Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II

Klaus Hasemann
Hedwig Gasteiger

Anfangsunterricht Mathematik

4. Auflage

Springer Spektrum

Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II

Reihe herausgegeben von

Friedhelm Padberg, Universität Bielefeld, Bielefeld, Deutschland

Andreas Büchter, Universität Duisburg-Essen, Essen, Deutschland

Die Reihe „Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II“ (MPS I+II), herausgegeben von Prof. Dr. Friedhelm Padberg und Prof. Dr. Andreas Büchter, ist die führende Reihe im Bereich „Mathematik und Didaktik der Mathematik“. Sie ist schon lange auf dem Markt und mit aktuell rund 60 bislang erschienenen oder in konkreter Planung befindlichen Bänden breit aufgestellt. Zielgruppen sind Lehrende und Studierende an Universitäten und Pädagogischen Hochschulen sowie Lehrkräfte, die nach neuen Ideen für ihren täglichen Unterricht suchen.
Die Reihe MPS I+II enthält eine größere Anzahl weit verbreiteter und bekannter Klassiker sowohl bei den speziell für die Lehrerausbildung konzipierten Mathematikwerken für Studierende aller Schulstufen als auch bei den Werken zur Didaktik der Mathematik für die Primarstufe (einschließlich der frühen mathematischen Bildung), der Sekundarstufe I und der Sekundarstufe II.
Die schon langjährige Position als Marktführer wird durch in regelmäßigen Abständen erscheinende, gründlich überarbeitete Neuauflagen ständig neu erarbeitet und ausgebaut. Ferner wird durch die Einbindung jüngerer Koautorinnen und Koautoren bei schon lange laufenden Titeln gleichermaßen für Kontinuität und Aktualität der Reihe gesorgt. Die Reihe wächst seit Jahren dynamisch und behält dabei die sich ständig verändernden Anforderungen an den Mathematikunterricht und die Lehrerausbildung im Auge.

Konkrete Hinweise auf weitere Bände dieser Reihe finden Sie am Ende dieses Buches und unter http://www.springer.com/series/8296

Klaus Hasemann · Hedwig Gasteiger

Anfangsunterricht Mathematik

4., überarbeitete Auflage

Springer Spektrum

Klaus Hasemann
Institut für Didaktik der Mathematik und Physik, Leibniz Universität Hannover
Hannover, Deutschland

Hedwig Gasteiger
Institut für Mathematik
Universität Osnabrück
Osnabrück, Deutschland

Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II
ISBN 978-3-662-61359-7 ISBN 978-3-662-61360-3 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-662-61360-3

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Planung/Lektorat: Annika Denkert
Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Hinweis der Herausgeber

Dieser Band von Klaus Hasemann und Hedwig Gasteiger thematisiert vielseitig und aspektreich den Anfangsunterricht Mathematik in der Grundschule. Der Band erscheint in der Reihe *Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II.* In dieser Reihe eignen sich insbesondere die folgenden Bände zur Vertiefung unter mathematikdidaktischen sowie mathematischen Gesichtspunkten:

- P. Bardy/Th. Bardy: Mathematisch begabte Kinder und Jugendliche- Theorie und Praxis
- C.Benz/A.Peter-Koop/M.Grüßing: Frühe mathematische Bildung
- M. Franke/S. Reinhold: Didaktik der Geometrie in der Grundschule
- M. Franke/S. Ruwisch: Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule
- K. Heckmann/F. Padberg: Unterrichtsentwürfe Mathematik Primarstufe, Band 1
- K. Heckmann/F. Padberg: Unterrichtsentwürfe Mathematik Primarstufe, Band 2
- F. Käpnick/R. Benölken: Mathematiklernen in der Grundschule
- G. Krauthausen: Digitale Medien im Mathematikunterricht der Grundschule
- G. Krauthausen: Einführung in die Mathematikdidaktik – Grundschule
- K.Krüger/H.-D. Sill/C. Sikora: Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I
- F. Padberg/C. Benz: Didaktik der Arithmetik
- P. Scherer/E. Moser Opitz: Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe
- H.-D. Sill/G. Kurtzmann: Didaktik der Stochastik in der Primarstufe
- A.-S. Steinweg: Algebra in der Grundschule
- A. Büchter/F. Padberg: Einführung in die Arithmetik
- A. Büchter/F. Padberg: Arithmetik und Zahlentheorie
- M. Helmerich/K. Lengnink: Einführung Mathematik Primarstufe- Geometrie
- T. Leuders: Erlebnis Arithmetik
- F. Padberg/A. Büchter: Elementare Zahlentheorie
- E.Rathgeb-Schnierer/Ch. Rechtsteiner: Rechnen lernen und Flexibilität entwickeln

Bielefeld
Essen
März 2020

Friedhelm Padberg
Andreas Büchter

Vorwort

Der mathematische Anfangsunterricht hat für die Lernentwicklung der Kinder richtungweisende Bedeutung. Diese Erkenntnis ist in der letzten Zeit wieder stärker in den Blick der Öffentlichkeit geraten, unter anderem durch die Diskussion über Ergebnisse internationaler Studien wie PISA (Programme for International Student Assessment) und IGLU (Internationale Grundschul-Lese-Untersuchung). In Deutschland hat die Kultusministerkonferenz u. a. mit der Formulierung von verbindlichen Bildungsstandards für die Primarstufe reagiert.

Mathematisches Lernen, Denken und Verstehen beginnt nicht erst in der Schule. Die Bedeutung und Verwendung von Zahlen erfahren die Kinder bereits in ihren ersten Lebensjahren. Sie sammeln erste geometrische Erfahrungen, wenn sie z. B. auf einen Stuhl klettern, um zu sehen, wie die Welt von oben aussieht. Die Kinder machen diese Erfahrungen selbstverständlich und in spielerischer Form. Sie als mathematische Vorerfahrungen bewusst zu machen und damit mathematische Denkweisen vorzubereiten, ist für die Kinder ein wichtiger Teil der Förderung ihrer kognitiven Entwicklung.

In diesem Buch wird deshalb ausführlich auf die Entwicklung des mathematischen Denkens der Kinder im Vorschulalter und auf Möglichkeiten der Förderungen im Kindergarten eingegangen. Den Hauptteil bilden die Inhalte des Anfangsunterrichts in der Schule: Zahlbegriff und elementares Rechnen, geometrische Fragestellungen sowie Größen und Sachrechen werden beschrieben, aus unterschiedlichen Perspektiven begründet und in praktischen Beispielen für die Umsetzung im Mathematikunterricht konkretisiert.

Ein Leitgedanke ist dabei, dass Bildungsprozesse anschlussfähig sein müssen. Bei der Förderung der Kinder in der Vorschulzeit sollte berücksichtigt werden, wie der systematische Unterricht in der Schule aufgebaut ist, und Lehrkräfte sollten wissen, welche Aktivitäten in den Kindertagesstätten üblich sind. Das Buch wendet sich deshalb an Lehrerinnen und Lehrer, Erzieherinnen und Erzieher, Studierende und alle am frühen Mathematikunterricht Interessierten.

Die *Entwicklung des mathematischen Verständnisses im Vorschulalter* ist das Thema des ersten Kapitels. Darin werden sowohl Ergebnisse aus der Entwicklungspsychologie vorgestellt, die als Grundlagen für den Zahlbegriff und für das geometrische

Denken der Kinder von Bedeutung sind, als auch Ergebnisse von Untersuchungen über die Entwicklung ihrer Zählkompetenz. Wir stellen auf der Grundlage empirischer Untersuchungen Verfahren zur Diagnose des mathematischen Entwicklungsstandes der Kinder vor und beschreiben einen Test, mit dem sich die Zahlbegriffsentwicklung in ihrer ganzen Breite erfassen lässt. Im zweiten Kapitel werden Inhalte und Methoden mathematischer Aktivitäten in Kindertagesstätten sowie die *Gestaltung des Überganges in die Grundschule* und die Erwartungen der Kinder an den Unterricht behandelt.

In der Schule lernen die Kinder lesen, schreiben und rechnen – diese so genannten Kulturtechniken sind zentrale Ziele. Skizziert werden didaktische Grundlagen für den mathematischen Anfangsunterricht sowie allgemeine Ziele des Mathematikunterrichts und Bildungsstandards für den Primarbereich.

Das Kapitel *Zahlen und Operationen im Anfangsunterricht* steht im Mittelpunkt des Buches. Ausführlich und mit vielen konkreten Beispielen und Hinweisen gehen wir darauf ein, wie die Vorkenntnisse der Kinder in der Schule aufgegriffen und für den Unterricht fruchtbar gemacht werden können, welche Möglichkeiten es gibt zur Einführung der Zahlen und des Rechnens mit Zahlen, welche Rolle Materialien und Veranschaulichungsmittel spielen und wie geübt werden kann. Bei den Rechenoperationen stehen Addition und Subtraktion im Mittelpunkt, es wird aber auch auf Multiplikation und Division eingegangen. Ein besonderer Abschnitt ist den Verfahren bei *speziellen Zielgruppen* gewidmet. Gemeint sind damit – unter Berücksichtigung der großen Bandbreite in den Vorkenntnissen, den Fähigkeiten und Fertigkeiten – die Kinder mit erhöhtem Förderbedarf sowie die mit besonders guten Lernvoraussetzungen.

Neben Kenntnissen über Zahlen bringen die Kinder am Schulbeginn vielfältige Vorerfahrungen geometrischer Art mit. Im Kapitel zum *geometrischen Anfangsunterricht* wird begründet, warum und auf welche Weise diese Vorerfahrungen aufgenommen und präzisiert werden sollten und an welchen Inhalten dies geschehen kann. Diese Entwicklung geometrischer Vorstellungen ist auch für die allgemeine Denkentwicklung der Kinder von besonderer Bedeutung; wir gehen deshalb vor allem auf das Entdecken und Darstellen von Mustern und Strukturen ein.

Sieht man sich die Vielfalt der Zahlen in unserer alltäglichen Umwelt genauer an, so findet man sie häufig zusammen mit einer Maßbezeichnung; man spricht auch von *Größen.* Das Rechnen mit Größen ist Teil des *Sachrechnens.* Die Kinder können dabei erkennen, dass Mathematik sowohl anwendbar ist als auch aus praktischen Fragestellungen heraus entwickelt werden kann. Darüber hinaus ist das Umgehen der Kinder mit Sachrechenaufgaben ein sehr guter Indikator für die Art ihres *mathematischen Verständnisses.* Beispiele dazu aus eigenen empirischen Untersuchungen werden vorgestellt, und es werden Folgerungen für den mathematischen Anfangsunterricht gezogen.

Das vorliegende Buch ist nicht allein das Werk der Autoren. Der Anfangsunterricht ist schon seit Jahrhunderten ein spannendes Thema. Viele Erkenntnisse, Ideen und Anregungen, die in der umfangreichen Literatur, in praktischen Ratgebern und in Schulbüchern zu finden sind, wurden aufgenommen.

Zur 3. Auflage

Die 3. Auflage wurde unter Beibehaltung des Konzeptes neu strukturiert und inhaltlich deutlich erweitert. Ein besonderer Schwerpunkt der Neubearbeitung liegt auf dem Mathematiklernen im Übergang von Kindergarten und Grundschule. Zudem wurden zahlreiche neue Erkenntnisse aus dem Bereich der Vorkenntnisuntersuchungen, der Arbeit mit lernschwachen Kindern und zum Mathematiklernen allgemein eingearbeitet. Großen Wert legen wir wie bereits in den früheren Auflagen auf umfassende inhaltliche Darstellungen der unterschiedlichen Bereiche des mathematischen Anfangsunterrichts und auf deren Verbindung zu neueren (und bewährten) Erkenntnissen zum Lehren und Lernen. Die Möglichkeiten der methodischen Umsetzung haben wir mit zahlreichen Beispielen und Bildern, insbesondere auch aus aktuellen Lehrwerken, illustriert. Zwei weitere Neuerungen gibt es noch: Das Buch ist in Teamarbeit entstanden, und es ist nun auch als E-Book erhältlich.

An dieser Stelle möchten wir uns ganz herzlich für die freundliche Aufnahme der früheren Auflagen und für die Hinweise von Leserinnen und Lesern bedanken, die wir gern aufgenommen haben. In diesem Sinne freuen wir uns auch auf Reaktionen zu dieser Neuauflage.

München
Hamburg
Juni 2013

Hedwig Gasteiger
Klaus Hasemann

Zur 4. Auflage

Die 4. Auflage ist bunter geworden. Dabei signalisieren die nun meist farbigen Abbildungen, dass auch der Mathematikunterricht im 1. und 2. Schuljahr vielfältiger und bunter geworden ist. Mit Blick auf diese Entwicklungen haben wir das Buch aktualisiert, ohne Konzept und Aufbau zu verändern: Wir stellen die Inhalte des mathematischen Anfangsunterrichts ausführlich vor und gehen auf bewährte und neuere Methoden sowie Erkenntnisse zum Lehren und Lernen von Mathematik in dieser Altersstufe ein. Das Buch wurde darüber hinaus mit einem neuen inhaltlichen Schwerpunkt erweitert: Aufgenommen sind zwei Abschnitte, in denen wir Einsatzmöglichkeiten und Potenziale von elektronischen Arbeitsmitteln, insbesondere von Tablets und interaktiven Whiteboards, beschreiben und erste Erfahrungen bei ihrem Einsatz im mathematischen Anfangsunterricht diskutieren.

Für die engagierte und kompetente Unterstützung unserer Arbeit an dieser Neuauflage danken wir Frau Theresa Schopferer (Osnabrück). Wie schon bei den vorigen Auflagen sind wir den Leserinnen und Lesern unseres Buches dankbar für wertvolle Hinweise und Anmerkungen. Genauso gilt der Dank Kolleginnen und Kollegen für Anregungen zu den inhaltlichen Erweiterungen sowie dem Herausgeber der Reihe und dem Verlag für die aktive Unterstützung.

Wir freuen uns auf Ihre Reaktionen zu dieser Neuauflage.

Osnabrück
Hamburg
Januar 2020

Hedwig Gasteiger
Klaus Hasemann

Inhaltsverzeichnis

1 Die Entwicklung des mathematischen Verständnisses bis zum Schulbeginn

Zahlen, ihre Bedeutung und ihre Verwendung lernen die Kinder bereits in ihren ersten Lebensjahren kennen; jedes Kind macht dabei unterschiedliche Erfahrungen. Bauersfeld (1983) spricht von „Subjektiven Erfahrungsbereichen", mit denen er die Gesamtheit des als subjektiv wichtig Erfahrenen und Verarbeiteten, einschließlich der Gefühle und der Körpererfahrung, kennzeichnen will. Abschn. 1.1 zeigt auf, dass bereits in den ersten Lebensmonaten Fähigkeiten zu beobachten sind, die als Grundvoraussetzung für die Entwicklung mathematischer Kompetenzen angesehen werden können.

In Abschn. 1.2 wird nach einem mathematischen Exkurs über die Zahlen ausgeführt, welche Aspekte zu berücksichtigen sind, damit man von einem umfassenden Zahlbegriff sprechen kann. Dazu sind einerseits das Verständnis dafür, was Zahlen eigentlich ausmachen, und andererseits ein Einblick in entwicklungspsychologische Zusammenhänge erforderlich.

Ein zentraler Bereich in der Entwicklung mathematischer Fähigkeiten in den ersten Lebensjahren eines Kindes ist die Entwicklung der Zählkompetenz. Abschn. 1.3 widmet sich dieser bedeutenden Kompetenz. Um zählen zu können, müssen die Kinder unter anderem die Zahlwörter kennen, sie in der richtigen Reihenfolge anwenden und beim Zählen einer Menge jedem Element genau ein Zahlwort zuordnen. Es handelt sich dabei um einen durchaus komplexen Vorgang, den man sich als erwachsener, perfekter Zähler bewusst machen muss, um die Lernprozesse der Kinder und Unterstützungsmaßnahmen in geeigneter Weise reflektieren zu können.

Untersuchungen über den Stand der mathematischen Kompetenzentwicklung bei Schulanfängerinnen und -anfängern sind wichtig und nützlich, zum einen, um falschen Vorstellungen über die Fähigkeiten der Kinder entgegenzuwirken, zum anderen, um mögliche Veränderungen zu erkennen – Veränderungen, die sich im Laufe der Zeit ergeben, deren Ursachen nicht immer klar sind und die eine wertvolle Grundlage für die Arbeit mit Kindern darstellen können. Die Relevanz solcher Untersuchungen für

K. Hasemann und H. Gasteiger, *Anfangsunterricht Mathematik,* Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II, https://doi.org/10.1007/978-3-662-61360-3_1

den mathematischen Anfangsunterricht ist deshalb offensichtlich. Tatsächlich sind in den letzten Jahrzehnten viele solcher Untersuchungen durchgeführt worden, eine Auswahl wird in Abschn. 1.4 vorgestellt. So haben Schmidt and Weiser (1982) ebenso wie Schmidt (1982a, b und c) bereits in den 1980er Jahren die zu dieser Zeit häufig unterschätzte und ignorierte Zählkompetenz der Schulanfänger dokumentiert. Die beobachteten durchaus hohen mathematischen Kompetenzen von Kindern zu Schulbeginn weckten in den 1990er-Jahren die Sensibilität dafür, dass mathematischer Anfangsunterricht keine „Stunde Null" sein kann (Selter 1995). Allerdings wird sich zeigen, dass es eine riesige Bandbreite in den Fähigkeiten und Fertigkeiten der Schulanfängerinnen und Schulanfänger gibt. Diese individuellen Unterschiede müssen von Lehrkräften ganz bewusst wahrgenommen werden und stellen eine große Herausforderung für den schulischen Anfangsunterricht dar.

1.1 Erkenntnisse aus der Säuglingsforschung

Bereits von den ersten Lebenswochen an entwickeln sich mathematische Kompetenzen bei Kindern. Diese Aussage mag verwunderlich klingen – nicht zuletzt, weil man sich zwangsläufig die Frage stellen muss, wie solche Erkenntnisse gewonnen werden können. Bei Untersuchungen mit Säuglingen nutzt man die Tatsache, dass kleine Kinder, sobald sie etwas Neues entdecken, ihren Blick aufmerksam und ausdauernd darauf richten. Haben sie sich an einen Anblick gewöhnt, wendet sich ihr Blick ab. Diese sogenannte Fixationsdauer wird als Maß dafür genommen, ob ein dargebotener Reiz für das Kind eine wahrgenommene Veränderung darstellt oder nicht.

Auf diese Art und Weise konnte man feststellen, dass Kinder in den ersten Lebenstagen bereits eine Menge mit zwei Elementen von einer Menge mit drei Elementen unterscheiden können (Antell und Keating 1983). Sie betrachteten eine Menge mit drei Elementen deutlich länger als verschiedene zuvor präsentierte Abbildungen von Mengen mit zwei Elementen. Diese Fähigkeiten wurden durch zahlreiche Experimente bestätigt. Beispielsweise gelingt es Kindern im ersten Lebensjahr auch, akustisch und visuell präsentierte Anzahlen in Verbindung zu setzen. Kinder betrachten ein Bild mit drei Elementen länger, wenn sie eine Folge von drei Trommelschlägen hören, als ein Bild mit zwei Elementen (Starkey et al. 1983). Offensichtlich scheint diese Mengenunterscheidung allerdings nur bei sehr kleinen Mengen zu gelingen und bei großen Mengen nur, wenn sich diese deutlich unterscheiden. Mengen mit 8 bzw. 16 Elementen konnten unterschieden werden von Mengen mit 16 bzw. 32 Elementen. Das Mengenverhältnis scheint ausschlaggebend für den Erfolg zu sein. Während Mengen im Verhältnis 2:1 bereits früh im ersten Lebensjahr als verschieden wahrgenommen werden konnten, gelingt eine Unterscheidung bei einem Anzahlverhältnis von 3:2 erst in zunehmendem Alter immer besser (Xu und Arriaga 2007).

Diese Erkenntnisse über erste Fähigkeiten von Kindern zur Mengenunterscheidung lassen kaum Rückschlüsse zu, inwieweit man hier von einem Verständnis für Mengen im mathematischen Sinne sprechen kann. Aber ein gewisses Bewusstsein für Mengen und Mengenveränderungen scheint vorhanden zu sein, welches einen Ansatzpunkt für mathematisches Lernen darstellen kann. In diesem Zusammenhang spricht man vom „Zahlensinn“ (Dehaene 1999) oder *number sense* (Dantzig 1954). Darunter versteht man eine Bewusstheit für Quantitäten in dem Sinne, dass Veränderungen von Anzahlen erkannt werden, ohne direkt zu wissen, dass Elemente dazu gefügt oder weggenommen wurden (vgl. Dantzig 1954, S. 1). Dehaene (1999, S. 34–46) geht beispielsweise davon aus, dass auch Tiere (Schimpansen, Ratten, Vögel) über einen ähnlichen Zahlensinn verfügen und in einem gewissen Umfang numerische Quantitäten unterscheiden können. Dies geschieht jedoch – ähnlich wie bei den oben berichteten Untersuchungen – nicht in dem Sinne, dass sie einzelne Objekte abzählen, sondern dass sie über eine Art Schätzalgorithmus verfügen, mit dem sie sogar Anzahlen wie drei und vier unterscheiden können.

Mögliche Erklärungsansätze für diesen Zahlensinn verweisen auf zwei verschiedene Modelle der Zahlvorstellung. Das sogenannte *analog magnitude model* (Carey 1998) geht von der Vorstellung eines inneren Zahlenstrahls aus. Mit dieser Modellvorstellung gelingt es leichter, Zahlen zu unterscheiden, die sehr weit auseinanderliegen, als z. B. benachbarte Zahlen. Das *object file model* (Carey 1998) basiert auf der Vermutung, dass für jedes wahrgenommene Element kurzzeitig eine Art mentaler Repräsentant abgespeichert wird. So kann es gelingen, eine präsentierte Menge mit einer anderen Menge gedanklich zu vergleichen. Jedes Element der gezeigten Menge wird in einer Art Eins-zu-eins-Zuordnung mit einem mental abgespeicherten Repräsentanten abgeglichen. Dieses Modell der Informationsverarbeitung im Zusammenhang mit Zahlen und Mengen trägt nur bei kleinen Mengen.

Generell geht man davon aus, dass erst verschieden geartete Vorstellungen von Zahlen ein solides, anschlussfähiges Grundverständnis von Zahlen – den sogenannten Zahlbegriff – ausmachen (Abschn. 1.2).

Ebenfalls bei Experimenten mit Kindern im ersten Lebensjahr zeigte sich, dass diese bereits ein Verständnis für Mengenveränderungen zu haben scheinen, welches grundlegend für das Verstehen von Addition und Subtraktion ist. Wynn (1992b) bezeichnete dies sogar als arithmetische Fähigkeiten (S. 750). Sie präsentierte 32 Kindern im Alter von etwa fünf Monaten z. B. ein Spielzeug, das sie anschließend mit einem Wandschirm verdeckte. Vor den Augen des Kindes wurde ein weiteres Spielzeug hinter den Wandschirm geführt, was einer Additionshandlung gleichkommt. Nun wurde der Wandschirm entfernt und den Kindern wurden zwei verschiedene Ergebnisse gezeigt. Entweder waren – wie zu erwarten – zwei Spielzeuge zu sehen oder es gab nur ein Spielzeug zu sehen. Letzteres brachte die Kinder dazu, das präsentierte Ergebnis deutlich länger zu fixieren, was den Rückschluss erlaubt, dass dieses Bild unerwartet für sie war. Die Versuchsanordnung kann mithilfe von Abb. 1.1 nachvollzogen werden. Analog wurden diese Versuche mit der Subtraktionshandlung durchgeführt.

Die Aussage, dass es sich hier bereits um die Fähigkeit zu addieren bzw. zu subtrahieren handelt, kann zu Recht kritisch bewertet werden. Allerdings zeigen diese Versuche, dass Kinder offensichtlich sehr früh Informationen zu Mengenveränderungen so verarbeiten können, dass es für sie erwartete oder unerwartete Ergebnisse gibt.

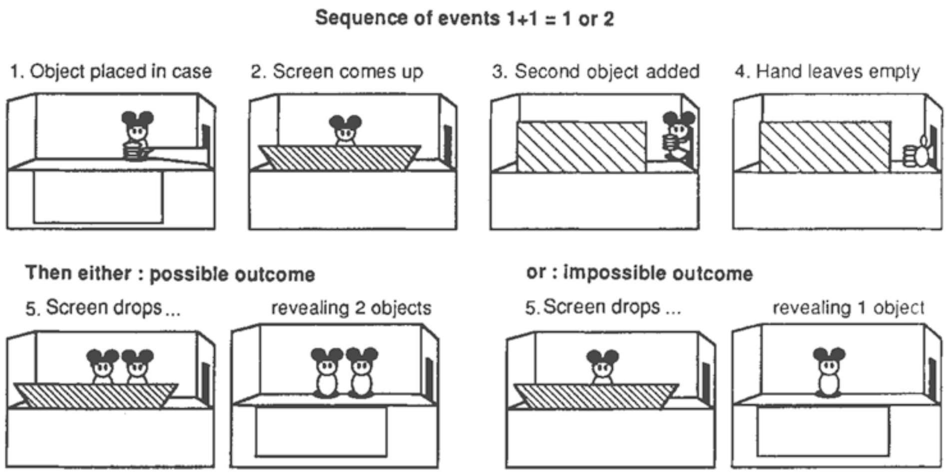


Abb. 1.1 Addition bei Säuglingen (Wynn 1992b, S. 749)

1.2 Entwicklung des Zahlbegriffs

Dass Kinder bereits von den ersten Lebenswochen an Fähigkeiten entwickeln, die für das mathematische Lernen grundlegend sein können, wurde einleitend geschildert. Wann kann man aber davon sprechen, dass Kinder eine tragfähige Zahlvorstellung ausgebildet oder einen Zahlbegriff entwickelt haben, der ihnen das mathematische Weiterlernen auf verschiedenen Stufen und bei unterschiedlichen Anforderungen ermöglicht? Um diese Frage zu beantworten, ist es notwendig, sich mit mathematischen Hintergründen auseinanderzusetzen (Abschn. 1.2.1), um klären zu können, was Zahlen eigentlich kennzeichnet (Abschn. 1.2.2). Außerdem erfordern Überlegungen zur Entwicklung des Zahlbegriffs eine Berücksichtigung psychologischer Erkenntnisse. Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kind ist ein Prozess, bei dem interne Veränderungen des Individuums und externe Einflüsse zusammenwirken. Interne Veränderungen, die weitgehend ohne äußere Einwirkungen stattfinden, werden Reifung genannt (vgl. Bower und Hilgard 1983, S. 33). Beim Lernen dagegen löst die Interaktion des Individuums mit seiner externen Umgebung die Verhaltensänderungen aus (Stern 1998, S. 38).

1.2.1 Exkurs: Mathematische Präzisierungen der natürlichen Zahlen

Dem Mathematiker Leopold Kronecker (1823–1891) wird das Zitat zugeschrieben, dass die natürlichen Zahlen Gott gemacht habe, alle anderen aber Menschenwerk seien. Wo kommen nun die Zahlen eigentlich her und was definiert sie? Diese Fragen sind nicht unerheblich, hat die Definition der Zahlen doch klaren Einfluss darauf, wie mit ihnen umgegangen werden kann und wie sich das Rechnen begründen lässt. Wenn Kronecker bei den natürlichen Zahlen höhere Mächte bemüht, weist dies schon darauf hin, dass ihre Definition nicht ganz einfach sein kann. In diesem Abschnitt kommen wir deshalb auch nicht umhin, einige mathematische Formulierungen und Notationen zu verwenden. Diese werden jedoch mit Worten umschrieben und, soweit es geht, mit Beispielen erläutert.

Aus mathematischer Sicht müssen die Zahlen „aus dem Nichts" geschaffen werden, also ohne Rückgriff auf Objekte, über die man schon etwas weiß. Man bedient sich in solchen Fällen der axiomatischen Methode, d. h. es werden Grundannahmen (Axiome) formuliert, mit denen zwar nicht gesagt wird, was die Objekte *sind,* wohl aber, *welche Eigenschaften* sie haben sollen. Selbstverständlich ist dann später zu zeigen, dass es Objekte mit den so definierten Eigenschaften tatsächlich gibt, dass man also nicht über „nichts" (d. h. im mathematischen Sinne: die leere Menge) redet. Diese Methode bewährt sich auch bei der Definition der natürlichen Zahlen, wenn man von den Eigenschaften ausgeht, die diese Zahlen bei ihrer Verwendung zum Zählen haben sollen.

Unsere erste Annahme besagt, dass es überhaupt eine Menge gibt, in der sich zu jedem Element ein weiteres, sein Nachfolger, finden lässt. Außerdem soll die Menge mindestens ein Element enthalten, das wir (der Einfachheit halber) „eins" nennen wollen. Die „Eins" und die Nachfolgerbildung kann man sich wie das Fortschreiben einer Strichliste vorstellen: Nach der ersten Annahme gibt es einen ersten Strich, |, dem man einen weiteren hinzufügen kann, | |, usw. Immer, wenn man eine Strichliste hat, z. B. | | | | | | | |, kann man sie durch einen weiteren Strich verlängern: | | | | | | | | |; die Strichliste hört nie auf. Anstelle der Striche kann man sich auch eine Aneinanderreihung von Worten vorstellen: Zu jedem Wort gibt es ein nächstes. Für die natürlichen Zahlen sind diese Worte die Zahlwörter. Auch die Zahlwortreihe hat kein Ende – zu jedem Zahlwort gibt es wieder ein nachfolgendes.

Allerdings ist das Zählen damit noch längst nicht präzise genug beschrieben. Wir müssen unter anderem sicherstellen, dass die Zählreihe (oder die Strichliste) außer der „Eins" nicht auch noch einen anderen Startpunkt hat; wir müssen erreichen, dass sie sich nicht verzweigt (dass also nicht an einer Stelle zwei verschiedene Nachfolger auftreten), und wir müssen ausschließen, dass wir bei der Nachfolgerbildung irgendwann auf ein Objekt stoßen, das vorher bereits in der Liste vorkam, sodass wir im Folgenden sozusagen im Kreis herumlaufen. Schließlich soll es zu unserer Zählreihe/Strichliste keine weitere, parallele Reihe/Liste geben. Werden alle diese Eigenschaften in mathematischer Terminologie aufgeschrieben, so erhält man ein System von Axiomen, das Giuseppe Peano (1858–1932) zugeschrieben wird. Man spricht deshalb von den Peano-Axiomen für die natürlichen Zahlen (vgl. Büchter und Padberg 2019, S. 257 ff.; sowie Padberg et al. 1995, S. 26; dort ist auch ausführlicher erläutert, warum diese Axiome tatsächlich eine Präzisierung unserer intuitiven Vorstellungen über das Zählen sind).

Die mathematische Definition der natürlichen Zahlen durch die Peano-Axiome lautet wie folgt:

Eine Menge N zusammen mit einer Abbildung n: $N \to N$ (der Nachfolgerbildung) heißt Menge der natürlichen Zahlen, wenn die folgenden vier Axiome gelten:

(P1)	$1 \in N$ Das heißt: Die Eins ist eine natürliche Zahl
(P2)	Für alle $x \in N$ gilt: $n(x) \neq 1$ Das heißt: Die Eins ist nicht Nachfolger irgendeiner natürlichen Zahl
(P3)	Für alle $x \in N$ und $y \in N$ gilt: Aus $x \neq y$ folgt $n(x) \neq n(y)$ Das heißt: Verschiedene Zahlen haben verschiedene Nachfolger
(P4)	Sei M eine Teilmenge von N und seien die folgenden beiden Aussagen (i) und (ii) wahr: (i) $1 \in M$ (ii) Für alle $x \in N$ gilt: Wenn $x \in M$, dann ist auch $n(x) \in M$ Dann ist $M = N$ Das heißt: Eine Teilmenge M von N ist *gleich* der Menge N, wenn sie die Eins enthält und wenn mit jeder Zahl x, die in M enthalten ist, auch deren Nachfolger n(x) in M enthalten ist. Dieses Axiom bewirkt, dass die oben mit den Strichlisten veranschaulichte Vorstellung tatsächlich alle natürlichen Zahlen liefert, darüber hinaus aber auch keine weiteren: Ausgehend von der Eins bekommt man alle natürlichen Zahlen, wenn man zu einer Zahl jeweils ihren Nachfolger bildet und mit diesem Prozess nie aufhört

Man nennt P4 das Induktionsaxiom; dieses Axiom ist bei Beweisen von Aussagen über natürliche Zahlen sehr nützlich (vgl. Büchter und Padberg 2019, S. 259 ff.).

Im ersten Satz der oben aufgeführten Definition wurde gefordert, dass die Nachfolgerbildung eine *Abbildung* von der Menge N in die Menge N ist. Da bei einer Abbildung n dem Element x immer *eindeutig* ein Element n(x) zugeordnet wird, ist durch diese Forderung bereits ausgeschlossen, dass die Zahlenreihe sich verzweigt, denn eine Zahl x kann damit nicht zwei verschiedene Nachfolger n(x) haben.

Auf der Grundlage dieser Definition können wir von der Menge der natürlichen Zahlen sprechen. Wir kennen bereits einige Eigenschaften dieser Menge, insbesondere die, dass es unendlich viele natürliche Zahlengibt[1]. Was wir allerdings, genau genommen, noch nicht wissen, ist, ob es eine solche Menge N, in der die Axiome P1 bis P4 erfüllt sind, überhaupt gibt. Man könnte versuchen, die Strichlisten als eine solche Menge zu interpretieren, doch waren diese Strichlisten nur als Veranschaulichung unserer intuitiven Vorstellungen über das Zählen gemeint und nicht als mathematische Objekte. Tatsächlich ist es relativ einfach, eine solche Menge zu finden, nämlich die der endlichen Kardinalzahlen, auf die wir im Folgenden eingehen.

Eine andere Möglichkeit zu erklären, was natürliche Zahlen sind, geht über den Vergleich von Mengen. Wie in Abschn. 1.2.3 erläutert werden wird, war man lange Zeit der Meinung, Kinder könnten einen Zahlbegriff überhaupt nur auf diesem Weg erwerben.

[1] „Unendlich viele" ist hier im Sinne von „beliebig viele" gemeint, d. h. zu jeder natürlichen Zahl gibt es noch eine weitere, nämlich den Nachfolger dieser Zahl.

Durch Eins-zu-eins-Zuordnung, d. h. indem jedem Element der einen Menge genau ein Element der anderen Menge zugeordnet wird, stellt das Kind fest, dass – beispielsweise – gleich viele rote wie blaue Plättchen auf dem Tisch liegen, und es lässt sich bei dieser Feststellung auch nicht mehr durch Veränderungen in der räumlichen Verteilung verwirren. Beide Mengen beschreibt man infolgedessen mit demselben Zahlwort. Diese (und einige weitere) Einsichten führen schließlich zu dem, was gemeinhin unter Zahlbegriff verstanden wird. Eine mathematische Präzisierung dieses Zugangs ist der Begriff der *Kardinalzahl*, der – anders als der Zugang über die Nachfolgerbildung – ganz wesentlich auf dem Begriff der Menge beruht.

Nun ist die axiomatische Begründung des allgemeinen Mengenbegriffs eher noch schwieriger als die Begründung der Zahlen mithilfe der Peano-Axiome. Deshalb wird auch bei rein mathematischen Erörterungen der Kardinalzahlen häufig auf die axiomatische Klärung verzichtet und eine „Definition" von Georg Cantor (1849–1918) zugrunde gelegt: „Unter einer Menge versteht man jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens, welche Elemente von M genannt werden, zu einem Ganzen" (vgl. Bigalke und Hasemann 1978, S. 78; Bedürftig und Murawski 2001, S. 40). Hierbei handelt es sich jedoch ganz offensichtlich nicht um eine mathematische Definition im üblichen Sinne, denn der zu erklärende Begriff „Menge" wird nur durch den ebenso wenig erklärten Begriff „Zusammenfassung zu einem Ganzen" ersetzt. Solange nur endliche Mengen (Mengen mit endlich vielen Elementen) betrachtet werden, ist dieses Vorgehen durchaus zu rechtfertigen, weil dabei unsere intuitive Vorstellung ausreicht.

Die Eins-zu-eins-Zuordnung findet ihre mathematische Präzisierung im Begriff der bijektiven Abbildung von einer Menge A in eine Menge B. Dabei wird jedem Element der Menge A *genau ein* Element der Menge B zugeordnet, und umgekehrt ist auch jedem Element von B genau ein Element von A zugeordnet. Ein Beispiel für eine bijektive Abbildung ist in Abb. 1.2 gegeben. Zwei Mengen, die man in dieser Weise bijektiv aufeinander abbilden kann, heißen *gleichmächtig*. Die Mengen A und B in Abb. 1.2 sind also gleichmächtig. Wenn wir uns als eine weitere Menge C die Menge der Finger einer Hand vorstellen, so ist diese ebenfalls zu A und zu B gleichmächtig. Die Gleichmächtigkeit ist eine *Äquivalenzrelation,* d. h. insbesondere: Wenn A zu B gleichmächtig ist und auch B zu C gleichmächtig ist, dann trifft dies auch auf A und C zu. Die Mengen A, B und C haben demnach eine gemeinsame Eigenschaft: ihre Gleichmächtigkeit, die eine Eigenschaft dieser Mengen ist (und nicht ihrer Elemente). Diese Eigenschaft kann man den Mengen nun wie ein Etikett anhängen, man nennt sie ihre Kardinalzahl. Die Mengen A, B und C haben deshalb die gleiche Kardinalzahl, während beispielsweise die Menge der Wochentage D = {Montag, Dienstag, Mittwoch, Donnerstag, Freitag, Samstag, Sonntag} eine andere Kardinalzahl hat, weil C und D (und damit auch A und D sowie B und D) nicht gleichmächtig sind.

Zu beachten ist zum einen, dass wir die Gleichmächtigkeit der Mengen nicht etwa durch Zählen, sondern durch Eins-zu-eins-Zuordnungen (bijektive Abbildungen) festgestellt haben, und zum anderen, dass wir immer noch nicht wissen, wie die

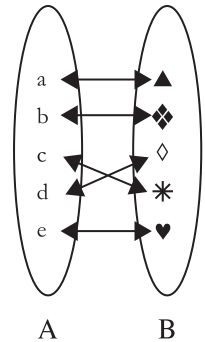


Abb. 1.2 Gleichmächtige Mengen

Kardinalzahlen der Mengen A (oder B oder C) und D heißen. Man kann auf die beschriebene Weise nur feststellen, ob zwei Mengen gleiche oder verschiedene Kardinalzahlen haben. Eine Möglichkeit, Mengen bestimmte Kardinalzahlen zuzuordnen, besteht darin, von *Standardmengen* auszugehen, also unter den jeweils gleichmächtigen Mengen eine auszuwählen, die sich besonders gut dazu eignet, eine bestimmte Kardinalzahl zugeordnet zu bekommen. Beispielsweise kann man, ausgehend von den Fingern einer Hand, die Menge I = {Daumen} nehmen und ihr (und damit allen zu ihr gleichmächtigen Mengen) die Kardinalzahl „Eins", im Zeichen: 1, zuordnen; der Menge II = {Daumen, Zeigefinger} die Kardinalzahl „Zwei", im Zeichen: 2, usw.; der Menge C (und damit auch den Mengen A und B) würde dann die Kardinalzahl „Fünf", im Zeichen: 5, zugeordnet. Dieses Verfahren ist zwar sicher ganz anschaulich, es stößt aber schnell an seine Grenzen. Aus rein mathematischer Sicht lässt es sich präzisieren, indem man die Standardmengen systematisch aufbaut: Der *leeren Menge* (im Zeichen: {} oder Ø) ordnet man die Kardinalzahl „Null" (im Zeichen: 0) zu, und der Menge {0}, die genau diese eben definierte Kardinalzahl als Element enthält, wird „Eins" zugeordnet. Da die Mengen {} und {0} nicht gleichmächtig sind, sind die Kardinalzahlen 0 und 1 verschieden, man kann als Nächstes also die Menge {0,1} betrachten, der die „Zwei" zugeordnet wird, usw. Es ist offensichtlich, dass dieses Verfahren nicht abbricht, und auch die Vermutung, dass die so definierten Kardinalzahlen mit den zuvor auf der Grundlage der Peano-Axiome definierten natürlichen Zahlen übereinstimmen, ist naheliegend. Tatsächlich kann man beweisen, dass in der Menge der Kardinalzahlen mit der angesprochenen Nachfolgerfunktion die Peano-Axiome gelten (vgl. z. B. Lenz 1976, S. 33 ff.), wir bekommen also auf beiden Wegen dieselben natürlichen Zahlen. Damit ist dann gleichzeitig nachgewiesen, dass es die natürlichen Zahlen – auch aus mathematischer Sicht – wirklich gibt: Die Kardinalzahlen *sind* ein Modell für die natürlichen Zahlen.

Ein Unterschied im Ergebnis der beiden Zugänge zu den natürlichen Zahlen bleibt dennoch: Die über die Peano-Axiome definierte Menge N enthält die Zahlen 1, 2, 3, …, während bei unserer Definition der Kardinalzahlen noch die Null hinzukommt. Dieser Unterschied ergibt sich aus den intuitiven Grundlagen: Beim Zählen beginnt man selbstverständlich mit der Eins, während es bei den Kardinalzahlen günstig ist, mit der leeren Menge und damit der Null zu beginnen. Man kann aber die Peano-Axiome ohne weiteres so abwandeln, dass in P1 statt der Eins die Null als Element der Menge gefordert wird (deren Nachfolger die Eins ist). Für den mathematischen Anfangsunterricht ist dieser Unterschied durchaus von Bedeutung: Es stellt sich zum einen die Frage, ob man die Null von vornherein zu den natürlichen Zahlen hinzunimmt oder nicht, und zum anderen, von welcher intuitiven Grundlage aus sich die Kinder den Zahlbegriff erarbeiten, ob sie also eher vom Zählen oder eher von Vorstellungen über „mehr/weniger/gleich viele" ausgehen (vgl. Abschn. 4.1).

1.2.2 Verschiedene Zahlaspekte

Mit den beiden mathematischen Definitionen natürlicher Zahlen (Abschn. 1.2.1) gehen zwei verschiedene Vorstellungen von Zahlen einher. Während bei der Definition über die Peano-Axiome die Reihenfolge der Zahlen sowie Vorgänger und Nachfolger im Mittelpunkt stehen, wodurch deutliche Assoziationen zum Zählen geweckt werden, rückt die Definition der Kardinalzahlen die Mengen und damit die verschiedenen Anzahlen in den Mittelpunkt. Hier geht es weniger um das Zählen als vielmehr um Vergleiche von Mengen im Sinne von gleichviel/weniger/mehr. Dies sind zwei verschiedene Vorstellungsbilder von Zahlen. Im Alltag und auch in der Mathematik gibt es darüber hinaus auch noch weitere Bedeutungszusammenhänge, in denen Zahlen eine Rolle spielen.

Vielleicht lohnt es sich, vor dem Weiterlesen kurz darüber nachzudenken, wann Zahlen im alltäglichen Leben eine Rolle spielen und welche Bedeutung Zahlen dabei jeweils haben. Es mag hilfreich sein, an möglichst verschiedene Situationen zu denken.

Die verschiedenen Bedeutungszusammenhänge von Zahlen werden in der Mathematikdidaktik unter dem Oberbegriff „Zahlaspekte" zusammengefasst. Für die Entwicklung eines umfassenden Zahlbegriffs ist es unabdingbar, dass Kinder Beziehungen zwischen den folgenden verschiedenen Zahlaspekten erkennen bzw. herstellen können (vgl. Padberg und Benz 2011, S. 13 ff.).

- Kardinalzahlaspekt: Die Zahl gibt die Anzahl der Objekte in einer Menge an und liefert eine Antwort auf die Frage „Wie viele?"
- Ordinalzahlaspekt: Die Zahl kennzeichnet eine Position in einer festen Reihenfolge. Hier unterscheidet man den Zählzahlaspekt (z. B. „eins, zwei, drei, …") und den Ordnungszahlaspekt. Ordnungszahlen geben eine Antwort auf die Frage „Der Wievielte?" und sie lassen sich sowohl verbal als auch symbolisch gut erkennen. Notiert werden sie mit einem Punkt: 1., 2., 3., …, und gesprochen lauten die Ordnungszahlen „erster, zweiter, dritter, …".
- Maßzahlaspekt: Im Zusammenhang mit Größen treten Zahlen als Maßzahlen auf. Sie bekommen durch die dazugehörige Maßeinheit eine ganz eigene Bedeutung:

3 m, 3 min, 3 Cent, … Kinder müssen hier die Erfahrung machen, dass 3 Kilogramm Kirschen beispielsweise etwas ganz anderes bedeutet als 3 Kirschen.
- Operatoraspekt: Hier beschreiben Zahlen die Wiederholung von Vorgängen oder Handlungen. Die dazugehörige Fragestellung wäre: „Wie oft?“ Auch hierfür gibt es eigene Zahlwörter: einmal, zweimal, dreimal, …
- Rechenzahlaspekt: Zahlen werden oft einfach zum Rechnen benutzt. Man spricht in diesem Zusammenhang vom algorithmischen Aspekt, wenn Zahlen beispielsweise bei schriftlichen Rechenverfahren nur ziffernweise nach einer vorgeschriebenen Handlungsanweisung verrechnet werden. Stehen algebraische Gesetzmäßigkeiten im Mittelpunkt, z. B. das Kommutativgesetz bei $3+4=4+3$, dann haben Zahlen eher einen algebraischen Aspekt.
- Codierungsaspekt: Dieser Zahlaspekt ist den meisten Schulanfängerinnen und Schulanfängern vertraut, da sie Zahlen in Telefonnummern, Autokennzeichen oder bei der Belegung von Programmplätzen auf der TV-Fernbedienung kennen. Zur Codierung werden oftmals auch ganze Ziffernfolgen verwendet. Dieser Zahlaspekt fällt insofern etwas aus der Reihe, dass ein mathematischer Umgang (z. B. Ordnen, Rechnen, …) mit Codierungszahlen nicht sinnvoll ist.

Da eine Integration der Zahlaspekte wesentlich zum Zahlverständnis und zur Entwicklung eines Zahlbegriffs beiträgt, werden die verschiedenen Bedeutungszusammenhänge von Zahlen auch in Schulbüchern thematisiert. Ein Beispiel gibt Abb. 1.3.

Das Verständnis der Kinder für die verschiedenen Zahlaspekte und ihre Zusammenhänge entwickelt sich ganz unterschiedlich. Fuson (1988, S. 404) hat die wechselseitigen Beziehungen zwischen den einzelnen Aspekten zusammengetragen und mit dem ungefähren Lebensalter in Bezug gesetzt, in dem die Kinder diese Beziehungen erkennen.

In Abb. 1.4 sind Teile dieses Beziehungsnetzes gezeigt. Ihm ist zu entnehmen, dass die Kinder die Beziehung zwischen Zählzahlen und Kardinalzahlen schon sehr früh (mit drei bis vier Jahren) erfassen. Mit fünf bis sechs Jahren entdecken sie, dass sie durch Weiter- und Rückwärtszählen addieren und subtrahieren können. Auch der Zusammenhang zwischen Zählzahlen und Ordnungszahlen wird schon mit etwa sechs Jahren erkannt, während der zwischen Kardinal- und Ordnungszahlen offenbar sehr viel schwieriger zu erfassen ist.

Auch wenn diese Altersangaben nicht überbewertet werden dürfen, so zeigen sie doch, dass die Sicherheit beim Zählen fundamental ist für das Zahlverständnis. Allerdings kann allein auf der Grundlage des Zählens sicher kein umfassender Zahlbegriff gebildet werden. Dieser erfordert, dass die Kinder alle Aspekte und ihre wechselseitigen Beziehungen erfassen sowie Einsicht in die formale Darstellung der Zahlen im Zehnersystem (Abschn. 4.1.7) haben. Bei den meisten Kindern dürfte dieser Prozess bis zum Ende der Grundschulzeit dauern.

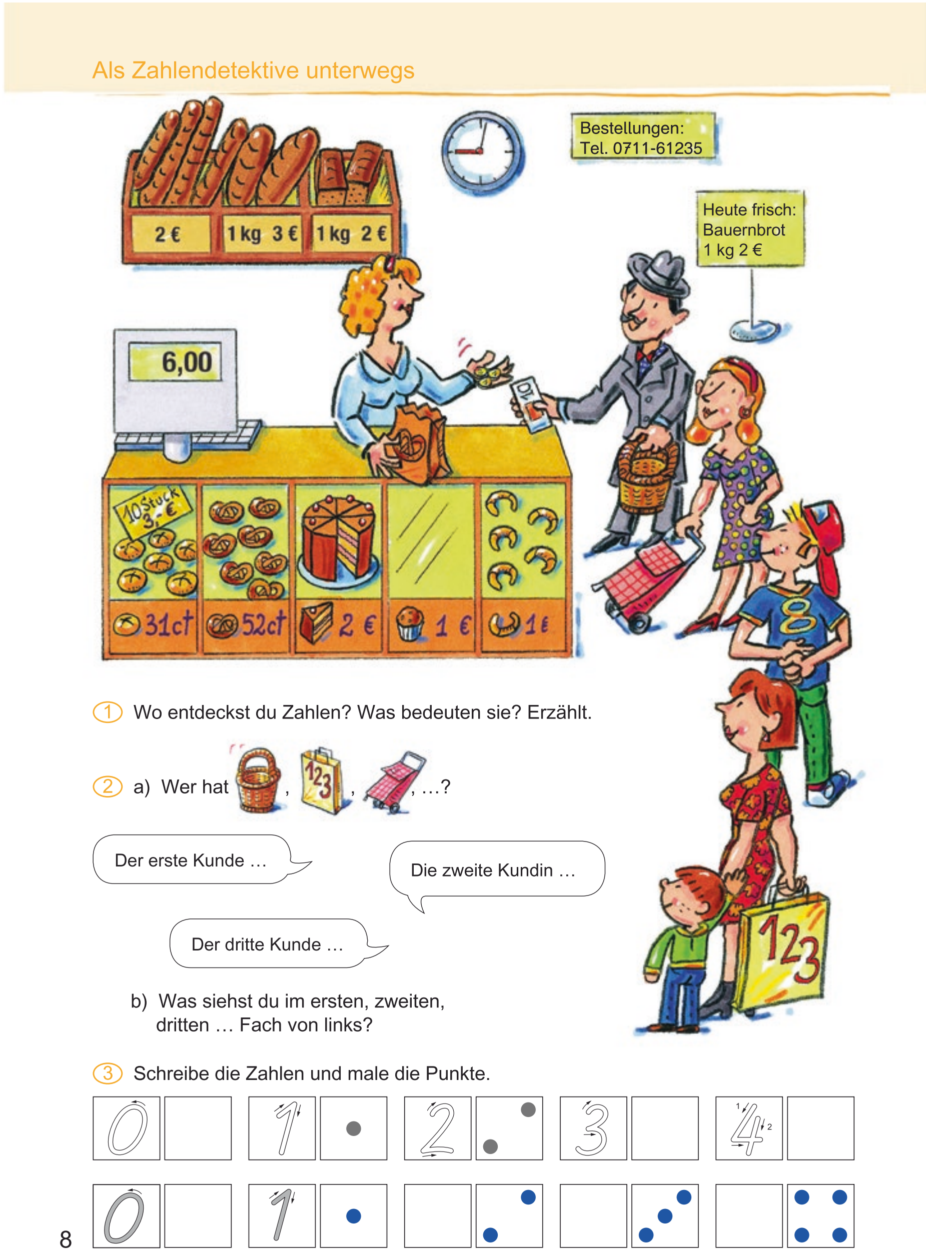


Abb. 1.3 Zahlaspekte im Schulbuch. (Betz et al. 2016, S. 8 © Cornelsen/Mathias Hütter)

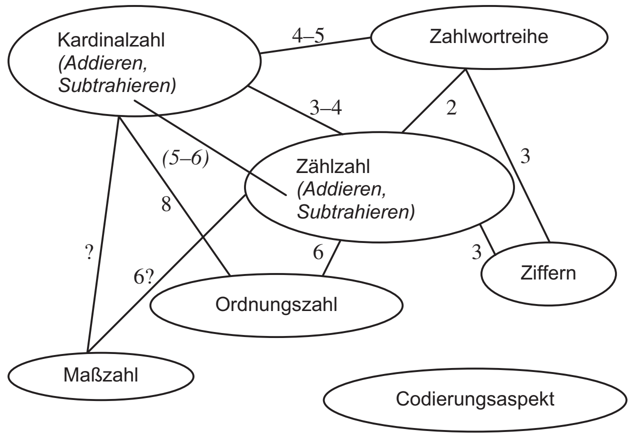


Abb. 1.4 Beziehungen zwischen einigen Zahlaspekten

1.2.3 Entwicklungspsychologische Hintergründe zum Zahlbegriffserwerb

Sucht man nach psychologischen Erkenntnissen zur Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kind, landet man unweigerlich bei den entwicklungspsychologischen Arbeiten der Genfer Schule Jean Piagets. Diese hatten Ende der 1960er Jahre einen ungeheuren Einfluss auf die Entwicklung des mathematischen Anfangsunterrichts in Deutschland (West), wobei hier insbesondere die empirischen Untersuchungen zur Entwicklung des Zahlbegriffs (Piaget 1958; Piaget und Szeminska 1975) zu nennen sind.

Der Entwicklungspsychologe Piaget hat sich in seinen Untersuchungen sehr intensiv mit der natürlichen kognitiven Entwicklung der Kinder befasst. Er kam zu dem Schluss, dass die Entwicklung in Stufen verläuft, wobei spätere Stufen die früheren ersetzen. Eine andere, durchaus ähnlich aufgebaute Stufentheorie wurde von Kohlberg (1974, 2000) vorgelegt, während beispielsweise Erikson (1966) die Entwicklung stärker aus der Sicht des Individuums und in „Lebenszyklen" beschreibt.

Laut Piaget müssen die Kinder erst einen bestimmten kognitiven Entwicklungsstand erreichen, bevor sich Lernprozesse fruchtbar auswirken können. Lernen bedeutet für ihn, die bereits aufgebauten kognitiven Strukturen auf neue Inhalte anzuwenden (zur Oeveste 1987, S. 25). Aufgrund dieser Annahme glaubte Piaget, von sehr spezifischen Experimenten auf die jeweilige Entwicklungsstufe des einzelnen Kindes schließen zu können.

Im Hinblick auf die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kind geht Piaget davon aus, dass es eine Reihe von kognitiven Fähigkeiten gibt, die notwendige Voraussetzungen für diese Entwicklung sind, wobei er einen strengen Maßstab anlegt, wann von „Zahlbegriff" gesprochen werden kann. Für ihn sind „Zahlen, welche vor dem Augenblick liegen, an dem das Kind die Wiederholung der Einheit verstanden hat (die Möglichkeit,

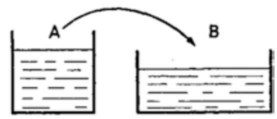


Abb. 1.5 Invarianz von Flüssigkeitsmengen (Piaget 1958, S. 358)

durch die Addition der Einheit jedes Mal eine neue Zahl zu bilden), noch keine wirklichen Zahlen“ (Piaget 1958, S. 358).

Mit „Invarianz“, „Eins-zu-eins-Zuordnung“, „Klassifikation“ und „Bildung von Reihenfolgen“ werden einige der für Piaget wesentlichen kognitiven Fähigkeiten im Zusammenhang mit dem Zahlbegriff hier kurz skizziert (ausführliche Darstellungen findet man z. B. bei Piaget und Szeminska 1975; oder zur Oeveste 1987, S. 27–42).

Das Prinzip der Invarianz (oder „Erhaltung“) ist eine Grundlage für das Denken ganz allgemein. Schon in den ersten Monaten seines Lebens macht das Kind Erfahrungen mit der Unveränderlichkeit der Form fester Gegenstände. Untersucht wurde von Piaget bei älteren Kindern die Entwicklung ihrer Einsicht in dieses Prinzip bei physikalischen Größen wie Volumina und Gewichten sowie bei Mengen von Perlen. In den berühmten Umschüttversuchen (z. B. von Flüssigkeit aus einem Gefäß mit einem kleineren Durchmesser in ein solches mit einem größeren Durchmesser, Abb. 1.5; Piaget 1958, S. 358) zeigte sich, dass viele Kinder erst zwischen sechs und sieben Jahren sicher sind, dass sich die Flüssigkeitsmenge beim Umfüllen nicht verändert. Als Grund nennt Piaget, dass das Denken der Kinder erst in dieser Zeit reversibel geworden ist. Sie erkennen, dass sich zum einen die Handlung des Umfüllens umkehren lässt (möglicherweise auch nur in Gedanken) und dass zum anderen beim Flüssigkeitsstand in den Gefäßen ein Ausgleich zwischen Höhe und Breite stattfindet. Entsprechend muss ein Kind bei einer Aufgabe zur Invarianz der Zahl in der Lage sein zu verstehen, dass sich Aussagen wie „mehr als“ oder „weniger als“ auf die Anzahl der Elemente in einer Menge beziehen und nicht auf die räumliche Ausdehnung dieser Elemente.

Die Einsicht in Eins-zu-eins-Zuordnungen zwischen Elementen von endlichen Mengen (Abschn. 1.2.1) wird von Piaget als die zentrale Grundlage für den Zahlbegriff gesehen, wodurch sich der Zahlbegriff jedoch auf die Aspekte „Kardinalzahl“ und „Ordnungszahl“ reduziert (Abschn. 1.2.2). Das Zählen als Grundlage des Zahlbegriffs wird dabei überhaupt nicht in Betracht gezogen (vgl. zur Oeveste 1987, S. 36: „Die grundlegende Operation für die Entwicklung der Kardinalzahl ist die Herstellung einer wechselseitigen Entsprechung (Stück-für-Stück-Korrespondenz) zwischen den Elementen zweier Klassen. Diese ist ursprünglicher als die Nummerierung durch Abzählen.“)

Bei den Versuchen Piagets und Szeminskas zur Eins-zu-eins-Zuordnung wurde den Kindern z. B. eine Reihe von Vasen und eine bestimmte Anzahl von Blumen (mehr Blumen als Vasen) vorgelegt. Die Kinder sollten für jede Vase eine Blume bereitlegen. Anschließend wurde die Reihe der Blumen zusammengerückt, sodass sich die räumlichen Anordnungen der Blumen und Vasen nicht mehr entsprechen. Die Kinder

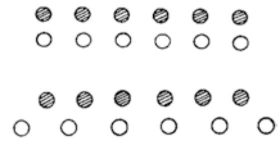


Abb. 1.6 Eins-zu-eins-Zuordnungen (Piaget 1958, S. 359 f.)

wurden gefragt, ob immer noch genauso viele Blumen wie Vasen vorhanden sind (vgl. Abb. 1.6; Piaget 1958, S. 359 f.; Piaget bezieht sich dort auf rote und blaue Knöpfe). Bei größeren Mengen (mit mehr als sechs bis acht Objekten) konnten jüngere Kinder die Eins-zu-eins-Zuordnung noch nicht selbstständig herstellen, außerdem beruhte ihre Bewertung der Mengen im Sinne von „mehr/weniger/gleich viele" allein auf dem optischen Vergleich der Reihenlängen. Die etwas älteren Kinder konnten ohne weiteres selbst die Eins-zu-eins-Zuordnung herstellen, aber auch sie waren noch nicht sicher, dass gleich viele vorhanden sind, wenn die räumliche Ausdehnung der Objekte verändert wurde. Das heißt, die Zuordnung und das Urteil darüber, ob „gleich viele" vorhanden sind, blieben weiterhin an die Anschauung gebunden. Etwa ab sechs Jahren waren die Kinder in der Lage, die räumliche Verschiebung durch eine nur in Gedanken durchgeführte Handlung wettzumachen. Ihr Denken ist reversibel geworden (vgl. zur Oeveste 1987, S. 37).

Baroody (1987, S. 112) und Sophian (1988, S. 639) haben darauf hingewiesen, dass sich für die Kinder in diesen Versuchen zum Mengenvergleich ein Konflikt ergeben kann zwischen den verschiedenen, ihnen bereits zur Verfügung stehenden Möglichkeiten des Vergleichs: Einerseits können sie die Mengen nach dem Kriterium „mehr/weniger/gleich viele" vergleichen und andererseits die Anzahl der Objekte durch Zählen ermitteln. Das könnte eine Erklärung für das Scheitern einiger Kinder bei dieser Aufgabe sein. Mehler und Bever (1967) haben den Versuch abgeändert und Kindern zunächst gleich lange Reihen mit je vier Bonbons vorgelegt. Anschließend wurde eine der Reihen auf sechs Bonbons erweitert, gleichzeitig aber so angeordnet, dass sie kürzer war als die Reihe mit vier Bonbons. Die Kinder wurden gefragt, welche Reihe mit Bonbons sie haben wollen, und die meisten Kinder im Alter zwischen zweieinhalb und drei Jahren wählten tatsächlich die kürzere Reihe mit mehr Bonbons. Etwas ältere Kinder (ca. drei bis viereinhalb Jahre) wählten überwiegend die längere Reihe und noch ältere (mehr als viereinhalb Jahre) wieder diejenige mit mehr Bonbons.

Mit „Klassifizieren" wird die Fähigkeit bezeichnet, verschiedene Objekte aufgrund gewisser Merkmale zusammenzufassen. „Jüngere Kinder, die aufgefordert werden, Figuren (die sich z. B. nach Form und Farbe unterscheiden) oder Objekte nach gemeinsamen Merkmalen zu ordnen, neigen mitunter dazu, diese aufgrund der räumlichen Nachbarschaft zu gruppieren. (…) Das Zusammenlegen der Gegenstände wird noch nicht durch gemeinsame Eigenschaften geleitet, sondern durch einfache Gestalten und Konfigurationen" (zur Oeveste 1987, S. 31). Laut Piaget sind die Kinder erst ab etwa fünfeinhalb Jahren zur einfachen und ab etwa siebeneinhalb Jahren zur multiplen Klassifizierung in der Lage, gleichzeitig entwickeln sie das Verständnis für Klasseninklusionen.

(Man spricht von einfacher Klassifizierung, wenn bei den Objekten nur ein Merkmal – z. B. nur die Form oder nur die Farbe – zu berücksichtigen ist, während bei der multiplen Klassifikation die Objekte nach mindestens zwei Merkmalen zugleich in Klassen eingeteilt werden müssen. Unter Klasseninklusion wird die Beziehung zwischen über- und untergeordneten Klassen verstanden, z. B. sind alle Hunde Tiere). Die Nachuntersuchungen zur Oevestes (1987, S. 32 f.), in denen den Kindern nicht nur – wie von Piaget – geometrische Formen, sondern auch Objekte aus ihrer täglichen Umwelt vorgelegt wurden, ergaben übrigens beim durchschnittlichen Alter der Kinder deutlich andere Werte: Einfache Klassifikation ermittelte zur Oeveste ab zwei und multiple Klassifikation ab sechs Jahren, dagegen ein Verständnis für die Klasseninklusion erst ab zehn Jahren.

Beim Bilden von Reihenfolgen (auch „Seriation" genannt) werden Objekte nach bestimmten Merkmalen geordnet. Auch hier wird zwischen einfacher und multipler Seriation unterschieden, hinzu kommt der Transitivitätsschluss (z. B. wenn a kleiner als b ist und b kleiner als c, dann ist a auch kleiner als c). In Versuchsanordnungen zur Prüfung der einfachen Seriation werden Kindern verschiedene Objekte dargeboten, die sich z. B. in der Länge oder im Gewicht voneinander unterscheiden. Die Kinder werden dann aufgefordert, die Objekte nach ihrer Länge oder ihrem Gewicht in einer Reihe anzuordnen. Bei der multiplen Seriation wird die Reihenbildung nach zwei Merkmalen zugleich verlangt. Die schwierigste Ordnungsoperation ist der transitive Schluss, wenn das Kind (im Kopf) z. B. von „A ist kürzer als B" und „B ist kürzer als C" auf „A ist kürzer als C" schließen muss.

Interessant ist in diesem Zusammenhang ein aus den Arbeiten zur Oevestes resultierendes Diagramm (Abb. 1.7), in dem wechselseitige Beziehungen dargestellt sind zwischen den Entwicklungssträngen bei der Seriation, der Klassifikation und bei geometrischen Einsichten (auf die wir im Abschn. 6.1 eingehen). Interessant sind diese Ergebnisse vor allem deshalb, weil in ihnen von der Möglichkeit unterschiedlicher Entwicklungsstränge ausgegangen wird.

Man kann erwarten, dass die kognitive Entwicklung bei den einzelnen Kindern nicht nur unterschiedlich schnell, sondern auch mit individuellen Abweichungen bei der Art und der Stärke ihrer Ausprägung verläuft. Wie wir in eigenen Untersuchungen feststellen konnten, gilt dies auch für ganze Gruppen von Kindern. Bei der Erprobung des „Osnabrücker Tests zur Zahlbegriffsentwicklung" in den Niederlanden und in Deutschland (Abschn. 1.4) zeigten sich in einigen Bereichen deutliche Unterschiede zwischen den beiden Ländern. Beispielsweise bei einfachen Aufgaben zur Klassifikation fiel es den deutschen Kindern sehr leicht, geometrische Figuren (Quadrate und Dreiecke) zu unterscheiden, während die niederländischen leichter Gegenstände aus ihrer täglichen Umwelt klassifizieren konnten („Was kann fliegen?"). Noch deutlicher war der Unterschied zwischen den Kindern in diesen beiden Ländern bei Aufgaben zur Bildung von Reihenfolgen. Beim Vergleich zweier Reihen (großen Hunden sollten lange Stäbe und kleinen Hunden kurze Stäbe zugeordnet werden) waren die deutschen Kinder im Durchschnitt deutlich besser als die niederländischen. Genau umgekehrt war das Ergebnis jedoch

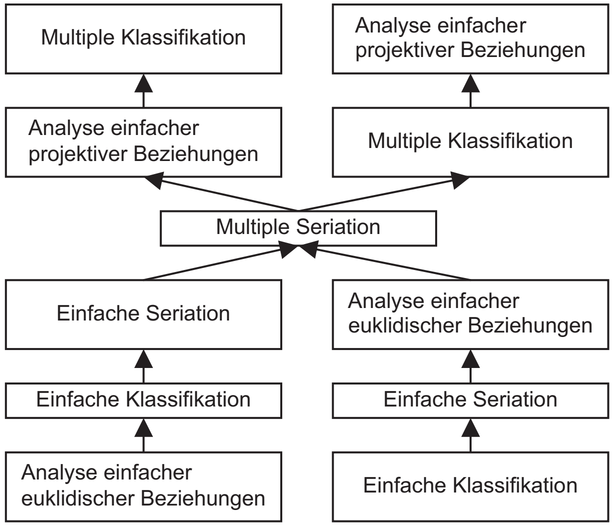


Abb. 1.7 Darstellung alternativer Entwicklungsverläufe in Bezug auf Klassifikation, Seriation und geometrische Einsichten (zur Oeveste 1987, S. 130). (Mit „euklidischen Beziehungen" sind solche geometrischen Eigenschaften von Figuren gemeint, die sich auf Längen, Winkel oder Parallelität beziehen, während „projektive Beziehungen" auf Lagebeziehungen zwischen Figuren und die Beachtung der Perspektive in Zeichnungen hinweisen; Abschn. 6.1.1)

bei einer Aufgabe, in der die Kinder mehrere Stapel mit Brotscheiben in die richtige Reihenfolge bringen sollten. Diese Aufgabe war für fast alle deutschen Kinder unlösbar, während viele niederländische sie bewältigten. (Über die Gründe für diese Unterschiede soll hier nicht spekuliert werden. Es ist aber naheliegend zu vermuten, dass sich Unterschiede in den Bildungssystemen der Länder hier auswirken, Abschn. 2.2.1).

Zusammenfassend lässt sich zu Piagets Erkenntnissen zur Zahlbegriffsentwicklung Folgendes festhalten: Einerseits deuten viele Äußerungen Piagets darauf hin, dass er der Meinung ist, gewisse Begriffe könnten von den Kindern keinesfalls gebildet werden, bevor diese nicht gewisse Entwicklungsstufen durchlaufen haben. Dazu betont er (1958, S. 360), dass die von ihm genannten Bedingungen (nur) „vom psychologischen Standpunkt (…) notwendig sind (ich stelle mich nicht auf den logischen Standpunkt)". Andererseits unterstreicht er auch, dass nicht allein das Verstehen logischer Zusammenhänge den Zahlbegriff ausmacht: „Es ist notwendig, dass es [das Kind], logische Werkzeuge hat, um die Zahl aufzubauen. Andererseits bedeutet dies nicht, dass die Zahl einfach auf die Logik rückführbar ist. Es geht hier um eine neue Kombination von logischen Elementen, um eine neue Synthese von logischen Operationen" (Piaget 1958, S. 363).

Den Folgerungen aus Piagets Untersuchungen mit Kindern wird heute nicht mehr uneingeschränkt zugestimmt. Neuere entwicklungspsychologische Arbeiten zeigen andere Entwicklungslinien zum Zahlverständnis auf, die sich vielfach auf einen Modellvorschlag von Resnick (1989) zurückführen lassen (z. B. Krajewski 2007). Sie beschreibt verschiedene Argumentationsschemata, die in Verbindung mit der Zählkompetenz als wesentlich für die Entwicklung des Zahlbegriffs angesehen werden (hier und im Folgenden: Resnick 1989, S. 162 ff.). Zunächst geht Resnick davon aus, dass ein erstes Bewusstsein über Mengen, das bereits bei Säuglingen beobachtet werden kann (Abschn. 1.1), grundlegend für die Weiterentwicklung mathematischer Fähigkeiten ist. Im Vorschulalter entwickeln sich dann die Sprachfähigkeiten so weit, dass die Kinder Mengenvergleiche und -veränderungen mit Worten beschreiben können. Sie verwenden Begriffe, wie „viel, wenig, mehr". Die Vergleiche beruhen aber oftmals auf der Wahrnehmung und weniger auf exaktem Bestimmen von Anzahlen durch Zählen (*protoquantitive comparison schema*). Eine weitere Erkenntnis der Kinder, die sich im Vorschulalter entwickelt, ist, dass das Hinzufügen von Elementen eine Menge größer macht, das Wegnehmen kleiner und dass eine Menge unverändert bleibt, wenn nichts hinzugefügt oder weggenommen wird (*protoquantitative increase/decrease schema*). Letzteres ist im Zusammenhang mit Piagets Untersuchungen zur Invarianz besonders interessant. Kinder scheinen durchaus bereits in diesem Alter ein Verständnis hierfür zu entwickeln, auch wenn Piagets Untersuchungsergebnisse dies nicht stützen. Für diese Diskrepanz gibt es viele Erklärungsversuche. Im Wesentlichen wurden Formulierungen und Abfolgen im Untersuchungsdesign von Piaget dafür verantwortlich gemacht (z. B. Donaldson 1991). Zu einem grundlegenden Zahlverständnis gehört nach Resnick auch das Verständnis, dass eine Menge aus verschiedenen Teilmengen zusammengesetzt sein kann (*protoquantitative part-whole schema*). Man spricht vom Verständnis des Teil-Ganzen. Zusammenhänge zwischen Teilen und dem Ganzen können erkannt und beschrieben werden: Es liegen fünf Bonbons auf dem Tisch, drei orangefarbene und zwei gelbe. Insgesamt sind es fünf Bonbons, und sowohl die orangefarbenen Bonbons als auch die gelben sind weniger als alle zusammen. Diese drei Argumentationsschemata werden als wichtige Grundlage für das Zahlverständnis angesehen und gelten – zusammen mit der Entwicklung der Zählkompetenz (Abschn. 1.3) – als zentrale Verständnisbausteine in unserem Zahlsystem.

Die beiden Ansätze zur Zahlbegriffsentwicklung von Piaget und Resnick unterscheiden sich nicht nur inhaltlich, sondern auch bezüglich der Schlussfolgerung, ob externe Faktoren die Zahlbegriffsentwicklung unterstützen können oder nicht. Während Piaget davon ausging, dass die Entwicklung der Kinder im Wesentlichen durch Mechanismen beeinflusst wird, die unabhängig sind von den Inhalten und Fragestellungen, mit denen sich die Kinder beschäftigen (vgl. Case 1996, S. 2), nimmt Resnick an, dass zahlreiche Lerngelegenheiten zur Mengenbestimmung, zum Vergleich oder zum Zählen die Zahlbegriffsentwicklung klar unterstützen (vgl. Resnick 1989, S. 164).

Ebenfalls aufbauend auf den Grundideen von Resnick existieren auch Modelle zur Zahlbegriffsentwicklung, die das Zählen integrieren (z. B. Case 1996; Dornheim 2008). Deshalb ist es notwendig, sich einen Überblick über die Zählentwicklung zu verschaffen.

1.3 Entwicklung der Zählkompetenz

Verwendet man im deutschen Sprachgebrauch das Wort „zählen" so kann man darunter Verschiedenes verstehen. Stellt man Kindern die Frage „Kannst du schon zählen?", dann zielt man zunächst oftmals darauf ab, zu sehen, ob Kinder die Zahlwortreihe möglichst fehlerfrei aufzählen können. „Zählen zu können" beinhaltet aber darüber hinaus die komplexe Tätigkeit, mithilfe der Zahlwortreihe bestimmen zu können, wie viele Elemente eine vorgegebene Menge hat. Ersteres ist eine Voraussetzung für Zweiteres (vgl. aber das Interview mit Lie in 1.3.1).

Zu bestimmen, wie viele Elemente eine vorgegebene Menge hat, erfordert das Anwenden der Zahlwortreihe jedoch nicht zwangsläufig. Dies kann auch durch simultane Zahlerfassung erfolgen, d. h. die Anzahl wird einfach durch „Hinsehen" ermittelt (in der Literatur wird die simultane Zahlerfassung auch *Subitizing* genannt). Simultane Zahlerfassung ist allerdings nur möglich, wenn es sich um wenige Objekte handelt. Drei- bis vierjährige Kinder können in der Regel drei, vier oder fünf Elemente auf einen Blick erfassen und selbst Erwachsenen gelingt dies in der Regel nur bei bis zu sechs Objekten. Darüber hinaus erfolgt die Erfassung dann nicht mehr „simultan", sondern es sind zusätzliche Strategien wie das Zusammenfassen von Objekten zu neuen Einheiten erforderlich. So ermöglicht beispielsweise die Strukturierung einer Menge von zwölf Elementen in zwei Würfelbilder der Zahl sechs wiederum ein Erfassen auf einem Blick. Man spricht in diesem Zusammenhang von „quasi-simultaner Zahlerfassung". Einige Psychologen waren der Meinung, dass die simultane Zahlerfassung in Wahrheit ein „blitzartiges" Auszählen der Anzahl ist (vgl. Schipper 2009, S. 53 bzw. 71 f.). Eine Vielzahl von Untersuchungen (vgl. z. B. Stern 1998, S. 62), deutet jedoch darauf hin, dass Zählen und Zahlerfassung zwei deutlich unterschiedliche Verfahren sind. Zweifellos hat aber das Zählen für die Ermittlung vor allem größerer Anzahlen eine weitreichende Bedeutung.

Im Folgenden werden die beiden oben geschilderten Bedeutungszusammenhänge des Zählens näher ausgeführt. Zunächst soll es um wichtige Prinzipien gehen, die Kinder verinnerlicht haben müssen, um mithilfe des Zählens Anzahlen zu bestimmen. Eines davon ist, die Zahlwortreihe zu beherrschen. Erkenntnisse über die Entwicklung der Zahlwortreihe werden in Abschn. 1.3.2 erläutert.

1.3.1 Anzahlbestimmung durch Zählen

Im Alter von etwa zwei Jahren beginnen die Kinder, sich mit dem Zählen auseinanderzusetzen: Sie können die ersten Zahlwörter „eins, zwei" aufsagen und lernen bald, dass mit Zahlwörtern Anzahlen bezeichnet werden: „zwei Bonbons", „drei Blumen" usw. Die Kinder unterscheiden dabei zunächst meist nur zwischen „eins" und „zwei" und „viele"[2], doch im Laufe der Zeit differenziert sich die Zahlwortreihe immer mehr. Jüngeren Kindern ist der Unterschied zwischen Zahlwörtern und Eigenschaftswörtern möglicherweise nicht immer ganz klar, d. h. es gibt für sie zunächst noch keinen bedeutsamen

[2]Auch aus der Entwicklung der Sprachen lässt sich nachweisen (Ifrah 1992, S. 20), dass das Zahlwort „drei" in der Bedeutung von „viele" gebraucht wurde. So besteht ein Zusammenhang in den sprachlichen Wurzeln der Wörter „drei" *(three, trois, tres)* und „Trupp" *(troop, troupe, troppus)* in der Bedeutung von „viele".

Unterschied zwischen Aussagen wie „drei Blumen“ und „rote Blumen“ – sind drei Blumen zu sehen, heißt es „drei Blumen“, sind rote Blumen zu sehen, heißt es „rote Blumen“. Es lässt sich aber zeigen (vgl. Stern 1998, S. 58), dass sie diesen Unterschied sehr schnell erfassen. Dabei hilft ihnen vor allem der sprachliche Kontext, beispielsweise Formulierungen mit und ohne Artikel („Gibt mir drei Bauklötze“ im Gegensatz zu „Gib mir die roten Blumen“).

Zahlwörter können bei beliebigen Objekten verwendet werden; diese Tatsache ist durchaus nicht völlig selbstverständlich. „Der frühe Mensch hat die Zahl anfangs immer als Eigenschaft empfunden. Einige Völker haben die Zahl vollständig mit den Dingen zur Einheit zusammengeschmolzen. 10 Kähne nennt der Fidschi-Insulaner bola, 10 Kokosnüsse koro, 1000 Kokosnüsse saloro“ (Menninger 1958, Bd. 1, S. 22). In vielen Sprachen gibt es auch heute noch „Zählklassen“, d. h. verschiedene Dinge – z. B. Lebendiges, runde Dinge oder Tage – werden jeweils in besonderen Zählreihen gezählt. Man weiß z. B. aus babylonischen Texten (vgl. Damerow 1990), dass zu jener Zeit bei unterschiedlichen Gegenständen des täglichen Gebrauchs verschiedene Zahlsysteme verwendet wurden (z. B. das Sechzigersystem bei Getreideprodukten und das Einhundertzwanzigersystem bei Bierkrügen). In unserer Sprache verwenden wir gelegentlich noch altertümliche Zahlwörter, deren Herkunft damit zusammenhängt, wie z. B. „Dutzend“ für die Zahl 12.

Damit Kinder mithilfe des Zählens Anzahlen richtig bestimmen können, müssen sie über verschiedene Teilkompetenzen verfügen, auf die Kruckenberg bereits 1935 hingewiesen hat und die später von Gelman und Gallistel (1986, S. 77 ff.) als Zählprinzipien wie folgt formuliert wurden:

1. *One-one principle* (Eindeutigkeitsprinzip): Jedem der zu zählenden Objekte wird genau ein Zahlwort zugeordnet. Um dies leisten zu können, muss das Kind die Menge handelnd oder mental in bereits gezählte und noch nicht gezählte Objekte teilen. Das Verschieben von bereits gezählten Objekten unterstützt diesen Prozess, ist aber nicht zwangsläufig nötig. Wird ein Zahlwort mehrfach verwendet, ein Objekt mehrfach gezählt oder beim Zählen übersehen, so wird gegen dieses Prinzip verstoßen.
2. *Stable-order principle* (Prinzip der stabilen Ordnung): Die Reihe der Zahlwörter hat eine feste Ordnung. Um richtige Zählergebnisse zu erhalten, müssen die Zahlwörter in einer stabilen Reihenfolge genannt werden, die jederzeit wiederholbar ist. Die Anforderung, diesem Prinzip Genüge zu tun, steigt, je mehr Objekte gezählt werden müssen. Bei der Anzahlbestimmung kann es dann zu Schwierigkeiten kommen, wenn die Zahlwortreihe nur begrenzt sicher beherrscht wird.
3. *Cardinal principle* (Kardinalzahlprinzip): Das zuletzt genannte Zahlwort gibt die Anzahl der Objekte einer Menge an. Gelman und Gallistel gehen davon aus, dass diese Erkenntnis nicht losgelöst von den ersten beiden Prinzipien erfolgen kann.
4. *Abstraction principle* (Abstraktionsprinzip): Es kann jede beliebige Menge ausgezählt werden, d. h. es kommt nicht darauf an, welcher Art die Objekte sind, die gezählt werden.

5. *Order-irrelevance principle* (Prinzip der Irrelevanz der Anordnung): Die jeweilige Anordnung der zu zählenden Objekte und auch die Reihenfolge, in der die Objekte gezählt werden, sind für das Zählergebnis nicht von Bedeutung. Dazu muss das Kind verstehen, dass das Zahlwort nicht die spezifische Eigenschaft eines Objekts ist und dass sich das Zählergebnis nicht ändert, wenn der Zählprozess bei einem anderen Objekt beginnt.

Die ersten drei Prinzipien beziehen sich darauf, wie gezählt wird *(how-to-count principles)*, die beiden letzten sind übergeordnete Prinzipien und besagen, was gezählt werden kann *(what-to-count principles)*.

In den ersten drei Prinzipien werden Voraussetzungen formuliert, die – man sollte meinen: logischerweise – erfüllt sein müssen, damit ein Individuum zählen kann: Es muss die Eins-zu-eins-Zuordnung (Abschn. 1.2.1) beherrschen, es muss die Zahlwörter in der korrekten (d. h. der üblichen) Reihenfolge kennen, und es muss das letzte Zahlwort auf die Frage „Wie viele sind es?" nennen. Aus mathematischer Sicht können die Prinzipien gut formalisiert und in einer Definition zusammengefasst werden, wie dies z. B. bei Bedürftig und Murawski geschehen ist (2001, S. 29). Beobachtungen bei jüngeren Kindern zeigen jedoch, dass es bei der Umsetzung dieser Prinzipien in realen Situationen und in Abhängigkeit vom Zahlenraum große individuelle Unterschiede gibt. Dabei zeigt sich auch, dass diese Prinzipien nicht als isolierte Teilkompetenzen gesehen werden können, sondern, wie auch Gelman und Gallistel beschreiben (1986, S. 80), teilweise eng vernetzt sind. Dazu einige Beispiele:

Lie (Alter: 5 Jahre und 7 Monate) besucht einen Kindergarten. Im Rahmen einer empirischen Untersuchung (Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung [OTZ], vgl. Abschn. 1.4) wird er von der Interviewerin gebeten zu zählen (im Sinne eines Aufsagens der Zahlwortreihe). Er kommt dabei bis zur Sechs. Später im Interview, als er Zahlen schreiben soll, zeigt sich, dass er die Zahlwortreihe bis zwölf beherrscht und noch später sogar bis 26. Die letztgenannte Beobachtung wurde gemacht, als Lie aufgefordert war, eine gewisse vorgegebene Anzahl von Holzwürfeln abzuzählen. Auch wenn dabei Abzählfehler vorkommen (einige Würfel werden doppelt angetippt, andere übersprungen), so ist Lie nun sicher in der Verwendung der Zahlwortreihe bis 26. Es gibt für dieses Verhalten eine durchaus plausible Erklärung: Manchen Kindern fällt offenbar das „konkrete" (Ab-)Zählen unter Verwendung von Material leichter als das Aufsagen der Zahlwortreihe, welches ein rein mentaler Prozess ist.

Eine Untersuchung von Caluori (2004) in der Schweiz liefert eine Reihe von Belegen für die Gültigkeit dieser Erklärung. Einige Kinder benutzen die Finger als Hilfe, andere stützen das Aufsagen der Zahlwortreihe durch einen Rhythmus, so z. B. Markus (4½ Jahre alt) durch gleichmäßiges Klopfen auf den Tisch. Manche Kinder verwenden die Klopftechnik sogar beim Abzählen von Objekten. Auch bei Aufgaben, in denen nicht sichtbare Objekte in der Vorstellung zu zählen sind, kommen viele Kinder auf die Idee, Hilfsmittel wie ihre Finger zu verwenden. Beispielsweise bei der folgenden Aufgabe:

I:	Ich gebe dir ein Bild, das du kurz anschauen sollst. (Der *Interviewer zeigt Sarah für zwei Sekunden ein Bild mit zwei Spielwürfeln mit den Augenzahlen 4 und 5 und nimmt dann das Bild weg.)* Wie viele Punkte waren es zusammen?
S:	*(Sie zählt leise aus der Erinnerung die neun Würfelaugen, wobei sich ihre Lippen bewegen:)* 9! *(Sie streckt dann mit der einen Hand vier Finger und mit der anderen Hand fünf Finger und schaut sich beide Hände lange an:)* 4 und 5 *(Sie stutzt, zeigt mit dem Kopf auf ihre Hände mit den ausgestreckten Fingern und beginnt zu strahlen:)* 4 und 5, das ist ja 9!

Im Rahmen einer weiteren Untersuchung (Gasteiger 2010) konnte folgende interessante Beobachtung gemacht werden. David (4 Jahre und 7 Monate) wurde aufgefordert, die Elemente auf einer Karte zu zählen, auf der die Würfeldrei mit gelben Punkten abgebildet war. Auf dem Tisch lagen noch mehrere Kärtchen mit strukturierten und unstrukturierten Punktmengen.

I:	Wie viele sind denn hier drauf? *(Die Interviewerin deutet auf die Karte mit der Würfeldrei.)*
D:	Das sind Gelbe und Kreise.
I:	*Wie viele* sind denn da drauf?
D:	1, 2, 3, 4, 5 *(zählt und zeigt auf Punkte der Karte mit der Würfeldrei und der Karte mit der Würfelsechs.)*
I:	Auf *der* Karte *(zeigt auf die Karte mit der Würfeldrei.)*
D:	Das, das, … dieselben Kreise.
I:	Wie viele sind das, die Kreise?
D:	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, … *(tippt dabei in die Luft)*

Auf den ersten Blick mag man denken, die Interviewerin und das Kind reden völlig aneinander vorbei. Analysiert man diesen Interviewausschnitt allerdings noch einmal auf Grundlage der Zählprinzipien, kommt man zu der Erkenntnis, dass David das Kardinalzahlprinzip offensichtlich noch nicht verinnerlicht hat. Dieses Prinzip ist durchaus nicht selbstverständlich für jedes Kind, sondern muss erst erworben werden. Letztlich geht es hier auch um eine Konvention, die das Kind erkennen und umsetzen muss: Auf die Frage „Wie viele?" muss das letztgenannte Zahlwort erneut genannt werden.

Beobachtungen dieser Art sind Beispiele für das rasante und spontane Anwachsen von Einsicht in Zahlbeziehungen bei den Kindern im Vorschulalter und andererseits auch für die Heterogenität ihrer Leistungen (ausführlicher dazu Abschn. 1.4).

Ungeachtet des letzten Interviewausschnitts kann als relativ gesichert gelten, dass Kinder im Alter von etwa dreieinhalb Jahren bereits in einem gewissen Umfang über die ersten drei der sogenannten Zählprinzipien verfügen, selbst dann, wenn sie die Zahlwortreihe noch nicht sicher beherrschen (Stern 1998, S. 55 ff.).

Gelman und Gallistel (1986) glaubten sogar, nachweisen zu können, dass die oben genannten fünf Zählprinzipien im Wesentlichen angeboren sind und nicht gelernt zu werden brauchen. Zu diesem Schluss kamen sie unter anderem durch Beobachtungen, wie folgende: Sie berichten von Kindern, die zwar falsch zählten, z. B. 1, 3, 4, 8, aber dennoch auf die Frage, wie viele Objekte es seien, im Sinne des dritten Prinzips mit „8" antworteten (zu beachten ist dabei, dass das zweite Prinzip nur eine „stabile Ordnung" der Zahlwortreihe vorgibt, nicht aber die – im Sinne der Erwachsenen – korrekte). Es gibt jedoch einige Forschungsergebnisse, die der These, dass die Zählprinzipien angeboren sind, widersprechen. Untersuchungen legen die Vermutung nahe, dass Kinder zunächst sukzessive die kardinale Bedeutung der ersten Zahlwörter erwerben und erst zu einem späteren Zeitpunkt alle Zählprinzipien auch auf größere Mengen anwenden können (Le Corre und Carey 2007; Wynn 1992c). Heute geht man überwiegend davon aus, dass die oben genannten fünf Zählprinzipien nicht angeboren sind, sondern dass sie am Ende eines längeren Lernprozesses stehen, der von den Kindern durchlaufen werden muss. Ein Modell für diesen Lernprozess stellt z. B. Moser Opitz (2001, S. 82 ff.) mit Bezug auf Fuson (1988) und Wynn (1990, 1992a) vor.

1.3.2 Zahlwortreihe

Um mithilfe des Zählens Anzahlen korrekt bestimmen zu können, ist also das Beherrschen der Zahlwortreihe, die Eins-zu-eins-Zuordnung und das Wissen um die kardinale Bedeutung der Zahlwörter erforderlich. Zum Erwerb der Zahlwortreihe gibt es ebenfalls einige Erkenntnisse, die verschiedene Entwicklungsprozesse bei Kindern aufzeigen.

Offensichtlich können Kinder schon früh Zahlwörter von anderen Wörtern unterscheiden, sie sind jedoch anfangs nicht in der Lage, diese in einer stabilen Reihenfolge zu verwenden (Gelman und Gallistel 1986; Fuson 1988). Beobachtet man die ersten Versuche von Kindern, die Zahlwortreihe zu nennen, so zeigt sich oft, dass sie durchaus einige Zahlworte in einer festen Reihenfolge parat haben. Ihre Weiterführung der Zahlwortreihe kann dann von Mal zu Mal sehr unterschiedlich aussehen. Sie fügen an den festen Start ihrer Zahlwortreihe weitere beliebige Zahlwörter an, die bei verschiedenen „Zählvorgängen" auch variieren können, z. B. „eins, zwei, drei, vier, sieben, neun, fünfzehn". Bis zum Erwerb der korrekten Zahlwortreihe werden verschiedene Entwicklungsniveaus durchlaufen, die im Folgenden beschrieben werden (vgl. Fuson 1988, S. 50 ff.; deutsche Begriffe nach Moser Opitz 2001):

1. Zahlwortreihe als Ganzheit: Anfangs können Kinder die Zahlwortreihe in der Regel nur als Ganzes – ähnlich einem Gedicht – aufsagen. Sie erkennen nicht die einzelnen Zahlwörter in ihrer Sprachmelodie „einszweidreivierfünf". Deshalb kann die Zahlwortreihe in diesem Stadium nicht zum Zählen verwendet werden, da eine Eins-zu-eins-Zuordnung so nicht möglich ist.
2. Unflexible Zahlwortreihe: Auf diesem Niveau können einzelne Zahlwörter zwar von anderen getrennt werden, die Kinder müssen aber – um die Zahlwortreihe korrekt

reproduzieren zu können – bei eins beginnen. Die Zahlwortreihe beispielsweise mit dem Zahlwort vier zu starten, gelingt Kindern hier noch nicht. Anzahlbestimmungen durch Zählen sind auf diesem Niveau möglich.
3. Teilweise flexible Zahlwortreihe: Ist die Zahlwortreihe teilweise flexibel, so können Kinder bei jedem beliebigen Zahlwort mit dem Aufsagen der Zahlwörter beginnen. Sie können auch benennen, welche Zahl vor einem bestimmten Zahlwort kommt und welche nachher. Mit einer gewissen zeitlichen Verzögerung entwickelt sich auch die Fähigkeit, rückwärts zu zählen.
4. Flexible Zahlwortreihe: Jedes Zahlwort wird als Einheit aufgefasst, und die Zahlwortreihe wird von verschiedenen Zahlwörtern ausgehend beherrscht. Kinder sind auf diesem Niveau auch in der Lage, von einem bestimmten Zahlwort um eine vorgegebene Anzahl von Schritten weiterzuzählen. Dies sind erste Voraussetzungen für ein zählendes Lösen von Additionsaufgaben: Ich zähle von der Fünf um drei Schritte weiter, dann bin ich bei acht.
5. Vollständig reversible Zahlwortreihe: Wenn Kinder von jedem beliebigen Zahlwort aus die Zahlwortreihe vorwärts und rückwärts nennen können, haben sie dieses Entwicklungsniveau erreicht. Sie sind auch in der Lage, die Zählrichtung zu verändern, was wiederum den Einblick in die Zusammenhänge zwischen Addition und Subtraktion erleichtert.

Diese Entwicklungsniveaus treffen in erster Linie auf den Erwerb der Zahlwortreihe von eins bis zwölf bzw. bis zwanzig zu. In diesem Bereich ist die Zahlwortreihe weitgehend unregelmäßig, wohingegen sich die weitere Zahlwortreihe durch die Anwendung dekadischer Analogien erschließen lässt. Die Kinder müssen die Zehnerzahlen kennen und können das immer wiederkehrende Zählmuster „einunddreißig, zweiunddreißig,…“ dann auf jeden neuen Zehner übertragen (vgl. Beispiele in Selter und Spiegel 1997, S. 49, 80). Diese eigentlich sehr clevere Vorgehensweise führt Kinder dann jedoch auch dazu, die Zahlwortreihe ab hundert mit einhundert, zweihundert, dreihundert, … fortzusetzen. Hier müssen die Kinder auf eine Unregelmäßigkeit in der Zahlwortreihe hingewiesen werden, oder sie erlernen die korrekte Zahlwortreihe ab hundert über die Zählerfahrungen mit Kindern bzw. Erwachsenen, die als Vorbild fungieren.

Der Erwerb der Zahlwortreihe erfolgt nicht isoliert von Erfahrungen des Abzählens und der Erkenntnis, dass Zahlwörter Anzahlen benennen. Übung im Abzählen von Elementen führt letztlich dazu, dass jedes Wort innerhalb der verbalen Zahlwortreihe zunehmend mit der entsprechenden Anzahl in Verbindung gebracht werden kann (vgl. Resnick 1983, S. 111).

Wie in diesem Kapitel dargelegt, erfordert die Entwicklung der Zählkompetenz eine Integration verschiedener Teilkompetenzen (Abschn. 1.3.1 und 1.3.2), die eng miteinander vernetzt sind. Betrachtet man diesen Entwicklungsprozess als Ganzes, so lässt sich dieser im Wesentlichen durch die folgenden Phasen beschreiben (vgl. van de Rijt et al. 2000):

- Phase 1 (verbales Zählen): Die Zahlwortreihe ist noch nicht strukturiert, sie wird wie ein Gedicht aufgesagt und kann noch nicht zum Zählen eingesetzt werden. Die einzelnen Zahlwörter werden teilweise noch nicht unterschieden und haben keine kardinale Bedeutung.
- Phase 2 (asynchrones Zählen): Im Alter von etwa dreieinhalb bis vier Jahren benutzen die Kinder die Zahlwörter zum Zählen in der richtigen Reihenfolge, jedoch wird oft noch ein Objekt übersehen oder das gleiche Objekt zweimal gezählt. Wenn die Kinder zählen und gleichzeitig auf (genau) ein Objekt zeigen können, spricht man von synchronem Zählen.
- Phase 3 (Ordnen der Objekte während des Zählens): Wenn ungeordnete Objekte gezählt werden sollen, fangen die Kinder mit etwa viereinhalb Jahren an, die Objekte während des Zählens zu ordnen, z. B., indem sie die gezählten zur Seite schieben.
- Phase 4 (resultatives Zählen): Im Alter von etwa fünf Jahren wissen die Kinder, dass sie beim Zählen mit der Eins anfangen müssen, dass jedes Objekt nur einmal gezählt wird und dass die letztgenannte Zahl die Anzahl der Objekte angibt. Wichtig ist in dieser Phase, dass den Kindern die eindeutige Entsprechung zwischen den zu zählenden Objekten und den Zahlwörtern klar wird.
- Phase 5 (abkürzendes Zählen): Die Kinder im Alter von fünfeinhalb bis sechs Jahren erkennen oder bilden in mehr oder weniger geordneten Mengen von Objekten Strukturen, z. B. das Zahlbild der Fünf auf einem Würfel. Sie können von einer Zahl an aufwärts zählen, sie können in Zweierschritten und auch rückwärts zählen. In dieser Phase können die meisten Kinder bereits einfache Rechnungen ausführen (vgl. Abschn. 1.4).

Wie sich hier zeigt, ist das Zählen eine komplexe Tätigkeit, die ein perfektes Zusammenspiel verschiedener Teilfähigkeiten erfordert. Dennoch entwickelt sich Zählkompetenz in der Regel, ohne dass Kinder darin konkret unterrichtet werden. Allerdings gibt es große Unterschiede in den Leistungen der Kinder, wie verschiedene Untersuchungen zu mathematischen Vorkenntnissen vor Schuleintritt zeigen.

1.4 Vorkenntnisse der Kinder am Schulbeginn

Gerade aufgrund der immer wieder festgestellten Heterogenität der Voraussetzungen, die Kinder zu Schuleintritt mitbringen, ist für die Planung des Anfangsunterrichts Mathematik ein guter Überblick über die Vorkenntnisse der angehenden Schülerinnen und Schüler unerlässlich. Auch wenn Vorkenntniserhebungen vor allem in den letzten Jahrzehnten zunehmend in den Fokus des Interesses gelangt sind, hat dieses Bewusstsein bereits eine lange Geschichte. Schon im ausklingenden 19. Jahrhundert veröffentlichte Hartmann eine *Analyse des kindlichen Gedankenkreises als die naturgemäße Grundlage des ersten Schulunterrichts* (Hartmann 1906), und der Gedanke wurde von Seiten der Mathematikdidaktik immer wieder als bedeutsam herausgestellt.

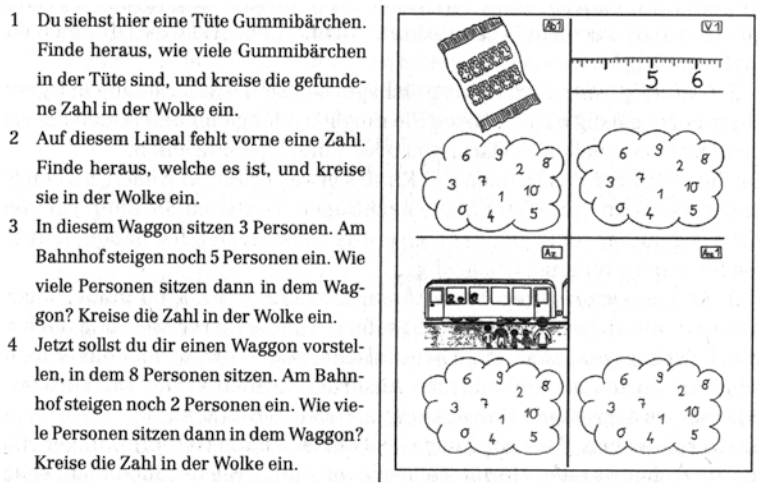
Mit Zählen, Ziffernkenntnis, Mengenvorstellung, Vergleich, Addition und Subtraktion, räumlichen Fähigkeiten, Formen und Größen werden im Folgenden zu den verschiedenen Bereichen des Anfangsunterrichts Ergebnisse aus ausgewählten Untersuchungen vorgestellt. Dadurch soll ein breiter Einblick in die Vorkenntnisse der Kinder vor Schuleintritt ermöglicht werden.

Die Ergebnisse solcher Untersuchungen sind keineswegs immer eindeutig, und ihre Interpretation und Bewertung erfordert sowohl die Kenntnis der Bedingungen, unter denen die Untersuchung durchgeführt wurde (Wie alt waren die Kinder? Wie lautete die genaue Fragestellung, und welches Material wurde verwendet? Wie wurden die Handlungen und Äußerungen der Kinder dokumentiert? etc.), als auch die Kenntnis des theoretischen Hintergrundes, vor dem die Experimente oder Beobachtungen konzipiert und interpretiert wurden: Waren es eher entwicklungspsychologisch oder kognitions- bzw. denkpsychologisch orientierte Arbeiten, oder argumentieren die Forscher eher aus einem pädagogischen oder didaktischen Blickwinkel? Bevor näher auf die Inhalte der Vorkenntnisuntersuchungen eingegangen wird, erfolgt zunächst eine kurze Charakterisierung der verwendeten Untersuchungen.

1.4.1 Vorkenntnisuntersuchungen – ein Überblick

Die Erhebung von Vorkenntnissen bei Kindern vor Schuleintritt hat und hatte verschiedene Motivationsgründe. Es gibt Untersuchungen, die in erster Linie aus einem wissenschaftlichen Erkenntnisinteresse heraus durchgeführt wurden. Dazu lassen sich sicherlich die Untersuchungen zum Zahlbegriffserwerb von Piaget und seinen Mitarbeitern zählen (vgl. Abschn. 1.2.3), aber auch die umfangreichen Untersuchungen von Schmidt (1982a, b und c) sowie Schmidt und Weiser (1982, 1986). Die beiden letztgenannten Untersuchungen sind auch als Konsequenz auf die Veröffentlichungen der Ergebnisse von Piaget zu sehen. Sie zeigten, dass Kinder bereits früh enorme Zählfähigkeiten unter Beweis stellen können und über einen Anzahlbegriff aufgrund dieser Zählfähigkeiten verfügen, was bis dato häufig unterschätzt wurde. In neuerer Zeit wurden einige Forschungsergebnisse veröffentlicht, die sich mit der Vorhersage von Rechenschwierigkeiten beschäftigen (Dornheim 2008; Krajewski 2003). Auch dort werden Ergebnisse über mathematische Kompetenzen von Kindern zu Schulbeginn berichtet.

Eine Reihe von Vorkenntnisuntersuchungen in den 1990er-Jahren zeigte, dass viele Kinder vor Schuleintritt bereits ein beträchtliches Vorwissen aufweisen. Die Ergebnisse geben Aufschluss über den Stand der Kompetenzentwicklung von Kindern und somit Signale für die inhaltliche, unterrichtliche Weiterarbeit. Nicht zuletzt durch Studien dieser Art entstanden Neukonzeptionen für den mathematischen Anfangsunterricht, die bestrebt waren, auf den Kenntnissen der Kinder aufzubauen und den Schulanfang nicht als „Stunde Null" zu betrachten (Selter 1995). Diesen Studien sind auch methodische Ideen zu verdanken, wie sich Lehrkräfte im Klassenverband relativ einfach und schnell einen Überblick über die Vorkenntnisse ihrer Schulkinder verschaffen können, obwohl



1 Du siehst hier eine Tüte Gummibärchen. Finde heraus, wie viele Gummibärchen in der Tüte sind, und kreise die gefundene Zahl in der Wolke ein.
2 Auf diesem Lineal fehlt vorne eine Zahl. Finde heraus, welche es ist, und kreise sie in der Wolke ein.
3 In diesem Waggon sitzen 3 Personen. Am Bahnhof steigen noch 5 Personen ein. Wie viele Personen sitzen dann in dem Waggon? Kreise die Zahl in der Wolke ein.
4 Jetzt sollst du dir einen Waggon vorstellen, in dem 8 Personen sitzen. Am Bahnhof steigen noch 2 Personen ein. Wie viele Personen sitzen dann in dem Waggon? Kreise die Zahl in der Wolke ein.

Abb. 1.8 Ausschnitt aus einer für die ersten Schulwochen konzipierten Vorkenntniserhebung. (Knapstein und Spiegel 1995; Bild entnommen aus Sundermann und Selter 2006, S. 32)

ja davon auszugehen ist, dass ein Großteil der Kinder zum Zeitpunkt des Schulbeginns noch nicht lesen kann (van den Heuvel-Panhuizen 1996; Selter 1995; Knapstein und Spiegel 1995). Mündlich gestellte Aufgaben – in der Regel zu Bildmaterial, das den Kindern vorliegt – können die Schulanfänger bearbeiten, indem sie ihre Antwort durch Einkreisen oder Ausmalen dokumentieren. Beispielhaft zeigt Abb. 1.8 eine der frühen Umsetzungen dieser Art von Vorkenntniserhebung für den Einsatz in den ersten Schulwochen. Mittlerweile finden sich Materialien in ähnlicher Art in den Lehrerhandbüchern einiger Schulbücher.

Darüber hinaus erhält man Informationen über mathematische Kompetenzen vor Schuleintritt auch aus der Ergebnisdokumentation von normierten Testverfahren. Normierte Tests dienen Pädagogen und Eltern dazu, einzuschätzen, inwieweit sich die Entwicklung bzw. die Leistung eines Kindes in einem altersangemessenen Rahmen befindet. Eine zentrale Zielsetzung normierter Testverfahren für den Einsatz vor Schulbeginn liegt in der Früherkennung von Kindern mit spezifischen, für das mathematische Lernen bedeutsamen Defiziten oder von Entwicklungsunterschieden. Exemplarisch ist hier der Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung (van Luit et al. 2001) zu nennen, der im Folgenden ausführlicher beschrieben wird. Aus den Ergebnissen der Normierungsstichprobe lassen sich auch interessante Erkenntnisse über die Vorkenntnisse der Kinder vor Schulbeginn im Allgemeinen ablesen.

Mithilfe des Osnabrücker Tests zur Zahlbegriffsentwicklung (OTZ) kann die Zahlbegriffsentwicklung bei Kindern zwischen viereinhalb und sieben Jahren eingeschätzt werden. Insbesondere ist der Test geeignet, bereits vor oder bei Schulbeginn diejenigen Kinder herauszufinden, deren Zahlbegriffsentwicklung relativ zu der ihrer

Tab. 1.1 Mittelwerte richtiger Lösungen und Durchschnittsalter bei der Erprobung des OTZ

Testdurchgang	Richtige Lösungen (bei insgesamt 40 Aufgaben)			Durchschnittsalter
	Mittelwerte	Bandbreite		
		Von	Bis	
T 1	23,7	5	39	6 Jahre, 2 Monate
T 2	26,3	5	40	6 Jahre, 5 Monate
T 3	32,9	12	40	7 Jahre, 2 Monate

Altersgenossen verzögert ist. Außerdem lässt sich feststellen, in welchen Bereichen gegebenenfalls besondere Stärken oder Defizite vorliegen. Der OTZ umfasst 40 Aufgaben, sie werden mündlich gestellt und die Kinder lösen sie anhand von Bildern oder unter Verwendung von Material. Jede Aufgabe wird mit „richtig“ oder „falsch“ bewertet. Je fünf Aufgaben des Tests lassen sich den folgenden acht Bereichen zuordnen: qualitatives Vergleichen, Klassifizieren, Eins-zu-eins-Zuordnungen herstellen, Reihenfolgen erkennen, Zahlwörter gebrauchen, Zählen mit Zeigen, Zählen ohne Zeigen, einfaches Rechnen.

In den ersten vier Teilbereichen werden Fähigkeiten getestet, die von Piaget als wesentlich für die Zahlbegriffsentwicklung der Kinder bezeichnet werden, während die anderen Teilbereiche Zählfertigkeiten abprüfen. Allerdings ist den Kindern bei *allen* Aufgaben die Vorgehensweise bei der Lösung ausdrücklich freigestellt, d. h. sie dürfen zählen, wann immer sie wollen, auch bei Aufgaben zur Eins-zu-eins-Zuordnung (einige Beispielaufgaben sowie Lösungen von Kindern werden in den folgenden Abschnitten genauer betrachtet).

Der Test wurde sowohl in den Niederlanden als auch in Deutschland mehrfach erprobt, insbesondere in Deutschland mit 330 Kindergartenkindern (168 Jungen und 162 Mädchen), als diese etwa fünf Monate vor ihrem Schulbeginn standen (T 1), dann kurz vor Schulbeginn (T 2) und schließlich noch einmal, nachdem sie etwa die Hälfte ihres ersten Schuljahres absolviert hatten (T 3). In Tab. 1.1 sind die Mittelwerte und Bandbreiten richtiger Lösungen für diese Kinder angegeben (die Unterschiede in den Ergebnissen der Mädchen und Jungen waren so gering, dass sie hier vernachlässigt werden können).

In der Tabelle fällt auf, dass noch in der Vorschulzeit die Anzahl richtiger Lösungen in den etwa dreieinhalb Monaten zwischen dem ersten und dem zweiten Testdurchgang von durchschnittlich knapp 24 auf mehr als 26 (bei jeweils 40 möglichen) stieg. Dieser Zuwachs ist in gleicher Weise für alle Teilgruppen von Kindern und Teilbereiche des Tests zu beobachten. Er zeigt auch, wie rasant die Entwicklung in dieser Zeit verläuft. Für einen Teil der Kinder war der Test am Schulbeginn bereits zu leicht, nach einem halben Schuljahr war er für fast alle Kinder (aber eben nicht für alle!) *viel* zu leicht. Wie die Beispiele in Abschn. 1.4.2 zeigen werden, sind die im OTZ gestellten Aufgaben durchaus nicht einfach, im Gegenteil, sie wurden vielfach von Erzieherinnen und Grund-

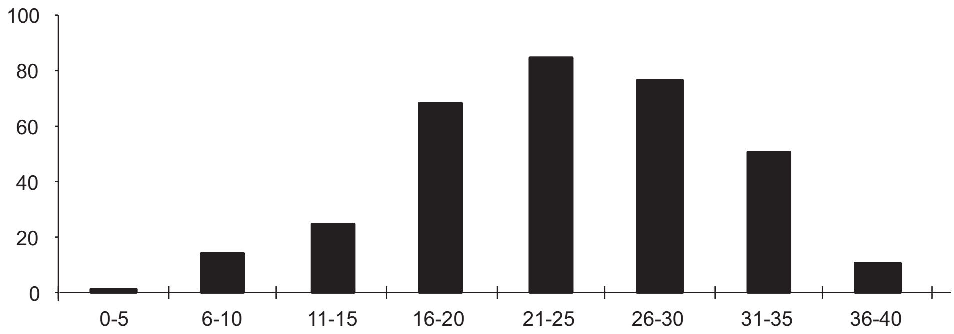


Abb. 1.9 Verteilung der Anzahl richtiger Lösungen im ersten Testdurchgang

schullehrerinnen als teilweise viel zu schwierig eingeschätzt. Auf diese *Unterschätzung* der Fähigkeiten der Mehrzahl der Kinder am Schulanfang sogar von Experten hat bereits Selter (1993, 1995) hingewiesen. Das Diagramm in Abb. 1.9 mit der Verteilung der Anzahl richtiger Lösungen beim ersten Testdurchgang zeigt deutlich, dass der Test für Kinder knapp ein halbes Jahr vor Schulbeginn genau den richtigen Schwierigkeitsgrad hat.

Allerdings zeigen die in Tab. 1.1 genannten Bandbreiten auch die gewaltigen Unterschiede in der Zahlbegriffsentwicklung bei den einzelnen Kindern. Zum Beispiel gab es im ersten Testdurchgang Kinder, die nur fünf der 40 Aufgaben richtig lösen konnten, und andere, die bis zu 39 dieser Aufgaben bewältigten. Solche Unterschiede wurden auch in anderen Untersuchungen mit Schulanfängerinnen und Schulanfängern ermittelt. So zeigten z. B. Grassmann et al. (1995) sowie Hengartner und Röthlisberger (1995), dass sich selbst Schulklassen des gleichen Jahrgangs an ein- und derselben Grundschule in ihren durchschnittlichen Vorkenntnissen erheblich unterscheiden können. Schipper (1998, S. 138) bemerkt, dass „genauere Analysen der vorliegenden Studien (…) vor allem auf die extrem große Leistungsheterogenität" aufmerksam machen. Diese Unterschiede in den Vorkenntnissen zeigen sich beim OTZ sehr deutlich.

Im Folgenden sind für den zweiten Testdurchgang (also unmittelbar vor Schulbeginn) die Mittelwerte richtiger Lösungen für die acht Teilbereiche des Tests aufgeführt. Maximal konnten pro Teilbereich fünf richtige Lösungen erzielt werden. Zusätzlich ist noch aufgelistet, wie viele Aufgaben das im Test stärkste Viertel der Kinder (Q 1), die Gesamtgruppe ohne das schwächste Viertel (Q 1–3) und das schwächste Viertel (Q 4) im Durchschnitt richtig lösen konnten[3].

---

[3]Die Bildung der hier angesprochenen Leistungsgruppen Q 1 bis Q 4 erfolgt rein statistisch aufgrund der Ergebnisse der (über 300) Kinder, die am zweiten Testdurchgang T2 teilgenommen haben. Über mögliche *Ursachen* für die individuelle Leistungsstärke wird mit dieser Einteilung nichts ausgesagt. Die Mittelwerte zeigen aber, dass der Test – bezogen auf die gesamte Stichprobe – nicht zu schwer war.

Tab. 1.2 Mittelwerte (MW) richtiger Lösungen (max. fünf pro Teilbereich) bei Gruppen mit unterschiedlichen Testleistungen

Teilbereich	Vergleichen	Klassifizierung	Eins-zu-eins-Zuordnung	Reihenfolgen
MW Gesamt	4,6	3,7	3,6	2,7
MW Q 1	4,9	4,3	4,6	4,4
MW Q 1–3	4,8	3,9	3,9	3,2
MW Q 4	4,0	3,0	2,7	1,1
Teilbereich	Zahlwörter	Zählen mit Zeigen	Zählen ohne Zeigen	Einfaches Rechnen
MW Gesamt	2,9	3,3	2,5	3,1
MW Q 1	4,4	4,4	3,7	4,5
MW Q 1–3	3,4	3,7	3,0	3,5
MW Q 4	1,2	1,9	1,2	1,1

Die Unterschiede zwischen den relativ starken und schwachen Kindern sind zu erwarten. Auffällig sind aber die Differenzen zwischen dem schwächsten Viertel Q 4 und dem Rest (Q 1–3): In den fünf schwierigsten der acht Teilbereiche des Tests beträgt die Differenz richtig gelöster Aufgaben durchschnittlich zwei (von fünf) Aufgaben (für die schwächsten 10 % der Kinder beträgt diese Differenz gegenüber dem Rest sogar fast drei Aufgaben). Das bedeutet, dass zwischen den schwächsten Kindern und der Mehrzahl (also auch dem Durchschnitt) der Kinder beträchtliche Unterschiede in den Lernvoraussetzungen bestehen. Es ist also eine große pädagogische und didaktische Herausforderung für die Lehrkräfte, diese Kinder mit geringeren Voraussetzungen angemessen zu fördern, ohne gleichzeitig die Mehrzahl zu unterfordern. Denn wie Tab. 1.2 zeigt, weist die Mehrzahl der Kinder (Q 1–3) vor dem Schulbeginn bereits erhebliche arithmetische Vorkenntnisse auf, die nicht ignoriert werden können. Details zu den Vorkenntnissen der Schulanfänger werden in den folgenden Abschnitten beschrieben (vgl. dazu auch Abschn. 4.1.2; dort wird auf weitere Testverfahren eingegangen, die sowohl für den Vorschulbereich als auch den Anfangsunterricht geeignet sind).

Es ist zwingend erforderlich, diese Vorkenntnisse der Kinder im mathematischen Anfangsunterricht zu berücksichtigen.

1.4.2 Arithmetische Vorkenntnisse der Kinder

Die Bandbreite arithmetischer Vorkenntnisse bei Kindern vor Schuleintritt ist groß, wie bereits mehrfach erwähnt. Im Folgenden werden zu den Teilbereichen Zählen, Ziffernkenntnis, Mengenerfassung, Vergleich sowie Addition und Subtraktion Ergebnisse verschiedener Vorkenntnisuntersuchungen zusammengetragen, um einen möglichst umfassenden Einblick in das Leistungsspektrum der Kinder geben zu können.

Zahlwortreihe
Die Zahlwortreihe beherrscht ein Großteil der Kinder vor Beginn des ersten Schuljahres bereits bis 10, viele können bis 20 zählen und auch einige sogar bis 100 und darüber hinaus. Schmidt (1982a, S. 371) forderte 1138 Kinder in seiner Untersuchung zur Zählfähigkeit der Schulanfängerinnen und Schulanfänger auf, so weit zu zählen, wie sie können. Er ermittelte dabei unter anderem folgende Ergebnisse:

- Mindestens bis zur Zahl 5 kamen 99 % der Kinder
- Mindestens bis zur Zahl 10 kamen 97 % der Kinder
- Mindestens bis zur Zahl 20 kamen 70 % der Kinder
- Mindestens bis zur Zahl 30 kamen 45 % der Kinder
- Mindestens bis zur Zahl 100 kamen 15 % der Kinder.

In Teilbereichen wurden diese Ergebnisse durch Erkenntnisse aus der Erprobung des Osnabrücker Tests zur Zahlbegriffsentwicklung mit mehr als 300 Kindern unmittelbar vor dem Schulbeginn bestätigt. Darüber hinaus ergeben weitere Ergebnisse aus dieser Stichprobe Aufschluss darüber, inwiefern die Zahlwortreihe bei den Schulanfängerinnen und Schulanfängern bereits flexibel ist, d. h., inwiefern sie z. B. ab einem bestimmten Zahlwort weiterzählen können. Von den untersuchten etwa 300 Kindern gelingt

- Zählen (Aufsagen der Zahlwortreihe) bis 20: 77 %
- Weiterzählen von 9 bis 15: 72 %
- in Zweierschritten von 2 bis 14 zählen: 50 %

Resultatives Zählen
Die Zahlwortreihe zu beherrschen, ist nicht gleichzusetzen mit der Fähigkeit, beim Zählprozess ein korrektes Ergebnis zu ermitteln (vgl. Abschn. 1.3). Resultatives Zählen von Elementen einer Menge erfordert über das Beherrschen der Zahlwortreihe hinaus auch noch das richtige Anwenden aller Zählprinzipien im Zählprozess, wobei viele Kinder auch hier bereits beträchtliche Fähigkeiten aufweisen.

Ergebnisse aus der Erprobung des Osnabrücker Tests zur Zahlbegriffsentwicklung zeigen welchem prozentualen Anteil der Kinder Folgendes gelingt:

- 20 geordnete Klötze abzählen: 58 %
- 20 ungeordnete Klötze abzählen: 49 %
- 17 Klötze rückwärts zählen: 32 %

Interessant sind hierzu auch die Ergebnisse von Selter (1995) bzw. Grassmann et al. (2002), die in verschiedenen Untersuchungen jeweils bei über 800 Schulanfängerinnen und Schulanfängern die Vorkenntnisse erhoben. Die Aufgabenstellung, in einem Punktefeld mit 20 Kreisen neun Kreise auszumalen (Abb. 1.10), konnten 87 % (Selter 1995) bzw. 78 % (Grassmann et al. 2002) der Kinder lösen.

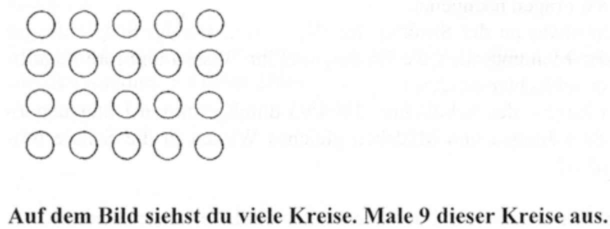


Abb. 1.10 Aufgabe aus Vorkenntnisuntersuchungen von Selter (1995) und Grassmann et al. (2002) (Bild entnommen aus Grassmann et al. 2002, S. 8)

Obwohl fast alle Kinder die Zahlwortreihe bis 10 beherrschen, muss hier registriert werden, dass etwa jedes fünfte bis achte Kind Schwierigkeiten hat, neun Kreise auszumalen. Die Fähigkeit des resultativen Zählens selbst bis 10 kann also nicht bei allen Kindern zu Schulbeginn vorausgesetzt werden. Dass Kinder in diesem Alter noch Schwierigkeiten mit der Eins-zu-eins-Zuordnung haben können, lässt sich auch aus den Ergebnissen der Untersuchung von Schmidt (1982a) schließen. Während 64 % der Kinder zu einer vorgegebenen Menge von neun Plättchen und 45 % zu einer Menge von 14 Plättchen das richtige Zahlwort nennen konnten, gelang es 87 %, die richtige Menge an Plättchen zum Zahlwort sieben zu legen, und immerhin noch 60 % zum Zahlwort sechzehn. Beim Legen der Plättchen wird die Eins-zu-eins-Zuordnung vermutlich bewusster durchgeführt als beim reinen Zählen einer vorgegebenen Menge.

Ziffernkenntnis

Ziffern lesen und schreiben gelingt ebenfalls vielen Kindern bei Schuleintritt. Bei der Untersuchung von Schmidt (1982b) zeigte sich, dass von den 1138 interviewten Kindern im Durchschnitt neun von zehn Ziffern richtig gelesen werden konnten. Mehr als drei Viertel aller Kinder konnte sogar alle Ziffern von 0 bis 9 richtig lesen. Das Schreiben der Ziffern fällt den Kindern schwerer. Im Durchschnitt kann ein Kind zu Schulbeginn fünf bis sechs Ziffern richtig schreiben. Verwechslungen von 9 und 6 und spiegelbildliche Schreibweisen traten dabei häufig auf. Die Ziffernschreibweise kann also im Anfangsunterricht nicht vorausgesetzt werden.

Erfassung strukturierter Mengen

Elemente einer Menge zu zählen, ist *eine* Möglichkeit, die Anzahl zu bestimmen. Darüber hinaus können kleine Mengen aber auch ohne zu zählen auf einen Blick erfasst werden (simultan) oder größere Mengen mithilfe von Strukturen (quasisimultan, vgl. Abschn. 1.3). Hier sind verschiedene Zwischenformen möglich. Beispielsweise kann ein Kind acht Finger als sogenanntes figurales Muster (von Glasersfeld 1982) eher ganzheitlich wahrnehmen, es kann fünf (simultan) als figurales Muster wahrnehmen und dann „sechs, sieben, acht" weiterzählen, oder es kann fünf und drei simultan erfassen und dann additiv erschließen, dass es acht Finger sind. Auch bezüglich der Mengenerfassung und der Wahrnehmung von Strukturen bringen Kinder unterschiedliche Vorkenntnisse mit in die Schule.

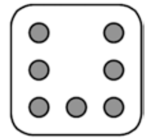


Abb. 1.11 Sieben Punkte in besonderer Anordnung (van Luit et al. 2001, Aufgaben)

Dies wird z. B. bei folgender Aufgabe aus dem OTZ sehr deutlich: Die Kinder sollten aus vier Kästen mit unterschiedlich vielen Punkten den mit sieben Punkten herausfinden (in einem der Kästen waren sechs Punkte wie beim Würfelbild angeordnet, in einem anderen sieben Punkte wie in Abb. 1.11, schließlich gab es je einen Kasten mit acht bzw. neun Punkten in entsprechender Anordnung).

Die Fehlerquote bei dieser Aufgabe war sehr gering, es gab aber gewaltige Unterschiede in der Zeit, die die Kinder zur Lösung benötigten. Während die stärkeren Kinder allesamt entweder das Muster des Würfelbildes erkannten ($7=6+1$) oder eine Zahlzerlegung vornahmen ($7=3+3+1$), verwandten die schwächeren überwiegend aufwendige Zählstrategien; teilweise zählten sie die Anzahl der Punkte in allen Kästen ab, auch wenn sie den Kasten mit sieben Punkten bereits gefunden hatten. Die Aufgabe zu lösen, gelingt unter Einsatz von Zählstrategien der überwiegenden Mehrheit der Schulanfängerinnen und Schulanfänger. Doch sind einige Kinder offensichtlich auch schon vor dem Beginn des regulären Anfangsunterrichts in Mathematik in der Lage, Anzahlen zu erfassen, indem sie auf bekannte Muster und Kenntnisse zurückgreifen und diese in neuartigen Situationen flexibel verwenden. Dass Kinder Strukturen bewusst wahrnehmen und auch nutzen können, zeigt sich in einer Untersuchung von Benz (2013) in Kindertagesstätten mit Kindern verschiedenen Alters. Etwa ein Drittel von 189 befragten Kindern konnten erläutern, weshalb sie bei in Würfelbildern strukturierten Mengendarstellungen besser erkennen konnten, wie viele Punkte darauf zu sehen sind als bei unstrukturierten. Ihre Begründungen reichten von „die sind so durcheinander" (bei der unstrukturierten Darstellung) oder „das ist die richtige Sechs" bis hin zu „das sind drei und drei, also sechs". Eine Untersuchung von Lüken (2012a) zeigt hingegen auch, dass immerhin knapp 20 % von 74 befragten Schulanfängerinnen und Schulanfängern das Würfelbild „sechs" nicht zur Quasisimultanerfassung nutzen konnten. Strukturen zu erkennen und zur simultanen oder quasisimultanen Anzahlerfassung zu nutzen, sind wichtige Fähigkeiten, die sowohl im Zusammenhang mit der Entwicklung des Zahlbegriffs stehen als auch eine wertvolle Grundlage für erste Rechenleistungen darstellen (vgl. Lüken 2012a und b). Erkennt ein Kind z. B. das Fingerbild 8 auf einen Blick, so können dabei implizit erste Zerlegungen der Zahl 8 oder auch der Zahl 10 mitgedacht und auch verbalisiert werden: „8 sind 5 und noch 3 dazu" oder „Das sehe ich, das sind 8. 2 weniger als 10".

Es muss allerdings berücksichtigt werden, dass Zerlegungen, die Kinder hierbei nennen (wie $7=3+1+3$ bei Abb. 1.11), noch *nicht* als abstrakte Zahlzerlegungen zu verstehen sind, sondern sich stark auf die präsentierten *Bilder* beziehen. Dennoch gelingt es Kindern teilweise, Strategien zu entwickeln, mit denen sie Mengen mithilfe von Strukturen, die sie in einem bestimmten Muster (wie z. B. dem Würfelbild) wahrnehmen, erfassen können.

Vergleich
Ob und inwieweit Vorschulkinder bzw. Schulanfängerinnen und Schulanfänger die Begriffe „mehr" bzw. „weniger" kennen und Mengen mithilfe dieser Begriffe vergleichen können, zeigen ebenfalls einige Ergebnisse aus Vorkenntnisuntersuchungen. Aus den bekannten Untersuchungen von Piaget und Szeminska (1975) zur Entwicklung des Zahlbegriffs könnte man schlussfolgern, dass Kinder in diesem Alter Schwierigkeiten haben, zu beurteilen, wann zwei Mengen gleich oder verschieden sind, bzw. die Relationsbegriffe zum Vergleich adäquat zu verwenden. Offensichtlich scheint es aber so zu sein, dass verschiedene Prozesse ablaufen können, wenn Kinder beurteilen, ob die eine Menge mehr oder weniger Elemente enthält als eine andere: Mengen können zum einen allein aufgrund der Wahrnehmung verglichen werden. Nach Resnick (1989) begründet sich dieser Prozess auf der Basis des sogenannten protoquantitiven Vergleichsschemas (vgl. Abschn. 1.2.3). Dafür sind Zahlen, die die Anzahl der zu vergleichenden Mengen beschreiben, nicht erforderlich. Vorschulkinder sind dazu durchaus in der Lage, und ein Vergleich aufgrund eines solchen Wahrnehmungsprozesses könnte auch ausschlaggebend sein für die Untersuchungsergebnisse bei den Aufgabenstellungen zur Eins-zu-eins-Zuordnung bzw. zur Invarianz von Piaget und Szeminska (1975) (vgl. Abschn. 1.2.3).

Mengen können aber auch mithilfe des Zählens verglichen werden. Auch dazu weisen Vorschulkinder bereits beträchtliche Fähigkeiten auf. Die Untersuchung von Schmidt (1982c, S. 11) zeigt, dass 95 % der Kinder richtig auf die Frage „Wo sind mehr Plättchen?" antworten, wenn sie eine Menge von fünf mit einer Menge von sechs Plättchen vergleichen sollen. Knapp 80 % antworten auch noch richtig, wenn sie eine Menge von 13 mit einer Menge von 14 Plättchen vergleichen sollen. Hier hatten sie die Möglichkeit zu zählen. Ein Ergebnis aus der Erprobung des OTZ zeigt, dass 69 % der befragten Kinder sogar ohne konkrete Mengen zu sehen richtig entscheiden können, dass 13 Bonbons mehr sind als neun Bonbons. Diese Entscheidung können sie nur aufgrund ihres Wissens über die Zahlwortreihe oder über eine Mengenvorstellung zu bestimmten Zahlworten lösen. Dass der Zahlvergleich für Kinder dieses Alters durchaus eine abstrakte, anspruchsvolle Aufgabenstellung ist, zeigt sich bei der Verwendung von Zahlsymbolen (Abb. 1.12, die Idee zu diese Aufgabe geht auf Kool 1998, zurück).

Auf die Frage „Welche Zahl ist größer?" antworteten die Kindergartenkinder in der Erprobung des OTZ übereinstimmend, dass die Eins die größere Zahl sei. Hier war die „Höhe" des Zahlsymbols für die Kinder das wichtigste Entscheidungskriterium: Die Eins ist größer, „weil die Eins einen größeren Stock hat; weil die Eins so groß gemalt ist; weil die Vier so klein ist und die Eins größer; weil die Eins größer geschrieben ist; weil die Vier eingeschrumpft ist, die Eins nicht". Dass vier *mehr* ist als eins wurde von

Abb. 1.12 Welche Zahl ist größer: die Eins oder die Vier? (van Luit et al. 2001, Aufgaben)

den Kindern bei dieser Fragestellung nicht in Betracht gezogen; sie wurden deshalb anschließend gefragt: „Was ist *mehr,* eins oder vier?“ Interessanterweise wussten fast alle befragten Kinder, dass 4 *mehr* ist als 1 (nur eines der schwächeren Kinder meinte, dass 1 mehr sei als 4, „weil die Eins so groß gemalt ist“; für dieses Kind blieb die Größe der notierten Ziffer entscheidend). Von der Mehrzahl der Kinder wurde also die Frage nach der *größeren* Zahl auf das Zahlsymbol, die Frage nach dem *Mehr* aber auf die Anzahl, d. h. auf die *Bedeutung* des Symbols, bezogen.

Zusammenfassend lässt sich für diese Aufgabenstellungen sagen:

- Die Wortwahl bei der Fragestellung ist von entscheidender Bedeutung. Die meisten Kinder unterscheiden sorgfältig zwischen „ist größer als“ (hier im Sinne von „höher“) und „ist mehr als“ (im Sinne der Anzahl).
- Auffällige Unterschiede zwischen stärkeren und schwächeren Kindern gibt es bei der Art der Begründungen: Während die schwächeren Kinder entweder gar keine Begründung für ihre Entscheidungen geben („darum“) oder auf den optischen Eindruck verweisen, entscheiden die stärkeren Kinder meist aufgrund rationaler Argumente.

Bei diesen Aufgaben zeigt sich, dass einige Kinder ihre Aufmerksamkeit allein auf die reale Darstellung der Objekte richten, während andere zwischen Darstellung und Bedeutung unterscheiden können. Insgesamt gesehen ist jedoch die Sensibilität dieser fünf- bis sechsjährigen Kinder für die Art der Fragestellung („größer“ oder „mehr“) so beeindruckend, dass sie in jedem Fall im mathematischen Anfangsunterricht stärker als bisher berücksichtigt werden muss.

Addition und Subtraktion

Zahlreiche Kinder sind vor Eintritt in die Schule auch schon in der Lage, einfache Additions- und Subtraktionsaufgaben zu bewältigen. Dies gilt vor allem, wenn die Aufgabenstellung in einen Handlungskontext eingebunden ist, der den Kindern vertraut ist (Hughes 1986). Dabei werden Aufgabenstellungen, bei denen Kindern Material bzw. Bilder angeboten werden, die ein Zählen erlauben, in der Regel deutlich besser gelöst als rein verbal gestellte Aufgaben (z. B. Grassmann et al. 2002). Die Untersuchung von Deutscher (2012, S. 274 ff.) zeigt, dass etwa 90 % von 108 Schulanfängerinnen und

Schulanfängern die Aufgaben 3+2 und 4+4 lösen können, wenn sie mit Plättchen gelegt werden. Werden die Aufgaben ohne Plättchen präsentiert, reichen die Lösungsquoten der Kinder von 56 % (6+5) bis 81 % (5+5) bzw. 83 % (2+2).

Kinder lösen Aufgabenstellungen wie diese auf sehr unterschiedliche Weise. In der Regel nutzen sie verschiedene Zählstrategien. Sie zählen entweder alle Elemente, die des ersten Summanden, die des zweiten Summanden und im Anschluss die Gesamtmenge, oder sie zählen vom ersten Summanden aus gleich direkt weiter (z. B. bei 3+2: 4, 5). Bei der Subtraktion würde das analog bedeuten, entweder zuerst die Ausgangsmenge zu zählen, dann zu zählen, wie viele Elemente weggenommen werden, und zuletzt zu zählen, wie viele Elemente übrig bleiben, bzw. gleich von der Ausgangsmenge die entsprechende Anzahl an Schritten rückwärts zu zählen (vgl. Padberg und Benz 2011, S. 111 f.). Zu manchen Aufgaben kennen die Kinder bereits die Ergebnisse bzw. manche Ergebnisse können sie sich auch herleiten (z. B. „Ich weiß, dass 5+5=10, also ist 6+5=11").

Hier scheint sich die Feststellung Sieglers zu bestätigen (Siegler 1988), wonach es einen deutlichen Zusammenhang zwischen Aufgabenschwierigkeit und der Art der Rechenstrategie gibt: Bei Aufgaben, die die Kinder für schwierig halten, greifen sie eher auf eine elementarere – sicherere – Strategie zurück, während sie bei leichteren eine anspruchsvollere – in der praktischen Anwendung bequemere – verwenden. Selbstverständlich können die Kinder eine anspruchsvollere (mathematisch elegantere) Strategie nur dann einsetzen, wenn sie sie wenigstens im Prinzip beherrschen.

Die Unterschiede zwischen stärkeren und schwächeren Schulanfängerinnen und Schulanfängern bei den Aufgaben zum Rechnen lassen sich wie folgt beschreiben: Die stärkeren Kinder verfügen bereits über effektive Rechenstrategien und können – zumindest anhand von Bildern – Zahlen additiv zerlegen. Sie sind in der Lage, die jeweils sicherere Lösungsstrategie auszuwählen. Die schwächeren Kinder addieren mithilfe von Zählstrategien und verlassen sich bei Aufgabenlösungen eher auf den optischen Eindruck. Effektive Lösungsverfahren und -strategien stehen ihnen häufig noch nicht zur Verfügung (vgl. dazu auch Abschn. 4.3.1 und Kap. 5).

Viele dieser Unterschiede in den Strategien der Kinder deuten nicht auf Unterschiede im Entwicklungstempo, sondern in der *Art ihres Denkens* hin. Gray et al. (1997, S. 117) vermuten, „dass die unterschiedliche Art der *Wahrnehmung* der mathematischen Objekte (eher als *mentale* oder eher als *physikalische* Objekte) den zentralen Unterschied in der Art des Denkens ausmacht, der über Erfolg oder Misserfolg in der elementaren Arithmetik entscheidet". Sie beziehen sich bei ihrer Aussage auf Kinder im ersten oder zweiten Schuljahr und auf ihre Experimente bei Sachaufgaben: Was stellen sich die Kinder vor, wenn sie solche Aufgaben bearbeiten? Wie repräsentieren sie die in den Aufgaben vorkommenden – mathematischen oder nicht mathematischen – Objekte? Erkennen sie Strukturen oder betrachten sie die Objekte eher als reale Gegenstände? Wenn beispielsweise die Aufgabe lautet: „Tina und ihre Freundin Katja haben rote und gelbe Plastikbälle. Zusammen haben sie 8 Bälle, 5 davon sind rot. Wie viele Bälle sind gelb?“, so gibt es Kinder, die sich bei einer solchen Sachaufgabe hauptsächlich für die *realen* Personen und *realen* Gegenstände interessieren und entsprechende Assoziationen herstellen (Wie heißen die genannten Kinder? Aus welchem Material sind die Bälle, und welche Farbe haben sie? Ich kenne ein Mädchen, das auch Tina heißt, und gestern haben wir auch mit einem roten Ball gespielt!).

Kinder, die in einer Sachsituation ihre Aufmerksamkeit auf diese oder ähnliche äußere Aspekte richten, zeigen bei diesen Aufgaben (und, wie Gray et al. gezeigt haben, in der Arithmetik insgesamt) deutlich schlechtere Leistungen als Kinder, die in derselben Situation ihre Aufmerksamkeit spontan auf die Zahlen und ihre Beziehungen richten, also auf die mathematische Struktur, die der Aufgabe zugrunde liegt. Es dürfte eine der wichtigsten Fragen im mathematischen Anfangsunterricht überhaupt sein, wie auf diese Unterschiede zu reagieren und wie mit ihnen umzugehen ist. In den folgenden Kapiteln gehen wir ausführlich auf diese Frage ein.

Greeno (1989) hat für die jeweilige Art, wie ein Individuum eine Situation in seinem Kopf repräsentiert, den Begriff „mentales Modell“ geprägt (wir sprechen auch von „mentalen Bildern“). Dieser Begriff ist Teil eines Ansatzes zur Beschreibung der Wissensrepräsentation und -verarbeitung, in dem nicht die Existenz abstrakter Wissensstrukturen postuliert wird, die beim Individuum vorhanden sein müssen, um gewisse Aufgaben bewältigen zu können, sondern bei dem es um die Frage geht, welche konkreten *Anforderungen* in einer konkreten Situation gestellt werden und welche Voraussetzungen erfüllt sein müssen, damit diese Anforderungen bewältigt werden können. Unter einem „mentalen Modell“ versteht Greeno die vom Individuum unter Verwendung des vorhandenen Wissens im Geist *konstruierte Repräsentation der Situation.*

Einige Beispiele aus Interviews mit Kindern in deren letztem Jahr in einer Kindertageseinrichtung, mehr als ein halbes Jahr vor Schulbeginn, sollen die Bedeutung der mentalen Situationsmodellierungen und deren Rolle bei der Lösung einfacher Additions- und Subtraktionsaufgaben weiter verdeutlichen.

Der Versuchsleiter (Vl.) zeigt ein Bild mit einer Geburtstagstorte (Abb. 1.13, im Original größer und farbig). Die Aufgabe lautet: „Kathrin hatte gestern Geburtstag. Sie wurde neun. Für Kathrins Geburtstagsfeier hatte ihre Mutter eine Torte gebacken und neun Kerzen darauf gesteckt.“ [Vl. zeigt auf die Torte mit neun Kerzen.] „Auf der Feier wurden die Kerzen angezündet und Kathrin durfte sie am Ende auspusten. Nach einmal

Abb. 1.13 Geburtstagstorte mit neun Kerzen (Interviewmaterial K. Hasemann)

Pusten brannten [mit Betonung] noch fünf Kerzen. Wie viele Kerzen hat Kathrin ausgepustet?“

Bei dieser Aufgabe gab es deutliche Unterschiede zwischen den Kindern. Während keines der (in der Untersuchung insgesamt) schwächeren diese Aufgabe lösen konnte, sind fast alle der stärkeren Kinder zum richtigen Ergebnis gekommen. Wesentlich ist dabei allerdings, welche Lösungsstrategien verwendet wurden. Zwei Kinder meinten, dass gar keine Kerze ausgepustet sei, sie gingen also auf das gestellte Problem gar nicht ein, sondern orientierten sich am Bild (auf dem ja tatsächlich alle Kerzen brennen). Andere nannten als Antwort eine Zahl aus der erzählten Geschichte: die Neun (die Gesamtzahl der Kerzen) oder die Fünf (die genannte Teilmenge). Die meisten Kinder versuchten jedoch, die Lösung anhand des Bildes durch Zählen zu finden. Diese Vorgehensweise ist durchaus sachgemäß, die Tücke der Aufgabe besteht darin, dass es ohne zusätzliche Maßnahmen sehr schwierig ist, die fünf noch brennenden von den nicht mehr brennenden Kerzen zu trennen. Die Lösung der Aufgabe erfordert also die mentale Modellierung der Situation *nach dem Pusten* und, daraus abgeleitet, eine Abzählstrategie, die die sichere Trennung der brennenden und nicht mehr brennenden Kerzen ermöglicht.

Ein Kind versuchte mehrfach, die Kerzen zu zählen. Es zählte dabei aber ungenau, tippte zum einen beim Nennen der Sieben auf zwei Kerzen (eine Kerze pro Silbe: sie-ben) und zählte zum anderen die zuerst gezählte Kerze doppelt. Da es fast unmöglich ist, die im Kreis aufgestellten Kerzen nur mit den Augen zu zählen, ist diese Strategie wenig angemessen. Auf die Idee, die Stelle zu markieren, an der sie mit dem Zählen begonnen hatten, kamen tatsächlich sehr viele Kinder, indem sie z. B. einen Stift auf das Bild mit der Torte legten und auf diese Weise die brennenden von den (fiktiv) nicht mehr brennenden Kerzen trennten.

Auf die Frage des Interviewers (I), wie viele Kerzen nach dem Pusten noch brennen, antwortete Thomas wie folgt:

Th:	So viele.
I:	Wie viele genau? Ich kann das nicht erkennen.
Th:	Das sind 4. Die Mitte ist hier. *(Er zeigt mit seinem Stift auf die Mitte.)* Sie hat ausgepustet und hinterher brannten nur noch 5.
I:	Und wie viele meinst du jetzt – vielleicht müsstest du mal selber zählen – wie viele Kerzen sie jetzt ausgepustet hat? Wir wissen ja, dass noch 5 Kerzen brennen.
Th:	*(Als er dann noch mal zählte, verrutschte sein Stift.)* 3

Andere Kinder zählten zunächst fünf Kerzen ab, markierten die erste und die letzte Kerze mit Fingern oder mit dem Bleistift und zählten dann die restlichen vier Kerzen ab. Eine andere Möglichkeit ist das Rückwärtszählen. Torsten beispielsweise deckte nacheinander fünf Kerzen ab und zählt dabei rückwärts: „9, 8, 7, 6, 5; vier Kerzen bleiben übrig“.

Eine weitere Variante ist das Rechnen mit den Fingern, das Anika zeigt:

I:	… und wie viele Kerzen hat sie ausgepustet?
A:	*(Sie guckt lange auf die Torte.)* 4
I:	Wie hast du das so gut ausgerechnet?
A:	Das habe ich mit den Händen gemacht.
I:	Unter dem Tisch gezählt! Dann sehen wir doch gar nichts. Das kannst du ruhig zeigen. Zeige noch mal, wie du das gemacht hast.
A:	Dann habe ich zuerst die 9 gemacht *(sie hält 9 Finger hoch).* Dann habe ich …, dann habe ich die 5 weggemacht. Und dann habe ich hinterher gezählt.

Im Hinblick auf die spontane Entwicklung von Lösungsstrategien besonders interessant sind die Kinder, die zum Zählen die Finger verwendet haben. Denn sie verschafften sich *Repräsentanten* für zu zählende Objekte, die nicht unmittelbar dem Bild zu entnehmen waren. Sie haben damit einen wichtigen Schritt hin zu einer verallgemeinerungsfähigen Lösung solcher Probleme bewältigt, weil die Lösung auf diese Weise ohne *direkten* Zugriff auf konkrete oder bildlich dargestellte reale Objekte möglich wird. Laut Hoffmann (2006) entsteht nämlich mathematisches Wissen beim einzelnen Kind – wie bei Anika – unter Verwendung von Zeichen und in der Auseinandersetzung mit anderen Personen über die Sachverhalte, bei denen diese Zeichen Verwendung finden und zur Verständigung erforderlich sind. Weitere Schritte auf diesem Weg sind der Aufbau rein mentaler Situationsmodellierungen, die Repräsentation der Situation als Beziehung zwischen Zahlen und schließlich die Formalisierung in einer Rechenaufgabe, z. B. $9-5=\ldots$ oder $5+\ldots=9$ (vgl. Abschn. 4.3.1 und 5.2.2).

Die Schwierigkeiten vieler Kinder mit der hier diskutierten Aufgabe können mehrere Ursachen haben. So ist es möglich, dass sich diese Kinder den geschilderten Vorgang nicht vorstellen können. Sie fangen an das Problem zu lösen, indem sie zählen, dabei vergessen sie die restlichen Beziehungen oder die eigentliche Aufgabenstellung: Es fehlt die Problemrepräsentation im Kopf. Außerdem ist es möglich, dass die Zählstrategien der Kinder noch nicht präzise genug oder zu wenig organisiert sind.

Für schwächere Kinder wäre es sicher angebracht, mit kleineren Zahlen (z. B. mit fünf Kerzen) zu beginnen und nur eine Kerze zu löschen; auch wäre am Anfang eine rechteckige Form statt der runden Torte vermutlich einfacher. Leichter wäre es – wie auch die Ergebnisse aus verschiedenen Vorkenntnisuntersuchungen zeigen (s. o.) –, wenn die Kinder die Gelegenheit haben, solche und ähnliche Aufgaben zunächst handelnd, also mit konkreten Materialien zu lösen. Sie können dann die Ausgangssituation und den in der Geschichte beschriebenen Ablauf verfolgen. Im mathematischen Anfangsunterricht in der Schule ist es jedoch erforderlich, über solche Konkretisierungen hinauszugehen, d. h. es ist erforderlich, *gezielt* (und nicht nur implizit) auf die mentale Situationsmodellierung einzugehen. Gerade die schwächeren Kinder benötigen auf diesem schwierigen und für sie mühsamen Weg zur mentalen Repräsentation der Situationen die Hilfe der Lehrkraft (vgl. dazu Abschn. 5.2 und 7.3).

Auch wenn die Unterschiede und die Bandbreite in den Fähigkeiten der Kinder keineswegs vernachlässigt werden sollen, so lässt sich aus den in diesem Kapitel vorgestellten Ergebnissen schließen, dass viele Kinder am Schulanfang mehr Einsicht in die Bedeutung von Zahlen und Zeichen haben, als man vielleicht glaubt. Um dies zu erkennen, reicht es aus, den Kindern einfach nur genauer zuzuhören. Es soll hier noch einmal darauf verwiesen werden, dass es sich bei den Kindern, auf die hier Bezug genommen wird, um Schulanfängerinnen und Schulanfänger oder Vorschulkinder handelt, also Kinder, die noch keinen systematischen Mathematikunterricht absolviert hatten. Es ist deshalb davon auszugehen, dass die geschilderten Strategien (z. B. beim Rechnen) von den Kindern selbst entwickelt worden sind. Selbstverständlich werden die Kinder bereits im Elternhaus oder in den Kindertagesstätten unterschiedlich gefördert. Doch kann aus den Beobachtungen geschlossen werden, dass die Kinder, die solche „klugen" Strategien verwenden, diese Strategien eigenständig gefunden haben. Die oft geäußerte Vermutung, dass es sich dabei nur um ein Nachplappern von „Belehrungen" Erwachsener oder älterer Geschwister handelt, ist höchstens in Einzelfällen gerechtfertigt.

Allerdings muss an dieser Stelle auch noch einmal erwähnt werden, dass zwar die arithmetischen Vorkenntnisse vieler Kinder zum Schuleintritt enorm sind, dass es aber immerhin auch 1 % bzw. 3 % der Schulanfängerinnen und Schulanfänger gibt, die noch nicht in der Lage sind, bis 5 bzw. 10 zu zählen, und 42 % haben Schwierigkeiten, 20 geordnete Klötze abzuzählen (vgl. Ergebnisse in diesem Kapitel). Diesen Kindern gilt es, im Anfangsunterricht besondere Aufmerksamkeit zu schenken.

1.4.3 Vorkenntnisse in den Bereichen Raum und Form sowie Größen und Messen

Während es eine Reihe von Vorkenntnisuntersuchungen zu den arithmetischen Fähigkeiten der Schulanfängerinnen und Schulanfänger gibt, ist die Erkenntnislage bei den Vorkenntnissen in den Bereichen Raum und Form sowie Größen und Messen deutlich geringer.

Größen und Messen

Schmidt und Weiser (1986) untersuchten das Maßzahlverständnis in einer qualitativen Interviewstudie bei 24 Kindern einige Monate vor Schulbeginn. Sie konnten bei etwa der Hälfte der Kinder feststellen, dass bei den Längen eine Vorstellung des Messens im Sinne eines lückenlosen Abtragens eines Repräsentanten am zu messenden Gegenstand vorhanden war. Bei den anderen Größenbereichen, etwa bei der Zeit, zeigten sich deutliche Schwierigkeiten. Das Messen einer Zeitspanne mit einer Vergleichsgröße bzw. einem Standardrepräsentanten (z. B. durch rhythmisches Klopfen oder Zählen) ist jedoch auch um einiges abstrakter als die Längenmessung.

Der direkte Vergleich von zwei gegebenen Längen gelingt deutlich mehr Kindern als das Messen einer Länge mit einem Repräsentanten. Deutscher (2012, S. 355) gab Schulanfängerinnen und Schulanfängern eine 30 und eine 40 cm lange Schnur und fragte nach der längeren. Bis auf eines der 108 untersuchten Kinder konnten alle diese Aufgabe lösen. Während etwa ein Viertel der Kinder auf ihr Augenmaß vertrauten, legten die restlichen Kinder die beiden Schnüre aneinander, um die längere zu ermitteln. In einer Studie von Zöllner (2020, S. 116) konnten alle 40 untersuchten Kinder im Alter zwischen 4 und 6 Jahren zwei längenkonsistente Gegenstände (Trinkhalme) erfolgreich direkt vergleichen, wohingegen dies nur 23 Kindern bei flexiblen Objekten gelang (Fruchtgummischlangen). Kinder, die hier nicht erfolgreich waren, legten zwar die Endpunkte der beiden Fruchtgummischlangen aneinander, betrachteten aber den Verlauf nicht.

Um mit einem genormten Messinstrument messen zu können, müssen die Kinder den Umgang mit Skalen lernen und verstehen. Messen erfolgt dann nicht mehr durch das Auszählen von Standardrepräsentanten, die die zu messende Größe ausschöpfen bzw. die an ihr angelegt oder abgetragen werden. Die Messtätigkeit mithilfe eines Messinstruments beschränkt sich auf das Ablesen der Maßzahl von der vorgegebenen Skala. Wird beispielsweise der Anfangspunkt der Skala nicht beachtet, sondern lediglich der Endpunkt anvisiert, kann davon ausgegangen werden, dass das Verständnis für das Messen mit einem genormten Messinstrument noch nicht ausgereift ist. Das korrekte Anlegen eines Lineals gelingt knapp 40 % der von Deutscher (2012, S. 355) untersuchten Kinder. Die restlichen Kinder legen den Beginn des Lineals am Messgegenstand an, oder das Anlegen erfolgt willkürlich. Einige benutzen das Lineal auch gar nicht als Messinstrument. Auch in der Studie von Zöllner (2020, S. 198) zeigte sich, dass es zwar Kinder in Kindertageseinrichtungen gibt, die ein konventionelles Messgerät korrekt beim Vergleich zweier vorgegebener Längen verwenden, andere Kinder schöpfen das Potenzial des konventionellen Messgerätes jedoch nicht aus und nutzen das Maßband als Vergleichsobjekt für einen indirekten Vergleich, in dem sie die Länge eines Gegenstands mit Fingern am Maßband markieren und dann das Maßband mit der Fingermarkierung an den zweiten Gegenstand legen.

Auch wenn Kinder noch nicht über die entsprechende Messidee verfügen, sind sie unter Umständen in der Lage, Fragen wie z. B. „Was ist schwerer: 4 Pfund oder 5 Pfund?“ richtig zu beantworten, ohne dass ihnen die jeweiligen Repräsentanten für die Gewichte wirklich vorliegen (vgl. Schmidt und Weiser 1986, S. 140 ff.). Offensichtlich gelingt es hier, das Wissen über Zahlen und Zahlvergleiche auf diese Aufgabenstellung zu übertragen.

Im Umgang mit Größen und Messergebnissen sowie beim Vergleich von Repräsentanten kommen verschiedene Relationsbegriffe, wie z. B. größer, kleiner, kürzer, länger, schwerer, leichter etc. zur Verwendung. Zunächst unterscheiden Kinder beim Vergleichen sprachlich kaum zwischen den Größenbereichen. „Größer“ und „kleiner“ werden beispielsweise auch anstelle von „länger“ und „kürzer“ verwendet (van den Heuvel-Panhuizen und Buys 2005, S. 19). Andererseits wird der Relationsbegriff

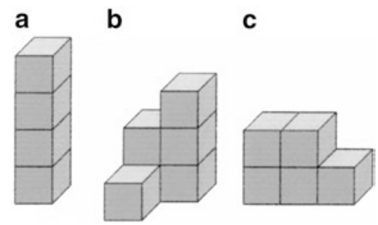


Abb. 1.14 Zwergenhäuschen (Interviewmaterial K. Hasemann)

„größer" auch vorrangig mit Längenmessung verknüpft, wie folgendes Beispiel aus Interviews mit Kindern mehr als ein halbes Jahr vor Schulbeginn zeigt: Für die Kinder aus einer Kindergartengruppe wurden drei Häuschen aus Klötzen gebaut (Abb. 1.14, vgl. auch Hasemann 2006, S. 72 f.). Erzählt wurde dazu die folgende Geschichte: „Ich baue dir drei Zwergenhäuschen. Stelle dir jetzt mal vor, dass in jedem Häuschen ein Zwerg wohnt. Die Zwerge lebten immer ganz gemütlich und friedlich zusammen, aber heute gibt es Streit! Zwerg Rotnase sagt, dass sein Häuschen am größten ist. Zwerg Blaumütze sagt:, Das stimmt nicht, mein Häuschen ist am größten'. Und Zwerg Gelbzipfel meint, dass sein Häuschen am größten ist. Was meinst du? Welches Häuschen ist am größten und warum?" Bei der Frage „Welches Häuschen ist am größten?" wählten alle Kinder das erste Häuschen. Das Kriterium „Höhe" bzw. die Längenmessung hat also in dieser Altersgruppe die höchste Priorität. Zur Begründung gaben die Kinder verschiedene Argumente:

- Weil das ein Turm ist.
- Weil hier mehr Steine auf einem Stapel sind.
- Weil es am längsten ist.
- Weil es höher ist.
- Weil hier ein Bauklotz mehr ist.
- Weil man das so sieht.
- Weil da vier aufeinander sind.

Manche Kinder wollten beweisen, dass dieses Häuschen am größten ist, indem sie ihren Stift anlegten und dann zeigten, dass die anderen Häuschen „kleiner" (bzw. niedriger) sind.

Ein Verständnis von „größer" im Sinne von „mehr Platz" oder „mehr Raum" zeigen die Kinder bei der Fragestellung nach dem größten Haus nicht. Die Frage nach den meisten Zimmern, wobei jeder Würfel für ein Zimmer steht, wird jedoch von fast drei Viertel der befragten Kinder richtig mit dem zweiten Häuschen beantwortet. Die Kinder sind also durchaus in der Lage, den Rauminhalt zu vergleichen, sie bringen diesen Vergleich aber offensichtlich nicht zwangsläufig mit dem Relationsbegriff „größer" in Verbindung.

Raum und Form

Zu geometrischen Vorkenntnissen von Schulanfängerinnen und Schulanfängern gibt es Erkenntnisse aus verschiedenen Studien – sie sind allerdings nicht so systematisch und umfassend untersucht wie die numerischen Vorkenntnisse. Allerdings ist offensichtlich, dass Kinder bereits im ersten Lebensjahr zahlreiche geometrische Erfahrungen machen. Sie betrachten verschiedene Formen, berühren diese und nehmen den umgebenden Raum in Besitz (vgl. van den Heuvel-Panhuizen und Buys 2005, S. 117).

Räumliche Fähigkeiten, wie z. B. das räumliche Wahrnehmen, das räumliche Orientieren oder das Erfassen räumlicher Beziehungen, können zu Schulbeginn bereits bei einigen Kindern beobachtet werden. Im Verlauf der Zeit bis zu Schulbeginn erlernen die Kinder in der Regel die Begriffe der räumlichen Lage zu verwenden, wobei ihnen dies je nach Begriff mehr oder weniger gut gelingt (Grassmann 1996; Grassmann et al. 2002; Clarke et al. 2008): „daneben/neben", „hinter", „vor" richtig zu verstehen und zu verwenden schafft ein Großteil der Schulanfängerinnen und Schulanfänger, wohingegen dies bei den Begriffen „rechts" und „links" lediglich etwa der Hälfte der Kinder in den oben angegebenen Untersuchungen gelingt. Generell muss bei Aufgabenstellungen zur Überprüfung des Verständnisses von „rechts" und „links" berücksichtigt werden, dass durch bloßes Raten bereits eine Lösungsrate von 50 % erzielt werden kann. Schwer fällt Schulanfängerinnen und Schulanfängern, sich mental in verschiedene Positionen zu versetzen. So gelingt nur 22 % der 830 von Grassmann u. a. untersuchten Kinder, eine der vier angebotenen Perspektiven anzugeben, aus der ein Bus abgebildet ist (Grassmann et al. 2002). Deutscher (2012, S. 385) berichtet eine Lösungsquote von 36 % bei einer ähnlichen Aufgabe. Die Kinder sollten entscheiden, wie das Bild eines Mädchens auf der gegenüberliegenden Straßenseite aussehen kann, das ein Haus, einen Baum und einen LKW malt. Am meisten Schwierigkeiten hatten die Kinder zu erkennen, dass der LKW von der Perspektive des Gegenübers in die andere Richtung fahren muss.

Geometrische Formen können Kinder bereits früh unterscheiden, auch wenn sie sie noch nicht benennen können (vgl. Franke 2007, S. 95). Nach einer Studie von Clements und anderen mit Kindern im Alter zwischen drei und sechs Jahren (Clements 2004, S. 269 ff.) scheinen Kinder prototypische Vorstellungen der verschiedenen Formen zu haben (s. auch Maier und Benz 2013a). Quadrate und Rechtecke werden als solche eher benannt, wenn eine Seite horizontal ausgerichtet ist, und das prototypische Dreieck ist für viele Kinder gleichseitig, was beispielsweise dazu führen kann, dass ein rechtwinkliges Dreieck als „halbes Dreieck" bezeichnet wird (vgl. Sarama und Clements 2009, S. 208 f.). Der Prototyp des Rechtecks scheint eine vierseitige Figur zu sein, die zwei lange, parallele Seiten hat und annähernd rechte Winkel (Sarama und Clements 2009, S. 217). Bei einer Untersuchung zum Oberbegriff Viereck zeigte sich das Quadrat als Prototyp des Begriffs Viereck – 98 % von 120 Kindern im Alter zwischen 4 und 6 Jahren identifizierten das Quadrat als Viereck, wohingegen z. B. nur jeweils ca. ein Viertel bei einer länglichen Raute, einem Drachen, einem langgezogenen Rechteck und einem Parallelogramm angaben, dass es sich dabei um ein Viereck handle

(Unterhauser und Gasteiger 2018, S. 155). Kreise wurden von fast allen drei- bis sechsjährigen Kindern in der Studie von Clements als solche benannt und auch Quadrate noch von 82 % der vierjährigen Kinder, wohingegen dies nur etwa 60 % der Kinder bei den Dreiecken gelang (Clements 2004). Das exakte Benennen der Flächenformen fällt deutschen Kindern im Vorschulalter im Vergleich mit englischen Kindern schwer. Sie verwenden Eigenschaftsbegriffe (z. B. rund statt Kreis) oder beschreiben die Flächen durch Vergleiche mit Alltagsgegenständen (z. B. beim Rechteck: sieht wie ein Schrank aus) (Maier und Benz 2013b). Nach einer Untersuchung von Waldow und Wittmann (2001) konnten 20 bzw. 30 % der 83 untersuchten Schulanfängerinnen und Schulanfänger aus 13 verschiedenen Dreiecken die zu einem vorgegebenen gleichseitigen Dreieck ähnlichen Dreiecke bzw. aus 13 verschiedenen Rechtecken die zu einem vorgegebenen Rechteck ähnlichen Flächenformen identifizieren.

Vorerfahrungen bringen Kinder auch im Bereich Symmetrie mit in die Schule. Diese schwanken jedoch enorm. Während 29 % der 108 von Deutscher (2012) untersuchten Schulanfängerinnen und Schulanfänger in der Lage waren, zu fünf „halben Männchen" die jeweils andere Hälfte zu finden, sodass sich eine symmetrische Figur ergibt, gelang diese Aufgabe etwa genauso vielen Kindern gar nicht bzw. fanden sie lediglich zu *einem* „halben Männchen" die passende zweite Hälfte. Beim symmetrischen Ergänzen von Figuren scheint der Lösungserfolg stark davon abzuhängen, ob das Kind bei der „halben Figur" bereits erkennt, welche Gesamtfigur entstehen soll, oder nicht (vgl. Franke 2007, S. 226 f.; Höglinger und Senftleben 1997).

Die in diesem Abschnitt berichteten Vorkenntnisse von Schulanfängerinnen und Schulanfängern zeigen, dass der Anfangsunterricht durchaus auf einem gewissen Fundament aufbauen kann. Außerdem sind sie ein starker Appell dafür, die Denk- und Vorgehensweisen der Kinder in den Blick zu nehmen und als Ausgangspunkt für weiteres Lernen zu sehen. Allerdings greift es deutlich zu kurz, von *der* hohen mathematischen Kompetenz bei den Schulanfängerinnen und Schulanfängern zu sprechen (vgl. Schipper 1998). Eine der größten Herausforderungen des Anfangsunterrichts ist es, der extrem großen Leistungsheterogenität angemessen zu begegnen.

Dies kann auf verschiedene Weisen geschehen. Eine Möglichkeit ist das Zurückstellen der Einschulung um ein Jahr, eine andere besteht in einer grundlegenden Veränderung der Schuleingangsphase (vgl. dazu Abschn. 2.2). Nach niederländischen Untersuchungen (van Luit und van de Rijt 1995) sind bei bis zu 25 % der fünf- bis sechsjährigen Kinder die Vorkenntnisse im Hinblick auf Zahlen so gering, dass sie dem (formalen) mathematischen Anfangsunterricht voraussichtlich nicht werden folgen können. Wenn diese Kinder in ihrer Entwicklung so deutlich hinter derjenigen ihrer Altersgenossen zurückbleiben, ist es sicher sinnvoll, sie bereits *vor* Schulbeginn durch spezielle Programme zu fördern. In den Niederlanden wird der Einsatz von Förderprogrammen damit begründet, dass die Lücken im Laufe der Zeit durchaus nicht „von selbst" kleiner, sondern immer größer werden. Ein dort erprobtes Förderprogramm wird in Abschn. 2.1.4 vorgestellt.

Literatur

Antell, S. E., & Keating, D. P. (1983). Perception of numerical invariance in neonates. *Child Development, 54,* 695–701.

Baroody, A. J. (1987). *Children's mathematical thinking*. New York: Teachers College Press.

Bauersfeld, H. (1983). Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In H. Bauersfeld, H. Bussmann, G. Krummheuer, J. H. Lorenz, & J. Voigt (Hrsg.), *Lernen und Lehren von Mathematik* (S. 1–56). Köln: Aulis.

Bedürftig, T., & Murawski, R. (2001). *Zählen. Grundlage der elementaren Arithmetik*. Hildesheim: Franzbecker.

Benz, C. (2013). Identifying quantities – Children's constructions to compose collections from parts or decompose collections into parts. In C. Benz, B. Brandt, U. Kortenkamp, G. Krummheuer, S. Ladel, & R. Vogel (Hrsg.), *Early mathematics learning. Selected papers of the POEM conference 2012*. Berlin: Springer.

Büchter, A., & Padberg, F. (2019). *Einführung in die Arithmetik*. Berlin: Springer Spektrum.

Betz, B., Dolenc-Petz, R., Gasteiger, H., Gehrke, H., Ihn-Huber, P., Kobr, U., Kraft, G., Kullen, C., Plankl, E., Pütz, B., & Schweden, K.-W. (2016). *Zahlenzauber 1, Mathematikbuch für die Grundschule*. München: Ausgabe H. Oldenbourg.

Bigalke, H. G., & Hasemann, K. (1978). *Zur Didaktik der Mathematik in den Klassen 5 und 6* (Bd. 2). Frankfurt a. M.: Diesterweg.

Bower, G. H., & Hilgard, E. R. (1983). *Theorien des Lernens* (Bd. 1). Stuttgart: Klett-Cotta.

Caluori, F. (2004). *Die numerische Kompetenz von Vorschulkindern – Theoretische Modelle und empirische Befunde*. Hamburg: Kovač.

Carey, S. (1998). Knowledge of number: Its evolution and ontogeny. *Science, 282,* 641–642.

Case, R. (1996). Introduction: Reconceptualizing the nature of children's conceptual structures and their development in middle childhood. *Monographs of the Society for Research in Child Development, 61*(1/2), 1–26.

Clarke, B., Clarke, D., Grüßing, M., & Peter-Koop, A. (2008). Mathematische Kompetenzen von Vorschulkindern: Ergebnisse eines Ländervergleichs zwischen Australien und Deutschland. *Journal für Mathematik-Didaktik, 29*(3/4), 259–286.

Clements, D. H. (2004). Geometric and spatial thinking in early childhood education. In D. H. Clements & J. Sarama (Hrsg.), *Engaging young children in mathematics. Standards for early childhood mathematics education* (S. 267–297). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Damerow, P. (1990). Frühgeschichte des mathematischen Denkens. *Beiträge zum Mathematikunterricht 1990,* 29–38.

Dantzig, T. (1954). *Number: The language of science* (4. Aufl.). New York: Macmillan.

Dehaene, S. (1999). *Der Zahlensinn oder warum wir rechnen können*. Basel: Birkhäuser.

Deutscher, T. (2012). *Arithmetische und geometrische Fähigkeiten von Schulanfängern*. Wiesbaden: Vieweg und Teubner.

Donaldson, M. (1991). *Wie Kinder denken*. München: Piper.

Dornheim, D. (2008). *Prädiktion von Rechenleistung und Rechenschwäche: Der Beitrag von Zahlen-Vorwissen und allgemein-kognitiven Fähigkeiten*. Berlin: Logos-Verlag.

Erikson, E. (1966). *Identität und Lebenszyklus*. Frankfurt a. M.: Suhrkamp.

Franke, M. (2007). *Didaktik der Geometrie*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Fuson, K. C. (1988). *Children's counting and concepts of numbers*. New York: Springer.

Gasteiger, H. (2010). *Elementare mathematische Bildung im Alltag der Kindertagesstätte. Grundlegung und Evaluation eines kompetenzorientierten Förderansatzes*. Münster: Waxmann.

Gelman, R., & Gallistel, C. R. (1986). *The child's understanding of number*. Cambridge: Harvard University Press.
Grassmann, M. (1996). Geometrische Fähigkeiten der Schulanfänger. *Grundschulunterricht, 43*(5), 25–27.
Grassmann, M., Mirwld, E., Klunter, M., & Veith, U. (1995). Arithmetische Kompetenz von Schulanfängern – Schlussfolgerungen für die Gestaltung des Anfangsunterrichts. *Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe, 23,* 314–321.
Grassmann, M., Klunter, M., Köhler, E., Mirwald, E., Raudies, M., Thiel, O. (2002). Mathematische Kompetenzen von Schulanfängern. Teil 1: Kinderleistungen – Lehrererwartungen. Universität Potsdam: Potsdamer Studien zur Grundschulforschung, Heft 30.
Gray, E., Pitta, D., Tall, D. (1997). The nature of the object as an integral component of numerical processes. In Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Lahti, Finnland (Bd. 1, S. 115–130).
Greeno, J. G. (1989). Sitations, mental models, and the generative knowledge. In D. Klahr & K. Kotowsky (Hrsg.), *Complex information processing: The impact of Herbert A Simon* (S. 285–318). Hillsdale: Erlbaum.
Hartmann, B. (1906). *Die Analyse des kindlichen Gedankenkreises als die naturgemäße Grundlage des ersten Schulunterrichts* (4. Aufl.). Frankfurt: Kesselringsche Hofbuchhandlung.
Hasemann, K. (2006). Mathematische Einsichten von Kindern im Vorschulalter. In M. Grüßing & A. Peter-Koop (Hrsg.), *Die Entwicklung mathematischen Denkens in Kindergarten und Grundschule: Beobachten – Fördern – Dokumentieren* (S. 67–79). Offenburg: Miltenberger.
Hengartner, E., & Röthlisberger, H. (1995). Standorte und Denkwege von Kindern. In E. Beck (Hrsg.), *Eigenständig lernen* (S. 109–132). Konstanz: UVK.
Hoffmann, M. (2006). Semiotik in der Mathematikdidaktik – Lernen anhand von Zeichen und Repräsentationen. *Journal für Mathematik-Didaktik, 27*(3/4), 171–179.
Höglinger, S., & Senftleben, H. G. (1997). Schulanfänger lösen geometrische Aufgaben. *Grundschulunterricht, 5,* 36–39.
Hughes, M. (1986). *Children and number: Difficulties in learning mathematics*. Oxford: Blackwell.
Ifrah, G. (1992). *Universalgeschichte der Zahlen*. Frankfurt a. M.: Campus.
Knapstein, K., & Spiegel, H. (1995). Testaufgaben zur Erhebung arithmetischer Vorkenntnisse zu Beginn des 1. Schuljahres. In G. Müller & E. C. Wittmann (Hrsg.), *Mit Kindern rechnen* (S. 65–73). Frankfurt a. M.: Arbeitskreis Grundschule.
Kohlberg, L. (1974). *Zur kognitiven Entwicklung des Kindes*. Frankfurt a. M.: Suhrkamp.
Kohlberg, L. (2000). *Die Psychologie der Lebensspanne*. Frankfurt a. M.: Suhrkamp.
Kool, M. (1998). Zoals de ouden zongen. In: Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs. Panama-Post, Nr. 2/3, Freudenthal Instituut.
Krajewski, K. (2003). *Vorhersage von Rechenschwäche in der Grundschule*. Hamburg: Kovač.
Krajewski, K. (2007). Prävention der Rechenschwäche. In W. Schneider & M. Hasselhorn (Hrsg.), *Handbuch der Psychologie* (Bd. 10 Pädagogische Psychologie, S. 360–370). Göttingen: Hogrefe.
Kruckenberg, A. (1935). *Handbuch für den Rechenunterricht der Volksschule*. Halle/Saale: Schroedel.
Le Corre, M., & Carey, S. (2007). One, two, three, four, nothing more: An investigation of the conceptual sources of the verbal counting principles. *Cognition, 105,* 395–438.
Lenz, H. (1976). *Grundlagen der Elementarmathematik*. München: Hanser.
Lüken, M. (2012a). *Muster und Strukturen im mathematischen Anfangsunterricht – Grundlegung und empirische Forschung zum Struktursinn von Schulanfängern*. Waxmann: Münster.

Lüken, M. (2012b). Young children's structure sense. *Journal für Mathematik-Didaktik, 33,* 263–285.

Maier, A. S., & Benz, C. (2013a). Selecting shapes – how children identify familiar shapes in two different educational settings. http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG13/WG13_Maier.pdf. Aufruf 30.03.2013.

Maier, A. S., & Benz, C. (2013b). Children's constructions in the domain of geometric competencies (in two different instructional settings). In C. Benz, B. Brandt, U. Kortenkamp, G. Krummheuer, S. Ladel, & R. Vogel (Hrsg.), *Early mathematics learning. Selected papers of the POEM conference 2012*. Berlin: Springer.

Mehler, J., & Bever, T. G. (1967). Cognitive capacity of very young children. *Science, 158,* 141–142.

Menninger, K. (1958). *Zahlwort und Ziffer. Eine Kulturgeschichte der Zahl*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Moser Opitz, E. (2001). *Zählen, Zahlbegriff, Rechnen*. Bern: Haupt.

Oeveste, H. (1987). *Kognitive Entwicklung im Vor- und Grundschulalter*. Göttingen: Verlag für Psychologie.

Padberg, F., & Benz, C. (2011). *Didaktik der Arithmetik für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung* (4. Aufl.). Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Padberg, F., Danckwerts, R., & Stein, M. (1995). *Zahlbereiche. Eine elementare Einfuehrung*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Piaget, J. (1958). Die Genese der Zahl beim Kinde. *Westermanns Pädagogische Beiträge, 10,* 357–367.

Piaget, J., & Szeminska, A. (1975). *Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde*. Stuttgart: Klett.

Resnick, L. B. (1983). A developmental theory of number understanding. In H. Ginsburg (Hrsg.), *The development of mathematical thinking*. London: Academic Press.

Resnick, L. B. (1989). Developing mathematical knowledge. *American Psychologist, 44*(2), 162–169.

Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research. Learning trajectories for young children*. New York: Routledge.

Schipper, W. (1998). „Schulanfänger verfügen über hohe mathematische Kompetenzen". Eine Auseinandersetzung mit einem Mythos. In A. Peter-Koop (Hrsg.), *Das besondere Kind im Mathematikunterricht der Grundschule* (S. 119–140). Mildenberger: Offenburg.

Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Braunschweig: Schroedel.

Schmidt, R. (1982a). Die Zählfähigkeit der Schulanfänger – Ergebnisse einer Untersuchung. *Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe, 12*(10), 371–376.

Schmidt, R. (1982b). Ziffernkenntnis und Ziffernverständnis der Schulanfänger. *Grundschule, 14,* 166–167.

Schmidt, R. (1982c). *Zahlenkenntnisse von Schulanfängern. Ergebnisse einer zu Beginn des Schuljahres 1981/82 durchgeführten Untersuchung*. Wiesbaden: Hessisches Institut für Bildungsplanung und Schulentwicklung.

Schmidt, S., & Weiser, W. (1982). Zählen und Zahlverständnis von Schulanfängern. *Journal für Mathematik-Didaktik, 3,* 227–263.

Schmidt, S., & Weiser, W. (1986). Zum Maßzahlverständnis von Schulanfängern. *Journal für Mathematik-Didaktik, 7,* 121–154.

Selter, C. (1993). Die Kluft zwischen den arithmetischen Kompetenzen von Erstkläßlern und dem Pessimismus der Experten. *Beiträge zum Mathematikunterricht, 1993,* 350–353.

Selter, C. (1995). Die Fiktivität der „Stunde Null" im arithmetischen Anfangsunterricht. *Mathematische Unterrichtspraxis, 16*(2), 11–19.

Selter, C., & Spiegel, H. (1997). *Wie Kinder rechnen*. Leipzig: Klett.

Siegler, R. S. (1988). Strategy choice procedures and the development of multiplication skill. *Journal of Experimental Psychology, 117*(3), 258–275.

Sophian, C. (1988). Limitations on preschool children's knowledge about counting: Use counting to compare two sets. *Development Psychology, 24*(5), 634–640.

Starkey, P., Spelke, E., & Gelman, R. (1983). Detection of intermodal numerical correspondences by human infants. *Science, 222,* 344–355.

Stern, E. (1998). *Die Entwicklung des mathematischen Verständnisses im Kindesalter*. Lengerich: Pabst Publisher.

Sundermann, B., & Selter, C. (2006). *Beurteilen und Fördern im Mathematikunterricht*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Unterhauser, E., & Gasteiger, H. (2018). Verständnis des geometrischen Begriffs Viereck bei Kindern zwischen vier und sechs Jahren. *Frühe Bildung, 7,* 152–158. https://doi.org/10.1026/2191-9186/a000382.

van den Heuvel-Panhuizen, M. (1996). *Assessment and realistic mathematics education*. Utrecht: Freudenthal Institute.

van den Heuvel-Panhuizen, M., & Buys, K. (2005). *Young children learn measurement and geometry. A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for the lower grades in primary school*. Utrecht: Freudenthal Institute.

van Luit, J. E. H., & van de Rijt, B. A. M. (1995). *Rekenhulp voor kleuters*. Doetichem: Graviant.

van Luit, J. E. H., van de Rijt, B. A. M., & Hasemann, K. (2001). *Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung*. Göttingen: Hogrefe.

van de Rijt, B. A. M., van Luit, J. E. H., & Hasemann, K. (2000). Zur Messung der frühen numerischen Kompetenz. *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie, 32*(1), 14–24.

von Glasersfeld, E. (1982). Subitizing: The role of figural patterns in the development of numerical concepts. *Archives de Psychologie, 50*(194), 191–218.

Waldow, N., & Wittmann, E. C. (2001). Ein Blick auf die geometrischen Vorkenntnisse von Schulanfängern mit dem mathe-2000-Geometrie-Test. In W. Weiser & B. Wollring (Hrsg.), *Beiträge zur Didaktik der Mathematik für die Primarstufe* (S. 247–261). Hamburg: Festschrift für Siegbert Schmidt.

Wynn, K. (1990). Children's understanding of counting. *Cognition, 36,* 155–193.

Wynn, K. (1992a). Evidence against empiricist accounts of the origins of numerical knowledge. *Mind and Language, 7,* 315–331.

Wynn, K. (1992b). Addition and subtraction by human infants. *Nature, 358,* 749–750.

Wynn, K. (1992c). Children's acquisition of the number words and the counting system. *Cognitive Psychology, 24,* 220–251.

Xu, F., & Arriaga, R. I. (2007). Number discrimination in 10-month-old infants. *British Journal of Developmental Psychology, 25,* 103–108.

Zöllner, J. (2020). *Längenkonzept von Kindern im Elementarbereich*. Wiesbaden: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-27671-3.

Mathematiklernen im Übergang Kindertagesstätte – Grundschule

2

Entwicklungs- und Lernprozesse beginnen bei Kindern früh, bauen aufeinander auf und beeinflussen sich gegenseitig. Bildungsprozesse über die Institutionen hinweg anschlussfähig zu gestalten, ist deshalb eine Herausforderung, der sich Erziehende und Lehrpersonen gleichermaßen stellen müssen. Im letzten Jahrzehnt rückte die fachliche Bildung in den Kindertagesstätten vermehrt in den Mittelpunkt. Insofern gibt es mittlerweile bildungspolitische Vorgaben und auch verschiedene Konzeptionen, die sich der mathematischen Bildung in der Kindertagesstätte widmen. Abschn. 2.1 schildert diese Grundlagen, die bei der Konzeption schulischen Anfangsunterrichts berücksichtigt werden müssen. Es werden unter anderem auch Empfehlungen für die Arbeit in Kindertageseinrichtungen gegeben, und es erfolgt der Versuch einer Klärung, welche mathematischen Inhalte bereits in der Kindertageseinrichtung thematisiert werden können und sollten. Allerdings kann man derzeit noch nicht von einer annähernd einheitlichen Umsetzung früher mathematischer Bildung ausgehen. Es sollte aber selbstverständlich sein, dass der schulische Anfangsunterricht möglichst gut auf die Vorarbeit und die Vorkenntnisse der Kinder reagiert. Die Erwartungen der Kinder spielen hier gleichermaßen eine Rolle wie die Möglichkeiten der Kooperation zwischen Kindertagesstätte und Schule. Dazu werden in Abschn. 2.2 einige Aspekte angesprochen.

2.1 Mathematische Bildung in Kindertagesstätten

Fachliche und insbesondere mathematische Bildung rückte um die Jahrtausendwende mehr und mehr in den Fokus des Interesses. Die Notwendigkeit, sich damit auseinanderzusetzen, ergibt sich vor allem durch die Erkenntnis, dass frühes Umgehen mit mathematikhaltigen Situationen und das dabei erworbene Wissen enormen Einfluss hat auf das weitere mathematische Lernen (vgl. Benz et al. 2015, S. 7 ff.). Aus

K. Hasemann und H. Gasteiger, *Anfangsunterricht Mathematik,* Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II, https://doi.org/10.1007/978-3-662-61360-3_2

der allgemeinen Bildungsdiskussion ist die frühe mathematische Bildung mittlerweile kaum mehr wegzudenken – auch schon deshalb, weil aufgrund der politischen und institutionellen Vorgaben ein breiter Markt für Materialien und Programme entstanden ist. Bevor im Folgenden auf die aktuellen politischen Vorgaben eingegangen wird und Programme bzw. Materialien vorgestellt werden, soll ein Blick auf die Entwicklung in den vergangenen Jahren und Jahrzehnten bis hin zu aktuellen Forschungsergebnissen die Einordnung unseres heutigen Verständnisses von früher mathematischer Bildung erlauben.

2.1.1 Bedeutung elementarer mathematischer Bildung

Ein Blick zurück

Obwohl Friedrich Fröbel (1782–1852), der weit über Deutschland hinaus als Begründer des Kindergartens gilt, bereits Mitte des 19. Jahrhunderts mathematische Bildung ins Zentrum seines pädagogischen Konzepts rückte, kann man über die Jahre eine kontinuierliche Weiterentwicklung dieser Ideen zu einem tragfähigen, tradierten Konzept früher mathematischer Bildung nicht erkennen (Balfanz 1999). Eher lässt sich beobachten, dass sich im Verlauf der Zeit im Bereich der Frühpädagogik ein deutlicher Fokus auf fachliche Bildung mit einer klar pädagogisch ausgerichteten Philosophie immer wieder – bis hinein in Extreme – abwechselte (Roux 2008). Betrachtet man beispielsweise behördliche Vorschriften zur Einrichtung von Kindertagesstätten aus den 1990er-Jahren, so findet man im Hinblick auf die Förderung der kognitiven Entwicklung der Kinder häufig nur recht lapidare Hinweise wie den, dass Kindertagesstätten „den natürlichen Wissensdrang und die Freude am Lernen pflegen“ sollen (Neufassung des Niedersächsischen Gesetzes über Tageseinrichtungen für Kinder vom 25.9.1995, § 2(1)). Bei der Arbeit in den Kindergärten dominierte der „Situationsansatz“, d. h. ausgehend von den Lebenssituationen der Kinder werden Qualifikationen ermittelt und dazu passende Lernsituationen entworfen (Faust-Siehl 2001a, S. 59).

In den Informationsschriften einzelner Kindergärten aus dieser Zeit sind die von den Erzieherinnen selbst gesetzten Ziele ihrer pädagogischen Arbeit durch hohes persönliches und deutlich emotionales Engagement gekennzeichnet. So sollen die Kinder Zeit und Muße haben zum Staunen, Üben, Wiederholen und Versinken. Sie sollen ernst genommen werden und es soll ihnen das Recht zugestanden werden, ihre Gefühle und Bedürfnisse zu äußern. Zwar soll den Kindern auch Wissen zu den vielfältigsten Bereichen vermittelt werden, damit sie gesellschaftliche, öffentliche und gewerbliche Zusammenhänge erfahren. Doch im Hinblick auf die Schule beschränkte sich die Förderung meist auf Konzentration, Ausdauer und Eigenständigkeit. Aktivitäten zur Förderung kognitiver Fähigkeiten, speziell Aktivitäten, die sich im weitesten Sinne auf mathematische Inhalte beziehen, kamen ebenso wenig vor wie z. B. die Förderung der sprachlichen Fähigkeiten.[1]

Nach einer Untersuchung von Naumann wurde vor allem das letzte Kindergartenjahr häufig dem „nur wenig eingeschränkten ‚Genuss der Gegenwart' gewidmet, damit die Kinder Erinnerungen mitnehmen, die sie stark machen für den Neuanfang" in der Schule (Faust-Siehl 2001a, S. 73). Die pädagogische Arbeit im Kindergarten schien geleitet von einem Wunsch, der über allem steht: Die Kinder glücklich zu sehen. Dagegen ist kaum etwas zu einzuwenden, doch stellte sich zunehmend die berechtigte Frage, ob zur Entwicklung der Persönlichkeit der Kinder und insbesondere des Selbstwertgefühls nicht auch das Ansprechen ihrer kognitiven Fähigkeiten gehört.

Spätestens mit Veröffentlichung der ersten PISA[2]-Ergebnisse veränderte sich die Herangehensweise an frühe Bildung merklich. Die Erkenntnis, dass die Dauer des Besuch von Kindertageseinrichtungen zwar einen „geringen, aber dennoch nennenswerten Beitrag (…) zur Vorhersage von Unterschieden in der mathematischen Kompetenz" bei 15-Jährigen liefert (Prenzel et al. 2004, S. 275), konnte nicht ignoriert werden.

Fachliche Bildung als wichtiger Bestandteil im Elementarbereich

Inzwischen herrscht weitgehend Einigkeit darüber, „dass sich die Kompetenzen der Heranwachsenden in Zeiträumen entfalten, die in der frühen Kindheit beginnen und weit über die Grundschule hinaus reichen. Dies gilt sowohl für Basiskompetenzen, z. B. die metakognitive Steuerung des eigenen Lernens, als auch für die spezifischen Lernvoraussetzungen. Paradebeispiele dafür sind die phonologische Bewusstheit, dem Forschungsstand nach eindeutig eine Schlüsselqualifikation für den Schriftspracherwerb, und die frühe Zahlbegriffsentwicklung. Während der Kindergartenzeit entwickeln sich die entscheidenden Vorläuferfähigkeiten für die schulischen Lernprozesse" (Faust-Siehl 2001a, S. 74). In mehreren Längsschnittstudien (Stern 1997; Dornheim 2008; Krajewski und Schneider 2009; Nguyen et al. 2016) wurde nachgewiesen, dass es einen engen Zusammenhang zwischen der numerischen Kompetenz der Kinder am Schulanfang und ihren arithmetischen und anderen Fähigkeiten in den späteren Schuljahren gibt. Dem mathematischen Vorwissen kommt bei der Vorhersage späterer Mathematikleistungen oder zu erwartender Schwierigkeiten beim Mathematiklernen dabei sogar eine weitaus größere Bedeutung zu als der Intelligenz.

In den letzten Jahren hat sich deshalb die Arbeit in den Kindertagesstätten deutlich verändert. Dazu gibt es mittlerweile auch einige amtliche Vorgaben.

---

[1]Das bis dahin in den Kindergärten des Kanons Zürich geltende Lese-, Schreib- und Rechenverbot wurde z. B. erst 2002 aufgehoben (Parlamentsbeschluss des Kantons Zürich zur Einführung der Grund- bzw. Basisstufe vom 28.5.2002).

[2]*Programme for International Student Assessment;* vgl. Baumert et al. 2001.

2.1.2 Bildungspolitische Vorgaben und Richtlinien

Schon vor der Veröffentlichung einer Studie der OECD *(Organisation for Economic Cooperation and Development)* im Jahre 2004, in der die Betreuungssituation in deutschen Kindertagesstätten als unzureichend kritisiert wurde, hatten die Bundesländer im Jahre 2002 vereinbart, Pläne für Bildung und Erziehung im Elementarbereich zu erstellen. Diese Vereinbarung ist in einem Beschluss der Jugendministerkonferenz (2004) fixiert, welcher darüber hinaus einen gemeinsamen Rahmen aller deutschen Bundesländer zur frühen Bildung in Kindertagesstätten beschreibt, in dem fachliche Bildung als klarer Aufgabenbereich formuliert wird. Dabei geht es um eine neue Qualität von Bildung: „Vom Bildungskonzept [wird] erwartet, dass es entwicklungsangemessen strukturiert, d. h. die kindliche Entwicklung fördert, und dabei darauf achtet, dass kindliche Kompetenzen gestärkt werden“ (Fthenakis 2003, S. 12). Dies gilt selbstverständlich auch für die mathematische Entwicklung der Kinder.

Konkretisiert wird dieses Bildungskonzept länderspezifisch in den verschiedenen Bildungsplänen, die in den Jahren 2002 bis 2006 in Erstfassungen vorlagen (vgl. Diskowski 2008, S. 48). Mittlerweile gibt es in einigen Ländern bereits überarbeitete Versionen. Die Bildungspläne unterscheiden sich sowohl vom Aufbau als auch inhaltlich deutlich voneinander: Nicht alle Länder weisen z. B. in ihren Bildungsplänen einen mathematischen Lernbereich aus (Senatorin für Soziales, Kinder, Jugend und Frauen, Bremen 2012). Teilweise werden Hinweise zur mathematischen Bildung in einem übergreifenden Bildungsbereich gegeben, der die Naturwissenschaften mit einschließt (Ministerium für Bildung, Jugend und Sport, Brandenburg 2004; Ministerium für Bildung, Rheinland-Pfalz 2018). In den Plänen anderer Bundesländer ist Mathematik hingegen ein eigener Bildungsbereich (z. B. Bayerisches Staatsministerium für Arbeit und Sozialordnung, Familie und Frauen 2012; Kultusministerium Niedersachsen 2018; Ministerium für Familie, Kinder, Jugend, Kultur und Sport des Landes Nordrhein-Westfalen 2016). Während sich der Rahmenplan von Mecklenburg-Vorpommern beispielsweise an fundamentalen Ideen der Mathematik (z. B. räumliche Strukturierung, Teil-Ganzes, Zahl, Form, Messen, Gesetzmäßigkeiten und Muster, Symmetrie) orientiert (Sozialministerium Mecklenburg-Vorpommern 2005), stellen z. B. die Bildungsempfehlungen von Hamburg, das Bildungsprogramm von Berlin und die Handreichungen für die Praxis zum saarländischen Bildungsprogramm im Abschnitt zur Mathematik das Kind in den Mittelpunkt. Hier gibt es z. B. die Themenfelder „Das Kind in seiner Welt“, „Das Kind in der Kindergemeinschaft“ oder „Weltgeschehen erleben, Welt erkunden“ (Behörde für Arbeit, Soziales, Familie und Integration, Hamburg 2008; Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Sport, Berlin 2014; Minister für Bildung und Kultur, Saarland 2018). Innerhalb dieser Themenfelder werden Erkundungsfragen angeboten, wie z. B. „Wie viele sind wir?“, „Wie viel kostet eine Eintrittskarte?“ oder „Wie lange fahren wir bis zum Urlaubsort?“ (z. B. Behörde für Arbeit, Soziales, Familie und Integration, Hamburg 2008, S. 89 ff.).

Trotz bundesweiter Einigung, die Bildungsmöglichkeiten des Kindes in den einzelnen Fachbereichen zu beachten und zu fördern (vgl. Jugendministerkonferenz 2004, S. 4), sind die Vorgaben zur mathematischen Bildung im Elementarbereich in den verschiedenen Bundesländern sehr unterschiedlich. Hinzu kommt noch die Tatsache, dass die Arbeit mit Bildungsplänen im Elementarbereich im Vergleich zur – für den Schulbereich selbstverständlichen – Orientierung an Lehrplänen vor allem in Westdeutschland kaum Tradition hat (vgl. Diskowski 2008, S. 48). „Anders als in vielen anderen Ländern gibt es in Deutschland über die (bisweilen engen) Ländergrenzen hinaus bislang kein Curriculum für die frühe mathematische Bildung, das bei Elementarpädagog(inn)en, Mathematikdidaktiker(inne)n, Erzieher(inne)n und Eltern gleichermaßen Zustimmung erfährt. Gleichwohl würde ein solches Curriculum allen Beteiligten Orientierung und geeignete Unterstützung bieten – wenn es denn von hinreichend hoher Qualität ist" (Benz et al. 2015, S. 65). Ob die Bildungspläne in Bezug auf elementare mathematische Bildung wirklich Steuerungsfunktion einnehmen können, muss sich deshalb erst zeigen. Problematisch scheint unter anderem, dass die Pläne teilweise sehr wenig konkret sind, was den Praxisbezug anbelangt. Außerdem mangelt es einigen Plänen auch in den überarbeiteten Versionen an fachlicher Systematisierung bzw. Fundierung (vgl. auch Fthenakis et al. 2009, S. 13; Fthenakis 2007, S. 4).

2.1.3 Inhalte

Gerade aufgrund der fehlenden Handlungskonzepte für die Umsetzung der Bildungspläne auf Einrichtungsebene kommt konzeptionellen Vorschlägen elementarer mathematischer Bildung (Abschn. 2.1.4) und der inhaltlichen Ausgestaltung eine umso größere Bedeutung zu. Mathematische Aktivitäten in die pädagogische Arbeit in Kindertagesstätten zu integrieren sollte weder zu einer Verschulung führen, noch ist damit gemeint, zentrale Inhalte des mathematischen Anfangsunterrichts vorwegzunehmen. Da aber bei allen Kindern nicht nur Neugier und ein natürlicher Entdeckungsdrang, sondern auch Kenntnisse über und Fähigkeiten im Umgang mit Mengen, Zahlen und geometrischen Objekten vorausgesetzt werden können (vgl. Abschn. 1.4), können diese Kenntnisse und Fähigkeiten ebenso wenig ignoriert werden wie die – gerade aufgrund der individuellen Unterschiede zwischen den Kindern – zwingende Notwendigkeit, mathematische Fähigkeiten bereits früh zu fördern (vgl. Abschn. 2.1.1). Es ist deshalb erforderlich, zu reflektieren, welche mathematischen Inhalte für die frühe mathematische Bildung von Bedeutung sind.

Bei Kindern im Alter bis etwa drei Jahren geht es im Bereich der mathematischen Bildung zunächst darum, dass sie eigene, sinnliche Erfahrungen sammeln

- in Bezug auf den eigenen Körper, z. B. im Hinblick auf die Reichweite der Arme bzw. auf die Position im Raum (z. B. auf den Stuhl klettern und die Welt „von oben" anschauen) sowie bei Bewegungsspielen

- mit Gegenständen, sowohl im Raum als auch in Bezug auf deren Eigenschaften (z. B. dass der Ball wegrollt)
- mit geometrischen Formen von Spielmaterialien und mit deren Verwendbarkeit im Spiel, wobei sie auch erste Erkenntnisse zu Benennungen gewinnen können
- mit Zahlen im Alltag, in Spielen und in sprachlicher Form, z. B. in Abzählreimen.

Im Vorschulalter (also mit etwa vier bis sechs Jahren) sollen die Kinder diese Erfahrungsbereiche erweitern und vertiefen. Da frühe mathematische Bildung nicht darauf abzielen sollte, die zentralen Inhalte des mathematischen Anfangsunterrichts vorzuverlagern, beschränken sich die Aktivitäten im Wesentlichen auf die in Kap. 1 angesprochenen Grundlagen des Zahlbegriffs wie die Invarianz von Mengen, das Erlernen des Zählens und elementare Erfahrungen zu Größen, Messen sowie zu geometrischen Inhalten. Darüber hinaus sollten Kinder die Möglichkeit haben, elementare Kompetenzen und Strategien beim Gewinn von Erkenntnissen oder Einsichten zu erwerben, zu vertiefen oder zu reflektieren. Als allgemeine Fähigkeit kommt das Umgehen mit Schreibgeräten, Scheren und anderen Hilfsmittel hinzu. Insbesondere geht es um

- den Umgang mit Raum- und Lagebeziehungen (lang, kurz, oben, unten, vorn, hinten, dazwischen, daneben, innen, außen, rechts, links)
- das Erkennen und gegebenenfalls Benennen von räumlichen Körpern (Kugeln, Würfel, Quader, Säulen) und ebenen Figuren (Kreise, Quadrate, Rechtecke, Dreiecke) anhand von konkreten Gegenständen oder geeignetem Material
- das Erkennen von Figuren und Körpern nicht nur an ihrer äußeren Gestalt, sondern zunehmend auch an den Merkmalen und Eigenschaften (rund, eckig, Anzahl der Ecken und Kanten)
- das Vergleichen, Klassifizieren und Ordnen von Objekten und Materialien nach unterschiedlichen Kriterien
- die Einsicht in die Invarianz von Größen und Mengen
- das Erfassen der Anzahl von Objekten (von Gegenständen, aber z. B. auch von Tönen)
- den Gebrauch von Zahlwörtern sowie das Zählen von Objekten
- das Erkennen von Zahlen in der alltäglichen Umwelt der Kinder
- das Zusammenfassen und Gliedern von Mengen von Objekten im Sinne eines Teil-Ganzes-Verständnisses und eventuell eines ersten gegenständlichen Rechnens (z. B. drei Bonbons und zwei Bonbons sind zusammen fünf Bonbons)
- das Erkennen von Mustern (z. B. der Zahlbilder auf dem Würfel oder das Fortsetzen von Reihen)
- das Erfassen und Wahrnehmen von Größen (Längen und Längenmessung, Gewichte und Abwägen, Volumina, Zeit, Umgang mit Geld)
- das verbale Beschreiben dieser Sachverhalte, Gemeinsamkeiten, Unterschiede

- den Aufbau mentaler Bilder, erste Einsicht in Beziehungen zwischen Objekten und das Übertragen von Erkenntnissen auf andere inhaltliche Bereiche oder in andere Darstellungsformen (Transfer)
- (fein)motorische Fertigkeiten wie Falten, Schneiden, Zeichnen, Ausmalen usw.

Einige der hier aufgelisteten Punkte sollen noch etwas genauer erläutert werden:

Bei den *geometrischen* Vorerfahrungen der Kinder können wir zwischen Raum- und Lagebeziehungen einerseits und dem Erkennen bzw. Benennen von räumlichen Körpern und ebenen Figuren unterscheiden. Die Kinder sollten am Schulbeginn sicher sein im Umgang mit den genannten Begriffen wie lang, kurz, innen, außen usw. Die Begriffe rechts/links bereiten erfahrungsgemäß zu Schulbeginn noch Schwierigkeiten. Die Kinder sollten anhand konkreter Gegenstände und Formenplättchen lernen, zwischen Kugeln, Würfeln, Quadern und Säulen sowie zwischen Kreisen, Quadraten, Rechtecken und Dreiecken zu unterscheiden. Noch nicht wichtig sind dabei die in der Geometrie üblichen Bezeichnungen und formale Beziehungen zwischen den Objekten (wie die, dass alle Würfel auch Quader und alle Quadrate auch Rechtecke sind – diese Erkenntnis bereitet auch im schulischen Unterricht noch Schwierigkeiten). Die Kinder erkennen und unterscheiden die Objekte zunächst an ihrer äußeren Gestalt, erkennen aber zunehmend auch Merkmale (z. B. rund, eckig, die Anzahl der Ecken bzw. Kanten).

Die Betrachtung geometrischer Objekte und Beziehungen „leistet einen wichtigen Beitrag für die Fähigkeitsentwicklung des einzelnen Kindes, seine Lebens- bzw. Erfahrungsumwelt zu erschließen. Ein wesentlicher Aspekt der Umwelt ist ihre vorwiegend geometrische Struktur, die ohne Kompetenzen einer Raumvorstellung oder der visuellen Informationsaufnahme und Informationsverarbeitung nur schwer erkannt oder durchdrungen werden kann. Diese notwendigen Fähigkeiten entwickeln sich nicht von selbst. Es bedarf dafür der Anregung, der Förderung und insbesondere der geometrischen Erfahrungen sowie Übungen im Vor- und Grundschulalter“ (Radatz und Rickmeyer 1991, S. 7; vgl. auch Benz et al. 2015, S. 183 ff.).

Das *Vergleichen,* das *Klassifizieren* und das *Ordnen* kann sowohl nach qualitativen als auch nach quantitativen Merkmalen erfolgen: Man *sieht,* dass ein Kind *größer* ist *als* das andere, ein Stab *länger* ist *als* der andere oder ein Hut *mehr* Federn hat *als* der andere; man *fühlt,* dass eine Kugel *schwerer* ist *als* die andere; man *hört,* dass ein Ton *lauter* ist *als* der andere, usw. Auch sieht, fühlt oder hört man, welches Kind das größte oder das kleinste ist, welcher Stab der längste oder der kürzeste ist, welcher Hut die meisten oder die wenigsten Federn hat und welcher Ton der lauteste oder der leiseste ist.

Beim *Klassifizieren* geht es zunächst um die Klassifikation von Gegenständen nach *einem* Merkmal, z. B. aus einer Menge von Gegenständen diejenigen herauszufinden, die rot sind, oder in einem Bild mit Tieren diejenigen, die nicht fliegen können. Die multiple Klassifikation nach *mehr als einem* Merkmal fällt den Kindern deutlich schwerer (vgl. Abschn. 1.2.3), wenn beispielsweise aus einer Schachtel die Plättchen herausgesucht werden sollen, die klein und blau sind.

Einige Stäbe sollen der Länge nach *geordnet* werden. Wie geht man vor? Sucht man zuerst den kleinsten und unter den übrig gebliebenen wieder den kleinsten usw.? Oder nimmt man zwei Stäbe und vergleicht und ordnet sie und nimmt dann einen weiteren Stab und prüft, ob er kürzer ist als die beiden oder länger als die beiden oder ob er in die Mitte (bzw. bei noch mehr Stäben in die Reihe) gehört? In Abschn. 1.2.3 haben wir gesehen, dass der Transitivitätsschluss (wenn A kürzer als B und B kürzer als C ist, dann ist auch A kürzer als C) für jüngere Kinder noch sehr schwierig ist. Deshalb sollen die Aktivitäten in der Kindertagesstätte ja gerade dazu beitragen, ihnen die Erfahrungsgrundlage zu geben, auf der solche Einsichten möglich sind. Auch deshalb ist es erforderlich, die Handlungen zunehmend sprachlich zu begleiten und sie erklären zu lassen.

Einige der Experimente zur *Invarianz* und zu *Eins-zu-eins-Zuordnungen* haben wir in Abschn. 1.2.3 beschrieben (z. B. Umfüllversuche mit Wasser sowie die Eins-zu-eins-Zuordnung von Gegenständen), sie können in vielen Varianten wiederholt und mit den Kindern durchgeführt werden. Interessant ist es dabei zu prüfen, inwieweit bei einzelnen Kindern die Fähigkeit zur Eins-zu-eins-Zuordnung tatsächlich von der Anzahl (oder auch von der Art) der Objekte abhängt, die einander zugeordnet werden sollen. Es ist zu erwarten, dass bei Anzahlen, die die Kinder simultan erfassen können, sehr viel früher Sicherheit beim Erkennen der Invarianz der Mengen vorhanden ist als bei größeren Mengen, die nicht unmittelbar überschaut werden können und bei deren Vergleich logische Operationen erforderlich werden. Bei diesen Mengen verlassen sich die Kinder häufig auf ihren optischen Eindruck (vgl. die Diskussion in Abschn. 1.2.3 sowie Abschn. 1.4).

Beim *Mengenerfassen* geht es zum einen darum, konkrete Mengen zu bilden. Dies bedeutet, Objekte zu einem Ganzen zusammenzufassen und diese Ganzheit als ein neues Objekt zu erkennen, und es bedeutet, die einzelnen Objekte in dieser Menge zu sehen, bzw. Objekte aussondern und entscheiden zu können, welche zu der Menge gehören und welche nicht. Dabei ist es hilfreich, zunächst Mengen mit gleichartigen Elementen zu bilden (z. B. Mengen von Äpfeln *oder* von Birnen und nicht Mengen mit Äpfeln *und* Birnen im Sinne von „Obst“, vgl. Leuschina 1962, S. 19–28). Zum anderen geht es darum, die Mächtigkeit solcher Mengen im Sinne von „enthält mehr/weniger/gleich viele Objekte“ zu vergleichen bzw. durch simultane Zahlerfassung oder durch Zählen die Anzahl der Objekte zu bestimmen. Hilfreich sind geordnete oder strukturierte Mengen, wie z. B. die Punktmuster auf dem Spielwürfel, die Finger oder andere Zahlbilder, die den Kindern vertraut sind oder vertraut werden und ihre Fähigkeiten zum Mustererkennen fördern (vgl. unten).

Die Entwicklung der *Zählkompetenz* der Kinder haben wir in Abschn. 1.3 ausführlich dargestellt; auf entsprechende Aktivitäten hierzu in Kindertagesstätten gehen wir im nächsten Abschnitt noch ein.

Das *Erkennen und Herstellen von Figuren und Mustern* erfolgt experimentell und spielerisch. Dabei können die Kinder vorgegebene Muster nachlegen, sie können Reihen fortsetzen oder Fehler in solchen Reihen finden, sie können aus einigen ähnlichen

Figuren die zur Vorlage genau gleichen herausfinden sowie „Schau-genau"-Spiele durchführen, sie können Melodien und Rhythmen (wieder-)erkennen und nachspielen usw. (vgl. auch Benz et al. 2015, S. 291 ff.).

Auf den engen Zusammenhang zwischen Denken und Sprechen hat schon Vygotsky (1969) hingewiesen – er ist bei der elementaren mathematischen Bildung ebenfalls von großer Bedeutung. Wir benutzen die Sprache nicht nur, um uns mit anderen zu verständigen, sondern auch in der Form eines „inneren Sprechens" (Galperin 1972), um geistige (mentale) Vorstellungen über die Sachverhalte und deren Beziehungen aufzubauen. Das *verbale Beschreiben* von Sachverhalten, Gemeinsamkeiten, Unterschieden usw. dient sowohl der Verständigung miteinander als auch der individuellen Entwicklung von Sprachkompetenz und der Präzisierung von Erfahrungen und Einsichten, die zuvor mit allen Sinnen gemacht wurden.

Die Entwicklung und das Training *motorischer Fertigkeiten* sind selbstverständliche Inhalte der Arbeit in Kindertagesstätten; darüber hinaus gibt es aber eine Reihe von Erkenntnissen über den Zusammenhang zwischen der physischen Beweglichkeit der Kinder und dem Erwerb der Kulturtechniken Lesen, Schreiben und Rechnen. Naheliegend ist beispielsweise der Zusammenhang zwischen der Entwicklung des sogenannten „Körperschemas" bei den Kindern (also unter anderem ihrer Vorstellung von den Ausmaßen des eigenen Körpers, wie z. B. der Armlänge) und der Entwicklung von Größenvorstellungen in der alltäglichen Umwelt, aber auch von Maßen wie „1 m". Auf solche Zusammenhänge soll hier aber nicht im Einzelnen eingegangen werden (vgl. z. B. Benz et al. 2015, S. 249 ff.; Eggert und Bertrand 2002; und den Beitrag von S. Gärtner in Milz 1993, S. 127 ff.).

2.1.4 Konzeptionen

Da die Elementarpädagogik vollkommen zu Recht eigenen Gesetzmäßigkeiten folgt und auch spezifische Zielsetzungen verfolgt, ist zu überlegen, wie eine konzeptionell angemessene Umsetzung mathematischer Bildung in diesem Rahmenkonzept aussehen kann. Ein Vorziehen schulischer Methodik wird zu Recht von vielen Erziehenden abgelehnt. Im Wesentlichen lassen sich derzeit zwei konzeptionelle Richtungen unterscheiden: Trainings- bzw. Förderprogramme einerseits und das bewusste Nutzen von – für Kinder dieser Altersstufe – natürlichen Lernsituationen andererseits (Gasteiger 2017). Im Folgenden werden jeweils exemplarisch konkrete Materialien und Programme beschrieben.

Förder- und Trainingsprogramme

Mit den Trainingsprogrammen „Entdeckungen im Zahlenland" (Preiß 2007) und „Komm mit ins Zahlenland" (Friedrich und de Galgóczy 2004) liegen zwei ähnliche Konzeptionen vor. Beiden Konzepten gemeinsam ist der Versuch, einen Zahlbegriff in ganzheitlich gestalteten Lerneinheiten aufzubauen und gestützt durch sinnliche

Erfahrungen bzw. konkrete Handlungen die „besondere Natur der mathematischen Objekte“ mit ihrem hohen „Grad an Abstraktheit“ (Preiß 2007, S. 2) so zu vermitteln, dass die Kinder „Spaß“ daran haben (Preiß 2007, S. 2; Friedrich und de Galgóczy 2004, S. 9). Durch die Lerneinheiten dieser Programme zieht sich die künstlich erzeugte und in der Arbeit mit den Kindern aufzubauende Umgebung des Zahlenlands mit Zahlenweg, Zahlenhäusern und Zahlenländern bzw. Zahlengärten. Preiß nennt diese Elemente seines Programms Erfahrungs- und Handlungsfelder (vgl. Preiß 2007, S. 4 f.). Die Zahlengärten (Friedrich und de Galgóczy 2004) bzw. die Wohnungen zu jeder Zahl (Preiß 2007) werden von den Kindern mit entsprechenden Materialien und Alltagsgegenständen ausgestattet. Dazu gibt es vorgefertigte Materialien, die immer passend der jeweiligen Zahl und ihrer Wohnung bzw. ihrem Garten zugeordnet werden. Ohne weiteres können auch Gegenstände hinzugelegt werden, die der Zahl entsprechen, z. B. eine Brille zur Zwei oder Steine, Kastanien o. Ä. in der entsprechenden Anzahl. Die Ausstattungen der einzelnen Wohnungen werden im Laufe der Zeit immer reichhaltiger. Die Kinder lernen die Zahlen als „Familie“ kennen und diese werden deshalb auch zu Beginn jeder Einheit freundlich begrüßt mit den Worten „Guten Morgen, liebe Zahlen: eins, zwei, drei, vier, fünf“ (Preiß 2007, S. 16). Der Zahlenweg entspricht im Wesentlichen einem Zahlenband, mit dem die Kinder Erfahrungen zum ordinalen Zahlaspekt machen können. Das Zählen ist dabei das wichtigste Hilfsmittel. Als Material stehen dazu Platten zur Verfügung, auf denen die Ziffern bzw. Zahlen von 1 bis 10 bzw. von 1 bis 20 aufgemalt sind. Man kann den Weg vorwärts und rückwärts gehen, und man kann an Stellen verweilen, um sich zu überlegen, welche Zahl vor einem liegt und welche dahinter.

Die Lerneinheiten in diesen Trainingsprogrammen sollen Sinne und Gedanken der Kinder anregen: Was gibt es nur einmal, was kommt immer doppelt vor? Wie viele Beine hat ein Stuhl, eine Katze, ein Vogel, eine Spinne? Zu den Aktivitäten im Zahlenland gehören auch Abzählreime, Zahlenrätsel und Zahlengeschichten, in denen „jede Zahl von 1 bis 10 eine eigene Persönlichkeit“ erhält (Friedrich und de Galgóczy 2004, S. 14). Sie betten die Zahlen in einen fiktiven Kontext und sind z. B. überschrieben mit Titeln wie „Die 4 ist krank“ oder „Die 5 hat Geburtstag“ (Preiß 2007, S. 108 ff.; vgl. auch Friedrich und de Galgóczy 2004, S. 32 ff.).

Dieser Versuch, den Umgang mit Zahlen positiv zu besetzen, indem man sie in eine künstliche Umgebung versetzt, sie personifiziert und sinnlich einbettet, muss durchaus kritisch betrachtet werden: „Das Hauptproblem dieses Programms ist die hohe emotionale Beziehung, die mit den Zahlen aufgebaut werden soll. Dies mag auf den ersten Blick kindlich-natürlich wirken, steht aber der abstrakten Idee der Zahlen entgegen. Zudem verlangt die Handlung, die permanent in den Märchenkontext eingebettet sein muss, die ständige Präsenz der Erzieherin. Ein eigenständiges Reflektieren der Kinder über Zusammenhänge zwischen den Zahlen (…) ist kaum möglich und wird auch nicht nahegelegt“ (Lorenz 2012, S. 165).

Das Förderkonzept „Mengen, zählen, Zahlen“ (Krajewski et al. 2007) ist ein weiteres Trainingsprogramm, das für den Einsatz in der Kindertagesstätte konzipiert wurde. Es ist zum einen für die Durchführung in kleinen Gruppen angelegt, kann

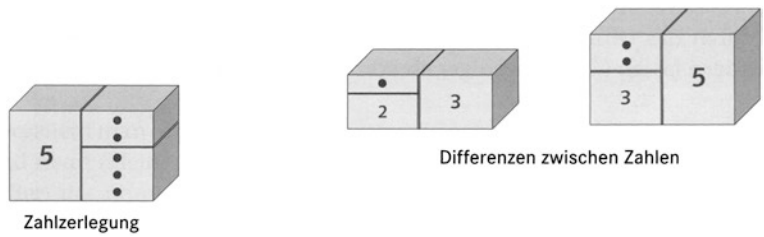


Abb. 2.1 Veranschaulichung zu Zahlzerlegungen. (entnommen aus Krajewski et al. 2007, S. 8)

aber auch in der Einzelförderung eingesetzt werden. Inhaltlich widmet es sich den drei Förderschwerpunkten „numerische Basisfertigkeiten“, „Anzahlordnung“ und „Teil-Ganzes-Beziehungen bzw. Anzahlunterschiede“. Damit orientiert sich dieses Programm an dem Modell zur Kompetenzentwicklung (Krajewski 2007), das in Abschn. 1.2.3 bereits erwähnt wurde. Für die Arbeit mit dem Programm liegt ein genauer Zeitplan vor – vorgesehen ist eine achtwöchige Durchführungszeit mit drei halbstündigen Sitzungen pro Woche – und es ist eine Art Unterrichtsskript mit größtenteils wörtlich ausformulierten Dialogen vorgegeben. Dadurch ist eine „Lehrsituation“ beschrieben, die klar an den Schulkontext denken lässt. Im ersten Förderschwerpunkt steht die Erarbeitung der Zahlen von 1 bis 10 im Mittelpunkt. Es werden die Ziffern thematisiert und die entsprechenden Mengen zugeordnet. Zudem gibt es mit einer Zahlentreppe speziell entwickeltes Material, das zum Einsatz kommt. Dieses Material umfasst Mengenbilder, Fingerbilder, den Zahlenstrahl, Ziffern und die Anteildarstellung in Form eines Uhrenstücks zu jeder Zahl, außerdem Blöcke, die als Treppe aufgebaut werden können und auf dessen Seiten ebenfalls die oben genannten Abbildungen zu sehen sind. Die Zahlen werden der Reihenfolge nach in einem Zahlenhaus angeordnet. Im zweiten Förderschwerpunkt erfolgt die Erarbeitung der Begriffe „mehr“, „weniger“, „größer“, „kleiner“, „kürzer“ und „länger“, und mithilfe der Zahlentreppe erfolgt eine Anordnung der Zahlen, aber auch der dazugehörigen Mengen. Beziehungen stehen im Mittelpunkt des dritten Förderschwerpunkts. Mit Anzahlstreifen und den Blöcken der Zahlentreppe werden einfache additive Aufgabenstellungen dargestellt (Abb. 2.1).

Im Vergleich zu den Zahlenland-Programmen verbleibt dieses Konzept im Abstrakten und versucht Beziehungen zwischen den Zahlen aufzuzeigen und auch zu verbalisieren. Problematisch zu sehen sind einige mathematische Unsauberkeiten (vgl. Gasteiger 2010, S. 89 ff.) und die strengen Vorgaben zur Erziehenden-Kind-Interaktion. Diese Vorgehensweise entspricht weniger den derzeitigen lernpsychologischen Erkenntnissen.

Das Programm *Rekenhulp voor kleuters* (van Luit und van de Rijt 1995) wird in den Niederlanden zur gezielten Förderung von Kindern eingesetzt, die in ihrer Zahlbegriffsentwicklung deutlich hinter derjenigen ihrer Kameraden zurückbleiben. Es ist also nicht – wie die bisher genannten Beispiele – als Anregung für die reguläre Arbeit in Kindertagesstätten zu verstehen. Zur Ermittlung möglicher Defizite bei den Kindern wird die

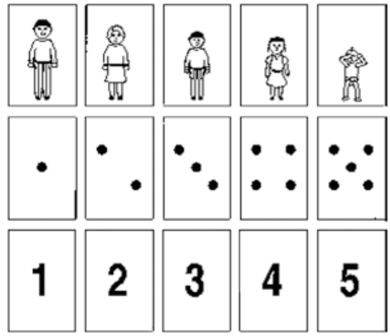


Abb. 2.2 Kärtchen aus dem Programm *Rekenhulp voor kleuters* (van Luit und van de Rijt 1995)

niederländische Version des „Osnabrücker Tests zur Zahlbegriffsentwicklung" (vgl. Abschn. 1.4.1) verwendet. Das Programm ist in Lektionen unterteilt und wird in Kleingruppen mit höchstens fünf Kindern eingesetzt; eine Lektion dauert etwa 30 bis 40 min. Es soll hier am Beispiel einer Lektion zum Thema „Familie: Menschen in der Familie" kurz vorgestellt werden.

Ziel dieser Lektion ist es, dass die Kinder ihre Fertigkeiten im Umgang mit den Zahlen von 1 bis 5 verbessern, insbesondere im Hinblick auf

- das Zählen
- den Gebrauch der Zahlen als Kardinal- und als Ordnungszahlen
- den Vergleich von Mächtigkeiten von Mengen
- das Rückwärtszählen
- das Bilden von Reihenfolgen
- das Erkennen der Zahlbilder auf dem Würfel
- das Erkennen der Ziffern von 1 bis 5.

Verwendet werden die in Abb. 2.2 gezeigten Kärtchen, aber auch konkrete Objekte, von denen jeweils fünf gleichartige vorhanden sein sollen.

Die Erzieherin sagt den Kindern, dass es heute um die Familie geht; sie sollen erzählen, wer bei ihnen zu Hause in der Familie wohnt: Vater, Mutter, Brüder, Schwestern? Wie viele Personen wohnen bei ihnen zu Hause? Dann wird auf die Kärtchen verwiesen (Abb. 2.2): Wie viele Personen gibt es in dieser Familie? Das Kind soll sagen, wie es die Anzahl festgestellt hat. Anhand der Kärtchen, die vor den Kindern auf dem Tisch liegen, wird besprochen, wie man sie abzählen kann (z. B. kann man sie in einer Reihe hinlegen, man kann beim Zählen die Kärtchen berühren, beiseiteschieben oder bereits gezählte Kärtchen umdrehen). Falls Kinder Schwierigkeiten beim Zählen haben, legt die Erzieherin die Kärtchen in eine Reihe, nimmt die erste, sagt das Zahlwort „eins" und legt das Kärtchen beiseite, dann das zweite Kärtchen, sagt „zwei" usw.; anschließend sollen die Kinder selbstständig genauso vorgehen.

Im nächsten Schritt werden die Kärtchen geordnet, z. B. gibt es auf den Kärtchen große und kleine Leute. Man kann die Kärtchen so hinlegen, dass die abgebildeten Personen von groß nach klein geordnet sind: Welches ist die größte Person? Wie kann man erkennen, welches die größte Person ist? (Zum Beispiel indem man die Kärtchen so hinlegt, dass ihre Unterkanten gleich hoch liegen, gegebenenfalls kann dann die Größe der Personen mit einem Stift oder Lineal verglichen werden.) Eine andere Übung ist folgende: Man legt das Kärtchen mit der größten Person als erstes in die Reihe, dann das mit der nächstkleineren Person usw. und fragt, an welcher Stelle ein bestimmtes Kärtchen liegen müsste. An der geordneten Reihe der Kärtchen kann außerdem die Zuordnung der Zahlbilder auf dem Würfel zu den Gliedern dieser Reihe vorgenommen werden (vgl. Abb. 2.2). Weitere Übungen bestehen darin, die Reihe rückwärts zu betrachten bzw. Zahlbilder, Zahlzeichen (Ziffern) sowie Mengen (gleichartiger) Objekte einander zuzuordnen.

Alle Lektionen haben im Wesentlichen den gleichen Aufbau: Sie haben ein Thema und eine Ausgangssituation, die den Kindern vertraut ist, in der aber auch gewisse Fertigkeiten genannt werden, die die Kinder zu Beginn dieser Lektion bereits beherrschen sollen (wenn dies nicht der Fall ist, muss zunächst auf vorhergehende Lektionen zurückgegriffen werden). Genannt werden für die Erzieherin die Ziele, die die Kinder in den jeweiligen Lektionen erreichen sollen; diese beziehen sich stets auf konkrete Handlungen in einem bestimmten Zahlenraum. Die Lektionen sind in allen Fällen so aufgebaut, dass die Kinder im ersten Schritt angeregt werden, die Einstiegsfragen selbstständig zu beantworten. Sind sie dazu noch nicht in der Lage, so stellt die Erzieherin weitere (offene) Fragen, die die Kinder zu einer Lösung hinführen sollen. Gelingt auch dies nicht, so werden weitere Anleitungen gegeben (vgl. das Beispiel oben: Gegebenenfalls wird von der Erzieherin vorgeführt, wie man zählt). Das wesentliche Ziel ist es immer, dass die Kinder die Struktur der jeweiligen Aufgaben bzw. der Handlungen erfassen (die Autoren sprechen von „strukturvermittelnder Unterweisung").

Nutzen natürlicher Lernsituationen in Alltag und Spiel

Ein zu Förder- und Trainingsprogrammen konträrer konzeptioneller Grundgedanke ist, natürliche Lernsituationen für frühes mathematisches Lernen zu nutzen (vgl. Gasteiger 2017; Benz et al. 2015, S. 100 ff.). Natürliches Lernen ist im Gegensatz zu schulischem Lernen gekennzeichnet durch „ein hohes Maß an Eigenaktivität, unmittelbares Sachinteresse, relativ große und andauernde Konzentration, verstärkte Einprägung, flüssiges Anwendungsverhalten und größere Kritikbereitschaft" (Schröder 2002, S. 18). Gelegenheiten, in denen im Elementarbereich natürliches Lernen stattfinden kann, gibt es in Alltags- und Spielsituationen zuhauf (vgl. Gasteiger 2010, S. 97 ff.). Gerade das Spiel wird für Kinder im vorschulischen Bereich als geeignete Form des Lernens angesehen (vgl. Wittmann 2004, S. 52). Das Berücksichtigen natürlicher Lerngelegenheiten heißt nicht, eine Fülle an Stoff zu bearbeiten, sondern bewusst mit den einzelnen Situationen umzugehen. Denn vieles, mit dem die Kinder spielen und was sie bearbeiten, beinhaltet mathematische Vorerfahrungen, die möglicherweise nicht als solche wahrgenommen werden. „Sammeln Sie Gegenstände mit einer bestimmten Eigenschaft. Sie werden staunen: Es gibt zum Beispiel unglaublich viele Gegenstände, die kreisrund sind (…)" (Beutelspacher 2003, S. 5). Allerdings müssen die Gegenstände und Situationen, mit denen sich die Kinder im Rahmen elementarer mathematischer Bildung beschäftigen, nicht unbedingt der unmittelbaren Lebenswelt der Kinder entnommen sein bzw. nicht allein aufgrund der Eigeninitiative des Kindes zum Lerngegenstand werden. „Die Kinder müssen in die Mathematik auch als einer von Menschen geschaffenen künstlichen Welt eingeführt werden, in der mathematische Regeln gelten. Für die mathematische Frühförderung gilt in besonderer Weise, dass man die Kinder nicht nur abholen muss, wo sie stehen, sondern auch hinführen muss, wo sie noch nicht waren, wo aber ihre Zukunft liegt" (Wittmann und Müller 2009, S. 101). Konzeptionelle Vorschläge, die sich im Wesentlichen dem Nutzen natürlicher Lernsituationen zuschreiben lassen, haben dennoch unterschiedliche Ausprägungen. Es gibt Zusammenstellungen konzeptioneller Ideen für frühes mathematisches Lernen, die z. B. in Buchform präsentiert sind und stark auf Alltagsmaterialien zurückgreifen (z. B. Hoenisch und Niggemeyer 2004; Benz 2010), aber auch Konzeptionen, die Materialien, geeignete Spiele, Malhefte und Material für die Hand der Erziehenden anbieten (Wittmann und Müller 2009; Kaufmann und Lorenz 2009) und dennoch kein Programm im oben genannten Sinne darstellen. Im Folgenden werden exemplarisch einzelne Konzeptionen vorgestellt.

Nancy Hoenisch entwickelte in den USA ein Konzept und Materialien, die in Deutschland unter dem Namen „Mathe-Kings" verbreitet werden (vgl. Hoenisch und Niggemeyer 2004). Auf mehreren „Inseln" bauen die Kinder die „Pfeiler einer Brücke", die sie (im Laufe ihres Lebens) von ihrer sinnlichen Welt des Anfassens, Schmeckens, Bewegens und Manipulierens in die Welt der „symbolischen mathematischen Konzepte der Erwachsenen" trägt (Hoenisch und Niggemeyer 2004, S. 15). Wesentlich bei der Aneignung eines soliden mathematischen Grundverständnisses ist die Eigentätigkeit der Kinder. Wenn z. B. auf der „Chaos-Insel" Ordnung geschaffen werden soll, so kann diese Ordnung – je nach Intentionen der Kinder – aufgrund der unterschiedlichsten Kriterien hergestellt werden: Infrage kommen nicht nur Farben, Formen und andere äußere Klassifizierungsmerkmale, sondern auch solche, die sich auf nicht direkt wahrnehmbare Eigenschaften oder die Funktion der Objekte beziehen; beispielsweise kann man alle Dinge zusammenfassen, die gefährlich sind. Weitere Bereiche für Aktivitäten sind bei diesem Konzept Muster, Zahlen, Geometrie, Wiegen, Messen und Vergleichen sowie grafische Darstellungen und Statistik.

Ein Beispiel für die projektartige mathematische Förderung von Kindern im Alltag beschreibt Caluori (2004, S. 280 ff.) in einer „Werkstatt" zum Thema „Ostern", die in einem Kindergarten in der Schweiz von den Erzieherinnen selbst eingerichtet wurde. Die Kinder arbeiten in den einzelnen Stationen der Werkstatt in Gruppen weitgehend selbstständig und in Eigenverantwortung miteinander; alle erhalten einen „Werkstattpass", auf dem ihre Aktivitäten festgehalten werden. Caluori beschreibt, wie sich die Kinder bei ihren Tätigkeiten gegenseitig halfen und unterstützten: „Als Gesamteindruck erweckte die Schar der Kinder einen fröhlichen und entspannten, aber immer konzentrierten Eindruck bei der Arbeit in dieser Werkstatt zum Thema Ostern.".

Beispielsweise sind in einer Station der Werkstatt Eierpaare mit unterschiedlicher Oberflächenstruktur in einer Wanne unter Spreu versteckt. Ein Kind zieht aus der Wanne ein Ei, es selbst oder ein anderes Kind ertastet unter der Spreu das dazu passende Ei; die Kinder klassifizieren auf diese Weise Eier mit taktil gleicher Oberflächenstruktur. In der „Eierfabrik" sind Knetmasse, Kärtchen mit Bildern verschieden vieler Eier sowie Kärtchen mit Ziffern vorgegeben. Die Kinder suchen verschiedene Eierkärtchen aus und formen entsprechend viele Eier aus der Knetmasse. Anschließend legen sie die passenden Ziffernkärtchen dazu, oder sie wählen zwei Eierkärtchen und formen die Summe der dort abgebildeten Eier aus dem Knetmaterial. In dieser Station lernen die Kinder die Mächtigkeit einer Menge in unterschiedlichen Darstellungsformen kennen und sie dem Zahlzeichen zuzuordnen, außerdem erfahren sie handelnd die Addition. Es ist offensichtlich, dass die Aktivitäten der Kinder in einer solchen „Werkstatt" reflektiert werden müssen. Wenn die Kinder zusammen arbeiten und sich gegenseitig helfen, können sie sich gegebenenfalls korrigieren oder um Rat bitten; wichtig ist aber auch der „Werkstattpass", in den die Aktivitäten eingetragen und auch von den Eltern kommentiert werden können. Dadurch ist ein Rückbezug und eine Rückbesinnung auf verschiedenen Ebenen möglich: Die Kinder lernen, über das Erlebte und Erfahrene zu sprechen, und es erfolgt ein bewusster Umgang mit den einzelnen Situationen. Darüber hinaus ist die Erzieherin gefordert, vorhandene Schwierigkeiten zu klären, die Erfahrungen zu systematisieren und die Tätigkeiten zu strukturieren.

Das Frühförderprogramm „Zahlenbuch" (Wittmann und Müller 2009) ist kein Förderprogramm im oben erwähnten Sinne, sondern eine Zusammenstellung von Materialien, Spielen und Malheften. Das zugrunde liegende Konzept und eine Reihe weiterer Ideen werden in einem zugehörigen Handbuch erläutert. Inhaltlich bezieht sich das Frühförderprogramm Zahlenbuch auf die Bereiche „Numerische Bewusstheit" und „Formbewusstheit" (Wittmann und Müller 2009). Die Lernanregungen und Spiele sind dabei so konzipiert, dass „unterschiedlich weit entwickelte Kinder mitmachen können. (…) Die Kinder können sich für Spielzüge unterschiedlich viel Zeit lassen, müssen nicht unbedingt optimale Züge wählen, dürfen Fehler machen und können Hilfe in Anspruch nehmen" (Wittmann und Müller 2009, S. 107).

Konkret kann dies wie folgt aussehen: In bildlicher Form werden Anregungen gegeben, z. B. sind lineare Muster aus roten und blauen Plättchen zu sehen, die die Kinder sinngemäß fortsetzen sollen. Verwenden können sie dabei Plättchen, die mitgeliefert werden, sie können die Muster aber auch frei auf dem Tisch legen. Dabei sind die vorgegebenen Muster als Anregungen für die Kinder gedacht, selbst Muster zu erfinden; z. B. kann sich ein Kind eine Regel zur Erzeugung eines Musters ausdenken und den Anfang legen, die anderen sollen das Muster erraten. Dies wird umso einfacher, je weiter das Muster fortgesetzt wird. Dabei ist es auch möglich, dass die Kinder die Regel sprachlich ausdrücken. Spannend wird dies vor allem dann, wenn die begonnenen Muster sich auf unterschiedliche Weisen fortsetzen lassen, sodass neben der handelnden Darstellung der Muster auch Begründungen (Argumente) auf unterschiedlichem Niveau möglich oder sogar erforderlich sind (vgl. Wittmann 2004, S. 58 f.). Andere Spiele rücken z. B. die Würfelbilder in den Mittelpunkt, die erste Erfahrungen zur Zahlzerlegung ermöglichen – schließlich kann man im Würfelbild der Sechs zwei Dreier erkennen. Geometrische Grunderfahrungen machen Kinder unter anderem bei der Umsetzung der konzeptionellen Ideen zum Falten, Kneten, Nachlegen bzw. Auslegen von Figuren.

Schließlich soll noch auf das für das Kindergartenalter geeignete Montessori-Material verwiesen werden, mit dem sich eine große Zahl von Aktivitäten nicht nur zu den Grundlagen des Zahlbegriffs, sondern auch zum Aufbau geometrischer Vorstellungen durchführen lässt. Eine detaillierte und anschauliche Beschreibung des Materials und möglicher Aktivitäten findet man z. B. bei Milz (1993, S. 158 ff.).

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass Konzeptionen elementarer mathematischer Bildung einerseits die mathematischen Inhalte dem Alter der Kinder entsprechend praktisch und konkret darbieten sollten, andererseits aber auch darauf geachtet werden sollte, dass fachliche Grundideen klar und anschlussfähig erfahrbar gemacht werden (Gasteiger 2017, S. 15 ff.). Aktivitäten und Spiele sollten die Kinder zur aktiven Auseinandersetzung mit mathematischen Gegenständen und zum interaktiven Austausch anregen, wobei darauf zu achten ist, dass Kinder mit unterschiedlichen Kompetenzniveaus miteinander spielen, lernen und arbeiten können.

2.2 Der Übergang in die Grundschule

2.2.1 Die Schuleingangsphase

Kinder werden in Deutschland üblicherweise schulpflichtig, wenn ein neues Schuljahr beginnt. Die Schulpflicht ist in den einzelnen Bundesländern unterschiedlich geregelt. Derzeit sind – je nach Bundesland – Kinder schulpflichtig, wenn Sie bis Ende Juli, Ende August, Ende September oder Ende Dezember sechs Jahre alt geworden sind. Ausnahmen gibt es dabei sowohl im Hinblick auf die Einschulung jüngerer Kinder (sogenannter „Kann-Kinder“ – Kinder, die vorzeitig eingeschult werden können) als auch auf das Zurückstellen um ein Schuljahr, in der Regel mit der Verpflichtung einen Schulkindergarten zu besuchen.

In den letzten Jahren wurden vielfältige Initiativen und Versuche zu einer grundlegenden Veränderung der Schuleingangsphase gestartet. Die Einführung von jahrgangsübergreifenden Lerngruppen in den ersten zwei Schuljahren wurde inzwischen von vielen Bundesländern erprobt, und zwar nicht flächendeckend, aber dennoch regional mehr oder weniger verpflichtend umgesetzt (vgl. z. B. Faust-Siehl 2001b; Nührenbörger 2006). Ein Ausgangspunkt ist dabei die Tatsache, dass die Unterschiede zwischen den Kindern in der allgemeinen und in der kognitiven Entwicklung auch bei altershomogenen Gruppen gewaltig sind (vgl. Abschn. 1.4). Diese Unterschiede sollten deshalb anerkannt und als belebend betrachtet werden. Dies ist eine deutliche Abkehr von der defizitorientierten Betrachtungsweise, bei der vor allem darauf geachtet wird, was einige Kinder schon können und andere (noch) nicht. „Gemeinsamer jahrgangsgemischter Mathematikunterricht setzt auf Individualisierung und Differenzierung“, gleichzeitig aber auch „auf den altersunabhängigen und phasenweise auch altersabhängigen fachbezogenen Austausch“ zwischen den Kindern (Nührenbörger 2006, S. 137).

In jahrgangsgemischten Gruppen findet in der Regel jährlich ein Wechsel in den Lerngruppen statt, ein Teil der Kinder verlässt die Gruppe, andere kommen hinzu; es gibt nicht immer einen festen Klassenverband. Offensichtlich stellt der Unterricht in einer solchen Lerngruppe hohe Anforderungen an die Lehrkraft. Sie ist permanent gefordert, die unterschiedlichen Fähigkeiten der Kinder wahrzunehmen und zu berücksichtigen. Damit einher geht die Forderung, im Unterricht differenzierende und individualisierende Unterrichtsformen umzusetzen (vgl. Brunner et al. 2019).

Die Inhalte des Mathematikunterrichts der Klassen 1 und 2 können teilweise parallel behandelt werden. Dies gilt z. B. für das Rechnen im Zahlenraum bis 20 bzw. bis 100, für Rechenübungen, für geometrische Inhalte und für das Erfassen von Größen (vgl. Kap. 4, 6 und 7). Den Vorteil haben dabei nicht nur die jüngeren Kinder, die von älteren lernen und deren Blick über die aktuelle Betätigung hinaus gelenkt wird, sondern auch die älteren. Wesentlich ist dabei gar nicht so sehr, dass die älteren den jüngeren Kindern helfen können, sondern dass die älteren die Möglichkeit haben, aus der Teilnahme an der Tätigkeit der jüngeren eigene neue Einsichten und Erkenntnisse über den Lerngegenstand zu gewinnen.

Vor allzu hohen Erwartungen an das Lernen in altersgemischten Gruppen wird aufgrund von empirischen Untersuchungen allerdings gewarnt (Rossbach 1999), und es ist klar, dass „positive Veränderungen (…) in erster Linie an den persönlichen Haltungen der Lehrpersonen ansetzen“ müssen (Steinbring 2005, S. 220; Brunner et al. 2019).

Eine enge Verknüpfung von Elementar- und Primarstufe gibt es in vielen Ländern, zu diesen gehören z. B. Australien und die Niederlande. In beiden Ländern beginnt die „Basisschool“ für Kinder mit vier Jahren, wobei in den Niederlanden die ersten beiden Jahre (die *Kleuter*-Stufe[3]) dem Kindergarten bzw. einer Vorschule gleichen. Wie in Deutschland beginnt der (formale) mathematische Anfangsunterricht erst, wenn die Kinder das sechste Lebensjahr vollendet haben. Mathematische Aktivitäten sind jedoch schon in den beiden vorausgehenden Jahren üblich. Aufgabe der *Kleuter*-Stufe ist sowohl die Vermittlung der Grundlagen für das Lesen, Schreiben und Rechnen als auch die Entwicklung der „motorischen, sensorischen, emotionalen, kognitiven, religiösen, sozialen und kreativen Aspekte ihrer Kompetenz“ (Klep 2006, S. 202).

[3] *Kleuters* sind Kinder im Alter von vier bis sechs Jahren.

2.2.2 Gestaltung des Übergangs

Klep hat damit die Vielfalt der Aspekte angesprochen, die für die Kinder, aber auch für die Lehrkräfte und Eltern beim Übergang von der Vorschul- in die Grundschulzeit von Bedeutung sind. Nicht unterschätzt werden sollten darüber hinaus Probleme, die sich aus der bei uns derzeit noch üblichen organisatorischen und administrativen Trennung des Vorschul- vom Schulbereich ergeben. Einige zentrale Unterschiede sind z. B.: Für Kindertagesstätten und Schulen sind in vielen Bundesländern verschiedene Ministerien zuständig; Kindertageseinrichtungen gibt es in den unterschiedlichsten Trägerschaften; die Ausbildungsgänge der frühpädagogischen Fachkräfte und der Grundschullehrkräfte sind auch institutionell völlig getrennt; die Ausbildung der frühpädagogischen Fachkräfte findet bisher meist an Fachschulen für Sozialpädagogik statt, die der Grundschullehrkräfte an Universitäten oder Pädagogischen Hochschulen, und dort gibt es bisher nur wenige Lehrstühle für Früh- oder Elementarpädagogik bzw. -didaktik. Die Zusammenarbeit aller Beteiligten auf allen Ebenen wäre aber gerade mit Blick auf diese Altersgruppe der Vier- bis Sechsjährigen außerordentlich wichtig. Wie dies vor Ort trotz aller institutionellen Unterschiede mit Blick auf die Kinder geschehen kann, soll im Folgenden dargestellt werden.

Kinder (und Eltern) haben Erwartungen, Wünsche und Hoffnungen, häufig aber auch Ängste in Bezug auf die Schule und das Lernen und Leben dort. Für die Kinder werden möglicherweise Bindungen an Bezugspersonen und Freunde gelöst, neue müssen sich erst herausbilden. In der Schule werden an die Kinder andere Anforderungen im Hinblick auf ihr Verhalten in der Gruppe, aber auch auf ihre Zeitplanung sowie die räumliche Orientierung beim Weg zur Schule und in der Schule gestellt. Günstig ist es deshalb, wenn die Schulen mit den Kindertageseinrichtungen in ihrem Einzugsbereich in Kontakt stehen, wenn Erziehende und Lehrkräfte sich über die Entwicklung der Kinder informieren, Kitagruppen die Schule besuchen und Schulkinder in die Kindertageseinrichtungen kommen.

Eine solche Zusammenarbeit zwischen Grundschulen und Kindertagesstätten muss wachsen, sie ist nicht selbstverständlich, sondern entsteht durch die Initiative einzelner Personen und benötigt gegenseitiges Vertrauen, das ebenfalls erst geschaffen werden und wachsen muss (s. auch Gasteiger 2012). Es folgt eine exemplarische Schilderung, wie die konkrete Zusammenarbeit aussehen kann (vgl. auch Peter-Koop et al. 2006, S. 30 ff.):

Etwa zu Beginn des Jahres, in dem die Kinder eingeschult werden sollen, besucht eine Lehrkraft die Kindertagesstätte; erste Gespräche finden statt über Kinder, die z. B. schulpflichtig sind, aber aus Sicht der Erziehenden noch in einigen Bereichen Aufholbedarf zeigen, oder über „Kann-Kinder", bei denen aber unklar ist, ob eine vorzeitige Einschulung empfohlen werden kann oder nicht. Wichtig ist dabei, die Eltern und deren Sichtweise auf das Kind mit einzubeziehen. Zweifellos kennen die Eltern ihre Kinder am besten, allerdings kann ihr Blick durch persönliche Hoffnungen und Wünsche getrübt sein, sodass eine fachkundige Beratung durch Lehrkräfte und Erziehende hilfreich ist.

Etwa ein halbes Jahr vor Schuleintritt findet in der Grundschule eine sogenannte „große Runde“ statt, zu der die Erziehenden aus allen Kindertageseinrichtungen zu einem pädagogischen Austausch eingeladen werden. Themen sind z. B. das Erkennen bzw. die Überprüfung der Schulfähigkeit, die Sprachförderung in der Kita oder die mathematische Frühförderung, sowohl im Allgemeinen als auch mit Blick auf Kinder, die bereits in der Kindertageseinrichtung durch ihr besonderes mathematisches Interesse aufgefallen sind.

Im Anschluss finden die formellen Aufnahmevorgänge in die Schule statt. Die Lehrkräfte nehmen Kontakt mit den Kindern auf und richten ihr Augenmerk unter anderem auf die Entwicklung der Motorik der Kinder, ihre soziale und emotionale Kompetenz, ihre Fähigkeit zur Integration in eine Gruppe, ihr Verhalten gegenüber Erwachsenen, ihre Fähigkeit zum Befolgen von Anweisungen, aber auch auf elementare fachliche Voraussetzungen in den Bereichen Schriftspracherwerb und Mathematik.

Vor dem Übergang von der Kindertageseinrichtung in die Schule hospitieren alle potenziellen Schulanfänger einen Vormittag lang im Unterricht der ersten Klassen der Schule. Diese Schulbesuche sind für die (noch) Kitakinder außerordentlich wichtig und für sie meist auch eindrucksvolle Erlebnisse; sie bekommen erste Eindrücke und können diese verarbeiten, um mögliche Ängste abzubauen.

Bei weiteren Besuchen der Lehrkräfte in den Kindertagesstätten wird noch einmal über alle Kinder gesprochen. Dabei geht es auch um Besonderheiten oder Wünsche, die z. B. für die Klassenzusammensetzung von Bedeutung sein können. Kurz vor den Sommerferien findet in der Schule ein Elternabend statt, zu dem auch die Erziehenden eingeladen sind.

Einige Zeit nach dem Beginn des ersten Schuljahres treffen sich die Grundschullehrkräfte und die Erziehenden zu einer Nachbetrachtung, in der die ersten Erfahrungen mit den Kindern in ihrer Schulzeit angesprochen werden.

Neben dieser Zusammenarbeit am Schulbeginn kann es auch weitere Kontakte zwischen der Schule und den Kindertageseinrichtungen geben. Eine Möglichkeit ist z. B., dass Kinder höherer Jahrgangsstufen gelegentlich in die Kindertageseinrichtungen gehen und dort eigene Bilder zeigen oder kleine Texte oder Geschichten vorlesen.

2.2.3 Erwartungen der Kinder an den Mathematikunterricht

Die Erwartungen der Kinder an die Schule und insbesondere an den Mathematikunterricht hat Peter-Koop (Peter-Koop et al. 2006, S. 23 ff.) untersucht. Unter anderem wurden Kinder in Kindertageseinrichtungen gefragt, ob sie wüssten, was Mathematik ist. Die Ergebnisse dieser Befragungen sind teilweise erheiternd (ein Junge sagte: „Auf einer Matte turnen!“) und zeigen, dass viele Kinder mit dem Wort „Mathematik“ noch keine konkreten Vorstellungen verbinden. Etwas anders sieht es aus, wenn man nach dem „Rechnen“ fragt oder den Kindern Bilder mit Gegenständen oder andere mathematik-bezogene Darstellungen zeigt (wie z. B. den Zahlensatz $4+3=7$, eine Stellenwerttafel, Türme aus Steckwürfeln, Zahlenbilder wie auf dem Würfel, Darstellungen von Kreis, Dreieck und Quadrat oder das Ziffernblatt einer Uhr). Abbildungen mit Zahlen wurden von den Kindern fast immer der Mathematik (bzw. dem Rechnen) zugeordnet, nicht aber geometrische Darstellungen. Auch ist z. B. die Uhr „nicht zum Rechnen da, da muss man die Uhrzeit ablesen, wann es klingelt".

Insgesamt zeigten sich – nicht unerwartet – bei den Kindern recht heterogene, aber eben auch sehr differenzierte Vorstellungen von Mathematik und Mathematikunterricht, die auch ihre Erwartungen an diesen schulischen Unterricht prägen. Einige Äußerungen dieser Kinder mögen dies illustrieren:

- Da rechnet man, was fünf plus fünf ist.
- Da muss man z. B. was größer ist und kleiner, Ketten bunt anmalen, mit solchen Steckleisten, mit Vierecken rechnen.
- Ich weiß nicht, ich glaube Mathearbeit, da muss man mit Bauklötzen schreiben.
- Da muss man so rechnen, wenn man Geld rechnen will später in der Bank, dafür lernt man das.

Im Allgemeinen ist zu beobachten, dass die Kinder lernen wollen, wenn sie in die Schule kommen, und nicht Dinge tun, die sie mit dem Besuch in der Kindertageseinrichtung hinter sich gebracht zu haben glaubten. Sie erwarten, dass sich in der Schule im Vergleich zum Alltag in der Kindertageseinrichtung grundlegend etwas ändert. Manche Kinder werden deshalb möglicherweise bereits in den ersten Schulwochen demotiviert, wenn die Schule nicht ihren eigenen Erwartungen entspricht.

Literatur

Balfanz, R. (1999). Why do we teach young children so little mathematics? Some historical considerations. In J. V. Copley (Hrsg.), *Mathematics in the early years* (S. 3–10). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Baumert, J., Klieme, E., Neubrand, M., Prenzel, M., Schiefele, U., Stanat, P., Tillmann, K.-J., & Weiß, M. (2001). *PISA 2000 – Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich*. Opladen: Leske & Budrich.

Bayerisches Staatsministerium für Arbeit und Sozialordnung, Familie und Frauen. (2012). Der Bayerische Bildungs- und Erziehungsplan für Kinder in Tageseinrichtungen bis zur Einschulung. Cornelsen, Berlin.

Behörde für Arbeit, Soziales, Familie und Integration, Hamburg. (2008). Hamburger Bildungsempfehlungen für die Bildung und Erziehung von Kindern in Tageseinrichtungen. Überarbeitete Neuaufl. Hamburg. https://www.hamburg.de/contentblob/118066/2a650d45167e815a43999555c6c470c7/data/bildungsempfehlungen.pdf. Zugegriffen: 17. Dez. 2019.

Benz, C. (2010). *Minis entdecken Mathematik*. Braunschweig: Westermann.

Benz, C., Peter-Koop, A., & Grüßing, M. (2015). *Frühe mathematische Bildung: Mathematiklernen der Drei- bis Achtjährigen*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Beutelspacher, A. (2003). Der äußere und der innere Blick auf die Welt. *Theorie und Praxis der Sozialpädagogik, 111*(10), 5.

Brunner, E., Gasteiger, H., Lampart, J., & Schreieder, K. (2019). Mathematikunterricht in jahrgangsübergreifenden Klassen der Grundschule in der Schweiz und in Deutschland: eine vergleichende Studie. *Schweizerische Zeitschrift für Bildungswissenschaften, 41*(1), 160–176.

Caluori, F. (2004). *Die numerische Kompetenz von Vorschulkindern – Theoretische Modelle und empirische Befunde*. Hamburg: Kovač.

Diskowski, D. (2008). Bildungspläne für Kindertagesstätten – ein neues und noch unbegriffenes Steuerungsinstrument. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, Sonderheft, 11,* 47–61.

Dornheim, D. (2008). *Prädiktion von Rechenleistung und Rechenschwäche: Der Beitrag von Zahlen-Vorwissen und allgemein-kognitiven Fähigkeiten*. Berlin: Logos-Verlag.

Eggert, D., & Bertrand, L. (2002). *RZI – Raum-Zeit-Inventar*. Dortmund: Borgmann.

Faust-Siehl, G. (2001a). Konzept und Qualität im Kindergarten. In G. Faust-Siehl & A. Speck-Hamdan (Hrsg.), *Schulanfang ohne Umwege* (Bd. 111, S. 53–79). Frankfurt a. M.: Arbeitskreis Grundschule.

Faust-Siehl, G. (2001b). Die neue Schuleingangsstufe in den Bundesländern. In G. Faust-Siehl & A. Speck-Hamdan (Hrsg.), *Schulanfang ohne Umwege* (Bd. 111, S. 194–252). Frankfurt a. M.: Arbeitskreis Grundschule.

Friedrich, G., & de Galgóczy, V. (2004). *Komm mit ins Zahlenland. Eine spielerische Entdeckungsreise in die Welt der Mathematik*. Freiburg: Christophorus-Verlag/Herder.

Fthenakis, W. E. (Hrsg.). (2003). *Elementarpädagogik nach PISA – Wie aus Kindertagesstätten Bildungseinrichtungen werden können. Vorwort*. Freiburg: Herder.

Fthenakis, W. E. (2007). Vorwort. In: Bundesministerium für Bildung und Forschung (Hrsg.) *Auf den Anfang kommt es an: Perspektiven für eine Neuorientierung frühkindlicher Bildung*. Bonn: BMBF, S. 2–9.

Fthenakis, W. E., Schmitt, A., Daut, E., Eitel, A., & Wendell, A. (2009). *Natur-Wissen schaffen: Bd. 2. Frühe mathematische Bildung.* Troisdorf: Bildungsverlag EINS.

Galperin, P. J. (1972). Zum Problem der Aufmerksamkeit. In J. Lompscher (Hrsg.), *Probleme der Ausbildung geistiger Handlungen* (S. 15–23). Berlin: Volk und Wissen.

Gärtner, S. (1993). Körperarbeit zur Förderung rechenschwacher Kinder. In I. Milz (Hrsg.), *Rechenschwächen erkennen und behandeln* (S. 127–157). Dortmund: Borgmann.

Gasteiger, H. (2010). *Elementare mathematische Bildung im Alltag der Kindertagesstätte. Grundlegung und Evaluation eines kompetenzorientierten Förderansatzes*. Münster: Waxmann.

Gasteiger, H. (2012). Gemeinsam an der Sache – für das Kind. In: *Mathematik differenziert. Themenheft: Kooperation*. Braunschweig: Westermann, S. 7–9.

Gasteiger, H. (2017). Frühe mathematische Bildung – sachgerecht, kindgemäß, anschlussfähig. In S. Schuler, C. Streit, & G. Wittmann (Hrsg.), *Perspektiven mathematischer Bildung im Übergang vom Kindergarten zur Grundschule* (S. 9–26). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Hoenisch, N., & Niggemeyer, E. (2004). *Mathe-Kings. Junge Kinder fassen Mathematik an*. Weimar: Verlag Das Netz.

Jugendministerkonferenz. (2004). Gemeinsamer Rahmen der Länder für die frühe Bildung in Kindertageseinrichtungen. Beschluss vom 13./14.05.2004. http://www.kmk.org/fileadmin/pdf/PresseUndAktuelles/2004/Gemeinsamer_Rahmen_Kindertageseinrich_BSJMK_KMK.pdf. Zugegriffen: 21. Aug. 2012.

Klep, J. (2006). Persönliche Entwicklung und mathematische Aktivität: Förderung mathematischer Kompetenzen beim Übergang vom Kindergarten zur Grundschule in den Niederlanden. In M. Grüßing & A. Peter-Koop (Hrsg.), *Die Entwicklung mathematischen Denkens in Kindergarten und Grundschule: Beobachten – Fördern – Dokumentieren* (S. 200–216). Offenburg: Mildenberger.

Kaufmann, S., & Lorenz, J. H. (2009). *Elementar – Erste Grundlagen in Mathematik*. Braunschweig: Westermann.

Krajewski, K. (2007). Prävention der Rechenschwäche. In Schneider, W., Hasselhorn, M. (Hrsg.), *Handbuch der Psychologie: Bd. 10. Pädagogische Psychologie* (S. 360–370). Göttingen: Hogrefe.

Krajewski, K., Nieding, G., & Schneider, W. (2007). *Mengen, zählen, Zahlen*. Berlin: Cornelsen.

Krajewski, K., & Schneider, W. (2009). Early development of quantity to number-word linkage as a precursor of mathematical school achievement and mathematical difficulties: Findings from a four-year longitudinal study. *Learning and Instruction, 19*(6), 513–526.

Kultusministerium Niedersachsen. (2018). *Orientierungsplan für Bildung und Erziehung im Elementarbereich niedersächsischer Tageseinrichtungen für Kinder*. Langenhagen: Gutenberg Beuys Feindruckerei.

Leuschina, A. M. (1962). *Rechenunterricht im Kindergarten*. Berlin: Volk und Wissen.

Lorenz, J. H. (2012). *Kinder begreifen Mathematik. Frühe mathematische Bildung und Förderung*. Stuttgart: Kohlhammer.

Ministerium für Bildung, Rheinland-Pfalz. (2018). *Bildungs- und Erziehungsempfehlung für Kindertagesstätten in Rheinland-Pfalz plus Qualitätsempfehlungen*. Berlin: Cornelsen.

Ministerium für Bildung, Jugend und Sport, Brandenburg. (2004). Grundsätze elementarer Bildung in Einrichtungen der Kindertagesbetreuung im Land Brandenburg. Potsdam.

Minister für Bildung und Kultur und Wissenschaft, Saarland. (2018). Bildungsprogramm mit Handreichungen für saarländische Krippen und Kindergärten. Weimar: verlag das netz.

Ministerium für Familie, Kinder, Jugend, Kultur und Sport, Nordrhein-Westfalen. (2016). *Bildungsgrundsätze für Kinder von 0 bis 10 Jahren in Kindertagesbetreuung und Schulen im Primarbereich in Nordrhein-Westfalen. Fundament stärken und erfolgreich starten*. Freiburg: Herder.

Nührenbörger, M. (2006). Anfangsunterricht Mathematik in jahrgangsgemischten Lerngruppen. In M. Grüßing & A. Peter-Koop (Hrsg.), *Die Entwicklung mathematischen Denkens in Kindergarten und Grundschule: Beobachten – Fördern – Dokumentieren* (S. 133–149). Offenburg: Mildenberger.

Nguyen, T., Watts, T. W., Duncan, G. J., Clements, D. H., Sarama, J. S., Wolfe, C., & Spitler, M. E. (2016). Which preschool mathematics competencies are most predictive of fifth grade achievement? *Early Childhood Research Quarterly, 36,* 550–560.

Peter-Koop, A., Hasemann, K., & Klep, J. (2006). Übergänge gestalten. IPN Kiel: SINUS-Transfer Grundschule. Mathematik, Modul G 10. (siehe auch http://www.sinus-grundschule.de).

Preiß, G. (2007). *Leitfaden Zahlenland 1. Verlaufspläne für die Lerneinheiten 1 bis 10 der „Entdeckungen im Zahlenland“*. Kirchzarten: Klein Druck.

Prenzel, M., Heidemeier, H., Ramm, G., Hohensee, F., & Ehmke, T. (2004). Soziale Herkunft und mathematische Kompetenz. In PISA-Konsortium Deutschland (Hrsg.), *PISA 2003. Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland – Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs.* Waxmann, Münster, S. 273–282.

Radatz, H., & Rickmeyer, K. (1991). *Handbuch für den Geometrieunterricht an Grundschulen*. Hannover: Schroedel.

Rossbach, H.-G. (1999). Empirische Vergleichsuntersuchungen zu den Auswirkungen von jahrgangsheterogenen und jahrgangshomogenen Klassen. In H. Laging (Hrsg.), *Altersgemischtes Lernen in der Schule* (S. 80–91). Hohengehren: Schneider.

Roux, S. (2008). Bildung im Elementarbereich – Zur gegenwärtigen Lage der Frühpädagogik in Deutschland. In F. Hellmich & F. Köster (Hrsg.), *Vorschulische Bildungsprozesse in Mathematik und Naturwissenschaften* (S. 13–25). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Schröder, H. (2002). *Lernen – Lehren – Unterricht: lernpsychologische und didaktische Grundlagen*. München, Wien: Oldenbourg.

Senatorin für Soziales, Kinder, Jugend und Frauen, Freie Hansestadt Bremen. (2012). Rahmenplan für Bildung und Erziehung im Elementarbereich. Bremen.

Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Wissenschaft, Berlin. (2014). Berliner Bildungsprogramm für Kitas und Kindertagespflege. Aktualisierte Neuauflage. Berlin: verlag das netz.

Sozialministerium Mecklenburg-Vorpommern (2005). *Rahmenplan für die zielgerichtete Vorbereitung von Kindern in Kindertageseinrichtungen auf die Schule* (Bd. 2). Schwerin: cw Obotritendruck.

Steinbring, H. (2005). *The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction. An epistemological perspective*. Berlin: Springer.

Stern, E. (1997). Erwerb mathematischer Kompetenzen: Ergebnisse aus dem SCHOLASTIK-Projekt. In F. E. Weinert & A. Helmke (Hrsg.), *Entwicklung im Grundschulalter*. Weinheim: Beltz.

van Luit, J. E. H., & van de Rijt, B. A. M. (1995). *Rekenhulp voor kleuters*. Doetichem: Graviant.

Vygotsky, L. S. (1969). *Denken und Sprechen*. Berlin: Akademie-Verlag.

Wittmann, E. C. (2004). Design von Lernumgebungen zur mathematischen Frühförderung. In G. Faust, M. Götz, H. Hacker, & H.-G. Roßbach (Hrsg.), *Anschlussfähige Bildungsprozesse im Elementar- und Primarbereich* (S. 49–63). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Wittmann, E. C., & Müller, G. N. (2009). *Das Zahlenbuch. Gesamtpaket zum Frühförderprogramm*. Stuttgart: Klett.

3 Mathematiklernen in der Schule

3.1 Verständnis von Lernen

Im Laufe der Zeit gab es verschiedene Theorien dazu, wie Menschen lernen. Heute besteht weitgehend Einigkeit darüber, dass Lernen ein aktiver und konstruktiver Prozess ist, der im Wesentlichen vom Kind bzw. von jedem Lernenden selbst vollzogen werden muss.

Welche Bedingungen müssen eigentlich erfüllt sein, damit man etwas nachhaltig lernt? Ein kleines Gedankenexperiment kann hilfreich sein, sich darüber Klarheit zu verschaffen. Sucht man gedanklich nach Fakten, Zusammenhängen, Wissensbausteinen etc., von denen man sagen kann, man hat sie durchdrungen und erfolgreich gelernt: Wie lässt sich der zugehörige Lernprozess dazu charakterisieren?

Es sind konstruktivistische Grundannahmen, die dem heutigen Verständnis von Lernen zugrunde liegen (Reusser 2006). Wissenserwerb erfordert die aktive Beteiligung des Lernenden. Auf der Basis des individuellen Vorwissens werden neue Inhalte in bestehende eingeordnet und für den Lernenden verfügbar. Fischbein (1990, S. 7) formuliert speziell auf die Mathematik bezogen: „Mathematik lernen heißt Mathematik konstruieren".

Diese Konstruktionsprozesse bedürfen einer Auseinandersetzung mit der Umwelt. Piaget (1974) beschreibt dies ausführlich in seinem Werk *Der Aufbau der Wirklichkeit beim Kinde:* „Intelligenz beginnt so weder mit der Erkenntnis des Ich noch mit der der Dinge als solchen, sondern mit der Erkenntnis ihrer Interaktion, und sie organisiert die Welt und sich selbst, indem sie sich gleichzeitig den beiden Polen dieser Interaktion zuwendet" (S. 341).

Lernen ist deshalb auch immer als sozialer Prozess zu verstehen. Oft erfolgt Lernen erst im Austausch mit anderen und durch gezielte Anregungen im Gespräch mit Lernpartnern oder Erwachsenen durch sogenannte Ko-Konstruktion (Reusser 2006). Gerade

K. Hasemann und H. Gasteiger, *Anfangsunterricht Mathematik,* Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II, https://doi.org/10.1007/978-3-662-61360-3_3

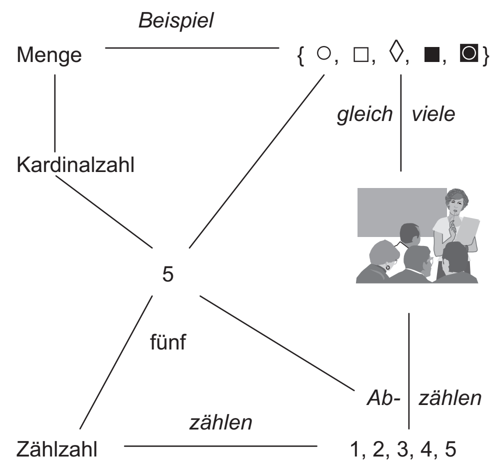


Abb. 3.1 Hypothetisches Wissensnetz zur Zahl 5

für Bildungsprozesse im Elementarbereich wird dieser Ansatz als sehr wesentlich erachtet (Fthenakis et al. 2009; van Oers 2004).

Vernetzung ist ein weiteres Schlagwort, das im Zusammenhang mit Lernen von großer Bedeutung ist. Werden neue Inhalte in bereits bestehende Wissensstrukturen integriert, so verfügt der Lernende im Laufe der Zeit über ein immer komplexer werdendes Gefüge von Wissensstrukturen, durch das dann auch ein situationsspezifisches und flexibles Agieren in Problemlösesituationen möglich wird. Hilfreich kann die Vorstellung sein, dass die im Gedächtnis eines Menschen gespeicherten Wissensstrukturen wie ein Netz (Abb. 3.1) organisiert sind: In den Knoten des Netzes stehen Begriffe, Beispiele, Bilder, Situationen usw., die Maschen kennzeichnen die Verbindungen (Beziehungen) zwischen diesen Begriffen, Beispielen usw.

Diese Vorstellung von einem Netz ist als Metapher zu verstehen, d. h. wenn man über „Netze" spricht und versucht, Wissensstrukturen von Individuen mithilfe von Netzen darzustellen, so sind dies zunächst Hypothesen über die interne Speicherung dieses Wissens.

Richard Skemp (1979, S. 144 f.) hat ein anschauliches Bild entworfen, indem er dieses beim Individuum vorhandene Wissensnetz mit einer Landkarte verglich: Nehmen wir an, wir hätten eine Landkarte, wüssten aber nicht, wo genau wir uns gerade befinden, welcher Punkt auf der Landkarte den eigenen, gegenwärtigen Standort repräsentiert. Kennen wir diesen Punkt nicht, so wissen wir nicht, wo wir sind – „wir sind verloren" –, es sei denn, wir können den aktuellen Standort aus der Karte rekonstruieren. Übertragen auf Wissensnetze heißt das: Wird man mit einem neuen Begriff oder einem neuen Sachverhalt konfrontiert, der nicht zu den bereits vorhandenen Wissensstrukturen passt oder sich mit ihnen erklären lässt, so kann man mit diesem Begriff oder diesem Sachverhalt zunächst nichts anfangen. Verstanden wird dieser Begriff erst, wenn es gelingt, den neuen Sachverhalt mit dem bereits bestehenden Wissensnetz zu verknüpfen. Anders ausgedrückt: „Lernen“ bedeutet die Erweiterung oder Umstrukturierung des bestehenden Wissensnetzes.

Die Modellvorstellung des Netzes lässt sich noch um einen Aspekt erweitern. Das Wissensnetz eines Menschen ist viel zu umfangreich, als dass es in einer bestimmten Situation als Ganzes verwendet werden könnte. „Aktiviert“ wird stets nur ein kleiner Teil des Wissensnetzes. Walter Kintsch (1988) hat den Begriff „assoziatives Netz“ geprägt: Welcher Teil aktiviert wird, hängt von der Situation ab und wie vertraut man mit ihr ist (und was man mit ihr „assoziiert“). Manchmal hängt die Aktivierung auch von bestimmten Reizen ab (so z. B. bei Sachaufgaben von bestimmten Reiz- oder Schlüsselwörtern wie „mehr“ oder „weniger“ oder „gibt ab“; vgl. Abschn. 7.2.3). Nur mit dem aktivierten Teil des Wissensnetzes kann man die Situation erfassen und ihre Bedeutung oder ihren Sinn erkennen. Falls sich dieses Erfassen und Erkennen jedoch als nicht möglich erweist, so muss ein anderer Teil des Wissensnetzes aktiviert (eine andere Sichtweise eingenommen) werden, oder es muss das Netz erweitert oder sogar teilweise neu strukturiert werden. Auf den Punkt gebracht, lässt sich sagen:

- Die Aufmerksamkeit des Lernenden wird beim Erwerb neuen Wissens von den bei ihm bereits vorhandenen Wissensstrukturen gesteuert.
- Dieses bereits vorhandene Wissen bildet beim Einarbeiten des neuen Wissens den verständnisstiftenden Rahmen.
- Für das Individuum ist die Bedeutung der Begriffe, die es erwirbt, deshalb zunächst abhängig von dem Kontext, in dem es die Begriffe erworben hat.

Im Zusammenhang mit der Vernetzung spricht man auch davon, dass Lernprozesse kumulativ sind (Shuell 1986). Kumulativ ist hier zu interpretieren als strukturiertes „Anhäufen“ von Wissen im Sinne des Vernetzens von Neuem mit Bekanntem. Berücksichtigt man diesen Aspekt des Lernens im Unterricht, so ist es zwingend nötig, das Vorwissen der Kinder zu kennen und darauf aufzubauen. Erst auf dieser Basis können Kinder neues Wissen integrieren. Zudem sollten Lernprozesse auch immer Phasen der Rückbesinnung und Wiederholung einschließen, um flexibel für die Integration neuer Wissensbestandteile zu bleiben.

Letztlich ist Lernen ein Prozess, den jedes Individuum selbst steuern muss. „Alle Konstruktionsschritte bei der begrifflichen Organisation von Erfahrungen müssen von den Lernenden – auf angebotenen oder selbst gefundenen Wegen – individuell und in sozialen Bezügen selbst vollzogen werden“ (Reusser 2006, S. 154). Wissen ist in diesem Sinne nicht übertragbar, und der Prozess des Lernens muss von jedem Individuum selbst geleistet werden: „Darum ist Begriffsbildung auch ganz und gar die Sache des Begriffsbildners. Niemand kann ihm diese Aufgabe abnehmen“ (Aebli 1981, S. 99).

Gestaltet man Unterricht vor diesem Hintergrund, so kann es nicht darum gehen, Wissen allein zu vermitteln oder zu lehren, sondern viel eher darum, Lerngelegenheiten zu schaffen, die es den Lernenden ermöglichen, auf der Basis ihres Vorwissens neues Wissen zu konstruieren. Es wäre allerdings ein Fehlschluss, diese Erkenntnisse zum

Lernen so zu interpretieren, dass Lehrkräfte im Unterricht nicht mehr „unterrichten" dürfen, weil sich das Kind in letzter Instanz selbst „bilden" muss. Eine ausgewogene Balance zwischen Instruktion und Konstruktion (Presmeg 2013) kann gerade dazu beitragen, dass effektiv gelernt wird. Dazu gehören beispielsweise präzise gestellte Fragen oder Impulse, die die Kinder anregen, nachzudenken, Neues zu erforschen, selbst Erklärungsmodelle zu finden und sich mit anderen auszutauschen, aber auch eine Lernatmosphäre, in der eigene Ideen willkommen sind und in der auch Irrwege toleriert werden. Gerade im Sinne der Vernetzung von neuem Wissen mit bereits Bekanntem, ist es sogar eine zentrale Aufgabe der Lehrkraft, die individuellen Lernstände der Kinder im Blick zu haben und mit adäquaten Unterstützungsangeboten zu reagieren (vgl. Abschn. 4.1.2 und 5.2.1).

3.2 Didaktische Grundlagen für den mathematischen Anfangsunterricht

Die Überlegungen zum Lernen im Allgemeinen gelten insbesondere natürlich auch für mathematisches Lernen. Bei der Planung des mathematischen Anfangsunterrichts sollte man deshalb nicht aus den Augen verlieren, dass der Geist eines Kindes kein „unbeladenes Schiff"[1] ist – wie auch die Untersuchungen zu den Vorkenntnissen der Schulanfängerinnen und Schulanfänger (Abschn. 1.4) zeigen – und dass wir keinen „Nürnberger Trichter"[2] zur Verfügung haben, mit dem wir diesen Geist füllen könnten. Wir können nicht erwarten, dass neue Begriffe durch geschickte Präsentation einfach von der Lehrkraft auf die Schülerinnen und Schüler übergehen. Stattdessen müssen die Lernenden „mathematische Begriffe in einem fortlaufenden sozialen Prozess rekonstruieren, in einem Prozess, bei dem sich elementare und nur teilweise effiziente kognitive Strukturen, die zudem mit Fehlvorstellungen durchsetzt sind, allmählich hin entwickeln zu differenzierteren, klaren und miteinander verknüpften Strukturen, die sich immer besser zum Problemlösen eignen" (Wittmann 1998, S. 149).

Bei der Planung und Gestaltung mathematischer Lerngelegenheiten ist zu beachten, dass Neues zunächst nur verstanden werden kann mithilfe von bereits Verstandenem. Mathematische Begriffe werden zudem meist in einem spezifischen Kontext erworben, sodass deren Bedeutung von den Lernenden zunächst häufig mit dem Kontext verbunden wird, in dem der Begriffserwerb stattgefunden hat. Die praktischen – didaktischen und methodischen – Konsequenzen hat Bauersfeld (1983), der dafür den Begriff

[1] „Der Geist ist kein Schiff, das man beladen kann, sondern ein Feuer, das man entfachen muss" (Plutarch, 46–120 n. Chr.).

[2] Der Begriff wurde zu einem geflügelten Wort für ein Lernen, das ohne eigene Anstrengung durch Übertragung von Wissen möglich ist. Vermutlich geht er zurück auf den Titel eines Poetiklehrbuches des Nürnberger Dichters Georg Philipp Harsdörffer (1607–1658).

„subjektive Erfahrungsbereiche" geprägt hat, so beschrieben: Die Lernenden (die „Subjekte") machen in einem bestimmten Bereich Erfahrungen, z. B. indem sie Handlungen ausführen. In der sozialen Interaktion mit anderen (z. B. mit Mitschülerinnen/Mitschülern und der Lehrkraft) bekommen diese Handlungen für die Lernenden einen Sinn, sie erkennen, welche (mathematische) *Bedeutung* diese Handlungen haben. Im Mathematikunterricht sind diese Bedeutungen eng mit dem verwendeten Anschauungsmaterial und den Einstiegsbeispielen verbunden. Wenn z. B. durch das Wegnehmen von drei Klötzen aus einer Menge mit sieben Klötzen die Subtraktion $7-3$ veranschaulicht werden soll, so ist diese Handlung nicht per se mathematisch. Das mathematisch Gemeinte muss vom Lernenden durch aktive, eigene geistige Handlungen und durch das Aushandeln mit Lernpartnern und der Lehrkraft entdeckt werden: „Daher hängt die subjektive Sinnkonstruktion (…) eng zusammen mit dem eigenen Handeln und (…) an den als Vorbild wahrgenommenen relevanten Handlungen von Lehrer, Mitschülern und anderen Personen (sowie) an deren Kommentaren" (Bauersfeld 1985, S. 15). Bauersfeld hat damit die Bedeutung der Handlungen und der Darstellungen für das Lernen von Mathematik herausgestellt, aber auch die des kommunikativen Prozesses: Der Sinn der Handlungen und Darstellungen erschließt sich dem Individuum durch eigenes geistiges Tun in der Interaktion mit anderen.

Laut Piaget (1967) erfolgt die Entwicklung des logischen Denkens beim Kinde in mehreren Entwicklungsstufen: Vom *senso-motorischen* Stadium (im Alter von 0 bis etwa 1½ Jahren) über das *prä-operative* (1½ bis 7 Jahre) und das *konkret-operative* (7 bis 12 Jahre) hin zum *formal-operativen* Stadium. Die Zuordnung der Stadien zum Lebensalter des Kindes wird heute kritisch gesehen, allerdings hat die Theorie der Entwicklung des logischen Denkens für den Mathematikunterricht nach wie vor grundlegende Bedeutung. Der zentrale Begriff in dieser Theorie Piagets ist der der „Operation": Operationen (auch „Denkhandlungen" genannt) entwickeln sich beim Individuum durch seine aktive Auseinandersetzung mit der Umwelt (durch „Adaption"). Sie werden im Geist in kognitiven Strukturen („Schemata") organisiert. Bei diesem aktiven Tun des Individuums spielen die *konkreten* Handlungen eine zentrale Rolle. Durch *Verinnerlichung* dieser konkreten Handlungen entstehen die Denkhandlungen. Diese Denkhandlungen ermöglichen wiederum ein flexibles mentales Umgehen mit den entsprechenden Sachverhalten. Jedoch sind die Kinder im konkret-operativen Stadium nur zu solchen Denkhandlungen fähig, die sie – wenigstens im Prinzip – auch als konkrete Handlungen ausführen könnten. Ein Beispiel ist die in Abschn. 1.2.3 (Abb. 1.6) angesprochene Einsicht der Kinder in die Äquivalenz von Mengen auch bei Veränderungen in der räumlichen Ausdehnung der Objekte. Auf der konkret-operativen Stufe der Entwicklung sind Kinder in der Lage, die Veränderung mithilfe einer Denkhandlung rückgängig zu machen: Ihr Denken ist *reversibel* geworden. Im konkreten Fall werden sie die Gleichheit der beiden Mengen erkennen, ohne dass sie den Ausgangszustand mit den konkreten Gegenständen wiederherstellen müssen.

Vor dem Hintergrund der Theorie Piagets bekam ein einzelner Aspekt aus einer Unterrichtstheorie von Bruner (1972) über lange Zeit geradezu den Status eines

Dogmas für den Mathematikunterricht in der Grundschule, das sogenannte *EIS-Prinzip*. Dabei stehen die Buchstaben E, I und S für drei verschiedene Arten der Darstellung von Sachverhalten und von Wissen: *enaktiv* (d. h. durch Handlungen), *ikonisch* (d. h. durch Bilder) und *symbolisch* (d. h. durch Zeichen aller Art, insbesondere auch durch Sprache). Da sich Schulanfängerinnen und Schulanfänger – gemäß Piaget – im konkret-operativen Stadium befinden, muss (bei dogmatischer Umsetzung des EIS-Prinzips) jede mathematische Erörterung mit Handlungen beginnen, die die Kinder mit konkreten Objekten selbst durchführen. Der (mathematische) Kern, also die mit oder in den Handlungen gemeinte mathematische Beziehung, wird anschließend bildlich dargestellt. Dabei wird teilweise oder ganz von den für den mathematischen Sachverhalt unwesentlichen Eigenschaften der konkreten Objekte abgesehen. Schließlich erfolgt die Darstellung des Sachverhaltes mit Zeichen, sei es sprachlich oder mit mathematischen Symbolen. Wesentlich bei diesem Prozess ist allerdings, dass bereits in den konkreten Handlungen der mathematische Kern des zu erarbeitenden Sachverhaltes enthalten sein muss. Der Übergang von den Handlungen zu den Bildern und schließlich den Symbolen geht – so die Theorie – einher mit der Verinnerlichung der konkreten Handlungen zu Denkhandlungen und mit dem Aufbau oder der Erweiterung der kognitiven Strukturen beim Kind. Man kann auch sagen, dieser Prozess begleitet und stützt den Abstraktionsprozess. Dieses Vorgehen – erst die Handlung, dann die bildliche Darstellung, dann die symbolische Notation – wird in der mathematikdidaktischen Diskussion heute nicht absolut gesetzt, wenngleich man sich der Bedeutung der verschiedenen Darstellungsebenen bewusst ist. Als wesentlich für den mathematischen Erkenntnisprozess wird aber nicht das strikte Einhalten der Reihenfolge der Darstellungen angesehen, sondern die Fähigkeit, mathematische Inhalte flexibel von einer Darstellung in die andere überführen zu können. Insbesondere sollte das Kind fähig sein, den Prozess in jeder Richtung zu durchlaufen, also u. a. in der Lage sein, zu mathematischen Zeichen passende Bilder, Handlungen oder Situationen („Rechengeschichten", vgl. Abschn. 7.2) zu (er-)finden. Auch ist zu bedenken, dass eine ikonische Repräsentation manchmal verwirrend sein kann und dann den Abstraktionsprozess wenig unterstützt; dies kann beispielsweise bei einigen Darstellungen von Subtraktionen der Fall sein (vgl. z. B. Abb. 4.65 in Abschn. 4.4). Generell sollte die Lehrperson bei jedem mathematischen Sachverhalt erneut überlegen, welche Darstellungsebenen sinnvoll zur Unterstützung des Abstraktionsprozesses verwendet werden können.

Als Beispiel für die verschiedenen Arten der Darstellung eines mathematischen Sachverhaltes betrachten wir die Aufgabe „Tina hatte 3 Murmeln, sie gewann beim Spiel mit Jonas einige dazu. Jetzt hat sie 7 Murmeln. Wie viele Murmeln hat sie gewonnen?" Diese Situation lässt sich auf mehrere Weisen durch Handlungen darstellen, so können zwei Kinder sie unmittelbar nachspielen, aber sie kann z. B. auch mit Kugeln oder Plättchen auf dem Tisch dargestellt werden. Die bildliche Darstellung kann ein – mehr oder weniger – getreues Abbild der Spielsituation sein. Sie kann aber auch ein schematisches Bild sein, aus dem nur noch der Kern der Denkhandlung, nämlich das Ergänzen von 3 zu 7 Murmeln, zu entnehmen ist (Abb. 3.2). Mögliche symbolische

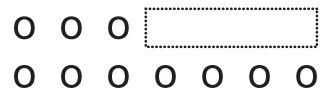


Abb. 3.2 Ergänzen von 3 zu 7

Darstellungen sind „$3+\ldots=7$“ oder der Satz „Welche Zahl muss man zu 3 ergänzen, um 7 zu bekommen?“ (Nicht direkt die Sachsituation bzw. die Handlung darstellen würde dagegen „$7-3=\ldots$“, weil diese Zeichenkette das Abziehen ausdrückt und nicht das Ergänzen.) Abb. 3.2 zeigt im Übrigen sehr deutlich, dass die bildliche Darstellung für sich genommen keineswegs eindeutig ist und von einem unvoreingenommenen Betrachter auch völlig anders interpretiert werden kann.

Auch wenn das EIS-Prinzip nicht starr und unreflektiert umgesetzt werden sollte, steht außer Frage, dass *Materialien* aller Art – konkrete Objekte ebenso wie Bilder und schematische Darstellungen – eine wichtige Funktion im mathematischen Anfangsunterricht haben (vgl. dazu auch Abschn. 4.2). Krauthausen (2018, S. 308) weist darauf hin, dass es eine fast unübersehbare Fülle solcher Materialien auf dem Markt gibt und dass damit für die Lehrenden die Auswahl immer schwieriger wird. Es stellt sich die Frage nach ihrem Wert: In welchen Unterrichtssituationen und mit welchen Intentionen können welche Materialien eingesetzt werden, und was können sie bewirken? In der Frage klingt bereits an, dass es *das* geeignete Material nicht gibt. Die Wirkung jedes Arbeitsmittels hängt sowohl von der spezifischen didaktischen Situation ab, in der das Material eingesetzt wird, als auch davon, was das Kind damit tut, wie es zu seinem Vorwissen, seinen Erfahrungen, aber auch seinen Vorlieben bei der Verwendung von Arbeitsmitteln passt (vgl. Abschn. 4.2).

Zu beachten ist außerdem, dass Erfahrungen mit einem Arbeitsmittel nicht unmittelbar auf ein anderes übertragen werden können: So „ist ein Addieren oder ein Subtrahieren mit Perlen, mit Steckwürfeln, mit Fingern oder mit Rechengeld jeweils ein Operieren in einer anderen ‚Mikrowelt‘“, dazwischen besteht „nicht einfach eine abstrakte (mathematische) Beziehung“ (Radatz 1991, S. 49). Auch korrektes Umgehen mit einem Arbeitsmittel bedeutet keine Garantie für die Verinnerlichung der mathematischen Ideen, Strukturen oder Begriffe. Problematisch ist es, wenn das Arbeiten am konkreten Material zum „Selbstzweck“ wird und nicht das Ziel anvisiert, die konkrete Handlung zur Denkhandlung zu verinnerlichen (vgl. Krauthausen 2018, S. 315, 325). Kurz gesagt: Entscheidend für den Lernprozess des Kindes ist der „Übergang vom Blick zum Durchblick“ (Winter 1998, S. 76). Wie wir noch sehen werden, ist die Unfähigkeit, sich vom Konkreten zu lösen, eines der Hauptprobleme gerade der schwächeren Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht (Abschn. 5.2).

Dennoch: „Eine verfrühte Abkehr von anschaulichen Darstellungen bevor wirklich tragfähige mentale Bilder vom Kind konstruiert und genutzt werden können, kann … als der Kardinalfehler des Anfangsunterrichts bezeichnet werden“ (Krauthausen 2018, S. 316). Anschauliche Darstellungen sind für das Kind Hilfen bei der Konstruktion mentaler Bilder und damit beim Begriffserwerb, wenn sie dazu beitragen, dass die neuen

Sachverhalte mit dem bereits bestehenden Wissensnetz verknüpft werden. Darstellungen und Materialen müssen also für den jeweiligen Sachverhalt geeignet sein und sollen den Blick der Kinder auf die strukturellen Beziehungen richten: „Eine wünschenswerte Einstellung der Kinder gegenüber Arbeitsmitteln und Veranschaulichungen kann sich nur dann entwickeln, wenn die eingesetzten Materialien das Ausnutzen effektiver Strategien auch nahelegen“ (vgl. Krauthausen 2018, S. 325; s. a. Abschn. 4.2).

3.3 Zielperspektiven des Mathematikunterrichts in der Grundschule

Bevor im Folgenden die Inhalte des mathematischen Anfangsunterrichts ausführlicher erläutert werden (Kap. 4 bis 7), soll an dieser Stelle noch ein Überblick über allgemeine Ziele des Mathematikunterrichts erfolgen und kritisch reflektiert werden, was Kinder nach Abschluss der Grundschulzeit wirklich können sollen. Schule muss sich heute dafür in die Verantwortung nehmen lassen, ob Kinder am Ende der Grundschulzeit über bestimmte Kompetenzen verfügen können oder eben nicht. Nach dem schlechten Abschneiden deutscher Schülerinnen und Schüler bei den internationalen Vergleichsstudien TIMSS[3] und PISA[4] wurde ein Paradigmenwechsel von der sogenannten Input- zur Output-Orientierung eingeleitet (vgl. Böhme et al. 2012). Das heißt, der Blick richtet sich heute in erster Linie darauf, welche Kompetenzen Kinder in der Grundschule erwerben sollen, und weniger auf detailliert ausgearbeitete Inhalte, die als Vorgabe für den Unterricht dienen.

Beispielsweise sollen Kinder am Ende des vierten Schuljahres bis zur Million sicher rechnen oder funktionale Beziehungen in Realsituationen erkennen und Problemstellungen dazu mathematisch bewältigen können. Diese Ziele sind verbindlich – sie sind nicht nur festgelegt in Richtlinien, sondern sie sind ein Recht der Kinder: Lehrerinnen und Lehrer haben dafür zu sorgen, dass die Kinder, die ihnen anvertraut sind, die Grundrechenarten flexibel und sicher anwenden können (ebenso, wie sie lesen und schreiben können müssen). Welche Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten die Kinder im Mathematikunterricht der Grundschule darüber hinaus noch erwerben sollen, wurde in den letzten Jahren immer wieder diskutiert und ist in den deutschlandweit verbindlichen Bildungsstandards geregelt (s. u., KMK 2004).

Um sinnvoll überlegen zu können, welche mathematischen Kompetenzen Kinder in der Grundschule erwerben sollen, muss in den Blick genommen werden, was Mathematik als Fach eigentlich ausmacht und was es folglich bedeutet, mathematisch kompetent zu sein. Dabei spielt auch die Forderung nach *Anschlussfähigkeit* der Bildungsprozesse eine entscheidende Rolle: Ebenso wie mathematische Bildung im

[3] *Third International Mathematics and Science Study.*

[4] *Programme for International Student Assessment.*

Elementarbereich anschlussfähig zum mathematischen Anfangsunterricht sein muss (vgl. Abschn. 2.1, Gasteiger 2017), sollte bedacht werden, dass in der Grundschulzeit wichtige Grundlagen für zentrale mathematische Denkweisen gelegt werden, die in den weiterführenden Schulen gefordert werden. Die Ausbildung solch zentraler mathematischer Denkweisen kann aber durch eine zu enge, allein auf die Bedürfnisse der Grundschule zugeschnittene Betrachtungsweise behindert werden (vgl. Abschn. 4.3.2). Beispielsweise können Kinder bei der Bruchrechnung scheitern, wenn sie die Zahlen ausschließlich als Anzahlen kennengelernt haben (vgl. z. B. Hasemann 1995). Ein anderes Beispiel sind Begriffe wie Kongruenz und Symmetrie, bei denen sich die Kinder im Laufe der Zeit von der Betrachtung von Figuren lösen müssen, um zu einer Vorstellung von Abbildungen zu kommen (vgl. Kap. 6).

3.3.1 Allgemeine Ziele des Mathematikunterrichts

Freudenthal charakterisiert Mathematik folgendermaßen: „Mathematik ist eine Geistesverfassung, die man sich handelnd erwirbt, und vor allem die Haltung, keiner Autorität zu glauben, sondern immer wieder ‚warum' zu fragen" (1982, S. 140). Reflektiert man dieses Zitat, so wird schnell klar, dass es nicht das Ziel des Mathematikunterrichts sein kann, Kinder zu sogenannten „Auto-Mathen" auszubilden, die „den Gebrauch des Sinns ‚in Mathematik' gründlich verlernt" haben (Baruk 1989, S. 17), sondern dass gerade Fähigkeiten, wie z. B. begründetes Argumentieren und Schlussfolgern im Mathematikunterricht von Bedeutung sein müssen. Diese Gedanken beschäftigen Mathematikdidaktiker bereits lange Zeit. Konkret wurden allgemeine Ziele des Mathematikunterrichts – d. h. Ziele, die weniger Einzelinhalte betreffen, sondern mehr auf das Fach im Allgemeinen fokussieren – beispielsweise von Bigalke (1976) formuliert, aber auch in dem Buch *Allgemeinbildung und Lehrplanwerk* (Neuner 1988; speziell für die Grundschule vgl. dazu Franke 2003).

Unsere heutigen Vorstellungen über die Ziele des Mathematikunterrichts in der Grundschule haben sich im Wesentlichen auf der Grundlage der Arbeiten zum „Entdeckenden Lernen" von Winter (1975, 1991) entwickelt. Er formulierte acht allgemeine Ziele, drei davon benennen Haltungen und Fähigkeiten der Kinder, fünf betreffen geistige Grundtechniken.

Als anzustrebende Haltungen bzw. Fähigkeiten bezeichnet Winter (1972, S. 71 ff.):

- Dialogfähigkeit, Dialogwilligkeit, Argumentationsfähigkeit bzw. die Fähigkeit, vernünftig zu reden
- die Fähigkeit, neue Situationen zu erzeugen bzw. mit neuen Situationen fertig zu werden, kreativ zu sein
- inner- oder außermathematische Situationen mit mathematischen Mitteln ordnen zu können.

Zentrale allgemeine Fertigkeiten bzw. Grundtechniken sind (Winter 1972, S. 79 ff.):

- klassifizieren und abstrahieren
- ordnen
- Analogien bilden bzw. beurteilen können, wann „zwei (inhaltlich verschiedene) Phänomenbereiche eine gemeinsame Struktur aufweisen“ (Winter 1972, S. 80)
- generalisieren
- formalisieren, d. h. geeignete Zeichen und Symbole verwenden, um Informationen wiederzugeben.

Diese Ziele wurden von Wittmann und Müller (2012, S. 159) in knapper und griffiger Form zu folgenden vier Zielen zusammengefasst, wobei auf die enge Verzahnung von inhaltlichen und allgemeinen Kompetenzen hingewiesen wird:

- „*Mathematisieren*, d. h. reale Situationen in die Sprache der Mathematik übersetzen, mit Mitteln der Mathematik Lösungen bestimmen und das Ergebnis für die reale Situation interpretieren
- *Explorieren,* d. h. Situationen probierend erforschen, Beziehungen und Strukturen entdecken, Strukturen erfinden, kreative Ideen entwickeln
- *Argumentieren*, d. h. mathematische Sachverhalte und Lösungswege erklären und begründen
- *Formulieren*, d. h. mathematische Sachverhalte und Lösungswege mündlich und schriftlich beschreiben“.

3.3.2 Bildungsstandards für den Primarbereich

Allgemeine Ziele von Mathematikunterricht haben auch Eingang gefunden in die Bildungsstandards, die im Auftrag der Kultusminister-Konferenz formuliert wurden (KMK 2004) und seit 2004 für alle Bundesländer verbindlich sind. In den KMK-Bildungsstandards werden die Kompetenzen beschrieben, die *alle* Schülerinnen und Schüler zu einem bestimmten Zeitpunkt erworben haben sollen (bezogen auf den Primarbereich heißt das: am Ende des vierten Schuljahres). In der Regel werden diese Kompetenzbeschreibungen in den einzelnen Ländern inhaltlich konkreter ausformuliert und lösen dort die alten „Rahmenrichtlinien“ bzw. „Lehrpläne“ in ihrer Funktion als Beschreibungen der Inhalte und Ziele des Mathematikunterrichts ab.

Die KMK-Bildungsstandards unterscheiden zwischen inhaltlichen und allgemeinen Kompetenzen und betonen, dass Mathematiklernen in der Grundschule „nicht auf die Aneignung von Kenntnissen und Fertigkeiten reduziert werden“ darf (KMK 2004, S. 6). Gerade die Formulierung allgemeiner Kompetenzen gibt den entscheidenden Hinweis darauf, dass eine solide mathematische Grundbildung nicht nur von der Auswahl von Inhalten abhängt, sondern in wesentlichem Maße davon, wie diese unterrichtet werden.

Den Kindern genügend Raum zum Problemlösen, Argumentieren und Mathematisieren einzuräumen, wird beispielsweise als wesentlicher Beitrag zur Förderung mathematischer Kompetenzentwicklung gesehen. Betrachtet man die Beschreibung der fünf allgemeinen Kompetenzen der Bildungsstandards, so zeigt sich eine hohe Deckung mit den oben angesprochenen allgemeinen Zielen des Mathematikunterrichts im Sinne von Winter bzw. Wittmann und Müller. Über folgende allgemeine mathematische Kompetenzen sollen die Kinder am Ende ihrer Grundschulzeit verfügen (KMK 2004, S. 7 f.):

- Problemlösen:
  Die Kinder sollen mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden können, Lösungsstrategien entwickeln und nutzen sowie Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen.
- Modellieren:
  Mathematikunterricht soll Kinder in die Lage versetzen, Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen entnehmen zu können; Sachprobleme in die Sprache der Mathematik zu übersetzen, innermathematisch zu lösen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation zu beziehen sowie zu Termen, Gleichungen und bildlichen Darstellungen Sachaufgaben zu formulieren.
- Kommunizieren:
  Die Kinder sollen eigene Vorgehensweisen beschreiben können, die Lösungswege anderer verstehen, mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden sowie Aufgaben gemeinsam bearbeiten, dabei Verabredungen treffen können und diese einhalten.
- Argumentieren:
  Diese Kompetenz wird wie folgt näher beschrieben: mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen, mathematische Zusammenhänge erkennen und Vermutungen entwickeln sowie Begründungen suchen und nachvollziehen.
- Darstellen:
  Die Kinder sollen für das Bearbeiten mathematischer Probleme geeignete Darstellungen entwickeln, auswählen und nutzen, eine Darstellung in eine andere übertragen können und Darstellungen miteinander vergleichen und bewerten.

Schülerinnen und Schüler zum *Problemlösen* anzuhalten, galt – seit man in den Wissenschaftsdisziplinen der Pädagogik, Psychologie und Didaktik begonnen hat, darüber nachzudenken, wie „Lernen“ funktioniert – als Bestandteil guten Unterrichts (vgl. z. B. Wittmann 1975, S. 82 ff.). Auch internationale Vergleichsstudien, insbesondere die für die Grundschule (wie die Internationale Grundschul-Lese-Studie – IGLU, vgl. Bos et al. 2003, S. 118 ff.), heben die Bedeutung der Kompetenz Problemlösen für erfolgreichen Unterricht hervor. Allerdings werden in der Literatur unter „Problemlösen“ durchaus unterschiedliche geistige Prozesse verstanden. In den Bildungsstandards wird damit zum einen das Behandeln und Lösen von solchen Aufgaben verstanden, die mehr als reine Routinetätigkeiten erfordern, zum anderen das Entwickeln von Lösungsstrategien, das Erkennen und Nutzen von Zusammenhängen sowie das Entdecken mathematischer Sachverhalte. Das Problemlösen hängt eng zusammen mit dem *Modellieren.* Diese allgemeine Kompetenz umfasst den weiten Bereich der Anwendungen von Mathematik, auf dieser Schulstufe vor allem im Alltag der Kinder (später auch in der Technik und in anderen Bereichen der Wissenschaften). Mathematische Fragestellungen erwachsen oft aus alltäglichen Situationen; damit zeigt sich auch, dass die Mathematik nicht „fertig“, sondern historisch gewachsen ist. Beim *Argumentieren* geht es um jede Art von Begründungen: „Aufgedeckte Strukturen oder Muster lassen sich aber nicht nur beschreiben, sondern – gemäß den Voraussetzungen der Lernenden – auch erklären und *argumentativ begründen*“ (Krauthausen 2018, S. 23). Dieses Ziel umfasst, ebenso wie das *Darstellen* und das *Kommunizieren,* die Förderung der sprachlichen Ausdrucksfähigkeit der Kinder. Im Kommunizieren ist auch der Aspekt des *gemeinsamen* Arbeitens enthalten. Die Mathematik erfordert zudem die sachgemäße Verwendung der Fachsprache, von Zeichen und Symbolen sowie von Tabellen, Diagrammen und anderen grafischen Darstellungen. Die Kinder sollen behutsam zu einer adäquaten Verwendung der mathematischen Sprache hingeführt werden, dazu können auch methodische Mittel zur Verschriftlichung, wie z. B. Lerntagebücher im Sinne von Gallin und Ruf (1993; vgl. auch Selter 1994), Wortspeicher bzw. das bewusste Reflektieren von Sprache (Götze 2015) beitragen.

Neben den allgemeinen Kompetenzen geben die KMK-Bildungsstandards– gegliedert nach folgenden fünf Leitideen – spezifische inhaltliche Kompetenzen an (KMK 2004, S. 8 ff.):

- Leitidee Zahlen und Operationen:
  - Zahldarstellungen und Zahlbeziehungen verstehen
  - Rechenoperationen verstehen und beherrschen
  - in Kontexten rechnen
- Leitidee Raum und Form:
  - sich im Raum orientieren
  - geometrische Figuren erkennen, benennen und darstellen
  - einfache geometrische Abbildungen erkennen, benennen und darstellen
  - Flächen- und Rauminhalte vergleichen und messen
- Leitidee Muster und Strukturen:
  - Gesetzmäßigkeiten erkennen, beschreiben und darstellen
  - funktionale Beziehungen erkennen, beschreiben und darstellen
- Leitidee Größen und Messen:
  - Größenvorstellungen besitzen
  - mit Größen in Sachsituationen umgehen
- Leitidee Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit:
  - Daten erfassen und darstellen
  - Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen in Zufallsexperimenten vergleichen

Die Kompetenzen, die hier zu jeder Leitidee aufgezählt sind, werden durch Teilkompetenzen noch detaillierter beschrieben und durch Aufgaben konkretisiert. Zum Beispiel gehören zur Kompetenz „Rechenoperationen verstehen und beherrschen“ unter anderem die Teilkompetenzen „mündliche und schriftliche Rechenstrategien verstehen und bei geeigneten Aufgaben anwenden“, „verschiedene Rechenwege vergleichen und bewerten, Rechenfehler finden, erklären und korrigieren“ sowie „Rechengesetze erkennen, erklären und benutzen“ (KMK 2004, S. 9).

Aus den Formulierungen der Kompetenzen wird ersichtlich, dass nicht bloß Inhalte des Unterrichts genannt sind, vielmehr wird die Erwartung ausgesprochen, dass die Kinder mit den konkreten Inhalten sachgemäß und kompetent umzugehen lernen. Die Verben in den Kompetenzformulierungen beschreiben, wie sich dieser kompetente Umgang charakterisieren lässt: Die Kinder sollen Sachverhalte „finden“, „erkennen“, „erklären“, „benutzen“, „anwenden“ usw. Wenn die Kinder diese Kompetenzen am Ende des vierten Schuljahres erreicht haben sollen, muss der Unterricht bereits vom ersten Schuljahr an darauf ausgerichtet sein.

Anders als bei den früheren Rahmenrichtlinien und Lehrplänen sind Lehrerinnen und Lehrer frei in ihren Entscheidungen, auf welchen methodischen Wegen sie diese Ziele bei den Kindern erreichen wollen. Hilfen dabei bieten unter anderem Beispiel-Aufgabensequenzen, die in die Veröffentlichung der KMK-Bildungsstandards aufgenommen wurden, sowie erläuternde Literatur zu den Bildungsstandards (Walther et al. 2007) und die Kerncurricula der Länder. Grundsätze für die methodische Ausgestaltung von Lernprozessen werden zudem in den Beschreibungen der allgemeinen, eher am Prozess orientierten Kompetenzen deutlich, weil darin eine veränderte Sicht auf die Ziele des Mathematikunterrichts in der Grundschule zum Ausdruck kommt. Es wird deutlich, dass Mathematikunterricht neben der Vermittlung von Inhalten weitere Ziele verfolgen muss und darüber hinaus einen wesentlichen Beitrag zur Bildung und Lebensvorbereitung der Kinder leistet: „Mathematiklernen hat das Potenzial den Schülerinnen und Schülern zu helfen, ihr Denken in Situationen des täglichen Lebens zu verbessern“ (Vinner 2018, S. 84).

In den folgenden Kapiteln werden zu einzelnen Leitideen fachdidaktische Erläuterungen und unterrichtspraktische Hinweise gegeben – wobei allgemeine und inhaltbezogene Kompetenzen gleichermaßen im Blick behalten werden.

Literatur

Aebli, H. (1981). *Denken: Das Ordnen des Tuns (Bd. 2)*. Stuttgart: Klett-Cotta.

Baruk, S. (1989). *Wie alt ist der Kapitän? Über den Irrtum in der Mathematik*. Basel: Birkhäuser.

Bauersfeld, H. (1983). Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In H. Bauersfeld, H. Bussmann, G. Krummheuer, J. H. Lorenz, & J. Voigt (Hrsg.), *Lernen und Lehren von Mathematik* (S. 1–56). Köln: Aulis.

Bauersfeld, H. (1985). Ergebnisse und Probleme von Mikroanalysen mathematischen Unterrichts. In W. Dörfler & R. Fischer (Hrsg.), *Empirische Untersuchungen zum Lehren und Lernen von Mathematik* (S. 7–25). Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.

Bigalke, H. G. (1976). Zur „gesellschaftlichen Relevanz" der Mathematik im Schulunterricht – Aufgaben und Ziele des Mathematikunterrichts. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 8*(1), 25–34.

Böhme, K., Richter, D., Stanat, P., Pant, H. A., & Köller, O. (2012). Die länderübergreifenden Bildungsstandards in Deutschland. In P. Stanat, H. A. Pant, K. Böhme, & D. Richter (Hrsg.), *Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangsstufe in den Fächern Deutsch und Mathematik. Ergebnisse des IQB-Ländervergleichs 2011* (S. 11–18). Münster: Waxmann.

Bos, W., Lankes, E.-M., Prenzel, M., Schwippert, K., Valtin, R., & Walther, G. (Hrsg.). (2003). *Erste Ergebnisse aus IGLU. Schülerleistungen am Ende der vierten Jahrgangsstufe im internationalen Vergleich*. Münster: Waxmann.

Bruner, J. S. (1972). *Der Prozess der Erziehung*. Berlin: Berlin Verlag.

Fischbein, E. (1990). Introduction. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Hrsg.), *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (S. 1–13). Cambridge: Cambridge University Press.

Franke, M. (2003). Der Mathematikunterricht in der Grundschule (Klassen 1 bis 4) und die Ausbildung von Grundschullehrern in der DDR. In H. Henning & P. Bender (Hrsg.), *Didaktik der Mathematik in den alten Bundesländern – Methodik des Mathematikunterrichts in der DDR*. Tagungsband: Universitäten Magdeburg und Paderborn.

Freudenthal, H. (1982). Mathematik – eine Geisteshaltung. *Grundschule, 14*(4), 140–142.

Fthenakis, W. E., Schmitt, A., Daut, E., Eitel, A., & Wendell, A. (2009). *Natur-Wissen schaffen* (Bd. 2: Frühe mathematische Bildung). Troisdorf: Bildungsverlag EINS.

Gallin, P., & Ruf, U. (1993). Sprache und Mathematik in der Schule. Ein Bericht aus der Praxis. *Journal für Mathematik-Didaktik, 14,* 3–33.

Gasteiger, H. (2017). Frühe mathematische Bildung – sachgerecht, kindgemäß, anschlussfähig. In S. Schuler, C. Streit, & G. Wittmann (Hrsg.), *Perspektiven mathematischer Bildung im Übergang vom Kindergarten zur Grundschule* (S. 9–26). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Götze, D. (2015). *Sprachförderung im Mathematikunterricht*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Hasemann, K. (1995). Individuelle Unterschiede. *Mathematik lehren, 73,* 12–16.

Kintsch, W. (1988). The role of knowledge in discourse comprehension: A construction-integration model. *Psychological Review, 95,* 163–182.

KMK. (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich.* Neuwied: Luchterhand.

Krauthausen, G. (2018). *Einführung in die Mathematikdidaktik – Grundschule*. Heidelberg: Springer Spektrum.

Neuner, G. (1988). *Allgemeinbildung und Lehrplanwerk*. Berlin: Volk und Wissen.

Piaget, J. (1967). *Psychologie der Intelligenz.* Stuttgart: Klett.

Piaget, J. (1974). *Der Aufbau der Wirklichkeit beim Kinde*. Stuttgart: Klett.

Presmeg, N. (2013). A dance of instruction with construction in mathematics education. In U. Kortenkamp, B. Brandt, C. Benz, G. Krummheuer, S. Ladel, & R. Vogel (Hrsg.), *Early Mathematics Learning. Selected Papers of the POEM Conference 2012* (S. 9–17). Berlin: Springer.

Radatz, H. (1991). Hilfreiche und weniger hilfreiche Arbeitsmittel im mathematischen Anfangsunterricht. *Grundschule, 23*(9), 46–49.

Reusser, K. (2006). Konstruktivismus – vom epistemologischen Leitbegriff zur Erneuerung der didaktischen Kultur. In M. Baer, M. Fuchs, P. Füglister, K. Reusser, & H. Wyss (Hrsg.), *Didaktik auf psychologischer Grundlage. Von Hans Aeblis kognitions-psychologischer Didaktik zur modernen Lehr- und Lernforschung* (S. 151–168). Bern: h.e.p. verlag.

Selter, C. (1994). *Eigenproduktionen im Arithmetikunterricht der Primarstufe*. Wiesbaden: Deutscher Universitäts Verlag.

Shuell, T. J. (1986). Cognitive conceptions of learning. *Review of Educational Research, 56*(4), 441–436.

Skemp, R. (1979). *Intelligence, learning, and action*. Chichester: Wiley.

van Oers, B. (2004). Mathematisches Denken bei Vorschulkindern. In W. E. Fthenakis & P. Oberhuemer (Hrsg.), *Frühpädagogik international* (S. 313–330). Wiesbaden: VS Verlag.

Vinner, S. (2018). *Mathematics, education, and other endangered species. From intuition to inhibition.* Basel: Springer Nature.

Walther, G., van den Heuvel-Panhuizen, M., Granzer, D., & Köller, O. (Hrsg.) (2007). *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Winter, H. (1972). Vorstellungen zur Entwicklung von Curricula für den Mathematikunterricht in der Gesamtschule. *Strukturförderung im Bildungswesen des Landes Nordrhein-Westfalen, 16,* 67–95 (Ratingen: Beiträge zum Lernzielproblem. Verlag Henn).

Winter, H. (1975). Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 3,* 106–116.

Winter, H. (1991). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht* (2. Aufl.). Braunschweig: Vieweg.

Winter, H. (1998). Mathematik als unersetzbares Fach einer Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft Hamburg, 17,* 75–83.

Wittmann, E. C. (1975). *Grundfragen des Mathematikunterrichts* (3. Aufl.). Braunschweig: Vieweg.

Wittmann, E. C. (1998). Standard Number Representations in the Teaching of Arithmetic. *Journal für Mathematik-Didaktik, 19,* 149–178.

Wittmann, E. C., & Müller, G. N. (2012). *Das Zahlenbuch 1. Begleitband*. Stuttgart: Klett.

4 Zahlen und Operationen im Anfangsunterricht

4.1 Zahlbegriffserwerb im Anfangsunterricht

Üblicherweise geht man davon aus, dass sich die Kinder am Ende ihres ersten Schuljahres im Zahlenraum bis 20 sicher orientieren können, und dass sie in diesem Zahlenraum auch sicher rechnen können. Wie man dieses Ziel am besten erreicht, ist auch – oder gerade – unter Experten durchaus strittig. Welches Konzept für den arithmetischen Anfangsunterricht favorisiert wird, hängt von vielen Faktoren ab, zu denen bildungspolitische Überzeugungen ebenso gehören wie akzeptierte wissenschaftliche Ergebnisse, persönliche Erfahrungen, aber auch aktuelle Strömungen und Schwerpunkte der öffentlichen Diskussion. Die facettenreiche „Geschichte des Mathematikunterrichts" von der Zeit Adam Ries' (1492–1559) bis etwa 2000 wurde von Schipper (2009, S. 42–67, s. auch Radatz und Schipper 1983, S. 26–47) ausführlich nachgezeichnet. Im folgenden Abschnitt sollen einige der Faktoren diskutiert werden, die die heutigen Konzepte des arithmetischen Anfangsunterrichts beeinflusst haben.

4.1.1 Historischer Rückblick

Betrachtet werden bildungspolitische, pädagogische und psychologische Faktoren.

Bildungspolitische Faktoren

Bildungspolitische Faktoren haben den Rechen- und später den Mathematikunterricht etwa seit der Zeit der Aufklärung beeinflusst. Während das Rechnen vorher eher als ein notwendiges Übel betrachtet wurde, das man gern einer Zunft von Rechenmeistern überließ, war für Heinrich Pestalozzi (1746–1827) das wichtigste Ziel die „Entwicklung der geistigen Kräfte aller Menschen". Aus einem Rechenunterricht, in dem es um den

K. Hasemann und H. Gasteiger, *Anfangsunterricht Mathematik,* Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II, https://doi.org/10.1007/978-3-662-61360-3_4

mechanischen Erwerb von Regeln ging, sollte das „Denkrechnen“ werden. Pestalozzi hatte mit seinen Vorschlägen erheblichen Einfluss auf die Entwicklung der Volksschulen insbesondere in Preußen. Allerdings gab es, beeinflusst auch durch Mängel in der unterrichtspraktischen Umsetzung der Ideen, bald (etwa ab Mitte des 19. Jahrhunderts) eine Gegenbewegung: An die Stelle des „Primats der formalen Bildung“ wurde das „Primat der materiellen Bildung“ gesetzt. Erstes Ziel des Rechenunterrichts war die Vorbereitung der „künftigen Bürger, Bauern und Soldaten“ (Stiehl 1854 nach Schipper 2009, S. 48) auf ihre Berufe.

Geht es nun in erster Linie um ein „Denken lernen“ oder um das „Rechnen können“? Auf den ersten Blick handelt es sich dabei um zwei eher unterschiedliche Ziele des Mathematikunterrichts. Dass diese tatsächlich nicht unvereinbar sind, zeigen sowohl einige ältere als auch viele der neueren Lehrgänge für den Anfangsunterricht sowie ein Einblick in die Bildungsstandards (Abschn. 3.3.2). Allerdings werden im Einzelfall die Schwerpunkte sehr unterschiedlich gesetzt.

Im Verlauf der Geschichte finden wir einige Situationen, in denen die staatliche Bildungspolitik direkt in die Konzeption des Mathematikunterrichts in der Grundschule eingegriffen hat: Aufgrund einer Empfehlung der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Bundesrepublik Deutschland (KMK-Empfehlungen vom 3.10.1968) wurde beispielsweise verbindlich für alle Schulen der Bundesrepublik Deutschland die „Neue Mathematik“ eingeführt – bekannt wurde sie bei uns unter der Bezeichnung „Mengenlehre“, in den USA hieß sie *New Math* –, die einen fast vollständigen Bruch mit bis dahin entwickelten Konzepten bedeutete (vgl. Padberg 1992, S. 23; Maier 1990, S. 132 f.). Teilweise ebenso hastig wie sie verordnet worden war, wurde die Reform wenige Jahre später – wieder durch die Kultusminister – zurückgenommen. Diese Vorgänge sind ein eindrucksvolles und abschreckendes Beispiel für eine nicht gewachsene, sondern verordnete Reform. Trotz gut begründeter Zielsetzung und vieler durchaus interessanter Ansätze und Ideen musste sie schon deshalb fast zwangsläufig scheitern, weil weder Lehrerinnen und Lehrer noch Eltern auf sie vorbereitet waren. Auslöser der Reformen war in den USA nicht zuletzt der sogenannte „Sputnik-Schock“[1], also der Start des ersten Satelliten durch die damalige Sowjetunion am 4.10.1957, der den Blick auf mögliche Defizite vor allem in der mathematischen und naturwissenschaftlichen Bildung in der westlichen Welt richtete. In der Bundesrepublik Deutschland konstatierte Georg Picht im Jahre 1964 die „deutsche Bildungskatastrophe“. Seine Feststellungen klingen in weiten Teilen erstaunlich ähnlich zur Berichterstattung nach der Veröffentlichung der ersten PISA-Ergebnisse. Verlangt wurde die Ausschöpfung aller Bildungsreserven, und das hieß nicht nur „Chancengleichheit“, also den Zugang von Kindern aus allen Schichten zu allen Bildungseinrichtungen, sondern auch die Reorganisation der Schule mit dem Ziel höherer Effizienz.

[1]Auch das Internet – entwickelt ab 1962 nach einem Konzept von J. C. R. Licklider vom Massachusetts Institute of Technology – ist ein Ergebnis dieses Schocks.

In diesem Sinne sollte die „Neue Mathematik“ entscheidende Veränderungen mit sich bringen. Dadurch sollte allen Kindern ein Weg zum Verständnis der Mathematik eröffnet werden. So schrieb z. B. der Pädagoge Hartmut von Hentig (1968, S. 126): „Die gemeinsame Mathematik [besteht] in der möglichst früh einzuführenden elementarisierenden Mengenlehre (…) – in einem gründlichen Verständnis und in einem ebenso gründlichen Exerzitium grundlegender mathematischer Operationen; das technische, von Mathematik durchsetzte Zeitalter fordert nicht, dass man alle Formen und Stufen der Mathematik durchlaufen hat, sondern die fundamentalen Prozesse durchschaut und versteht.“ Die Schulbücher insbesondere für die ersten Schuljahre wurden mit diesem Ziel neu geschrieben. In den zugehörigen Lehrerhandbüchern und auch in speziellen „Elternheften“ versuchten die jeweiligen Autorinnen und Autoren deutlich zu machen, welche Ziele sie verfolgten und warum dazu neue, ungewohnte Inhalte erforderlich waren.

Aus der Sicht vieler Mathematikdidaktiker, die zu dieser Zeit begannen, ihre Disziplin an Pädagogischen Hochschulen und Universitäten zu etablieren, war diese Reform des Mathematikunterrichts durchaus gut begründet. Es gab zum Teil groß angelegte Studien zur Entwicklung und Erprobung der neuen Inhalte und vor allem der neuen Lehr- und Denkweisen. Eine davon war das „Frankfurter Projekt“ zur Modernisierung des Mathematikunterrichts in der Grundschule (vgl. Weis und Bauersfeld 1973), aus dem der Lehrgang „Alef – Wege zur Mathematik“ (Bauersfeld et al. 1970) entstand. In ihrem Handbuch zum Lehrgang für das erste Schuljahr schreiben die Autoren: „Wir haben versucht, jene allgemeinen Grunderfahrungen, Verhaltensweisen und Denkgewohnheiten zu erfassen und die Bedingungen ihres Erwerbs zu analysieren. (…) Dabei sind wir auf Begriffe der neuen Mathematik gestoßen, die zum Teil auch innerhalb der Mathematik zu den grundlegenden gehören und der Arithmetik vorausgehen“ (Bauersfeld et al. 1970, S. 7). Diese Begriffe sind vor allem „Menge“, „Relation“ und „Verknüpfung“ sowie topologische Begriffe (vgl. Abschn. 6.1.1).

Bauersfeld und seine Mitautoren argumentieren in erster Linie pädagogisch, mit Blick auf Lernprozesse und mathematisches Verständnis. Erwartet werden zudem „erhöhte Motivation, kritischeres Denken und präzisere Sprache, aber ebenso größere Selbstständigkeit des Handelns, Kooperationsfähigkeit und weit umfangreicherer Ausgleich der unterschiedlichen Vorerfahrungen“. Der Name Piaget kommt in dem erwähnten Handbuch überhaupt nicht vor, dennoch kann gesagt werden, dass die entwicklungs- und lernpsychologischen Theorien Piagets und insbesondere dessen Thesen über die Entwicklung des Zahlbegriffs (vgl. Abschn. 1.2.3) für die meisten der um 1970 neu konzipierten Lehrgänge für den mathematischen Anfangsunterricht eine zentrale Rolle spielten. Aus psychologischer Sicht lieferten sie die Begründung dafür, dass die Behandlung der Zahlen im ersten Schuljahr mit einer „prä-numerischen Phase“ beginnen sollte, in der die „grundlegenden und der Arithmetik vorausgehenden Begriffe der neuen Mathematik“ (Bauersfeld et al. 1970, S. 7) ausführlich thematisiert werden sollten. Laux und Bigalke schreiben (1972, S. 2): „Da Invarianz und Zuordnung Begriffe sind, ohne die weder mit Mengen noch mit Zahlen sinnvoll gearbeitet werden kann (Piaget), beginnt unser Lehrgang folgerichtig mit diesem Gegenstand“.

Es fällt auf, dass zur Begründung der neuen Inhalte eher auf die auch von H. von Hentig angesprochene „Elementarisierung“ der Mathematik Bezug genommen wurde, während Piagets entwicklungs- und lernpsychologische Theorien vor allem der Begründung des methodischen Vorgehens dienten. Fricke und Besuden beispielsweise, die sich bei ihrer Konzeption ausdrücklich auf Piaget berufen, schreiben: „Die Erforschung des Denkens, insbesondere im mathematischen Bereich, hat gezeigt, dass ein Lernen in Zusammenhängen notwendig ist (…). Aus diesen Erkenntnissen wurde die operative Methode entwickelt. Damit werden Logik, Arbeit mit Mengen, Arithmetik und Geometrie, wichtige neue und unersetzbare traditionelle Aufgabenbereiche der Mathematik, so angeboten, dass sie den Bedingungen kindlichen Denkens entsprechen und die Ausbildung beweglicher Denkoperationen fördern“ (1973, S. IV).

In welchem Maße allerdings bei der tatsächlichen Umsetzung in den Schulbüchern häufig die mathematische – und nicht die lernpsychologische – Sichtweise die Oberhand gewonnen hat, zeigt schon der Blick auf die Inhaltsverzeichnisse dieser Bücher, beispielsweise in die *Einführung in die Mathematik, 1. Schuljahr* (Laux und Bigalke 1971). Auf Seite 4 bis 15 werden „Invarianz und Zuordnung“ behandelt: Die Invarianz von Länge, Höhe, Entfernung, von kontinuierlichen Quantitäten (wie Wasser) und von Mengen (Kinder, Perlen, Klötze). Bei den Zuordnungen wird u. a. zwischen „eineindeutigen“ und „nicht-eindeutigen“ unterschieden. Der nächste Abschnitt beschäftigt sich mit Mengen (Begriff der Menge, Element, Teilmenge, Restmenge, Schnittmenge, Vereinigungsmenge, aber auch logische Verknüpfungen wie „nicht“, „und“, „oder“). Neben Objekten des täglichen Lebens werden dabei – wie auch in den meisten anderen Schulbüchern – „strukturierte Materialien“ verwendet, d. h. die Kinder sollen konkrete Mengen bilden mithilfe von Plättchen oder Klötzchen aus Holz oder Plastik, die sich in mehreren Merkmalen (Form, Farbe, Größe und Griffigkeit) unterscheiden. Die ersten Zahlen (die Kardinalzahlen 2, 3 und 4) treten erst in der Mitte des Lehrgangs (auf Seite 54 von insgesamt 107 Seiten) als „Eigenschaften gleichmächtiger Mengen“ auf (vgl. Abschn. 1.2.1). Entsprechend wird später die Addition auf die Vereinigung von Mengen und die Subtraktion auf die Restmengenbildung zurückgeführt. Die Verwendung der Zahlen als Zählzahlen wird nicht explizit angesprochen, Ordnungszahlen kommen nur kurz vor. In anderen Lehrgängen, wie z. B. bei Fricke und Besuden (1973, S. 32), wurden die Zahlen von 1 bis 4 durch die Bezugnahme auf Standardmengen (aneinandergelegte Klötze) gekennzeichnet.

Die Reform des Mathematikunterrichts scheiterte trotz allem Schulungs- und Informationsaufwand bei Eltern, Lehrerinnen und Lehrern in der Praxis:

> „Was als Schüleraktivität zur Steigerung der Fähigkeiten im Klassifizieren und Ordnen, im funktionalen und im schlussfolgernden Denken, im Abstrahieren und Generalisieren, im Argumentieren und Beweisen, im Gebrauch von Symbolen usw. gedacht war, gerann zu einem Unterrichtsstoff, der nach traditionellen methodischen Mustern ‚durchgenommen‘ wurde. (…) Eine Flut von Bezeichnungen, Symbolen und Sprechweisen brach schon über die Schulanfänger herein, die sie ‚lernen‘ sollten und die nicht nur den Eltern fremd waren, sondern auch manchen [Lehrern und] Lehrerinnen noch Schwierigkeiten bereiteten“ (Maier 1990, S. 133).

Es gibt allerdings weitere Gründe für das Scheitern. Während die von Maier zusammengestellten *Ziele* auch heute noch aktuell sind (vgl. die allgemeinen Ziele und die Bildungsstandards in Kap. 3), ging die Reform in doppelter Hinsicht von falschen Voraussetzungen aus. Zum einen sind grundlegende mathematische Begriffe wie solche aus der Logik und der Mengenlehre nicht „elementar“ in dem Sinne, dass sie leicht zu verstehen sind – ganz im Gegenteil (darauf wurde in Abschn. 1.2.1 schon verwiesen). Zum anderen vernachlässigt die einseitige Betrachtung der natürlichen Zahlen als Kardinalzahlen die Vorerfahrungen der Kinder mit den Zählzahlen. Die Vorstellung, dass man auf diese Weise eine „Tabula rasa“ und damit allen Kindern gleiche Startbedingungen schaffen könnte, ist vielleicht pädagogisch ehrenwert, aber aus lernpsychologischer Sicht und auf der Basis des heutigen Wissens über die Vorkenntnisse der Kinder völlig verfehlt (vgl. Abschn. 1.4 und 3.2).

In der früheren DDR wurde der „Rechenunterricht“ 1963 durch einen einheitlichen „Schullehrgang Mathematik von Klasse 1 bis 10“ ersetzt (vgl. Borneleit 2003, S. 37 ff.). Auffällig waren dabei vor allem die frühzeitige Verwendung von Variablen (x als „Zeichen für eine unbekannte Zahl“ bereits im ersten Schuljahr), die frühe Einführung und durchgängige Behandlung von Gleichungen und Ungleichungen, die systematische Förderung von Fähigkeiten im Beweisen und Definieren von Anfang an sowie eine „vollwertige“ Geometrie in den Klassen 1 bis 4. Während die Veränderungen vom Rechen- zum Mathematikunterricht in der DDR durchaus einige Ähnlichkeiten mit den Entwicklungen der „Neuen Mathematik“ hatten, wird an der Geometrie der Unterschied deutlich: „Bereits in den Klassen 1 bis 3 wird in der DDR mit einem systematischen Geometrielehrgang begonnen, der an das Hilbertsche Axiomensystem angelehnt ist“ (Franke 2007, S. 10). Später wurden einige dieser Anforderungen reduziert, da „sich in den letzten Jahren immer deutlicher (zeigte), dass es in den Lehrplänen selbst, aber auch in den Lehrbüchern und ‚Unterrichtshilfen‘ noch nicht durchgehend gelang, das o. g. Konzept in der erforderlichen Qualität umzusetzen“ (Weber 1987, S. 68). So wurde im ersten Schuljahr auf das Lösen von Gleichungen des Typs $x + 3 = 5$ bzw. $x - 3 = 5$ und im Zahlenraum bis 100 auf das Üben mit Variablen verzichtet. Dennoch blieb es bei der „grundsätzlichen Position, dass das Können im Arbeiten mit Variablen, mit Tabellen (und) im Lösen von Gleichungen und Ungleichungen (…) von Klasse 1 an systematisch entwickelt werden muss“ (Weber 1988, S. 20).

Es besteht immer die Gefahr, dass Reformen in der Schule und speziell im Mathematikunterricht durch äußere Ereignisse und die dadurch ausgelöste bildungspolitische Diskussion stärker beeinflusst werden als durch die Ergebnisse wissenschaftlicher Studien und durch reflektierte Unterrichtspraxis. Dies ist in einem gewissen Umfang unvermeidlich, weil die Institution Schule in einem gesellschaftlichen und politischen Kontext steht. Öffentliche Diskussionen wie etwa die über die Ergebnisse der PISA-Studie, der Internationalen Grundschul-Lese-Studie (IGLU, vgl. Bos et al. 2003) oder des IQB-Bildungstrends (www.iqb.hu-berlin.de) können aber durchaus hilfreich sein, um den Blick auf Mängel zu lenken und um Vorschlägen zu ihrer Behebung auch im politischen Raum eine gewisse Chance zu geben.

Die bisherigen Betrachtungen haben gezeigt, dass grundlegende Veränderungen im Mathematikunterricht zwar wesentlich von bildungspolitischen Faktoren abhängen, dass die Diskussion darüber aber stets auch mit pädagogischen und psychologischen Argumenten geführt wird. In seinem oben angesprochenen historischen Überblick geht Schipper (2009) gerade auf diese Argumente sehr ausführlich ein. Angesprochen werden sollen hier nur Entwicklungen, die auch für den heutigen Anfangsunterricht in Mathematik von Bedeutung sind.

Pädagogische und psychologische Faktoren

Ende des 19. Jahrhunderts gab es eine Kontroverse zwischen „Zählmethodikern" und „Anschauern (Zahlbildmethodikern)" (vgl. Schipper 2009, S. 52 ff.). Im Kern ging es dabei um die auch heute noch aktuelle Frage, ob die Zahlbegriffsentwicklung der Kinder eher durch die Betrachtung der Zahlwortreihe und das Zählen gestützt wird oder eher durch das Betrachten von anschaulichen Materialen (Mengen konkreter Objekte) und von Zahlbildern. Mit Blick auf die Veranschaulichungsmittel kann man den Unterschied auch daran festmachen, ob die natürlichen Zahlen am besten dargestellt werden durch den Zahlenstrahl oder durch flächige Zahldarstellungen, wie z. B. diejenigen auf einem Würfel oder in einem Zwanzigerfeld (vgl. Abschn. 4.2). Schon die Aufzählung der Beispiele macht deutlich, dass es sich – aus der Sicht der Kinder – bei der Unterscheidung zwischen „Zählern" und „Anschauern" nicht um einen echten Gegensatz handelt, es geht vielmehr um Präferenzen: Offensichtlich können sich Menschen Zahlen in Form eines inneren Zahlenstrahls vorstellen, sie nutzen aber gleichermaßen auch ihr Wissen über die Zerlegung in Zehner und Einer zur Zahlvorstellung (Nuerk et al. 2001), oder sie stellen sich vor allem bei kleineren Anzahlen Mengen vor.

Der Beginn des 20. Jahrhunderts bringt mit der Reformpädagogik eine neue Sichtweise, die insbesondere mit dem Namen Maria Montessori (1870–1952) verbunden ist: die Pädagogik (und damit auch der Rechenunterricht) vom Kinde aus (vgl. Montessori 1969). Das Kind und seine Art zu lernen stehen im Mittelpunkt und sind bei der Auswahl und Anordnung der Lerninhalte ebenso zu berücksichtigen wie seine natürliche Entwicklung. Vor allem aber sind die Selbstständigkeit und die Eigentätigkeit des Kindes zu fördern (vgl. Schipper 2009, S. 56).

Die erste systematische Rechendidaktik stammt ebenfalls aus dieser Zeit: Johannes Kühnels *Neubau des Rechenunterrichts.* Kühnel (1919) beruft sich auf Ergebnisse der experimentellen Psychologie. Für den Rechenunterricht verlangt er unter anderem (vgl. Maier 1990, S. 114 ff.):

- „eine wirkliche, allseitige, planmäßige, oft wiederholte Anschauung, eine (…) immer genauer und vollständiger werdende Assimilation, eine kontemplative Betätigung aller Sinne mit besonderer Berücksichtigung der Bewegungsvorstellungen, ein handelndes Erleben, ein selbstständiges Vertrautwerden mit der Wirklichkeit (sowie)
- eine weit hinausgeschobene, langsam reifende vorsichtig prüfende Abstraktionsfähigkeit, die immer wieder von Konkretionen unterbrochen wird und aus ihnen immer wieder von Neuem sich aufbaut."

- Zu betonen und zu üben sind „Raumvorstellungen zu den Zahlbegriffen" und „Bewegungsvorstellungen zu den Operationen", die Kinder sollen sich an „greifbare Begriffssubstrate" gewöhnen. „Dazu müssen auch die Rechenmittel dienen und sie sind entsprechend zu gebrauchen. Die Ziffer ist zunächst gar nicht, später als Notizmittel und erst noch später als Begriffssubstrat zugelassen."

Kühnel beendet auch den Streit zwischen Zähl- und Zahlbildmethodikern durch eine Synthese der Ideen beider Gruppen, indem er – unter anderem – sowohl rhythmisches Zählen als auch den Gebrauch der Kühnel'schen Hundertertafel (heute in ähnlicher Form unter dem Begriff Hunderterfeld bekannt – vgl. Abschn. 4.2) vorschlug. Viele von Kühnels Ideen wirken bis heute fort, so berufen sich z. B. Winter (1984, 1991) und E.C. Wittmann (1993) bei der Begründung des „aktiv-entdeckenden Unterrichts" ausdrücklich auf Kühnel.

Ebenfalls Aufnahme in Schulbücher fanden Johannes Wittmanns Vorschläge für das „Ganzheitliche Rechnen" (Wittmann 1929, 1939). Ähnlich wie Kühnel geht J. Wittmann davon aus, dass Lernende sich ihre Erkenntnisse selbst und aktiv erarbeiten müssen und dass der Erwerb des Zahlbegriffs mit konkreten Erfahrungen beginnt und über „Dingsymbole" und zeichnerische Darstellungen zur fachlichen Symbolsprache führt. Zentral ist dabei allerdings für Wittmann die These, dass „alles seelisch-körperliche Leben des Menschen (…) stets von irgendwie strukturierten Ganzheiten ausgeht und zu neuen Ganzheiten fortschreitet". Am Anfang steht bei Wittmann nicht wie bei Kühnel die Synthese – die Betrachtung einer immer größeren Anzahl von Einzelobjekten –, sondern die Analyse, d. h. der zunächst spielerische und dann ordnende Umgang mit komplexen Situationen. Dazu gehört z. B., dass die Kinder ungeordnete Mengen in verschiedener Gestalt ordnen und beschreiben: Als gerade „Reihe", als „Schlangenlinie", als „Kreisreihe", als „Treppe" usw.

Die hier genannten Ideen und Vorschläge für die Gestaltung des mathematischen Anfangsunterrichts wirken heute noch fort. Dies gilt für die Rolle des Zählens bei der Zahlbegriffsbildung ebenso wie für das „handelnde Erleben" der mathematischen Sachverhalte und die Verwendung von Anschauungsmitteln. Große Bedeutung haben vor allem die Vorschläge zum „aktiv-entdeckenden Lernen" bzw. zum Lernen in „strukturierten Ganzheiten".

Nach diesem historischen Rückblick folgen nun Ausführungen zu den für den Zahlbegriffserwerb im Anfangsunterricht relevanten Themen und Aspekten.

4.1.2 Aufgreifen der Vorkenntnisse

Die Kinder kommen mit sehr unterschiedlichen Vorerfahrungen, Vorkenntnissen und Erwartungen in die Schule (vgl. Abschn. 1.4 und 2.2.3). Bei den meisten ist die Motivation groß, und sie wollen zeigen, was sie schon können. Diese Motivation zu erhalten, gehört sicher zu den wichtigsten und reizvollsten Aufgaben der Lehrperson.

Mit Blick auf den arithmetischen Anfangsunterricht ist es diesbezüglich vor allem wichtig, die Kenntnisse und Erfahrungen der Kinder mit Zahlwörtern, mit dem Zählen sowie mit dem Lesen und Schreiben von Zahlen zu berücksichtigen. Darüber hinaus spielen auch ihr Entwicklungsstand bei der Einsicht in die Invarianz und ihre Fähigkeiten bei der Klassifikation sowie beim Vergleichen und Ordnen eine grundlegende Rolle. Einen umfassenden Einblick in die Vorkenntnisse der Kinder gibt Abschn. 1.4. Zusammenfassend erfolgt hier noch einmal ein Überblick darüber, welche Kenntnisse und Fähigkeiten bei einigen, vielen, den meisten oder fast allen Kindern am Schulanfang zu erwarten sind. Die folgenden Prozentwerte stammen aus der Erprobung des „Osnabrücker Tests zur Zahlbegriffsentwicklung“ (Luit et al. 2001, Abschn. 1.4.1), und zwar aus der Testdurchführung mit mehr als 300 Kindern unmittelbar vor dem Schulbeginn. Zu diesem Zeitpunkt konnten von den untersuchten etwa 300 Kindern

• zählen (Aufsagen der Zahlwortreihe) bis 20:	77 %
• weiterzählen von 9 bis 15:	72 %
• in Zweierschritten von 2 bis 14 zählen:	50 %
• 20 geordnete Klötze abzählen:	58 %
• 20 ungeordnete Klötze abzählen:	49 %
• 17 Klötze rückwärts zählen:	32 %
• ohne sie zu sehen, wissen, dass 13 Bonbons mehr sind als 9:	69 %
• die Augensumme von zwei Würfeln zusammenzählen:	51 %
• zum Vergleich mehr/weniger bis zu 5 Objekte simultan erfassen:	83 %
• Objekte nach zwei Merkmalen gleichzeitig klassifizieren:	67 %
• Objekte der Größe nach ordnen:	75 %
• zwei Reihen der Größe nach vergleichen:	67 %
• Objekte eins zu eins zuordnen (zählen ist möglich):	75 %
• Objekte eins zu eins zuordnen (zählen ist nicht möglich):	61 %

Für das Lesen und Schreiben von Ziffern ermittelte Schmidt (1982), dass ein Schulanfänger im Durchschnitt fünf bis sechs Ziffern richtig schreiben und neun der zehn Ziffern lesen kann. In diesen Aufzählungen fällt auf, dass fast alle der genannten Kenntnisse und Fähigkeiten bei mehr als der Hälfte oder sogar drei Vierteln aller Kinder am Schulbeginn erwartet werden können. Außerdem haben wir bereits in Abschn. 1.4.1 gesehen, mit welchem Tempo die geistige Entwicklung der Kinder verläuft. Dies macht allerdings die Aufgabe der Lehrerinnen und Lehrer am Schulbeginn nicht leichter: Einerseits gibt es Kinder, die noch nicht sicher bis 20 zählen und noch nicht in Zweierschritten oder gar rückwärts zählen können und die mit den Begriffen „mehr“ und „weniger“ ebenso ihre Probleme haben wie mit dem Ordnen von Gegenständen nach vorgegebenen Merkmalen. Andererseits aber würde man alle die Kinder, die diese Fähigkeiten schon besitzen, furchtbar langweilen und in ihrem Lerneifer enttäuschen, wenn man zu lange bei den von ihnen als „Kindergartenkram“ betrachteten Sachverhalten verweilt. Hier ist das besondere pädagogische und methodische Geschick gefordert, einen Ausgleich zu schaffen.

Dazu ist es für die Lehrperson unabdingbar, möglichst für jedes einzelne Kind zu wissen, welche Kenntnisse und Fähigkeiten bereits vorhanden sind und vor allem, wie sich diese im Laufe der Zeit entwickeln. Im Folgenden werden Verfahren vorgestellt, mit denen diese Entwicklungen dokumentiert werden können.

Eine sehr einfach durchzuführende Vorkenntnisermittlung, die allerdings bereits einen guten ersten Eindruck über die Vorkenntnisse der Kinder vermitteln kann, ist der sogenannte „Weißblatt-Test“. Diese Art der Aufgabenstellung lässt sich wohl auf eine Idee aus dem Schriftspracherwerb zurückführen – das sogenannte „leere Blatt“ (Hüttis-Graff und Baark 1996, S. 133). Bei Wittmann und Müller (2012, S. 172) liest man in diesem Zusammenhang den Begriff „Ortungsaufgaben“. Zu Beginn des ersten Schuljahres können Kinder einfach gefragt werden:

- Welche Zahlen kennst du schon?
- Welche Rechnungen kannst du schon lösen?
- Wo begegnen dir Zahlen?
- …

Die Kinder werden gebeten, alles, was sie über Zahlen und Rechnungen wissen auf ein leeres Blatt Papier zu notieren. Die Vielfalt der Ergebnisse kann bereits einen guten Einblick in das Leistungsspektrum der eigenen Klasse geben (s. Abb. 4.1, 4.2 und 4.3[2]).

Die Ziffernschreibweise bereitet dem Kind 1 (Abb. 4.1) zwar noch Schwierigkeiten – die Ziffern werden teilweise spiegelverkehrt notiert –, allerdings erkennt das Kind bereits, dass Zahlen als Hausnummern eine Rolle spielen, und es verfügt schon über erste Kenntnisse zum Verdoppeln und Halbieren.

Das Kind 2 (Abb. 4.2) kann offensichtlich mindestens bis 14 zählen und ist auch in der Lage, einige zweistellige Zahlen sowie die Zahlen 100 und 200 zu notieren – bei der Zahl 12 passiert allerdings ein Zahlendreher. Zudem kennt dieses Kind bereits die Ergebnisse einiger Rechnungen und kann diese auch in Gleichungsschreibweise notieren.

Auf die Frage, welche Zahlen bereits bekannt sind, notiert das Kind 3 (Abb. 4.3) unter anderem auch Buchstaben. Diesem Kind scheint der Unterschied zwischen Zahlen und Buchstaben noch nicht ganz geläufig zu sein.

Diese drei Beispiele zeigen erneut, wie heterogen die Vorkenntnisse bei den Kindern sind, und machen sensibel dafür, wie wichtig es ist, dass die Lehrkraft einen guten Überblick über die Vorkenntnisse der Schulanfängerinnen und Schulanfänger in der eigenen Klasse hat.

[2]Die Beispiele wurden dankenswerterweise zur Verfügung gestellt von Ruth Dolenc-Petz und Maria Otto.

Abb. 4.1 Beispiel eines Weißblatt-Tests: Kind 1

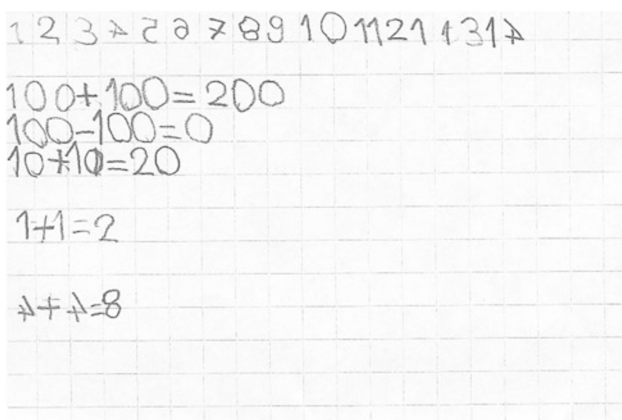


Abb. 4.2 Beispiel eines Weißblatt-Tests: Kind 2

Eine Möglichkeit, die Vorkenntnisse der Kinder noch gezielter zu erheben, sind Verfahren, wie sie bereits in Abschn. 1.4.1 angesprochen wurden. Hierzu zählt z. B. die Vorkenntniserhebung von Knapstein und Spiegel (1995) oder Selter (1995). Dabei werden den Kindern in Form von Bildern verschiedene Situationen vorgestellt, in denen Zahlen vorkommen oder einfache Operationen gefordert sind. Außerdem wird eine Frage formuliert; die jeweilige Antwort (die Lösungszahl) sollen die Kinder in einer

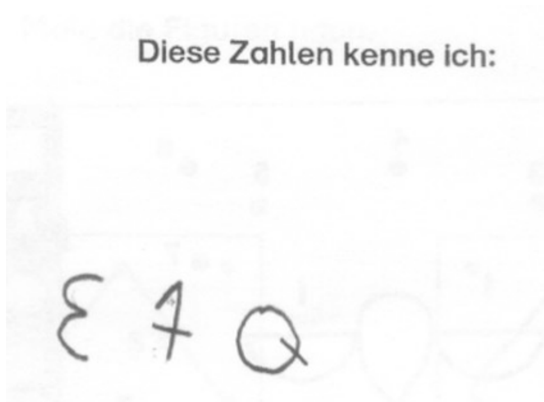


Abb. 4.3 Beispiel eines Weißblatt-Tests: Kind 3

vorgegebenen Menge von Zahlen kennzeichnen. In den Lehrerhandreichungen zu einzelnen Schulbüchern gibt es ebenfalls Vorschläge, wie mit der ganzen Klasse in den ersten Schulwochen eine Vorkenntniserhebung durchgeführt werden kann (vgl. Abb. 4.4).

Werden die Aufgaben größeren Gruppen (wie Schulklassen) vorgelegt, so reicht es zur Auswertung zunächst, eine Tabelle zu verwenden, in die für jedes Kind und jede Aufgabe das Ergebnis („richtig“, „falsch“ bzw. „nicht bearbeitet“) eingetragen wird. Bei

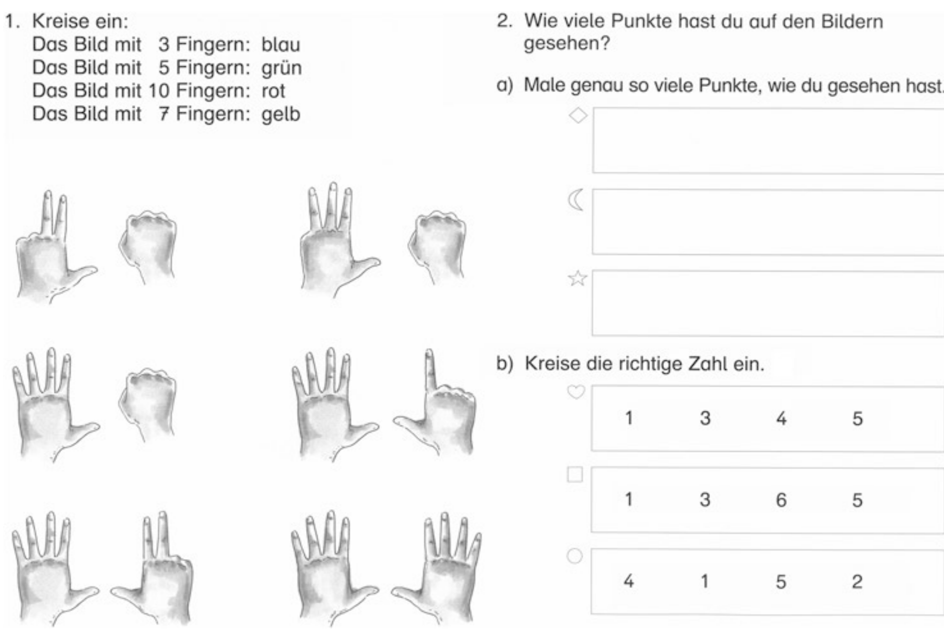


Abb. 4.4 Ausschnitt aus einer Aufgabensammlung zur Erhebung der Lernausgangslage zu Beginn des ersten Schuljahres. (Betz et al. 2016b, S. 27 f. © Cornelsen/Kristina Klotz)

kleineren Gruppen von Kindern bzw. bei besonderen Auffälligkeiten ist es sehr sinnvoll, die Art der Aufgabenlösungen durch die Kinder zu beobachten und diese für genauere Analysen der Vorgehensweisen zu dokumentieren. Solche Standortbestimmungen geben Auskunft über Kompetenzen und spezifische Schwierigkeiten einzelner Kinder und erleichtern damit die Planung des nachfolgenden Unterrichts – gegebenenfalls auch mit Blick auf notwendige Fördermaßnahmen. Darüber hinaus können sie aber auch als Rückmeldungen für die Kinder über deren eigenes Können zu sehen sein (vgl. Sundermann und Selter 2006, S. 21, sowie Abschn. 5.2.1).

4.1.3 Vertiefung und Festigung der Zählfähigkeit

Ungeachtet der individuellen Vorkenntnisse sollte jedes Kind nach wenigen Schulwochen zumindest im Zahlenraum bis 20 sicher zählen können. Sicheres Zählen in einem Zahlenraum (Vorwärts- und Rückwärtszählen, auch beginnend von beliebigen Zahlen an) ist eine wesentliche, unabdingbare Voraussetzung für die Rechenfertigkeit in diesem Zahlenraum[3]. Das Zählen trägt auch dazu bei, mentale Vorstellungen vom Zahlenraum aufzubauen. Die Kinder lernen dabei sowohl die Aufeinanderfolge der Zahlen vor ihrem „geistigen Auge" zu sehen als auch ihren „Abstand" und ihre Beziehungen zueinander. So ist z. B. die 13 weiter weg von der 3 als die 5, aber die Zahlenfolge 13, 14, 15, … wird analog gebildet zu der Folge 3, 4, 5, …; man erreicht die 13 von der 3 aus schneller in Zweierschritten als durch einfaches Zählen usw. Es gibt auch Kinder, die besondere „Zahlraumbilder" haben, das sind individuell ausgeprägte („idiosynkratische") Vorstellungen von den Zahlen (vgl. Rickmeyer 2001). Zählübungen sind in jedem Fall erforderlich, und auch für die Kinder, die bereits über umfangreiche Zählfähigkeiten verfügen, können herausfordernde Zählaufgaben gefunden werden (z. B. Zählen in Schritten). Um die Zählfähigkeit zu vertiefen und zu festigen, können die Kinder beispielsweise

- im Chor zählen
- Zahlenreihen rhythmisch sprechen (z. B. 1, *2,* 3, *4,* … oder 1, 2, *3,* 4, 5, *6,* …)
- das Zählen mit Bewegungen (hüpfen, stampfen, klatschen) verbinden
- im Stuhlkreis eine Zahl nennen; von dieser Zahl ab reihum vorwärts oder rückwärts zählen.

[3]Diese Voraussetzung ist nicht zu verwechseln und hat wenig zu tun mit dem zählenden Rechnen, also der Tatsache, dass manche Kinder auch noch in höheren Klassen Additions- und Subtraktionsaufgaben durch offenes oder verstecktes Zählen zu lösen versuchen. Diese Strategie ist ineffektiv und muss spätestens im zweiten Schuljahr verhindert werden (vgl. Abschn. 5.2). Allerdings ist sie die erste informelle Herangehensweise von fast allen Kindern an Additions- und Subtraktionsaufgaben (vgl. Abschn. 1.4.2).

Diese Übungen dienen vor allem der Festigung der Zahlwortreihe. Beim Abzählen – der *Anzahlbestimmung* durch Zählen – ist darauf zu achten, dass die Eins-zu-eins-Zuordnung von Zahlwort zu zu zählendem Objekt richtig erfolgt und dass gemäß dem Abstraktionsprinzip (vgl. Abschn. 1.3) beliebige Objekte (auch nur vorgestellte oder solche, die in keinem begrifflichen Zusammenhang zueinander stehen) gezählt werden können. Die Schwierigkeit des Zählens erhöht sich, wenn es keine Möglichkeit gibt, die zu zählenden Objekte zu berühren oder die bereits gezählten Objekte zur Seite zu schieben. Das Zählen wird einfacher, wenn man die zu zählenden Objekte ordnen kann. Abzählübungen sollten folglich so viele Varianten wie möglich umfassen. Unterschiedlich schwierig zu zählen, sind beispielsweise

- die Gegenstände im Federmäppchen
- Töne (auf dem Xylophon, Klatschen)
- sich bewegende Kinder oder Vögel auf dem Schulhof
- nicht anwesende oder nicht sichtbare Personen (z. B. Kinder außerhalb des Klassenraumes)
- große, unstrukturiert dargebotene Mengen.

Eine andere Möglichkeit, die Sicherheit im Umgehen mit Zahlen zu erhöhen, ist das Herstellen von Mengen mit vorgegebener Anzahl, z. B. neun Kinder für ein Spiel, Obststücke für alle Kinder der Klasse oder 17 Paar Schuhe im Klassenraum.

Auch Beobachtungen oder Erkundungen in der Klasse und im Schulhaus sind gerade für den Schulanfang geeignete Lernanlässe, um die Zählfähigkeiten zu festigen:

- Wie viele Kinder gehen in unsere Klasse?
- Wie viele Mädchen? Wie viele Jungen?
- Wie viele Kinder sind fünf, sechs, sieben Jahre alt?
- Wie viele Erstklasskinder gibt es an unserer Schule?
- Wie viele Räume hat das Schulhaus?
- Wie viele Schulklassen gibt es an unserer Schule?
- Wie viele Lehrkräfte sind es?
- Wie viele Treppenstufen sind es bis zu unserem Klassenzimmer?
- …

Belässt man es nicht beim Zählen sondern schließt Überlegungen mit ein, wie z. B. „Weshalb sind es mehr Zimmer als Schulklassen?“, „Mehr Lehrkräfte als Schulklassen?“ usw., schult man bereits wichtige mathematische Kompetenzen, wie etwa Argumentieren oder Vergleichen (vgl. Abschn. 3.3). Außerdem lassen sich diese Zählaufgaben auch nutzen, um beispielsweise erste Balkendiagramme zu thematisieren (Abb. 4.5) und so Erfahrungen mit der übersichtlichen Darstellung von Daten zu sammeln.

Gerade beim Abzählen größerer Mengen oder bei unstrukturiert bzw. unübersichtlich präsentierten Zählaufgaben ist es wichtig, Strategien zur Anzahlbestimmung zu

Abb. 4.5 Wie alt sind die Kinder in unserer Klasse? Zählaufgabe mit Veranschaulichung im Balkendiagramm

thematisieren. Dazu gehört beispielsweise das Verschieben von Elementen beim Zählen oder das Vorstrukturieren einer Menge (Kinder aufstellen lassen und der Reihe nach zählen). Viele Zählprozeduren werden auch einfacher, wenn man die zu zählenden – realen oder auch nur vorgestellten – Objekte in irgendeiner Weise repräsentiert, z. B. mithilfe der Finger oder durch eine Strichliste. Bei diesem Vorgehen fällt sofort auf, dass Ordnen und Bündeln die Sache erleichtert: 5 Finger sind eine Hand, man hat insgesamt 10 Finger. Bei den Strichlisten bietet es sich an, entsprechende Bündelungen (je 5 oder je 10) vorzunehmen.

4.1.4 Einführung der Zahlen

Aufbauend auf den Vorkenntnissen der Kinder werden in den ersten Schulwochen die Zahlen eingeführt. Zunächst sind dazu konzeptionelle Vorüberlegungen zu treffen: Mit welchen Zahlen beginnt man? Stellt man einen größeren Zahlenraum zur Verfügung, den man dann systematisch durcharbeitet, oder beginnt man Schritt für Schritt? Hat man sich für eine Vorgehensweise entschieden, steht der Erwerb eines fundierten Zahlbegriffs im Mittelpunkt der mathematischen Arbeit. Dieser zeigt sich in einer flexiblen Zuordnung von Mengen zu Ziffern und Zahlwörtern, aber auch im Erkennen der verschiedenen Bedeutungen von Zahlen (vgl. Abschn. 1.2.2). Zudem muss im Rahmen der Erarbeitung der ersten Zahlen auch die Schreibweise der Ziffern thematisiert werden.

Konzeptionelle Vorgehensweisen

Bei der Einführung der ersten Zahlen im Schulunterricht gibt es im Wesentlichen drei Vorgehensweisen:

1. Man führt die Zahlen schrittweise eine nach der anderen ein: die Eins, dann die Zwei, die Drei usw. bis zur Zehn.
2. Man führt einige Zahlen (z. B. 1 bis 4 oder 1 bis 6) ein und behandelt zunächst diesen begrenzten Zahlenraum. Erst anschließend werden die weiteren Zahlen – meist schrittweise – eingeführt (5 und 6, 7 und 8, 9 und 10).
3. Man betrachtet einen größeren Zahlenraum (1 bis 10 oder sogar 1 bis 20) als Ganzes mit dem Ziel der Systematisierung und Präzisierung des vorhandenen Wissens über diese Zahlen.

Die erste der drei Vorgehensweisen kennzeichnet die „synthetische" Methode. Die Vertreter dieser Methode (wie Haase 1898; später Breidenbach 1956 und Oehl 1966) legten großen Wert darauf, dass von Anfang an kardinale und ordinale Zahlaspekte miteinander verbunden werden. Auf jeder Seite des Schulbuchs wird nur eine Zahl behandelt, diese aber umfassend, so in dem 1960 von Kruckenberg und Oehl herausgegebenen Lehrgang *Die Welt der Zahl* am Beispiel der Seite zur Zahl 5 (Abb. 4.6).

Es sollte an Erfahrungen der Kinder angeknüpft werden. Die Zahl 5 wird vielfältig dargestellt und auf viele verschiedene Weisen zerlegt. Damit wird auch der Zusammenhang zu den vorher behandelten Zahlen 1, 2, 3 und 4 hergestellt. Nicht im Bild dargestellt sind Übungen an einer Treppe, durch die kardinale und ordinale Aspekte „unterschieden und miteinander verknüpft" werden: „Wir gehen die Treppe hinauf, Schritt für Schritt: Erste Stufe – noch ein Schritt: Zweite Stufe usw. – Die Bewegung

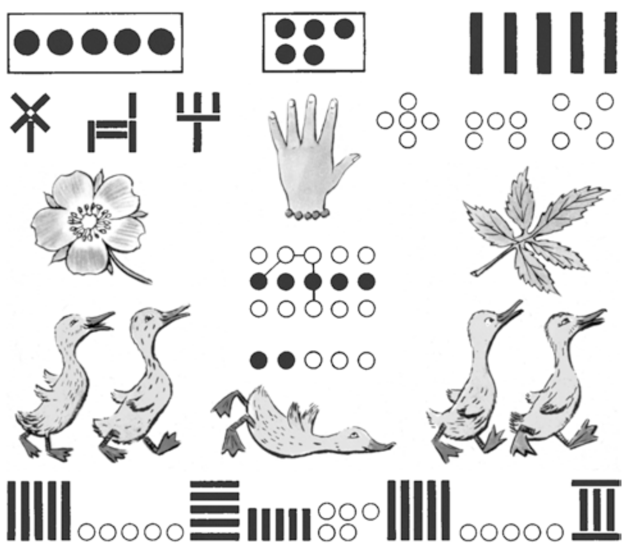


Abb. 4.6 Einführung der 5. (Kruckenberg und Oehl 1960)

wird nachvollzogen. – Der Lehrer zeigt: Auf welcher Stufe stehen wir hier? … Der dritten. Zeige die zweite Stufe, …! Die sprachliche Formulierung ist hier besonders wichtig“ (Oehl 1966, zu S. 8). In den aktuellen Schulbüchern ist diese Vorgehensweise – die Zahlen Schritt für Schritt einzuführen – nicht mehr zu finden.

Die zweite Vorgehensweise erfolgt nicht ganz so kleinschrittig: Der Zahlenraum wird in kleineren Bereichen erweitert. Dies zeigte sich beispielsweise in *Welt der Zahl – Neu* (Oehl und Palzkill 1971), einem Schulbuch, das in der Zeit der „Mengenlehre“ (vgl. Abschn. 4.1.1) verwendet wurde. Hier folgt einer längeren „prä-numerischen Phase“ mit einer ausführlichen Behandlung der Mengenbildung ab Seite 32 die Einführung der Zahlen 1 bis 5 als Kardinalzahlen, auf Seite 33 dann auch schon die Null: „An die leere Menge kommt das Zahlzeichen 0 (‚Null‘)“ (Zitat aus einem Buch für Schulanfänger!). Vom alten Konzept Oehls übrig geblieben ist nur noch ein Rest, wenn auf Seite 39 die Verbindung zwischen Kardinalzahl und Ordnungszahl hergestellt wird (die Fünfermenge umfasst die Vierermenge, diese die Dreiermenge usw.).

Dieses Konzept, nämlich die Einführung

- nicht nur einer, sondern mehrerer Zahlen auf derselben Schulbuchdoppelseite,
- in einigen Büchern nicht in der natürlichen Reihenfolge, sondern beginnend mit der Vier oder der Drei und
- die fast ausschließliche Konzentration auf den Kardinalzahlaspekt, also die Betrachtung der Mächtigkeiten von Mengen konkreter Objekte,

wurde bei allen sonstigen Unterschieden in den Schulbüchern noch bis in die 1990er-Jahre beibehalten. Wie wir in Abschn. 4.1.6 und 4.3.1 sehen werden, hat die Sicht der natürlichen Zahlen als Kardinalzahlen bei der Behandlung der Kleiner-Relation und der Rechenoperationen Addition und Subtraktion den großen Vorteil, dass man sehr gut auf konkrete Objekte und Handlungen zurückgreifen kann. Bei der Begründung der Zahlen als Kardinalzahlen ist es naheliegend, nicht mit der Eins zu beginnen, weil es für sechsjährige Kinder wenig plausibel wäre, bei Einer-Mengen einen „Mächtigkeitsvergleich“ vorzunehmen. Hier bietet es sich vielmehr an, Mengen mit drei oder vier Elementen daraufhin zu untersuchen, ob sie gleichmächtig sind.

In den – wenigen – aktuellen Schulbüchern, die den Zahlenraum eher gestuft einführen, also zunächst die Zahlen bis fünf und anschließend die von sechs bis zehn, werden die Zahlen allerdings nicht ausschließlich als Mächtigkeiten von Mengen gesehen. In der Regel steht der Kardinalzahlaspekt zusammen mit Zahlbildern (vgl. Abb. 4.7) und der Zählzahl im Mittelpunkt, und es werden die Schreibweise der Ziffern, die Mengenerfassung und Zerlegungen der Zahlen bis fünf bearbeitet.

Begründen lässt sich die gestufte Erarbeitung des Zahlenraumes gemäß der beiden bislang genannten Vorgehensweisen mit dem „Prinzip der kleinen Schritte“: „Rechenunterricht kann nur zum Erfolg führen, wenn er in kleinen und kleinsten Schritten vom Einfachen zum Schwierigen fortschreitet. Dieses Prinzip der kleinen Schritte gilt (…) für

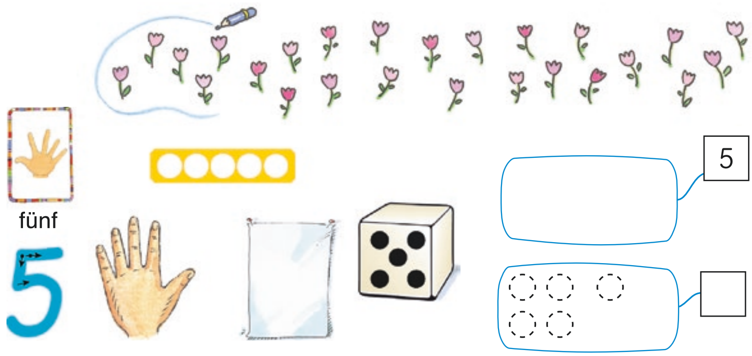


Abb. 4.7 Einführung der Zahl 5. (Rinkens et al. 2015, S. 12 © Westermann Gruppe)

alle Altersstufen und ist somit grundlegendes Prinzip des Rechenunterrichts“ (KM NRW 1955, zitiert nach Krauthausen und Scherer 2007, S. 112). Aus heutiger Sicht ist dieses „Prinzip“ eher umstritten. Es widerspricht aktuellen Erkenntnissen zum Lernen (vgl. Kap. 3) und steht auch im Gegensatz zu mathematikdidaktischen Erkenntnissen (vgl. Abschn. 4.1.1). Wir gehen in den folgenden Abschnitten noch ausführlicher darauf ein.

Generell muss es nicht unbedingt als erwiesen gelten, dass im Hinblick auf den Erwerb eines allgemeinen Zahlbegriffs die Eins die einfachste aller Zahlen ist. Maier gibt jedoch eine trivial anmutende, aber durchaus plausible Begründung für dieses Vorgehen: „Auf die Frage, in welcher Reihenfolge die ersten neun Zahlen – das sind die Zahlen, für die es im dekadischen System ein eigenes Ziffernsymbol gibt – im Unterricht zu behandeln sind, gibt es eine sehr triviale Antwort: zuerst eins, dann zwei, dann drei, usw.“, und etwas später: „Ein erster inhaltlicher Abschnitt ist wohl durch die Zahlen 1 bis 4 markiert; können doch, gemäß psychologischer Einsicht, die meisten Schulanfänger die Anzahl von Mengen dieser ersten Zahlen mit weniger als fünf Elementen ohne Schwierigkeiten simultan erfassen“ (1990, S. 190). Die Null kommt in der Reihe der Zählzahlen nicht vor und ist vielen Kindern als Zahl nicht geläufig. Deshalb bleibt zu überlegen, ob sie gleich am Anfang zusammen mit den ersten Zahlen betrachtet werden sollte und wenn ja, in welcher Weise (vgl. Abschn. 4.1.5).

Die Betrachtung eines größeren Zahlenraumes als Ganzes und von Anfang an – die dritte der oben genannten Vorgehensweisen – wird seit Mitte der 1990er-Jahre von zahlreichen Schulbuchautoren favorisiert. Im Lehrerband des zuerst 1994 erschienenen Lehrgangs *Das Zahlenbuch* betonten Wittmann und Müller (1994, S. 18):

„Das ‚Zahlenbuch‘ führt den Zwanzigerraum ganzheitlich ein, d. h. die Zahlen von 1 bis 10 und von 11 bis 20 werden verhältnismäßig rasch vorgestellt (Seite 1–13 bzw. 14–17), wobei der Anzahl- und der Zählzahlaspekt sofort verknüpft werden. Dieses Vorgehen ist dadurch begründet, dass Schulanfänger bereits sehr viel über diesen Zahlenraum und teilweise auch darüber hinaus wissen, wie zahlreiche empirische Untersuchungen zeigen.“

Begründen lässt sich diese Vorgehensweise mit dem Konzept des „aktiv-entdeckenden und sozialen Lernens“ (vgl. Krauthausen 2018, S. 179 ff.; Selter und Walther 1999). Dieses grenzt sich deutlich ab vom Prinzip der kleinen Schritte: Es „verlangt eine ständige Durchdringung inhaltlicher und allgemeiner Lernziele und lässt sich daher nicht in einem kleinschrittigen Unterricht verwirklichen, in dem der Stoff Häppchen für Häppchen vermittelt wird und die Lösungswege sowie die äußere Form der Lösung anhand von Musteraufgaben festgelegt ist. Sinnvoll ist vielmehr eine ganzheitliche Behandlung von Rahmenthemen“ (Wittmann und Müller 2012, S. 163). Spricht man in diesem Sinne von einem „ganzheitlichen Einstieg in den Zwanzigerraum“, so bedeutet dies, den Zahlenraum von Anfang an bis 10 oder sogar bis 20 zu öffnen.

In Abb. 4.8 ist die Doppelseite aus einem zugehörigen Schülerbuch abgebildet, auf der die Zahlen von 0 bis 10 in diesem Sinne ganzheitlich eingeführt werden. In den Aufgaben sollen die Kinder den Ziffernkarten zum einen Mengen konkreter Gegenstände zuordnen und zum anderen strukturierte Mengen von Plättchen und die Finger der Hand.

Viele Schulbuchautoren – wie z. B. Häring und Hesemann (2014) im *Nussknacker 1* – gehen ähnlich vor (Abb. 4.9).

Diese Vorgehensweise steht in deutlichem Gegensatz zu der oben skizzierten schrittweisen Behandlung der Zahlen in *Welt der Zahl* (Abb. 4.6). Rinkens et al. (2009) berufen sich in ihren Schulbüchern ebenfalls auf ein „Prinzip des ganzheitlichen

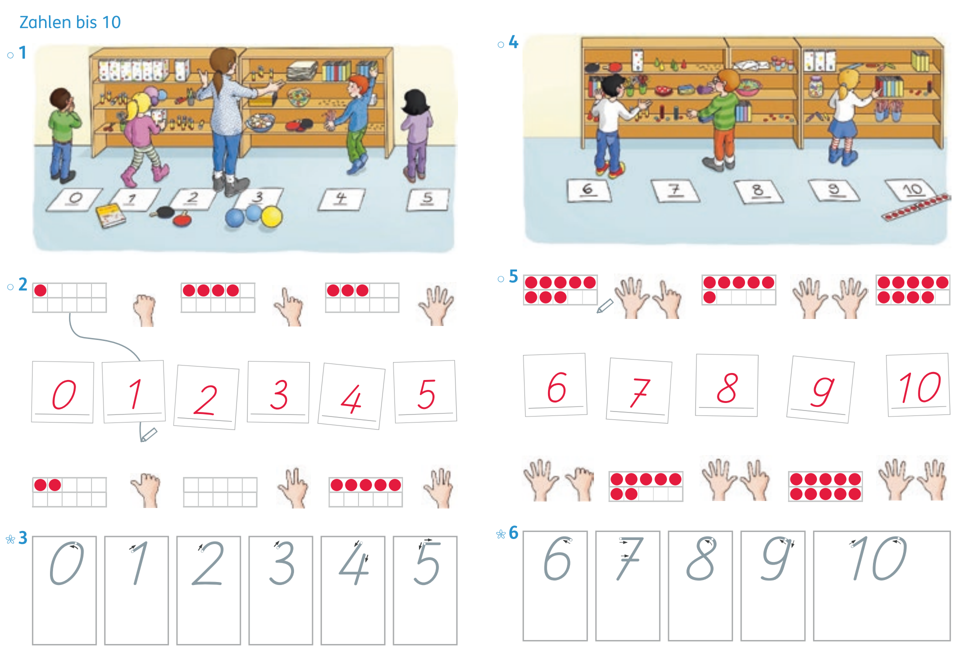


Abb. 4.8 Die Zahlen von 0 bis 10. (Wittmann und Müller 2017a, S. 8 f. © Ernst Klett Verlag GmbH)

Abb. 4.9 Zahlenausstellung. (Häring und Hesemann 2014, S. 6 f. © Ernst Klett Verlag GmbH)

Lernens", wobei sie jedoch einen anderen Begriff von Ganzheitlichkeit zugrunde legen: „Das Kind lernt mit den Sinnen, mit Gefühl, mit Verstand. ‚Ganzheitlich' meint also hier, ‚das ganze Kind ansprechend' und beschränkt sich nicht auf das Stoffliche" (Rinkens et al. 2009, S. 4). Diese Auffassung von „ganzheitlich" unterscheidet sich von der oben beschriebenen, welche sich vor allem auf die inhaltliche Herangehensweise an mathematische Themen bezieht. Schütte merkt dazu kritisch an, dass gut überlegt werden muss, ob „die Sinneserfahrung tatsächlich für die Kernideen der mathematischen Sachverhalte funktional ist, ob sie die Lehrintention unterstützt oder gar von ihr ablenkt" und warnt, dass die „sinnliche ‚Verpackung' (…) für die Bildung von mathematischen Begriffen geradezu kontraproduktiv" sein kann (2008, S. 59 f.).

Ziffernschreibweise

In den neueren Lehrgängen ist das Schreiben von Ziffern von Anfang an Teil der Behandlung der jeweiligen Zahlen. Ergänzend zum Schulbuch werden dazu auch eigene Ziffernschreibkurse angeboten (Abb. 4.10). Zwar können viele Kinder am Schulanfang die meisten Ziffern lesen und auch bereits einige schreiben, doch ist die Präzision beim Schreiben von großer Bedeutung. Dabei geht es nicht nur um die Lesbarkeit des Geschriebenen durch andere, sondern auch darum, dass die Kinder sich selbst zusätzliche Probleme schaffen, wenn sie z. B. in Rechnungen ihre Ziffern nur mühsam lesen können.

Zur Entwicklung von Sicherheit und Präzision beim Schreiben von Ziffern sind Übungen hilfreich, die aus dem Schriftspracherwerb bekannt sind:

- Vorbereitende Übungen wie das Halten der Schreibgeräte und das Ziehen von geraden Linien, Bögen und Schleifen durch die Kinder
- Sinnvoll ist auch die Festigung einer standardisierten Abfolge von Bewegungen beim Ziffernschreiben (s. Abb. 4.10, oben links)
- Entwicklung von Routine im Ziffernschreiben durch regelmäßiges Üben

Zahlen auf verschiedene Weise darstellen
Die neueren Lehrgänge stimmen in einem weiteren Punkt überein: Die Kinder sollen angeregt werden, ihre vorhandenen Erfahrungen mit Zahlen und ihre Zahlvorstellungen mit möglichst vielen Aspekten zu verknüpfen (s. Abschn. 1.2.2) und diese untereinander und mit anderem Wissen zu vernetzen. Verschiedene Bedeutungszusammenhänge und Repräsentationen von Zahlen, wie sie Kindern in der Umwelt und auch im Anfangsunterricht begegnen, sind beispielsweise:

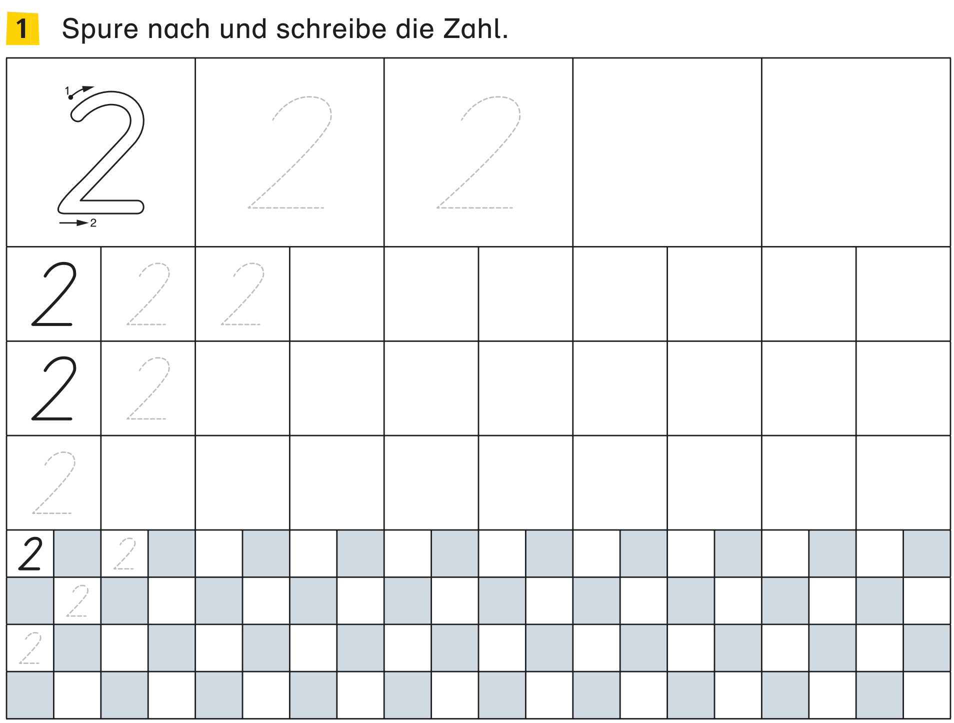


Abb. 4.10 Ziffernschreibkurs zur Zahl 2. (Balins et al. 2015a, S. 85 © Cornelsen/Detlef Seidensticker)

- Darstellungen von Anzahlen, häufig als Darstellungen von Mengen konkreter Objekte oder von Punktmengen, Strichlisten und Ähnlichem
- Zahlbilder der verschiedensten Art (Zahlbilder auf Spielwürfeln oder sonstige Muster)
- Ziffern
- Zahlwörter
- Maßzahlen (z. B. Geldwerte: 2 €, Zeitspannen: drei Stunden)
- wiederholte Handlungen oder Ereignisse (z. B. Tonfolgen, Schritte)
- unterschiedlichste Anlässe zum Zählen (im Klassenraum, beim Würfelspiel)
- Reihenfolgen (Perlenketten, Wettlauf)
- Beispiele für die Verwendung von Zahlen und Ziffern zur Codierung, wie etwa bei Telefonnummern oder Autokennzeichen
- Zahlzerlegungen

In der ersten Arbeit mit Zahlen spielt deshalb die Zuordnung von Mengen, Zahlwort und Ziffer eine wichtige Rolle, die Mengen können dabei konkret sein oder auch bildlich dargestellt. Können die Kinder die verschiedenen Zahldarstellungen flexibel und verständnisvoll ineinander überführen, so ist eine wichtige Grundlage für den Erwerb des Zahlbegriffs gelegt. Aktivitäten wie in Abb. 4.8, bei denen Mengen mit konkreten Gegenständen den entsprechenden Ziffern zugeordnet und zudem noch strukturierte Mengen dargeboten werden, finden sich in vielen Schulbüchern.

Kleine Anzahlen (bis 5 oder 6) erkennen Kinder oft bereits durch Hinsehen, also durch simultane Zahlerfassung (Abschn. 1.3). Man kann diese Fähigkeiten in Verbindung mit verschiedenen Zahldarstellungen üben (oder testen), indem man die Kinder z. B. alle Figuren legen lässt, die mit vier Plättchen möglich sind (vgl. Abb. 4.11), oder ihnen kleinere Anzahlen von Gegenständen nur kurz zeigt und sie die Anzahl nennen oder mit den Fingern zeigen lässt.

Punktebilder (Augenzahlen) auf dem Spielwürfel können die Kinder oftmals zur schnellen Erfassung von Mengen nutzen. Beispielsweise ist es recht einfach, die Anzahl von Gegenständen anzugeben, wenn sie ähnlich wie das Zahlbild der Sechs auf dem Würfel angeordnet sind, oder bei größeren Anzahlen, wenn sich ihre Anordnung zerlegt denken lässt, z. B. ähnlich den Zahlbildern der Vier und der Fünf auf dem Würfel (Abb. 4.12), oder wenn eine Anordnung vorliegt, deren Struktur leicht erkannt werden kann, wenn also ein Mustererkennen möglich ist.

Auf die unterschiedlichen Fähigkeiten in diesem Bereich sind wir schon in Abschn. 1.3.1 und 1.4.2 eingegangen. Einige Kinder erkennen die Würfelbilder und machen sie sich zunutze, andere verwenden aufwendige Zählprozeduren (vgl. die

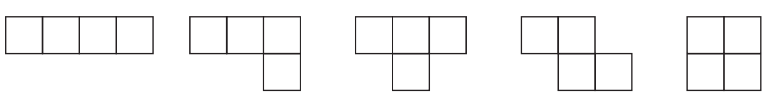


Abb. 4.11 Figuren aus vier Plättchen

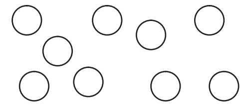


Abb. 4.12 „5 und 4“

Diskussion zur Abb. 1.11). Gerade das Erkennen von Mustern aller Art ist eine Fähigkeit, die unbedingt entwickelt und immer wieder trainiert werden sollte. Auch damit wird das Übertragen von der einen in eine andere Zahldarstellung gefestigt (gesprochene Zahlwörter, Punktebilder oder andere Zahlbilder, Standardmengen wie die Finger einer Hand, Ziffern). Eine Partnerübung dazu kann z. B. so aussehen: Man legt verschiedene Punktebilder (z. B. von 1 bis 10) aus und lässt eine Zahl nennen oder durch den Zehnerwürfel ermitteln. Die Kinder sollen sich das passende Punktebild greifen (falls gewünscht auch auf Tempo und als Wettbewerb möglich).

Darstellungen von Zahlen in Strichlisten (Abb. 4.13) eignen sich sehr gut, um Daten und Häufigkeiten genauer zu betrachten, wie dies in den Bildungsstandards gefordert wird: „In Beobachtungen, Untersuchungen und einfachen Experimenten Daten sammeln, strukturieren und in Tabellen, Schaubildern und Diagrammen darstellen“ (vgl. KMK 2004, S. 8 ff.; s. a. Walther et al. 2007, S. 141 ff. und Hasemann 2009). Strichlisten sind zudem ein einfaches und effektives Mittel, um die Idee der Strukturierung von Daten und Zahlen anzuregen.

Zahlzerlegungen

Bei den Zahlzerlegungen geht es zunächst nur darum, Zahlen als Ganzes in verschiedene Teile zerlegt zu sehen; teilweise werden Zahlzerlegungen aber auch schon als Vorübungen zur Addition verstanden (vgl. Abschn. 4.3.1). Zahlzerlegungen können handelnd, z. B. durch das Werfen von (auf beiden Seiten verschieden gefärbten) Wendeplättchen hergestellt werden. Man mischt beispielsweise fünf solcher Plättchen in einem Würfelbecher und wirft sie auf den Tisch: Wie viele rote und blaue Plättchen sind zu sehen?

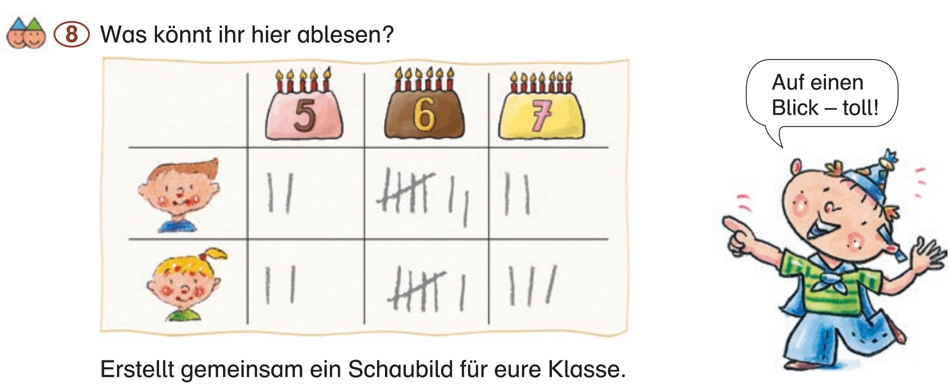


Abb. 4.13 Strichlisten. (Betz et al. 2016a, S. 7 © Cornelsen/Mathias Hütter)

Die Ergebnisse (Ausfälle) können auf unterschiedliche Weise notiert werden (unter anderem durch Strichlisten und Tabellen), sogar „statistische“ Auswertungen sind möglich (so kommt die Verteilung „fünf blaue und kein rotes Plättchen“ seltener vor als ein Wurfergebnis, das sowohl blaue als auch rote Plättchen enthält). Vor allem aber sollen die Kinder erkennen, dass die Anzahl 5 auf verschiedene Weisen durch kleinere Anzahlen zusammengesetzt werden kann. Eine andere Art, die verschiedenen Zerlegungen einer Zahl zu generieren, sind sogenannte Schüttelschachteln (Abb. 4.14). Zahlzerlegungen enthalten dadurch den Aspekt des Zusammenfügens von Objekten: Zwei Teile ergeben ein Ganzes. Die Zahlzerlegungen können so auch zur Einführung des Plus-Zeichens genutzt werden (s. Abb. 4.14); die Einführung des Gleichheitszeichens erfolgt in Schulbüchern dann häufig erst später.

Während die Plättchen oder auch die Perlen in den Schüttelschachteln in der Regel unstrukturiert zu liegen kommen, wird bei den Aufgaben in Abb. 4.15 der Blick für Strukturen im Zusammenhang mit den Zerlegungen geschult. Es geht darum zu erkennen und zu üben, dass – und wie – Anzahlen leichter erfasst werden können, wenn die Mengen strukturiert sind. Das Bestimmen der Anzahl ist z. B. dann leicht, wenn die Teilmengen simultan erfasst werden können, wenn sie den Zahlbildern auf dem Würfel ähneln oder das Verdoppeln nahelegen.

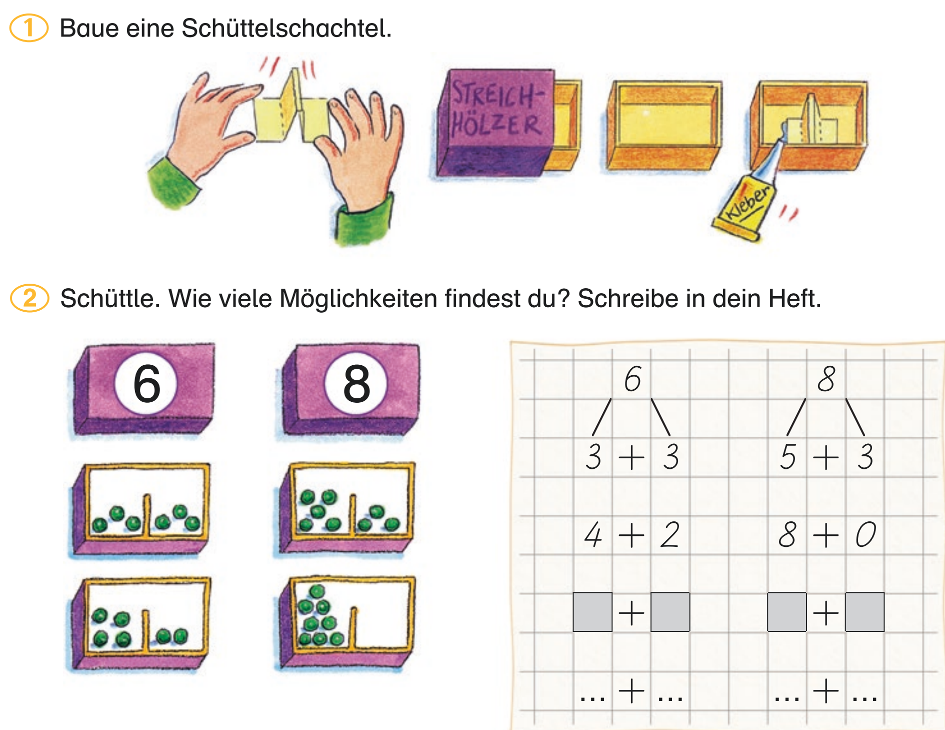


Abb. 4.14 Zahlzerlegungen mit der Schüttelschachtel. (Betz et al. 2016a, S. 10 © Cornelsen/Mathias Hütter)

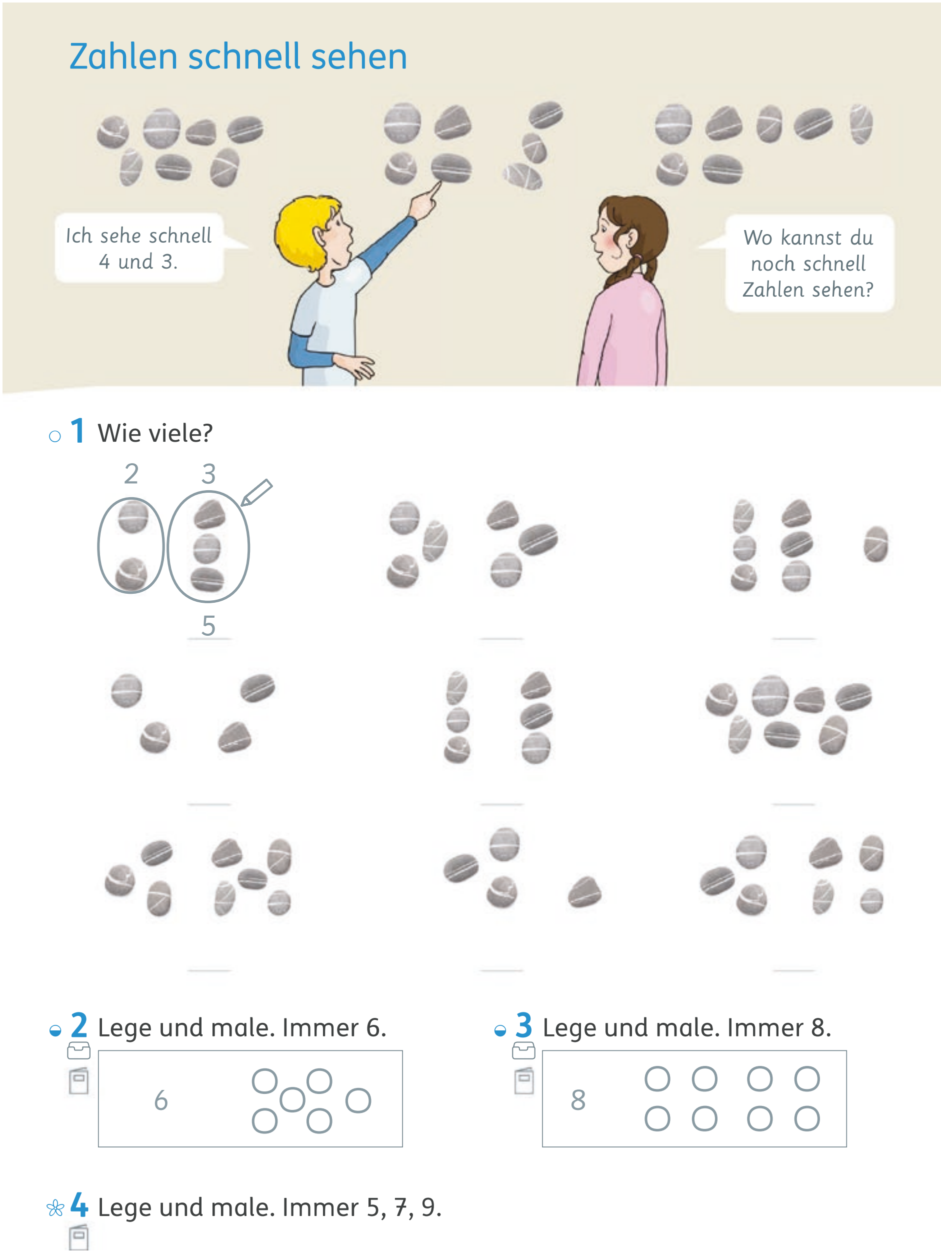


Abb. 4.15 Wie viele? (Wittmann und Müller 2017a, S. 16 © Ernst Klett Verlag GmbH)

4.1.5 Die Null

Bei der Betrachtung der Null sollte sorgfältig zwischen der 0 als Ziffer (also dem Zeichen bzw. der Schreibfigur 0) und der Zahl Null unterschieden werden. Die Ziffer 0 kennen die meisten Kinder zu Schulbeginn. Nach einer Untersuchung von Schmidt (1982) können 87 % der Schulanfängerinnen und Schulanfänger diese Ziffer schreiben und 94 % sie lesen. In den meisten der neueren Schulbücher wird die Ziffer 0 gleich zu Beginn und ohne Umschweife zum Aufschreiben der Zahl 10 (mit den Ziffern 1 und 0) verwendet. Übungen zum sauberen Schreiben der Ziffer werden eher unabhängig davon im Rahmen des Ziffernschreibkurses angeboten.

Die Einführung der Zahl Null ist nicht so unproblematisch wie die der Ziffer 0. Die Null als Zählzahl kann den Kindern bekannt sein durch das Rückwärtszählen bei einem Countdown (Abb. 4.16).

Aber es ist ein hoher Anspruch, bei Schulanfängern ein Begriffsverständnis für die Kardinalzahl Null zu erlangen (mathematisch gesehen: die Mächtigkeit der leeren Menge, Abschn. 1.2.1). In Beispielen kommt die Null, wenn überhaupt, nur in der Weise vor, dass „kein" rotes Plättchen auf dem Tisch liegt (was anschaulich ist und sicher etwas anderes als die Feststellung: „Die Menge der roten Plättchen ist leer"). Für viele Kinder – und nicht nur Kinder – ist deshalb „null" gleichbedeutend mit „nichts" – eben „kein" Plättchen. Bei der späteren Verwendung der Null als Rechenzahl beobachtet man sehr häufig, dass die Kinder große Probleme haben:

- Manche Kinder fangen bei Aufgaben wie $5 + 0 = \ldots$. schlicht an zu lachen: Null ist doch keine Zahl, mit der man rechnen kann!
- Häufig vorkommende Fehler bei der Addition und Subtraktion sind dann $5 + 0 = 0$ und $5 - 0 = 0$.

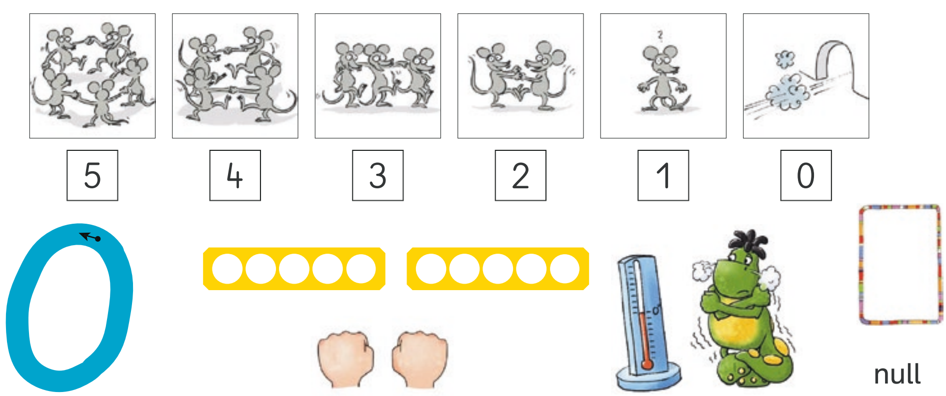


Abb. 4.16 Null als Zählzahl im Countdown, als Schreibfigur und auf dem Thermometer. (Rinkens et al. 2015, S. 17 © Westermann Gruppe)

- Bei der Multiplikation lautet die „Variante" (vermutlich durch eine Übertragung von „Mustern" aus Aufgaben mit Null zur Addition und Subtraktion) $5 \cdot 0 = 5$.

Auch wenn Fehlvorstellungen und deren Ursachen individuell sehr unterschiedlich sein können, so spricht die Häufung dieser Fehler dafür, dass unzulängliche oder nicht adäquate Vorstellungen zur Zahl Null von den Kindern bereits im Anfangsunterricht aufgebaut werden.

Um die Schwierigkeiten mit der Null etwas genauer zu verstehen, mag ein kurzer Exkurs hilfreich sein. Griechen und Römer brauchten sie nicht, weder zum Schreiben ihrer Zahlen noch zum Rechnen. Menninger (1958, S. 214) erwähnt einen indischen Text etwa aus dem Jahre 870, in dem die Null als Ziffer zum ersten Mal zu finden ist; ihr Name *sunya* bedeutet schlicht „leer" – sie ist ein Leerzeichen in der indischen Stellenschrift. Nach Europa kommt die Null – immer noch als Leerzeichen – durch die Vermittlung der Araber, und sogar die Wörter „Ziffer" und *zero* lassen sich auf die indische Bezeichnung zurückführen (Menninger 1958, S. 215). Aber bis ins 15. Jahrhundert hinein bleibt sie *nulla figura* (wie es in einem italienischen Rechenbuch aus dem Jahre 1484 heißt); zwar liest man hier das Wort „null" zum ersten Mal, aber weiterhin in der Bedeutung „die Figur (das Zeichen) für das Nichts": eine Ziffer, die nur ein Leerzeichen ist.

Irgendwann haben Menschen entdeckt, dass die Null sehr wohl auch als Zahl verstanden werden kann, zumindest, dass es nützlich und hilfreich ist, mit der Null zu rechnen (und dass sie eben nicht „-ein Nichts" ist). Leonardo von Pisa (genannt Fibonacci, 1180–ca. 1250) hatte bei seinen Reisen in islamische Länder das Umgehen mit – wie wir heute sagen würden – linearen Gleichungssystemen kennengelernt. Er ließ jedoch, notfalls durch raffinierte inhaltliche Interpretationen der Ergebnisse, nur Lösungen mit positiven Zahlen (die auch Brüche sein konnten) zu (vgl. Sesiano 1990, S. 144 f.). Negative Lösungen von Gleichungen treten erstmals in einer provenzalischen Handschrift, die etwa aus dem Jahre 1430 stammt, auf, wo von „10 und ¼ weniger als nichts" die Rede ist – also auch hier ist „null" noch gleich „nichts". Dennoch: Nachdem die Stellenschreibweise mit den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und 0 erst einmal eingeführt war, wurden die Vorteile dieser Notation gerade für das Rechnen sehr schnell erkannt, und auch bei der Null wurde aus der reinen Ziffer in den Rechenbüchern Ende des 15. und Anfang des 16. Jahrhunderts eine Rechenzahl, so z. B. in den Büchern von Adam Ries (1492–1559; vgl. Menninger 1958, S. 256 ff.). Die mathematische Begründung dafür, dass die ganzen Zahlen, also die positiven und die negativen Zahlen zusammen mit der Null wirklich Zahlen sind, lieferte H. Hankel erst in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts (vgl. Sesiano 1990, S. 142).

Aus diesem kleinen historischen Exkurs wird klar, dass die Einführung der Null als Zahl im mathematischen Anfangsunterricht nicht zu früh kommen darf. Die Kinder müssen selbst erkennen, dass es vernünftig ist, sie als eine „richtige" Zahl zu betrachten.

Beitragen kann dazu eine Betrachtung wie die folgende (vgl. Radatz und Schipper 1983, S. 58):

Wir zählen ab, wie viele Mädchen, Jungen, Lehrerinnen, Lehrer oder 5-Jährige, 6-Jährige, 7-Jährige usw. in der Klasse sind. Die Ergebnisse werden in einer Tabelle aufgeschrieben, die z. B. so aussehen kann:

5-Jährige	6-Jährige	7-Jährige	8-Jährige
6	15	3	0

Selbstverständlich ist es auch dabei möglich (und sogar zu erwarten), dass die Kinder „0 8-Jährige" als „es ist kein 8-jähriges Kind in der Klasse" lesen und verstehen. Die Lehrkraft muss also deutlich machen, dass die Null hier zum Aufschreiben einer *Anzahl* verwendet wurde. Am besten wird der Zahlcharakter der Null deutlich, wenn man sie als Rechenzahl verwendet (vgl. Abschn. 4.3). Beispielsweise tritt sie bei Zerlegungen mit der Schüttelschachtel auf (8 Kugeln auf einer Seite, keine Kugel auf der anderen Seite: $8 = 8 + 0$, s. auch Abb. 4.14) oder als Ergebnis einer Rechnung, wenn man Aufgabenreihen wie

$$\begin{aligned} 5 - 1 &= 4 \\ 5 - 2 &= 3 \\ 5 - 3 &= 2 \\ 5 - 4 &= 1 \\ 5 - 5 &= 0 \end{aligned}$$

betrachtet. Danach sind auch Additionen wie $5 + 0 = 5$ und Subtraktionen wie $5 - 0 = 5$ sinnvoll. In einer konkreten Aufgabe könnte z. B. die Anzahl der Kinder verschiedenen Alters in der Klasse (einschließlich der 8-jährigen!) addiert werden. An einer solchen – den Erstklässlern möglicherweise merkwürdig anmutenden – Aufgabe wird erkennbar, dass die Hinzunahme der Null eine formale Erweiterung des Bereichs der natürlichen Zahlen bedeutet. Es handelt sich damit um ein Beispiel für eine für die Mathematik typische Vorgehensweise: Der Gültigkeitsbereich eines Regelsystems wird (hier: durch die Hinzunahme der Null) erweitert. Im Mathematikunterricht kommen solche Erweiterungen immer wieder vor, etwa bei der Einführung der Bruchzahlen und der negativen Zahlen. Dieser Sachverhalt kann mit den Kindern durchaus angesprochen werden, etwa in dem Sinne, dass die Null als Ergebnis einer Rechnung auftreten und damit auch als Rechenzahl betrachtet werden kann. Vermieden werden sollte in jedem Fall, dass die Kinder ihre Vorstellung von der Null zu eng mit „nichts" verknüpfen. Dies gilt auch für Überlegungen bei der Multiplikation mit der Null (denn ein flotter Spruch wie „Null ist nix, verschwinde fix! Denn Null mal Null macht nix" wird diese irreführende Vorstellung von der Null als „nichts" eher noch verstärken).

4.1.6 Kleiner-Relation und Aspekte der mathematischen Begriffsbildung

In vielen Lehrgängen für das erste Schuljahr werden Sprech- und Schreibweisen wie „3 ist kleiner als 5“ (mit Zeichen: $3 < 5$) und „5 ist größer als 3“ ($5 > 3$) früh eingeführt und in verschiedenen Anwendungssituationen und Übungsbeispielen verwendet. Abgesehen von gelegentlichen Verwechslungen der Zeichen „<“ und „>“, dürften die meisten Kinder nach einiger Zeit der Übung kaum ernsthafte Probleme damit haben. Wir beschäftigen uns dennoch in diesem Abschnitt etwas ausführlicher mit der Kleiner-Relation, weil auch eine vermeintlich einfache Begriffsbildung wie diese den Kindern einen Abstraktionsprozess abverlangt. Begriffsbildungen, die im Anfangsunterricht vorkommen, sind aus der Sicht der Erwachsenen häufig so einfach, dass die dazu erforderlichen Prozesse kaum noch beachtet werden, zumal sie bei den meisten Kindern eher unauffällig ablaufen. Im Folgenden geht es also nicht darum, einen einfachen Sachverhalt künstlich kompliziert zu machen, sondern um die Reflexion dieses Sachverhalts aus lerntheoretischer Sicht.

Auf Vorkenntnisse der Kinder zur Kleiner-Relation haben wir bereits in Abschn. 1.4 hingewiesen. Im Zusammenhang mit der Festigung der Zählfähigkeiten (vgl. Abschn. 4.1.3) kommen auch Übungen zum Tragen, die einen Vergleich im Hinblick auf „mehr“, „weniger“ oder „genauso viele wie“ erforderlich machen. Dabei kommt auch die Eins-zu-eins-Zuordnung wieder ins Spiel:

- Sind mehr Jungen oder mehr Mädchen in der Klasse, oder sind es gleich viele? Wie kann man dies ohne zu zählen feststellen?
- Ist für jedes Kind ein Stuhl da? Sind weniger Stühle da, oder reichen sie aus?
- Im Schwimmbad sind zwei Eisverkäufer, die das gleiche Eis haben. Vor beiden steht eine Schlange. An welcher stellst du dich an? Warum?
- Bei zeichnerischen Darstellungen von zwei Mengen können die Kinder die Eins-zu-eins-Zuordnung sehr schön dadurch herstellen, dass sie die Objekte der einen und der anderen Menge gleichzeitig mit einem Finger der linken und der rechten Hand antippen.

Die Verwendung von weiteren Relationsbegriffen, wie z. B. schneller – langsamer – genauso schnell wie, kleiner – größer – genauso groß wie, leichter – schwerer – genauso schwer wie, mehr wert – weniger wert – genauso viel wert wie, gelingt Kindern in der Regel zu Schulbeginn schon relativ gut (vgl. Abschn. 1.4), wenn sich die Vergleiche auf Situationen beziehen, in denen konkrete Objekte verglichen werden. So können die Kinder leicht Stifte oder Steckwürfeltürme der Länge oder Höhe nach ordnen bzw. feststellen, dass z. B. „5 Würfel mehr sind als 3 Würfel“. Aus der erfolgreichen Bewältigung solcher Fragestellungen, die sich auf *konkrete* Situationen beziehen, kann nicht ohne Weiteres geschlossen werden, dass die Kinder Einsicht in die (abstrakten) Beziehungen zwischen Zahlen haben. Wie sehr die Problembewältigung von der Art der Fragestellung abhängen kann, zeigten die Beispiele aus Interviews mit Kindern im letzten Kindergartenjahr, die in Abschn. 1.4 vorgestellt wurden: Bei mehreren Aufgaben ging es in diesen Interviews um die Frage, welches Kriterium beim Vergleich im Hinblick auf „mehr" oder „weniger" für die Kinder höchste Priorität hat: das Kriterium „räumliche Ausdehnung" oder das Kriterium „Anzahl der Elemente". Für die Kinder wurden dazu unter anderem drei Häuschen aus Klötzen gebaut (vgl. Abschn. 1.4.3, Abb. 1.14). Bei der Frage „Welches Häuschen ist am größten?" zogen alle Kinder das Kriterium „Höhe" heran; bei der Frage „Welches Häuschen hat am meisten Zimmer?" zählten dagegen fast alle die Anzahl der Klötze. In jedem Fall aber bezogen sie die Frage ausschließlich auf das konkrete Problem, sie verglichen nicht *Zahlen* nach dem Kriterium „ist größer als".

Auf der Schulbuchseite in Abb. 4.17 werden die Kinder mit diesen beiden begrifflichen Ebenen konfrontiert: Mit (Bildern von) Steckwürfeltürmen bzw. Fischen einerseits und dem Vergleich von Zahlen (und formalen Schreibweisen wie $4 > 2$) andererseits. Das Herstellen eines Zusammenhangs zwischen den konkreten Steckwürfeln und den „gemeinten" Beziehungen zwischen Zahlen erfordert einen durchaus komplexen Denkprozess. Zur Beschreibung dieses Prozesses soll hier eine vereinfachte Version des von Steinbring (2000, S. 34) vorgestellten „epistemologischen Dreiecks" (Abb. 4.18) verwendet werden.

Der mathematische Begriff, um den es geht, ist der der Kleiner-Relation zwischen Zahlen: Zwei Zahlen sind entweder gleich groß, die eine ist kleiner als die andere oder die eine ist größer als die andere. Fasst man die Zahlen als Kardinalzahlen auf, so lässt sich entscheiden, ob eine Zahl kleiner ist als die andere, indem man die entsprechenden

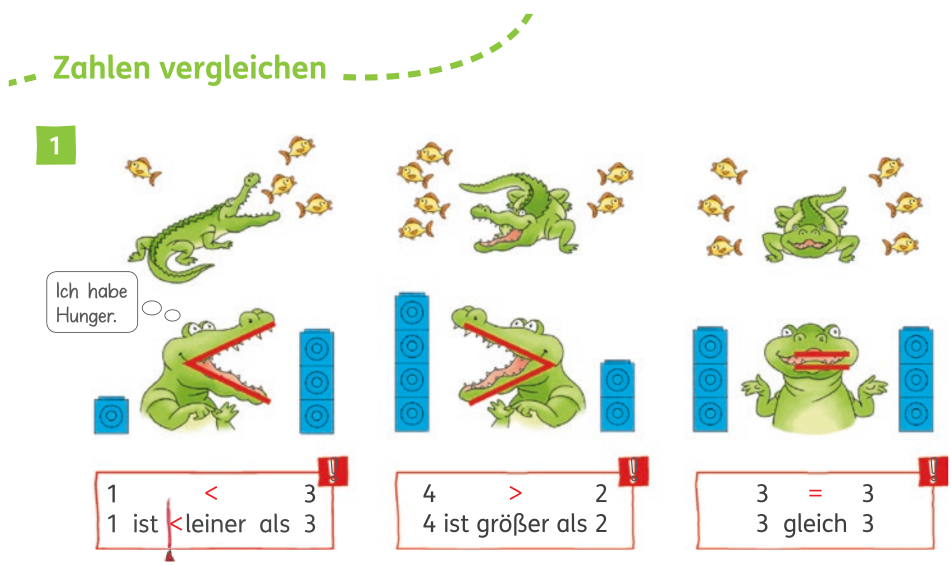


Abb. 4.17 Größer, kleiner, gleich. (Häring und Hesemann 2014, S. 22 © Ernst Klett Verlag GmbH)

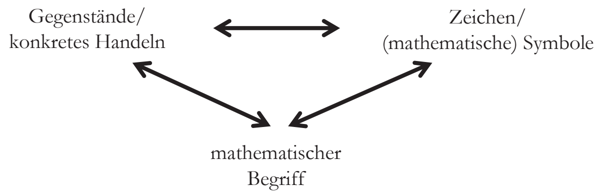


Abb. 4.18 Epistemologisches Dreieck (vereinfacht)

Mengen nach dem Kriterium „die eine Menge enthält weniger Elemente als die andere“ vergleicht. Was mit dem Begriff „ist kleiner als“ gemeint ist (seine Bedeutung), beschreiben wir *mit Worten,* d. h. wir verwenden *sprachliche Zeichen.* In Abb. 4.17 wird dieser Sachverhalt nicht in allgemeiner Form, sondern – dem ersten Schuljahr angemessen – anhand von Beispielen angesprochen: Die Kinder sollen Mengen von Fischen bzw. Steckwürfeltürme unterschiedlicher Höhe miteinander vergleichen. Im ersten Beispiel geht es um den Vergleich von einem mit drei Fischen, und der linke Steckwürfelturm enthält einen Würfel, der rechte drei: Ein Fisch bzw. ein Würfel ist *weniger* als drei Fische bzw. drei Würfel – eins ist *kleiner* als drei, mit mathematischen Zeichen geschrieben: $1 < 3$. Zu beachten ist hier aber, dass mit der auf Wahrnehmungen bezogenen Aussage „ein Fisch ist weniger als drei Fische“ nicht automatisch die auf *Zahlen* bezogene Erkenntnis einhergeht, dass „eins kleiner als drei“ ist.

Die Fische und Steckwürfeltürme sind Beispiele für die im epistemologischen Dreieck genannten Gegenstände. Sie werden – z. B. durch konkretes Handeln – nach den Kriterien „mehr/weniger/gleich viele“ (Fische) oder „höher/niedriger/gleich hoch“ (Türme) miteinander verglichen. Auf der Schulbuchseite in Abb. 4.17 kommen außerdem sprachliche Zeichen (Wörter) und mathematische Symbole (die Ziffern und die Zeichen < und >) vor. Allerdings „haben die Zeichen zunächst für sich allein keine Bedeutung, die muss von den lernenden Kindern hergestellt werden“ (Steinbring 2000, S. 34). Mit anderen Worten: Was mit den Bildern (von Gegenständen) und mit den Zeichen *gemeint* ist, was also der Inhalt des mathematischen Begriffs ist, um den es hier geht, erschließt sich den Kindern nicht notwendigerweise allein aus den Bildern und Zeichen.

Im Gegenteil, es kann durchaus vorkommen, dass die Kinder zwar die gleichen Wörter verwenden wie die Lehrkraft („kleiner“ oder „größer“), aber mit diesen Wörtern nicht Zahlen, sondern lediglich Türme im Hinblick auf deren Höhe vergleichen. Den Begriffsbildungsprozess muss jedes einzelne Kind selbst vollziehen.

Dabei ist das Gespräch in der Klasse, also die Interaktion mit der Lehrerin/dem Lehrer und den Klassenkameraden, von großer Bedeutung. Denn erst aus diesen Gesprächen ergibt sich für die Kinder, ob das, was sie mit den sprachlichen und mathematischen Zeichen meinen, auch das ist, was die Lehrkraft oder die Mitschülerinnen und Mitschüler meinen. Das Klassengespräch dient also unter anderem dazu, die Bedeutung der Wörter und Zeichen für alle Kinder einheitlich und verbindlich festzulegen. Für jedes einzelne Kind geht es aber auch darum zu verstehen, dass die Wörter und Zeichen eine Beziehung zwischen Zahlen ausdrücken. Die drei Seiten des epistemologischen Dreiecks beeinflussen und stützen sich dabei wechselseitig: „Genau darin liegt der Kern der epistemologischen Perspektive: Wie erhalten die neuen mathematischen Zeichen und Symbole Bedeutung, und von welcher Art ist die (Be-) Deutung?“ (Steinbring 2000, S. 31).

Zum Abschluss dieser Diskussion soll noch auf zwei weitere Aspekte hingewiesen werden:

1. Mathematische Zeichen haben eine Bedeutung, aber diese Bedeutung kann in den meisten Fällen nicht der äußeren Gestalt des Zeichens entnommen werden. Auf der Schulbuchseite ist das offene Maul des Krokodils als Gedächtnisstütze dafür gemeint, dass „>“ für „ist größer als“ und „<“ für „ist kleiner als“ steht. Solche Stützen können durchaus hilfreich sein. Bei häufiger Verwendung besteht Anlass zur Sorge, dass die Kinder glauben, sie könnten stets von der äußeren Gestalt eines Zeichens auf seine Bedeutung schließen – dies entspricht der Gefahr, dass die Kinder beim Handeln mit konkreten Gegenständen die „gemeinten“ mathematischen Beziehungen völlig aus dem Blick verlieren.
2. Die Kleiner-Relation lässt sich sehr gut am Zahlenstrahl darstellen: Die kleinere Zahl steht links von der größeren. Manche Kinder ziehen es vor, den Zahlenstrahl nicht horizontal, sondern vertikal zu zeichnen, sodass die größere Zahl „höher“ steht als die kleinere. Dieses Verhalten kann ein Indiz dafür sein, dass sie bei der Kleiner-Relation vorwiegend an Eigenschaften konkreter Objekte – z. B. an mehr oder weniger hohe Türme – denken und sie (noch) nicht als Beziehung zwischen Zahlen verstehen.

4.1.7 Erweiterung des Zahlenraumes bis 100

Am Ende ihres ersten Schuljahres sollten die Kinder sicher sein im Zahlenraum bis 20. Man kann davon ausgehen, dass die meisten Kinder auch schon die Zahlen bis 100 kennen, zumindest in dem Sinne, dass sie bis 100 zählen können. Es ist deshalb sinnvoll, bereits zu diesem Zeitpunkt einen Ausblick auf größere Zahlen als 20 vorzunehmen, selbst wenn das Rechnen im Hunderterraum erst Thema des zweiten Schuljahres ist. In den meisten neueren Schulbüchern beschränkt man sich bei diesem Ausblick allerdings zunächst auf die Zehnerzahlen; z. B. ist im Lehrgang *Nussknacker 1* (Häring und Hesemann 2014, S. 132.) der Aufbau des ersten Hunderters aus zehn Zehnern dargestellt (Abb. 4.19).

Während solche Betrachtungen am Ende des ersten Schuljahres noch einer vorbereitenden Orientierung dienen, geht es bei der systematischen Einführung im zweiten Schuljahr nicht nur um das Kennenlernen und Umgehen mit allen Zahlen bis 100, sondern auch um die verschiedenen Formen, sie darzustellen: Die lineare Repräsentation der Zahlen bis 20 auf der Perlenkette oder dem Zahlenstrahl (vgl. Abschn. 4.2) kann bis 100 erweitert werden, ebenso die flächige Darstellung im Zwanzigerfeld zum Hunderterfeld.

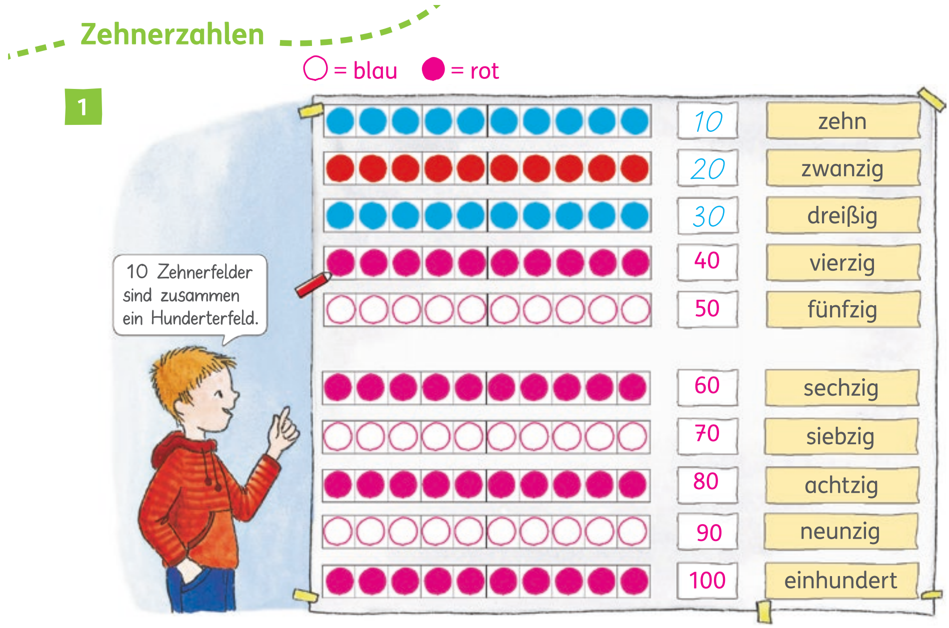


Abb. 4.19 10 Zehner, ein Hunderter. (Häring und Hesemann 2014, S. 132 © Ernst Klett Verlag GmbH)

Bei der symbolischen Darstellung der Zahlen durch Ziffern rücken die beiden Prinzipien in das Blickfeld, die ein *Stellenwertsystem* kennzeichnen, nämlich das Bündelungsprinzip und das Prinzip des Stellenwertes (vgl. Krauthausen 2018, S. 54 ff.). Größere Anzahlen von Objekten sind besser überschaubar, wenn man sie – z. B. zu je 10 – bündelt (Bündelungsprinzip). Beim Aufschreiben der Bündelanzahl gibt die Stelle, an der eine Ziffer notiert wird, an, ob es sich dabei um Einer, Zehner, Hunderter, … handelt (Prinzip des Stellenwertes). So kommt man auch beim Schreiben von großen Zahlen unter Berücksichtigung des Stellenwertes mit nur zehn verschiedenen Ziffern aus. Für eine vertiefende Betrachtung des Zehnersystems (des dezimalen Stellenwertsystems – oder gar von anderen Stellenwertsystemen) ist es jedoch zu Beginn des zweiten Schuljahres noch zu früh, denn die genannten beiden Prinzipien können erst dann voll erfasst werden, wenn zumindest noch die Hunderter bzw. Tausender hinzukommen (vgl. Padberg und Benz 2011, S. 52 f.).

Der Einstieg in die systematische Betrachtung der Zahlen bis 100 kann eher ganzheitlich orientiert z. B. über das Erkunden oder über das Schätzen und Zählen erfolgen. Eine Erkundungsfrage könnte sein: „Welche Hobbys gibt es an unserer Schule?“ Die Durchführung der Umfrage mit Überlegungen zur geeigneten Repräsentation der Ergebnisse in Strichlisten oder einem Diagramm eignet sich wunderbar für die Schulung von Fähigkeiten im Bereich Daten. Auch Forscherfragen wie „Wer findet große Zahlen in

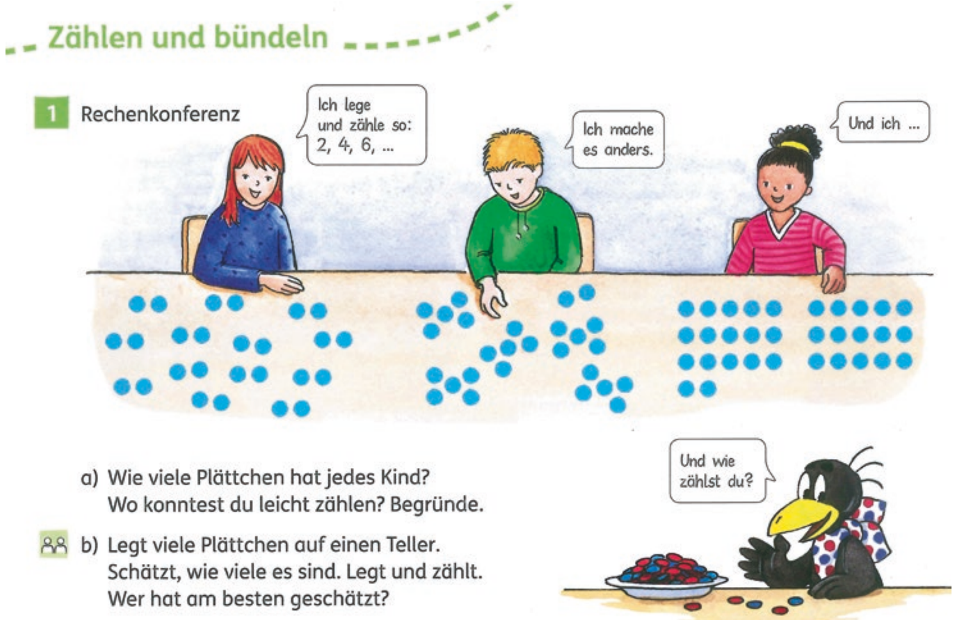


Abb. 4.20 Zählen, Bündeln, Schätzen. (Häring et al. 2015, S. 16 © Ernst Klett Verlag GmbH)

Zeitungen, in der Umwelt?“ oder „Paula wird im Mai acht Jahre alt. Wie viele Monate ist Paula bereits auf der Welt?“ geben Anlass zu interessanten Diskussionen und Argumentationen im Klassenverband. Hier werden allgemeine Kompetenzen wie das Argumentieren oder Kommunizieren geschult (vgl. Abschn. 3.3.2). Beim Schätzen geht es darum, dass die Kinder ihre Vorstellungen von Anzahlen vertiefen oder überhaupt erst entwickeln (Abb. 4.20). Darüber hinaus geht es beim Schätzen aber auch um die Einsicht, dass es in manchen Fällen völlig ausreicht, ungefähr zu wissen, wie viele Personen z. B. in einem Raum sind (zur Bedeutung des Schätzens vgl. auch Krauthausen und Scherer 2007, S. 67/99; Franke und Ruwisch 2010, S. 248 ff.).

Im Lehrgang *Zahlenzauber 2* (Betz et al. 2016c) folgt die weitere Behandlung der Zahlen bis 100 unter Berücksichtigung der Darstellungsebenen „enaktiv – ikonisch – symbolisch“ (vgl. Abschn. 3.2): Dem Bündeln von Steckwürfeln zu je 10 folgen die Darstellungen der Zehner und Einer in Zehnerstangen und Einerwürfeln und schließlich durch Ziffern in der Stellenwerttafel (Abb. 4.21).

Die systematische Verwendung der Hundertertafel findet man z. B. in dem Lehrgang *Das Zahlenbuch 2* (Abb. 4.22), wobei es auch darum geht, die Struktur des Hunderterraumes zu verdeutlichen.

Generell kann – wie auch bereits im kleineren Zahlenraum (vgl. Abschn. 4.1.4) – davon ausgegangen werden, dass das Verständnis für den Zahlenraum gesichert ist,

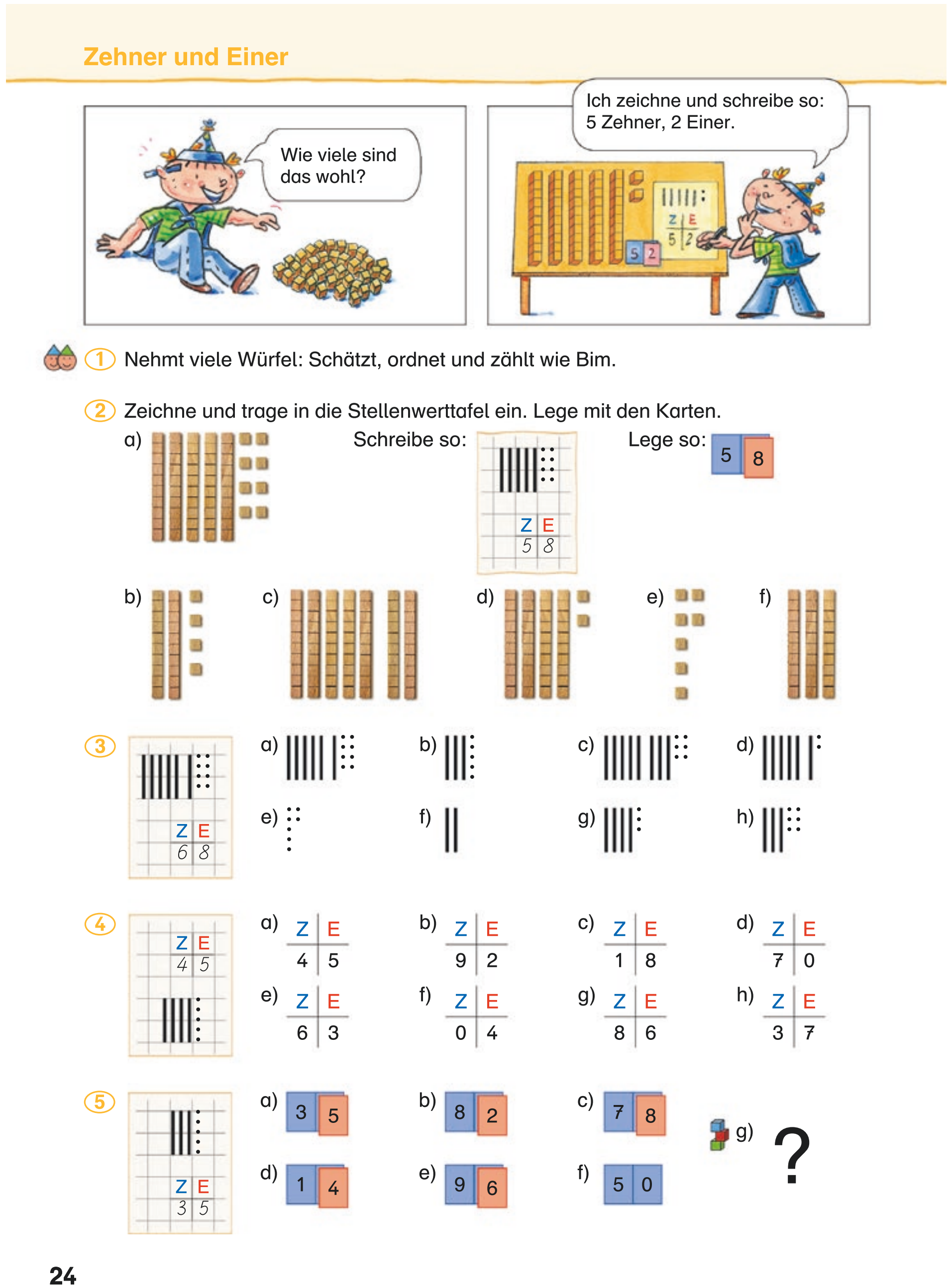


Abb. 4.21 Darstellungen von Zehnern und Einern. (Betz et al. 2016c, S. 24 © Cornelsen/Mathias Hütter& Melanie Beutel)

Abb. 4.22 Erforschen der Struktur des Hunderterraumes mit der Hundertertafel. (Wittmann und Müller 2017b, S. 37 © Ernst Klett Verlag GmbH)

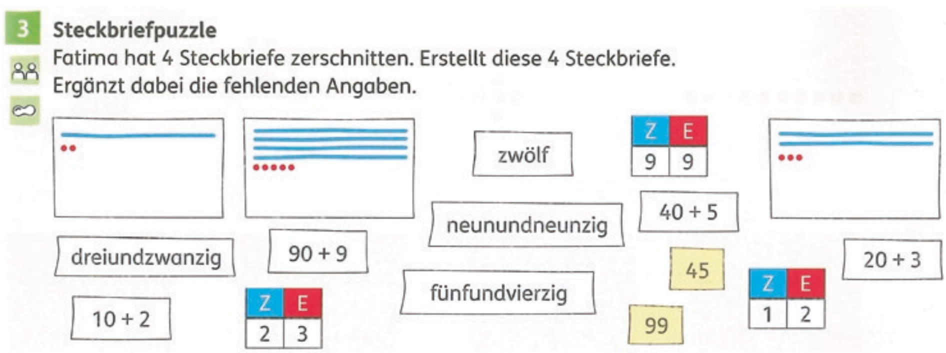


Abb. 4.23 Verschiedene Zahldarstellungen. (Häring et al. 2015, S. 19 © Ernst Klett Verlag GmbH)

wenn verschiedene Zahldarstellungen flexibel ineinander überführt werden können (z. B. Abb. 4.23). Dazu gehören unter anderem Zahlwort, Ziffernschreibweise, ikonische Darstellung (z. B. mit Zehnerstangen und Einerwürfeln oder am Hunderterfeld, vgl. Abb. 4.27), Darstellung in der Stellenwerttafel, aber auch der Einblick in die Zusammenhänge zwischen kardinalen und ordinalen Zahlvorstellungen, wie z. B. die Darstellung von Zahlen am Zahlenstrahl. Zu einer guten Orientierung im Zahlenraum gehört es zudem, Zahlen ordnen zu können und Analogien zu entdecken. Hierfür eignet sich ebenfalls der Zahlenstrahl als Arbeitsmittel.

4.2 Arbeitsmittel

Wie im vorherigen Abschnitt bereits an einigen Stellen ersichtlich wurde, spielen Arbeitsmittel im arithmetischen Anfangsunterricht eine tragende Rolle. Sowohl zum Erlernen der Zählfähigkeiten als auch zum Erwerb des Kardinalzahlbegriffs ist der Einsatz geeigneter Arbeitsmittel unerlässlich. Nach Piagets Theorie zur Entwicklung des logischen Denkens (vgl. Abschn. 3.2) ist Denken ein verinnerlichtes Handeln: „Die Intelligenz ist ein System von Operationen; die ganze Mathematik ist ein System von Operationen. Die Operation ist nichts anderes als ein Handeln; es ist ein wirkliches Handeln, das sich innerlich vollzieht (…) [das Kind] muss gehandelt, experimentiert haben, aber nicht nur mit Zeichnungen, sondern mit wirklichem Material, mit körperlichen Gegenständen. Dann verinnerlichen sich diese Handlungen“ (Piaget 1958, S. 367). Die Rolle von Materialien im mathematischen Anfangsunterricht wird in diesem Zitat unmissverständlich gekennzeichnet: Es geht um das Handeln mit wirklichen Gegenständen, aber dieses Handeln ist kein Selbstzweck, sondern Grundlage und Voraussetzung für dessen Verinnerlichung und damit für das Denken; es ersetzt aber nicht das Denken. Kann sich ein Kind beispielsweise vorstellen, wie es zwei Finger streckt und dann noch drei Finger dazu, dann kann es über diese Vorstellung auch das Ergebnis der Addition 2 + 3 abrufen. Es sieht vor dem geistigen Auge die fünf Finger vor sich. Diese Vorstellung setzt allerdings voraus, dass die Handlung des „Fingerstreckens“ bereits konkret durchgeführt wurde. Handeln darf und wird zunächst freies Spiel und Experiment sein, aber wenn wir von Mathematikunterricht sprechen, dann sollte das „System der Operationen“ nicht außer Acht gelassen werden. Handlungen müssen bewusst gemacht und verbalisiert werden, und der Übergang von der konkreten Handlung zur Denkhandlung ist ein wesentliches Ziel des Unterrichts.

Für den Mathematikunterricht stehen dazu zahlreiche Arbeitsmittel zur Verfügung, die im Folgenden bezüglich ihrer Einsatzmöglichkeiten und Eignung diskutiert werden.

4.2.1 Zur Klassifizierung verschiedener Arbeitsmittel

Zu den im mathematischen Anfangsunterricht verwendeten Materialien zählt man nicht nur konkrete Gegenstände, sondern auch Bilder, Diagramme und Ähnliches. In diesem Abschnitt geht es um Material in gegenständlicher Form, mit dem die Kinder konkrete Handlungen durchführen können, und nicht um „Veranschaulichungen“, die als Mittel der Lehrkraft gesehen werden können, wenn es darum geht, den Kindern etwas zu demonstrieren (zu einer umfassenden Diskussion vgl. Krauthausen 2018, S. 313 ff. und 333 ff.; vgl. auch Lorenz 1992).

Im Zentrum der Überlegungen steht also die Frage, welches konkrete Material geeignet erscheint, das mathematische Denken der Kinder anzuregen, zu stützen und zu fördern. Material, das nur zum Spielen gebraucht werden kann, lassen wir deshalb außer Acht. Ob ein bestimmtes Material gut oder schlecht ist, lässt sich nicht allein durch die Betrachtung des Materials entscheiden: Es kommt darauf an, was man mit ihm macht. Potenziell geeignetes Material gibt es in fast unübersehbarer Fülle, und es steht jeder Lehrerin und jedem Lehrer frei, neues oder auf eine spezifische Situation genauer zugeschnittenes selbst zu entwickeln. Zur Orientierung in dieser Fülle des Angebots kann man wie z. B. Schipper et al. (2015a, S. 41 ff.) unterscheiden zwischen unstrukturiertem und strukturiertem Material (s. u.) oder auch zwischen

- „natürlichem" Material, das stets oder fast jederzeit zur Verfügung steht (wie die Finger, Gegenstände des täglichen Gebrauchs, Schulutensilien wie Stifte), sowie Materialien, die leicht selbst hergestellt werden können wie Zahlenbänder oder Strichlisten, und
- „künstlichem" Material, das bereits zu bestimmten Zwecken aufbereitet wurde, wie z. B. Zählobjekte (Plättchen, Klötze, Steckwürfel) oder Zwanzigerfeld und Rechenrahmen.

Wir wollen uns hier bei der Diskussion von Materialien von der Frage leiten lassen, welchen Zwecken oder Zielen sie dienen können. Außerdem beschränken wir uns in diesem Abschnitt auf Materialien für den arithmetischen Anfangsunterricht (zum geometrischen Anfangsunterricht vgl. Kap. 6). Dabei gehen wir davon aus, dass

- die Materialien Hilfen bei Denkhandlungen der Kinder sein sollen und
- sie anregen sollen, in den Handlungen mit den Materialien mathematische Muster, Strukturen oder Beziehungen zu erkennen oder wiederzufinden.
- Dabei muss uns bewusst sein, dass die Materialien bzw. die Handlungen mit ihnen zwar möglicherweise die Entdeckung bestimmter Strukturen oder Beziehungen nahelegen oder die Einsicht in diese Strukturen oder Beziehungen vertiefen,
- dass dies aber nicht von selbst geschieht, sondern bei jedem einzelnen Kind Ergebnis eigener gedanklicher Anstrengungen ist und schon deshalb auch zu anderen als den von der Lehrerin oder dem Lehrer gewünschten Ergebnissen führen kann.

Kurz gesagt: Auch der Einsatz des besten Materials gibt keine Erfolgsgarantie, und der Umgang mit jedem neuen Material muss von den Kindern neu gelernt werden. Ein wesentliches Kriterium bei der Auswahl von Materialien aller Art sollte deshalb die Vielfalt seiner Einsatzmöglichkeiten sein, genauer: Es sollte so beschaffen sein, dass es den Kinder vertraut ist und immer wieder in unterschiedlichen Situationen und (ggf. in angepasster Form) in den erweiterten Zahlenräumen eingesetzt werden kann.

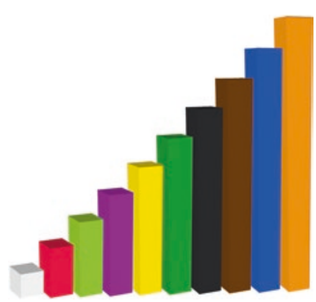
Arbeitsmittel lassen sich nach verschiedenen Kriterien einordnen – eine bereits genannte ist die der natürlichen und künstlichen Materialien. Für den Einsatz im Mathematikunterricht ist vor allem die Klassifizierung der Materialien nach der Struktur hilfreich (vgl. Schipper et al. 2015a, S. 41 ff.):

Es gibt Materialien ohne Struktur, das sind insbesondere Gegenstände aus der alltäglichen Umwelt der Kinder (wie Stifte, Perlen, Kugeln, Kastanien und Ähnliches), aber auch einzelne Steckwürfel, Wendeplättchen oder Muggelsteine (so werden farbige Glasnuggets gern bezeichnet, die im Unterricht in verschiedenen Funktionen Verwendung finden). Sie sind gekennzeichnet durch eine Merkmalsarmut. Das hat den Vorteil, dass sie im Mathematikunterricht als Repräsentanten für sehr vieles verwendet werden können. Bei der Modellierung einfacher Sachprobleme kann dies von großem Vorteil sein. Diese Materialien können für bestimmte Gegenstände, für Personen oder aber auch nur für bestimmte Anzahlen stehen. Unstrukturierte Materialien eignen sich gut für Zähl- und Bündelungsübungen, kleine Mengen bis fünf lassen sich schnell darstellen und auch erkennen, weil diese simultan erfasst werden können, und man kann außerdem die Kleiner-Relation sehr gut darstellen. Das Fehlen der Struktur bedingt, dass eine Quasisimultanerfassung nicht möglich ist, weshalb unstrukturierte Materialien im Wesentlichen nur im Zahlenraum bis fünf oder zehn einsetzbar sind. Ein großer Nachteil unstrukturierter Materialien ist, dass sie das zählende Rechnen unterstützen (vgl. Abschn. 5.2), was als großes Problem im Anfangsunterricht gesehen werden muss.

Bei strukturierten Materialien unterscheidet man solche mit fester Struktur und solche, bei denen eine Struktur gegeben ist, aber trotzdem Einzelobjekte manipuliert werden können. Materialien, die eine feste Struktur aufweisen, repräsentieren Zahlen nicht durch die Anzahl einzelner Elemente, sondern auf andere Art und Weise. Cuisenaire-Stäbe (Abb. 4.24) stellen die verschiedenen Zahlen durch Stäbe verschiedener Länge und Farbe dar. Die Stäbe weisen keine Unterteilung auf, und jeder Stab repräsentiert eine der Zahlen von 1 bis 10. Das Addieren lässt sich beispielsweise durch Hintereinanderlegen von Stäben darstellen, beim Subtrahieren wird ergänzt (z. B.: Welchen Stab muss man zum Vierer-Stab hinzufügen, um die gleiche Länge wie die des Siebener-Stabs zu bekommen?). Wie der – lange Zeit sehr erfolgreiche – Lehrgang von Fricke und Besuden (1973; s. a. Besuden 1978) gezeigt hat, lassen sich Cuisenaire-Stäbe im mathematischen Anfangsunterricht flexibel einsetzen. Ihr Einsatzbereich ist jedoch im Wesentlichen auf den Zahlenraum bis 20 beschränkt.

Auch das Geld (Spiel- bzw. Rechengeld wird immer wieder als Arbeitsmittel eingesetzt) ist ein Material mit fest vorgegebener Struktur. Verschiedene Werte werden durch das unterschiedliche Aussehen der Münzen und Scheine repräsentiert. In einem

Abb. 4.24 Cuisenaire-Stäbe



weiteren Sinne fällt auch das klassische Bündelmaterial in diese Kategorie. Es sieht Einerwürfel, Zehnerstangen, Hunderterplatten und Tausenderblöcke zur Repräsentation der Zahlen vor.

Als Vorteil der Materialien mit fester Struktur kann genannt werden, dass sie in der Regel einen zählenden Umgang nicht ermöglichen. Da, wie bereits erwähnt, verfestigtes Zählen letztlich zu Schwierigkeiten im Mathematikunterricht führt, ist dies ein wichtiges Argument. Allerdings erfordern Materialien mit fester Struktur ein regelrechtes Lernen der einzelnen Repräsentanten. Will man Einsicht in die Zahlzerlegung gewinnen, ist immer ein Umwechseln nötig. Speziell das Rechengeld ist darüber hinaus sehr abstrakt – z. B. gibt es Münzen, die weniger wert sind, aber größer sind als Münzen geringeren Wertes. Zudem ist Geld bereits durch die Alltagsbedeutung besetzt, was einen flexiblen Umgang und eine Abstraktion von der konkreten zur Denkhandlung erschweren kann.

Neben unstrukturierten Arbeitsmitteln und solchen mit fester Struktur gibt es Mischformen, in denen versucht wird, die Vorteile von beiden zu verbinden. Dies wird im Wesentlichen dadurch erreicht, dass man einzelne Objekte problemlos zu größeren Gesamtheiten zusammenfassen kann, aber dennoch eine Manipulation von Einzelobjekten möglich ist. Materialien dieser Art, wie sie häufig im Anfangsunterricht zum Einsatz kommen, sind z. B. das Zwanzigerfeld oder der Zwanziger-Rechenrahmen. Das Zwanzigerfeld ist eine Platte mit Markierungen für 20 Plättchen, die in zwei Reihen zu je 10 so angeordnet sind, dass immer zwei nebeneinander oder übereinander stehende Fünfer einen Zehner ergeben (Abb. 4.25). Bei den Plättchen kommen in der Regel entweder zwei Farben oder Wendeplättchen zum Einsatz.

Beim Zwanziger-Rechenrahmen befinden sich je zehn Kugeln – in zwei farbig abgehobene Fünfergruppen unterteilt – auf den beiden Drähten (Abb. 4.26). Die Zahlen bis 20 lassen sich sehr gut durch Verschieben der Kugeln darstellen, Handlungen des Zusammenfügens (addieren) und Wegnehmens (subtrahieren) können problemlos durchgeführt werden.

Gemeinsam ist beiden Materialien die Fünfer- und Zehnergliederung und die Möglichkeit der Handhabung als Ganzes (z. B. kann die Sieben am Rechenrahmen mit einer Bewegung eingestellt werden, oder die Fünf am Zwanzigerfeld kann gelegt werden, ohne dass jedes Element gezählt werden muss), es sind aber auch Handlungen

Abb. 4.25 Zwanzigerfeld

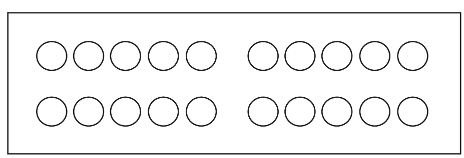
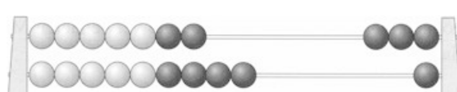


Abb. 4.26 Rechenrahmen. (Radatz et al. 1996, S. 98)



mit Einzelobjekten möglich (zur Sieben können neun Elemente dazu geschoben werden, zur Fünf am Zwanzigerfeld können sieben dazugelegt werden, um $7 + 9$ bzw. $5 + 7$ zu veranschaulichen). Diese Materialien eignen sich zur Übung der quasisimultanen Mengenerfassung, die Kinder können relativ gut Beziehungen zwischen Zahlen entdecken (z. B. 12 sind ein Zehner und zwei Einer, aber auch zwei Sechser), und die Beziehungen lassen sich dann zum Rechnen verwenden. Bei geeigneter Verwendung dieser Materialien werden die Kinder darin unterstützt, von einer konkreten zählenden Handlung zu einer nicht zählenden mentalen Handlung zu gelangen. Zu beachten ist hier aber, dass diese Materialien natürlich auch zählend verwendet werden können – ein richtiger Gebrauch des Arbeitsmittels ist also unabdingbar, um den oben genannten Vorteil nutzen zu können. Vor allem beim Rechenrahmen ist zudem Vorsicht geboten, weil im Handel auch Exemplare angeboten werden, die keine Fünferstruktur aufweisen. Diese Art von Rechenrahmen führt ausschließlich dazu, dass die Einzelobjekte gezählt werden, und jegliche Vorteile der Strukturierung, die in diesem Abschnitt genannt wurden, gehen dann verloren.

Um die Einsatzmöglichkeiten der Arbeitsmittel im Unterricht intensiver zu reflektieren, werden sie im Folgenden getrennt nach Möglichkeiten der Veranschaulichung von zentralen Zahlaspekten vorgestellt. Dabei wird jeweils auch thematisiert, wie die Rechenoperationen veranschaulicht werden können.

4.2.2 Materialien zur kardinalen Zahldarstellung

Für ein erstes Verständnis der kardinalen Bedeutung von Zahlen können Alltagsmaterialien verwendet werden. Finger, Stifte, Bonbons, Naturmaterialien und ähnliche Dinge können zur Anzahlbestimmung verwendet werden. Dabei wird natürlich die Zahlwortreihe ebenso gestützt wie ein Verständnis für die Mächtigkeit einer Menge und somit die Zahl als Kardinalzahl. Sie können zur simultanen, aber auch zur quasisimultanen Zahlerfassung genutzt werden (hier vor allem die Finger oder falls Einzelobjekte beispielsweise in Form von Würfelbildern strukturiert gelegt werden). Im Handel angeboten werden unter anderem Klötze (z. B. Holzwürfel), Steckwürfel und Muggelsteine. Da diese Materialien oft farbig sind, ermöglichen sie – ebenso wie die Finger – eine Strukturierung des Zahlenraumes, z. B. durch Zusammenfassung oder Hervorheben von je fünf oder zehn. Diese Struktur muss bei unstrukturierten Arbeitsmitteln aber selbst hergestellt werden.

Häufig verwendete strukturierte Materialien, die den kardinalen Zahlaspekt im Anfangsunterricht verdeutlichen, sind das Zwanzigerfeld (Abb. 4.25) und der Zwanziger-Rechenrahmen (Abb. 4.26). Beide ermöglichen eine Vielzahl von Aktivitäten der Kinder, die sowohl der Orientierung im Zahlenraum bis 20 dienen als auch der Vorbereitung des Rechnens. Zahlzerlegungen, das Verdoppeln und Halbieren, das Ergänzen zur 10 und die Addition und Subtraktion können anschaulich und handelnd problemlos an diesen beiden Arbeitsmitteln umgesetzt bzw. nachvollzogen werden. Eine Aufgabe wie 6 + 6 kann im Zwanzigerfeld auf verschiedene Weisen mit unterschiedlich gefärbten Plättchen gelegt werden:

- Die Aufgabe kann z. B. durch 6 rote Plättchen in der oberen Reihe und 6 blaue in der unteren Reihe repräsentiert werden. Die Kinder erkennen die Verdoppelung der 6 entweder unmittelbar, oder sie spalten in jeder Reihe 5 ab, fassen die beiden Fünfer zu 10 zusammen und erfassen so die 12 als 10 + 2.
- Man kann auch in der oberen Reihe 6 rote Plättchen legen, diese Reihe mit den blauen bis zur 10 auffüllen und die restlichen blauen in die zweite Reihe legen, dies ist das Ergänzen zur 10 und entspricht einer rechnerischen Bewältigung des Zehnerübergangs in folgenden Rechenschritten: $6 + 6 = 6 + 4 + 2$.

Im ersten Fall ist aufgrund der symmetrischen Darstellung der Plättchen eine mentale Vorstellung von „Verdopplung" relativ leicht zugänglich. Dies gilt vor allem dann, wenn die Zehnerstruktur des Materials verinnerlicht ist und die beiden Fünfer sofort als zehn erkannt werden. Die verbleibenden zwei Plättchen können simultan erfasst werden, sodass das Ergebnis der Verdopplung gut quasisimultan zu erfassen ist. Bei der Aufgabe 6 + 7 geht man ähnlich vor, an die Stelle des Verdoppelns tritt dann das „Fast-Verdoppeln" (auf die Addition und Subtraktion wird in Abschn. 4.3.1 ausführlich eingegangen).

Im Gegensatz zur Zwanzigerreihe, die den ordinalen Zahlaspekt betont (vgl. Abschn. 4.2.3), sollen das Zwanzigerfeld bzw. der Rechenrahmen den Kindern das Erfassen sowohl der einzelnen Summanden als auch der Summe erleichtern. Sehr hilfreich ist dabei die gut erkenn- und einsehbare Tatsache, dass zwei Fünfer eine Zehn ergeben (die „Kraft der Fünf") (vgl. Wittmann und Müller 1993, S. 35; Krauthausen 1997).

Für die Erweiterung des Zahlenraumes bis 100 können sowohl das Zwanzigerfeld als auch der Zwanziger-Rechenrahmen problemlos weitergeführt werden. Die Erweiterung des Zwanzigerfeldes führt zur Zahldarstellung im Hunderterfeld (Abb. 4.27), und der Zwanziger-Rechenrahmen findet seine Fortführung im Hunderter-Rechenrahmen.

4.2.3 Materialien zur ordinalen Zahldarstellung

Um das Verständnis für den ordinalen Zahlaspekt zu vertiefen, kommen in erster Linie Arbeitsmittel mit linearer Anordnung der Zahlen zum Einsatz.

Der Zahlenstrahl (Abb. 4.28) ist dazu ein besonders geeignetes Arbeitsmittel, das auch – in der Regel in verschiedenen Vorformen – bereits in den ersten Schuljahren zum Einsatz kommt.

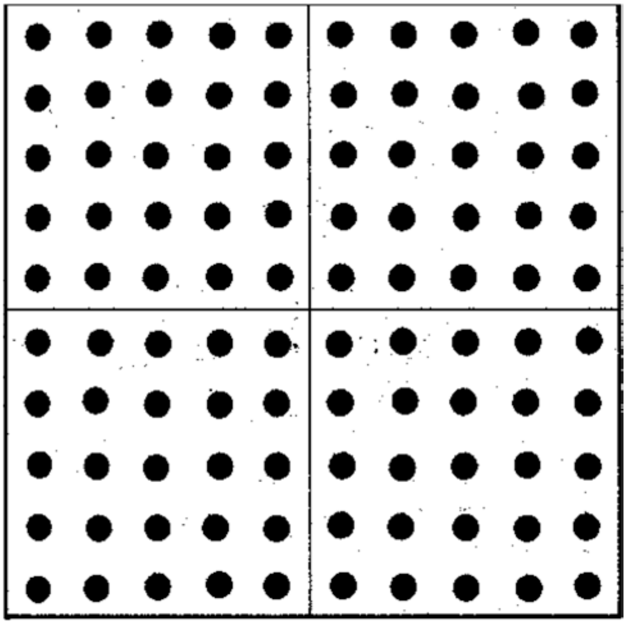


Abb. 4.27 Hunderterfeld

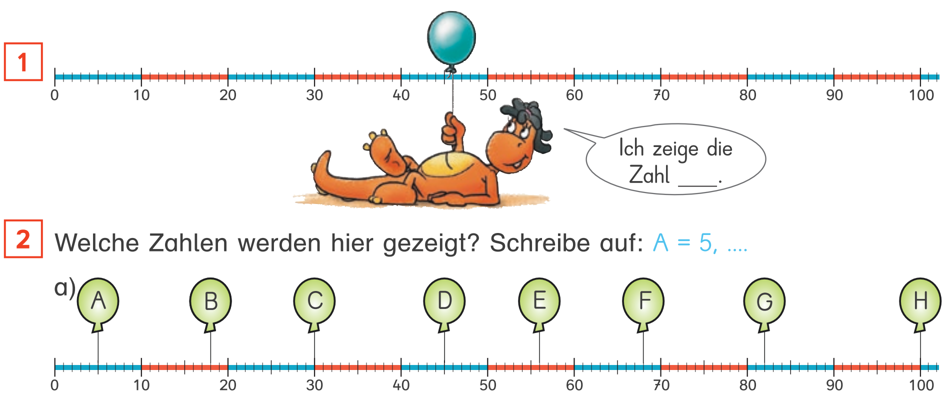


Abb. 4.28 Zahlenstrahl. (Rinkens et al. 2014, S. 61 © Westermann Gruppe)

- Die Zahlen werden der Reihe nach von links nach rechts aufgezählt, wobei durch Hervorheben der Fünfer- und Zehnerzahlen auch eine Struktur in der Zahlenreihe erkennbar wird.
- Die Strecken zwischen den Zahlen sind alle gleich lang, die Eins steht am Ende der ersten Strecke, die Zwei am Ende der zweiten usw.
- Man kann sich die Herstellung des Zahlenstrahls als wiederholtes Aneinanderlegen dieser Einheitsstrecke vorstellen.

- Von zwei verschiedenen Zahlen steht die größere rechts von der kleineren (vgl. Abschn. 4.1.6).
- Additionen und Subtraktionen lassen sich mit Pfeilen darstellen (vgl. Abschn. 4.3.1).

Im Zusammenhang mit dem Zahlenstrahl wird gern darauf verwiesen, dass er in geradezu idealer Weise die Aspekte Zählzahl, Ordnungszahl, Maßzahl und Kardinalzahl sowie den Operatoraspekt verbinde. Allerdings ist die Veranschaulichung des kardinalen Zahlaspekts am Zahlenstrahl nicht einfach. Dies kann eigentlich nur gelingen, wenn man sich auf die oben genannten Einheitsstrecken beruft. Diese sind aber in der üblichen Darstellung nicht offensichtlich. Klar ersichtlich sind vor allem die Positionen der Zahlen innerhalb einer Reihe, nicht jedoch die Mengen, die als Repräsentanten für Kardinalzahlen stehen. Beim Einsatz des Zahlenstrahls im Unterricht muss deshalb sehr gut überlegt werden, wozu er als Anschauungsmittel verwendet wird. Gut darstellen lassen sich die Reihenfolge der Zählzahlen, die Kleiner-Relation sowie Vorgänger- und Nachfolgerzahlen innerhalb der Zahlwortreihe sowie die Beziehungen zwischen einzelnen Zahlen im Sinne von „18 liegt nahe bei 20“ oder „13 liegt näher bei 10 als bei 20“. Auch Rechenoperationen lassen sich am Zahlenstrahl aufzeigen (s. u.).

Aus diesen Gründen ist der Zahlenstrahl während der gesamten Grundschulzeit brauchbar und nützlich. Seine volle Kraft als Mittel zur Unterstützung des mathematischen Denkens und Verstehens entfaltet der Zahlenstrahl in den höheren Klassen der Grundschule – er ist beispielsweise eines der wenigen Arbeitsmittel, die auch im Zahlenraum bis zur Million noch gut verwendet werden können. Über die Grundschulzeit hinaus ist er ein wichtiges Darstellungsmittel bei den Erweiterungen des Zahlenraumes über die natürlichen Zahlen hinaus, also bei der Einführung der ganzen, der rationalen und der reellen Zahlen.

Es gibt Kinder, die Probleme haben, den Zahlenstrahl richtig zu lesen. Ihnen ist beispielsweise nicht klar, warum die erste Zahl die Null und nicht die Eins ist. Es gibt aber auch Kinder, die überhaupt keine lineare Vorstellung von der Zahlenreihe haben. Schon deshalb ist es nützlich, im Anfangsunterricht zunächst mit Vorformen des Zahlenstrahls zu arbeiten.

Zu diesen Vorformen zählen die bereits erwähnten Perlenketten, aber auch Zahlenstreifen oder Zahlenbänder (in Abb. 4.29 mit zehn Einheiten, selbstverständlich ist eine Weiterführung bis 20 oder darüber hinaus möglich).

Abb. 4.30 zeigt die Zwanzigerreihe, eine Vorform des Zahlenstrahls, in der Blöcke mit je fünf Punkten erkennbar sind. Anhand dieser Vorformen muss den Kindern hinreichend Gelegenheit gegeben werden, Erfahrungen zu machen, z. B. indem sie Zahlenkärtchen zu einem Zahlenband legen oder mit Plättchen eine Zwanzigerreihe herstellen.

Der Zahlenstrahl lässt sich – wie bereits erwähnt – problemlos in den erweiterten Zahlenräumen einsetzen. Aber auch das Zahlenband kann bei der Erweiterung des

Abb. 4.29 Zahlenband bis 10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

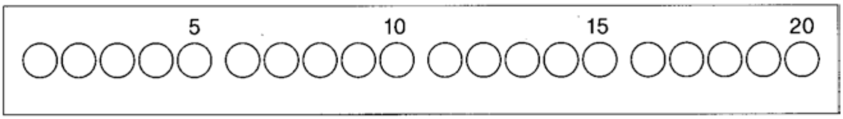


Abb. 4.30 Zwanzigerreihe. (Wittmann und Müller 1993, S. 35)

Zahlenraumes bis 100 fortgeführt werden. Die Fortführung kann linear geschehen oder aber in der üblichen Darstellung der Zahlen in der Hundertertafel (Abb. 4.31). Auch dieses Arbeitsmittel veranschaulicht den ordinalen Zahlaspekt, weil zu erkennen ist, welche Zahl vor oder nach einer anderen kommt. In der Hundertertafel können vor allem aber auch die Analogien innerhalb der einzelnen Zehner gut erkannt werden: 12, 22, 32, … liegen untereinander – die Einer bleiben gleich, nur der Zehner wird immer um eins größer.

Verwendet man ordinale Arbeitsmittel zum Rechnen, so besteht prinzipiell die Gefahr des Zählens. Vermieden wird dies mit dem sogenannten „Rechenstrich", der gut eingesetzt werden kann, wenn einzelne Rechenwege veranschaulicht werden sollen (vgl. Treffers 1991; Krauthausen 2018, S. 323 f.). Beim Rechenstrich handelt es sich um einen unskalierten Zahlenstrahl, auf dem einzelne Ankerpunkte markiert werden, die bei der Lösung einer Aufgabe von Bedeutung sind (vgl. Abb. 4.32).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Abb. 4.31 Hundertertafel

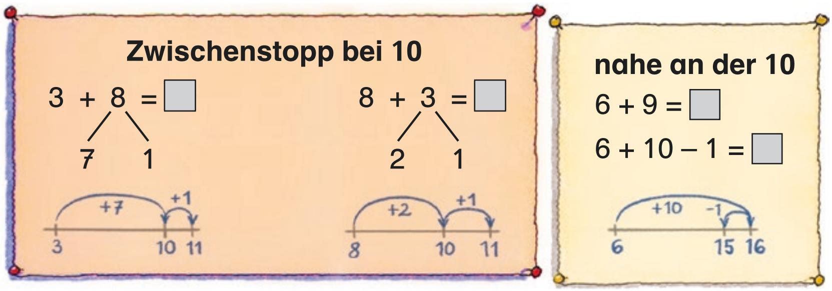


Abb. 4.32 Rechenstrich. (Betz et al. 2016c, S. 10 © Cornelsen/Mathias Hütter)

Wie wir gesehen haben, eignen sich fast alle der bisher angesprochenen Materialien auch zur Vorbereitung und Stützung des Rechnens. Dass die erforderliche „Verinnerlichung" der Handlungen mit dem Material zu Denkhandlungen – und damit die Loslösung vom Konkreten – manchen Kindern nicht leichtfällt, ist eine andere Frage (auf die wir in Abschn. 7.3 noch genauer eingehen).

4.3 Operationsverständnis und Rechnen

In den ersten beiden Schuljahren lernen die Kinder mit Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division alle vier Grundrechenarten kennen. Wichtig ist dabei, dass sie sowohl ein solides Verständnis für die Operationen aufbauen, als auch flexibel und routiniert rechnen lernen. Die in Abschn. 4.1.6 in Bezug auf das „epistemologische Dreieck" diskutierten wechselseitigen Beziehungen zwischen dem konkreten Handeln mit Gegenständen, dem „gemeinten" mathematischen Begriff und den zum Be- und Aufschreiben verwendeten Zeichen erlangen in besonderem Maße bei der Erarbeitung der Rechenoperationen ihre Bedeutung: Letztlich ist es zwingend erforderlich, dass die Schülerinnen und Schüler mit dem Rechenzeichen die entsprechende Grundvorstellung der Operation aktivieren können. Dafür sind Handlungs- und Sachsituationen bei der Erarbeitung der Operationen von großer Bedeutung.

4.3.1 Addition und Subtraktion

Grundlagen
Fasst man die Zahlen als Kardinalzahlen auf, so lässt sich die Addition durch Rückgriff auf die Vereinigung von Mengen definieren und die Subtraktion durch Restmengenbildung (indem man von einer gegebenen Menge eine Anzahl von Elementen wegnimmt). In diesem Sinne kann die Addition von Zahlen durch die Handlungen des Zusammenfassens bzw. des Hinzufügens von Objekten dargestellt werden und die Subtraktion von Zahlen durch die Handlung des Wegnehmens von Objekten. Während die

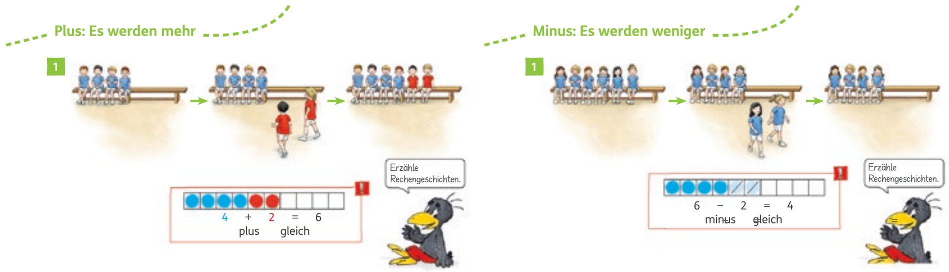


Abb. 4.33 Es werden mehr und weniger. (Häring und Hesemann 2014, S. 36/44 © Ernst Klett Verlag GmbH)

Handlungen des Hinzufügens und Wegnehmens eher dynamisch sind (Abb. 4.33), ist die Vorstellungen von der Addition als Zusammenfassen zweier Mengen zu einem Ganzen eher statisch. So sollen z. B. in Abb. 4.36 die Schülerinnen und Schüler die *Gesamtzahl* der Kugeln in den abgebildeten Schachteln in den Blick nehmen: die Kugeln auf der linken Seite der Schachtel zusammen mit denen auf der rechten Seite.

Die Subtraktion kann auch mit einer anderen Vorstellung als der des Wegnehmens in Beziehung gesetzt werden, nämlich mit dem Ergänzen. Die Frage, die man bei dieser Sichtweise stellt, lautet: Wie viele Objekte muss man zu einer Menge von Objekten hinzufügen, um eine vorgegebene Anzahl zu erhalten? Bei Verwendung von Zwanzigerfeld und Rechenrahmen lässt sich die Handlung des Ergänzens ebenso durchführen wie die des Wegnehmens und die des Hinzufügens oder Zusammenfassens.

Formal gesehen ist die Subtraktion die Umkehroperation zur Addition (und entsprechend ist die Addition die Umkehroperation zur Subtraktion): Wenn $a + b = c$ ist, dann ist $c - b = a$ bzw. $c - a = b$ (und wenn $c - b = a$ ist, dann ist $c = a + b$). Dieser Zusammenhang zwischen den Rechenoperationen lässt sich mit den entsprechenden Handlungen sehr schön darstellen: Das Hinzufügen von Objekten wird durch Wegnehmen wieder rückgängig gemacht (und das Wegnehmen durch das Hinzufügen). Beim Ergänzen wird der Zusammenhang zwischen Addition und Subtraktion – zumindest auf der formalen Ebene – sogar noch deutlicher: Der „fertigen" Gleichung $a + b = c$ kann man nicht ansehen, ob sie zu einer Summenbildung $a + b = \ldots$ führt oder aufgrund des Vorgangs des Ergänzens $a + \ldots = c$ entstanden ist. In vielen Lehrgängen für den mathematischen Anfangsunterricht werden deshalb die Addition und die Subtraktion gleichzeitig oder fast gleichzeitig eingeführt (Abb. 4.34), um die Kinder von vornherein auf die Beziehung zwischen Operation und Umkehroperation aufmerksam zu machen und sie zum reversiblen Denken anzuregen.

Bei der Einführung der Addition und Subtraktion muss man allerdings davon ausgehen, dass die intuitiven Grundvorstellungen „Hinzufügen" und „Wegnehmen" in den Köpfen der Kinder in Konkurrenz stehen mit anderen Vorstellungen vom Addieren und Subtrahieren, nämlich denen vom Weiterzählen und vom Rückwärtszählen.

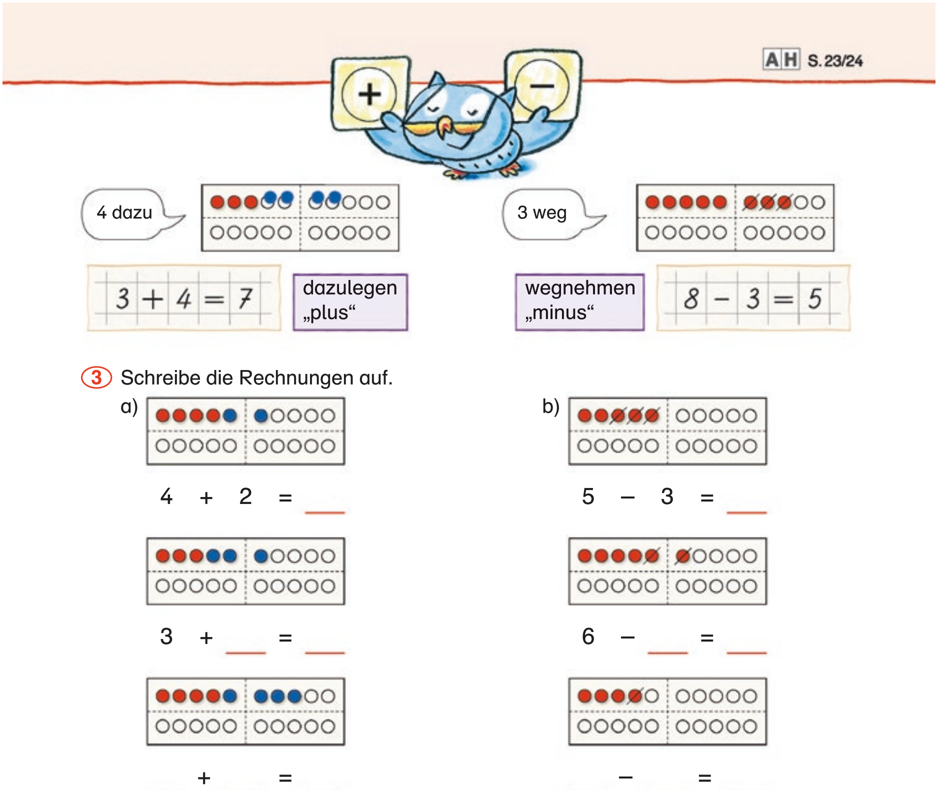


Abb. 4.34 Gleichzeitige Einführung von Addition und Subtraktion. (Betz et al. 2016a, S. 31 © Cornelsen/Mathias Hütter)

Wie in Abschn. 1.4.2 angesprochen, lösen fast alle Kinder bereits vor dem Schulbeginn einfache Rechenaufgaben auf diese Weise. Deutlich wurde dies z. B. bei der Geburtstagstorten-Aufgabe (Abb. 1.13 in Abschn. 1.4.2). Es ist zu erwarten, dass die Kinder auch im mathematischen Anfangsunterricht die entsprechenden Aufgaben durch Zählen zu lösen versuchen, und sie werden diese – ihnen so erfolgreich erscheinende – Strategie nicht ohne Weiteres aufgeben. Es gibt viele (und auch sehr gute) Argumente, die dafür sprechen, das zählende Rechnen bei den Kindern von Anfang an nicht zu fördern (vgl. z. B. Besuden 1998; Gerster 1994; Wartha und Schulz 2012, S. 42 ff.), sondern – im Gegenteil – dafür Sorge zu tragen, dass es durch tragfähigere Strategien abgelöst wird. Zählendes Rechnen ist mit Zahlen größer als 20 kaum noch möglich, es ist ineffektiv und fehleranfällig (vgl. unten in diesem Abschnitt), und es erschwert den Aufbau von tragfähigen Grundvorstellungen zu Zahlen, Operationen und Strategien (vgl. Wartha und Schulz 2012, S. 46 ff.). Dennoch ist es notwendig, sich bewusst zu machen, dass diese Art zu rechnen ein Zwischenstadium zu sein scheint, das alle Kinder durchlaufen.

Wie kann nun eine systematische Einführung der Addition und Subtraktion im ersten Schuljahr aussehen?

Die Einführung von Addition und Subtraktion

Konkretes Handeln und dessen sprachliche, mentale und symbolische Repräsentation sind erforderlich, wenn die Kinder Einsicht in die Rechenoperationen und die Bedeutung der Notationen gewinnen sollen. Im Lehrgang *Zahlenzauber 1* (Betz et al. 2016a, S. 32 f.) wird dazu immer wieder auf das Handeln am Zwanzigerfeld Bezug genommen, um Situationen des Plus- und des Minusrechnens konkret und – parallel dazu – symbolisch darzustellen (Abb. 4.35): Zu vier roten werden zwei blaue Plättchen hinzugefügt: $4 + 2 = \ldots$; von sechs Plättchen werden zwei weggenommen: $6 - 2 = \ldots$ (Aufgaben 1 und 2). Die Frage kann aber auch lauten: Wie viele Plättchen muss man zu zweien hinzufügen, um sechs zu bekommen? (Aufgabe 4 in Abb. 4.35); hier haben wir die Situation des Ergänzens: $2 + \ldots = 6$, symbolisch geschrieben mit einem Platzhalter („…“ oder „__“) für die gesuchte Anzahl an Plättchen.

Später in diesem Lehrgang werden durch das intensive Eingehen auf Zahlzerlegungen und eine Thematisierung des Gleichungsbegriffs wesentliche Grundlagen für tragfähige Strategien beim Rechnen (sog. heuristischen Strategien, vgl. unten in diesem Abschnitt) und damit auch für das Ablösen vom zählenden Rechnen gelegt (Abb. 4.36): Unterschiedliche Zerlegungen z. B. der Zahl 7 werden zum einen durch die entsprechenden Notationen wie $5 + 2$ und $6 + 1$ dargestellt und zum anderen durch Bilder von Schüttelschachteln, mit denen die Zerlegungen konkret durchgeführt werden können. Wesentlich

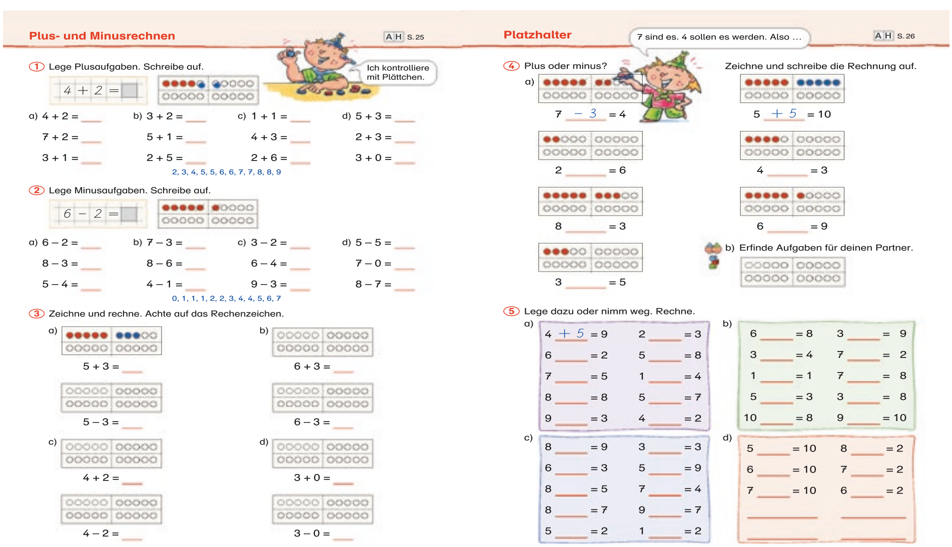


Abb. 4.35 Aufschreiben der Ergebnisse von Handlungen. (Betz et al. 2016a, S. 32 f. © Cornelsen/Mathias Hütter)

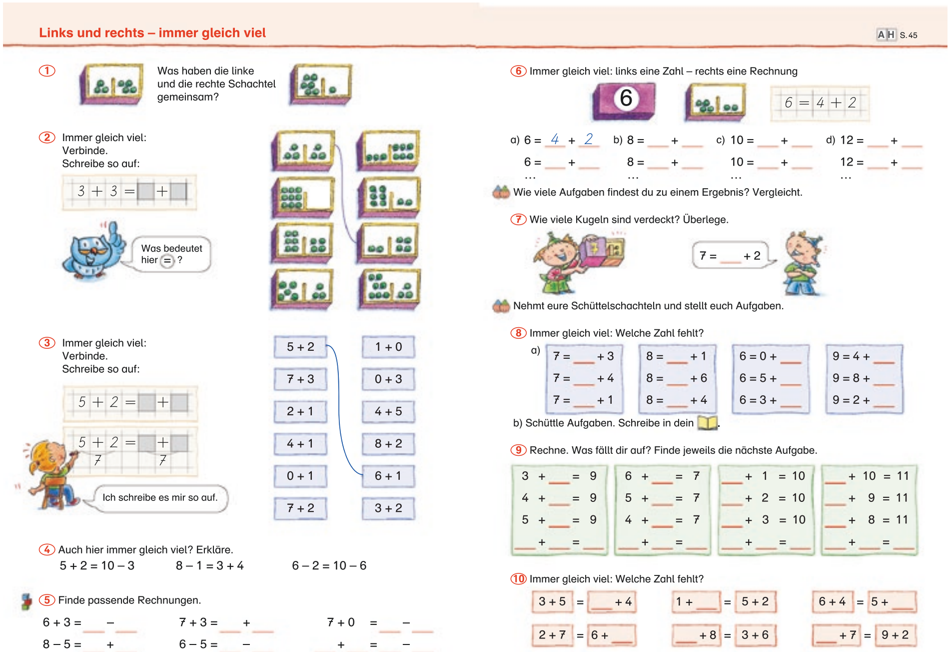


Abb. 4.36 Zahlzerlegungen und Gleichungsbegriff. (Betz et al. 2016a, S. 64 f. © Cornelsen/ Mathias Hütter)

ist, dass die Kinder die Zusammenhänge zwischen den Zerlegungen selbst herstellen (Aufgaben 2 und 3), aber auch lernen, sich (im Kopf!) vorzustellen, welche Zahl fehlt, um z. B. von der 3 zur 7 zu kommen (Aufgaben 7 und 8).

Die mentalen Repräsentationen von Zahlzerlegungen dieser Art sind für den sog. Zehnerübergang wichtig (vgl. unten in diesem Abschnitt), und sie fördern die Entwicklung eines „Zahlensinns“ bei den Kindern. Auf der Schulbuchseite (Abb. 4.36) wird dabei explizit ein Verständnis für das Gleichheitszeichen angebahnt. Eine häufige Fehlvorstellung der Kinder ist, dass das Gleichheitszeichen lediglich ein Symbol dafür ist, dass nach diesem Symbol das Ergebnis einer Rechnung folgt. Aufgaben wie z. B. $3 + 5 = \ldots + 4$ werden dann wie folgt „gelöst“: $3 + 5 = \mathbf{8} + 4$. Nach dem Gleichheitszeichen wird das Ergebnis der Addition $3 + 5$ notiert. Der Rest der Gleichung wird ignoriert. Ein Verständnis dafür, dass das Symbol „=“ bedeutet, dass links und rechts dieses Symbols „das Gleiche“ steht bzw. „gleich viel“ sollte im Sinne der Propädeutik bereits in Jahrgangsstufe 1 angebahnt werden.

Die Übungsbeispiele zur Addition und Subtraktion beschränken sich zunächst auf den Zahlenraum bis 10. Wesentlich ist,

- dass die Kinder durch eigenes Tun Erfahrungen mit möglichen Zerlegungen einer Anzahl von Objekten sammeln und

- Übung bekommen in der symbolischen Darstellung (Notation) des Handlungsergebnisses in Form von Additionsgleichungen (sowohl ausgehend von einer vorgegebenen Anzahl, z. B. $6 = \ldots. + \ldots.$, als auch ausgehend von den Zerlegungen, z. B. $\ldots. + \ldots. = 6$).

Selbstverständlich müssen Handlungen und symbolische Darstellungen durch das Unterrichtsgespräch begleitet und erläutert werden, um auf diese Weise Zusammenhänge zwischen beiden herzustellen: Was ist mit $4 + 2$ gemeint? Und warum schreiben wir einmal $6 = 4 + 2$ (die Zahl 6 zerlegt in 4 und 2, vgl. Abb. 4.36) und ein anderes Mal $4 + 2 = 6$ (6 als Summe von 4 und 2, vgl. Abb. 4.35)? Durch solche Fragen kann den Kindern deutlich werden, dass das Gleichheitszeichen nicht als Aufforderung zum Rechnen zu verstehen ist, sondern besagt, dass die Ausdrücke (Terme) links und rechts vom Gleichheitszeichen das Gleiche bedeuten.

Handlungen, Zeichnungen, symbolische Schreibweisen und das Gespräch im Unterricht begleiten bei jedem einzelnen Kind den Prozess der Verinnerlichung (vgl. Abschn. 3.2): Die äußeren, konkreten Handlungen sollen vom Kind im Geist nachvollzogen und schließlich ganz durch Denkhandlungen ersetzt werden. Die Denkhandlungen beziehen sich nicht mehr auf die konkreten Gegenstände, sondern in ihnen werden abstrakte Objekte – hier Zahlen – miteinander in Beziehung gesetzt. Man benötigt mathematische Symbole, um die Beziehungen aufzuschreiben: Aus einer Aussage über die Verteilung von sechs Kugeln in den zwei Teilen der Schüttelschachtel wird eine Aussage über die Zerlegung der Zahl: $6 = 4 + 2$. Diese Aussage steht zwar in Beziehung zu dem Erfahrungsbereich, aus dem heraus sie gewonnen wurde, aber sie gilt universell und nicht nur für Kugeln in einer Schachtel.

Die Kinder anzuleiten und zu befähigen, in konkreten Handlungen oder (realen) Situationen die „gemeinten“ Rechenoperationen zu erkennen, ist insbesondere dann notwendig, wenn diese Situationen ihrerseits sehr anregend sind. Z. B. in dem Lehrgang *Welt der Zahl 1* (Rinkens et al. 2015, S. 44; Abb. 4.37) stehen auf der Schulbuchseite Situationen im Mittelpunkt, in denen es um das Herunterfallen, Kaputtgehen oder Weglaufen geht. Damit die Kinder die jeweiligen Sachverhalte im Sinne des Abziehens, also im mathematischen Sinn, verstehen, müssen diese Situationen entsprechend präzisiert und interpretiert werden.

Zerlegungen der Zehn und Zehnerübergang

Die besondere Rolle der Zehn im dezimalen Stellenwertsystem wird beim Zählen nicht erkennbar („…, acht, neun, zehn, elf, zwölf“: nicht nur im Deutschen gibt es für die ersten Zahlen, die größer als zehn sind, eigene Zahlwörter), jedoch ist die Schreibweise der Zahlen ab 10 mit zwei Ziffern vielen Kindern durchaus geläufig. Für das spätere Rechnen mit größeren Zahlen ist es in jedem Fall unumgänglich, den sogenannten Zehnerübergang zu beherrschen, um Aufgaben wie $7 + 8 = \ldots.$, $17 + 8 = \ldots.$, $17 + 18 = \ldots.$ usw. lösen zu können. Dazu müssen die Kinder sicher sein, sowohl bei allen Zerlegungen der Zahlen bis zehn als auch beim Ergänzen von Zahlen zur Zehn.

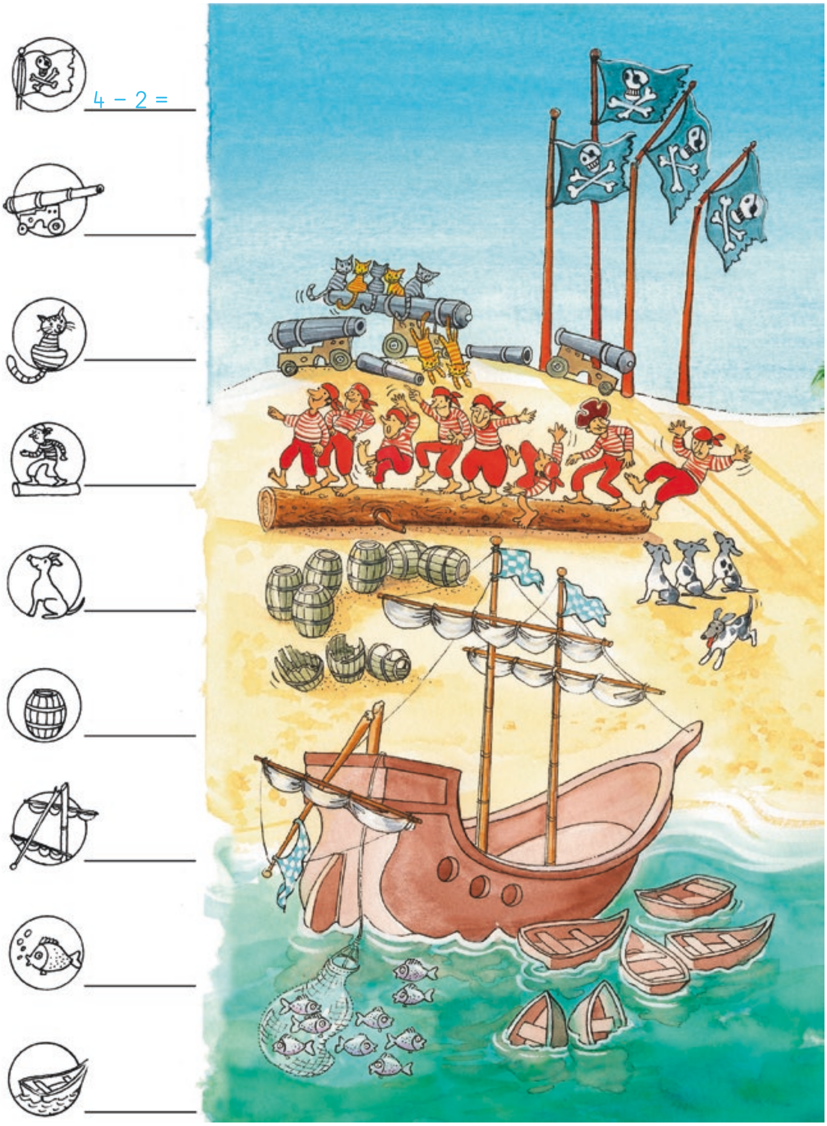


Abb. 4.37 Minus-Geschichten. (Rinkens et al. 2015, S. 44 © Westermann Gruppe)

Übungen dazu dienen gleichzeitig der Orientierung im Zehnerraum. Als Hilfen zum Erreichen dieser Ziele gibt es eine Vielzahl von Materialien und Anschauungsmittel (vgl. Abschn. 4.2).

Im Zusammenhang mit Abb. 4.36 und in Abschn. 4.1.4 wurden die Zahlzerlegungen bereits thematisiert. Für das Rechnen über den ersten Zehner hinaus ist die Zerlegung der Zehn von besonderer Bedeutung. Dabei ist es naheliegend, auf strukturierte Arbeitsmittel

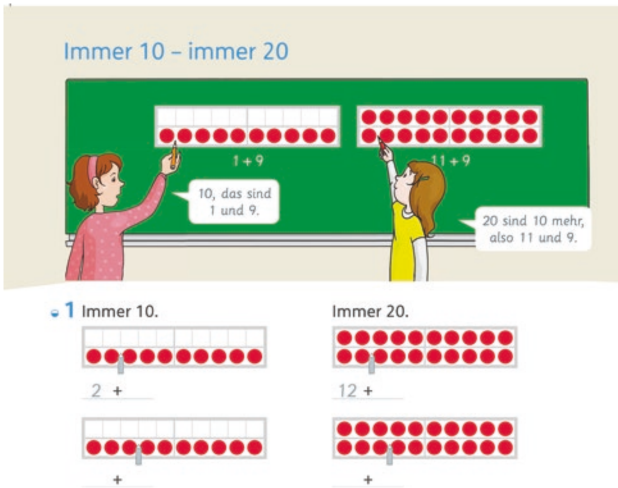


Abb. 4.38 Zerlegungen der 10. (Wittmann und Müller 2017a, S. 40 © Ernst Klett Verlag GmbH)

zurückzugreifen, weil eine simultane Erfassung der beiden Teile nur bei der Zerlegung der 10 in 5 + 5 und eventuell noch bei 6 + 4 und 4 + 6 möglich ist. Verwenden lassen sich als Anschauungs- und Arbeitsmittel sehr gut die zehn Finger beider Hände oder aber farbige Plättchen (Abb. 4.38).

Wie bei den Händen kann bei den strukturierten Materialien als weiteres Merkmal die Fünf hervorgehoben werden. Beim Rechnen erleichtern die Zusammenfassungen von jeweils fünf Objekten die Anzahlbestimmung ungeheuer, weil die Fünf von den Kindern statt durch Zählen unmittelbar durch Hinsehen (simultan) erfasst werden kann und mithilfe dieser Strukturierung eine Quasisimultanerfassung größerer Mengen möglich wird. In nahezu allen aktuellen Schulbüchern wird systematisch auf die Fünfer- und Zehnerstrukturierung gesetzt; eine besondere Rolle spielen dabei das Zwanzigerfeld und der Rechenrahmen (vgl. Abschn. 4.2).

Unterschiedliche Rechenwege

Konkrete Handlungen – gleichgültig, ob mit Bleistiften, Plättchen oder Kugeln –, die die Kinder zum Verständnis von Rechenoperationen führen sollen, müssen diesen Operationen präzise entsprechen. Nur so besteht die Chance, dass die Kinder die Handlungen zu Denkhandlungen „verinnerlichen“. Dabei ist die Verinnerlichung keine Einbahnstraße, sondern die Kinder sollten auch in der Lage sein, zu den Rechenoperationen passende konkrete Situationen zu (er-)finden, in denen entsprechende Handlungen ausgeführt werden. Immer wieder verwendete und damit vertraute Materialien können durchaus einen Kontext bilden, in dem sich solche passenden Situationen finden lassen. Dabei können ganz unterschiedliche Rechenwege beschritten und mit entsprechenden Handlungen nachvollzogen werden. Beispielsweise kann die Addition

$7 + 6 = \ldots$. auf die Verdopplung ($7 + 7 = 14$ oder $6 + 6 = 12$) zurückgeführt werden, wobei die „Kraft der Fünf" die Verdopplung erleichtert (vgl. Abschn. 4.2.2). Man kann aber auch den Weg über das Ergänzen zur Zehn gehen ($7 + 3 = 10$, $10 + 3 = 13$). Bei manchen Aufgaben bieten sich Rechenwege an, die die Nähe zur Zehn nutzen ($9 + 4$: $10 + 4 = 14$, also $9 + 4 = 13$, bzw. $9 + 4 = 10 + 3 = 13$; vgl. unten: Heuristische Strategien beim Addieren und Subtrahieren). Gegen die Betrachtung unterschiedlicher Rechenwege im Unterricht wird häufig eingewandt, dass damit eine Überforderung der schwächeren Kinder verbunden sei. Diese Kinder hätten schon hinreichend Mühe, auch nur einen Rechenweg nachzuvollziehen und korrekt zu verwenden. Dieses Argument ist sicher nicht ganz unberechtigt. Es sollte jedoch bedacht werden, dass die Kinder – ebenso wie die Erwachsenen – unterschiedliche Präferenzen bei ihren Vorgehensweisen haben und unterschiedliche Vorstellungen davon, was „leicht" und was „schwer" ist. Ein Verfahren, das die Lehrerin oder der Lehrer bevorzugt, ist nicht notwendigerweise das für alle Kinder am besten geeignete. Kinder, die sich die Zahlen eher linear geordnet vorstellen, werden beim Rechnen vielleicht das Ergänzen zur Zehn mit anschließendem Addieren des Restes bevorzugen. Kinder, die zunächst vom Zwanziger- und später vom Hunderterraum eher eine kardinale Vorstellungen haben – gegebenenfalls verbunden mit einem mentalen Bild des Zwanzigerfeldes –, betrachten möglicherweise bevorzugt Analogien zwischen den Zehnern, verdoppeln oder nutzen die „Kraft der Fünf".

Der Vorschlag, verschiedene Rechenwege zu betrachten und im Unterricht darüber zu sprechen, bedeutet nicht, dass alle Kinder auch alle Wege beherrschen müssen. Die Kinder sollten aber die Chance haben, den von ihnen bevorzugten Weg selbst zu wählen, wenn dieser tragfähig ist. Ist tatsächlich ein Kind mit dieser Wahl überfordert, so kann die Lehrerin oder der Lehrer ihm selbstverständlich zu einem bestimmten Weg raten (wir kommen auf dieses Problem in Abschn. 5.2 zurück).

Abb. 4.39 zeigt eine Veranschaulichung verschiedener Rechenwege am Zwanzigerfeld. Auch der Rechenrahmen mit jeweils zehn Kugeln auf zwei Stangen lässt Handlungen zu unterschiedlichen Rechenwegen zu.

Zählendes Rechnen

Übungen, Handlungen und Rechnungen dieser Art und vor allem die Gespräche im Unterricht darüber sollen die Kinder sicherer machen beim Rechnen im Zahlenraum bis 20. Dies bedeutet aber auch: Sie sollen sie wegführen vom zählenden Rechnen. Wie schon angesprochen (vgl. Abschn. 1.4.2), lösen viele Kinder Additions- und Subtraktionsaufgaben zunächst durch Weiter- bzw. Rückwärtszählen, wobei von manchen Kindern die Finger oder andere Materialien als Zählhilfen eingesetzt werden. Einige entwickeln geradezu phänomenale Fertigkeiten beim zählenden Rechnen und darüber hinaus auch Tricks, dieses zu verschleiern (vgl. das Interview zur Aufgabe Geburtstagstorte, Abschn. 1.4.2). Noch eher harmlos ist es, wenn die Kinder spontan $8 + 5$ statt $5 + 8$ zählend addieren oder in Zweierschritten weiterzählen (schöne Beispiele dazu findet man bei Schipper 2009, S. 105) – die Vermutung liegt nahe, dass Kinder, die auf solche Ideen

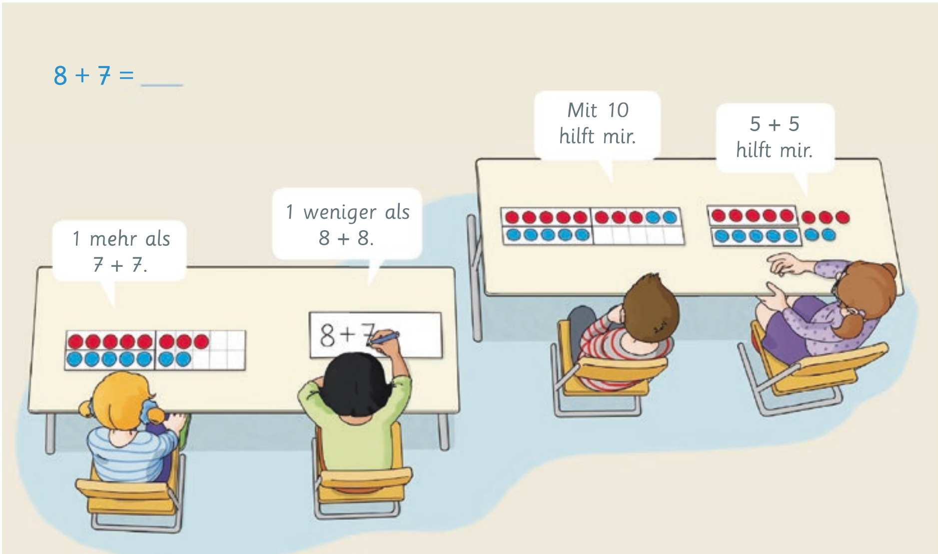


Abb. 4.39 Verschiedene Rechenwege am Zwanzigerfeld. (Wittmann und Müller 2017a, S. 65 © Ernst Klett Verlag GmbH)

kommen, bald von sich aus auf andere und effektivere Rechenstrategien zurückgreifen werden.

Dennoch: Abgesehen davon, dass das zählende Rechnen bei Zahlen, die größer als 10 sind, umständlich und ineffektiv wird, führt es zu typischen Fehlern. Beim Addieren durch Weiterzählen müssen die Kinder zwei Zählreihen verwalten. Zum Beispiel muss bei 8 + 5 beginnend mit dem Zahlwort neun um 5 weitergezählt werden, d. h. das Kind muss gleichzeitig mit dem Weiterzählen registrieren, wann die 5 erreicht ist. Ein typischer Fehler (der geradezu als Indikator für diese Art zu addieren betrachtet werden kann) ist der „Eins-und-eins-Fehler der Nähe“ (Gerster 1982, S. 28); er beruht darauf, dass das Kind (in unserem Beispiel) statt mit dem Zahlwort neun beim Weiterzählen mit dem Zahlwort acht beginnt. Das Ergebnis ist dann um eins zu klein:

1 2 3 4 5 6 7 ***8*** *9 10 11* ***12*** (8 + 5 = 12)
1 2 3 4 5

Bei der Subtraktion durch Rückwärtszählen gibt es sogar zwei Varianten dieses „Fehlers der Nähe“, weil zum einen nun tatsächlich beim Zählen mit der Ausgangszahl begonnen werden muss und zum anderen die zuletzt genannte Zahl nicht wie bei der Addition das Ergebnis, sondern die letzte „weggenommene“ Zahl ist. Zur Kennzeichnung beider Fehler verwenden wir das Beispiel 8 − 3:

1 2 3 ***4*** 5 *6* 7 8 (8 − 3 = 4)
3 2 1

$$\begin{array}{l} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ \underline{\mathbf{6}}\ 7\ 8\ \ (8-3=6) \\ \qquad\quad\ \ 3\ 2\ 1 \end{array}$$

Heuristische Strategien beim Addieren und Subtrahieren

Wir haben bereits gesehen, dass einige Kinder beim Rechnen spontan sehr effektive Verfahren verwenden. Auf welche unterschiedlichen Weisen die Kinder vorgehen, haben unter anderem Hengartner (1999), Selter und Spiegel (1997) sowie Spiegel und Selter (2003) eindrucksvoll beschrieben. Die im Folgenden aufgeführten Aktivitäten sollen dazu beitragen, dass möglichst alle Kinder selbst entdecken, wie sie sich das Rechnen durch „heuristische Strategien[4]" erheblich erleichtern können. Zu diesen Strategien gehören (vgl. Schipper 2009, S. 107 ff.; Padberg und Benz 2011, S. 98 ff.):

- Addition und Subtraktion mit Hilfe von Zahlzerlegungen der verschiedensten Art, insbesondere im Hinblick auf den Zehnerübergang. Bei der Aufgabe 8 + 5 kann man beispielsweise 8 + 2 + 3 = 13 rechnen, und bei der Aufgabe 4 + 7 rechnet man möglicherweise bequemer 7 + 3 + 1 (in beiden Fällen ist das Ergänzen zur 10 eine eher „leichte" Anforderung, weil sowohl 7 als auch 8 nahe an der 10 liegen und so schnell überblickt werden kann, wie viele noch fehlen); entsprechend ist 13 – 5 = 13 – 3 − 2.
- Die Verwendung von Verdoppelung und Fast-Verdoppelung sowie der „Kraft der Fünf": Die Aufgabe 6 + 7 lässt sich z. B. zurückführen auf 6 + 6 + 1, und 8 + 5 kann auch in die Form 5 + 5 + 3 gebracht werden.
- Das Ausnutzen von Analogien zwischen Rechnungen in den Zehnern, z. B. ist 7 – 3 = 4 und 17 – 3 = 14.
- Gegensinniges Verändern der Zahlen bei der Addition und gleichsinniges bei der Subtraktion, z. B. ist 9 + 4 = 10 + 3 und 12 – 3 = 10 − 1.

Wenn im Unterricht verschiedene Aufgaben in einen sinnvollen Zusammenhang gebracht und ihre wechselseitigen Beziehungen erörtert werden, so spricht man auch vom „operativen Durcharbeiten". Das „operative Prinzip" (Wittmann 1975, S. 62 ff., Krauthausen 2018, S. 232 ff.), auf das dabei als methodisches Prinzip Bezug genommen wird, besagt insbesondere, dass die Kinder mit einer Rechenoperation gleich auch die Umkehroperation kennenlernen sollten. Im Anfangsunterricht sollten sie also zusammen mit der Addition auch die Subtraktion kennenlernen. Beim „operativen Durcharbeiten" werden allerdings noch weitere Beziehungen hergestellt, die wieder am Beispiel 8 + 5 erläutert werden sollen (vgl. auch Schipper et al. 2015a, S. 97):

Die *Aufgabe* lautet 8 + 5:

- Umkehraufgaben sind 13 − 5 und 13 − 8
- Die Tauschaufgabe zu 8 + 5 ist 5 + 8

[4]Die „Heuristik" ist die „Kunst des Problemlösens" (vgl. Polya 1980).

- Darüber hinaus gibt es eine Reihe von Nachbaraufgaben wie 8 + 4, 8 + 6, 7 + 5, 7 + 6, 9 + 5, 9 + 4; entsprechend für die Subtraktionsaufgaben
- Es gibt Zerlegungsaufgaben wie 8 + 2 + 3, 3 + 5 + 5 bzw. 13 – 3 – 2, die in Verbindung mit der Aufgabe 8 + 5 stehen, usw.

In den KMK-Bildungsstandards (vgl. Abschn. 3.3.2) wird gefordert, dass die Schülerinnen und Schüler am Ende des vierten Schuljahres unter anderem „Grundaufgaben des Kopfrechnens (Einspluseins, Zahlzerlegungen) gedächtnismäßig beherrschen, deren Umkehrungen sicher ableiten und auf analoge Aufgaben (…) übertragen" sowie „verschiedene Rechenwege vergleichen und bewerten, Rechenfehler finden, erklären und korrigieren" (KMK 2004, S. 12). Diese Forderungen betreffen keineswegs nur die höheren Schuljahre, sie müssen von Anfang an altersgemäß und konsequent verfolgt werden. Einige Beispiele aus Schulbüchern für das erste Schuljahr sollen verdeutlichen, wie dies geschehen kann:

In Abb. 4.40 geht es um Analogien zwischen Aufgaben (hier: 13 + 4 und 3 + 4). Im nächsten Beispiel (Abb. 4.41) finden die Schülerinnen und Schüler Anregungen, Aufgaben wie 3 + 8 = …, 8 + 5 = …, 6 + 7 = … oder 9 + 6 = … auf verschiedenen Wegen zu lösen, und sie werden angeregt, ihre Lösungswege zu beschreiben und zu erklären.

Das gezielte Suchen nach Fehlern (Abb. 4.42) kann dazu beitragen, die Flexibilität im Denken und beim Rechnen zu verbessern, insbesondere, wenn man die Kinder erklären lässt, wie diese Fehler zustande gekommen sein könnten.

Die Vorteile der hier geschilderten heuristischen Strategien und der damit verbundenen unterrichtlichen Maßnahmen liegen auf der Hand. Allerdings dürfte es, wie bereits mehrfach angesprochen, große individuelle Unterschiede geben zwischen dem,

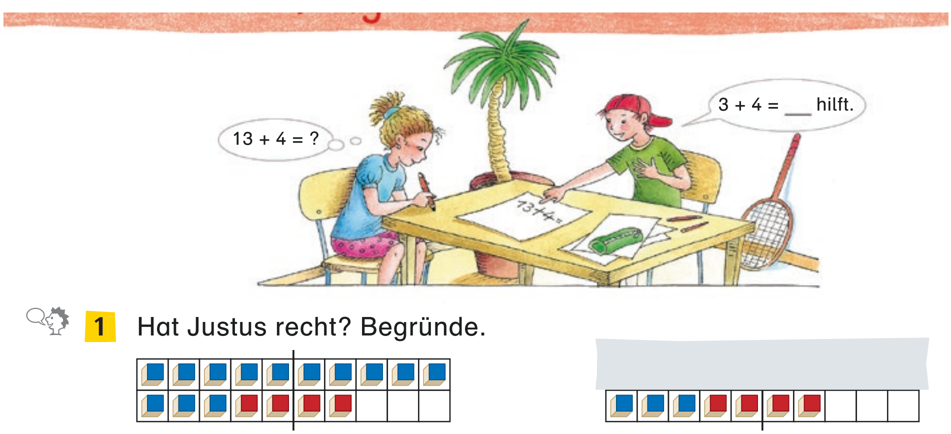


Abb. 4.40 Analogien zwischen Aufgaben. (Balins et al. 2015b, S. 74 © Cornelsen/Cleo-Petra Kurze, Detlef Seidensticker & Erasmi + Stein)

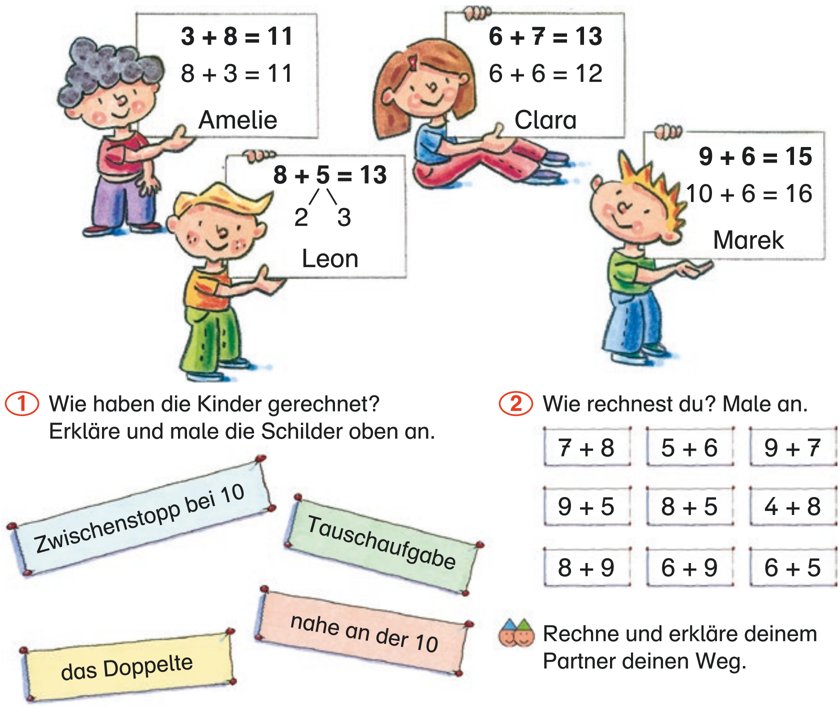


Abb. 4.41 Leichte Aufgaben, schwere Aufgaben. (Betz et al. 2016a, S. 90 © Cornelsen/Mathias Hütter)

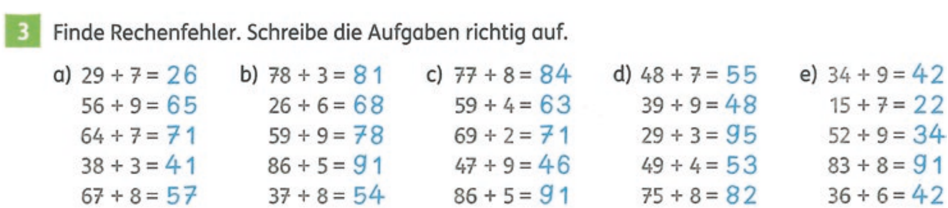


Abb. 4.42 Fehler suchen. (Häring et al. 2015, S. 34 © Ernst Klett Verlag GmbH)

was einzelne Kinder als „leicht“ oder „schwierig“ empfinden. Dies bedeutet, dass die Kinder letztlich selbst entscheiden müssen, welche der Strategien sie verwenden wollen und welche nicht. Insofern zeigt sich beim Umgang mit heuristischen Strategien, ob die Kinder – zumindest ansatzweise – jene allgemeinen mathematischen Fähigkeiten erworben haben, die neben den Rechentechniken zu den wichtigsten Zielen des Mathematikunterrichts in der Grundschule gehören: Die Fähigkeiten zum Problemlösen, Modellieren, Kommunizieren, Argumentieren und Darstellen (vgl. Abschn. 3.3.2).

Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 100

Auch beim Rechnen im Zahlenraum bis 100 gilt es, die Schülerinnen und Schüler zu befähigen, inhaltliche Fähigkeiten und Fertigkeiten mit allgemeinen Kompetenzen zu verbinden. Dazu gehört auch hier das Finden verschiedener Möglichkeiten und Wege beim Rechnen. Einige Beispielaufgaben, die zur Erläuterung der in den KMK-Bildungsstandards geforderten Kompetenzen dienen sollen, greifen die Betrachtung von Zahlzerlegungen im Hunderterraum auf (KMK 2004, S. 19 f.):

Aufgabenstellung: Zerlege die Zahl 31 in zwei Zahlen.

1. Aufgabe

31	
12	
	0

Trage fehlende Zahlen ein

2. Aufgabe

31	

Finde das Zahlenpaar, bei dem eine Zahl um 1 größer ist als die andere. Trage die Zahlen ein

3. Aufgabe

31	

Zerlege die Zahl 31 so in zwei Zahlen, dass eine durch 5 und die andere durch 2 teilbar ist

4. Aufgabe

31	

Bei der 3. Aufgabe gibt es weitere Lösungen. Schreibe sie auf

Als inhaltliche Kompetenz wird bei diesen Aufgaben das Verstehen der vier Grundrechenarten und ihre Zusammenhänge angesprochen, als allgemeine Kompetenz das Anwenden mathematischer Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben (vgl. Abschn. 3.3.2). Die genannten vier Aufgaben sind so konzipiert, dass in ihnen die Anforderungen stetig zunehmen: Zuerst geht es um beliebige Zerlegungen der 31, dann um solche mit bestimmten Eigenschaften bei den Summanden und schließlich um das Finden aller Zerlegungen mit einer vorgegebenen Eigenschaft.

Beim Addieren und Subtrahieren mit Zahlen bis 100 muss sich zeigen, inwieweit die Kinder in der Lage sind, die Rechenfertigkeiten, die sie im Zahlenraum bis 20 erworben haben, auf größere Zahlen zu übertragen und in diesem Zahlenraum mental zu operieren. Dabei können Materialien wie das Hunderterfeld, der Rechenrahmen und der Zahlenstrahl bzw. der Rechenstrich zur Stützung der entsprechenden Denkoperationen am Anfang eine große Hilfe sein. Johannes Kühnel hat bereits 1959 darauf hingewiesen, dass es – anders als bei den schriftlichen Rechenverfahren – beim mündlichen Rechnen (oder auch beim halbschriftlichen Rechnen, d. h. wenn Zwischenergebnisse aufgeschrieben werden) kein standardisiertes „Normalverfahren“ geben kann, also kein Verfahren, das von der Lehrerin oder dem Lehrer eingeführt und von allen Kindern in gleicher Weise durchgeführt wird und von dem Abweichungen nicht erlaubt sind. Kühnels Begründung ist ebenso drastisch wie einleuchtend: „Wir wollen kein Normalverfahren den Kindern aufnötigen. Nicht darauf kommt es an, dass das Kind einen bestimmten Weg mit Sicherheit gehen lernt – das streben wir an bei der Gewöhnung der Pferde –, sondern dass es seinen Weg *allein zu suchen* und zu finden weiß“ (Kühnel 1959, S. 119).

Wir haben oben bereits erläutert, wie die Kinder bei ein- und derselben Aufgabe unterschiedliche Rechenwege selbst entdecken und – für sich selbst und für ihre Mitschülerinnen und -schüler – erklären können; dabei wurden auch mögliche Einwände gegen diese Vorgehensweise diskutiert. Weil beim Addieren und Subtrahieren im Hunderterraum die Anzahl der möglichen Rechenwege erheblich größer ist als im Zwanzigerraum, soll der Grundgedanke hier wiederholt werden: Es geht natürlich *nicht* darum, dass alle Kinder alle denkbaren Rechenwege beherrschen sollen, sondern darum, dass sie erkennen, auf welche Weise andere Kinder eine bestimmte Aufgabe gelöst haben, und vor allem, dass es nicht sinnvoll ist, alle Aufgaben auf die gleiche Weise lösen zu wollen ($91 - 2$ wird man nicht auf die gleiche Weise rechnen wie $91 - 89$).

Es sollen nun unterschiedliche Rechenwege an einigen Beispielen beschrieben werden, wobei nicht mehr in jedem Fall auf geeignete Arbeitsmittel (Rechenrahmen, Hunderterfeld usw.) verwiesen wird. Obwohl es beim halbschriftlichen Rechnen keine vorgegebene Notation gibt – es handelt sich um ein Rechnen mit Notizen, die das Gedächtnis entlasten –, wird der Übersichtlichkeit und Korrektheit halber im Folgenden eine einheitliche Notation verwendet: Die einzelnen Rechenschritte werden in Form von Gleichungen notiert. Zu beachten ist dabei, dass bei dieser Notation von Aufgabe, Zwischenergebnis und Endergebnis das Gleichheitszeichen stets korrekt verwendet wird, weil jeweils auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens äquivalente Terme stehen. (Das Gleichheitszeichen sollte von den Kindern nicht als „Aufforderung zum Rechnen“ oder im Sinne einer Handlungsabfolge verstanden werden, denn bei der Aufgabe $26 + 45 = \ldots$ sind Schreibweisen wie z. B. $26 + 40 = 66 + 5 = 71$ schlicht falsch. Die Beachtung der mathematischen Bedeutung des Gleichheitszeichens in den ersten Grundschuljahren mag als übertriebener Formalismus erscheinen[5], doch muss man sich darüber im Klaren sein, dass es außerordentlich schwierig ist, Gewohnheiten zu ändern. Wer bei einfachen Rechensätzen die Bedeutung des Gleichheitszeichens nicht erfasst hat, wird später große Schwierigkeiten beim Umgehen mit Gleichungen haben.)

Zur Erläuterung einiger Rechenwege verwenden wir die Beispiele $26 + 45$ und $63 - 27$; selbstverständlich sind weitere als die hier aufgeführten Varianten möglich:

- Zehner und Einer werden getrennt addiert (erst die Zehner, dann die Einer, wie im Beispiel, oder auch umgekehrt, erst die Einer, dann die Zehner):

$$\begin{array}{rcrcr} \underline{26} & \underline{+} & \underline{45} & \underline{=} & \underline{71} \\ 20 & + & 40 & = & 60 \\ 6 & + & 5 & = & 11 \end{array}$$

[5]Zumal beim Programmieren das Gleichheitszeichen tatsächlich häufig im Sinne einer Aufforderung zum Handeln gebraucht wird, z. B. wenn man eine Variable durch „$a = a + 1$“ verändert.

- Zum ersten Summanden wird zunächst nur der Zehner des zweiten Summanden addiert und dann der Einer (oder auch erst der Einer, dann der Zehner):

$$\begin{array}{rcl} 26 + 45 & = & 71 \\ \hline 26 + 40 & = & 66 \\ 66 + 5 & = & 71 \end{array}$$

- Vom ersten Summanden aus wird zum nächsten Zehner ergänzt (dieses Vorgehen kann auch als gegensinniges Verändern gesehen werden):

$$\begin{array}{rcrcr} 26 & + & 45 & = & 71 \\ \hline 26 & + & 4 & = & 30 \\ 45 & - & 4 & = & 41 \\ 30 & + & 41 & = & 71 \end{array}$$

- Schrittweises Vorgehen beim Subtrahieren:

$$\begin{array}{rcrcr} 63 & - & 27 & = & 36 \\ \hline 63 & - & 20 & = & 43 \\ 43 & - & 7 & = & 36 \end{array} \qquad \text{oder} \qquad \begin{array}{rcrcr} 63 & - & 27 & = & 36 \\ \hline 63 & - & 30 & = & 33 \\ 33 & + & 3 & = & 36 \end{array}$$

- Ergänzen:

$$\begin{array}{rcrcr} 63 & - & 27 & = & 36 \\ \hline 27 & + & \mathbf{3} & = & 30 \\ 30 & + & \mathbf{33} & = & 63 \end{array}$$

- Gleichsinniges Verändern mit Ergänzen zum Zehner:

$$\begin{array}{rcrcr} 63 & - & 27 & = & 36 \\ \hline 66 & - & 30 & = & 36 \end{array}$$

- Es gibt Kinder (und Erwachsene), die auch bei der Subtraktion die Zehner und Einer getrennt verarbeiten. Dieser Rechenweg ist bei Aufgaben, bei denen der Einer des Subtrahenden größer ist als der des Minuenden, nur möglich, wenn zumindest ein intuitives Bewusstsein für negative Zahlen vorhanden ist. Bezüglich der Schreibweise ergeben sich Schwierigkeiten, wenn die symbolische Notation negativer Zahlen nicht bekannt ist. Eine mögliche, grundschuladäquate Notation gibt das zweite Beispiel:

$$\begin{array}{rcr} 63 - 27 & = & 36 \\ \hline 60 - 20 & = & 40 \\ 3 - 7 & = & -4 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 63 - 27 \ = \ 40 - 4 \ = \ 36 \\ \hline 60 - 20 \\ 3 - 7 \end{array}$$

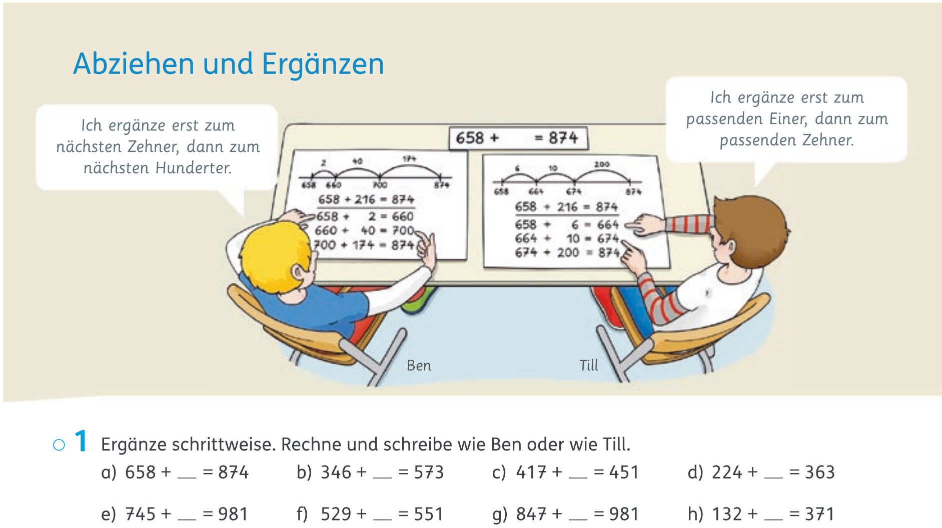


Abb. 4.43 Ergänzen. (Wittmann und Müller 2018, S. 54 © Ernst Klett Verlag GmbH)

Die Subtraktion durch Ergänzen bietet sich vor allem dann an, wenn wie bei der Aufgabe 91 − 89 Minuend und Subtrahend dicht beieinander liegen. Dieser Sachverhalt lässt sich am Zahlenstrahl oder am Rechenstrich besonders gut darstellen (Abb. 4.43).

Generell ist der Rechenstrich vorzüglich geeignet zur Darstellung unterschiedlicher Rechenwege im Zahlenraum bis 100: Man zeichnet eine Strecke, bei dem Anfangs- und Endpunkt mit 0 und 100 markiert sein können, aber nicht müssen. Die in den Rechnungen vorkommenden Zahlen werden nach Augenmaß eingetragen und die Rechenoperationen durch Pfeile gekennzeichnet (Abb. 4.44).

4.3.2 Multiplikation und Division

Multiplikation und Division werden üblicherweise im zweiten Schuljahr durch Rückgriff auf intuitive Vorstellungen der Kinder eingeführt; die Multiplikation wird erklärt als wiederholte Addition gleicher Summanden (z. B. „Greife fünfmal in das Säckchen und nimm jedes Mal drei Plättchen heraus“: $5 \cdot 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3$), die Division durch Bezugnahme auf das Verteilen (z. B. „12 Bonbons werden – gerecht – an 4 Kinder verteilt“) oder auf das Aufteilen (z. B. „12 Eier werden in Kästen zu je 6 Eiern aufgeteilt“; diese Handlung kann auch als wiederholte Subtraktion gleicher Subtrahenden verstanden werden: „Wie oft kann man 6 von 12 abziehen?“).

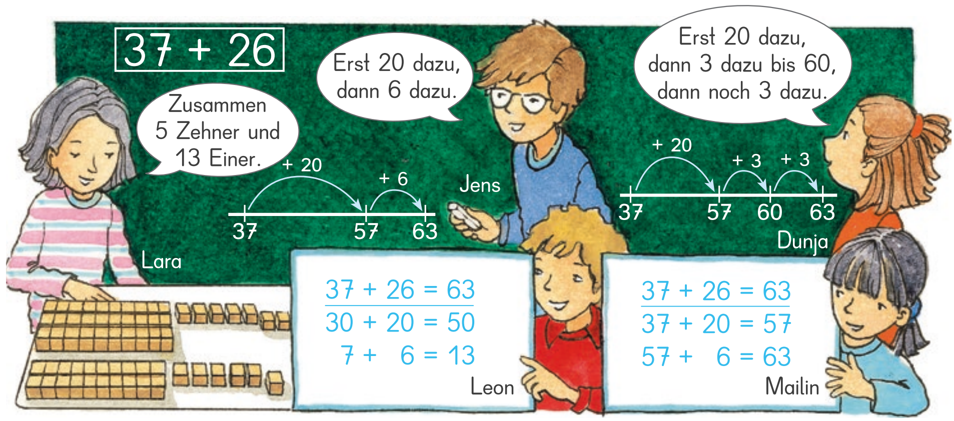


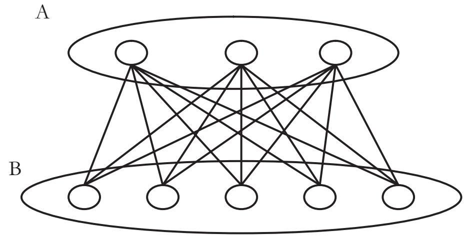
Abb. 4.44 Rechenwege am Rechenstrich. (Rinkens et al. 2014, S. 106 © Westermann Gruppe)

Dieser Zugang zur Multiplikation und zur Division ist naheliegend und wird im Folgenden noch ausführlicher behandelt. Er hat aber auch Nachteile. So haben bei der Auffassung von $5 \cdot 3$ als $3+3+3+3+3$ die beiden Faktoren 5 und 3 unterschiedliche Bedeutung: 5 ist der *Multiplikator,* 3 der *Multiplikand.* Die Kommutativität der Multiplikation (also die Tatsache, dass man die beiden Faktoren vertauschen darf, ohne dass sich dadurch das Ergebnis – das Produkt – ändert) erschließt sich im Rückgriff auf Situationen wie die des fünfmaligen Nehmens von drei Plättchen nicht von selbst. Zudem erscheint bei diesem Zugang die Multiplikation nur als eine verkürzende Schreibweise für bestimmte Additionsaufgaben und nicht als eigenständige Rechenoperation. Dieser Nachteil kann später für viele Schülerinnen und Schüler zu einem echten Problem werden, wenn sie nämlich z. B. beim Rechnen mit Bruchzahlen die eingeschränkte Sicht der Multiplikation (und vor allem auch der Division) beibehalten: Man kann nicht $^2/_5$ -mal in die Kiste greifen und jedes Mal $^3/_4$ Äpfel herausholen (Versuche, Divisionen wie $^3/_4 : {}^2/_5$ auf das Verteilen zurückzuführen, können schon gar nicht ernst genommen werden). Spätestens bei der Bruchrechnung ist eine erweiterte Sicht der Multiplikation und Division erforderlich. Mehr noch als beim Gleichheitszeichen gilt hier, dass es vielen Kindern sehr schwerfällt, sich von vereinfachenden, stark an konkreten Handlungen orientierten Denkgewohnheiten zu lösen.

Selbst wenn man sich dieser Gefahr eines eingeschränkten Verständnisses bewusst ist, bleibt die Frage, welche Alternativen es gibt. Tatsächlich gibt es eine andere Möglichkeit der Einführung der Multiplikation, doch auch die hat Nachteile. Sie soll hier dennoch kurz vorgestellt werden:

Dazu betrachten wir zwei Länder, A und B. Im Land A gibt es drei und im Land B fünf Flughäfen. Außerdem besteht zwischen jedem Flughafen des Landes A eine Flugverbindung zu jedem Flughafen des Landes B (vgl. Abb. 4.45).

Abb. 4.45 3×5 Verbindungen zwischen den Elementen von A und B



Die Anzahl der Flugverbindungen zwischen den drei Flughäfen von A und den fünf Flughäfen von B ist $3 \cdot 5 = 15$, das ist die Anzahl der *Paare* von Flughäfen aus A und B. Man kann dieses Beispiel beliebig verallgemeinern, nicht nur im Hinblick auf die Zahlen, sondern auch auf Situationen (und sich z. B. fragen, auf wie viele Weisen man Pullover und Hosen kombinieren kann, wenn man drei Pullover und fünf Hosen besitzt).

Bei diesem Zugang zur Multiplikation betrachtet man die Elemente zweier (endlicher) Mengen und kombiniert je ein Element aus der einen Menge A mit je einem Element aus der anderen Menge B, man bildet also geordnete Paare (a,b) von Elementen $a \in A$ und $b \in B$. Die Anzahl dieser Paare ist das Produkt aus der Kardinalzahl von A und der Kardinalzahl von B (vgl. Abschn. 1.2.1 und Padberg und Büchter 2015, S. 210 ff.) Diese Sicht der Multiplikation natürlicher Zahlen wird auch als *kombinatorischer Aspekt* der Multiplikation bezeichnet. Da kein Rückgriff auf die Addition nötig ist, wird bei dieser Vorgehensweise deutlich, dass die Multiplikation eine neue, eigenständige Rechenoperation ist[6]. Dieser Zugang verlangt von den Kindern ein höheres Abstraktionsvermögen als der oben schon angedeutete Zugang über die wiederholte Addition, bei dem ihre Vorstellungen durch konkrete Handlungen gestützt werden können. Denn beim kombinatorischen Aspekt der Multiplikation wird auf die Anzahl der *Verbindungen* (z. B. von Flughäfen) oder der *Kombinationen* (z. B. von Kleidungsstücken) zurückgegriffen, die Kinder müssen also im Kopf Beziehungen herstellen und diese dann bei der Ermittlung des Ergebnisses betrachten. So sind es nicht die Objekte selbst, die das Ergebnis der Multiplikation darstellen, sondern eben die Anzahl der möglichen Kombinationen. In den meisten Lehrgängen für das zweite Schuljahr entscheiden sich die Schulbuchautoren für Anschaulichkeit. Der kombinatorische Aspekt der Multiplikation wird – wenn überhaupt – erst später als eine Anwendung der Multiplikation im Zusammenhang mit kombinatorischen Fragestellungen betrachtet (vgl. Abb. 4.46).

Bei der Einführung der Multiplikation als wiederholte Addition geht man von Situationen aus, die den Kindern vertraut sind: Beispielsweise kann auf einer Flöte eine Folge von viermal drei Tönen gespielt werden, oder die Kinder ertasten dreimal

[6] Selbstverständlich wird auch bei dem hier skizzierten Zugang zur Multiplikation auf Eigenschaften der natürlichen Zahlen (Kardinalzahlen) Bezug genommen, sodass z. B. die Multiplikation von Bruchzahlen eine weitere Abstraktion erfordert.

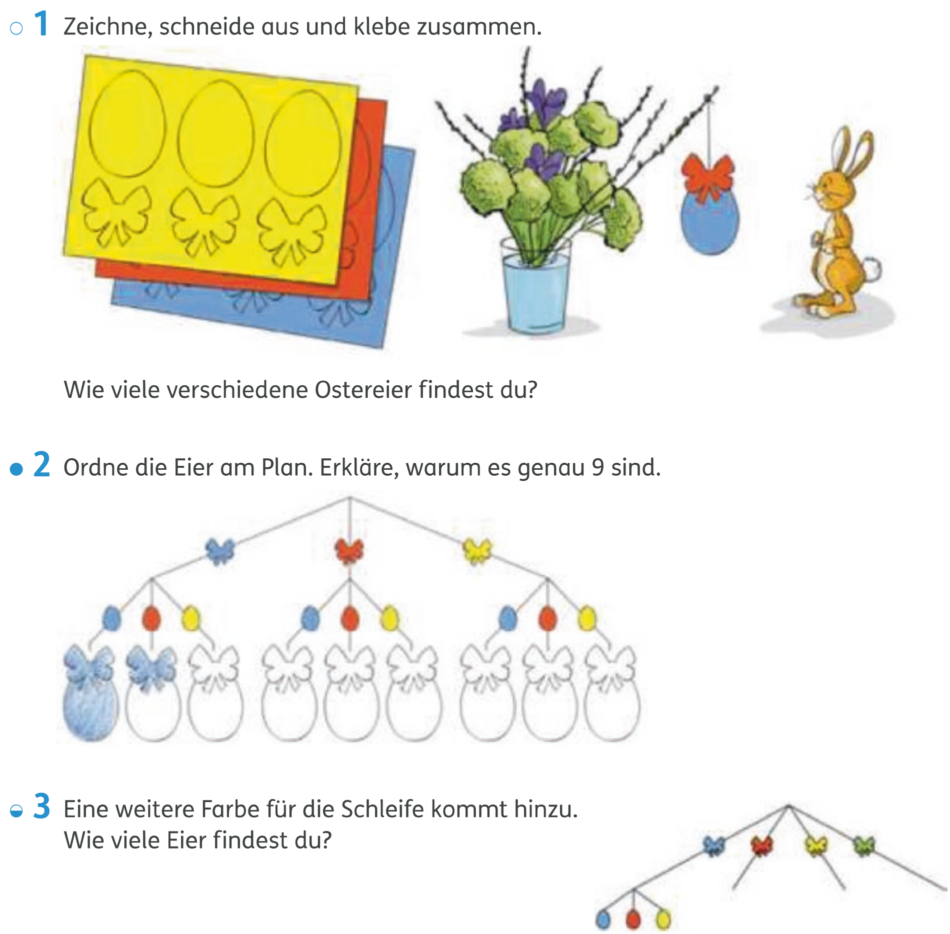


Abb. 4.46 Kombinationen. (Wittmann und Müller 2017b, S. 142 © Ernst Klett Verlag GmbH)

zwei Knoten in einem Seil, oder sie sehen zweimal drei Flaschen, die in einem Kasten stehen. Als Situationen, die sich durch die wiederholte Addition gleicher Summanden beschreiben lassen, kommen also sowohl (zeitliche) Abfolgen gleicher Ereignisse infrage (wie die Töne auf der Flöte oder die zu ertastenden Knoten auf dem Seil, vgl. Abb. 4.47) als auch räumliche Darstellungen von Objekten, die in Reihen untereinander bzw. in Spalten nebeneinander stehen (vgl. Abb. 4.48). Im ersten Fall spricht man vom *zeitlich-sukzessiven Aspekt* und im zweiten Fall vom *räumlich-simultanen Aspekt* der Multiplikation.

Abb. 4.47 Dreimal zwei

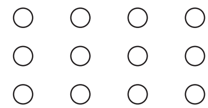


Abb. 4.48 Dreimal vier oder viermal drei

Insbesondere bei rechteckigen Anordnungen wie in Abb. 4.48 wird sofort klar, dass es für das Ergebnis gleichgültig ist, ob man „dreimal vier“ oder „viermal drei“ betrachtet: Man kann beim wiederholten Addieren von den Reihen *oder* von den Spalten ausgehen, beim Verändern der Blickrichtung (Drehen um 90°) werden aus Spalten Reihen und aus Reihen Spalten. Auf diese Weise wird anschaulich klar, dass das Vertauschen der Rollen von Multiplikand und Multiplikator (also der beiden Faktoren) das Ergebnis der Multiplikation nicht ändert.

Von dieser Erkenntnis zu unterscheiden ist die Erwägung, ob beim Aufschreiben (also bei der formalen Notation) der Multiplikation der Multiplikator vorn steht (wie wir es in allen bisherigen Beispielen gehandhabt haben) oder hinten, ob $3 \cdot 5$ also „dreimal fünf“ oder „drei fünfmal“ bedeutet. Die Betrachtung konkreter Situationen und Handlungen legt die erste Schreibweise nahe (und diese wird auch in fast allen neueren Lehrgängen verwendet). Da der Multiplikator beim Normalverfahren der schriftlichen Multiplikation jedoch stets als zweiter Faktor aufgeschrieben wird (vgl. Padberg und Benz 2011, S. 269), könnte man argumentieren, dies möge bereits bei der Einführung der Multiplikation ebenso gehandhabt werden. Auch die Verwendung der Operatorschreibweise bei der Multiplikation unter Verwendung eines Pfeils, über dem der Multiplikator – als „Operator“ – steht, würde die Leseweise „fünf dreimal“ nahelegen:

$$5 \xrightarrow{\cdot 3} 15$$

Andererseits fordert die Sprechweise vor allem bei zeitlich-sukzessiven Situationen die Interpretation des ersten Faktors als Multiplikator: „Ich gehe dreimal in den Keller und bringe jedes Mal fünf Flaschen Wasser mit“. Welche Schreibweise auch immer man wählt, es handelt sich dabei um eine Vereinbarung, und wie bei allen Festlegungen und Vereinbarungen über formale Dinge ist es wichtig, sie als solche zu erkennen, im Unterrichtsgespräch ausdrücklich auf sie einzugehen und sie möglichst zusammen mit den Schülerinnen und Schülern zu treffen.

Bei der Betrachtung der Multiplikation als wiederholter Addition gleicher Summanden ist es naheliegend, die Division als wiederholte Subtraktion gleicher Subtrahenden einzuführen (das entspricht Situationen, in denen aufgeteilt wird, vgl. Abb. 4.49).

In dieser Situation („24 Brötchen. Immer 4 in ein Körbchen“) wird die Frage gestellt, wie 24 Objekte in Teilmengen zu je 4 Objekten aufgeteilt werden können, oder anders ausgedrückt, wie oft 4 von 24 subtrahiert werden kann. Man kann in dieser Situation aber auch die Frage stellen, mit welchem Multiplikator 4 multipliziert werden muss, wenn man 24 erhalten will. Auf diese Weise wird für die Kinder der Zusammenhang zwischen Division und Multiplikation erkennbar (vgl. dazu auch das Beispiel in Abb. 4.50, in der der Zusammenhang zwischen Aufgabe und Umkehraufgabe ausdrücklich hergestellt wird).

Abb. 4.49 Aufteilen. (Wittmann und Müller 2017b, S. 100 © Ernst Klett Verlag GmbH)

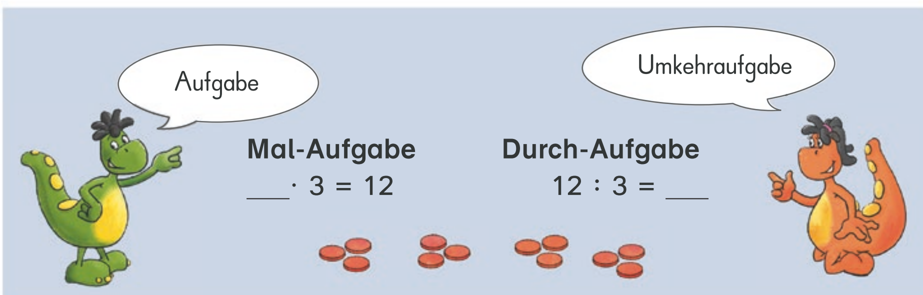


Abb. 4.50 Zusammenhang zwischen Multiplikation und Division. (Rinkens et al. 2014, S. 63 © Westermann Gruppe)

Intuitiv mag den Kindern eine andere Einführung der Division näherliegen, wenn nämlich Situationen betrachtet werden, in denen *verteilt* wird (12 Bonbons gerecht verteilt an 4 Kinder). Dabei ist der Divisor (hier die 4) bekannt, gesucht wird der Quotient ($12 : 4 = \ldots$). Formuliert man diese Aufgabe um als Multiplikationsaufgabe, so lautet sie $4 \cdot \ldots = 12$, und das heißt: Welche Zahl muss man mit 4 multiplizieren bzw. viermal addieren, wenn man 12 erhalten will? Eine solche Fragestellung ist für Kinder sicher eher ungewöhnlich und macht es ihnen möglicherweise schwerer, den Zusammenhang zwischen Multiplikation und Division zu erschließen.

Vor allem diese letzten Erörterungen zeigen, dass manche Verständnisprobleme, die bei den Kindern auftreten können, im Grunde gar nicht in der Sache selbst begründet sind, sondern sich aus der speziellen Art der Einführung von Multiplikation und Division durch Bezugnahme auf alltägliche Situationen ergeben. Ein Charakteristikum aller Rechenoperationen ist aber, dass diese universell einsetzbar sind und nicht nur in den spezifischen Situationen, aus denen heraus sie entwickelt wurden, Verwendung finden. Wie in Abschn. 4.1.6 im Zusammenhang mit der Betrachtung der Kleiner-Relation ausführlich diskutiert, muss beim Verweis auf konkrete Handlungen und reale Situationen für die Schülerinnen und Schüler stets deutlich werden, welche *mathematischen* Begriffe und Beziehungen „gemeint" sind. Dieses Zusammenspiel zwischen konkreten Situationen und Handlungen, den begrifflichen Beziehungen zwischen Zahlen und deren formaler Notation in Zahlensätzen haben wir in Abb. 4.18 mithilfe eines „epistemologischen Dreiecks" zu kennzeichnen versucht.

In der Regel finden die Kinder schnell heraus, dass es sich bei der Multiplikation und der Division in der gleichen Weise um eine Rechenoperation und ihre Umkehroperation handelt wie sie sie schon bei der Addition und Subtraktion kennengelernt haben. Entsprechend bieten sich auch in diesem Bereich „operative Übungen" mit Aufgaben, Tauschaufgaben, Umkehraufgaben, Nachbaraufgaben und Zerlegungsaufgaben an (vgl. Abschn. 4.3.3).

Zum Schluss dieses Abschnitts sollen kurz noch zwei spezielle Probleme angesprochen werden, die sich bei der Behandlung von Multiplikation und Division ergeben:

- Die Multiplikation mit der Null (und die Frage, warum man nicht durch Null dividieren kann) und
- die Division mit Rest.

In Abschn. 4.1.5 sind wir bereits auf Probleme bei der Einführung der Null als Zahl eingegangen, insbesondere auch darauf, dass viele Kinder bei Additions- und Subtraktionsaufgaben, in denen die Null vorkommt ($a + 0$ und $0 + a$ bzw. $a - 0$) häufig das Ergebnis 0 nennen. Nun ist ja tatsächlich $a \cdot 0 = 0$ für alle natürlichen Zahlen, und es ist durchaus denkbar, dass dieses Wissen das Verhalten der Kinder auch bei Additionen und Subtraktionen beeinflusst. Schon deshalb sollte ihnen klar werden, *warum* $a \cdot 0$ gleich 0 (und $a + 0$ eben *nicht* gleich 0) ist:

Bei der Betrachtung der Multiplikation als wiederholter Addition gleicher Summanden kann man auf die Abfolge von Handlungen zurückgreifen: Hans geht viermal in den Keller und holt jedes Mal drei Flaschen Saft: $4 \cdot 3 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12$; entsprechend bei zwei Flaschen: $4 \cdot 2 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$, bei einer Flasche: $4 \cdot 1 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$ und bei null Flaschen: $4 \cdot 0 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$ (wenn der schusselige Hans jedes Mal keine Flasche mitbringt). Selbstverständlich muss diese Überlegung verallgemeinert werden: Es kommt *stets* Null heraus, wenn man eine Zahl mit Null multipliziert (vgl. auch Hefendehl-Hebeker 1985).

Während die Multiplikation mit der Null aus den genannten Gründen im zweiten Schuljahr durchaus angesprochen werden sollte, kommt die Frage nach der Division durch Null zu diesem Zeitpunkt für viele Schülerinnen und Schüler noch zu früh, weil ihre Klärung Einsicht in den formalen Zusammenhang zwischen Multiplikation und Division erfordert. Die Division durch Null ist nämlich – entgegen einer landläufigen Meinung – nicht etwa „verboten" (wer sollte ein solches „Verbot" auch ausgesprochen haben?), sondern sie ist schlicht unmöglich: Könnte man z. B. 4 durch 0 dividieren, so wäre $4 : 0$ gleich einer Zahl a. Dann müsste aber $a \cdot 0 = 4$ sein, jedoch haben wir gerade festgestellt, dass $a \cdot 0$ stets gleich 0 ist – ganz gleich, welche Zahl für a gewählt wird.

Die *Division mit Rest* ist sehr viel einfacher zu behandeln, weil man sehr leicht Situationen erfinden kann, in denen Aufteil- oder Verteilhandlungen nicht „aufgehen": Wenn man 15 Eier in Kästen mit jeweils 6 Eiern aufteilen will, so bleiben 3 Eier übrig (und entsprechend bleiben 3 Bonbons übrig, wenn man 15 Bonbons an 6 Kinder verteilt): $15 : 6 = 2$ Rest 3. Diese Schreibweise „mit Rest" dürfte für die Kinder kein Problem sein (zur Diskussion der verschiedenen Schreibweisen bei der Division mit Rest vgl. Padberg und Benz 2011, S. 164 f.).

Auf die konkrete Erarbeitung der Einmaleinssätze wird hier nicht im Detail eingegangen (vgl. dazu z. B. Padberg und Benz 2011, S. 128 ff.; Krauthausen 2018, S. 70 ff.; Schipper et al. 2015b, S. 109 ff.; Wittmann und Müller 1993, S. 110 ff.).

Gerade mit Rückgriff auf die Grundpositionen zum aktuellen Verständnis von Lernen (vgl. Abschn. 3.1) stellt sich nun die Frage, auf welche Weise die Beherrschung der vier Grundrechenarten am besten erreicht wird – und zu welchem „Preis": Ist reines Üben – „Pauken" – der Grundrechenarten eine geeignete Methode, die dazu führt, dass diese flexibel und sicher angewendet werden können, und welche Einstellung zur Mathematik würden die Kinder bei einem solchen Unterricht entwickeln?

4.3.3 Übung

Während die Überlegungen in den vorigen Abschnitten in erster Linie auf die Erarbeitung und das Verstehen der Rechenoperationen zielten, soll nun auf ihre Automatisierung, d. h. auf das sichere Beherrschen der Aufgaben eingegangen werden. Allerdings ist das Thema Üben, wie Schipper (2009, S. 304) schreibt, seit „Beginn der modernen Pädagogik, seit Wolfgang Radtke (1571–1635) und Johann Amos Comenius (1592–1670), (…) sowohl in der pädagogischen Diskussion als auch in der Unterrichtspraxis ein ständiger Reibungspunkt". Krauthausen (2018, S. 187 ff.) unterscheidet zwischen dem „traditionellen Verständnis" des Übens, bei dem es vor allem um die Festigung des Wissens geht, und dem „produktiven Üben", bei dem Übungen integraler Bestandteil eines aktiven Lernprozesses sind. Die Einführungen, Übungen und Anwendungen von Sachverhalten sollen nicht getrennt, sondern als sich wechselseitig ergänzende Phasen der unterrichtlichen Betrachtung dieser Sachverhalte gesehen werden. Dabei ist das „operative Üben", das auf der Basis vielfältiger Beziehungen und Zusammenhänge auf den Ausbau der Beweglichkeit des Denkens abzielt (Schipper 2009, S. 307), von großer Bedeutung. Beziehungen, die hier genutzt werden, sind unter anderem Tausch-, Umkehr- oder Nachbaraufgaben. Ein Beispiel ist in Abb. 4.51 gegeben.

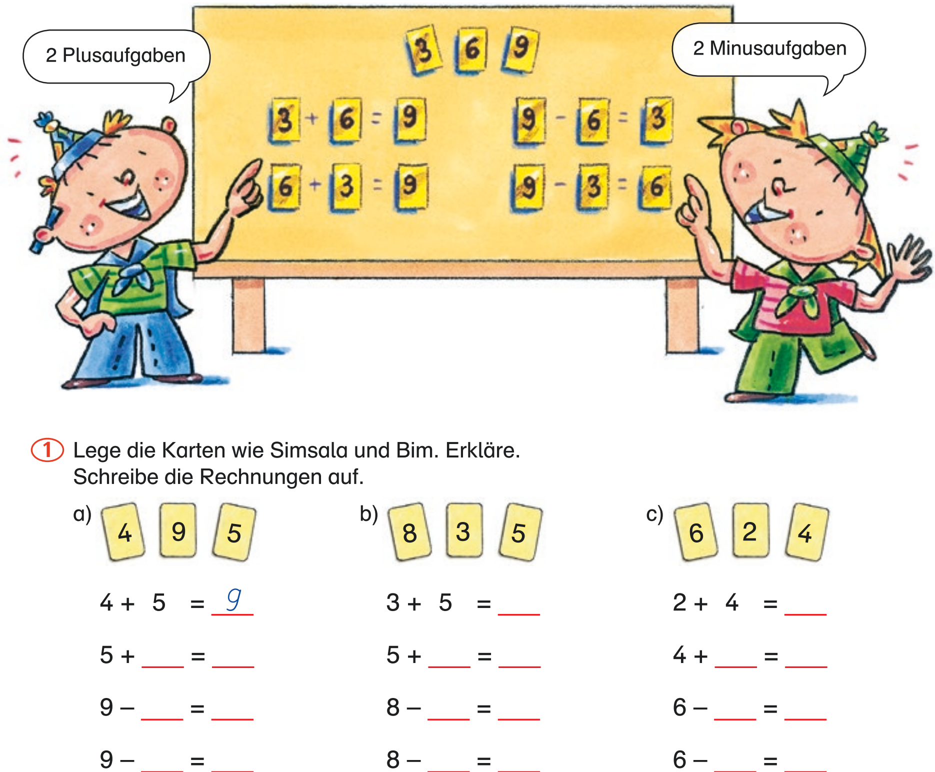


Abb. 4.51 3 Zahlen – 4 Aufgaben. (Betz et al. 2016a, S. 44 © Cornelsen/Mathias Hütter)

Im Konzept des *Zahlenbuches* wird zur produktiven Übung und zur Vertiefung unter anderem eine besonders gestaltete Eins-plus-eins-Tafel (Abb. 4.52) verwendet, in der die Beziehungen zwischen einzelnen Aufgaben durch farbige Markierungen hervorgehoben sind.

Es gibt kein Material, das in der Weise selbsterklärend wäre, um von den Schülerinnen und Schülern ohne weiteres verwendet werden zu können. Auch die Eins-plus-eins-Tafel und insbesondere die farbigen Markierungen müssen also besprochen werden. In der Tafel sind beispielsweise alle Additionsaufgaben, deren Ergebnis 10 ist, blau hinterlegt; die + 0, + 1 und + 10-Aufgaben sind grün, die + 5-Aufgaben gelb und die Verdopplungsaufgaben rot. Übungen zur Sicherung und Festigung der Addition im Zwanzigerraum können damit beginnen, dass die Aufmerksamkeit der Kinder z. B. auf die durch die Farbe hervorgehobenen Zusammenhänge zwischen Aufgaben wie 10 + 0, 9 + 1, 8 + 2, … gelenkt wird. Entscheidend sind dabei natürlich nicht die Farben, sondern die Beziehungen zwischen den Aufgaben. Entsprechend kann man in einer nächsten Phase auch die Nachbaraufgaben (ausgehend von 9 + 1 sind das beispielsweise die Aufgaben 8 + 1 und 9 + 2) hinzunehmen. Die Kinder werden jetzt

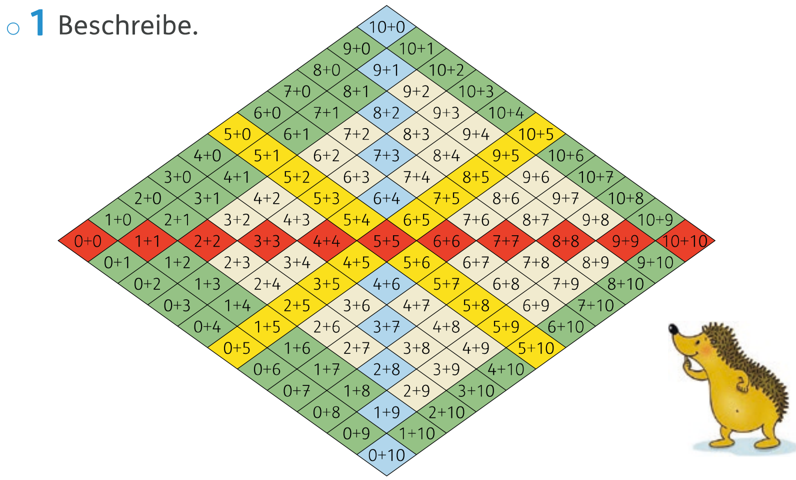


Abb. 4.52 Eins-plus-eins-Tafel. (Wittmann und Müller 2017a, S. 114 © Ernst Klett Verlag GmbH)

aufgefordert, eine Reihe solcher Aufgaben selbstständig zu lösen, z. B. alle Aufgaben mit der Summe 10 und deren Nachbaraufgaben. Dabei können die Kinder anfangs auch noch auf die in der Eins-plus-eins-Tafel vorgegebene Systematik zurückgreifen.

Eine weitere Anregung besteht darin, die Kinder ihre eigene, auf einer Kopiervorlage vorgegebene Eins-plus-eins-Tafel selbst ausfüllen zu lassen. Dabei sollen sie die Aufgaben markieren, die sie selbst als leicht empfinden und „wie der Blitz“ ausrechnen können. Da diese Aufgaben individuell markiert werden, bilden sie für das einzelne Kind feste Bezugspunkte („Ankeraufgaben“), von denen aus sie sich zu schwierigeren vortasten können. Die weitere Automatisierung erfordert eine ständige Wiederholung. Die Aufgaben werden sowohl schriftlich als auch mündlich gerechnet, mit dem Ziel der sicheren Beherrschung, und das heißt auch: Mit dem Ziel, die Aufgaben schnell zu lösen.

Übung im Anfangsunterricht der Grundschule muss dafür Sorge tragen, dass zentrale Inhalte gut verstanden und auf eine Weise beherrscht werden, die einen flexiblen Einsatz in verschiedenen Anwendungssituationen ermöglicht. Hierzu ist ein überlegter Einsatz variantenreicher, aber vor allem auch systematischer Übungen sinnvoll, die der Automatisierung dienen.

Grundlegende Inhalte, die bis zur „sicheren Beherrschung“ (Schipper 2009, S. 307) geübt werden müssen, sind beispielsweise die Zahlzerlegungen (vgl. Abschn. 4.1.4 und 4.3.1) – vor allem die Zerlegung der 10 –, die Eins-plus-eins-Aufgaben mit Umkehrungen und auch die Kernaufgaben des kleinen Einmaleins mit Umkehrungen sowie zu einem späteren Zeitpunkt alle Einmaleinssätze. Bei den Eins-plus-eins-Aufgaben handelt es sich um folgende Aufgaben:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0+0 & 1+0 & 2+0 & 3+0 & 4+0 & 5+0 & 6+0 & 7+0 & 8+0 & 9+0 & 10+0 \\
0+1 & 1+1 & 2+1 & 3+1 & 4+1 & 5+1 & 6+1 & 7+1 & 8+1 & 9+1 & 10+1 \\
0+2 & 1+2 & 2+2 & 3+2 & 4+2 & 5+2 & 6+2 & 7+2 & 8+2 & 9+2 & 10+2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0+10 & 1+10 & 2+10 & 3+10 & 4+10 & 5+10 & 6+10 & 7+10 & 8+10 & 9+10 & 10+10
\end{array}$$

sowie

$$\begin{array}{ccccccccccc}
10-0 & 10-1 & 10-2 & 10-3 & 10-4 & 10-5 & 10-6 & 10-7 & 10-8 & 10-9 & 10-10 \\
9-0 & 9-1 & 9-2 & 9-3 & 9-4 & 9-5 & 9-6 & 9-7 & 9-8 & 9-9 & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\
1-0 & 1-1 & & & & & & & & & \\
0-0 & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Wittmann et al. (2017, S. 171 f., vgl. auch Krauthausen 2018, S. 86 ff.) schlagen zum automatisierenden Üben einen „Blitzrechenkurs" vor, der so aufgebaut ist, dass Aufgaben aus zehn verschiedenen Bereichen über die gesamte Grundschulzeit hinweg immer wieder von den Kindern zu lösen sind. Die Autoren wollen damit der Beliebigkeit beim Einsatz von Übungsaufgaben entgegenwirken. Gleichzeitig soll aber auch erreicht werden, dass die Kinder die Notwendigkeit und die Ziele der jeweiligen Übungen erkennen. Im ersten Schuljahr sind diese zehn Bereiche von besonderer Bedeutung (Krauthausen 2018, S. 86):

- Wie viele?
- Zahlenreihe
- Zerlegen
- Immer 10/immer 20
- Verdoppeln
- Plusaufgaben
- Minusaufgaben
- Kraft der Fünf
- Halbieren
- Zählen in Schritten/Mini-Einmaleins (Aufgaben von 1 mal 1 bis 5 mal 5).

Bei diesen Übungen wird jeweils noch unterschieden zwischen

- einer Grundlegungsphase, in der den Kindern der Ablauf und der Sinn der Übung erläutert wird und in der die Bezüge zur Einführung der zu übenden Inhalte und zu den jeweiligen Mitteln der Veranschaulichung noch erhalten bleiben, sowie
- einer Automatisierungsphase, die der Festigung und der blitzschnellen Abrufbarkeit der entsprechenden Wissenselemente und Fertigkeiten dient (Krauthausen 2018, S. 87).

Zur sicheren Beherrschung der entsprechenden Aufgaben beitragen kann das „Zehn-Minuten-Rechnen“ (Schipper 2009, S. 322 f.): In jeder Mathematikstunde in der Grundschulzeit sollten (am Anfang, am Ende oder auch mittendrin, z. B. wenn eine Unterrichtsphase beendet ist oder sich aus sonstigen Gründen eine Unterbrechung anbietet) fünf bis zehn Minuten lang Kopfrechenübungen durchgeführt werden. Wenn Kopfrechnen in dieser Weise als fester Bestandteil in den Unterricht integriert wird, können solche Übungen sowohl für die Schülerinnen und Schüler als auch für die Lehrkraft sehr reizvoll sein.

Sie sind es vor allem dann, wenn sie abwechslungsreich gestaltet werden:

Die Aufgaben müssen nicht immer von der Lehrerin oder vom Lehrer gestellt werden, dies können auch die Kinder selbst tun – beispielsweise können sich Kinder in Partnerarbeit die Ausgangszahlen der Kopfrechnung mit dem Zehnerwürfel „erwürfeln“. Bei den meisten Kindern sehr beliebt sind Kopfrechenspiele (wie „Bingo“: Die Kinder tragen Ergebnisse der gestellten Rechnungen in beliebig gewählte Felder eines Neunergitters ein. Sind neun Aufgaben gestellt, werden die Ergebnisse einzeln genannt. Jedes Kind markiert in seinem Neunerfeld die Ergebnisse. Wer als Erstes drei markierte Ergebnisse in einer Reihe, Spalte oder diagonal hat, darf „Bingo“ rufen und ist Sieger). Es gibt auch zahlreiche Kopfrechenspiele mit Wettbewerbscharakter bezüglich Schnelligkeit. Spiele dieser Art haben den Nachteil, dass es „Sieger“ und „Verlierer“ gibt. Gefordert ist dabei also gegebenenfalls die Sensibilität der Lehrerin bzw. des Lehrers, um die Kinder, die beim Rechnen konkurrieren, geschickt auszuwählen.

Beim „rot gegen blau“ haben auch die (noch) langsamen Rechner eine Chance, zur Lösung der Aufgaben zu kommen: Die Lehrkraft teilt die Klasse in zwei Mannschaften („rot“ und „blau“). Jedes Kind bekommt verdeckt ein Kärtchen mit einer Spielernummer, wobei in jeder Mannschaft gleiche Nummern vergeben werden. Die Lehrkraft stellt eine Aufgabe, wartet so lange, bis sie denkt, die Kinder könnten die Aufgabe gelöst haben, und ruft dann eine Nummer auf. Nun sind die beiden Spieler jeder Mannschaft, die die entsprechende Nummer haben, aufgefordert, möglichst schnell das Ergebnis zu nennen. Die Mannschaft bekommt einen Punkt, aus der das Ergebnis zuerst genannt wird.

Einige Beispiele für Rechenspiele in Partner- oder Gruppenarbeit – die sich wiederum eher dem produktiven Üben zuordnen lassen – findet man in dem Lehrgang *Fredo – Mathematik* (Balins et al. 2015b, 2016). Zum Beispiel würfeln und addieren und subtrahieren zwei Kinder die Augenzahlen so lange, bis eine Zielzahl (z. B. 100) erreicht ist (Abb. 4.53).

Nur kurz erwähnt werden sollen hier schriftliche Übungen mit der Möglichkeit der Selbstkontrolle durch die Schülerinnen und Schüler. So können beispielsweise die Lösungen der auf einem Arbeitsblatt gestellten Aufgaben an den Rand des Blattes geschrieben sein – selbstverständlich in anderer Reihenfolge und vielleicht auch mit einer zusätzlichen Zahl, die als Aufgabenlösung gar nicht vorkommt. Weniger empfehlenswert sind die sogenannten „bunten Hunde“. Das sind Figuren (Tiere, Blumen oder anderes), in denen Teilflächen entsprechend der Aufgabenlösung verschiedenfarbig auszumalen sind. Auch wenn das Ausmalen von Figuren als motorisches Training in

Abb. 4.53 Rechenspiele. (Balins et al. 2016, S. 42 © Cornelsen/Cleo-Petra Kurze, Martina Theisen & Erasmi + Stein)

den ersten Schuljahren sicher sinnvoll ist, so trägt es wenig zur Erhöhung der Sicherheit im Rechnen bei. Außerdem zeigt die Erfahrung, dass die Kinder sehr schnell erfassen, welche Figur sich beim Ausmalen ergeben wird, sodass das Rechnen gar nicht mehr zwingend erforderlich ist. Wittmann (1993, S. 161) weist auf eine weitere Gefahr hin: „Anstatt Erfahrungen zu erwerben, wie man den eigenen gesunden Menschenverstand gebrauchen kann, um aktiv und selbstständig an Aufgaben heranzugehen, gewöhnt sich der Schüler mehr und mehr an, die Verantwortung für das Lernen dem Lehrer zu überlassen und selbst passiv abzuwarten.“

Viele weitere Anregungen für Übungen findet man in den aktuellen Schulbüchern und in der Literatur (vgl. unter anderem Christiani 1994; Schipper et al. 2015a, S. 91 ff.; Schipper 2009, S. 307 ff.; Wittmann und Müller 2017c). Eine ausführliche Darstellung von Formen und Möglichkeiten des „spielerischen Lernens und Übens“ gibt Krauthausen (2018, S. 194 ff.).

4.4 Tablets und andere elektronische Hilfsmittel im Anfangsunterricht?

Sind elektronische Geräte erst einmal erfunden und somit in der Welt, werden sie sehr schnell auch in der Schule genutzt. In diesem Abschnitt gehen wir der Frage nach, inwieweit die Nutzung von Computern, Smartphones, Tablets, interaktiven Whiteboards usw. im mathematischen Anfangsunterricht sinnvoll sein kann, d. h. ob solche elektronischen Hilfsmittel einen Nutzen haben, und falls ja: in welcher Hinsicht und für wen. Im Mittelpunkt steht dabei der Einsatz von Tablets, weil sie ein Arbeitsmittel sind, das für die Hand der einzelnen Schülerin und des einzelnen Schülers in Frage käme. Sie sind größer als Smartphones, aber immer noch handlich. Kurz eingegangen werden soll jedoch zunächst auf elektronische Whiteboards, die das Arbeiten mit Kreide und Schwamm an der Wandtafel ergänzen und möglicherweise ablösen.

4.4.1 Whiteboards

Auf dem Whiteboard kann man wie auf der Tafel schreiben und das Geschriebene „wegwischen". Je nach technischer Ausstattung (vgl. Krauthausen 2012, S. 181 ff.; Rink und Walter 2020, S. 64 ff.; Schlieszeit 2011, S. 36 ff.) kann man das mit der Hand Geschriebene aber auch in Druckschrift umwandeln und es abspeichern; man kann einzelne Aspekte markieren oder – z. B. farbig – hervorheben (und die Hervorhebung wieder löschen); man kann Teile verschieben und verkleinern, um auf diese Weise Platz für Ergänzungen, Erläuterungen, weitere Beispiele usw. zu schaffen; man kann bei entsprechenden Aufgabenformaten das Grundgerüst, wie z. B. Tabellen oder Raster erstellen und kopieren; man kann Bilder, Graphiken usw. in das Tafelbild einfügen, durch Klonen Muster erstellen oder Videos einspielen. Das alles lässt sich speichern, kopieren, wiederverwenden und am heimischen Computer vorbereiten.

Deutlich wird bei dieser – ohne Anspruch auf Vollständigkeit – erfolgten Aufzählung von Möglichkeiten, dass dabei an die Lehrkraft durchaus hohe Ansprüche an deren Flexibilität und Fähigkeit im Umgang mit den technischen Möglichkeiten gestellt werden. Diese Anforderungen lassen sich selbstverständlich reduzieren, wenn man nicht den Anspruch erhebt, alles was möglich ist, auch tatsächlich sofort umzusetzen, und fortschreitende Erfahrung und Übung motivieren vielleicht auch, Weiteres zu probieren. Spannender ist die Frage, wie die Kinder dies sehen: Wird ihre Aufmerksamkeit auf das (mathematisch) Wesentliche gestärkt oder lassen sie sich eher durch schöne Bilder, Animationen und überhaupt die Vielfalt in der graphischen Gestaltung vom Wesentlichen ablenken, weil ihre Aufmerksamkeit mehr auf die äußere Gestalt der Darstellung gerichtet ist als auf das mit der Darstellung (inhaltlich) Gemeinte?

Wir kommen auf diese – aus unserer Sicht zentralen – Fragen im Zusammenhang der Diskussion über die Verwendung von Tablets im Anfangsunterricht zurück, wollen aber zunächst den Einsatz eines Whiteboards am Beispiel von Aufgabenformaten wie $a + b = \ldots$, $a + \ldots = c$ und $\ldots + b = c$ versuchsweise durchexerzieren. Wie in Abschn. 4.3.1 beschrieben, können diese Formate zum einen im Sinne von Zahlzerlegungen verstanden und eingesetzt werden und zum anderen als Additions- und Subtraktionsaufgaben.

Bei den Zahlzerlegungen bieten sich als Mittel zur Darstellung von Aufgaben u. a. Varianten der Schüttelkästen (vgl. Abb. 4.36) oder Zahlenhäuser an. Für die Zahlenhäuser können zur Darstellung und Behandlung am Whiteboard variantenreiche Raster

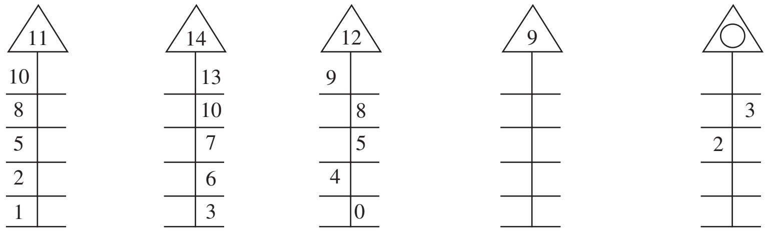


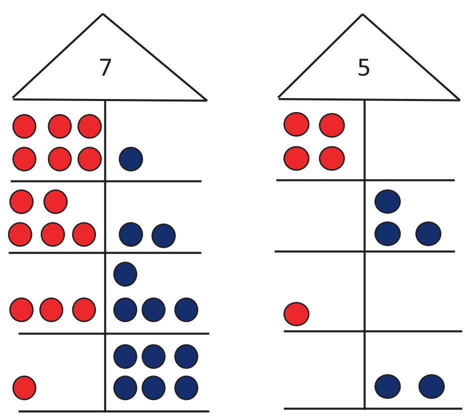
Abb. 4.54 Ergänze: Immer 11, 14, 12, 9, …

vorbereitet und abgespeichert werden. In diese Raster werden dann verschiedene Zahlen, die zerlegt werden sollen, eingefügt (vgl. einige Beispiele in Abb. 4.54).

Selbstverständlich ist es auch möglich, in den Zahlenhäusern anstelle von Ziffern – oder besser noch: parallel dazu – farbige Plättchen zu verwenden (Abb. 4.55; eine passende Unterrichtseinheit wurde von Pöhls 2014 entwickelt, vgl. auch Rink und Walter 2020, S. 65). Die so erzeugten Vorlagen lassen sich zu Übungszwecken als Arbeitsblätter ausdrucken. In der Einführungs- und Erarbeitungsphase des Aufgabenformates „Zahlenhaus" liegt der Vorteil von Whiteboards im Vergleich mit Wandtafeln in der situations- und lernfortschrittabhängigen Vielfalt der Varianten, die nach Bedarf und Anspruchsniveau erzeugt werden können; dies gilt entsprechend für die Arbeitsblätter.

Unterrichtsbeobachtungen zeigen aber auch, dass manche Schülerinnen und Schülern nach der Er- und Bearbeitung von Aufgaben am Whiteboard den Transfer zur Eigentätigkeit und individuellen Übung am Arbeitsblatt nicht eigenständig leisten können, selbst dann nicht, wenn die Aufgabenformate identisch sind. Misslingenden Transfer gibt es selbstverständlich auch bei entsprechenden Erarbeitungen an der Wandtafel (vgl. Abschn. 3.2 und 5.1), dennoch ist nicht völlig auszuschließen, dass der kognitive Anspruch beim Übergang von der elektronischen Darstellung zur handschriftlichen auf Papier höher ist. Schon deshalb scheint es wichtig, dass am Whiteboard die Möglichkeit zum handschriftlichen Eintragen von Zahlen besteht und dass Lösungszahlen nicht nur

Abb. 4.55 Zahlenhäuser mit Plättchen



aus einem am Board eingeblendeten Zahlenvorrat in die Raster eingefügt werden – was technisch sehr gut geht und bequem ist (oder bequem zu sein scheint). Zudem müssen die am Whiteboard durchgeführten Aktionen sprachlich begleitet werden (wie dies selbstverständlich auch bei der Arbeit an der Wandtafel geschehen sollte, vgl. dazu z. B. Abschn. 4.3.1).

Um die Möglichkeiten eines Whiteboards voll zu nutzen, bieten sich Aufgabensequenzen an, die eine gewisse Dynamik haben, bei denen z. B. – bei gleichbleibendem Aufgabenformat – systematische Veränderungen in den zu verarbeitenden Zahlen oder Operationen vorgenommen werden. Als Beispiele seien aus dem „Handbuch“ von Wittmann und Müller (2017c) zum einen operative Veränderungen von Aufgaben und zum anderen „Schöne Päckchen“ und „Schöne Päckchen?“ (mit Fragezeichen) gewählt:

Operative Veränderungen werden z. B. beim Übergang „von einfachen zu schweren Aufgaben“ vorgenommen: Die Kinder wählen eine der „leichten“ Aufgaben (z. B. $7 + 7 = \ldots$), legen sie mit Plättchen im Zwanzigerfeld und leiten andere Aufgaben durch Veränderungen der Zahlen daraus ab.

Solche Aufgabenfolgen lassen sich sehr schön am Whiteboard realisieren: Die rautenförmige Eins-plus-eins-Tafel mit den farbig unterlegten Aufgaben bleibt fest eingeblendet, dazu eine „leichte“ Aufgabe zusammen mit der Plättchendarstellung auf dem virtuellen Zwanzigerfeld (dabei können passende Apps verwendet werden; mehr dazu unten). Die Kinder lösen die Aufgaben durch Manipulieren der Plättchen und notieren dann das Ergebnis der Rechnung, am besten handschriftlich auf dem Board. Die „fertigen“ Zwanzigerfelder einschließlich der Rechnungen werden – wie in Abb. 4.56 – am Whiteboard abgespeichert. (Eine ähnliche Aufgabe mit Bezug zur Eins-plus-eins-Tafel haben wir bereits in Abschn. 4.3.3 vorgestellt.)

Das zweite Beispiel ist orientiert an den Formaten „Schöne Päckchen“ und „Schöne Päckchen?“ von Wittmann und Müller (2017c, S. 117, dort Abb. 1 und 3).

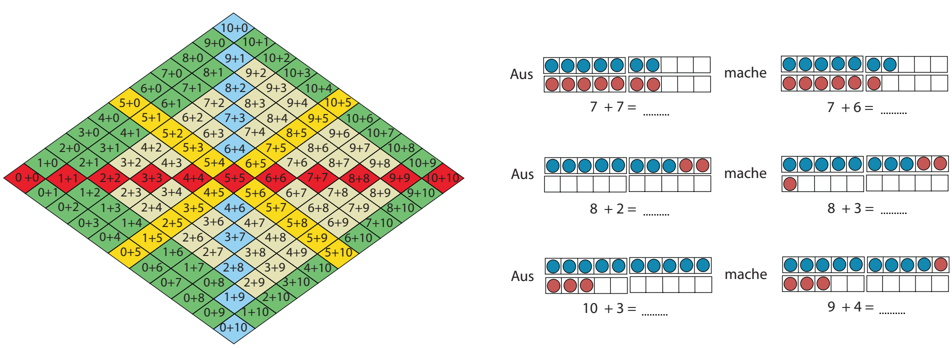


Abb. 4.56 Von einfachen zu schweren Aufgaben. (Wittmann und Müller 2008, S. 50; 2017a, S. 114 © Ernst Klett Verlag GmbH)

Während das „schöne“ Päckchen links in Abb. 4.57 systematische Veränderungen aufweist, die von den Kindern erkannt werden (sollen), enthält das rechte eine „Störung“, denn die Aufgabe $6 + 2 = \ldots$ passt nicht zu den übrigen. Diese Idee der systematischen Veränderung von Aufgaben – ohne und mit Störung – lässt sich am Whiteboard dynamisch umsetzen. Dazu werden Aufgabensequenzen wie in Abb. 4.57 am Computer vorbereitet und sukzessive am Whiteboard eingeblendet. Bei der linken Sequenz lässt man die Kinder z. B. nach der Behandlung der dritten Aufgabe ($3 + 4 = \ldots$) vermuten, welche Aufgabe nun folgen wird und wie es dann wohl weitergehen könnte. Die rechte Sequenz (mit der „störenden“ Aufgabe $6 + 2 = \ldots$) kann kommentarlos sukzessive eingeblendet werden, um von den Kindern Kommentare zu provozieren. Parallel zu den Aufgabensequenzen werden – wie in Abb. 4.57 angedeutet – Bilder mit einer zu den Aufgaben passenden (oder auch nicht passenden!) Anzahl von Plättchen gezeigt, einerseits, um die Aufgaben auch bildlich zu repräsentieren, andererseits um „Störungen“ einzubauen, etwa indem zu den Aufgaben nicht exakt passende Anzahlen von Plättchen eingeblendet werden. Abb. 4.58 zeigt eine Aufgabenvariante, die sich ebenfalls gut dynamisch realisieren lässt.

Weitere Sequenzen mit anderen Aufgabentypen lassen sich leicht finden, z. B. mit Minus- statt Plus-Aufgaben, aber es können auch herausfordernde Sequenzen sein wie

$1 + 2 =$	$1 + 2 =$
$2 + 3 =$	$3 + 2 =$
$3 + 4 =$	$5 + 2 =$
$4 + 5 =$	$6 + 2 =$
$\ldots$	$9 + 2 =$
	$\ldots$

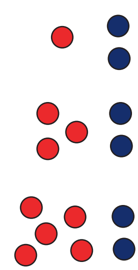


Abb. 4.57 Schöne(?) Päckchen

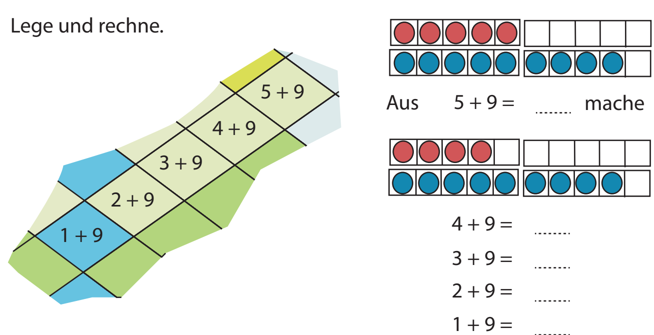


Abb. 4.58 Lege und rechne. (Wittmann und Müller 2008, S. 77 © Ernst Klett Verlag GmbH)

$$\begin{array}{rcl} 1 + \ldots = 11 & \text{oder} & \ldots - 1 = 3 \\ 3 + \ldots = 11 & & \ldots - 2 = 3 \\ 5 + \ldots = 11 & & \ldots - 3 = 3 \\ \ldots & & \ldots \end{array}$$

Herausfordernde Aufgabensequenzen können nicht ohne (intensive) Vorbereitung eingesetzt werden. Aufgaben vom Typ $a + \ldots = c$ sind den Kindern im Zusammenhang mit dem Aspekt „Ergänzen" aus der Einführung der Subtraktion bekannt (vgl. Abschn. 4.3.1). Darüber hinaus aber ist die Behandlung von Additions- und Subtraktionsaufgaben vom Typ $a \pm \ldots = c$ und $\ldots \pm b = c$ für die Entwicklung des mathematischen Verständnisses der Kinder von besonderer Bedeutung – auch mit Blick auf den Mathematikunterricht in den höheren Klassen –, weil zu ihrer Lösung Beziehungen zwischen Zahlen hergestellt werden müssen. Bei diesen Aufgaben tragen allerdings ikonische Darstellungen (Bilder) zur Einsicht in die Struktur oft wenig bei, vielmehr ist hier das Erfinden von (exakt) passenden Rechengeschichten besonders wichtig. Auf diesen Sachverhalt gehen wir im 7. Kapitel noch ausführlich ein.

4.4.2 Tablets

Wir wenden uns nun der Frage zu, welche (mathematikdidaktischen) Potenziale[7] der Einsatz von Tablets im Mathematikunterricht des 1. und 2. Schuljahres haben kann[8]. Anstelle manch völlig überzogener Erwartungen, die noch vor einigen Jahren formuliert wurden (z. B. Wiesner 1999, S. 24; zitiert nach Walter 2018, S. 2: „Deswegen ist der Computer vor allem für lernschwache Schüler ein Segen. … Je mehr Probleme ein Kind beim Lernen hat, desto wichtiger wird der PC bei der Wissensvermittlung"), dominieren heute eher abwägende und differenzierende Betrachtungsweisen. Als Beispiel mag eine Erörterung zum Einsatz digitaler Medien in Schulen dienen, die in zwei Ausgaben der Wochenzeitschrift „Die Zeit" im Juli 2019 publiziert wurde: Neben einem allgemein gehaltenen Plädoyer für die Handynutzung berichtet (der Bildungsforscher) Klaus Hurrelmann u. a. von Erfahrungen aus Schulen, die elektronische Medien „gezielt und kritisch" einsetzen, nämlich dass dort insbesondere „komplexere Aufgaben … mit Tablet und Computer fortgeführt" würden (N° 29, S. 58). Auch wenn er sich nicht explizit auf den Mathematikunterricht bezieht, wird deutlich, dass Hurrelmann beim Einsatz elektronischer Medien die *Fortführung komplexerer Aufgaben* in den Blick nimmt und nicht etwa Routine- oder reine Übungsaufgaben. In seiner Erwiderung (N° 30,

[7]Wir verwenden wie Walter (2018, S. 30 ff) den Terminus „Potenzial" anstelle des häufig benutzten Begriffs „didaktischer Mehrwert", um deutlich zu machen, dass es nicht um „mehr oder weniger Wert" von Hilfsmitteln geht, sondern um die mit ihnen verbundene Möglichkeiten.

[8]Auf die technischen Aspekte von Tablets gehen wir hier nicht ein, vgl. dazu Krauthausen 2012, S. 151 ff.

S. 58) verweist (der Schulpädagoge) Klaus Zierer auf empirische Untersuchungen, die nicht erkennen ließen, dass digitale Medien „Schule und Unterricht revolutionieren"; er konstatiert vielmehr, „Medien (sind) für den Lernerfolg nur ein Oberflächenmerkmal. Wichtiger ist die Tiefenstruktur, etwa die Professionalität von Lehrpersonen. Ein schlechter Unterricht wird durch digitale Hilfsmittel nicht besser." Dieser Aspekt: die Bedeutung der *Unterrichtsqualität* insgesamt, scheint uns ebenso wie Hurrelmanns Verweis auf die „komplexeren Aufgaben" für die hier folgende Diskussion wesentlich[9].

Welche „Potenziale" bietet nun der Einsatz digitaler Medien speziell im Mathematikunterricht der Grundschule? Sechs mathematikdidaktische Potenziale werden von Walter (2018, S. 30 ff., vgl. auch Rink und Walter 2020, S. 17 ff.) ausführlich diskutiert. Es wird dabei völlig klar, dass es sich um *Potenziale* – Möglichkeiten – handelt, bei denen sich unterrichtlicher Erfolg nicht „von selbst" einstellt, sondern durch entsprechende Maßnahmen herbeigeführt werden muss, insbesondere durch das Herstellen einer Passung zwischen den eingesetzten Mitteln oder Verfahren und den Bedürfnissen der Kinder. Wir beschränken uns hier auf zwei dieser Potenziale:

1. Synchronität und intermodaler Transfer: Es ist bekannt (vgl. oben und die Abschn. 4.1.6 und 5.2.2), dass es vielen Kindern schwerfällt, den sog. „intermodalen Transfer" zu leisten, d. h. einen mathematischen Sachverhalt, den sie in der einen Darstellungsform kennengelernt haben, in eine andere zu übertragen bzw. zu erkennen, dass zwei unterschiedliche Darstellungen ein- und desselben mathematischen Sachverhaltes auch tatsächlich dasselbe aussagen. Als Beispiel betrachten wir Zerlegungen der 7, symbolisch und mit Plättchen (vgl. Abb. 4.55):

Im Virtuellen können unterschiedliche Repräsentationen leicht zeitgleich und in engem räumlichen Zusammenhang dargestellt werden, und zwar so, dass eine Veränderung in der einen Repräsentation automatisch die entsprechende in der anderen nach sich zieht (vgl. Abb. 4.59). Bei aller „Offensichtlichkeit" ist es jedoch in der virtuellen Welt (ebenso wie in der realen) erforderlich, dass diese gleichzeitig ablaufenden Prozesse sprachlich begleitet werden: Was passierte bei den Plättchen, wenn wir $7 = 6 + 1$ in $7 = 5 + 2$ verändern? Oder: Wie (und warum) hat sich die mit Zahlen geschriebene Zerlegung der 7 verändert, als wir ein rotes Plättchen weggenommen und ein blaues hinzugefügt haben?

Es wird erwartet, dass die Gleichzeitigkeit der unterschiedlichen Darstellungen des mathematischen Sachverhaltes und die unmittelbar wahrnehmbare Synchronität der dabei vorgenommenen Veränderungen deren „Verinnerlichung", also deren Verfügbarkeit als *mentale* Operationen erleichtert. Zu prüfen ist allerdings, ob dies bei der Mehrzahl der Kinder tatsächlich der Fall ist. Wir werden bei der Diskussion der empirischen

[9] Ein weiterer Aspekt wurde von dem Medienpädagogen Ralf Lankau in einem Beitrag (in der FAZ vom 2./3.10.2019, S. 8) angesprochen: „Verstärkt werden müssen das Lesen und Schreiben mit der Hand, um dem Verflachen der sinnlichen Welt auf eine Scheibe entgegenzuwirken und die Kinder in der realen Welt zu verankern."

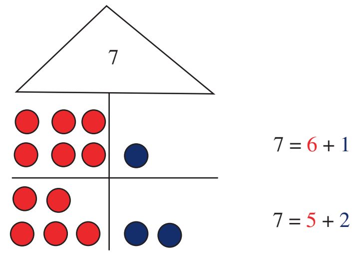


Abb. 4.59 Synchrone Veränderung der Aufgabendarstellung

Untersuchungen zu Aktivitäten am virtuellen Zwanzigerfeld auf diesen Punkt zurückkommen.

2. Strukturierungshilfen: Wie in Abschn. 1.4.2 erörtert, haben Kinder sehr unterschiedliche Fähigkeiten beim Erkennen von Mustern und dem Erfassen von Strukturen sowie bei deren Nutzung für weitere mathematische Aktivitäten. So konnte Lüken (2011) bei ihren Analysen von Videoaufzeichnungen mit Schulanfängerinnen und Schulanfängern zeigen, dass manche Kinder z. B. das Punktebild der Fünf auf dem Spielwürfel als *eine* Zahl interpretieren (eben „*die Fünf*"), während andere in diesem Muster zusätzlich zu der räumlichen Anordnung auch Zahlzerlegungen sehen (wie 4 + 1 oder 2 + 2 + 1). Diese letztgenannten Kinder erkennen damit zusätzlich die arithmetische Bedeutung eines räumlichen oder geometrischen Musters. Da *alle Kinder* im Laufe ihrer mathematischen Entwicklung lernen sollten, wie man Muster und Strukturen nutzt und sie bewusst im Geist verändert, ist zu prüfen, welche Potenziale mit dem Einsatz elektronischer Medien verbunden sein können.

Ein einfacher erster Schritt in dieser Hinsicht kann das Strukturieren ungeordneter Mengen (von Objekten wie Plättchen, Klötzen usw.) zum leichteren Erfassen ihrer Anzahl sein (vgl. Betz et al. 2016a, S. 14 f.). Beim Einsatz von C. Urffs App „Rechentablett[10]" (http://www.lernsoftware-mathematik.de/?p=1331) berühren die Nutzer mit den Fingern den Bildschirm, um ein oder mehrere Plättchen zu legen oder von einer Seite zur anderen zu verschieben. Zum Strukturieren gibt es dann zwei Möglichkeiten (vgl. Rink und Walter 2020, S. 23 f.): Das Strukturieren „auf Anfrage" und das „automatische Strukturieren". Bei der erstgenannten Variante nimmt das Kind die Strukturierung bewusst vor, indem es sie vom System „einfordert", wie in der Bilderfolge in Abb. 4.60 am Beispiel der Frage nach der Gesamtzahl der blauen Plättchen dargestellt.

Ein weiteres Beispiel ist in Abb. 4.61 dargestellt: die Veränderung der Anordnung der Plättchen im virtuellen Zwanzigerfeld[11] bei der Darstellung der Additionsaufgabe 8 + 7 = ….

[10] Auf das „Rechentablett" gehen wir im Folgenden genauer ein.

[11] Ebenso wird auf das „virtuelle Zwanzigerfeld" im Folgenden noch genauer eingegangen.

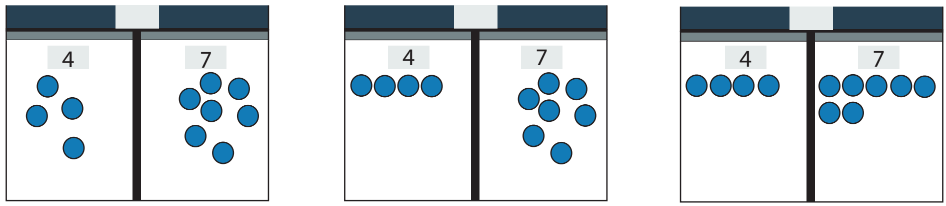


Abb. 4.60 Strukturieren auf Anfrage. (unter Verwendung der App Rechentablett, Aufruf vom 05.11.2019, © C. Urff, www.lernsoftware-mathematik.de)

Abb. 4.61 Der zur bewussten und gezielten Umordnung der Plättchen erforderliche Button befindet sich unten links auf dem Tablet. (App Zwanzigerfeld, Aufruf vom 05.11.2019, © C. Urff, www.lernsoftware-mathematik.de; s. a. Walter 2018, S. 151)

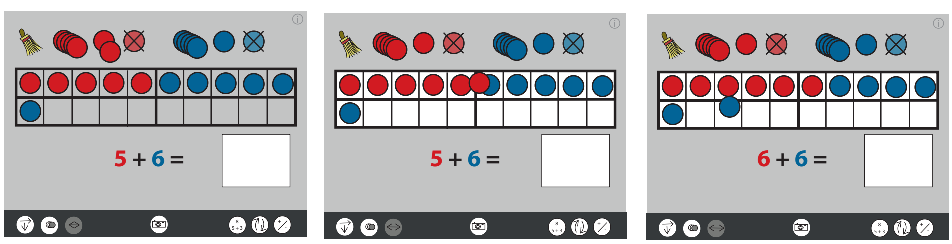


Abb. 4.62 Automatisches Strukturieren. (unter Verwendung der App Zwanzigerfeld, Aufruf vom 05.11.2019, © C. Urff, www.lernsoftware-mathematik.de; s. a. Walter 2018, S. 180)

Bei einer zweiten Strukturierungsvariante reagiert das System automatisch auf Veränderungen. Z. B. rückt im Zwanzigerfeld beim Übergang von $5 + 6 = \ldots$ zu $6 + 6 = \ldots$ (und das heißt im Zwanzigerfeld: mit dem Hinzufügen eines roten Plättchens) automatisch ein blaues Plättchen in die untere Zeile (vgl. Abb. 4.62).

Selbstverständlich können derartige Umstrukturierungen bei der Anordnung von Plättchenmengen – sei es von einzelnen Plättchen, die auf dem Tisch liegen, sei es auf den Zwanzigerfeldern – auch „von Hand“ und im Realen vorgenommen werden. Erkennbare Vorteile der virtuellen Darstellung sind zweifellos die Synchronität von bildlicher und symbolischer Darstellung sowie die einfache Verfügbarkeit einer größeren Zahl von Aufgabenbeispielen und, damit verbunden, die erhebliche Zeitersparnis. Auch könnte man argumentieren, dass bei der Variante mit der automatischen Strukturierung den Kindern stets vor Augen geführt wird, auf welche Weisen Plättchen angeordnet werden können und welche Arbeitserleichterungen Strukturierungen bieten. Wie jedoch schon mehrfach betont, ist dem entgegenzuhalten, dass konkretes Handeln im Realen möglicherweise eher „Spuren im Gehirn" hinterlässt als durch Klicks angestoßene Bewegungen von Elementen auf dem Bildschirm. Schon deshalb ist es sinnvoll, auch im Virtuellen soweit wie möglich Bewegungen (Schieben, Gruppieren usw.) aktiv handelnd durchführen zu lassen (vgl. Ladel 2018). In jedem Fall aber – sowohl beim konkreten Handeln mit Material als auch beim Arbeiten im Virtuellen mit Whiteboards oder Tablets – müssen die jeweiligen Aktionen sprachlich (argumentativ) begleitet werden, nicht nur sehr intensiv in der Einführungs- und Erarbeitungsphase, sondern auch später, z. B. bei der Partnerarbeit.

Im Folgenden sollen nun einige Beispiele zum konkreten Einsatz von Tablets im mathematischen Anfangsunterricht vorgestellt werden. Vielfältige Anregungen und Möglichkeiten findet man in der Literatur (u. a. bei Krauthausen 2012; Walter 2018; Rink und Walter 2020; Urff 2014) und natürlich im Netz (z. B. unter www.lernsoftware-mathematik.de oder https://www.mathlearningcenter.org/resources/apps/). Im Netz gibt es allerdings auch Angebote, die durchaus kritisch gesehen werden sollten, weil sie elementare Qualitätsanforderungen nicht erfüllen – und schon gar nicht die oben mit Verweis auf Hurrelmann und Zierer genannten Kriterien.

Wir orientieren uns bei unseren Beispielen an diesen Kriterien: Geht es zum einen um *komplexere Aufgaben* (und nicht nur um reine Routineaufgaben, oder werden gar zu überwindende Strategien wie zählendes Rechnen explizit gefördert – auch solche Apps findet man leider), und ist zum anderen ein Bezug auf die *Tiefenstruktur des Unterrichts* herstellbar, d. h. wird nicht nur ein oberflächlicher Motivationseffekt durch „schöne Bilder" hergestellt, sondern hat der Einsatz der Tablets das Potenzial, die Qualität des Unterrichts zu verbessern? Wir ziehen im Folgenden auch Ergebnisse von empirischen Untersuchungen heran, insbesondere die von Walter (2018) und Urff (2014). Beide Autoren haben den Einsatz des virtuellen Zwanzigerfelds und des Rechentabletts im Unterricht des 2. Schuljahres untersucht.

In den Abschn. 4.2.1, 4.2.2 und 4.3.1 haben wir das (reale) Zwanzigerfeld als Arbeitsmittel zur Darstellung von Zahlen und zur Behandlung der Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 20 ausführlich beschrieben. Das virtuelle Zwanzigerfeld ist eine gut erprobte App, die von C. Urff entwickelt wurde. Mit ihr sind im Wesentlichen die gleichen Aktivitäten möglich wie auf dem realen Zwanzigerfeld, nur sind es eben nicht konkrete Handlungen mit farbigen Plättchen, sondern Klicks und Bewegungen auf dem Tablet. Zudem gibt es Aktivitäten, die im Realen so nicht ohne weiteres möglich sind.

Um die in der App enthaltenen Handlungsmöglichkeiten nutzen zu können, müssen die Schülerinnen und Schüler die einprogrammierten Einzelaktivitäten kennen und sicher mit ihnen umgehen können, sie sind also für den Tablet-Einsatz zu erarbeiten. So kann man u. a. jeweils mit einem Klick

- einzelne rote oder blaue Plättchen in das Feld bringen, aber auch jeweils fünf Plättchen auf einmal (zum Nutzen der „Kraft der Fünf“ vgl. Abschn. 4.2.2 und 4.3.1); die mit Zahlzeichen geschriebene (Addditions-) Aufgabe ändert sich entsprechend der Plättchenanzahl
- Plättchen löschen und Subtraktionsaufgaben darstellen
- die mit Zahlzeichen geschriebenen Aufgaben sukzessive verändern
- Abdeckungen auf jede der drei Zahlen schieben (bei der Aufgabe $9 + 4 = \ldots$ in Abb. 4.63 ist das Ergebnis abgedeckt); auf diese Weise können auch Aufgaben vom Typ $9 + \ldots = 13$ und $\ldots + 4 = 13$ erzeugt werden
- Zeilen auffüllen bzw. automatisch sortieren (vgl. Abb. 4.61 und 4.62).

(vgl. Rink und Walter 2020, S. 38 ff, bzw. Urffs Beschreibung der App unter http://www.lernsoftware-mathematik.de/?p=503, Aufruf am 12.08.2019).

Abb. 4.63 zeigt links den Bildschirm mit dem Zwanzigerfeld ohne eine vorgegebene Aufgabe. Werden nun rote und blaue Plättchen durch Anklicken eingefügt (oder wieder entfernt), so erscheint synchron die mit Ziffern geschriebene Aufgabe (wie z. B. $9 + 4 = \ldots$ in Abb. 4.63 rechts). Die Abdeckung der Zahl in dem Rechensatz lässt sich ganz entfernen, sodass im Beispiel „$9 + 4 = 13$“ sichtbar würde. Wird die symbolische Darstellung der Aufgabe verändert, so verändert sich synchron die Darstellung mit Plättchen.

Ein anderer Aufgabentyp: Die Kinder sollen mit möglichst wenigen Klicks 14 rote Plättchen auf das Zwanzigerfeld legen (Abb. 4.64). Eine „trickreiche“ Möglichkeit, dies zu tun wäre es z. B., dreimal jeweils fünf Plättchen als Bündel auf das Zwanzigerfeld zu bringen und dann ein einzelnes Plättchen wieder zu entfernen: $14 = 3 \cdot 5 - 1$. Dieses Vorgehen wäre am realen Zwanzigerfeld so nicht zu realisieren, weil dort fünf Plättchen nicht auf einmal gelegt werden können, es sei denn, man verwendet Fünferstreifen. Dann wiederum müsste ein Fünferstreifen zunächst gegen fünf einzelne Plättchen ausgetauscht werden (vgl. auch Rink und Walter 2020, S. 40).

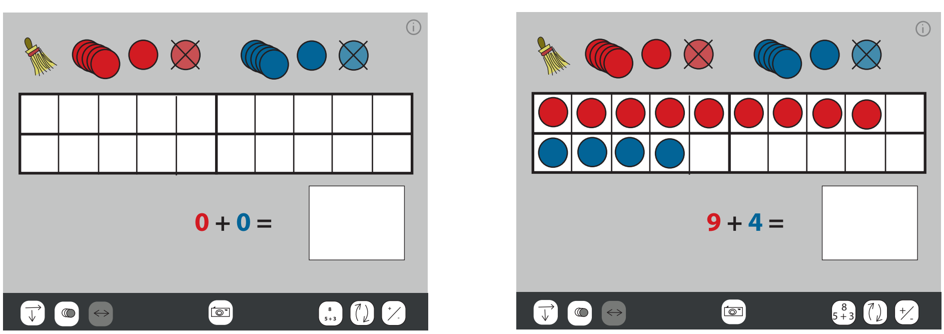


Abb. 4.63 Zwanzigerfeld. (App Zwanzigerfeld, Aufruf vom 05.11.2019, © C. Urff, www.lernsoftware-mathematik.de)

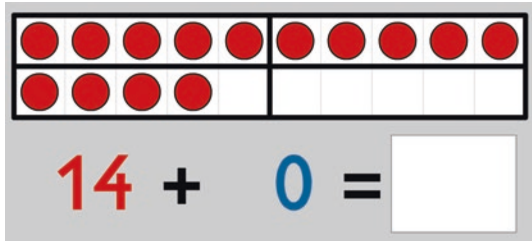


Abb. 4.64 14 Plättchen im Zwanzigerfeld. (App Zwanzigerfeld, Aufruf vom 05.11.2019, © C. Urff, www.lernsoftware-mathematik.de)

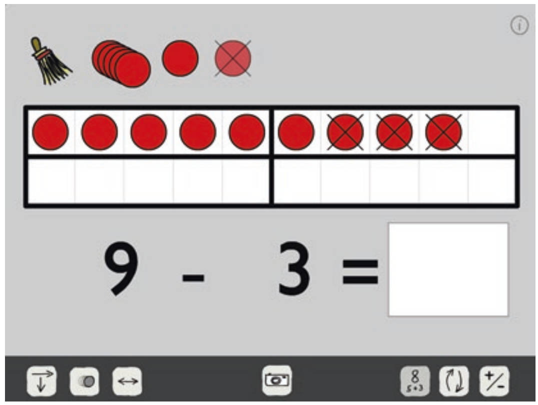


Abb. 4.65 Subtraktion. (App Zwanzigerfeld, Aufruf vom 05.11.2019, © C. Urff, www.lernsoftware-mathematik.de)

Bei der Darstellung der Subtraktion im virtuellen Zwanzigerfeld wird das (reale) Wegnehmen von Plättchen durch Wegstreichen angedeutet (vgl. Abb. 4.65). Man muss sich jedoch bei Darstellungen wie in Abb. 4.65 (die man ähnlich auch in Schulbüchern findet) darüber im Klaren sein, dass das Wegstreichen von Plättchen von vielen Kindern durchaus nicht im „gemeinten" Sinne verstanden wird, sondern dass sie das Bild z. B. als Addition $6 + 3 = 9$ deuten. Diese Art der Interpretation von Subtraktionsdarstellungen zeigt sich sehr eindrucksvoll in Interviews mit Kindern des 1. und 2. Schuljahres, die im Material des KIRA-Projektes der Universität Dortmund zu finden sind (vgl. https://kira.dzlm.de/zahlen-und-operationen/zahl-und-operationsvorstellungen/interpretation-bildlicher-darstellungen). Auch Schipper (2009, S. 296) verweist auf empirische Untersuchungen im 1. Schuljahr, die zeigten, dass Bilder wie die in Abb. 4.65 nur von der Hälfte bis zu zwei Dritteln der Kinder „richtig" als Subtraktionen gelesen wurden, selbst wenn diese Art der Darstellung von Subtraktionen zuvor Thema des Unterrichts gewesen war. Bei der Behandlung von Subtraktionsaufgaben mit der App „Zwanzigerfeld" muss den Kindern deshalb der Zusammenhang zwischen diesem Wegstreichen von Plättchen und dem (gleich aussehenden) Symbol für die Aktion „Plättchen löschen" deutlich werden.

Die App „Number Pieces" (https://www.mathlearningcenter.org/resources/apps/number-pieces) wurde entwickelt, um den Kindern bessere Einsicht in das dezimale Stellenwertsystem (Zehnersystem) zu vermitteln; sie ist ab dem 2. Schuljahr geeignet. Es geht darum zu verstehen, wie (und warum) wir die Zahlen mit Einern, Zehnern, Hundertern usw. schreiben und welche Ideen dabei Verwendung finden, insbesondere sind dies die Prinzipien „Bündelung“ und „Stellenwert“ (vgl. Abb. 4.21 in Abschn. 4.1.7). Zudem geht es um das rechnerische Handeln mit mehrstelligen Zahlen. Die in der App verwendeten bildlichen Darstellungen orientieren sich an den in den 1960iger Jahren von P. Dienes vorgestellten „Mehrsystemblöcken“ (vgl. Gerster und Walter 1973). Dienes’ Absicht war es, den Kindern (formale) Einsicht in Stellenwertsysteme zu vermitteln, und deshalb sollten sie in verschiedenen Basen (außer der Basis 10 auch in den Basen 2, 3, 4, 5 und 6) das Bündeln und Entbündeln konkret und ganz bewusst handelnd mit den jeweiligen Würfeln, Stäben, Platten usw. durchführen. In „Number Pieces“ auf dem Tablet bündeln und entbündeln die Kinder dagegen mit nur einem Klick (vgl. zum kombinierten Einsatz von virtuellen und physischen Materialien auch Ladel 2018, S. 64 f.). Mit der App wird die Bedeutung des Bündelns und Entbündelns für die Zahldarstellung vor allem deutlich in Anwendungen wie beim schrittweisen Rechnen (z. B. bei 23 – 5, vgl. Abb. 4.66[12]). Wenn die Kinder mit diesen Aktionen am Tablet auch die Ideen erfassen sollen, die das (dezimale) Stellenwertsystem kennzeichnen, ist deshalb – wie stets – das begleitende Sprechen sehr wichtig.

Ausführliche Beschreibungen zu weiteren Apps, die für den Einsatz im mathematischen Anfangsunterricht geeignet sind, geben Rink und Walter (2020), einige dieser Apps sind unter www.lernsoftware-mathematik.de zu finden. Verwiesen sei zudem noch einmal auf https://www.mathlearningcenter.org/resources/apps (u. a. „Number Pieces“, s. o.), sowie auf die im Rahmen des von U. Kortenkamp geleiteten Projektes „Digitales Lernen Grundschule“ an der Universität Potsdam entwickelten Apps „Klipp Klapp“ und „Klötzchen“, auf die wir im Geometrie-Kap. 6 eingehen (vgl. Rink und Walter 2020, S. 55 ff. sowie Krauthausen und Pilgrim 2020; Pilgrim und Krauthausen 2020).

Den Umgang von Kindern mit Aufgaben am virtuellen Zwanzigerfeld (Abb. 4.61 ff.) und am Rechentablett (Abb. 4.60) hat Walter (2018) in einer empirischen Untersuchung sehr intensiv untersucht und auch das Verhalten am virtuellen Zwanzigerfeld mit dem am realen Zwanzigerfeld verglichen. Beteiligt waren an der Untersuchung 33 Kinder, die im 2. Schuljahr als „zählende Rechner“ aufgefallen waren (vgl. Walter 2018, S. 143 f.). Entsprechend geht es Walter in seiner Untersuchung vor allem um das Überprüfen von Möglichkeiten zur Überwindung zählender Lösungsstrategien. Den Vorteil beim Handeln der Kinder am Tablet sieht Walter in der besseren Passung zwischen Handlung und mentaler Operation: „Am virtuellen Zwanzigerfeld besteht die Chance, eine engere Passung zwischen Handlung und begleitender mentaler Operation zu schaffen, als es beim physischen Zwanzigerfeld und bei der Verwendung von Fünferstreifen und Wendeplättchen möglich sein kann“ (2018, S. 149).

[12]Wir danken Günter Krauthausen für Rat und Hilfe beim Erstellen der Abbildungen.

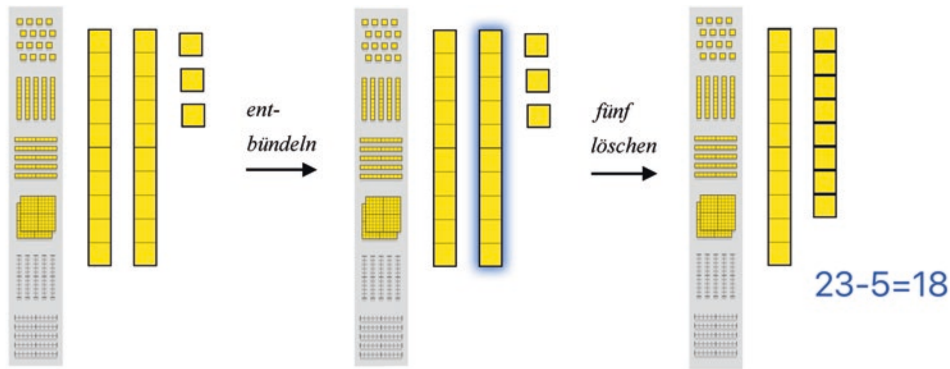


Abb. 4.66 23 – 5. (App Number Pieces, Aufruf vom 05.11.2019, © The Math Learning Center)

Die in der Untersuchung verwendeten Aufgaben (sowohl am Zwanzigerfeld als auch am Rechentablett) können, bezogen auf die betrachtete Gruppe von eher rechenschwachen Kinder, durchaus als „komplexere" (im Sinne von Hurrelmann, s. o.) bezeichnet werden. So geht es zum einen um das Rechnen mit Zahlbeziehungen (Additionsaufgaben im Zwanzigerraum mit Zehnerübergang) und zum anderen um Teil-Ganzes-Beziehungen (ein Beispiel: Die eine Hälfte des Rechentabletts ist abgedeckt. Dem Kind wird gesagt, dass auf dem gesamten Rechentablett 8 Plättchen liegen. In der nicht abgedeckten Hälfte sind 3 Plättchen zu sehen. Frage: Wie viele befinden sich wohl hinter der Pappe? Wie bist du darauf gekommen? Überprüfe!, vgl. Walter 2018, S. 136 ff).

In der Zusammenfassung der Ergebnisse seiner Untersuchungen bleibt Walter (2018, S. 271 ff.) allerdings vorsichtig: Der Vorteil des virtuellen Zwanzigerfeldes, nämlich bildliche und symbolische Darstellung einer Aufgabe parallel präsentieren zu können und Veränderungen in beiden Darstellungsformen synchron anzuzeigen, wurde von den Kindern häufig nicht wahrgenommen. Vielmehr fokussierten sie ihre Aufmerksamkeit jeweils nur auf eine der beiden Darstellungen. Dies bedeutet, „dass die Nutzung synchron miteinander verknüpfter Darstellungen nicht allein durch deren Bereitstellung garantiert wird. Es bedarf gezielter Impulse, die entsprechende Nutzungsweisen initiieren können. … Demnach scheint nicht die Verwendung mehrerer … Darstellungsebenen entscheidend zu sein, … vielmehr (sind es) die begleitenden mentalen Prozesse" (2018, S. 273). Diese Folgerung mag auch als Hinweis darauf verstanden werden, dass beim Einsatz von Tablets (und anderen elektronischen Hilfsmitteln) vorrangig die von Zierer angemahnte Verbesserung der Qualität des Unterrichts das Ziel sein muss.

Dieser Punkt wird ebenfalls deutlich beim Vergleich der Ergebnisse von Handlungsweisen der Kinder am virtuellen und am realen (physischen) Zwanzigerfeld: Einerseits nutzten die Kinder bei Additionsaufgaben sehr wohl die Möglichkeiten, die das virtuelle Zwanzigerfeld beim Legen und geschickten Zusammenstellen von Plättchen bietet, insbesondere benutzten sie die Fünferbündel statt einzelner Plättchen (was als Schritt zur Ablösung vom zählenden Rechnen gesehen werden kann), und sie griffen zum Überprüfen ihrer Ergebnisse auch auf die gleichzeitig sichtbare symbolische Darstellung der Aufgabe zu. Andererseits zeigte sich aber, dass die Kinder „am physischen Zwanzigerfeld weitaus mehr und vielfältigere Plättchenbilder erzeugten als es beim virtuellen Zwanzigerfeld möglich war." …. Es können deshalb „keine pauschalen Aussagen dahingehend getroffen werden …, an welchem der beiden Zwanzigerfelder Nutzungsweisen auftraten, welche die Überwindung zählender Lösungsstrategien eher unterstützen" (Walter 2018, S. 276 f.).

Mit Bezug auf Rechentabletts kommt Walter (2018, S. 274) zu ähnlichen Einschätzungen: „Strukturierungen auf Anfrage" wurden von den Kindern nur „nach Veranlassung" (durch die Interviewer) vorgenommen; zudem zählten die Kinder die strukturierten Plättchenbilder meist einzeln ab, die intendierte Ablösung vom Zählen blieb hier also oft aus. Die automatische Strukturierung verhinderte bei einigen Kindern geradezu das flexible Positionieren der Plättchen auf dem Tablet gemäß ihrer eigenen Vorstellung.

In der empirischen Untersuchung von Urff (2014) waren die Probanden zählende Rechner im 3. Schuljahr einer Förderschule. Auch wenn sich die Untersuchungsmethoden unterscheiden, sind seine Ergebnisse mit denen von Walter durchaus vergleichbar. Insbesondere kommt Urff zu dem Schluss, dass eine „visuelle Hervorhebung von strukturierten Mengen … besonders hilfreich (ist) für die Entwicklung quantitativer Mengenrelationen und die Förderung nichtzählender Rechenoperationen". Voraussetzung dafür ist aber, „dass die Kinder bereits über Kompetenzen zur nichtzählenden Mengenerfassung verfügen" (Urff 2014, S. 266).

Ob Strukturierungshilfen tatsächlich eine Hilfe für die Kinder sind, hängt demnach wesentlich von deren Lernvoraussetzungen ab. Nicht nur bei der Arbeit an Tablets scheint es eine Wechselwirkung zu geben zwischen Vorkenntnissen und Verwendungsmöglichkeiten: Man kann ein Verfahren nur nutzen, wenn man es kennt. Um es aber überhaupt kennenzulernen und zu erfassen, braucht man sowohl Situationen, in denen es nützlich ist, als auch bereits eine rudimentäre Idee davon, wie ein solches Verfahren aussehen könnte. Auf dieses Dilemma verweist auch Urff hin, wenn er für das erfolgreiche Arbeiten am Tablet gewisse Fähigkeiten zum Strukturieren oder Erkennen von Strukturen voraussetzt, deren Erwerb die Hilfsmittel eigentlich besonders fördern sollen. Auf dieses „learning paradox" (van den Heuvel-Panhuizen 2003, S. 96) gehen wir in Abschn. 6.1.2 noch einmal ein.

Trotz aller Vorbehalte, die im Zusammenhang mit den empirischen Untersuchungen formuliert wurden, bleibt festzuhalten, dass es einigen Schülerinnen und Schülern (mit Rechenschwierigkeiten) „gelang …, bereits nach kurzen Einführungsphasen die Tablet-Apps so zu nutzen, dass ihre mathematikdidaktischen Potenziale ausgeschöpft wurden" (Walter 2018, S. 279). Die hier skizzierten Beobachtungen dürften nicht untypisch sein für das Verhalten von Kindern im Umgang mit Tablets insgesamt. Zum

Abschluss dieser Übersicht sollen deshalb noch einmal einige Aspekte zusammengefasst werden, die beim (oder besser: vor dem) Einsatz elektronischer Hilfsmittel im mathematischen Anfangsunterricht bedacht sein sollten (vgl. Krauthausen 2020; Krauthausen und Pilgrim 2020; Etzold et al. 2018, S. 92 ff.):

- Whiteboards, Computer, Smartphones, Tablets oder sonstige Hilfsmittel (welcher Art auch immer) dienen im Unterricht weder der „Bespaßung" der Kinder noch sind sie Selbstzweck. Selbstverständlich ist es sehr erfreulich, wenn sie die Lernfreude der Kinder stärken, aber die zentralen Kriterien zu ihrer Beurteilung sind fachlicher Art: Die eingesetzten Apps müssen mathematisch fundiert sein, didaktisch und methodisch durchdacht und zur aktuellen Unterrichts- und Lernsituation der Kinder passen.
- Die verwendete Technik sollte einfach sein, das gilt auch für die Arbeitsanweisungen. Selbstverständlich sind Einführungen erforderlich: für die Kinder im Umgang mit der App ebenso wie für die Lehrerinnen und Lehrer bei der Installation und dem Umgang mit der Technik.
- Da der Einarbeitungsaufwand zur Entwicklung von Apps inzwischen relativ gering ist, besteht die Gefahr, dass Apps schon deshalb fachdidaktisch inakzeptabel sein können, weil den Entwicklerinnen und Entwicklern die fachdidaktische Kompetenz fehlt (Krauthausen 2020, S. 6 f.).
- Wünschenswert sind deshalb Kriterien zur Auswahl von Apps. Gesucht wird dabei nicht die eine, optimale App, besser ist es, wenn sie – wie jedes andere Arbeits- oder Anschauungsmittel auch – gezielt für eine spezifische Unterrichtssituation geeignet ist.
- Von besonderer Bedeutung für die Auswahl ist aber die fachliche und fachdidaktische Kompetenz der Lehrenden – die Lehrerinnen und Lehrer sind es, die die Apps auswählen, einsetzen und die die zentrale Rolle dabei spielen, ob der Einsatz der App erfolgreich sein kann, oder nicht!

Zwei wichtige Kriterien zur Einschätzung von Apps haben wir oben genannt: In der App sollen die Kinder mit komplexeren Situationen umgehen (und nicht nur reine Routineaufgaben abarbeiten), und die Apps sollen dazu beitragen, die Qualität des Unterrichts zu verbessern. Insbesondere ist zu bedenken, dass hier der mathematische Anfangsunterricht im Fokus steht: Wesentliche Grundlagen für die Lernprozesse der Kinder sind Handlungen, reales Tun mit konkreten Objekten und die Versprachlichung der Handlung. Es ist deshalb nicht nur eine „Fußnote" zu fordern, dass „dem Verflachen der sinnlichen Welt auf eine Scheibe entgegenzuwirken ist" (vgl. oben, Fußnote 9). Ausgehend vom Realen und Konkreten erfordern Lernprozesse nicht nur das Sprechen über die Dinge und die Interaktion mit anderen, sondern es handelt sich letztlich um Prozesse, die im Kopf des Individuums ablaufen und von ihm bewältigt werden müssen (vgl. Abschn. 3.1). Elektronische Hilfsmittel sollen deshalb so beschaffen sein und eingesetzt werden, dass sie diese mentalen Prozesse der Kinder stützen.

Literatur

Balins, M., Dürr, R., Franzen-Stephan, N., Gerstner, P., Plötzer, U., Strothmann, A., Torke, M., & Verboom, L. (2015a). *Fredo 1 Mathematik, Arbeitsheft, Allgemeine Ausgabe*. Berlin: Cornelsen.

Balins, M., Dürr, R., Franzen-Stephan, N., Gerstner, P., Plötzer, U., Strothmann, A., Torke, M., & Verboom, L. (2015b). *Fredo 1 Mathematik, Allgemeine Ausgabe*. Berlin: Cornelsen.

Balins, M., Dürr, R., Franzen-Stephan, N., Gerstner, P., Plötzer, U., Strothmann, A., Torke, M., & Verboom, L. (2016). *Fredo 3 Mathematik, Allgemeine Ausgabe*. Berlin: Cornelsen.

Bauersfeld, H., Gnirk, H., Homann, G., Lubeseder, U., Mitsos-Görner, U., Radatz, H., & Rickmeyer, K. (1970). *Alef 1. Wege zur Mathematik. Handbuch zum Lehrgang*. Hannover: Schroedel.

Besuden, H. (1978). Cuisenaire-Stäbe als Hilfsmittel zur Förderung induktiven Schließens. *Der Mathematikunterricht, 24*(4), 26–37.

Besuden, H. (1998) *Wider das unnatürliche Zählen im Anfangsunterricht.* Oldenburger VorDrucke 355.

Betz, B., Bezold, A., Dolenc-Petz, R., Gasteiger, H., Hölz, C., Ihn-Huber, P., Kullen, C., Plankl, E., Pütz, B., Schraml, C., & Schweden, K.-W. (2016a). *Zahlenzauber 1, Mathematikbuch für die Grundschule, Allgemeine Ausgabe*. Berlin: Cornelsen.

Betz, B., Bezold, A., Dolenc-Petz, R., Gasteiger, H., Hölz, C., Ihn-Huber, P., Kullen, C., Plankl, E., Pütz, B., Schraml, C., & Schweden, K.-W. (2016b). *Zahlenzauber 1, Lehrermaterialien, Allgemeine Ausgabe*. Berlin: Cornelsen.

Betz, B., Bezold, A., Dolenc-Petz, R., Gasteiger, H., Hölz, C., Ihn-Huber, P., Kullen, C., Plankl, E., Pütz, B., Schraml, C., & Schweden, K.-W. (2016c). *Zahlenzauber 2, Mathematikbuch für die Grundschule, Allgemeine Ausgabe*. Berlin: Cornelsen.

Borneleit, P. (2003). Lehrplanerarbeitung und Schulbuchentwicklung in der DDR. In H. Henning & P. Bender (Hrsg.), *Didaktik der Mathematik in den alten Bundesländern – Methodik des Mathematikunterrichts in der DDR* (S. 26–49). Tagungsband: Universitäten Magdeburg und Paderborn.

Bos, W., Lankes, E.-M., Prenzel, M., Schwippert, K., Valtin, R., & Walther, G. (Hrsg.). (2003). *Erste Ergebnisse aus IGLU. Schülerleistungen am Ende der vierten Jahrgangsstufe im internationalen Vergleich*. Münster: Waxmann.

Breidenbach, W. (1956). *Rechnen in der Volksschule* (3. Aufl.). Berlin: Schroedel.

Christiani, R. (Hrsg.). (1994). *Auch die leistungsstarken Kinder fördern*. Frankfurt a. M.: Cornelsen.

Etzold, H., Kortenkamp, U., & Ladel, S. (2018). ACAT-Review Guide – Ein tätigkeitstheoretischer Blick auf die Beurteilung von Mathematik-Apps. In H. Etzold, U. Kortenkamp, & S. Ladel (Hrsg.), *Mathematik in digitalen Medien – Konkret: Ein Handbuch für Lehrpersonen der Primarstufe* (S. 91–98). Münster: WTM Verlag.

Franke, M. (2007). *Didaktik der Geometrie*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Franke, M., & Ruwisch, S. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Fricke, A., & Besuden, H. (1973). *Mathematik in der Grundschule, 1. Schuljahr, Lehrerband*. Stuttgart: Klett.

Gerster, H.-D. (1982). *Schülerfehler bei schriftlichen Rechenverfahren – Diagnose und Therapie*. Freiburg: Herder.

Gerster, H.-D. (1994). Arithmetik im Anfangsunterricht. In A. Abele & H. Kalmbach (Hrsg.), *Handbuch zur Grundschulmathematik* (Bd. 1). Stuttgart: Klett.

Gerster, H.-D., & Walter, R. (1973). *Mehr System im Mehrsystem-Rechnen*. Freiburg: Herder.

Haase, H. (1898). *Zur Methodik des ersten Rechenunterrichts*. Langensalza: Beyer & Söhne.

Häring, G., & Hesemann, S. (2014). *Nussknacker. Mein Mathematikbuch. 1. Schuljahr*. Stuttgart: Klett.

Häring, G., Lippmann, F., Neißl, U., & Redlich, M. (2015). *Nussknacker. Mein Mathematikbuch. 2. Schuljahr*. Stuttgart: Klett.

Hasemann, K. (2009). Meilensteine bei der Kompetenzentwicklung im Bereich „Daten". *Grundschule Mathematik, 21,* 14–17.

Hefendehl-Hebeker, L. (1985). Ein Bühnenstück zu einem mathematischen Märchen: Als die Null in das Zahlenreich kam. *Mathematische Unterrichtspraxis, 3,* 19–30.

Hengartner, E. (Hrsg.). (1999). *Mit Kindern lernen*. Zug: Klett und Balmer.

Hüttis-Graff, P., & Baark, C. (1996). Die Schulanfangsbeobachtung. Unterrichtsaufgaben für den Schrifterwerb. In M. Dehn, P. Hüttis-Graff, & N. Kruse (Hrsg.), *Elementare Schriftkultur. Schwierige Lernentwicklung und Unterrichtskonzept* (S. 132–155). Weinheim: Beltz.

KIRA (o.J.). Projekt „Kinder rechnen anders", Universität Dortmund. https://kira.dzlm.de/zahlen-und-operationen.

KMK (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich*. Neuwied: Luchterhand.

Knapstein, K., & Spiegel, H. (1995). Testaufgaben zur Erhebung arithmetischer Vorkenntnisse zu Beginn des 1. Schuljahres. In G. Müller & E. C. Wittmann (Hrsg.), *Mit Kindern rechnen* (S. 65–73). Frankfurt a. M.: Arbeitskreis Grundschule.

Krauthausen, G. (1997). Die nächste Welle? Neue Trends zum Computereinsatz im Grundschulalter. *Grundschulunterricht, 4,* 14–17.

Krauthausen, G. (2012). *Digitale Medien im Mathematikunterricht der Grundschule*. Heidelberg: Springer Spektrum.

Krauthausen, G. (2018). *Einführung in die Mathematikdidaktik – Grundschule*. Heidelberg: Springer Spektrum.

Krauthausen, G. (2020). Tablets ante portas – Innovation oder/und Déja-vu (?). In B. Brandt, L. Bröll, & H. Dausend (Hrsg.), *Lernen digital: Fachliche Lernprozesse im Elementar- und Primarbereich anregen*. Münster: Waxmann.

Krauthausen, G., & Pilgrim, A. (2020). Das Teilprojekt APPsicht – Anregungen zur Förderung der Raumvorstellung. In V. Frederking & S. Ladel (Hrsg.), *Grundschule digital. Innovative Projekte für die Fächer Deutsch und Mathematik* (S. 17–36). Münster: Waxmann.

Krauthausen, G., & Scherer, P. (2007). *Einführung in die Mathematikdidaktik*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Kruckenberg, A., & Oehl, W. (1960). *Die Welt der Zahl.* Schoedel, Hannover.

Kühnel, J. (1919). *Neubau des Rechenunterrichts* (Bd. 1). Leipzig: Klinkhardt.

Kühnel, J. (1959). *Neubau des Rechenunterrichts* (10. Aufl.). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Ladel, S. (2018). Kombinierter Einsatz virtueller und physischer Materialien. Zur handlungsorientierten Unterstützung des Erwerbs mathematischer Kompetenzen. In B. Brandt & H. Dausend (Hrsg.), *Digitales Lernen in der Grundschule. Fachliche Lernprozesse anregen* (S. 53–72). Münster: Waxmann.

Laux, J., & Bigalke, H.-G. (Hrsg.). (1971). *Einführung in die Mathematik, 1. Schuljahr*. Frankfurt a. M.: Diesterweg.

Laux, J., & Bigalke, H.-G. (1972). *Einführung in die Mathematik, 1. Schuljahr, Lehrerband*. Frankfurt a. M.: Diesterweg.

Lorenz, J. H. (1992). *Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht – Mentales visuelles Operieren und Rechenleistung*. Göttingen: Hogrefe.

Lüken, M. (2011). School starters' early structure sense In Proceedings of 35th conference of the international group for the psychology of mathematics education, Ankara (Bd. 3, S. 353–360).

Maier, H. (1990). *Didaktik des Zahlbegriffs*. Hannover: Schroedel.

Menninger, K. (1958). *Zahlwort und Ziffer. Eine Kulturgeschichte der Zahl*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Montessori, M. (1969). *Die Entdeckung des Kindes*. Freiburg: Herder.

Nuerk, H.-C., Weger, U., & Willmes, K. (2001). Decade breaks in the mental number line? Putting tens and units back into different bins. *Cognition, 82,* B25–B33.

Oehl, W. (1966). *Die Welt der Zahl, Lehrer-Ausgabe*. Hannover: Schroedel.

Oehl, W., & Palzkill, L. (1971). *Die Welt der Zahl – Neu, 1. Schuljahr*. Hannover: Schroedel.

Padberg, F. (1992). *Didaktik der Arithmetik*. Mannheim: BI.

Padberg, F., & Benz, C. (2011). *Didaktik der Arithmetik für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Padberg, F., & Büchter, A. (2015). *Einführung Mathematik Pimarstufe – Arithmetik*. Berlin: Springer Spektrum.

Piaget, J. (1958). Die Genese der Zahl beim Kinde. *Westermanns Pädagogische Beiträge, 10,* 357–367.

Pilgrim, A., & Krauthausen, G. (2020). Aktivitäten rund um Würfelkonfigurationen – Ein klassischer Inhalt mit physischen und digitalen Arbeitsmitteln integrativ erarbeitet. In V. Frederking & S. Ladel (Hrsg.), *Grundschule digital. Innovative Projekte für die Fächer Deutsch und Mathematik*. Münster: Waxmann.

Pöhls, A. (2014). Klonen, sortieren, entdecken – Zahlenhauser am interaktiven Whiteboard. *Grundschule Mathematik, 43,* 10–13.

Polya, G. (1980). *Schule des Denkens*. Bern: Francke.

Radatz, H., & Schipper, W. (1983). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Hannover: Schroedel.

Radatz, H., Schipper, W., Dröge, R., & Ebeling, A. (1996). *Handbuch für den Mathematikunterricht. 1. Schuljahr*. Hannover: Schroedel.

Rickmeyer, K. (2001). „Die Zwölf liegt hinter der nächsten Kurve und die Sieben ist pinkrot“: Zahlenraumbilder und bunte Zahlen. *Journal für Mathematik-Didaktik, 22,* 51–71.

Rink, R., & Walter, D. (2020). *Digitale Medien in Mathematikunterricht der Grundschule*. Berlin: Cornelsen.

Rinkens, H.-D., Hönisch, K., & Träger, G. (2009). *Welt der Zahl. Lehrermaterialien 1*. Braunschweig: Schroedel, Westermann Gruppe.

Rinkens, H.-D., Rottmann, T., & Träger, G. (2014). *Welt der Zahl 2. Mathematisches Unterrichtswerk für die Grundschule*. Braunschweig: Schroedel, Westermann Gruppe.

Rinkens, H.-D., Rottmann, T., & Träger, G. (2015). *Welt der Zahl 1. Mathematisches Unterrichtswerk für die Grundschule*. Braunschweig: Schroedel, Westermann Gruppe.

Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Braunschweig: Schroedel.

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2015a). *Handbuch für den Mathematikunterricht. 1. Schuljahr*. Braunschweig: Schroedel.

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2015b). *Handbuch für den Mathematikunterricht. 2. Schuljahr*. Braunschweig: Schroedel.

Schlieszeit, J. (2011). *Mit Whiteboards unterrichten*. Weinheim: Beltz.

Schmidt, R. (1982). Ziffernkenntnis und Ziffernverständnis der Schulanfänger. *Grundschule, 14,* 166–167.

Schütte, S. (2008). *Qualität im Mathematikunterricht der Grundschule sichern. Für eine zeitgemäße Unterrichts- und Aufgabenkultur*. München: Oldenbourg.

Selter, C. (1995). Die Fiktivität der „Stunde Null“ im arithmetischen Anfangsunterricht. *Mathematische Unterrichtspraxis, 16*(2), 11–19.

Selter, C., & Spiegel, H. (1997). *Wie Kinder rechnen*. Leipzig: Klett.

Selter, C., & Walther, G. (Hrsg.). (1999). *Mathematikdidaktik als design science. Festschrift für E.C. Wittmann*. Leipzig: Klett.

Sesiano, J. (1990). Aufnahme und Fortführung der arabischen Algebra im europäischen Mittelalter. In E. Scholz (Hrsg.), *Geschichte der Algebra* (S. 129–150). Mannheim: BI.

Spiegel, H., & Selter, C. (2003). *Kinder & Mathematik. Was Erwachsene wissen sollten*. Seelze: Kallmeyer.

Steinbring, H. (2000). Mathematische Bedeutung als eine soziale Konstruktion – Grundzüge der epistemologisch orientierten mathematischen Interaktionsforschung. *Journal für Mathematik-Didaktik, 21,* 28–49.

Sundermann, B., & Selter, C. (2006). *Beurteilen und Fördern im Mathematikunterricht*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Treffers, A. (1991). Didactical background of a mathematics program for primary education. In L. Streefland (Hrsg.), *Realistic mathematics education in primary school*. Utrecht: CD-ß Press.

Urff, C. (2014). *Digitale Lernmedien zur Förderung grundlegender mathematischer Kompetenzen*. Berlin: Mensch und Buch Verlag.

van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The learning paradox and the learning miracle: Thoughts on primary school mathematics education. *Journal für Mathematik-Didaktik, 24,* 96–121.

van Luit, J. E. H., van de Rijt, B. A. M., & Hasemann, K. (2001). *Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung*. Göttingen: Hogrefe.

von Hentig, H. (1968). *Systemzwang und Selbstbestimmung*. Stuttgart: Klett.

Walter, D. (2018). *Nutzungsweisen bei der Verwendung von Tablet-Apps*. Heidelberg: Springer Spektrum.

Walther, G., van den Heuvel-Panhuizen, M., Granzer, D., & Köller, O. (Hrsg.). (2007). *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Wartha, S., & Schulz, A. (2012). *Rechenproblemen vorbeugen. Grundvorstellungen aufbauen: Zahlen und Rechnen bis 100*. Berlin: Cornelsen.

Weber, K. (1987). Ziele, Inhalt und Prozeßkonzeption des Mathematikunterrichts nach den neuen Lehrplänen der Klassen 1 bis 3. *Unterstufe, 34,* 65–77.

Weber, K. (1988). *Der Lehrplan Mathematik der zehnklassigen allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule*. Berlin: Volk und Wissen.

Weis, V., & Bauersfeld, H. (1973). Neue Mathematik und Rechenfertigkeit. *Westermann Pädagogische Beiträge, 25,* 127–135.

Winter, H. (1984). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Grundschule, 16*(4), 26–29.

Winter, H. (1991). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht*. Braunschweig: Vieweg.

Wittmann, J. (1929). Theorie und Praxis eines analytischen Unterrichts in der Grundschule und Hilfsschule: Entwurf einer Gestaltung des Anschauungsunterrichts, des ersten Rechen-, Lese- und Schreibunterrichts als eines wirklichkeitsnahen Gesamtunterrichts nach den Grundsätzen einer analytischen Psychologie. Psychologisches Institut der Universität, Kiel.

Wittmann, J. (1939). *Ganzheitliches Rechnen*. Dortmund: Crüwell.

Wittmann, E. C. (1975). *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. Braunschweig: Vieweg.

Wittmann, E. C. (1993). Wider die Flut der „bunten Hunde“ und der „grauen Päckchen“: Das Konzept des aktiv-entdeckenden Lernens und des produktiven Übens. In E. C. Wittmann & N. Müller (Hrsg.), *Handbuch produktiver Rechenübungen* (Bd. 1, S. 157–171). Stuttgart: Klett.

Wiesner, B. (1999). Das klickende Klassenzimmer. Wie Computer unsere Kinder schlau machen. *Familie & Co. Spezial Computer* (Heft 1, S. 20–28).

Wittmann, E. C., & Müller, G. N. (1993). *Handbuch produktiver Rechenübungen, Bd 1*. Stuttgart: Klett.

Wittmann, E. C., & Müller, G. N. (1994). *Das Zahlenbuch. Mathematik im 1. Schuljahr. Lehrerband*. Stuttgart: Klett.

Wittmann, E. C., & Müller, G. N. (2008). *Das Zahlenbuch 1*. Stuttgart: Klett.

Wittmann, E. C., & Müller, G. N. (2012). *Das Zahlenbuch 1. Begleitband*. Stuttgart: Klett.

Wittmann, E. C., & Müller, G. N. (2017a). *Das Zahlenbuch 1*. Stuttgart: Klett.

Wittmann, E. C., & Müller, G. N. (2017b). *Das Zahlenbuch 2*. Stuttgart: Klett.

Wittmann, E. C., & Müller, G. N. (2017c). *Handbuch produktiver Rechenübungen* (Bd. 1). Stuttgart: Klett.

Wittmann, E. C., & Müller, G. N. (2018). *Das Zahlenbuch 3*. Stuttgart: Klett.

Wittmann, E. C., Müller, G. N., Nührenbörger, M., & Schwarzkopf, R. (2017). *Das Zahlenbuch 1. Lehrerband*. Stuttgart: Klett.

5 Spezielle Zielgruppen

Nach den Grundüberlegungen zum arithmetischen Anfangsunterricht und der Frage nach Kompetenzen, die Kinder in der Grundschule erreichen sollen, drängt sich die Frage auf, wie es gelingen kann, allen Kindern mit ihren heterogenen Voraussetzungen im Unterricht gerecht zu werden. Deshalb ist es angebracht, sich zu überlegen, ob für Kinder an den beiden Enden des Leistungsspektrums ergänzende methodische Maßnahmen und Angebote gefunden oder gewisse Schwerpunkte anders gesetzt werden können. Es geht also in diesem Kapitel insbesondere um den Umgang mit Kindern, die besondere Schwierigkeiten beim Erlernen der Mathematik haben (Abschn. 5.2), und um den mit Kindern mit besonderen Begabungen (Abschn. 5.3). In der Literatur findet man immer wieder Zahlen, die den Anteil der Kinder mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen mit etwa 15 bis 20 % angeben (z. B. Schipper et al. 2011, S. 4, 14). Im folgenden Abschn. 5.2 soll aber in erster Linie erörtert werden, wie auf diese Kindern im Unterricht eingegangen werden kann, während auf eine Diskussion möglicher Ursachen für die Schwierigkeiten, die individuell sehr unterschiedlich sein können, verzichtet wird (vgl. dazu z. B. Lorenz 1987; Peter-Koop 1998; Wartha und Schulz 2012 sowie das von Fritz et al. 2017 aktualisierte Handbuch zur Rechenschwäche).

5.1 Die Bandbreite mathematischer Fähigkeiten im Anfangsunterricht

Auf die gewaltigen Unterschiede in den Vorkenntnissen der Kinder am Schulbeginn sind wir im ersten Kapitel bereits eingegangen, dort wurde auch eine Reihe von Beispielen für individuell unterschiedliches Vorgehen bei Aufgaben zum Zählen, zum Zahlbegriff und zum elementaren Rechnen gegeben (vgl. Abschn. 1.4). Ergänzt werden sollen diese Informationen im Folgenden durch Beispiele von Aufgabenlösungen von Kindern im

K. Hasemann und H. Gasteiger, *Anfangsunterricht Mathematik,* Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II, https://doi.org/10.1007/978-3-662-61360-3_5

ersten Schuljahr oder zu Beginn des zweiten Schuljahres. Die Beispiele sollen deutlich machen, dass die Bandbreite in den Fähigkeiten und Fertigkeiten und auch im individuellen Verhalten nach Schulbeginn keineswegs geringer wird.

Das erste Beispiel ist dem Buch von J. H. Lorenz (1987) *Lernschwierigkeiten und Einzelfallhilfe* entnommen. Es geht dabei um den achtjährigen Jungen Bernd am Ende des ersten Schuljahres. Aufgefallen war er durch ungenügende Rechenfertigkeiten bei durchschnittlichen Lese- und Rechtschreibleistungen. Lorenz (1987, S. 45, 53 f.) äußert nach mehrstündiger therapeutischer Arbeit mit dem Jungen den „Eindruck, dass für Bernd zwei Welten existieren, einmal die symbolische, geschriebene und zum anderen eine ‚reale' Objektwelt, mit der er hantieren und die er manipulieren kann, die aber auch ihre eigenen Gesetzmäßigkeiten besitzt".

I: Wie viel ist neun plus neun?
B: Es muss eine ganz große Zahl sein
I: Kann es fünfzehn sein?
B: Viel größer!
I: Zwanzig?
B: Viel größer!

…

I: Dreiunddreißig?
B: (nickt zustimmend)

Der Bitte, neun gelbe Plättchen hinzulegen, kommt Bernd zügig unter Verwendung von Zahlzerlegeprozeduren (3 + 3 + 3) nach und ebenso der Aufforderung, neun schwarze Plättchen hinzuzufügen (3 + 2 + 2 + 2). Die beiden Häufchen wurden dann gemischt.

I: Wie viele gelbe Plättchen sind in dem Häufchen?
B: Neun
I: Und wie viele schwarze?
B: Neun

Anschließend wurden Türmchen aus den gelben und den schwarzen Plättchen gebildet.

I: Wie viele Plättchen sind denn in dem einen Turm?
B: Neun
I: Und in dem anderen?
B: Neun
I: Wie viele Plättchen sind denn in den beiden Türmen zusammen?
B: Achtzehn
I: (auf das Blatt Papier deutend, auf der die Aufgabe stand) Was ist denn neun plus neun?
B: (nachdenklich den Kopf wiegend) Dreiunddreißig

Im zweiten Beispiel aus eigenen Unterlagen (K. Hasemann) geht es inhaltlich um die Schreibweise der Zahlen im dezimalen Stellenwertsystem und um das Ordnen dieser Zahlen. In einem zu Beginn des zweiten Schuljahres im Klassenverband durchgeführten Kurztest sollten die Kinder zunächst zweistellige Zahlen in unterschiedlichen Formen darstellen: mit Ziffern (z. B. 32), und mit Strichen und Punkten (z. B. |||:). Ein Junge, Oskar, hatte mit diesen Aufgaben allem Anschein nach keine besonderen Schwierigkeiten, er konnte zu den vorgegebenen Darstellungen mit Strichen und Punkten die Zahlen korrekt schreiben und umgekehrt zu den Zahlen die Darstellungen mit Strichen und Punkten angeben. Bei einer der weiteren Aufgaben waren zu zweistelligen Zahlen jeweils die unmittelbaren Vorgänger und Nachfolger aufzuschreiben. Oskars Lösungen zu dieser Aufgabe sind im Folgenden kursiv geschrieben, die Zahl in der Mitte jeder Dreiergruppe war vorgegeben:

59	**39**	*49*	*24*	**41**	*34*	*18*	**17**	*19*	*80*	**70**	*90*
49	**54**	*84*	*69*	**76**	*86*	*92*	**28**	*78*	*83*	**63**	*73*

Sieht man von dem Missverständnis ab, dass Oskar statt des Vorgängers und Nachfolgers zwei Nachfolger aufschreiben wollte (man erkennt dies sehr deutlich bei der Zahlenfolge 18, 17, 19), haben fast alle Fehllösungen eine einzige Ursache: Er vertauschte beim Lesen oder beim Schreiben der Zahlen die Zehner und Einer, d. h. seine Zahlen sind (der Reihe nach, also beginnend jeweils mit der Zahl in der Mitte) zu lesen als 93, 94, 95–41, 42, 43–17, 18, 19–70, 80, 90–45, 48, 49–67, 68, 69–28, 29, ?–36, 37, 38.

Eine sichere Übereinstimmung zwischen geschriebenen und gelesenen (möglicherweise leise oder auch nur im Geist gesprochenen) Zahlworten gibt es bei Oskar nur in dem aus dem ersten Schuljahr vertrauten Zahlenraum bis 20. Bemerkenswert an Oskars Lösungsverhalten ist vor allem, dass ihm bei der ersten Aufgabe die Übertragung von mit Ziffern geschriebenen Zahlen in die Darstellung mit Strichen und Punkten scheinbar mühelos gelang. Offensichtlich trügt hier der Schein: Eine Vermutung wäre, dass Oskar jeweils nur die links stehende Ziffer den Strichen und die rechts stehende den Punkten zugeordnet hat. Inwieweit Oskar ein gesichertes Stellenwertverständnis hat, ist unklar.

Ein weiteres Beispiel (Unterlagen H. Gasteiger) – es entstammt dem Unterricht Ende Jahrgangsstufe 1– zeigt verschiedene Strategien und Lösungswege zur Bewältigung des Zehnerübergangs. Lisa löst $3+8$ wie in Abb. 5.1 angegeben. Auf den ersten Blick könnte man sagen, Lisa wählt eine geschickte Strategie: Sie verwendet die Tauschaufgabe, weil 8 näher an der 10 liegt als 3, ergänzt zur 9 und rechnet dann über den Zehner. Der zweite Blick lässt jedoch erkennen, dass es sich bei dieser Schülerlösung um zählendes Rechnen handelt. Lisa verwendet die Tauschaufgabe und zählt dann die drei dazu.

In derselben Unterrichtsstunde zeigt Lukas bei der Aufgabe $9+6$ den in Abb. 5.2 dargestellten Weg. Diese Strategie – Nutzen der Zehnernähe – wurde im Unterricht nicht

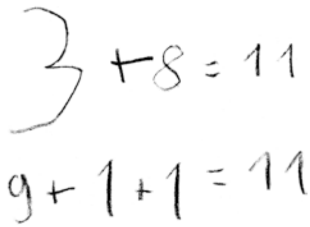


Abb. 5.1 Schülerlösung zum zehnerüberschreitenden Rechnen. (Lisa)

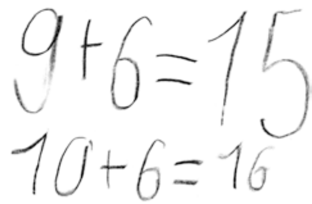


Abb. 5.2 Schülerlösung zum zehnerüberschreitenden Rechnen. (Lukas)

explizit thematisiert. Zwar spielten Nachbaraufgaben vor allem im Zusammenhang mit Verdopplungen eine Rolle, jedoch nicht die Zehnernähe. Lukas fand von sich aus eine adäquate und sehr geschickte Strategie zur Lösung dieser Aufgabe.

In einem letzten Beispiel beziehen wir uns auf die in Abschn. 1.4.2 angesprochene Untersuchung mit Kindern in ihrem letzten Jahr vor dem Schulbeginn. Diesen Kindern wurden in Einzelinterviews unter anderem Aufgaben zum elementaren Rechnen vorlegt. Die folgende Aufgabe war die schwerste in dieser Serie von Aufgaben: Die Interviewerin legt fünf Holzwürfel auf den Tisch und sagt: „Hier sind fünf Holzwürfel. Ich schiebe sie unter meine Hand." Sie schiebt die Holzwürfel unter ihre Hand. Dann schiebt sie sieben weitere Holzwürfel, die sie dem Kind zeigt, unter ihre Hand. „Ich füge sieben Holzwürfel dazu. Wie viele Holzwürfel habe ich jetzt unter meiner Hand?" Viele Kinder haben schlicht geraten, sie nannten z. B. 5, 17, 18 oder 80 als Ergebnis. Einige Kinder kamen zur richtigen Lösung, indem sie von der fünf aus weiterzählten, und drei (der insgesamt über 40) Kinder lösten die Aufgabe durch eine Rechnung: Zwei von ihnen rechneten $7+3+2=12$ und eines $5+7=6+6=12$ (!).

Besonders bemerkenswert an den zuletzt genannten Lösungen ist, dass diese Kinder – ähnlich wie Lukas in Abb. 5.2 – spontan sehr anspruchsvolle heuristische Strategien verwendet haben, die ihnen nicht in irgendeiner Form „vermittelt" worden waren, denn es handelt sich dabei um Leistungen, die die Kinder vor Schulbeginn zeigten. Es gibt also – am oberen Rand des Spektrums individueller Fähigkeiten – Kinder, die schon vor der Schulzeit in der Lage sind, nicht nur Situationen mental zu repräsentieren, sondern auch verallgemeinerungsfähige Rechenstrategien selbst zu entwickeln. Bereits zu Schulbeginn und im Verlauf des mathematischen Anfangsunterrichts müssen die Lehrenden damit rechnen, in ihren Klassen sowohl Kinder mit ausgeprägten Schwierigkeiten beim

Erlernen der Mathematik vorzufinden als auch Kinder mit einer frühen mathematischen Hochbegabung.

5.2 Kinder mit Schwierigkeiten beim Mathematiklernen

Frühzeitig zu erkennen, wenn Kinder Schwierigkeiten beim Erlernen mathematischer Begriffe und Verfahren haben, ist vermutlich der wichtigste Schritt auf dem Weg zur Förderung. Mathematisches Lernen ist kumulatives Lernen: Auf Vorwissen und den bereits erlernten Konzepten und Vorstellungen wird sukzessive aufgebaut, es wird vernetzt, und Zusammenhänge werden hergestellt. Gibt es in diesem Lernprozess Lücken, die nicht erkannt werden, so ist die Gefahr groß, dass sich Schwierigkeiten beim Weiterlernen ergeben. Erst wenn erkannt wird, womit Kinder Probleme haben bzw. wo sich Stagnationen im Entwicklungsprozess zeigen, kann die entsprechende Förderung erfolgreich andocken.

5.2.1 Beobachtung und diagnostische Informationen

Woran aber erkennt man frühzeitig sich abzeichnende Probleme? Mittlerweile gibt es bereits ein breites Wissen darüber, wie sich mögliche Schwierigkeiten in Schüleräußerungen und -lösungen offenbaren. Schipper et al. (2011, S. 15 ff.) nennen als Hauptsymptome für Rechenstörungen in der Grundschule verfestigtes zählendes Rechnen, ein eingeschränktes Stellenwertverständnis, unzureichende Orientierung im Zahlenraum sowie unzureichende Grundvorstellungen zu den Rechenoperationen und unzureichende Größenvorstellungen. Gaidoschik (2003, S. 23 ff.) gibt konkret für die erste Schulstufe noch weitere Hinweise auf eine mögliche beginnende Rechenschwäche:

- basale Teilleistungsstörungen (d. h. fehlende Fähigkeiten im Hinblick auf elementare Aspekte des Zahlbegriffs und der Rechenoperationen)
- Schwierigkeiten im Klassifizieren
- Unklarheit über die Begriffe „gleich viel“, „mehr“ und „weniger“
- fehlende Eins-zu-eins-Zuordnung, Zählfehler
- einseitig „ordinales“ Zahlverständnis: Zahlen als „Rangplätze“ gedacht
- zählen statt rechnen
- unzureichendes Operationsverständnis
- Schwierigkeiten mit zweistelligen Zahlen
- Wahrnehmung der Zehner-Zahlen bis 100 als „noch eine Reihe zum Merken“

Ein weiterer Bereich, der erst in neuerer Zeit intensiver untersucht wurde, ist das Erfassen von Mustern und Strukturen, das insbesondere bei Zahlbildern und Arbeitsmitteln wie z. B. dem Zwanzigerfeld, aber auch für die Entwicklung des mathematischen Denkens insgesamt von Bedeutung ist (vgl. Lüken 2012a, b und Abschn. 1.4.2).

An dieser Stelle ist es allerdings wichtig, zu betonen, dass all dies Hinweise sein *können* – es kann auch Kinder geben, die in dem einen oder anderen Punkt auffällig sind, jedoch keine lang anhaltend gravierenden Schwierigkeiten beim Erlernen der Mathematik zeigen.

Entscheidend für eine adäquate, individuelle Förderung ist die Früherkennung von Schwierigkeiten. A. Schulz (1998, S. 84) hat darauf hingewiesen, dass Schwierigkeiten beim Lernen vor allem dann entstehen, wenn die individuellen Lernvoraussetzungen und die in einer bestimmten Lernumgebung zu erfüllenden Anforderungen nicht zueinander passen. Schon deshalb ist eine Erhebung dieser Lernvoraussetzungen in jedem Fall wichtig. Erste Informationen darüber können Vorkenntnisermittlungen zu Beginn des ersten Schuljahres geben (vgl. Abschn. 4.1.2; vgl. auch Benz et al. 2015, S. 146 ff.; Peter-Koop und Wollring 2015). Für einzelne Kinder bietet darüber hinaus der „Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung (OTZ)“ eine Möglichkeit, die individuelle Zahlbegriffsentwicklung einzuschätzen. Zwar ist dieser Test für Kinder im Vorschulalter konzipiert, doch hat er bei schwächeren Kindern im ersten Schuljahr genau das richtige Anspruchsniveau. Der OTZ ist insbesondere geeignet, herauszufinden, ob bei einzelnen Kindern die Zahlbegriffsentwicklung relativ zu der ihrer Altersgenossen verzögert ist. Außerdem lässt sich feststellen, in welchen Bereichen gegebenenfalls besondere Stärken oder Defizite vorliegen (vgl. Abschn. 1.4.1).

Für die Planung von Fördermaßnahmen ist zu beachten, dass die diagnostischen Bemühungen sowohl kompetenzorientiert (vgl. Selter 2008, S. 37 f.) als auch prozessorientiert (Wartha und Schulz 2012, S. 19) sind. Konkret heißt das, dass eine klare Orientierung an dem erfolgt, was die Kinder bereits können, *und* dass nicht die Ergebnisse im Mittelpunkt des Interesses stehen, sondern Lösungswege und Vorgehensweisen. Dies kann am Beispiel der Schülerlösung in Abb. 5.1 noch einmal erläutert werden: Ein kompetenzorientierter Blick auf die Leistung dieses Kindes offenbart, dass es die Möglichkeit, eine Tauschaufgabe zu verwenden, erkennt. Nach dem Vertauschen der Summanden ist eine Zehnernähe des ersten Summanden gegeben, die die Bearbeitung der Aufgabe deutlich erleichtern kann. Auf dieses Vorwissen kann das Kind vermutlich auch in anderen Fällen zurückgreifen. Würde man die Lösung produktorientiert betrachten, so ergäben sich keine großen Auffälligkeiten. Das Ergebnis 11 ist schließlich richtig, was zu dem Schluss verleiten könnte, dass das Kind keinerlei Schwierigkeiten beim Lösen solcher Aufgaben hat. Prozessorientiert erkennt man jedoch, dass dieses Ergebnis über zählendes Rechnen ermittelt wurde und dass deshalb am Ende der Jahrgangsstufe 1 Aufmerksamkeit geboten ist. Schließlich weiß man um die Problematik eines verfestigten zählenden Rechnens (s. o.). Erst eine prozessorientierte und kompetenzorientierte Diagnostik gibt die entscheidenden Informationen über die vorhandenen Fähigkeiten der Kinder, an denen die Förderung ansetzen kann.

Der Beobachtung im Unterricht kommt insofern eine große Bedeutung zu, als in der Regel in einer Schulklasse nicht mit jedem Kind ein Testverfahren oder ein diagnostisches

Interview durchgeführt werden kann. Im Anfangsunterricht ist zunächst ein Blick auf die Zählfähigkeiten von besonderer Bedeutung (vgl. Abschn. 1.3 und 4.1.3). Können Kinder beispielsweise zu Schulbeginn noch nicht richtig zählen – d. h. gelingt ihnen etwa die Eins-zu-eins-Zuordnung von zu zählendem Objekt und Zahlwort nicht sicher –, werden sie bei vielen Inhalten des mathematischen Anfangsunterrichts Schwierigkeiten haben (vgl. Abschn. 4.1). Verstehen sie Zahlen lediglich als Zählzahlen, die eine bestimmte Reihenfolge vorgeben, werden sie Schwierigkeiten haben, zu erkennen, dass sich die Zahl 5 aus 2 und 3 oder aus 4 und 1, aber auch aus 0 und 5 zusammensetzen lässt. Dies zieht wiederum Schwierigkeiten beim Rechnen nach sich. Ein Verständnis für heuristische Strategien ist aufgrund einer rein ordinalen Zahlvorstellung nahezu unmöglich (vgl. dazu auch Gaidoschik 2003, S. 27 ff.). So gibt es z. B. Kinder, die beim Zählen die Finger zu Hilfe nehmen und dabei jedem Zahlwort *einen bestimmten* Finger zuordnen, beispielsweise der Eins stets den Daumen der linken Hand, der Zwei den Zeigefinger usw. Flexibles Rechnen ist mit dieser Veranschaulichungsstrategie kaum möglich. Ob Kinder neben einem ordinalen Zahlbegriff auch ein kardinales Zahlverständnis haben, kann sich beispielsweise im Unterrichtsalltag bei Aufgaben zeigen, in denen Zahlen auf verschiedene Weise dargestellt werden oder verschiedene Zahldarstellungen einander zugeordnet werden sollen (vgl. Abschn. 4.1.4). Über diese Ideen hinaus findet man z. B. bei Wartha und Schulz (2012, S. 94 ff.) oder Gaidoschik (2009) weitere Hinweise, worauf in der Beobachtung ein besonderes Augenmerk gelegt werden soll.

Im Folgenden werden einige Situationen des Anfangsunterrichts beschrieben, in denen gezielt die Beobachtung notwendiger Lernvoraussetzungen erfolgen kann – gerade im Sinne der oben genannten Symptome von Schwierigkeiten beim Mathematiklernen

- Zählen: Im Chor zählen; Zahlenreihe rhythmisch sprechen; melodisches Zählen; Zählen mit Bewegungen verbinden.
  - Individuelle Beobachtungen: Das Kind zählt vorwärts bis …, rückwärts von …, zählt Gegenstände durch Antippen, nur mit den Augen.
- Zahlverständnis, simultane Zahlerfassung: Punktebild einer Zahl zeigen, auf Kommando zeigen alle Kinder gleichzeitig die Anzahl der Punkte mit den Fingern; Partnerübung: Punktebilder auslegen, eine Zahl würfeln, die Kinder sollen ganz schnell die Karte mit dem passenden Punktebild greifen; eine Anzahl von Tönen wird vorgespielt, die Kinder notieren die Anzahl als Ziffer oder in Form von Strichen.
  - Individuelle Beobachtungen: Das Kind erkennt spontan die Mächtigkeit von Mengen bis…, stellt spontan Mengen mit vorgegebener Mächtigkeit her bis…
- Schreiben und Lesen von Ziffern: Male ein Bild von deiner Lieblingszahl und von allen Ziffern, die du schon kennst.
- Raum-/Lagebeziehungen:
  - Orientieren und Zeichnen in einem vorgegebenen Feld mit neun Quadraten in drei Reihen und drei Spalten: Zum Beispiel soll oben rechts ein Herz und unten links ein Haus gezeichnet werden.

  - Orientieren und Zeichnen im Punkteraster, z. B. ein Zeichendiktat, bei dem von einem vorgegebenen Startpunkt aus drei nach oben, drei nach rechts usw. gegangen werden sollen.
  - Handlungen nach Anweisungen ausführen: Zum Beispiel „lege *auf* den Tisch dein Mathebuch, *rechts neben* dein Mathebuch legst du einen Bleistift".
  - Bauen mit Holzwürfeln nach Vorlage
  - Muster nachlegen
- Visuelle Fähigkeiten: Spiele wie Memory, Puzzles, „Schau genau"
- Auge-Hand-Koordination: Muster auf dem Geobrett nachspannen (s. Abschn. 6.3.2); Falt- und Schneideübungen
- Auditive Wahrnehmung: Hördiktate, z. B. Geräusche identifizieren, Richtungshören; Melodien nachsingen; Anzahl von Tönen hören; Bälle aus unterschiedlichem Material am Geräusch beim Aufprall unterscheiden
- Größeneinschätzungen: Raum ausmessen: Wie oft passt mein eigener Körper in die Zimmerlänge? Messen mit Körperteilen: Wie oft passt meine Handfläche in eine festgelegte Strecke? (vgl. Milz 1993, S. 134)

Verwiesen werden soll hier auch auf Anregungen zum Erstellen eines „Mathematikprofils" bei Lorenz und Radatz (1993, S. 48 f.) und die – sehr ausführlichen und umfassenden – Tests zur „Lernstandermittlung" bei Scherer (1999, S. 25 ff.).

Eine weitere Möglichkeit, gezielte Informationen über das Denken und den Kenntnisstand eines Kindes zu bekommen, sind Fehleranalysen. Der in Abschn. 5.1 beschriebene Fall Oskar zeigt recht eindrucksvoll, wie wertvoll diese sein können: Es geht nicht nur darum festzustellen, *dass* ein Kind etwas falsch macht, sondern *was* es falsch macht und vor allem *warum*. Fehler können sehr unterschiedliche Ursachen haben, die meisten sind keine „Flüchtigkeitsfehler" – also momentane Versehen –, sondern systematische Fehler, die verursacht werden durch bestimmte Schwierigkeitsmerkmale bzw. ein unzulängliches (oder: anderes) Verständnis des Sachverhaltes, um den es geht (vgl. Gerster 1982, S. 14 ff.). Laut Radatz (1980, S. 72) sind zwischen 70 und 90 % aller Fehler systematische Fehler. Fehler werden deshalb nicht mehr als zu vermeidendes Übel, sondern als eine im Lernprozess unumgängliche und sogar notwendige Erscheinung gesehen (eine ausführliche Diskussion hierzu findet man bei Krauthausen 2018, S. 262 ff., sowie bei Lorenz und Radatz 1993, S. 59 ff.).

Einige Fehlerursachen können relativ leicht durch genaues Hinhören oder Hinsehen ermittelt werden. So sind z. B. „Eins-und-eins-Fehler der Nähe", also Abweichungen des Ergebnisses bei der Addition oder Subtraktion im Zahlenraum bis 20 um ± 1, deutliche Hinweise darauf, dass das Kind durch Weiter- bzw. Rückwärtszählen addiert oder subtrahiert hat (vgl. Abschn. 4.3.1). Ebenfalls leicht zu erkennen sind Fehler bei der Subtraktion zweistelliger Zahlen, wie etwa $14-6=12$ oder $12-5=13$. Sie entstehen dadurch, dass die Kinder stellenweise die kleinere von der größeren Ziffer abziehen (gehäuft treten diese Fehler erst bei der schriftlichen Subtraktion auf, vgl. Gerster 1982, S. 52 ff.). Dieses Fehlermuster ist eine Strategie zur Vermeidung des Zehnerübergangs und kann zum einen darauf hindeuten, dass die betreffenden Kinder den Aufbau zweistelliger Zahlen (mit Zehnern und Einern) noch nicht erfasst haben (in diesem Fall können Übungen zur Bündelung mit Eintragen der Bündelungsergebnisse in die Stellenwerttafel durchgeführt werden, vgl. Abschn. 4.1.7). Zum anderen kann dieses Fehlermuster ein Indiz dafür sein, dass die Kinder den Zehnerübergang zu vermeiden versuchen, weil sie nicht sicher sind bei Zahlzerlegungen (z. B. bei $14 - 6$ ist die Zerlegung der 6 hilfreich: $14 - 4 - 2$).

Bemerkenswert ist bei solchen Rechnungen, dass viele Kinder allem Anschein nach den – sollte man meinen: offensichtlichen – Unsinn ihrer Ergebnisse nicht erkennen ($12 - 5$ kann nicht 13 sein!). Insofern kann dieses Verhalten der Kinder auch ein Hinweis darauf sein, dass sie keinen Zusammenhang sehen zwischen Rechnungen einerseits und konkreten Handlungen andererseits (von zwölf Äpfeln fünf wegnehmen). Dies wäre ein Alarmsignal für den Unterricht insgesamt, in dem solche Zusammenhänge möglicherweise zu wenig thematisiert wurden.

5.2.2 Hinweise zur Förderung

In Hinblick auf die konkreten Vorgehensweisen bei der Förderung von Kindern mit spezifischen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen gibt es – auch methodisch – durchaus unterschiedliche Vorschläge.

Weit verbreitet ist immer noch die Vorstellung, dass bei lernschwachen Kindern ohnehin nur ein sehr kleinschrittiges Vorgehen möglich sei. Diese Vorgehensweise ist darauf ausgerichtet, dass die Kinder durch ständiges Wiederholen einfache Rechnungen schließlich auswendig lernen. Sie ist verbunden mit der Hoffnung, dass sich im Laufe der Zeit eine gewisse Einsicht in Beziehungen zwischen diesen Aufgaben „von selbst" einstellt. Auch wenn eine solche – letztlich durch Resignation gekennzeichnete – Haltung nachvollziehbar sein mag, so kann sie nicht Ausgangspunkt für die Arbeit mit den Kindern sein.

Ein theoretisches Modell, das insbesondere in den Schulen für Kinder mit Lernbeeinträchtigungen weite Verbreitung fand, wurde von Kutzer (1976, 1999) entwickelt. Eine Grundlage ist Piagets Begriff der *abstraction à partir de l'action* (vgl. Aebli 1980, S. 217), also die Vorstellung, dass jeder abstrakte (mathematische) Begriff von den Kindern nur aus eigenen Handlungserfahrungen heraus gebildet werden kann. Dabei bilden nicht die Objekte, mit denen gehandelt wird, die Grundlage der Erkenntnis, sondern die Handlungen mit ihnen, d. h. der Begriff wird durch Reflexion dieser Handlungen gebildet. Kutzer unterscheidet in seinem Konzept eines „struktur-niveauorientierten Unterrichts" vier Niveaustufen zur Verinnerlichung der Sachstruktur:

- konkrete, strukturorientierte Handlungen
- teilweise vorstellendes Handeln
- vollständig vorstellendes Handeln
- Umgang mit Erkenntnissen (Transfer, Generalisierung)

Dieser Struktur folgt auch das sogenannte Vier-Phasen-Modell (vgl. Wartha und Schulz 2012). In der Liste fällt auf, dass bildliche Darstellungen keine wesentliche Rolle spielen. Laut Kutzer (1999, S. 21) ist vielmehr „die konkrete, strukturierte Handlung ein wesentliches Element des Lernprozesses (…), die bewusste und gezielte Ablösung dieser konkreten Handlung durch das nachvollziehende oder vorweggreifende gedankliche Handeln ein noch bedeutsameres. Das Nichterkennen dieses Tatbestandes ist ein wesentlicher Schwachpunkt vieler sogenannter ‚handlungsorientierter' Lernkonzepte". In diesem Zitat sollte vor allem Kutzers deutlicher Hinweis auf die Notwendigkeit des „gedanklichen Handelns" nicht übersehen werden. Es geht nicht um die Handlung an sich, sondern um den bewussten Prozess, der von der konkreten zur mentalen Handlung führt (vgl. Abschn. 3.2). Zwar haben Lorenz und Radatz recht, wenn sie schreiben (1993, S. 51), dass „die Phase des konkreten Handelns und des Erfahrens von Realitätsbezügen einer mathematischen Operation (leider) in der Unterrichtspraxis für einige Schüler viel zu kurz" ist. Doch diese Feststellung kann durchaus auch missverstanden werden, etwa in der Weise, dass man weiterhin mit konkreten Handlungen in einem viel zu wenig strukturierten Zahlenraum (z. B. dem bis 6) verweilt, nur weil einige Kinder in diesem Zahlenraum noch mit den Fingern rechnen (vgl. dazu auch Scherer 1999, S. 11).

Eingangs wurde kritisch angemerkt, dass das Prinzip der kleinen Schritte für Kinder mit spezifischen Schwierigkeiten – trotz zahlreicher Befürworter – nicht die optimale Lösung sein kann. Der Gegenpol dazu wäre das aktiv-entdeckende Lernen. Auch das aktiv-entdeckende Lernen baut auf Piagets genetischer Erkenntnistheorie auf, ihm liegen außerdem Ideen von Kühnel zugrunde (vgl. Abschn. 4.1.1 und 4.1.4). Aktiv-entdeckendes Lernen bedeutet, den Kindern mathematische Sachverhalte in Ganzheiten – mit einer reichhaltigen mathematischen oder realen Struktur – anzubieten, mit denen sie sich länger beschäftigen können und in denen es Anlässe zum Entdecken, Beschreiben und Begründen von Beziehungen gibt. Es bleibt die Frage, ob gerade schwächere Schülerinnen und Schüler bei diesem Konzept in ihrer Lernentwicklung profitieren können. Untersuchungen von Scherer (1999) und von Moser Opitz (2001) haben gezeigt, dass das Konzept des aktiv-entdeckenden Lernens auch bei lernschwachen Kindern erfolgreich sein kann. Anders als beim kleinschrittigen Lernen, das zur Abhängigkeit von den von außen vermittelten Verfahren führt, werden bei diesem Vorgehen keine Entwicklungsmöglichkeiten verhindert, und es bietet den Kindern die Chance, Vertrauen in das eigene Lernen und Denken zu gewinnen. Selbstverständlich sind die individuellen Lernvoraussetzungen bei jeder Vorgehensweise zu beachten. Beim Konzept des „aktiv-entdeckenden Lernens" heißt dies insbesondere für Kinder mit spezifischen Schwierigkeiten,

- sich auf die Grundideen der Arithmetik (und der Geometrie) zu konzentrieren,
- überflüssigen Formalismus zu vermeiden,
- in der Verwendung von Arbeitsmaterialien und Veranschaulichungsmitteln sparsam zu sein (z. B. Verwendung von Zwanzigerreihe und Zwanzigerfeld und deren Erweiterungen über mehrere Schuljahre hinweg) sowie

- mentale Vorstellungsbilder durch strukturierende Operationen an diesen ausgewählten Materialien aufzubauen (vgl. Moser Opitz 2001, S. 108 f.).

Für aktiv-entdeckendes Lernen sowohl mit rechenschwachen als auch gut begabten Kindern gibt es mittlerweile neben wissenschaftlichen Erkenntnissen auch erprobte und evaluierte Unterrichtskonzepte (Hengartner et al. 2010; Hirt und Wälti 2008).

Im Folgenden werden nun einige konkrete Fördermaßnahmen zum Zählen, zur Ablösung vom zählenden Rechnen, zu Grundvorstellungen von Rechenoperationen und zum Schreiben von Ziffern und Zahlen geschildert. Bei allen Maßnahmen ist auch zu bedenken, dass Schwierigkeiten beim Mathematiklernen, vor allem wenn sie später im Mathematikunterricht auftreten, „didaktogen", also durch den Mathematikunterricht selbst verursacht sein können (vgl. Grissemann und Weber 1982, S. 41 ff.). Dies ist sicher dann der Fall, wenn auf fehlende Lernvoraussetzungen nicht reagiert wurde, diese vielleicht gar nicht erst erkannt worden sind oder wenn schlicht das Bewusstsein für „Hürden im Lernprozess der Kinder" (Wartha und Schulz 2012) fehlt.

Zählfähigkeiten

Fast alle Kinder können zu Schulbeginn bis 10 zählen, die meisten sogar bis 20 (vgl. Abschn. 1.4 und 4.1.2). Kindern, die diese Fähigkeiten noch nicht aufweisen, sollte besondere Beachtung geschenkt werden. Dabei umfasst „zählen können" das Beherrschen der Zahlwortreihe *und* die erfolgreiche Anzahlbestimmung durch Zählen unter Berücksichtigung aller Zählprinzipien (vgl. Abschn. 1.3). Eine einfache Fördermöglichkeit ist, zahlreiche herausfordernde und variantenreiche Zählanlässe zu schaffen und die Kinder dabei zu fordern und zu beobachten. Reizvoll kann es sein, Zählaufgaben mit dem Schätzen zu verbinden: Wie viele Kastanien sind im Glas? Wer liegt mit seiner Schätzung am nächsten am Ergebnis? Das Bedürfnis zu zählen ergibt sich so ganz natürlich. Weitere Anregungen finden sich in Abschn. 4.1.3. Auch das in Abschn. 2.1.4 beschriebene niederländische Programm *Rekenhulp voor kleuters* liefert hierfür Ideen: Ausgehend beispielsweise von Bildern einer Familie werden die Kinder auf diese Situation eingestimmt: Gibt es in der eigenen Familie Vater, Mutter, Brüder, Schwestern? Dann wird auf Kärtchen (Abb. 2.2) verwiesen: Welche und wie viele Personen gibt es in dieser Familie? Das Kind soll sagen, wie es die Anzahl festgestellt hat, gegebenenfalls wird besprochen, wie man sie abzählen kann, bzw. es wird vorgeführt, wie man zählt. Anschließend sollen die Kinder selbstständig genauso vorgehen. Bei allen Zählübungen ist darauf zu achten, dass Strategien thematisiert werden – hierzu gehört z. B. die Möglichkeit, Elemente beim Zählen zu verschieben oder zu strukturieren, um die Übersicht zu behalten und noch zu zählende von bereits gezählten Elementen zu trennen. Auch die Bildung der Zahlworte kann Thema von Gesprächen sein – wo gibt es Regelmäßigkeiten, wo fällt ein Zahlwort aus der Reihe? Es ist nicht sinnvoll, in allen Fällen zwanghaft darauf zu warten, dass Kinder diese Erkenntnisse von selbst gewinnen.

Entscheidend bei all diesen Zählübungen ist eine intensive Beobachtung der Kinder, die hier auffällig sind. Orientieren kann man sich bei der Beobachtung an den Zählprinzipien (Abschn. 1.3.1):

- Kann das Kind die Zahlwortreihe? Bis zu welchem Zahlwort? (Gegebenenfalls können hier auch Abzählverse, Reime und Lieder unterstützend eingesetzt werden.)
- Ordnet das Kind jedem zu zählenden Element ein Zahlwort zu? (Das Thematisieren von Strategien wie z. B. das Verschieben von Elementen kann hierbei helfen.)
- Hat das Kind ein kardinales Verständnis für die Zahl? Kann es die Frage „Wie viele sind es?" beantworten? (Letztlich geht es um den Zusammenhang zwischen Zählzahl und Kardinalzahl: Das Zahlwort, das als letztes genannt wird, liefert die richtige Antwort auf die Frage „Wie viele?".)
- Zeigt das Kind beim Zählen Flexibilität? Beginnt es immer beim selben Objekt zu zählen? Hat es erkannt, dass „Zählen" universell einsetzbar ist – unabhängig von der Art und Lage der Gegenstände?

Ablösung vom zählenden Rechnen

Wie in Abschn. 1.4 und 4.3.1 ausführlich dargestellt, ist das zählende Rechnen offenbar eine erste informelle Strategie, die viele Kinder zeigen, wenn sie sich an additive oder subtraktive Fragestellungen heranwagen. Es ist allerdings dafür Sorge zu tragen, dass sich das zählende Rechnen – unter Verwendung der Finger oder auch ohne – nicht verfestigt und nicht nach dem ersten Schuljahr noch die einzige Rechenmethode bleibt. Jede Lehrerin und jeder Lehrer weiß, dass manche Kinder ausgesprochen findig sind, dieses zählende Rechnen zu verschleiern, nicht nur, indem sie die Finger versteckt benutzen, sondern auch, indem sie beispielsweise rhythmische Körperbewegungen oder Gegenstände im Klassenraum als Stütze zum Weiter- oder Rückwärtszählen verwenden. Da das zählende Rechnen letztlich „eine Sackgasse dar[stellt], aus der die Schüler im 2. oder im 3. Schuljahr kaum mehr herauskommen" (Lorenz und Radatz 1993, S. 117), müssen den Kindern bereits im Anfangsunterricht Mittel an die Hand gegeben werden, diese Phase zu überwinden.

Ein erster Schritt in diese Richtung ist, Kinder bereits „in den ersten Schulwochen (…) gezielt zu einer *strukturierten, nicht-zählenden* Anzahlerfassung hinzuführen" (Gaidoschik 2010, S. 210). Die Verwendung von Materialien wie Zwanzigerreihe, Zwanzigerfeld oder Rechenrahmen, bei denen die Rolle der Fünf als weiteres Strukturierungsmerkmal hervorgehoben wird, ist hierbei von zentraler Bedeutung. Zusammenfassungen von jeweils fünf Objekten erleichtern die Anzahlbestimmung, weil diese Anzahl von den Kindern statt durch Zählen unmittelbar durch Hinsehen (simultan) erfasst werden kann. Mithilfe der Fünfer- und Zehner-Strukturierung können sogar alle Mengen bis 20 auf einen Blick quasisimultan erfasst werden (vgl. Abschn. 4.2). Als erstes Arbeitsmittel mit diesen Vorteilen können die Finger sehr gut genutzt werden. Aufgrund der Strukturierung in zweimal fünf Finger, können Zahlen bis 10 ohne zu zählen schnell gezeigt werden. Diese nicht-zählende Anzahlerfassung sollte von den Kindern ganz bewusst gefordert werden, um ihnen eine Chance zu geben, vom zählenden

Rechnen wegzukommen. Werden die Kinder aufgefordert, bei Blitz-Leseübungen, z. B. am Zwanzigerfeld, zu begründen, welche Zahl sie gesehen haben, so wird mehr oder weniger bewusst schon früh das Verständnis für Zahlzerlegungen und Zahlbeziehungen geschult: „Das sind 7. Ich sehe fünf und noch zwei dazu!“ oder „Das sind 9, eins weniger als 10!“ oder auch „Das sind 6. Ich sehe drei und drei!“. Konkrete Übungen dazu sind:

- Zahlen auf einmal zeigen: mit den Fingern, am Zwanzigerfeld, am Rechenrahmen (s. auch Schipper 2009, S. 358)
- Blitzlesen: Bilder von Mengen im Zwanzigerfeld werden kurz gezeigt. Wer erkennt die Zahl?
- Wie viele fehlen noch? Betrachtet werden nur zehn Elemente (z. B. eine Reihe am Zwanzigerfeld, am Rechenrahmen). Eine Zahl bis zehn wird gezeigt. Die Kinder überlegen, wie viele zur Zehn fehlen
- Innere Bilder: Stell dir die Sieben vor. Wie sieht das am Zwanzigerfeld aus? Wie kannst du sieben mit den Fingern zeigen?

Eine weitere notwendige Voraussetzung dafür, dass Additionen oder Subtraktionen nicht zählend ausgeführt werden können, ist die Beherrschung der Zerlegungen aller Zahlen bis 10 (vgl. Abschn. 4.3.1). Diese Fähigkeit darf im Anfangsunterricht keinesfalls zu kurz kommen, ist sie doch eine zentrale Grundlage für zahlreiche Rechenstrategien beim Rechnen über den ersten Zehner hinaus. Voraussetzung für das Beherrschen der Zahlzerlegungen ist zunächst die Einsicht in die Tatsache, dass man Zahlen auf verschiedene Weise zerlegen kann ($5=4+1$, $5=2+3$, $5=5+0$, …). Diese Einsicht kann auf unterschiedliche Art und mit geeigneten Arbeitsmitteln gestützt und gestärkt werden. Wichtige Hinweise und Übungsmöglichkeiten dazu – beispielsweise mit der Schüttelschachtel oder mit Wendeplättchen – wurden bereits in Abschn. 4.1.4 und 4.3.1 vorgestellt. Für eine Ablösung vom zählenden Rechnen sind darüber hinaus die Verinnerlichung und das „Abrufen-Können“ der Zahlzerlegungen von zentraler Bedeutung. Dafür sind wiederum mentale Vorstellungen zu den Zahlzerlegungen nötig und damit einhergehend ein überlegter Einsatz von Material sowie das Bewusstsein dafür, dass die konkrete Handlung in eine mentale Denkhandlung überführt werden muss. Arbeitsmittel, die lediglich zählend verwendet werden können, sind dafür nicht geeignet. Abb. 4.38 zeigt einen sinnvollen Einsatz, wie die Zerlegungen der Zahl Zehn durch Handlungen und Sprechen verinnerlicht werden können. Gerade für Kinder, die Schwierigkeiten bei diesem Prozess der Verinnerlichung haben, gibt Schipper (2009, S. 95, 359 f.) wertvolle Anregungen. Er schlägt z. B. eine Partnerübung vor, bei der ein Kind beide Hände mit gespreizten Fingern auf den Tisch legt. Die Lehrkraft oder der Partner legt den Stift zwischen zwei Finger. Das Kind nennt die Zahlzerlegung. In einer zweiten Phase liegen die Hände des Kindes nach wie vor auf dem Tisch. Die Lehrkraft zeigt die Zahlzerlegung aber nicht mehr mit einem Stift, sondern nennt lediglich die erste Zahl, beispielsweise „7“. Das Kind ergänzt zur 10 und nennt die „3“. In einer dritten Phase werden die Hände abgedeckt. Die Finger sind nun nicht mehr direkt sichtbar, und es muss ein inneres Bild abgerufen werden (Schipper 2009, S. 95). Dieses Vorgehen folgt den Niveaustufen von Kutzer (1976, s. o.) bzw. den ersten drei Phasen im Vier-Phasen-Modell (Wartha und Schulz 2012). Weiterführende Übungen mit strukturiert gelegten Plättchen und Ziffernkärtchen finden sich ebenfalls bei Schipper (2009, S. 359 f.).

Auch das Beherrschen der Verdopplungsaufgaben ist auf dem Weg zum nicht-zählenden Rechnen ein wichtiger Schritt. Mit dieser Grundvoraussetzung und einem soliden kardinalen Zahlverständnis sind Aufgaben wie z. B. $7+8$ schnell lösbar: „Das sind $7+7$, also 14, und noch eins mehr. Das Ergebnis ist 15!“ Auch hier spielen mentale Vorstellungsbilder eine Rolle, wie das Beispiel zur Veranschaulichung der Aufgabe $6+6$ im Abschn. 4.2.2 zeigt.

Sollen Kinder auf das zählende Rechnen verzichten, so brauchen sie einen alternativen Weg, den sie verstehen, der sie sicher ans Ziel bringt und der für sie gegenüber dem zählenden Rechnen Vorteile bringt. Gaidoschik (2009, S. 123) schlägt vor, Strategien immer wieder zum Thema des Unterrichtsgesprächs zu machen. Gerade für schwächere Kinder kann es sehr hilfreich sein zu reflektieren, warum viele Aufgaben sehr leicht gelöst werden können, z. B. alle Aufgaben mit $+1$, $+2$, und auch deren Tauschaufgaben. Im Gespräch mit anderen Kindern wächst das Bewusstsein dafür, dass es geschicktere und ungeschicktere Lösungen geben kann. Zudem kann die Lehrkraft daraus auch wieder entscheidende diagnostische Informationen gewinnen. Wird die Aufgabe $1+8$ von einem Kind nicht als „leicht“ angesehen, mag das unter Umständen daran liegen, dass es die Kommutativität der Addition nicht verinnerlicht hat.

Grundvorstellungen zu Rechenoperationen

Viele Kinder sind bereits vor Schuleintritt in der Lage, Additions- und Subtraktionsaufgaben, die in Form von Rechengeschichten erzählt werden, handelnd oder mit Zählstrategien zu lösen (vgl. Abschn. 1.4). Im Anfangsunterricht müssen sie „ihr Vorwissen über Dazugeben und Wegtun konkreter Mengen weiterentwickeln zum rechnerischen Umgang mit *abstrakten Zahlen und mathematischen Symbolen*“ (Gaidoschik 2009, S. 71). Vor allem bei der Subtraktion kann die Verbindung von Handlung und Notation zu Verständnisproblemen führen. Notiert wird z. B. $5-2$, in der Vorstellung des Wegnehmens gibt es also eine Menge mit fünf Elementen, von der zwei Elemente weggenommen werden sollen. Es gibt Kinder, die versucht sind, aufgrund der symbolischen Notation sowohl eine Menge von fünf Elementen zu legen als auch eine Menge von zwei Elementen (vgl. dazu auch das Beispiel in Abb. 4.65 in Abschn. 4.4.2). Dann ist es für sie vermutlich schwierig zu wissen, wie mit diesen beiden Mengen nun umzugehen ist. Bei der Addition gibt es ja diese Entsprechung von Notation und Handlung: $3+2$ wird modelliert, indem drei Elemente und zwei Elemente gelegt und zusammengefügt werden.

Gaidoschik macht einige Vorschläge, wie der Übergang von der Handlungssituation zur Notation gut vollzogen und verstanden werden kann (2009, S. 74 ff.):

- Parallelisieren von Handlung und Notation: Ich habe 7 Murmeln – Notation: „7", dann nehme ich 5 weg – Notation: „–5", jetzt sind es insgesamt 2 – Notation: „= 2".
- Symbolische Notationen verbalisieren und in Handlungen übersetzen: Hierzu gehört auch das Erfinden von Rechengeschichten zu solchen symbolischen Notationen. Hilfreich ist das Denken in zeitlichen Abläufen: zuerst – dann, vorher – nachher.
- Nachdenken über „unmögliche" Aufgaben, wie z. B. 5 – 9: Gibt es dazu eine Handlung? Ein häufiger Fehler bei der Subtraktion im größeren Zahlenraum ist das Abziehen der kleineren von der größeren Zahl, ungeachtet dessen, ob die kleinere Zahl im Minuenden oder im Subtrahenden steht (s. Hinweise zur Fehleranalyse in Abschn. 5.2.1). Früh ein Bewusstsein dafür zu schaffen, dass die Subtraktion nicht kommutativ ist, ist deshalb sehr wertvoll.
- Auch die Interpretation von Abbildungen soll hier genannt sein: Können die Kinder Rechengeschichten zu Bildern erzählen und diese in die Symbolschreibweise übersetzen, so zeigen sie Verständnis für die Rechenoperationen. Zu beachten ist, dass Abbildungen meist auf sehr unterschiedliche Art interpretiert werden können und dass es in der Regel nicht nur eine passende Aufgabe zu einem Bild gibt. Den Argumentationen der Kinder zu *ihrer* genannten Aufgabe zuzuhören und gemeinsam zu reflektieren, kann wesentlich zum Verständnis der Rechenoperationen beitragen.

Schreiben von Ziffern und Zahlen

Beim Schreiben der Zahlen können neben Problemen mit der Feinmotorik, die ebenfalls gezielte Übungen nötig machen, insbesondere zwei Phänomene auftreten: Zum einen schreiben manche Schulanfänger Ziffern spiegelbildlich (vgl. Abb. 4.1 und 4.2), zum anderen kommt es vor, dass Kinder – wie in Abschn. 5.1 am Fall Oskar beschrieben – bei zwei- oder mehrstelligen Zahlen die Zehner und Einer vertauschen. Dies fällt allerdings häufig erst nach der Erweiterung des Zahlenraumes bis 100 auf.

Das korrekte Schreiben einzelner Ziffern gehört zum Standardprogramm des mathematischen Anfangsunterrichts (vgl. Abschn. 4.1.4, insbesondere Abb. 4.10), und die spiegelverkehrte Schreibweise ist meist eine vorübergehende Erscheinung, die sich legt, wenn vielfach Zahlen geschrieben und gelesen werden.

Das Vertauschen der Zehner und Einer muss hingegen als ein ernsthafteres Problem betrachtet werden. Lorenz und Radatz (1993, S. 119 f.) geben die „dringliche Empfehlung", die Kinder *nicht* darin zu bestärken, wenn sie die zweistelligen Zahlen in der gesprochenen Reihenfolge (also von rechts nach links) schreiben, weil diese Schreibweise sich verfestigt und bei mehrstelligen Zahlen im dritten und vierten Schuljahr sehr fehleranfällig wird. Stattdessen empfehlen sie als Übungen unter anderem das Schreiben von Zahlen in Tabellen, wobei die Schreibrichtung farbig mit einem Pfeil gekennzeichnet werden kann. Auch das Tippen von Zahlen auf dem Taschenrechner oder am Tablet erfordert die Notation von links nach rechts. Außerdem kann die sinnvolle Schreibweise der Zahlen von links nach rechts durch Zahlendiktate gefestigt werden (Lorenz und Radatz 1993, S. 120).

5.2.3 Die Rolle der Sprache

Auf die Bedeutung der Sprache sind wir schon mehrfach eingegangen (vgl. Abschn. 4.1.6 und auch Abschn. 5.2.2). Im Mathematikunterricht geht es dabei nicht nur um das Sprechen miteinander, sondern insbesondere auch um ein „inneres Sprechen". Gerade das „innere Sprechen" hat große Relevanz für die Begriffsbildung, für das Erkennen und Herstellen von Mustern und Beziehungen sowie für die Entwicklung des Denkens allgemein, weil es zur bewussten Verinnerlichung von mathematischen Inhalten beiträgt. Mögliche Zusammenhänge zwischen Rechenschwächen und gestörter Sprachrezeption beschreibt Nolte (2000) anhand von Fallstudien sehr ausführlich.

Die Bedeutung der Sprache im Unterricht ist also keineswegs darauf beschränkt, dass die Lehrperson fragt und die Kinder antworten, auch nicht in dem Sinne, dass durch diese Fragen die Aufmerksamkeit der Kinder auf bestimmte Sachverhalte gerichtet wird und die Fragen zur „vorstellungsmäßigen Vorwegnahme von geplanten Handlungen anleiten" (Lorenz und Radatz 1993, S. 172). Vielmehr werden mathematische Verfahren und Einsichten für die Kinder erst verfügbar, wenn sie sie *benennen* und *beschreiben* können. Auch deshalb sollte man gerade von den schwächeren Kindern immer wieder das Benennen von Eigenschaften und die sprachliche Begleitung von Handlungen fordern (vgl. Abschn. 5.2.2). Dabei sollten sich die sprachlichen Äußerungen der Kinder nicht auf Stichworte beschränken, sondern möglichst in ganzen Sätzen erfolgen.

Ein Beispiel dafür, dass „Schwierigkeiten, die sich als sprachliche darstellen, ihren Ursprung nicht in der Sprache haben müssen" gibt Nolte (2000, S. 36 f.): Ein Kind (Barbara, 8 Jahre, 2. Schuljahr) sollte vorgegebene Zahlen der Größe nach ordnen und tat dies auch. Allerdings betrachtete es die am größten *geschriebene* Zahl als die „größte". Bei Kindern dieses Alters wird man erwarten, dass sie bei Bezugnahme auf Zahlen das Wort „groß" im Sinne von „kommt später in der Zahlwortreihe" interpretieren und wissen, dass dabei die Größe (Höhe) der Zahlzeichen irrelevant ist. Wie wir allerdings bereits gesehen haben (Abschn. 1.4), ist die den Erwachsenen geläufige Unterscheidung von Referenzbereichen für jüngere Kinder nicht selbstverständlich; für sie ist vielmehr die Art der Fragestellung entscheidend.

Bei den zu Abb. 1.12 angesprochenen Aufgaben zeigte sich, dass Kinder im Vorschulalter z. B. bei der Aufgabe mit einer „großen Eins" und einer „kleinen Vier" übereinstimmend die Eins für die „größere" Zahl hielten. Jedoch auf die Frage, was *mehr* ist, eins oder vier, gaben die meisten dieser Kinder zur Antwort, dass 4 mehr sei als 1. Bei dieser Aufgabe wurde also von der Mehrzahl der Kinder die Frage nach der „größeren" Zahl auf das Zahlzeichen, die Frage nach dem Mehr aber auf die Anzahl bezogen. Da das Ordnen der Zahlen Thema des Unterrichts im ersten Schuljahr ist, sollten die Kinder im zweiten Schuljahr (und damit auch Barbara) die Aufforderung, Zahlen zu ordnen, richtig (d. h. im Sinne der Reihenfolge der Zahlen in der Zahlwortreihe) verstehen. Deshalb ist Barbaras Vorgehen ein deutliches Indiz dafür, dass ihr Zahlbegriff nicht altersgemäß ausgeprägt ist. Dennoch muss gerade bei schwächeren Kindern die Möglichkeit berücksichtigt werden, dass sie die Sprache der Erwachsenen anders verstehen als diese.

5.3 Kinder mit besonders guten Lernvoraussetzungen

Bezogen auf den vorschulischen Bereich und auf den mathematischen Anfangsunterricht liegen nur wenige Erfahrungsberichte über Kinder mit besonders ausgeprägten Lernvoraussetzungen in Mathematik vor. Etwas umfangreicher ist die Literatur über die Förderung mathematisch talentierter oder interessierter Grundschulkinder in den Klassenstufen 3 und 4. Manche der dort gewonnenen Einsichten können sicher auf den Anfangsunterricht übertragen werden.

5.3.1 Besondere Begabungen – Begriffsklärung

Zunächst ist es erforderlich abzugrenzen, was mathematisch besonders talentierte, interessierte oder begabte Kinder auszeichnet. Dazu kann man die gründliche Untersuchung von Käpnick (1998a) über mathematisch begabte Kinder in der Grundschule heranziehen. Käpnick hat – zunächst für Kinder des dritten und vierten Schuljahres – einen „Indikatorenaufgaben-Test“ entwickelt und erprobt. Die mathematisch besonders begabten Kinder unterscheiden sich demnach von den übrigen in einer Reihe von Merkmalen (Käpnick 1998a, S. 264 ff.): Vor allem können diese Kinder schon in der unmittelbaren Phase der Informationsaufnahme und -speicherung im Kurzzeitgedächtnis Sachverhalte nach zumeist sinnvollen mathematischen Gesichtspunkten strukturieren. Des Weiteren fallen sie auf durch

- Mathematische Phantasie
- Fähigkeiten im Strukturieren mathematischer Sachverhalte
- Fähigkeiten zum selbstständigen Transfer erkannter Strukturen beim Bearbeiten mathematischer Aufgaben
- Fähigkeiten zum selbstständigen Wechseln der Repräsentationsebenen
- Fähigkeiten zum selbstständigen Umkehren von Gedankengängen
- Mathematische Sensibilität (ein ausgeprägtes Gefühl für Zahlen und Muster)
- Umfangreiche mathematische Kenntnisse.

Fuchs (2002) hat durch gezielte Beobachtung im Mathematikunterricht überprüft, ob diese Merkmale auch schon bei Kindern im ersten Schuljahr erkennbar sind. Dies ist durchaus der Fall, insbesondere beim Umgehen mit geometrischen Mustern. So sollten die Kinder beispielsweise mit Plättchen, Stäben oder anderen Materialien bestimmte Muster so herstellen, dass sie daraus die Anzahl der Objekte leicht erkennen konnten (vgl. Abb. 5.3): „Bei diesen Übungen im Finden geometrischer Muster konnte ich feststellen, dass viele Kinder erstaunlich originelle Ideen entwickelten. Ich beobachtete aber ebenso, dass *nur einige* Schüler (…) systematisch vorgingen. Nach einem ganz bestimmten Prinzip versuchten diese Kinder viele Möglichkeiten aus einer Grundform zu entwickeln“ (Fuchs 2002, S. 20).

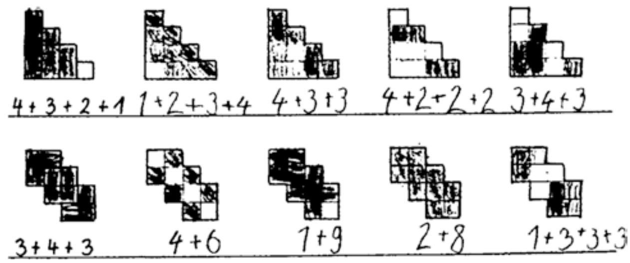


Abb. 5.3 Olivers Lösung zur Aufgabe „Male die Zehnermuster aus und schreibe passende Rechenaufgaben dazu". (Fuchs 2002, S. 23)

Wenn in diesem Abschnitt von mathematisch „talentierten", „interessierten" oder „begabten" Kindern gesprochen wurde, so muss man berücksichtigen, dass diese Begriffe nicht nur unscharf, sondern auch mit Wertungen belastet sind. Dies gilt insbesondere für den Begabungsbegriff. Eine sehr ausführliche Analyse dieses Begriffs findet man bei Fuchs (2006): Es gibt demnach eine Reihe von Merkmalen, die eine besondere mathematische Begabung kennzeichnen, insbesondere sind das die von Käpnick genannten (vgl. oben). Hinzu kommen Persönlichkeitsmerkmale wie (intellektuelle) Neugier, Anstrengungsbereitschaft und Beharrlichkeit. Das Vorhandensein dieser Merkmale muss nicht dazu führen, dass die Kinder tatsächlich ihre Fähigkeiten voll entwickeln oder gar herausragende Leistungen zeigen. Dazu bedarf es der Förderung[1], und nur bei einem Zusammenspiel aller fördernden „Katalysatoren kann sich eine sehr hohe mathematische Kompetenz zu einer weit überdurchschnittlichen mathematischen Performanz (Leistungsfähigkeit) entwickeln" (Fuchs 2006, S. 68). Wir sprechen im Folgenden von mathematisch besonders talentierten Kindern, weil der Begriff „Talent" emotional weniger belastet sein mag als der der „Begabung". Außerdem geht es, speziell im Anfangsunterricht, nicht um Leistungen, sondern um die Bedürfnisse der Kinder: Sie haben ein Recht darauf, ihren Erwartungen und Fähigkeiten entsprechende Anregungen zu bekommen.

5.3.2 Hinweise zur Förderung

Mit Unterstützung der Leibniz Universität Hannover und der Landesschulbehörde Hannover wurde einige Jahre lang ein Projekt zur Förderung mathematisch talentierter Grundschulkinder in den Klassen 1 bis 4 durchgeführt. Die Kinder wurden in kleinen Gruppen (acht bis zehn Kinder) einmal pro Woche am Nachmittag durch Gymnasial-

[1]Auch ein mathematisches Genie wie Carl Friedrich Gauß (1777–1855) brauchte das Glück, dass sein Talent bereits in seinen ersten Schuljahren entdeckt wurde und dass er zunächst durch seinen Lehrer Büttner und später durch den Professor Zimmermann eine angemessene Förderung erfuhr (vgl. Michling 1976).

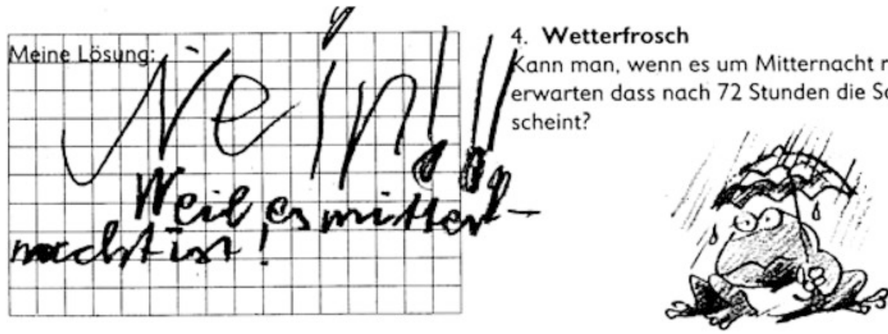


Abb. 5.4 Felix' Lösung einer Scherzaufgabe. (Eigene Unterlagen K. Hasemann)

oder Grundschullehrerinnen und -lehrer betreut. Dabei bearbeiteten die Kinder herausfordernde mathematische oder naturwissenschaftliche Aufgaben, die sie – je nach individuellem Wunsch – allein oder gemeinsam mit anderen zu lösen versuchten. Die am Projekt beteiligten Kinder wurden zwar von den Grundschulen benannt, mussten sich aber vor der Aufnahme einem recht strengen Auswahlverfahren unterziehen. Dabei wurden unter anderem die von Käpnick und Fuchs (2004) für das erste und zweite Schuljahr angepassten „Indikatorenaufgaben" eingesetzt, die – neben Gesprächen mit den Kindern, ihren Eltern und Lehrkräften – dazu beitragen sollten, die mathematisch besonders talentierten Kinder von denen zu unterscheiden, die „nur" besonders gut rechnen können.

Beim Umgang mit mathematisch talentierten Kindern des ersten und zweiten Schuljahres fiel auf, dass die meisten zwar bereit waren, die Lösung eines Problems anderen zu erläutern, dass sie aber nur widerwillig Lösungswege aufschreiben, aufzeichnen oder in anderer Weise darstellen wollten. Sie hielten dies schlicht für überflüssig: Die Lösung ist da und fertig. Die folgenden Beispiele verdeutlichen auch diesen Aspekt ihres Verhaltens.

Zum Einsatz kamen in diesem Projekt unter anderem auch Scherzfragen. Diese sind immer beliebt, auch wenn sie – wie viele Knobelaufgaben – nicht wirklich mathematisch anspruchsvoll sind. Auch Felix (ein Schüler des zweiten Schuljahres, der bereits seit seinem letzten Kindergartenjahr an dem Programm teilnahm), hatte seine Freude daran (Abb. 5.4).

Aufschlussreicher für die Art seines Denkens ist Felix' Lösung bei der folgenden Aufgabe, insbesondere, wenn man sie mit der von Alfons (Abb. 5.5, rechts) vergleicht.

Die Lösung von Felix (Abb. 5.5, links) zeichnet sich durch ihre verblüffende Einfachheit aus: Man notiere für alle vier Maschinen die 25 Arbeitstage und streiche diejenigen, an denen mit der defekten Maschine nicht mehr gearbeitet werden kann. Die dort entfallenden Arbeitstage müssen auf die drei übrigen Maschinen verteilt werden. Felix hielt es jedoch für überflüssig, dies und damit das Ergebnis (6 Arbeitstage) noch in irgendeiner Weise zu notieren: Man sieht's ja auch so. Alfons (ebenfalls ein Zweitklässler) löste die Aufgabe ganz ähnlich, nur dass er die Rechenaufgabe 18:3 = 6 auch noch aufschrieb.

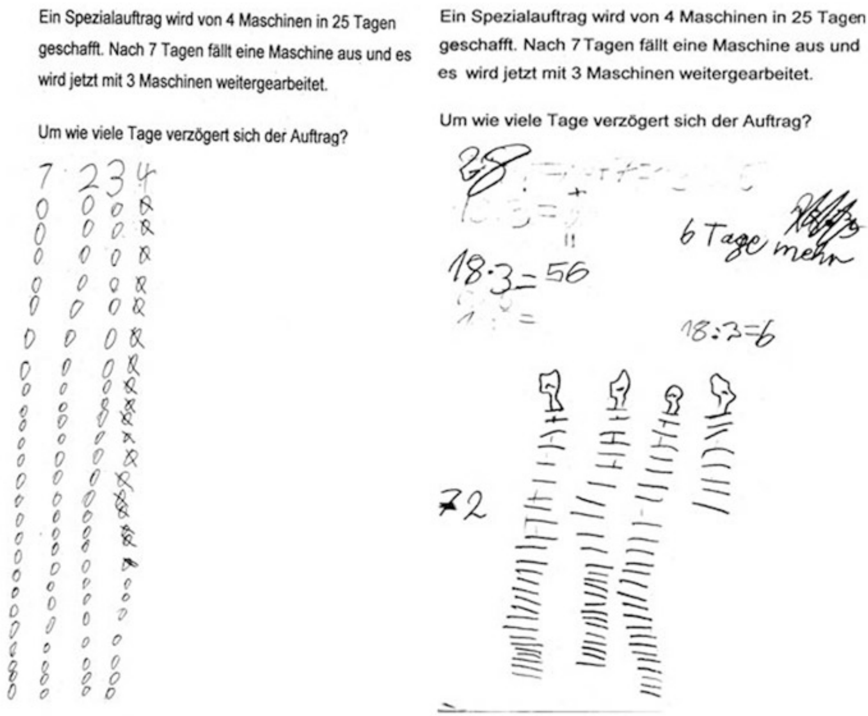


Abb. 5.5 Felix' und Alfons' Lösungen der Aufgabe mit dem Spezialauftrag. (Eigene Unterlagen K. Hasemann)

Auffällig ist bei ihm allerdings, dass er noch weitere Rechnungen notierte, insbesondere $18 \cdot 3 = 56$ (andere Rechnungen – oben links auf dem Blatt – wurden von ihm wieder ausradiert und sind unleserlich). Die Zahl 28 könnte die an den ersten sieben Tagen von allen vier Maschinen zusammen geleisteten Arbeitstage bedeuten, 72 wären dann die zu den insgesamt $4 \cdot 25 = 100$ noch fehlenden Arbeitstage. Falls diese Interpretation korrekt ist, wären diese Zahlen als ein rechnerisches Herantasten an die Lösung zu verstehen. Wie bei Felix ist die eigentliche Lösung jedoch das Resultat einer geeigneten – vermutlich erst mentalen und dann grafischen – Repräsentation der Problemsituation, nämlich der tatsächlichen Verteilung der Arbeitstage auf die vier Maschinen.

Felix bevorzugte diese grafische Darstellungsform auch bei anderen Aufgabenstellungen, wie das Beispiel in Abb. 5.6 zeigt (es sollten drei – oder mehr – unmittelbar aufeinander folgenden Zahlen mit den Summen 12 bzw. 60 gefunden werden).

Ist der Sachverhalt erst einmal „richtig" aufgeschrieben, so ist der Weg zu einer Verallgemeinerung nicht mehr weit.

Aus dem hier angesprochenen Projekt ist eine Sammlung von *Denkaufgaben für die 1. und 2. Klasse* hervorgegangen (Hasemann et al. 2006), in der jeweils Sequenzen von Aufgaben so aufbereitet und kommentiert sind, dass die ersten Aufgaben jeder Sequenz

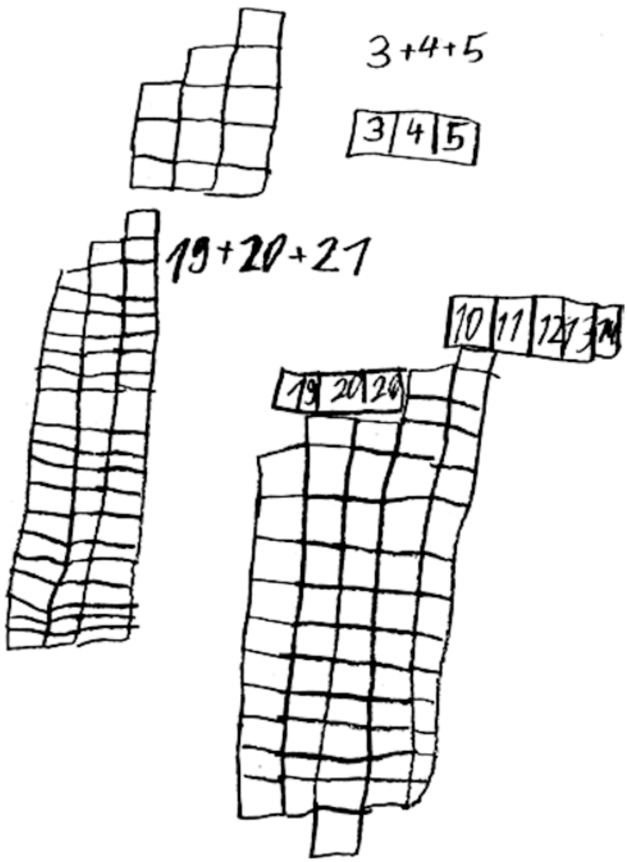


Abb. 5.6 Felix' grafische Repräsentation der Summen 12 bzw. 60 aus drei (oder mehr) direkt aufeinanderfolgenden Zahlen. (Eigene Unterlagen K. Hasemann)

auch im Klassenverband eingesetzt werden können (vgl. Abb. 5.7), während die weiteren auf Kopiervorlagen als anregende Aufgaben für talentierte und interessierte Kinder gedacht sind. Das Buch dient damit auch der Differenzierung.

Die Absicht beim Einsatz solcher Aufgaben ist es zum einem, für alle Kinder der Altersgruppe sinnvolle Anforderungen zu formulieren und damit für alle einen „Beitrag zur Entwicklung grundlegender mathematischer Kompetenzen (zu) leisten" (Fuchs 2002, S. 24). Zum anderen soll den Kindern die Möglichkeit gegeben werden, selbstständig Entdeckungen zu machen, Strukturen und Muster zu erkennen und diese darzustellen.

Sehr anregende Quellen für entsprechende Aufgaben sind auch das *Handbuch produktiver Rechenübungen* (Wittmann und Müller 1993, 2017) und die *Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte* (Hengartner et al. 2010). Die meisten Übungen sind so angelegt, dass die Kinder über das Üben der Basisfertigkeiten hinaus die Möglichkeit haben, Strukturen oder Beziehungen zu entdecken und ihre Ent-

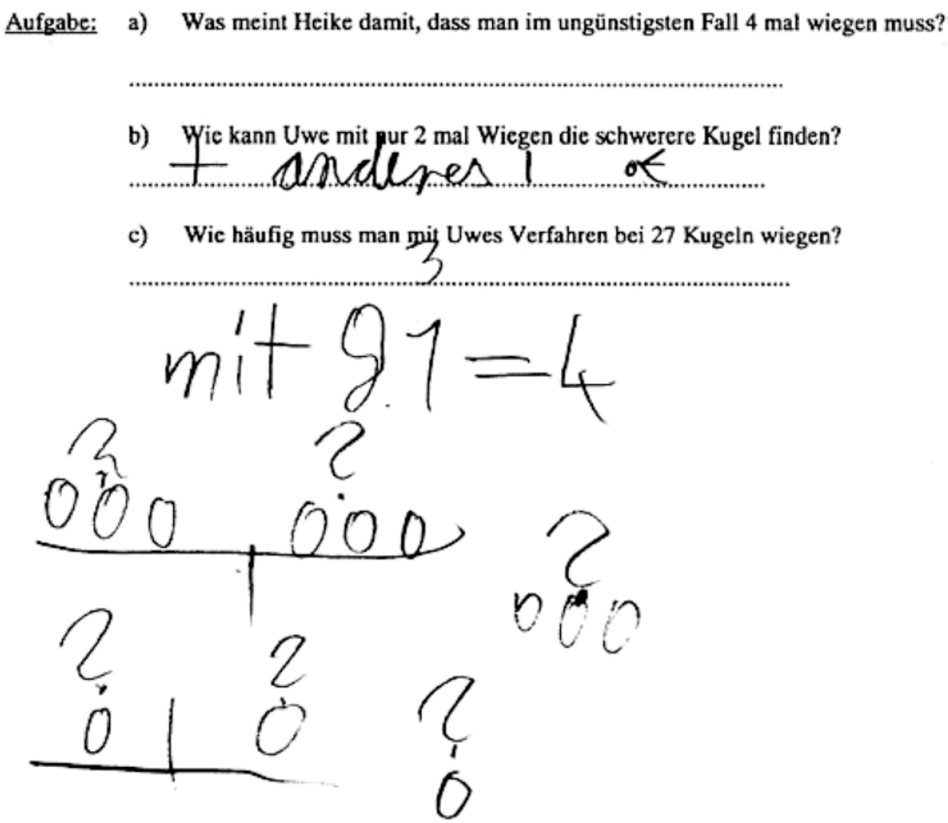


Abb. 5.7 Die Balkenwaage (Hasemann et al. 2006, S. 26): Von 9 gleich aussehenden Kugeln haben 8 das gleiche Gewicht, eine ist schwerer als die übrigen. Wie kann man mithilfe einer Balkenwaage die schwerere finden?

deckungen altersgemäß zu begründen. Beim „Würfelraten“ z. B. (Wittmann und Müller 1993, S. 51 ff.) ermitteln die Kinder zunächst die Augensummen beim Würfeln mit drei Spielwürfeln. Sie werden aber auch zum „reflektiven Üben“ angeregt. Beispielsweise bei der Aufgabe „Auf welche Weisen kann man die Augenzahl 10 mit drei Würfeln erreichen?“ können sie eine Systematik entdecken, die es ihnen erlaubt, alle möglichen Zahlzerlegungen zu finden.

Sammlungen von Aufgaben speziell für mathematisch talentierte Kinder in den Klassen 3 und 4 findet man bei Käpnick (2001) und für Kinder in den Klassen 1 und 2 bei Käpnick und Fuchs (2004). Weitere Anregungen bieten Bardy (2007), Bardy und Hrzán (1998, 2005), Christiani (1994), Käpnick (1998b), Lorenz (1994), Peter-Koop (2002), Radatz (1994), Spiegel und Selter (2003, Kap. 9), Wielpütz (1994, 1998) sowie viele Lehrerbände zu den neueren Lehrgängen für das erste und zweite Schuljahr.

Literatur

Aebli, H. (1980). *Denken: Das Ordnen des Tuns*, *Bd. 1*. Stuttgart: Klett-Cotta.

Bardy, P. (2007). *Mathematisch begabte Grundschulkinder. Diagnostik und Förderung*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Bardy, P., & Hrzán, J. (1998). Zur Förderung begabter Dritt- und Viertkläßler in Mathematik. In A. Peter-Koop (Hrsg.), *Das besondere Kind im Mathematikunterricht der Grundschule* (S. 7–24). Offenburg: Mildenberger.

Bardy, P., & Hrzán, J. (2005). *Aufgaben für kleine Mathematiker*. Köln: Aulis Verlag Deubner.

Benz, C., Peter-Koop, A., & Grüßing, M. (2015). *Frühe mathematische Bildung: Mathematiklernen der Drei- bis Achtjährigen*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Christiani, R. (Hrsg.). (1994). *Auch die leistungsstarken Kinder fördern*. Frankfurt a. M.: Cornelsen.

Fritz, A., Schmidt, S., & Ricken, G. (Hrsg.). (2017). *Handbuch Rechenschwäche: Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie*. Weinheim: Beltz.

Fuchs, M. (2002). Zahlen sind unsere Freunde – Anregungen zum Fördern mathematisch begabter Erstkläßler. *Grundschulunterricht, 7*(8), 19–24.

Fuchs, M. (2006). *Vorgehensweisen mathematisch potentiell begabter Dritt- und Viertklässler beim Problemlösen*. Berlin: LIT.

Gaidoschik, M. (2003). *Rechenschwäche – Dyskalkulie. Eine unterrichtspraktische Einführung für LehrerInnen und Eltern*. Horneburg: Persen.

Gaidoschik, M. (2009). *Rechenschwäche verstehen – Kinder gezielt fördern. Ein Leitfaden für die Unterrichtspraxis*. Buxtehude: Persen.

Gaidoschik, M. (2010). *Wie Kinder rechnen – oder auch nicht. Eine empirische Studie zur Entwicklung von Rechenstrategien im ersten Schuljahr.* Frankfurt a. M.: Peter Lang.

Gerster, H.-D. (1982). *Schülerfehler bei schriftlichen Rechenverfahren – Diagnose und Therapie*. Freiburg: Herder.

Grissemann, H., & Weber, A. (1982). *Spezielle Rechenstörungen – Ursachen und Therapie*. Bern: Huber.

Hasemann, K., Leonhardt, U., & Szambien, H. (2006). *Denkaufgaben für die 1. und 2. Klasse*. Berlin: Cornelsen – Scriptor.

Hengartner, E., Hirt, U., & Wälti, B. (2010). *Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht*. Zug: Klett und Balmer.

Hirt, U., & Wälti, B. (2008). *Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte*. Seelze-Velber: Kallmeyer/Klett.

Käpnick, F. (1998a). *Mathematisch begabte Kinder*. Frankfurt a. M.: Lang.

Käpnick, F. (1998b). Mathematisch begabte Grundschulkinder: Besonderheiten, Probleme und Fördermöglichkeiten. In A. Peter-Koop (Hrsg.), *Das besondere Kind im Mathematikunterricht der Grundschule*. Offenburg: Mildenberger.

Käpnick, F. (2001). *Mathe für kleine Asse – Klasse 3/4*. Berlin: Volk und Wissen.

Käpnick, F., & Fuchs, M. (2004). *Mathe für kleine Asse – Empfehlungen zur Förderung mathematisch interessierter Kinder im 1. und 2. Schuljahr*. Berlin: Volk und Wissen & Cornelsen.

Krauthausen, G. (2018). *Einführung in die Mathematikdidaktik*. Berlin: Springer Spektrum.

Kutzer, R. (1976). *Zur Kritik gegenwärtiger Didaktik der Schule für Lernbehinderte – Aufgezeigt an den Befunden der Überprüfung rechendidaktischer Entscheidungen*. Dissertation, Universität Marburg.

Kutzer, R. (1999). Überlegungen zur Unterrichtssituation im Sinne strukturorientierten Lernens. In H. Probst (Hrsg.), *Mit Behinderungen muss gerechnet werden* (S. 15–69). Solms: Jarick Oberbiel.

Lorenz, J. H. (1987). *Lernschwierigkeiten und Einzelfallhilfe*. Göttingen: Verlag für Psychologie.

Lorenz, J. H. (1994). Arithmetische Anregungen. In R. Christiani (Hrsg.), *Auch die leistungsstarken Kinder fördern* (S. 89–105). Frankfurt a. M.: Cornelsen.

Lorenz, J. H., & Radatz, H. (1993). *Handbuch des Förderns im Mathematikunterricht*. Hannover: Schroedel.

Lüken, M. (2012a). *Muster und Strukturen im mathematischen Anfangsunterricht – Grundlegung und empirische Forschung zum Struktursinn von Schulanfängern*. Münster: Waxmann.

Lüken, M. (2012b). Young children's structure sense. *Journal für Mathematik-Didaktik, 33,* 263–285.

Michling, H. (1976). *Carl Friedrich Gauß. Aus dem Leben des princeps mathematicorum*. Göttingen: Verlag Göttinger Tageblatt.

Milz, I. (1993). *Rechenschwächen erkennen und behandeln*. Dortmund: Borgmann.

Moser Opitz, E. (2001). *Zählen, Zahlbegriff, Rechnen*. Bern: Haupt.

Nolte, M. (2000). *Rechenschwächen und gestörte Sprachrezeption: Beeinträchtigte Lernprozesse im Mathematikunterricht und in der Einzelbeobachtung*. Bad Heilbrunn: Klinckhardt.

Peter-Koop, A. (Hrsg.). (1998). *Das besondere Kind im Mathematikunterricht der Grundschule*. Offenburg: Mildenberger.

Peter-Koop, A. (2002). Leistungsstarke Kinder im Mathematikunterricht – (k)ein Problem. *Die Grundschulzeitschrift, 160,* 6–7.

Peter-Koop, A., & Wollring, B. (2015). Geometrieunterricht für „hand-on-learners". *Lernen konkret. Bildung im Förderschwerpunkt geistige Entwicklung, 34*(3), 20–25.

Radatz, H. (1980). *Fehleranalysen im Mathematikunterricht*. Braunschweig: Vieweg.

Radatz, H. (1994). Geometrische Aktivitäten. In R. Christiani (Hrsg.), *Auch die leistungsstarken Kinder fördern* (S. 131–151). Frankfurt a. M.: Cornelsen.

Scherer, P. (1999). *Produktives Lernen für Kinder mit Lernschwächen. Fördern durch Fordern*. Leipzig: Klett.

Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Braunschweig: Schroedel.

Schipper, W., Wartha, S., & von Schroeders, N. (2011). *Birte 2. Bielefelder Rechentest für das zweite Schuljahr*. Braunschweig: Schroedel.

Schulz, A. (1998). Förderung „rechenschwacher" Schüler im Rahmen einer integrativen Lerntherapie – Ein Erfahrungsbericht. In A. Peter-Koop (Hrsg.), *Das besondere Kind im Mathematikunterricht der Grundschule* (S. 83–98). Offenburg: Mildenberger.

Selter, C. (2008). Wie junge Kinder rechnen lernen. In L. Fried (Hrsg.), *Das wissbegierige Kind* (S. 37–54). Weinheim: Juventa.

Spiegel, H., & Selter, C. (2003). *Kinder und Mathematik. Was Erwachsene wissen sollten*. Seelze: Kallmeyer.

Wartha, S., & Schulz, A. (2012). *Rechenproblemen vorbeugen. Grundvorstellungen aufbauen: Zahlen und Rechnen bis 100*. Berlin: Cornelsen.

Wielpütz, H. (1994). Zur Unterrichtskultur für einen differenzierten Umgang mit Mathematik. In R. Christiani (Hrsg.), *Auch die leistungsstarken Kinder fördern* (S. 83–88). Frankfurt a. M.: Cornelsen.

Wielpütz, H. (1998). Das besondere Kind im Mathematikunterricht – Anmerkungen aus der Sicht einer reflektierten Praxis, Beobachtung und Beratung. In A. Peter-Koop (Hrsg.), *Das besondere Kind im Mathematikunterricht der Grundschule* (S. 41–58). Offenburg: Mildenberger.

Wittmann, E. C., & Müller, G. N. (1993). *Handbuch produktiver Rechenübungen* (Bd. 1). Stuttgart: Klett.

Wittmann, E. C., & Müller, G. N. (2017). *Handbuch produktiver Rechenübungen* (Bd. 1). Stuttgart: Klett.

6 Geometrischer Anfangsunterricht

In der Grundschule sollen die Kinder lesen, schreiben und rechnen lernen – so ist es auch heute noch immer wieder zu hören. Ohne Zweifel gehört die Vermittlung der sogenannten Kulturtechniken zu den wichtigen und zentralen Zielen der Grundschule. Im mathematischen Anfangsunterricht stehen deshalb die Einführung der Zahlen und das elementare Rechnen im Mittelpunkt. Doch ist „Mathematik“ nicht nur Rechnen. A.I. Wittenberg (1968) nennt sie ein „Experiment des reinen Denkens“, und E.C. Wittmann unterstreicht mit Blick auf die Frühförderung, dass die Kinder Mathematik als das erfahren sollen, was sie ihrem Wesen nach ist, nämlich als „Wissenschaft von Mustern“ (2004, S. 52). Damit soll natürlich nicht gesagt sein, dass Mathematik nur auf einem hohen Abstraktionsniveau möglich wäre – ganz im Gegenteil. Um zu erfahren, was Mathematik ist, müssen die Kinder durch entsprechende Fragestellungen und Lernumgebungen in altersgemäßer Form an das mathematische Denken herangeführt werden. Im Zusammenhang mit den Zahlen haben wir immer wieder darauf hingewiesen, dass die Kinder die Gelegenheit haben müssen, Sachverhalte und Beziehungen selbst zu entdecken und ihre Einsichten zu begründen und darzustellen. Geometrische Fragestellungen eignen sich zum Entdecken, Begründen und Darstellen ganz besonders, weil sie sich häufig unmittelbar aus der alltäglichen Lebenswelt der Kinder ergeben. Etwa seit den 1970er-Jahren sind in Deutschland geometrische Inhalte in das Grundschulcurriculum aufgenommen worden, nicht nur mit Blick auf das dritte und vierte Schuljahr, sondern auch schon im Anfangsunterricht (zur Entwicklung des Geometrieunterrichts vgl. Franke 2007, S. 6 ff.). Allerdings werden – auch heute noch – geometrische Inhalte im Vergleich zum „Rechnenlernen“ häufig als weniger wichtig betrachtet. Sie werden manchmal als eine Art inhaltliche Reserve betrachtet, auf die nur zurückgegriffen wird, wenn alle anderen Dinge erledigt sind. Dabei ist die Geometrie gerade in der Grundschule eine echte „Schule des Denkens“ (Polya 1980), die zudem noch den Vorteil hat, über weite Strecken sehr anschaulich, lebensnah und attraktiv zu sein.

K. Hasemann und H. Gasteiger, *Anfangsunterricht Mathematik,* Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II, https://doi.org/10.1007/978-3-662-61360-3_6

Die Entwicklung geometrischer Fähigkeiten beginnt bereits sehr früh. In Abschn. 6.1 werden wesentliche Punkte dieser Entwicklung geschildert, mit besonderer Aufmerksamkeit wird dabei der Prozess der Begriffsbildung betrachtet. Anschließend gehen wir auf Ziele und Begründungen des Geometrieunterrichts (Abschn. 6.2) ein und schließlich im Abschn. 6.3 im Detail auf die geometrischen Inhalte des Anfangsunterrichts und auf Zusammenhänge zwischen geometrischen Vorstellungen und Zahlvorstellungen.

6.1 Geometrische Vorstellungen und Begriffe

Erfahrungen, die für den Geometrieunterricht von Bedeutung sind, machen die Kinder von Geburt an: Sie betrachten und erkunden den sie umgebenden Raum; sie klettern auf Stühle und Tische, um zu sehen, wie die Welt aus einer anderen Perspektive aussieht; sie lernen mit Begriffen wie lang, kurz, gerade, schräg, schief, oben, unten, vorn, hinten, dazwischen, daneben, innen, außen, rechts, links umzugehen; sie erfahren im Spiel, dass Gegenstände rollen, kippen können, dass sie sich ‚eckig' oder auch ‚rund' anfühlen.

6.1.1 Die Entwicklung des geometrischen Denkens

Untersuchungen über die natürliche Geometrie des Kindes (Piaget et al. 1975) und die Entwicklung des räumlichen Denkens (Piaget und Inhelder 1971) nehmen im Werk Piagets über die Entwicklung des Zahlbegriffs hinaus einen wichtigen Platz ein. Das Denken von Vorschulkindern ist – so entnimmt man es den Veröffentlichungen von Piaget – sehr stark auf die eigene Perspektive bezogen – die gesamte Periode des vor-operativen Denkens ist vom Egozentrismus geprägt. Piaget will mit diesem Begriff allerdings nicht nur die Tatsache kennzeichnen, dass die Kinder (noch) nicht fähig sind, den Blickwinkel anderer einzunehmen. Er erfasst damit auch „finalistische", „animistische" und „artifizielle" Naturerklärungen der Kinder. Das sind Erklärungen, die Naturerscheinungen aus ihrem Zweck heraus deuten („Bäume sind da, um Schatten zu spenden"), als Wesen mit einem Willen („der Wind ist böse, er heult, damit wir Angst haben") oder als von Menschen oder höheren Mächten „hergestellt" (Oerter und Montada 1987). Wie man weiß, kommen solche Deutungen nicht nur bei Vorschulkindern vor.

Dem Diagramm in Abb. 1.7 (Abschn. 1.2.3) ist zu entnehmen, dass man sich – auch im Hinblick auf geometrische Begriffe – mit einer Entwicklung in Stufen auseinandersetzte. In Piagets Terminologie ausgedrückt, erkennen die Kinder zunächst topologische und später projektive und euklidische Beziehungen und Begriffe. Unter topologischen Beziehungen versteht er solche, die sich bei Linien auf Aspekte wie „haben gemeinsame Punkte – keine gemeinsamen Punkte" beziehen oder sich mit Begriffen wie „innen – außen" oder „offen – geschlossen" kennzeichnen lassen. Es werden also Gradlinigkeit, Winkel oder Parallelität noch nicht berücksichtigt. Untersuchungen mit Kindern, die Piaget zu diesen

Feststellungen geführt haben, sind ausführlich bei Piaget und Inhelder (1971) und bei Wittmann (1982) beschrieben; im Folgenden genügen einige Beispiele.

Unter anderem sollten Kinder im Alter von drei bis vier Jahren vorgegebene Figuren abzeichnen, so z. B. den in Abb. 6.1 links gezeichneten Kreis sowie das Rechteck und das Quadrat. Rechts daneben ist der Versuch eines Kindes zu sehen, diese Aufgabe zu erfüllen.

In Abb. 6.2 sind zwei Zeichnungen von dreijährigen Kindern wiedergegeben. Die Vorlagen waren hier jeweils zwei unterschiedlich große geschlossene Figuren, von denen die kleinere im Inneren, außerhalb (aber sie berührend) bzw. auf dem Rand der größeren Figur lag (vgl. Piaget 1958, S. 366).

Kinder dieses Alters können offensichtlich sicher offene und geschlossene Figuren sowie „innen" und „außen" unterscheiden, aber ihre Nachzeichnungen des Quadrats und des Kreises sehen gleich aus (Abb. 6.1). Erst ab etwa knapp vier Jahren beginnen die Kinder euklidische Eigenschaften wie rechte Winkel, Parallelität und Länge zu berücksichtigen, wie Piaget und Inhelder (1971, S. 68) nach Auswertung ihrer Interviews mit Kindern formulieren.

Sehr eindrucksvoll sind die Experimente zur Entdeckung der Horizontalen (Maringer 1996; vgl. Hasemann 1999; Wittmann 1982, S. 6). Gezeigt wird den Kindern eine Flasche, die zur Hälfte mit rot gefärbtem Wasser gefüllt ist, zunächst aber nur als Vergleichsobjekt auf dem Tisch steht. Die Kinder erhalten ein Arbeitsblatt (Abb. 6.3), auf dem eine Flasche in acht verschiedenen Positionen dargestellt ist.

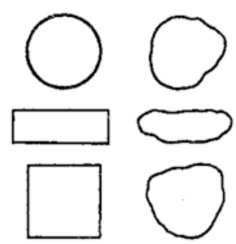


Abb. 6.1 Abzeichnen geometrischer Figuren. (Piaget 1958, S. 366)

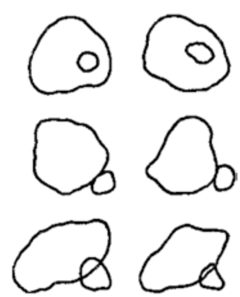


Abb. 6.2 Innen – außen – auf dem Rand. (Piaget 1958, S. 366)

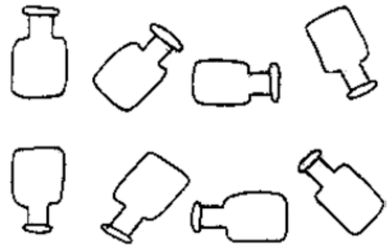


Abb. 6.3 Gedrehte Flaschen. (Hasemann 1999, S. 145)

Die Kinder werden aufgefordert, die erste Flasche oben links auf dem Arbeitsblatt derart mit roter Farbe anzumalen, dass sie genauso aussieht wie die Modellflasche, die zur Hälfte mit Himbeersaft gefüllt ist. Anschließend wird den Kindern erklärt, dass die übrigen Flaschen ebenfalls halb gefüllt und die Deckel fest verschraubt sind, sodass kein Saft herauslaufen kann. Sie sollen auch in diesen Flaschen den Stand des Saftes eintragen. Die jeweilige Position der Flasche wird ihnen mit Worten wie „die Flasche liegt auf der Seite“ oder „die Flasche macht einen Kopfstand“ erläutert. Die Modellflasche steht zu diesem Zeitpunkt weiterhin unberührt auf dem Tisch, weil die Kinder den Flüssigkeitsstand zunächst allein aufgrund ihrer Vorstellungen eintragen sollen. Erst in einem zweiten Durchgang wird zu jeder Lage der gezeichneten Flasche auch die Modellflasche in die entsprechende Position gebracht, sodass die Kinder jetzt ihr Bild mit dem Original vergleichen und es – wenn sie dies wollen – korrigieren können.

Piaget und Inhelder (1971, S. 443 ff.) nennen im Hinblick auf die Entdeckung der Horizontalen drei Stadien (das Entsprechende gilt auch für die Vertikale und andere geometrische Begriffe); das Erreichen des dritten Stadiums ist durch die Fähigkeit der Kinder zur Abstraktion gekennzeichnet:

1. Darstellungen der Flüssigkeit in der Flasche ohne Berücksichtigung der Lage und der Horizontalen (bis etwa 4 Jahre, vgl. Abb. 6.4)
2. Flüssigkeitsoberfläche parallel zum Boden des Gefäßes, unabhängig von dessen Lage im Raum (bis etwa 7–8 Jahre, vgl. Abb. 6.5)
3. Entdeckung der Horizontalen (beginnend ab etwa 7–8 Jahren, vollendet meist mit 9 Jahren, vgl. Abb. 6.6)

Abb. 6.4 GUN (3 Jahre, 9 Monate). (Hasemann 1999, S. 146)

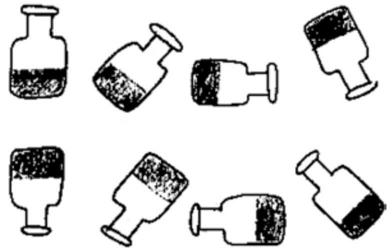


Abb. 6.5 JAU (4 Jahre, 8 Monate). (Hasemann 1999, S. 146)

Es ist für Erwachsene immer wieder verblüffend zu beobachten, dass die Kinder tatsächlich erst in relativ fortgeschrittenem Alter ein klares Bild vom Wasserstand in einer geneigten Flasche bekommen, obwohl die meisten frühzeitig Erfahrungen mit gekippten Flaschen haben dürften, z. B. beim Trinken aus einer Flasche. Beispiele aus einer Untersuchung von Maringer (1996) belegen dies sehr deutlich.

Typisch an der Darstellung von RAB (Abb. 6.6) ist, dass den Kindern vor allem die Flaschen in den geneigten Positionen Probleme bereiten (vgl. Piaget und Inhelder 1971, S. 445). So bemerkte z. B. MAR (7 Jahre 8 Monate) bei den Flüssigkeitsspiegeln in der stehenden und in der liegenden Flasche: „Es bleibt gerade", für die geneigte Position schloss er dies aber aus: „Geht nicht."

6.1.2 Geometrische Begriffsbildungen

Die Beispiele in den Abb. 6.4, 6.5 und 6.6 machen besonders deutlich, dass sich Betrachten, Wahrnehmen und Denken bei geometrischen Einsichten in einem langen Prozess gegenseitig bedingen und beeinflussen: Während ein fast vierjähriges Kind (Abb. 6.4) die Flüssigkeit in einer halb gefüllten Flasche auch beim Drehen als einen Klumpen in der Mitte der Flasche wahrnimmt oder zumindest so aufzeichnet, lösen sich sieben- bis achtjährige Kinder (Abb. 6.6) offensichtlich langsam von dieser Wahrnehmung und können sich vorstellen, wie sich der Flüssigkeitsstand beim Drehen einer Flasche ändert. Lediglich Erfahrungen zu machen bzw. etwas zu betrachten reicht offenbar nicht aus, um Einsichten zu gewinnen. Dazu werden mentale Bilder der Vorgänge gebraucht: Es ist Denken erforderlich.

Mit „Betrachten" ist das einfache Hinsehen oder Ansehen eines Bildes gemeint. Es bedeutet nicht notwendigerweise, dass z. B. in einem Bild Einzelheiten oder gar

Abb. 6.6 RAB (7 Jahre, 5 Monate); diese vier Bilder beschreiben die zeichnerische Abfolge bei der Darstellung des Flüssigkeitsstandes. Das rechte Bild gibt – laut RAB – den Stand korrekt wieder. (Hasemann 1999, S. 147)

Strukturen erkannt (also „wahrgenommen") werden: „Visuelles Wahrnehmen bedeutet nicht nur das Sehen durch das Auge. Der Wahrnehmungsprozess ist eng mit anderen Funktionen (Denken, Gedächtnis, Vorstellungen, aber auch Sprache) verbunden. Zu wenige Anregungen und Erfahrungen in der Vorschulzeit (…) beim Erkennen, Operieren und Speichern visueller Information können sich sehr verhängnisvoll auf das Verstehen in den verschiedenen Unterrichtsfächern auswirken" (Radatz und Rickmeyer 1991, S. 15). Zum „Wahrnehmen" gehört z. B. auch die Fähigkeit, räumliche Figuren in verschiedenen Lagen, Größen, Anordnungen usw. wiederzuerkennen und von anderen zu unterscheiden.

Am Anfang jeder Einsicht in geometrische Sachverhalte in der Grundschule stehen das Sehen und Betrachten und das eigene, reale Handeln. Zunächst geht es darum, mit Gegenständen oder Materialien Erfahrungen zu sammeln. Es zeigt sich, dass uns manche Dinge besonders schön oder regelmäßig erscheinen. Man kann sich natürlich fragen, was an diesen Dingen das Besondere ist. Doch dass die Objekte beispielsweise symmetrisch sind oder Muster bilden, mag zwar aus der Sicht der Lehrkraft, die das Folgende bereits im Blick hat, wichtig sein, aber nicht unbedingt für die Kinder. Für sie geht es zunächst einmal um Handlungen wie das Spiegeln, Falten, Legen und Basteln und um das Betrachten von Objekten. Dabei steht die Freude am eigenen Tun und an der Sache selbst im Mittelpunkt (vgl. Abb. 6.7).

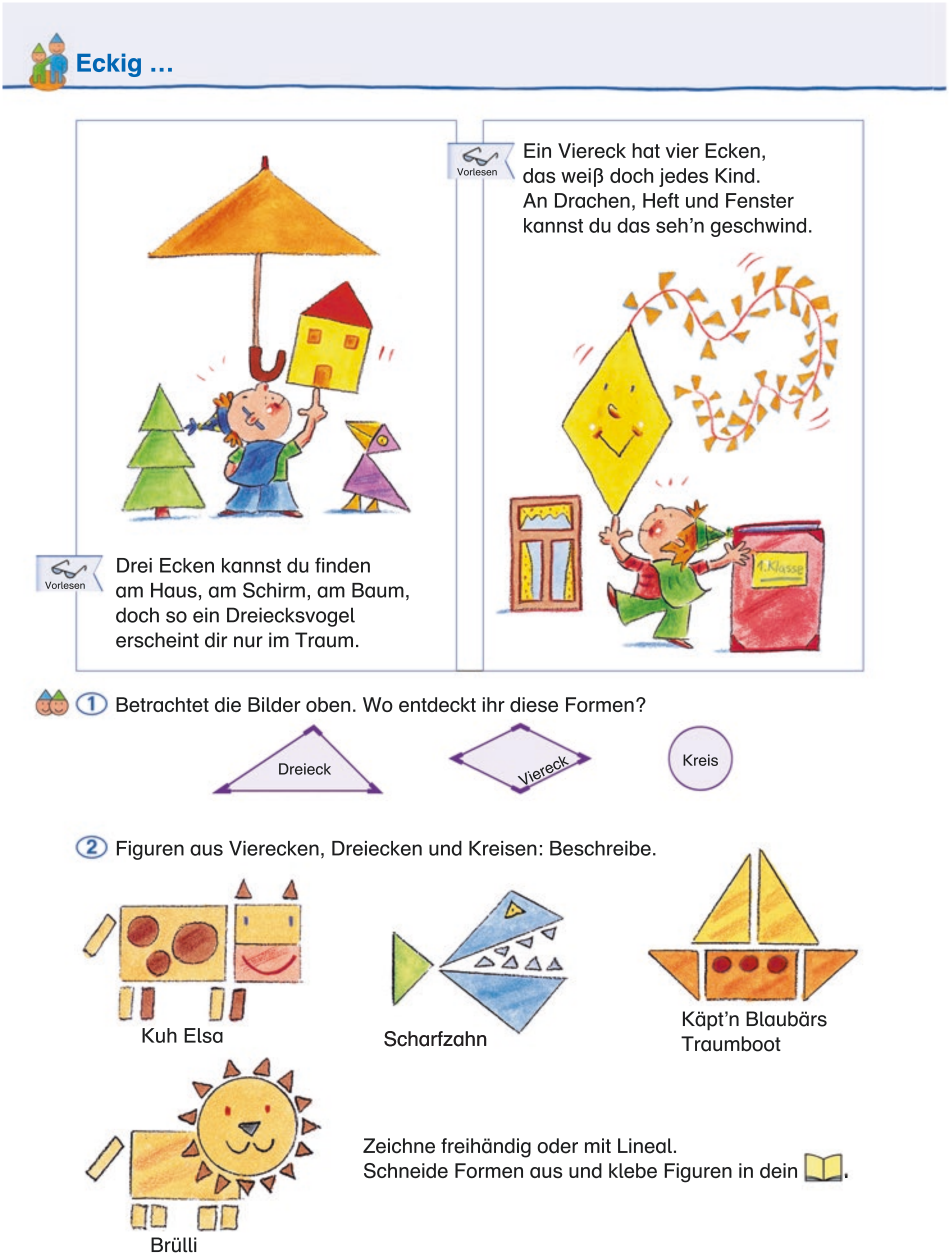
Wie können aber aus solchen Handlungen und Betrachtungen geometrische Begriffe entstehen? Eine mögliche Antwort auf diese Frage haben D. und P. M. van Hiele gegeben. Sie versuchten, den Prozess des Mathematiklernens mithilfe einer Folge von Denkniveaus zu beschreiben (van Hiele-Geldorf 1957; van Hiele 1957, 1976, 1981). Entstanden ist diese „Niveautheorie" aus der reflektierten Beobachtung von Schülerinnen und Schülern im Mathematikunterricht. Sie gibt deshalb auch heute noch wertvolle Impulse für das Verstehen des mathematischen Denkens der Kinder.

Die van Hieles kamen zu dem Schluss, dass jegliches Begreifen eines mathematischen Gegenstandes von Denkebenen aus erfolgt. Sie beschreiben folgende Niveaustufen (vgl. Franke 2007, S. 114):

0. Niveaustufe: räumlich-anschauungsgebundenes Denken
1. Niveaustufe: geometrisch-analysierendes Denken
2. Niveaustufe: geometrisch-abstrahierendes Denken
3. Niveaustufe: geometrisch-schlussfolgerndes Denken
4. Niveaustufe: strenge, abstrakte Geometrie

Der Grundgedanke bei diesem Modell ist, dass das Denken, Argumentieren und Kommunizieren auf jeder Ebene anderen Charakter hat:

> „Es gibt eine Sprache auf dem nullten Niveau, die es möglich macht, über direkte Wahrnehmungen zu sprechen. Man benötigt diese Sprache nicht, um auf die wahrgenommene Struktur zu reagieren. (…) Ursächliche, logische und andere Beziehungen, die in der



Eckig …

Drei Ecken kannst du finden
am Haus, am Schirm, am Baum,
doch so ein Dreiecksvogel
erscheint dir nur im Traum.

Vorlesen

Ein Viereck hat vier Ecken,
das weiß doch jedes Kind.
An Drachen, Heft und Fenster
kannst du das seh'n geschwind.

Vorlesen

1.Klasse

① Betrachtet die Bilder oben. Wo entdeckt ihr diese Formen?

Dreieck Viereck Kreis

② Figuren aus Vierecken, Dreiecken und Kreisen: Beschreibe.

Kuh Elsa

Scharfzahn

Käpt'n Blaubärs Traumboot

Brülli

Zeichne freihändig oder mit Lineal.
Schneide Formen aus und klebe Figuren in dein .

Abb. 6.7 Eckig oder rund? (Betz et al. 2016, S. 52 © Cornelsen/Mathias Hütter)

Struktur enthalten sind, werden durch die Sprache des ersten Niveaus ausgedrückt. Durch den Gebrauch dieser neuen Sprache werden neue Strukturen geboren. Diese wären nicht denkbar, wenn nicht die Sprache des ersten Niveaus entwickelt worden wäre. Das diskursive Denken verläuft zu einem großen Teil in dieser Sprache. Auch Deutungen werden hauptsächlich in dieser Sprache vorgenommen. Die Sprache des zweiten Niveaus beschäftigt sich mit den ursächlichen, logischen und anderen Beziehungen einer Struktur, die selbst schon nicht mehr visuell wahrnehmbar ist. (…) Die Diskussion über den logischen Zusammenhang von Sätzen in der Geometrie fällt in das Gebiet der Sprache des zweiten Niveaus. Wenn jemand Schwierigkeiten hat, einen solchen Zusammenhang zu begreifen, dann kann man ihm nicht dadurch helfen, dass man auf eine visuell wahrnehmbare Struktur verweist" (van Hiele 1981, S. 70 f.).

Bei dieser als Zusammenfassung seiner Vorstellungen gemeinten Darstellung der Denkebenen fällt zum einen auf, dass auch van Hiele der Sprache eine zentrale Rolle bei der Denkentwicklung und insbesondere bei der Entwicklung von Einsicht in geometrische Zusammenhänge zuweist (vgl. unter anderem die Abschn. 2.1.3, 4.1.6 und 5.2.3). Zum anderen fällt auf, dass er deutlich zwischen der Ebene der Wahrnehmung geometrischer Objekte und der Ebene des Erkennens von Strukturen in solchen Objekten oder zwischen solchen Objekten unterscheidet: Auf dem nullten Denkniveau werden geometrische Objekte an ihrer äußeren Gestalt erkannt; die Kinder „sehen" z. B., dass Objekte Dreiecke, Quadrate oder Kugeln sind oder dass Figuren wie z. B. in Abb. 6.8 (mehr oder weniger) symmetrisch sind, ohne dass dazu irgendwelche Definitionen erforderlich wären.

Notwendig ist es allerdings, dass über diese Objekte gesprochen wird. Das Sprechen über Beobachtungen auf dem nullten Denkniveau ist nötig, um auf dem ersten Denkniveau die Symmetrie von Figuren an ihren Eigenschaften erkennen zu können. Äußerungen auf dem nullten Denkniveau könnten z. B. sein: „die beiden Hälften sind gleich", „das sieht auf der einen Seite so aus, wie auf der anderen". Eigenschaften symmetrischer Figuren, wie die, dass ein Punkt und sein Spiegelpunkt (oder ein Punkt und der Punkt, der beim Falten genau auf dem Ausgangspunkt zu liegen kommt) auf einer Geraden liegen, die senkrecht zur Spiegelachse steht, und dass diese Punkte von der Achse den gleichen Abstand haben, werden auf dem ersten Denkniveau erkannt und formuliert. Erst wenn diese Eigenschaften erfasst sind, lässt sich feststellen, wie die Figur beschaffen sein müsste, damit beide Seiten wirklich genau gleich sind, die Figur also symmetrisch ist (das Blatt in Abb. 6.8 ist es offensichtlich nicht!).

Abb. 6.8 Erkennen von Symmetrie an der äußeren Gestalt einer Figur. (Rothmaler 2000, S. 246)

Besonders zu beachten ist zudem, dass die Kinder und Lehrkräfte zwar oftmals die gleichen Wörter benutzen, sich aber dennoch auf verschiedenen Denkniveaus befinden können, und dass damit die Gefahr des Missverstehens besteht. Beispielsweise kann es sein, dass ein Kind von einem „Dreieck" spricht und dabei die prototypische Vorstellung eines *gleichseitigen* Dreiecks vor Augen hat. Die Lehrkraft versteht unter „Dreieck" aber eine ebene Figur mit drei Ecken, die gleichseitig, gleichschenklig, spitz-, stumpf- oder rechtwinklig sein kann. Hört die Lehrkraft nun die Bezeichnung „Dreieck" vom Kind, so kann es sein, dass sie davon ausgeht, das Kind kenne Dreiecke und sei deshalb in der Lage, jedes Dreieck – egal welcher Gestalt – als solches zu erkennen. Zudem ist es nicht so, dass sich Kinder immer eindeutig einem Denkniveau zuordnen lassen. Unterhauser (2020) untersuchte das Begriffsverständnis von Drei- und Vierecken bei Vorschulkindern. Sie stellte fest, dass es Kinder gibt, die konsequent Ecken zählen um zu entscheiden, ob es sich um ein Viereck oder ein Dreieck handelt – diese Kinder könnte man Denkniveau 1 zuordnen. Andere Kinder begründen eher ganzheitlich („sieht so aus"), ob es sich um ein Viereck/Dreieck oder kein Viereck/Dreieck handelt – diese Kinder könnte man Denkniveau 0 zuordnen. Darüber hinaus gibt es aber auch Kinder, die sowohl Eigenschaften als auch ganzheitliche Argumente für eine Begründung heranziehen, ob es sich um ein Viereck/Dreieck handelt, oder nicht. So kann es sein, dass diese Kinder zunächst die Anzahl der Ecken bestimmen, dann aber verunsichert sind, und sagen, es sei doch kein Viereck/Dreieck, weil es nicht so aussieht.

Das „Erkennen der Objekte an ihrer äußeren Gestalt" im Sinne von van Hiele steht in engem Zusammenhang mit neueren Erkenntnissen über das Lernen: So stellen z. B. Clements und Sarama 2000 (vgl. auch Krauthausen 2018, S. 103) fest, dass die Fähigkeit, Muster zu erkennen, nicht am Beginn der geometrischen Wissensentwicklung steht, sondern deren Ergebnis ist. Doch man kann einerseits nur solche Strukturen und Muster erkennen, die man kennt, aber andererseits diese Strukturen nur kennenlernen, wenn man sie wahrnimmt. Van den Heuvel-Panhuizen (2003, S. 96) spricht mit Blick auf diesen – scheinbaren – Widerspruch von einem „Wunder des Lernens" (vgl. auch Abschn. 4.4.2; auf den Prozess des Lernens sind wir in Kap. 3 genauer eingegangen).

Van Hieles Niveautheorie weist der Beschäftigung der Kinder mit den Objekten ihrer alltäglichen Umwelt eine wichtige Rolle zu, nicht nur im Hinblick auf die Bildung geometrischer Begriffe, sondern auch auf die Entwicklung des mathematischen Denkens insgesamt. Die Beschäftigung mit geometrischen Objekten im mathematischen Anfangsunterricht ist der Einstieg in eine immer wiederkehrende Abfolge der Denkniveaus bei der Bildung von Begriffen und bei der Einsicht in Strukturen. Die von den van Hieles vorgeschlagene Vorgehensweise im Unterricht wurde später von Mitarbeitern des Utrechter Freudenthal-Instituts sehr detailliert ausformuliert (vgl. z. B. Treffers 1987; van den Heuvel-Panhuizen 2003). Sie kann jedoch auch auf andere Weise begründet werden, nämlich durch Bezugnahme auf Jerome Bruners „Spiralprinzip" (Wittmann 1975, S. 68). Laut Bruner sollte „der Anfangsunterricht in den Naturwissenschaften, Mathematik (…) so angelegt sein, dass diese Fächer mit unbedingter intellektueller Redlichkeit gelehrt werden, aber mit Nachdruck auf dem Erfassen und Gebrauchen der grundlegenden Ideen. Das Curriculum sollte bei seinem Verlauf wiederholt auf diese Grundbegriffe zurückkommen und auf ihnen aufbauen, bis der Schüler den ganzen formalen Apparat, der mit ihnen einhergeht, begriffen hat. (…) Man muss noch viel über die ‚Curriculum-Spirale‘ lernen, die auf höheren Ebenen immer wieder zu sich selbst zurückkommt“ (Bruner 1972, S. 26 f.).

Ein geometrischer Grundbegriff im Sinne Bruners ist der der Symmetrie. Im Anfangsunterricht werden symmetrische Figuren betrachtet, sie werden gespiegelt oder durch Falten oder Legen von Plättchen selbst hergestellt, und es wird geprüft, welche Figuren symmetrisch sind. Wenn man später auf diese Figuren zurückkommt, können die Schülerinnen und Schüler bei der rein geometrischen Beschreibung und Konstruktion der Figuren auf diese Erfahrungen zurückgreifen. (Zum Beispiel wird in der Bilderfolge in Abb. 6.9 demonstriert, wie man mithilfe des Faltens ein Spiegelbild erzeugen und die oben angesprochenen Beziehungen zwischen Punkt und Bildpunkt herausarbeiten kann.)

Noch später bilden – unter anderem – Erfahrungen mit der Konstruktion symmetrischer Figuren die Grundlage für deren mathematische Interpretation als Abbildungen der Ebene auf sich und damit eine Grundlage für die Kongruenzgeometrie. Wesentlich ist bei jedem dieser Schritte, dass er nicht mit Blick auf ein fernes Ziel, sondern um seiner selbst willen durchgeführt wird: Er wird durchgeführt, weil die jeweiligen Fragestellungen für Kinder dieses Alters interessant sind und mit ihren Mitteln unverfälscht (also: intellektuell redlich) beantwortet werden können. Aber es ist gerade für Lehrkräfte im Anfangsunterricht wichtig zu wissen, wie sich diese ersten – oftmals eher spielerischen und handelnden – Beschäftigungen mit einem mathematischen Inhalt in das oben genannte Spiralcurriculum einfügen. Erst dann kann bei der sprachlichen Auseinandersetzung in der jeweiligen Denkebene auf die entscheidenden Aspekte Wert gelegt werden, die für eine sachgemäße Begriffsbildung erforderlich sind. Sind der Lehrkraft die fachlichen Zusammenhänge und die erforderlichen Schritte bei der Begriffsbildung nicht bekannt, besteht die Gefahr, dass Handlung im Geometrieunter-

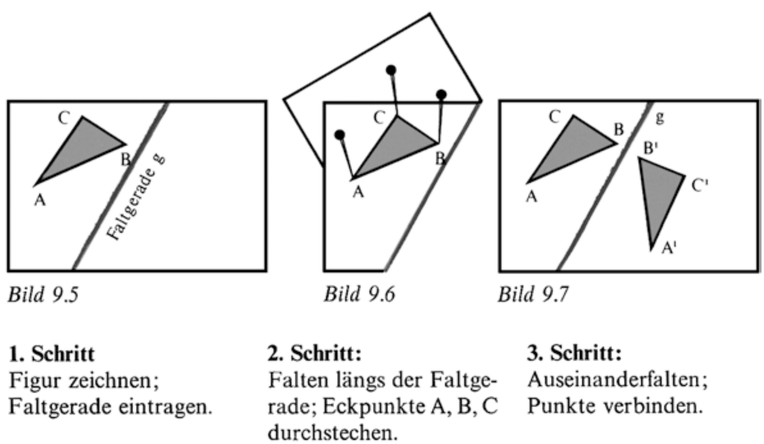


Abb. 6.9 Konstruktion von Symmetrien. (Bigalke und Schröder 1980, S. 181)

richt allein ein – auf methodischer Ebene durchaus wohlüberlegtes – Hantieren mit Gegenständen ist und die fachliche Begriffsbildung dabei auf der Strecke bleibt.

In neuerer Zeit hat sich insbesondere Wollring (z. B. 1998, 2006a) sehr intensiv mit der Rolle der Geometrie bei der Entwicklung des mathematischen Denkens befasst. Für ihn sind die folgenden zwei Aspekte wesentlich, wobei vor allem der erste in der Auseinandersetzung mit der geometrischen Begriffsbildung in diesem Abschnitt bereits angeklungen ist (2006a, S. 81 ff.):

- Formen und Gestalten sollten den Kindern früh begegnen. Deren Eigenschaften und Strukturen sollen von ihnen handelnd erlebt werden, wobei das Handeln von einem Gespräch begleitet wird. Um das „Sprechen über“ die Dinge zu erleichtern, werden Sprachangebote – Vorschläge, wie man die Gegenstände und ihre Eigenschaften kennzeichnen könnte – von der Lehrkraft gemacht. Die sprachliche Kennzeichnung allein den Kindern zu überlassen, würde bedeuten, sie zu überfordern.
- Die Kinder sollen das Erlebte oder Hergestellte in irgendeiner Weise dokumentieren, also aufschreiben oder aufzeichnen: „Geometrie besteht darin, Pläne zu machen und (…) Pläne zu lesen“ (Wollring 2006a, S. 83). Konkrete Beispiele folgen in Abschn. 6.3. (s. auch Wollring 2003, 2006a, b).

6.2 Begründung und Zielsetzung des geometrischen Anfangsunterrichts

Geometrische Inhalte im Unterricht der Primarstufe zu behandeln, wurde in der Historie nicht immer als zwingend notwendig erachtet. Eine Wende diesbezüglich waren der Schullehrgang Mathematik der DDR von 1963 und die Beschlüsse der Kultusministerkonferenz der Bundesrepublik Deutschland von 1968 und 1976, in denen die Geometrie explizit auch für die Grundschule festgeschrieben wurde (vgl. hierzu sowie zu dem Folgenden Franke 2007, S. 6 ff.). In den letzten Jahren bzw. Jahrzehnten wurde die Rolle der Geometrie im Grundschulunterricht betont, und es gab vielfältige Bestrebungen, den Geometrieunterricht zu stützen. Dennoch scheint es vielen Lehrkräften in der Grundschule nach wie vor nicht leicht zu fallen, die Zusammenhänge der geometrischen Grundideen so zu durchdringen, dass diese in wohlüberlegten Unterrichtskonzepten umgesetzt werden können. Schwierigkeiten bereitet vor allem die Tatsache, dass Geometrie im Allgemeinen „nicht als Lehrgang konzipiert“ und daher „nicht so systematisch entwickelt“ wird (Krauthausen 2018, S. 101). Gerade im Anfangsunterricht kann deshalb die Gefahr bestehen, dass geometrische Aktivitäten, die das konkrete Handeln in den Mittelpunkt stellen, mehr oder weniger unverbunden aneinandergereiht werden. Ein stufenübergreifendes didaktisches Konzept fehlt, „das den fachlichen Strukturen der Geometrie“ und „den jeweiligen psychologischen Voraussetzungen der Lernenden“ gleichermaßen gerecht wird (Wittmann 1999, S. 209).

Dabei gibt es gute Gründe für die durchdachte – und nicht nur beiläufige – Behandlung geometrischer Inhalte im mathematischen Anfangsunterricht (Wittmann 1999, S. 206 f., vgl. auch de Moor 1991):

- „Geometrische Vorstellungen, besonders für das Lesen von Karten, Plänen und Skizzen, sind grundlegend dafür, dass wir uns im Erfahrungsraum orientieren und zielgerichtet bewegen können.
- In vielen (…) Berufen sind einschlägige geometrische Kenntnisse, die in der heutigen Zeit auch den Umgang mit (…) bildhafter Software einschließen, unerlässlich.
- Die Geometrie leistet einen fundamentalen Beitrag zur Entwicklung intelligenten Verhaltens ganz allgemein. (…) Unsere Sprache weist dementsprechend einen großen Reichtum an geometrischen Metaphern auf, deren wir uns vielfach gar nicht mehr bewusst sind: Be-greifen, Er-fassen, Unter-fordern usw. (…) Raumerfahrungen behalten auch während der Psychogenese im Kindesalter ihren starken Einfluss auf die Denkentwicklung: Aus den sensomotorischen Schemata des Babys erwachsen geometrische Vorstellungen, die in der weiteren Entwicklung zunehmend differenziert, artikuliert und miteinander koordiniert werden. (…) Viele Menschen haben ihre Stärken ausgesprochen im geometrischen Bereich.
- Geometrische Vorstellungen durchdringen in starkem Maße auch andere Inhaltsbereiche der Mathematik, insbesondere die Arithmetik und die Analysis. (…)
- Wie kein anderer Bereich weist die Geometrie einen großen Reichtum an anschaulichen Problemen aller Schwierigkeitsniveaus auf und ist damit von der Grundschule an für die allgemeinen Lernziele ‚Entdecken von Strukturen' und ‚Argumentieren' (…) ergiebig" (Wittmann 1999, S. 206 f.).
- Zur Beschreibung geometrischer Vorstellungen werden laut Franke (2007, S. 100 ff.) verschiedene Typen von Begriffen erarbeitet und verwendet: Objektbegriffe (wie z. B. Würfel, Quader, Dreieck), Eigenschaftsbegriffe (wie z. B. rechteckig, Seitenfläche, Kante) sowie Relationsbegriffe (wie z. B. steht senkrecht auf, ist parallel zu, ist genauso lang wie). Diese Begriffstypen treten auch in anderen Bereichen der Mathematik auf.
- Die KMK-Bildungsstandards (KMK 2004) benennen im Hinblick auf die Geometrie nicht nur inhaltliche Kompetenzen, die traditionell zum Geometrieunterricht gehören (sollten), wie „sich im Raum orientieren", „geometrische Figuren erkennen, benennen und darstellen" und „Flächen- und Rauminhalte vergleichen und messen", sondern auch Fähigkeiten, die sich auf Muster und Strukturen beziehen, wie z. B. das Erkennen, Entwickeln, Beschreiben und Fortsetzen von geometrischen Mustern.

Um der Beliebigkeit geometrischer Aktivitäten im Geometrieunterricht der Grundschule entgegenzuwirken, erscheint es geboten, didaktische Konzeptionen „sowohl mit Blick auf die anderen Schulstufen als auch in Verbindung mit anderen mathematischen Bereichen, insbesondere der Arithmetik, aber auch des Sachrechnens und der Arbeit mit Größen" (Franke 2007, S. 15) zu durchdenken.

Vor allem wenn im Sinne eines Spiralcurriculums die Anschlussfähigkeit geometrischer Bildungsprozesse gewährleistet werden soll, erweist es sich als sinnvoll, sich auf Grundideen (Wittmann 1999) oder Kernideen (Franke 2007) des Faches zu beziehen.

Für den Geometrieunterricht beschreiben Wittmann und Müller sieben Grundideen, die durchaus über die Grundschule hinausgehen, aber „für ein Verständnis der Fachstruktur unerlässlich sind" (Wittmann und Müller 2012, S. 159 f., Wittmann 1999, S. 210 ff.). Die Auflistung der Grundideen erfolgt hier in leicht veränderter Reihenfolge und wird bereits bezogen auf den geometrischen Anfangsunterricht:

1 Formen in der Umwelt: Reale Gegenstände, ihre Lage im Raum und Operationen mit ihnen sowie Beziehungen zwischen ihnen können mithilfe geometrischer Begriffe beschrieben werden. Hierzu werden Raum-Lagebeziehungen (das Buch liegt auf dem Tisch, das Bild hängt zwischen zwei Fenstern) und die Objektbegriffe zu Flächen- und Körperformen benötigt.
2 Formen und ihre Konstruktion: Tragendes Gerüst der elementargeometrischen Formenwelt ist der dreidimensionale Raum, der von Formgebilden unterschiedlicher Dimensionen bevölkert wird: 0-dimensionale Punkte, 1-dimensionale Linien, 2-dimensionale Flächen und 3-dimensionale Körper. Geometrische Formen lassen sich auf vielfältige Weise herstellen (falten, formen, schneiden, zeichnen,…). Dadurch werden ihnen Eigenschaften aufgeprägt.
3 Geometrische Gesetzmäßigkeiten und Muster: Es gibt viele Möglichkeiten, Punkte, Linien, Flächen und Körper so in Beziehung zu setzen, dass geometrische Muster und Strukturen entstehen. Diese Muster und Strukturen können bereits auf inhaltlich-anschaulichem Niveau sauber begründet werden. Beispiele sind hier Parkette oder Bandornamente.
4 Operieren mit Formen: Geometrische Figuren und Körper lassen sich verschieben, drehen und spiegeln, in Teile zerlegen, mit anderen Figuren und Körpern zu komplexeren Gebilden zusammensetzen usw.
5 Koordinaten: Zur Lagebeschreibung von Punkten mithilfe von Zahlen können auf Linien und Flächen Koordinatensysteme eingeführt werden. Hier gibt es bereits propädeutische Möglichkeiten für den Anfangsunterricht (vgl. Abschn. 6.3.6).
6 Maße und Formeln: Exakte Längen- oder andere Messungen sind noch nicht Thema des Anfangsunterrichts, wohl aber können z. B. Flächen mit verschiedenen, auch verschieden geformten Plättchen ausgelegt werden.
7 Übersetzung in die Zahl- und Formensprache: Raumgeometrische Sachverhalte und Problemstellungen, aber auch Zahlbeziehungen und abstrakte Beziehungen können in die Sprache der Geometrie übersetzt und geometrisch bearbeitet werden. Während z. B. Schrägbilder von Würfeln, Grundrisse und Landkarten erst Thema der höheren Klassen der Grundschule sind, kommen für den Anfangsunterricht geometrische Darstellungen von Zahlbeziehungen infrage, wie z. B. die Darstellung der Summe $3 + 4 + 5$ als Treppe oder figurierte Zahlen (vgl. Abb. 6.36 in Abschn. 6.3.8).

Die verschiedenen Grundideen werden im Laufe der Schulzeit immer wieder aufgegriffen (vgl. die Anmerkungen zum Spiralprinzip in Abschn. 6.1.2). So haben die Kinder eine Chance, ihr Wissen anzureichern und sukzessive immer mehr zu vertiefen. Grundschulunterricht hat hierbei keine „Zuliefererfunktion“ für die weiterführenden Jahrgangsstufen, sondern es werden bereits in frühen Jahren durch die Auseinandersetzung mit geometrischen Themen zentrale mathematische Fähigkeiten erworben (vgl. Radatz und Rickmeyer 1991, S. 8). Unter anderem entwickeln sich durch die Beschäftigung mit geometrischen Aufgabenstellungen spezifische Denkweisen, wie z. B. Klassifizieren, systematisches Problemlösen oder das Erkennen von Zusammenhängen und Regeln; im Geometrieunterricht erwerben Kinder grundlegende kognitive Kompetenzen wie räumliches Vorstellungsvermögen, und nicht zuletzt dient der Umgang mit geometrischen Aufgabenstellungen auch der Umwelterschließung. Auf der Basis der Erfahrungen von Kindern mit ihrer Umwelt können geometrische Eigenschaften, Beziehungen oder Ordnungsstrukturen herausgearbeitet und bei der Lösung von Problemen angewandt werden.

Bei aller Berücksichtigung der fachlichen Grundideen ist jedoch vor allem im Übergangsbereich Kindertagesstätte – Grundschule darauf zu achten, dass Lern- und Arbeitssituationen nicht zu sehr auf geometrische Inhalte zugespitzt werden (Wollring 2006a, S. 81). Ausgangspunkt für erste geometrische Begegnungen sollen spielerische Situationen sein, die gemeinsam reflektiert und in denen einfache Beschreibungen oder Begründungen gefordert werden (vgl. Gasteiger und Benz 2012, Wollring 2006a, 2008a, b).

Im geometrischen Anfangsunterricht werden realitätsgebundene Fragestellungen behandelt, die mithilfe konkreter oder mentaler Handlungen zu beantworten sein sollen. Solche Fragestellungen haben de Moor und van den Brink (1997) zusammengestellt:

- Die Kinder sollen unter Verwendung der elementaren Begriffe für Raum- und Lagebeziehungen ihre eigene Position und die anderer Objekte im Raum ermitteln können. Im Unterricht werden Pläne, Grundrisse, Aufrisse, Bilder und andere Mittel zur Beschreibung des Raumes verwendet *(Orientieren im Raum und in der Ebene)*.
- Angesprochen werden können solche Phänomene der Realität, die sich mit geraden Linien erklären lassen, wie z. B. Schattenwürfe durch die Sonne oder eine Lampe, und Fragestellungen, die die Sichtbarkeit oder Unsichtbarkeit von Objekten von gewissen Standorten aus zum Inhalt haben *(Abbilden und Anvisieren)*.
- Die Kinder sollen lernen, bei einfachen Fragestellungen anschauliche Erklärungen zu geben *(Anschauliches Denken und „Beweisen“)*.
- Durch Spiegeln, Verschieben, Drehen, Vergrößern und Verkleinern von Figuren sowie das Verändern und Umstrukturieren von Figuren und Körpern ergeben sich ebenfalls interessante geometrische Fragestellungen *(Transformieren)*.
- Ein weiterer Kernbereich zeigt sich im Interpretieren, Zeichnen, Konstruieren und Messen von Figuren mithilfe von Modellen, Bildern oder Grafiken, auch unter Verwendung von Hilfsmitteln zum Messen *(Konstruieren und Messen)*

6.3 Geometrische Inhalte im Anfangsunterricht

Zur unterrichtlichen Umsetzung dieser Themen gibt es viele Anregungen in der Literatur und in Schulbüchern, außerdem sind der Fantasie von Lehrkräften und Kindern – außer technischen oder handwerklichen – kaum Grenzen gesetzt. Im Folgenden werden zu den in Abschn. 6.2 angesprochenen Grundideen Anregungen und Hinweise für den geometrischen Anfangsunterricht gegeben. An einigen Stellen kann dies allerdings nur exemplarisch erfolgen.

6.3.1 Formen in der Umwelt

Dreidimensionale Körper sind in der alltäglichen Umwelt der Kinder ebenso zu entdecken wie zweidimensionale Flächen. Man kann sich dabei an Beispielen wie in Abb. 6.7 oder 6.10 orientieren. Beim Suchen und Entdecken von Formen in der Umwelt ist jedoch immer zu berücksichtigen, dass die Realobjekte selten dem abstrakten Begriff z. B. einer idealen Kugel oder eines idealen Würfels entsprechen. Dass beispielsweise Bälle die Form einer Kugel haben, ist schnell zu erkennen, und gerade an Bällen lassen sich einige Eigenschaften der Kugel leicht entdecken (Abb. 6.10). An einer Eiskugel würde man diese Eigenschaften hingegen weniger gut finden; es kann aber durchaus bereits in Jahrgangsstufe 1 diskutiert und begründet werden, ob und warum es sich dabei um eine Kugel handelt oder nicht.

Beim Würfel kommen noch weitere Aspekte hinzu: Viele Kinder verbinden mit dem Begriff „Würfel“ einen Spielwürfel. Diesen Würfel kennen sie, das wichtigste Kriterium bei seiner Identifikation dürften aber die Zahlbilder auf den sechs Flächen sein und nicht die Tatsache, dass diese Flächen alle gleich groß und Quadrate sind. Ein anderes Problem sind unterschiedliche Wortbedeutungen in der Alltagssprache und in der mathematischen Fachsprache. Im Alltag werden die Begriffe „Zuckerwürfel“ oder „Würfelzucker“ verwendet, dieser Realgegenstand ist aber, geometrisch betrachtet, meist ein Quader und kein Würfel. Die Kinder müssen ein Bewusstsein dafür bekommen, dass sich die Alltagssprache und die Fachsprache nicht zwangsläufig decken. Eines der markantesten Beispiele ist die Bedeutung des Wortes „senkrecht“: In der Alltagssprache ist damit meist „von oben nach unten“ – also „lotrecht“ – gemeint, während „senkrecht“ in der Geometrie ein Relationsbegriff ist (zwei Geraden können „aufeinander senkrecht stehen“).

Kugeln und Würfel in der Umwelt zu erkennen, fällt vielen Kindern in der Regel nicht schwer. Sehr viel weniger eindeutig ist dagegen zu erkennen, dass beispielsweise die Keks- und die Fischdose in Abb. 6.10 die gleiche Form (einer Säule bzw. im Fachterminus: eines Zylinders) haben. Die „äußeren Gestalten“ dieser Körper unterscheiden sich in den Augen der Kinder möglicherweise so sehr, dass sie sie nicht als „gleichartig“ betrachten wollen. Dennoch wäre die Diskussion darüber eine wichtige Erfahrung, um später die Notwendigkeit von formalen Definitionen in der Geometrie und in der Mathematik überhaupt einzusehen.

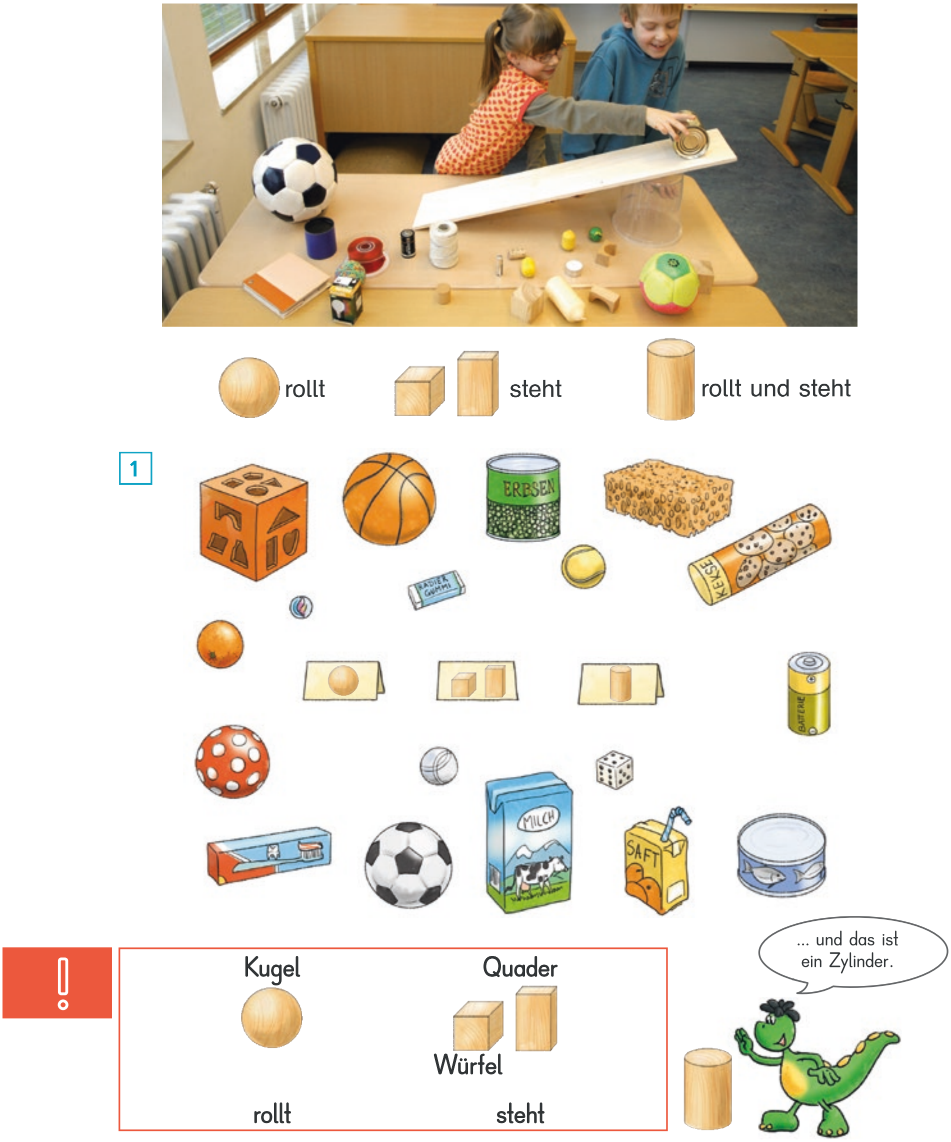


Abb. 6.10 „Rollt", „steht", „rollt und steht". (Rinkens et al. 2015a, S. 24 © Westermann Gruppe)

6.3.2 Formen und ihre Konstruktion

In den meisten Lehrgängen für das erste Schuljahr wird von Anfang an vorausgesetzt, dass die Kinder zumindest Vierecke, Dreiecke und Kreise kennen und unterscheiden können. An dieser Stelle ist es für die Lehrkraft aber von großer Bedeutung, zu erfahren, auf welchem Denkniveau bezüglich der Begriffsbildung sich das Kind gerade befindet (vgl. Abschn. 6.1.2). Meint das Kind mit „Dreieck“ das Gleiche wie die Lehrkraft? Werden gemeinsame Merkmale verschiedener Figuren wirklich erkannt? Können sie beschrieben werden? Oder verwendet das Kind noch die Sprache, die dem nullten Denkniveau (im Sinn von van Hiele, vgl. Abschn. 6.1.2) zugeordnet werden kann?

Formen zu sortieren, ist eine Möglichkeit, das Augenmerk ganz bewusst auf Gemeinsamkeiten und Unterschiede der verschiedenen Flächenformen zu lenken und so den Prozess der Begriffsbildung zu stützen (Abb. 6.11).

Zwei Körper, bei denen die äußere Gestalt und die mathematische Definition für viele Kinder (und Erwachsene) auseinanderklaffen, sind Würfel und Quader: Laut Definition ist jeder Würfel auch ein Quader. Kinder, aber auch viele Erwachsene, sehen in dem regelmäßigen Würfel einen Körper eigener Art, der sich „offensichtlich“ von Quadern (mit unterschiedlich langen Kanten) unterscheidet (entsprechendes gilt bei den ebenen Figuren für das Quadrat und das Rechteck). Dies gilt es im Rahmen des Begriffsbildungsprozesses zu bedenken, und auch hier kann das Sortieren verschiedener Körperformen eine geeignete Aufgabenstellung sein, um das Bewusstsein für die Beziehungen zwischen Würfel und Quader bzw. zwischen Quadrat und Rechteck (und anderen Vierecken, vgl. Abb. 6.11) zu schärfen.

Thematisiert werden Körper und Flächen meist unabhängig voneinander.

Es versteht sich von selbst, dass alle Objekte im geometrischen Anfangsunterricht von den Kindern auch selbst hergestellt werden sollen. Die verschiedenen Körper können aus knetbarem Material geformt und vor allem im zweiten Schuljahr auch als Kantenmodell (Abb. 6.12) oder aus Pappe (Abb. 6.13) gebastelt werden.

Abb. 6.11 Flächen sortieren. (Betz et al. 2016, S. 54 © Cornelsen/Mathias Hütter)

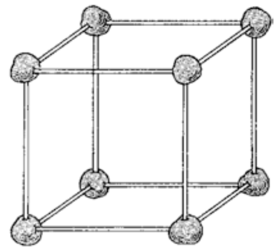


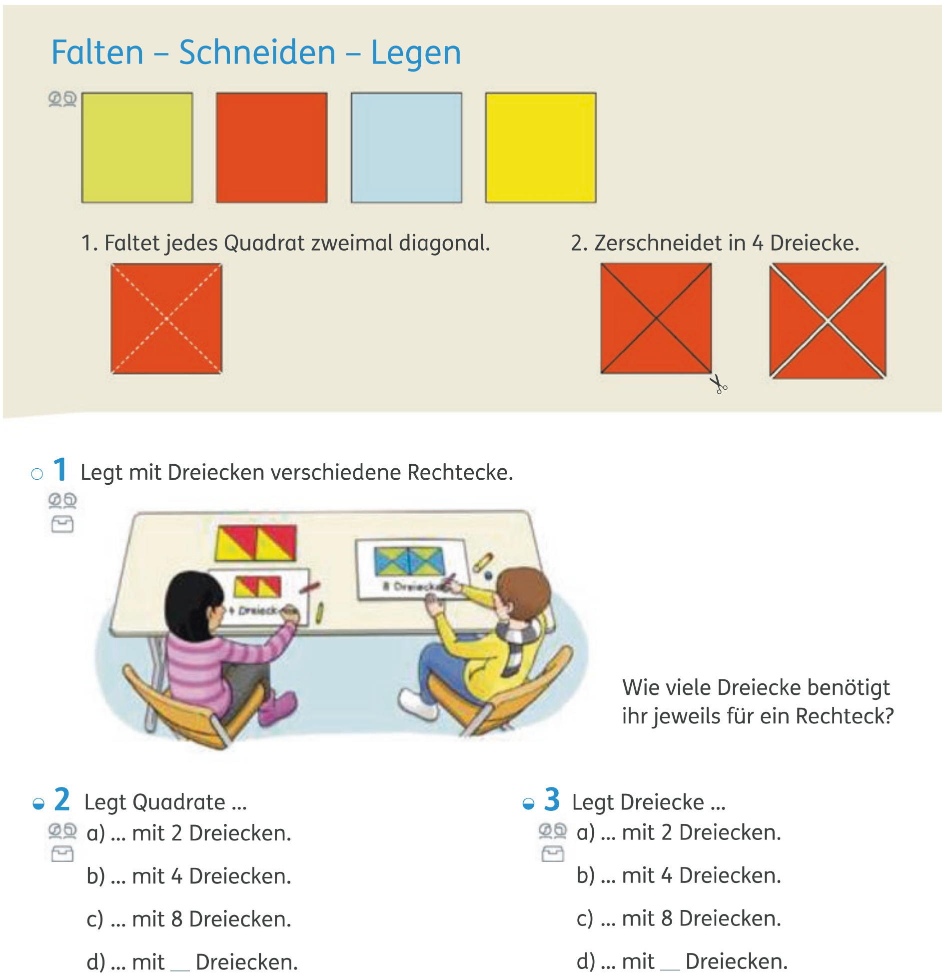
Abb. 6.12 Kantenmodell eines Würfels. (Radatz und Rickmeyer 1991, S. 53)

Die ebenen Figuren werden gefaltet, ausgeschnitten, ausgemalt und selbst gezeichnet. Abb. 6.14 zeigt an einem Beispiel, wie im Unterricht verschiedenfarbige Quadrate gefaltet, zu Dreiecken zerschnitten und zu verschiedenen Rechtecken, Quadraten oder Dreiecken zusammengelegt werden können.

Vielfältige Möglichkeiten zum Konstruieren von Formen bietet das Geobrett. Dabei handelt es sich um ein Arbeitsmittel, das in den 1950er-Jahren von Caleb Gattegno (1971) entwickelt und von Horst Steibl in einem 1976 erschienenen Buch mit seinen vielfältigen Möglichkeiten zum Einsatz in der Primar- und Sekundarstufe ausführlich beschrieben wurde (vgl. auch Radatz und Rickmeyer 1991, S. 113 ff.). Es wird in unterschiedlichen Ausführungen im Handel angeboten. In seiner ursprünglichen Form ist es ein Holzbrett mit 3×3, 4×4 oder 5×5 in Quadraten angeordneten Nägeln. Varianten aus Plastik (Abb. 6.15) sind im Lehrmittelhandel erhältlich und auch für jüngere Kinder sehr gut geeignet. Man kann sich zunächst auch auf Bretter mit 3×3 Nägeln beschränken.

Wie Abb. 6.15 zeigt, können auf dem Brett mit Gummibändern verschiedene Figuren dargestellt werden. Strecken entstehen einfach dadurch, dass die Gummibänder zwischen zwei Nägeln gespannt werden. Zunächst experimentieren die Kinder frei mit verschiedenfarbigen Gummibändern und versuchen, die gefundenen Figuren zu beschreiben

Abb. 6.13 Modelle von Körpern. (Eigenes Foto)


Falten – Schneiden – Legen

1. Faltet jedes Quadrat zweimal diagonal.

2. Zerschneidet in 4 Dreiecke.

1 Legt mit Dreiecken verschiedene Rechtecke.

Wie viele Dreiecke benötigt ihr jeweils für ein Rechteck?

2 Legt Quadrate …

a) … mit 2 Dreiecken.

b) … mit 4 Dreiecken.

c) … mit 8 Dreiecken.

d) … mit __ Dreiecken.

3 Legt Dreiecke …

a) … mit 2 Dreiecken.

b) … mit 4 Dreiecken.

c) … mit 8 Dreiecken.

d) … mit __ Dreiecken.

Abb. 6.14 Falten, Schneiden, Legen. (Wittmann und Müller 2017b, S. 54 © Ernst Klett Verlag GmbH)

und gegebenenfalls auch schon zu klassifizieren (ähnlich wie in Abb. 6.11). Allein der Auftrag „Spanne verschiedene Dreiecke“ oder „Spanne verschiedene Vierecke“ führt vermutlich zu einer größeren Formenvielfalt als das Zeichnen von Figuren. Dies gilt sogar bei einer Beschränkung auf das Geobrett mit 3×3 Nägeln: Es entstehen verschiedene Dreiecke, Quadrate, Rechtecke und andere Vierecke (vgl. Abb. 6.16 und 6.17. Wie bereits ausführlich diskutiert, werden die Figuren von den Kindern vorzugsweise anhand ihrer äußeren Gestalt unterschieden bzw. ist das Verständnis für die Klasseninklusion – jedes Quadrat ist ein Rechteck bzw. Quadrate und Rechtecke sind Vierecke –

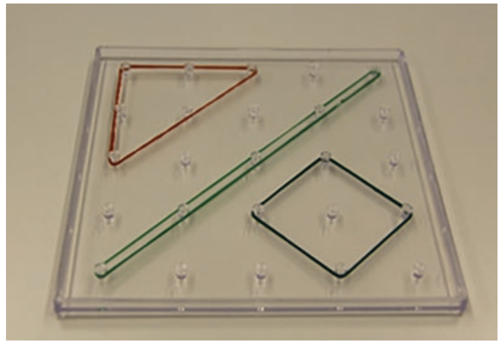


Abb. 6.15 Das Geobrett

noch nicht vorhanden, deshalb verwenden wir hier die Begriffe Dreieck und Viereck als Oberbegriffe für alle Figuren mit drei bzw. vier Ecken.)

Beim Umgang mit Flächen ist zu beachten, dass diese den Kindern häufig gar nicht als Objekte eigener Art begegnen, sondern als flache dreidimensionale Körper wie z. B. Holzplatten oder Kunststoffplättchen. Als zweidimensionale Objekte treten sie lediglich als Begrenzungsflächen von Körpern auf: Rechtecke begrenzen die Quader, Quadrate die Würfel, Dreiecke oben und unten die Dreiecksprismen, Kreise oben und unten die Zylinder usw.

Das im Abschn. 2.1.4 schon erwähnte Montessori-Material (vgl. Milz 1993, S. 158 ff.) eignet sich auch im Geometrieunterricht der Grundschule vorzüglich, um die verschiedenen Aspekte der räumlichen Körper miteinander zu verbinden (die konkreten Objekte, ihre Seitenflächen, die Namen der Körper und ihrer Seitenflächen, zweidimensionale Darstellungen der Körper im Schrägbild sowie – später – Aufrisse).

6.3.3 Geometrische Gesetzmäßigkeiten und Muster

Eine sehr attraktive Eigenschaft von Figuren ist die Symmetrie. Beim Falten und beim Zerschneiden und Legen neuer Figuren aus den entstandenen Teilen (s. Abb. 6.14) stellt sich die Frage, wie die Teilfiguren zueinander in Beziehung stehen. Einige sind deckungsgleich, was die Kinder leicht durch Aufeinanderlegen erkennen können. Die Deckungsgleichheit (oder Kongruenz) verweist auf einen weiteren Aspekt bei der

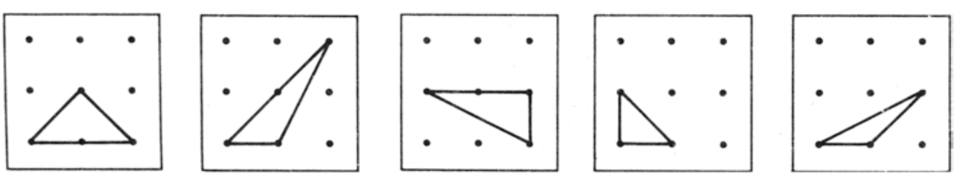


Abb. 6.16 Verschiedene Dreiecke. (Steibl 1976, S. 18)

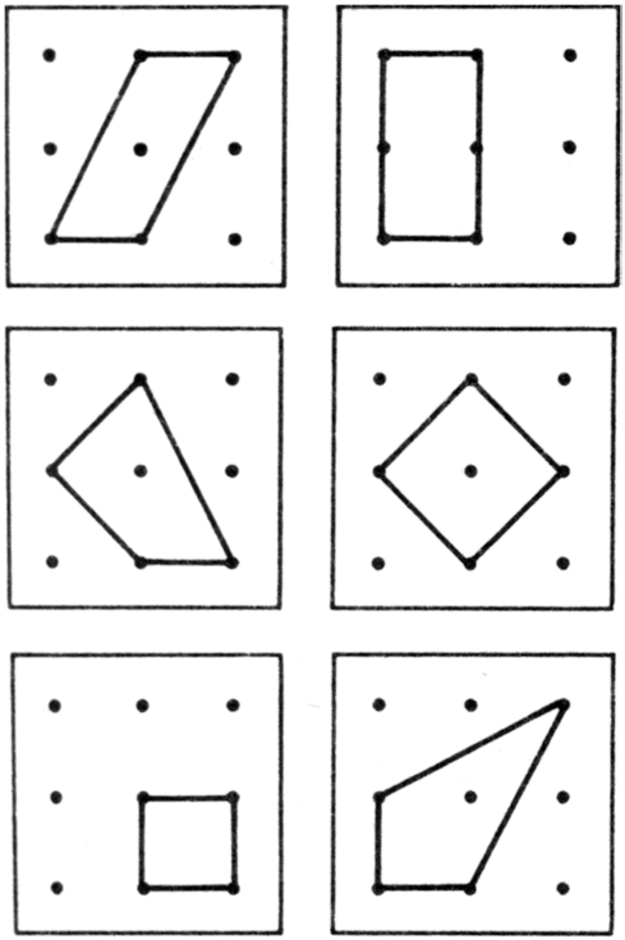


Abb. 6.17 Verschiedene Vierecke. (Steibl 1976, S. 31)

Behandlung ebener Figuren (der aber auch bei räumlichen Körpern angesprochen werden kann), nämlich den Begriff der Symmetrie.

Das Betrachten, Herstellen, Beschreiben und Dokumentieren von Symmetrien kann bereits Thema der mathematischen Frühförderung in der Vorschulzeit sein und bietet gehaltvolle Lerngelegenheiten im geometrischen Anfangsunterricht. Wollring (2006a) beschreibt eine relativ einfache Zeichentechnik zum Erzeugen symmetrischer Muster: Mit einem starken Filzstift wird die Randlinie eines halben Herzes auf ein Blatt Papier gezeichnet. Das Blatt wird durch die beiden Endpunkte der Linie gefaltet, sodass die Zeichnung innen liegt. Sie scheint dann durch und wird auf dem oberen Papierteil nachgezeichnet. Faltet man das Papier auf, scheint die zweite Hälfte des Herzens durch das Papier und kann nachgezeichnet werden (vgl. Wollring 2006a, S. 89 f.). Die achsensymmetrische Figur ist fertig (Abb. 6.18).

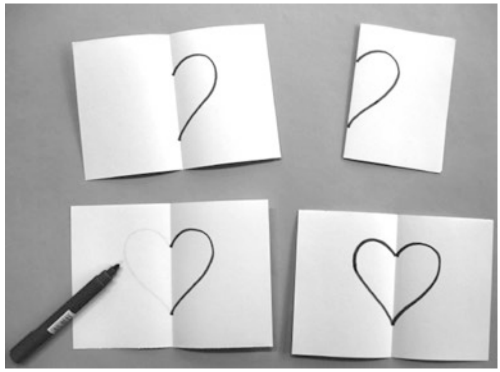


Abb. 6.18 Herstellen einer symmetrischen Figur auf Transparentpapier. (Wollring 2006a, S. 89)

Auf diese Weise können auch komplexere und sehr schöne symmetrische Muster relativ einfach erstellt werden, wie Abb. 6.19 zeigt.

Eine weitere Möglichkeit, symmetrische Muster zu erzeugen, die direkt auf Spiel- und Handlungserfahrungen der Kinder basiert, ergibt sich, wenn Kinder diese Muster selbst darstellen (vgl. Wollring 2006a, S. 93 ff.). Zwei Kinder können sich gegenüber als Bild und Spiegelbild aufstellen. Die Spiegelebene wird durch einen Kreidestrich auf dem Boden markiert. Diese Tätigkeit ermöglicht Erfahrungen zur Raumwahrnehmung aus verschiedenen Perspektiven: Hebt ein Kind den rechten Arm, so muss das andere Kind den linken Arm heben, um zu spiegeln. Diese Muster können von den Kindern beschrieben, aber auch dokumentiert werden. Abb. 6.20 zeigt eine Dokumentation eines Kindermusters mit Kreide auf dem Boden. Die Aufgabenstellung für die Kinder war „Kinder und Spiegel-Kinder so darzustellen, dass sie sich zu einem späteren Zeitpunkt anhand dieses Plans auf dieselbe Art und an derselben Stelle erneut aufstellen können“ (Wollring 2006a, S. 96). Die für die Geometrie zentrale Fähigkeit, Pläne zu erstellen und zu lesen (vgl. Abschn. 6.2), wird dadurch geschult.

Weitere geometrische Muster in denen Beziehungen entdeckt, analysiert und beschrieben werden können, sind Bandornamente und Parkette. Bandornamente sind

Abb. 6.19 Eine Figur mit mehreren Symmetrieachsen. (Wollring 2006a, S. 90)

Abb. 6.20 Kindermuster mit zwei Achsen, Plan auf dem Boden (Wollring 2006a, S. 97)

Streifen mit Figuren, die sich wiederholen. Sie lassen sich durch lineare Verschiebungen zur Deckung bringen. Parkette dehnen sich in der Fläche aus, hier können die sich wiederholenden Grundfiguren durch Verschieben in verschiedenen Richtungen zur Deckung gebracht werden. Sowohl bei Bandornamenten als auch bei Parketten kann erneut der Bezug zur Umwelt hergestellt werden (vgl. Abschn. 6.3.1), weil sich zahlreiche Muster dieser Art z. B. in Bauwerken, Fußböden oder Kunstwerken entdecken lassen.

Im Unterricht können Parkette und Bandornamente mit verschiedenen Materialien gelegt, gezeichnet und gefärbt werden (Abb. 6.21 und 6.22).

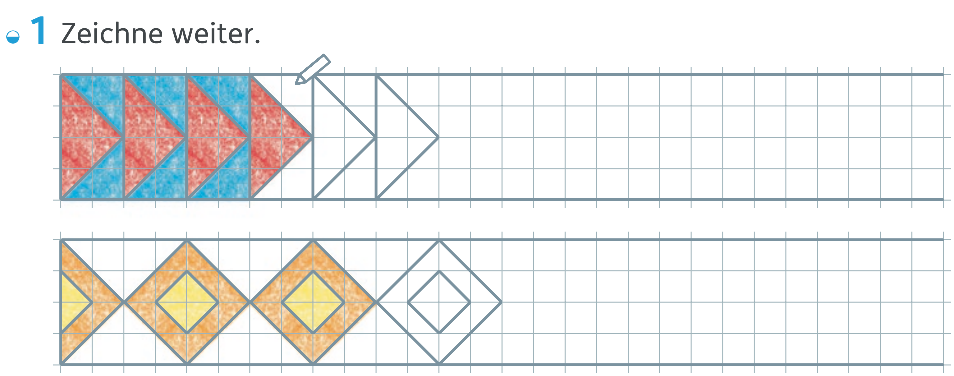


Abb. 6.21 Bandornamente. (Wittmann und Müller 2017a, S. 72 © Ernst Klett Verlag GmbH)

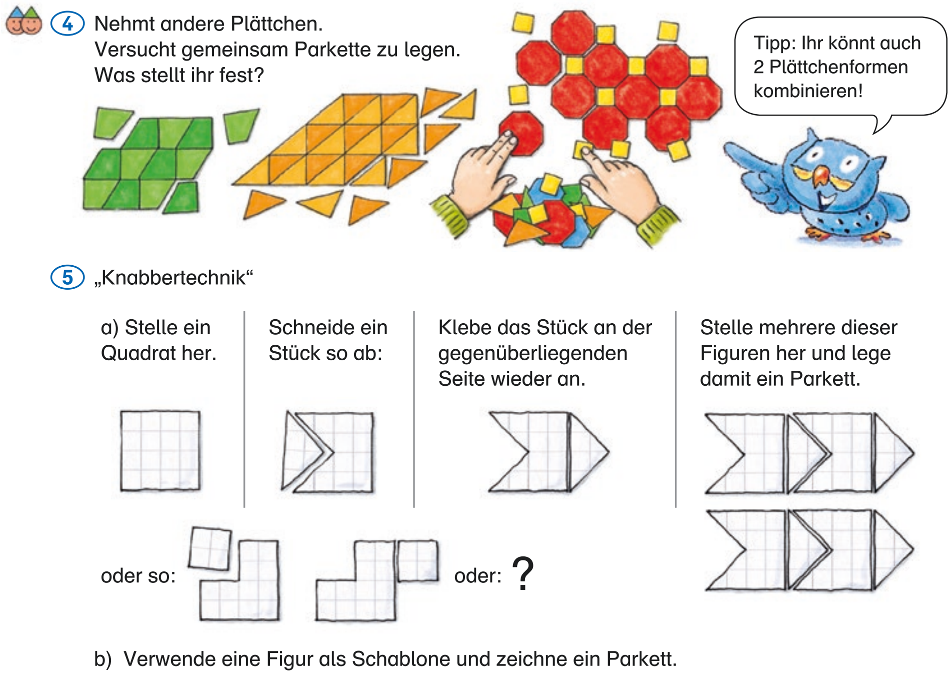


Abb. 6.22 Parkette. (Betz et al. 2017, S. 133 © Cornelsen/Mathias Hütter)

6.3.4 Operieren mit Formen

Für die erste Begegnung mit Flächen- und Körperformen eignet sich das freie Legen und Bauen (Abb. 6.23).

Diese Aktivitäten kennen Kinder in der Regel aus den Kindertagesstätten. Sie liefern zahlreiche Anlässe, die Formen und Bauwerke zu vergleichen, über einzelne Flächen- oder Körperformen zu sprechen, zu entscheiden, wofür sich z. B. ein kegelförmiger Baustein eignet, wofür ein Quader usw. Das Bauen und Legen kann auch mit Zählen (vgl. Abb. 6.23) oder mit dem Zeichnen gekoppelt werden. Sollen Figuren oder Ansichten von Bauwerken gezeichnet werden, ist das bewusste Wahrnehmen der Eigenschaften der Figuren erforderlich. Der Begriffsbildungsprozess wird dadurch unterstützt. Bei dreidimensionalen Bauwerken werden darüber hinaus Fähigkeiten der Raumwahrnehmung und der räumlichen Orientierung geschult: Wie sieht das Gebäude von der anderen Seite aus? Von oben?

Eine weiterführende Aktivität ist das Legen bzw. Bauen nach Vorgabe. Sprachliche Beschreibungen oder gezeichnete Pläne werden dabei in Handlungsaktivitäten umgesetzt. Bei den Vorgaben kann es sich um Handlungsanweisungen handeln (vgl. Abb. 6.24) oder aber auch um offenere Aufgabenstellungen, wie z. B. „Baue verschiedene Würfelvierlinge“ (Bauwerke mit vier Würfeln; Abb. 6.25). Wie viele findest

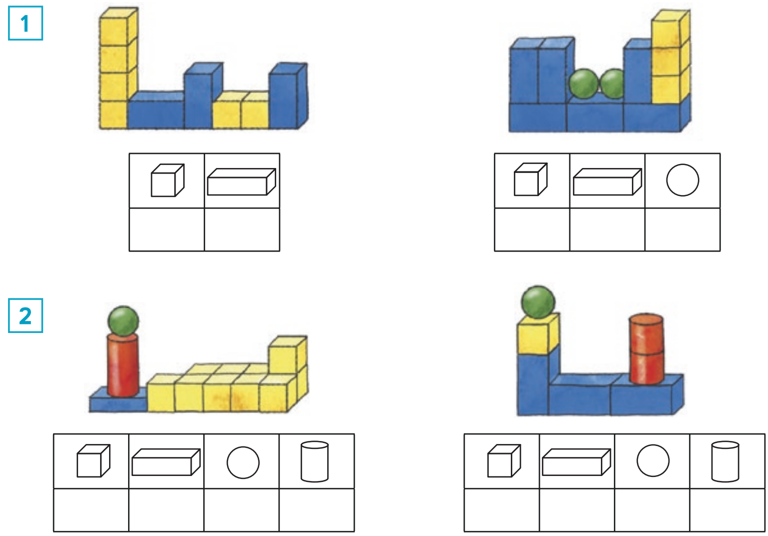


Abb. 6.23 Freies Bauen mit Körpern. (Rinkens et al. 2015a, S. 25 © Westermann Gruppe)

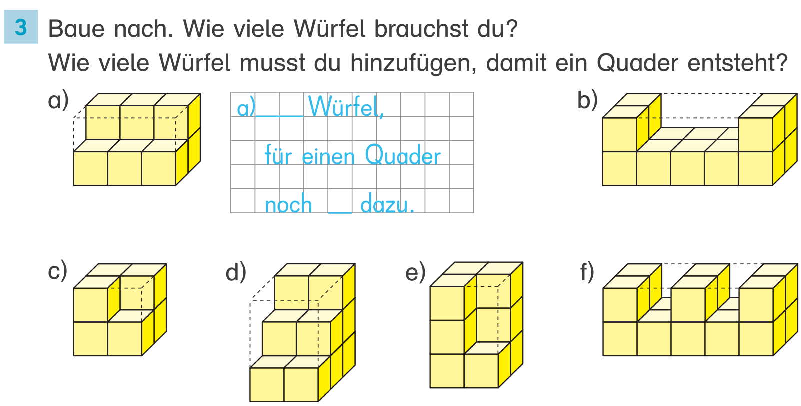


Abb. 6.24 Mit Würfeln bauen. (Rinkens et al. 2014, S. 124 © Westermann Gruppe)

du? Bist du sicher, dass du alle gefunden hast? (Wollring 2006b). Dies ist eine natürlich differenzierende, offene Aufgabenstellung, die viel Spielraum für mathematische Aktivitäten lässt: Um zu entscheiden, ob Würfelvierlinge identisch sind, sind Kongruenzbetrachtungen nötig; beim Suchen möglichst aller Vierlinge können systematisches Probieren oder das Sortieren und systematische Zusammenstellen der gefundenen Bauwerke hilfreich sein. Wird die Aktivität mit dem Partner oder in der Gruppe durchgeführt, ergeben sich zahlreiche Gelegenheiten des mathematischen Kommunizierens und Begründens (vgl. Abschn. 3.3).

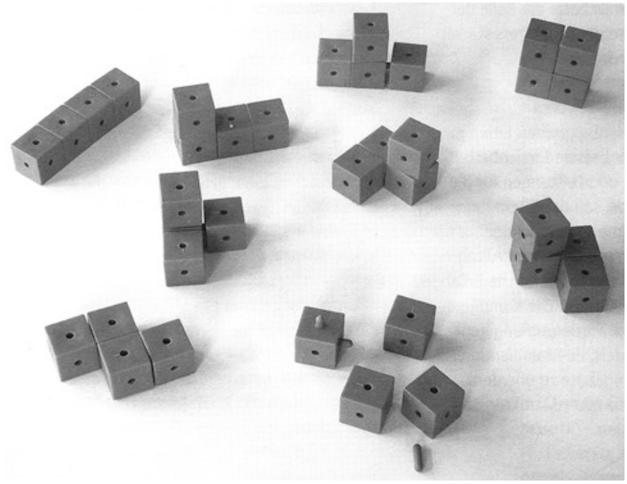


Abb. 6.25 Würfelvierlinge. (Wollring 2006b, S. 8)

Eine grundsätzlich andere Art der Operation mit Formen als das Erzeugen von Symmetrien durch Falten und Legen, die wir in Abschn. 6.3.3 beschrieben haben, ist das Spiegeln. Dabei treten andere Aspekte symmetrischer Muster in den Vordergrund. Es geht weniger um die Symmetrie als Eigenschaft einer Figur als vielmehr um Symmetrien, die durch geometrische Abbildungen erzeugt werden: Das „Urbild" wird an einer Achse gespiegelt, Beziehungen zwischen Urbild und Spiegelbild können entdeckt und auf verschiedenen Niveaus begründet werden (wie z. B. dass Punkt und Spiegelpunkt den gleichen Abstand von der Spiegelachse haben). Im Anfangsunterricht bietet sich zunächst ein spielerischer Zugang zum Spiegeln an. Schöne Ideen dazu, die sich auch für den Einsatz in Kindertagesstätten eignen, finden sich in dem englischen Kinderbuch *Make a bigger puddle, make a smaller worm* (Walter 2000). Die Kinder werden aufgefordert, mithilfe eines Spiegels aus der kleinen Pfütze eine große zu „zaubern" oder aus dem langen Wurm einen kurzen. Bei diesen Aktivitäten kann ein Taschenspiegel verwendet werden, und gerade durch das Bewegen des Spiegels sammelt das Kind vielfältige Erfahrungen mit der geometrischen Operation: Wie muss der Spiegel entlang des Wurms bewegt werden, damit dieser länger wird, kürzer wird oder gar verschwindet?

Der Spiegel eignet sich auch dafür, Bezüge zwischen Arithmetik und Geometrie herzustellen, denn anschaulich gesprochen „verdoppelt" der Spiegel eine Figur. Durch diese Eigenschaft lassen sich die Verdopplungen von Zahlen (Anzahlen) herstellen: Man kann z. B. Mengen von Plättchen durch Spiegeln verdoppeln (Abb. 6.26).

Im Lehrwerk *Nussknacker* wird eine spannende Aufgabe zum Spiegeln präsentiert (Abb. 6.27). Gelingt es, auch ungerade Anzahlen mit dem Spiegel zu zeigen? Hier werden weitere geometrische Überlegungen provoziert: Man kann ungerade Anzahlen erzeugen, wenn man den Spiegel geschickt entlang der Symmetrieachse eines

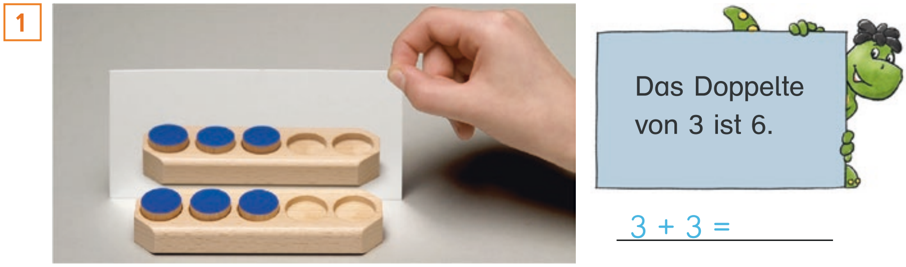


Abb. 6.26 Verdoppeln von Anzahlen im Spiegel. (Rinkens et al. 2015a, S. 88 © Westermann Gruppe)

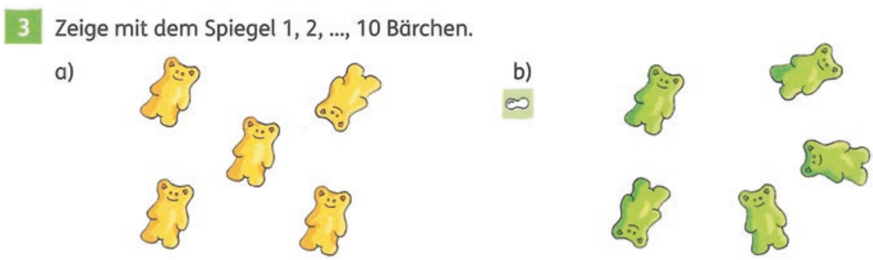


Abb. 6.27 Spiegelaufgaben. (Häring et al. 2015, S. 54 © Ernst Klett Verlag GmbH)

Gummibärchens aufstellt. Auch diese Aufgabe bietet zahlreiche Möglichkeiten zum mathematischen Kommunizieren und Argumentieren.

Bei vielen Aktivitäten mit geometrischen Figuren ist es günstig, statt eines Taschenspiegels einen halb durchsichtigen Spiegel (den „Mira-Spiegel“) zu verwenden. Der Vorteil dieses Spiegels ist, dass man das Spiegelbild sieht, aber gleichzeitig auch erkennen kann, was „hinter“ dem Spiegel liegt. Der Mira-Spiegel ist z. B. hilfreich, wenn eine (oder auch mehrere) Spiegelachsen gefunden, Teilfiguren symmetrisch ergänzt werden oder die Kinder versuchen sollen, – z. B. ihren Namen – selbst in Spiegelschrift zu schreiben (vgl. Franke 2007, S. 237 ff.).

Neben den bereits angesprochenen Möglichkeiten des Operierens mit Formen durch Falten bietet das Papierfalten im mathematischen Anfangsunterricht auch „durch die Verbindung von (technischem) Handlungswissen, mathematischen Aspekten und Ästhetik interessante Zugänge“ (Wollring 2008a, S. 18). Mathematisch substanziell ist das Herstellen von Objekten durch Falten, wenn „Symmetrie ein zentrales Herstellungsprinzip ist, wenn räumliche Objekte erstellt werden oder wenn die Raumvorstellung wesentliche Voraussetzung für das Erstellen der Objekte ist“ (Wollring 2008a, S. 19). Fische, Schmetterlinge, Blumen, Vögel – es gibt zahlreiche einfache und komplexere Faltobjekte, die im Herstellungsprozess mathematische Überlegungen erfordern und Erfahrungen ermöglichen. Sie können durch schrittweises Vormachen, mithilfe einer Faltanleitung, durch Analysieren eines fertig gefalteten Objekts oder mithilfe von

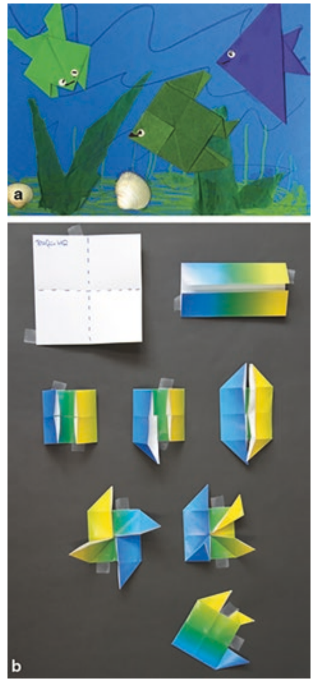


Abb. 6.28 Faltobjekt „Fisch" mit Faltplakat

Faltplakaten (Abb. 6.28)[1], die jeden einzelnen Schritt darstellen, entstehen. Unter Verwendung der Formen können – gerade im vorschulischen Bereich oder im Anfangsunterricht – Bilder oder sogar Faltbilderbücher (Wollring 2008b) erstellt werden.

Weitere Aktivitäten sind das Parkettieren (vgl. Abb. 6.22) und das Gestalten komplexerer Figuren. Z. B. die Drachenform (vgl. unten rechts in Abb. 6.17) eignet sich sehr gut als Ausgangsform zur Gestaltung von Sternen. Auch diese Tätigkeit eröffnet wieder breiten Spielraum für mathematische Entdeckungen: Wie viele Drachenformen brauche ich für einen Stern? Wenn ich die Formen aneinanderlege, schließt sich die Figur? Kann ich auch einen halben Stern legen?

6.3.5 Die Verwendung von Tablets im geometrischen Anfangsunterricht

In Abschn. 4.4 sind wir ausführlich auf den Einsatz von Tablets im mathematischen Anfangsunterricht eingegangen; dort standen Anregungen zum Umgehen mit arithmetischen Fragestellungen im Vordergrund. Hier sollen noch zwei Apps betrachtet werden, die die Förderung geometrisch-räumlicher Vorstellungen zum Ziel haben, und

[1]Die Bilder wurden dankenswerterweise von Bernd Wollring zur Verfügung gestellt.

zwar zum einen durch die Betrachtung von Würfelnetzen und zum anderen durch das Umgehen mit virtuellen Bauwerken. Die betreffenden Apps „Klipp Klapp" und „Klötzchen" wurden im Rahmen des von U. Kortenkamp geleiteten Projektes „Digitales Lernen Grundschule" der Universität Potsdam von H. Etzold entwickelt (https://dlgs.uni-potsdam.de/apps/, vgl. auch Rink und Walter 2020, S. 55 ff.).

Die App „Klipp Klapp" (Kuzle und Etzold 2017, Stein 2018) ist so konzipiert, dass die Kinder reale ebenso wie virtuelle Würfelnetze herstellen und betrachten, sie bewegen und miteinander vergleichen können.

Vor dem Einsatz der App sollen reale Würfelnetze im Unterricht behandelt sein, d. h. von den Schülerinnen und Schülern selbst hergestellt und am realen Würfel überprüft. Ihnen ist also bekannt, dass es nicht nur unterschiedliche Würfelnetze gibt, sondern auch, dass sich nicht alle Figuren mit sechs zusammenhängenden Quadraten zu einem Würfel zusammenfalten lassen. Beim Einsatz von „Klipp Klapp" laufen dann die realen und virtuellen Handlungen parallel und ergänzen sich wechselseitig. So können die Kinder z. B. bei einem auf dem Bildschirm angezeigten Netz entscheiden, ob es ein Würfelnetz ist oder nicht. Sie prüfen dies, indem sie das Netz in der App virtuell zusammenklappen oder es konkret basteln und zusammenfalten.

Weitere mit der App mögliche Aktionen sind z. B. das Ergänzen von Netzen mit weniger als sechs Quadraten zu Würfelnetzen und das Einfärben von Würfelnetzen gemäß der Färbung eines zur Hälfte sichtbaren Würfels (gegenüberliegende Seiten sollen die gleiche Farbe bekommen, vgl. Abb. 6.29). Dabei kann die Überprüfung durch das virtuelle Zusammenfalten des Netzes erfolgen oder durch reales Basteln und Färben des Würfelnetzes, aber auch rein mental, also durch den vorstellungsmäßigen Vergleich des Würfelnetzes mit dem Würfel. Diese Arbeit mit Würfelnetzen kann in den höheren Klassen der Grundschule sehr gut mit weitergehenden Zielen fortgeführt werden, z. B. mit der Aufforderung an die Kinder, *alle* Würfelnetze zu finden (Hasemann 1985).

Mit der App „Klötzchen" können die Kinder ihr räumliches Vorstellungsvermögen schulen, dazu sollen sie insbesondere Würfelgebäude nach Vorgabe bauen und zwischen verschiedenen Darstellungsformen wechseln. Ähnlich wie bei der App „Klipp Klapp" wird auch bei den „Klötzchen" vorausgesetzt, dass die Schülerinnen und Schüler bereits mit realen Würfeln selbst Bauwerke hergestellt haben und mit verschiedenen Ansichten von solchen Bauwerken umgegangen sind (Anregungen zum konkreten Handeln findet man z. B. bei Radatz und Rickmeyer 1991, S. 34 ff.; vgl. auch Abb. 6.24). Da die App für den Einsatz in den höheren Klassen der Grundschule konzipiert ist, sollen hier nur einige Möglichkeiten der App betrachtet werden, die für das 2. Schuljahr geeignet sind (vgl. im übrigen Bönig und Thöne 2018).

Lautet die Aufgabe z. B. „Wie viele unterschiedliche Würfelgebäude können mit sechs Würfeln gebaut werden?", so können die Schülerinnen und Schüler sowohl real als auch mit der App möglichst viele Bauwerke herstellen und mit ihnen agieren. Ein anderes Beispiel zeigt Abb. 6.30: Wurde ein Würfelgebäude hergestellt (z. B. in der 3D-Ansicht), so können Auswirkungen von Veränderungen am Gebäude in einer der Darstellungen vorgenommen und in den anderen Darstellungen nachvollzogen werden.

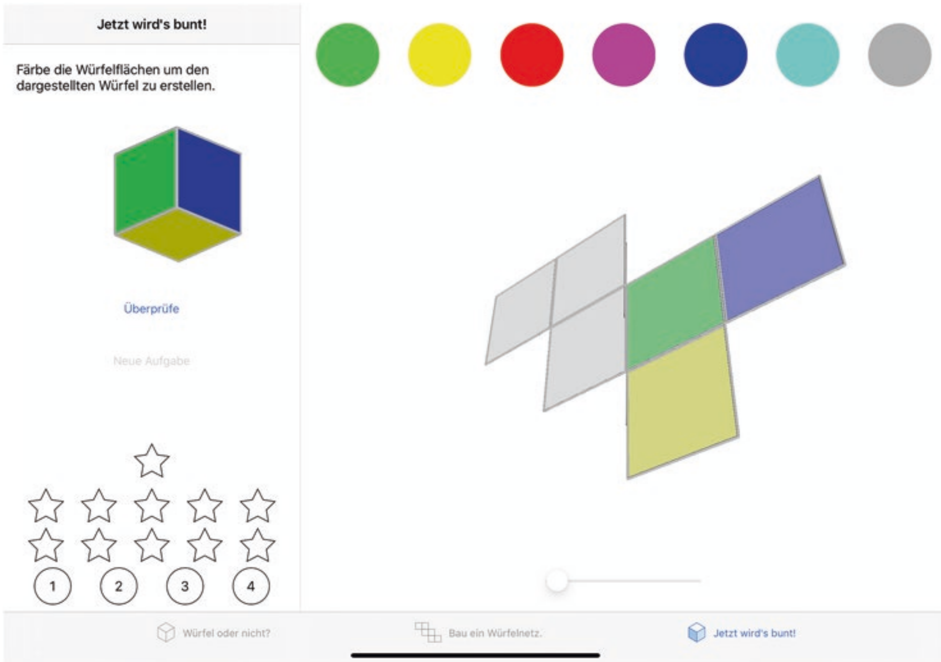


Abb. 6.29 App „Klipp Klapp". Die Flächen im Würfelnetz sollen wie die am Würfel gefärbt werden, gegenüberliegende Seiten haben die gleiche Farbe. (Aufruf 05.11.2019, © Projekt „Digitales Lernen Grundschule", Universität Potsdam)

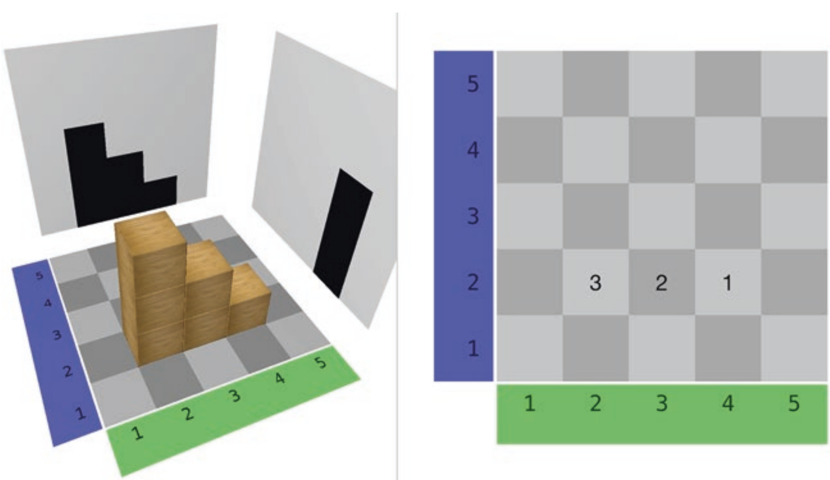


Abb. 6.30 App „Klötzchen". Zweigeteilter Bildschirm mit Würfelbauwerk, Schattenrissen und Bauplan. (Aufruf 05.11.2019, © Projekt „Digitales Lernen Grundschule", Universität Potsdam)

Eine entsprechende Vorstellung im Kopf kann beispielsweise durch Fragen angeregt werden wie: „Was wäre, wenn Du an dieser Stelle einen Würfel hinzufügtest bzw. wegnähmst?“ Hier müssen sich die Kinder das veränderte Objekt in den verschiedenen Darstellungen vorstellen. Der Vorteil der Darstellung in der App ist dabei, dass die Bauwerke auf dem Bildschirm auch gedreht werden können, dabei kommt insbesondere das in den Apps enthaltene Potenzial „Synchronität von Darstellungen“ zum Tragen (vgl. Abschn. 4.4.2 und Rink und Walter 2020, S. 57). Sehr schöne Anregungen zur Förderung der Raumvorstellung mit dieser App findet man bei Krauthausen und Pilgrim (2020) und Pilgrim und Krauthausen (2020). Eine ganz andere Möglichkeit zur Weiterführung bietet das ebenfalls im Rahmen des Projektes „Digitales Lernen Grundschule“ entwickelte Konzept „Klötzchenprogrammierung“, mit dem die Kinder erste Erfahrungen im Programmieren gewinnen können (vgl. Etzold und Janke 2018).

6.3.6 Koordinaten

Die Einführung von Koordinaten dient in den Sekundarstufen unter anderem dem Ziel, geometrische Sachverhalte rechnerisch zu beschreiben. Dazu werden die Punkte der Ebene durch eine x- und eine y-Koordinate gekennzeichnet. Ein amüsanter Einstieg in die Behandlung von Koordinaten in der Sekundarstufe ist eine Geschichte von den Schildbürgern: Sie wollten ihre wertvolle Glocke dadurch vor dem anrückenden bösen Feind retten, dass sie sie in einem See versenkten. Um sie später wiederfinden zu können, markierten sie am Bootsrand mit einer Kerbe die Stelle, an der sie die Glocke über Bord geworfen hatten.

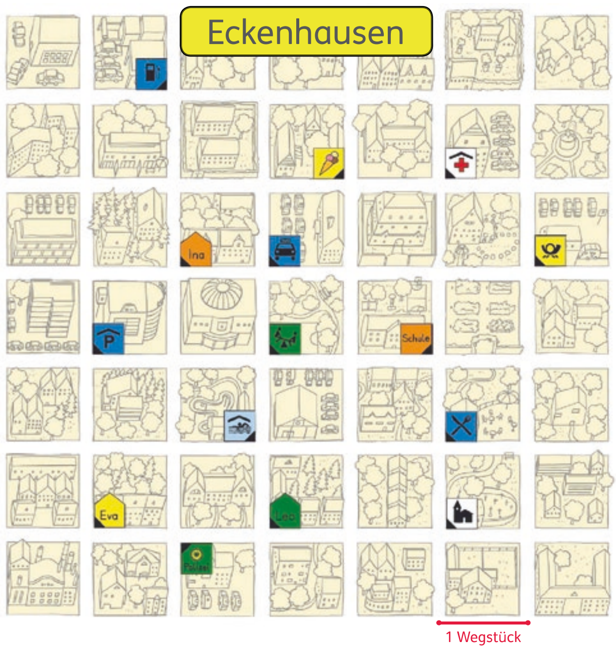
Die Betrachtung von Koordinaten in der Grundschule geht auf Ideen von F. und G. Papy (1990) zurück. Es geht z. B. darum, sich auf einem Stadtplan zurechtzufinden (vgl. Abb. 6.31: „Eckenhausen“; vgl. auch die „Gitter-City“ bei Radatz und Rickmeyer 1991, S. XI). Auch das altbekannte Spiel „Schiffe versenken“ ermöglicht eine Annäherung an den Umgang mit Koordinaten. Bei einem Plan wie dem von „Eckenhausen“ ist zum einen zu klären, ob man sozusagen „von oben“ auf den Plan sieht oder ob man sich in Gedanken auf den Straßen entlangbewegt. Zum anderen müssen die Richtungen und Abstände auf dem Plan festgelegt werden:

> „Die Kinder lernen einen Ortsplan zu nutzen und lernen gleichzeitig die Grundstruktur eines Koordinatensystems kennen. Die in Eckenhausen besonders ausgewählten Gebäude sind bewusst an Kreuzungen platziert. Welche Kreuzung zu einem Gebäude gehört, wird durch ein kleines schwarzes Dreieck am Piktogramm angezeigt. Mit den Kindern wird vereinbart, dass jeder Weg in der Mitte der zum Startpunkt gehörenden Kreuzung beginnt und am Mittelpunkt der zum Zielpunkt gehörenden Kreuzung endet. Durch diese Festlegung ist die Anzahl der Wegstücke eines Wegs vom Start bis zum Ziel eindeutig bestimmt“ (Wittmann und Müller 2012, S. 104).

Die Kinder beschreiben verschiedene Wege mit ihren eigenen Worten. Es geht also bei diesem Thema ganz wesentlich auch um das Fördern der sprachlichen Ausdrucksfähigkeit der Kinder, wobei Lagebeziehungen (oben, unten, rechts und links) verwendet werden, und beim Beschreiben der Weglängen auch Zahlen.

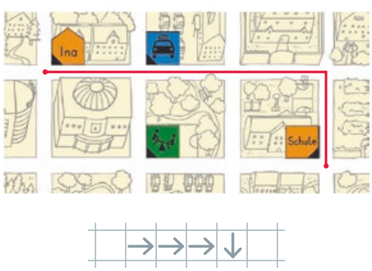
Straßenpläne: Eckenhausen

1 Beschreibe.



2 Zeichne Wege.

Ina geht zur Schule.



Leo geht zur Schule.

3 Finde weitere Wege für Leo zur Schule und Ina zur Schule.

Abb. 6.31 Eckenhausen. (Wittmann und Müller 2017a, S. 128 © Ernst Klett Verlag GmbH)

6.3.7 Messen

Auf das Messen von Größen ganz allgemein wird im nächsten Kapitel noch ausführlicher eingegangen. Hier geht es zunächst nur um einige geometrische Betrachtungen zu Strecken(längen) und Flächen(maßen).

Außer auf die Gestalt der Formen kann die Aufmerksamkeit der Kinder auch auf die Flächengröße der Figuren gelenkt werden. Ein Herantasten an diese Thematik geschieht mit Fragen, wie z. B. „Welche Figur ist größer, welche kleiner?“ oder „Wie kann man die Größe von Figuren bestimmen?“. Um diese Fragen zu beantworten, bietet es sich an, mit Quadraten und Rechtecken zu beginnen; auch die Flächen einiger Dreiecke lassen sich leicht ermitteln. Hierfür eignet sich wieder die Arbeit mit dem Geobrett (s. Abschn. 6.3.2) oder das Zerschneiden von Figuren in Teilfiguren und das Auslegen von Figuren mit Teilfiguren (vgl. Abb. 6.14). Ein großes Quadrat kann mit kleineren Einheitsquadraten oder auch mit bestimmten Dreiecksformen ausgemessen werden (Abb. 6.32 und 6.33).

Auch die Längen verschiedener Strecken können am Geobrett verglichen werden: Sie lassen sich als Längen der Seiten des kleinen bzw. des großen Quadrates beschreiben. Schwieriger wird es allerdings, bei Quadraten oder Rechtecken die Längen der Diagonalen zu bestimmen. Bei der Kennzeichnung dieser Diagonalen können die Kinder ihre sprachlichen Fähigkeiten erproben, indem sie passende, altersgemäße Namen erfinden, wie z. B. „kurze“, „mittlere“ und „lange Schrägen“; die „lange Schräge“ (die Diagonale des großen Quadrats) ist dabei zweimal so lang wie die „kurze“ (Abb. 6.34).

Die hier vor allem mit Blick auf das zweite Schuljahr angesprochenen Aktivitäten und Anregungen können später ausgebaut werden, wie das Beispiel aus einem Schulbuch für das dritte Schuljahr zeigt (Abb. 6.35).

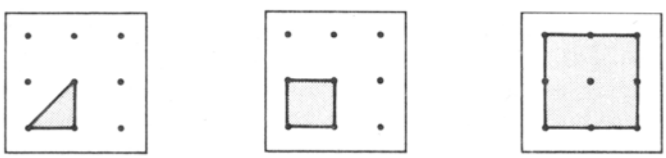


Abb. 6.32 Kleines und großes Quadrat. Das (rechtwinklige) Dreieck links kann als halbes kleines Quadrat gesehen werden. (Steibl 1976, S. 59)

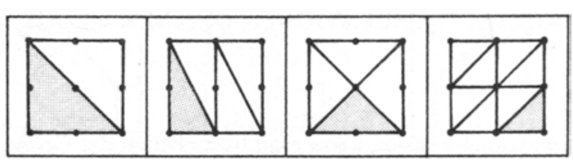


Abb. 6.33 Halbe, unterschiedliche Viertel und Achtel von großen Quadraten. (Steibl 1976, S. 60)

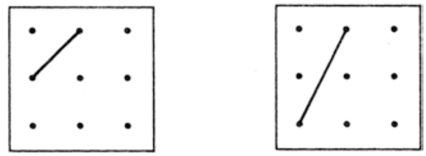


Abb. 6.34 „Kurze" und „mittlere Schrägen". (Steibl 1976, S. 24)

6.3.8 Übersetzungen in die Zahl- und Formensprache

Abschließend wird noch ein Aspekt der Geometrisierung behandelt – die Übersetzung von Zahlbeziehungen in die Sprache der Geometrie (Wittmann 1999, S. 211). Insbesondere sollen hier figurierte Zahlen als ein Beispiel für die Verbindung zwischen geometrischen und arithmetischen Beschreibungen von Sachverhalten betrachtet werden. Bei den figurierten Zahlen handelt es sich um arithmetische Muster, die z. B. mit Plättchen oder Punkten geometrisch dargestellt werden. Wurzeln dazu finden sich bereits in der frühen griechischen Mathematik (vgl. Steinweg 2001, S. 35 ff.).

In Bezug auf den Mathematikunterricht schreibt Steinweg:

> „In jedem Unterrichtswerk finden sich Beispiele der Darstellung von figurierten Zahlen, die (…) zwei verschiedenen Intentionen zugeordnet werden können: Zum einen der Gebrauch von Punktmustern als passend zugeordnete Veranschaulichung zur Einübung von Rechenfertigkeiten, zum anderen der Umgang mit figurierten Zahlen als eigenständigem Thema, bei dem deutlich wird, dass figurierte Zahlen Beziehungen innerhalb eines Musters, wie auch Beziehungen zwischen zwei Mustern (…) darstellen können, die denkend erforscht werden sollen" (2002, S. 130).

Figurierte Zahlen sind deshalb „mehr als bloße Veranschaulichung. Sie stehen nicht nur historisch, sondern auch epistemologisch am Übergang zwischen gegenstandsbezogenem und symbolischem Rechnen. Sie fördern das theoretische Sehen" (Hefendehl-Hebeker 1999, S. 108).

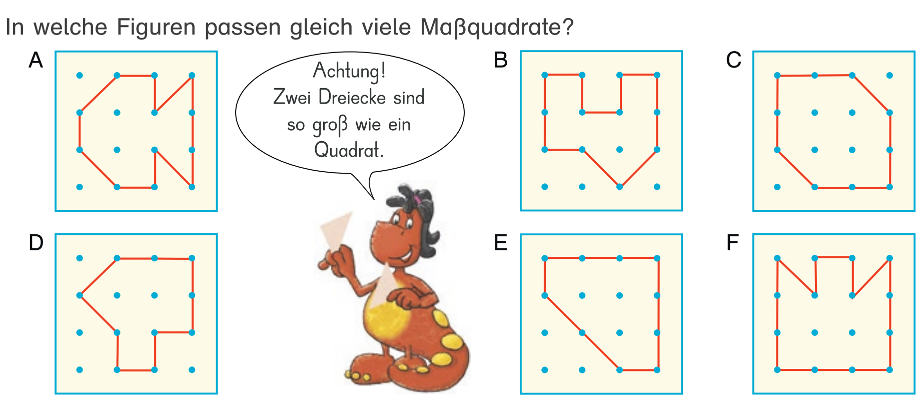


Abb. 6.35 Flächenmessung mit Einheitsquadraten. (Rinkens et al. 2015b, S. 101 © Westermann Gruppe)

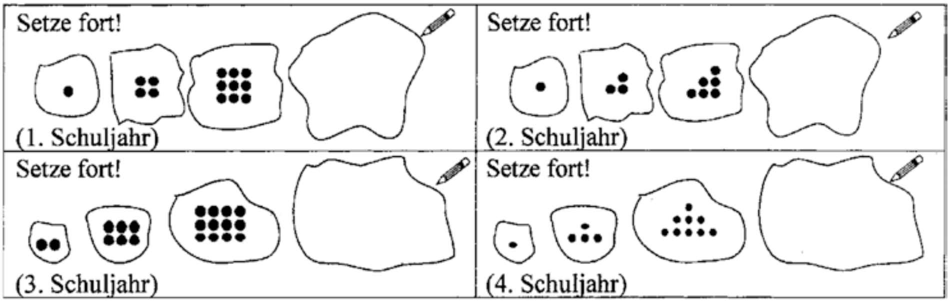


Abb. 6.36 Reihen figurierter Zahlen (Steinweg 2002, S. 135)

In ihrer empirischen Untersuchung ging es Steinweg unter anderem um die Frage, ob die Kinder Sequenzen von figurierten Zahlen wie in Abb. 6.36 eher dynamisch als Momentaufnahme eines Prozesses deuten oder eher statisch, indem sie ihr Augenmerk auf die Anzahlen richten. Tatsächlich steht bei jüngeren Kindern der arithmetische (kardinale) Aspekt von Punktmustern zunächst im Vordergrund, die geometrische Gestalt wird vernachlässigt. Dies bedeutet, dass im Unterricht „der Wechsel zwischen den Repräsentationsebenen (…) gezielt zu fördern [ist] (…), [er] ergibt sich, wie bei allen anderen Unterrichtszielen, nicht von selbst“ (Steinweg 2002, S. 150).

Eine spannende Anwendung findet die in Abb. 6.36 für das 1. Schuljahr dargestellte Reihe u. a. bei der Frage, warum die Summe aufeinanderfolgender ungerader Zahlen stets eine Quadratzahl ist (vgl. z. B. Wittmann und Müller 1993, S. 101 ff.). Die für das 2. Schuljahr dargestellte Reihe kann zur Bestimmung von Summen aufeinander folgender natürlicher Zahlen ab 1 (z. B. $1+2+3+\ldots+8$) benutzt werden (vgl. *Das Zahlenbuch 2,* Wittmann und Müller 2017b, S. 131; vgl. auch Schipper 2009, S. 319).

Literatur

Betz, B., Bezold, A., Dolenc-Petz, R., Gasteiger, H., Hölz, C., Ihn-Huber, P., Kullen, C., Plankl, E., Pütz, B., Schraml, C., & Schweden, K.-W. (2016). *Zahlenzauber 1, Mathematikbuch für die Grundschule, Allgemeine Ausgabe*. Berlin: Cornelsen.

Betz, B., Bezold, A., Dolenc-Petz, R., Gasteiger, H., Hölz, C., Ihn-Huber, P., Kullen, C., Plankl, E., Pütz, B., Schraml, C., & Schweden, K.-W. (2017). *Zahlenzauber 3, Mathematikbuch für die Grundschule, Allgemeine Ausgabe*. Berlin: Cornelsen.

Bigalke, H. G., & Schröder, H. (1980). *Einführung in die Mathematik, 6. Schuljahr*. Frankfurt a. M.: Diesterweg.

Bönig, D., & Thöne, B. (2018). Die Klötzchen-App im Mathematikunterricht der Grundschule – Potentiale und Einsatzmöglichkeiten. In H. Etzold, U. Kortenkamp, & S. Ladel (Hrsg.), *Mathematik in digitalen Medien – konkret. Ein Handbuch für Lehrpersonen der Primarstufe* (S. 7–27). Münster: WTM Verlag.

Bruner, J. S. (1972). *Der Prozess der Erziehung*. Berlin: Berlin-Verlag.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2000). Young children's ideas about geometric shapes. *Teaching Children Mathematics, 8,* 482–488.

de Moor, E. (1991). Geometry instruction in the Netherlands (ages 4–14) – The realistic approach. In L. Streefland (Hrsg.), *Realistic mathematics education in primary school*. Utrecht: CD-ß Press.

de Moor, E., & van den Brink, J. (1997). Geometrie vom Kind und von der Umwelt aus. *Mathematik lehren, 83,* 14–17.

Etzold, H., & Janke, S. (2018). https://dlgs.uni-potsdam.de/oer/kloetzchenprogrammierung-leitfaden. Zugegriffen: 10.12.2019.

Franke, M. (2007). *Didaktik der Geometrie*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Gasteiger, H., & Benz, C. (2012). Mathematiklernen im Übergang – kindgemäß, sachgemäß und anschlussfähig. In S. Pohlmann-Rother & U. Franz (Hrsg.), *Kooperation von KiTa und Grundschule. Eine Herausforderung für das pädagogische Personal* (S. 104–120). Köln: Carl Link.

Gattegno, C. (1971). *Geoboard Geometry*. New York: Educational Solutions Worldwide Inc.

Häring, G., Lippmann, F., Neißl, U., & Redlich, M. (2015). *Nussknacker. Mein Mathematikbuch. 2. Schuljahr*. Stuttgart: Klett.

Hasemann, K. (1985). Schülergespräche über Würfelnetze. *Journal für Mathematik-Didaktik, 6,* 119–140.

Hasemann, K. (1999). Zur Entwicklung geometrischer und physikalischer Begriffe bei Kindern. In H. Henning (Hrsg.), *Mathematik lernen durch Handeln und Erfahrung* (S. 145–150). Oldenburg: Bültmann & Gerriets.

Hefendehl-Hebeker, L. (1999). Erleben, wie arithmetisches Wissen entsteht. In C. Selter & G. Walther (Hrsg.), *Mathematikdidaktik als design science* (S. 105–111). Leipzig: Klett.

KMK. (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich*. Neuwied: Luchterhand.

Krauthausen, G. (2018). *Einführung in die Mathematikdidaktik – Grundschule*. Heidelberg: Springer Spektrum.

Krauthausen, G., & Pilgrim, A. (2020). Das Teilprojekt APPsicht – Anregungen zur Förderung der Raumvorstellung. In V. Frederking & S. Ladel (Hrsg.), *Grundschule digital. Innovative Projekte für die Fächer Deutsch und Mathematik* (S. 17–36). Münster: Waxmann.

Kuzle, A., & Etzold, H. (2017). Klipp Klapp – Würfelnetze einmal anders. Mit digitalen Medien das räumliche Vorstellungsvermögen fördern. *Grundschulunterricht Mathematik, 1,* 29–32.

Maringer, A. (1996). *Die Entwicklung von Raumbegriffen. Eine empirische Untersuchung mit Kindern im Vor- und Grundschulalter. Hausarbeit im Rahmen der ersten Staatsprüfung für das Lehramt an Grund- und Hauptschulen.* Universität Osnabrück.

Milz, I. (1993). *Rechenschwächen erkennen und behandeln*. Dortmund: Borgmann.

Oerter, R., & Montada, L. (1987). *Entwicklungspsychologie*. München: Psychologie Verlags Union.

Papy, F., & Papy, G. (1990). Taximetry. *International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, 1,* 39–352.

Piaget, J. (1958). Die Genese der Zahl beim Kinde. *Westermanns Pädagogische Beiträge, 10,* 57–367.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1971). *Die Entwicklung des räumlichen Denkens beim Kinde*. Stuttgart: Klett.

Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminska, A. (1975). *Die natürliche Geometrie des Kindes*. Stuttgart: Klett.

Pilgrim, A., & Krauthausen, G. (2020). Aktivitäten rund um Würfelkonfigurationen – Ein klassischer Inhalt mit physischen und digitalen Arbeitsmitteln integrativ erarbeitet. In V.

Frederking & S. Ladel (Hrsg.), *Grundschule digital. Innovative Projekte für die Fächer Deutsch und Mathematik*. Waxmann: Münster.

Polya, G. (1980). *Schule des Denkens*. Bern: Francke.

Radatz, H., & Rickmeyer, K. (1991). *Handbuch für den Geometrieunterricht an Grundschulen*. Hannover: Schroedel.

Rink, R., & Walter, D. (2020). *Digitale Medien im Matheunterricht – Ideen für die Grundschule*. Berlin: Cornelsen.

Rinkens, H.-D., Rottmann, T., & Träger, G. (2014). *Welt der Zahl 2. Mathematisches Unterrichtswerk für die Grundschule*. Braunschweig: Bildungshaus Schulbuchverlage.

Rinkens, H.-D., Rottmann, T., & Träger, G. (2015a). *Welt der Zahl 1. Mathematisches Unterrichtswerk für die Grundschule*. Braunschweig: Bildungshaus Schulbuchverlage.

Rinkens, H.-D., Rottmann, T., & Träger, G. (2015b). *Welt der Zahl 3. Mathematisches Unterrichtswerk für die Grundschule*. Braunschweig: Bildungshaus Schulbuchverlage.

Rothmaler, W. (2000). *Exkursionsflora von Deutschland* (Bd. 3, Gefäßplanzen: Atlasband). Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Braunschweig: Schroedel.

Steibl, H. (1976). *Geo-Brett im Unterricht*. Göttingen: Kallmeyer.

Stein, S. (2018). ACAT-Review zur App „Klipp Klapp“. In H. Etzold, U. Kortenkamp, & S. Ladel (Hrsg.), *Mathematik in digitalen Medien – konkret. Ein Handbuch für Lehrpersonen der Primarstufe* (S. 121–128). Münster: WTM Verlag.

Steinweg, A. S. (2001). *Zur Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses bei Kindern. Epistemologisch-pädagogische Grundlegung*. Münster: LIT.

Steinweg, A. S. (2002). Zu Bedeutung und Möglichkeiten von Aufgaben zu figurierten Zahlen. *Journal für Mathematik-Didaktik, 23,* 129–151.

Treffers, A. (1987). *Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction – The Wiskobas Project*. Dordrecht: Reidel.

Unterhauser, E. (2020). *Geometrisches Begriffsverständnis in der frühen Bildung. Eine Interviewstudie zu den Begriffen Vier- und Dreieck bei Kindergartenkindern*. Berlin: Springer Spektrum.

van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The learning paradox and the learning miracle: Thoughts on primary school mathematics education. *Journal für Mathematik-Didaktik, 24,* 96–121.

van Hiele, P. M. (1957). De problematiek van het inzicht. Gedemonstreed an het inzicht van schoolkinderen in meetkunde-leerstoff. Dissertation, Universität Utrecht.

van Hiele, P. M. (1976). Wie kann man im Mathematikunterricht den Denkstufen Rechnung tragen? *Educational Studies in Mathematics, 7,* 157–169.

van Hiele, P. M. (1981). *Struktuur*. Purmerend: Musses.

van Hiele-Geldorf, D. (1957). De didaktiek van de meetkunde in de eerste klaas van het V.H.M.O. Dissertation, Universität Utrecht.

Walter, M. (2000). *Make a bigger puddle, make a smaller worm*. London: BEAM Education.

Wittenberg, A. I. (1968). *Vom Denken in Begriffen: Mathematik als Experiment des reinen Denkens*. Basel: Birkhäuser.

Wittmann, E. C. (1975). *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. Braunschweig: Vieweg.

Wittmann, E. C. (1982). *Mathematisches Denken bei Vor- und Grundschulkindern*. Braunschweig: Vieweg.

Wittmann, E. C. (1999). Konstruktion eines Geometriecurriculums ausgehend von Grundideen der Elementargeometrie. In H. Henning (Hrsg.), *Mathematik lernen durch Handeln und Erfahrung* (S. 205–223). Oldenburg: Bültmann & Gerriets.

Wittmann, E. C., & Müller, G. N. (1993). *Handbuch produktiver Rechenübungen* (Bd. 1). Stuttgart: Klett.

Wittmann, E. C., & Müller, G. N. (2012). *Das Zahlenbuch 1. Begleitband*. Stuttgart: Klett.

Wittmann, E. C., & Müller, G. N. (2017a). *Das Zahlenbuch 1*. Stuttgart: Klett.

Wittmann, E. C., & Müller, G. N. (2017b). *Das Zahlenbuch 2*. Stuttgart: Klett.

Wollring, B. (1998). Robert zeichnet und baut. In A. Peter-Koop (Hrsg.), *Das besondere Kind im Mathematikunterricht der Grundschule* (S. 155–163). Offenburg: Mildenberger.

Wollring, B. (2003). Hausnetze auf begrenzten Flächen – Anspruchsvolle Aufgabenmuster zur Geometrie. In S. Ruwisch & A. Peter-Koop (Hrsg.), *Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule* (S. 131–143). Offenburg: Mildenberger.

Wollring, B. (2006a). Kindermuster und Pläne dazu – Lernumgebungen zur frühen geometrischen Förderung. In M. Grüßing & A. Peter-Koop (Hrsg.), *Die Entwicklung mathematischen Denkens in Kindergarten und Grundschule: Beobachten – Fördern – Dokumentieren* (S. 80–102). Offenburg: Mildenberger.

Wollring, B. (2006b). Erwerben, Korrespondieren, Festhalten. Raumerfahrungen im Mathematikunterricht der Grundschule. *Grundschulmagazin, 5,* 8–12.

Wollring, B. (2008a). Bilder falten – Geschichten falten. Arbeitsumgebungen zur ebenen Papierfaltgeometrie. *Unterricht konkret, 8,* 18–23.

Wollring, B. (2008b). Faltbilderbücher und Faltanleitungen. *Unterricht konkret 8,* Materialbeilage.

7 Größen und Sachrechnen

Zahlen begegnen einem überall – das wissen die Kinder schon zu Schulbeginn (vgl. Abb. 1.3 in Abschn. 1.2.2). Sieht man sich die Vielfalt der Zahlen, die in der alltäglichen Umwelt auftreten, etwas genauer an, so findet man sie – genau genommen – nur selten „rein“, sondern häufig zusammen mit einer Maßbezeichnung: 1 €, 2 h, 3 m, aber auch als Ordnungszahlen (4. Stock) oder in Telefonnummern und Autokennzeichen. Auf diese verschiedenen Zahlaspekte sind wir in Abschn. 1.2.2 schon eingegangen. Bei der Verwendung von Zahlen zusammen mit einer Maßbezeichnung spricht man von Größen (Abschn. 7.1).

Im Alltag rechnen wir meist mit Größen, wenn wir beispielsweise beim Einkaufen Preise addieren oder vergleichen, mithilfe des Kilometerzählers eine zurückgelegte Wegstrecke oder die Geschwindigkeit aus Weg und Zeit berechnen. Werden solche alltäglichen oder auch weniger alltäglichen Probleme mithilfe der Mathematik bearbeitet, spricht man in der Grundschule in der Regel vom „Sachrechnen“, in höheren Jahrgangsstufen von „angewandter Mathematik“. Die Bearbeitung von – möglichst realen und lebensnahen – Sachproblemen zeigt den Schülerinnen und Schülern, dass die Mathematik für die Bewältigung des Alltags brauchbar und hilfreich ist und das Leben erleichtern kann (Abschn. 7.2).

Insbesondere im Anfangsunterricht haben Aufgaben mit Sachbezug noch eine weitere Funktion: Sie sind sehr gute Indikatoren dafür zu zeigen, inwieweit die Kinder Grundvorstellungen zu den Rechenoperationen aufgebaut haben. Sehen sie Rechenaufgaben nur als auszuführende Prozeduren (deren Ergebnis „richtig“ oder „falsch“ ist), oder können sie die Beziehungen zwischen Zahlen in Rechenaufgaben erkennen und diese auch mit Situationen oder Handlungen verbinden? Beim Lösen von Sachaufgaben offenbaren Kinder also, ob und wie sie mathematische Zusammenhänge verstehen, was den Lehrkräften wiederum entscheidende Hinweise auf den momentanen Entwicklungsstand eines Kindes gibt. Wir gehen darauf in Abschn. 7.3 ausführlich ein.

K. Hasemann und H. Gasteiger, *Anfangsunterricht Mathematik,* Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II, https://doi.org/10.1007/978-3-662-61360-3_7

7.1 Größen

7.1.1 Begriffsklärung

Bei der Definition des Begriffs „natürliche Zahl“ haben wir auf endliche Mengen zurückgegriffen und sie im Hinblick auf ihre „Mächtigkeit“ verglichen (vgl. Abb. 1.2 in Abschn. 1.2.1). Eine ähnliche Idee hilft auch bei der Erklärung dessen, was – mathematisch gesehen – unter „Größen“ verstanden werden soll (für unsere Zwecke reicht es, diese Idee anzusprechen; eine systematische Einführung in das Rechnen mit Größen findet man z. B. bei Bigalke und Hasemann 1977, S. 85 ff.). Größen sind in der Regel objektiv messbare Eigenschaften von Gegenständen und Vorgängen. Die „Größe“ eines Gegenstandes oder Vorgangs kann also gemessen und insofern auch mit einer Größenangabe versehen werden. In der Grundschule kommen die Größenbereiche Längen, Gewichte, Zeitspannen, Geldwerte, Flächeninhalte und Volumina vor, während andere wie Geschwindigkeit oder Stromstärke erst später thematisiert werden.

Da sich die Begriffsbildung am Beispiel der Längen sehr einfach und anschaulich erläutern lässt, nehmen wir sie hier als Beispiel. Werden Kinder oder Erwachsene gefragt, was „ein Meter“ ist, so breiten viele die Arme aus und zeigen mit den Händen einen Abstand: ungefähr so lang ist ein Meter. Unsere Vorstellung von einer Länge ist an Abstände – genauer: an Strecken – gebunden, ebenso wie unsere Vorstellung von natürlichen Zahlen, wenn wir sie als Anzahlen (Kardinalzahlen) auffassen, an Mengen gebunden ist. Zwei (endliche) Mengen sind „gleich groß“ bzw. gleichmächtig, wenn sie gleich viele Elemente haben. Sie werden mit der gleichen Kardinalzahl – z. B. „drei“ – bezeichnet. Jede dieser Mengen „repräsentiert“ die Kardinalzahl „drei“. Zwei Längen (die wir uns durch Stäbe repräsentiert denken können) haben die Eigenschaft, „gleich lang“ zu sein, wenn man sie z. B. unmittelbar nebeneinanderlegen kann und keiner der beiden Stäbe an einem Ende übersteht. Man kann beide mit der gleichen Größenangabe – z. B. fünf Zentimeter – bezeichnen (Abb. 7.1). Jeder dieser Stäbe „repräsentiert“ die Größe „fünf Zentimeter“.

Längen und natürliche Zahlen haben eine weitere Gemeinsamkeit: Man kann sie ordnen und man kann sie addieren: Die Ordnung ergibt sich direkt aus dem Vergleich von Strecken (vgl. Abb. 7.1), die Addition wird durch das Aneinanderlegen von Strecken repräsentiert. Allerdings lassen sich Größen – anders als natürliche Zahlen – nicht multiplizieren. Einleuchtend ist dies, wenn man überlegt, was drei Euro mal fünf Euro oder sechs Stunden mal zwei Minuten sein sollen. Auf den ersten Blick sieht es zwar bei Längen so aus als ginge es doch: Ein Rechteck mit den Seitenlängen zwei Meter und drei Meter hat bekanntlich den Flächeninhalt sechs Quadratmeter. Doch dabei ist

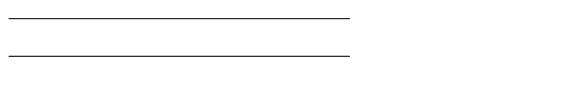


Abb. 7.1 Gleich lange und nicht gleich lange Strecken

„Quadratmeter“ keine Maßbezeichnung für *Längen,* sondern eine für *Flächeninhalte,* d. h. wir befinden uns jetzt nicht mehr im Größenbereich Längen, sondern in einem anderen Größenbereich. Die sechs Quadratmeter sind zu verstehen als „sechs mal ein Quadratmeter“, wobei „ein Quadratmeter“ der Flächeninhalt einer bestimmten Fläche ist (ebenso wie „ein Meter“ die Länge einer bestimmten Strecke).

Mit diesen Betrachtungen leiten wir über zu der Frage, wie Maßeinheiten zustande kommen. Einheiten sind stets Vereinbarungen zwischen Menschen – also in irgendeiner Weise festgelegt. Die Einheit „eine Stunde“ (als der vierundzwanzigste Teil eines Tages) orientiert sich zwar an einer Naturerscheinung – man kann sich aber auch fragen, warum für eine Stunde ausgerechnet 1/24 des Tages festgesetzt wurde. Der folgende historische Einblick zur Festlegung der Einheit „ein Meter“ zeigt in besonderem Maße, dass Einheiten auf Vereinbarungen beruhen.

Die Längeneinheit „ein Meter“ hat eine interessante Geschichte: In Deutschland hatte man früher unter anderem Einheiten mit den Maßbezeichnungen Zoll, Fuß, Elle und Meile (die teilweise von einem Fürstentum zum anderen differierten). In manchen technischen Bereichen sind diese Einheiten heute noch gebräuchlich, z. B. misst man Rohrdurchmesser meist in Zoll, und in den angelsächsischen Ländern verwendet man weiterhin die *inches*[1], *feet, yards*[2] und *miles.* Die Festlegung auf die Einheit „ein Meter“ (mit den Verfeinerungen Dezimeter, Zentimeter und Millimeter sowie der Vergröberung Kilometer) ist auf einen Beschluss der französischen Nationalversammlung aus dem Jahre 1791 zurückzuführen, die diese neue Längeneinheit als den 40-millionsten Teil des Erdumfangs festlegte. Dazu musste der Erdumfang selbstverständlich so genau wie möglich vermessen werden. Damit beauftragt wurden zwei französische Astronomen, die unter abenteuerlichen Bedingungen zwischen 1792 und 1798 – also in einer Zeit kurz nach der französischen Revolution – den 2. Längengrad östlicher Länge zwischen Barcelona und Dünkirchen vermaßen.

Das Meter wurde ab Mitte des 19. Jahrhunderts von den meisten europäischen Staaten, 1870 auch in Deutschland, übernommen. Das „Ur-Meter“ – ursprünglich ein Platinstab, seit 1889 ein Stab aus 90 % Platin und 10 % Iridium – wird heute noch in einem Museum in Sèvres bei Paris aufbewahrt. Dieser Vergleichsstab, zu dem jeder Maßstab (Zollstock) mit der Länge „ein Meter“ gleich lang ist, liegt also tatsächlich und konkret vor. (Wegen höherer Ansprüche an die Genauigkeit werden heute allerdings andere Methoden zur Bestimmung der Länge „ein Meter“ verwendet. In Deutschland geschieht dies durch die Physikalisch-Technische Bundesanstalt (PTB) in Braunschweig.).

[1]Angeblich hat Heinrich I. im Jahre 1101 in England die Breite seines Daumens als Einheit „1 *inch*“ festgelegt.

[2]Derselbe Heinrich soll die Einheit „1 *yard*“ als Abstand zwischen seiner Nasenspitze und dem Daumen seines ausgestreckten Armes eingeführt haben (für die Richtigkeit dieser Angabe wird von den Autoren keine Gewähr übernommen).

Im Hinblick auf die begriffliche Klarheit ist es nützlich, auch schon in der Grundschule zu unterscheiden zwischen der Maß*bezeichnung* (bei den Längen also „Meter", kurz: m) und der Maß*einheit* (bei den Längen „ein Meter", kurz: 1 m, oder „ein Zentimeter", kurz: 1 cm). Die Einheit wird – wie oben ausgeführt – durch Konventionen oder (internationale) Vereinbarungen festgelegt; die Maßbezeichnung ist dagegen nur ein Name. Eine bestimmte Längenangabe wird geschrieben mit der Maßzahl und der Maßbezeichnung, z. B. 3 m, 1 m 25 cm oder auch 1,25 m. Wird eine Länge mit „3 m" angegeben, so gibt die Maßzahl 3 dabei an, wie oft die Maßeinheit – hier: 1 m – in der mit „3 m" bezeichneten Länge enthalten ist. Man kann, falls erforderlich, sowohl Verfeinerungen der Maßeinheit (cm, mm) als auch andere als natürliche Zahlen (z. B. Dezimalzahlen wie 1,25) als Maßzahlen verwenden.

7.1.2 Größen im Anfangsunterricht

Die meisten Schulanfängerinnen und Schulanfänger bringen Kenntnisse über Standardmaße mit, d. h. sie kennen einige Maßbezeichnungen wie „Stunden", „Euro", „Liter", „Kilometer" usw. Manche können auch schon Größenangaben (wie z. B. 50 Cent oder zwei Stunden) mehr oder weniger korrekt verwenden. Dies bedeutet allerdings keinesfalls, dass die Kinder bereits eine sichere Vorstellung von den Größen haben – ebenso wie das Zählen-Können zwar einen wichtigen Schritt in der Zahlbegriffsentwicklung der Kinder darstellt, aber nicht bedeutet, dass der Zahlbegriff bereits erworben ist (vgl. Kap. 1, insbesondere Abschn. 1.2.2, 1.2.3 und 5.2). Bei vielen Kindern sind die Größenvorstellungen bis weit in die Grundschulzeit hinein durchaus unsicher (vgl. Franke und Ruwisch 2010, S. 235; Grassmann 1999).

Eine gründliche empirische Untersuchung zum Maßzahlverständnis haben Schmidt und Weiser (1986) vorgelegt (s. auch Abschn. 1.4.3). Zusammen mit einigen neueren Ergebnissen ergibt sich im Hinblick auf Schulanfänger das folgende Bild:

- Die Kinder haben Erfahrungen beim Einkaufen und mit anderen Situationen, in denen Geld eine Rolle spielt; die meisten kennen auch die gängigen Münzen. Dies bedeutet aber nicht, dass ihnen der Geldwert voll bewusst wäre. Selbstverständlich können sie mit „Geld" in einem abstrakten Sinne – seiner Rolle für die Wirtschaft – noch nichts anfangen, aber auch der Wert einzelner Münzen ist ihnen häufig noch nicht klar. Legt man Kindern eine Anzahl von Münzen vor, so zählen sie diese, und bei unterschiedlichen Häufchen mit Münzen beziehen sie die Frage, wo „mehr Geld" ist, meist auf die Anzahl der Münzen und nicht auf den Wert jeder einzelnen (vgl. Schmidt und Weiser 1986, S. 151; Franke und Kurz 2003, S. 201 f.). Außerdem haben Schulanfänger – außer bei sehr vertrauten Waren – häufig nur eine sehr vage Vorstellung über deren Preis.
- Erste Erfahrungen haben die Kinder auch mit dem Messen von Längen: Bei zwei Stäben können die meisten durch direkten Vergleich entscheiden, ob diese gleich oder verschieden lang sind. Schwieriger ist es jedoch, die Länge von Objekten oder die

Größe von Personen zu schätzen und mit Standardmaßen anzugeben. Dies gilt auch noch für Kinder im dritten und vierten Schuljahr (vgl. z. B. Grassmann 1999, S. 32: „1 m ist so groß wie ein ausgewachsener Mensch“).

- Bei Zeitspannen liegt eine Schwierigkeit darin, dass die Repräsentanten für die Größen (z. B. für eine Stunde, für zehn Minuten) nicht gut unmittelbar vergleichbar sind. Es handelt sich dabei in der Regel um Vorgänge, die eine gewisse Zeitdauer erfordern, wie z. B. das Zurücklegen einer Strecke auf dem Schulhof oder das Klopfen einer Folge von Tönen. Direkt vergleichen lassen sich diese nur, wenn sie zur selben Zeit beginnen, z. B. „wer läuft die 100 m schneller?“ Es ist allerdings schwerer zu sagen, ob die Schulpause länger dauert als der Schulweg. Problematisch beim Größenbereich Zeit ist außerdem, dass unser „Gefühl für Zeit“ subjektiv und von den jeweiligen Situationen abhängig ist. Die Zeitdauer wird ganz anders eingeschätzt, wenn wir beispielsweise ungeduldig auf etwas warten oder einem spannenden Film zusehen.
- Auch Gewichte sind – ohne technische Hilfsmittel – nur schwer vergleichbar. Beim Schätzen von Gewichten neigen Kinder (aber auch Erwachsene) dazu, auf das – nicht sichtbare – Gewicht eines Körpers zu schließen, indem sie von wahrnehmbaren Eigenschaften, wie z. B. seiner Dicke oder seinem Volumen, ausgehen (vgl. Schmidt und Weiser 1986, S. 151). Andererseits aber können (ältere) Grundschulkinder das Gewicht ihrer Schulfreunde recht gut schätzen, sofern sie ihr eigenes Körpergewicht kennen (Grassmann 1999, S. 32).
- Über die Kenntnisse von Schulanfängern zu Flächeninhalten und Volumina liegen kaum empirische Daten vor. Man weiß aber, dass gerade Flächeninhalte auch von älteren Kindern häufig noch völlig falsch eingeschätzt werden (vgl. Fraedrich 1991).

Radatz und Schipper (1983, S. 125) schlagen für die Behandlung von jeder Art von Größen (wie z. B. Längen) im Grundschulunterricht eine „didaktische Stufenfolge“ vor. Diese Stufenfolge führt

- von ersten Erfahrungen mit dieser Größe in Sach- oder Spielsituationen
- über den direkten Vergleich von Repräsentanten der Größe,
- den indirekten Vergleich mithilfe willkürlicher Maßeinheiten,
- das Erkennen der Invarianz einer Größe (dass sich also z. B. die Länge einer Schnur nicht ändert, wenn sie statt geradlinig geschwungen auf dem Boden liegt, oder der Abstand zweier Bäume, wenn ein Zaun dazwischen gebaut wird),
- den indirekten Vergleich mithilfe standardisierter Maßeinheiten,
- die Entwicklung einer Vorstellung von Größeneinheiten,
- das Messen mit technischen Hilfsmitteln,
- das Verfeinern und Vergröbern von Maßeinheiten
- hin zum Rechnen mit Größen.

Diese Stufenfolge findet man auch modifiziert auf sechs oder sieben Stufen (Franke und Ruwisch 2010, S. 184). Die verringerte Anzahl an Stufen ergibt sich, wenn das Erkennen der Invarianz nicht extra erwähnt und das Messen mit technischen Hilfsmitteln zur Stufe des indirekten Vergleichs mit standardisierten Maßeinheiten hinzugenommen wird.

Für den Anfangsunterricht ist natürlich vor allem das Sammeln von Erfahrungen mit Größen in Sach- oder Spielsituationen von Bedeutung. Die Stufen des direkten und des indirekten Vergleichs mit selbstgewählten Maßeinheiten und auch die Abfolge der Stufen werden von einigen kritisch gesehen (z. B. Grassmann et al. 2006, S. 54; Zöllner und Benz 2013; Zöllner 2020, S. 206 f.), sie liefern aber wertvolle Hinweise zur Entwicklung von Einsicht in die Tätigkeit des Messens. Zwar kennen Kinder in der Regel Meterstab und Maßband – die Tätigkeit des Messens mit diesen Hilfsmitteln erfordert aber einen gewissen Grad an Abstraktion, weil es sich dabei um das Ablesen von einer Skala handelt, die erst einmal verstanden werden muss. Dass dieses Verständnis nicht vorausgesetzt werden kann, zeigt die wunderschöne Projektbeschreibung *Schuh und Meter* aus einem italienischen Kindergarten (Reggio Children 2002). Die Kinder werden dort aufgefordert, einem Tischler die Maße für einen neuen Tisch mitzuteilen, der genauso aussehen soll, wie einer, der bereits im Kindergarten vorhanden ist. Sie haben freie Hand, wie sie diese Aufgabe bewerkstelligen. Obwohl diverse Messgeräte in der Einrichtung vorhanden sind, messen die Kinder mit Schöpfkellen, mit dem Kopf und letztendlich mit dem Schuh. Der Messhandlung mit dem Schuh vertrauen sie, weil sie die Maßangabe „acht Schuhlängen“ aufgrund der eigenen Messhandlung nachvollziehen können. Sie legen den Schuh so oft nacheinander an, bis die komplette Länge des Tisches abgetragen ist. Aufgrund dieser Messerfahrungen mit selbstgewählten Maßeinheiten kann letztlich auch das Verständnis für die Messgeräte geweckt werden: Es ist nicht erforderlich, eine Strecke von einem Zentimeter Länge immer wieder nacheinander anzulegen: Es kann einfach ein Maßband an den zu messenden Gegenstand angelegt werden, dies zeigt dann, wie oft der Zentimeter in der Gesamtlänge enthalten ist.

Eine wichtige Bedeutung im Anfangsunterricht hat auch der Aufbau von Größenvorstellungen (vgl. Schipper et al. 2015, S. 189). Wohlüberlegte Messhandlungen und auch direkte Vergleiche dienen dazu, Vergleichsobjekte zu kennen und insofern auch Größenvorstellungen aufzubauen (z. B. von der Größe von Menschen oder Tieren, der Höhe von Türen, der Länge von Händen und Füßen, der Breite von Fingern usw.).

In neueren Lehrgängen für das erste Schuljahr werden als Größen nur die Geldwerte, manchmal in Ansätzen auch die Längen behandelt. Beim Thema „Zeit“ geht es zunächst nicht um Zeitspannen, sondern um Zeitpunkte (Uhrzeit, Geburtstagskalender). Gewichte, Flächeninhalte und Volumina und das Berechnen von Zeitspannen sind erst Inhalte höherer Schuljahre, in Sachaufgaben (Abschn. 7.2) werden dann in der Regel alle Größenbereiche thematisiert.

Eine erste Begegnung mit dem Größenbereich Geldwerte erfolgt im Unterricht in der Regel mithilfe von sogenanntem Spiel- oder Rechengeld. Den Unterrichtsmaterialien zu den Lehrgängen für das erste Schuljahr ist es oft beigefügt. Spielgeld, wenn möglich aber auch echte Münzen, sollten zunächst dazu verwendet werden, sicherzustellen, dass alle Kinder die einzelnen Münzen kennen. Den Wert der Münzen machen sie sich bewusst, indem sie z. B. Überlegungen anstellen, was man sich jeweils dafür kaufen könnte, oder indem sie Geldbeträge von gleichem Wert mit unterschiedlichen Münzen darstellen. Das Zählen von Münzen hilft für Aufgabenstellungen dieser Art nur begrenzt weiter – ein Geldbetrag von z. B. 10 Cent lässt sich auf verschiedene Weisen und nicht nur durch 10 Ein-Cent-Münzen legen –, der *Wert* einzelner Münzen muss berücksichtigt werden. Interessante Fragestellungen zum Darstellen von Geldbeträgen auf unterschiedliche Weise sind: Kannst du zwei Euro mit einer, zwei, drei usw. Münzen legen? Lege 30 Cent mit möglichst wenig Münzen. Was müsstest du legen, wenn du den Betrag mit möglichst vielen Münzen legen willst? Weitere Fragen beziehen sich auf den Vergleich von Geldwerten, die mit Münzen dargestellt sind: Wofür kann ich mir mehr kaufen? (vgl. Schipper et al. 2015, S. 191). Wie viele 10-, 20- oder 50-Cent-Münzen ergeben zusammen einen Euro?

Das Rechnen mit Geld ist aufgrund der Alltagsrelevanz ein weiteres Ziel in diesem Größenbereich. Dabei darf es nicht darum gehen, „normale“ Rechenaufgaben in „neuem Gewand“ daher kommen zu lassen, indem z. B. statt $35 + 23 = 58$ oder $58 - 35 = 23$ Aufgaben mit Maßzahlen, gelöst werden sollen: $35\,\text{ct} + 23\,\text{ct} = 58\,\text{ct}$ bzw. $58\,\text{ct} - 35\,\text{ct} = 23\,\text{ct}$. Das Rechnen mit Geld dient vielmehr dazu, die Kinder mit Situationen vertraut zu machen, denen sie im Alltag begegnen (vgl. Abb. 7.2).

Sicherheit im Umgang mit Geld gewinnen die Kinder auch bei Rollenspielen, wie sie in Abb. 7.3 angeregt werden. Dadurch lernen die Kinder sowohl Geldbeträge darzustellen – sie müssen überlegen, mit welchen Münzen oder Scheinen sie den geforderten Betrag „bezahlen“ können – als auch mit Geldbeträgen rechnerisch umzugehen: Wie viel kostet die Bestellung? Wie viel Geld muss zurückgegeben werden?

Diese Aufgaben verfolgen klar andere Ziele als Aufgaben, in denen es „nur“ um die Sicherheit beim Rechnen geht. Eine Untersuchung von Grassmann et al. (2005, S. 55) mit Kindern am Ende des 1. Schuljahres zeigte, dass es bei Rechenübungen keineswegs von Vorteil sein muss, sie den Kindern mit Geldwerten zu stellen, statt nur mit Zahlen. (Auf die verschiedenen Aspekte des Sachrechnens kommen wir in Abschn. 7.2 noch einmal zurück.).

Längen werden meist erst im zweiten Schuljahr genauer betrachtet. In dem Lehrgang *Das Zahlenbuch 1* (Wittmann und Müller 2017a, S. 91) gibt es zwar schon im ersten Schuljahr Anregungen zum Messen mit einem Meterstab, doch ist auch in diesem Lehrgang die Maßeinheit „ein Meter“ (mit ihrer Verfeinerung zu Zentimetern) erst

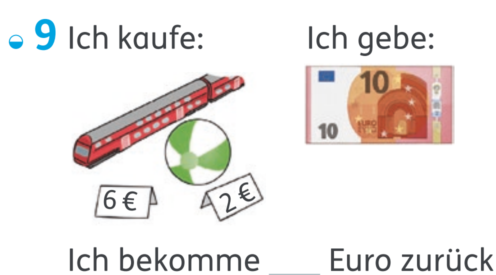


Abb. 7.2 Rückgeld. (Wittmann und Müller 2017a, S. 107 © Ernst Klett Verlag GmbH)

1 Spielt in eurem Klassenzimmer „Zauberküche“.

Ihr braucht: Spielgeld, Bestellblöcke,
Bedienungen und Gäste.

Bestellt bei der Bedienung – zum Schluss wird bezahlt.

Abb. 7.3 Frisches aus der Zauberküche. (Betz et al. 2016b, S. 90 © Cornelsen/Mathias Hütter)

Thema des zweiten Schuljahres. Die Einführung der Längen folgt üblicherweise der oben skizzierten didaktischen Stufenfolge: Zum „direkten Vergleich“ siehe als Beispiel Abb. 7.4, zum „indirekten Vergleich mithilfe willkürlicher Maßeinheiten“ siehe das Beispiel Abb. 7.5, und in Abb. 7.6 geht es um das „Messen mit technischen Hilfsmitteln“.

Bei der Betrachtung der „Zeit“ stehen zunächst Zeitpunkte (wie die Uhrzeit oder Daten auf dem Kalender) im Vordergrund. Zeitpunkte sind zwar keine „Größen“ in dem in Abschn. 7.1.1 definierten Sinne. Sie kommen aber in der Lebenswelt der Kinder vor, sodass mit ihnen unmittelbare und authentische Erfahrungen angesprochen werden, die vertieft und präzisiert werden sollten. Zudem sind es *Zeitpunkte,* die den Anfang und das Ende von *Zeitspannen* bestimmen.

In Jahrgangsstufe 1 geht es zunächst um das Kennenlernen der Uhr. Uhrzeiten wie der morgendliche Schulbeginn sowie Beginn und Ende der Pausen sorgen Tag für Tag in jeder Schulklasse für Gesprächsstoff. Diese und andere Zeitpunkte im Tagesverlauf sind deshalb für die Kinder naheliegende Anknüpfungspunkte, um Zeitpunkte an der Uhr ablesen zu lernen (vgl. Abb. 7.7).

Der eigene Geburtstag ist schon lange vor Schuleintritt ein Thema, bei dem sich Kinder mit Zeit auseinandersetzen: Wie alt bin ich? Wie oft muss ich noch schlafen, bis ich Geburtstag habe? Wie alt war ich, als ich noch ein Baby war? Im Anfangsunterricht kann die Beschäftigung mit den Geburtstagen auch noch einmal dazu dienen, verschiedene Zahlaspekte bewusst zu machen (vgl. Abb. 7.8 und Abschn. 1.2.2). Es ist eine naheliegende Idee – die man in vielen Klassen umgesetzt sehen kann –, Kinder einen

Abb. 7.4 Direkter Vergleich. (Häring et al. 2015, S. 44 © Ernst Klett Verlag GmbH)

Abb. 7.5 Messen mit Körpermaßen. (Betz et al. 2016b, S. 62 © Cornelsen/Mathias Hütter & Renate Möller)

Geburtstagskalender selbst basteln zu lassen und die Gesprächsanlässe zum Thema Zeit dabei zu nutzen.

Konkrete Anregungen, auf welche Weise Kinder Erfahrungen mit Zeitspannen machen können, geben Schipper et al. (2015, S. 195 ff.). Zum Beispiel kann man ausprobieren, wer schneller bis 20 zählen oder am schnellsten um den Schulhof laufen kann (direkter Vergleich), und man kann die Dauer von Vorgängen durch regelmäßiges Zählen oder Klatschen messen (indirekter Vergleich). Das Zählen zum indirekten Vergleich zu

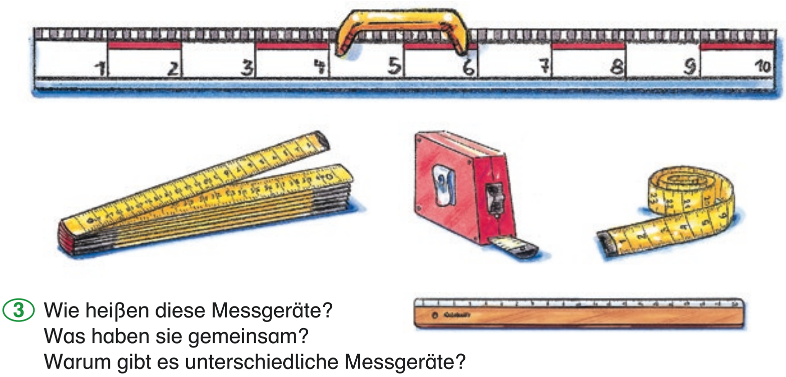


Abb. 7.6 Messgeräte. (Betz et al. 2016b, S. 63 © Cornelsen/Mathias Hütter)

Abb. 7.7 Tagesablauf. (Betz et al. 2016a, S. 112 © Cornelsen/Mathias Hütter)

8 a) Wann hast du Geburtstag? Welcher Wochentag ist oder war das in diesem Jahr?
b) Wie lange dauert es bis zu deinem Geburtstag?

9 a) Schreibe die Geburtstage deiner Familie und Freunde auf.
An welchen Wochentagen haben oder hatten sie in diesem Jahr Geburtstag?
b) Wer hat von deiner Familie und deinen Freunden als nächstes Geburtstag?
Wie lange dauert es noch?

Abb. 7.8 Kalender. (Wittmann und Müller 2017b, S. 139 © Ernst Klett Verlag GmbH)

Abb. 7.9 Direkter und indirekter Vergleich durch Zählen. (Rinkens et al. 2014, S. 121 © Westermann Gruppe)

nutzen, ist den Kindern oft bekannt vom Versteckspiel: Das Kind, das suchen muss, zählt bis zu einer vereinbarten Zahl, damit die anderen Kinder sich während dieser Zeitspanne verstecken können.

Eine Reihe von Aktivitäten für das zweite Schuljahr zum Vergleich von Zeitspannen ist in dem Lehrgang *Welt der Zahl 2* (Rinkens et al. 2014, S. 121; vgl. auch Abb. 7.9) beschrieben: Wie lange brauchst du, um bis 100 zu zählen, das ABC aufzusagen, die 6er-Reihe aufzusagen? Wie lange könnt ihr einander ansehen ohne zu lachen? … Der Vergleich kann in vielen Situationen (indirekt) durch langsames, regelmäßiges Zählen erfolgen.

7.2 Sachrechnen

7.2.1 Ziele und Funktionen

Sachrechnen ist ein Bereich des Mathematikunterrichts, in dem Probleme des Alltags, aus dem unmittelbaren oder weiteren Erfahrungsbereich der Kinder, mit mathematischen Mitteln bearbeitet werden. Die Arithmetik spielt in diesem Bereich natürlich eine große

Rolle, es geht aber auch um das Messen, Zählen, Schätzen und Vergleichen, um das Sammeln und Interpretieren von Daten und um das Veranschaulichen von Sachverhalten bzw. das Darstellen von Sachverhalten durch Skizzen, Tabellen oder auch geometrische Formen und Figuren.

Im Wesentlichen werden drei *Ziele* mit dem Sachrechnen in der Grundschule verfolgt (vgl. Franke und Ruwisch 2010, S. 20 ff.):

- Die Kinder sollen lernen, Mathematik bei der Lösung von Sachproblemen anzuwenden bzw. zu *modellieren* (vgl. Abschn. 3.3.2). Dazu wird das Sachproblem in der Regel zunächst analysiert, indem wesentliche Informationen herausgefiltert und miteinander in Beziehung gesetzt werden. Auf dieser Basis wird versucht, ein mathematisches Modell zu finden, mit dem sich das reale Problem beschreiben und lösen lässt. Das kann ein einfacher mathematischer Term sein, es kann aber auch eine Modellierung mithilfe von Tabellen, geometrischen Formen oder – in höheren Klassen – mit Hilfe von Funktionen sinnvoll sein. Um das mathematische Modell zu finden, ist es manchmal notwendig, den komplexen Sachverhalt zu reduzieren und sich auf Wesentliches zu beschränken. Mithilfe des mathematischen Modells werden Ergebnisse ermittelt und wieder in den Sachzusammenhang eingeordnet. Dabei muss die mathematische Lösung dahingehend interpretiert werden, inwieweit sie tatsächlich zur Lösung des realen Problems beiträgt.
- Ein weiteres Ziel ist das *Problemlösen* – im angelsächsischen Sprachraum wird das Lösen von Sachaufgaben meist *problem solving* genannt. Durch die Arbeit an Sachsituationen sollen die Kinder allgemeine Problemlösefähigkeiten entwickeln. Sachprobleme können in der Regel nicht mit vorgegebenen Lösungsschemata bearbeitet werden. Es ist notwendig, passend zum jeweiligen Problem eine Strategie zu entwickeln, mit der man der Problemlösung ein Stück näher kommt. Diese Fähigkeiten zum Problemlösen können sich nur dann entwickeln, wenn den Kindern auch Möglichkeiten zum Problemlösen gegeben werden (vgl. Winter 1994) – Probleme zu lösen, lernt man, indem man Probleme löst! Sachrechnen im Mathematikunterricht der Grundschule sollte diese Gelegenheiten bieten.
- Als drittes Ziel wird die *Umwelterschließung* genannt. Sachrechnen dient nicht allein der Lösung von Alltagsproblemen – darüber hinaus sollen die Kinder durch Sachrechnen auch Neues über ihre Umwelt in Erfahrung bringen. Die mathematische Auseinandersetzung mit Phänomenen oder Ereignissen aus der Umwelt kann dazu beitragen, Beziehungen und Zusammenhänge bewusst wahrzunehmen und dadurch das Verständnis für die Welt zu erweitern. Ein Beispiel für Sachrechnen mit dem Ziel der Umwelterschließung wäre: Es soll festgestellt werden, wie viele Kilogramm/Kubikmeter Müll pro Tag/Woche/Jahr in der Klasse/Schule anfallen und auf welche Weise diese Menge verringert werden kann (vgl. Müller 1991).

Das Sachrechnen hat aber auch innerhalb des Mathematikunterrichts eine besondere Bedeutung. Winter (1985) benennt drei *Funktionen,* die dem Sachrechnen im Grundschulunterricht zukommen:

- Sachrechnen als *Lernstoff:* Gemeint sind insbesondere das Kennen und Vertrautwerden mit den Größen (vgl. Abschn. 7.1).
- Sachrechnen als *Lernprinzip:* Bezüge zu realen Situationen, die für die Schülerinnen und Schüler Bedeutung haben, wecken Interesse an der Mathematik und fördern die Motivation. Mathematische Objekte werden anschaulicher, wenn man sie in alltäglichen Situationen wiederfindet. Das Sachrechnen dient damit auch dem mathematischen Verständnis. Dies zeigt sich vor allem im Zusammenhang mit dem Aufbau von Grundvorstellungen zu den mathematischen Operationen (Abschn. 4.3 und 5.2). Ein Verständnis der Addition beinhaltet beispielsweise die Erkenntnis, dass sich Situationen, in denen etwas hinzugefügt wird oder in denen zwei Mengen vereinigt werden, durch diese Operation darstellen lassen. Die Verbindung von Sache und Mathematik kommt hier als Lernprinzip zum Tragen, weil das Verständnis der Operationen in der Grundschule im Wesentlichen über Sachsituationen aufgebaut wird.
- Sachrechnen als *Lernziel:* Zu lernen, reale (authentische) Situationen zu „modellieren", also reale Probleme in mathematische Probleme zu übersetzen, ist – wie bereits erläutert – ein Ziel des Sachrechnens. Im Unterricht der Grundschule soll Sachrechnen einen wesentlichen Beitrag zur Umwelterschließung des Kindes leisten.

Die drei oben genannte Ziele des Sachrechnens sind ebenso wie die von Winter beschriebenen Funktionen bereits für den mathematischen Anfangsunterricht bedeutsam. Vor allem machen sie deutlich, was Sachrechnen nicht ist: die „Einkleidung" von Rechenaufgaben mit dem einzigen Ziel, das Rechnen zu üben. Selbstverständlich ist Übung wichtig, um Rechenfertigkeiten zu erlangen (vgl. Abschn. 4.3.3), und im Sachrechnen wird natürlich auch gerechnet, aber Rechenübungen sind kein Sachrechnen, und das Sachrechnen dient nicht allein der Übung von Rechenfertigkeiten.

Zum Thema „Sachrechnen" gibt es eine Vielzahl von Büchern und Veröffentlichungen, die auch die Ziele und Funktionen noch ausführlicher darlegen. Verwiesen sei hier z. B. auf Schipper 2009, S. 237 ff.; Winter 1985; Rasch 2001, 2006, 2016; Krauthausen 2018, S. 124 ff.; Maaß 2009; Franke und Ruwisch 2010.

7.2.2 Typen von Sachaufgaben

Wie können diese Ziele und Funktionen des Sachrechnens nun umgesetzt werden? Dazu ist es erforderlich, sich mit Frage- und Aufgabenstellungen zu beschäftigen, die im Unterricht der Grundschule eine Auseinandersetzung mit Sachthemen ermöglichen und dabei Modellierungs- und Problemlösekompetenzen fördern. Traditionell werden dazu im Mathematikunterricht „Sachaufgaben" eingesetzt, die jedoch von der Präsentation bis hin zum inhaltlichen und mathematischen Anspruch sehr unterschiedlich sein können.

Schipper (2009, S. 242; vgl. auch Radatz und Schipper 1983, S. 130) beschreibt Aufgabentypen, die zur Kategorisierung und näheren Beschreibung von Aufgaben – wie sie im Unterricht zum Einsatz kommen – verwendet wurden. Er unterscheidet „eingekleidete Aufgaben" (das sind in Worte gefasste Rechenaufgaben, wie z. B. „Max geht dreimal in den Keller und holt jedes Mal zwei Flaschen Wasser nach oben"), „Textaufgaben" (in Textform dargestellte Aufgaben, bei denen die Sache weitgehend bedeutungslos und austauschbar ist) und „Sachaufgaben/Sachprobleme" (bei denen die Sache/Umwelt im Vordergrund steht und die Mathematik das Hilfsmittel ist).

Zu dieser Unterteilung bemerkte Franke (2003, S. 35), dass „die Unterscheidung der drei Aufgabentypen nicht erforderlich [ist], weil sowohl der mathematische Inhalt als auch die Sache gleichberechtigte Komponenten in den Aufgaben sein sollen". Sie schlägt stattdessen die Bezeichnung „Sachaufgaben" für alle diese Aufgaben vor und klassifiziert sie nach

- den in den Aufgaben beschriebenen Situationen: reale Situationen und fiktive Situationen (dazu gehören z. B. auch Knobel- und Scherzaufgaben sowie Aufgaben aus Kinderbüchern),
- den mathematischen Inhalten: unter anderem geometrische und arithmetische Inhalte sowie Sachaufgaben zum Aufbau von Größenvorstellungen, und
- der Art der Präsentation der Aufgaben: unter anderem reale Phänomene, authentische Materialien, Bildaufgaben, Sachtexte und Projekte (vgl. Franke 2003, S. 36 ff.).

Eine wesentliche Kompetenz der Lehrkräfte ist es, Aufgaben für den Unterricht auszuwählen, die zentrale Ziele verfolgen und die Kinder fordern, aber trotzdem gut zu bewältigen sind. Gerade im Anfangsunterricht ist dies nicht ganz trivial.

Sachaufgaben sollten sich aus einer alltäglichen oder auch gut konstruierten Sachsituation ergeben und mit – für die Jahrgangsstufe angemessenen – mathematischen Mitteln lösbar sein. Bei den ersten Zugängen zum Sachrechnen im Anfangsunterricht wird für diese Art von Aufgaben gelegentlich der Terminus „Rechengeschichten" verwendet. Wesentlich ist dabei zum einen, dass die Kinder die in den Aufgaben oder Geschichten angesprochenen Sachsituationen (den „Kontext", wie man auch sagt) gut kennen. Zum anderen müssen die Geschichten im Hinblick auf Wortwahl und Komplexität der Darstellung dem Alter der Kinder angemessen sein. Es ergibt sich oft das Problem, dass die realistische Darstellung der Alltagssituationen Kenntnisse oder Rechenfertigkeiten erfordern würde, über die Kinder der entsprechenden Altersstufe noch nicht verfügen. So ist es häufig erforderlich, die Komplexität der Realität einzuschränken und/oder die vorkommenden Zahlen zu „schönen"; dies gilt auch für Sachsituationen, mit denen die Kinder vertraut sind. Im ersten und zweiten Schuljahr ist es beispielsweise schwierig, bei Aufgaben reale Preise zu verwenden. Es kommen im Alltag kaum „glatte“ Euro-Beträge vor, die Kinder können aber mit realen Preisen rechnerisch noch nicht umgehen.

Unabhängig vom Zahlenmaterial erfordern gerade reale Sachsituationen oftmals auch komplexe Darstellungen (z. B. Fahrplan, Preislisten) oder umfangreiche Texte, die für Kinder im Anfangsunterricht schwierig zu bewältigen sind. Sinnvoll kann es deshalb sein, den Kindern reale Situationen aus ihrer Erfahrungswelt in Bildern oder als Bildgeschichten („Bild-Text-Darstellungen“, vgl. Franke et al. 1998) zu präsentieren. Dadurch kann die Umwelterschließung, die von Winter als dritte Funktion des Sachrechnens genannt wird, bereits im Anfangsunterricht umgesetzt werden. Wir werden darauf noch eingehen.

Im Abschn. 7.2.3 geht es mit Blick auf den Anfangsunterricht darum zu zeigen, dass mathematische Fragestellungen aus realen Situationen erwachsen können und dass die im Mathematikunterricht erworbenen Einsichten, Fähigkeiten und Fertigkeiten auch im Alltag nützlich und hilfreich sind. Thema von Abschn. 7.3 wird es dann allerdings sein zu zeigen, dass sich Mathematik nicht ausschließlich auf diese beiden Aspekte – Realitätsbezug und Anwendbarkeit – reduzieren lässt.

7.2.3 Sachrechnen im Anfangsunterricht

Gelungene Beispiele für Sachaufgaben findet man in fast allen neueren Schulbüchern. Im Folgenden werden die in Abschn. 7.2.1 genannten Ziele des Sachrechnens noch einmal aufgegriffen und jeweils mit Beispielen illustriert. Darüber hinaus wird noch einmal anhand von Beispielen erläutert, was man im Anfangsunterricht unter der von Winter benannten Funktion des „Sachrechnens als Lernprinzip“ verstehen kann.

Modellieren

Das Übersetzen von Sachproblemen in die Sprache der Mathematik muss von den Kindern erst erlernt werden. Im Anfangsunterricht werden Kinder deshalb zunächst angeregt, dargestellte Situationen zu beschreiben und „passende“ Aufgaben zu erfinden. Solche Aufgaben tragen auch ganz wesentlich zur Entwicklung der sprachlichen Fähigkeiten der Kinder bei. In Abb. 7.10 ist z. B. ein Weihnachtsmarkt mit Lebkuchen, Krippenfiguren, Weihnachtssternen usw. abgebildet. Die Kinder sollen beschreiben, was sie sehen, sie sollen Rechenaufgaben aufschreiben und selbst Geschichten zum Rechnen erfinden.

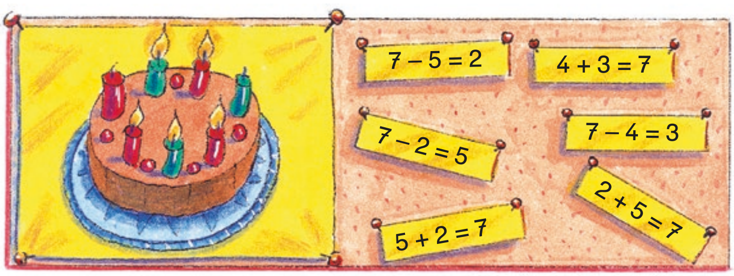
Gerade bei den im Anfangsunterricht verwendeten Bildaufgaben ist zu beachten, dass oft mehrere Lösungen möglich sind und dass zu dem Bild nicht nur *eine* einzig richtige Aufgabe passt. In Abb. 7.11 wird sogar explizit gefordert, zu einem Bild verschiedene Geschichten zu erzählen und dann auch die entsprechend verschiedenen Rechenaufgaben zuzuordnen.

Das Modellieren von Sachaufgaben ist ein Prozess, der aus mehreren Schritten besteht: Zunächst müssen der Text und die Situation korrekt erfasst werden. Bei in

Abb. 7.10 Erzählen und Rechnen. (Betz et al. 2016a, S. 34/35 © Cornelsen/Mathias Hütter)

1 Ein Bild – viele Geschichten – viele Rechnungen

a) Erzähle Geschichten zum Bild.



b) Finde zu jeder Rechnung die passende Geschichte.

Abb. 7.11 Ein Bild – viele Geschichten – viele Rechnungen. (Betz et al. 2016a, S. 60 © Cornelsen/Mathias Hütter)

Textform gegebenen Aufgaben heißt das, dass diese sowohl syntaktisch als auch im Hinblick auf die Bedeutung der einzelnen Wörter und im Hinblick auf den dargestellten Sachzusammenhang richtig erfasst werden müssen. *Textverständnis* ist also nötig. Zum anderen muss der Sachverhalt mit adäquaten mathematischen Operationen in Beziehung gesetzt werden. Um ein passendes mathematisches Modell zu finden, ist also *Operationsverständnis* nötig. Anhand folgender Aufgabe können diese Zusammenhänge anschaulich illustriert werden: „5 Vögel haben Hunger. Sie finden 3 Würmer. Wie viele Vögel bekommen keinen Wurm?“ Dieser Text ist syntaktisch und sprachlich sehr einfach. Es ist aber dennoch erforderlich, dass die Kinder die Situation erfassen und interpretieren können. Eine Interpretation wäre, dass von den fünf Vögeln drei je einen Wurm fressen und die übrigen keinen bekommen. Die Lösung zu dieser Interpretation der Aufgabe finden die Kinder dann z. B. durch Übersetzen der Situation in die Subtraktion $5 - 3 = 2$. Es sind dazu aber auch andere Lösungswege denkbar, wie z. B. die Eins-zu-eins-Zuordnung zwischen Vögeln und Würmern mit (gedanklichem) „Wegstreichen“ der drei Vogel-Wurm-Paare. (Diese Aufgabe wird am Ende des ersten Schuljahres von über 90 % der Kinder richtig gelöst, bei einer kleinen Veränderung im Wortlaut des Aufgabentextes jedoch nur noch von etwa 25 %. Wir kommen deshalb auf diese Aufgabe – und die zugehörigen „mentalen Bilder“ – im Abschn. 7.3 zurück.)

Im Mathematikunterricht der Grundschule hat sich zur Lösung von Sachaufgaben über lange Zeit hinweg ein Verfahren etabliert, das als „Frage-Rechnung-Antwort-Schema“ bekannt ist. Dieses schematische Vorgehen hat einerseits den Vorteil, dass den Kindern ein Gerüst an die Hand gegeben wird, mit dem sie an Sachaufgaben herangehen können. Andererseits ist eine Herangehensweise wie diese – gerade, wenn man berücksichtigt, dass Sachrechnen mehr ist als das Lösen von Routineaufgaben – nur bedingt hilfreich, und vor allem bei realen Problemen kann sie oftmals auch nicht zielführend sein. Allein *die* Frage zu finden, erweist sich häufig als problematisch, weil eine „echte“ Sachsituation unter Umständen mehrere, vielleicht auch zueinander konkurrierende Fragestellungen aufwirft.

Fragen zu stellen und ihre jeweilige Zielrichtung zu erkennen, ist allerdings eine wichtige Fähigkeit, wenn man sich über einen Sachverhalt Klarheit verschaffen will[3]. Um zu klären, ob und wie eine Rechnung bei der Problemlösung helfen kann, sollte man überlegen, welche Fragen überhaupt sinnvoll sind, welche Fragen mithilfe der gegebenen Informationen beantwortet werden können und für welche Fragen vielleicht das Einholen zusätzlicher Informationen nötig ist. Damit kann bereits in Jahrgangsstufe 1 begonnen werden (Abb. 7.12).

Ist der Sachverhalt mithilfe von Fragen soweit geklärt, fällt es leichter, ein mathematisches Modell für all die Fragen zu finden, die durch Rechnung beantwortet werden können.

Wird im oben erwähnten „Frage-Rechnung-Antwort-Schema“ die geforderte Antwort rein routinemäßig gegeben, indem das Rechenergebnis in einen Satz „gepackt“ wird, so

[3]Vielfach werden Situationen ohne Frage – „offen“ – in den Raum gestellt. Das ist sinnvoll, sofern die Aufgaben wirklich verschiedene Fragestellungen zulassen und diese auch diskutiert werden. Die Methode ist allerdings nicht neu, sie wurde bereits vor fast 4000 Jahren von den Babyloniern verwendet (vgl. Hasemann 1993, S. 161).

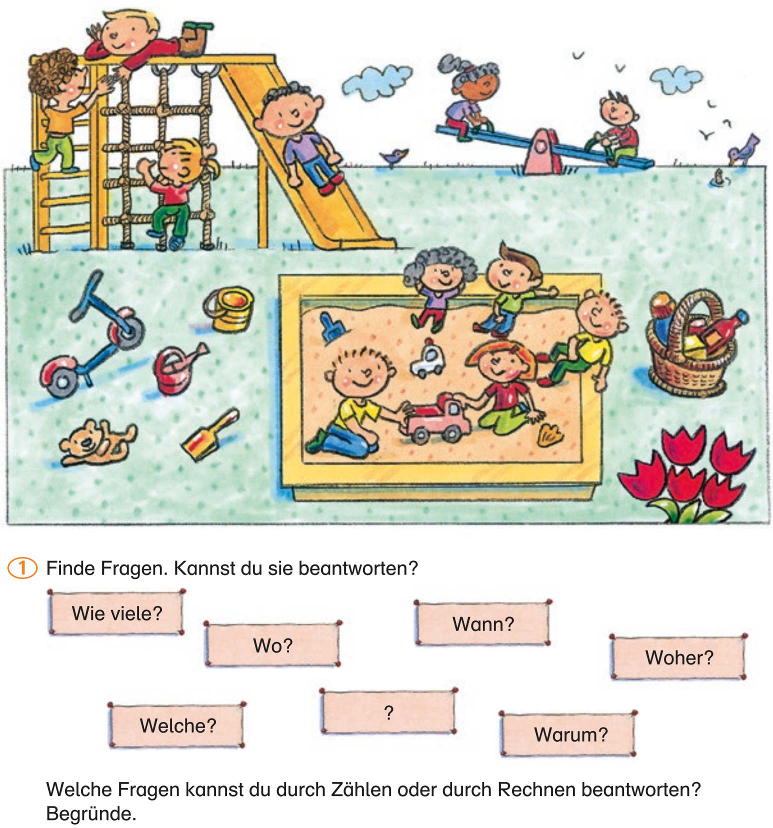


Abb. 7.12 Fragen und Antworten. (Betz et al. 2016a, S. 68 © Cornelsen/Mathias Hütter)

ist dies sicher kritisch zu sehen. Diese Phase sollte auch dazu dienen zu überprüfen, ob das Berechnete wirklich zu der Frage passt und eine plausible Lösung der Sachaufgabe darstellt. Dabei handelt es sich um eine wichtige Teilkompetenz des Modellierens.

Die Gefahren einer zu schematischen Vorgehensweise beim Sachrechnen liegen auf der Hand: Die Kinder versuchen möglicherweise gar nicht erst, den Text zu verstehen, sondern suchen nur noch nach Zahlen und Schlüsselwörtern (wie „dazu", „wegnehmen", „mehr"), um von diesen auf „passende" Rechenoperationen zu schließen. Diese Vorgehensweise verleitet manche Kinder dazu, auch Aufgaben zu lösen, die unsinnig oder mit den gegebenen Informationen gar nicht zu lösen sind (sogenannte „Kapitänsaufgaben"; vgl. Baruk 1989 oder Schipper 2009, S. 229, 245). Solche Kapitänsaufgaben[4] können im Unterricht gezielt präsentiert werden, um Kinder dafür zu sensibilisieren,

[4]Z. B.: „Auf dem Schiff sind 20 Ziegen und 8 Schafe. Wie alt ist der Kapitän?" (Schipper 2009, S. 229).

an Sachaufgaben mit Sachverstand heranzugehen. Ein sinnvoller Umgang mit Sachaufgaben und gut ausgewählte, realitätsnahe Aufgabenstellungen tragen jedenfalls dazu bei, dass die Kinder nicht „ihren Verstand mit Betreten des Klassenzimmers" ausschalten (vgl. Spiegel und Selter 2003, S. 9), sondern reflektiert an Sachprobleme herangehen.

Problemlösen

Problemlöseaufgaben im Anfangsunterricht zu verwenden, erscheint auf den ersten Blick sehr anspruchsvoll. Rasch (2006, 2016) zeigt eine unterrichtliche Vorgehensweise auf, wie Problemlösen als Ziel des Sachrechnens bereits ab Jahrgangsstufe 1 verfolgt werden kann. Problemhaltige Aufgaben kennzeichnen sich durch „in der Regel anspruchsvolle mathematische Strukturen (…), die häufig so in Sachsituationen eingebettet sind, dass die den Kindern vertrauten Grundmodelle der Rechenoperationen nicht ohne Weiteres sichtbar bzw. nicht ohne Transferleistung anzuwenden sind" (Rasch 2006, S. 5). Es hat sich als sinnvoll erwiesen, für den Problemlöseprozess das Potenzial der Gruppenarbeit zu nutzen und problemhaltige Sachaufgaben mit einer gewissen Regelmäßigkeit im Unterricht einzusetzen. Eine bereits für Jahrgangsstufe 1 geeignete Aufgabe ist z. B. „Murks hat doppelt so viele Sticker wie Quicki. 18 Sticker liegen auf dem Tisch. Wie viele Sticker hat Murks? Wie viele Sticker hat Quicki?" (Rasch 2006, S. 22). Die Kinder zeigen verschiedene Lösungsansätze: Sie handeln mit Plättchen, zerlegen die Zahl 18 oder verdoppeln Zahlen und überprüfen, ob das Doppelte der Zahl und die Zahl selbst zusammen 18 ergeben (vgl. Abb. 7.13).

Um Strategien zum Problemlösen bewusst zu machen, werden die verschiedenen Lösungswege und -ansätze sowie mögliche Darstellungsweisen gemeinsam mit allen Kindern der Klasse besprochen.

Einige Problemlöseaufgaben finden sich auch in Schulbüchern (Abb. 7.14 und 7.15).

Umwelterschließung

Um das Ziel der Umwelterschließung zu verwirklichen, müssen Aufgaben im Unterricht zum Einsatz kommen, in denen reale Sachprobleme thematisiert werden. Dazu gehören natürlich Einkaufssituationen, wie sie beispielsweise in Abb. 7.16 dargestellt sind. Hier geht es nicht ausschließlich um Rechenaufgaben, sondern auch um adäquate Preisvorstellungen. Diese sind Voraussetzung für einen bewussten Umgang mit Preisen und für

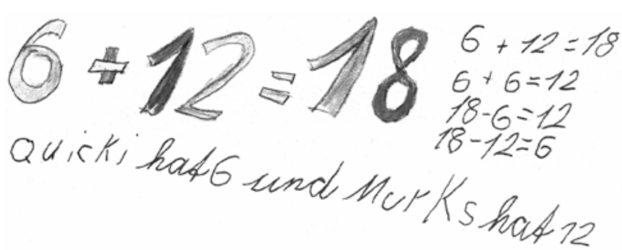
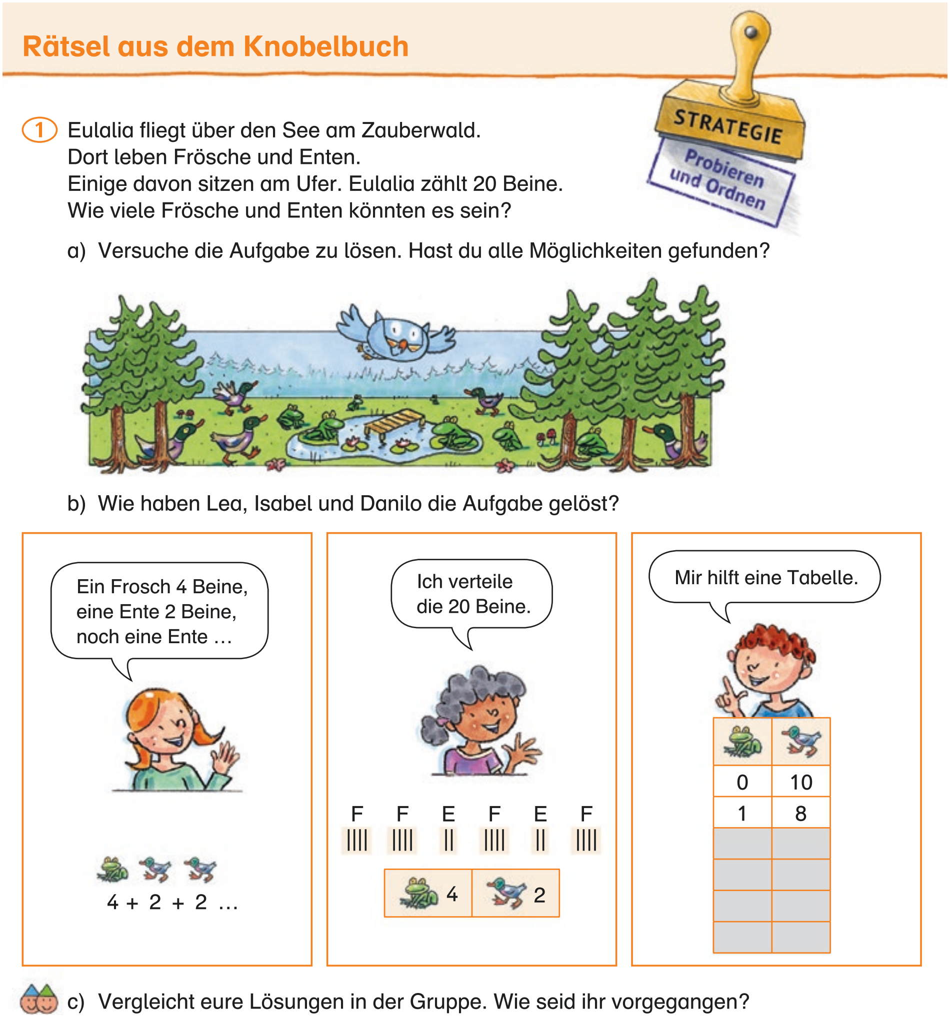


Abb. 7.13 Schülerlösung zur Stickeraufgabe. (Rasch 2006, S. 22)



Rätsel aus dem Knobelbuch

STRATEGIE
Probieren und Ordnen

1 Eulalia fliegt über den See am Zauberwald.
Dort leben Frösche und Enten.
Einige davon sitzen am Ufer. Eulalia zählt 20 Beine.
Wie viele Frösche und Enten könnten es sein?

a) Versuche die Aufgabe zu lösen. Hast du alle Möglichkeiten gefunden?

b) Wie haben Lea, Isabel und Danilo die Aufgabe gelöst?

Ein Frosch 4 Beine, eine Ente 2 Beine, noch eine Ente …

4 + 2 + 2 …

Ich verteile die 20 Beine.

F F E F E F
|||| |||| || |||| || ||||

4 2

Mir hilft eine Tabelle.

Frosch	Ente
0	10
1	8

c) Vergleicht eure Lösungen in der Gruppe. Wie seid ihr vorgegangen?

Abb. 7.14 Lösungswege und Darstellungen bei Problemlöseaufgaben. (Betz et al. 2017, S. 68 © Cornelsen/Mathias Hütter)

Rechnungen mit Geldwerten – vor allem auch, wenn es darum geht, einzuschätzen, ob ein Ergebnis richtig sein kann. Mit diesen Aktivitäten verbunden ist die Erwartung, dass die Kinder lernen, die im Text oder im Bild dargestellten realen Situationen mit mathematischen Begriffen auszudrücken und formal (also mit Zahlensätzen) darzustellen. Sie lernen zu „mathematisieren" (vgl. Abschn. 3.3.1) bzw. zu „modellieren" und setzen sich dabei mit Phänomenen ihrer Umwelt oder alltäglichen Ereignissen auseinander.

Legen und Überlegen

1 24 Personen sind im Schwimmbad.
Es sind 6 Kinder **mehr als** Erwachsene.
Wie viele Kinder sind es?
Wie viele Erwachsene?

2 Einen Tag später sind wieder 24 Personen im Schwimmbad. Nun sind es **doppelt so viele** Kinder wie Erwachsene.
Wie viele Kinder sind es?
Wie viele Erwachsene?

Abb. 7.15 Lösungswege finden. (Wittmann und Müller 2017b, S. 110 © Ernst Klett Verlag GmbH)

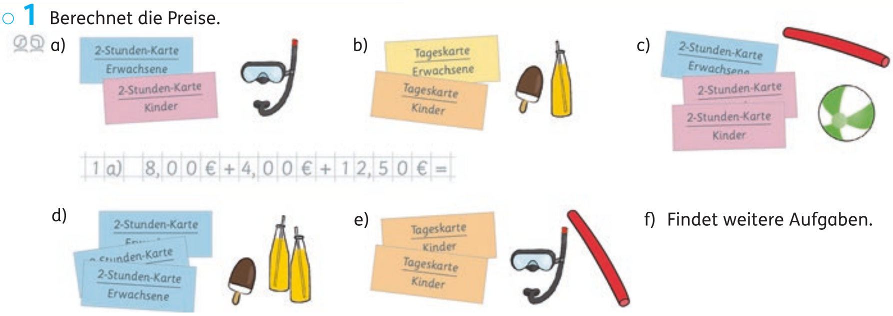
Schwimmbad »Ahoi«

	Erwachsene	Kinder
2-Stunden-Karte	8,00 €	4,00 €
Jede weitere angefangene Stunde	3,00 €	1,50 €
Tageskarte	12,00 €	6,00 €

Kiosk

Eis	1,30 €
Limo	1,50 €
Taucherbrille	12,50 €
Schwimmnudel	4,50 €
Wasserball	3,50 €

1 Berechnet die Preise.



f) Findet weitere Aufgaben.

Abb. 7.16 Einkaufssituationen. (Wittmann und Müller 2018, S. 22 © Ernst Klett Verlag GmbH)

Projekte mit realem Bezug zum Schulleben tragen in der Regel dazu bei, dass die Schülerinnen und Schüler in und für lebensbedeutsame Situationen lernen. Solche Situationen sollten zum Sachrechnen genutzt werden. Konkret kann das die Planung eines Wandertages, einer Klassenfahrt oder eines Schulfestes sein. Auch gemeinsame Aktivitäten, wie z. B. ein Besuch auf dem Markt oder die Zubereitung eines gesunden Frühstücks liefern zahlreiche Möglichkeiten für mathematische Überlegungen


Die 25 Kinder der Klasse 2c möchten ein Abschlussfest feiern.
Sie treffen viele Vorbereitungen.

① Schätzt: Wie viele Einladungskarten braucht ihr für eure Klasse?

② Erstellt eine Liste für eure Klasse. Wie viele Einladungen müsst ihr basteln?

Einladung pro Kind	1	2	3	4
Kinder	卌 |||	卌 卌	卌			

③ Zum Abschlussfest der Klasse 2c kommen 80 Gäste.

a) Schätzt: Wie viele Tische und Bänke werden benötigt?

b) Plant nun: Wie viele Tische und Bänke werden benötigt?
Die Überlegungen der Kinder können helfen. Vergleicht mit eurer Schätzung.

Abb. 7.17 Miniprojekt: Abschlussfest. (Betz et al. 2016b, S. 114 © Cornelsen/Mathias Hütter & Renate Möller)

und Rechnungen. In Schulbüchern können Projekte immer nur angedeutet werden (Abb. 7.17).

Zum Aspekt Umwelterschließung bieten sich über Projekte hinaus weitere fächerübergreifende Themen an. Ein Beispiel ist in Abb. 7.18 dargestellt. Hier sieht man in besonderem Maße, dass die Kinder durch das Sachrechnen etwas über ihre Umwelt lernen können.

Sachrechnen als Lernprinzip

In den oben betrachteten Beispielen sollen die Kinder gegebene Situationen mit – bekannten – mathematischen Mitteln beschreiben. Winter hat darüber hinaus die Funktion des Sachrechnens als „Lernprinzip“ (vgl. Abschn. 7.2.1) beschrieben. Man kann Situationen konstruieren, die die Bildung neuer mathematischer Begriffe oder Verfahren nahelegen, die also Anlässe für die Erweiterung des mathematischen Repertoires

Maße bei Tieren

120 cm groß

Störche fliegen am Tag etwa 200 – 300 km.

Zugvögel fliegen im Herbst nach Spanien oder Afrika und kommen im Frühling zurück. Etwa 4500 km!

Glücksbringer Klapperstorch

Ein Ei wiegt 110 g und ist 7 cm lang.

Flügelspannweite 2 Meter!

Nest (Horst) 1,5 m Durchmesser

3 – 5 Eier

32 Tage Brutzeit. 9 – 11 Wochen bleiben die Jungen im Nest.

Gefahren: Strommasten, Drähte, Autos, Müll, wenig Nahrung

1 Lest die Informationen zu den Störchen.

a) Wie viele Tage lang kümmern sich die Storcheneltern um ihre Jungen?

b) Wie viele Mäuse fressen die Störche ungefähr in einer Woche?

c) Vergleicht die Flügelspannweite der Störche und eure Armspannweite. Was ist länger?

d) Finde weitere Fragen.

2 Berechnet die Anzahl der Paare und Jungstörche. Vergleicht und beschreibt.

Brutplatz	Anzahl der Storchenpaare	Anzahl der Jungstörche
Ubstadt	1	1
Forst	36	66
Karlsruhe	1	0
Neuburgweier	1	3
Liedolsheim	2	6
Oberhausen	16	27

Weißstörche im Rheintal bei Karlsruhe 2016

Abb. 7.18 Störche. (Wittmann und Müller 2017b, S. 132 © Ernst Klett Verlag GmbH)

der Kinder sein können. Dabei wird über Sachzusammenhänge das mathematische Verständnis gefördert. Zahlreiche Beispiele hierzu findet man im Anfangsunterricht vor allem im Zusammenhang mit den Grundvorstellungen zu den Rechenoperationen: Es geht darum zu verstehen, was eine Operation „macht“. Im Beispiel in Abb. 7.19 wird

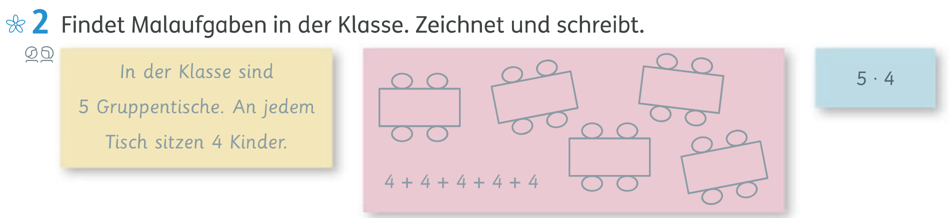


Abb. 7.19 Rechengeschichten zu Multiplikationsaufgaben. (Wittmann und Müller 2017b, S. 68 © Ernst Klett Verlag GmbH)

eine Darstellung zu einer Rechengeschichte zur Multiplikation gezeigt, die veranschaulicht, dass die Multiplikation eine sukzessive Addition sein kann, und dass es um gleiche Mengen geht, die mehrfach auftreten (hier die vier Stühle an einem Tisch). Man sieht zudem, dass sich die Aufgabe 5 mal 4 auch über 10 mal 2 lösen ließe (je zwei Kinder an Seiten der Tische).

Die Schulbuchseite in Abb. 7.20 zeigt verschiedene Grundvorstellungen der Division. Die Kinder sollen entscheiden, welche Aufgaben zu den dargestellten Situationen und Rechnungen passen. Die Seite verfolgt in erster Linie das Ziel, den Kindern aufzuzeigen, dass all dies Dividieren ist – so verschieden die Situationen auch sind.

Bei der Entwicklung mathematischer Begriffe und Verfahren aus anregenden Situationen heraus ist zu beachten, dass die entsprechenden Lernumgebungen reichhaltig und für die Schülerinnen und Schüler attraktiv sind. Gleichzeitig müssen sie aber auch strukturiert sein, sodass die mathematischen Beziehungen in ihnen tatsächlich entdeckt werden können. In dem Beispiel in Abb. 7.19 ist dies sicher der Fall. Dort wird eine Situation beschrieben, in der dieselbe Menge in einer räumlich-simultanen Anordnung mehrfach vorhanden ist. Dies ist eine der Möglichkeiten, die Multiplikation in der Grundschule zu begründen (vgl. Abschn. 4.3.2).

Die Entwicklung mathematischer Begriffe aus Alltags- oder Anwendungssituationen kann auch mit dem vor einigen Jahren entwickelten Konzept der „situierten Kognition" (vgl. Greeno 1989; Brown et al. 1989; Stern 1998) begründet werden. Demnach ist Wissen nicht „abstrakt" vorhanden, sondern stets nur im Hinblick auf die Bewältigung ganz bestimmter Anforderungen verfügbar (vgl. Stern 1998, S. 29). Einige Vertreter dieses Konzeptes behaupten sogar, dass anwendbares Wissen überhaupt nur aus realen Situationen heraus entwickelt werden kann, und dass Lern- und Anwendungssituationen deshalb möglichst ähnlich zu gestalten sind.

Auf mathematisches Wissen bezogen ist diese Sichtweise sicher zu eng. Für mathematische Begriffe und Verfahren und damit für mathematisches Wissen typisch ist ja gerade die universelle Anwendbarkeit. So sind z. B. mathematische Operationen wie die Rechenoperationen in vielfältigen und sehr unterschiedlichen Anwendungsbereichen verwendbar. Darüber hinaus sind sie ihrerseits Ausgangspunkte weiterer Fragestellungen und damit Grundlage neuer Begriffsbildungen (wenn man z. B. die Eigenschaften

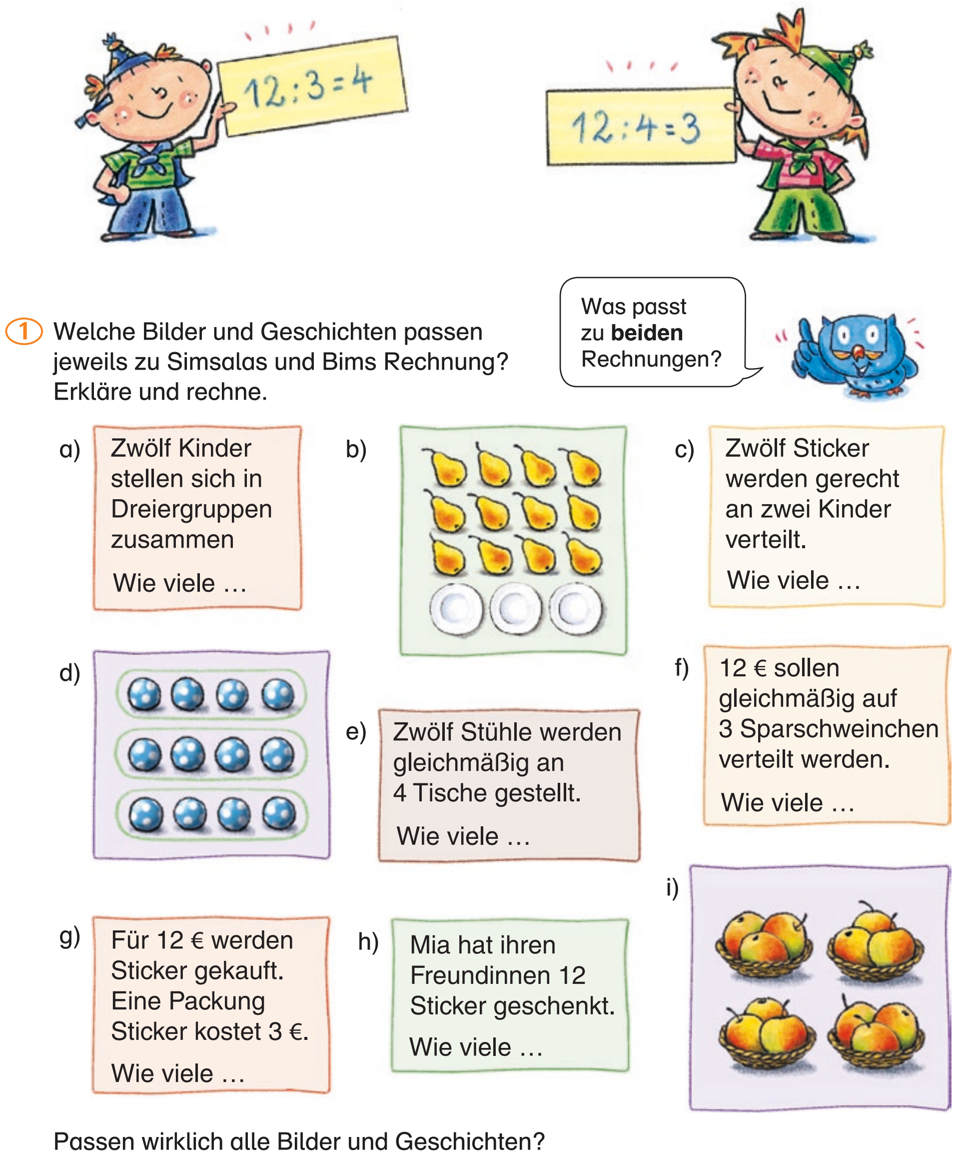


Abb. 7.20 Grundvorstellungen zum Dividieren. (Betz et al. 2016b, S. 102 © Cornelsen/Mathias Hütter)

der Rechenoperationen – Kommutativität, Assoziativität, Reversibilität – untersucht oder Möglichkeiten ihrer Verallgemeinerung – z. B. mit Blick auf Verknüpfungen von Elementen in irgendwelchen Mengen – diskutiert). Dies sind zwar keine Themen für den Anfangsunterricht, doch wir haben bereits im Zusammenhang mit der Betrachtung geometrischer Inhalte (Kap. 6) angesprochen, dass die Kinder schon recht früh erfahren sollten, inwieweit mathematische Begriffsbildungen unabhängig von realen Situationen existieren und bedeutsam sind. Dieser Aspekt ist auch Inhalt des folgenden Abschn. 7.3.

Die Schwierigkeit des Sachrechnens darf keinesfalls unterschätzt werden. Insbesondere das Modellieren ist eine große Herausforderung des Sachrechnens nicht nur in der Grundschule. Schon deshalb ist es sinnvoll, Sachaufgaben bereits im Anfangsunterricht zu behandeln und die Beziehungen zwischen Sachsituationen und Zahlensätzen immer wieder zum Inhalt des Unterrichtsgesprächs zu machen.

7.3 Entwicklung des mathematischen Verständnisses

Sachaufgaben sind sehr gute Indikatoren, wenn es darum geht zu prüfen, inwieweit Kinder mit mathematischen Beziehungen umgehen können. Wie schon erwähnt, werden diese Aufgaben manchmal auch nur gestellt, um die Kinder „passende“ Rechnungen finden und lösen zu lassen. Sie wirken deshalb häufig gekünstelt, wie folgendes Beispiel zeigt: „Jan hat 7 Hasen. Er hat 4 Hasen mehr als Thomas. Wie viele Hasen haben beide zusammen?“ In diesem Abschnitt werden wir dennoch gezielt auf das Verhalten der Kinder beim Lösen von Aufgaben dieser Art eingehen. Es wird sich zeigen, dass solche Aufgaben neben den alltagsnahen Sachaufgaben im mathematischen Anfangsunterricht durchaus eine Existenzberechtigung haben. Denn wenn sie entsprechend eingesetzt und zum Thema des Unterrichts gemacht werden, ist ihre Behandlung gerade für die schwächeren Kinder bei der Entwicklung ihres mathematischen Verständnisses von großer Bedeutung.

7.3.1 Schwierigkeit der Aufgaben

In Abschn. 7.2.3 haben wir die Aufgabe „5 Vögel haben Hunger. Sie finden 3 Würmer. Wie viele Vögel bekommen keinen Wurm?“ angesprochen. Sie wurde von über 90 % der Kinder am Ende ihres ersten Schuljahres richtig gelöst. Wie Hudson (1983) gezeigt hat, führt eine – scheinbar – geringfügige Veränderung in der Fragestellung in derselben Altersgruppe zu einem völlig anderen Ergebnis: Wenn die Frage lautet: „Wie viel mehr Vögel als Würmer gibt es?“, lösen nur noch etwa 25 % der Kinder die Aufgabe richtig.

Dieser gewaltige Unterschied wirkt auf Erwachsene irritierend, weil die Situation unverändert bleibt. Verursacht wird er durch die Art der Fragestellung: Bei der zuerst genannten Frage wird auf eine Handlung Bezug genommen. Jedenfalls können sich die Kinder in einer Handlungsfolge vorstellen, wie die Vögel die Würmer fressen, und so zur Lösung kommen. Dagegen erfordert es die zuletzt genannte Frage, *Zahlen* in Beziehung zu setzen: Wie viel sind x mehr als y? In den mentalen Bildern (vgl. Abschn. 1.4.2, 3.2 und 4.3.1), die die Kinder zur Lösung aufbauen, müssen bei dieser Art der Fragestellung abstrakte Beziehungen zwischen Zahlen repräsentiert werden. Dies ist sehr viel schwieriger (und wird von weniger Kindern spontan geleistet) als die Repräsentation von Handlungen.

Es ist seit langem bekannt (vgl. Stern 1998, S. 87 ff.), dass man 14 Grundtypen solcher Aufgaben zur Addition und Subtraktion unterscheiden kann. In diesen Aufgaben werden jeweils vergleichbare Zahlen verwendet und ähnliche Sachsituationen angesprochen, sie unterscheiden sich aber in der Art der Fragestellung. Die Aufgaben wurden in verschiedenen Ländern und zu unterschiedlichen Zeitpunkten eingesetzt, dabei wurden stets Ergebnisse ähnlich denen in Tab. 7.1 ermittelt. In dieser Tabelle sind (nach Stern 1998, S. 89) die Prozentzahlen richtiger Lösungen von deutschen Kindern im ersten Schuljahr (D1) sowie von amerikanischen Kindern im ersten, zweiten und dritten Schuljahr (A1, A2 und A3) zusammengestellt.

Vergleicht man die Prozentzahlen der deutschen Kinder am Ende des ersten Schuljahres (D1) für die einzelnen Aufgaben, so fällt auf, dass es unter ihnen leichte, mittelschwere und sehr schwere Aufgaben gibt. Betrachtet man nur die beiden ersten Aufgabengruppen (Kombinations- und Austauschaufgaben), so könnte man meinen, die Schwierigkeit einer Aufgabe sei im Wesentlichen durch die Komplexität ihrer sprachlichen Struktur bestimmt: Die Austauschaufgaben A3 bis A6 sind sprachlich komplexer als die Aufgaben K1, K2, A1 und A2. Zu dieser Hypothese passen aber in keiner Weise die Ergebnisse bei den Vergleichsaufgaben. Diese sind syntaktisch sehr einfach, umfassen aber die mit Abstand schwersten in der Liste. Die Gründe für die unterschiedliche Schwierigkeit müssen also vor allem in den *mathematischen* Anforderungen zu suchen sein, die die Aufgaben an die Kinder stellen.

Die Lösungsstrategien, die bei den einzelnen Aufgaben möglich sind, geben schon eher Hinweise auf plausible Erklärungen für den jeweiligen Schwierigkeitsgrad: Alle Aufgaben, die sich ohne allzu großen Aufwand durch Weiter- oder Rückwärtszählen lösen lassen, sind leicht. Das sind vor allem die Aufgaben, in denen Handlungen beschrieben werden oder die sich leicht durch Zählprozesse darstellen lassen (A1 und A2 bzw. K1). Zwar werden auch in den restlichen Austauschaufgaben (A3 bis A6) Handlungen beschrieben, doch können diese nicht ohne Weiteres durch Zählprozesse dargestellt werden (z. B. müsste man bei A3 abzählen, wie viele Murmeln zu 2 hinzuzufügen sind, um 9 zu erhalten. Dabei wären zwei Zählprozesse parallel zu bewältigen). Entsprechend höher ist der Schwierigkeitsgrad dieser Aufgaben.

Allerdings versagt auch diese Erklärung bei den Vergleichsaufgaben, insbesondere bei V5 und V6. Spätestens diese Aufgaben zeigen, wo das eigentliche Problem vieler Kinder im Umgang mit Sachaufgaben zu suchen ist (vgl. auch Stern 1998, S. 90 ff.): Sie sind nicht in der Lage, sich die in den Aufgaben beschriebenen Situationen im Hinblick auf die darin enthaltenen mathematischen Beziehungen vorzustellen. Die Schwierigkeit einer Aufgabe hängt hauptsächlich davon ab, wie leicht oder schwer es ist, die Situation im Kopf zu repräsentieren, sie mit dem vorhandenen Wissen zu verknüpfen und daraus adäquate Rechenverfahren abzuleiten.

Tab. 7.1 Prozentsätze richtiger Lösungen bei 14 Grundtypen von Sachaufgaben

		D1	A1	A2	A3
Kombinationsaufgaben					
	Gesamtmenge unbekannt				
K1	Maria hat 3 Murmeln. Hans hat 5 Murmeln Wie viele Murmeln haben beide zusammen?	87	100	100	100
	Teilmenge unbekannt				
K2	Maria und Hans haben zusammen 8 Murmeln Maria hat 7 Murmeln Wie viele Murmeln hat Hans?	55	39	70	100
Austauschaufgaben					
	Endmenge unbekannt				
A1	Maria hatte 6 Murmeln. Dann gab ihr Hans 5 Murmeln Wie viele Murmeln hat Maria jetzt?	89	100	100	100
A2	Maria hatte 6 Murmeln. Dann gab sie Hans 4 Murmeln Wie viele Murmeln hat Maria jetzt?	95	100	100	100
	Austauschmenge unbekannt				
A3	Maria hatte 2 Murmeln. Dann gab ihr Hans einige Murmeln. Jetzt hat Maria 9 Murmeln Wie viele Murmeln hat Hans ihr gegeben?	52	56	100	100
A4	Maria hatte 8 Murmeln. Dann gab sie Hans einige Murmeln. Jetzt hat Maria 3 Murmeln Wie viele Murmeln hat sie Hans gegeben?	49	78	100	100
Startmenge unbekannt					
A5	Am Anfang hatte Maria einige Murmeln Dann gab ihr Hans 3 Murmeln. Jetzt hat Maria 5 Murmeln Wie viele Murmeln hatte sie am Anfang?	49	28	80	95
A6	Am Anfang hatte Maria einige Murmeln Dann gab sie Hans 2 Murmeln. Jetzt hat Maria 6 Murmeln Wie viele Murmeln hatte sie am Anfang?	38	39	70	80
Vergleichsaufgaben					
	Differenzmenge unbekannt				
V1	Maria hat 5 Murmeln. Hans hat 8 Murmeln Wie viele Murmeln hat Hans mehr als Maria?	28	28	85	100
V2	Maria hat 6 Murmeln. Hans hat 2 Murmeln Wie viele Murmeln hat Hans weniger als Maria?	32	22	75	95
	Vergleichsmenge unbekannt				
V3	Maria hat 3 Murmeln. Hans hat 4 Murmeln mehr als Maria Wie viele Murmeln hat Hans?	53	17	80	100
V4	Maria hat 5 Murmeln. Hans hat 3 Murmeln weniger als Maria Wie viele Murmeln hat Hans?	58	28	90	100

(Fortsetzung)

Tab. 7.1 (Fortsetzung)

		D1	A1	A2	A3
	Referenzmenge unbekannt				
V5	Maria hat 9 Murmeln. Sie hat 4 Murmeln mehr als Hans Wie viele Murmeln hat Hans?	22	11	65	75
V6	Maria hat 4 Murmeln. Sie hat 3 Murmeln weniger als Hans Wie viele Murmeln hat Hans?	16	6	35	75

Schwächere Kinder können sich gut reale Situationen, Objekte und deren Eigenschaften sowie Handlungen vorstellen, nicht aber (abstrakte) Beziehungen zwischen Zahlen (vgl. auch Schipper 2004, S. 193). Wir haben diese Erkenntnis bereits in Abschn. 1.4.2 bei der Diskussion der arithmetischen Vorkenntnisse von Schulanfängern angesprochen. Dort hatten wir mit Gray et al. (1997, S. 117) festgestellt, „dass die unterschiedliche Art der Wahrnehmung der mathematischen Objekte (eher als mentale oder eher als physikalische Objekte) den zentralen Unterschied in der Art des Denkens ausmacht, der über Erfolg oder Misserfolg in der elementaren Arithmetik entscheidet".

Etwas vereinfacht ausgedrückt: Erfolgreich sind im Mathematikunterricht der Grundschule die Kinder, die in der Lage sind, selbstständig in Sachaufgaben die Beziehungen zwischen den genannten Zahlen zu entdecken. Die weniger erfolgreichen Kinder können genau dies nicht allein und brauchen Hilfe. Schon deshalb ist es erforderlich, bereits im Anfangsunterricht auch auf Aufgaben einzugehen, in denen nicht nur Handlungen beschrieben oder reale, den Kindern vertraute alltägliche Situationen dargestellt sind. Im späteren Mathematikunterricht – spätestens bei der Bruchrechnung – ist es unumgänglich, mentale Bilder aufzubauen, in denen auch rein mathematische Beziehungen repräsentiert sind. Die Fähigkeit dazu zu entwickeln, gehört zu den wesentlichen Zielen des Mathematikunterrichts (vgl. Abschn. 3.3).

Werden die Ausbildung und das Training dieser Fähigkeiten im Anfangsunterricht vernachlässigt, so benachteiligt man gerade die schwächeren Kinder. Es ist deshalb erforderlich, die Kinder auch tatsächlich mit Fragestellungen zu konfrontieren, die kein Ausweichen auf reine Alltagsbezüge erlauben. Viele Kinder benötigen dabei und zum Aufbau geeigneter mentaler Bilder die Hilfe der Lehrerinnen und Lehrer. Diese Hilfe mit dem Hinweis zu verweigern, solche Aufgaben seien für die schwächeren Kinder zu schwierig, wäre eine Flucht vor der Herausforderung und pädagogisch nicht zu verantworten. Wie den schwächeren Kindern beim Aufbau adäquater mentaler Bilder im Unterricht geholfen werden kann, ist Inhalt des folgenden Abschnitts.

7.3.2 Mathematisches Verständnis fördern

Zum Einstieg betrachten wir einen kurzen Ausschnitt aus einem Interview-Transkript. Eine Schülerin (S) sollte am Ende des zweiten Schuljahres folgende, oben bereits erwähnte Aufgabe lösen: „Jan hat 7 Hasen. Er hat 4 Hasen mehr als Thomas. Wie viele Hasen haben beide zusammen?“

I:	Liest du die Aufgabe mal vor?
S:	*(Liest Aufgabe vor):* 7 + 4
I:	Wie hast du das gerechnet? Wieso rechnest du das so?
S:	Weil die … wie viel Hasen haben beide zusammen? … 7 + 4 sind 11.
I:	Wie kommst du auf 7 + 4? … *(16 Sekunden)* … Wie viel Hasen hat Jan?
S:	7
I:	Und wie viel Hasen hat Thomas?
S:	4
I:	4? *(S nickt)* Wo steht das?
S:	*(Zeigt auf den Text)*
I:	Lies mal vor.
S:	Er hat 4 Hasen mehr als Thomas.
I:	… Wer ist denn „er“?
S:	Jan.
I:	Aha. Also Jan hat 4 Hasen mehr als Thomas … und wie viel Hasen hat Thomas?
S:	4
I:	4?
S:	*(Nickt)*
I:	Gucken wir uns nochmal die Frage an: „Wie viel Hasen haben beide zusammen?“… Was rechnest du da?
S:	7 +4
I:	Schreibst du das mal als Rechnung hin?
S:	*(Schreibt):* 7 + 4 = 11
I:	Wie viel Hasen haben dann beide zusammen?
S:	11

Das Verhalten dieser Schülerin ist kein Einzelfall, und je nach Standpunkt kann man es unterschiedlich interpretieren; so z. B., dass im Mathematikunterricht solche Aufgaben zu wenig geübt worden sind oder dass das Verständnis der Schülerin für diese Art von Aufgaben – vielleicht sogar für die Mathematik insgesamt – nur wenig entwickelt ist. Man könnte auch vermuten, dass beides gilt (die Schülerin wurde übrigens von ihrer

Lehrerin als relativ schwach in Mathematik, aber recht gut in Deutsch eingeschätzt). Eine weitere Interpretation wäre, dass die Schülerin nicht aufmerksam genug an die Aufgabe herangegangen sei. Solche Folgerungen greifen jedoch zu kurz. Es ist keineswegs so, dass die Schülerin nicht gewusst hätte, was „mehr“ oder „weniger“ bedeutet. Vielmehr ignorierte sie diesen Teil der Aufgabe völlig und richtete ihre Aufmerksamkeit ganz auf das Schlüsselwort „zusammen“. Davon ließ sie sich auch durch mehrere Interventionen der Interviewerin nicht abbringen.

Speziell für die hier angesprochenen Bedürfnisse der schwächeren Schülerinnen und Schüler wurde ein Förderprogramm entwickelt. Es wurde in mehreren Klassen am Ende des zweiten Schuljahres erprobt und mit anderen Vorgehensweisen verglichen (Hasemann und Stern 2002, 2003).

In allen Klassen wurde zunächst ein Vortest und abschließend ein Nachtest durchgeführt. Für den Unterrichtsversuch mit insgesamt neun Klassen und 175 Schülerinnen und Schülern standen jeweils zwölf Unterrichtsstunden (verteilt auf sechs Wochen) zur Verfügung. Da Sachaufgaben bereits früher Thema des Unterrichts gewesen waren, ging es nicht mehr um die Einführung neuer Inhalte, sondern um eine erneute und vertiefende Behandlung dieses Themas. Ausgewählt wurden dazu zwölf Sachaufgaben, die teilweise den schwierigeren der in Abschn. 7.3.1 genannten Grundaufgaben ähnlich, teilweise aber auch komplexer waren und mehr als einen Rechenschritt erforderten. Dabei war sicherzustellen, dass der Kontext zum einen altersgemäß war, er es aber zum anderen nicht zuließ, dass sich die Kinder ausschließlich auf eigene Erfahrungen aus ihrem Alltag verlassen konnten. Das Ziel war die Verbesserung des mathematischen Verständnisses der Kinder und nicht (nur) die Erhöhung der pragmatischen Fertigkeiten beim Lösen solcher Aufgaben. Außerdem wurden dem zweiten Schuljahr angemessen Zahlen aus dem Zahlenraum bis 100 verwendet.

In der holländischen Didaktik ist ein „Bus“-Kontext (vgl. z. B. van den Brink 1989) entwickelt worden, der die Konstruktion vieler, mathematisch unterschiedlich anspruchsvoller Aufgaben ermöglicht. Auf diesen Kontext wurde ebenso zugegriffen wie auf den „Murmeln“-Kontext, der in den Untersuchungen zu den Grundtypen von Sachaufgaben häufig verwendet wird; dabei wurden jedoch die „Murmeln“ ersetzt durch „Pokémon-Karten“ (bei Kindern zu jenem Zeitpunkt sehr beliebte Spielkarten). Hinzu kam noch ein weiterer Kontext („Stundenplan“), der in einigen Aufgaben das Operieren mit gegebenen Quantitäten oder mit Beziehungen zwischen Quantitäten erfordert. In allen neun Klassen wurden die folgenden Aufgaben in der hier angegebenen Reihenfolge verwendet:

1	(V1)	Die Klasse 2a macht einen Ausflug. Die Kinder fahren mit einem roten und einem grünen Kleinbus. Im roten Bus sitzen 12 Kinder. Im grünen Bus sitzen 7 Kinder. Wie viele Kinder sitzen im roten Bus mehr als im grünen Bus?
2	(V3)	Im roten Bus sitzen 8 Kinder. Im grünen Bus sitzen 5 Kinder mehr als im roten Bus. Wie viele Kinder sitzen im grünen Bus?
3	(Komplex)	Im roten Bus sitzen 13 Kinder. Im grünen Bus sitzen 6 Kinder weniger als im roten Bus. Wie viele Kinder sitzen in beiden Bussen zusammen?
4	(V1)	Tom hat 27 Pokémon-Karten. Sarah hat 33 Pokémon-Karten. Wie viele Karten hat Sarah mehr als Tom?
5	(K2)	Moritz und Thorsten haben zusammen 34 Pokémon-Karten gesammelt. Moritz hat 19 Karten gesammelt. Wie viele Karten hat Thorsten gesammelt?
6	(V1)	Katrin hat 17 h in der Woche. Ihr älterer Bruder Lars hat 22 h in der Woche. Wie viele Stunden hat Lars mehr als Katrin?
7	(V5)	Im zweiten Halbjahr hat Lars 21 Stunden. Er hat 4 Stunden mehr als Katrin. Wie viele Stunden hat Katrin?
8	(A3)	Der Schulbus fährt zur Haltestelle. Im Bus sitzen 8 Kinder. Es steigen einige Kinder ein. Nach der Haltestelle sitzen 15 Kinder im Bus. Wie viele Kinder sind eingestiegen?
9	(A6)	David sammelt Pokémon-Karten. Am Wochenende hat er 15 Karten bekommen. Jetzt hat er 89 Karten. Wie viele Karten hatte er vorher?
10	(Komplex)	Claudia hat 24 Stunden in der Woche. Sie hat 6 Stunden mehr als Thomas. Oliver hat 5 Stunden mehr als Thomas. Wie viele Stunden hat Oliver?
11	(V6)	Lisa hat 29 Karten. Astrid hat 11 Karten weniger als Lisa. Wie viele Karten hat Astrid?
12	(Komplex)	Jana hat 33 Pokémon-Karten. Sie hat 17 Karten mehr als Thomas. Wie viele Karten haben beide zusammen?

Drei Klassen wurden als Vergleichsklassen ausgewählt, in denen die jeweilige Lehrerin diese zwölf Aufgaben so, wie sie es für richtig hielt, behandelte. Ebenfalls in drei Klassen wurde ein Programm eingesetzt, in dem gezielt *vom Konkreten zum Abstrakten* vorgegangen wurde, und in den restlichen drei Klassen ein Programm, das *abstrakt-symbolisch* genannt wurde und in dem das Herstellen von Beziehungen zwischen Zahlen im Vordergrund stand. Der Verlauf des Unterrichts in den beiden speziell konzipierten Programmen kann hier nur durch eine überblicksartige Beschreibung einiger markanter Stellen angedeutet werden.

Zum Vorgehen *vom Konkreten zum Abstrakten:* In den ersten drei Unterrichtsstunden wurde je eine der drei ersten Busaufgaben behandelt (Aufgaben Nr. 1, 2 und 3). Die jeweiligen Vergleichssituationen können sehr gut „gespielt" werden, indem Kinder die Businsassen darstellen und auf diese Weise die Antworten auf die Fragen aus ihren Handlungen direkt ermitteln. Die ersten Unterrichtsstunden hatten allerdings auch schon das Ziel, den Kindern bei dem schwierigen Prozess der Transformation von konkreten Handlungen in Denkhandlungen – und damit in mentale Repräsentationen – zu helfen.

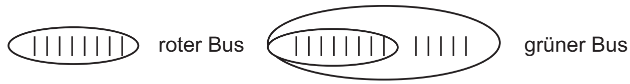


Abb. 7.21 Skizze zur Aufgabe 2

Zur Förderung dieses Prozesses wurden „Zeichnungen“ und „Skizzen“ eingesetzt: Mit „Zeichnungen“ sind unmittelbare Wiedergaben der Situationen mit den technischen Mitteln der Kinder gemeint. In „Skizzen“ sollten die *mathematischen* Zusammenhänge in den Situationen, z. B. die relevanten Mengen oder Zahlen und deren Beziehungen, gekennzeichnet werden. Selbstverständlich hatten alle Kinder zunächst Probleme zu erfassen, was mit „Skizzen“ gemeint war. Abb. 7.21 zeigt eine mögliche Skizze zur Aufgabe 2: *Im roten Bus sitzen 8 Kinder. Im grünen Bus sitzen 5 Kinder mehr als im roten Bus. Wie viele Kinder sitzen im grünen Bus?*

In den folgenden Stunden zeichnete die Lehrerin unter anderem ähnliche Skizzen an die Tafel und fragte nach dazu passenden Rechenaufgaben. Die Aufgaben wurden im Hinblick auf die Frage, ob bzw. warum sie zur Skizze passten, diskutiert. Die vierte Aufgabe *(Tom hat 27 Pokémon-Karten. Sarah hat 33 Pokémon-Karten. Wie viele Karten hat Sarah mehr als Tom?)* wurde mit Karten im Sitzkreis durchgespielt. Anschließend sammelte die Lehrerin dazu passende Rechenaufgaben. Von den Kindern genannt wurden $33 - 27 = \ldots$, $27 + \ldots = 33$ und $33 - \ldots = 27$.

Eine Beobachtung aus der fünften Stunde bei der Behandlung der Aufgabe 5 *(Moritz und Thorsten haben zusammen 34 Pokémon-Karten gesammelt. Moritz hat 19 Karten gesammelt. Wie viele Karten hat Thorsten gesammelt?)* zeigte jedoch, wie schwer es manchen Kindern fällt, sich von der realen Situation zu lösen: Ein Schüler hatte 34 Karten auf den Tisch gelegt, eine Mitschülerin sollte eine mögliche Verteilung dieser 34 Karten auf zwei Kinder vornehmen und griff (zufällig) 20 Karten für Thorsten (und damit 14 für Moritz). Während der gesamten Unterrichtszeit, in der die Lehrerin mit der Klasse mögliche Vorgehensweisen zur Lösung der Aufgabe behandelte, bestand diese Schülerin darauf, dass Thorsten 20 (eben genau die von ihr ausgewählten) Karten gesammelt habe. Die Aufgabe selbst und ihre Anforderungen traten gegenüber dieser eigenen Handlungserfahrung völlig in den Hintergrund, und auch noch nach der Unterrichtsstunde zeichnete sie ein (durchaus gelungenes) Bild von Thorsten und seinen 20 Karten an die Tafel.

Im Anschluss an die Behandlung der Aufgabe 9 *(David sammelt Pokémon-Karten. Am Wochenende hat er 15 Karten bekommen. Jetzt hat er 89 Karten. Wie viele Karten hatte er vorher?)* wurden die Schülerinnen und Schüler aufgefordert, selbst Rechengeschichten zu erfinden, die die gleiche Struktur haben wie diese Aufgabe. Es zeigte sich, dass die meisten Kinder zwar in der Lage waren, sinnvolle Geschichten zu erfinden, aber nur etwa 20 % dieser Geschichten hatten die gleiche oder eine vergleichbare Struktur wie die von Aufgabe 9 (vgl. z. B. Abb. 7.22).

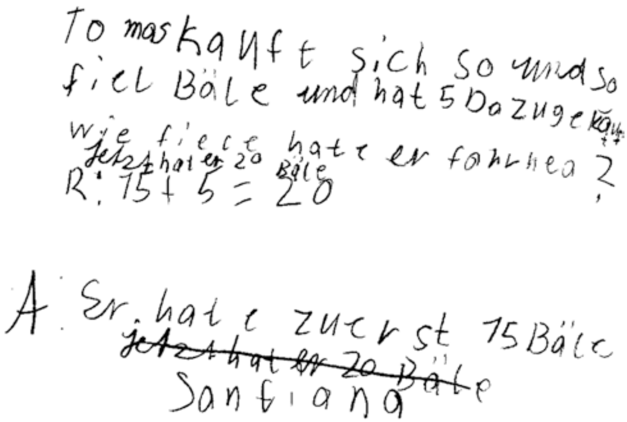


Abb. 7.22 Geschichte mit zur Aufgabe passender Struktur. (eigene Unterlagen K. Hasemann)

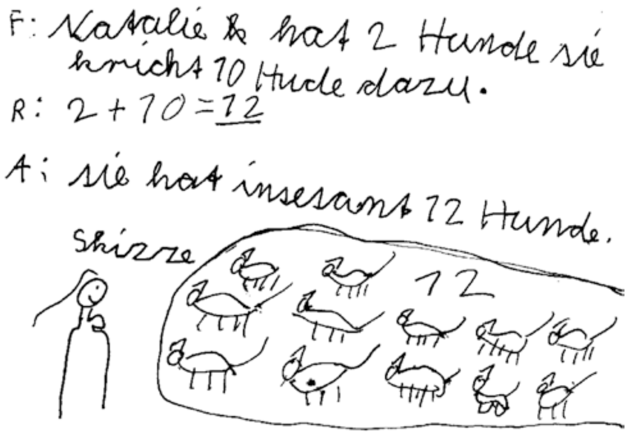


Abb. 7.23 Geschichte mit nicht zur Aufgabe passender Struktur. (Eigene Unterlagen K. Hasemann)

Das Beispiel in Abb. 7.22 ist insofern erfreulich, als es zeigt, dass der Unterricht Kinder in die Lage versetzt hat, den mathematischen Kern einer Aufgabe – mit ihren sprachlichen Möglichkeiten: präzise – in eine völlig andere Situation zu übertragen.

Es lohnt sich, die Abb. 7.22 noch etwas genauer zu betrachten: Hier hat ein Mädchen nicht nur die Struktur der zuvor behandelten Aufgabe präzise wiedergegeben ($\ldots + b = c$), sondern sogar noch für die unbekannte Ausgangsgröße einen Variablennamen („so und so fiel") verwendet. Es konnten durchaus noch weitere Schülerlösungen dieser Art gefunden werden, doch bildeten sie die Minderheit; die meisten waren eher von der Art der Abb. 7.23. Das einzige, was in der Geschichte in Abb. 7.23 „stimmt", ist die gelernte Form der Aufgabenlösung nach dem „Frage-Rechnung-Antwort-Schema"

(s. Abschn. 7.2.3). Die Aufgabenstruktur ist die für Sachaufgaben allereinfachste ($a + b = \ldots$) und nicht die der Beispielaufgabe. Es fällt auf, wie sehr diese Schülerin im Konkreten verhaftet ist: Die zwölf Hunde sind sorgfältig aufgezeichnet und auch die Besitzerin der Hunde ist zu sehen. Der Zusammenhang mit der genannten Rechnung $2 + 10 = 12$ ist jedoch in der Zeichnung nur mit gutem Willen zu erkennen.

Die Eigenproduktion in Abb. 7.23 ist typisch für die Mehrzahl der Lösungen, die in dieser Unterrichtssituation produziert wurden:

- Es wird ein gelerntes Lösungsschema verwendet
- die Struktur der Beispielaufgabe wurde nicht erkannt
- in der Zeichnung ist keine mathematische Beziehung, sondern eine konkrete Situation mit überwiegend irrelevanten Details dargestellt.

Die Realisierung des neuartigen, *abstrakt-symbolisch* genannten Programms, das ebenfalls in drei Klassen eingesetzt wurde, erfordert ein Umdenken in der Art, wie Lernumgebungen zu gestalten sind, um die entsprechenden Lernprozesse in den Köpfen der Schülerinnen und Schüler anzuregen. Denn es scheint doch allgemein Einigkeit darüber zu bestehen, dass es mit Blick auf Kinder im frühen Grundschulalter keine Alternative gibt zu einem Vorgehen, bei dem reale Situationen und Handlungen am Anfang des Lernprozesses stehen. Beim Programm *vom Konkreten zum Abstrakten* bekommt eine Zeichenkette wie $3 + \ldots = 7$ für die Kinder dadurch Bedeutung, dass sie lernen, die Zeichenkette mit unterschiedlichen Situationen in Verbindung zu bringen, um sie dann in verschiedenen Situationen verwenden zu können. Die Alternative besteht nun darin, von vornherein eine Vorstellung davon zu vermitteln, dass Zeichenketten als Darstellungen von Beziehungen zwischen Zahlen verstanden werden können. Diese Art des Verständnisses ist selbstverständlich auch bei jedem anderen Vorgehen Ziel des Lernprozesses, und dieses Ziel wird sicher auch bei vielen Kindern erreicht. Das abstrakt-symbolische Programm unterscheidet sich hiervon aber durch ein anderes Setzen der Prioritäten. Bei der Unterrichtsplanung zu diesem Programm wird von der Frage ausgegangen, welche Art von Aufgaben – genauer: welche Art von mathematischen Beziehungen und Strukturen – den Kindern besondere Schwierigkeiten bereiten und warum. Das Programm zielt darauf, diese Schwierigkeiten explizit zum Thema des Unterrichts zu machen und gezielte Hilfen zu ihrer Überwindung anzubieten.

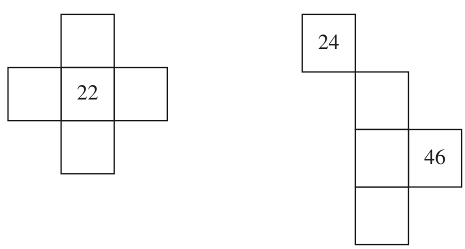
Selbstverständlich muss auch das abstrakt-symbolische Programm kindgemäß, also dem zweiten Schuljahr angemessen, sein. Es ist deshalb nicht in dem Sinne „abstrakt“, dass über die Bedeutung von formalen Notationen lediglich gesprochen würde. Auch in diesem Programm wird „anschaulich“ vorgegangen. Allerdings ist die Anschauung von anderer Art als die im Programm vom Konkreten zum Abstrakten; die dafür aufgewendete Zeit ist jedoch bei beiden Programmen etwa gleich. Veranschaulichungsmittel und Konkretisierungen sind im abstrakt-symbolischen Programm vor allem der Zahlenstrahl bzw. der Rechenstrich und die Hundertertafel (gegebenenfalls zunächst Vorformen von beiden wie Perlenketten und Rechenrahmen, vgl. Abschn. 4.2). Es geht aber auch um Denkaufgaben der folgenden Art: „Ich denke mir zwei Zahlen, die eine ist um 5 größer als die andere. Welche Zahlen könnten das sein?“

In allen drei Klassen wurden im Verlauf dieses Programms dieselben Aufgaben behandelt wie im vorher skizzierten alltagsnahen Programm. Die Einstiegsaufgabe *(Die Klasse 2a macht einen Ausflug. Die Kinder fahren mit einem roten und einem grünen Kleinbus. Im roten Bus sitzen 12 Kinder. Im grünen Bus sitzen 7 Kinder. Wie viele Kinder sitzen im roten Bus mehr als im grünen Bus?)* wurde zunächst nach dem in den Klassen bekannten „Frage-Rechnung-Antwort-Schema“ behandelt. Im Anschluss daran erinnerten die Lehrerinnen an die in den Klassen bekannte Hundertertafel (und im Laufe des Programms auch an den ebenfalls bekannten Zahlenstrahl). Diese beiden Veranschaulichungsmittel wurden dann zu den wichtigsten Strukturierungshilfen bei der Lösung von Sachaufgaben. Das Programm besteht demzufolge vor allem aus Übungen, in denen Beziehungen zwischen Zahlen im Mittelpunkt stehen. Übungen an der Hundertertafel sehen etwa wie folgt aus: Die Kinder sitzen im Halbkreis vor einem großen Poster mit einer solchen Tafel. Die Lehrerin lässt die Kinder anhand der Tafel folgende „Wegbeschreibung“ nachvollziehen:

1. Am Anfang stand ich auf der 7.
2. Dann bin ich einen Schritt nach unten gegangen.
3. Danach bin ich 26 Schritte vorwärts gegangen.
4. Dann bin ich 3 Schritte nach oben und einen nach links gegangen.
5. Wo bin ich?

Ebenfalls vor der Hundertertafel wird besprochen, was es rechnerisch bedeutet, einen Schritt nach links, rechts, oben, unten, links oben, rechts unten usw. zu gehen (dabei können Pfeile zur Kennzeichnung dieser Schritte vereinbart werden). Anschließend betrachten die Kinder Wege, auf denen sie 34 Schritte vorwärts gehen können, z. B. Schritt für Schritt oder drei Zeilen herunter und vier Spalten nach rechts. Die jeweiligen Rechnungen werden aufgeschrieben. Beim „Wo bin ich?“-Spiel sollen die Kinder, die sich dies zutrauen, jetzt mit geschlossenen Augen versuchen herauszufinden, wo sich die Lehrerin am Ende befindet. Weitere Übungen bestehen z. B. darin, in Ausschnitten aus

Abb. 7.24 Zahlen ergänzen



der Hundertertafel fehlende Zahlen zu ergänzen (vgl. Abb. 7.24; zu den Schwierigkeiten, die Kinder mit diesen Übungen haben können, vgl. Krummheuer 2003).

Ein Spiel am Zahlenstrahl heißt „Mister X". Dabei wird ein (bis auf die 0 und die 100) leerer Zahlenstrahl an die Tafel gezeichnet, und die Lehrerin oder ein Kind schreibt an die Rückseite der Tafel eine Zahl zwischen 0 und 100. Die Spieler versuchen, diese Zahl zu ermitteln, indem sie den Zahlbereich immer weiter einengen. Mitgeteilt wird nur, ob die genannte Zahl zu groß oder zu klein war. Die Spieler haben höchstens zehn Versuche. Die bei diesen Übungen entwickelten Fähigkeiten im Erkennen von Beziehungen zwischen Zahlen wurden von den Schülerinnen und Schülern zunehmend zur Lösung der Sachaufgaben verwendet. Wird beispielsweise die Aufgabe 7 *(Im zweiten Halbjahr hat Lars 21 Stunden. Er hat 4 Stunden mehr als Katrin. Wie viele Stunden hat Katrin?)* betrachtet, so kann eine große Hundertertafel als Veranschaulichungsmittel im Klassenraum aufgehängt sein. Die Kinder suchen in der Hundertertafel die 21; da 21 laut Aufgabentext 4 mehr ist als die gesuchte Zahl, lässt sie sich leicht ermitteln, entweder durch eine Rechnung oder durch vier Schritte rückwärts auf der Tafel. Sollte als Lösung „25" (21 + 4 wegen des Schlüsselwortes „mehr") genannt werden, so ist die Kontrolle anhand der Hundertertafel einfacher und naheliegender, als wenn die Rechenoperation direkt aus dem Aufgabentext entnommen worden wäre: Die 21 (die Stundenzahl von Lars) wird markiert, da Lars mehr Stunden hat als Katrin, kann deren Stundenzahl nicht größer sein als 21.

Der Zahlenstrahl und der Rechenstrich lassen ganz ähnliche Überlegungen zu. Sie werden von denjenigen Menschen (Kindern wie Erwachsenen) bevorzugt, die sich die Zahlen lieber linear geordnet als flächig vorstellen.

Um die Kinder dazu anzuregen, sich von dem konkreten Veranschaulichungsmittel zu lösen und auf einer nur vorgestellten Tafel mental zu operieren, werden sie im nächsten Schritt – bei derselben Aufgabe mit anderen Zahlen – aufgefordert, die Augen zu schließen (wer will, mag noch „blinzeln") und den Weg zur Lösung zu verbalisieren. Weitere ähnliche Aufgaben sollen dann möglichst ganz ohne Hilfsmittel gelöst werden.

Eine weitere Vorgehensweise dieses Programms wird anhand der Aufgabe 9 *(David sammelt Pokémon-Karten. Am Wochenende hat er 15 Karten bekommen. Jetzt hat er 89 Karten. Wie viele Karten hatte er vorher?)* geschildert. Diese Aufgabe erfordert das Zugreifen auf eine unbekannte Startmenge. Da die Aufgabe keine direkte Übersetzung in Handlungen zulässt, gehört sie zu den schwierigeren. Die Kennzeichnung der 89 auf der Hundertertafel oder am Zahlenstrahl erleichtert aber auch hier den Zugang zur Lösung, weil die Kinder zunächst am Material erkennen, wo die Startzahl zu suchen ist, um dann die Beziehung zwischen gesuchter Startzahl, Abstand und Zielzahl in eine Rechenoperation zu übersetzen. Dies gilt erst recht für eine der schwierigsten der eingesetzten Aufgaben *(Claudia hat 24 Stunden in der Woche. Sie hat 6 Stunden mehr als Thomas. Oliver hat 5 Stunden mehr als Thomas. Wie viele Stunden hat Oliver?)*. Die mentale Repräsentation dieser Aufgabe ist kaum möglich, wenn man das Augenmerk nur auf die Zahlen selbst richtet.

Bei der Lösung der Sachaufgaben wird zunehmend Wert auf die formale Darstellung der Rechnungen gelegt, d. h. man löst die Aufgaben zunächst unter Verwendung von Materialen wie Rechenrahmen, Hundertertafel oder Zahlenstrahl. Anschließend werden verschiedene Lösungswege erarbeitet und die dazugehörenden Formalisierungen an der Tafel festgehalten, so z. B. bei der Aufgabe 5 *(Moritz und Thorsten haben zusammen 34 Pokémon-Karten gesammelt. Moritz hat 19 Karten gesammelt. Wie viele Karten hat Thorsten gesammelt?):*

$$19 + \ \ldots\ = 34 \quad \text{oder} \quad 34 - 19 = \ \ldots \quad \text{oder} \quad 34 - \ldots\ = 19.$$

Die Schülerinnen und Schüler werden aufgefordert, einen Antwortsatz zu schreiben. Die schnelleren können dieselbe Aufgabe auch noch mit anderen Zahlen lösen.

Wie oben schon erwähnt, wurden in allen an der Erprobung der Programme beteiligten neun Klassen ein Vortest und – nach Abschluss der Programme – Nachtests durchgeführt. Die Tests umfassten nicht nur Sachaufgaben von der Art, wie sie im Unterricht behandelt worden waren, sondern auch eine Reihe von reinen Rechenaufgaben. In allen Aufgabenbereichen, also sowohl bei den Sachaufgaben als auch bei den reinen Rechenaufgaben, zeigte sich, dass das abstrakt-symbolische Programm bei den Kindern den größten und das Programm vom Konkreten zum Abstrakten den geringsten Leistungszuwachs bewirkt hatte. Dies bedeutet, dass das an alltäglichen Vorstellungen orientierte Programm im Durchschnitt noch weniger bewirkte als das unbeeinflusste Vorgehen der Lehrerinnen in den Vergleichsklassen. Betrachtet man in allen Klassen nur die im Vortest jeweils schwächere Hälfte der Kinder, so ist das Ergebnis noch deutlicher: In dieser unteren Leistungsgruppe war das abstrakt-symbolische Programm sogar mit großem Abstand das wirkungsvollste, während das Programm vom Konkreten zum Abstrakten eindeutig am wenigsten bewirkte (vgl. Hasemann und Stern 2002, S. 235 ff.).

Dieses Ergebnis der Studie ist nur auf den ersten Blick überraschend. Zwar herrscht bei vielen Lehrerinnen und Lehrern, aber auch bei Didaktikern und Lehrbuchautoren, die Meinung vor, dass Grundschulkinder mathematische Sachverhalte grundsätzlich nur ausgehend von konkreten Handlungen lernen könnten. Doch ist diese Sichtweise zu eng. Es ist vielmehr plausibel, dass man gerade die weniger leistungsstarken Kinder am besten fördert, wenn man ihnen gezielt dabei hilft, die im Konkreten und Offensichtlichen enthaltenen mathematischen Beziehungen, Muster und Strukturen zu erkennen, weil sie sie – anders als die leistungsstärkeren Kinder – nicht selber finden. Gerade den schwächeren Kindern hilft es nicht, wenn sie immer wieder auf das Offensichtliche und Konkrete verwiesen werden. Es ist sogar wahrscheinlich, dass ein Unterricht, der zu sehr auf die Alltagspraktiken der unterprivilegierten Kinder eingeht, Gefahr läuft, die sozialen Unterschiede zwischen den Kindern weiter zu zementieren (vgl. Rowlands und Carson 2002).

Man kann davon ausgehen, dass die Schwierigkeiten vieler Kinder mit der Mathematik im Unterricht der Sekundarstufe zumindest teilweise auf unzureichende Förderung in der Grundschule zurückzuführen sind. Die für den gegenwärtigen Grundschulunterricht typische Konzentration auf die Verwendung der Zahlen als Rechenzahlen bzw. als Kardinalzahlen (Mächtigkeiten von Mengen) in Sachaufgaben führt zu einem eingeschränkten mathematischen Verständnis. In den ersten Schuljahren lassen sich die meisten Aufgaben allein mithilfe konkreter Handlungsvorstellungen lösen. Dieses Denken ist in den höheren Klassen völlig unzureichend (verwiesen sei noch einmal auf die bekannten Probleme in der Bruchrechnung, vgl. z. B. Hasemann und Mangel 1999). Kinder sollten bereits in der Grundschule lernen, Beziehungen zwischen Zahlen zu modellieren.

Selbstverständlich muss im Mathematikunterricht anfangs von konkreten Situationen und Handlungen und von dem für die Kinder direkt Erfassbaren ausgegangen werden. Darüber hinaus ist es aber erforderlich, gezielt (und nicht nur implizit) auf Beziehungen und Strukturen einzugehen. Wenn sie nicht ausschließlich als Zählwerkzeuge verstanden werden, können Materialien wie die Hundertertafel und der Zahlenstrahl (oder auch Rechenrahmen, Zwanzigerfeld und Rechenkette) sehr gute Erfahrungs- und Übungsfelder sein. Sie erlauben es gerade den schwächeren Kindern, mentale Bilder von Situationen zu konstruieren, in denen auch die mathematischen Beziehungen repräsentiert sind. Diese Überzeugung wird gestützt durch die Beobachtung, dass es nur teilweise Sprachprobleme (geringe Lesefertigkeiten oder mangelnde Kenntnisse der deutschen Sprache) sind, die den Kindern die Probleme mit Sachaufgaben bereiten, sondern dass mathematische Einsichten in gewissem Umfang unabhängig sind von der gesprochenen Sprache (vgl. Tab. 7.1 und das Beispiel in Abb. 7.22).

Literatur

Baruk, S. (1989). *Wie alt ist der Kapitän? Über den Irrtum in der Mathematik*. Basel: Birkhäuser.

Betz, B., Bezold, A., Dolenc-Petz, R., Gasteiger, H., Hölz, C., Ihn-Huber, P., Kullen, C., Plankl, E., Pütz, B., Schraml, C., & Schweden, K.-W. (2016a). *Zahlenzauber 1, Mathematikbuch für die Grundschule, Allgemeine Ausgabe*. Berlin: Cornelsen.

Betz, B., Bezold, A., Dolenc-Petz, R., Gasteiger, H., Hölz, C., Ihn-Huber, P., Kullen, C., Plankl, E., Pütz, B., Schraml, C., & Schweden, K.-W. (2016b). *Zahlenzauber 2, Mathematikbuch für die Grundschule, Allgemeine Ausgabe*. Berlin: Cornelsen.

Betz, B., Bezold, A., Dolenc-Petz, R., Gasteiger, H., Hölz, C., Ihn-Huber, P., Kullen, C., Plankl, E., Pütz, B., Schraml, C., & Schweden, K.-W. (2017). *Zahlenzauber 3, Mathematikbuch für die Grundschule, Allgemeine Ausgabe*. Berlin: Cornelsen.

Bigalke, H. G., & Hasemann, K. (1977). *Zur Didaktik der Mathematik in den Klassen 5 und 6* (Bd. 1). Frankfurt a. M.: Diesterweg.

Brown, J., Collins, A., & Duguid, R. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher, 18,* 32–42.

Fraedrich, A. M. (1991). Flächenauslegen in der 1./2. Klasse. *Grundschule, 23*(2), 20–24.

Franke, M. (2003). *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Franke, M., & Kurz, A. (2003). Beim Einkaufen kenne ich mich aus – wirklich? *Journal für Mathematik-Didaktik, 24,* 190–210.

Franke, M., & Ruwisch, S. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Franke, M., Edler, S., Kettner, B., Kilian, A., & Ruwisch, S. (1998). Kinder bearbeiten Sachsituationen in Bild-Text-Darstellung. *Journal für Mathematik-Didaktik, 19,* 89–122.

Grassmann, M. (1999). Die Entwicklung von Zahl- und Größenvorstellungen als wichtigem Anlegen des Sachrechnens. *Grundschulunterricht, 46*(4), 31–34.

Grassmann, M., Klunter, M., Köhler, E., Mirwald, E., & Raudies, M. (2005). Kinder wissen viel. Auch über die Größe Geld? Universität Potsdam: Potsdamer Studien zur Grundschulforschung, Heft 32.

Grassmann, M., Klunter, M., Köhler, E., Mirwald, E., & Raudies, M. (2006). Kinder wissen viel. Auch über die Größe Geld? Universität Potsdam: Potsdamer Studien zur Grundschulforschung, Heft 33.

Gray, E., Pitta, D., & Tall, D. (1997). The nature of the object as an integral component of numerical processes. In: *Proceedings of the 21st conference of the international group for the psychology of mathematics education, Lahti, Finnland* (Bd. 1, 115–130).

Greeno, J. G. (1989). Sitations, mental models, and the generative knowledge. In D. Klahr & K. Kotowsky (Hrsg.), *Complex information processing: The impact of Herbert A Simon* (S. 285–318). Hillsdale: Erlbaum.

Häring, G., Lippmann, F., Neißl, U., & Redlich, M. (2015). *Nussknacker. Mein Mathematikbuch. 2. Schuljahr*. Stuttgart: Klett.

Hasemann, K. (1993). Beispiele Babylonischer Mathematik. *Mathematik in der Schule, 31,* 167–171.

Hasemann, K., & Mangel, H.-P. (1999). Individuelle Denkprozesse von Schülerinnen und Schülern bei der Einführung der Bruchrechnung im 6. Schuljahr. *Journal für Mathematik-Didaktik, 20,* 138–165.

Hasemann, K., & Stern, E. (2002). Die Förderung des mathematischen Verständnisses anhand von Textaufgaben – Ergebnisse einer Interventionsstudie in Klassen des 2. Schuljahres. *Journal für Mathematik-Didaktik, 23,* 222–242.

Hasemann, K., & Stern, E. (2003). Textaufgaben und mathematisches Verständnis – Ergebnisse eines Unterrichtsversuchs im 2. Schuljahr. *Grundschulunterricht, 2,* 2–5.

Hudson, T. (1983). Correspondences and numerical differences between disjoint sets. *Child Development, 54,* 84–90.

Krauthausen, G. (2018). *Einführung in die Mathematikdidaktik - Grundschule*. Heidelberg: Springer Spektrum.

Krummheuer, G. (2003). Wie wird Mathematiklernen im Unterricht der Grundschule zu ermöglichen versucht? *Journal für Mathematik-Didaktik, 24,* 122–138.

Maaß, K. (2009). *Mathematikunterricht weiterentwickeln*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Müller, G. (1991). Mit der Umwelt muss man rechnen. In H. Gesing & R. E. Lob (Hrsg.), *Umwelterziehung in der Primarstufe* (S. 225–240). Heinsberg: Dieck.

Radatz, H., & Schipper, W. (1983). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Hannover: Schroedel.

Rasch, R. (2001). *Zur Arbeit mit problemhaltigen Textaufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule*. Hildesheim: Franzbecker.

Rasch, R. (2006). *42 Denk- und Sachaufgaben. Wie Kinder mathematische Aufgaben lösen und diskutieren*. Seelze: Kallmeyer.

Rasch, R. (2016). *Textaufgaben für Grundschulkinder zum Denken und Knobeln. Mathematische Probleme lösen – Strategien entwickeln*. Seelze: Kallmeyer.

Reggio Children. (2002). *Schuh und Meter. Wie Kinder im Kindergarten lernen*. Weinheim: Beltz.

Rinkens, H.-D., Rottmann, T., & Träger, G. (2014). *Welt der Zahl 2. Mathematisches Unterrichtswerk für die Grundschule*. Braunschweig: Bildungshaus Schulbuchverlage.

Rowlands, S., & Carson, R. (2002). Where would formal academic mathematics stand in a curriculum informed by ethnomathematics? A critical review of ethnomathematics. *Educational Studies in Mathematics, 50,* 79–102.

Schipper, W. (2004). Von Handlungen zu Operationen: Entwicklung von Strategien des Kopfrechnens aus Handlungen mit Materialien. In B. Ganser (Hrsg.), *Rechenstörungen – Hilfen für Kinder mit besonderen Schwierigkeiten beim Erlernen der Mathematik* (S. 191–200). Donauwörth: Auer.

Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Braunschweig: Schroedel.

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2015). *Handbuch für den Mathematikunterricht. 1. Schuljahr*. Braunschweig: Schroedel.

Schmidt, S., & Weiser, W. (1986). Zum Maßzahlverständnis von Schulanfängern. *Journal für Mathematik-Didaktik, 7,* 121–154.

Spiegel, H., & Selter, C. (2003). *Kinder & Mathematik. Was Erwachsene wissen sollten*. Seelze: Kallmeyer.

Stern, E. (1998). *Die Entwicklung des mathematischen Verständnisses im Kindesalter*. Lengerich: Pabst Publisher.

van den Brink, F. J. (1989). Realistisch rekenonderwijs aan jonge kinderen. OW & OC, Nr. 10, Universiteit Utrecht.

Winter, H. (1985). *Sachrechnen in der Grundschule*. Bielefeld: CVK.

Winter, H. (1994). Problemhaltige Sachaufgaben. In R. Christiani (Hrsg.), *Auch die leistungsstarken Kinder fördern* (S. 106–130). Frankfurt a. M.: Cornelsen.

Wittmann, E. C., & Müller, G. N. (2017a). *Das Zahlenbuch 1*. Stuttgart: Klett.

Wittmann, E. C., & Müller, G. N. (2017b). *Das Zahlenbuch 2*. Stuttgart: Klett.

Wittmann, E. C., & Müller, G. N. (2018). *Das Zahlenbuch 3*. Stuttgart: Klett.

Zöllner, J. (2020). *Längenkonzept von Kindern im Elementarbereich*. Berlin: Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-27671-3.

Zöllner, J., & Benz, C. (2013). How four to six year old children compare lengths indirectly. http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG13/WG13_Zollner.pdf. Zugegriffen: 29.03.2013.

Bisher erschienene Bände der Reihe Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II

Herausgegeben von
Prof. Dr. Friedhelm Padberg, Universität Bielefeld
Prof. Dr. Andreas Büchter, Universität Duisburg-Essen

Bisher erschienene Bände (Auswahl):

Didaktik der Mathematik

T. Bardy/P. Bardy: Mathematisch begabte Kinder und Jugendliche (P)
C. Benz/A. Peter-Koop/M. Grüßing: Frühe mathematische Bildung (P)
M. Franke/S. Reinhold: Didaktik der Geometrie (P)
M. Franke/S. Ruwisch: Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule (P)
K. Hasemann/H. Gasteiger: Anfangsunterricht Mathematik (P)
K. Heckmann/F. Padberg: Unterrichtsentwürfe Mathematik Primarstufe, Band 1 (P)
K. Heckmann/F. Padberg: Unterrichtsentwürfe Mathematik Primarstufe, Band 2 (P)
F. Käpnick: Mathematiklernen in der Grundschule (P)
G. Krauthausen: Digitale Medien im Mathematikunterricht der Grundschule (P)
G. Krauthausen: Einführung in die Mathematikdidaktik (P)
G. Krummheuer/M. Fetzer: Der Alltag im Mathematikunterricht (P)
F. Padberg/C. Benz: Didaktik der Arithmetik (P)
E. Rathgeb-Schnierer/C. Rechtsteiner: Rechnen lernen und Flexibilität entwickeln (P)
P. Scherer/E. Moser Opitz: Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe (P)
H.-D. Sill/G. Kurtzmann: Didaktik der Stochastik in der Primarstufe (P)
A.-S. Steinweg: Algebra in der Grundschule (P)
G. Hinrichs: Modellierung im Mathematikunterricht (P/S)
A. Pallack: Digitale Medien im Mathematikunterricht der Sekundarstufen I + II (P/S)
R. Danckwerts/D. Vogel: Analysis verständlich unterrichten (S)
C. Geldermann/F. Padberg/U. Sprekelmeyer: Unterrichtsentwürfe Mathematik Sekundarstufe II (S)

K. Hasemann und H. Gasteiger, *Anfangsunterricht Mathematik,* Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II, https://doi.org/10.1007/978-3-662-61360-3

G. Greefrath: Didaktik des Sachrechnens in der Sekundarstufe (S)
G. Greefrath: Anwendungen und Modellieren im Mathematikunterricht (S)
G. Greefrath/R. Oldenburg/H.-S. Siller/V. Ulm/H.-G. Weigand: Didaktik der Analysis für die Sekundarstufe II (S)
K. Heckmann/F. Padberg: Unterrichtsentwürfe Mathematik Sekundarstufe I (S)
K. Krüger/H.-D. Sill/C. Sikora: Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe (S)
F. Padberg/S. Wartha: Didaktik der Bruchrechnung (S)
V. Ulm/M. Zehnder, Mathematische Begabung in der Sekundarstufe (S)
H.-J. Vollrath/H.-G. Weigand: Algebra in der Sekundarstufe (S)
H.-J. Vollrath/J. Roth: Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe (S)
H.-G. Weigand/T. Weth: Computer im Mathematikunterricht (S)
H.-G. Weigand et al.: Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I (S)

Mathematik

M. Helmerich/K. Lengnink: Einführung Mathematik Primarstufe – Geometrie (P)
A. Büchter/F. Padberg: Arithmetik und Zahlentheorie (P/S)
A. Büchter/F. Padberg: Einführung in die Arithmetik (P/S)
K. Appell/J. Appell: Mengen – Zahlen – Zahlbereiche (P/S)
A. Filler: Elementare Lineare Algebra (P/S)
H. Humenberger/B. Schuppar: Mit Funktionen Zusammenhänge und Veränderungen beschreiben (P/S)
S. Krauter/C. Bescherer: Erlebnis Elementargeometrie (P/S)
H. Kütting/M. Sauer: Elementare Stochastik (P/S)
T. Leuders: Erlebnis Algebra (P/S)
T. Leuders: Erlebnis Arithmetik (P/S)
F. Padberg/A. Büchter: Elementare Zahlentheorie (P/S)
F. Padberg/R. Danckwerts/M. Stein: Zahlbereiche (P/S)
A. Büchter/H.-W. Henn: Elementare Analysis (S)
B. Schuppar: Geometrie auf der Kugel – Alltägliche Phänomene rund um Erde und Himmel (S)
B. Schuppar/H. Humenberger: Elementare Numerik für die Sekundarstufe (S)
G. Wittmann: Elementare Funktionen und ihre Anwendungen (S)
P: Schwerpunkt Primarstufe
S: Schwerpunkt Sekundarstufe

Sachverzeichnis

K. Hasemann und H. Gasteiger, *Anfangsunterricht Mathematik,* Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II, https://doi.org/10.1007/978-3-662-61360-3