

Heinz Klaus Strick

# Mathematik ist schön

Anregungen zum Anschauen  
und Erforschen

für Menschen  
zwischen 9  
und 99 Jahren



Springer

---

Mathematik ist schön

---

Heinz Klaus Strick

# Mathematik ist schön

Anregungen zum Anschauen und  
Erforschen für Menschen zwischen  
9 und 99 Jahren

2., erweiterte und korrigierte Auflage

Heinz Klaus Strick  
Leverkusen, Deutschland

ISBN 978-3-662-59059-1      ISBN 978-3-662-59060-7 (eBook)  
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-59060-7>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature 2017, 2019

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Einbandabbildung: deblik, Berlin  
Planung: Iris Ruhmann

Springer ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

---

## Vorwort zur 2. Auflage

Nicht jeder denkt, wenn von Mathematik die Rede ist, unbedingt an etwas, an dem man sich erfreuen kann. Dabei hat die Mathematik viele spannende und durchaus auch ästhetisch ansprechende Aspekte zu bieten. In diesem Buch versuche ich einige dieser schönen Seiten der Mathematik aufzuzeigen.

Während meiner Tätigkeit als Mathematiklehrer habe ich mich immer wieder bemüht, für eine gewisse Auflockerung des Unterrichts zu sorgen. Denn auch beim spannendsten Mathematikunterricht lassen sich mühsame und trockene Phasen leider nicht vermeiden.

Für eine solche Auflockerung und Bereicherung eignen sich Fragestellungen, die man als *mathematische Spiele* bezeichnen könnte, oder auch *Knobelaufgaben*, deren Lösungswege zu verblüffenden Einsichten führen.

So können beispielsweise nach der Behandlung der Winkelsätze in der Elementargeometrie regelmäßige Sternfiguren untersucht (Kap. 1) oder regelmäßige Vielecke mithilfe von Rauten ausgelegt werden (Kap. 10). Das Auffinden des größten gemeinsamen Teilers zweier Zahlen ist unterhaltsamer, wenn man dies als Auslegen eines Rechtecks interpretiert (Kap. 3). Kopfrechnen ist nicht jedermanns Sache, aber erstaunlicherweise kann man mit nur wenigen Rechenricks interessante Strukturen in der Welt der Zahlen entdecken (Kap. 7). Quadratische Gleichungen und lineare Gleichungssysteme zu lösen, ist in der Regel nicht sehr spannend – es sei denn, man nutzt diese Verfahren, um wunderbare Figuren mit sich gegenseitig berührenden Kreisen (*Kissing Circles*) zu erforschen (Kap. 15) und sich mit der Frage der Parkettierung von Rechtecken durch lauter verschieden große Quadrate zu beschäftigen (Kap. 14). Zusätzlich zu den *Kissing Circles* werden in der 2. Auflage Probleme aus der japanischen Tempelgeometrie (*Sangaku*) untersucht.

Etliche der im Buch angesprochenen Themen richten sich an jüngere Schülerinnen und Schüler. Erfahrungsgemäß üben Fadenbilder (Kap. 6) eine große Faszination aus – auch wenn die theoretischen Hintergründe erst am Ende der Schulzeit oder sogar erst danach vermittelt werden können. Das Spielen mit Pentomino-Steinen (Kap. 5) regt zu

strategisch-logischer Vorgehensweise an. Und dass sich hinter dem Wiegen mit einem festen, sehr eingeschränkten Satz von Gewichten (Kap. 9) das Rechnen im Dreiersystem verbirgt, können auch schon pfiffige 10-Jährige verstehen.

Bereits in den ersten Schuljahren lernen Kinder Flächeninhalte einfacher geometrischer Figuren zu bestimmen; umso größer ist dann das Erstaunen, dass es auch ganz anders geht: Auf einem Koordinatensteckbrett braucht man nur die Gitterpunkte auf dem Rand und im Innern zu zählen (Kap. 11)

Als Einstieg in das Thema sind jetzt in der 2. Auflage Untersuchungen von Rechtecken und anderen einfachen Figuren auf kariertem Papier ergänzt worden. Sich mit schöner Mathematik zu beschäftigen, kann aber auch bedeuten, dass man sich farbige Muster anschaut oder eigene Muster entwirft. Muster aus bunten Steinen (Kap. 2) untersuchte man schon vor 2500 Jahren. Beim Färben von Kreisringen (Kap. 4) und gleich großen Teilflächen regelmäßiger Vielecke (Flächenaufteilungen, Kap. 8) kann man die eigene Fantasie entfalten und vielleicht sogar neue Muster entdecken.

Am Ende des Buches stehen zwei umfangreichere Kapitel über die Herleitung von Potenzsummenformeln (Kap. 16) und zum Satz des Pythagoras (Kap. 17). Sie machen deutlich, wie im Laufe der Jahrhunderte immer wieder neue Ideen zu einem Thema entwickelt wurden.

Für weitere Themen war leider kein Platz mehr in diesem Buch. Mir ist bewusst, dass eine Auswahl auch anders hätte aussehen können. (Wer beispielsweise den „Goldenen Schnitt“ vermisst: Zumindest ein bisschen davon findet sich in Kap. 3 und in Kap. 13).

In der Zwischenzeit sind weitere Bücher mit „schönen“ Inhalten erschienen: „Mathematik ist wunderschön“ (ISBN 978-3-662-55831-7) und „Mathematik ist wunderwunderschön“ (ISBN 978-3-662-58100-1).

Die Kapitel sind durchweg unabhängig voneinander lesbar. Für den Einstieg in die einzelnen Themen wurde ein möglichst einfacher Zugang gewählt; dafür werden keine oder nur geringe Voraussetzungen aus dem Schulunterricht benötigt.

Es ist ein wichtiges Anliegen des Buches, dass viele junge Menschen den Weg zur Mathematik finden und zugleich jene Leser, deren Schulzeit schon einige Zeit zurückliegt, sich wieder erinnern und Neues entdecken. Hierbei sollen die zahlreichen Hinweise auf weitere Informationsmöglichkeiten im Internet sowie auf weiterführende Literatur helfen. Die „Lösungen“ zu den in den einzelnen Abschnitten eingestreuten *Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen* werden auf der Internetseite des Verlags veröffentlicht:

<http://www.springer.com/de/book/9783662590591>

Das Buch wurde für alle geschrieben, die Freude an der Mathematik haben oder verstehen möchten, warum das Buch diesen (für manchen vielleicht provokanten) Titel trägt. Es richtet sich auch an Lehrkräfte, die ihren Schülerinnen und Schülern zusätzliche oder neue Lernmotivation geben wollen.

Auch wenn in jedem Kapitel Sätze, Regeln und Formeln grafisch besonders hervorgehoben sind, sich also die typischen Elemente eines Mathematikbuches wiederfinden, ist dies kein Lehrbuch der Mathematik. Beweise von Sätzen erfolgen in den meisten Fällen nur beispielgebunden – die zugrunde liegenden Ideen zu vermitteln war mir stets wichtiger, als die formalen Schlüsse aufzuzeigen.

Die Fülle an Grafiken in diesem Buch soll dazu anregen, eigene Ideen zu den dargestellten Objekten zu entwickeln:

*Anschauen, Nachdenken, Ausprobieren, Variieren, Recherchieren, Wundern.*

Unter diesem Motto standen und stehen auch die von mir erstellten immerwährenden Kalender im DIN A3-Format, die ich seit einigen Jahren zugunsten von *Friedensdorf International in Oberhausen verkaufe* ([www.mathematik-ist-schoen.de](http://www.mathematik-ist-schoen.de)).

Dass die meisten Grafiken mithilfe der Programmiersprache LOGO erstellt wurden, mag auf Kritik stoßen, da die mit dieser Software erreichbare grafische Auflösung sicherlich nicht optimal ist. Ausschlaggebend für die Entscheidung waren neben der Lizenzfrage meine eigenen positiven Unterrichtserfahrungen mit dem Konzept einer Programmiersprache, die ihr Erfinder Seymour Papert (*Mindstorms*) sogar für die Grundschule geeignet hielt.

In den letzten Jahren hatte ich das Vergnügen, mich in jedem Monat neu mit einer Mathematikerin oder einem Mathematiker beschäftigen zu dürfen, um dann durch ein Kalenderblatt an diese(n) zu erinnern ([www.spektrum.de](http://www.spektrum.de): *Der Mathematische Monatskalender*). Wenn man sich mit den Erkenntnissen und Ideen längst verstorbener Gelehrter auseinandersetzt, kommt man oft aus dem Staunen nicht heraus. Ich hoffe, dass es mir in diesem Buch auch gelungen ist, eine Reihe dieser wunderbaren, leider oft in Vergessenheit geratenen Einsichten wieder ins Bewusstsein zu rücken. Hierzu gehören insbesondere auch die Entdeckungen der Mathematiker des islamischen Kulturkreises. Während meiner Übersetzungsarbeit an Len Berggrens *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam (Mathematik im islamischen Mittelalter, Springer 2011)* hat sich auch für mich eine bis dahin unbekannte Welt geöffnet.

Ich habe mich bemüht, durch die Literaturhinweise in jedem Kapitel und am Ende des Buches genügend Anregungen für eine weitere Beschäftigung mit den angesprochenen Themen zu geben. Erfreulicherweise hat die Qualität der deutschen Wikipedia-Beiträge (und der darin enthaltenen Literaturhinweise) in den letzten Jahren deutlich zugenommen. Manchmal werden sie von der englisch- bzw. französischsprachigen Version noch übertroffen; daher sind auch diese Quellen genannt. Im Einzelnen ist es mir nicht mehr möglich anzugeben, durch welche Veröffentlichungen ich selbst welche Anregungen erhalten habe. In den vergangenen Jahrzehnten habe ich eine große Zahl von Büchern durchgearbeitet, deren Titel mit den Vokabeln

*Recreations, Challenging Problems, Excursions, Adventures ...*

beginnen. Meistens habe ich sie unter dem Gesichtspunkt durchgesehen, ob sie Anregungen für den „normalen“ Unterricht, für Arbeitsgemeinschaften oder für Wettbewerbsaufgaben enthielten.

Am Ende der Arbeit an diesem Buch möchte ich mich herzlich bei all denen bedanken, die mich bei der Vorbereitung und Umsetzung des Buchprojekts unterstützt haben:

- bei meiner Frau, die es geduldig ertrug, dass ich mich immer wieder in die schöne Welt der Mathematik vertiefte,
- bei Wilfried Herget, der zahlreiche Vorschläge machte, Formulierungen meiner Texte verständlicher zu gestalten, und Argumentationslücken aufdeckte (die ich jetzt hoffentlich gefüllt habe),
- bei Manfred Stern †, der akribisch meine Texte durchschaute und vor allem auch dank seiner Fremdsprachenkompetenz dabei half, Fehler zu vermeiden,
- bei Peter Gallin, der mich durch seine konstruktiv-kritischen Anmerkungen auf Schwachstellen aufmerksam machte,
- bei Hans Walser, durch dessen unfassbar kreative Veröffentlichungen ich immer wieder Anregungen für dieses Buch erhielt,
- bei Georg Obermeier, der mir dabei half, Fehler in der 1. Auflage dieses Buches aufzuspüren,
- und nicht zuletzt bei Andreas Rüdinger, Iris Ruhmann und Carola Lerch vom Springer Verlag, die dieses Buch erst ermöglichten.

Leverkusen  
Deutschland

Heinz Klaus Strick

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Regelmäßige Vielecke und Sterne</b> . . . . .	1
1.1	Eigenschaften regelmäßiger Sterne . . . . .	1
1.2	Sterne zeichnen . . . . .	7
1.3	Diagonalen in einem regelmäßigen $n$ -Eck. . . . .	9
1.4	Zackenwinkel im regelmäßigen $n$ -zackigen Stern. . . . .	11
1.5	Aufgesetzte $n$ -zackige Sterne. . . . .	15
1.6	Regelmäßige $n$ -Ecke in der Gauß'schen Zahlenebene. . . . .	16
1.7	Spielpläne mithilfe von regelmäßigen $n$ -Ecken aufstellen. . . . .	21
1.8	Hinweise auf weiterführende Literatur . . . . .	23
<b>2</b>	<b>Muster aus bunten Steinen</b> . . . . .	25
2.1	Die Summe der ersten $n$ natürlichen Zahlen . . . . .	25
2.2	Die Summe der ersten $n$ ungeraden natürlichen Zahlen . . . . .	30
2.3	Quotienten von Summen ungerader natürlicher Zahlen . . . . .	33
2.4	Darstellung einer natürlichen Zahl als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen. . . . .	35
2.5	Summe der ersten $n$ Quadratzahlen von natürlichen Zahlen. . . . .	41
2.6	Summe der ersten $n$ Kubikzahlen von natürlichen Zahlen . . . . .	44
2.7	Pythagoreische Zahlentripel. . . . .	50
2.8	Hinweise auf weiterführende Literatur . . . . .	58
<b>3</b>	<b>Zerlegung von Rechtecken in möglichst große Quadrate</b> . . . . .	59
3.1	Ein Spiel mit einem Rechteck . . . . .	59
3.2	Rechnerische Untersuchung des Spiels – Beschreibung mithilfe von Kettenbrüchen . . . . .	62
3.3	Zusammenhang zwischen der Kettenbruchentwicklung und den Rechteckseiten . . . . .	64
3.4	Die Zerlegung besonderer Rechtecke – Fibonacci-Rechtecke . . . . .	65
3.5	Die Folge der Fibonacci-Zahlen . . . . .	67
3.6	Zusammenhang mit dem Euklidischen Algorithmus. . . . .	70

3.7	Beispiele unendlicher Folgen von Rechteckzerlegungen . . . . .	73
3.8	Bestimmung der Kettenbrüche von Quadratwurzeln. . . . .	77
3.9	Hinweise auf weiterführende Literatur . . . . .	79
<b>4</b>	<b>Kreise und Kreisringe. . . . .</b>	<b>81</b>
4.1	Die Kreiszahl $\pi$ – Umfang und Flächeninhalt eines Kreises. . . . .	81
4.2	Kreisringe. . . . .	83
4.3	Verschobene Halbkreise. . . . .	86
4.4	Flechtbänder. . . . .	89
4.5	Laufbahnen . . . . .	89
4.6	Hinweise auf weiterführende Literatur . . . . .	91
<b>5</b>	<b>Pentominos und ähnliche Puzzles . . . . .</b>	<b>93</b>
5.1	Einfache Polyominos . . . . .	93
5.2	Pentominos. . . . .	96
5.3	Hexominos. . . . .	104
5.4	Hinweise auf weiterführende Literatur . . . . .	105
<b>6</b>	<b>Fadenbilder . . . . .</b>	<b>107</b>
6.1	Grundfigur Kreis – Seiten und Diagonalen in regelmäßigen Vielecken. . . . .	107
6.2	Grundfigur Quadrat . . . . .	109
6.3	Exkurs: Einhüllende einer Funktionenschar . . . . .	113
6.4	Verfolgungskurven. . . . .	118
6.5	Grundfigur Kreis: Epizykloide. . . . .	120
6.6	Grundfigur zueinander senkrechte Achsen: Astroide. . . . .	122
6.7	Hinweise auf weiterführende Literatur . . . . .	124
<b>7</b>	<b>Rechnen mit Quadratzahlen – Zahlenzyklen. . . . .</b>	<b>125</b>
7.1	Rechnen mit Quadratzahlen. . . . .	126
7.2	Zahlenzyklen . . . . .	133
7.3	Zahlenzyklen modulo $n$ . . . . .	136
7.4	Zahlenzyklen bei höheren Potenzen . . . . .	138
7.5	Hinweise auf weiterführende Literatur . . . . .	142
<b>8</b>	<b>Flächenaufteilungen . . . . .</b>	<b>143</b>
8.1	Fortgesetzte Halbierungen . . . . .	143
8.2	Fortgesetzte Dreiteilungen . . . . .	145
8.3	Fortgesetzte Vierteilungen . . . . .	147
8.4	Fortgesetzte Fünfteilungen. . . . .	149
8.5	Fortgesetzte Teilungen in $n$ gleich große Teilflächen. . . . .	151
8.6	Geometrische Folgen und Reihen . . . . .	152
8.7	Zerlegung von regelmäßigen $n$ -Ecken in gleich große Teilflächen . . . .	154
8.8	Hinweise auf weiterführende Literatur . . . . .	157

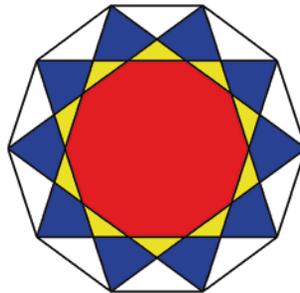
<b>9</b>	<b>Wiegen im 3er-System</b> .....	159
9.1	Lösung der einfachen Fälle des Wägeproblems .....	160
9.2	Lösung der übrigen Fälle des Wägeproblems .....	161
9.3	Darstellung natürlicher Zahlen im 3er-System .....	163
9.4	Zusammenhang zwischen den beiden Darstellungen .....	164
9.5	Hinweise auf weiterführende Literatur .....	166
<b>10</b>	<b>Parkettieren von regelmäßigen <math>2n</math>-Ecken mithilfe von Rauten</b> .....	167
10.1	Parkettierung eines regelmäßigen 10-Ecks .....	168
10.2	Anwenden der Parkettierungsmethode auf andere regelmäßige $2n$ -Ecke .....	169
10.3	Verallgemeinerungen der beobachteten Gesetzmäßigkeiten .....	171
10.4	Anleitung zum Basteln der Rauten-Puzzles .....	173
10.5	Alternative Auslegungen des regelmäßigen 10-Ecks mit Rauten .....	174
10.6	Zentralsymmetrische Parkettierung der regelmäßigen $2n$ -Ecke von innen nach außen .....	176
10.7	Zentralsymmetrische Parkettierung der regelmäßigen $2n$ -Ecke von außen nach innen .....	178
10.8	Rauten-Parkettierungen für regelmäßige 5-Ecke, 7-Ecke, 9-Ecke usw. ....	181
10.9	Hinweise auf weiterführende Literatur .....	182
<b>11</b>	<b>Geometrische Figuren auf kariertem Papier und auf einem Quadratgitter</b> .....	183
11.1	Rechtecke mit vorgegebenem Flächeninhalt .....	184
11.2	Rechtecke mit gleichem Umfang .....	187
11.3	Besondere Rechtecke: Das $16\text{er-}4 \times 4$ -Rechteck und das $18\text{er-}3 \times 6$ -Rechteck .....	190
11.4	Veränderungen an der Rechteckfigur .....	192
11.5	Untersuchungen zum Satz von Pick .....	197
11.6	Eine Regel für rechtwinklige Vielecke .....	200
11.7	Überprüfung der Pick'schen Regel für schräg abgeschnittene Dreiecke .....	202
11.8	Überlegungen zu einem allgemeinen Beweis des Satzes von Pick .....	203
11.9	Hinweise auf weiterführende Literatur .....	209
<b>12</b>	<b>Augensummen</b> .....	211
12.1	Augensummen beim Werfen von zwei regelmäßigen Hexaedern .....	212
12.2	Augensummen beim Werfen von mehreren regelmäßigen Hexaedern .....	214
12.3	Eine fehlerhafte Vorstellung über Augensummen .....	216
12.4	Ein faires Würfelspiel mit Augensummen .....	219

12.5	Die Sicherman-Würfel . . . . .	220
12.6	Weitere Ersatz-Zufallsgeräte für den Doppelwurf . . . . .	221
12.7	Algebraischer Hintergrund für die verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten . . . . .	224
12.8	Wahrscheinlichkeitsverteilung der Augensummen beim $n$ -fachen Würfeln . . . . .	228
12.9	Wahrscheinlichkeitsverteilungen der platonischen Körper . . . . .	230
12.10	Vergleich von Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit gleichen Augensummen . . . . .	232
12.11	Ein Beispiel zum Zentralen Grenzwertsatz . . . . .	234
12.12	Bestimmen von Augensummen mithilfe von Markow-Ketten. . . . .	237
12.13	Hinweise auf weiterführende Literatur . . . . .	239
<b>13</b>	<b>Das verschwundene Quadrat</b> . . . . .	<b>241</b>
13.1	Scheinbar zueinander kongruente Figuren. . . . .	242
13.2	Das verschwundene Quadrat im Zusammenhang mit dem Höhensatz des Euklid. . . . .	247
13.3	Das verschwundene Quadrat im Zusammenhang mit anderen Methoden Euklids . . . . .	252
13.4	Weitere Eigenschaften der Folge der Fibonacci-Zahlen . . . . .	254
13.5	Anordnung von Sam Loyd. . . . .	256
13.6	Weitere geeignete Zahlentripel . . . . .	257
13.7	Das verschwundene Quadrat im Zusammenhang mit dem Satz von Pythagoras. . . . .	258
13.8	Hinweise auf weiterführende Literatur . . . . .	260
<b>14</b>	<b>Zerlegen von Rechtecken in lauter verschiedene Quadrate</b> . . . . .	<b>261</b>
14.1	Rechtecke, die sich in neun bzw. zehn verschieden große Quadrate zerlegen lassen . . . . .	262
14.2	Bestimmen der Seitenlängen zu einer gegebenen Zerlegung . . . . .	264
14.3	Einführung der Bouwkamp-Notation zur Beschreibung einer Zerlegung. . . . .	268
14.4	Quadrate, die man in lauter verschieden große Quadrate zerlegen kann . . . . .	271
14.5	Zusammenhang mit elektrischen Netzwerken. . . . .	275
14.6	Ein Spiel mit Rechteckzerlegungen. . . . .	276
14.7	Hinweise auf weiterführende Literatur . . . . .	277
<b>15</b>	<b>Kissing Circles</b> . . . . .	<b>279</b>
15.1	Untersuchung sich berührender Kreise mithilfe trigonometrischer Methoden . . . . .	280
15.2	Der Vier-Kreise-Satz von Descartes . . . . .	282
15.3	Bestimmung von Beispielen mit ganzzahligen Radien . . . . .	286
15.4	Pappos-Ketten . . . . .	290

15.5	Berührende Kreise mit Krümmung 0 . . . . .	293
15.6	Sangaku . . . . .	295
15.7	Hinweise auf weiterführende Literatur . . . . .	303
<b>16</b>	<b>Summen von Potenzen aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen.</b> . . . . .	<b>305</b>
16.1	Herleitung von Summenformeln mithilfe arithmetischer Folgen höherer Ordnung . . . . .	308
16.2	Koeffizientenbestimmung durch Vergleich aufeinanderfolgender Glieder der Summenfolge . . . . .	314
16.3	Alhazens Herleitung der Summenformeln für höhere Potenzen . . . . .	316
16.4	Thomas Harriot entdeckt den Zusammenhang zwischen Dreiecks- und Tetraederzahlen. . . . .	320
16.5	Fermats Entdeckung . . . . .	324
16.6	Pascals Methode zur Bestimmung von Formeln für Potenzsummen . . . . .	327
16.7	Darstellung der Potenzsummen-Formeln mithilfe der Bernoulli-Zahlen . . . . .	328
16.8	Bestimmung von Potenzsummen-Formeln mithilfe der Lagrange-Interpolation . . . . .	330
16.9	Hinweise auf weiterführende Literatur . . . . .	331
<b>17</b>	<b>Der Satz des Pythagoras.</b> . . . . .	<b>333</b>
17.1	Der Satz des Pythagoras und die klassischen Beweise von Euklid . . . . .	333
17.2	„Schöne“ Beweise des Satzes von Pythagoras. . . . .	339
17.3	Zerlegungsbeweise des Satzes von Pythagoras Zerlegungsbeweise des Satzes von Pythagoras . . . . .	341
17.4	Darstellung der Zerlegungsbeweise mithilfe von Fliesenmustern . . . . .	345
17.5	Einige Beweise von historischer Bedeutung . . . . .	346
17.6	Unendliche Folgen im Zusammenhang mit dem Satz von Pythagoras . . . . .	350
17.7	Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras . . . . .	352
17.8	Die Mönchen des Hippokrates von Chios und andere Kreisfiguren . . . . .	353
17.9	Anwendung des Satzes von Pythagoras bei Vierecken . . . . .	357
17.10	Ganzzahlige Pythagoras-Partner und besondere Pythagoras-Folgen . . . . .	359
17.11	Heron'sche Dreiecke . . . . .	364
17.12	Briefmarken zu Pythagoras . . . . .	367
17.13	Hinweise auf weiterführende Literatur . . . . .	369
	<b>Allgemeine Hinweise auf geeignete Literatur</b> . . . . .	<b>371</b>
	<b>Stichwortverzeichnis</b> . . . . .	<b>373</b>

*Drei Dinge sind uns aus dem Paradies geblieben:  
Sterne, Blumen und Kinder.*

(Dante Alighieri, 1265–1321,  
italienischer Dichter und Philosoph)



## 1.1 Eigenschaften regelmäßiger Sterne

Regelmäßige Sterne entstehen dadurch, dass man Eckpunkte von regelmäßigen Vielecken nach einer gewissen Vorschrift miteinander verbindet.

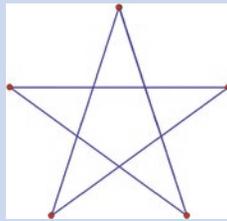
Eine solche Vorschrift kann wie folgt lauten:

Verbinde einen Eckpunkt des  $n$ -Ecks mit dem  $k$ -nächsten Eckpunkt (im Uhrzeigersinn).

**Beispiel: 5-zackiger Stern**

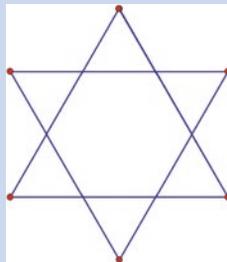
Für  $n = 5$  und  $k = 2$  bedeutet dies: Verbinde jeden Eckpunkt eines regelmäßigen 5-Ecks mit dem zweitnächsten Eckpunkt (im Uhrzeigersinn). Es entsteht so ein regelmäßiger 5-zackiger Stern.

Weitere 5-zackige Sterne existieren nicht, denn für  $n = 5$  und  $k = 3$  erhält man den gleichen Stern. Statt jeden Punkt mit dem 3-nächsten Punkt im Uhrzeigersinn zu verbinden, kann man den Punkt auch mit dem 2-nächsten Punkt im Gegenuhrzeigersinn verbinden.

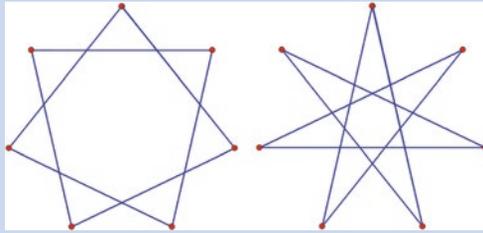
**Beispiel: 6-zackiger Stern**

Auch für  $n = 6$  existiert nur ein Typ. Er besteht aus 2 gleichseitigen 3-Ecken, denn  $2 \cdot 3 = 6$ .

Numeriert man die Eckpunkte des  $n$ -Ecks im Uhrzeigersinn mit  $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ , dann ergeben sich 2 Streckenzüge:  $P_0-P_2-P_4-P_0$  und  $P_1-P_3-P_5-P_1$ , also mit entweder geradem oder mit ungeradem Index.

**Beispiel: 7-zackige Sterne**

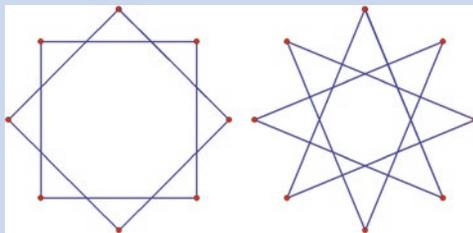
Für  $n = 7$  gibt es zwei verschiedene Sterne, nämlich für  $k = 2$  und für  $k = 3$ . Bei genauem Hinschauen sieht man, dass der 7-zackige Stern für  $k = 2$  auch im Innern des Sterns für  $k = 3$  entsteht (außerdem ein regelmäßiges 7-Eck).



### Beispiel: 8-zackige Sterne

Auch für  $n = 8$  gibt es zwei verschiedene Sterne, nämlich für  $k = 2$  und für  $k = 3$ .

Der 8-zackige Stern für  $k = 2$  entsteht auch im Innern des Sterns für  $k = 3$ . Er besteht aus 2 regelmäßigen 4-Ecken (Quadraten), denn  $2 \cdot 4 = 8$ .



### Beispiel: 9-zackige Sterne

Für  $n = 9$  gibt es sogar drei verschiedene Sterne.

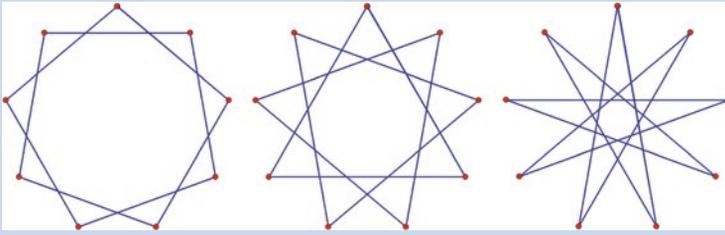
- $n = 9, k = 2$ : Der Stern lässt sich als durchgehender Streckenzug zeichnen:

$$P_0 - P_2 - P_4 - P_6 - P_8 - P_1 - P_3 - P_5 - P_7 - P_0$$

- $n = 9, k = 3$ : Der Stern besteht aus 3 regelmäßigen 3-Ecken, denn  $3 \cdot 3 = 9$ .  
Innen tritt der Stern für  $k = 2$  auf.
- $n = 9, k = 4$ : Der Stern lässt sich als durchgehender Streckenzug zeichnen:

$$P_0 - P_4 - P_8 - P_3 - P_7 - P_2 - P_6 - P_1 - P_5 - P_0$$

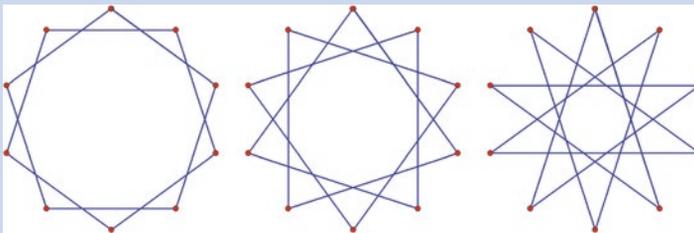
Innen tritt sowohl der Stern für  $k = 2$  als auch für  $k = 3$  auf.



### Beispiel: 10-zackige Sterne

Auch für  $n = 10$  gibt es drei verschiedene Sterne.

- $n = 10, k = 2$ : Dieser Stern besteht aus 2 regelmäßigen 5-Ecken, denn  $2 \cdot 5 = 10$ .
- $n = 10, k = 3$ : Der Stern lässt sich als durchgehender Streckenzug zeichnen.
- $n = 10, k = 4$ : Dieser Stern besteht aus 2 Sternen vom Typ  $n = 5, k = 2$ . Zu diesen gehören die Streckenzüge  $P_0-P_4-P_8-P_2-P_6-P_0$  und  $P_1-P_5-P_9-P_3-P_7-P_1$ .

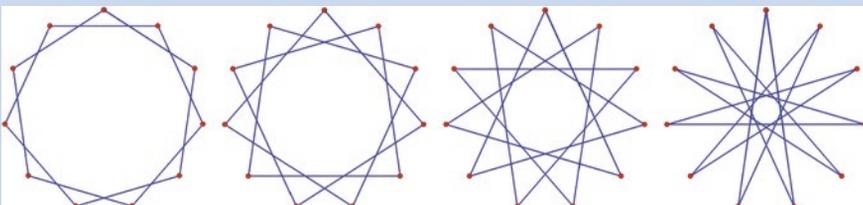


### Beispiel: 11-zackige Sterne

Für  $n = 11$  gibt es vier verschiedene Sterne, nämlich für  $k = 2, k = 3, k = 4$  und  $k = 5$ .

Alle diese Sterne lassen sich als durchgehende Streckenzüge zeichnen.

Im Innern treten jeweils alle Sterne mit kleinerem  $k$  auf.



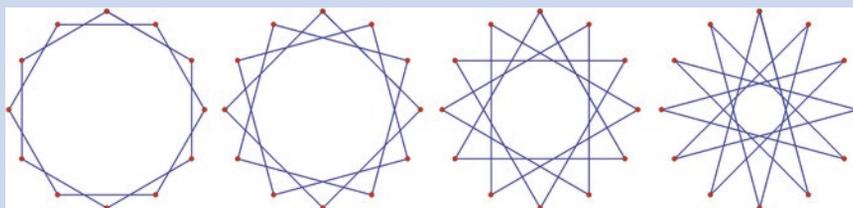
**Beispiel: 12-zackige Sterne**

Für  $n = 12$  gibt es vier verschiedene Sterne:

- $k = 2$ : 2 regelmäßige 6-Ecke, denn  $2 \cdot 6 = 12$ .
- $k = 3$ : 3 regelmäßige 4-Ecke (Quadrate), denn  $3 \cdot 4 = 12$ .
- $k = 4$ : 4 regelmäßige (gleichseitige) 3-Ecke, denn  $4 \cdot 3 = 12$ .

Nur der Stern für  $k = 5$  lässt sich als durchgehender Streckenzug zeichnen.

Im Innern treten jeweils alle Sterne mit kleinerem  $k$  auf.



Folgende Eigenschaften lassen sich aus den Beispielen ablesen:

- Für jedes  $n$ , das größer ist als 4, existieren  $n$ -zackige Sterne.
- Für  $k$  kann man beliebige Zahlen einsetzen. Unterschiedliche Sternfiguren erhält man, wenn man in der Zeichenvorschrift folgende Werte einsetzt:  $k$  ist mindestens 2, bei geradzahligem  $n$  höchstens  $\frac{n}{2} - 1$ , bei ungeradzahligem  $n$  höchstens  $\frac{n-1}{2}$ .
  - Im Einzelnen gilt für ungeradzahlige  $n$ : Für  $n = 5$  gibt es einen Stern für  $k = 2$ ; für  $n = 7$  gibt es zwei Sterne, nämlich für  $k = 2$  und für  $k = 3$ ; für  $n = 9$  gibt es drei Sterne, nämlich für  $k = 2$ , für  $k = 3$  und für  $k = 4$ ; usw.
  - Im Einzelnen gilt für geradzahlige  $n$ : Für  $n = 6$  gibt es einen Stern für  $k = 2$ ; für  $n = 8$  gibt es zwei Sterne, nämlich für  $k = 2$  und für  $k = 3$ ; für  $n = 10$  gibt es drei Sterne, nämlich für  $k = 2$ , für  $k = 3$  und für  $k = 4$ ; usw.
- Bezeichnet man irgendeinen Punkt als Beginn eines Streckenzuges mit der Nummer 0, dann gehen die Streckenzüge durch die Punkte mit den Nummern  $0 - k - 2k - 3k - \dots$ , und ähnlich wie bei der Uhr werden die Nummern jeweils um  $n$  verringert, wenn das Vielfache von  $k$  die Zahl  $n$  erreicht oder darüber hinausgeht.
- In jedem  $n$ -zackigen Stern sind im Innern für jedes mögliche  $k > 2$  weitere  $n$ -zackige Sterne enthalten.
- Manche Sternfiguren lassen sich zeichnen, ohne dass man absetzen muss; andere bestehen aus zwei oder mehr Vielecken oder Sternfiguren. Im Einzelnen gilt:
  - Ist  $k$  ein Teiler von  $n$ , dann besteht der Stern aus  $k$  Vielecken mit  $e$  Ecken, wobei  $e = \frac{n}{k}$ .
  - Haben  $k$  und  $n$  den gemeinsamen Teiler  $g$ , dann setzt sich der  $n$ -zackige Stern aus  $g$  Sternen mit  $\frac{n}{g}$  Zacken zusammen.

- Wenn  $k$  und  $n$  zueinander teilerfremd sind, d. h., wenn sie nur die Zahl 1 als gemeinsamen Teiler haben, treten Sterne auf, die man als durchgehenden Streckenzug zeichnen kann. Umgekehrt gilt auch: Wenn ein Stern als durchgehender Streckenzug gezeichnet ist, dann sind  $k$  und  $n$  zueinander teilerfremd.

### Regel

#### Sterne, die man als durchgehenden Streckenzug zeichnen kann

Für alle natürlichen Zahlen  $n$ ,  $k$  mit  $n > 4$  und  $2 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$ , falls  $n$  eine gerade Zahl ist, bzw.  $2 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$ , falls  $n$  eine ungerade Zahl ist, existieren regelmäßige  $n$ -zackige Sterne.

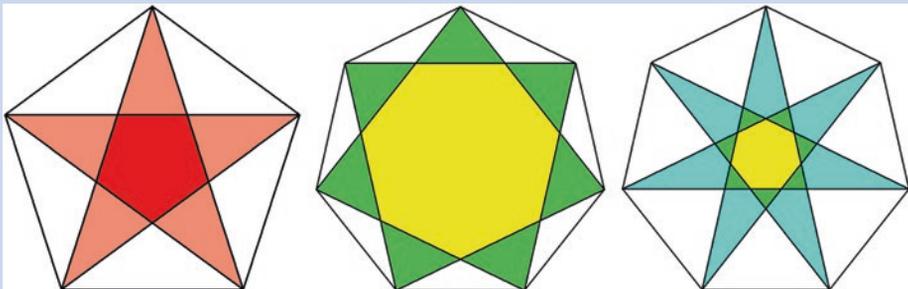
Dann und nur dann lassen sich die Sterne als durchgehenden Streckenzug zeichnen, wenn  $n$  und  $k$  zueinander teilerfremd sind.

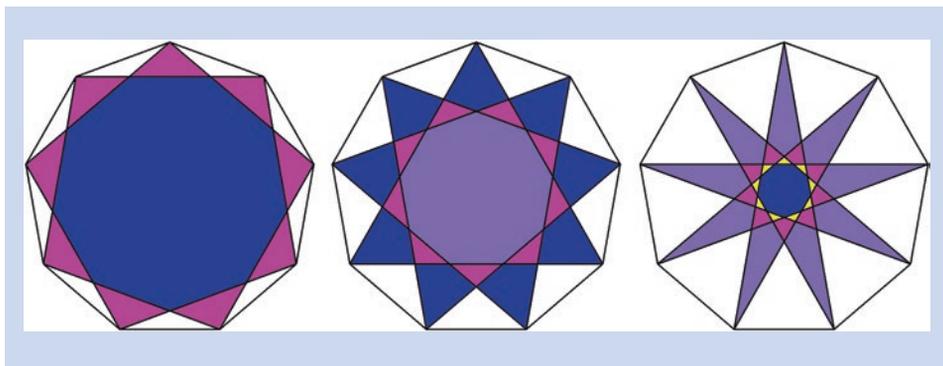
Da bei den regelmäßigen  $n$ -zackigen Sterne sowohl die Zackenanzahl  $n$  als auch der Parameter  $k$  eine wesentliche Rolle spielen, werden sie oft mit der symbolischen Schreibweise  $\{n/k\}$  notiert, dem sogenannten **Schläfli-Symbol** (benannt nach dem Schweizer Mathematiker Ludwig Schläfli (1814–1895), der sich insbesondere mit regelmäßigen Vielecken (Polygonen), Vielflächnern (Polyedern) und deren Verallgemeinerung in höheren Dimensionen beschäftigte).

#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 1.1:** Beantworten Sie die folgenden Fragen für  $n = 13$ ,  $n = 15$  und für  $n = 18$  (also für eine ungerade oder eine gerade Anzahl von Eckpunkten): Für welche  $k$  (Mindest- und Höchstwert) erhält man einen  $n$ -zackigen Stern? Wie viele verschiedene Sternfiguren sind dies? Welche der möglichen Sternfiguren lassen sich als durchgehenden Streckenzug zeichnen, welche bestehen aus mehreren Sternen, welche aus mehreren Vielecken? Welche Punkt-Nummern treten bei den möglichen Streckenzügen auf (Beginn der Streckenzüge beim Punkt mit der Nummer 0)?

**A 1.2:** In den folgenden Abbildungen sind gleich große Flächenstücke jeweils gleich gefärbt. Wie hängt die Anzahl der Farben von der Art des Sterns, also von den Werten für  $n$  und  $k$  ab?





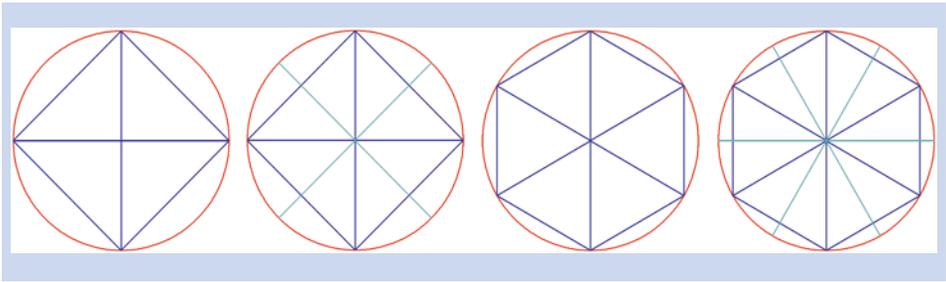
## 1.2 Sterne zeichnen

Um einen regelmäßigen Stern mit  $n$  Zacken zeichnen zu können, muss man wissen, wie man ein regelmäßiges  $n$ -Eck zeichnet.

Besonders einfach ist die Konstruktion eines regelmäßigen 4-Ecks (Quadrat) und die eines regelmäßigen 6-Ecks sowie der regelmäßigen Vielecke, die man jeweils durch Verdoppelung der Anzahl der Eckpunkte aus gegebenen regelmäßigen  $n$ -Ecken erhält:

- Ein regelmäßiges 4-Eck erhält man, indem man einen Kreis mit beliebig gewähltem Radius  $r$  zeichnet, irgendeinen Punkt der Kreislinie auswählt und eine Gerade durch den Mittelpunkt des Kreises zeichnet, bis die Kreislinie wieder geschnitten wird. Dann zeichnet man eine Senkrechte zu dieser Strecke durch den Mittelpunkt des Kreises und erhält zwei weitere Eckpunkte des 4-Ecks. Diese bisher eingetragenen vier Eckpunkte bilden ein Quadrat.
- Ein regelmäßiges 6-Eck erhält man, indem man einen Kreis mit beliebig gewähltem Radius  $r$  zeichnet, irgendeinen Punkt der Kreislinie auswählt und von diesem aus nacheinander Strecken der Länge  $r$  auf dem Kreis abträgt. Diese Konstruktion ist möglich, weil das regelmäßige 6-Eck aus sechs gleichseitigen Dreiecken besteht, also die Seiten des 6-Ecks genauso lang sind wie die Verbindungsstrecken der Eckpunkte mit dem Mittelpunkt des Kreises (= Radius des Kreises).

Zeichnet man vom Mittelpunkt des Kreises jeweils eine Gerade durch die Mittelpunkte der Seiten des regelmäßigen  $n$ -Ecks, dann sind die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Kreislinie die zusätzlichen Eckpunkte für das regelmäßige  $2n$ -Eck. So erhält man aus dem Quadrat das regelmäßige 8-Eck, aus dem regelmäßigen 6-Eck das regelmäßige 12-Eck usw. (vgl. die folgenden Abbildungen).



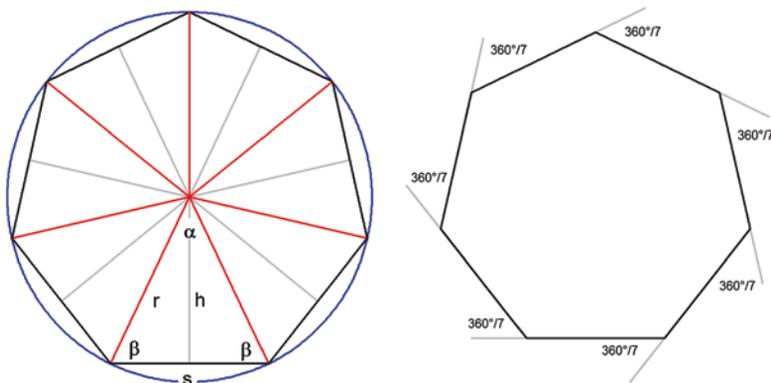
Allgemein, d. h. für beliebiges  $n$ , gibt es zwei Möglichkeiten:

- Man startet mit einem Kreis mit Radius  $r$ , der um einen Mittelpunkt geschlagen wird, und zeichnet dann vom Mittelpunkt aus  $n$ -mal den Radius, wobei jedes Mal die Richtung um  $360^\circ/n$  geändert wird.  
In Abb. 1.1 sind (für  $n = 7$ ) außer den Eckpunkten auch die Seiten des regelmäßigen  $n$ -Ecks sowie die Höhen der entstehenden gleichschenkligen Dreiecke eingezeichnet. Der  $n$ -zackige Stern entsteht, wenn gemäß der Vorschrift ein Ausgangspunkt mit dem  $k$ -nächsten Punkt verbunden und dieses Verfahren dann noch  $n$ -mal wiederholt wird.
- Alternativ kann man auch mit einer Seite des  $n$ -Ecks beginnen, zeichnet also eine Strecke der Länge  $s$ , ändert dann die Richtung, in der man sich beim Zeichnen bewegt hat, um den  $n$ -ten Teil von  $360^\circ$ , sodass man nach der  $n$ -fachen Wiederholung des Vorgangs insgesamt eine Drehung von  $360^\circ$  vollzogen hat und wieder am Ausgangspunkt der „Wanderung“ angekommen ist.

Zwischen dem Kreisradius  $r$  und der Seitenlänge  $s$  des regelmäßigen  $n$ -Ecks besteht ein einfacher Zusammenhang: Je zwei benachbarte Radien und eine verbindende Seite des  $n$ -Ecks bilden ein gleichschenkliges Dreieck, das durch die Höhe  $h$  in zwei rechtwinklige Dreiecke unterteilt wird.

Für den halben Winkel am Mittelpunkt gilt daher:

$$\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = \frac{s}{2r} \text{ und } \tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = \frac{s}{2h} \text{ sowie } \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = \frac{h}{r}$$



**Abb. 1.1** Zwei der Möglichkeiten, ein regelmäßiges 7-Eck zu zeichnen

### 1.3 Diagonalen in einem regelmäßigen $n$ -Eck

Bei der Untersuchung der Frage, welche  $n$ -zackigen Sterne überhaupt möglich sind, macht es Sinn, zunächst ein regelmäßiges  $n$ -Eck mit allen Diagonalen zu zeichnen und dann gemäß Vorschrift den gewünschten Streckenzug zu markieren, für den die Diagonalen benutzt werden.

Von jedem Eckpunkt eines  $n$ -Ecks aus kann man Verbindungsstrecken zu den anderen Eckpunkten einzeichnen: 2 Seiten (zu den beiden benachbarten Eckpunkten) sowie  $n - 3$  Diagonalen (zu den übrigen Eckpunkten).

Die Gesamtzahl der Diagonalen in einem  $n$ -Eck ergibt sich jedoch nicht unmittelbar aus dem Produkt  $n \cdot (n - 3)$ , da bei dieser Zählweise jede der Strecken doppelt erfasst wird. Vielmehr gilt:

#### Regel

##### Anzahl der Diagonalen eines $n$ -Ecks

Die Anzahl der Diagonalen in einem  $n$ -Eck ist gleich  $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n - 3)$ .

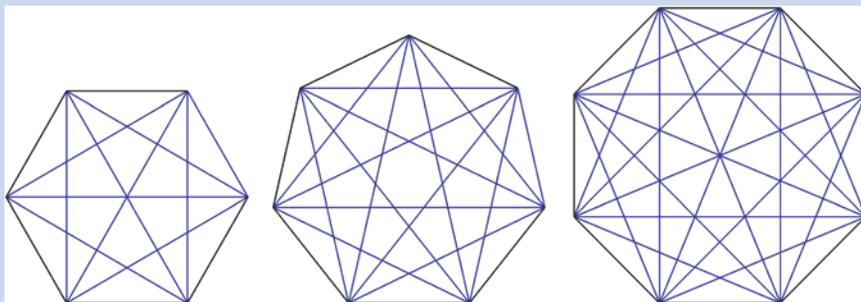
##### Beispiele für die Berechnung der Anzahl der Diagonalen

Ein regelmäßiges 5-Eck hat  $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 = 5$  Diagonalen, die den regelmäßigen 5-zackigen Stern bilden.

Ein regelmäßiges 6-Eck hat  $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9$  Diagonalen, von denen jedoch 3 Diagonalen jeweils nur zum gegenüberliegenden Punkt führen, also als Streckenzug für das Zeichnen eines Sterns nicht geeignet sind. Die übrigen 6 Diagonalen bilden die jeweils 3 Seiten der beiden gleichseitigen Dreiecke.

Ein regelmäßiges 7-Eck hat  $\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 4 = 14$  Diagonalen, von denen jeweils 7 Diagonalen einen geschlossenen Streckenzug für den 7-zackigen Stern mit  $k = 2$  bzw.  $k = 3$  bilden.

Ein regelmäßiges 8-Eck hat  $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 = 20$  Diagonalen, von denen jeweils 4 Diagonalen nur zum gegenüberliegenden Punkt führen, also als Streckenzug für das Zeichnen eines Sterns nicht geeignet sind. Außerdem bilden zweimal je vier Diagonalen die beiden Quadrate, aus denen Stern  $\{8/2\}$  besteht, sodass noch 8 Diagonalen bleiben, die den regelmäßigen 8-zackigen Stern  $\{8/3\}$  bilden.



**Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen**

**A 1.3:** Bestimmen Sie für  $n = 9$  bis  $n = 12$  die Anzahl der Diagonalen im regelmäßigen  $n$ -Eck. Welche von diesen Diagonalen werden für das Zeichnen der  $n$ -zackigen Sterne benötigt? Verallgemeinern Sie diese Aussagen über Diagonalen und Sterne für eine gerade bzw. eine ungerade Anzahl von Ecken.

Beim regelmäßigen 5-Eck haben alle Diagonalen dieselbe Länge. Verbindet man die Endpunkte einer Diagonale mit dem Mittelpunkt des Kreises, dann entsteht ein gleichschenkliges Dreieck mit Basis  $d$  und den beiden Schenkeln der Länge  $r$ . Da die Diagonalen einen Eckpunkt des regelmäßigen 5-Ecks mit dem übernächsten Eckpunkt verbinden, ist die Winkelgröße des Winkels  $\delta$  am Kreismittelpunkt gleich  $2 \cdot \frac{360^\circ}{5}$ , also die Winkelgröße des halben Winkels gleich  $2 \cdot \frac{180^\circ}{5} = 72^\circ$ .

Daher gilt für die Diagonalen im regelmäßigen 5-Eck:

$$\sin\left(\frac{2 \cdot 180^\circ}{5}\right) = \frac{d}{r}, \text{ also } d = 2r \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot 180^\circ}{5}\right).$$

Entsprechend ergibt sich allgemein für die Diagonalen in beliebigen regelmäßigen  $n$ -Ecken, die einen Eckpunkt mit dem übernächsten (also dem zweitnächsten) verbinden, als Länge  $d_2$  für die Diagonalen:

$$d_2 = 2r \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot 180^\circ}{n}\right)$$

Bei den Diagonalen, die einen Eckpunkt mit dem drittnächsten Eckpunkt verbinden, ändert sich im gleichschenkligen Dreieck der Winkel  $\delta$  am Mittelpunkt entsprechend zu  $3 \cdot \frac{360^\circ}{n}$ , also der halbe Winkel zu  $3 \cdot \frac{180^\circ}{n}$ . Daher gilt:

$$d_3 = 2r \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot 180^\circ}{n}\right)$$

**Formel****Länge der Diagonalen eines  $n$ -Ecks**

Allgemein gilt für die Länge  $d_k$  einer Diagonalen, die einen Eckpunkt mit dem  $k$ -nächsten eines regelmäßigen  $n$ -Ecks verbindet und dem Winkel  $\delta = k \cdot \frac{360^\circ}{n}$  gegenüberliegt:

$$d_k = 2r \cdot \sin\left(\frac{k \cdot 180^\circ}{n}\right) \quad (1.1)$$

Mithilfe von Formel (1.1) kann dann die Gesamtlänge des Streckenzuges berechnet werden, der den regelmäßigen  $n$ -zackigen Stern bildet, vgl. auch Tab. 1.1 unten.

**Tab. 1.1** Winkelgrößen und Streckenlängen bei regelmäßigen  $n$ -zackigen Sternen

Sterntyp $\{n/k\}$	Anzahl der zugehörigen Streckenzüge	Mittelpunktswinkel $\delta_k$ zur Diagonalen $d_k$ $\delta_k = k \cdot \frac{360^\circ}{n}$ ( $^\circ$ )	Winkel $\varepsilon$ in der äußeren Zacke ( $^\circ$ )	Gesamtlänge aller Strecken des Sterns $n \cdot 2r \cdot \sin\left(\frac{k \cdot 180^\circ}{n}\right)$
{5/2}	1	144	36	$9,51 \cdot r$
{6/2}	2	120	60	$10,39 \cdot r$
{7/2}	1	102,86	77,14	$10,95 \cdot r$
{7/3}	1	154,29	25,71	$13,65 \cdot r$
{8/2}	2	90	90	$11,31 \cdot r$
{8/3}	1	135	45	$14,78 \cdot r$
{9/2}	1	80	100	$11,57 \cdot r$
{9/3}	3	120	60	$15,59 \cdot r$
{9/4}	1	160	20	$17,73 \cdot r$
{10/2}	2	72	108	$11,76 \cdot r$
{10/3}	1	108	72	$16,18 \cdot r$
{10/4}	2	144	36	$19,02 \cdot r$
{11/2}	1	65,45	114,55	$11,89 \cdot r$
{11/3}	1	98,18	81,82	$16,63 \cdot r$
{11/4}	1	130,91	49,91	$20,01 \cdot r$
{11/5}	1	163,64	16,36	$21,78 \cdot r$
{12/2}	2	60	120	$12 \cdot r$
{12/3}	3	90	90	$16,97 \cdot r$
{12/4}	4	120	60	$20,78 \cdot r$
{12/5}	1	150	30	$23,18 \cdot r$

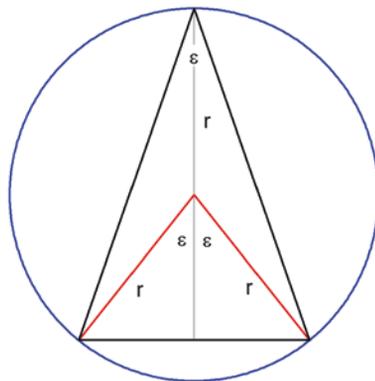
## 1.4 Zackenwinkel im regelmäßigen $n$ -zackigen Stern

In den Zacken (Spitzen) der regelmäßigen  $n$ -zackigen Sterne treten Winkel auf, die von den Werten für  $n$  und  $k$  abhängen. Diese sind einfach zu bestimmen, wenn man den sogenannten **Kreiswinkelsatz** anwendet. Der Satz beschäftigt sich mit dem Mittelpunktswinkel (Zentriwinkel) über einer Sehne und den zugehörigen darüber liegenden Umfangswinkel  $n$  (Peripheriewinkel  $n$ ). Der Satz besagt: Alle Umfangswinkel über einer Sehne sind gleich groß. Der Mittelpunktswinkel ist doppelt so groß wie die Umfangswinkel.

In Abb. 1.2 ist der symmetrische Fall des Satzes dargestellt; wie der allgemeine Beweis des Satzes geführt werden kann, entnehmen man den Literaturhinweisen.

Verbindet man zwei benachbarte Eckpunkte eines regelmäßigen  $n$ -Ecks miteinander, dann ist der zur  $n$ -Eck-Seite gehörende Mittelpunktswinkel gleich  $\frac{360^\circ}{n}$ ; die zugehörigen Umfangswinkel sind gleich  $\frac{180^\circ}{n}$ .

**Abb. 1.2** Zusammenhang zwischen Mittelpunkts- und Umfangswinkel in einem symmetrischen Dreieck



Verbindet man einen Eckpunkt eines regelmäßigen  $n$ -Ecks mit dem übernächsten Eckpunkt, dann ist der zu dieser Diagonale  $d_2$  zugehörige Mittelpunktswinkel doppelt so groß wie  $\frac{360^\circ}{n}$ , also gleich  $\frac{720^\circ}{n}$ , und die zugehörigen Umfangswinkel gleich  $\frac{360^\circ}{n}$ .

Allgemein ergibt sich:

#### Regel

##### Mittelpunkts- und Umfangswinkel über einer Sehne im regelmäßigen $n$ -Eck

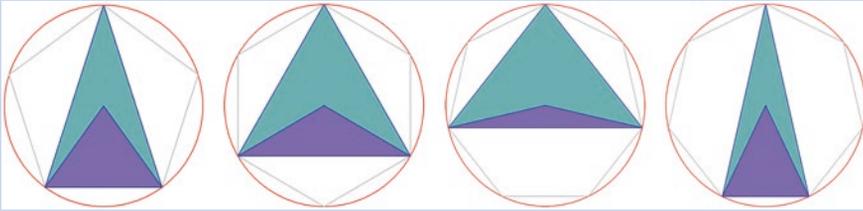
Verbindet man einen Eckpunkt eines regelmäßigen  $n$ -Ecks mit dem  $k$ -nächsten Eckpunkt, dann ist der zu dieser Diagonale  $d_k$  gehörende Mittelpunktswinkel  $k$ -mal so groß wie  $\frac{360^\circ}{n}$ ; die zugehörigen Umfangswinkel sind dann gleich  $k \cdot \frac{180^\circ}{n}$ .

##### Beispiele für die Winkel in den Zacken von regelmäßigen $n$ -zackigen Sternen

- Beim regelmäßigen 5-zackigen Stern liegt die Zacke „über“ einer Seite des 5-Ecks. Daher ist der Winkel  $\varepsilon$  an der Spitze halb so groß wie der Mittelpunktswinkel des regelmäßigen 5-Ecks. Da der Mittelpunktswinkel eine Winkelgröße von  $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$  hat, gilt für den Winkel in der Zacke des regelmäßigen 5-zackigen Sterns  $\varepsilon = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$ , vgl. die erste der folgenden Abbildungen.
- Beim regelmäßigen 6-zackigen Stern liegt die Zacke ebenfalls „über“ einer Diagonale des 6-Ecks, die einen Eckpunkt mit dem übernächsten Eckpunkt verbindet. Daher ist der Zackenwinkel  $\varepsilon$  halb so groß wie der zugehörige Mittelpunktswinkel, nämlich halb so groß wie  $2 \cdot \frac{360^\circ}{6}$ , also  $\varepsilon = 60^\circ$ , vgl. die zweite der folgenden Abbildungen.
- Beim regelmäßigen 7-zackigen Stern  $\{7/2\}$  liegt die Zacke ebenfalls „über“ einer Diagonale des 7-Ecks, die einen Eckpunkt mit dem drittnächsten Eckpunkt verbindet. Daher ist der Zackenwinkel  $\varepsilon$  halb so groß wie der zugehörige Mittelpunktswinkel, nämlich halb so groß wie  $3 \cdot \frac{360^\circ}{7}$ , also  $\varepsilon \approx 77,14^\circ$ .

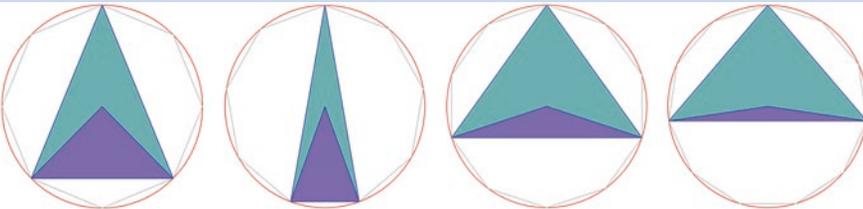
Dagegen liegt beim Stern  $\{7/3\}$  die Zacke „über“ einer Diagonale des 7-Ecks, die einen Eckpunkt mit dem nächsten Eckpunkt verbindet. Daher ist der

Zackenwinkel  $\varepsilon$  halb so groß wie der zugehörige Mittelpunktswinkel, nämlich halb so groß wie  $1 \cdot \frac{360^\circ}{7}$ , also  $\varepsilon \approx 25,71^\circ$ , vgl. die dritte und vierte der folgenden Abbildungen.

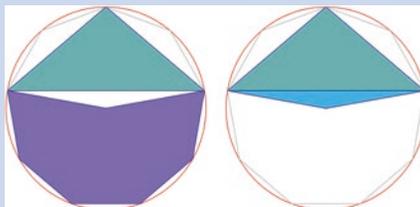


#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

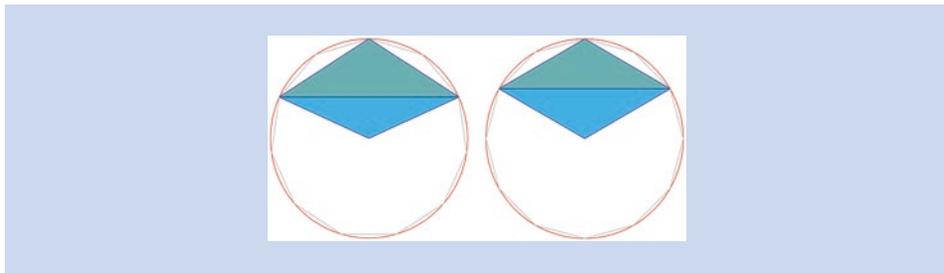
**A 1.4:** Überlegen Sie anhand der abgebildeten 8-, 9-, 10- bzw. 12-zackigen Sterne, welche Winkelgrößen in den äußeren Zacken der  $n$ -zackigen Sterne vorliegen.



**A 1.5:** Bei einem der regelmäßigen 9-zackigen Sterne tritt ein Mittelpunktswinkel auf, der größer als  $180^\circ$  ist. Erläutern Sie anhand der beiden folgenden Abbildungen, wie hier der Winkel in der Zacke berechnet wird.



**A 1.6:** Auch bei den folgenden regelmäßigen Sternen tritt ein Mittelpunktswinkel auf, der größer als  $180^\circ$  ist. Erläutern Sie jeweils, wie die Winkel in der Zacke berechnet werden.



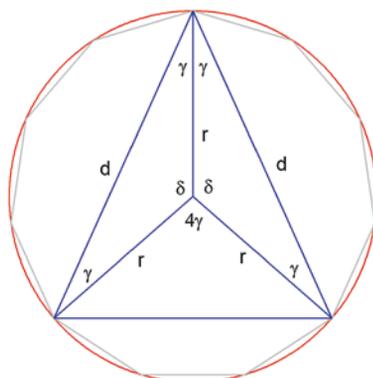
Aufgrund der Beispiele liegt die Vermutung nahe, dass es einen einfachen Zusammenhang zwischen dem Winkel  $\varepsilon$  in der äußeren Zacke und dem Mittelpunktswinkel  $\delta_k$  über den Diagonalen gibt, nämlich  $\varepsilon = 180^\circ - \delta_k$ , vgl. folgende Tabelle.

Sterntyp $\{n/k\}$	Mittelpunktswinkel $\delta_k$ zu einer Diagonalen $d_k$	Winkel $\varepsilon$ in der äußeren Zacke
$\{5/2\}$	$144^\circ$	$36^\circ$
$\{6/2\}$	$120^\circ$	$60^\circ$
$\{7/2\}$	$102,86^\circ$	$77,14^\circ$
$\{7/3\}$	$154,29^\circ$	$25,71^\circ$

Dass dies tatsächlich so ist, kann der Abb. 1.3 entnommen werden: Die Zacke wird durch zwei Diagonalen bestimmt, zu denen jeweils der Mittelpunktswinkel  $\delta_k$  gehört. Gemäß Abschn. 1.3 berechnet sich dieser Winkel als  $\delta_k = k \cdot \frac{360^\circ}{n}$ . Für die beiden Basiswinkel  $\gamma$  der zugehörigen gleichschenkligen Dreiecke gilt wegen der Winkelsumme im Dreieck  $2\gamma + \delta_k = 180^\circ$ .

Da der Zackenwinkel  $\varepsilon$  aber gerade von  $2\gamma$  gebildet wird, gilt die Behauptung  $\varepsilon + \delta_k = 180^\circ$ .

**Abb. 1.3** Zur Bestimmung des Winkels  $\varepsilon = 2\gamma$  in der Zacke eines regelmäßigen  $n$ -Ecks



**Regel****Größe der Zackenwinkel in regelmäßigen  $n$ -zackigen Sternen**

Für die Winkelgröße des äußeren Zackenwinkels  $\varepsilon$  eines regelmäßigen  $n$ -zackigen Sterns vom Typ  $\left\{\frac{n}{k}\right\}$  gilt:

$$\varepsilon = 180^\circ - \frac{k \cdot 360^\circ}{n}$$

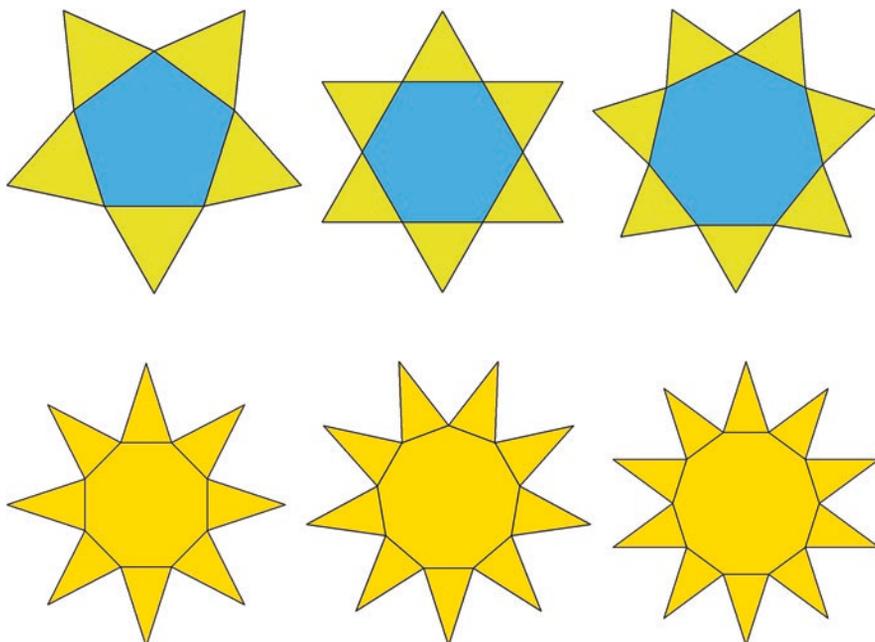
Im Innern eines Sterns vom Typ  $\{n/k\}$  treten weitere  $n$ -zackige Sterne  $\{n/m\}$  auf mit  $1 < m < k$ . Ganz im Innern eines regelmäßigen Sterns liegt außerdem ein regelmäßiges  $n$ -Eck, für dessen Innenwinkel  $\alpha$  gilt:  $7 + 9 = 16 = 4^2 = (3 + 4) + (4 + 5)$ .

Man kann also die Formel zur Berechnung von  $\varepsilon$  auf den Fall  $k = 1$  erweitern und regelmäßige  $n$ -Ecke mit dem Schläfli-Symbol  $\{n/1\}$  bezeichnen.

Die bisherigen Ergebnisse sind in Tab. 1.1 zusammengefasst.

## 1.5 Aufgesetzte $n$ -zackige Sterne

Im Prinzip kann man regelmäßige  $n$ -zackige Sterne auch dadurch erzeugen, dass man zunächst ein regelmäßiges  $n$ -Eck zeichnet, auf dessen Seiten dann gleichschenklige Dreiecke gesetzt werden. In den folgenden Abbildungen wurden gleichseitige bzw. *Goldene* Dreiecke auf die Seiten eines regelmäßigen 5-, 6- und 7-Ecks aufgesetzt. (Gleichschenklige Dreiecke mit Basiswinkel  $72^\circ$  werden als Goldene Dreiecke bezeichnet.)



### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 1.7:** Begründen Sie die Behauptung: Alle regelmäßigen  $n$ -zackigen Sterne vom Typ  $\{n/2\}$  lassen sich als aufgesetzte  $n$ -zackige Sterne auffassen.

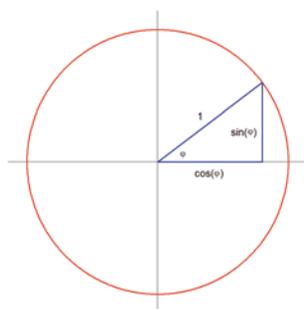
## 1.6 Regelmäßige $n$ -Ecke in der Gauß'schen Zahlenebene

In Abschn. 1.2 wurde erläutert, wie man regelmäßige  $n$ -Ecke zeichnen kann. Für diese Zeichnungen wird kein Koordinatensystem benötigt.

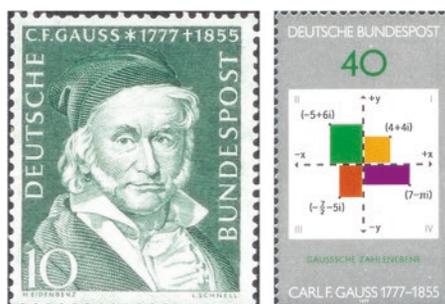
In der komplexen Analysis verwendet man oft Darstellungen, bei denen man die sogenannte **Gauß'sche Zahlenebene** zugrunde legt; das ist ein zweidimensionales Koordinatensystem, in dem der Realteil einer komplexen Zahl in horizontaler Richtung und der Imaginärteil in vertikaler Richtung abgetragen wird.

Komplexe Zahlen  $z = x + i \cdot y$  werden im Koordinatensystem der Gauß'schen Zahlenebene als Punkte mit den Koordinaten  $(x|y)$  eingezeichnet (vgl. Abb. 1.4).

Die Punkte  $(x|y)$  des Einheitskreises, also eines Kreises mit dem Radius 1 LE, erfüllen – gemäß dem Satz des Pythagoras – die Gleichung  $x^2 + y^2 = 1$ . Bezeichnet man den Winkel zwischen dem Strahl, der zu einem Punkt des Einheitskreises führt, und der  $x$ -Achse mit  $\varphi$ , dann lässt sich jeder Punkt auch durch die Koordinaten  $(\cos(\varphi) | \sin(\varphi))$  beschreiben.



**Abb. 1.4** Briefmarken der Deutschen Bundespost zu C. F. Gauß und der Gauß'schen Zahlenebene



Eine Gleichung der Form  $z^n = 1$  wird als **Kreisteilungsgleichung** bezeichnet. Nach dem **Fundamentalsatz der Algebra** besitzt eine solche Gleichung genau  $n$  Lösungen in der Menge der komplexen Zahlen. In der Gauß'schen Zahlenebene bilden die Lösungen der Kreisteilungsgleichung die Eckpunkte eines regelmäßigen  $n$ -Ecks (daher die Bezeichnung für die Gleichung).

Der im englischen Exil lebende französische Mathematiker Abraham de Moivre (1667–1754) fand heraus, dass für jede komplexe Zahl  $z = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$  und für jede natürliche Zahl  $n$  gilt:

**Formel****Satz von Moivre**

$$[\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)]^n = \cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi) \quad (1.2)$$

Daher gilt für jeden Winkel  $\varphi = k \cdot \frac{360^\circ}{n}$  mit  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ :

$$\left[ \cos\left(k \cdot \frac{360^\circ}{n}\right) + i \cdot \sin\left(k \cdot \frac{360^\circ}{n}\right) \right]^n = \cos(k \cdot 360^\circ) + i \cdot \sin(k \cdot 360^\circ) = 1 + i \cdot 0 = 1$$

Das heißt, die  $n$  komplexen Zahlen  $z_k = \cos\left(k \cdot \frac{360^\circ}{n}\right) + i \cdot \sin\left(k \cdot \frac{360^\circ}{n}\right)$  erfüllen die Gleichung  $z^n = 1$ .

**Formel****Lösungen der Kreisteilungsgleichung**

Die  $n$  Lösungen der Kreisteilungsgleichung  $z^n = 1$  haben die Form

$$z_k = \cos\left(k \cdot \frac{360^\circ}{n}\right) + i \cdot \sin\left(k \cdot \frac{360^\circ}{n}\right),$$

wobei  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ .

Zeichnerisch findet man die  $n$  Lösungen, indem man vom Ursprung des Koordinatensystems aus  $n$  Strahlen unter dem Winkel  $\varphi$  mit  $\varphi = k \cdot \frac{360^\circ}{n}$  zeichnet und deren Schnittpunkte mit dem Einheitskreis bestimmt.

In besonderen Fällen kann man die Lösungen der Kreisteilungsgleichungen auch mithilfe elementarer algebraischer Methoden bestimmen, also ohne Verwendung trigonometrischer Funktionen. Dies wird an den Beispielen für  $n = 3, 4$  und  $5$  gezeigt.

**Beispiel 1: Lösung der Gleichung  $x^3 = 1$** **Darstellung mithilfe trigonometrischer Funktionen:**

Die kubische Gleichung  $z^3 = 1$  hat die drei Lösungen:

$$z_0 = \cos(0^\circ) + i \cdot \sin(0^\circ) = 1$$

$$z_1 = \cos(120^\circ) + i \cdot \sin(120^\circ) = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = \cos(240^\circ) + i \cdot \sin(240^\circ) = -\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

**Bestimmung der Lösungen mithilfe algebraischer Methoden:**

Die kubische Gleichung  $x^3 = 1$  besitzt nur eine reellwertige Lösung, nämlich  $x_1 = 1$ . Diese Lösung wird in der Gauß'schen Ebene durch den Punkt  $(1 | 0)$  dargestellt.

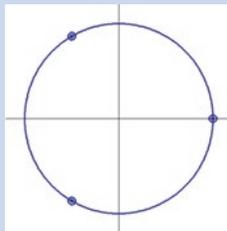
Da  $x_1 = 1$  eine Lösung ist, lässt sich die Termdivision  $\frac{x^3-1}{x-1}$  ohne Rest durchführen. Dies führt auf die quadratische Gleichung

$$x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4},$$

welche zwei komplexe Lösungen besitzt, nämlich

$$x_2 = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ und } x_3 = -\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

In der Gauß'schen Zahlenebene werden diese beiden Lösungen als Punkte mit den Koordinaten  $\left(-\frac{1}{2} | \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  bzw.  $\left(-\frac{1}{2} | -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  eingezeichnet.



**Beispiel 2: Lösung der Gleichung  $x^4 = 1$**

**Darstellung mithilfe trigonometrischer Funktionen:**

Die Gleichung 4. Grades  $z^4 = 1$  hat die vier Lösungen:

$$z_0 = \cos(0^\circ) + i \cdot \sin(0^\circ) = 1$$

$$z_1 = \cos(90^\circ) + i \cdot \sin(90^\circ) = i$$

$$z_2 = \cos(180^\circ) + i \cdot \sin(180^\circ) = -1$$

$$z_3 = \cos(270^\circ) + i \cdot \sin(270^\circ) = -i$$

**Bestimmung der Lösungen mithilfe algebraischer Methoden:**

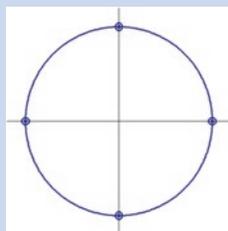
Die Gleichung 4. Grades  $x^4 = 1$  besitzt zwei reellwertige Lösungen, nämlich  $x_1 = 1$  und  $x_2 = -1$ . Diese Lösungen werden in der Gauß'schen Zahlenebene durch die Punkte  $(1 \mid 0)$  und  $(-1 \mid 0)$  dargestellt.

Da  $x_1 = 1$  und  $x_2 = -1$  Lösungen sind, lässt sich die Termdivision  $\frac{x^4-1}{x^2-1}$  ohne Rest durchführen.

Dies führt auf die quadratische Gleichung  $x^2 + 1 = 0$ , welche zwei komplexe Lösungen besitzt:

$$x_3 = i \text{ und } x_4 = -i.$$

In der Gauß'schen Zahlenebene werden diese beiden Lösungen als Punkte mit den Koordinaten  $(0 \mid 1)$  und  $(0 \mid -1)$  eingezeichnet.

**Beispiel 3: Lösung der Gleichung  $x^5 = 1$** **Darstellung mithilfe trigonometrischer Funktionen:**

Die Gleichung 5. Grades  $z^5 = 1$  hat die fünf Lösungen:

$$z_0 = \cos(0^\circ) + i \cdot \sin(0^\circ) = 1$$

$$z_1 = \cos(72^\circ) + i \cdot \sin(72^\circ)$$

$$z_2 = \cos(144^\circ) + i \cdot \sin(144^\circ)$$

$$z_3 = \cos(216^\circ) + i \cdot \sin(216^\circ)$$

$$z_4 = \cos(288^\circ) + i \cdot \sin(288^\circ)$$

**Bestimmung der Lösungen mithilfe algebraischer Methoden:**

Die Gleichung 5. Grades  $x^5 = 1$  besitzt nur eine reellwertige Lösung, nämlich  $x_1 = 1$ . Diese Lösung wird in der Gauß'schen Zahlenebene durch den Punkt  $(1 \mid 0)$  dargestellt.

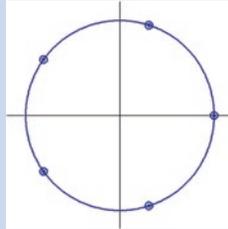
Da  $x_1 = 1$  eine Lösung ist, lässt sich die Termdivision  $\frac{x^5-1}{x-1}$  ohne Rest durchführen.

Dies führt auf die Gleichung 4. Grades  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ .

Man kann zeigen, dass sich das Polynom 4. Grades in zwei quadratische Polynome zerlegen lässt, nämlich

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \left(x^2 - \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \left(\sqrt{5} - 1\right) \cdot x + 1\right) \cdot \left(x^2 + \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \left(\sqrt{5} - 1\right) \cdot x + 1\right).$$

Hieraus ergeben sich dann vier komplexe Lösungen der beiden zugehörigen quadratischen Gleichungen.

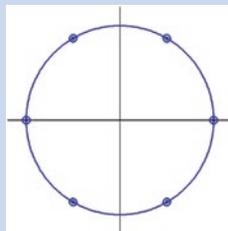


### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 1.8:** Erläutern Sie die Umformungsschritte

$$x^6 - 1 = (x^2 - 1) \cdot (x^4 + x^2 + 1) = (x^2 - 1) \cdot (x^2 + x + 1) \cdot (x^2 - x + 1)$$

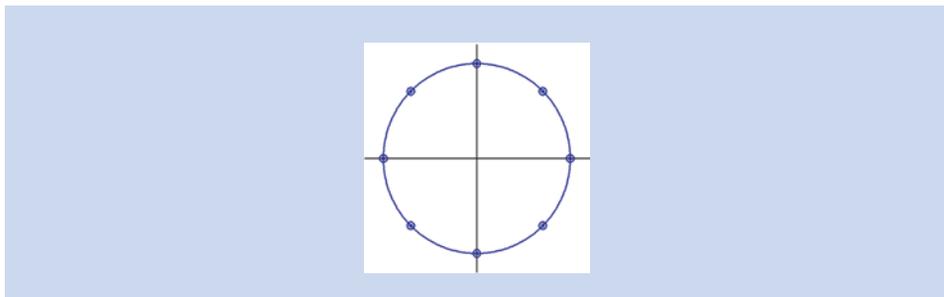
und bestimmen Sie hiermit die Koordinaten der zugehörigen Punkte in der Gauß'schen Zahlenebene, die ein regelmäßiges 6-Eck bestimmen.



**A 1.9:** Erläutern Sie die Umformungsschritte

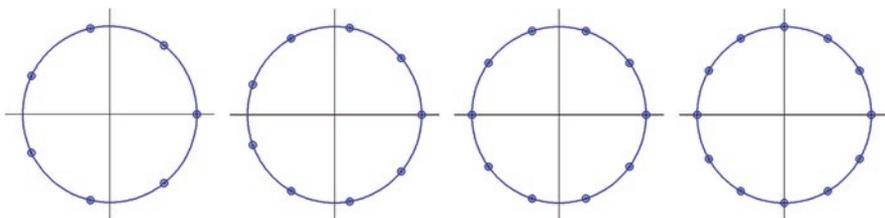
$$\begin{aligned} x^8 - 1 &= (x^2 - 1) \cdot (x^6 + x^4 + x^2 + 1) \\ &= (x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1) \cdot (x^2 + \sqrt{2}x + 1) \cdot (x^2 - \sqrt{2}x + 1) \end{aligned}$$

und bestimmen Sie hiermit die Koordinaten der zugehörigen Punkte in der Gauß'schen Zahlenebene, die ein regelmäßiges 8-Eck bestimmen.



Vergleichsweise nur wenige Kreisteilungsgleichungen lassen sich mithilfe algebraischer Methoden lösen: Es sind genau diejenigen Gleichungen, bei denen eine Konstruktion des zugehörigen regelmäßigen  $n$ -Ecks mithilfe von Zirkel und Lineal möglich ist.

Beispielsweise lassen sich die Kreisteilungsgleichungen  $x^7 = 1$  und  $x^9 = 1$  zwar zeichnerisch, aber nicht algebraisch lösen, wohl aber die Gleichungen  $x^{10} = 1$  und  $x^{12} = 1$  (vgl. folgende Abbildungen).

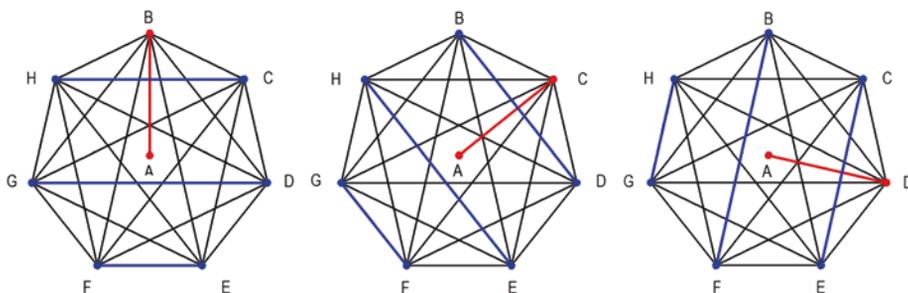


## 1.7 Spielpläne mithilfe von regelmäßigen $n$ -Ecken aufstellen

Die Strukturen von regelmäßigen  $n$ -Ecken mit ihren Seiten und Diagonalen können genutzt werden, um Spielpläne von Turnieren und Wettbewerben aufzustellen.

### Beispiel: Aufstellen eines Spielplans für ein Turnier mit acht Mannschaften

Für ein Turnier von acht teilnehmenden Mannschaften ist ein Spielplan aufzustellen. Da jede Mannschaft gegen jede andere spielen soll, sind sieben Runden mit je vier Partien anzusetzen, also insgesamt 28 Spiele.



### Lösung des Problems

Man betrachte ein regelmäßiges 7-Eck. Dieses hat 7 Seiten und  $\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 4 = 14$  Diagonalen.

Außerdem spielen noch 7 Radien eine Rolle, die von den Eckpunkten zum Mittelpunkt eingetragen werden können, insgesamt sind dies 28 Strecken.

Der Mittelpunkt A und die sieben Eckpunkte B, C, D, E, F, G, H stehen für die acht Mannschaften. Die vier Partien eines Spieltages ergeben sich jeweils aus dem rot eingezeichneten Radius und den drei hierzu senkrecht stehenden Diagonalen und der dazu parallelen Seite (alle blau gezeichnet).

Die Spielpaarungen der sieben Runden ergeben sich dadurch, dass man die sieben verschiedenen Radien betrachtet.

So ergeben sich für die ersten Spielrunden folgende Partien:

1. Runde: A – B, C – H, D – G, E – F
2. Runde: A – C, B – D, E – H, F – G
3. Runde: A – D, C – E, B – F, G – H

### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 1.10:** Vervollständigen Sie den Spielplan für das Turnier mit acht Mannschaften.

**A 1.11:** Erstellen Sie einen Spielplan für ein Turnier mit sieben Mannschaften.

**A 1.12:** Billard ist ein Spiel, bei dem zwei Personen oder zwei Teams gegeneinander spielen. Mit dem sogenannten Queue werden dabei die Billardkugeln auf einem mit Billardtuch bespannten Billardtisch gestoßen. Dabei stößt der Spieler mit dem Queue nur die weiße Kugel, die ihrerseits dann andere Kugeln anstoßen kann.

Fünf Freunde (A, B, C, D, E) spielen regelmäßig zusammen Billard, und zwar immer in Zweier-Teams, ein Spieler setzt pro Runde aus.

- Wie viele Spiele finden jeweils statt, bis jedes mögliche Zweier-Team gegen jedes mögliche andere Zweier-Team gespielt hat?
- Stellen Sie einen Spielplan auf, bei dem jeweils nacheinander die Spieler A, B, C, D, E aussetzen.

*Tipp:* Benutzen Sie für die Aufstellung eines Spielplans ein regelmäßiges Fünfeck mit Diagonalen.

## 1.8 Hinweise auf weiterführende Literatur

Bei **Wikipedia** findet man in deutscher (englischer, französischer) Sprache weitere Informationen und Literatur zu den Stichwörtern:

- Stern (Geometrie)/Stern (Star polygon, Polygon régulier étoile),
- Schläfli-Symbol (Schläfli symbol, Symbole de Schläfli)
- *nur in englischer Sprache*: List of regular polytopes and compounds
- Kreisteilung/Kreisteilungspolynom (Cyclotomic polynomial, Polynôme cyclotomique)

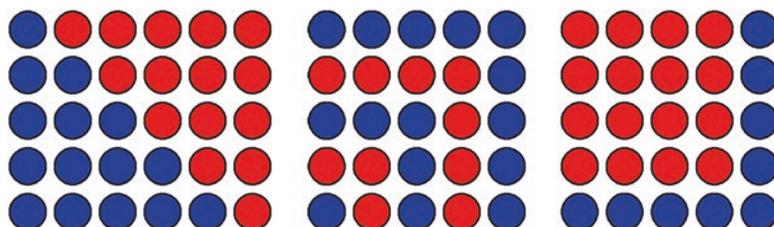
Fachliche Informationen findet man auf **Wolfram Mathworld** unter den Stichwörtern:

- Star polygon, Polygram sowie Spezialfälle wie z. B. Pentagram, Hexagram, Cyclotomic Polynomial, Root of Unity

## Muster aus bunten Steinen

# 2

*Die Zahl ist das Wesen aller Dinge.  
Das Universum ist auf der Macht der Zahlen aufgebaut.*  
(Pythagoras von Samos, 570–500 v. Chr.)



Bereits im 5. Jahrhundert v. Chr. beschäftigten sich die Pythagoreer mit der Frage, wie man mathematische Gesetzmäßigkeiten veranschaulichen kann.

Hierzu benutzten sie unterschiedlich gefärbte bzw. helle und dunkle Steine.

### 2.1 Die Summe der ersten $n$ natürlichen Zahlen

Das einfachste Muster besteht darin, dass Steine in einer Dreiecksform ausgelegt werden; dabei nimmt die Anzahl der Steine von oben nach unten jeweils um 1 ab.

#### **Beispiel: Bestimmen der Summe $1 + 2 + 3 + \dots + 10$**

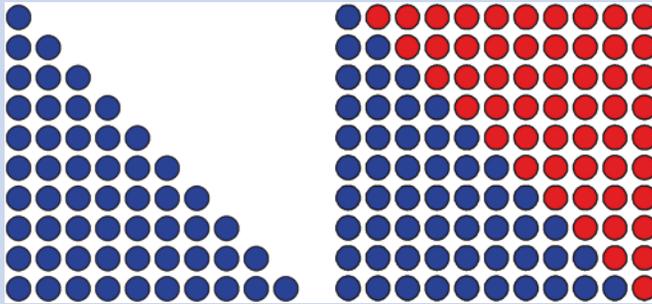
Für jeden Summanden legt man eine entsprechende Anzahl (blauer) Steine in Form eines gleichschenkelig rechtwinkligen Dreiecks (von oben nach unten und linksbündig) untereinander.

Dann verdoppelt man die Figur und legt entsprechend gleich viele rote Steine von unten nach oben.

Man erhält ein Rechteck-Muster mit insgesamt  $10 \cdot 11 = 110$  Steinen.

Die gesuchte Summe ist halb so groß, also gilt:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 10 = 55$$



Dies lässt sich für die Summe beliebig vieler natürlicher Zahlen verallgemeinern:

Um die Summe der ersten  $n$  natürlichen Zahlen zu bilden, muss man die zugehörige Dreiecksfigur verdoppeln. Dafür benötigt man doppelt so viele Steine, also  $2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n)$ , sodass sich ein Rechteck aus Steinen ergibt, das die Höhe  $n$  und die Breite  $n + 1$  hat.

Daher gilt:

#### Formel

##### Summe der ersten $n$ natürlichen Zahlen

Die Folge der ersten  $n$  natürlichen Zahlen kann in Form eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks dargestellt werden.

Die Summe  $(1 + 2 + 3 + \dots + n)$  der ersten  $n$  natürlichen Zahlen kann man bestimmen, indem man den größten Summanden ( $n$ ) mit seinem Nachfolger ( $n + 1$ ) multipliziert und das Produkt der beiden Zahlen halbiert.

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1) \quad (2.1)$$

Die gleiche Idee des Verdoppelns und anschließenden Halbierens verwendete übrigens auch der 8-jährige Carl Friedrich Gauß, als er die Aufgabe seines Lehrers in nur kurzer Zeit löste:

**Aufgabe: Addiere die (natürlichen) Zahlen von 1 bis 100!**

Dazu schreibt man die Summe zweimal auf, beim zweiten Mal notiert man die Summanden in umgekehrter Reihenfolge. Dann stehen 100-mal zwei Zahlen übereinander, welche jeweils zusammen 101 ergeben. Insgesamt hat die doppelte Summe den Wert  $100 \cdot 101$ , also die einfache Summe den Wert  $\frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 101$ , d. h. den Wert 5050.

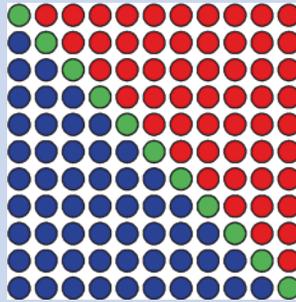
$$\begin{array}{r}
 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100 \\
 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1 \\
 \hline
 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 + 101
 \end{array}$$

**Alternative Herleitung der Summenformel**

Statt der Rechteck-Form kann man auch eine quadratische Anordnung der Steine für die Herleitung der Summenformel benutzen.

**Beispiel: Bestimmen der Summe  $1 + 2 + 3 + \dots + 10$** 

Das Quadrat mit der Seitenlänge 11 enthält  $11^2 = 121$  Steine, davon liegen 11 Steine in der Diagonale, also die Hälfte von  $121 - 11 = 110$ , d. h. 55 Steine unterhalb bzw. oberhalb der Diagonale.

**Allgemeine Herleitung**

Die jeweils  $1 + 2 + \dots + n$  blauen und roten Steine ergeben zusammen mit den  $n$  grünen Diagonalsteinen ein Quadrat der Seitenlänge  $(n + 1)$ . Es gilt also:

$$2 \cdot (1 + 2 + \dots + n) + (n + 1) = (n + 1)^2$$

Umformung der Gleichung führt auf:

$$2 \cdot (1 + 2 + \dots + n) = (n + 1)^2 - (n + 1)$$

Auf der rechten Seite der Gleichung kann man den gemeinsamen Term  $(n + 1)$  ausklammern:

$$2 \cdot (1 + 2 + \dots + n) = (n + 1) \cdot [n + 1 - 1], \text{ also:}$$

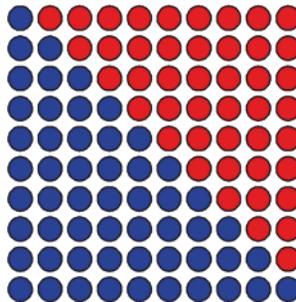
$$1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1)$$

#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 2.1:** Bestimmen Sie systematisch die Summe der ersten  $n$  natürlichen Zahlen mit größtem Summanden  $n = 1, 2, 3 \dots, 20$ .

**A 2.2:** Bis zu welcher natürlichen Zahl  $n$  muss man summieren, bis die Summe 100 [1000; 1.000.000] überschritten wird?

Eine weitere (dritte) Möglichkeit, die Formel herzuleiten, ergibt sich aus der folgenden quadratischen Anordnung von Steinen: Dabei kombiniert man Steinreihen von 1 bis 10 blauen Steinen mit Steinreihen von 1 bis 9 roten Steinen.



Es ist üblich, die Folge der Teilsummen der ersten  $n$  natürlichen Zahlen, d. h. die Folge der Zahlen

1, 3, 6, 10, 15, ..., als Folge der **Dreieckszahlen**  $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zu bezeichnen (vgl. auch Kap. 16).

Die  $n$ -te Dreieckszahl  $\Delta_n$  kann also wie folgt berechnet werden:

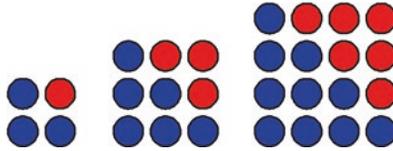
$$\Delta_n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1)$$

Die Abbildung veranschaulicht also die Summe der 10. Dreieckszahl und der 9. Dreieckszahl – zusammen ergeben diese ein Quadrat der Seitenlänge 10. Es gilt also:

$$\Delta_9 + \Delta_{10} = 10^2$$

Solche Kombinationen sind für beliebige Dreieckszahlen und ihre Vorgänger möglich:

$$\Delta_1 + \Delta_2 = 2^2 = 4; \Delta_2 + \Delta_3 = 3^2 = 9; \Delta_3 + \Delta_4 = 4^2 = 16; \dots$$



### Regel

#### Summe zweier benachbarter Dreieckszahlen

Die Summe von zwei aufeinanderfolgenden Dreieckszahlen  $\Delta_{n-1}$  und  $\Delta_n$  ist stets eine Quadratzahl.

Dabei gilt:

$$\Delta_{n-1} + \Delta_n = n^2 \quad (2.2)$$

Diese Eigenschaft kann man wie folgt für die Herleitung der Summenformel nutzen:

Ergänzt man auf beiden Seiten der Gleichung

$$(1 + 2 + 3 + \dots + n) + (1 + 2 + 3 + \dots + n - 1) = n^2$$

noch den Summanden  $n$ , dann ergibt sich

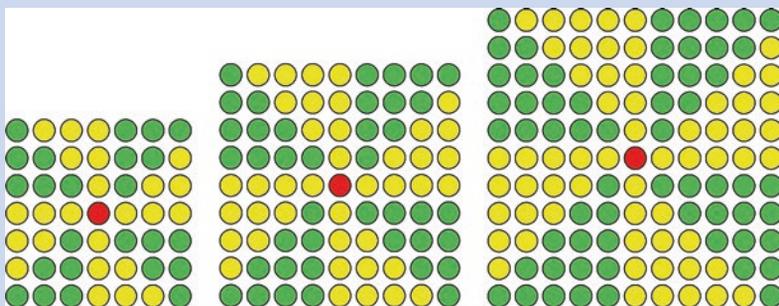
$$(1 + 2 + 3 + \dots + n) + (1 + 2 + 3 + \dots + n - 1) + n = n^2 + n, \text{ also}$$

$$2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n) = n \cdot (n + 1), \text{ und daher}$$

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1).$$

#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 2.3:** Der griechische Mathematiker Diophant (ca. 250 n. Chr.) entdeckte eine Beziehung zwischen Dreiecks- und Quadratzahlen, die man den folgenden Abbildungen entnehmen kann. Welche ist dies? Zeichnen Sie entsprechende Figuren auch für eine kleinere Anzahl von Punkten.

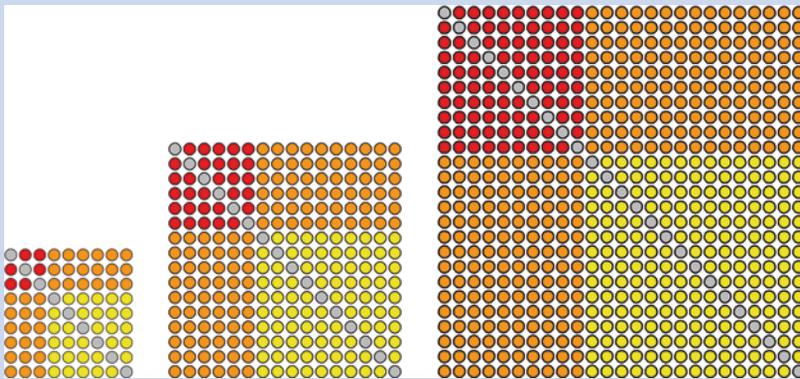


**A 2.4:** Die folgenden Abbildungen zeigen Punktmuster mit der gemeinsamen Eigenschaft:

Anzahl der roten Steine + Anzahl der gelben Steine = Anzahl der orange gefärbten Steine

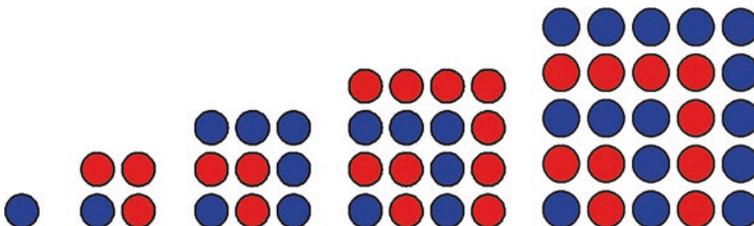
- Begründen Sie: Diese Eigenschaft gilt nur, wenn die Seitenlänge  $r$  des Quadrats mit den roten Steinen und die Seitenlänge  $g$  des Quadrats mit den gelben Steinen benachbarte Dreieckszahlen sind.
- Aus dieser Eigenschaft ergibt sich eine **faire Spielregel** für die folgende Urnenziehung:

In einer Urne liegen  $r$  rote und  $g$  gelbe Kugeln. Nacheinander werden zwei Kugeln gezogen und nicht zurückgelegt. Man gewinnt das Spiel, wenn die beiden gezogenen Kugeln die gleiche Farbe haben. (Man verliert also das Spiel, wenn die beiden gezogenen Kugeln verschiedene Farben haben.)



## 2.2 Die Summe der ersten $n$ ungeraden natürlichen Zahlen

Quadratische Muster lassen sich auch auf andere Weise mithilfe von bunten Steinen auslegen: Um ein vorhandenes Quadrat aus  $m \cdot m$  Steinen legt man einen Winkelhaken, einen sogenannten **Gnomon**, mit Steinen einer anderen Farbe. Hierfür werden  $m + 1 + m$ , also  $2m + 1$  Steine benötigt, d. h. eine ungerade Anzahl von Steinen.



Um ein „Quadrat“ aus  $1 \cdot 1$  Steinen kann man einen Winkelhaken aus  $2 \cdot 1 + 1 = 3$  Steinen legen, um ein Quadrat aus  $2 \cdot 2$  Steinen einen Winkelhaken aus  $2 \cdot 2 + 1 = 5$  Steinen usw.

Somit gilt:  $1 + 3 = 2^2$ ,  $1 + 3 + 5 = 3^2$ ,  $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$ , ...

Dies lässt sich für eine beliebige Summe der ersten  $n$  ungeraden natürlichen Zahlen verallgemeinern:

### Regel

#### Summe der ersten $n$ ungeraden Zahlen

Die Folge der ersten  $n$  ungeraden natürlichen Zahlen kann als quadratisches Muster von Winkelhaken dargestellt werden.

Die Summe der ersten  $n$  ungeraden natürlichen Zahlen ist gleich der Quadratzahl  $n^2$ .

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 \quad (2.3)$$

#### Zweite Möglichkeit der Herleitung der Formel

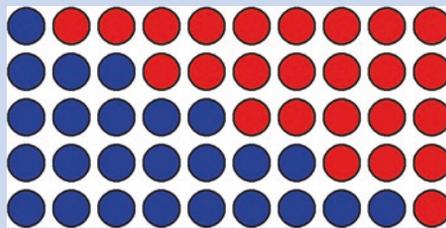
Für die Herleitung kann auch wieder die Methode des Verdoppelns und anschließenden Halbierens angewandt werden.

#### Beispiel: Summe der ungeraden natürlichen Zahlen von 1 bis 9

Nacheinander werden 9, dann 7, dann 5, dann 3 blaue Steine, zuletzt 1 blauer Stein stufenförmig und linksbündig übereinander angeordnet. Im zweiten Schritt werden dann die Stufen durch rote Steine (1, 3, 5, 7, 9) aufgefüllt, sodass ein Rechteck aus 5 Stufen mit jeweils 10 Steinen entsteht.

Das Doppelte der Summe  $1 + 3 + 5 + 7 + 9$  ist also gleich  $5 \cdot 10 = 50$ .

Für die Summe  $1 + 3 + 5 + 7 + 9$  ergibt sich daher der Wert  $\frac{1}{2} \cdot 50 = 25$ .



#### Allgemeine Herleitung:

$$2 \cdot (1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)) = n \cdot [(2n - 1) + 1], \text{ also:}$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot 2n = n \cdot n = n^2$$

### Dritte Möglichkeit der Herleitung der Formel

Da die Anzahl der Steine ungerade ist, kann man sie auch in einer achsensymmetrischen Form anordnen.

#### Beispiel: Summe der ungeraden natürlichen Zahlen von 1 bis 9

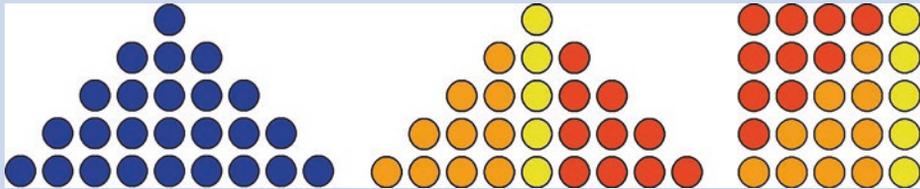
Die Anordnung der Steine in achsensymmetrischer Form kann man auf verschiedene Weisen analysieren:

Verwendet man für die Steine drei verschiedene Farben, dann hat man links und rechts der Symmetrieachse jeweils  $1 + 2 + 3 + 4 = 10$  Steine, zusätzlich – da 5 ungerade Zahlen addiert werden – die 5 Steine der Symmetrieachse.

Hieraus ergibt sich nach Anwenden der Summenformel:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + 7 + 9 &= 2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) + 5 \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5\right) + 5 \\ &= 4 \cdot 5 + 5 = 5 \cdot 5 = 5^2 \end{aligned}$$

Dass sich ein Quadrat ergibt, erkennt man auch, wenn man das rechts der Achse liegende Dreieck um  $180^\circ$  dreht und nach links verschiebt.

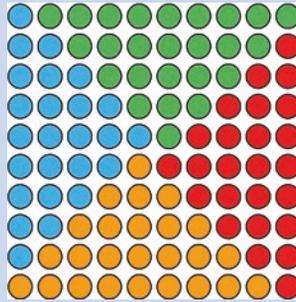


#### Allgemeine Herleitung:

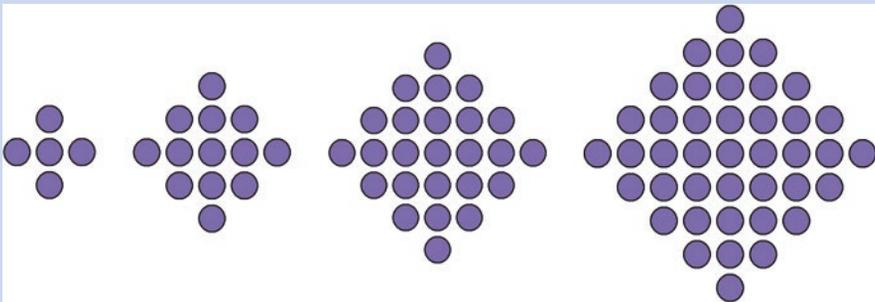
$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) &= 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n - 1) + n \\ &= 2 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (n - 1) \cdot n\right] + n = (n - 1) \cdot n + n \\ &= n \cdot n = n^2 \end{aligned}$$

#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 2.5:** Begründen Sie: Eine weitere Möglichkeit der Herleitung der Formel (2.3) ergibt sich durch eine vierfache achsensymmetrische Anordnung von Steinen.



**A 2.6:** Geben Sie einen gemeinsamen Term für die Anzahl der Steine der im Folgenden abgebildeten Figuren an.



### 2.3 Quotienten von Summen ungerader natürlicher Zahlen

Galileo Galilei (1564–1642) fiel auf, dass für eine gerade Anzahl von aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen eine besondere Eigenschaft erfüllt ist:

Die Summe der ersten Hälfte der ungeraden Zahlen ergibt stets ein Drittel der Summe der zweiten Hälfte der ungeraden Zahlen, d. h., bildet man den Quotienten, dann ist dieser stets gleich  $\frac{1}{3}$ :

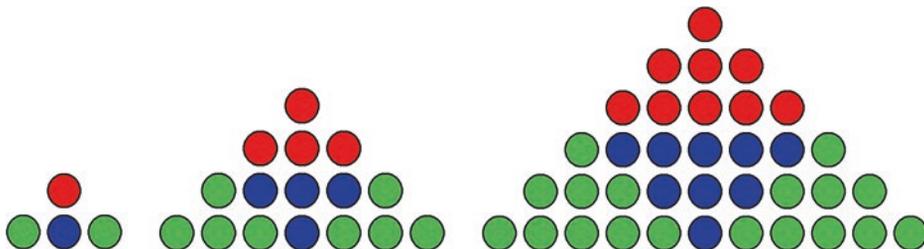
$$\frac{1}{3} = \frac{1+3}{5+7} = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \frac{1+3+5+7}{9+11+13+15} = \dots$$

Allgemein gilt also:

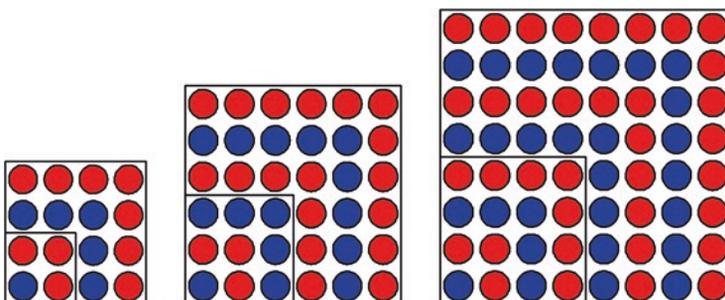
$$\frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{(2n+1)+(2n+3)+(2n+5)+\dots+(2n+(2n-1))} = \frac{1}{3}$$

Ganz so überraschend erscheint diese Eigenschaft allerdings nicht mehr, wenn man die achsensymmetrische Darstellung der Summenfolge der ungeraden natürlichen Zahlen betrachtet.

In den folgenden Abbildungen sind die Quotienten aus dem Verhältnis der Anzahl der roten zu den grünen/blauen Punkten ablesbar: In der ersten Abbildung ist dies das Verhältnis  $1 : 3$ , in der zweiten Abbildung das Verhältnis  $(1 + 3) : (5 + 7) = 4 : 12$  und in der dritten  $(1 + 3 + 5) : (7 + 9 + 11) = 9 : 27$ .



Für die Begründung kann man alternativ auch die folgende Darstellung ungerader Zahlen mithilfe von Winkelhaken betrachten.



Dass diese Eigenschaft nur für Summen von ungeraden natürlichen Zahlen gilt und nicht allgemein für Summen von natürlichen Zahlen, erkennt man bereits an den ersten Folgengliedern:

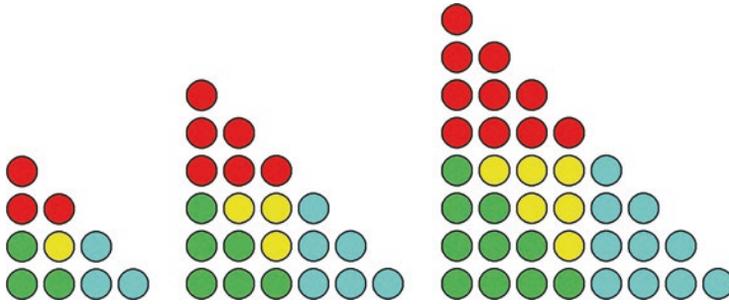
$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{1}{2} = 0,5; & a_2 &= \frac{1+2}{3+4} = \frac{3}{7} = 0,428571 \dots; \\
 a_3 &= \frac{1+2+3}{4+5+6} = \frac{6}{15} = 0,4; & a_4 &= \frac{1+2+3+4}{5+6+7+8} = \frac{10}{26} = 0,384615 \dots; \\
 a_5 &= \frac{1+2+3+4+5}{6+7+8+9+10} = \frac{15}{40} = 0,375; \\
 a_6 &= \frac{1+2+3+4+5+6}{7+8+9+10+11+12} = \frac{21}{57} = 0,368421 \dots
 \end{aligned}$$

Es handelt sich dabei um eine streng monoton fallende Folge mit dem Grenzwert  $\frac{1}{3}$ .

Den Grenzwert kann man am umgeformten Folgenterm ablesen:

$$a_n = \frac{\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)}{\frac{1}{2} \cdot 2n \cdot (2n+1) - \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)} = \frac{n^2 + n}{3n^2 + n} = \frac{n+1}{3n+1} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{3 + \frac{1}{n}}$$

Dass die Folge gegen den Grenzwert  $\frac{1}{3}$  konvergiert, kann auch grafisch veranschaulicht werden. Die Zählersumme ist in den folgenden Grafiken durch rote Steine veranschaulicht, die Nennersumme durch grüne, gelbe und hellblaue Steine, wobei das Dreieck aus gelben Steinen jeweils  $n$  Steine weniger enthält als die anderen. Mit zunehmendem  $n$  spielt diese fehlende Anzahl an Steinen immer weniger eine Rolle.



#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 2.7** Erläutern Sie: Die letzten Abbildungen veranschaulichen auch eine Beziehung zwischen der  $n$ -ten und der  $2n$ -ten Dreieckszahl, nämlich  $\Delta_{2n} + n = 4 \cdot \Delta_n$ .

## 2.4 Darstellung einer natürlichen Zahl als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen

Im Abschn. 2.1 wurde erläutert, wie man die Summe der ersten  $n$  natürlichen Zahlen bestimmen kann. Mithilfe des Terms  $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1)$  kann man auch leicht Summen von beliebigen aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen berechnen.

#### Beispiel: Summe der natürlichen Zahlen zwischen 30 und 40 (einschl.)

Die Summe der 11 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen zwischen 30 und 40 erhält man durch Differenzbildung: Von der Summe der ersten 40 natürlichen Zahlen wird die Summe der ersten 29 natürlichen Zahlen subtrahiert:

$$\begin{aligned}
 30 + 31 + \dots + 40 &= (1 + 2 + \dots + 40) - (1 + 2 + \dots + 29) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 41 - \frac{1}{2} \cdot 29 \cdot 30 \\
 &= 20 \cdot 41 - 29 \cdot 15 \\
 &= 820 - 435 = 385
 \end{aligned}$$

Allgemein: Man erhält die Summe der natürlichen Zahlen zwischen zwei natürlichen Zahlen  $a$  und  $b$ , indem man die Summe der natürlichen Zahlen bis zum größten Summanden  $b$  vermindert um die Summe der natürlichen Zahlen bis zum Vorgänger des kleinsten Summanden  $a$ , also bis  $a - 1$ .

**Beispiel: Summe der natürlichen Zahlen zwischen 30 und 40 (einschl.) – alternative Methode**

$$\begin{aligned} 30 + 31 + 32 + \dots + 40 &= (30 + 0) + (30 + 1) + (30 + 2) + \dots + (30 + 10) \\ &= 11 \cdot 30 + (0 + 1 + 2 + \dots + 10) \\ &= 11 \cdot 30 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 11 \\ &= 11 \cdot \left( 30 + \frac{1}{2} \cdot 10 \right) = 385 \end{aligned}$$

Allgemein: Man erhält die Summe der natürlichen Zahlen zwischen zwei natürlichen Zahlen  $a$  und  $b$ , indem man die Anzahl der natürlichen Zahlen, die summiert werden soll (also:  $b - a + 1$ ), multipliziert mit der Summe aus dem kleinsten Summanden  $a$  und der Hälfte der Differenz zwischen dem größten und kleinsten Summanden, also  $\frac{1}{2} \cdot (b - a)$ .

In diesem Abschnitt soll die Frage untersucht werden, welche Summenwerte überhaupt auftreten können, wenn man beliebig viele aufeinanderfolgende natürliche Zahlen addiert.

Gibt es vielleicht sogar natürliche Zahlen, die sich *nicht* als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen darstellen lassen?

Eine indirekte Antwort auf diese Frage gibt ein Satz, den der englische Mathematiker **James Joseph Sylvester** (1814–1897) entdeckte:

**Satz**

**Anzahl der möglichen Summendarstellungen von natürlichen Zahlen (Satz von Sylvester)**

Die Anzahl der Möglichkeiten, eine natürliche Zahl  $n$  als Summe von aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darzustellen, ist gleich der Anzahl der ungeraden Teiler ( $>1$ ) der Zahl  $n$ .

Dass und warum dieser Satz gilt, soll zunächst an Beispielen veranschaulicht werden:

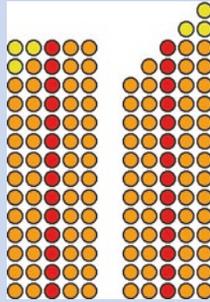
**Beispiel: Darstellung der Zahl 70 als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen**

Die natürliche Zahl 70 hat die ungeraden Teiler 5, 7 und 35.

Wegen  $70 = 5 \cdot 14$  kann man 70 in Form eines Rechtecks darstellen, das aus 5 „Säulen“ mit je 14 Steinen besteht. Da 5 eine ungerade Zahl ist, gibt es eine mittlere Säule (rot).

Die Anzahl der Steine der mittleren Säule wird unverändert in die zweite Darstellung übernommen. Bei den links von der Mitte liegenden Säulen werden dann 1 bzw. 2 Steine weggenommen, die symmetrisch zu den rechts liegenden Säulen hinzugefügt werden (in der Abbildung gelb hervorgehoben).

Somit entsteht ein Muster aus  $12 + 13 + \mathbf{14} + 15 + 16 = 70$  Steinen, d. h., die Zahl 70 lässt sich als Summe von 5 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darstellen.

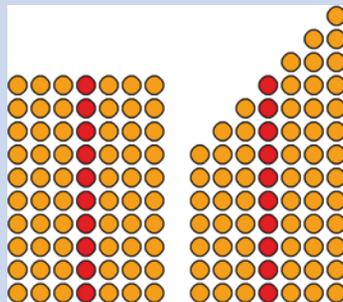


Analog kann man bei dem zweiten ungeraden Teiler, also der Zahl 7 vorgehen:

Das Rechteck aus  $7 \cdot 10$  Steinen, also aus 7 Säulen mit jeweils **10** Punkten, besitzt eine mittlere Säule (rot). Dann werden wieder symmetrisch zur mittleren Säule 1 bzw. 2 bzw. 3 Steine bei den Säulen links weggenommen und bei den Säulen rechts hinzugefügt.

Somit ergibt sich die Summendarstellung

$$(10 - 3) + (10 - 2) + (10 - 1) + \mathbf{10} + (10 + 1) + (10 + 2) + (10 + 3) = 70, \text{ also } 7 + 8 + 9 + \mathbf{10} + 11 + 12 + 13 = 70.$$



Bei dem dritten ungeraden Teiler, der Zahl 35, muss das bisherige Verfahren verändert werden.

Zwar lässt sich auch hier ein Rechteck zeichnen mit diesmal  $35 \cdot 2$  Steinen, und man kann auch bei den beiden benachbarten Säulen links von der Mitte 1 bzw. 2 Steine wegnehmen, aber von da an würde die Anzahl der Steine „negativ“.



Auch dies kann veranschaulicht werden: Wir stellen dies in Form von Steinen dar, die unter dem bisherigen Zeichenniveau liegen.

Somit haben wir folgende Situation: Links von der mittleren Säule (rot), die aus 2 Steinen besteht, folgt eine Säule aus 1 Stein, dann eine Säule mit 0 Steinen, danach dann 15 Säulen mit 1, 2, 3, ..., 15 Steinen im negativen Bereich (gelb gefärbt). Rechts von der Mitte stehen Säulen mit 3, 4, 5, ..., 20 Steinen.

Die  $1 + 2 + 3 + \dots + 15$  Steine im negativen Bereich (gelb gefärbt) werden ausgeglichen durch  $1 + 2 + 3 + \dots + 15$  Steine im positiven Bereich (rot bzw. grün gefärbt). Es bleibt das Trapez aus 4 Säulen mit  $16 + 17 + 18 + 19 = 70$  Steinen (orange gefärbt) (Abb. 2.1).

#### Zusammenfassung:

Die drei möglichen Darstellungen der Zahl 70 als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen lauten:

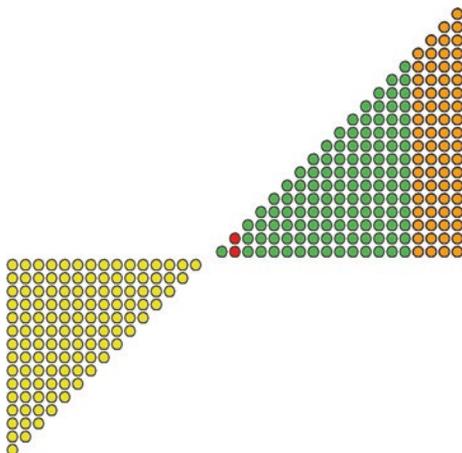
$$12 + 13 + 14 + 15 + 16 = 70 \text{ und}$$

$$7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 = 70 \text{ und}$$

$$16 + 17 + 18 + 19 = 70$$

Offensichtlich lässt sich die Darstellung einer Summe von aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, die aus einer *ungeraden* Anzahl von Summanden besteht, also eine

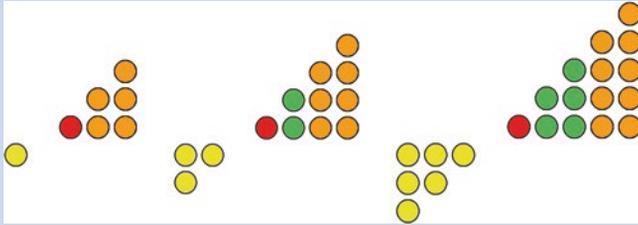
**Abb. 2.1** Veranschaulichung des Falls negativer Anzahlen



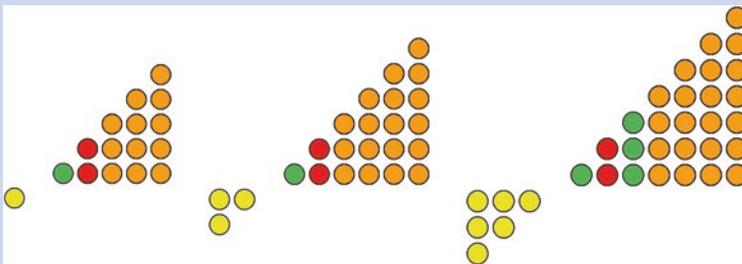
Treppe mit einer *ungeraden* Anzahl von Säulen, in die Rechteckform zurückführen, d. h., die natürliche Zahl ist darstellbar als Produkt aus einer *ungeraden* Zahl und der mittleren Zahl der Summanden (letztere kann gerade oder ungerade sein).

Untersucht man nun systematisch die Summen aus einer *geraden* Anzahl von aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen (jeweils vom kleinsten Summanden 1 an), dann zeigt sich, dass es sich um Vielfache von *ungeraden* Zahlen handelt, d. h., dass auch hier der *ungerade* Teiler der natürlichen Zahl (der Summe) von entscheidender Bedeutung ist.

Die ungeraden Zahlen ( $\geq 3$ ) selbst lassen sich als Summe von *zwei* aufeinanderfolgenden Zahlen darstellen:  $1 \cdot 3 = 3 = 1 + 2$  und weiter  $1 \cdot 5 = 5 = 2 + 3$ ;  $1 \cdot 7 = 7 = 3 + 4$ ;  $1 \cdot 9 = 9 = 4 + 5$  (vgl. folgende Abbildungen). Hier ist die eine Reihe mit 5 bzw. 7 bzw. 9 Steinen nicht dargestellt, wohl aber die geänderte Anordnung mit Steinen im negativen Bereich.

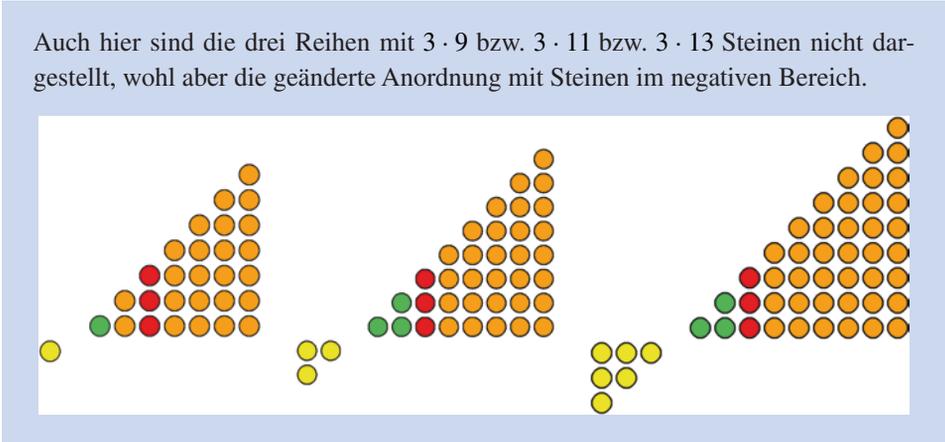


Das 2-Fache von ungeraden Zahlen ( $\geq 5$ ) lässt sich als Summe von *vier* aufeinanderfolgenden Zahlen darstellen:  $2 \cdot 5 = 1 + 2 + 3 + 4$  und weiter  $2 \cdot 7 = 2 + 3 + 4 + 5$ ;  $2 \cdot 9 = 3 + 4 + 5 + 6$ ;  $2 \cdot 11 = 4 + 5 + 6 + 7$  (vgl. folgende Abbildungen). Hier sind die zwei Reihen mit  $2 \cdot 7$  bzw.  $2 \cdot 9$  bzw.  $2 \cdot 11$  Steinen nicht dargestellt, wohl aber die geänderte Anordnung mit Steinen im negativen Bereich.



Das 3-Fache von ungeraden Zahlen ( $\geq 7$ ) lässt sich als Summe von *sechs* aufeinanderfolgenden Zahlen darstellen:  $3 \cdot 7 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$  und weiter  $3 \cdot 9 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$ ;  $3 \cdot 11 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$ ;  $3 \cdot 13 = 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$  (vgl. folgende Abbildungen).

Auch hier sind die drei Reihen mit  $3 \cdot 9$  bzw.  $3 \cdot 11$  bzw.  $3 \cdot 13$  Steinen nicht dargestellt, wohl aber die geänderte Anordnung mit Steinen im negativen Bereich.



Das am Beispiel erläuterte Verfahren lässt sich für jede beliebige natürliche Zahl  $n$  anwenden:

Lässt sich eine natürliche Zahl  $n$  durch eine ungerade Zahl  $u$  teilen, dann kann man der Zahl  $n$  ein Rechteck mit den Seitenlängen  $u$  (Breite) und  $x := \frac{n}{u}$  (Höhe) zuordnen. Dieses besteht also aus  $u$  Säulen mit jeweils  $x$  Steinen. Da es sich um eine ungerade Anzahl von Säulen handelt, kann man die Höhe der mittleren Säule beibehalten und die der benachbarten Säulen um 1, 2, ... symmetrisch vergrößern bzw. verkleinern.

Das Rechteck aus  $u$  Säulen mit jeweils  $x$  Steinen wird in eine Treppenfigur umgewandelt, bei der jeweils  $\frac{1}{2} \cdot (u - 1)$  Säulen links und rechts von der unveränderten mittleren Säule liegen. Die am weitesten links liegende Säule besteht dann aus  $x - \frac{1}{2} \cdot (u - 1)$  Steinen, die am weitesten rechts liegende Säule aus  $x + \frac{1}{2} \cdot (u - 1)$  Steinen.

Wenn ein ungerader Teiler  $u$  einer natürlichen Zahl  $n$  größer ist als  $x = n/u$ , dann wird die Angelegenheit etwas komplizierter: Die Anzahl  $x = \frac{1}{2} \cdot (u - 1)$  der Steine in der am weitesten links liegenden Säule wäre nach den bisherigen Überlegungen negativ. Die im negativen Bereich liegenden Säulen werden durch gleich hohe Säulen ausgeglichen, die im positiven Bereich liegen. Die am weitesten rechts liegende Ausgleichssäule besteht demnach aus  $(-1) \cdot \left(x - \frac{1}{2} \cdot (u - 1)\right) = \frac{1}{2} \cdot (u - 1) - x$  Steinen.

Von den insgesamt  $u$  Säulen bleiben dann rechts noch  $u - 2 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (u - 1) - x\right] - 1$  Säulen übrig, also  $2 \cdot x$  Säulen. Dies ist stets eine gerade Anzahl.

### Satz

#### Folgerung aus dem Satz von Sylvester

Von allen natürlichen Zahlen lassen sich nur die Zweierpotenzen (also Zahlen der Form  $n = 2^k$  mit  $k \in \mathbb{N}$ ) nicht als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen darstellen, denn nur sie besitzen keine ungeraden Teiler.

**Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen**

**A 2.8:** Untersuchen Sie, auf wie viele Arten man die natürlichen Zahlen 18, 15, 45 als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen darstellen kann. Veranschaulichen Sie diese Möglichkeiten jeweils mithilfe geeigneter Muster aus bunten Steinen.

**A 2.9:** Erstellen Sie eine Übersicht über die Anzahl der ungeraden Teiler für die natürlichen Zahlen von 3 bis 100.

**A 2.10:** Es gilt  $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ . Welche Summendarstellungen von aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ergeben sich für diese Jahreszahl? Ermitteln Sie auch die Summendarstellungen für nachfolgende Jahreszahlen.

## 2.5 Summe der ersten $n$ Quadratzahlen von natürlichen Zahlen

Der Mathematiker und Physiker Abu Ali al-Hasan ibn al-Haitham (965–1039) ist in Europa auch unter dem Namen Alhazen bekannt. Besonders berühmt wurde er wegen seiner optischen Experimente, u. a. gilt er als „Erfinder“ der Lupe. Wegen seiner zahlreichen bedeutenden Entdeckungen wird er auch als *Vater der Optik* bezeichnet.



al-Haithams genialer Ansatz zur Bestimmung der Summe der ersten  $n$  Quadratzahlen von natürlichen Zahlen lässt sich (wenn auch weniger anschaulich) sogar auf die Summen höherer Potenzen übertragen (vgl. Kap. 16).

Für die Herleitung einer Formel wird nur die Kenntnis der Formel (2.1) für die Summe der ersten  $n$  natürlichen Zahlen vorausgesetzt, also:

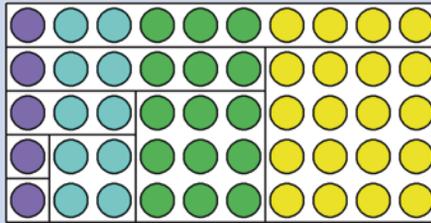
$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + n &= \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{1}{2} \cdot n \end{aligned}$$

Seine Idee: Man ergänze die Quadrate mit den Seitenlängen 1, 2, 3, ...,  $n$  durch geeignete Rechtecke der Höhe 1 zu einem Rechteck der Höhe  $n + 1$ .

**Beispiel: Bestimmung der Summe der ersten vier Quadratzahlen**

Die bunten Steine sind in Form eines Rechtecks angeordnet, das die Breite  $1 + 2 + 3 + 4$  hat und die Höhe  $1 + 4$ . Insgesamt sind in den Quadraten  $1^2$ ,  $2^2$ ,  $3^2$  und  $4^2$  Steine enthalten und in den Rechteckstreifen  $1$ ,  $1 + 2$ ,  $1 + 2 + 3$  und  $1 + 2 + 3 + 4$  Steine. Es gilt also:

$$\begin{aligned} & (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) + (1) + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + (1 + 2 + 3 + 4) \\ &= (1 + 2 + 3 + 4) \cdot 5 \end{aligned}$$



Ersetzt man die auf der linken Seite in Klammern stehenden Summen von natürlichen Zahlen jeweils durch den bekannten Term, also

$$1 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot 1;$$

$$1 + 2 = \frac{1}{2} \cdot 2^2 + \frac{1}{2} \cdot 2;$$

$$1 + 2 + 3 = \frac{1}{2} \cdot 3^2 + \frac{1}{2} \cdot 3;$$

$$1 + 2 + 3 + 4 = \frac{1}{2} \cdot 4^2 + \frac{1}{2} \cdot 4,$$

so ergibt sich:

$$\begin{aligned} & (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) + \left( \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \right) + \left( \frac{1}{2} \cdot 2^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \right) \\ & + \left( \frac{1}{2} \cdot 3^2 + \frac{1}{2} \cdot 3 \right) + \left( \frac{1}{2} \cdot 4^2 + \frac{1}{2} \cdot 4 \right) = (1 + 2 + 3 + 4) \cdot 5 \end{aligned}$$

Nach Auflösen der Klammern und Umordnen folgt hieraus:

$$\begin{aligned} & (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) + \frac{1}{2} \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) + \frac{1}{2} \cdot (1 + 2 + 3 + 4) \\ &= (1 + 2 + 3 + 4) \cdot 5 \end{aligned}$$

und weiter:

$$\frac{3}{2} \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) = \frac{9}{2} \cdot (1 + 2 + 3 + 4)$$

Auflösen nach der Summe der Quadratzahlen ergibt dann

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = \frac{9}{3} \cdot (1 + 2 + 3 + 4)$$

und nach Ersetzen des Summenterms für die ersten vier natürlichen Zahlen:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = \frac{9}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (4^2 + 4) = 30$$

#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 2.11:** Führen Sie den Ansatz al-Haithams für die Summe der ersten fünf Quadratzahlen durch.

#### Allgemeine Herleitung einer Summenformel für die ersten $n$ Quadratzahlen

Alle Schritte lassen sich entsprechend für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  durchführen, d. h., man betrachtet allgemein ein Rechteck mit der Breite  $1 + 2 + 3 + \dots + n$  und der Höhe  $n + 1$ .

Dieses setzt sich zusammen aus  $n$  Quadraten mit den Flächeninhalten  $1^2, 2^2, 3^2, \dots, n^2$  sowie  $n$  Rechteckstreifen der Höhe 1 mit den Flächeninhalten  $1, 1 + 2, 1 + 2 + 3, \dots, 1 + 2 + 3 + \dots + n$ . Es gilt also:

$$(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + (1) + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + \dots + (1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

$$= (1 + 2 + 3 + \dots + n) \cdot (n + 1), \text{ also}$$

$$(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + \left(\frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot 1\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot 2^2 + \frac{1}{2} \cdot 2\right) + \dots + \left(\frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{1}{2} \cdot n\right)$$

$$= (1 + 2 + 3 + \dots + n) \cdot (n + 1), \text{ also}$$

$$(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + \frac{1}{2} \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + \frac{1}{2} \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

$$= (1 + 2 + 3 + \dots + n) \cdot (n + 1), \text{ also}$$

$$\frac{3}{2} \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n).$$

Ersetzen der Summe für die ersten  $n$  natürlichen Zahlen gemäß Formel (2.1) ergibt

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \left(\frac{2}{3}n + \frac{1}{3}\right) \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n), \text{ also}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3} \cdot (2n + 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1) = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)$$

**Formel****Summe der ersten  $n$  Quadratzahlen von natürlichen Zahlen**

Die Summe der ersten  $n$  Quadratzahlen von natürlichen Zahlen berechnet sich nach der Formel:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \quad (2.4)$$

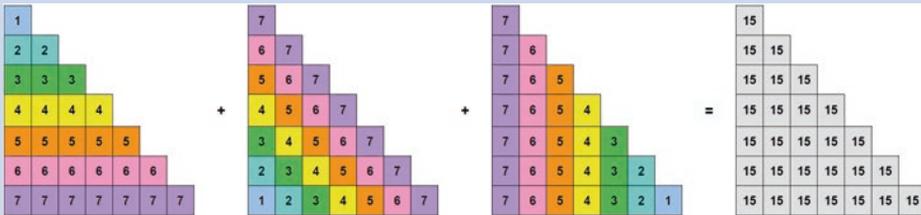
**Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen**

**A 2.12:** Stellen Sie eine Summenformel für die Summe der ersten  $n$  ungeraden Quadratzahlen auf.

**A 2.13:** Die Summe von zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen ist eine ungerade Zahl und daher stets darstellbar als Summe von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, z.B.:

$1^2 + 2^2 = 5 = 2 + 3$ ;  $2^2 + 3^2 = 13 = 6 + 7$ ;  $3^2 + 4^2 = 25 = 12 + 13$   
Geben Sie eine allgemeine Darstellung für die Summe  $n^2 + (n+1)^2$  an.

**A 2.14:** Wie kann man aus der folgenden Abbildung schließen, dass gilt:  
 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$ ?

**2.6 Summe der ersten  $n$  Kubikzahlen von natürlichen Zahlen**

Eine Formel für die Summe der ersten  $n$  Kubikzahlen war bereits dem griechischen Mathematiker Nikomachos von Gerasa (60–120 n. Chr.) bekannt, ebenso dem indischen Mathematiker Aryabhata (476–550 n. Chr.).

**Formel****Summe der ersten  $n$  Kubikzahlen**

Die Summe der ersten  $n$  Kubikzahlen ist gleich dem Quadrat der Summe der ersten  $n$  natürlichen Zahlen:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left( \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1) \right)^2 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 \quad (2.5)$$

Dass diese einfache Beziehung gilt, wurde von diesen und anderen Mathematikern der Antike nicht bewiesen, weil man ja den Zusammenhang unmittelbar durch Vergleich „sehen“ konnte (vgl. Spalte 3 und 5 der folgenden Tabelle).

$k$	$\Sigma k$	$(\Sigma k)^2$	$k^3$	$\Sigma k^3$
1	1	1	1	1
2	3	9	8	9
3	6	36	27	36
4	10	100	64	100
5	15	225	125	225
6	21	441	216	441
7	28	784	343	784
8	36	1296	512	1296
9	45	2025	729	2025
10	55	3025	1000	3025

### 2.6.1 Beweis der Formel für die Summe der ersten $n$ Kubikzahlen durch Al-Karaji

Abu Bakr ibn Muhammad ibn al-Husayn al-Karaji (953–1029), einer der bedeutendsten Mathematiker des islamischen Mittelalters, begnügte sich nicht mit der *Einsicht durch bloßes Hinschauen*, sondern führte als Erster einen formalen (induktiven) Beweis.

#### Beispiel: Beweis der Formel für $n = 5$

Ein Quadrat mit der Seitenlänge  $1 + 2 + 3 + 4 + 5$  kann – gemäß binomischer Formel – unterteilt werden in ein Quadrat der Seitenlänge  $1 + 2 + 3 + 4$  (blaugrau), in zwei Rechtecke der Länge  $1 + 2 + 3 + 4$  und der Breite 5 (rosa) sowie in ein Quadrat der Seitenlänge 5 (rot).

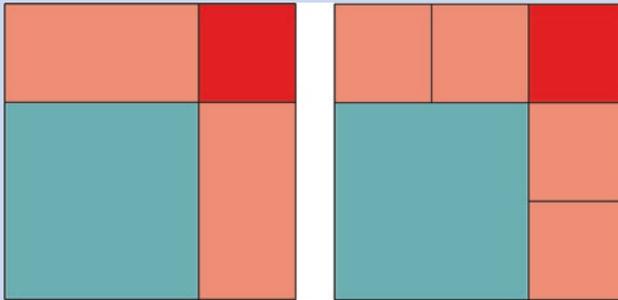
$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2 = (1 + 2 + 3 + 4)^2 + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) \cdot 5 + 5^2$$

Die Summe der ersten vier natürlichen Zahlen  $1 + 2 + 3 + 4$  kann ersetzt werden durch  $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5$ , sodass hieraus folgt:

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2 = (1 + 2 + 3 + 4)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^2, \text{ also}$$

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2 = (1 + 2 + 3 + 4)^2 + 5 \cdot 5^2$$

mit der Seitenlänge  $1 + 2 + 3 + 4 + 5$  kann zerlegt werden in ein Quadrat der Seitenlänge  $1 + 2 + 3 + 4$  und fünf Quadrate der Seitenlänge 5.



Dies bedeutet aber, dass gilt:

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2 = (1 + 2 + 3 + 4)^2 + 5^3$$

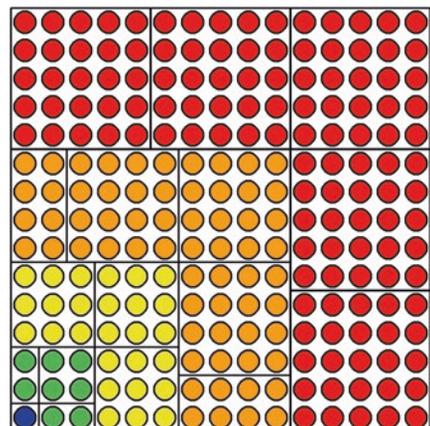
Da dies analog auch für die Summen  $(1 + 2 + 3 + 4)^2$ ,  $(1 + 2 + 3)^2$  usw. gezeigt werden kann, folgt schrittweise:

$$\begin{aligned} (1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2 &= (1 + 2 + 3 + 4)^2 + 5^3 = (1 + 2 + 3)^2 + 4^3 + 5^3 \\ &= (1 + 2)^2 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 1^2 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 \end{aligned}$$

Das heißt, das Quadrat mit der Seitenlänge  $1 + 2 + 3 + 4 + 5$  kann zerlegt werden in fünf Quadrate der Seitenlänge 5, vier Quadrate der Seitenlänge 4, drei Quadrate der Seitenlänge 3, zwei Quadrate der Seitenlänge 2 und ein Quadrat der Seitenlänge 1.

Dies ist in der folgenden Abbildung ablesbar, in der Steine in verschiedenen Farben ausgelegt wurden (Abb. 2.2).

**Abb. 2.2** Darstellung der Summe der ersten fünf Kubikzahlen



Dass die Anordnung der insgesamt  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$  Steine in insgesamt  $n$  Winkelhaken auch im allgemeinen Fall gelingt, kann man wie folgt überlegen:

- Jeder  $k$ -te Winkelhaken besteht aus  $k$  Teilquadraten mit jeweils  $k^2$  Steinen ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), wobei bei geradem  $k$  jeweils eines der Teilquadrate aus  $k^2$  Punkten aufgeteilt werden muss.
- Bei ungeradem  $k$  liegen  $k^2$  Steine im Eckquadrat des Winkelhakens und außerdem jeweils  $\frac{1}{2} \cdot (k - 1)$ -mal  $k^2$  Steine in waagrecht bzw. senkrecht angeordneten Quadraten.
- Bei geradem  $k$  liegen  $k^2$  Steine im Eckquadrat des Winkelhakens und außerdem jeweils  $\left(\frac{1}{2} \cdot k - 1\right)$ -mal  $k^2$  Steine in waagrecht bzw. senkrecht angeordneten Quadraten, außerdem ist jeweils ein halbes Quadrat mit  $\frac{1}{2} \cdot k^2$  Steinen waagrecht bzw. senkrecht eingetragen.

Betrachtet man die Gesamtfigur, dann sind Breite und Höhe dieser Figur durch den  $n$ -ten Winkelhaken bestimmt.

- Ist  $n$  ungerade, dann liegen bei diesem Gesamtquadrat waagrecht wie senkrecht jeweils  $\frac{1}{2} \cdot (n - 1) \cdot n + n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1)$  Steine.  
Die Anzahl  $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1)$  bedeutet aber gemäß Formel (2.1) nichts anderes, als dass Breite und Höhe des Gesamtquadrats gleich der Summe  $1 + 2 + \dots + n$  sind.
- Ist  $n$  gerade, dann liegen bei diesem Gesamtquadrat waagrecht wie senkrecht jeweils  $\left(\frac{1}{2} \cdot n - 1\right) \cdot n + \frac{1}{2} \cdot n + n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1)$  Steine.  
Wie im ungeraden Fall bedeutet dies, dass Breite und Höhe des Gesamtquadrats gleich der Summe  $1 + 2 + \dots + n$  sind.

Es passt also!

### 2.6.2 Beweis der Summenformel für Kubikzahlen durch Wheatstone

Der englische Physiker und Erfinder Charles Wheatstone (1802–1875) beschrieb den Zusammenhang zwischen der Summe der ersten  $n$  Kubikzahlen und der Summe der ersten  $n$  natürlichen Zahlen auf folgende Weise:

Kubikzahlen lassen sich als Summe aufeinanderfolgender ungerader Zahlen darstellen – genauer:

Die Kubikzahl  $n^3$  lässt sich als Summe von  $n$  aufeinanderfolgenden *ungeraden* Zahlen notieren.

Die Kubikzahl  $n^3 = n \cdot n^2$  kann nämlich aufgefasst werden als die  $n$ -fache Summe der Quadratzahl  $n^2$ . Und diese Summe wiederum kann umgeformt werden, sodass eine Summe von aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen entsteht.

**Beispiel: Kubikzahlen als Summe aufeinanderfolgender ungerader natürlicher Zahlen**

$$1^3 = 1$$

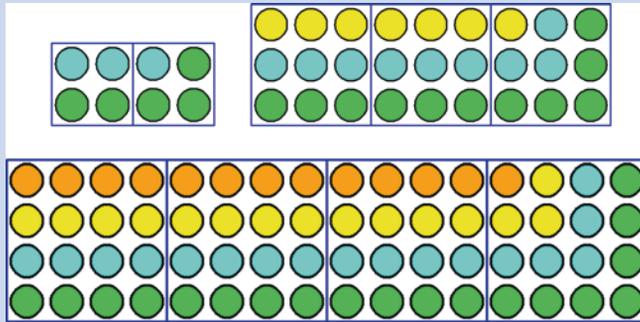
$$2^3 = 2 \cdot 2^2 = 2 \cdot 4 = 4 + 4 = 3 + 5$$

$$3^3 = 3 \cdot 3^2 = 3 \cdot 9 = 9 + 9 + 9 = 7 + 9 + 11$$

$$4^3 = 4 \cdot 4^2 = 4 \cdot 16 = 16 + 16 + 16 + 16 = 13 + 15 + 17 + 19$$

$$5^3 = 5 \cdot 5^2 = 5 \cdot 25 = 25 + 25 + 25 + 25 + 25 = 21 + 23 + 25 + 27 + 29$$

$$\begin{aligned} 6^3 &= 6 \cdot 6^2 = 6 \cdot 36 = 36 + 36 + 36 + 36 + 36 + 36 \\ &= 31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41 \end{aligned}$$



Die Figuren bestehen – ähnlich wie bei Sylvester – aus  $n$  Stein-Säulen (in der Abbildung als liegende Säulen dargestellt). In den ersten  $n - 1$  Quadraten stimmt die Länge der Säulen überein; das letzte Quadrat enthält aber genau die Winkelhaken wie in den Figuren von Abschn. 2.2, also die Darstellung der Summe der ungeraden natürlichen Zahlen  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$ , vgl. Formel (2.3).

Aus den Figuren ist also folgende Zerlegung der Kubikzahl  $n^3$  ablesbar:

$$n^3 = n \cdot n^2 = (n - 1) \cdot n^2 + 1 \cdot n^2 = (n - 1) \cdot n^2 + (1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1))$$

- Die kürzeste Säule besteht also aus  $(n - 1) \cdot n + 1 = n^2 - n + 1$  Steinen,
- die nächste aus  $(n - 1) \cdot n + 3 = n^2 - n + 3$  Steinen,
- die dritte aus  $(n - 1) \cdot n + 5 = n^2 - n + 5$  Steinen  
usw.
- Die längste Säule schließlich enthält

$$(n - 1) \cdot n + (2n - 1) = n^2 - n + 2n - 1 = n^2 + n - 1 \text{ Steine.}$$

**Regel****Darstellung der Summe der ersten  $n$  Kubikzahlen**

Jede Kubikzahl  $n^3$  lässt sich als Summe von  $n$  ungeraden natürlichen Zahlen darstellen, deren Mittelwert  $n^2$  beträgt. Dabei gilt,

- falls  $n$  gerade:

$$n^3 = (n^2 - n + 1) + \dots + (n^2 - 3) + (n^2 - 1) + (n^2 + 1) + (n^2 + 3) + \dots + (n^2 + n - 1)$$

- falls  $n$  ungerade:

$$n^3 = (n^2 - n + 1) + \dots + (n^2 - 4) + (n^2 - 2) + n^2 + (n^2 + 2) + (n^2 + 4) + \dots + (n^2 + n - 1)$$

Nach Formel (2.3) gilt für die Summe der ersten  $k$  ungeraden Zahlen:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$$

Hier wird bis zur ungeraden Zahl  $(n^2 + n - 1)$  addiert. Setzt man also  $2k - 1 = n^2 + n - 1$ , dann folgt, dass  $k = \frac{1}{2} \cdot (n^2 + n) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1)$ .

Eingesetzt ergibt sich daher:

$$\begin{aligned} & 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 \\ &= 1 + [3 + 5] + [7 + 9 + 11] + \dots + \left[ (n^2 - n + 1) + \dots + (n^2 + n - 1) \right] \\ &= \left[ \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1) \right]^2 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 \end{aligned}$$

**Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen**

**A 2.15** Addiert man die ersten Kubikzahlen von *ungeraden* Zahlen, dann fällt eine Regelmäßigkeit auf:

- Die Summe der ersten zwei ungeraden Kubikzahlen ist die Summe von drei aufeinanderfolgenden Zweierpotenzen (beginnend mit dem Exponenten 2):

$$1^3 + 3^3 = 2^2 + 2^3 + 2^4 = 11100_2$$

- Die Summe der ersten vier ungeraden Kubikzahlen ist die Summe von fünf aufeinanderfolgenden Zweierpotenzen (beginnend mit dem Exponenten 4):

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 = 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 = 111110000_2$$

- Die Summe der ersten acht ungeraden Kubikzahlen ist die Summe von sieben aufeinanderfolgenden Zweierpotenzen (beginnend mit dem Exponenten 6):

$$1^3 + 3^3 + \dots + 13^3 + 15^3 = 2^6 + 2^7 + \dots + 2^{11} + 2^{12} = 1111111000000_2$$

- Die Summe der ersten 16 ungeraden Kubikzahlen ist die Summe von neun aufeinanderfolgenden Zweierpotenzen (beginnend mit dem Exponenten 8):

$$1^3 + 3^3 + \dots + 29^3 + 31^3 = 2^8 + 2^9 + \dots + 2^{15} + 2^{16} = 11111111100000000_2$$

Wie lauten die „nächsten“ Gleichungen? Gilt diese Eigenschaft allgemein?

**A 2.16:** Die Summe von zwei aufeinanderfolgenden Kubikzahlen ist eine ungerade Zahl und daher stets darstellbar als Summe von aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, z. B.:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 &= 9 = 3^2 = 4 + 5 = 2 + 3 + 4; \\ 2^3 + 3^3 &= 35 = 17 + 18 = 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8; \\ 3^3 + 4^3 &= 91 = 45 + 46 = 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 \\ &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13. \end{aligned}$$

Begründen Sie, dass sich allgemein die Summe zweier Kubikzahlen  $n^3 + (n+1)^3$  auf mindestens zwei Arten als Summe von aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darstellen lässt. Geben Sie eine allgemeine Darstellung für diese Summen an.

## 2.7 Pythagoreische Zahlentripel

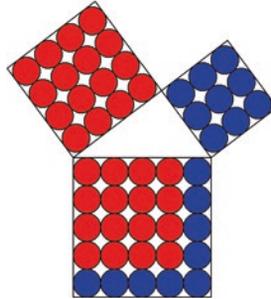
Die Anordnung von bunten Steinen in Form eines Winkelhakens kann man benutzen, um sogenannte **pythagoreische Zahlentripel** zu finden. Das sind natürliche Zahlen  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , die Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks sein können.

Gesucht sind also drei Quadratzahlen  $a^2$ ,  $b^2$ ,  $c^2$ , welche die Gleichung des **Satzes von Pythagoras**

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ erfüllen (vgl. Kap. 17).}$$

### 2.7.1 Einfache Typen pythagoreischer Zahlentripel

Bekanntlich ist  $(3; 4; 5)$  ein pythagoreisches Zahlentripel, denn es gilt  $3^2 + 4^2 = 5^2$ .

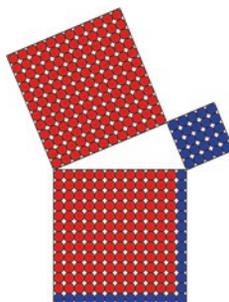


In der Abbildung ist  $3^2$  dargestellt durch die blauen Steine,  $4^2$  durch die in Quadratform ausgelegten roten Steine und  $5^2$  durch die in Quadratform ausgelegten roten zusammen mit den in Form eines Winkelhakens ausgelegten blauen Steine, die insgesamt ebenfalls ein Quadratmuster ergeben.

Da die Anzahl der Steine des (blauen) Winkelhakens im Beispiel eine Quadratzahl ist, hat man mit dem Tripel  $(3; 4; 5)$  ein pythagoreisches Zahlentripel gefunden.

Grundsätzlich enthalten Winkelhaken, die ein Quadrat einrahmen, eine ungerade Anzahl von Steinen. Weitere pythagoreische Zahlentripel findet man daher, indem man systematisch die Folge der *ungeraden Quadratzahlen* betrachtet. Die nächste ungerade Quadratzahl nach  $3^2 = 9$  ist  $5^2 = 25$ :

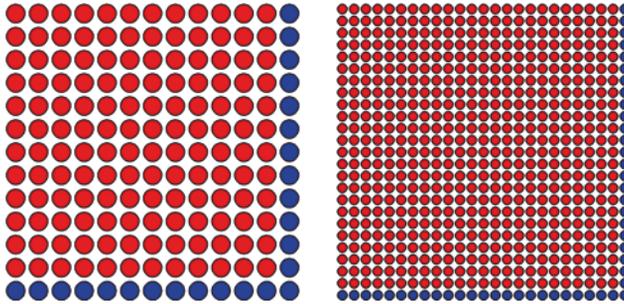
$5^2 = 25 = 13 + 12$  blaue Steine des Winkelhakens gehören zu einem Muster von 12 roten Steinen und insgesamt  $13^2$  (roten und blauen) Steinen (vgl. die folgende Abbildung).



In den folgenden beiden Abbildungen ist jeweils das größte der drei Quadrate (das Hypotenusenquadrat) dargestellt, das zu den nächsten beiden ungeraden Quadratzahlen gehört und somit weitere pythagoreische Zahlentripel ergibt:

- $7^2 = 49 = 25 + 24$  blaue Steine des Winkelhakens gehören zu einem Muster von 24 roten Steinen und insgesamt  $25^2$  (roten und blauen) Steinen.

- $9^2 = 81 = 41 + 40$  blaue Steine des Winkelhakens gehören zu einem Muster von  $40^2$  roten Steinen und insgesamt  $41^2$  (roten und blauen) Steinen.



### Regel

**Pythagoreische Zahlentripel, zu deren Darstellung *ein* Winkelhaken benötigt wird**

Allgemein findet man unendlich viele pythagoreische Zahlentripel  $(a_n; b_n; c_n)$  mit  $a_n = 2n + 1$ ,  $b_n = 2n(n + 1)$ ,  $c_n = 2n(n + 1) + 1$ , also  $c_n - b_n = 1$ .

Begründung: Ausgehend von einer ungeraden Quadratzahl (= Anzahl der blauen Steine des Winkelhakens) berechnet man hieraus die Anzahl der roten Steine des Quadrats, das vom blauen Winkelhaken umschlossen wird:  $(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$ .

Von den blauen Steinen liegt *ein* Stein in der rechten unteren Ecke des Quadrats und jeweils die Hälfte der übrigen blauen Steine unterhalb bzw. rechts vom roten Quadrat. Die Anzahl  $4n^2 + 4n + 1$  der blauen Steine verteilt sich daher wie folgt:

$$\text{Stein unten rechts} + \text{Steine in der Reihe unten} + \text{Steine in der Reihe rechts} = 1 + (2n^2 + 2n) + (2n^2 + 2n)$$

Wegen  $2n^2 + 2n = 2n \cdot (n + 1)$  kann daher die Seitenlänge des roten Quadrats mit dem Term  $b_n = 2n \cdot (n + 1)$  beschrieben werden. Das gesamte Quadrat hat dann die Seitenlänge  $c_n = 2n \cdot (n + 1) + 1$ .

Die folgende Tabelle enthält die ersten Zahlentripel dieses Typs:

$n$	$a_n = 2n + 1$	$(2n + 1)^2$	$b_n = 2n \cdot (n+1)$	$c_n = 2n \cdot (n + 1) + 1$
1	3	$9 = 4 + 5$	4	5
2	5	$25 = 12 + 13$	12	13
3	7	$49 = 24 + 25$	24	25
4	9	$81 = 40 + 41$	40	41
5	11	$121 = 60 + 61$	60	61
6	13	$169 = 84 + 85$	84	85
...	...	...	...	...

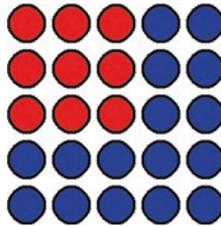
## 2.7.2 Weitere pythagoreische Zahlentripel

Außer den gerade beschriebenen, unendlich vielen pythagoreischen Zahlentripeln gibt es aber noch weitere: Man kann ebenso gut *zwei* aneinanderliegende Winkelhaken eintragen, und wenn die Anzahl der Steine in den beiden Winkelhaken *zusammen* eine Quadratzahl ergibt, hat man im Prinzip ein weiteres pythagoreisches Zahlentripel gefunden.

Da *ein* Winkelhaken stets eine ungerade Anzahl von Steinen enthält, gehört zu einem doppelten Winkelhaken stets eine gerade Anzahl von Steinen.

Man muss daher die Folge der geraden Quadratzahlen durchgehen, diese Anzahl von blauen Steinen auf die beiden Winkelhaken verteilen und hieraus die Seitenlänge des Quadrats aus roten Steinen ermitteln.

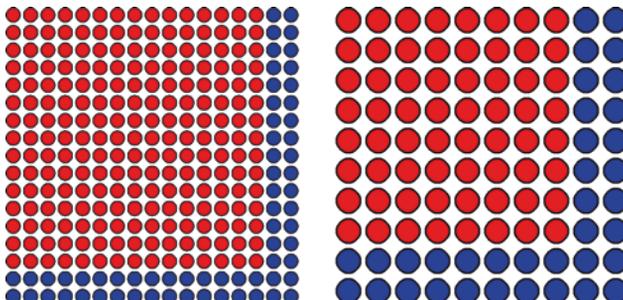
Die kleinste infrage kommende gerade Quadratzahl ist  $4^2 = 16$ , was als Summe der beiden benachbarten ungeraden Zahlen 7 und 9 dargestellt werden kann. Aus der Anzahl  $7 = 3 + 1 + 3$  des innen liegenden Winkelhakens schließt man auf die Seitenlänge 3 des roten Quadrats.



Das erste Zahlentripel  $(3; 4; 5)$  mit  $7 + 9 = 16 = 4^2 = (3 + 4) + (4 + 5)$  blauen Steinen,  $3^2$  roten Steinen und insgesamt  $5^2$  roten und blauen Steinen ist zwar bereits durch den Typ mit *einem* Winkelhaken erfasst, aber wie im Folgenden gezeigt wird, treten in der Folge auch unendlich viele *neue* Zahlentripel auf.

Analog findet man als nächste gerade Quadratzahlen:

- $6^2 = 36 = 17 + 19 = (8 + 9) + (9 + 10)$  blaue Steine der beiden Winkelhaken gehören zu einem Muster von  $8^2$  roten Steinen und insgesamt  $10^2$  (roten und blauen) Steinen,
- $8^2 = 64 = 31 + 33 = (15 + 16) + (16 + 17)$  blaue Steine der beiden Winkelhaken gehören zu einem Muster von  $15^2$  roten Steinen und insgesamt  $17^2$  Steinen (vgl. die folgenden Abbildungen).



Das nächste Tripel dieses Typs ergibt sich dann wie folgt:

$10^2 = 100 = 49 + 51 = (24 + 25) + (25 + 26)$  blaue Steine der beiden Winkelhaken gehören zu einem Muster von  $24^2$  roten Steinen und insgesamt  $26^2$  Steinen usw.

### Regel

**Pythagoreische Zahlentripel, zu deren Darstellung zwei Winkelhaken benötigt werden**

Allgemein findet man unendlich viele pythagoreische Zahlentripel  $(a_n; b_n; c_n)$  mit  $a_n = 2n$ ,  $b_n = n^2 - 1$ ,  $c_n = n^2 + 1$ , also  $c_n - b_n = 2$ .

Dabei gilt für die Anzahl der blauen Steine:

$$(2n)^2 = 4n^2 = \left[2n^2 - 1\right] + \left[2n^2 + 1\right]$$

gerade Quadratzahl      innerer Winkelhaken      äußerer Winkelhaken

Der innere der beiden Winkelhaken besteht aus  $(n^2 - 1)$  blauen Steinen an der unteren Seite (= Breite des roten Quadrats), 1 Stein rechts unten in der Ecke und aus  $(n^2 - 1)$  Steinen an der rechten Seite des roten Quadrats. Der äußere der beiden Winkelhaken besteht aus  $n^2$  blauen Steinen unterhalb, 1 Stein rechts unten in der Ecke und aus  $n^2$  Steinen rechts vom roten Quadrat. Das Quadrat aus blauen und roten Steinen hat eine Seitenlänge von  $(n^2 + 1)$ .

Die folgende Tabelle enthält die ersten Zahlentripel dieses Typs:

$n$	$a_n = 2n$	$(2n)^2$	$b_n = n^2 - 1$	$c_n = n^2 + 1$
2	4	$16 = 7 + 9 = (3 + 4) + (4 + 5)$	3	5
3	6	$36 = 17 + 19 = (8 + 9) + (9 + 10)$	8	10
4	8	$64 = 31 + 33 = (15 + 16) + (16 + 17)$	15	17
5	10	$100 = 49 + 51 = (24 + 25) + (25 + 26)$	24	26
6	12	$144 = 71 + 73 = (35 + 36) + (36 + 37)$	35	37
7	14	$196 = 97 + 99 = (48 + 49) + (49 + 50)$	48	50
...	...	...	...	...

Für ungerades  $n$  erhält man durch die Methode der zwei Winkelhaken keine neuen pythagoreischen Tripel, sondern nur das Doppelte von Tripeln, die man mit *einem* Winkelhaken herausgefunden hatte. (Da für ungerades  $n$  die Zahlen  $2n$ ,  $n^2 - 1$  und  $n^2 + 1$  gerade sind, kann man sie durch 2 teilen.)

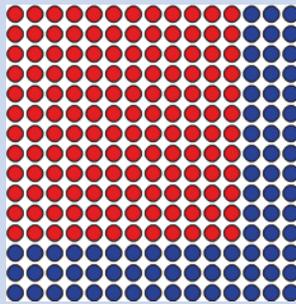
Für gerades  $n$  erhält man drei Zahlen, deren größter gemeinsamer Teiler gleich 1 ist:  $\text{ggT}(a_n; b_n; c_n) = 1$ .

Solche Tripel bezeichnet man als **primitive pythagoreische Zahlentripel**.

Im Prinzip kann man durch die Methode der Winkelhaken alle pythagoreischen Zahlentripel finden, denn in der Gleichung  $a^2 + b^2 = c^2$  steht  $b^2$  für die Steine des roten Quadrats und  $c^2$  für die Steine des gesamten Quadrats, und hieraus ergibt sich zwangsläufig  $a^2$  als Anzahl der Steine der Winkelhaken.

#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 2.17:** Betrachtet man analog zu den Überlegungen mit einem oder zwei Winkelhaken eine Figur mit drei Winkelhaken, dann stellt man fest, dass sich hieraus keine neuen pythagoreischen Tripel ergeben. Überprüfen Sie dies am abgebildeten Beispiel und begründen Sie dies allgemein.



### 2.7.3 Allgemeine Methode zur Bestimmung aller pythagoreischen Zahlentripel

In der Literatur findet man eine allgemeine Methode, wie man systematisch *alle* pythagoreischen Zahlentripel  $(a; b; c)$  finden kann. Diese Methode wird bereits von Euklid in den *Elementen* (Band IX, §§ 28 und 29) angegeben und war vermutlich babylonischen Mathematikern (ca. 1500 v. Chr.) bekannt.

#### Satz

##### Darstellung aller pythagoreischen Zahlentripel

Für beliebige natürliche Zahlen  $u, v$  mit  $u > v$  erhält man ein pythagoreisches Zahlentripel  $(a; b; c)$  aus dem Ansatz  $a = u^2 - v^2$ ,  $b = 2uv$  und  $c = u^2 + v^2$ .

Dabei handelt es sich genau dann um primitive Zahlentripel, wenn  $u, v$  teilerfremd sind und die Summe  $u + v$  ungerade ist.

Eine Begründung für diesen Ansatz folgt am Ende dieses Abschnitts.

Setzt man systematisch nacheinander alle natürlichen Zahlen  $u, v$  mit  $v < u$  ein, so erhält man den linken Teil der Tab. 2.1. Im rechten Teil der Tabelle ist dann notiert, wie viele Winkelhaken man für die Darstellung der einzelnen Tripel benötigt hätte, darunter auch die o. a. Beispiele.

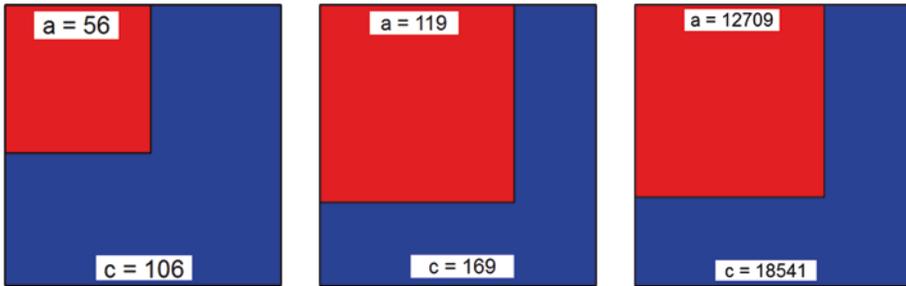
**Tab. 2.1** Systematische Bestimmung aller pythagoreischen Zahlentripel sowie deren Darstellung mithilfe von Winkelhaken

$u$	$v$	$a = u^2 - v^2$	$b = 2uv$	$c = u^2 + v^2$	Anzahl der Winkelhaken
2	1	3	4	5	1 oder 2
3	1	8	6	10	2 oder 4
3	2	5	12	13	1 oder 8
4	1	15	8	17	2 oder 9
4	2	12	16	20	4 oder 8
4	3	7	24	25	1 oder 18
5	1	24	10	26	2 oder 16
5	2	21	20	29	8 oder 9
5	3	16	30	34	4 oder 18
5	4	9	40	41	1 oder 32
6	1	35	12	37	2 oder 25
6	2	32	24	40	8 oder 16
6	3	27	36	45	9 oder 18
6	4	20	48	52	4 oder 32
6	5	11	60	61	1 oder 50
7	1	48	14	50	2 oder 36
7	2	45	28	53	8 oder 25
7	3	40	42	58	16 oder 18
7	4	31	56	65	9 oder 34
7	5	24	70	74	4 oder 50
7	6	13	84	85	1 oder 72
...	...	...	...	...	...

Pythagoreische Zahlentripel fand man übrigens bereits auf babylonischen Tontafeln aus der Zeit der Hammurabi-Dynastie (1829–1530 v. Chr.). Vor mehr als 3500 Jahren muss also ein Berechnungsverfahren bekannt gewesen sein – aber mit Sicherheit nicht die Winkelhaken-Methode, denn das dort angegebene pythagoreische Zahlentripel

- (56, 90, 106) benötigt 16 oder 50 Winkelhaken,
- (119, 120, 169) benötigt 49 oder 50 Winkelhaken und
- (12709, 13500, 18541) benötigt 5041 oder 5832 Winkelhaken,

vgl. die folgenden Abbildungen.



### 2.7.4 Herleitung der Formel zur Erzeugung aller pythagoreischen Zahlentripel

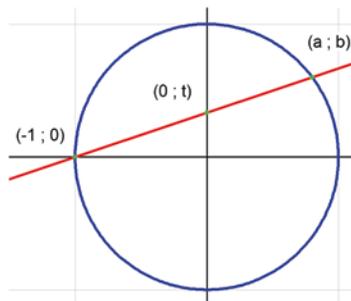
Die Gleichung  $x^2 + y^2 = z^2$  kann umgeformt werden zu  $\frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2} = 1$ .

Für zueinander teilerfremde  $x, z$  und  $y, z$  wird durch  $a = \frac{x}{z}$  und  $b = \frac{y}{z}$  ein Punkt auf dem Einheitskreis mit rationalen Koordinaten  $a, b$  beschrieben.

Für eine Gerade durch die Punkte  $(-1|0)$  und  $(a|b)$  gilt die Gleichung:

$$y = \frac{b}{1+a} \cdot (x+1) + 0$$

Diese Gerade schneidet die  $y$ -Achse im Punkt  $(0|\frac{b}{1+a})$ .



Setzt man  $t = \frac{b}{1+a}$ , dann gilt  $b = t \cdot (1+a)$ .

Die Punkte des Einheitskreises können also durch die Gleichung

$$a^2 + t^2 \cdot (1+a)^2 = 1$$

beschrieben werden. Diese Gleichung kann man umformen:

$$\begin{aligned} (a^2 - 1) + t^2 \cdot (1+a)^2 &= 0 \Leftrightarrow (a-1)(a+1) + t^2 \cdot (1+a)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow (a+1) \left[ (a-1) + t^2(a+1) \right] &= 0 \end{aligned}$$

Wegen  $0 \leq a \leq 1$ , also  $a + 1 > 0$ , kann nur der zweite Faktor den Wert null annehmen, also folgt  $(a - 1) + t^2(a + 1) = 0$  und weiter

$$a \cdot (1 + t^2) = 1 - t^2 \Leftrightarrow a = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

Hieraus ergibt sich:  $b = \frac{2t}{1 + t^2}$

Die Punkte des Einheitskreises lassen sich also wie folgt mithilfe nur *eines* Parameters beschreiben:

$$(a; b) = \left( \frac{x}{z}; \frac{y}{z} \right) = \left( \frac{1 - t^2}{1 + t^2}; \frac{2t}{1 + t^2} \right)$$

Ist  $t$  eine rationale Zahl mit  $0 < t < 1$ , also ein Bruch der Form  $t = \frac{v}{u}$  mit der natürlichen Zahl  $u$  im Nenner und einer natürlichen Zahl  $v$  im Zähler, wobei  $v < u$ , dann ergibt sich nach einer Zwischenrechnung:

$$(a; b) = \left( \frac{1 - t^2}{1 + t^2}; \frac{2t}{1 + t^2} \right) = \left( \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2}; \frac{2uv}{u^2 + v^2} \right)$$

Daher erhält man **alle** pythagoreischen Zahlentripel  $(x | y | z)$  mithilfe des Ansatzes

$$x = u^2 - v^2, y = 2uv, z = u^2 + v^2 \text{ mit } u > v.$$

## 2.8 Hinweise auf weiterführende Literatur

Bei **Wikipedia** findet man in deutscher (englischer, französischer) Sprache weitere Informationen und Literatur zu den Stichwörtern:

- Gaußsche Summenformel
- Pythagoreisches Tripel (Pythagorean triple, Triplet pythagoricien)

Fachliche Informationen findet man auf **Wolfram Mathworld** unter dem Stichwort:

- Pythagorean triple

Viele anregende Beispiele zum Thema *Muster aus bunten Steinen* findet man in den Büchern von Nelsen, siehe *allgemeine Literaturhinweise*.

# Zerlegung von Rechtecken in möglichst große Quadrate

# 3

*Die Mathematik ist eine Art Spielzeug, welches die Natur uns zuwarf zum Troste und zur Unterhaltung in der Finsternis.*  
 (Jean-Baptiste le Rond d'Alembert, französischer Mathematiker, Physiker und Philosoph, 1717–1783)



Können Sie angeben, wie groß die Seitenlängen des abgebildeten Rechtecks sind?

Wenn die beiden kleinen Quadrate in der Abbildung die Seitenlänge 1 LE haben, dann ergibt sich für das hellblau gefärbte Quadrat die Seitenlänge 2 LE, für das grüne und das blaue Quadrat eine Seitenlänge von 3 LE. Daher hat das Ausgangsrechteck die Seitenlängen 3 LE und 8 LE; wir bezeichnen es als  $3 \times 8$ -Rechteck (dabei nennen wir die „Höhe“ des Rechtecks zuerst).

Wenn die kleinsten Quadrate in der Abbildung die Seitenlänge  $a$  LE haben, dann hat das Ausgangsrechteck die Seitenlängen  $3a$  LE und  $8a$  LE.

## 3.1 Ein Spiel mit einem Rechteck

**Spielregel 1** Der beginnende Spieler zeichnet ein beliebiges Rechteck auf ein Blatt Papier mit Rechenkästchen. Dabei liegen die Rechteckseiten auf den Linien des Kästchenrasters. Der zweite Spieler trägt dann ein möglichst großes Quadrat links und oben

bündig in dieses Rechteck ein, sodass ein Rechteck übrig bleibt. Dann ist wieder der erste Spieler an der Reihe, der in das verbleibende Rest-Rechteck ein möglichst großes Quadrat einzeichnet usw.

Das Spiel endet, wenn das Ausgangsrechteck mit Quadraten ausgefüllt ist.

Gewonnen hat derjenige Spieler, der das letzte Quadrat einzeichnen konnte.

**Spielregel 2** (geänderte Spielregel zur Beschleunigung des Spielablaufs): Wenn ein Spieler an der Reihe ist, dann zeichnet er in das Rechteck (bzw. das Rest-Rechteck) ein möglichst großes Quadrat ein. Wenn es dann möglich ist, in das verbleibende Rest-Rechteck ein gleich großes Quadrat oder sogar mehrere gleich große Quadrate einzutragen, dann darf dies derselbe Spieler tun, bevor der andere Spieler an die Reihe kommt.

Das Spiel endet, wenn das Ausgangsrechteck mit Quadraten ausgefüllt ist.

Gewonnen hat derjenige Spieler, der das letzte Quadrat bzw. die letzten Quadrate einzeichnen konnte.

#### Beispiel: Welcher Spieler gewinnt bei einem $3 \times 8$ -Rechteck?

Um zu entscheiden, wer gemäß der Spielregel 1 oder 2 gewonnen hätte, müssen die einzelnen Schritte zur Zerlegung des  $3 \times 8$ -Rechtecks in möglichst große Quadrate untersucht werden:

Im ersten Schritt kann maximal ein Quadrat mit der Seitenlänge 3 LE eingezeichnet werden. Dieses ist in der Abbildung blau gefärbt.

Das übrige Rechteck hat dann die Seitenlängen 5 LE und 3 LE. In dieses passt maximal ein Quadrat mit der Seitenlänge 3 LE. Dieses ist grün gefärbt.



Es bleibt ein Rechteck mit den Seitenlängen 3 LE und 2 LE. In dieses kann man maximal ein Quadrat mit der Seitenlänge 2 LE einzeichnen. Dieses ist hellblau gefärbt. Übrig bleibt ein Rechteck mit den Seitenlängen 2 LE und 1 LE, in dem man zwei Quadrate mit der Seitenlänge 1 LE unterbringen kann. Diese sind rot bzw. magentafarben gefärbt.

Dass nacheinander in das Ausgangsrechteck zwei große Quadrate mit der Seitenlänge 3 LE, ein mittleres Quadrat mit der Seitenlänge 2 LE und zwei kleine Quadrate mit der Seitenlänge 1 LE passen, wird auch durch folgende Rechnung deutlich:

$$3 \cdot 8 = 3 \cdot (3 + 5) = 3^2 + 3 \cdot 5$$

$$3 \cdot 5 = 3 \cdot (3 + 2) = 3^2 + 3 \cdot 2$$

$$2 \cdot 3 = 2 \cdot (2 + 1) = 2^2 + 2 \cdot 1$$

$$1 \cdot 2 = 1 \cdot (1 + 1) = 1^2 + 1^2$$

Insgesamt ergibt sich:

$$3 \cdot 8 = 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 1^2$$

Da der erste Spieler das Rechteck gezeichnet hat und insgesamt  $2 + 1 + 2$ , also 5 Quadrate eingetragen werden konnten, gewinnt der zweite Spieler, weil dieser das letzte Quadrat zeichnen konnte.

Der zweite Spieler würde auch nach der geänderten Spielregel gewinnen, da drei verschiedene Quadrate in das Rechteck eingetragen wurden, also der zweite Spieler die letzten beiden Quadrate einzeichnen konnte.

#### **Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen**

**A 3.1:** Kann der beginnende Spieler die Seitenlängen des Rechtecks so wählen, dass er das Spiel nach Spielregel 1 und nach Spielregel 2 gewinnt?

Gibt es Rechteck-Seitenlängen, bei denen der erste Spieler nach Spielregel 1 gewinnt, aber nach Spielregel 2 verliert bzw. umgekehrt?

*Übrigens* Das Spiel, das von Kindern im Grundschulalter gerne gespielt wird, ist gut dazu geeignet, deren Rechenfertigkeiten zu fördern. Allerdings werden sie den Ablauf eher mit Worten beschreiben als in der formalen Schreibweise notieren.

### 3.2 Rechnerische Untersuchung des Spiels – Beschreibung mithilfe von Kettenbrüchen

Kann man auch ohne Zeichnung, also allein aus der Kenntnis der Seitenlängen durch eine schnelle Rechnung entscheiden, wer das Spiel aus Abschn. 3.1 gewonnen hat?

Das größtmögliche Quadrat, das in ein Rechteck passt, hat eine Seitenlänge, die der kleineren Seitenlänge des Rechtecks entspricht. Wenn man wissen will, wie viele dieser Quadrate in das Rechteck passen, muss man nur prüfen, wie oft die kleinere Seitenlänge in die größere hineinpasst, d. h., man muss den Quotienten (größere Seitenlänge): (kleinere Seitenlänge) bilden.

Bei dem dann übrig bleibenden Rechteck ist die ursprünglich kürzere Seite nunmehr die längere Seite und die kürzere Seite des jetzt zu betrachtenden Rechtecks ergibt sich, indem die kleinere Seitenlänge von der größeren subtrahiert wird (evtl. mehrfach) usw.

#### Beispiel: Rechnerische Untersuchung der Zerlegung des $3 \times 8$ -Rechtecks

Beim  $3 \times 8$ -Rechteck muss also zunächst der Quotient  $8:3$  betrachtet werden; das Ergebnis ist 2,

d. h., *zwei* Quadrate mit Seitenlänge 3 können eingezeichnet werden.

Dann wird der Quotient  $3:2$  betrachtet; das Ergebnis ist 1,

d. h., *ein* Quadrat der Seitenlänge 2 kann eingetragen werden.

Im dritten Schritt geht es dann noch um den Quotienten  $2:1$ ,

d. h., *zwei* Quadrate der Seitenlänge 1 werden gezeichnet.

Wer die Bruchrechenregeln beherrscht, kann diese Rechnung auch wie folgt durchführen:

$$\frac{8}{3} = 2 + \frac{2}{3} = 2 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = \underline{2} + \frac{1}{\underline{1} + \frac{1}{\underline{2}}}$$

Dabei muss nach dem ersten Schritt der Kehrwert des Bruchs  $\frac{2}{3}$  gebildet werden, um zu prüfen, welches maximale Quadrat in das  $3 \times 2$ -Rechteck passt – statt des  $3 \times 2$ -Rechtecks betrachten wir also ein um  $90^\circ$  gedrehtes Rechteck, also das  $2 \times 3$ -Rechteck.

Eine Darstellung von gemischten Brüchen (= natürliche Zahl plus echter Bruch), bei denen im Nenner wieder gemischte Brüche stehen, wird als **Kettenbruch** bezeichnet. Stehen in den Zählern des Kettenbruchs lauter Einsen, dann spricht man von einem **regulären Kettenbruch**.

Die hier im Term unterstrichenen Zahlen geben an, wie viele große, mittlere bzw. kleine Quadrate eingezeichnet werden können, wenn man von einem Rechteck mit den

Seitenlängen 8 LE und 3 LE ausgeht. An den unterstrichenen Zahlen lässt sich unmittelbar ablesen, welcher Spieler gemäß Spielregel 1 bzw. 2 gewonnen hat.

Durch die unterstrichenen Zahlen ist die geometrische Figur bis auf ein Vielfaches der Seitenlänge des kleinsten Quadrats eindeutig bestimmt. Man kann das Ausgangsrechteck auch kurz durch folgende Schreibweise charakterisieren:  $[2; 1, 2]$

Rechnung und Schreibweise sollen noch in einem weiteren Beispiel erläutert werden:

**Beispiel: Zerlegung eines  $5 \times 12$ -Rechtecks in möglichst große Quadrate**

Für ein Rechteck mit den Seitenlängen 5 LE und 12 LE ergeben sich folgende Einzelschritte:

$$5 \cdot 12 = 5 \cdot (5 + 7) = 5^2 + 5 \cdot 7$$

$$5 \cdot 7 = 5 \cdot (5 + 2) = 5^2 + 5 \cdot 2$$

$$2 \cdot 5 = 2 \cdot (2 + 3) = 2^2 + 2 \cdot 3$$

$$2 \cdot 3 = 2 \cdot (2 + 1) = 2^2 + 2 \cdot 1$$

$$1 \cdot 2 = 1 \cdot (1 + 1) = 1^2 + 1^2$$

Zusammengefasst:  $5 \cdot 12 = 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 1^2$

Aus der Kettenbruchentwicklung

$$\frac{12}{5} = 2 + \frac{2}{5} = 2 + \frac{1}{\frac{5}{2}} = \underline{\underline{2}} + \frac{1}{\underline{\underline{2}} + \frac{1}{\underline{\underline{2}}}}$$

ergibt sich die Darstellung  $[2; 2, 2]$ .



**Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen**

**A 3.2:** Entwickeln Sie jeweils den Kettenbruch, der zur Zerlegung des folgenden Rechtecks gehört:

- (1)  $3 \times 10$    (2)  $4 \times 13$    (3)  $5 \times 11$    (4)  $6 \times 17$    (5)  $7 \times 16$    (6)  $8 \times 19$

### 3.3 Zusammenhang zwischen der Kettenbruchentwicklung und den Rechteckseiten

An den beiden bisher betrachteten Beispielen wird deutlich, dass man zu einer Kettenbruchdarstellung auch umgekehrt das zugehörige Rechteck bestimmen kann. Bis auf Vielfache ist diese Zuordnung eindeutig.

Die folgenden Beispiele sollen dies verdeutlichen.

#### Beispiele: Kettenbrüche und zugehöriges Rechteck

$$\text{Zum Kettenbruch } [1; 3, 2] = \underline{1} + \frac{1}{\underline{3} + \frac{1}{\underline{2}}} = 1 + \frac{1}{7} = 1 + \frac{2}{7} = \frac{9}{7}$$

gehört ein  $7 \times 9$ -Rechteck

$$(\text{ausführliche Zerlegung: } 7 \cdot 9 = \underline{1} \cdot 7^2 + \underline{3} \cdot 2^2 + \underline{2} \cdot 1^2),$$

vgl. die erste der folgende Abbildungen.

$$\text{Zum Kettenbruch } [1; 1, 2] = \underline{1} + \frac{1}{\underline{1} + \frac{1}{\underline{2}}} = 1 + \frac{1}{3} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

gehört ein  $3 \times 5$ -Rechteck

$$(\text{ausführliche Zerlegung: } 3 \cdot 5 = \underline{1} \cdot 3^2 + \underline{2} \cdot 2^2 + \underline{2} \cdot 1^2),$$

vgl. die zweite der folgenden Abbildungen.

$$\text{Zum Kettenbruch } [1; 2, 3] = \underline{1} + \frac{1}{\underline{2} + \frac{1}{\underline{3}}} = 1 + \frac{1}{7} = 1 + \frac{3}{7} = \frac{10}{7}$$

gehört ein  $7 \times 10$ -Rechteck

$$(\text{ausführliche Zerlegung: } 7 \cdot 10 = \underline{1} \cdot 7^2 + \underline{2} \cdot 3^2 + \underline{3} \cdot 1^2),$$

vgl. die dritte der folgenden Abbildungen.



Aus den bisher betrachteten Beispielen wird deutlich, dass man zu jedem beliebigen Kettenbruch-Term  $[a_0; a_1, a_2]$  mit natürlichen Zahlen  $a_0, a_1, a_2$  ein Rechteck erstellen kann, sofern  $a_2$  mindestens 2 ist.

Dazu zeichnet man zunächst nebeneinander die  $a_2$  Quadrate mit Seitenlänge 1 LE, darüber dann die  $a_1$  Quadrate der Seitenlänge  $a_2 \cdot 1$  LE, also  $a_2$  LE, und daran dann  $a_0$  Quadrate mit Seitenlänge  $a_2 \cdot a_1 + 1$ . Das Rechteck hat dann die Seitenlängen  $a_2 \cdot a_1 + 1$  und  $a_0 \cdot (a_2 \cdot a_1 + 1) + a_2$ :

**Regel****Rechtecke, die sich aus drei verschiedenen großen Quadraten zusammensetzen**

Zum Kettenbruch  $[a_0; a_1, a_2]$  gehört ein Rechteck mit den Seitenlängen  $a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 + a_0 + a_2$  und  $a_1 \cdot a_2 + 1$ , das mit drei verschiedenen großen Quadraten ausgelegt werden kann.

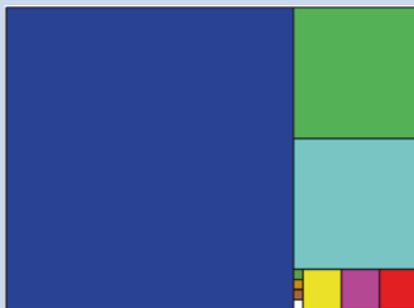
$$= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = a_0 + \frac{1}{\frac{a_1 \cdot a_2 + 1}{a_2}} = a_0 + \frac{a_2}{a_1 \cdot a_2 + 1} = \frac{a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 + a_0 + a_2}{a_1 \cdot a_2 + 1} \quad (3.1)$$

**Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen**

**A 3.3:** Bestimmen Sie den Kettenbruch-Term  $[a_0; a_1, a_2, a_3]$ .

**A 3.4:** Warum kann an der letzten Stelle eines Kettenbruchs  $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$  keine 1 stehen?

**A 3.5:** Welches Rechteck gehört zur Kettenbruchzerlegung  $[1; 2, 3, 4]$  (vgl. die folgende Abbildung)?



### 3.4 Die Zerlegung besonderer Rechtecke – Fibonacci-Rechtecke

Eine besondere Rolle spielen Rechtecke, für deren Zerlegung in möglichst große Quadrate jeweils nur *ein* Quadrat von jeder Größe benötigt wird – bis auf das kleinste Quadrat, das zweimal vorkommt. Erfolgt der Vorgang der Zerlegung in Form eines Bogens im Uhrzeigersinn, dann kann man in die einzelnen Quadrate jeweils einen Viertelkreisbogen einzeichnen, sodass insgesamt eine Spirale entsteht.

In Abb. 3.1 a–d sind erste Beispiele dazu abgebildet. Es handelt sich dabei

- um ein  $5 \times 8$ -Rechteck mit der zugehörigen Kettenbruchentwicklung:

$$\frac{8}{5} = 1 + \frac{3}{5} = 1 + \frac{1}{\frac{5}{3}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{3}{2}}} = \underline{\underline{1}} + \frac{1}{\underline{\underline{1}} + \frac{1}{\underline{\underline{1}} + \frac{1}{\underline{\underline{2}}}}} = [1; 1, 1, 2]$$

- um ein  $8 \times 13$ -Rechteck mit der zugehörigen Kettenbruchentwicklung:

$$\frac{13}{8} = 1 + \frac{5}{8} = 1 + \frac{1}{\frac{8}{5}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{3}{5}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{5}{3}}} = \dots = \underline{1} + \frac{1}{\underline{1} + \frac{1}{\underline{1} + \frac{1}{\underline{1} + \frac{1}{\underline{2}}}}} = [1; 1, 1, 1, 2]$$

- um ein  $13 \times 21$ -Rechteck mit der zugehörigen Kettenbruchentwicklung:

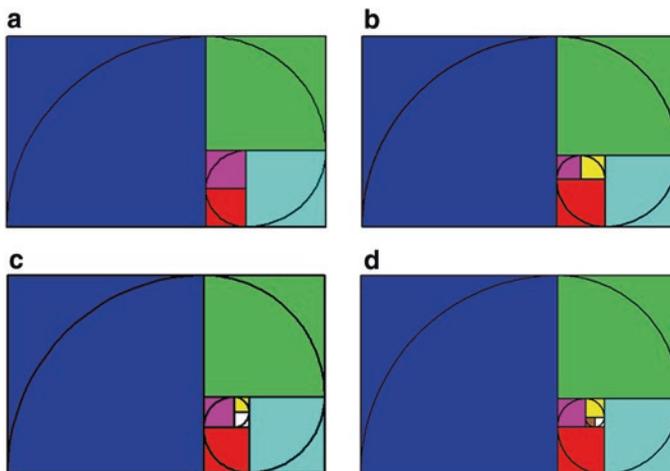
$$\frac{21}{13} = 1 + \frac{8}{13} = 1 + \frac{1}{\frac{13}{8}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{5}{8}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{8}{5}}} = \dots = \underline{1} + \frac{1}{\underline{1} + \frac{1}{\underline{1} + \frac{1}{\underline{1} + \frac{1}{\underline{1} + \frac{1}{\underline{2}}}}} = [1; 1, 1, 1, 1, 2]$$

- um ein  $21 \times 34$ -Rechteck mit der zugehörigen Kettenbruchentwicklung:

$$\frac{34}{21} = 1 + \frac{13}{21} = 1 + \frac{1}{\frac{21}{13}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{8}{13}} = \dots = \underline{1} + \frac{1}{\underline{1} + \frac{1}{\underline{1} + \frac{1}{\underline{1} + \frac{1}{\underline{1} + \frac{1}{\underline{1} + \frac{1}{\underline{2}}}}} = [1; 1, 1, 1, 1, 1, 2]$$

Die Seitenlängen der hier betrachteten Rechtecke sind jeweils benachbarte Glieder der Folge der **Fibonacci-Zahlen**. Dies ist eine Zahlenfolge, deren Glieder sich jeweils durch Addieren der beiden vorangehenden Glieder berechnen: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

Wenn man in Abb. 3.1 genau hinschaut, dann erkennt man, dass bei den aufeinanderfolgenden Figuren an das gerade betrachtete Rechteck im nächsten Schritt nur noch *ein* Quadrat angehängt wird; dadurch wird aus einem  $5 \times 8$ -Rechteck ein  $8 \times 13$ -Rechteck, aus einem  $8 \times 13$ -Rechteck ein  $13 \times 21$ -Rechteck usw. Vielleicht sieht man dies nicht



**Abb. 3.1** a–d Zerlegung von besonderen Rechtecken in möglichst große Quadrate

auf den ersten Blick, weil für die Färbung der Rechtecke in den Abbildungen grundsätzlich für das größte Quadrat Blau gewählt wurde, für das nächste Grün usw.

Aus all diesen Abbildungen wird aber eine Gesetzmäßigkeit deutlich:

### Satz

#### Eigenschaften von Fibonacci-Rechtecken

- Ein Rechteck, dessen Seitenlängen zwei benachbarte Glieder  $f_n$  und  $f_{n+1}$  der Fibonacci-Folge sind, lässt sich in eine Folge von Quadraten zerlegen, deren Seitenlängen genau gleich den Zahlen der Fibonacci-Folge von  $f_1$  bis  $f_n$  sind.
- In diese Quadrate kann man jeweils einen Viertelkreisbogen einzeichnen, sodass sich insgesamt eine spiralförmige Kurve ergibt.
- Die Summe der Quadrate der ersten  $n$  Glieder der Fibonacci-Folge  $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \dots + f_n^2$  (= Flächeninhalt der  $n$  Quadrate) ist gleich dem Produkt der  $n$ -ten Fibonacci-Zahl mit der  $(n + 1)$ -ten Zahl der Folge, d. h., es gilt:

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \dots + f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1}$$

#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 3.6:** Zeichnen Sie die Rechteckzerlegungen für die ersten benachbarten Glieder der Fibonacci-Folge, also für das  $f_2 \times f_3$ -Rechteck, das  $f_3 \times f_4$ -Rechteck, das  $f_4 \times f_5$ -Rechteck.

## 3.5 Die Folge der Fibonacci-Zahlen

Die Glieder der Fibonacci-Folge werden rekursiv definiert:

$$f_1 = 1; f_2 = 1 \text{ und } f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ für } n > 2,$$

also:

$$f_1 = 1; f_2 = 1; f_3 = f_1 + f_2 = 1 + 1 = 2$$

$$f_4 = f_2 + f_3 = 1 + 2 = 3; f_5 = f_3 + f_4 = 2 + 3 = 5$$

$$f_6 = f_4 + f_5 = 3 + 5 = 8; f_7 = f_5 + f_6 = 5 + 8 = 13$$

...

Die französischen Mathematiker Abraham de Moivre (1667–1754) und Jacques Philippe Marie Binet (1786–1856) entdeckten eine Möglichkeit, die Fibonacci-Zahlen direkt zu berechnen:

**Satz****Formel von Moivre-Binet**

Das  $n$ -te Glied der Fibonacci-Folge (die  $n$ -te Fibonacci-Zahl) berechnet sich wie folgt:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right) \quad (3.2)$$

In Europa wurde die Zahlenfolge durch ein Buch des italienischen Mathematikers Leonardo von Pisa aus dem Jahr 1202 bekannt, das den Titel *liber abaci* (frei übersetzt: Rechenbuch) trug. Der Rufname Leonardos war Fibonacci; er stammt aus dem Italienischen und setzt sich aus „figlio di Bonaccio“, deutsch „Sohn des Bonaccio“ zusammen.

Die wohl berühmteste Aufgabe dieses Buchs ist das **Kaninchen-Problem**, dessen Lösung auf die Zahlenfolge führt, die heute seinen Namen trägt:

*Ein frisch geborenes Paar von Kaninchen wird im Alter von einem Monat fortpflanzungsfähig. Nach einer Tragzeit von einem weiteren Monat wird der erste Nachwuchs geboren; es ist wieder ein Kaninchenpaar, das sich in gleicher Weise wie das erste Paar vermehrt. Wie viele Kaninchenpaare leben dann im  $n$ -ten Monat?*

Ewige Lebensdauer der Kaninchen und die immerwährende, monatliche Reproduktion von Kaninchenpaaren (die sich nach einem Monat wieder vermehren) vorausgesetzt, stellt man folgende Entwicklung der Population fest:

Nach dem 1. Monat existiert nur 1 Paar (Paar 1); es wird jetzt fortpflanzungsfähig, sodass am Ende des 2. Monats das erste Nachwuchspaar (Paar 2) zur Welt kommt, also 2 Paare existieren.

Das Paar 1 erzeugt dann nach einem weiteren Monat wieder ein Kaninchenpaar (Paar 3) – insgesamt gibt es am Ende des 3. Monats dann 3 Paare; jetzt ist auch Paar 2 fortpflanzungsfähig.

Paar 2 bringt am Ende des 4. Monats ein Kaninchenpaar zur Welt (Paar 5), ebenfalls das Paar 1; dann leben also 5 Paare usw. (vgl. auch Abb. 3.2).

Die Zahlen der Fibonacci-Folge spielen in zahlreichen Phänomenen der Natur eine Rolle (vgl. Literaturhinweise).

Die im Jahr 2007 in Macau/China erschienenen Briefmarken (vgl. folgende Abbildung) greifen das Motiv des Kaninchen-Problems auf, zeigen die Anordnung der Kerne von Sonnenblumen, verweisen auf die Penrose-Parkettierung (vgl. auch Kap. 10) und bilden den Schnitt durch einen Nautilus, eine im indischen Ozean vorkommende Kopffüßer-Art, in ein zerlegtes  $13 \times 21$ -Rechteck ab.

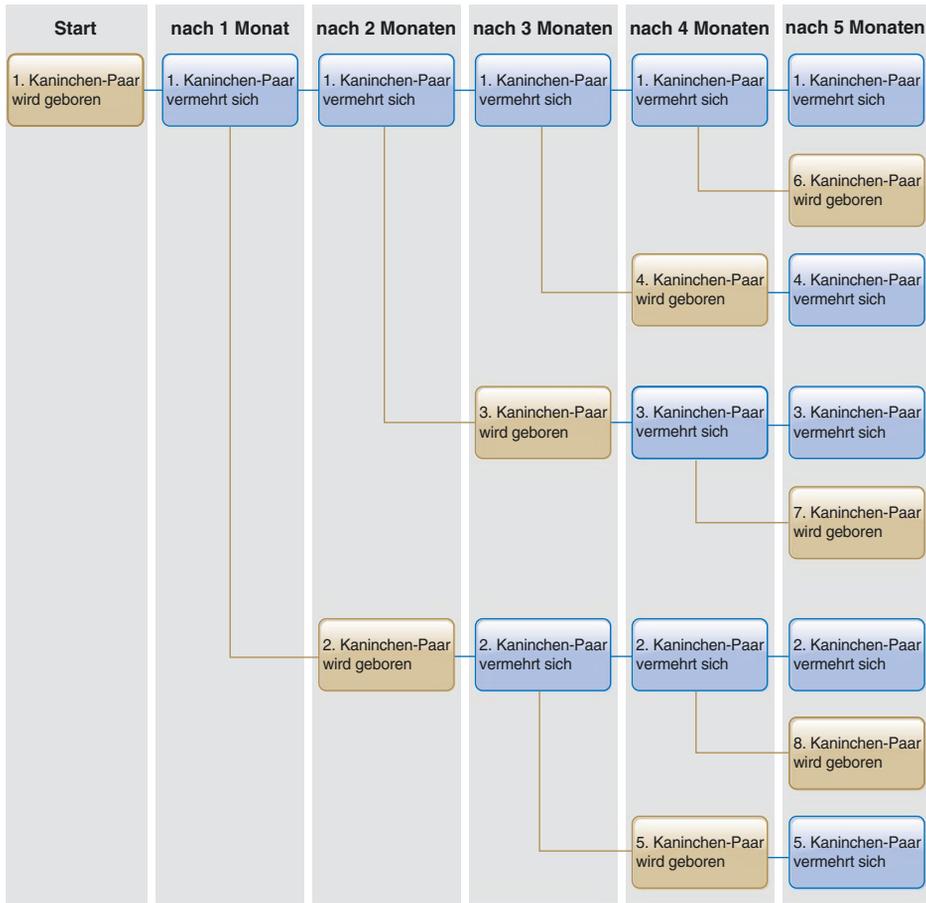


Abb. 3.2 Lösung des Kaninchen-Problems



Die folgenden Briefmarken aus Liechtenstein wurden 2013 anlässlich der von Georg Schierscher gestalteten Mathematikausstellung *Matheliebe* herausgegeben. Sie zeigen Blätter einer Weinrebe, eines Kulturapfelbaumes sowie eines Japanischen Ahorns, deren Strukturen im Zusammenhang mit dem „Goldenen Schnitt“ stehen. Am unteren Rand der Briefmarken findet man die Zahlenfolge der Fibonacci-Zahlen (beginnend mit  $f_2$ , die Ziffernfolge von  $f_{20} = 6765$  ist abgeschnitten), die zugehörigen Quotienten (233:144 ist abgeschnitten) sowie die **Goldene Zahl**  $\Phi = 1,61803\dots$  (bei der allerdings zwei Fehler unterliefen: eine 6 fehlt an der 31. Nachkommastelle, außerdem müsste die letzte Ziffer 7 lauten).



Die Schweizer Briefmarke wurde 1987 anlässlich des 150-jährigen Bestehens des Schweizerischen Ingenieur- und Architektenvereins (SIA) herausgegeben und zeigt das Goldene Rechteck, bei dem die Seitenlängen genau dem Verhältnis  $\Phi:1$  entsprechen, mit den ersten sechs Zerlegungsquadraten mit Viertelkreisen. Die spanische Briefmarke erschien 2006 anlässlich des Internationalen Mathematiker-Kongresses in Madrid und greift ebenfalls die Anordnung der Sonnenblumenkerne auf.



### 3.6 Zusammenhang mit dem Euklidischen Algorithmus

In den *Elementen* erläutert Euklid ein Verfahren, wie man zu zwei gegebenen natürlichen Zahlen  $x$  und  $y$  den größten gemeinsamen Teiler dieser Zahlen findet.

Dabei veranschaulicht er dies mithilfe von Strecken, deren Längen  $x$  und  $y$  sind. Interpretiert man zwei gegebene Zahlen  $x$ ,  $y$  als Streckenlängen  $x = |AB|$  und  $y = |CD|$ , dann gilt:

*Wenn  $CD$  aber  $AB$  nicht misst und man bei  $AB$ ,  $CD$  abwechselnd immer das Kleinere vom Größeren wegnimmt, dann muss eine Zahl übrig bleiben, welche die vorangehenden misst.*

**Tab. 3.1** Einzelne Schritte bei der Bestimmung des  $\text{ggT}(20;28)$  nach Euklid

	$y = 20$ passt nicht genau in $x = 28$ ; deshalb nimmt man 20 von 28 weg und es bleibt $x = 8$ und $y = 20$
	$x = 8$ passt nicht genau in $y = 20$ ; deshalb nimmt man 8 von 20 weg und es bleibt $x = 8$ und $y = 12$
	$x = 8$ passt nicht genau in $y = 12$ ; deshalb nimmt man 8 von 12 weg und es bleibt $x = 8$ und $y = 4$
	$y = 4$ passt genau in $x = 8$
	Daher „misst“ die Zahl 4 sowohl 20 als auch 28

**Beispiel: Durchführung des euklidischen Algorithmus für Strecken von 28 LE und 20 LE**

Wir wenden die Vorschrift Euklids an, um den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen 20 und 28 zubestimmen. Dazu werden zwei Strecken gezeichnet, deren Längen durch die beiden Zahlen bestimmt sind, und durch wechselseitige Wegnahme verkleinert, vgl. Tab. 3.1.

Bei dem in den ersten Abschnitten beschriebenen Verfahren der Rechteckzerlegung zeichnet man statt der Strecken, die man voneinander „wegnimmt“, ein Rechteck mit den Ausgangszahlen  $x$ ,  $y$  als Seitenlängen (mit z. B.  $x > y$ ).

In diesem Rechteck trennt man ein möglichst großes Quadrat ab. Dann bleibt ein Rechteck mit den Seitenlängen  $y$  und  $x - y$ .

usw.

**Beispiel: Durchführung des euklidischen Algorithmus für ein Rechteck mit den Seitenlängen 28 LE und 20 LE**

Wir betrachten wieder die natürlichen Zahlen 20 und 28. Um den größten gemeinsamen Teiler der beiden Zahlen zu finden, wird ein Rechteck gezeichnet, dessen Seitenlängen durch die beiden Zahlen bestimmt sind, und dieses in möglichst große Quadrate zerlegt, vgl. Tab. 3.2.

**Tab. 3.2** Einzelne Schritte bei der Bestimmung des  $\text{ggT}(20;28)$  mithilfe einer Rechteckzerlegung

(0) Ein Rechteck mit den Seitenlängen 20 LE und 28 LE wird gezeichnet	
(1) In das Rechteck mit den Seitenlängen 28 und 20 wird ein möglichst großes Quadrat gezeichnet, also ein Quadrat mit der Seitenlänge 20. Es bleibt ein Rechteck mit den Seitenlängen 20 und 8	
(2) In das Rechteck mit den Seitenlängen 20 und 8 wird ein möglichst großes Quadrat gezeichnet, also ein Quadrat mit Seitenlänge 8. Es bleibt ein Rechteck mit den Seitenlängen 12 und 8	
(3) In das Rechteck mit den Seitenlängen 12 und 8 wird ein möglichst großes Quadrat gezeichnet, also ein Quadrat mit Seitenlänge 8. Es bleibt ein Rechteck mit den Seitenlängen 8 und 4	
(4) In das Rechteck mit den Seitenlängen 8 und 4 wird ein möglichst großes Quadrat gezeichnet, also ein Quadrat mit Seitenlänge 4	
(5) Es bleibt ein Rechteck mit den Seitenlängen 4 und 4, also ein Quadrat. Die Seitenlänge 4 dieses Quadrats gibt den $\text{ggT}(20;28)$ an	

**Regel****Allgemeine Beschreibung des Euklidischen Algorithmus**

Um den Euklidischen Algorithmus zeichnerisch umzusetzen, kommt man mit wenigen Anweisungen aus:

1. Start: Lege  $x$ ,  $y$  fest.
2. Wenn  $x > y$ , dann zeichne ein Rechteck mit der Breite  $x$  und der Höhe  $y$  sowie ein Quadrat mit der Seitenlänge  $y$ . Setze  $x := x - y$ . Gehe zurück nach (2).
3. Wenn  $x < y$ , dann vertausche  $x$  und  $y$  und gehe zurück nach (2).
4. Wenn  $x = y$ , dann zeichne (abschließend) ein Quadrat mit der Seitenlänge  $x$ .

### Eindeutigkeit der zeichnerischen Methode

Bei der zeichnerischen Methode erkennt man jedoch nur dann, wie groß der ggT ist, wenn die Seitenlängen angegeben werden.

Die Figur für das Bestimmen des ggT(20;28) sieht nämlich genauso aus wie die Figur für den ggT(10;14) oder für den ggT(5;7), aber auch für den ggT(15;21). Die zugehörigen Figuren sind zueinander ähnlich. Bei der kleinstmöglichen der zueinander ähnlichen Figuren ist der ggT gleich 1.

Da die Verhältnisse der Seitenlängen alle quotientengleich sind, ergibt sich aus der Kettenbruchentwicklung, dass sich die Rechteckfigur zusammensetzt aus 1 großen Quadrat, 2 mittelgroßen Quadraten und 2 kleinen Quadraten, kurz: [1; 2, 2]:

$$\frac{28}{20} = \frac{21}{15} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5} = 1 + \frac{2}{5} = 1 + \frac{1}{\frac{5}{2}} = \underline{1} + \frac{1}{\underline{\underline{2 + \frac{1}{2}}}}$$

### 3.7 Beispiele unendlicher Folgen von Rechteckzerlegungen

Lässt sich eine natürliche Zahl als Produkt von zwei zueinander teilerfremden Zahlen  $a$ ,  $b$  darstellen, dann ergibt sich aus der Darstellung des Produkts in Form eines Rechtecks mit Flächeninhalt  $a \cdot b$  durch das beschriebene Verfahren eine Zerlegung in Quadrate, wobei die kleinsten Quadrate die Seitenlänge 1 LE haben; denn für teilerfremde Zahlen  $a$ ,  $b$  gilt, dass der größte gemeinsame Teiler der Zahlen gleich 1 ist.

Daher betrachten wir im Folgenden nur teilerfremde Zahlen  $a$ ,  $b$ .

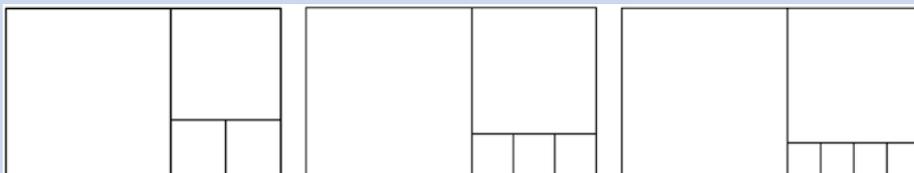
**Beispiel: Welche gemeinsame Eigenschaft haben die folgenden Rechtecke?**

$$a = 3, b = 5, a \cdot b = 15 = 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 \leftrightarrow [1; 1, 2] = \frac{5}{3} = 1,\bar{6}$$

$$a = 4, b = 7, a \cdot b = 28 = 4^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 \leftrightarrow [1; 1, 3] = \frac{7}{4} = 1,75$$

$$a = 5, b = 9, a \cdot b = 45 = 5^2 + 4^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 \leftrightarrow [1; 1, 4] = \frac{9}{5} = 1,8$$

Die Kettenbruch-Terme haben alle die Form  $[1; 1, n]$  mit  $n = 2, 3, 4$ .



### Kettenbruchfolge mit Grenzwert 2

Lässt sich eine Gesetzmäßigkeit für Kettenbrüche der Form  $[1; 1, n]$  erkennen, wenn  $n$  immer größer wird?

Einsetzen in die Formel (3.1) ergibt:

$$[1; 1, n] = \frac{1 \cdot 1 \cdot n + 1 + n}{1 \cdot n + 1} = \frac{2n + 1}{n + 1}$$

Für größer werdendes  $n$  konvergiert diese Folge gegen den Grenzwert 2:

$$\frac{2n + 1}{n + 1} = \frac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow \frac{2}{1}$$

Das heißt, das Verhältnis der Seitenlängen des Rechtecks geht gegen 2 – das Rechteck nähert sich immer mehr einem doppelten Quadrat.

### Kettenbruchfolge mit Grenzwert 10/7

Entsprechend kann man auch bei dem folgenden, etwas komplizierteren Beispiel vorgehen:

Unter Verwendung der Beziehung

$$[a_0; a_1, a_2, a_3] = \frac{a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 + a_0 \cdot a_1 + a_0 \cdot a_3 + a_2 \cdot a_3 + 1}{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 + a_1 + a_3}$$

(vgl. A 3.3) ergibt sich:

$$[1; 2, 3, n] = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot n + 1 \cdot 2 + 1 \cdot n + 3 \cdot n + 1}{2 \cdot 3 \cdot n + 2 + n} = \frac{10n + 3}{7n + 2} = \frac{10 + \frac{3}{n}}{7 + \frac{2}{n}} \rightarrow \frac{10}{7}$$

Das heißt, das Verhältnis der Seitenlängen des Rechtecks geht gegen 10/7 – die Seitenlängen der Rechtecke nähern sich immer mehr dem Verhältnis 10:7.

#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 3.7:** Untersuchen Sie, gegen welchen Grenzwert die Kettenbruchfolgen  $[1; 2, n]$  und  $[1; 1, 2, n]$  konvergieren.

### Die unendliche Folge der Fibonacci-Rechtecke

Im Abschn. 3.4 wurden einige Beispiele von Rechtecken untersucht, deren Seitenlängen benachbarte Fibonacci-Zahlen sind.

**Tab. 3.3** Folge der Quotienten der Seitenlängen von Fibonacci-Rechtecken

Quotient der Seitenlängen	$\frac{3}{2} = 1,5$	$\frac{5}{3} = 1,\bar{6}$	$\frac{8}{5} = 1,6$	$\frac{13}{8} = 1,625$	$\frac{21}{13} = 1,61538\dots$	...
Zerlegung	[1; 2]	[1; 1, 2]	[1; 1, 1, 2]	[1; 1, 1, 1, 2]	[1; 1, 1, 1, 1, 2]	...

Die Folge der Quotienten benachbarter Zahlen der Fibonacci-Folge (vgl. Tab. 3.3) nimmt abwechselnd größere bzw. kleinere Werte an, wobei die Schwankungen immer kleiner werden. Die Folge der zugehörigen Zerlegungen könnte man (unter Vernachlässigung der letzten Stelle) auch so beschreiben:

$$[1; \bar{1}] = [1; 1, 1, 1, \dots]$$

Für zwei aufeinanderfolgende Quotienten gilt der folgende Zusammenhang:

Setzt man für den ersten Quotienten  $\frac{a}{b}$ , dann gilt für den nächsten Quotienten  $\frac{a+b}{a}$ .

Für den Grenzwert  $\Phi = \frac{a}{b}$  gilt daher:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 1 + \frac{b}{a}$$

Einsetzen von  $\Phi = \frac{a}{b}$  ergibt (nach Umformung) eine quadratische Gleichung:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} \Leftrightarrow \Phi^2 = \Phi + 1 \Leftrightarrow \Phi^2 - \Phi + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \left(\Phi - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

Deren positive Lösung ist

$$\Phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1,6180\dots$$

### Satz

#### Das Goldene Rechteck

Die Rechtecke der Folge  $[1; \bar{1}] = [1; 1, 1, 1, \dots]$  konvergieren gegen ein Rechteck mit dem Seitenverhältnis  $\Phi : 1 = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5} + 1) : 1$ , wobei  $\Phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1,6180\dots$

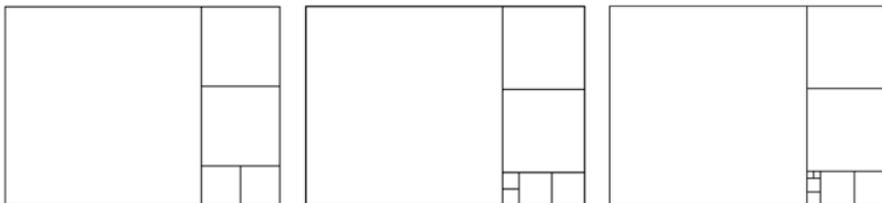
Es wird als **Goldenes Rechteck** bezeichnet,  $\Phi$  als **Goldene Zahl**.

#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 3.8:** Welche Quotienten-Folge ergibt sich, wenn man die Quotienten aus einer Fibonacci-Zahl und ihrem Vorgänger bildet?

#### Unendliche Folgen von Rechtecken mit einem irrationalen Seitenverhältnis

Eine interessante Beobachtung kann man machen, wenn im Kettenbruch jeweils eine weitere gleiche Ziffer ergänzt wird. Der Vorgang ist in den folgenden Abbildungen veranschaulicht.



Auch bei dieser Folge nimmt der Quotient abwechselnd kleinere und größere Werte an und strebt ebenfalls gegen einen Grenzwert (vgl. Tab. 3.4).

**Tab. 3.4** Folge der Kettenbrüche mit periodischer Endziffer 2

Quotient der Seitenlängen	$\frac{3}{2} = 1,5$	$\frac{7}{5} = 1,4$	$\frac{17}{12} = 1,41\bar{6}$	$\frac{41}{29} = 1,4137 \dots$	...
Zerlegung	[1; 2]	[1; 2, 2]	[1; 2, 2, 2]	[1; 2, 2, 2, 2]	...
Kettenbruch	$1 + \frac{1}{2}$	$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}$	$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}$	$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}$	...

Für zwei aufeinanderfolgende Quotienten gilt der folgende Zusammenhang:

Setzt man für den ersten Quotienten  $\frac{a}{b}$ , dann gilt für den nächsten Quotienten  $\frac{a+2b}{a+b}$ , d. h., man erhält den Zähler des nächsten Folgenglieds, indem man den Zähler zum doppelten Nenner addiert, und den nächsten Nenner, indem man Zähler und Nenner addiert.

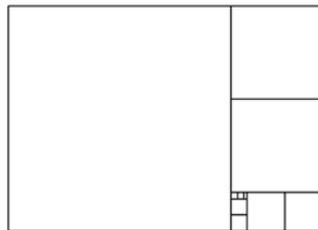
Für den Grenzwert muss daher gelten:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+2b}{a+b} \Leftrightarrow a \cdot (a+b) = (a+2b) \cdot b \Leftrightarrow a^2 + ab = ab + 2b^2 \Leftrightarrow a^2 = 2b^2 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$$

Der Grenzwert der Folge ist also gleich  $[1; \bar{2}] = \sqrt{2} = 1,41421 \dots$

Die Rechtecke dieser Folge konvergieren demnach gegen ein Rechteck mit dem Seitenverhältnis  $\sqrt{2} : 1$  (vgl. folgende Abbildung).

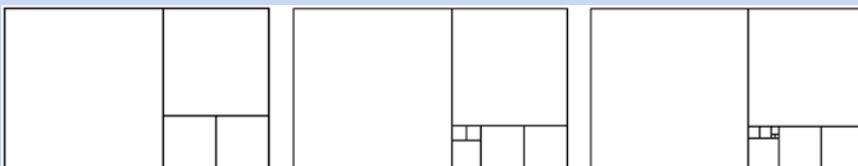
*Hinweis:* Ein solches Rechteck kann man leicht mithilfe des Satzes von Pythagoras konstruieren.



#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 3.9:** Begründen Sie (anschaulich) die oben formulierte Aussage: „Setzt man für den ersten Quotienten  $\frac{a}{b}$ , dann gilt für den nächsten Quotienten  $\frac{a+2b}{a+b}$ .“

**A 3.10:** Welchen Grenzwert hat die Folge von Kettenbrüchen  $[1; 1, 2]$ ,  $[1; 1, 2, 1, 2]$ ,  $[1; 1, 2, 1, 2, 1, 2]$ , ...?



**A 3.11:** Die oben angegebenen Folgenglieder der Kettenbrüche mit Grenzwert  $\sqrt{2}$  sind gute rationale Näherungswerte für die irrationale Wurzel. Untersuchen Sie, um welchen Betrag sich die Folgenglieder vom Grenzwert unterscheiden.

Führen Sie die Untersuchung auch für die Kettenbruch-Folge aus **A 3.10** durch.

### 3.8 Bestimmung der Kettenbrüche von Quadratwurzeln

Um die zu Quadratwurzeln gehörenden unendlichen Kettenbrüche zu finden, wird im Prinzip immer der gleiche algebraische Trick angewandt:

Man zerlegt die Wurzel in den ganzzahligen Teil und einen „Rest“, formt diesen Term mithilfe der 3. binomischen Formel um, ersetzt dann die Wurzel im Nenner durch den Bruch, zu dem man durch die Umformungen gekommen ist – so lange, bis in den Zählern der Brüche nur noch Einsen stehen ...

Leonhard Euler bewies um 1760 den Satz, dass die Kettenbrüche der Quadratwurzeln von natürlichen Zahlen periodisch sind (Quadratzahlen ausgenommen).

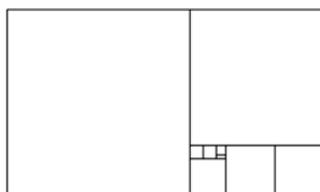
#### Darstellung von $\sqrt{2}$ als Kettenbruch

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} + 1)} = 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}\right)} \\ &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}\right)}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}}} = \dots = [1; \overline{2}]\end{aligned}$$

#### Darstellung von $\sqrt{3}$ als Kettenbruch

$$\begin{aligned}\sqrt{3} &= 1 + (\sqrt{3} - 1) = 1 + \frac{(\sqrt{3} - 1) \cdot (\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} + 1)} = 1 + \frac{2}{1 + \sqrt{3}} = 1 + \frac{2}{2 + \frac{2}{1 + \sqrt{3}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \sqrt{3}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{3}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{3}}}}} = \dots = [1; \overline{1, 2}]\end{aligned}$$

Erste Glieder der Kettenbruchentwicklung für  $\sqrt{3}$  kann man aus der folgenden Abbildung ablesen.





### 3.9 Hinweise auf weiterführende Literatur

Bei **Wikipedia** findet man in deutscher (englischer, französischer) Sprache weitere Informationen und Literatur zu den Stichwörtern:

- Euklidischer Algorithmus (Euclidean algorithm\*, L'algorithmes d'Euclide),
- Kettenbruch\* (Continued fraction, Fraction continue\*)
- Fibonacci-Folge (Fibonacci number, Suite de Fibonacci)

\*) *Auszeichnung als lesenswerter Artikel*

Fachliche Informationen findet man auf **Wolfram Mathworld** unter den Stichwörtern:

- Continued Fraction, Euclidean Algorithm, Fibonacci Number

Umfangreiche Erläuterungen zum Thema „Rechteckzerlegungen“, insbesondere im Zusammenhang mit dem Goldenen Schnitt, sind in den Büchern von Hans Walser enthalten, u. a. in:

- Walser, Hans (2012): *Fibonacci. Zahlen und Figuren*. Edition am Gutenbergplatz, Leipzig
- Walser, Hans (2013): *Der Goldene Schnitt*. 6., bearbeitete und erweiterte Auflage. Edition am Gutenbergplatz, Leipzig

Eine ausführliche Darstellung der Algorithmen (einschl. Programm zur Darstellung der Zerlegung von Rechtecken) enthält folgende Website:

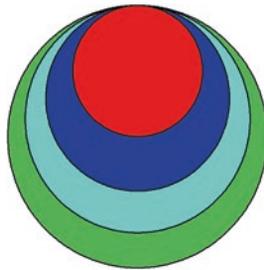
- <http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/cfINTRO.html>

#### Literaturhinweise zu den Briefmarken aus Liechtenstein

- Börgens, Manfred: *Mathematik auf Briefmarken*# 86, <http://homepages-fb.thm.de/boergens/marken/briefmarke086.htm>
- Egelriede, Dieter: *Mathematik aus Liechtenstein*, Techno-Thema 69, S. 13, 2013
- Schierscher, Georg: *Geopythafibotonpolyhypotesaeder! Matheliebe*, Katalog zur gleichnamigen Ausstellung, Verlag Liechtensteinisches Landesmuseum, 2012

*Der Horizont vieler Menschen ist wie ein Kreis mit Radius null.  
Und das nennen sie dann ihren Standpunkt.*

(David Hilbert, deutscher Mathematiker, 1862–1943)

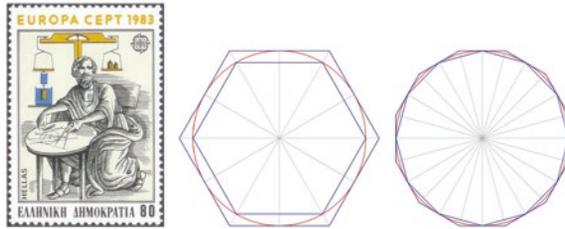


## 4.1 Die Kreiszahl $\pi$ – Umfang und Flächeninhalt eines Kreises

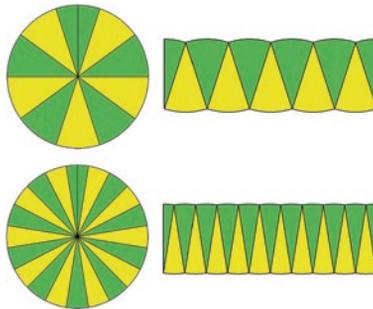
Die Kreiszahl  $\pi$  ist *definiert* durch  $\pi = \frac{u}{d}$ , also durch das Verhältnis des Umfangs  $u$  eines Kreises zu seinem Durchmesser  $d$  (= doppelter Radius  $r$ ).

Archimedes (287–212 v. Chr.) ermittelte für  $\pi$  eine Abschätzung:  $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ . Hierzu bestimmte er den Umfang eines regelmäßigen ein- bzw. umbeschriebenen 96-Ecks.

Beginnend beim regelmäßigen 6-Eck verdoppelte er dazu schrittweise die Anzahl der Ecken.



Um den Flächeninhalt eines Kreises zu berechnen, zerlegte er den Kreis in  $n$  Sektoren und ordnete die „Tortenstücke“ so an, dass (immer genauer) die Form eines Rechtecks mit Breite  $\frac{u}{2}$  und Höhe  $r$  entsteht.



Der Flächeninhalt  $A$  der Figur aus Tortenstücken ergibt sich dann näherungsweise aus der Breite  $\frac{1}{2} \cdot u$  und der Höhe  $r$ . Aus der Definition der Kreiszahl  $\pi$  ergibt sich dann die Formel für die Berechnung des Flächeninhalts eines Kreises.

#### Definition/Formel

##### Flächeninhalt $A$ eines Kreises

Die Kreiszahl  $\pi$  ist *definiert* als das Verhältnis des Umfangs  $u$  des Kreises zu seinem Durchmesser  $d$ .

Für den Umfang  $u$  eines Kreises gilt also  $u = \pi \cdot d = 2\pi \cdot r$ .

Für den Flächeninhalt  $A$  eines Kreises ergibt sich dann:  $A = \frac{1}{2} \cdot u \cdot r = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot d \cdot r$ ,  
also  $A = \pi \cdot r^2 = 3,14159 \dots \cdot r^2$

Der chinesische Mathematiker Zu Chongzhi (425–500) ging ähnlich vor wie Archimedes. Durch fortgesetzte Verdopplung der Eckenzahl bis zum regelmäßigen 24.576-Eck konnte er die Kreiszahl  $\pi$  auf sieben Dezimalstellen genau bestimmen. An diese Leistung erinnern die Briefmarken aus China aus dem Jahr 1955 und aus Hongkong aus dem Jahr 2015.

Erst im 15. Jahrhundert wurde diese Genauigkeit durch den letzten großen Mathematiker des islamischen Mittelalters, Jamshid al Kashi (1380–1429), vgl. iranische Briefmarke aus dem Jahr 1979, übertroffen, der durch Berechnungen an einem regelmäßigen 805.306.368-Eck die Zahl  $\pi$  auf 16 Dezimalstellen genau berechnen konnte.

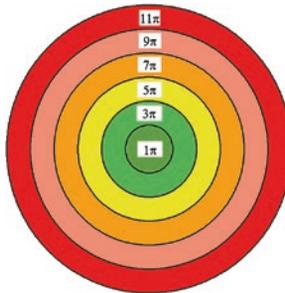


## 4.2 Kreisringe

Gemäß der Formel zur Berechnung des Flächeninhalts hat ein Kreis mit Radius  $r = 1$  (LE) den Flächeninhalt  $A_1 = 1\pi$  (FE), ein Kreis mit doppeltem Radius, also mit  $r = 2$ , den Flächeninhalt  $A_2 = 4\pi$  usw.

Die Flächeninhalte der Kreisringe e, also der Flächen, die zwischen zwei benachbarten Kreisen liegen, ergeben sich durch Differenzbildung:

$$A_{R12} = 4\pi - 1\pi = 3\pi, \quad A_{R23} = 9\pi - 4\pi = 5\pi, \quad A_{R34} = 16\pi - 9\pi = 7\pi \text{ usw.}$$



### Regel

#### Folge der Kreisringe von benachbarten Kreisen

Zu der Folge von Kreisen, deren Radien natürliche Zahlen sind, gehört eine Folge von Kreisringen. Für diese gilt:

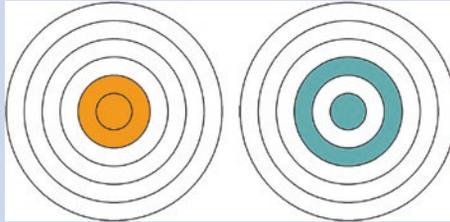
Die Folge der Flächeninhalte der Kreisringe von benachbarten Kreisen durchläuft die Folge der *ungeraden* Vielfachen der Zahl  $\pi$ .

#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

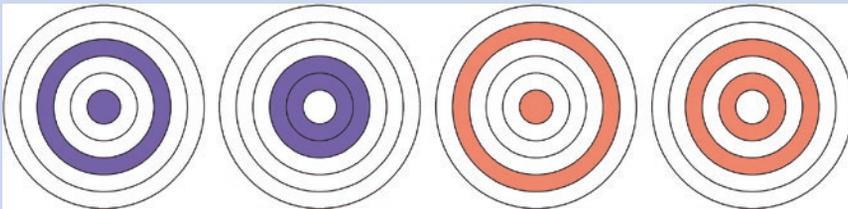
**A 4.1:** Da der Flächeninhalt eines Kreisrings der Breite 1 LE ein ungeradzahliges Vielfaches von  $\pi$  ist, ergibt sich ein geradzahliges Vielfaches von  $\pi$ , wenn man die Gesamtfläche von zwei Kreisringen betrachtet.

Dabei gibt es unterschiedliche Kombinationsmöglichkeiten. Setzen Sie die folgende Beobachtung fort.

Es gibt jeweils 1 mögliche Kombination für den Flächeninhalt  $4\pi$  und  $6\pi$ , ...



... jeweils 2 mögliche Kombinationen für den Flächeninhalt  $8\pi$  und  $10\pi$ , ...

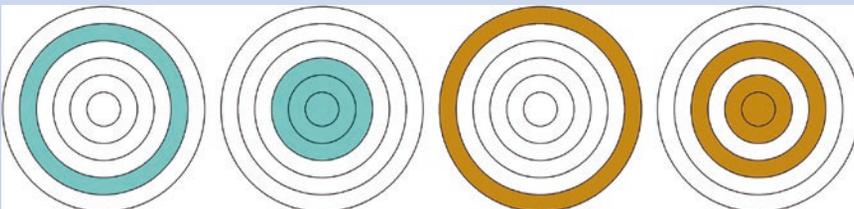


... jeweils 3 mögliche Kombinationen für den Flächeninhalt  $12\pi$ .



**A 4.2:** Da der Flächeninhalt eines Kreisrings der Breite 1 LE ein ungeradzahliges Vielfaches von  $\pi$  ist, ergibt sich auch ein ungeradzahliges Vielfaches von  $\pi$ , wenn man die Gesamtfläche von ein, drei, fünf, ..., also allgemein von einer *ungeraden* Anzahl von Kreisringen betrachtet.

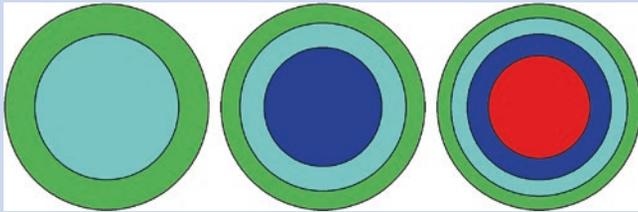
Z. B. sind in den folgenden Abbildungen die Flächeninhalte  $9\pi$  bzw.  $11\pi$  dargestellt. Untersuchen Sie, wie viele Möglichkeiten es gibt, ein ungeradzahliges Vielfaches von  $\pi$  mithilfe von drei Kreisringen darzustellen.



**A 4.3:** Wenn man eine gerade Anzahl von Kreisringen betrachtet, ergibt sich ein geradzahliges Vielfaches von  $\pi$ . Untersuchen Sie, wie viele Möglichkeiten es gibt, ein geradzahliges Vielfaches von  $\pi$  mithilfe von vier Kreisringen darzustellen.

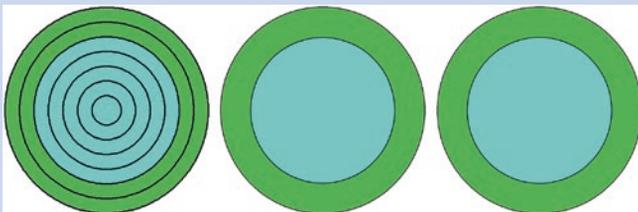
**A 4.4:** Die in den folgenden Abbildungen dargestellten Kreisringe haben jeweils gleichen Flächeninhalt, beispielsweise sind in der Abbildung links die grün und die hellblau gefärbte Fläche gleich groß usw.

Warum ist es nicht möglich, diese Flächen mithilfe von Kreisringen der Breite 1 LE darzustellen?



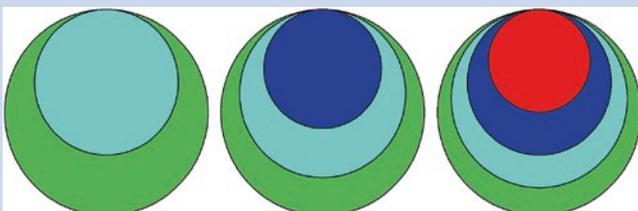
**A 4.5:** Erläutern Sie: Die Kreisring-Figuren der folgenden Abbildungen sind Näherungslösungen für das Problem „hellblau“ = „grün“ in **A 4.4**.

*Hinweis:* In den abgebildeten Figuren sind 5 von 7 bzw. 12 von 17 bzw. 29 von 41 Kreisringen hellblau gefärbt, die anderen grün – bei der zweiten und dritten Abbildung sind die Zwischenringe nicht eingezeichnet.

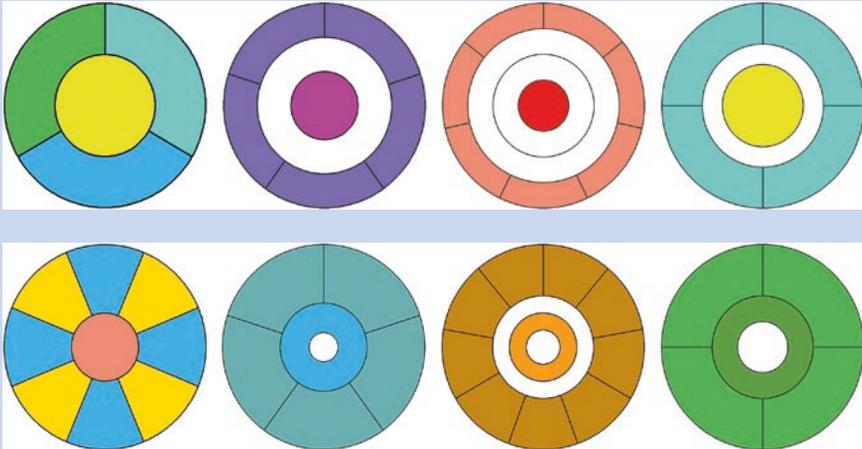


**A 4.6:** Geben Sie analog zu **A 4.5** Näherungslösungen für die anderen beiden Kreisfiguren in **A 4.4** an.

**A 4.7:** Warum fällt es uns schwer, die jeweils verschieden gefärbten Flächen der drei Kreisfiguren in den folgenden Abbildungen jeweils als gleich groß zu erkennen?



**A 4.8** Die Kreisfiguren in den folgenden Abbildungen enthalten jeweils gleich große Flächen. Begründen Sie dies. Ist die Zuordnung zu bestimmten Flächeninhalten eindeutig möglich?

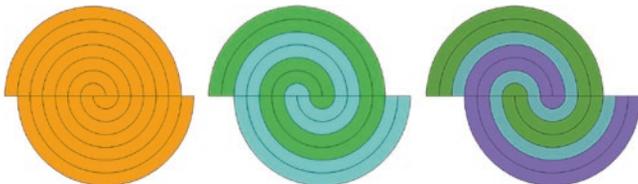


### 4.3 Verschobene Halbkreise

Man kann die Kreisringe längs eines Durchmessers durchschneiden und die beiden Hälften horizontal gegeneinander verschieben.

In den folgenden neun Abbildungen sind sieben zueinander konzentrisch liegende Kreise mit den Radien 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 LE gezeichnet und um 1, 2, 3, ..., 8, 9 LE gegeneinander verschoben.

Wenn man die Trennlinie (Durchmesser) außer Acht lässt, entstehen so viele zusammenhängende Kreisring-Teilstücke (erkennbar an der gleichen Färbung), wie sich aus der Anzahl der Verschiebungseinheiten ergeben.





#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

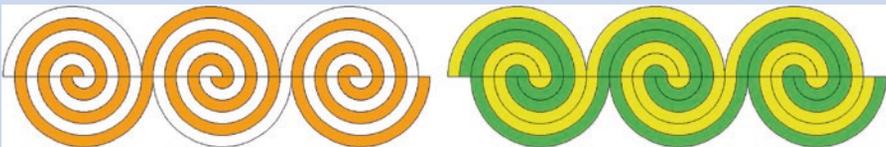
**A 4.9:** Die gesamte Kreisring-Figur mit Radius 7 LE in den Abbildungen mit den verschobenen Halbkreisen hat jeweils einen Flächeninhalt von  $49\pi$  FE. Welchen Anteil haben jeweils die unterschiedlich gefärbten Teilflächen?

#### Ornamente aus Kreisring-Figuren

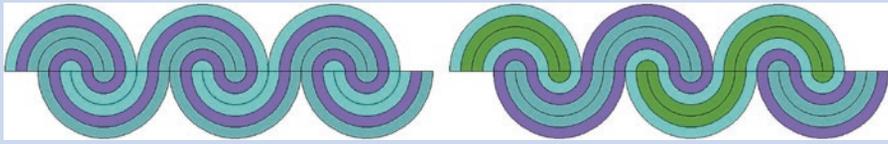
Gemäß einem Vorschlag von Hans Walser werden mehrere Kreisring-Figuren nebeneinander gezeichnet, halbiert und dann horizontal verschoben.

#### Beispiel: Kreisring-Figuren aus drei Figuren mit jeweils *sechs* konzentrisch liegenden Kreisen

Im Fall der Verschiebung um 1 LE ergibt sich ein durchgehendes Spiralenmuster (der besseren Übersicht halber wurde nur eine Hälfte gefärbt). Bei der Verschiebung um 2 LE entstehen zwei unendlich lange, miteinander verschlungene mäanderartige Bänder.



Während bei der Verschiebung um 3 LE drei unendliche, ineinander verwobene Bänder auftreten, besteht das Ornament bei der Verschiebung um 4 LE aus unendlich vielen kurzen Elementen.



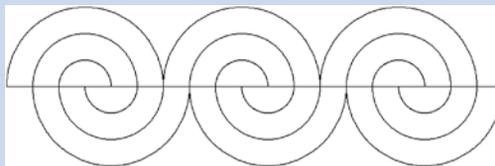
Um das Ornament, bei dem um 5 LE verschoben wird, genauer beschreiben zu können, müsste man die Anzahl der aneinandergereihten konzentrischen Kreise erhöhen (dann wird man feststellen, dass es sich um ein einziges, hin und her gehendes Band handelt). Im Fall der Verschiebung um 6 LE ergeben sich sechs unendlich lange Bänder.



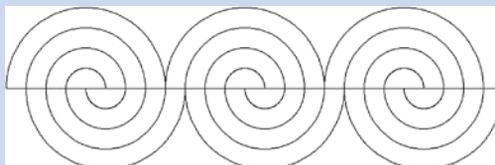
#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 4.10:** Vergleicht man die Grafiken des Beispiels mit den Ergebnissen von Hans Walser für zehn zueinander konzentrisch liegende Kreise, dann erkennt man: Hier gibt es noch einiges, das erforscht werden könnte, beispielsweise:

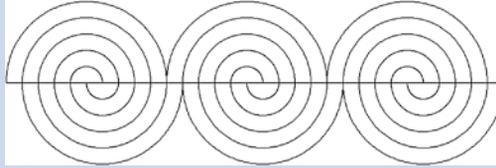
- a) Welche Eigenschaften ergeben sich, wenn man Kreisring-Figuren mit *drei* zueinander konzentrisch liegenden Kreisen betrachtet, die um 1, 2, 3 LE verschoben werden?



- b) Welche Eigenschaften ergeben sich, wenn man Kreisring-Figuren mit vier zueinander konzentrisch liegenden Kreisen betrachtet, die um 1, 2, 3, 4 LE verschoben werden?

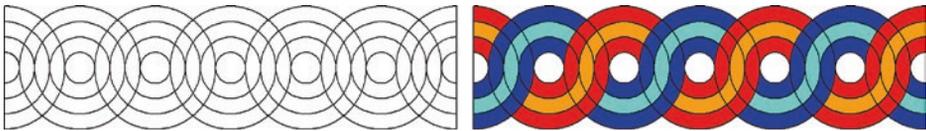


- c) Welche Eigenschaften ergeben sich, wenn man Kreisring-Figuren mit fünf zueinander konzentrisch liegenden Kreisen betrachtet, die um 1, 2, 3, 4, 5 LE verschoben werden?



#### 4.4 Flechtbänder

Kreisringe können auch aneinandergereiht werden. Beispielsweise kann man ein Flechtmuster entstehen lassen.

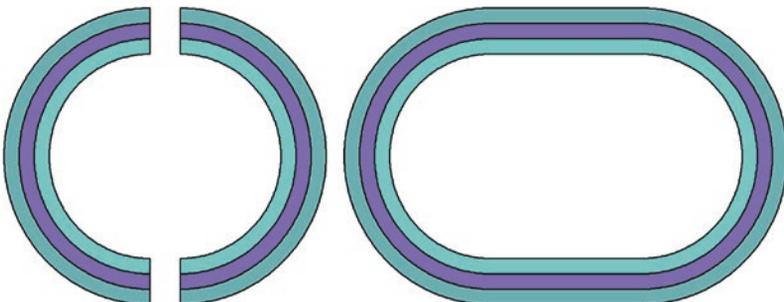


**Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen**

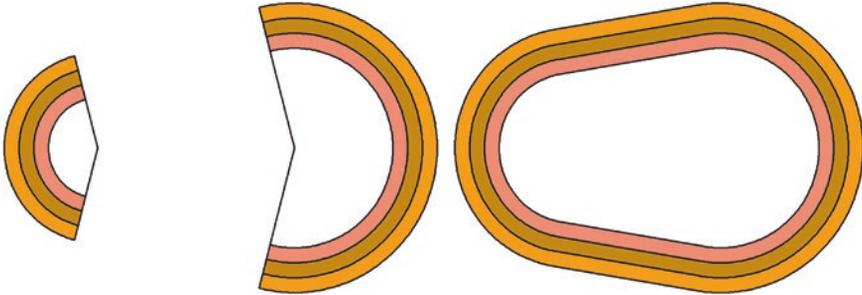
**A 4.11:** Entdecken Sie Ihre eigenen Muster in Kreisring-Figuren!

#### 4.5 Laufbahnen

Halbiert man eine teilweise ausgeführte Kreisring-Figur und fügt jeweils zwischen die beiden Teile der Figur parallel zueinander verlaufende Strecken ein, dann erhält man eine geometrische Figur, die man als *Laufbahn* bezeichnen könnte.



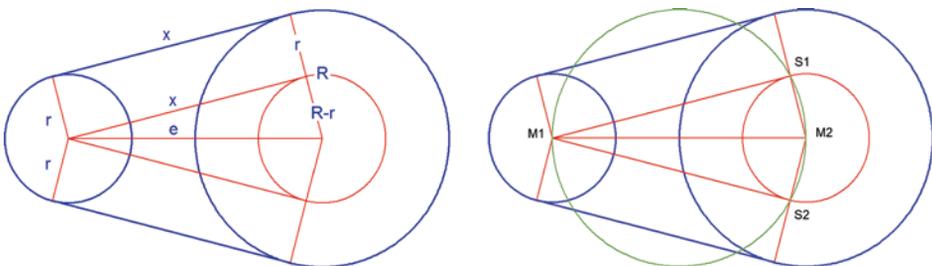
Als Laufbahn könnte man auch die Figuren bezeichnen, die sich ergeben, wenn man bei zwei Kreisring-Figuren mit *unterschiedlichen* Radien Sektoren herauschneidet, die sich zu  $360^\circ$  ergänzen, und diese dann mit parallel zueinander verlaufenden Strecken verbindet.



Die hierzu notwendige Konstruktion von (außen liegenden) Tangente  $n$  an zwei Kreise kann man den folgenden Abbildungen entnehmen: Die Radien der beiden Kreise sind mit  $r$  und  $R$  ( $r \leq R$ ) bezeichnet, die Verbindungsstrecke der Kreismittelpunkte mit  $e$ .

Nach den beiden Kreisen zeichnet man zwei Hilfskreise: um den Mittelpunkt  $M_2$  des größeren Kreises einen Kreis mit Radius  $R-r$  (rot) und um den Mittelpunkt der Strecke  $M_1M_2$  einen Kreis mit Radius  $\frac{1}{2} \cdot e$  (grün). Gemäß dem Satz des Thales liegt an den Schnittpunkten  $S_1$  und  $S_2$  dieser beiden Kreise jeweils ein rechter Winkel vor.

Die vom Mittelpunkt  $M_2$  ausgehenden Strahlen durch die Schnittpunkte  $S_1$  bzw.  $S_2$  schneiden den größeren Kreis in den Berührungspunkten der Tangenten. Die Berührungspunkte der Tangenten am kleineren Kreis erhält man durch Parallelverschiebung der Strecken  $M_1S_1$  bzw.  $M_1S_2$ .



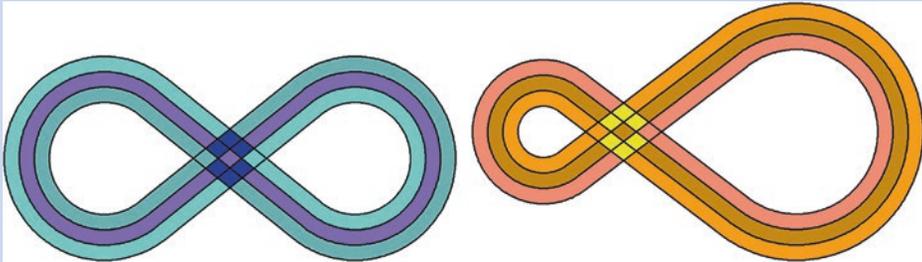
#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 4.12:** Stellen Sie einen Term auf zur Berechnung der Länge einer Laufbahn.

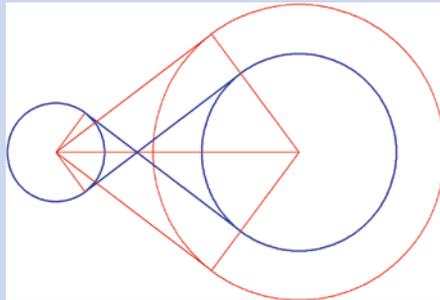
*Anleitung:* Um die Länge einer Laufbahn zu berechnen, benötigt man die Länge der Strecke  $x$ , die sich nach dem Satz des Pythagoras aus  $x^2 + (R-r)^2 = e^2$

ergibt, außerdem die beiden Bogenlängen. Hierzu bestimmt man die beiden Winkel der Kreissektoren bei  $M_1$  und  $M_2$  mithilfe der Beziehung  $\sin(\alpha) = (R - r)/e$ , hieraus den spitzen Winkel  $\alpha$  im Dreieck  $M_1M_2S_1$  und damit dann die beiden Sektorwinkel  $180^\circ - 2\alpha$  bzw.  $180^\circ + 2\alpha$ .

**A 4.13:** Bekanntlich erhalten (z. B. bei einem 400-m-Lauf) die Läufer auf der Außenbahn eine Kurvenvorgabe, damit die Laufstrecken gleich lang sind. Könnte man dies durch eine Laufbahn in Form einer liegenden Acht ebenfalls erreichen?



*Hinweis:* Die Konstruktion von innen verlaufenden, sich überkreuzenden Tangenten an zwei Kreise kann man der folgenden Abbildung entnehmen.



## 4.6 Hinweise auf weiterführende Literatur

Bei **Wikipedia** findet man in deutscher (englischer, französischer) Sprache weitere Informationen und Literatur zu den Stichwörtern:

- Kreisring (Annulus, Couronne)
- Kreistangente (Tangent lines to circles, Cercle)

Umfangreiche fachliche Informationen findet man auf **Wolfram Mathworld** unter den Stichwörtern:

- Circle, Annulus, Concentric Circles, Circle Tangent Line, Circle-CircleTangents

Eine Darstellung der Ornamente aus verschobenen Halbkreisen enthält die Website

- [http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/A/Arch\\_Spiralen/Arch\\_Spiralen.pdf](http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/A/Arch_Spiralen/Arch_Spiralen.pdf)

#### **Literaturhinweis zu den verschobenen Kreisringen**

- Walser, Hans: *EAGLE-MALBUCH Formen und Farben: Geometrische Figuren zum Ausmalen*, Edition am Gutenbergplatz Leipzig, 2015

*Das Spiel gleicht einer Erholung, und da man nicht ununterbrochen arbeiten kann, bedarf man der Erholung.*  
 (Aristoteles, griechischer Philosoph, 384–322 v. Chr.)



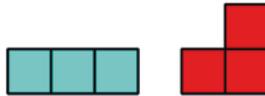
## 5.1 Einfache Polyominos

In Anlehnung an das Wort *Domino* schuf der amerikanische Mathematiker Solomon W. Golomb im Jahre 1953 die Begriffe *Tromino*, *Tetromino*, *Pentomino*, *Hexomino*, ... und den Oberbegriff *Polyomino* für Puzzlestücke dieses Typs. Populär wurden sie durch die monatliche Kolumne von Martin Gardner im *Scientific American*.

- **Dominos:** Ein Dominostein entsteht, indem man zwei Quadrate so aneinandersetzt, dass sie eine Quadratseite gemeinsam haben – hier gibt es nur einen Typ.



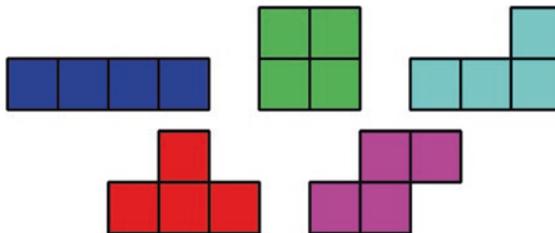
- **Trominos:** Wenn man drei Quadrate aneinandersetzt, dann sind zwei Typen von Puzzlestücken möglich.



Domino- und Tromino-Steine kann man durch Drehungen um  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  in eine andere Lage bringen. Bei diesen Steinen ergeben sich keine anderen Varianten, wenn man die Formen umklappt.

Im Folgenden sollen alle diese Varianten nicht mehr unterschieden werden; vielmehr gehen wir davon aus, dass die Polyomino-Steine gedreht und umgeklappt werden können.

- **Tetrominos:** Fünf Typen von Puzzlestücken sind möglich, wenn man vier Quadrate aneinandersetzt. Üblicherweise werden die fünf Typen mit den Buchstaben I, O, L, T und S bezeichnet.

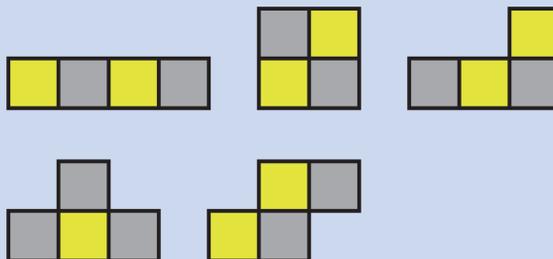


#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

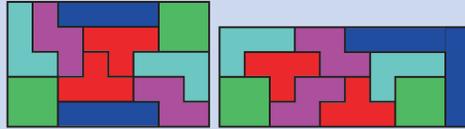
**A 5.1:** Mit den fünf Steinen eines Tetromino-Spiels kann man eine Fläche von 20 FE bedecken.

Begründen Sie: Es ist nicht möglich, mit den fünf Tetrominos ein Rechteck mit Flächeninhalt 20 FE zu parkettieren, also weder ein Rechteck mit den Seitenlängen 2 LE und 10 LE noch ein Rechteck mit den Seitenlängen 4 LE und 5 LE.

*Tipp:* Man färbe die 20 Felder der beiden Rechtecke sowie die fünf Tetrominos wie ein Schachbrett abwechselnd dunkel und hell.



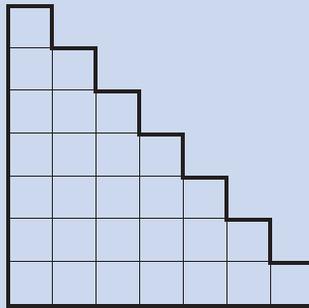
**A 5.2:** Mit dem doppelten Puzzle-Satz kann man eine Rechteckfläche von 40 FE bedecken. Finden Sie weitere Beispiele.



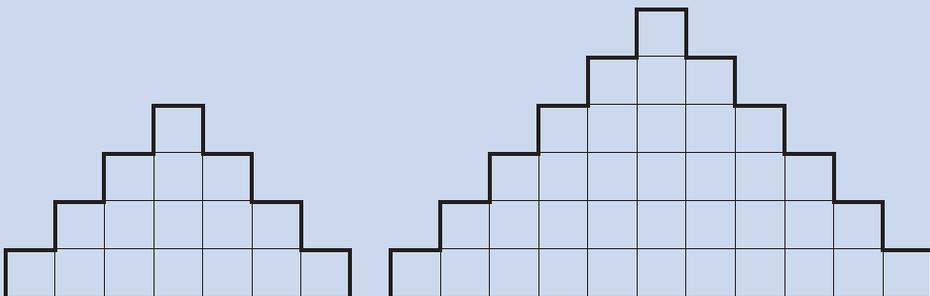
**A 5.3:** Begründen Sie: Es ist nicht möglich, eine Quadratfläche mit  $4 \times 4 = 16$  Feldern mit vier verschiedenen Tetrominos auszulegen.

**A 5.4:** Ist es möglich, eine Rechteckfläche mit  $4 \times 6 = 24$  Feldern mit *mindestens* einem Element von jeder Sorte auszulegen?

**A 5.5:** Die Zahl 28 ist die kleinste durch 4 teilbare Dreieckszahl (vgl. Abschn. 2.2). Kann eine Treppenfigur aus 28 Feldern mit den fünf Typen von Tetromino-Steinen ausgelegt werden?



**A 5.6:** Die Zahlen 16 und 36 sind durch 4 teilbare Quadratzahlen, die man in Form von achsensymmetrischen Dreiecksfiguren veranschaulichen kann. Wie kann man sie mit Tetrominos auslegen?



## 5.2 Pentominos

Es gibt zwölf Möglichkeiten, fünf Quadrate zu einem Pentomino-Stein zusammenzusetzen. Üblicherweise werden diese mit den Buchstaben F, I, L, N, P, T, U, V, W, X, Y, Z bezeichnet (vgl. Abb. 5.1).

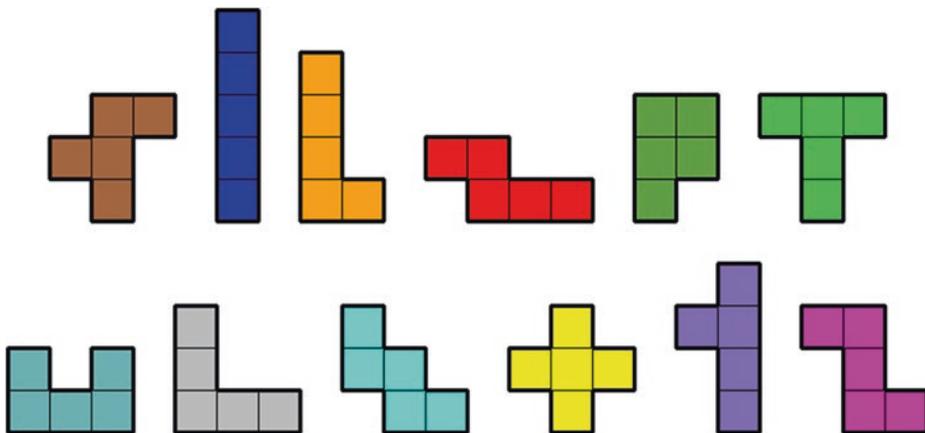
### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 5.7:** Färben Sie die zwölf Pentominos wie ein Schachbrett abwechselnd dunkel und hell (ähnlich wie die Tetrominos in A 5.1). Welche Unterschiede erkennen Sie?

### 5.2.1 Parkettierung von Rechtecken durch Pentominos

Mit den zwölf Pentomino-Steinen kann man eine Fläche mit 60 Flächeneinheiten bedecken.

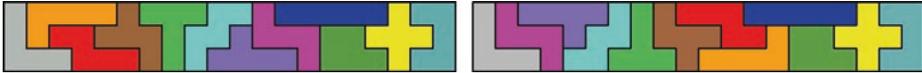
Es gibt sechs Möglichkeiten, ein Rechteck mit ganzzahligen Seitenlängen und Flächeninhalt 60 FE zu zeichnen. Da man für das Auslegen der Pentomino-Steine F, T, L, W, X und Z mindestens eine Höhe von 3 LE benötigt, kommen das  $1 \times 60$ -Rechteck und das  $2 \times 30$ -Rechteck für die Parkettierung mit Pentominos nicht infrage.



**Abb. 5.1** Die zwölf möglichen Pentomino-Steine

Daher bleiben: das  $3 \times 20$ -Rechteck, das  $4 \times 15$ -Rechteck, das  $5 \times 12$ -Rechteck und das  $6 \times 10$ -Rechteck.

- Für die Parkettierung einer Rechteckfläche mit  $3 \times 20 = 60$  Feldern gibt es nur die beiden folgenden Möglichkeiten.

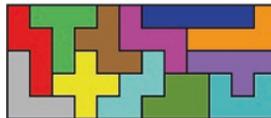


Dagegen ist die Anzahl der möglichen Parkettierungen der anderen Rechtecke erheblich größer:

- Für die Parkettierung eines  $4 \times 15$ -Rechtecks gibt es 368 Möglichkeiten, davon ist *eine* abgebildet:



- Für die Parkettierung eines  $5 \times 12$ -Rechtecks gibt es 1010 Möglichkeiten, davon ist *eine* abgebildet:



- Für die Parkettierung eines  $6 \times 10$ -Rechtecks gibt es 2339 Möglichkeiten, davon ist *eine* abgebildet:



#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 5.8:** Obwohl es sehr viele mögliche Parkettierungen gibt, fällt es nicht leicht, eine Belegung der 60 Felder mit genau den zwölf Steinen vorzunehmen. Finden Sie außer den abgebildeten Beispielen noch mindestens eine weitere Möglichkeit, ein  $4 \times 15$ -Rechteck, ein  $5 \times 12$ -Rechteck bzw. ein  $6 \times 10$ -Rechteck mit den zwölf Pentominos zu parkettieren.

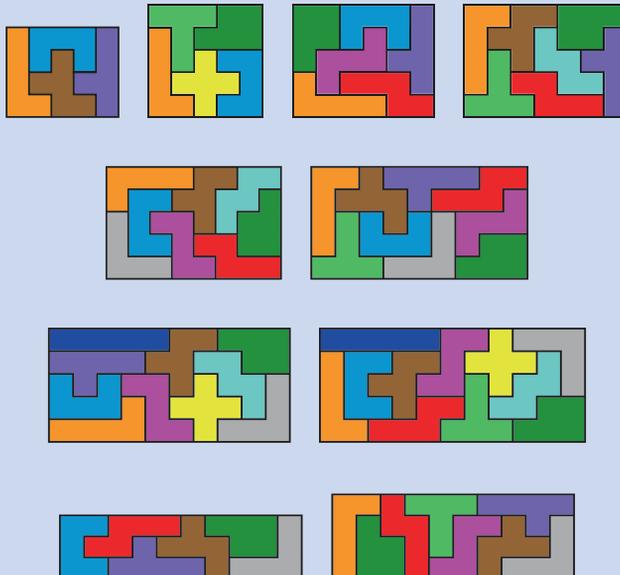
**A 5.9:** Bestimmen Sie alle sieben Möglichkeiten, eine Rechteckfläche mit  $3 \times 5 = 15$  Feldern mit drei verschiedenen Pentomino-Steinen auszulegen.

Auch bei anderen Rechteckflächen, deren Flächeninhalt durch 5 teilbar ist, gibt es zahlreiche Möglichkeiten, diese Flächen mit der entsprechenden Anzahl von Pentomino-Steinen auszulegen, wobei keines der Puzzlestücke doppelt verwendet werden darf (vgl. die folgende Tabelle).

Rechteck	4 x 5	5 x 5	6 x 5	7 x 5	8 x 5
Anzahl der Möglichkeiten	50	107	541	1396	3408
Rechteck	9 x 5	10 x 5	11 x 5	3 x 10	4 x 10
Anzahl der Möglichkeiten	5902	6951	4103	145	2085

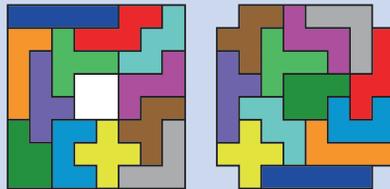
#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 5.10:** Finden Sie außer den folgenden Parkettierungsbeispielen noch mindestens eine weitere Möglichkeit, die Rechtecke mit ganzzahligem Flächeninhalt mit verschiedenen Pentominos auszulegen.



**A 5.11:** Die folgenden Figuren haben einen Flächeninhalt von 60 FE. Finden Sie außer den abgebildeten Beispielen noch mindestens eine weitere Möglichkeit, diese Figuren mit verschiedenen Pentominos zu parkettieren.

1. Es gibt insgesamt 65 Möglichkeiten, eine Quadratfläche mit  $8 \times 8 = 64$  Feldern mit den zwölf verschiedenen Pentominos zu parkettieren, bei der die vier Felder in der Mitte nicht belegt werden dürfen.
2. Es gibt insgesamt 2170 Möglichkeiten, eine Quadratfläche mit  $8 \times 8 = 64$  Feldern mit den zwölf verschiedenen Pentominos zu parkettieren, bei der die vier Eckfelder nicht belegt werden dürfen.



**A 5.12:** Die folgenden Abbildungen zeigen zwei mögliche Raster für das Kalenderblatt eines Monats. Nach Auflegen von sechs geeigneten Pentomino-Steinen bleibt ein Feld frei – das heutige Datum! Wählen Sie ein Datum und legen Sie das zugehörige Raster aus. Denken Sie sich eigene Raster aus.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	

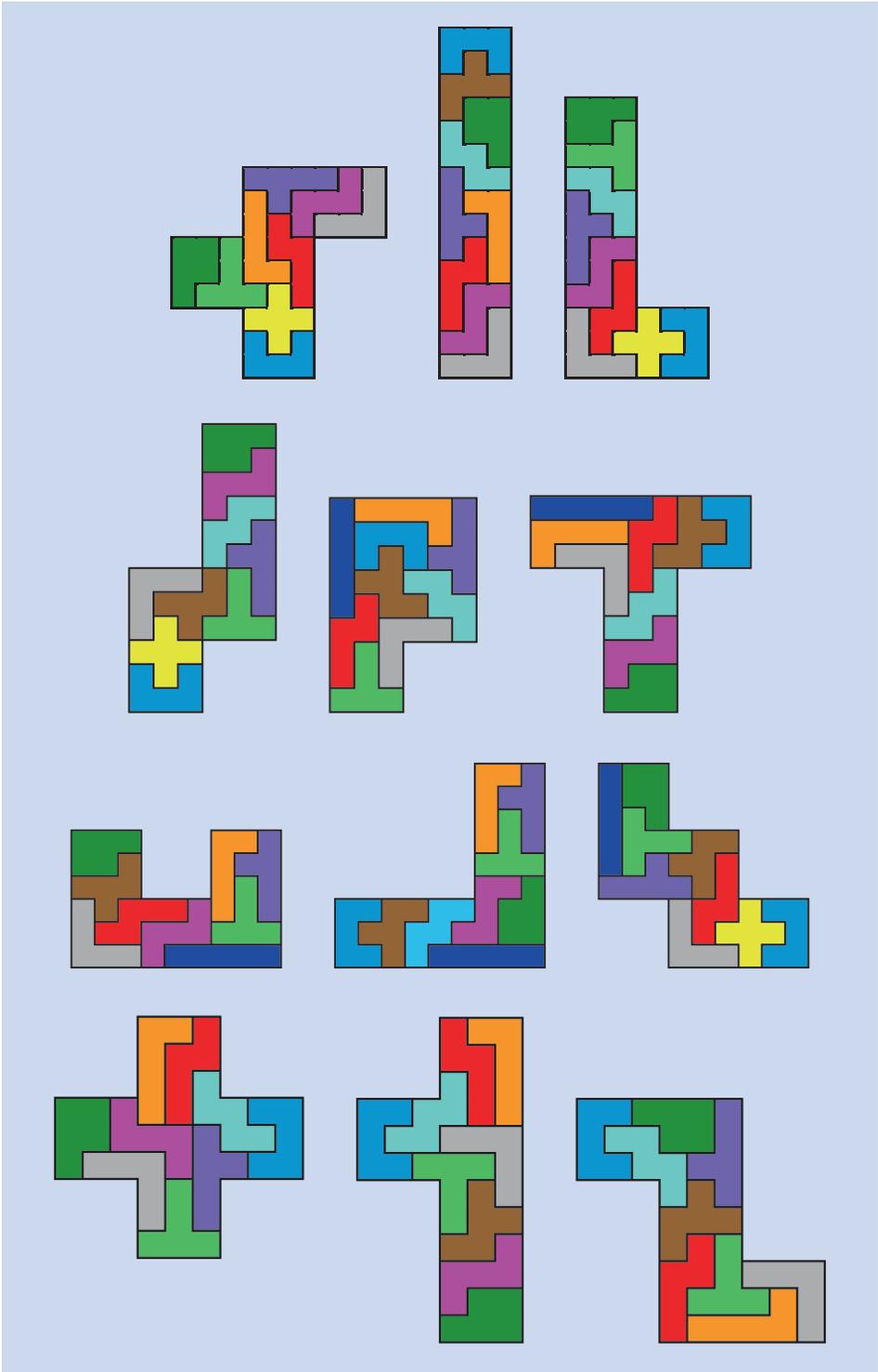
	1	2	3	4	5	
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
	27	28	29	30	31	

### 5.2.2 Parkettierung von vergrößerten Pentomino-Figuren durch Pentominos

Interessant ist auch die Aufgabenstellung, die Vergrößerungen der einzelnen Puzzlestücke als Vorlage für eine Parkettierung zu nehmen und diese nur mithilfe der *anderen* Pentominos darzustellen. Die vergrößerten Figuren sind dreimal so hoch und dreimal so breit wie die Puzzlestücke selbst. Für die Figuren mit  $3^2 \cdot 5 = 45$  Feldern müssen also neun der elf übrigen Puzzlestücke benutzt werden. Die Anzahl der möglichen Parkettierungen kann aus der folgenden Tabelle entnommen werden.

Pentomino-Typ	F	I	L	N	P	T
Anzahl der Möglichkeiten	125	19	113	68	497	106
Pentomino-Typ	U	V	W	X	Y	Z
Anzahl der Möglichkeiten	48	63	91	15	86	131

**A 5.13:** In den folgenden Abbildungen ist jeweils ein Beispiel für die Parkettierung der vergrößerten Pentomino-Figuren mit jeweils neun der übrigen elf Pentominos dargestellt. Finden Sie jeweils noch mindestens eine weitere Möglichkeit der Parkettierung dieser Figuren.

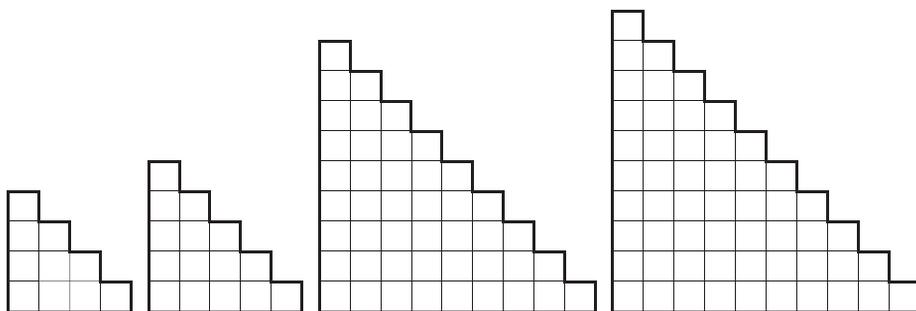


### 5.2.3 Parkettierung von Dreiecksfiguren mithilfe von Pentominos

Die Glieder der Summenfolge der ersten  $n$  natürlichen Zahlen werden als Dreieckszahlen bezeichnet (vgl. Kap. 2). Einige der Dreieckszahlen sind durch 5 teilbar, d. h., die zugehörigen Dreiecksfiguren lassen sich durch Pentominos auslegen.

Wir betrachten hier nur die Parkettierung von Dreiecksfiguren, deren Flächeninhalt höchstens 60 FE beträgt, und prüfen, ob bzw. wie oft die Flächen durch verschiedene Pentominos belegt werden können.

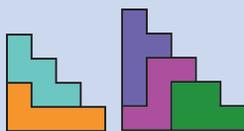
Infrage kommen immerhin vier Formen, nämlich mit  $1 + 2 + 3 + 4 = 10$  FE, mit  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$  FE, mit  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$  FE und mit  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$  FE (vgl. die folgenden Abbildungen).



#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 5.14:** Färben Sie die Felder der vier abgebildeten Dreiecksfiguren wie ein Schachbrett abwechselnd dunkel und hell. Welche Besonderheiten entdecken Sie?

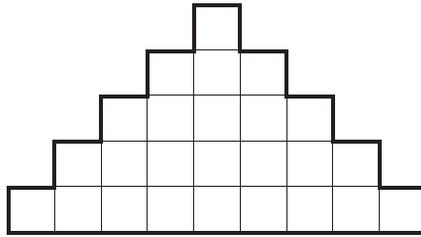
**A 5.15:** Bestimmen Sie alle Möglichkeiten, die Dreiecksfigur mit 10 FE mit zwei bzw. die Dreiecksfigur mit 15 FE mit drei verschiedenen Pentominos auszulegen. Je ein Parkettierungsbeispiel kann der folgenden Abbildung entnommen werden.



**A 5.16:** Ist es möglich, die Dreiecksfiguren mit Flächeninhalt 45 FE bzw. 55 FE mit lauter verschiedenen Pentominos auszulegen?

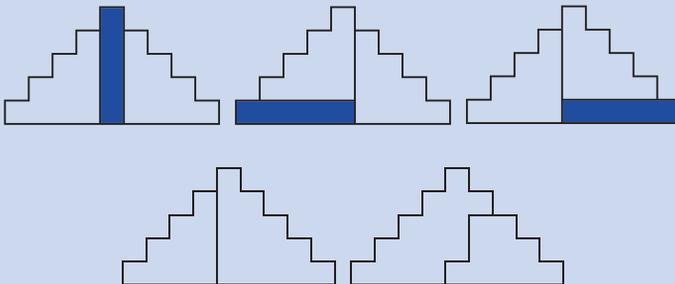
Eine weitere Dreiecksfigur ergibt sich, wenn man Rechtecke mit ungeradzahlicher Seitenlänge aufeinanderstapelt. Wie in Kap. 2 erläutert, ist die Gesamtzahl der in der Figur enthaltenen Quadrate eine Quadratzahl, da die Summe der ersten aufeinanderfolgenden ungeraden natürlichen Zahlen stets eine Quadratzahl ist.

Die einzige durch 5 teilbare Quadratzahl bis 60 ist die Zahl 25, dargestellt als Summe der ersten fünf ungeraden natürlichen Zahlen:  $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$  (vgl. die folgende Abbildung).



#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

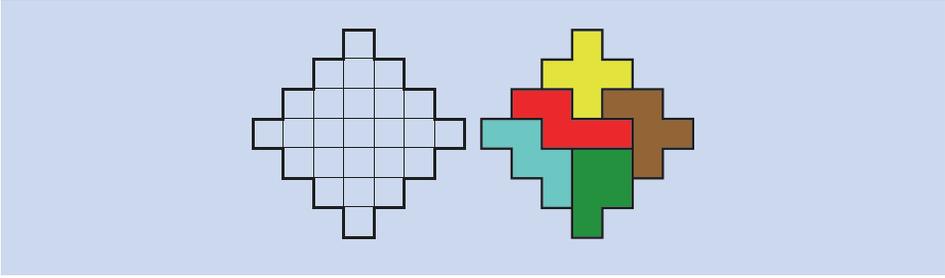
**A 5.17:** Bestimmen Sie alle Möglichkeiten, die zuletzt betrachtete Dreiecksfigur mit Flächeninhalt 25 FE mit fünf verschiedenen Pentominos auszulegen. Beachten Sie, dass sich einige Möglichkeiten unmittelbar aus den Lösungen von A 5.14 ergeben (vgl. folgende Abbildungen).



**A 5.18:** Die Summe benachbarter Quadratzahlen lässt sich auch mithilfe einer gedrehten quadratischen Figur darstellen. Die kleinste durch 5 teilbare Summe benachbarter Quadratzahlen ist

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = (1 + 3 + 5) + (1 + 3 + 5 + 7) = 5^2.$$

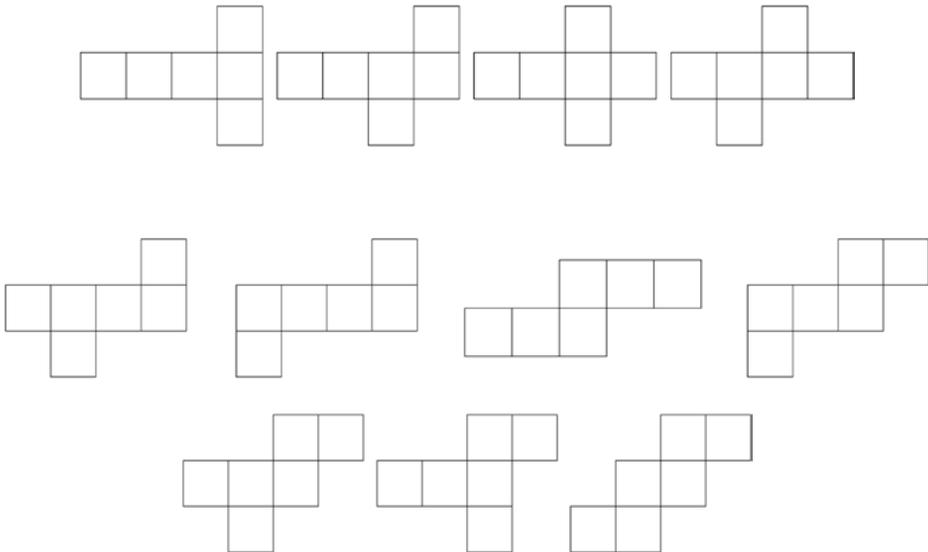
Gibt es außer der Parkettierung rechts noch eine weitere Möglichkeit?



### 5.3 Hexominos

Es gibt 35 Möglichkeiten, sechs Quadrate zu einem Hexomino-Stein zusammenzusetzen. In der folgenden Abbildung sind diejenigen elf Hexominos abgebildet, die als **Würfelnetze** geeignet sind; die übrigen 24 Formen möge man selbst finden.

Im Prinzip lassen sich für Hexominos ähnliche Aufgabenstellungen entwickeln wie für Pentominos. Da die Anzahl der zur Verfügung stehenden Puzzlesteine jedoch sehr viel größer ist, wird auch die Anzahl der Lösungen mit Sicherheit sehr groß sein.



**Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen**

**A 5.19:** Bestimmen Sie die 24 Hexominos, die nicht als Würfelnetze geeignet sind.

**A 5.20:** Welche der Hexominos sind aus welchen Pentomino-Steinen durch Ansetzen eines weiteren Quadrats entstanden? Welche der Pentominos sind aus welchen Tetromino-Steinen durch Ansetzen eines weiteren Quadrats entstanden?

---

**5.4 Hinweise auf weiterführende Literatur**

Bei **Wikipedia** findet man in deutscher (englischer, französischer) Sprache weitere Informationen und Literatur zu den Stichwörtern:

- Pentomino (Pentomino, Pentomino)
- Polyomino (Polyomino, Polyomino)

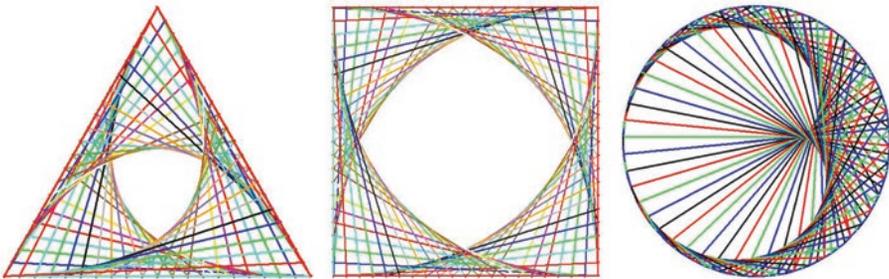
Umfangreiche fachliche Informationen findet man auf **Wolfram Mathworld** unter den Stichwörtern:

- Pentomino, Polyomino

Eine ausführliche Darstellung der Möglichkeiten enthalten die Websites

- <https://isomerdesign.com/Pentomino/>
- <https://gp.home.xs4all.nl/PolyominoSolver/Polyomino.html>

*Wer am falschen Faden arbeitet, zerstört das ganze Gewebe.*  
 (Konfuzius, chinesischer Philosoph, 551–479 v. Chr.)

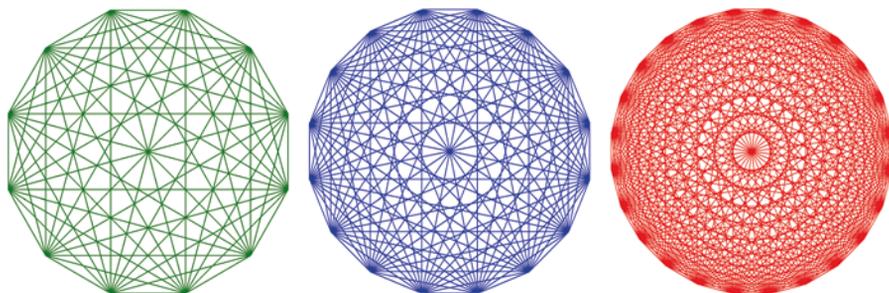


Man kann auf einfache Weise durch das Spannen von Fäden scheinbar gekrümmte Linien erzeugen. Dazu zeichnet man die Grundfigur (Kreis, gleichseitiges Dreieck, Quadrat, regelmäßiges Vieleck) auf ein Brett, schlägt in gleichmäßigen Abständen Nägel ein, die dann nach bestimmten Regeln miteinander verbunden werden. So entstehen in unserem Gehirn Kreise, Parabeln und andere Kurven, obwohl wir eigentlich nur Tangenten an diese Kurven sehen.

## 6.1 Grundfigur Kreis – Seiten und Diagonalen in regelmäßigen Vielecken

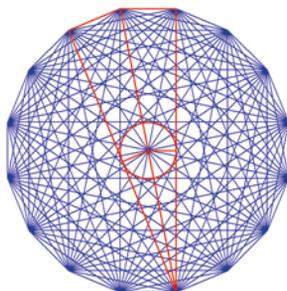
Schlägt man auf einer Kreislinie in gleichmäßigen Abständen  $n$  Nägel ein und verbindet jeden Nagel mit allen anderen Nägeln, dann entsteht ein regelmäßiges  $n$ -Eck mit  $n$  Seiten und  $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n - 3)$  Diagonalen (vgl. Abschn. 1.3).

In den folgenden Abbildungen sind verschiedene regelmäßige  $n$ -Ecke abgebildet, die man durch Verdopplung der Anzahl der Eckpunkte aus einem regelmäßigen 6-Eck bzw. 8-Eck erhält: ein regelmäßiges 12-Eck mit 12 Seiten und 54 Diagonalen, ein regelmäßiges 16-Eck mit 16 Seiten und 104 Diagonalen sowie ein regelmäßiges 24-Eck mit 24 Seiten und 252 Diagonalen:



Mit größer werdender Eckenzahl entsteht in unserem Kopf der Eindruck, dass im Innern der Figuren Kreise gezeichnet worden sind. Diese Kreise existieren nicht wirklich. Was wir eigentlich sehen, sind Tangenten an die Kreise.

Um dies zu überprüfen, betrachte man die Diagonale eines Eckpunkts zum gegenüberliegenden Eckpunkt. Diese Diagonale ist Symmetrieachse für je zwei Diagonalen, die vom selben Eckpunkt ausgehen. Die beiden nächsten benachbarten Diagonalen sind Tangenten an den innersten Kreis, die nächsten beiden liegen tangential zum zweitinnersten Kreis usw.

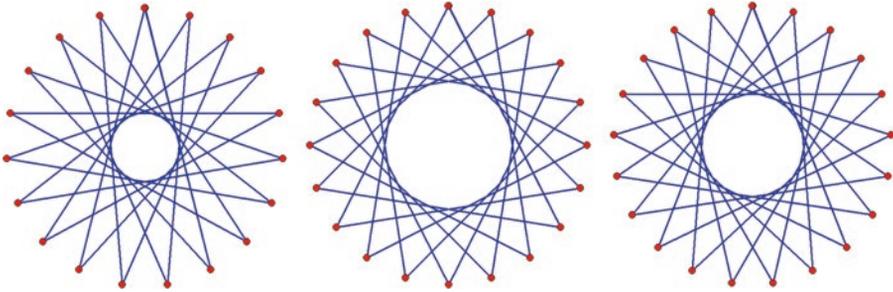


An der Grafik kann man ablesen, dass der Radius des innersten (eingebildeten) Kreises *ungefähr* halb so groß ist wie die Seitenlänge des regelmäßigen Vielecks.

Der Radius des zweiten (eingebildeten) Kreises ist nicht ganz doppelt so groß wie der Radius des innersten Kreises, der Radius des dritten Kreises nicht ganz dreimal so groß; der Zuwachs der Radien von innen nach außen ist jeweils etwas kleiner.

Im Kap. 1 ist auch ausgeführt, welche Eckpunkte eines regelmäßigen  $n$ -Ecks mit welchen folgenden Eckpunkten verbunden werden müssen, damit ein  $n$ -zackiger Stern

entsteht, für den man nur *einen* Faden benötigt. Auch wenn hier nur ein Teil der Diagonalen benötigt wird, entstehen im Innern der Figur scheinbar Kreise, vgl. die folgenden Abbildungen der Sterne  $\{19/8\}$ ,  $\{20/7\}$ ,  $\{21/8\}$ .

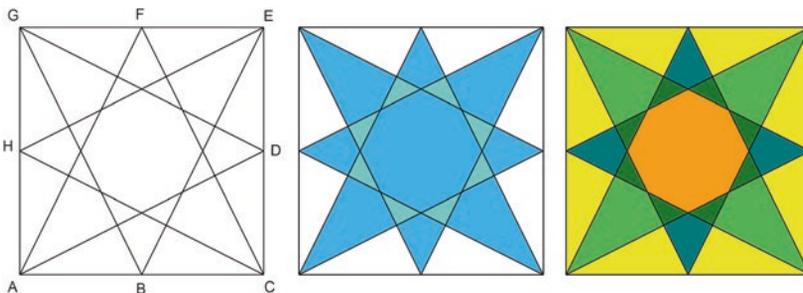


## 6.2 Grundfigur Quadrat

### 6.2.1 Besondere Sternfiguren in einem Quadrat

Wählt man bei einem Quadrat die Eckpunkte und weitere dazwischenliegende Punkte, dann entstehen besondere Sternfiguren.

Beispielsweise ergibt sich durch die Eck- und Mittelpunkte der Seiten ein 8-zackiger Stern, wenn man wie beim Stern  $\{8/3\}$  die Punktfolge  $A - D - G - B - E - H - C - F - A$  betrachtet, also jeden der acht Punkte jeweils mit dem drittnächsten verbindet. Wenn man die Teilflächen der entstehenden Figur einfärbt, ist wieder ein besonders schöner Stern entstanden.



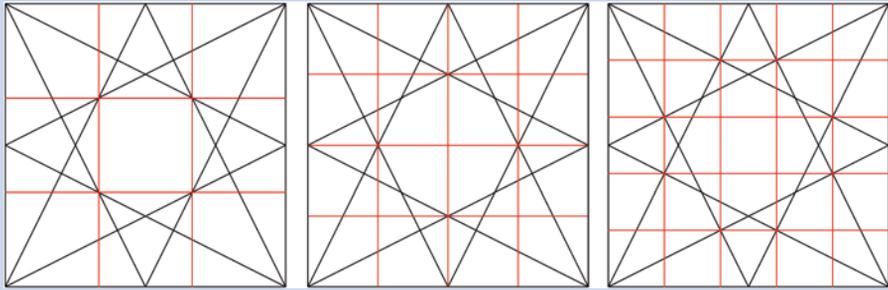
Das Besondere an dieser Sternfigur: Wählt man als Seitenlänge des Quadrats 60 LE und legt den Ursprung des Koordinatensystems in eine Ecke oder in die Mitte der Figur, dann haben alle auftretenden Schnittpunkte ganzzahlige Koordinaten und alle Flächenstücke einen ganzzahligen Flächeninhalt.

### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

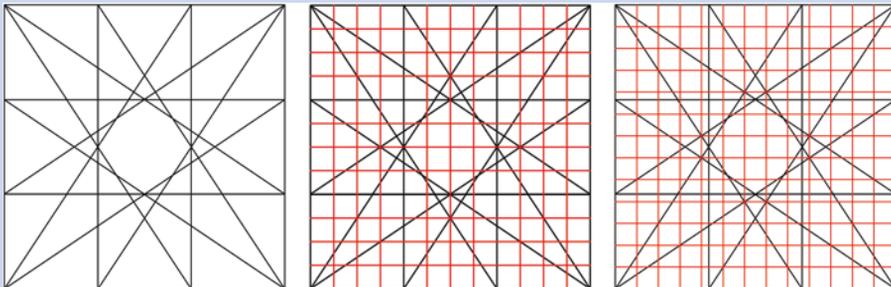
**A 6.1:** In den folgenden Abbildungen sind in die 8-zackige Figur verschiedene Gitterlinien eingezeichnet, aus denen dann die ganzzahligen Koordinaten der Schnittpunkte abgelesen werden können. Die Seitenlänge des umgebenden Quadrats beträgt 60 LE.

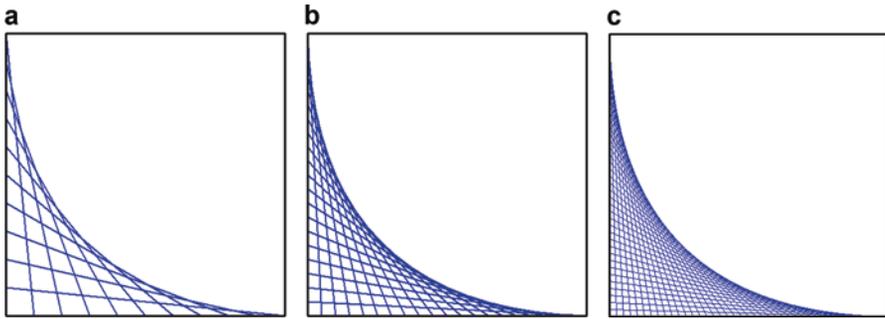
Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Figur und die Flächeninhalte der Flächenstücke.

In welchem Verhältnis stehen die Seitenlängen der in der Figur auftretenden rechtwinkligen Dreiecke zueinander?



**A 6.2:** Bestimmen Sie analog zu A 6.1 die Koordinaten der Schnittpunkte der folgenden 12-zackigen Sternfigur.





**Abb. 6.1** a–c Scheinbare Parabeln in einem Quadrat

### 6.2.2 Parabeln in einem Quadrat

Unterteilt man die linke senkrechte und die untere waagerechte Seite eines Quadrats in zehn gleich große Abschnitte, nummeriert die Unterteilungspunkte mit 0, 1, 2, ..., 10 und verbindet

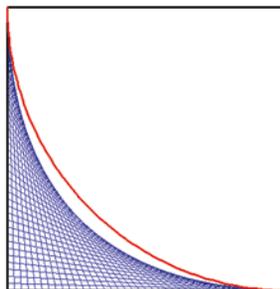
- Punkt 10 der senkrechten Seite mit Punkt 1 der waagerechten Seite,
- Punkt 9 der senkrechten Seite mit Punkt 2 der waagerechten Seite,
- Punkt 8 der senkrechten Seite mit Punkt 3 der waagerechten Seite,
- ...
- Punkt 1 der senkrechten Seite mit Punkt 10 der waagerechten Seite,

dann ergibt sich das Fadenbild in Abb. 6.1a.

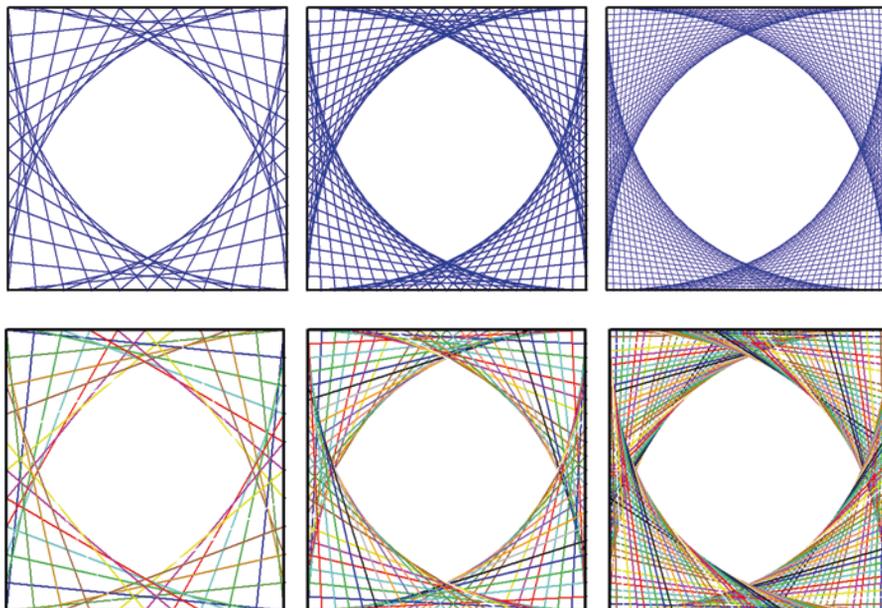
Es sieht so aus, als wäre hier eine gekrümmte Linie entstanden – es handelt sich um eine Parabel. Aber tatsächlich sind nur Tangente  $n$  der Parabel gezeichnet worden.

Vergößert man die Anzahl der Abschnitte auf den beiden Quadratseiten (z. B. 20 Abschnitte bzw. 40 Abschnitte, vgl. Abb. 6.1b, c), dann verstärkt sich der Eindruck, dass tatsächlich eine Kurve entstanden ist.

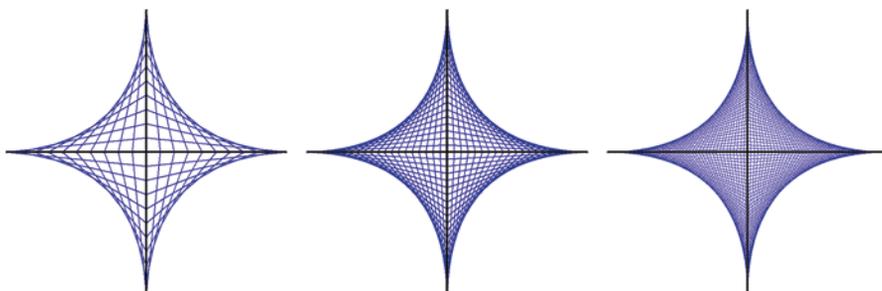
Dass es sich bei der Kurve nicht um einen Viertelkreis handelt, kann man an der folgenden Abbildung ablesen.



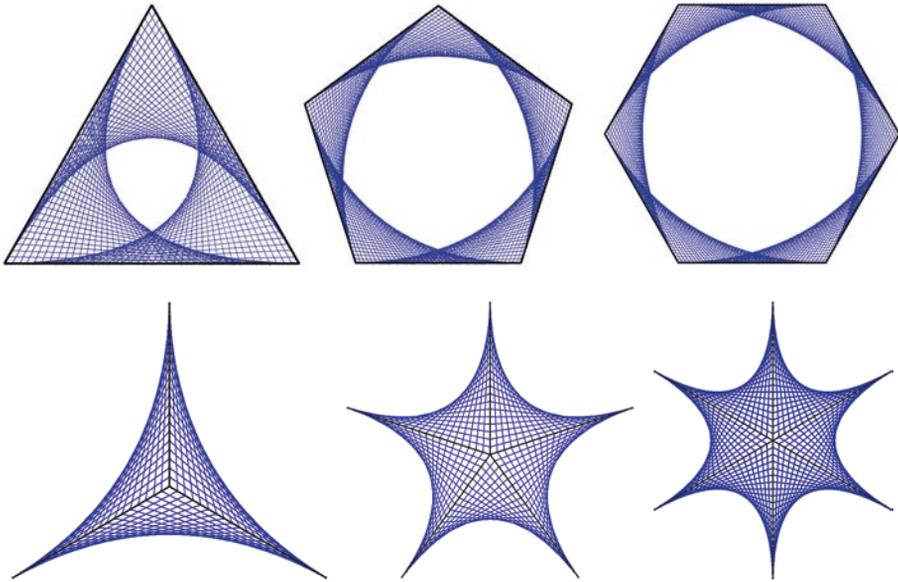
Die folgenden Fadenbilder entstehen, wenn man vier dieser Parabel-„Figuren“ in einem Quadrat erzeugt bzw. wenn farbige Fäden verwendet werden.



Statt eines Quadrats als Rahmen kann man auch zwei zueinander senkrecht stehende (Koordinaten-)Achsen verwenden (oder vier zu einem großen Quadrat zusammengesetzte Quadrate).



Als Grundfigur kann man auch regelmäßige Vielecke oder Achsen verwenden, die in bestimmten Winkeln zueinander stehen. Dabei werden die Fäden jeweils zwischen zwei benachbarten Seiten bzw. Achsen gespannt:



## 6.3 Exkurs: Einhüllende einer Funktionenschar

In der höheren Mathematik werden diese in unserem Gehirn erzeugten Kurven als **Einhüllende** (Hüllkurven oder Enveloppe) bezeichnet. Da hier Fadenbilder betrachtet werden, handelt es sich in diesem Fall um Hüllkurven von Geradenscharen.

Um die Gleichung einer solchen Hüllkurve zu bestimmen, muss man von der Funktionsgleichung der Geradenschar auf die der einhüllenden Kurve zurückschließen. Dies geht über die üblicherweise im Schulunterricht behandelten Methoden hinaus.

### 6.3.1 Beispiele von Geradenscharen, die im Rahmen des Schulunterrichts behandelt werden

Im Rahmen der Differenzialrechnung betrachtet man Tangenten an die Graphen von Funktionen.

Dabei berechnet man die Tangentensteigung in einem Punkt  $(a \mid f(a))$  eines Graphen mithilfe der 1. Ableitung an dieser Stelle. Die Gleichung einer solchen Tangente  $t_a$  ist gegeben durch:

$$t_a(x) = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$$

**Beispiel 1: Quadratische Funktion**

Für eine quadratische Funktion  $f$  mit  $f(x) = x^2$  ergibt sich:

$$t_a(x) = 2a \cdot (x - a) + a^2 = 2ax - a^2$$

In Abb. 6.2a ist für  $-4 \leq a \leq +4$  und Schrittweite  $\Delta a = 0,2$  die Geradenschar der Tangenten an den Graphen der Normalparabel gezeichnet. Obwohl die Parabel selbst nicht gezeichnet wurde, hat man den Eindruck, dass dieser Graph trotzdem vorhanden ist.

**Beispiel 2: Kehrwertfunktion**

Für die Kehrwertfunktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{1}{x}$ , deren Graph auch als Normalhyperbel bezeichnet wird, ergibt sich als Tangentengleichung:

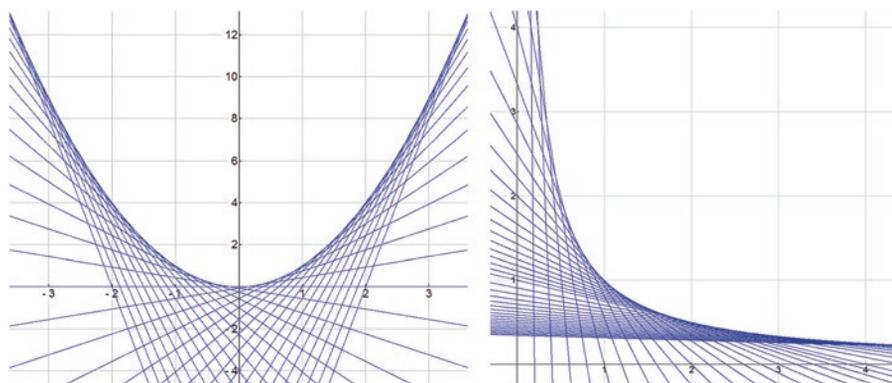
$$t_a(x) = -\frac{1}{a^2} \cdot (x - a) + \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}$$

In Abb. 6.2b wurden die Tangenten für  $0,1 \leq a \leq 2$  mit Schrittweite  $\Delta a = 0,1$  sowie für  $2 \leq a \leq 6$  mit  $\Delta a = 0,2$  gezeichnet.

**6.3.2 Ermittlung der Gleichung der einhüllenden Parabel**

Im Folgenden soll ein Weg beschrieben werden, der den Rahmen der Kenntnisse des normalen Mathematikunterrichts der Oberstufe nicht überschreitet.

Die Figuren in Abb. 6.1a–c besitzen offensichtlich eine Symmetrieachse, die durch den Ursprung und einen noch zu bestimmenden Scheitelpunkt der Kurve verläuft.



**Abb. 6.2** Tangenten an eine Normalparabel und eine Normalhyperbel

Der Scheitelpunkt liegt ungefähr dort, wo sich die beiden „mittleren Geraden“ der Schar schneiden.

### Rechnung für 10 Unterteilungen auf den Achsen

Man betrachte die beiden „mittleren“ Geraden

$$g_6 \text{ durch } (0 \mid 6) \text{ und } (5 \mid 0): y = \frac{0-6}{5-0} \cdot (x-0) + 6 = \frac{-6}{5} \cdot x + 6$$

$$g_5 \text{ durch } (0 \mid 5) \text{ und } (6 \mid 0): y = \frac{0-5}{6-0} \cdot (x-0) + 5 = \frac{-5}{6} \cdot x + 5$$

Für die  $x$ -Koordinate des Schnittpunkts gilt:

$$\frac{-6}{5} \cdot x + 6 = \frac{-5}{6} \cdot x + 5 \Leftrightarrow \left( \frac{6}{5} - \frac{5}{6} \right) \cdot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{30}{11} \approx 2,73$$

$$\text{Für die } y\text{-Koordinate des Schnittpunkts gilt dann: } y = \frac{-6}{5} \cdot \frac{30}{11} + 6 = \frac{30}{11}$$

### Rechnung für 20 Unterteilungen auf den Achsen

Man betrachte die beiden „mittleren“ Geraden

$$g_{11} \text{ durch } (0 \mid 5,5) \text{ und } (5 \mid 0): y = \frac{0-5,5}{5-0} \cdot (x-0) + 5,5 = \frac{-5,5}{5} \cdot x + 5,5$$

$$g_{10} \text{ durch } (0 \mid 5) \text{ und } (5,5 \mid 0): y = \frac{0-5}{5,5-0} \cdot (x-0) + 5,5 = \frac{-5}{5,5} \cdot x + 5$$

Für die  $x$ -Koordinate des Schnittpunkts gilt:

$$\frac{-5,5}{5} \cdot x + 5,5 = \frac{-5}{5,5} \cdot x + 5 \Leftrightarrow \left( \frac{5,5}{5} - \frac{5}{5,5} \right) \cdot x = 0,5 \Leftrightarrow x = \frac{13,75}{5,25} \approx 2,62$$

$$\text{Für die } y\text{-Koordinate des Schnittpunkts gilt: } y = \frac{-5,5}{5} \cdot \frac{13,75}{5,25} + 5,5 \approx 2,62$$

### Verallgemeinerung der Rechnung

Man betrachte die beiden „mittleren“ Geraden

$$g_r \text{ durch } (0 \mid 5 + \Delta) \text{ und } (5 \mid 0): y = \frac{-5-\Delta}{5} \cdot x + 5 + \Delta$$

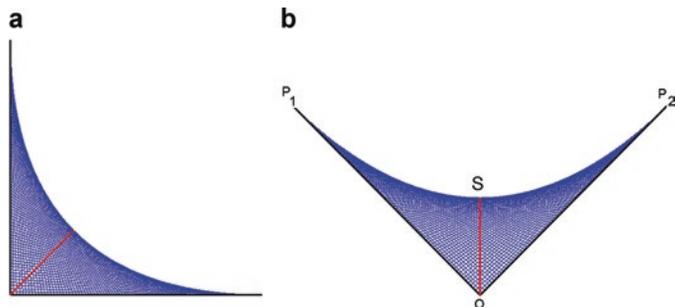
$$g_{r-1} \text{ durch } (0 \mid 5) \text{ und } (5 + \Delta \mid 0): y = \frac{-5}{5+\Delta} \cdot x + 5$$

Für die  $x$ -Koordinate des Schnittpunkts gilt:

$$\begin{aligned} \frac{-5-\Delta}{5} \cdot x + 5 + \Delta &= \frac{-5}{5+\Delta} \cdot x + 5 \Leftrightarrow \left( \frac{5+\Delta}{5} - \frac{5}{5+\Delta} \right) \cdot x = \Delta \\ \Leftrightarrow x &= \Delta \cdot \frac{5 \cdot (5+\Delta)}{(5+\Delta)^2 - 5^2} = \Delta \cdot \frac{5 \cdot (5+\Delta)}{(5+\Delta-5) \cdot (5+\Delta+5)} = \frac{5 \cdot (5+\Delta)}{10+\Delta} \end{aligned}$$

Für  $\Delta \rightarrow 0$  konvergieren  $x$  und  $y$  gegen 2,5.

Dreht man nun die Figur in Abb. 6.3a um  $45^\circ$  nach links, dann liegt die begrenzende Parabel symmetrisch zur  $y$ -Achse eines Koordinatensystems (vgl. Abb. 6.3b).



**Abb. 6.3** a, b Drehen der einhüllenden Parabel um  $45^\circ$

Aus den Koordinaten der Punkte  $(0 \mid 10)$ ,  $(2,5 \mid 2,5)$  und  $(10 \mid 0)$  der Figur links ergeben sich nach der Drehung die Koordinaten:  $P_1(-5\sqrt{2} \mid 5\sqrt{2})$ ,  $P_2(5\sqrt{2} \mid 5\sqrt{2})$ ,  $S(0 \mid 2,5\sqrt{2})$

Die Gleichung der Parabel mit  $y = ax^2 + b$  erhält man dann aus diesen Punkten durch Koeffizientenvergleich:

$$y = \frac{\sqrt{2}}{20}x^2 + 2,5\sqrt{2}$$

Um hieraus die Gleichung der ursprünglichen Parabel zu bestimmen, muss dieser Graph wieder um  $45^\circ$  gedreht werden (diesmal nach rechts).

Nach Anwendung der Formel (6.1), vgl. unten, ergibt sich im Fall einer Drehung um  $45^\circ$  nach rechts,

$$\text{also mit } \sin(-45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ und } \cos(-45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}:$$

$$x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \text{ und } y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + y),$$

nach  $x, y$  aufgelöst:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \text{ und } y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$$

Setzt man dies in die Ausgangsgleichung  $y = \frac{\sqrt{2}}{20}x^2 + 2,5\sqrt{2}$  ein,

so erhält man  $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (x' + y') = \frac{\sqrt{2}}{20} \cdot \frac{1}{2} \cdot (x' - y')^2 + 2,5 \cdot \sqrt{2}$ , also

$$20 \cdot (x' + y') = (x' - y')^2 + 100.$$

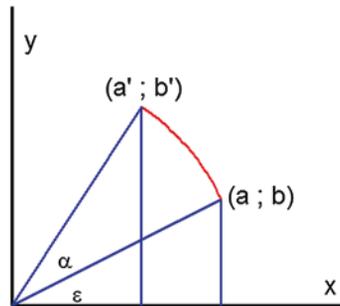
Diese Gleichung für die Einhüllende in Abb. 6.3a kann man explizit auch so notieren:

$$x'^2 - 2x'y' + y'^2 - 20x' - 20y' + 100 = 0$$

**Formel****Drehung eines Punktes um den Ursprung mit dem Winkel  $\alpha$** 

In einem Koordinatensystem wird ein Punkt  $P(a; b)$  durch eine Drehung mit dem Winkel  $\alpha$  um den Ursprung gedreht und geht so in den Punkt  $P'(a'; b')$  über. Für die Koordinaten von  $P'$  gilt dann:

$$a' = a \cdot \cos(\alpha) - b \cdot \sin(\alpha) \text{ und } b' = a \cdot \sin(\alpha) + b \cdot \cos(\alpha) \quad (6.1)$$

**Herleitung der Formel (6.1)**

Für  $r = |OP|$  gilt nach Pythagoras:  $a^2 + b^2 = |OP|^2$ .

Im rechtwinkligen Dreieck, das durch die Koordinaten des Punktes  $P$  bestimmt ist, gilt:

$$a = r \cdot \cos(\varepsilon) \text{ und } b = r \cdot \sin(\varepsilon)$$

Im rechtwinkligen Dreieck, das durch die Koordinaten des Punktes  $P'$  bestimmt ist, gilt:

$$a' = r \cdot \cos(\varepsilon + \alpha) \text{ und } b' = r \cdot \sin(\varepsilon + \alpha)$$

Nach Anwenden der Additionstheoreme für sin und cos

$$\sin(\varepsilon + \alpha) = \sin(\varepsilon) \cdot \cos(\alpha) + \cos(\varepsilon) \cdot \sin(\alpha) \text{ und}$$

$$\cos(\varepsilon + \alpha) = \cos(\varepsilon) \cdot \cos(\alpha) - \sin(\varepsilon) \cdot \sin(\alpha)$$

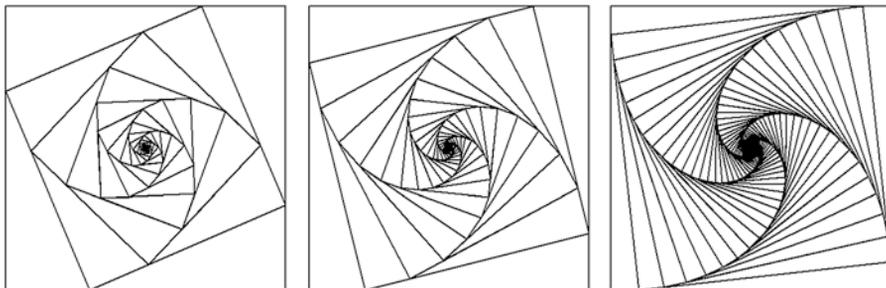
folgt

$$a' = r \cdot \cos(\varepsilon + \alpha) = r \cdot \cos(\varepsilon) \cdot \cos(\alpha) - r \cdot \sin(\varepsilon) \cdot \sin(\alpha) = a \cdot \cos(\alpha) - b \cdot \sin(\alpha)$$

und

$$b' = r \cdot \sin(\varepsilon + \alpha) = r \cdot \sin(\varepsilon) \cdot \cos(\alpha) + r \cdot \cos(\varepsilon) \cdot \sin(\alpha) = b \cdot \cos(\alpha) + a \cdot \sin(\alpha).$$

## 6.4 Verfolgungskurven



Die abgebildeten Figuren enthalten eine Folge von unendlich vielen ineinander geschachtelten Quadraten, deren Grundseiten im Verhältnis 3:7 bzw. 2:8 bzw. 1:9 geteilt sind.

Diese sind wie folgt gebildet worden: Alle vier Seiten des Quadrats werden im angegebenen Verhältnis unterteilt. Die Unterteilungspunkte werden dann jeweils mit den benachbarten Unterteilungspunkten verbunden – die entstehende Figur ist wieder ein Quadrat. Bei diesem Quadrat werden die Seiten ebenfalls in diesem Verhältnis geteilt usw.

Die Bezeichnung **Verfolgungskurve** lässt sich am besten mit der folgenden Geschichte erklären:

Vier Hunde sitzen in den Eckpunkten eines Quadrats, als sie jeweils einen benachbarten Hund bemerken. Sie laufen jeweils auf diesen los, bemerken aber, nachdem sie einen Teil der Strecke zurückgelegt haben und zum selben Zeitpunkt, dass sie ihre Richtung ändern müssen, denn der jeweils anvisierte Hund hat in der Zwischenzeit seine Position verändert usw.

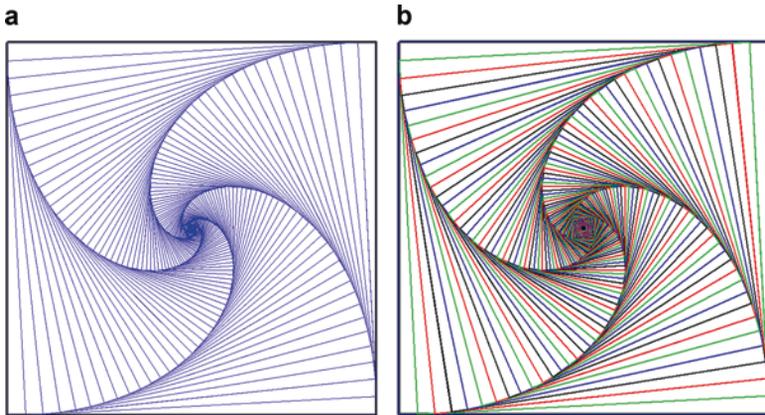
Während man bei den o. a. Grafiken kaum von einer „Kurve“ sprechen kann, verstärkt sich dieser Eindruck, je näher die Teilungspunkte an die Eckpunkte heranrücken; in Abb. 6.4a, b beträgt das Teilverhältnis 1:19. Eindrucksvoll sind sicherlich Fadenbilder, bei denen die Quadrate in unterschiedlichen Farben dargestellt werden.

Die scheinbar entstehenden Kurven sind sogenannte **logarithmische Spiralen**. Diese umlaufen die Mitte des Quadrats unendlich oft; dennoch ist deren Länge endlich – sie ist nämlich tatsächlich genauso groß wie die Seitenlänge des Quadrats.

Eine der besonderen Eigenschaften der logarithmischen Spiralen ist:

Zeichnet man beliebige Geraden durch den Mittelpunkt des Quadrats, dann schneiden diese die Spiralen stets unter dem gleichen Winkel, nämlich unter  $45^\circ$ .

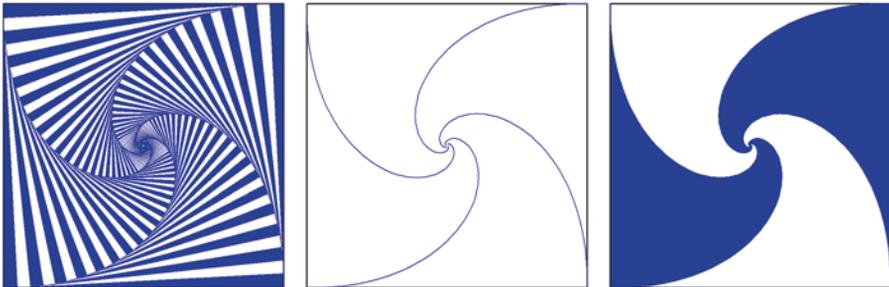
In der Praxis zeigen sich bei den Fadenbildern mit Verfolgungskurven allerdings schnell Probleme hinsichtlich der Genauigkeit der Positionen, in die die Nägel eingeschlagen werden müssen, da diese immer dichter beieinanderliegen. Dagegen hat



**Abb. 6.4** a, b Logarithmische Spiralen als Einhüllende der ineinandergeschachtelten Quadrate

man diese Probleme bei der Darstellung auf dem Computerbildschirm erst im Bereich der vier sich ineinander eindrehenden Spiralarme.

Figuren mit Verfolgungskurven lassen sich auf unterschiedliche Weise ausgestalten, z. B. indem man die Felder abwechselnd einfärbt oder nur die Strecken zeichnet, welche die Spiralen bilden, oder die durch die Spiralen entstehenden Bereiche einfärbt.

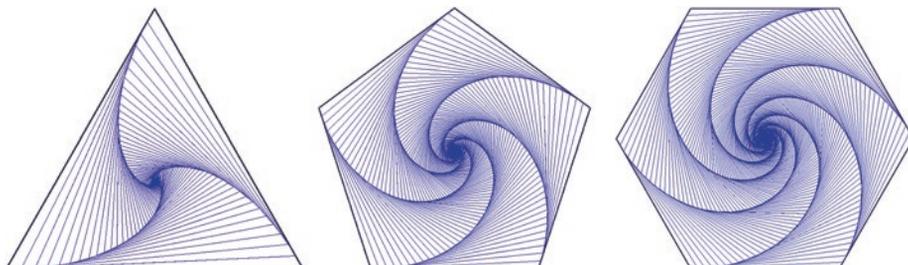


Auch bei anderen Grundflächen entstehen bei entsprechender Aufgabenstellung logarithmische Spiralen. Man kann (mithilfe von geometrischen Reihen) zeigen, dass sich die Länge  $\lambda_n$  der Spiralen für ein regelmäßiges  $n$ -Eck mit Seitenlänge  $s$  wie folgt berechnet:

$$\lambda_n = \frac{s}{1 - \cos\left(\frac{360^\circ}{n}\right)}$$

Im Fall von  $n = 4$  ergibt sich  $\lambda_4 = s$ , d. h., die Spiralen sind – wie oben angegeben – genauso lang wie die Seiten des Quadrats.

Im gleichseitigen Dreieck gilt für die Länge der Verfolgungskurve  $\lambda_3 = \frac{2}{3} \cdot s$ , im regelmäßigen 5-Eck gilt  $\lambda_5 \approx 1,447 \cdot s$ , und im regelmäßigen 6-Eck sind die logarithmischen Spiralen doppelt so lang wie die Seiten:  $\lambda_6 = 2 \cdot s$ .



## 6.5 Grundfigur Kreis: Epizykloide

Als **Zykloide** bezeichnet man eine Kurve, die beschreibt, wie sich ein Punkt eines Kreises bewegt, der abgerollt wird, beispielsweise längs einer Geraden. Rollt der bewegliche Kreis an einem anderen festen Kreis ab, so bezeichnet man die entstehende Kurve als **Epizykloide**.

Die Art der entstehenden Kurve hängt vom Verhältnis der Radien des festen und des beweglichen Kreises ab.

Im Folgenden betrachten wir die Fälle:

1. Der abrollende Kreis und der feste Kreis haben den Radius  $r$ .
2. Der feste Kreis hat den Radius  $2r$ ; der abrollende Kreis den Radius  $r$ .
3. Der feste Kreis hat den Radius  $3r$ ; der abrollende Kreis den Radius  $r$ .

In den Abb. 6.5a–c liegt der Mittelpunkt des festen Kreises im Ursprung; der Kreis ist gelb gefärbt, außerdem der rollende Kreis in Blau, jeweils in einer extremen Lage.

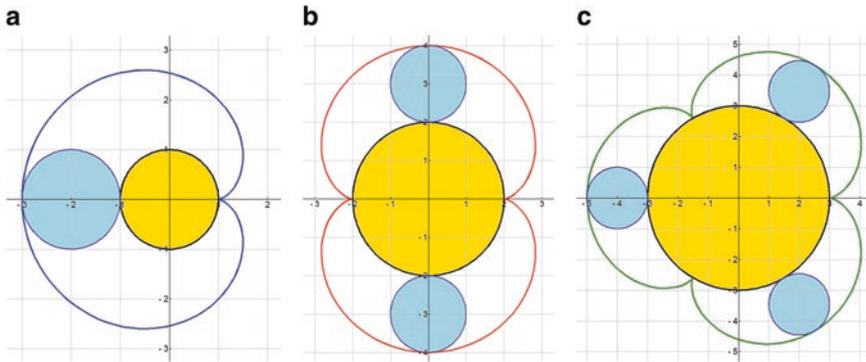
Die Kurven lassen sich mithilfe von Parameterdarstellungen beschreiben (vgl. Abb. 6.6a–c):

$$x(t) = r \cdot [2\cos(t) - \cos(2t)]; y(t) = r \cdot [2\sin(t) - \sin(2t)]$$

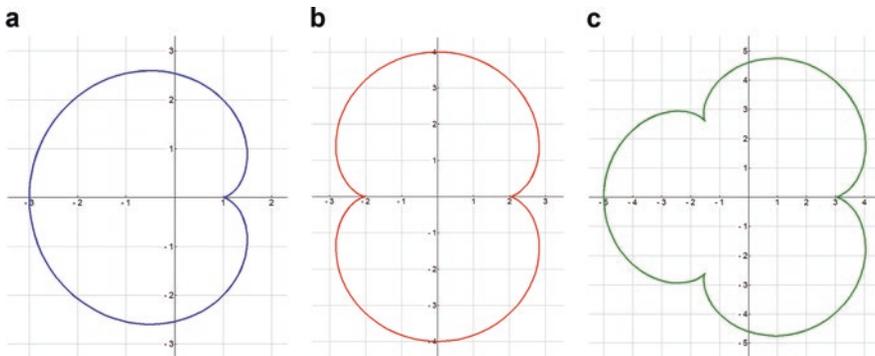
$$x(t) = r \cdot [3\cos(t) - \cos(3t)]; y(t) = r \cdot [3\sin(t) - \sin(3t)]$$

$$x(t) = r \cdot [4\cos(t) - \cos(4t)]; y(t) = r \cdot [4\sin(t) - \sin(4t)]$$

Epizykloide können auch durch Fadenbilder erzeugt werden:



**Abb. 6.5** a–c Epizykloiden mit dem festen Kreis sowie dem rollendem Kreis in extremen Lagen



**Abb. 6.6** a–c Graphen der Parameterdarstellungen

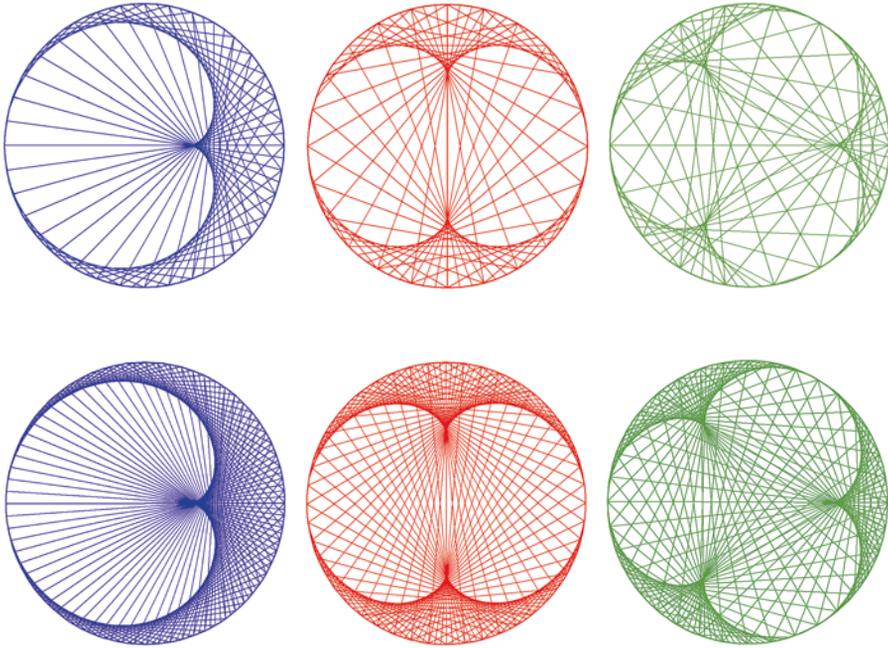
Verbindet man die Eckpunkte eines regelmäßigen  $n$ -Ecks (also Punkte auf einer Kreislinie) nach einer festen Zuordnungsvorschrift miteinander, dann entstehen solche Epizykloide in unserem Gehirn.

Zunächst betrachten wir ein regelmäßiges 72-Eck. Die Punkte werden von 1 bis 72 durchnummeriert; die Nummerierung wird dann noch weitergeführt, sodass Punkt  $k$  und Punkt  $72 + k$ ,  $144 + k$  usw. übereinstimmen.

Verbindet man dann Punkt  $k$  mit

- (1) Punkt  $2k$     bzw.    (2) Punkt  $3k$     bzw.    (3) Punkt  $4k$

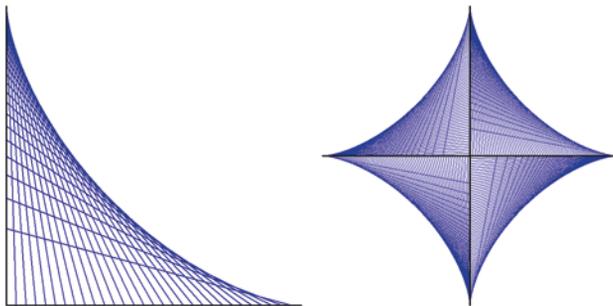
dann erhält man als Hüllkurven die oben beschriebenen Epizykloiden; die Konturen verschärfen sich, wenn man die Anzahl der Eckpunkte auf 144 verdoppelt (vgl. folgende Abbildungen).



Die Hüllkurve im Fall (1) ist eine einstrahlige Epizykloide; sie wird auch als **Kardioid** bezeichnet (griech. *kardia*, dt. Herz), im Fall (2) handelt es sich um eine zweistrahlige Epizykloide, die als **Nephroid** bezeichnet wird (griech. *nephros*, dt. Niere).

## 6.6 Grundfigur zueinander senkrechte Achsen: Astroide

Die einhüllende Kurve in den beiden folgenden Grafiken sieht aus wie eine Parabel, sie ist aber tatsächlich eine sogenannte **Astroide**.



Das erste Fadenbild wird wie folgt bestimmt:

Auf der  $x$ -Achse markiert man Punkte in gleichen Abständen. Dann nimmt man Fäden mit einer festen Länge, befestigt sie an den Punkten der  $x$ -Achse und bestimmt anschließend Punkte auf der  $y$ -Achse für das andere Ende des Fadens.

Man kann sich auch vorstellen, dass die einhüllende Kurve folgendermaßen entstanden ist:

Eine Leiter mit einer bestimmten Länge gleitet an einer Wand (=  $y$ -Achse) hinunter. Für bestimmte Positionen auf der  $x$ -Achse (die in gleichen Abständen zueinander liegen) wird der Punkt auf der  $y$ -Achse protokolliert, in dem die Leiter anlehnt.

Die Astroide gehören zu den sogenannten **Hypozykloiden**. Diese entstehen, wenn ein beweglicher Kreis innerhalb eines festen Kreises abrollt.

In Abb. 6.7a hat der feste Kreis den Radius  $r$  und der abrollende Kreis den Radius  $\frac{1}{4}r$ .

Die Parameterdarstellung der in Abb. 6.7b dargestellten Kurve ist:

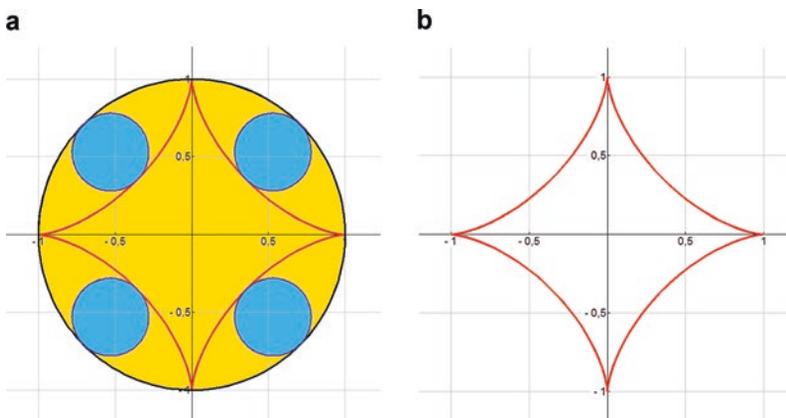
$$x(t) = r \cdot \cos^3(t); y(t) = r \cdot \sin^3(t)$$

Die Kurve kann auch durch die Gleichung

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = r^{\frac{2}{3}}$$

beschrieben werden.

Die Länge der Astroide ist mit  $6r$  etwas kürzer als der Umfang des Kreises ( $2\pi r$ ).



**Abb. 6.7** a, b Beispiel einer Astroide

## 6.7 Hinweise auf weiterführende Literatur

Bei **Wikipedia** findet man in deutscher (englischer, französischer) Sprache weitere Informationen und Literatur zu den Stichwörtern:

- Einhüllende (Envelope, Enveloppe)
- Radiodrome (Pursuit curve, Courbe du chien)
- Epizykloide (Epicycloid, Épicycloïde)

Unter dem Stichwort Fadenbilder (Curve stitching, Courbe à broder) findet man im Internet zahlreiche Anregungen für eigene Aktivitäten, u. a. das folgende Buch:

- Hale, Helen, *Curve Stitching: Art of Sewing Beautiful Mathematical Patterns*, Tarquin Pub, 2008

Umfangreiche fachliche Informationen findet man auf **Wolfram Mathworld** unter den Stichwörtern:

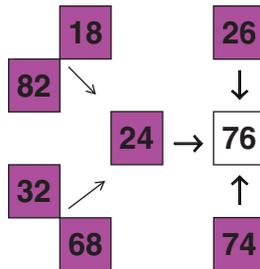
- Envelope, Pursuit Curve, Epicycloid, Cardioid, Astroid

# Rechnen mit Quadratzahlen – Zahlenzyklen

# 7

*Rechnen muss jeder Knabe lernen, damit er sein Leben berechne,  
denn die gesamte Vernunft, zumal die Führung menschlicher  
Dinge, heißt Rechnen.*

(Johann Gottfried von Herder, deutscher Dichter und Philosoph,  
1744–1803)



Dieses Kapitel beschäftigt sich mit einer bemerkenswerten Eigenschaft der Endziffern von Quadratzahlen, die man mit dem Begriff „Quadratzahlen-Zyklen“ beschreiben könnte.

Bevor im Folgenden diese Zahlenzyklen entdeckt werden, sollen Möglichkeiten aufgezeigt werden, wie man Quadratzahlen im Kopf berechnen kann. Die Untersuchungen über Quadratzahlen-Zyklen können auch mithilfe von Taschenrechnern oder einer Tabellenkalkulation durchgeführt werden, d. h., wer an den Tipps zum Kopfrechnen nicht interessiert ist, kann den ersten Teil des Beitrags überspringen.

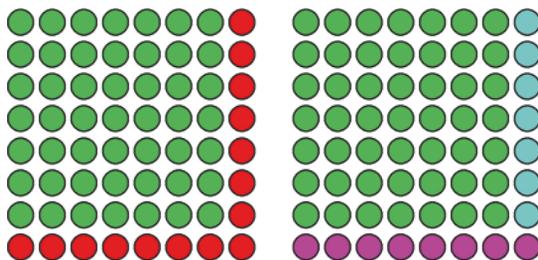
## 7.1 Rechnen mit Quadratzahlen

### 7.1.1 Rechnen mit Quadratzahlen: Von einer Quadratzahl zur nächsten

Wie in Kap. 2 erläutert wurde, kann man Quadratzahlen mithilfe von quadratisch angeordneten Punktmustern visualisieren.

Um von einer Quadratzahl zur nächsten zu kommen, muss man das Quadrat aus Punkten um einen Winkelhaken mit einer ungeraden Anzahl von Punkten ergänzen, d. h., die Differenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen  $n^2$  und  $(n + 1)^2$  ist die ungerade Zahl  $2n + 1$ .

Der Term  $2n + 1$  lässt sich auch als  $n + (n + 1)$  notieren, wie man aus der Abbildung unten rechts ablesen kann.



Hieraus folgt die erste Regel zum Berechnen von Quadratzahlen:

#### Regel 1

Kennt man das Quadrat  $n^2$  einer natürlichen Zahl  $n$ , dann erhält man die nächste Quadratzahl  $(n + 1)^2$ , indem man zur Quadratzahl  $n^2$  die Zahl  $n$  und deren Nachfolger  $(n + 1)$  addiert:

$$(n + 1)^2 = n^2 + n + (n + 1)$$

$40^2 = 1600$	40	41	$41^2 = 1600 + (40 + 41) = 1600 + 81 = 1681$
$41^2 = 1681$	41	42	$42^2 = 1681 + (41 + 42) = 1681 + 83 = 1764$
$42^2 = 1764$	42	43	$43^2 = 1764 + (42 + 43) = 1764 + 85 = 1849$
...			

Im Prinzip kann man so von *einer* bekannten Quadratzahl aus schrittweise die nächsten Quadratzahlen berechnen. Da dann die Summe von zwei, vier, sechs, ... Zahlen gebildet wird, ist es einfacher, statt der Summe selbst den Mittelwert der Summanden mit der Anzahl der Summanden zu multiplizieren.

$40^2 = 1600$	40	41	$41^2 = 1600 + (40 + 41)$ $= 1600 + 2 \cdot 40,5 = 1600 + 81 = 1681$
		42	$42^2 = 1600 + (40 + 41) + (41 + 42)$ $= 1600 + 4 \cdot 41 = 1600 + 164 = 1764$
		43	$43^2 = 1600 + (40 + 41) + (41 + 42) + (42 + 43)$ $= 1600 + 6 \cdot 41,5 = 1600 + 249 = 1849$
...			

Diese Methode kann auch rückwärts schreitend angewandt werden.

$50^2 = 1600$	50	49	$49^2 = 2500 - (50 + 49)$ $= 2500 - 2 \cdot 49,5 = 2500 - 99 = 2401$
		48	$48^2 = 2500 - (50 + 49) - (49 + 48)$ $= 2500 - 4 \cdot 49 = 2500 - 196 = 2304$
		47	$47^2 = 2500 - (50 + 49) - (49 + 48) - (48 + 47)$ $= 2500 - 6 \cdot 48,5 = 2500 - 291 = 2209$
...			

### 7.1.2 Rechnen mit Quadratzahlen: Besondere Regel für Quadratzahlen mit Endziffer 5

Betrachtet man die Quadratzahlen von natürlichen Zahlen mit Endziffer 5, dann fällt eine besondere Eigenschaft auf:

$n$	$n^2$	Rechnung	$n$	$n^2$	Rechnung
5	25		55	3025	$50 \cdot 60 + 5^2$
15	225	$10 \cdot 20 + 5^2$	65	4225	$60 \cdot 70 + 5^2$
25	625	$20 \cdot 30 + 5^2$	75	5625	$70 \cdot 80 + 5^2$
35	1225	$30 \cdot 40 + 5^2$	85	7225	$80 \cdot 90 + 5^2$
45	2025	$40 \cdot 50 + 5^2$	95	9025	$90 \cdot 100 + 5^2$

#### Regel 2

Man erhält das Quadrat einer natürlichen Zahl mit Endziffer 5, indem man zum Produkt aus der nächstniedrigeren und der nächsthöheren Zehnerzahl die Zahl 25 addiert:

$$(\mathbf{10} \cdot \mathbf{k} \mathbf{5})^2 = [\mathbf{10} \cdot \mathbf{k}] \cdot [\mathbf{10} \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{1})] + \mathbf{5}^2 = \mathbf{100} \cdot \mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{1}) + \mathbf{5}^2$$

Dies lässt sich anschaulich begründen.

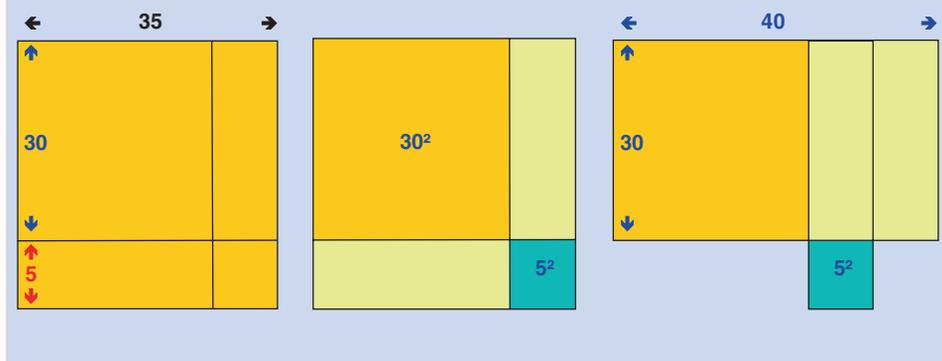
**Beispiel: Begründung der Regel für die Berechnung von  $35^2$** 

Nach binomischer Formel gilt:

$$35^2 = (30 + 5)^2 = 30^2 + 2 \cdot 30 \cdot 5 + 5^2$$

Das heißt, das Quadrat mit Seitenlänge 35 LE setzt sich zusammen aus dem Quadrat mit Seitenlänge 30, aus zwei Rechtecken mit den Seitenlängen 30 LE und 5 LE sowie aus einem Quadrat mit Seitenlänge 5 LE.

Durch Umlegen eines der beiden Rechtecke entsteht aus dem Quadrat mit Seitenlänge 30 LE und den beiden Rechtecken ein „großes“ Rechteck mit den Seitenlängen 30 LE und 40 LE.



*Historischer Hinweis:* Die Idee zur Veranschaulichung der 1. binomischen Formel findet man bereits in den *Elementen* des Euklid (Buch II, Proposition 4).

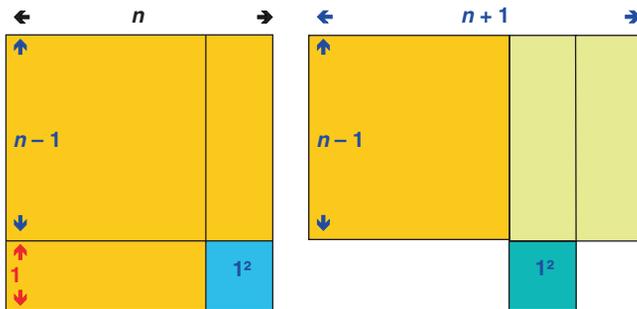
### 7.1.3 Rechnen mit Quadratzahlen: Produkte aus symmetrisch liegenden benachbarten Zahlen

Die geometrische Idee der Zerlegung eines Terms kann man auch wie folgt für die Berechnung von Quadratzahlen nutzen:

Ein Quadrat mit Seitenlänge  $n$  LE kann zerlegt werden in ein Quadrat mit Seitenlänge  $(n - 1)$  LE, zwei Rechtecke mit den Seitenlängen  $(n - 1)$  LE und 1 LE sowie ein Quadrat mit Seitenlänge 1 LE.

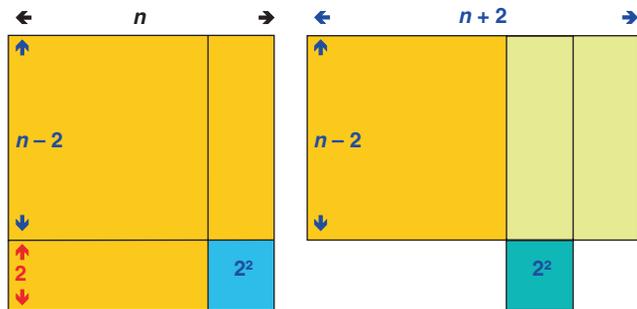
Durch Umlegen eines der Rechtecke erhält man ein „großes“ Rechteck mit den Seitenlängen  $(n - 1)$  LE und  $(n + 1)$  LE, d. h., es gilt (vgl. auch folgende Abbildung):

$$n^2 = (n - 1) \cdot (n + 1) + 1^2$$



Analog zu dieser Formel ergeben sich entsprechende Beziehungen für andere symmetrisch zu einer Zahl  $n$  liegende natürliche Zahlen (vgl. auch folgende Abbildung):

$$n^2 = (n - 2) \cdot (n + 2) + 2^2$$



### Regel 3

Das Quadrat einer natürlichen Zahl  $n$  ist gleich dem Produkt der beiden symmetrisch zu  $n$  liegenden Zahlen  $n - k$  und  $n + k$  ( $0 \leq k \leq n$ ), vermehrt um  $k^2$ :

$$n^2 = (n - k) \cdot (n + k) + k^2$$

Um diese Zusammenhänge besonders elegant zu nutzen, muss man den Abstand zur nächsten *Zehnerzahl* bestimmen – die nächste Zehnerzahl wird dann zu einem der Faktoren des Produktterms. Grundsätzlich kann man aber beide benachbarten Zehnerzahlen für die Rechnung benutzen, siehe dazu das Beispiel der Quadratberechnungen von natürlichen Zahlen zwischen 40 und 50 (vgl. Abb. 7.1).

$41^2 = 40 \cdot 42 + 1^2 = 1680 + 1 = 1681$	$41^2 = 32 \cdot 50 + 9^2 = 1600 + 81 = 1681$
$42^2 = 40 \cdot 44 + 2^2 = 1760 + 4 = 1764$	$42^2 = 34 \cdot 50 + 8^2 = 1700 + 64 = 1764$
$43^2 = 40 \cdot 46 + 3^2 = 1840 + 9 = 1849$	$43^2 = 36 \cdot 50 + 7^2 = 1800 + 49 = 1849$
$44^2 = 40 \cdot 48 + 4^2 = 1920 + 16 = 1936$	$44^2 = 38 \cdot 50 + 6^2 = 1900 + 36 = 1936$
$45^2 = 40 \cdot 50 + 5^2 = 2000 + 25 = 2025$	
$46^2 = 40 \cdot 52 + 6^2 = 2080 + 36 = 2116$	$46^2 = 42 \cdot 50 + 4^2 = 2100 + 16 = 2116$
$47^2 = 40 \cdot 54 + 7^2 = 2160 + 49 = 2209$	$47^2 = 44 \cdot 50 + 3^2 = 2200 + 9 = 2209$
$48^2 = 40 \cdot 56 + 8^2 = 2240 + 64 = 2304$	$48^2 = 46 \cdot 50 + 2^2 = 2300 + 4 = 2304$
$49^2 = 40 \cdot 58 + 9^2 = 2320 + 81 = 2401$	$49^2 = 48 \cdot 50 + 1^2 = 2400 + 1 = 2401$

**Abb. 7.1** Berechnen der Quadrate von natürlichen Zahlen zwischen 40 und 50

### 7.1.4 Rechnen mit Quadratzahlen: Kontrolle der Endziffern

Um Fehler beim Kopfrechnen zu vermeiden, beachte man eine Kontrollmöglichkeit hinsichtlich der Endziffern. Hier gilt nämlich eine einfache Regel (vgl. dazu Abb. 7.2):

#### Regel 4

Für alle natürlichen Zahlen  $k$  mit  $0 \leq k \leq 25$  gilt:

Die Zahlen  $k^2$ ,  $(50 - k)^2$ ,  $(50 + k)^2$  und  $(100 - k)^2$  stimmen in den letzten beiden Ziffern überein.

Daher genügt es für diese Kontrolle, wenn man die ersten 25 Quadratzahlen auswendig kennt.

Der Nachweis dieser Regel kann mithilfe der binomischen Formeln erfolgen.

Die Terme  $(50 - k)^2$ ,  $(50 + k)^2$  und  $(100 - k)^2$  lassen sich nämlich als Summe von  $k^2$  und einem Produktterm darstellen:

$$(50 - k)^2 = 50^2 - 2 \cdot 50 \cdot k + k^2 = 2500 - 100 \cdot k + k^2 = 100 \cdot (25 - k) + k^2$$

$$(50 + k)^2 = 50^2 + 2 \cdot 50 \cdot k + k^2 = 2500 + 100 \cdot k + k^2 = 100 \cdot (25 + k) + k^2$$

$$(100 - k)^2 = 100^2 - 2 \cdot 100 \cdot k + k^2 = 10.000 - 200 \cdot k + k^2 = 100 \cdot (100 - 2 \cdot k) + k^2$$

Da einer der Faktoren des vorderen Summanden 100 ist, sind die beiden Endziffern des Produkts gleich null, und daher hängen die letzten beiden Ziffern des gesamten Terms nur von den letzten beiden Ziffern von  $k^2$  ab.

$n$	$n^2$	$n$	$n^2$	$n$	$n^2$	$n$	$n^2$
00	00	50	2500	50	2500	100	10000
01	01	49	2401	51	2601	99	9801
02	04	48	2304	52	2704	98	9604
03	09	47	2209	53	2809	97	9409
04	16	46	2116	54	2916	96	9216
05	25	45	2025	55	3025	95	9025
06	36	44	1936	56	3136	94	8836
07	49	43	1849	57	3249	93	8649
08	64	42	1764	58	3364	92	8464
09	81	41	1681	59	3481	91	8281
10	100	40	1600	60	3600	90	8100
11	121	39	1521	61	3721	89	7921
12	144	38	1444	62	3844	88	7744
13	169	37	1369	63	3969	87	7569
14	196	36	1296	64	4096	86	7396
15	225	35	1225	65	4225	85	7225
16	256	34	1156	66	4356	84	7056
17	289	33	1089	67	4489	83	6889
18	324	32	1024	68	4624	82	6724
19	361	31	961	69	4761	81	6561
20	400	30	900	70	4900	80	6400
21	441	29	841	71	5041	79	6241
22	484	28	784	72	5184	78	6084
23	529	27	729	73	5329	77	5929
24	576	26	676	74	5476	76	5776
25	625	25	625	75	5625	75	5625

Abb. 7.2 Quadrate der natürlichen Zahlen zwischen 0 und 100

### 7.1.5 Rechnen mit Quadratzahlen: Vergleich der Methoden

In den vorhergehenden Abschnitten wurden verschiedene Methoden vorgestellt, die zum Berechnen der Quadratzahlen im Kopf genutzt werden können.

In den folgenden Beispielen wird eine weitere Methode (Methode 3) vorgestellt, bei der die 1. binomische Formel angewandt wird.

### Beispiel 1: Berechnung von $37^2$

- **Kontrolle der Endziffern:**  $37^2$  hat die gleichen Endziffern wie  $13^2 = 169$ .
- **Methode 1 (schrittweise Berechnung)**  
Hilfsgröße:  $35^2 = 30 \cdot 40 + 5^2 = 1225$

$$37^2 = 35^2 + (35 + 36) + (36 + 37) = 35^2 + 4 \cdot 36 = 1225 + 144 = 1369$$

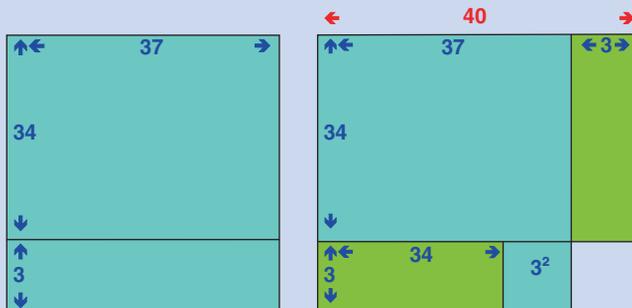
Man könnte sich dies auch wie folgt veranschaulichen:

Um das 35er-Quadrat zu einem 37er-Quadrat zu ergänzen, benötigt man zusätzlich  $35 + 36 + 36 + 37$  Kästchen.

- **Methode 2 (Berechnung mithilfe einer Zehnerzahl und eines symmetrisch liegenden Partners)**

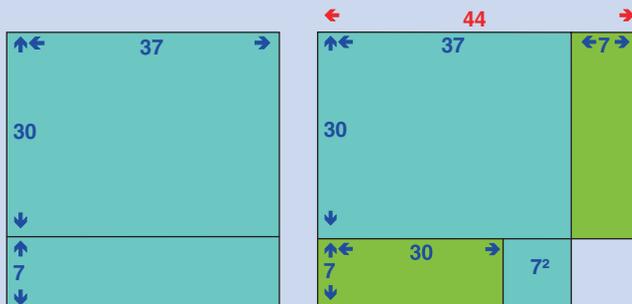
#### Alternative 1:

$$37^2 = (40 - 3) \cdot (34 + 3) = 40 \cdot 34 + 3^2 = 1360 + 9 = 1369$$



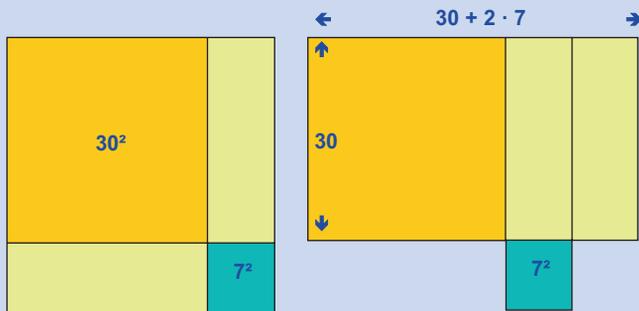
#### Alternative 2:

$$37^2 = (30 + 7) \cdot (44 - 7) + 7^2 = 30 \cdot 44 + 7^2 = 1320 + 49 = 1369$$



- **Methode 3 (Anwenden der 1. binomischen Formel und Umlegen)**

$$\begin{aligned}
 37^2 &= (30 + 7)^2 = 30^2 + 2 \cdot 30 \cdot 7 + 7^2 = 30 \cdot (30 + 2 \cdot 7) + 7^2 \\
 &= 30 \cdot 44 + 7^2 = 1320 + 49 = 1369
 \end{aligned}$$



### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

A 7.1 Berechnen Sie nach den drei Methoden im Kopf die Quadratzahl von 58 [von 84, von 73].

## 7.2 Zahlenzyklen

Achtet man beim Quadrieren von natürlichen Zahlen nur auf die letzte Ziffer, dann zeigen sich folgende Übergänge:

$$1 \rightarrow 1; 2 \rightarrow 4; 3 \rightarrow 9; 4 \rightarrow 6; 5 \rightarrow 5; 6 \rightarrow 6; 7 \rightarrow 9; 8 \rightarrow 4; 9 \rightarrow 1; 0 \rightarrow 0$$

Die Endziffern 1, 5, 6 und 0 führen auf sich selbst. Die anderen Endziffern sind in **Zahlenketten** enthalten:

$$2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 6; 3 \rightarrow 9 \rightarrow 1 \rightarrow 1; 7 \rightarrow 9 \rightarrow 1 \rightarrow 1; 8 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 6$$

Startet man also mit einer natürlichen Zahl, deren letzte Ziffer eine 2 ist, dann endet diese Kette ebenso auf der 6 wie eine Kette, die mit der Ziffer 8 beginnt. Gleiches gilt für Ketten, die mit der Endziffer 3 oder der Endziffer 7 starten.

Spannender wird die Untersuchung für die letzten beiden Ziffern einer natürlichen Zahl. Hier kann man beim fortgesetzten Quadrieren bemerkenswerte **Zahlenzyklen** entdecken.

**Beispiel: Ein Zahlenzyklus, der sich aus der Startzahl 17 ergibt**

$$17 \rightarrow 89 \rightarrow 21 \rightarrow 41 \rightarrow 81 \rightarrow 61 \rightarrow 21 \rightarrow 41 \rightarrow \dots$$

Wenn man irgendeine Zahl quadriert, die auf 17 endet, dann endet die Quadratzahl davon stets auf 89. Das Quadrat dieser Zahl endet stets auf 21, deren Quadrat endet auf 41, deren Quadrat endet auf 81, deren Quadrat endet auf 61, deren Quadrat endet auf 21.

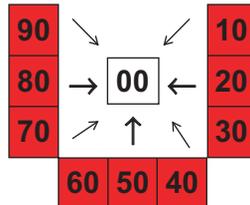
Danach wiederholt sich die Folge 21 – 41 – 81 – 61 unendlich oft; der Zyklus hat die Länge 4.

Im Folgenden untersuchen wir systematisch alle Startzahlen zwischen den Zahlen mit Endziffer 00 und Endziffer 99.

**7.2.1 Zahlenzyklen, die nach einem oder zwei Schritten enden**

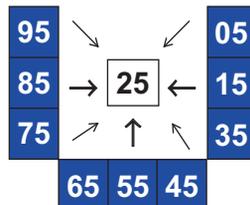
Die Quadrate von natürlichen Zahlen, deren Endziffer 0 ist, haben „00“ als Endziffern.

Diese Zyklen enden also alle auf „00“.



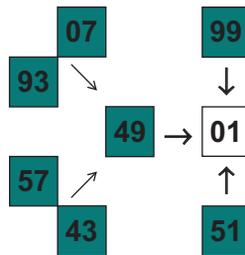
Die Quadrate von natürlichen Zahlen, deren Endziffer 5 ist, haben „25“ als Endziffern.

Diese Zyklen enden also alle auf „25“.



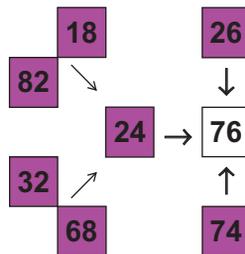
Die Quadrate von 07, 43, 57 und 93 haben „49“ als Endziffern. Die Quadrate von 01, 49, 51 und 99 haben „01“ als Endziffern.

Diese Zyklen enden also alle auf 01.



Die Quadrate von 18, 32, 68 und 82 haben „24“ als Endziffern. Die Quadrate von 24, 26, 74 und 76 haben „76“ als Endziffern.

Diese Zyklen enden also alle auf 76.



### 7.2.2 Periodische Zyklen

Die folgenden Zahlenzyklen enden in einem periodisch en 4er-Zyklus:

- Die Quadrate von 02, 48, 52 und 98 haben „04“ als Endziffern; die Quadrate von 04, 46, 54 und 96 haben „16“ als Endziffern.
- Die Quadrate von 12, 38, 62 und 88 haben „44“ als Endziffern; die Quadrate von 06, 44, 56 und 94 haben „36“ als Endziffern.
- Die Quadrate von 22, 28, 72 und 78 haben „84“ als Endziffern; die Quadrate von 16, 34, 66 und 84 haben „56“ als Endziffern.
- Die Quadrate von 08, 42, 58 und 92 haben „64“ als Endziffern; die Quadrate von 14, 36, 64 und 86 haben „96“ als Endziffern.

Die Quadrate von 16, 56, 36 und 96 bilden einen periodischen 4er-Zyklus (vgl. Abb. 7.3a).

- Die Quadrate von 17, 33, 67 und 83 haben „89“ als Endziffern; die Quadrate von 11, 39, 61 und 89 haben „21“ als Endziffern.
- Die Quadrate von 23, 27, 73 und 77 haben „29“ als Endziffern; die Quadrate von 21, 29, 71 und 79 haben „41“ als Endziffern.



Quadrieren einer natürlichen Zahl auftreten, und anschließend, wie die letzten beiden Ziffern lauten. Hierbei handelt es sich um eine Kongruenzrechnung bzgl. 10 bzw. bzgl. 100. Denn wenn man nur die letzten beiden Ziffern einer natürlichen Zahl berücksichtigt, dann betrachtet man nur den Rest der natürlichen Zahl nach Division durch 100, also nur Zahlen modulo 100.

Aus unserem Alltag kennen wir die Kongruenzrechnung modulo 24, denn der Tag hat 24 h. Da unsere Uhren meist nur zwölf Stunden anzeigen, rechnen wir modulo 12.

Wenn wir beispielsweise ausrechnen wollen, wie viel Uhr es in 77 h ist, dann addieren wir die 77 zur aktuellen Uhrzeit, dividieren die Summe durch 24 und interessieren uns nur für den Rest, der nach Division durch 24 bleibt. In der Praxis wird man statt der Division durch 24 vielleicht eher die Zahl 24 so oft abziehen, bis ein Rest übrig bleibt, der kleiner ist als 24. Dies ist aber genau die Methode, mit der man das Dividieren in der Grundschule einführt.

#### Beispiel: Rechnen modulo 24

Die aktuelle Uhrzeit ist 10 Uhr; in 77 h ist es dann

$$10 + 77(\text{mod } 24) \equiv 87 (\text{mod } 24) \equiv 15 (\text{mod } 24),$$

also 15 Uhr.

Die Schreibweise „ $\equiv$ “ für die *Gleichheit von Zahlen bzgl. der Restbildung* wurde von C. F. Gauß eingeführt; man verwendet hierbei die Sprechweise „87 ist kongruent 15 modulo 24“.

Untersucht man die Reste modulo 24 nach dem Quadrieren von natürlichen Zahlen, dann fällt auf, dass dies ziemlich langweilig ist: Es treten als Reste verständlicherweise nur die Quadratzahlen 0, 1, 4, 9 und 16 auf, außerdem noch die Zahl 12 (vgl. folgende Tabelle).

Umfangreichere Zyklen entstehen nicht – spätestens nach dem zweiten Quadrieren endet eine Kette,

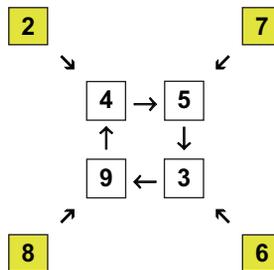
z. B.  $10 \rightarrow 4 \rightarrow 16 \rightarrow 16$ .

Auffallend ist aber auch hier die Symmetrie der Beziehungen.

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$n^2$	0	1	4	9	16	1	12	1	16	9	4	1
$n$	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
$n^2$	0	1	4	9	16	1	12	1	16	9	4	1

Ändert man jedoch die Zahl, bezüglich derer der Rest gebildet wird, so kann man interessante(re) Eigenschaften entdecken.

Beispielsweise findet man bzgl. der Kongruenzen modulo 11 die in der folgenden Abbildung dargestellte Struktur:



### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 7.2** Untersuchen Sie, welche Zyklen beim Quadrieren modulo  $n$  auftreten.

1. ein 6er-Zyklus bei  $n = 19$ ;
2. ein 10er-Zyklus bei  $n = 23$ ;
3. ein komplexer 4er-Zyklus bei  $n = 25$ ;
4. ein 6er-Zyklus bei  $n = 27$ .

*Hinweis:* Für die systematische Untersuchung von Zyklen modulo  $n$  empfiehlt sich der Einsatz einer Tabellenkalkulation. In Excel® kann man hierfür den Befehl = Rest(Zahl; Divisor) verwenden.

## 7.4 Zahlenzyklen bei höheren Potenzen

Im Folgenden werden Anregungen gegeben, sich mit den Gesetzmäßigkeiten bei Kubikzahlen (3. Potenz) näher zu beschäftigen. Aus den abgedruckten Grafiken können verschiedene Eigenschaften abgelesen werden. Für die zugehörigen formalen Beweise benötigt man allerdings Kenntnisse der binomischen Formeln für 3. Potenzen.

### 7.4.1 Untersuchungen der letzten beiden Endziffern von Kubikzahlen

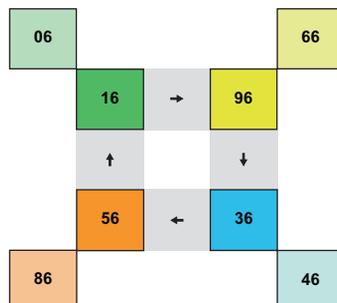
Betrachtet man die letzten beiden Ziffern von natürlichen Zahlen und bestimmt die letzten beiden Ziffern der zugehörigen Kubikzahlen, dann entdeckt man bei Zahlen mit den Endziffern 1 bis 4 und 6 bis 9 eine Reihe von interessanten Zusammenhängen.

Welche Eigenschaften bzgl. der Endziffern 0 bzw. 5 gelten, kann man sich leicht selbst überlegen.

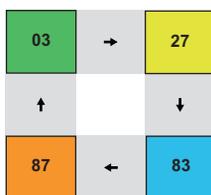
- Die 3. Potenz der Zahlen mit den Endziffern „01“ bzw. „99“ bzw. „49“ bzw. „51“ endet jeweils auf diesen Endziffern.
- Die 3. Potenz von 26 hat die Endziffern „76“; die dritte Potenz von 76 hat die Endziffern „76“. Die 3. Potenz von 74 hat die Endziffern „24“; die dritte Potenz von 24 hat die Endziffern „24“.
- Die 3. Potenz von 07 hat die Endziffern „43“; die dritte Potenz von 43 hat die Endziffern „07“. Die 3. Potenz von 93 hat die Endziffern „57“; die dritte Potenz von 57 hat die Endziffern „93“.
- Die 3. Potenz von 18 hat die Endziffern „32“; die dritte Potenz von 32 hat die Endziffern „68“. Die 3. Potenz von 82 hat die Endziffern „68“; die dritte Potenz von 68 hat die Endziffern „32“.



- Die 3. Potenz von 06 hat die Endziffern „16“; die dritte Potenz von 16 hat die Endziffern „96“. Die 3. Potenz von 66 hat die Endziffern „96“; die dritte Potenz von 96 hat die Endziffern „36“. Die 3. Potenz von 46 hat die Endziffern „36“; die dritte Potenz von 36 hat die Endziffern „56“. Die 3. Potenz von 86 hat die Endziffern „56“; die dritte Potenz von 56 hat die Endziffern „16“. Die Zahlen mit den Endziffern „16“, „96“, „36“ und „56“ bilden einen periodischen Zahlenzyklus der Länge 4.



- Die Zahlen mit den Endziffern „03“, „27“, „83“ und „87“ bilden einen periodischen Zahlenzyklus der Länge 4.



#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 7.3** Untersuchen Sie, welche anderen periodischen Zahlenzyklen auftreten.

### 7.4.2 Untersuchung der letzten drei Endziffern einer Kubikzahl

Natürlich ist es viel interessanter, bei der 3. Potenz von natürlichen Zahlen nicht nur die beiden letzten Ziffern zu betrachten, sondern die letzten drei Ziffern der Zahl und die drei Endziffern der zugehörigen Kubikzahlen. Uninteressant sind alle natürlichen Zahlen mit der Endziffer 0, denn deren 3. Potenzen haben die Endziffern 000.

In den im Folgenden gegebenen Anregungen werden verschiedene Typen von Zyklen aufgeführt, zu denen manchmal ein Beispiel genannt wird.

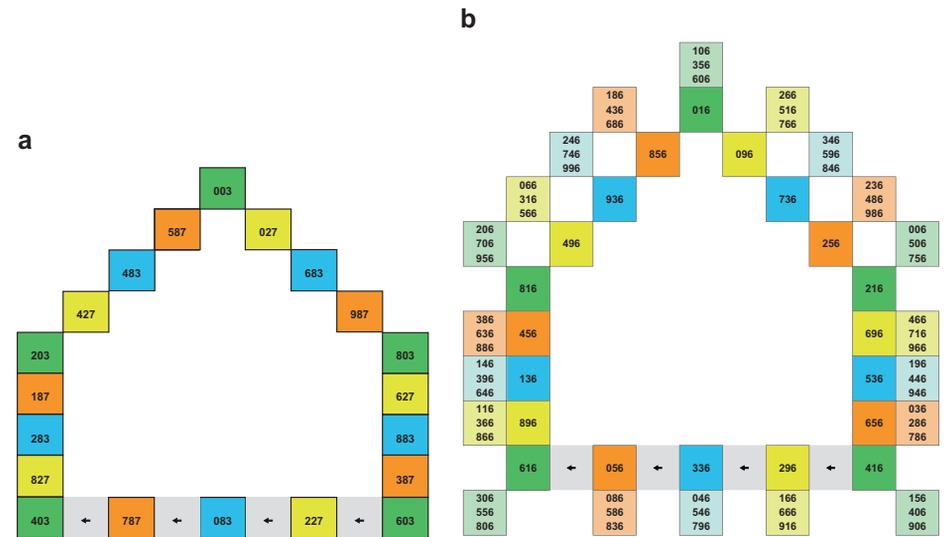
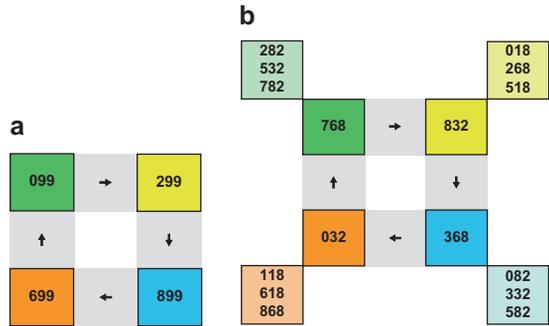
#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

##### A 7.4

- Nicht besonders interessant sind die Zyklen der Zahlen, deren Endziffer 5 ist. Zeigen Sie: Die natürlichen Zahlen, deren Endziffer 5 ist, führen in der 3. Potenz auf Zahlen mit den Endziffern 125, 875, 375 oder 625.
- Auch gibt es Zahlen, deren drei Endziffern immer auf sich selbst zurückführen, z. B. 001 und 999. Überlegen Sie, welche anderen (sechs) natürlichen Zahlen in der 3. Potenz auf sich selbst zurückführen.
- Es gibt Partnerzahlen, die wechselseitig aufeinander führen, z. B. 307 und 193. Überlegen Sie, welche anderen (zwei) Paare von natürlichen Zahlen in der 3. Potenz wechselseitig aufeinander führen.
- Die Zahlen mit den Endziffern 124, 374 und 874 führen in der 3. Potenz auf eine Zahl mit den Endziffern 624. Welche anderen Zahlen haben eine analoge Eigenschaft wie die Zahlen 124, 374 und 874?

5. Eine Besonderheit stellen die Zahlen mit den Endziffern 068, 318 und 818 dar, die in der 3. Potenz auf die Endziffern 432 führen. Hierzu gehören Partnerzahlen. Welche sind dies?
6. Die übrigen natürlichen Zahlen bilden durch das Potenzieren mit 3 einen Vierer-Zyklus (vgl. Abb. 7.4a, b) oder sogar einen 20er-Zyklus (vgl. Abb. 7.5a, b).

**Abb. 7.4** a, b Beispiele von 4er-Zyklen bei Kubikzahlen (modulo 1000)



**Abb. 7.5** a, b Beispiele von 20er-Zyklen bei Kubikzahlen (modulo 1000)

## 7.5 Hinweise auf weiterführende Literatur

Bei **Wikipedia** findet man in deutscher (englischer, französischer) Sprache weitere Informationen und Literatur zu den Stichwörtern:

- Kopfrechnen (Mental calculation, –)
- Kongruenz (Modulo operation, Congruence sur les entiers/Modulo (opération))

Umfangreiche fachliche Informationen findet man auf **Wolfram Mathworld** unter dem Stichwort:

- Congruence

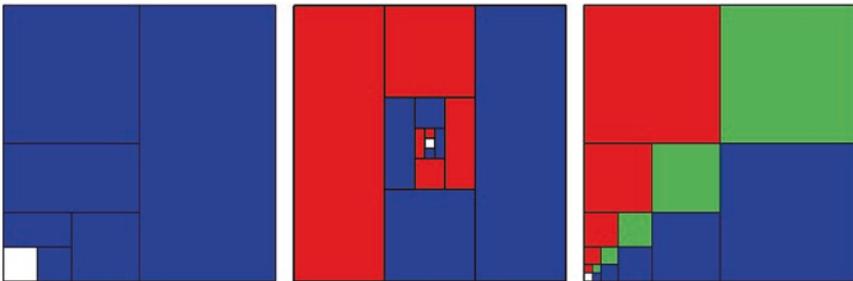
Unter den vielen anregenden Beiträgen in

- Erickson, Martin, *Mathematische Appetithäppchen*, Springer Spektrum, Berlin/Heidelberg, 2015

findet unter dem Stichwort „Quadrierplan“ einen Zyklus modulo 25 sowie weitere Hinweise zu diesem Thema.

*Das Ganze ist mehr als die Summe seiner Teile.*

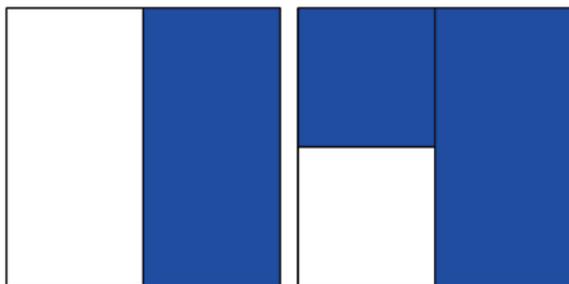
(Aristoteles, griechischer Philosoph, 384–322 v. Chr.)



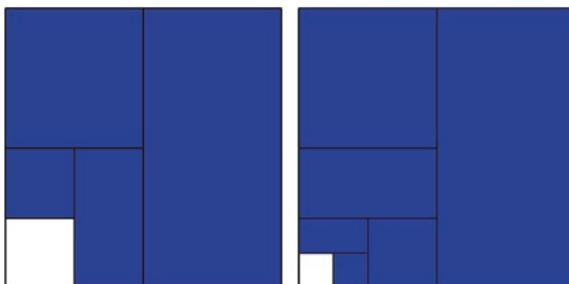
Ein regelmäßiges Vieleck, z. B. ein Quadrat, kann man durch fortgesetzte Teilung auf unterschiedliche Weise zerlegen.

## 8.1 Fortgesetzte Halbierungen

In den folgenden Abbildungen ist eine der vielen Möglichkeiten dargestellt, wie die fortgesetzte Halbierung eines Quadrats aussehen kann: Zunächst teilt man das Quadrat in zwei zueinander kongruente Rechtecke. Eines der beiden Rechtecke wird blau gefärbt, das andere bleibt weiß. Dann wird das weiße Rechteck in zwei Quadrate geteilt. Eines der beiden Quadrate wird blau gefärbt, das andere bleibt weiß.



Nach diesen beiden Schritten liegt für das ungefärbte weiße Quadrat die gleiche Situation vor wie am Anfang. In den nächsten Schritten wird dieses weiße Quadrat zunächst wieder längs geteilt und eine Hälfte blau gefärbt, dann das weiße Rechteck quer geteilt und eines der Quadrate blau gefärbt.



Wenn man die Teilung des weißen Quadrats in zwei Rechtecke, die Teilung eines der beiden Rechtecke in zwei Quadrate und die Färbung jeweils einer der durch Teilung entstandenen Teilflächen fortsetzt, wird die nicht gefärbte Fläche des Ausgangsquadrats immer kleiner. Wenn man den Prozess in Gedanken unendlich oft durchführt, ist das gesamte Ausgangsquadrat gefärbt.

Das Ausgangsquadrat wird durch den fortgesetzten Teilungsvorgang in eine Folge von Rechtecken und Quadraten aufgeteilt, die jeweils halb so groß sind wie ihre Vorgänger.

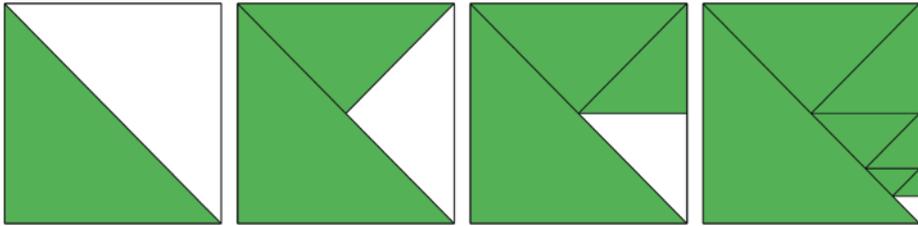
Für den Flächeninhalt des Quadrats und seiner Teilflächen gilt daher:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \dots &= \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots &= \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \dots = 1 \end{aligned}$$

Also:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \dots = 1 \quad (8.1)$$

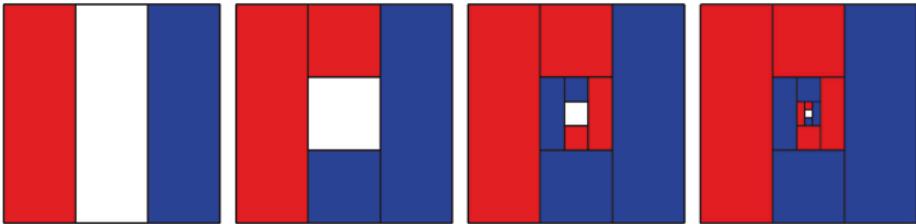
Die Halbierung eines Quadrats kann auch mithilfe einer Diagonalen erfolgen: Durch diese Halbierung entstehen zwei zueinander kongruente gleichschenkelig-rechtwinklige Dreiecke. Eines der entstehenden Dreiecke wird gefärbt und das andere im nächsten Schritt mithilfe der Höhe (Symmetrieachse) halbiert, das Verfahren dann unendlich oft so fortgesetzt. Im Unterschied zum ersten Teilungsverfahren liegt hier vom 2. Schritt an stets ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck vor, das halbiert wird.



## 8.2 Fortgesetzte Dreiteilungen

Ein Quadrat kann durch eine fortgesetzte Dreiteilung in zwei gleich große Teilflächen zerlegt werden:

Zunächst wird das Ausgangsquadrat in drei zueinander kongruente Rechtecke unterteilt. Eines der äußeren Rechtecke wird blau gefärbt, das andere rot; das mittlere Rechteck bleibt weiß. Das mittlere der Rechtecke kann in drei gleich große Quadrate geteilt werden. Das obere der Quadrate wird rot, das untere blau gefärbt, das mittlere bleibt weiß.



Nach diesen beiden Schritten liegt für das ungefärbte weiße Quadrat die gleiche Situation vor wie am Anfang. In den nächsten Schritten wird dieses weiße Quadrat zunächst wieder durch senkrechte Linien dreigeteilt und diesmal das links liegende Drittel blau, das rechts liegende Drittel rot gefärbt, dann das weiße Rechteck durch waagerechte Linien in drei Teile geteilt und diesmal unten rot und oben blau gefärbt.

Wenn man die Teilung des weißen Quadrats bzw. des weißen Rechtecks und die Färbung der durch Teilung entstandenen Teilflächen fortsetzt, wird die nicht gefärbte Fläche des Ausgangsquadrats immer kleiner. Wenn man den Prozess in Gedanken unendlich oft durchführt, ist das gesamte Ausgangsquadrat in zwei Farben gefärbt.

Dadurch, dass bei den ungeraden Schritten die Farben im linken bzw. rechten Rechteck und bei den geraden Schritten die Farben im oben bzw. unten liegenden Quadrat vertauscht wurden, entstand eine spiralförmige Zerlegung des Ausgangsquadrats.

Für den Flächeninhalt der rot bzw. der blau gefärbten Teilflächen des Quadrats und seiner Teilflächen gilt also:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \dots = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \dots = \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \dots = \frac{1}{2}$$

Also:

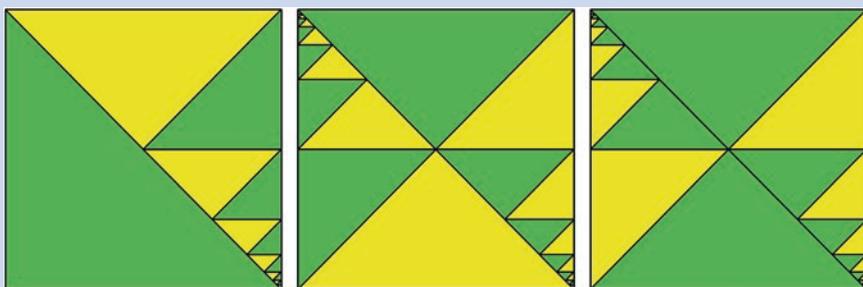
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \dots = \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \dots = \frac{1}{2} \quad (8.2)$$

#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 8.1:** Welche Figur ergibt sich, wenn die Färbung im 3. und 4. Schritt wie im 1. und 2. Schritt erfolgt wäre (also ohne Vertauschung von links und rechts bzw. oben und unten)?

**A 8.2:** Wie müsste die Dreiteilung des Quadrats erfolgen, damit nach unendlich vielen Schritten die linke Hälfte des Ausgangsquadrats rot und die rechte Hälfte blau gefärbt ist?

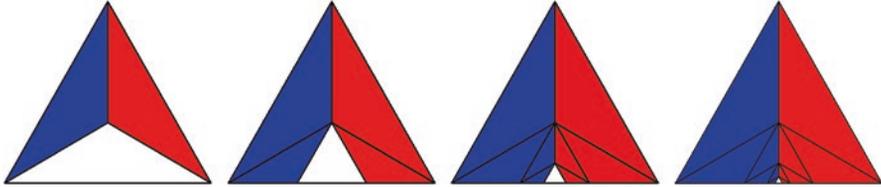
**A 8.3:** In welcher Weise wurden das Quadrat und die gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecke in den folgenden Abbildungen jeweils unterteilt und gefärbt? Welchen Anteil haben jeweils die gelb gefärbten Teilflächen an der Fläche des Ausgangsquadrats?



Als Ausgangsfigur kann man statt eines Quadrats auch ein gleichseitiges Dreieck wählen, dessen Flächeninhalt 1 FE beträgt:

Das gleichseitige Dreieck wird in drei zueinander kongruente Teile geteilt, indem man den Mittelpunkt des Dreiecks mit den Eckpunkten verbindet. Zwei Teilflächen werden gefärbt, ein Teildreieck bleibt weiß.

Im nächsten Schritt wird das weiße Dreieck in drei gleich große Teildreiecke unterteilt. Dies geschieht, indem man die Grundseite drittelt. Da die Höhen der entstehenden Teildreiecke gleich lang sind, haben die Dreiecke den gleichen Flächeninhalt. Zwei der Teildreiecke werden gefärbt, eines bleibt weiß.



Da dieses weiße Dreieck wieder ein gleichseitiges Dreieck ist, können die Schritte 1 und 2 auf dieses Dreieck angewandt werden. Wenn man den Prozess in Gedanken unendlich oft durchführt, ist das Ausgangsdreieck in zwei Farben gefärbt und damit Formel (8.2) bestätigt.

#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 8.4:** Wie groß ist die Seitenlänge eines gleichseitigen Dreiecks mit dem Flächeninhalt 1 FE?

### 8.3 Fortgesetzte Vierteilungen

Das Ausgangsquadrat wird in vier gleich große Teilquadrate aufgeteilt. Drei der Quadrate werden rot, grün und blau gefärbt, ein Quadrat bleibt weiß. Dieses weiße Quadrat wird dann im 2. Schritt wieder in vier gleich große Teilquadrate aufgeteilt. Drei der Quadrate werden rot, grün und blau gefärbt, ein Quadrat bleibt weiß, usw.

Wenn man die Teilung des weißen Quadrats und die Färbung der durch Teilung entstandenen Teilquadrate fortsetzt, dann wird die nicht gefärbte Fläche des Ausgangsquadrats immer kleiner. Wenn man den Prozess in Gedanken unendlich oft durchführt, ist das gesamte Quadrat mit drei Farben gefärbt.



Für den Flächeninhalt der rot bzw. blau bzw. grün gefärbten Teilflächen des Quadrats und seiner Teilflächen gilt daher:

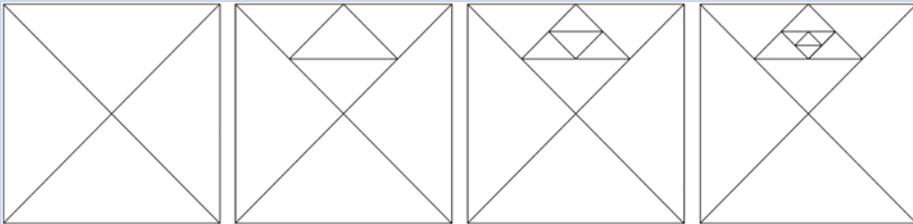
$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \dots \\ & = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{1024} + \dots = \frac{1}{4^1} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{4^5} + \dots = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Also:

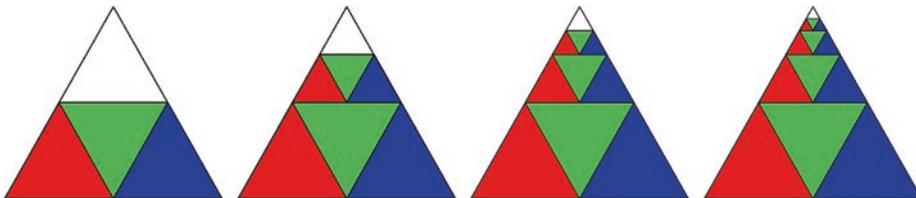
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{1024} + \dots = \frac{1}{4^1} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{4^5} + \dots = \frac{1}{3} \quad (8.3)$$

#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

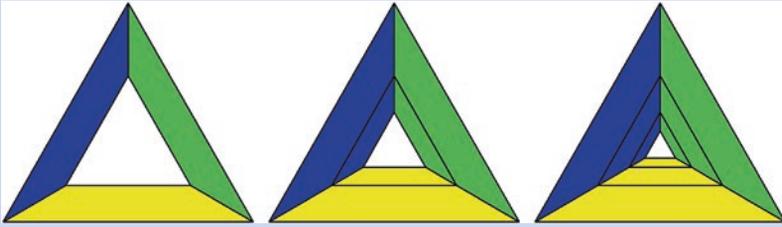
**A 8.5:** In welcher Weise kann man die Teilflächen des Quadrats in den folgenden Abbildungen mit drei Farben einfärben, damit auch hier die Gültigkeit der Formel (8.3) ablesbar ist?



Für die fortgesetzte Vierteilung kann man als Ausgangsfigur statt eines Quadrats auch ein gleichseitiges Dreieck wählen, dessen Flächeninhalt 1 FE beträgt (vgl. die folgenden Abbildungen).



**A 8.6:** Beschreiben Sie den Vorgang der Teilung in den folgenden Abbildungen genauer. Geben Sie insbesondere die Seitenlängen der auftretenden Trapeze an. Welche Besonderheit gilt hier für die Seitenlängen der Trapeze?

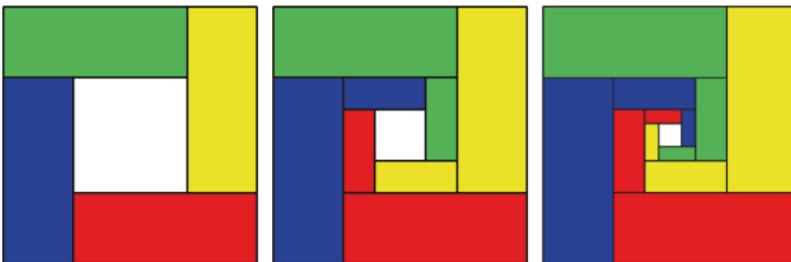


**A 8.7:** Beschreiben Sie den Vorgang der Teilung in den folgenden Abbildungen. Geben Sie insbesondere die Seitenlängen der auftretenden Trapeze an.



## 8.4 Fortgesetzte Fünfteilungen

Eine der vielen Möglichkeiten, wie man das Ausgangsquadrat in fünf gleich große Teilflächen aufteilen und mit vier Farben färben kann, kann den folgenden Abbildungen entnommen werden. Im nächsten Schritt wird dann das nicht gefärbte Quadrat so in fünf Teilflächen geteilt und vier davon gefärbt, dass wieder ein weißes Quadrat übrig bleibt.



Wenn man die Teilung des weißen Quadrats entsprechend fortsetzt, wird die nicht gefärbte Fläche des Ausgangsquadrats immer kleiner. Wenn man den Prozess in Gedanken unendlich oft durchführt, ist das gesamte Quadrat mit vier Farben gefärbt.

Für den Flächeninhalt der rot bzw. blau bzw. grün bzw. gelb gefärbten Teilflächen des Quadrats und seiner Teilflächen gilt daher jeweils:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \dots \\ & = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \frac{1}{625} + \frac{1}{3025} + \dots = \frac{1}{5^1} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^5} + \dots = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

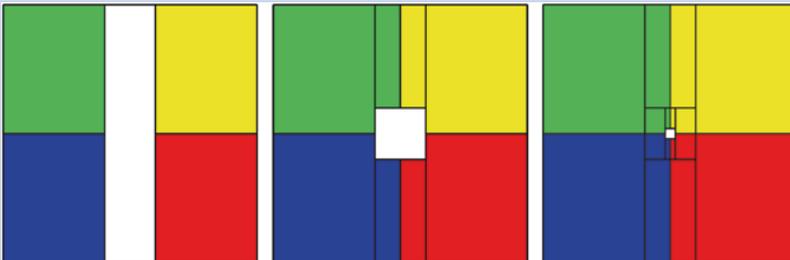
Also:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \frac{1}{625} + \frac{1}{3025} + \dots = \frac{1}{5^1} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^5} + \dots = \frac{1}{4} \quad (8.4)$$

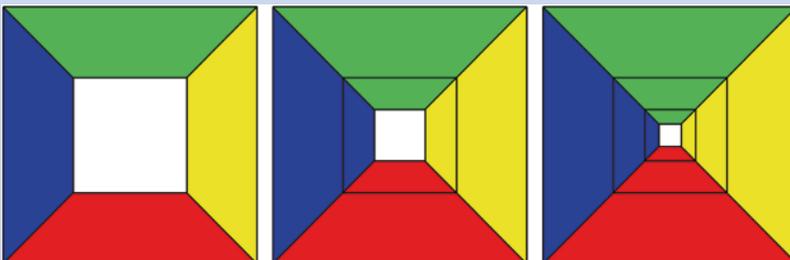
### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 8.8:** Beschreiben Sie den Vorgang der Fünfteilung in den vorstehenden Abbildungen genauer. Geben Sie insbesondere die Seitenlängen der auftretenden Rechtecke an.

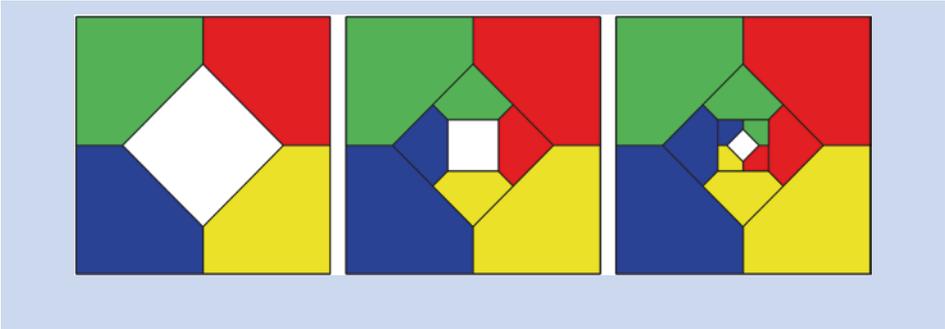
**A 8.9:** Beschreiben Sie den Vorgang der Teilung in den folgenden Abbildungen genauer. Geben Sie insbesondere die Seitenlängen der auftretenden Rechtecke an.



**A 8.10:** Beschreiben Sie den folgenden Vorgang der Fünfteilung eines Quadrats genauer. Geben Sie insbesondere die Seitenlängen der auftretenden Trapeze an.



**A 8.11:** Beschreiben Sie das in den folgenden Abbildungen dargestellte Verfahren der fortgesetzten Fünfteilung eines Quadrats genauer. Geben Sie insbesondere die Seitenlängen der auftretenden Fünfecke an.



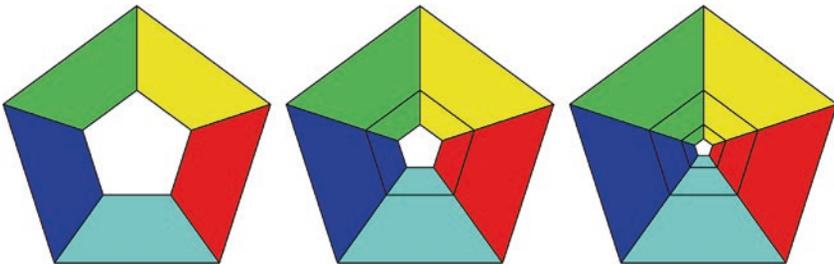
## 8.5 Fortgesetzte Teilungen in $n$ gleich große Teilflächen

Eine zu den Formeln (8.1) bis (8.4) analoge Gesetzmäßigkeit für die Summe der Potenzen von  $\frac{1}{6}$ , also

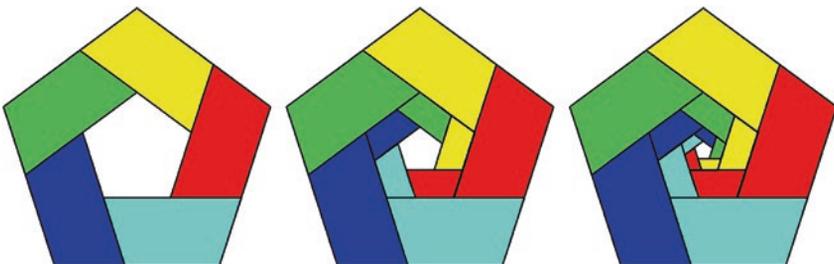
$$\frac{1}{6^1} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{6^5} + \dots = \frac{1}{5}, \quad (8.5)$$

findet man durch fortgesetzte Aufteilung der Fläche eines regelmäßigen Fünfecks.

### 1. Möglichkeit:



### 2. Möglichkeit:



Die den beiden Teilungsverfahren zugrunde liegenden Ideen lassen sich auf beliebige regelmäßige  $n$ -Ecke übertragen.

Die erste Idee entspricht der Zerlegung von regelmäßigen  $n$ -Ecken in achsensymmetrische Dreiecke, deren Grundseite auch Grundseite des  $n$ -Ecks und dessen Spitze der Mittelpunkt des  $n$ -Ecks ist. Die achsensymmetrischen Dreiecke ergeben sich dann als unendliche „Summe“ von symmetrischen Trapezen.

Die andere Idee führt zu einer spiralartigen Zerlegung der regelmäßigen  $n$ -Ecke. Im Innern der  $n$ -Ecke wird wieder ein zur Grundfigur ähnliches regelmäßiges  $n$ -Eck eingezeichnet, dessen Flächeninhalt genau dem  $(n + 1)$ -ten Teil der Gesamtfläche entspricht. Der äußere Bereich wird in zueinander kongruente Trapeze zerlegt.

Aus beiden Flächenaufteilungen ergibt sich allgemein:

#### Formel

#### Unendliche Summe mit Grenzwert $\frac{1}{n}$

Für natürliche Zahlen  $n$  mit  $n \geq 1$  gilt:

$$\frac{1}{(n+1)^1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots = \frac{1}{n} \quad (8.6)$$

## 8.6 Geometrische Folgen und Reihen

Formel (8.6) ist ein Spezialfall der Grenzwertformel für sogenannte geometrische Reihen.

#### Definition

#### Geometrische Folge, geometrische Reihe

Eine Zahlenfolge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt geometrisch, wenn der Quotient  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$  von je zwei aufeinanderfolgenden Folgengliedern konstant ist; diese Konstante wird üblicherweise mit  $q$  bezeichnet.

Die zu einer geometrischen Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gehörige Summenfolge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  wird als **geometrische Reihe** bezeichnet.

Die Glieder einer geometrischen Folge berechnen sich für  $n > 1$  rekursiv nach der Vorschrift  $a_{n+1} = a_n \cdot q$  (gemäß Definition) und explizit mithilfe von  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ , wobei  $a_1$  das Anfangsglied der Folge ist.

Für die zugehörige geometrische Reihe gilt:

**Satz****Berechnung der Folgenglieder einer geometrischen Reihe**

Gegeben ist eine geometrische Folge mit Startwert (Anfangsglied)  $a_1$  und konstantem Faktor  $q$ .

Dann gilt für die Glieder  $s_n$  der zugehörigen geometrischen Reihe:

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad (8.7)$$

Für  $q < 1$  konvergiert die geometrische Reihe gegen den Grenzwert  $s$ :

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n) = a_1 \cdot \frac{1}{1 - q} \quad (8.8)$$

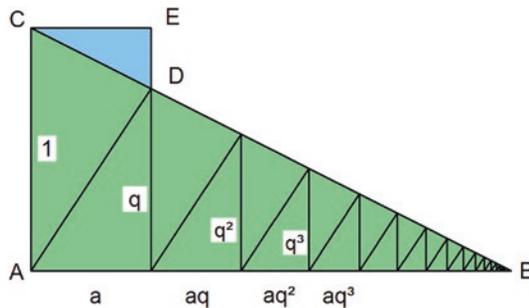
Der Beweis der Formel (8.7) kann durch Multiplikation beider Seiten der Gleichung mit dem Faktor  $(1 - q)$  erfolgen (vgl. hierzu z. B. den Wikipedia-Artikel).

Die Gültigkeit der Formel (8.8) für den Grenzwert der geometrischen Reihe mit dem Anfangsglied  $a = a_1$  ergibt sich aus der folgenden Abbildung.

Hier sind die Dreiecke  $ABC$  und  $ECD$  zueinander ähnlich, d. h., es gilt:

$AB : AC = CE : DE$ , also:

$$(a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots) : 1 = a : (1 - q)$$



In den vorangegangenen Abschnitten wurden spezielle geometrische Folgen untersucht, und zwar

in Abschn. 8.1 mit  $a_1 = \frac{1}{2}$  und  $q = \frac{1}{2}$ , in Abschn. 8.2 mit  $a_1 = \frac{1}{3}$  und  $q = \frac{1}{3}$ ,

in Abschn. 8.3 mit  $a_1 = \frac{1}{4}$  und  $q = \frac{1}{4}$ , in Abschn. 8.4 mit  $a_1 = \frac{1}{5}$  und  $q = \frac{1}{5}$ ,

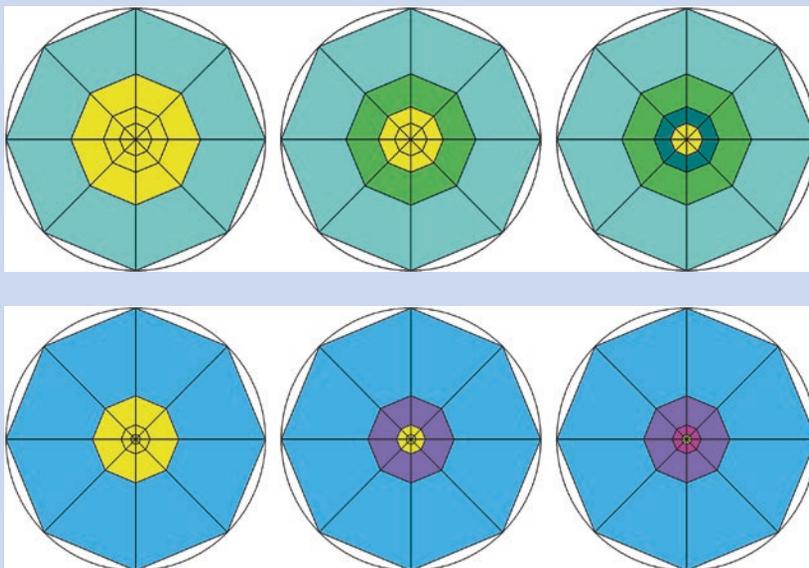
in Abschn. 8.5 wurde nach den Beispielen mit  $a_1 = \frac{1}{6}$  und  $q = \frac{1}{6}$  allgemein  $a_1 = \frac{1}{n+1}$  und  $q = \frac{1}{n+1}$  betrachtet.

Der Grenzwert  $s$  dieser speziellen geometrischen Reihen ergab sich mithilfe der gewählten grafischen Methode. Eine Rechnung wäre hier aufwendiger:

$$s = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{\frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{n}$$

### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 8.12:** Vergleichen Sie die Folge der Flächenaufteilungen des regelmäßigen 8-Ecks in den ersten drei der folgenden Abbildungen mit denen der letzten drei. Bei der ersten Folge wird der Radius fortlaufend halbiert, bei der zweiten Folge gedrittelt.



## 8.7 Zerlegung von regelmäßigen $n$ -Ecken in gleich große Teilflächen

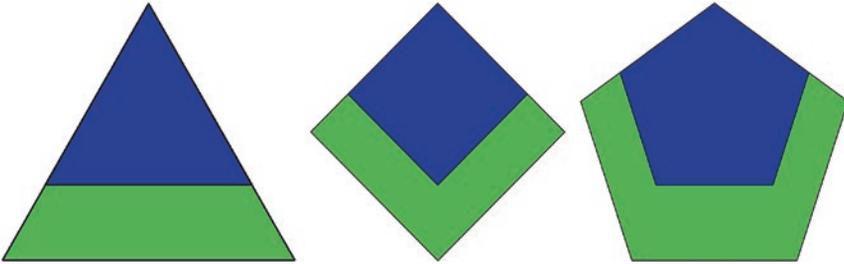
Gemäß einem Satz der Ähnlichkeit verhalten sich die Flächeninhalte von zueinander ähnlichen geometrischen Figuren wie die Quadrate der Längen von zugehörigen Seiten.

Daher ist es eigentlich nicht sehr anspruchsvoll, wenn es nur darum geht, die Fläche eines regelmäßigen  $n$ -Ecks in  $k = 2, 3, \dots$  gleich große Teile zu zerlegen: Man muss nur die Seitenlänge der Grundfigur mit  $\frac{1}{\sqrt{k}}$  multiplizieren, um eine erste Teilfigur zu erhalten.

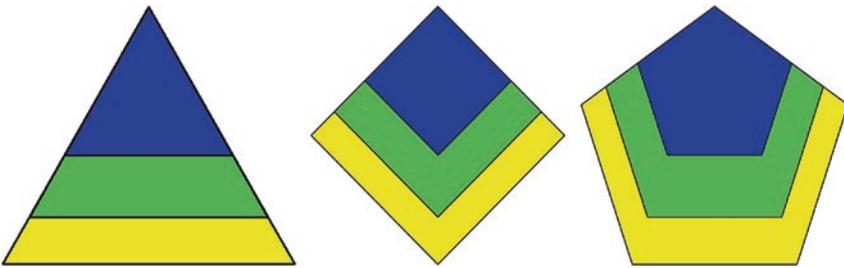
Beim Zerlegen in zwei gleich große Flächen muss also die Seitenlänge der Ausgangsfigur mit  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  multipliziert werden, beim Zerlegen in drei gleich große Flächen mit  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  bzw. mit  $\sqrt{\frac{2}{3}}$ , beim Zerlegen in vier gleich große Flächen mit  $\frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$  bzw.  $\sqrt{\frac{3}{4}}$  bzw.  $\sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  usw.

In den folgenden Abbildungen ist jeweils eine Zerlegung der Figur dargestellt, wenn man die Zerlegung in einer Ecke des Vielecks beginnt.

### Zerlegung in zwei gleich große Teilflächen



### Zerlegung in drei gleich große Teilflächen

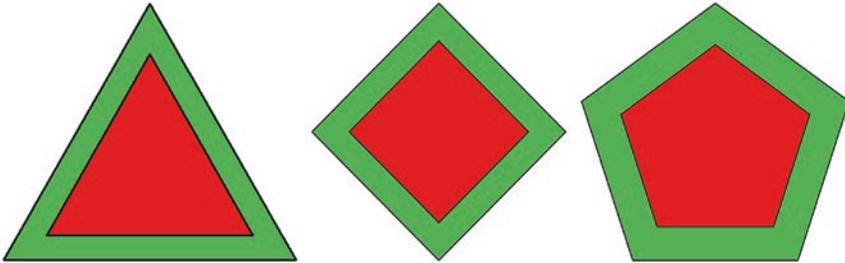


### Zerlegung in vier gleich große Teilflächen

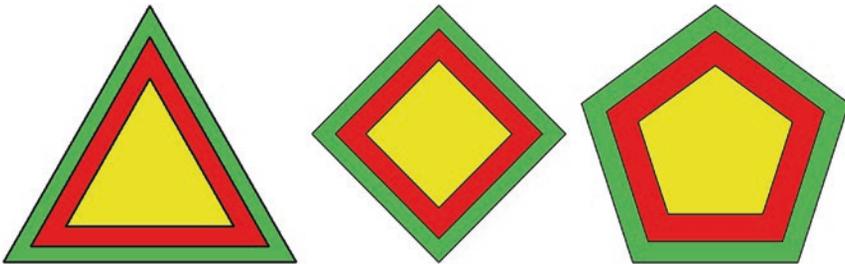


In den nächsten Abbildungen ist die Zerlegung der Figur dargestellt, wenn man mit der Zerlegung in der Mitte des Vielecks beginnt.

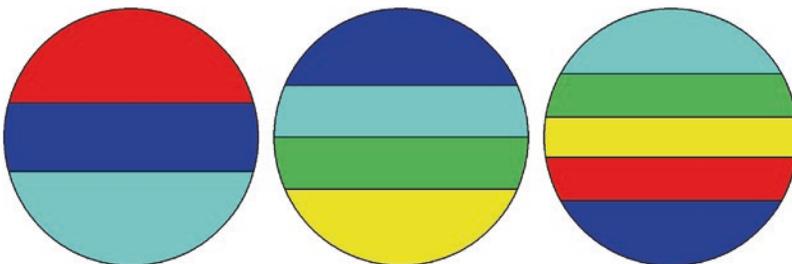
### Zerlegung in zwei gleich große Teilflächen

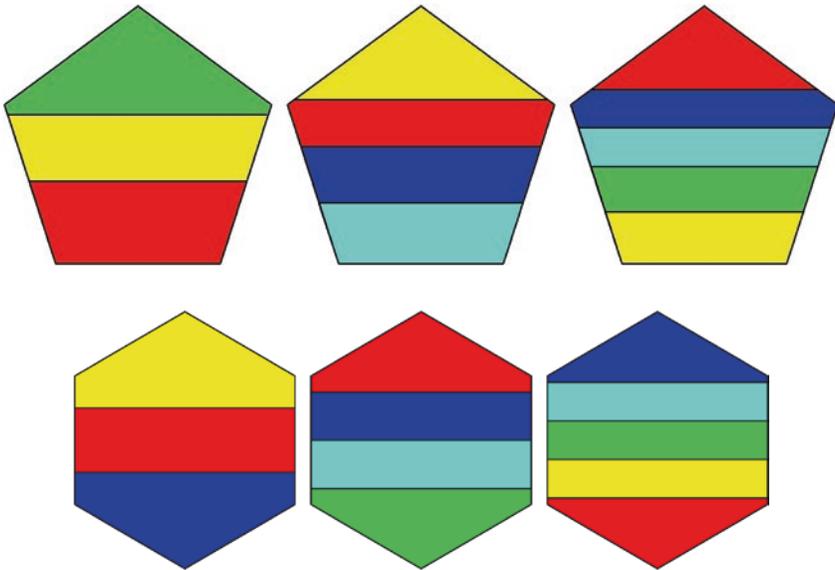


### Zerlegung in drei gleich große Teilflächen



Schlussbemerkung: Wie schon im Kap. 4 über Kreisringe festgestellt, hat man überhaupt kein „Gefühl“ dafür, ob die einzelnen Flächenstücke einer Unterteilung gleich groß sind. Das gilt auch und erst recht für die durch waagerechte Linien unterteilten Figuren in den folgenden Abbildungen.





#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 8.13:** Um die letzten Abbildungen mit den Teilungen in drei, vier, fünf gleich große Flächen zeichnen zu können, müssen die in den Figuren auftretenden Längen berechnet werden. Führen Sie die notwendigen Berechnungen durch.

## 8.8 Hinweise auf weiterführende Literatur

Bei **Wikipedia** findet man in deutscher (englischer, französischer) Sprache weitere Informationen und Literatur zu den Stichwörtern:

- Geometrische Folge (Geometric progression, Suite géométrique)
- Geometrische Reihe (Geometric series, Série géométrique)

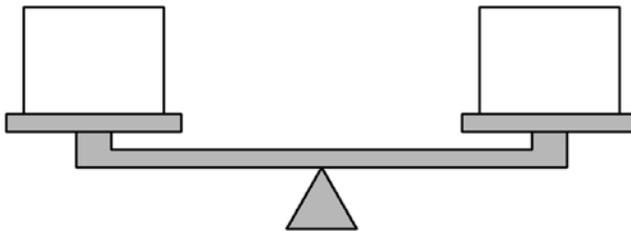
Umfangreiche fachliche Informationen findet man auf **Wolfram Mathworld** unter den Stichwörtern:

- Geometric Sequence, Geometric Series

Viele anregende Beispiele zum Thema *Flächenaufteilungen* findet man in den Büchern von Roger B. Nelsen, siehe *allgemeine Literaturhinweise*.

*Menschen, die von der Algebra nichts wissen, können sich auch nicht die wunderbaren Dinge vorstellen, zu denen man mit Hilfe der genannten Wissenschaft gelangen kann.*

(Gottfried Wilhelm Leibniz, deutscher Mathematiker und Philosoph, 1646–1716)

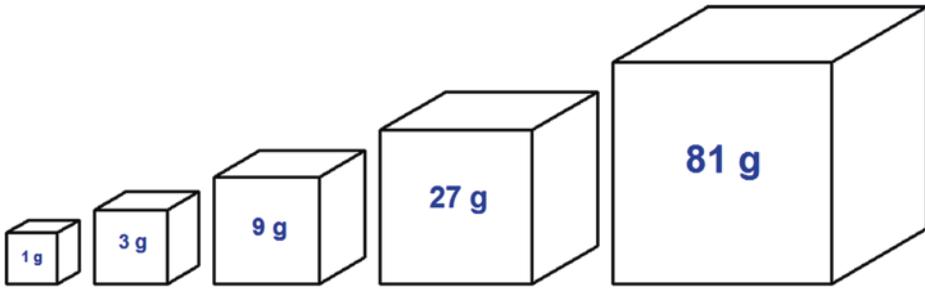


In diesem Kapitel geht es zunächst nur um das Auswiegen von Gegenständen mithilfe einer Balkenwaage – letztlich um den Aufbau des Zahlensystems.

### Ein Wägeproblem

Gegeben sind fünf einzelne Gewichtsstücke von 1 g, 3 g, 9 g, 27 g, 81 g.

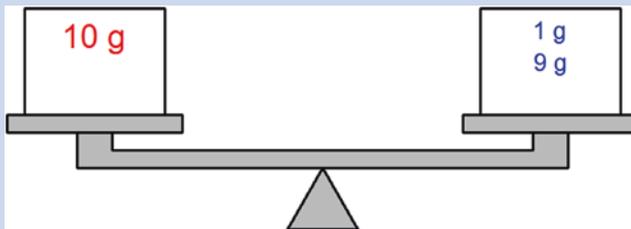
Behauptet wird, dass man mit den Gewichtsstücken und der Balkenwaage jeden Gegenstand auf 1 g genau auswiegen kann, wenn dessen Gewicht nicht größer ist als 121 g.



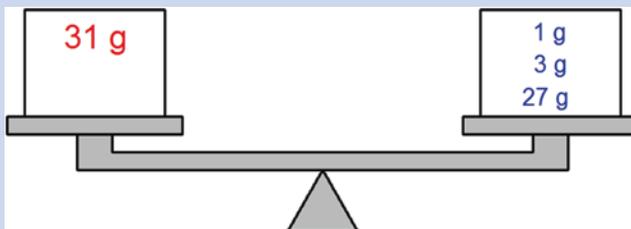
## 9.1 Lösung der einfachen Fälle des Wägeproblems

Ein Gegenstand wird auf die linke Waagschale gelegt, dessen Gewicht angegeben ist. Untersucht werden soll, wie man die fünf einzelnen Gewichtsstücke dazu verwenden kann, die Waage in ein Gleichgewicht zu bringen.

**Beispiel 1:** Wenn der Gegenstand 10 g wiegt, dann legt man die Gewichtsstücke von 1 g und von 9 g auf die rechte Waagschale.



**Beispiel 2:** Wenn der Gegenstand 31 g wiegt, dann legt man die Gewichtsstücke von 1 g, von 3 g und von 27 g auf die rechte Waagschale.



Aber nur bei wenigen Körper-Gewichten ist das Auswiegen so einfach wie bei diesen beiden Beispielen.

Die angegebenen Gewichte von 10 g bzw. 31 g lassen sich als fünfstellige Zahl aus Nullen und Einsen notieren – je nachdem, ob ein Gewichtsstück verwendet wurde oder nicht:

$$10 \text{ g} = 0 \cdot 81 \text{ g} + 0 \cdot 27 \text{ g} + 1 \cdot 9 \text{ g} + 0 \cdot 3 \text{ g} + 1 \cdot 1 \text{ g}, \text{kurz : } \mathbf{00101}$$

$$31 \text{ g} = 0 \cdot 81 \text{ g} + 1 \cdot 27 \text{ g} + 0 \cdot 9 \text{ g} + 1 \cdot 3 \text{ g} + 1 \cdot 1 \text{ g}, \text{kurz : } \mathbf{01011}$$

Es gibt nur  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$  Zahlen, die fünfstellig sind und nur aus Nullen und Einsen bestehen, darunter auch die Zahl Null (= **00000**), d. h., es gibt 31 einfach auszuwiegende Körper-Gewichte.

Das größte einfach darstellbare Körper-Gewicht ist 121 g; dabei wird jedes der fünf Gewichtsstücke verwendet:

$$121 \text{ g} = 1 \cdot 81 \text{ g} + 1 \cdot 27 \text{ g} + 1 \cdot 9 \text{ g} + 1 \cdot 3 \text{ g} + 1 \cdot 1 \text{ g} = \mathbf{11111}$$

Für die übrigen  $121 - 31 = 90$  Körpergewichte muss es ein anderes Wiegeverfahren geben, wenn die Behauptung von oben richtig ist.

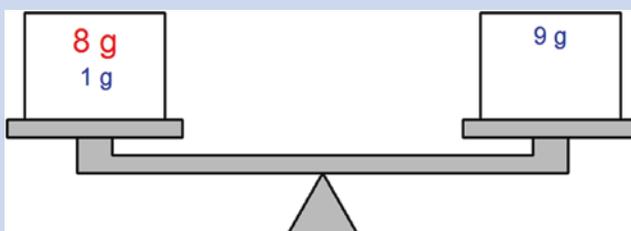
#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 9.1:** Geben Sie alle 31 einfach auszuwiegenden Körper-Gewichte an.

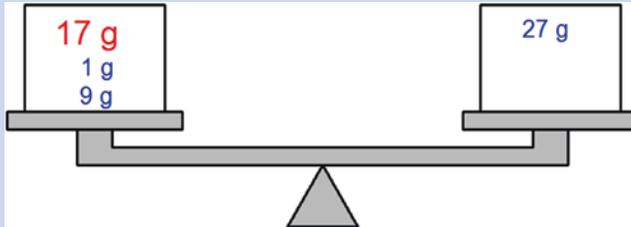
## 9.2 Lösung der übrigen Fälle des Wägeproblems

Auch die übrigen 90 Fälle sind schließlich leicht lösbar: Man muss nämlich – anders als bei den einfachen Fällen – einzelne Gewichtsstücke auch auf die linke Seite der Waagschale legen. Dadurch erhöht man das Gewicht des auszuwiegenden Körpers. Anschließend subtrahiert man diese Zusatzgewichte der linken Seite von der Summe der Gewichtsstücke der rechten Waagschale.

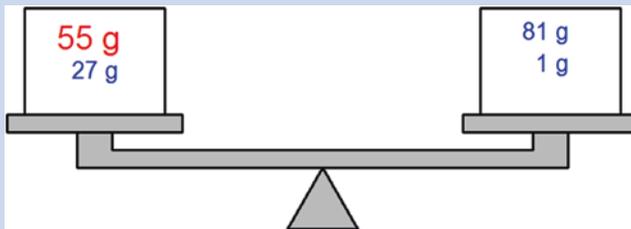
**Beispiel 3:** Wenn der Gegenstand 8 g wiegt, dann legt man noch ein Gewichtsstück von 1 g auf die linke Waagschale hinzu; rechts genügt dann ein Gewichtsstück von 9 g.



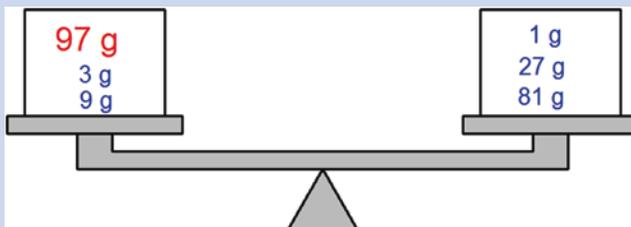
**Beispiel 4:** Wenn der Gegenstand 17 g wiegt, dann legt man die Gewichtsstücke von 1 g und von 9 g auf die linke Waagschale hinzu; rechts genügt dann ein Gewichtsstück von 27 g.



**Beispiel 5:** Wenn der Gegenstand 55 g wiegt, dann legt man das Gewichtsstück von 27 g auf die linke Waagschale hinzu; rechts benötigt man die Gewichtsstücke von 1 g und von 81 g.



**Beispiel 6:** Wenn der Gegenstand 97 g wiegt, dann legt man die Gewichtsstücke von 3 g und von 9 g auf die linke Waagschale hinzu; rechts benötigt man die Gewichtsstücke von 1 g, von 27 g und von 81 g.



Die auf der linken Waagschale benötigten Zusatzgewichte werden wie oben in Form einer Gleichung notiert; dies bedeutet für das Beispiel 3:

$$8g + 1 \cdot 1g = 0 \cdot 81g + 0 \cdot 27g + 1 \cdot 9g + 0 \cdot 3g + 0 \cdot 1g$$

Diese Gleichung kann man – wie auch sonst bei Gleichungen üblich – umstellen:

$$8g = 0 \cdot 81g + 0 \cdot 27g + 1 \cdot 9g + 0 \cdot 3g + (-1) \cdot 1g$$

Die Kurzschreibweise von oben muss dann also ergänzt werden:  $10g = 0010(-1)$

In den anderen Beispielen ergibt sich somit:

$$17g = 0 \cdot 81g + 1 \cdot 27g + (-1) \cdot 9g + 0 \cdot 3g + (-1) \cdot 1g = 01(-1)0(-1)$$

$$55g = 1 \cdot 81g + (-1) \cdot 27g + 0 \cdot 9g + 0 \cdot 3g + 1 \cdot 1g = 1(-1)001$$

$$97g = 1 \cdot 81g + 1 \cdot 27g + (-1) \cdot 9g + (-1) \cdot 3g + 1 \cdot 1g = 11(-1)(-1)1$$

Für jeden der 90 verbleibenden Fälle ist eine solche Darstellung mithilfe von 0, 1 oder  $-1$  möglich.

Dies soll hier jedoch nicht ausgeführt werden; vielmehr untersuchen wir zunächst einen anderen Sachverhalt.

### 9.3 Darstellung natürlicher Zahlen im 3er-System

Auffallend an den gewählten Gewichtsstücken von 1 g, 3 g, 9 g, 27 g, 81 g ist, dass es sich um die ersten Potenzen der Zahl 3 handelt ( $3^0 = 1$ ,  $3^1 = 3$ ,  $3^2 = 9$ ,  $3^3 = 27$ ,  $3^4 = 81$ ).

Man spricht hier auch von den **Stufenzahlen** des Dreiersystems. Bei der Darstellung von Zahlen im 3er-System verwendet man nur die **Ziffern 0, 1 und 2**.

#### Verfahren

Bestimmung der Ziffern einer natürlichen Zahl im 3er-System

Man erhält die Darstellung der natürlichen Zahl  $a$  im 3er-System auf folgende Weise:

Man sucht die größtmögliche 3er-Potenz, die höchstens gleich  $a$  ist, und zieht diese von  $a$  ab; man erhält so eine Zahl  $b$ .

Dann sucht man die größtmögliche 3er-Potenz, die höchstens gleich  $b$  ist, und zieht diese von  $b$  ab; man erhält so eine Zahl  $c$  ... usw.

#### Beispiel: Bestimmung der Ziffern der Zahl $a = 65$ im 3er-System

- Größtmögliche 3er-Potenz, die höchstens gleich  $a$  ist: 27. Man subtrahiert 27 von 65 und erhält  $b = 65 - 27 = 38$ .
- Größtmögliche 3er-Potenz, die höchstens gleich  $b$  ist: 27. Man subtrahiert 27 von 38 und erhält  $c = 38 - 27 = 11$ .

- Größtmögliche 3er-Potenz, die höchstens gleich  $c$  ist: 9. Man subtrahiert 9 von 11 und erhält  $d = 11 - 9 = 2$ .
- Größtmögliche 3er-Potenz, die höchstens gleich  $d$  ist: 1. Man subtrahiert 1 von 2 und erhält  $e = 2 - 1 = 1$ .
- Größtmögliche 3er-Potenz, die höchstens gleich  $e$  ist: 1. Man subtrahiert 1 von 1 und erhält  $1 - 1 = 0$ .

Damit ergibt sich folgende Darstellung der Zahl 65 als Summe von 3er-Potenzen:

$$65 = 0 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0$$

Es gilt also:  $65_{(10)} = {}_{(3)}02102$

Für die Zahlenbeispiele aus Abschn. 9.1 und 9.2 ergibt sich folgende Darstellung im 3er-System:

$$10 = 0 \cdot 3^4 + 0 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = {}_{(3)}00101(\text{oben : } \mathbf{00101})$$

$$31 = 0 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = {}_{(3)}01011(\text{oben : } \mathbf{01011})$$

$$8 = 0 \cdot 3^4 + 0 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = {}_{(3)}00022(\text{oben : } \mathbf{0010(-1)})$$

$$17 = 0 \cdot 3^4 + 0 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = {}_{(3)}00122(\text{oben : } \mathbf{01(-1)0(-1)})$$

$$55 = 0 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = {}_{(3)}02001(\text{oben : } \mathbf{1(-1)001})$$

$$97 = 1 \cdot 3^4 + 0 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = {}_{(3)}10121(\text{oben : } \mathbf{11(-1)(-1)1})$$

## 9.4 Zusammenhang zwischen den beiden Darstellungen

Bei der Darstellung von Zahlen im 3er-System werden die Ziffern 0, 1 und 2 verwendet. Damit wird angegeben, ob die einzelnen 3er-Potenzen 0-mal, 1-mal oder 2-mal zur Darstellung der Zahl benötigt werden.

Beim Wiegen mit der Balkenwaage sind die fünf Gewichtsstücke nur jeweils *einmal* vorhanden. Wenn man zum Auswiegen eines Gegenstandes eigentlich zwei Gewichtsstücke von einer Sorte benötigt, kann man sich so behelfen, dass man die nächstgrößere Gewichtseinheit verwendet und das rechts zu viel aufgelegte Gewicht durch Auflegen eines geeigneten Gewichtsstücks auf der linken Seite ausgleicht.

**Beispiel: Auswiegen eines Gegenstandes mit 65 g Gewicht**

Wenn von den Gewichtsstücken jeweils zwei Exemplare vorhanden wären, dann würde sich bei einem Gegenstand, der 65 g wiegt, Folgendes ergeben (Wiegen im 3er-System):

$$65 \text{ g} = 0 \cdot 81 \text{ g} + 2 \cdot 27 \text{ g} + 1 \cdot 9 \text{ g} + 0 \cdot 3 \text{ g} + 2 \cdot 1 \text{ g}$$

Da aber das Gewichtsstück von 27 g bzw. von 1 g nur einmal vorhanden ist, wird

$2 \cdot 27 \text{ g}$  ersetzt durch  $1 \cdot 81 \text{ g} - 1 \cdot 27 \text{ g}$  und

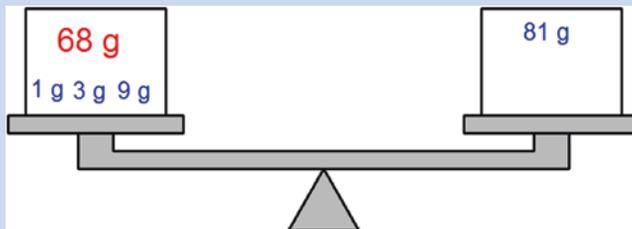
$2 \cdot 1 \text{ g}$  ersetzt durch  $1 \cdot 3 \text{ g} - 1 \cdot 1 \text{ g}$ , also:

$$65 \text{ g} = 1 \cdot 81 \text{ g} + (-1) \cdot 27 \text{ g} + 1 \cdot 9 \text{ g} + 1 \cdot 3 \text{ g} + (-1) \cdot 1 \text{ g}$$

**Regel****Von der Darstellung einer natürlichen Zahl im 3er-System zum Auswiegen mit der Balkenwaage**

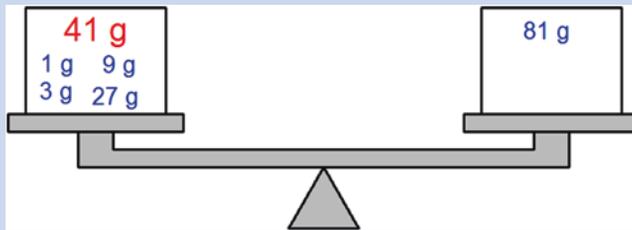
Ersetze den Term  $2 \cdot 3^x$  der Darstellung einer natürlichen Zahl im 3er-System durch  $1 \cdot 3^{x+1} + (-1) \cdot 3^x$ .

Nicht immer verläuft die Umformung so problemlos wie im Beispiel der Zahl 65. Beispielsweise sind bei der Zahl 68 mehrere Zwischenschritte erforderlich:



$$\begin{aligned} 68 \text{ g} &= 0 \cdot 81 \text{ g} + 2 \cdot 27 \text{ g} + 1 \cdot 9 \text{ g} + 1 \cdot 3 \text{ g} + 2 \cdot 1 \text{ g} \\ &= 1 \cdot 81 \text{ g} + (-1) \cdot 27 \text{ g} + 1 \cdot 9 \text{ g} + (1 + 1) \cdot 3 \text{ g} + (-1) \cdot 1 \text{ g} \\ &= 1 \cdot 81 \text{ g} + (-1) \cdot 27 \text{ g} + 1 \cdot 9 \text{ g} + 2 \cdot 3 \text{ g} + (-1) \cdot 1 \text{ g} \\ &= 1 \cdot 81 \text{ g} + (-1) \cdot 27 \text{ g} + (1 + 1) \cdot 9 \text{ g} + (-1) \cdot 3 \text{ g} + (-1) \cdot 1 \text{ g} \\ &= 1 \cdot 81 \text{ g} + (-1) \cdot 27 \text{ g} + 2 \cdot 9 \text{ g} + (-1) \cdot 3 \text{ g} + (-1) \cdot 1 \text{ g} \\ &= 1 \cdot 81 \text{ g} + (-1 + 1) \cdot 27 \text{ g} + (-1) \cdot 9 \text{ g} + (-1) \cdot 3 \text{ g} + (-1) \cdot 1 \text{ g} \\ &= 1 \cdot 81 \text{ g} + 0 \cdot 27 \text{ g} + (-1) \cdot 9 \text{ g} + (-1) \cdot 3 \text{ g} + (-1) \cdot 1 \text{ g} \end{aligned}$$

Ein ziemlich großer Aufwand ist bei der Zahl 41 erforderlich:



$$\begin{aligned}
 41 \text{ g} &= 0 \cdot 81 \text{ g} + 1 \cdot 27 \text{ g} + 1 \cdot 9 \text{ g} + 1 \cdot 3 \text{ g} + 2 \cdot 1 \text{ g} \\
 &= 0 \cdot 81 \text{ g} + 1 \cdot 27 \text{ g} + 1 \cdot 9 \text{ g} + 2 \cdot 3 \text{ g} + (-1) \cdot 1 \text{ g} \\
 &= 0 \cdot 81 \text{ g} + 1 \cdot 27 \text{ g} + 2 \cdot 9 \text{ g} + (-1) \cdot 3 \text{ g} + (-1) \cdot 1 \text{ g} \\
 &= 0 \cdot 81 \text{ g} + 2 \cdot 27 \text{ g} + (-1) \cdot 9 \text{ g} + (-1) \cdot 3 \text{ g} + (-1) \cdot 1 \text{ g} \\
 &= 1 \cdot 81 \text{ g} + (-1) \cdot 27 \text{ g} + (-1) \cdot 9 \text{ g} + (-1) \cdot 3 \text{ g} + (-1) \cdot 1 \text{ g}
 \end{aligned}$$

*Hinweis:* In der Literatur findet man für die Beschreibung von natürlichen Zahlen mithilfe der besonderen 3er-Potenz-Gewichtsstücke auch die Bezeichnung **balanciertes 3er-System** (engl. balance, dt. Gleichgewicht).

#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 9.2:** Bestimmen Sie systematisch die Körper-Gewichte, für die man ein, zwei bzw. drei Gewichtsstücke für die linke Waagschale benötigt.

## 9.5 Hinweise auf weiterführende Literatur

Bei **Wikipedia** findet man in deutscher (englischer, französischer) Sprache weitere Informationen und Literatur zu den Stichwörtern:

- Ternärsystem (Ternary numeral system, Système trinaire)

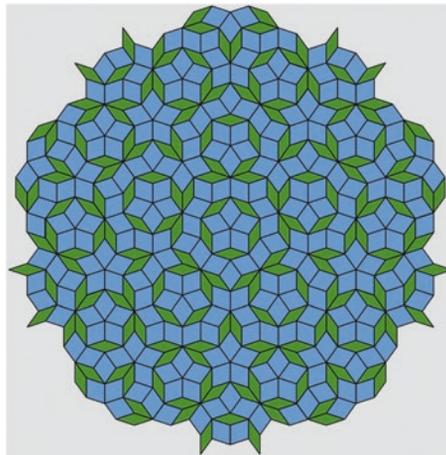
Umfangreiche fachliche Informationen findet man auf **Wolfram Mathworld** unter dem Stichwort:

- Ternary

# Parkettieren von regelmäßigen $2n$ -Ecken mithilfe von Rauten

# 10

*Das entscheidende Kriterium ist Schönheit;  
für hässliche Mathematik ist auf dieser Welt kein beständiger Platz.*  
(Godfrey Harold Hardy, britischer Mathematiker, 1877–1947)



Quelle: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Penrose\\_Tiling\\_\(Rhombi\).svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Penrose_Tiling_(Rhombi).svg)

Roger Penrose entdeckte 1973 die Möglichkeit, eine Ebene lückenlos mit *aperiodischen* Kachelmustern so zu bedecken, dass sich keine Muster periodisch wiederholen. In der Abbildung oben erkennt man, dass regelmäßige 10-Ecke als Teilfiguren enthalten sind.

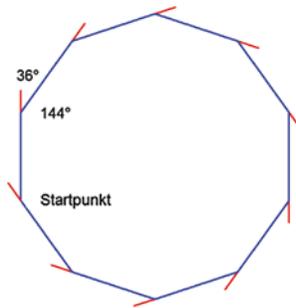
In diesem Kapitel beschäftigen wir uns – über die Parkettierung von regelmäßigen 10-Ecken hinaus – mit einer besonderen Eigenschaft von regelmäßigen  $2n$ -Ecken (also Vielecken mit einer geraden Anzahl von Ecken), nämlich mit der Eigenschaft, dass man deren Fläche vollständig mit Raute  $n$  ausfüllen kann.

## 10.1 Parkettierung eines regelmäßigen 10-Ecks

Wie in Kap. 1 erwandern wir eine solche regelmäßige Figur zunächst einmal in Gedanken:

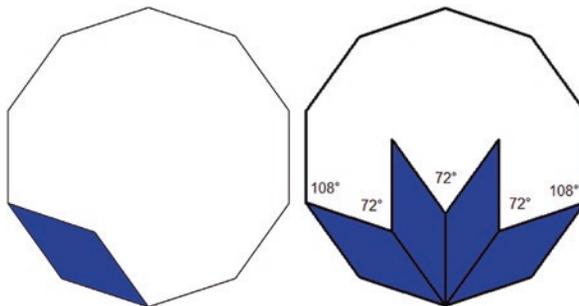
Man beginnt mit einer Strecke von einer festgelegten Länge, wandert vom Startpunkt aus an der Strecke entlang bis zum Endpunkt der Strecke, und wenn man dort angekommen ist, dreht man sich um  $36^\circ$ . Dann beginnt man die Wanderung längs der nächsten Strecke und wiederholt dies insgesamt 10-mal. Wenn man sich 10-mal um  $36^\circ$  dreht, hat man sich einmal um sich selbst gedreht, d. h., man schaut nach den zehn Drehungen wieder in die Anfangsrichtung, und durch das Abwandern von 10 gleich langen Strecken kommt man wieder am Startpunkt an.

Aus dem Winkel der Richtungsänderung von  $36^\circ$  ergibt sich, dass alle Innenwinkel des regelmäßigen 10-Ecks eine Winkelgröße von  $144^\circ$  haben.



Wir verlegen nun den Startpunkt unserer Betrachtungen in den unteren Eckpunkt des 10-Ecks.

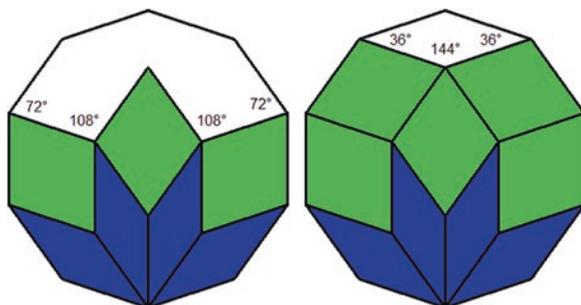
An die ersten beiden Seiten des 10-Ecks passt eine Raute mit den Winkeln  $36^\circ$  (spitzer Winkel unten und oben) und  $144^\circ$  (stumpfer Winkel = Innenwinkel des 10-Ecks). Wir bezeichnen sie im Folgenden als  $36^\circ$ - $144^\circ$ -Rauten. Und da ein Innenwinkel  $144^\circ$  ist, passen vier solcher Rauten nebeneinander an den unteren Eckpunkt des regelmäßigen 10-Ecks.



Der Winkel, der jeweils zwischen zwei Rauten entsteht, ist  $360^\circ - 2 \cdot 144^\circ = 72^\circ$ . Der Winkel zur 10-Eck-Seite ist  $144^\circ - 36^\circ = 108^\circ$  (Innenwinkel des 10-Ecks – spitzer Winkel der blau gefärbten Raute).  $72^\circ$  und  $108^\circ$  sind genau die passenden Winkel für drei  $72^\circ$ – $108^\circ$ -Rauten, die jeweils eingeschoben werden können.

Oberhalb der drei  $72^\circ$ – $108^\circ$ -Rauten passen zwei  $108^\circ$ – $72^\circ$ -Rauten, denn im Anschluss an die bisher gelegten Rauten ist ein Winkel von  $360^\circ - (2 \cdot 108^\circ + 36^\circ)$  entstanden, und am Rand liegt ein Winkel von  $144^\circ - 72^\circ = 72^\circ$  vor. Das sind gedrehte  $72^\circ$ – $108^\circ$ -Rauten. Schließlich ist noch Platz für eine gedrehte  $36^\circ$ – $144^\circ$ -Raute (Winkel am Rand:  $144^\circ - 108^\circ = 36^\circ$  bzw.  $360^\circ - 3 \cdot 72^\circ = 144^\circ$ ).

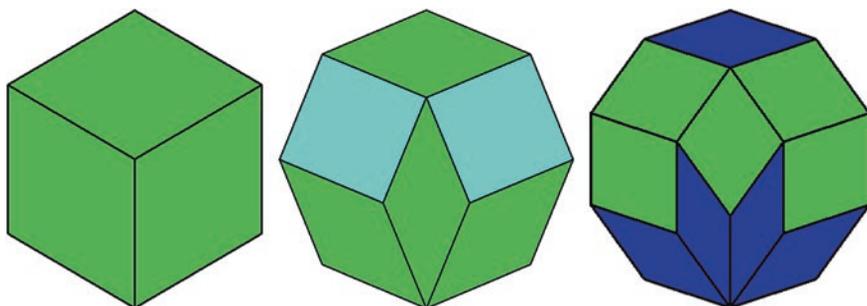
Insgesamt benötigt man für das Parkettieren eines regelmäßigen 10-Ecks je fünf  $36^\circ$ – $144^\circ$ -Rauten und  $72^\circ$ – $108^\circ$ -Rauten.



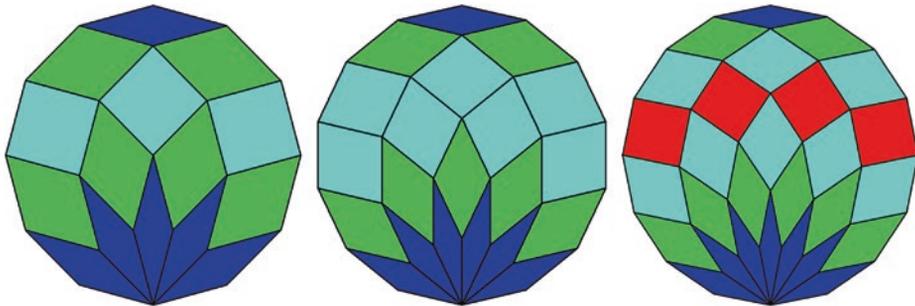
## 10.2 Anwenden der Parkettierungsmethode auf andere regelmäßige $2n$ -Ecke

Im Prinzip gelingt diese *baumartige* Auslegung für alle regelmäßigen  $2n$ -Ecke.

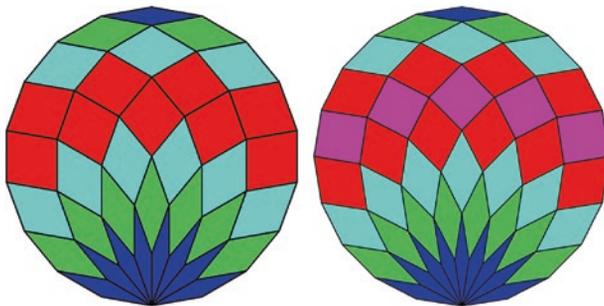
- $n = 3$ : regelmäßiges 6-Eck, ausgefüllt mit drei  $60^\circ$ – $120^\circ$ -Rauten,
- $n = 4$ : regelmäßiges 8-Eck, ausgefüllt mit vier  $45^\circ$ – $135^\circ$ -Rauten und zwei  $90^\circ$ – $90^\circ$ -Rauten (= Quadrate),
- $n = 5$ : regelmäßiges 10-Eck, vgl. Abschn. 10.1.



- $n = 6$ : regelmäßiges 12-Eck, ausgefüllt mit sechs  $30^\circ$ – $150^\circ$ -Rauten, sechs  $60^\circ$ – $120^\circ$ -Rauten und drei  $90^\circ$ – $90^\circ$ -Rauten (= Quadrate)
- $n = 7$ : regelmäßiges 14-Eck, ausgefüllt mit je sieben  $25,71^\circ$ – $154,29^\circ$ -Rauten,  $51,43^\circ$ – $128,57^\circ$ -Rauten und  $77,14^\circ$ – $102,86^\circ$ -Rauten (gerundete Werte)
- $n = 8$ : regelmäßiges 16-Eck, ausgefüllt mit je acht  $22,5^\circ$ – $157,5^\circ$ -Rauten,  $45^\circ$ – $135^\circ$ -Rauten,  $67,5^\circ$ – $112,5^\circ$ -Rauten und vier  $90^\circ$ – $90^\circ$ -Rauten (= Quadrate)



- $n = 9$ : regelmäßiges 18-Eck, ausgefüllt mit je neun  $20^\circ$ – $160^\circ$ -Rauten,  $40^\circ$ – $140^\circ$ -Rauten,  $60^\circ$ – $120^\circ$ -Rauten und  $80^\circ$ – $100^\circ$ -Rauten
- $n = 10$ : regelmäßiges 20-Eck, ausgefüllt mit je zehn  $18^\circ$ – $162^\circ$ -Rauten,  $36^\circ$ – $144^\circ$ -Rauten,  $54^\circ$ – $126^\circ$ -Rauten,  $72^\circ$ – $108^\circ$ -Rauten und fünf  $90^\circ$ – $90^\circ$ -Rauten (= Quadrate)



#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 10.1:** Überprüfen Sie die Angaben über die Winkel in den Rauten, die zur Parkettierung des regelmäßigen 6-Ecks (8-Ecks, 12-Ecks, 14-Ecks, 16-Ecks, 18-Ecks, 20-Ecks) verwendet werden.

### 10.3 Verallgemeinerungen der beobachteten Gesetzmäßigkeiten

Bei der Untersuchung der bisher betrachteten baumartigen Parkettierungen ergaben sich folgende Fragestellungen:

- **Wie viele und welche Rauten passen „unten“ in das regelmäßige  $2n$ -Eck?**

Bei allen betrachteten  $2n$ -Ecken beginnt die baumartige Auslegung unten mit  $n - 1$  Rauten, deren spitzer Winkel sich aus der Richtungsänderung bei der Rundwanderung längs der Seiten des  $2n$ -Ecks durch die Division  $\frac{360^\circ}{2n}$  ergibt.

Der Innenwinkel des regelmäßigen  $2n$ -Ecks ist der Ergänzungswinkel zu der Richtungsänderung, also  $180^\circ - \frac{360^\circ}{2n} = 180^\circ - \frac{180^\circ}{n}$ . Eine Raute, die genau an den Rand passt, hat also die Winkel  $180^\circ - \frac{180^\circ}{n}$  und  $\frac{180^\circ}{n}$ . Dividiert man die Winkelgröße des Innenwinkels ( $180^\circ - \frac{180^\circ}{n}$ ) durch die Winkelgröße des spitzen Winkels der schmalsten Raute ( $\frac{180^\circ}{n}$ ), dann erhält man genau  $n - 1$ , d. h., genau  $n - 1$  der ( $\frac{180^\circ}{n}$ ) - ( $180^\circ - \frac{180^\circ}{n}$ )-Rauten passen in den Winkel unten.

- **Wie ergeben sich die Winkel der nachfolgenden, jeweils genau in die Lücken passenden Rauten?**

In der ersten Schicht beginnt man mit  $n - 1$  Rauten, deren spitzer Winkel eine Winkelgröße von  $\alpha = \frac{360^\circ}{2n} = \frac{180^\circ}{n}$  hat. Es fällt auf, dass die Rauten der nachfolgenden Schichten einen Winkel haben, der doppelt, dreifach, vierfach, ... so groß ist wie der spitze Winkel des untersten Puzzlestücks.

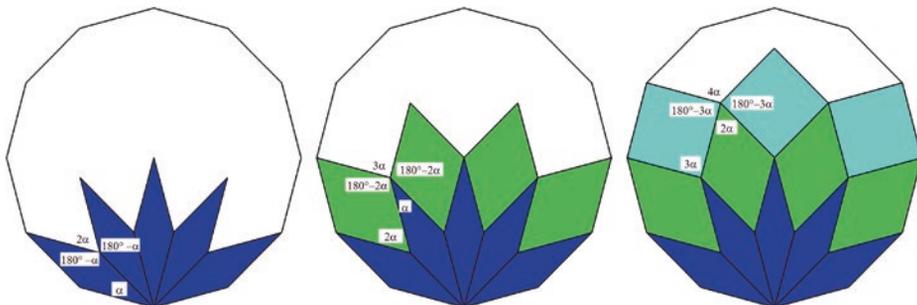
Dass dies so ist, lässt sich wie folgt begründen:

Die Rauten der zweiten Schicht passen in einen Winkel, für den gilt:  
 $360^\circ - 2 \cdot (180^\circ - \alpha) = 2\alpha$  (vgl. die erste der folgenden Abbildungen)

Die Rauten der dritten Schicht passen in einen Winkel, für den gilt:  
 $360^\circ - 2 \cdot (180^\circ - 2\alpha) - \alpha = 3\alpha$  (vgl. die mittlere der folgenden Abbildungen)

Die Rauten der vierten Schicht passen in einen Winkel, für den gilt:  
 $360^\circ - 2(180^\circ - 3\alpha) - 2\alpha = 4\alpha$  (vgl. die letzte der folgenden Abbildungen)

usw.



- **Wie viele Rauten werden von den einzelnen Typen benötigt? Wie viele Rauten insgesamt?**

Wie oben gezeigt wurde, passen in die unterste Schicht des  $2n$ -Ecks  $(n - 1)$  der  $\alpha - (180^\circ - \alpha)$ -Rauten hinein, wobei  $\alpha = \frac{180^\circ}{n}$ . Der zweite Winkel der Rauten, also der Winkel  $180^\circ - \alpha$ , kann auch so notiert werden:

$$180^\circ - \alpha = 180^\circ - \frac{180^\circ}{n} = 180^\circ \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{180^\circ}{n} \cdot (n - 1) = (n - 1) \cdot \alpha$$

Entsprechend gilt:  $180^\circ - 2\alpha = (n - 2) \cdot \alpha$ ,  $180^\circ - 3\alpha = (n - 3) \cdot \alpha$  usw.

Dies bedeutet, dass Rauten vom selben Typ jeweils unten und oben für die Parkettierung benötigt werden. Da insgesamt  $n - 1$  Schichten gelegt werden, hängt es bei der „mittleren“ Schicht davon ab, ob  $n$  gerade oder ungerade ist.

Im Einzelnen gilt:

Schicht-Nr.	Anzahl der Rauten	Winkel 1	Winkel 2
1	$n - 1$	$1 \cdot \alpha$	$(n - 1) \cdot \alpha$
2	$n - 2$	$2 \cdot \alpha$	$(n - 2) \cdot \alpha$
3	$n - 3$	$3 \cdot \alpha$	$(n - 3) \cdot \alpha$
...	...	...	...
$n - 2$	2	$(n - 2) \cdot \alpha$	$2 \cdot \alpha$
$n - 1$	1	$(n - 1) \cdot \alpha$	$1 \cdot \alpha$

Insgesamt legt man also  $(n - 1) + (n - 2) + \dots + 3 + 2 + 1$  Rauten aus. Diese Anzahl kann man auch mithilfe der Summenformel  $\frac{1}{2} \cdot (n - 1) \cdot n$  berechnen (vgl. Formel 2.1).

Die Anzahl der benötigten verschiedenen Rautentypen wächst mit Regelmäßigkeit:

Bei *ungeradem*  $n$  werden von jedem Typ gleich viele Rauten benötigt, bei *geradem*  $n$  benötigt man vom letzten Typ nur halb so viele Rauten wie von den vorherigen Typen (vgl. folgende Tabelle).

$n$	3	4	5	6	7	...
Vieleck	6-Eck	8-Eck	10-Eck	12-Eck	14-Eck	...
$\alpha$	$60^\circ$	$45^\circ$	$36^\circ$	$30^\circ$	$25,71^\circ$	...
Anzahl der Schichten	2	3	4	5	6	...
Rauten vom Typ $\alpha$	$2 + 1 = 3$	$3 + 1 = 4$	$4 + 1 = 5$	$5 + 1 = 6$	$6 + 1 = 7$	...
Rauten vom Typ $2\alpha$		2	$3 + 2 = 5$	$4 + 2 = 6$	$5 + 2 = 7$	...
Rauten vom Typ $3\alpha$				3	$4 + 3 = 7$	...
...	...	...	...	...	...	...
Gesamtzahl der Rauten	3	6	10	15	21	...

**Regel****Baumartige Parkettierung regelmäßiger  $2n$ -Ecke**

Regelmäßige  $2n$ -Ecke lassen sich mithilfe von Rauten baumartig von unten nach oben parkettieren; dazu benötigt man insgesamt  $\frac{1}{2} \cdot (n - 1) \cdot n$  Rauten, und zwar

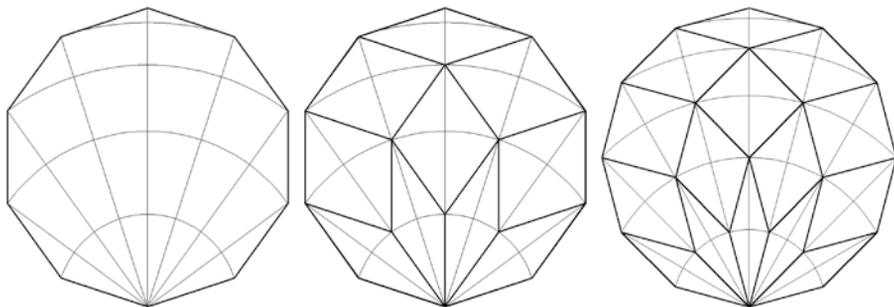
- bei ungeradem  $n$  jeweils  $n$  Rauten mit spitzem Winkel  $\alpha = \frac{180^\circ}{n}, 2\alpha, 3\alpha, \dots, \frac{1}{2} \cdot (n - 1) \cdot \alpha$ ,
- bei geradem  $n$  jeweils  $n$  Rauten mit spitzem Winkel  $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \dots, \left(\frac{1}{2} \cdot n - 1\right) \cdot \alpha$  sowie  $\frac{1}{2} \cdot n$  Rauten mit spitzem Winkel  $\frac{1}{2} \cdot n \cdot \alpha$ .

**10.4 Anleitung zum Basteln der Rauten-Puzzles**

Wegen der in Abschn. 10.3 beschriebenen Gesetzmäßigkeiten ist es leicht, die Puzzlestücke zu basteln. Auf Pappe (oder einem ähnlich geeigneten Material) zeichnet man

- das regelmäßige  $2n$ -Eck,
- $n - 1$  Kreisbögen um den unteren Eckpunkt durch die anderen Eckpunkte,
- $2n - 3$  Verbindungslinien vom unteren Eckpunkt zu den anderen Eckpunkten.

Mithilfe der Schnittpunkte auf den Hilfslinien kann man dann die Rauten zeichnen, vgl. die folgenden Abbildungen zum regelmäßigen 10-Eck und 12-Eck.

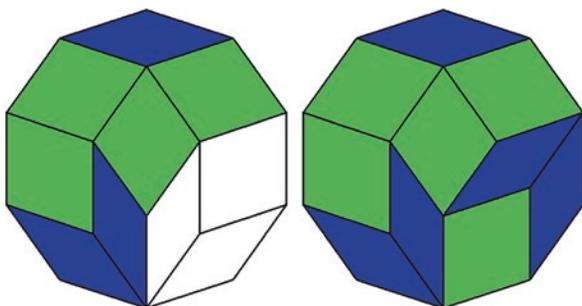
**Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen**

**A 10.2:** Konstruieren Sie die Puzzlestücke, die zur Parkettierung eines regelmäßigen 8-Ecks (14-Ecks) benötigt werden.

## 10.5 Alternative Auslegungen des regelmäßigen 10-Ecks mit Rauten

Die baumartige Auslegung ist nicht die einzige Möglichkeit, ein regelmäßiges  $2n$ -Eck auszulegen.

Beispielsweise kann man die drei nicht gefärbten Rauten im 10-Eck der folgenden Abbildung um  $180^\circ$  drehen, da diese drei Puzzlestücke zusammen eine symmetrische Teilfigur bilden. Führt man die Drehung durch, so erhält man eine alternative Parkettierung des 10-Ecks.

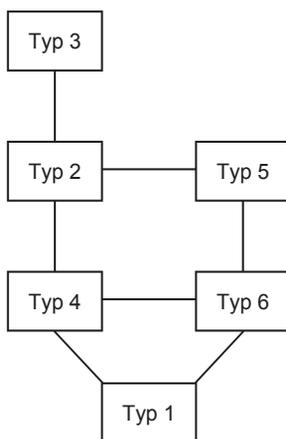


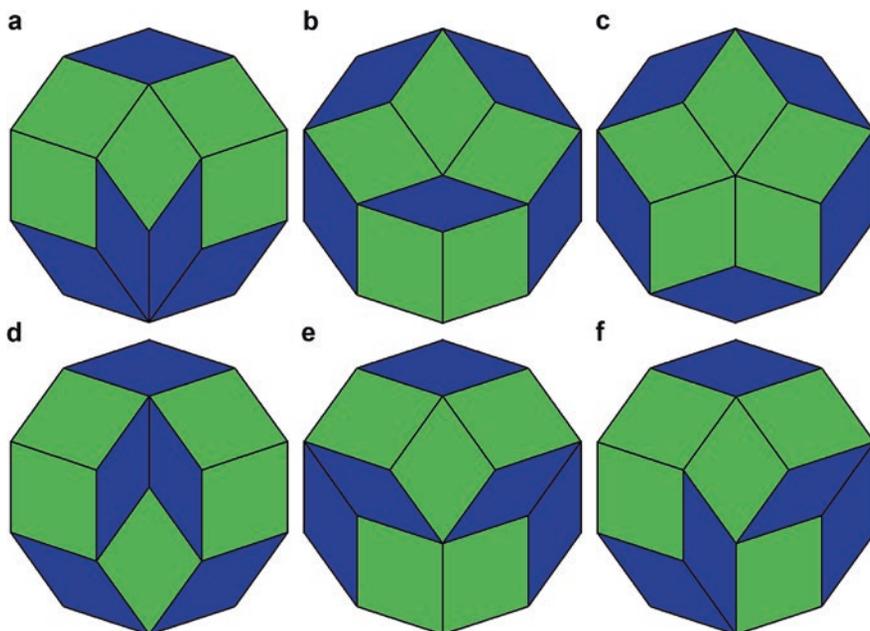
Insgesamt gibt es sechs verschiedene Möglichkeiten, das regelmäßige 10-Eck mit den  $5 + 5$  Rauten zu parkettieren (vgl. Abb. 10.1a–f).

(*Hinweis:* Zwischen Typ 6 und seinem horizontalen Spiegelbild soll nicht unterschieden werden.)

Zu Beginn des Abschnitts wurde beispielhaft gezeigt, wie man durch Umlegen von drei Rauten von der Parkettierung Typ 1 zu Typ 6 kommt – natürlich kann man den Vorgang auch umkehren. Auch die übrigen Parkettierungstypen erhält man, indem symmetrische Teilfiguren um  $180^\circ$  gedreht werden.

Welche Zusammenhänge zwischen den einzelnen Typen bestehen, kann der folgenden Grafik entnommen werden.

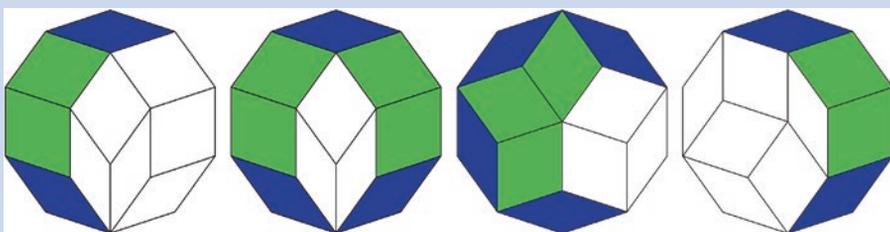




**Abb. 10.1** a-f Die sechs Möglichkeiten der Parkettierung eines regelmäßigen 10-Ecks (Typ 1 bis Typ 6)

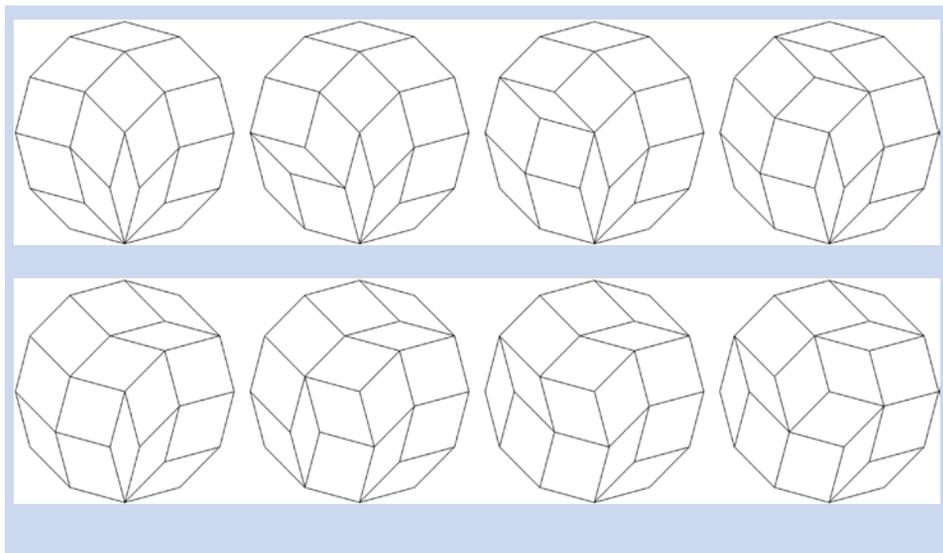
#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 10.3:** Welchen Zusammenhang zwischen den Parkettierungstypen eines regelmäßigen 10-Ecks erhält man, wenn man die nicht gefärbte Teilfigur der regelmäßigen 10-Ecke jeweils um  $180^\circ$  dreht? (Vergleiche dazu die folgenden Abbildungen.)



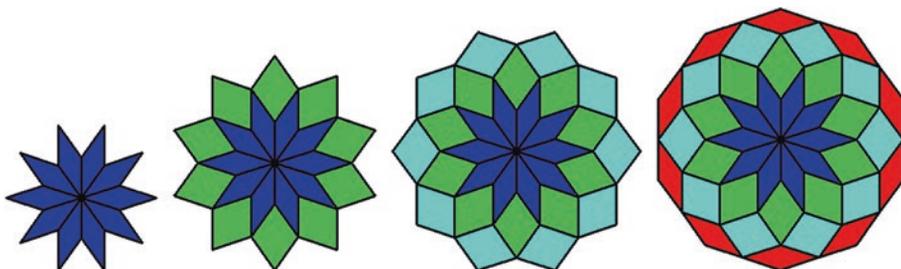
**A 10.4:** Im Unterschied zum regelmäßigen 10-Eck gibt es beim regelmäßigen 6-Eck und beim regelmäßigen 8-Eck nur *eine* Möglichkeit der Auslegung der Puzzlestücke. Erläutern Sie dies.

**A 10.5:** Beim regelmäßigen 12-Eck gibt es eine Fülle von Möglichkeiten der Parkettierung mit den  $6 + 6 + 3$  Puzzlestücken. Kommentieren Sie die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Parkettierungen, die jeweils durch Umlegung einzelner Rauten auseinander hervorgehen (vgl. die folgende Abbildungssequenz).



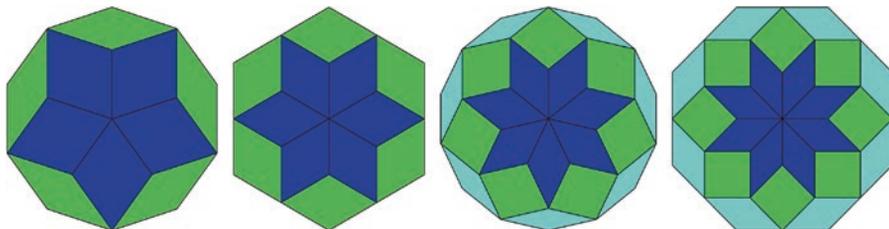
### 10.6 Zentralsymmetrische Parkettierung der regelmäßigen $2n$ -Ecke von innen nach außen

Es ist durchaus naheliegend, mit dem Auslegen eines regelmäßigen Vielecks in der Mitte statt in dem Punkt unten anzufangen. Beim regelmäßigen 10-Eck beispielsweise beginnt man mit zehn Rauten mit spitzem Winkel  $\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$ , dann folgen jeweils zehn  $72^\circ$ – $108^\circ$ -Rauten,  $108^\circ$ – $72^\circ$ -Rauten und  $144^\circ$ – $36^\circ$ -Rauten. Man erhält so ebenfalls eine Parkettierung eines regelmäßigen 10-Ecks; dieses besteht allerdings aus viermal so vielen Rauten wie bei den bisher betrachteten 10-Eck-Parkettierungen.



Beginnt man jedoch in der Mitte mit fünf  $72^\circ$ – $108^\circ$ -Rauten, dann kommt man insgesamt wieder mit zehn Rauten aus; es ergibt sich Typ 3 des regelmäßigen 10-Ecks (vgl. Abb. 10.1c).

Legt man allerdings sechs Rauten mit spitzem Winkel  $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$  in der Mitte aus, dann ergibt sich allerdings kein regelmäßiges 12-Eck, sondern ein regelmäßiges 6-Eck. Beginnt man in der Mitte mit  $\frac{360^\circ}{7}$ -Rauten, dann entsteht ein regelmäßiges 14-Eck. Legt man in der Mitte  $\frac{360^\circ}{8}$ -Rauten aus, dann entsteht kein regelmäßiges 16-Eck, sondern ein regelmäßiges 8-Eck (vgl. die folgenden Abbildungen).



Diese ersten Erfahrungen mit der zentralsymmetrischen Parkettierung führen zu der folgenden Vermutung:

Nur wenn  $n$  ungerade ist, kann man das regelmäßige  $2n$ -Eck mit  $\frac{1}{2} \cdot (n - 1) \cdot n$  rautenförmigen Puzzlestücken zentralsymmetrisch auslegen. Für gerades  $n$  gelingt dies nicht.

#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 10.6:** Überprüfen Sie diese Vermutung auch für  $n = 9$  und  $n = 10$ .

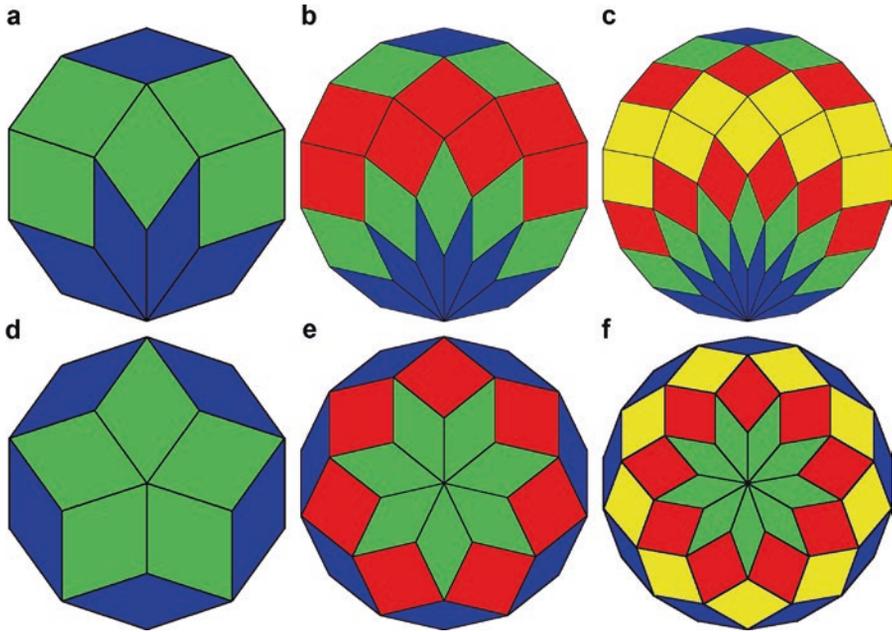
Einen Hinweis hierauf kann man schon den Tabellen in Abschn. 10.3 entnehmen: Wenn  $n$  ungerade ist, dann benötigt man von allen Rautengrößen jeweils gleich viele, bei geradem  $n$  gibt es einen Rautentyp, von dem man nur halb so viele wie von den anderen benötigt.

#### Regel

##### Besondere Eigenschaft der regelmäßigen $2n$ -Ecke mit ungeradem $n$

Bei regelmäßigen  $2n$ -Ecken mit ungeradem  $n$  ist sowohl eine baumartige als auch eine zentralsymmetrische Parkettierung möglich.

In Abb. 10.2 ist diese besondere Eigenschaft der regelmäßigen  $2n$ -Ecke für  $n = 5$ ,  $n = 7$  und  $n = 9$  dargestellt.



**Abb. 10.2** a-f Die baumartige und die zentralsymmetrische Auslegung eines regelmäßigen  $2n$ -Ecks für  $n = 5, 7, 9$

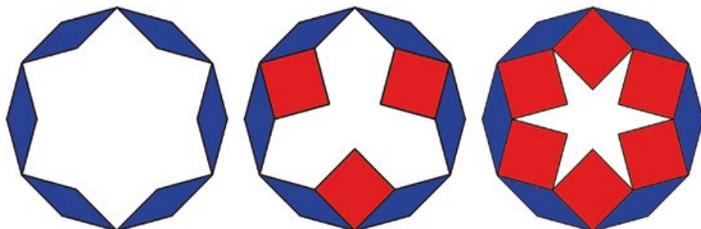
## 10.7 Zentralsymmetrische Parkettierung der regelmäßigen $2n$ -Ecke von außen nach innen

Dass eine zentralsymmetrische Auslegung bei den  $2n$ -Ecken mit geradem  $n$  nicht gelingt, kann man sich leichter klarmachen, wenn man mit der Parkettierung *am Rand* beginnt. Als Nebenergebnis entdeckt man eine Methode, schöne **Sternfiguren** zu entwickeln.

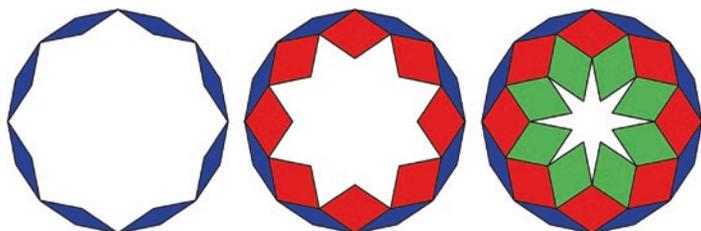
- $n = 4$  (regelmäßiges 8-Eck), also  $\alpha = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$ : Man kann die vier  $\alpha$ - $(180^\circ - \alpha)$ -Rauten an den Rand legen; dann ist aber für die zwei  $90^\circ$ - $90^\circ$ -Rauten, die zur Parkettierung des regelmäßigen 8-Ecks gehören, kein Platz.



- $n = 6$  (regelmäßiges 12-Eck), also  $\alpha = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$ : Man kann die sechs  $\alpha$ - $(180^\circ - \alpha)$ -Rauten an den Rand legen. Dann passen sechs  $90^\circ$ - $90^\circ$ -Rauten in die entstehenden Winkel, aber es stehen, wenn man die Rauten aus der baumartigen Parkettierung zugrunde legt, nur drei zur Verfügung. Nimmt man nur drei, dann ist für die sechs vorhandenen  $60^\circ$ - $120^\circ$ -Rauten kein Platz.



- $n = 8$  (regelmäßiges 16-Eck), also  $\alpha = \frac{180^\circ}{8} = 22,5^\circ$ : Zu den acht  $\alpha$ - $(180^\circ - \alpha)$ -Rauten am Rand passen die acht  $67,5^\circ$ - $112,5^\circ$ -Rauten. Aber für die entstehenden Winkel würden dann noch einmal acht von dieser Sorte benötigt, die nicht zur Verfügung stehen.



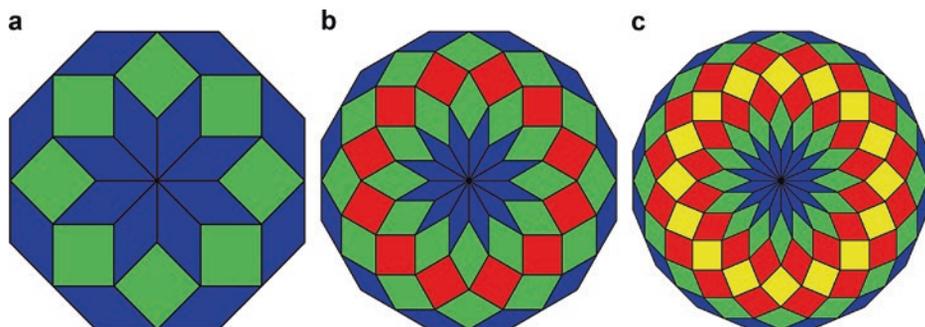
Wie in Abschn. 10.3 gezeigt, werden für die Parkettierungen mit baumartigem Muster Rauten mit folgenden Winkeln benötigt:  $\alpha$  und  $180^\circ - \alpha$ ,  $2\alpha$  und  $180^\circ - 2\alpha$ ,  $3\alpha$  und  $180^\circ - 3\alpha$  usw.

Die Innenwinkel am Rand haben alle die Winkelgröße  $180^\circ - \frac{180^\circ}{n} = 180^\circ - \alpha$ .

Legt man die  $n$  Rauten mit dem spitzen Winkel  $\alpha = \frac{180^\circ}{n}$  rundum an den Rand, dann entstehen zwischen zwei benachbarten Puzzleteilen jeweils Winkel von  $(180^\circ - \alpha) - 2\alpha = 180^\circ - 3\alpha$ .

In der dritten Schicht muss dann eine Raute in den Winkel  $360^\circ - [2 \cdot 3\alpha + (180^\circ - \alpha)] = 180^\circ - 5\alpha$  passen, in der vierten Schicht in den Winkel  $360^\circ - [2 \cdot 5\alpha + (180^\circ - 3\alpha)] = 180^\circ - 7\alpha$  usw.

Man benötigt demnach für eine zentralsymmetrische Auslegung Rauten mit den Winkeln  $\alpha$ ,  $3\alpha$ ,  $5\alpha$ ,  $7\alpha$  usw.



**Abb. 10.3** a–c Zentralsymmetrische  $2n$ -Ecke mit vierfacher Rautenzahl ( $n = 4, n = 6, n = 8$ )

Wenn sowohl eine baumartige Auslegung als auch eine zentralsymmetrische Parkettierung eines regelmäßigen  $2n$ -Ecks möglich sein soll, dann müssten Rauten mit den spitzen Winkeln  $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, 4\alpha, \dots$ , also *allen* Vielfachen von  $\alpha$  vorkommen.

Bei  $n = 5$  (zwei Schichten) ist  $\alpha = 36^\circ$  und man beginnt außen mit den  $\alpha$ - $4\alpha$ -Rauten, dann folgen in der zweiten Schicht die  $3\alpha$ - $2\alpha$ -Rauten, d. h., alle Winkel  $\alpha, 2\alpha, 3\alpha$  und  $4\alpha$  treten auf.

Bei  $n = 7$  (drei Schichten) beginnt man außen mit den  $\alpha$ - $6\alpha$ -Rauten, dann folgen die  $3\alpha$ - $4\alpha$ -Rauten und schließlich die  $5\alpha$ - $2\alpha$ -Rauten, d. h., alle Winkel  $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, 4\alpha, 5\alpha$  und  $6\alpha$  treten auf.

Bei  $n = 9$  (vier Schichten) legt man von außen nach innen nacheinander die  $\alpha$ - $8\alpha$ -Rauten,  $3\alpha$ - $6\alpha$ -Rauten,  $5\alpha$ - $4\alpha$ -Rauten und  $7\alpha$ - $2\alpha$ -Rauten aus, d. h., wieder treten alle Winkel  $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, 4\alpha, 5\alpha, 6\alpha, 7\alpha$  und  $8\alpha$  auf.

Dagegen kommt man bei  $n = 4$  (zwei Schichten) nach dem Auslegen der ersten Schicht mit  $\alpha$ - $3\alpha$ -Rauten nicht mehr weiter, bei  $n = 6$  (drei Schichten) nach dem Auslegen der  $\alpha$ - $5\alpha$ -Rauten und der  $3\alpha$ - $3\alpha$ -Rauten, bei  $n = 8$  (vier Schichten) hat man nach dem Auslegen der  $\alpha$ - $7\alpha$ -Rauten und der  $3\alpha$ - $5\alpha$ -Rauten keine passenden Rauten mehr.

Dass es trotzdem zentralsymmetrisch parkettierte 8-Ecke, 12-Ecke, 16-Ecke usw. gibt, zeigen die Abb. 10.3 a–c.

Ein zentralsymmetrisch ausgelegtes regelmäßiges 8-Eck, 12-Eck, 16-Eck usw. erhält man nur mit der vierfachen Anzahl an Puzzlestücken, also mit  $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (n - 1) \cdot n$  Rauten, also für

$n = 4$  (regelmäßiges 8-Eck) mit  $16 + 8 = 24$  Rauten,

$n = 6$  (regelmäßiges 12-Eck) mit  $24 + 24 + 12 = 60$  Rauten,

$n = 8$  (regelmäßiges 16-Eck) mit  $32 + 32 + 32 + 16 = 112$  Rauten.

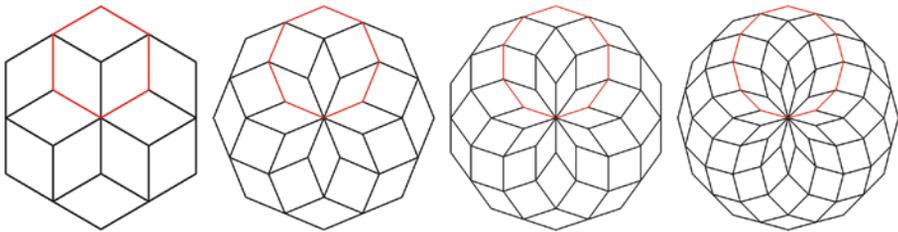
## 10.8 Rauten-Parkettierungen für regelmäßige 5-Ecke, 7-Ecke, 9-Ecke usw

Ein Argument, warum es keine Parkettierungen mit Rauten bei den regelmäßigen Vielecken mit ungerader Eckenzahl gibt, erschließt sich unmittelbar aus den Überlegungen des letzten Abschnitts: Eine zentralsymmetrische Parkettierung von außen nach innen ist nicht möglich, weil eine Auslegung von Rauten am Rand eines regelmäßigen  $n$ -Ecks voraussetzt, dass  $n$  eine gerade Zahl ist, da jede Raute an zwei Seiten des  $n$ -Ecks anliegt. Außerdem zeigt sich bereits nach dem ersten Schritt, dass es so nicht weitergeht, vgl. die folgenden Abbildungen zum regelmäßigen 5-Eck, 7-Eck und 9-Eck.

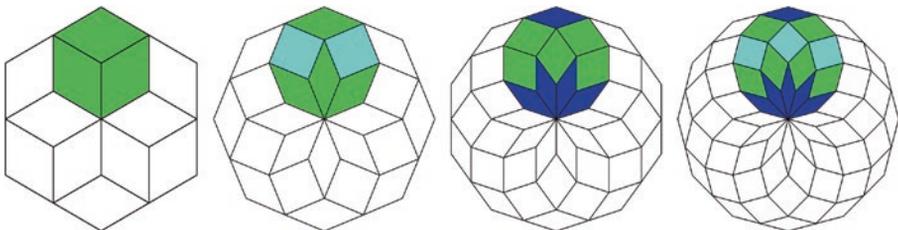


Eine andere anschauliche Begründung mit erstaunlichen „Nebenergebnissen“ ergibt sich dadurch, dass man regelmäßige  $n$ -Ecke dreht:

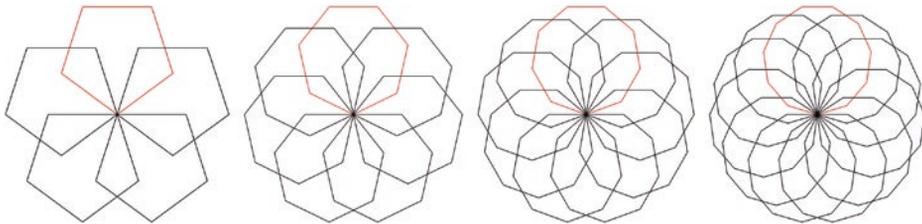
Zeichnet man ein regelmäßiges Vieleck mit  $n$  Ecken (in den folgenden Abbildungen in Rot gezeichnet) und dreht dieses  $n$ -mal jeweils um  $\frac{360^\circ}{n}$ , dann bilden die regelmäßigen  $n$ -Ecke für *gerades*  $n$  die in Abschn. 10.5 betrachteten zentralsymmetrischen Figuren.



Die rot eingerahmten Teilfiguren enthalten genau die baumartig wachsende Parkettierung, die wir in Abschn. 10.2 betrachtet haben. Dies wird in den folgenden Abbildungen (mit  $n = 6, 8, 10, 12$ ) noch deutlicher sichtbar.

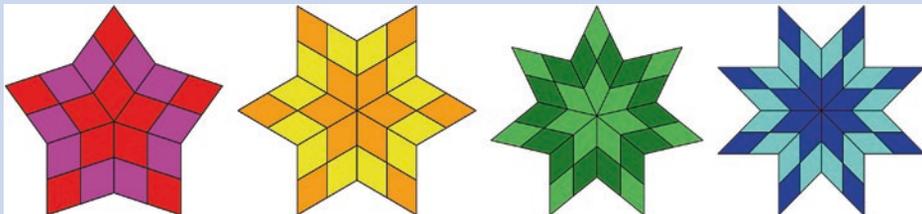


Bei *ungeradem*  $n$  ist dagegen keine Struktur erkennbar (vgl. die folgenden Abbildungen für  $n = 5, 7, 9, 11$ ).



### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 10.7:** Analysieren Sie die folgenden zentralsymmetrisch mit Rauten parkettierten Sternfiguren.



## 10.9 Hinweise auf weiterführende Literatur

Bei **Wikipedia** findet man in deutscher (englischer, französischer) Sprache weitere Informationen und Literatur zum Stichwort:

- Penrose-Parkettierung (Penrose Tiling\*, Pavage de Penrose)  
\*) *Auszeichnung als lesenswerter/exzellenter Artikel*

Der englischsprachige Wikipedia-Beitrag *Euclidean tilings by convex regular polygons* gibt einen Überblick über die Parkettierung der Ebene durch regelmäßige konvexe Vielecke.

Einige Ausführungen zum Parkettieren mit Rauten enthält das Buch:

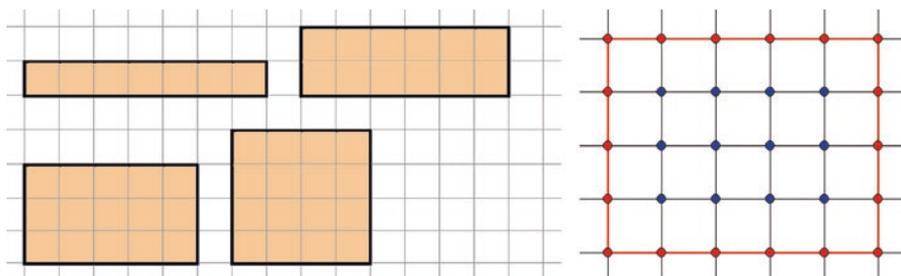
- Walser, Hans (2014): *Symmetrie in Raum und Zeit*. Leipzig, Edition am Gutenbergplatz

# Geometrische Figuren auf kariertem Papier und auf einem Quadratgitter

# 11

*Man muss einen mathematischen Satz erraten, ehe man ihn beweist, man muss die Idee eines Beweises erraten, ehe man die Einzelheiten durchführt.*

(George Pólya, amerikanischer Mathematiker ungarischer Herkunft 1887–1985)



In der Abbildung links sind Rechtecke abgebildet, die man ohne besondere Hilfsmittel auf kariertem Papier (Papier mit quadratischen Rechenkästchen) zeichnen kann. Statt des Papiers mit Rechenkästchen kann man allgemein ein Quadratgitter zur Darstellung von einfachen geometrischen Figuren benutzen, beispielsweise ein Koordinatensystem mit ganzzahligen Koordinaten.

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns zunächst mit Rechtecken auf kariertem Papier, die wir dann schrittweise verändern. Weiter unten untersuchen wir einfache Figuren, deren Eckpunkte auf dem Quadratgitter liegen.

### 11.1 Rechtecke mit vorgegebenem Flächeninhalt

Um ein Quadrat (also ein Rechteck mit gleichlangen Seiten) mit dem Flächeninhalt  $A = 1$  FE (Flächeneinheit) einzurahmen, zeichnet man 4 Strecken, jeweils von der Länge 1 LE (Längeneinheit). Die Länge dieses geschlossenen Streckenzugs ist der **Umfang der Figur**.

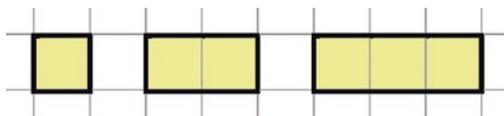
Gibt man für das Zeichnen von Rechtecken auf kariertem Papier einen Flächeninhalt  $A$  von 1 FE, 2 FE oder 3 FE vor, so sind die Rechtecke (bis auf Drehung um  $90^\circ$ ) eindeutig festgelegt:

Das Rechteck mit dem Flächeninhalt

$A = 1$  (FE) hat den Umfang  $u = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$  (LE),

$A = 2$  (FE) hat den Umfang  $u = 2 + 1 + 2 + 1 = 2 \cdot (2 + 1) = 6$  (LE),

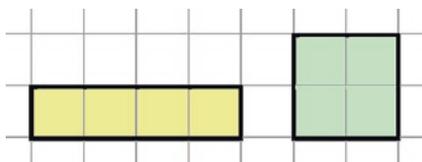
$A = 3$  (FE) hat den Umfang  $u = 3 + 1 + 3 + 1 = 2 \cdot (3 + 1) = 8$  (LE).



Zum Flächeninhalt  $A = 4$  (FE) gibt es zwei verschiedene Rechtecke (sie werden hier als „gleich groß“ bezeichnet), nämlich das Rechteck

links mit dem Umfang  $u = 4 + 1 + 4 + 1 = 2 \cdot (4 + 1) = 10$  (LE),

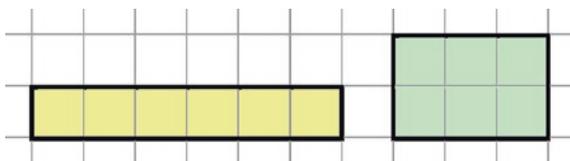
rechts mit dem Umfang  $u = 2 + 2 + 2 + 2 = 4 \cdot 2 = 8$  (LE).



Ähnliches gilt für Rechtecke mit dem Flächeninhalt  $A = 6$  (FE). Auch hier gibt es zwei verschiedene Rechtecke, nämlich das Rechteck

links mit dem Umfang  $u = 6 + 1 + 6 + 1 = 2 \cdot (6 + 1) = 14$  (LE),

rechts mit dem Umfang  $u = 3 + 2 + 3 + 2 = 2 \cdot (3 + 2) = 10$  (LE).



**Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen**

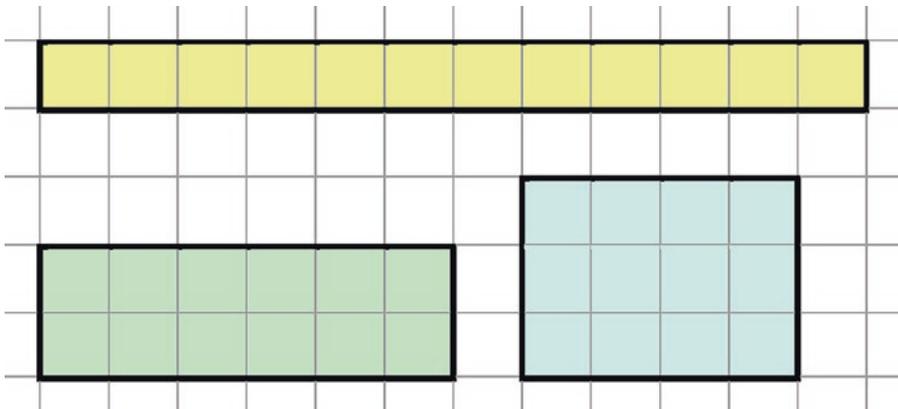
**A 11.1:** Zeigen Sie, dass es auch für die Flächeninhalte  $A = 8$  (FE),  $A = 9$  (FE) und  $A = 10$  (FE) jeweils zwei verschiedene Rechtecke gibt. Zeichnen Sie diese.

Dass es in den Fällen  $A = 4$ ,  $A = 6$ ,  $A = 8$  und  $A = 10$  jeweils zwei Arten von Rechtecken gibt, hängt damit zusammen, dass sich die natürlichen Zahlen 4, 6, 8 und 10 durch 2 teilen lassen, sodass es außer den Rechtecken mit den Formaten  $4 \times 1$ ,  $6 \times 1$ ,  $8 \times 1$  und  $10 \times 1$  auch Rechtecke mit den Formaten  $2 \times 2$ ,  $3 \times 2$ ,  $4 \times 2$  und  $5 \times 2$  gibt. Und da sich die natürliche Zahl 9 durch 3 teilen lässt, gibt es außer dem Rechteck im Format  $9 \times 1$  auch ein Rechteck im Format  $3 \times 3$ .

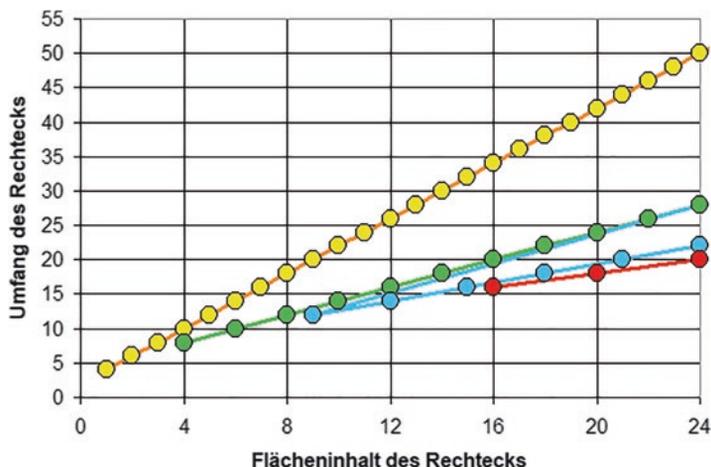
Statt der für Rechtecke typischen Schreibweise mit dem „ $\times$ “-Symbol gibt es auch die Möglichkeit, diese Fälle als sog. **Teiler-Paare** zu notieren, beispielsweise hat die natürliche Zahl 4 die Teiler-Paare (1; 4) und (2; 2).

**A 11.2:** Notieren Sie jeweils die zugehörigen Teilerpaare zu den Flächeninhalten 6, 8, 9, 10 (FE) und geben Sie den zugehörigen Rechteck-Umfang an.

Zur natürlichen Zahl 12 gehören drei Teilerpaare, nämlich (1; 12), (2; 6) und (3; 4). Daher gibt es drei verschiedene Rechtecke mit dem Flächeninhalt  $A=12$ . Die Umfänge dieser drei Rechtecke sind  $u = 2 \cdot (12 + 1) = 26$ ,  $u = 2 \cdot (6 + 2) = 16$  und  $u = 2 \cdot (4 + 3) = 14$ .



Aus den bisherigen Überlegungen wird eine Regel deutlich, die durch Abb. 11.1 veranschaulicht wird.



**Abb. 11.1** Zusammenhang zwischen Flächeninhalt und Umfang von Rechtecken

### Regel

#### Anzahl der Rechtecke mit einem vorgegebenen ganzzahligen Flächeninhalt

Um herauszufinden, wie viele Rechtecke es mit einem bestimmten Flächeninhalt  $A$  gibt, bestimmt man alle Teilerpaare der natürlichen Zahl  $A$ .

- Zu jeder natürlichen Zahl  $n$  mit  $n \geq 1$  gibt es ein Teilerpaar  $(1; n)$ , und hierzu gehört ein Rechteck mit den Seitenlängen 1 und  $n$ , also mit dem Flächeninhalt  $A = n \cdot 1 = n$  und dem Umfang  $u = 2 \cdot (n + 1) = 2n + 2$ .
- Zu jeder geraden natürlichen Zahl  $n = 2m$  mit  $n \geq 4$  gibt es zusätzlich ein Teilerpaar  $(2; m)$ , und hierzu gehört ein Rechteck mit den Seitenlängen 2 und  $m$ , also mit dem Flächeninhalt  $A = m \cdot 2 = 2m = n$  und dem Umfang  $u = 2 \cdot (m + 2) = 2m + 4 = n + 4$ .
- Zu jeder durch 3 teilbaren natürlichen Zahl  $n = 3m$  mit  $n \geq 9$  gibt es zusätzlich ein Teilerpaar  $(3; m)$ , und hierzu gehört ein Rechteck mit den Seitenlängen 3 und  $m$ , also mit dem Flächeninhalt  $A = m \cdot 3 = 3m = n$  und dem Umfang  $u = 2 \cdot (m + 3) = 2m + 6 = \frac{2}{3}n + 6$ .
- Zu jeder durch 4 teilbaren natürlichen Zahl  $n = 4m$  mit  $n \geq 16$  gibt es zusätzlich ein Teilerpaar  $(4; m)$ , und hierzu gehört ein Rechteck mit den Seitenlängen 4 und  $m$ , also mit dem Flächeninhalt  $A = m \cdot 4 = 4m = n$  und dem Umfang  $u = 2 \cdot (m + 4) = 2m + 8 = \frac{1}{2}n + 8$ .

#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 11.3:** Warum sind bei der Formulierung der Regel Einschränkungen ( $n \geq 1$ ,  $n \geq 4$ ,  $n \geq 9$  usw.) notwendig?

## 11.2 Rechtecke mit gleichem Umfang

Bei der Durchsicht der bisher betrachteten Rechtecke fällt auf, dass es zwei Rechtecke gibt, die den Umfang  $u = 8$  (LE) haben, nämlich das  $3 \times 1$ -Rechteck (mit Flächeninhalt 3 FE) und das  $2 \times 2$ -Rechteck (mit Flächeninhalt 4 FE).

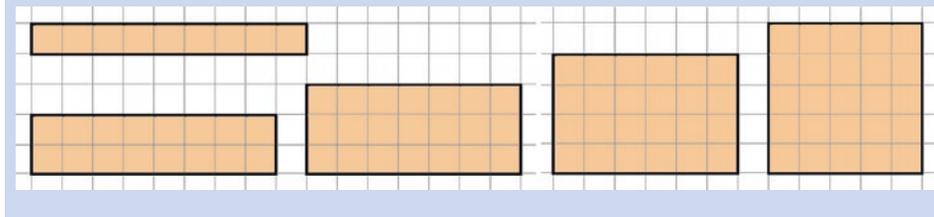
Und zum Umfang  $u = 10$  LE findet man das  $4 \times 1$ -Rechteck (mit Flächeninhalt 4 FE) und das  $3 \times 2$ -Rechteck (mit Flächeninhalt 6 FE).

Für den Umfang  $u = 12$  (LE) gibt es sogar drei Rechtecke, nämlich das  $5 \times 1$ -Rechteck (mit Flächeninhalt 5 FE), das  $4 \times 2$ -Rechteck (mit Flächeninhalt 8 FE) und das  $3 \times 3$ -Rechteck (mit Flächeninhalt 9 FE).

Wir wollen nun allgemein überlegen, wie viele verschiedene Rechtecke es zu einem bestimmten Umfang gibt.

### Beispiel: Rechtecke mit Umfang $u = 20$ LE

In der folgenden Abbildung sind die fünf verschiedenen großen Rechtecke mit Umfang  $u = 20$  LE, also mit den Seitenlängen  $a$  und  $b$  mit  $a + b = 10$  zu sehen, nämlich das  $9 \times 1$ -Rechteck (mit Flächeninhalt 9 FE), das  $8 \times 2$ -Rechteck (mit Flächeninhalt 16 FE), das  $7 \times 3$ -Rechteck (mit Flächeninhalt 21 FE), das  $6 \times 4$ -Rechteck (mit Flächeninhalt 24 FE) und das  $5 \times 5$ -Rechteck (mit Flächeninhalt 25 FE).



Grundsätzlich ist es so, dass alle Rechtecke auf kariertem Papier einen Umfang haben, der geradzahlig ist, also durch 2 teilbar ist. Das liegt daran, dass jeweils zwei einander gegenüberliegende Seiten gleich groß sind und deshalb die zugehörigen Längen in der Summe, die man für den Umfang bilden muss, zweimal enthalten sind.

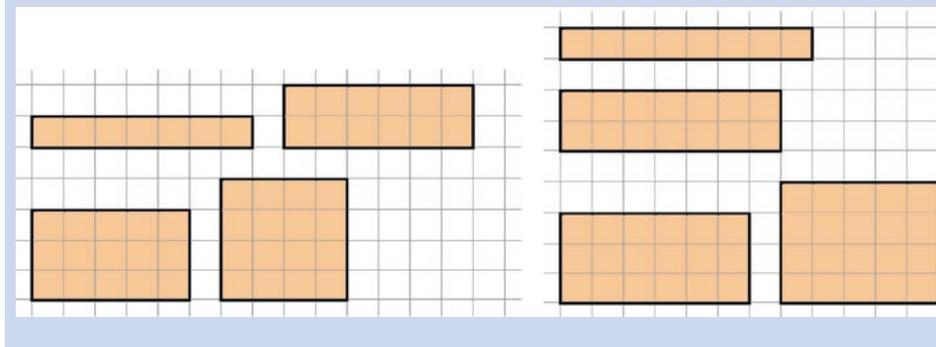
Daher geht man also am einfachsten wie folgt vor:

- Man halbiert die Zahl  $u$  und bestimmt alle Zahlenpaare  $(a; b)$  aus natürlichen Zahlen  $a, b$  mit  $a \leq b$ , für deren Summe gilt:  $a + b = \frac{1}{2} \cdot u$ .

**Beispiele mit  $u = 16$  bzw.  $u = 18$**

$u = 16$  (LE), also  $\frac{1}{2} \cdot u = 8$ : Zahlenpaare: (1; 7), (2; 6), (3; 5), (4; 4), vgl. folgende Abb. links.

$u = 18$  (LE), also  $\frac{1}{2} \cdot u = 9$ : Zahlenpaare: (1; 8), (2; 7), (3; 6), (4; 5), vgl. folgende Abb. rechts.



Um eine Regel zu finden, wie viele Zahlenpaare zu einem bestimmten Umfang  $u$  gehören, betrachten wir die folgende Tabelle in Abb. 11.2.

Vergleicht man die gelb unterlegten Zeilen der Tabelle mit den jeweils nachfolgenden grün unterlegten Zeilen, dann wird die folgende Regel deutlich.

### Regel

#### Anzahl der Rechtecke mit einem vorgegebenen ganzzahligen Umfang

- Wenn der Umfang  $u$  eine durch 4 teilbare natürliche Zahl ist, dann ist der vierte Teil von  $u$  genau gleich der Anzahl der möglichen Rechtecke mit diesem Umfang.
- Geht man zu dem Rechteck über, dessen Umfang um 2 LE größer ist, dann bleibt die Anzahl der möglichen Rechtecke gleich.

Außerdem gilt:

- Wenn der Umfang  $u$  eine durch 4 teilbare natürliche Zahl ist, dann ist eines der *möglichen* Rechtecke ein Quadrat; dabei ist der vierte Teil des Umfangs gleich der Seitenlänge des Quadrats.

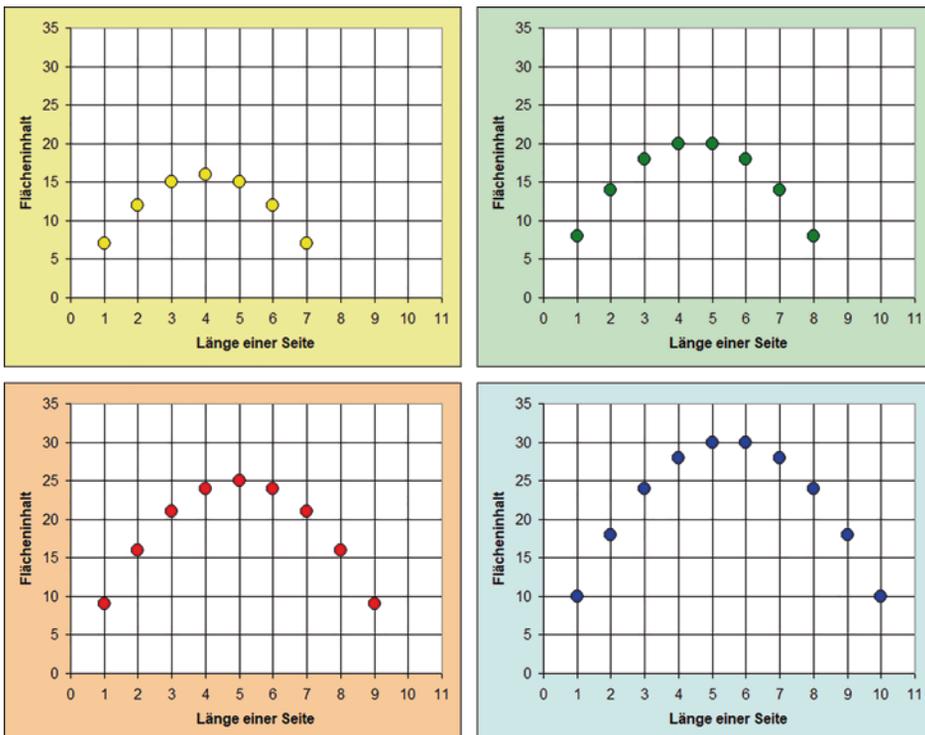
Abschließend untersuchen wir, welchen Flächeninhalt ein Rechteck **maximal** haben kann, dessen Umfang vorgegeben ist.

Die folgenden Grafiken für  $u = 16$  (gelb),  $u = 18$  (grün),  $u = 20$  (orange-rot) und  $u = 22$  (blau) ergeben sich, wenn man jeweils den Flächeninhalt zu einzelnen Rechtecken der Tabelle aus Abb. 11.2 bestimmt.

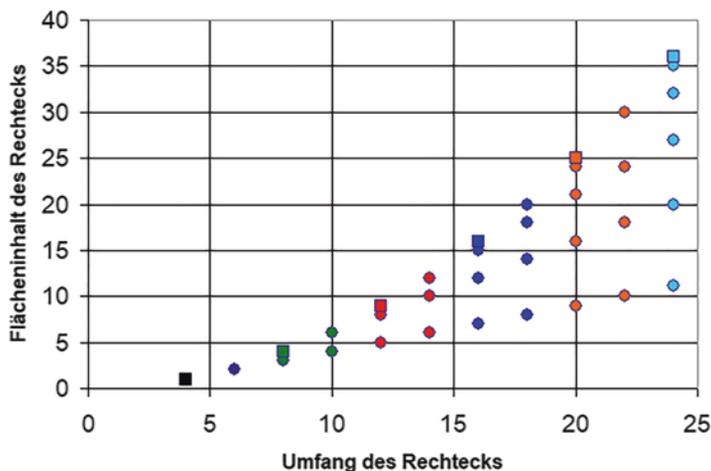
Umfang $u$	Zahlenpaare	Anzahl
4	(1 ; 1)	1
6	(1 ; 2)	1
8	(1 ; 3), (2 ; 2)	2
10	(1 ; 4), (2 ; 3)	2
12	(1 ; 5), (2 ; 4), (3 ; 3)	3
14	(1 ; 6), (2 ; 5), (3 ; 4)	3
16	(1 ; 7), (2 ; 6), (3 ; 5), (4 ; 4)	4
18	(1 ; 8), (2 ; 7), (3 ; 6), (4 ; 5)	4
20	(1 ; 9), (2 ; 8), (3 ; 7), (4 ; 6), (5 ; 5)	5
22	(1 ; 10), (2 ; 9), (3 ; 8), (4 ; 7), (5 ; 6)	5
...	...	...

**Abb. 11.2** Anzahl der Rechtecke mit einem vorgegebenen ganzzahligen Umfang

Im Unterschied zu den bisherigen Überlegungen werden dabei auch die Rechtecke mit den Seitenlängen  $a$  und  $b$  berücksichtigt, die man durch *Vertauschen* der Seitenlängen erhält.



Die Punkte liegen auf nach unten geöffneten **quadratischen Parabeln**.



**Abb. 11.3** Flächeninhalte der Rechtecke mit einem bestimmten Umfang

Wenn der Umfang  $u$  durch vier teilbar ist, liegt das Maximum (also der größtmögliche Flächeninhalt) vor, wenn alle vier Seiten des Rechtecks gleich lang sind, d. h., wenn ein Quadrat betrachtet wird.

(Dies gilt übrigens allgemein auch für Rechtecke, die nicht ganzzahlige Seitenlängen haben).

### Satz

#### Rechtecke mit maximalem Flächeninhalt

Unter allen Rechtecken mit einem bestimmten Umfang hat das Quadrat den größten Flächeninhalt.

Umgekehrt gilt auch: Unter allen Rechtecken mit einem bestimmten Flächeninhalt hat das Quadrat den kleinsten Umfang.

### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

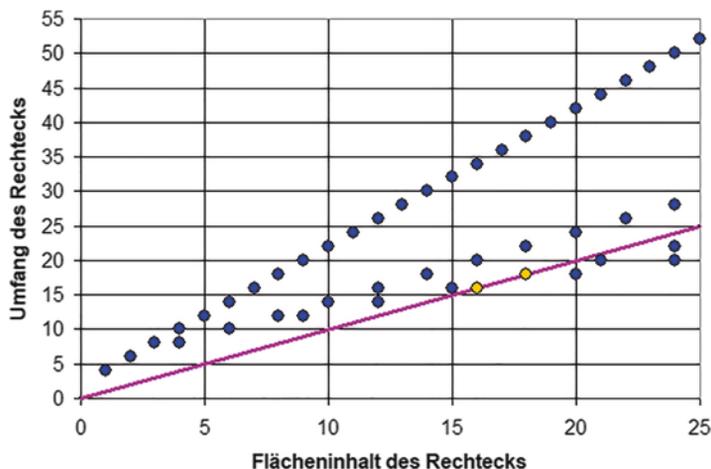
**A 11.4:** Erläutern Sie Abb. 11.3.

## 11.3 Besondere Rechtecke: Das $16\text{er-}4 \times 4\text{-Rechteck}$ und das $18\text{er-}3 \times 6\text{-Rechteck}$

Vielleicht ist bei der Betrachtung der Rechtecke mit Umfang 16 bzw. 18 aufgefallen, dass jeweils ein Rechteck existiert, für das die Zahlenwerte für  $A$  und  $u$  übereinstimmen:

$A = 16$  (FE) und  $u = 16$  (LE) bzw.  $A = 18$  (FE) und  $u = 18$  (LE).

Es handelt sich dabei um das  $4 \times 4\text{-Rechteck}$  bzw. das  $6 \times 3\text{-Rechteck}$ .



**Abb. 11.4** Zusammenhang zwischen Flächeninhalt und Umfang von Rechtecken

Man kann beweisen, dass es nur für die beiden natürlichen Zahlen 16 und 18 ein Rechteck gibt, bei dem der Umfang und Flächeninhalt gleiche Zahlwerte haben.

In Abb. 11.4 sind diese beiden Punkte  $(A | u) = (16 | 16)$  und  $(A | u) = (18 | 18)$  hervorgehoben; außerdem ist die Gerade eingezeichnet, für deren Punkte allgemein die Übereinstimmung der beiden Zahlenwerte zutrifft, für die also gilt  $u = A$ .

$(16 | 16)$  und  $(18 | 18)$  scheinen demnach die einzigen Punkte mit ganzzahligen Koordinaten auf der Geraden zu sein.

Das ist natürlich kein Beweis, denn die Grafik zeigt nur einen Ausschnitt. Es wäre ja denkbar, dass es für größere Umfänge vielleicht noch weitere Rechtecke mit dieser besonderen Eigenschaft gibt.

Dass dies tatsächlich nicht der Fall ist, kann man wie folgt zeigen:

Für die Seitenlängen  $a, b$  muss gelten  $2 \cdot (a + b) = a \cdot b$ .

Diese Gleichung kann man umformen:

$$2 \cdot a = a \cdot b - 2 \cdot b \Leftrightarrow 2 \cdot a = b \cdot (a - 2) \Leftrightarrow b = \frac{2a}{a-2} = \frac{2 \cdot (a-2) + 4}{a-2} = 2 + \frac{4}{a-2} \quad (\text{für } a > 2).$$

Diesen Zusammenhang kann man in einem  $a$ - $b$ -Koordinatensystem darstellen, vgl. folgende Abbildung.

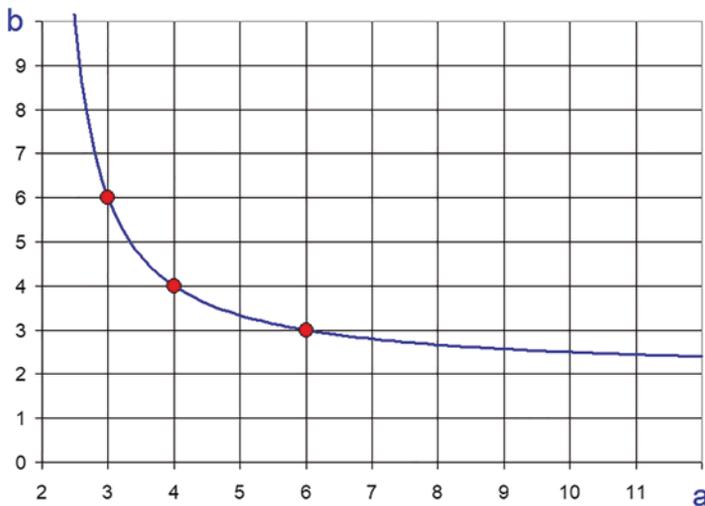
Man stellt fest: Nur die drei Punkte des Graphen  $(3 | 6)$ ,  $(4 | 4)$  und  $(6 | 3)$  haben ganzzahlige Koordinaten.

Dass es keine weiteren Punkte außerhalb des sichtbaren Bereichs gibt, kann man aus der strengen Monotonie des Graphen ablesen:

Für  $a > 6$  gilt (da der Nennerterm auf jeden Fall größer als null ist):

$$2 < b = 2 + \frac{4}{a-2} < 3, \text{ d. h., alle Funktionswerte liegen zwischen 2 und 3,}$$

Also auch außerhalb Bereichs, der in der Grafik zu sehen ist, gibt es keine ganzzahligen  $b$ -Werte mehr.



## 11.4 Veränderungen an der Rechteckfigur

Wenn man ein Eckquadrat-Kästchen oder mehrere Quadrat-Kästchen an einer Ecke wegnimmt, dann vermindert sich der Flächeninhalt um eine entsprechende Anzahl von Kästchen-Einheiten – aber der Umfang bleibt gleich.

### Beispiele

Am  $3 \times 2$ -Rechteck mit dem Flächeninhalt 6 (FE) kann man höchstens zwei Eckquadrate wegnehmen (vgl. folgende Abbildungen mit rot gestrichelten Linien), d. h., bei diesen Figuren mit dem Umfang 10 (LE) liegt der Flächeninhalt zwischen 4 (FE) und 6 (FE).

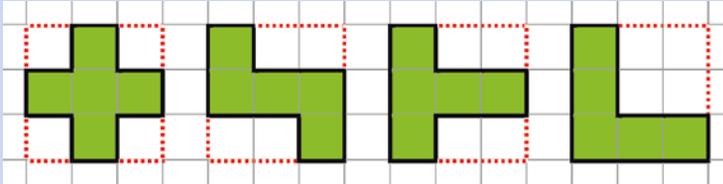
Figur links:  $A = 2 \cdot 3 - 1 = 5$  (FE);  $u = 2 \cdot (2 + 3) = 10$  (LE),

Übrige Figuren:  $A = 2 \cdot 3 - 2 = 4$  (FE);  $u = 2 \cdot (2 + 3) = 10$  (LE).



Am  $3 \times 3$ -Rechteck mit dem Flächeninhalt 9 (FE) kann man höchstens vier Eckquadrat-Kästchen wegnehmen, d. h., bei diesen Figuren mit dem Umfang 12 (LE) liegt der Flächeninhalt zwischen 5 (FE) und 9 (FE).

Für alle diese Figuren gilt  $A = 3 \cdot 3 - 4 = 5$  (FE);  $u = 2 \cdot (3 + 3) = 12$  (LE).



#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 11.5:** Um wie viel kann man den Flächeninhalt eines  $a \times b$ -Rechtecks durch Wegnehmen von Eckquadrat-Kästchen *höchstens* vermindern?

Wenn man allerdings ein Quadrat-Kästchen oder mehrere herausnimmt, die *nicht* an einer Ecke liegen, dann wird die Sache komplizierter ...

An den folgenden Beispielen wird deutlich, dass der Umfang um 2 (LE), 4 (LE), 6 (LE), ... größer wird, wenn man vom Rand her Quadrate herausschneidet. In den Grafiken sind die hinzugekommenen Strecken in Violett eingezeichnet.

Auch kann man an den Beispielen ablesen, dass die Anzahl der Quadrate, die herausgeschnitten werden, eine wichtige Rolle spielt, wesentlich ist aber vor allem die Tiefe der „Einbuchtung“.

#### Beispiele für Veränderungen durch Herausnahme von Quadraten

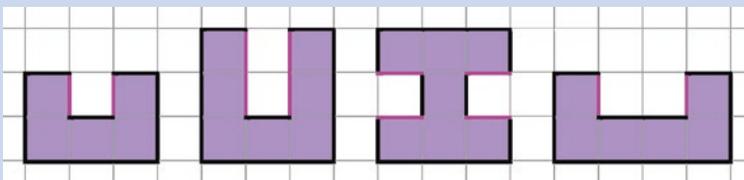
Die folgenden Abbildungen zeigen von links nach rechts veränderte Rechtecke mit

$$A = 2 \cdot 3 - 1 = 5 \text{ (FE)}; u = 2 \cdot (2 + 3) + 2 = 12 \text{ (LE)},$$

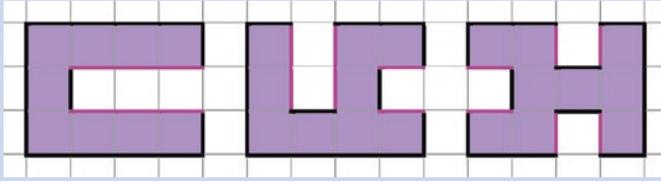
$$A = 3 \cdot 3 - 2 = 7 \text{ (FE)}; u = 2 \cdot (3 + 3) + 4 = 16 \text{ (LE)},$$

$$A = 3 \cdot 3 - 2 = 7 \text{ (FE)}; u = 2 \cdot (3 + 3) + 4 = 16 \text{ (LE)},$$

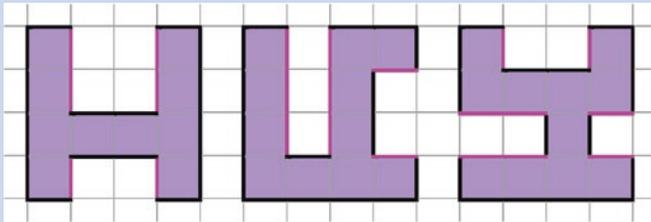
$$A = 2 \cdot 4 - 2 = 6 \text{ (FE)}; u = 2 \cdot (2 + 4) + 2 = 14 \text{ (LE)}.$$



Für alle folgenden Figuren gilt  $A = 3 \cdot 4 - 3 = 9$  (FE);  $u = 2 \cdot (3 + 4) + 6 = 20$  (LE).



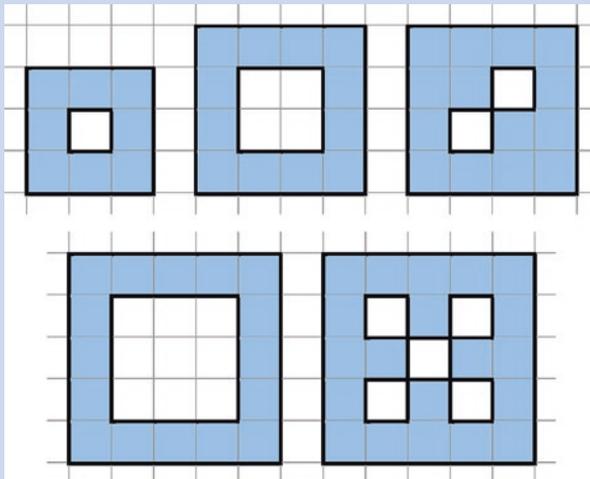
Für die ersten beiden der folgenden Figuren gilt:  $A = 4 \cdot 4 - 6 = 10$  (FE);  $u = 2 \cdot (4 + 4) + 6 = 22$  (LE), und für die Figur rechts gilt:  $A = 4 \cdot 4 - 4 = 12$  (FE);  $u = 2 \cdot (4 + 4) + 6 = 22$  (LE).



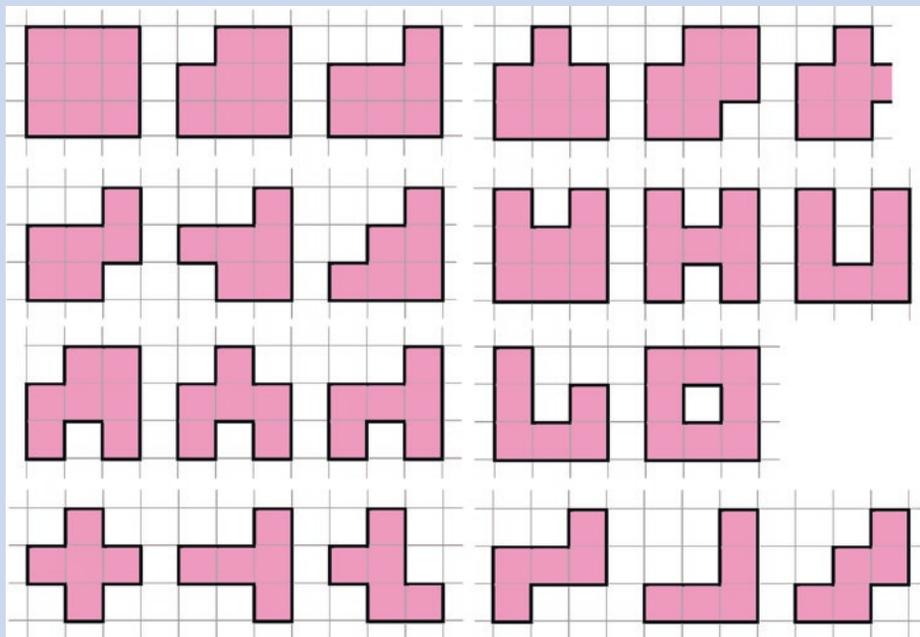
#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 11.6:** Um wie viel kann man den Umfang eines  $a \times b$ -Rechtecks durch Herausnehmen von Quadrat-Kästchen *höchstens* vergrößern?

**A 11.7:** In welchem Maße können Flächeninhalte und Umfänge (=Länge der begrenzenden Strecken innen *und* außen) verändert werden, wenn man *im Innern* der Rechtecke solche Quadrat-Kästchen herausnimmt, vgl. die folgenden Abbildungen.



**A 11.8:** Untersuchen Sie, welche Formen sich auf diese Weise überhaupt aus einer Ausgangsfigur ergeben können, beispielsweise aus einem  $3 \times 3$ -Rechteck (Quadrat). Bestimmen Sie jeweils Umfang und Flächeninhalt der Figuren.



*Hinweis:* Die zuletzt abgebildeten Figuren gehören zu den **Pentominos**, vgl. Kap. 5.

Weitere Figuren erhält man aus den abgebildeten Figuren durch Drehung oder Spiegelung.

**A 11.9:** Welche Figuren ergeben sich aus einem  $4 \times 3$ -Rechteck als Ausgangsfigur? Bestimmen Sie jeweils Umfang und Flächeninhalt der Figuren.



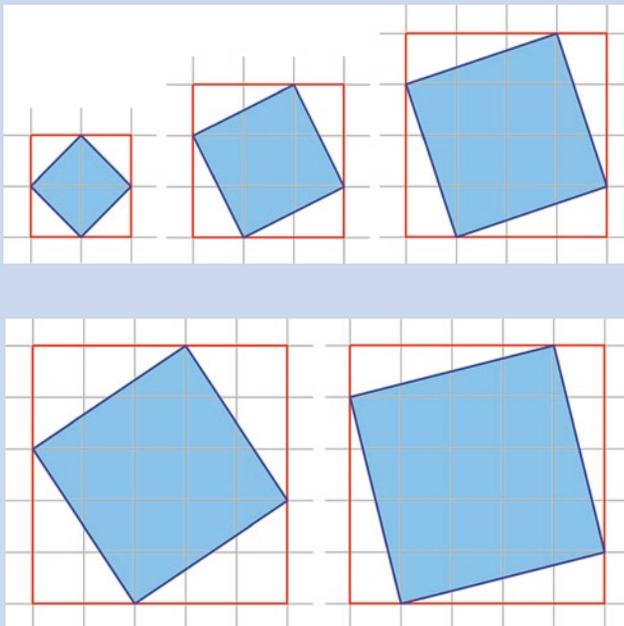
### Rechtecke mit ganzzahligem Flächeninhalt, aber nicht ganzzahligem Umfang

Die Quadrate in der folgenden Abbildung sind gegenüber dem Rechenkästchen-Raster gedreht, aber weil die Eckpunkte auf den Gitterpunkten liegen, kann man trotzdem die Flächeninhalte berechnen:

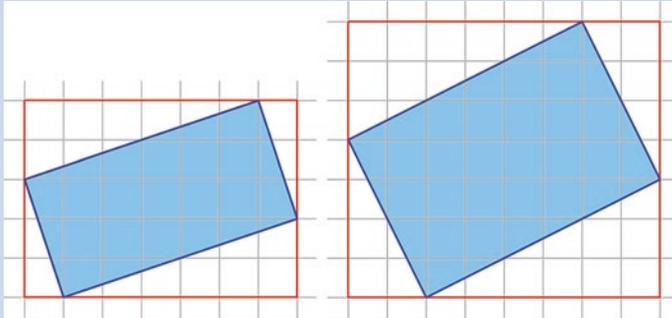
Man braucht nur einen Rahmen um die Quadrate zu zeichnen, also ein Quadrat, auf dessen Seiten die Eckpunkte des gegebenen Quadrats liegen, vgl. die folgenden Abbildungen.

#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

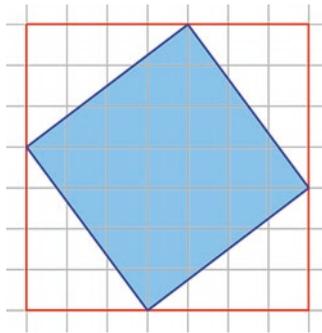
**A 11.10:** Welche Flächeninhalte haben die hellblau gefärbten Quadrate? Gibt es einfache Regeln für das Berechnen dieser Flächeninhalte? Welche Werte können auftreten?



**A 11.11:** Auf ähnliche Weise wie in A 11.10 kann man auch *Rechtecke* so drehen, dass deren Eckpunkte auf den Gitterpunkten liegen. Was muss man hier beachten? Welche Flächeninhalte können auftreten?



*Hinweis:* Ein besonderer Fall liegt im folgenden Beispiel vor: Hier ist nicht nur der Flächeninhalt, sondern auch der Umfang ganzzahlig; denn die Seitenlängen der Eckdreiecke bilden ein pythagoreisches Zahlentripel, vgl. Abschn. 2.7.



## 11.5 Untersuchungen zum Satz von Pick

Georg Alexander Pick (geb. 1859 in Wien) war von 1888 bis 1927 Professor für Mathematik an der Universität Prag. 1942 wurde er von den Nationalsozialisten im KZ Theresienstadt umgebracht.

Er entdeckte eine einfache Möglichkeit, den Flächeninhalt von Vielecken zu berechnen, wenn die Eckpunkte des Vielecks Punkte eines Quadratgitters sind.

**Satz****Flächeninhalt von Vielecken im Quadratgitter**

Sind die Eckpunkte eines Vielecks Punkte eines Quadratgitters, dann hängt der Flächeninhalt  $A$  des Vielecks nur von der Anzahl  $r$  der Randpunkte ab, die Gitterpunkte sind, und von der Anzahl  $i$  der innerhalb des Vielecks liegenden Gitterpunkte, und zwar:

$$A = i + \frac{1}{2} \cdot r - 1$$

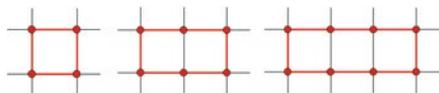
In der Literatur findet man kurze und elegante Beweise der Formel. Wir wollen uns hier der Aussage des Satzes und dem Beweis der Formel schrittweise nähern. Ein eleganter Weg zeichnet sich i. A. dadurch aus, dass er geradlinig ist und Umwege vermeidet – im Unterschied zu dem hier eingeschlagenen Weg, bei dem durch Aufgabenvariation Erfahrungen gesammelt werden sollen. Es wird dabei in Kauf genommen, dass sich Überlegungen nachträglich als überflüssig herausstellen; denn das gehört auch zur gewählten Methode.

Zunächst betrachten wir **Rechtecke**.

Sowohl zur Berechnung des Flächeninhalts ( $A = \text{Breite } b \text{ des Rechtecks} \cdot \text{Höhe } h \text{ des Rechtecks}$ ) als auch des Umfangs ( $u = 2 \cdot (\text{Breite } b \text{ des Rechtecks} + \text{Höhe } h \text{ des Rechtecks})$ ) benötigt man die Größen  $b$  und  $h$ .

Deshalb schließen wir zunächst diese beiden Größen in unsere Betrachtungen ein.

Beginnen wir mit einem Rechteck ohne innere Punkte, d. h., wir untersuchen Rechtecke der Höhe 1 LE.



Ein Rechteck der Breite 1 LE, also ein Quadrat, besitzt  $r = 4$  Randpunkte. Wächst die Breite  $b$  schrittweise um 1 LE, dann kommen jeweils 2 Randpunkte hinzu. Die Anzahl  $r$  der Randpunkte eines Rechtecks mit Höhe  $h = 1$  LE berechnet sich daher nach der Formel  $r = 2 \cdot b + 2$ .

Man kann dies auch so formulieren: Die Anzahl der Randpunkte am oberen bzw. unteren Rand ist jeweils um 1 größer als die Breite  $b$ , also  $r = 2 \cdot (b + 1)$ .

Löst man diese Gleichung nach  $b$  auf, so ergibt sich  $b = \frac{1}{2} \cdot r - 1$ .

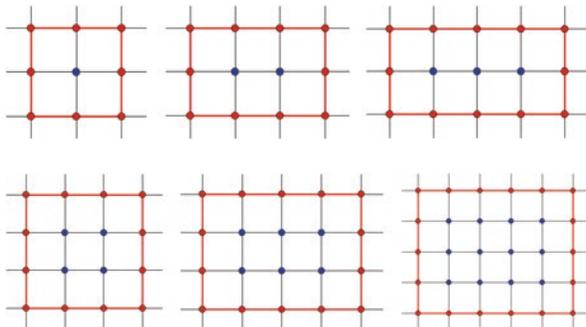
Und da bei Rechtecken der Höhe  $h = 1$  LE die Maßzahl  $A$  der Fläche (d. h. der Flächeninhalt) gleich der Maßzahl  $b$  der Breite ist, gilt:

$$A = \frac{1}{2} \cdot r - 1 \quad (11.1)$$

Mit Worten: Halbiert man die Anzahl  $r$  der Randpunkte und vermindert das Ergebnis um 1, dann ergibt sich der Flächeninhalt  $A$  eines Rechtecks der Höhe  $h = 1$  LE (vgl. auch die folgende Tabelle).

Breite $b$ der Rechtecke (in LE)	1	2	3	4	5	...
Anzahl $r$ der Randpunkte	4	6	8	10	12	...
Flächeninhalt $A$ (in FE)	1	2	3	4	5	...

Als Nächstes untersuchen wir Rechtecke, bei denen innere Punkte auftreten.



Diese inneren Punkte bilden selbst ebenfalls ein Rechteck. Die Anzahl  $i$  der inneren Punkte in der Breite und in der Höhe ist offensichtlich jeweils um 1 kleiner als die Anzahl der Längeneinheiten der Breite  $b$  bzw. der Höhe  $h$  der Rechtecke, d. h., es gilt:

$$i = (b - 1) \cdot (h - 1)$$

Mit zunehmender Höhe nimmt die Anzahl  $r$  der Randpunkte pro Längeneinheit um 2 zu, d. h., es gilt:

$$r = 2 \cdot (b + 1) + 2 \cdot (h - 1) = 2 \cdot (b + h)$$

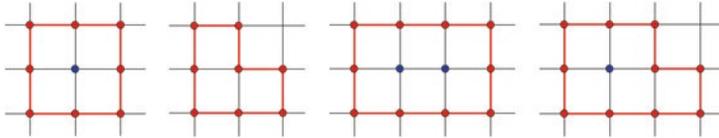
Im Vergleich zur bisherigen Regel stellt man fest, dass sich der Flächeninhalt  $A$  der Rechtecke vom Ergebnis der Rechnung  $\frac{1}{2} \cdot r - 1$  gerade um die Anzahl  $i$  der inneren Punkte unterscheidet (vgl. die folgende Tabelle), d. h., für Rechtecke gilt die Formel:

$$A = i + \frac{1}{2} \cdot r - 1 \quad (11.2)$$

Breite $b$ der Rechtecke (in LE)	2	3	4	...	3	4	5	...	4	5	6	...
Höhe $h$ der Rechtecke (in LE)	2	2	2	...	3	3	3	...	4	4	4	...
Anzahl $r$ der Randpunkte	8	10	12	...	12	14	16	...	16	18	20	...
Vergleichsgröße $\frac{1}{2} \cdot r - 1$	3	4	5	...	5	6	7	...	7	8	9	...
Anzahl $i$ der inneren Punkte	1	2	3	...	4	6	8	...	9	12	15	...
Flächeninhalt $A$ (in FE)	4	6	8	...	9	12	15	...	16	20	24	...

## 11.6 Eine Regel für rechtwinklige Vielecke

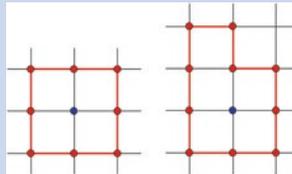
Im nächsten Schritt betrachten wir rechtwinklige Vielecke, bei denen ein Quadrat an einer Ecke herausgenommen wurde.



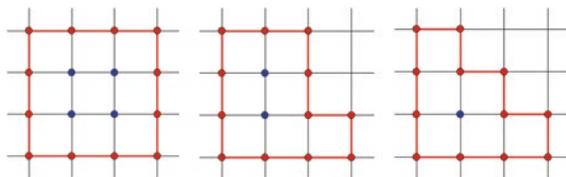
Durch das Einstülpen geht ein innerer Punkt verloren, aber die Anzahl der Eckpunkte bleibt erhalten; der Flächeninhalt nimmt um 1 FE ab, d. h., die Formel (11.2) zur Berechnung des Flächeninhalts ist unverändert anwendbar.

### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 11.12:** Statt ein Quadrat an einer Ecke herauszunehmen, kann man auch ein Quadrat an einer Seite anschließen (vgl. die folgende Abbildung). Begründen Sie, warum sich auch in diesem Fall nichts an der Richtigkeit der Formel (11.2) ändert.

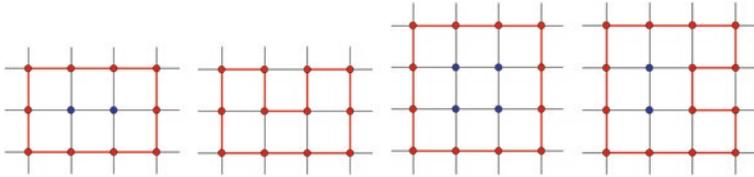


Man kann aber auch von einer Ecke aus zwei oder mehr Quadrate wegnehmen; die Randlänge und damit die Anzahl der Randpunkte bleibt unverändert. Mit jeder Quadrat-Wegnahme geht jeweils ein innerer Punkt verloren, und gleichzeitig nimmt der Flächeninhalt jeweils um 1 FE ab.



**Zwischenergebnis:** Werden einzelne oder mehrere Randquadrate an einer Ecke eines Rechtecks abgeschnitten, dann bleibt die Anzahl der Randpunkte gleich. Der Flächeninhalt der Figur vermindert sich um so viele Flächeneinheiten, wie innere Punkte entfallen.

Etwas anders scheint die Situation zu sein, wenn man nicht an einer Ecke eines Rechtecks, sondern an einer „inneren“ Stelle einer Rechteckseite ein Quadratfeld herausnimmt, also den Flächeninhalt um 1 FE verringert.



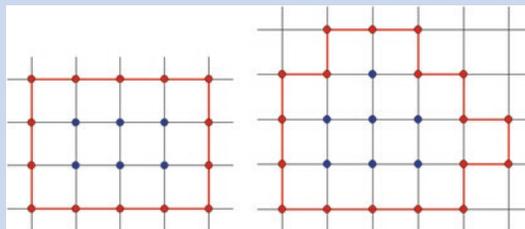
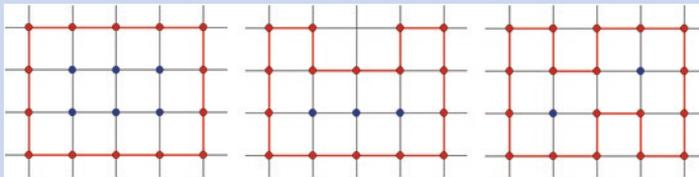
Die Umrandung des Vielecks wird länger; zwei der inneren Punkte werden zu Randpunkten. Für die Bilanz bedeutet dies:

$$A_{\text{neu}} = (i - 2) + \frac{1}{2} \cdot (r + 2) - 1 = \left(i + \frac{1}{2} \cdot r - 1\right) - 1 = A_{\text{vorher}} - 1$$

Das heißt, der Flächeninhalt des um 1 Quadrat verkleinerten Vielecks kann ebenfalls mithilfe der Formel (11.2) berechnet werden.

#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

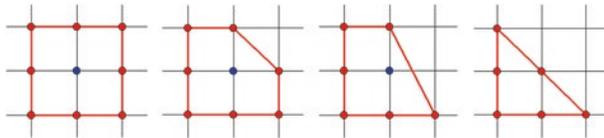
**A 11.13:** Begründen Sie: Auch wenn man an mehreren Stellen ein Quadrat herausnimmt oder ergänzt (vgl. die folgenden Abbildungen), stimmt die Formel (11.2) immer noch.



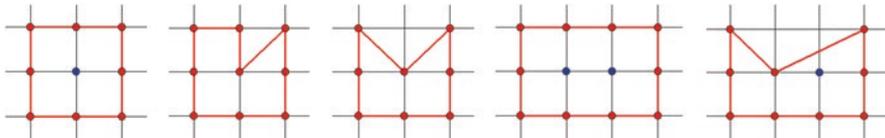
## 11.7 Überprüfung der Pick'schen Regel für schräg abgeschnittene Dreiecke

Nachdem sich die Formel für Vielecke mit rechtwinkligen Begrenzungen bewährt hat, soll jetzt untersucht werden, wie sich schräg verlaufende Begrenzungen auswirken.

Wenn man bei einem Rechteck an einer Ecke ein rechtwinkliges Dreieck abschneidet, dann verringert sich die Anzahl der Randpunkte. Mit jedem wegfallenden Randpunkt verringert sich dann der Flächeninhalt um eine halbe Flächeneinheit, was genau der Formel (11.2) entspricht.



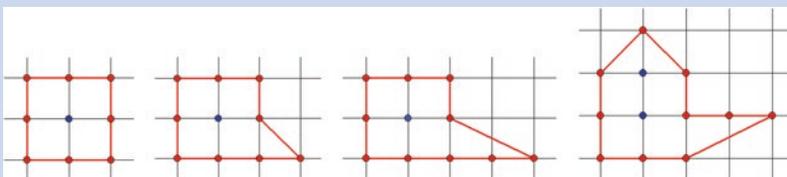
Schneidet man bei einem Rechteck ein rechtwinkliges Dreieck heraus, ohne dass eine Ecke entfällt, dann kann ein innerer Punkt zum Randpunkt werden, und damit wird der Flächeninhalt um  $\frac{1}{2}$  FE kleiner. Dies gilt auch, wenn mehr als ein Dreieck herausgeschnitten wird: Mit jedem wegfallenden Randpunkt verringert sich der Flächeninhalt um jeweils  $\frac{1}{2}$  FE.



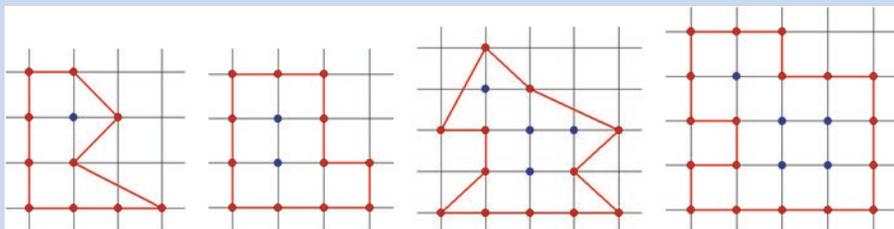
### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 11.14:** Man kann sich schräge Randlinien auch so entstanden denken, dass auf ein vorhandenes Rechteck ein Dreieck oder mehrere Dreiecke aufgesetzt wurden (vgl. die folgenden Abbildungen).

Begründen Sie: Auch in diesem Fall ändert sich nichts an der Richtigkeit der Formel (11.2), denn der Flächeninhalt der Figur nimmt mit jedem Randpunkt um  $\frac{1}{2}$  FE zu.



**A 11.15:** Die Figuren in den folgenden Abbildungen sind durch Abschneiden oder Herausschneiden von Flächenstücken aus den benachbarten rechtwinkligen Figuren entstanden. Erläutern Sie, wie die Flächeninhalte der Figuren zusammenhängen.



**A 11.16:** Geben Sie rechtwinklige Vielecke an, aus denen die Figuren in A 11.15 durch Ergänzung entstanden sind, und erläutern Sie auch so, wie die Flächeninhalte der Figuren zusammenhängen.

## 11.8 Überlegungen zu einem allgemeinen Beweis des Satzes von Pick

Hat man ein beliebiges Vieleck, dessen Eckpunkte Punkte in einem Gitternetz sind, dann kann man dieses immer weiter unterteilen, bis nur noch Teilfiguren der beiden Grundformen Rechteck und rechtwinkliges Dreieck vorhanden sind. Dass für Rechtecke der Satz von Pick gilt, wurde in Abschn. 11.1 erläutert.

Rechtwinklige Dreiecke im Gitternetz wurden in den vorangehenden Abschnitten nur als Ergänzung zu vorhandenen Figuren betrachtet, nicht aber als eigenständige Figuren.

Rechtwinklige Dreiecke mit Breite  $b$  und Höhe  $h = 1$  LE haben unten  $b + 1$  Randpunkte und oben einen weiteren Randpunkt, also insgesamt  $r = b + 2$  Randpunkte, aber keine inneren Punkte.



Der Flächeninhalt berechnet sich zu:

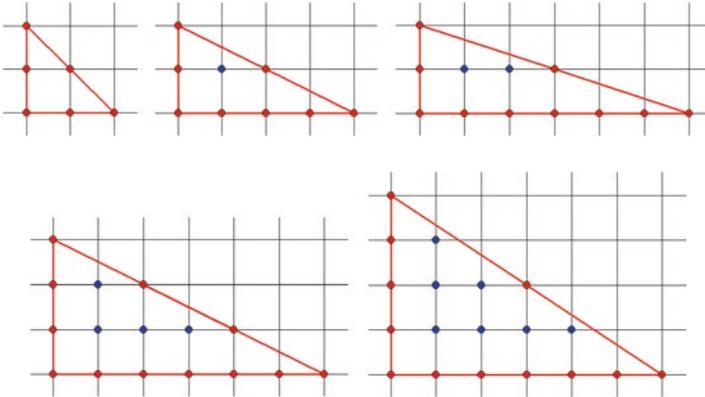
$$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = \frac{1}{2} \cdot b \text{ (wegen } h = 1 \text{ LE)}$$

Ersetzt man  $b = r - 2$ , dann ergibt sich

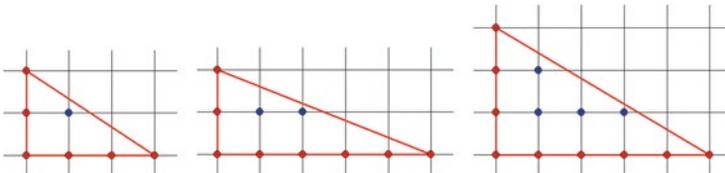
$$A = \frac{1}{2} \cdot (r - 2) = \frac{1}{2} \cdot r - 1,$$

die gleiche Formel wie bei Rechtecken der Höhe  $h = 1$  LE, vgl. Formel (11.1).

Rechtwinklige Dreiecke, bei denen die längste Seite (Hypotenuse) einen Randpunkt enthält, brauchen nicht näher untersucht zu werden, weil sie in ein Rechteck und zwei kleinere rechtwinklige Dreiecke zerlegt werden können (vgl. folgende Abbildungen).

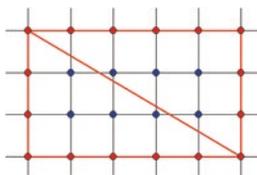


Wenn die Breite und die Höhe der rechtwinkligen Dreiecke zueinander teilerfremde Längen haben, dann treten auf den Hypotenusen jedoch *keine* Randpunkte auf. In den folgenden Abbildungen sind rechtwinklige Dreiecke mit den Seitenlängen 2 LE und 3 LE bzw. 2 LE und 5 LE bzw. 3 LE und 5 LE als Beispiele abgebildet.



In diesem Fall hat das Dreieck einen Flächeninhalt, der halb so groß ist wie der Flächeninhalt des Rechtecks, das man durch Punktspiegelung am Mittelpunkt der Hypotenuse erhält.

Durch diese Spiegelung werden auch die inneren Punkte des rechtwinkligen Dreiecks gespiegelt (vgl. das folgende Beispiel).



Die zum Rechteck ergänzte Figur enthält also doppelt so viele innere Punkte:

$$\frac{1}{2} \cdot i_{\text{Rechteck}} = i_{\text{Dreieck}}$$

Die Anzahl der Randpunkte des Rechtecks ist allerdings nicht doppelt so groß wie die des Dreiecks, sondern um 2 kleiner als das Doppelte, weil die beiden Eckpunkte der Hypotenuse beim Verdoppeln der Figur doppelt gezählt werden:

$$r_{\text{Rechteck}} = 2 \cdot r_{\text{Dreieck}} - 2$$

Für ein Rechteck wurde die Richtigkeit der Formel (11.2) nachgewiesen. Es gilt also:

$$A_{\text{Rechteck}} = i_{\text{Rechteck}} + \frac{1}{2} \cdot r_{\text{Dreieck}} - 1$$

Hieraus folgt für das halb so große rechtwinklige Dreieck:

$$\begin{aligned} A_{\text{Dreieck}} &= \frac{1}{2} \cdot A_{\text{Rechteck}} = \frac{1}{2} \cdot i_{\text{Rechteck}} + \frac{1}{4} \cdot r_{\text{Rechteck}} - \frac{1}{2} \\ &= i_{\text{Dreieck}} + \left( \frac{1}{2} \cdot r_{\text{Dreieck}} \right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ &= i_{\text{Dreieck}} + \frac{1}{2} \cdot r_{\text{Dreieck}} - 1 \end{aligned}$$

Für rechtwinklige Dreiecke, die keine Randpunkte auf der Hypotenuse haben, gilt also die Formel (11.2) ebenfalls.

#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

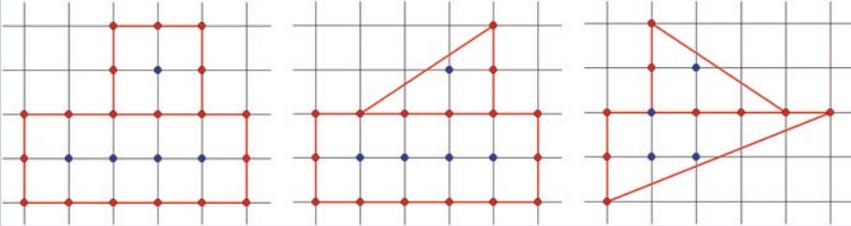
**A 11.17:** Erläutern Sie, warum die Schlussfolgerung zu Dreiecken, bei denen kein Randpunkt auf der Hypotenuse liegt, auch auf Dreiecke übertragen werden kann, bei denen mindestens ein Randpunkt auf der Hypotenuse liegt.

Bleibt also zum Schluss nur noch zu untersuchen, ob die Formel auch weiter gültig ist, wenn man zwei Rechtecke aneinanderfügt oder zwei rechtwinklige Dreiecke (ohne Randpunkt auf der Hypotenuse) oder ein Rechteck und ein rechtwinkliges Dreieck (ohne Randpunkt auf der Hypotenuse).

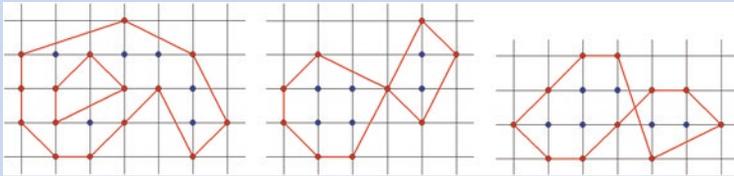
Diese Überlegungen können beispielgebunden selbstständig vorgenommen werden.

### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

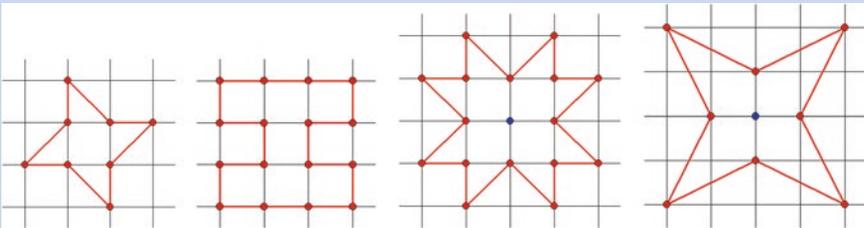
**A 11.18:** Erläutern Sie anhand der folgenden Abbildungen, warum beim Aneinanderlegen von zwei Figuren der oben beschriebenen Grundformen der Satz von Pick weiterhin gültig ist.



**A 11.19:** Untersuchen Sie, ob der Satz von Pick auch in Fällen anwendbar ist, wie sie in den folgenden Abbildungen dargestellt sind.

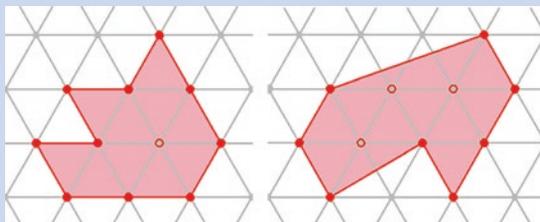


**A 11.20:** Zum kreativen Abschluss sollen möglichst viele symmetrische Vielecke im Quadratgitter gesucht werden, die keinen (genau einen) inneren Punkt besitzen. Je zwei Beispiele sind im Folgenden abgedruckt.

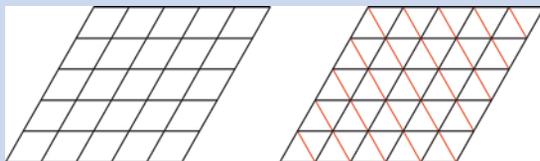


**A 11.21:**

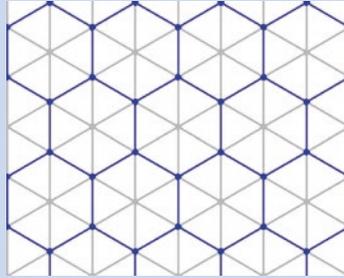
1. Die Vielecke in den beiden folgenden Abbildungen werden durch Punkte in einem *Dreieckgitter* begrenzt. Bestimmen Sie die Flächeninhalte dieser Figuren in Vielfachen des Flächeninhalts eines Gitterdreiecks.



2. Bestimmen Sie auch die Randpunkte bzw. die inneren Punkte dieser Figuren und überprüfen Sie anhand dieser Beispiele die Richtigkeit des folgenden Satzes:
- Sind die Eckpunkte eines Vielecks Punkte eines Dreieckgitters, dann lässt sich der Flächeninhalt  $A$  des Vielecks berechnen aus der Anzahl  $r$  derjenigen Randpunkte, die Gitterpunkte sind, und der Anzahl  $i$  der innerhalb des Vielecks liegenden Gitterpunkte:  $A = 2 \cdot i + r - 2$
- Dabei wird  $A$  in Vielfachen des Flächeninhalts eines Gitterdreiecks gemessen.
3. Begründen Sie, warum die Formel  $A = 2 \cdot i + r - 2$  plausibel ist. Überlegen Sie dazu, was sich an der Formel des Satzes von Pick ändert, wenn man statt eines Quadratgitters ein Rautengitter betrachtet (vgl. folgende Abb. links). Wie ergibt sich dann die Formel  $A = 2 \cdot i + r - 2$  aus dem Satz von Pick, wenn man vom Rautengitter zum Dreieckgitter übergeht (vgl. folgende Abb. rechts)?



**A 11.22:** Statt eines Quadrat- oder Dreieckgitters kann man auch ein Sechseckgitter für die Ebene verwenden. Ein Gitterelement setzt sich aus sechs gleichseitigen Dreiecken zusammen, vgl. folgende Abb:

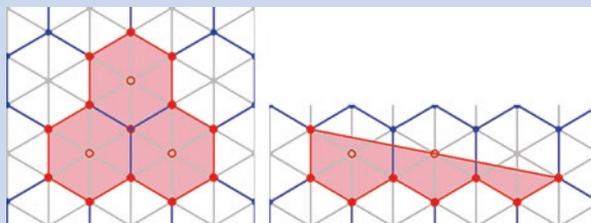


Auch bei diesen Gittern kann man den Flächeninhalt eines Vielecks mithilfe der Anzahl der Randpunkte und der inneren Punkte der Figur bestimmen. Allerdings ist das Zählen hier etwas komplizierter – man muss nämlich jeweils zwei Arten von Randpunkten bzw. von inneren Punkten unterscheiden.

Die Berechnungsformel lautet hier wie folgt:

- Sind die Eckpunkte eines Vielecks Punkte eines Sechseckgitters, dann lässt sich der Flächeninhalt  $A$  des Vielecks berechnen aus der Anzahl  $r_S$  derjenigen Randpunkte, die Gitterpunkte sind, und der Anzahl  $i_S$  der innerhalb des Vielecks liegenden Gitterpunkte des Sechseckgitters, sowie der Anzahl  $r_D$  der Randpunkte und der Anzahl  $i_D$  der inneren Punkte, die sich aus dem „dahinter stehenden“ Dreiecksraster ergeben:  $A_S = \frac{1}{3} \cdot (i_D + i_S) + \frac{1}{6} \cdot (r_D + r_S) - \frac{1}{3}$ . Dabei wird  $A$  in Vielfachen des Flächeninhalts eines Basis-Gittersechsecks gemessen.

1. In der folgenden Abb. links ist in das Gitter ein Vieleck eingetragen, dessen Flächeninhalt offensichtlich gleich 3 FE beträgt. Erläutern Sie die Berechnung des Flächeninhalts mithilfe der Formel.
2. Die Figur in der Abb. rechts hat den Flächeninhalt 1,5 FE. Erläutern Sie auch hier die Berechnung des Flächeninhalts mithilfe der Formel.
3. Begründen Sie die o. a. Formel zur Berechnung des Flächeninhalts eines Vielecks im Sechseckgitter.



## 11.9 Hinweise auf weiterführende Literatur

Bei **Wikipedia** findet man in deutscher (englischer, französischer) Sprache weitere Informationen und Literatur zu den Stichwörtern:

- Rechteck (Rectangle, Rectangle)
- Quadrat (Square, Carré)
- Flächeninhalt (Area, Aire)
- Umfang (Perimeter, Périmètre\*)
- Satz von Pick (Pick's theorem, Théorème de Pick).  
\*)Auszeichnung als lesenswerter/exzellenter Artikel

Fachliche Informationen findet man auf **Wolfram Mathworld** unter dem Stichwort:

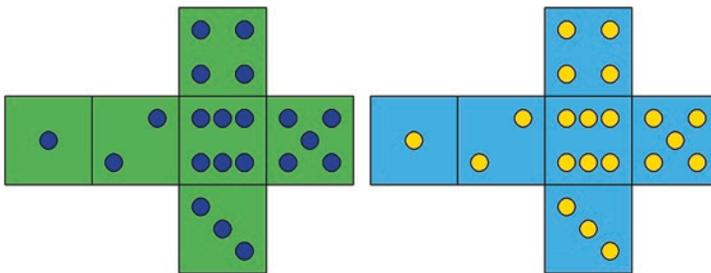
- Rectangle, Square, Area, Perimeter, Pick's Theorem

Die interaktive Website von Alexander Bogomolny bietet die Möglichkeit, beliebige Vielecke zu zeichnen und die Aussage des Satzes von Pick zu überprüfen:

- <http://www.cut-the-knot.org/ctk/Pick.shtml>

*Im Menschenleben ist's wie im Würfelspiel: Fällt auch der Wurf nicht so, wie du ihn am meisten wünschst, so muss die Kunst verbessern, was der Zufall bot.*

(Publius Terentius Afer, genannt Terenz, römischer Dichter, 195–159 v. Chr.)



In der Mathematik werden gewöhnliche Würfel oft als reguläre (regelmäßige) Hexaeder bezeichnet – das Wort ist zusammengesetzt aus den griechischen Wörtern *hexa* (dt. sechs) und *hedra* (dt. Fläche), also *Sechsfächner*.

Üblicherweise werden die Würfel so beschriftet, dass die Augensummen von einander gegenüberliegenden Flächen die Augensumme 7 ergeben, also  $7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4$ .

Um einen Würfel zu basteln, kann man verschiedene Würfelnetze benutzen. Am bekanntesten ist die in der Abbildung oben verwendete Form eines liegenden Kreuzes, aber auch zehn andere Formen sind möglich (vergleiche Kap. 5).

## 12.1 Augensummen beim Werfen von zwei regelmäßigen Hexaedern

Um die möglichen Augensummen beim Werfen von zwei gewöhnlichen, in üblicher Weise beschrifteten Würfeln zu bestimmen, legt man eine **Kombinationstabelle** an. Dabei trägt man die Augenzahlen des ersten Würfels (z. B. der grüne Würfel der oberen Abbildung) in der vorderen Randspalte der Tabelle ab und die des zweiten Würfels (z. B. blau) in der oberen Randzeile. Statt zwei verschiedene Würfel zu benutzen, kann man auch einen Würfel nacheinander zweimal werfen (vgl. hierzu Abschn. 12.3).

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Aus der Kombinationstabelle des Werfens zweier Würfel oder des zweifachen Werfens eines Würfels kann man ablesen, durch welche der  $6 \cdot 6 = 36$  Kombinationen welche Augensummen entstehen können.

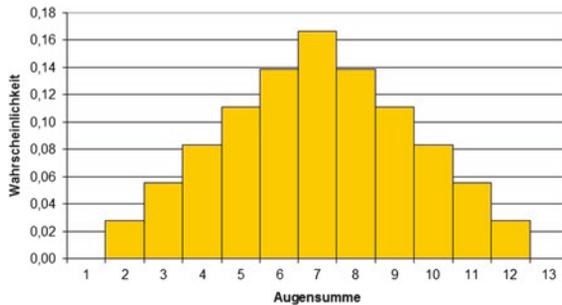
Wenn die Würfel in Ordnung sind, d. h., wenn man keinen Grund hat, daran zu zweifeln, dass bei beiden Würfeln jede Augenzahl die gleiche Chance hat, aufzutreten, dann kann man aus der Kombinationstabelle durch Abzählen auch die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Augensummen ablesen, vgl. Abb. 12.1.

Augensumme	Paare (Augenzahl grün   Augenzahl blau)	Wahrscheinlichkeit
2	(1   1)	$1/36 \approx 2,8 \%$
3	(1   2), (2   1)	$2/36 \approx 5,6 \%$
4	(1   3), (2   2), (3   1)	$3/36 \approx 8,3 \%$
5	(1   4), (2   3), (3   2), (4   1)	$4/36 \approx 11,1 \%$
6	(1   5), (2   4), (3   3), (4   2), (5   1)	$5/36 \approx 13,9 \%$
7	(1   6), (2   5), (3   4), (4   3), (5   2), (6   1)	$6/36 \approx 16,7 \%$
8	(2   6), (3   5), (4   4), (5   3), (6   2)	$5/36 \approx 13,9 \%$
9	(3   6), (4   5), (5   4), (6   3)	$4/36 \approx 11,1 \%$
10	(4   6), (5   5), (6   4)	$3/36 \approx 8,3 \%$
11	(5   6), (6   5)	$2/36 \approx 5,6 \%$
12	(6   6)	$1/36 \approx 2,8 \%$

**Abb. 12.1** Wahrscheinlichkeitsverteilung der Augensumme beim Werfen zweier Würfel

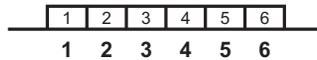
Eine Tabelle, in der die möglichen Augensummen und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten notiert sind, wird als **Wahrscheinlichkeitsverteilung** bezeichnet. In Abb. 12.1 ist zur Verdeutlichung in der zusätzlichen (mittleren) Spalte festgehalten, welche der Augenzahl-Kombinationen des oben abgebildeten grünen und des blauen Würfels erfasst sind.

Diese Wahrscheinlichkeitsverteilung kann man in Form eines **Histogramms** veranschaulichen. Bei diesem besonderen Typ eines Säulendiagramms werden Rechtecke der Breite 1 ohne Lücke nebeneinandergezeichnet; die Höhe der Rechtecke entspricht dabei der Wahrscheinlichkeit des jeweiligen Ergebnisses (hier: der jeweiligen Augensumme).



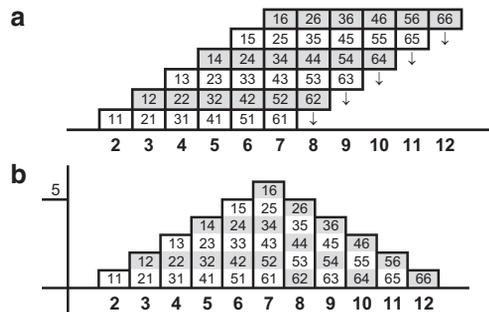
Lässt man die Klammern und den senkrechten Strich bei den Zahlenpaaren in der mittleren Spalte von Abb. 12.1 weg, dann könnte man die Grafik auch so zeichnen wie in Abb. 12.2b dargestellt. An der vertikalen Achse ist die Anzahl der möglichen Kombinationen abgetragen.

Dieses Diagramm kann man sich auch schematisch so entstanden vorstellen: Bei einem einzelnen Würfel gibt es sechs mögliche Augenzahlen, die mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten.



In der Kombination mit einem zweiten Würfel verschieben sich diese sechs Rechtecke um 1, 2, 3, 4, 5, 6 Einheiten nach rechts – je nachdem, welche Augenzahl der zweite Würfel zeigt (vgl. Abb. 12.2a). Anschließend schiebt man die überstehenden Rechtecke nach unten auf die horizontale Achse (vgl. Abb. 12.2b).

**Abb. 12.2 a, b**  
 Schrittweise Entwicklung  
 des Histogramms zur  
 Augensumme beim 2-fachen  
 Würfeln



## 12.2 Augensummen beim Werfen von mehreren regelmäßigen Hexaedern

Analog zu der Vorgehensweise beim 2-fachen Würfeln kann man auch eine Grafik zur Verteilung der Augensumme beim Werfen von drei Würfeln erstellen:

Aus dem Diagramm für die Augensumme beim doppelten Würfeln entsteht durch entsprechendes Verschieben das Histogramm zum dreifachen Wurf (vgl. Abb. 12.3a, b). Im Diagramm sind (im Prinzip) alle  $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$  möglichen Ergebnisse des Dreifachwurfs ablesbar.

Diese Idee des Verschiebens aus Abb. 12.2 und 12.3 kann man benutzen, um die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Augensummen zu bestimmen, auch ohne die Augenzahlen einzeln zu notieren (vgl. die folgende Tabelle zur Augensumme beim 2-fachen Würfeln).

Analog ist dies auch für Augensummen beim Werfen von mehr als zwei Würfeln möglich: Mithilfe einer Tabellenkalkulation und dem Copy & Paste-Befehl erstellt man die Schemata, bildet Summen (grüne Zeile) und berechnet hieraus die Wahrscheinlichkeiten. Die Zeile mit der Anzahl der Möglichkeiten aus der folgenden Abbildung wird kopiert und – jeweils um eine Einheit versetzt – in der übernächsten Abbildung eingefügt usw.

Augensumme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
						1	1	1	1	1	1
				1	1	1	1	1	1	1	
		1	1	1	1	1	1	1			
	1	1	1	1	1	1					
Anzahl der Möglichkeiten	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
Wahrscheinlichkeit	0,028	0,056	0,083	0,111	0,139	0,167	0,139	0,111	0,083	0,056	0,028

3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
					1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
			1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1		
		1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1			
	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1				
1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1					
1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1
0,005	0,014	0,028	0,046	0,069	0,097	0,116	0,125	0,125	0,116	0,097	0,069	0,046	0,028	0,014	0,005

Auf diese Weise wurden die folgenden Histogramme der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Augensummen beim 2-, 3-, 4- und 5-fachen Würfeln erstellt.

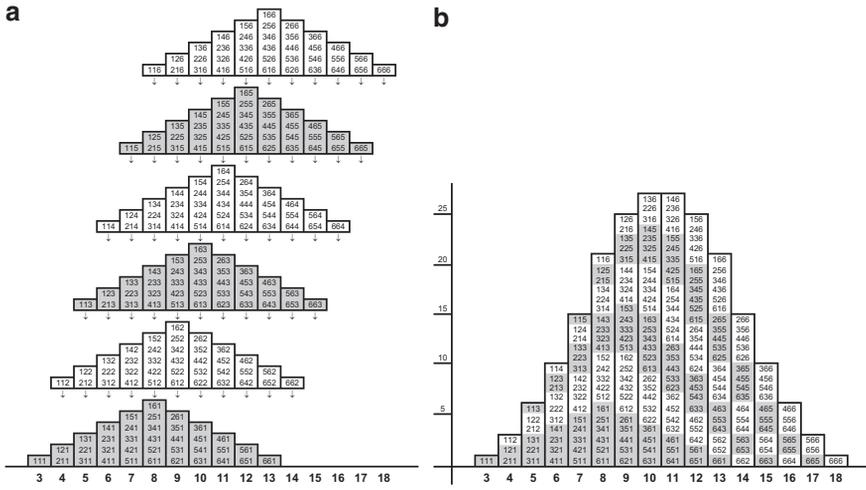
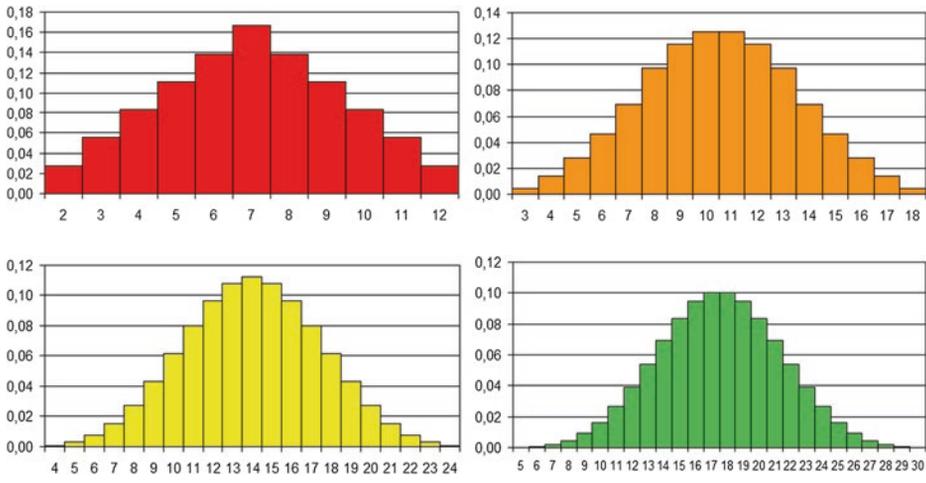


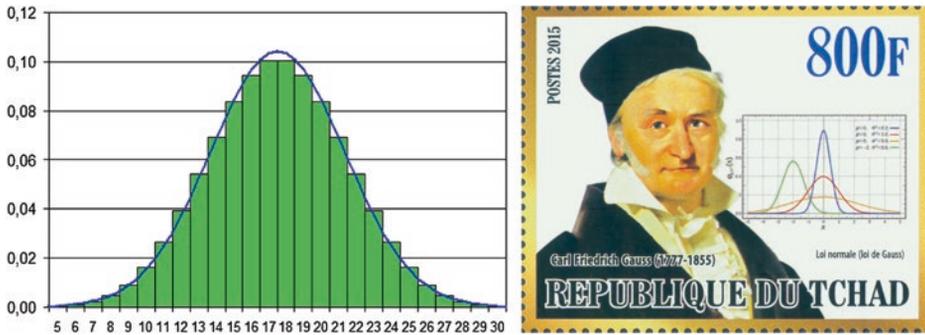
Abb. 12.3 a, b Schrittweise Entwicklung des Histogramms zur Augensumme beim 3-fachen Würfeln



Mit zunehmender Anzahl von Würfeln nehmen die Histogramme der Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die Augensummen immer stärker die Gestalt einer **Glockenkurve** an. In Abb. 12.4 ist zusätzlich zum Histogramm der Augensumme beim 5-fachen Würfeln auch der Graph der sogenannten **Gauß'schen Dichtefunktion** der zugehörigen **Normalverteilung** eingezeichnet.

Diese Funktion hat die Gleichung

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2},$$



**Abb. 12.4** Histogramm der Augensumme beim 5-fachen Würfeln und Graph der zugehörigen Dichtefunktion, Briefmarke zu C. F. Gauß und den Normalverteilungen (Tschad 2015)

wobei im Fall des 5-fachen Würfels die Parameter  $\mu$  und  $\sigma$  die Werte  $\mu = 17,5$  und  $\sigma \approx 3,82$  haben (vgl. Abschn. 12.8).

### 12.3 Eine fehlerhafte Vorstellung über Augensummen

Es wird berichtet, dass Galileo Galilei (1564–1642) von seinem Fürsten gefragt wurde, ob es gleich günstig sei, beim Doppelwurf auf Augensumme 6 oder Augensumme 7 zu setzen.

Die Begründung hierfür lautete so: Wenn man mit zwei nicht unterscheidbaren Würfeln würfelt, kann man nicht sagen, welcher der beiden Würfel welche Augenzahl zeigt. Daher treten nur die in der mittleren Spalte der folgenden Tabelle stehenden 21 Ergebnisse auf, jedes mit gleicher Wahrscheinlichkeit.

Augensumme	mögliche Ergebnisse	Wahrscheinlichkeit	Augensumme	mögliche Ergebnisse	Wahrscheinlichkeit
2	{1;1}	1/21	12	{6;6}	1/21
3	{1;2}	1/21	11	{5;6}	1/21
4	{1;3}, {2;2}	2/21	10	{4;6}, {5;5}	2/21
5	{1;4}, {2;3}	2/21	9	{3;6}, {4;5}	2/21
6	{1;5}, {2;4}, {3;3}	3/21	8	{2;6}, {3;5}, {4;4}	3/21
7	{1;6}, {2;5}, {3;4}	3/21			

Bei der in Abschn. 12.1 aufgestellten Wahrscheinlichkeitsverteilung mit 36 verschiedenen Ergebnissen wurde als Voraussetzung genannt, dass z. B. ein grüner und ein blauer Würfel geworfen werden. Es kann aber nicht an der Farbe der Würfel liegen, welche Wahrscheinlichkeitsverteilung dem Zufallsversuch zugrunde liegt. Wenn man die beiden Würfel mit nicht unterscheidbaren Würfeln durchführt, genügt eine Kleinigkeit, die beiden Würfel unterscheidbar zu machen – beispielsweise dadurch, dass man auf dem einen Würfel eine winzige Markierung vornimmt.

Abb. 12.5 und 12.6 zeigen die fehlerhafte bzw. die richtige Wahrscheinlichkeitsverteilung im Vergleich.

#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

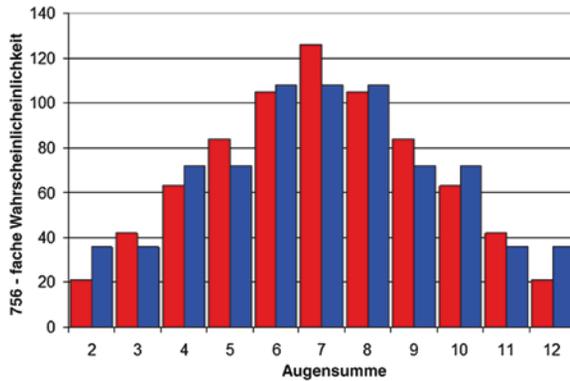
**A 12.1:** Vergleicht man die beiden Wahrscheinlichkeitsverteilungen in Abb. 12.5 und 12.6 miteinander, dann fällt auf: Die (tatsächliche) Wahrscheinlichkeit für eine gerade bzw. eine ungerade Augensumme ist jeweils  $\frac{1}{2}$ . Dagegen müssten nach dem falschen Ansatz die geraden Augensummen mit größerer Wahrscheinlichkeit auftreten ( $\frac{12}{21} = \frac{4}{7}$  für eine gerade Augensumme und  $\frac{9}{21} = \frac{3}{7}$  für eine ungerade Augensumme). Das widerspricht der symmetrischen Beschriftung der Würfel, auf denen sich jeweils gleich viele gerade wie ungerade Augenzahlen befinden.

Aber wie würde man sich mit folgender Argumentation auseinandersetzen? *Gerade Augensummen ergeben sich, wenn die beiden Würfel beide eine gerade oder beide eine ungerade Augenzahl zeigen. Ungerade Augensummen kommen zustande, wenn der eine Würfel eine gerade und der andere Würfel eine ungerade Augenzahl zeigt; und da die beiden Würfel nicht unterscheidbar sind, sind das weniger Fälle als bei den geraden Augensummen ...*

Hier ergibt sich die Frage, ob der Fehler der Zeitgenossen Galileis durch ein Experiment hätte bemerkt werden können. Wie in **A 12.1** ausgeführt, wäre beim falschen Ansatz die Wahrscheinlichkeit  $p_1$  dafür, dass die Augensumme gerade ist, gleich  $p_1 = \frac{4}{7}$ , während die Wahrscheinlichkeit  $p_2$  beim richtigen Ansatz tatsächlich gleich  $\frac{1}{2}$  ist.

Augensumme	vermutete Wahrscheinlichkeit	tatsächliche Wahrscheinlichkeit
2	$1/21 = 12/252$	$1/36 = 7/252$
3	$1/21 = 12/252$	$2/36 = 14/252$
4	$2/21 = 24/252$	$3/36 = 21/252$
5	$2/21 = 24/252$	$4/36 = 28/252$
6	$3/21 = 36/252$	$5/36 = 35/252$
7	$3/21 = 36/252$	$6/36 = 42/252$
8	$3/21 = 36/252$	$5/36 = 35/252$
9	$2/21 = 24/252$	$4/36 = 28/252$
10	$2/21 = 24/252$	$3/36 = 21/252$
11	$1/21 = 12/252$	$2/36 = 14/252$
12	$1/21 = 12/252$	$1/36 = 7/252$

**Abb. 12.5** Tabellarischer Vergleich der beiden Ansätze einer Wahrscheinlichkeitsverteilung beim 2-fachen Würfeln



**Abb. 12.6** Grafischer Vergleich der beiden Ansätze einer Wahrscheinlichkeitsverteilung beim 2-fachen Würfeln

Wenn man beispielsweise zwei Würfel 126-mal wirft, dann kann man beim falschen Ansatz erwarten, dass eine gerade Augensumme in 72 von 126 Doppelwürfen auftritt, beim richtigen Ansatz bei der Hälfte der Doppelwürfe, also bei 63 von 126 Würfeln.

**Hinweis** Man berechnet den **Erwartungswert**  $\mu$  der Anzahl der Würfe mit gerader Augensumme, indem man den entsprechenden Anteil an der Gesamtzahl der Versuche bildet:

$$\frac{4}{7} \text{ von } 126 = \frac{4}{7} \cdot 126 = 72 = \mu_1 \text{ bzw. } \frac{1}{2} \text{ von } 126 = \frac{1}{2} \cdot 126 = 63 = \mu_2$$

Wenn man den Doppelwurf 126-mal durchführt, muss eine gerade Augensumme nicht unbedingt genau 72-mal bzw. genau 63-mal auftreten. Diese Anzahlen sind jedoch diejenigen mit der jeweils höchsten Wahrscheinlichkeit; benachbarte Werte wie 71 oder 73 bzw. 62 oder 64 treten aber mit ähnlich großer Wahrscheinlichkeit auf. Wie groß die Wahrscheinlichkeiten für bestimmte Anzahlen sind, kann man Abb. 12.7 entnehmen.

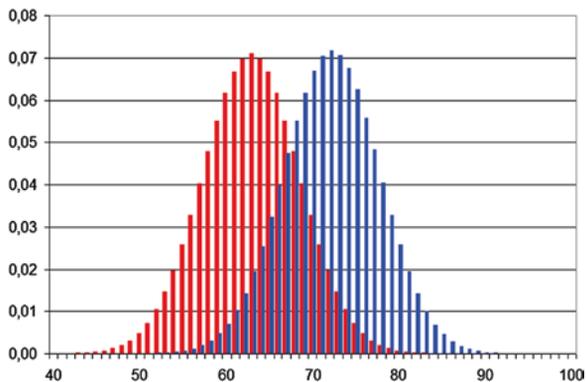
Eine experimentelle Entscheidung zwischen beiden Ansätzen könnte man wie folgt angehen: Man legt einen **kritischen Wert**  $k$  fest, der beispielsweise in der Mitte zwischen den beiden Erwartungswerten liegt.

Wenn die Anzahl der Würfe mit einer geraden Augensumme größer ist als  $k = \frac{1}{2} \cdot (63 + 72) = 67,5$ , dann hält man den (falschen) Ansatz  $p_1 = \frac{4}{7}$  für richtig, sonst den Ansatz  $p_2 = \frac{1}{2}$ .

Man kann ausrechnen, dass eine Anzahl von 126 Würfeln nicht genügen würde, um mit einer großen Sicherheit zwischen den beiden Ansätzen entscheiden zu können: Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 21 % würde man dann nämlich eine Fehlentscheidung treffen, denn mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 21 % kommt es beim 126-fachen Doppelwurf *zufällig* zu mehr als 67 Würfeln mit gerader Augensumme. Selbst wenn man doppelt so oft werfen würde, läge die Wahrscheinlichkeit für eine falsche Entscheidung (dann mehr als 135-mal eine gerade Augensumme) immerhin noch bei ca. 12 %.

**Abb. 12.7**

Wahrscheinlichkeiten für bestimmte Anzahlen von geraden Augensummen beim 126-fachen Werfen von zwei Würfeln



Denkbar wäre auch ein Entscheidungsverfahren, wie es in Abschn. 12.10 beschrieben wird.

## 12.4 Ein faires Würfelspiel mit Augensummen

Bleiben wir zunächst noch beim Doppelwurf und spielen ein einfaches Spiel, bei dem es auf die Augensumme ankommen soll:

*Wenn die Augensumme eine gerade Zahl ist, gewinnt der erste Spieler (Spieler A), bei einer ungeraden Augensumme der zweite Spieler (Spieler B).*

Auf den ersten Blick (und wenn man sich nicht mit Abschn. 12.3 beschäftigt hat) scheint die Spielregel *nicht* fair zu sein; denn von den möglichen Augensummen 2, 3, 4, ..., 11, 12 sind sechs gerade und nur fünf ungerade.

Aber hierauf kommt es nicht an, sondern auf die Wahrscheinlichkeit, mit der solche Augensummen zustande kommen. Statt der Wahrscheinlichkeiten kann man auch die Anzahl der möglichen Kombinationen miteinander vergleichen:

Augensumme	gerade						ungerade				
	2	4	6	8	10	12	3	5	7	9	11
Anzahl der Kombinationen	1	3	5	5	3	1	2	4	6	4	2
insgesamt	18 mögliche Kombinationen						18 mögliche Kombinationen				

Zum Doppelwurf kann man sich noch viele andere faire Spielregeln ausdenken: Dazu muss man sich nur überlegen, auf wie viele Arten die Zahl 18 als Summe von Kombinationen dargestellt werden kann, wobei als Summanden die folgenden elf Kombinationsanzahlen in Frage kommen: 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6.

Um 18 als Summe der Kombinationen zu erhalten, benötigt man mindestens vier Summanden:

$18 = 4 + 4 + 5 + 5$  : Spieler A gewinnt, wenn Augensumme 5, 9, 6 oder 8 auftritt.

$18 = 2 + 5 + 5 + 6$  : Spieler A gewinnt, wenn Augensumme 3, 6, 8 oder 7 auftritt bzw. wenn Augensumme 11, 6, 8 oder 7 auftritt.

$18 = 3 + 4 + 5 + 6$  : Zu dieser Summe gehören acht verschiedene Spielregeln (vgl. **A 12.2 (1)**).

Da jeweils die übrig bleibenden sieben Summanden der möglichen Kombinationen ebenfalls 18 ergeben, ist entsprechend auch die hierzu komplementäre Spielregel gegeben, z. B.:

Spieler A gewinnt mit Augensumme 5, 9, 6, 8  $\leftrightarrow$

Spieler B gewinnt bei 2, 3, 4, 7, 10, 11, 12.

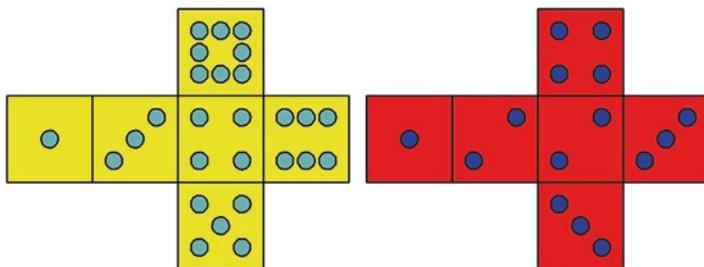
#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

##### A 12.2:

1. Geben Sie die acht möglichen Spielregeln für ein faires Spiel an, bei dem man mit den Augenzahlen 3, 4, 5, 6 gewinnt.
2. Die Augensumme 18 kann man auch aus fünf Summanden bilden. Wie viele Spielregeln können hierzu angegeben werden?
3. Geben Sie faire Spielregeln für drei bzw. für vier Mitspieler an.

## 12.5 Die Sicherman-Würfel

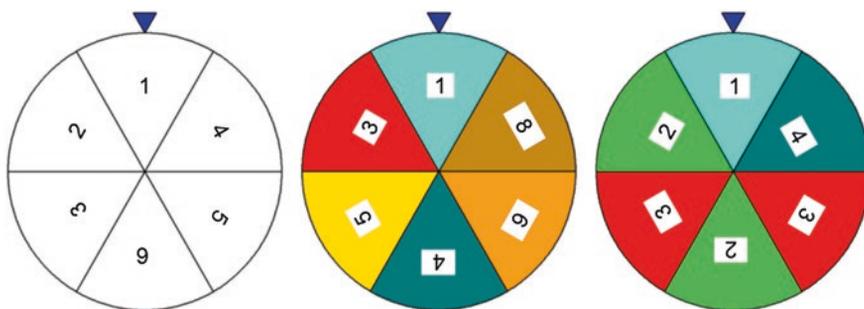
Im Jahr 1978 berichtete Martin Gardner in seiner monatlichen Kolumne im *Scientific American*, dass der Hobby-Mathematiker George Sicherman eine andere Möglichkeit entdeckt habe, die Flächen zweier regulärer Hexaeder so zu beschriften, dass diese zu derselben Wahrscheinlichkeitsverteilung der Augensumme führen, wie sie sich durch die übliche Beschriftung mit den Augenzahlen von 1 bis 6 ergibt (vgl. die folgende Abbildung der beiden zugehörigen Würfelnetze).



Wie man an der folgenden Kombinationstabelle ablesen kann, kommen Augensumme 2 und 12 je einmal vor, Augensumme 3 und 11 je zweimal, Augensumme 4 und 10 je dreimal, Augensumme 5 und 9 je viermal, Augensumme 6 und 8 je fünfmal und Augensumme 7 sechsmal – genau wie beim Werfen zweier gewöhnlicher Würfel:

	1	2	2	3	3	4
1	2	3	3	4	4	5
3	4	5	5	6	6	7
4	5	6	6	7	7	8
5	6	7	7	8	8	9
6	7	8	8	9	9	10
8	9	10	10	11	11	12

Gewöhnliche Würfel und die Sichermann-Würfel kann man auch durch Glücksräder mit sechs gleich großen Sektoren mit entsprechender Beschriftung ersetzen:

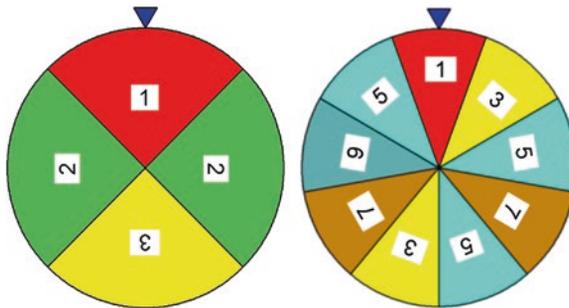


## 12.6 Weitere Ersatz-Zufallsgeräte für den Doppelwurf

Die monatelange Suche Sichermans soll hier nicht kleingeredet werden. Es gibt jedoch noch weitere sechs Möglichkeiten, nach denen der Hobby-Mathematiker Sicherman aber sicherlich nicht gesucht hat, da es sich nicht um 6er-Würfel oder deren Ersatz handelt.

Für diese anderen Fälle ist es notwendig, entsprechend beschriftete Glücksräder zu verwenden.

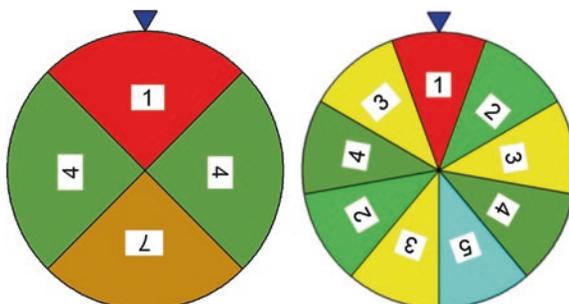
Die 36 möglichen Kombinationen des Hexaeder-Doppelwurfs kann man auch mithilfe eines 4er-Glücksrads und eines 9er-Glücksrads darstellen. In der folgenden Abbildung ist ein 4er-Glücksrad zu sehen, dessen vier 90°-Sektoren mit den Augenzahlen 1, 2, 2, 3 beschriftet sind, sowie ein 9er-Glücksrad, in dessen neun 40°-Sektoren die Augenzahlen 1, 3, 3, 5, 5, 5, 7, 7, 9 stehen. Das 4er-Glücksrad könnte auch durch ein regelmäßiges Tetraeder ersetzt werden, das entsprechend beschriftet wird; für den 9er-Würfel gibt es keinen solchen Würfelerersatz.



In der zugehörigen Kombinationstabelle kann man wieder ablesen, dass die Augensumme 2 einmal, die Augensumme 3 zweimal usw. auftritt.

	1	3	3	5	5	5	7	7	9
1	2	4	4	6	6	6	8	8	10
2	3	5	5	7	7	7	9	9	11
2	3	5	5	7	7	7	9	9	11
3	4	6	6	8	8	8	10	10	12

Aber auch für diese Kombination eines 4er- und eines 9er-Glücksrads gibt es eine Alternative: ein 4er-Glücksrad mit der Beschriftung 1, 4, 4, 7 und ein 9er-Glücksrad mit der Beschriftung 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5.



Auch hier zeigt die zugehörige Kombinationstabelle die Übereinstimmung mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Augensumme von gewöhnlichen 6er-Würfeln.

	1	2	2	3	3	3	4	4	5
1	2	3	3	4	4	4	5	5	6
4	5	6	6	7	7	7	8	8	9
4	5	6	6	7	7	7	8	8	9
7	8	9	9	10	10	10	11	11	12

Die 36 möglichen Kombinationen des Hexaeder-Doppelwurfs kann man auch mithilfe eines 3er-Glücksrads und eines 12er-Glücksrads darstellen. Die 120°-Sektoren des 3er-Glücksrads sind mit den Augenzahlen 1, 3, 5 beschriftet, die 30°-Sektoren des 12er-Glücksrads mit den Augenzahlen 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7.

Die zugehörige Kombinationstabelle enthält wieder die Augensummen von 2 bis 12 mit den bekannten Häufigkeiten.

	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7
1	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8
3	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10
5	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12

Auch hierzu gibt es eine Alternative: die Beschriftung des 3er-Glücksrads mit 1, 2, 3 und des 12er-Glücksrads mit 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 8, 9. Hier die zugehörige Kombinationstabelle:

	1	2	3	4	4	5	5	6	6	7	8	9
1	2	3	4	5	5	6	6	7	7	8	9	10
2	3	4	5	6	6	7	7	8	8	9	10	11
3	4	5	6	7	7	8	8	9	9	10	11	12

Das 12er-Glücksrad könnte durch ein regelmäßiges Dodekaeder ersetzt werden, das entsprechend beschriftet wird; für den 3er-Würfel gibt es keinen solchen Ersatz.

Schließlich gibt es noch zwei Möglichkeiten, die 36 Kombinationen des Hexaeder-Doppelwurfs mithilfe eines 2er-Glücksrads und eines 18er-Glücksrads darzustellen. Die 180°-Sektoren des 2er-Glücksrads sind mit den Augenzahlen 1, 2 beschriftet, die 20°-Sektoren des 18er-Glücksrads mit den Augenzahlen 1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 10 – die zugehörige Kombinationstabelle sieht wie folgt aus:

	1	2	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7	8	8	9	10
1	2	3	4	4	5	5	6	6	6	7	7	7	8	8	9	9	10	11
2	3	4	5	5	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	10	10	11	12

Auch hierzu gibt es eine Alternative, wie aus der folgenden Kombinationstabelle ersichtlich ist: die Beschriftung des 2er-Glücksrads mit 1, 4 und des 18er-Glücksrads mit 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 8.

	1	2	2	3	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7	8
1	2	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7	7	8	8	9
4	5	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	9	10	10	10	11	11	12

Das 2er-Glücksrad könnte durch eine Münze ersetzt werden, die entsprechend beschriftet wird; für den 18er-Würfel gibt es keinen solchen Ersatz.

## 12.7 Algebraischer Hintergrund für die verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten

Dass es nicht noch weitere Möglichkeiten der Darstellung gibt, kann man mithilfe einer genialen Methode nachweisen, die von Leonard Euler (1707–1783) entwickelt wurde. Dieser betrachtete sogenannte *erzeugende Funktionen* (diese Bezeichnung stammt von Pierre-Simon Laplace, 1749–1827):

Zu der Beschriftung eines gewöhnlichen Würfels gehört das Polynom:

$$f(x) = \frac{1}{6} \cdot (1x^1 + 1x^2 + 1x^3 + 1x^4 + 1x^5 + 1x^6)$$

Dabei stehen die Exponenten für die auftretenden Augenzahlen, die Koeffizienten für die Häufigkeit, mit der die jeweiligen Augenzahlen bei der Beschriftung des Würfels vorkommen, und der Faktor  $\frac{1}{6}$  für die Wahrscheinlichkeit jeder einzelnen Augenzahl.

Betrachtet man das Produkt der erzeugenden Funktion mit sich selbst (also das Quadrat der erzeugenden Funktion), dann ergibt sich als erzeugende Funktion für die Augensumme:

$$\begin{aligned} f^2(x) &= \frac{1}{36} \cdot \left[ 1x^1 + 1x^2 + 1x^3 + 1x^4 + 1x^5 + 1x^6 \right]^2 \\ &= \frac{1}{36} \cdot \left( 1x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + 6x^7 + 5x^8 + 4x^9 + 3x^{10} + 2x^{11} + 1x^{12} \right) \end{aligned}$$

Man beachte, dass hier die Exponenten für die verschiedenen möglichen Augensummen stehen und die Koeffizienten für die Häufigkeit, mit der die jeweiligen Augensummen in der Kombinationstabelle vorkommen, der Faktor  $\frac{1}{36}$  für die Wahrscheinlichkeit jeder einzelnen Kombination.

Nun kann man ein solches Polynom 12. Grades auf unterschiedliche Weise in Faktoren zerlegen.

Am besten beginnt man damit, den Term der erzeugenden Funktion  $f$  selbst zu faktorisieren. Es ergibt sich:

$$f(x) = \frac{1}{6} \cdot x \cdot (1+x) \cdot (1+x+x^2) \cdot (1-x+x^2)$$

Hiermit findet man dann außer der Möglichkeit

$$f^2(x) = \frac{1}{6} \cdot \left( 1x^1 + 1x^2 + 1x^3 + 1x^4 + 1x^5 + 1x^6 \right) \cdot \frac{1}{6} \cdot \left( 1x^1 + 1x^2 + 1x^3 + 1x^4 + 1x^5 + 1x^6 \right),$$

die für die übliche Beschriftung der Hexaeder-Flächen steht, noch weitere sieben Möglichkeiten der Zerlegung von  $f^2(x)$ . Und jede dieser Zerlegungen entspricht der Kombination von entsprechend beschrifteten Zufallsgeräten:

- alternative Beschriftung zweier Hexaeder (Sicherman-Variante)

$$\begin{aligned} f^2(x) &= \frac{1}{36} \cdot \left[ x \cdot (1+x) \cdot (1+x+x^2) \cdot (1-x+x^2)^2 \right] \cdot \left[ x \cdot (1+x) \cdot (1+x+x^2) \right] \\ &= \frac{1}{6} \cdot \left[ 1x + 1x^3 + 1x^4 + 1x^5 + 1x^6 + 1x^8 \right] \cdot \frac{1}{6} \cdot \left[ 1x + 2x^2 + 2x^3 + 1x^4 \right] \end{aligned}$$

- 4er- und 9er-Glücksrad (1. Möglichkeit)

$$\begin{aligned} f^2(x) &= \frac{1}{36} \cdot \left[ x \cdot (1+x)^2 \right] \cdot \left[ x \cdot (1+x^2+x^4)^2 \right] \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left[ 1x + 2x^2 + 1x^3 \right] \cdot \frac{1}{9} \cdot \left[ 1x + 2x^3 + 3x^5 + 2x^7 + 1x^9 \right] \end{aligned}$$

- 4er- und 9er-Glücksrad (2. Möglichkeit)

$$\begin{aligned} f^2(x) &= \frac{1}{36} \cdot \left[ x \cdot (1+x+x^2)^2 \right] \cdot \left[ x \cdot (1+x^3)^2 \right] \\ &= \frac{1}{9} \cdot \left[ 1x + 2x^2 + 3x^3 + 2x^4 + 1x^5 \right] \cdot \frac{1}{4} \cdot \left[ 1x + 2x^4 + 1x^7 \right] \end{aligned}$$

- 3er- und 12er-Glücksrad (1. Möglichkeit)

$$\begin{aligned} f^2(x) &= \frac{1}{36} \cdot \left[ x \cdot (1+x)^2 \cdot (1+x^2+x^4) \right] \cdot \left[ x \cdot (1+x^2+x^4) \right] \\ &= \frac{1}{12} \cdot \left[ 1x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 1x^7 \right] \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[ 1x + 1x^3 + 1x^5 \right] \end{aligned}$$

- 3er- und 12er-Glücksrad (2. Möglichkeit)

$$\begin{aligned} f^2(x) &= \frac{1}{36} \cdot \left[ x \cdot (1+x+x^2) \cdot (1+x^3)^2 \right] \cdot \left[ x \cdot (1+x+x^2) \right] \\ &= \frac{1}{12} \cdot \left[ 1x + 1x^2 + 1x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 1x^7 + 1x^8 + 1x^9 \right] \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[ 1x + 1x^2 + 1x^3 \right] \end{aligned}$$

- 2er- und 18er-Glücksrad (1. Möglichkeit)

$$\begin{aligned} f^2(x) &= \frac{1}{36} \cdot \left[ x \cdot (1+x) \cdot (1+x^2+x^4)^2 \right] \cdot \left[ x \cdot (1+x) \right] \\ &= \frac{1}{18} \cdot \left[ 1x + 1x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 3x^6 + 2x^7 + 2x^8 + 1x^9 + 1x^{10} \right] \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[ 1x + 1x^2 \right] \end{aligned}$$

- 2er- und 18er-Glücksrad (2. Möglichkeit)

$$\begin{aligned} f^2(x) &= \frac{1}{36} \cdot \left[ x \cdot (1+x+x^2)^2 \cdot (1+x^3) \right] \cdot \left[ x \cdot (1+x^3) \right] \\ &= \frac{1}{18} \cdot \left[ 1x + 2x^2 + 3x^3 + 3x^4 + 3x^5 + 3x^6 + 2x^7 + 1x^8 \right] \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[ 1x + 1x^4 \right] \end{aligned}$$

Das Werfen von zwei gewöhnlichen Würfeln mit der üblichen Beschriftung kann also durch sieben alternative Zufallsversuche mit anderen Zufallsgeräten ersetzt werden, die auf dieselbe Wahrscheinlichkeitsverteilung führen (vgl. die folgende Übersichtstabelle in Abb. 12.8).

Die Zerlegung der erzeugenden Funktion der üblichen Beschriftung eines Würfels selbst in  $f(x) = \frac{1}{6} \cdot x \cdot (1+x) \cdot (1+x+x^2) \cdot (1-x+x^2)$  lässt sich dahin gehend interpretieren, dass auch der „normale“ Würfel ersetzt werden kann.

Der Faktor  $(1-x+x^2)$ , der sich einer Interpretation entzieht, kann mit den anderen kombiniert werden.

Zufallsgerät 1	Beschriftung	Zufallsgerät 2	Beschriftung
Sechserwürfel	(1, 3, 4, 5, 6, 8)	Sechserwürfel	(1, 2, 2, 3, 3, 4)
4er-Glücksrad	(1, 2, 2, 3)	9er-Glücksrad	(1, 3, 3, 5, 5, 5, 7, 7, 9)
4er-Glücksrad	(1, 4, 4, 7)	9er-Glücksrad	(1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5)
3er-Glücksrad	(1, 3, 5)	12er-Glücksrad	(1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7)
3er-Glücksrad	(1, 2, 3)	12er-Glücksrad	(1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 8, 9)
2er-Glücksrad	(1, 2)	18er-Glücksrad	(1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 10)
2er-Glücksrad	(1, 4)	18er-Glücksrad	(1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 8)

**Abb. 12.8** Übersicht über die möglichen Ersatz-Zufallsgeräte für den Doppelwurf mit einem Hexaeder

### 1. Möglichkeit

$$(1+x) \cdot (1-x+x^2) = 1-x+x^2+x-x^2+x^3 = 1+x^3, \text{ also}$$

$$f(x) = \frac{1}{6} \cdot x \cdot (1+x^3) \cdot (1+x+x^2)$$

Das Produkt kann man auf zwei Arten im Hinblick auf die Beschriftung von Zufallsgeräten interpretieren:

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^1 + x^4) \cdot \frac{1}{3} \cdot (x^0 + x^1 + x^2)$$

oder

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^0 + x^3) \cdot \frac{1}{3} \cdot (x^1 + x^2 + x^3).$$

Und diese stehen für eine Kombination eines 2er-Glücksrads mit den Augenzahlen 1 und 4 und eines 3er-Glücksrads mit den Augenzahlen 0, 1 und 2 oder als Kombination eines 2er-Glücksrads mit den Augenzahlen 0 und 3 und eines 3er-Glücksrads mit den Augenzahlen 1, 2 und 3 (vgl. die beiden folgenden Kombinationstabellen).

	0	1	2
1	1	2	3
4	4	5	6

	1	2	3
0	1	2	3
3	4	5	6

## 2. Möglichkeit

$(1 + x + x^2) \cdot (1 - x + x^2) = 1 - x + x^2 + x - x^2 + x^3 + x^2 - x^3 + x^4 = 1 + x^2 + x^4$ , also

$f(x) = \frac{1}{6} \cdot x \cdot (1 + x) \cdot (1 + x^2 + x^4)$ , und hieraus

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^1 + x^2) \cdot \frac{1}{3} \cdot (x^0 + x^2 + x^4)$$

oder

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^0 + x^1) \cdot \frac{1}{3} \cdot (x^1 + x^3 + x^5).$$

Diese Produkte können interpretiert werden als eine Kombination eines 2er-Glücksrads mit den Augenzahlen 1 und 2 und eines 3er-Glücksrads mit den Augenzahlen 0, 2 und 4 oder als eine Kombination eines 2er-Glücksrads mit den Augenzahlen 0 und 1 und eines 3er-Glücksrads mit den Augenzahlen 1, 3 und 5 (vgl. die beiden zugehörigen Kombinationstabellen).

	0	2	4
1	1	3	5
2	2	4	6

	1	3	5
0	1	3	5
1	2	4	6

## 12.8 Wahrscheinlichkeitsverteilung der Augensummen beim $n$ -fachen Würfeln

Mit der Methode der erzeugenden Funktionen verfügt man über ein algebraisches Verfahren, um die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Augensumme beim  $n$ -fachen Würfeln zu bestimmen.

Durch Ausmultiplizieren (eher etwas mühsam) oder mithilfe eines Computeralgebrasystems (CAS) findet man auf diese Weise heraus, dass beispielsweise gilt:

$$\begin{aligned} f^3(x) &= \frac{1}{216} \cdot [1x^1 + 1x^2 + 1x^3 + 1x^4 + 1x^5 + 1x^6]^3 \\ &= \frac{1}{216} \cdot (1x^3 + 3x^4 + 6x^5 + 10x^6 + 15x^7 + 21x^8 + 25x^9 + 27x^{10} \\ &\quad + 27x^{11} + 25x^{12} + 21x^{13} + 15x^{14} + 10x^{15} + 6x^{16} + 3x^{17} + 1x^{18}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^4(x) &= \frac{1}{1296} \cdot [1x^1 + 1x^2 + 1x^3 + 1x^4 + 1x^5 + 1x^6]^4 \\ &= \frac{1}{1296} \cdot (1x^4 + 4x^5 + 10x^6 + 20x^7 + 35x^8 + 56x^9 + 80x^{10} + 104x^{11} + 125x^{12} + 140x^{13} + 146x^{14} \\ &\quad + 140x^{15} + 125x^{16} + 104x^{17} + 80x^{18} + 56x^{19} + 35x^{20} + 20x^{21} + 10x^{22} + 4x^{23} + 1x^{24}) \end{aligned}$$

Die Methode der erzeugenden Funktionen erweist sich auch deshalb als elegant, weil man mit ihrer Hilfe den Erwartungswert  $\mu = E(X)$  und die Standardabweichung  $\sigma$  bzw. die Varianz  $V(X)$  für Augensummen leicht bestimmen kann.

Ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung durch eine erzeugende Funktion gegeben, dann gilt nämlich:

$$\mu = E(X) = f'(1); \quad \sigma^2 = V(X) = f''(1) + f'(1) - f'(1)^2,$$

also hier:  $f'(x) = \frac{1}{6} \cdot (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5)$  mit

$$f'(1) = \frac{1}{6} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6} = 3,5 = \mu$$

und

$$f''(x) = \frac{1}{6} \cdot (2 + 6x + 12x^2 + 20x^3 + 30x^4) \text{ mit}$$

$$f''(1) = \frac{1}{6} \cdot (2 + 6 + 12 + 20 + 30) = \frac{70}{6} = \frac{35}{3} = 11,\bar{6},$$

also  $\sigma^2 = \frac{7}{2} + \frac{35}{3} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12} = 2,91\bar{6}$ .

Wegen der Linearität von Erwartungswert und Varianz ergeben sich dann entsprechend Vielfache hiervon bei den Augensummen von zwei oder mehr Würfeln (vgl. die folgende Tabelle).

2-facher Wurf	3-facher Wurf	4-facher Wurf	5-facher Wurf
$\mu = 7$	$\mu = 10,5$	$\mu = 14$	$\mu = 17,5$
$\sigma^2 = \frac{35}{6} = 5,8\bar{3}$	$\sigma^2 = \frac{35}{4} = 8,75$	$\sigma^2 = \frac{35}{3} = 11,\bar{6}$	$\sigma^2 = \frac{175}{12} = 14,58\bar{3}$

Die Herleitung der Formeln für Erwartungswert und Varianz kann auch *elementar* erfolgen. Betrachtet man allgemein ein Glücksrad mit  $m$  gleich großen Sektoren, die mit den Nummern 1, 2, 3, ...,  $m$  („Augenzahlen“) beschriftet sind, dann gilt für den Erwartungswert der Augenzahlen gemäß Definition:

$$\mu = \frac{1}{m} \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + m)$$

Hierfür kann man gemäß Formel (2.1) schreiben:

$$\mu = \frac{1}{m} \cdot \frac{m \cdot (m+1)}{2} = \frac{m+1}{2}$$

Für die Varianz gilt:

$$\sigma^2 = \frac{1}{m} \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + m^2) - \left(\frac{m+1}{2}\right)^2$$

Hieraus folgt gemäß Formel (2.4):

$$\sigma^2 = \frac{1}{m} \cdot \frac{m \cdot (m+1) \cdot (2m+1)}{6} - \left(\frac{m+1}{2}\right)^2 = \frac{m^2-1}{12}$$

## Formel

Erwartungswert  $\mu$  der Augenzahl eines Glücksrads mit  $m$  gleich großen Sektoren

$$\mu = \frac{m+1}{2} \quad (12.1)$$

Varianz  $V(X)$  und Standardabweichung  $\sigma$  der Augenzahl eines Glücksrads mit  $m$  gleich großen Sektoren

$$\sigma^2 = \frac{m^2-1}{12}, \text{ also } \sigma = \sqrt{\frac{m^2-1}{12}} \quad (12.2)$$

## 12.9 Wahrscheinlichkeitsverteilungen der platonischen Körper

Zu den Würfeln, die man heute in den Spielzeuggläden findet, gehören neben dem Hexaeder auch die anderen platonischen Körper: Tetraeder (*tetra*, dt. vier), Oktaeder (*okto*, dt. acht), Dodekaeder (*dodeka*, dt. zwölf), Ikosaeder (*eikosa*, dt. zwanzig). Diese sind üblicherweise entsprechend ihrer jeweiligen Flächenzahl mit den natürlichen Zahlen von 1 bis 4 bzw. 8 bzw. 12 bzw. 20 beschriftet („Augenzahl“).



Quelle: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:BluePlatonicDice.jpg>

Alle bisherigen Überlegungen für Hexaeder lassen sich auch auf die anderen platonischen Körper übertragen. Mithilfe der Formeln (12.1) und (12.2) kann man elementar den Erwartungswert und die Standardabweichung der Augenzahl der platonischen Körper berechnen (vgl. folgende Tabelle). Wegen der Linearität erhält man Erwartungswert und Standardabweichung von Augensummen durch entsprechende Vielfache bzw. Summen aus dieser Tabelle.

	Tetraeder	Hexaeder	Oktaeder	Dodekaeder	Ikosaeder
Anzahl $m$ der Flächen	4	6	8	12	20
Erwartungswert $\mu$	2,5	3,5	4,5	6,5	10,5
Standardabweichung $\sigma$	$\sqrt{\frac{15}{12}} \approx 1,12$	$\sqrt{\frac{35}{12}} \approx 1,71$	$\sqrt{\frac{63}{12}} \approx 2,29$	$\sqrt{\frac{143}{12}} \approx 3,45$	$\sqrt{\frac{399}{12}} \approx 5,77$

**Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen**

**A 12.3:** Ein regelmäßiges Tetraeder ist mit den Augenzahlen 1, 2, 3, 4 beschriftet.

1. Untersuchen Sie, welche Augensummen beim doppelten Tetraederwurf auftreten können (Kombinationstabelle, Histogramm).
2. Bestimmen Sie die erzeugende Funktion für die Augenzahlen eines Tetraeders, und bestimmen Sie hiermit Glücksräder, die ein Tetraeder ersetzen könnten.
3. Bestimmen Sie mögliche Zerlegungen des Terms der erzeugenden Funktion für die Augensummen des Tetraeder-Doppelwurfs, und bestimmen Sie hiermit drei alternative Zufallsgeräte, mit denen man den Tetraeder-Doppelwurf ersetzen kann.
4. Bestimmen Sie mithilfe der erzeugenden Funktion Erwartungswert und Standardabweichung der Augenzahl beim Tetraeder.

**Augensummen beim Wurf unterschiedlicher platonischer Körper**

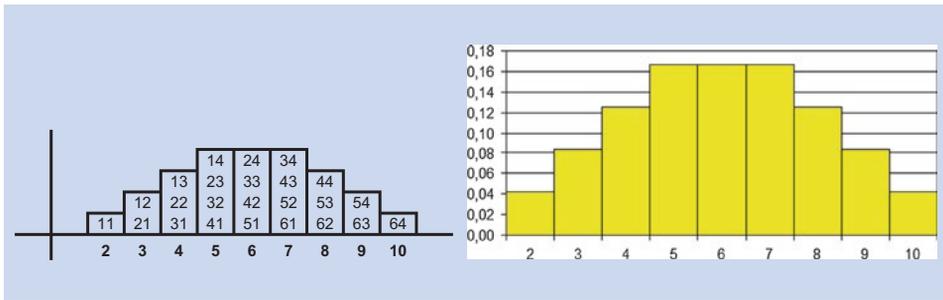
Statt des Doppelwurfs eines Würfels (bzw. eines anderen platonischen Körpers) kann man die Augensumme beim Werfen unterschiedlicher platonischer Körper untersuchen. Die Vorgehensweise ist die gleiche.

**Beispiel: Augensumme beim Wurf eines Tetraeders und eines Hexaeders**

Wie oben bestimmt man zunächst die Kombinationstabelle, die Wahrscheinlichkeitsverteilung und das Histogramm zur Augensumme. Beim Histogramm fällt die Trapezform auf (im Unterschied zur Dreiecksform bei der Augensumme von zwei gleichen Würfeln, vgl. Abschn. 12.1).

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10

Augensumme	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{1}{24}$



Auch beim Wurf von Tetraeder und Hexaeder kann man die Wahrscheinlichkeitsverteilung mithilfe der beiden erzeugenden Funktionen bestimmen:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \cdot (1x^1 + 1x^2 + 1x^3 + 1x^4) \cdot \frac{1}{6} \cdot (1x^1 + 1x^2 + 1x^3 + 1x^4 + 1x^5 + 1x^6) \\ &= \frac{1}{24} \cdot (1x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 4x^6 + 4x^7 + 3x^8 + 2x^9 + 1x^{10}) \end{aligned}$$

#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 12.4:** Bestimmen Sie die möglichen Polynom-Zerlegungen zur erzeugenden Funktion der Augensumme von Tetraeder und Hexaeder, und ermitteln Sie hieraus die acht alternativen Kombinationen von Zufallsgeräten mit gleicher Wahrscheinlichkeitsverteilung.

## 12.10 Vergleich von Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit gleichen Augensummen

Besonders interessant sind solche Würfe mit zwei platonischen Körpern, bei denen die möglichen Augensummen mit denen von Zweifach-Würfeln übereinstimmen können.

Hierfür gibt es drei Möglichkeiten:

- Beim gemeinsamen Wurf zweier Hexaeder bzw. beim gemeinsamen Wurf eines Tetraeders und eines Oktaeders können als Augensummen die Werte 2, 3, 4, ..., 12 auftreten.
- Beim gemeinsamen Wurf zweier Oktaeder bzw. beim gemeinsamen Wurf eines Tetraeders und eines Dodekaeders können als Augensummen die Werte 2, 3, 4, ..., 16 auftreten.
- Beim gemeinsamen Wurf zweier Dodekaeder bzw. beim gemeinsamen Wurf eines Tetraeders und eines Ikosaeders können als Augensummen die Werte 2, 3, 4, ..., 24 auftreten.

An den Histogrammen in Abb. 12.9a–c ist ablesbar, wie sich die verschiedenen Kombinationen unterscheiden. Auf den Unterschied in der Form (Dreiecks- bzw. Trapezgestalt)

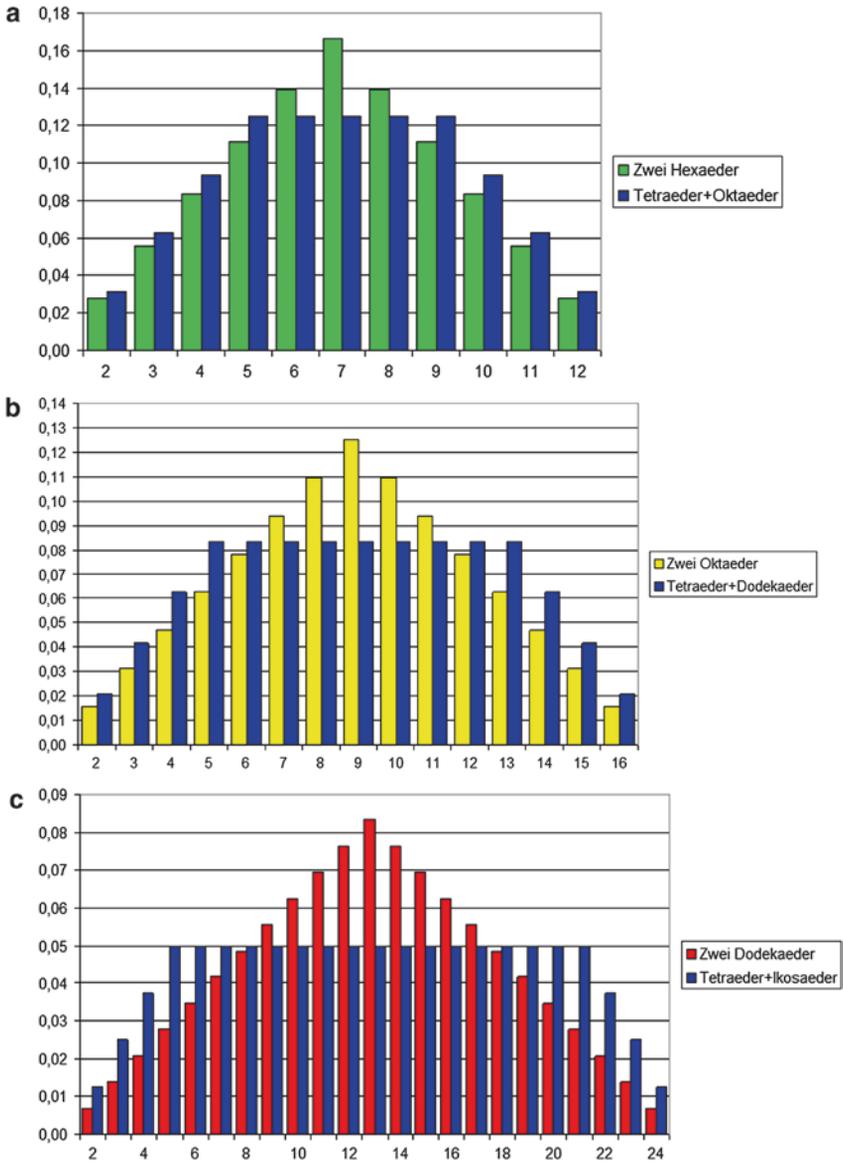


Abb. 12.9 a–c Vergleich der Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit übereinstimmenden Augensummen

haben wir bereits hingewiesen: Augensummen in der Nähe des Erwartungswerts haben bei einem Doppelwurf mit dem *gleichen* Polyeder eine größere Wahrscheinlichkeit; dagegen treten die Augensummen an den Enden der Verteilung beim Wurf zweier *verschiedener* Polyeder mit größerer Wahrscheinlichkeit auf.

### Ein Wettspiel: Würden Sie darauf wetten, mit welcher Polyeder-Kombination gewürfelt wurde?

Aus dem interessanten Vergleich ergibt sich die Möglichkeit eines Wettspiels: Der Spielveranstalter würfelt nacheinander (z. B.) 5-mal verdeckt mit einer der beiden Kombinationen von Polyedern und gibt jeweils die geworfenen Augensummen bekannt. Der Spielteilnehmer gibt einen Tipp ab und wettet darauf, mit welcher der beiden Kombinationen gewürfelt wurde.

Der Spielteilnehmer kann konkret die Wahrscheinlichkeiten berechnen, mit denen die bekannt gegebenen Augensummen auftreten, und so die Chancen für die Richtigkeit der beiden möglichen Tipps ermitteln.

#### Beispiel

Der Spielleiter gibt folgende Augensummen bekannt: 9, 5, 10, 8, 6.

$$P_{\text{zwei Hexaeder}(9, 5, 10, 8, 6)} = \frac{4}{36} \cdot \frac{4}{36} \cdot \frac{3}{36} \cdot \frac{5}{36} \cdot \frac{5}{36} \approx 1,985 \cdot 10^{-5}$$

$$P_{\text{Tetraeder + Oktaeder}(9, 5, 10, 8, 6)} = \frac{4}{32} \cdot \frac{4}{32} \cdot \frac{3}{32} \cdot \frac{4}{32} \cdot \frac{4}{32} \approx 2,289 \cdot 10^{-5}$$

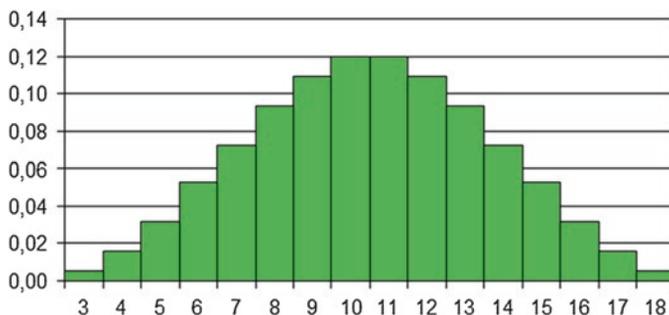
Da diese Abfolge von Augensummen beim Werfen von Tetraeder und Oktaeder eine größere Wahrscheinlichkeit hat als beim Werfen von zwei Hexaedern, würde man auf die zweite Kombination tippen.

Allerdings ist der Unterschied der beiden Wahrscheinlichkeiten nicht sehr groß (Chancenverhältnis: 46,4 % zu 53,6 %).

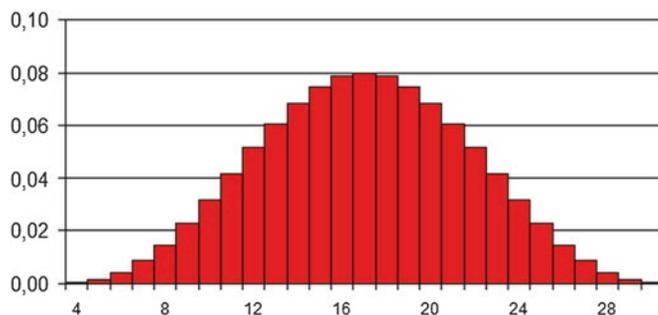
## 12.11 Ein Beispiel zum Zentralen Grenzwertsatz

Der **Zentrale Grenzwertsatz** der Stochastik besagt, dass unter bestimmten Bedingungen die Summe von mehreren Zufallsgrößen näherungsweise normalverteilt ist und dass die Qualität der Approximation der Wahrscheinlichkeitsverteilung durch eine Normalverteilung mit der Anzahl der Summanden zunimmt.

In der folgenden Abbildung ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung beim Werfen von drei der platonischen Körper dargestellt, nämlich von Tetraeder, Hexaeder und Oktaeder.



In der nächsten Grafik ist dann noch ein Dodekaeder hinzugekommen:



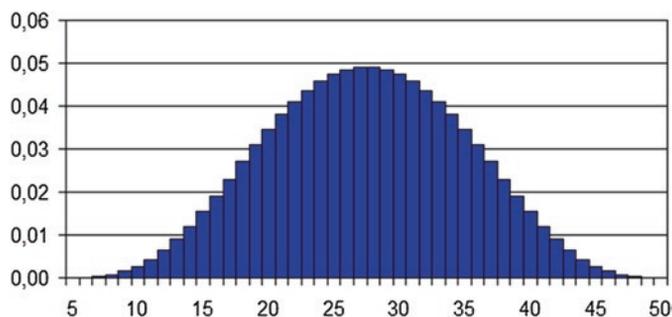
Wirft man alle fünf regulären Polyeder, dann hat das Histogramm der Augensumme fast die Gestalt einer Glockenkurve. Im Funktionsterm der Dichtefunktion  $\varphi$  mit

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

treten die Parameter  $\mu$  und  $\sigma$  auf mit

$$\mu = 2,5 + 3,5 + 4,5 + 6,5 + 10,5 = 27,5 \text{ sowie}$$

$$\sigma^2 = \frac{15}{12} + \frac{35}{12} + \frac{63}{12} + \frac{143}{12} + \frac{399}{12} = \frac{655}{12} = 54,8\bar{3}, \text{ also } \sigma \approx 7,39.$$



Die Erwartungswerte und Standardabweichungen kann man dazu benutzen, um Prognosen für Augensummen bei vielfacher Versuchsdurchführung zu erstellen. Führt man solche Zufallsversuche sehr oft durch, dann sind die möglichen Augensummen näherungsweise normalverteilt und man kann die sogenannten **Sigma-Regeln** anwenden, das sind Faustregeln über die Wahrscheinlichkeit für Bereiche um den Erwartungswert. Diese gelten exakt für Normalverteilungen, aber näherungsweise auch dafür, wenn man die Augensummen aus mehreren Würfeln bildet.

**Regel****Sigma-Regeln für Augensummen**

Gilt für die Augensumme aus mehreren Würfelversuchen, dass sie näherungsweise durch eine Normalverteilung mit Erwartungswert  $\mu$  und Standardabweichung  $\sigma$  beschrieben werden kann, dann liegt diese Augensumme

1. in ca. zwei Dritteln der Fälle im Intervall zwischen  $\mu - \sigma$  und  $\mu + \sigma$ ,
2. mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 90 % im Intervall zwischen  $\mu - 1,64\sigma$  und  $\mu + 1,64\sigma$ ,
3. mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 95 % im Intervall zwischen  $\mu - 1,96\sigma$  und  $\mu + 1,96\sigma$ ,
4. mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 99 % im Intervall zwischen  $\mu - 2,58\sigma$  und  $\mu + 2,58\sigma$ .

**Beispiel: Augensumme beim Werfen der fünf platonischen Körper**

Da der Erwartungswert  $\mu = 27,5$  und die Standardabweichung  $\sigma \approx 7,39$  ist, sind folgende Prognosen möglich:

1. In ungefähr zwei Dritteln der Würfe liegt die Augensumme zwischen 21 und 34.
2. In neun von zehn Würfeln liegt die Augensumme zwischen 16 und 39.
3. In neunzehn von zwanzig Würfeln liegt die Augensumme zwischen 14 und 41.
4. Nur in 1 % der Würfe ist die Augensumme kleiner als 9 oder größer als 46.

Die exakten (auf eine Dezimalstelle gerundeten) Wahrscheinlichkeiten sind:

(1) 62,7 % (2) 89,6 % (3) 95,1 % (4) 0,2 %

An (4) sieht man, dass die Wahrscheinlichkeit für solch extrem kleine bzw. große Augensummen im konkreten Fall noch kleiner ausfällt, die Faustregel hier also ziemlich ungenau ist.

**Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen**

**A 12.5:** Die Augensumme beim 10-fachen Würfeln mit einem Hexaeder [Oktaeder] kann näherungsweise als normalverteilt angesehen werden.

Formulieren Sie – ähnlich wie im Beispiel oben – Prognosen hinsichtlich der Bereiche, in denen die Augensummen liegen werden.

## 12.12 Bestimmen von Augensummen mithilfe von Markow-Ketten

Im Rahmen der Theorie der Markow-Ketten beschäftigt man sich mit **Zuständen** von Systemen und den **Übergängen** zwischen den Zuständen. Auch Augensummen lassen sich als Zustände auffassen.

Wenn man beispielsweise ein regelmäßiges Hexaeder das erste Mal wirft, dann geschieht jeweils mit der Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{6}$  ein Übergang vom Zustand 0 in den Zustand 1, 2, 3, 4, 5 oder 6.

Beim zweiten Wurf sind dann Übergänge zu den Zuständen 2, 3, 4, ..., 12 möglich – alle Übergänge geschehen mit der Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{6}$ . Geht man von diesen Zuständen aus, dann ist

- der Übergang zum Zustand 2 nur möglich vom Zustand 1 aus,
- der Übergang zum Zustand 3 sowohl vom Zustand 1 als auch vom Zustand 2 aus,
- der Übergang zum Zustand 4 von den Zuständen 1, 2, 3 aus,
- der Übergang zum Zustand 5 von den Zuständen 1, 2, 3, 4 aus,
- der Übergang zum Zustand 6 von den Zuständen 1, 2, 3, 4, 5 aus,
- der Übergang zum Zustand 7 von den Zuständen 1, 2, 3, 4, 5, 6 aus,
- der Übergang zum Zustand 8 nicht mehr vom Zustand 1, aber von den Zuständen 2, 3, 4, 5, 6 aus.

Da der Zustand 7 nach dem ersten Wurf noch nicht erreicht war, also die Wahrscheinlichkeit 0 hat, kann man in der Liste der möglichen Zugänge auch den Zustand 7 nennen, ohne dass dies Einfluss hätte. Die letzte Zeile können wir also wie folgt notieren:

- der Übergang zum Zustand 8 von den Zuständen 2, 3, 4, 5, 6, 7 aus und analog weiter auch
- der Übergang zum Zustand 9 von den Zuständen 3, 4, 5, 6, 7, 8 aus,
- ...
- der Übergang zum Zustand 12 von den Zuständen 6, 7, 8, 9, 10, 11 aus.

Dies hat den Vorteil, dass auf jeweils sechs vorangehende Zustände zurückgegriffen wird.

Die Berechnung der Wahrscheinlichkeit  $P(n; k)$ , dass sich das System nach  $n$  Würfeln im Zustand  $k$  befindet, erfolgt rekursiv aus den Wahrscheinlichkeiten der vorherigen Stufe:

$$P(2; 2) = \frac{1}{6} \cdot P(1; 1)$$

$$P(2; 3) = \frac{1}{6} \cdot [P(1; 1) + P(1; 2)]$$

$$P(2; 4) = \frac{1}{6} \cdot [P(1; 1) + P(1; 2) + P(1; 3)]$$

$$P(2; 5) = \frac{1}{6} \cdot [P(1; 1) + P(1; 2) + P(1; 3) + P(1; 4)]$$

$$P(2; 6) = \frac{1}{6} \cdot [P(1; 1) + P(1; 2) + P(1; 3) + P(1; 4) + P(1; 5)]$$

$$P(2; 7) = \frac{1}{6} \cdot [P(1; 1) + P(1; 2) + P(1; 3) + P(1; 4) + P(1; 5) + P(1; 6)]$$

$$P(2; 8) = \frac{1}{6} \cdot [P(1; 2) + P(1; 3) + P(1; 4) + P(1; 5) + P(1; 6) + P(1; 7)]$$

...

$$P(2; 11) = \frac{1}{6} \cdot [P(1; 5) + P(1; 6) + P(1; 7) + P(1; 8) + P(1; 9) + P(1; 10)]$$

$$P(2; 12) = \frac{1}{6} \cdot [P(1; 6) + P(1; 7) + P(1; 8) + P(1; 9) + P(1; 10) + P(1; 11)]$$

Beim Übergang zur 3. Runde muss man die beiden Parameterwerte  $n$  und  $k$  jeweils um 1 hochsetzen, also:

$$P(3; 3) = \frac{1}{6} \cdot P(2; 2)$$

$$P(3; 4) = \frac{1}{6} \cdot [P(2; 2) + P(2; 3)]$$

$$P(3; 5) = \frac{1}{6} \cdot [P(2; 2) + P(2; 3) + P(2; 4)]$$

...

$$P(3; 8) = \frac{1}{6} \cdot [P(2; 2) + P(2; 3) + P(2; 4) + P(2; 5) + P(2; 6) + P(2; 7)]$$

...

$$P(3; 13) = \frac{1}{6} \cdot [P(2; 7) + P(2; 8) + P(2; 9) + P(2; 10) + P(2; 11) + P(2; 12)]$$

Und dann muss man dies noch bis zum nächsten größtmöglichen Zustand fortsetzen:

$$P(3; 18) = \frac{1}{6} \cdot [P(2; 12) + P(2; 13) + P(2; 14) + P(2; 15) + P(2; 16) + P(2; 17)]$$

In Excel<sup>®</sup> lässt sich der erste Teil mit dem einfachen Copy & Paste-Befehl umsetzen, der zweite Teil durch Drag & Drop (vgl. den folgenden Tabellenausschnitt).

n \ k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0,167	0,167	0,167	0,167	0,167	0,167	0	0	0	0	0	0	0
2		0,028	0,056	0,083	0,111	0,139	0,167	0,139	0,111	0,083	0,056	0,028	
3			0,005	0,014	0,028	0,046	0,069	0,097	0,116	0,125	0,125	0,116	0,097
4				0,001	0,003	0,008	0,015	0,027	0,043	0,062	0,080	0,096	0,108
5					0,000	0,001	0,002	0,005	0,009	0,016	0,026	0,039	0,054

Man könnte die Rekursionsformeln dahin gehend vereinheitlichen, dass man überall Terme mit sechs Summanden ansetzt. Dazu müsste man in Runde 1 Zustände mit den Nummern 0, 1, -1, -2, -3, -4 einführen und diesen die Wahrscheinlichkeit 0 zuordnen.

Dann lautet die einheitliche Rekursionsvorschrift für  $n \geq 2$  und  $k$  mit  $n \leq k \leq 6n$ :

$$P(n; k) = \frac{1}{6} \cdot [P(n-1; k-6) + P(n-1; k-5) + P(n-1; k-4) + P(n-1; k-3) + P(n-1; k-2) + P(n-1; k-1)]$$

$$\text{mit } P(1; 1) = P(1; 2) = P(1; 3) = P(1; 4) = P(1; 5) = P(1; 6) = \frac{1}{6}$$

sowie  $P(n; k) = 0$  für  $k < n$ .

Aus den Zeilen der folgenden Tabelle kann man also ablesen, mit welcher Wahrscheinlichkeit man beim Werfen mit  $n$  Würfeln die Augensumme  $k$  erreicht.

n \ k	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	0	0,167	0,167	0,167	0,167	0,167	0,167	0	0
2		0	0	0	0	0	0,028	0,056	0,083	0,111	0,139	0,167	0,139
3			0	0	0	0	0	0,005	0,014	0,028	0,046	0,069	0,097
4				0	0	0	0	0	0,001	0,003	0,008	0,015	0,027
5					0	0	0	0	0	0,000	0,001	0,002	0,005

## 12.13 Hinweise auf weiterführende Literatur

Bei **Wikipedia** findet man in deutscher (englischer, französischer) Sprache weitere Informationen und Literatur zu den Stichwörtern:

- Spielwürfel (Dice, Dé)
- Würfelspiel (Dice games, Jeu de dés)
- Histogramm (Histogram, Histogramme)
- Erwartungswert (Expectation value, Espérance)

- Standardabweichung (Standard deviation, Écart type)
- Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion (Probability-generating function, Fonction génératrice des probabilités)
- Normalverteilung (Normal distribution, Loi normale\*)
- Zentraler Grenzwertsatz (Central limit theorem, Théorème central limite)

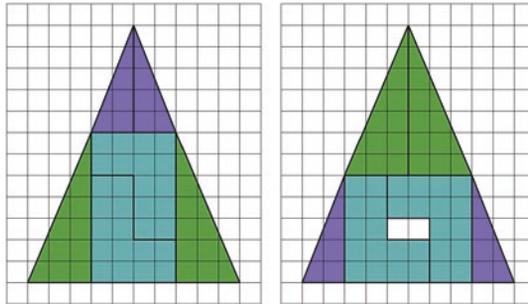
\*) *Auszeichnung als lesenswerter Artikel*

Umfangreiche fachliche Informationen findet man auf **Wolfram Mathworld** unter den Stichwörtern:

- Dice, Sicherman dice, Dice games, Expectation value, Standard deviation, Normal distribution.

*Es gibt Dinge, die den meisten Menschen unglaublich erscheinen,  
die nicht Mathematik studiert haben.*

(Archimedes, griechischer Mathematiker und  
Physiker, 287–212 v. Chr.)



Im Jahr 1858 präsentierte Sam Loyd (1841–1911), der Erfinder und Sammler von mathematischen Rätseln, als Erster das Problem des verschwundenen Quadrats. Diese Rätsel finden Sie in Abschn. 13.5 dieses Kapitels.

In den 1950er-Jahren berichtete Martin Gardner (1914–2010) in seiner monatlichen Kolumne im *Scientific American* darüber, dass der Zauberer Paul Curry (1917–1986) das Paradoxon zweier verschwundener Quadrate in seiner Show zeigte (vgl. die Abbildungen oben); seitdem wird das Rätsel auch als „Curry’s triangle paradox“ bezeichnet.

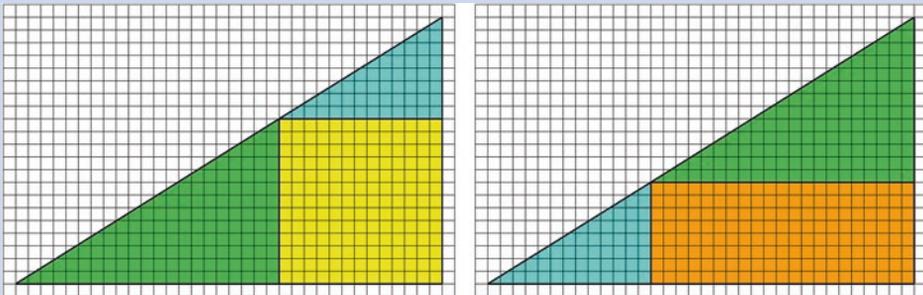
Aber auch zahlreiche andere Sammlungen von mathematischen Rätseln enthalten Ausführungen hierzu.

### 13.1 Scheinbar zueinander kongruente Figuren

#### Rätsel 1

In der folgenden Abbildung links ist ein Quadrat (gelb) mit der Seitenlänge 13 LE zu sehen. An dieses ist ein rechtwinkliges Dreieck (grün) angelegt, dessen Katheten die Seitenlängen 13 LE und 21 LE haben, und darüber ein rechtwinkliges Dreieck (hellblau), dessen Katheten die Seitenlängen 13 LE und 8 LE haben. Die Abbildung rechts zeigt ein Rechteck (orange) mit den Seitenlängen 8 LE und 21 LE sowie dieselben rechtwinkligen Dreiecke wie in der Abbildung links, diesmal in vertauschter Position angeordnet.

Die beiden Figuren scheinen zueinander kongruent zu sein. Beim Nachrechnen fällt aber auf, dass die Fläche des Rechtecks in der Abbildung rechts mit  $8 \text{ LE} \cdot 21 \text{ LE} = 168 \text{ FE}$  um 1 FE kleiner ist als die des Quadrats in der Abbildung links mit  $(13 \text{ LE})^2 = 169 \text{ FE}$ .

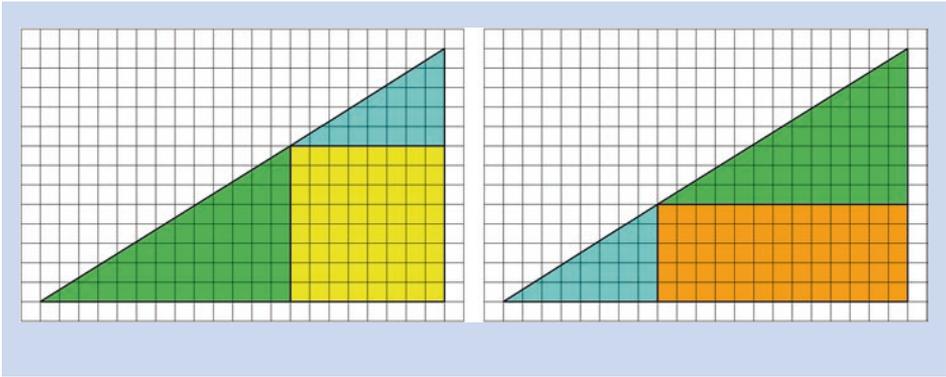


Bevor man versucht, hinter Rätsel 1 zu kommen, sollte man sich ein ähnliches Problem in den folgenden Abbildungen anschauen:

#### Rätsel 2

Die Katheten des hellblauen Dreiecks haben die Seitenlängen 5 LE und 8 LE und die des grünen Dreiecks haben die Seitenlängen 8 LE und 13 LE. Auch hier scheinen die beiden Figuren zueinander kongruent zu sein.

Beim Nachrechnen fällt wieder auf, dass die Flächeninhalte von Rechteck und Quadrat nicht übereinstimmen: Die Fläche des Rechtecks ist mit  $5 \text{ LE} \cdot 13 \text{ LE} = 65 \text{ FE}$  um 1 FE größer als die des Quadrats mit  $(8 \text{ LE})^2 = 64 \text{ FE}$ .

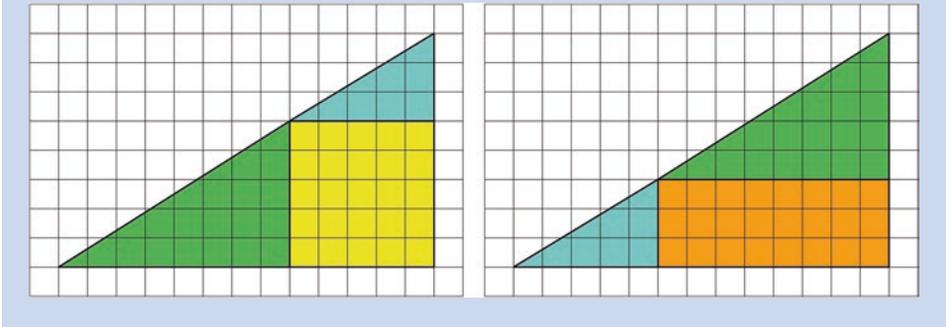


Erst bei den folgenden Abbildungen des Rätsels 3 hat man vielleicht eher eine Chance herauszufinden, wo der Fehler steckt.

### Rätsel 3

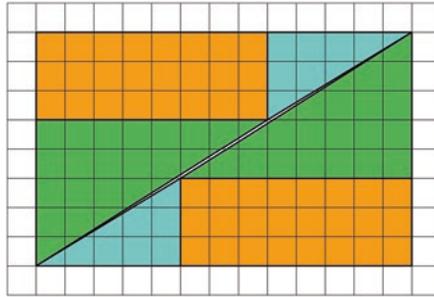
Die Katheten des hellblauen bzw. grünen Dreiecks haben hier die Seitenlängen 3 LE und 5 LE bzw. 5 LE und 8 LE. Und auch hier scheinen die beiden Figuren auf den ersten Blick zueinander kongruent zu sein.

Auch hier fällt beim Nachrechnen auf, dass sich die Flächeninhalte der beiden Figuren um 1 FE unterscheiden: Die Fläche des Rechtecks ist mit  $3 \text{ LE} \cdot 8 \text{ LE} = 24 \text{ FE}$  um 1 FE kleiner als das Quadrat mit  $(5 \text{ LE})^2 = 25 \text{ FE}$ .



Wenn man *ganz genau* hinschaut, erkennt man (vielleicht), dass die Hypotenusen des blauen und des grünen Dreiecks keine durchgehende Linie bilden.

Dieser „Knick“ in der Sichtlinie wird noch deutlicher, wenn man die rechts abgebildete Figur der letzten Abbildung geeignet verdoppelt. Man erkennt jetzt einen schmalen weißen Streifen (genauer: ein Parallelogramm). Und dieses hat einen Flächeninhalt von 1 FE.

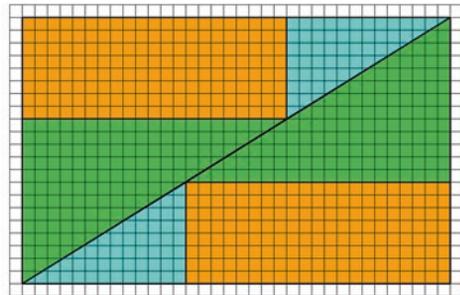
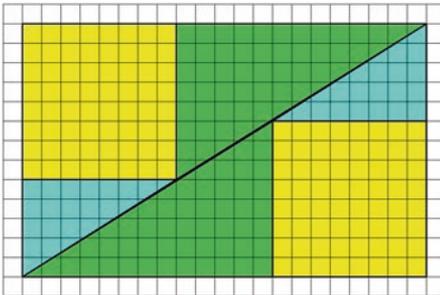


Dies ist die fehlende Quadrateinheit!

Denn die gesamte Figur ist – außen gemessen – ein Rechteck mit dem Flächeninhalt  $(3\text{ LE} + 5\text{ LE}) \cdot (5\text{ LE} + 8\text{ LE}) = 104\text{ FE}$ .

Es setzt sich zusammen aus zwei Rechtecken von je  $3\text{ LE} \cdot 8\text{ LE} = 24\text{ FE}$  zusammen also 48 FE, den beiden grünen Dreiecken ( $5\text{ LE} \cdot 8\text{ LE} = 40\text{ FE}$ ) sowie den beiden hellblauen Dreiecken ( $3\text{ LE} \cdot 5\text{ LE} = 15\text{ FE}$ ), insgesamt also 103 FE. Den weißen Streifen erkennt man nur deshalb, weil die Figur insgesamt eine nicht allzu große Länge und Breite hat.

Bei den Figuren aus den anderen Abbildungen wird dies nicht so deutlich: In der Abbildung mit dem verdoppelten  $8 \times 8$ -Quadrat aus Rätsel 2 ist der weiße Streifen kaum noch zu erkennen. Auch hier handelt es sich um den Flächeninhalt von 1 FE, allerdings bei einem größeren Gesamtflächeninhalt. Erst recht erkennt man den weißen Streifen nicht bei der verdoppelten Figur mit dem  $8 \times 21$ -Rechteck aus Rätsel 1.



#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 13.1:** Bestimmen Sie den Flächeninhalt der verdoppelten Teilfiguren in den letzten beiden Abbildungen sowie den Gesamtflächeninhalt. Welchen Flächenanteil hat die Fläche des „weißen Streifens“?

Das Paradoxon des verschwundenen Quadrats hängt also damit zusammen, dass das hellblaue und das grüne Dreieck unterschiedliche „Steigungen“ haben. Der Unterschied ist jedoch so gering, dass man es nicht „sieht“. Bei den in den Figuren auftretenden Seitenlängen handelt es sich übrigens um Zahlen aus der Fibonacci-Folge (vgl. Kap. 3). Der Trick des verschwundenen Quadrats funktioniert, weil hier zwei Eigenschaften zusammenkommen:

- Das Zahlenverhältnis zweier aufeinanderfolgender Zahlen der Fibonacci-Folge nähert sich sehr schnell dem Grenzwert  $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618 \dots$  – und das hat zur Konsequenz, dass sich die Steigungswinkel der Dreiecke immer weniger voneinander unterscheiden (vgl. Abb. 13.1).
- Das Quadrat einer Zahl der Fibonacci-Folge unterscheidet sich vom Produkt seiner beiden Nachbarn stets um 1, und zwar ist es abwechselnd um 1 größer bzw. um 1 kleiner:

$$2^2 = 1 \cdot 3 + 1; 3^2 = 2 \cdot 5 - 1; 5^2 = 3 \cdot 8 + 1; 8^2 = 5 \cdot 13 - 1; 13^2 = 8 \cdot 21 + 1;$$

$$21^2 = 13 \cdot 34 - 1; \dots$$

c	c <sup>2</sup>	c <sup>2</sup> - 1	a	b	α	β	c <sup>2</sup> + 1	a	b	α	β
3	9	8	2	4	33,69°	36,87°	10	2	5	33,69°	30,96°
4	16	15	3	5	36,87°	38,66°	17				
5	25	24	4	6	38,66°	39,81°	26	2	13	21,80°	21,04°
			3	8	30,96°	32,01°					
			2	12	21,80°	22,62°					
6	36	35	5	7	39,81°	40,60°	37				
7	49	48	6	8	40,60°	41,19°	50	5	10	35,54°	34,99°
			4	12	29,74°	30,26°		2	25	15,95°	15,64°
			3	16	23,20°	23,63°					
			2	24	15,95°	16,26°					
8	64	63	7	9	41,19°	41,63°	65	5	13	32,01°	31,61°
			3	21	20,56°	20,85°					
9	81	80	8	10	41,63°	41,99°	82	2	41	12,38°	12,41°
			5	16	29,05°	29,36°					
			4	20	23,96°	24,23°					
			2	40	12,53°	12,68°					
10	100	99	9	11	41,99°	42,27°	101				
			3	33	16,70°	16,86°					

**Abb. 13.1** Weitere Beispiele geeigneter Zahlentripel für das Paradoxon des verschwundenen Quadrats

Diese Eigenschaft wurde u. a. vom italienischen Mathematiker und Astronom Giovanni Domenico Cassini (1625–1712) entdeckt und wird ihm zu Ehren als „Cassini-Identität“ bezeichnet.

(*Hinweis:* Der Beweis der Formel kann beispielsweise durch vollständige Induktion erfolgen.)

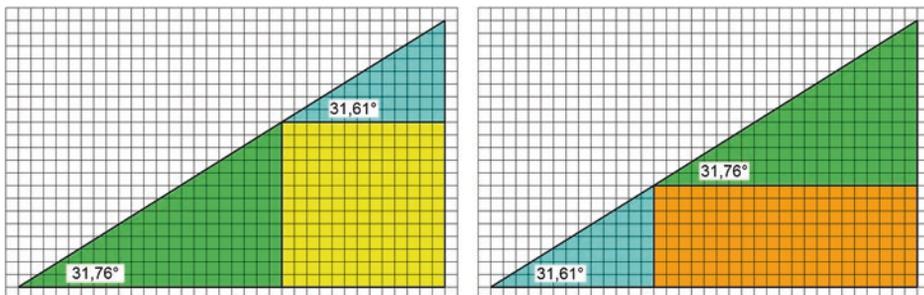
### Formel

#### Cassini-Identität

Für drei aufeinanderfolgende Zahlen  $f_{n-1}, f_n, f_{n+1} (n \in \mathbb{N})$  der Fibonacci-Folge gilt folgende Gleichung:

$$f_{n-1} \cdot f_{n+1} = f_n^2 + (-1)^n \quad (13.1)$$

Bei den Figuren in Rätsel 1 hatte das grüne Dreieck einen Steigungswinkel von  $\tan^{-1}\left(\frac{13}{21}\right) \approx 31,76^\circ$ , das hellblaue von  $\tan^{-1}\left(\frac{8}{13}\right) \approx 31,61^\circ$ . Diesen Unterschied von  $0,15^\circ$  kann man kaum erkennen! Die optische Täuschung geschieht, weil man die gesamte Figur als Dreieck ansieht, dessen Steigungswinkel sich aus dem Seitenverhältnis  $(13 + 8):(21 + 13) = 21:34$  ergibt:  $\tan^{-1}\left(\frac{21}{34}\right) \approx 31,70^\circ$ .



Tatsächlich aber hat die Figur links einen „Knick“ nach außen, die Figur rechts einen Knick nach innen. Wegen des geringen Unterschieds der Steigungswinkel erkennt man den nach innen weisenden Knick auch nicht bei Verdoppelung der Figur rechts und sieht daher auch nicht den weißen Streifen.

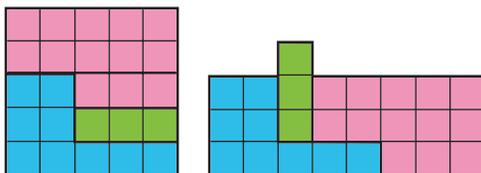
#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 13.2:** Analysieren Sie auch die anderen Figuren in den bisherigen Abbildungen. Benutzen Sie dazu die folgende Tabelle.

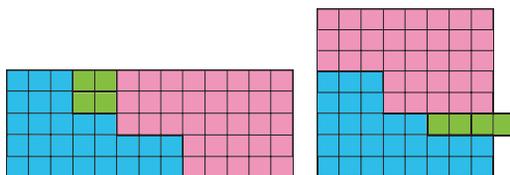
Verhältnis	$\frac{3}{5} = 0,6$	$\frac{5}{8} = 0,675$	$\frac{8}{13} = 0,615\dots$	$\frac{13}{21} = 0,619\dots$	$\frac{21}{34} = 0,617\dots$	$\frac{34}{55} = 0,618\dots$
Winkel	$30,96^\circ$	$32,01^\circ$	$31,61^\circ$	$31,76^\circ$	$31,70^\circ$	$31,724^\circ$

Den Unterschied des Flächeninhalts von 1 FE kann man nicht nur rechnerisch, sondern auch optisch sichtbar machen. Statt der beiden zusammenhängenden gelben Ausgangsfiguren, also dem Quadrat und dem Rechteck, werden Figuren betrachtet, die aus Puzzlestücken bestehen. Diese werden beim Umlegen des grünen und des hellblauen Dreiecks ebenfalls ausgelegt:

- In Rätsel 3 besteht das  $5 \times 5$ -Quadrat aus drei Puzzlestücken; ein Puzzlestück mit 1 FE ragt aus dem  $3 \times 8$ -Rechteck heraus.



- In Rätsel 2 besteht das  $5 \times 13$ -Rechteck aus vier Puzzlestücken; ein Puzzlestück mit 1 FE ragt aus dem  $8 \times 8$ -Quadrat heraus.



#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 13.3** Wie könnte eine Puzzlezerlegung der Figuren aus Rätsel 1 aussehen, also beim  $13 \times 13$ -Quadrat und beim  $8 \times 21$ -Rechteck?

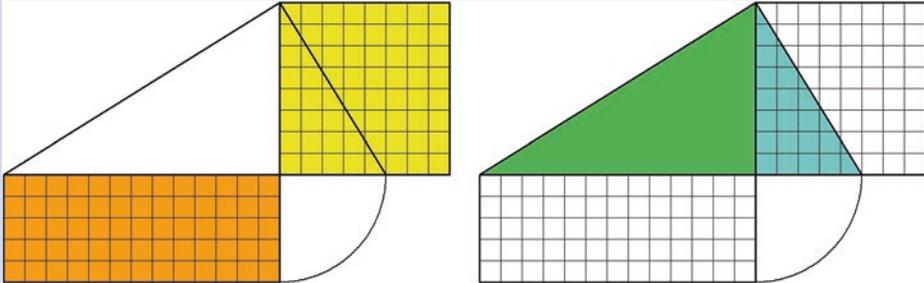
## 13.2 Das verschwundene Quadrat im Zusammenhang mit dem Höhensatz des Euklid

Der Höhensatz des Euklid besagt, dass das Quadrat über der Höhe im rechtwinkligen Dreieck flächengleich ist zu dem Rechteck, dessen Seiten aus den Abschnitten der Hypotenuse gebildet werden. Auch die Umkehrung des Höhensatzes ist richtig, d. h.: Nur dann, wenn das Rechteck und das Quadrat flächengleich sind, ist das Dreieck rechtwinklig.

**Rätsel 4**

In der folgenden Abbildung ist ein Quadrat mit dem Flächeninhalt  $(8 \text{ LE})^2 = 64 \text{ FE}$  über der Höhe eingezeichnet sowie ein Rechteck aus den Hypotenusenabschnitten mit dem Flächeninhalt  $5 \text{ LE} \cdot 13 \text{ LE} = 65 \text{ FE}$ .

Lösung: Da die beiden Flächen offensichtlich nicht den gleichen Flächeninhalt haben, folgt, dass das Dreieck nicht rechtwinklig ist.



Der vermeintlich rechte Winkel des Gesamtdreiecks hat tatsächlich eine Winkelgröße von:

$$\begin{aligned} \tan^{-1}\left(\frac{13}{8}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{5}{8}\right) &= \left[90^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{8}{13}\right)\right] + \tan^{-1}\left(\frac{5}{8}\right) \\ &\approx (90^\circ - 31,61^\circ) + 32,01^\circ = 58,39^\circ + 32,01^\circ = 90,40^\circ \end{aligned}$$

In der letzten Abbildung sind übrigens dieselben Figuren enthalten wie in den Abbildungen von Rätsel 2 (vgl. Abbildung rechts): das hellblaue Dreieck mit den Kathetenlängen 5 LE und 8 LE, das grüne Dreieck mit den Kathetenlängen 13 LE und 8 LE.

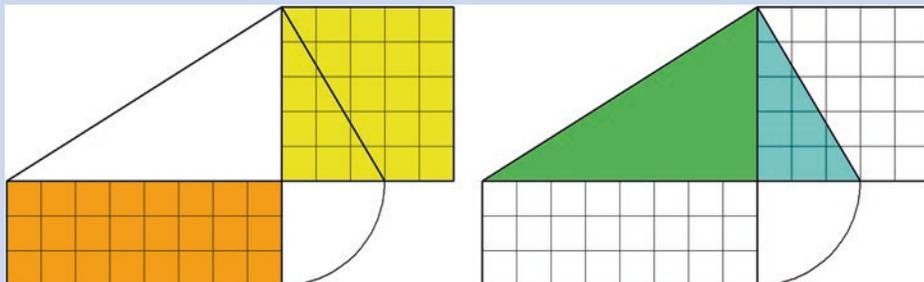
Entsprechend kann man analog ein beinahe-rechtwinkliges Dreieck passend zu Rätsel 3 zeichnen.

**Rätsel 5**

Die folgende Abbildung enthält wieder den Nachweis, dass gilt:  $3 \cdot 8 = 5^2$

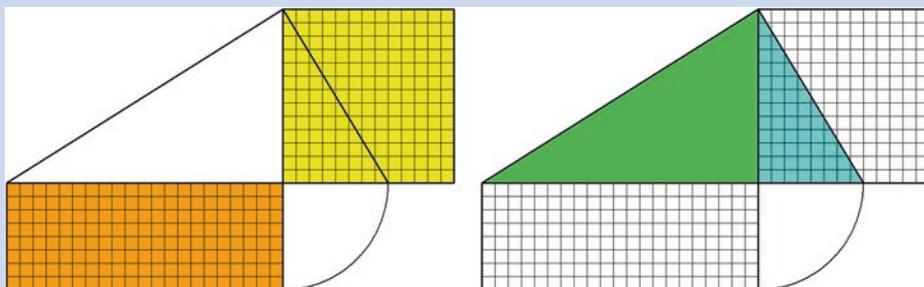
Lösung: Hier ergibt sich für den Winkel im Gesamtdreieck:

$$\tan^{-1}\left(\frac{8}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) \approx 57,99^\circ + 30,96^\circ = 88,95^\circ.$$



Und die nächste Abbildung enthält eine Figur, die zu Rätsel 1 passt:

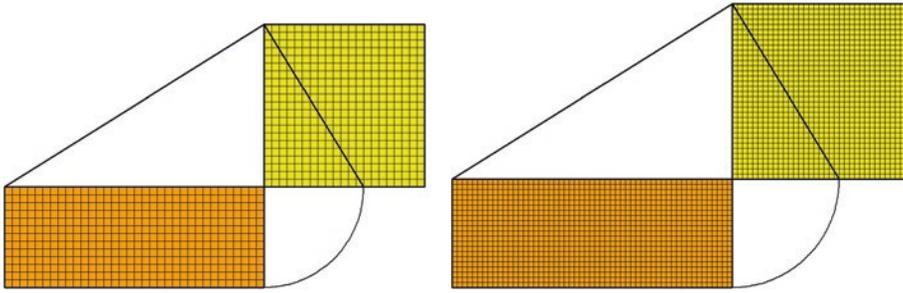
$$\tan^{-1}\left(\frac{21}{13}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{8}{13}\right) \approx (90^\circ - 31,76^\circ) + 31,61^\circ = 58,24^\circ + 31,61^\circ = 89,85^\circ.$$



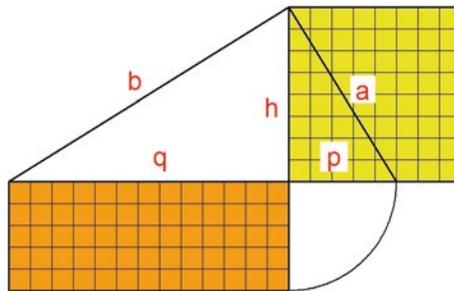
Wenn die Seitenlängen die Folge der Fibonacci-Zahlen durchläuft, ist der Winkel im Gesamtdreieck abwechselnd kleiner bzw. größer als  $90^\circ$ , er nähert sich dabei immer mehr einem rechten Winkel (vgl. die folgende Tabelle).

Rechteck	3x8	5x13	8x21	13x34	21x55	...
Quadrat	5x5	8x8	13x13	21x21	34x34	...
Winkel	88,95°	90,40°	89,85°	90,06°	89,98°	...
Differenz zu $90^\circ$	1,05°	0,40°	0,15°	0,06°	0,02°	...

Die nächsten Abbildungen zeigen die beinahe-rechtwinkligen Dreiecke zu den Fibonacci-Zahlen 13, 21, 34 und zu 21, 34, 55, bei denen der Winkel gegenüber der längsten Seite im Dreieck sich immer mehr einem Winkel von  $90^\circ$  annähert.



Üblicherweise überprüft man die Rechtwinkligkeit eines Dreiecks mithilfe des Satzes von Pythagoras. Dazu müsste man jeweils die Längen der „Katheten“  $a$  und  $b$  berechnen (vgl. die folgende Abbildung).



Die Grundseite  $c$  des Dreiecks („Hypotenuse“) ist im Fall von Rätsel 4:

$$c = p + q = 5 + 13 = 18, \text{ also } c^2 = 18^2 = 324.$$

Für die „Katheten“ gilt:

$$a^2 = p^2 + h^2 = 5^2 + 8^2 = 89 \text{ und}$$

$$b^2 = h^2 + q^2 = 8^2 + 13^2 = 233, \text{ also } a^2 + b^2 = 322.$$

Die Summe  $a^2 + b^2 = 322$  ist um 2 kleiner als  $c^2 = 324$ .

Da also  $a^2 + b^2 < c^2$ , folgt nach der Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras, dass die Winkelgröße von  $\gamma$  größer sein muss als  $90^\circ$ .

Die Winkelgröße von  $\gamma$  kann man mithilfe des Kosinussatzes bestimmen:

$$\cos^{-1}(\gamma) = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)$$

Hier ist  $\cos^{-1}(\gamma) = \cos^{-1}\left(\frac{-2}{2 \cdot \sqrt{89} \cdot \sqrt{233}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{89} \cdot \sqrt{233}}\right) \approx 90,40^\circ$  (vgl. Tabelle oben).

Entsprechend gilt für die Seitenlängen in Rätsel 5:

$$a^2 = 3^2 + 5^2 = 34; \quad b^2 = 5^2 + 8^2 = 89; \quad a^2 + b^2 = 123$$

$$c^2 = (3 + 8)^2 = 11^2 = 121$$

$$\cos^{-1}(\gamma) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{2 \cdot \sqrt{34} \cdot \sqrt{89}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{34} \cdot \sqrt{89}}\right) \approx 88,96^\circ \text{ (vgl. Tabelle oben)}$$

Es fällt auf: Auch hier unterscheidet sich  $c^2$  um 2 von  $a^2 + b^2$ .

Bemerkenswert ist aber auch eine weitere Eigenschaft:

$a^2$  und  $b^2$  sind einerseits Summe von Quadraten von zwei aufeinanderfolgenden Fibonacci-Zahlen, andererseits aber jeweils selbst Zahlen aus der Fibonacci-Folge (vgl. die folgende Tabelle mit den ersten 16 Fibonacci-Zahlen).

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
$f_n$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	...

Es gilt:

$$f_1^2 + f_2^2 = 1^2 + 1^2 = 2 = f_3; f_2^2 + f_3^2 = 1^2 + 2^2 = 5 = f_5; f_3^2 + f_4^2 = 2^2 + 3^2 = 13 = f_7;$$

$$f_4^2 + f_5^2 = 3^2 + 5^2 = 34 = f_9; f_5^2 + f_6^2 = 5^2 + 8^2 = 89 = f_{11};$$

$$f_6^2 + f_7^2 = 8^2 + 13^2 = 233 = f_{13}; \dots$$

Tatsächlich gilt allgemein die Beziehung:

#### Formel

Für die Quadrate von zwei aufeinanderfolgenden Zahlen  $f_n$  und  $f_{n+1}$  der Fibonacci-Folge gilt:

$$f_n^2 + f_{n+1}^2 = f_{2n+1} \quad (13.2)$$

Man kann diese Beziehung nutzen, um große Fibonacci-Zahlen zu bestimmen, ohne alle Zwischenglieder zu berechnen.

#### Beispiel: Bestimmung von $f_{31}$

Die letzten Einträge in der Tabelle mit den Fibonacci-Zahlen sind  $f_{15}$  und  $f_{16}$ . Hiermit kann man  $f_{31}$  berechnen:

$$f_{31} = f_{15}^2 + f_{16}^2 = 610^2 + 987^2 = 1346269$$

Für den Unterschied zwischen  $a^2 + b^2$  und  $c^2$  gilt allgemein:

$$a^2 = p^2 + h^2 = f_{n-1}^2 + f_n^2 (= f_{2n-1}) \text{ und}$$

$$b^2 = h^2 + q^2 = f_n^2 + f_{n+1}^2 (= f_{2n+1}) \text{ sowie}$$

$$\begin{aligned}
 c^2 &= (p + q)^2 = (f_{n-1} + f_{n+1})^2 = f_{n-1}^2 + 2 \cdot f_{n-1} \cdot f_{n+1} + f_{n+1}^2, \text{ also} \\
 a^2 + b^2 - c^2 &= f_{n-1}^2 + f_n^2 + f_n^2 + f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2 - 2 \cdot f_{n-1} \cdot f_{n+1} - f_{n+1}^2 \\
 &= 2 \cdot (f_n^2 - f_{n-1} \cdot f_{n+1}) = 2 \cdot (-1)^{n+1} = \pm 2
 \end{aligned}$$

gemäß der Cassini-Identität  $f_{n-1} \cdot f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n$  (vgl. Formel 13.1).

Tatsächlich beträgt also die Differenz zwischen  $a^2 + b^2$  und  $c^2$  stets 2.

Für den Term zur Berechnung des größten Winkel des beinahe-rechtwinkligen Dreiecks ergibt sich daher:

$$\begin{aligned}
 \cos^{-1}(\gamma) &= \cos^{-1}\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{f_{2n-1} \cdot f_{2n+1}}}\right) \\
 &= \cos^{-1}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{f_{2n}^2 + (-1)^{2n}}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{f_{2n}^2 + 1}}\right)
 \end{aligned}$$

An diesem Term kann man ablesen, dass der Winkel abwechselnd größer und kleiner als  $90^\circ$  ist und mit wachsendem  $n$  gegen  $90^\circ = \cos^{-1}(0)$  konvergiert.

### 13.3 Das verschwundene Quadrat im Zusammenhang mit anderen Methoden Euklids

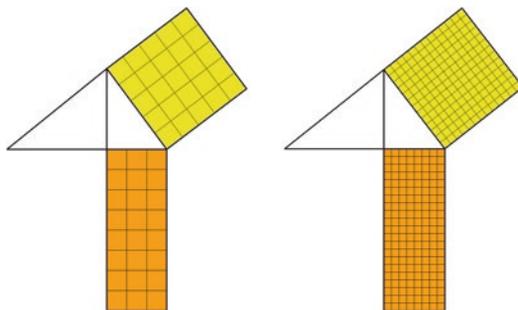
Die Anwendung des Höhensatzes ist eine der geometrischen Methoden, ein Quadrat in ein flächengleiches Rechteck bzw. ein Rechteck in ein flächengleiches Quadrat umzuwandeln. In den *Elementen* des Euklid findet man noch weitere Methoden.

#### 13.3.1 Anwendung des Kathetensatzes

Das Quadrat über einer Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist flächengleich zum Rechteck, das aus der Hypotenuse und dem zur Kathete gehörenden Hypotenusenabschnitt gebildet wird (Kathetensatz des Euklid). Umgekehrt kann man aus der Flächengleichheit von Rechteck und Quadrat darauf schließen, dass das Dreieck rechtwinklig ist.

Während man in der ersten der beiden folgenden Abbildungen (Fibonacci-Zahlen 3, 5, 8) vielleicht doch noch erkennen kann, dass es einen „Knick“ beim Übergang zwischen der anderen Kathete und der Quadratseite gibt, fällt dies in der rechts stehenden Abbildung (Fibonacci-Zahlen 8, 13, 21) nicht mehr auf.

Die abgebildeten Dreiecke sind nicht rechtwinklig, weil jeweils das rechte Teildreieck nicht ähnlich zum Gesamtdreieck ist: In der Abbildung links erkennt man dies an den Verhältnissen der Seitenlängen von Kathete und Hypotenuse 3:5 bzw. 5:8; in der Abbildung rechts sind dies die Verhältnisse 8:13 bzw. 13:21.



### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

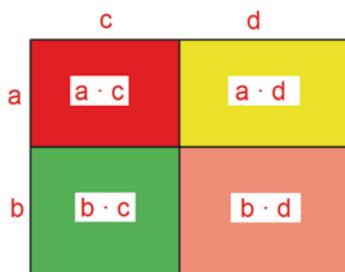
**A 13.4:** Können in den letzten Abbildungen das grüne bzw. hellblaue Dreieck aus den Abbildungen zu Rätsel 1 bzw. Rätsel 3 eingezeichnet werden?

### 13.3.2 Umwandlung durch Flächenanlegung

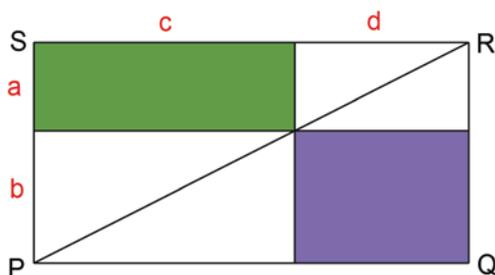
Bekanntlich lässt sich das Produkt zweier Summen

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

geometrisch mithilfe von Rechtecken darstellen (vgl. folgende Abbildung).

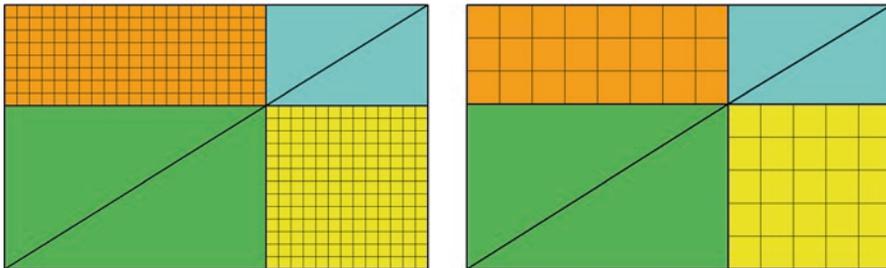


Das Rechteck mit den Seiten  $a$  und  $c$  ist genau dann flächengleich zu dem Rechteck mit den Seiten  $b$  und  $d$ , wenn der gemeinsame Eckpunkt der beiden Rechtecke auf der Diagonalen  $PR$  liegt. Denn dann gilt wegen der Ähnlichkeit der unter bzw. über der Diagonale liegenden Dreiecke die Verhältnissgleichung  $b : c = a : d$ , also  $b \cdot d = a \cdot c$ .



Diese Eigenschaft kann konstruktiv genutzt werden, um ein Rechteck in ein flächengleiches Quadrat zu verwandeln (und umgekehrt). Das Verfahren wird als *Flächenanlegung* bezeichnet.

In der ersten der beiden folgenden Abbildungen scheint es eine gemeinsame Diagonale für das grüne und das hellblaue Rechteck zu geben, tatsächlich ist dies jedoch nicht der Fall. Nur wenn die Seitenlängen Zahlen der ersten Glieder der Fibonacci-Folge sind, erkennt man den „Knick“ (vgl. Abbildung rechts).



### 13.4 Weitere Eigenschaften der Folge der Fibonacci-Zahlen

Statt drei aufeinanderfolgende Zahlen  $f_{n-1}$ ,  $f_n$ ,  $f_{n+1}$  der Fibonacci-Folge zu betrachten und den Zusammenhang  $f_{n-1} \cdot f_{n+1} = f_n^2 \pm 1$  (vgl. Formel 13.1) für das Paradoxon zu nutzen, kann man auch vier aufeinanderfolgende Zahlen der Folge auswählen und die Eigenschaft der ungefähr geltenden Quotientengleichheit visualisieren.

In der Kette  $\frac{f_n}{f_{n-1}} \approx \frac{f_{n+1}}{f_n} \approx \frac{f_{n+2}}{f_{n+1}}$  lässt man den mittleren Term weg und erhält dann  $f_n \cdot f_{n+1} \approx f_{n-1} \cdot f_{n+2}$ .

#### Beispiel

Für die Fibonacci-Zahlen 3, 5, 8, 13 ergibt sich:

$$39 = 3 \cdot 13 \approx 5 \cdot 8 = 40$$

Für 5, 8, 13, 21 ergibt sich entsprechend:

$$105 = 5 \cdot 21 \approx 8 \cdot 13 = 104$$

Und weiter für 8, 13, 21, 34 ergibt sich:

$$272 = 8 \cdot 34 \approx 13 \cdot 21 = 273$$

Abwechselnd ist das Produkt der beiden mittleren Zahlen der Fibonacci-Folge um 1 größer oder kleiner als das Produkt der beiden äußeren Zahlen.

Ersetzt man  $f_{n+2}$  und  $f_{n+1}$  gemäß Definition und ersetzt das Produkt  $f_{n-1} \cdot f_{n+1}$  durch  $f_n^2 + (-1)^n$  gemäß der Cassini-Identität, dann ergibt sich tatsächlich:

$$\begin{aligned} f_{n-1} \cdot f_{n+2} - f_n \cdot f_{n+1} &= f_{n-1} \cdot (f_n + f_{n+1}) - f_n \cdot f_{n+1} \\ &= f_{n-1} \cdot f_n + f_{n-1} \cdot f_{n+1} - f_n \cdot (f_{n-1} + f_n) \\ &= f_{n-1} \cdot f_n + (f_n^2 + (-1)^n) - f_n \cdot f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n \end{aligned}$$

### Formel

Für vier aufeinanderfolgende Zahlen  $f_{n-1}, f_n, f_{n+1}, f_{n+2}$  der Fibonacci-Folge gilt:

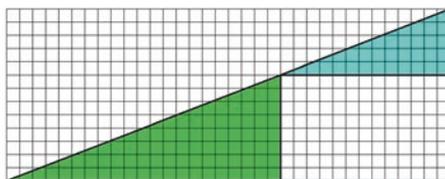
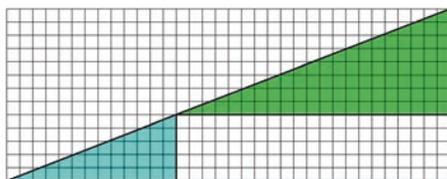
$$f_{n-1} \cdot f_{n+2} - f_n \cdot f_{n+1} = (-1)^n \quad (13.3)$$

Formel (13.3) ist ein Spezialfall einer allgemeinen Formel, die der französische Mathematiker Philbert Maurice d'Ocagne (1862–1938) bewies und die man in der Literatur unter der Bezeichnung *Identität von d'Ocagne* findet.

Diese Beziehung zwischen vier aufeinanderfolgenden Fibonacci-Zahlen ermöglicht es also ebenfalls, ein Quadrat „verschwinden“ zu lassen:

Zeichnet man zwei rechtwinklige Dreiecke mit den Katheten  $f_{n-1}$  und  $f_{n+1}$  bzw. mit den Katheten  $f_n$  und  $f_{n+2}$ , dann sieht es bei hinreichend großem  $n$  so aus, als hätten die Hypotenusen in diesen Dreiecken die gleiche Steigung (vgl. die folgende Tabelle sowie die beiden Abbildungen).

Steigung	$\frac{3}{8} = 0,375$	$\frac{5}{13} = 0,384\dots$	$\frac{8}{21} = 0,380\dots$	$\frac{13}{34} = 0,382\dots$	$\frac{21}{55} = 0,381\dots$	$\frac{34}{89} = 0,382\dots$
Winkel	20,56°	21,04°	20,85°	20,92°	20,898°	20,908°

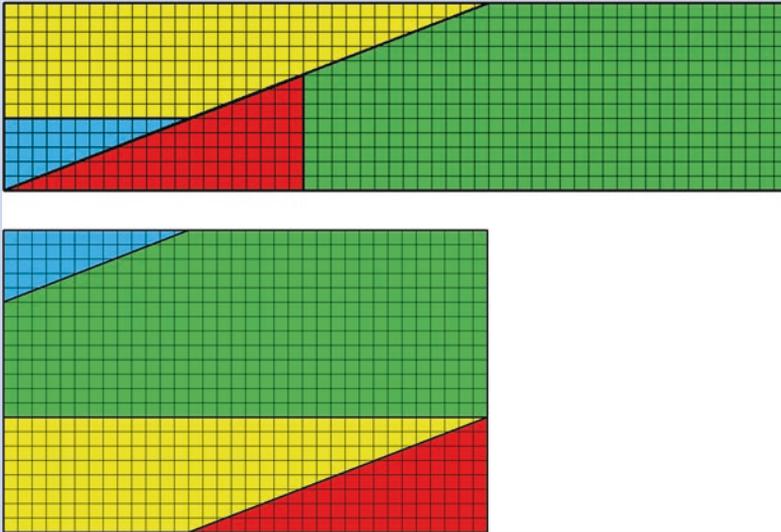


### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 13.5:** Ermitteln Sie den Grenzwert der Winkel in der Tabelle mit den Quotienten  $\frac{f_n}{f_{n+2}}$ .

**A 13.6:** Analysieren Sie „Curry’s triangle paradox“ in den Abbildungen am Anfang des Kapitels.

**A 13.7:** Analysieren Sie die folgenden Figuren.

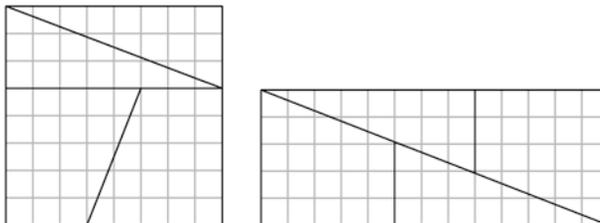


### 13.5 Anordnung von Sam Loyd

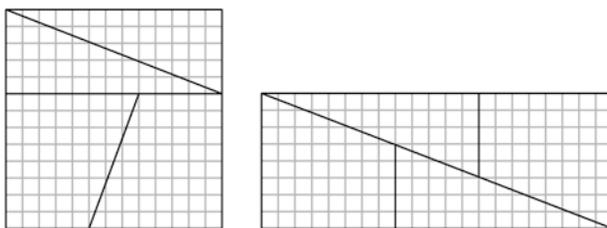
In der Anordnung von Sam Loyd werden die in Abschn. 13.4 betrachteten Dreiecke zusammen mit trapezförmigen Puzzlestücken zu einem Rechteck bzw. einem Quadrat zusammengesetzt.

Hierbei ergibt die Loyd'sche Anordnung

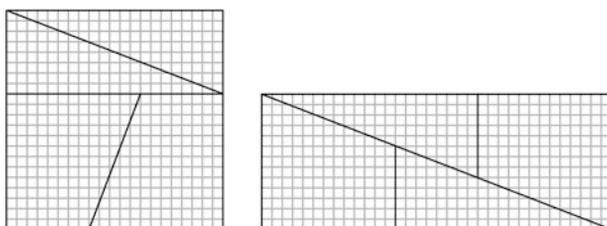
- für die Fibonacci-Zahlen 5, 8, 13:  $8^2 = 64 < 65 = 5 \cdot 13$



- für die Fibonacci-Zahlen 8, 13, 21:  $13^2 = 169 > 168 = 8 \cdot 21$



- für die Fibonacci-Zahlen 13, 21, 34:  $21^2 = 441 < 442 = 13 \cdot 34$



Beim genauen Vergleich sieht man – zumindest an der ersten Figur – dass für die Puzzlestücke in den quadratischen Figuren genau die Gitterpunkte des hinter der Grafik liegenden Koordinatengitters berücksichtigt werden, bei den Rechtecken jedoch nicht.

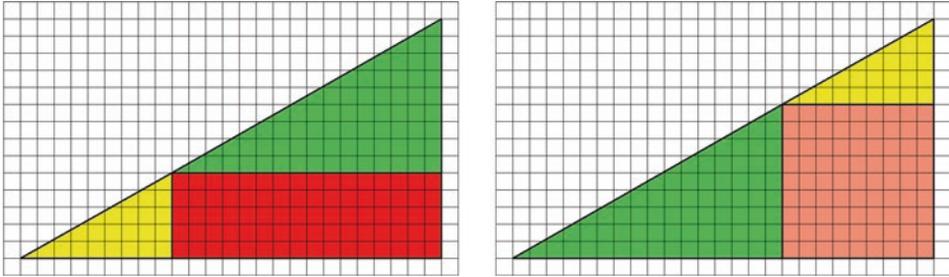
## 13.6 Weitere geeignete Zahlentripel

Das Paradoxon des verschwundenen Quadrats kann nicht nur bei Zahlen der Fibonacci-Folge beobachtet werden. Im Prinzip genügt es, drei geeignete Zahlen  $a$ ,  $b$  und  $c$  zu suchen, sodass das Rechteck mit den Seitenlängen  $a$  und  $b$  ungefähr so groß ist wie das Quadrat mit der Seitenlänge  $c$ . Man kann dabei so vorgehen, dass man nacheinander die Quadratzahlen  $c^2$  durchgeht und mögliche Faktorzerlegungen  $a \cdot b$  für  $c^2 - 1$  bzw.  $c^2 + 1$  betrachtet.

Untersucht wird dann der Steigungswinkel in den rechtwinkligen Dreiecken mit den Katheten  $a$  und  $c$  bzw.  $c$  und  $b$ . In Abb. 13.1 sind nur die Rechtecke aufgeführt, deren kürzere Seitenlänge mindestens 2 LE ist. Wegen der 3. Binomischen Formel gibt es für  $c^2 - 1$  stets die Zerlegung  $(c - 1) \cdot (c + 1)$ .

Für die auftretenden Steigungswinkel wurden die Bezeichnungen  $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{c}{a}\right)$  und  $\beta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{c}\right)$  gewählt.

In der folgenden Grafik ist das Beispiel  $a = 5$ ,  $b = 16$ ,  $c = 9$  aus Abb. 13.1 veranschaulicht.



### 13.7 Das verschwundene Quadrat im Zusammenhang mit dem Satz von Pythagoras

In den bisherigen Beispielen wurden geometrische Figuren wie Dreiecke, Rechtecke und Quadrate betrachtet, bei denen durch Umlegen von Teilfiguren Abweichungen von 1 FE (oder auch mehr) auftraten. In allen Fällen konnte das „verschundene Quadrat“ als Täuschung aufgrund von geringfügig voneinander abweichenden Winkeln entlarvt werden.

Im Zusammenhang mit der bekannten Satzfigur des Satzes von Pythagoras (dazu mehr in Kap. 17) kann es ebenfalls zu einer Abweichung von 1 FE kommen, nämlich dann, wenn der Winkel  $\gamma$ , welcher der längsten Seite im Dreieck gegenüberliegt, geringfügig von  $90^\circ$  abweicht.

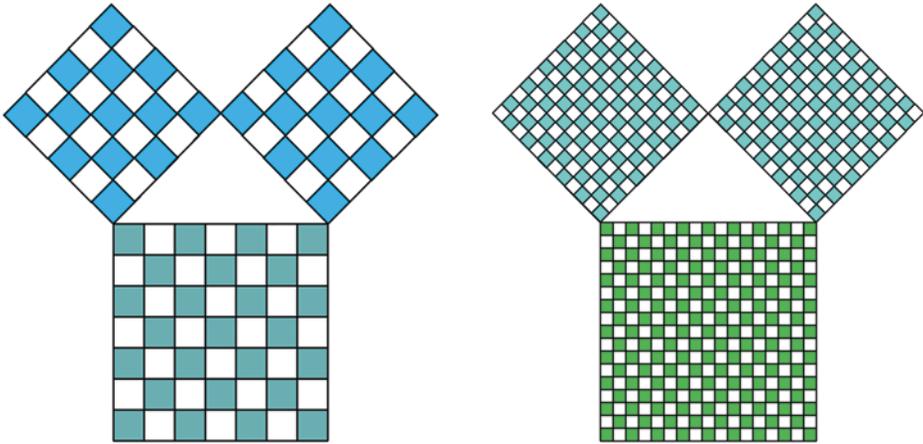
Durch systematisches Probieren findet man die in Abb. 13.2 aufgeführten zehn Zahlentripel von Seitenlängen der „Katheten“  $a$ ,  $b$  und der „Hypotenuse“  $c$ , die höchstens 20 LE betragen und bei denen  $a^2 + b^2$  um genau 1 FE von  $c^2$  abweicht.

Die Abweichungen vom rechten Winkel sind jeweils so gering, dass man erst erkennt, dass die „Katheten“ keine Verlängerungen von Quadratseiten sind, wenn man die Kästchen gezählt hat.

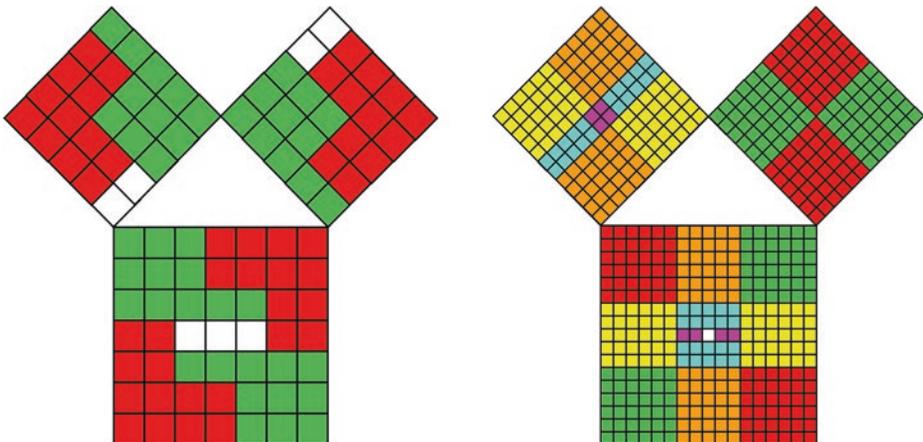
Unter den Beispielen von Abb. 13.2 sind auch zwei „symmetrische“ Fälle mit gleich langen „Katheten“. Diese Tripel  $(5; 5; 7)$  und  $(12; 12; 17)$  sind in den folgenden Abbildungen mit schachbrettartiger Färbung dargestellt.

**Abb. 13.2** Beinahe-Pythagoras-Figuren mit Differenz 1 FE (geordnet nach der Länge der „Hypotenuse“)

$a$	$b$	$c$	$a^2 + b^2$	$c^2$	$\gamma$
5	5	7	50	49	88,85°
4	7	8	65	64	88,98°
4	8	9	80	81	90,90°
8	9	12	145	144	89,60°
7	11	13	170	169	89,63°
11	13	17	290	289	89,80°
12	12	17	288	289	90,20°
6	17	18	325	324	89,72°
10	15	18	325	324	89,81°
6	18	19	360	361	90,27°



Dass sich die Anzahl der Kästchen in den Kathetenquadraten um 1 FE von der des Hypotenusenquadrats unterscheidet, wird durch die Zerlegung mit Puzzlestücken deutlich.



### 13.8 Hinweise auf weiterführende Literatur

Bei **Wikipedia** findet man in deutscher (englischer, französischer) Sprache weitere Informationen und Literatur zu den Stichwörtern:

- Fehlendes Quadrat Rätsel (Missing square puzzle, Paradoxe du carré manquant),
- Sam Loyd (Samuel Loyd, Sam Loyd)

Fachliche Informationen findet man auf **Wolfram Mathworld** unter den Stichwörtern:

- Curry Triangle, Dissection Fallacy, Triangle Dissection Paradox

Empfohlen wird auch Alexander Bogomolnys Website

- <http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Fallacies/CurryParadox.shtml>

sowie Hans Walsers „Miniaturen“ (<http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/>) zu diesem Thema:

- Verschwundenes Quadrat, Fastpythagoreische Dreiecke

# Zerlegen von Rechtecken in lauter verschiedene Quadrate

# 14

*Mathematik, richtig betrachtet, besitzt nicht nur Wahrheit, sondern auch höchste Schönheit, eine Schönheit kalt und streng wie die einer Skulptur.*

(Bertrand Russell, britischer Philosoph und Mathematiker, 1872–1970)



Über 100 Jahre lang beschäftigten sich Mathematiker mit der Frage, ob es möglich ist, ein Quadrat *in lauter verschiedenen große Quadrate* zu zerlegen; solche Quadrate haben im Englischen die Bezeichnung *Simple Perfect Squared Squares*. (Man beachte den Unterschied zu der Fragestellung in Kap. 3, wo es darum geht, ein Rechteck in *möglichst große* Quadrate zu zerlegen.)

Die anlässlich des Internationalen Mathematikerkongresses (ICM) in Berlin 1998 von der Deutschen Post herausgegebene Briefmarke (vgl. Abbildung oben) nimmt Bezug auf diese Frage.

Als Erstem gelang es dem polnischen Mathematiker Zbigniew Moroń (1904–1971) im Jahre 1925, Rechtecke mithilfe von verschiedenen großen Quadraten zu parkettieren (*Simple Perfect Squared Rectangles*). 14 Jahre später war es der deutsche Mathematiker Roland P. Sprague (1894–1967), der die erste „Quadratur des Quadrats“ entdeckte – die

Auslegung eines Quadrats durch 55 verschieden große Quadrate. Schließlich bewies im Jahre 1962 der niederländische Mathematiker Adrianus Johannes Wilhelmus Duijvestijn (1927–1998), dass man mindestens 21 unterschiedlich große quadratische Puzzlestücke braucht, um ein Quadrat auszulegen. Und er war es auch, der ein solches Quadrat schließlich mit Computerhilfe fand – allerdings erst 16 Jahre später.

In diesem Kapitel beschränken wir uns auf Aktivitäten, die mit der Analyse gegebener Rechtecke und Quadrate zu tun haben; für weitere mögliche Untersuchungen sei auf das Literaturverzeichnis verwiesen.

*Übrigens:* Für das Färben der zerlegten Rechtecke und Quadrate braucht man höchstens vier Farben – dieser sogenannte *Vierfarbensatz* wurde 1976 bewiesen. Auch dieses Motiv findet man auf der ICM-Briefmarke (außerdem im Hintergrund: die Dezimalzahlentwicklung der Kreiszahl  $\pi$ ).

### 14.1 Rechtecke, die sich in neun bzw. zehn verschieden große Quadrate zerlegen lassen

Um ein Rechteck mit lauter verschieden großen Quadraten auszulegen, benötigt man mindestens neun Quadrate. Die beiden Grafiken in Abb. 14.1 zeigen die einzigen Rechtecke, die sich mit neun verschieden großen Quadraten auslegen lassen. Es handelt sich um das Rechteck (links) mit den Quadrat-Seitenlängen 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15, 18 LE sowie um das Rechteck (rechts) mit den Quadrat-Seitenlängen 2, 5, 7, 9, 16, 25, 28, 33, 36 LE.

Die nächsten beiden Grafiken in Abb. 14.2 zeigen zwei der sechs möglichen Rechtecke, die mit zehn verschieden großen Quadraten parkettiert werden können. Deren Seitenlängen betragen 2, 3, 8, 11, 13, 15, 17, 25, 27, 30 LE (Abb. 14.2a) und 3, 5, 6, 11, 17, 19, 22, 23, 24, 25 LE (Abb. 14.2b).

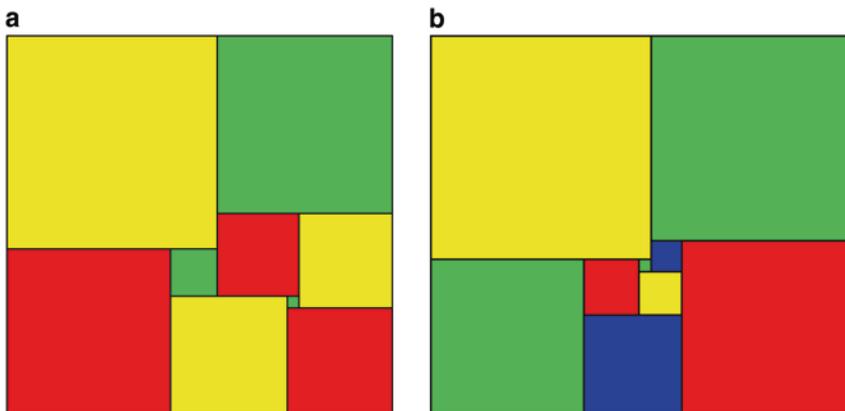
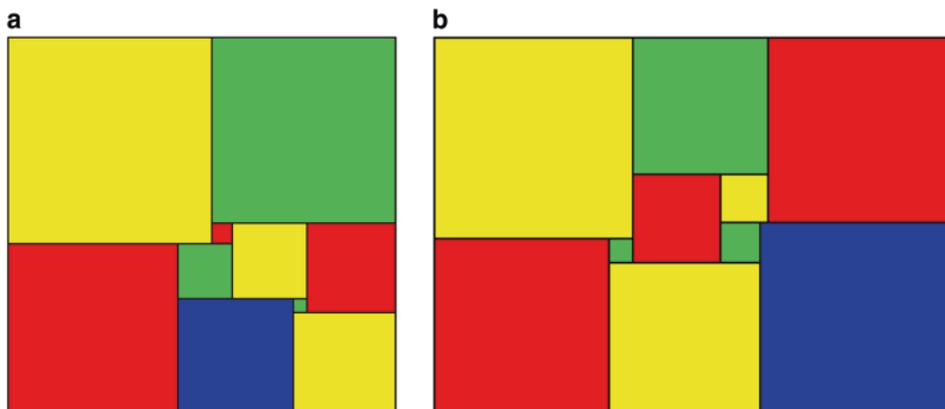


Abb. 14.1 a, b Zerlegung von Rechtecken in neun verschieden große Quadrate



**Abb. 14.2** a, b Zerlegung von Rechtecken in zehn verschieden große Quadrate

Welches der Quadrate in den Abbildungen welche Seitenlänge hat, lässt sich durch einfache Überlegungen herausfinden.

#### Beispiel: Zuordnung der angegebenen Seitenlängen zu den Quadraten

Mit der Information über die Seitenlängen 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15, 18 LE der Quadrate im Rechteck der Abb. 14.1a ergibt sich Folgendes:

Das kleinste Quadrat mit der Seitenlänge 1 LE (rechts unten, grün, nicht beschriftet) ist leicht zu identifizieren, ebenso wie die Quadrate mit den Seitenlängen 4 LE (Mitte, grün), 7 LE (Mitte, rot) und 8 LE (rechts Mitte, gelb).

Weiter gilt für die benachbarten Quadrate: 9 LE (unten rechts, rot), 10 LE (unten, gelb). Durch Vergleich mit benachbarten Quadraten ergeben sich weiter die Quadrate mit den Seitenlängen 14 LE (unten links, rot) = 4 LE + 10 LE, 15 LE (oben rechts, grün) = 7 LE + 8 LE und schließlich das Quadrat mit der Seitenlänge 18 LE (oben links, gelb) = 14 LE + 4 LE.

Zur Kontrolle der zugeordneten Seitenlängen kann man an verschiedenen Stellen jeweils horizontal bzw. vertikal die Summe von Seitenlängen bilden und damit auch die Gesamtgröße des Rechtecks ermitteln.

Vertikale Schnitte durch die Figur (von oben nach unten notiert):

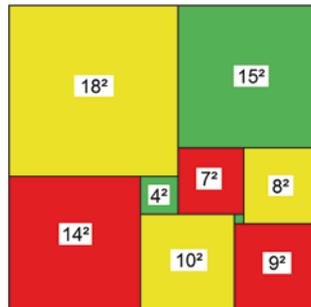
- 18 LE (gelb) + 14 LE (rot) = 32 LE;
- 18 LE (gelb) + 4 LE (grün) + 10 LE (gelb) = 32 LE;
- 15 LE (grün) + 7 LE (rot) + 10 LE (gelb) = 32 LE;
- 15 LE (grün) + 8 LE (gelb) + 9 LE (rot) = 32 LE.

Horizontale Schnitte durch die Figur (von links nach rechts notiert):

- $18 \text{ LE (gelb)} + 15 \text{ LE (rot)} = 33 \text{ LE}$ ;
- $18 \text{ LE (gelb)} + 7 \text{ LE (rot)} + 8 \text{ LE (gelb)} = 33 \text{ LE}$ ;
- $14 \text{ LE (rot)} + 4 \text{ LE (grün)} + 7 \text{ LE (rot)} + 8 \text{ LE (gelb)} = 33 \text{ LE}$ ;
- $14 \text{ LE (rot)} + 10 \text{ LE (gelb)} + 9 \text{ LE (rot)} = 33 \text{ LE}$ .

Das Rechteck in Abb. 14.1a hat also die Breite 33 LE und die Höhe 32 LE.

Es handelt sich hierbei um die von Zbigniew Moroń im Jahre 1925 gefundene erste Rechteckzerlegung. Die Seitenlängen der Quadrate kann man – mit Ausnahme des Quadrats mit Seitenlänge 1 LE – der folgenden Abbildung entnehmen.



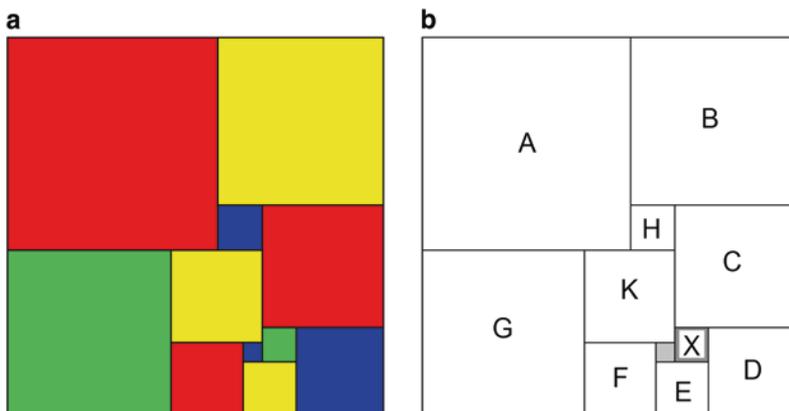
#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 14.1:** Begründen Sie, dass das Rechteck aus Abb. 14.1b die Maße  $69 \text{ LE} \times 61 \text{ LE}$  hat, das Rechteck in Abb. 14.2a die Maße  $57 \text{ LE} \times 55 \text{ LE}$  und das Rechteck in Abb. 14.2b die Maße  $65 \text{ LE} \times 47 \text{ LE}$ .

## 14.2 Bestimmen der Seitenlängen zu einer gegebenen Zerlegung

Die Aufgabe, den einzelnen Quadraten ihre Seitenlänge zuzuordnen, wenn alle Seitenlängen bekannt sind, hat sich als einfache Übung herausgestellt. Kann man die Seitenlängen herausfinden, wenn man nur ein Bild der Parkettierung vorliegen hat, aber keine Seitenlängen kennt?

Dieser Aufgabe wollen wir uns jetzt stellen. Am Beispiel der Zerlegung auf der ICM-Briefmarke (s. o., Abb. 14.3a) wird im Folgenden ein Verfahren erläutert, das so elementar ist, dass es sich eignet, in das Rechnen mit Termen einzuführen.



**Abb. 14.3** a, b Rechteck aus der ICM-Briefmarke – Ansatz zur Bestimmung der Seitenlängen

Dem kleinsten Quadrat (hellgrau) wird zunächst die Seitenlänge 1 LE zugeordnet, die Seitenlänge des zweitkleinsten Quadrats (dunkelgrau) bezeichnet man mit einer Variablen ( $x$ ). Die übrigen Quadrate sind mit den Variablen A bis K beschriftet (vgl. Abb. 14.3b).

Jetzt geht es darum, die Seitenlängen der übrigen Quadrate mithilfe von 1 und  $x$  darzustellen.

Die ersten Rechenschritte sind leicht; für die Seitenlänge des benachbarten Quadrats E gilt dann:

1.  $e = 1 + x$  (in Worten: Die Seitenlänge des Quadrats E ist um 1 Einheit größer als die Seitenlänge des dunkelgrau markierten Quadrats.)  
Entsprechend gilt dann weiter:
2.  $f = e + 1$   
Setzt man die Darstellung aus (1) ein, dann ergibt sich  $f = (1 + x) + 1$ , also (2)'  $f = 2 + x$   
und weiter
3.  $k = f + 1 = (2 + x) + 1 = 3 + x$  sowie
4.  $g = k + f = (3 + x) + (2 + x) = 5 + 2 \cdot x$  (in Worten: Die Seitenlänge des Quadrats G ist 5 Einheiten größer als die zweifache Seitenlänge des zweitkleinsten Quadrats.).  
Vereinbarungsgemäß lässt man das Malzeichen bei  $2 \cdot x$  weg.
5.  $d = e + x = (1 + x) + x = 1 + x + x = 1 + 2x$
6.  $c = d + x = (1 + 2x) + x = 1 + 2x + x = 1 + 3x$   
Bei der Bestimmung der Seitenlänge von H stellt man fest:  $h$  lässt sich nur durch den Vergleich der Seitenlängen von mehreren aneinandergesetzten Quadraten bestimmen. Es gilt:  $c + d = h + k + f$ , also:

$$\begin{aligned}
 7. \quad h &= (c + d) - (k + f) = [(1 + 3x) + (1 + 2x)] - [(3 + x) + (2 + x)] \\
 &= [1 + 3x + 1 + 2x] - [3 + x + 2 + x] \\
 &= [2 + 5x] - [5 + 2x] = 2 + 5x - 5 - 2x = 3x - 3
 \end{aligned}$$

Und weiter:

$$8. \quad b = c + h = (1 + 3x) + (3x - 3) = 6x - 2$$

$$9. \quad a = b + h = (6x - 2) + (3x - 3) = 9x - 5$$

Abschließend vergleicht man die Seitenlängen der gesamten Figur an verschiedenen Stellen.

Die Höhe des Rechtecks an der linken Seite beträgt:

$$a + g = (9x - 5) + (5 + 2x) = 9x - 5 + 5 + 2x = 11x$$

Die Höhe des Rechtecks an der rechten Seite ist beträgt:

$$b + c + d = (6x - 2) + (1 + 3x) + (1 + 2x) = 11x$$

In beiden Fällen erhält man denselben Term – nämlich dass diese Rechteckseite 11-mal so groß ist wie die Seitenlänge des zweitkleinsten Quadrats.

Die Breite des Rechtecks an der oberen Seite beträgt:

$$\begin{aligned}
 a + b &= (9x - 5) + (6x - 2) \\
 &= 9x - 5 + 6x - 2 \\
 &= 15x - 7
 \end{aligned}$$

Die Breite des Rechtecks an der unteren Seite beträgt:

$$\begin{aligned}
 g + f + e + d &= (5 + 2x) + (2 + x) + (1 + x) + (1 + 2x) \\
 &= 5 + 2x + 2 + x + 1 + x + 1 + 2x \\
 &= 6x + 9
 \end{aligned}$$

Dass man für die Breite des äußeren Rechtecks unterschiedliche Terme erhält, bedeutet, dass die beiden Terme gleich sein müssen. Es gilt also:

$$15x - 7 = 6x + 9$$

Durch Umformungen ergibt sich dann  $15x = 6x + 16$  und hieraus:

$$9x = 16$$

Dies bedeutet, dass die gesuchte Seitenlänge des zweitkleinsten Quadrats genau  $16/9$ -mal so lang ist wie die Seitenlänge des kleinsten Quadrats. Hätte man am Anfang als Seitenlänge nicht 1 LE gewählt, sondern das Neunfache hiervon, also 9 LE, dann hätten sich für alle Quadrate der Figur *ganzzahlige* Seitenlängen ergeben.

**Abb. 14.4** Übersicht über die Seitenlängen der Quadrate auf der ICM-Briefmarke

Term für die Seitenlänge	Seitenlänge	Neunfaches der Seitenlänge
$x$	$x = 16/9$	$9x = 16$
$a = 9x - 5$	$a = 99/9$	$9a = 99$
$b = 6x - 2$	$b = 78/9$	$9b = 78$
$c = 1 + 3x$	$c = 57/9$	$9c = 57$
$d = 1 + 2x$	$d = 41/9$	$9d = 41$
$e = 1 + x$	$e = 25/9$	$9e = 25$
$f = 2 + x$	$f = 34/9$	$9f = 34$
$g = 5 + 2x$	$g = 77/9$	$9g = 77$
$h = 3x - 3$	$h = 21/9$	$9h = 21$
$k = 3 + x$	$k = 43/9$	$9k = 43$
Gesamthöhe: $11x$	$176/9$	176
Gesamtbreite: $15x - 7 = 6x - 9$	$177/9$	177

Die Seitenlängen der einzelnen Quadrate wären damit dann: 9, 16, 21, 25, 34, 41, 43, 57, 77, 78 und 99 LE. Die auf der Briefmarke dargestellte Figur ist also tatsächlich ein Rechteck mit den Seitenlängen  $176 \text{ LE} \times 177 \text{ LE}$ .

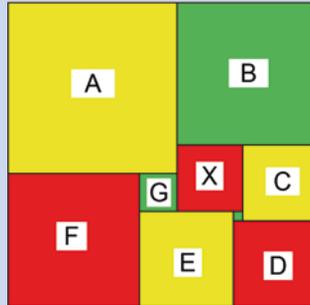
In Abb. 14.4 sind die Ansätze aus der Rechnung und die Ergebnisse der besseren Übersicht halber noch einmal festgehalten.

Das hier praktizierte Verfahren, die Seitenlängen von Quadraten mithilfe der Seitenlängen der benachbarten Quadrate auszudrücken, kann man auch bei den anderen Beispielen anwenden. Je nach Lage der beiden gewählten Quadrate kommt es vor, dass sich unterschiedliche Terme bei den Rechteckbreiten bzw. den Rechteckhöhen ergeben. Möglich ist auch, dass man auf unterschiedliche Terme für ein und dasselbe Quadrat stößt, sodass sich dann die Variable  $x$  aus dieser Bedingung bestimmen lässt.

Eigentlich liegt hier ein Problem vor, für dessen Lösung man zwei Variablen benötigt; aber mithilfe des „Tricks“, eine Seitenlänge als 1 LE anzunehmen, reduziert man die Zahl der Variablen auf 1. Wie im betrachteten Beispiel kann man nachträglich die Lösungen mit einem geeigneten Faktor multiplizieren, um unter den unendlich vielen (zueinander proportionalen) Lösungen die kleinste *ganzzahlige* zu finden.

### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 14.2:** Stellen Sie Beziehungen auf zwischen den Seitenlängen des Rechtecks aus Abb. 14.1a. Um den Vergleich der Lösungen zu ermöglichen, sind die Quadrate in der folgenden Abbildung bereits beschriftet.



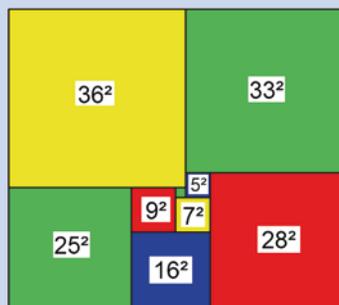
## 14.3 Einführung der Bouwkamp-Notation zur Beschreibung einer Zerlegung

Christoffel Jacob Bouwkamp (1915–2003), der Doktorvater von Duijvestijn, führte eine Schreibweise für die Rechteckzerlegungen ein, die man zum Zeichnen eines Rechtecks verwenden kann, das sich in Quadrate zerlegen lässt.

### Beispiel: Beschreibung der Zerlegung des $69 \times 61$ -Rechtecks aus Abb. 14.1b

In der Bouwkamp-Notation wird die Rechteckzerlegung beschrieben durch den Term  $(36,33)(5,28)(25,9,2)(7)(16)$ .

Die Seitenlängen des Rechtecks sind aus der folgenden Abbildung zu entnehmen (das kleine grüne Quadrat in der Mitte hat die Seitenlänge 2 LE).



Man „übersetzt“ die Bouwkamp-Notation, indem man sich von links nach rechts und von oben nach unten durch die Figur bewegt:

(36,33) – Man zeichnet ein Quadrat der Seitenlänge 36 LE und schließt rechts daneben ein Quadrat der Seitenlänge 33 LE so an, dass die beiden oberen Seiten eine durchgehende Linie bilden.

Das Quadrat der Seitenlänge 33 LE reicht nicht so weit nach unten wie das Quadrat der Seitenlänge 36 LE. Von oben nach unten gesehen, müssen also jetzt Quadrate folgen, die sich an das Quadrat der Seitenlänge 33 LE anschließen.

(5,28) – Die nächsten beiden notierten Quadrate der Seitenlängen 5 LE und 28 LE passen genau an (bzw. unter) dieses Quadrat der Seitenlänge 33 LE.

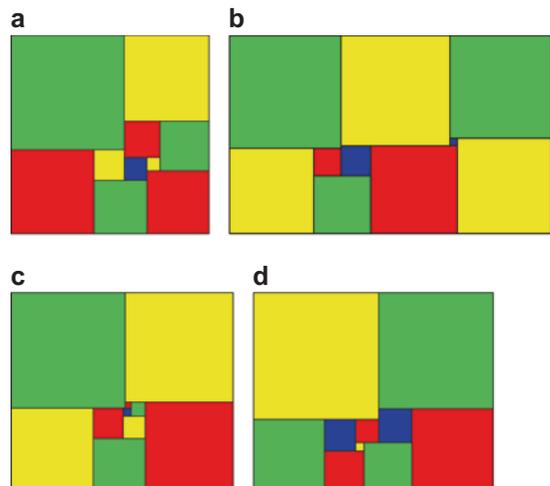
(25,9,2) – Die nächsten Quadrate der Seitenlängen 25 LE, 9 LE und 2 LE (grün, ohne Beschriftung) zeichnet man dann unterhalb des Quadrats der Seitenlänge 36 LE ein.

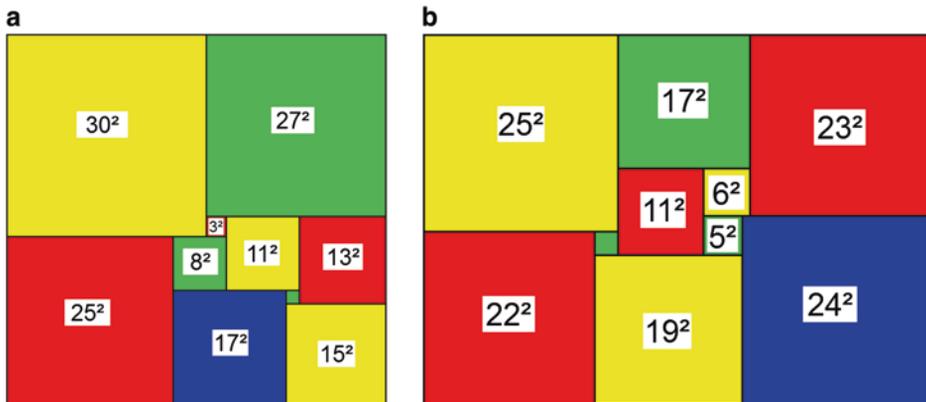
(7) – Von den bisher gezeichneten Quadraten haben die Quadrate der Seitenlängen 2 LE bzw. 5 LE nach unten einen Abschluss „auf gleicher Höhe“. In die Lücke zum Quadrat mit der Seitenlänge 28 LE, das schon erfasst ist, passt ein Quadrat der Seitenlänge 7 LE.

(16) – Die Quadrate mit Seitenlängen 9 LE bzw. 7 LE haben eine gemeinsame untere Kante, sodass zum Schluss das Quadrat der Seitenlänge 16 in der Figur eingefügt werden kann.

Außer den beiden Rechtecken in Abb. 14.2 gibt es noch vier weitere Rechtecke, die sich in zehn verschieden große Quadrate zerlegen lassen (vgl. Abb. 14.5).

**Abb. 14.5** a–d Weitere Rechtecke, die sich in zehn verschieden große Quadrate zerlegen lassen





**Abb. 14.6** a, b Links die Zerlegung des  $57 \times 55$ -Rechtecks in Quadrate (das kleine grüne Quadrat rechts unten hat die Seitenlänge 2 LE), rechts die Zerlegung des  $65 \times 47$ -Rechtecks in Quadrate (das kleine grüne Quadrat in der Mitte hat die Seitenlänge 3 LE)

Und weiter existieren 67 Rechtecke, die sich in zwölf verschieden große Quadrate zerlegen lassen, 213 Rechtecke aus 13 verschieden großen Quadraten, 744 Rechtecke aus 14 verschieden großen Quadraten, 2609 Rechtecke aus 15 verschieden großen Quadraten ...

#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 14.3:** Bestimmen Sie die Bouwkamp-Notation für die Zerlegung des

1.  $33 \times 32$ -Rechtecks aus Abb. 14.3,
2.  $57 \times 55$ -Rechtecks aus Abb. 14.6a,
3.  $65 \times 47$ -Rechtecks aus Abb. 14.6b.

**A 14.4:** Bestimmen Sie die Seitenlängen des Rechtecks und der zehn Zerlegungsquadrate für die Rechtecke aus Abb. 14.5a–d. (Zur besseren Vergleichbarkeit der Lösungen sind die Quadrate in den folgenden Abbildungen bereits beschriftet.)

Notieren Sie die Beschreibung der Zerlegung mithilfe der Bouwkamp-Notation.



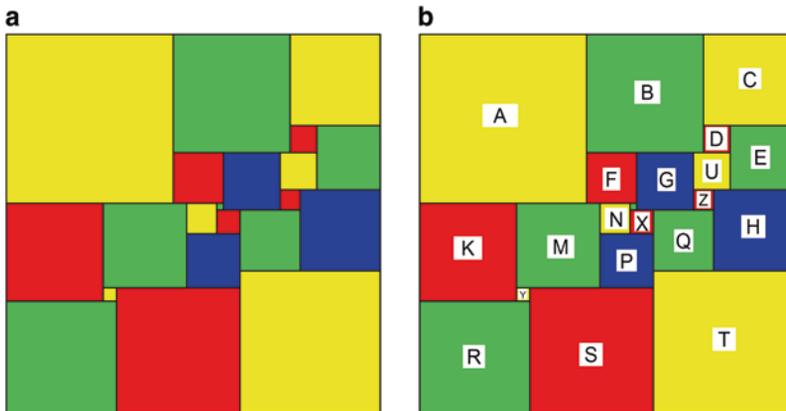
**A 14.5:** Außerdem existieren 22 Rechtecke, die man aus elf verschiedenen großen Quadraten zusammensetzen kann (darunter auch das Rechteck der ICM-Briefmarke).

Zeichnen Sie die folgenden Rechtecke:

1.  $97 \times 96$ -Rechteck: (56,41)(17,24)(40,14,2)(12,7)(31)(26)
2.  $98 \times 86$ -Rechteck: (51,47)(8,39)(35,11,5)(1,7)(6)(24)
3.  $98 \times 95$ -Rechteck: (50,48)(7,19,22)(45,5)(12)(28,3)(25)
4.  $112 \times 81$ -Rechteck: (43,29,40)(19,10)(9,1)(41)(38,5)(33)

## 14.4 Quadrate, die man in lauter verschieden große Quadrate zerlegen kann

Nachdem R. P. Sprague im Jahre 1939 das erste „quadrierte Quadrat“, bestehend aus 55 verschieden großen Quadraten, entdeckt hatte, wurde die Mindestzahl der benötigten Quadrate immer wieder verkleinert. Wie oben beschrieben, fand A. J. W. Duijvestijn



**Abb. 14.7** a, b Das kleinste Quadrat, das sich mithilfe von 21 verschiedenen großen Quadraten parkettieren lässt, sowie eine Beschriftung der Quadrate

schließlich 1978 eine Quadraterlegung in nur 21 verschieden große Quadrate – nachdem er Jahre zuvor hatte beweisen können, dass diese Anzahl nicht noch weiter unterboten werden kann.

Dieses Quadrat hat das Format  $112 \text{ LE} \times 112 \text{ LE}$  und folgende Bouwkamp-Notation:  $(50,35,27)(8,19)(15,17,11) (6,24)(29,25,9,2)(7,18)(16)(42)(4,37)(33)$  (vgl. Abb. 14.7a)

Kann man auch hier die Seitenlängen der einzelnen Quadrate durch ein einfaches algebraisches Verfahren aus der Abbildung ermitteln?

Wenn man in diesem Beispiel ein Quadrat auswählt, dem man die Seitenlänge 1 LE zuordnet, und einem benachbarten Quadrat die Seitenlänge  $x$  zuweist, dann gelingt es nur teilweise, die Seitenlängen anderer Quadrate allein mithilfe dieser Variablen darzustellen. Man benötigt weitere Variablen; die Zusammenhänge zwischen den Variablen ergeben ein lineares Gleichungssystem, das gelöst werden kann. Mithilfe der Lösungen erschließen sich dann die übrigen Seitenlängen.

**Beispiel: Bestimmung der Seitenlängen der Quadrate mithilfe der Abb. 14.7b**

Wählt man beispielsweise für das kleinste Quadrat (im Zentrum, grün) wieder die Seitenlänge 1 LE und für das benachbarte nächst-größere (rote) Quadrat die Seitenlänge  $x$ , dann findet man folgende Zusammenhänge:

$$n = x + 1 \quad p = n + x = 2x + 1 \quad m = n + p = 3x + 2$$

Vom nächsten Schritt an wird eine weitere Variable ( $y$ ) benötigt:

$$k = m + y = 3x + y + 2 \quad r = k + y = 3x + 2y + 2 \quad s = r + y = 3x + 3y + 2$$

Mithilfe der Variablen  $u$  und  $z$  lassen sich die Seitenlängen der restlichen Quadrate beschreiben:

$$g = u + z$$

$$f = g - 1 = u + z - 1 \qquad q = 1 + g + z - x = -x + u + 2z + 1$$

$$h = q + z = -x + u + 3z + 1 \qquad t = q + h = -2x + 2u + 5z + 2$$

$$e = h + z - u = -x + 4z + 1 \qquad d = e - u = -x - u + 4z + 1$$

$$c = d + e = -2x - u + 8z + 2 \qquad b = c + d = -3x - 2u + 12z + 3$$

Andererseits gilt auch:

$$\begin{aligned} b &= f + g + u - d = (u + z - 1) + (u + z) + u - (-x - u + 4z + 1) \\ &= x + 4u - 2z - 2 \end{aligned}$$

Aus den beiden Darstellungen für  $b$  ergibt sich daher

$$-3x - 2u + 12z + 3 = x + 4u - 2z - 2, \text{ also}$$

$$\mathbf{4x + 6u - 14z = 5}$$

Weiter folgt:

$$a = b + f = (-3x - 2u + 12z + 3) + (u + z - 1) = -3x - u + 13z + 2$$

Andererseits gilt auch:

$$\begin{aligned} a &= k + m + n + 1 - f = (3x + y + 2) + (3x + 2) + (x + 1) + 1 - (u + z - 1) \\ &= 7x + y - u - z + 7 \end{aligned}$$

Aus beiden Darstellungen für  $a$  ergibt sich dann

$$-3x - u + 13z + 2 = 7x + y - u - z + 7, \text{ also}$$

$$\mathbf{10x + y - 14z = -5}$$

Beachtet man außerdem, dass beim betrachteten Rechteck die Seitenlängen links und rechts bzw. oben und unten übereinstimmen müssen, dann folgt:

$$a + k + r = c + e + h + t, \text{ also}$$

$$(7x + y - u - z + 7) + (3x + y + 2) + (3x + 2y + 2)$$

$$= (-2x - u + 8z + 2) + (-x + 4z + 1) + (-x + u + 3z + 1) + (-2x + 2u + 5z + 2), \text{ also}$$

$13x + 4y - u - z + 11 = -6x + 2u + 20z + 6$  und hiermit

$$\mathbf{19x + 4y - 3u - 21z = -5}$$

und

$$a + b + c = r + s + t, \text{ also}$$

$$\begin{aligned} &(-3x - u + 13z + 2) + (-3x - 2u + 12z + 3) + (-2x - u + 8z + 2) \\ &= (3x + 2y + 2) + (3x + 3y + 2) + (-2x + 2u + 5z + 2), \text{ also} \end{aligned}$$

$-8x - 4u + 33z + 7 = 4x + 5y + 2u + 5z + 6$  und hiermit:

$$\mathbf{12x + 5y + 6u - 28z = 1}$$

Das lineare Gleichungssystem mit vier Gleichungen und vier Variablen

$$4x + 0y + 6u - 14z = 5$$

$$10x + 1y + 0u - 14z = -5$$

$$19x + 4y - 3u - 21z = -5$$

$$12x + 5y + 6u - 28z = 1$$

hat die Lösung

$$x = 3, 5; y = 2; u = 5, 5 \text{ und } z = 3.$$

Um ganzzahlige Seitenlängen zu erhalten, hätte man von einem kleinsten Quadrat der Seitenlänge 2 LE ausgehen müssen, um damit dann auf die Lösung  $x = 7; y = 4; u = 11$  und  $z = 6$  zu kommen.

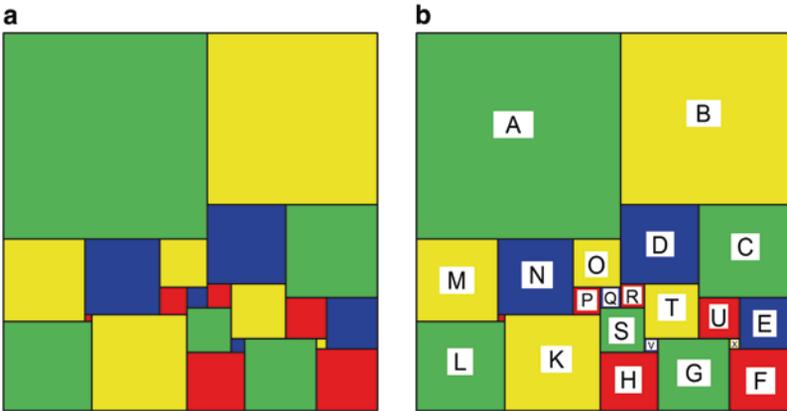
*Hinweis:* Dies ist nur ein Beispiel, wie man die Seitenlängen der Teilquadrate erschließen kann; andere Vorgehensweisen sind ebenfalls möglich.

Das gerade untersuchte Quadrat hat mit 21 Teilquadraten die geringstmögliche Anzahl an Puzzleteilen (man sagt dazu auch „die kleinste Ordnung“). Weiter existieren

- 8 Quadratzerlegungen der Ordnung 22 (ein Beispiel finden Sie in **A 14.6**),
- 12 Quadratzerlegungen der Ordnung 23,
- 26 Quadratzerlegungen der Ordnung 24,
- 160 Quadratzerlegungen der Ordnung 25,
- 441 Quadratzerlegungen der Ordnung 26,
- 1152 Quadratzerlegungen der Ordnung 27,
- ... (vgl. Literaturhinweise).

#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 14.6:** Ermitteln Sie die Seitenlängen des Quadrats aus Abb. 14.8 mithilfe eines geeigneten Gleichungssystems.



**Abb. 14.8** a, b Eines der beiden  $110 \times 110$ -Quadrate, das sich mithilfe von 22 verschieden großen Quadraten parkettieren lässt, sowie eine Beschriftung der Quadrate

### 14.5 Zusammenhang mit elektrischen Netzwerken

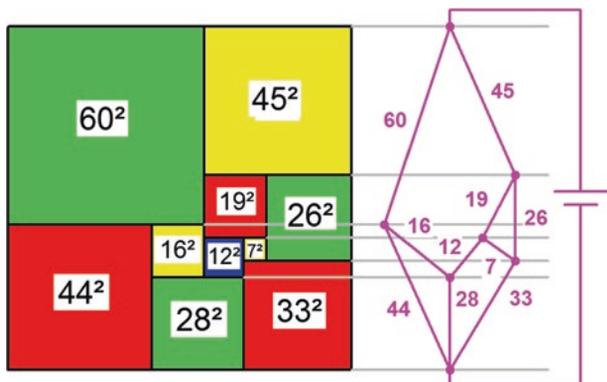
Eine systematische Methode zum Auffinden von Rechteckzerlegungen wurde Ende der 1930er Jahre von Rowland Leonard Brooks, Cedric Austin Bardell Smith, Arthur Harold Stone und William Thomas Tutte, vier Studenten des Trinity College in Cambridge, entwickelt.

Entscheidend war die Idee, die Zerlegungen in anderer Weise darzustellen: Horizontale Linien werden durch Knoten ersetzt und diese werden mit Strecken (oder Pfeilen) miteinander verbunden.

In Abb. 14.9 ist dies am Beispiel des Rechtecks aus Abb. 14.6a dargestellt

Jetzt lässt sich das entstandene Diagramm als ein Netzwerk elektrischer Ströme interpretieren: Die an den Strecken stehenden Zahlen geben die jeweilige Stromstärke des (von oben nach unten) fließenden Stroms an.

**Abb. 14.9** Interpretation der Zerlegung eines Rechtecks als Netzwerk elektrischer Ströme



- Die Summe der zu einem Knoten fließenden Ströme ist genauso groß wie die Summe der von dem Knoten abfließenden Ströme.

*Beispiel des Knotens oben rechts:* zum Knoten hin 45, vom Knoten weg 19 + 26.

- Betrachtet man Stromschleifen innerhalb des Netzes, dann ergibt sich als Summe der Ströme innerhalb einer Stromschleife der Wert null, wenn die Richtung berücksichtigt wird.

*Beispiel der oberen Schleife:*  $60 + 16 - 12 - 19 - 45 = 0$

Diese beiden Aussagen entsprechen exakt den Kirchhoff'schen Regeln für Netzwerke!

Mithilfe dieser beiden Prinzipien konnten dann – durch entsprechende Computerprogramme, wie sie von Brooks, Smith, Stone und Tutte entwickelt wurden – alle überhaupt möglichen Beispiele systematisch ermittelt werden.

#### **Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen**

**A 14.7:** Zeichnen Sie das zum Rechteck aus Abb. 14.5a [Abb. 14.5b] gehörende Netzwerk.

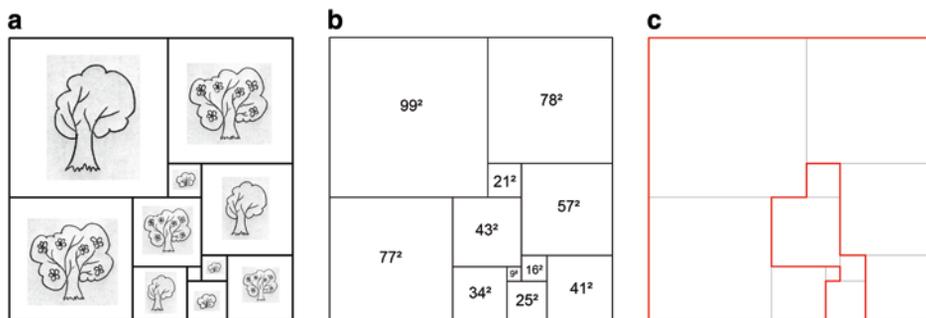
## **14.6 Ein Spiel mit Rechteckzerlegungen**

Die Rechtecke und Quadrate, die in lauter verschieden große Quadrate zerlegt werden, können auch auf andere Weise unterhaltsam verwendet werden:

Stellen Sie sich vor, Abb. 14.10a stellt den Lageplan eines Parks dar, die Linien sind die Wege (auch die Randlinien sind Wege), deren Längen in Meter der Abb. 14.10b entnommen werden können.

Sie stehen links unten an der Ecke und möchten einen möglichst langen Spaziergang durch den Park bzw. entlang des Parks machen, allerdings ohne ein Stück doppelt zu gehen.

Wer findet den längsten Weg am Park?



**Abb. 14.10** a–c Plan eines Parks mit zugehöriger Rechteckerlegung und ein Vorschlag für einen Rundweg am Park

Es handelt sich um die Rechteckerlegung der ICM-Briefmarke. Eine Vorüberlegung ist, dass man dann einen besonders langen Weg zurücklegt, wenn man möglichst viele Strecken an großen Quadraten entlanggeht. Da die drei größten Quadrate am Rand liegen, führt der Spaziergang überwiegend am Rand des Parks entlang.

Der in Abb. 14.10c eingetragene Weg hat folgende Länge:

$$77 + 2 \cdot 99 + 2 \cdot 78 + 57 + 3 \cdot 41 + 16 + 57 + 2 \cdot 21 \\ + 22 + 2 \cdot 43 + 2 \cdot 9 + 25 + 34 + 77 = 988$$

Insgesamt ist der Spazierweg also fast einen Kilometer lang.

#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 14.8:** Ermitteln Sie einen möglichst langen Spazierweg durch den Park, dessen Wegeplan dargestellt wird durch Abb. 14.1a bzw. Abb. 14.1b [Abb. 14.2a, Abb. 14.2b].

## 14.7 Hinweise auf weiterführende Literatur

Die umfassendste Informationsquelle zu diesem Thema ist die Website:

- <http://www.squaring.net/index.html>

Sie enthält neben detaillierten historischen Informationen umfangreiche Dateien mit den Grafiken von *Tausenden* von Rechteck- und Quadrat-Parkettierungen.

Bei **Wikipedia** findet man in deutscher (englischer, französischer) Sprache weitere Informationen und Literatur zum Stichwort:

- Quadratur des Quadrats (Squaring the square, Quadrature du carré)

Umfangreiche fachliche Informationen findet man auf **Wolfram Mathworld** unter dem Stichwort:

- Perfect square dissection

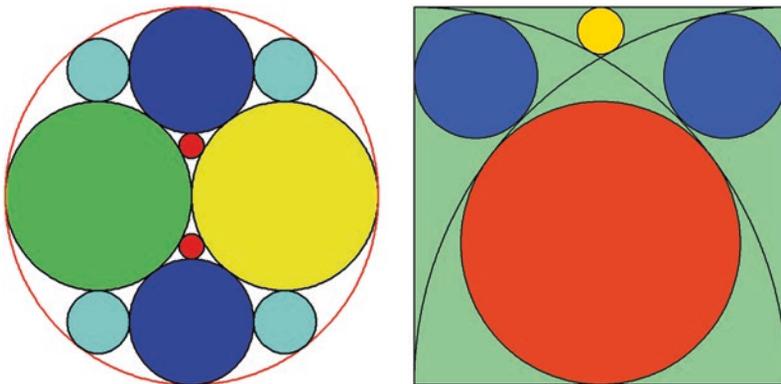
Weiterer Hinweis: Die **Websites von Karl Scherer**

- <http://karlscherer.com/prosqtre.html>
- <http://karlscherer.com/prosqtsq.html>

beschäftigen sich mit der Parkettierung von Rechtecken bzw. Quadraten durch nicht notwendig unterschiedlich große Quadrate; mehrfach verwendete, gleich große Quadrate dürfen jedoch keine gemeinsame Seite (*nowhere-neat*) oder keinen Punkt gemeinsam (*no-touch*) haben.

*Die Mathematik als Fachgebiet ist so ernst, dass man keine Gelegenheit versäumen sollte, dieses Fachgebiet unterhaltsamer zu gestalten.*

(Blaise Pascal, französischer Mathematiker und Philosoph, 1623–1662)



Unter den Geometrie-Aufgaben zum Knobeln gibt es oft Fragestellungen, bei denen Kreise in Kreisfiguren eingepasst werden sollen.

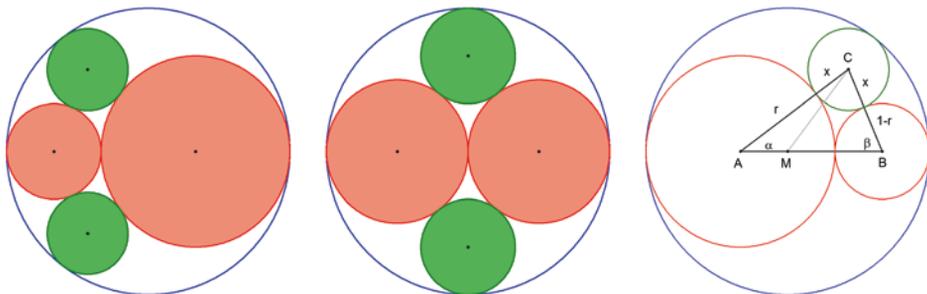
Viele Beispiele hierzu und zum Einpassen von Kreisen in andere geometrische Figuren findet man in der japanischen Tempelgeometrie (Sangaku), auf die wir in Abschn. 15.6 eingehen werden.

Für die Lösung der Aufgaben benötigt man Kenntnisse über trigonometrische Sätze, insbesondere den Kosinussatz und den Sinussatz.

## 15.1 Untersuchung sich berührender Kreise mithilfe trigonometrischer Methoden

### Problem 1

Gegeben ist ein Kreis mit Mittelpunkt  $M$ , auf dessen Durchmesser die Mittelpunkte  $A, B$  zweier kleinerer Kreise liegen. Diese beiden Kreise berühren sich gegenseitig und auch jeweils den Kreis um  $M$ . Gesucht sind die beiden Kreise, welche die drei gegebenen Kreise berühren.



Die Abbildung links dient zur Veranschaulichung des Problems; die Abbildung in der Mitte zeigt den Sonderfall zweier gleich großer Kreise.

Aus Symmetriegründen beschränken wir uns hier auf den Kreis um  $C$  oberhalb des Durchmessers (vgl. Abbildung rechts).

Durch Anwendung des Kosinussatzes in den Dreiecken  $AMC$  und  $ABC$  erhält man:

$$\overline{MC}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AM} \cdot \overline{AC} \cdot \cos(\alpha)$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos(\alpha)$$

Löst man die beiden Gleichungen nach  $2 \cdot \overline{AC} \cdot \cos \alpha$  auf und setzt die Terme dann gleich, so erhält man:

$$\left(\overline{AM}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{MC}^2\right) \cdot \overline{AB} = \left(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2\right) \cdot \overline{AM}$$

Wählt man 1 LE als Radius des äußeren Kreises und bezeichnet den Radius des linken roten Kreises mit  $r$  sowie den Radius des zu bestimmenden Kreises (grün) mit  $x$ , dann ergibt sich aus der Gleichung wegen

$$|AB| = 1, |AM| = 1 - r, |AC| = r + x, |MC| = 1 - x \text{ und } |BC| = 1 - r + x$$

die Beziehung

$$1 \cdot \left[(1 - r)^2 + (r + x)^2 - (1 - x)^2\right] = (1 - r) \cdot \left[1^2 + (r + x)^2 - (1 - r + x)^2\right]$$

und hieraus nach Umformung

$$x = \frac{r \cdot (1 - r)}{1 - r + r^2}.$$

Mithilfe dieser Formel kann man also zu beliebigen Radien  $r$  ( $0 < r < 1$ ) einen Radius  $x$  bestimmen, sodass die Kreise mit den Radien  $r$  und  $1 - r$  symmetrisch zu einem Durchmesser des Kreises mit Radius 1 liegen und sich die Kreise mit den Radien  $r$ ,  $1 - r$  und  $x$  gegenseitig berühren. Wegen der Symmetrie kann ein weiterer Kreis mit Radius  $x$  im unteren Teil der Figur ergänzt werden.

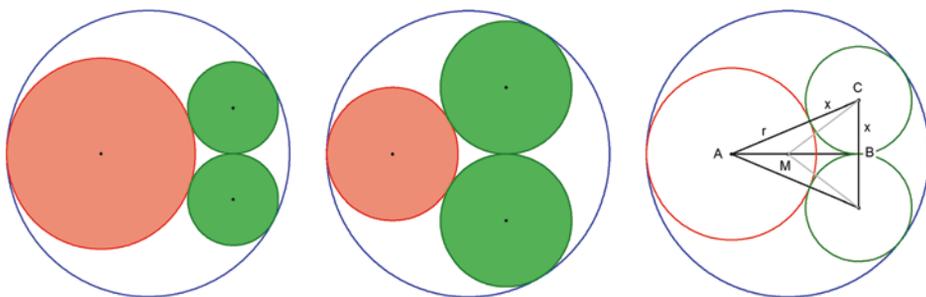
### Beispiele

Im Fall  $r = \frac{1}{2}$  (zwei gleich große Kreise am Durchmesser) ist der Radius des ergänzbaren Kreises gleich  $x = \frac{1}{3}$ .

Im Fall  $r = \frac{1}{3}$  (der rechte Kreis am Durchmesser hat einen doppelt so großen Radius wie der linke Kreis) ist der Radius des ergänzbaren Kreises gleich  $x = \frac{2}{7}$ .

### Problem 2

Gegeben ist ein Kreis mit Mittelpunkt  $M$ , auf dessen Durchmesser der Mittelpunkt  $A$  eines kleineren Kreises liegt, der den Kreis um  $M$  berührt. Gesucht sind zwei Kreise, die symmetrisch zum Durchmesser liegen und die beiden gegebenen Kreise berühren.



Durch Anwendung des Kosinussatzes im Dreieck  $AMC$  erhält man wieder:

$$\overline{MC}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AM} \cdot \overline{AC} \cdot \cos(\alpha)$$

Wählt man 1 LE als Radius des äußeren Kreises und bezeichnet den Radius des roten Kreises mit  $r$  sowie den Radius der zu bestimmenden Kreise (grün) mit  $x$ , dann ergibt sich aus dem Ansatz wegen

$|AB| = 1$ ,  $|AM| = 1 - r$ ,  $|AC| = r + x$ ,  $|MC| = 1 - x$  und  $|BC| = x$  die Beziehung:

$$\cos(\alpha) = \frac{(r+x)^2 + (1-r)^2 - (1-x)^2}{2 \cdot (r+x) \cdot (1-r)}$$

Die Anwendung der Definition des Sinus im rechtwinkligen Dreieck  $ABC$  ergibt:

$$\sin(\alpha) = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{x}{r+x}$$

Dann folgt wegen  $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$  nach etlichen Umformungen:

$$x = \frac{4r \cdot (1-r)}{(1+r)^2}$$

Mithilfe dieser Formel kann man also zu einem beliebigen Radius  $r$  ( $0 < r < 1$ ) einen Radius  $x$  bestimmen, sodass die symmetrisch zu einem Durchmesser liegenden Kreise mit Radius  $r$  bzw.  $x$  sich gegenseitig berühren.

#### Beispiele

Im Fall  $r = \frac{2}{3}$  ist der Radius der beiden ergänzbaren Kreise gleich  $x = 0,32$

Im Fall  $r = 2 \cdot \sqrt{3} - 3 \approx 0,464$  ist der Radius der beiden ergänzbaren Kreise genauso groß wie  $x = 2 \cdot \sqrt{3} - 3 \approx 0,464$ . Die Mittelpunkte der drei innen liegenden Kreise bestimmen ein gleichseitiges Dreieck.

#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 15.1:** Suchen Sie weitere Zahlenbeispiele zu den Problemen 1 und 2 und zeichnen Sie diese Figuren.

## 15.2 Der Vier-Kreise-Satz von Descartes

Die im Abschn. 15.1 hergeleiteten Formeln zur Bestimmung der Radien zueinander passender, sich gegenseitig berührender Kreise stellen nur Spezialfälle eines allgemeinen Satzes dar, der vom französischen Mathematiker und Philosoph René Descartes (1596–1650) gefunden wurde. Der Satz geriet in Vergessenheit und wurde erst im 20. Jahrhundert durch den Chemie-Nobelpreisträger Frederick Soddy (1877–1956) wiederentdeckt. Bereits im Altertum hatte der griechische Mathematiker Apollonios von Perge (262–190 v. Chr.) entdeckt, wie solche Probleme mithilfe einer Konstruktion gelöst werden können.

Der folgende Satz wurde nach Descartes benannt, weil dieser im Prinzip die Zusammenhänge zwischen den Radien richtig erkannt hatte; allerdings hatte die von ihm notierte Gleichung noch eine etwas kompliziertere Form.

Wie bei den beiden Knobelaufgaben geht es um sich gegenseitig berührende Kreise und man sucht den Radius eines Kreises, der die gegebenen Kreise berührt.

### Satz

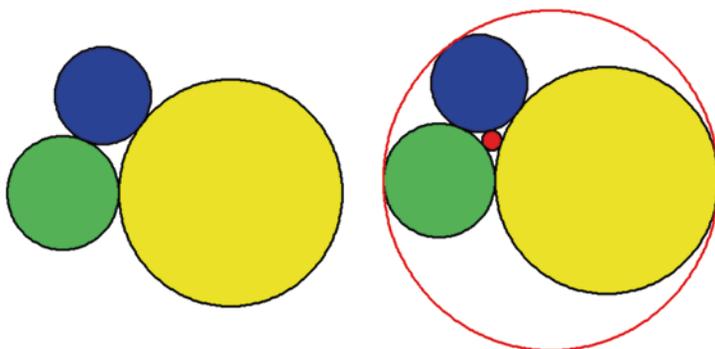
#### Vier-Kreise-Satz von Descartes

Sind  $r_1, r_2$  und  $r_3$  die Radien von drei einander berührenden Kreisen und sind  $k_1, k_2, k_3$  deren Kehrwerte (= Kreiskrümmungen), dann gilt für den Radius  $r_4$  des Kreises, der die drei Kreise berührt, mit  $k_4 = \pm \frac{1}{r_4}$ :

$$2 \cdot (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2) = (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2 \quad (15.1)$$

Diese Gleichung kann wie folgt genutzt werden: Sind die Radien  $r_1, r_2$  und  $r_3$  von drei sich gegenseitig berührenden Kreisen gegeben, dann setzt man diese Radien in die Gleichung ein und löst die Gleichung nach der Variablen  $r_4$  (bzw.  $k_4$ ) auf.

Da es sich um eine quadratische Gleichung handelt, hat diese Gleichung i. A. zwei Lösungen, d. h., es gibt zwei Kreise, welche die drei gegebenen Kreise berühren. Wie man der folgenden Abbildung rechts entnehmen kann, handelt es sich zum einen um einen Kreis, der die drei Kreise außen berührt, zum anderen um einen Kreis, der die drei Kreise innen berührt.



Im Folgenden bezeichnen wir die Krümmung der zu bestimmenden Berührungskreise mit  $x$ . Es lohnt sich, das Lösen der quadratischen Gleichung allgemein durchzuführen:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + x^2) &= (k_1 + k_2 + k_3 + x)^2 \\ 2 \cdot (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) + 2x^2 &= (k_1 + k_2 + k_3)^2 + 2 \cdot (k_1 + k_2 + k_3) \cdot x + x^2 \\ x^2 - 2 \cdot (k_1 + k_2 + k_3) \cdot x + 2 \cdot (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) - (k_1 + k_2 + k_3)^2 &= 0 \quad (15.2) \end{aligned}$$

$$[x - (k_1 + k_2 + k_3)]^2 = 2 \cdot [(k_1 + k_2 + k_3)^2 - (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)] \quad (15.3)$$

**Beispiel 1**

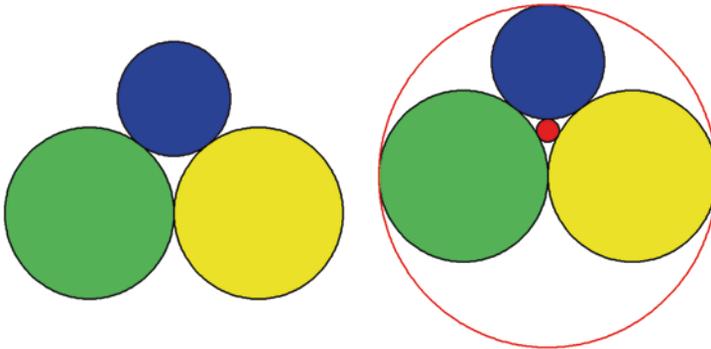
Gegeben sind drei Kreise mit den Radien  $r_1 = 15, r_2 = 15, r_3 = 10$ .

Ausgehend von Formel (15.3) ergibt sich:

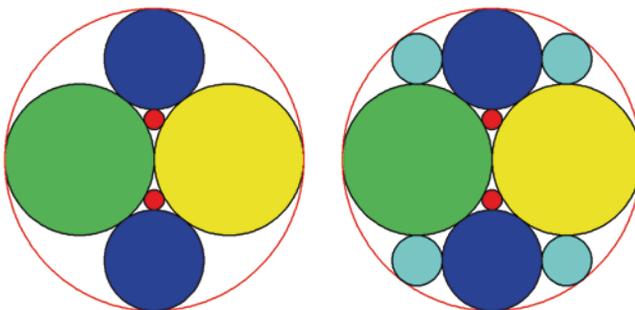
$$\begin{aligned} \left[ x - \left( \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{10} \right) \right]^2 &= 2 \cdot \left[ \left( \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{10} \right)^2 - \left( \frac{1}{225} + \frac{1}{225} + \frac{1}{100} \right) \right] \\ \Leftrightarrow \left[ x - \frac{7}{30} \right]^2 &= 2 \cdot \left[ \left( \frac{7}{30} \right)^2 - \frac{17}{900} \right] \Leftrightarrow \left( x - \frac{7}{30} \right)^2 = \frac{64}{900} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{30} \end{aligned}$$

Die quadratische Gleichung hat zwei Lösungen, die wie folgt interpretiert werden können:

Der Radius des innen berührenden, rot gefüllten Kreises ist  $r_4 = 2$ , der des außen berührenden Kreises (daher das negative Vorzeichen)  $r_5 = 30$ .



Da in diesem konkreten Beispiel die Radien  $r_1$  und  $r_2$  gleich sind und genau halb so groß wie der Radius  $r_5$  des äußeren Kreises, liegt der Mittelpunkt des äußeren Kreises im Berührungspunkt der grün und gelb gefüllten Kreise. Daher kann man in diesem Fall die Figur symmetrisch ergänzen.



In dieser Figur kann man nun weitere Kreise ergänzen, z. B. oben links. Gesucht ist also ein Kreis mit Radius  $r_6$ , der den oberen blau gefüllten Kreis mit Radius  $r_3 = 10$ , den grün gefüllten Kreis mit Radius  $r_1 = 15$  sowie den äußeren roten Kreis mit Radius  $r_5 = 30$  berührt.

Diese Eigenschaft hat aber auch der gelb gefüllte Kreis, d. h., von den zu erwartenden zwei Lösungen der quadratischen Gleichung kennen wir bereits eine. Das erleichtert die Lösung der quadratischen Gleichung erheblich.

Denn die andere Lösung ergibt sich durch eine einfache Rechnung mithilfe des Vieta'schen Wurzelsatzes (benannt nach François Viète, 1540–1603):

### Satz

#### Vieta'scher Wurzelsatz

Hat eine quadratische Gleichung  $x^2 + px + q = 0$  die Lösungen  $x_1$  und  $x_2$ , dann gilt:

$$x_1 + x_2 = -p \text{ und } x_1 \cdot x_2 = q$$

Durch Vergleich mit Formel (15.2) ergibt sich daher:

$$x_1 + x_2 = 2 \cdot (k_1 + k_2 + k_3) \quad (15.4)$$

#### Beispiel 1 (Fortsetzung)

In diesem Beispiel sind die Krümmungen  $k_{\text{grün}} = \frac{1}{15}$ ,  $k_{\text{blau}} = \frac{1}{10}$  und  $k_{\text{außen}} = -\frac{1}{30}$  bekannt sowie  $x_2 = k_{\text{gelb}} = \frac{1}{15}$ .

Daher ergibt sich für die gesuchte Krümmung der hellblau gefüllten Kreise:

$$x_1 = 2 \cdot \left( \frac{1}{15} + \frac{1}{10} - \frac{1}{30} \right) - \frac{1}{15} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

Das heißt, diese Kreise haben den Radius  $r_6 = 5$ .

Das gerade angewandte Verfahren kann nun beliebig fortgesetzt werden, um weitere Radien von Kreisen zu bestimmen, durch welche die vorhandenen Lücken gefüllt werden können.

Die Radien der Kreise, die sich bei den nächsten Schritten ergeben, kann man Abb. 15.1 entnehmen.

So entsteht eine Folge von **Kissing Circles**. In Abb. 15.2 hat der äußere Kreis den Radius 1 (statt 30); die eingetragenen ganzzahligen Werte entsprechen dann den Krümmungen.

*Hinweis:* Das Beispiel umfasst auch die Knobelaufgabe 1 aus Abschn. 15.1.

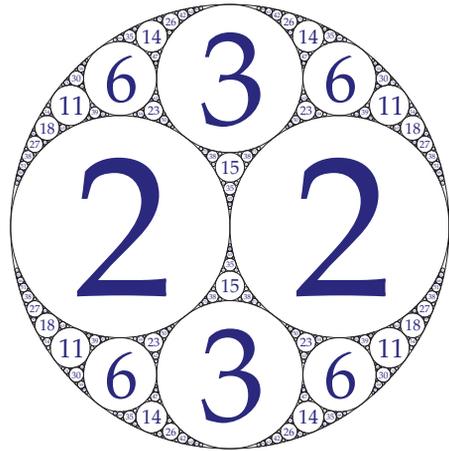
#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 15.2:** Zeigen Sie, dass die beiden Formeln, die sich aus den Knobelaufgaben in Abschn. 15.1 ergaben, nur Spezialfälle des Vier-Kreise-Satzes von Descartes sind.

gesucht: zwei Kreise, welche die folgenden drei Kreise berühren	bereits bekannter Kreis	$x_1 = 2 \cdot (k_1 + k_2 + k_3) - x_2$	Radius des neu bestimmten Kreises
hellblau (5), blau (10), außen (30)	grün (15)	$2 \cdot \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{10} - \frac{1}{30} \right) - \frac{1}{15} = \frac{14}{30}$	$\frac{30}{14}$
hellblau (5), grün (15), außen (30)	blau (10)	$2 \cdot \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{15} - \frac{1}{30} \right) - \frac{1}{10} = \frac{11}{30}$	$\frac{30}{11}$
hellblau (5), grün (15), blau (10)	außen (30)	$2 \cdot \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{10} \right) + \frac{1}{30} = \frac{23}{30}$	$\frac{30}{23}$
grün (15), blau (10), rot (2)	gelb (15)	$2 \cdot \left( \frac{1}{15} + \frac{1}{10} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{15} = \frac{38}{30}$	$\frac{30}{38}$
grün (15), gelb (15), rot (2)	blau (10)	$2 \cdot \left( \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{10} = \frac{35}{30}$	$\frac{30}{35}$

**Abb. 15.1** Radien, die sich in Beispiel 1 durch wiederholte Anwendung des Vieta'schen Wurzelsatzes ergeben

**Abb. 15.2** Folge der Kissing Circles für  $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$  und  $r_3 = \frac{1}{3}$  (mit freundlicher Genehmigung des Autors David Austin und der American Mathematical Society)



### 15.3 Bestimmung von Beispielen mit ganzzahligen Radien

Dass in der Figur nur ganzzahlige Krümmungen auftreten, liegt an der Gleichung aus Formel (15.4):

$$x_1 + x_2 = 2 \cdot (k_1 + k_2 + k_3)$$

Beginnt man mit ganzzahligen Krümmungen  $k_1, k_2, k_3$  und ergeben sich im ersten Schritt, also beim Lösen der quadratischen Gleichung, wieder ganzzahlige Krümmungen  $k_4$  und  $k_5$ , dann müssen bei den folgenden Schritten alle weiteren Krümmungen ganzzahlig sein.

Wann aber sind mit den Krümmungen  $k_1, k_2, k_3$  auch die Krümmungen  $k_4$  und  $k_5$  ganzzahlig?

Eine weitere Umformung der quadratischen Gleichung in Formel (15.3) ergibt:

$[x - (k_1 + k_2 + k_3)]^2 = 2 \cdot (2k_1k_2 + 2k_1k_3 + 2k_2k_3)$ , also:

$$x = (k_1 + k_2 + k_3) \pm 2 \cdot \sqrt{k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3} \quad (15.5)$$

Ob also auch die Krümmungen  $k_4$  und  $k_5$  ebenfalls ganzzahlig sind, hängt von dem Term unter dem Wurzelzeichen (Radikand) ab.

### Regel

#### Bestimmung von Beispielen mit ganzzahligen Radien

Wenn die Summe von Produkten  $k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3$  der Kreiskrümmungen  $k_1, k_2, k_3$  eine Quadratzahl ist, erhält man sich berührende Kreise mit lauter ganzzahligen Krümmungen. Wählt man dann das kleinste gemeinsame Vielfache der Krümmungen als Radius für den umgebenden Kreis (außen), dann sind auch die Radien der innen liegenden Kreise ganzzahlig.

#### Beispiel 1 (Fortsetzung)

Hier ist mit  $k_1 = k_2 = 2$  und  $k_3 = 3$  diese Bedingung erfüllt:

$$k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 16 \text{ ist eine Quadratzahl,}$$

und es ergibt sich:  $k_4 = 15$  und  $k_5 = -1$

Da 30 das kleinste gemeinsame Vielfache der Krümmungen 2, 3 und 15 ist, sind die Radien der innen liegenden Kreise ganzzahlig, nämlich  $r_1 = \frac{30}{k_1} = \frac{30}{2} = 15 = r_2, r_3 = \frac{30}{k_3} = \frac{30}{3} = 10$  und  $r_4 = \frac{30}{k_4} = \frac{30}{15} = 2$ .

#### Beispiel 2

Gegeben sind drei Kreise mit den Radien  $r_1 = 7$  (grün),  $r_2 = 14$  (gelb),  $r_3 = 6$  (blau)

Die Radien der beiden berührenden Kreise bestimmt man mithilfe von Formel (15.5):

$$x = \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{6} \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{7 \cdot 14} + \frac{1}{7 \cdot 6} + \frac{1}{14 \cdot 6}} = \frac{6 + 3 + 7}{42} \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{18 + 42 + 21}{7^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2}} = \frac{16}{42} \pm 2 \cdot \frac{9}{42}$$

$$\text{d. h. } x = \frac{17}{21} \vee x = -\frac{1}{21}.$$

Die beiden berührenden Kreise haben demnach die Radien  $r_4 = \frac{21}{17}$  und  $r_5 = 21$ .

Auch bei diesem Beispiel stellt man fest, dass der Radius des äußeren Kreises gleich der Summe der Radien von zwei der Ausgangskreise ist. Daher lässt sich auch diese Figur ohne weitere Rechnung symmetrisch ergänzen.

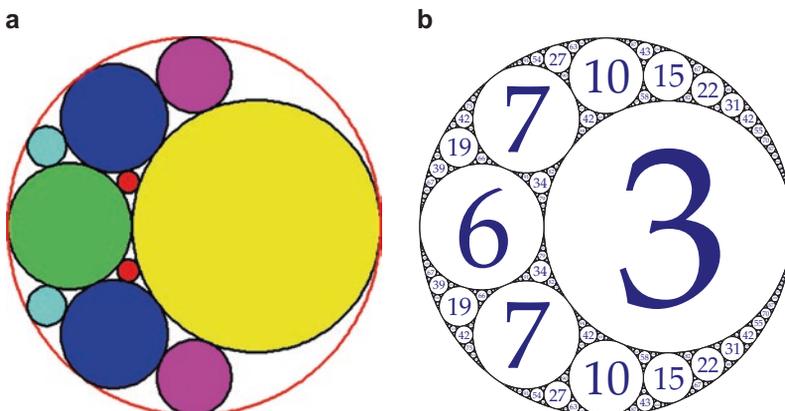
Wie in Beispiel 1 kann man dann mithilfe von Formel (15.4) die Radien der „nächsten“ benachbarten Kreise bestimmen (vgl. folgende Tabelle und Abb. 15.3).

gesucht: zwei Kreise, welche die folgenden drei Kreise berühren	bereits bekannter Kreis	$x_1 = 2 \cdot (k_1 + k_2 + k_3) - x_2$	Radius des neu bestimmten Kreises
grün (7), blau (6), außen (21)	gelb (14)	$2 \cdot \left( \frac{1}{7} + \frac{1}{6} - \frac{1}{21} \right) - \frac{1}{14} = \frac{19}{42}$	$\frac{42}{19}$ (hellblau)
blau (6), gelb (14), außen (30)	grün (7)	$2 \cdot \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{14} - \frac{1}{21} \right) - \frac{1}{7} = \frac{10}{42}$	$\frac{42}{10}$ (pink)

In Abb. 15.3 ist der Radius des äußeren Kreises gleich  $\frac{1}{2}$  LE. Hieraus ergeben sich dann die Krümmungen

$$k_1 = \frac{42}{7} = 6; k_2 = \frac{42}{14} = 3; k_3 = \frac{42}{6} = 7; k_4 = \frac{42}{\frac{21}{17}} = 34 \text{ usw.}$$

Durch systematisches Probieren kann man mithilfe von Formel (15.5) weitere Beispiele mit ganzzahligen Krümmungen finden (vgl. Abb. 15.4; die beiden ersten Zeilen enthalten die Beispiele 1 und 2).



$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_1 + k_2 + k_3$	$k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3$	$k_4$	$k_5$
2	2	3	7	16	15	-1
3	6	7	16	81	34	-2
5	8	8	21	144	45	-3
1	1	4	6	9	12	0
1	4	9	14	49	28	0
2	3	6	11	36	23	-1
3	7	10	20	121	42	-2
8	9	9	26	225	56	-4

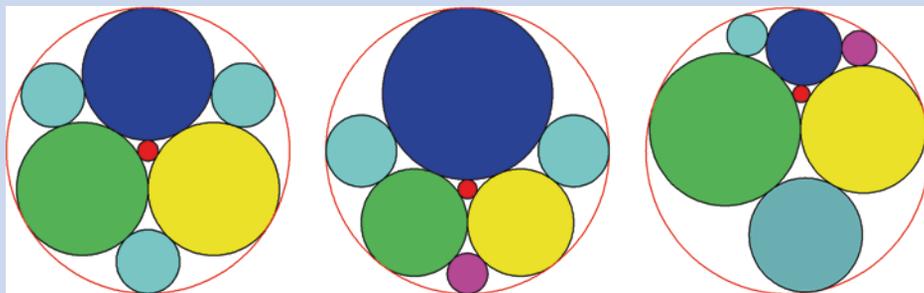
**Abb. 15.4** Beispiele von ganzzahligen Krümmungen

#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

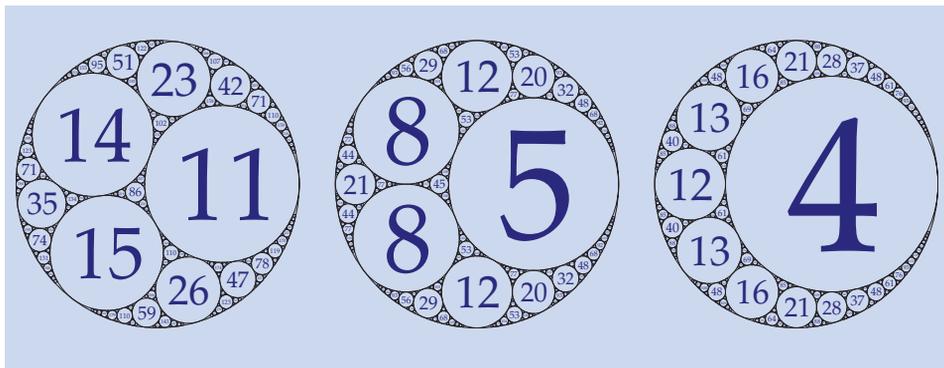
**A 15.3:** Berechnen Sie die Krümmungen der Kreise, die sich als nächste aus den Beispielen der Tabelle Abb. 15.4 ergeben. Geben Sie einen geeigneten ganzzahligen Radius für den äußeren Kreis an. Fertigen Sie eine Zeichnung an.

**A 15.4:** Bestimmen Sie die Radien der Kreise in den folgenden Abbildungen:

- $r_1 = r_2 = r_3 = 1$  (grün, gelb, blau)
- $r_1 = r_2 = 5$  (grün, gelb),  $r_3 = 8$  (blau)
- $r_1 = 6$  (grün),  $r_2 = 5$  (gelb),  $r_3 = 3$  (blau)



**A 15.5** Analysieren Sie die folgenden Abbildungen und rekonstruieren Sie erste Schritte der Figuren. (Abdruck mit freundlicher Genehmigung des Autors David Austin und der American Mathematical Society)



### 15.4 Pappos-Ketten

Bei den oben abgebildeten Grafiken in Abb. 15.2 und Abb. 15.3 von David Austin fallen Regelmäßigkeiten hinsichtlich der Krümmungen der Kreise auf, die eine „Kette“ um die Ausgangskreise bilden:

- Beispiel 1: 2, 3, 6, 11, 18, 27, 38, ...
- Beispiel 2: 6, 7, 10, 15, 22, 31, 42, ...

Es handelt sich jeweils um eine unendliche Folge von Kreisen mit abnehmenden Radien, die nach ihrem Entdecker, dem griechischen Mathematiker **Pappos von Alexandria**, der um das Jahr 320 n. Chr. gelebt hat, als **Pappos-Ketten** bezeichnet werden. Die Krümmungen durchlaufen jeweils eine arithmetische Folge 2. Ordnung (die zweite Differenzenfolge ist konstant), vgl. hierzu mehr in Kap. 16.

In Beispiel 1 sieht das so aus:

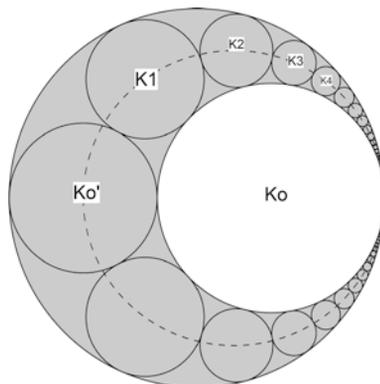
2	3	6	11	18	27	38	...
	1	3	5	7	9	11	...
		2	2	2	2	2	...

Im Folgenden werden die ersten Elemente einer Pappos-Kette mithilfe des Vier-Kreise-Satzes analysiert.

Der Radius des äußeren Kreises  $K$  in Abb. 15.5 werde mit  $r$  bezeichnet, der des weiß gelassenen Kreises  $K_0$  mit  $r_0$ . Dann ist der Radius des Kreises  $K_0'$  entsprechend gleich  $r - r_0$ .

Für den Radius  $r_1$  der beiden symmetrisch nach oben und unten anschließenden Kreise gilt nach dem Vier-Kreise-Satz von Descartes:

**Abb. 15.5** Schema einer Pappos-Kette (beschriftete Grafik entnommen dem englisch-sprachigen Wikipedia-Artikel *Pappus Chain*)



$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1} = 2 \cdot \left( \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r - r_0} - \frac{1}{r} \right),$$

also

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r - r_0} - \frac{1}{r}.$$

Für den „nächsten“ Kreis  $K_2$  der Kette gilt:  $K_2$  berührt  $K_1$  und  $K_0$  und wird von außen von  $K$  berührt.

Von  $K$ ,  $K_0$  und  $K_1$  wird aber auch der Kreis  $K_0'$  berührt. Daher ergibt sich aus dem Vier-Kreise-Satz:

$$\frac{1}{r_2} + \frac{1}{1 - r_0} = 2 \cdot \left( \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right)$$

Ersetzen des Terms für  $\frac{1}{r_1}$  und Auflösen nach  $\frac{1}{r_2}$  ergibt daher:

$$\frac{1}{r_2} = 2 \cdot \left( \frac{1}{r_0} + \left( \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r - r_0} - \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r - r_0} = \frac{4}{r_0} + \frac{1}{r - r_0} - \frac{4}{r}$$

Für den „nächsten“ Kreis  $K_3$  der Kette gilt:  $K_3$  berührt  $K_2$  und  $K_0$ , zudem wird er von außen von  $K$  berührt. Von  $K$ ,  $K_0$  und  $K_2$  wird aber auch der Kreis  $K_1$  berührt. Aus dem Vier-Kreise-Satz ergibt sich hier:

$$\frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_1} = 2 \cdot \left( \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r} \right)$$

Ersetzen der Terme für  $\frac{1}{r_1}$  und  $\frac{1}{r_2}$  und Auflösen nach  $\frac{1}{r_3}$  ergibt:

$$\frac{1}{r_3} = 2 \cdot \left( \frac{1}{r_0} + \left( \frac{4}{r_0} + \frac{1}{r - r_0} - \frac{4}{r} \right) - \frac{1}{r} \right) - \left( \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r - r_0} - \frac{1}{r} \right), \text{ also } \frac{1}{r_3} = \frac{9}{r_0} + \frac{1}{r - r_0} - \frac{9}{r}.$$

Analog ergibt sich im nächsten Schritt:

$$\frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_2} = 2 \cdot \left( \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r} \right) \text{ und weiter } \frac{1}{r_4} = \frac{16}{r_0} + \frac{1}{r-r_0} - \frac{16}{r}.$$

Das allgemeine Prinzip ist nun deutlich geworden.

Für den an den Kreis  $K_n$  anschließenden Kreis  $K_{n+1}$  der Kette gilt:

Kreis  $K_{n+1}$  berührt Kreis  $K_n$  und Kreis  $K_0$ , zudem wird er von außen vom Kreis  $K$  berührt. Von  $K$ ,  $K_0$  und  $K_n$  wird aber auch der Kreis  $K_{n-1}$  berührt. Daher ergibt sich aus dem Vier-Kreise-Satz die Beziehung:

$$\frac{1}{r_{n+1}} + \frac{1}{r_{n-1}} = 2 \cdot \left( \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_n} - \frac{1}{r} \right)$$

Hieraus ergibt sich dann nach Umformungen:

#### Satz

#### Radius der Kreise in einer Pappos-Kette

Für den Radius des  $(n+1)$ -ten Kreises einer Pappos-Kette gilt:

$$\frac{1}{r_{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{r_0} + \frac{1}{r-r_0} - \frac{(n+1)^2}{r} \quad (15.6)$$

#### Beispiel 1: Radien einer Pappos-Kette

Die Berechnung der Radien sieht wie folgt aus:

Hier ist  $r = 1$  und  $r_0 = \frac{1}{2}$ .

Für die Krümmung der beiden benachbarten Kreise  $K_1$  ergibt sich:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{1} = 3$$

Weiter folgt für die nächsten Kreise

$$\frac{1}{r_2} = \frac{4}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{2}} - \frac{4}{1} = 6, \quad \frac{1}{r_3} = \frac{9}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{2}} - \frac{9}{1} = 11, \quad \frac{1}{r_4} = \frac{16}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{2}} - \frac{16}{1} = 18$$

und allgemein:

$$\frac{1}{r_{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{2}} - \frac{(n+1)^2}{1} = (n+1)^2 + 2 = n^2 + 2n + 3$$

Einsetzen von  $n = 1, 2, 3, \dots$  ergibt die Folge der Kreiskrümmungen

2, 3, 6, 11, 18, 27, 38, ... (vgl. Abb. 15.2).

**Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen**

**A 15.6:** Führen Sie die Berechnung der Radien für **Beispiel 2** durch.

Zeigen Sie:  $\frac{1}{r_{n+1}} = n^2 + 2n + 7$ .

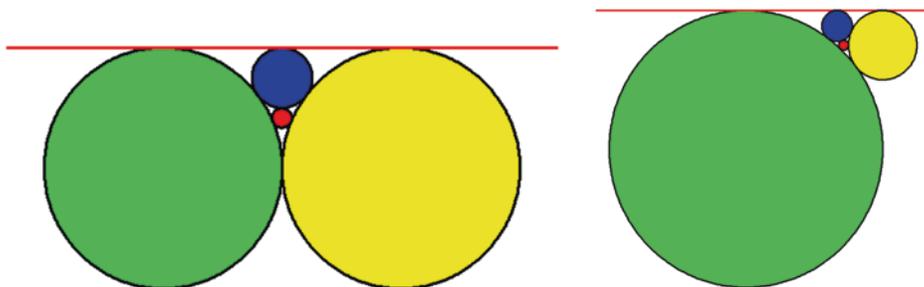
**A 15.7:** Bestimmen Sie für eine der Pappos-Ketten in der rechts stehenden Abbildung zu **A 15.5** den Term zur Berechnung der Radien der Kette.

## 15.5 Berührende Kreise mit Krümmung 0

In der Tabelle von Abb. 15.4 fallen die Zahlentripel auf, bei denen die Lösung  $k_5 = 0$  auftritt. Kreise mit Krümmung 0 haben einen unendlich großen Radius – es handelt sich um Geraden, welche die Kreise berühren, vgl. folgende Abbildungen.

Zum Starttripel (1; 1; 4) gehören  $r_1 = 12 \cdot 1 = 12$  (grün),  $r_2 = 12 \cdot 1 = 12$  (gelb) und  $r_3 = 12 \cdot \frac{1}{4} = 3$  (blau). Mithilfe von Formel (15.5) ergibt sich:  $r_4 = 12 \cdot \frac{1}{12} = 1$  (rot) und  $r_5 = 12 \cdot \frac{1}{0} = \infty$ .

Zum Starttripel (1; 4; 9) gehören  $r_1 = 28 \cdot 1 = 28$  (grün),  $r_2 = 28 \cdot \frac{1}{4} = 7$  (gelb) und  $r_3 = 28 \cdot \frac{1}{9} = \frac{28}{9}$  (blau). Mithilfe von Formel (15.5) ergibt sich:  $r_4 = 28 \cdot \frac{1}{28} = 1$  (rot) und  $r_5 = 28 \cdot \frac{1}{0} = \infty$ .



Eine allgemeine Untersuchung der Beispiele mit Krümmung 0 ergibt Folgendes:

Aus Formel (15.1) ergibt sich  $2 \cdot (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + 0^2) = (k_1 + k_2 + k_3 + 0)^2$  und weiter aus Formel (15.5):

$$0 = (k_1 + k_2 + k_3) - 2 \cdot \sqrt{k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3}$$

Beide Beziehungen können zusammengefasst werden zu:

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 2 \cdot (k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3)$$

In Abb. 15.6 sind weitere Beispiele angegeben, die man durch systematisches Probieren findet; dabei wurden Vielfache von Tripeln weggelassen.

$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_1 + k_2 + k_3$	$k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3$	$k_4$	$k_5$
1	1	4	6	9	12	0
1	4	9	14	49	28	0
1	9	16	26	169	52	0
1	16	25	42	441	84	0
1	25	36	62	961	124	0
1	36	49	86	1849	172	0
1	49	64	114	3249	228	0
1	64	81	146	5329	292	0
4	9	25	38	361	76	0
4	25	49	78	1521	156	0
4	49	81	134	4489	268	0
9	16	49	74	1369	148	0
9	25	64	98	2401	196	0

**Abb. 15.6** Beispiele von berührenden Kreisen mit Krümmung 0 als Tabelle

Auffallend ist, dass alle Beispiele mit  $k_5 = 0$  aus lauter Quadratzahlen bestehen.

Aufgrund der erfassten Beispiele kann man eine Vermutung darüber aufstellen, welches gemeinsame Bildungsgesetz den Beispielen zugrunde liegt:

#### Regel

#### Gemeinsame Tangente für drei sich berührende Kreise

Für alle natürlichen Zahlen  $n, k$  gilt:

Lassen sich die Krümmungen von drei sich berührenden Kreisen in der Form  $(n^2; (n+k)^2; (2n+k)^2)$  darstellen, dann existiert eine Gerade, welche die drei Kreise berührt, die also eine gemeinsame Tangente für die drei Kreise bildet.

Der Nachweis für die Gültigkeit der Vermutung erfolgt durch Ausrechnen der Terme auf beiden Seiten der Gleichung; tatsächlich gilt:

$$\begin{aligned} n^4 + (n+k)^4 + (2n+k)^4 &= 2 \cdot \left[ n^2 \cdot (n+k)^2 + n^2 \cdot (2n+k)^2 + (n+k)^2 + (2n+k)^2 \right] \\ &= 18 \cdot n^4 + 36 \cdot n^3 \cdot k + 30 \cdot n^2 \cdot k^2 + 12 \cdot n \cdot k^3 + 2 \cdot k^4 \end{aligned}$$

#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 15.8:** Welche Krümmung hat allgemein ein Kreis, der zwischen drei sich berührenden Kreisen mit gemeinsamer Tangente liegt?

**A 15.9:** Welche Krümmungen haben die Kreise, die zwei sich berührende Kreise und die gemeinsame Tangente berühren?

## 15.6 Sangaku

Im Folgenden sollen nicht nur Kreise, sondern auch andere geometrische Rahmenfiguren betrachtet werden (insbesondere Halbkreise, Quadrate und gleichseitige Dreiecke), in die weitere Kreise eingepasst werden sollen. Wie oben erwähnt, findet man viele Beispiele dieser Art in der japanischen Tempelgeometrie (Sangaku).

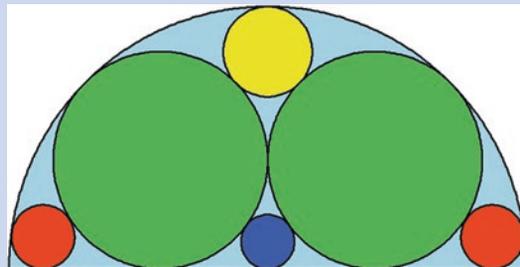
Das japanische Wort *Sangaku* bedeutet so viel wie „mathematische Tafeln“. Diese farbigen Holztafeln, auf denen ein geometrisches Problem dargestellt ist, wurden in früheren Jahrhunderten in Japan von Pilgern an Tempeln aufgehängt – gleichermaßen als Opfertafeln für die Gottheit und als „Knobelaufgaben“ für die anderen Besucher.

Auch der berühmte japanische Mathematiker Seki Kowa (1642–1708), ein Zeitgenosse von Newton und Leibniz, beschäftigte sich mit Sangaku-Problemen.



### Beispiel 1

In einen Halbkreis werden zwei gleichgroße Kreise so eingezeichnet (grün), dass sie einander berühren und außerdem die Halbkreislinie sowie den Durchmesser des Halbkreises. In die Zwischenräume werden oben (gelb) und unten (blau) sowie links und rechts (rot) weitere Kreise eingepasst.



**Lösung:**

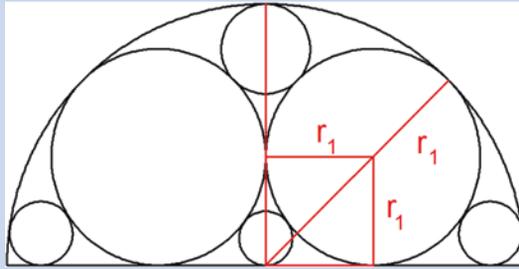
Für den Radius des Halbkreises wählen wir – zur Vereinfachung – die Länge 1 LE.

Bestimmung des Radius  $r_1$  der grün gefärbten Kreise:

Durch den Mittelpunkt des Halbkreises und den Mittelpunkt eines grün gefärbten Kreises ist ein Quadrat mit Seitenlänge  $r_1$  bestimmt, dessen Diagonale gemäß dem Satz von Pythagoras die Länge  $r_1 \cdot \sqrt{2}$  hat.

Somit gilt für die Länge des Halbkreis-Radius  $r_1 \cdot \sqrt{2} + r_1 = r_1 \cdot (\sqrt{2} + 1) = 1$ , also

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2} - 1 \approx 0,4142.$$



Bestimmung des Radius  $r_2$  des gelb gefärbten Kreises:

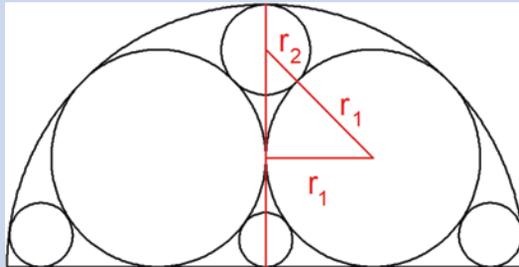
Gemäß dem Satz von Pythagoras gilt in dem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten der Länge  $r_1$  und  $1 - r_1 - r_2$  und der Hypotenuse der Länge  $r_1 + r_2$ :

$$r_1^2 + (1 - r_1 - r_2)^2 = (r_1 + r_2)^2, \text{ also}$$

$$r_1^2 + 1 + r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 - 2r_2 + 2r_1r_2 = r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 \text{ und somit}$$

$$2r_2 = 1 + r_1^2 - 2r_1 = (1 - r_1)^2.$$

$$\text{Einsetzen von } r_1 = \sqrt{2} - 1 \text{ ergibt } r_2 = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0,1716.$$



Bestimmung des Radius  $r_3$  der rot gefärbten Kreise:

Um diesen Radius zu bestimmen, benötigt man noch den horizontalen Abstand  $x$  zwischen dem Mittelpunkt eines der grünen Kreise und des betreffenden roten Kreises. In den beiden rechtwinkligen Dreiecken der Hilfsfigur gilt:

$$\text{rotes Dreieck: } x^2 + (r_1 - r_3)^2 = (r_1 + r_3)^2, \text{ also } x^2 = 4r_1r_3,$$

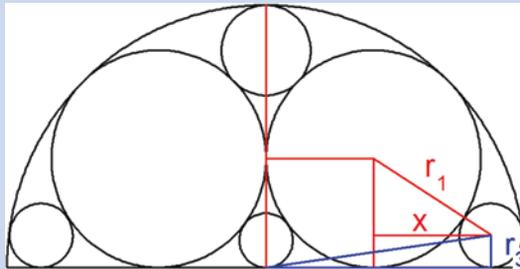
$$\text{blaues Dreieck: } (r_1 + x)^2 + r_3^2 = (1 - r_3)^2.$$

Ersetzt man in der zweiten Gleichung  $r_3$  durch  $\frac{x^2}{4r_1}$ , dann ergibt sich nach Umformen

$$(2r_1 + 1) \cdot x^2 + 4r_1^2x = 2r_1 \cdot (1 - r_1^2).$$

Einsetzen von  $r_1 = \sqrt{2} - 1$ , also  $r_1^2 = 3 - 2\sqrt{2}$  und  $1 - r_1^2 = 2\sqrt{2} - 2$  führt zu einer quadratischen Gleichung, deren positive Lösung  $x \approx 0,4531$  ist.

Hieraus folgt:  $r_3 \approx 0,1239$ .

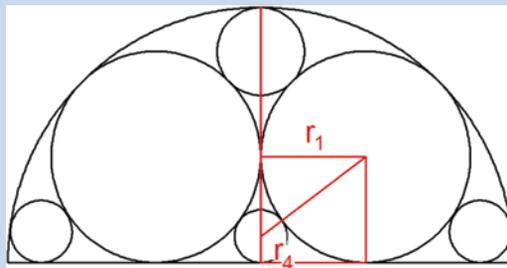


Bestimmung des Radius  $r_4$  des blau gefärbten Kreises:

Für das rechtwinklige Dreieck in der folgenden Abbildung gilt:  
 $r_1^2 + (r_1 - r_4)^2 = (r_1 + r_4)^2$ .

Hieraus ergibt sich nach Umformen  $r_1 = 4r_4$ , also

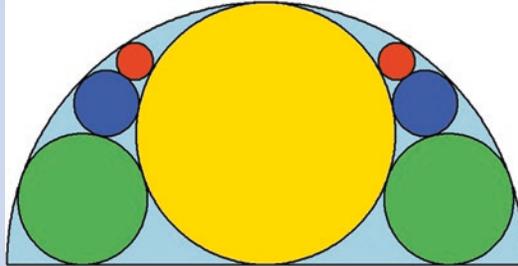
$$r_4 = \frac{1}{4} \cdot r_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot \sqrt{2} \approx 0,1036.$$



### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

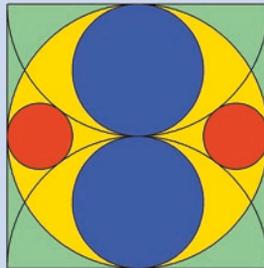
**A 15.10:** Zeigen Sie, dass für die Radien der Kreise in der folgenden Halbkreisfigur mit Radius 1 LE gilt:

$$r_{\text{gelb}} = \frac{1}{2}, r_{\text{grün}} = \frac{1}{4}, r_{\text{blau}} \approx 0,128, r_{\text{rot}} \approx 0,073.$$



### Beispiel 2

Die nachfolgende Figur enthält zwar fünf Kreise (gold, blau, rot), die in ein Quadrat mit zwei Halbkreisen eingepasst sind – aber nur für die rot gefärbten Kreise muss eine Rechnung durchgeführt werden.

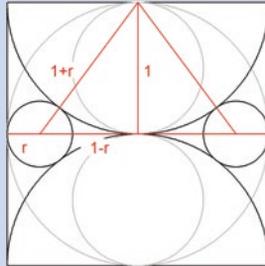


### Lösung:

Zur Vereinfachung der Rechnung wählen wir 2 LE als Länge der Quadratseite. In der folgenden Hilfsfigur ist dann ein rechtwinkliges Dreieck erkennbar, in dem der Satz von Pythagoras angewandt werden kann. So ergibt sich:

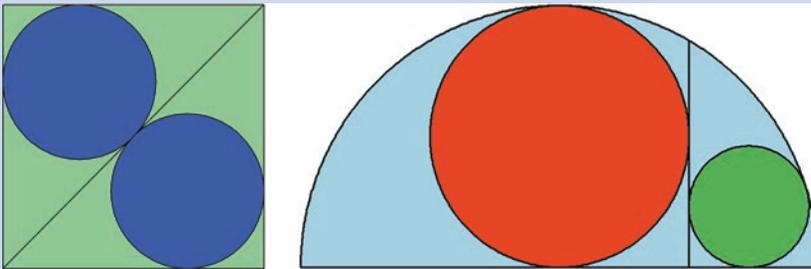
$$(1 - r)^2 + 1^2 = (1 + r)^2, \text{ also } 1 - 2r + r^2 + 1 = 1 + 2r + r^2 \text{ und somit } 4r = 1, \text{ d. h. } r = \frac{1}{4}.$$

Die rot gefärbten Kreise haben also einen Radius, der ein Achtel der Seitenlänge des Quadrats ausmacht.



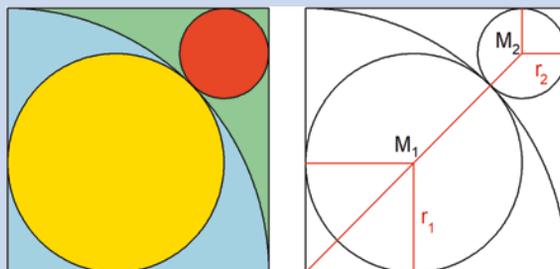
#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 15.11:** Bestimmen Sie jeweils die Radien der in die äußeren Figuren eingeschlossenen Kreise.

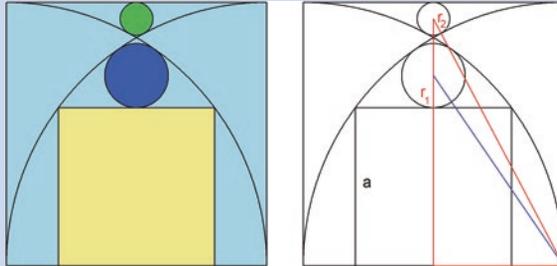


**A 15.12:** Zeigen Sie, dass für die Radien der Kreise in der folgenden Quadratfigur (Seitenlänge 1 LE) gilt:

$$r_1 = r_{\text{gelb}} \approx 0,414 \text{ und } r_2 = r_{\text{rot}} \approx 0,172.$$

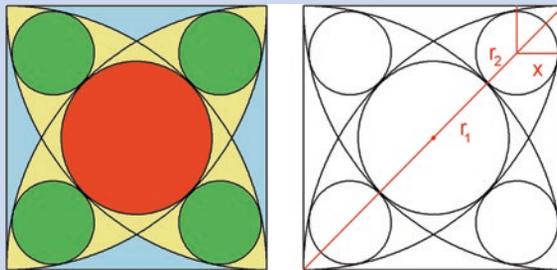


**A 15.13:** Bestimmen Sie die Seitenlänge des eingeschlossenen Quadrats (hellgelb) sowie die Radien der beiden Kreise (nach einem Sangaku aus dem Jahr 1820).



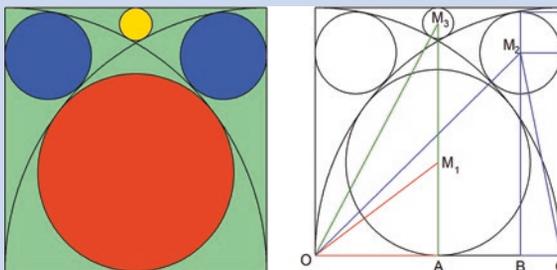
**A 15.14:** Zeigen Sie, dass für die Radien der Kreise in der folgenden Quadratfigur (Seitenlänge 1 LE) gilt:

$$r_1 = r_{rot} \approx 0,293 \text{ und } r_2 = r_{grün} \approx 0,160. \text{ Für die Hilfsgröße } x \text{ gilt: } x \approx 0,180.$$

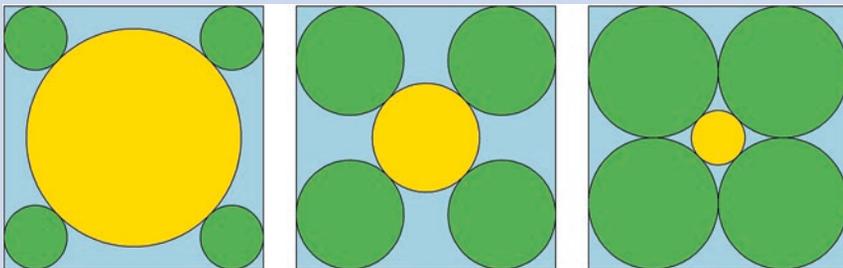


**A 15.15:** Zeigen Sie, dass für die Radien der Kreise in der folgenden Quadratfigur (Seitenlänge 1 LE) gilt:

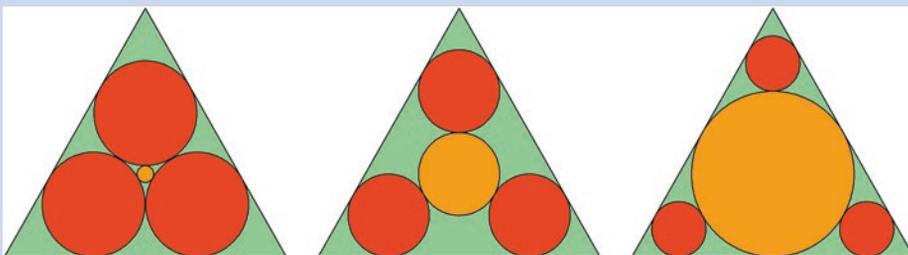
$$r_1 = r_{rot} = \frac{3}{8} = 0,375, r_2 = r_{blau} = \frac{1}{6} \approx 0,167 \text{ und } r_3 = r_{gold} = \frac{1}{16} = 0,0625.$$



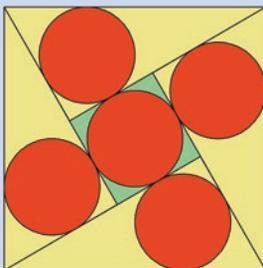
**A 15.16:** Untersuchen Sie für die folgende Quadratfigur (Seitenlänge 1 LE), wie der Gesamtflächeninhalt  $A$  der grün bzw. gold gefärbten Kreise von den Radien abhängt. Für welche Radien ist  $A$  maximal, für welche minimal? Wie groß ist der Radius im Falle gleich großer Kreise, vgl. dritte Abbildung (rechts)?



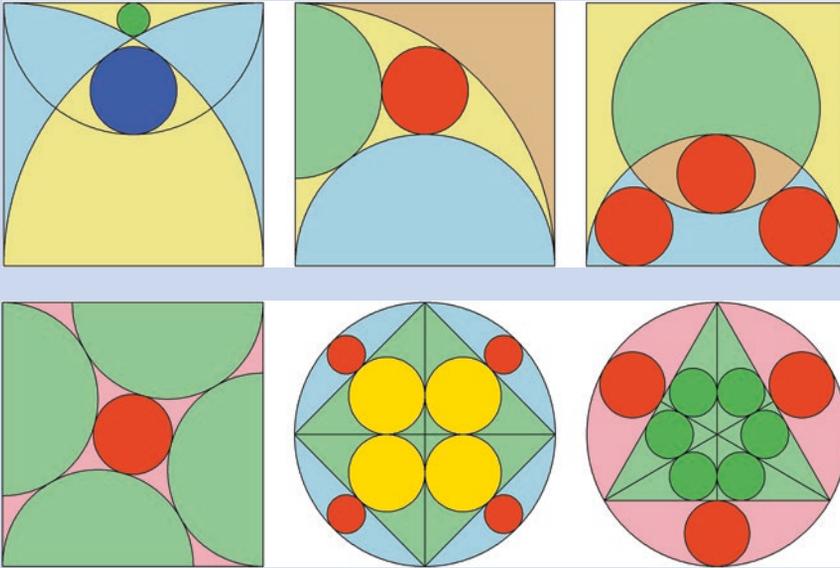
**A 15.17:** Untersuchen Sie für die folgende Figur eines gleichseitigen Dreiecks (Seitenlänge 1 LE), wie der Gesamtflächeninhalt  $A$  der rot bzw. orange gefärbten Kreise von den Radien abhängt. Für welche Radien ist  $A$  maximal, für welche minimal? Wie groß ist der Radius im Falle gleich großer Kreise, vgl. dritte Abbildung (rechts)?



**A 15.18:** Wie muss das äußere Quadrat unterteilt werden, dass die fünf eingeschlossenen Kreise gleich groß sind (nach einem Sangaku aus dem Jahr 1811)?

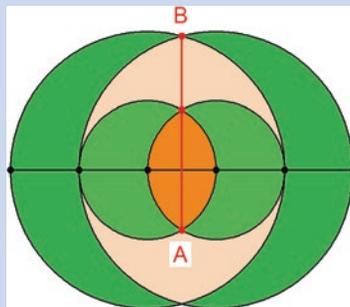


**A 15.19:** Bestimmen Sie jeweils die Radien der Kreise und Kreisbögen.



**A 15.20:** Analysieren Sie die folgende 4-Kreise-Figur.

Zeigen Sie: Die Strecke AB wird durch den oberen Schnittpunkt der beiden inneren Kreise im Verhältnis des goldenen Schnitts geteilt (vgl. *Mathematik ist wunderschön*, Kap. 9).



## 15.7 Hinweise auf weiterführende Literatur

Bei **Wikipedia** findet man in deutscher (englischer, französischer) Sprache weitere Informationen und Literatur zu den Stichwörtern:

- Satz von Descartes (Descartes' theorem, Théorème de Descartes),
- Apollonisches Problem (Problem of Apollonius, Problème des contacts),
- Pappos-Kette (Pappus chain, –)
- Sangaku (Sangaku, Sangaku)

Umfangreiche fachliche Informationen findet man auf **Wolfram Mathworld** unter den Stichwörtern:

- Descartes Circle Theorem, Apollonius Problem, Pappus Chain, Sangaku Problem

Eine ausführliche Darstellung, auch der Zusammenhänge mit komplexen Zahlen, auf die hier nicht eingegangen werden konnte, findet man in:

- Austin, David, *When Kissing Involves Trigonometry*, <http://www.ams.org/samplings/feature-column/fc-arc-kissing>
- Lagarias, Jeffrey C. et al. (2002), *Beyond the Descartes circle theorem*, American Mathematical Monthly 109, S. 338–361.

Zum Thema Sangaku empfehle ich das Buch

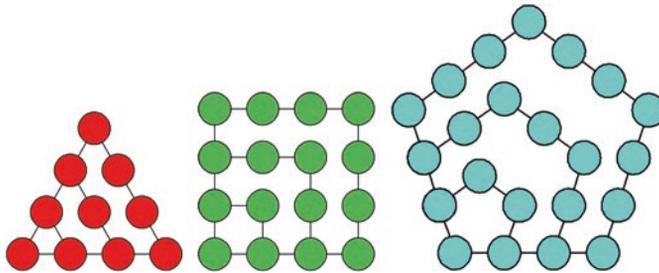
- Huvent, Géry (2008): Sangaku – le mystère des énigmes géométriques japonaises, Dunod, Paris
- sowie die Websites [www.zum.de/Faecher/Materialien/rubin/sangaku.html](http://www.zum.de/Faecher/Materialien/rubin/sangaku.html)
- [www.cut-the-knot.org/pythagoras/Sangaku.shtml](http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Sangaku.shtml)
- [www.matheraetsel.de/sangaku.html](http://www.matheraetsel.de/sangaku.html)
- [u.osu.edu/unger.26/online-publications/sangaku-problems-involving-ellipses/](http://u.osu.edu/unger.26/online-publications/sangaku-problems-involving-ellipses/)

# Summen von Potenzen aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen

# 16

*Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist  
Menschenwerk.*

(Leopold Kronecker, deutscher Mathematiker, 1823–1891)



In Kap. 2 wurde erläutert, wie man die Summe der ersten  $n$  natürlichen Zahlen anschaulich bestimmen kann. Auch wurden einige der Ideen vorgestellt, mit denen Formeln zur Berechnung der Summe der ersten  $n$  Quadratzahlen bzw. Kubikzahlen hergeleitet werden können.

In diesem Kapitel sollen weitere Methoden für die Berechnung der Summe von Potenzen natürlicher Zahlen vorgestellt werden, die im Laufe der Jahrhunderte von verschiedenen Mathematikern entdeckt und entwickelt wurden. Einer der ersten Mathematiker der Neuzeit, die sich mit diesen Formeln beschäftigten, war Johannes Faulhaber (1580–1635). Nach einem Vorschlag des amerikanischen Informatikers Donald E. Knuth werden die Summenformeln oft als **Faulhaber'sche Formeln** bezeichnet.

## Formeln

Summen von Potenzen der ersten  $n$  natürlichen Zahlen

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{1}{2} \cdot n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1) \quad (16.1)$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1) \quad (16.2)$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \left[ \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1) \right]^2 \quad (16.3)$$

$$\begin{aligned} 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 &= \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n \\ &= \frac{1}{30} \cdot n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1) \cdot (3n^2 + 3n - 1) \end{aligned} \quad (16.4)$$

$$\begin{aligned} 1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + n^5 &= \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2 \\ &= \frac{1}{12} \cdot n^2 \cdot (n + 1)^2 \cdot (2n^2 + 2n - 1) \end{aligned} \quad (16.5)$$

In seinen Werken *Miracula Arithmetica* (1622) und *Academia Algebrae* (1631) entwickelte Johann Faulhaber Summenformeln für die Potenzen der ersten  $n$  natürlichen Zahlen bis zur zwölften Potenz.

Dazu legte er systematisch Tabellen mit den ersten Gliedern der Folge der natürlichen Zahlen und der Potenzen an, dann weiter die zugehörigen Summenfolgen sowie Spalten, in denen er das  $k$ -Fache dieser Werte notierte.

Unmittelbar durch „Hinschauen“ kann man erkennen, dass zwischen der Summe der ersten  $n$  Kubikzahlen (abkürzende Schreibweise:  $\Sigma k^3$  für  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$ ) und der Summe der ersten  $n$  natürlichen Zahlen (abkürzende Schreibweise:  $\Sigma k$  für  $1 + 2 + 3 + \dots + n$ ) der Zusammenhang  $\Sigma k^3 = (\Sigma k)^2$  besteht (vgl. auch Formel 16.3).

$n$	$n^2$	$n^3$	$\Sigma k$	$\Sigma k^2$	$\Sigma k^3$	$n \cdot \Sigma k$	$n \cdot \Sigma k^2$
1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	3	5	9	6	10
3	9	27	6	14	36	18	42
4	16	64	10	30	100	40	120
5	25	125	15	55	225	75	275
6	36	216	21	91	441	126	546
7	49	343	28	140	784	196	980
8	64	512	36	204	1296	288	1632

Darüber hinaus entdeckte er, dass zwischen der Summe  $\Sigma k^2 (= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)$  der ersten  $n$  Quadratzahlen und der Summe  $\Sigma k$  der ersten  $n$  natürlichen Zahlen ein „einfacher“ Zusammenhang besteht: Aus dem Ansatz  $\Sigma k^2 = (a \cdot n + b) \cdot (\Sigma k)$  gewinnt man die Koeffizienten  $a = \frac{2}{3}$  und  $b = \frac{1}{3}$  und somit die Formel  $\Sigma k^2 = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot n + \frac{1}{3}\right)$ ;

zur Koeffizientenmethode vergleiche Abschn. 16.1.

Faulhaber entwickelte die Technik des Vergleichs von Tabellenspalten zur Perfektion; beispielsweise entdeckte er anhand der folgenden Tabelle die Beziehung  $n \cdot \Sigma k^2 - \Sigma k^3 = \Sigma (\Sigma k^2) - \Sigma k^2$ , wobei  $\Sigma (\Sigma k^2)$  abkürzend für  $(1^2) + (1^2 + 2^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2) + \dots + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)$  notiert ist.

$n$	$n^2$	$\Sigma k^2$	$\Sigma(\Sigma k^2)$	$n \cdot \Sigma k^2$	$k^3$	$\Sigma k^3$	$n \cdot \Sigma k^2 - \Sigma k^3$	$\Sigma(\Sigma k^2) - \Sigma k^2$
1	1	1	1	1	1	1	0	0
2	4	5	6	10	8	9	1	1
3	9	14	20	42	27	36	6	6
4	16	30	50	120	64	100	20	20
5	25	55	105	275	125	225	50	50
6	36	91	196	546	216	441	105	105
7	49	140	334	980	343	784	196	196
8	64	204	540	1632	512	1296	336	336

Hieraus ergibt sich  $\Sigma k^3 = (n + 1) \cdot \Sigma k^2 - \Sigma (\Sigma k^2)$ , sodass man damit auch eine direkte Berechnungsmöglichkeit für  $\Sigma (\Sigma k^2)$  gefunden hat:

$$\Sigma (\Sigma k^2) = (n + 1) \cdot \Sigma k^2 - \Sigma k^3.$$

Für höhere Potenzen probierte Faulhaber solange verschiedene Zerlegungsansätze durch, bis er einen passenden gefunden hatte. Beispielsweise fand er heraus, dass sich die Summe  $\Sigma k^4$  der ersten  $n$  vierten Potenzen als Produkt der Form  $(a \cdot \Sigma k + b) \cdot (\Sigma k^2)$  mit  $a = \frac{6}{5}$  und  $b = -\frac{1}{5}$  darstellen lässt, vgl. **A 16.1**.

Die genialen Ansätze Faulhabers können hier nicht weiter vertieft werden; nähere Einzelheiten kann u. a. man der folgenden Biographie entnehmen:

Ivo Schneider (1993): *Johannes Faulhaber: 1580–1635. Rechenmeister in einer Welt des Umbruchs*. Birkhäuser, Basel.

Im Folgenden gehen wir auf weitere Verfahren und eindrucksvolle Entdeckungen anderer Mathematiker ein.

#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 16.1:** Ergänzen Sie ggf. die o. a. Tabellen um weitere Spalten und überprüfen Sie, ob auch die folgenden Gleichungen gelten:

$$\Sigma k^2 = (n + 1) \cdot \Sigma k - \Sigma (\Sigma k) \text{ und } \Sigma k^4 = (n + 1) \cdot \Sigma k^3 - \Sigma (\Sigma k^3).$$

## 16.1 Herleitung von Summenformeln mithilfe arithmetischer Folgen höherer Ordnung

Summen von Potenzen natürlicher Zahlen (kurz: Potenzsummen) kann man mit einem einfachen Ansatz bestimmen, nämlich mithilfe von arithmetischen Folgen höherer Ordnung.

### Definition

#### Arithmetische Folgehöherer Ordnung

Eine Zahlenfolge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , bei der die zugehörige Differenzenfolge  $\Delta_1$  von je zwei aufeinanderfolgenden Folgengliedern eine konstante Folge bildet, wird als **arithmetische Folge 1. Ordnung** bezeichnet.

Eine **arithmetische Folge-ter Ordnung** ist eine Zahlenfolge, bei der die zugehörige Differenzenfolge  $\Delta_n$  von je zwei aufeinanderfolgenden Folgengliedern eine arithmetische Folge  $(n - 1)$ -ter Ordnung bildet.

Konstante Folgen kann man daher auch als arithmetische Folgen 0. Ordnung bezeichnen.

#### Beispiele arithmetischer Folgen

- Die Folge  $0, 1, 2, 3, \dots$  der natürlichen Zahlen ist eine arithmetische Folge 1. Ordnung, denn ihre zugehörige Differenzenfolge ist die konstante Folge  $1, 1, 1, \dots$
- Die Folge  $1, 3, 5, 7, \dots$  der ungeraden natürlichen Zahlen ist ebenfalls eine arithmetische Folge 1. Ordnung, denn ihre zugehörige Differenzenfolge ist die konstante Folge  $2, 2, 2, \dots$
- Die Folge  $0, 1, 4, 9, 16, \dots$  der Quadratzahlen von natürlichen Zahlen ist eine arithmetische Folge 2. Ordnung, denn ihre zugehörige Differenzenfolge ist  $1, 3, 5, 7, \dots$ , die Folge der ungeraden natürlichen Zahlen, also eine arithmetische Folge 1. Ordnung.
- Die Folge der Dreieckszahlen  $0, 1, 3, 6, 10, 15, \dots$  ist eine arithmetische Folge 2. Ordnung, denn ihre zugehörige Differenzenfolge ist  $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ , die Folge der natürlichen Zahlen, also eine arithmetische Folge 1. Ordnung.  
Die Folge der Dreieckszahlen wird gebildet, indem man die natürlichen Zahlen kumuliert („anhäuft“). Daher ergeben sich beim umgekehrten Vorgang, nämlich bei der Differenzbildung aufeinanderfolgender Glieder, entsprechend wieder die Folgenglieder der natürlichen Zahlen.
- Die Folge  $0, 1, 8, 27, 64, 125, \dots$  der Kubikzahlen von natürlichen Zahlen ist eine arithmetische Folge 3. Ordnung. Ihre zugehörige Differenzenfolge hat die Folgenglieder  $1, 7, 19, 37, 61, \dots$ , deren zugehörige Differenzenfolge die Folgenglieder  $6, 12, 18, 24, \dots$  Dies ist eine arithmetische Folge 1. Ordnung, denn deren zugehörige Differenzenfolge ist eine konstante Folge; also ist die Folge  $1, 7, 19, 37, 61, \dots$  eine arithmetische Folge 2. Ordnung und die Folge der Kubikzahlen selbst eine arithmetische Folge 3. Ordnung (vgl. nachfolgende Tabelle).

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$a_n$	0	1	8	27	64	125	216	343	...
$\Delta_1$	1	7	19	37	61	91	127	...	
$\Delta_2$	6	12	18	24	30	36	...		
$\Delta_3$	6	6	6	6	6	...			

- Die Folge  $s_n$  der fortlaufend gebildeten Summen von aufeinanderfolgenden Quadratzahlen natürlicher Zahlen, also 0, 1, 5, 14, ..., ist eine arithmetische Folge 3. Ordnung, denn durch Differenzbildung entsteht wieder die Ausgangsfolge der Quadratzahlen, also eine arithmetische Folge 2. Ordnung (vgl. nachfolgende Tabelle).

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$a_n$	0	1	4	9	16	25	36	49	...
$s_n$	0	1	5	14	30	55	91	140	...
$\Delta_1$	0	1	4	9	16	25	36	49	...
$\Delta_2$	1	3	5	7	9	11	13	...	...
$\Delta_3$	2	2	2	2	2	2	...		

Eine Berechnung der ersten Folgenglieder ist natürlich noch kein Beweis für die Richtigkeit der Aussagen über die Ordnung der arithmetischen Folgen. Um einen formalen Nachweis zu führen, benötigt man binomische Formeln höherer Ordnung und einige Umformungsschritte.

Beispielsweise ergibt sich für die Folge der Kubikzahlen

- $\Delta_1(n) = (n+1)^3 - n^3 = n^3 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1 - n^3 = 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1$   
also eine arithmetische Folge 2. Ordnung.
- $\Delta_2(n) = [3 \cdot (n+1)^2 + 3 \cdot (n+1) + 1] - (3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1)$   

$$= 3 \cdot n^2 + 6 \cdot n + 3 + 3 \cdot n + 3 + 1 - 3 \cdot n^2 - 3 \cdot n - 1$$

$$= 6 \cdot n + 6,$$
 also eine arithmetische Folge 1. Ordnung.
- $\Delta_3(n) = [6 \cdot (n+1) + 6] - (6 \cdot n + 6) = 6 \cdot n + 6 + 6 - 6 \cdot n - 6 = 6,$   
also eine arithmetische Folge 0. Ordnung.

Umgekehrt kann man zu einer arithmetischen Folge 0. Ordnung, z. B.  $a_n = u$  mit  $u \in \mathbb{R}$ , unendlich viele arithmetische Folgen  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  1. Ordnung angeben, deren Differenzenfolge gleich  $a_n$  ist, nämlich die linearen Folgen  $b_n = u \cdot n + v$  mit beliebigem  $v \in \mathbb{R}$ .

Und auch zu einer arithmetischen Folge 1. Ordnung, z. B.  $b_n = u \cdot n + v$  mit  $u, v \in \mathbb{R}$ , lassen sich unendlich viele arithmetische Folgen  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  2. Ordnung angeben, deren Differenzenfolge gleich  $b_n$  ist, nämlich die quadratischen Folgen  $c_n = \frac{1}{2} \cdot u \cdot n^2 + \left(v - \frac{1}{2} \cdot u\right) \cdot n + w$  mit beliebigem  $w \in \mathbb{R}$ .

#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 16.2:** Die quadratische Folge  $(c_n)$  findet man mithilfe des Ansatzes  $c_n = \alpha \cdot n^2 + \beta \cdot n + \gamma$ . Hiermit berechnet man die Folgenreihe für die zugehörige Differenzenfolge und vergleicht diesen Term mit der Folgenreihe  $b_n = u \cdot n + v$ . Hieraus ergibt sich ein Zusammenhang zwischen den Koeffizienten  $\alpha, \beta, \gamma$  und  $u, v$ , aus dem man  $u, v$  bestimmen kann. Führen Sie diese Rechnung und den Koeffizientenvergleich durch.

Eine Rechnung wie in **A 16.2** ist allgemein möglich, d. h., für arithmetische Folgen  $k$ -ter Ordnung kann man unendlich viele arithmetische Folgen  $(k + 1)$ -ter Ordnung finden, deren Differenzenfolge genau die arithmetische Folge  $k$ -ter Ordnung ist, die man betrachtet.

Aus den o. a. Beispielen und den gerade gegebenen Informationen wird deutlich:

#### Satz

##### Darstellung des Terms einer arithmetischen Folge mithilfe einer ganzrationalen Funktion

Die Folgenglieder einer arithmetischen Folge  $k$ -ter Ordnung lassen sich mithilfe des Terms einer ganzrationalen Funktion  $k$ -ten Grades (Polynom) berechnen, d. h., es gilt:

$$a(n) = a_k \cdot n^k + a_{k-1} \cdot n^{k-1} + \dots + a_1 \cdot n^1 + a_0$$

Um den Term der Summenfolge  $s(n)$  einer arithmetischen Folge  $k$ -ter Ordnung zu bestimmen, muss also ein Ansatz mit einer ganzrationalen Funktion  $(k + 1)$ -ten Grades gemacht werden. Dann kann mithilfe der ersten Folgenglieder der Summenfolge der zugehörige Funktionsterm ermittelt werden.

Für die Herleitung einer Summenformel für die Folge der  $n$ -ten Potenzen der natürlichen Zahlen, also einer arithmetischen Folge  $(n + 1)$ -ter Ordnung, benötigt man  $n + 2$  Gleichungen. Um  $n + 2$  Gleichungen aufstellen zu können, genügt es, die ersten  $n + 2$  Folgenglieder zu bilden. Wenn man bei 0 beginnt, reduziert sich das Gleichungssystem auf  $n + 1$  Gleichungen.

Für die im Folgenden betrachteten Beispiele benötigt man die ersten Folgenglieder der Summenfolgen von natürlichen Zahlen, Quadratzahlen, Kubikzahlen, der vierten Potenz von natürlichen Zahlen. Hierbei kann man auf [Abb. 16.1](#) zurückgreifen. Das von

Potenzen				Summen der Potenzen			
$k$	$k^2$	$k^3$	$k^4$	$\Sigma k$	$\Sigma k^2$	$\Sigma k^3$	$\Sigma k^4$
0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	3	5	9	17
3	9	27	81	6	14	36	98
4	16	64	256	10	30	100	354
5	25	125	625	15	55	225	979
6	36	216	1296	21	91	441	2275
7	49	343	2401	28	140	784	4676
8	64	512	4096	36	204	1296	8772
9	81	729	6561	45	285	2025	15333
10	100	1000	10000	55	385	3025	25333

**Abb. 16.1** Natürliche Zahlen und deren Potenzen (bis zum Grad 4) und deren fortgesetzte Summen

Gottfried Wilhelm Leibniz eingeführte Summensymbol  $\Sigma$  (= griechischer Großbuchstabe Sigma, entspricht dem Buchstaben S für Summe) wird als Kurzschreibweise für das Bilden der Summen der genannten Zahlen verwendet.

#### Beispiel 1: Berechnung der Summe der ersten $n$ Quadratzahlen

Ansatz mit einer ganzrationalen Funktion 3. Grades:

$$s(n) = a \cdot n^3 + b \cdot n^2 + c \cdot n + d$$

Der Abb. 16.1 entnimmt man:

$$s(0) = 0; \quad s(1) = 1; \quad s(2) = 5; \quad s(3) = 14$$

Wegen  $s(0) = 0$  folgt unmittelbar  $d = 0$ .

Gelöst werden muss also das folgende lineare Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Variablen:

$$\begin{cases} 1a + 1b + 1c = 1 \\ 8a + 4b + 2c = 5 \\ 27a + 9b + 3c = 14 \end{cases}$$

Dieses hat die Lösung  $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{1}{6}\right)$ .

Welche Schritte notwendig sind, um die Lösung zu bestimmen, wird weiter unten erläutert.

Es gilt also:  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$

Wenn man den Term in Linearfaktoren zerlegt, lässt sich die Formel eher merken:

$$\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{1}{3}n \cdot \left(n^2 + \frac{3}{2}n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} \cdot n \cdot (n+1) \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$$

Diese Formel war bereits in Kap. 2 hergeleitet worden (vgl. dort Formel (2.4)).

### Beispiel 2: Berechnung der Summe der ersten $n$ Kubikzahlen

Ansatz mit einer ganzrationalen Funktion 4. Grades:

$$s(n) = a \cdot n^4 + b \cdot n^3 + c \cdot n^2 + d \cdot n + e$$

Der Abb. 16.1 entnimmt man:

$$s(0) = 0; \quad s(1) = 1; \quad s(2) = 9; \quad s(3) = 36; \quad s(4) = 100$$

Wegen  $s(0) = 0$  folgt unmittelbar  $e = 0$ .

Gelöst werden muss also das folgende lineare Gleichungssystem mit vier Gleichungen und vier Variablen:

$$\begin{cases} 1a + 1b + 1c + 1d = 1 \\ 16a + 8b + 4c + 2d = 9 \\ 81a + 27b + 9c + 3d = 36 \\ 256a + 64b + 16c + 4d = 100 \end{cases}$$

Dieses hat die Lösung  $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; 0\right)$ .

Hieraus ergibt sich

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \frac{1}{4} \cdot n^2 \cdot (n^2 + 2n + 1) = \left[\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)\right]^2,$$

vgl. auch Formel (2.5).

### Systematische Lösung der linearen Gleichungssysteme mithilfe des Additionsverfahrens

Bei der Lösung von linearen Gleichungssystemen empfiehlt sich ein systematisches Verfahren; ein solches ist das sogenannte Additionsverfahren. Bei diesem wird eine der Zeilen festgehalten und ein passendes Vielfaches dieser Zeile zu einer anderen Zeile addiert – mit dem Ziel, in der anderen Zeile eine Variable zu eliminieren.

**Anwendung des Additionsverfahrens bei Beispiel 1**

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} 1a + 1b + 1c = 1 \\ 8a + 4b + 2c = 5 \\ 27a + 9b + 3c = 14 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 1a + 1b + 1c = 1 \\ 7a + 3b + 1c = 4 \\ 19a + 5b + 1c = 9 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 1a + 1b + 1c = 1 \\ 6a + 2b = 3 \\ 12a + 2b = 5 \end{array} \right| \\ \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 1a + 1b + 1c = 1 \\ 6a + 2b = 3 \\ 6a = 2 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} c = \frac{1}{6} \\ b = \frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{3} \end{array} \right| \end{array}$$

Man hält jeweils die 1. Zeile fest, addiert das  $(-1)$ -Fache der 1. Zeile zur 2. Zeile, das  $(-1)$ -Fache der 2. Zeile zur 3. Zeile. Wenn dann dies wiederholt wird, hat man bereits die letzte Variable eliminiert. Dann hält man außer der 1. Zeile auch die 2. Zeile fest und addiert das  $(-1)$ -Fache der 2. Zeile zur 3. Zeile, sodass dort die zweite Variable eliminiert wird. Das  $3 \times 3$ -Gleichungssystem hat jetzt Dreiecksgestalt und man kann die Variablen schrittweise von unten nach oben bestimmen.

Dass dies so wunderbar funktioniert, hängt mit den Koeffizienten zusammen: Die Koeffizienten der Variablen  $a$ ,  $b$ ,  $c$  bilden jeweils arithmetische Folgen 3., 2. bzw. 1. Ordnung: Das Addieren mit dem  $(-1)$ -Fachen der vorangehenden Zeile entspricht dann jeweils dem Bilden der Differenzenfolge.

**Anwendung des Additionsverfahrens bei Beispiel 2**

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} 1a + 1b + 1c + 1d = 1 \\ 16a + 8b + 4c + 2d = 9 \\ 81a + 27b + 9c + 3d = 36 \\ 256a + 64b + 16c + 4d = 100 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 1a + 1b + 1c + 1d = 1 \\ 15a + 7b + 3c + 1d = 8 \\ 65a + 19b + 5c + 1d = 27 \\ 175a + 37b + 7c + 1d = 64 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 1a + 1b + 1c + 1d = 1 \\ 14a + 6b + 2c = 7 \\ 50a + 12b + 2c = 19 \\ 110a + 18b + 2c = 37 \end{array} \right| \Leftrightarrow \\ \left| \begin{array}{l} 1a + 1b + 1c + 1d = 1 \\ 14a + 6b + 2c = 7 \\ 36a + 6b = 12 \\ 60a + 6b = 18 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 1a + 1b + 1c + 1d = 1 \\ 14a + 6b + 2c = 7 \\ 36a + 6b = 12 \\ 24a = 6 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} d = 0 \\ c = \frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{4} \end{array} \right| \end{array}$$

**Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen**

**A 16.3:** Stellen Sie das lineare Gleichungssystem auf, das zur Bestimmung der Summe der vierten [fünften] Potenzen der natürlichen Zahlen erforderlich ist. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem und bestimmen Sie so die Koeffizienten der ganzrationalen Funktion  $s(n)$ , mit deren Hilfe die Summe der vierten [fünften] Potenzen direkt berechnet werden kann.

## 16.2 Koeffizientenbestimmung durch Vergleich aufeinanderfolgender Glieder der Summenfolge

Der Term zur Berechnung einer Summe der Potenzen der  $(n + 1)$  ersten natürlichen Zahlen kann auch rekursiv (rückwärtsgehend) bestimmt werden: Man erhält die Summe  $s_k(n + 1)$  der  $k$ -ten Potenzen der ersten  $(n + 1)$  natürlichen Zahlen, indem man zur Summe  $s_k(n)$  der  $k$ -ten Potenzen der ersten  $n$  natürlichen Zahlen die  $k$ -te Potenz der natürlichen Zahl  $(n + 1)$  addiert:

$$s_k(n + 1) = s_k(n) + (n + 1)^k$$

### Beispiel: Rekursive Bestimmung von Koeffizienten

Die Summe der ersten  $n + 1$  Quadratzahlen berechnet sich rekursiv aus  $s_2(n + 1) = s_2(n) + (n + 1)^2$ .

Aus dem Polynomialansatz ergibt sich

sowie 
$$s_2(n) = a \cdot n^3 + b \cdot n^2 + c \cdot n + d$$

Daher gilt: 
$$s_2(n + 1) = a \cdot (n + 1)^3 + b \cdot (n + 1)^2 + c \cdot (n + 1) + d.$$

$$\left[ a \cdot n^3 + b \cdot n^2 + c \cdot n + d \right] + (n + 1)^2 = a \cdot (n + 1)^3 + b \cdot (n + 1)^2 + c \cdot (n + 1) + d$$

Die binomischen Terme können entwickelt werden:

$$\begin{aligned} & a \cdot n^3 + b \cdot n^2 + c \cdot n + d + (n^2 + 2n + 1) \\ &= a \cdot (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + b \cdot (n^2 + 2n + 1) + c \cdot (n + 1) + d \end{aligned}$$

Ordnen nach Potenzen von  $n$ :

$$\begin{aligned} & (a - a) \cdot n^3 + (b + 1 - 3a - b) \cdot n^2 + (c + 2 - 3a - 2b - c) \cdot n \\ & + (d + 1 - a - b - c - d) = 0, \end{aligned}$$

$$\text{also } (1 - 3a) \cdot n^2 + (2 - 3a - 2b) \cdot n + (1 - a - b - c) = 0.$$

Da diese Gleichung für beliebige natürliche Zahlen  $n \in \mathbb{N}$  gilt, müssen die Klammerterme jeweils gleich null sein.

So erhält man schrittweise aus  $1 - 3a = 0$  den Wert  $a = \frac{1}{3}$ , aus  $2 - 3a - 2b = 0$  dann den Wert  $b = \frac{1}{2}$  und aus  $1 - a - b - c = 0$  den Wert  $c = \frac{1}{6}$ . Dass  $d = 0$  ist, ergibt sich aus  $s(0) = 0$ .

Im Prinzip kann man also auch nach dieser Methode des Koeffizientenvergleichs die Koeffizienten der ganzrationalen Funktionen  $(n + 1)$ -ten Grades bestimmen, um so eine Formel zur Berechnung der Summe von  $n$ -ten Potenzen natürlicher Zahlen aufzustellen. Hierzu wird der allgemeine binomische Lehrsatz benötigt.

### Formel

#### Allgemeiner binomischer Lehrsatz (Potenz einer Summe von zwei reellen Zahlen)

Für  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt:

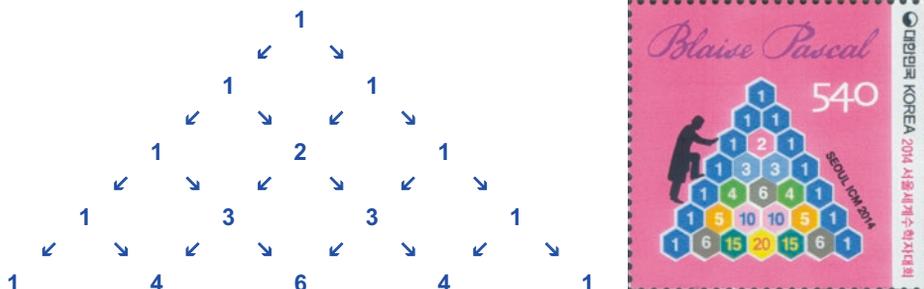
$$(a + b)^2 = 1a^2b^0 + 2a^1b^1 + 1a^0b^2$$

$$(a + b)^3 = 1a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1a^0b^3$$

$$(a + b)^4 = 1a^4b^0 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1a^0b^4$$

usw.

Die Vorzahlen der Produkte der Potenzen von  $a$  und  $b$  werden – wegen des Zusammenhangs mit den binomischen Formeln – als **Binomialkoeffizienten** bezeichnet. Diese kann man beispielsweise im Pascal'schen Dreieck ablesen (vgl. das folgende Schema und die von Korea [Süd] herausgegebene Briefmarke anlässlich des Internationalen Mathematikerkongresses in Seoul 2014).



Binomialkoeffizienten kann man auch direkt mithilfe eines Bruchterms berechnen, bei dem im Zähler und im Nenner jeweils  $k$  Faktoren stehen. Dies ist jedoch nicht wirklich eine Bruchzahl, da sich alle Faktoren des Nenners wegkürzen lassen.

### Formel

#### Berechnung von Binomialkoeffizienten

Für  $n, k \in \mathbb{N}$  und  $0 \leq k \leq n$  gilt: 
$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}$$

Unter Verwendung der Schreibweise  $\binom{n}{k}$  für die Binomialkoeffizienten lassen sich die binomischen Formeln wie folgt notieren:

**Formel****Allgemeiner binomischer Lehrsatz (Potenz einer Summe von zwei reellen Zahlen)**

Für  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt:

$$(a + b)^2 = \binom{2}{0} \cdot a^2 b^0 + \binom{2}{1} \cdot a^1 b^1 + \binom{2}{2} \cdot a^0 b^2$$

$$(a + b)^3 = \binom{3}{0} \cdot a^3 b^0 + \binom{3}{1} \cdot a^2 b^1 + \binom{3}{2} \cdot a^1 b^2 + \binom{3}{3} \cdot a^0 b^3$$

$$(a + b)^4 = \binom{4}{0} \cdot a^4 b^0 + \binom{4}{1} \cdot a^3 b^1 + \binom{4}{2} \cdot a^2 b^2 + \binom{4}{3} \cdot a^1 b^3 + \binom{4}{4} \cdot a^0 b^4$$

usw.

**Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen**

**A 16.4:** Bestimmen Sie die Formel zur Berechnung der Summe der ersten  $n$  Kubikzahlen (der Summe der ersten vierten Potenzen) nach der rekursiven Methode.

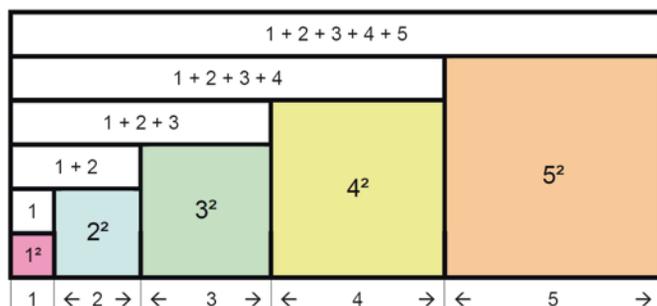
**A 16.5:** Im Beispiel oben wurden die Koeffizienten  $a, b, c, d$  aus der Gleichung: gewonnen. Ersetzen Sie in dieser Gleichung die konkreten Binomialkoeffizienten

$$\begin{aligned} a \cdot n^3 + b \cdot n^2 + c \cdot n + d + (n^2 + 2n + 1) \\ = a \cdot (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + b \cdot (n^2 + 2n + 1) + c \cdot (n + 1) + d \end{aligned}$$

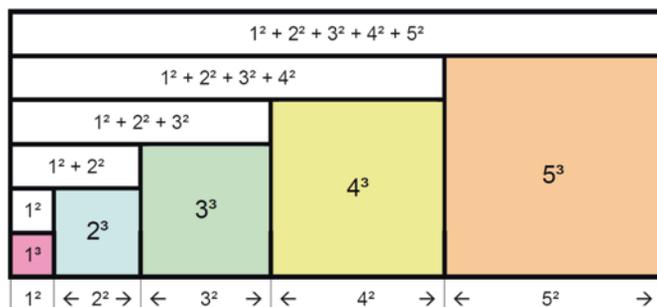
durch die symbolische Schreibweise. Wie lauten dann die Gleichungen im letzten Schritt der Umformungen?

### 16.3 Alhazens Herleitung der Summenformeln für höhere Potenzen

In Abschn. 2.5 wurde erläutert, mit welchem Ansatz Abu Ali al-Hasan ibn al-Haitham (Alhazen) eine Formel für die Summe der ersten  $n$  Quadratzahlen herleitete. Quadratzahlen werden in der hierfür verwendeten Rechteckfigur naheliegenderweise durch Quadrate dargestellt.



Ibn al-Haitham fand auch einen Weg, eine Formel für höhere Potenzsummen herzuleiten. Dabei benutzte er im Prinzip die gleiche Rechteckfigur, deutete sie jedoch anders, und zwar so, dass die Quadrate Rechtecke darstellen sollen mit den Höhen 1, 2, 3, ... und den „Breiten“  $1^2, 2^2, 3^2, \dots$ , d. h., die „Quadrate“ haben die Flächeninhalte  $1^3, 2^3, 3^3, \dots$



In der so veränderten Rechteckfigur gilt daher der folgende Zusammenhang:

Die Summe der „Flächeninhalte“ der einzelnen Flächenstücke ist gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks mit der Breite  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$  und der Höhe  $n + 1$ :

$$\begin{aligned} & [1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3] + [1^2 + (1^2 + 2^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2) + \dots + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)] \\ &= (n + 1) \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) \end{aligned}$$

Nach Anwenden der bereits hergeleiteten Summenformeln

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \text{ und } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} & [1^3 + 2^3 + \dots + n^3] + \left[ \left( \frac{1}{3} \cdot 1^3 + \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{6} \cdot 1 \right) + \left( \frac{1}{3} \cdot 2^3 + \frac{1}{2} \cdot 2^2 + \frac{1}{6} \cdot 2 \right) + \dots + \left( \frac{1}{3} \cdot n^3 + \frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{1}{6} \cdot n \right) \right] \\ &= (n + 1) \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) \end{aligned}$$

Und nach Umordnen und Zusammenfassen gleichartiger Terme:

$$\begin{aligned} & [1^3 + 2^3 + \dots + n^3] + \left[ \frac{1}{3} \cdot (1^3 + 2^3 + \dots + n^3) + \frac{1}{2} \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + \frac{1}{6} \cdot (1 + 2 + \dots + n) \right] \\ &= (n+1) \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) \\ &\Leftrightarrow \frac{4}{3} \cdot (1^3 + 2^3 + \dots + n^3) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) - \frac{1}{6} \cdot (1 + 2 + \dots + n) \\ &\Leftrightarrow 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{3}{4} \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot (1 + 2 + \dots + n) \end{aligned}$$

Setzt man jetzt die bekannten Summenformeln ein, ergibt sich

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{3}{4}n + \frac{3}{8}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n\right) - \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\right),$$

also

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{3}{8}n^3 + \frac{1}{8}n^2 + \frac{1}{8}n^3 + \frac{3}{16}n^2 + \frac{1}{16}n - \frac{1}{16}n^2 - \frac{1}{16}n,$$

und weiter

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2.$$

Dieser Summenterm kann noch weiter umgeformt werden zu:

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4} \cdot n^2 \cdot (n+1)^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)\right)^2$$

Diese Idee ist allgemein anwendbar und führt zu Summenformeln für beliebige Potenzen.

#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 16.6:** Leiten Sie eine Formel für die Summe der vierten Potenzen der ersten  $n$  natürlichen Zahlen mithilfe der Methode von al-Haitham her. Fertigen Sie dazu eine Skizze an. Verwenden Sie bei den Umformungen die Summenformeln für natürliche Zahlen, Quadratzahlen und Kubikzahlen.

Für den speziellen Fall der Formel für die Summe der Quadratzahlen schlägt George Pólya, amerikanischer Mathematiker ungarischer Herkunft, in Band 1 seines Buches *Mathematik und plausible Schließen* (Birkhäuser Verlag, Basel 1962, S. 167 ff.) vor, die Summenfolgen der Folge der natürlichen Zahlen und der Quadratzahlen dadurch miteinander zu vergleichen, dass man deren Quotienten betrachtet (vgl. Abb. 16.2).

Offensichtlich lassen sich die Quotienten der betrachteten Glieder der beiden Summenfolgen ( $\sum k$  bzw.  $\sum k^2$ ) in der Form  $(2n+1)/3$  darstellen.

**Abb. 16.2** Vergleich der Summen von natürlichen Zahlen und von Quadratzahlen

$k$	$k^2$	$\Sigma k$	$\Sigma k^2$	$\Sigma k^2 / \Sigma k$
1	1	1	1	$1/1 = 3/3$
2	4	3	5	$5/3$
3	9	6	14	$14/6 = 7/3$
4	16	10	30	$30/10 = 9/3$
5	25	15	55	$55/15 = 11/3$
6	36	21	91	$91/21 = 13/3$
7	49	28	140	$140/28 = 15/3$
8	64	36	204	$204/36 = 17/3$
9	81	45	285	$285/45 = 19/3$
10	100	55	385	$385/55 = 21/3$

Hieraus gewinnt man dann die Folgenrechte für die Summenfolge der Quadratzahlen.

$$\frac{\sum_{k=1}^n k^2}{\sum_{k=1}^n k} = \frac{\sum_{k=1}^n k^2}{\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)} = \frac{2n+1}{3}, \text{ also } \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1) \cdot \frac{2n+1}{3} = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1).$$

Da damit nur die Folgenrechte *entdeckt*, aber nicht *bewiesen* ist, schließt sich bei Pólya das Beweisverfahren der vollständigen Induktion an.

Dieser schöne Weg, eine Summenformel zu *entdecken*, gelingt jedoch nur im Fall  $\Sigma k^2 / \Sigma k$ , wie aus der Herleitung von al-Haitham deutlich wird (vgl. **A 16.7**).

#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 16.7:** Bei den Umformungen, die sich aus dem Ansatz al-Haithams ergeben, kommt man an eine Stelle, bei der die Kenntnisse über die Summen von niedrigeren Potenzen benötigt werden.

Bei der Herleitung der Summe der Quadratzahlen ist dies die Gleichung:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \left(\frac{2}{3}n + \frac{1}{3}\right) \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

bei der Herleitung der Summe der Kubikzahlen die Gleichung:

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{3}{4} \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2\right) - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot (1 + 2 + \dots + n)$$

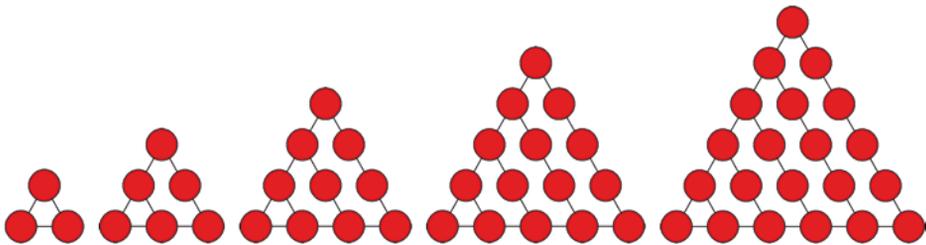
Erläutern Sie, warum gerade an dieser Stelle ablesbar ist, dass die Idee Pólyas nicht bei der Summenformel für Kubikzahlen anwendbar ist.

## 16.4 Thomas Harriot entdeckt den Zusammenhang zwischen Dreiecks- und Tetraederzahlen

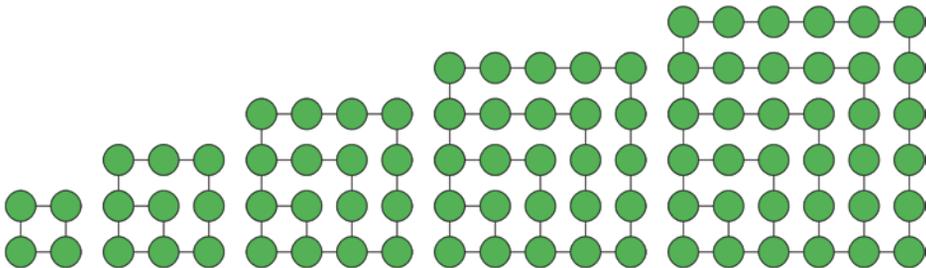
Bereits seit dem Altertum beschäftigten sich Mathematiker mit **figurierten Zahlen**, d. h. mit Zahlen, die sich durch eine besondere geometrische Figur darstellen lassen.

Den **Polygonalzahlen** liegt als geometrische Figur ein regelmäßiges Vieleck (Polygon) zugrunde.

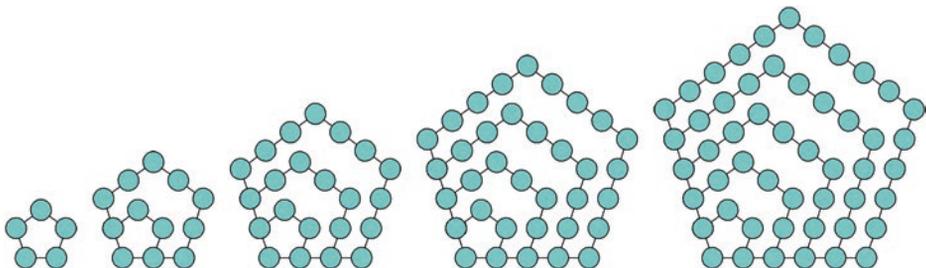
Zu diesen gehören beispielsweise die **Dreieckszahlen** (1, 3, 6, 10, 15, 21, ...),



die Quadratzahlen (1, 4, 9, 16, 25, 36, ...)



sowie die Fünfeckszahlen (1, 5, 12, 22, 35, 51, ...):

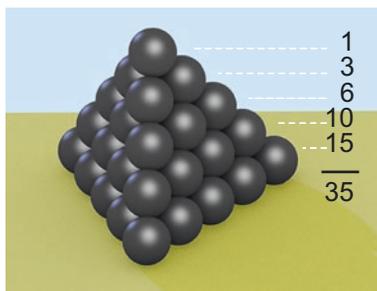


(In den o. a. Abbildungen wurde das aus nur einem „Punkt“ bestehende erste Folgenglied jeweils weggelassen.)

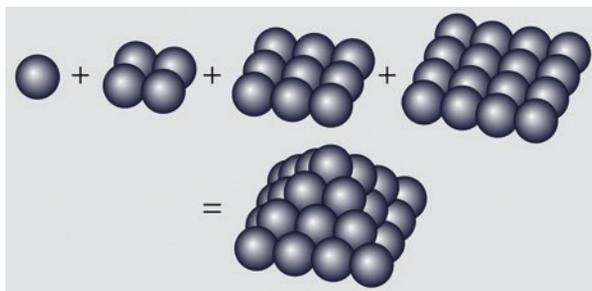
Eine Folge von Polygonalzahlen bildet jeweils eine arithmetische Folge 2. Ordnung (da dem Zuwachs der Folgenglieder jeweils eine arithmetische Folge 1. Ordnung zugrunde liegt).

Die zu einer Folge von Polygonalzahlen gehörende Summenfolge wird als Folge von **Pyramidalzahlen** bezeichnet. Betrachtet man nämlich statt der zweidimensionalen Kreise dreidimensionale Kugeln, dann lassen sich diese räumlich zu Pyramiden „stapeln“.

Aus der Folge der Dreieckszahlen 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... wird durch Summenbildung die Folge der **Tetraederzahlen** 1, 4, 10, 20, 35, 56, ... – in der folgenden Abbildung ist die Tetraederzahl 35 veranschaulicht:



Aus der Folge der Quadratzahlen 1, 4, 9, 16, 25, 36, ... wird durch Summenbildung die Folge der quadratischen Pyramidenzahlen 1, 5, 14, 30, 55, 91, ... – in der folgenden Abbildung ist veranschaulicht, wie die quadratische Pyramidenzahl 30 zustande kommt:



(Quelle: Square pyramidal number, David Eppstein/English Wikipedia/public domain)

Der englische Mathematiker Thomas Harriot (1560–1621) machte bei der Untersuchung von Dreiecks- und Tetraederzahlen eine bemerkenswerte Entdeckung. In seiner Schrift *De Numeris Triangularibus et inde De Progressionibus Arithmeticis Magisteria Magna* („Über Dreieckszahlen und hieraus ein großer Lehrsatz über arithmetische Progressionen“, ca. 1611) stellte er eine Tabelle auf, in der er die Seitenlängen (*laterals*), die Dreieckszahlen (*triangulars*) und die Pyramidalzahlen (*pyramidalis*) eintrug, außerdem noch eine Zeile und Spalte für die Längeneinheit (*units*) ergänzte.



Dreieck, also die Binomialkoeffizienten auf. Anders als bei den binomischen Formeln bestehen die Summen hier jedoch aus maximal vier Summanden.

Die letzte Spalte in der Tabelle links enthält die ersten sechs Folgenglieder der Summenfolge der Quadratzahlen. Wie man aus der Tabelle rechts durch Vergleich entnehmen kann, berechnet sich beispielsweise das 6. Folgenglied als Summe von Produkten aus „Startzahlen“ und Binomialkoeffizienten:

$$1 \cdot d + 5 \cdot c + 10 \cdot b + 10 \cdot a = 1 \cdot 1 + 5 \cdot 4 + 10 \cdot 5 + 10 \cdot 2 = 91$$

Um das 6. Folgenglied der Summenfolge zu berechnen, benötigt man die ersten vier Binomialkoeffizienten aus der 5. Zeile des Pascal'schen Dreiecks.

Um allgemein das  $n$ -te Folgenglied der Summenfolge der Quadratzahlen zu berechnen, benötigt man die ersten vier Binomialkoeffizienten aus der  $(n-1)$ -ten Zeile des Pascal'schen Dreiecks.

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 &= 1 \cdot \binom{n-1}{0} + 4 \cdot \binom{n-1}{1} + 5 \cdot \binom{n-1}{2} + 2 \cdot \binom{n-1}{3} \\ &= 1 + 4 \cdot \frac{n-1}{1} + 5 \cdot \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2 \cdot 1} + 2 \cdot \frac{(n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \dots \\ &= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) \end{aligned}$$

#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 16.8:** Begründen Sie: Wenn Harriot die Summenfolge mit dem Folgenglied 0 begonnen hätte, dann hätte er das 6. Folgenglied 91 wie folgt berechnen müssen:

$$1 \cdot d + 6 \cdot c + 15 \cdot b + 20 \cdot a = 1 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 15 \cdot 3 + 20 \cdot 2 = 91$$

Leiten Sie auch hieraus die Summenformel für Quadratzahlen ab.

Die Harriot'sche Methode kann entsprechend auch angewandt werden, wenn man eine Formel für die Summe der ersten  $n$  Kubikzahlen bestimmt.

				0					e
			1	1					e+d
		12	7	8	1				e+2d+c
6		18	19	27	9				e+3d+3c+b
6	6	24	37	64	36	a	b+a		e+4d+6c+4b+a
	6	30	61	125	100	a	b+2a		e+5d+10c+10b+5a
			91	225	216		b+3a		e+6d+15c+20b+15a
				441			c+4b+6a		
							c+2b+a		
							c+3b+3a		
							c+4b+6a		
							d+5c+10b+10a		
							d+4c+6b+4a		
							d+3c+3b+a		
							d+2c+b		
							d+c		
							c+b		
							c		
							b		
							a		
							a		

In der letzten Spalte der Tabelle links stehen die ersten Glieder der Summenfolge, beginnend mit Startwert 0 (deshalb stehen in der vorletzten Spalte gerade die Glieder der Folge der Kubikzahlen). Die Summenterme in der letzten Spalte der Tabelle rechts bestehen aus maximal fünf Summanden.

Für das  $n$ -te Folgenglied der Summenfolge ergibt sich hier:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 &= 0 \cdot \binom{n}{0} + 1 \cdot \binom{n}{1} + 7 \cdot \binom{n}{2} + 12 \cdot \binom{n}{3} + 6 \cdot \binom{n}{4} \\ &= 0 + 1 \cdot \frac{n}{1} + 7 \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2 \cdot 1} + 12 \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} + 6 \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \dots \\ &= \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 \end{aligned}$$

### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 16.9:** Bestimmen Sie mithilfe der Harriot'schen Methode eine Formel für die Summe der vierten Potenzen.

## 16.5 Fermats Entdeckung

Der Franzose Pierre de Fermat (1607–1665) war als Jurist in Toulouse tätig; in seiner Freizeit beschäftigte er sich intensiv mit mathematischen Problemen. Insbesondere die Zahlentheorie hatte es ihm angetan.

Als 1994 endlich der Große Fermat'sche Satz (im Englischen: Fermat's Last Theorem, FLT) bewiesen werden konnte, nämlich dass für  $n > 2$  die  $n$ -te Potenz einer natürlichen Zahl nicht als Summe der  $n$ -ten Potenzen zweier natürlichen Zahlen (ungleich null) dargestellt werden kann, war dies der französischen Post eine Briefmarke wert. Allerdings enthält der Text der Briefmarke noch das Geburtsjahr 1601, das sich später als falsch herausstellte.



Über seine Entdeckungen führte Fermat einen umfangreichen Briefwechsel mit verschiedenen Mathematikern, unter anderem mit Marin Mersenne in Paris, der wiederum zahlreiche Briefpartner in ganz Europa über die bei ihm eingehenden Meldungen informierte.

Eine der Fermat'schen Entdeckungen war die Tatsache, dass sich Dreiecks- und Tetraederzahlen als Bruchterme mit aufsteigenden Faktoren notieren lassen. (Dies ist deswegen erstaunlich, weil es sich bei diesen Zahlen um *Anzahlen* handelt, also um natürliche Zahlen. Die Bruchterme sind tatsächlich keine wirklichen Bruchzahlen, da sich alle Faktoren im Nenner wegkürzen lassen).

In Abb. 16.3 sind in Spalte 2 und 3 die von ihm gefundenen Bruchterme notiert, mit denen man die Folge der Dreiecks- und der Tetraederzahlen berechnen kann. Die Tabelle enthält außerdem noch zwei weitere Spalten, in denen Produkte mit vier bzw. fünf aufsteigenden Faktoren (im Zähler beginnend mit  $n$ , im Nenner beginnend mit 1) stehen.

Nicht nur für die ersten beiden Spalten von Abb. 16.3 gilt folgende bemerkenswerte Eigenschaft:

Bestimmt man in einer Spalte die Summe der ersten  $n$  Zahlen, so erhält man die Zahl, die in der nächsten Spalte an der  $n$ -ten Stelle steht.

Beispielsweise steht die Summe der ersten fünf Zahlen der 2. Spalte, also  $1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 35$ , an der 5. Stelle der 3. Spalte (gelb unterlegt), und die Summe der ersten vier Zahlen der 3. Spalte, also  $1 + 5 + 15 + 35 = 56$ , steht an der 4. Stelle der 4. Spalte (grün unterlegt).

Da man die Summanden der 2. Spalte allgemein in der Form  $\frac{n \cdot (n+1)}{1 \cdot 2}$  notieren kann, bedeutet dies  $\frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2} + \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{n \cdot (n+1)}{1 \cdot 2} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

und entsprechend für die Zahlen der 3. Spalte

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

usw.

n	$\frac{n \cdot (n+1)}{1 \cdot 2}$	$\frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$	$\frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$	$\frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$
1	1	1	1	1
2	3	4	5	6
3	6	10	15	21
4	10	20	35	56
5	15	35	70	126
6	21	56	126	252
7	28	84	210	462
8	36	120	330	792
9	45	165	495	1287
10	55	220	715	2002

Abb. 16.3 Fermats Tabelle mit Bruchtermen

Man kann nun diese Gleichungen mit dem auf der linken Seite stehenden Nenner multiplizieren und erhält dann interessante Formeln:

### Formeln

#### Berechnung der Summe von Produkten benachbarter natürlicher Zahlen

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3}$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}{4}$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + \dots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \\ = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4)}{5}$$

usw.

Die linke Seite der ersten dieser beiden Gleichungen kann man auch wie folgt notieren:

$$1 \cdot (1+1) + 2 \cdot (2+1) + 3 \cdot (3+1) + \dots + n \cdot (n+1) \\ = (1^2 + 1) + (2^2 + 2) + (3^2 + 3) + \dots + (n^2 + n) \\ = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + (1 + 2 + 3 + \dots + n) \\ = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1),$$

also:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3} - \frac{n \cdot (n+1)}{2} \\ = \frac{n \cdot (n+1)}{6} \cdot [2 \cdot (n+2) - 3] \\ = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

Nach dem gleichen Verfahren kann man so schrittweise Summenformeln für höhere Potenzen von natürlichen Zahlen herleiten.

#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 16.10:** Bestimmen Sie mithilfe der Fermat'schen Methode eine Summenformel für Kubikzahlen (für vierte Potenzen von natürlichen Zahlen).

## 16.6 Pascals Methode zur Bestimmung von Formeln für Potenzsummen

Der französische Mathematiker und Philosoph Blaise Pascal (1623–1662) veröffentlichte im Jahr 1654 die Abhandlung *Traité du triangle arithmétique*, in der er verschiedene Eigenschaften des Zahlendreiecks beschrieb, das heute ihm zu Ehren als Pascal'sches Dreieck bezeichnet wird.



Ausgehend vom binomischen Lehrsatz für die dritte Potenz stellte er beispielsweise die Differenz zweier aufeinanderfolgender Kubikzahlen auf zwei Arten dar

$$(k + 1)^3 - k^3 = (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

und legte damit eine Tabelle an (vgl. Abb. 16.4).

Bildet man in Abb. 16.4 die Spaltensummen, dann fallen in der 2. Spalte alle Summanden bis auf die beiden Summanden  $(n + 1)^3$  und  $1^3$  weg, sodass sich für die Summe der ersten  $n$  Quadratzahlen Folgendes ergibt:

$k$	$(k+1)^3 - k^3$	$3k^2 + 3k + 1$
1	$2^3 - 1^3$	$3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$
2	$3^3 - 2^3$	$3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$
3	$3^3 - 2^3$	$3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1$
...	...	...
$n - 1$	$n^3 - (n - 1)^3$	$3 \cdot (n - 1)^2 + 3 \cdot (n - 1) + 1$
$n$	$(n + 1)^3 - n^3$	$3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1$
Summe	$(n + 1)^3 - 1^3$	$3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + 3 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n) + n \cdot 1$

**Abb. 16.4** Pascals Tabelle zur Berechnung der Summe von Kubikzahlen

$$\begin{aligned}
 & 3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) \\
 &= (n+1)^3 - 1^3 - 3 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n) - n \cdot 1 \\
 &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1 - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot (n^2 + n) - n \\
 &= n^3 + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{1}{2} \cdot n
 \end{aligned}$$

Also:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3} \cdot n^3 + \frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{1}{6} \cdot n$$

#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 16.11:** Bestimmen Sie die Summenformel für Kubikzahlen (für vierte Potenzen von natürlichen Zahlen) nach der Pascal'schen Methode.

## 16.7 Darstellung der Potenzsummen-Formeln mithilfe der Bernoulli-Zahlen

Der Schweizer Mathematiker Jakob Bernoulli (1655–1705) stellte fest, dass bei den Potenzsummen-Formeln nicht nur der binomische Lehrsatz und damit die Binomialkoeffizienten eine entscheidende Rolle spielen, sondern gewisse, in all diesen Formeln vorkommende Koeffizienten.



Diese werden auf Vorschlag des französischen Mathematikers Abraham de Moivre als Bernoulli-Zahlen  $B_k$  (mit  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) bezeichnet.

Die Potenzsummen-Formeln lassen sich dann wie folgt notieren:

- **Summe der ersten  $n$  natürlichen Zahlen**

$$\begin{aligned} S_1(n) &= 1^1 + 2^1 + 3^1 + \dots + n^1 = \frac{1}{2} \cdot \left[ \binom{2}{0} \cdot B_0 \cdot n^2 + \binom{2}{1} \cdot B_1 \cdot n^1 \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot [B_0 \cdot n^2 + 2 \cdot B_1 \cdot n^1] = \frac{1}{2} \cdot [n^2 + n^1] \end{aligned}$$

Also:  $B_0 = 1$  und  $B_1 = \frac{1}{2}$

- **Summe der ersten  $n$  Quadratzahlen**

$$\begin{aligned} S_2(n) &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3} \cdot \left[ \binom{3}{0} \cdot B_0 \cdot n^3 + \binom{3}{1} \cdot B_1 \cdot n^2 + \binom{3}{2} \cdot B_2 \cdot n^1 \right] \\ &= \frac{1}{3} \cdot [B_0 \cdot n^3 + 3 \cdot B_1 \cdot n^2 + 3 \cdot B_2 \cdot n^1] = \frac{1}{3} \cdot [n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n^1] \end{aligned}$$

Also:  $B_0 = 1$ ,  $B_1 = \frac{1}{2}$  und  $B_2 = \frac{1}{6}$

- **Summe der ersten  $n$  Kubikzahlen**

$$\begin{aligned} S_3(n) &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left[ \binom{4}{0} \cdot B_0 \cdot n^4 + \binom{4}{1} \cdot B_1 \cdot n^3 + \binom{4}{2} \cdot B_2 \cdot n^2 + \binom{4}{3} \cdot B_3 \cdot n^1 \right] \\ &= \frac{1}{4} \cdot [B_0 \cdot n^4 + 4 \cdot B_1 \cdot n^3 + 6 \cdot B_2 \cdot n^2 + 4 \cdot B_3 \cdot n^1] = \frac{1}{4} \cdot [n^4 + 2n^3 + n^2] \end{aligned}$$

Also:  $B_0 = 1$ ,  $B_1 = \frac{1}{2}$ ,  $B_2 = \frac{1}{6}$  und  $B_3 = 0$

**Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen**

**A 16.12:** Zeigen Sie, dass die Bernoulli'sche Entdeckung auch für die Summenformeln für vierte und fünfte Potenzen gilt, und bestimmen Sie so die Bernoulli-Zahlen  $B_4$  und  $B_5$ .

## 16.8 Bestimmung von Potenzsummen-Formeln mithilfe der Lagrange-Interpolation

Der französische Mathematiker italienischer Abstammung Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)



stellte eine Formel auf, mit deren Hilfe man aus den Stützstellen eines Graphen unmittelbar das zugehörige Polynom ablesen kann, dessen Graph durch die vorgegebenen Punkte verläuft.

Diesen Vorgang, zu gegebenen Punkten den Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion zu finden, deren Graph durch diese Punkte verläuft, bezeichnet man auch als **Interpolation**.

### Formel

#### Bestimmung einer ganzrationalen Funktion, deren Graph durch gegebene Punkte verläuft (Lagrange-Interpolation)

Durch drei gegebene Punkte  $P_0(x_0|y_0)$ ,  $P_1(x_1|y_1)$ ,  $P_2(x_2|y_2)$  verläuft der Graph einer ganzrationalen Funktion 2. Grades  $L_2$ , deren Funktionsterm berechnet werden kann mithilfe von:

$$L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \cdot y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \cdot y_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \cdot y_2$$

Durch vier gegebene Punkte  $P_0(x_0|y_0)$ ,  $P_1(x_1|y_1)$ ,  $P_2(x_2|y_2)$ ,  $P_3(x_3|y_3)$  verläuft der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades  $L_3$ , deren Funktionsterm berechnet werden kann mithilfe von:

$$L_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} \cdot y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \cdot y_1 \\ + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \cdot y_2 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \cdot y_3$$

usw.

*Hinweis:* Beim Ansatz wird vorausgesetzt, dass alle  $x$ -Koordinaten der gegebenen Punkte voneinander verschieden sind.

**Beispiel: Bestimmung eines Terms für die Summe der ersten  $n$  natürlichen Zahlen mithilfe der Lagrange-Interpolation**

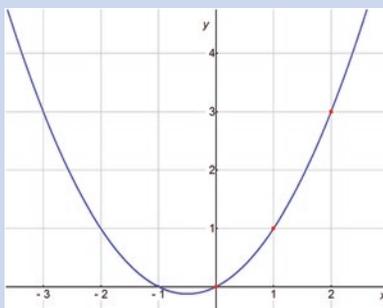
Die ersten drei Glieder der Summenfolge der natürlichen Zahlen sind:

$$s(0) = 0, s(1) = 1, s(2) = 1 + 2 = 3$$

Das heißt, man kennt die Punkte  $P_0(0|0)$ ,  $P_1(1|1)$ ,  $P_2(2|3)$ , durch die ein Graph 2. Grades, also eine quadratische Parabel, verlaufen soll (vgl. folgende Abbildung).

Das Interpolationspolynom lautet dann:

$$\begin{aligned} L_2(n) &= \frac{(n-1)(n-2)}{(0-1)(0-2)} \cdot 0 + \frac{(n-0)(n-2)}{(1-0)(1-2)} \cdot 1 + \frac{(n-0)(n-1)}{(2-0)(2-1)} \cdot 3 \\ &= (-1) \cdot n \cdot (n-2) + \frac{3}{2} \cdot n \cdot (n-1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{1}{2} \cdot n \end{aligned}$$



**Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen**

**A 16.13:** Bestimmen Sie die Summenformel für die Summe der ersten  $n$  Quadratzahlen (Kubikzahlen) mithilfe der Lagrange-Interpolation.

## 16.9 Hinweise auf weiterführende Literatur

Bei **Wikipedia** findet man in deutscher (englischer, französischer) Sprache weitere Informationen und Literatur zu den Stichwörtern:

- Arithmetische Folge/Arithmetische Reihe (Arithmetic progression, Suite arithmétique/Somme arithmétique)
- Faulhabersche Formel (Faulhaber's formula, Formule de Faulhaber)
- Quadratische Pyramidalzahl (Square pyramidal number, Nombre pyramidal carré)

- Tetraederzahl (Tetrahedral number, Nombre tétraédrique)
- Polynominterpolation (Polynomial interpolation, Interpolation polynomiale)

Umfangreiche fachliche Informationen findet man auf **Wolfram Mathworld** unter den Stichwörtern:

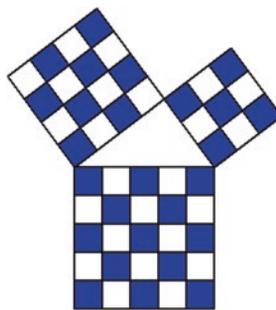
- Arithmetic Progression, Arithmetic Series, Faulhaber's Formula, Power Sum, Figurate Numbers, Pyramidal Number, Square Pyramidal Number, Lagrange Interpolating Polynomial

Eine umfassende historische Darstellung der verschiedenen, im Laufe der Jahrhunderte entwickelten Ansätze zur Herleitung der Formeln enthält der Beitrag *Sums of Powers of Positive Integers* von Janet Beery (University of Redlands), veröffentlicht im Rahmen des 100-jährigen Bestehens der Mathematical Association of America (MAA 100):

- <http://www.maa.org/press/periodicals/convergence/sums-of-powers-of-positive-integers>.

*Die Natur spricht die Sprache der Mathematik  
Die Buchstaben dieser Sprache sind Dreiecke, Kreise  
und andere mathematische Figuren.*

(Galileo Galilei, italienischer Physiker  
und Mathematiker, 1564–1642).



Der vielleicht berühmteste Satz der Geometrie trägt den Namen des griechischen Mathematikers Pythagoras von Samos, der im 6. Jahrhundert v. Chr. lebte.

## 17.1 Der Satz des Pythagoras und die klassischen Beweise von Euklid

Wenn man Erwachsene danach fragt, welche Erinnerungen sie an den *Satz des Pythagoras* haben, dann erhält man oft nur die Gleichung  $a^2 + b^2 = c^2$  als Antwort. Leider ist dabei in Vergessenheit geraten (oder nie ins Bewusstsein gerückt), dass der Satz

aus einer doppelten Aussage besteht. Die Umkehrung des Satzes ist nämlich in der Anwendung mindestens ebenso wichtig wie der Satz selbst. Allein aus der Kenntnis der Seitenlängen eines Dreiecks kann man erschließen, was für ein Dreieck (spitzwinklig, rechtwinklig oder stumpfwinklig) vorliegt.

Im Folgenden werden wir – wie üblich – die Eckpunkte eines Dreiecks mit  $A$ ,  $B$ ,  $C$  (im Gegenuhrzeigersinn) bezeichnen, die anliegenden Innenwinkel mit  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  und die jeweils gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks mit  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

### Satz

#### Satz des Pythagoras

Wenn in einem Dreieck der Winkel  $\gamma$  ein rechter Winkel ist, dann gilt zwischen den Längen der Katheten  $a$ ,  $b$  und der Hypotenuse  $c$  die Beziehung  $a^2 + b^2 = c^2$ . Es gilt aber auch die **Umkehrung des Satzes**

Wenn für die Seitenlängen von  $a$ ,  $b$ ,  $c$  eines Dreiecks die Gleichung  $a^2 + b^2 = c^2$  gilt, dann ist der Winkel  $\gamma$ , welcher der Seite  $c$  gegenüberliegt, ein rechter Winkel.

Ganzzahlige Zahlentripel  $(a; b; c)$ , welche die Bedingung  $a^2 + b^2 = c^2$  erfüllen, nennt man **pythagoreische Zahlentripel**, vgl. Abschn. 2.7. Ein Beispiel ist  $(3; 4; 5)$ , das in der Abbildung oben veranschaulicht ist.

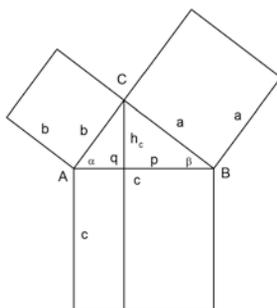
Es ist nicht bekannt, ob Pythagoras oder seine Schüler, die Pythagoreer, eine Begründung oder gar einen Beweis für die Gültigkeit des Satzes gekannt haben. Die ersten beiden dokumentierten Beweise findet man in den *Elementen* des Euklid (Buch I, Sätze 47 und 48, sowie Buch VI, Satz 31).

#### 17.1.1 Erster Beweis von Euklid

Der erste Beweis des Satzes benutzt die Eigenschaft, dass zwei Dreiecke flächengleich sind, wenn sie in einer Seite und der zugehörigen Höhe übereinstimmen (*Elemente* I, 38):

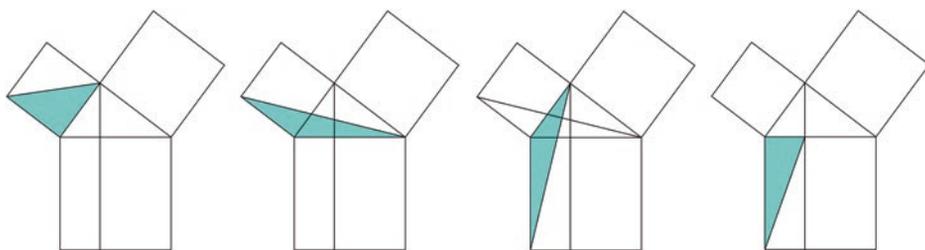
- *Dreiecke, deren Grundseiten auf einer Geraden liegen und gleich lang sind und deren Höhen auf einer Parallelen zur Grundseite liegen, sind gleich.*

Zum Beweis unterteilt man zunächst die gesamte Figur durch ein Lot vom Punkt  $C$  auf die Seite  $c$  und verlängert dies.



Dann halbiert man eines der Kathetenquadrate durch eine Diagonale und färbt eines der beiden entstehenden gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecke. Dieses halbe Kathetenquadrat ist gemäß *Elemente I, 38* flächengleich zu dem stumpfwinkligen Dreieck, das im zweiten Bild farbig unterlegt ist.

Durch Drehung dieses Dreiecks um  $90^\circ$  (im Uhrzeigersinn) erhält man ein hierzu kongruentes Dreieck in der dritten Abbildung und schließlich in der letzten Abbildung ein dazu flächengleiches rechtwinkliges Dreieck, die Hälfte des Rechtecks, das unterhalb des geteilten Kathetenquadrats liegt.



Damit ist bewiesen, dass das halbe Kathetenquadrat und das zugehörige halbe Rechteck den gleichen Flächeninhalt haben, also auch das Kathetenquadrat selbst und das zugehörige Rechteck.

Analog ist der Beweis für das andere Kathetenquadrat zu führen.

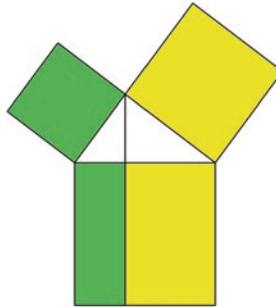
Bezeichnet man die beiden kürzeren Seiten der Rechtecke, die Abschnitte der Hypotenuse, wie üblich mit  $q$  (senkrechte Projektion von  $b$  auf  $c$ ) bzw. mit  $p$  (senkrechte Projektion von  $a$  auf  $c$ ), dann lässt sich das Zwischenergebnis als **Kathetensatz** des Euklid formulieren:

#### Satz

##### Kathetensatz des Euklid

Das Quadrat über einer Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist flächengleich zum Rechteck, das aus dem zugehörigen Hypotenusenabschnitt und der Hypotenuse gebildet wird:

$$a^2 = c \cdot p \text{ und } b^2 = c \cdot q$$



Diesen Satz wendet man nun an, um den Beweis des Satzes von Pythagoras abzuschließen:

$$a^2 + b^2 = c \cdot p + c \cdot q = c \cdot (p + q) = c \cdot c = c^2$$

Der Beweis der Umkehrung des Satzes von Pythagoras erfolgt an späterer Stelle (in Abschn. 17.5).

### 17.1.2 Zweiter Beweis von Euklid

Buch VI der *Elemente* beschäftigt sich mit Proportionen in der Geometrie. Hierauf beruht ein zweiter Beweis des Satzes von Pythagoras. Satz VI, 8 untersucht die oben betrachtete Teilung des rechtwinkligen Dreiecks durch die Höhe  $h_c$ :

*Zeichnet man in einem rechtwinkligen Dreieck die Höhe  $h_c$  ein, dann entstehen zwei rechtwinklige Teildreiecke, die zum ursprünglichen Dreieck ähnlich sind:*



Man kann daher eine dreifache Verhältnisgleichung für die Seitenlängen der drei rechtwinkligen Dreiecke aufstellen. Es gilt:

$$\text{(kürzere Kathete): (längere Kathete): (Hypotenuse)} = a : b : c = h : q : b = p : h : a$$

Dabei gilt die erste Proportion im großen (ungeteilten) Dreieck, die zweite im Teildreieck, das links von der Höhe  $h_c$  liegt, und die dritte im Teildreieck, das rechts von der Höhe  $h_c$  liegt.

In dieser dreifachen Verhältnisgleichung sind neun einzelne Verhältnisgleichungen enthalten, von denen drei durch Umstellung der Variablen ineinander überführt werden können.

Die Gleichungen kann man auch in Produktform notieren.

$$(1) a : b = h : q \Leftrightarrow a \cdot q = b \cdot h \text{ stimmt überein mit}$$

$$(9) q : b = h : a \Leftrightarrow a \cdot q = b \cdot h$$

$$(2) a : b = p : h \Leftrightarrow a \cdot h = b \cdot p \text{ stimmt überein mit}$$

$$(6) h : b = p : a \Leftrightarrow a \cdot h = b \cdot p$$

$$(3) h : q = p : h \Leftrightarrow h^2 = p \cdot q$$

$$(4) a : c = h : b \Leftrightarrow a \cdot b = c \cdot h \text{ stimmt überein mit}$$

$$(8) b : c = h : a \Leftrightarrow a \cdot b = c \cdot h$$

$$(5) a : c = p : a \Leftrightarrow a^2 = c \cdot p$$

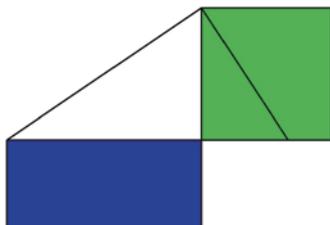
$$(7) b : c = q : b \Leftrightarrow b^2 = c \cdot q$$

Die Aussagen (5) und (7) entsprechen den beiden Kathetensätzen, aus denen – wie oben erläutert – die Aussage des Satzes von Pythagoras folgt. Aussage (3) ist der sogenannte **Höhensatz des Euklid** (vgl. auch Satz II, 14 der *Elemente*):

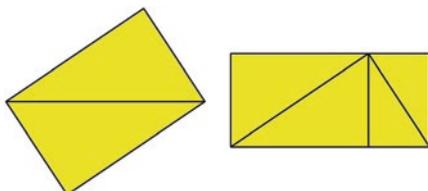
### Satz

#### Höhensatz des Euklid

Das Quadrat über der Höhe  $h_c$  eines rechtwinkligen Dreiecks ist flächengleich zum Rechteck, das aus den Hypotenusenabschnitten  $p$  und  $q$  gebildet wird.

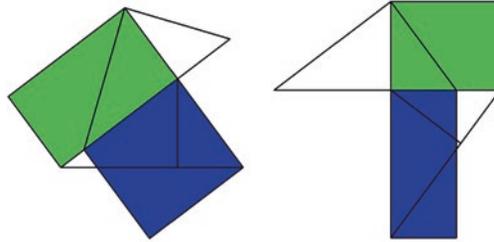


Die Aussagen (4) = (8) enthalten die beiden Möglichkeiten, den Flächeninhalt eines doppelten Dreiecks (also eines Rechtecks) zu berechnen:  $a \cdot b = c \cdot h$ .



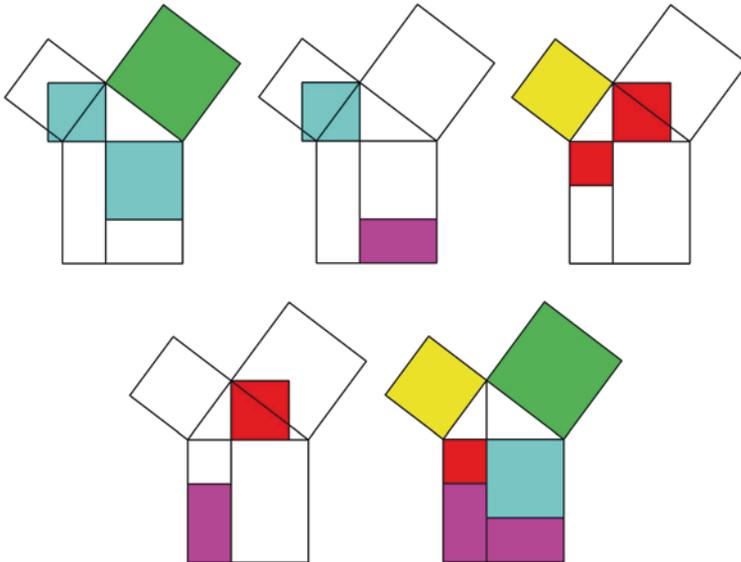
Die Aussagen  $(1) = (9)$  sowie  $(2) = (6)$  geben Beziehungen an, die i. A. nicht von Bedeutung sind; diese sind in den folgenden Abbildungen veranschaulicht.

$$a \cdot q = b \cdot h \quad a \cdot h = b \cdot p$$

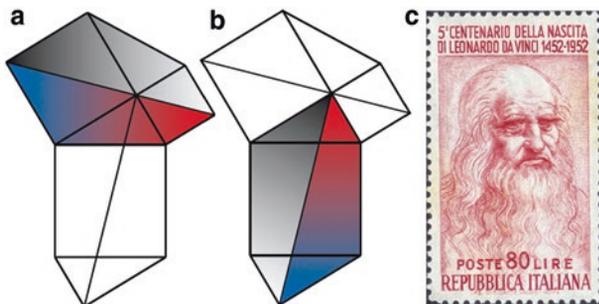


### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 17.1:** Erläutern Sie die folgende Abbildungssequenz.



**Abb. 17.1** a–c Leonardo-Beweis auf einen Blick (mit freundlicher Genehmigung von Dr. Peter Gallin) und die italienische Briefmarke, die anlässlich des 500. Geburtstags Leonardos herausgegeben wurde



## 17.2 „Schöne“ Beweise des Satzes von Pythagoras

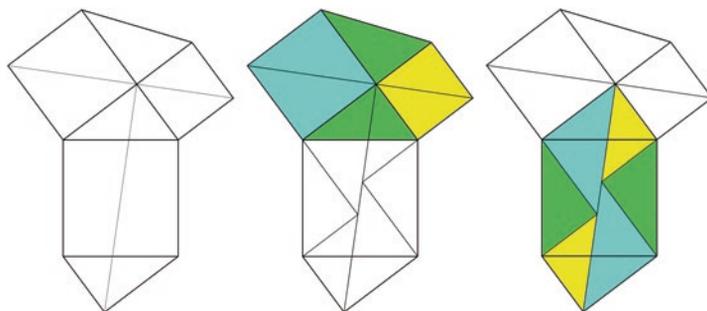
Es gibt weit über 100 Beweise des Satzes von Pythagoras – welcher ist wohl der schönste?

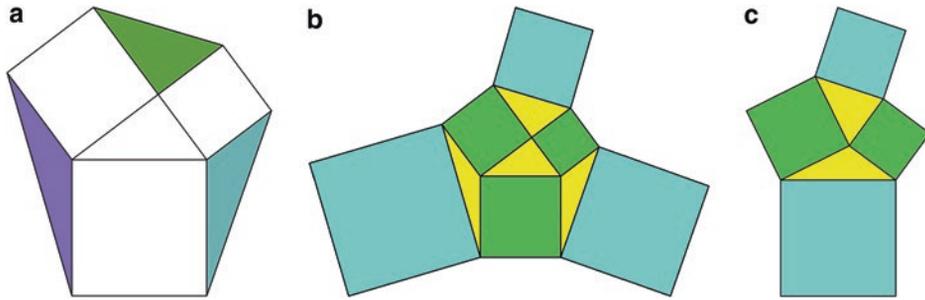
Was schön ist, muss jeder für sich selbst entscheiden. Ein Kriterium könnte sein: Man schaut einfach nur hin und sieht sofort und ohne Rechnung, dass die Kathetenquadrate zusammen so groß sind wie das Hypotenusenquadrat.

Dieses Kriterium erfüllt mit Sicherheit der Beweis, den Leonardo da Vinci (1452–1519) gefunden haben soll: Man ergänze die klassische Pythagoras-Figur oben und unten jeweils um das gegebene rechtwinklige Dreieck. Oben entsteht dann ein achsensymmetrisches, unten ein punktsymmetrisches Sechseck. Durch die eingezeichneten Hilfslinien sind die zueinander kongruenten Teilfiguren leicht erkennbar.

Ist der in Abb. 17.1 a, b dargestellte Beweis nicht wunderschön?

In den folgenden Abbildungen sind zugeordnete Teilflächen gleich gefärbt, sodass dann leichter nachvollziehbar ist, wieso die beiden Sechsecke flächengleich sind.





**Abb. 17.2** a–c Ergänztes bzw. verallgemeinerte Pythagoras-Figuren

### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 17.2:** In Abb. 17.2a ist die Pythagoras-Figur durch drei gefärbte Dreiecke ergänzt. Zeigen Sie, dass gilt:

1. Die drei gefärbten Dreiecke haben jeweils den gleichen Flächeninhalt wie das Ausgangsdreieck.
2. Bezeichnet man die jeweils längsten Seiten der gefärbten Dreiecke mit  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , dann gilt:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3 \cdot (a^2 + b^2 + c^2)$$

3. In Abb. 17.2b ist die Figur aus Abb. 17.2a durch Quadrate ergänzt. Begründen Sie: Die hellblau gefärbten Flächen sind zusammen dreimal so groß wie die grün gefärbten Flächen.
4. Die Eigenschaften (1) und (2) gelten sogar für beliebige Dreiecke, über deren Seiten Quadrate errichtet sind.

**A 17.3:** In Abb. 17.2c ist der folgende allgemeine Satz veranschaulicht:

*Werden über den Seiten eines beliebigen Dreiecks Quadrate gezeichnet und wird die Fläche zwischen zwei der Quadrate zu einem Dreieck ergänzt, auf das dann wiederum ein Quadrat gesetzt wird, dann sind die beiden Dreiecke (gelb) gleich groß, und die beiden äußeren Quadrate der Figur (hellblau) sind zusammen doppelt so groß wie die beiden inneren Quadrate (grün) zusammen.*

Untersuchen Sie, welche Eigenschaften gelten, wenn man die Figuren in Abb. 17.2b bzw. in Abb. 17.2c durch weitere Quadrate (nach rechts und nach links) ergänzt?

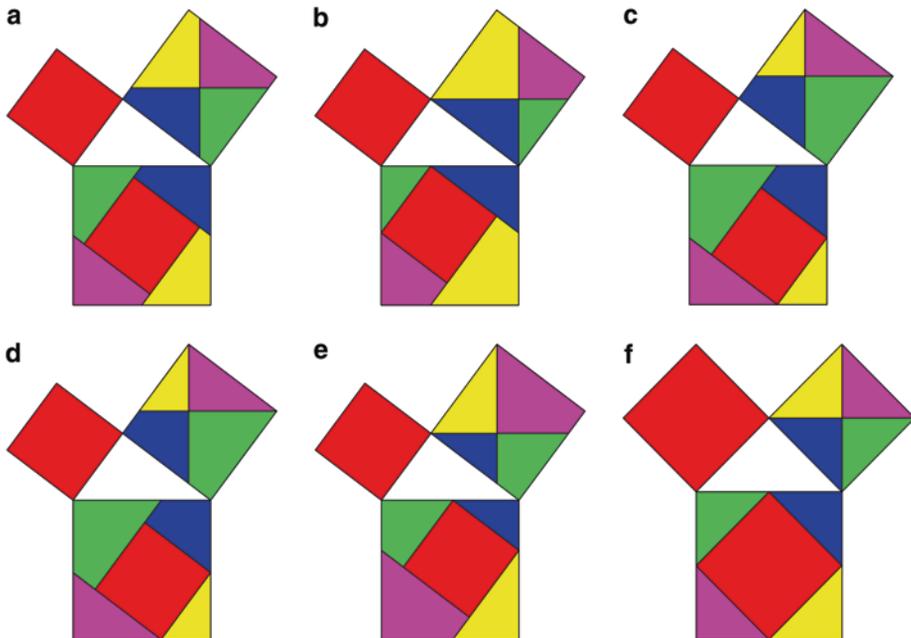
## 17.3 Zerlegungsbeweise des Satzes von Pythagoras

*Schön* sind auch die Puzzle-Beweise des Satzes von Pythagoras. Hierbei werden die Quadrate über den Seiten des rechtwinkligen Dreiecks derart in Teilflächen zerlegt, dass man mit den Puzzlestücken sowohl die beiden Kathetenquadrate als auch das Hypotenusenquadrat ausfüllen kann.

### 17.3.1 Ein Zerlegungsbeweis von Perigal

Der von französischen Huguenotten abstammende englische Hobby-Mathematiker Henry Perigal (1801–1898) fand in seiner Freizeit – er war Bankangestellter – eine Methode für eine unendlich große Anzahl von möglichen Zerlegungen, die mit nur fünf Puzzlestücken auskommt. (Übrigens war er von seiner Entdeckung so begeistert, dass er die symmetrische Variante der von ihm gefundenen Zerlegung auf seinen Grabstein meißeln ließ.)

Bei diesem Zerlegungsbeweis bleibt das kleinere der beiden Kathetenquadrate ungeteilt, d. h., es wird vollständig als Puzzleteil für die Zerlegung des Hypotenusenquadrats übernommen. Für die Zerlegung des größeren Kathetenquadrats gibt es unendlich viele Möglichkeiten. Die Zerlegung erfolgt durch eine horizontale und eine vertikale Linie, die jeweils zwischen den einander gegenüberliegenden Eckpunkten des Kathetenquadrats



**Abb. 17.3** a–f Verschiedene Fälle des Zerlegungsbeweises von Perigal

verlaufen muss. Für die Umlegung der Puzzlestücke vom Kathetenquadrat in das Hypotenusenquadrat (und umgekehrt) ist nur eine Verschiebung erforderlich (d. h., es ist nicht nötig, die Puzzlestücke zu drehen oder zu wenden).

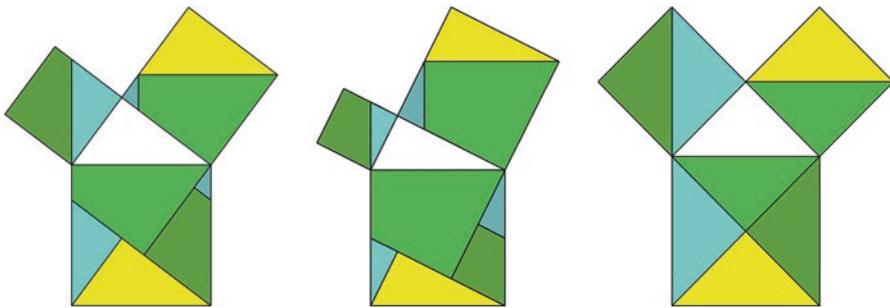
Die horizontale und die vertikale Linie sind jeweils so lang wie die Hypotenuse.

In Abb. 17.3a ist eine symmetrische Lage gewählt, die dazu führt, dass alle vier Puzzlestücke des Kathetenquadrats zueinander kongruent sind. Die nächsten vier Zerlegungen in Abb. 17.3b–e stellen jeweils extreme Lagen der horizontalen bzw. vertikalen Linie dar. Bei diesen vier Lagen könnte man mit zwei der vier Puzzleteile das Ausgangsdreieck auf zwei Arten auslegen.

Abb. 17.3f zeigt schließlich den Sonderfall eines gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecks – beide Kathetenquadrate sind gleich groß. Hier gibt es nur *eine* Möglichkeit der Zerlegung: Eines der beiden Kathetenquadrate wird durch die Diagonalen in vier zueinander kongruente rechtwinklige Dreiecke unterteilt.

### 17.3.2 Ein Zerlegungsbeweis von Göpel

Der Zerlegungsbeweis des deutschen Mathematikers Adolph Göpel (1812–1847) kommt ebenfalls mit fünf Puzzlestücken aus, die (ohne die Puzzlestücke zu drehen) von den Kathetenquadraten in das Hypotenusenquadrat verschoben werden können (und umgekehrt), vgl. folgende Abbildungen.



Das kleinere Kathetenquadrat wird durch Verlängerung einer vertikalen Seite des Hypotenusenquadrats in zwei Teile zerlegt. Die Unterteilung des größeren Kathetenquadrats erfolgt durch eine horizontale und eine vertikale Linie in drei Puzzlestücke. (Man könnte das größere Kathetenquadrat durch Verlängerung der anderen vertikalen Seite des Hypotenusenquadrats unterteilen; dann müssten aber Puzzlestücke beim Verschieben gedreht werden.)

Das gelb gefärbte Puzzlestück ist so groß wie das gegebene rechtwinklige Dreieck, das grau-blau gefärbte Puzzlestück und das hellblau gefärbte Puzzlestück sind jeweils ähnlich zum Ausgangsdreieck, d. h., deren Seitenlängen ergeben sich aus einfachen Verhältnisgleichungen.

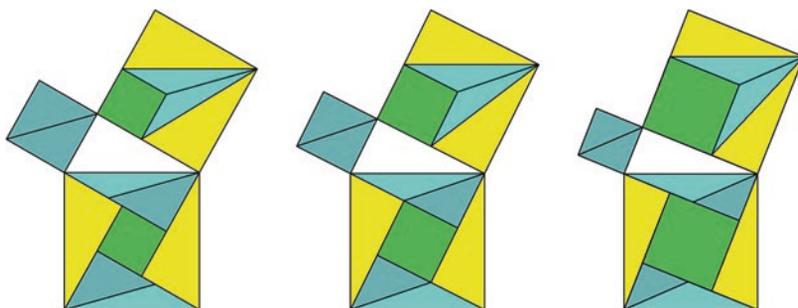
Die Abbildung links zeigt die Zerlegung für  $a:b = 4:3$ , die mittlere Abbildung für  $a = 2 \cdot b$  (mit zueinander kongruenten grau-blau und hellblau gefärbten Puzzlestücken) und die Abbildung rechts den Sonderfall für  $a = b$ .

### 17.3.3 Ein Zerlegungsbeweis von Gutheil

Für die Zerlegung der Katheten- und Hypotenusenquadrate nach Benjir von Gutheil († 1914) benötigt man i. A. sieben Puzzlestücke.

Faszinierend an dieser Zerlegung ist die symmetrische Anordnung der Teile: Im Hypotenusenquadrat sind die Puzzlestücke punktsymmetrisch angeordnet, in den Kathetenquadraten achsensymmetrisch. Das kleinere Kathetenquadrat wird durch eine Diagonale in zwei gleichschenkelig-rechtwinklige Dreiecke zerlegt. Das größere Kathetenquadrat setzt sich zusammen aus zwei Puzzlestücken, die mit dem gegebenen rechtwinkligen Dreieck übereinstimmen, einem quadratischen Puzzlestück mit Seitenlänge  $a - b$  und zwei dreieckigen Puzzleteilen, die sich mit den Puzzlestücken der Zerlegung des kleineren Kathetenquadrats zum Ausgangsdreieck ergänzen.

Da die Zerlegung des Hypotenusenquadrats in punktsymmetrischer Weise erfolgt und die der Kathetenquadrate in achsensymmetrischer Weise, muss man beim Umlegen vom Katheten- zum Hypotenusenquadrat zwei der Puzzleteile wenden.

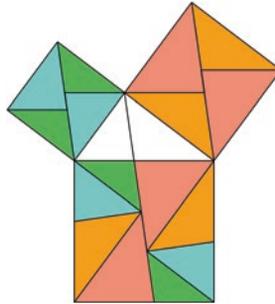


### 17.3.4 Ein Zerlegungsbeweis von Epstein und Nielsen

Für die Zerlegung von Paul Epstein (1871–1939) und Jakob Nielsen (1890–1959) werden acht Puzzlestücke benötigt. Diese erhält man, indem man die Kathetenquadrate durch die Diagonalen teilt und außerdem Linien einzeichnet, die parallel zur Hypotenuse des Ausgangsdreiecks jeweils durch die anderen beiden Eckpunkte der Quadrate verlaufen.

Da beide Kathetenquadrate in gleicher Weise unterteilt werden, sind entsprechende Puzzlestücke in beiden Kathetenquadraten zueinander ähnlich. Das Hypotenusenquadrat wird durch die Winkelhalbierende durch den Punkt  $C$  halbiert; die Puzzlestücke werden

so angeordnet, dass eine punktsymmetrische Zerlegung des Hypotenusenquadrats vorliegt. Für das Zeichnen der Puzzlestücke beachte man, dass die Winkel in den spitzwinkligen Dreiecken gleich  $\alpha$ ,  $45^\circ$  und  $135^\circ - \alpha$  sind.



#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 17.4:** Welche Besonderheit ergibt sich für die Puzzlestücke beim Zerlegungsbeweis von Epstein und Nielsen im Fall eines gleichschenkelig-rechtwinkligen Ausgangsdreiecks?

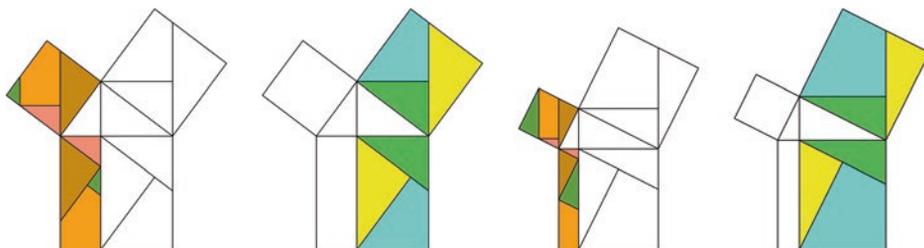
### 17.3.5 Ein Zerlegungsbeweis von Dobriner und Thieme

Die Zerlegung der Pythagoras-Figur nach Hermann Dobriner (1857–1902) und Karl Gustav Hermann Thieme (1852–1926) erfolgt so, dass gleichzeitig auch der Kathetensatz des Euklid bewiesen wird, d. h., die Puzzlestücke des Kathetenquadrats über  $a$  passen genau in das Rechteck mit den Längen  $p$  und  $c$  und die des Kathetenquadrats über  $b$  genau in das Rechteck mit den Längen  $q$  und  $c$  und umgekehrt. Die grundlegende Idee der Zerlegung ist, Streifen der Breite  $p$  bzw.  $q$  durch die beiden Kathetenquadrate zu legen und die entstehenden Puzzlestücke durch waagerechte Linien so zu unterteilen, dass die Rechteckbereiche des Hypotenusenquadrats ausgefüllt werden können.

Die Anzahl der Puzzlestücke für das größere Kathetenquadrat beträgt stets drei: Die rechte vertikale Seite des Hypotenusenquadrats wird verlängert, sodass ein Puzzlestück in der Größe des Ausgangsdreiecks abgetrennt wird. Das übrig bleibende Viereck wird durch eine Parallele zur Hypotenuse durch den Punkt  $C$  unterteilt, sodass das dann übrig bleibende viereckige Puzzlestück (hellblau) unten in das rechte Hypotenusenrechteck passt.

Für das kleinere Kathetenquadrat benötigt man im Fall eines gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecks ebenfalls nur drei Puzzlestücke – i. A. richtet sich aber diese Anzahl danach, wie breit das kleinere Hypotenusenrechteck ist, und kann im Prinzip sogar beliebig groß werden.

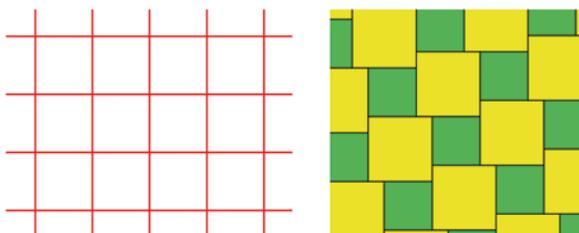
Die ersten beiden Abbildungen zeigen die Zerlegungen für den Fall  $a:b = 4:3$ , die anderen für den Fall  $a:b = 2:1$  (genau drei Streifen).



## 17.4 Darstellung der Zerlegungsbeweise mithilfe von Fliesenmustern

Dass man eine Ebene mit Quadraten „parkettieren“ kann, weiß jeder, der sich einmal mit der Frage beschäftigt hat, wie Küche oder Badezimmer gefliest werden sollen. Ein solches Muster ( $Q$ -Muster, vgl. Abb. links) ist allerdings ziemlich langweilig.

Abwechslungsreicher ist ein Muster aus zwei unterschiedlich großen Quadraten, also aus großen und kleinen Quadraten ( $guk$ -Muster, vgl. folgende Abb. rechts), mit dem eine Ebene ebenfalls vollständig ausgelegt werden kann.



In jedem  $guk$ -Muster ist (versteckt) auch ein  $Q$ -Muster enthalten: Wählt man nämlich bei den großen oder kleinen Quadraten des  $guk$ -Musters jeweils einen bestimmten (aber beliebigen) Punkt aus und verbindet diese Punkte miteinander, dann ergibt sich genau ein  $Q$ -Muster.

Man kann dies wie folgt konkret umsetzen: Eine Fläche wird mit unterschiedlich großen Quadraten im Sinne des  $guk$ -Musters gefliest. Dann legt man eine Folie darüber, auf der man die gewählten Punkte markiert und miteinander verbindet.

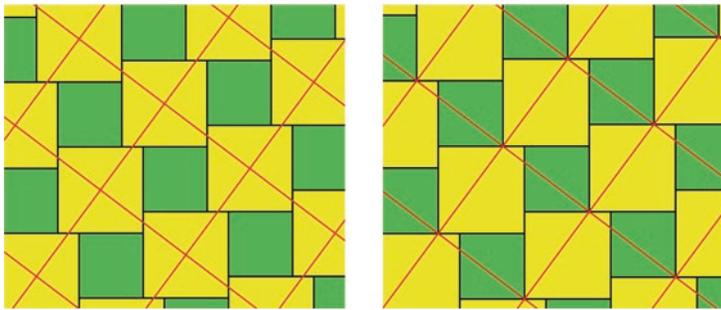
Je nach Wahl der Punkte erhält man die Zerlegung gemäß Perigal oder gemäß Göpel. Die gelben und grünen Fliesen bilden die Kathetenquadrate eines rechtwinkligen Dreiecks, und die Quadrate des  $Q$ -Musters auf der Folie bilden die Hypotenusenquadrate.

In der Abbildung links ist der symmetrische Fall des Beweises von Perigal dargestellt: Das kleinere Kathetenquadrat (grün) wird von den roten Linien nicht geschnitten, das größere (gelb) wird durch die roten Linien in Puzzlestücke zerlegt – das Hypotenusenquadrat (rot umrandet) wird in ein grünes und vier gelbe Puzzlestücke zerlegt. Die Folie

kann nach links oder rechts bzw. nach oben oder unten verschoben werden, solange nur das grün gefärbte Quadrat innerhalb des roten Rahmens bleibt – vergleiche hierzu die Erläuterungen zur Perigal'schen Idee.

In der Abbildung rechts werden die Kathetenquadrate durch die roten Linien in zwei bzw. drei Puzzlestücke zerlegt – das Hypotenusenquadrat (rot umrandet) wird in drei gelbe und zwei grüne Puzzlestücke zerlegt. Die Folie muss so gelegt werden, dass die Eckpunkte des roten Hypotenusenquadrats mit den unteren Berührungspunkten von nebeneinanderliegenden gelb und grün gefärbten Kathetenquadraten übereinstimmen.

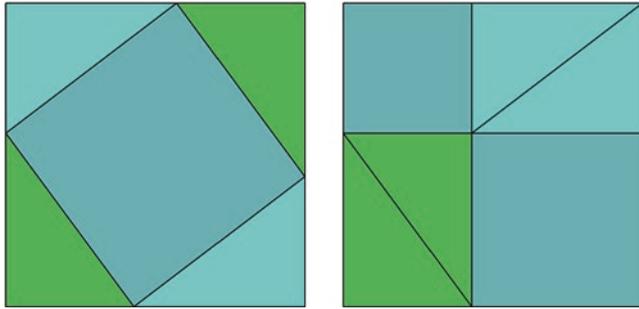
Dass es sich hier tatsächlich um einen Beweis des Satzes von Pythagoras handelt, also  $gelb + grün = rot\ ingerahmt$  gilt, ergibt sich aus der Tatsache, dass mit beiden Mustern die Ebene vollständig parkettiert wird.



## 17.5 Einige Beweise von historischer Bedeutung

Wie oben beschrieben, gibt es weit über 100 Beweise des Satzes von Pythagoras.

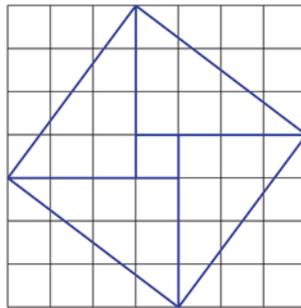
- Der griechische Mathematiker Proclus (412–485 n. Chr.) war davon überzeugt, dass die Idee zu den beiden folgenden Figuren von Pythagoras selbst stammt, und bezeichnete dies als den **Beweis des Pythagoras**. Dass dies tatsächlich ein Beweis des Satzes ist, erschließt sich, wenn man überlegt, was dargestellt ist und worin sich die beiden Grafiken unterscheiden.



Dies ist bei der nächsten Abbildung nicht so leicht.

- In der **Schrift Chou Pei Suan Ching**, die vor dem 1. Jahrhundert v. Chr. in China verfasst wurde, findet man die folgende Figur. Das Quadrat mit der Seitenlänge  $c = 5$  erhält man, indem man vom äußeren Quadrat mit den Seitenlängen  $a + b = 3 + 4$  die vier rechtwinkligen Dreiecke mit dem Flächeninhalt  $\frac{1}{2} \cdot a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$  abschneidet. Wendet man dann noch den binomischen Lehrsatz für  $(a + b)^2$  an, dann ergibt sich der Zusammenhang zwischen dem Quadrat mit Seitenlänge  $c$  und den beiden (nicht eingezeichneten) Quadraten mit den Seitenlängen  $a$  und  $b$ :

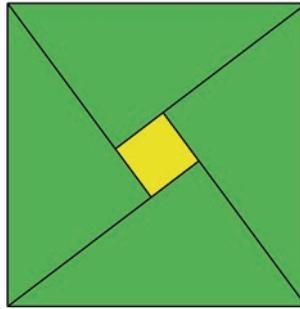
$$c^2 = (a + b)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = a^2 + b^2$$



- Vom indischen Mathematiker **Bhaskara** (1114–1185) stammt die folgende Beweisfigur: Ein Quadrat mit der Seitenlänge  $c$  wird in vier rechtwinklige Dreiecke mit den Katheten  $a$  und  $b$  und ein Quadrat der Seitenlänge  $b - a$  zerlegt ( $a < b$ ). Dann gilt:

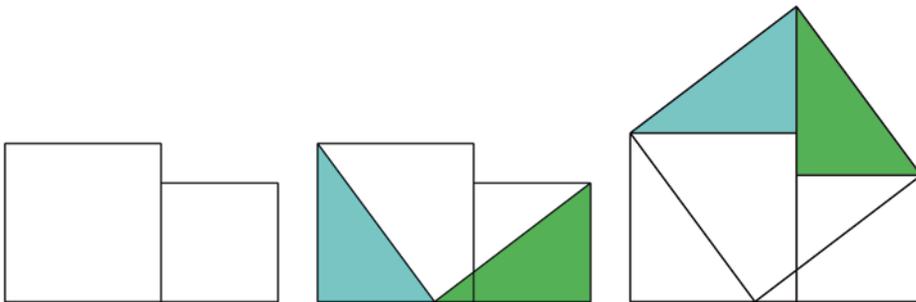
$$c^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + (b - a)^2 = 2ab + b^2 - 2ab + a^2 = a^2 + b^2$$

Bhaskara schreibt zwar, dass man bei diesem Beweis nur hinschauen muss („Siehe!“), aber ohne algebraische Kenntnisse (2. binomischer Lehrsatz) kommt man auch hier nicht weit.

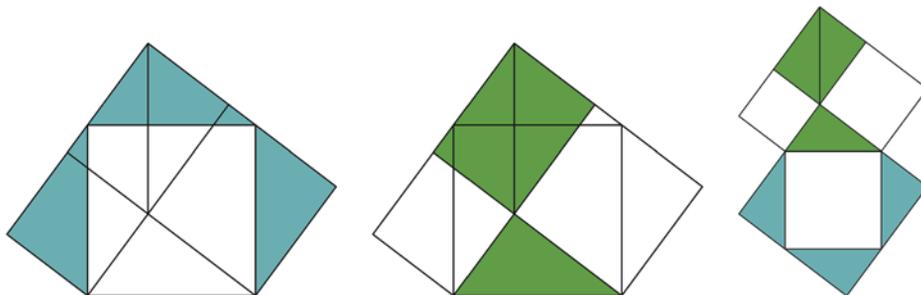


- Drei **Beweise von Thabit ibn Qurra** (836–901): Der bedeutende assyrische Mathematiker und Astronom war ursprünglich als Geldwechsler tätig, bevor er aufgrund seiner Sprachbegabung von den Banu-Musa-Brüdern eingeladen wurde, im „Haus der Weisheit“ in Bagdad die Schriften griechischer Mathematiker zu übersetzen. Nach der intensiven Beschäftigung mit den *Elementen* des Euklid entwickelte er selbstständig eigene Beweise für den pythagoreischen Lehrsatz.

In seinem ersten Beweis zeichnete er die beiden Kathetenquadrate mit den Seiten  $a$  und  $b$  ( $a > b$ ) nebeneinander. In diese Figur lässt sich das rechtwinklige Dreieck mit den Katheten  $a$  und  $b$  und der Hypotenuse  $c$  zweifach eintragen (hellblau und grün). Die beiden Dreiecke werden dann im dritten Schritt jeweils um die äußeren oberen Eckpunkte der Quadrate nach oben (gegen bzw. mit dem Uhrzeigersinn) gedreht, sodass das Hypotenusenquadrat entsteht.

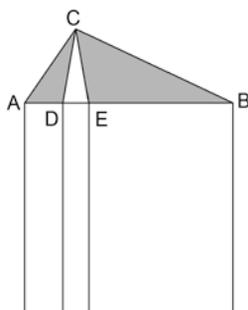


Die Genialität des Ansatzes zum zweiten Beweis von Thabit ibn Qurra erschließt sich insbesondere, wenn man die Figur unterschiedlich färbt oder wenn man einen Teil der Figur um  $180^\circ$  dreht (vgl. verkleinerte Abb. rechts).



Der dritte Beweis beschäftigt sich mit der Verallgemeinerung des Pythagoreischen Lehrsatzes und enthält damit auch einen **Beweis für die Umkehrung des Satzes**.

Im stumpfwinkligen Dreieck  $ABC$  rechts sind die Punkte  $D$  und  $E$  auf  $AB$  so eingetragen, dass die Dreiecke  $ABC$ ,  $ACD$  und  $CBE$  zueinander ähnlich sind.



Daher gilt:

$$|AC| : |AB| = |AD| : |AC|, \text{ also } |AC|^2 = |AB| \cdot |AD|, \text{ und}$$

$$|BC| : |AB| = |EB| : |BC|, \text{ also } |BC|^2 = |AB| \cdot |EB|.$$

$$\text{Somit folgt: } |AC|^2 + |BC|^2 = |AB| \cdot (|AD| + |EB|)$$

Ist der Winkel bei  $C$  ein rechter Winkel, dann fallen die Punkte  $D$  und  $E$  zusammen, und es folgt:

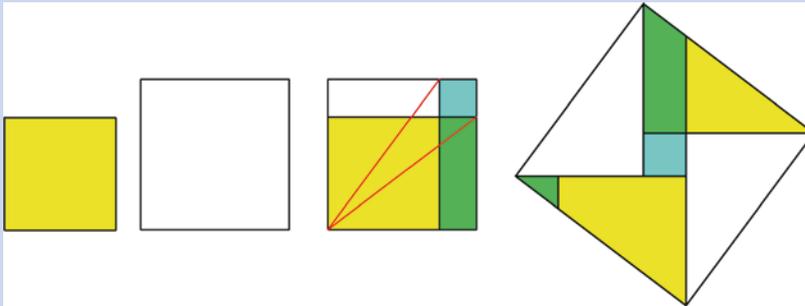
$$|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$$

Ist der Winkel bei  $C$  stumpf, dann muss das Quadrat über der Seite  $AB$  um das Rechteck der Breite  $DE$  verkleinert werden, damit es flächengleich zur Summe der Quadrate über den kürzeren Seiten ist:  $|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2 - |AB| \cdot |DE|$

Im Fall eines spitzwinkligen Dreiecks ergibt sich entsprechend, dass das Quadrat über der Seite  $AB$  vergrößert werden muss.

### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

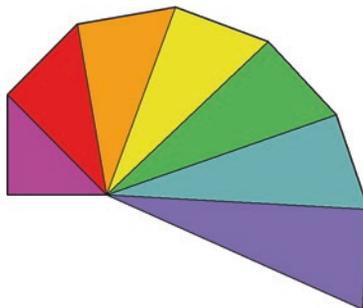
**A 17.5:** Erläutern Sie die Beweisvariante, die Abu'l-Wafa Al-Buzjani (940–998), einer der bedeutendsten persischen Mathematiker des Mittelalters, beschrieb: Zwei Quadrate mit den Seitenlängen  $a$  (gelb) und  $b$  (weiß), wobei  $a < b$ , werden gemäß der mittleren Figur in Puzzleteile zerlegt und zur rechts stehenden Figur zusammengesetzt.



## 17.6 Unendliche Folgen im Zusammenhang mit dem Satz von Pythagoras

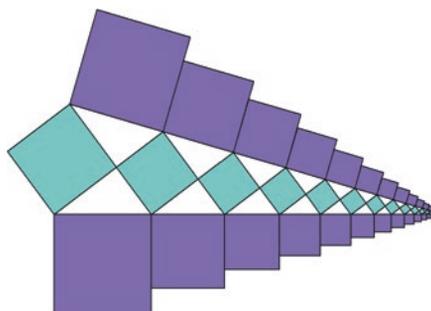
Zum Satz von Pythagoras gibt es noch viel zu entdecken ...

Bei der **Pythagoras-Spirale** beginnt man mit einem rechtwinkligen Dreieck mit gleich langen Katheten der Länge 1 LE. Die Hypotenuse hat damit die Länge  $\sqrt{2}$  LE. Diese Hypotenuse ist dann eine der beiden Katheten des nächsten rechtwinkligen Dreiecks. Die andere Kathete hat wieder die Länge 1 LE, sodass die neue Hypotenuse die Länge  $\sqrt{3}$  LE hat usw.



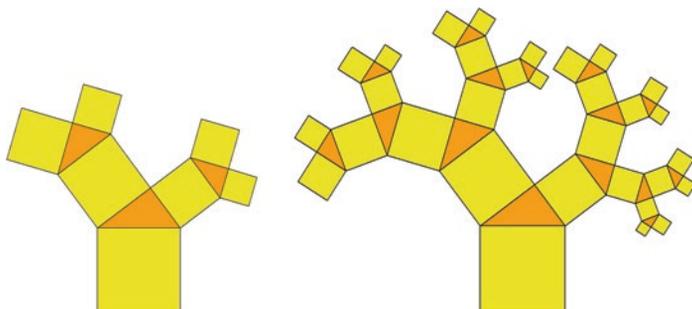
**Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen****A 17.6:** Untersuchen Sie:

1. Welchen Flächeninhalt hat die wachsende Figur der Pythagoras-Spirale nach  $n$  Schritten?
2. Wie viele Dreiecke kann man anschließen, bis sich die Dreiecke der Pythagoras-Spirale überschneiden?



Bei der **achsensymmetrischen Pythagoras-Folge** spiegelt man zunächst die klassische Pythagoras-Figur an der gemeinsamen Diagonale der beiden Kathetenquadrate und setzt dann die Figur fort, indem das kleinere Kathetenquadrat zum größeren Kathetenquadrat wird.

**A 17.7:** Untersuchen Sie, welchen Flächeninhalt die wachsende Figur hat und wie dieser von den gewählten Ausgangsgrößen abhängt.



Beim **Pythagoras-Baum** startet man mit der klassischen Pythagoras-Figur, benutzt dann aber bei den folgenden Schritten die beiden Kathetenquadrate jeweils als neue Hypotenusenquadrate.

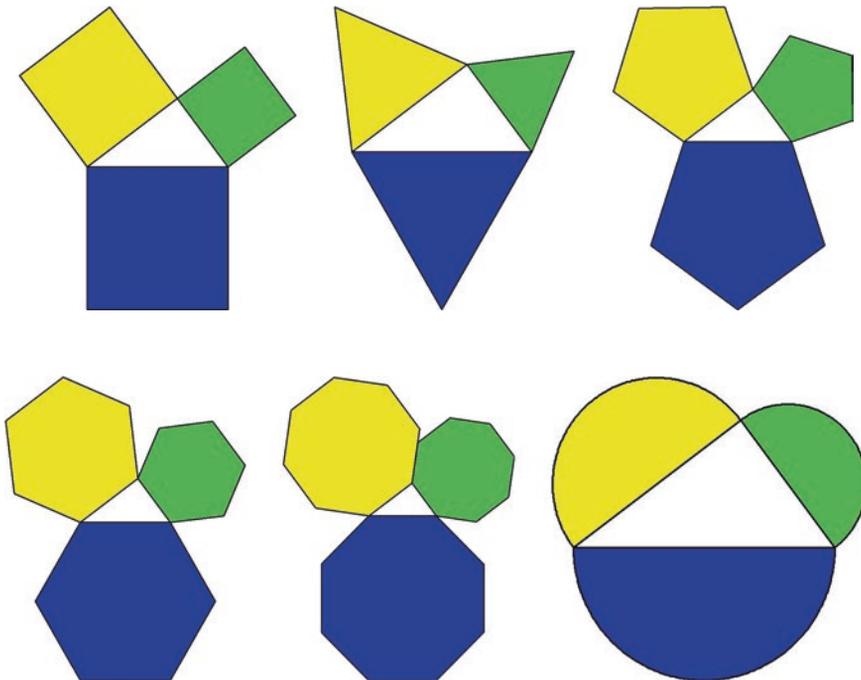
**A 17.8:** Untersuchen Sie, welchen Flächeninhalt die wachsende Figur hat und bei welchen Seitenlängen der Katheten und bei welchem Schritt es zu Überschneidungen von Teilfiguren kommt.

## 17.7 Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras

Der Satz über die Flächengleichheit der Flächenstücke über den Katheten und der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks gilt nicht nur für Quadrate, sondern für beliebige zueinander ähnliche Figuren.

Denn die Berechnung der Flächeninhalte  $A$  aller Figuren erfolgt mithilfe von Formeln des Typs  $A = k \cdot s^2$ , wobei  $s$  für die Seitenlängen von  $a$  bzw.  $b$  bzw.  $c$  steht und  $k$  ein figurtypischer Faktor ist:

$k = 1$  für das Quadrat,  $k = \frac{\sqrt{3}}{4}$  für das gleichseitige Dreieck,  $k = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}$  für das regelmäßige Fünfeck,  $k = \frac{3\sqrt{3}}{2}$  für das regelmäßige Sechseck,  $k = 2 \cdot (\sqrt{2} + 1)$  für das regelmäßige Achteck und  $k = \frac{\pi}{8}$  für Halbkreise über den Seiten des rechtwinkligen Dreiecks.



**Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen**

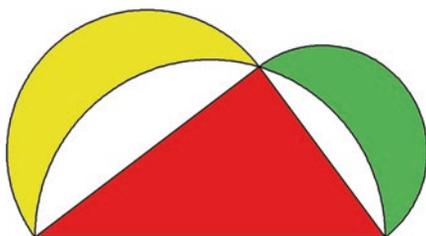
**A 17.9:** Erläutern Sie, wie man den „figurtypischen“ Faktor  $k$  für das regelmäßige Dreieck, Fünfeck, Sechseck, Achteck bzw. den Kreis bestimmen kann.

## 17.8 Die Mündchen des Hippokrates von Chios und andere Kreisfiguren

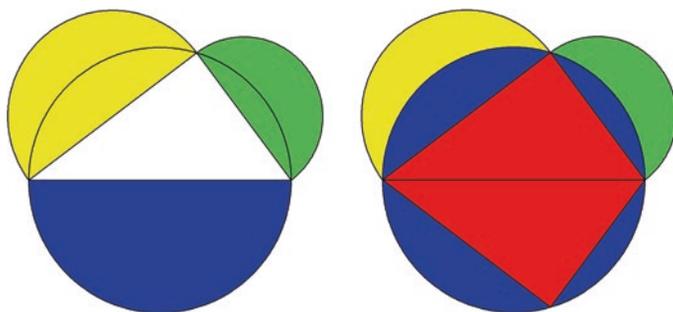
Die letzte Figur aus Abschn. 17.7 führt zu einem verblüffenden Satz, den der griechische Mathematiker Hippokrates von Chios um 450 v. Chr. entdeckte: Eine geradlinig begrenzte Fläche kann genauso groß sein wie krummlinig begrenzte Flächen, konkret:

**Satz****Die Mündchen des Hippokrates**

Die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks ist flächengleich zur Summe der Flächen der beiden Mündchen über den Katheten.

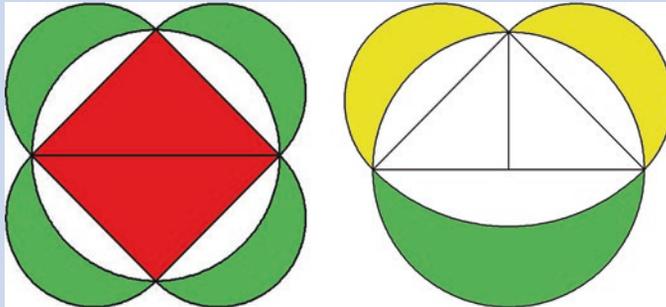


Um den Satz zu beweisen, muss man nur die Idee des verallgemeinerten Satzes von Pythagoras aus Abschn. 17.7 anwenden: Die Fläche des Halbkreises über der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist genauso groß wie die Summe der Halbkreisflächen über den Katheten (folgende Abb. links). Klappt man dann den Halbkreis „unter“ der Hypotenuse nach oben (folgende Abb. rechts), erkennt man den Zusammenhang.



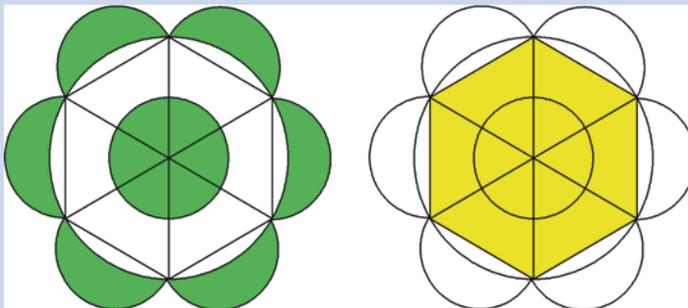
**Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen**

**A 17.10:** Erläutern Sie die beiden folgenden Grafiken. Formulieren Sie jeweils den Sachverhalt mit Worten.

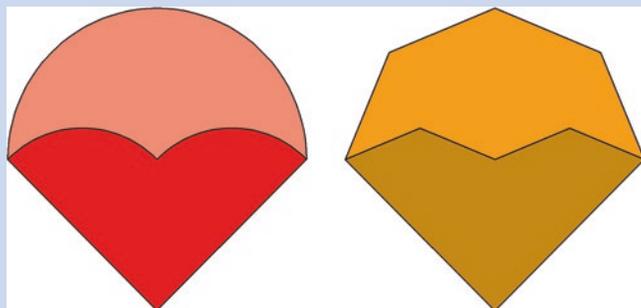


**A 17.11:** Beweisen Sie einen Satz über die Mönchen über regelmäßigen Sechsecken, der ebenfalls von Hippokrates gefunden wurde.

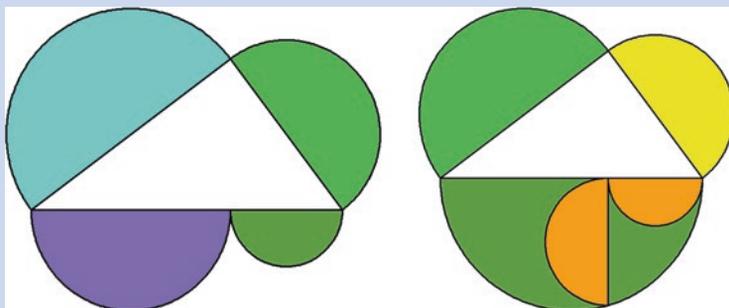
*Der Flächeninhalt der sechs Mönchen ist genauso groß wie der Flächeninhalt des gelb gefärbten Flächenstücks innerhalb des regelmäßigen Sechsecks. Die weiß gelassene Fläche innerhalb des Sechsecks ist ein Kreis, dessen Radius halb so groß ist wie die Seitenlänge des Sechsecks.*



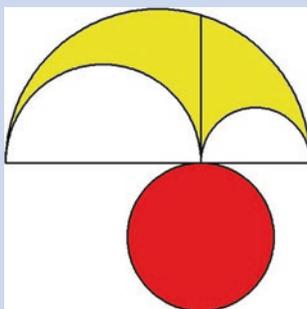
**A 17.12:** Die Beweisidee für die Mönchen des Hippokrates lässt sich auch auf die abgebildete **Herzfigur** anwenden, aber nicht nur für Halbkreise, sondern auch für regelmäßige  $n$ -Ecke, wobei  $n$  Vielfaches von 4 sein muss. Erläutern Sie dies.



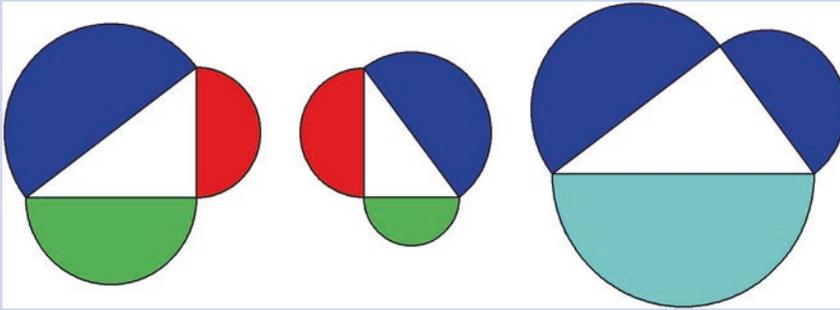
**A 17.13:** Welche Beziehung besteht zwischen den Flächeninhalten der Halbkreise?



**A 17.14:** Beweisen Sie, dass die (gelb gefärbte) sichelförmige Figur, das sogenannte **Schustermessers Archimedes** (griech. *Arbelos*), flächengleich ist zum rot gefärbten Kreis. Dabei ist der Durchmesser des Kreises genauso groß wie die eingezeichnete „Höhe“.

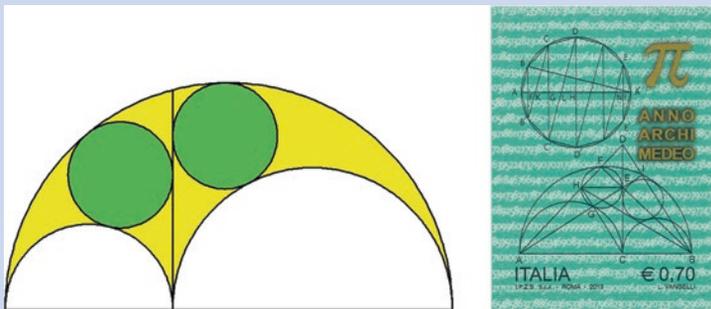


*Tipp:* Verwenden Sie bei der Beweisführung die folgenden Hilfsfiguren.

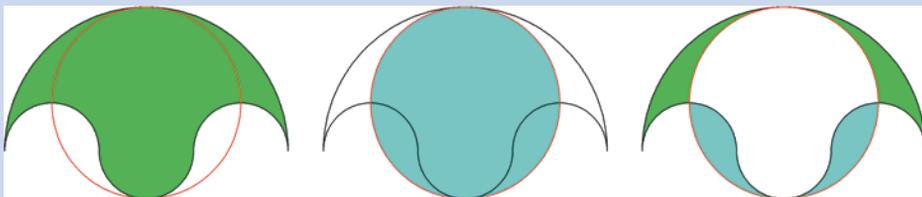


**A 17.15:** In die beiden Teile des Schustermessers aus A 17.14 können zwei Kreise eingetragen werden (sogenannte **Zwillingskreise des Archimedes**). Warum sind diese beiden grün gefärbten Kreise gleich groß?

*Hinweis:* Die italienische Briefmarke erschien anlässlich des Archimedes-Jahres im Jahr 2013 und zeigt u. a. die Zwillingskreise.

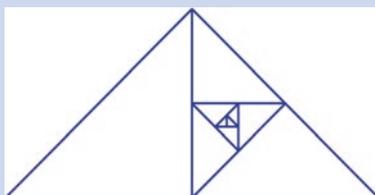


**A 17.16:** In seinen *Lemmata* beschreibt Archimedes eine Figur, die aus vier Halbkreisen gebildet wird. Wegen ihrer Form wird sie als **Salinon** (dt. Salzfüßchen) bezeichnet. Begründen Sie, warum die in der Abbildung links grün gefärbte Fläche genauso groß ist wie die Fläche des hellblau gefärbten Kreises in der mittleren Abbildung. Wie folgt hieraus die Gleichheit der unterschiedlich gefärbten Flächenstücke in der Abbildung rechts?



**A 17.17:** Unter den zahlreichen Variationen des Mönchchen-Problems, die Hans Walser untersucht hat, findet sich auch eine Folge von immer kleiner werdenden Mönchchen, die über einem Streckenzug auf ineinandergeschachtelten gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecken gebildet werden. Jedes Mönchchen ist dabei halb so groß wie sein Vorgänger.

Erläutern Sie die Konstruktion der Mönchchen-Folge.



Begründen Sie den folgenden Satz:

Wenn man ein Ausgangsdreieck mit Flächeninhalt 1 FE zeichnet, dann haben die unendlich vielen Mönchchen zusammen den Flächeninhalt  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = 2$  FE.



## 17.9 Anwendung des Satzes von Pythagoras bei Vierecken

Auch über den Seiten eines Vierecks kann man Quadrate zeichnen. Hier gilt ein bemerkenswerter Sachverhalt:

### Satz

#### Satz überorthodiagonale Vierecke

Die Summen der Quadrate von einander gegenüberliegenden Seiten eines Vierecks sind genau dann gleich, wenn sich die Diagonalen des Vierecks orthogonal schneiden.

Bekanntlich ist ein Viereck durch die Längen der vier Seiten  $a, b, c, d$  noch nicht festgelegt; zu vier gegebenen Seitenlängen gibt es stets unendlich viele Vierecke. Der Satz besagt aber:

Egal, welche Gestalt das Viereck einnimmt: Wenn für die Seiten die Bedingung  $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$  erfüllt ist, dann schneiden sich die Diagonalen im rechten Winkel (und umgekehrt).

*Zum Beweis:* Wenn sich die Diagonalen in einem Viereck orthogonal schneiden, dann gilt (vgl. Abb. 17.4b):

$$a^2 = u^2 + y^2 \text{ und } c^2 = x^2 + v^2 \text{ sowie } b^2 = y^2 + v^2 \text{ und } d^2 = x^2 + u^2, \text{ also: } a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$

Schneiden sich umgekehrt die Diagonalen eines Vierecks unter den Scheitelwinkeln  $\varepsilon$  bzw.  $180^\circ - \varepsilon$ , dann gilt in den Teildreiecken gemäß Kosinussatz:

$$a^2 = u^2 + y^2 - 2uy \cdot \cos(\varepsilon) \text{ und } c^2 = v^2 + x^2 - 2vx \cdot \cos(\varepsilon), \text{ also}$$

$$a^2 + c^2 = u^2 + v^2 + x^2 + y^2 - 2 \cdot (uy + vx) \cdot \cos(\varepsilon) \text{ sowie}$$

$$b^2 = v^2 + y^2 - 2vy \cdot \cos(180^\circ - \varepsilon) \text{ und } d^2 = x^2 + u^2 - 2xu \cdot \cos(180^\circ - \varepsilon), \text{ also:}$$

$$b^2 + d^2 = u^2 + v^2 + x^2 + y^2 + 2 \cdot (vy + ux) \cdot \cos(\varepsilon)$$

Aus  $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$  folgt daher  $(uy + vx + vy + ux) \cdot \cos(\varepsilon) = 0$  und, da nicht alle Summanden  $uy, vx, vy, ux$  gleichzeitig gleich null sein können, ergibt sich hieraus  $\cos(\varepsilon) = 0$ , d. h.  $\varepsilon = 90^\circ$ .

Besonders eindrucksvoll ist das folgende Experiment: Man fertige aus festem Material (Pappe, Holz, Metall, ...) Streifen der Länge  $a, b, c, d$ , welche die Bedingung  $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$  erfüllen. Diese werden an den Enden drehbar miteinander verbunden (z. B. mit einer Verschlussklammer). Die Diagonalen können dann mithilfe von Gummibändern realisiert werden. Egal, welche Gestalt das Viereck annimmt: Die Gummibänder schneiden sich im rechten Winkel!

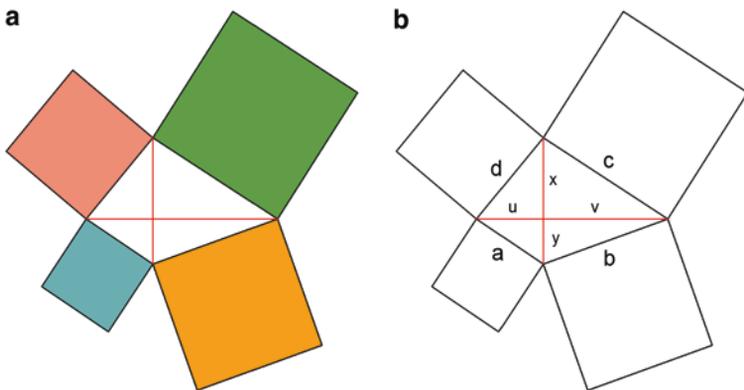
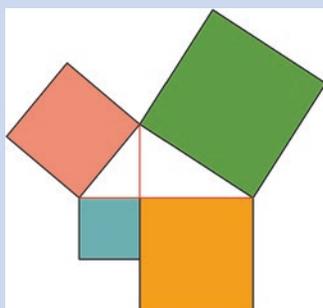


Abb. 17.4 a, b Orthodiagonale Vierecke

**Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen****A 17.18:**

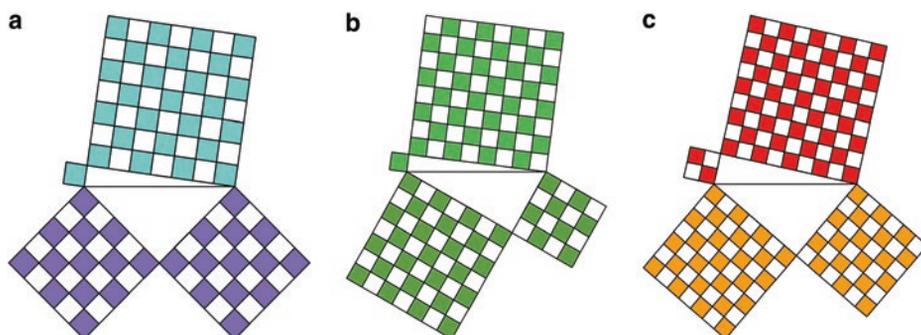
1. Ein Sonderfall des Satzes liegt vor, wenn  $y = 0$  (vgl. folgende Abbildung). Welche besondere Eigenschaft ergibt sich?
2. Ein anderer Sonderfall ist gegeben, wenn z. B.  $x = y$ . Was für eine Figur liegt dann vor?



## 17.10 Ganzzahlige Pythagoras-Partner und besondere Pythagoras-Folgen

Das rechtwinklige Dreieck mit den ganzzahligen Kathetenlängen 1 LE und 7 LE besitzt eine Hypotenuse, die genauso lang ist wie die Hypotenuse des gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecks mit zwei ganzzahligen Kathetenlängen 5 LE:

$$50 = 1^2 + 7^2 = 5^2 + 5^2 \text{ (vgl. Abb. 17.5a)}$$



**Abb. 17.5** a–c Ganzzahlige Pythagoras-Partner zur Summe 50, 65, 85

Auch zu den Hypotenusenquadraten mit Flächeninhalt 65 FE und 85 FE gibt es jeweils zwei verschiedene ganzzahlige Partner:

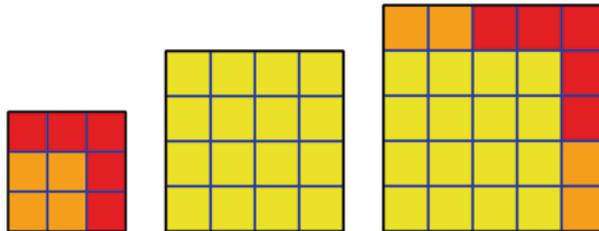
$$65 = 1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2 \text{ (vgl. Abb. 17.5b) und}$$

$$85 = 2^2 + 9^2 = 6^2 + 7^2 \text{ (vgl. Abb. 17.5c).}$$

#### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 17.19:** Bestimmen Sie noch weitere zehn solcher ganzzahligen Pythagoras-Partner.

In Abschn. 2.7 wurde für das pythagoreische Zahlentripel (3; 4; 5) ein anschaulicher Beweis mithilfe von bunten Steinen geführt. Eine andere Idee ist in der folgenden Abbildung präsentiert: Das Quadrat mit Seitenlänge 3 LE wird so zerlegt, dass die Teile zusammen mit dem ungeteilten Quadrat der Seitenlänge 4 LE eine Zerlegung des Quadrats der Seitenlänge 5 LE ergeben.



Über die Gleichung  $3^2 + 4^2 = 5^2$  hinaus, die einen besonderen Zusammenhang zwischen den Quadratzahlen der drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen 3, 4, 5 beschreibt, existieren noch weitere (sogar unendlich viele) Beziehungen ähnlicher Art. Die nächste Gleichung dieses Typs lautet:

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$

Auch hier ist ein Beweis durch Umlegen von Puzzleteilen möglich: Die beiden ungeteilten Quadrate mit Seitenlänge 11 und 12 werden durch Teilstücke des Quadrats mit Seitenlänge 10 zu den Seiten mit den Seitenlängen 13 und 14 ergänzt (vgl. Abb. 17.6).

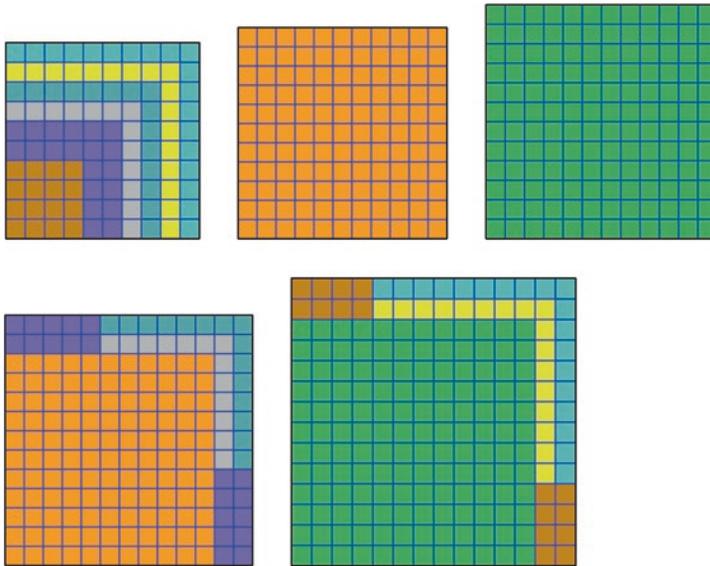
Auch die nächsten Gleichungen dieser Art

$$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$$

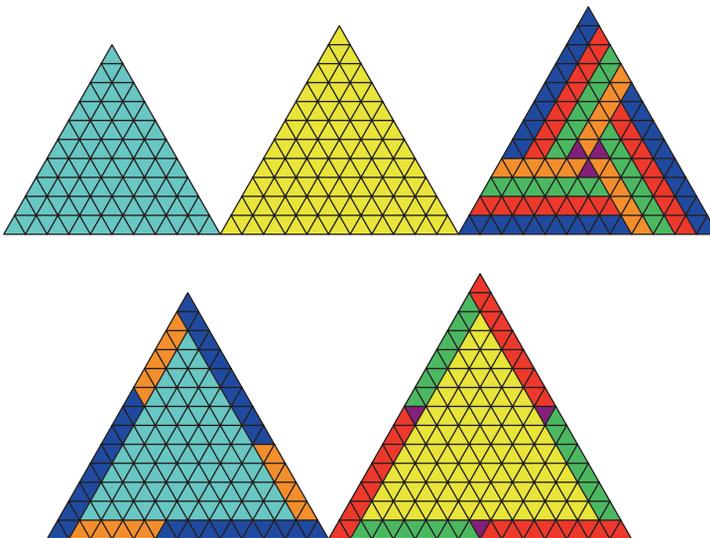
$$36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2$$

lassen sich durch entsprechende Unterteilungen des jeweils kleinsten Quadrats und Umlegungen der Teile beweisen.

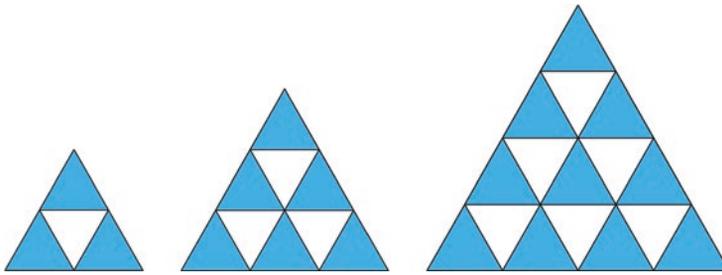
Hans Walser beweist die Gleichungen mithilfe eines Rasters von gleichseitigen Dreiecken (vgl. Abb. 17.7). Er benutzt dabei die Eigenschaft, dass man gemäß Formel (2.2) ein gleichseitiges Dreieck der Breite  $n$  LE aus  $n^2$  gleichseitigen Dreiecken der Breite 1 LE zusammensetzen kann (vgl. auch folgende Abbildung).



**Abb. 17.6** Nachweis der Gleichung  $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$  durch Umlegen von Quadraten



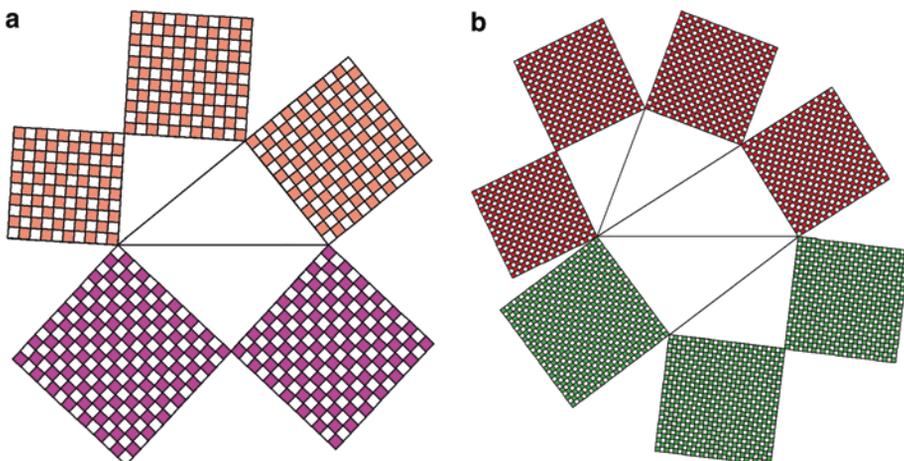
**Abb. 17.7** Alternative Veranschaulichung der Gleichung  $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$  mithilfe von gleichseitigen Dreiecken (mit freundlicher Genehmigung von Dr. Hans Walser)



Man kann diese Beziehungen aber auch – ähnlich wie bei den ganzzahligen Pythagoras-Partnern – graphisch darstellen (vgl. Abb. 17.8).

Wie kann man nun herausfinden, welche weiteren derartigen Gleichungen gelten?  
Mögliche Beobachtungen:

- Die Quadratzahlen, die unmittelbar links und rechts vom Gleichheitszeichen stehen, gehören zu besonderen pythagoreischen Tripeln  $(a; b; c)$  mit  $c = b + 1$ :  $(3; 4; 5)$ ,  $(5; 12; 13)$ ,  $(7; 24; 25)$ ,  $(9; 40; 41)$ . Das nächste Tripel dieser Art ist  $(11; 60; 61)$ .
- Die Anzahl der Summanden auf der linken und auf der rechten Seite der Gleichungen wächst jeweils um 1, d. h., in der nächsten Gleichung müssten links sechs und rechts fünf Summanden stehen.
- Die Basen der jeweils *kleinsten* Summanden auf der linken Seite der Gleichungen durchlaufen eine arithmetische Folge 2. Ordnung: Die Folge 3, 10, 21, 36 hat die



**Abb. 17.8** a, b Veranschaulichung der Beziehungen  $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$  und  $21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$

Differenzfolge 7, 11, 15. Demnach müsste die linke Seite der nächsten Gleichung mit dem Summanden  $55^2$  beginnen.

- Die Basen der jeweils *größten* Summanden auf der linken Seite der Gleichungen durchlaufen ebenfalls eine arithmetische Folge 2. Ordnung: Die Folge 4, 12, 24, 40 hat die Differenzfolge 8, 12, 16. Demnach müsste die linke Seite der nächsten Gleichung mit dem Summanden  $60^2$  enden.

*Zwischenergebnis für die linke Seite der Gleichung:*

*Die Summe  $55^2 + 56^2 + 57^2 + 58^2 + 59^2 + 60^2 = 19855$  enthält sechs Summanden.*

- Die Basen der jeweils *kleinsten* Summanden auf der rechten Seite der Gleichungen durchlaufen eine arithmetische Folge 2. Ordnung: Die Folge 5, 13, 25, 41 hat die Differenzfolge 8, 12, 16. Demnach müsste die rechte Seite der nächsten Gleichung mit dem Summanden  $61^2$  beginnen.
- Die Basen der jeweils *größten* Summanden auf der rechten Seite der Gleichungen durchlaufen ebenfalls eine arithmetische Folge 2. Ordnung: Die Folge 5, 14, 27, 44 hat die Differenzfolge 9, 13, 17. Demnach müsste die rechte Seite der nächsten Gleichung mit dem Summanden  $65^2$  enden.

*Zwischenergebnis für die rechte Seite der Gleichung:*

*Die Summe  $61^2 + 62^2 + 63^2 + 64^2 + 65^2 = 19855$  enthält fünf Summanden.*

Linke und rechte Seite stimmen also überein.

**Verallgemeinerung:** Gesucht werden geeignete natürliche Zahlen  $n$ , sodass für  $k = 1, 2, 3, \dots$  gilt:

$$(n - k)^2 + (n - k + 1)^2 + \dots + n^2 = (n + 1)^2 + (n + 2)^2 + \dots + (n + k)^2$$

Diese Bedingung ist erfüllt, wenn:

$$n = 2 \cdot k \cdot (k + 1) = 2k^2 + 2k$$

(Vergleiche dazu auch die Beispiele von oben:  $n$  ist die größte Zahl auf der linken Seite der Gleichung:  $k = 1 \rightarrow n = 4$ ;  $k = 2 \rightarrow n = 12$ ;  $k = 3 \rightarrow n = 24$ ;  $k = 4 \rightarrow n = 40$ ;  $k = 5 \rightarrow n = 60$ )

Der Beweis erfolgt durch Ausrechnen:

$$\begin{aligned} (n - k)^2 + (n - k + 1)^2 + \dots + n^2 &= (n + 1)^2 + (n + 2)^2 + \dots + (n + k)^2 \\ \Leftrightarrow [1^2 + 2^2 + \dots + n^2] - [1^2 + 2^2 + \dots + (n - k - 1)^2] \\ &= [1^2 + 2^2 + \dots + (n + k)^2] - [1^2 + 2^2 + \dots + n^2] \\ \Leftrightarrow 2 \cdot [1^2 + 2^2 + \dots + n^2] &= [1^2 + 2^2 + \dots + (n - k - 1)^2] \\ &+ [1^2 + 2^2 + \dots + (n + k)^2] \end{aligned}$$

Verwenden der Summenformel (2.4) und Multiplizieren beider Seiten der Gleichung mit dem Faktor 6 ergibt:

$$\begin{aligned} & 2 \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) \\ &= (n-k-1) \cdot (n-k) \cdot (2n-2k-1) + (n+k) \cdot (n+k+1) \cdot (2n+2k+1) \end{aligned}$$

Für  $n = 2k^2 + 2k$  erhält man eine wahre Aussage (allgemeingültige Gleichung):

$$\begin{aligned} & 2 \cdot (2k^2 + 2k) \cdot (2k^2 + 2k + 1) \cdot (4k^2 + 4k + 1) \\ &= (2k^2 + 2k - k - 1) \cdot (2k^2 + 2k - k) \cdot (4k^2 + 4k - 2k - 1) \\ &\quad + (2k^2 + 2k + k) \cdot (2k^2 + 2k + k + 1) \cdot (4k^2 + 4k + 2k + 1) \\ \Leftrightarrow & 2 \cdot (2k^2 + 2k) \cdot (2k^2 + 2k + 1) \cdot (4k^2 + 4k + 1) \\ &= (2k^2 + k - 1) \cdot (2k^2 + k) \cdot (4k^2 + 2k - 1) \\ &\quad + (2k^2 + 3k) \cdot (2k^2 + 3k + 1) \cdot (4k^2 + 6k + 1) \\ \Leftrightarrow & 32k^6 + 96k^5 + 120k^4 + 80k^3 + 28k^2 + 4k \\ &= 32k^6 + 96k^5 + 120k^4 + 80k^3 + 28k^2 + 4k \end{aligned}$$

Alternativ kann man auch die erste Gleichung nach  $n$  auflösen und erhält dann die Bedingung  $n = 2k^2 + 2k$ .

---

## 17.11 Heron'sche Dreiecke

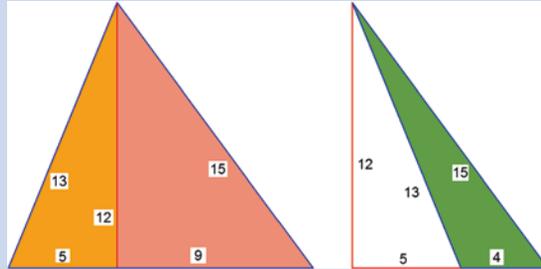
In der Geometrie werden Dreiecke, bei denen alle Seitenlängen und der Flächeninhalt ganzzahlig sind, zu Ehren des griechischen Mathematikers Heron von Alexandria (ca. 10–70 n. Chr.) als **Heron'sche Dreiecke** bezeichnet.

Rechtwinklige Dreiecke, deren Seitenlängen ein pythagoreisches Zahlentripel bilden, sind gleichzeitig auch Heron'sche Dreiecke. Denn mindestens eine der Katheten hat eine *geradzahlige* Seitenlänge; daher ist der Flächeninhalt des Dreiecks als halbes Produkt der beiden Kathetenlängen ebenfalls ganzzahlig.

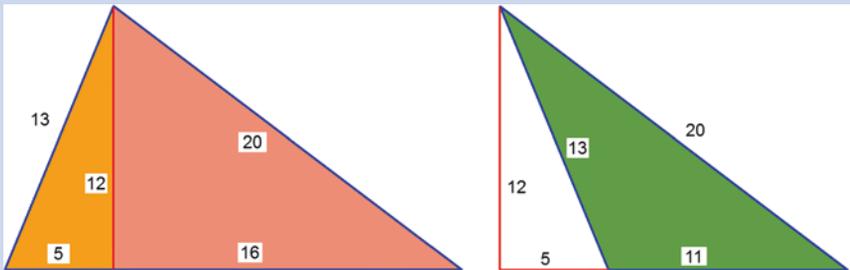
Heron'sche Dreiecke kann man auch dadurch erhalten, dass man zwei passende rechtwinklige Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen zusammensetzt – daher werden sie als **zerlegbare Heron'sche Dreiecke** bezeichnet. Das Zusammensetzen kann in zwei „Richtungen“ geschehen.

**Beispiel 1**

Die zu den Tripeln  $(5; 12; 13)$  und  $(9; 12; 15)$  gehörenden Dreiecke haben jeweils eine Kathete mit Seitenlänge **12 LE**.

**Beispiel 2**

Die zu den Tripeln  $(5; 12; 13)$  und  $(12; 16; 20)$  gehörenden Dreiecke haben jeweils eine Kathete mit Seitenlänge **12 LE**.

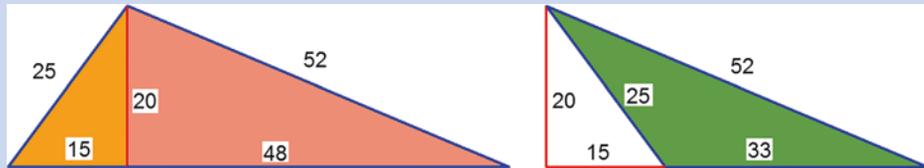
**Beispiel 3**

Die zu den Tripeln  $(15; 20; 25)$  und  $(15; 36; 39)$  gehörenden Dreiecke haben jeweils eine Kathete mit Seitenlänge **15 LE**.



**Beispiel 4**

Die zu den Tripeln (15; 20; 25) und (20; 48; 52) gehörenden Dreiecke haben jeweils eine Kathete mit Seitenlänge 20 LE.



Der Flächeninhalt  $A$  des zusammengesetzten Dreiecks berechnet sich in allen Beispielen aus  $A = \frac{1}{2} \cdot z \cdot h$ , wobei  $h$  die Länge der gemeinsamen Kathete und  $z$  die Summe bzw. die Differenz der Längen der nicht gemeinsamen Katheten ist.

Allgemein kann man zu zwei pythagoreischen Zahlentripeln jeweils acht Heron'sche Dreiecke angeben:

Sind  $(a; b; c)$  und  $(d; e; f)$  irgendwelche primitive (d. h. zueinander teilerfremde) pythagoreische Zahlentripel, dann gehören dazu unendlich viele zueinander ähnliche rechtwinklige Dreiecke mit den ganzzahligen Vielfachen der ursprünglichen Seitenlängen, also dem  $r$ -fachen der Seitenlängen  $a, b, c$  bzw. dem  $s$ -fachen der Seitenlängen  $d, e, f$ .

Die Faktoren  $r, s$  kann man – mithilfe des kleinsten gemeinsamen Vielfachen – so wählen, dass die beiden Dreiecke jeweils in zwei Kathetenlängen übereinstimmen:

$$(1) r \cdot a = s \cdot d \quad (2) r \cdot a = s \cdot e \quad (3) r \cdot b = s \cdot d \quad (4) r \cdot b = s \cdot e$$

**Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen****A 17.20**

1. Erläutern Sie, welche primitiven pythagoreischen Zahlentripel und welche Vielfachen in den Beispielen 1 bis 4 betrachtet werden.
2. Geben Sie an, welche Heron'schen Vierecke sich aus der Kombination des Zahlentripels (3; 4; 5) mit dem Tripel (8; 15; 17) ergeben.
3. Geben Sie an, welche Heron'schen Vierecke sich aus der Kombination des Zahlentripels (3; 4; 5) mit dem Tripel (7; 24; 25) ergeben.

Außer den auf einfache Art zu bestimmenden zerlegbaren Heron'schen Dreiecken existieren auch solche, die sich nicht durch Aneinandersetzen (also als Summe oder Differenz) zweier rechtwinkliger Dreiecke ergeben. Das erste Dreieck dieser Art wurde vom amerikanischen Mathematiker Fitch Cheney im Jahr 1929 gefunden; es hat die Seitenlängen 25 LE, 34 LE und 39 LE. Das kleinste Dreieck dieses Typs hat die Seitenlängen 5 LE, 29 LE, 30 LE.

Die allgemeine Theorie hierzu setzt tiefer gehende Kenntnisse der Geometrie voraus, auf die hier nicht eingegangen werden kann. Im Jahr 2001 konnte schließlich der folgende Satz bewiesen werden:

### Satz

#### Nicht zerlegbare Heron'sche Vierecke

Die Eckpunkte von nicht zerlegbaren Heron'schen Dreiecken lassen sich in ein Koordinatengitter eintragen, d. h., die Eckpunkte dieser Dreiecke haben ganzzahlige Koordinaten.

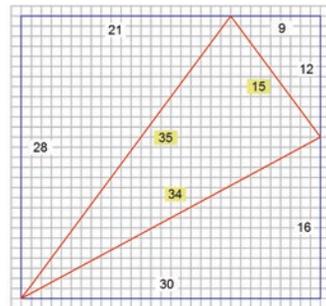
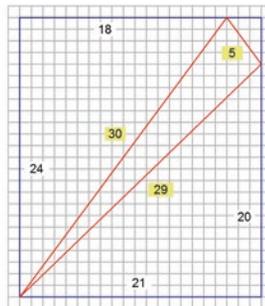
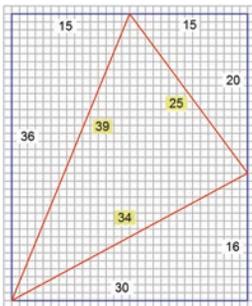
Nicht zerlegbare Heron'sche Dreiecke treten also als Restdreiecke auf, wenn von geeigneten Rechtecken drei rechtwinklige Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen abgeschnitten werden.

Die Flächeninhalte der im Folgenden abgebildeten Dreiecke sind:

$$A = 30 \cdot 36 - \frac{1}{2} \cdot (30 \cdot 16 + 15 \cdot 20 + 15 \cdot 36) = 420$$

$$A = 21 \cdot 24 - \frac{1}{2} \cdot (21 \cdot 20 + 3 \cdot 4 + 18 \cdot 24) = 72$$

$$A = 30 \cdot 28 - \frac{1}{2} \cdot (30 \cdot 16 + 9 \cdot 12 + 21 \cdot 28) = 252$$



## 17.12 Briefmarken zu Pythagoras

Von den Postverwaltungen einiger Länder wurden Briefmarken herausgegeben, die sich mit Pythagoras und dem nach ihm benannten Satz beschäftigen:

Nicaragua (1971), Süd-Korea (2014), Surinam (1972)

Griechenland (1955), Makedonien (1998)

Vatikan (1986), Sierra Leone (1983)

Philippinen (2001), Japan (1984), San Marino (1983)



## 17.13 Hinweise auf weiterführende Literatur

Bei Wikipedia findet man in deutscher (englischer, französischer) Sprache weitere Informationen und Literatur zu den Stichwörtern:

- Satz des Pythagoras\* (Pythagorean theorem\*, Théorème de Pythagore\*)
- Satzgruppe des Pythagoras
- Orthodiagonales Viereck (Orthodiagonal quadrilateral, –)
- Pythagorean tiling (nur in englischer Sprache)  
\*) Auszeichnung als lesenswerter/exzellenter Artikel

Umfangreiche fachliche Informationen findet man auf **Wolfram Mathworld** unter den Stichwörtern:

- Pythagorean Theorem, Heronian Triangle, Orthodiagonal Quadrangle

Unter den Websites mit Beweisen des Satzes von Pythagoras ist insbesondere die von Alexander Bogomolny hervorzuheben, auf der über 100 Beweise zu finden sind:

- <http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml>

Die Anzahl der Bücher zum Thema ist ebenfalls unüberschaubar groß. Hier einige Empfehlungen:

- Lietzmann, Walter (1966), *Der pythagoreische Lehrsatz*, 8. Auflage, Teubner, Leipzig
- Baptist, Peter (1997), *Pythagoras und kein Ende*. Klett, Stuttgart
- Maor, Eli (2007), *The Pythagorean Theorem: A 4000-Year History*, Princeton, New Jersey: Princeton University Press
- Posamentier, Alfred (2010), *The Pythagorean Theorem: The Story of Its Power and Beauty*, Prometheus Books

Literatur zu den Zerlegungsbeweisen:

- Frederickson, Greg (1997), *Dissections: Plane and Fancy*, New York: Cambridge University Press

Eine hervorragende Übersetzung der *Elemente* des Euklid durch Rudolph Haller findet man unter:

- <http://www.opera-platonis.de/euklid/>

Unter den „Miniaturen“ von Hans Walser findet man eine Fülle von Variationen zum Thema (darunter zu den Zerlegungsbeweisen, den Mönchen, den Pythagoras-Schmetterlingen, den orthodiagonalen Vierecken und Diagonalen, Pythagoras-Fraktalen):

- [http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen\\_Uebersicht/Pythagoras/index.html](http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen_Uebersicht/Pythagoras/index.html)

Zum Thema „Orthodiagonale Vierecke“ sei verwiesen auf:

- Josefsson, Martin: *Characterizations of Orthodiagonal Quadrilaterals*, Forum Geometricorum 12: 13–25 (2012), als pdf herunterladbar unter <http://forumgeom.fau.edu/FG2012volume12/FG201202.pdf>

Und zum Thema „Nicht zerlegbare Heron’sche Dreiecke“ folgende Empfehlung:

- Yiu, Paul (2008), *Heron triangles which cannot be decomposed into two integer right triangles*, 41st Meeting of Florida Section of Mathematical Association of America, als pdf herunterladbar unter <http://math.fau.edu/yiu/Southern080216.pdf>

---

## Allgemeine Hinweise auf geeignete Literatur

Die Fülle an Büchern über schöne Mathematik macht es schwer, eine angemessene Auswahl aufzulisten.

Anregend sind die Sammlungen von mathematischen Problemen, die ursprünglich in monatlichen Kolumnen verschiedener Zeitschriften erschienen sind. Hier möchte ich insbesondere die folgenden Autoren nennen, die eine Reihe von Büchern veröffentlicht haben:

- Martin Gardner (u. a. *Mathematische Rätsel und Spiele*)
- Theoni Pappas (u. a. *The Joy of Mathematics*)
- Ian Stewart (u. a. *Professor Stewarts mathematisches Sammelsurium*)
- Heinrich Hemme (u. a. *Heureka!*)

Schöne und spannende Mathematik steht im Mittelpunkt der Bücher von:

- Hans Walser (u. a. *Der Goldene Schnitt, Geometrische Miniaturen, Symmetrie in Raum und Zeit, DIN A4 in Raum und Zeit*)
- Roger B. Nelsen (u. a. *Beweise ohne Worte, Proofs without Words I, II, III*)
- Claudi Alsina und Roger B. Nelsen (u. a. *Bezaubernde Beweise, Perlen der Mathematik*)
- Albrecht Beutelspacher (u. a. *Wie man in eine Seifenblase schlüpft*)
- Julian Havil (u. a. *Gamma, Verblüfft?, Das gibt's doch nicht!*)
- George G. Szpiro (u. a. *Mathematik für Sonntagmorgen, Mathematik für Sonntagnachmittag*)
- Eli Maor und Eugen Jost (*Beautiful Geometry*)
- Alfred S. Posamentier (u. a. *Mathematical Amazements and Surprises*)
- Martin Erickson (u. a. *Mathematische Appetithäppchen*)

Unter den zahlreichen Websites, die sich mit schöner Mathematik und mathematischen Knobeleyen beschäftigen, können hier nur die wichtigsten genannt werden:

- [www.walser-h-m.ch/hans](http://www.walser-h-m.ch/hans)
- [www.cut-the-knot.org](http://www.cut-the-knot.org)
- [www.gogeometry.com](http://www.gogeometry.com)
- [www.mathsisfun.com](http://www.mathsisfun.com)
- [www.mathpuzzle.com](http://www.mathpuzzle.com)
- [www.recreomath.qc.ca](http://www.recreomath.qc.ca)
- [www.mathematische-basteleien.de](http://www.mathematische-basteleien.de)

Eine Sammlung höchst interessanter Artikel zu verschiedenen mathematischen Themen findet man auf der Website der *Mathematical Association of America* (MAA). Lesenswert sind sie vor allem auch wegen ihres historischen Bezugs und der Frage der Umsetzbarkeit im schulischen Unterricht:

- [www.maa.org/press/periodicals/convergence](http://www.maa.org/press/periodicals/convergence)

Wer mehr wissen möchte über jene Persönlichkeiten, die im Laufe der Jahrhunderte dazu beigetragen haben, mathematische Theorien zu entwickeln oder die Erkenntnisse darüber zu vertiefen, dem empfehle ich an erster Stelle die Website des *MacTutor History of Mathematics archive* der *School of Mathematics & Statistics* an der *University of St. Andrews, Scotland*:

- [www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/](http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/)

Wer einen zusammenfassenden Überblick über Leben und Werk einzelner ausgewählter Persönlichkeiten erhalten möchte, dem sei *Der Mathematische Monatskalender* empfohlen:

- [www.spektrum.de/mathematik/monatskalender/index/](http://www.spektrum.de/mathematik/monatskalender/index/)
- Spektrum Spezial: Geschichten aus der Mathematik (Sonderhefte 2/2009 und 3/2011)

---

## Stichwortverzeichnis

### A

Additionstheorem, 117  
Additionsverfahren, 312  
Ähnlichkeit, 154  
al-Buzjani, Abu'l-Wafa, 350  
Algorithmus, Euklidischer, 70  
al-Haitham, Abu Ali al-Hasan ibn, 41, 316  
Alhazen, 316  
al-Karaji, Abu Bakr ibn Muhammad ibn  
    al-Husayn, 45  
al Kashi, Jamshid, 82  
Apollonios von Perge, 282  
Arbelos, 355  
Archimedes, 81, 355  
Aryabhata, 44  
Astroid, 122  
Augensumme, 211  
Austin, David, 286

### B

Balkenwaage, 159  
Beinahe-Pythagoras-Figur, 259  
Bernoulli, Jakob, 328  
Bernoulli-Zahl, 328  
Bhaskara, 347  
Billardturnier, 22  
Binet, Jacques Philippe Marie, 67  
Binomialkoeffizient, 315  
Bouwkamp, Christoffel Jacob, 268  
Brooks, Rowland Leonard, 275

### C

CAS, 228

Cassini, Giovanni Domenico, 246  
Cassini-Identität, 246  
Cheney, Fitch, 366  
Curry, Paul, 241  
Curry's triangle paradox, 241

### D

da Vinci, Leonardo, 339  
Descartes, René, 282  
Diagonale, 9, 107  
    Länge, 10  
Dichtefunktion, 235  
Differenzenfolge, 308  
Diophant, 29  
Dobriner, Hermann, 344  
Dodekaeder, 230  
Domino, 93  
Drehung, 117  
Dreieck  
    beinahe-rechtwinkliges, 252  
    Heron'sches, 364  
Dreiecksfigur, 102  
Dreiecksform, 231  
Dreieckszahl, 28, 35, 320  
Dreiersystem, 163  
    balanciertes, 166  
Dreiteilung, 145  
Duijvestijn, Adrianus Johannes Wilhelmus, 262

### E

Einheitskreis, 16, 57  
Einhüllende, 113  
Endziffer, 125

Entscheidungsverfahren, 219  
 Epizykloide, 120  
 Epstein, Paul, 343  
 Erwartungswert, 218, 228  
 Euklid, 55, 70, 128, 247, 334  
 Euklidischer Algorithmus, 70  
 Euler, Leonhard, 77, 136, 224

**F**

Fadenbilder, 107  
 Faktorisierung, 225  
 Faulhaber, Johannes, 305  
 Faulhaber'sche Formeln, 305  
 Fermat, Pierre de, 324  
 Fibonacci, 68  
 Fibonacci-Folge, 245  
 Fibonacci-Rechteck, 67  
 Fibonacci-Zahl, 66  
 Flächenanlegung, 254  
 Flächenaufteilung, 143  
 Flechtmuster, 89  
 Fliesenmuster, 345  
 Folge  
   arithmetische, 290, 308  
   geometrische, 152  
 Fünfeckszahl, 320  
 Funktion  
   erzeugende, 224  
   ganzrationale, 310  
   quadratische, 114

**G**

Galilei, Galileo, 33, 216  
 Gardner, Martin, 93, 220, 241  
 Gauß, Carl Friedrich, 16, 26, 136, 216  
 Gauß'sche Dichtefunktion, 215  
 Gauß'sche Zahlenebene, 16  
 Gitterpunkt, 199  
 Gleichungssystem, lineares, Lösung, 312  
 Glockenkurve, 215, 235  
 Glücksrad, 221  
 Gnomon, 30  
 Goldbach, Christian, 136  
 Goldener Schnitt, 70  
 Goldenes Dreieck, 15  
 Goldenes Rechteck, 70  
 Goldene Zahl, 70

Golomb, Solomon W., 93  
 Göpel, Adolph, 342  
 Grenzwert, 74, 153  
 Grenzwertsatz, zentraler, 234  
 Gutheil, Benjir von, 343

**H**

Halbierung, 143  
 Halbkreis, verschobener, 86  
 Harriot, Thomas, 321  
 Heron von Alexandria, 364  
 Heron'sches Dreieck, 364  
   zerlegbares, 364  
 Heron'sches Viereck, nicht zerlegbares, 366  
 Herzfigur, 354  
 Hexaeder, 211  
 Hexagram, 23  
 Hexomino, 93  
 Hippokrates von Chios, 353  
 Histogramm, 213  
 Höhensatz, 337  
   des Euklid, 247  
 Hüllkurve, 113  
 Hypozykloid, 123

**I**

ICM, 261  
 Identität von d'Ocagne, 255  
 Ikosaeder, 230  
 Imaginärteil, 16

**K**

Kachelmuster, 167  
 Kaninchen-Problem, 68  
 Kardioid, 122  
 kariertes Papier, 183  
 Kathetensatz, 252, 335  
 Kehrwertfunktion, 114  
 Kettenbruch, 62  
 Kirchhoff'schen Regeln, 276  
 Kissing Circles, 285  
 Knuth, Donald E., 305  
 Kombinationstabelle, 212  
 Kongruenzrechnung, 137  
 Kopfrechnen, 125  
 Körper, platonischer, 230

Kosinussatz, 279  
 Kreisring, 83  
 Kreisteilungsgleichung, 17  
 Kreiswinkelsatz, 11  
 Kreiszahl, 81  
 Krümmung, ganzzahlige, 286  
 Kubikzahl, 138  
 Summe, 44, 312

**L**

Lagrange, Joseph-Louis, 329  
 Lagrange-Interpolation, 330  
 Laplace, Pierre-Simon, 224  
 Laufbahn, 89  
 Lehrsatz, allgemeiner binomischer, 315  
 Leibniz, Gottfried Wilhelm, 311  
 Leonardo von Pisa, 68  
 Loyd, Sam, 241

**M**

Markow-Kette, 237  
 mathematische Tafeln, 295  
 Mersenne, Marin, 324  
 Mittelpunktswinkel, 11  
 Moivre, Abraham de, 17, 67, 328  
 Mönchen des Hippokrates, 353  
 Moroń, Zbigniew, 261

**N**

Nautilus, 68  
 $n$ -Eck, 107  
 Nephroid, 122  
 Netzwerk elektrischer Ströme, 275  
 Nielsen, Jakob, 343  
 Nikomachos von Gerasa, 44  
 Normalverteilung, 215, 234

**O**

Ocagne, Philbert Maurice d', 255  
 Oktaeder, 230  
 Ornament, 87

**P**

Pappos-Kette, 290

Pappos von Alexandria, 290  
 Parabel, 111, 190  
 Parkettierung, 97, 167  
 $2n$ -Eck, 169  
 baumartige, 173  
 zentralsymmetrische, 176  
 Pascal, Blaise, 327  
 Pascal'sches Dreieck, 315  
 Penrose, Roger, 167  
 Pentagram, 23  
 Pentomino, 93, 197  
 Perigal, Henry, 341  
 Peripheriewinkel, 11  
 Pick, Georg Alexander, 199  
 Pólya, George, 318  
 Polygonalzahl, 320  
 Polynom, 225  
 Polynomzerlegung, 225  
 Polyomino, 93  
 Potenzen, Summe, 305  
 Punkt, innerer, 200  
 Puzzle-Beweis, 341  
 Puzzlestück, 173  
 Pyramidalzahl, 321  
 Pythagoras, 333  
 Briefmarke, 367  
 Satz von, 50, 76, 258  
 Umkehrung, 349  
 Pythagoras-Baum, 351  
 Pythagoras-Partner, 360  
 Pythagoras-Spirale, 350  
 Pythagoreer, 25

**Q**

Quadrat, verschwundenes, 241  
 Quadratur des Quadrats, 261  
 Quadratwurzel, Kettenbruch, 77  
 Quadratzahl, 125, 320  
 Summe, 41, 311  
 Zyklen, 125  
 Quadrierplan, 142

**R**

Radius, ganzzahliger, 287  
 Randpunkt, 199  
 Raute, 167  
 Realteil, 16

Rechenkästchen, 183  
 Rechteck  
   goldenes, 70  
   maximaler Flächeninhalt, 190  
   Zerlegung, 59  
 Reihe, geometrische, 152

## S

Salinon, 356  
 Salzfasschen, 356  
 Sangaku, 295  
 Satz des Pythagoras  
   Umkehrung, 349  
 Satz von Pythagoras, 76  
 Schachbrettfärbung, 96  
 Schierscher, Georg, 79  
 Schläfli-Symbol, 6  
 Schnitt, goldener, 70  
 Schustermesser, 355  
 Scientific American, 220  
 Seki Kowa, 295  
 Sicherman, George, 220  
 Sigma-Regel, 235  
*Simple Perfect Squared Rectangles*, 261  
*Simple Perfect Squared Squares*, 261  
 Sinussatz, 279  
 Soddy, Frederick, 282  
 Spiel, faires, 219  
 Spielplan, 21  
 Spielregel, 220  
   faire, 30  
 Spirale, 65, 118  
 Sprague, Roland P., 261  
 Standardabweichung, 228  
 Stern, 1, 108  
 Sternfigur, 178  
 Streckenzug, 3  
 Stufenzahl, 163  
 Summe  
   Kubikzahlen, 44, 312  
   Quadratzahlen, 311  
   von Potenzen, 305  
 Summenformel, 26  
 Sylvester, James Joseph, 36

## T

Tangente, 111  
   Kreis-, 90  
 Teiler, 5  
   größter gemeinsamer, 70  
   teilerfremd, 6  
 Teilerfremd, 6, 57, 206  
 Teilerpaar, 185  
 Termdivision, 18  
 Tetraeder, 230  
 Tetraederzahl, 321  
 Tetromino, 94  
 Thabit ibn Qurra, 348  
 Thieme, Karl Gustav Hermann, 344  
 Trapezform, 231  
 Tromino, 93  
 Turnier, 21  
 Tutte, William Thomas, 275

## U

Übergang, 237  
 Umfang  
   Rechteck, 184  
 Umfangswinkel, 11

## V

Verfolgungskurve, 118  
 Verhältnisgleichung, 336  
 Vieleck, 1, 107  
 Viereck  
   Heron'sches, 366  
   orthodiagonales, 357  
*Vierfarbensatz*, 262  
 Vier-Kreise-Satz, 283  
 Vierteilung, 147  
 Vieta'scher Wurzelsatz, 285  
 Viète, François, 285

## W

Wahrscheinlichkeitsverteilung, 213  
 Walser, Hans, 79, 87, 357  
 Wert, kritischer, 218

Wettspiel, [234](#)

Wheatstone, Charles, [47](#)

Wiegen, [159](#)

Winkelhaken, [31](#), [51](#)

## Z

Zackenwinkel, [11](#)

Zahl

    aufeinanderfolgende natürliche, [36](#)

    figurierte, [320](#)

    goldene, [70](#)

    komplexe, [16](#)

    modulo, [137](#)

Zahlenkette, [133](#)

Zahlentripel, pythagoreisches, [50](#), [198](#), [334](#)

Zehneck, [168](#)

Zentriwinkel, [11](#)

Zerlegungsbeweis, [341](#)

Zerlegung von Rechtecken, [59](#)

Zu Chongzhi, [82](#)

Zustand, [237](#)

Zweierpotenz, [49](#)

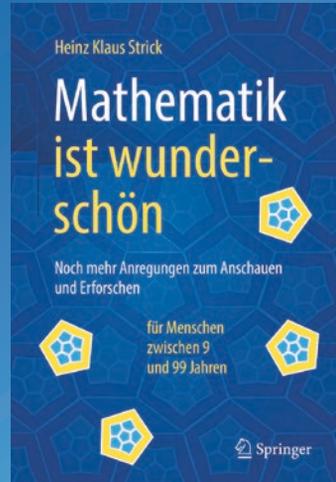
Zwillingskreise, [356](#)

Zyklen, periodische, [135](#)

Zykloide, [120](#)

Zykluslänge, [134](#)

Heinz Klaus Strick  
**Mathematik ist wunderschön**  
Noch mehr Anregungen zum Anschauen  
und Erforschen für Menschen zwischen  
9 und 99 Jahren  
1. Aufl. 2018, XI, 277 S. 681 Abb.,  
640 Abb. in Farbe, Softcover  
24,99 € (D) | 25,69 € (A) | \*CHF 28,00  
ISBN 978-3-662-55830-0



## Zum Weiterlesen...

- Das Buch bietet eine Fülle von Materialien und Anregungen zum eigenen Forschen, Ausprobieren und Recherchieren aus ganz unterschiedlichen Bereichen der Mathematik
- Es wird nahezu kein Wissen vorausgesetzt, sondern nur Neugier am eigenen Entdecken und Durchdenken
- Es eignet sich als Geschenk, als Quelle für Mathematik-interessierte Lehrer, als Preis bei Mathematik-Wettbewerben

1. Auflage

Wie der Vorgängerband *Mathematik ist schön* macht auch dieses Buch in 12 Kapiteln wieder zahlreiche Angebote, sich mit (weiteren) bekannten oder weniger bekannten Fragestellungen aus der Mathematik zu beschäftigen. Der Aufbau von Mobs wird analysiert, Quader werden gestapelt, Flächen mit Mustern ausgelegt, ägyptische Brüche und periodische Dezimalzahlen erforscht, Spiele mit merkwürdigen Würfeln und Glücksrädern untersucht. Es geht um Gemeinsames und Besonderes bei Dreiecken, Vierecken, Fünfecken, ... um den Goldenen Schnitt und um Eigenschaften regelmäßiger Körper. Die letzten Kapitel beschäftigen sich mit Monsterkurven und Fraktalen und geben einen Einblick in die Gesetzmäßigkeiten des Zufalls. Das Buch bietet in allen Kapiteln eine Vielzahl von Anregungen, die dazu beitragen, einzelne Fragestellungen zu vertiefen. „Lösungen“ hierzu können von der Internetseite des Springer-Verlags heruntergeladen werden. Es ist ein wichtiges Anliegen des Buches, dass auch junge Menschen den Weg zur Mathematik finden und Leser, deren Schulzeit schon einige Zeit zurückliegt, Neues entdecken.

€ (D) sind gebundene Ladenpreise in Deutschland und enthalten 7% MwSt; € (A) sind gebundene Ladenpreise in Österreich und enthalten 10% MwSt; CHF und die mit \* gekennzeichneten Preise enthalten die landesübliche MwSt. Programm- und Preisänderungen (auch bei Irrtümern) vorbehalten. Es gelten unsere Allgemeinen Liefer- und Zahlungsbedingungen.

Jetzt bestellen: [springer.com/shop](https://www.springer.com/shop)

## Weitere Bücher des Autors

Neu in der  
1. Auflage



- Unterschied zwischen Wahrscheinlichkeit und relativer Häufigkeit
- Wie rechnet man mit Wahrscheinlichkeiten
- Was ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung

Heinz Klaus Strick

### Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung

Stochastik kompakt

1. Aufl. 2018, IX, 57 S., 3 Abb., Softcover,

14,99 € (D) | 15,41 € (A) | \*CHF 15,50

ISBN 978-3-658-21852-2



- Bedeutung der Standardabweichung
- Bedeutung signifikanter Abweichungen
- Bedeutung von „statistischer Beweis“

Heinz Klaus Strick

### Einführung in die Beurteilende Statistik

Stochastik kompakt

1. Aufl. 2018, IX, 59 S., 33 Abb., Softcover,

14,99 € (D) | 15,41 € (A) | \*CHF 15,50

ISBN 978-3-658-21854-6



- Kriterien für die „Zufälligkeit“ von Versuchsabläufen und Versuchsergebnissen
- Faustregeln zu den Kriterien
- Beispiele zu allen behandelten Themen

Heinz Klaus Strick

### Gesetzmäßigkeiten des Zufalls

Stochastik kompakt

1. Aufl. 2019, XIII, 49 S., 32 Abb., Softcover,

14,99 € (D) | 15,41 € (A) | \*CHF 17,00

ISBN 978-3-658-25464-3

€ (D) sind gebundene Ladenpreise in Deutschland und enthalten 7% MwSt. € (A) sind gebundene Ladenpreise in Österreich und enthalten 10% MwSt. Die mit \* gekennzeichneten Preise sind unverbindliche Preisempfehlungen und enthalten die landesübliche MwSt. Preisänderungen und Irrtümer vorbehalten.

Jetzt bestellen: [springer.com/shop](https://springer.com/shop)



# Willkommen zu den Springer Alerts

Jetzt  
anmelden!

- Unser Neuerscheinungs-Service für Sie:  
aktuell \*\*\* kostenlos \*\*\* passgenau \*\*\* flexibel

Springer veröffentlicht mehr als 5.500 wissenschaftliche Bücher jährlich in gedruckter Form. Mehr als 2.200 englischsprachige Zeitschriften und mehr als 120.000 eBooks und Referenzwerke sind auf unserer Online Plattform SpringerLink verfügbar. Seit seiner Gründung 1842 arbeitet Springer weltweit mit den hervorragendsten und anerkanntesten Wissenschaftlern zusammen, eine Partnerschaft, die auf Offenheit und gegenseitigem Vertrauen beruht.

Die SpringerAlerts sind der beste Weg, um über Neuentwicklungen im eigenen Fachgebiet auf dem Laufenden zu sein. Sie sind der/die Erste, der/die über neu erschienene Bücher informiert ist oder das Inhaltsverzeichnis des neuesten Zeitschriftenheftes erhält. Unser Service ist kostenlos, schnell und vor allem flexibel. Passen Sie die SpringerAlerts genau an Ihre Interessen und Ihren Bedarf an, um nur diejenigen Information zu erhalten, die Sie wirklich benötigen.

Mehr Infos unter: [springer.com/alert](http://springer.com/alert)