

Beat P. Kneubuehl

Ballistik

Theorie und Praxis

 Springer

Ballistik

Beat P. Kneubuehl

Ballistik

Theorie und Praxis

mit 253 Abbildungen und 49 Tabellen

 Springer

Beat P. Kneubuehl
bpk consultancy GmbH
Thun, Schweiz

ISBN 978-3-662-58299-2 ISBN 978-3-662-58300-5 (eBook)
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-58300-5>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature 2018

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Verantwortlich im Verlag: Andreas Rüdinger

Springer ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorwort

Ballistik ist nicht gerade ein breit bekanntes Teilgebiet der Physik. Hochschulen und Universitäten, an denen dieses Fach belegt werden kann, sind wohl an einer Hand abzuzählen; mit einem direkten Weg dorthin ist somit kaum zu rechnen. Nach meiner Berufslehre im Baugewerbe, dem anschließenden Studium der Mathematik und Physik an der Universität Bern und mehreren Jahren als Dozent an einer Abitursschule war ich des Unterrichtens müde und auf der Suche nach einer neuen Betätigung. Zu jener Zeit wurde in für mich erreichbarer Umgebung eine einzige Stelle für einen Mathematiker in einem physikalischen Umfeld angeboten, und zwar bei der Erprobungsstelle für Ballistik, Waffen und Munition des Schweizer Verteidigungsministeriums. So kam ich ganz zufällig zum Fachgebiet Ballistik, von dem ich, abgesehen von der üblichen, im Physikunterricht dargebotenen Berechnung von Flugbahnen im Vakuum, keine Ahnung hatte.

Ein halbes Dutzend Kurse bei der Carl-Cranz-Gesellschaft in Weil/Rhein und bei der ENSTA in Paris später und nach vielen auf dem Schießplatz verbrachten Stunden und Tagen wusste ich, dass ich – aus meiner Sicht – in eines der vielseitigsten und spannendsten Gebiete der Physik hineingeraten war.

Allein die Außenballistik benötigt neben der klassischen Mechanik einen vertieften Einblick in den Aufbau der Atmosphäre, Kenntnisse der Meteorologie, der Aerodynamik und der Kreiseltheorie. Die Innenballistik basiert auf mechanischen, thermo- und fluiddynamischen Prinzipien und setzt einige elementare Kenntnisse der Explosivstoffe voraus. Die Endballistik schließlich, mit ihren Ereignissen im Milli- und Mikrosekundenbereich, eröffnet ein kaum erforschtes Feld, reagiert doch Materie auf die äußerst kurzzeitigen und extrem hohen Belastungen anders, als wir uns dies vom quasi-statischen Denken her gewohnt sind.

Die tiefe Einsicht in all diese Teilgebiete der Ballistik hat es mir ermöglicht, physikalisch-ballistische Denkweisen in andere Wissenschafts- und Wissensbereiche hineinzutragen, dies insbesondere in die Prüfung und Beurteilung von ballistischem Schutz, in die Kriminalistik und Rechtsmedizin und in die Chirurgie, der vor allem die experimentelle Simulation kurzzeitiger Eindringvorgänge eine wesentlich verbesserte Beurteilung und Behandlung der Schuss- und Kriegsverletzungen ermöglichte.

Mit diesem Buch möchte ich all jenen Personen, die sich in die Ballistik einarbeiten wollen, eine umfassende Grundlage bieten und jene, die sich bereits beruflich oder privat damit beschäftigen, an meinen Erfahrungen teilhaben lassen, die sich in

den über 40 Jahren Beschäftigung mit diesen Themen und den unzähligen miterlebten Versuchen angesammelt haben.

Die Erarbeitung eines Werkes in einem so umfassenden Gebiet, wie es die Ballistik darstellt, erfordert die Mithilfe verschiedener Institutionen und fachkompetenter Personen. Ich danke vor allem der armasuisse, Wissenschaft und Technologie (W & T), Thun, und deren Leiter, Dr. Thomas Rothacher, für die bedingungslose Unterstützung und die Möglichkeit, all die Berichte und Unterlagen, die ich während der 33 Jahre meiner Tätigkeit in der Abteilung für Ballistik und Schießversuche verfasste, für dieses Buch zu verwenden. Zudem durfte ich auch Bilder einfügen, die im Zusammenhang mit meinen Arbeiten entstanden sind.

Ein weiterer Dank geht an die Firma Nitrochemie, Wimmis und insbesondere an die Herren Dr. sc. nat. Beat Vogelsanger und Dipl.-Chem. Pascal Beer für ihre Unterstützung im Fachgebiet Explosivstoffe und bei weiteren innenballistischen Fragen. Für die Beschreibung des gasdynamischen Modelles erhielt ich kompetente Hilfe von Dr. Rudi Heiser, Weil am Rhein. Eine sorgfältige und fachlich profunde Durchsicht der ganzen Innenballistik führte Dr. chem. Patrick Folly durch. Beiden bin ich für ihre Unterstützung sehr dankbar.

Dipl. Ing. Volker Fleck, Freiburg i. Br., stellte mir freundlicherweise seine Unterlagen zu den Rechenmodellen der Außenballistik zur Verfügung, die ich beim Verfassen der Abschnitte über 6- und 4-FG-Modelle verwenden konnte. Das Kapitel Außenballistik hat mir in dankenswerter Weise Dipl.-Ing. Peter Näf mit großer Aufmerksamkeit gegengelesen.

Da ich mich mit dem hydrodynamischen Eindringvorgang der Endballistik kaum je auseinandergesetzt habe, verfasste Dipl.-Ing. Wilhelm Odermatt freundlicherweise diesen Abschnitt über sein Spezialgebiet.

Für die tatkräftige Mitarbeit im Abschnitt forensische Anwendungen der Ballistik bin ich Dr. sc. forens. Fabiano Riva vom Institut für Rechtsmedizin der Universität Bern zu Dank verpflichtet und dem Institut selbst für die Bilder aus dem Zentrum für Forensische Physik/Ballistik.

Mit Unterlagen zugeeignet haben mir außerdem Henri Habegger vom Verein Schweizer Armeemuseum, Dr. Tobias Schmid von der Rheinmetall WM GmbH sowie Philippe Drapela und Martin Zumstein von der armasuisse W & T.

Für eine gründliche und sachverständige Durchsicht des gesamten Manuskriptes durfte ich einmal mehr auf Ueli Geiger, Rüti (Zürich), zählen. Dafür danke ich ihm herzlich. Ganz besonders danke ich auch meiner Frau für sehr viel Geduld während der Entstehung dieses Werkes und für die sprachliche Prüfung des Textes.

Dem Springer-Verlag sei für die sehr angenehme Zusammenarbeit und die hervorragende Ausstattung des Werkes herzlich gedankt.

Thun, September 2018

Beat P. Kneubuehl

Inhaltsübersicht

1 Einführung.....	1
2 Physikalische Grundlagen.....	3
2.1 Bezugs- und Maßsysteme, Notation.....	3
2.2 Mechanik.....	4
2.3 Fluiddynamik.....	25
2.4 Das physikalische Umfeld der Ballistik.....	50
3 Innenballistik.....	53
3.1 Einführung, Historisches.....	53
3.2 Explosivstoffe.....	54
3.3 Elemente der Innenballistik.....	67
3.4 Innenballistische Berechnungen.....	83
3.5 Bestimmung der erforderlichen Treibmittelkenndaten.....	104
3.6 Innenballistik der Rakete.....	108
3.7 Spezielle Antriebssysteme.....	116
3.8 Die Beschleunigung von Splittern.....	125
4 Abgangsballistik.....	131
4.1 Einleitung.....	131
4.2 Phänomene an der Mündung.....	132
4.3 Der Geschossabgang.....	141
5 Außenballistik.....	151
5.1 Historisches.....	151
5.2 Die Atmosphäre.....	154
5.3 Am Geschoss wirkende Kräfte und Momente.....	161
5.4 Flugbahnrechnungen mit dem Massenpunktmodell.....	174
5.5 Flugbahnmodelle mit mehr als drei Freiheitsgraden.....	227
5.6 Stabilität und Folgsamkeit.....	242
5.7 Zur Bestimmung der Beiwerte.....	258

5.8	Ballistisch optimale Geschosse	279
5.9	Zur Außenballistik der un gelenkten Rakete	298
6	Grundzüge der Endballistik.....	303
6.1	Einführung	303
6.2	Durchdringungsmodelle	307
6.3	Verhaltensmerkmale verschiedener Materialien	318
6.4	Schutzanordnungen	328
6.5	Probleme des ballistischen Schutzes	332
7	Abprallende Geschosse	351
7.1	Einleitung	351
7.2	Stoßtheorie.....	352
7.3	Phänomenologie des Prellschusses.....	362
7.4	Das Geschoss als Massenpunkt.....	366
7.5	Das Geschoss als starrer Körper.....	376
7.6	Die Flugbahn eines Prellschusses.....	386
7.7	Weitere Abprallertheorien	388
8	Spezielle Anwendungen der Ballistik	391
8.1	Einleitung	391
8.2	Forensische Anwendungen (<i>Mitautor Dr. Fabiano RIVA</i>)	392
8.3	Sicherheitsfragen auf Schießplätzen und in Schießanlagen	412

Inhaltsverzeichnis

Verzeichnis der Formelzeichen.....	XXI
Umrechnung von Einheiten	XXIX
1 Einführung.....	1
2 Physikalische Grundlagen	3
2.1 Bezugs- und Maßsysteme, Notation.....	3
2.2 Mechanik	4
2.2.1 Kinematik, lineare Bewegungen	4
2.2.2 Masse, Impuls, Kraft	7
2.2.3 Arbeit und Energie	8
2.2.4 Drehbewegungen.....	10
2.2.5 Erhaltungssätze	12
2.2.6 Bewegungsgleichungen.....	13
2.2.6.1 Allgemeines	13
2.2.6.2 Das Prinzip von D’ALEMBERT	13
2.2.6.3 Flugbahnen im Vakuum.....	13
2.2.6.4 Wegabhängigkeit	15
2.2.6.5 Die Bewegung im Zentralfeld.....	15
2.2.7 Beschleunigungen im rotierenden Bezugssystem.....	19
2.2.7.1 Die Zentrifugalbeschleunigung.....	19
2.2.7.2 Die Coriolisbeschleunigung.....	20
2.2.8 Bewegungen starrer Körper	21
2.2.8.1 Bewegungszerlegung	21
2.2.8.2 Der Trägheitstensor.....	21
2.2.8.3 Der freie symmetrische Kreisel	23
2.2.8.4 Der schwere symmetrische Kreisel.....	23
2.3 Fluiddynamik.....	25
2.3.1 Allgemeines.....	25
2.3.2 Thermodynamische Grundbegriffe	25
2.3.2.1 Die Temperatur	25
2.3.2.2 Temperatur und Wärme	26
2.3.2.3 Aggregatzustände	26
2.3.2.4 Die Zustandsgleichung der Gase	27

2.3.2.5	Wärme, Arbeit, innere Energie	27
2.3.3	Materieeigenschaften	29
2.3.3.1	Dichte, Kompressibilität	29
2.3.3.2	Zähigkeit	29
2.3.3.3	Schallgeschwindigkeit	30
2.3.3.4	Ausbreitung von Schallwellen, Mach'scher Kegel.....	31
2.3.4	Reibungsfreie Strömungen.....	33
2.3.4.1	Definition, Erhaltungssätze.....	33
2.3.4.2	Die Bernoulligleichung.....	34
2.3.4.3	Strömungswiderstand.....	35
2.3.4.4	Wirbelströmungen	36
2.3.4.5	Der Magnuseffekt	37
2.3.4.6	Das Tragflügelprinzip	38
2.3.5	Strömungen mit Reibung	39
2.3.5.1	Kräfte, Bewegungsgleichungen	39
2.3.5.2	Berücksichtigung der Zähigkeit, Reynoldszahl	41
2.3.6	Strömungsvorgänge und Freistrahlen	42
2.3.6.1	Allgemeines	42
2.3.6.2	Ausströmen aus Mündungen	42
2.3.6.3	Geschwindigkeits- und Energieverlauf im Freistrahle	43
2.3.6.4	Verdichtungsstöße	45
2.3.6.5	Lavaldüsen	47
2.4	Das physikalische Umfeld der Ballistik	50
2.4.1	Größenordnungen.....	50
2.4.2	Kaliber und Querschnittsbelastung	51
3	Innenballistik.....	53
3.1	Einführung, Historisches	53
3.2	Explosivstoffe.....	54
3.2.1	Allgemeines.....	54
3.2.1.1	Definition und Bezeichnungen	54
3.2.1.2	Die Abbrandgeschwindigkeit.....	54
3.2.2	Schwarzpulver.....	56
3.2.2.1	Geschichtliches	56
3.2.2.2	Zutaten	57
3.2.2.3	Herstellung.....	57
3.2.2.4	Rezeptur und Reaktionsprodukte.....	58
3.2.3	Nitrocellulose basierte Treibmittel.....	59
3.2.3.1	Nitrocellulose.....	59
3.2.3.2	Einbasige Treibmittel.....	61
3.2.3.3	Zwei- und dreibasige Treibmittel.....	61
3.2.4	Treibmittel ohne Nitrocellulose-Basis	63

3.2.4.1	Kunststoffgebundene Treibmittel	63
3.2.4.2	Composite-Treibmittel	63
3.2.5	Physikalische Daten der Treibmittel	64
3.2.6	Anzünd- und Zündmittel	64
3.3	Elemente der Innenballistik	67
3.3.1	Möglichkeiten der Projektilbeschleunigung	67
3.3.1.1	Allgemeines	67
3.3.1.2	Federenergie	67
3.3.1.3	Komprimierte Gase	69
3.3.1.4	Explosivstoffe	70
3.3.2	Treibmittelabbrand	70
3.3.2.1	Die Abbrandgeschwindigkeit	70
3.3.2.2	Die Formfunktion	72
3.3.2.3	Chemische Beeinflussung der Abbrandgeschwindigkeit ..	74
3.3.2.4	Das Abbrandgesetz	75
3.3.3	Die Energiegleichung	76
3.3.4	Die Geschossbewegung im Rohr	77
3.3.5	Der Druckverlauf, Druckkurven	78
3.3.6	Der Wirkungsgrad und die maximale Geschwindigkeit	82
3.4	Innenballistische Berechnungen	83
3.4.1	Das thermodynamische Gleichungssystem	83
3.4.2	Das Spannungsverhältnis	84
3.4.3	Der Drall und die Leistenkräfte	85
3.4.4	Das Druckgefälle im Rohr	87
3.4.5	Das gasdynamische Modell	89
3.4.5.1	Historische Entwicklung	89
3.4.5.2	Der aktuelle Stand	94
3.4.6	Die Methode von HEYDENREICH	96
3.4.7	Das offene Rohr	100
3.4.7.1	Allgemeines	100
3.4.7.2	Das erweiterte Gleichungssystem	100
3.4.7.3	Der Gasdruckverlauf im offenen Rohr	102
3.5	Bestimmung der erforderlichen Pulverkenndaten	104
3.5.1	Allgemeines	104
3.5.2	Die manometrische Bombe	104
3.5.3	Die Crawfordbombe	107
3.5.4	Thermodynamische Berechnung	108
3.6	Innenballistik der Rakete	108
3.6.1	Allgemeines	108
3.6.2	Treibladungsabbrand und Brennkammerdruck	109

3.6.2.1	Der Abbrand der Treibladung.....	109
3.6.2.2	Der Druck in der Brennkammer	110
3.6.2.3	Treibladungsgeometrien	112
3.6.3	Der Schub.....	113
3.6.3.1	Die Raketengleichung.....	113
3.6.3.2	Berechnung des Schubes, Düsenauslegung	114
3.6.3.3	Schubbestimmung.....	116
3.7	Spezielle Antriebssysteme.....	116
3.7.1	Allgemeines.....	116
3.7.2	Die Daviskanone	117
3.7.3	Die Düsenkanone	118
3.7.4	Das Hochdruck-Niederdruck-System	120
3.7.5	Die Leichtgaskanone.....	120
3.7.6	Das Prinzip der Unterkalibergeschosse.....	121
3.7.6.1	Grundlegendes	121
3.7.6.2	Das konische Rohr	122
3.7.6.3	Treibspiegel- und Treibkäfiggeschosse	123
3.8	Die Beschleunigung von Splittern.....	125
3.8.1	Allgemeines.....	125
3.8.2	Sprengstoffbeschleunigte Splitter	125
3.8.2.1	Die Gurney-Formel.....	125
3.8.2.2	Lokale Anwendung der Gurney-Formel.....	128
3.8.3	Impulsbeschleunigte Splitter.....	129
3.8.3.1	Entstehung, mögliche Geschwindigkeiten.....	129
3.8.3.2	Fallbeispiel.....	130
4	Abgangsbalistik	131
4.1	Einleitung	131
4.2	Phänomene an der Mündung	132
4.2.1	Gasströmungen.....	132
4.2.1.1	Gasströmung bei Abgang eines Geschosses	132
4.2.1.2	Die Ausströmgeschwindigkeit	134
4.2.1.3	Gasströmung bei offenem Rohr	137
4.2.2	Feuererscheinungen.....	139
4.3	Der Geschossabgang	141
4.3.1	Rohrschwingungen und der Abgangsfehlerwinkel	141
4.3.1.1	Entstehung und Auswirkungen.....	141
4.3.2.2	Bestimmung des Abgangsfehlerwinkels.....	142
4.3.2	Der Rückstoß.....	144
4.3.2.1	Ursachen des Rückstoßes.....	144
4.3.2.2	Bestimmung des Rückstoßimpulses	144

4.3.2.3	Rücklaufgeschwindigkeit und Rückstoßenergie.....	146
4.3.2.4	Das Drehmoment beim Schuss	147
4.3.2.5	Möglichkeiten der Beeinflussung	148
4.3.3	Die Ablösung von Geschossführungsteilen	149
5	Außenballistik.....	151
5.1	Historisches	151
5.2	Die Atmosphäre.....	154
5.2.1	Physikalische Eigenschaften	154
5.2.2	Normalatmosphären	156
5.2.2.1	Allgemeines	156
5.2.2.2	Die ICAO-Atmosphäre	157
5.2.2.3	Weitere Atmosphärenstandards	158
5.2.3	Wirkliche Verhältnisse.....	158
5.2.3.1	Druck und Temperatur	158
5.2.3.2	Wind.....	160
5.3	Am Geschoss wirkende Kräfte und Momente.....	161
5.3.1	Erdbedingte Beschleunigungen.....	161
5.3.1.1	Die Zentrifugalbeschleunigung.....	161
5.3.1.2	Die Gravitationsbeschleunigung.....	162
5.3.1.3	Die Coriolisbeschleunigung.....	163
5.3.2	Das Geschoss als Massenpunkt.....	167
5.3.2.1	Der Luftwiderstand	167
5.3.2.2	Das Gewicht.....	168
5.3.3	Das Geschoss als starrer Körper	169
5.3.3.1	Bewegungen des Geschosses	169
5.3.3.2	Kräfte und Momente infolge nicht-axialer Anströmung.....	170
5.3.3.3	Kräfte und Momente infolge Drehung um eine Querachse.....	172
5.3.3.4	Kräfte und Momente infolge Drehung um die Längsachse.....	172
5.3.3.5	Die Ursache der seitlichen Abweichung.....	173
5.3.4	Zusammenfassende Liste der Kräfte und Momente.....	173
5.4	Flugbahnrechnungen mit dem Massenpunktsmodell	174
5.4.1	Bewegungsgleichungen.....	174
5.4.1.1	Die physikalische Herleitung.....	174
5.4.1.2	Die bahngeometrische Herleitung.....	175
5.4.1.3	Die Hauptgleichung der Außenballistik.....	176
5.4.2	Historisches zur Berechnung von Flugbahnen.....	177
5.4.2.1	Die Darstellung des Luftwiderstandes	177
5.4.2.2	Die Methode von SIACCI.....	178

5.4.2.3	Widerstandsgesetze und Standardgeschosse.....	179
5.4.2.4	Die Ingalls-Tabellen und der „Ballistic Coefficient“ (BC)	182
5.4.2.5	Die seitliche Abweichung (Derivation)	185
5.4.3	Gleichungssysteme für die Programmierung	185
5.4.3.1	Die numerische Berechnung.....	185
5.4.3.2	Gleichungssysteme mit 3- und 2-Freiheitsgraden.....	186
5.4.3.3	Das Anfangswertproblem	188
5.4.3.4	Einige Hinweise zur Durchführung	190
5.4.4	Der Einfluss von Wind.....	191
5.4.4.1	Die Bewegungsgleichungen bei Windeinwirkung.....	191
5.4.4.2	Transformation in ein windfestes Bezugssystem.....	192
5.4.4.3	Die Didion'sche Längswindformel.....	195
5.4.4.4	Die Didion'sche Querwindformel.....	195
5.4.4.5	Experimentelle Bestimmung der Querwindempfindlichkeit	197
5.4.5	Eigenschaften der Flugbahn.....	198
5.4.5.1	Allgemeines	198
5.4.5.2	Eigenschaften der Bahngeschwindigkeit.....	199
5.4.5.3	Geometrische Eigenschaften der Flugbahn	203
5.4.5.4	Besondere Punkte der Flugbahn	205
5.4.6	Näherungen	206
5.4.6.1	Näherungen für flache Flugbahnen.....	206
5.4.6.2	Näherungen für die Gipfelhöhe	209
5.4.6.3	Näherungen für den Auftreffpunkt	210
5.4.6.4	Der Schuss auf geneigter Ebene	210
5.4.6.5	Der Schuss steil aufwärts in die Luft	211
5.4.7	Das Randwertproblem.....	213
5.4.7.1	Problemstellung	213
5.4.7.2	Schusstafeln, Flugbahnkarten und der Benoist-Plan	214
5.4.7.3	Mechanische Lösungen.....	216
5.4.7.4	Rechnerische Lösungen	217
5.4.7.5	Ergänzende Bemerkungen zum Randwertproblem	222
5.4.8	Außenballistik der Splitter	222
5.4.8.1	Die Querschnittsbelastung	222
5.4.8.2	Der Luftwiderstandsbeiwert	223
5.4.8.3	Flugbahnrechnungen.....	224
5.4.8.4	Maximale Reichweiten	225
5.5	Flugbahnmodelle mit mehr als drei Freiheitsgraden	227
5.5.1	Berechnung der vollständigen Geschossbewegung	227
5.5.1.1	Bezugssysteme.....	227
5.5.1.2	Kräfte und Momente	229

5.5.1.3	Die Bewegungsgleichungen.....	232
5.5.1.4	Ergänzungen und Hinweise	233
5.5.1.5	Die Gleichung des komplexen Anstellwinkels	236
5.5.2	Modifizierte Massenpunktsmodelle	238
5.5.2.1	Vorbemerkung	238
5.5.2.2	Die Abnahme der Winkelgeschwindigkeit	238
5.5.2.3	Der BRL-Ansatz	240
5.5.2.4	Der Ansatz von FLECK und MOLITZ	241
5.6	Stabilität und Folgsamkeit	242
5.6.1	Was bedeutet Stabilität?	242
5.6.2	Stabilisierungsprinzipien bei Geschossen	243
5.6.2.1	Geschosse mit Drallstabilisierung.....	243
5.6.2.2	Stabilisierung drallloser Geschosse	243
5.6.2.3	Schulterstabilisierung.....	244
5.6.3	Gyroskopische Stabilität	244
5.6.4	Die Molitz'sche Stabilitätsbedingung	247
5.6.4.1	Vorbemerkung	247
5.6.4.2	Mathematische Definition der Stabilität	247
5.6.4.3	Stabilitätskriterien	248
5.6.4.4	Ballistische Stabilität	249
5.6.4.5	Das Molitz'sche Stabilitätsdreieck	251
5.6.4.6	Stabilitätsprobleme, instabile Geschosse.....	252
5.6.5	Folgsamkeit	255
5.6.5.1	Definition der Folgsamkeit	255
5.6.5.2	Wann sind Folgsamkeitsprobleme zu erwarten?	256
5.7	Zur Bestimmung der Beiwerte	258
5.7.1	Vorbemerkung.....	258
5.7.2	Experimentelle Bestimmung.....	258
5.7.2.1	Luftwiderstandsbeiwert.....	258
5.7.2.2	Weitere Beiwerte	262
5.7.3	Rechnerische Bestimmung des Luftwiderstandsbeiwertes	263
5.7.3.1	Die Anteile des Luftwiderstandsbeiwertes.....	263
5.7.3.2	Wellenwiderstand, Singularitätenverfahren.....	264
5.7.3.3	Wellenwiderstand, Newton'sche Theorie	269
5.7.3.4	Widerstandsbeiwert der Spitzenabplattung.....	270
5.7.3.5	Der Reibungsbeiwert	270
5.7.3.6	Der Bodensog	273
5.7.3.7	Beispiele.....	275
5.7.3.8	Unterschallanströmung	276
5.7.4	Rechnerische Bestimmung weiterer Beiwerte	277
5.7.4.1	Auftrieb- und Momentenbeiwert	277
5.7.4.2	Übrige Beiwerte.....	278

5.8	Ballistisch optimale Geschosse	279
5.8.1	Aerodynamisch optimale Geschossformen.....	279
5.8.1.1	Die Geschosstheorie nach W. HAACK	279
5.8.1.2	Anwendung der Newton'schen Theorie	281
5.8.1.3	Gültigkeitsbereich der Optimierungen.....	283
5.8.1.4	Optimierung des Geschosshecks	283
5.8.2	Praktische Auslegung einer optimalen Geschossform.....	285
5.8.2.1	Geschossspitze.....	285
5.8.2.2	Bemerkungen zu Zylinder und Heck	286
5.8.2.3	Stabilität und Folgsamkeit	287
5.8.3	Realisationen optimierter Geschosse	287
5.8.3.1	Experimentelle Bestätigung, allgemeine Bemerkungen ..	287
5.8.3.2	Untersuchungen mit Modellgeschossen	288
5.8.3.3	Artilleriegeschosse	289
5.8.3.4	Kleinkalibergeschosse.....	291
5.8.4	Optimierung der Stabilität.....	291
5.8.4.1	Optimale Geschosse und gyroskopische Stabilität	291
5.8.4.2	Geschosse maximaler Stabilität	293
5.8.4.3	Wie lang darf ein drallstabilisiertes Geschoss sein?	294
5.8.5	Reduktion des Basiswiderstandes	296
5.8.5.1	Das „Base bleed“-Prinzip	296
5.8.5.2	Leuchtpurgeschosse	297
5.9	Zur Außenballistik der un gelenkten Rakete	298
5.9.1	Vorbemerkung.....	298
5.9.2	Die Flugbahn.....	298
5.9.2.1	Allgemeines	298
5.9.2.2	Die Antriebsphase.....	298
5.9.2.3	Die Freiflugphase.....	300
5.9.2.4	Allgemeine Flugbahneigenschaften.....	300
5.9.3	Querwindverhalten von Raketen.....	301
6	Grundzüge der Endballistik.....	303
6.1	Einführung.....	303
6.1.1	Vorbemerkungen.....	303
6.1.2	Elementare Gesetzmäßigkeiten.....	303
6.1.3	Materialarten	304
6.1.4	Bezeichnungen und Definitionen.....	305
6.1.5	Das Backman-Goldsmith-Diagramm.....	306
6.2	Durchdringungsmodelle	307
6.2.1	Das Stanzmodell.....	307
6.2.2	Das Verdrängungsmodell.....	308
6.2.3	Durchschießen dünner Schichten.....	309

6.2.4	Das Erosionsmodell (<i>Autor: Dipl.-Ing. W. ODERMATT</i>)	310
6.2.4.1	Modellbeschreibung.....	310
6.2.4.2	Hydrodynamische Betrachtung.....	311
6.2.4.3	Referenzziele.....	313
6.2.4.4	Maßgebende Parameter, Dimensionsanalyse.....	314
6.2.4.5	Vollständige Näherungsformel des Grenzdurchschlages	317
6.3	Verhaltensmerkmale verschiedener Materialien	318
6.3.1	Grundsätzliche Bemerkungen	318
6.3.2	Stahl.....	319
6.3.3	Aluminium	321
6.3.4	Beton und Mauerwerk.....	322
6.3.5	Holz.....	324
6.3.6	Sand, Erde	327
6.4	Schutzanordnungen	328
6.4.1	Geneigte Platten	328
6.4.2	Geschottete Plattenanordnungen.....	330
6.4.3	Asymmetrische Anordnungen.....	331
6.5	Probleme des ballistischen Schutzes	332
6.5.1	Allgemeines.....	332
6.5.1.1	Personenschutz und Sachwertschutz	332
6.5.1.2	Das Bedrohungspotenzial	332
6.5.1.3	Maßzahlen des Bedrohungspotenzials.....	333
6.5.2	Bedrohungs- und Schutzklassen	333
6.5.2.1	Allgemeines	333
6.5.2.2	Kurzwaffen	334
6.5.2.3	Langwaffen	335
6.5.3	Die Bedrohungswahrscheinlichkeit	336
6.5.3.1	Anteile der Bedrohungswahrscheinlichkeit	336
6.5.3.2	Verfügbarkeit und Häufigkeit.....	336
6.5.3.3	Bedrohungswahrscheinlichkeit bei Kurzwaffen.....	337
6.5.3.4	Bedrohungswahrscheinlichkeit bei Langwaffen.....	338
6.5.4	Schutzwahrscheinlichkeit.....	338
6.5.4.1	Durchschusswahrscheinlichkeit eines ballistischen Schutzes	338
6.5.4.2	Schutzwahrscheinlichkeit eines ballistischen Schutzes	341
6.5.5	Prüfung von ballistischem Schutz.....	342
6.5.5.1	Allgemeines	342
6.5.5.2	Prüfung auf Nicht-Durchschuss.....	345
6.5.5.3	Bestimmung der Verteilungsparameter	347
6.5.6	Beurteilung des Wirkungspotenzials hinter dem Schutz	349

7 Abprallende Geschosse	351
7.1 Einleitung	351
7.1.1 Vorbemerkung.....	351
7.1.2 Begriffserläuterung	351
7.2 Stoßtheorie.....	352
7.2.1 Stoßarten	352
7.2.2 Der zentrische, gerade Stoß.....	353
7.2.3 Der zentrische, schiefe Stoß.....	355
7.2.4 Der exzentrische, gerade Stoß.....	357
7.2.5 Der exzentrische, schiefe Stoß	358
7.2.6 Spezialfälle.....	360
7.3 Phänomenologie des Prellschusses.....	362
7.3.1 Festlegungen und Symbole	362
7.3.2 Einflussparameter des Prellschussverhaltens.....	363
7.3.3 Typische Abprallkonstellationen	364
7.3.4 Der senkrechte Schuss gegen eine harte Oberfläche.....	366
7.4 Das Geschoss als Massenpunkt.....	366
7.4.1 Prellkörper großer Masse	366
7.4.1.1 Vorbemerkung	366
7.4.1.2 Prellschusstheorie	367
7.4.1.3 Verlauf der Abprallfunktionen, Approximationen	370
7.4.2 Prellkörper geringer Masse	371
7.4.2.1 Allgemeines	371
7.4.2.2 Der maximale Ablenkwinkel	372
7.4.2.3 Geschwindigkeit und Energie.....	373
7.4.2.4 Geschossablenkung an Halmen und Zweigen	373
7.4.2.5 Regentropfen.....	375
7.5 Das Geschoss als starrer Körper.....	376
7.5.1 Allgemeines.....	376
7.5.2 Lage der Stoßnormalen bei verschiedenen Geschossformen.....	377
7.5.2.1 Bezeichnungen.....	377
7.5.2.2 Ellipsenförmige Rundkopfgeschosse.....	377
7.5.2.3 Parabelförmige Rundkopfgeschosse.....	378
7.5.2.4 Spitzgeschosse	378
7.5.2.5 Zylinder-, Kegelspitz- und Flachkopfgeschosse.....	379
7.5.3 Der Drehmomentenstoß auf das Geschoss.....	379
7.5.4 Wann fliegt ein Prellschuss stabil?	382
7.5.5 Eigenbewegung und Fluglage eines Prellschusses	383
7.5.5.1 Die Eigenbewegung	383
7.5.5.2 Fluglage und Stabilität	384
7.6 Die Flugbahn eines Prellschusses.....	386

7.6.1	Querschnittsbelastung und Luftwiderstandsbeiwert	386
7.6.2	Maximale Reichweiten.....	387
7.7	Weitere Abprallertheorien	388
7.7.1	Theorie von SELLIER	388
7.7.2	Theorie von JAUHARI	388
7.7.3	Theorie von BIRKHOFF für Wasseroberflächen.....	389
8	Spezielle Anwendungen der Ballistik	391
8.1	Einleitung	391
8.2	Forensische Anwendungen (<i>Mitautor Dr. Fabiano RIVA</i>)	392
8.2.1	Flugbahnrekonstruktion	392
8.2.1.1	Kurze und lange Flugbahnen	392
8.2.1.2	Daten am Ereignisort	393
8.2.1.3	Beschaffung weiterer Daten.....	394
8.2.1.4	Visualisierung	397
8.2.2	Flugbahnrekonstruktion instabiler Geschosse.....	398
8.2.2.1	Ursachen instabiler Geschosse.....	398
8.2.2.2	Querschnittsbelastung und Luftwiderstandsbeiwert	400
8.2.2.3	Rekonstruktion.....	401
8.2.3	Fallbeispiele	402
8.2.3.1	Direkte Schüsse.....	402
8.2.3.2	Abgelenkte Schüsse	404
8.2.4	Ballistik in der Blutspurenanalyse	407
8.2.4.1	Fragestellung.....	407
8.2.4.2	Die maximale Geschwindigkeit eines Blutstropfens	408
8.2.4.3	Anwendung.....	410
8.2.4.4	Fallbeispiele	411
8.3	Sicherheitsfragen auf Schießplätzen und in Schießanlagen	412
8.3.1	Sicherheit und Gefährlichkeit	412
8.3.2	Maximalschussweiten	412
8.3.3	Kurzschüsse.....	414
8.3.4	Rückpraller.....	415
Anhang		
	Literaturverzeichnis	419
	Abbildungsnachweis	427
	Sachverzeichnis.....	429

Verzeichnis der Formelzeichen

Allgemeines

Die Angabe der Einheiten erfolgt gemäß dem internationalen Einheitensystem (SI) oder in den gesetzlich zugelassenen (gebräuchlichen) Ableitungen. Dimensionslose Größen sind mit [-] bezeichnet, bei Größen die keine sinnvolle Dimension haben, ist die Angabe weggelassen.

Allgemein verwendete Formelzeichen

A	Fläche	[m ²]
A ₀	Bezugsquerschnittsfläche	[m ²]
C _p	spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck	[J/(kg·K)]
C _v	spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen	[J/(kg·K)]
D	Dicke	[m]
E	Energie	[J]
E _{dr}	Druckenergie	[J]
E _{kin}	kinetische Energie	[J]
E _{pot}	potenzielle Energie	[J]
E _{rot}	Rotationsenergie	[J]
F	Kraft	[N]
F _A	Auftriebskraft eines Flugkörpers	[N]
F _G	Gewicht	[N]
F _S	Schubkraft	[N]
F _W	Widerstandskraft eines Flugkörpers	[N]
G	Gravitationskonstante	[m ³ /(kg·s ²)]
I	Impuls	[kg·m/s]
J _a	axiales Trägheitsmoment	[kg·m ²]
J _r	radiales Trägheitsmoment	[kg·m ²]
L	Drehimpuls	[N·m·s]
M	Drehmoment	[N·m]
Ma	Machzahl	[-]
M _M	Drehmoment von F _A	[N·m]
R	spezielle Gaskonstante	[J/(kg·K)]
R _L	spezielle Gaskonstante der Luft	[J/(kg·K)]
Re	Reynoldszahl	[-]
S	Schwerpunkt (in Abbildungen)	
T	Temperatur	[K]
T _C	Temperatur in Celsius	[°C]
Q	Wärmeenergie	[J]
U	innere Energie	[J]

V	Volumen	[m ³]
W	Arbeit	[J]
We	Weber-Zahl	[-]
a	Beschleunigung	[m/s ²]
a _c	Coriolisbeschleunigung	[m/s ²]
c	Schallgeschwindigkeit	[m/s]
c _a	Auftriebsbeiwert	[-]
c _m	Momentenbeiwert	[-]
c _p	Druckkoeffizient eines Körpers	[-]
c _w	Widerstandsbeiwert	[-]
d	Kaliber (gelegentlich auch Geschossdurchmesser)	[mm], [m]
g	Erdbeschleunigung	[m/s ²]
ℓ	Länge	[m]
m	Masse	[kg]
m _E	Erdmasse	[kg]
p	Druck	[Pa], [bar]
q	Querschnittsbelastung	[kg/m ²]
r	Radius, radialer Abstand	[m]
s	Wegstrecke	[m]
t	Zeit	[s]
v	Geschwindigkeit	[m/s]
v ₀	Mündungsgeschwindigkeit	[m/s]
(x, y, z)	Ortskoordinaten	[m]
γ	Isentropenkoeffizient	[-]
ρ	Dichte	[kg/m ³]
τ	Temperaturgradient	[K/m]
ω	Winkelgeschwindigkeit	[1/s]
θ	Bahnwinkel (Flugbahn)	[mil]
θ ₀	Abgangswinkel (Elevation)	[mil]

Indizes

E	End- (Enddistanz, Endzeit, ...)
G	Gipfel- (Gipfelhöhe, ...)
c	Ladung (Charge)
i	innen, im Innern
p	Geschoss, Projektil
r	Rohr
x	Komponente in x-Richtung
y	Komponente in y-Richtung
z	Komponente in z-Richtung
0	Anfangswert, Startwert

Formelzeichen Kapitel 2

E_{mech}	Mechanische Energie	[J]
H	Enthalpie	[J]
\hat{J}	Trägheitstensor	[kg·m ²]
S	Entropie	[J/K]
a_{zf}	Zentrifugalbeschleunigung	[m/s ²]
a_{zp}	Zentripetalbeschleunigung	[m/s ²]
b	Flügelspannweite	[m]
d_0	Bezugsabstand (Hebelarm) beim Drehmoment	[m]
p_i	Druck im Behälter (Innendruck)	[bar]
p_m	Druck in der Mündung	[bar]
p_0	Druck der ungestörten Strömung	[bar]
p_λ	Laval-Druck	[bar]
v_r	Radialgeschwindigkeit	[m/s]
v_t	Tangentialgeschwindigkeit	[m/s]
Γ	Zirkulation einer Wirbelströmung	[m ² /s]
α	Winkelbeschleunigung (Mechanik)	[1/s ²]
α	Mach-Winkel (Fluiddynamik)	[-]
δ	Ablenkwinkel (einer Strömung)	[-]
η	dynamische Viskosität	[Pa·s]
κ	Kompressibilität	[1/Pa]
ν	kinematische Viskosität	[m ² /s]
ν_N	Nutationsfrequenz eines Kreisel	[1/s]
σ	Stoßwinkel	[-]
σ_s	Schubspannung	[N/m ²]
ω_p	Winkelgeschwindigkeit der Präzession	[1/s]

Formelzeichen Kapitel 3

A_c	Pulverkornoberfläche	[m ²]
A_e	Düsenendquerschnitt	[m ²]
A_r	Rohrquerschnitt	[m ²]
A_m	Querschnitt Mündung	[m ²]
A_0	Anfangsoberfläche (Pulver)	[m ²]
B	Abbrandkoeffizient	[1/m]
B_A	Lebhaftigkeit	[1/s]
C_S	Schubkoeffizient	[N]
D	Federkonstante	[N/m]
E_c	Energie des mitbeschleunigten Pulvers	[J]
F_L	Gesamtleistenkraft	[N]

F_r	Reibung	[N]
F_{se}	spezifische Energie eines Pulvers („Pulverkraft“)	[J/kg]
F_{sp}	Spannkraft (Federwaffen)	[N]
K	Klemmung (Rakete)	[-]
Q_{ex}	Verbrennungswärme	[J/g], [kJ/kg]
T_{ex}	Explosionstemperatur (manometrische Bombe)	[K]
V_b	Laderaumvolumen	[m ³]
a_b	Beschleunigung Antriebsphase (Rakete)	[m/s ²]
a_f	Verzögerung Freiflugphase (Rakete)	[m/s ²]
e	Dicke des abgebrannten Pulvers	[mm]
ℓ_r	Rohrlänge	[m]
m_a	ausströmende Masse	[kg]
m_f	Masse der Fragmente (Splitterbeschleunigung)	[kg]
m_r	Rohrmasse	[kg]
m_t	Trägermasse (Federwaffen)	[kg]
m^+	bewegte Masse (Geschoss plus Gase)	[kg]
p_e	Druck im Endquerschnitt einer Düse	[bar]
p_μ	Gasdruck bei Mündungsdurchgang des Geschosses	[bar]
p_r	Druck am Stoßboden (Rohrboden)	[bar]
p_p	Druck am Geschossboden	[bar]
p_0	Startdruck für die Bewegungsgleichung	[bar]
r	Abbrandgeschwindigkeit	[m/s]
t_{LR}	Rohrdurchlaufzeit	[s], [ms]
t_s	Schussentwicklungszeit	[ms], [s]
u	Strömungsgeschwindigkeit im Rohr	[m/s]
v_a	Ausströmgeschwindigkeit	[m/s]
v_{Sp}	Detonationsgeschwindigkeit von Sprengstoff	[m/s]
z	relatives Restpulvervolumen	[m ³]
Γ	Drallwinkel	[-]
Λ	Dralllänge	[m]
Ψ	Verlustenergie	[J]
β	lineare Abbrandgeschwindigkeit	[m/s]
ε	Sébert'scher Faktor (Treibmittel)	[-]
η	Wirkungsgrad	[-]
η^+	mechanischer Wirkungsgrad der Waffe	[-]
$\phi(z)$	Formfunktion	[-]

Formelzeichen Kapitel 4

A_m	Mündungsquerschnitt	[m ²]
-------	---------------------	-------------------

E_R	Rückstoßenergie	[J]
E_d	Drehenergie beim Rückstoß	[J]
E_t	translatorischer Anteil an E_R	[J]
I_N	Nachwirkungsimpuls	[N·s]
I_R	Rückstoßimpuls	[N·s]
I_d	drehender Anteil des Rückstoßimpulses	[N·s]
I_m	Mündungsimpuls	[N·s]
I_n	Impuls der nachströmenden Gase	[N·s]
I_p	Geschossimpuls	[N·s]
J_w	Trägheitsmoment der Waffe	[kg·m ²]
m_p	Geschossmasse	[g], [kg]
m_w	Waffenmasse	[kg]
p_i	Innendruck	[bar]
v_a	Ausströmgeschwindigkeit der Gase	[m/s]
v_m	mittlere Ausströmgeschwindigkeit	[m/s]
v_R	Rücklaufgeschwindigkeit	[m/s]

Formelzeichen Kapitel 5

BC	Ballistischer Koeffizient („Ballistic Coefficient“)	[-]
F_E	Pendeldämpfungskraft	[N]
F_K	Magnuskraft	[N]
F_{KP}	Pendelmagnuskraft	[N]
F_L	Luftkraft	[N]
F_N	Normalkraft am Geschoss	[N]
F_Q	Querkraft	[N]
F_{SD}	Staudruckwiderstand	[N]
F_T	Tangentalkraft am Geschoss	[N]
M_H	Pendeldämpfungsmoment	[N·m]
M_I	Rollbremsmoment	[N·m]
M_J	Magnusmoment	[N·m]
M_{JP}	Pendelmagnusmoment	[N·m]
P, Q	Quaternionen	
Q	Piton-Bressant'sche Zahl	[1/m]
R_E	Erdradius	[m]
S	Querschnittsfläche des Geschosses	[m ²]
V	Volumen des Geschosses	[m ³]
c_e	Pendeldämpfungskraftbeiwert	[-]
c_f	Reibungsbeiwert	[-]
c_h	Pendeldämpfungsmomentenbeiwert	[-]
c_j	Magnusmomentenbeiwert	[-]

c_k	Magnuskraftbeiwert	[-]
$\vec{c}, \vec{p}, \vec{q}$	Einheitsvektoren geschossfestes Koordinatensystem	[m]
d_z	seitliche Beschleunigung im Massenpunktsmodell	[[m/s ²]
e_A	Hebelarm der Luftkraft	[m]
f	Folgsamkeitszahl (Außenballistik)	[-]
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$	Einheitsvektoren erdfestes Koordinatensystem	[m]
ℓ_g	Geschosslänge	[mm]
r	Radius des Rotationskörpers	[m]
s	gyroskopische Stabilitätszahl (Außenballistik)	[-]
\hat{s}	Molitz'sche (dynamische) Stabilitätszahl	[-]
$s(t)$	Bogenlänge (Flugbahn, differenzialgeometrische Betrachtung)	[m]
$\vec{t}, \vec{s}, \vec{h}$	Einheitsvektoren Bahntangentensystem	[m]
u	Strömungsgeschwindigkeit	[m/s]
v	Geschwindigkeit	[m/s]
v_w	Windgeschwindigkeit	[m/s]
v_{wx}	Windgeschwindigkeit in Flugrichtung	[m/s]
v_{wz}	Windgeschwindigkeit quer zur Flugrichtung	[m/s]
Φ	Potenzialfunktion der Strömungsgeschwindigkeit	[m ² /s]
Θ	Trägheitstensor des Geschosses	[kg·m ²]
$\vec{\Omega}$	Vektor der Winkelgeschwindigkeit	[1/s]
α	Azimet bezüglich Nord, im Uhrzeigersinn gemessen	[mil]
α_i	($i = 0,1,3$) reelle Koeffizienten der Differenzialgleichung für ζ	[-]
β	geografische Breite des Standortes	[-]
β_i	($i = 0,1,3$) imaginäre Koeffizienten der Differenzialgleichung für ζ	[-]
δ	Anstellwinkel	[-]
ϕ	Störpotenziale der Strömungsgeschwindigkeit	[m ² /s]
λ	Lagewinkel (zwischen Horizontalen und Ziellinie)	[mil]
σ	Schusswinkel	[mil]
τ	Temperaturgradient	[K/m]
ω_E	Winkelgeschwindigkeit der Erde	[1/s]
ω_H	Fallwinkel bezüglich der Horizontalen	[mil]
ω_Z	Fallwinkel bezüglich Ziellinie	[mil]
ξ	Winkel zwischen erd- und windfestem Koordinatensystem	[-]
ψ	Drehwinkel der Geschossachse um die Bahntangente	[-]
ζ	komplexer Anstellwinkel	[-]

Formelzeichen Kapitel 6

A	Kontaktfläche Geschoss-Material	[m ²]
C _S	Scherbruchspannung	[N/m ²]
D	Plattendicke	[m]

D_g	geometrischer Geschossweg	[m]
ED	Energiedichte	[J/mm ²]
E_D	Für Durchschlag aufgewendete Energie	[J]
E_{gr}	Grenzenergie bei der der Durchschlag gerade noch nicht stattfindet	[J]
E_s	Scherenergie	[J]
HBW	Brinell-Härte	[-]
L	Penetratorlänge	[m]
P	Eindringtiefe	[m]
Y_P	Festigkeit des Penetrators	[N/m ²]
R_Z	Festigkeit des Zielmaterials	[N/m ²]
$W(x)$	Zerstörungspotenzial an der Stelle x	[J/cm]
$a, b, b_{0,1}$	Experimentell ermittelte Parameter der relativen Eindringtiefe	[-]
$c, c_{0,1}$	konstante Parameter	[-]
u	Eindringgeschwindigkeit	[m/s]
x	Eindringstrecke	[cm], [m]
s_e	Eindringtiefe	[cm], [m]
u	Eindringgeschwindigkeit	[m/s]
v_{50}	Mittlere Durchschussgeschwindigkeit	[m/s]
w_a	Annahmewahrscheinlichkeit	[-]
w_b	Angriffswahrscheinlichkeit	[-]
w_d	Durchschusswahrscheinlichkeit	[-]
w_r	Rückweisungswahrscheinlichkeit	[-]
w_s	Schutzwahrscheinlichkeit	[-]
α	Auftreffwinkel	[-]
β	Stellungswinkel	[-]
δ	Drehwinkel der Auftreffebene bezüglich der Schussrichtung	[-]
κ	Neigungswinkel der Auftreffebene bezüglich der Schussrichtung	[-]
ρ_P	Penetratordichte	[kg/m ³]
ρ_Z	Dichte des Zielmaterials	[kg/m ³]

Formelzeichen Kapitel 7

E_u	Energie nach dem Stoß	[J]
F_y	Andruckkraft	[N]
Q	Verformungsarbeit beim Stoß	[J]
Q_T	Verlust an kinetischer Energie	[J]
Q_w	verbleibende Verformungsarbeit	[J]
R_x	Reibung	[N]
T	Drehmomentenstoß	[N·m]
b	Stoßexzentrizität	[m]

h	Spitzenhöhe	[m]
k	Stoßzahl	[-]
s_x	Spurlänge	[mm]
t_s	Stoßzeit (Kontaktzeit Geschoss Prellkörper)	[ms], [s]
u	Geschwindigkeit nach dem Stoß	[m/s]
v	Geschwindigkeit vor dem Stoß	[m/s]
α	Auftreffwinkel	[-]
β	Abgangswinkel	[-]
γ	Seitenwinkel	[-]
ε	Auslenkwinkel	[-]
λ	Ablenkwinkel	[-], [mil]
θ	Trägheitsmomentenzahl	[-]
μ	Massenverhältnis m_1/m_2	[-]
ν	Drehfrequenz der Nutation	[1/s]
σ	Reibungszahl	[-]

Indizes

n	Normal-
t	Tangential-
1	Körper 1
2	Körper 2

SI-Vorsätze für dezimale Teile oder Vielfache von Einheiten

Faktor	Vorsatz	Zeichen	Faktor	Vorsatz	Zeichen
10^{12}	Tera	T	10^{-1}	Dezi	d
10^9	Giga	G	10^{-2}	Zenti	c
10^6	Mega	M	10^{-3}	Milli	m
10^3	Kilo	k	10^{-6}	Mikro	μ
10^2	Hekto	h	10^{-9}	Nano	n
10^1	Deka	da	10^{-12}	Piko	p

Umrechnung von Einheiten

U.S.-Einheiten → metrische Einheiten

	U.S.-Einheiten	Symbol	Definition	Metrische Einheit	
Länge	1 Inch	in		25.4	mm
	1 foot	ft	12 in	0.3048	m
	1 yard	yd	3 ft	0.9144	m
Fläche	1 square inch	in²		645.16	mm²
Geschwindigkeit	1 foot/second	ft/s		0.3048	m/s
Masse	1 Grain	gr	1/7000 lbs	0.0647989	g
	1 pound	lb		0.4535924	kg
Energie	1 foot pound weight	ft lb wt		1.35582	J
Kraft	1 pound weight	lb wt		4.448221	N
Druck	1 lb wt/square-inches	lb wt/in²		0.0689476	bar

Metrische Einheiten → U.S.-Einheiten

	Metrische Einheiten	Symbol	Definition	U.S.-Einheiten	
Länge	1 Millimeter	mm	1/1000 m	0.03937	in
	1 Meter	m	Grundeinheit	3.28084	ft
	1 Meter	m		1.0936133	yd
Fläche	1 Quadratmillimeter	mm²		0.001550	in²
Geschwindigkeit	1 Meter/Sekunde	m/s		3.28084	ft/s
Masse	1 Gramm	g	1/1000 kg	15.43236	gr
	1 Kilogramm	kg	Grundeinheit	2.204622	lbs
Energie	1 Joule	J	1 N·m	0.737561	ft lb wt
Kraft	1 Newton	N	1 kg·m/s²	0.224809	lb wt
	1 bar	bar	10 ⁵ Pa	14.503774	psi



1 Einführung

Bereits einige Hundert Jahre vor unserer Zeitrechnung beschäftigten sich Menschen insbesondere der griechischen Kultur mit dem geworfenen Stein und dem fliegenden Pfeil. Aus dem griechischen Wort für werfen („βάλλειν“, *ballein*) entstand schließlich der Name „Ballistik“ für das zugehörige Wissensgebiet.

Das Aufkommen der Feuerwaffen bescherte den Ballistikern mit der Beschleunigung der Geschosse in einem Rohr neue Probleme, die allerdings während langer Zeit mit „Versuch und (oft schmerzhaftem) Irrtum“ angegangen wurden. Erst mit den großen Fortschritten in der Physik und der Messtechnik im Verlauf des 18. Jahrhunderts wurden die Untersuchungen systematischer, und es bahnte sich eine Trennung der „Ballistik“ in zwei Teilgebiete an: jenes der Geschossbeschleunigung im Rohr und jenes der Geschossverzögerung beim Flug durch die Luft.

Der zunehmenden Verbreitung der Feuerwaffen fielen die bis dahin zum Schutz getragenen Rüstungen nach und nach zum Opfer, da sie gegen die Kugeln keinen Schutz boten. Erst gegen Ende des 19. Jahrhunderts – mit der aufkommenden Motorisierung – wurde Schutz wieder ein Thema, und es entstand eine neue ballistische Disziplin, die sich mit der Wechselwirkung des Geschosses mit Materialien und mit der Entstehung von Schussverletzungen zu beschäftigen begann.

Heute ist Ballistik jene Wissenschaft, welche die gesamten physikalischen Erscheinungen und die Bewegung eines geworfenen Körpers behandelt. Die vier aus der historischen Entwicklung entstandenen Teilgebiete werden auseinandergehalten und oft auch einzeln bearbeitet. Mit dem vorliegenden Buch wird versucht, eine Gesamtdarstellung der Ballistik zu bieten, welche die einzelnen Disziplinen mit ihren zentralen Fragestellungen beschreibt.

Im Kapitel *Innenballistik* werden zunächst die Explosivstoffe – insbesondere die Treibmittel – besprochen und anschließend die heute gängigen Rechenverfahren (das thermodynamische und das gasdynamische Modell) für Druck und Geschwindigkeit im Rohr beschrieben. Zudem wird versucht, mit Messungen und einem Rechenmodell der Innenballistik des offenen Rohres (Böller und Schreckschüsse) auf die Spur zu kommen. Alternative Verfahren zur Beschleunigung von Projektilen werden dargestellt und der Bestimmung der Anfangsgeschwindigkeit von Splittern ein Platz eingeräumt.

Den Ereignissen, die ablaufen, kurz bevor das Geschoss den Lauf verlässt und unmittelbar danach, ist das Kapitel *Abgangsballistik* gewidmet. Neben der phäno-

menologischen Beschreibung der Erscheinungen werden eine Schätzformel für die Ausströmgeschwindigkeit der Gase angegeben und die Methoden erläutert, mit denen der Abgangsfehler einer Waffe bestimmt werden kann.

Eine ausführliche Behandlung kommt der *Außenballistik* zu, nicht zuletzt, weil sie aus physikalischer Sicht die greifbarste Disziplin ist. Neben der Darstellung der verschiedenen Rechenmodelle und einer detaillierten Besprechung der Flugbahneigenschaften werden auch verschiedene Lösungsverfahren des Randwertproblems vorgestellt, einige Ansätze zur Geschossaerodynamik und zu widerstandsoptimierten Körperformen aufgezeigt und auch Hinweise zur Berechnung des Luftwiderstandes gegeben.

Die Wechselwirkung eines Geschosses mit Materialien entzieht sich weitgehend einer rechnerischen Behandlung, weshalb im Kapitel *Endballistik* vor allem experimentell ermittelte Fakten und Daten zusammengestellt und kommentiert werden. Ein Schwerpunkt wird auf die Probleme bei der Prüfung von ballistischem Schutz gelegt. Das *Abprallen von Geschossen*, das eigentlich auch zur Endballistik gehört, wird wegen seiner Bedeutung (insbesondere in der Kriminalistik) in einem speziellen Kapitel abgehandelt. Dem oben angesprochenen Thema der Entstehung und der Physik der *Schussverletzungen* ist ein eigenes Buch¹ gewidmet.

Das letzte Kapitel stellt einige selten beschriebene *Anwendungen* der Ballistik in der Forensik zusammen und geht auf Sicherheitsfragen bei Schießanlagen ein.

Damit sich der Leser und die Leserin nicht um ein begleitendes Kompendium *physikalischer Grundlagen* bemühen müssen, ist ein entsprechendes Kapitel dem Buch vorangestellt.

Ballistik ist nicht eine Frage des Kalibers. Die Darlegungen in diesem Buch sind genauso für ein 155 mm Artilleriegeschoss wie für eine Schrotkugel mit 2 mm Durchmesser gültig. In der Praxis findet man jedoch immer wieder eine Einteilung in Klein-, Mittel- und Großkaliberwaffen, wobei oft auch unterschiedliche Bezeichnungen verwendet werden.

So heißt die zur Beschleunigung des Geschosses verwendete Stahlröhre im Kleinkaliberbereich „Lauf“, bei den Großkaliberwaffen wird sie jedoch als „Rohr“ bezeichnet.

Die Allgemeingültigkeit ballistischer Aussagen wird im Folgenden dadurch unterstrichen, dass stets einheitliche Benennungen verwendet werden, auch wenn spezifische Kaliberbereiche angesprochen sind.

Ballistik ist auch nicht eine Frage von Formeln, sondern des Verstehens von (meist sehr schnellen) Bewegungsabläufen. Falls Ihnen die Formelsprache nicht besonders geläufig ist, überlesen Sie die Formeln einfach. In der Regel drücken sie in Kurzform aus, was im Text beschrieben ist.

¹ B. P. KNEUBUEHL (Hrsg.) Wundballistik, Grundlagen und Anwendungen, Springer Medizin Verlag, Heidelberg, 3. Aufl. 2008

2 Physikalische Grundlagen

2.1 Bezugs- und Maßsysteme, Notation

Physikalische Ereignisse lassen sich nur dann einfach beschreiben, wenn ein geeignetes Bezugssystem zur Verfügung steht. Für ballistische Vorgänge wird üblicherweise das sogenannte *ballistische Koordinatensystem* verwendet, das folgendermaßen definiert ist: x- und y-Achse spannen eine vertikale Ebene auf, wobei die y-Achse der Erdbeschleunigung entgegengesetzt ist. Die z-Achse ergänzt die x-y-Ebene zu einem räumlichen Rechtssystem (Abb. 2.1). Eigenbewegungen von Körpern werden auf ein körperfestes System bezogen, dessen Ursprung im Massenmittelpunkt (Schwerpunkt) des Körpers liegt und dessen Hauptachse mit der momentanen Bewegungsrichtung des Schwerpunkts zusammenfällt (Bahntangentensystem). Auch dieses System ist rechts orientiert.

Für die Maßeinheiten wird durchweg das in vielen Ländern gesetzlich vorgeschriebene internationale Einheitensystem („Système Internationale d’Unités“, abgekürzt SI) verwendet. Länge wird in Metern, Masse in Kilogramm und Zeit in Sekunden gemessen, oft verbunden mit den entsprechenden Dezimalvorsätzen (wie z. B. Milli-, Kilo-, Mega-). Weiter benötigte, abgeleitete Maßeinheiten werden jeweils bei Einführung der betreffenden physikalischen Größen erwähnt.

In der Ballistik der kleinkalibrigen Waffen (Kurz- und Langwaffen) sind die angloamerikanischen Maßeinheiten immer noch stark verbreitet. Für deren Umrechnung in die gesetzlich vorgeschriebenen SI-Einheiten und umgekehrt stehen am Ende des Verzeichnisses der Formelzeichen (S. XXIX) die entsprechenden Formeln zur Verfügung.

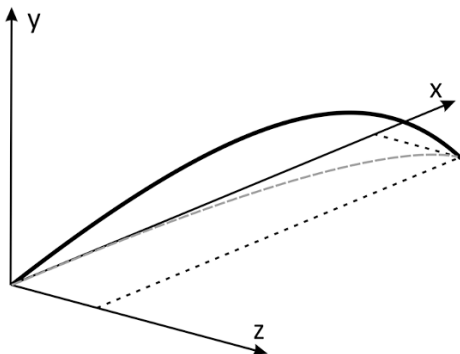


Abb. 2.1. Ballistisches Koordinatensystem: x-Achse in Schussrichtung, y-Achse nach oben und z-Achse nach rechts.

Für die in Definitionen und Gleichungen vorkommenden Differenzialquotienten werden die in der Physik üblichen Schreibkonventionen verwendet: zeitabhängige Ableitungen mit Punkt, wegabhängige mit Strich

$$(2.1:1) \quad \frac{dx}{dt} \Leftrightarrow \dot{x}, \quad \frac{dv_x}{dt} \Leftrightarrow \dot{v}_x, \quad \frac{dv_x}{dx} \Leftrightarrow v'_x.$$

2.2 Mechanik

2.2.1 Kinematik, lineare Bewegungen

Die Kinematik behandelt die Bewegung eines Körpers im Raum, ohne auf seine spezifischen Eigenschaften einzugehen. Zentrale Aufgabe ist die Beschreibung des Weges (der „Bahn“), den der Körper zurücklegt. Dabei wird auch die räumliche Ausdehnung des Körpers nicht beachtet; er wird als punktförmig angesehen. Die wichtigste kinematische Maßzahl ist die *Geschwindigkeit*. Sie ist eine vektorielle Größe, deren Komponenten als Wegänderung pro Zeiteinheit in den drei Koordinatenrichtungen definiert sind.

$$(2.2:1) \quad v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \quad [\text{m/s}]$$

Der Betrag der Geschwindigkeit ist gegeben durch

$$(2.2:2) \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad [\text{m/s}]$$

In Tabelle 2.1 sind Größenordnungen einiger typischer Geschwindigkeiten aus der Ballistik zusammengestellt.

Eine Geschwindigkeitsänderung pro Zeiteinheit heißt im Falle einer Geschwin-

Tabelle 2.1. Typische Geschwindigkeiten

Erzeugendes System	Projektil	Geschwindigkeit [m/s]
Tennisschläger	Tennisball	bis ca. 70
Golfschläger	Golfball	80
Kleinwaffen	Kurzwaffengeschosse	250 .. 400
	Langwaffengeschosse	600 .. 1000
Minenwerfer	Wurfgranaten	70 .. 400
Kanonen, Haubitzen	Granaten	300 .. 900
Granate	Splitter	bis ca. 2000
Objekt	Medium	Geschwindigkeit [m/s]
Schallwellen	in der Luft (15 °C)	340
	im Wasser (20 °C)	1483
	in Stahl, Glas	ca. 5200

digkeitszunahme *Beschleunigung* und bei einer Geschwindigkeitsverminderung negative Beschleunigung (*Verzögerung*).

$$(2.2:3) \quad a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}. \quad [\text{m/s}^2]$$

Analog der Geschwindigkeit gilt auch hier für den Betrag der Beschleunigung

$$(2.2:4) \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad [\text{m/s}^2]$$

Einige Beschleunigungen, wie sie bei ballistischen Bewegungen vorkommen können, sind in der Tabelle 2.2 aufgeführt.

Weil die Geschwindigkeit eine vektorielle Größe ist, treten Beschleunigungen nicht nur dann auf, wenn sich der Betrag der Geschwindigkeit ändert, sondern auch dann, wenn ihre Richtung wechselt.

Ist die Beschleunigung konstant, so können die Bahngeschwindigkeit und die Weglänge einfach gerechnet werden

$$(2.2:5) \quad v = v_0 + a \cdot t, \quad [\text{m/s}]$$

$$(2.2:6) \quad x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2, \quad [\text{m}]$$

wobei v_0 die zu der Zeit $t = 0$ vorhandene Geschwindigkeit und x_0 der bis zu diesem Zeitpunkt bereits zurückgelegte Weg bedeutet.

Die Bewegung längs einer gekrümmten Bahn lässt sich lokal stets auf die Bewegung längs eines Kreisbogenstückes zurückführen. Diese sogenannte Rotationsbewegung wird kinematisch durch die *Winkelgeschwindigkeit* beschrieben, wobei der Drehwinkel φ im Bogenmaß gemessen wird (ganze Drehung = $2 \cdot \pi$)

$$(2.2:7) \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt}. \quad [1/\text{s}]$$

Tabelle 2.2. Typische Beschleunigungen in der Ballistik

Objekt	Beschleunigung [m/s ²]
Erdbeschleunigung (Normalwert)	−9.80665
Tischtennisball in Luft	−450
Golfball in Luft	−10
Gewehrsgeschoss in Luft	−400
Artilleriegeschoss in Luft	−30
Splitter in Luft	−60'000
Golfball beim Abschlag	200'000
Gewehrsgeschoss im Lauf beim Abschuss (Mittelwert)	500'000
Gewehrsgeschoss im Lauf beim Abschuss (Spitzenwert)	1'500'000
Artilleriegeschoss im Rohr beim Abschuss (Mittelwert)	50'000
Saturn-V-Rakete in der Startphase	2–40

Tabelle 2.3. Typische Winkelgeschwindigkeiten (ω), Drehzahlen (ν) und Umfangsgeschwindigkeiten (v)

Geschossart	ω [rad/s]	ν [1/s]	v [m/s]
Tennisball bei Top Spin, bis zu	440	70	15
Golfball (abhängig vom Schlag), mittlerer Wert	380	60	8
Pistolengeschoss (9 mm Luger)	8800	1400	40
Revolvergesschoss (44 Rem. Mag.)	5440	866	30
Gewehrgeschoss (7.62 mm NATO)	17100	2721	67
Artilleriegesschoss (155 mm), max. Ladung	1265	200	98

Die *Drehfrequenz* ν (Anzahl Umdrehungen pro Sekunde) ergibt sich aus der Winkelgeschwindigkeit durch

$$(2.2:8) \quad \nu = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} . \quad [1/s]$$

Drehbewegungen mit konstanter Winkelgeschwindigkeit heißen gleichförmige Kreisbewegungen. Für den Betrag ihrer Bahngeschwindigkeit ergibt sich

$$(2.2:9) \quad v = r \cdot \omega . \quad [m/s]$$

r bezeichnet den Abstand des betrachteten Punktes vom Drehzentrum (Drehradius).

Sie gehören zu den beschleunigten Bewegungen, da sich die Bahngeschwindigkeit zwar nicht dem Betrage nach, so doch in ihrer Richtung stetig ändert. Die Beschleunigung (*Zentripetalbeschleunigung*) steht dabei stets senkrecht zur momentanen Bewegungsrichtung und ist gegen das Kreiszentrum gerichtet. Ihr Betrag lautet

$$(2.2:10) \quad a = v \cdot \omega = \frac{v^2}{r} = r \cdot \omega^2 . \quad [m/s^2]$$

Die Umrechnung zwischen den verschiedenen Darstellungen geschieht mit Verwendung der Gl. 2.2:9. Änderungen in der Winkelgeschwindigkeit werden durch die *Winkelbeschleunigung* α beschrieben

$$(2.2:11) \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} . \quad [1/s^2]$$

In der Ballistik treten Drehbewegungen beispielsweise bei drallstabilisierten Geschossen als Rotation um deren Längsachse auf. Die dabei auftretenden Winkelgeschwindigkeiten und Drehzahlen sind recht hoch. Trotz kleinen Geschossradien ergeben sich beachtliche Umfangsgeschwindigkeiten (siehe Tabelle 2.3).

2.2.2 Masse, Impuls, Kraft

Masse ist eine Grundeigenschaft eines Körpers, die sich in zwei Erscheinungen äußert:

- Widerstand gegen Änderungen des Bewegungszustandes (Trägheit),
- Erzeugung von Änderungen des Bewegungszustandes bei anderen Körpern (Gravitation).

Physikalische Vorgänge lassen sich oft von der räumlichen Ausdehnung eines Körpers nicht beeinflussen. Sie können in diesem Fall wesentlich einfacher beschrieben werden, wenn der Körper als Punkt aufgefasst wird, in dem sich die gesamte Masse vereinigt. Dieser Punkt – *Schwerpunkt* genannt – wird so gewählt, dass auch unter Einwirkung von Kräften zwischen der Bahn des ausgedehnten Körpers und derjenigen des Punktes kein Unterschied festgestellt werden kann.

In SI-Einheiten wird die Masse in Kilogramm oder in Gramm angegeben. Im angloamerikanischen Raum sind im Bereich der Kleinwaffen zudem das „Grain“ und die „Ounce“ noch häufig anzutreffen (Umrechnungsfaktoren s. S. XXIX).

Das Produkt aus der Geschwindigkeit v eines Körpers und seiner Masse m wird *Impuls* I oder Bewegungsgröße genannt. Es ist ein Vektor mit derselben Richtung wie die Geschwindigkeit

$$(2.2:12) \quad I = m \cdot v . \quad [\text{kg} \cdot \text{m/s}]$$

Diejenige physikalische Größe, die für Änderungen des Bewegungszustandes oder für die Deformation eines Körpers verantwortlich ist, heißt *Kraft*. Sie wird durch die bekannten *Newton-Axiome* festgelegt.

1. Die Geschwindigkeit (genauer: der Impuls) eines Körpers bleibt konstant, solange keine Kraft auf ihn einwirkt.
2. Die Kraft ist die zeitliche Änderung des Impulses, also

$$(2.2:13) \quad F = \frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot v) = \frac{dm}{dt} \cdot v + m \cdot \frac{dv}{dt} . \quad [\text{N}]$$

Maßeinheit für die Kraft ist das Newton, wobei $1 \text{ Newton (N)} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$ gilt. Nach SI nicht mehr zulässig, aber immer noch verbreitet, ist die Einheit Kilopond (kp). Im angloamerikanischen Maßsystem wird die Kraft ebenfalls in „Pound“ gemessen („pound-force“). Umrechnungsformeln für Krafteinheiten s. S. XXIX

Falls die Masse eines Körpers konstant bleibt ($dm/dt = 0$), entsteht aus (2.2:13) die bekannte Beziehung für die Kraft

$$(2.2:14) \quad F = m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot a . \quad [\text{N}]$$

3. Jede Kraft ist stets mit einer betragsmäßig gleich großen Gegenkraft verbunden („Actio gleich Reactio“).

Tabelle 2.4. Typische, in der Ballistik auftretende Kräfte

Kraftart	Kraft [N]
Luftkraft auf einen Tischtennisball	1.25
Luftkraft auf einen Golfball	0.46
Luftkraft auf ein Gewehrgeschoss	4
Luftkraft auf ein Artilleriegeschoss	1380
Mittlere Bremskraft bei einem Gewehrschuss ins Wasser	5000
Maximale Kraft auf ein Geschoss im Gewehrlauf	12'000
Mittlere Kraft auf ein Artilleriegeschoss im Rohr	2'300'000
Maximale Kraft auf ein Artilleriegeschoss im Rohr	6'680'000

Typische in der Ballistik auftretende Kräfte sind in der Tabelle 2.4 aufgeführt.

Da die Beschleunigung ein Vektor ist, folgt aus der Gl. 2.2:14 sofort, dass sich auch die Kraft vektoriell verhält. Um eine Kraft zu kennzeichnen, sind somit drei Angaben notwendig: *Betrag*, *Richtung* und *Angriffspunkt*. Die wohl bekannteste Kraft ist das Gewicht G , das dadurch zustande kommt, dass ein Körper der Erdbeschleunigung g ausgesetzt ist. Aus Gl. 2.2:14 folgt sofort

$$(2.2:15) \quad G = m \cdot g . \quad [N]$$

Oft ist es physikalisch sinnvoll, die Kraft mit der Fläche in Beziehung zu bringen, auf die sie einwirkt. Steht die Kraft senkrecht zu dieser Fläche, wird sie als *Zug-* bzw. *Druckkraft* bezeichnet. Wirkt sie parallel dazu, heißt sie *Scher-* oder *Schubkraft*. Wird sie auf die Flächeneinheit bezogen, so spricht man von der entsprechenden *Spannung*.

Spannungen (üblicherweise mit dem Formelzeichen σ bezeichnet) sind oft wichtiger als die Kräfte selbst. Dies rechtfertigte die Einführung einer eigenen Maßeinheit: Pascal (Pa). Es gilt: $1 \text{ Pa} \Leftrightarrow 1 \text{ N/m}^2$. Für Druckspannungen zugelassen ist auch die Einheit „bar“, die in der Ballistik häufig verwendet wird und mit der Einheit Pascal folgendermaßen zusammenhängt

$$1 \text{ bar} \Leftrightarrow 10^5 \text{ Pa}.$$

Im angloamerikanischen Gebiet wird der Druck noch recht verbreitet in „lbs/in²“ gemessen. Umrechnungsformeln für Druckeinheiten s. S. XXIX.

2.2.3 Arbeit und Energie

Bei ballistischen Vorgängen spielen Arbeit und Energie und ihre Beziehungen zu Geschwindigkeit, Kraft, Impuls und Leistung eine zentrale Rolle. Eine sorgfältige Betrachtung ist daher am Platz, besonders weil diese Begriffe umgangssprachlich oft nicht richtig verwendet werden.

Die *Arbeit* W ist definiert als das Produkt aus der in einer bestimmten Richtung wirkenden Kraft F und dem unter dieser Einwirkung zurückgelegten Weg s

$$(2.2:16) \quad W = F \cdot s . \quad [J]$$

Jede ungleichförmige Bewegung, aber auch jede Veränderung der Struktur von Materie (Deformation, Zerstörung) ist nur durch Erbringen („Leisten“) von Arbeit möglich. Dabei ist nicht allein die Größe der Kraft maßgebend, sondern auch der zurückgelegte Weg. Wirkt eine (große) Kraft nur längs eines kurzen Weges (oft gleichbedeutend mit einer kurzen Einwirkungszeit), so bleibt die erbrachte Arbeit trotzdem gering.

Für die Arbeit ergibt sich aus der obigen Definition die Maßeinheit Newtonmeter [N·m], für die wegen deren Wichtigkeit die Einheit Joule [J] eingeführt wurde

$$1 \text{ J} \Leftrightarrow 1 \text{ N} \cdot \text{m}$$

In den immer noch üblichen angloamerikanischen Kraft- und Längeneinheiten lautet die Energieeinheit „feet pound-weight“ [ft·lb.wt.] (Formeln zur Umrechnung s. S. XXIX).

Wird ein Körper entgegen der Erdbeschleunigung bewegt, so ist dazu eine Kraft notwendig, die dem Gewicht des betreffenden Körpers entspricht. Die dabei erbrachte Arbeit W lässt sich dann gemäß Gl. 2.2:16 mit der folgenden Formel berechnen

$$(2.2:17) \quad W = m \cdot g \cdot y , \quad [J]$$

wobei mit y die Wegstrecke bezeichnet ist, die der Körper der Erdanziehung entgegengesetzt bewegt wurde.

Erfährt jedoch der Körper durch die wirkende Kraft eine Beschleunigung, so resultiert aus der erbrachten Arbeit eine Bewegung. Durch Einsetzen der Gl. 2.2:14, 2.2:6 und 2.2:5 (die beiden letzteren mit $x_0 = 0$ und $v_0 = 0$) in Gl. 2.2:16 ergibt sich

$$(2.2:18) \quad W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 . \quad [J]$$

Von nichtmechanischen Vorgängen abgesehen, äußert sich somit die an einem Körper erbrachte Arbeit in einer Abstandszunahme im Gravitationsfeld oder in Bewegung. Sie lässt sich im ersten Fall durch das Körpergewicht und die Abstandszunahme (Gl. 2.2:17) und im zweiten Fall durch die Masse des Körpers und die erreichte Geschwindigkeit ausdrücken (Gl. 2.2:18).

Sowohl der angehobene wie auch der sich bewegende Körper sind nun selbst fähig, Arbeit zu erbringen. Die Fähigkeit, Arbeit erbringen zu können, wird allgemein Energie genannt; im Falle des angehobenen Körpers heißt sie *potenzielle Energie*, und beim bewegten Körper wird sie als *Bewegungsenergie* oder *kinetische Energie* bezeichnet (Beispiele siehe Tabelle 2.5). Arbeit und Energie sind damit physikalisch gleichwertig. Weder die eine noch die andere kann geschaffen oder vernichtet werden. Sie werden nur untereinander ausgetauscht. Für die kinetische Energie eines sich in Bewegung befindenden Körpers ergibt sich demnach aus Gl. 2.2:18 die völlig analoge Formel (und damit auch die gleiche Maßeinheit [J])

$$(2.2:19) \quad E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 . \quad [J]$$

Ebenso lässt sich die potenzielle Energie mit Hilfe der Gl. 2.2:17 darstellen

Tabelle 2.5. Typische, in der Ballistik auftretende kinetische Energien

Objekt	Abgangsenergie [kJ]
Golfball	0.13
Baseball	0.18
Federwaffen (Bogen, Armbrust)	0.04–0.15
Kurzwaffen (Pistolen, Revolver)	0.3–1.2
Kleinkaliber-Langwaffen (Gewehre)	1.6–16.5
20 mm Geschütz	75
81 mm Mörser	bis 110
155 mm Artilleriegeschütz	13'500

$$(2.2:20) \quad E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot y . \quad [\text{J}]$$

Energie kann in der Ballistik unter zwei Gesichtspunkten gesehen werden. Einerseits wird kinetische Energie benötigt, um ein Projektil von der Waffe ins Ziel zu transportieren, andererseits benötigt das Projektil Energie zur Erzeugung einer Wirkung im Ziel. Damit ergibt sich eine Einteilung der Projektile in jene, bei denen die gesamte Energie (in kinetischer Form) in der Waffe aufgebracht wird und jene, die in der Waffe nur die Energie für den Transport erhalten, die Energie für die Wirkung jedoch in anderer Form (z. B. chemisch als Sprengstoff) mitführen und erst im Ziel freisetzen.

2.2.4 Drehbewegungen

Wirkt eine Kraft außerhalb der Drehachse auf ein drehbares System, so beginnt es sich zu drehen. Die Winkelgeschwindigkeit, die sich dabei einstellt, hängt direkt von der Kraft, aber auch vom Abstand zwischen deren Wirkungsrichtung und der Drehachse („Hebelarm“) ab. Dies legt die folgende Definition nahe

$$(2.2:21) \quad M = F \cdot r . \quad [\text{N} \cdot \text{m}]$$

M heißt *Drehmoment* und r bezeichnet den Abstand der Kraftwirkungsrichtung von der Drehachse (Länge des Hebelarmes).

Als gerichtete Größe (Vektor) betrachtet, steht das Moment stets senkrecht auf der Kraftrichtung und dem Hebelarm, ist also zur Drehachse parallel.

Mit Gl. 2.2:14, 2.2:9 und 2.2:11 ergibt sich

$$(2.2:22) \quad M = m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot r = m \cdot \frac{r \cdot d\omega}{dt} \cdot r = m \cdot r^2 \cdot \alpha . \quad [\text{N} \cdot \text{m}]$$

Zwischen dem Drehmoment und der dadurch erzeugten Winkelbeschleunigung besteht gemäß dieser Gleichung ein linearer Zusammenhang – wie bei Kraft und Be-

schleunigung. Der zugehörige Proportionalitätsfaktor heißt *Trägheitsmoment* J und ist eine auf die Drehachse bezogene Eigenschaft des Körpers

$$(2.2:23) \quad M = J \cdot \alpha . \quad [\text{N} \cdot \text{m}]$$

Dem Trägheitsmoment J kommt damit bei der Drehbewegung dieselbe Bedeutung zu wie der Masse bei der linearen Bewegung.

Die Trägheitsmomente beliebiger Körper lassen sich rechnerisch durch (analytische oder numerische) Integration über das Volumen ermitteln

$$(2.2:24) \quad J = \int r^2 \cdot dm , \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2]$$

oder aber mittels der sogenannten Trägheitsmomentenwaage messtechnisch bestimmen. Für elementare homogene Körper ergeben sich zum Teil recht einfache Formeln.

Mit Berücksichtigung der Definition der Kraft (Gl. 2.2:13) ergibt sich aus Gl. 2.2:23 die folgende Beziehung

$$M = F \cdot r = \frac{dI}{dt} \cdot r = J \cdot \frac{d\omega}{dt} = J \cdot \alpha . \quad [\text{N} \cdot \text{m}]$$

Die Integration der Gleichung der beiden Differenziale führt zu einer Beziehung, bei welcher auf der einen Seite das Produkt aus Impuls(vektor) und dessen Abstand von der Drehachse erscheint. Dieses Produkt heißt *Drehimpuls* oder *Drall*

$$(2.2:25) \quad L = I \cdot r = m \cdot v \cdot r = J \cdot \omega . \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}]$$

Für die Bestimmung der kinetischen Energie einer rotierenden Masse (Rotations- oder Drehenergie) ist zu bedenken, dass jedes Masseteilchen eine vom Drehradius abhängige Geschwindigkeit besitzt. Es ist also die differenzielle Energie über das ganze Volumen zu integrieren.

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \cdot \int_V v^2 \cdot dm = \frac{1}{2} \cdot \int_V \omega^2 \cdot r^2 \cdot dm = \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot \int_V r^2 \cdot dm , \quad [J]$$

$$(2.2:26) \quad E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2 . \quad [J]$$

Es wird oft übersehen, dass auch Pendelungen und Teildrehungen zu den Drehbewegungen gehören. So führt ein Geschoss auf seiner Bahn neben der bereits erwähnten schnellen Rotation um seine Längsachse noch weitere Drehungen aus (z. B. eine um eine horizontale Querachse, s. Abb. 2.2).

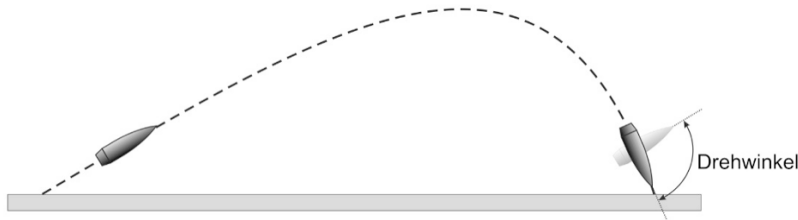


Abb. 2.2. Drehung eines Geschosses um eine Querachse entlang der Flugbahn.

2.2.5 Erhaltungssätze

Alle physikalischen (und insbesondere auch alle mechanischen) Vorgänge werden von einigen sogenannten *Erhaltungssätzen* bestimmt. Die Analyse eines physikalischen Prozesses beginnt mit der Anwendung dieser fundamentalen Gesetze, mit deren Hilfe die Abläufe in der Regel einfach durchschaut werden können. Dabei ist es wichtig, das betrachtete physikalische System zuerst so abzugrenzen, dass seine Wechselwirkungen mit der „Außenwelt“ vernachlässigbar werden. Es wird dann als abgeschlossen bezeichnet. Erhaltungssätze gelten stets nur in einem abgeschlossenen System.

1. *Gesetz der Massenerhaltung.* In einem abgeschlossenen System bleibt die Gesamtsumme der Masse erhalten. Es wird also weder Masse entstehen noch verloren gehen (von atomphysikalischen Prozessen abgesehen)

$$(2.2:27) \quad m_{\text{tot}} = \sum m_i = \text{const} . \quad [\text{kg}]$$

In einem System verschiedener Massen bleibt zudem auch der gemeinsame *Schwerpunkt* erhalten, unabhängig davon, welche Bewegungen die einzelnen Massen ausführen (Beispiel: Schrotgarbe).

2. *Impulserhaltungssatz.* In einem abgeschlossenen System (also ohne äußere Kräfte) bleibt die Gesamtsumme des Impulses stets konstant

$$(2.2:28) \quad I_{\text{tot}} = \sum I_i = \text{const} . \quad [\text{N} \cdot \text{s}]$$

3. *Erhaltungssatz für den Drehimpuls.* In einem abgeschlossenen System (also ohne äußere Momente) bleibt die Gesamtsumme des Drehimpulses stets konstant

$$(2.2:29) \quad L_{\text{tot}} = \sum L_i = \text{const} . \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}]$$

4. *Energieerhaltungssatz für die Mechanik.* In einem abgeschlossenen, reibungsfreien System (also ohne äußere Energiezufuhr und ohne Verluste) bleibt die Gesamtsumme aus potenzieller, kinetischer und rotativer Energie stets konstant

$$(2.2:30) \quad E_{\text{mech}} = \sum E_{\text{pot}} + \sum E_{\text{kin}} + \sum E_{\text{rot}} = \text{const} . \quad [\text{J}]$$

Der Energieerhaltungssatz geht jedoch über die Mechanik hinaus. Andere, nicht-mechanische Energieformen werden von ihm ebenfalls erfasst. Es gilt deshalb

5. *Energieerhaltungssatz allgemein.* In einem abgeschlossenen System bleibt die Gesamtsumme der Energie (sämtlicher Energieformen) konstant.

Umwandlungen von einer Energieform in eine andere innerhalb des Systems sind nicht zwingend umkehrbar.

2.2.6 Bewegungsgleichungen

2.2.6.1 Allgemeines

Physikalisch gesehen ist die Bewegung eines Körpers vollständig bestimmt, wenn zu jedem Zeitpunkt sein Ort, seine Geschwindigkeit und seine Lage im Raum angegeben werden können. Der Ablauf der Bewegung wird durch die auf den Körper einwirkenden Kräfte und die dadurch hervorgerufenen Beschleunigungen vollständig festgelegt.

Wird die Beschleunigung eines Körpers mit dessen Ort und Geschwindigkeit verknüpft, so entstehen die sogenannten Bewegungsgleichungen. Diese bilden ein Differenzialgleichungssystem für die zeitabhängigen Geschwindigkeits- und Ortsfunktionen des Körpers. Im Falle eines Massenpunktes (z. B. des Schwerpunktes des Körpers) besteht das System aus sechs Gleichungen, drei für die Ortskoordinaten und drei für die Geschwindigkeitskomponenten. Bei einem starren (ausgedehnten) Körper treten weitere sechs Gleichungen hinzu, die seine Lage im Raum und die Geschwindigkeit der Lageänderung beschreiben. In vielen Fällen lässt sich jedoch das System der Bewegungsgleichungen stark reduzieren, wenn beispielsweise in einer bestimmten Richtung keine Kräfte auftreten.

2.2.6.2 Das Prinzip von D’ALEMBERT

Bewegungsgleichungen lassen sich durch Differenziation aus dem Energie- oder dem Impulssatz gewinnen. Ein direkterer Zugang führt über das d’Alembert’sche Prinzip, nach dem die Beschleunigung eines Körpers durch eine fiktive Kraft F_{fikt} ersetzt wird, die (gemäß dem 3. Newton-Axiom) im Gleichgewicht mit der Summe der einwirkenden Kräfte sein muss

$$(2.2:31) \quad m \cdot a = F_{\text{fikt}} = \sum F_i . \quad [N]$$

Beim Aufstellen von Bewegungsgleichungen wird auf ein weiteres wichtiges Grundprinzip der Mechanik zurückgegriffen: auf das Prinzip der *Unabhängigkeit von Bewegungen*. Verschiedene, gleichzeitig stattfindende Bewegungen eines Körpers beeinflussen sich gegenseitig nicht. Dies hat zur Folge, dass sich eine beliebige Bewegung nach den drei Richtungen des Bezugssystems in Komponenten aufteilen lässt. Diese lassen sich getrennt betrachten und können daher mit entsprechend einfachen Gleichungen beschrieben werden.

2.2.6.3 Flugbahnen im Vakuum

Ein typisches und im Zusammenhang mit der Ballistik besonders geeignetes Beispiel für das Aufstellen und Lösen von Bewegungsgleichungen ist die Bahn eines Körpers im Vakuum. In der x-Richtung wirken keine Kräfte, in der y-Richtung

wirkt nur das Gewicht. Nach dem Prinzip von D'ALEMBERT ergeben sich die folgenden zwei Gleichungen

$$(2.2:32a) \quad m \cdot \dot{v}_x = 0 \quad (x\text{-Richtung}), \quad [N]$$

$$(2.2:32b) \quad m \cdot \dot{v}_y = -m \cdot g \quad (y\text{-Richtung}). \quad [N]$$

Diese zwei Differenzialgleichungen bilden das System der *Bewegungsgleichungen* des sogenannten schiefen Wurfs im Vakuum. Sie lassen sich einfach integrieren, wobei mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 und dem Abgangswinkel θ_0 (der *Elevation*) die folgenden Anfangswerte zu berücksichtigen sind

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos \theta_0, \quad v_{0y} = v_0 \cdot \sin \theta_0 \quad [m/s]$$

Es resultieren die folgenden Gleichungen

$$(2.2:33a) \quad x(t) = v_0 \cdot \cos \theta_0 \cdot t, \quad [m]$$

$$(2.2:33b) \quad y(t) = v_0 \cdot \sin \theta_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2. \quad [m]$$

Wird aus diesen beiden Gleichungen t eliminiert, so ergibt sich die Bahngleichung für die (parabelförmige) Flugbahn im Vakuum

$$(2.2:34) \quad y(x) = \tan \theta_0 \cdot x - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \theta_0}. \quad [m]$$

Wird hierin $y = 0$ gesetzt (Mündungshorizont), so folgt die mit dem Abgangswinkel θ_0 erreichbare Schussdistanz x_E

$$(2.2:35) \quad x_E = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(2 \cdot \theta_0). \quad [m]$$

Hieraus folgt, dass im Vakuum die maximale Schussweite für alle v_0 bei $\theta_0 = 45^\circ$ erreicht wird.

Die zugehörige Flugzeit erhält man analog aus Gl. 2.2:33b

$$(2.2:36) \quad t_E = \frac{2 \cdot v_0}{g} \cdot \sin \theta_0. \quad [s]$$

Der höchste Punkt der Flugbahn (Gipfel) lässt sich einfach bestimmen, wenn man bedenkt, dass dort die vertikale Geschwindigkeitskomponente null sein muss. Hieraus folgt die Flugzeit zum Gipfel, die – in Gl. 2.2:33b eingesetzt – zu der folgenden Beziehung führt.

$$(2.2:37) \quad y_G = \frac{v_0^2}{2 \cdot g} \cdot \sin^2 \theta_0. \quad [m]$$

Eine Kombination der Gl. 2.2:36 und 2.2:37 führt zu der in der Praxis nützlichen *Haupt'schen Formel* für die Gipfelhöhe, die mit guter Näherung auch für Flugbahnen mit Luftwiderstand gilt

$$(2.2:38) \quad y_G = \frac{1}{8} \cdot g \cdot t_E^2. \quad [m]$$

2.2.6.4 Wegabhängigkeit

Es ist oft anschaulicher, wenn bei einer Bewegung der Geschwindigkeitsverlauf nicht in Abhängigkeit von der Zeit, sondern vom Weg vorliegt. Als Weg wird dabei die Bahnlänge verstanden, manchmal aber auch deren Projektion auf die x-Achse.

So hat ein leichtes, schnelles Jagdgeschoss bei einer Mündungsgeschwindigkeit von 1050 m/s in Mündungsnähe eine Verzögerung von ca. 1700 m/s², ein Wert, der völlig unanschaulich ist. Dieser Verzögerung entspricht eine Geschwindigkeitsabnahme von 1.6 m/s pro m Flugdistanz, eine Zahl, unter der man sich etwas vorstellen kann.

Mit dem differenziellen Bahnlängenelement

$$(2.2:39) \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}, \quad [m]$$

ergibt sich die Geschwindigkeit zu

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}, \quad [m/s]$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \quad [m/s]$$

woraus die folgende Umrechnungsformel zwischen Zeit- und Wegabhängigkeit resultiert (mit Benutzung der in Abschn. 2.1 eingeführten Schreibkonvention)

$$(2.2:40) \quad \dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v' \cdot v. \quad [m/s^2]$$

2.2.6.5 Die Bewegung im Zentralfeld

Bei den in Abschn. 2.2.6.3 hergeleiteten Bewegungsgleichungen (2.2:32a und b) war stillschweigend vorausgesetzt worden, dass die Gravitationsbeschleunigung stets senkrecht zur x-z-Ebene wirkt. Für größere Schussdistanzen, bei denen sich die Erdkrümmung bemerkbar macht, kann diese Annahme nicht mehr genügen; der Flugkörper wird sich in einem Zentralfeld bewegen.

Ein Zentralfeld ist dadurch charakterisiert, dass die Beschleunigungsvektoren alle auf einen festen Raumpunkt gerichtet sind.

Flugbahnen im Gravitationsfeld der Erde unterliegen (wie Satellitenbahnen) dem Newton'schen Gravitationsgesetz und somit auch den Kepler'schen Gesetzen. Die geometrische Form der Bahn (Vakuum vorausgesetzt) wird also eine Ellipse sein.

Ausgangspunkt ist die Bewegungsgleichung im Zentralfeld und die auf die Masse bezogene Erhaltung des Drehimpulses. Dargestellt in Polarkoordinaten (r, ψ) mit Ursprung in einem Brennpunkt der Ellipse erhält man somit

$$m \cdot \ddot{r} - m \cdot r \cdot \dot{\psi}^2 = - \frac{G \cdot m \cdot m_{ER}}{r^2}, \quad [N]$$

$$r^2 \cdot \dot{\psi} = \text{const} := j, \quad [m^2/s]$$

woraus sich ergibt

$$(2.2:41) \quad \ddot{r} - \frac{j^2}{r^3} = -\frac{G \cdot m_E}{r^2} . \quad [m/s^2]$$

Darin bedeuten: m die Masse des Flugkörpers, r den Abstand vom Erdzentrum, ψ die Winkelgeschwindigkeit, G die Gravitationskonstante und m_E die Erdmasse.

Eine Differenzialgleichung für die Flugbahn ergibt sich aus der zeitabhängigen Bewegungsgleichung (2.2:41) in Analogie zu Abschn. 2.2.6.4 durch die folgende Umrechnungsformel

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\psi}{dt} \cdot \frac{d}{d\psi} = \frac{j}{r^2} \cdot \frac{d}{d\psi} , \quad [1/s]$$

angewendet auf (2.2:41)

$$\frac{j}{r^2} \cdot \frac{d}{d\psi} \left(\frac{j}{r^2} \cdot \frac{dr}{d\psi} \right) - \frac{j^2}{r^3} = -\frac{G \cdot m_E}{r^2} , \quad [m/s^2]$$

$$(2.2:42) \quad \frac{d}{d\psi} \left(\frac{1}{r^2} \cdot \frac{dr}{d\psi} \right) - \frac{1}{r} = -\frac{G \cdot m_E}{j^2} . \quad [1/m]$$

Mit der Setzung

$$u = \frac{1}{r} , \quad \frac{du}{d\psi} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{dr}{d\psi} ,$$

folgt aus (2.2:42) eine inhomogene Differenzialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten für die Funktion $u(\theta)$

$$(2.2:43) \quad \frac{d^2 u}{d\psi^2} + u = \frac{G \cdot m_E}{j^2} , \quad [1/m]$$

Die zugehörige homogene Gleichung hat die Lösung $u(\psi) = B \cdot \cos(\psi - \psi_0)$, wobei B und ψ_0 Konstanten sind. Die rechte Seite von (2.2:43) ist zugleich eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung, sodass sich als Lösung von (2.2:43) ergibt

$$u = \frac{1}{r} = B \cdot \cos(\psi - \psi_a) + \frac{G \cdot m_E}{j^2} , \quad [1/m]$$

oder mit $k := \frac{j^2}{G \cdot m_E}$ und $e = B \cdot k$ folgt

$$(2.2:44) \quad r(\psi) = \frac{k}{e \cdot \cos(\psi - \psi_a) + 1} \quad \text{mit} \quad r(0) = r_0 . \quad [m]$$

Dies ist die Darstellung eines Kegelschnittes in Polarkoordinaten mit Ursprung in einem Brennpunkt und mit der Nullrichtung durch den Abgangspunkt A der Flug-

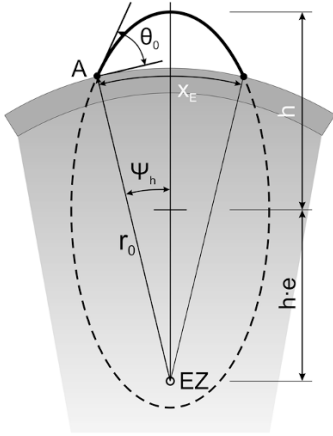


Abb. 2.3. Flugbahn im Zentralfeld. Der eine Brennpunkt liegt im Erdzentrum EZ, A bezeichnet den Abgangspunkt des Flugkörpers, r_0 den Abstand des Abgangspunktes vom Erdzentrum, h die große Halbachse der Ellipse, e die Exzentrizität und x_E die Schussweite. ψ_h zeigt in Richtung der Hauptachse.

bahn. Ist die Exzentrizität $e < 1$, handelt es sich um eine Ellipse, in der ψ_h die Richtung der Hauptachse darstellt (siehe Abb. 2.3).

Mit $\psi = \psi_h$ und $\psi = \psi_h + \pi$ ergibt sich die große Halbachse zwanglos zu

$$(2.2:45) \quad h = \frac{k}{1 - e^2} . \quad [\text{m}]$$

Der Abgangsort des Flugkörpers ist gegeben durch $\psi = 0$, seine Abgangsgeschwindigkeit wird mit v_0 und der Abgangswinkel (die Elevation) mit θ_0 bezeichnet. Somit gilt

$$(2.2:46) \quad \begin{aligned} \dot{r}(\psi = 0) &= v_0 \cdot \sin \theta_0 \\ r \cdot \dot{\psi}(\psi = 0) &= v_0 \cdot \cos \theta_0 \end{aligned} . \quad [\text{m/s}]$$

Mit diesen ergänzenden Bedingungen kann die Exzentrizität e und die Richtung der Hauptachse bestimmt werden. Die Bahngleichung (2.2:44) wird dazu mit $(r_0, \psi = 0)$ als Abschusspunkt in der folgenden Form geschrieben

$$(2.2:47a) \quad e \cdot \cos(\psi_h) = \frac{k}{r_0} - 1 , \quad [-]$$

und nach der Zeit abgeleitet und anschließend in (2.2:46) eingesetzt

$$(2.2:47b) \quad \begin{aligned} e \cdot \sin(\psi_h) \cdot \dot{\psi} &= -\frac{k \cdot \dot{r}}{r_0^2} , \\ e \cdot \sin(\psi_h) &= -\frac{k}{r_0} \cdot \tan \theta_0 . \end{aligned} \quad [-]$$

Die beiden Gleichungen (2.2:47a und b) bilden ein Gleichungssystem für die beiden gesuchten Größen e und ψ_h . Nach einiger Rechnung und durch Resubstitution der Konstanten k , die sich nach Einsetzen von (2.2:46) wie folgt berechnet

$$k = \frac{r_0^2 \cdot (r_0 \cdot \dot{\psi})^2}{G \cdot m_E} = \frac{r_0^2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \theta}{G \cdot m_E}, \quad [m]$$

erreicht man für die beiden Größen die Ausdrücke

$$(2.2:48) \quad e = \sqrt{1 - \frac{r_0 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \theta_0}{G \cdot m_E} \cdot \left(2 - \frac{r_0 \cdot v_0^2}{G \cdot m_E}\right)}, \quad [-]$$

$$(2.2:49) \quad \psi_h = \arcsin \frac{r_0 \cdot v_0^2 \cdot \sin(2 \cdot \theta_0)}{2 \cdot G \cdot m_E \cdot e}. \quad [-]$$

Weil ψ_h als Richtung der Hauptachse der Ellipse zugleich auch die Richtung des Flugbahngipfels ist, ergibt sich aus Symmetriegründen für die gesamte Flugweite

$$(2.2:50) \quad x_E = 2 \cdot r_0 \cdot \psi_h. \quad [m]$$

Dabei ist unterstellt, dass sich der Einschlagspunkt auf gleicher Höhe (d. h. im gleichen Abstand vom Erdzentrum) befindet wie der Abgangspunkt.

Die Gipfelhöhe der Flugbahn ist nun die Differenz des Abstandes des entfernteren Scheitels der Ellipse vom Erdzentrum und jenem des Abgangsortes

$$h_G = h \cdot (1 + e) - r_0. \quad [m]$$

Einsetzen von (2.2:45) und k

$$(2.2:51) \quad h_G = \frac{r_0^2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \theta_0}{G \cdot m_E \cdot (1 - e)} - r_0. \quad [m]$$

In der Tabelle 2.6 sind Reichweiten und Gipfelhöhen von Flugbahnen im Zentralfeld in Abhängigkeit der Abgangsgeschwindigkeit und der Elevation zusammengestellt. Wie bereits im Abschnitt 2.2.6.3 ist auch hier ein luftleerer Raum voraus-

Tabelle 2.6. Reichweiten x_E und Flughöhen h_G von Flugbahnen im Zentralfeld (in [km]) in Abhängigkeit von Abgangsgeschwindigkeit und Elevation. (Gerechnet mit r_0 = Erdradius und mit $G \cdot m_E = 3.986 \cdot 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$)

Elev. [°]		Abgangsgeschwindigkeit [m/s]						
		1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000
15	x _E	51.7	216.6	529.0	1067.4	2012.6	3837.3	8010.9
	h _G	3.5	14.5	35.6	72.4	138.0	270.0	608.0
30	x _E	89.3	370.4	888.2	1735.1	3086.4	5263.6	8766.0
	h _G	12.9	53.9	130.9	261.1	481.5	876.8	1661.2
45	x _E	102.6	420.6	985.5	1854.9	3117.6	4891.3	7287.0
	h _G	25.8	106.9	256.4	501.1	893.1	1536.7	2653.1
60	x _E	88.5	358.4	822.2	1500.4	2419.9	3608.5	5084.9
	h _G	38.6	159.1	377.2	724.4	1258.6	2088.8	3434.5
75	x _E	51.0	204.5	462.5	827.7	1303.3	1892.4	2596.4
	h _G	47.9	196.7	462.9	879.1	1504.5	2448.8	3930.7

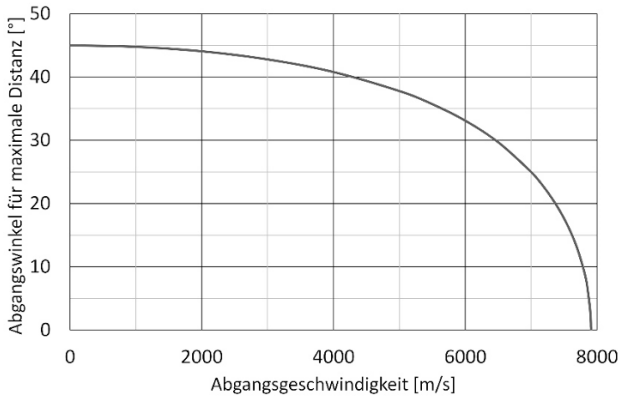


Abb. 2.4. Zusammenhang zwischen Abgangsgeschwindigkeit und Abgangswinkel für maximale Flugdistanz. Bei Erreichen der ersten astronautischen Geschwindigkeit wird der Abgangswinkel zu 0° .

gesetzt worden. Für große Gipfelhöhen (ab etwa 30 km) dürften die Werte durchaus akzeptable Schätzungen darstellen, da bei diesen Bahnen die Lufthülle nur für kurze Zeit im aufsteigenden und im absteigenden Ast einen Einfluss ausübt.

Während im parallelen Gravitationsfeld die maximale Schussweite stets bei einem Abgangswinkel von 45° erreicht wird, stellt man mit Blick auf Tabelle 2.6 fest, dass im Zentralfeld mit zunehmender Abgangsgeschwindigkeit ein stets kleinerer Winkel eingestellt werden muss, um die maximale Distanz zu erreichen. Abb. 2.4 zeigt diese Abhängigkeit auf und macht ersichtlich, dass bei Erreichen der sogenannten ersten astronautischen Geschwindigkeit die zugehörige Abgangsrichtung zu 0° wird, der Abschuss also tangential erfolgen müsste.

Die erste astronautische Geschwindigkeit ist jene Geschwindigkeit, bei welcher der Flugkörper eine geschlossene Kreisbahn um die Erde einnimmt. Gewicht und Zentrifugalkraft stehen in diesem Fall im Gleichgewicht. Die Abgangsgeschwindigkeit beträgt dabei 7910 m/s.

2.2.7 Beschleunigungen im rotierenden Bezugssystem

2.2.7.1 Die Zentrifugalbeschleunigung

Bewegt sich ein Körper auf einem Kreisbahnstück mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag v , so wird er dennoch beschleunigt, da seine Geschwindigkeit ständig die Richtung wechselt. Die Geschwindigkeitsänderung steht auf dem Geschwindigkeitsvektor senkrecht. Mit Blick auf die Abb. 2.5 folgt

$$(2.2:52) \quad a_{zp} = -\frac{dv}{dt} = -v \cdot \frac{d\phi}{dt} = -v \cdot \omega = -r \cdot \omega^2. \quad [\text{m/s}^2]$$

Das negative Vorzeichen wird gesetzt, weil die Beschleunigung zum Zentrum hin gerichtet ist.

Befindet sich nun ein Körper auf einem gleichförmig rotierenden System und ist nicht gleichzeitig der Zentripetalbeschleunigung a_{zp} unterworfen (also nicht mit dem rotierenden System fest verbunden), erfährt er infolge seiner Trägheit eine a_{zp} entgegengesetzte Beschleunigung a_{zf} (die *Zentrifugalbeschleunigung*), die sich nur

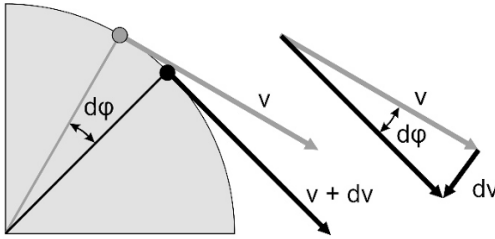


Abb. 2.5. Zur Herleitung der Zentripetalbeschleunigung auf einem rotierenden System.

bezüglich des rotierenden Systems bemerkbar macht. Man spricht daher von einer „Scheinbeschleunigung“

$$(2.2:53) \quad a_{zf} = r \cdot \omega^2 . \quad [\text{m/s}^2]$$

Sie steht stets senkrecht zur Rotationachse.

2.2.7.2 Die Coriolisbeschleunigung

Bewegt sich ein Körper auf einem rotierenden System mit konstanter Geschwindigkeit v_r vom Zentrum aus in Richtung Peripherie, so nimmt seine tangential Geschwindigkeit gemäß Formel (2.2:9) zu. Der Weg, der in tangentialer Richtung zurückgelegt wird, errechnet sich zu

$$s = v_t \cdot t = \omega \cdot r \cdot t . \quad [\text{m}]$$

Gleichzeitig hat der Körper in der Zeit t den Radius $r = v_r \cdot t$ erreicht. Eingesetzt in die obige Wegformel und diese der klassischen Wegbeziehung bei konstanter Beschleunigung gleichgesetzt ergibt

$$s = \omega \cdot v_r \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot a_c \cdot t^2 , \quad [\text{m}]$$

woraus für die Beschleunigung die folgende Beziehung resultiert

$$(2.2:54) \quad a_c = 2 \cdot \omega \cdot v_r . \quad [\text{m/s}^2]$$

Sie wird nach ihrem Entdecker *Coriolisbeschleunigung* genannt. Auch hier ist ein nicht mit dem beschleunigten System fest verbundener Körper trägheitsbedingt einer entgegengesetzten Beschleunigung unterworfen.

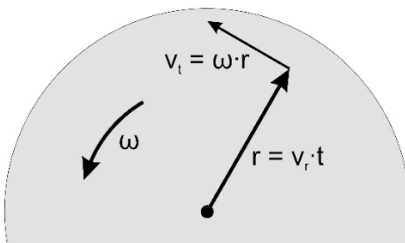


Abb. 2.6. Zur Herleitung der Coriolisbeschleunigung auf einem rotierenden System.

2.2.8 Bewegungen starrer Körper

2.2.8.1 Bewegungszzerlegung

Ein *starrer Körper* ist dadurch charakterisiert, dass die Abstände aller möglichen Punktpaare unverändert bleiben, unabhängig davon, was mit ihm geschieht. Im Gegensatz zum Massenpunkt, kann sich ein solcher Körper nicht nur verschieben, sondern sich auch um einen Punkt drehen, wobei sich die durch diesen Punkt gehende, zugehörige Drehachse im Allgemeinen zeitlich ändert. Nach dem Satz von CHASLES, einem französischen Mathematiker des 19. Jahrhunderts, kann jede beliebige Bewegung des Körpers stets in eine Translation des Schwerpunktes und in eine Rotation um diesen Punkt zerlegt werden. Die Translation allein kann bereits aus dem Ort des Schwerpunktes, der Gesamtmasse des Körpers, dem Impuls und den entsprechend einwirkenden Kraftkomponenten bestimmt werden.

Für die Translationsbewegung lässt sich somit der Körper als Massenpunkt betrachten.

Drehbewegungen eines Massenpunktes bezüglich einer festen Drehachse sind bereits in Abschn. 2.2.4 eingeführt worden. Dabei hat sich das Trägheitsmoment als wichtige Eigenschaft der sich drehenden Masse erwiesen, stellt es doch den Proportionalitätsfaktor zwischen Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit dar (analog zur Masse, die Impuls und Geschwindigkeit verbindet). Nun kommt aber beim Drehimpuls des starren Körpers mit dem Abstand der Massenelemente von der Drehachse eine weitere variable Größe hinzu, welche dessen Beschreibung merklich erschwert.

Die beschriebene Bewegungszzerlegung gestattet es nun, auch die Rotation des starren Körpers für sich allein zu betrachten. Dies erfolgt in der Regel in einem körperfesten Bezugssystem, dessen Ursprung in den Schwerpunkt gelegt wird.

2.2.8.2 Der Trägheitstensor

Der dreidimensionalen Ausdehnung des starren Körpers wegen werden die folgenden Ausführungen in vektorieller Form dargestellt.

Die Geschwindigkeit eines Massenpunktes $\vec{r}_i = (r_{i1}, r_{i2}, r_{i3})$ des starren Körpers, der sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ um eine durch den Schwerpunkt S gehende Achse dreht, beträgt

$$(2.2:55) \quad \vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i . \quad [\text{m/s}]$$

Der Drehimpuls ist bekanntlich das Vektorprodukt aus Radius und Impuls

$$(2.2:56) \quad \vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times (m_i \cdot \vec{v}_i) = \sum_i m_i \cdot (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) , \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}]$$

Einsetzen der Gl. (2.2:55)

$$\vec{L} = \sum_i m_i \cdot \{ \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \} . \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}]$$

und Anwenden des Graßmann'schen Entwicklungssatzes ergibt

$$(2.2:57) \quad \vec{L} = \sum_i m_i \cdot \left\{ \vec{\omega} \cdot r_i^2 - \vec{r}_i \cdot (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) \right\}. \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}]$$

Werden die Vektoren in Komponenten zerlegt und daraus die Komponenten des Drehimpulses berechnet, erhält man

$$(2.2:58) \quad \begin{cases} L_1 = J_1 \cdot \omega_1 + J_{12} \cdot \omega_2 + J_{13} \cdot \omega_3 \\ L_2 = J_{21} \cdot \omega_1 + J_2 \cdot \omega_2 + J_{23} \cdot \omega_3 \\ L_3 = J_{31} \cdot \omega_1 + J_{32} \cdot \omega_2 + J_3 \cdot \omega_3 \end{cases}, \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}]$$

oder in vektorieller Form dargestellt

$$(2.2:59) \quad \vec{L} = \begin{pmatrix} J_1 & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_2 & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_3 \end{pmatrix} \cdot \vec{\omega} = \hat{J} \cdot \vec{\omega}, \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}]$$

mit

$$J_1 = \sum_i m_i \cdot (x_{2i}^2 + x_{3i}^2), \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2]$$

$$J_2 = \sum_i m_i \cdot (x_{1i}^2 + x_{3i}^2), \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2]$$

$$J_3 = \sum_i m_i \cdot (x_{1i}^2 + x_{2i}^2), \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2]$$

$$J_{12} = J_{21} = - \sum_i m_i \cdot x_{1i} \cdot x_{2i}, \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2]$$

$$J_{13} = J_{31} = - \sum_i m_i \cdot x_{1i} \cdot x_{3i}, \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2]$$

$$J_{23} = J_{32} = - \sum_i m_i \cdot x_{2i} \cdot x_{3i}. \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2]$$

Bei einer kontinuierlich verteilten Masse wird das Summenzeichen durch das Volumenintegral ersetzt und das Massenelement durch die Dichte.

Der Ausdruck \hat{J} in Gl. 2.2:59 heißt *Trägheitstensor*. Er lässt sich als symmetrische 3×3 -Matrix schreiben; die Elemente der Hauptdiagonalen werden als *Trägheitsmomente* die restlichen als *Deviationsmomente* bezeichnet. Offensichtlich stellt der Trägheitstensor nicht eine Körperkonstante dar, sondern ist auch von der Wahl des Ursprungs und der Orientierung des körperfesten Bezugssystems abhängig.

Symmetrische Matrizen haben die Eigenschaft, dass es bei gegebenem Ursprung stets gelingt, das Bezugssystem so zu orientieren, dass die Matrix Diagonalform annimmt, die Deviationsmomente also verschwinden. Ein solches System heißt dann *Hauptträgheitsachsensystem*, die zugehörigen Trägheitsmomente *Hauptträgheitsmomente*. Im Zusammenhang mit ballistischen Fragen wird man stets ein solches System voraussetzen.

2.2.8.3 Der freie symmetrische Kreisel

Ein starrer Körper, der mit einer bestimmten Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ um eine Achse rotiert, wird *Kreisel* genannt. Sind zwei der drei Hauptträgheitsmomente gleich (z. B. $J_1 = J_2$), bezeichnet man ihn als symmetrisch. Die Hauptträgheitsachse, auf die sich J_3 bezieht, heißt dann *Figurenachse*. In einem rotationssymmetrischen Körper fällt sie mit der Symmetrieachse zusammen.

Wirken auf einen Kreisel keine äußeren Kräfte ein (und damit auch kein Drehmoment bezüglich des Drehpunktes), so handelt es sich um einen *freien Kreisel*. Drehimpuls und kinetische Energie bleiben dann konstant. Hingegen zeigt ein Blick auf Gl. (2.2:59), dass auch bei verschwindenden Deviationsmomenten die Winkelgeschwindigkeit im Allgemeinen nicht parallel zum Drehimpuls sein wird und folglich auch die Richtung der momentanen Drehachse zeitabhängig ist.

Die damit verbundene Bewegung des kräftefreien Kreisels nennt man *Nutation*. Sie hängt von den Anfangsbedingungen der Bewegung ab. Ihre Frequenz ν_N lässt sich aus den Bewegungsgleichungen des freien Kreisels ermitteln, wobei die folgende Beziehung resultiert

$$(2.2:60) \quad \nu_N = \frac{|J_3 - J_1|}{J_1} \cdot \frac{\omega}{2 \cdot \pi} \quad [1/s]$$

2.2.8.4 Der schwere symmetrische Kreisel

Wirkt auf einen Kreisel ein ständiges Drehmoment, so wird er als *schwerer Kreisel* bezeichnet (wegen des Faktes, dass sehr oft das Gewicht Verursacher des Drehmomentes ist).

Für eine elementare Betrachtung des Verhaltens eines schweren symmetrischen Kreisels stelle man sich einen klassischen Spielzeugkreisel der Masse m vor, der auf einer Ebene in Gang gesetzt worden ist und um seine Figurenachse mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ dreht. (siehe Abb. 2.7). Das Bezugssystem wird in den

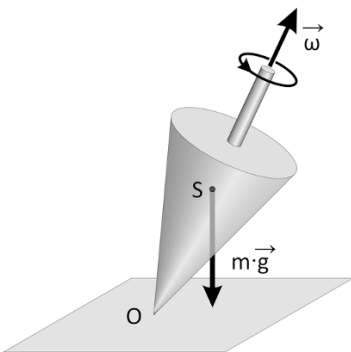


Abb. 2.7. Klassisches Bild des schweren Kreisels.

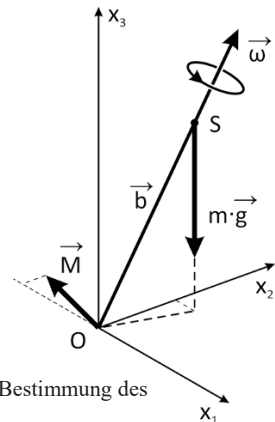


Abb. 2.8. Zur Bestimmung des Drehmomentes.

Unterstützungspunkt O gelegt, der Schwerpunkt befindet sich aus Symmetriegründen auf der Figurenachse im Abstand \vec{b} (siehe Abb. 2.8). Das einwirkende Drehmoment ergibt sich zu

$$(2.2:61) \quad \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{b} \times (m \cdot \vec{g}) , \quad [\text{N} \cdot \text{m}]$$

und steht somit senkrecht sowohl auf \vec{b} als auch auf \vec{g} . Dies gilt natürlich auch für die zum Drehmoment parallele Änderung des Drehimpulses, wobei jedoch dessen Komponente L_3 erhalten bleibt. Der Drehimpulsvektor bewegt sich folglich auf einem Kegelmantel um die e_3 -Achse. Die dabei entstehende Bewegung des Kreisels wird *Präzession* genannt.

Die Winkelgeschwindigkeit ω_p der Präzession ergibt sich aus einigen geometrischen Überlegungen (siehe dazu Abb. 2.9). Es sei δ der Neigungswinkel des Drehimpulsvektors \vec{L} . Mit L_r wird die radiale Komponente von \vec{L} bezeichnet, mit L dessen Betrag und es gilt

$$L_r = L \cdot \sin \delta . \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}]$$

In der Zeit dt überstreicht L_r den Winkel $d\alpha$

$$d\alpha = \frac{dL_r}{L_r} = \frac{dL}{L} = \frac{M \cdot dt}{L \cdot \sin \delta} , \quad [-]$$

woraus folgt

$$(2.2:62) \quad \omega_p = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{M}{L \cdot \sin \delta} . \quad [1/\text{s}]$$

Diese Beziehung kann auch so geschrieben werden

$$\omega_p \cdot L \cdot \sin \delta = M , \quad [\text{N} \cdot \text{m}]$$

und weil die linke Seite der Betrag des Vektorproduktes von $\vec{\omega}$ und \vec{L} ist, gilt auch

$$(2.2:63) \quad \vec{\omega}_p \times \vec{L} = \vec{M} . \quad [\text{N} \cdot \text{m}]$$

Daraus ist ersichtlich, dass die Winkelgeschwindigkeit der Präzession von der Neigung der Kreiselachse unabhängig ist.

Der Präzession ist meist eine Nutation überlagert, die bekanntlich eintritt, wenn der Vektor der Winkelgeschwindigkeit nicht mit jenem des Drehimpulses zusammenfällt. Dies kann eine Folge der Startbedingungen sein oder ergibt sich, wenn dem Kreisel ein kurzer Drehmomentenstoß widerfährt, welcher den Drehimpulsvektor auslenkt. Die Bewegung der Figurenachse wird dadurch reichlich kompliziert.

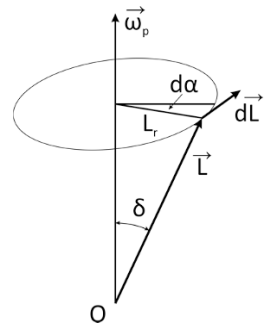


Abb. 2.9. Zur Berechnung der Winkelgeschwindigkeit der Präzession.

2.3 Fluiddynamik

2.3.1 Allgemeines

Die Mechanik der Flüssigkeiten und Gase – die sogenannte Fluiddynamik – spielt in der gesamten Ballistik eine zentrale Rolle. Unter hohem Druck stehende Gase sind in der Regel für die Beschleunigung des Geschosses verantwortlich; hat das Geschoss das Waffenrohr verlassen, strömen diese Gase mit großer Geschwindigkeit aus der Mündung. Der Flug durch die Luft berührt das weite Gebiet der Aerodynamik und das Eindringen eines Geschosses in plastisch verformbare Medien lässt sich oft unter hydrodynamischen Aspekten betrachten.

Beim Studium der Bewegung eines Körpers in einem Medium ist es gleichgültig, ob das Medium ruhend und der Körper bewegt oder der Körper ruhend und das Medium (mit entgegengesetzt gleicher Geschwindigkeit) bewegt angenommen wird. Beide Betrachtungsweisen sind aus physikalischer Sicht gleichwertig. Dies erlaubt, sich jeweils jener zu bedienen, die im betreffenden Fall die geeignetere oder die anschaulichere ist.

Bewegungen in einem flüssigen oder gasförmigen Medium sind stets mit Wärmeerscheinungen verbunden, sei es bei Reibungsvorgängen oder bei Gasen, die unter Druck gesetzt worden sind. Thermodynamische Prozesse sind deshalb in eine Betrachtung über Fluiddynamik einzubeziehen.

2.3.2 Thermodynamische Grundbegriffe

2.3.2.1 Die Temperatur

Bei der Beschreibung von Vorgängen, die mit Beteiligung von Wärme ablaufen, wird als weitere Grundgröße die Temperatur benötigt. Sie beschreibt den sogenannten Wärmezustand eines Körpers und lässt sich als ein Maß für die gesamte Bewegungsenergie seiner Moleküle interpretieren. Sie ist von der Masse und der stofflichen Zusammensetzung des Körpers unabhängig.

Wechselt bei einem Stoff der Wärmezustand, so ändern sich auch einige seiner physikalischen Eigenschaften, wie z. B. seine Ausdehnung (Länge, Volumen), Farbe oder elektrische Leitfähigkeit. Dieses Verhalten lässt sich für die Messung der Temperatur heranziehen. Allerdings sind dadurch nur Relativmessungen möglich, sodass Nullpunkt und Einheit der Skala beliebig vorgegeben werden können.

Im internationalen Einheitensystem wurde als Basiseinheit für die Temperatur das Kelvin [K] gewählt, das bis auf die Lage des Nullpunkts mit der älteren Einheit Celsius [°C] übereinstimmt. War bei der Celsiusskala der Nullpunkt noch auf den Erstarrungspunkt des Wassers gelegt worden, so befindet er sich in der Kelvinskala bei der tiefst möglichen Temperatur. In Großbritannien und in Nordamerika ist außerdem noch die Fahrenheitskala [°F] gebräuchlich. Die Eichung der verschiedenen

Tabelle 2.7. Temperaturfixpunkte (bei Normaldruck)

Medium	Fixpunkt	[K]	[°C]	[°F]
Wasser	Erstarrungspunkt	273.15	0.00	32.00
	Siedepunkt	373.15	100.00	212.00
Sauerstoff	Siedepunkt	90.18	−182.97	−297.35
Gold	Schmelzpunkt	1336.15	1063.00	1945.40

Skalen geschieht mit international vereinbarten Fixpunkten, die durch Siede- und Erstarrungspunkte verschiedener Stoffe bei Normaldruck (1013.25 mbar) festgelegt sind (siehe Tabelle 2.7).

Umrechnungsformeln für die verschiedenen Einheiten finden sich nach dem Verzeichnis der Formelzeichen (S. XXIX).

2.3.2.2 Temperatur und Wärme

Erhöht sich bei einem physikalischen Vorgang die Temperatur einer bestimmten Menge Materie, so ist ihr Wärme zugeführt worden. Eine höhere Temperatur bedeutet jedoch, dass die gesamte Bewegungsenergie der Moleküle in der betrachteten Menge angestiegen ist. Wärme ist demzufolge eine Energieform und wird in Joule gemessen. Die zugeführte Wärmemenge ist zur beteiligten Masse und zur erreichten Temperaturerhöhung proportional. Der Proportionalitätsfaktor C heißt *spezifische Wärmekapazität* des betreffenden Stoffes

$$(2.3:1) \quad \Delta Q = C \cdot m \cdot \Delta T \quad [J]$$

2.3.2.3 Aggregatzustände

Der Zustand eines Stoffes kann fest, flüssig oder gasförmig sein. Etwas genauer werden diese drei Aggregatzustände als kristallin, amorph und gasförmig bezeichnet. Im festen Zustand sind die Moleküle in einer Kristallgitterstruktur angeordnet, wobei neben den zwischenmolekularen Kohäsionskräften noch sogenannte Gitterbindungskräfte wirken. Feste Stoffe haben eine definierte geometrische Gestalt und nehmen ein festes Volumen ein.

Wird einem festen Körper so viel Wärme zugeführt, dass die Moleküle genügend kinetische Energie erhalten, um die Gitterkräfte zu überwinden, geht der Stoff in den amorphen (flüssigen) Zustand über. Der Zusammenhang ist nur noch durch die Kohäsionskräfte gegeben. Flüssige Stoffe nehmen noch ein festes Volumen ein, haben aber in der Regel keine definierte Form mehr.

Bei genügend großen Kohäsionskräften können auch amorphe Stoffe formstabil bleiben. Beispiele hierfür sind Glas und Wachse.

Wird durch weitere Wärmezufuhr die kinetische Energie der Moleküle so weit gesteigert, dass sie auch die Kohäsionskräfte überwinden, werden sie frei beweg-

lich. Der Stoff tritt in den gasförmigen Zustand über, in dem das Volumen nicht mehr durch die Stoffmenge, sondern durch den gesamten zur Verfügung stehenden Raum bestimmt wird. Der Übergang von einem Aggregatzustand in den nächst höheren ist also nur durch Zufuhr von Energie in Form von Wärme möglich. Analog wird bei der Rückkehr von einem höheren in einen tieferen Zustand die entsprechende Energiemenge wieder frei.

2.3.2.4 Die Zustandsgleichung der Gase

Wegen der kinetischen Energie der frei beweglichen Moleküle übt ein Gas auf die das Volumen begrenzenden Wände einen Druck p aus. Die Stöße der Teilchen gegen diese Wände ergeben pro Flächeneinheit eine mittlere Kraftwirkung, die durch den Impulserhaltungssatz begründet werden kann. Eine Änderung der Temperatur (also der kinetischen Energie) oder des Volumens (also der Oberfläche) wird auch den Druck beeinflussen. Druck, Temperatur und Volumen nennt man die thermodynamischen Zustandsgrößen des betreffenden Gases. Eine Gleichung, die sie miteinander verknüpft, wird Zustandsgleichung genannt. Die bekannteste Form ist das *Gesetz von BOYLE-MARIOTTE*, welches für einatomige Gase lautet

$$(2.3:2) \quad p \cdot V = m \cdot R \cdot T . \quad [J]$$

Darin bezeichnet m die Gasmasse und R die spezielle (stoffabhängige) Gaskonstante. Erfüllt ein Gas das Gesetz von BOYLE-MARIOTTE (Gl. 2.3:2), dann wird es *ideales Gas* genannt. Bei entsprechender Verdünnung (kleinem Druck) verhalten sich viele Gase angenähert ideal.

Bei realen Gasen, die unter hohem Druck stehen oder größere Moleküle besitzen, ist das Eigenvolumen der Moleküle b und ein sogenannter „Binnendruck“ w/V^2 zu berücksichtigen. Die entsprechende Erweiterung der Gl. (2.3:2) ist unter dem Namen *van-der-Waals-Gleichung* bekannt

$$(2.3:2a) \quad \left(p + \frac{w}{V^2} \right) \cdot (V - b) = m \cdot R \cdot T . \quad [J]$$

In der Gasdynamik wird an Stelle der Masse bevorzugt die Dichte (die auf das Volumen bezogene Masse) verwendet. Gl. 2.3:2 erhält dann die folgende Form

$$(2.3:3) \quad \frac{p}{\rho} = R \cdot T . \quad [J/kg]$$

Im Falle konstanter Temperatur sind die rechten Seiten der obigen Gleichungen und damit auch deren linken Seiten konstant.

2.3.2.5 Wärme, Arbeit und innere Energie

Da Stoffe nur im gasförmigen Aggregatzustand ein veränderbares Volumen haben, können sie nur in dieser Form Wärmeenergie in mechanische Arbeit umwandeln. Die entsprechenden Einrichtungen heißen *Wärmekraftmaschinen*.

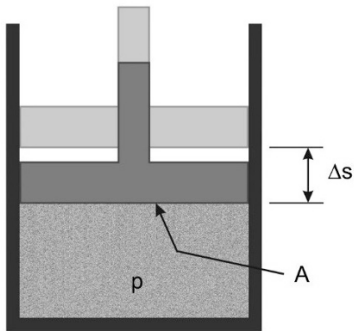


Abb. 2.10. Zur Berechnung der Arbeit, die ein Gas bei der Ausdehnung um die Strecke Δs erbringt.

Wärmekraftmaschinen, zu denen auch die Feuerwaffen gehören, arbeiten stets mit Stoffen in gasförmiger Phase. Diese wird in der Regel durch Erhitzen oder Verbrennen erzeugt.

Wird nämlich das Volumen eines Gases durch Erwärmung vergrößert, so erbringt es infolge der wirkenden Kraft (Druck \cdot Fläche) und des zurückgelegten Weges nach Gl. 2.2:16 Arbeit (siehe Abb. 2.10)

$$(2.3:4) \quad \Delta W = p \cdot A \cdot \Delta s = p \cdot \Delta V . \quad [J]$$

Die Fähigkeit, Arbeit zu erbringen, wird bekanntlich allgemein als potenzielle Energie bezeichnet.

Ein unter dem Druck p stehendes Gas vom Volumen V besitzt demnach die potenzielle Energie

$$(2.3:5) \quad E_{dr} = p \cdot V . \quad [J]$$

Sie heißt in diesem Zusammenhang *Druckenergie*.

Mit zugeführter Wärmeenergie dQ erhöht ein System einerseits die Gesamtsumme der kinetischen Energie seiner Moleküle (die sogenannte *innere Energie* U) und damit die Temperatur, andererseits erbringt es mechanische Arbeit. Es gilt somit die folgende Energiebilanz

$$(2.3:6) \quad dQ = dU + dW = dU + p \cdot dV . \quad [J]$$

Wird keine Wärme zugeführt ($dQ = 0$), so folgt aus Gl. 2.3:6

$$dU + p \cdot dV = 0 ,$$

und damit bleibt die Summe aus innerer Energie und Druckenergie (die *Enthalpie*, bezeichnet mit H) konstant

$$(2.3:7) \quad H = U + p \cdot V = \text{const} . \quad [J]$$

Wird also keine Wärme (Energie) zugeführt, ergibt sich daraus – zusammen mit dem entsprechenden Satz der Mechanik (Gl. 2.2:30) – der mechanisch-thermodynamische Erhaltungssatz für die Energie

$$(2.3:8) \quad E_{\text{tot}} = E_{\text{mech}} + H = E_{\text{mech}} + U + E_{dr} = \text{const} . \quad [J]$$

Um eine bestimmte Temperaturerhöhung zu erreichen, muss ein Gas bei konstantem Druck mehr Wärme aufnehmen als bei konstantem Volumen. Dies ist eine direkte Folge von Gl. 2.3:7.

Bei konstantem Volumen ($dV = 0$) wird die zugeführte Wärme vollständig für die Erhöhung der inneren Energie (Temperatur) verwendet, da keine mechanische Arbeit erbracht werden kann. Bei konstantem Druck hingegen geht Wärme an Arbeit „verloren“; die Temperatur nimmt weniger zu.

Die nach Gl. 2.3:1 definierte spezifische Wärmekapazität ist demnach bei konstantem Druck (C_p) größer als bei konstantem Volumen (C_v)

$$(2.3:9) \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v} > 1. \quad [-]$$

Der Quotient γ wird *Isentropenexponent* genannt.

2.3.3 Materieeigenschaften

2.3.3.1 Dichte, Kompressibilität

Flüssigkeiten und Gase (Fluide) sind unter Krafteinwirkung in ihrer Form (oft auch im Volumen) veränderbar. Zur Beschreibung der Bewegungsvorgänge werden deshalb physikalische Größen benötigt, die die maßgebenden Eigenschaften der beteiligten Stoffe charakterisieren. An Stelle der Masse tritt bei fluiddynamischen Prozessen die *Dichte* ρ in den Vordergrund

$$(2.3:10) \quad \rho = \frac{m}{V}. \quad [\text{kg/m}^3]$$

Ein Maß für die relative Änderung des Volumens eines Stoffes bei einer Veränderung des Druckes ist die *Kompressibilität*

$$(2.3:11) \quad \kappa = -\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dp}. \quad [1/\text{Pa}]$$

Das negative Vorzeichen bedeutet, dass bei Druckzunahme das Volumen kleiner wird.

Flüssigkeiten werden üblicherweise als inkompressibel angesehen; bei Gasen lässt sich diese Modellannahme für kleine Geschwindigkeiten ebenfalls vertreten.

2.3.3.2 Zähigkeit

Wegen der fehlenden Gitterkräfte wird ein Fluid unter Einfluss einer äußeren Kraft zu Formänderungen veranlasst, auf die es jedoch mit einer gewissen Trägheit reagiert. Dieser Widerstand, der in den zwischenmolekularen Kohäsionskräften begründet ist, wird durch die *Zähigkeit* oder Viskosität beschrieben. Wirkt auf das Fluid eine Schubspannung mit der Schubkraft F_R , so entsteht im Spannungsbereich ein Geschwindigkeitsgefälle, das bei den sogenannten Newton'schen Fluiden der Spannung proportional ist (siehe Abb. 2.11).

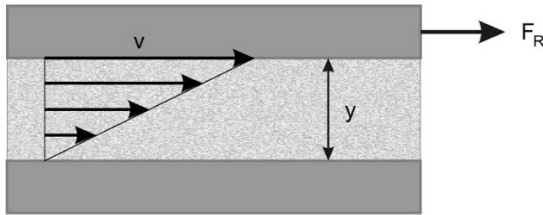


Abb. 2.11. Zum Begriff der dynamischen Viskosität.

$$(2.3:12) \quad \sigma_s = \frac{F_R}{A} = \eta \cdot \frac{dv}{dy} . \quad [\text{N/m}^2]$$

Der Proportionalitätsfaktor heißt dann Scherviskosität oder *dynamische Viskosität*; diese wird mit η bezeichnet

$$(2.3:13) \quad \eta = \sigma_s \cdot \frac{dy}{dv} . \quad [\text{Pa}\cdot\text{s}]$$

Die auf die Dichte des Fluids bezogene dynamische Viskosität wird *kinematische Viskosität* genannt

$$(2.3:14) \quad \nu = \frac{\eta}{\rho} . \quad [\text{m}^2/\text{s}]$$

Die Zähigkeit ist stark temperaturabhängig, wobei sich die Flüssigkeiten zu den Gasen genau entgegengesetzt verhalten.

Bei Flüssigkeiten wird mit zunehmender Temperatur (zunehmender innerer Energie) die Wirkung der Kohäsionskräfte geringer: die Zähigkeit sinkt. Bei Gasen beruht die innere Reibung auf dem Impulsaustausch zwischen den frei beweglichen Molekülen, der mit zunehmender Temperatur (größerer Geschwindigkeit) steigt: Die Zähigkeit wird größer.

Bei gleichbleibender Masse setzt ein Fluid auch einer Volumenzunahme Widerstand entgegen, da dies ebenfalls einer Formänderung entspricht. Diese Kraftwirkung wird durch die sogenannte Volumenviskosität beschrieben, die von der dynamischen Viskosität zu unterscheiden ist.

2.3.3.3 Schallgeschwindigkeit

Druck- und Dichteänderungen (sogenannte Störungen) breiten sich in einem Fluid in Form longitudinaler Wellen aus.

Bei longitudinalen Wellen schwingen die Störungen in der gleichen Richtung, wie die Welle sich fortbewegt.

Sofern die Störungen klein bleiben, wird ihre Ausbreitungsgeschwindigkeit als *Schallgeschwindigkeit* c bezeichnet. In Flüssigkeiten ist sie von Dichte und Kompressibilität abhängig

$$(2.3:15) \quad c = \sqrt{\frac{1}{\kappa \cdot \rho}} , \quad [\text{m/s}]$$

und in Gasen von Dichte und Druck

$$(2.3:16) \quad c = \sqrt{\frac{\gamma \cdot p}{\rho}} = \sqrt{\gamma \cdot R \cdot T} . \quad [\text{m/s}]$$

Mit γ ist das Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten C_p/C_v bezeichnet (Gl. 2.3:9), das für Luft den Wert 1.4 annimmt.

Allgemein lautet die Definition der Fortpflanzungsgeschwindigkeit kleiner Störungen in Gasen wie folgt

$$(2.3:16a) \quad c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\Delta S = 0} . \quad [\text{m}^2/\text{s}^2]$$

$\Delta S = 0$ bedeutet, dass Temperaturänderungen keine Änderung der Wärme(energie) zur Folge haben (man spricht auch von konstanter Entropie). Im Falle eines isentropen Gases ergibt sich hieraus der erste Teil der Gl. 2.3:16.

Der zweite Teil der Gl. 2.3:16 gilt wegen der dabei verwendeten Gl. 2.3:2 nur für ideale (und angenähert ideale) Gase. Die Schallgeschwindigkeit ist in diesem Falle ausschließlich eine Funktion der Temperatur. Sie eignet sich deshalb als Bezugsgeschwindigkeit für kompressible Medien. Dies führt zur Definition der *Machzahl* (Ma)

$$(2.3:17) \quad \text{Ma} = \frac{v}{c} . \quad [-]$$

Das Verhalten einer Strömung hängt eng mit dem Wert der Machzahl zusammen, die deshalb auch eine einfache Klassierung erlaubt. So wird eine Strömung mit $\text{Ma} < 1$ als Unterschall- oder *subsonische* Strömung bezeichnet, und mit $\text{Ma} > 1$ heißt sie Überschall- oder *supersonische* Strömung. Liegt die Machzahl im Bereich von 1, spricht man von Transschall- oder *transsonischer* Strömung.

2.3.3.4 Ausbreitung von Schallwellen, Mach'scher Kegel

Wie im vorigen Abschnitt erwähnt, breitet sich eine schwache Störung in einem Fluid (zum Beispiel jene, die von einem in der Luft fliegenden Körper aus geht) mit Schallgeschwindigkeit aus.

Starke Störungen, wie z. B. Stoßwellen von Detonationen, pflanzen sich mit Geschwindigkeiten fort, die deutlich über der Schallgeschwindigkeit unter normalen Bedingungen liegen können.

Bewegt sich das Geschoss langsamer als die Schallgeschwindigkeit ($\text{Ma} < 1$), so eilen ihm die Störungen voraus (Abb. 2.12). Fliegt es jedoch schneller als sich der Schall ausbreitet ($\text{Ma} > 1$), so kommt es entlang einer kegelförmigen Fläche zu einer Verdichtung der Störungen („Zusammenschieben“ der Schallwellen, siehe Abb. 2.13). Diese sogenannte Stoßwelle, auch *Mach'scher Kegel* genannt, ist mit einem sprunghaften Anstieg des Druckes verbunden, der sich als lauter Knall bemerkbar macht.

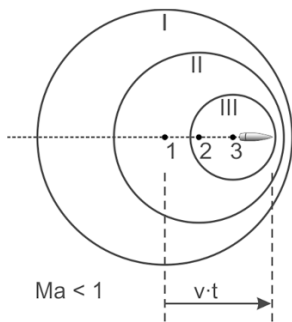


Abb. 2.12. Schallausbreitung bei Unterschallgeschwindigkeit: Die vom Geschoss an den Positionen 1, 2, 3 ausgesandten Schallwellen I, II, III erreichen das Ohr nacheinander und sind kaum hörbar.

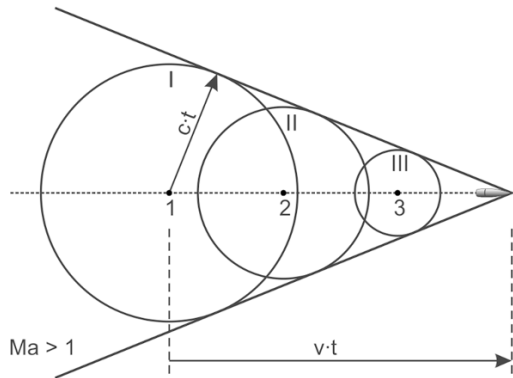


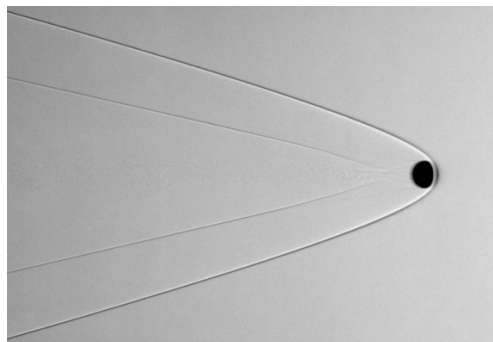
Abb. 2.13. Schallausbreitung bei Überschallgeschwindigkeit: Die Schallwellen aus allen Positionen kumulieren in einer Front und ergeben einen lauten Knall.

Der halbe Öffnungswinkel α des Mach'schen Kegels ist durch das Verhältnis von Schallgeschwindigkeit c und Geschwindigkeit v bestimmt (siehe Abb. 2.13). Er wird auch *Mach'scher Winkel* genannt.

$$(2.3:18) \quad \sin \alpha = \frac{c}{v} . \quad [-]$$

Mit speziellen fotografischen Mitteln lassen sich die Verdichtungslinien sichtbar machen. Abb. 2.14 zeigt die Umströmung einer Kugel bei einer Geschwindigkeit von ca. 1150 m/s. Auffällig ist, dass nicht nur am Projektilkopf, sondern auch beim Zusammenfließen der Strömung am Heck eine Stoßwelle entsteht. Bei langen Flugobjekten (Flugzeugen) lassen sich die beiden Knalle hörbar unterscheiden.

Abb. 2.14. Überschallknall sichtbar gemacht: Schattenaufnahme einer Stahlkugel (Durchmesser 5.5 mm) bei ca. 1150 m/s ($Ma = 3.4$). Die Verdichtungslinien sind deutlich sichtbar. Front- und Heckstoß folgen so nahe aufeinander, dass sie vom Gehör nicht unterschieden werden können. (Bei der Betrachtung derartiger Bilder denke man stets daran, dass es sich um kegelförmige Flächen handelt, die von der Bildebene geschnitten wird).



2.3.4 Reibungsfreie Strömungen

2.3.4.1 Definition, Erhaltungssätze

Das Studium von Strömungsvorgängen vereinfacht sich wesentlich, wenn die innere Reibung vernachlässigt werden kann. Dies hat zur Folge, dass keine Schubspannungen auftreten, das Fluid sich also nicht deformiert. Mit dieser Annahme übergeht man auch die Tatsache, dass jedes Fluid an einer festen Oberfläche haftet. Äußere Reibung wird also ebenfalls nicht beachtet. Trotz dieser Einschränkung lassen sich erstaunlich viele Erscheinungen beschreiben und gesetzmäßig darstellen.

Dies hängt damit zusammen, dass bei einem umströmten Körper der Reibungseinfluss oft auf eine dünne Schicht an der Oberfläche (die sogenannte *Grenzschicht*) begrenzt bleibt. Ist die Dicke dieser Grenzschicht gegenüber den übrigen Abmessungen der Strömung sehr klein, so sind die äußeren Reibungseinflüsse vernachlässigbar.

Ein Fluid, in dem keine inneren Reibungskräfte vorkommen, heißt reibungsfrei; ist es zusätzlich dichtebeständig (inkompressibel), so nennt man es *ideal*. Eine weitere Charakterisierung geht vom zeitlichen Ablauf aus. Sind Geschwindigkeit und thermodynamische Zustandsgrößen nur vom Ort, nicht aber von der Zeit abhängig, so wird die Strömung als *stationär* bezeichnet.

Die in 2.2.5 formulierten Erhaltungssätze gelten ebenfalls für Bewegungen von Fluiden. Grundlegend ist auch hier die Massenerhaltung: Die Massenänderung in einem beliebigen, festen Volumenelement entspricht der Differenz aus eintretender (Index 1 in der folgenden Formel) und austretender Masse (Index 2), wo A_i die jeweilige Querschnittsfläche bedeutet

$$(2.3:19) \quad \frac{dm}{dt} = \rho_1 \cdot v_1 \cdot A_1 - \rho_2 \cdot v_2 \cdot A_2 . \quad [\text{kg/s}]$$

Diese Beziehung heißt *Kontinuitätsgleichung*. Bei konstanter Masse ($dm/dt = 0$) geht Gl. 2.3:19 über in

$$(2.3:19a) \quad \partial(\rho \cdot v \cdot A) = \frac{\partial \rho}{\rho} + \frac{\partial v}{v} + \frac{\partial A}{A} = 0 . \quad [\text{m}^3/\text{s}]$$

Für inkompressible Fluide ($\rho = \text{const}$) ergibt sich hieraus, dass Geschwindigkeit und Strömungsquerschnitt einander umgekehrt proportional sind

$$(2.3:19b) \quad v \cdot A = \text{const} . \quad [\text{m}^3/\text{s}]$$

Diese Gesetzmäßigkeit lässt sich bei einem Fluss sehr schön beobachten. Ist sein Flussbett breit, fließt er langsam, wird der Platz eng, erhöht sich seine Fließgeschwindigkeit.

Der Energieerhaltungssatz behält ebenfalls seine Gültigkeit. Wird keine Wärme zugeführt, bleibt die Summe aus Druckenergie, kinetischer, potenzieller und innerer Energie konstant (s. Gl. 2.3:8)

$$E_{\text{dr}} + E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} + U = \text{const} , \quad [\text{J}]$$

also

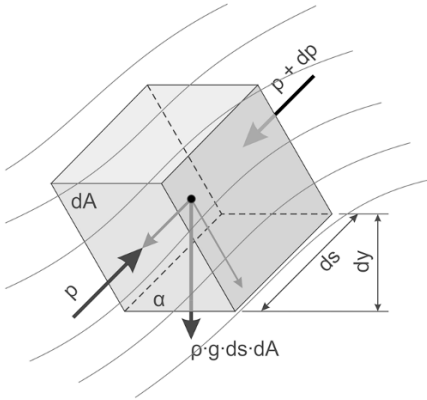


Abb. 2.15. Kräfte auf ein Volumenelement in der Strömung.

$$(2.3:20) \quad p \cdot V + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot y + U = \text{const} . \quad [\text{J}]$$

Ebenso bleiben in einer Strömung Impuls und Drehimpuls erhalten. Aus dem Impulssatz folgt analog wie in der Mechanik mit Hilfe des Prinzips von D'ALEMBERT die Bewegungsgleichung für die Strömung, die hier *Euler'sche Gleichung* heißt. Mit Blick auf die Abb. 2.15 ergibt sich

$$p \cdot dA - (p + dp) \cdot dA - \rho \cdot g \cdot ds \cdot \sin \alpha \cdot dA = \rho \cdot ds \cdot dA \cdot \frac{dv}{dt} ,$$

$$- dp \cdot dA - \rho \cdot g \cdot dy \cdot dA = \rho \cdot ds \cdot dA \cdot \frac{dv}{ds} \cdot v ,$$

$$(2.3:21) \quad dp + \rho \cdot v \cdot dv + \rho \cdot g \cdot dy = 0 . \quad [\text{N/m}^2]$$

Dividiert man die Gleichung (2.3:20) durch das Volumen V und bildet die Ableitung, ergibt sich ebenfalls Gl. (2.3:21).

Die Erhaltung des Drehimpulses tritt nur beim Vorkommen von Wirbeln in Erscheinung. Sie besagt, dass beim Auftreten eines Wirbels in einer Strömung stets ein gleicher Wirbel entgegengesetzter Drehrichtung entstehen muss.

2.3.4.2 Die Bernoulligleichung

Von der Euler'schen Gleichung (2.3:21) ausgehend, erhält man durch Integration die *Bernoulligleichung*

$$(2.3:22) \quad p + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 + \rho \cdot g \cdot y = \text{const} . \quad [\text{N/m}^2]$$

Bei konstanter Dichte und innerer Energie U folgt Gl. (2.3:22) auch direkt aus Gl. (2.3:20).

Wird zusätzlich eine konstante Fließhöhe y angenommen, vereinfacht sich Gl. (2.3:22) zu

$$(2.3:22a) \quad p_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho_1 \cdot v_1^2 = p_0 + \frac{1}{2} \cdot \rho_0 \cdot v_0^2 = \text{const} . \quad [\text{N/m}^2]$$

In einer Strömung stehen demnach Druck und Geschwindigkeit in einer direkten Beziehung zueinander. Bei hohem Druck ist die Strömungsgeschwindigkeit klein, bei niedrigem Druck ist sie groß. Für die Beschleunigung ist das Druckgefälle verantwortlich.

2.3.4.3 Strömungswiderstand

Prallt eine Strömung senkrecht auf eine ruhende, ebene Platte, so kommt auf deren Oberfläche die Strömungsgeschwindigkeit zum Stillstand. Werden die Werte in der ungestörten Strömung mit dem Index 0, die Werte an der Plattenoberfläche entsprechend mit 1 bezeichnet, so folgt aus der Gl. 2.3:22a mit $v_1 = 0$

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0 + \frac{1}{2} \cdot \rho_0 \cdot v_0^2, \\ (2.3:23) \quad p_1 - p_0 &= \frac{1}{2} \cdot \rho_0 \cdot v_0^2. \end{aligned} \quad [\text{N/m}^2]$$

Die linke Seite von Gl. 2.3:23 entspricht der Druckzunahme, die sich auf der Plattenoberfläche gegenüber dem Druck in der ungestörten Strömung ergibt. Sie wird als *Staudruck* der ebenen Platte bezeichnet.

Bei einem realen Körper ist der Strömungsdruck nicht allein von der Geschwindigkeit, sondern auch von der Form und Ausdehnung des Körpers abhängig. Es stellen sich Werte ein, die vom oben Errechneten abweichen.

Zur Charakterisierung des Strömungsdrucks an einem beliebigen Körper wird das Verhältnis der effektiven Druckzunahme zum Plattenstaudruck angegeben. Dieses ist dimensionslos und heißt *Druckkoeffizient* des Körpers

$$(2.3:24) \quad c_p = \frac{p_{\text{eff}} - p_0}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2}. \quad [-]$$

Die von der Strömung auf einen Körper ausgeübte Kraft (Strömungswiderstand) ergibt sich durch Multiplikation des Drucks mit der zugehörigen Wirkfläche. Diese ist jedoch oft nur schwer zu bestimmen. Sie wird daher durch eine feste Bezugsfläche A_0 ersetzt, die zusammen mit dem Plattenstaudruck Gl. 2.3:23 eine von der Körperform unabhängige Bezugskraft ergibt. Der Quotient aus effektiv wirkendem Widerstand F_w und dieser Bezugskraft ist wiederum eine dimensionslose Zahl, die alle formspezifischen Einflüsse ausdrückt. Sie wird mit dem Namen *Widerstandsbeiwert* bezeichnet

$$(2.3:25) \quad c_w = - \frac{F_w}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot A_0}, \quad [-]$$

$$(2.3:25a) \quad F_w = - c_w \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot A_0. \quad [\text{N}]$$

Mit dem negativen Vorzeichen wird ausgedrückt, dass die Kraft der Bewegungsrichtung entgegengesetzt ist.

Auftriebskräfte (F_A) an umströmten Körpern (d. h. Kräfte quer zur Strömungsrichtung) entstehen, wenn infolge unterschiedlicher Strömungsgeschwindigkeiten auf gegenüberliegenden Seiten Druckunterschiede entstehen (Bernoulligleichung). Diese werden auf dieselbe Bezugskraft bezogen wie der Widerstand. Die entsprechende Verhältniszahl wird *Auftriebsbeiwert* genannt

$$(2.3:26) \quad c_a = - \frac{F_A}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot A_0} . \quad [-]$$

Da eine Auftriebskraft in der Regel außerhalb des Schwerpunkts des Körpers angreift, verursacht sie gleichzeitig ein Drehmoment M_M (Kippmoment), das nach demselben Muster mit einem entsprechend gewählten Bezugsabstand d_0 gebildet wird. Die zugehörige Kennzahl heißt (*Kipp-*)*Momentenbeiwert*

$$(2.3:27) \quad c_m = - \frac{M_M}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot A_0 \cdot d_0} . \quad [-]$$

Die Wahl der Bezugsfläche A_0 und des Bezugsabstandes d_0 ist nicht einheitlich. Während in der Aerodynamik oft der größte Querschnitt des Flugkörpers in Richtung der Strömung (bzw. seine Länge) oder die Flügelfläche (bzw. die Flügelspannweite) gewählt wird, bezieht man sich in der Ballistik durchweg auf die Kaliberquerschnittsfläche (die zumeist kleiner ist als die Querschnittsfläche des Geschosses) und auf das Kaliber (gelegentlich auch die Geschosslänge). Mit einem Beiwert müssen daher stets die entsprechenden Bezugsgrößen angegeben werden.

Die Beiwerte sind geschwindigkeits- und temperaturabhängig und werden stets als Funktion der Machzahl dargestellt.

2.3.4.4 Wirbelströmungen

Wird ein in einem Fluid ruhender Zylinder in eine Rotationsbewegung um seine Längsachse versetzt, so beginnt das Fluid wegen seiner bereits erwähnten, aber bisher vernachlässigten Haftung an der Oberfläche des Zylinders und der (bisher ebenfalls vernachlässigten) inneren Reibung sich sukzessive mitzudrehen. Es entsteht eine stationäre Rotationsströmung, die an der Oberfläche die Geschwindigkeit des Zylinders hat und die nach außen hin stetig abnimmt. Man bezeichnet sie als *Wirbelströmung* (Abb. 2.16). Als Maß für die Intensität dieser Wirbelströmung (die Wirbelstärke) wird die sogenannte *Zirkulation* Γ eingeführt. Sie ist definiert als das Linienintegral entlang einer geschlossenen Kurve der Tangentialkomponente der Geschwindigkeit an diese Kurve

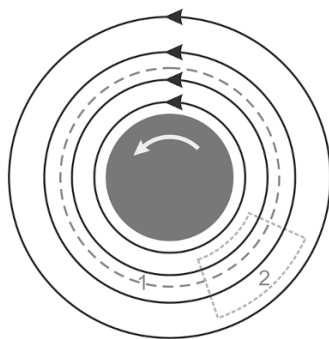


Abb. 2.16. Wirbelströmung, erzeugt durch rotierenden Zylinder.

$$(2.3:28) \quad \Gamma = \oint \mathbf{v}_t \cdot d\mathbf{s} . \quad [\text{m}^2/\text{s}]$$

Entlang des Integrationsweges 1 (siehe Abb. 2.16) ergibt sich für die Zirkulation der Wirbelströmung

$$(2.3:29) \quad \Gamma = \oint \omega \cdot \mathbf{r} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} \omega \cdot r^2 \cdot d\alpha = \omega \cdot r^2 \cdot \int_0^{2\pi} d\alpha . \quad [\text{m}^2/\text{s}]$$

Im Gegensatz dazu verschwindet in einer reibungsfreien Parallelströmung die Zirkulation wegen $\mathbf{v}_t = \mathbf{v} \cdot \cos \alpha$ für jede beliebige geschlossene Kurve

$$\Gamma = \oint \mathbf{v}_t \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} \mathbf{v} \cdot \cos \alpha \cdot \mathbf{r} \cdot d\alpha = \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} \cdot \int_0^{2\pi} \cos \alpha \cdot d\alpha = 0 .$$

Eine reibungsfreie Strömung mit verschwindender Zirkulation wird *Potenzialströmung* genannt; sie ist überall wirbelfrei.

In einer Wirbelströmung gilt für ein Masseteilchen m im Abstand r vom Zentrum des Zylinders wegen der Erhaltung des Drehimpulses

$$m \cdot r \cdot v(r) = \text{const} .$$

Bei einer reibungsfrei kreisenden Strömung gilt dies für alle massegleichen Teilchen in beliebigem Abstand, woraus mit (2.3:29) folgt

$$(2.3:30) \quad r \cdot v(r) = \text{const} = \frac{\Gamma}{2 \cdot \pi} , \quad [\text{m}^2/\text{s}]$$

womit sich die Geschwindigkeit der Wirbelströmung als Funktion des Abstandes vom Zentrum darstellen lässt

$$(2.3:30a) \quad v(r) = \frac{\Gamma}{2 \cdot \pi \cdot r} . \quad [\text{m/s}]$$

Ermittelt man nun noch die Zirkulation in einer Wirbelströmung außerhalb des Zentrums (Integrationsweg 2 in Abb. 2.16), so erhält man unter Beachtung, dass die Geschwindigkeit in radialer Richtung Null ist

$$\Gamma = \int_0^\beta \mathbf{v}_1 \cdot d\mathbf{s} + \int_\beta^0 \mathbf{v}_2 \cdot d\mathbf{s} = \int_0^\beta \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{r}_1 \cdot d\alpha - \int_0^\beta \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{r}_2 \cdot d\alpha = 0 ,$$

weil wegen (2.3:30) $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{r}_1 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{r}_2$ gilt. Somit ist eine Wirbelströmung, die dem Gesetz (2.3:30) folgt, außerhalb des Wirbelzentrums wirbelfrei und wird deshalb als *Potenzialwirbel* bezeichnet.

2.3.4.5 Der Magnuseffekt

Wird ein ruhender zylindrischer Körper senkrecht zur Achse von einer Potenzialströmung angeströmt, entsteht wegen der dadurch bedingten Verringerung des Querschnittes eine Änderung der Strömungsgeschwindigkeit. Dies ist in der Kon-

tinuitätsgleichung (2.3:19b) begründet, die besagt, dass bei konstanter Dichte und Erhaltung der Masse eine Querschnittsverkleinerung mit einer Geschwindigkeitssteigerung einhergeht. Damit verbunden ist aber eine Abnahme des Druckes (Bernoulligleichung 2.3:22), sodass entlang der Zylinderkontur sowohl positive als auch negative Druckgebiete auftreten. Weil die Strömung symmetrisch ist, gruppieren sich diese Druckgebiete symmetrisch um den Körper (siehe Abb. 2.17 a), sodass dieser insgesamt kräftefrei bleibt.

Wird nun der Zylinder in eine gleichförmige Rotation versetzt, so entsteht nach Abschnitt 2.3.4.4 eine der Potenzialströmung überlagerte Wirbelströmung (Abb. 2.17 b). Die Strömungsgeschwindigkeiten an der Zylinderoberfläche addieren sich, wodurch sich ein unsymmetrisches Geschwindigkeitsfeld ergibt. Damit wird aber auch die Druckverteilung unsymmetrisch (siehe Abb. 2.17 c), und am Zylinder wirkt eine zur Strömungsrichtung senkrechte Kraft: die nach ihrem Entdecker benannte *Magnuskraft*. Sie ist stets auf die Seite gerichtet, an der die größere Geschwindigkeit herrscht.

Eine praktische Anwendung der Magnuskraft findet sich im Flettner-Rotor als Schiffsantrieb. Anstelle der Segelmasten sind auf dem Schiff große, vertikale Zylinder angebracht. In Rotation versetzt, erzeugen sie bei einer Windströmung dem Magnusprinzip entsprechend eine Querkraft, mit welcher das Schiff angetrieben werden kann. Ein mit vier Rotoren ausgerüstetes Frachtschiff (Länge 130 m) wurde im Jahre 2010 in den Dienst gestellt.

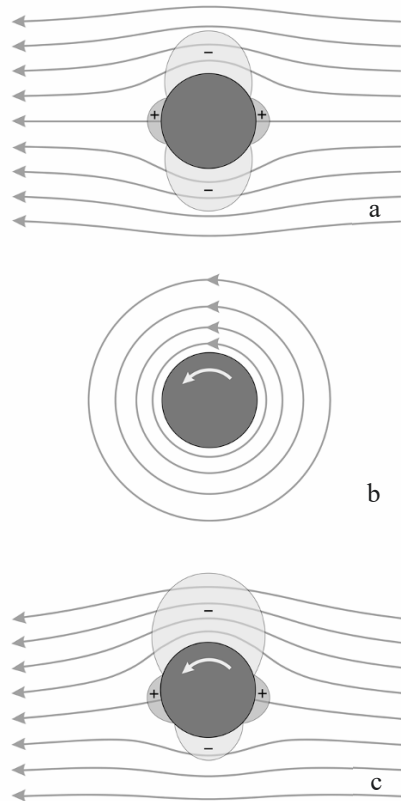


Abb. 2.17. Potenzialströmung um einen Zylinder. **a.** Zylinder ruhend, symmetrische Druckverteilung; **b.** Potenzialwirbel; **c.** Strömung um einen rotierenden Zylinder, asymmetrische Druckverteilung.

2.3.4.6 Das Tragflügelprinzip

Mit Tragflügeln ausgerüstete Flugkörper gehören eigentlich in das Gebiet der Flugmechanik und weniger in die Ballistik. Gewisse Methoden der Stabilisierung von Projektilen bedienen sich des Tragflügelprinzips, weshalb ein Blick auf dessen physikalische Hintergründe auch für den Ballistiker von Nutzen sein kann.

Ein Tragflügel ist ein leicht gewölbter flächiger Körper geringer Dicke. Befindet er sich in einer Potenzialströmung, so legen die Luftteilchen entlang der gewölbten

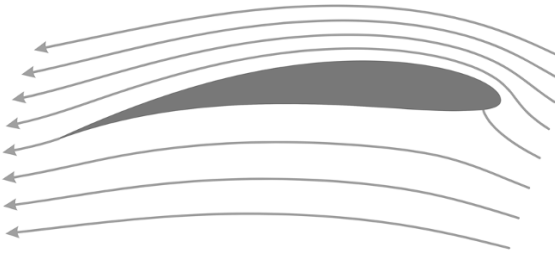


Abb. 2.18. Prinzip des Tragflügels: Durch die asymmetrische Form entsteht ein Unterschied in den Strömungsgeschwindigkeiten auf den beiden Seiten und dadurch ein Druckunterschied.

Seite einen längeren Weg zurück als jene auf der Gegenseite (siehe Abb. 2.18). Damit die Kontinuitätsgleichung erfüllt bleibt, müssen sie ihre Geschwindigkeit vorübergehend steigern. Mit der höheren Geschwindigkeit fällt aber gemäß der Bernoulligleichung der Druck, weshalb auf der gewölbten Seite ein Unterdruck entsteht, der zu einer entsprechenden Querkraft (Auftrieb) führt.

Der Geschwindigkeitsunterschied zwischen Ober- und Unterseite eines Tragflügels lässt sich durch eine Überlagerung der Parallelströmung mit einem Potenzialwirbel darstellen, so, dass am Flügel die effektiven Geschwindigkeitsverhältnisse entstehen. Dessen Auftrieb F_A kann somit durch die zugehörige Zirkulation Γ ausgedrückt werden (Satz von JOUKOWSKI, siehe z. B. in W. KALIDE, 1980)

$$(2.3:31) \quad F_A = \rho \cdot v \cdot b \cdot \Gamma, \quad [N]$$

wobei b die Flügelspannweite bedeutet. Die Bestimmung der Zirkulation erfordert jedoch weitere mathematische Hilfsmittel (Theorie der konformen Abbildungen komplexer Funktionen).

2.3.5 Strömungen mit Reibung

2.3.5.1 Kräfte, Bewegungsgleichungen

Gemäß dem Prinzip von D'ALEMBERT ergeben sich die Bewegungsgleichungen der Strömung aus der Gleichsetzung von Trägheitskraft und den einwirkenden Kräften. Wegen der Veränderlichkeit von Dichte und Volumen werden beide auf die Masseneinheit bezogen.

Die folgenden Betrachtungen werden auf eine eindimensionale Strömung (Stromfaden) beschränkt. Dies ergibt wesentlich einfachere und übersichtlichere Beziehungen und dient dem besseren Verständnis der Zusammenhänge. Vollständige Darstellungen der allgemeinen Bewegungsgleichungen eines Fluids entnehme man der einschlägigen Fachliteratur (z. B. J. ZIEREP, 1991).

Ein Teilchen in einer Strömung kann auf zwei verschiedene Arten eine Geschwindigkeitsänderung erfahren, nämlich wenn

- sich das Geschwindigkeitsfeld zeitlich ändert (*instationäre* Strömung),
- es im (stationären) Geschwindigkeitsfeld durch eine Verschiebung zu einem Ort mit anderer Geschwindigkeit gelangt.

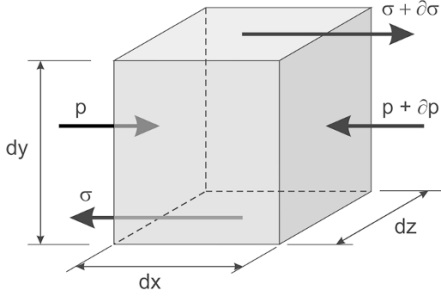


Abb. 2.19. Stromfadenelement mit den angreifenden Druckspannungen (p) und Schubspannungen (σ).

Beide Teile zusammen ergeben die gesamte Beschleunigung, die üblicherweise substanzielle Beschleunigung genannt wird

$$(2.3:32) \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial x} . \quad [\text{m/s}^2]$$

Die zwei Glieder rechts lassen sich als zeit- bzw. ortsabhängige, auf die Masseneinheit bezogene Trägheitskräfte interpretieren.

Für die Bestimmung der einwirkenden Kräfte wird angenommen, der betrachtete Stromfaden fließe in x -Richtung und habe den Querschnitt $dy \times dz$ (s. Abb. 2.19). Auf ein Strömungselement der Länge dx wirkt pro Masseneinheit die Druckkraft

$$(2.3:33) \quad \frac{(p + \partial p) \cdot dy \cdot dz - p \cdot dy \cdot dz}{\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} , \quad [\text{N/kg}]$$

und die Reibungskraft

$$(2.3:34) \quad \frac{(\sigma + \partial \sigma) \cdot dy \cdot dz - \sigma \cdot dx \cdot dz}{\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial y} . \quad [\text{N/kg}]$$

Für ein Newton-Fluid lässt sich die Schubspannung σ nach Gl. 2.3:12 ersetzen

$$(2.3:35) \quad \frac{d\sigma}{dy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \eta \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = v \cdot \rho \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} , \quad [\text{N/m}^3]$$

wo η die dynamische und ν die kinematische Viskosität bedeutet. Das Gewicht wird weggelassen, weil es keinen Kraftbeitrag in x -Richtung liefert. Ebenso wird darauf verzichtet, äußere Kräfte mit einzubeziehen, da sie nur mit einem zusätzlichen additiven Glied in Erscheinung treten würden. Gleichsetzung von Gl. 2.3:32 mit Gl. 2.3:33 und 2.3:34 ergibt mit Berücksichtigung von Gl. 2.3:35 die Bewegungsgleichung

$$(2.3:36) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} . \quad [\text{m/s}^2]$$

Die drei Gleichungen, die sich bei Verallgemeinerung von Gl. 2.3:36 auf 3 Dimensionen ergeben, heißen die *Navier-Stokes-Gleichungen* für (dichtebeständige) Newton-Fluide. Sie stellen die allgemeinen Bewegungsgleichungen eines Newton-

Fluids dar und lassen sich nur in ganz speziellen Fällen geschlossen lösen. Für die Berechnung realer Probleme muss auf numerische Methoden (z. B. finite Elemente) zurückgegriffen werden.

In einer stationären ($\partial v / \partial t = 0$) und reibungsfreien ($\nu = 0$) Strömung folgt wegen

$$v \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \cdot v^2 \right),$$

aus Gl. 2.3:36 die folgende Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 + p \right) = 0.$$

Diese entspricht jedoch in der Aussage der Bernoulligleichung (Gl. 2.3:22a), die – wie oben bereits erwähnt – aus den Bewegungsgleichungen folgt.

2.3.5.2 Berücksichtigung der Zähigkeit, Reynoldszahl

Aus den charakteristischen Strömungsgrößen Länge s , Geschwindigkeit v , Zeit t , Druck p und Dichte ρ kann zu jeder der in Gl. 2.3:36 vorkommenden, massebezogenen Kräfte ein Term erzeugt werden. Aus diesen vier Termen lassen sich durch Quotientenbildung verschiedene dimensionslose Kennzahlen bilden, welche für die Charakterisierung der Kräfteverhältnisse in der Strömung herangezogen werden können.

Für die Frage, ob in einem strömenden Fluid die Reibung vernachlässigt werden kann oder einzubeziehen sei, ist das Verhältnis von Trägheits- zu Reibungskräften maßgebend. Die so gebildete, dimensionslose Größe heißt *Reynoldszahl* (Re); sie ist neben der Machzahl die wichtigste Kennzahl einer Strömung

$$(2.3:37) \quad Re = \frac{v^2 / s}{\nu \cdot v / s^2} = \frac{v \cdot s}{\nu} \quad [-] \quad$$

s stellt eine charakteristische Länge des betreffenden Objekts dar, bei Geschossen in der Regel die Geschosslänge. ν bedeutet die kinematische Zähigkeit.

Gilt $Re \gg 1$, so kann die Reibung in einer Strömung übergangen werden, also zum Beispiel bei großer Geschwindigkeit oder geringer Zähigkeit.

Weil jedes strömende Fluid an einem festen Körper haftet, ergibt sich an der Körperoberfläche eine Fluidschicht, in der die Geschwindigkeit von 0 auf Strömungsgeschwindigkeit ansteigt und in der Reibungserscheinungen auftreten. Bei großen Reynoldszahlen ist diese Schicht (die Grenzschicht) sehr dünn und die Reibung vernachlässigbar. Beim Geschossflug in der Luft ergeben sich Re -Werte zwischen etwa $5 \cdot 10^5$ (Kurzwaflengeschosse) und $5 \cdot 10^7$ (Artilleriegeschosse); die Reibung spielt somit in der Außenballistik bezüglich ihres Einflusses auf das Strömungsverhalten eine untergeordnete Rolle. Ihr Anteil am Widerstand ist jedoch nicht vernachlässigbar.

Reynoldszahlen mit $Re \approx 1$ oder $Re < 1$ kennzeichnen Strömungen, in denen die Reibungskräfte im ganzen Strömungsfeld berücksichtigt werden müssen. Dies tritt bei kleinen Geschwindigkeiten, kleinen Abmessungen, aber auch bei großer Zähigkeit ein.

2.3.6 Strömungsvorgänge und Freistrahlen

2.3.6.1 Allgemeines

Fließt ein Fluid aus einem Behälter durch eine (röhrenförmige) Öffnung aus, wird dies als Ausströmvorgang bezeichnet. Es setzt eine gewisse Druckdifferenz zwischen Behälter und Umgebung voraus, die für die Beschleunigung des Massenstroms verantwortlich ist. Dabei spielt der Querschnittsverlauf der Öffnung eine entscheidende Rolle. Rohre, deren Querschnitt in Strömungsrichtung variabel ist, werden als *Düse* bezeichnet. Ist der Austrittsquerschnitt des Rohrs zugleich der kleinste Querschnitt, so spricht man von einer *Mündung*.

Freistrahlen entstehen, wenn ein Fluid aus einer Mündung oder Düse eines Behälters ausströmt und mit einer gewissen Geschwindigkeit in ein anderes (ruhendes) Fluid eindringt. Die beiden Fluide können bezüglich Dichte, Aggregatzustand und Zusammensetzung verschieden oder auch gleich sein. Ein solches Strahlstück stellt stets einen zeitlich und räumlich beschränkten Massenstrom dar, der bei hohen Geschwindigkeiten oder hohen Dichten eine beträchtliche kinetische Energie aufweisen kann. Er lässt sich bis zu einer gewissen kurzen Distanz durchaus als ein Projektil unbestimmter Form auffassen und zeitigt auch entsprechende Wirkungen.

2.3.6.2 Ausströmen aus Mündungen

Beim Ausströmen aus Mündungen interessieren in erster Linie der Impuls, der Energiestrom und die Energiestromdichte. Sie ergeben sich, wenn die Ausströmgeschwindigkeit und der Massenstrom durch die Mündung bekannt sind.

Ausströmvorgänge verlaufen (angenähert) isentrop. Dies bedeutet, dass der Wärmeaustausch mit der Umgebung vernachlässigbar ist. Die Zustandsgleichung für isentropische Prozesse lautet (mit dem Isentropenexponenten γ)

$$(2.3:38) \quad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma. \quad [-]$$

Die Ausströmgeschwindigkeit wird mit der Bernoulligleichung bestimmt, wobei die Dichte gemäß Gl. 2.3:38 einzusetzen ist. Es resultiert mit einiger Rechnung die Beziehung

$$(2.3:39) \quad v_m = \sqrt{\frac{2 \cdot \gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{p_i}{\rho_i} \cdot \left[1 - \left(\frac{p_m}{p_i} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}. \quad [\text{m/s}]$$

v_m bedeutet die Ausströmgeschwindigkeit, p_m den Druck im Austrittsquerschnitt und p_i und ρ_i Druck und Dichte des Fluids im Behälter.

Der Massenstrom im Austrittsquerschnitt A_m ergibt sich dann nach Gl. 2.3:19 und mit Berücksichtigung von Gl. 2.3:38 zu

$$(2.3:40) \quad \dot{m} = A_m \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \gamma}{\gamma - 1} \cdot p_i \cdot \rho_i \cdot \left[\left(\frac{p_m}{p_i} \right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left(\frac{p_m}{p_i} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \right]}. \quad [\text{kg/s}]$$

Er ist somit außer von Druck und Dichte des Fluids im Behälter und der Querschnittsfläche der Austrittsöffnung nur vom Druckverhältnis zwischen Behälter und Mündungsquerschnitt abhängig. Aus Gl. 2.3:40 geht hervor, dass ein Druckverhältnis p_m/p_i existiert, für das der Massenstrom maximal wird.

Gl. 2.3:40 ist eine stetige, positiv wertige Funktion, die sowohl für $p_m/p_i = 1$ wie auch für $p_m/p_i = 0$ zu null wird. Es muss somit zwischen diesen beiden Werten ein Maximum geben.

Dieses Druckverhältnis wird *kritisches Druckverhältnis* genannt und der dazu gehörende Mündungsdruck *Lavaldruck* p_λ . Durch Ableiten und Null Setzen der quadrierten Funktion (2.3:40) ergibt sich für das kritische Druckverhältnis

$$(2.3:41) \quad \frac{p_\lambda}{p_i} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}. \quad [-]$$

Ist das Druckverhältnis kleiner als dieser Wert, wird der Massendurchfluss ausschließlich vom Innendruck bestimmt.

Die sich dabei einstellende Geschwindigkeit heißt *Lavalgeschwindigkeit*. Sie ist die maximal mögliche Ausströmgeschwindigkeit eines Gases aus einer Mündung. Gl. (2.3:41) in (2.3:39) eingesetzt und den Ausdruck vereinfacht, führt zu

$$(2.3:42) \quad v_{\max} = \sqrt{\frac{2 \cdot \gamma}{\gamma + 1} \cdot \frac{p_i}{\rho_i}}. \quad [\text{m/s}]$$

Der zugehörige Massenstrom folgt durch Einsetzen von (2.3:41) in (2.3:40)

$$(2.3:43) \quad \dot{m} = A_m \cdot \sqrt{\gamma \cdot p_i \cdot \rho_i \cdot \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}}. \quad [\text{kg/s}]$$

Ist der Druck außerhalb der Mündung (Außendruck) gleich oder größer als der Lavaldruck, so kann sich das ausströmende Gas in der Mündung völlig entspannen. Der Strahl ist gerichtet und kann kinetische Energie übertragen. Ist der Außendruck hingegen kleiner als der Lavaldruck, so wird das Gas in der Mündung nicht völlig entspannt. Die weitere Entspannung vom Mündungsdruck zum Außendruck erfolgt explosionsartig unter Bildung einer völlig verwirbelten Strömung, die nicht in der Lage ist, Arbeit zu erbringen (siehe Abb. 2.20).

2.3.6.3 Geschwindigkeits- und Energieverlauf im Freistrah

Ausströmgeschwindigkeit und Massenstrom bilden die Anfangswerte für den Freistrah. Mit ihnen ist auch die maximale Energiestromdichte gegeben (also die pro

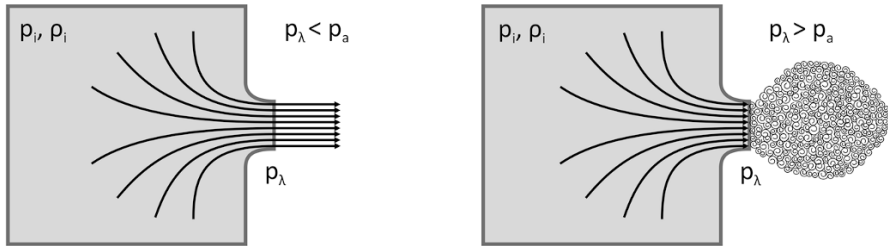


Abb. 2.20. Ausströmen aus einer Mündung: *Links*: Außendruck ist größer als der Druck in der Mündung (Lavaldruck). Es entsteht ein gerichteter Strahl. *Rechts*: Außendruck ist viel kleiner als der Lavaldruck. Die Strömung wird explosionsartig verwirbelt und kann keine Arbeit erbringen.

Zeiteinheit auf einer bestimmten Fläche auftreffende Energie), die im Strahl auftreten kann.

Ausgenommen bei sehr kleinen Strömungsgeschwindigkeiten, sind Freistrahlen bereits kurz nach dem Austritt turbulent.

Turbulente Strömungen sind dadurch charakterisiert, dass der längsgerichteten Grundbewegung unregelmäßige Schwankungsbewegungen überlagert sind. Die Fluidteilchen können sich daher auch quer zur Strömungsrichtung bewegen. Dies kommt im Gegensatz dazu bei den laminaren Strömungen nicht vor.

Die Geschwindigkeit einer turbulenten Strömung ist folglich als zeitlicher Mittelwert zu verstehen. Wegen den unterschiedlichen Bewegungsrichtungen der Teilchen kommt es (bezogen auf die mittlere Bewegung) zu einer scheinbaren Erhöhung der inneren Reibung (vgl. Abschn. 2.3.5). Die zugehörige, sogenannte *scheinbare Zähigkeit* ist eine wichtige Kennzahl turbulenter Strömungen.

Durch die Turbulenz vermischt sich der Strahl teilweise mit dem umgebenden Fluid, von dem Teilchen mitgerissen werden. Die mitgeführte Masse wird stromabwärts größer und der Strahl breiter. Gleichzeitig nimmt die Geschwindigkeit ab, da der Gesamtimpuls konstant bleibt.

Im Zusammenhang mit ballistischen Fragen kann man sich auf runde Freistrahlen beschränken, da sowohl die aus einer Waffenmündung strömenden Gase wie auch die Antriebsstrahlen von Raketen in der Regel zu dieser Kategorie gehören. Runde Freistrahlen haben den Vorteil, dass die scheinbare (kinematische) Zähigkeit im ganzen Strahl konstant ist. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich für die mittlere Geschwindigkeitsverteilung im Strahl die folgende Beziehung, wobei nur die Komponente in Strahlrichtung von Bedeutung ist

$$(2.3:44) \quad v_x(x, r) = \frac{3}{8 \cdot \pi} \cdot \frac{I}{\rho \cdot \varepsilon \cdot x} \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{4} \cdot \beta^2} \right)^2, \quad [\text{m/s}]$$

$$(2.3:44a) \quad \beta = \sqrt{\frac{3}{16 \cdot \pi}} \cdot \sqrt{\frac{I}{\rho}} \cdot \frac{r}{\varepsilon \cdot x}. \quad [-]$$

In diesen beiden Formeln bedeuten:

x	der Abstand von der Ausströmöffnung	r	der Abstand seitlich von der Strahlachse
I	der Gesamtimpuls (pro Zeit)	ρ	die Dichte
ε	die scheinbare kinematische Zähigkeit		

In der Strahlachse ($r = 0$) wird β zu Null, was Gl. 2.3:44 stark vereinfacht. Mit Hilfe des Massenstroms (Gl. 2.3:19) folgt bei bekannter Geschwindigkeit für die Energiestromdichte (Energiedichte E' pro Zeiteinheit)

$$(2.3:45) \quad \frac{E'}{\Delta t} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_x^3.$$

Hauptproblem bei einer solchen Rechnung ist die Bestimmung der scheinbaren Zähigkeit, die experimentell mit einer Druckmessung in der Strahlachse erfolgen kann. Aus der Druckmessung ergibt sich die Geschwindigkeit, woraus ε aus Gl. 2.3:44 berechnet werden kann.

2.3.6.4 Verdichtungsstöße

Wie bereits im Abschn. 2.3.3.3 erwähnt, breitet sich eine schwache Druckstörung in einem Fluid mit Schallgeschwindigkeit aus. Bewegt sich die Quelle der Störung langsamer als die Schallgeschwindigkeit, so eilen ihr die Störungen voraus und der Druckunterschied kann sich sukzessive ausgleichen.

Bewegt sich die Quelle jedoch schneller als sich der Schall ausbreitet, so kommt es an den Stellen höheren Druckes wegen der isentropen Verdichtung zu einem Anstieg der Temperatur und damit zu einer erhöhten Schall- und somit auch Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Die schnelleren Teilchen höheren Druckes laufen auf jene niedrigeren Druckes auf, wodurch sich an der Vorderseite der Störung eine steile Druckfront – ein sogenannter *Verdichtungsstoß* – ausbildet.

Je nach Wahl des Bezugssystems ergeben sich zwei unterschiedliche Betrachtungsweisen für Verdichtungsstöße. Typische Beispiele sind:

- der fortschreitende Verdichtungsstoß im ruhenden Medium, auch *Stoßwelle* genannt (entsteht z. B. durch die plötzliche Freisetzung einer großen Menge unter hohem Druck stehenden Gase bei der Detonation von Explosivstoffen),
- der stehende Verdichtungsstoß in einem strömenden Medium (z. B. an einem Flugzeugmodell in einem Überschallwindkanal).

Die Ebene, in welcher der Verdichtungsstoß liegt, wird als *Stoßfront* bezeichnet. Ihre Dicke ist außerordentlich gering (Größenordnung 10^{-4} mm). Steht die Stoßfront senkrecht auf der Strömungsrichtung einer Parallelströmung, spricht man von einem *geraden, senkrechten Verdichtungsstoß*. Druck, Dichte und Temperatur nehmen beim Durchgang durch die Stoßfront zu, hingegen fällt die Geschwindigkeit stets unter die Schallgeschwindigkeit ab.

Eine Berechnung der Strömungswerte nach dem Stoß bei bekannten Daten vor dem Stoß erfolgt mit einem nicht-linearen Gleichungssystem aus Kontinuitätsgleichung, Impulssatz und Energiegleichung, wobei der Vorgang wegen dessen Kurzzeitigkeit als isentrop angenommen werden kann.

Wird eine überschallschnelle Parallelströmung durch eine geneigte Wand abgelenkt, entsteht ein sogenannter *schräger Verdichtungsstoß* (siehe Abb. 2.21). Darin ändern sich nicht nur Druck, Dichte, Temperatur und Geschwindigkeit sprunghaft,

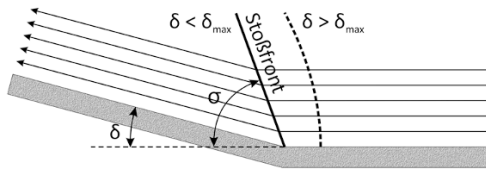


Abb. 2.21. Schräger Verdichtungsstoß. δ bedeutet den Ablenkwinkel, σ den Stoßwinkel. Die gestrichelte Linie zeigt die Stoßfront, wenn der Grenzblenkwinkel überschritten ist.

sondern auch die Bewegungsrichtung der Strömung. Im Gegensatz zum geraden Verdichtungsstoß kann hier nach der Stoßfront noch eine Überschallströmung vorhanden sein, allerdings mit einer kleineren Machzahl als vor dem Stoß. Der Winkel zwischen Anströmrichtung und Stoßfront wird als *Stoßwinkel* σ bezeichnet. Er ist stets größer als der in Abschn. 2.3.3.4 eingeführte Mach'sche Winkel α .

Verändert sich der Ablenkwinkel δ , ändert auch der Stoßwinkel. Dabei existiert ein von der Machzahl abhängiger Grenzblenkwinkel δ_{\max} , bei dessen Erreichen die Stoßfront beginnt, sich vom Knickpunkt der Ablenkung abzulösen. Dabei lassen sich die folgenden Fälle unterscheiden:

- δ sehr klein. Der Stoßwinkel nähert sich dem Mach'schen Winkel α . Die Überschallströmung erzeugt keine Stoßfront.
- $\delta < \delta_{\max}$. Mit zunehmendem Ablenkwinkel vergrößert sich auch der Stoßwinkel, behält aber den Ursprung im Knickpunkt der Ablenkung.
- $\delta > \delta_{\max}$. Die Stoßfront hat sich von der Ablenkfläche gelöst (Abb. 2.21, gestrichelte Linie). Sie bildet davor einen senkrechten Stoß, der mit größer werdendem Abstand in einen schrägen Stoß übergeht (siehe Abb. 2.22).

Je weiter sich die Stoßfront von der Störungsursache entfernt, desto näher schmiegt sie sich an eine Linie an, deren Steigung dem Mach'schen Winkel entspricht. In größerer Entfernung von Störzentrum kann daher mittels der Formel (2.3:18) die Strömungsgeschwindigkeit zumindest angenähert bestimmt werden.

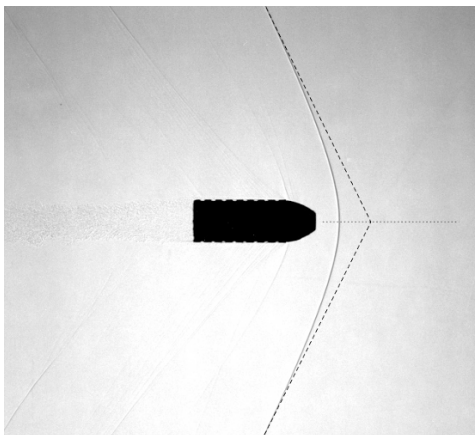


Abb. 2.22. Überschallanströmung eines stumpfen Körpers (Bleigeschoss für Vorderlader). Der Verdichtungsstoß ist abgelöst. Die gestrichelte Linie stellt den zugehörigen Mach'schen Kegel dar, aus dessen Winkel die Machzahl der Anströmung ermittelt werden kann ($Ma = 1.11$).

2.3.6.5 Lavaldüsen

Düsen dienen in erster Linie dazu, beim Ausströmvorgang aus einem Druckbehälter einen gerichteten Strahl zu erzeugen, der in der Lage ist, Kräfte zu erzeugen und Arbeit zu erbringen. Dies wird durch einen geeigneten variablen Querschnittsverlauf der Austrittsöffnung erreicht.

Mittels des Kontinuitätsgesetzes und der Bernoulligleichung lässt sich zeigen, dass zwischen der Machzahl (der Geschwindigkeit) der Strömung und der Formgebung einer Düse eine enge Beziehung besteht.

Für eine stationäre, reibungsfreie Strömung (wie sie im Strahl vorausgesetzt sei) folgt aus der Bewegungsgleichung Gl. 2.3:36 mit $\partial x / \partial t = 0$ und $v = 0$ die Bernoulligleichung in differenzieller Form

$$(2.3:46) \quad \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 0 . \quad [\text{m/s}^2]$$

Wird die Gleichung mit ∂x multipliziert und das erste Glied mit ∂p und das zweite mit v erweitert, so folgt

$$(2.3:47) \quad \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right) \cdot \frac{\partial \rho}{\rho} + v^2 \cdot \frac{\partial v}{v} = 0 . \quad [\text{m}^2/\text{s}^2]$$

Der erste Faktor im ersten Summand ist aber nach Gl. 2.3:16a das Quadrat der Schallgeschwindigkeit, sodass in Gl. 2.3:47 die Machzahl Ma eingeführt werden kann

$$(2.3:48) \quad \frac{\partial \rho}{\rho} + Ma^2 \cdot \frac{\partial v}{v} = 0 . \quad [-]$$

Eine stationäre Strömung besitzt auch einen zeitlich konstanten Massenfluss ($dm/dt = 0$). Der erste Summand in Gl. (2.3:48) kann somit mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung (Gl. 2.3:19a), ersetzt werden wodurch nach kurzer Rechnung die folgende Beziehung entsteht (A Querschnittsfläche der Düse)

$$(2.3:49) \quad \frac{\partial v}{v} = - \frac{1}{1 - Ma^2} \cdot \frac{\partial A}{A} . \quad [-]$$

Daraus ist nun ersichtlich, dass eine Beschleunigung ($\partial v / v > 0$) nur dann zustande kommt, wenn die Querschnittsfläche des Strahles bei Unterschallgeschwindigkeiten ($Ma < 1$) abnimmt ($\partial A / A < 0$) und bei Überschallgeschwindigkeiten ($Ma > 1$) zunimmt ($\partial A / A > 0$).

Unterschallströmungen werden in einem konvergenten (zusammenlaufenden) Rohr- oder Kanalquerschnitt beschleunigt, Überschallströmungen hingegen in einer divergenten (sich öffnenden) Düse. Mit einer Kombination dieser beiden Düsenarten lassen sich sehr hohe Strahlgeschwindigkeiten erreichen, welche die Schallgeschwindigkeit weit übersteigen. Solche Düsen heißen *Lavaldüsen* oder (vor allem im englischsprachigen Raum) *konvergent-divergente Düsen*.

Eine direkte Beziehung für die geometrische Form der Lavaldüse ergibt sich aus den Gleichungen (2.3:40) und (2.3:43). Die erstere beschreibt den Massenfluss in einem beliebigen Querschnitt, die zweite gilt, wenn sich im betreffenden Querschnitt der Lavaldruck einstellt. Dieser findet sich in der Lavaldüse im engsten Querschnitt A_m . Etwas umgestellt lauten sie

$$(2.3:50) \quad \frac{\dot{m}}{A} = \sqrt{\frac{2 \cdot \gamma}{\gamma - 1} \cdot p_i \cdot \rho_i \cdot \left[\left(\frac{p}{p_i} \right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left(\frac{p}{p_i} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \right]}, \quad [\text{kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})]$$

$$(2.3:51) \quad \frac{\dot{m}}{A_m} = \sqrt{\gamma \cdot p_i \cdot \rho_i \cdot \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}}. \quad [\text{kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})]$$

Wird nun die zweite durch die erste dieser Gleichungen dividiert und für das Druckverhältnis die im isentropischen Fall gültige Gleichung

$$(2.3:52) \quad \frac{p}{p_i} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \cdot \text{Ma}^2 \right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad [-]$$

eingesetzt, so folgt für das Querschnittsverhältnis

$$(2.3:53) \quad \frac{A}{A_m} = \frac{1}{\text{Ma}} \cdot \left[\frac{2}{\gamma + 1} \cdot \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \cdot \text{Ma}^2 \right) \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}. \quad [-]$$

Ma bedeutet die jeweilige, zum Querschnitt A gehörende Machzahl.

Für die Auslegung einer Düse werden zunächst ein bestimmter Massenfluss und der Druck p_i im Behälter festgelegt, die eine Folge der geforderten Leistung sind. Mit der Gl. (2.3:51) ergibt sich der Querschnitt A_m an der engsten Stelle und Gl. (2.3:53) liefert den Querschnittsverlauf in Abhängigkeit der Machzahl. Abb. 2.23 zeigt ein Beispiel einer mit $\gamma = 1.25$ (Wert für Pulvergase) berechneten Düse bis zu einer Ausströmgeschwindigkeit mit der Machzahl $\text{Ma} = 2$.

Im unteren Teil der Abb. 2.23 sind die möglichen Zustände in einer Lavaldüse dargestellt. Sie sind vom Außendruck abhängig und bilden vier Bereiche, welche durch drei spezifische Drücke (bezeichnet durch p_1 , p_2 und p_3) abgegrenzt sind.

Ist der Außendruck p_a gleich dem Innendruck p_i , findet trivialerweise keine Strömung statt. Wird der Außendruck kleiner, so entsteht zunächst eine Unterschallströmung, bei welcher im konvergenten Teil die Geschwindigkeit zu- und der Druck abnimmt, im divergenten Teil der Druck hingegen wieder größer und die Geschwindigkeit entsprechend kleiner wird (gestrichelte Linie in Abb. 2.23). Bei weiterer Verringerung von p_a wird der erste bereichsbegrenzende Druck p_1 erreicht, bei dem sich im engsten Querschnitt der Düse gerade Schallgeschwindigkeit einstellt (markiert mit Z in Abb. 2.23).

Dieser Punkt ist nach Gl. 2.3:52 ($\text{Ma} = 1$ eingesetzt) ausschließlich vom Isentropenkoeffizienten abhängig. Für $\gamma = 1.25$ ergibt sich ein Druckverhältnis zum Innendruck von 0.5549.

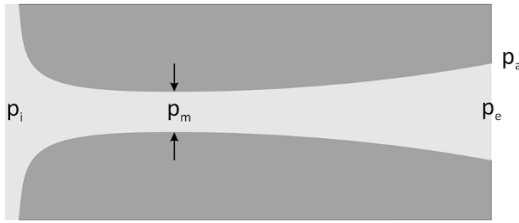
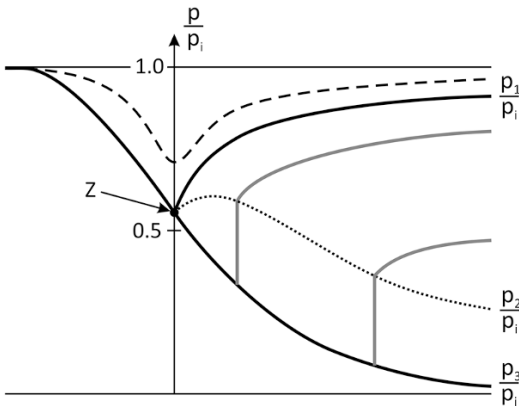


Abb. 2.23. Form einer Lavaldüse, gerechnet mit $\gamma = 1.25$ bis zu einer Strömungsgeschwindigkeit von $Ma = 2$. Der engste Querschnitt ist durch Pfeile markiert. Darunter der Druckverlauf bei verschiedenen Außendrücken. Näheres siehe Text.



Die Druckdifferenz zwischen p_m und p_1 ist jedoch zu gering um das Gas weiter zu beschleunigen. Der Druck steigt wieder an und die Strömungsgeschwindigkeit nimmt ab.

Sinkt der Außendruck unter p_1 , wird das Gas nach dem engsten Querschnitt weiter an Geschwindigkeit zunehmen und in den Überschallbereich eintreten. Der Gegendruck ist allerdings noch so groß, dass nach einer gewissen Strecke ein senkrechter Verdichtungsstoß entsteht, in dem der Druck annähernd unstetig ansteigt und die Strömung auf Unterschallgeschwindigkeit verzögert wird. Mit weiter abnehmendem Druck verschiebt sich dieser Verdichtungsstoß in Richtung Endquerschnitt, den er beim Druck p_2 erreicht. Damit ist die zweite Bereichsgrenze erreicht und im ganzen divergenten Teil der Düse strömt das Gas mit Überschallgeschwindigkeit.

Wegen des Verdichtungsstoßes herrscht düsenseitig im Endquerschnitt ein etwas geringerer Druck p_e als p_2 . Bei weiterer Druckabnahme wird daher der Überschallstrahl gegen einen leichten Überdruck austreten und unter Bildung schräger Verdichtungsstöße zunächst auf einen Druck über p_a verdichtet und anschließend auf p_a entspannt.

Mit $p_a = p_3$ wird die dritte Bereichsgrenze erreicht. Bei diesem Druckniveau sind der Außendruck und der Druck im Endquerschnitt gleich ($p_e = p_a$). Die ganze Düse wird stetig mit zunehmender Geschwindigkeit durchströmt. Die Düse heißt in diesem Fall *angepasst*.

Unterschreitet der Außendruck p_3 , entsteht im Endquerschnitt ein etwas höherer Druck und der Gasstrahl tritt gegen einen leichten Unterdruck aus, wobei er sich mit Schwingungen auf den Außendruck entspannt.

Zusammengefasst sind bei einer Lavaldüse in Abhängigkeit des Außendruckes die folgenden Strömungszustände möglich:

- 1 p_1-p_1 . Die gesamte Düse wird mit Unterschallgeschwindigkeit durchströmt. Die Geschwindigkeit nimmt im divergenten Teil ab.
- 2 p_1-p_2 . Die Strömung überschreitet nach dem engsten Querschnitt die Schallgeschwindigkeit, erzeugt aber einen senkrechten Verdichtungsstoß, in dem die Geschwindigkeit auf Unterschall verzögert wird.
- 3 p_2-p_3 . Im divergenten Teil der Düse herrscht Überschallgeschwindigkeit, die an der Mündung gegen einen leichten Überdruck austreten muss.
- 4 $p_3 = p_a$. Kontinuierlich zunehmende Geschwindigkeit bis zur Mündung. Die Düse ist angepasst.
- 5 p_3-0 . Der Überschallgasstrahl tritt gegen einen leichten Unterdruck mit einer schwingenden Entspannung aus.

Düsen, welche in den Zuständen 3 und 5 arbeiten, werden als *nicht angepasst* bezeichnet.

2.4 Das physikalische Umfeld der Ballistik

2.4.1 Größenordnungen

Bevor wir uns den Teilgebieten der Ballistik zuwenden, seien noch einige Bemerkungen zu Größenordnungen angeführt, mit welchen man sich im Rahmen dieses physikalischen Teilgebietes auseinanderzusetzen hat.

In der Tabelle 2.8 sind einige Richtwerte getrennt nach Klein- und Großkaliberwaffen zusammengestellt. Unmittelbar fallen in der Innen- und Endballistik die enorm großen Kräfte und hohen Beschleunigungen auf, welche in außerordentlich kurzer Zeit und erst noch zumeist bei extremen Temperaturen stattfinden. Solche Ereignisse entziehen sich weitgehend unserem normalerweise quasi-statisch arbeitenden Vorstellungsvermögen. Zudem haben einige (sehr aufwändige) Versuche gezeigt, dass Materialeigenschaften (Festigkeiten, Dehnungen) unter diesen hochdynamischen und extrem thermischen Belastungen Werte annehmen können, die sich von den gewohnten wesentlich unterscheiden.

Ballistik, insbesondere die Innen- und die Endballistik, gehört deshalb – und dies wird sich wohl kaum ändern – zu den ausgesprochen experimentellen Wissenschaften. Auch dem erfahrenen Ballistiker widerfährt es immer wieder, dass ein Versuchsergebnis gar nicht den Erwartungen entspricht, sich aber im Nachhinein zu meist erklären lässt.

Tabelle 2.8. Richtwerte maximaler Drücke, Kräfte und Beschleunigungen und mittlere Zeitdauern, Drehzahlen und Temperaturen bei den Ereignissen

Kleinkaliberwaffen		Innenballistik	Außenballistik	Endballistik
Drücke	[bar]	2000–5000	0.5–1.0	10'000
Kräfte	[kN]	10–15	0.001	100
Beschleunigungen	[m/s ²]	500'000–2'000'000	–200 bis –400	–10'000'000
Zeitdauer	[ms]	0.5–1.5	100–500	0.1–1
Drehzahlen	[1/s]	3000–5000	3000–5000	–
Temperaturen	[°C]	2000–3000	–20 bis 200	einige 1000
Großkaliberwaffen		Innenballistik	Außenballistik	Endballistik
Drücke	[bar]	500–3500	0.45–4.0	
Kräfte	[kN]	750–6600	300–7500	
Beschleunigungen	[m/s ²]	50'000–150'000	–7 bis –180	
Zeitdauer	[s]	0.008–0.025	20–60	
Drehzahlen	[1/s]	90–300	90–300	
Temperaturen	[°C]	2000–3000	?	

Wegen der Vielfalt endballistischer Möglichkeiten bei Großkaliberwaffen wurde auf die Angabe von Werten in der Tabelle 2.8 verzichtet.

Die Außenballistik bewegt sich in einem durchaus „normalen“ physikalischen Rahmen. Dennoch trifft man auch hier auf erhebliche Schwierigkeiten, die vollständige Geschossbewegung in allen Freiheitsgraden vorauszusagen, wirken doch auf das Geschoss Kräfte und Momente, deren Ermittlung selbst im Schießversuch oder im Windkanal aufwändig oder gar unmöglich ist. So begnügt man sich in der Regel mit relativ einfachen Modellen, welche durch geschickte Anwendung von Hilfsgrößen und Korrekturfaktoren Ergebnisse liefern, welche die Realität erstaunlich gut wiedergeben und voraussagen können.

2.4.2 Kaliber und Querschnittsbelastung

Die stets zuerst genannten geometrisch-physikalischen Größen eines Geschosses sind sein Kaliber und seine Masse. Dabei ist zu beachten, dass der Begriff „Kaliber“ drei Bedeutungen besitzt:

- Durchmesser des Waffenrohres (bei einem Rohr mit Zügen und Feldern über den Feldern gemessen),
- Durchmesser des Geschosses (bei Geschossen mit Flügeln oder Führungsbändern der Durchmesser des Geschosskörpers),
- Nominalkaliber (offizielle Bezeichnung, meist angelehnt an den Durchmesser des Waffenrohres).



Abb. 2.24. Zwei Geschosse ungefähr gleicher Querschnittsbelastung und damit sehr ähnlicher ballistischer Eigenschaften trotz unterschiedlichem Kaliber und verschiedener Masse.

Ausnahme: Bei Flinten wird die Anzahl Kugeln angegeben, die aus einem englischen Pfund Blei gegossen werden können und deren Durchmesser jenem des Laufes entspricht. Größere Kaliberzahlen bedeuten somit kleinere Laufdurchmesser.

Interessanterweise hängen die physikalisch-ballistischen Eigenschaften eines Geschosses nicht vom Kaliber und der Masse einzeln ab, sondern vom Quotienten aus Masse und Kaliberquerschnittsfläche (in der Regel wird das Nominalkaliber gewählt), der sogenannten *Querschnittsbelastung* q des Geschosses (engl. „cross sectional density“, fr. „masse par l’unité de section“)

$$(2.4:1) \quad q = \frac{m}{\frac{1}{4} \cdot d^2 \cdot \pi} \quad [\text{g/mm}^2], [\text{kg/m}^2]$$

Dies zeigt sich insbesondere im Bereich der Kleinkalibergeschosse deutlich, wo beispielsweise ein Flintenlaufgeschoss im Kaliber 12 (Durchmesser 18.2 mm) mit einer Masse von 28.3 g und ein Geschoss im Kaliber 22 L. R. (5.6 mm) mit der Masse 2.6 g (siehe Abb. 2.24) bei gleicher Mündungsgeschwindigkeit ausgesprochen ähnliche ballistische Eigenschaften aufweisen (fast gleicher Geschwindigkeitsverlauf, gleiche Windablage, aber auch ähnliche Durchschlagseigenschaften).

In gewissen Fällen (z. B. bei einem großen Winkel zwischen Geschossachse und Bewegungsrichtung des Geschosses) wird die Querschnittsbelastung auf die Schattenfläche des Geschosses in Bewegungsrichtung bezogen.



3 Innenballistik

3.1 Einführung, Historisches

Die Schussentwicklung in einer Waffe gehört zu den extremsten Vorgängen der klassischen Physik. Sie ist äußerst kurzzeitig, und es sind enorme Kräfte und Beschleunigungen und hohe Temperaturen daran beteiligt (siehe Tabelle 2.8). Die rechnerische Erfassung und Behandlung derartiger Prozesse gibt Probleme auf, die auch mit modernsten Mess- und Rechentechniken nur schwer – wenn überhaupt – zu bewältigen sind. Die Bestimmung des maximalen Gasdruckes und des Gasdruckverlaufes, der Geschwindigkeit des Geschosses und insbesondere der Mündungsgeschwindigkeit wird oft als das Hauptproblem der Innenballistik bezeichnet.

Nach der Teilung der „Ballistik“ in die Teilgebiete Innen- und Außenballistik Mitte des 18. Jahrhunderts rückten vor allem der maximale Druck und die Mündungsgeschwindigkeit ins Zentrum des Interesses. Mit den in diesem Zeitraum erzielten Fortschritten in der Physik entstanden auch die ersten theoretischen Untersuchungen zur Strömung im Rohr (LAGRANGE, 1793, publiziert durch S. POISSON 1832). Die Messtechnik konnte jedoch mit den neuen Theorien noch nicht mithalten, weshalb sich die gefundenen Zusammenhänge nicht überprüfen ließen.

Sowohl bei der Messung des Maximaldruckes als auch der Mündungsgeschwindigkeit ist man darauf angewiesen, Messwerte innerhalb sehr kurzer Zeitspannen (Millisekunden oder gar Bruchteile davon) zu ermitteln. Dies ließ sich mit den damaligen Zeitmessgeräten (Chronometer, Sanduhren) nicht bewerkstelligen.

In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts (1871) konstruierte M. DEPREZ eine Apparatur, mit welcher der Maximaldruck recht genau ermittelt werden konnte (B. P. KNEUBUEHL 2013). Durch die Anbringung mehrerer solcher Systeme längs des Waffenrohres ließ sich sogar ein grober Druckverlauf messen. Etwa im gleichen Zeitabschnitt erfand der belgische Offizier P. E. LE BOULENGÉ (1864, siehe auch C. KUHN, 1866) eine sinnreiche Einrichtung, mit welcher die Geschwindigkeit eines Geschosses auf seiner Bahn bestimmt werden konnte. Zur indirekten Zeitmessung diente die Erdbeschleunigung, indem an einem frei fallenden Stab zwei Marken geschlagen wurden, aus deren Abstand die dazwischen liegende Zeit bestimmt werden konnte.

Die Möglichkeit, Druck und Geschwindigkeit zu bestimmen, führte um die Jahrhundertwende zu entscheidenden Fortschritten in der innenballistischen Wissenschaft, aber auch bald einmal zu der Erkenntnis, dass ein umfassendes Verständnis der Vorgänge in einer Waffe kaum je erreicht werden würde.

3.2 Explosivstoffe

3.2.1 Allgemeines

3.2.1.1 Definition und Bezeichnungen

Explosivstoffe sind feste, flüssige oder gasförmige Stoffe, die fähig sind, unter Abgabe von Energie schnell und ohne externe Anwesenheit von Sauerstoff zu verbrennen (explosiv zu reagieren). Die Auslösung der Reaktion kann mechanisch (Schlag, Reibung) oder thermisch (Funken, Flamme, Wärme) oder durch eine Stoßwelle erfolgen. Je nach ihrer Verwendung werden die Explosivstoffe in die folgenden Gruppen eingeteilt:

- *Initialsprengstoffe* reagieren empfindlich auf mechanische oder thermische Einwirkungen; sie dienen der Initiierung eines Sprengstoffes.
- *Sekundärsprengstoffe* (oft nur Sprengstoffe genannt) sind die eigentlichen Arbeitsmittel. Sie sind weniger schlag- und reibempfindlich und reagieren geringer auf elektrostatische Entladungen. Sie sind daher handhabungssicherer als die Initialsprengstoffe, besitzen aber einen größeren Energiegehalt. Zur Einleitung der Reaktion benötigen sie jedoch in der Regel die Stoßfront eines Initialsprengstoffes.

Initial- und Sekundärsprengstoffe werden zusammen oft auch als *Sprengmittel* bezeichnet.

- *Treibmittel* (Pulver) sind Explosivstoffe, welche zum Antrieb von Geschossen und Raketen Verwendung finden.
- *pyrotechnische Sätze* sind Gemische aus Sauerstoffträgern (Oxidationsmittel) und Brennstoffen und dienen der Erzeugung von Licht, Wärme, Rauch oder akustischen Effekten.

Eine der wichtigsten Kennzeichnungen der Explosivstoffe, die auch zu deren Charakterisierung herangezogen werden kann, ist die Abbrandgeschwindigkeit.

3.2.1.2 Die Abbrandgeschwindigkeit

In einem Explosivstoff setzt sich die Reaktionsfront, in der die chemische Umsetzung (Oxidation) stattfindet, stets senkrecht zur momentanen Oberfläche mit einer bestimmten Geschwindigkeit fort. Diese Geschwindigkeit wird als *Abbrand- oder Verbrennungsgeschwindigkeit* bezeichnet.

Liegt die Abbrandgeschwindigkeit von Explosivstoffen in der Größenordnung von mm/s oder cm/s, spricht man von einer *Verbrennung*. Sie wird in erster Linie bei Treibmitteln unter Normaldruck beobachtet. Setzt sich die Reaktionsfront in einem Explosivstoff mit wesentlich höheren Geschwindigkeiten fort, die aber noch unterhalb der Schallgeschwindigkeit im verbrennenden Medium liegen, nennt man den Vorgang *Deflagration*. Der Abbrandprozess ist physikalisch instabil; die Fortpflanzung erfolgt durch die bei der Reaktion freigesetzte Wärmeenergie mit Geschwindigkeiten von einigen 10 m/s bis einigen 100 m/s. Übersteigt die Abbrandgeschwindigkeit die Schallgeschwindigkeit, bilden sich Stoßwellen aus, die eng mit der chemischen Umsetzung gekoppelt sind. In einer sehr schmalen, scharf begrenzten Zone ergeben sich hohe Drücke und Temperaturen, welche für den Fortgang der Reaktion verantwortlich sind. Dieser Abbrandmechanismus wird mit dem Begriff *Detonation* verbunden. Die Reaktionsfront setzt sich dabei mit Geschwindigkeiten ab etwa 2 km/s bis gegen 10 km/s fort.

Explosivstoffe können verbrennen, deflagrieren oder auch detonieren. In welcher Form der Abbrand vonstattengeht, hängt weitgehend von der chemischen Zusammensetzung, der Zündung bzw. Anfeuerung des Stoffes und vom umgebenden Druck ab.

Für Treibmittel und Sprengstoffe gibt es naturgemäß unterschiedliche Methoden zur Bestimmung der Abbrandgeschwindigkeit. Für Treibmittel wird in der Europäischen Norm EN 13938-4 ein Verfahren beschrieben, das deren Wert bei Normaldruck liefert. Dieses Ergebnis ist allerdings innenballistisch nicht besonders aussagekräftig; die Methode ist daher nicht verbreitet. Vielmehr wird die Abbrandgeschwindigkeit von Treibmitteln mit speziellen Bombenkonstruktionen (manometrische Bombe, Crawfordbombe) ermittelt, denen ein eigener Abschnitt gewidmet ist (siehe Abschn. 3.5).

Die eigentlich erforderliche Kurzzeitmessung bei der Bestimmung der Abbrandgeschwindigkeit von Sprengstoffen kann durch die von Henri J. DAUTRICHE im Jahre 1906 eingeführte Methode umgangen werden. Allerdings wird eine Sprengschnur mit bekannter Detonationsgeschwindigkeit vorausgesetzt.

In einem mit dem zu messenden Sprengstoff gefüllten Stahlrohr werden in einem gewissen Abstand x zwei Sprengkapseln angebracht und mit einer genügend langen Sprengschnur bekannter Detonationsgeschwindigkeit v_s verbunden (siehe Abb. 3.1). Weil die beiden Enden der Sprengschnur mit einer zeitlichen Differenz initiiert werden, treffen die beiden einander entgegenlaufenden Stoßfronten um eine bestimmte Strecke y von der Mitte der Sprengschnur entfernt aufeinander. An dieser Stelle entsteht auf dem unterlegten Bleiblock eine deutliche Marke. Mit einer

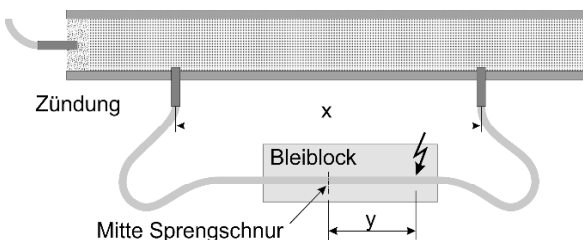


Abb. 3.1. Bestimmung der Detonationsgeschwindigkeit nach H. J. DAUTRICHE. Erklärung siehe Text.

einfachen geometrisch-physikalischen Überlegung ergibt sich für die Abbrandgeschwindigkeit v_{sp} im zu messenden Sprengstoff die folgende Beziehung

$$(3.2:1) \quad v_{sp} = \frac{x}{2 \cdot y} \cdot v_s \quad [m/s]$$

Mit heutiger Kurzzeitmesstechnik lässt sich die Durchgangszeit der Detonationsfront zwischen zwei Messstellen natürlich auch ermitteln und wohl auch genauer.

3.2.2 Schwarzpulver

3.2.2.1 Geschichtliches

Salpeter (chemische Bezeichnung: Nitrate) kommen in der Natur häufig vor. Kalisalpeter, Natronsalpeter („Chilesalpeter“) und Ammonsalpeter werden in der Landwirtschaft oft als Dünger verwendet. Wird Ammonsalpeter sehr rasch erwärmt oder initiiert, so zersetzt er sich detonativ in Stickstoff, Sauerstoff und Wasser; er ist also auch ein Sprengstoff. Bei Verbrennungsvorgängen sind Kali- und Natronsalpeter ausgezeichnete Sauerstofflieferanten. Werden sie mit leicht brennbaren Stoffen vermischt, kann es durchaus zu sehr raschem Abbrennen oder ebenfalls zu Detonationen führen.

Da diese Stoffe auf natürliche Weise entstehen können, ist anzunehmen, dass ihre Brenneigenschaften auch schon früh entdeckt worden sind. Es ist deshalb müßig, von einer zeitlich festgelegten „Erfindung“ des Schwarzpulvers zu reden. Bereits die Griechen und Römer scheinen mit derart brennfähigen Stoffen vertraut gewesen zu sein und haben diese auch bei der Kriegsführung eingesetzt (so z. B. die mit den Spartanern verbündeten Böotier im Peloponnesischen Krieg 431–404 v. u. Z.). Die berühmte Mischung aus Kalisalpeter, Kohle und Schwefel, die heute den Namen „Schwarzpulver“ trägt, stammt ursprünglich offenbar aus China. Dort soll es zwischen dem 8. und 10. Jahrhundert für Feuerwerk und zum Antrieb von Raketen entwickelt und verwendet worden sein. Wie diese Kenntnisse nach Europa gelangten, lässt sich ebenfalls nur vermuten. Im 13. Jahrhundert unternahmen DŤCHINGIS KHAN, seine Heerführer und seine Nachfolger ausgedehnte Feldzüge, die sie bis nach Europa (z. B. Schlacht bei Liegnitz, 1241) und Kleinasien führten. Es ist durchaus plausibel, dass dabei Schwarzpulver oder zumindest seine Rezeptur mitgekommen ist.

Im europäischen Gebiet sind zwei Namen mit diesem Treibmittel verbunden. Der eine ist jener des englischen Philosophen, Theologen und Naturgelehrten Roger BACON, der zwischen 1215 und 1290 lebte und sich in den Jahren 1241 bis 1246 in Paris aufhielt. In einem Manuskript (um 1250) beschrieb er eine Mischung aus Kalisalpeter, Schwefel und Kohle, wobei er diese nicht etwa als seine Erfindung, sondern als einen bekannten Stoff darstellte. Von möglichen Anwendungen war jedoch nicht die Rede. Anders beim zweiten erwähnenswerten Namen. Der mythenumwobene Franziskanermönch Berthold SCHWARZ, der im Klos-

ter Freiburg im Breisgau gelebt hatte und mit Salpeter, Schwefel und Kohle experimentierte, verwendete diese Zusammensetzung offenbar bereits zum Fortschleudern von Gegenständen. Er lebte zwischen 1300 und 1390, so dass er Gelegenheit gehabt hätte, sich Kenntnisse von diesem Stoff zu verschaffen. Es ist aber auch möglich, dass er selbst auf diese Mischung gekommen ist.

Gesamthaft gesehen, liegt die Herkunft des Schießpulvers ziemlich im Dunkeln. Der angedeutete Ablauf der Ereignisse kann sich so, aber auch anders abgespielt haben. Dies mag einerseits daran liegen, dass um derartige Stoffe stets ein Geheimnis gemacht worden ist, andererseits auch daran, dass vom historischen Gesichtspunkt aus die *Entstehung* des Schießpulvers relativ unbedeutend ist. Tausend Jahre später hat allerdings die *Anwendung* des Schießpulvers die Geschichte der Menschheit stark mitgeprägt.

3.2.2.2 Zutaten

Schwarzpulver besteht aus Kalisalpeter (chemisch: Kaliumnitrat, KNO_3), Schwefel (S) und Kohle (C). Anstelle von Kalisalpeter kann auch Natronsalpeter (Natriumnitrat, NaNO_3) verwendet werden, womit der sogenannte „Sprengsalpeter“ entsteht, der vor allem im Bergbau angewendet wurde.

Salpeter kommt in kleinen Lagern und in Salzwüsten vor (Kalisalpeter in Asien, Natronsalpeter in der Atacama-Wüste, Südamerika). Für die Herstellung von Schwarzpulver wurde Kalisalpeter auch in sogenannten Salpeterplantagen gewonnen. Dabei wurde Stallmist mit Kalk (CaCO_3) und Pottasche (Kaliumkarbonat, K_2CO_3) vermischt und mit Jauche feucht gehalten.

Schwefel ist ein seit dem Altertum bekannter Stoff. Er kommt in vulkanischen Gebieten in reiner Form vor und ist in zahlreichen Erzen und Mineralien eingebunden. Die Beschaffung von Schwefel bot daher keine Schwierigkeiten.

Etwas weniger einfach ist die Beschaffung der *Kohle*. Ihre Herstellung wird in der Regel in den Fabrikationsprozess des Schwarzpulvers integriert, damit Qualität und Zusammensetzung möglichst gleichbleiben. Sie wird durch Trockendestillation aus Holz gewonnen, wobei sich harzfreie, feinfasrige Holzarten (z.B. Faulbaum, Weißerle) am besten eignen. Gelegentlich wird auch Hasel- und Weidenholz verwendet. Holzkohle besteht aus Kohlen-, Wasser- und Sauerstoff. Der Wasserstoff ist für die Entzündbarkeit, der Sauerstoff für die Brennfähigkeit verantwortlich. Kohle mit hohem Wasser- und Sauerstoffgehalt (Kohleanteil ca. 70 %) wurde vor allem für Pulver für die Jagd und fürs Scheibenschießen verwendet. Kohle mit weniger Wasser- und Sauerstoff (Kohleanteil rund 85 %) kam in erster Linie für militärische Zwecke zur Anwendung.

3.2.2.3 Herstellung

Während Jahrhunderten wurden die drei Bestandteile in feiner Körnung (pulverförmig, daher auch der Name) möglichst innig miteinander vermengt. Dennoch

ließ es sich nicht vermeiden, dass sich das Gemenge mit der Zeit entmischte. Die Folge waren unregelmäßiger Abbrand und erhebliche Abweichungen in der Anfangsgeschwindigkeit. Dies spielte damals wohl eine untergeordnete Rolle, da die Streuung beim Schießen ohnehin nicht klein war. Im Verlaufe der Zeit (vor allem mit der Verbreitung der Büchsen) wurden die Qualitätsansprüche an das Pulver immer größer. Es mussten Verfahren entwickelt werden, die das Entmischen verhinderten und die auch industrielle Fertigungen ermöglichten. Mit der Zeit hat sich ein Herstellungsprozess herausgebildet, der zu einem körnigen Endprodukt führt.

Die Herstellung erfolgt im Wesentlichen in den folgenden Schritten:

- Zerkleinern und Mahlen der Zutaten, Vermengen der Bestandteile,
- unter Zugabe von Feuchtigkeit das Pulver zu Kuchen pressen (dieser Vorgang bewirkt einen festen Verbund der einzelnen Bestandteile, sodass sich diese nicht mehr entmischen können),
- Körnen der Pulverkuchen in kleine Stücke und mit Sieben Vorsortieren, Polieren der Körner in der Poliertrommel (wobei die Körner durch gegenseitiges Reiben entgratet und die Oberflächen poliert werden; sie werden dadurch weniger hygroskopisch),
- Trocknen des Pulvers (Reduzieren des Feuchtigkeitsgehaltes von etwa 4 bis 5 % auf $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{2}$ %) und nach verschiedenen Korngrößen sortieren.

Übliche Korngrößen für Schießpulver sind 0.2 bis 1.6 mm (siehe Abb. 3.2). Welche Pulverart zur Anwendung kommt, hängt unter anderem von Kaliber, Lauflänge und Geschossmasse ab. Feinere Pulver haben insgesamt eine größere Oberfläche und sind daher brennfreudiger als gröbere Pulver.

3.2.2.4 Rezeptur und Reaktionsprodukte

Die frühesten Rezepturen für Schwarzpulver gaben ein Mischungsverhältnis von 6 Teilen Kalisalpeter und je einem Teil Schwefel und Kohle an. (In Prozenten ausgedrückt ergibt dies 75 % Kalisalpeter und je 12.5 % Schwefel und Kohle). Dies stimmt recht gut mit der heutigen Standardzusammensetzung (75 % KNO_3 , 10 % S und 15 % C) überein.

Eine systematische Untersuchung der chemischen Vorgänge und damit eine Verfeinerung der Zusammensetzung wurde erst mit den Fortschritten der Chemie möglich, die insbesondere von LAVOISIER in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhun-

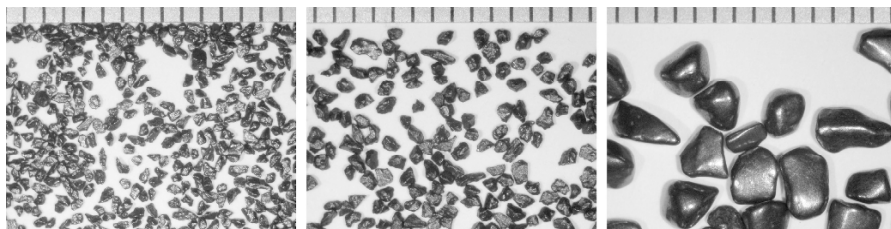


Abb. 3.2. Schwarzpulverkörnungen. *Links:* CH-Schwarzpulver Nr. 1 für Pistolen; *Mitte:* CH-Schwarzpulver Nr. 2 für Gewehre; *rechts:* CH-Schwarzpulver Nr. 5 für Böllerschüsse.

derts erzielt worden waren. So wurde bereits im 19. Jahrhundert festgestellt, dass die vollständigste Zersetzung der drei Bestandteile bei einer Zusammensetzung von 74.65 % Kalisalpeter, 11.90 % Schwefel und 13.45 % Kohle erzielt wird.

Der Verbrennungsvorgang von Schwarzpulver läuft etwa folgendermaßen ab: Angefeuert wird die Kohle, die unter Bildung von Kohlendioxid (CO_2) abbrennt. Durch die entstehende Wärme reagiert der Schwefel mit dem Salpeter, wobei neben Stickstoff (N_2) auch Kaliumsulfat (K_2SO_4), Kaliumkarbonat (K_2CO_3) und Kaliumsulfid (K_2S) und noch einige weitere Stoffe entstehen. Der Gasdruck in der Waffe wird durch die Gase Stickstoff und Kohlendioxid erzeugt. Die drei andern Stoffe liegen (neben Spuren weiterer Stoffe) nach der Reaktion in fester Form vor. Sie machen über 60 % der gesamten Pulvermasse aus und verursachen den Rauch und die Verschmutzung des Laufes. Da sie leicht wasserlöslich sind, lassen sie sich problemlos auswaschen.

3.2.3 Nitrocellulose basierte Treibmittel

3.2.3.1 Nitrocellulose

Schwarzpulver wurde nicht nur als Treibmittel für Geschosse verwendet, sondern seit der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts auch als Sprengmittel im Bergbau. Zu Beginn des 19. Jahrhunderts schienen jedoch die Grenzen der Sprengkraft des Schwarzpulvers erreicht zu sein und es begann die Suche nach leistungsfähigeren Stoffen.

Nachdem in den 30er Jahren bereits Experimente mit Nitrieren verschiedener Stoffe durchgeführt worden waren, entdeckte im Jahre 1846 der an der Universität Basel lehrende deutsche Chemiker Christian F. SCHÖNBEIN die *Nitrocellulose* (auch *Schießbaumwolle* genannt, chemische Bezeichnung: Cellulosenitrat). Im gleichen Jahr stieß auch Rudolf C. BOETTGER in Frankfurt am Main auf diesen Explosivstoff.

Nitrocellulose verpufft nach der Zündung sehr rasch und hinterlässt dabei keine Rückstände; insbesondere entsteht kein sichtbarer Rauch. Dadurch schien dieser Stoff geeignet zu sein, Schwarzpulver zumindest als Treibmittel für Projektile zu ersetzen. Allerdings war die Abbrandgeschwindigkeit viel zu groß.

Ein Jahr darauf, 1847, fand der italienische Chemiker Ascanio SOBRERO bei Arbeiten mit Nitrocellulose einen brisanten und äußerst schlagempfindlichen Sprengstoff in flüssiger Form, das *Nitroglycerin* (Ngl, chemische Bezeichnung: Glyceroltrinitrat). SOBRERO empfand diesen Stoff für die Praxis als zu gefährlich. Erst 20 Jahre später gelang es dem schwedischen Chemiker Alfred NOBEL (nach mehreren Rückschlägen) diesen Stoff durch Mischen mit Kieselgur zu bändigen und unter dem Namen Dynamit als Sprengstoff technisch verwendbar zu machen. Nitroglycerin spielt aber auch bei den Treibmitteln eine wichtige Rolle.

Das Ausgangsmaterial für die Herstellung von Nitrocellulose bilden kurze Baumwollfasern, die sogenannte Baumwoll-Linters. Baumwolle ist ein idealer Ausgangsstoff, da die Baumwollfasern aus fast reiner Cellulose bestehen. Durch Ein-

wirken von sogenannter Nitriersäure wird die Cellulose nitriert. Deren faserige Struktur bleibt dabei erhalten.

Nitriersäure ist ein Gemisch aus konzentrierter Salpetersäure und konzentrierter Schwefelsäure in unterschiedlichem Mischungsverhältnis. Für die Nitrierung von Cellulose wird ein Verhältnis von rund 25 % HNO_3 , 60 % H_2SO_4 und etwa 15 % H_2O verwendet. Der Grad der Nitrierung kann durch den Wasseranteil gesteuert werden.

Während die Salpetersäure für die Nitrierung verantwortlich ist, hat die Schwefelsäure die Aufgabe, das bei der Reaktion frei werdende Reaktionswasser aufzunehmen.

Je nach dem Grad der Nitrierung erhält die Nitrocellulose einen unterschiedlichen Stickstoffgehalt. Liegt dieser unterhalb 12.75 % (10.6–12.7 %), bezeichnet man das Produkt als Collodiumwolle (Cellulosedinitrat), ist er größer als 12.75 %, entsteht Schießbaumwolle (Cellulosetrinitrat). Der theoretische (und mit speziellen Nitrierverfahren auch beinahe erreichbare) Stickstoffgehalt liegt bei 14.15%; bei dem großtechnisch verwendeten Verfahren mit Nitriersäure wird jedoch nur ca. 13.5% Stickstoffanteil erreicht.

Für die Herstellung von Treibmitteln wird in der Regel ein Gemisch aus Schießbaumwolle und Collodiumwolle verwendet. Collodiumwolle allein bildet das Basismaterial für Zelluloid, einen der ersten Kunststoffe (Thermoplaste), der eine große Verbreitung fand (z. B. als Trägermaterial für fotografische Filme). Zudem taucht sie als Bindemittel in Nitrolacken und in Klebstoffen auf.

In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts wurden viele Versuche unternommen, die Brennfreudigkeit von Nitrocellulose zu beschränken und sie in ein brauchbares Treibmittel überzuführen. Es dauerte rund 40 Jahre, bis es 1884 P. VIEILLE in Frankreich und M. DUTTENHOFER in Deutschland gelang, diesen Stoff durch ein entsprechendes Verfahren handhabbar und damit auch lagerfähig zu machen. Einige Jahre später hatten auch A. NOBEL in Schweden (1887) und F. A. ABEL und J. DEWAR in England (1889) Möglichkeiten gefunden, Treibmittel auf der Basis von Nitrocellulose herzustellen.

Der Weg, den die beiden Nordeuropäer einschlugen, unterschied sich allerdings von jenem der beiden Kontinentaleuropäer, weshalb zwei grundsätzlich verschiedene Verfahren der Pulverherstellung bestehen:

- Die Nitrocellulose wird mit einem Lösungsmittel unter Einwirkung mechanischer Energie (kneten und pressen) gelatiniert. Das Lösungsmittel wird anschließend wieder entfernt. Diese Pulver werden als PmL (*Pulver mit Lösungsmittel*) bezeichnet
- Der Nitrocellulose wird ein Weichmacher beigelegt, wodurch mit Anwendung thermischer und mechanischer Energie (erwärmen und kneten) ein Thermoplast entsteht. Diese Pulver werden PoL (*Pulver ohne Lösungsmittel*) genannt.

Bleibt die Nitrocellulose der einzige Energieträger, tragen Treibmittel auch den Namen „einbasige Pulver“. Werden ein oder zwei weitere Explosivstoffe eingearbeitet (z. B. als energetische Weichmacher bei den PoL-Pulvern), so werden sie als „zweibasige“ bzw. „dreibasige“ Pulver bezeichnet.

3.2.3.2 Einbasige Treibmittel

Die von VIEILLE gefundene Lösung zur Zähmung der Nitrocellulose ist in ihren Grundzügen auch heute noch aktuell. Durch Beifügen von Alkohol und Ether und längerem Kneten und Pressen wird die faserige Struktur der Nitrocellulose in eine amorphe, plastische Masse übergeführt (geliert).

DUTTENHOFER verwendete zur Lösung der Nitrocellulose nicht das Rezept von VIEILLE, sondern das heute kaum mehr gebräuchliche Ethylacetat.

Anstelle von Alkohol und Ether kann auch Aceton verwendet werden. Während Alkohol und Ether nur mittels nitrierter Kollodiumwolle gelieren können, schafft Aceton diesen Prozess auch mit hochnitrierter Schießbaumwolle.

In diesem knetbaren Zustand können aus diesem Material durch Strangpressen und Schneiden beliebig geformte Pulverkörper und -körner hergestellt werden. Damit die Form auch stabil bleibt, muss das Lösungsmittel anschließend in einem Trocknungsprozess wieder entfernt werden.

Derart hergestellte Treibmittel werden *Nitrocellulosepulver* (kurz: Nc-Pulver) oder – wie bereits erwähnt – *einbasige Pulver* genannt (englisch: „single base propellant“, SB), da sie nur einen Stoff als Energieträger haben.

Nc-Pulver werden in erster Linie bei Klein- und Mittelkaliberwaffen eingesetzt, aber auch für kleine und mittlere Ladungsgruppen der Artillerie verwendet. Mit verschiedenen Zusätzen werden sie ihrer Anwendung entsprechend angepasst. Im Wesentlichen bestehen sie aus 80–98 % Nitrocellulose, 1–4 % Stabilisatoren, Weichmachern und weiteren Stoffen, so zur Dämpfung des Mündungsfeuers und zur Rohrschonung sowie aus Mitteln zur Oberflächenbehandlung. Wichtig sind insbesondere die Stabilisatoren, welche die Lebensdauer der sehr temperaturempfindlichen Nitrocellulose wesentlich verlängern helfen.

Leistungssteigerungen bei Nc-Pulvern werden durch Nachbehandlung (Imprägnierung) mit *Nitroglycerin* (Ngl) erzielt (wie z. B. Kugelpulver und EI[®]-Pulver, die ebenfalls „semi-double base“ Pulver genannt werden), aber auch durch kristalline Energieträger (Hexogen, Nitroguanidin), die vor dem Kneten der Nitrocellulose beigelegt werden (bezeichnet als ECL[®]-Pulver oder Semi-Nitramin-pulver).

3.2.3.3 Zwei- und dreibasige Treibmittel

Zweibasige (engl. „double base“, DB) und dreibasige (engl. „multiple base“, MB) Treibmittel lassen sich mit oder ohne Lösungsmittel produzieren.

Ein Verfahren ohne Lösungsmittel wurde in seiner ursprünglichen Form von A. NOBEL (1887) sowie von F. A. ABEL und J. DEWAR (1889) entwickelt. Sie fanden heraus, dass Nitrocellulose bereits durch Beigabe von Nitroglycerin – einem zweiten Energielieferanten – geliert. Bei einer heutigen Produktion zwei- und dreibasiger Pulver nach diesem Prinzip wird zunächst eine sogenannte Pulverrohmasse hergestellt, wobei der in Wasser aufgeschlämmten Nitrocellulose *Nitro-*

glyzerin (Ngl) oder *Diglycoldinitrat* (chem. *Diethylenglycoldinitrat*, Degdn) oder beide unter starkem Rühren langsam beigefügt werden. Der Anteil dieser Sprengstoffe an der Pulverrohmasse kann bis zu 50 % betragen.

Ngl und Degdn gehören zu den flüssigen Salpetersäureestern, die wegen ihrer öligen Form oft auch als Sprengöle bezeichnet werden.

Dabei bindet die Nitrocellulose die Sprengöle fast vollständig und wird dadurch geliert. Zur Konsolidierung der Verbindung zwischen den beiden wird die Pulverrohmasse einige Zeit in einem Reifelager zwischengelagert. Für die eigentliche Pulverherstellung wird sie zusammen mit den erforderlichen Zusätzen (Stabilisatoren, Mündungsfeuereämpfer usw.) vermischt. Im Falle eines dreibasigen Pulvers wird zugleich auch der dritte Energieträger (in den meisten Fällen *Nitroguanidin*, Nigu) beigefügt. Durch den anschließenden Walzprozess entsteht nach mehrmaligem Durchgang eine feste Kunststoffmasse, welche in Rollen aufgewickelt wird und so der Presse zugeführt werden kann. Dort wird die Masse bei 70–80° in die gewünschten Formen stranggepresst und nach Bedarf geschnitten.

Bei der Fabrikation zwei- und dreibasiger Treibmittel unter Anwendung von Lösungsmitteln wird ebenfalls zuerst ein Vorprodukt hergestellt. Dieses als Pulvervorkonzentrat bezeichnete Erzeugnis besteht aus Nitrocellulose und einem oder mehreren Sprengölen, wobei der Anteil an Sprengölen mit 80 % wesentlich höher ist als in der Pulverrohmasse.

Zur Herstellung des Pulvers selbst werden die Bestandteile der Rezeptur (Pulvervorkonzentrat und Zusätze) zusammen mit dem Lösungsmittel (üblich ist ein Gemisch aus Aceton und Ethanol) sukzessive in den Knetter gegeben und einige Stunden geknetet. Bei dreibasigem Pulver wird zugleich auch Nitroguanidin beigegeben. Nach Beendigung des Mischens wird das Pulver durch Strangpressen geformt, geschnitten und anschließend getrocknet.

Je nach dem Geliermittel werden die zweibasigen Pulver *Nitroglyzerin-Pulver* (kurz: Ngl-Pulver) bzw. *Glykol-Pulver* genannt. Zusammengesetzt sind sie aus 20–70 % Nitrocellulose, 20–50 % Sprengöl, 2–10 % Weichmachern, Stabilisatoren und weiteren Zusätzen. Ihr Energiegehalt ist größer als beim einbasigen Pulver; sie entwickeln beim Abbrand aber auch eine höhere Temperatur, wodurch die Waffen stärker belastet werden. Diesem Nachteil ist man durch das Zufügen des dritten Energieträgers, des Nitroguanidins, begegnet. Nitroguanidin ist ein sehr unempfindlicher Sprengstoff mit niedrigem Energiegehalt. Das dreibasige sogenannte *Nitroguanidinpulver* (Nigu-Pulver), zeigt sich als ein besonders energiearmes „kaltes“ Pulver, das insbesondere in Waffen mit hohen Schusskadenzen und bei den hohen Ladungsgruppen der Artillerie zur Anwendung kommt. Der Anteil Nitroguanidin in dreibasigem Pulver beträgt ca. 30–55 %.

3.2.4 Treibmittel ohne Nitrocellulose-Basis

3.2.4.1 Kunststoffgebundene Treibmittel

Nitrocellulose basierte Treibmittel besitzen einen gewichtigen Nachteil: sie entzünden sich bereits bei Temperaturen unter 200 °C selbst und reagieren relativ empfindlich auf mechanische Einwirkungen. Dies führte zur Entwicklung von Treibmitteln, die insbesondere gegenüber thermischen Einflüssen resistenter sind. Sie wurden lange Zeit als sogenannte *LOVA-Pulver* („low vulnerability propellants“) gehandelt; sie sollten bei Beschuss und Wärmeeinwirkung höchstens brennen und nicht deflagrieren oder detonieren.

Als Energieträger werden sekundäre Sprengstoffe verwendet, wie z. B. Hexogen oder Oktogen, aber auch Nitroguanidin oder Ammoniumperchlorat. Diese werden in einem Binder so eingebunden, dass sich ein regulärer Abbrand ergibt. Je nach den Möglichkeiten der Verarbeitung kommen als Binder Duroplaste, Thermoplaste oder Gelbinder in Frage. Sie können auch energie- oder gasliefernde Anteile enthalten und werden in diesem Fall als energetische Binder bezeichnet; andernfalls heißen sie inert.

LOVA-Pulver werden in erster Linie bei großkalibrigen Waffen sowie Feststoffraketen eingesetzt. Im Bereich der Rohrwaffen finden sie sich z. B. auch bei hülsenloser Munition, wo sie auch unter der Bezeichnung HITP („high ignition temperature propellant“) bekannt sind. Durchgesetzt haben sie sich für diese Anwendung bisher nicht, da sie bei Beschuss sehr empfindlich reagieren.

3.2.4.2 Composite-Treibmittel

Composite-Treibmittel (auch Verbund-Treibmittel) bestehen hauptsächlich aus zwei Verbindungen, einem Oxidator und einem Binder, der zugleich auch den Brennstoff darstellt. Sie werden als Raketentreibsätze und bei Gasgeneratoren eingesetzt.

Im Gegensatz dazu sind in einem homogenen Treibmittel Oxidator und Brennstoff zusammen in einer chemischen Verbindung enthalten.

Geeignete Oxidatoren sind die Nitrate und Perchlorate des Ammoniums und der Alkalimetalle. Häufig verwendet wird *Ammoniumperchlorat*, insbesondere wegen seiner hohen Energie und der relativ druckunabhängigen Abbrandgeschwindigkeit. Nachteilig ist die Entstehung von Chlorwasserstoff, der in Verbindung mit Luftfeuchtigkeit zur Bildung von Rauch- und Salzsäurenebel führt. *Ammoniumnitrat* besitzt weniger Energie, brennt aber praktisch rauchlos und ohne korrosive Nebenprodukte ab. Ebenfalls relativ wenig Energie liefert *Kaliumperchlorat*; der Abbrand ist stark druckabhängig, erfolgt aber mit hoher Geschwindigkeit und unter starker Rauchbildung.

Als Binder dienen Thermoplaste (Asphalte, Polyvinylchlorid, Polyisobutylen) und Elastomere (Polysulfide, Polyurethan, Polybutadiene). Mit metallischen Zu-

sätzen (z. B. Aluminiumpulver) kann die Energie gesteigert werden. Die Abbrandgeschwindigkeit wird über den Zusatz von Metalloxiden (Eisen- oder Kupferoxide) geregelt. Bezeichnungen orientieren sich am Sauerstoffträger: APCP: „Ammoniumperchlorate Composite Propellant“, ANCP: „Ammoniumnitrate Composite Propellant“.

3.2.5 Physikalische Daten der Treibmittel

Innenballistische Berechnungen erfordern einige physikalische Daten des in der Rechnung vorkommenden Treibmittels. Es handelt sich dabei um:

- Die *Explosionswärme* Q_{ex} , welche die Energie angibt, die beim Abbrand von 1 g Pulver in N_2 -Umgebung als Wärmeenergie freigesetzt wird (gemessen in J/g); in O_2 -Umgebung wird sie *Verbrennungswärme* genannt.

Das Produkt aus Ladungsmasse und Explosionswärme ergibt die gesamte für den Schussvorgang verfügbare Energie.

- Das *spezifische Gasvolumen* (Gasmenge in lt oder dm^3 , die 1 g Pulver beim Verbrennen erzeugt),
- die *Flammtemperatur* T_{ex} (früher auch *Explosionstemperatur* bezeichnet), die sich beim Abbrand in einem konstanten Volumen einstellt,
- die *spezifische Energie* F_{se} (früher auch *Pulverkraft*) stellt ein Maß für die mechanische Energie dar.

Sie wird durch die Druckzunahme bestimmt, die sich in der Druckbombe (Volumen konstant) beim Abbrand eines Gramms Pulver ergibt und entspricht der dabei entstehenden Druckenergie.

- Die *Verpuffungstemperatur*, bei welcher sich das Pulver selbst entzündet,
- der prozentuale Anteil *fester Rückstände* (in Form von Ablagerungen im Rohr und Rauch).

In der Tabelle 3.1 sind Richtwerte der vier wichtigsten Pulversorten aufgelistet.

3.2.6 Anzünd- und Zündmittel

Treibmittel und Sprengstoffe müssen gegen äußere Einflüsse wie Erschütterung, Schlag und Wärme unempfindlich sein, damit sie gefahrlos gelagert, transportiert, gehandhabt und geladen werden können. Sie lassen sich daher nicht auf einfache Weise mechanisch oder mit Wärme initiieren. Es braucht dazu Zwischenmittel, wobei zwei Arten unterschieden werden:

- *Anzündmittel* lösen eine Verbrennung oder eine Deflagration aus; das Anzünden des Explosivstoffes führt zu einer Abbrandgeschwindigkeit, die unterhalb der Schallgeschwindigkeit im Material bleibt.

Tabelle 3.1. Eigenschaften der verschiedenen Pulvertypen

		SP	SB	DB	MB
Verbrennungswärme Q_{ex}	[J/g]	2650	3000–4000	3500–5500	3000–4100
Spez. Gasvolumen	[lt/g]	0.28	0.90–0.97	0.80–0.86	0.90–1.00
Flammtemperatur T_{ex}	[C]	ca. 2400	2400–2600	3000–3800	2500–3000
spezifische Energie F_{se}	[J/g]		900–960	1100–1170	960–1050
Verpuffungstemperatur	[C]	300	170	160	150–170
Feste Rückstände	[%]	ca. 40	ca. 1	ca. 1	ca. 1

SP: Schwarzpulver, SB: „Single Base“, DB: „Double Base“, MB: „Multiple Base“-Pulver

- *Zündmittel* führen zu einer Detonation; durch das Zünden entsteht im Explosivstoff eine mit der Brennfront zusammenfallende Stoßwelle, die sich mit Überschallgeschwindigkeit fortsetzt.

Beide Arten haben die Aufgabe, eine mechanische oder thermische Einwirkung in eine ausreichende Anfeuerung des Explosivstoffes umzusetzen. Dazu enthalten sie einen *Initiator* in Form einer gewissen Menge eines schlag-, reib- oder wärmeempfindlichen Initialsprengstoffes. Zudem werden *Energie-* und *Sauerstoffträger* beigelegt, damit sehr schnell und ausreichend Energie freigesetzt wird.

Vorderladerwaffen wurden ursprünglich mit sehr fein gemahlenem Schwarzpulver, dem Zündkraut, gezündet, welches in die Zündpfanne und den Zündkanal hin zur Ladung geschüttet wurde. Dieses war sehr brennfreudig und ließ sich mit einer Lunte oder mit Funken eines Feuersteins des Steinschlusses anzünden.

Das erste Anzündmittel zur Anfeuerung von Schwarzpulver, das *Anzündhütchen*, wurde 1818 vom in England lebenden Schweizer J. EGG erfunden, der das Perkussionsschloss für Vorderladergewehre entwickelte. Als Initiator verwendete er *Knallquecksilber* (chemisch: Quecksilberfulminat) und als Energie- und Sauerstoffträger Kalisalpete.

Im Verlauf des letzten Jahrhunderts entstanden weitere, material- und umweltschonende Anzündsätze. Zunächst wurde Quecksilber und der stark korrosive Kalisalpete durch *Bleitrizinat* (chemisch Bleitrinitroresorcinat) und *Tetrazen* als Initiator und *Bariumnitrat* als Sauerstoffträger ersetzt (sogenannte SINOXYD®-Zündsätze). Mit dem Aufkommen der bleifreien Munition wurde das Bleitrizinat durch *Diazol* (chemisch: Diazodinitrophenol) und auch der Sauerstoffträger ausgetauscht (SINTOX®-Zündsätze). In der Tabelle 3.2 sind die Zusammensetzungen der üblichsten Anzündsätze zusammengestellt und der Tabelle 3.3 können die physikalischen Eigenschaften der gebräuchlichsten Initialsprengstoffe entnommen und untereinander verglichen werden.

Anzündhütchen genügen, um Pulvermengen für Kleinwaffen (Kurz- und Langwaffen) anzuzünden. Ladungen von Mittel- und Großkalibermunition benötigen hingegen eine stärkere Anfeuerung. Je nach Ladungsmasse werden ein Zündhüt-

Tabelle 3.2. Zusammensetzung von Anzündsätzen bei verschiedenen Pulvertypen

	Schwarzpulver	Nitropulver klassisch	Nitropulver bleifrei
Initiator	Knallquecksilber	Bleitrizinat	Diazodinitrophenol
Sensibilisierer		Tetrazen	Tetrazen
Energieträger	Schwarzpulver	Antimonsulfid	Nc-Pulver
Sauerstoffträger	Kaliumchlorat	Bariumnitrat	Strontiumnitrat
Diverses	Glaspulver	Glaspulver	

chen und eine Zusatzladung aus Schwarzpulver oder porösem Nc-Pulver zu einer Einheit zusammengebaut, welche in patronierter Munition (und in Mörsergranaten) als *Zündschraube* zum Einsatz kommt. Bei offenen Ladungen (die zumeist in Baumwollsäcken eingenäht sind) werden diese zusätzlichen Treibmittel am rückwärtigen Ende des Ladungspaketes angebracht und durch den Verschluss mit einer *Zündkartusche* gezündet (sogenannte *Schlagladungen*).

Für die Initiierung von sekundären Sprengstoffen reichen Anzündsätze nicht aus. Bei kleineren Sprengstoffmengen werden dazu sogenannte *Sprengkapseln* oder elektrische Zünder angewendet. Dies sind zylindrische Kupfer- oder Aluminiumhülsen, in welche ein Initialsprengstoff (Bleiazid oder Bleitrizinat) und hochbrisanter Sprengstoff (Nitropenta, Hexogen) eingebracht sind. Die Zündung kann mechanisch (mittels eines Anzündsatzes) oder auch elektrisch (durch Wärme) erfolgen. Größere Sprengstoffmengen und unempfindliche Sprengstoffe werden mit *Detonatoren* initiiert, die grundsätzlich gleich aufgebaut sind, jedoch mit einer zusätzlichen Verstärkerladung („*Booster*“) aus einem brisanten Sprengstoff versehen sind.

Tabelle 3.3. Physikalische Daten der wichtigsten Initialsprengstoffe

Initial-Sprengstoff	Dichte [g/cm ³]	Q _{ex} [J/g]	v _{Sp} [m/s]	GV [lt/g]	VT [°]	SE [N·m]	RE: [N]
Acetonperoxid	1.22		5300			0.3	0.1
Bleiazid	4.80	1536	5180	0.31	315–360	3–6.5	0.1–1
Bleitrizinat	3.00	1454	5200	0.47	275–280	2.5–5	1.5
Diazol	1.63	4000	6600	0.86	180–200	1.5	
Nitroglycerin	1.60	6680	7600	0.78	223–225	0.2	> 350
Knallquecksilber	4.42	1788	5000		165–170	1–2	3
Tetrazen	1.70		1500		140	1	8

Legende: Q_{ex}: Verbrennungswärme
v_{Sp}: Detonationsgeschwindigkeit
GV: Gasvolumen

VT: Verpuffungstemperatur
SE: Schlagempfindlichkeit
RE: Reibempfindlichkeit

3.3 Elemente der Innenballistik

3.3.1 Möglichkeiten der Projektilbeschleunigung

3.3.1.1 Allgemeines

Eine Fernwirkung irgendwelcher Art kann nur erzielt werden, wenn es gelingt, eine ausreichende Menge Energie an den gewünschten Ort zu transportieren. Dies bedeutet, dass am Ausgangsort zwei Energiepakete bereitgestellt werden müssen: das eine für den Transport, das andere für die am Endpunkt zu erbringende Arbeit.

Für klassische Wurfaffen (von weiteren Energieträgern wie Laser, Schallwellen usw. wird hier abgesehen) kommen für den Transport nur kinetische Energie (also eine mit Geschwindigkeit versehene Masse) in Frage und für die Wirkung im Ziel ebenfalls kinetische Energie oder aber chemische Energie (in Form eines Sprengstoffes), welche erst im Ziel in kinetische umgewandelt wird.

Somit muss in jedem Fall am Ausgangsort eine gewisse Menge kinetischer Energie zur Verfügung gestellt werden. Dies kann nur durch Erbringen von Arbeit an der für den Energietransport vorgesehenen Masse (dem Projektil) erfolgen. Die für diese Arbeit erforderliche (potenzielle) Energie kann auf verschiedenste Weise im „Wurfgerät“ (der Waffe) gespeichert werden.

3.3.1.2 Federenergie

Das erste Wurfgerät, das sich der Mensch konstruierte, um größere Reichweiten zu erreichen, war wohl der Bogen, in dem mit Muskelkraft erbrachte Arbeit in die (potenzielle) Energie einer gespannten Feder umgewandelt wurde.

Die ältesten gesicherten Bogenfunde stammen aus dem Mesolithikum (ca. 6000 v. u. Z.).

Geräte, welche Projektile mittels Federenergie beschleunigen, werden auch heute noch verwendet. Bekannt sind vor allem Bogen, Armbrust und Zwillie.

Dauids Schleuder, die er erfolgreich gegen Goliath einsetzte, beruht auf einem andern Prinzip, nämlich der Erzeugung von Rotationsenergie, die beim Aufheben der Zentripetalkraft in translatorische Energie übergeht.

Die „Innenballistik“ der Federwaffen basiert auf dem Gesetz der linearen Feder

$$(3.3:1) \quad F_{\text{sp}}(s) = D \cdot s \quad [N]$$

F_{sp} bedeutet die Spannkraft, D die Federkonstante und s die Zuglänge.

Die gesamte bis zur Auszugslänge s gespeicherte Energie beläuft sich dann zu

$$(3.3:2) \quad E = \int F_{\text{sp}}(s) \cdot ds = \frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2 \quad [J]$$

Wird die maximale Spannkraft mit $F_{\text{sp,max}}$ und der zugehörige Spannweg mit s_{max} bezeichnet, so ergeben sich für den Geschwindigkeits- und den Beschleunigungsverlauf des Projektils während der Beschleunigung in Abhängigkeit des Weges x

$$(3.3:3) \quad v(x) = \sqrt{\frac{F_{sp,max} \cdot x}{m} \cdot \left(2 - \frac{x}{s_{max}}\right)}, \quad [m/s]$$

$$(3.3:4) \quad v'(x) = \sqrt{\frac{F_{sp,max}}{m}} \cdot \frac{s_{max} - x}{\sqrt{s_{max} \cdot x \cdot (2 \cdot s_{max} - x)}}, \quad x > 0. \quad [1/s]$$

Die in den beiden letzten Formeln auftretende Masse m umfasst nicht nur die Projektilmasse m_p , sondern auch Teile des Wurfgerätes, welche zugleich mitbeschleunigt werden (Spiralfeder, Bogenarme und Sehne, Gummizug). Die Masse m kann somit in m_p und eine (fiktive) „Trägermasse“ m_t aufgeteilt werden. Diese folgt aus der Energiebilanz

$$E_{tot} = \frac{1}{2} \cdot F_{sp,max} \cdot s_{max} = \frac{1}{2} \cdot (m_p + m_t) \cdot v^2, \quad [J]$$

$$(3.3:5) \quad m_t = \frac{F_{sp,max} \cdot s_{max}}{v^2} - m_p. \quad [kg]$$

Der Wirkungsgrad des Wurfgerätes ergibt sich damit zu

$$(3.3:6) \quad \eta = \frac{E_0}{E_{tot}} = \frac{m_p}{m_p + m_t}. \quad [-]$$

wo E_0 die Startenergie des Projektils ist. Bei einem gegebenen Wurfgerät wird somit der Wirkungsgrad mit zunehmender Projektilmasse immer besser.

Dies gilt grundsätzlich für alle „Wurfgeräte“, vom Werfen mit der Hand bis zur Feuerwaffe.

Die in der Innenballistik oft interessierende *Schussentwicklungszeit* t_s (Zeit zwischen Schussauslösung und dem Zeitpunkt, an dem das Projektil die Waffe verlässt) ergibt sich mit $x = s_{max}$ zu

$$(3.3:7) \quad t(x) = \frac{s_{max}}{v^2} \cdot \arccos\left(1 - \frac{x}{s_{max}}\right), \quad [s]$$

$$(3.3:8) \quad t_s = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{s_{max}}{v^2}. \quad [s]$$

Dieses Formelsystem ist für lineare Federn gültig und lässt sich angenähert auch bei Systemen anwenden, die sich ähnlich einer linearen Feder verhalten (Federpistolen, Langbogen). $F_{sp,max}$ ist jedoch so zu wählen, dass $\frac{1}{2} \cdot F_{sp,max} \cdot s$ der effektiv erbrachten Spannarbeit entspricht. Bei größeren Abweichungen von der Linearität (z. B. bei Compoundbogen) ist mit dem effektiven Weg-Kraftverlauf zu rechnen

$$(3.3:9) \quad v(x) = \sqrt{\frac{2}{m} \cdot \int_0^x F_{sp}(s_{max} - \xi) \cdot d\xi}.$$

Die maximal mögliche Geschwindigkeit ergibt sich für $x = s_{max}$.

3.3.1.3 Komprimierte Gase

Nicht nur beim Zusammendrücken oder Dehnen einer Feder kann Energie gespeichert werden, sondern auch beim Komprimieren eines Gases. Diese Möglichkeit der Energiebereitstellung wurde und wird auch heute noch bei verschiedenen Waffen und Wurfgeräten angewendet. In einer Kammer hinter dem Geschoss wird ein Gas unter einen vorgegebenen Druck gesetzt, der sich bei Schussauslösung durch ein (sehr schnell öffnendes) Ventil entspannt und am Geschossboden die beschleunigende Kraft erzeugt.

Für die Erzeugung des Druckes werden zwei Verfahren angewendet:

- Mechanische Kompression (Luftgewehr),
- Entnahme aus einem Druckbehälter (CO₂-Pistole, großkalibrige Waffen).

Unter gewissen vereinfachenden Annahmen kann der Weg-Geschwindigkeitsverlauf eines derart beschleunigten Geschosses berechnet werden. Setzt man voraus, dass die Öffnungszeit des Ventils vernachlässigt werden kann und der Entspannungsprozess isentrop (d. h. ohne Wärmeaustausch mit der Umgebung) verläuft, also gemäß

$$p \cdot V^\gamma = \text{const} , \quad [J]$$

so ergibt sich für den Druck am Geschossboden, nachdem das Geschoss den Weg x zurückgelegt hat

$$(3.3:10) \quad p(x) = p_0 \cdot \left(\frac{V_0}{V_0 + A \cdot x} \right)^\gamma - \frac{m_{\text{Gas}} \cdot v^2}{2 \cdot (V_0 + A \cdot x)} . \quad [N/m^2]$$

Darin bedeuten: V_0 das Vorkammervolumen, p_0 der Vorkammerdruck, A der Laufquerschnitt, m_{Gas} die Gasmasse und v die Geschosseschwindigkeit. Die Gasmasse errechnet sich aus Vorkammerdruck und -volumen mittels der Gleichung (2.3:2). Der zweite Summand auf der rechten Seite ist die Druckminderung, die sich aus der Bernoulli-Gleichung ergibt.

Nach dem d'Alembert'schen Prinzip (Gl. 2.2:31) ergeben sich die Geschwindigkeit und der Weg mit dem folgenden Differenzialgleichungssystem

$$(3.3:11) \quad \frac{dv}{dt} = \frac{p(x) \cdot A - R}{m_p + \frac{1}{2} \cdot m_{\text{Gas}}} , \quad [m/s^2]$$

$$(3.3:12) \quad \frac{dx}{dt} = v . \quad [m/s]$$

m_p bezeichnet die Geschossmasse und R stellt eine mögliche Reibungskraft dar.

Die drei Gleichungen (3.3:10–12) beschreiben die Geschossbewegung und den Druckverlauf im Lauf einer Druckgaswaffe. Mit entsprechenden Daten von Waffen ergeben sie durchaus plausible Resultate.

Heute sind in erster Linie kleinkalibrige Druckgaswaffen im Bereich des sportlichen Schießens verbreitet. In der ersten Hälfte des 20. Jh. wurden jedoch auch

größere Geschütze für Druckluftantrieb gebaut, da sie deutlich geräuschärmer als Feuerwaffen waren. So kamen bereits im ersten Weltkrieg Minenwerfer im Kaliberbereich 105 bis 200 mm zum Einsatz, die Granaten von 6.5 bis 22.6 kg Masse auf Distanzen bis zu 800 bzw. 1250 m weit warfen.

3.3.1.4 Explosivstoffe

In Abschn. 3.2 wurden die typischen Eigenschaften von Explosivstoffen, insbesondere der Treibmittel beschrieben. Sie verbrennen ohne Sauerstoffzufuhr zu benötigen, erzeugen dabei eine große Menge Gase und hinterlassen (mit Ausnahme des Schwarzpulvers) kaum feste Rückstände.

Es überrascht daher nicht, dass – trotz intensiver Bemühungen um andere Antriebsmöglichkeiten – die auf Explosivstoffen basierten Treibmittel bei der Beschleunigung von Projektilen aus Rohr Waffen und bei kleinen Raketen nach wie vor absolut dominant sind.

3.3.2 Treibmittelabbrand

3.3.2.1 Die Abbrandgeschwindigkeit

Wie bereits im Abschn. 3.2.1.2 erwähnt, brennen Treibmittel stets senkrecht zu ihrer Oberfläche mit einer definierten Abbrandgeschwindigkeit r ab. Wird in der Zeit dt die Schichtdicke de umgesetzt, so gilt

$$(3.3:13) \quad r = \frac{de}{dt} . \quad [\text{m/s}]$$

Diese sogenannte *lineare Abbrandgeschwindigkeit* hängt sehr stark vom umgebenden Druck und von der Anfangstemperatur des Pulverkörpers ab. Empirische Untersuchungen, verbunden mit gewissen qualitativen und quantitativen theoretischen Überlegungen, führten im 19. Jh. zu verschiedenen Ansätzen für die Abbrandgeschwindigkeit.

Der französische Chemiker Paul VIEILLE (1893) wählte auf Grund seiner Ergebnisse die folgende Beziehung

$$(3.3:14) \quad \frac{de}{dt} = \beta \cdot \left(\frac{p}{p_0} \right)^\alpha . \quad [\text{mm/s}], [\text{m/s}]$$

p_0 bedeutet den konstanten Normaldruck, α und β sind bei gleicher Pulversorte Konstanten.

Für den Exponenten α ermittelte VIEILLE mit seinem Pulver den Wert $2/3$; später fand der deutsche Chemiker W. WOLFF eine Abhängigkeit von der *Ladedichte* (dem Verhältnis des Pulvervolumens zum gesamten dem Pulver zur Verfügung stehenden Volumen) mit Werten zwischen 0.46 und 0.66. Ausführliche Versuche von O. SCHMITZ (1913) legten einen Wert von 0.9–1 nahe; J. CORNER (1950) gibt

für diesen Wert einen Gültigkeitsbereich von 800 bis 4000 bar an. In der Vor-Computerzeit kam dies aus rechentechnischen Gründen durchaus gelegen, da sich die innenballistischen Rechnungen vereinfachten. Die Konstante β kann durch Messung der Abbrandgeschwindigkeit unter Normaldruck ermittelt werden.

In der freien Atmosphäre (bei normalem Luftdruck von 1 bar) verbrennt Schießpulver sehr langsam (ca. 0.1 mm/s). Mit zunehmendem Umgebungsdruck steigt die Abbrandgeschwindigkeit massiv an. Bei 4000 bar kann sie bereits rund 60 cm/s betragen. Einige typische Abbrandgeschwindigkeiten von Pulvern und ihre Druckabhängigkeit sind in der Tabelle 3.4 aufgeführt.

Ein weiterer wichtiger Ansatz für die Bestimmung der Druckabhängigkeit der Abbrandgeschwindigkeit geht auf die französischen Ballistiker H. MURAOUR und C. AUNIS (1949) zurück

$$(3.3:15) \quad \frac{de}{dt} = \delta + \xi \cdot \frac{p}{p_0}, \quad [\text{mm/s}], [\text{m/s}]$$

wobei δ üblicherweise konstant und ξ temperaturabhängig ist. Obwohl sich auch diese Gleichung in einem weiten Druckbereich (200-4400 bar) bewährt hat (nach R. E. KUTTERER, 1959), wird heute meist der Ansatz von P. VIEILLE verwendet.

Für die Berechnung des innenballistischen Ablaufes ist nicht allein die lineare Abbrandgeschwindigkeit maßgebend, sondern der zeitliche Verlauf der Umsetzung der gesamten Pulvermasse. Wird mit e die Dicke des bereits verbrannten Pulvers bezeichnet und mit $A(e)$ die gesamte, zu diesem Zeitpunkt brennende Pulveroberfläche und bedeutet $V(e)$ das gesamte noch vorhandene Pulvervolumen, so lässt sich das in der Zeit dt neu umgesetzte Volumen zusammen mit der Abbrandgeschwindigkeit wie folgt darstellen

$$(3.3:16) \quad \frac{dV(e)}{dt} = -A(e) \cdot \frac{de}{dt}. \quad [\text{m}^3/\text{s}]$$

Es ist üblich, das nach Abbrand der Pulverdicke e verbliebene Volumen $V(e)$ des Pulverkörpers in Relation zum anfänglich vorhandenen Volumen V_0 zu setzen

$$(3.3:17) \quad z = 1 - \frac{V(e)}{V_0}. \quad [-]$$

Wird Gl. (3.3:17) nach der Zeit abgeleitet und Gl. (3.3:16) eingesetzt, ergibt sich

Tabelle 3.4. Abbrandgeschwindigkeiten diverser Pulver

Treibmittel	Druck [bar]	Abbrandgeschwindigkeit [mm/s]
Schwarzpulver	1	1.8
Nitrocellulose Pulver	1	0.06–0.09
Nitroglyzerin Pulver	1	0.07–0.25
do.	10	1.5
do.	500	75
do.	4000	600

$$(3.3:18) \quad \frac{dz}{dt} = \frac{A(e)}{V_0} \cdot \frac{de}{dt} \quad [1/s]$$

Die Gleichung wird mit der Anfangsoberfläche A_0 und der Dichte des Pulvers ρ_c erweitert, womit sich als relative (Volumen-)Abbrandgeschwindigkeit ergibt

$$(3.3:19) \quad \frac{dz}{dt} = \frac{A(e)}{A_0} \cdot B \cdot \frac{de}{dt}, \quad \text{mit} \quad [1/s]$$

$$(3.3:19a) \quad B = \frac{A_0 \cdot \rho_c}{m_c} \left(= \frac{A_0}{V_0} \right) \quad [1/m]$$

B heißt *Abbrandkoeffizient* des Pulvers und ist ausschließlich von der Geometrie des Pulverkörpers abhängig. Außer von der Abbrandgeschwindigkeit und vom Abbrandkoeffizient hängt die Pulverumsetzung nur noch vom Quotienten aus der momentan brennenden Oberfläche und der Anfangsoberfläche ab. Dieser wird mit $\varphi(z)$ notiert und als (geometrische) *Formfunktion* des Pulvers bezeichnet

$$(3.3:20) \quad \varphi(z) = \frac{A(e)}{A_0} \quad [-]$$

Die Formfunktion eines Pulvers spielt somit beim Abbrand eine entscheidende Rolle, weil durch geeignete Formgebung der Pulverkörper die entstehende Gasmenge gesteuert werden kann.

3.3.2.2 Die Formfunktion

Es mag erstaunen, dass auf der rechten Seite der Gl. (3.3:20) die Variable z nicht erscheint. Ein Blick auf Gl. (3.3:17) zeigt jedoch, dass die Formfunktion durch eine Parameterdarstellung definiert ist, mit der Dicke e des abgebrannten Pulvers als Parameter. $\varphi(z)$ ist somit ausschließlich von der geometrischen Form des einzelnen Pulverelements abhängig. Bei einfachen Formen ergeben sich sogar geschlossene Funktionen. So erhalten Kugel und Würfel die einfache Beziehung

$$(3.3:21) \quad \varphi(z) = (1-z)^{\frac{3}{2}}, \quad [-]$$


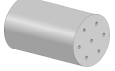
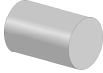


und für einen Zylinder mit isolierten Stirnflächen findet man

$$(3.3:22) \quad \varphi(z) = (1-z)^{\frac{1}{2}} \quad [-]$$

Formfunktionen weiterer typischer und klassischer Pulverformen in Parameterdarstellung können der Tabelle 3.5 entnommen werden. Die zugehörigen Funktionsgraphen sind in der Abb. 3.3 dargestellt.

Nimmt die Oberfläche beim Abbrand ab, ist also $\varphi(z) < 1$, so wird das Pulver als *degressiv* (oft unzutreffend auch als *offensiv*) bezeichnet. Nimmt jedoch die brennende Oberfläche zu, ist $\varphi(z) > 1$ und das Pulver heißt *progressiv*. Pulver, die mit konstanter Oberfläche abbrennen, werden *neutral* genannt ($\varphi(z) = 1$).

Tabelle 3.5. Formfunktionen einiger typischer Pulverformen

Röhrenpulver 	$z = 1 - \left(1 - \frac{2 \cdot e}{r_a - r_i}\right) \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot e}{c}\right)$ $\varphi(z) = 1 - \frac{4 \cdot e}{r_a - r_i + c}$
Siebenlochpulver 	$z = 1 - \left(1 - \frac{2 \cdot e}{c}\right) \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot e \cdot (r_a + 7 \cdot r_i + 3 \cdot e)}{r_a^2 - 7 \cdot r_i^2}\right)$ $\varphi(z) = 1 - 2 \cdot e \cdot \frac{r_a + 7 \cdot r_i - 3 \cdot c + 6 \cdot e}{c \cdot (r_a + 7 \cdot r_i)}$
Zylinderpulver 	$z = 1 - \left(1 - \frac{e}{r}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot e}{c}\right)$ $\varphi(z) = \left(1 - \frac{e}{r}\right) \cdot \left(1 - \frac{e}{c}\right)$
Streifenpulver 	$z = 2 \cdot e \cdot \frac{(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) - 2 \cdot e \cdot (a + b + c)}{a \cdot b \cdot c}$ $\varphi(z) = 1 - \frac{4 \cdot e \cdot (a + b + c - 3 \cdot e)}{a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c}$
Kreuzpulver 	$z = 1 - \frac{(b - 2 \cdot e) \cdot (4 \cdot a + b - 2 \cdot e) \cdot (c - 2 \cdot e)}{b \cdot c \cdot (4 \cdot a + b)}$ $\varphi(z) = \frac{2 \cdot (c - 2 \cdot e) \cdot (2 \cdot a + b - 2 \cdot e) + (b - 2 \cdot e) \cdot (4 \cdot a + b - 2 \cdot e)}{2 \cdot c \cdot (2 \cdot a + b) + b \cdot (4 \cdot a + b)}$

Erläuterung: r_a bedeutet jeweils den Radius des Zylinders, r_i den Radius des Loches. a steht stets für die größere Abmessung, b für die kleinere der Stirnfläche, c ist immer die Länge des Pulverstückes. Mit e wird die Dicke des bereits verbrannten Pulvers bezeichnet.

Konvexe Pulverkörper brennen grundsätzlich degressiv ab. Typische Formen bei kleinkalibrigen Waffen sind Kugel (Abb. 3.4 a), Blättchen (Abb. 3.4 b) und kurze Röhrchen (Abb. 3.4 c). Neutrale Pulver lassen sich durch Zylinder mit isolierter (nicht brennender) Mantelfläche oder durch Röhren mit isolierten Stirnseiten darstellen. Als nahezu neutral gelten lange Röhren-, Streifen- und Kreuzpulver (Abb. 3.5), wie sie bei der klassischen Artillerie eingesetzt wurden. Ein progressiver Abbrand wird durch Zylinder mit mehrfacher Lochung erreicht. Aus Symmetriegründen kommen dabei 7-, 19- und auch 43-Lochpulver in Frage (Beispiele siehe Abb. 3.6). Sie werden in erster Linie bei Waffen mit langen Rohren (Mittelkaliber-Flak, Panzer) eingesetzt.

Nach einer bestimmten Brennstrecke zerfallen Mehrlochpulver in mehrere Einzelteile, welche anschließend (als angenähertes Dreieckpulver) stark degressiv fertig brennen. Eine stückweise Darstellung der Formfunktion wird damit zwingend (siehe Abb. 3.3).

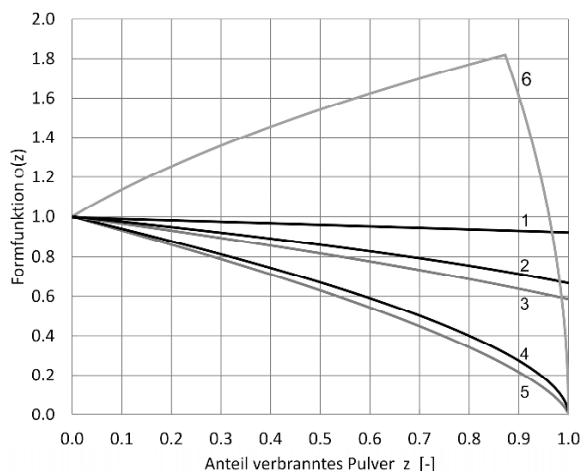


Abb. 3.3. Verlauf der Formfunktionen verschiedener Pulverformen:

- 1: Kreuzpulver,
- 2: Streifenpulver,
- 3: kurzes Röhrchenpulver ($L/D=5$),
- 4: Zylinderpulver,
- 5: Kugelpulver,
- 6: 7-Loch-Pulver.

Wegen der relativ komplizierten Darstellung der Formfunktionen realer Pulverkörper werden heute – in Anlehnung an die Gl. (3.3:21) und (3.3:22) – üblicherweise ein oder mehrere Kurvenstücke mit dem folgenden Ansatz verwendet

$$(3.3:23) \quad \varphi(z) = \mu \cdot (1 + \lambda \cdot z)^n, \quad [-]$$

und damit die in der Praxis vorkommenden (meist experimentell bestimmten) Formfunktionen approximiert.

In der Vor-Computerzeit war dieser Ansatz beliebt, weil er mit $\lambda = 1$ und $n = \frac{1}{2}$ eine geschlossene Integration der Energiegleichung ermöglichte.

3.3.2.3 Chemische Beeinflussung der Abbrandgeschwindigkeit

In Gl. (3.3:19) wurde im Zusammenhang mit der relativen Umsatzrate des Pulvers dz/dt der Abbrandkoeffizient B eingeführt, der wegen seiner Dimension $[1/m]$ mit zunehmender Größe des Pulverkornes stets kleiner wird. Dies bedeutet, dass bei großen Pulverkörnern aus geometrischen Gründen grundsätzlich mit einer trägeren Umsetzung des Pulvers und damit mit einem langsameren Druckanstieg zu rechnen ist als bei kleinen. Bei Munition für kleinkalibrige Waffen sind jedoch kleine Pulverteilchen erwünscht, da sie eine höhere Ladedichte erlauben.



Abb. 3.4. Verschiedene Pulverformen für Kleinwaffen: a: Kugelpulver; b: Blättchenpulver; c: kurzes Röhrchenpulver.

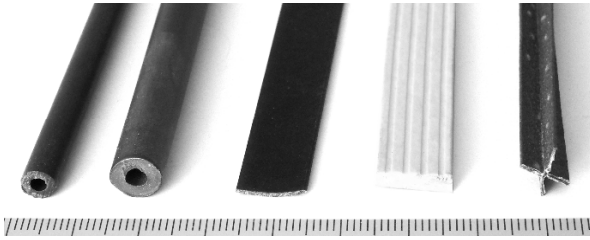


Abb. 3.5. Pulver für Artillerieladungen. Von links: Zwei Röhrenpulver, dünnes und dickes Streifenpulver und Kreuzpulver. Die Länge der Stangen richtet sich in der Regel nach der Länge des Laderaumes.

Die meisten Kurzpulver (siehe Abb. 3.4) werden daher einem Verfahren unterzogen, welches eine Steuerung der Abbrandgeschwindigkeit außerhalb geometrischer Formgebung ermöglicht. Durch eine *Oberflächenbehandlung* wird ein sogenannter Phlegmatisator auf das Pulver aufgetragen, der eine bestimmte Strecke in das Pulverkorn eindringt und die Brennfreudigkeit dieser Schicht verringert. Progressive Mehrloch-Pulver (siehe Abb. 3.6) können mit demselben Verfahren in der Progressivität und damit in ihrer Leistung gesteigert werden. Auf diese Weise lässt sich das Abbrandverhalten eines Pulvers zusätzlich beeinflussen.

3.3.2.4 Das Abbrandgesetz

Setzt man nun die Gl. (3.3:14) und (3.3:20) in die Gleichung der relativen Abbrandgeschwindigkeit (3.3:19) ein, so ergibt sich das nach P. J. CHARBONNIER (1908) benannte *Abbrandgesetz*, welches die Umsetzungsrate des Pulvers mit dem Druck in Verbindung bringt

$$(3.3:24) \quad \frac{dz}{dt} = \varphi(z) \cdot B \cdot \beta \cdot \left(\frac{p}{p_0} \right)^\alpha. \quad [1/s]$$

Darin bedeuten $\varphi(z)$ die Formfunktion (in der Regel gemäß Gl. 3.3:23), B den Abbrandkoeffizienten nach Gl. (3.3:19a) und β die lineare Abbrandgeschwindigkeit beim Normaldruck p_0 . Die beiden (konstanten) letzten Größen werden oft zusammengefasst und als *Lebhaftigkeit* B_A des Pulvers bezeichnet

$$(3.3:25) \quad B_A = B \cdot \beta = \frac{A_0 \cdot \rho_c \cdot \beta}{m_c}. \quad [1/s]$$

Sie bestimmt die anfängliche Gasproduktionsrate des Pulvers.

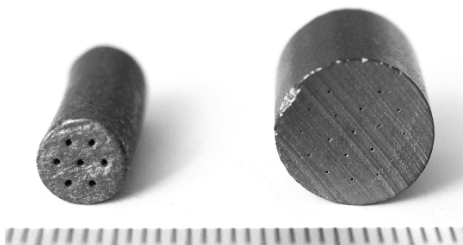


Abb. 3.6. Links: 7-Loch-Pulver für Mittelkalibermunition; rechts: 19-Loch-Pulver für Panzerkanonen.

Die Bezeichnungen sind nicht eindeutig. Gelegentlich wird die Größe B_A als Abbrandkoeffizient bezeichnet und B bleibt namenlos. Auch der Name *Brisanz* taucht ab und zu auf und wird der einen oder der andern Größe zugeordnet.

Die Lebhaftigkeit ist eine Pulverkonstante; sie lässt sich im Allgemeinen nur experimentell ermitteln, besonders dann, wenn das Pulver einer Oberflächenbehandlung zur Steuerung der Abbrandgeschwindigkeit unterzogen worden ist. Zur Messung kommt die manometrische Bombe (s. Abschn. 3.5.2) zur Anwendung.

3.3.3 Die Energiegleichung

Zur Herleitung der innenballistische Energiegleichung wird man auf die allgemeine Energiegleichung (2.3:20) zurückgreifen und die durch die Verbrennung freigesetzte Energie der inneren Energie der Gase und der kinetischen Energie der sich bewegenden Massen m^+ (Geschoss und Gase) gleichsetzen. Zum betrachteten Zeitpunkt sei von der Pulvermasse der Anteil z (Gl. 3.3:17) verbrannt. Somit ergibt sich die Gleichung

$$(3.3:26) \quad Q_{\text{ex}} \cdot z \cdot m_c = C_v \cdot T \cdot z \cdot m_c + \frac{1}{2} \cdot m^+ \cdot v^2 + \Psi \quad [\text{J}]$$

Mit $C_v = \frac{R}{\gamma - 1}$ und $p \cdot V = R \cdot T \cdot z \cdot m_c$,

$$\text{folgt} \quad Q_{\text{ex}} \cdot z \cdot m_c = \frac{p \cdot V}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \cdot m^+ \cdot v^2 + \Psi \quad [\text{J}]$$

Mit Ψ wird die nicht bezifferbare Verlustenergie bezeichnet, die unter anderem aus der an das Rohr übergehenden Wärmeenergie und aus innerer Energie der Gase besteht. In der Praxis wird sie durch einen an Experimente angepassten Isentropenkoeffizienten γ^* berücksichtigt.

Es gilt nun, das dem Gas zur Verfügung stehende Volumen zu bestimmen. Dieses setzt sich zusammen aus dem Volumen des Laderaumes und dem Rohrvolumen, welches durch das Geschoss bereits freigegeben worden ist und wird vermindert um das Eigenvolumen des noch unverbrannten Pulvers und das Kovolumen der entstandenen Gase

$$V = V_b + A_r \cdot x - \frac{(1-z) \cdot m_c}{\rho_c} - \eta \cdot z \cdot m_c \quad [\text{m}^3]$$

Darin bedeuten V_b das Laderaumvolumen, A_r die Rohrquerschnittsfläche, x der zurückgelegte Geschossweg, m_c die Pulvermasse, ρ_c die Pulverdichte und η das Kovolumen der Pulvergase.

Wird diese Beziehung noch etwas umgruppiert und das anfängliche Brennraumvolumen $V_b - m_c/\rho_c = V_b^*$ gesetzt, so ergibt sich als Energiegleichung

$$(3.3:27) \quad Q_{\text{ex}} \cdot z \cdot m_c = \frac{p}{\gamma^* - 1} \cdot \left[V_b^* - z \cdot m_c \cdot \left(\eta - \frac{1}{\rho_c} \right) + A_r \cdot x \right] + \frac{1}{2} \cdot m^+ \cdot v^2 \quad [\text{J}]$$

Sie ist in der Innenballistik allgemein unter dem Namen *Résal'sche Gleichung* bekannt und gilt als *Hauptgleichung* der Innenballistik.

Bleibt noch die Bestimmung der mitbeschleunigten Masse. Üblicherweise wird dafür der folgende Ansatz gewählt

$$(3.3:28) \quad m^+ = m_p + \varepsilon \cdot m_c . \quad [g], [kg]$$

Die Zahl ε heißt „*Sébert'scher Faktor*“. Zu dessen Ermittlung wurden in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts viele Versuche mit Rücklaufmessungen und Messungen des Druckunterschiedes durchgeführt, wobei Werte zwischen 0.25 und 0.5 angegeben wurden. Mit den besten Ergebnissen durchgesetzt hat sich offensichtlich der Wert 0.5 (C. CRANZ 1926, J. CORNER 1950, R. GERMERSHAUSEN 1980).

3.3.4 Die Geschossbewegung im Rohr

Die Berechnung der Geschossbewegung im Rohr erfolgt nach dem Prinzip von D'ALEMBERT (Gl. 2.2:31). Mit $a = dv/dt$ ergibt sich

$$(3.3:29) \quad m \cdot \frac{dv}{dt} = \sum F_i . \quad [N]$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung treten die Kräfte auf, die auf das Geschoss beim Durchgang durch das Rohr einwirken. Die durch den Druck der Pulvergase am Geschossboden agierende Kraft $p \cdot A_r$ (A_r : Rohrquerschnittsfläche) beschleunigt das Geschoss, während die Reibung F_r an der Rohrwand (in den Zügen und Feldern) der Bewegung entgegenwirkt. Zudem muss das Geschoss das im Rohr sich befindende Medium nach vorne ausstoßen.

Im Fall von Luft ist diese Masse gegenüber der Geschossmasse vernachlässigbar. Wird aber z. B. unter Wasser geschossen, hat dies einen deutlichen Einfluss auf den innenballistischen Ablauf.

Zwei weitere Kräfte dienen dazu, die Geschossbewegung bei Beginn des innenballistischen Prozesses zu verzögern. Damit das Pulver möglichst gleichmäßig und auf der gesamten Oberfläche zu brennen beginnt, ist anfänglich ein sehr schneller Druckanstieg erforderlich. Der Brennraum muss somit zunächst seine Größe beibehalten, das Geschoss also an seiner unmittelbaren Bewegung gehindert werden. Die dazu nötige Kraft wird durch den sogenannten *Einpresswiderstand* des Geschosses in die Züge und Felder erzeugt; bei patronierter Munition wird dies zusätzlich vom *Ausziehwiderstand* aus der Hülse unterstützt. Dies bedeutet, dass die Bewegungsgleichung erst in Aktion treten kann, wenn der zu diesen beiden Kräften gehörende Startdruck p_0 überschritten ist. Somit gilt

$$(3.3:30) \quad m \cdot \frac{dv}{dt} = p \cdot A_r - F_r \quad \text{für } p > p_0 . \quad [N]$$

Hinzu kommt, dass zwischen Auszieh- und Einpresswiderstand ein rotationsloser Geschossflug üblich und ein Freiflug möglich ist. Dies bleibt jedoch bei der Rechnung meist unberücksichtigt.

3.3.5 Der Druckverlauf, Druckkurven

Übersteigt nach dem Anfeuern des Treibmittels der Druck im Laderaum den Wert, der zum Ausziehen des Geschosses aus der Hülse und (oder) zum Einpressen des Geschosses in die Züge und Felder erforderlich ist, beginnt das Geschoss sich zu bewegen. Im Laderaum steigen der Druck und damit die Abbrandgeschwindigkeit weiter an, was zu einem noch schnelleren Druckanstieg führt. Das Geschoss beschleunigt nun sehr stark und stellt dadurch den Gasen zunehmend ein größeres Volumen zur Verfügung. Solange die produzierte Gasmenge die Volumenzunahme übersteigt, nimmt der Gasdruck weiter zu. Er erreicht sein Maximum, wenn die neu erzeugte Gasmenge der gleichzeitigen Volumenvergrößerung entspricht. Danach sinkt der Druck stetig ab. Nachdem das Treibmittel vollständig verbrannt ist, herrscht noch immer ein hoher Druck, der nun (angenähert isentropisch) expandiert und das Geschoss noch etwas weiter beschleunigt. Das Ende des Abbrandes und der Beginn der Expansion sind im Druckverlauf oft gut ersichtlich.

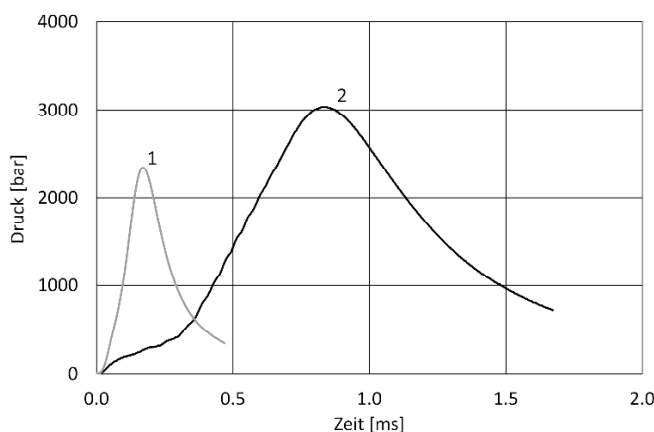


Abb. 3.7. Zeit-Druckkurven einer Kurzwaffe (9 mm Luger) und einer Langwaffe im Kaliber 7.5×55 . Der kurze Lauf der Kurzwaffe erfordert einen wesentlich schnelleren Pulverabbrand.

1 Kurzwaffe
2 Langwaffe

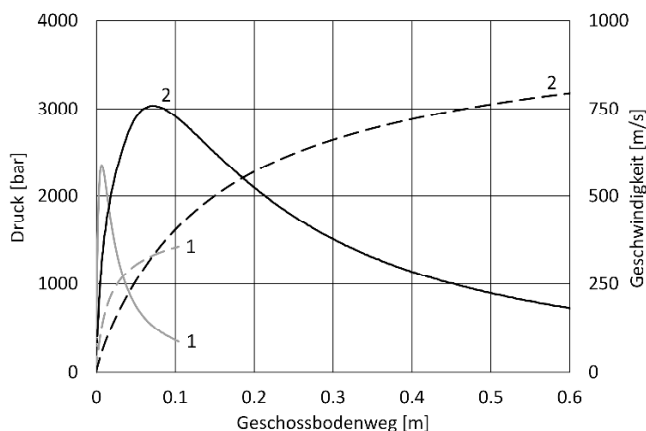


Abb. 3.8. Weg-Druck- (Linie ausgezogen) und Weg-Geschwindigkeitskurven (Linie gestrichelt) von Kurz- und Langwaffe aus Abb. 3.7. Hier ist zusätzlich der Unterschied in der Geschossbeschleunigung sichtbar.

1 Kurzwaffe
2 Langwaffe

Bei schwach geladenen Patronen, die in langen Läufen geschossen werden, kann es durchaus vorkommen, dass die druckbedingte beschleunigende Kraft kleiner wird als die Geschossreibung im Rohr. Die Mündungsgeschwindigkeit des Geschosses ist in diesem Fall geringer als seine maximale Geschwindigkeit im Rohr. Dies führt in der Regel zu schlechteren Ergebnissen, sowohl bezüglich der v-Streuung als auch der Treffgenauigkeit. Eine Verkürzung des Rohres ergibt in diesen Fällen eine höhere Mündungsgeschwindigkeit und bessere Schießresultate.

Die Abb. 3.7 bis 3.14 zeigen typische Druck- und Geschwindigkeitsverläufe in Abhängigkeit der Zeit und – approximativ – des Weges. Es sind jeweils mehrere Kurven im gleichen Graphen dargestellt um die Verschiedenartigkeit der Treibmittel unterschiedlicher Kaliber und Geschossmassen darzustellen.

Aus den Abb. 3.7 und 3.8 ist der Unterschied zwischen einem Treibmittel für Kurz Waffen und einem für Langwaffen ersichtlich. Der kurze Lauf erfordert einen wesentlich schnelleren Abbrand; das Geschoss erfährt dadurch eine höhere Beschleunigung. Die Abb. 3.9. und 3.10 vergleichen die Treibmittel eines leichten und eines schweren Geschoss im Mittelkaliberbereich. Der steilere Druckanstieg beim leichteren Geschoss zeigt, dass es sich um ein degressiveres Pulver handelt;

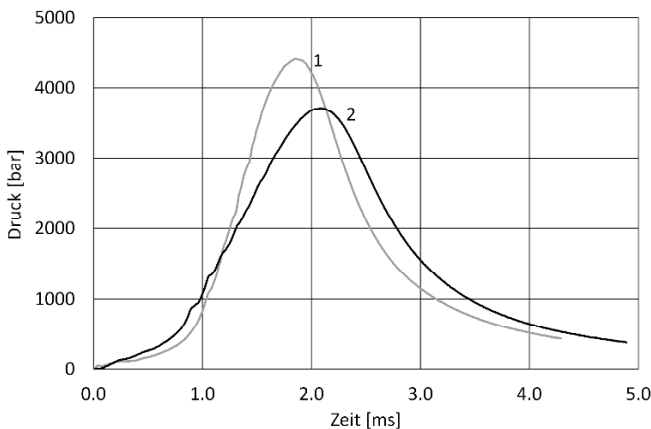


Abb. 3.9. Zeit– Druckkurven einer Patrone im Kaliber 30×173 mm mit einem leichten Unterkalibergeschoss (APDS) und einer mit schwerem Vollgeschoss. Das leichte Geschoss erfordert ein schnelleres Pulver.

- 1 APDS-Geschoss
- 2 Vollgeschoss

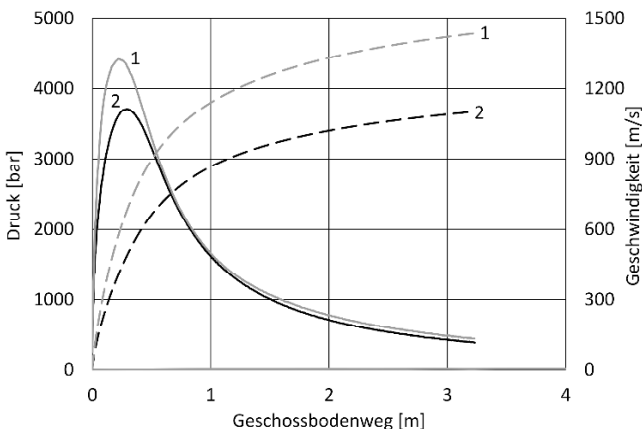


Abb. 3.10. Weg-Druck- (Linie ausgezogen) und Weg-Geschwindigkeitskurven (Linie gestrichelt) der beiden Patronen aus Abb. 3.9. Beachte die höhere Beschleunigung des leichteren Geschosses.

- 1 APDS-Geschoss
- 2 Vollgeschoss

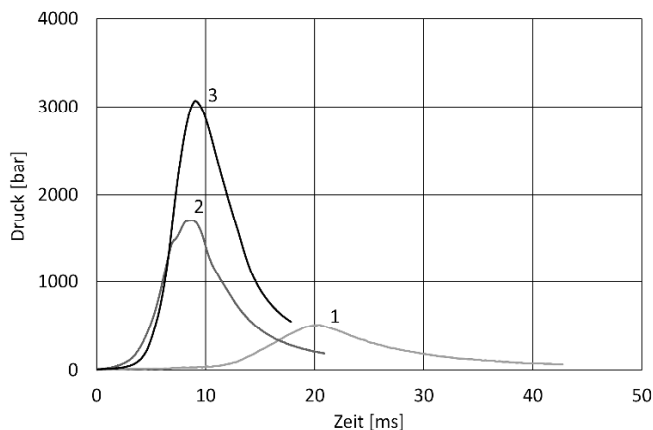


Abb. 3.11. Zeit-Druckkurven von drei Artillerieladungen im Kaliber 155 mm. Beachte die wegen dem geringen Druck lange Druckaufbauzeit der kleinen Ladung 3.

- 1 Ladung 3
- 2 Ladung 7
- 3 Ladung 9

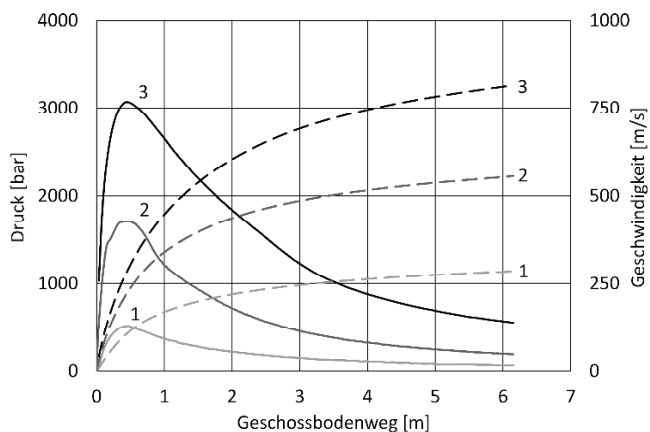


Abb. 3.12. Weg-Druck- (Linie ausgezogen) und Weg-Geschwindigkeitskurven (Linie gestrichelt) der drei Artillerieladungen aus Abb. 3.11.

- 1 Ladung 3
- 2 Ladung 7
- 3 Ladung 9

dies führt (wie beim kurzen Lauf) zu einer steilen Zunahme der Geschwindigkeit. Die folgenden zwei Abb. 3.11 und 3.12 zeigen auf, wie sich Druck und Geschwindigkeit bei verschiedenen Artillerieladungen verhalten. Bemerkenswert ist die lange Druckaufbauzeit bei der Ladung 3, die auf den geringen Druck zurückzuführen ist. Solche kleine Ladungen benötigen schnell brennende Pulver großer Oberfläche (üblich sind etwa Kreuzpulver, siehe Abb. 3.5).

In den Abb. 3.13 und 3.14 sind Druckkurven zweier verschiedener Geschosse eines Hochleistungsgeschützes dargestellt (120 mm Pz Kan). Der Knick im absteigenden Ast zeigt den Brennschluss des Treibmittels. Auffällig ist auch der Unterschied zwischen den beiden Geschossarten, besonders bezüglich der Fläche unter der Druck-Weg-Kurve.

Abb. 3.15 stellt die Druckkurven aller Kaliberbereiche einander gegenüber und zeigt dadurch auf, wie verschieden das Brennverhalten des Pulvers bei den unterschiedlichen Kalibern und Geschossmassen sein muss.

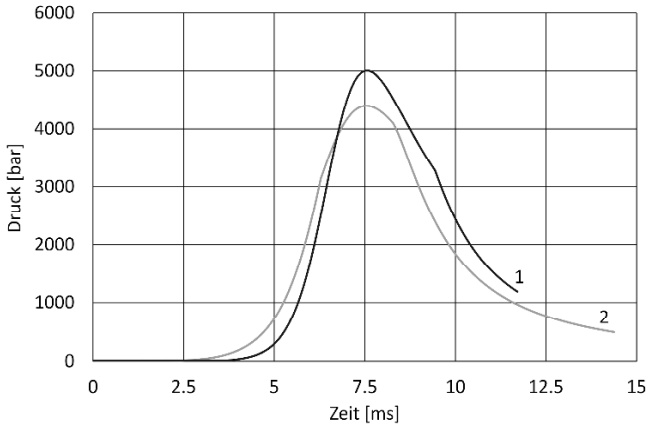


Abb. 3.13. Zeit-Druck-Kurven von Panzermunition im Kaliber 120 mm.

- 1 KE-Geschoss
- 2 HE-Geschoss

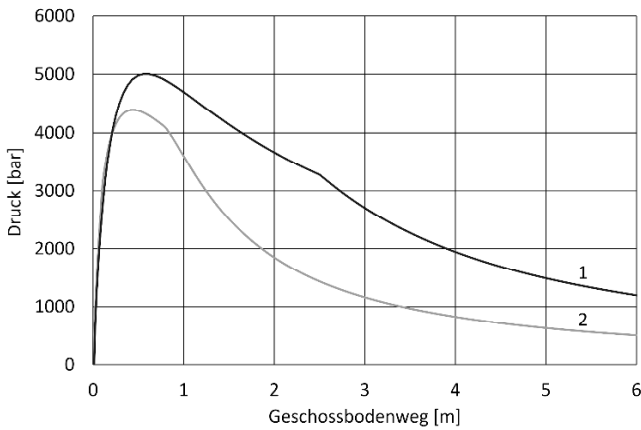


Abb. 3.14. Weg-Druck-Kurven der beiden Munitionsarten aus Abb. 3.13. Der Knick im absteigenden Ast markiert den Brennschluss des Treibmittels.

- 1 KE-Geschoss
- 2 HE-Geschoss

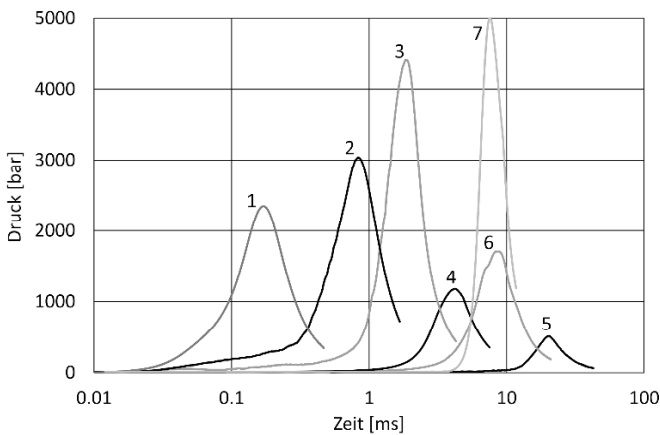


Abb. 3.15. Zeit-Druck-Kurven aller Kaliberbereiche dargestellt mit einer logarithmischen Zeitskala.

- 1 Patrone 9 mm Luger
- 2 Patrone 7.5 × 55
- 3 30 × 173 mm APDS
- 4 120 mm Mörser
- 5 155 mm Ldg 3
- 6 155 mm Ldg 7
- 7 120 mm Pz Kan, KE

3.3.6 Der Wirkungsgrad und die maximale Geschwindigkeit

Wie bereits im Abschn. 2.3.2.5 erwähnt, gehören Feuerwaffen physikalisch zu den Wärmekraftmaschinen, also zu Einrichtungen, welche Wärmeenergie in mechanische Energie umwandeln. In diesem Zusammenhang ist gelegentlich auch der mechanische Wirkungsgrad von Interesse, also der Anteil der Gesamtenergie, der mechanisch nutzbar gemacht werden kann.

Die gesamte Energie, die einem Schuss zur Verfügung gestellt wird, ist gegeben durch die Pulvermasse und durch die Verbrennungswärme des betreffenden Pulvers. Die erhaltene mechanische Energie entspricht der Mündungsenergie des Geschosses und der Bewegungsenergie der Gase (siehe Gl. 3.3:27). Der mechanische Wirkungsgrad der Waffe ergibt sich somit zu

$$(3.3:31) \quad \eta^+ = \frac{m^+ \cdot v_0^2}{2 \cdot m_c \cdot Q_{ex}} \quad [-]$$

$m^+ = m_p + \varepsilon \cdot m_c$ steht für die gesamte beschleunigte Masse (Gl. 3.3:28), m_p für die Geschossmasse und m_c für die Ladungsmasse; ε bedeutet den Sébert'schen Faktor. Für die effektive Wirkung η der Waffe ist nur die Mündungsenergie des Geschosses maßgebend, d. h. anstelle von m^+ ist in diesem Fall m_p einzusetzen.

Üblicherweise liegt der Wirkungsgrad einer Feuerwaffe zwischen 0.25 und 0.45. Er nimmt mit zunehmender Geschossmasse und zunehmendem Kaliber zu.

Mit Hilfe des mechanischen Wirkungsgrades lässt sich eine Grenzwertbetrachtung zur *maximal möglichen Mündungsgeschwindigkeit* von Pulverwaffen durchführen. Dazu geht man davon aus, dass die Hälfte der Pulvermasse mit dem Geschoss mit beschleunigt wird (Sébert'scher Faktor, Gl. 3.3:28) und dass die Geschwindigkeit des Pulvers und der Pulvergase v_c linear vom Stoßboden ($v_c = 0$) zum Geschossboden ($v_c = v_0$) zunehmen. Für die Energie des mitbeschleunigten Pulvers ergibt sich damit

$$(3.3:32) \quad E_c = \frac{1}{6} \cdot m_c \cdot v_0^2, \quad [J]$$

und es gilt die Energiegleichung

$$\frac{1}{2} \cdot \left(m_p + \frac{1}{3} \cdot m_c \right) \cdot v_0^2 = \eta^+ \cdot m_c \cdot Q_{ex} \quad [J]$$

Dividiert man diese Gleichung durch m_c und macht die Grenzwertbetrachtung

$$m_c \rightarrow \infty,$$

so ergibt sich für die Mündungsgeschwindigkeit die folgende Beziehung

$$(3.3:33) \quad v_0 = \sqrt{6 \cdot \eta^+ \cdot Q_{ex}} \quad [J]$$

Ein Pulver mit der Verbrennungswärme 5000 kJ/kg und einem Wirkungsgrad von 0.35 kann ein Geschoss höchstens auf rund 3240 m/s beschleunigen.

3.4 Innenballistische Berechnungen

3.4.1 Das thermodynamische Gleichungssystem

In den Abschn. 3.3.2 bis 3.3.4 sind die physikalischen Gesetzmäßigkeiten bereitgestellt worden, nach denen sich der innenballistische Vorgang richtet. Fasst man die dabei hergeleiteten Gleichungen zusammen, ergibt sich das thermodynamische Gleichungssystem der Innenballistik

$$(3.4:1a) \quad \frac{dz}{dt} = \varphi(z) \cdot B_A \cdot \left(\frac{p}{p_0} \right)^\alpha, \quad [1/s]$$

$$(3.4:1b) \quad \frac{dv}{dt} = \frac{p \cdot A_r - F_r}{m_p} \quad \text{wenn } p > p_s, \quad [m/s^2]$$

$$(3.4:1c) \quad \frac{dx}{dt} = v. \quad [m/s]$$

In der Résal'schen Gleichung (3.3:27) ist der Druck die zu berechnende Größe, weshalb die Gleichung danach umgestellt wird

$$(3.4:2) \quad p = \frac{(\gamma^* - 1) \cdot \left[Q_{ex} \cdot z \cdot m_c - \frac{1}{2} \cdot (m_p + \varepsilon \cdot m_c) \cdot v^2 \right]}{V_b^* - z \cdot m_c \cdot \left(\eta - \frac{1}{\rho_c} \right) + A_r \cdot x}. \quad [N/m^2]$$

Die Gleichungen (3.4:1a-c) bilden zusammen ein Differenzialgleichungssystem, das unter stetiger Berücksichtigung der Beziehung (3.4:2) mit einem numerischen Verfahren (z. B. Runge-Kutta) zu lösen ist. Es resultieren der Druckverlauf (insbesondere der Maximaldruck), die Geschossgeschwindigkeit und der Geschossweg im Lauf sowie der zeitliche Ablauf des ganzen Vorgangs. Dazu müssen eine ganze Reihe von Daten im Voraus bereitgestellt werden (siehe Tabelle 3.6).

- *Pulverdaten*: Masse, Dichte, Dicke, Anfangsoberfläche, Formfunktion, Kovolumen, Abbrandgeschwindigkeit in Abhängigkeit des Druckes, Verbrennungswärme, spezifische Energie,
- *Waffendaten*: Laufquerschnitt und -länge, Zugprofil, Laderaumvolumen (nur bei Kartuschenmunition, wo Geschoss und Ladung getrennt sind),
- *Munitionsdaten*: Geschossmasse, Einpresskraft, Reibung, zusätzlich bei patronierter Munition Hülsenvolumen (mit Berücksichtigung des in die Hülse hineinragenden Geschosshecks), Auszieh Widerstand.

Die Unterlagen werden am einfachsten bei den entsprechenden Herstellern eingeholt. Für Kleinwaffen existieren zwei internationale Normierungen für Patronenlagerabmessungen der Waffe und für die Hülsenmaße (C.I.P., „Commission Inter-

Tabelle 3.6. Zusammenstellung der für eine innenballistische Rechnung erforderlichen Daten

A_0	$[m^2]$	Anfangsoberfläche des Pulvers	p_0	$[N/m^2]$	Bezugsdruck
A_r	$[m^2]$	Rohrquerschnitt	v	$[m/s]$	Geschwindigkeit
B_A	$[1/s]$	dynamische Lebhaftigkeit	x	$[m]$	Geschossweg
F_r	$[N]$	Rohrreibung	z	$[-]$	Anteil verbrannten Pulvers
Q_{ex}	$[J/g]$	Verbrennungswärme	α	$[-]$	Druckexponent der Abbrandgeschwindigkeit
V_b	$[m^3]$	Volumen des Laderaumes	β	$[m/s]$	Abbrandgeschwindigkeit bei Normaldruck p_0
F	$[J/g]$	spezifische Energie	ε	$[-]$	Sébert'scher Faktor
μ, λ	$[-]$	Konstanten der Formfunktion (3.3:23)	γ^*	$[-]$	angepasster Isentropenexponent
m_c	$[kg]$	Pulvermasse	η	$[m^3/kg]$	Kovolumen
m_p	$[kg]$	Geschossmasse	$\varphi(z)$	$[-]$	Formfunktion
p	$[N/m^2]$	Druck	ρ_c	$[kg/m^3]$	Dichte des Pulvers

ationale des Armes à Feu Portative“ mit Sitz in Brüssel und SAAMI, „Sporting Arms and Ammunition Manufacturer's Institute“ in den USA). Für Kleinwaffen (bis Kaliber 15 mm) und einige Mittelkaliberwaffen ist auch eine Innenballistik-Software auf dem Markt erhältlich („*QuickLoad*“, H. BRÖMEL, 2009).

Trotz guter Zuverlässigkeit innenballistischer Rechnungen sind die Resultate stets anhand aktueller Ladedaten der Geschoss- und Pulverhersteller zu überprüfen und die in den Programmen angeführten Warnungen zu beachten.

3.4.2 Das Entspannungsverhältnis

Für die innenballistische Auslegung einer Waffe gibt es eine wichtige Grundregel, die das Laderaumvolumen und das Rohrvolumen betrifft.

Bei patronierter Munition entspricht das Laderaumvolumen dem Hülsenvolumen abzüglich des Volumens des in die Hülse hineinragenden Geschosshecks.

Wird das Laderaumvolumen mit V_b und das Rohrvolumen mit V_r bezeichnet, so gilt die folgende Faustregel

$$(3.4:3) \quad \frac{V_b + V_r}{V_b} = 1 + \frac{V_r}{V_b} > 5 \dots 6 . \quad [-]$$

Dieses Verhältnis vom gesamten Innenvolumen einer Waffe zum Laderaumvolumen wird als *Entspannungsverhältnis* (englisch: „expansion ratio“, französisch: „rapport de détente“) bezeichnet.

Genau genommen müsste sowohl im Zähler als auch im Nenner das Kovolumen der Pulvergase subtrahiert werden (J. CORNER, 1950). Dadurch würde aber die Formel den Status einer Faustregel verlieren, weil die einfache Beurteilung einer Waffe nicht mehr möglich wird. Am Ergebnis ändert sich wegen dieser Vereinfachung kaum etwas.

Die Regel (3.4:3) lässt sich mit der Zustandsgleichung der Gase (2.3:2) in Verbindung bringen. Da sich das Geschoss im Zeitpunkt des maximalen Gasdruckes erst sehr wenig bewegt hat (je nach Kaliber, einige mm bis mehrere cm, stets jedoch gering gegenüber der Rohrlänge), kann man näherungsweise das Laderaumvolumen mit dem maximalen Gasdruck p_{\max} in Verbindung bringen. Der Mündungsdruck p_{μ} hingegen korrespondiert mit dem gesamten Innenvolumen der Waffe. So ergibt sich

$$p_{\max} \cdot V_b = p_{\mu} \cdot (V_b + V_r) , \quad [J]$$

$$(3.4:4) \quad \frac{p_{\max}}{p_{\mu}} = 1 + \frac{V_r}{V_b} . \quad [-]$$

Das Entspannungsverhältnis entspricht demnach ungefähr dem Verhältnis vom maximalen Gasdruck zum Mündungsdruck. Der Mündungsdruck einer Waffe sollte also stets etwa 5 bis 6 Mal kleiner sein als der maximale Gasdruck. Ist dies nicht der Fall, ist mit einem schlechten thermischen Wirkungsgrad, starken Feuererscheinungen an der Mündung und einer starken Beeinträchtigung des Geschosses durch nachströmende Gase außerhalb der Mündung zu rechnen.

Waffen mit langen Rohren genügen der Regel (3.4:3) fast immer. Hingegen arbeiten Waffen mit kleinem Rohrvolumen (kurzläufige Pistolen und Revolver, Waffen mit sehr kleinem Kaliber) aus innenballistischer Sicht oft sehr unbefriedigend. Die Regel besagt auch, dass der Laderaumgröße (und damit der Treibmittelmenge) ebenfalls Grenzen gesetzt sind.

3.4.3 Der Drall und die Leistenkräfte

Lange Geschosse werden auf ihrer Flugbahn nach dem Prinzip eines Kreisels stabilisiert. Sie müssen also während der Beschleunigung im Rohr in eine schnelle Rotation um die Geschoss längsachse versetzt werden. Dazu dienen die schraubenförmig angeordneten Züge und Felder auf der Innenseite des Rohres.

Die für eine genügende Stabilität erforderliche Winkelgeschwindigkeit ist ausschließlich vom Geschoss und dessen Aufbau abhängig (siehe dazu Abschn. 5.6). Als waffenseitige Maßzahl dient die sogenannte *Dralllänge*, womit die Strecke, bezeichnet wird, während der das Geschoss eine Umdrehung vollzieht (entspricht auch der Ganghöhe der Schraube). Eine weitere, ebenfalls häufig verwendete Kennzeichnung ist der *Drallwinkel* als der Winkel zwischen Rohrachse und der Tangenten an die Züge.

Zwischen der Dralllänge Λ , dem Kaliber d und dem Drallwinkel Γ besteht die folgende Beziehung

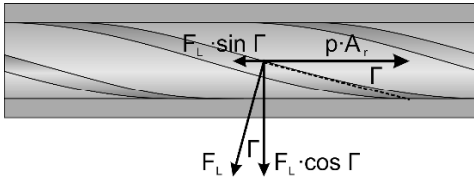


Abb. 3.16. Zur Berechnung der Leistenkräfte (der Drallwinkel ist stark überhöht gezeichnet).

$$(3.4:5) \quad \Gamma = \arctan \frac{d \cdot \pi}{\Lambda} . \quad [-]$$

Die Winkelgeschwindigkeit ω , die sich bei der Dralllänge Λ einstellt, ist von der Mündungsgeschwindigkeit v_0 abhängig und errechnet sich zu

$$(3.4:6) \quad \omega = 2 \cdot \pi \cdot \frac{v_0}{\Lambda} = \frac{2}{d} \cdot v_0 \cdot \tan \Gamma . \quad [1/s]$$

Zu Beginn seiner Bewegung wird das Geschoss mit dem für die Führung vorgesehenen Teil (Führungsbänder, Mantel) in die Züge und Felder des Rohres eingepresst. Weil diese bezüglich der Rohrachse den Drallwinkel einnehmen, wirken zwischen den Seitenflächen der Felder und jenen der Zugabdrücke am Führungsteil des Geschosses Kräfte, die das Geschoss in Drehung versetzen. Sie werden *Leistenkräfte* F_L genannt. Die Gesamtsumme ergibt sich in x-Richtung aus dem d'Alembert'schen Prinzip (Gl. 2.2:31) und dem Momentengleichgewicht um die x-Achse (siehe Abb. 3.16)

$$p \cdot A_r - F_L \cdot \sin \Gamma - m_p \cdot \frac{dv}{dt} = 0 , \quad [N]$$

$$F_L \cdot \frac{d}{2} \cdot \cos \Gamma - J_a \cdot \frac{d\omega}{dt} = 0 . \quad [J]$$

Nach einer kurzen Rechnung mit den (wegen kleinem Winkel Γ) zulässigen Approximationen $\sin^2 \Gamma \approx 0$ und $\cos \Gamma \approx 1$ und mit Berücksichtigung der Beziehung (3.4:6) und, ergibt sich die folgende Formel für die Gesamtleistenkraft

$$(3.4:7) \quad F_L = \frac{\pi \cdot J_a}{m_p} \cdot p \cdot \tan \Gamma . \quad [N]$$

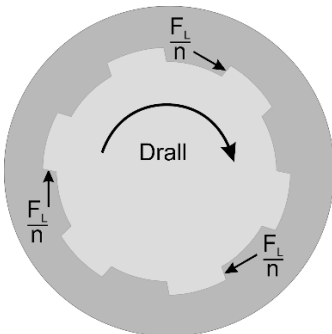


Abb. 3.17. Die Leistenkräfte. Die mit der Formel (3.4:7) berechnete Kraft F_L wird auf die Anzahl n der Züge aufgeteilt (wegen der Übersichtlichkeit sind nur einige der Teilkräfte eingezeichnet).

F_L bedeutet die Gesamtleistenkraft, J_a das axiale Trägheitsmoment des Geschosses, m_p die Geschossmasse, p den aktuellen Gasdruck und Γ den Drallwinkel.

Die Gesamtleistenkraft teilt sich auf die Anzahl der Zug-Feld-Paare auf (siehe Abb. 3.17). Die einzelnen Kräfte erzeugen in der äußersten Schicht des Führungsteils Scherspannungen, die mit zunehmendem Gasdruck ansteigen. Sie werden aber auch größer, wenn sich die Felder weniger in den Führungsteil des Geschosses (Führungsband, zylindrischer Teil des Geschosses) einpressen. Überschreiten diese Spannungen die Scherfestigkeit des Materials des Führungsteils, scheren die in das Geschoss eingepressten Züge und Felder ab. Das Geschoss wird nicht oder ungenügend in Drehung versetzt und fliegt nach Verlassen der Mündung instabil (Querschläger).

Gewehrläufe, die bereits mit einer größeren Schusszahl belastet sind und die im kalten Zustand völlig normal schießen, können im warmgeschossenen Zustand Querschläger erzeugen. Die durch die Erwärmung hervorgerufene Kalibererweiterung reicht aus, dass die Scherspannungen die Festigkeitsgrenze des Geschossmantelmaterials überschreiten. Nach Abkühlung des Laufes ist der Geschossflug wiederum normal.

Bei einem unsymmetrisch (oval) erodierten Kanonen- oder Haubitzenrohr kann sich die gesamte Leistenkraft auf zu wenige Feldeindrücke am Führungsband verteilen, wodurch dessen Scherfestigkeit ebenfalls überschritten werden kann. Die Granate wird nach Verlassen des Rohres mit zu geringer Stabilität fliegen.

Mit zunehmender innenballistischer Leistungssteigerung der Waffen und der Forderung nach langen Geschossen mit größerem Volumen (gleichbedeutend mit größerer Nutzlast) wurden die Grenzen der Scherbelastung der Führungsteile erreicht, insbesondere im Bereich des maximalen Gasdruckes, kurz nach Beginn der Geschossbewegung. Dies führte zu Waffenkonstruktionen mit sogenanntem *Progressivdrall*, bei denen der Drallwinkel einem bestimmten Gesetz folgend sukzessive zunimmt, bis der für die Stabilität des Geschosses erforderliche Enddrallwinkel erreicht ist. Man findet den Progressivdrall in erster Linie bei Hochleistungswaffen mit hoher Beschleunigung des Geschosses im Rohr.

3.4.4 Das Druckgefälle im Rohr

Die im Abschn. 3.3.5 dargestellten Druckkurven (Abb. 3.7–3.15) werden stets im Bereich des Laderaums gemessen. Mit der Zunahme der Geschossgeschwindigkeit entsteht jedoch ein Druckgefälle zwischen dem Rohrboden (Stoßboden) und dem Geschossboden, das auf der Basis der Gleichung von BERNOULLI (2.3:22a) recht einfach geschätzt werden kann.

Am Rohrboden sind die Gase in Ruhe und am Geschossboden bewegen sie sich mit der Geschwindigkeit des Geschosses. Nach der Gleichung von BERNOULLI gilt somit (mit der Gasgeschwindigkeit $v_r = 0$)

$$p_r = p_p + \frac{1}{2} \cdot \rho_c \cdot v_c^2 . \quad [\text{Pa}]$$

Der Index c bezeichnet die Werte der Pulvergase, p_r den Druck am Rohrboden und p_p jenen am Geschossboden.

Setzt man eine lineare Geschwindigkeitszunahme in den Pulvergasen voraus und damit eine mittlere Geschwindigkeit von $v_c = 0.5 \cdot v_p$, so ergibt sich mit der zusätzlichen Annahme einer mittleren Dichte ρ_c

$$(3.4:8) \quad p_r - p_p = \Delta p = \frac{1}{8} \cdot \rho_c \cdot v_p^2. \quad [\text{Pa}]$$

Der Druck am Boden des sich bewegenden Geschosses ist somit stets kleiner als der Druck im Laderaum. Die mittlere Dichte der Pulvergase nach Brennschluss ergibt sich aus der Pulvermasse (die der Gasmasse entspricht) und dem momentanen Laufvolumen.

Gleichung (3.4:8) ist vor allem für eine approximative Bestimmung des effektiven Mündungsdruckes aus einem im Laderaum gemessenen Druckverlauf nützlich. Die Ergebnisse stimmen mit den an der Mündung gemessenen Drücken recht gut überein.

Ein zweiter Weg führt über den Impulssatz, angewendet auf Rohr und Geschoss als abgeschlossenes System

$$(3.4:9) \quad (m_r + \varepsilon' \cdot m_c) \cdot v_r = (m_p + \varepsilon \cdot m_c) \cdot v_p. \quad [\text{N} \cdot \text{s}]$$

Der Index r bezeichnet die Werte des Rohres, p und c wie üblich Geschoss und Ladung. ε ist der Anteil Ladung, welcher mit dem Geschoss, ε' jener, der mit dem Rohr zusammen beschleunigt wird.

Ableitung der Gleichung (3.4:9) nach der Zeit, und mit Berücksichtigung der berechtigten Näherung $\varepsilon' \cdot m_c \ll m_r$ ergibt

$$m_r \cdot \dot{v}_r = (m_p + \varepsilon \cdot m_c) \cdot \dot{v}_p. \quad [\text{N}]$$

Ergänzt man diese Gleichung mit den beiden Bewegungsgleichungen für Rohr und Geschoss

$$m_r \cdot \dot{v}_r = A_R \cdot p_r, \quad [\text{N}]$$

$$m_p \cdot \dot{v}_p = A_R \cdot p_p, \quad [\text{N}]$$

ergibt sich nach kurzer Rechnung

$$(3.4:10) \quad p_r - p_p = \Delta p = \frac{\varepsilon \cdot m_c}{m_p + \varepsilon \cdot m_c} \cdot p_r. \quad [\text{Pa}]$$

Werden die rechten Seiten der beiden Gleichungen (3.4:8) und (3.4:10) einander gleichgesetzt, lässt sich der Sébert'sche Faktor ε aus dem Mündungsdruck p_r (am Rohrboden gemessen) und der Mündungsgeschwindigkeit v_p bestimmen

$$(3.4:11) \quad \varepsilon = \frac{m_p \cdot v_p^2}{8 \cdot p_r \cdot V_r - m_c \cdot v_p^2}. \quad [\text{Pa}]$$

3.4.5 Das gasdynamische Modell

3.4.5.1 Historische Entwicklung

Mit der Frage nach Druck, Dichte und Geschwindigkeit der Gasströmung in einem Rohr hinter einem beschleunigenden Geschoss hat sich zuerst der italienische Gelehrte J. L. LAGRANGE (1736-1813) beschäftigt. LAGRANGE lebte von 1787 bis zu seinem Tod in Paris; 1793 erhielt er offenbar von der Regierung den Auftrag, sich diesem Problem zu widmen. Eine Arbeit darüber fand sich allerdings erst in seinem Nachlass. Das Ergebnis schien den Autor nicht befriedigt zu haben, weshalb er auf eine Publikation verzichtete. Der französische Mathematiker und Physiker POISSON (S. D. POISSON, 1832) fand jedoch in dieser Arbeit neue Sichtweisen und es schien ihm nutzbringend, die Schrift zu publizieren. Seither ist die obige Fragestellung als das Lagrangesche Ballistik-Problem bekannt.

Zu seiner Zeit konnte LAGRANGE diese Aufgabe nur analytisch angehen, weil es an geeigneten numerischen Möglichkeiten fehlte. Er war daher gezwungen, die Fragestellung in wesentlichen Punkten zu vereinfachen. Auch wenn sein Ansatz längst überholt ist, bietet er doch einen ersten Einblick in die Denkweise des gasdynamischen Modells. Er sei deshalb hier kurz skizziert.

LAGRANGE setzte voraus, dass zu Beginn der Bewegung Gas und Pulver in allen Punkten dieselbe Dichte aufweisen (eigentlich gleichbedeutend mit einer vollständigen Verbrennung des Pulvers, bevor sich das Geschoss zu bewegen beginnt). Zudem nahm er an, dass in einem infinitesimalen Querschnitt des Rohres Geschwindigkeit, Dichte und Druck stets gleich sein würden (eindimensionales Modell). Zur Beschreibung der Gasbewegung wird eine solche Scheibe der Dicke dx betrachtet, die sich zum Zeitpunkt $t = 0$ an der Stelle x befindet. Nach Ablauf der Zeit t hat sie sich zu einer Stelle im Abstand z von einer festen Normalebene zur Rohrachse hin bewegt (siehe Abb. 3.18). Es gilt nun, die unbekannten Größen Geschwindigkeit v , Dichte ρ , Druck p und den Ort z dieser Scheibe als Funktion der beiden unabhängigen Variablen x und t zu bestimmen. Zunächst ergibt sich für die Geschwindigkeit

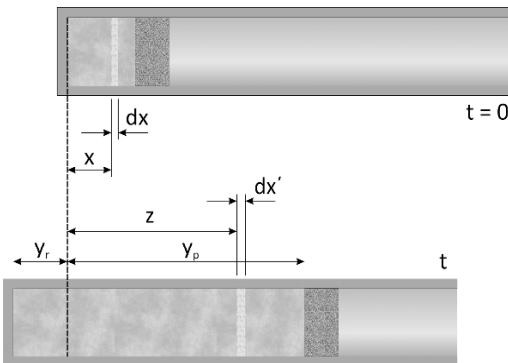


Abb. 3.18. Zum Ansatz des gasdynamischen Modells von LAGRANGE. *Oberes Bild:* vor Beginn der Bewegung ($t = 0$), *unteres Bild:* zum Zeitpunkt t . Die infinitesimale Scheibe bei x ist nun bei z . t und x sind die unabhängigen Variablen.

$$v = \frac{dz}{dt}, \quad [\text{m/s}]$$

und für die momentane Dicke der Scheibe

$$dx' = \frac{dz}{dx} \cdot dx. \quad [\text{m}]$$

Wegen der Massenerhaltung in der Scheibe folgt hieraus für deren Dichte ρ

$$(3.4:12) \quad \rho = \rho_0 \cdot \left(\frac{dz}{dx} \right)^{-1}, \quad [\text{kg/m}^3]$$

worin ρ_0 die Dichte zum Zeitpunkt $t = 0$ bedeutet. LAGRANGE wählte für den Druck p den Ansatz

$$(3.4:13) \quad p = \Psi_0 \cdot \left(\frac{dz}{dx} \right)^{-n}, \quad [\text{N/m}^2]$$

in dem Ψ_0 die Volumenenergiedichte des Gases („force élastique du gaz“) vor Beginn der Bewegung bedeutet. Zugleich erweiterte er das Gesetz von BOYLE und MARIOTTE, indem er den Druck nicht proportional zur Dichte annahm, sondern zur Verbesserung der Allgemeingültigkeit den Exponenten n einsetzte.

Damit hat er in gewisser Weise die isentrope Beziehung zwischen Druck und Dichte vorweggenommen.

Aus dem d'Alembertschen Prinzip, angewendet auf die infinitesimale Scheibe, ergibt sich deren Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \rho_0 \cdot A_r \cdot dx &= A_r \cdot p - A_r \cdot \left(p + \frac{dp}{dx} \cdot dx \right), \quad [\text{N}] \\ (3.4:14) \quad \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{dp}{dx} &= 0. \quad [\text{m/s}^2] \end{aligned}$$

Einsetzen der Ableitung von Gl. (3.4:13) und Zusammenfassen aller Konstanten zu k^2 führt zu der Differenzialgleichung

$$(3.4:15) \quad \frac{d^2z}{dt^2} = k^2 \cdot \frac{d^2z}{dx^2} \cdot \left(\frac{dz}{dx} \right)^{-(n+1)}. \quad [\text{m/s}^2]$$

Zur vollständigen Beschreibung des Geschehens im Rohr gehören noch die beiden Bewegungsgleichungen für Geschoss und Rohr. Werden zusätzlich zu den Bezeichnungen der Abb. 3.18 die Massen des Geschosses und des Rohres mit m_p und jene des Rohres mit m_r bezeichnet sowie p_p und p_r für den Druck am Geschossboden bzw. am Stoßboden (Rohrende) eingeführt, so gilt

$$m_p \cdot \frac{d^2y_p}{dt^2} = A_r \cdot p_p, \quad [\text{m/s}^2]$$

$$\text{und} \quad m_r \cdot \frac{d^2 y_r}{dt^2} = -A_r \cdot p_r. \quad [\text{m/s}^2]$$

p_p und p_r werden wiederum mit Gl. (3.4:13) ausgedrückt, wobei anstelle der Variablen z nun die entsprechenden y_p und y_r stehen

$$(3.4:16) \quad m_p \cdot \frac{d^2 y_p}{dt^2} = A_r \cdot \Psi_0 \cdot \left(\frac{dy_p}{dx} \right)^{-n}, \quad [\text{m/s}^2]$$

$$(3.4:17) \quad m_r \cdot \frac{d^2 y_r}{dt^2} = A_r \cdot \Psi_0 \cdot \left(\frac{dy_r}{dx} \right)^{-n}. \quad [\text{m/s}^2]$$

Die Anfangsbedingungen der drei Gl. (3.4:15–17) lauteten $t = 0$ und $z = x$ sowie den Wert 0 für die Geschwindigkeiten von Gas, Geschoss und Rohr.

Mit den Gl. (3.4:15–17) hatte LAGRANGE ein Gleichungssystem aufgestellt, das die Bewegung des Gases, des Geschosses und des Rohres simultan beschrieb und hatte damit die Grundidee des gasdynamischen Modells der Innenballistik geschaffen. Beim Lösungsversuch dieses Systems traf er eine Annahme, die sich auch später noch als sehr nützlich erwies. Er postulierte, dass die Gasgeschwindigkeit im Rohr linear mit dem Weg zunehmen würde („Lagrange’sche Approximation“).

Im Verlauf des 19. Jahrhunderts befassten sich neben POISSON noch weitere renommierte Wissenschaftler mit dem Lagrange’schen Ballistik-Problem. Einen in mathematischer Hinsicht wichtigen Beitrag leistete der deutsche Mathematiker B. RIEMANN mit seiner Studie über die Differenzialgleichungen der Bewegung der Gase und deren Integration (B. RIEMANN, 1860).

RIEMANN nahm allerdings in dieser Arbeit keinen Bezug zum innenballistischen Problem, sondern beschrieb die eindimensionale Bewegung eines Gases in einem (geometrischen) Zylinder ohne Kolben, aber auch ohne jeden Wärmeaustausch. Für ihn waren nicht nur die möglichen Anwendungen in der Akustik eine Rechtfertigung für diese Publikation, sondern auch das Interesse an der theoretischen Behandlung nichtlinearer partieller Differenzialgleichungen.

Das dieser Arbeit zugrunde gelegte Differenzialgleichungssystem bestand aus der Gleichung für die Erhaltung der Masse und der Bewegungsgleichung und lautete (Originaldarstellung mit u als Geschwindigkeit)

$$(3.4:18) \quad \frac{d\rho}{dt} = -\frac{d(\rho \cdot u)}{dx}, \quad [\text{kg}/(\text{m}^3 \cdot \text{s})]$$

$$(3.4:19) \quad \rho \cdot \left(\frac{du}{dt} + u \cdot \frac{du}{dx} \right) = -\frac{dp(\rho)}{d\rho} \cdot \frac{d\rho}{dx}. \quad [\text{N/m}^3]$$

Es gelang RIEMANN zu zeigen, dass dieses System unter der Bedingung, dass die anfängliche Bewegung für alle Teile in der gleichen Richtung stattfindet und dass in jeder auf dieser Richtung senkrechten Ebene Druck und Geschwindigkeit konstant sind, vollständig integriert werden kann. Bei der Diskussion der Lösungen

zeigte sich, dass Expansions- und Kompressionswellen beschränkter Amplitude auftreten und folglich auch Druckunterschiede entstehen. Dieses für den innenballistischen Blick auf diese Studie entscheidende Ergebnis war in der Folge aus der gasdynamischen Vorstellung der Innenballistik nicht mehr wegzudenken.

In seinem kurzen Leben (er wurde nur 36 Jahre alt) hat sich der französische Physiker und Ballistiker P.-H. HUGONIOT vor allem der Gasausbreitung in Rohren gewidmet. Er verfasste eine grundlegende Studie zur Stoßwellentheorie und wendete die gewonnenen Erkenntnisse auf das Lagrange'sche Ballistik-Problem an. Wegen dieses Zugangs wundert es nicht, dass der (erst nach seinem Tod publizierten) Bearbeitung dieses Problems die allgemeine Wellengleichung vorangestellt ist (P.-H. HUGONIOT, 1889). Davon ausgehend, hat er die folgende Beziehung für die Bewegung hergeleitet

$$(3.4:20) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\gamma \cdot p_0}{\rho_0} \cdot \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-\gamma-1} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} . \quad [\text{m/s}^3]$$

Darin bedeuten p_0 und ρ_0 Druck und Dichte vor Beginn der Bewegung und γ den Isentropenkoeffizienten.

HUGONIOT widmete sich zunächst dem Start der Geschossbewegung und der Expansionswelle, die dabei beginnt, sich in Richtung Rohrboden fortzupflanzen. Seine Lösungswege, welche zum Teil bereits auf dem Charakteristikenverfahren aufbauten, wurden erst von F.-F. GOSSOT und R. LIOUVILLE (1914) und insbesondere dann von A. E. H. LOVE und F. B. PIDDUCK (1922) wesentlich erweitert. Zusätzlich wurden nun auch die reflektierten Wellen betrachtet, welche vom Rohrboden zurück zum Geschossboden laufen und dabei zusammengesetzte Wellen verursachen.

Alle diese Rechnungen erfolgten unter folgenden einschränkenden Annahmen:

- a Zylindrisches, glattes Rohr (keine Laderaumerweiterung),
- b vollständige Verbrennung des Pulvers vor Beginn der Geschossbewegung,
- c in allen Punkten gleiche Anfangswerte für Druck, Dichte und Temperatur,
- d isentrope Expansion der Gase,
- e konstantes Kovolumen während dem ganzen Vorgang,
- f keine Reibung zwischen Geschoss und Rohr.

Zudem hat der Isentropenkoeffizient der folgenden Form zu genügen

$$(3.4:21) \quad \gamma = \frac{2 \cdot n + 1}{2 \cdot n - 1} , \quad n \text{ positive ganze Zahl} , \quad [-]$$

eine Approximation, die nur für bestimmte Gase gültig sein konnte.

In der genannten Arbeit leitete LOVE einen allgemein gültigen Formelsatz her, der unter den erwähnten Bedingungen Lösungen für Druck und Geschwindigkeit lieferte, wenn die entsprechenden spezifischen Daten eingesetzt wurden. Der Auf-

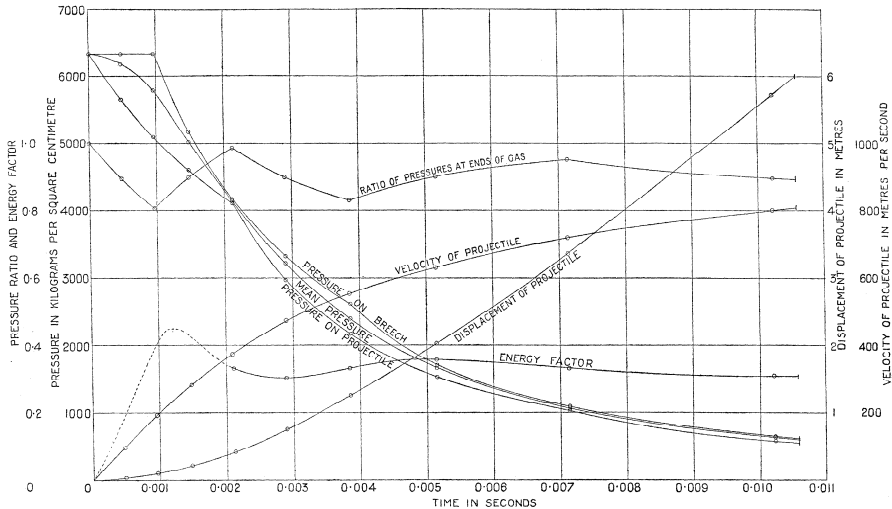


Abb. 3.19. Darstellung der Druck-, Geschwindigkeits- und Wegkurven in Abhängigkeit der Zeit aus einer Berechnung nach LOVE (aus LOVE und PIDDUCK, 1922).

wand einer solchen Rechnung war allerdings enorm. Als Alternative wurden deshalb auch Lösungen mittels der Methode der Charakteristiken gesucht. Bei Anwendung der grafischen Variante dieses Verfahrens ließen sich die Ergebnisse schneller ermitteln (siehe dazu auch P. DE HALLER, 1948).

Es stellte sich schon damals die Frage, welchen Sinn ein derartiger Rechenaufwand hat, wenn die erzielten Resultate wegen den (für das Gelingen der Rechnung erforderlichen) einschränkenden Annahmen mit der Realität kaum in Einklang zu bringen waren. Am deutlichsten zeigte sich dies beim Druckverlauf in der Anfangsphase, der wegen der Forderung der vollständigen Verbrennung des Treibmittels vor Beginn der Geschossbewegung der Erfahrung in keiner Weise entsprach (siehe Abb. 3.19). Die Arbeiten von LOVE und PIDDUCK haben heute keine Bedeutung mehr.

Bereits HUGONIOT (H. HUGONIOT, 1889) erwähnte, dass besonders bei langsam brennenden Treibmitteln diese Annahme zu großen Fehlern führen würde und PIDDUCK meinte in LOVE und PIDDUCK (1922), dass es hoffnungslos sei zu glauben, man würde einen fortschreitenden Abbrand des Pulvers jemals rechnen können.

Dennoch waren diese Modellansätze für die innenballistische Wissenschaft nutzbringend. Ihre Ergebnisse offenbarten bisher nicht bekannte Phänomene wie das Auftreten von Expansionswellen und Druckgefällen zwischen Rohrboden und Geschoss sowie auch den Einfluss der mitbewegten Gasmasse. Für die praktische Auslegung von Geschützen waren sie allerdings wenig hilfreich.

Mit den oben erwähnten einschränkenden Annahmen a–f stößt man letztendlich stets auf Gleichungen, welche nur mit Methoden der Approximation zu lösen sind. (Dies hat bereits LAGRANGE in seinem Urtext erwähnt). Ein Durchbruch in

Richtung wirklichkeitsnaher Ergebnisse und physikalischer Fragestellungen war somit erst in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhundert mit der Entwicklung effizienter numerischer Verfahren und den dazu erforderlichen Rechenkapazitäten möglich.

Es ist bemerkenswert, dass im zweiten großen Teilgebiet der Ballistik, der Außenballistik, im gleichen Zeitraum eine ähnliche Entwicklung zu beobachten war. Auch hier ermöglichten erst die Fortschritte in der numerischen Rechentechnik die Verlagerung des Interesses von den mathematischen Lösungsverfahren zu den physikalischen Fragen der Außenballistik.

3.4.5.2 Der aktuelle Stand

Der Inhalt dieses Abschnittes basiert auf Unterlagen von Dr. Rudi HEISER, Weil/Rhein.

Die heutigen Möglichkeiten der numerischen Berechnungen in Verbindung mit den hohen Rechenleistungen moderner Computer haben es eröffnet, die gasdynamischen Modelle der Innenballistik wesentlich zu erweitern, vor allem durch Aufhebung einiger der im obigen Abschnitt beschriebenen Einschränkungen. Der wichtigste Schritt dabei war wohl der Einbezug der Abbrandphase des Treibmittels, also der Verzicht auf die Annahme b (S. 92). Dies bedeutet, dass im Raum zwischen Rohrboden und Geschoss nicht nur Gase, sondern auch feste Treibmittelkörner das physikalische Geschehen bestimmen und somit zu berücksichtigen sind. Dies führte zum Begriff des Zweiphasenmodells.

Für den Aufbau eines solchen Modells wird eine neue Variable benötigt, welche im Volumenelement das Verhältnis des Gasvolumens zum Gesamtvolumen angibt, wobei sich letzteres aus dem Gasvolumen und dem Volumen der Treibladung zusammensetzt. Sie wird mit Porosität ζ (meist mit α oder ε) bezeichnet

(3.4:22) $\zeta = \frac{V_g}{V_c + V_g} .$ [-]

Dies gestattet, mit den Grundgesetzen der Massen-, Impuls- und Energieerhaltung ein vollständiges dreidimensionales partielles Differenzialgleichungssystem für den innenballistischen Vorgang anzuschreiben. In den folgenden Gleichungen ste-

Tabelle 3.7. Zusammenstellung der Variablen im allgemeinen gasdynamischen Modell

ζ	[-]	Porosität	A_c	[m/s]	Pulverkornoberfläche
c	–	Index für Treibladung	V	[m]	Volumen
g	–	Index für Gas	\dot{r}	[m/s]	Abbrandgeschwindigkeit
ρ	[kg/m³]	Dichte	D	[N]	Flugwiderstand der Körner
\vec{u}	(m/s)	Geschwindigkeit	Q	[J/kg]	Energie pro Masseneinheit
\dot{m}_g	[kg]	Gasproduktionsrate	\vec{F}_c	[N/m²]	Intergranularer Druck
e_g	[N/m²]	Innere Energie	i	–	Index für den Zündsatz

hen jene mit a in der Gleichungsnummer für die (kompressible) Gasphase und jene mit b für die (inkompressible) Treibmittelfase (Bedeutung der Bezeichnungen siehe Tabelle 3.7).

Gleichung der Gasproduktion

$$(3.4:23) \quad \dot{m}_g = (1-\zeta) \cdot \frac{A_c}{V_c} \cdot \rho_c \cdot \dot{r} . \quad [\text{kg}/(\text{m}^3 \cdot \text{s})]$$

Kontinuitätsgleichung

$$(3.4:24a) \quad \frac{\partial(\zeta \cdot \rho_g)}{\partial t} + \vec{\nabla}(\zeta \cdot \rho_g \cdot \vec{u}) = \dot{m}_g + \dot{m}_i , \quad [\text{kg}/(\text{m}^3 \cdot \text{s})]$$

$$(3.4:24b) \quad \rho_c \cdot \frac{\partial}{\partial t}(1-\zeta) + \rho_c \cdot \vec{\nabla}[(1-\zeta) \cdot \vec{u}_c] = -\dot{m}_g , \quad [\text{kg}/(\text{m}^3 \cdot \text{s})]$$

Erhaltung des Impulses

$$(3.4:25a) \quad \frac{\partial(\zeta \cdot \rho_g \cdot \vec{u}_g)}{\partial t} + \vec{\nabla}(\zeta \cdot \rho_g \cdot \vec{u}_g \cdot \vec{u}_g) + \zeta \cdot \vec{\nabla} p = \\ = -D + \dot{m}_g \cdot (\vec{u}_c - \vec{u}_g) + \dot{m}_i \cdot \vec{u}_i , \quad [\text{N}]$$

$$(3.4:25b) \quad \rho_c \cdot \frac{\partial}{\partial t}[(1-\zeta) \cdot \vec{u}_c] + \rho_c \cdot \vec{\nabla}[(1-\zeta) \cdot \vec{u}_c \cdot \vec{u}_c] + (1-\zeta) \cdot \vec{\nabla} p = \\ = -D + \dot{m}_g \cdot \vec{u}_c - \vec{F}_c(\zeta) , \quad [\text{N}]$$

Erhaltung der Energie

$$(3.4:26) \quad \frac{\partial(\zeta \cdot \rho_g \cdot e_g)}{\partial t} + \vec{\nabla}(\zeta \cdot \rho_g \cdot e \cdot \vec{u}_c) + \zeta \cdot p \cdot \vec{\nabla} \vec{u}_c = \\ = \dot{m}_c \cdot \left(Q + \frac{1}{2} \cdot \vec{u}_g \cdot \vec{u}_g \right) + \dot{m}_i \cdot Q_i + \vec{D} \cdot (\vec{u}_c - \vec{u}_g) , \quad [\text{N}]$$

mit $Q = Q_{\text{ex}} + e_c + \frac{1}{2} \cdot \vec{u}_c \cdot \vec{u}_c - \vec{u}_c \cdot \vec{u}_g . \quad [\text{J/kg}]$

Zur vollständigen Beschreibung des gesamten innenballistischen Prozesses müssen nebst diesen Gleichungen noch weitere physikalische Bedingungen erfüllt werden. Die wichtigsten sind:

- Abbrandgesetz,
- Zustandsgleichung des Gases,
- Bewegungsgleichung des Geschosses,
- Rohrreibung,
- Wärmeübertragung.

Zudem müssen auch noch der aerodynamische Widerstand der Treibmittelkörner und deren gegenseitige Wechselwirkung sowie Impuls- und Energiesatz für das

Zündmittel und das Energiekriterium für die Anzündung der Treibladung in die Rechnung aufgenommen werden.

Aus diesem allgemeinen Ansatz kann durch Reduzieren der Dimension und durch begründete Vernachlässigung einiger der oben erwähnten physikalischen Bedingungen eine Vielfalt von Modellen unterschiedlicher Komplexität abgeleitet werden. So sind beispielsweise bereits zweidimensionale Modelle (achsensymmetrisch) für zwei Phasen mit variabler Innenraumgeometrie (Ladungsraum, Geschosshock) und Wärmeleitung in der Entwicklung und auch mit Erfolg realisiert worden.

Im Gegensatz zu thermodynamischen Modellen (bei denen der Gasdruck am Geschossboden stets kleiner ist als am Rohrboden) liefern die gasdynamischen Modelle realistischere Druckverteilungen und die Ausbildung von Druckwellen. Sie erlauben die Simulation der von der Anzündung und dem Ladungsaufbau abhängigen Phänomene und ermöglichen dadurch Aussagen zur Sicherheit eines Systems. Zur Anwendung gelangen sie vor allem bei der innenballistischen Auslegung von Hochleistungsgeschützen und bei großen Treibladungsmassen.

3.4.6 Die Methode von HEYDENREICH

Die Bestimmung von Druck- und Geschwindigkeitsverlauf in Abhängigkeit der Schussentwicklungszeit bietet mit den heutigen numerischen Möglichkeiten keine Schwierigkeiten, wenn nicht das Problem der Bereitstellung der vielen erforderlichen Daten wäre. Diese sind oft nur schwer zugänglich und lassen sich mit einfacher Messtechnik kaum ermitteln. Dies ist wohl der Grund, weshalb ein empirisches Verfahren, die Methode von W. HEYDENREICH (1908), bis in die heutige Zeit erhalten geblieben ist.

Das Heydenreich'sche Verfahren basiert auf einer analytischen Funktion, mit welcher zuerst E. VALLIER (1899) versucht hatte, ausgehend von Messungen des Maximaldruckes und der Mündungsgeschwindigkeit, den zeitlichen Verlauf des Druckes darzustellen

$$(3.4:27) \quad p(t) = K_A \cdot t \cdot e^{-K_B \cdot t} . \quad [\text{bar}]$$

Während VALLIER zusätzliche Annahmen über den Verlauf der Gasdruckkurve traf und die Konstanten K_A und K_B auf diese Weise zu bestimmen suchte, setzte HEYDENREICH auf sehr viele, durch Rücklaufmessungen ermittelte empirische Daten. Er kam zur Annahme, dass das Verhältnis des Druckes p_x an einer beliebigen Stelle x des Rohres zum Maximaldruck p_{\max} stets die gleiche Funktion der Variablen $x/x_{p\max}$ sei, wo $x_{p\max}$ die Stelle des maximalen Druckes bedeutet. Für den ersten Schritt der Berechnung führte er das Druckverhältnis χ ein

$$(3.4:28) \quad \chi = \frac{p_m}{p_{\max}} . \quad [-]$$

p_m kennzeichnet den *mittleren Druck* und bedeutet jenen konstanten Druck, der notwendig wäre, um Geschoss und halbe Pulvermasse (Sébert'scher Faktor!) bei gleicher Rohrlänge auf dieselbe Mündungsgeschwindigkeit zu beschleunigen, wie sie mit dem wirklichen Druckverlauf erreicht wird.

Falls der maximale Gasdruck nicht bekannt ist und nicht gemessen werden kann, lassen sich für Kleinkaliberpatronen entsprechende Werte in gewissen Waffen- und Wiederladehandbüchern (z. B. DEVA, 2017) oder im internationalen Standard der CIP (2007) nachschlagen. Voraussetzung ist, dass die betreffende Patrone den maximalen Gebrauchsgasdruck auch ungefähr ausnützt.

HEYDENREICH'S Formelaufbau ist sehr einfach und einheitlich. Die zu berechnende Größe ergibt sich durch Multiplikation der gegebenen Größe mit dem zugehörigen, vom Druckverhältnis χ abhängigen Faktor. Die Werte dieser Faktoren können den empirisch ermittelten und in Tabellen zusammengestellten Funktionen F_1 – F_5 (siehe Tabelle 3.8) entnommen werden.

Die Formeln gliedern sich in zwei Gruppen: die eine für den Ort des Druckmaximums, die andere für die Mündung. Für den Zeitpunkt des maximalen Gasdruckes gelten für den Geschossweg x_{pmax} , die Zeit t_{pmax} und die Geschossgeschwindigkeit v_{pmax} die folgenden Beziehungen (mit der Rohrlänge ℓ_r und der Mündungsgeschwindigkeit v_0)

$$(3.4:29a) \quad x_{pmax} = \ell_r \cdot F_1(\chi), \quad [\text{mm}]$$

$$(3.4:29b) \quad t_{pmax} = \frac{2 \cdot \ell_r}{v_0} \cdot F_2(\chi), \quad [\text{ms}]$$

$$(3.4:29c) \quad v_{pmax} = v_0 \cdot F_3(\chi). \quad [\text{m/s}]$$

Tabelle 3.8. Funktionen F_1 – F_5 von HEYDENREICH

χ	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
0.250	0.0313	0.139	0.324	0.216	0.725
0.275	0.0357	0.155	0.328	0.228	0.743
0.300	0.0402	0.172	0.333	0.242	0.762
0.325	0.0450	0.189	0.338	0.260	0.781
0.350	0.0500	0.207	0.343	0.278	0.800
0.375	0.0552	0.225	0.348	0.291	0.818
0.400	0.0608	0.244	0.354	0.304	0.836
0.425	0.0666	0.264	0.360	0.321	0.854
0.450	0.0729	0.284	0.366	0.340	0.873
0.475	0.0799	0.305	0.373	0.359	0.891
0.500	0.0877	0.326	0.380	0.382	0.910
0.525	0.0966	0.348	0.388	0.415	0.930
0.550	0.1059	0.370	0.396	0.454	0.950

Der Druck an der Mündung p_μ und die Geschossdurchlaufzeit für die ganze Rohrlänge t_ℓ ergeben sich aus

(3.4:30a) $p_\mu = p_m \cdot F_4(\chi) ,$ [bar]

(3.4:30b) $t_\ell = \frac{2 \cdot \ell_r}{v_0} \cdot F_5(\chi) .$ [ms]

Ein weiterer Satz Heydenreich'scher empirischer Funktionen ermöglicht die Bestimmung von Druck, Geschwindigkeit und Zeit in Abhängigkeit des Geschossweges. Als Parameter dient hier dessen Verhältnis zum Weg, den das Geschoss bis zum Auftreten des maximalen Druckes zurückgelegt hat (Gl. 3.4:29a).

(3.4:31) $\lambda = \frac{x}{x_{p\max}} .$ [-]

Die Koeffizienten $v_{p\max}$ und $t_{p\max}$ ergeben sich aus den Gleichungen (3.4:29c) und (3.4:29b), und die Werte der empirischen Funktionen F_6 – F_8 sind der Tabelle 3.9 zu entnehmen.

(3.4:32a) $p_x = p_{\max} \cdot F_6(\lambda) ,$ [bar]

(3.4:32b) $v_x = v_{p\max} \cdot F_7(\lambda) ,$ [m/s]

(3.4:32c) $t_x = t_{p\max} \cdot F_8(\lambda) .$ [ms]

Tabelle 3.9. Funktionen F_6 – F_8 von HEYDENREICH

λ	F_6	F_7	F_8	λ	F_6	F_7	F_8
0.25	0.741	0.392	0.610	8.00	0.284	2.445	2.309
0.50	0.912	0.635	0.780	9.00	0.248	2.509	2.451
0.75	0.980	0.834	0.903	10.00	0.220	2.566	2.589
1.00	1.000	1.000	1.000	11.00	0.199	2.615	2.725
1.25	0.989	1.130	1.081	12.00	0.181	2.659	2.858
1.50	0.965	1.262	1.154	13.00	0.164	2.702	2.988
1.75	0.932	1.366	1.219	14.00	0.150	2.740	3.116
2.00	0.898	1.468	1.282	15.00	0.137	2.777	3.253
2.50	0.823	1.632	1.394	16.00	0.125	2.811	3.390
3.00	0.747	1.763	1.495	17.00	0.117	2.837	3.502
3.50	0.675	1.875	1.589	18.00	0.109	2.862	3.618
4.00	0.604	1.983	1.682	19.00	0.102	2.887	3.740
4.50	0.546	2.068	1.769	20.00	0.096	2.910	3.816
5.00	0.495	2.140	1.851	25.00	0.073	3.003	4.455
6.00	0.403	2.269	2.012	30.00	0.058	3.075	5.031
7.00	0.338	2.363	2.163	35.00	0.048	3.162	5.657

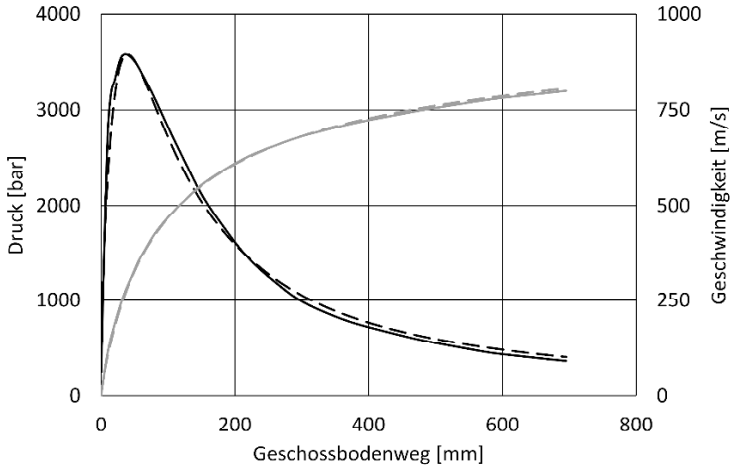


Abb. 3.20. Vergleich von Druck- und Geschwindigkeitsverlauf einer Patrone im Kaliber 7.5×55 nach HEYDENREICH (durchgezogene Linie) mit den gemessenen Werten (gestrichelte Linie).

Ist der Maximaldruck und die Mündungsgeschwindigkeit einer Patrone bei einer bestimmten Lauflänge bekannt, kann mit der Methode von HEYDENREICH Druck- und Geschwindigkeitsverlauf längs des gesamten Geschossweges errechnet werden. Damit wird es möglich, die zu erwartenden Werte für Mündungsgeschwindigkeit und Mündungsdruck bei jeder beliebigen anderen Rohrlänge zu schätzen.

Da die Grundlagen des Heydenreich'schen Verfahrens rein empirisch sind und auf einer festen Form der Druckkurve basiert, dürfen keine allzu großen Anforderungen an die Genauigkeit gestellt werden. Beispiele zeigen jedoch, dass bei der Nachrechnung bekannter Systeme die Übereinstimmung mit den gemessenen Wer-

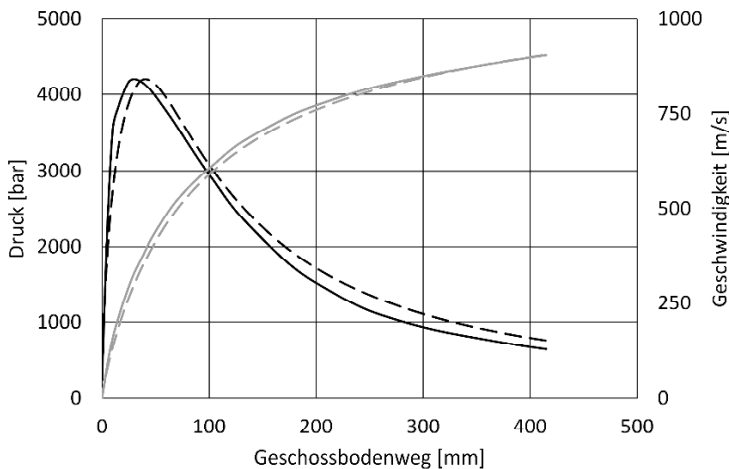


Abb. 3.21. Vergleich von Druck- und Geschwindigkeitsverlauf einer Patrone im Kaliber 5.6×45 nach HEYDENREICH (durchgezogene Linie) mit den gemessenen Werten (gestrichelte Linie).

ten durchaus erstaunlich gut sein kann, insbesondere wenn Maximaldruck und Mündungsgeschwindigkeit den realen Werten entspricht (siehe Abb. 3.20, Kaliber 7.5×55). Bei einem kleineren Kaliber (5.6×45) ist die Genauigkeit geringer (siehe Abb. 3.21).

3.4.7 Das offene Rohr

3.4.7.1 Allgemeines

Der innenballistische Ablauf bei Gas- und Schreckschusswaffen und bei Böllerschüssen unterscheidet sich von demjenigen klassischer Feuerwaffen in erster Linie dadurch, dass kein Projektil vorhanden ist. Dadurch fehlt ein definierter Brennraum; zudem findet an der Mündung ein Verlust an Gasmasse statt, sobald der Druck im Lauf zu steigen beginnt.

Damit das Pulver genügend gut angefeuert wird, braucht es anfänglich rasch einen Druckaufbau und somit ein beschränktes Volumen. Bei Kartuschen wird dies durch eine Abdeckung des Hülsenmundes oder durch dessen Bördelung erreicht. Böllerschüsse werden in der Regel mit leichten schwer brennbaren Materialien (z. B. Kork) verdammt. Wenn der Druck in der Hülse soweit angewachsen ist, dass die Treibmittelabdeckung birst oder sich die Verdämmung zu bewegen beginnt, wird unverbranntes und teilverbranntes Pulver in den Lauf hinein geschleudert, so dass dem weiteren Brennvorgang das ganze Laufvolumen zur Verfügung steht. Dies hat zur Folge, dass der maximale Gasdruck in der Regel nicht zwingend in oder in der Nähe der Kartusche entsteht, sondern irgendwo im Rohr auftreten kann.

Während Kartuschen für Gas- und Schreckschusswaffen zumeist mit Nitropulvern geladen sind, kommt bei Böllerschüssen fast ausschließlich Schwarzpulver zur Anwendung.

3.4.7.2 Das erweiterte Gleichungssystem

In Anlehnung an das thermodynamische Modell der Innenballistik von Rohrworten lassen sich für das offene Rohr die nachstehenden Gleichungen aufstellen. Sie können bei Gas- und Schreckschusswaffen sowie in Böllerschüssen angewendet werden, sofern Nitropulver geladen ist.

Das Abbrandgesetz kann von (Gl. 3.4:1a) übernommen werden. Beim Volumen des Brennraumes ist grundsätzlich mit dem ganzen Laufvolumen zu rechnen, von dem das Eigenvolumen des unverbrannten Pulvers und das Kovolumen der Pulvergase sowie das Volumen etwaiger Schikanen V_s abzuziehen sind

$$(3.4:33) \quad V = A \cdot \ell_r - \frac{m_c}{\rho_c} \cdot (1 - z) - m_i \cdot \eta - V_s \quad [m^3]$$

ℓ_r bedeutet Rohrlänge, m_c die Pulvermasse, ρ_c die Dichte des Pulvers, η das Kovolumen der Pulvergase und V_s das Volumen der Schikane (falls vorhanden).

Die im Lauf vorhandene Gasmasse m_i entspricht der Masse des verbrannten Pulvers, von der die Masse m_a des bereits an der Mündung ausgeströmten Gases zu subtrahieren ist

$$(3.4:34) \quad m_i = m_c \cdot z - m_a . \quad [\text{kg}]$$

Da der Druck im Lauf fast immer wesentlich größer ist als der Umgebungsdruck, kann stets mit dem maximalen Massenstrom (bei Lavaldruck) gerechnet werden

$$(3.4:35) \quad \dot{m}_a = A \cdot \sqrt{\gamma \cdot p_i \cdot \frac{m_i}{V} \cdot \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}} . \quad [\text{kg/s}]$$

In der Energiebilanz ist die Druckenergie, die Bewegungsenergie der unverbrannten Pulverteilchen, die Bewegungsenergie der Gasströmung im Lauf und die Bewegungsenergie des ausströmenden Gases zu berücksichtigen

$$(3.4:36) \quad m_c \cdot z \cdot Q_{\text{ex}} = \frac{p_i \cdot V}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \cdot (m_c - m_a) \cdot v_i^2 + \frac{1}{2} \cdot m_a \cdot \frac{2 \cdot \gamma}{\gamma + 1} \cdot \frac{p_i \cdot V}{m_i} . \quad [\text{J}]$$

γ bezeichnet den Isentropenkoeffizient, Q_{ex} die Verbrennungswärme des Pulvers, m_a die ausgeströmte Gasmasse und v_i die Geschwindigkeit der im Lauf strömenden Pulvergase.

In Bewegung befinden sich die unverbrannten Pulverteilchen und die noch im Lauf vorhandene Gasmasse

$$(3.4:37) \quad \dot{v}_i = \frac{\Delta p_i \cdot A}{m_i} , \quad [\text{m/s}^2]$$

wobei Δp_i das Druckgefälle im Rohrrinnern bedeutet.

Das Abbrandgesetz und die Gl. (3.4:33–36) bilden zusammen mit der Bewegungsgleichung (3.4:37) und der Gleichung für den Weg das folgende Differenzialgleichungssystem (wo p_m den Lavaldruck bezeichnet)

$$(3.4:38a) \quad \dot{z} = \varphi(z) \cdot B_A \cdot \left(\frac{p}{p_0} \right)^n , \quad [1/\text{s}]$$

$$(3.4:38b) \quad \dot{m}_a = A \cdot \sqrt{\gamma \cdot p_i \cdot \frac{m_c \cdot z - m_a}{V} \cdot \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}} , \quad [\text{kg/s}]$$

$$(3.4:38c) \quad \dot{v}_i = \frac{(p_i - p_m) \cdot A}{m_c \cdot z - m_a} , \quad [\text{m/s}^2]$$

$$(3.4:38d) \quad \dot{x} = v , \quad [\text{m/s}]$$

$$(3.4:39) \quad p_i = \frac{m_c \cdot z \cdot Q_{ex} - \frac{1}{2} \cdot (m_c - m_a) \cdot v_i^2}{V \cdot \left(\frac{1}{\gamma - 1} + \frac{\gamma}{\gamma + 1} \cdot \frac{m_a}{m_c \cdot z - m_a} \right)}, \quad [\text{N/m}^2]$$

Die Gleichung (3.4:39) dient zur Bestimmung des Innendruckes, der nach jedem Integrationsteilschritt berechnet werden muss; dabei ist für das Gasvolumen Gl. (3.4:33) einzusetzen.

Das Gleichungssystem lässt sich durch die Annahme vereinfachen, dass die Geschwindigkeit der Pulverteilchen und der Gase im Innern des Laufs gering ist und daher vernachlässigt werden kann. Die Gleichungen (3.4:38c), (3.4:38d) und der zweite Summand im Zähler der Gleichung (3.4:39) fallen dann weg. Diese Annahme lässt sich aus den Messergebnissen ableiten, aus denen hervorgeht, dass der Maximaldruck je nach Auslegung der Kartusche zwischen Kartuschenmündung und Laufmitte erreicht wird und die Druckunterschiede im Lauf relativ gering sind.

Das Differenzialgleichungssystem (3.4:38a–d) beschreibt zusammen mit den Gl. (3.4:39) die Vorgänge im offenen Rohr nur unvollständig. Ungenauigkeiten ergeben sich vor allem durch die folgenden Annahmen:

- Das innenballistische Gleichungssystem für Rohrwaffen geht von einem durch das Geschoss abgeschlossenen, definierten Brennraum aus. Beim offenen Rohr ist der für den Druckaufbau maßgebende Raum nicht exakt bestimmbar. Als Näherungswert wird anfänglich das Volumen der halben Lauflänge angenommen (da der Brennvorgang zuerst im hinteren Teil stattfindet), das mit der Beschleunigung der Pulvergase bis zum ganzen Laufvolumen ausgedehnt wird.
- Es lässt sich nur ein Druckverlauf rechnen, der für den ganzen, momentan zur Verfügung stehenden Raum gilt. Eine wegabhängige Druckverteilung ist nicht möglich.
- Die Gleichungen für den durch das Ausströmen bedingten Masseverlust gelten für einen großen Behälter, in dem konstanter Druck und konstante Dichte herrscht. Für genügend kurze Zeitschritte ist dieser Ansatz als Näherung vertretbar.

Dennoch ergeben sich mit üblichen Pulverdaten Werte, die (mit Ausnahme der Schussentwicklungszeit) den gemessenen Daten annähernd entsprechen. Das Modell lässt sich demnach für Parameterstudien durchaus verwenden.

3.4.7.3 Der Gasdruckverlauf im offenen Rohr

Reale Druckverläufe im offenen Rohr lassen sich mit einfachen Messrohren und mit Knallkartuschen ermitteln, wobei der Druck jeweils am Kartuschenmund, in der Rohrmitte und kurz vor der Rohrmündung mit Piezodrucksensoren gleichzei-

tig gemessen wird. In den Abb. 3.22–25 sind einige typische Beispiele solcher Messungen dargestellt.

Dabei zeigen sich einige besondere Vorkommnisse, insbesondere bezüglich der Lage des Druckmaximums und des Druckes vor der Mündung. Dieser ist in zwei Fällen gleich groß wie oder größer als jener am Kartuschenmund. Schwankungen weisen darauf hin, dass in allen Fällen offensichtlich Expansionswellen und Kom-

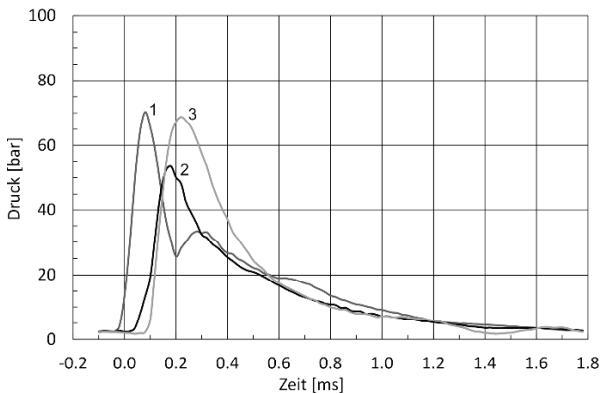


Abb. 3.22. Druckkurven einer Kartusche im Kaliber 8 mm.

1: am Kartuschenmund,
2: in der Rohrmittle,
3: 1 cm vor der Rohrmündung
Rohrlänge 20 cm.
Der Druck in der Rohrmittle ist
geringer als am Kartuschen-
mund und am Rohrende.

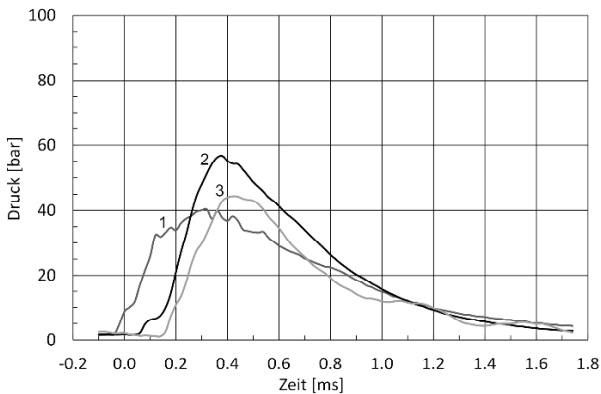


Abb. 3.23. Druckkurven einer Kartusche im Kaliber 9 mm PA.

1: am Kartuschenmund,
2: in der Rohrmittle,
3: 1 cm vor der Rohrmündung
Rohrlänge 20 cm.
Der Maximaldruck tritt in der
Rohrmittle auf, der Druck an
der Mündung ist höher als am
Kartuschenmund.

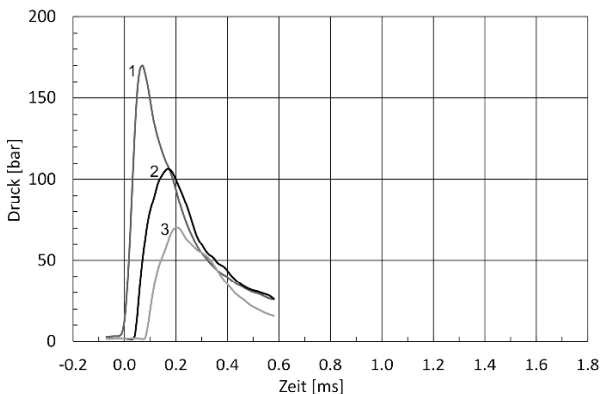


Abb. 3.24. Druckkurven einer Kartusche im Kaliber 380 R (mit Nitropulver).

1: am Kartuschenmund,
2: in der Rohrmittle,
3: 1 cm vor der Rohrmündung
Rohrlänge 20 cm.
Der Maximaldruck tritt am
Kartuschenmund auf und
nimmt zur Mündung hin ab.
Beachte den andern Maßstab
der y-Achse.

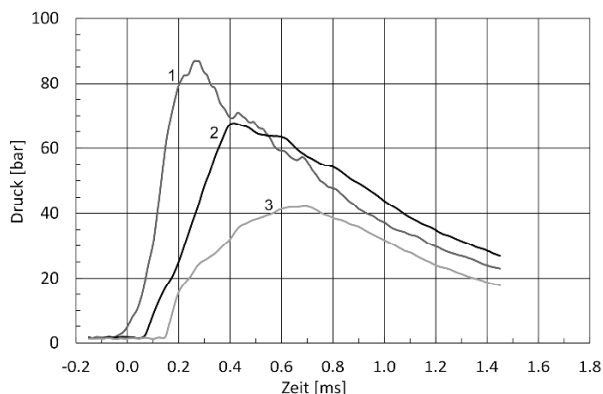


Abb. 3.25. Druckkurven einer Kartusche im Kaliber 380 R (mit Schwarzpulver).

1: am Kartuschenmund,
2: in der Rohrmitte,
3: 1 cm vor der Rohrmündung
Rohrlänge 20 cm.
Der Maximaldruck tritt am Kartuschenmund auf. Der zeitliche Ablauf ist deutlich langsamer als beim Nitropulver.

pressionswellen durch das Rohr laufen, wie dies in der Arbeit von RIEMANN postuliert worden ist (siehe Abschn. 3.4.5.1). Mit Ausnahme bei der Schwarzpulverkartusche gleicht sich der Druck nach und nach aus.

Der Unterschied zwischen Nitro- und Schwarzpulver geht aus den beiden Abbildungen 3.24 und 3.25 hervor; beide Kartuschen gehören dem gleichen Kaliber an, sind aber mit unterschiedlicher Pulverart geladen.

3.5 Bestimmung der erforderlichen Pulverkenndaten

3.5.1 Allgemeines

Innenballistische Rechnungen sind darauf angewiesen, dass die in der Tabelle 3.6 (S. 84) erwähnten Pulverkenndaten bekannt sind. Zu deren Ermittlung lassen sich zwei Wege beschreiten: Der eine führt über die thermodynamische Berechnung der Umsetzung von Explosivstoffen (J. AKHAVAN, 2008, J. KÖHLER et al. 2008), der andere über die experimentelle Bestimmung.

Experimentell lassen sich die meisten Pulverkenndaten mit der sogenannten *manometrischen Bombe* (auch als *ballistische Bombe* bezeichnet) bestimmen. Mit einer weiteren Versuchseinrichtung mit dem Namen *Crawfordbombe* kann die Abbrandgeschwindigkeit gemessen werden.

3.5.2 Die manometrische Bombe

Der Grundgedanke der manometrischen Bombe besteht darin, dass eine gewisse Menge Treibmittel in einem festen Volumen V_{mb} verbrannt wird, wobei sich bei Brennschluss ein bestimmter Maximaldruck p_{mb} einstellt. Wegen der Größe der Moleküle der Verbrennungsgase (und auch wegen des Druckes) ist dabei eigentlich die van-der-Waals-Gleichung (2.3:2a) zugrunde zu legen. Wegen der Höhe

des Druckes kann jedoch der Binnendruck vernachlässigt werden. Für den Druck in der manometrischen Bombe gilt demnach

$$(3.5:1) \quad p_{mb} \cdot (V_{mb} - \eta \cdot m_c) = m_c \cdot R \cdot T_{ex} \quad [J]$$

Darin bedeutet m_c die Pulvermasse, η das Kovolumen, R die Gaskonstante und T_{ex} die Temperatur der Verbrennungsgase (*Flammtemperatur* oder *Explosionstemperatur* genannt), die (sehr aufwändig) experimentell bestimmt aber auch thermodynamisch berechnet werden kann.

Das Produkt aus Gaskonstante und Flammtemperatur ist eine Pulverkonstante, die als *spezifische Energie* F_{se} (früher *Pulverkraft*, engl. Force) bezeichnet wird

$$(3.5:2) \quad F_{se} = R \cdot T_{ex} \quad [J/kg]$$

Sie stellt die Druckenergie dar, welche beim Abbrennen von 1 g Pulver frei wird und für die Umwandlung in mechanische Energie zur Verfügung steht.

Wird Gl. (3.5:1) durch die Masse dividiert, mit Δ die *Ladedichte* m_c/V_{mb} eingeführt und Gl. (3.5:2) berücksichtigt, ergibt sich nach kurzer Rechnung

$$(3.5:3) \quad p_{mb} = \frac{\Delta \cdot F_{se}}{1 - \Delta \cdot \eta} \quad [Pa]$$

Diese Gleichung wurde vom englischen Chemiker F. A. ABEL entwickelt und 1874 (ein Jahr nach der Veröffentlichung der van-der-Waals-Gleichung) publiziert. Sie ist in der Ballistik als *Abel'sche Gleichung* bekannt.

Die manometrische Bombe besteht aus einem dickwandigen Stahlhohlkörper mit verschraubbarer Öffnung und einem definierten Innenvolumen (Abb. 3.26). Von dem zu prüfenden Treibmittel wird eine gewisse Menge in den Innenraum eingebracht und nach dem Verschluss der Bombe über eine elektrische Anzündladung angezündet. Mit einem piezoelektrischen Drucksensor wird der Druck im Innenraum als Funktion der Zeit aufgezeichnet.

In der Gl. (3.5:3) kommen neben den zwei bestimmbareren Werten p_{mb} und Δ mit F_{sp} und η zwei unbekannte Größen vor. Wird nun die Messung in der manometrischen Bombe mit zwei verschiedenen Ladedichten Δ_1 und Δ_2 durchgeführt (wobei die beiden Drücke p_{mb1} bzw. p_{mb2} gemessen werden), ergeben sich zwei Gleichungen, aus denen die beiden unbekannten Größen berechnet werden können. Es ergibt sich

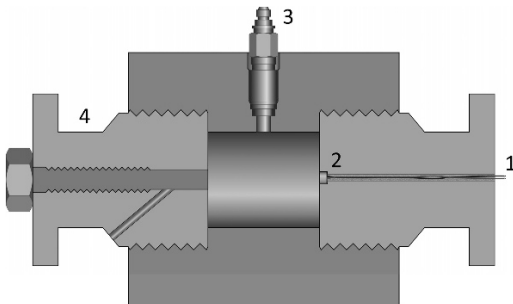


Abb. 3.26. Schema einer manometrischen Bombe.

- 1: Spannungszuführung zu Zündpille,
- 2: Zündpille,
- 3: piezoelektrischer Drucksensor,
- 4: Ablassventil.

$$(3.5:4) \quad F_{se} = \frac{(\Delta_2 - \Delta_1) \cdot p_{mb1} \cdot p_{mb2}}{\Delta_1 \cdot \Delta_2 \cdot (p_{mb1} - p_{mb2})}, \quad [J/kg]$$

$$(3.5:5) \quad \eta = \frac{\Delta_2 \cdot p_{mb1} - \Delta_1 \cdot p_{mb2}}{\Delta_1 \cdot \Delta_2 \cdot (p_{mb1} - p_{mb2})}. \quad [m^3/kg]$$

In der Praxis wird man (wegen den unvermeidlichen Streuungen) Messungen mit mehreren unterschiedlichen Ladedichten durchführen. Die Bestimmung der spezifischen Energie und des Kovolumens erfolgt dann mittels einer linearen Regression mit der folgenden, aus Gl. (3.5:3) abgeleiteten Beziehung

$$(3.5:6) \quad \frac{1}{p_{mb}} = \frac{1}{F_{se}} \cdot \frac{1}{\Delta} - \frac{\eta}{F_{se}}. \quad [1/Pa]$$

Die reziproken Werte der Messungen (Δ , p_{mb}) bilden die Wertepaare, die Steigung der Regressionsgeraden ergibt den Reziprokwert der spezifischen Energie und mit dieser kann aus dem konstanten Glied das Kovolumen ermittelt werden.

Die Registrierung des Druckes in Abhängigkeit der Zeit ermöglicht noch die Bestimmung weiterer Pulverkenndaten. Bezeichnet man wiederum mit $z(t)$ den Anteil der umgesetzten Ladung, so kann der Gasdruck zum Zeitpunkt t wie folgt dargestellt werden

$$(3.5:7) \quad p(t) = \frac{z(t) \cdot \Delta \cdot F_{se}}{1 - \eta \cdot z(t) \cdot \Delta - (1 - z(t)) \cdot \Delta / \rho_c}. \quad [Pa]$$

Für die Ableitung nach der Zeit ergibt sich nach kurzer Rechnung

$$(3.5:8) \quad \dot{p}(t) = \frac{\dot{z}(t) \cdot \Delta \cdot F_{se} \cdot (V_{mb} - \Delta / \rho_c)}{[1 - \eta \cdot z(t) \cdot \Delta - (1 - z(t)) \cdot \Delta / \rho_c]^2}. \quad [Pa/s]$$

Anstelle von $\dot{z}(t)$ kann mit Gl. (3.4:1a) das Abbrandgesetz eingesetzt und nach dem Produkt aus dynamischer Lebhaftigkeit und Formfunktion aufgelöst werden

$$(3.5:9) \quad \frac{B_A \cdot \phi(z)}{p_0} = \frac{\dot{p}(t)}{p(t)} \cdot \frac{[1 - \eta \cdot z(t) \cdot \Delta - (1 - z(t)) \cdot \Delta / \rho_c]^2}{\Delta \cdot F_{se} \cdot (1 - \Delta / \rho_c)}. \quad [1/(Pa \cdot s)]$$

Nimmt man an, dass $\eta = 1/\rho_c$ gilt und berücksichtigt Gl. (3.5:3), vereinfacht sich die Gl. (3.5:9) zu

$$(3.5:10) \quad \frac{B_A \cdot \phi(z)}{p_0} = \frac{\dot{p}(t)}{p_{mb} \cdot p(t)}. \quad [1/(Pa \cdot s)]$$

Das Abbrandverhalten des Pulvers ist damit bekannt.

3.5.3 Die Crawfordbombe

Die für innenballistische Rechnungen wichtige Abbrandgeschwindigkeit und ihre Abhängigkeit vom Druck werden mit der sogenannten *Crawfordbombe* ermittelt. Entwickelt an der Universität von Minnesota in Minneapolis, wurde sie erstmals in B. L. CRAWFORD et al. (1947) beschrieben.

In einem druckfesten Stahlgefäß (siehe Abb. 3.27) wird ein (in der Regel speziell hergestellter) meist zylinderförmiger Probekörper des zu untersuchenden Pulvers eingebracht. Dieser besitzt einen Durchmesser von 3–6 mm und ist (je nach Größe der Bombe) 150–250 mm lang. Der Brennraum wird mit Stickstoff (N_2) gefüllt, wobei der Druck auf den Wert eingestellt wird, bei dem die Abbrandgeschwindigkeit gemessen werden soll. Damit der Pulverstab linear abrennt, werden dessen Mantel und die freie Stirnseite mit einem Kunststoffüberzug isoliert. Die Anzündung erfolgt elektrisch an der zweiten Stirnseite. In den Pulverstab werden zwei oder drei an einem Zeitmessgerät angeschlossene Sonden eingebohrt, welche bei Durchgang der Flammenfront ein Signal abgeben. Aus dem Abstand der Sonden und der gemessenen Zeit ergibt sich die Abbrandgeschwindigkeit bei dem eingestellten Druck.

Das Volumen des Brennraumes ist so groß zu wählen, dass die beim Abbrand entstehenden Pulvergase den Druck nur unwesentlich erhöhen.

Auf Grund der Messanordnung in der Crawfordbombe kann nicht erwartet werden, dass die Ergebnisse unmittelbar den realen Werten in der Waffe entsprechen. Einerseits ist der Querschnitt des Probekörpers relativ gering, andererseits wird die Randzone mit der Isolation einen gewissen Einfluss auf den Abbrand ausüben. Für Vergleichsmessungen zwischen verschiedenen Treibmitteln und für Qualitätsprüfungen ist die Methode jedoch gut geeignet.

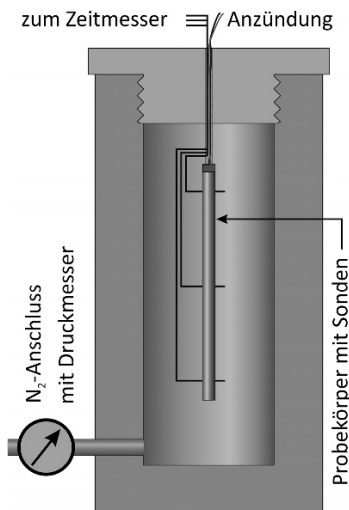


Abb. 3.27. Schema einer Crawfordbombe. Das Druckgefäß wird mit Stickstoffgas von vorgegebenem Druck gefüllt. Der am Mantel und an der freien Stirnfläche isolierte Probekörper brennt linear ab, wobei die Brennzeit zwischen den Sonden gemessen wird.

3.5.4 Thermodynamische Berechnung

Außer der in den letzten zwei Abschnitten beschriebenen experimentellen Bestimmung der innenballistischen Pulverkenndaten besteht auch die Möglichkeit, die Verbrennungswärme (Q_{ex}), die Flammtemperatur (T_{ex}), die spezifische Energie (F_{se}) und auch das Schwadenvolumen bei Normaltemperatur aus der chemischen Summenformel und der Bildungsenergie der Explosivstoffbestandteile zu berechnen.

Bei Treibladungspulvern erfolgt dies bei konstantem Volumen (entsprechend der manometrischen Bombe) und bei Raketenpulvern bei konstantem Druck.

Dieses Verfahren gehört jedoch in das Gebiet der Explosivstoffchemie und liegt außerhalb des Themas dieses Buches. Ausführliche Beschreibungen hierzu finden sich in J. KÖHLER et al. (2008) und J. AKHAVAN (2008).

3.6 Innenballistik der Rakete

3.6.1 Allgemeines

Mit dem Begriff Rakete wird bekanntlich ein Geschoss beschrieben, welches den für den Antrieb benötigten Treibstoff mit sich führt. Bei dessen Umsetzung in einer *Brennkammer* werden unter Druck stehende Gase erzeugt, die durch eine Lavaldüse am Geschossheck mit hoher Geschwindigkeit ausströmen und dadurch einen Impuls erzeugen. Infolge der Impulserhaltung wird dieser auf das Geschoss übertragen und führt zu dessen Beschleunigung. Die beschleunigende Kraft wird als *Schub* bezeichnet; sie sollte möglichst konstant sein.

Weil es zu einem ständigen Abströmen der produzierten Gase kommt, ist der Druck in der Brennkammer eines Raketentriebwerkes wesentlich (5–10 Mal) geringer als im Laderaum einer Waffe. Dies erlaubt eine relativ leichte Geschosskonstruktion und – weil der Druck nur im Geschoss aufgebaut wird – Abschlusseinrichtungen geringer Masse.

Raketengeschosse sind oft mit zwei Triebwerken ausgerüstet: einem *Starttriebwerk*, welches das Geschoss in kurzer Zeit auf eine gewisse Mündungsgeschwindigkeit bringt (bis zum Ende der Abschlusseinrichtung) und einem *Marschtriebwerk*, das für eine Geschwindigkeitszunahme während einer ersten Flugphase besorgt ist (siehe Abb. 3.28). Es liegt auf der Hand, dass die beiden ganz unterschiedlich ausgelegt sein müssen, sowohl bezüglich der Treibladung als auch der geometrischen Abmessungen.

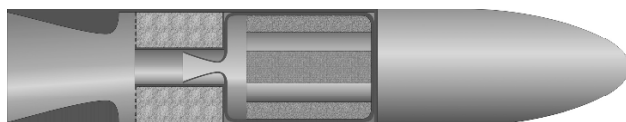


Abb. 3.28. Schema einer Panzerabwehrrakete mit Starttriebwerk (große Düse) und Marschtriebwerk (kleine Düse).

3.6.2 Treibladungsabbrand und Brennkammerdruck

3.6.2.1 Der Abbrand der Treibladung

Aus den Beziehungen der Düsentheorie (Abschn. 2.3.6) geht hervor, dass eine möglichst große und während einer gewissen Zeit gleichmäßige Ausströmgeschwindigkeit eines (möglichst) konstanten Innendrucks in der Brennkammer bedarf. Zusammen mit dem oben erwähnten kleineren Druckniveau erfordert dies besondere Raketenpulver mit geringerer Abbrandgeschwindigkeit, die zudem nur wenig vom Druck abhängig sein sollten. In Frage kommen:

- *Homogene Treibmittel*, bei denen der Energieträger und der Sauerstoff in einer Verbindung enthalten ist. Es handelt sich dabei um zweibasige Pulver, deren Aufbau den Geschützpulvern (wie im Abschn. 3.2.3.3. beschrieben) ähnlich ist.
- *Heterogene Treibmittel* (Composite), die aus zwei Komponenten bestehen: einem Oxidator und einem Energielieferanten, der zugleich auch der Binder ist. Im Abschn. 3.2.4.2 sind sie etwas genauer erläutert.

Flüssigtreibmittel kommen im wehrtechnischen Bereich ballistisch fliegender Geschosse kaum vor und werden hier nicht behandelt.

Das thermodynamische Modell der Innenballistik eines Raketentriebwerkes setzt ebenso (wie jenes der Geschütze) voraus, dass das Pulver auf der gesamten Oberfläche gleichzeitig beginnt abzubrennen. Für die Abbrandgeschwindigkeit wird üblicherweise das Gesetz von VIEILLE verwendet (siehe Gl. 3.3:14)

$$(3.6:1) \quad \frac{de}{dt} = \beta \cdot \left(\frac{p_i}{p_0} \right)^\alpha, \quad [\text{mm/s}], [\text{m/s}]$$

mit e als abgebrannte Pulverdicke, p_i der momentane Druck und p_0 der Umgebungsdruck.

In dieser für Rohr Waffen gültigen und experimentell ermittelten Gleichung bezeichnen α und β pulverabhängige Konstanten; die Abbrandgeschwindigkeit hängt somit nur vom Druck ab. Einen Einfluss der Temperatur kann man infolge der kurzen Brenndauer (je nach Kaliber etwa 1–60 ms) ausschließen. Raketen-treibsätze brennen jedoch bei wesentlich tieferem Druck und mit 10 bis einige 100 Mal längeren Brennzeiten. Die heißen Verbrennungsgase können somit den noch vorhandenen Pulverkörper vorwärmen und dadurch die Geschwindigkeit des Abbrandes beschleunigen, was sich in einer Zunahme des Koeffizienten β äußert. Dies wird in Gl. (3.6:1) ausgeglichen, indem der Exponent $\alpha < 1$ gewählt wird. Mit der Setzung (3.3:17) ergibt sich die relative auf das Volumen bezogene Abbrandgeschwindigkeit gemäß (Gl. 3.3:18) zu

$$\frac{dz}{dt} = \frac{A(e) \cdot \rho_c}{m_c} \cdot \frac{de}{dt}, \quad [1/\text{s}]$$

Tabelle 3.10. Zusammenstellung der Variablen im Abschn. 3.6.2

e	[m]	Dicke der abgebrannten Treibladung	ρ_c	[kg/m ³]	Dichte der Treibladung
A _c	[m ²]	Oberfläche der Treibladung	ρ_i	[kg/m ³]	Dichte der Gase
A _m	[m ²]	engster Düsenquerschnitt	p _i	[Pa]	Druck in der Brennkammer
V _b	[m ³]	Volumen der Brennkammer	p ₀	[Pa]	Standarddruck
V _i	[m ³]	freies Volumen	T _i	[K]	Brennkammertemperatur
m _c	[kg]	Masse der Treibladung	c	[m/s]	Schallgeschwindigkeit
m _a	[kg]	Masse der ausgeströmten Gase	γ	[–]	Isentropenkoeffizient

worin das Volumen der ursprünglichen Treibladung durch deren Masse m_c und Dichte ρ_c ersetzt worden ist. Einsetzen von Gl. (3.6:1) führt zu

$$(3.6:2) \quad \frac{dz}{dt} = \frac{A(e) \cdot \rho_c}{m_c} \cdot \beta \cdot \left(\frac{p}{p_0} \right)^\alpha. \quad [1/s]$$

3.6.2.2 Der Druck in der Brennkammer

Die beim Abbrand erzeugten Gase erhöhen einerseits den Druck in der Brennkammer, andererseits strömt ein Teil davon infolge des Druckunterschieds zwischen Brennkammer und Außendruck durch die Düse ab. Die in der Zeit dt umgesetzte Treibladungsmasse lässt sich somit wie folgt darstellen

$$(3.6:3) \quad m_c \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{d(\rho_i \cdot V_i)}{dt} + \frac{dm_a}{dt}. \quad [kg/s]$$

Vorausgesetzt, die Düse ist angepasst, herrscht im engsten Querschnitt der Lavaldruck (siehe Abschn. 2.3.6.2) und die pro Zeiteinheit ausströmende Masse lautet nach (Gl. 2.3:43)

$$\frac{dm_a}{dt} = A_m \cdot \sqrt{\gamma \cdot p_i \cdot \rho_i \cdot \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}}. \quad [kg/s]$$

Bedeutung der Variablen siehe Tabelle 3.10.

Für den Einsatz in der Gl. (3.6:3) wird diese Beziehung etwas umgestellt und die Faktoren mit dem Isentropenkoeffizienten zusammengefasst

$$\frac{dm_a}{dt} = A_m \cdot p_i \cdot \sqrt{\frac{1}{\gamma \cdot R \cdot T_i}} \cdot \gamma \cdot \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}. \quad [kg/s]$$

Einsetzen der Schallgeschwindigkeit

$$c = \sqrt{\gamma \cdot R \cdot T_i} , \quad [\text{m/s}]$$

führt zu

$$(3.6:4) \quad \frac{dm_a}{dt} = \frac{A_m \cdot p_i}{c} \cdot f(\gamma) . \quad [\text{kg/s}]$$

mit

$$f(\gamma) = \gamma \cdot \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} . \quad [-]$$

Die Herleitung der Differenzialgleichung für den Druck in der Brennkammer erfordert noch Beziehungen für die Dichte der Gase im Brennraum

$$(3.6:5) \quad \rho_i = \frac{\gamma}{c^2} \cdot p_i , \quad [\text{kg/m}^3]$$

für das freie Brennraumvolumen

$$(3.6:6) \quad V_i = V_b - \frac{m_c}{\rho_c} \cdot (1-z) - \left(m_c \cdot z - \frac{dm_a}{dt} \right) \cdot \eta , \quad [\text{m}^3]$$

und für die Änderung des Gasvolumens in der Zeit dt

$$(3.6:7) \quad \frac{dV_i}{dt} = \frac{m_c}{\rho_c} \cdot \frac{dz}{dt} = A(e) \cdot \beta \cdot \left(\frac{p}{p_0} \right)^\alpha . \quad [\text{m}^3/\text{s}]$$

Wird in der Gl. (3.6:3) im ersten Summanden auf der rechten Seite die Produktregel angewendet und werden anschließend die drei Gl. (3.6:5–7) eingesetzt, so ergibt sich nach einigen Rechenschritten und mit der Annahme einer konstanten Temperatur in der Brennkammer ($T_i = \text{const} \Rightarrow c = \text{const}$)

$$(3.6:8) \quad \begin{aligned} \frac{\gamma}{c^2} \cdot \frac{dp_i}{dt} \left[V_b - \frac{m_c}{\rho_c} \cdot (1-z) - \left(m_c \cdot z - \frac{dm_a}{dt} \right) \cdot \eta \right] + \\ + \rho_c \cdot A_c(e) \cdot \beta \cdot \frac{p_i^\alpha}{p_0^\alpha} \cdot \left(\frac{\gamma}{c^2} \cdot \frac{p_i}{\rho_c} - 1 \right) = - \frac{A_m \cdot p_i}{c} \cdot F(\gamma) . \end{aligned} \quad [\text{kg/s}]$$

Diese Gleichung bildet zusammen mit Gl. (6.3:2) das System der Differenzialgleichungen zur Bestimmung des Druckes in der Brennkammer in Abhängigkeit der Zeit. In dieser allgemeinen Form lässt es sich nur mit numerischen Methoden lösen.

Setzt man voraus, dass die Treibladung mit konstanter Oberfläche abbrennt, so stellt sich in der Brennkammer ein konstanter Druck ein, der sich mit Gl. (3.6:8) berechnen lässt. Mit $p_i = \text{const}$ folgt $dp_i/dt = 0$ und Gl. (3.6:8) vereinfacht sich zu

$$(3.6:9) \quad \rho_c \cdot A_{c0} \cdot \beta \cdot \frac{p_i^\alpha}{p_0^\alpha} \cdot \left(\frac{\gamma}{c^2} \cdot \frac{p_i}{\rho_c} - 1 \right) = - \frac{A_m \cdot p_i}{c} \cdot F(\gamma) , \quad [\text{kg/s}]$$

Wird in der Klammer Gl. (3.6:5) angewendet und anschließend berechtigterweise $p_i \ll p_c$ gesetzt (wodurch der Klammerausdruck zu -1 wird), so kann Gl. (3.6:9) nach p_i aufgelöst und umgeformt werden

$$(3.6:10) \quad p_i = \left(\frac{c \cdot p_c \cdot \beta}{F(\gamma) \cdot p_0^\alpha} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot \left(\frac{A_{c0}}{A_m} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad [\text{Pa}]$$

Die Umformung erfolgte zielgerichtet auf den zweiten Klammerausdruck auf der rechten Seite, der das Verhältnis der (konstanten) Treibladungsoberfläche A_{c0} zur Fläche des engsten Querschnittes der Düse A_m darstellt. Dieses Verhältnis wird als *Klemmung* K bezeichnet und stellt eine der wichtigsten Größen eines Raketentriebwerks dar

$$(3.6:11) \quad K = \frac{A_{c0}}{A_m}. \quad [-]$$

Gl. (3.6:10) lautet somit in einfacher Form

$$(3.6:12) \quad p_i = C \cdot K^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad \text{mit } C = \text{const.} \quad [\text{Pa}]$$

Diese Beziehung lässt sofort ersehen, dass $\alpha < 1$ für Raketentreibladungen zwingend erforderlich ist und dass ein möglichst kleines α anzustreben ist. Je näher α bei 1 liegt, desto empfindlicher reagiert der Druck auf die Klemmung.

Nimmt α beispielsweise den Wert 0.8 an, so wird der Innendruck proportional zu K^5 . Würde in diesem Fall die Oberfläche der Treibladung z. B. infolge einer Rissbildung um 10 % zunehmen, ergäbe sich bereits eine Drucksteigerung von über 60 %.

3.6.2.3 Treibladungsgeometrien

Im vorangehenden Abschnitt wurde dargelegt, welche Bedeutung eine mit konstanter Oberfläche abbrennende Treibladung bei einem Raketentriebwerk hat. Die naheliegendste geometrische Form mit dieser Eigenschaft ist der *Stirnbrenner*, ein (in der Regel) zylindrischer Pulverkörper, der allseitig mit Ausnahme einer Stirnseite gegen Abbrand isoliert ist. Nachteilig ist, dass sich die Wände der Brennkammer bei längeren Brennzeiten im Bereich des bereits verbrannten Pulvers durch die heißen Gase sehr stark erhitzen und daher entsprechend massiv konstruiert sein müssen. Stirnbrenner werden daher kaum mehr eingesetzt, außer in sehr kurzzeitig brennenden Starttriebwerken.

Ein Beispiel ist in Abb. 3.28 im Abschn. 3.6.1 dargestellt. Der Pulverkörper des Starttriebwerkes besteht aus einem ringförmigen Stirnbrenner, der um die Düse des Marschtriebwerkes angeordnet ist. Jener des Marschtriebwerkes ist als Innenbrenner ausgestaltet, der auch mit konstanter Oberfläche abbrennt.

Mit einfachen geometrischen Formen lassen sich Pulverkörper herstellen, welche mit konstanter Oberfläche abbrennen, wobei die Flammfront erst zuletzt auf den Brennkammerwände trifft (*Innenbrenner*). In der Abb. 3.29 sind drei solche For-

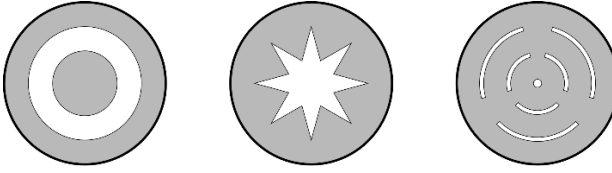


Abb. 3.29. Querschnitte von Pulverkörpern (Innenbrennern), welche zumindest während längerer Zeit mit konstanter Oberfläche abbrennen. Die Außenfläche ist isoliert.

men dargestellt. Aufwändigere Innengeometrien verbunden mit Treibladungsteilen verschiedener Abbrandgeschwindigkeiten gestatten es auch, den Pulverabbrand so zu steuern, dass sich im Verlauf des Abbrandes verschiedene Druckniveaus einstellen. So lässt sich beispielsweise der Druckverlauf äußeren Bedingungen anpassen oder ein Start- und ein Marschtriebwerk in einer Brennkammer vereinen (eine ausführliche Darstellung findet sich z. B. in W. WOLFF, 2006).

3.6.3 Der Schub

3.6.3.1 Die Raketengleichung

Wie bereits im einführenden Abschn. 3.6.1 erwähnt, basiert der Antrieb einer Rakete auf dem Grundprinzip der Impulserhaltung. Bezeichnet man mit dm_p die Abnahme der Raketenmasse und mit dv_p deren Geschwindigkeitszunahme, mit dm_a die ausströmende Gasmasse, mit v_a die Ausströmgeschwindigkeit des Gases, so gilt bei Abwesenheit weiterer Kräfte und wegen $dm_p = dm_a$

$$m_p \cdot dv_p = -dm_p \cdot v_a, \quad [\text{kg} \cdot \text{m/s}]$$

$$\text{oder} \quad dv_p = -v_a \cdot \frac{dm_p}{m_p}. \quad [\text{m/s}]$$

Die Integration dieser Gleichung von der Startmasse m_{p0} bis zur Masse m , ergibt

$$v_p = -v_a \cdot \int_{m_{p0}}^m \frac{dm_p}{m_p} = -v_a \cdot (\ln m - \ln m_{p0}), \quad [\text{m/s}]$$

$$(3.6:13) \quad v_p = v_a \cdot \ln \frac{m_{p0}}{m}. \quad [\text{m/s}]$$

Dies ist die *allgemeine Raketengleichung*. Wird anstelle von m die Raketenmasse bei Brennschluss $m_{p0} - m_c$ (wo m_c die Treibladungsmasse darstellt) eingesetzt, so liefert Gl. (3.6:13) die maximale Geschwindigkeit bei Brennschluss v_{pe}

$$(3.6:14) \quad v_{pe} = v_a \cdot \ln \frac{m_{p0}}{m_{p0} - m_c} = v_a \cdot \ln \mu. \quad [\text{m/s}]$$

Der Quotient aus Startmasse m_{p0} und Leermasse $m_{p0} - m_c$ der Rakete wird als deren *Massenverhältnis* μ bezeichnet. Hohe Endgeschwindigkeiten der Rakete

werden mit einer hohen Ausströmgeschwindigkeit und mit einem großen Massenverhältnis erreicht.

Die an der Rakete schiebende Kraft, der *Schub*, ergibt sich nun zu einem Teil aus der pro Zeiteinheit ausströmenden Masse multipliziert mit deren Ausströmgeschwindigkeit (Impulssatz). Ein weiterer Teil entsteht dadurch, dass der Druck im Endquerschnitt der Düse vom Außendruck verschieden ist. Diese Druckdifferenz wirkt auf den Endquerschnitt und erzeugt an dessen Fläche eine weitere auf die Rakete wirkende Kraft. Der Schub ergibt sich somit zu

$$(3.6:15) \quad F_s = \frac{dm_c}{dt} \cdot v_a + A_e \cdot (p_e - p_a) . \quad [N]$$

A_e bedeutet den Endquerschnitt der Düse, p_e der dortige Druck und p_a der Außendruck.

Besitzt die Rakete eine angepasste Lavaldüse (siehe dazu Abschn. 2.3.6.5), dann gilt $p_e = p_a$ und der zweite Term auf der rechten Seite verschwindet. In der Praxis wird kaum je eine ballistische Rakete angepasst sein. Der Druck am Geschossende wird maßgeblich von der Umströmung des Geschosskörpers und diese wiederum von der Fluggeschwindigkeit bestimmt sein, die sich in der Beschleunigungsphase ständig ändert. Raketen mit größeren Gipfelhöhen (z. B. Artillerieraketen) durchfliegen zudem einen abnehmenden Außendruck. Dies beeinflusst einerseits die Auslegung des Treibwerks, andererseits auch den Schub in der ballistischen Rechnung des angetriebenen Flugbahnstückes.

3.6.3.2 Berechnung des Schubes, Düsenauslegung

Zur Berechnung des Schubes bei einer angepassten Düse kann auf die im Abschn. 2.3.6 bereitgestellten Formeln zurückgegriffen werden. Aus Gl. (2.3:51) ergibt sich für den Massendurchsatz

$$(3.6:16) \quad \frac{dm_c}{dt} = A_m \cdot \sqrt{\gamma \cdot p_i \cdot \rho_i \cdot \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}}} , \quad [kg/s]$$

und die Strömungsgeschwindigkeit v_a beim Druck p_e beträgt nach Gl. (2.3:39)

$$(3.6:17) \quad v_a = \sqrt{\frac{2 \cdot \gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{p_i}{\rho_i} \cdot \left[1 - \left(\frac{p_e}{p_i} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \right]} . \quad [m/s]$$

Eingesetzt in die Gl. (3.6:15) folgt für den Schub

$$(3.6:18) \quad F_s = A_m \cdot p_i \cdot Y \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{p_e}{p_i} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}} , \quad [N]$$

wobei Y eine reine Funktion des Isentropenkoeffizienten ist

$$(3.6:19) \quad Y = \gamma \cdot \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \cdot \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}} . \quad [-]$$

Der Quotient aus Schub und dem Produkt von Brennkammerdruck und engstem Düsenquerschnitt wird als *Schubkoeffizient* C_s bezeichnet

$$(3.6:20) \quad C_s = \frac{F_s}{A_m \cdot p_i} = Y \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{p_e}{p_i}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} , \quad [N]$$

Er ist nur vom Isentropenkoeffizienten (also vom Treibmittel) und vom Druckverhältnis zwischen Endquerschnitt und Brennkammer abhängig; bei Auslegung des Antriebs ist er eine wichtige Kennzahl.

Die geometrische Form einer Lavaldüse wurde mittels der Gl. (2.3:53) bestimmt, die den Düsenquerschnitt mit der Machzahl der Strömung an der betreffenden Stelle in Beziehung bringt. Wird nun in dieser Formel die Machzahl mit Hilfe der Gl. (2.3:52) durch das Druckverhältnis von Brennkammerdruck zum Druck im betrachteten Querschnitt ersetzt, ergibt sich nach einiger Rechnung eine Gleichung, die es gestattet, aus der Fläche des engsten Querschnittes der Düse A_m , dem Druck im Endquerschnitt p_e und dem Innendruck p_i die zugehörige Endquerschnittsfläche A_e zu bestimmen

$$(3.6:21) \quad \frac{A_e}{A_m} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{p_i}{p_e}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \cdot \left[1 - \left(\frac{p_i}{p_e}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\right]^{\frac{1}{2}} . \quad [-]$$

Im einfachsten Fall wird diese Endfläche durch eine kegelförmige Expansion erreicht. Allerdings darf der halbe Öffnungswinkel des Kegels 15° nicht überschreiten (W. WOLFF, 2006, P. VON BÖCKH, 2004, gibt 10° an), da beim Überschreiten dieses Winkels die Strömung abreißt; wegen der dabei auftretenden Wirbelbildung nimmt der Wirkungsgrad der Düse stark ab.

Bei der expandierenden Strömung in der Kegeldüse ergeben sich zwangsläufig radiale Geschwindigkeitskomponenten, weshalb die Geschwindigkeit in der Bewegungsrichtung der Rakete etwas geringer ausfällt. Als mittlerer Wert ergibt sich

$$(3.6:22) \quad v_{a\text{eff}} = \frac{v_a}{\alpha_0} \cdot \int_0^{\alpha_0} \cos \alpha \cdot d\alpha = v_a \cdot \frac{\sin \alpha_0}{\alpha_0} . \quad [m/s]$$

Bei einer Kegeldüse mit einem halbem Öffnungswinkel von 15° ergibt sich eine Reduktion von ca. 1.1 %.

Düsen, die für große Höhen (kleinen Außendruck) adaptiert werden, müssten infolge des kleinen Kegelwinkels sehr lang gebaut werden. Man wird in diesen Fällen zu Glockenformen übergehen, welche unmittelbar nach der engsten Stelle einen größeren Knickwinkel zulassen, an dem die Strömung mit einer Prantl-Meyer-Expansion umgelenkt wird. Glockenform und deren Endwinkel können so berechnet werden, dass eine Parallelströmung entsteht (K. OSWATITSCH, 1976).

3.6.3.3 Schubbestimmung

Experimentell gibt es zwei Möglichkeiten, den Schub einer Rakete so zu bestimmen, dass er in eine Flugbahnrechnung eingebaut werden kann. Die eine erfolgt auf einem Raketenprüfstand, wobei während des Abbrandes des Triebwerks der Zeit-Kraft-Verlauf – das sogenannte *Schubdiagramm* – registriert wird. Man muss sich jedoch bewusst sein, dass dieser Schub nicht dem tatsächlichen im Flug entspricht, da die Rakete auf dem Prüfstand nicht umströmt wird und sich somit im Endquerschnitt ein anderer Druck einstellt, als auf der Flugbahn.

Die andere Möglichkeit besteht darin, den Geschwindigkeitsverlauf der Rakete auf ihrer Flugbahn zu messen und daraus die Beschleunigungen zu bestimmen. Wird mit $a_b(t)$ die Beschleunigung in der Antriebsphase und mit $a_f(t)$ die Verzögerung in der Freiflugphase nach Schubende bezeichnet, so kann der Schub wie folgt definiert werden

$$(3.6:23) \quad F_s(t) = m_p(t) \cdot (a_b(t) - a_f(t)) \quad . \quad [N]$$

Allerdings entspricht auch dieser Schub nicht der Realität, da die Umströmung des Raketenkörpers in der Freiflugphase nicht jener während der Beschleunigung entspricht. Es ist prinzipiell nicht möglich, Schub und Widerstand während der Antriebsphase voneinander zu trennen.

In der Praxis wird man eher das auf dem Prüfstand ermittelte Schubdiagramm in die Flugbahnrechnung einführen und den Luftwiderstand den Ergebnissen der Geschwindigkeitsmessungen anpassen.

3.7 Spezielle Antriebssysteme

3.7.1 Allgemeines

Klassische Feuerwaffen haben einige gewichtige Nachteile. Bezogen auf die Masse des geworfenen Körpers sind sie außerordentlich schwer (in der Regel sind sie 200–1000 Mal schwerer als das Geschoss). Zudem werden die Geschosse beim Abschuss hohen Beschleunigungen und damit auch Kräften ausgesetzt. Außerdem sind dem herkömmlichen innenballistischen Antrieb bezüglich der Mündungsgeschwindigkeit Grenzen gesetzt (siehe Abschn. 3.3.6).

Im Laufe der Zeit sind einige Antriebssysteme entwickelt worden, welche den einen oder anderen der oben erwähnten Nachteile zu vermeiden suchten. So liegt der Hauptgrund der großen Waffenmasse im Impulssatz

$$m_w \cdot v_w = m_p \cdot v_p \quad , \quad [N \cdot s]$$

aus dem für die Rückstoßenergie der Waffe folgt

$$(3.7:1) \quad E_w = \frac{m_p}{m_w} \cdot E_p \quad [J]$$

Der Index w bezieht sich auf die Waffe, der Index p auf das Projektil. E_p bedeutet somit die Mündungsenergie.

Die auf die Waffe beim Schuss einwirkende Energie ist also gleich der Mündungsenergie vermindert um das Verhältnis aus Geschoss- und Waffenmasse. Hohe Mündungsenergien erfordern somit zwangsläufig große Waffenmassen.

Auch ohne Raketenantrieb kann eine Waffe so konstruiert werden, dass sie zugleich mit dem Abschussimpuls einen etwa gleich großen Gegenimpuls erzeugt. Die Waffe selbst bleibt damit (praktisch) impulsfrei und die Rücklaufenergie verschwindet. Dies lässt sich grundsätzlich auf zwei Arten realisieren: durch Ausstoßen einer der Geschossmasse ähnlich schweren Masse entgegen der Schussrichtung oder durch einen Gasstrahl, der mit hoher Geschwindigkeit nach hinten ausströmt. Diese beiden Möglichkeiten sind auch entsprechend realisiert worden. Weitere Konstruktionen strebten eine geringe Beschleunigungsbelastung des Geschosses oder eine Steigerung der Mündungsgeschwindigkeit an. Sie werden alle in den folgenden Abschnitten besprochen.

3.7.2 Die Daviskanone

Eine Daviskanone besteht aus einem Rohr mit Abschussvorrichtung und einer Munition, welche das Geschoss, die Treibladung und eine inerte Gegenmasse in der Größenordnung der Geschossmasse enthält (siehe Abb. 3.30). Die Treibladung befindet sich zwischen Geschoss und Gegenmasse. Durch den Druckaufbau bei deren Abbrand wird das Geschoss nach vorne, die Gegenmasse nach hinten beschleunigt. Durch geeignete Wahl der Gegenmasse und der beiden Beschleunigungsstrecken kann Rückstoßfreiheit erreicht werden.

Weil die Gegenmasse in der Munition verbaut ist, wird die Rückstoßfreiheit genaugenommen nicht durch die Waffe, sondern durch die Munition allein erreicht. Manchmal ist auch das Rohr eine Einwegausführung, sodass die „Waffe“ nur noch aus der Abschussvorrichtung besteht.

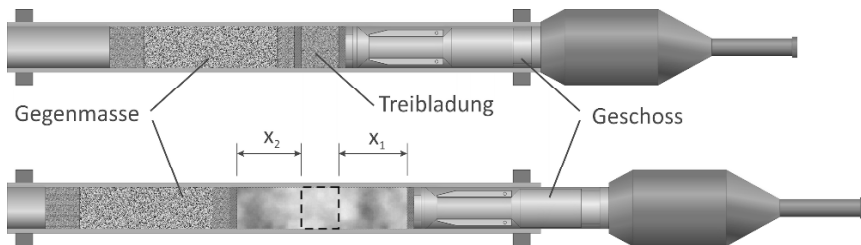


Abb. 3.30. Schema einer Daviskanone. *Oberes Bild:* vor der Zündung, *unteres Bild:* nach der Zündung. Das Geschoss wird nach vorne, die Gegenmasse nach hinten beschleunigt. Die zurückgelegten Wegstrecken werden von der Ruhelage weg gemessen.

Das thermodynamische Gleichungssystem (nach Abschn. 3.4.1) lässt sich einfach auf die Verhältnisse in einer Daviskanone erweitern. Wird mit m die Masse, mit v die Geschwindigkeit, mit x der zurückgelegte Weg und mit F die Reibung bezeichnet, wobei der Index 1 das Geschoss und der Index 2 die Gegenmasse betrifft, so ergibt sich abgeleitet aus den Gl. (3.4:1a–c) und (3.4:2) das folgende Gleichungssystem, das wiederum aus dem Abbrandgesetz (a), den Bewegungsgleichungen (b–e) und der Résal'schen Gleichung (Energiebilanz, 3.7:3) besteht

$$(3.7:2a) \quad \frac{dz}{dt} = \varphi(z) \cdot B_A \cdot \left(\frac{p}{p_0} \right)^\alpha, \quad [1/s]$$

$$(3.7:2b) \quad \frac{dv_1}{dt} = \frac{p \cdot A_r - F_1}{m_1}, \quad [m/s^2]$$

$$(3.7:2c) \quad \frac{dv_2}{dt} = \frac{p \cdot A_r - F_2}{m_2}, \quad [m/s^2]$$

$$(3.7:2d) \quad \frac{dx_1}{dt} = v_1, \quad [m/s]$$

$$(3.7:2e) \quad \frac{dx_2}{dt} = v_2, \quad [m/s]$$

$$(3.7:3) \quad p = \frac{(\gamma^* - 1) \cdot \left[Q_{ex} \cdot z \cdot m_c - \frac{1}{2} \cdot (m_1 \cdot v_1^2 + m_2 \cdot v_2^2) \right]}{V_b^* - z \cdot m_c \cdot \left(\eta - \frac{1}{\rho_c} \right) + A_r \cdot (x_1 + x_2)}. \quad [N/m^2]$$

Im Zusammenhang mit einem realen Waffensystem hat dieses Gleichungssystem gute Ergebnisse ergeben; es eignet sich ebenfalls für Parameterstudien.

Wegen den möglichen einstellbaren Parametern (Masse, Geschwindigkeit und Weg der Gegenmasse, Weg des Geschosses) kann die Daviskanone gut an eine geeignete Rückstoßkompensation (Zeit, Weg, Kraft) angepasst werden. Als Nachteil erweisen sich einerseits die im Verhältnis zur Nutzmasse (Geschoss) große Gesamtmasse und andererseits die zwei entgegengesetzten Beschleunigungsstrecken, die – gemessen an den erzielbaren Mündungsgeschwindigkeiten – zu relativ langen Rohren führen. Beide zusammen bewirken, dass Daviskanonen nicht beliebig in der Leistung gesteigert werden können. Zudem muss hinter dem Rohr ein gewisser Sicherheitsbereich eingehalten werden.

3.7.3 Die Düsenkanone

Wird hingegen der Gegenimpuls nicht mit einer festen Masse, sondern mit einem nach hinten ausströmenden Gas erzielt, fallen die beiden Hauptnachteile der Daviskanone weg. Bedingung ist aber, dass die Gase mit einer hohen Geschwindig-

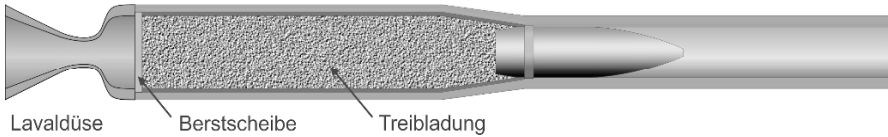


Abb. 3.31. Prinzip einer Düsenkanone. Der Boden (bei andern Ausführungen die Hülsenwand) bildet eine Berstscheibe, welche einen gewissen Druckaufbau ermöglicht, bevor sie bricht. Das beim Abbrand der Treibladung entstehende Gas strömt einerseits durch die Düse ab, andererseits erzeugt es den für die Geschossbeschleunigung erforderlichen Druckaufbau.

keit austreten, damit ein genügend hoher Impuls entsteht. Dies wird erreicht, indem am hinteren Ende eines Waffenrohres eine Lavaldüse angebracht wird und durch eine entsprechend große Treibladung die erforderliche Gasmenge für den Druckaufbau zur Beschleunigung des Geschosses als auch für den Gegenimpuls durch die Düse erzeugt wird. Eine solche Anordnung wird als *Düsenkanone* oder als *rückstoßfreie Kanone* (rsf Kan) bezeichnet (Schema siehe Abb. 3.31).

Damit die Treibladung gut angefeuert wird, muss die Düse durch eine Berstscheibe oder -folie abgeschlossen werden. Bei einigen Waffensystemen ist diese in der (gelochten) Hülsenwand integriert (siehe Abb. 3.32).

Für die innenballistische Berechnung einer Düsenkanone sind einerseits das System der thermodynamischen Gleichungen aus Abschn. 3.4.1 beizuziehen, andererseits sind die Gleichungen für den Schub der Rakete bereitzustellen. Beim ersten System kommt hinzu, dass durch die Düse Gas abfließt, bei den Raketengleichungen ist zu berücksichtigen, dass sich das Volumen der „Brennkammer“ durch die Geschossbewegung vergrößert und der Kammerdruck variiert. Die beiden zusätzlichen Bedingungen erschweren die Berechnung der Düsenkanone wesentlich. Eine ausführliche Darstellung findet sich in J. CORNER (1950).

CORNER wendet sein Verfahren nicht nur auf Düsenkanonen an, sondern auf alle innenballistischen Vorgänge mit Gaslecks wie z. B. ausgeschossene Rohre und Mörser mit Labyrinthdichtung.

Rückstoßfreie Geschütze nach dem Düsenkanonenprinzip werden als tragbare Systeme und auf leichten Fahrzeugen, Flugzeugen, Helikoptern und Schiffen eingesetzt. Die Kaliber liegen im Bereich von ca. 30–120 mm.

Auch die Düsenkanone ist mit gewissen Nachteilen verbunden. Sie benötigt hinter dem Rohr einen Sicherheitsbereich, der oft größer ist als jener der Daviskanon. Die Treibladung ist wesentlich größer als bei einem klassischen Rohr; dies führt zudem zu einer erhöhten Knallbelastung.



Abb. 3.32. Munition zu einer rückstoßfreien Kanone im Kaliber 106 mm. Die Düse wird durch die gelochte Hülsenwand mit Gas versorgt.

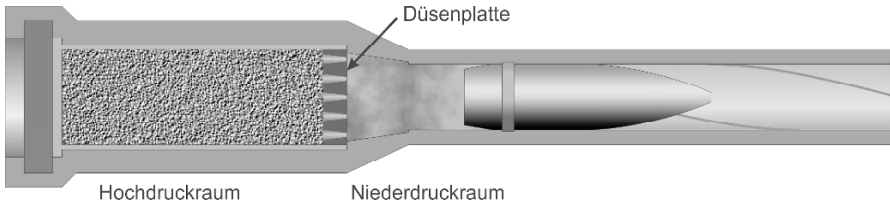


Abb. 3.33. Prinzip eines H-N-Systems. Die Treibladung wird im Hochdruckteil abgebrannt. Der entstehende hohe Druck wird durch die Düsenplatte (mit Loch- oder Venturi-Düsen) auf ein niedrigeres und gleichmäßigeres Druckniveau entspannt.

3.7.4 Das Hochdruck-Niederdruck-System

Ein gewichtiger Nachteil klassischer Geschütze ergibt sich aus der (zeitlich) un-symmetrischen Druckverteilung, die dazu führt, dass Geschoss und Rohr für einen Spitzdruck ausgelegt werden müssen, der zeitlich nur sehr kurz und räumlich nur im Anfangsbereich des Rohres auftritt. Idealer wäre ein möglichst konstanter Druck während der ganzen Schussentwicklungszeit; Rohr und Geschoss würden dadurch deutlich weniger belastet.

Dies führte zu der Idee, den Laderaum als Hochdruckraum auszugestalten und mit einer gelochten Platte gegen das Rohr abzugrenzen z. B. als Abschluss der Hülse (siehe Abb. 3.33). Die Platte ist mit einfachen Löchern oder solchen mit konisch abnehmendem Querschnitt (sogenannte Venturidüsen) versehen. Der Druckunterschied zwischen Hochdruckraum (Druck p_h) und Rohr (Niederdruckraum, p_n) führt zu einem Massendurchfluss (siehe dazu auch Abschn. 2.3.6.2), der zunächst nur vom Druck p_h abhängig ist. Infolge der Durchflussgeschwindigkeit reduziert sich der Druck (Bernoulli-Gleichung).

Durch entsprechende Wahl von Hochdruckraum, Ausbildung der Düsenplatte und der Treibladung kann mit dieser Anordnung eine wesentlich flachere Gasdruckkurve als beim klassischen Rohr erzeugt werden. Eine Anleitung zur approximativen Berechnung (aufgeteilt in die Phase bis Brennschluss und nach Abbrandende) kann dem Buch von J. CORNER (1950) entnommen werden.

3.7.5 Die Leichtgaskanone

Im Abschn. 3.3.6 wurde dargelegt, dass bei klassischen Pulverwaffen die Mündungsgeschwindigkeit eine gewisse Grenze nicht übersteigen kann. Einer der Gründe ist die Druckdifferenz zwischen Rohrboden und Geschossboden, die sich nur mit Schallgeschwindigkeit ausgleichen kann. Die Schallgeschwindigkeit in einem Gas ist gemäß Gl. (2.3:16) gegeben durch

$$(3.7:4) \quad c = \sqrt{\frac{\gamma \cdot p}{\rho}}, \quad [\text{m/s}]$$

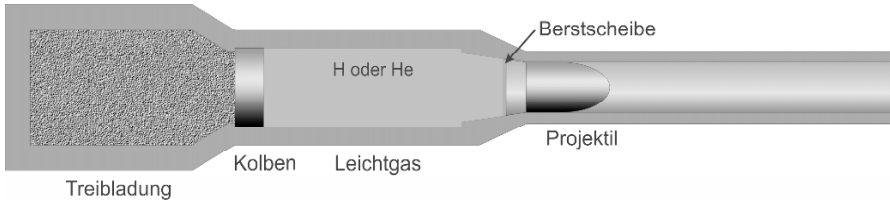


Abb. 3.34. Prinzip einer Leichtgaskanone. Durch den Abbrand der Treibladung wird der Kolben in den Leichtgasraum geschossen und komprimiert das leichte Gas. Bei Erreichen des Berstdruckes der Scheibe strömt das Gas mit hoher Geschwindigkeit in das Rohr und beschleunigt das Projektil.

also umgekehrt proportional zur Dichte. Leichtere Gase haben somit eine höhere Schallgeschwindigkeit und könnten den Druckunterschied schneller ausgleichen, wodurch am Geschossboden eine größere Kraft wirkt.

Eine Leichtgaskanone besitzt demnach zwei Stufen (siehe Abb. 3.34): Die erste Stufe besitzt einen mit klassischem Treibladungspulver geladenen Laderaum. Beim Abbrand des Pulvers wird ein Kolben in einen zweiten mit Wasserstoff oder Helium gefüllten Raum geschossen, der das leichte Gas komprimiert. Gegen den Lauf, in dem sich das Projektil befindet, ist dieser Leichtgasraum durch eine Berstscheibe abgetrennt. Die Scheibe öffnet sich bei Erreichen des vorgegebenen Druckes und das hochverdichtete Leichtgas strömt in das Rohr und beschleunigt das Projektil. Weil das Gas sehr leicht ist (die Molmasse ist bis zu 15 Mal leichter als jene von Pulvergasen), lässt es sich auf wesentlich höhere Geschwindigkeiten beschleunigen als die Gase einer Treibladung. Die erreichten Geschwindigkeiten hängen von der Masse des Projektils ab; sie betragen bei Massen im Grammbe- reich ca. 7 km/s und im Milligrammbereich bis zu 11 km/s.

Leichtgaskanonen werden vor allem für endballistische Untersuchungen im Zusammenhang mit Einschlägen von Minimeteoriten in Raumfahrzeugen und zum Studium von Meteoriteneinschlägen auf der Erde verwendet.

3.7.6 Das Prinzip der Unterkalibergeschosse

3.7.6.1 Grundlegendes

In Abschn. 2.4.2 ist auf die Bedeutung der Querschnittsbelastung hingewiesen worden. Sie tritt insbesondere an den Schnittstellen der ballistischen Teilgebiete zu Tage, indem sie – aus Sicht der Geschosskonstruktors – widersprechende Anforderungen deutlich sichtbar macht. Diese Gegensätze lassen sich bereits in einfachen Gesetzmäßigkeiten darlegen.

Im innenballistischen Prozess kann die durch die Pulvergase am Geschoss erbrachte mechanische Arbeit der kinetischen Energie gleichgesetzt werden, welche das Geschoss dabei übernimmt. Es gilt somit

$$\frac{1}{2} \cdot m_p \cdot v_0^2 = p_m \cdot A_p \cdot x \quad [J]$$

Darin bedeutet A_p die Geschossquerschnittsfläche, p_m ein konstanter, mittlerer Druck, der die gleiche Arbeit erbringt wie der reale Druckverlauf, und x der vom Geschoss zurückgelegte Weg.

Wird diese Gleichung nach der Mündungsgeschwindigkeit aufgelöst und die Definition der Querschnittsbelastung $q = m_p/A_p$ (Gl. 2.4:1, Abschn. 2.4.2) verwendet, ergibt sich

$$(3.7:5) \quad v_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot p_m \cdot A_p \cdot x}{m_p}} = \sqrt{\frac{2 \cdot p_m \cdot x}{q}} \quad [\text{m/s}]$$

Die Mündungsgeschwindigkeit ist also zur Wurzel aus q umgekehrt proportional. Weil grundsätzlich eine hohe v_0 angestrebt wird, ist aus innenballistischer Sicht eine kleine Querschnittsbelastung anzustreben.

Die Verzögerung, die ein Geschoss beim Flug durch die Luft erfährt, kann aus dem Strömungswiderstand Gl. (2.3:25a) abgeleitet werden. Es folgt, wiederum mit Einbezug der Querschnittsbelastung

$$(3.7:6) \quad a_p = \frac{F_w}{m_p} = -c_w \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2 \cdot \frac{A_p}{m_p} = -c_w \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2 \cdot \frac{1}{q} \quad [\text{J}]$$

Ein geringer Geschwindigkeitsverlust wird demnach dann erreicht, wenn das Geschoss eine große Querschnittsbelastung besitzt, also einen kleinen Durchmesser hat und möglichst schwer ist.

Ein Geschoss müsste also für die innenballistische Beschleunigung eine kleine und danach für den außenballistischen Flug eine große Querschnittsbelastung aufweisen (*1. ballistisches Paradoxon*, siehe dazu B. P. KNEUBUEHL, 2013). Geschosskonstrukteure waren daher gefordert, dieser widersprüchlichen Anforderung durch eine entsprechende Auslegung des Geschosses gerecht zu werden.

3.7.6.2 Das konische Rohr

Weil die Geschossmasse noch andere Randbedingung zu erfüllen hat, lag es nahe, dem Geschoss zunächst eine große Querschnittsfläche zu geben und diese dann zu reduzieren, bevor es die Mündung verlässt. Zu diesem Zweck wurde bereits zu Beginn des 20. Jahrhunderts (Patent 1903) vorgeschlagen, dem Waffenrohr ein konisches Stück einzubauen oder auf die Mündung aufzusetzen, mit dem Ziel, das Geschoss zu einem kleineren Kaliber hin zu verformen. Dies bedingt jedoch, dass das Geschoss mit entsprechenden Knautschzonen zu versehen ist (siehe Abb. 3.35). Die Drallübertragung findet im ersten, zylindrischen Teil statt.

Durch die Verformung im glatten konischen Teil wird das axiale Trägheitsmoment des Geschosses verkleinert, was zu einer Steigerung der Winkelgeschwindigkeit führt (Drehimpulserhaltung). Die Stabilität ist dadurch erst recht gewährleistet.

Erst im Verlauf des zweiten Weltkrieges sind konische Geschützrohre eingesetzt worden; sie dienten vor allem bei den Panzerabwehrgeschützen zum Erzielen der für den Durchschlag notwendigen hohen Mündungsgeschwindigkeiten.

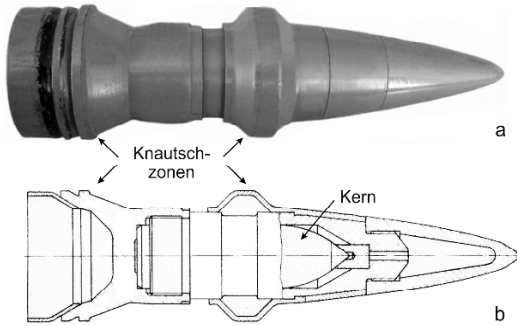


Abb. 3.35 a. Bild eines Geschosses einer Pzabw-Kanone im Kaliber 47 mm mit einem sich von 47 mm auf 35 mm verjüngenden Rohrteil. b. Die zugehörige Zeichnung zeigt den komplizierten Geschossaufbau des Panzerkerngeschosses.

Das thermodynamische Differenzialgleichungssystem kann von Abschn. 3.4.1 übernommen werden, wenn der variable Rohrquerschnitt berücksichtigt wird. Die Gl. 3.4.1b ist zu ersetzen durch

$$(3.7:7) \quad \frac{dv}{dt} = \frac{1}{m_p} \cdot (p \cdot A_r(x) - F_r) \quad \text{wenn } p > p_s, \quad [m/s^2]$$

wo p_s der Druck bei Eintritt in den konischen Teil bedeutet. Die Druckberechnung Gl. 3.4:2 erhält dann die folgende Form

$$(3.7:8) \quad p = \frac{(\gamma^* - 1) \cdot \left[Q_{ex} \cdot z \cdot m_c - \frac{1}{2} \cdot (m_p + \varepsilon \cdot m_c) \cdot v^2 \right]}{V_b^* - z \cdot m_c \cdot \left(\eta - \frac{1}{\rho_c} \right) + \int_0^x A_r(\xi) \cdot d\xi} \quad [N/m^2]$$

Experimenten zur Folge (R. GERMERSHAUSEN, 1980) scheint der Einfluss der Geschossverformung gering zu sein und kann offenbar vernachlässigt werden. Hingegen beeinflusst die Querschnittsverjüngung die Gasströmung im Rohr; man nimmt an, dass der Druckgradient dadurch verkleinert wird (J. CORNER, 1950).

3.7.6.3 Treibspiegel- und Treibkäfiggeschosse

Um die Mitte des 20. Jahrhunderts tauchte eine Konstruktion auf, deren Grundidee möglicherweise bei den alten Vorderladergeschützen abgeholt worden war.

Damit die Rohre einfach geladen werden konnten, wurden leicht unterkalibrige Kugeln verwendet. Dies erforderte jedoch zwischen der Pulverladung und der Kugel ein Zwischenmittel, welches das Rohr abdichtete und die Übertragung des Druckes auf das Geschoss gewährleistete.

Die Idee ist, zu einem gegebenen Rohr ein Geschoss deutlich kleineren Kalibers zu wählen und dieses mit einer leichten Konstruktion so zu umgeben, dass die Führung im Rohr gewährleistet ist und auch ein eventuell notwendiger Drall übertragen wird. Diese Vorrichtung wird so ausgelegt, dass sie nach Verlassen der Mündung durch die vorhandenen, einwirkenden Kräfte (Luftwiderstand oder Zentrifugalkraft) vom Geschoss getrennt wird. Innenballistisch wird so das Geschoss dem

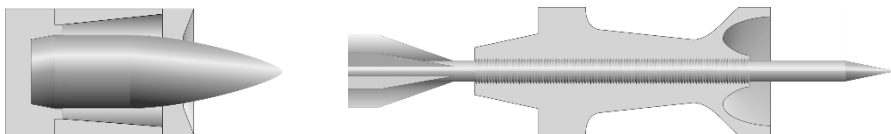


Abb. 3.36. (links). Prinzip eines Treibspiegelgeschosses für gezogene Rohre.

Abb. 3.37. (rechts). Prinzip eines Pfeilgeschosses mit Treibkäfig für glatte Rohre.

Kaliber des Rohres entsprechend eine kleine Querschnittsbelastung aufweisen, außenballistisch jedoch auf das Geschosskaliber bezogen ein großes Massen-Querschnittsverhältnis besitzen. Die ersten Konstruktionen waren für gezogene Rohre gebaut und besaßen am Heck eine Scheibe (meist aus Aluminium) und eine Stützkonstruktion für den Geschosskörper (siehe Abb. 3.36); sie wurden als *Treibspiegelgeschosse* bezeichnet.

Der Begriff „Treibspiegel“ könnte dem Schiffsbau entnommen worden sein, wo ein glattes, senkrecht Heck als „Spiegelheck“ bezeichnet wird.

Heute sind vor allem Pfeilgeschosse üblich, denen außenballistisch eine außerordentlich hohe Querschnittsbelastung eigen ist. Der aus mehreren Segmenten bestehende Führungskörper (aus Aluminium oder Kunststoff) wird vor den Stabilisierungsflügeln angebracht und umfasst den Pfeil wie ein Käfig, weshalb sich auch der Begriff *Treibkäfiggeschoss* eingebürgert hat (siehe Abb. 3.37 und 3.38). Für gezogene Rohre müssen Pfeilgeschosse mit einem durchrutschenden Treibkäfig versehen sein, da die Flügelstabilisierung nicht mit den hohen Drehzahlen drallstabiler Geschosse vereinbar ist.

Die konstruktive Schwierigkeit der Treibkäfigablösung nach Austritt aus der Mündung, die erfolgen muss, ohne den Geschossflug zu stören, ist offensichtlich besser zu beherrschen als die Probleme beim konischen Rohr (Rohrherstellung, Geschoss mit Knautschzonen). Konische Rohre sind daher bald nach den ersten Einführungen von Treibspiegel- und Treibkäfiggeschossen bis auf einige seltene Anfertigungen verschwunden.

Im Gebiet der Kleinwaffen gibt es die sogenannten „Salvo Squeeze Bore“-Kurzaffen mit Rohren, die das Geschoss vom Kaliber 9 mm Luger auf 7.62 mm bzw. Kaliber 45 Auto auf das 38 reduzieren (Näheres siehe B. P. KNEUBUEHL, 2013).

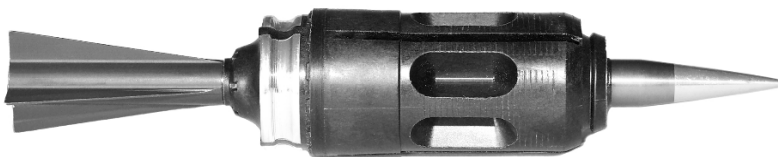


Abb. 3.38. Beispiel eines Pfeilgeschosses mit Treibkäfig für ein Mittelkalibergeschütz mit gezogenem Rohr.

3.8 Die Beschleunigung von Splittern

3.8.1 Allgemeines

Splitter werden in der Regel mit Sprengstoff beschleunigt. Ihre Anfangsgeschwindigkeit (bzw. Anfangsenergie) ist in diesem Fall eine Frage der Energiebilanz und daher des Energiesatzes. Splitter können aber auch entstehen, wenn ein Geschoss an einem harten Zielmaterial Bruchstücke herausschlägt oder auch selber zersplittert. In diesem Falle erhält der Splitter seine Energie im Wesentlichen durch Impulsübertrag.

3.8.2 Sprengstoffbeschleunigte Splitter

3.8.2.1 Die Gurney-Formel

Während des zweiten Weltkrieges entwickelte R. W. GURNEY (1943), ein Feststoffphysiker von Princeton, im US Army Ballistics Research Laboratory (BRL) in Aberdeen MD einige einfache Prinzipien zur Schätzung der Anfangsgeschwindigkeit Sprengstoff beschleunigter Splitter (siehe auch J. A. ZUKAS et al., 1998). Er ging von folgenden Annahmen aus:

- Die Detonation eines bestimmten Sprengstoffes liefert pro Masseneinheit einen festen Betrag an kinetischer Energie, die auf das beschleunigte Material und auf die beschleunigten Schwaden aufgeteilt wird.
- Die Schwaden haben eine konstante Dichte.
- Das Geschwindigkeitsprofil in den Schwaden ist linear.

Es ist bemerkenswert, dass die Arbeit, die zum Zerreißen des Materials aufgewendet wird, offensichtlich vernachlässigt werden kann.

Aus dem Energieerhaltungssatz folgt

$$(3.8:1) \quad m_c \cdot \varepsilon = \frac{1}{2} \cdot m_f \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot \int_0^y \rho_c(x) \cdot A(x) \cdot v_c^2(x) \cdot dx . \quad [J]$$

Darin bedeutet m_c die Masse des Sprengstoffes, ε die Energie des Sprengstoffes pro Masseneinheit, m_f die Masse des beschleunigten Materials, v dessen Geschwindigkeit, ρ_c die Dichte der Schwaden, v_c deren Geschwindigkeit, A die Querschnittsfläche des Schwadenkanals und y dessen Länge.

Für eine zylinderförmige Anordnung mit Radius b und Länge y ergibt sich (siehe Abb. 3.39)

$$(3.8:2a) \quad \rho_c = \frac{m_c}{b^2 \cdot \pi \cdot y} , \quad [kg/m^3]$$

$$(3.8:2b) \quad A(x) = 2 \cdot x \cdot \pi \cdot y , \quad [m^2]$$

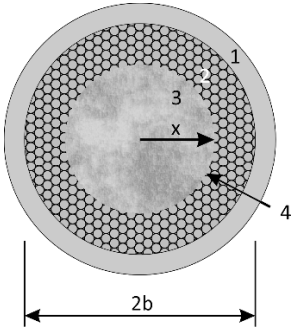


Abb. 3.39. Zur Herleitung der Gurney-Formel.

- 1 Ummantelung (zu beschleunigendes Material),
- 2 Sprengstoff,
- 3 Schwaden,
- 4 Flammfront.

$$(3.8:2c) \quad v_c(x) = \frac{x}{b} \cdot v. \quad [m/s]$$

Werden (3.8:2a-c) in (3.8:1) eingesetzt, folgt nach Integration und Umstellung

$$(3.8:3) \quad \frac{v}{\sqrt{2 \cdot \varepsilon}} = \left(\frac{m_f}{m_c} + \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad [-]$$

Entsprechend ergeben sich für andere geometrische Anordnungen die folgenden Beziehungen, so für die Kugel

$$(3.8:4) \quad \frac{v}{\sqrt{2 \cdot \varepsilon}} = \left(\frac{m_f}{m_c} + \frac{3}{5} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad [-]$$

für das symmetrische Sandwich

$$(3.8:5) \quad \frac{v}{\sqrt{2 \cdot \varepsilon}} = \left(\frac{m_f}{m_c} + \frac{1}{3} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad [-]$$

und für das asymmetrische Sandwich (mit Verdämmung)

$$(3.8:6) \quad \frac{v}{\sqrt{2 \cdot \varepsilon}} = \left(\frac{1 + C^3}{3 \cdot (1 + C)} + \frac{m_t}{m_c} \cdot C^2 + \frac{m_f}{m_c} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad [-]$$

$$\text{mit} \quad C = \frac{1 + 2 \cdot \frac{m_f}{m_c}}{1 + 2 \cdot \frac{m_t}{m_c}}. \quad [-]$$

Dabei bedeutet m_t die Verdämmmasse.

Wird $m_t = \infty$ gesetzt, folgt aus (3.8:6) die Beziehung für das symmetrische Sandwich. Für $m_t = 0$ ergibt sich hingegen eine Formel für die einseitige Sprengstoffbelegung

$$(3.8:7) \quad \frac{v}{\sqrt{2 \cdot \varepsilon}} = \left(\frac{\left(1 + 2 \cdot \frac{m_f}{m_c} \right)^3 + 1}{6 \cdot \left(1 + \frac{m_f}{m_c} \right)} + \frac{m_f}{m_c} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad [-]$$

Die Größe mit der Dimension einer Geschwindigkeit

$$v_G = \sqrt{2 \cdot \varepsilon}, \quad [\text{m/s}]$$

wird Gurney-Konstante oder Gurney-Geschwindigkeit genannt. Sie ist eine sprengstofftypische Konstante. In der Tabelle 3.9 sind einige Werte zusammengestellt.

Der (dimensionslose) Quotient von Splittergeschwindigkeit und Gurney-Konstante ist – abgesehen von der geometrischen Anordnung – ausschließlich eine Funktion des Massenverhältnisses der beschleunigten Masse und der Sprengstoffmasse.

Der Reziprokwert m_c/m_f dieses Massenverhältnisses wird oft auch als Sprengstoffbelegung des Splitters bezeichnet.

In der Abb. 3.40 sind die Verläufe dieser Funktion für die wichtigsten Anordnungen dargestellt. Ist die Splittermasse mehr als doppelt so groß wie die Sprengstoffmasse, spielt beim eingeschlossenen Sprengstoff die Art der Anordnung keine Rolle mehr.

Tabelle 3.9. Dichten und Gurney-Konstanten einiger Sprengstoffe und Pulver

Sprengstoff	Bezeichnung/Zusammensetzung	Dichte [kg/m³]	v_G [m/s]
Composition A-3	91 % RDX, 9 % Wachs	1.59	2630
Composition B	63 % RDX, 36 % TNT, 1 % Wachs	1.72	2710
Composition C-3	71 % RDX, 4 % TNT, 10 % DNT, ...	1.60	2680
Cyclotol	75 % RDX, 25 % TNT	1.754	2790
Hexogen	RDX	1.77	2830
Hexogen	97 % RDX, 3 % Wachs	1.75	2800
LX-14	95.5 % HMX, 4.5 % Kunststoffbinder	1.83	2800
Nitropenta	PETN	1.76	2930
Oktogen	HMX	1.89	2970
Octol	75 % HMX, 25 % TNT	1.82	2830
PBX 9404	94 % HMX, 3 % NC, 3 % CEF	1.84	2900
PBX 9502	95 % TATB, 5 % Binder	1.885	2377
Tetryl		1.62	2500
Trinitrotoluol	TNT	1.63	2370
Tritonal	80 % TNT, 20 % A (gegossen/gepreßt)	1.69/1.55	2200
Nc- & Ngl-Pulver		1.55	1680
Schwarzpulver		1.30	950

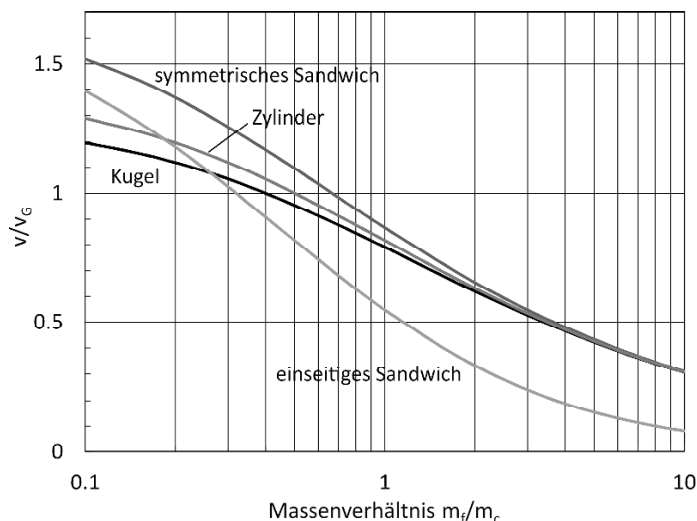


Abb. 3.40. Verlauf der Gurney-Funktionen Gl. (3.8:3)–(3.8:5) und (3.8:7).
Ab einem Massenverhältnis von ungefähr 2 spielt beim eingeschlossenen Sprengstoff die Anordnung praktisch keine Rolle mehr.

3.8.2.2 Lokale Anwendung der Gurney-Formel

Die Anfangsgeschwindigkeit der Splitter von Sprenggeschossen wird bei Anwendung der Gurney-Formel üblicherweise mittels des Massenverhältnisses der Gesamtmassen von Geschosskörper und Sprengstoff bestimmt. Dadurch ergibt sich ein für alle Splitter konstanter Wert. Messungen der Splittergeschwindigkeit zeigen jedoch, dass sich entlang der Geschosskontur oft recht unterschiedliche Werte ergeben können.

Geht man davon aus, dass der Ausgangspunkt der Detonation beim Zünder liegt, so ergeben sich lokal betrachtet für verschiedene Stellen am Geschosskörper unterschiedliche Sprengstoffbelegungen. Diese ergeben sich für ein bestimmtes Volumenelement des Geschosskörpers aus dessen Masse und der Masse der Sprengstoffpyramide, deren Spitze sich im Punkt der Detonationseinleitung (Zünder) befindet (Abb. 3.41). Dabei ergibt sich für das Massenverhältnis

$$(3.8:8) \quad \frac{m_f}{m_c} = \frac{3 \cdot d_f \cdot \rho_f}{h_c \cdot \rho_c} \quad [-]$$

d_f bedeutet die Wandstärke des Splittermantels, h_c die Höhe der Sprengstoffpyramide (bezogen auf die Pyramidengrundfläche), ρ_f die Dichte des Splittermantels und ρ_c die Dichte des Sprengstoffes.

In die Gurney-Formel für die Kugel eingesetzt, ergeben sich dadurch entsprechend genauere Anfangsgeschwindigkeiten für die Splitter.

Beispiele: Bei einer annähernd kugelförmigen Handgranate wird die Detonation etwas außerhalb des Kugelzentrums eingeleitet. Dies ergibt entlang des Kugelkörpers recht unter-

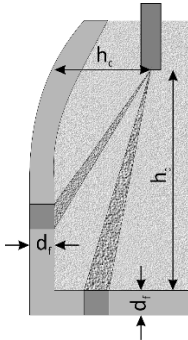
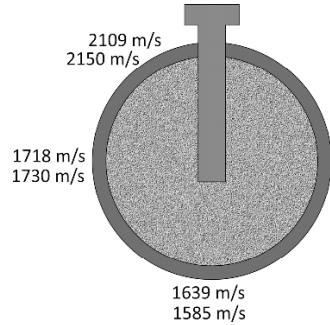


Abb. 3.41. (links). Lokale Berechnung der Splittergeschwindigkeiten durch die Sprengstoffbelegung zwischen Splitter und Zünder.

Abb. 3.42. (rechts) Vergleich zwischen gemessenen und lokal gerechneten Splittergeschwindigkeiten. Obere Zahl: gemessen, untere Zahl: gerechnet.



schiedliche Sprengstoffbelegungen, die auch zu verschiedenen Anfangsgeschwindigkeiten führen. Da in diesem Fall Messungen mittels Röntgenaufnahmen und mit dem Folienkasten vorlagen, ließen sich die Ergebnisse der lokal angewendeten Gurney-Formel überprüfen. Die Abweichungen waren stets kleiner als 5% (siehe Abb. 3.42, aus B. P. KNEUBUEHL, 1999).

Ähnlich gute Resultate ergeben sich bei Geschosskörpern von Mörsern. Ein Vergleich mit röntgenfotografischen Messungen bei einer 6 cm Mörsergranate ergab Unterschiede zwischen den berechneten und den gemessenen Werten von weniger als 3.5 %.

3.8.3 Impulsbeschleunigte Splitter

3.8.3.1 Entstehung, mögliche Geschwindigkeit

Impulsbeschleunigte Splitter können auf zwei Arten entstehen:

- Auftreffen eines Geschosses auf kleine Massen (Steine)
- Zersplittern eines Geschosses an einem harten Gegenstand

Im ersten Fall lässt sich die Anfangsgeschwindigkeit des Splitters mittels der Stoßgesetze bestimmen (B. P. KNEUBUEHL, 1999). Dabei zeigt sich, dass der gestoßene Splitter höchstens auf die folgende Geschwindigkeit beschleunigt werden kann

$$(3.8:9) \quad v_f = v_p \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{m_p}{m_f}}{\frac{m_p}{m_f} + 1}} \quad [\text{m/s}]$$

v_f bedeutet die Splittergeschwindigkeit, v_p die Geschwindigkeit des auftreffenden Projektils, m_p die Projektilmasse und m_f die Splittermasse).

Da Formel (3.8:9) den vollständig elastischen Stoß voraussetzt, ist die erhaltene Geschwindigkeit eine obere Schranke.

Beispiel: Trifft ein 11.3 g schweres Geschoss mit 650 m/s auf einen 1 g schweren Stein, so kann dieser höchstens eine Geschwindigkeit von $650 \cdot 1.36 = 880$ m/s erreichen.

Trifft im zweiten Fall ein Geschoss unter einem genügend steilen Winkel auf ein hartes Ziel auf, das ein Eindringen verunmöglicht, so wird die gesamte Energie auf einer Strecke umgesetzt, die etwa der Geschosslänge entspricht. Dabei treten kurzzeitig sehr hohe Kräfte auf, die einerseits das Geschoss zerreißen, andererseits die gebildeten Splitter beschleunigen.

Eine besondere Art dieser Splitterbeschleunigung entsteht, wenn ein Weichkerngeschoss mit genügend hoher Energie auf ein hartes Ziel auftrifft. Als Folge der erwähnten Kräfte entstehen im Bleikern Druckspannungen, die den Geschossmantel zum Platzen bringen. Die entstehenden Splitter können dabei recht hohe Geschwindigkeiten erreichen.

Eine Schätzung der entstehenden Geschwindigkeit in diesem zweiten Fall der Impulsbeschleunigung ist in der Regel kaum möglich. Treten jedoch Schädigungen durch solche Splitter auf, kann oft durch eine Rückrechnung auf die anfängliche Energie geschlossen werden.

3.8.3.2 Fallbeispiel

Bei einer kombinierten Gefechtsübung (HG-Werfen und Stgw-Schießen) auf einer von Felsbrocken durchsetzten Alpweide wurde ein HG-Werfer von einem Splitter in einem Auge getroffen. Der Splitter, ein Bruchstück eines Geschossmantels, drang dabei ca. 25 mm in das Auge ein. Seine Masse betrug 0.05 g, was mit seinen geometrischen Abmessungen eine Querschnittsbelastung ca. 0.0087 g/mm^2 ergab. Für einen derartigen Splitter lässt sich aus der wundballistischen Literatur (K. SELLIER, 1982, und B. P. KNEUBUEHL et al., 2008) eine Grenzgeschwindigkeit für das Eindringen in das Auge von ca. 115 m/s ableiten. Wäre der Splitter mit einer kleineren Geschwindigkeit aufgetroffen, hätte er nicht in das Auge eindringen können.

Dabei wurde die Annahme getroffen, dass der Widerstand der Lederhaut (Sclera) und der Hornhaut (Cornea) dem Splitter gegenüber von gleicher Größenordnung ist.

Da der Splitter noch ca. 2.5 cm in das Auge eingedrungen war, musste seine Geschwindigkeit mindestens 10 bis 20 m/s höher gewesen sein, so dass als grobe untere Schätzung für die Auftreffgeschwindigkeit 130 m/s angenommen werden kann. Eine ballistische Rückrechnung ergibt, dass bei der vermuteten Schussdistanz von ca. 15 m der Splitter mit rund 900 m/s weggeflogen sein muss.

4 Abgangsballistik

4.1 Einleitung

Zwischen den beiden, seit Mitte des 18. Jahrhunderts getrennt betrachteten, primären Gebieten der Ballistik – der Innen- und der Außenballistik – etablierte sich im Verlauf der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts eine neue Teildisziplin. Begonnen hat es vermutlich damit, dass C. CRANZ und H. SCHARDIN bereits im Jahre 1929 einen Kinematografen entwickelten, der bis zu 24 Bilder optisch getrennt mit einer Frequenz von bis zu 3'000'000 B/s und mit Belichtungszeiten von 0.1 μ s auf einen ruhenden Film projizierte (siehe Abb. 4.1). Dies ermöglichte erstmals einen Einblick in die schnellen Vorgänge beim Austritt eines Geschosses aus der Mündung, wie auch bei gewissen endballistischen Vorgängen.

24 Funkenstrecken erzeugten die Kurzzeitbelichtung, und ein optisches System mit einer großen und 24 kleinen Linsen projizierte den i-ten Funken auf die zugehörige Zone des feststehenden Filmes (detaillierte Beschreibung siehe R. E. KUTTERER, 1959 und B. P. KNEUBUEHL, 2013).

Dabei wurde zunehmend deutlich, welchen Einflüssen das Geschoss unmittelbar nach Verlassen der Mündung unterworfen ist, und wie sich diese auf den weiteren

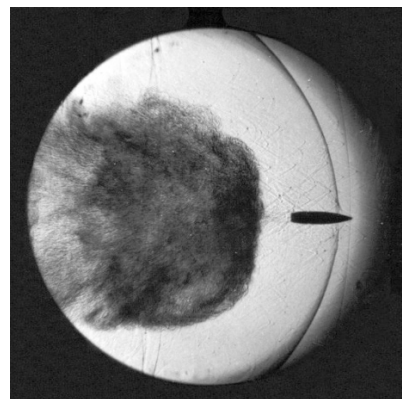
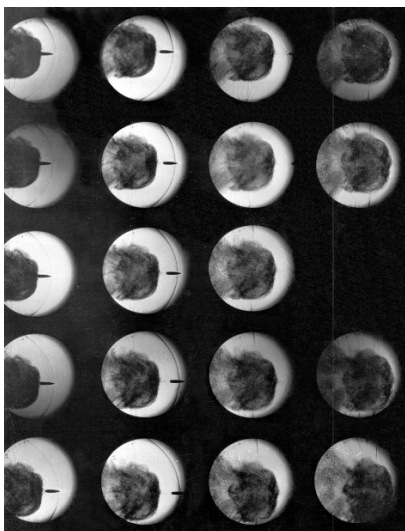


Abb. 4.1. Links: Bild einer Cranz-Schardin-Kamera mit 20 Einzelaufnahmen; 7.5 × 55 Swiss (GP 11), nach Austritt aus Mündung. Bildfolge von oben nach unten. Oben: Bild Nr. 8 vergrößert.

Verlauf der Geschossbewegung sowie auch auf den Schützen oder die Lafette auswirken. R. E. KUTTERER (1959) beschrieb in diesem Zusammenhang die Gasströmung aus der Mündung und erwähnte dabei den Namen „Zwischenballistik“. Die Bezeichnung „Abgangsballistik“ taucht in (R. GERMERSHAUSEN et al., 1980) auf, wobei allerdings nur der Abgangsfehlerwinkel betrachtet wird. Das Buch von C. L. FARRAR et al. (1983) widmet diesem Zweig der Ballistik ein eigenes Kapitel (engl. „Intermediate Ballistics“), in dem nebst dem Gasfluss auch Feuererscheinungen, Mündungsknall, Schalldämpfer und Mündungsbremsen besprochen werden. Schließlich wird man auch die Trennung von Treibspiegeln und -käfigen von unterkalibrigen Geschossen diesem Teil der Ballistik zuordnen.

Die meisten dieser abgangsbalistischen Vorgänge entziehen sich einer überschaubaren theoretischen Behandlung, weshalb man sich hier in erster Linie der Beschreibung der Phänomene und der qualitativen physikalischen Interpretation zuwendet.

4.2 Phänomene an der Mündung

4.2.1 Gasströmungen

4.2.1.1 Gasströmung bei Abgang eines Geschosses

Aus den Druckkurven in Abschn. 3.3.5 lässt sich entnehmen, dass der Druck innerhalb der ersten Wegstrecke des Geschosses von einigen wenigen Kalibern Länge bereits sein Maximum erreicht. Dies bedeutet zugleich eine außerordentlich hohe Beschleunigung (siehe dazu auch Tabelle 2.8), durch die das Geschoss ins Rohr hinein und gegen die darin befindliche Luftsäule bewegt wird. Dadurch ent-

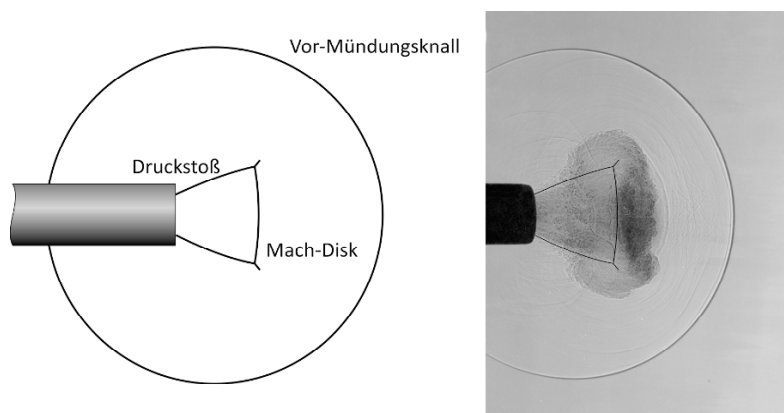


Abb. 4.2. a. Schema und b. Beispiel einer dem Geschoss vorauseilenden Strömung aus der Mündung. Der zugehörige Vor-Mündungsknall ist sichtbar, kann aber mit dem Gehör nicht vom eigentlichen Mündungsknall unterschieden werden.

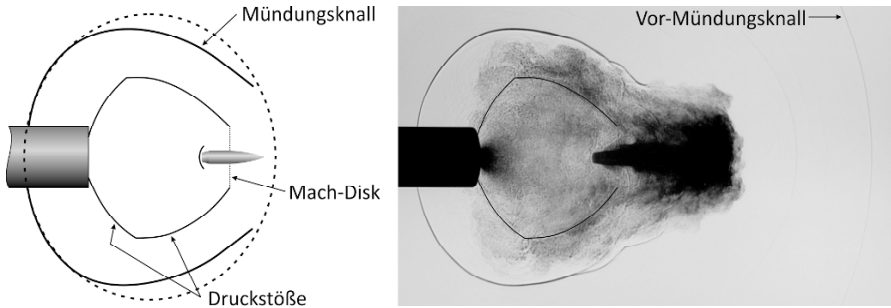


Abb. 4.3. a. Schema und b. Beispiel der Strömung an der Mündung kurz nach dem Austritt des Geschosses. Der Mündungsknall und die Druckstöße zeigen sich deutlich und auch der Vor-Mündungsknall ist noch vorhanden.

steht in der Luftsäule eine Stoßwelle, welche dem Geschoss vorausseilt und an der Mündung zu einem Vor-Mündungsknall führt, bevor das Geschoss die Mündung verlässt (siehe Abb. 4.2). Weil kein Geschoss das Rohr vollständig abdichtet, sind diesem Gasaustritt stets auch voreilende Pulvergase beigemischt. Gemäß den Gesetzmäßigkeiten des Ausströmens aus Mündungen gegen einen Unterdruck expandiert der Strahl unter Bildung kleiner Druckstöße und einer Mach-Disk, in welchen die Strömung von Überschall auf Unterschall verzögert wird.

Zum Zeitpunkt des Geschossaustritts aus der Mündung stehen die Gase im Rohr immer noch unter hohem Druck (Mündungsdruck). Wegen der großen Druckdifferenz zum Umgebungsdruck entsteht diesmal durch die Expansion eine wesentlich stärkere Stoßwelle, der eigentliche *Mündungsknall*. Wegen den Störungen durch die Anwesenheit des Geschosses und die nachströmenden Gase, weicht dessen Ausbreitung oft deutlich von der Kugelform ab (siehe Abb. 4.3 und 4.4) Zugleich ergeben sich in der Mündung beachtliche Strömungsgeschwindigkeiten; das Geschoss wird von hinten überströmt und dadurch gestört. Es entstehen erneut Druckstöße (engl. „Barrel Shock“) und eine Mach-Disk, die mit abnehmender Geschwindigkeit der ausströmenden Gase zur Mündung zurückgezogen wird und in eine Verdünnungswelle im Rohr übergeht.

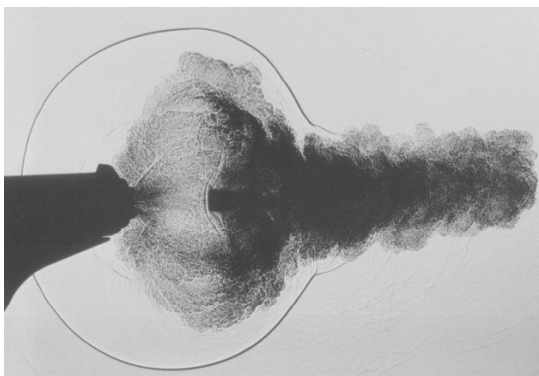


Abb. 4.4. Schattenaufnahme der Mündung einer Kurzwaffe im Kaliber 9 x 18. Belichtungszeit ca. 1 μ s. Mündungsknall, Druckstöße und Stoßwelle am Geschossheck sind gut sichtbar. Geschwindigkeit des Geschosses ca. 330 m/s.

Dies kann bei einem Artilleriegeschütz zur Folge haben, dass bei zu frühem Öffnen des Verschlusses Pulvergase nach hinten austreten und sich bei Vermischung mit Luftsauerstoff entzünden. Mit einem *Rauchabsauger* (R. GERMERSHAUSEN, 1980) lässt sich diese Rückströmung verhindern.

Die Geschwindigkeit der ausströmenden Gase ist so groß, dass in Mündungsnähe am Geschossheck stets eine Stoßwelle zu beobachten ist (siehe Abb. 4.4, Abb. 4.5, drittes Bild und Abb. 4.6 mit Detail im ersten Bild). Dies weist Strömungsgeschwindigkeiten nach, die relativ zum Geschoss größer sind als die lokale Schallgeschwindigkeit, die ihrerseits von Druck und Dichte der Gase im Innern des „Druckstoß-Polygons“ abhängig ist.

Die Abb. 4.5 und 4.6 zeigen zwei Folgen von Schattenaufnahmen, die erste an der Mündung einer Kurzwaffe (Revolver Kaliber 357 Magnum) vom ersten Gasaustritt bis zum Erscheinen des Geschosses, die zweite bei einem Messlauf im Langwaffenkaliber 7.62 mm NATO vom Austreten des Geschosses, bis es den Bereich der Abgangsballistik verlässt.

Da die Aufnahmen stets an derselben Stelle erfolgten, handelt es sich bei jedem Bild um einen andern Schuss mit entsprechend länger verzögertem Aufnahmezeitpunkt.

Infolge der hohen Geschwindigkeit erzeugt die ausströmende Gasmasse einen Impuls, den sogenannten *Nachwirkungsimpuls*, der zusammen mit dem Geschossimpuls den auf die Lafette (bzw. den Schützen) einwirkenden Rückstoßimpuls bestimmt. In diesem Zusammenhang wird ab und zu auch von einer Nachbeschleunigung des Geschosses gesprochen. Eine einfache Überlegung zeigt jedoch, dass der dadurch induzierte Geschwindigkeitszuwachs völlig vernachlässigt werden kann, und zwar wegen der sehr kurzen Einwirkungszeit von einigen 10 µs.

Eine einfache Überschlagsrechnung zeigt, dass auch mit hoher Gasdichte und großer Strömungsgeschwindigkeit die Geschosseschwindigkeit nur im Nachkommabereich zunimmt.

4.2.1.2 Die Ausströmgeschwindigkeit

Eine zentrale abgangsballistische Größe ist die Ausströmgeschwindigkeit; sie spielt eine wichtige Rolle bei der Bestimmung des Rückstoßimpulses und der Rückstoßenergie. Die Bestimmung ihres maßgebenden Wertes bietet allerdings einige Schwierigkeiten, da in der unmittelbaren Umgebung der Mündung Druck, Dichte und Temperatur in den ausströmenden Gasen stark variieren.

Vereinfachend wird angenommen, im Zeitpunkt des Mündungsdurchganges sei im ganzen Rohrrinnenraum der Druck gleich groß. Das darauffolgende Ausströmen der Gase erfolge so schnell, dass der Wärmeaustausch mit der Umgebung vernachlässigt werden kann (isentropen Prozess). Dann strömen die Gase mit der Laval-Geschwindigkeit (Gl. 2.3:42) und mit dem Massendurchsatz (Gl. 2.3:43) aus. Damit wird der Impulsdurchsatz zu

$$\dot{m} \cdot v_m = A_m \cdot \sqrt{\gamma \cdot p_i \cdot \rho_i \cdot \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \cdot \frac{2 \cdot \gamma}{\gamma + 1} \cdot \frac{p_i}{\rho_i}} \quad [N]$$

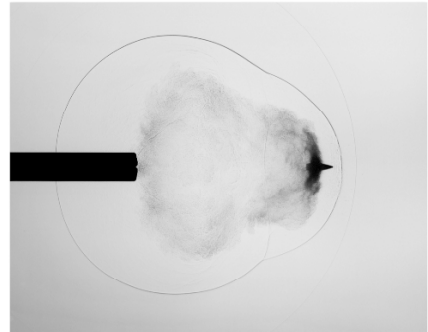
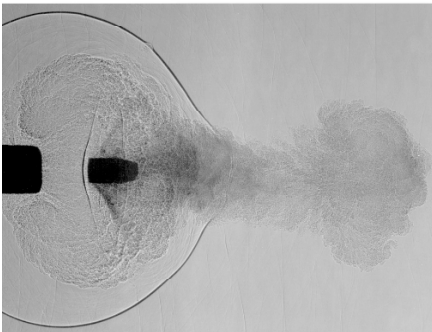
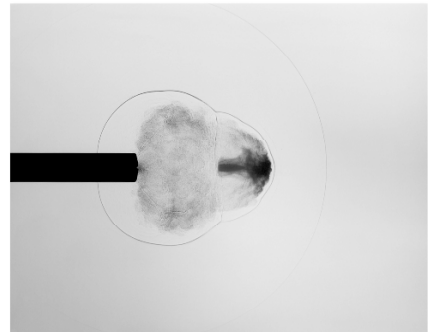
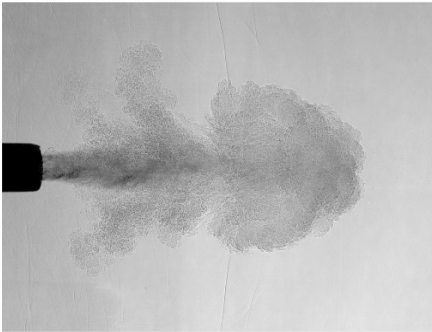
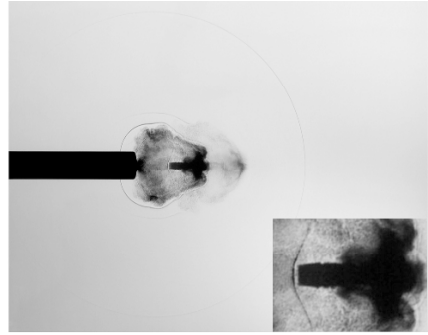
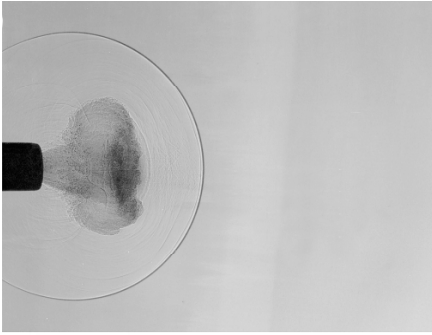
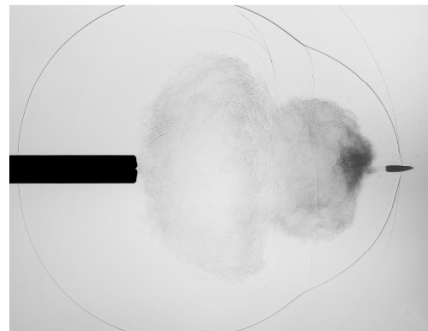


Abb. 4.5. *Oben.* Folge von Schattenaufnahmen an der Mündung einer Kurzwaffe im Kaliber 357 Magnum ab erstem Gasaustritt bis zum Erscheinen des Geschosses.

Abb. 4.6. *Rechts.* Folge von Schattenaufnahmen an der Mündung einer Langwaffe im Kaliber 7.62 mm NATO ab Erscheinen des Geschosses bis es den Bereich der Abgangsbalistik verlässt (im ersten Bild befindet sich eine Vergrößerung des Geschosses zur besseren Sichtbarkeit der Umströmung durch die Pulvergase).



Durch Vereinfachen ergibt sich daraus

$$(4.2:1) \quad \dot{m} \cdot v_m = A_m \cdot \gamma \cdot p_i \cdot \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} . \quad [N]$$

Darin soll v_m eine mittlere, für den Gesamtimpuls maßgebende Ausströmgeschwindigkeit bedeuten, A_m den Mündungsquerschnitt, p_i den Innendruck und γ den Isentropenkoeffizienten.

Weil die erwähnten Formeln eine vernachlässigbare Geschwindigkeit im Innern voraussetzen, erfolgt die Betrachtung relativ zur Geschossgeschwindigkeit. Die Gl. (4.2:1) wird nun diskretisiert und auf der rechten Seite der (willkürliche) Faktor $\frac{1}{2}$ eingeführt, da der Massendurchfluss sicher nicht während der ganzen Ausflusszeit konstant bleibt (vgl. Sébert'scher Faktor)

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot v_m = \frac{1}{2} \cdot A_m \cdot \gamma \cdot p_i \cdot \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} . \quad [N]$$

Wird nun noch die Länge der Gassäule im Innern (ungefähr die Rohrlänge) mit ℓ bezeichnet, und bedacht, dass deren Masse der Pulvermasse m_c und der Innendruck dem Mündungsdruck p_m entspricht, folgt weiter

$$m_c \cdot v_m = \frac{1}{2} \cdot A_m \cdot \gamma \cdot p_m \cdot \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \cdot \frac{\ell}{v_m} , \quad [N \cdot s]$$

$$(4.2:2) \quad v_m = \sqrt{\frac{p_m \cdot A_m \cdot \ell}{2 \cdot m_c} \cdot \gamma \cdot \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} . \quad [m/s]$$

Für den Isentropenkoeffizienten wird noch der für Pulvergase übliche Wert $\gamma = 1.25$ eingesetzt und berücksichtigt, dass $A_m \cdot \ell$ etwa dem Rohrvolumen V_r entspricht. Dies führt zu der folgenden Approximationsformel

$$(4.2:3) \quad v_m = 0.59 \cdot \sqrt{\frac{p_m \cdot V_r}{m_c}} . \quad [m/s]$$

Weil diese Geschwindigkeit auf die Geschossgeschwindigkeit v_0 bezogen ist, ergibt sich als Ausströmgeschwindigkeit v_a der Gase

$$(4.2:4) \quad v_a = \sqrt{v_0^2 + v_m^2} . \quad [m/s]$$

In der Tabelle 4.1 sind einige Beispiele zusammengestellt, die auf gemessenen Druckkurven basieren. Die Werte sind durchaus plausibel.

In der Literatur sind nur spärliche Angaben zu finden. Das OERLIKON Taschenbuch (1981) bezieht sich auf eine Theorie von H. KRATZ, ohne jedoch weitere Quellen anzugeben. R. GERMERSHAUSEN et al. (1980) geben für Abschätzungen den Wert $v_a = 1000$ m/s vor. D. E. CARLUCCI et al. (2008) setzen für v_m etwas überraschend die Normal-Schallgeschwindigkeit der Luft ein.

Tabelle 4.1. Approximative Ausströmgeschwindigkeiten nach (4.2:3) und (4.2:4)

		9 mm Luger	7.5 × 55 Swiss	35 × 228
Kaliber	[mm]	9	7.5	35
Geschossweg	[mm]	104	603	2930
Mündungsdruck	[bar]	342	721	560
Pulvermasse	[g]	0.305	2.92	322
v_0 Geschoss	[m/s]	356	795	1175
v_m	[m/s]	507	479	412
v_a	[m/s]	620	928	1245

Die Werte der beiden ersten Kolonnen stammen von Druckmessungen, jene der dritten Kolonne sind dem OERLIKON Taschenbuch (1981) entnommen.

4.2.1.3 Gasströmung bei offenem Rohr

Bei Böllergeschützen und Schreckschusswaffen ist die Ladung nur leicht verdammt, das Rohr sonst offen (abgesehen von möglichen Schikanen). Die dadurch sich ergebenden Druckverteilungen im Rohr sind in Abschn. 3.4.7 besprochen worden. In Ergänzung zum vorangehenden Abschnitt, in dem auf der Basis der gasdynamischen Gleichungen die Ausströmgeschwindigkeit geschätzt worden ist, wurde bei der Untersuchung der Schreckschusswaffen die Strömungsgeschwindigkeit an der Mündung direkt gemessen, und zwar mit drei voneinander unabhängigen Methoden (B. P. KNEUBUEHL, 1998).

Eine direkte Messung der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Gasstrahles kann optisch durch Mehrfach-Schattenaufnahmen bei sehr kurzen Belichtungszeiten (Größenordnung 1 μ s) erfolgen. Wegen der perspektivischen Verzerrung kann nur die Geschwindigkeit der Strahlspitze in der Strahlachse gemessen werden. Die Auswertung erfolgte direkt durch Ausmessen der zurückgelegten Strecke zwischen zwei Bildern und der dazwischen liegenden Zeit.

Das zweite Messverfahren beruht auf Druckmessungen in der Strahlachse in den Abständen 30, 50 und 100 mm. Für die Ermittlung der Geschwindigkeit aus dem Druck wurde die Bernoulli'sche Gleichung verwendet und anschließend auf die Gl. (2.3:44) zurückgegriffen, welche mit $r = 0$ das Geschwindigkeitsfeld eines Freistrahles in der Strahlachse beschreibt

$$(4.2:5) \quad v_x(x, 0) = \frac{3}{8 \cdot \pi} \cdot \frac{I}{\rho \cdot \varepsilon \cdot (x + x_0)} \quad [\text{m/s}]$$

Gemäß der Gl. (2.3:44) wäre die Geschwindigkeit an der Mündung ($x = 0$) nicht definiert. Damit die gemessenen Werte eingepasst werden können, wird der Nullpunkt um x_0 verschoben.

Mit einer Ausgleichsrechnung über die drei Messdistanzen ließ sich der Faktor I/ε und x_0 bestimmen und damit auch die Geschwindigkeit an der Mündung.

Der dritte Weg, zu einer (mittleren) Ausströmgeschwindigkeit zu gelangen, führt über die Bestimmung des totalen Mündungsimpulses der austretenden Gas-

masse. Dies ermöglicht ein ballistisches Pendel, wenn die Pendelmasse aus einem Material besteht, in welches der Gasstrahl vollständig eindringen kann (z. B. Gelatine). Aus dem Ausschlag des Pendels kann mit Impuls- und Energiesatz die maximale Pendelgeschwindigkeit v_{pe} berechnet werden. Messungen der gleichen Kartusche mit verschiedenen Pendelmassen m_{pe} erlauben, mittels einer linearen Regression mit der Zielfunktion

$$(4.2:6) \quad v_{pe} = i \cdot \frac{1}{m_{pe}}, \quad [\text{m/s}]$$

den Gesamtimpuls der ausströmenden Gase i zu bestimmen. Da die Gasmasse bekannt ist – sie entspricht der Masse der Pulverladung – ergibt sich damit ebenfalls die (mittlere) Ausströmgeschwindigkeit der Gase.

In der Tabelle 4.2 sind einige der gemessenen Ausströmgeschwindigkeiten zusammengestellt. Angesichts der relativ großen Streuung der Knallkartuschen und den schwierigen messtechnischen Bedingungen sind die Ergebnisse (mit Ausnahme einer Druckmessung) überraschend gut vergleichbar.

Druckmessungen, die seitlich im Strömungsfeld durchgeführt wurden, ließen sich zur Bestimmung der kinematischen Zähigkeit ε heranziehen, die ihrerseits für die approximative Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes unmittelbar nach der Mündung nach Gl. (2.3:44) verwendet werden konnte. Zwei solche Geschwindigkeitsverteilungen, die eine einer Waffe mit kurzem Lauf (PTB Nr. 78), die andere einer langläufigen Waffe (PTB Nr. 437), sind in den Abb. 4.7 und 4.8 dargestellt (vergleiche auch Tabelle 4.2). Bemerkenswert sind sowohl der sehr hohe Wert an der Mündung wie auch der schnelle Geschwindigkeitsverlust in der Gasströmung.

Das freie Ausströmen aus einem offenen Rohr ist natürlich nicht mit dem Nachströmen der Gase hinter einem austretenden Geschoss vergleichbar. Das Geschoss verhindert auf den ersten Millimetern die volle Beschleunigung, weshalb die hohen Geschwindigkeiten des offenen Rohres nicht erreicht werden.

Tabelle 4.2. Ausströmgeschwindigkeit: Vergleich der Messverfahren; alle Kartuschen Kaliber 8 mm Knall, Nc-Pulver (PTB: Physikalisch-technische Bundesanstalt)

Waffe PTB Nr.	Rohrlänge [mm]	Messwerte [m/s]		
		mit Druck	optisch	mit Pendel
176/2	53		3278 3057	
100/2	56	3334	2856 2968	2722
78	57		3251 3300	
388	57		3282	
437	125	2196	2288 2814	2079

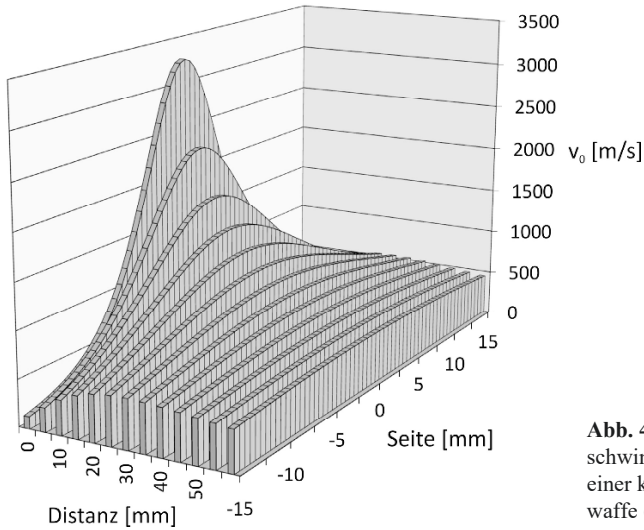


Abb. 4.7. Verteilung der Gasgeschwindigkeit an der Mündung einer kurzläufigen Schreckschusswaffe (PTB Nr. 78).

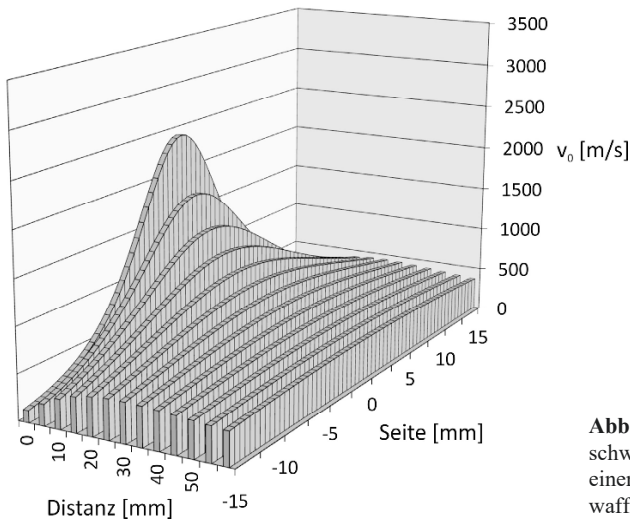


Abb. 4.8. Verteilung der Gasgeschwindigkeit an der Mündung einer langläufigen Schreckschusswaffe (PTB Nr. 437).

4.2.2 Feuererscheinungen

An der Mündung einer Waffe sind neben den Gasströmungen meist auch Lichterscheinungen zu beobachten, die zwei verschiedene Ursachen haben können. Bei kurzläufigen Waffen oder progressiven Treibmitteln verlässt das Geschoss oft die Mündung, bevor das Pulver ganz verbrannt ist. Das noch brennende Pulver führt zu einer Erscheinung, die *Feuer aus Mündung* (engl. „primary flash“) genannt wird. Andererseits können sich die dem Geschoss nachströmenden Gase in Verbindung mit dem aus der Luft hinzutretenden Sauerstoff vor der Mündung ent-

zünden. In diesem Falle spricht man von *Mündungsfeuer* (engl. „secondary flash“). Mündungsfeuer ist stets von der Mündung abgesetzt. In der Abb. 4.9, ein Bild aus einer Videoaufnahme, sind beide gleichzeitig sichtbar. Mündungsfeuer erscheinen oft ringförmig, da offenbar das zündfähige Gas-Sauerstoff-Gemisch in einem gewissen Abstand von der Schusslinie entsteht. Die Abb. 4.10 und 11 zeigen weitere Beispiele bei ganz unterschiedlichen Kalibern.



Abb. 4.9. Feuer aus Mündung und Mündungsfeuer bei einer Pistole im Kaliber 9 mm Luger im gleichen Bild. Das Mündungsfeuer ist ringförmig.



Abb. 4.10. Mündungsfeuer einer 155 mm Panzerhaubitze; sichtbar sind auch die durch die Mündungsbremse nach hinten ausströmenden Gase.



Abb. 4.11. Ringförmiges Mündungsfeuer einer Düsenkanone (84 mm Pzabw-Waffe „Carl Gustav“). Hinter der Waffe ist der Feuerball der rückstoßkompensierenden Düsenströmung zu sehen.

4.3 Der Geschossabgang

4.3.1 Rohrschwingungen und der Abgangsfehlerwinkel

4.3.1.1 Entstehung und Auswirkungen

Bei der Schussentwicklung steigt der Druck sehr schnell an und erreicht sein Maximum, wenn das Geschoss sich erst einige wenige Kaliberlängen bewegt hat (siehe Abschn. 3.3.5). Zu diesem Zeitpunkt herrscht im Rohr ein Druck von einigen Hundert (bei kleinen Artillerieladungen) bis mehrere Tausend Bar (bei Hochleistungsgeschützen und Kleinkaliberwaffen). Dadurch wirkt nicht nur auf den Geschossboden, sondern auch auf die Rohrwände eine sehr große dynamische Kraft, welche das Rohr in longitudinale und transversale Schwingungen versetzt. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit solcher Schwingungen in Stahl ist sehr hoch; longitudinal um 5900 m/s, transversal etwa 3200 m/s. Die Schwingungen erfassen somit das ganze Rohr lange (relativ zur Schussentwicklungszeit) bevor das Geschoss die Mündung erreicht. Infolge der transversalen Schwingungen verändert die Rohrachse an der Mündung ständig die Richtung und weicht zum Zeitpunkt des Geschossdurchgangs zumeist von der ursprünglichen Einstellung ab. Das Geschoss startet somit nicht mit demjenigen Abgangswinkel, der als Elevation am Geschütz eingestellt wurde. Diese Winkeldifferenz wird *Abgangsfehler(winkel)* genannt. Unabhängig vom Kaliber ist mit einem Fehlerwinkel von etwa 1–3 mil (ca. 3–10 Bogenminuten) zu rechnen.

Bei lafettierten Waffen ist dieser Abgangsfehler recht gleichmäßig; er wird in der Regel für jedes Waffensystem einmal bestimmt und muss nur von Zeit zu Zeit überprüft werden. Hingegen wird er sehr unbestimmt, wenn ab Schulter geschossen wird. Die Art und Weise, wie ein Schütze die Waffe hält, wirkt sich direkt auf die Rohrschwingungen aus.

In einem Schießtraining von Präzisionsschützen mussten die Teilnehmer erst ein gewohntes Trefferbild schießen und anschließend eines mit deutlich stark in die Schulter gepresster Waffe. Das Streubild blieb dabei etwa gleich, hingegen verschob sich der mittlere Treffpunkt bei allen Teilnehmern um 10–15 cm bei 100 m Schussdistanz, also um 1–1.5 mil.

Schießen zwei Schützen mit der gleichen Waffe, ohne an der Visierung etwas zu ändern, können sich ohne weiteres Treffpunktabweichungen in der Größenordnung von 1–2 mil ergeben, was bei 300 m Schussdistanz 30–60 cm in der Scheibe ausmachen kann.

Eingedenk der extrem guten Treffgenauigkeit, die Präzisions- und Sportschützen vorweisen können, ist von einer hohen Reproduzierbarkeit der Rohrschwingungen auszugehen, wenn die Waffe stets im gleichen Anschlag gehalten wird.

Ab und zu trifft man auch auf Ereignisse, welche die Auswirkungen der Rohrschwingungen auf die Treffpunktlage direkt aufzeigen.

Bei einem Abnahmeschießen von Pistolenmunition mit einer Schießmaschine wurde beobachtet, dass die Schüsse mit tieferer Mündungsgeschwindigkeit einen messbar höheren Treffpunkt erzielten als die schnelleren. Dies schien zunächst unerklärlich. Bedenkt man jedoch, dass die schnelleren Geschosse eine kürzere Durchlaufzeit durch das Rohr haben und nimmt man an, die Rohr-

schwingung befinde sich gerade in einer Aufwärtsbewegung, wird diese Erscheinung plausibel. Eine einfache Zusatzmasse am Rohr veränderte das Trägheitsmoment und die Frequenz der Schwingungen und damit die Beziehung zwischen Geschwindigkeit und Treffpunktlage.

Bei Artilleriegeschützen wirkt sich der Abgangsfehler weniger gravierend aus als bei Direktschusswaffen. Er beträgt bei kleinen Elevationen etwa 0,5–1 % der Schussdistanz und nimmt mit zunehmender Elevation stark ab.

Der Abgangsfehler wird ausschließlich experimentell bestimmt, wobei verschiedene Methoden unterschiedlicher Genauigkeit angewendet werden können.

4.3.1.2 Bestimmung des Abgangsfehlerwinkels

Die einfacheren Methoden der Bestimmung des Abgangsfehlerwinkels setzen voraus, dass die Mündung keine seitliche Verschiebung durch die Rohrschwingungen erfährt; sie befindet sich also im Ursprung des Bezugssystems. Gemessen wird damit nur die Winkeländerung.

In einer gewissen Entfernung von der Mündung (bei Artilleriegeschützen einige zehn Meter) wird eine Kartonscheibe aufgestellt (siehe Abb. 4.12), auf der die Verlängerung der Rohrseelenachse mittels eines Rohrsachsenlasers oder eines Seelenfernrohrs markiert wird (T). Der anschließende Schuss, bei dem die Flugzeit t_s zwischen Mündung und Karton gemessen wird, trifft diesen im Punkt S. Nun ist zu berücksichtigen, dass das Geschoss während der Zeit t_s der Fallbeschleunigung ausgesetzt war. Bei geradliniger Flugbahn hätte es den Karton in der Höhe

$$(4.3:1) \quad y_A = y_s + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_s^2, \quad [\text{m}]$$

über der Mündung getroffen. Mit Blick auf die Abb. 4.12 ergibt sich für den Abgangsfehlerwinkel $\Delta\theta_0$ die Beziehung

$$(4.3:2) \quad \Delta\theta_0 = \arctan\left(\frac{y_A}{x_s}\right) - \arctan\left(\frac{y_T}{x_s}\right). \quad [\text{mil}]$$

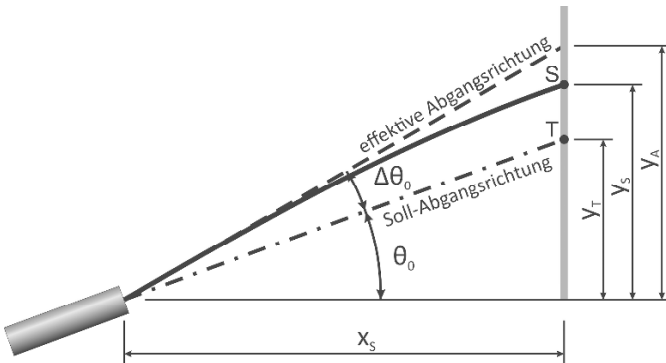


Abb. 4.12. Zur Bestimmung des Abgangsfehlerwinkel (einfache Methode). Erläuterungen siehe Text.

Einen Schritt weiter kann man gehen, indem anstelle des parabolischen Ansatzes eine Näherungsformel für Flugbahnen, z. B. die Formel von PITON-BRESSANT (siehe dazu Abschn. 5.4.6.3) verwendet wird. Dies erfordert jedoch eine weitere Information, entweder die Messung der Flugzeit zu einem der Flugbahnpunkte oder einen weiteren Flugbahnpunkt in einem dritten Karton. Diese Methode wird mit Vorteil dann angewendet, wenn – z. B. wegen hohem Mündungsdruck – große Abstände zwischen Mündung und Karton notwendig sind.

Bei stark pendelnden Geschossen ist darauf zu achten, dass nicht etwa die Amplitude der Pendelbewegung als Abgangsfehler interpretiert wird. Für die Bestimmung eines etwaigen seitlichen Abgangsfehlers genügt in jedem Falle die lineare Methode.

Die Auswirkungen von Abgangsfehlerwinkeln $\Delta\theta_0$ auf den Treffpunkt lassen sich mit Hilfe von Näherungsformeln schätzen. In der untern Winkelgruppe ergibt sich der Höhenfehler bei der gegebenen Distanz zu

$$(4.3:7) \quad \Delta y = x_e \cdot \frac{1 - \tan^2 \theta}{\cos \theta} \cdot \Delta\theta_0, \quad [m]$$

und in der oberen Winkelgruppe der Distanzfehler bei der gegebenen Zielhöhe

$$(4.3:8) \quad \Delta x_e = x_e \cdot \left(1 - \frac{\sin 2 \cdot (\theta + \Delta\theta)}{\sin 2 \cdot \theta} \right), \quad [m]$$

worin x_e die Schussdistanz der ungestörten Elevation bedeutet.

4.3.2 Der Rückstoß

4.3.2.1 Ursachen des Rückstoßes

Durch die Schussabgabe erhalten das Geschoss und die nachströmenden Pulvergase einen bestimmten Impuls in Schussrichtung, der durch einen ebenso großen Impuls in entgegengesetzter Richtung ausgeglichen wird. Dieser Gegenimpuls wird *Rückstoßimpuls* genannt. Er ist die unmittelbare Ursache der bei der Schussabgabe auf die Lafette oder den Schützen einwirkenden, mechanischen Kräfte.

4.3.2.2 Bestimmung des Rückstoßimpulses

Genaugenommen müsste für die Bestimmung des gesamten Schussentwicklungsimpulses bereits die Bewegung des Geschosses und der Pulvergase im Rohr und deren Reibung berücksichtigt werden. Dies führt jedoch zu schwierigen Rechnungen mit schwer zu ermittelnden Daten, ohne die Genauigkeit entscheidend zu verbessern. Es ist wesentlich einfacher und genügend genau, wenn die Impulsanteile des Geschosses und der Pulvergase bei Mündungsdurchgang berechnet werden.

Der *Geschossimpuls* I_p ergibt sich (nach Gl. 2.2:12) aus der Mündungsgeschwindigkeit v_0 und der Geschossmasse m_p

$$(4.3:9) \quad I_p = m_p \cdot v_0 . \quad [\text{N}\cdot\text{s}]$$

Sieht man von den Stoß- und Verdünnungswellen ab, die im Rohr zwischen Stoßboden und Geschoss hin- und herlaufen, kann angenommen werden, dass das Gas am Stoßboden ruht und am Geschossboden sich mit dessen Geschwindigkeit mitbewegt. In linearer Näherung verschiebt sich die Gassäule somit mit der halben Geschossgeschwindigkeit Richtung Mündung. Da deren Masse der Pulvermasse m_c entspricht, ergibt sich für den Impuls der nachströmenden Gase I_n im Rohr

$$(4.3:10) \quad I_n = m_c \cdot \frac{1}{2} \cdot v_0 . \quad [\text{N}\cdot\text{s}]$$

Diese beiden, von der Mündungsgeschwindigkeit v_0 abhängenden Impulsanteile (4.3:9) und (4.3:10) werden zusammen als *Mündungsimpuls* I_M bezeichnet. Zusammengefasst ergeben sie

$$(4.3:11) \quad I_M = \left(m_p + \frac{1}{2} \cdot m_c \right) \cdot v_0 . \quad [\text{N}\cdot\text{s}]$$

Hat das Geschoss die Mündung verlassen, strömen die Pulvergase aus und zwar mit der in Abschn. 4.2.1.2 beschriebenen Ausströmgeschwindigkeit v_a . Wenn der Mündungsdruck bekannt ist, kann diese mit den Gleichungen (4.2:3) und (4.2:4) angenähert berechnet werden. Der Mündungsdruck kann mittels eines Innenballistik-Programms (z. B. H. BRÖMEL, 2009) oder dem Heydenreich-Verfahren bestimmt werden. Manchmal liegen auch Messungen vor.

Sind die Daten für die Berechnung der Ausströmgeschwindigkeit v_a nicht greifbar, können die folgenden Schätzwerte verwendet werden:

- für Langwaffen 850–1050 m/s,
- für Kurzwaffen 500–650 m/s.

Bei kleinem Mündungsdruck (lange Rohre oder degressives Pulver) sind eher die niedrigeren, bei hohem Mündungsdruck (kurze Rohre oder progressives Pulver) die höheren Werte einzusetzen.

Der Impuls dieser nach dem Geschossaustritt expandierenden Gase wird als *Nachwirkungsimpuls* I_N bezeichnet.

$$(4.3:12) \quad I_N = m_c \cdot v_a \quad [\text{N}\cdot\text{s}]$$

Tabelle 4.3. Daten und Impulsanteile zu den Geschossen aus Tabelle 4.1

		9 mm Luger	7.5 × 55 Swiss	35 × 228
Kaliber	[mm]	9	7.5	35
Geschossmasse	[g]	8	11.3	550
Pulvermasse	[g]	0.305	2.92	322
v_0 Geschoss	[m/s]	356	795	1175
v_a nach Gl. (4.2:4)	[m/s]	620	928	1245
Geschossimpuls Gl. (4.3:9)	[N·s]	2.85	8.98	646
Mündungsimpuls Gl. (4.3:11)	[N·s]	2.90	10.14	835
Nachwirkungsimpuls Gl. (4.3:12)	[N·s]	0.19	2.71	401
Rückstoßimpuls Gl. (4.3:13)	[N·s]	3.09	12.85	1236

Der *Rückstoßimpuls* I_R , der betragsmäßig gleich dem gesamten Impuls ist, setzt sich aus dem Mündungs- und dem Nachwirkungsimpuls zusammen:

$$(4.3:13) \quad I_R = \left(m_p + \frac{1}{2} \cdot m_c\right) \cdot v_0 + m_c \cdot v_a . \quad [\text{N} \cdot \text{s}]$$

Als Beispiel sind in der Tabelle 4.3 die Anteile des Rückstoßimpulses der Geschosse aus Tabelle 4.1 zusammengestellt.

4.3.2.3 Rücklaufgeschwindigkeit und Rückstoßenergie

Infolge des Rückstoßimpulses wird der Waffe eine bestimmte Rücklaufgeschwindigkeit v_R erteilt. Aus der Impulsleichung folgt mit der Waffenmasse m_w

$$(4.3:14) \quad v_R = \frac{I_R}{m_w} . \quad [\text{m/s}]$$

Außer einer gewissen Anschaulichkeit hat die Rücklaufgeschwindigkeit allerdings keine Bedeutung. Zur Beurteilung des Rückstoßes lässt sie sich nicht heranziehen.

Ein Rohr oder eine Waffe, die mit einer bestimmten Geschwindigkeit zurückläuft, besitzt kinetische Energie, die in diesem Zusammenhang *Rückstoßenergie* E_R genannt wird. Da die Rückstoßenergie ein Maß für die Arbeitsfähigkeit der sich bewegenden Waffe darstellt, ist sie wohl die einzige messbare Größe, mit der der Rückstoß objektiv beurteilt werden kann. Mit den Gleichungen (2.2:19) und (4.3:14) ergibt sich

$$(4.3:15) \quad E_R = \frac{I_R^2}{2 \cdot m_w} . \quad [\text{J}]$$

Das Abfangen einer bestimmten Rückstoßenergie geschieht durch Erbringen von Arbeit in Form einer Bremskraft, die längs eines bestimmten Abbremsweges wirkt (Gl. 2.2:16). Bei Geschützen erfolgt dies beispielsweise durch Spannen von Federn oder Komprimieren von Flüssigkeiten.

Beim Schießen ab Schulter macht diese Bremskraft (*Rückstoßkraft*) jedoch einen großen Teil des subjektiven Rückstoßempfindens aus. Bei einer gegebenen Rückstoßenergie verhalten sich Abbremsweg und Rückstoßkraft umgekehrt proportional zueinander. Jede Verlängerung des Abbremsweges (z. B. gepolsterte Kleidung) verringert demzufolge die Rückstoßkraft.

Wird die Waffe fest in der Hand gehalten beziehungsweise in die Schulter gepresst, so bildet sie mit dem entsprechenden Körperteil eine Einheit. Bei der Berechnung der Rückstoßenergie nach Gl. (4.3:15) ist die Waffenmasse mit einem gewissen Anteil der Körpermasse zu ergänzen. Die Rückstoßenergie wird dadurch wesentlich verkleinert.

Bei kleineren Waffen kann die Rückstoßenergie gemessen werden, in dem die Waffe als Pendel aufgehängt wird und der Pendelausschlag beim Schuss gemessen wird. Sie kann auch in einen reibungsarmen Wagen eingespannt werden, dessen Rücklaufgeschwindigkeit gemessen wird. Dabei ist die Rohrachse so anzuordnen, dass beim Schuss kein Drehmoment entsteht (siehe Abb. 4.14).

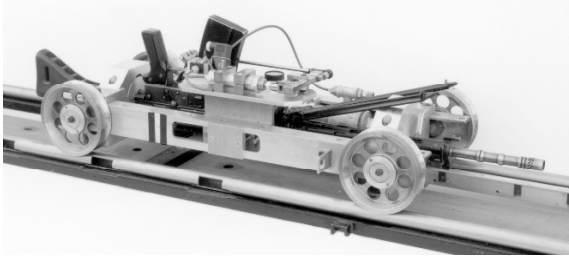


Abb. 4.14. Beispiel einer Einrichtung zur Bestimmung der Rückstoßenergie. Das Waffenrohr ist genau in der Ebene der Radachsen, damit beim Schuss kein Drehmoment entsteht.

4.3.2.4 Das Drehmoment beim Schuss

Aus verschiedenen technischen Gründen sind praktisch alle Waffen so konstruiert, dass das Rohr oberhalb des Punktes liegt, an dem es abgestützt wird. Demzufolge wirkt der Rückstoßimpuls in einem bestimmten Abstand vom Abstützpunkt, in dem die erforderliche Gegenkraft angreift (siehe Abb. 4.15). Damit wird ein Drehmoment erzeugt, welches das Rohr um einen bestimmten Drehpunkt nach oben dreht. Bei lafettierten Waffen muss dieses Drehmoment von der Lafettenkonstruktion übernommen werden. Wird ab der Schulter oder von Hand geschossen, wird ein Hochschlagen der Waffe verspürt.

Die Drehung beginnt bereits, wenn sich das Geschoss im Rohr in Bewegung setzt. Bis zum Zeitpunkt, in dem es das Rohr verlässt, hat sich bei Kurz Waffen die Mündung einige Millimeter gehoben. Da dieser Vorgang gut reproduzierbar ist, merkt der Schütze nichts davon.

Die Drehbewegung setzt sich auch noch fort, nachdem das Geschoss die Mündung verlassen hat. Bei großen Rückstoßenergien kann die Waffe beachtlich über die ursprüngliche Schussrichtung angehoben werden. Der Drehpunkt liegt etwa in der Mitte zwischen Rohrachse und Abstützung; der Abstand sei r . Bezeichnet I_d den drehenden Anteil des Rückstoßimpulses, so folgt für den Drehimpuls L

$$(4.3:16) \quad L = I_d \cdot r . \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}]$$

In Anlehnung an (Gl. 4.3:15) ergibt sich für die zugehörige Drehenergie

$$(4.3:17) \quad E_d = \frac{L^2}{2 \cdot J_w} = \frac{I_d^2 \cdot r^2}{2 \cdot J_w} , \quad [\text{J}]$$

wobei mit J_w wird das Trägheitsmoment der Waffe bezüglich des Drehpunktes bezeichnet ist.



Abb. 4.15. Entstehung des Drehmoments beim Schießen am Beispiel der Pistole. Die Abstützung liegt unterhalb der Wirkungslinie des Rückstoßimpulses. F_a : abstützende Kraft, übrige Bezeichnungen gemäß Abschn. 4.3.2.2.

Bedeutet I_t den linearen (translatorischen) Anteil des Rückstoßimpulses und E_t die zugehörige Energie, so lässt sich mit den Gleichungen (4.3:15) und (4.3:17) die folgende Energiegleichung aufstellen

$$(4.3:18) \quad E_R = E_t + E_d = \frac{I_t^2}{2 \cdot m_w} + \frac{I_d^2 \cdot r^2}{2 \cdot J_w} . \quad [J]$$

Das Trägheitsmoment J_w der Waffe lässt sich angenähert mit $\beta \cdot m_w \cdot r^2$ schätzen (β ist eine Konstante und m_w die Waffenmasse)

$$\frac{I_R^2}{2 \cdot m_w} = \frac{I_t^2}{2 \cdot m_w} + \frac{I_d^2 \cdot r^2}{2 \cdot \beta \cdot m_w \cdot r^2} , \quad [J]$$

$$(4.3:19) \quad I_R^2 = I_t^2 + \frac{I_d^2}{\beta} . \quad [(N \cdot s)^2]$$

Die gesamte Rückstoßenergie teilt sich in Dreh- und Rücklaufenergie auf. Je besser man der Drehbewegung entgegengewirkt, desto stärker wird der Rückstoß verspürt; je mehr man die Waffe die Drehbewegung ausführen lässt, desto schwächer wird der Rückstoß. Da die Summe stets der gesamten Rückstoßenergie entspricht, ist diese für eine objektive Beurteilung des Rückstoßes geeignet.

4.3.2.5 Möglichkeiten der Beeinflussung

Die dem Geschoss nachfolgenden Gase strömen mit großer Geschwindigkeit aus der Mündung (gemäß Abschn. 4.2.1.2); zusammen mit ihrer Masse ergibt dies eine beachtliche Energie. Es ist daher naheliegend, diese Energie zur Reduktion des Rückstoßes und des Drehmomentes einzusetzen. Es genügt, die Gase, die sich nach der Mündung ungefähr kugelförmig ausbreiten (siehe Abb. 4.3), außerhalb der Geschossbahn durch eine mit dem Rohr verbundene *Mündungsbremse* entgegen der Schussrichtung umzulenken.

Es gibt zahlreiche Konstruktionen, die mit vor der Mündung angebrachten Prellflächen (aktive Mündungsbremsen) oder mit seitlichen Bohrungen im Rohr (reaktive Mündungsbremsen) arbeiten. Mit dem Umlenkwinkel lässt sich die

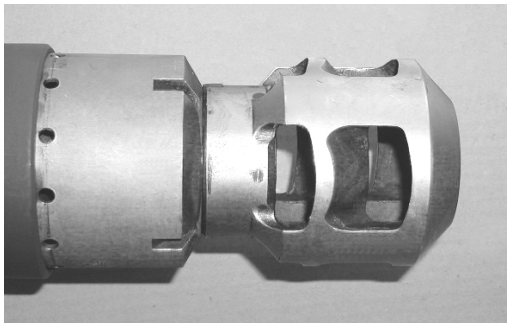


Abb. 4.16. Mündungsbremse eines Mittelkalibergeschützes mit zwei Kammern (zwei Umlenkflächen nacheinander). Die Gase werden nicht nur seitlich nach hinten umgelenkt, sondern auch nach oben und unten.



Abb. 4.17. Mündungsbremse mit Kompensator an der Mündung eines Präzisionsgewehres (SIG Sauer 2000).

Rückstoßverminderung einstellen. Eine gute Wirkung wird nur mit Umlenkwinkeln über 90° erreicht (siehe Abb. 4.16) wobei allerdings die Geschützbedienung stärkerem Knalldruck und auch Gasen ausgesetzt wird. Mündungsbremsen werden deshalb in erster Linie bei Waffen eingesetzt, bei denen die Mannschaft geschützt ist.

Bei Kleinkaliberwaffen werden in der Regel reaktive Anordnungen verwendet mit seitlichen, runden oder schlitzförmigen Öffnungen. Damit der Schütze nicht zu sehr belästigt wird, sind diese senkrecht zur Schussrichtung gerichtet oder nur leicht ihr entgegen geneigt. Ab und zu finden sich schräg nach oben vorn gerichtete Öffnungen, welche dem in Abschn. 4.3.2.4 beschriebenen Drehmoment entgegenwirken und das Hochschlagen des Rohrs vermindern (siehe Abb. 4.17). Solche Konstruktionen werden auch als *Kompensatoren* bezeichnet.

Seitliche Öffnungen erfüllen aber noch einen weiteren Zweck. Sie bewirken eine bessere Verteilung der dem Geschoss nachströmenden Gase und erzielen dabei eine Verminderung des Mündungsfeuers, dies auch, wenn eine Rückstoßverminderung ausbleibt. Sie werden deshalb zumeist als *Feuerscheindämpfer* bezeichnet (siehe Abb. 4.18).

4.3.3 Die Ablösung von Geschossführungsteilen

In Abschn. 3.7.6 wurde das 1. ballistische Paradoxon erwähnt, für welches das konische Rohr eine Lösungsmöglichkeit darstellte. Die zweite, üblichere Konstruktion, innenballistisch eine kleine und außenballistisch eine große Querschnittsbelastung zu erreichen, ist das ebenfalls dort beschriebene Unterkalibergeschoss, das sich im Bereich der Abgangsbalistik seiner Führungsteile entledigen muss.

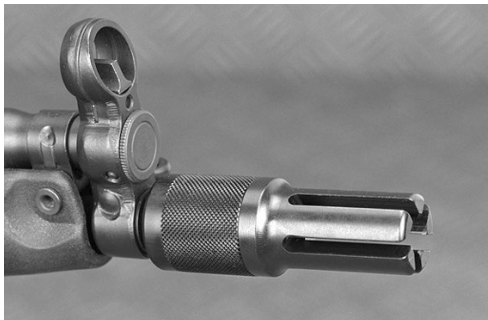


Abb. 4.18. Einfacher Feuerscheindämpfer ohne Rückstoßminderung an der Mündung einer Kleinkaliberwaffe.

Führungsteile, die das Geschossheck aufnehmen, wurden in Anlehnung an die Vorderlader *Treibspiegel* genannt, jene, die das Geschoss am zylindrischen Teil stützen, bezeichnet man als *Treibkäfig* (engl. „Sabot“). Heute wird vor allem der letztere Begriff verwendet. Die Ablösung des Treibkäfigs nach Austritt aus der Mündung erfolgt bei drallstabilisierten Geschossen durch die Fliehkraft, bei flügelstabilisierten durch aerodynamische Kräfte. Die Kontrolle über die störungsfreie Trennung erfolgt in erster Linie durch bildgebende Verfahren wie Schatten- oder Auflichtaufnahmen (Abb.4.19 bzw. Abb. 4.20).

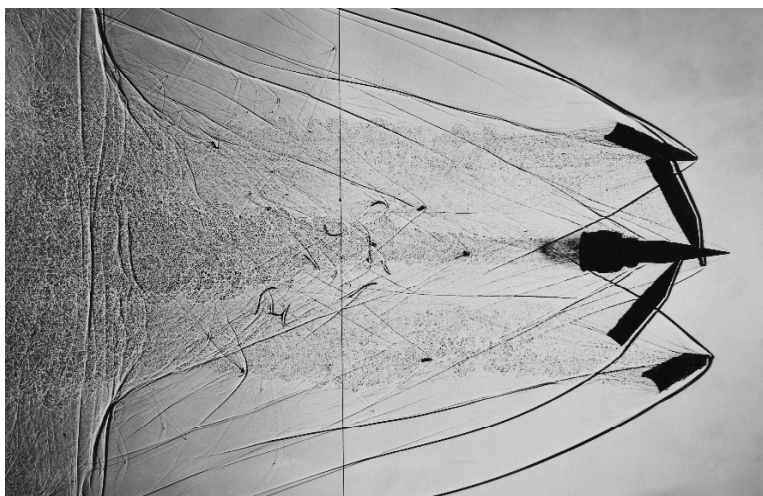


Abb. 4.19. Schattenaufnahme der Trennung des Treibkäfigs von einem drallstabilisierten Unterkalibergeschoss (Kaliber 20 mm). Der Treibspiegel hat sich noch nicht vom Geschossheck gelöst.

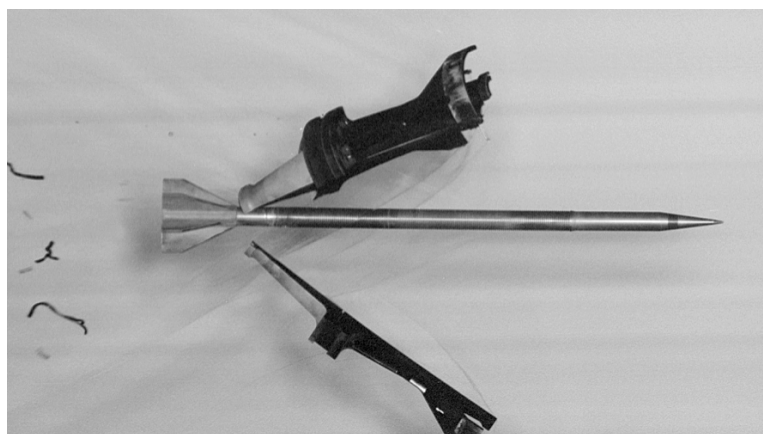


Abb. 4.20. Auflichtaufnahme des Trennvorganges des Treibkäfigs von einem Pfeilgeschoss. Luftkräfte greifen vorne an den Treibkäfigelementen an und kippen sie nach hinten.

5 Außenballistik

5.1 Historisches

Außenballistik ist die urtümlichste Disziplin der Ballistik. Der Flug (die Bewegung) eines Pfeils oder einer geworfenen Kugel beschäftigte bereits die Denker des antiken Griechenlandes, wie dies beispielsweise im Pfeil-Paradoxon des ZENON (etwa 490–430 v. u. Z.) überliefert ist. Als ein Teil der Bewegungslehre finden sich erste Beschreibungen der Bahn eines geworfenen Körpers in den philosophischen Schriften des ARISTOTELES (384–322 v. u. Z.), der sich in seinem Werk „Physik, Vorlesungen über die Natur“ eingehend mit Ruhe und Bewegung beschäftigte. Er unterschied bei einem Ortswechsel eines Körpers naturgemäße (natürliche) und naturwidrige (gewaltsame) Bewegungszustände. Zu den ersteren zählte er die geradlinige Fortbewegung, zu den zweiten jene, die eine Veränderung (der Richtung) bewirken. Mischformen der beiden wurden kategorisch verworfen.

Dies hatte zur Folge, dass der Flugweg eines Projektils als aus drei Teilen bestehend dargestellt wurde (siehe Abb. 5.1): eine erste geradlinige, „natürliche“ Bewegung A–B, ein zweiter „gewaltsamer“ Teil B–C, der die Krümmung beschrieb und als dritter und letzter Teil der wiederum „natürliche“ freie Fall C–D. Diese aristotelische Vorstellung der ballistischen Bahn hielt sich fast 2000 Jahre lang.

Erst im 16. Jahrhundert beschäftigte sich erneut ein Gelehrter, der Italiener Niccolò TARTAGLIA (1500–1557), mit dem Flug eines Geschosses.

Bekannt wurde TARTAGLIA in erster Linie durch ein Verfahren zur Auflösung der allgemeinen kubischen Gleichung und durch den damit verbundenen Rechtsstreit, den er sich mit dem Arzt und Mathematiker Girolamo CARDANO (1501–1576) lieferte.

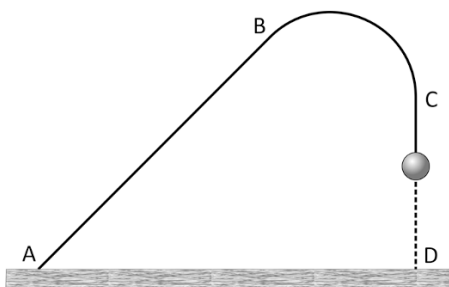


Abb. 5.1. Flugbahn eines Projektils nach Aristoteles. An die erste geradlinige „natürliche“ Bewegung schließt sich der „gewaltsame“ gekrümmte Teil an, der anschließend in den „natürlichen“ freien Fall übergeht.

Im Jahre 1537 veröffentlichte TARTAGLIA eine in italienischer Sprache geschriebene Schrift mit dem Titel „Nova Scientia“ („Neue Wissenschaft“, übersetzt ins Englische und kommentiert in Matteo VALLERIANI, 2013). Es ist dies das erste Werk, in dem versucht wird, die Außenballistik von einem wissenschaftlichen (geometrischen) Gesichtspunkt aus aufzubauen. TARTAGLIA orientierte sich unter anderem an den Werken von Euklid, indem er versuchte, aus einigen wenigen Grundregeln (Axiomen) eine beschränkte Zahl von Sätzen abzuleiten, welche die Flugbahn eines Geschosses exakt beschreiben sollten. Allerdings fehlte ihm dazu der fundamentale Begriff der Beschleunigung. Seine Flugbahndarstellungen standen deshalb noch ganz unter dem aristotelischen Einfluss und besaßen nach wie vor den geometrischen Verlauf gemäß Abb. 5.1, obwohl er bereits Krümmungen im auf- und absteigenden Ast postuliert hatte. Die Frage nach der Elevation für maximale Schussdistanz beantwortete er als Erster; aus der Reichweite Null für 0° und 90° zog er den Schluss, das Maximum müsse sich bei 45° einstellen.

Es vergingen weitere hundert Jahre, bis ein nächster, entscheidender Schritt hin zum Verständnis der ballistischen Flugbahn erfolgte. Es war kein geringerer als Galileo GALILEI (1564–1641), der sich in den 1638 erschienenen „Discorsi“ (seinem physikalischen Hauptwerk) ausführlich mit der Kinematik auseinandersetzte.

GALILEI schrieb die „Discorsi“ in Form eines Gesprächs zwischen drei Personen, welches an vier Tagen stattfand. Wegen seiner Kontroverse mit der katholischen Kirche erschien dieses Buch nicht in Italien, sondern bei Elsevier in Leiden. Die Aussagen zur Flugbahn von Geschossen sind (unter anderem) Thema des vierten Tages.

Basierend auf seinen Erkenntnissen zur Fallbeschleunigung wies GALILEI in diesem vierten Teil der „Discorsi“ nach, dass eine Geschossbahn aus zwei (unabhängigen) Bewegungen besteht: einer horizontalen, deren Geschwindigkeit wegen der Trägheit konstant bleibt, und einer vertikalen mit einer nach unten gerichteten, konstanten Beschleunigung. Die dabei entstehende Bahnform stellt eine quadratische Parabel dar. Allerdings hatte er bei der Untersuchung der Fallbewegung entdeckt, dass der Widerstand mit zunehmender Geschwindigkeit wächst und somit eine Fallhöhe existieren müsse, bei welcher der Widerstand dem Gewicht entsprechen und die Bewegung in eine gleichförmige übergehen würde. Sollten Flugbahnen in größere Höhen reichen, würde diese Gesetzmäßigkeit die Parabelform als unzulässig erscheinen lassen.

Ist das Gewicht des Körpers nicht zu leicht und die Fallhöhe nicht zu groß, so bleibt die Abweichung vom quadratischen Fallgesetz klein. Dieser experimentelle Befund veranlasste GALILEI, in solchen Fällen die Parabel als Flugbahnform beizubehalten. Er wies jedoch ausdrücklich darauf hin, dass Flugbahnen von Feuerwaffen wegen deren „übernatürlichen Wucht“ von dieser Approximation auszuschließen seien.

Trotz diesen Einsichten GALILEIS blieben die damaligen Ballistiker bei der Parabelform für alle Flugbahnen, bis Isaac NEWTON (1643–1727) in seiner „Principia“ (1687 und 1713) die Mechanik auf eine völlig neue Grundlage stellte. NEWTON stellte bei Fallversuchen mit großen, gläsernen Hohlkugeln fest, dass der Luftwiderstand beträchtlich sein musste und nahm an, dass dieser dem Quadrat der Ge-

schwindigkeit proportional sei. Zur Kurvenform der dabei entstehenden Bahnkurve machte er jedoch keine Angaben.

Es ist bemerkenswert, dass NEWTON bereits erkannte, dass bei der obigen Annahme des Luftwiderstandes die Meridiankurve eines Geschosses kleinsten Widerstandes eine transzendente Kurve sein musste.

In der zweiten Hälfte des 17. und im Verlauf des 18. Jahrhunderts befassten sich weitere namhafte Wissenschaftler mit der Frage der Flugbahnbestimmung, so z. B. Christiaan HUYGENS (1629–1695) und Johann BERNOULLI (1667–1748). Ein entscheidender Fortschritt ergab sich, als der Engländer Benjamin ROBINS (1707–1751) das ballistische Pendel erfand und so die Möglichkeit schuf, Geschosseschwindigkeiten zu messen. Er beschrieb es in seinem 1742 erschienenen Buch „New principles of gunnery“, in dem er nicht nur das Problem der Bestimmung des Luftwiderstandes und der Flugbahnform, sondern – wohl als Erster – auch die „Explosionskraft“ des Schießpulvers (und somit die Innenballistik) behandelte. Dieses Werk enthielt derart viele neue Denkanstöße, dass es der große Leonhard EULER (1707–1783) trotz erheblicher Mängel und Fehler in der mathematischen Beschreibung vom Englischen ins Deutsche übersetzte. Zugleich versah er es mit verbessernden Zusätzen und Erläuterungen und schaffte damit die erste vollständige Theorie der Bewegung geworfener Körper (siehe Abb. 5.2).

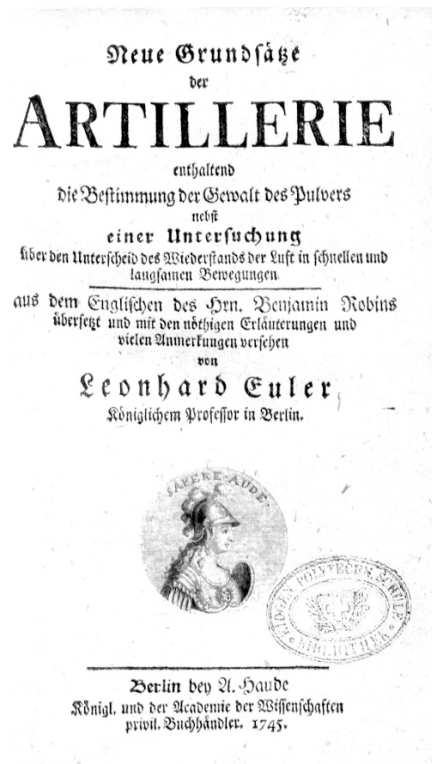


Abb. 5.2. Titelseite des von Leonhard EULER übersetzten und bearbeiteten Buches von Benjamin ROBINS. Das Buch erschien 1745 in Berlin; es wurde so bekannt, dass es rund vierzig Jahre später ins Französische übersetzt und ins Englische zurück übersetzt wurde (Titelseite des Exemplars der Eidgenössischen Polytechnischen Schule, der heutigen ETH Zürich).

EULER beschäftigte sich auch weiterhin mit dem Problem der Berechnung einer Flugbahn. In der wohl wichtigsten Schrift zu diesem Thema (L. EULER, 1755) schrieb er (übersetzt aus dem Französischen):

„Obwohl sich diese Frage mühelos auf ein rein analytisches Problem reduzieren lässt, hat der große NEWTON trotz einfallsreichen Untersuchungen vergeblich nach einer Lösung gesucht. Nachdem die Lösung unter der Annahme, der Widerstand sei proportional zur Geschwindigkeit, so gut gelang, ist es fast unvorstellbar, dass man nicht zum Ziel kommen sollte, wenn der Widerstand proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit angenommen wird, sind doch schon viele ungleich schwierigere Fragen gelöst worden. Es war Johann BERNOULLI selig, der als erster die Lösung dieses Problems gegeben und eine Konstruktion der Kurve beschrieben hat.“

Jedoch könne man, schrieb er weiter, aus dieser Lösung keinen praktischen Nutzen ziehen, so gut sie in der Theorie sein möge. Hauptursache für diese Schwierigkeit sei, dass in der Praxis nicht nur die Anfangsgeschwindigkeit und der Abgangswinkel als Parameter auftreten würden, sondern auch Gewicht und Durchmesser des Geschosses. Anstelle der analytischen Lösung schlug er die Schaffung von Tabellen vor, eine Idee, die bis in die neueste Zeit erhalten geblieben ist (z. B. die Methoden von SIACCI).

Zwei Parameter verhindern, dass das allgemeine außenballistische System der Bewegungsgleichungen analytisch gelöst werden kann: der eine ist der form- und geschwindigkeitsabhängige Luftwiderstandsbeiwert des Geschosses (der via Machzahl auch von der Temperatur beeinflusst ist), der andere die mit zunehmender Flughöhe abnehmende Luftdichte.

Bis in die zweite Hälfte des 20. Jahrhunderts stand man somit in der Außenballistik vor einem sehr ähnlichen Problem wie in der Innenballistik: das die Flugbahn beschreibende Differenzialgleichungssystem lässt sich allgemein nicht analytisch lösen. Dadurch wurde die Suche nach möglichst guten Näherungslösungen eines der Hauptarbeitsgebiete der Ballistiker. Erst die Entwicklung effizienter numerischer Verfahren und die Schaffung der dazu erforderlichen Rechenkapazitäten rückten physikalisch-ballistische Fragen vermehrt ins Zentrum der Betrachtungen.

5.2 Die Atmosphäre

5.2.1 Physikalische Eigenschaften

Der Luftwiderstand eines Geschosses hängt unter anderem von der Luftmasse ab, die das Geschoss verdrängen muss. Wie bei Gasen üblich, wird dabei nicht mit der Masse gerechnet, sondern mit der Dichte, also mit der auf das Volumen bezogenen Masse. Die Kenntnis der Luftdichte an der Stelle, an der sich das Geschoss gerade aufhält, ist somit für die Berechnung einer Flugbahn unabdingbar.

Luft ist ein Gasgemisch, das vor allem aus Stickstoff (N_2) und Sauerstoff (O_2) besteht, daneben aber noch Anteile von Kohlendioxid (CO_2), Argon (Ar) und weiteren Gasen enthält. Ein für die atmosphärischen Erscheinungen wichtiger Bestand-

teil ist der Wasserdampf (H_2O). Im Gegensatz zu den übrigen Gasen ist sein Anteil sehr unterschiedlich.

Der Zustand der Luft wird durch den Luftdruck, die Temperatur und die relative Luftfeuchtigkeit charakterisiert. Sie darf für ballistische Zwecke ohne weiteres als ideales Gas betrachtet werden. Dies bedeutet, dass zwischen Druck p , Dichte ρ und Temperatur T (in Kelvin) die Zustandsgleichung (2.3:3) gilt

$$(5.2:1) \quad \frac{p}{\rho} = R \cdot T \quad [\text{J/kg}]$$

Luftdruck und -temperatur lassen sich mit Barometer und Thermometer messen. Die für die Bestimmung der Luftkräfte maßgebende Luftdichte kann dann mit Hilfe der Gleichung (5.2:1) berechnet werden. Wird der Luftdruck p in Millibar bzw. Hektopascal (mbar, hPa) und die Temperatur T_C in Celsius abgelesen, so ergibt sich für die Luftdichte in kg/m^3 die Gleichung

$$(5.2:2) \quad \rho = \frac{100 \cdot p}{R_L \cdot (T_C + 273.15)} \quad [\text{kg/m}^3]$$

Darin steht R_L für die spezielle Gaskonstante der Luft. Als durchaus gute Näherung kann hierfür der Wert für trockene Luft, $R_{LT} = 287.06 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$, eingesetzt werden.

Durch die Luftfeuchtigkeit wird jedoch die Gaskonstante vergrößert und somit die Luftdichte verkleinert. Ist eine größere Genauigkeit gefordert, kann diesem Umstand mit der folgenden Formel für die Gaskonstante der feuchten Luft Rechnung getragen werden

$$(5.2:3) \quad R_{LF} = \frac{R_{LT}}{1 - r_f \cdot \frac{p_d}{p} \cdot \left(1 - \frac{R_{LT}}{R_D}\right)} \quad [\text{J/(kg}\cdot\text{K)}]$$

Darin bedeuten R_{LF} die Gaskonstante der feuchten Luft, $R_{LT} = 287.06 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ jene der trockenen Luft, $R_D = 461.52 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ jene von Wasserdampf, p der aktuelle Luftdruck, p_d der Sättigungsdampfdruck von Wasser (beide in mbar) und r_f die relative Luftfeuchtigkeit (bezogen auf 1)

Der Sättigungsdampfdruck hängt von der Temperatur ab. Er kann angenähert mittels der Magnus-Formel (nach D. SONNTAG 1990) berechnet werden

$$(5.2:3a) \quad p_d = 6.112 \cdot \exp\left(\frac{17.62 \cdot T_C}{243.12 + T_C}\right) \quad [\text{mbar}]$$

Wegen ihrem nur geringen Einfluss auf die Luftdichte (in der Regel $< 1 \%$) wird die Luftfeuchtigkeit üblicherweise bei Flachbahnwaffen mit kurzen Geschossflugzeiten nicht berücksichtigt.

Der Luftdruck wird durch das Eigengewicht der Lufthülle erzeugt; er nimmt daher mit zunehmender Höhe ab. Dabei spielt auch die Temperatur eine entscheidende Rolle; mit abnehmendem Druck nimmt auch sie grundsätzlich ab (siehe Gl. 5.2:1). Der Temperaturverlauf in den verschiedenen Schichten unserer Atmosphäre

ist im Mittel linear. Dies bedeutet, dass in gleichen Höhenstufen die Temperatur gleichviel ab- oder zunimmt. Die auf die Höheneinheit bezogene Temperaturänderung wird *Temperaturgradient* τ genannt. Er ist bei linearem Temperaturverlauf konstant und es gilt

$$(5.2:4) \quad dT = \tau \cdot dh \quad [\text{K}]$$

Die Druckabnahme in der Schicht dh ergibt sich zu

$$(5.2:4a) \quad dp = -\rho \cdot g \cdot dh \quad [\text{mbar}]$$

Wird ρ mittels Gl. (5.2:1) ersetzt und dh aus Gl. (5.2:4) eingesetzt, folgt nach Separation der Variablen und Integration zwischen der Höhe h_1 (mit p_1 und T_1) und der Höhe h_2 (mit p_2 und T_2) die folgende Beziehung

$$(5.2:5) \quad p_2 = p_1 \cdot \left(1 + \frac{\tau \cdot \Delta h}{T_1} \right)^{-\frac{g}{R_L \cdot \tau}}, \quad [\text{mbar}]$$

mit $\Delta h = h_2 - h_1$. Darin bedeuten g die Erdbeschleunigung und R_L die spezielle Gas-konstante der Luft. Die Temperatur T_1 ist in Kelvin einzusetzen.

In größeren Höhen (über 10 km) kann die Temperatur innerhalb gewisser Höhenstufen auch konstant sein. Die Druckabnahme lässt sich in diesem Fall (wegen $\tau = 0$) nicht mit Gl. (5.2:5) ermitteln, sondern kann direkt durch Integrieren der Gl. (5.2:4a) bestimmt werden (nach Ersetzen von ρ mit G. 5.2:1)

$$(5.2:6) \quad p_2 = p_1 \cdot e^{-\frac{g \cdot \Delta h}{R_L \cdot T}} \quad [\text{mbar}]$$

Die zugehörigen Luftdichten ergeben sich durch Einsetzen der Druckwerte in die Gl. (5.2:2).

Bei flachen Flugbahnen, bei denen der höchste Punkt (Flugbahngipfel) nur wenig über dem Abgangs- und dem Auftreffpunkt liegt, sind kaum Druckänderungen zu erwarten. Auch die Temperatur bleibt während des ganzen Weges angesichts der kurzen Flugzeiten ungefähr konstant, so dass in diesen Fällen mit einer konstanten Luftdichte gerechnet werden kann.

Luftdruck und -temperatur verändern sich nicht nur mit der Höhe, sondern auch stark mit dem Wetter. Es stellt sich somit die Frage, mit welchen Daten Schießbehelfe (z. B. Schusstafeln) berechnet werden sollen. Zu diesem Zweck wurden sogenannte „Normalatmosphären“ definiert, bei denen der Druck- und Temperaturverlauf genau festgelegt sind.

5.2.2 Normalatmosphären

5.2.2.1 Allgemeines

Der Druckverlauf in der Atmosphäre kann vollständig nach Gl. (5.2:5) bestimmt werden, sofern Druck und Temperatur auf einer bestimmten Höhe, der sogenannten

Bezugshöhe, bekannt sind und der konstante Temperaturgradient gegeben ist. Versieht man die Werte auf der Bezugshöhe y_0 mit dem Index 0, so ergibt sich der Druck auf der Höhe y zu

$$(5.2:7) \quad p(y) = p_0 \cdot \left(1 + \frac{\tau}{T_0} \cdot (y - y_0) \right)^{-\frac{g}{R_L \cdot \tau}} \quad [\text{mbar}]$$

g bezeichnet die Erdbeschleunigung, R_L ist wiederum die spezielle Gaskonstante der Luft. T_0 ist in Kelvin einzusetzen.

Bei konstanter Temperatur innerhalb einer Luftschicht ist Gl. (5.2:6) maßgebend

$$(5.2:8) \quad p(y) = p_0 \cdot e^{-\frac{g(y-y_0)}{R_L \cdot T_0}} \quad [\text{mbar}]$$

Normalatmosphären benötigen also zu ihrer Definition die Festlegung einer Bezugshöhe sowie den dort herrschenden Druck und die zugehörige Temperatur. Sie setzen einen abschnittsweise konstanten Temperaturgradienten voraus. In der Regel wird auch die Erdbeschleunigung als konstant angenommen. Luftdruck und Luftdichte werden somit in der ganzen Atmosphäre allein durch den Verlauf der Temperatur bestimmt.

5.2.2.2 Die ICAO-Atmosphäre

Die bekannteste und am weitesten verbreitete Normalatmosphäre wurde von der „International Civil Aviation Organisation“ (ICAO) herausgegeben. Als Bezugshöhe wurde die Meereshöhe gewählt und dort folgende Normalwerte festgelegt:

- Luftdruck: 1013.25 mbar
- Temperatur: 288.15 K, (entspricht 15.0 °C)
- Erdbeschleunigung 9.80665 m/s²

Daraus ergibt sich eine Luftdichte von 1.225 kg/m³.

Wegen der Annahme einer konstanten Erdbeschleunigung werden in der Meteorologie sogenannte geopotenzielle Höhenstufen gewählt, mit denen die Normalatmosphäre mittels der Temperaturgradienten definiert wird (siehe Tabelle 5.1).

Die geopotenzielle Höhe ist jene Höhe, auf welcher ein Körper bei konstanter Erdbeschleunigung dieselbe potenzielle Energie besitzt wie in der zugehörigen geometrischen Höhe bei der realen, mit der Höhe abnehmenden Erdbeschleunigung. Die geopotenzielle Höhe ist damit stets geringfügig kleiner als die geometrische Höhe.

Diese Festlegungen erfolgten selbstverständlich nicht willkürlich, sondern basieren auf Beobachtungen und Messungen, die über eine lange Zeit und an vielen Orten der Erde durchgeführt worden waren. Sie wurden so gewählt, dass die Normalatmosphäre etwa einem mittleren Zustand der wirklichen Atmosphäre entspricht. Tabelle 5.2 gibt den Verlauf der Temperatur-, Druck- und Dichtewerte der ICAO-Normalatmosphäre bis und mit der Stratosphäre wieder.

Tabelle 5.1. Geopotenzielle Höhenstufen der ICAO-Standardatmosphäre

untere Grenze [m]	obere Grenze [m]	effektive Höhe [m]	Gradient τ [K/m]	Bezeichnung
0	11'000	11'019	-0.0065	Troposphäre
11'000	20'000	20'063	0.0	Tropopause
20'000	32'000	32'162	0.001	Stratosphäre
32'000	47'000	47'350	0.0028	do.
47'000	51'000	51'413	0.0	Stratopause
51'000	71'000	71'802	-0.0028	Mesosphäre
71'000	84'850	86'000	-0.002	Mesopause

5.2.2.3 Weitere Atmosphärenstandards

Besondere, begrenzte Gebiete der Erde (wie z. B. die Alpen, Wüstengebiete, nördliche Regionen) können ein Atmosphärenprofil aufweisen, das sich lokal vom allgemeinen Mittel unterscheidet. Für solche Regionen ist es durchaus sinnvoll, eine vom ICAO-Standard abweichende Atmosphäre zu definieren. In dieser Situation befinden sich beispielsweise die Alpenländer. Bei früheren Messungen Mitte des letzten Jahrhunderts wurde z. B. über der Schweiz ein mittlerer Temperaturgradient ermittelt, der sich um etwa 1 °C pro 1000 m geringer herausstellte als jener des ICAO-Profiles. Auf Grund dieser Ergebnisse wurde für militärische Anwendungen in diesem Land eine eigene Atmosphäre festgelegt, deren Normdruck auf Meereshöhe 1018.7 mbar, die Normaltemperatur 283.95 K (10.8 °C) und der Temperaturgradient -0.0055 K/m betrug. Flugbahnen mit Gipfelhöhen im Höhenbereich der Alpen ließen sich damit merklich besser berechnen.

Auch andere Länder oder Ländergruppen haben eigene, von der ICAO abweichende Normalatmosphären festgelegt. Dies kann historisch bedingt sein (östliche Länder) oder aber (wie im Falle der Schweiz) auf die spezielle geografische Lage eines Landes Rücksicht nehmen. So war in den Ländern der ehemaligen Sowjetunion eine Normalatmosphäre üblich, die mit einer Normaltemperatur auf Meereshöhe von 288.9 K und einem Gradienten von -0.006328 K/m rechnete. In Frankreich ist ebenfalls eine von der ICAO-Atmosphäre abweichende Normalatmosphäre festgelegt worden.

5.2.3 Wirkliche Verhältnisse

5.2.3.1 Druck und Temperatur

In den meisten Fällen ist die Beschaffenheit der wirklichen Atmosphäre zum Zeitpunkt des Schießens nicht bekannt. Ballistische Rechnungen werden deshalb üblicherweise mit einer Normalatmosphäre durchgeführt. Wie genau die Flugbahn eines Geschosses vorausgesagt werden kann, hängt davon ab, um wie viel sich die

Tabelle 5.2. ICAO-Normalatmosphäre

geopot. Höhe [m]	Luftdruck [mb]	Temperatur [°C]	Temperatur [K]	Luftdichte [kg/m ³]	g(y) [m/s ²]
0	1013.25	15.00	288.15	1.225	9.8067
250	983.6	13.40	286.53	1.196	9.8059
500	954.6	11.80	284.90	1.167	9.8051
750	926.3	10.10	283.28	1.139	9.8043
1000	898.7	8.50	281.65	1.112	9.8036
1250	877.2	7.20	280.35	1.090	9.8028
1500	856.0	5.90	279.05	1.069	9.8020
1750	835.2	4.60	277.75	1.048	9.8013
2000	795.0	2.00	275.15	1.006	9.8005
2500	746.8	-1.25	271.90	0.957	9.7990
3000	701.1	-4.50	268.65	0.909	9.7974
3500	657.6	-7.75	265.40	0.863	9.7959
4000	616.4	-11.00	262.15	0.819	9.7943
4500	577.3	-14.25	258.90	0.777	9.7928
5000	540.2	-17.50	255.65	0.736	9.7913
5500	505.1	-20.75	252.40	0.697	9.7897
6000	471.8	-24.00	249.15	0.660	9.7882
6500	440.3	-27.25	245.90	0.624	9.7867
7000	410.6	-30.50	242.65	0.590	9.7851
7500	382.5	-33.75	239.40	0.557	9.7836
8000	356.0	-37.00	236.15	0.525	9.7821
8500	331.0	-40.25	232.90	0.495	9.7805
9000	307.4	-43.50	229.65	0.466	9.7790
9500	285.2	-46.75	226.40	0.439	9.7775
10000	264.4	-50.00	223.15	0.413	9.7759
10500	244.7	-53.25	219.90	0.388	9.7744
11000	226.3	-56.50	216.65	0.364	9.7729
20000	54.75	-56.50	216.65	0.088	9.7454
32000	8.68	-44.50	228.65	0.0132	9.7089
47000	1.11	-2.50	270.65	0.0014	9.6635

momentane wirkliche Atmosphäre von der Normalatmosphäre unterscheidet. Hierbei kommt es in erster Linie auf das Temperaturprofil an.

Bei weitreichenden Bogenschusswaffen (Artillerie, großkalibrige Minenwerfer) sind die Einflüsse der Atmosphäre so groß, dass vor dem Schießen eine Messung des aktuellen Temperaturprofils notwendig ist. Zusammen mit dem auf einer Bezugshöhe (in der Regel die Mündungshöhe) gemessenen Luftdruck kann die momentane Luftdichte in Abhängigkeit der Flughöhe bestimmt werden. Dies führt zu wesentlich genaueren Voraussagen für die Flugbahn und den Auftreffpunkt.

Große Unterschiede zu Normalbedingungen ergeben sich beispielsweise im Winter bei sogenannten Inversionswetterlagen. Dabei ist die Lufttemperatur in höheren Lagen (üblicherweise oberhalb einer Nebeldecke) höher als in tieferen Lagen. Die Temperatur ist also im Gegensatz zur Normalatmosphäre anfänglich steigend (daher auch der Name „Inversion“) und erst später fallend. Ein anderer abweichender Fall ergibt sich bei warmem Sommerwetter, wenn die Bodentemperaturen infolge der Sonneneinstrahlung viel höher sind, als es den Normalverhältnissen entspricht. Die Temperatur nimmt in diesem Falle in den untersten Schichten wesentlich stärker ab als die Normalatmosphäre vorgibt.

Bei Flachbahnwaffen wirken sich derartige Unregelmäßigkeiten im Temperaturverlauf kaum aus. Hier genügt es in den meisten Fällen, Luftdruck und Temperatur auf der Höhe der Mündung zu messen und mit dem normalen Temperaturgradienten zu rechnen.

5.2.3.2 Wind

Wind entsteht infolge Druckunterschieden in der Atmosphäre. Richtung und Geschwindigkeit der bewegten Luft sind dabei durch die Lage des Hoch- und des Tiefdruckzentrums und durch deren Druckdifferenz gegeben. Die Richtung wird zudem durch die Corioliskraft der rotierenden Erde beeinflusst.

In der Meteorologie wird stets die Richtung angegeben, aus welcher der Wind kommt. In der Ballistik wird man jedoch mit einem Geschwindigkeitsvektor arbeiten, also mit der Richtung, wohin der Wind bläst.

In Bodennähe ist die Windströmung wegen der Rauheit der Oberfläche und dem Relief turbulent. Mit zunehmender Höhe nimmt die Geschwindigkeit wegen der abnehmenden Reibung zu und dreht sich infolge der Corioliskraft auf der Nordhalbkugel nach rechts, auf der Südhalbkugel nach links. Es ist deshalb allgemein zwischen Wind in Bodennähe und Wind in der freien (oberen) Atmosphäre zu unterscheiden.

Bei neutraler thermischer Schichtung (steigende Luftmassen besitzen das gleiche Temperaturprofil wie die Atmosphäre) nimmt die Windgeschwindigkeit im bodennahen Bereich bis etwa 100 m Höhe angenähert logarithmisch zu.

In höheren Lagen begegnet man Luftschichten mit ungefähr konstanten Windgeschwindigkeiten und -richtungen, deren Dicke durchaus mehrere hundert Meter bis einige Kilometer betragen kann. Die Schichtgrenzen selbst scheinen jedoch schmal zu sein; sie können durchaus als scharf angenommen werden.

Vom ballistischen Gesichtspunkt ist zu bedenken, dass bei flachen Flugbahnen nur Wind in Bodennähe in Frage kommt und die Flugzeit, d. h. die Zeitdauer, während der das Geschoss dem Wind ausgesetzt ist, sehr kurz ist (Sekunden). Steile Flugbahnen dauern oft Dutzende von Sekunden und finden größtenteils in den oberen Luftschichten statt. Bodennahe, turbulente Schichten werden so schnell durchflogen, dass sie kaum einen Einfluss auf die Flugbahn ausüben.

5.3 Am Geschoss wirkende Kräfte und Momente

5.3.1 Erdbedingte Beschleunigungen

5.3.1.1 Die Zentrifugalbeschleunigung

Das zur Beschreibung von Flugbahnen verwendete ballistische Koordinatensystem ist stets mit der Erde verbunden und wird dadurch zwangsläufig zu einem beschleunigten Bezugssystem. Die dadurch entstehenden Beschleunigungen müssen deshalb berücksichtigt werden. Die eine ist die Zentrifugalbeschleunigung, die der Zentripetalbeschleunigung (siehe Gl. 2.2:10) der Erde entgegengesetzt ist und mit $a_f = r \cdot \omega^2$ notiert werden kann. Sie steht stets senkrecht auf der Drehachse der Erde; der maßgebende Radius r entspricht jenem des Breitenkreises, in dessen Ebene die Bewegung startet (siehe Abb. 5.3). Bezeichnet β die geografische Breite, R_E den Erdradius und ω_E die Winkelgeschwindigkeit der Erde, so ergibt sich mit den Werten $R_E = 6'371'000$ m und $\omega_E = 7.292115 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$

$$(5.3:1) \quad a_{f\beta} = \omega_E^2 \cdot R_E \cdot \cos \beta \quad [\text{m/s}^2]$$

In der Praxis wird die Zentrifugalbeschleunigung in eine radiale und in eine tangential Komponente bezüglich der Nord-Süd-Richtung zerlegt. Der radiale Anteil wirkt der Erdbeschleunigung entgegen und wird in der Regel mit ihr zusammengeführt. Der tangential Anteil hingegen ist in das aktuelle ballistische Koordinatensystem zu transformieren und dessen Auswirkung auf das Geschoss bei der Rechnung zu berücksichtigen. Die beiden Komponenten lauten

$$(5.3:2a) \quad a_{fr} = a_{f\beta} \cdot \cos \beta = \omega_E^2 \cdot R_E \cdot \cos^2 \beta, \quad [\text{m/s}^2]$$

$$(5.3:2b) \quad a_{ft} = a_{f\beta} \cdot \sin \beta = \omega_E^2 \cdot R_E \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta. \quad [\text{m/s}^2]$$

Mit zunehmender Höhe über Grund nimmt die Zentrifugalbeschleunigung wegen dem größer werdenden Abstand zu

$$(5.3:3) \quad a_f(h) = \omega_E^2 \cdot (R_E + h) \cdot \cos \beta = a_{f\beta} \cdot \left(1 + \frac{h}{R_E}\right). \quad [\text{m/s}^2]$$

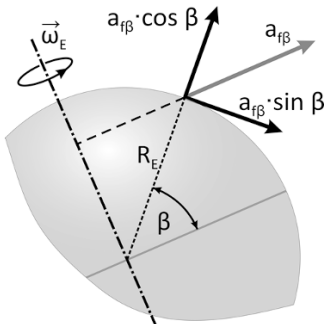


Abb. 5.3. Radiale und tangential Komponente der Zentrifugalbeschleunigung. β : geografische Breite.

Bei den üblichen ballistischen Schussweiten reicht es aus, wenn die geografische Breite des Abschussortes in der Rechnung Eingang findet. Deren Änderung entlang der Flugbahn kann ohne weiteres vernachlässigt werden. Genau so kann auf eine Berücksichtigung der Komponente der Flughöhe des Geschosses verzichtet werden, die eigentlich zum Breitenkreisradius addiert werden müsste. Die Ungenauigkeit der Zentrifugalkraft beträgt auch bei großen Gipfelhöhen weniger als ein halbes Promille und ist von gleicher Größenordnung wie die Ungenauigkeit, die durch die Wahl eines mittleren Erdradius entsteht.

5.3.1.2 Die Gravitationsbeschleunigung

Berechnungen auf der Erdoberfläche und in geringeren Höhen werden zumeist mit der Standard-Erdbeschleunigung durchgeführt, die in der ICAO-Atmosphäre mit $g_n = 9.80665 \text{ m/s}^2$ festgelegt worden ist. Die Erdbeschleunigung umfasst jedoch nicht nur die Massenanziehung (Gravitation), sondern auch den radialen Anteil der durch die Erddrehung verursachten Zentrifugalbeschleunigung. Die beiden Anteile verändern sich mit zunehmendem Abstand von der Erdoberfläche nach unterschiedlichen Gesetzen. Jenes der Zentrifugalbeschleunigung ist bereits in der Gl. (5.3:3) notiert worden, die auch für den radialen Anteil gültig ist.

Die *Gravitationsbeschleunigung* folgt dem Gravitationsgesetz. Wird die Erdmasse m_E , der Erdradius wiederum R_E und die Gravitationskonstante G genannt, so gilt auf der Erdoberfläche (Meereshöhe)

$$(5.3:4) \quad g_0 = G \cdot \frac{m_E}{R_E^2}, \quad [\text{m/s}^2]$$

und in der Höhe h

$$(5.3:5) \quad g(h) = G \cdot \frac{m_E}{(R_E + h)^2}. \quad [\text{m/s}^2]$$

Dividiert man Gl. (5.3:4) durch (5.3:3) erhält man

$$\frac{g(h)}{g_0} = \frac{R_E^2}{(R_E + h)^2} = \left(1 + \frac{h}{R_E}\right)^{-2}. \quad [-]$$

Der letzte Ausdruck wird in eine Reihe entwickelt und nur das lineare Glied berücksichtigt und nach $g(h)$ aufgelöst

$$(5.3:6) \quad g(h) = g_0 \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot h}{R_E}\right). \quad [\text{m/s}^2]$$

Weil die Gravitationsbeschleunigung vom Äquator zu den Polen abnimmt, ist g_0 keine Konstante, sondern abhängig von der geografischen Breite, wobei der folgende Ansatz angenommen werden kann

$$(5.3:7) \quad g_0(\beta) = 9.814 \cdot \left(1 + 1.834 \cdot 10^{-3} \cdot \sin^2 \beta - 1.981 \cdot 10^{-5} \cdot \sin^2 2 \cdot \beta \right). \quad [\text{m/s}^2]$$

Für den Bereich zwischen dem 46°- und dem 55°-Breitengrad lässt sich ohne eine merkbare Einschränkung der Genauigkeit der konstante Wert $g_0 = 9.825 \text{ m/s}^2$ anwenden.

Entsprechendes gilt auch für die Erdbeschleunigung

$$(5.3:8) \quad g_e(\beta) = 9.7805 \cdot \left(1 + 5.266 \cdot 10^{-3} \cdot \sin^2 \beta - 5.9 \cdot 10^{-6} \cdot \sin^2 2 \cdot \beta \right), \quad [\text{m/s}^2]$$

wobei im genannten Breitengradbereich der konstante Wert $g_{e0} = 9.8111 \text{ m/s}^2$ genügend gute Dienste tut.

Die Änderung der Erdbeschleunigung mit zunehmender Höhe h ergibt sich nun aus der Zusammensetzung der beiden Gleichungen (5.3:6) und (5.3:3), letztere für den radialen Anteil der Zentrifugalbeschleunigung umgeschrieben

$$g_e(h) = g_0 \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot h}{R_E} \right) - a_{fr0} \cdot \left(1 + \frac{h}{R_E} \right). \quad [\text{m/s}^2]$$

Auf der Erdoberfläche gilt aber $g_0 = g_{e0} + a_{fr0}$

$$g_e(h) = (g_{e0} + a_{fr0}) \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot h}{R_E} \right) - a_{fr0} \cdot \left(1 + \frac{h}{R_E} \right), \quad [\text{m/s}^2]$$

woraus sich durch Vereinfachung die folgende Formel ergibt

$$(5.3:9) \quad g_e(h) = g_{e0} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot h}{R_E} \right) - a_{fr0} \cdot \frac{3 \cdot h}{R_E}. \quad [\text{m/s}^2]$$

Die Größenordnung des Korrekturgliedes auf der rechten Seite dieser Gleichung ist sehr klein; sie spielt erst in großen Höhen ($> 10'000 \text{ m}$) eine Rolle.

5.3.1.3 Die Coriolisbeschleunigung

Im Abschn. 2.2.7.2 wurde die Coriolisbeschleunigung eingeführt, der ein Körper unterworfen ist, wenn er sich auf einer rotierenden Scheibe vom Zentrum aus in radialer Richtung nach außen bewegt. Die nur im rotierenden System wirkende Beschleunigung steht auf dem Vektor der Winkelgeschwindigkeit und auf dem Geschwindigkeitsvektor des Körpers senkrecht, wirkt also in diesem zweidimensionalen Fall in tangentialer Richtung.

Zur Bestimmung der auf ein fliegendes Geschoss einwirkenden Coriolisbeschleunigung reicht Formel (2.2:53) nicht aus, weil sich dessen Geschwindigkeitsvektor längs der Flugbahn ständig ändert. Es ist auf die allgemeine Form der Bewegungsgleichung in einem rotierenden Koordinatensystem zurückzugreifen, deren Coriolisanteil lautet (W. GREINER, 1989)

$$(5.3:10) \quad \vec{a}_c = 2 \cdot (\vec{v} \times \vec{\omega}). \quad [\text{m/s}^2]$$

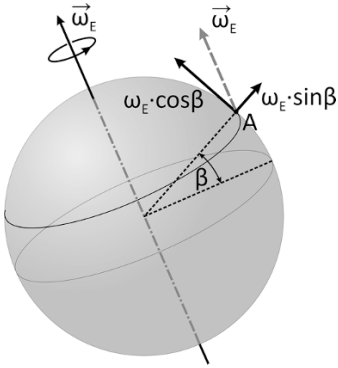
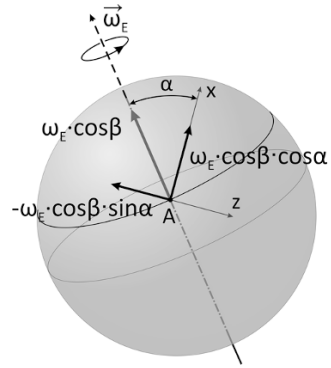


Abb. 5.4. (links). Zerlegung der Winkelgeschwindigkeit in eine tangentielle und eine normale Richtung.

Abb. 5.5. (rechts). Zerlegung der tangentialen Komponente in die Richtungen des ballistischen Koordinatensystems.



Darin bedeuten \vec{v} die Geschwindigkeit und $\vec{\omega}$ die Winkelgeschwindigkeit der Erde.

Die Coriolisbeschleunigung wirkt somit senkrecht zur Ebene, die durch die Erdachse und die Bewegungsrichtung des Körpers gebildet wird. Entlang der Flugbahn wechselt sie somit laufend die Richtung. Es gilt somit, ihre Vektorkomponenten in einem ballistischen Koordinatensystem zu bestimmen, dessen Ausgangspunkt A die geografische Breite β hat und dessen Schussrichtung (x-Achse) mit der Nordrichtung den Winkel α einschließt (α heißt *Azimut* und bedeutet den Drehwinkel ab Nord im Uhrzeigersinn).

Mit Blick auf Abb. 5.4 lässt sich die Winkelgeschwindigkeit im Ursprung A des ballistischen Koordinatensystems in eine bezüglich der Erdoberfläche tangentielle und in eine normale Komponente zerlegen. Der tangentielle Anteil wird seinerseits auf die x- und die z-Richtung des ballistischen Koordinatensystems projiziert, wie dies in Abb. 5.5 dargestellt ist. Es resultiert bezüglich dieses Systems

$$(5.3:11) \quad \vec{\omega}_E = \omega_E \cdot (\cos \beta \cdot \cos \alpha, \sin \beta, -\cos \beta \cdot \sin \alpha). \quad [1/s]$$

Der Vektor der Geschwindigkeit lautet im gleichen System

$$(5.3:12) \quad \vec{v} = (v_x, v_y, v_z). \quad [m/s]$$

Das Vektorprodukt der beiden gemäß Gl. (5.3:10) ergibt den Vektor der Coriolisbeschleunigung im ballistischen Koordinatensystem

$$(5.3:13) \quad \vec{a}_c = 2 \cdot \omega_E \cdot \begin{pmatrix} -v_y \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha - v_z \cdot \sin \beta \\ v_z \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha + v_x \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha \\ v_x \cdot \sin \beta - v_y \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad [m/s^2]$$

Dieser Vektor lässt sich in einen richtungsunabhängigen und in einen richtungsabhängigen Teil aufspalten

$$(5.3:14) \quad \vec{a}_c = \vec{a}_{cu} + \vec{a}_{ca}, \quad [m/s^2]$$

$$\text{mit} \quad \vec{a}_{cu} = 2 \cdot \omega_E \cdot \sin \beta \cdot (-v_z, 0, v_x), \quad [m/s^2]$$

$$\text{und} \quad \vec{a}_{c\alpha} = 2 \cdot \omega_E \cdot \cos \beta \cdot \begin{pmatrix} -v_y \cdot \sin \alpha \\ v_z \cdot \cos \alpha + v_x \cdot \sin \alpha \\ -v_y \cdot \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad [\text{m/s}^2]$$

In dieser Form (5.3:14) kann die Coriolisbeschleunigung problemlos in eine Flugbahnrechnung eingeführt werden.

Es stellt sich nun die Frage, wie groß der Einfluss dieser durch die Erddrehung bedingten Beschleunigung auf eine Flugbahn überhaupt sein kann und in welcher Richtung er sich bemerkbar macht. Hierzu wird vereinfachend angenommen, die z-Komponente der Geschwindigkeit sei Null. Damit kann die Bahngeschwindigkeit des Geschosses in Abhängigkeit des Winkels zwischen der Bahntangenten und der Horizontalen (*Bahnwinkel* θ) ausgedrückt werden

$$(5.3:15) \quad \vec{v} = v \cdot (\cos \theta, \sin \theta, 0). \quad [\text{m/s}]$$

Zusammen mit Gl. (5.3:11) eingesetzt in Gl. (5.3:10) ergibt

$$(5.3:16) \quad \vec{a}_c = 2 \cdot v \cdot \omega_E \cdot \begin{pmatrix} -\sin \theta \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha \\ \cos \theta \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha \\ \cos \theta \cdot \sin \beta - \sin \theta \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad [\text{m/s}^2]$$

Betrag und Richtung der Coriolisbeschleunigung können damit getrennt betrachtet werden. In der Abb. 5.6 sind die Richtungsverläufe (Einheitsrichtungsvektoren) für drei Schussazimute dargestellt (gerechnet für 47° nördlicher Breite). Bei einem

Tabelle 5.3. Flugbahnabweichungen infolge der Coriolisbeschleunigung

	Kaliber [mm]	Distanz [m]	Flugzeit [s]	Azimet [°]	x [mm]	y [mm]	z [mm]
Gewehrgeschoss	7.62	300	0.42	0	0.0	0.0	7.0
				45	0.0	4.6	7.0
				90	-0.0	6.6	7.0
Mittelkaliber- geschoss	20	1000	1.16	0	0.0	0.0	67.0
				45	-0.1	44.3	67.0
				90	-0.1	62.6	67.1
					[m]	[m]	[m]
Mörsergeschoss	81	2700	29.5	0	0.0	0.0	2.6
				45	-1.4	3.1	3.2
				90	-2.0	4.3	4.6
Artilleriegeschoss	155	30000	77.0	0	0	0	102
				45	-26	91	113
				90	-36	129	138
				135	-26	91	164
				180	0	0	175

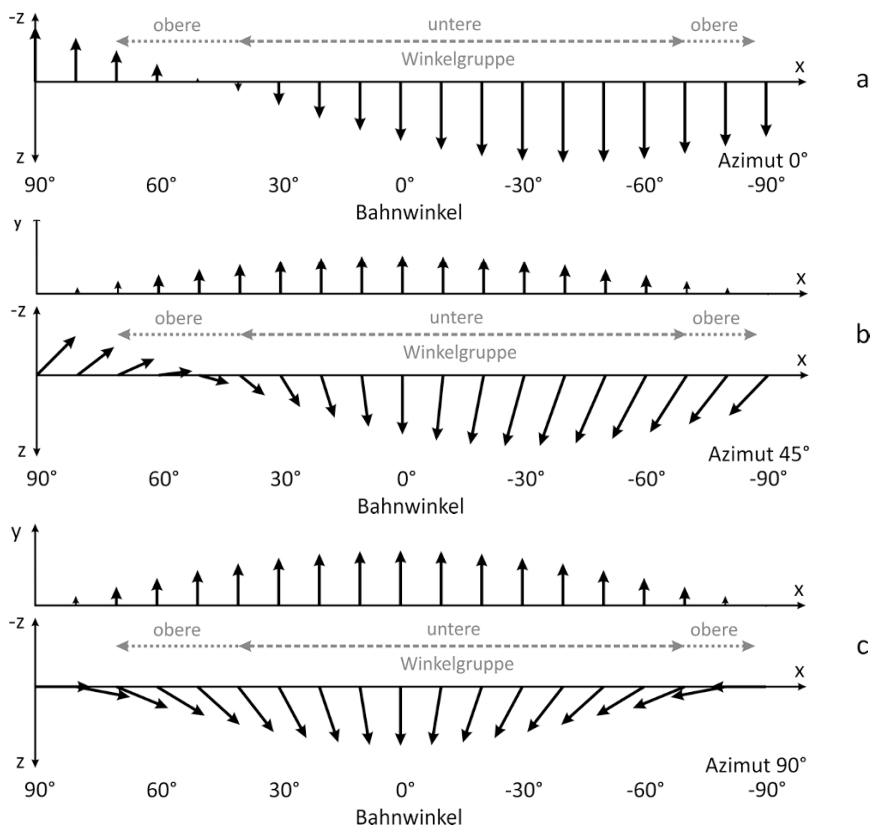


Abb. 5.6. Richtung der Coriolisbeschleunigung im ballistischen Koordinatensystem in Abhängigkeit der Schussrichtung (Azimut) und des Bahnwinkels (Winkel der Bahntangente).
a. Richtung Nord, **b.** Richtung Nordost, **c.** Richtung Ost. **a** besitzt nur die z -Komponente (x und y sind 0) **b** und **c** sind im Grund- und Aufriss gezeichnet. Flugbahnen verlaufen von links nach rechts (Abschusswinkel positiv, Fallwinkel negativ), flache Flugbahnen liegen alle um 0° Bahnwinkel.

Schuss nach Norden entsteht nur eine seitliche Beschleunigung; liegt der Abgangswinkel oberhalb des Winkels der geografischen Breite wirkt sie nach links, unterhalb dagegen nach rechts. Bei allen andern Schussrichtungen stellen sich ständig ändernde, räumlich gerichtete Beschleunigungsvektoren ein. Entgegengesetzte Schussrichtungen erfahren einen Vorzeichenwechsel und entsprechend auch entgegengesetzte Auswirkungen oder eine Spiegelung der Wirkungsrichtungen.

In der Tabelle 5.3 sind die durch die Coriolisbeschleunigung bedingten Abweichungen einiger typischer Geschosse zusammengestellt. Es leuchtet ein, dass die Flugzeit des Geschosses einen starken Einfluss auf die Größenordnung dieser Werte hat.

5.3.2 Das Geschoss als Massenpunkt

5.3.2.1 Der Luftwiderstand

Die Bestimmung der Flugbahn eines Geschosses erfordert zunächst (nebst den Anfangsbedingungen der Bewegung) die Kenntnis der auf das Geschoss wirkenden Kräfte und der dadurch verursachten Beschleunigungen. Die naheliegendste Kraft entsteht durch die aus dem Bernoulli'schen Gesetz folgende Druckverteilung an der Oberfläche des Geschosses. Sie ergibt sich als Oberflächenintegral des Produktes aus Druck p und Flächenelement $d\vec{A}$ und heißt *Luftwiderstand*

$$(5.3:17) \quad \vec{F} = \int_0 \vec{p} \cdot d\vec{A} . \quad [N]$$

Nach Abschn. 2.3.4.3 wird der durch eine Strömung erzeugte Druck grundsätzlich auf den Staudruck der großen ebenen Platte bezogen. Weil zudem die Oberflächen realer Körper sehr unterschiedlich sein können, ist es sinnvoll, dem Bezugsdruck auch eine feste *Bezugsfläche* A_0 zuzuordnen. Zusammen mit dem Staudruck ergibt sich damit eine feste Bezugskraft, *Staudruckwiderstand* F_{SD} genannt

$$(5.3:18) \quad F_{SD} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot A_0 . \quad [N]$$

Der tatsächliche Luftwiderstand eines sich in der Luft bewegenden Objektes wird stets auf diesen Staudruckwiderstand bezogen. Die Verhältniszahl zwischen wirklichem Widerstand F_w und Staudruckwiderstand heißt *Widerstandsbeiwert* c_w .

$$(5.3:19) \quad c_w = \frac{F_w}{F_{SD}} , \quad [-]$$

$$(5.3:20) \quad F_w = c_w \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot A_0 . \quad [N]$$

ρ bedeutet die Luftdichte, v_0 die Geschwindigkeit und A_0 die Bezugsfläche.

In der Gl. (5.3:20) sind Luftwiderstand, Luftdichte und Geschwindigkeit feste physikalische Größen. Der Widerstandsbeiwert hängt somit von der Wahl der Bezugsfläche ab. Große Bezugsflächen ergeben kleine c_w -Werte und umgekehrt. Liegt ein c_w -Verlauf eines Körpers vor, ist deshalb stets nachzuprüfen, auf welche Fläche A_0 sich dieser bezieht. Während in der Ballistik in der Regel die Querschnittsfläche des Nominalkalibers gewählt wird (diese entspricht zumeist nicht der Querschnittsfläche des Geschosses), setzen Aerodynamiker oft die Querschnittsfläche des größ-

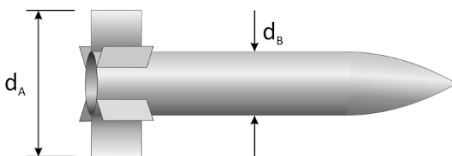


Abb. 5.7. Bezugsflächen bei der Bestimmung der c_w -Funktionen.

- Fläche des größten Durchmessers d_A wird meist in der Aerodynamik verwendet,
- Querschnittsfläche des Nominalkalibers d_B wird in der Ballistik angewendet.

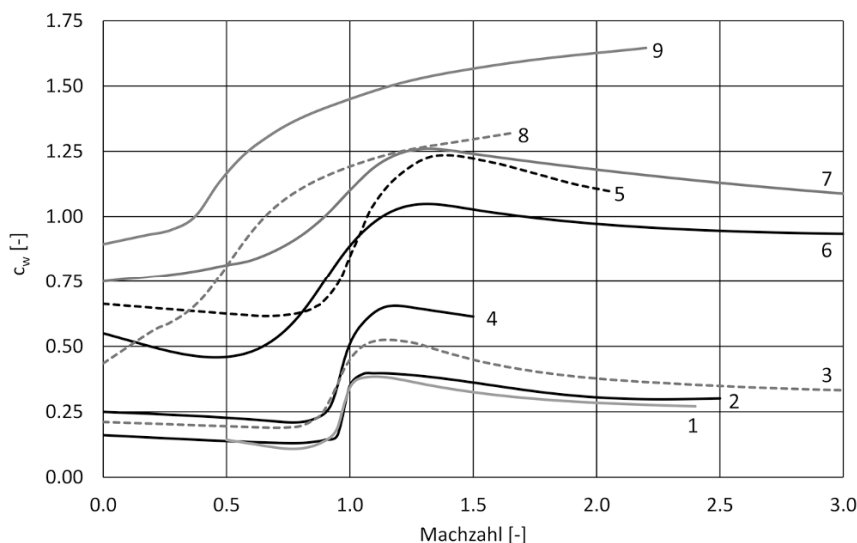


Abb. 5.8. Beispiele von Luftwiderstandsbeiwerten c_w einiger Geschosse. 1: 155 mm StG, 2: Gewehrgeschoss Kaliber 7.5 mm, 3: Gewehrgeschoss Kaliber 5.56 × 45 (SS92), 4: Pistolen-geschoss Kaliber 9 mm Luger, 5: Flintenlaufgeschoss Kaliber 12/70, 6: Kugel, 7: Würfel, 8: Zylinder Durchmesser zu Länge (d/L) = 1:2.6, 9: Zylinder d/L = 1:4.

ten Durchmessers ein. Bei einer Rakete mit Leitwerk kann dies bei gleichem Luftwiderstand zu ganz unterschiedlichen c_w -Werten führen (siehe Abb. 5.7).

Die Druckverteilung am umströmten Körper und die betroffene Fläche werden stark durch die Strömungsgeschwindigkeit und die Geschossform bestimmt. Diese Abhängigkeiten übertragen sich demzufolge auch auf den Widerstandsbeiwert, der dadurch der betreffenden Körperform zuzuordnen ist und mit der Geschwindigkeit der Anströmung variiert. Im Abschn. 2.3.6.5 wurde zudem gezeigt, dass bei einer stationären, reibungsfreien Strömung (wie sie auch bei der Umströmung von Geschossen angenommen werden kann) nicht die Geschwindigkeit, sondern die Machzahl die Art der Strömung charakterisiert. c_w -Verläufe sind daher Funktionen der Machzahl und nicht der Geschwindigkeit. Einige typische Beispiele sind in der Abb. 5.8 dargestellt.

5.3.2.2 Das Gewicht

Die nach dem Luftwiderstand zweite elementare Kraft, die an einem frei fliegenden Geschoss angreift, ist sein Gewicht

$$(5.3:21) \quad F_G = m_p \cdot g \quad [N]$$

Die übliche Zerlegung des Gewichtes in eine tangentielle und eine dazu normale Komponente zeigt, dass im aufsteigenden Ast der Flugbahn der tangentielle Anteil den Luftwiderstand unterstützt und das Geschoss verzögern hilft, im absteigenden

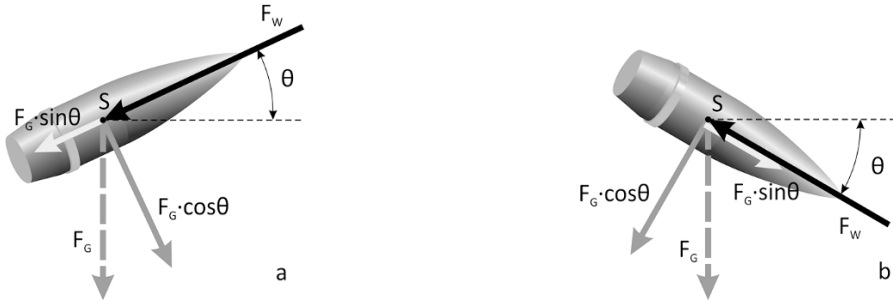


Abb. 5.9. Das Geschossgewicht F_G und seine Komponenten. **a.** im aufsteigenden Ast, **b.** im absteigenden Ast. θ bezeichnet den Bahnwinkel (Winkel der Bahntangenten zur Horizontalen) und F_W den Luftwiderstand.

Ast dagegen der Bremsung durch die Luft entgegenwirkt (siehe Abb. 5.9 a und b). Die normale Komponente hingegen erzeugt als Zentralkraft eine fortwährende Richtungsänderung und ist damit für die Krümmung der Flugbahn verantwortlich.

Bei größeren Schussdistanzen steht wegen der Erdkrümmung der Erdbeschleunigungsvektor im ballistischen Koordinatensystem zunehmend nicht mehr senkrecht auf der x-z-Ebene. Das Gewicht erhält dadurch eine Komponente F_{GR} entgegen der Schussrichtung

$$(5.3:22) \quad F_{GR}(x) = m_p \cdot g \cdot \sin\left(\frac{x}{R_E}\right), \quad [N]$$

wo x die Schussdistanz und R_E den Erdradius bedeutet.

5.3.3 Das Geschoss als starrer Körper

5.3.3.1 Bewegungen des Geschosses

Die meisten mit Rohrwaffen beschleunigten Geschosse werden zur Stabilisierung auf der Flugbahn durch die schraubenförmigen Züge im Rohr (Drall) in eine sehr schnelle Rotation um ihre Längsachse versetzt. Sie werden dadurch zu einem schweren, symmetrischen Kreisel. Die Analogie zwischen einem gebundenen schweren Kreisel und einem frei fliegenden Geschoss ist in Abb. 5.10 dargestellt. Beim Ersteren ist der Drehpunkt O fest (Spitze des Kreisels), und es greift eine Kraft (sein Gewicht) im Schwerpunkt S an, die mit ihrem Abstand vom Drehpunkt ein Drehmoment auf den Kreisel ausübt. Das freie Geschoss hingegen dreht sich um den Schwerpunkt S, und es wirkt eine Luftkraft in einem Punkt L, der zwischen Geschossspitze und Schwerpunkt liegt (*Angriffspunkt der Luftkraft*). Mit dem Abstand zwischen L und S, dem *Hebelarm der Luftkraft*, kommt ebenfalls ein Drehmoment zustande.

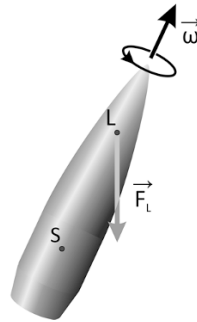
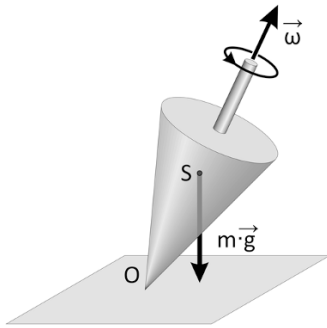


Abb. 5.10. Analogie zwischen dem gebundenen schweren, symmetrischen Kreisel und dem frei fliegenden Geschoss.
O: Drehpunkt des Kreisels,
L: Angriffspunkt der Luftkraft.
Näheres siehe Text.

Als schwerer, symmetrischer Kreisel führt das drallstabilisierte Geschoss die in Abschn. 2.2.8.4 beschriebene Präzessionsbewegung aus. Seine Längsachse fällt somit nicht mit der Bewegungsrichtung zusammen, sondern umkreist die Bahntangente entlang einer kegelmantelähnlichen Fläche, deren Spitze sich im Schwerpunkt befindet. Bewegungsrichtung und Geschossachse schließen daher einen gewissen Winkel ein, der *Anstellwinkel* genannt wird. Die von den Schenkeln des Anstellwinkels aufgespannte Ebene heißt *Widerstandsebene*.

Ein Geschoss ist zumeist auch der im Abschn. 2.2.8.3 beschriebenen Nutation unterworfen. Diese verursacht eine zusätzliche Bewegung der Geschossachse, welche als Pendelung um eine sich ständig ändernde Querachse interpretiert werden kann und die der Präzession überlagert ist.

Eine weitere Drehung um eine horizontale Querachse vollführt das Geschoss, indem es mit seiner Achse im Mittel der Flugbahntangenten folgt (siehe dazu die Abb. 2.2 im Kap. 2). Der gesamte Drehwinkel ergibt sich aus der Differenz des Bahnwinkels beim Abschuss (Elevation) und dem (negativen) Bahnwinkel im Auftreffpunkt. Außerdem wird auch die zur Stabilisierung erforderliche schnelle Rotation um die Längsachse bei den auf das Geschoss wirkenden Kräften eine Rolle spielen.

5.3.3.2 Kräfte und Momente infolge nicht-axialer Anströmung

Wegen des ständig wechselnden Anstellwinkels fällt die Wirkungslinie der auf das Geschoss wirkenden, resultierenden Luftkraft F_L weder mit der Geschossachse noch mit der Bewegungsrichtung zusammen. Sie lässt sich auf zwei Arten in sinnvolle Komponenten zerlegen:

- in Bewegungsrichtung und senkrecht dazu (gemäß Abb. 5.9 a),
- in Richtung der Geschossachse und senkrecht dazu (gemäß Abb. 5.9 b).

Je nach gewähltem Bezugssystem wird man der einen oder der andern Zerlegung den Vorzug geben. Die Kraft in Bewegungsrichtung heißt *Widerstand* F_W (wie bereits im Abschn. 2.3.4.3), jene senkrecht dazu wird *Auftrieb* F_A genannt.

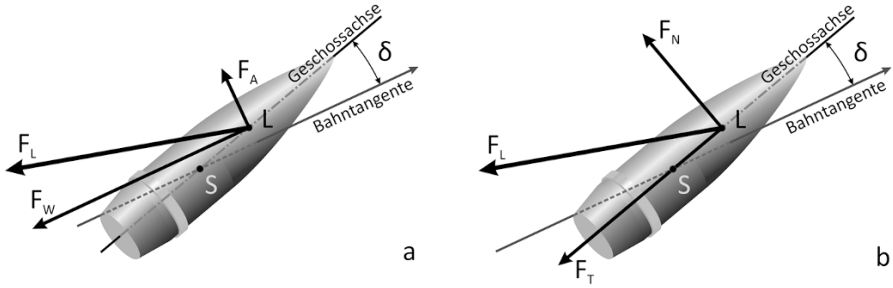


Abb. 5.11. Zerlegung der resultierenden Luftkraft in Komponenten. **a.** In Richtung der Bahntangente und senkrecht dazu ergibt den Widerstand und den Auftrieb. **b.** In Richtung der Geschossachse und senkrecht dazu ergibt die Tangential- und die Normalkraft, die auch das Drehmoment erzeugt.

Der Auftrieb liegt stets in der Widerstandsebene, kann also in beliebiger Richtung wirken, so auch seitlich oder nach unten.

Entsprechend ergeben sich bei der zweiten Komponentenzerlegung die *Tangentialkraft* F_T und die *Normalkraft* F_N . Weil der Angriffspunkt der resultierenden Luftkraft zwischen Schwerpunkt und Geschossspitze liegt, erzeugt die Normalkraft zudem ein Drehmoment um den Schwerpunkt. Alle diese Kräfte werden – der Darstellung des Widerstandes (Gl. 5.3:20) entsprechend – ebenfalls mit einer Bezugsfläche und einem Beiwert auf den Staudruck bezogen. Es gilt somit

$$(5.3:23) \quad F_A = c_a \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2 \cdot A_0, \quad [N]$$

$$(5.3:24) \quad F_T = c_t \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2 \cdot A_0, \quad [N]$$

$$(5.3:25) \quad F_N = c_n \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2 \cdot A_0, \quad [N]$$

Beim Drehmoment (meist als *Kippmoment* bezeichnet) kommt noch eine Bezugsstrecke hinzu, für die das Nominalkaliber d gewählt wird.

$$(5.3:26) \quad M_M = c_m \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2 \cdot A_0 \cdot d. \quad [N \cdot m]$$

Wird der Hebelarm der Luftkraft mit e_A bezeichnet, so folgt aus Gl. (5.3:25) und (5.3:26)

$$(5.3:27) \quad e_A = \frac{M_M}{F_N} = \frac{c_m}{c_n} \cdot d. \quad [m]$$

Die Luftkraft F_L ergibt sich nach Gl. (5.3:17) aus dem Oberflächenintegral der Druckverteilung am Geschoss. Sie ist somit von der Machzahl der Anströmung und auch vom Anstellwinkel abhängig. Dies überträgt sich auf alle erwähnten Komponenten und wegen deren Bezug auf den Staudruck auf die Beiwerte. Sind die Beiwerte bekannt, gilt dies auch für die Kräfte und Momente selbst.

5.3.3.3 Kräfte und Momente infolge Drehung um eine Querachse

Wirkt auf einen umströmten Körper eine Kraft, so ist die erzeugte Beschleunigung nicht so groß, wie sie nach dem Newton'schen Gesetz sein sollte

$$(5.3:28) \quad m \cdot a = F - m^* \cdot a \quad [N]$$

m^* ist der Masse der vom Körper verdrängten Flüssigkeitsmenge proportional. Beschleunigungen in Strömungen induzieren also Kraftwirkungen. Dies kommt bei der Pendelung um eine (nicht stationäre) Querachse zur Geltung. Es sind dabei drei Ursachen für Kraftwirkungen zu erkennen: die Winkelgeschwindigkeit der Pendelung ω_p und deren Änderung, sowie die Änderung des Anstellwinkels δ . Die durch die beiden Winkelgeschwindigkeiten ω_p und $\dot{\delta}$ erzeugten Kraftanteile bewirken beide eine Dämpfung der Pendelbewegung. Sie werden daher oft zusammengefasst und *Pendeldämpfungskraft* F_E genannt

$$(5.3:29) \quad F_E = c_e \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2 \cdot A_0 \cdot \frac{\omega_p \cdot d}{v} \quad [N]$$

Deren Angriffspunkt fällt in der Regel nicht mit dem Schwerpunkt zusammen. Somit erzeugt sie auch ein Moment, das *Pendeldämpfungsmoment* M_H

$$(5.3:30) \quad M_H = c_h \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2 \cdot A_0 \cdot d \cdot \frac{\omega_p \cdot d}{v} \quad [N \cdot m]$$

In Abschn. 5.3.3.1 wurde zudem noch die Drehung um eine Querachse erwähnt, die sich ergibt, weil das Geschoss mit seiner Achse der Bahntangente folgt. Dies führt zu einer (leichten) Queranströmung im vorderen Geschossteil (zwischen Spitze und Schwerpunkt) und zu einer entgegengesetzten Anströmung im hinteren Teil. Die dabei entstehende Kraft und deren Moment werden üblicherweise in den Auftrieb und das Drehmoment integriert.

5.3.3.4 Kräfte und Momente infolge Drehung um die Längsachse

Die aus der axialen Anströmung resultierende Reibungskraft an der Geschoss Oberfläche trägt einen Teil an den Widerstand, aus Symmetriegründen jedoch nichts an die Querkraft bei. Hingegen erzeugt sie ein Moment, welches der Drehung um die Längsachse entgegenwirkt und somit die Winkelgeschwindigkeit verringert. Es wird *Rollbremsmoment* M_I genannt

$$(5.3:31) \quad M_I = c_i \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2 \cdot A_0 \cdot d \cdot \frac{\omega \cdot d}{v} \quad [N \cdot m]$$

Da das Geschoss praktisch immer mit einem gewissen Anstellwinkel fliegt, ergibt sich eine ständige Queranströmung, die sich der in Abschn. 5.3.3.3 erwähnten überlagert. Durch die (schnelle) Drehung um die Längsachse ergibt sich infolge des Magnuseffekts eine auf das Geschoss wirkende Kraft F_K (*Magnuskraft*). Ihr Angriffspunkt liegt bei einem normal gebauten drallstabilisierten Geschoss hinter dem

Schwerpunkt. Dadurch entsteht auch ein Drehmoment, das als *Magnusmoment* bezeichnet wird

$$(5.3:32) \quad F_K = c_k \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2 \cdot A_0 \cdot \frac{\omega \cdot d}{v} . \quad [N]$$

$$(5.3:33) \quad M_J = c_j \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2 \cdot A_0 \cdot d \cdot \frac{\omega \cdot d}{v} . \quad [N \cdot m]$$

Der Angriffspunkt der Magnuskraft ist stark von der Oberflächenbeschaffenheit des Geschosses (Rauheit, Führungsbänder usw.) abhängig. Bei ungeschickten Geschossauslegungen kann sich dieser Angriffspunkt nach vorne über den Schwerpunkt hinaus verschieben. In diesem Falle wirkt das Magnusmoment destabilisierend.

Die Pendelung um eine Querachse verursacht ebenfalls eine Queranströmung, die wegen der Drehung um die Längsachse auch zu einer auf dem Magnuseffekt beruhenden Kraft führt. Sie heißt *Pendelmagnuskraft* F_{KP} . Entsprechend existiert auch das *Pendelmagnusmoment* M_{JP} .

$$(5.3:34) \quad F_{KP} = c_{kp} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2 \cdot A_0 \cdot \frac{\omega \cdot d}{v} \cdot \frac{\dot{\delta} \cdot d}{v} . \quad [N]$$

$$(5.3:35) \quad M_{JP} = c_{jp} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2 \cdot A_0 \cdot d \cdot \frac{\omega \cdot d}{v} \cdot \frac{\dot{\delta} \cdot d}{v} . \quad [N \cdot m]$$

Einige Hinweise zur Herkunft dieser Beziehungen finden sich im Abschn. 5.5.1, „Berechnung der vollständigen Geschossbewegung“. Ausführliche Herleitungen auf Grund der physikalischen Zusammenhänge können in H. MOLITZ, R. STROBEL (1963) nachgeschlagen werden.

5.3.3.5 Die Ursache der seitlichen Abweichung

Die gleichzeitige Überlagerung von Kreiselbewegung und Drehung um die horizontale Querachse bewirkt, dass bei Rechtsdrall die Geschossspitze im Mittel stets ein wenig rechts der Flugbahntangenten liegt. Dadurch erfährt das Geschoss eine ständige (leichte) Anströmung von links, die für eine Rechtsabweichung verantwortlich ist. Bei Flugbahnen unterhalb ca. 60° Elevation (und insbesondere bei flachen Flugbahnen) ist die Wirkung dieser Queranströmung größer als die der Magnuskraft. Rechtsdrehende Geschosse weichen deshalb nach rechts und (in analoger Weise) linksdrehende nach links ab. Oberhalb 60° beginnt die Magnuskraft zu überwiegen und der Einschlagpunkt wandert sukzessive nach links (bzw. bei Linksdrall nach rechts).

5.3.4 Zusammenfassende Liste der Kräfte und Momente

Neben Gewicht und Corioliskraft wirken auf ein Starrkörper-Geschoss die in der Tabelle 5.4 zusammengestellten Kräfte und Momente, die alle durch ihre Beiwerte charakterisiert sind.

Tabelle 5.4. Zusammenstellung der auf ein Geschoss wirkenden Kräfte und Momente und der zugehörigen Beiwerte

Kräfte			Momente		
F_W	Widerstand	c_w	M_I	Rollbremsmoment	c_i
F_A	Auftriebskraft	c_a	M_M	Kippmoment	c_m
F_K	Magnuskraft	c_k	M_J	Magnusmoment	c_j
F_E	Pendeldämpfungskraft	c_e	M_H	Pendeldämpfungsmoment	c_h
F_{KP}	Pendelmagnuskraft	c_{kp}	M_{JP}	Pendelmagnusmoment	c_{jp}

5.4 Flugbahnrechnungen mit dem Massenpunktsmodell

5.4.1 Bewegungsgleichungen

5.4.1.1 Die physikalische Herleitung

Wird zunächst von der Coriolisbeschleunigung und möglichen seitlichen Anteilen der Erdbeschleunigung abgesehen, ist die Berechnung einer Flugbahn ein zweidimensionales Problem. Das System der Bewegungsgleichungen lautet somit

$$(5.4:1) \quad \ddot{\vec{r}}(t) = -\frac{F_W}{m_p} \cdot \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{v} + \vec{g} . \quad [\text{m/s}^2]$$

Mit der obigen Annahme ergeben sich die folgenden Komponenten

$$(5.4:2) \quad \left| \begin{array}{l} \ddot{x}(t) = -\frac{F_W}{m_p} \cdot \frac{\dot{x}(t)}{v} , \\ \ddot{y}(t) = -\frac{F_W}{m_p} \cdot \frac{\dot{y}(t)}{v} - g . \end{array} \right. \quad [\text{m/s}^2]$$

Der Betrag des Luftwiderstandes F_W ist gemäß Gl. (2.3:25a) eine Funktion der Geschwindigkeit v , der Luftdichte $\rho(y)$ und des Luftwiderstandsbeiwertes c_w , der seinerseits (wegen dem Zusammenhang mit der Machzahl) von der Temperatur und somit auch von der Flughöhe y abhängig ist. Es gilt also

$$(5.4:3) \quad F_W = F_W(v, y, c_w) . \quad [\text{m/s}^2]$$

Mit Blick auf Abb. 5.9 (S. 169) lässt sich in tangentialer Richtung eine Kräftegleichung anschreiben

$$m \cdot \dot{v} = -F_W - F_G \cdot \sin \theta = -F_W - m \cdot g \cdot \sin \theta , \quad [\text{N}]$$

mit dem Bahnwinkel θ . Division durch die Masse führt zu einer Gleichung für den zeitlichen Verlauf des Geschwindigkeitsbetrages

$$(5.4:4) \quad \dot{v} = -\frac{F_w}{m} - g \cdot \sin \theta . \quad [\text{m/s}^2]$$

Die Gleichung für den Bahnwinkel folgt durch Elimination des Luftwiderstandes aus den Gleichungen (5.4:2). Hierzu wird die erste Gleichung mit \dot{y} und die zweite mit \dot{x} multipliziert und die erste von der zweiten subtrahiert. Es resultiert

$$\ddot{y} \cdot \dot{x} - \dot{y} \cdot \ddot{x} = -g \cdot \dot{x} , \quad [\text{m}^2/\text{s}^3]$$

und nach Division durch \dot{x}^2

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right) = -\frac{g}{\dot{x}} . \quad [1/\text{s}]$$

Wegen $\dot{y} / \dot{x} = \tan \theta$, folgt weiter

$$\frac{d}{dt}(\tan \theta) = \frac{1}{\cos^2 \theta} \cdot \dot{\theta} = -\frac{g}{v \cdot \cos \theta} , \quad [1/\text{s}]$$

$$(5.4:5) \quad \dot{\theta} = -\frac{g}{v} \cdot \cos \theta , \quad [1/\text{s}]$$

Zusammen mit Gl. (5.4:4) bildet diese Gleichung ein System, welches den Geschwindigkeitsvektor (Betrag und Richtung) in Funktion der Zeit beschreibt.

5.4.1.2 Die bahngeometrische Herleitung

Die Bewegungsgleichungen für den Massenpunkt lassen sich auch aus differenzialgeometrischen Eigenschaften der Flugbahn herleiten.

Es sei $\vec{r}(t)$ eine beliebige Bahn und

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) . \quad [\text{m/s}]$$

\vec{v} ist stets eine Tangente an die Bahnkurve. Mit dem Tangentenrichtungsvektor \vec{e}_t und der Bogenlänge s lässt sich also schreiben

$$(5.4:6) \quad \vec{v}(t) = v(t) \cdot \vec{e}_t[s(t)] . \quad [\text{m/s}]$$

Ableiten nach der Zeit ergibt

$$(5.4:7) \quad \vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \frac{d}{dt}[v \cdot \vec{e}_t(s)] = \dot{v} \cdot \vec{e}_t + v^2 \cdot \frac{d\vec{t}}{ds} \quad [\text{m/s}^2]$$

Die Frenet'schen Formeln der Differenzialgeometrie liefern für den Tangentenvektor die Beziehung

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{1}{R} \cdot \vec{e}_n , \quad [\text{m/s}^2]$$

wo R den Krümmungsradius der Bahnkurve an der Stelle $s(t)$ und \vec{e}_n den Normalenvektor bezeichnet. Die Beschleunigung (5.4:7) wird somit in einen tangentialen und einen normalen Anteil aufgespalten

$$(5.4:8) \quad \vec{a}(t) = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \dot{v} \cdot \vec{e}_t + \frac{v^2}{R} \cdot \vec{e}_n . \quad [\text{m/s}^2]$$

Die tangentielle und die normale Beschleunigungskomponenten ergeben sich mit Blick auf die Abb. 5.9, S. 169 zu

$$(5.4:9a) \quad \vec{a}_t = -\left(\frac{F_w}{m} + g \cdot \sin \theta\right) \cdot \vec{e}_t , \quad [\text{m/s}^2]$$

$$(5.4:9b) \quad \vec{a}_n = -g \cdot \cos \theta \cdot \vec{e}_n . \quad [\text{m/s}^2]$$

Koeffizientenvergleich mit Gl. (5.4:8) führt zusammen mit der Beziehung

$$ds = R \cdot d\theta = v \cdot dt , \quad [\text{m}]$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{v} \cdot \frac{d\theta}{dt} , \quad [1/\text{m}]$$

zum selben Gleichungssystem wie es unter Abschn. 5.4.1.1 hergeleitet worden ist; diesmal wurde jedoch von der Bahngeometrie ausgegangen. Für die Ortsbestimmung sind noch die beiden Gleichungen für die Ortskoordinaten anzufügen

$$(5.4:10) \quad \begin{cases} \dot{v} = -\frac{F_w}{m} - g \cdot \sin \theta , & [\text{m/s}^2] \\ \dot{\theta} = -\frac{g}{v} \cdot \cos \theta , & [1/\text{s}] \\ \dot{x} = v \cdot \cos \theta , & [\text{m/s}] \\ \dot{y} = v \cdot \sin \theta . & [\text{m/s}] \end{cases}$$

Dieses System wird oft auch als *bahngeometrisches System* bezeichnet, weil es durch die Angabe des zeitlichen Verlaufs des Geschwindigkeitsvektors (Betrag und Richtung) direkt die Flugbahn darstellt. Es gehörte lange Zeit zu den gebräuchlichsten Systemen.

5.4.1.3 Die Hauptgleichung der Außenballistik

Mit der Setzung

$$(5.4:11) \quad \frac{d}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d}{d\theta} = -\frac{g \cdot \cos \theta}{v} \cdot \frac{d}{d\theta} , \quad [1/\text{s}]$$

kann im Gleichungssystem (5.4:10) der Bahnwinkel anstelle der Flugzeit als Integrationsvariable eingeführt werden. Für die erste Gleichung folgt

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{g \cdot \cos \theta}{v} \cdot \frac{dv}{d\theta} = -\frac{F_w}{m} - g \cdot \sin \theta , \quad [\text{m/s}]$$

In die übliche Darstellung gebracht und die Prozedur in gleicher Weise auch auf die drei andern Gleichungen angewendet, ergibt das folgende System

$$\begin{aligned}
 (5.4:12) \quad & \left. \begin{aligned} \frac{dv}{d\theta} &= \frac{F_w}{m} \cdot \frac{v}{g \cdot \cos \theta} + v \cdot \tan \theta, & [\text{m/s}] \\ \frac{dt}{d\theta} &= -\frac{v}{g \cdot \cos \theta}, & [\text{s}] \\ \frac{dx}{d\theta} &= -\frac{v^2}{g}, & [\text{m}] \\ \frac{dy}{d\theta} &= -\frac{v^2}{g} \cdot \tan \theta. & [\text{m}] \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

In dieser Form hat die erste Gleichung eine besondere Bedeutung. Multipliziert man sie mit $\cos \theta$ und subtrahiert anschließend beidseitig $v \cdot \sin \theta$, so entsteht

$$\frac{dv}{d\theta} \cdot \cos \theta - v \cdot \sin \theta = \frac{F_w(v)}{m \cdot g} \cdot v, \quad [\text{m/s}]$$

oder

$$(5.4:13) \quad \frac{d}{d\theta}(v \cdot \cos \theta) = \frac{F_w(v)}{m \cdot g} \cdot v. \quad [\text{m/s}]$$

Diese Gleichung heißt *Hauptgleichung der Außenballistik*. Unter Voraussetzung einer konstanten Erdbeschleunigung g und konstanter Luftdichte ρ (die also beide als unabhängig von der Flughöhe y angenommen werden), lässt sich diese Gleichung für spezielle Formen der Funktion $F_w(v)$ analytisch integrieren, womit die Geschwindigkeit als Funktion des Bahnwinkels dargestellt werden kann (Bestimmung des *Hodographen*). In der Vorcomputerzeit wurde deshalb eine Vielzahl von Luftwiderstandsgesetzen entwickelt, die eine Lösung der Hauptgleichung ermöglichen sollten.

5.4.2 Historisches zur Berechnung von Flugbahnen

5.4.2.1 Die Darstellung des Luftwiderstandes

In Abschn. 5.1 wurde bereits erwähnt, dass selbst die ganz großen Mathematiker (wie I. NEWTON, Joh. BERNOULLI, J.-B. D’ALEMBERT und L. EULER) sich um eine Lösung der außenballistischen Aufgabe der Bestimmung einer Flugbahn bemühten und nur Teilergebnisse erzielten. Die analytische Integration der Hauptgleichung der Außenballistik hing (und hängt immer noch) von der Art der Luftwiderstandsfunktion $F_w(v)$ ab, und es wurden zunächst nur wenige Funktionen gefunden, mit denen die Differenzialgleichung gelöst werden konnte.

NEWTON berechnete Flugbahnen mit der linearen Funktion $F_w = k \cdot v$, BERNOULLI nicht nur für das vermutete quadratische Gesetz, sondern sogar für ganzzahlige Potenzen $F_w = k_n \cdot v^n$. D’ALEMBERT

zeigte bereits 1744, dass auch mit $F_w = k_0 + k_n \cdot v^n$, $F_w = a + b \cdot \log v$ und weiteren ähnlichen Funktionen die Hauptgleichung (5.4:13) durch Quadraturen (also durch numerische Integration) gelöst werden kann.

Mit zunehmendem Wissens- und Erfahrungsgewinn drang die Erkenntnis durch, dass die Luftwiderstandsfunktion nicht nur von der Geschwindigkeit, sondern auch maßgeblich von der Luftdichte abhängen würde (für die man bis anhin einen mittleren Wert einsetzte) und somit offenbar eine empirische Funktion sei.

Im Verlauf der Zeit entwickelte sich die Behandlung des außenballistischen Problems in zwei Richtungen. Die eine suchte weiterhin nach geeigneten Funktionen, die einerseits den Luftwiderstand möglichst gut beschrieben, andererseits aber auch die Integration der Hauptgleichung ermöglichte (meist mittels Quadraturen). Die andere berechnete die Flugbahn in kurzen Teilbögen mit jeweils konstanten mittleren Widerständen, die dann zur Flugbahn zusammengesetzt wurden.

5.4.2.2 Die Methode von SIACCI

Eine weitere (dritte) Lösungsmethode kam gegen Ende des 19. Jahrhunderts vor allem durch den italienischen Ballistiker F. SIACCI zur Anwendung. Dabei wurde die Hauptgleichung derart abgeändert, dass mit einem empirischen Widerstandsgesetz, $F_{ws} = k_s \cdot f_s(v)$, ein beliebiger Punkt der Flugbahn (üblicherweise der Endpunkt) bestimmt werden konnte. In der Hauptgleichung ersetzte man hierzu weniger wichtige Größen durch geeignete Mittelwerte. So gelang in der Hauptgleichung eine Trennung der Variablen, welche die weitere Integration erlaubte.

$$(5.4:14) \quad d(\tan \theta) = \frac{g \cdot du}{u \cdot k_s \cdot f(u) \cdot \varepsilon}, \quad [-]$$

$$\text{mit} \quad u = \frac{v \cdot \cos \theta}{\sigma}, \quad [\text{m/s}]$$

wo $\sigma = \cos \theta_1$ und $\varepsilon = \cos \theta_2$ die beiden geeignet zu wählenden Mittelwerte darstellen. Zur weiteren Rechnung wurden vier sogenannte „Primär-Funktionen“ definiert, welche die direkte Integration der Hauptgleichung erlaubten.

$$(5.4:15) \quad \left| \begin{array}{ll} T(u) &= - \int \frac{u}{f(v)} dv, & [\text{s/m}] \\ D(u) &= - \int \frac{v \cdot dv}{f(v)}, & [-] \\ J(u) &= - 2 \cdot g \cdot \int \frac{dv}{v \cdot f(v)}, & [1/\text{m}] \\ A(u) &= - \int \frac{J(v) \cdot v \cdot dv}{f(v)}. & [1/\text{m}] \end{array} \right.$$

Die untere Grenze der Integrale war beliebig wählbar, da bei der Rechnung nur Differenzen dieser Ausdrücke auftraten.

In einem weiteren Schritt verfeinerte SIACCI die Methode, indem er die beiden geeignet zu wählenden Mittelwerte wie folgt definierte

$$\sigma = \cos \theta_0 \quad \text{und} \quad \varepsilon = \xi \cdot \cos^2 \theta_0 . \quad [\text{m/s}]$$

Weil θ_0 der Anfangswert ist, wurden dadurch die beiden Anpassungsgrößen σ und ε durch eine, nämlich ξ , ersetzt. Damit lieferte die direkte Integration von (5.4:14) unter Hinzunahme weiterer Beziehungen aus dem Gleichungssystem (5.4:12) die folgenden Formeln (bezeichnet als „Siacci III“)

$$(5.4:16) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \tan \theta &= \tan \theta_0 - \frac{1}{2 \cdot k_s \cdot \xi \cdot \cos^2 \theta_0} \cdot [J(u) - J(u_0)] , & [-] \\ x &= \frac{1}{k_s \cdot \xi} \cdot [D(u) - D(u_0)] , & [\text{m}] \\ t &= \frac{1}{k_s \cdot \xi \cdot \cos \theta_0} \cdot [T(u) - T(u_0)] , & [\text{s}] \\ y &= x \cdot \tan \theta_0 - \frac{x}{2 \cdot k_s \cdot \xi \cdot \cos^2 \theta_0} \cdot \left[\frac{A(u) - A(u_0)}{D(u) - D(u_0)} - J(u_0) \right] , & [\text{m}] \end{array} \right.$$

Die Primär-Funktionen ließen sich für die damals bekannten und üblichen Widerstandsgesetze tabellieren, woraus die wichtigen Flugbahnwerte mit den Gleichungen (5.4:16) bestimmt werden konnten.

Die Methode von SIACCI war in der Vorcomputerzeit das wohl wichtigste Verfahren zur Berechnung von Flugbahnen mittels Widerstandsfunktionen und der Integration der Hauptgleichung. Ausführliche Darstellungen dieser Methode finden sich in R. L. MCCOY (1999), G. HAUCK (1972) und in H. MOLITZ, R. STROBEL (1963). Im erstgenannten Werk sind zudem viele Tabellen und Beispiele enthalten.

5.4.2.3 Widerstandsgesetze und Standardgeschosse

Mit Widerstandsgesetzen wurde damals versucht, einen für alle Geschosse gültigen Verlauf der Verzögerungsfunktion zu beschreiben, der bei der Integration der Hauptgleichung verwendet werden konnte. Der Ansatz lautete in der Regel

$$(5.4:17) \quad F_w / m = a = k \cdot f(v) = k \cdot v^2 \cdot F(v) . \quad [\text{m/s}^2]$$

Drei Widerstandsgesetze erlangten damals Bedeutung, wovon sich eines derart durchgesetzt hat, dass es noch heute in einem bestimmten Teilgebiet der Ballistik angewendet wird.

Das eine stammt von SIACCI, der 1896 versuchte, Resultate von Schießversuchen aus Russland, England und Deutschland mit verschiedenen Geschossen zu einer einheitlichen Gesetzmäßigkeit zu verarbeiten. Sein Gesetz lautete (mit Index S)

$$(5.4:18) \quad f_s(v) = 0.2002 \cdot v - 48.05 + \sqrt{(0.1648 \cdot v - 47.95)^2 + 9.6} + B, \quad [m^2/s^2]$$

$$\text{mit} \quad B = \frac{0.0442 \cdot v \cdot (v - 300)}{371 + \left(\frac{v}{200}\right)^{10}}. \quad [m^2/s^2]$$

Für die Konstante k_s notierte er

$$(5.4:19) \quad k_s = \frac{1000 \cdot d^2 \cdot \rho \cdot i_s}{1.206 \cdot m}. \quad [1/m]$$

Darin bedeutet d das Kaliber, ρ die Luftdichte, m die Geschossmasse und i_s ein dimensionsloser Formfaktor, der Anpassungen an verschiedene Geschossformen erlaubte.

Wird in der Gl. (5.4:17) auf der linken Seite die Gl. (5.3:20) und in der zweiten Form der rechten Seite Gl. (5.4:18) eingesetzt, ergibt sich eine Beziehung zwischen dem Widerstandskoeffizienten c_w und dem Siacci'schen Widerstandsgesetz. Eine kurze Rechnung ergibt

$$(5.4:20) \quad c_{ws}(v) = \frac{8000 \cdot i_s \cdot F_s(v)}{1.206 \cdot \pi} \quad \text{mit} \quad F_s(v) = \frac{f_s(v)}{v^2}. \quad [-]$$

Einen anderen Weg schlug die Firma Krupp ein, die in der zweiten Hälfte des 19. und zu Beginn des 20. Jahrhunderts der bedeutendste Geschützhersteller in Europa war. Sie schuf ein Normalgeschoss (Abb. 5.12), mit dem viele Schießversuche durchgeführt wurden, aus deren Resultaten das Krupp'sche Widerstandsgesetz entstand. Die Darstellung des Luftwiderstandsgesetzes entsprach ebenfalls dem Ansatz der Gl. (5.4:17), und für die Konstante k (jetzt mit Index K) wurde gesetzt

$$(5.4:21) \quad k_K = \frac{10^4 \cdot d^2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot i_K}{1.22 \cdot 4 \cdot m}, \quad [1/m]$$

wobei mit i_K wiederum ein dimensionsloser Formfaktor eingeführt worden war. Für das Krupp-Geschoss galt $i_K = 1$.

$$(5.4:22) \quad c_{wK}(v) = 1.64 \cdot 10^4 \cdot i_K \cdot F_K(v) \quad \text{mit} \quad F_K(v) = \frac{f_K(v)}{v^2}. \quad [-]$$

Bei beiden Widerstandsgesetzen, Siacci und Krupp, wurden jeweils die Funktionen F_s bzw. F_K tabelliert. Die Beiwertfunktion des Krupp-Geschosses ist in der Abb. 5.14 dargestellt (graue Linie).

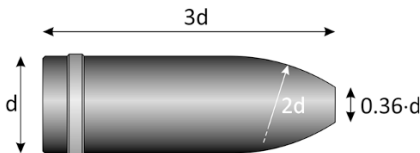


Abb. 5.12. Das Krupp'sche Normalgeschoss im Kaliber 10 cm.

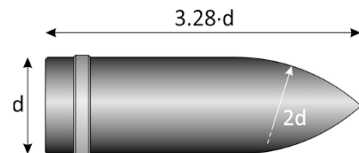


Abb. 5.13. Das Normalgeschoss G1 der Commission d'expériences von Gâvres.

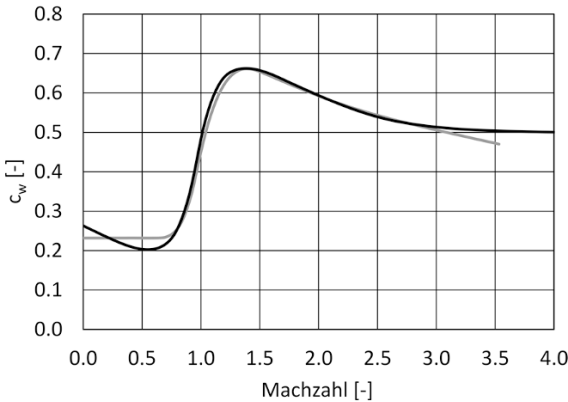


Abb. 5.14. Die c_w -Kurven der beiden Normalgeschosse.
Graue Linie: Krupp'sches Geschoss,
schwarze Linie: Geschoss G1 von Gävres.

Im Jahre 1829 gründete die französische Marine in Gâvres an der Atlantikküste Frankreichs die „Groupe d'études et de recherches en balistique, armes et munitions“ (Studien- und Forschungsgruppe für Ballistik, Waffen und Munition). Diese später auch unter dem Namen „Commission d'expériences de Gâvres“ bekannt gewordene Forschungs- und Untersuchungsinstitution verfügte über einen großen Schießplatz am Strand von Gâvres, auf dem in den Jahren 1873-1898 sehr viele Schießversuche, vor allem mit Marinegeschützen und auch einem Normalgeschoss G1 (siehe Abb. 5.13) durchgeführt wurden. Deren Ergebnisse bildeten die Grundlage des Widerstandsgesetzes der Kommission von Gâvres (Index G)

$$(5.4:23) \quad f_G(v) = k_G \cdot v^2 \cdot \left[0.255 + B \cdot \arctan\left(\frac{v-330}{50}\right) \right] \cdot 10^{\frac{v-600}{10^6}}, \quad [\text{m}^2/\text{s}^2]$$

$$\text{mit} \quad B = \frac{\sqrt[4]{1 + 0.0392 \cdot \left(\frac{v-330}{500}\right)^8}}{27226 + 494 \cdot \left(\frac{v-330}{50}\right)^2}, \quad [-]$$

$$\text{und} \quad k_G = \frac{d^2 \cdot i_G \cdot 10^{0.000045 \cdot y}}{m}. \quad [1/\text{m}]$$

Darin bedeutet d das Kaliber, y die Mündungshöhe, m die Geschossmasse und i_G ein dimensionsloser Formfaktor, der Anpassungen an verschiedene Geschossformen erlaubte. Die Zehnerpotenz im Ausdruck k_G bedeutet die Luftdichte auf der Höhe y und hat auch deren Dimension.

Der Verlauf der Beiwertfunktion des G1-Geschosses ist ebenfalls in der Abb. 5.14 eingezeichnet (schwarze Linie).

Im Gegensatz zu den andern beiden erwähnten Gesetzen wurde in Gâvres versucht, den steilen Anstieg des Luftwiderstandes im Bereich der Schallgeschwindigkeit mittels der Arkustangens-Funktion nachzubilden. Außerdem war für die Luftdichte ein höhenabhängiger Faktor in der Zahl k_G eingeführt worden.

5.4.2.4 Die Ingalls-Tabellen und der „Ballistic Coefficient“ (BC)

Basierend auf Krupp'schen Schießversuchen der Jahre 1875-81 stellte der russische Generalmajor N. MAYEVSKI 1883 ein Luftwiderstandsgesetz auf, das unter der Bezeichnung „Zonenpotenzgesetz“ vor allem in den USA weite Verbreitung fand und dort auch heute noch aktuell ist. Nebst den Ergebnissen von Krupp verarbeitete er auch Resultate englischer (von F. BASHFORD) und eigener Experimente.

Eine erste Version publizierte MAYEVSKI in seiner Schrift „Traité de balistique extérieure“, die 1872 in Paris erschien.

MAYEVSKI unterteilte den Geschwindigkeitsbereich von 0 bis 900 m/s in fünf Zonen. In jeder Zone wird die Verzögerung nach dem Ansatz (5.4:17) als Potenz der Geschwindigkeit in der folgenden Form dargestellt

$$(5.4:24) \quad a_{M,i} = k_{M,i} \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot \frac{\rho}{1.206} \cdot v^{n_i}, \quad i = 1 \dots 5 \quad [\text{m/s}^2]$$

Die konstanten Wertepaare $(k_{M,i}, n_i)$ waren so gewählt, dass die Verzögerung des Krupp'schen Normalgeschosses beschrieben wurde. Später wurde die fünfte Zone bis 1100 m/s erweitert und durch drei Zonen ersetzt. Die Verzögerung eines beliebigen Geschosses im i -ten Geschwindigkeitsbereich wird mit Hilfe einer Verhältniszahl C auf den Luftwiderstand des Normalgeschosses bezogen

$$(5.4:25) \quad a_i = \frac{a_{M,i}}{C} \quad [\text{m/s}^2]$$

Die diskontinuierliche Form des Mayevski'schen Zonenpotenzgesetzes ließ sich mit dem Widerstandsgesetz von SIACCI (Gl. 5.4:17) ausgleichen. Mit Wahl eines bestimmten Zahlenwertes für den Faktor k_s ergab sich eine gute Übereinstimmung, einerseits mit der Mayevski'schen Rechnung, andererseits auch mit den Experimenten.

In den Vereinigten Staaten übernahm J. M. INGALLS, Ballistiker und Oberst der Artillerie, das Mayevski'sche Verfahren einschließlich des zugehörigen Widerstandsgesetzes von SIACCI und übertrug beides in das angloamerikanische Maßsystem. Er schuf ein Tabellenwerk, die *Ingalls-Tabellen* (J.M. INGALLS, 1918), das erstmals 1883 erschien und in dem nebst den primären Siacci-Funktionen (5.4:15) weitere Tabellen für spezielle ballistische Probleme (Wind, Luftdichteänderungen) zusammengestellt sind. In der Einleitung zu diesem Werk formulierte er die grundlegende Hypothese, dass unter sonst gleichen Bedingungen das Verhältnis der Verzögerungen zweier unterschiedlicher Geschosse von der Geschwindigkeit unabhängig sei. Dadurch wird die Zahl C in Gl. (5.4:25) zu einer Konstanten; sie wird als „Ballistic Coefficient“ bezeichnet und (heute) mit BC abgekürzt.

Mit dieser Hypothese wird jedem Geschoss die gleiche Kurvenform der c_w -Funktion zugeordnet, wie sie durch das Normalgeschoss gegeben ist. Durch den konstanten BC wird diese Kurve nur parallel verschoben. Seine Bestimmung erfolgt durch möglichst gute Angleichung der Rechnung an das Experiment bei unterschiedlichen Bedingungen (Luftdichte, Temperatur usw.).

Allgemein wird der BC folgendermaßen definiert (J. M. INGALLS, 1918)

$$(5.4:26) \quad BC = \frac{\rho_0}{\rho} \cdot f_w \cdot f_H \cdot \frac{m}{\beta \cdot i \cdot d^2} . \quad [-]$$

Darin bedeutet m Geschossmasse, d das Kaliber; ρ_0 die Standardluftdichte, ρ die aktuelle Luftdichte auf Mündungshöhe, f_w ein Korrekturfaktor für den Längswindeinfluss, und f_H ein solcher für die mittlere Flughöhe des Geschosses. β ist ein integrierender Faktor, welcher den Fehler kompensieren soll, der durch die Anwendung der Siacci-Methode auf das Mayevski'sche Zonenpotenzgesetz entsteht. Mit i wird die sogenannte *Formkonstante* bezeichnet, eine Zahl, die den Einfluss der Form des Geschosses auf den Luftwiderstand beschreibt. Im Original wird die Masse in pounds [lbs] und das Kaliber in Inches [in] eingesetzt.

Bei Flugbahnrechnungen unter Normalbedingungen gilt $\rho = \rho_0$ und die Korrekturfaktoren werden (mit Ausnahme von i) alle zu 1; der BC vereinfacht sich zu

$$(5.4:27) \quad BC = \frac{m}{i \cdot d^2} . \quad [-]$$

Der Ballistische Koeffizient ist nach seiner Definition (Gl. 5.4:25) als Verhältnis zweier Verzögerungen dimensionslos. Die Setzung gemäß Gl. (5.4:26) bzw. (5.4:27) führt dazu, dass die Formkonstante i nicht dimensionslos sein kann, sondern die (aus physikalischer Sicht) etwas seltsame Einheit [in²/lb] erhält.

Der Ausdruck m/d^2 in den beiden Formeln wird in der amerikanischen Literatur als „*Sectional Density*“ bezeichnet und entspricht bis auf den Faktor $4/\pi$ der Querschnittsbelastung q des Geschosses. Damit wird aber auch eine direkte Beziehung zwischen der Formkonstanten i und dem Luftwiderstandsbeiwert c_w impliziert. Werden die Daten des Normalgeschosses mit Index 0, jene eines beliebigen Geschosses mit Index 1 versehen, so gilt nach den Gl. (5.4:25) und (5.4:27)

$$(5.4:28) \quad BC_1 = \frac{a_0}{a_1} = \frac{m_1}{i_1 \cdot d_1^2} . \quad [-]$$

Außerdem gilt

$$BC_0 = 1 = \frac{m_0}{i_0 \cdot d_0^2} . \quad [-]$$

und somit

$$(5.4:29) \quad i_0 = \frac{m_0}{d_0^2} . \quad [\text{lbs/in}^2]$$

Die Formkonstante des Normalgeschosses ist also gleich dessen „*Sectional Density*“. Mit der Wahl von $m_0 = 1 \text{ lb}$ und $d_0 = 1 \text{ in}$ (J. S. HATCHER, 1962) wird sie wie gewünscht zu 1.

Wird nun in Gl. (5.4:28) für die beiden Verzögerungen die klassische aerodynamische Form eingesetzt

$$a_j = c_w \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot \frac{d_j^2 \cdot \pi}{4 \cdot m_j} , \quad j = 0, 1 , \quad [-]$$

so ergibt sich nach kurzer Rechnung und mit Einbezug von Gl. (5.4:29)

$$(5.4:30) \quad \frac{i_0}{i_1} = \frac{c_{w0}}{c_{w1}} . \quad [-]$$

Der Formfaktor eines beliebigen Geschosses verhält sich zum Formfaktor des Normalgeschosses, wie sich die entsprechenden Luftwiderstandsbeiwerte verhalten. Er lässt sich aus der c_w -Funktion des betreffenden Geschosses bestimmen

$$(5.4:31) \quad i_1 = \frac{c_{w1}}{c_{w0}} \cdot \frac{m_0}{d_0^2} . \quad [\text{lbs/in}^2]$$

Mit Index 1 sind die Werte des beliebigen Geschosses bezeichnet, mit 0 jene des Normalgeschosses.

Zu diesem Konzept der ballistischen Flugbahnbestimmung, das auch heute noch (in erster Linie im Bereich der Kleinkalibergeschosse für Jagd- und Sportwaffen) in einigen Ländern (vor allem in den USA) angewendet wird, lassen sich folgende Anmerkungen anbringen:

- Die Rechnungen erfolgen nach dem Siacci-Verfahren für flache Flugbahnen, bei denen die Luftdichte als konstant vorausgesetzt werden kann.
- Die Vielzahl der möglichen Geschossformen können nur eingeschränkt auf ein einziges Normalgeschoss zurückgeführt werden. Aus diesem Grund wurden weitere Normalgeschosse mit den Bezeichnungen G2, G5, G6, G7, G8 und GL eingeführt, unter anderem auch eines mit schlanker Spitze und Heckkonus (G7). Bei den heutigen Kleinkalibergeschossen wird allerdings fast nur das Geschoss G1 (siehe Abb. 5.13), ab und zu auch G7 verwendet.
- Der Bezug auf ein Normalgeschoss und dessen c_w -Verlauf kann für ein beliebiges anderes Geschoss stets nur zu einer Approximation der Flugbahn führen. Dies reicht für die Anwendung bei Kleinkalibergeschossen und üblichen Schussdistanzen aus, kann aber bei der Berechnung von maximalen Schussweiten zu größeren Ungenauigkeiten führen.
- Neben der Mayevski'schen und der Ingalls'schen Definition des BC (siehe Gl. 5.4:25) findet man auch eine Festlegung mittels der Hauptgleichung Gl. 5.4:13 (siehe A. GLUCHOFF, 2011)

$$(5.4:32) \quad \frac{d}{d\theta}(v \cdot \cos\theta) = \frac{F_w(v)}{g \cdot BC} \cdot v , \quad [\text{m/s}]$$

wobei die Setzung (5.4:27) beibehalten wird. In diesem Fall kann der BC nicht mehr das Verhältnis der Verzögerungen darstellen, da er nicht dimensionslos sein kann.

- Der Formfaktor i ist proportional zum c_w , im BC kommt er jedoch im Nenner vor (Formel 5.4:27). Die BC verhalten sich daher gerade umgekehrt wie die c_w . Je geringer ein Geschoss verzögert, desto größer wird sein BC.

5.4.2.5 Die seitliche Abweichung (Derivation)

Beide Berechnungsarten für Flugbahnen – die Integration der Hauptgleichung unter Verwendung von Widerstandsgesetzen und die schrittweise numerische Integration – wurden aus Gründen des Rechenaufwandes stets nur zweidimensional ausgeführt. Die beim Schießen beobachtete seitliche Abweichung der Treffpunkte von der ursprünglichen Schussrichtung (deren Ursache bereits CRANZ, 1896, der Magnuskraft und dem Drall des Geschosses zuschrieb) musste daher getrennt von der Flugbahnberechnung ermittelt werden. Der Ansatz war naheliegend: Es wurde eine Beschleunigung quer zur Schussrichtung, die sogenannte *Derivationsbeschleunigung* d_z , eingeführt. Die geringe mittlere Quergeschwindigkeit des Geschosses (je nach Schussdistanz etwa 2-7 m/s), erlaubte es, den Luftwiderstand der Querbewegung zu vernachlässigen und die Seitenabweichung elementar als quadratische Funktion der Flugzeit anzusetzen

$$(5.4:33) \quad z(t) = d_z \cdot t^2 . \quad [m]$$

Der Faktor d_z wurde zunächst als konstant angenommen und mit Schießversuchen bestimmt. Es zeigte sich aber, dass mit zunehmenden Reichweiten der Geschütze (verbunden auch mit längeren Flugzeiten) Gl. (5.4:33) geändert werden musste

$$(5.4:34) \quad z(t) = d_z(\theta_0) \cdot t^n . \quad [m]$$

Die Konstante änderte sich nun in Abhängigkeit der Elevation θ_0 und für den Exponenten n waren in gewissen Fällen Zahlen > 2 einzusetzen.

Durch die Einführung der Flugbahnrechnung mit drei Freiheitsgraden, bei welcher auch die seitliche Komponente des Luftwiderstandes berücksichtigt wird, ergeben sich in den meisten Fällen wiederum konstante Derivationsbeschleunigungen, was physikalisch durchaus Sinn macht.

5.4.3 Gleichungssysteme für die Programmierung

5.4.3.1 Die numerische Berechnung

Der in Abschn. 5.4.2.1 erwähnte zweite Weg der Berechnung einer Flugbahn in kurzen Teilbögen gewann mit den Fortschritten der numerischen Mathematik und der Entwicklung der elektrischen und elektronischen Rechengeräte immer mehr an Bedeutung. Insbesondere die Entwicklung des Verfahrens von C. RUNGE und W. KUTTA zur numerischen Integration eines Systems von Differenzialgleichungen (siehe z. B. in G. ENGELN-MÜLLGES et. al., 2011) trug dazu bei, dass sich diese Methode (zumindest in Europa) durchsetzte.

Der Rechenaufwand war allerdings groß. Zur Herstellung eines Schießbehelfs für ein Artilleriegeschütz mit elektrischen Tischrechenmaschinen waren bei zweidimensionaler Rechnung ein Dutzend Personen mehrere Monate beschäftigt.

Mit der Leistungsfähigkeit heutiger Computer ist man keinerlei Einschränkungen mehr unterworfen. Dies hatte zur Folge, dass sich der Ballistiker kaum mehr mit

Rechenverfahren beschäftigen muss und daher wesentlich mehr Zeit zur Verfügung hat, sich ballistische Fragen zuzuwenden, wie z. B. der Minimierung des Luftwiderstandes oder den Problemen der Stabilisierung.

5.4.3.2 Gleichungssysteme mit 3- und 2-Freiheitsgraden

Im Massenpunktmodell wird vorausgesetzt, dass die Richtung des Luftwiderstandes F_W stets mit der Geschossachse und diese mit der Bahntangente zusammenfallen. Die allgemeine Bewegungsgleichung für den Massenpunkt lautet demnach

$$(5.4:35) \quad \ddot{\vec{r}} = -\frac{F_W}{m} \cdot \frac{\dot{\vec{r}}}{v} + \vec{g} + \vec{a}_c, \quad [\text{m/s}^2]$$

worin $\vec{r} = (x, y, z)$ den Radiusvektor des Bahnpunktes, $F_W = F_W(v, y)$ den Betrag des Widerstandes, m die Geschossmasse, v den Betrag der Geschwindigkeit und \vec{g} einen Vektor bedeutet, der die Erd- und Zentrifugalbeschleunigung beinhaltet. Mit \vec{a}_c wird die Coriolisbeschleunigung und mit d_z die für die seitliche Abweichung verantwortliche Derivationsbeschleunigung bezeichnet. In Komponenten geschrieben und mit $\ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{v}}$ auf 1. Ordnung gebracht, ergibt sich das folgende Differenzialgleichungssystem für die Geschossbewegung

$$(5.4:36) \quad \left| \begin{array}{ll} \dot{v}_x = -\frac{F_W}{m} \cdot \frac{v_x}{v} + g_x + a_{cx}, & [\text{m/s}^2] \\ \dot{v}_y = -\frac{F_W}{m} \cdot \frac{v_y}{v} + g_y + a_{cy}, & [\text{m/s}^2] \\ \dot{v}_z = -\frac{F_W}{m} \cdot \frac{v_z}{v} + g_z + d_z + a_{cz}, & [\text{m/s}^2] \\ \dot{x} = v_x, & [\text{m/s}] \\ \dot{y} = v_y, & [\text{m/s}] \\ \dot{z} = v_z, & [\text{m/s}] \end{array} \right.$$

mit der Verzögerung durch die Luftkraft

$$(5.4:37) \quad \frac{F_W}{m} = a = c_w \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot \frac{1}{q}, \quad [\text{m/s}^2]$$

wo q die Querschnittsbelastung des Geschosses bedeutet. Der Bahnwinkel ergibt sich fortlaufend aus den Komponenten des Geschwindigkeitsvektors

$$(5.4:38) \quad \theta = \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right). \quad [-]$$

Das System (5.4:36) stellt die klassische physikalische Form der ballistischen Bewegungsgleichungen dar, in der die Zeit die unabhängige Variable ist. In vielen

Fällen ist es jedoch von Vorteil, die Gleichungen auf eine andere unabhängige Variable umzuschreiben. Flache Flugbahnen von Direktschusswaffen werden vorzugsweise mit einem System gerechnet, in dem die Integration über die Horizontaldistanz erfolgt. Wird jede Gleichung des Systems (5.4:36) mit dem Ausdruck

$$(5.4:39) \quad \frac{1}{v_x} = \frac{dt}{dx}, \quad [s/m]$$

multipliziert, so entsteht das in der Praxis häufig verwendete System

$$(5.4:40) \quad \left\{ \begin{array}{ll} v'_x = -\frac{F_W}{m} \cdot \frac{1}{v} + \frac{g_x}{v_x} + \frac{a_{cx}}{v_x}, & [1/s] \\ v'_y = -\frac{F_W}{m} \cdot \frac{v_y}{v \cdot v_x} + \frac{g_y}{v_x} + \frac{a_{cy}}{v_x}, & [1/s] \\ v'_z = -\frac{F_W}{m} \cdot \frac{v_z}{v \cdot v_x} + \frac{g_z}{v_x} + \frac{d_z}{v_x} + \frac{a_{cz}}{v_x}, & [1/s] \\ t' = \frac{1}{v_x}, & [s/m] \\ y' = \frac{v_y}{v_x}, & [-] \\ z' = \frac{v_z}{v_x}. & [-] \end{array} \right.$$

Mit Substitutionen analog Gl. (5.4:39) können auch die Schrägdistanz, die Bahnlänge oder die Flughöhe des Projektils als unabhängige Variable eingeführt werden. Mit der Ersetzung gemäß Gl. (5.4:11) kann auch der Bahnwinkel als Integrationsvariable gewählt werden. Es gibt immer wieder Fälle, in denen solche Systeme ganz nützlich sein können.

Bei flachen Flugbahnen auf kürzere Distanzen (Flugzeit etwa 7 s) kann die Erdbeschleunigung konstant angenommen und die Coriolisbeschleunigung vernachlässigt werden (der Einfluss ist klein im Vergleich zur Streuung). Mit diesen Annahmen ergibt sich aus (5.4:36) das einfache und schnell programmierbare System

$$(5.4:41) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \dot{v}_x = -\frac{F_W}{m} \cdot \frac{v_x}{v}, & [m/s^2] \\ \dot{v}_y = -\frac{F_W}{m} \cdot \frac{v_y}{v} - g, & [m/s^2] \\ \dot{x} = v_x, & [m/s] \\ \dot{y} = v_y. & [m/s] \end{array} \right.$$

Mit der Horizontaldistanz als unabhängige Variable eignet es sich besonders gut zur Berechnung von Schusstafeln.

$$\begin{aligned}
 (5.4:42) \quad & \left. \begin{aligned} v'_x &= -\frac{F_W}{m} \cdot \frac{1}{v}, & [1/s] \\ v'_y &= -\frac{F_W}{m} \cdot \frac{v_y}{v_x \cdot v} - \frac{g}{v_x}, & [1/s] \\ t' &= \frac{1}{v_x}, & [s/m] \\ y' &= \frac{v_y}{v_x}. & [-] \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

Die üblichen Schusstafelwerte (Flugzeit, Endgeschwindigkeit, Energie, Schusswinkel, Bahnwinkel) lassen sich so mit einer einzigen Integration für alle Distanzen berechnen.

5.4.3.3 Das Anfangswertproblem

Die übliche Form der Flugbahnberechnung gehört zu den Anfangswertproblemen, bei denen die Startwerte bekannt sind und Bahnwerte bestimmt werden sollen, welche gewissen Kriterien genügen. Die Startwerte sind gegeben durch die Mündungsgeschwindigkeit v_0 und die Elevation θ_0 , und es gilt im Normalfall

$$\begin{aligned}
 (5.4:43) \quad & \left. \begin{aligned} v_{x0} &= v_0 \cdot \cos \theta_0, & [m/s] \\ v_{y0} &= v_0 \cdot \sin \theta_0, & [m/s] \\ v_{z0} &= 0, & [m/s] \\ t_0 &= 0, & [s] \\ \vec{r}_0 &= (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0). & [m] \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

Zur fortlaufenden Bestimmung des Luftwiderstandes F_W sind weitere Angaben erforderlich. Die Luftdichte errechnet sich aus dem Luftdruck auf Mündungshöhe und dem Druck- und Temperaturverlauf in Abhängigkeit der Höhe; die Temperatur wird zudem für die Ermittlung der Machzahl benötigt, welche den momentanen Luftwiderstandsbeiwert bestimmt. Es hängt von der Art und der Zielsetzung der durchzuführenden Rechnung ab, welche dieser Anfangs- und Zusatzinformationen in welcher Genauigkeit erforderlich sind.

Als Ergebnis der Flugbahnrechnung erhält man Ort und Geschwindigkeit des Geschosses in diskreten Punkten (deren Dichte von der Schrittweite der Integration abhängig ist) und weitere Punkte, die gewissen Kriterien genügen, wie z. B. der höchste Punkt der Flugbahn (der *Gipfel*) und die Schussdistanz x_E bei einer gegebenen Zielhöhe y_E oder die Zielhöhe bei einer gegebenen Schussdistanz (siehe Abb. 5.15). Zudem lassen sich weitere Daten mit einfachen geometrischen Beziehungen gewinnen, wie der Bahnwinkel (nach Gl. 5.4:38) und der Fallwinkel ω_H im Mündungshorizont als Scheitelwinkel zum dortigen Bahnwinkel. Der Fallwinkel ω_Z

neuen Geschosses können mit solchen Studien die optimalen Daten (Masse, Geschwindigkeit) festgelegt werden.

Rechnungen sind bei solchen Untersuchungen viel weniger aufwändig als entsprechende Experimente. Es lassen sich wesentlich mehr Situationen und Varianten durchrechnen, als erprobt werden können. Die Aussagen werden dadurch allgemeiner und zuverlässiger.

Rekonstruktion. Es gibt (leider) viele Fälle von Geschosseinschlägen, bei denen Personen gefährdet waren oder getroffen wurden oder Sachbeschädigungen entstanden sind. Es handelt sich dabei in der Regel um Unfälle oder Straftaten oder gar um Verstöße gegen internationale Vereinbarungen, wenn z. B. Fahrzeuge oder Personen internationaler Hilfsorganisationen betroffen sind. In solchen Fällen ist es aus Gründen des Rechts wichtig, die Herkunft des Geschosses zu rekonstruieren.

Die Startwerte sind in diesem Fall die Koordinaten des Einschlagpunktes, wobei insbesondere auch der Fallwinkel und die Ankunftsrichtung wichtig sind. Die Geschwindigkeit wird auf Grund der erzeugten Schäden geschätzt. Die im Abschn. 5.4.3.2 zusammengestellten Gleichungssysteme lassen sich auch mit negativen Zeit- oder Wegschritten integrieren, wodurch ein Zurückrechnen auf den Ausgangspunkt ermöglicht wird. Wichtig ist, dass die zum Zeitpunkt des Schusses aktuellen meteorologischen Daten (Luftdichte, Wind) ermittelt und in die Rechnung eingegeben werden. Diese lassen sich in den meisten Fällen den Aufzeichnungen einer nahegelegenen Wetterstation entnehmen, welche von den offiziellen Wetterdiensten angefordert werden können. Die Windwerte (Geschwindigkeit und Richtung) sind dabei besonders wichtig, da sie die Flugbahn merklich beeinflussen.

Falls die Luftwiderstandsfunktion des betreffenden Geschosses nicht bekannt ist, können Funktionen formähnlicher Projektile herangezogen werden. Weil die c_w -Werte ausschließlich von der Form abhängig sind, spielen Kaliber und Masse dabei keine Rolle.

Eine ausführlichere Darstellung der forensischen Flugbahnrekonstruktion findet sich im Kap. 8, Abschn. 8.2.1.

5.4.3.4 Einige Hinweise zur Durchführung

Für die numerische Integration eignet sich in erster Linie das klassische Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung. Eine elegante und schnelle Variante, die zudem mit weniger Registern auskommt, ist das Verfahren von RUNGE-KUTTA-GILL (siehe z. B. A. RALSTON, H. S. WILF, 1967). Dieses hat sich vor allem in den Anfängen der programmierbaren Rechenggeräte bewährt, bei denen die Rechenleistung gering und die Speicherkapazität beschränkt war. Es ist auch in heutigen mathematischen Softwarepaketen implementiert.

Flache Flugbahnen und solche in der unteren Winkelgruppe können sowohl mit der Zeit als auch mit der Horizontaldistanz als unabhängige Variable integriert werden. Geschosswege in der oberen Winkelgruppe werden vorzugsweise über der Zeit

gerechnet; wegen dem steil abfallenden absteigenden Ast müsste bei der Horizontaldistanz eine sehr kleine Schrittweite gewählt werden.

Die Berechnung spezieller Punkte (Gipfel- und Endwerte) erfolgt durch sukzessives Verkleinern des Integrationsschrittes, bis das Kriterium des gesuchten Punktes mit der gewünschten Genauigkeit erfüllt ist.

Für den Gipfelpunkt gilt beispielsweise das Kriterium $v_y = 0$.

Die gleiche Prozedur ist auch bei Schichtgrenzen in der Atmosphäre erforderlich, wenn z. B. der Temperaturgradient oder die Windrichtung ändert. Die Integration ist an die Schichtgrenze heranzuführen und dort mit den neuen Daten wiederum zu starten. Es empfiehlt sich, den ersten Schritt in der neuen Schicht so zu wählen, dass das ursprüngliche Schrittraster wieder erreicht ist.

5.4.4 Der Einfluss von Wind

5.4.4.1 Die Bewegungsgleichungen bei Windeinwirkung

Der Luftwiderstand eines Geschosses entsteht durch den Staudruck, der seinerseits durch die Anströmgeschwindigkeit bestimmt ist. Maßgebend ist daher nicht die Geschossgeschwindigkeit, sondern die Relativgeschwindigkeit der Luft bezüglich des Geschosses. Weht ein Wind mit der Geschwindigkeit \vec{v}_w , so strömt die Luft mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_{rel} = \vec{v} - \vec{v}_w$ gegen das Geschoss. Damit erweitert sich die Bewegungsgleichung (5.4:35) zu

$$(5.4:44) \quad \ddot{\vec{r}} = -\frac{F_w}{m} \cdot \frac{(\dot{\vec{r}} - \vec{v}_w)}{|\vec{v}_{rel}|} + \vec{g} + \vec{a}_c, \quad [\text{m/s}^2]$$

Diese Differenzialgleichung 2. Ordnung lässt sich analog Abschn. 5.4.3.2 in ein System von 6 Gleichungen 1. Ordnung umwandeln

$$(5.4:45) \quad \begin{cases} \dot{v}_x = -\frac{F_w}{m} \cdot \frac{v_x - v_{wx}}{|\vec{v}_{rel}|} + g_x + a_{cx}, & [\text{m/s}^2] \\ \dot{v}_y = -\frac{F_w}{m} \cdot \frac{v_y - v_{wy}}{|\vec{v}_{rel}|} + g_y + a_{cy}, & [\text{m/s}^2] \\ \dot{v}_z = -\frac{F_w}{m} \cdot \frac{v_z - v_{wz}}{|\vec{v}_{rel}|} + g_z + a_{cz}, & [\text{m/s}^2] \\ \dot{x} = v_x, & [\text{m/s}] \\ \dot{y} = v_y, & [\text{m/s}] \\ \dot{z} = v_z, & [\text{m/s}] \end{cases}$$

mit der Luftkraft

$$(5.4:46) \quad F_w = c_w \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \left(\dot{\vec{r}} - \vec{v}_w \right)^2 \cdot A_0 . \quad [N]$$

Dieses System lässt sich in gleicher Weise, wie dies in Abschn. 5.4.3.2 beschrieben ist, auf andere Integrationsvariablen umschreiben und auch entsprechend den Erläuterungen in Abschn. 5.4.3.4 numerisch (mit der Runge-Kutta-Methode) integrieren, wobei auch die Anfangswerte nach (5.4:43) zum Zuge kommen.

5.4.4.2 Transformation in ein windfestes Bezugssystem

Neben der numerischen Integration des Differenzialgleichungssystems (5.4:45) existiert eine elegante, direkte Möglichkeit, die Windablage eines Geschosses zu berechnen. Sie geht auf den französischen Ballistiker Isidor DIDION (1798-1878) zurück (I. DIDION, 1852, B. P. KNEUBUEHL, 1976). Die Grundidee ist einfach: Die Bewegungsgleichung wird in ein *windfestes* (d. h. mit dem Wind mitbewegtes) Koordinatensystem transformiert, in dem die Ergebnisse der Flugbahnrechnung als bekannt vorausgesetzt werden können. Die Rücktransformation ins erdfeste System liefert dann die Ablage durch den Wind.

Auf die Differenzialgleichung (5.4:44) wird somit die folgende Transformation in das windfeste Stern-System angewendet

$$(5.4:47) \quad \vec{r}^* = A \cdot (\vec{r} - \vec{v}_w \cdot t) , \quad \text{mit} \quad [m]$$

$$(5.4:48) \quad \dot{\vec{r}}^* = A \cdot (\dot{\vec{r}} - \vec{v}_w) , \quad \text{und} \quad [m/s]$$

$$\ddot{\vec{r}}^* = A \cdot (\ddot{\vec{r}} - \dot{\vec{v}}_w) , \quad [m/s^2]$$

woraus bei Annahme einer konstanten Windgeschwindigkeit $\dot{\vec{v}}_w = 0$ folgt

$$(5.4:49) \quad \ddot{\vec{r}}^* = A \cdot \ddot{\vec{r}} . \quad [m/s^2]$$

Die Voraussetzung einer konstanten Windgeschwindigkeit ist durchaus berechtigt, da sowohl bei flachen Flugbahnen in Bodennähe als auch bei steilen Flugbahnen in der freien Atmosphäre innerhalb der Luftschichten die Flugzeiten meist klein sind gegenüber der zeitlichen Dauer des Geschwindigkeitwechsels des Windes (B. KLOSE, 2016).

Die Gleichungen (5.4:48 und 49) werden nun nach $\dot{\vec{r}}$ bzw. $\ddot{\vec{r}}$ aufgelöst und die Ergebnisse in (5.4:44) eingesetzt

$$A^{-1} \cdot \ddot{\vec{r}}^* = - \frac{F_w}{m} \cdot \frac{A^{-1} \cdot \dot{\vec{r}}^* - \vec{v}_w - \vec{v}_w}{\left| A^{-1} \cdot \dot{\vec{r}}^* - \vec{v}_w - \vec{v}_w \right|} + \vec{g} + \vec{a}_c , \quad [m/s^2]$$

$$(5.4:50) \quad \ddot{\vec{r}}^* = - \frac{F_w}{m} \cdot \frac{\dot{\vec{r}}^*}{\left| \dot{\vec{r}}^* \right|} + A \cdot (\vec{g} + \vec{a}_c) . \quad [m/s^2]$$

Unabhängig von der Wahl der (konstanten) Transformationsmatrix A ist dadurch erreicht worden, dass der Windvektor im Stern-System zu Null wird. Gleichung (5.4:50) ist somit die Bahngleichung einer Flugbahn in einem windlosen System.

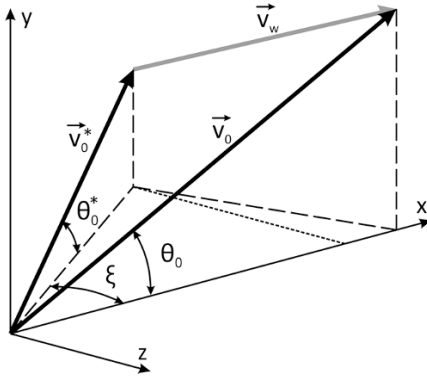


Abb. 5.16. Zur Transformation zwischen erdfestem und windfestem Bezugssystem.

Gleichzeitig ergeben sich aber auch neue Anfangsbedingungen mit der Mündungsgeschwindigkeit $\dot{\vec{r}}^*(0) = \vec{v}_0^*$ und der Elevation θ_0^* .

Durch geeignete Wahl der Matrix A kann erreicht werden, dass der Vektor \vec{v}_0^* im Stern-System in der $x^* - y^*$ -Ebene liegt. A ist dann eine Drehmatrix mit dem Winkel ξ zwischen den Projektionen von \vec{v}_0 und $\vec{v}_0 - \vec{v}_w$ in die x - z -Ebene als Drehwinkel (siehe Abb. 5.16). Drehachse ist die y -Achse. Matrix A lautet

$$(5.4:51) \quad A = \begin{pmatrix} \cos \xi & 0 & \sin \xi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \xi & 0 & \cos \xi \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad [-]$$

$$(5.4:52a) \quad \cos \xi = \frac{v_{0x} - v_{wx}}{\sqrt{(v_{0x} - v_{wx})^2 + v_{wz}^2}}, \quad [-]$$

$$(5.4:52b) \quad \sin \xi = \frac{-v_{wz}}{\sqrt{(v_{0x} - v_{wx})^2 + v_{wz}^2}}. \quad [-]$$

Für $t = 0$ ergibt sich aus (5.4:48)

$$(5.4:53) \quad \vec{v}_0^* = A \cdot (\vec{v}_0 - \vec{v}_w), \quad [\text{m/s}]$$

und aus Abb. 5.16 lässt sich für den Abgangswinkel im gestrichenen System die folgende Beziehung ablesen

$$(5.4:54) \quad \tan \theta_0^* = \frac{v_{0y} - v_{wy}}{\sqrt{(v_{0x} - v_{wx})^2 + v_{wz}^2}}. \quad [-]$$

Mit (5.4:53 und 54) sind die Anfangsbedingungen für die Differenzialgleichung (5.4:50) im Stern-System bekannt und die Gleichung kann nach einem üblichen Verfahren integriert werden. Daraus ergeben sich die Flugbahnpunkte im (windfesten) Stern-System, von denen nun ein beliebiger, z. B. der Auftreffpunkt auf der Mündungsebene $\vec{r}_E^* = \vec{r}_E^*(t_E^*)$, herausgegriffen wird. Dieser wird in der Transfor-

mationsgleichung (5.4:47) eingesetzt und die Gleichung nach dem Vektor \vec{r}_E im erdfesten System aufgelöst. Es ergibt sich

$$(5.4:55) \quad \vec{r}_E = A^{-1} \cdot \vec{r}_E^* + \vec{v}_w \cdot t_E^*, \quad [m]$$

oder in Komponenten geschrieben

$$(5.4:56a) \quad x_E = x_E^* \cdot \cos \xi - z_E^* \cdot \sin \xi + v_{wx} \cdot t_E^*, \quad [m]$$

$$(5.4:56b) \quad y_E = y_E^* + v_{wy} \cdot t_E^*, \quad [m]$$

$$(5.4:56c) \quad z_E = x_E^* \cdot \sin \xi + z_E^* \cdot \cos \xi + v_{wz} \cdot t_E^*. \quad [m]$$

Einsetzen von (5.4:52a und b) in (5.4:56a und c) und umformen führt zu den folgenden Beziehungen für x_E und z_E

$$(5.4:57) \quad x_E = \frac{x_E^* + z_E^* \cdot \frac{v_{wz}}{v_{0x} - v_{wx}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{v_{wz}}{v_{0x} - v_{wx}} \right)^2}} + v_{wx} \cdot t_E^*, \quad [m]$$

$$(5.4:58) \quad z_E = \frac{z_E^* - x_E^* \cdot \frac{v_{wz}}{v_{0x} - v_{wx}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{v_{wz}}{v_{0x} - v_{wx}} \right)^2}} + v_{wz} \cdot t_E^*. \quad [m]$$

Es sei daran erinnert, dass eine beliebige Windrichtung stets in eine Komponente längs und eine quer zur Schussrichtung aufgeteilt werden kann. Die beiden Formeln können somit getrennt nach Längs- und Querwind diskutiert werden. Vertikalwinde werden in der Ballistik zumeist vernachlässigt; mit $v_{wy} = 0$ folgt nach Gl. (5.4:56b) sofort $y_E = y_E^*$.

Der Verzicht auf die Berücksichtigung der Vertikalwinde hängt unter anderem damit zusammen, dass mit den Ballonsonden der Artilleriewetterdienste Auf- und Abwinde kaum gemessen werden können, weil Steig- und Windgeschwindigkeit nicht getrennt werden können. Die Eigensteiggeschwindigkeit des Ballons ist von der Relativgeschwindigkeit zur umgebenden Luft abhängig und ändert sich mit einem Vertikalwind.

In den beiden Formeln (5.4:57 und 58) stecken noch die Schussdistanz x_E^* und die Seitenabweichung z_E^* im windfesten Stern-System. Die Flugzeit ändert sich, wenn überhaupt, nur äußerst geringfügig, sodass $t_E^* = t_E$ gesetzt werden kann. Sieht man zur Vereinfachung im Stern-System von weiteren seitlichen Beschleunigungen wie z. B. Derivations- und Coriolisbeschleunigung ab (welche die reine Abweichung durch den Wind nur wenig beeinflussen), so begnügt man sich mit einer zweidimensionalen Integration im windfesten System. Dies bedeutet, dass auch noch $z_E^* = 0$ angenommen werden kann. Dies wird jedoch die Genauigkeit und den Einsatz dieser Formeln einschränken.

5.4.4.3 Die Didion'sche Längswindformel

Bei reinem Längswind ($v_{wz} = 0$) ergeben sich aus den Gl. (5.4:57 und 58) zusammen mit den erwähnten Annahmen die nachstehenden Ablagen

$$(5.4:59) \quad x_E = x_E^* + v_{wx} \cdot t_E^* , \quad [m]$$

$$\text{mit} \quad z_E = z_E^* = 0 . \quad [m]$$

Der Längswindeinfluss lässt sich somit aus der Schussweite im windlosen System bestimmen, indem die aus Windgeschwindigkeit und Flugzeit im windlosen System erhaltene Strecke vorzeichengerecht hinzu addiert wird. Eine seitliche Abweichung entsteht dabei nicht.

Für Flugbahnen von Artilleriegeschossen ist die Formel ungeeignet. Es entstehen Fehler von 30 % und mehr. Bei Kleinkalibergeschossen lässt sie sich für Elevation über 100 mil (ca. 5.6°) gut verwenden. Der Fehler beträgt dabei weniger als 10 %. Unterhalb dieser Elevation nimmt der Fehler sehr stark zu und kann bei sehr gestreckten, kurzen Flugbahnen 100 % übersteigen.

5.4.4.4 Die Didion'sche Querwindformel

Die seitliche Windablage ist in der Regel von größerem Interesse als die Änderung der Schussweite, insbesondere bei flachen Flugbahnen. Die Querwindformel von DIDION liefert dazu unter gewissen einschränkenden Bedingungen gute Resultate, die der Formel zu einer praktischen Bedeutung verhelfen.

Liegt ausschließlich Querwind vor, entsteht durch Einsetzen von $v_{wx} = 0$ in die Gl. (5.4:57 und 58)

$$(5.4:60) \quad x_E = \frac{x_E^* + z_E^* \cdot \varepsilon}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} , \quad [m]$$

$$(5.4:61) \quad z_E = \frac{z_E^* - x_E^* \cdot \varepsilon}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} + v_{wz} \cdot t_E^* , \quad [m]$$

$$\text{mit} \quad \varepsilon = \frac{v_{wz}}{v_{0x}} . \quad [-]$$

Gilt zudem noch $\varepsilon \ll 1$, (also $v_{wz} \ll v_{0x}$, was bei flachen Flugbahnen fast immer angenommen werden kann), so lassen sich die Gl. (5.4:60) und (5.4:61) linearisieren und lauten, wenn auch noch $z_E^* = 0$ und $t_E^* = t_E$ eingesetzt werden

$$(5.4:62) \quad x_E = x_E^* , \quad [m]$$

$$(5.4:63) \quad z_E = - x_E^* \cdot \frac{v_{wz}}{v_{0x}} + v_{wz} \cdot t_E . \quad [m]$$

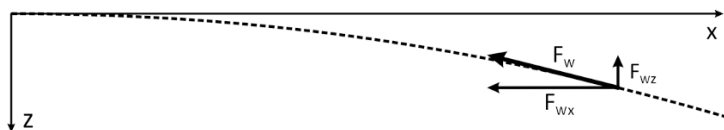


Abb. 5.17. Die Ablenkung durch einen Querwind erzeugt eine Komponente des Luftwiderstandes entgegen der Windrichtung.

Mit Berücksichtigung von (5.4:62) folgt aus (5.4:63) durch einfache Umformung die Didion'sche Querwindformel

$$(5.4:64) \quad z_E = v_{wz} \cdot \left(t_E - \frac{x_E}{v_{0x}} \right) \quad [\text{m}]$$

Der Genauigkeitsbereich der Didion'schen Formel wird vor allem durch die Annahme der zweidimensionalen Rechnung im windfesten System eingeschränkt. Die Ablenkung durch den Wind der effektiven Flugbahn erzeugt eine Komponente des Luftwiderstandes, die der Windrichtung entgegengesetzt ist (siehe Abb. 5.17). Diese Komponente wird bei der Integration im windfesten System nicht berücksichtigt. Daraus folgt

- die Formel (5.4:64) liefert zu große Werte,
- mit zunehmender Flugzeit weichen die Formelwerte weiter von jenen ab, die mit der Integration des Gleichungssystems (5.4:45) erzielt werden.

Die Ergebnisse eines Vergleichs zwischen Formel und Gleichungssystem ist in Abb. 5.18 dargestellt. Der Fehler der ersteren bleibt kleiner als 1 %, wenn die Flugzeit bei Kurzwaffen kürzer als 7 s (Schussdistanz ca. 1 km) und bei Langwaffen kürzer als etwa 15 s (Schussdistanz je nach Kaliber 2–3 km) beträgt. Dies bedeutet, dass die Didion'sche Querwindformel bei allen in der Praxis vorkommenden Flugbahnen kleinkalibrier Waffen sehr gute Werte liefert und daher für eine Schätzung der Windablage geeignet ist, wenn keine Möglichkeit besteht, die Integration des Differenzialgleichungssystems zu vollziehen.

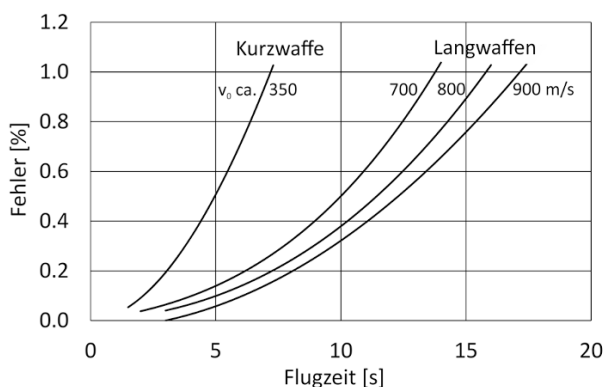


Abb. 5.18. Zur Genauigkeit der Didion'schen Formel zur Berechnung der Querwindablage. Für die üblichen Einsatzdistanzen von Kleinwaffen (Flugzeiten < 5 s) ist der Fehler sehr gering.

Allerdings benötigt die Formel (5.4:64) neben den bekannten Größen Schussdistanz und Mündungsgeschwindigkeit noch die Flugzeit des Geschosses. Falls keine Schusstafel mit diesen Angaben vorliegt, kann man sich wie folgt behelfen:

Ist die Endgeschwindigkeit v_E bekannt, kann die Flugzeit zur Schussdistanz x_E mittels der mittleren Geschwindigkeit berechnet werden

$$(5.4:65) \quad t_E = \frac{2 \cdot x_E}{v_0 + v_E} \quad [s]$$

Ist v_E auch nicht greifbar, kann sie mit den folgenden Schätzwerten aus der Enddistanz ermittelt werden, indem die Endgeschwindigkeit geschätzt wird (bei Gewehren brauchbar bis etwa 300 m):

- Schwere, schlanke Spitzgeschosse (Kaliber 7 mm und größer) verringern ihre Geschwindigkeit um ca. 0.5 m/s pro 1 m Flugweg; eine stumpfere Geschossspitze (z. B. klassisches Jagdgeschoss) vergrößert diesen Wert auf 0.7–0.8 m/s pro 1 m Flugweg,
- leichte, schlanke Spitzgeschosse (Kaliber 6 mm und kleiner) verlieren ca. 1 m/s pro 1 m Flugweg an Geschwindigkeit, bei gedrungenen Geschossformen rechnet man mit 1.2–1.3 m/s Geschwindigkeitsverlust pro 1 m Flugweg.

Die Genauigkeit wird dadurch natürlich geringer, die Ergebnisse sind dennoch als Schätzwerte durchaus tauglich.

Beim Vergleich der ballistischen Eigenschaften zweier Munitionsarten wird in der Regel die Querwindablage betrachtet, die bei 1 m/s Querwind entsteht; sie wird als *Querwindempfindlichkeit* bezeichnet und ergibt sich aus Gl. (5.4:64) zu

$$(5.4:66) \quad z'_E = \frac{z_E}{v_{wz}} = \left(t_E - \frac{x_E}{v_{0x}} \right) \quad [s]$$

5.4.4.5 Experimentelle Bestimmung der Querwindempfindlichkeit

Die bei der Herleitung der Didion'schen Formel angewendete Idee des Wechsels des Bezugssystems kann zu einer experimentellen Bestimmung der Querwindempfindlichkeit verwendet werden. Wird nämlich die Waffe zum Zeitpunkt der Schussauslösung mit gleichförmiger Geschwindigkeit v_q quer zur Schussrichtung bewegt, so ist das Geschoss im mitbewegten waffenfesten System einem konstanten Querwind entgegengesetzter Geschwindigkeit gleichen Betrages ausgesetzt. Das erdfeste Bezugssystem ist in diesem Fall (Windstille vorausgesetzt) zugleich das windfeste System (siehe Abb. 5.19).

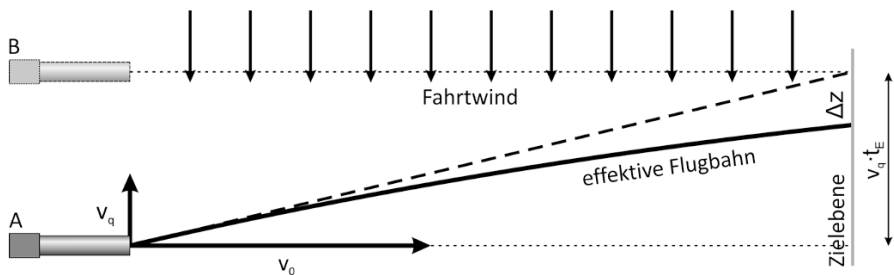


Abb. 5.19. Experimentelle Bestimmung der Querwindempfindlichkeit. A: Position der Waffe bei Schussauslösung und B: bei Eintreffen des Geschosses in der Zielsebene. Die Abweichung Δz des effektiven Geschosseinschlages vom geometrisch erwarteten ergibt die Querwindablage bei v_q .

Wegen der Querbewegung der Waffe mit der Geschwindigkeit v_q gibt es einen theoretischen Geschosseinschlag in der Zielebene, der um die Strecke

$$z_g = v_q \cdot t_E, \quad [m]$$

gegenüber der Abschusslinie verschoben ist, wo t_E die Flugzeit des Geschosses bedeutet. Der effektive Treffpunkt wird jedoch gegenüber diesem Punkt verschoben sein; die Differenz ist das Ergebnis der durch den Fahrtwind erzeugten Verschiebung Δz , die nun der Quergeschwindigkeit v_q zugeordnet werden kann. Die Windempfindlichkeit des betreffenden Geschosses ergibt sich dann als Quotient von Δz und v_q .

Bei der praktischen Durchführung sind neben der genauen Bestimmung der Quergeschwindigkeit der Waffe und der Flugzeit des Projektils auch die Schussentwicklungszeit (Zeit zwischen der Schussauslösung und dem Zeitpunkt, zu dem das Projektil die Mündung verlässt) und auch die Geschwindigkeit eines eventuellen natürlichen Windes zu registrieren.

Eine derartige Messeinrichtung wurde in der Praxis bereits mit verschiedenen Geschossen (auch Raketen) erfolgreich erprobt. Sie ist in B. KNEUBUEHL (1979) ausführlich und mit detaillierten Angaben zur Konstruktion und zur praktischen Auswertung beschrieben.

5.4.5 Eigenschaften der Flugbahn

5.4.5.1 Allgemeines

Ballistische Flugbahnen im Massenpunktsmodell besitzen einige charakteristische Eigenschaften und Merkmale, die mit einfachen Überlegungen aus den Bewegungsgleichungen abgeleitet werden können. Sie haben keine unmittelbare Bedeutung, doch wecken sie das Verständnis und geben ein Gefühl für den geometrisch-physikalischen Ablauf der Geschossbewegung. Die meisten von ihnen sind offensichtlich; dennoch werden die Herleitungen skizziert, weil Begriffe wie „offensichtlich“, „einleuchtend“, „evident“ gerade in der Ballistik mit sehr großer Vorsicht und Zurückhaltung verwendet werden sollten (Abschn. 2.4 sei in Erinnerung gerufen).

Bei einer Flugbahn werden grundsätzlich zwei Hauptteile unterschieden: der *aufsteigende Ast* und der *absteigende Ast*. Der Trennpunkt der beiden Teile ist der höchste Punkt der Flugbahn, der dadurch charakterisiert ist, dass die y -Komponente der Geschwindigkeit verschwindet. Er wird *Gipfel* genannt (umgangssprachlich oft auch als *Scheitel* bezeichnet, was jedoch falsch ist, siehe dazu Abschn. 5.4.5.4).

Die folgenden Überlegungen setzen ein passives Geschoss voraus, also eines ohne eigene Energiequelle. Ausgangspunkt sind die Gleichungen des zweidimensionalen Flugbahnmodells; dies bedeutet jedoch kaum eine Einschränkung, da die betrachteten Eigenschaften durch die seitliche Abweichung der Bahn nicht beeinflusst werden.

5.4.5.2 Eigenschaften der Bahngeschwindigkeit

Die Bahngeschwindigkeit eines Geschosses weist die folgenden 6 charakteristischen Eigenschaften auf, die sich aus den Bewegungsgleichungen des zweidimensionalen Modells und den physikalischen Grundgesetzen herleiten lassen:

- 1 Die Horizontalkomponente der Bahngeschwindigkeit nimmt ständig ab.
- 2 Die Bahngeschwindigkeit nimmt auf dem aufsteigenden Ast stets ab.
- 3 Die Bahngeschwindigkeit auf einer bestimmten Höhe ist im aufsteigenden Ast größer als auf derselben Höhe im absteigenden Ast.
- 4 Die Vertikalgeschwindigkeit auf einer bestimmten Höhe ist im aufsteigenden Ast betragsmäßig größer als auf derselben Höhe im absteigenden Ast.
- 5 Die Bahngeschwindigkeit bleibt beschränkt.
- 6 Relative Extremwerte der Bahngeschwindigkeit können nur auf dem absteigenden Ast auftreten.

Begründungen:

Zu 1. Aus Gleichung (5.4:41/1) ergibt sich bei Division durch v_x und dt

$$\frac{dv_x}{v_x} = -\frac{F_W}{m \cdot v} \cdot dt, \quad [-] \quad (5.4:65)$$

und nach Integration zwischen zwei Punkten 1 und 2 mit $t_2 > t_1$

$$\ln \frac{v_{x2}}{v_{x1}} = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{F_W}{m \cdot v} \cdot dt, \quad [-] \quad (5.4:66)$$

$$(5.4:67) \quad v_{x2} = v_{x1} \cdot \exp\left(-\int_{t_1}^{t_2} \frac{F_W}{m \cdot v} \cdot dt\right). \quad [\text{m/s}]$$

F_W , m und v sind stets positiv; es folgt sofort ein negativer Exponent für die Exponentialfunktion und damit $v_{x2} < v_{x1}$.

Zu 2. Dies ist eine direkte Folge des Energiesatzes, wobei die Änderung der kinetischen Energie des Geschosses der dem Luftwiderstand und der Erdanziehung entgegen erbrachten Arbeit entsprechen muss

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot d(v^2) = -F_W \cdot ds - m \cdot g \cdot \sin\theta \cdot ds, \quad [\text{J}] \quad (5.4:68)$$

und nach Integration, mit $s_2 > s_1$ und der Ersetzung $dy = \sin\theta \cdot ds$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \int_{s_1}^{s_2} d(v^2) = -\int_{s_1}^{s_2} F_W \cdot ds - m \cdot g \cdot \int_{y_1}^{y_2} dy, \quad [\text{J}] \quad (5.4:69)$$

und nach Ausführen der Integration

$$(5.4:68) \quad \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_2^2 - v_1^2) = - \int_{s_1}^{s_2} F_W \cdot ds - m \cdot g \cdot (y_2 - y_1) . \quad [J]$$

Wegen $y_2 > y_1$ ist die rechte Seite negativ und damit auch die linke, woraus sofort $v_2 < v_1$ folgt.

Zu 3. Da nun $y_2 = y_1$ aber immer noch $s_2 > s_1$ gilt, fällt in (5.4:68) auf der rechten Seite der zweite Summand weg. Die rechte Seite bleibt negativ und somit auch die linke, sodass mit derselben Überlegung wie oben $v_2 < v_1$ folgt. Dies bedeutet speziell für den Mündungshorizont, dass v_E stets kleiner ist als v_0 .

Zu 4. Die Gleichung (5.4:41/2) wird mit der Setzung

$$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{v_y} , \quad [s/m]$$

auf die Integrationsvariable y umgeschrieben

$$v_y \cdot dv_y = - \frac{F_W}{m} \cdot \frac{v_y}{v} \cdot dy - g \cdot dy = - \frac{F_W}{m} \cdot \sin \theta \cdot dy - g \cdot dy , \quad [m^2/s^2]$$

und mit $dy = v \cdot \sin \theta \cdot dt$ ergibt sich

$$d(v_y^2) = - \frac{F_W}{m} \cdot \sin \theta \cdot v \cdot \sin \theta \cdot dt - g \cdot dy . \quad [m^2/s^2]$$

Integriert wird von Punkt 1 im aufsteigenden zu Punkt 2 im absteigenden Ast

$$(5.4:69) \quad \int_1^2 d(v_y^2) = v_{y_2}^2 - v_{y_1}^2 = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{F_W}{m} \cdot v \cdot \sin^2 \theta \cdot dt - \int_{y_1}^{y_2} g \cdot dy . \quad [m^2/s^2]$$

Wegen $y_2 = y_1$ verschwindet der zweite Summand auf der rechten Seite, die rechte Seite bleibt negativ und damit auch die linke. Eigenschaft 4 ist damit bewiesen.

Vorbereitend für die Begründung der Eigenschaften 5 und 6 sei gezeigt, dass sich das Minimum der Bahngeschwindigkeit im absteigenden Ast befindet. Die Substitution

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{v} , \quad [s/m]$$

führt die Gl. (5.4:10/1) in die folgende Beziehung über, die übrigens auch den Energiesatz darstellt

$$(5.4:70) \quad v \cdot dv = - \left(\frac{F_W}{m} + g \cdot \sin \theta \right) \cdot ds . \quad [m^2/s^2]$$

Im Gipfel ist $\sin \theta = 0$ und $F_W/m > 0$. Somit muss $dv < 0$ sein; die Geschwindigkeit nimmt im Gipfelpunkt noch weiter ab, wodurch das Minimum in den absteigenden Ast verschoben wird.

Zu 5. Nach dem eben Nachgewiesenen genügt es, Überlegungen für den absteigenden Ast durchzuführen. Das Geschoss ist der Erdbeschleunigung unterworfen,

nimmt daher nach dem Punkt minimaler Bahngeschwindigkeit wieder an Geschwindigkeit zu. Da aber die Verzögerung mit der Geschwindigkeit quadratisch wächst und die Erdbeschleunigung mit abnehmender Höhe nur wenig zunimmt, kommt es zu einem gewissen Zeitpunkt zur Gleichheit zwischen Verzögerung und Beschleunigung und damit zu $dv = 0$. Aus Gl. (5.4:70) folgt mit Gl. (5.4:37)

$$\frac{F_w}{m} = c_w \cdot \frac{\rho}{2 \cdot q} \cdot v^2 = -g \cdot \sin \theta . \quad [\text{m/s}^2]$$

Weil der Bahnwinkel θ zu diesem Zeitpunkt in die Gegend von -90° kommt, kann $\sin \theta = -1$ gesetzt werden. Nach der Geschwindigkeit aufgelöst ergibt sich

$$(5.4:71) \quad v = \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot g}{c_w \cdot \rho}} . \quad [\text{m/s}]$$

Dies ist die sogenannte *Fallschirmgeschwindigkeit* eines Geschosses. Sie bildet eine obere Schranke für die Geschwindigkeit eines fallenden Geschosses, womit die Aussage 5 nachgewiesen ist.

Das Erreichen eines relativen Maximums findet nur auf sehr steilen absteigenden Ästen und damit nur bei großen Elevationen statt (obere Winkelgruppe). Bei den meisten Flugbahnen nimmt die Geschwindigkeit bis zum Aufprall zu.

Zu 6. Das relative Minimum auf dem absteigenden Ast ist bereits nachgewiesen worden. Für das relative Maximum sind zwei Fälle zu unterscheiden:

- Die Fallschirmgeschwindigkeit ist deutlich kleiner als die Schallgeschwindigkeit. Dies tritt bei kleineren Querschnittsbelastungen ein (Klein- und leichte Mittelkalibergeschosse). In diesem Fall ist der c_w -Wert ungefähr konstant. Weil mit abnehmender Flughöhe die Luftdichte stärker zunimmt als die Erdbeschleunigung, wird die Geschwindigkeit nach Erreichen des relativen Maximums wieder abnehmen. Dies tritt allerdings erst unterhalb der Mündungshöhe ein. Auf dieser Höhe sind die Geschosse noch am Beschleunigen.
- Geschosse mit großer Querschnittsbelastung (schwere Mittelkaliber- und Artilleriegeschosse) erhalten eine Fallschirmgeschwindigkeit, die in der Nähe der Schallgeschwindigkeit liegt. Bei einer weiteren Zunahme der Geschwindigkeit steigt der c_w -Wert massiv an, was das Geschoss wiederum stark verzögern lässt. Dadurch sinkt der c_w -Wert erneut ab und das Geschoss beschleunigt wieder. Es entsteht eine Art Schwingungszustand zwischen Beschleunigung und Verzögerung, der zu einer mittleren Sinkgeschwindigkeit führt, die – wiederum wegen der zunehmenden Luftdichte – laufend kleiner wird. Es ist somit auch hier ein relatives Maximum vorhanden, das oberhalb der Mündungsebene eintritt.

Dieses zuletzt beschriebene Verhalten ist bei einem Artillerieschießen im Zielgebiet gut hörbar. Die niedergehende Granate wechselt fortlaufend von tiefer Überschall- zu hoher Unterschallgeschwindigkeit, was sich durch ein deutliches Knattern (unterbrochene Stoßwellen) kund tut.

In den Abbildungen 5.20, 5.21 und 5.22 sind die Geschwindigkeitsverläufe eines Kleinkaliber-, eines Mittelkaliber- und eines Artilleriegeschosses bei großer Elevation über der Schussdistanz dargestellt. Die eben erläuterten Eigenschaften lassen sich gut erkennen. Beim Gewehrsgeschoss (Abb. 5.20) nimmt die Geschwindigkeit am Ende der Flugbahn noch zu, beim Mittelkalibergeschoss (Abb. 5.21) beginnt sie gegen ein Maximum abzubiegen und beim Artilleriegeschoss (Abb. 5.22) ist bereits ein Maximum sichtbar. Bei kleineren Elevationen (unterhalb etwa 800 mil) beschleunigt auch das Artilleriegeschoss bis zur Mündungshöhe.

Bemerkenswert ist der Knick im Bereich der Schallgeschwindigkeit, der mit zunehmendem Kaliber immer weniger ausgeprägt ist.

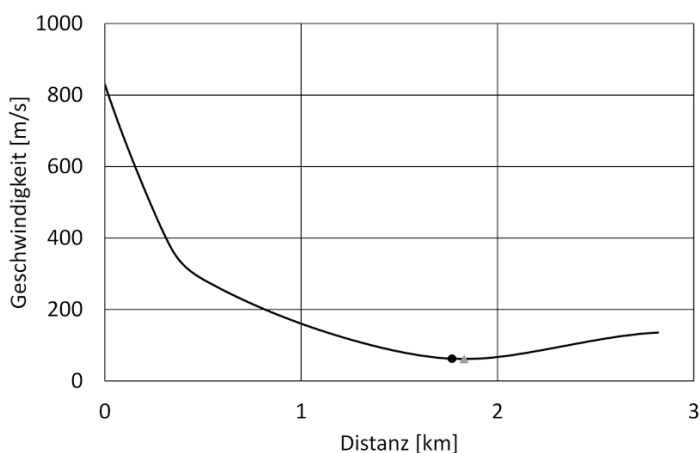


Abb. 5.20. Geschwindigkeitsverlauf eines Gewehrsgeschosses, Elevation 1100 mil. Der schwarze Kreis zeigt den Gipfel, das graue Dreieck den Punkt kleinster Geschwindigkeit.

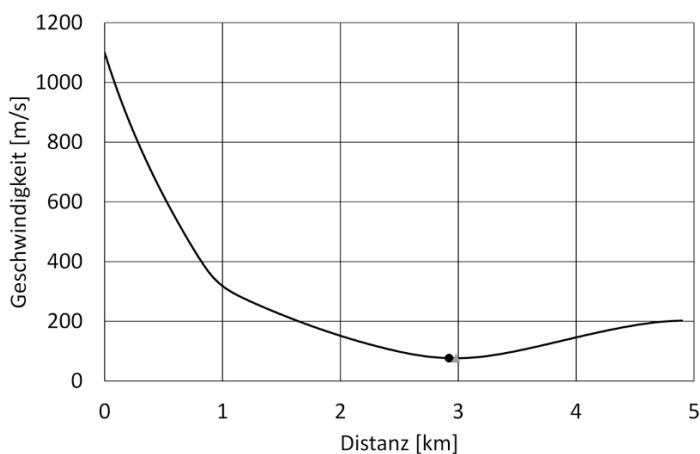


Abb. 5.21. Geschwindigkeitsverlauf eines 20-mm-Flak-Geschosses, Elevation 1200 mil. Die Markierungen bedeuten das Gleiche wie in Abb. 5.20.

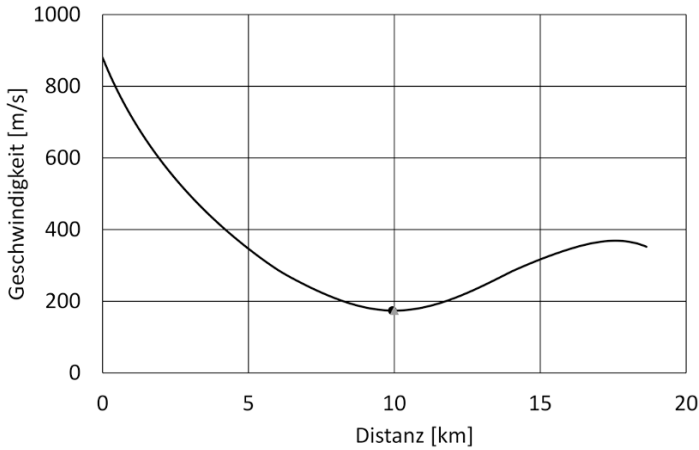


Abb. 5.22. Geschwindigkeitsverlauf eines 155-mm-Artilleriegeschosses, Elevation 1200 mil. Der schwarze Kreis zeigt den Gipfel, das graue Dreieck den Punkt kleinster Geschwindigkeit. Die Geschwindigkeit erreicht ein relatives Maximum, bevor die Mündungshöhe erreicht wird.

5.4.5.3 Geometrische Eigenschaften der Flugbahn

Neben den Eigenschaften der Bahngeschwindigkeit seien noch die folgenden geometrischen Eigenschaften der Flugbahn erwähnt:

- 7 Der Bahnwinkel nimmt längs der Flugbahn ständig ab. Im aufsteigenden Ast ist er positiv, im absteigenden Ast negativ.
- 8 Der Bahnwinkel ist auf einer bestimmten Höhe im aufsteigenden Ast betragsmäßig kleiner als auf derselben Höhe im absteigenden Ast.
- 9 Der absteigende Ast der Flugbahn hat eine vertikale Asymptote.
- 10 Der Gipfel einer Flugbahn liegt stets hinter der Mitte zwischen zwei gleich-hohen Bahnpunkten.

Begründungen:

Zu 7. Nach Eigenschaft 1 ist die Horizontalkomponente der Geschwindigkeit $v_x = v \cdot \cos \theta$ monoton abnehmend. Daraus folgt $d(v \cdot \cos \theta) < 0$. Ein Blick auf die Hauptgleichung der Außenballistik (5.4:13)

$$\frac{d(v \cdot \cos \theta)}{d\theta} = \frac{F_w \cdot v}{m \cdot g}, \quad [\text{m/s}]$$

deren rechte Seite positiv ist, zeigt, dass dies nur mit $d\theta < 0$ möglich ist; dies gilt (zusammen mit der Hauptgleichung) für die ganze Flugbahn.

Zu 8. Die nachzuweisende Eigenschaft ist eine Beziehung zwischen Bahnwinkel und Flughöhe. Im Gleichungssystem (5.4:10) finden sich die zweite und die vierte Gleichung, welche zusammen diese zwei Variablen betreffen

$$\dot{\theta} = -\frac{g}{v} \cdot \cos \theta, \quad [1/s]$$

und $\dot{y} = v \cdot \sin \theta.$ [m/s]

Wird die vierte durch die zweite dividiert, entsteht

$$\frac{dy}{d\theta} = -\frac{v^2}{g} \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \quad [m]$$

und $\frac{d(\cos \theta)}{\cos \theta} = \frac{g}{v^2} \cdot dy.$ [-]

Das Integral von Punkt 1 (y_1, θ_1) zu Punkt 2 (y_2, θ_2) ergibt

$$(5.4:72) \quad \ln(\cos \theta_2) - \ln(\cos \theta_1) = \int_{y_1}^{y_2} \frac{g}{v^2} \cdot dy. \quad [-]$$

Die Integration vom Punkt 1 im aufsteigenden Ast zum Punkt 2 im absteigenden Ast wird im Gipfel unterbrochen (mit $\theta_G = 0$ im Gipfel)

$$\ln(\cos \theta_1) = -\int_{y_1}^{y_G} \frac{g}{v^2} \cdot dy, \quad [-]$$

$$\ln(\cos \theta_2) = -\int_{y_2}^{y_G} \frac{g}{v^2} \cdot dy. \quad [-]$$

Weil in gleicher Höhe die Geschwindigkeit im aufsteigenden Ast stets größer ist als im absteigenden Ast (Eigenschaft 3) und θ monoton abnimmt, folgt aus den beiden letzten Gleichungen

$$\ln(\cos \theta_1) \geq \ln(\cos \theta_2) \Rightarrow \cos \theta_1 \geq \cos \theta_2, \quad [-]$$

und somit $|\theta_1| \leq |\theta_2|.$ [-]

Zudem bedeutet dies auch, dass der absteigende Ast stets steiler verläuft als der aufsteigende und dass der Fallwinkel auf Mündungshöhe stets größer ist als die Elevation.

Zu 9. In der Begründung zur Eigenschaft 1 wurde die Gl. (5.4:67) hergeleitet, in welche der Luftwiderstand mit Gl. (5.4:37) eingesetzt werden kann

$$v_{x2} = v_{x1} \cdot \exp\left(-\int_{t_1}^{t_2} \frac{c_w \cdot \rho \cdot v}{2 \cdot q} \cdot dt\right), \quad [m/s]$$

worin q die Querschnittsbelastung des Geschosses bedeutet.

Der Integrand im Exponenten ist positiv und hat einen konstanten Nenner, weshalb für $t_2 \rightarrow \infty$ auch das Integral gegen unendlich strebt und somit die Horizontalge-

schwindigkeit den Grenzwert 0 hat. Dies bedeutet aber auch, dass bei jeder Flugbahn im luftgefüllten Raum eine Grenzschussweite existiert, die nicht überschritten werden kann, womit die vertikale Asymptote des absteigenden Astes bestätigt ist.

Zu 10. Aus der Eigenschaft 8 leitet sich auch diese Aussage ab; weil der aufsteigende Ast flacher, der absteigende steiler verläuft, verschiebt sich der Gipfel vom Abgangspunkt der Flugbahn weg.

Flugbahnen im Vakuum und im parallelen Gravitationsfeld besitzen die Form einer Parabel (siehe Gl. 2.2:34), sind also symmetrisch. Das Auftreten des Luftwiderstandes bewirkt nach Eigenschaft 10 eine Unsymmetrie im Bahnverlauf, die umso deutlicher wird, je mehr sich das Geschoss verzögert. Geschosse kleiner Querschnittsbelastung und hoher Geschwindigkeit werden eine starke Unsymmetrie der Bahn aufweisen, schwere und langsame Geschosse einem annähernd parabelförmigen Verlauf folgen. Dies zeigt Abb. 5.23 deutlich, in der vier Flugbahnen vom leichten, sehr schnellen Splitter zum schweren, langsamen Artilleriegeschoss in prozentualem Maßstab dargestellt sind.

Der schnelle Splitter (Bahn 1 in Abb. 5.23, Masse 1.1 g, v_0 2000 m/s) erreicht den Gipfel nach 77 % der Schussdistanz wogegen das langsame Artilleriegeschoss (Bahn 4, Masse 43 kg, v_0 470 m/s) bereits nach 53 % zurückgelegter Distanz im höchsten Punkt ankommt. Beim leichten (Bahn 2) und schweren (Bahn 3) Infanteriegeschoss lauten die Werte 66 % und 62 %. Alle vier Bahnen sind mit der gleichen Elevation (600 mil) gerechnet worden. Es lässt sich auch eine Abhängigkeit von der Elevation feststellen. In der unteren Winkelgruppe (bis zur maximalen Schussdistanz) nimmt die Unsymmetrie leicht zu, in der oberen Winkelgruppe wieder leicht ab.

5.4.5.4 Besondere Punkte der Flugbahn

Auf einer Flugbahn existieren neben dem Gipfel einige weitere Punkte, die flugbahngeometrisch interessant sind, weil jeder eine Extremaleigenschaft besitzt und alle in einer bestimmten, stets gleichen Reihenfolge auf dem absteigenden Ast liegen. Es sind dies:

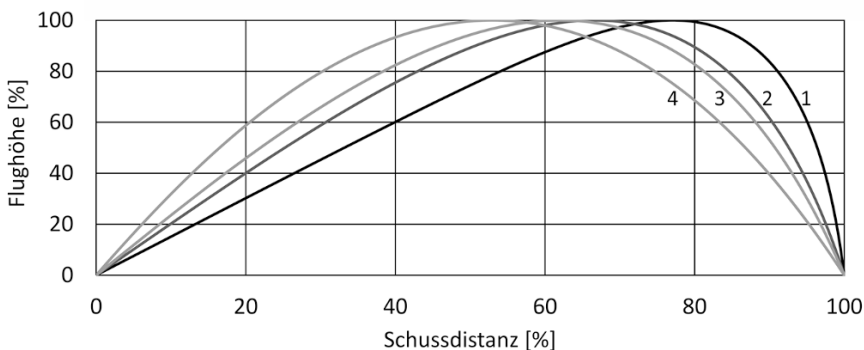


Abb. 5.23. Prozentuale Darstellung von vier Flugbahnen unterschiedlicher Verzögerung. Bahn 1, leichter, schneller Splitter, Bahn 2, leichtes Infanteriegeschoss Kaliber 5.56×45 , Bahn 3, schweres Infanteriegeschoss Kaliber 7.5×55 , Bahn 4, Artilleriegeschoss.

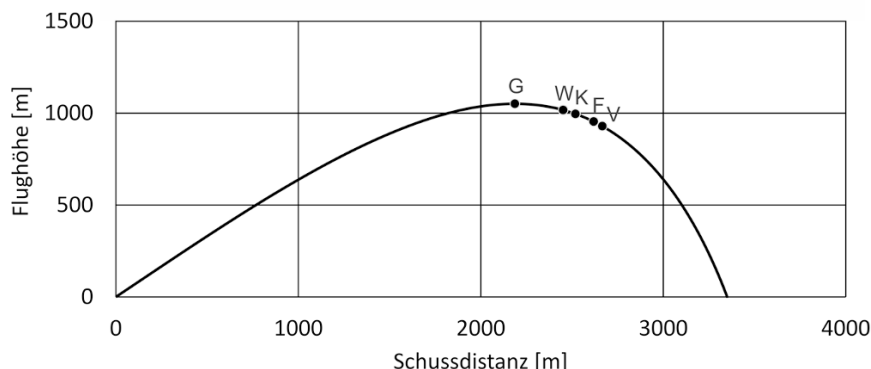


Abb. 5.24. Flugbahn eines Kleinkalibergeschosses (Kaliber 5.56×45) mit den eingetragenen besonderen Punkten, Elevation 600 mil. Bahn und Punkte sind maßstäblich gezeichnet.

- G Gipfel (höchster Punkt der Bahn),
- W Punkt größter Bahnwinkelgeschwindigkeit,
- K Punkt größter Bahnkrümmung, auch Scheitelpunkt genannt,
- F Punkt kleinster Folgsamkeit (meist auch Punkt größter Stabilität),
- V Punkt kleinster Geschwindigkeit.

In der Abb. 5.24 sind diese Punkte auf einer Flugbahn eines Kleinkalibergeschosses (Kaliber 5.56×45) maßstabsrichtig eingezeichnet. Mit zunehmender Elevation rückt der Punkt kleinster Geschwindigkeit näher zum Gipfel (siehe Abb. 5.20–22) und damit auch alle besonderen Punkte.

Der Flugbahnscheitel ist also jener Punkt, in dem der Schmiegkreis der Flugbahn den kleinsten Radius hat. Er findet sich stets an zweiter Stelle der besonderen Punkte nach dem Gipfel.

Für die Bewegung eines Geschosses spielt, nebst dem Gipfel, insbesondere der Punkt kleinster Folgsamkeit eine Rolle. Hat ein Geschoss diesen Punkt der Flugbahn ohne Störung überwunden, kann mit einem normalen Flug bis zum Ende gerechnet werden. Eine eingehendere Besprechung der Folgsamkeit erfolgt im Abschn. 5.6 „Stabilität und Folgsamkeit“. Die anderen drei Punkte haben keine unmittelbare ballistische Bedeutung.

5.4.6 Näherungen

5.4.6.1 Näherungen für flache Flugbahnen

Eine Flugbahn wird als *flach* bezeichnet, wenn der Schusswinkel weniger als rund 100 mil (etwa 5.6°) beträgt. Ihre Berechnung kann wesentlich vereinfacht werden, weil die Erdbeschleunigung stets annähernd senkrecht zur Bewegungsrichtung steht, die Flugzeit kurz ist und die Luftdichte und -temperatur längs der ganzen Flugbahn konstant bleiben. Die kurze Flugzeit bedeutet auch eine relativ geringe

Geschwindigkeitsänderung und erlaubt somit auch, einen konstanten Luftwiderstandsbeiwert c_w anzunehmen.

Ausgangspunkt für die Berechnung ist die Gl. (5.4:10/1) mit dem eingesetzten Ausdruck (5.4:37) für die Verzögerung

$$\dot{v} = -c_w \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot \frac{1}{q}, \quad [\text{m/s}^2]$$

wobei $\sin\theta \approx 0$ gesetzt worden ist. Alle festen Werte lassen sich zu einer Konstanten K zusammenfassen

$$(5.4:73) \quad K = \frac{c_w \cdot \rho}{2 \cdot q}, \quad [1/\text{m}]$$

mit welcher die folgende integrierbare, zeitabhängige Differenzialgleichung für die Geschwindigkeit resultiert

$$(5.4:74) \quad \dot{v} = -K \cdot v^2. \quad [\text{m/s}^2]$$

Trennung der Variablen und Integration mit der Anfangsbedingung $v(0) = v_0$ führt zur Lösung

$$(5.4:75) \quad v(t) = \frac{v_0}{1 + K \cdot v_0 \cdot t}. \quad [\text{m/s}]$$

Durch Anwenden der Substitution (5.4:39) auf Gl. (5.4:74) kann die entsprechende wegababhängige Gleichung dargestellt werden

$$(5.4:76) \quad v' = -K \cdot v, \quad [1/\text{s}]$$

die in gleicher Weise und mit gleicher Anfangsbedingung gelöst werden kann

$$(5.4:77) \quad v(x) = v_0 \cdot e^{-K \cdot x}. \quad [\text{m/s}]$$

Wird Gl. (5.4:75) nach der Flugzeit aufgelöst und darin für die Geschwindigkeit Gl. (5.4:77) eingesetzt, ergibt sich eine Formel für die Flugzeit in Abhängigkeit der Schussdistanz

$$(5.4:78) \quad t(x) = \frac{1}{v_0 \cdot K} \cdot (e^{K \cdot x} - 1). \quad [\text{s}]$$

Mit den Bedingungen für flache Flugbahnen lässt sich auch eine Gleichung für die Flugbahn selbst herleiten. Ausgegangen wird von der Gl. (5.4:41/2)

$$\dot{v}_y = \ddot{y} = -\frac{F_w}{m} \cdot \frac{v_y}{v} - g = -K \cdot v \cdot v_y - g. \quad [\text{m/s}^2]$$

Mit einer kurzen Rechnung lässt sich die zweite zeitliche Ableitung von y auf die Variable x umschreiben

$$\ddot{y} = (y'' \cdot v_x + y' \cdot v'_x) \cdot v_x, \quad [\text{m/s}^2]$$

und in der obigen Gleichung ersetzen

$$(5.4:79) \quad (y'' \cdot v_x + y' \cdot v'_x) \cdot v_x = -K \cdot v \cdot v_y - g . \quad [\text{m/s}^2]$$

Die Voraussetzung der flachen Flugbahn gestattet die Setzung $v = v_x$ und dadurch mit Gl. (5.4:77)

$$v_x = v_{0x} \cdot e^{-K \cdot x} , \quad [\text{m/s}]$$

$$v'_x = -K \cdot v_{0x} \cdot e^{-K \cdot x} , \quad [1/\text{s}]$$

sowie $v_y = y' \cdot v_x . \quad [\text{m/s}]$

Eingesetzt in Gl. (5.4:79) und vereinfacht, führt zu der Differenzialgleichung der Flugbahn

$$(5.4:80) \quad y'' = -\frac{g}{v_{0x}^2} \cdot e^{2 \cdot K \cdot x} , \quad [1/\text{m}]$$

die sich elementar integrieren lässt. Mit der Anfangsbedingung $y'(0) = \tan \theta_0$ folgt zunächst eine Gleichung für den Bahnwinkel

$$(5.4:81) \quad y'(x) = \tan\{\theta(x)\} = \tan \theta_0 - \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \theta_0 \cdot K} \cdot (e^{2 \cdot K \cdot x} - 1) , \quad [-]$$

deren Integration mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$ zu der geschlossenen Darstellung der Flugbahnkurve führt

$$(5.4:82) \quad y(x) = x \cdot \tan \theta_0 - \frac{g}{4 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \theta_0 \cdot K^2} \cdot (e^{2 \cdot K \cdot x} - 2 \cdot K \cdot x - 1) . \quad [\text{m}]$$

Die Gleichungen (5.4:77 und 78) sowie (5.4:81 und 82) bilden einen Formelsatz, mit dem die wichtigsten Flugbahndaten direkt berechnet werden können. Er lässt sich auch einfach auf einem wissenschaftlichen Taschenrechner programmieren. In der Tabelle 5.5 sind einige Werte für die Konstante K zusammengestellt. Falls der BC eines Geschosses (siehe Abschn. 5.4.2.4) für einen gewissen Geschwindigkeitsbereich bekannt ist, kann K mit der folgenden Formel bestimmt werden

$$(5.4:83) \quad K = 0.00068422 \cdot \frac{c_w(\text{NG})}{\text{BC}} , \quad [1/\text{m}]$$

wo $c_w(\text{NG})$ ein mittlerer Luftwiderstandsbeiwert des Normalgeschosses G1 im betreffenden Geschwindigkeitsbereich ist. In der Beizahl sind die Umrechnungen von den angloamerikanischen zu den metrischen Einheiten bereits enthalten.

Wegen den vereinfachenden Annahmen lassen sich diese Formeln nur mit gewissen Einschränkungen verwenden. Ein konstanter Luftwiderstandsbeiwert längs der Flugbahn lässt sich im Überschallbereich für Geschwindigkeitsänderungen von höchstens 200 bis 300 m/s vertreten. Dies entspricht einer Schussdistanz bis etwa 300 m, für größere Kaliber bis rund 500 m. Im Transschallbereich ist die Änderung des c_w so groß, dass diese Rechnungen nur für sehr kurze Distanzen (50 m) verwendet werden könnten und daher kaum sinnvoll sind.

Tabelle 5.5. K-Werte für die näherungsweise Berechnung von Flugbahndaten

Kaliber	Masse [g]	Bereich bis [m]	Ortshöhe [m ü. M.]		
			0	200	400
5.56 mm NATO	4.1	300	0.0011630	0.0011383	0.0011142
7.5 × 55 GP 11	11.3	300	0.0007333	0.0007182	0.0007035
7.62 × 39 Kalashnikov	8.0	300	0.0017081	0.0016713	0.0016353
7.62 mm NATO	9.5	300	0.0009654	0.0009451	0.0009253
338 Win. Mag.	16.2	500	0.0008318	0.0008144	0.0007972
12.7 × 99 (50 Brown.)	42.0	500	0.0005750	0.0005631	0.0005514

5.4.6.2 Näherungen für die Gipfelhöhe

Eine weitere bedeutsame außenballistische Maßzahl ist die maximale Flughöhe y_G des Geschosses (Gipfelhöhe). Sie kann allerdings nicht direkt aus den im vorigen Abschnitt hergeleiteten Gleichungen bestimmt werden. Es existiert jedoch eine Näherungsformel, die der Vakuumballistik entnommen worden ist, und die recht genaue Werte liefert. Sie wird *Haupt'sche Gleichung* genannt.

$$(5.4:84) \quad y_G = \frac{1}{8} \cdot g \cdot t_E^2 \quad [m]$$

Darin bedeutet g die Erdbeschleunigung und t_E die Flugzeit für die gesamte Schussdistanz x_E , zu der die Gipfelhöhe y_G gehört. Für praktische Rechnungen kann die Flugzeit nach Gl. (5.4:65) eingesetzt werden. Zur Herleitung der Haupt'schen Gleichung siehe Abschnitt 2.2.6.3 (Gl. 2.2:38).

Jede Flugbahn verläuft ganz zwischen zwei Parabeln mit gleicher Schussweite, von denen die eine den gleichen Abgangswinkel, die andere den gleichen Fallwinkel wie die betrachtete Flugbahn hat (siehe Abb. 5.25). Für die Gipfelhöhen der beiden Parabeln ergeben sich aus der Kombination der beiden Formeln (2.2:35 und 37) aus Abschn. 2.2.6.3 die folgenden Beziehungen

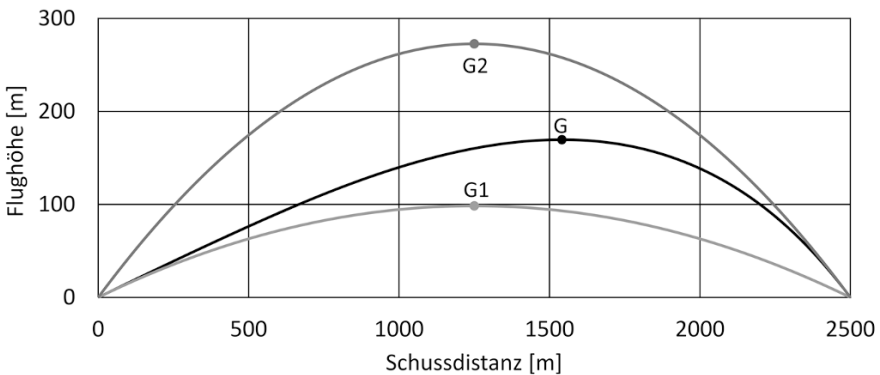


Abb. 5.25. Flugbahn eines Gewehrsgeschosses im Kaliber 5.56 x 45 mit den beiden umschließenden Parabeln. Markiert sind die Gipfel der drei Bahnen.

$$y_{G1} = \frac{x_E}{4} \cdot \tan \theta_0, \quad [m]$$

$$y_{G2} = \frac{x_E}{4} \cdot \tan \omega_H, \quad [m]$$

worin x_E die Schussdistanz, θ_0 die Elevation und ω_H den Fallwinkel bezüglich der Horizontalen bedeutet.

Das geometrische Mittel dieser beiden Gipfel liefern recht genaue Werte für den Gipfel der von den beiden Parabeln eingeschlossenen Flugbahn

$$(5.4:85) \quad y_G = \frac{x_E}{4} \cdot \sqrt{\tan \theta_0 \cdot \tan \omega_H}. \quad [m]$$

Je parabelähnlicher eine Flugbahn ist (d. h. je größer die Querschnittsbelastung und je geringer die Geschwindigkeit), desto genauer werden die Resultate dieser Näherungsformel.

Im dargestellten Beispiel (Abb. 5.25) eines kleinkalibrigen Geschosses mit einer recht stark unsymmetrischen Flugbahn beträgt der Fehler rund 3.3 %.

Zu ihrer Auswertung benötigt Gl. (5.4:85) neben der Schussdistanz auch die Elevation und den Fallwinkel, Werte, die nicht ohne weiteres zur Hand sind. Damit stellt sich die Frage nach dem Nutzen einer solchen Formel. Vorbereitete Elevation- (oder Schussdistanz-) -Fallwinkeldiagramme geben auf Grund eines gemessenen Fallwinkels Auskunft über die ungefähre Schussdistanz und mit Gl. (5.4:85) auch über die Gipfelhöhe (näheres siehe Abschn. 8.2.1, „Flugbahnrekonstruktion“).

5.4.6.3 Näherungen für den Auftreffpunkt

Im Auftreffpunkt einer Flugbahn interessieren in erster Linie Schussweite, Endgeschwindigkeit und Fallwinkel. Einfache Näherungsformeln für Schussweite und Endgeschwindigkeit sind kaum anzugeben. Erwähnenswert für die Schussweite ist die Flugbahngleichung nach A.-H. PITON-BRESSANT (1852). Sie ergibt sich aus der Potenzreihenentwicklung der Flugbahngleichung wenn nach dem dritten Glied abgebrochen wird (H. MOLITZ, R. STROBEL, 1963).

$$(5.4:86) \quad y = x \cdot \tan \theta_0 - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \theta} \cdot (1 + Q \cdot x). \quad [m]$$

Die Zahl Q ist eine geschoss-, elevations- und v_0 -abhängige Zahl, die experimentell ermittelt werden muss. Ist Q einmal bekannt, so kann mit (5.4:86) die Flugbahn recht gut berechnet werden.

5.4.6.4 Der Schuss auf geneigter Ebene

Waffen werden üblicherweise horizontal oder annähernd horizontal eingeschossen. Wird anschließend im Gelände mit derselben Visiereinstellung relativ steil aufwärts

Tabelle 5.6. Schusswinkeländerung beim Auf- oder Abwärtsschießen, (in mil) zugleich Höhenfehler in Promille der Schussdistanz

Lagewinkel λ [°]	Schusswinkel σ [mil]				
	2	3	4	5	6
5	0.007	0.010	0.014	0.017	0.019
10	0.029	0.043	0.057	0.070	0.084
15	0.066	0.098	0.130	0.161	0.192
20	0.117	0.175	0.232	0.288	0.344
25	0.183	0.273	0.362	0.451	0.539
30	0.261	0.391	0.520	0.647	0.774

oder abwärts geschossen, so nimmt die Flugbahn einen anderen Verlauf, als dies beim Einschießen der Fall war. Der effektive Abgangswinkel des Geschosses (die Elevation) ergibt sich nämlich als Summe des Schusswinkels und des Lagewinkels (siehe dazu Abb. 5.15, Seite 189).

Beim horizontalen Schießen wirkt die Erdbeschleunigung senkrecht zur Ziellinie auf das Geschoss. Wird die Schussrichtung um den Lagewinkel λ gedreht, ist nur noch der Anteil $g \cdot \cos \lambda$ wirksam. Bezüglich der geneigten Ziellinie erfährt das Geschoss eine geringere Beschleunigung vertikal zur Ziellinie, weshalb der Treffpunkt höher sein wird als beim horizontalen Schuss.

Aus den Flugbahngleichungen im luftleeren Raum lässt sich eine Näherungsformel für den relativen Höhenfehler herleiten. Sie lautet

$$(5.4:87) \quad \Delta\sigma = \frac{1000 \cdot \cos \lambda \cdot \sin \sigma}{\cos(\lambda + \sigma)} \cdot \left(1 - \frac{\cos \lambda}{1 - \tan \lambda \cdot \tan \sigma} \right). \quad [\text{mil}]$$

Darin bedeuten $\Delta\sigma$ die Schusswinkeländerung (zugleich der Höhenfehler in Promille der Schussdistanz), σ den Schusswinkel und λ den Lagewinkel des Zieles.

In der Tabelle 5.6 sind für einige Schuss- und Lagewinkel die zu erwartenden Höhenabweichungen zusammengestellt. Geschosse mit hohen Anfangsgeschwindigkeiten (und damit kleinen Schusswinkeln) ergeben geringere Abweichungen als langsame.

5.4.6.5 Der Schuss steil aufwärts in die Luft

Es gibt immer wieder Personen, die bei besonderen Gelegenheiten (Feiertage, Silvester) glauben in die Luft schießen zu müssen. Geschosse, die steil in die Luft geschossen worden sind, fliegen im absteigenden Ast der Flugbahn mit zunehmender Geschwindigkeit, überschreiten jedoch die in Abschn. 5.4.5.2 unter Punkt 5 hergeleiteten Fallschirmgeschwindigkeiten nicht.

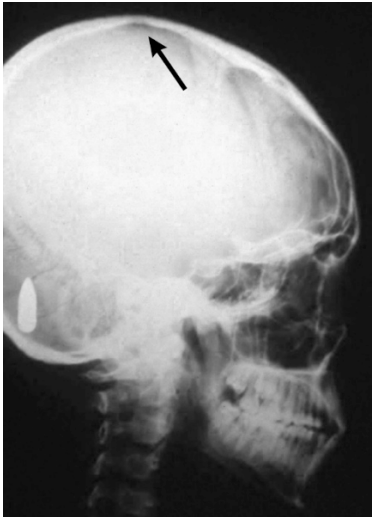
Geschosse großer Querschnittsbelastung (für die Artillerie) und hoher Geschwindigkeit erreichen das relative Geschwindigkeitsmaximum oberhalb der Mündungshöhe, alle andern Auslegungen befinden sich auf dieser Höhe noch in einer leichten Beschleunigung (Δv etwa 1 m/s pro 100 m Fallstrecke oder weniger),

Tabelle 5.7. Ballistische Daten fallender Geschosse

Geschoss	d	q	v _f	v _E	E _E	ED	y _G
	[mm]	[g/mm ²]	[m/s]	[m/s]	[J]	[J/mm ²]	[m]
4.5 mm Diabolo Fk Schrotkorn (Pb) do.	4.5	0.0332	30.3	26.1	0.13	0.008	149
	5.0	0.0377	35.4	34.5	0.44	0.022	271
	6.0	0.0452	38.8	37.8	0.91	0.032	314
22 L.R. PbR	5.6	0.1035	80.6	77.8	7.73	0.314	882
9 mm Luger VMR	9.0	0.1258	94.4	91.3	33.4	0.524	1130
38 Spl. SWC	9.0	0.1610	91.5	86.6	38.4	0.604	913
44 Rem. Mag. TMF	11.2	0.1578	102.9	99.6	77.1	0.783	1335
5.56 mm NATO VMS	5.56	0.1647	123.4	120.6	29.1	1.198	2240
7.62 × 39 VMS	7.62	0.1754	115.2	112.6	50.7	1.112	1852
7.62 mm NATO VMS	7.62	0.2083	142.8	140.3	93.6	2.052	2632

d: Kaliber, q: Querschnittsbelastung, v_f: Fallschirmgeschwindigkeit (nach Gl. 5.4:71), v_E: effektive Auftreffgeschwindigkeit, E_E: Auftreffenergie, ED: Energiedichte, y_G: Gipfelhöhe bei 1250 mil Abschusswinkel (ca. 70°), Ortshöhe 400 m ü. M.

was durchaus eine (fast) konstante Fallgeschwindigkeit darstellt. In der Tabelle 5.7 sind diese Werte zusammen mit den entsprechenden Energien und Energiedichten für eine Ortshöhe von 400 m ü. M. zusammengestellt. Aus den Daten ist ersichtlich, dass die Grenzwerte, die für die Gefährdung von Menschen maßgebend sind (siehe dazu B. P. KNEUBUEHL, 2008) bei allen Geschossen (ausgenommen Luftgewehr-Diabolos und der Schrotkörner mit Durchmesser 5 mm und kleiner) überschritten werden. Abgesehen von den erwähnten Ausnahmen sind zurückfallende Geschosse grundsätzlich gefährlich und können lebensbedrohende Verletzungen erzeugen.



Die Abb. 5.26 zeigt eine typische Verletzung durch ein herabfallendes Geschoss, wie sie zu Dutzenden vorkommen, wenn bei Anlässen in gewissen Ländern mit Gewehren in die Luft geschossen wird.

Geschosse, die steiler als etwa 80° in die Luft geschossen werden, erhalten infolge zu geringer Folgsamkeit (siehe dazu Abschn. 5.6.4.6 und 5.6.5) in der Gipfelgegend einen großen Anstellwinkel und geraten ins Tauseln. Mit zunehmender Geschwindigkeit stabilisieren sie sich in den meisten Fällen wieder, entweder mit der Spitze oder dem Heck voran.

Abb. 5.26. Verletzung durch ein herabfallendes Geschoss. Dieses blieb nach Durchschlag durch das Schädeldach (siehe Pfeil) in der Schädelbasis liegen (Kaliber 7.62 × 39 Kalashnikov).

5.4.7 Das Randwertproblem

5.4.7.1 Problemstellung

Ballistische Untersuchungen – seien sie theoretisch oder experimentell – erfolgen fast ausschließlich mit bekannten Anfangswerten. Es soll ja unter genau definierten Bedingungen herausgefunden werden, welche Ergebnisse sich einstellen. Im Gegensatz dazu ist bei der praktischen Anwendung stets das Ziel vorgegeben und es werden die Anfangselemente gesucht, mit denen das gegebene Ziel erreicht wird. Als zunächst unbekannte Startwerte kommen eigentlich nur die Schussrichtung (das Azimut), die Elevation und die Mündungsgeschwindigkeit in Frage.

In den meisten Fällen ist die Mündungsgeschwindigkeit gegeben, entweder weil die Munition patroniert ist und damit eine feste Menge Treibladungspulver enthält oder weil ein System aus verschiedenen Ladung vorliegt, woraus vorgängig eine Ladung ausgewählt wird, die dem Distanzbereich entspricht, in dem das Ziel liegt.

Es gibt auch Waffensysteme (Mörser) mit einer, zwei oder drei festen Elevationen, bei denen die Schussdistanz mit der Mündungsgeschwindigkeit eingestellt wird. Dies erfolgt durch Anpassung der Ladungsmenge oder – bei Druckluftmörsern und Pulvermörsern mit regulierbarem Laderaum – durch Einstellen des erforderlichen Druckes.

In einer ersten Näherung ist auch die Schussrichtung durch die Verbindung Mündung-Ziel bekannt; es bleibt somit die Suche nach der Elevation.

Eine naheliegende Möglichkeit besteht darin, mittels Flugbahnrechnungen mit gegebenen Anfangswerten eine Schussdistanz-Elevation-Beziehung zu erstellen, also eine sogenannte *Elevationskurve* (siehe Abb. 5.27). Allerdings kann eine sol-

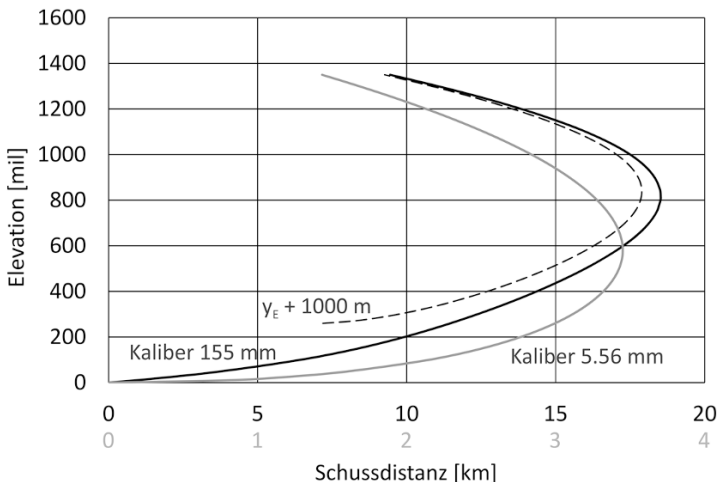


Abb. 5.27. Elevationskurven zweier Geschosse mit unterschiedlichen Querschnittsbelastungen. Das leichte Kleinkalibergeschoss (graue Linie und Zahlen) erreicht die maximale Schussdistanz mit einer Elevation von ca. 600 mil, wogegen das schwere Artilleriesgeschoss (schwarze Linie) bei etwa 810 mil am weitesten schießt. Beim Artilleriesgeschoss ist auch die Kurve für Zielhöhe 1000 m eingezeichnet.

che Grafik (oder auch Tabelle) das Problem nur sehr ungenau lösen, weil die Rechnungen mit einer Normalatmosphäre durchgeführt werden und die Zielhöhe auch nur in größeren Schritten berücksichtigt werden kann.

Das Randwertproblem der Außenballistik lässt sich somit wie folgt formulieren: „Es ist bei gegebenen Zielwerten, x_E , y_E sowie bei gegebener (gemessener) Mündungsgeschwindigkeit v_0 und bekannten ballistischen Daten des Geschosses diejenige Elevation zu finden, die unter Berücksichtigung der aktuellen atmosphärischen Bedingungen (Luftdichte, Wind) jene Flugbahn liefert, die den Zielpunkt trifft“. Die Schussrichtung wird zunächst unabhängig davon ermittelt.

Dies hat zur Folge, dass in zeitlicher und örtlicher Nähe der geplanten Flugbahn die aktuellen Wetterdaten (Druck, Temperaturprofil und Windgeschwindigkeit und -richtung) gemessen werden müssen. Artillerieeinheiten unterhalten deshalb eigene Wetterdienste. Zudem besitzen die Geschütze meist eine Möglichkeit, die Mündungsgeschwindigkeit zu messen oder aus Pulvertemperatur und den (wegen Rohrausbrand veränderten) Rohrrinnenabmessungen zu schätzen.

Da das Lösen des Randwertproblems eine der zentralsten Aufgaben des praktischen Schießens ist, und genügend schnelle Rechner noch nicht sehr lange zur Verfügung stehen, sind im Verlauf der Zeit eine große Zahl von Lösungsmöglichkeiten ersonnen worden, die in der Vorcomputerzeit auf grafischen oder mechanischen Methoden beruhten. Einige dieser Verfahren sind heute noch (als Redundanz) in Gebrauch; sie sind auch ballistisch so interessant, dass es sich lohnt, einen Blick darauf zu werfen.

5.4.7.2 Schusstafeln, Flugbahnkarten und der Benoist-Plan

Tabellenwerke und Tabellen, welche eine Beziehung zwischen Zieldistanz und Elevation herstellen, werden *Schusstafeln* genannt. Dabei sind zwei verschiedene Ausführungen zu unterscheiden. Die eine ist für indirektes Schießen mit Bogenschuss-

Tabelle 5.8. Auszug aus einer Schusstafel für indirektes Schießen (Artilleriegeschoss im Kaliber 155 mm, gerechnet auf Meereshöhe)

Distanz	Elev.	Δx pro 1 mil	Flug- zeit	α_z	$\Delta\alpha_w$ ± 10 m/s	Längswind		Luftdichte	
						+10 m/s	-10 m/s	+0.1 kg/m ³	-0.1 kg/m ³
[m]	[mil]	[m]	[s]	[mil]	[mil]	[mil]	[mil]	[mil]	[mil]
13000	340.5	19.9	34.5	11	11	11.9	-11.6	26.6	-22.0
13100	345.5	19.7	34.9	11	11	12.2	-11.9	27.0	-22.5
13200	350.6	19.5	35.3	11	11	12.5	-12.2	27.4	-22.8
13300	355.8	19.3	35.7	12	11	12.9	-12.5	28.0	-23.2
13400	361.0	19.1	36.1	12	11	13.2	-12.9	28.4	-23.6
13500	366.2	18.9	36.6	12	11	13.6	-13.2	28.9	-24.0

Die Kolonnen α_z (Derivation) und $\Delta\alpha_w$ (Seitenwind) sind Azimutkorrekturen. Weitere Kolonnen, welche Elevationskorrekturen bei abweichender Mündungsgeschwindigkeit, höher oder tiefer liegendem Ziel und die Gipfelhöhe enthalten, könnten einer zweiten Seite entnommen werden.

Tabelle 5.9. Auszug aus einer Schusstafel für direktes Schießen (Kleinkaliber-Geschoss im Kaliber 338 Win. Mag. gerechnet auf Meereshöhe)

Distanz [m]	σ [mil]	v [m/s]	E [J]	ED [J/mm ²]	t [s]	z _E [m]	y _G [m]	x _G [m]
0	0.00	810	5315	96	0.00	0.00	0.00	0
100	0.80	748	4532	82	0.13	0.05	0.02	51
200	1.70	689	3844	69	0.27	0.21	0.09	103
300	2.70	633	3243	59	0.42	0.49	0.22	156
400	3.83	580	2721	49	0.58	0.91	0.42	211
500	5.10	529	2269	41	0.77	1.48	0.72	268

σ : Schusswinkel, E: Energie ED: Energiedichte, z_E: Seitenwindablage bei ± 10 m/s Seitenwind, y_G: Gipfelhöhe, x_G: Gipfelweite

waffen konzipiert (siehe Tabelle 5.8). Diese enthalten nicht nur die Distanz-Elevations-Beziehung, sondern auch alle Informationen, die für das Schießen unter realen Bedingungen erforderlich sind. Sie stellen somit eine echte Lösung des Randwertproblems dar. Derartige Schusstafeln sind recht umfangreiche Bücher, da sie in der Regel die Angaben für alle Ladungen eines Geschützes enthalten.

Zu ihrer Herstellung ist eine sehr große Zahl von Flugbahnrechnungen mit unterschiedlichen Anfangsbedingungen notwendig. In der Vor-Computerzeit wurden die Korrekturwerte der Schusstafeln mit der sogenannten „Ballistischen Störungsrechnung“ erarbeitet, welche auf Näherungsgleichungen beruhte (eine ausführliche Darstellung findet sich in H. MOLITZ, R. STROBEL, 1963).

Aus ballistischer Sicht bemerkenswert und zunächst nicht offensichtlich ist der Unterschied zwischen den Korrekturen für Mit- und Gegenwind, wogegen jener bei zu- bzw. abnehmender Luftdichte auf der Hand liegt.

Die zweite Ausführung von Schusstafeln findet ihre Anwendung bei den Geschossen für Flachbahnwaffen (siehe Tabelle 5.9). Darin sind neben der namensgebenden Schussdistanz-Schusswinkel-Relation ballistische Daten der betreffenden Flugbahn aufgelistet, wie z. B. Geschwindigkeit, Energie, Flugzeit, Windablage, Gipfelhöhe und -weite (zum Unterschied Elevation - Schusswinkel siehe Abb. 5.15, S. 189). Im Gegensatz zu den Ersteren handelt es sich hier meist um einfache Datenblätter. Die Schusswinkelangaben dienen vor allem der Auslegung der Zielvorrichtungen (Visiere).

Ein raffiniertes und im Gebrauch sehr schnelles Hilfsmittel zur Lösung des Randwertproblems war die *grafische Schusstafel*. Es handelte sich um eine transparente Scheibe, in welcher die Schussdistanz-Elevationsbeziehungen unter Berücksichtigung der Zielhöhe als Linien eingraviert waren (siehe Abb. 5.28). Man legte die Scheibe mit dem Nullpunkt bei der Geschützstellung auf eine topografische Karte gleichen Maßstabes und stellte beim Zielpunkt die Zielhöhe ein; die Elevation ließ sich unmittelbar ablesen. Die Korrekturen für die realen Verhältnisse ließen sich dann an der entsprechenden Stelle direkt der Scheibe entnehmen.

In gebirgigen Regionen in denen sich die Zielhöhe häufig deutlich von der Mündungshöhe unterscheidet, eignet sich als grafische Lösung der Randwertaufgabe

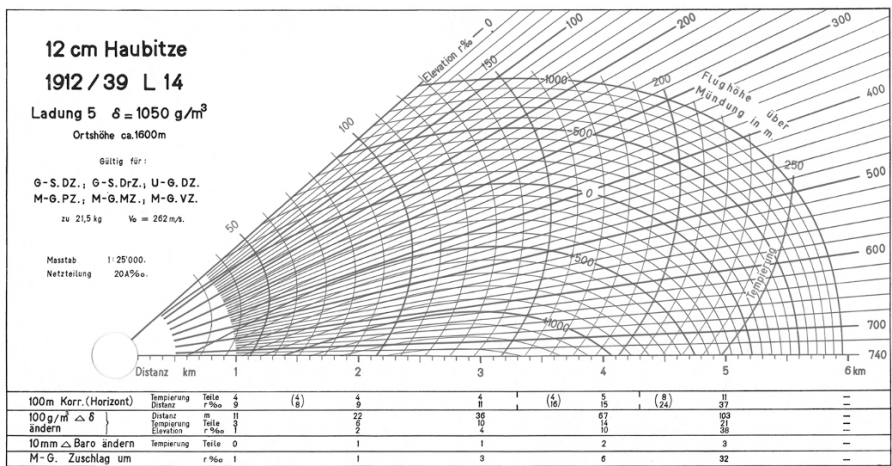


Abb. 5.28. Grafische Schusstafel. Im Original sind die Linien zur besseren Lesbarkeit farblich unterschieden.

besonders auch die Flugbahnkarte. Es handelt sich dabei um eine Darstellung der Flugbahnen im Aufriss in Elevationsschritten von 20 mil gerechnet mit Normalbedingungen, für jede Ladung ein Blatt, zu einem Büchlein zusammengeheftet. Oft wurden solche Kartenhefte für verschiedene Mündungsluftdichten (entsprechend verschiedenen Mündungshöhen) erstellt, sodass je nach Standort die geeignetste Unterlage gewählt werden kann. Ein Beispiel einer solchen Flugbahnkarte zeigt Abb. 5.29 auf der nächsten Doppelseite. In einer solchen Darstellung ist die Bestimmung der Elevation auch bei höher oder tiefer liegenden Zielen direkt möglich. Korrekturen für reale Wetterbedingungen, die Derivation, Abweichungen in der Mündungsgeschwindigkeit sind in Fußnoten unterhalb der Grafik eingetragen.

Schussrichtung und Schussdistanz ließen sich weder mit Schusstafeln noch mit Flugbahnkarten bestimmen. Zu diesem Problem publizierte der französische Artilleriekommandant A. BENOIST anfangs der 1920er Jahre ein Verfahren mit dessen Hilfe Schussrichtung und Zieldistanz (sogar für eine ganze Batterie) auf einfache Weise bestimmt werden konnte (A. BENOIST, 1922). Diese unter dem Namen „Benoist-Plan“ bekannt gewordene Methode, die auf zwei überlagerten Koordinatennetzen beruhte, einem kartesischen und einem polaren, hielt sich für diese Aufgabe bis zur Einführung der Feuerleitrechner im ausgehenden 20. Jahrhundert.

5.4.7.3 Mechanische Lösungen

Flugbahnkarten und Schusstafeln besitzen außer der fehlenden Schussrichtung- und Schussdistanzbestimmung noch einen weiteren gewichtigen Nachteil: die Korrekturwerte gelten eigentlich nur in der Mündungsebene. Für höher oder tiefer liegende Zielpunkte müssten weitere Fussnotenzeilen eingeführt werden, was der Übersichtlichkeit abträglich wäre. Im mittleren Drittel des letzten Jahrhunderts wurden daher

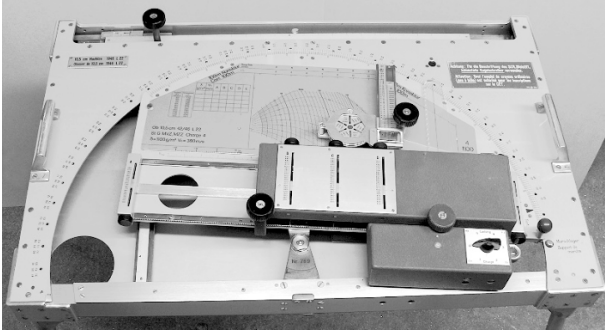


Abb. 5.30. Schießelemente-rechner (SER) mit eingespannter Flugbahnkarte. Damit ließen sich die Grundelemente rasch und mit guter Genauigkeit bestimmen.

sinnreiche Apparate entwickelt, welche die Flugbahnbestimmung auch bei unterschiedlichen Zielhöhen genauer zu lösen imstande waren.

So wurde (z. B. in der Schweizer und der Österreichischen Armee) ein auf der Basis von Flugbahnkarten arbeitendes Gerät, der „Schießelementerechner“ (SER, siehe Abb. 5.30) zur genauen Bestimmung des Azimuts sowie der Grundelemente Elevation und Flugzeit verwendet. Für Korrekturen, die sich aus Differenzen zwischen Einschlag- und Zielpunkt ergaben, stand der „Korrekturrechner“ (KR), und für Korrekturen aus geänderter Mündungsgeschwindigkeit und meteorologischen Einflüssen der „Ballistische Korrekturrechner“ (BKR) zur Verfügung. Diese drei Präzisionsgeräte ermöglichten eine vollständige und ausreichend genaue Lösung des Randwertproblems.

5.4.7.4 Rechnerische Lösungen

Zu einem gegebenen Differenzialgleichungssystem Lösungen finden, welche an den Rändern des Definitionsbereichs vorgegebene Werte einnehmen, gehört zu den allgemein bekannten Problemen der numerischen Mathematik. Daher existieren auch Methoden zu dessen Lösung, wie z. B. das sogenannte „Einschießverfahren“ (J. STOER, R. BULIRSCH, 1973). Dabei wird mit den realen Werten für Mündungsgeschwindigkeit und Zustand der Atmosphäre (einschließlich Wind) das Anfangswertproblem f_A berechnet und die Bahnhöhe y bei der Zieldistanz x_E als Funktion der Elevation θ dargestellt

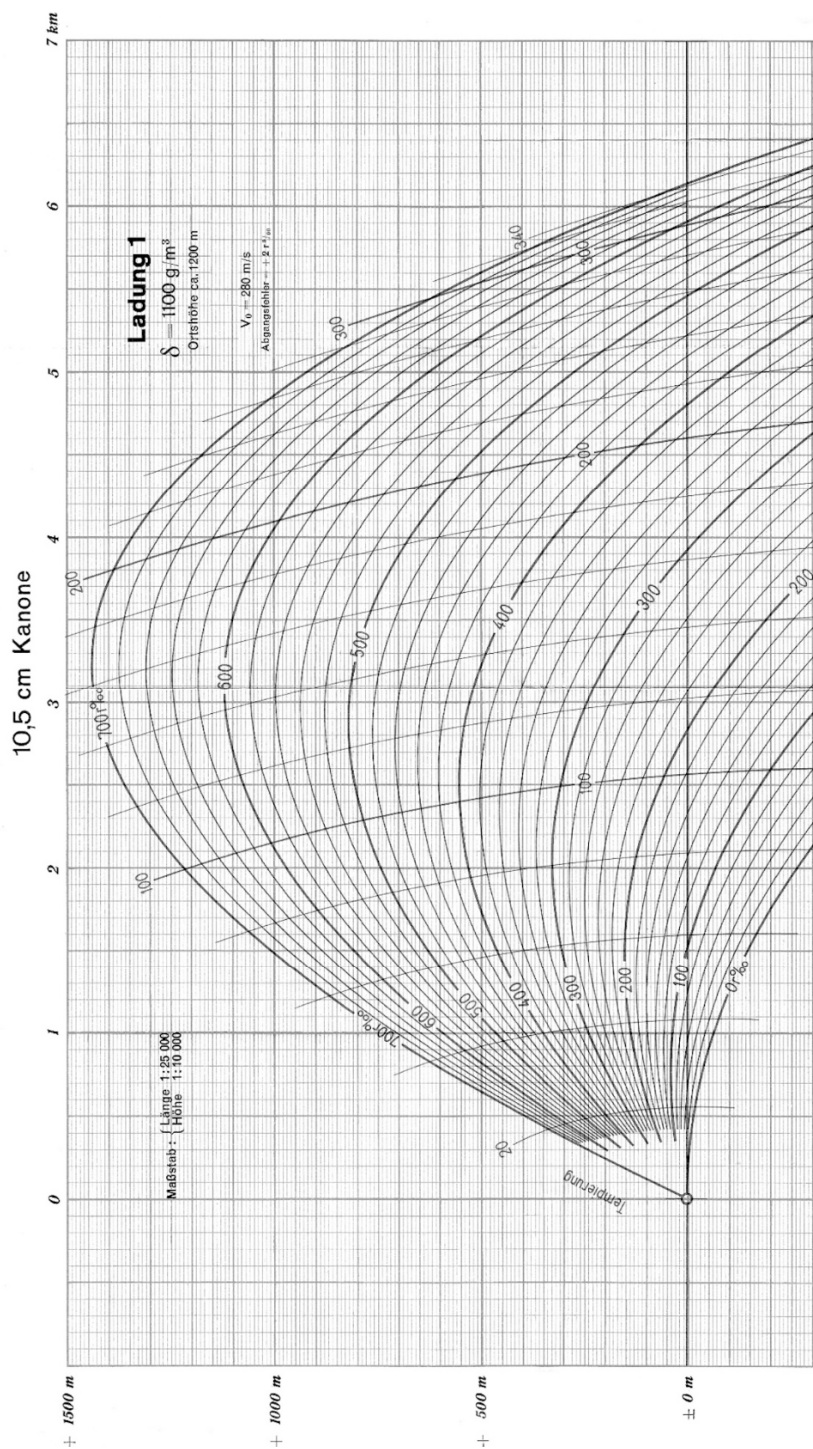
$$f_A(\theta) = y, \quad \text{mit} \quad x = x_E. \quad [m]$$

Die Differenz zur gesuchten Zielhöhe ergibt eine Funktion f_B , deren Nullstelle nun gesucht wird

$$(5.4:88) \quad f_B(\theta) = f_A(\theta) - y_E = 0. \quad [m]$$

Dies kann z. B. mit Hilfe der folgenden Iterationsvorschrift erfolgen

$$(5.4:89) \quad \theta_{i+1} = \theta_i - \frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{f_A(\theta_i) - f_A(\theta_{i-1})} \cdot [f_A(\theta_i) - y_E], \quad [m]$$



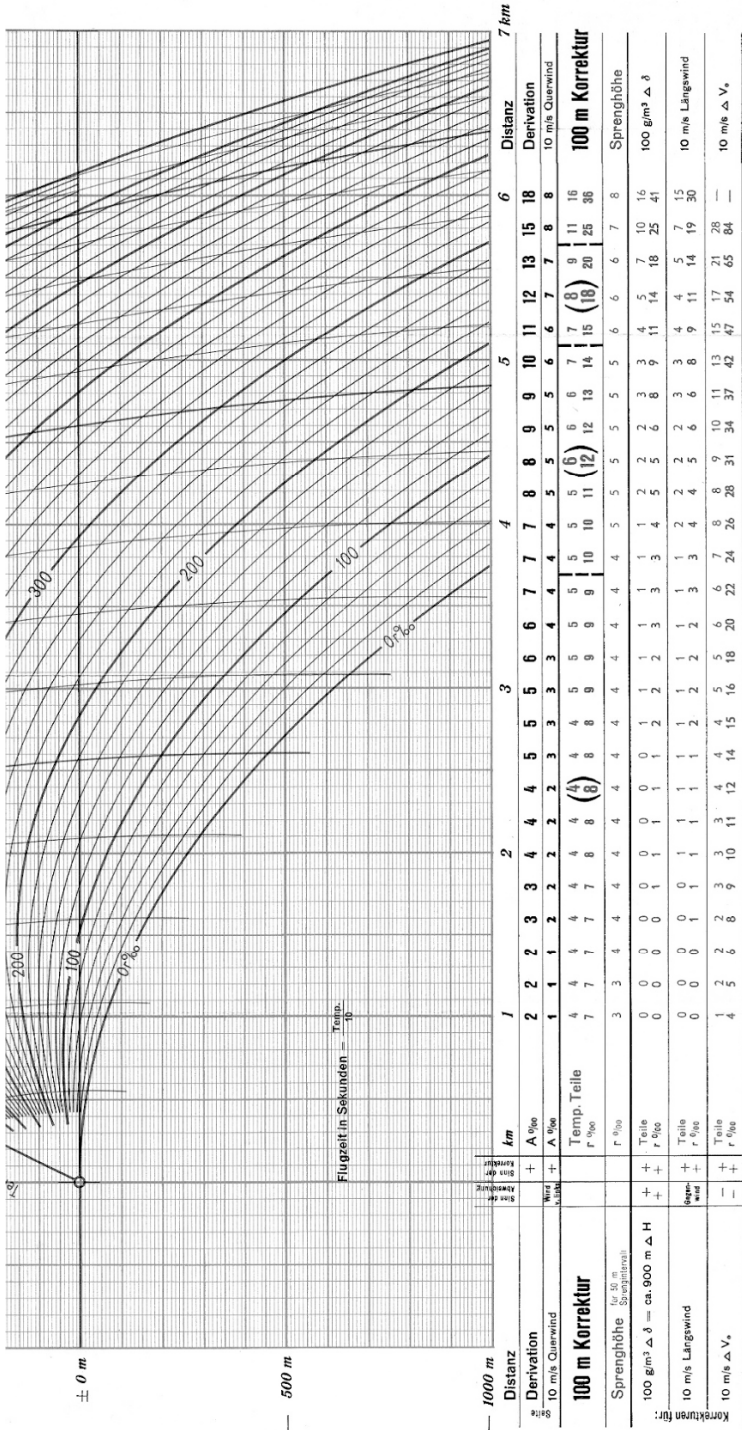


Abb. 5.29. Beispiel einer Flugbahnkarte aus einem Heft für ein Artilleriegeschütz im Kaliber 105 mm. Die Originalkarte ist auf einem Blatt gedruckt und nur aus Platzgründen auf zwei Seiten verteilt. Im Original sind die Flugbahnen rot, die Tempierungskurven (entsprechen der Flugzeit in Zehntelsekunden) grün gezeichnet. Elevationen und Korrekturen sind in einem früher bei der Artillerie gebräuchlichen Winkelmaß angegeben, das den vollen Winkel in 6300 Teile teilte (sogenannte Radiuspromille). Grund war die bessere Näherung an 2π .

wobei die Iteration so lange durchgeführt wird, bis eine vorgegebene Fehlerschranke (z. B. 10^{-6}) unterschritten wird.

Geht es um Differenzbildung zweier Flugbahnen (in diesem Fall die gesuchte Bahn durch den Zielpunkt und eine der Näherungen), so kann auf die Vakuumsballistik zurückgegriffen werden, da beide Bahnen beim Verzicht auf den Luftwiderstand ungefähr demselben Fehler unterworfen sind, der sich in deren Differenz aufhebt. So lassen sich in der luftwiderstandsfreien Ballistik Beziehungen herleiten, welche auf die widerstandsbehafteten Flugbahnen übertragen werden können.

Erfolgt die Flugbahnintegration stets mit den realen atmosphärischen Bedingungen auf die gesuchte Zieldistanz x_E und wird dabei der in der Höhe entstehende Fehler $\Delta y_{E(i)}$ ermittelt, so kann eine Iterationsformel hergeleitet werden, die aus der momentanen Elevation und der zugehörigen Höhenabweichung eine neue, verbesserte Elevation errechnet

$$(5.4:90) \quad \theta_{i+1} = \theta_i - \arctan \frac{\Delta y_{E(i)}}{x_E \cdot (1 - \tan^2 \theta_i)} . \quad [-]$$

Die Winkel sind im Bogenmaß gemessen.

Eine etwas einfachere Beziehung ergibt sich aus dem Schwenken der Flugbahn

$$(5.4:91) \quad \theta_{i+1} = \theta_i + \left(\arctan \frac{y_E}{x_E} - \arctan \frac{y_{E(i)}}{x_E} \right) . \quad [-]$$

Wird jedoch die Integration stets auf die gesuchte Zielhöhe y_E gerechnet und der Distanzfehler $\Delta x_{E(i)}$ bestimmt, so entsteht (wiederum aus der Vakuumsballistik) die folgende Iterationsgleichung

$$(5.4:92) \quad \theta_{i+1} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \arcsin \frac{\sin(2 \cdot \theta_i)}{1 + \frac{\Delta x_{E(i)}}{x_E}} . \quad [-]$$

Die zwei ersten Formeln (5.4:90 und 91) ergeben die gesuchte Elevation in der unteren Winkelgruppe, die dritte Formel (5.4:92) jene im oberen Winkelbereich.

Mit allen drei Formeln kann das Randwertproblem mit wenigen Durchgängen (Richtwert 3–4) gelöst werden. Dabei spielt die Wahl der ersten Elevation keine Rolle, sofern die Zieldistanz bzw. die Zielhöhe tatsächlich erreicht wird. Man beginnt daher in beiden Winkelbereichen mit einer Elevation nahe an der maximalen Schussdistanz. Weil zudem die Integration mit den realen Bedingungen erfolgt, ergibt sich direkt die Lösung des betreffenden Randwertproblems.

Ist ein gegebener Zielpunkt nicht erreichbar, so konvergieren die Elevationen der Formeln (5.4:90 und 91) nicht, sondern nehmen alternierend oder gleichförmig zu. In Formel (5.4:92) kann sich dies durch einen Sinuswert > 1 manifestieren. Bei der Programmierung dieser Formeln ist deshalb ein geeignetes Abbruchkriterium einzubeziehen. Bei Punkten, die erreichbar sind, konvergieren die Verfahren in der Regel sehr rasch.

Ein weiterer Ansatz, die gesuchte Elevation iterativ zu finden, geht von der Flugbahnformel von PITON-BRESSANT (siehe Gl. 5.4:86) aus, in welcher mit dem Parameter Q eine gewisse Berücksichtigung des Luftwiderstandes steckt

$$y = x \cdot \tan \theta_0 - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \theta} \cdot (1 + Q \cdot x) . \quad [m]$$

Wird der Punkt $(x, y) = (x_E, y_E)$ als bekannt vorausgesetzt, stellt diese Beziehung eine quadratische Gleichung für den Tangens der Elevation dar, die sich direkt auflösen lässt

$$(5.4:93) \quad \theta = \arctan \left(\frac{x_E}{2 \cdot B} \pm \sqrt{\frac{x_E^2}{4 \cdot B^2} - \left(1 + \frac{y_E}{B}\right)} \right) , \quad [-]$$

mit

$$(5.4:93a) \quad B = \frac{g}{2 \cdot v_0^2} \cdot x_E^2 \cdot (1 + Q \cdot x_E) . \quad [m]$$

Ist die Piton-Bressant'sche Zahl Q eines Punktes bekannt, liefern die zwei Lösungen nach Gl. (5.4:93) die zwei Elevationen für die Flugbahnen, mit denen dieser Punkt mit der betreffenden Geschwindigkeit erreicht werden kann, die eine für die untere, die andere für die obere Winkelgruppe.

Rechnet man nun eine Flugbahn unter realen Bedingungen mit einer ersten beliebigen Elevation und bestimmt entweder bei der Zieldistanz den Höhenfehler oder bei der Zielhöhe den Distanzfehler, so kann die Piton-Bressant'sche Zahl Q dieses genäherten Punktes (x, y) und der zugehörigen Elevation bestimmt werden

$$(5.4:94) \quad Q(x, y) = \frac{(x \cdot \tan \theta - y) \cdot 2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \theta}{g \cdot x^3} - \frac{1}{x} . \quad [1/m]$$

In der Gl. (5.4:93a) eingesetzt, ergibt sich die Zahl B , mit welcher die Gl. (5.4:93) die neue Elevation liefert. Diese Prozedur kann bis zum Erreichen der erforderlichen Genauigkeit wiederholt werden.

Bei Punkten in der Nähe der maximalen Schussdistanz kann es vorkommen, dass die Diskriminante in Gl. (5.4:93) negativ wird. Man setzt sie in diesem Fall 0 und rechnet mit der dabei erhaltenen Elevation weiter. Beim erneuten Eintreten dieses Falles ist das Ziel nicht erreichbar.

Bei einer beliebigen Startelevation benötigt dieses Verfahren etwa die gleiche Anzahl Iterationen bis zum genügend genauen Resultat, wie die vorgängig besprochenen Gl. (5.4:9092). Hingegen können die Elevationen der unteren und oberen Winkelgruppe mit dem gleichen Formelsystem bestimmt werden, und die Mündungsgeschwindigkeit wird berücksichtigt. Die Verwendung des Ansatzes nach PITON-BRESSANT würde es zudem erlauben, ein grobes Raster mittlerer Q -Werte anzulegen, das die Bestimmung einer angenäherten ersten Elevation erlaubte. Damit ließe sich das Verfahren um ein bis zwei Iterationen beschleunigen.

5.4.7.5 Ergänzende Bemerkungen zum Randwertproblem

Integrationen der ballistischen Differenzialgleichungssysteme, welche im Rahmen der Lösung von Randwertproblemen durchgeführt werden, finden in den meisten Fällen im realen Umfeld statt. Dies bedeutet, dass aktuelle gemessene meteorologische Daten vorliegen (Luftdruck und -temperatur auf Mündungshöhe, ein Temperaturprofil und Windschichten mit Richtung und Geschwindigkeit bis über die vorgesehene Gipfelhöhe hinaus). Wie bereits im Abschnitt 5.4.3.4 erwähnt, ist die Integration jeweils an die Schichtgrenzen heranzuführen und von dort aus wieder mit den neuen Werten zu starten.

Die untersten Windschichten machen sich im Geschossflug nur wenig bemerkbar, da das Geschoss sich zeitlich nur sehr kurz darin aufhält, sowohl im aufsteigenden als auch im absteigenden Ast. Hingegen beeinflussen die Schichten in der Gipfelgegend die Flugbahn deutlich. Hier kann es sogar zu Konstellationen kommen, bei denen das Randwertproblem keine Lösung geben kann. Wird beispielsweise ein Zielpunkt in der untern Winkelgruppe noch nicht ganz erreicht und weht im Gipfel ein Mitwind so kann die erforderliche Elevationserhöhung dazu führen, dass der Gipfel in die nächste Luftschicht mit Gegenwind gerät und die Schussdistanz trotz größerer Elevation wieder kürzer wird. In solchen Fällen von Scherwinden, die wirklich auch auftreten, kann höchstens auf die obere Winkelgruppe ausgewichen werden, wenn das Geschütz dies zulässt.

5.4.8 Außenballistik der Splitter

5.4.8.1 Die Querschnittsbelastung

Nach seiner Beschleunigung durch die Schwaden des detonierenden Sprengstoffes wird ein Splitter nur äußerst selten (wenn überhaupt) seine anfängliche räumliche Lage längs der Flugbahn beibehalten (ausgenommen sind natürlich Kugelsplitter). Vielmehr ist zu erwarten, dass bei der Einwirkung der Detonationsfront auf den Fragmentkörper die Wirkungslinie der beschleunigenden Kraft nicht durch den Schwerpunkt verläuft. Der Splitter erhält dadurch ein Drehmoment, das zu einer Drehbewegung um eine (im Allgemeinen nicht feste) räumliche Achse führt. Die angeströmte Querschnittsfläche wechselt daher ständig und damit auch die Querschnittsbelastung. Für die Flugbahnrechnung wird man daher einen mittleren Wert einsetzen müssen.

Zur Berechnung einer maßgebenden Querschnittsfläche wird der Splitter zunächst durch einen massegleichen, konvexen Körper ähnlicher Längenausdehnung (in der Regel ein Quader) ersetzt. Dies lässt sich damit vertreten, dass bei der Umströmung nicht-konvexer Körper die konkaven Stellen aerodynamisch durch darin sich bildende kleine Wirbel „geglättet“ werden.

Für die entstandene Drehbewegung sind nun zwei Annahmen möglich:

- die Drehachse des Quaders wechselt ständig, der Splitter taumelt,
- die Drehung erfolgt um eine feste Achse; dies ist in der Regel die Achse des größten Trägheitsmomentes.

Im ersten Fall kann auf das Theorem von CAUCHY zurückgegriffen werden, nach dem die über den ganzen Raumwinkel gemittelte Projektionsfläche eines konvexen Körpers ein Viertel seiner Oberfläche S beträgt. Die für den Luftwiderstand maßgebende Bezugsfläche A_0 lautet somit in diesem Fall

$$(5.4:95) \quad A_0 = \frac{1}{4} \cdot S. \quad [\text{m}^2]$$

Bei einer Drehung um eine feste Achse ergibt sich als mittlere Schattenfläche und damit als Bezugsfläche eines Quaders mit den Seiten a , b und c (wo a parallel zu der Drehachse ist)

$$A_0 = \frac{4 \cdot a}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (b \cdot \cos \alpha + c \cdot \sin \alpha) \cdot d\alpha, \quad [\text{m}^2]$$

$$(5.4:96) \quad A_0 = \frac{2 \cdot a}{\pi} \cdot (b + c). \quad [\text{m}^2]$$

Beispiel: Für den Würfel berechnet sich nach (5.4:95) $A_m = \frac{3}{2} a^2 = 1.5 \cdot a^2$. Nach Formel (5.4:96) folgt mit $a = b = c$ hingegen $A_m = \frac{4}{\pi} a^2 = 1.273 \cdot a^2$.

Die zweite Formel ergibt also einen um 15% geringeren Wert. Je weiter sich das Seitenverhältnis bei einem Quader von 1 (Würfel) entfernt, desto größer wird diese Differenz.

Im ersten Fall (wechselnde Drehachse) kann angenommen werden, dass das Projektil eine Nutationsbewegung ausführt, die bei längerer Flugzeit abklingt. Für die Berechnung maximaler Flugweiten (Gefährdungsdistanzen) ist es daher durchaus am Platz, mit Formel (5.4:96) zu rechnen, zumal sich gleichzeitig ein auf der sicheren Seite liegendes Resultat einstellt (die zu große Querschnittsbelastung führt zu einer etwas größeren Reichweite, als der Splitter effektiv fliegt). Für kurze Schussdistanzen (Wirksamkeitsabklärungen zur Beurteilung der Gefährdung) ist hingegen eher die Beziehung (5.4:95) zu wählen.

5.4.8.2 Der Luftwiderstandsbeiwert

Funktionen des Luftwiderstandsbeiwertes, die für Splitter in Frage kommen, sind zwei mit guter Genauigkeit bekannt: jene der Kugel und jene des Würfels. Zudem existiert für die Prüfung von ballistischem Schutz ein sogenanntes „Fragment Simulating Projectile“ (FSP), ein Zylinder, bei dem die eine Stirnfläche zweiseitig leicht angeschrägt ist (siehe Abb. 5.31).

Beim Würfel ist dabei eine Seitenfläche als Bezugsfläche angenommen worden. Dies bedeutet, dass bei der Verwendung dieser c_w -Funktion deren Werte von der Seitenfläche auf eine der beiden oben eingeführten Bezugsflächen umgerechnet werden müssen.



Abb. 5.31. Bild eines „Fragment Simulating Projectile“ (FSP), ein standardisiertes Projektil zur Simulation von Splitterbeschuss. Es existiert in verschiedenen Kalibern und wird vor allem zum Testen von Splitterschutz verwendet (mm-Skala am untern Bildrand).

Die c_w -Kurven dieser drei Projektile sind in der Abb. 5.32 dargestellt. Sie wurden aus den Daten diverser Publikationen und aus eigenen Messungen gemittelt. Die Werte für die Kugel stammen aus H. MOLITZ, R. STROBEL (1963), R. SUTTERLIN (1965), A. MAY, W. R. WITT (1953) sowie aus eigenen Messung mit 5.56 mm und 7.5 mm Kugeln. Die Werte für den Würfel sind G. HANTSCHKE, J. RINEHART (1952) und C. W. WHITEFORD, J. M. REGAN (1961) entnommen und jene des FSP eigenen Messungen.

Der c_w -Verlauf der Kugel eignet sich nur für vorfragmentierte, kugelförmige Splitter mit glatter Oberfläche. Hingegen lassen sich die Funktionswerte des Würfels für praktisch alle unregelmäßig geformten Splitter verwenden. Dies ist möglich, weil der Luftwiderstandsbeiwert von der Form, nicht aber von der geometrischen Ausdehnung abhängig ist. Bei kantigen, stumpfen Formen reißt die Strömung stets ab, ob es sich um einen Würfel oder einen Quader (oder eine unregelmäßige Form) handelt. Bei Überschallgeschwindigkeiten wird in analoger Weise infolge der stumpfen Form die Stoßwelle abgelöst auftreten, so dass auch hier mit einer gewissen Ähnlichkeit der Strömung zu rechnen ist. Da infolge der Ablösung an den Kanten ein großer Teil der Oberfläche von turbulenten Grenzschichten eingehüllt ist, wird auch der Reibungsbeiwert nicht entscheidend anders ausfallen.

5.4.8.3 Flugbahnrechnungen

Splitterflugbahnen können grundsätzlich mit einem zweidimensionalen Gleichungssystem gerechnet werden, da eine Derivationsbeschleunigung kaum zu bestimmen ist und die Flugzeit zu kurz ist, als dass die Coriolisbeschleunigung einen wesentlichen Einfluss haben könnte. In den meisten Fällen wird sich die Flugbahn in der unteren Winkelgruppe abspielen, womit das Gleichungssystem (5.4:42) privilegiert zur Anwendung kommt.

In den eher seltenen Fällen, in denen Splitter mit hohen Abgangswinkeln ($> \text{etwa } 600 \text{ mil}$) gerechnet werden müssen, wird man zum zeitabhängigen System (5.4:41) wechseln, da der absteigende Ast sehr steil wird und der Distanzschritt sehr klein gewählt werden müsste, damit die Rechnung nicht in den unerreichbaren Bereich hineingerät.

Abweichungen durch Seitenwind lassen sich mit der Didion'schen Formel mit sehr guter Genauigkeit im ganzen Elevationsbereich bestimmen.

Bei kurzen Flugdistanzen ($< 10 \text{ m}$) und hohen Anfangsgeschwindigkeiten ($> 1000 \text{ m/s}$) ist normalerweise eine vollständige Flugbahnrechnung nicht erforderlich. Der c_w -Wert kann in diesem Fall als konstant (Kugel und Würfel ≈ 1 , Zylinder ≈ 1.3) angenommen und die Querschnittsbelastung nach (5.4:95) eingesetzt wer-

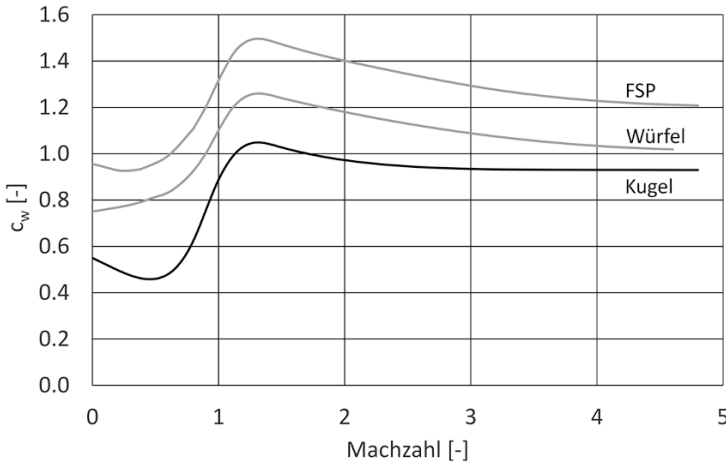


Abb. 5.32. c_w -Kurven dreier geformter Splitter, welche sich für Splitter-Flugbahnrechnungen eignen.

den. Da sich die Luftdichte ebenfalls nicht ändert, lassen sich die Näherungsgleichungen nach Abschn. 5.4.6.1 mit dem K -Wert (5.4:73)

$$K = \frac{c_w \cdot \rho}{2 \cdot q}, \quad [1/m]$$

und der Differenzialgleichung (5.4:76) anwenden. Für die Geschwindigkeit in Abhängigkeit des Weges ergibt sich daraus die folgende berechenbare Gleichung

$$(5.4:97) \quad v(x) = v_0 \cdot e^{-K \cdot x}, \quad [m/s]$$

und entsprechend für die zugehörige Energie

$$(5.4:98) \quad E(x) = E_0 \cdot e^{-2 \cdot K \cdot x}. \quad [J]$$

Im Gegensatz zu Geschossen, bei denen der Geschwindigkeitsverlust auf den ersten 10 m Flugstrecken meist innerhalb der Streuung der Mündungsgeschwindigkeit liegt und folglich keine Relevanz hat, verlieren insbesondere kleine Splitter sehr viel an Geschwindigkeit und Energie (0.1-g-Splitter bis 60 %). Dies ist bei der Abklärung von Ereignissen (Unfällen, Straftaten, z. B. mit Handgranaten) oft von entscheidender Bedeutung.

5.4.8.4 Maximale Reichweiten

Kleine Splitter besitzen infolge ihrer geringen Querschnittsbelastung einen markanten Geschwindigkeits- und Energieverlust auf ihrer Flugbahn. Verzögerungen von bis zu 100 m/s pro Meter Flugstrecke sind bei leichten, schnellen Splittern ohne weiteres möglich. Diese anfänglich große Verzögerung bei kleinen Splintern bewirkt jedoch, dass die Geschwindigkeit sehr rasch in den Unterschallbereich abfällt.

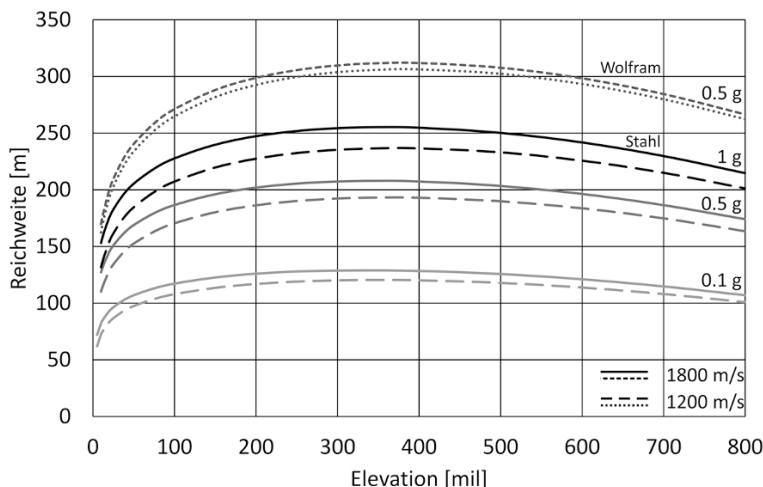


Abb. 5.33. Maximale Reichweite kleiner Splitter in Abhängigkeit des Abgangswinkels. Zwischen 200 und 600 mil ändert sie nur wenig. Der Einfluss der Abgangsgeschwindigkeit ist überraschend gering.

Ein 0.1 g schwerer Splitter, der mit 1800 m/s startet, erreicht bereits nach nur 0.05 s Unterschallgeschwindigkeit. Bei einer Flugdauer von rund 4 s für die Maximaldistanz fliegt er somit fast 99 % seiner Flugzeit mit Unterschallgeschwindigkeit.

Aus diesem Grund beeinflusst die Anfangsgeschwindigkeit die maximale Flugweite nur unwesentlich, und zwar unabhängig von Form und Material des Splitters. Wird sie beispielsweise um einen Drittel reduziert, so verringert sich die Maximaldistanz um weniger als 10 % bei allen kleinen Splitter. Entscheidend für die Reichweite sind in erster Linie die mittlere Querschnittsbelastung und die Form (Kugel oder Nicht-Kugel). In der Abb. 5.33 sind die maximalen Reichweiten einige Würfelsplitter in Abhängigkeit des Abgangswinkels dargestellt. Mit zunehmender Masse (bei gleichem Material gleichbedeutend mit zunehmender Querschnittsbelastung) nimmt die Reichweite deutlich zu, hingegen ist der Unterschied zwischen den Geschwindigkeiten beim gleichen Splitter nicht besonders groß. Der Einfluss der größeren Querschnittsbelastung tritt auch deutlich hervor, wenn bei gleicher Masse ein dichteres Material (z. B. Wolfram) gewählt wird.

Die große Verzögerung bei kleinen Splittern sorgt außerdem für eine stark unsymmetrische Flugbahnform. Dies führt wiederum dazu, dass die maximale Reichweite in einem Abgangswinkelbereich von 200 bis etwa 600 mil weniger als 10% ändert (siehe Abb. 5.33). Die Bestimmung der maximalen Reichweite kleiner Splitter ist daher recht unkritisch.

Große, schwere Splitter (im Kilogramm Bereich) erfahren infolge der relativ großen Querschnittsbelastung bei kleinen Geschwindigkeiten (100 bis 300 m/s) einen entsprechend geringen Geschwindigkeitsverlust und können in der Folge große Flugweiten erreichen. Dies trifft insbesondere auf tellerartige Splitter zu, die in spe-

zieller Fluglage (Drehung um die Achse des größten Trägheitsmomentes, ähnlich wie ein Diskus) außerordentlich weit fliegen können.

Explosivübungsgranaten im Kaliber 155 mm zerfallen wegen der geringen Sprengstoffmenge in eine relativ geringe Zahl größerer Splitter. Solche etwa handtellergroße Stahlstücke sind bereits mit Reichweiten von gegen 2.5 km festgestellt worden.

Da hier sowohl die Querschnittsbelastung als auch der Luftwiderstandsbeiwert der effektiv eingenommenen Fluglage schwierig zu bestimmen sind, gehört die Berechnung derartiger Splitterflugbahnen zu den schwierigeren Aufgaben des Ballistikers.

Außenballistische Störungen (wie z. B. Längs- und Querwind) sind der Verzögerung des Projektils proportional. Kleine Splitter können daher unter Windeinfluss weit verfrachtet werden, sofern sie genügend lange der Störung ausgesetzt sind. Dies ist insbesondere bei der Abklärung von Schadensfällen zu berücksichtigen.

5.5 Flugbahnmodelle mit mehr als drei Freiheitsgraden

5.5.1 Berechnung der vollständigen Geschossbewegung

5.5.1.1 Bezugssysteme

Zur Beschreibung der Bewegung des dreidimensionalen, starren Geschosses werden drei Bezugssysteme eingeführt (siehe Abb. 5.34):

- Ein *erdfestes ballistisches Koordinatensystem* (Rechtssystem nach Abb. 2.1) mit den Einheitsvektoren $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, dessen Ursprung normalerweise in der Mündung der Waffe liegt.
- Ein sogenanntes *Bahntangentensystem* mit den Einheitsvektoren $(\vec{t}, \vec{s}, \vec{h})$, dessen primäre Richtung mit der Bahntangenten zusammenfällt, die dritte Richtung \vec{h} senkrecht dazu in einer Horizontalebene liegt; die zweite Richtung \vec{s} ergänzt die beiden zu einem Rechtssystem. \vec{s} und \vec{h} spannen somit eine Normalebene (A) zur Bahntangenten auf. Der Ursprung des Systems liegt im Schwerpunkt des Geschosses.
- Ein *geschossfestes System* dessen Einheitsvektoren $(\vec{c}, \vec{p}, \vec{q})$, ein mit dem Geschoss fest verbundenes Rechtssystem bilden, und dessen Ursprung ebenfalls im Schwerpunkt des Geschosses liegt. Die primäre Richtung \vec{c} fällt mit der Symmetrieachse des Geschosses zusammen; die beiden andern Achsen liegen in einer Normalebene (B) dazu.

Werden der Bahnwinkel (Winkel zwischen Bahntangente und Horizontalen) mit θ , der Seitenwinkel (Winkel zwischen der Horizontalprojektion der Bahntangente und der i -Achse) mit η und der Schwerpunkt des Geschosses mit \vec{r} bezeichnet, so wird ein beliebiger Punkt \vec{x} im Bahntangentensystem mit der folgenden Transformation ins erdfeste System übergeführt

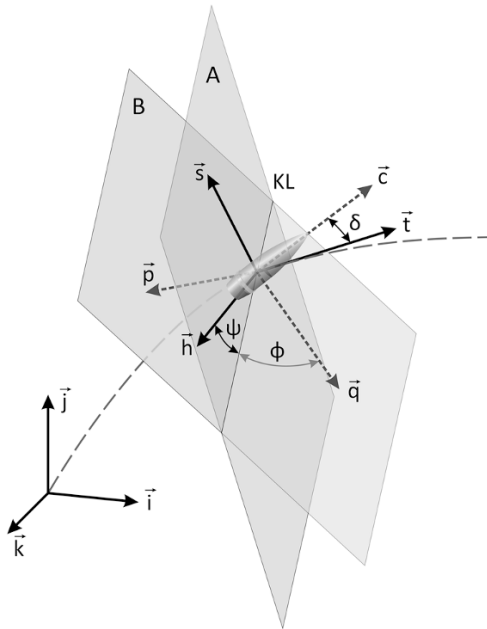


Abb. 5.34. Bezugssysteme für die Beschreibung der vollständigen Geschossbewegung. Ein erdfestes, ballistisches Koordinatensystem $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dient der Beschreibung der Schwerpunktsbahn, das Bahntangentensystem $(\vec{t}, \vec{s}, \vec{h})$ zeichnet die Bewegungsrichtung nach und das geschossfeste System $(\vec{c}, \vec{p}, \vec{q})$ die Lage des Geschosses im Raum. Die Vektoren \vec{s} und \vec{h} spannen die Ebene A auf, die im Schwerpunkt normal zum Tangentenvektor steht. Entsprechend bilden die Vektoren \vec{p} und \vec{q} eine Normalebene B im Schwerpunkt zur Geschossachse. Die Schnittgerade der beiden Ebenen A und B heißt Knotenlinie KL und mit δ , ϕ und ψ sind die Euler'schen Winkel bezeichnet. Nicht eingezeichnet ist die von \vec{t} und \vec{c} aufgespannte Widerstandsebene.

$$(5.5:1) \quad \vec{x}_{(\text{EF})} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cdot \cos \eta & -\sin \theta \cdot \cos \eta & -\sin \eta \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \cos \theta \cdot \sin \eta & -\sin \theta \cdot \sin \eta & \cos \eta \end{pmatrix} \cdot \vec{x}_{(\text{BT})} + \vec{r} . \quad [\text{m}]$$

Der Bezug zwischen dem Bahntangentensystem und dem geschossfesten System erfolgt über die sogenannten *Euler'schen Winkel* δ , ϕ und ψ (siehe Abb. 5.34). Mit δ wird der Winkel zwischen der Bahntangente und der Geschossachse bezeichnet; dies ist zugleich auch der Winkel zwischen den Ebenen A und B. Der Winkel ψ liegt in der Ebene A und bedeutet den Winkel zwischen dem (horizontalen) Vektor \vec{h} und der Knotenlinie, und ϕ liegt zwischen der Knotenlinie und dem in der Ebene B liegenden Vektor \vec{q} . Das geschossfeste System kann nun mit den Drehungen um ϕ (Drehachse \vec{c}), δ (Drehachse ist der nun in der Knotenlinie liegende Vektor \vec{q}') und ψ (Drehachse \vec{c}'' , zusammenfallend mit \vec{t}) in das Bahntangentensystem übergeführt werden. Das Produkt der drei zugehörigen Drehmatrizen ergibt die Transformationsmatrix T, welche das geschossfeste System in das Bahntangentensystem überführt

$$(5.5:2) \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \delta & \sin \delta & 0 \\ -\sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} .$$

Die Berücksichtigung von Wind würde ein weiteres, windfestes System erfordern. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird jedoch darauf verzichtet, da grundsätzlich gleich vorgegangen werden kann, wie es im Abschn. 5.4.4 beschrieben ist.

5.5.1.2 Kräfte und Momente

Die auf ein drallstabilisiertes Geschoss wirkenden Kräfte und Momente sind betragsmäßig bereits im Abschn. 5.3.3 beschrieben worden. Für die Berechnung der vollständigen Geschossbewegung ist es erforderlich, einerseits die Abhängigkeit der Beiwerte vom Anstellwinkel zu berücksichtigen und andererseits beide vektoriell auszudrücken.

Bei der Darstellung des Luftwiderstandes nach Gl. (5.3:20)

$$F_w = c_w \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot A_0, \quad [\text{N}]$$

ist stillschweigend angenommen, dass die Anströmung achsenparallel auf das Geschoss auftrifft. Nimmt aber das Geschoss mit seiner Achse einen bestimmten Anstellwinkel δ zur Bewegungsrichtung (Bahntangente) ein, so vergrößert sich die angeströmte Fläche. Dies hat einen Anstieg des Luftwiderstandes zur Folge, da ja der Staudruck bei gleicher Geschwindigkeit gleich geblieben ist. In der Ballistik gilt nun die Konvention, dass an der Bezugsquerschnittfläche A_0 festgehalten wird und die Widerstandszunahme dem Luftwiderstandsbeiwert c_w zukommt, der damit zu einer Funktion des Anstellwinkels wird $c_w = c_w(\delta)$. In analoger Weise gilt dies auch für den Auftriebsbeiwert c_a und den Momentenbeiwert c_m .

Diese Beiwertfunktionen werden üblicherweise in eine Potenzreihe um den Anstellwinkel 0° entwickelt

$$(5.5:3) \quad c_x(\delta) = c_{x0} + c'_x \cdot \delta + c''_x \cdot \frac{\delta^2}{2!} + c'''_x \cdot \frac{\delta^3}{3!} + \dots, \quad [-]$$

wobei anstelle des Index x die Indices w , a oder m eingesetzt werden können.

Die Funktion $c_w(\delta)$ ist offensichtlich eine gerade Funktion, weil sie bei negativem Anstellwinkel gleichermaßen zunimmt wie bei positivem: $c_w(-\delta) = c_w(\delta)$. Die beiden andern $c_a(\delta)$ und $c_m(\delta)$ sind ungerade: $c_a(-\delta) = -c_a(\delta)$, c_m analog. In der Abb. 5.35 sind entsprechende Ergebnisse von Windkanalmessungen an einem Modell eines Kleinkalibergeschosses (Kaliber 7.5×55) bei $Ma = 2.5$ dargestellt.

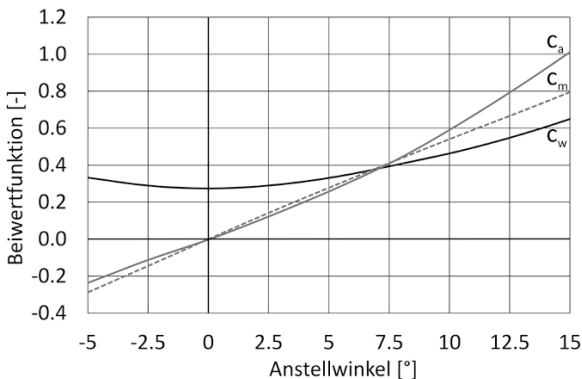


Abb. 5.35. Abhängigkeit der Beiwertfunktionen c_w , c_a und c_m vom Anstellwinkel. Ergebnis aus Windkanalmessungen eines Geschosses ($Ma = 2.5$).

Die Potenzreihen (5.5:3) werden in der Regel nach jeweils zwei Gliedern abgebrochen. Man erhält so

$$(5.5:4) \quad c_w(Ma, \delta) = c_{w0}(Ma) + c_w''(Ma) \cdot \frac{\delta^2}{2}, \quad [-]$$

$$(5.5:5) \quad c_a(Ma, \delta) = c_a'(Ma) \cdot \delta + c_a'''(Ma) \cdot \frac{\delta^3}{6}, \quad [-]$$

$$(5.5:6) \quad c_m(Ma, \delta) = c_m'(Ma) \cdot \delta + c_m'''(Ma) \cdot \frac{\delta^3}{6}. \quad [-]$$

Bei regulärem Geschossflug kann man kleine Anstellwinkel im Bereich von einigen wenigen Grad voraussetzen; dies gestattet in den meisten Fällen, die zweiten Glieder in den drei Beiwertfunktionen wegzulassen.

Mit den Gl. (5.3:20) und (5.5:4) ergibt sich nun für den Luftwiderstand mit

$$(5.5:7) \quad \vec{t} = \frac{\vec{v}}{v}, \quad [-]$$

$$(5.5:8) \quad \vec{F}_W = - \left(c_{w0} + c_w'' \cdot \frac{\delta^2}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A_0 \cdot v^2 \cdot \vec{t}. \quad [N]$$

Der Auftrieb liegt einerseits in der von \vec{t} und \vec{c} aufgespannten Ebene, der sogenannten *Widerstandsebene*, andererseits steht er senkrecht auf dem Vektor des Luftwiderstandes, also auch auf \vec{t} . Somit gilt

$$\vec{F}_A = |\vec{F}_A| \cdot [\vec{t} \times (\vec{c} \times \vec{t})]. \quad [N]$$

Einsetzen der Gl. (5.3:23) und (5.5:5) führt zu

$$(5.5:9) \quad \vec{F}_A = \left(c_a' \cdot \delta + c_a''' \cdot \frac{\delta^3}{6} \right) \cdot \frac{\rho}{2} \cdot A_0 \cdot v^2 \cdot [\vec{t} \times (\vec{c} \times \vec{t})]. \quad [N]$$

Das Kippmoment steht auf der Widerstandsebene senkrecht, woraus sofort folgt

$$(5.5:10) \quad \vec{M}_M = \left(c_m' \cdot \delta + c_m''' \cdot \frac{\delta^3}{6} \right) \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2 \cdot A_0 \cdot d_0 \cdot (\vec{t} \times \vec{c}). \quad [N \cdot m]$$

Zwischen Drehmoment und erzeugender Kraft gilt allgemein die Beziehung

$$(5.5:11) \quad \vec{M}_M = \vec{e}_A \times \vec{F}_A, \quad [N \cdot m]$$

wo \vec{e}_A den Vektor zwischen Drehpunkt (hier: Schwerpunkt) und dem (fiktiven) Angriffspunkt der Luftkraft F_A darstellt. Dieser liegt bei einem drallstabilisierten Geschoss auf dessen Achse zwischen Schwerpunkt und Geschossspitze.

Die Pendeldämpfungskraft wird durch die Drehung des Geschosses um eine Querachse bewirkt, wobei sich drei Anteile unterscheiden lassen. Zum einen ist es die Drehung selbst mit der Winkelgeschwindigkeit ω_p , der zweite Anteil ergibt sich

aus der zeitlichen Änderung des Anstellwinkels, und außerdem entsteht ein Beitrag durch die Änderung der Winkelgeschwindigkeit ω_p selbst. Meist wird der letztere vernachlässigt (R. L. MCCOY, 1999) und manchmal werden die beiden andern zusammengefasst (H. MOLITZ, R. STROBEL, 1963). Andere (frühere) Autoren gehen bereits bei der Herleitung von einer Kraft aus (R. F. LIESKE, R. L. MCCOY, 1964) oder lassen diese Kraft sogar ganz weg.

Als eine Kraft ausgedrückt, wird sie gemäß Gl. (5.3:29) eingesetzt, wobei die Richtung durch die zeitliche Änderung des Einheitsvektors der Geschossachse bestimmt ist, die bekanntlich senkrecht auf dem sich ändernden Vektor steht

$$(5.5:12) \quad \vec{F}_E = -c_e \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2 \cdot A_0 \cdot \omega_p \cdot \frac{d}{v} \cdot \dot{\vec{c}} . \quad [N]$$

Die Richtung des zugehörigen Pendeldämpfungsmomentes steht einerseits auf der Krafrichtung, andererseits auf der Geschossachse senkrecht

$$(5.5:13) \quad \vec{M}_H = -c_h \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2 \cdot A_0 \cdot d_0 \cdot \omega_p \cdot \frac{d}{v} \cdot (\vec{c} \times \dot{\vec{c}}) . \quad [N \cdot m]$$

Das Rollbremsmoment entsteht durch die radiale Komponente der durch die Strömung erzeugten Reibungskraft an der Oberfläche. Eine Querkraft entsteht dabei nicht, weil die gegenüberliegenden Anteile entgegengesetzt gerichtet sind und sich somit aufheben. Die Richtung des Momentes fällt mit der Geschossachse zusammen und der Betrag kann von Gl. (5.3:31) übernommen werden

$$(5.5:14) \quad \vec{M}_I = c_i \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2 \cdot A_0 \cdot d_0 \cdot \frac{\omega \cdot d}{v} \cdot \vec{c} . \quad [N \cdot m]$$

Durch die Anströmung gegen das angestellte Geschoss entsteht nicht nur eine Querkraft, sondern auch eine Querströmung. Wegen der Rotation des Geschosses um seine Längsachse entsteht gemäß Abschnitt 2.3.4.5 eine Magnuskraft. Bei entgegengesetztem Anstellwinkel wechselt diese analog dem Auftrieb auch die Richtung, weshalb der entsprechende Beiwert ebenfalls als ungerade Funktion angesetzt werden kann. Entsprechendes gilt natürlich auch für das Magnusmoment

$$(5.5:15) \quad c_k(Ma, \delta) = c'_k(Ma) \cdot \delta + c''_k(Ma) \cdot \frac{\delta^3}{6} , \quad [-]$$

$$(5.5:16) \quad c_j(Ma, \delta) = c'_j(Ma) \cdot \delta + c''_j(Ma) \cdot \frac{\delta^3}{6} . \quad [-]$$

Die Richtung der Magnuskraft ist stets senkrecht zur Anströmung, die in Richtung der Widerstandsebene erfolgt. Mit der Gl. (5.3:32) ergibt sich somit

$$(5.5:17) \quad F_K = \left(c'_k \cdot \delta + c''_k \cdot \frac{\delta^3}{6} \right) \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2 \cdot A_0 \cdot \frac{\omega \cdot d}{v} \cdot (\vec{t} \times \vec{c}) . \quad [N]$$

Das zugehörige Magnusmoment steht auf der zugehörigen Kraft und auf der Geschossachse senkrecht. Mit den Gl. (5.3:33) und (5.5:16) erhält man

$$(5.5:18) \quad \vec{M}_J = \left(\vec{c}'_j \cdot \delta + \vec{c}'''_j \cdot \frac{\delta^3}{6} \right) \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2 \cdot A_0 \cdot d_0 \cdot \frac{\omega \cdot d}{v} \cdot \left[\vec{c} \times (\vec{t} \times \vec{c}) \right] . \quad [\text{N} \cdot \text{m}]$$

Zwischen Magnusmoment und Magnuskraft kann ebenfalls analog Gl. (5.5:11) angesetzt werden

$$(5.5:19) \quad \vec{M}_J = \vec{e}_K \times \vec{F}_K , \quad [\text{N} \cdot \text{m}]$$

wo \vec{e}_K vom Schwerpunkt zum (auch fiktiven) Angriffspunkt der Magnuskraft \vec{F}_K zeigt. Im Gegensatz zum Angriffspunkt der Luftkraft liegt dieser in der Regel zwischen Schwerpunkt und Geschossboden.

Die Pendelbewegung um eine Querachse erzeugt auch eine Queranströmung, die zusammen mit der Eigenrotation des Geschosses einen Magnuseffekt erzeugt. Die entsprechende Kraft ist die Pendelmagnuskraft, das zugehörige Moment das Pendelmagnusmoment. Da deren Einfluss bis heute offensichtlich experimentell nicht nachgewiesen werden konnte (R. L. McCoy, 1999), werden sie in Rechnungen weggelassen. In Abschn. 5.3.3.4 sind sie der Vollständigkeit halber erwähnt.

5.5.1.3 Die Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichungen für das 6-FG-Modell der Geschossbewegung basieren auf den üblichen Erhaltungssätzen der Mechanik. Nach dem Impulssatz gilt die vektorielle Differenzialgleichung

$$(5.5:20a) \quad m \cdot \dot{\vec{v}} = \vec{F}_W + \vec{F}_A + \vec{F}_E + \vec{F}_K + m \cdot \vec{g} + m \cdot \vec{a}_c , \quad [\text{N}]$$

die zusammen mit

$$(5.5:20b) \quad \dot{\vec{r}} = \vec{v} , \quad [\text{m/s}]$$

Geschwindigkeit und Ort des Schwerpunktes bestimmen. Dabei sind die Kräfte alle zunächst im Bahntangentensystem darzustellen und anschließend ins erdfeste System zu transformieren.

Die Eigenbewegung des Geschosses um dessen Schwerpunkt wird durch den Drehimpulssatz im geschossfesten (c, p, q)-System beschrieben

$$(5.5:20c) \quad \dot{\vec{L}} + \vec{\Omega} \times \vec{L} = \vec{M}_I + \vec{M}_M + \vec{M}_H + \vec{M}_J , \quad [\text{N} \cdot \text{m}]$$

wobei der Drehimpulsvektor \vec{L} gegeben ist durch

$$\vec{L} = \Theta \cdot \vec{\omega} . \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}]$$

Mit $\vec{\omega}$ wird der Vektor der Winkelgeschwindigkeit des Geschosses bezeichnet, und Θ steht für den Trägheitstensor des Geschosses, in dem wegen der vorausgesetzten Axialsymmetrie nur die Diagonalelemente von Null verschieden sind

$$\Theta = \begin{pmatrix} J_a & 0 & 0 \\ 0 & J_r & 0 \\ 0 & 0 & J_r \end{pmatrix}. \quad [\text{kg}\cdot\text{m}^2]$$

J_a bedeutet das axiale, J_r das radiale Trägheitsmoment. Der Vektor $\vec{\Omega}$ bezeichnet die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich das geschossfeste Bezugssystem $(\vec{c}, \vec{p}, \vec{q})$ bezüglich des Bahntangentialsystems $(\vec{i}, \vec{s}, \vec{h})$ dreht. Die eigentliche Richtung der Geschossachsen im Raum ergibt sich mit der vierten Differenzialgleichung

$$(5.5:20d) \quad \dot{\vec{\phi}} = T \cdot \vec{\Omega}, \quad [1/\text{s}]$$

mit T als Euler'sche Transformationsmatrizen gemäß Gl. (5.5:2). Beide Gleichungen (5.5:20c und d) sind schließlich ebenfalls noch unter Verwendung der Transformation (5.5:1) ins erdfeste System zu transformieren.

Die 4 vektoriellen Gleichungen (5.5:20a–d) bilden in Komponenten ausgeschrieben ein Gleichungssystem von 12 linearen Differenzialgleichungen, das bei Kenntnis aller erforderlichen Daten mittels eines numerischen Verfahrens (üblich sind Runge-Kutta-Verfahren) gelöst werden kann. Es wird hier darauf verzichtet, die Komponenten explizit wiederzugeben. Sie können z. B. in D. E. CARLUCCI, S. S. JACOBSON (2008), R. L. MCCOY (1999) (Vorsicht wegen Druckfehlern!) oder in H. MOLITZ, R. STROBEL (1963) nachgeschlagen werden.

Wer sich ernsthaft mit der Programmierung dieses Systems auseinandersetzen will, wird nicht umhin kommen, sich die Gleichungen und ihre Transformationen selbst minutiös aufzuschreiben.

5.5.1.4 Ergänzungen und Hinweise

Transformationen. Die Transformation zwischen dem geschossfesten und dem Bahntangenten-System mittels der Euler'schen Winkel ist aus geometrischer Sicht sehr anschaulich und lässt sich auch gut programmieren, birgt jedoch bei der Ausführung einen gewichtigen Nachteil. Die Folge der Drehungen der Euler'schen Winkel kann zu dem sogenannten „Gimbal Lock“ führen.

Das englische Wort „Gimbal“ bezeichnet die kardanische Aufhängung, wie sie beispielsweise in einem Kreiselkompass angewendet wird.

Dieses Ereignis, also die „kardanische Blockade“, kann bei einer räumlichen Transformation mittels der Euler'schen Winkel auftreten, die bei einer bestimmten Folge der Drehungen blockieren kann. Diese Drehungen werden nacheinander ausgeführt, wobei die aktuelle Drehachse von den vorangegangenen Abbildungen mitbestimmt wird. Dabei kann es geschehen, dass zwei Achsen zusammenfallen, wodurch eine Winkelinformation verloren geht; dies führt bei Transformationen zu falschen Ergebnissen und bei mechanischen Kardansystemen zu Blockaden.

Wird die Transformation des geschossfesten Bezugssystems in das bahnfeste nicht mit den Euler'schen Winkeln durchgeführt, sondern werden dazu die Hamil-

ton'schen *Quaternionen* zu Hilfe genommen, kann dieses Problem vermieden werden. Allerdings wird die Rechnung dadurch etwas komplizierter.

Die Quaternionen wurden vom irischen Mathematiker W. R. HAMILTON 1843 entdeckt während des Versuchs, die komplexen Zahlen $a + b \cdot i = (a, b)$ um eine Dimension zu erweitern. Die Definition einer Multiplikation gelang jedoch erst durch Hinzunahme einer weiteren Einheit und damit einer vierten Dimension.

Eine Quaternion ist somit ein 4-Tupel reeller Zahlen (a, b_1, b_2, b_3) ; a wird als Realteil und die b_i ($i = 1, 2, 3$) als Imaginärteile bezeichnet. Die definierte Multiplikation erwies sich jedoch als nicht-kommutativ; weshalb die Menge der Quaternionen einen Schiefkörper bildet. Übliche Darstellungen der Quaternionen sind

$$(5.5:21a) \quad Q = a + b_1 \cdot i + b_2 \cdot j + b_3 \cdot k, \quad \text{klassisch und}$$

$$(5.5:21b) \quad Q = (a, \vec{b}), \quad \text{vektoriell,}$$

worin $\vec{b} = (b_1 \cdot i, b_2 \cdot j, b_3 \cdot k)$ einen dreidimensionalen imaginären Vektor darstellt. Außerdem lassen sie sich auch als vierdimensionale komplexe Vektoren oder als komplexe Matrizen schreiben. Für die imaginären Einheiten i, j und k gelten die Rechenregeln

$$(5.5:22a) \quad i^2 = j^2 = k^2 = i \cdot j \cdot k = -1, \quad \text{und damit auch}$$

$$(5.5:22b) \quad i \cdot j = k, j \cdot k = i, k \cdot i = j \quad \text{und} \quad j \cdot i = -k, k \cdot j = -i, i \cdot k = -j.$$

Die Addition zweier Quaternionen $Q_1 = (a_1, \vec{b}_1)$ und $Q_2 = (a_2, \vec{b}_2)$ ergibt

$$(5.5:23) \quad Q_1 + Q_2 = (a_1 + a_2, \vec{b}_1 + \vec{b}_2),$$

woraus auch das additive neutrale Element $(0, \vec{0})$ ersichtlich ist. Die Multiplikation wird nach der folgenden Formel ausgeführt

$$(5.5:24) \quad Q_1 \cdot Q_2 = (a_1 \cdot a_2 - \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2, \vec{b}_1 \times \vec{b}_2 + a_1 \cdot \vec{b}_2 + a_2 \cdot \vec{b}_1),$$

worin bei den Multiplikationen der Vektoren \vec{b}_i jeweils das Skalar- bzw. Vektorprodukt gemeint ist. Letzteres trägt auch die Verantwortung, dass $Q_1 \cdot Q_2 \neq Q_2 \cdot Q_1$ ist. Analog zu den komplexen Zahlen existiert auch eine konjugierte Quaternion, definiert durch $\bar{Q} = (a, -\vec{b})$, und es gilt

$$(5.5:25) \quad \text{Norm}(Q) = Q \cdot \bar{Q} = |Q|^2 = a^2 + \vec{b}^2.$$

Die Wurzel aus der Norm (also $|Q|$) wird als die Länge von Q bezeichnet. Mit der Norm kann die Inverse einer Quaternion gebildet werden

$$(5.5:26) \quad Q^{-1} = \frac{\bar{Q}}{|Q|^2}.$$

Eine wichtige Rolle bei der Darstellung von Transformationen spielen die Einheitsquaternionen, die aus einer beliebigen Quaternion durch Division durch deren Länge gebildet werden

$$(5.5:27) \quad Q^* = \frac{Q}{|Q|} = \left(\frac{a}{|Q|}, \frac{\vec{b}}{|Q|} \right) = (a^*, \vec{b}^*) .$$

Eine Quaternion $P = (0, \vec{x})$, deren Realteil 0 beträgt, wird rein imaginär (auch reine Quaternion) genannt. Sie stellt einen dreidimensionalen Vektor dar. Wie bei den komplexen Zahlen existiert auch bei den Quaternionen eine Polardarstellung

$$(5.5:28) \quad Q = |Q| \cdot (\cos \varphi, \vec{e} \cdot \sin \varphi) .$$

\vec{e} stellt darin eine rein imaginäre Einheitsquaternion dar.

Nach diesen Vorbereitungen lässt sich nun der zentrale Satz zur Rotation im dreidimensionalen Raum mittels Quaternionen formulieren.

Es sei \vec{x} ein Vektor des dreidimensionalen Raumes und P die zugehörige rein imaginäre Quaternion. Die Operation

$$(5.5:29) \quad D = Q^* \cdot P \cdot \vec{Q}^* ,$$

mit der Einheitsquaternion Q^*

$$Q^* = (\cos \varphi, \vec{e} \cdot \sin \varphi) ,$$

rotiert den Vektor \vec{x} um die durch den Vektor \vec{e} dargestellte Achse mit dem Drehwinkel $2 \cdot \varphi$. Werden also die Vektoren im dreidimensionalen Raum als reine Quaternionen dargestellt, lässt sich stets eine Einheitsquaternion finden, mit welcher die gewünschte Drehung vollzogen werden kann.

Die Darstellung der Drehungen mittels Quaternionen hat den Vorteil, dass der Gimbal-Lock nicht eintreten kann. Dies muss jedoch durch einen höheren Programmieraufwand erkauft werden; nicht zuletzt, weil für die Translationen dennoch die Matrizen beibehalten werden müssen.

Die Berechnung räumlicher Rotationen mit Hilfe der Quaternionen wird heute verbreitet in der Programmierung von Robotern und Computerspielen eingesetzt. Es ist anzunehmen, dass entsprechende Module verfügbar sind. Auf eine ausführliche Darstellung der entsprechenden Transformationsgleichungen wird daher verzichtet. Sie kann beispielsweise in V. FLECK (2009) nachgeschlagen werden. Literatur zu den Quaternionen siehe z. B. bei T. LEDOUX (2011) und M. LUST (2001).

Bestimmung der Kraft- und Momentenbeiwerte. Das vektorielle Differenzialgleichungssystem (5.5:20 a–d) benötigt zu seiner numerischen Integration die Kenntnis sämtlicher Kraft- und Momentenbeiwerte in Abhängigkeit der Machzahl und des Anstellwinkels. Grundsätzlich stehen dazu zwei Möglichkeiten offen: rechnerisch auf Grund aerodynamischer Prinzipien und messtechnisch mittels Modell- oder Realversuche. Mit entsprechenden aerodynamischen Rechnungen lassen sich der axiale Luftwiderstandsbeiwert und bei kleinen Anstellwinkeln auch der Auftrieb und das Kippmoment berechnen (siehe dazu Abschn. 5.7.3). Mit speziellen Programmen können zusätzlich auch die Magnuskraft und ihr Moment sowie das Pendeldämpfungsmoment ermittelt werden.

Experimentell werden Luftwiderstandsbeiwerte durch Geschwindigkeits-Weg-Messungen mittels Radar gemessen. Allerdings fehlt in der Regel die gleichzeitige

Ermittlung des Anstellwinkels, wodurch c_{w0} und c_w'' nicht auseinandergehalten werden können. Auftrieb und Kippmoment lassen sich durch Windkanalmessungen bestimmen, wobei berücksichtigt werden muss, dass die Rotation um die Längsachse nicht (oder nur mit großem Aufwand) simuliert werden kann. In Freifluganlagen lassen sich einige Beiwerte ermitteln, indem die Pendelungen (räumlicher Anstellwinkel, Schwerpunktbahn) des Geschosses gemessen werden (mit Hilfe von Funkenblitz- oder Schattenaufnahmen). Es ergeben sich die Beiwerte von Widerstand, Auftrieb, Kippmoment, Magnusmoment und Pendeldämpfungsmoment. Allerdings ist die Versuchsdurchführung und -auswertung sehr aufwändig und meist auf kleine bis mittlere Kaliber beschränkt. Bei größeren Kalibern besteht die Möglichkeit, Sonden in das Geschoss einzubauen, welche die Lage der Geschossachse und die Drehfrequenz via Telemetrie übermitteln. Dies kann zur Bestimmung derselben Beiwerte verwendet werden. Dabei ist zu beachten, dass das Messgeschoss in allen physikalischen Eigenschaften (Form, Schwerpunkt, Trägheitsmomente) mit dem zu untersuchenden Geschoss übereinstimmt.

Bestimmung der Anfangswerte. Zum Starten der Integration der Geschossbewegung müssen sämtliche 4 gesuchten Vektorfunktionen für $t = 0$ vorgegebene Werte aufweisen. Es sind also Orts- und Geschwindigkeitsvektor des Schwerpunktes sowie Richtung der Geschossachse und deren vektorielle Winkelgeschwindigkeit bei Mündungsdurchgang als bekannt vorauszusetzen. Angesichts der vor dem Mündungsdurchgang des Geschosses einsetzenden Rohrschwingungen und der dadurch bedingten Querbewegung der Mündung sowie des Einflusses der Pulvergase, die das Geschoss außerhalb der Mündung von hinten überströmen, ist die Ermittlung dieser Werte schwierig, wenn überhaupt durchführbar.

6-FG-Modelle werden dieser Probleme wegen vor allem für Parameterstudien (z. B. Einfluss der Startwerte und der Flugbedingungen auf die Streuung) und zur Lösung von lokalen Bewegungsproblemen (Stabilität, Folgsamkeit) bei Projektilen eingesetzt, wobei in der Regel ein kleiner Anstellwinkel vorausgesetzt wird.

5.5.1.5 Die Gleichung des komplexen Anstellwinkels

Ein Weg, einen analytischen Lösungsansatz für die Bewegung des Geschosses um seinen Schwerpunkt zu finden, führt über die Einführung des sogenannten *komplexen Anstellwinkels*, wobei δ den Anstellwinkel (Winkel zwischen Bahntangenten und Geschossachse) und ψ den Drehwinkel der Geschossachse um die Bahntangente bedeutet (siehe Abb. 5.36 und auch 5.34)

$$(5.5:30) \quad \zeta = \delta \cdot (\cos \psi + i \cdot \sin \psi) = \delta \cdot e^{i \cdot \psi} . \quad [-]$$

Ähnlich kann auch der komplexe Bahnwinkel definiert werden

$$(5.5:31) \quad \varepsilon = \theta + i \cdot \eta . \quad [-]$$

Werden die beiden Gleichungen zwei Mal nach der Zeit abgeleitet und die dabei entstehenden Größen aus den Gl. (5.5:20a–d) eingesetzt, so ergibt sich nach einer

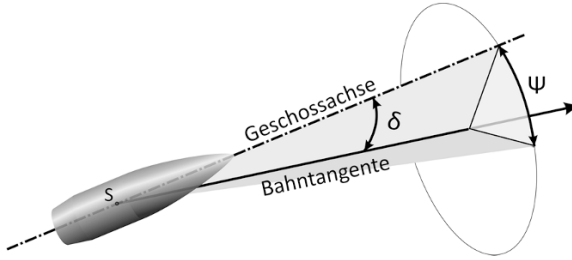


Abb. 5.36. Zur Definition des komplexen Anstellwinkels.

Reihe von Umwandlungen und rechentechnischen Kniffen, unter anderem den Ersatz der Zeit als unabhängige Variable durch die auf das Kaliber bezogene Bahnlänge λ (siehe E. CARTOUX 1974, R. L. MCCOY, 1999)

$$(5.5:32) \quad \lambda = \int_0^t \frac{v}{d} \cdot dt, \quad [-]$$

eine Differenzialgleichung 2. Ordnung für den komplexen Anstellwinkel ζ

$$(5.5:33) \quad \zeta'' + (\alpha_1 - i \cdot \beta_1) \cdot \zeta' + (\alpha_0 - i \cdot \beta_0) \cdot \zeta = \alpha_3 - i \cdot \beta_3. \quad [-]$$

Zusätzlich vorausgesetzt sind dabei ein rotationssymmetrisches Geschoss, eine gestreckte Flugbahn, ein kleiner Anstellwinkel δ , kleine Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\theta}$, $\dot{\eta}$ und Beiwerte, die nur linear vom Anstellwinkel abhängen.

Die Real- und Imaginäranteile der Koeffizienten enthalten nebst den festen physikalischen Größen des Geschosses noch die Geschwindigkeit, die Winkelgeschwindigkeit, den Bahnwinkel und die Beiwerte der einwirkenden Kräfte und Momente. Sie sind dimensionslos und lauten

$$(5.5:34a) \quad \alpha_0 = -c'_m \cdot \frac{\pi \cdot \rho}{8} \cdot \frac{d^5}{J_r}, \quad [-]$$

$$(5.5:34b) \quad \beta_0 = \frac{\pi \cdot \rho}{8} \cdot \frac{d^3}{m} \cdot \frac{J_a}{J_r} \cdot \frac{\omega \cdot d}{v} \cdot \left(c'_a - c'_j \cdot \frac{d^2 \cdot m}{J_a} \right), \quad [-]$$

$$(5.5:34c) \quad \alpha_1 = \frac{\pi \cdot \rho}{8} \cdot \frac{d^3}{m} \cdot \left(c'_a - c_{w0} + c_h \cdot \frac{d^2 \cdot m}{J_r} \right), \quad [-]$$

$$(5.5:34d) \quad \beta_1 = \frac{J_a}{J_r} \cdot \frac{\omega \cdot d}{v}, \quad [-]$$

$$(5.5:34e) \quad \alpha_3 = \left(\frac{g \cdot d \cdot \cos \theta}{v^2} \right)' + \frac{g \cdot d \cdot \cos \theta}{v^2} \cdot \frac{\pi \cdot \rho \cdot d^5}{8} \cdot \left(\frac{c_h}{J_r} - \frac{c_i}{J_a} \right), \quad [-]$$

$$(5.5:34f) \quad \beta_3 = g \cdot \frac{J_a}{J_r} \cdot \frac{\omega \cdot d^2}{v^3} \cdot \cos \theta. \quad [-]$$

Gleichung (5.5:33) beschreibt vereinfacht die vollständige Geschossbewegung um den Schwerpunkt bei kleinen Anstellwinkeln und bei gestreckten Flugbahnen. Sie

wird auch *linearisierte Bewegungsgleichung* genannt. Unter gewissen Bedingungen kann sie durch komplexe Exponentialfunktionen analytisch gelöst werden (siehe obige Literaturhinweise), und ist auch Ausgangspunkt zu Stabilitätsbetrachtungen und zu Vereinfachungen, welche Nachteile des Massenpunktmodelles aufheben und dennoch weniger aufwändig sind als ein vollständiges 6-FG-Modell.

5.5.2 Modifizierte Massenpunktmodelle

5.5.2.1 Vorbemerkung

In den Anfängen der Computertechnik scheiterte die Berechnung der vollständigen Geschossbewegung nicht nur an den fehlenden Beiwerten, sondern vor allem auch an den sehr langen Rechenzeiten für die Lösung des betreffenden Differenzialgleichungssystems. Es wurde deshalb nach Kompromisslösungen gesucht, welche die Geschossbewegung einerseits besser beschreiben sollten als das Massenpunktmodell, andererseits den rechentechnischen Aufwand geringer halten würden als dies beim 6-FG-Modell der Fall war. Hier bot sich insbesondere die Gleichung des komplexen Anstellwinkels an, die ja bereits einige Vereinfachungen hinter sich hatte. Die dabei entstandenen sogenannten *modifizierten Massenpunktmodelle* sind auch heute noch interessant, weil sie mit weniger Geschosdaten auskommen und dadurch der messtechnische Aufwand zu deren Ermittlung vermindert wird.

Ein offensichtlicher Fehler einer mit dem Massenpunktmodell gerechneten Bahn betrifft die Gipfelhöhe bei steileren Elevationen. Die Flugbahn wird mit einem Luftwiderstandsbeiwert gerechnet, der auf einem über die ganze Flugbahn gemittelten Anstellwinkel basiert, weil bei der experimentellen Ermittlung des c_w der anstellwinkelabhängige Anteil $c_w''(\delta)$ zumeist nicht erfasst wird. In Wirklichkeit ist jedoch der Anstellwinkel im auf- und absteigenden Ast geringer als während der Bahnrichtungsänderung im Gipfel. Dies bedeutet, dass im aufsteigenden Ast mit einem zu hohen Widerstand gerechnet wird; damit ergibt sich eine geringere Gipfelhöhe, als sie in Wirklichkeit ist. Dies kann bei Artilleriegeschossen durchaus mehrere Dutzende Meter ausmachen. Modifizierte Massenpunktmodelle streben in erster Linie danach, den Einfluss des Anstellwinkels (und damit den Auftrieb und die Magnuskraft) längs der Flugbahn zu berücksichtigen.

5.5.2.2 Die Abnahme der Winkelgeschwindigkeit

Einen markanten Einfluss auf die Flugbahn eines drallstabilisierten Geschosses übt dessen Winkelgeschwindigkeit aus, da die Stabilität der Kreiselbewegung und der zugehörige Präzessionswinkel den Anstellwinkel wesentlich mitbestimmen. Eine Erweiterung eines Massenpunktmodelles, welche die Abnahme der Drehzahl des Geschosses mitberechnet, würde bereits Schätzungen zur Stabilität des Geschosses längs der Flugbahn erlauben. Zudem findet sich die Winkelgeschwindigkeit in ei-

nigen Koeffizienten der Gleichung des komplexen Anstellwinkels. Deren Anwendung setzt somit die Kenntnis des Verlaufs der Winkelgeschwindigkeit voraus.

Für die Drallabnahme bei einem drallstabilisierten Geschoss (ohne Leitwerk) ist ausschließlich das Moment des Reibungswiderstandes (das Rollbremsmoment) verantwortlich. Zu dessen Bestimmung wird von der Reibungskraft pro Flächeneinheit der Geschossoberfläche aus gegangen, wobei zu berücksichtigen ist, dass der Reibungswiderstand mit zunehmender Grenzschichtdicke und daher mit zunehmendem Abstand von der Geschossspitze zunimmt. Mit der Annahme

$$F_l \propto x^{0.8},$$

für turbulente Strömungen (H. SCHLICHTING, 1965) ergibt sich

$$(5.5:35) \quad F_l(x) = 1.8 \cdot c_i \cdot \frac{\rho}{2} \cdot (v^2 + r^2(x) \cdot \omega^2) \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4 \cdot A \cdot \ell^{0.8}} \cdot x^{0.8}, \quad [\text{N/m}^2]$$

wo x den Abstand von der Geschossspitze, ℓ die Länge, $r(x)$ die Meridianlinie und A die Oberfläche des Geschosses bedeutet. Für das Moment um die Geschossachse folgt damit

$$(5.5:36) \quad dM_l = F_l(x) \cdot \frac{r(x) \cdot \omega}{\sqrt{v^2 + r^2(x) \cdot \omega^2}} \cdot r(x) \cdot dA. \quad [\text{N} \cdot \text{m}]$$

Einsetzen von (5.5:35) in (5.5:36), zusammenfassen und vereinfachen

$$dM_l = c_i \cdot \frac{9 \cdot \rho \cdot d^2 \cdot \pi}{40 \cdot A \cdot \ell^{0.8}} \cdot r^2(x) \cdot \omega \cdot v \cdot \sqrt{1 + \frac{r^2(x) \cdot \omega^2}{v^2}} \cdot x^{0.8} \cdot dA. \quad [\text{N} \cdot \text{m}]$$

Weil $r \cdot \omega \ll v$, kann die Wurzel linearisiert werden

$$(5.5:37) \quad dM_l = c_i \cdot \frac{9 \cdot \rho \cdot d^2 \cdot \pi}{40 \cdot A \cdot \ell^{0.8}} \cdot \omega \cdot v \cdot r^2(x) \cdot \left(1 + \frac{r^2(x) \cdot \omega^2}{2 \cdot v^2}\right) \cdot x^{0.8} \cdot dA. \quad [\text{N} \cdot \text{m}]$$

Die Integration über die Oberfläche des Geschosses führt zu

$$(5.5:38) \quad M_l = c_i \cdot \frac{\rho}{2} \cdot \omega \cdot v \cdot \left(C_1 + \frac{\omega^2}{v^2} \cdot C_2\right), \quad \text{mit} \quad [\text{N} \cdot \text{m}]$$

$$(5.5:39) \quad C_1 = \frac{0.45 \cdot d^2 \cdot \pi}{A \cdot \ell^{0.8}} \cdot \oint r^2(x) \cdot x^{0.8} \cdot dA, \quad [\text{m}^4]$$

$$(5.5:40) \quad C_2 = \frac{0.225 \cdot d^2 \cdot \pi}{A \cdot \ell^{0.8}} \cdot \oint r^4(x) \cdot x^{0.8} \cdot dA. \quad [\text{m}^6]$$

Die Integration des Reibungsmomentes lässt sich somit auf eine rein geometrische Integration zurückführen. Für die rechnerische Ermittlung des Reibungsbeiwertes c_i sei auf den Abschn. 5.7.3.5 verwiesen.

Die Winkelgeschwindigkeit ergibt sich dann aus der Bewegungsgleichung des rotierenden Körpers (wo J_a das axiale Trägheitsmoment bezeichnet)

$$(5.5:41) \quad J_a \cdot \dot{\omega} = -M_l . \quad [\text{N} \cdot \text{m}]$$

Zusammen mit den Bewegungsgleichungen des Massenpunktes kann diese Gleichung numerisch integriert werden und liefert so zusätzlich zu jedem Bahnpunkt die momentane Winkelgeschwindigkeit

$$(5.5:42) \quad \left| \begin{array}{lcl} m \cdot \dot{\vec{v}} & = & \vec{F}_W + m \cdot \vec{g} + m \cdot \vec{a}_c , \quad [\text{N}] \\ \dot{\omega} & = & -\frac{M_l}{J_a} , \quad [1/\text{s}^2] \\ \dot{\vec{r}} & = & \vec{v} . \quad [\text{m/s}] \end{array} \right.$$

Wegen der zusätzlichen Differenzialgleichung in diesem System wird oft auch von einem 4-FG-Modell der Außenballistik gesprochen.

5.5.2.3 Der BRL-Ansatz

Das Problem der langen Rechenzeiten beim 6-FG-Modell in den 60er-Jahren des vergangenen Jahrhunderts veranlasste das „Computing Laboratory“ der „Ballistic Research Laboratories“ (BRL) der US Army, nach einem Ansatz zu suchen, der zumindest das oben geschilderte Problem des Anstellwinkels verbessert lösen könnte. Im Report 1314 (R. F. LIESKE, M. L. REITER, 1966) wird unter den in Abschn. 5.5.1.5 erwähnten Vereinfachungen eine Gleichung für den Anstellwinkel hergeleitet.

Zum selben Ergebnis gelangt man, wenn in der linearisierten Bewegungsgleichung (5.5:33) die Winkelbeschleunigungen und -geschwindigkeiten ζ'' und ζ' vernachlässigt werden. Der komplexe Anstellwinkel ζ und damit auch die Winkel δ und ψ können so direkt berechnet werden

$$(5.5:43) \quad \zeta = \frac{\alpha_3 - i \cdot \beta_3}{\alpha_0 - i \cdot \beta_0} = \frac{(\alpha_3 - i \cdot \beta_3) \cdot (\alpha_0 + i \cdot \beta_0)}{\alpha_0^2 + \beta_0^2} . \quad [-]$$

Darin werden die Ausdrücke (5.5:34a, b) bzw. (5.5:34e, f) eingesetzt, in denen auch die Winkelgeschwindigkeit enthalten ist. Die Differenzialgleichung (5.5:41) ist daher mit zu integrieren. Bei bekannten Winkeln können nun auch die Auftriebs- und die Magnuskraft berechnet werden. Zusammen mit der Gleichung (5.5:43) kann somit das folgende System angesetzt werden

$$(5.5:44) \quad \left| \begin{array}{lcl} m \cdot \dot{\vec{v}} & = & \vec{F}_W + \vec{F}_A + \vec{F}_K + m \cdot \vec{g} + m \cdot \vec{a}_c , \quad [\text{N}] \\ \dot{\omega} & = & -\frac{M_l}{J_a} , \quad [1/\text{s}^2] \\ \dot{\vec{r}} & = & \vec{v} , \quad [\text{m/s}] \end{array} \right.$$

Das Geschoss fliegt in diesem Modell während der ganzen Flugbahn mit einem bestimmten, von Geschwindigkeit und Bahnwinkel abhängigen Anstellwinkel.

Eine ausführliche Darstellung dieses Rechenmodells (auch *modifiziertes statisches Massenpunktsmodell* genannt) findet sich (außer im erwähnten Report) auch in R. L. MCCOY (1999).

5.5.2.4 Der Ansatz von FLECK und MOLITZ

In einem Beitrag anlässlich des 3. Internationalen Ballistischen Symposiums schlugen V. FLECK u. H. MOLITZ (1977) vor, in der linearisierten Bewegungsgleichung nur die zweite Ableitung des komplexen Anstellwinkels zu vernachlässigen. Es ergibt sich eine lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung für ζ

$$(5.5:45) \quad \zeta' + \frac{\alpha_0 - i \cdot \beta_0}{\alpha_1 - i \cdot \beta_1} \cdot \zeta = \frac{\alpha_3 - i \cdot \beta_3}{\alpha_1 - i \cdot \beta_1}, \quad [-]$$

die zusammen mit dem System (5.5:44) (numerisch) integriert werden kann (*modifiziertes dynamisches Massenpunktsmodell*). Dabei sind wiederum die Ausdrücke (5.5:34a–f) einzusetzen. Unter Annahme eines schrittweise konstanten c_w , lässt sich damit der komplexe Anstellwinkel (also δ und ψ) für jeden Integrationsschritt schätzen. Der Genauigkeitsgewinn bei der Bestimmung des Anstellwinkels ist gegenüber dem BRL-Ansatz beträchtlich, wie dies die Abb. 5.37 und 5.38 zeigen, die aus der oben genannten Arbeit stammen.

Im Manuskript von V. FLECK (2009) sind im Zusammenhang mit den modifizierten Massenpunktsmodellen Vergleichsrechnungen präsentiert, welche deren Unterschied untereinander und zum 6-FG-Modell zeigen. Gerechnet wurde die Flugbahn eines 155 mm Artilleriegeschosses bei einer Mündungsgeschwindigkeit von 800 m/s und einer Elevation von 1120 mil. Bezogen auf das 6-FG-Modell ergab sich beim statischen Modell ein Distanzfehler von +5.0 ‰ und beim dynamischen Modell von +0.2 ‰. In der Seite betrug der Fehler –8.6 ‰ bzw. –12.0 ‰ und in der Flugzeit +1.0 ‰ bzw. 0.4 ‰. Für praktische Anwendungen sind die Genauigkeiten der modifizierten Modelle offensichtlich durchaus genügend.

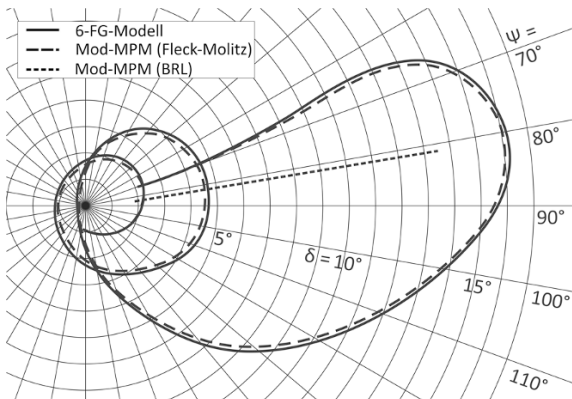


Abb. 5.37. Darstellung des komplexen Anstellwinkels mit den Komponenten δ und ψ , gerechnet mit den beiden modifizierten Massenpunktsmodellen und verglichen mit dem 6-FG-Modell. Das dynamische Modell nähert das 6-FG-Modell gut an, während beim statischen Modell der Drehwinkel der Geschossachse um die Bahntangente konstant bleibt und sich nur der Anstellwinkel ändert.

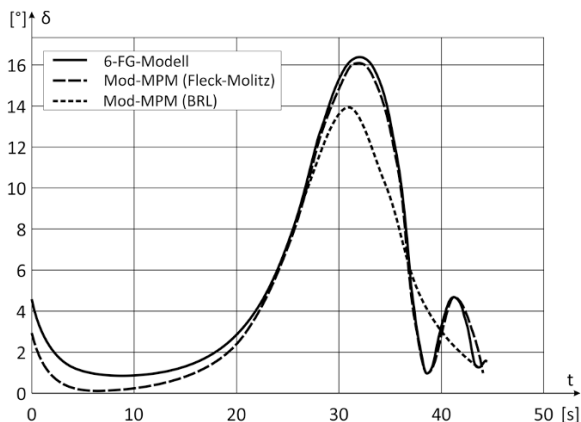


Abb. 5.38. Verlauf des Anstellwinkels in Abhängigkeit der Flugzeit im gleichen Modellvergleich wie Abb. 5.37.

5.6 Stabilität und Folgsamkeit

5.6.1 Was bedeutet Stabilität?

Jedes physikalische System besitzt normalerweise eine Ruhelage, die einem bestimmten Kräfte- und Momentengleichgewicht entspricht und in der es solange verharrt, als dieses Gleichgewicht nicht gestört wird. Wirkt jedoch kurzzeitig eine Störung (eine Kraft oder ein Drehmoment) auf das System ein, so kann es auf drei verschiedene Arten reagieren:

- Klingt die dabei erzwungene Bewegung wieder ab, so heißt das System *stabil*. Dabei tritt eine (meist von der Störkraft induzierte) Gegenkraft auf.
- Nimmt sie hingegen zu, so wird das System als *instabil* oder *labil* bezeichnet. Hier sind oft Kräfte festzustellen, welche durch die Störung zunehmen.
- Bleibt die erzwungene Bewegung erhalten, so ist der Zustand des Systems *indifferent*. Nach Verschwinden der Störung bleibt es in einer neuen Gleichgewichtslage, die sich von der ursprünglichen unterscheidet oder kehrt unter gewissen Bedingungen in die frühere zurück.

Diese drei Möglichkeiten lassen sich durch eine Kugel veranschaulichen, die im ersten Fall in der konkaven Seite einer Kugelschale, im zweiten Fall auf deren konvexen Seite und im dritten Fall auf einer Ebene liegt (siehe Abb. 5.39).

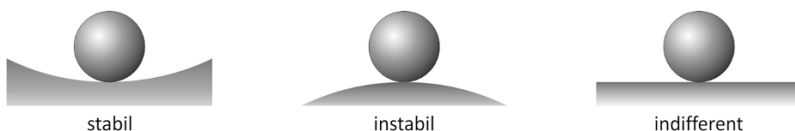


Abb. 5.39. Veranschaulichung der möglichen Stabilitätszustände. Man stelle sich die Bewegung der Kugeln vor, wenn kurzzeitig eine seitliche Kraft einwirkt.

5.6.2 Stabilisierungsprinzipien beim Geschoss

5.6.2.1 Geschosse mit Drallstabilisierung

Die stabilisierende Eigenschaft des Kreisels, unter Einfluss einer Kraft nicht dieser nachzugeben, sondern senkrecht dazu auszuweichen, ist wohl die am häufigsten angewendete Methode, ein langes Geschoss stabil auf seiner Flugbahn zu halten. Allerdings werden dazu recht hohe Drehzahlen benötigt, die jedoch technisch recht einfach durch das gezogene Waffenrohr erzeugt werden können. In den Abschn. 2.2.8.4 und 5.3.3.1 ist das Prinzip bereits erläutert worden (siehe auch Abb. 5.10).

5.6.2.2 Stabilisierung dralloser Geschosse

Bei Projektilen, die ohne oder nur mit geringem Drall verschossen werden, muss das stabilisierende Moment durch die Luftkraft selber erzeugt werden. Dies bedingt jedoch, dass der Angriffspunkt der Luftkraft hinter dem Schwerpunkt des Geschosses liegt, damit ein Windfahneneffekt zustande kommt. Dies kann auf die folgenden Arten erzwungen werden:

- durch entsprechende Massenverteilung den Schwerpunkt vor den Angriffspunkt der Luftkraft legen (Pfeilstabilisierung, Abb. 5.40 a)
- durch Einleiten zusätzlicher Luftkräfte am Heck den Luftangriffspunkt nach hinten verschieben. Dazu gibt es zwei Möglichkeiten:
 - Vergrößern der Auftriebskräfte am Heck durch Anbringen von Flügeln (Flügelstabilisierung, Abb. 5.40 b)
 - Vergrößern des Luftwiderstandes am Heck durch eine konische Erweiterung oder eine Scheibe mit vergrößertem Durchmesser (Widerstandsstabilisierung, Abb. 5.40 c)

Die Widerstandsstabilisierung ist relativ ungünstig, da das Geschoss des großen Luftwiderstandes wegen auf der Flugbahn viel Energie verliert. Pfeilstabilisierung findet sich in der Praxis beispielsweise bei Feuerwerksraketen, Bogen- und Armbrustpfeilen (gelegentlich mit gleichzeitiger Widerstandsstabilisierung) und bei einigen Flintenlaufgeschossen.

Die zwei Flügel bei einigen Bogen- und Armbrustpfeilen dienen nicht primär der Stabilisierung, da der erzeugte Auftrieb zu sehr mit der Drehlage des Pfeiles schwankt. Sie bewirken in erster Linie eine (langsame) Rotation des Pfeils, die Unsymmetrien der Masseverteilung und der Kräfte ausgleichen soll.

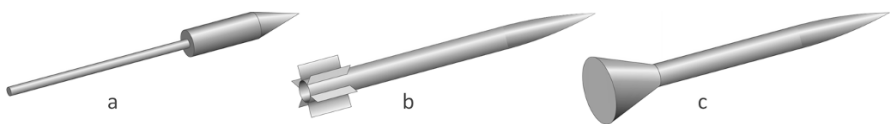


Abb. 5.40. Möglichkeiten dralloser Stabilisierung: **a.** Pfeilstabilisierung, **b.** Flügelstabilisierung, **c.** Widerstandsstabilisierung.



Abb. 5.41. Schulterstabilisierung: Bei kleinen Anstellwinkeln ergibt die entstehende Asymmetrie der Druckverteilung ein stabilisierendes, bei größeren Anstellwinkeln ein destabilisierendes Moment.

Die üblichste Form drallloser Stabilisierung ist jene mit Flügeln, da pfeilstabile und widerstandsstabilisierte Projektile einen höheren Luftwiderstand aufweisen.

5.6.2.3 Schulterstabilisierung

Bei Projektilen mit großen Stirnflächen tritt eine weitere Art der Stabilisierung ein, und zwar unabhängig davon, ob sie mit oder ohne Drall verschossen wurden. Auf der Stirnfläche ergibt sich infolge des Staudruckes eine Druckverteilung, die bei Auftreten kleiner Anstellwinkel unsymmetrisch wird und ein stabilisierendes Moment erzeugt (Abb. 5.41 a). An der Kante der Stirnfläche reißt die Strömung normalerweise ab, sodass längs des übrigen Geschosskörpers keine weiteren Druckkräfte wirken. Bei größeren Anstellwinkeln wirkt das Moment hingegen destabilisierend, wobei der Winkel, bei dem die Stabilisierung in Destabilisierung umschlägt, durch den Durchmesser der Stirnfläche und deren Abstand vom Schwerpunkt gegeben ist (Abb. 5.41 b). In der Abb. 5.42 sind zwei Beispiele schulterstabilisierter Geschosse für glattläufige Jagdgewehre (Flinten) dargestellt.

5.6.3 Gyroskopische Stabilität

Zur Beurteilung der Stabilität eines drallstabilen Geschosses kann auf die Theorie des Kreisels zurückgegriffen werden. Die Bewegung eines Kreisels wird bekanntlich mit Euler'schen Kreiselgleichungen beschrieben, die für ein körperfestes Hauptachsensystem wie folgt lauten

$$(5.6:1) \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{\partial \vec{L}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{T} . \quad [\text{N}\cdot\text{m}]$$

\vec{L} bedeutet den Drehimpuls, $\vec{\omega}$ die Winkelgeschwindigkeit und \vec{T} das totale Drehmoment.

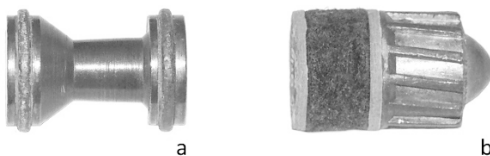


Abb. 5.42. Zwei Beispiele schulterstabilisierter Geschosse für glattläufige Gewehre (Flinten).

a. Die „balle blondeau“ mit reiner Schulterstabilisierung,
b. Brennecke-Geschoss mit Schulter- und Pfeilstabilisierung.

Wegen der Voraussetzung des Hauptachsensystems reduziert sich der Trägheitstensor auf die Diagonale und die Gl. (5.6:1) lautet in Komponenten

$$(5.6:2) \quad \begin{cases} J_c \cdot \dot{\omega}_c + (J_p - J_q) \cdot \omega_p \cdot \omega_q = T_c \\ J_p \cdot \dot{\omega}_p + (J_q - J_c) \cdot \omega_q \cdot \omega_c = T_p \\ J_q \cdot \dot{\omega}_q + (J_c - J_p) \cdot \omega_c \cdot \omega_p = T_q \end{cases} \quad [\text{N}\cdot\text{m}]$$

Bei einem Geschoss kann in der Regel Rotationssymmetrie vorausgesetzt werden, sodass $J_p = J_q = J_r$ und $J_c = J_a$ gilt.

Das Drehmoment \vec{T} wird beim drallstabilen Geschoss in erster Linie von der Luftkraft verursacht (von den andern Momenten wie Magnusmoment, Pendeldämpfungsmoment wird hier abgesehen). Dieses Drehmoment steht auf der Geschossachse (Kreiselachse) \vec{c} und der Flugbahntangenten (Präzessionsachse) \vec{t} senkrecht und bestimmt mit seiner Richtung die sogenannte Knotenlinie K (siehe dazu Abb. 5.34, S. 228). Es folgt dann im körperfesten System

$$(5.6:3) \quad \vec{T} = M_M \cdot (0, -\sin \phi, \cos \phi) \quad [\text{N}\cdot\text{m}]$$

Für die Winkelgeschwindigkeit erhält man nach Einführen der Euler'schen Winkel ϕ, ψ und δ

$$(5.6:4) \quad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_c \\ \omega_p \\ \omega_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} + \dot{\psi} \cdot \cos \delta \\ -\dot{\delta} \cdot \sin \phi + \dot{\psi} \cdot \sin \delta \cdot \cos \phi \\ \dot{\delta} \cdot \cos \phi + \dot{\psi} \cdot \sin \delta \cdot \sin \phi \end{pmatrix} \quad [1/\text{s}]$$

Wird eine reguläre Präzession vorausgesetzt (d. h. der Winkel δ zwischen der Figurenachse und der Präzessionsachse ist konstant), so folgt aus (5.6:2), (5.6:3) und der Rotationssymmetrie ein Differenzialgleichungssystem für $\vec{\omega}$

$$(5.6:5) \quad \begin{cases} J_a \cdot \dot{\omega}_c = 0 \\ J_r \cdot \dot{\omega}_p + (J_r - J_a) \cdot \omega_q \cdot \omega_c = -M_M \cdot \sin \phi \\ J_r \cdot \dot{\omega}_q + (J_a - J_r) \cdot \omega_c \cdot \omega_p = M_M \cdot \cos \phi \end{cases} \quad [\text{N}\cdot\text{m}]$$

Durch Multiplikation der ersten Gleichung mit ω_c , der zweiten Gleichung mit ω_p und der dritten mit ω_q ergibt sich nach Addition der drei Gleichungen

$$J_a \cdot \dot{\omega}_c \cdot \omega_c + J_r \cdot (\dot{\omega}_q \cdot \omega_q + \dot{\omega}_p \cdot \omega_p) = M_M \cdot (-\sin \phi \cdot \omega_p + \cos \phi \cdot \omega_q) \quad .$$

Links umformen und rechts einsetzen von (5.6:4) mit anschließender Integration ergibt den Energiesatz

$$(5.6:6) \quad J_r \cdot (\omega_q^2 + \omega_p^2) + J_a \cdot \omega_c^2 - 2 \cdot M_M \cdot \delta = \text{const} \quad . \quad [\text{J}]$$

Ersetzen der Winkelgeschwindigkeiten ω_p und ω_q mittels Gl. (5.6:4) führt zu

$$(5.6:7) \quad J_r \cdot \dot{\psi}^2 \cdot \sin^2 \delta + J_a \cdot \omega_c^2 - 2 \cdot M_M \cdot \delta = \text{const} \quad . \quad [\text{N}\cdot\text{m}]$$

Wegen der ersten Gleichung in (5.6:5) ist ω_c konstant (für δ wurde dies vorausgesetzt). Mit (5.6:7) wird damit auch $\dot{\psi}$ konstant und nach der letzten Gleichung von (5.6:4) gilt es ebenso für $\dot{\phi}$. Die Ableitung der zweiten Gleichung von (5.6:4) lautet mit diesen Vorgaben

$$\dot{\omega}_p = -\dot{\psi} \cdot \dot{\phi} \cdot \sin \delta \cdot \sin \phi . \quad [1/s^2]$$

Einsetzen in die zweite Gleichung von (5.6:5) ergibt nach einigen Umformungen

$$(5.6:8) \quad J_r \cdot \cos \delta \cdot \dot{\psi}^2 - J_a \cdot \omega_c \cdot \dot{\psi} + \frac{M_M}{\sin \delta} = 0 . \quad [N \cdot m]$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}$, die reelle Lösungen haben muss. Die Diskriminante muss daher positiv sein

$$J_a^2 \cdot \omega_c^2 - 4 \cdot J_r \cdot \cos \delta \cdot \frac{M_M}{\sin \delta} > 0 , \quad [kg^2 \cdot m^4 / s^2]$$

oder

$$\frac{J_a^2 \cdot \omega_c^2}{4 \cdot J_r \cdot \frac{M_M}{\tan \delta}} > 1 . \quad [-]$$

Der Ausdruck auf der linken Seite des Ungleichheitszeichens wird *gyroskopische Stabilitätszahl* genannt und mit s bezeichnet

$$(5.6:9) \quad s := \frac{J_a^2 \cdot \omega_c^2}{4 \cdot J_r \cdot \frac{M_M}{\tan \delta}} > 1 . \quad [-]$$

Für den Betrag des Moment M_M wird Gl. (5.5:10) angefordert, wobei die linearisierte Darstellung des Momentenbeiwertes c_m ausreichend genau ist

$$M_M = c'_m \cdot \delta \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2 \cdot A \cdot d . \quad [N \cdot m]$$

Für kleine Winkel δ ($\delta < \text{ca. } 10^\circ$) kann $\tan \delta \approx \delta$ gesetzt werden. Damit ergibt sich aus Gl. (5.6:9)

$$(5.6:10) \quad s = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{J_a^2 \cdot \omega^2}{J_r \cdot c'_m \cdot \rho \cdot v^2 \cdot d^3} > 1 . \quad [-]$$

Dabei ist zu beachten, dass bei der Herleitung der gyroskopischen Stabilitätszahl s Konstanz des Anstellwinkels vorausgesetzt wurde. Die Präzession braucht also nicht abzuklingen. Die Ungleichung (5.6:10) ist somit nur eine notwendige, nicht aber eine hinreichende Bedingung für einen stabilen Geschossflug. Auf diesen Umstand wird bereits in H. MOLITZ (1957) und in H. MOLITZ, R. STROBEL (1963) hingewiesen. In der Praxis genügt jedoch in den meisten Fällen die Bestimmung von s (siehe B. P. KNEUBUEHL, 1983₁).

5.6.4 Die Molitz'sche Stabilitätsbedingung

5.6.4.1 Vorbemerkung

Seit Mitte des 20. Jahrhunderts bildet die Molitz'sche Stabilitätstheorie die Grundlage zur Beurteilung der Flugeigenschaften eines drallstabilen Geschosses. MOLITZ benutzte für seine Theorie zunächst die klassische gyroskopische Stabilitätszahl eines Kreisels, die – wie oben nachgewiesen – eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für dessen Stabilität darstellt. In Ergänzung dazu postulierte er eine weitere Stabilitätsbedingung, welche die fehlende hinreichende Bedingung darstellen soll.

In der Originalliteratur werden jedoch die physikalischen und mathematischen Hintergründe dieser Theorie, insbesondere jene, welche den zweiten Teil betreffen, nur angedeutet. Beim Erarbeiten dieser Grundlagen ergeben sich aber Einblicke in die Gültigkeit und die Grenzen der Stabilitätstheorie, die für deren Verständnis nützlich sein können.

5.6.4.2 Mathematische Definition der Stabilität

Es sei eine Bewegung gegeben, die durch das Differenzialgleichungssystem

$$(5.6:11) \quad \dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$$

beschrieben wird. Diese Bewegung habe eine durch den Vektor \vec{b} gekennzeichnete Gleichgewichtslage (z. B. die Ruhelage im verwendeten Bezugssystem).

Eine solche Gleichgewichtslage \vec{b} heißt stabil, wenn eine Anfangsbedingung (die in der Nähe von \vec{b} liegt) stets zu einer Lösung führt, die für alle Zeiten in der Nähe der Gleichgewichtslage bleibt. Formal lautet die Definition wie folgt (L. S. PONTRJAGIN, 1965):

Definition: Gegeben sei ein Differenzialgleichungssystem nach (5.6:11), wobei die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} = f_{i,k},$$

existieren und stetig sind. Mit $\vec{y}(t, \vec{\xi})$ sei eine Lösung des Systems (5.6:11) bezeichnet, die den Anfangsbedingungen $t = 0$ und $\vec{x} = \vec{\xi}$ genügt. Eine Gleichgewichtslage \vec{b} von (5.6:11) heißt stabil im Sinne von LJAPUNOW, wenn folgendes gilt:

- 1 Es gibt eine so kleine positive Zahl τ , dass die Lösung $\vec{y}(t, \vec{\xi})$ für alle $t > 0$ definiert ist, sofern die Bedingung $|\vec{\xi} - \vec{b}| < \tau$ erfüllt ist.
- 2 Zu jeder positiven Zahl ε existiert eine positive Zahl $\delta < \tau$ so, dass für $|\vec{\xi} - \vec{b}| < \delta$ und $t > 0$ $|\vec{y}(t, \vec{\xi}) - \vec{b}| < \varepsilon$ gilt.

Eine im obigen Sinne stabile Gleichgewichtslage heißt asymptotisch stabil, wenn eine so kleine positive Zahl $\sigma < \tau$ existiert, dass für $\left| \vec{\xi} - \vec{b} \right| < \sigma$ gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \vec{y}(t, \vec{\xi}) - \vec{b} \right| = 0.$$

5.6.4.3 Stabilitätskriterien

Es sei \vec{b} eine Gleichgewichtslage des Systems (5.6:11) und $\Delta \vec{x}$ eine Störung. Dann lässt sich schreiben

$$(5.6:12) \quad \vec{x} = \vec{b} + \Delta \vec{x}.$$

Einsetzen in (5.6:11) und abspalten des linearen Gliedes der Taylorreihe ergibt

$$(5.6:13) \quad \Delta \dot{\vec{x}}_i = f_i(\vec{b}) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(\vec{b})}{\partial x_j} \cdot \Delta x_j + R_i,$$

oder mit $f_{i,k} = A = (A_{ik})$ in vektorieller Schreibweise

$$(5.6:14) \quad \Delta \dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{b}) + A \cdot \Delta \vec{x} + \vec{R},$$

wobei der Vektor \vec{R} nur Glieder der Ordnung > 1 enthält. Damit lässt sich der Satz von LJAPUNOW formulieren:

Satz 1 Haben alle Eigenwerte der Matrix A negative Realteile, so ist die Gleichgewichtslage \vec{b} des Systems

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}),$$

asymptotisch stabil.

Anmerkung: Die Eigenwerte der Matrix A stimmen mit den Wurzeln der charakteristischen Gleichung des linearisierten Systems $\Delta \dot{\vec{x}} = A \Delta \vec{x}$ überein.

Der Satz von LJAPUNOW lässt sich noch etwas verschärfen. Dazu wird weiter vorausgesetzt, dass die Gleichgewichtslage durch $\vec{b} = 0$ charakterisiert sei. Dies lässt sich durch eine Transformation jederzeit erreichen. Es ergibt sich dann

$$(5.6:15) \quad \Delta \dot{\vec{x}}_i = A \cdot \Delta \vec{x} + \vec{R}$$

Satz 2 Haben alle Eigenwerte der Matrix A negative Realteile und genügen die Funktionen R_i den Bedingungen

$$(5.6:16) \quad \left| R_i(t, \vec{x}) \right| \leq M \cdot \left\{ \sum_{j=1}^n x_j^2 \right\}^{\frac{1}{2} + \alpha},$$

so ist die triviale Lösung des Systems (5.6:15) stabil.

Anmerkung: Für Schwingungsvorgänge ist die Formulierung von Satz 1 und die erste Bedingung von Satz 2 anschaulich klar: Dem Realteil der Lösung entspricht gerade der Exponent der maximalen Amplitude $e^{\beta t}$. Die Amplitude nimmt nur ab, wenn $\beta < 0$ ist.

Das Stabilitätsproblem verlagert sich damit auf die Aufgabe, Bedingungen aufzustellen, unter denen eine algebraische Gleichung ausschließlich Lösungen mit negativen Realteilen aufweist.

Damit alle Lösungen der algebraischen Gleichung

$$(5.6:17) \quad \sum_{j=0}^n c_j \cdot x^j = 0 ,$$

einen negativen Realteil haben, muss bei reellen Koeffizienten c_j das bekannte Hurwitz'sche Kriterium (A. HURWITZ, 1895) erfüllt sein. Im Falle komplexer Koeffizienten kann auf eine Arbeit von H. BILHARZ, (1944) zurückgegriffen werden, welcher den Hurwitz'schen Satz auf komplexe Koeffizienten erweiterte.

Satz 3 (BILHARZ) Eine algebraische Gleichung n -ten Grades nach (5.6:17) mit beliebigen komplexen Koeffizienten besitzt dann und nur dann nur Lösungen mit negativen Realteilen, wenn alle Hauptunterdeterminanten der Matrix C positiv sind. $C = (\gamma_{jk})$ ist dabei gegeben durch

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{j,2k-1} &= (-i)^{j-k} \cdot c_{j-k} \\ \gamma_{j,2k} &= -i^{j-k+1} \cdot \bar{c}_{j-k} \\ \gamma_{j,m} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} &k=1, \dots, j; \quad j=1, \dots, 2n, \\ &2j \leq m \leq 2n; \quad j=1, \dots, 2n. \end{aligned}$$

Für eine quadratische Gleichung ergeben sich damit die folgenden zwei Hauptunterdeterminanten, die positiv sein müssen

$$(5.6:18) \quad \begin{vmatrix} c_0 & -i \cdot \bar{c}_0 \\ -i \cdot c_1 & \bar{c}_1 \end{vmatrix} > 0 ,$$

$$(5.6:19) \quad \begin{vmatrix} c_0 & -i \cdot \bar{c}_0 & 0 & 0 \\ -i \cdot c_1 & \bar{c}_1 & c_0 & -i \cdot \bar{c}_0 \\ -c_2 & i \cdot \bar{c}_2 & -i \cdot c_1 & \bar{c}_1 \\ 0 & 0 & -c_2 & i \cdot \bar{c}_2 \end{vmatrix} > 0 .$$

5.6.4.4 Ballistische Stabilität

Für die Beschreibung der Pendelbewegung eines Geschosses (Präzession und Nutation) ist es vorteilhaft, den bereits in Abschn. 5.5.1.5 eingeführten komplexen Anstellwinkel ζ zu verwenden

$$(5.6:20) \quad \zeta = \delta \cdot (\cos \psi + i \cdot \sin \psi)$$

Dabei bedeutet δ den Winkel zwischen der Bahntangenten und der Geschossachse, ψ liegt in der Bahnnormalebene und bezeichnet die Drehung um die Bahntangente.

Die Ruhelage ist charakterisiert durch das Zusammenfallen von Geschossachse und Bahntangente ($\zeta = 0$).

Für den komplexen Anstellwinkel (5.6:20) kann unter den in Abschn. 5.5.1.5 beschriebenen Annahmen die folgende Differenzialgleichung angegeben werden

$$(5.6:21) \quad \zeta'' + (\alpha_1 - i \cdot \beta_1) \cdot \zeta' + (\alpha_0 - i \cdot \beta_0) \cdot \zeta = \alpha_3 - i \cdot \beta_3. \quad [-]$$

Die Koeffizienten $\alpha_0 - i \cdot \beta_0$ und $\alpha_1 - i \cdot \beta_1$ werden als (lokal) konstant angenommen, $\alpha_3 - i \cdot \beta_3$ ist eine Funktion der Geschwindigkeit und des Anstellwinkels. Als unabhängige Variable wird dabei die in Kalibern gemessene (und damit dimensionslose) Bahnlänge verwendet.

Wegen der Konstanz der Koeffizienten gilt in (5.6:15) $\ddot{R} = 0$, und die Gl. (5.6:21) erfüllt die Bedingungen (5.6:16) des Satzes 2. Die normale Position des komplexen Anstellwinkels (5.5:20) $\zeta = 0$ und damit auch die Ruhelage der Geschossachse sind stabil, wenn alle Eigenwerte der zugehörigen Matrix negative Realteile haben; dies ist gemäß Satz 3 dann der Fall, wenn die Hauptunterdeterminanten der dort definierten Matrix positiv sind, wenn also im Fall der Gl. (5.6:21) die beiden Determinanten (5.6:18) und (5.6:19) positiv sind. Mit

$$c_0 = \alpha_0 - i \cdot \beta_0, \quad \text{und} \quad c_1 = \alpha_1 - i \cdot \beta_1,$$

folgen nach einer kürzeren Rechnung die beiden Ungleichungen

$$(5.6:22) \quad \alpha_0 \cdot \alpha_1 + \beta_0 \cdot \beta_1 > 0,$$

$$(5.6:23) \quad \alpha_1 \cdot (\alpha_0 \cdot \alpha_1 + \beta_0 \cdot \beta_1) - \beta_0^2 > 0,$$

und aus diesen beiden kann noch auf

$$(5.6:24) \quad \alpha_1 > 0,$$

geschlossen werden. Die Koeffizienten α_i , β_i sind bereits in Abschn. 5.5.1.5 zusammengestellt worden (5.5:34a–d)

$$(5.6:25a) \quad \alpha_0 = -c'_m \cdot \frac{\pi \cdot \rho}{8} \cdot \frac{d^5}{J_r}, \quad [-]$$

$$(5.6:25b) \quad \beta_0 = \beta_1 \cdot \frac{\pi \cdot \rho}{8} \cdot \frac{d^3}{m} \cdot \left(c'_a - c'_j \cdot \frac{d^2 \cdot m}{J_a} \right), \quad [-]$$

$$(5.6:25c) \quad \alpha_1 = \frac{\pi \cdot \rho}{8} \cdot \frac{d^3}{m} \cdot \left(c'_a - c_{w0} + c_h \cdot \frac{d^2 \cdot m}{J_r} \right), \quad [-]$$

$$(5.6:25d) \quad \beta_1 = \frac{J_a}{J_r} \cdot \frac{\omega \cdot d}{v}. \quad [-]$$

Bildet man mit Gl. (5.6:25a) und (5.6:25d) den Ausdruck

$$-\beta_1^2 / (4 \cdot \alpha_0), \quad [-]$$

resultiert die gyroskopische Stabilitätszahl s (5.6:10)

$$(5.6:26) \quad s = -\frac{\beta_1^2}{4 \cdot \alpha_0} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{J_a^2 \cdot \omega^2}{J_r \cdot c'_m \cdot \rho \cdot v^2 \cdot d^3} . \quad [-]$$

Zudem generierte MOLITZ in H. MOLITZ, R. STROBEL (1963) eine weitere Stabilitätszahl durch

$$(5.6:27) \quad \hat{s} = \frac{\beta_0}{\alpha_1 \cdot \beta_1} . \quad [-]$$

Einsetzen der Ausdrücke (5.6:25b–d) führt zu der *Molitz'schen Stabilitätszahl* (auch *dynamische Stabilitätszahl* genannt)

$$(5.6:28) \quad \hat{s} = \frac{c'_a - c'_j \cdot \frac{d^2 \cdot m}{J_a}}{c'_a - c_{w0} + c_h \cdot \frac{d^2 \cdot m}{J_r}} . \quad [-]$$

Eine erste Bedingung für die Stabilität eines drallstabilen Geschosses ergibt sich aus der Ungleichung (5.6:22). Wird diese durch α_1 dividiert und der zweite Summand mit β_1 erweitert, so folgt mit (5.6:27) die Ungleichung

$$(5.6:29) \quad \alpha_0 + \beta_1^2 \cdot \hat{s} > 0 . \quad [-]$$

Einsetzen von (5.6:25a und d) führt nach einer kleineren Rechnung zu der Ungleichung zwischen der gyroskopischen und der Molitz'schen Stabilitätszahl

$$(5.6:30) \quad s > \frac{1}{4 \cdot \hat{s}} .$$

Aus der zweiten Ungleichung (5.6:23) kann eine weitere, schärfere Bedingung zwischen den beiden Stabilitätszahlen hergeleitet werden

$$(5.6:31) \quad s > \frac{1}{4 \cdot \hat{s} \cdot (1 - \hat{s})} . \quad [-]$$

Wie bereits früher erwähnt, bildet die Ungleichung der gyroskopischen Stabilitätszahl (5.6:10) eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für einen stabilen Geschossflug; die Molitz'sche Ungleichung (5.6:31) steht hingegen für beides.

5.6.4.5 Das Molitz'sche Stabilitätsdreieck

Eine sehr anschauliche und einprägsame Darstellung der Beziehung zwischen den beiden Stabilitätszahlen hat MOLITZ in dem bereits mehrfach zitierten Werk von 1963 eingeführt. Er führte zunächst eine Variablentransformation ein

$$(5.6:32) \quad \sigma = \sqrt{1 - \frac{1}{s}} , \quad [-]$$

mit welcher die Ungleichung (5.6:31) die folgende Form annimmt



Abb. 5.44. Papierdurchschusslöcher eines ohne Drall geschossenen Geschosses. Der durch die Laufschwingungen und die nachströmenden Pulvergase erzeugte Drehimpuls bleibt während der Flugbahn erhalten. Die Drehung erfolgt um die Achse des größten Trägheitsmomentes. Vergleiche dazu Abb. 7.21 eines stabilen, aber gestörten Geschosses. Die Distanzangaben bedeuten den Abstand von der Mündung.

Drallwinkel von 8° ausgelegtes Artilleriegeschoss in einem Rohr mit 6° Drallwinkel zur Anwendung kommt, oder wenn ein für eine Dralllänge von 178 mm (7") konstruiertes Infanteriegeschoss in einem Gewehr mit 305 mm (12") Dralllänge verwendet wird. Das Geschoss wird unter diesen Bedingungen eine Kreiselbewegung ausführen, jedoch mit einem entsprechend großen und oft zunehmenden Präzessionswinkel (siehe Abb. 5.45).

Dieselben Erscheinungen zeigen Geschosse, die aus ausgeschossenen Röhren geschossen werden oder bei denen die Führungsbänder wegen einer zu großen Beschleunigung durchrutschen. In der Regel bleibt eine gewisse Führungslänge bestehen, die aber zu einer ungenügenden Drallübertragung führt.

Die Winkelgeschwindigkeit ω_c , mit der das Geschoss um seine eigene Achse dreht, kann angenähert aus der Projektion des Drehimpulsvektors auf die Geschossachse und dem entsprechenden Trägheitsmoment geschätzt werden

$$(5.6:34) \quad \omega_c = \frac{|\vec{L}|}{J_a} \cdot \cos \gamma . \quad [1/s]$$

J_a bezeichnet das axiale Trägheitsmoment und γ den Winkel zwischen Drehimpulsvektor und Geschossachse.

Daraus folgt, dass mit zunehmendem Querstellen des Geschosses die Drehgeschwindigkeit um die Körperachse abnimmt. Steht die Geschossachse senkrecht zur

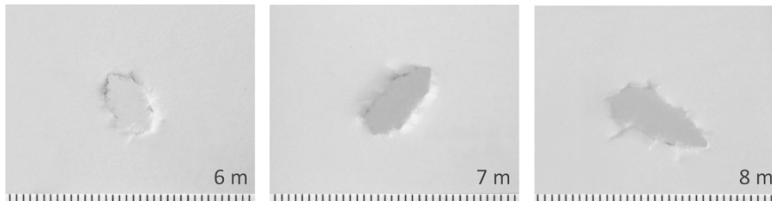


Abb. 5.45. Papierdurchschusslöcher eines mit zu geringem Drall (12" Dralllänge statt 7") geschossenen Geschosses im Kaliber 5.56×45 . Die Präzession (Winkeländerung der Geschossachse) und die Nutation (unterschiedliche Länge des Loches) sind gut sichtbar. (Distanzangaben ab Mündung).

Drehimpulsachse (also auch ungefähr senkrecht zur Bewegungsrichtung), so wird ω_c zu Null; die Rotation des Geschosses um seine eigene Achse kommt zum Stillstand und ist in eine Rotation um eine Querachse übergegangen. Wird α größer als 90° , beginnt sich das Geschoss in entgegengesetzter Richtung zu drehen und wird bei einer Drehung um 180° mit etwa gleicher Winkelgeschwindigkeit um seine Achse rotieren, wie in der normalen Fluglage, jedoch in entgegengesetzter Drehrichtung (vergleiche dazu den „Steh-auf-Kreisel“, F. KUYPERS u. Ch. UCKE, 1994). Aus diesem Gedankengang folgt, dass bei einem „Überschlagen“ des Geschosses ein Wechsel der Drehrichtung im geschossfesten System zu erwarten ist.

Ein experimenteller Nachweis eines solchen Geschossverhaltens ergab sich bei einer Artillerie-Schießübung. Eine Granate erhielt offenbar beim Abschuss (aus welchem Grund auch immer) einen zu geringen Drall und schlug (wegen instabilem Flug) bereits nach einem Drittel der erwarteten Schussdistanz am Boden auf. Überraschenderweise fehlte der Zünder; er war regulär abgeschraubt worden und fand sich einige 100 m von der Granate entfernt. Zündergewinde sind so ausgelegt, dass sie durch Drehrichtung des Dralles festgeschraubt werden. Ein Losschrauben des Zünders war somit nur möglich, wenn die Granate auf dem Flug die Drehrichtung um die Körperachse änderte, sich also mindestens einmal überschlug.

Der dritte Fall betrifft Geschosse mit regulärem Drall und ausreichender Stabilität an der Mündung, welche unterwegs auf der Flugbahn in Schwierigkeiten bezüglich eines stabilen Fluges geraten. Weil die gyroskopische Stabilität mit zunehmender Schussdistanz größer wird, kann dies nur bei besonderen Umständen eintreten.

Die reguläre Zunahme der Stabilität längs der Flugbahn kann in der Gleichung (5.6:10) direkt abgelesen werden. Die Winkelgeschwindigkeit ω nimmt wesentlich weniger schnell ab als die Geschwindigkeit, wodurch der Ausdruck ω^2/v^2 zügig zunimmt. Bei Bogenschüssen wird dies durch die abnehmende Luftdichte noch unterstützt.

Die einzige Größe in der Stabilitätszahl, die kritisch werden kann, ist das Momentenbeiwertderivativ c_m' . In der Tat kann diese Beiwertfunktion in der Umgebung von $M = 1$ vorübergehend ansteigen (siehe Beispiel in Abb. 5.46), was eine spürbare Verringerung der Stabilität zur Folge hat. Wenn bei der betreffenden Distanz auch noch eine Leuchtspur gerade fertig brennt, ist es bei gleichzeitiger Zunahme des Luftwiderstandes durchaus möglich, dass das Geschoss ins Trudeln kommt. In der Abb. 5.47 ist ein derartiges Beispiel dargestellt.

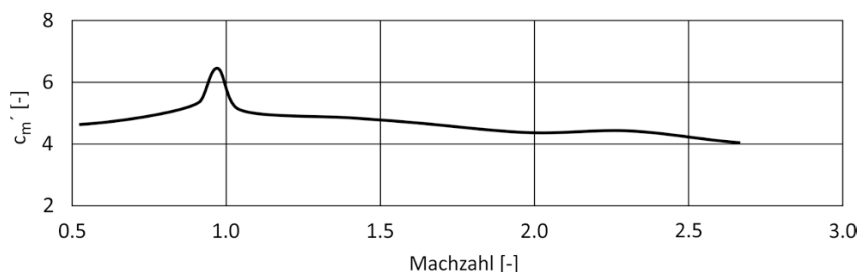


Abb. 5.46. Verlauf des Momentenbeiwertderivativs eines Kleinkalibergeschosses im Kaliber 7.5×55 , gemessen im Transschall- und im Überschallwindkanal.

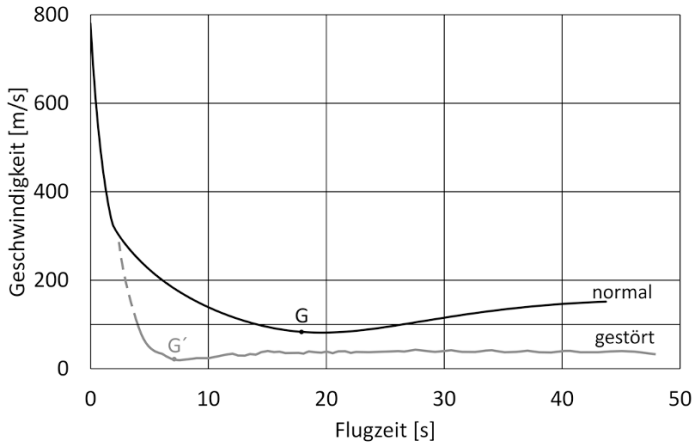


Abb. 5.47. Zeit-Geschwindigkeit-Verlauf eines normal fliegenden Leuchtpurgeschosses und eines mit gestörter Stabilität. Elevation 1000 mil. Näheres siehe Text.

Es zeigt den Geschwindigkeitsverlauf eines Leuchtpurgeschosses im Kaliber 7.5×55 , welches für Übungsschießen der Fliegerabwehr gegen einen Schleppsack verwendet wurde. Etwa ein Drittel der Geschosse stürzten vorzeitig ohne zunächst ersichtlichen Grund ab. Geschwindigkeitsmessung mit einem Verfolgerradar zeigten nach Erreichen der Schallgeschwindigkeit (der gut sichtbare Knick im normalen t-v-Verlauf) eine sehr starke Verzögerung, die zu einem vorzeitigen Erreichen des Gipfels G' nach ca. 8 s führte. Danach stürzte das Geschoss mit einer im Mittel konstanten Geschwindigkeit von ca. 40 m/s ab. Diese Fallgeschwindigkeit lässt auf einen nicht stabilen Sinkflug schließen. Die Schussdistanz bis in den Mündungshorizont betrug beim normal fliegenden Geschoss rund 3.85 km, das gestörte Geschoss erreichte etwa 1.3 km.

Ein weiterer Anlass für einen gestörten Flug eines an sich stabilen Geschosses ergibt sich im Gipfel einer sehr steilen Flugbahn (Elevationen oberhalb etwa 70° bzw. 1250 mil). Durch das Nachführen der Geschossachse zur Bahntangente entsteht in der Gipfelgegend ein großer Anstellwinkel; die entstehende Auftriebskraft ist in der Lage, zumindest kleinkalibrige Geschosse zum Überschlagen zu bringen. Im weiteren Verlauf der Flugbahn stabilisieren sie sich wieder, wobei als Fluglage Spitze voran oder Heck voran möglich ist (siehe dazu Abschn. 5.4.6.5 und Abb. 5.26).

5.6.5 Folgsamkeit

5.6.5.1 Definition der Folgsamkeit

In der Stabilitätstheorie wird die Fähigkeit eines Geschosses, seine Achse stets der Bahntangente nachzuführen, als *Folgsamkeit* (engl. „tractability“) bezeichnet. Sie lässt sich dadurch charakterisieren, dass der Winkel zwischen der Bahntangente und der Geschossachse in jedem Bahnpunkt klein bleiben muss. Dies ist dann der Fall, wenn die zeitliche Änderung des Bahnwinkels θ stets kleiner ist als die Änderung des Präzessionswinkels ψ . Bildet man den Quotienten aus diesen beiden Winkel-

änderungen, ergibt sich eine dimensionslose Zahl, die Folgsamkeitszahl f genannt wird. Sie hat die folgende Ungleichung zu erfüllen

$$(5.6:35) \quad f = \frac{|\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}t|}{|\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t|} = \frac{|\dot{\psi}|}{|\dot{\theta}|} > 1. \quad [-]$$

Für den Ausdruck im Zähler kann auf die quadratische Gl. (5.6:8) für $\dot{\psi}$ zurück gegriffen werden, deren Lösung

$$\dot{\psi} = \frac{J_a \cdot \omega_c}{2 \cdot J_r \cdot \cos \delta} \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4 \cdot M_M \cdot J_r \cdot \cos \delta}{J_a^2 \cdot \omega_c^2 \cdot \sin \delta}} \right), \quad [1/s]$$

linearisiert werden kann

$$\dot{\psi} = - \frac{M_M}{J_a \cdot \omega_c \cdot \sin \delta}, \quad [1/s]$$

worin M_M das Kippmoment, J_a das axiale Trägheitsmoment des Geschosses und δ den Anstellwinkel bedeutet.

Der Ausdruck im Nenner wird dem bahngeometrischen Differenzialgleichungssystem (5.4:10) entnommen

$$\dot{\theta} = - \frac{g}{v} \cdot \cos \theta \quad [1/s]$$

Eingesetzt in (5.6:35) ergibt sich

$$(5.6:36) \quad f = \left| \frac{M_M \cdot v}{J_a \cdot \omega \cdot g \cdot \cos \theta \cdot \sin \delta} \right|. \quad [-]$$

Kleine Winkelgeschwindigkeiten und kleine axiale Trägheitsmomente wirken sich positiv auf die Folgsamkeit aus.

Wird die rechte Seite in Gl. (5.6:36) mit $J_a \cdot \omega$ erweitert, kann die gyroskopische Stabilitätszahl eingeführt werden

$$(5.6:37) \quad f = \frac{J_a \cdot v \cdot \omega}{4 \cdot J_q \cdot g \cdot \cos \theta} \cdot \frac{1}{s} > 1. \quad [-]$$

Folgsamkeit ist also umgekehrt proportional zur Stabilität.

5.6.5.2 Wann sind Folgsamkeitsprobleme zu erwarten?

Eine Abschätzung der Größenordnung der Folgsamkeitszahl in Mündungsnähe mittels groben Werten der in Gl. (5.6:37) beteiligten Größen ergibt für kleinkalibrige Geschosse Werte im Bereich $10^4 \dots 10^5$ und für Artilleriegeschosse $10^2 \dots 10^3$. Bei kleinen Bahnwinkeln θ ($\cos \theta \approx 1$) werden diese nicht wesentlich ändern, weshalb bei flachen Flugbahnen das Geschoss grundsätzlich folgsam ist. Eine Überstabilisierung (d. h. ein zunehmender Anstellwinkel auf dem absteigenden Ast der Flug-

Tabelle 5.10. Flugbahndaten mit Stabilitäts- und Folgsamkeitszahlen. Geschoss: 7.62 mm NATO, v_0 : 830 m/s, Masse: 9.5 g

x [m]	v [m/s]	ω [1/s]	s [-]	f [-]
0	830	2729	1.37	34021
50	791	2711	1.49	29649
100	754	2692	1.62	25837
150	718	2673	1.76	22485
200	683	2654	1.92	19519
250	649	2634	2.09	16883
300	616	2614	2.29	14538

bahn), wie sie fälschlicherweise oft behauptet wird, kann nicht auftreten. Dies ist auch an den in der Tabelle 5.10 zusammengestellten Stabilitäts- und Folgsamkeitszahlen des 7.62-mm-NATO-Geschosses ersichtlich. Würde die Winkelgeschwindigkeit in Gl. (5.6:36) in einem Ausmaß vergrößert, dass Folgsamkeitsprobleme entstehen könnten, würde dies zu Drehzahlen führen, die sich wegen den entstehenden Leistenkräfte im Rohr gar nicht erzeugen ließen.

Folgsamkeitsprobleme können nach Gl. (5.6:37) offensichtlich nur entstehen, wenn die Bahngeschwindigkeit (bezüglich zur umgebenden Luft) klein und die Stabilitätszahl groß geworden ist. Tatsächlich ergeben sich kritische Werte nur in Gipfelnähe sehr steiler Flugbahnen (Elevationen ab ca. 70°) im Punkt kleinster Folgsamkeit (siehe Abschn. 5.4.5.4 und Abb. 5.24).

Als ein Beispiel seien die im Abschn. 5.6.4.6 besprochenen, steil in die Luft geschossenen Kleinkalibergeschosse erwähnt, die meist nach einer Phase des Trudelns stabil spitze- oder auch heckvoran zurückfallen. Ein weiteres Beispiel zeigte sich bei einem technischen Schießversuch mit 155 mm Artilleriegeschossen, die mit großer Elevation geschossen wurden. Der Flugbahngipfel kam in einen Jetstream zu liegen. Die steile Flugbahn wäre unter Normalbedingungen genügend folgsam gewesen (siehe Tabelle 5.11). Der ungefähr in Schussrichtung strömende Jetstream bewirkte eine sehr geringe Relativgeschwindigkeit im Gipfel, wodurch die Folgsamkeitszahl auf fast 1 absank (siehe Tabelle 5.12). Die dadurch verursachte Flugunruhe im Gipfel hatte in der Mündungsebene eine Seitenabweichung von über 2000 m zur Folge, statt der üblichen 1370 m.

Tabelle 5.11. Flugbahnwerte mit Stabilitäts- und Folgsamkeitszahlen, normale Bahn. 155 mm Art.-Geschoss, v: 684 m/s, Masse: 43 kg, Elevation 1280 mil

t [s]	y [m]	v [m/s]	s [-]	f [-]
10	4503	400	12.3	320.0
20	7193	267	32.1	62.2
30	8865	188	86.2	11.6
40	9664	136	176.3	3.1
44.5	9747	130	195.8	2.45
50	9619	138	167.8	3.2
60	8745	187	79.6	12.7

Tabelle 5.12. Flugbahnwerte mit Stabilitäts- und Folgsamkeitszahlen, mit gemessenem Windprofil. 155 mm Art.-Granate, v_0 : 684 m/s, Masse: 43 kg, Elevation: 1280 mil

t	y	v	s	f
[s]	[m]	[m/s]	[-]	[-]
10	4463	394	12.2	309.0
20	7108	267	37.4	48.1
30	8756	189	107.5	7.8
40	9534	141	286.0	1.4
44.2	9608	136	333.3	1.06
50	9468	145	251.3	1.7
60	8574	194	90.8	9.8

5.7 Zur Bestimmung der Beiwerte

5.7.1 Vorbemerkung

Dank dem Konzept der dimensionslosen Kenngrößen sind für die Berechnung von Flugbahnen nur die Beiwerte der Kräfte und Momente sowie deren Ableitungen nach dem Anstellwinkel zu ermitteln. Zur Verfügung stehen grundsätzlich zwei verschiedene Möglichkeiten: die Berechnung auf Grund der aerodynamischen Umströmung des Geschosses oder die experimentelle Bestimmung. Letztere kann entweder im freien Flug oder in einem Windkanal erfolgen.

Das Hauptinteresse aus der Sicht praktischer Anwendung gilt dem Luftwiderstandsbeiwert. Bei seiner Kenntnis lassen sich mit einem Massenpunktsmodell nach Gl. (5.4:36) oder (5.4:40) die Flugbahnwerte mit völlig ausreichender Genauigkeit voraussagen. Zusätzliche Aussagen zur Stabilität und zum Anstellwinkel erfordern zudem noch den Reibungsbeiwert und den Gradienten des Momentenbeiwertes.

In den folgenden Abschnitten werden einige Möglichkeiten aufgezeigt, wie diese wichtigsten Beiwerte ermittelt werden können. Für weitere Beiwerte ist zumeist ein Zugang zu einem entsprechenden Computerprogramm erforderlich.

5.7.2 Experimentelle Bestimmung

5.7.2.1 Luftwiderstandsbeiwert

Bestimmung mit Zeit-Weg-Messungen. Diese Methode war in der Zeit vor der Einführung des Doppler-Radar eine der wichtigsten Möglichkeiten, die Flugbahn eines Geschosses zu erfassen. Verwendet wurden hierzu sogenannte *Ballistische Kameras*, mit welchen von zwei Standorten aus der Weg des mit einer Leuchtspur versehenen Geschosses registriert wurde. Der zeitliche Ablauf ergab sich durch ein synchrones, periodisches Öffnen und Schließen der Blende. Mit Radargeräten lie-

ßen sich Distanz, Seiten- und Höhenwinkel messen, woraus sich ebenfalls der Ort des Geschosses in Abhängigkeit der Zeit ermitteln ließ. Heute sind auch Zeit-Weg-Messungen mit einem eingebauten GPS denkbar.

Ist die *Zeit-Ort-Kurve* in festen Zeitschritten Δt registriert, so kann durch Differenzbildung zunächst die Geschwindigkeit, dann aber auch die Verzögerung mit den folgenden Formeln berechnet werden. So folgt aus

$$[x_i(t_i), y_i(t_i)], \quad i = 1, \dots, n, \quad [\text{m}]$$

$$(5.7:1) \quad v_{i+1} \left(t_i + \frac{1}{2} \cdot \Delta t \right) = \frac{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}}{\Delta t}, \quad [\text{m/s}]$$

$$(5.7:2) \quad a_{i+1} (t_{i+1}) = \frac{v_{i+2} - v_{i+1}}{\Delta t}. \quad [\text{m/s}^2]$$

Weil Messwerte stets fehlerbehaftet sind, ergeben sich aus der zweimaligen Differenzenbildung allerdings sehr große Schwankungen in den gesuchten Verzögerungswerten.

Zur Demonstration dieser Problematik wurde eine gerechnete Flugbahn eines 7.62-mm-Geschosses bis 1100 m Distanz mit einem realen Messfehler versehen, dessen Standardabweichung lediglich 10 cm betrug. Die für die Bestimmung der Geschwindigkeit gemäß (5.7:1) gebildete erste Differenz folgt der wirklichen Geschwindigkeit recht gut (siehe Abb. 5.48), wogegen die für die Ermittlung der Verzögerung erforderliche zweite Differenz (5.7:2) trotz des geringen Messfehlers außerordentlich stark schwankt (siehe Abb. 5.49).

Mit mathematischen Glättungsverfahren (C. REINSCH, 1967, H. RUTISHAUSER, 1976) lassen sich gleichwohl brauchbare Ergebnisse erzielen.

Die geglätteten ersten Differenzen ergeben bezüglich den gerechneten Werten einen maximalen Fehler von 0.17 %. Die ausgeglichenen Verzögerungswerte weichen weniger als 5 % von den gerechneten Werten ab. Damit können auch Zeit-Weg-Messungen eine brauchbare Grundlage zur c_w -Funktion eines Geschosses bilden.

Bestimmung mit Weg-Geschwindigkeit-Messungen. Eine deutliche Verbesserung der Resultate lässt sich erzielen, wenn die Geschwindigkeit direkt gemessen

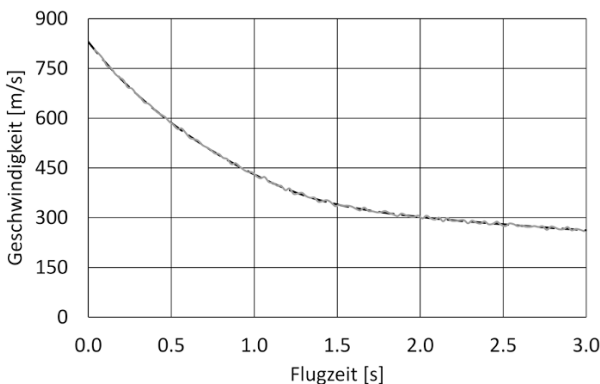


Abb. 5.48. Geschwindigkeit ermittelt durch erste Differenzenbildung einer Zeit-Weg-Messung. Graue Linie: Originalwerte, gestrichelte Linie: geglättete Werte. Der Unterschied zu den gerechneten Werten ist sehr gering.

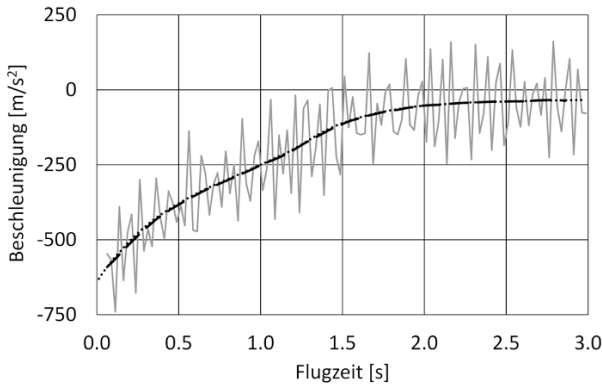


Abb. 5.49. Verzögerung berechnet durch zweimalige Differenzbildung aus einer Zeit-Weg-Messung. *Graue Linie:* Originalwerte, *gestrichelte Linie:* durch Spline-Glättung erhaltene Werte, *punktierte Linie:* Verzögerung gemäß Rechnung (deckt sich fast gänzlich mit der gestrichelten Linie).

wird. Dadurch kann die stark unter der Fehlerfortpflanzung leidende zweite Differenzenbildung vermieden werden.

Aus der Gleichung für den Luftwiderstand (5.3:29) folgt für die Verzögerung

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F_w}{m} = -c_w \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2 \cdot \frac{1}{q} \quad [\text{m/s}^2]$$

Wird auf die linke Seite die Beziehung (5.3:20) angewendet und anschließend die Gleichung diskretisiert, ergibt sich

$$(5.7:3) \quad \frac{\Delta v}{\Delta x} = c_w \cdot \frac{\rho \cdot v_m}{2 \cdot q}, \quad [1/\text{s}]$$

und man erhält für den Luftwiderstandsbeiwert die folgende Formel

$$(5.7:4) \quad c_w = \frac{2 \cdot \Delta v \cdot q}{\Delta x \cdot \rho \cdot v_m} \quad [-]$$

Darin bedeutet Δv den Geschwindigkeitsverlust über der Wegstrecke Δx , ρ die Luftdichte, v_m die mittlere Geschwindigkeit über Δx und q die Querschnittsbelastung des Geschosses.

Für eine praktische Bestimmung des Luftwiderstandsbeiwertes mittels Gl. (5.7:4) reichen zwei Lichtschrankenpaare aus. Mit der in Abb. 5.50 dargestellten Anordnung lassen sich die Größen Δv , Δx und $v_m = \frac{1}{2} \cdot (v_1 + v_2)$ ermitteln. Die Querschnittsbelastung des Geschosses ist bekannt und die Luftdichte ist nach Gl. (5.2:2) aus den aktuellen Werten für Druck und Temperatur zu ermitteln.

Mit (5.7:4) ergibt sich der c_w -Wert für die Geschwindigkeit v_m . Wird aus verschiedenen Distanzen über die Messeinrichtung geschossen oder werden verschie-

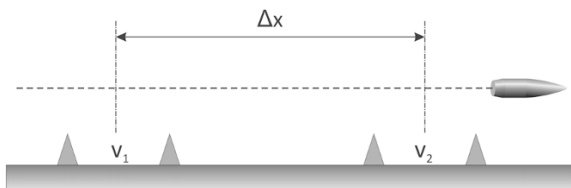


Abb. 5.50. Schema der c_w -Bestimmung mittels Weg-Geschwindigkeitsmessungen.

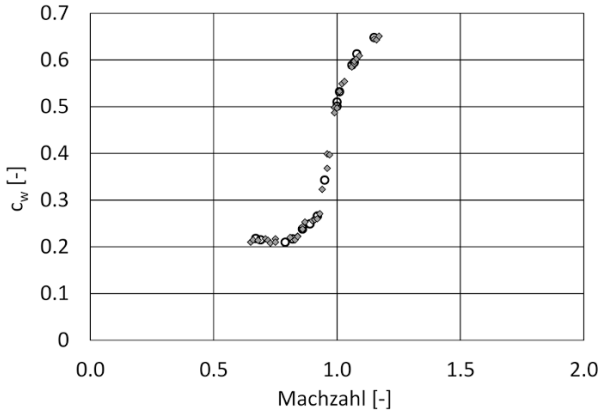


Abb. 5.51. c_w -Verlauf eines 9-mm-Luger-Geschosses, ermittelt aus Weg-Geschwindigkeitsmessungen. Die Ringe sind Mittelwerte aus 10 Einzelmessungen bei gleicher Distanz, die Punkte Einzelmessungen.

dene Ladungen verwendet, so kann der c_w -Verlauf über ein größeres Geschwindigkeitsintervall ermittelt werden. Wie genau dies gerade im schwierigen Transschallbereich möglich ist, zeigt die auf diese Weise ermittelte c_w -Kurve eines 9-mm-Luger-Geschosses in Abb. 5.51 (aus B. P. KNEUBUEHL, 1983₂).

Bestimmung mit Doppler-Radarmessungen. Doppler-Radargeräte messen mittels der Frequenzdifferenz zwischen der ausgesendeten und der am Geschoss reflektierten Welle direkt die Geschwindigkeit eines bewegten Objektes (Doppler-Effekt). Sie sind daher prädestiniert, bei c_w -Messungen an Geschossen eingesetzt zu werden, da eine einmalige Differenzenbildung zur Bestimmung der Verzögerung genügt. Moderne Geräte sind zudem in der Lage, auch kleinkalibrige Geschosse über mehrere Kilometer verfolgen zu können. Dies hat dazu geführt, dass die Radarmessung zur üblichen Messmethode für die Bestimmung von Luftwiderstandsbeiwerten geworden ist. Abb. 5.52 stellt die mit Radar ermittelten c_w -Kurven eines 6-mm-Geschosses dar. Gewisse Unterschiede von Geschoss zu Geschoss zeigen sich im Bereich von Mach 1,0–1,3 und unterhalb von Mach 0,9; sie sind in der Größenordnung von einigen wenigen Prozenten.

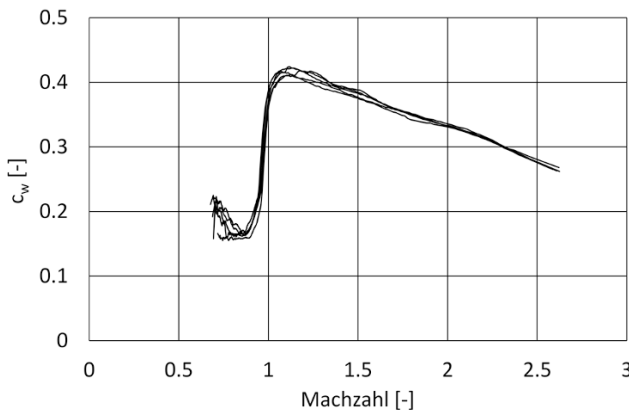


Abb. 5.52. c_w -Verläufe aus Radarmessungen fünf gleicher Geschosse im Kaliber 6 × 47.

Windkanalmessungen. Steht ein Überschall- und ein Transschallwindkanal mit kontinuierlicher Strömung zur Verfügung, können c_w -Kurven von Geschossen praktisch für die ganze Flugdistanz ermittelt werden. Die erforderlichen Modelle sind in einem bestimmten, durch den Kanalquerschnitt gegebenen Maßstab anzufertigen, wobei insbesondere auch die Oberflächenrauigkeit entsprechend angepasst werden muss. Bei Kleinkaliberprojektilen ist meist ein größeres Modell möglich, Geschosse großer Kaliber müssen oft verkleinert werden.

Eine Modellvergrößerung wirkt sich auf die Messungen günstig aus, da dadurch die im Kanal herrschenden Strömungskennzahlen (wie z. B. Reynolds- und Nußeltzahl) besser dem freien Flug angepasst sind als bei einer Modellverkleinerung.

Weil die Kraftsensoren mit einem sogenannten „Sting“ („Stachel“) von hinten in das Modell eingebracht sind, wird die Strömung um das Geschossheck gestört. Dies erfordert bei der Bestimmung der Widerstandsbeiwerte entsprechende Korrekturen.

5.7.2.2 Weitere Beiwerte

Messungen im Freiflug. Die experimentelle Bestimmung weiterer Beiwerte ist mit einem ungleich größeren Aufwand verbunden als die Ermittlung des Luftwiderstandsbeiwertes. Die Kräfte und Momente, welche die Eigenbewegung des Geschosses verursachen, verraten sich nur durch den zeitlichen Verlauf der beiden Winkelkomponenten, die den komplexen Anstellwinkel ausmachen. Es gilt somit, diese beiden Größen zu erfassen.

Die ersten derartigen Ergebnisse wurden mit Durchschießen von Papierbahnen erzielt. Dabei war jedoch die Bestimmung der Winkel relativ ungenau; zudem wurde das Geschoss bei jedem Durchschlag gestört. Zeitgemäße Anlagen arbeiten mit bis zu 25 Messstationen, bei denen das Geschoss mittels Schattenfotografie in Grundriss und Aufriss festgehalten wird. Liegen die beiden Winkelfolgen vor, können mit nichtlinearer Ausgleichsrechnung die Koeffizienten der Gl. (5.5:33) bestimmt werden, die es ihrerseits gestatten, aus den Beziehungen (5.5:34) die Beiwerte c'_a , c'_m , c'_j und c_h zu ermitteln.

Eine ausführliche Darstellung dieses Verfahrens findet sich in R. L. McCoy (2009).

Windkanalmessungen. In einer Windkanalanlage mit kontinuierlicher Strömung können bei einem Modell verschiedene Anstellwinkel eingestellt werden und so der Auftrieb und das Kippmoment und deren Winkelabhängigkeit gemessen werden, was zu den Beiwerten c'_a und c'_m führt.

Es gibt zudem Anlagen, in denen die Hülle des Geschossmodells in eine Rotation um dessen Längsachse versetzt werden kann. Dies würde zusätzlich die Bestimmung des Magnusmomentes und des Reibungsbeiwertes ermöglichen. Allerdings sind hierzu sehr hohe Drehzahlen erforderlich.

5.7.3 Rechnerische Bestimmung des Luftwiderstandsbeiwertes

5.7.3.1 Die Anteile des Luftwiderstandsbeiwertes

Wird ein Geschoss (allgemein, ein beliebiger Körper) von Luft umströmt, so kommt es innerhalb der Strömung zu Änderungen der Geschwindigkeit und des Druckes. Die Luftteilchen werden von der Geschossspitze an erst beschleunigt, dann wiederum verzögert. Dabei erfahren die dem Geschoss näher gelegenen Luftschichten eine größere Geschwindigkeitsänderung als die weiter entfernten.

Dies lässt sich anschaulich mit den Erhaltungssätzen erklären. Bei reibungsfreier Strömung verlangen die Sätze der Energie- und der Impulserhaltung, dass die Geschwindigkeit einer bestimmten Luftschicht vor und nach dem Körper gleich sein muss. Die Luftteilchen, die den Körper eng umströmen, müssen einen weiteren Weg zurücklegen als die weiter entfernten und daher die Geschwindigkeit vorübergehend erhöhen.

Die für die Beschleunigung notwendige Arbeit wird der Druckenergie entnommen. Die Geschwindigkeit steigt bis zum maximalen Körperquerschnitt an, während gleichzeitig der Druck sinkt (Bernoulli-Gesetz). In reibungsfreier Strömung wird die dabei gewonnene kinetische Energie beim Zusammenströmen hinter dem Körper wiederum in Druckenergie zurückverwandelt, wobei sich die Geschwindigkeit entsprechend verringert.

Bei diesem Vorgang bleiben (in reibungsfreier Strömung!) die Bewegungs- und die Druckenergie der Strömung erhalten. Der Körper würde damit keinen Geschwindigkeits- und Energieverlust erfahren (d'Alembertsches Paradoxon).

Wegen der unterschiedlichen Geschwindigkeiten innerhalb der umströmenden Luftschichten kommt es zwischen den Luftteilchen (Molekülen) zu Reibungserscheinungen, die einen Teil der Bewegungsenergie in Wärme umwandeln. Der verbleibende Rest reicht dann nicht mehr aus, um hinter dem Geschoss die ursprünglichen Druck- und Geschwindigkeitsverhältnisse wieder herzustellen. Es bildet sich an dessen Rückseite eine Wirbelstraße, in der ein geringerer Druck (ein Unterdruck) herrscht als auf der Vorderseite. Aus dieser Druckdifferenz resultiert nun eine Kraft, die der Bewegungsrichtung entgegenwirkt und das Geschoss bremst. Diese Kraft wird üblicherweise als *Bodensog* bezeichnet. Sie macht den größten Teil des Luftwiderstandes aus (85 bis 90 % bei Unterschallgeschwindigkeiten und 50 bis 60% bei Überschallgeschwindigkeiten).

Jedes Gas (und jede Flüssigkeit) haftet an der Oberfläche eines umströmten Körpers. Innerhalb einer sehr dünnen Schicht (der sogenannten *Grenzschicht*) wird dann die effektive Strömungsgeschwindigkeit erreicht. Die Geschwindigkeitsunterschiede innerhalb dieser Grenzschicht sind sehr groß. Wegen der dadurch entstehenden Reibung wird kinetische Energie in Wärme umgewandelt, und die Geschossgeschwindigkeit nimmt ab. Die diese Verzögerung verursachende Kraft heißt *Reibungswiderstand*. Je nach Beschaffenheit und Größe der Oberfläche macht sie etwa 5 bis 15 % des gesamten Geschosseswiderstandes aus.

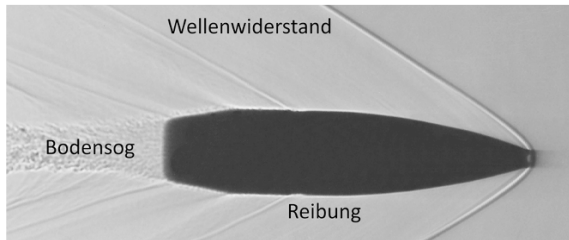


Abb. 5.53. Schattenaufnahme eines Geschosses im Flug. Die beschriebene Wirbelstraße am Geschossheck, die Grenzschicht an der Oberfläche und die Stoßwellen werden darin veranschaulicht.

Fliegt ein Geschoss schneller als die Schallgeschwindigkeit, so bildet sich an der Geschossspitze eine Stoßwelle aus (siehe Abschn. 2.3.3.4 und Abb. 5.53). Die Strömungsgeschwindigkeit wird in der Stoßfront sprunghaft auf Unterschallgeschwindigkeit verzögert, und gleichzeitig werden Druck und Dichte erhöht. Dieser sogenannte Verdichtungsstoß ist die Ursache des Überschallknalls. Er trägt eine gewisse Energiemenge mit sich (Schallenergie und Wärme), die er der kinetischen Energie des Geschosses entnimmt. Dieser Energieentzug bedeutet jedoch gleichzeitig eine Geschwindigkeitsverringerung. Die zugehörige Kraft heißt *Wellenwiderstand* des Geschosses. Sie tritt nur bei Überschallgeschwindigkeiten auf und macht rund 40 bis 50 % des gesamten Widerstandes aus.

5.7.3.2 Wellenwiderstand, Singularitätenverfahren

Für die Berechnung des Wellenwiderstandes wird ein zylindrisches Koordinatensystem (x, r) in die (fiktive) Geschossspitze gelegt, wobei die x -Achse mit der Geschossachse zusammenfällt. Das Geschoss wird als schlank vorausgesetzt; dies heißt, dass für jeden Punkt des Meridians

$$(5.7:5) \quad \frac{x}{r} < \sqrt{\text{Ma}^2 - 1} = \cot \alpha, \quad [-] \quad$$

gelten soll, wo α den Machwinkel der Anströmung bedeutet. Übliche Spitzgeschosse erfüllen in der Regel diese Bedingung.

Die dreidimensionale Anströmung sei stationär, isentrop und wirbelfrei; damit kann die Strömungsgeschwindigkeit durch eine Potenzialfunktion dargestellt werden. Für kleine Störungen der Parallelströmung lautet das Potenzial

$$(5.7:6) \quad \Phi(x, r) = u_\infty \cdot x + \phi(x, r) + v_\infty \cdot r + \bar{\phi}(x, r), \quad [\text{m}^2/\text{s}]$$

mit ϕ als Störpotenzial der axialen Strömung und $\bar{\phi}$ als jenes der angestellten Strömung.

Das Hauptinteresse gilt zunächst dem Grundwert des Luftwiderstandsbeiwertes bei axialer Anströmung und nicht angestelltem Geschoss. Damit verschwinden die beiden Terme v_∞ und $\bar{\phi}$ in Gl. (5.7:6). Unter dieser Voraussetzung lässt sich die Strömungsgeschwindigkeit mit Hilfe einer Potenzialfunktion darstellen. Weil nur kleine Störungen der Parallelströmung in Frage kommen (schlanker Körper!), lässt sich die zugehörige Differenzialgleichung für die Potenzialfunktion linearisieren,

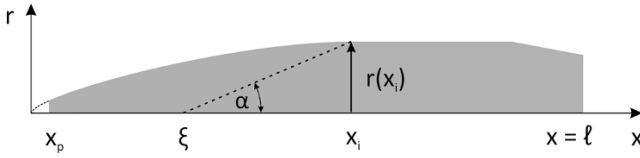


Abb. 5.54. Koordinatensystem für die Druckberechnung

wobei am einfachsten nur das Potenzial der Geschwindigkeitsstörung betrachtet wird. So erhalten wir, bereits in Zylinderkoordinaten geschrieben

$$(5.7:7) \quad (1 - Ma_\infty^2) \cdot \phi_{xx} + \phi_{rr} + \frac{1}{r} \cdot \phi_r = 0. \quad [1/s]$$

Für die weitere Betrachtung wird das Koordinatensystem so festgelegt, dass der Ursprung in der (fiktiven) Geschossspitze liegt und die x-Achse mit der Körperachse zusammenfällt (Abb. 5.54).

Das Geschwindigkeitspotenzial ϕ wird mit Hilfe des Singularitätenverfahrens bestimmt, wobei zu berücksichtigen ist, dass die Stromlinien tangential zur Körperkontur verlaufen sollen. Dabei werden auf der Geschossachse Singularitäten (Quellen und Senken) kontinuierlich so verteilt, dass eben diese Strömung entlang der Oberfläche entsteht.

Wird der Meridian des Geschosses durch $r = r(x)$ beschrieben, ergibt sich somit als Randbedingung

$$(5.7:8) \quad r' = \frac{\phi_r}{u_\infty + \phi_x}. \quad [-]$$

Dabei bedeuten u_∞ die Geschwindigkeit der ungestörten Strömung, ϕ_x und ϕ_r die entsprechenden Störgeschwindigkeiten (als Ableitung ihrer Potenzialfunktion).

Aus der Potenzialtheorie ist bekannt, dass als Lösung für die Gleichung (5.7:7) der Ansatz

$$(5.7:9) \quad \phi(x, r) = \int_0^\ell \frac{-k(\xi) \cdot d\xi}{\sqrt{(x - \xi)^2 - a^2 \cdot r^2}}, \quad [m^2/s]$$

in Frage kommt. $k(\xi)$ bedeutet dabei die Singularitätenverteilung auf der x-Achse und a steht für

$$a = \sqrt{Ma_\infty^2 - 1} = \cot \alpha, \quad [-]$$

wo α den Mach'schen Winkel bedeutet. Bei Unterschallströmung werden alle Singularitäten alle Punkte des Meridians beeinflussen, weshalb die Integration von 0 bis ℓ läuft. Im Überschallgebiet hingegen wird der Punkt mit der Koordinate x_i (siehe Abb. 5.54) nur von jenen Singularitäten beeinflusst, welche links vom Punkt ξ liegen. Es muss folglich nur von 0 bis $x - r \cdot \cot \alpha$, also $x - a \cdot r$ summiert werden

$$(5.7:9a) \quad \phi(x, r) = \int_0^{x - a \cdot r} \frac{-k(\xi) \cdot d\xi}{\sqrt{(x - \xi)^2 - a^2 \cdot r^2}}. \quad [m^2/s]$$

Mit Berücksichtigung von $k(0) = 0$ ergibt sich aus (5.7:9a) mit der Substitution

$$x - \xi = a \cdot r \cdot \cosh \lambda$$

$$(5.7:10) \quad \phi_x = - \int_0^{x-a \cdot r} \frac{-k'(\xi) \cdot d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - a^2 \cdot r^2}}, \quad [\text{m/s}]$$

$$(5.7:11) \quad \phi_r = \frac{1}{r} \cdot \int_0^{x-a \cdot r} \frac{-k'(\xi) \cdot (x-\xi) \cdot d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - a^2 \cdot r^2}}. \quad [\text{m/s}]$$

Da die Störungen klein sein sollen, kann in (5.7:8) ϕ_x gegen u_∞ vernachlässigt werden. Einsetzen von (5.7:11) führt dann zu

$$(5.7:12) \quad r \cdot r' = r \cdot \frac{\phi_r}{u_\infty} = \frac{1}{u_\infty} \cdot \int_0^{x-a \cdot r} \frac{-k'(\xi) \cdot (x-\xi) \cdot d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - a^2 \cdot r^2}}, \quad [\text{m}]$$

mit $\xi = x - a \cdot r$. Bei gegebenem Meridian $r(x)$ ist dies eine Volterra'sche Integralgleichung für die Ableitung der Singularitätenverteilung $k'(x)$. Zu ihrer numerischen Lösung wird sie als Differenzengleichung angeschrieben, wobei $k'(\xi)$ im betrachteten Intervall konstant sein soll

$$(5.7:13) \quad k'(\xi) = A_j \cdot u_\infty, \quad \text{für} \quad \xi_{j-1} < \xi < \xi_j. \quad [\text{m/s}]$$

Es folgt

$$(5.7:14) \quad r_k \cdot \frac{r_k - r_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} = A_k \int_{\xi_{k-1}}^{x_k - a \cdot r_k} \frac{(x_k - \xi) \cdot d\xi}{\sqrt{(x_k - \xi)^2 - a^2 \cdot r_k^2}} + \sum_{j=1}^{k-1} A_j \cdot \int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} \frac{(x_k - \xi) \cdot d\xi}{\sqrt{(x_k - \xi)^2 - a^2 \cdot r_k^2}}. \quad [\text{m}]$$

Die beiden Integrale in (5.7:1) sind elementar lösbar. Sie ergeben

$$\int_{\xi_{k-1}}^{x_k - a \cdot r_k} \frac{(x_k - \xi) \cdot d\xi}{\sqrt{(x_k - \xi)^2 - a^2 \cdot r_k^2}} = a \cdot r_k \cdot \sqrt{\left(\frac{x_k - \xi_{k-1}}{a \cdot r_k}\right)^2 - 1}, \quad [\text{m}]$$

$$\begin{aligned} \int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} \frac{(x_k - \xi) \cdot d\xi}{\sqrt{(x_k - \xi)^2 - a^2 \cdot r_k^2}} &= \\ &= a \cdot r_k \cdot \left[\sqrt{\left(\frac{x_k - \xi_{j-1}}{a \cdot r_k}\right)^2 - 1} - \sqrt{\left(\frac{x_k - \xi_j}{a \cdot r_k}\right)^2 - 1} \right]. \end{aligned} \quad [\text{m}]$$

Eingesetzt in (5.7:14) und nach A_k aufgelöst, entsteht für diesen Koeffizienten eine Rekursionsformel

(5.7:15)

$$A_k = \frac{\left\{ \frac{r_k - r_{k-1}}{a \cdot (x_k - x_{k-1})} - \sum_{j=1}^{k-1} A_j \cdot \left[\sqrt{\left(\frac{x_k - \xi_{j-1}}{a \cdot r_k} \right)^2 - 1} - \sqrt{\left(\frac{x_k - \xi_j}{a \cdot r_k} \right)^2 - 1} \right] \right\}}{\sqrt{\left(\frac{x_k - \xi_{k-1}}{a \cdot r_k} \right)^2 - 1}}, \quad [-]$$

die mit dem folgenden Wert gestartet wird

$$(5.7:16) \quad A_1 = \frac{r_1}{a \cdot x_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{a \cdot r_1} \right)^2 - 1}}. \quad [-]$$

Nun wird noch der Zusammenhang zwischen dem Potenzial und dem Druckkoeffizienten benötigt. Aus der (eindimensional angeschriebenen) Euler'schen Bewegungsgleichung

$$(5.7:17) \quad \rho \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{du}{dx} \right) + \frac{dp}{dx} = 0, \quad [\text{N/m}^3]$$

folgt, weil die Strömung stationär vorausgesetzt ist, also $\partial u / \partial t = 0$ gilt

$$dp = -\rho \cdot u \cdot du, \quad [\text{N/m}^2]$$

und nach Integration

$$p - p_0 = -\rho \cdot \frac{u^2 - u_0^2}{2} = -\rho \cdot \frac{(u + u_0) \cdot (u - u_0)}{2}. \quad [\text{N/m}^2]$$

Mit der Näherung $u + u_0 \approx 2 \cdot u_0$ folgt

$$p - p_0 = -\rho \cdot u_0 \cdot (u - u_0) = -\rho \cdot u_0 \cdot \Delta u, \quad [\text{N/m}^2]$$

und nach Umstellung

$$(5.7:18) \quad c_p = \frac{p - p_0}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_0^2} = -\frac{2}{u_\infty} \cdot \phi_x. \quad [-]$$

Einsetzen von (5.7:10)

$$(5.7:19) \quad c_p(x_k) = \frac{2}{u_\infty} \cdot \int_{\xi=0}^{x_k - a \cdot r} \frac{k'(\xi) \cdot d\xi}{\sqrt{(x_k - \xi)^2 - a^2 \cdot r_k^2}}, \quad [-]$$

und mit der Annahme (5.7:13) folgt

(5.7:20)

$$c_p(x_k) = 2 \cdot A_k \cdot \int_{\xi_{k-1}}^{x_k - a \cdot r_k} \frac{d\xi}{\sqrt{(x_k - \xi)^2 - a^2 \cdot r_k^2}} + 2 \cdot \sum_{j=1}^{k-1} A_j \cdot \int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} \frac{d\xi}{\sqrt{(x_k - \xi)^2 - a^2 \cdot r_k^2}}. \quad [-]$$

Auch diese Integrale lassen sich elementar ausrechnen

$$\int_{\xi_{k-1}}^{x_k - a \cdot r_k} \frac{d\xi}{\sqrt{(x_k - \xi)^2 - a^2 \cdot r_k^2}} = \ln \frac{x_k - \xi_{k-1} + \sqrt{(x_k - \xi_{k-1})^2 - a^2 \cdot r_k^2}}{a \cdot r_k}, \quad [-]$$

$$\int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} \frac{d\xi}{\sqrt{(x_k - \xi)^2 - a^2 \cdot r_k^2}} = \ln \frac{x_k - \xi_{j-1} + \sqrt{(x_k - \xi_{j-1})^2 - a^2 \cdot r_k^2}}{x_k - \xi_j + \sqrt{(x_k - \xi_j)^2 - a^2 \cdot r_k^2}}, \quad [-]$$

und in (5.7:20) einsetzen

$$(5.7:21) \quad c_p(x_k) = 2 \cdot A_k \cdot \ln \frac{x_k - \xi_{k-1} + \sqrt{(x_k - \xi_{k-1})^2 - a^2 \cdot r_k^2}}{a \cdot r_k} + \quad [-]$$

$$+ 2 \cdot \sum_{j=1}^{k-1} A_j \cdot \ln \frac{x_k - \xi_{j-1} + \sqrt{(x_k - \xi_{j-1})^2 - a^2 \cdot r_k^2}}{x_k - \xi_j + \sqrt{(x_k - \xi_j)^2 - a^2 \cdot r_k^2}}. \quad [-]$$

Zusammen mit der Formel (5.7:15) ergibt sich damit die Druckverteilung längs des Geschosskörpers. Zur Bestimmung des Wellenwiderstandsbeiwertes ist noch ein weiteres Integral auszuführen

$$(5.7:22) \quad c_{ww} = \frac{4}{d^2} \cdot \int_{x_p}^{\ell} c_p \cdot 2 \cdot r \cdot r' \cdot dx, \quad [-]$$

das am einfachsten und mit genügender Genauigkeit mittels der Trapezregel berechnet wird.

Für die praktische Durchführung ist folgendes zu beachten:

- Die Berechnung der Geschwindigkeits- und Druckverteilung wird von einer fiktiven Geschossspitze ($x = 0, r = 0$) aus gestartet, in der auch der Ursprung des Koordinatensystems liegt. Die Integration des Widerstandes (5.7:22) beginnt jedoch erst bei der effektiven Geschossspitze x_p (vgl. Abb. 5.54).
- Der Einfluss von Führungsbändern und ähnlichen Unebenheiten kann sehr unterschiedlich sein. Sofern der zylindrische Teil mindestens 1 Kaliber vor das Führungsband reicht und die Geschossspitze unter einem Winkel von ca. 2° in den zylindrischen Teil mündet (was bei derartigen Geschossen meist der Fall ist) können die Führungsbänder bei der Berechnung des Druckwiderstandes vernachlässigt werden (siehe dazu Abschn. 5.8.2.1). Sie tragen dann nur durch die Sogwirkung an der Hinterkante zum Gesamtwiderstand bei.

Ein Beispiel einer gerechneten Druckverteilung längs eines Artilleriegeschosses ist in der Abb. 5.55 dargestellt. Die Drucksprünge entstehen an den Unstetigkeitsstellen des Gradienten der Geschosskontur (Übergänge Zünder-Geschosskörper, Geschossspitze-Zylinder, Zylinder-Heckkonus).

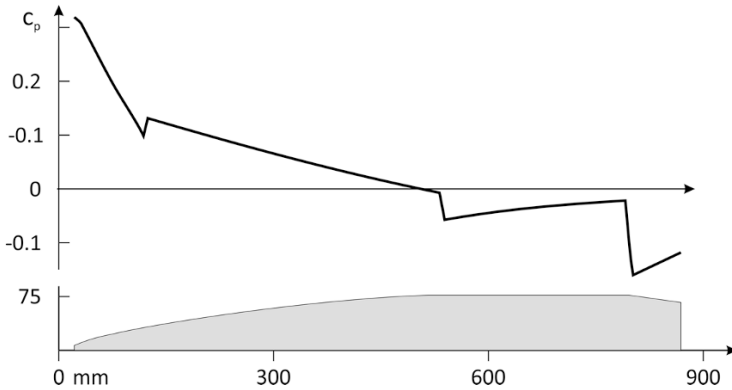


Abb. 5.55. Relative Druckverteilung längs eines Artilleriegeschosses. Die Drucksprünge entstehen an Unstetigkeitsstellen des Gradienten der Projektilkontur.

5.7.3.3 Wellenwiderstand, Newton'sche Theorie

In der klassischen Newton'schen Darstellung besteht das strömende Medium aus Teilchen, die sich geradlinig fortbewegen. Beim Auftreffen auf einen Körper behalten sie nur die Tangentialkomponente ihres Impulses bei und geben die Normalkomponente an den Körper ab. Die der Anströmung abgewandte Seite des Körpers erfährt in diesem Modell keine Kraftwirkung.

Die Strömungsgeschwindigkeit in Richtung der Körpnormalen lautet

$$(5.7:23) \quad u_{\infty,n} = u_{\infty} \cdot \sin \tau, \quad [\text{m/s}]$$

wo τ der Neigungswinkel der Körpertangenten im betrachteten Punkt bedeutet (siehe Abb. 5.56). Mit (5.6:11) ergibt sich als Druck auf die Oberfläche

$$p - p_0 = \rho \cdot (u_{\infty} \cdot \sin \tau)^2, \quad [\text{bar}]$$

woraus für den Druckkoeffizient folgt

$$(5.7:24) \quad c_p = \frac{p - p_0}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u_{\infty}^2} = 2 \cdot \sin^2 \tau. \quad [-]$$

Auch hier wird der Körper als schlank vorausgesetzt. Dies gestattet die folgende Approximation

$$(5.7:25) \quad \sin^2 \tau = \frac{r'^2}{1 + r'^2} \approx r'^2 \quad [-]$$

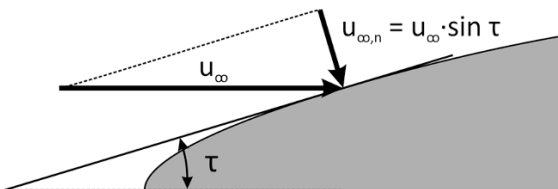


Abb. 5.56. Zur Herleitung der Newton'schen Theorie.

Wird Gl. (5.7:25) in (5.7:24) und diese danach in (5.7:22) eingesetzt, so lässt sich der Körperwiderstand durch die folgende Gleichung darstellen

$$(5.7:26) \quad W_s = \frac{W}{\frac{1}{2} \cdot \rho_0 \cdot u_\infty^2} = 4 \cdot \pi \cdot \int_0^h r \cdot r'^3 \cdot dx . \quad [m^2]$$

Die Newton'sche Strömungsvorstellung lässt ahnen, dass die daraus hergeleiteten Beziehungen umso besser gelten, je größer die Strömungsgeschwindigkeit ist.

5.7.3.4 Widerstandsbeiwert der Spitzenabplattung

Aus konstruktiven Gründen hat fast jedes Geschoss an der Spitze eine Abplattung, deren Auswirkung auf den Gesamtwiderstand bisher nicht berücksichtigt wurde.

Der Widerstand dieser Abplattung, der besonders bei kleinen Kalibern einen erheblichen Anteil am Gesamtwiderstand ausmachen kann, wird nach HAACK wie folgt abgeschätzt:

Für den Staudruck im Punkt S gelten nach PRANDTL die in der Tabelle 5.13 angegebenen Beiwerte. Sie lassen sich durch ein Polynom approximieren

Tabelle 5.13. Prantl'sche Beiwerte für den Plattenstaudruck

Ma	c_{ps}
0.5	1.065
1	1.275
1.5	1.53
2	1.65
3	1.75

$$(5.7:27) \quad c_{ps}(Ma) = 0.7340 + 0.6931 \cdot Ma - 0.1179 \cdot Ma^2 . \quad [-]$$

Auf der Platte wird eine parabolische Druckverteilung angenommen, die am Rand verschwindet und in der Mitte dem Staudruck entspricht

$$(5.7:28) \quad c_{wp}(Ma) = \frac{1}{2} \cdot c_{ps}(Ma) \cdot \left(\frac{d_p}{d} \right)^2 , \quad [-]$$

wobei d das Nominalkaliber und d_p den Plattendurchmesser bedeutet.

5.7.3.5 Der Reibungsbeiwert

Zur Bestimmung des Reibungsbeiwertes wird die bekannte Theorie der Plattenreibung zu Hilfe genommen. Das Prantl-Schlichting'sche Widerstandsgesetz liefert bei turbulenter Grenzschicht mit laminarem Anlauf den auf die gesamte Oberfläche bezogenen Beiwert

$$(5.7:29) \quad c_f = \frac{0.455}{(\log Re)^{2.58}} - \frac{B}{Re} . \quad [-]$$

Re bedeutet die Reynoldszahl der ungestörten Strömung bezogen auf die Geschosslänge.

Die Konstante B ist von der Lage des Umschlagpunktes von laminarer zu turbulenter Grenzschicht abhängig. Sie ergibt sich durch Ersetzen des turbulenten Wider-

standes zwischen Spitze und Umschlagpunkt durch den laminaren Widerstand, der nach dem Blasius'schen Gesetz berechnet wird

$$(5.7:30) \quad B = 0.074 \cdot (\text{Re}_{\text{krit}})^{0.8} - 1.328 \cdot (\text{Re}_{\text{krit}})^{0.5} . \quad [-]$$

Aus rechentechnischen Gründen legt man der Berechnung des turbulenten Anteiles der Konstanten B das $1/7$ -Potenzgesetz der Geschwindigkeitsverteilung zu Grunde (H. SCHLICHTING, 1965).

Der nach (5.7:29) berechnete Reibungswiderstand bezieht sich jedoch auf inkompressible Strömungen. Bei der Umströmung eines Geschosses mit Machzahlen > 1 muss aber die Kompressibilität berücksichtigt werden. Hierzu wird für turbulente Grenzschichten der folgende Quotient gebildet

$$(5.7:31) \quad \beta = \frac{c_{f,k}}{c_{f,ink}} , \quad [-]$$

wobei im Zähler die von Driest'sche Formel für den Beiwert des Reibungswiderstandes einer kompressiblen, turbulenten Grenzschicht verwendet wird. Diese lautet, bereits umgestellt zur einfacheren numerischen Behandlung

$$(5.7:32) \quad c_{f,k} = \frac{0.242^2 \cdot (1 - \lambda^2) \cdot (\arcsin \lambda)^2}{\lambda^2 \cdot \left[\log \left\{ \text{Re} \cdot c_{f,k} \cdot (1 - \lambda^2)^{1.1} \right\} \right]^2} , \quad [-]$$

$$\text{mit} \quad 1 - \lambda^2 = (1 + 0.2 \cdot \text{Ma}^2)^{-1} . \quad [-]$$

In dieser Form lässt sich die Gleichung iterativ nach $c_{f,k}$ auflösen.

Für den Reibungsbeiwert der inkompressiblen Strömung im Nenner der Gl. (5.7:31) wird der erste Summand aus der Formel (5.7:29) übernommen. In der Abb. 5.57 ist dargestellt, wie β von Ma und Re abhängig ist.

Da in der Ballistik fast stets die Kreisfläche des Nominalkalibers als Bezugsfläche angenommen wird, ist der Reibungsbeiwert auf diese Bezugsgröße umzurechnen. Es ergibt sich

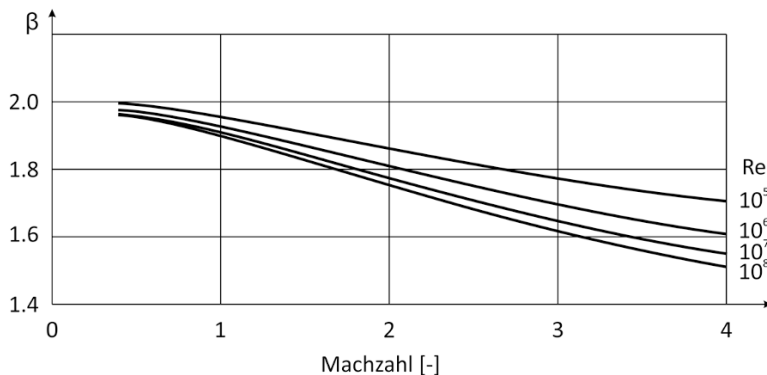


Abb. 5.57. Quotient der Reibungsbeiwerte von kompressibler und inkompressibler Strömung, in Abhängigkeit von Mach- und Reynoldszahl.

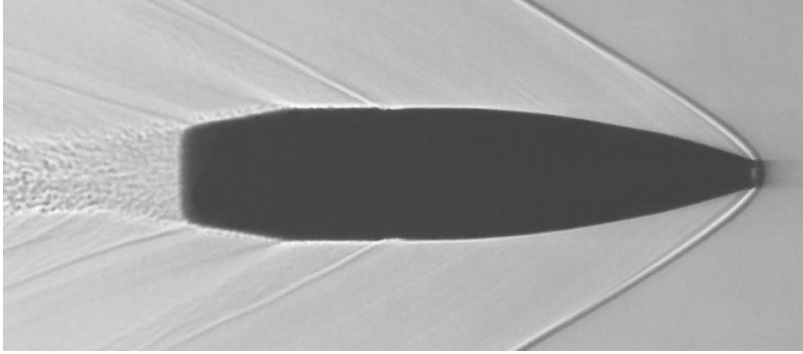


Abb. 5.58. Schattenaufnahme eines Gewehrgeschosses im Kaliber 7.5 × 55. Die Grenzschicht bleibt laminar bis zum Beginn des Heckkonus. Eine leichte Störung entsteht an der Kneiffrille.

$$(5.7:33) \quad c_{wr} = \beta \cdot c_f \cdot \frac{4 \cdot A_s}{d^2 \cdot \pi}, \quad [-]$$

wo c_f nach (5.7:29) eingesetzt wird und A_s die gesamte umströmte Körperfläche bedeutet.

Für die praktische Rechnung ist noch die kritische Reynoldszahl zum Umschlagspunkt (beim Abstand ℓ) zu bestimmen. Aus Schattenaufnahmen ist zu entnehmen, dass bei Geschossen kleinen Kalibers die Grenzschicht bis zum Beginn des Heckkonus laminar bleibt (siehe Abb. 5.58). Gelegentlich entsteht eine Verwirbelung bereits bei der Kneiffrille. Bei grosskalibrigen Geschossen kann der Beginn der turbulenten Grenzschicht (ebenfalls in Anlehnung an Schattenschlierenaufnahmen) 5–15 cm nach der Geschosspitze angenommen werden (siehe Abb. 5.59). Rauigkeit und Rillen beeinflussen den Beginn der Turbulenz merklich.

Die in Gleichung (5.7:30) benötigte kritische Reynoldszahl Re_{krit}

$$(5.7:34) \quad Re_{krit} = \frac{\rho \cdot u \cdot \ell}{\eta}, \quad [-]$$

ergibt sich durch die folgenden lokalen Anteile

$$(5.7:35) \quad u = u_\infty \cdot \sqrt{1 - c_p}, \quad [\text{m/s}]$$

$$(5.7:36) \quad \rho = \rho_0 \cdot \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad [\text{kg/m}^3]$$

$$(5.7:37) \quad \eta = \eta_0 \cdot \left(\frac{T}{T_0} \right)^{0.6}, \quad \text{mit} \quad [\text{N} \cdot \text{s/m}]$$

$$T = \frac{p}{R \cdot \rho}. \quad [\text{K}]$$

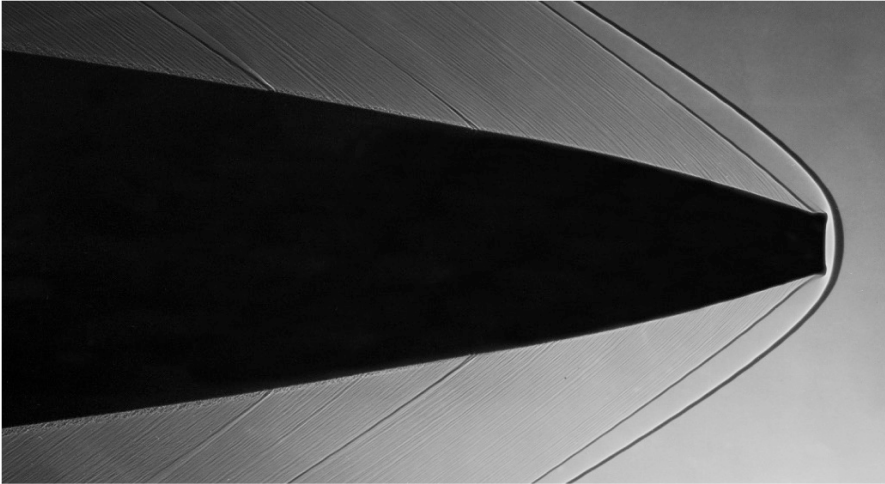


Abb. 5.59. Schattenaufnahme der Spitze eines 155 mm Artilleriegeschosses. Der Verlauf der Grenzschicht und der Beginn des Umschlagens von laminar nach turbulent wird sichtbar.

5.7.3.6 Der Bodensog

Die Bestimmung der Strömung am Heck eines Geschosses ist rechnerisch mit ziemlichen Schwierigkeiten verbunden. Man kann sich jedoch auf experimentelle Daten stützen. Eine ausführliche Zusammenstellung und Zusammenfassung experimenteller Ergebnisse findet sich in W. R. SCHMIDT, E. HERPFER (1973). Darin sind sehr viele Messdaten nach den Parametern Heckkonuswinkel und dem Verhältnis des Basisdurchmessers d_B zum Durchmesser des zylindrischen Teils dargestellt. Die Grafiken umfassen den Machzahlbereich bis 6 und Konuswinkel von 1° – 12° . Sie sind unterteilt in den Heckwiderstand, der den Unterdruck am Heckkonus einschließt, und in den Basiswiderstand, welcher nur den Widerstand am Geschossboden beschreibt. In diesen Grafiken lassen sich neue Projekte ohne weiteres eintragen und interpolieren.

Wenn bei der Berechnung des Wellenwiderstandes der (negative) Druckwiderstand des konischen Hecks bereits berücksichtigt wird (wie bei der Berechnung mittels der Singularitäten, Abb. 5.55), sind die Grafiken des Basiswiderstandskoeffizienten zu verwenden, andernfalls (z. B. bei der Widerstandsberechnung nach der Newton'schen Methode) der Heckwiderstandskoeffizient.

Weil die Grafiken aus aerodynamischer Sicht erstellt wurden, bei welcher die Bezugsgröße der maximale Projektildurchmesser ist, müssen die Beiwerte für ballistische Anwendungen noch auf das Nominalkaliber umgerechnet werden.

Bei der Berechnung des Wellenwiderstandes wurde der Einfluss von Führungsbändern vernachlässigt, an deren Rückseite ebenfalls noch ein Sog zu berücksichtigen ist. Dazu nimmt man an, dass auf die den Geschosskörper überragende Kreisringfläche der Basisdruck eines zylindrischen Hecks einwirkt.

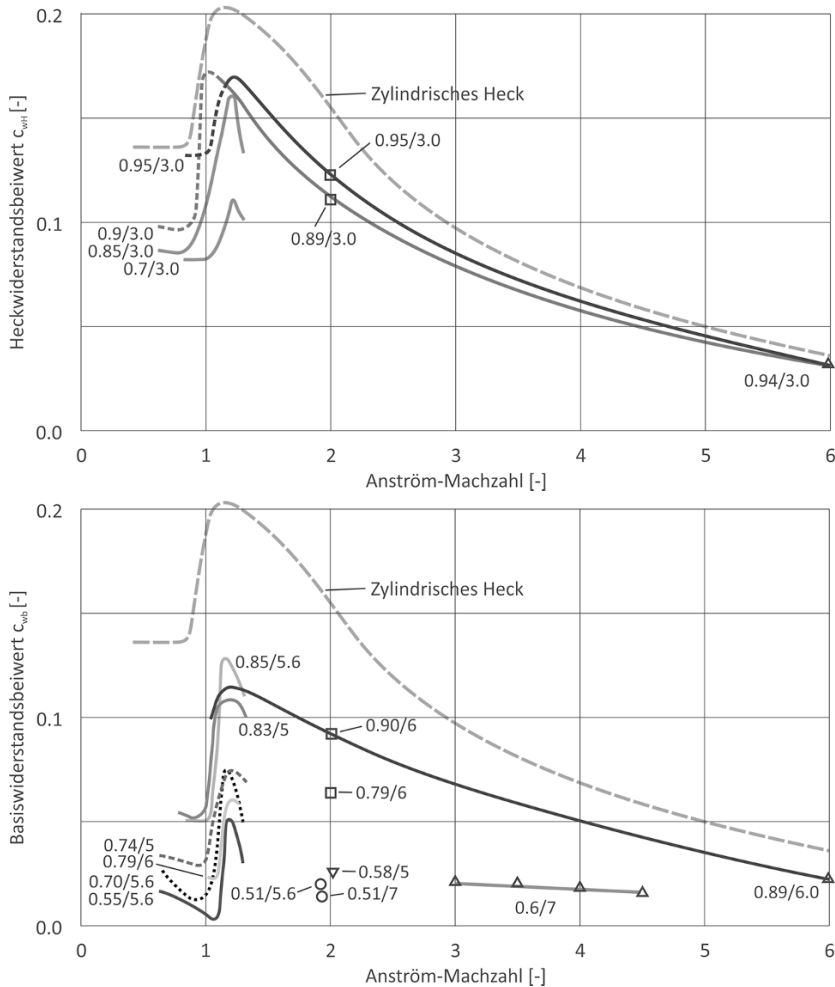


Abb. 5.60. Zwei Beispiele aus der Zusammenstellung von Heck- und Basiswiderstandsbeiwerten (aus W. R. SCHMIDT, E. HERPFER, 1973, auszugsweise nachgezeichnet). **a.** Oben. Heckwiderstand bei 3° Konuswinkel. **b.** Unten. Basiswiderstand bei 4-7° Konuswinkel. Die erste Zahl bedeutet den Basisdurchmesser gemessen in Geschossdurchmessern, die zweite Zahl ist der Konuswinkel.

Insgesamt ergibt sich damit als Luftwiderstandskoeffizienten des Bodensoges

$$(5.7:38) \quad c_{wb} = c_{wb}^* \cdot \frac{d_{\max}^2}{d^2} + c_{wb,zyl} \cdot \frac{d_F^2 - d_{\max}^2}{2 \cdot d^2} \quad [-]$$

Darin bedeuten c_{wb}^* den Basiswiderstandskoeffizienten nach SCHMIDT, HERPFER, d_{\max} den maximalen Geschossdurchmesser, d_F den Durchmesser des Führungsbandes und d das Bezugskaliber.

Mit dem Faktor 2 im Nenner des zweiten Summanden rechts wird berücksichtigt, dass sich durch das Einschneiden der Felder des Waffenrohres die Fläche etwa halbiert.

Bei der Interpolation in diesen Grafiken wurde in erster Linie der Parameter d_B/d_{\max} und erst in zweiter Linie der Heckkonuswinkel berücksichtigt. Dies lässt sich auf Grund der in diesen Zeichnungen zusammengestellten Messresultaten durchaus vertreten, da offensichtlich das Durchmesser Verhältnis einen grösseren Einfluss auf den Basiswiderstand ausübt als der Heckkonuswinkel.

5.7.3.7 Beispiele

Mit den in den Abschn. 5.7.3.2 sowie 5.7.3.4–6 beschriebenen Verfahren wurden die Luftwiderstandsbeiwerte verschiedener Geschosse bestimmt und mit den aus Schiessversuchen und aus Windkanalmessungen erhaltenen Resultaten verglichen. Die Auswahl betraf Projektile unterschiedlicher Kaliber und Form im Klein-, Mittel- und Großkaliberbereich.

Obwohl der Anstellwinkel unberücksichtigt blieb, ergaben die Rechnungen für das Massenpunktmodell durchaus brauchbare c_w -Verläufe, die sich geeigneter erwiesen als jene, die mit Standardgeschossen und ballistischem Koeffizienten BC ermittelt worden waren. Einige der Ergebnisse sind in der Abb. 5.61 zusammen mit den entsprechenden Messresultaten dargestellt.

Der Einfluss der fehlenden Berücksichtigung des Anstellwinkels zeigt sich vor allem bei den hohen Machzahlen (Bahnabschnitt nach der Mündung). Die gemessenen Werte sind dort wegen der anfänglichen Geschosspendelung (je nach Stabilität des Geschosses) wenig bis merklich größer.

Es erstaunt, dass beim Artilleriegeschoss die Rechnung trotz der Vernachlässigung des Anstellwinkels höhere Werte ergibt als die Freiflugmessung. Dies könnte z. B. mit zu groß gerechnetem Widerstand der Zünderplatte oder des Führungsbandes zusammenhängen.

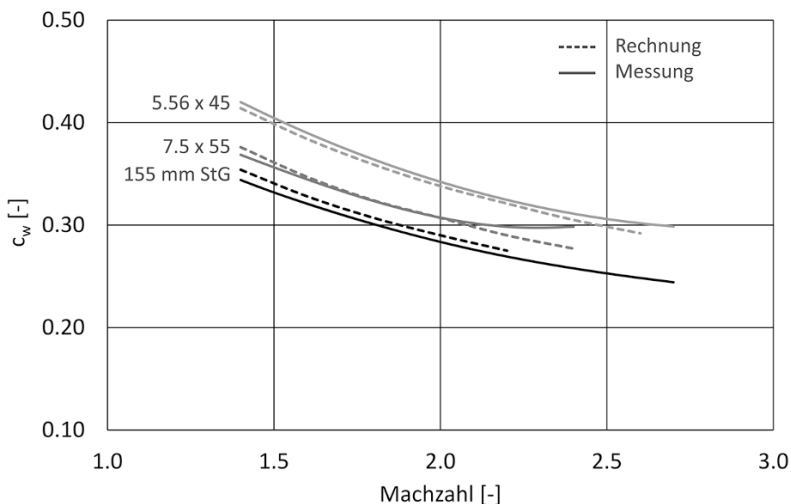


Abb. 5.61. Vergleich von gemessenen und nach dem beschriebenen Verfahren gerechneten Luftwiderstandsbeiwerten. Die durch die Anfangspendelung bedingte Vergrößerung des Luftwiderstandsbeiwertes ist bei den kleinkalibrigen Geschossen gut sichtbar.

Bei einem neu entwickelten Artilleriegeschoss, dessen c_w -Werteverlauf nach dem beschriebenen Verfahren gerechnet worden war, betrug der Schussdistanzfehler beim ersten Schießen rund 300 m (bei einer Schussdistanz von etwa 20 km). Gemessen an der Einfachheit des verwendeten Modells (nebst den Grafiken Abb. 5.60 reicht ein einfaches BASIC-Programm zur Bestimmung des c_w -Verlaufs aus) war das Ergebnis erstaunlich gut.

5.7.3.8 Unterschallanströmung

Für eine Berechnung der Druckverteilung in der Unterschallströmung kann auf die Potenzialgleichung (5.7:9) zurückgegriffen werden. Die Integration erfolgt diesmal jedoch über die gesamte Geschosslänge, da nun alle Singularitäten sich an der Umströmung beteiligen.

$$(5.7:39) \quad \phi(x, r) = \int_0^\ell \frac{-k(\xi) \cdot d\xi}{\sqrt{(x - \xi)^2 + b^2 \cdot r^2}}, \quad [\text{m}^2/\text{s}]$$

$$\text{mit} \quad b = \sqrt{1 - \text{Ma}_\infty^2}. \quad [-]$$

Zudem gilt auch hier die Randbedingung (5.7:8), die besagt, dass die Strömung der Körperkontur folgen soll

$$(5.7:40) \quad r' = \frac{\phi_r}{u_\infty}, \quad [-]$$

wobei die Näherung $u_\infty + \phi_x \approx u_\infty$ für schlanke Geschosse bereits angewendet ist. Wird die Gleichung mit r erweitert und die Ableitung von (5.7:39) nach r eingesetzt und ausgewertet, ergibt sich die Beziehung zwischen der Singularitätenverteilung und der Meridiankurve

$$(5.7:41) \quad k(x) = \frac{u_\infty}{2} \cdot r \cdot r' = u_\infty \cdot \frac{q'(x)}{4 \cdot \pi}, \quad [\text{m}^2/\text{s}]$$

wo $q(x)$ die Querschnittsfläche des Rotationskörpers an der Stelle x bedeutet. Einsetzen in die Potenzialgleichung und Ableiten führt zu den Formeln für die beiden Geschwindigkeitskomponenten an der Oberfläche

$$(5.7:42) \quad \phi_x = \frac{u_\infty}{4 \cdot \pi} \cdot \int_0^\ell \frac{q'(\xi) \cdot (x - \xi) \cdot d\xi}{[(x - \xi)^2 + b^2 \cdot r^2]^{3/2}}, \quad [\text{m/s}]$$

$$(5.7:43) \quad \phi_r = \frac{u_\infty \cdot b^2 \cdot r}{4 \cdot \pi} \cdot \int_0^\ell \frac{q'(\xi) \cdot d\xi}{[(x - \xi)^2 + b^2 \cdot r^2]^{3/2}}. \quad [\text{m/s}]$$

Analog wie bei der Bestimmung des Wellenwiderstandes in Abschn. 5.7.3.2 lassen sich die beiden Gleichungen mittels Diskretisieren lösen (wobei allerdings komplizierte Integrale entstehen), oder man sucht das Ergebnis mittels eines numerischen

Verfahrens. Mit der Annahme kleiner Änderungen der Querschnittsfläche $q(x)$ und der Setzung $q(0) = q(\ell) = 0$ (also ein vorn und hinten spitzer Körper) lassen sich auch geschlossene Näherungsformeln angeben (J. ZIEREP, 1991).

Im Unterschallgebiet setzt sich der Widerstand nur aus der Reibung und dem Bodensog zusammen. Es kann in der Praxis durchaus genügen, die in den Abschn. 5.7.3.5 und 5.7.3.6 beschriebenen Rechnungen und Daten zusammenzustellen, so dass auf die obige aufwändige numerische Integration verzichtet werden kann.

5.7.4 Rechnerische Bestimmung weiterer Beiwerte

5.7.4.1 Auftrieb- und Momentenbeiwert

Nimmt das Geschoss mit seiner Achse einen bestimmten (kleinen) Winkel mit der Richtung der Anströmung ein, so kommt in der Potenzialgleichung (5.7:6)

$$\Phi(x, r) = u_\infty \cdot x + \phi(x, r) + v_\infty \cdot r + \bar{\phi}(x, r), \quad [\text{m}^2/\text{s}]$$

das Störpotenzial der angestellten Strömung zum Tragen, und es ist anstelle der Gleichung (5.7:7) die Differenzialgleichung

$$(5.7:44) \quad (1 - \text{Ma}_\infty^2) \cdot \bar{\phi}_{xx} + \bar{\phi}_{rr} + \frac{1}{r} \cdot \bar{\phi}_r - \frac{1}{r^2} \cdot \bar{\phi} = 0, \quad [1/\text{s}]$$

zu lösen. In ähnlicher Weise wie im Fall der axialen Anströmung ergibt sich mit Einbezug der entsprechenden Randbedingungen bei Überschallanströmung

$$(5.7:45) \quad \bar{\phi}(x, r) = u_\infty \cdot \sin \delta \cdot \frac{1}{\pi \cdot r} \cdot \int_0^{x-a \cdot r} \frac{q'(\xi) \cdot (x - \xi) \cdot d\xi}{\sqrt{(x - \xi)^2 - a^2 \cdot r^2}}, \quad [\text{m}^2/\text{s}]$$

und im Fall der Unterschallströmung

$$(5.7:46) \quad \bar{\phi}(x, r) = u_\infty \cdot \sin \delta \cdot \frac{b^2 \cdot r}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^\ell \frac{q(\xi) \cdot d\xi}{[(x - \xi)^2 + b^2 \cdot r^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad [\text{m}^2/\text{s}]$$

Durch Ableiten der Potenzialgleichungen nach x bzw. nach r ergeben sich die beiden Störgeschwindigkeiten im angestellten Fall, die mit jenen des nicht-angestellten Geschosses zu überlagern sind. Aus den Geschwindigkeiten an der Oberfläche des Geschosses ergeben sich die Druckverteilung und damit auch die Kräfte.

Eine ausführliche Beschreibung der Singularitätenmethode findet sich in J. ZIEREP (1991).

Wird nur die axiale Geschwindigkeitsstörung an der Geschossoberfläche betrachtet, resultiert in beiden Geschwindigkeitsbereichen eine einfache, ausschließlich auf geometrischen Größen des Geschosses basierende Gleichung für das Kippmoment. Entwickelt wurde sie für Luftschiffe von M. MUNK (1924) und ist unter der Bezeichnung „Munk'sche Luftschiffformel“ bekannt.

$$(5.7:47) \quad M_M = \frac{\rho}{2} \cdot v^2 \cdot \sin(2 \cdot \delta) \cdot [V - (\ell_g - x_s) \cdot A_B] . \quad [\text{N} \cdot \text{m}]$$

Darin bedeuten ρ die Luftdichte, v die Geschossgeschwindigkeit, δ den Anstellwinkel, V das Geschossvolumen, ℓ die Geschosslänge, x_s den Abstand des Schwerpunktes von der Geschossspitze und A_B die Fläche des Geschossbodens.

Setzt man die rechten Seiten der beiden Gleichungen (5.3:26) und (5.7:47) einander gleich und benutzt die lineare Näherung (5.5:6), so ergibt sich für kleine Anstellwinkel ($\sin \lambda \approx \lambda$) eine Formel für c'_m

$$(5.7:48) \quad c'_m = \frac{8 \cdot [V - (\ell_g - x_s) \cdot A_B]}{\pi \cdot d^3} . \quad [-]$$

Die Ergebnisse, die mit Hilfe dieser Formel erzielt werden, lassen sich mit Hilfe von Windkanalmessungen an bekannten Geschossformen überprüfen. Dabei zeigt sich, dass die Munk-Formel bei Überschallgeschwindigkeiten c'_m zu groß schätzt. Angewendet auf die Geschossstabilität ergibt sich ein zu geringer Wert, eine Unstimmigkeit, die allerdings auf der sicheren Seite liegt.

Im Zusammenhang mit der Berechnung von Auftriebs- und Momentenbeiwert sei zudem noch auf W. HAACK (1959) und auf G. BRUHN (1961) verwiesen.

5.7.4.2 Übrige Beiwerte

Von den übrigen Beiwerten sind vor allem jene von Interesse, die für die Bestimmung des Stabilitätsverlaufes eines Geschossfluges im Molitz'schen Stabilitätsdreieck bekannt sein müssen. Es sind dies – neben dem Momentenbeiwertderivativ für die gyroskopische Stabilitätszahl – die Derivative des Auftrieb- und des Magnusmomentenbeiwertes sowie der Pendeldämpfungsbeiwert.

Eine rechnerische Ermittlung dieser Daten erfordert die Verfügbarkeit eines entsprechenden Programmes, das die Kräfte auf das Projektil auf Grund der Strömungsgleichungen berechnet. Hat man keinen Zugriff auf ein derartiges Programm, kann man sich mit den von MOLITZ angegebenen Näherungen begnügen

$$(5.7:49) \quad c_h = k \cdot \ell_g^2 , \quad k = 0.4 \dots 0.5 , \quad [-]$$

$$(5.7:50) \quad c'_j = -0.02 \cdot \left(\ell_g - \frac{h}{2} \right)^2 , \quad [-]$$

worin ℓ_g die Geschosslänge und h die Spitzenhöhe bedeuten, die beide in Kalibern gemessen einzusetzen sind.

5.8 Ballistisch optimale Geschosse

5.8.1 Aerodynamisch optimale Geschossformen

5.8.1.1 Die Geschosstheorie nach W. HAACK

Damit die relativ aufwändige numerische Integration der Integralgleichung (5.7:12) umgangen werden kann, schlug W. HAACK (1941) die Anwendung der sogenannten Kàrmàn'sche Näherung vor. KÀRMÀN nahm an, dass in dieser Gleichung $a \cdot r$ gegen x und $x - \xi$ zu vernachlässigen sei

$$r \cdot r' = \frac{1}{u_\infty} \cdot \int_0^{x-a \cdot r} \frac{-k'(\xi) \cdot (x - \xi) \cdot d\xi}{\sqrt{(x - \xi)^2 - a^2 \cdot r^2}} . \quad [m]$$

Diese Annahme lässt sich durch die Schlankheit des Körpers begründen, die bereits bei der Herleitung dieser Gleichung vorausgesetzt worden ist. Außerdem kann für Geschosse auch

$$a = \sqrt{Ma_\infty^2 - 1} = \cot \alpha , \quad [-]$$

als hinreichend klein angenommen werden. Mit dieser Näherung und mit der Setzung $r^2 = q$ folgt aus der obigen Gleichung

$$(5.8:1) \quad r \cdot r' = \frac{1}{2} \cdot q'(x) = \frac{1}{u_\infty} \cdot k(x) . \quad [m]$$

Für den Druckbeiwert kann auf Gleichung (5.7:18) zurückgegriffen werden

$$(5.8:2) \quad c_p = \frac{p - p_0}{\frac{1}{2} \cdot \rho_0 \cdot u_\infty^2} = -\frac{2}{u_\infty} \cdot \phi_x , \quad [-]$$

woraus für den Wellenwiderstand folgt

$$(5.8:3) \quad W_s = \frac{W}{\frac{1}{2} \cdot \rho_0 \cdot u_\infty^2} = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^h c_p \cdot r \cdot r' \cdot dx . \quad [m^2]$$

Einsetzen von (5.8:1), (5.8:2) und (5.7:10) ergibt, wobei für die letztere Gleichung ebenfalls die Kàrmàn'sche Näherung benutzt wird,

$$(5.8:4) \quad W_s = \pi \cdot \int_0^h q'(x) \cdot \left\{ \int_0^x \frac{q''(\xi) \cdot d\xi}{x - \xi} \right\} \cdot dx . \quad [m^2]$$

Damit ist eine direkte Beziehung zwischen dem Wellenwiderstand und der Form des Geschosses hergestellt. Sie bildet den Ausgangspunkt für die Bestimmung einer Haack'schen Geschosspitze.

Der auf den Staudruck bezogene Widerstand W_s lässt sich zu einem Minimum machen, vorausgesetzt, dass die Singularitätenverteilung vor und hinter dem Geschoss verschwindet. Damit erhält man die Nebenbedingungen

$$k(0) = 0 ; k(h) = 0 , \quad [m^2/s]$$

und damit nach (5.8:1)

$$(5.8:5) \quad q'(0) = 0 ; q'(h) = 0 . \quad [m]$$

Weiter sollte die Geschossspitze in der Geschossachse beginnen und in einem durch den Geschossdurchmesser d_G bestimmten Querschnitt enden. Dies liefert

$$(5.8:6) \quad q(0) = 0 ; q(h) = \left(\frac{d_G}{2} \right)^2 = \frac{S}{\pi} , \quad [m^2]$$

wo S die Querschnittsfläche des zylindrischen Geschossteils bedeutet. Zusätzlich wird man noch als Nebenbedingung ein festes Volumen V fordern müssen

$$(5.8:7) \quad V = \int_0^h q(x) \cdot dx . \quad [m^3]$$

Damit ist ein Variationsproblem mit Nebenbedingungen für die Funktion $q(x)$ des quadrierten Geschossmeridians skizziert. Mit einer längeren Rechnung (detailliert ausgeführt in I. SZABÓ, 1972) ergibt sich die folgende Parameterdarstellung

$$(5.8:8a) \quad x(\beta) = \frac{h}{2} \cdot (1 - \cos \beta) ; 0 \leq \beta \leq \pi , \quad [m]$$

$$(5.8:8b) \quad q(\beta) = \frac{2}{\pi^2} \cdot \left[\frac{S}{2} \cdot \left(\beta - \frac{1}{2} \cdot \sin 2 \cdot \beta \right) + \frac{4}{3} \cdot \left(2 \cdot \frac{V}{h} - S \right) \cdot \sin^3 \beta \right] , \quad [m^2]$$

wobei der Widerstand dieser Spitzenform lautet

$$(5.8:9) \quad W_s = \frac{4}{\pi \cdot h^2} \cdot \left(9 \cdot S^2 + 32 \cdot \frac{V^2}{h^2} - 32 \cdot \frac{S \cdot V}{h} \right) . \quad [m^2]$$

Die Beziehungen (5.8:8) und (5.8:9) bilden einen Formelsatz, der für jede Geschossspitze mit den Variablen Geschossdurchmesser (Kaliber), Spitzenlänge und Volumen einen Meridian kleinsten Wellenwiderstandes erzeugt.

Sind nur zwei der drei Größen vorgegeben, so lässt sich die dritte so bestimmen, dass der Widerstand minimal wird. Dies wird durch Nullsetzen der Ableitung von (5.8:9) nach der freien Variablen erreicht. So gibt es drei Möglichkeiten:

I. Gegeben Geschossdurchmesser (Kaliber) und Länge (*K-L-Geschosse*). Der Wellenwiderstand wird minimal, wenn

$$\frac{d W_s}{d V} = 0 , \quad [1/m]$$

woraus zwischen V , S und h die folgende Beziehung resultiert

$$(5.8:10) \quad V = \frac{1}{2} \cdot S \cdot h . \quad [m^3]$$

II. Gegeben Volumen und Länge (*V-L-Geschosse*). Die Bedingung für minimalen Wellenwiderstand lautet jetzt

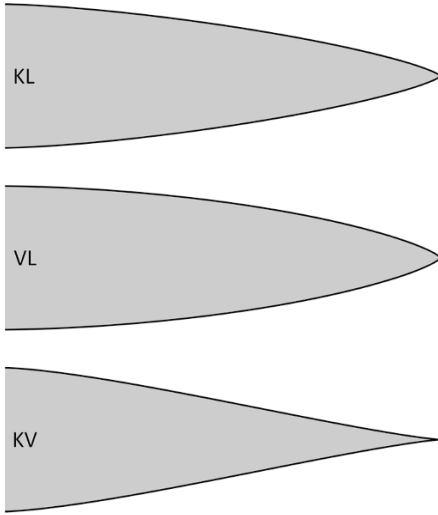


Abb. 5.62 Die drei Formen der nach der Haack'schen Theorie optimierten Spitzen. KL: Kaliber und Spitzenhöhe gegeben, VL: Volumen und Spitzenhöhe gegeben, KV: Kaliber und Volumen gegeben. Alle drei haben beim Erreichen des Geschossdurchmessers eine horizontale Tangente.

$$\frac{dW_s}{dS} = 0, \quad [-]$$

und zwischen S, V und h ergibt sich die Gleichung

$$(5.8:11) \quad S = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 = \frac{16 \cdot V}{9 \cdot h}. \quad [m^2]$$

III. Gegeben Geschossdurchmesser (Kaliber) und Volumen (*K-V-Geschosse*). Minimaler Widerstand ergibt sich mit der Bedingung

$$\frac{dW_s}{dh} = 0, \quad [m]$$

aus welcher sich für V, S und h der folgende Zusammenhang errechnet

$$(5.8:12) \quad h = \frac{8 \cdot V}{3 \cdot S}. \quad [m]$$

Da sich alle drei Gleichungen (5.8:10), (5.8:11) und (5.8:12) nach jeder Variablen auflösen lassen, können bei vorgegebenen zwei Größen stets 3 Geschossspitzen bestimmt werden, wovon eine kleinsten Wellenwiderstand hat.

Bei gegebenem Geschossdurchmesser (Kaliber) und gegebener Länge ergeben sich so die in der Abb. 5.62 dargestellten Spitzenformen.

5.8.1.2 Anwendung der Newton'schen Theorie

Ausgangspunkt für eine Newton'sche Geschossspitze ist die Gleichung (5.7:26)

$$(5.8:13) \quad W_s = 4 \cdot \pi \cdot \int_0^h r \cdot r'^3 \cdot dx. \quad [m^2]$$

Die Frage nach einer Meridiankurve $r(x)$ mit minimalem Widerstand führt auf das allgemeine Extremalproblem

$$(5.8:14) \quad W_s = \int_a^b f(x, r, r') \cdot dx = \min, \quad [m^2]$$

Ein notwendiges Kriterium für das Eintreten eines Minimums ist die Euler'sche Differenzialgleichung

$$(5.8:15) \quad \frac{d}{dx} f_{r'} - f_r = 0. \quad [-]$$

Wird für f nach (5.8:13) die Funktion $r \cdot r'^3$ eingesetzt, folgt nach kurzer Rechnung

$$(5.8:16) \quad r \cdot r'^3 = \text{const.} \quad [m]$$

Zur Bestimmung der Konstanten müssen jetzt die Randbedingungen hinzugezogen werden. Zum einen wird angenommen, dass das Geschoss spitzig sei, also

$$(5.8:17) \quad r(0) = 0. \quad [m]$$

Ist zudem Kaliber und Höhe gegeben (K-L Geschoss), so gilt weiter

$$(5.8:18) \quad r(h) = \frac{d}{2}. \quad [m]$$

Integration von (5.8:16) mit den Bedingungen (5.8:17 und 18) ergibt

$$(5.8:19) \quad r(x) = \frac{d}{2} \cdot \left(\frac{x}{h} \right)^{3/4}, \quad 0 \leq x \leq h. \quad [m]$$

Die Newton-Spitze heißt deshalb in der Literatur auch 3/4-Potenz-Spitze.

Ist das Volumen vorgegeben, so lässt sich im Falle bekannter Höhe (V-L-Geschoss) das Kaliber aus der nachstehenden Formel berechnen

$$(5.8:20) \quad \frac{d}{2} = \sqrt{\frac{5 \cdot V}{2 \cdot \pi \cdot h}}, \quad [m]$$

und im Falle gegebenen Kalibers (K-V-Geschoss) die Höhe aus

$$(5.8:21) \quad h = \frac{10 \cdot V}{\pi \cdot d^2}. \quad [m]$$

Im Gegensatz zu der Haack'schen Geschossspitze besteht jedoch hier kein wesentlicher Unterschied zwischen den drei Varianten. Abb. 5.63 stellt die Form einer Newton'schen Geschossspitze dar.

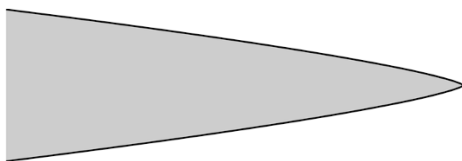


Abb. 5.63 Form der nach der Newton'schen Strömungsannahme optimierten Geschossspitze.

5.8.1.3 Gültigkeitsbereich der Optimierungen

Bei der Betrachtung der Formeln (5.8:9) und (5.8:13) zur Berechnung des Widerstandes der Geschosspitze fällt auf, dass dieser von der Geschwindigkeit unabhängig ist. Dies ist im Fall des Haack'schen Ansatzes auf die Kármán'sche, im andern Fall auf die Newton'sche Näherung zurückzuführen.

W. HAACK hat in einer seiner Arbeiten das Variationsproblem für den Geschossmeridian in einer Form untersucht, in der die Abhängigkeit von der Geschwindigkeit berücksichtigt wurde (W. HAACK, 1941). Dabei ergab sich, dass der optimale Meridian im Bereich der Gültigkeit der linearen Theorie von der Geschwindigkeit nahezu unabhängig ist. Werden alle Voraussetzungen berücksichtigt, bedeutet dies, dass die Haack'schen Geschossformen im Machzahlbereich von etwa 1.3 bis 2.7 gut verwendet werden können. Der optimale Bereich für die Anwendung der Newton'schen Konturen schließt sich etwa an diesen Bereich nach oben hin an (siehe dazu Abschn. 5.8.3.2).

Eine weitere Folge der Vereinfachungen ist auch, dass die Haack'schen K-L- und V-L-Formen wie auch die Newton'sche Form eigentlich stumpf sind, d.h. für $x = 0$ eine vertikale Tangente haben. Dies steht im Gegensatz zu der Annahme, dass der halbe Öffnungswinkel an der Geschosspitze kleiner als der Machwinkel sein sollte. In der Praxis fällt dies jedoch überhaupt nicht ins Gewicht, da jede Geschosspitze aus konstruktiven Gründen (z. B. Zünderplatte) abgeplattet ist.

5.8.1.4 Optimierung des Geschosshecks

In Abschnitt 5.7.3.1 wurde erwähnt, dass der Bodensog den größten Anteil zum Widerstand eines Geschosses beiträgt. Es wird sich also lohnen, bei der Suche nach einer widerstandsoptimierten Form auch das Heck zu betrachten.

Bei der Gestaltung eines Geschosshecks stehen in erster Linie zwei Parameter zur Verfügung: der Konuswinkel und die Länge des Konus. Zudem ist bekannt, dass der Abströmwinkel an einem zylindrischen Heck im üblichen Machzahlbereich etwa $10\text{--}12^\circ$ beträgt (siehe Abb. 5.64). Ein steilerer Konus gibt somit keinen Sinn, weil sonst die Strömung an der Ecke abreißt und die ganze Heckquerschnitts-

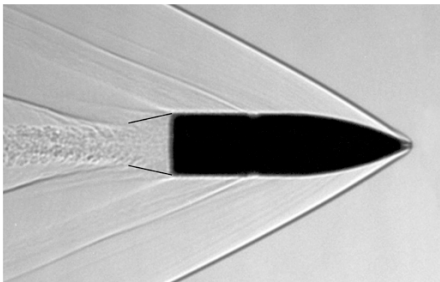


Abb. 5.64 Strömung am zylindrischen Heck. Der freie Abströmwinkel beträgt ca. $10,5^\circ$.

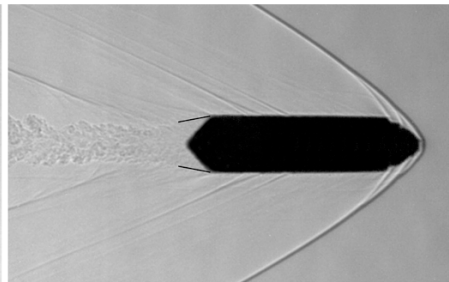


Abb. 5.65 Abströmwinkel bei einem Geschoss mit „Turbo“-Heck, er beträgt ebenfalls ca. $10,5^\circ$.

fläche in den Unterdruck zu liegen kommt (siehe Abb. 5.65). Es ist also zu erwarten, dass bei gleichem Vorkörper zwischen 0° und 12° Konuswinkel ein Widerstandsminimum existiert.

Dieses Minimum ließ sich mit einer eigenen, experimentellen Untersuchung nachweisen. Im Kaliber 6.45×48 wurden 12 Geschosse gleicher Spitzenform mit Heckkonen der Länge $\frac{1}{2}$ -, $\frac{3}{4}$ - und 1-Kaliber sowie den Konuswinkeln 5° , 7° , 9° und 11° ausgerüstet und die c_w -Werte im Machzahlbereich von 1.8–2.7 im Freiflug gemessen. Dabei zeigten sich die folgenden Ergebnisse

- Mit zunehmender Konuslänge nimmt der Widerstand ab.
- Zwischen 6° und 8° Konuswinkel existiert ein Widerstandsminimum, unabhängig von der Machzahl (siehe Abb. 5.66 und 67).
- In diesem Winkelbereich nimmt der Widerstand linear mit zunehmender Konuslänge ab.

Zum gleichen Ergebnis kamen auch Untersuchungen von R. L. MCCOY (1999), der auch einen flachen Verlauf des Widerstandes mit einem Minimum zwischen 5° und 9° beschreibt. Er hält auch fest, dass bei Winkeln über 10° mit einem Abreißen der Grenzschicht gerechnet werden muss, wobei der Vorteil des Konus hinfällig wird.

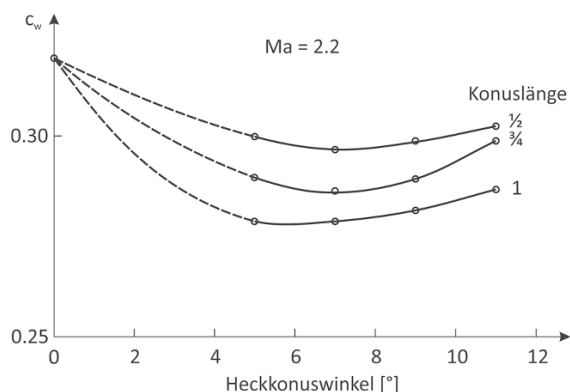


Abb. 5.66 Widerstandsbeiwert in Abhängigkeit des Heckkonuswinkels bei $Ma = 2.2$.

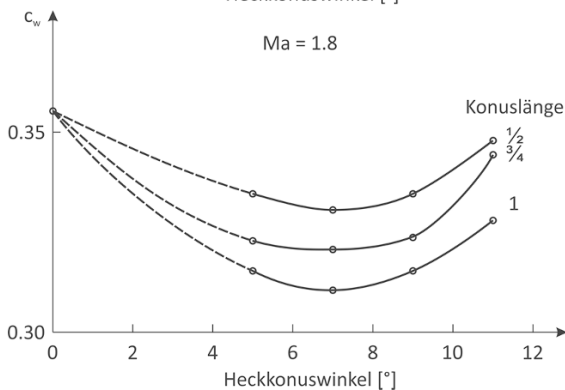


Abb. 5.67 Widerstandsbeiwert in Abhängigkeit des Heckkonuswinkels bei $Ma = 1.8$.

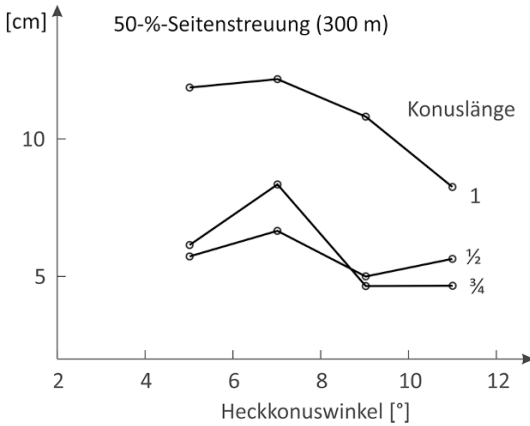


Abb. 5.68 Abhängigkeit der Geschossstreuung von Konuswinkel und Konuslänge.

Die Versuche haben aber auch gezeigt, dass ein langer Heckkonus die Stabilität des Geschosses beeinträchtigt. Dies wird bei der Streuung ersichtlich, die beim Geschoss mit dem 1-Kaliber langen Konus in Seite und Höhe deutlich schlechter wird (siehe Abb. 5.68).

5.8.2 Praktische Auslegung einer optimalen Geschossform

5.8.2.1 Geschossspitze

Haack'sche Geschossspitze. Bei der praktischen Bestimmung einer Geschossspitze ist in den meisten Fällen das Kaliber und damit der Geschossdurchmesser vorgegeben; so kommen nur K-L- und K-V-Geschosse in Frage. Da aber K-V-Geschosse in konstruktiver Hinsicht eine ungünstige Form aufweisen, die auch für die Herstellung problematisch ist, wird man in der Praxis nur K-L-Geschosse wählen.

Die Parameterdarstellung für den Meridian einer K-L-Spitze lautet

$$(5.8:22) \quad x = \frac{h}{2} \cdot (1 - \cos \beta), \quad [m]$$

$$(5.8:23) \quad r^2(\beta) = \frac{S}{\pi^2} \cdot \left[\beta - \frac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot \beta) \right]. \quad [m^2]$$

Bei Geschossen, die einen Zünder aufweisen, wird man von der Zünderkonstruktion her weitere Auflagen in Kauf nehmen müssen.

Es ist dies in der Regel der Bodenradius r_z und die Höhe h_z des Zünders, wodurch der gesuchte Meridian durch einen vorgegebenen Punkt (h_z , r_z) gehen muss.

Hier wird man mittels den Formeln (5.8:8a) und (5.8:8b) aus h_z und r_z V bestimmen, das dann für die Berechnung des Meridians eingesetzt wird.

Ist das Geschoss mit einem Führungsband versehen, so wird der Übergang von der Spitze in den zylindrischen Teil nicht glatt ausgebildet, sondern es wird ein Tangentensprung von ca. 2° vorgesehen.

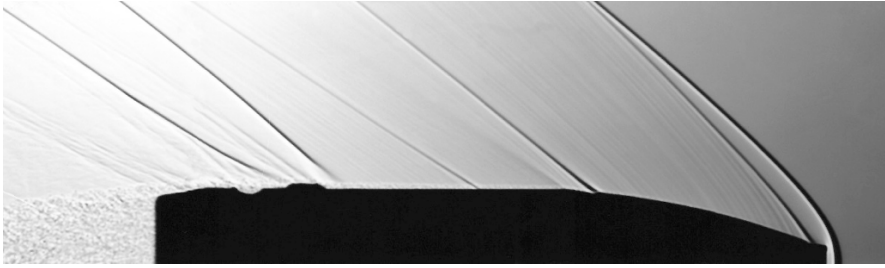


Abb. 5.69 Grenzschicht bei einem 20-mm-Geschoss mit Führungsband. Der kleine Winkel zwischen Spitze und Zylinder bewirkt eine Verdickung der Grenzschicht, die verhindert, dass es beim Führungsband zu einer Ablösung kommt.

Man kann diesen Winkel aus der Dicke des Führungsbandes und der Länge des zylindrischen Teils zwischen Spitzenende und Führungsband gut schätzen.

Die turbulente Grenzschicht wird dadurch soweit angehoben, dass das Führungsband ganz darin zu liegen kommt. Dies vermeidet eine Grenzschichtablösung an der Vorderkante des Führungsbandes, die einen erhöhten Heckwiderstand zur Folge hätte (siehe Abb. 5.69). Die zur Berechnung der Haack'schen Geschossspitze maßgebenden Spitzenhöhe und Durchmesser sind entsprechend anzupassen.

Newton'sche Spitze. Bei deren Berechnung kann man sich stets auf die Formel (5.8:19) stützen. Ist das Volumen vorgegeben, so bestimmt man vorgängig nach (5.8:20) oder (5.8:21) Höhe bzw. Kaliber.

Erschwerend bei der praktischen Anwendung einer solchen Spitze tritt hinzu, dass die Tangente des Meridians für $x = h$ nicht horizontal ist, sondern auch bei sehr schlanken Spitzen einen Winkel von 5° oder größer mit dem zylindrischen Teil einschließt. Man wird eine Ausrundung vorsehen müssen, die bei Geschossen ohne Führungsband einen glatten Übergang in den zylindrischen Teil erzwingt, bei Geschossen mit Führungsband einen Tangentensprung von etwa 2° ergibt. Für diese Ausrundung bietet sich aus rechentechnischen Gründen beispielsweise eine quadratische Parabel oder ein Kreisbogenstück an.

Ebenfalls erschwerend wirkt sich aus, dass für den Einbau eines Zünders keine Nebenbedingungen akzeptiert werden können, da die Potenzfunktion (5.8:19) keine weiteren Parameter mehr besitzt.

5.8.2.2 Bemerkungen zu Zylinder und Heck

Der zylindrische Teil eines Geschosses hat für eine gute Führung im Waffenrohr zu sorgen. Um einen guten Geschossabgang zu gewährleisten, muss die Zentrierlänge mindestens 1.2 Kaliber betragen.

Bei der Erprobung einer neuen Gewehrmunitionsentwicklung fanden sich Geschosse, die Feldeindrücke bis zur Geschossspitze aufwiesen. Die Geschosse hatten sich im Rohr bereits schräggestellt. Die Führungslänge betrug rund 1.1 Kaliber.

Da die Aufgabe des zylindrischen Teils außerhalb des Rohres erfüllt ist, liegt es nahe, auf diesen ganz zu verzichten und die Führung durch einen Zentrierring über der Spitze übernehmen zu lassen, der nach Verlassen der Mündung abgesprengt wird. Dies gestattet, die ganze Geschosslänge als Spitze auszubilden und so einen sehr großen Schlankheitsgrad zu erzielen. Dadurch wird der Luftwiderstand im Überschallbereich sehr gering.

Derartige Geschosse wurden bereits von W. HAACK empfohlen. Allerdings gefährden die wegfliegenden Teile Personen, die sich vor dem Geschütz aufhalten, sodass aus Sicherheitsgründen solche Geschosse in der Regel nicht eingesetzt werden können.

Das Heck wird mit Vorteil konisch mit einer Länge von 0.5–0.75 Kaliber ausgebildet, wobei der Heckkonuswinkel etwa 6–8° betragen soll (zur optimalen Heckgestaltung siehe Abschn. 5.8.1.4).

5.8.2.3 Stabilität und Folgsamkeit

Der Wellenwiderstand eines Geschosses wird umso kleiner, je grösser der Schlankheitsgrad der Spitze h/d ist (wo d das Kaliber und h die Spitzenhöhe bezeichnet). Diesem Schlankheitsgrad sind jedoch von der Stabilität her Grenzen gesetzt. Für Geschütze mit einem üblichen Drall von 6–7° muss die Länge des Geschosses kleiner als 6 d sein (siehe Abschn. 5.8.4.3), wobei für die Spitze höchstens 4–4.5 d übrig bleiben kann.

Man darf dann einen ruhigen Geschossflug erwarten, wenn darauf geachtet wird, dass das Verhältnis des radialen Trägheitsmoment J_r zum axialen J_a die folgende Bedingung erfüllt

$$(5.8:24) \quad \frac{J_r}{J_a} \leq 10 \dots 11. \quad [-]$$

Die gyroskopische Stabilitätszahl s an der Mündung sollte etwa 1.4, mindestens aber 1.3 betragen. Eine obere Grenze hierfür kann jedoch nicht ohne weiteres angegeben werden. Erfahrungsgemäß sind Geschosse mit $s = 2.0$ noch genügend folgsam, um in der oberen Winkelgruppe eingesetzt werden zu können. Bei Geschossen, die mit Flachbahnwaffen verschossen werden, darf s auch größer sein, da hier die Gefahr einer Überstabilisierung mit Folgsamkeitsproblemen nicht besteht (obwohl dies ab und zu behauptet wird).

5.8.3 Realisationen optimierter Geschosse

5.8.3.1 Experimentelle Bestätigung, allgemeine Bemerkungen

Eine experimentelle Bestätigung der Wirksamkeit optimaler Geschossformen ist nur möglich, wenn mit Modellgeschossen gearbeitet wird, bei denen Zylinder und Heck formgleich sind und mit geeigneter Massenverteilung möglichst auch gleiche

Flugbedingungen angestrebt werden (Pendelungen). Solche Versuche können helfen, die Wahl der optimalen Geschosskontur zu treffen.

Soll in der Praxis für ein bestimmtes Kaliber ein Geschoss neu entwickelt oder ballistisch verbessert werden, so wird man nicht nur die Spitze neu gestalten, sondern auch andere Möglichkeiten zur Reichweitensteigerung ausnützen, wie z. B. Erhöhen der Mündungsgeschwindigkeit, Vergrößern der Querschnittsbelastung und Neugestalten von Zylinder und Heckkonus. Verbesserungen lassen sich dann nur durch Vergleich der Luftwiderstandsbeiwerte nachweisen.

5.8.3.2 Untersuchungen mit Modellgeschossen

Modellgeschosse in Handfeuerwaffenkalibern eignen sich für außenballistische Untersuchungen aus den folgenden Gründen:

- Die Geschosse sind billig. Es können Versuchsreihen mit genügend großen Schusszahlen durchgeführt werden.
- Der Widerstandsbeiwert kann in Freifluganlagen über einen großen Machzahlbereich sehr genau bestimmt werden.
- Die Versuche lassen sich auf kleinen Schießplätzen mit geringem Aufwand an Personal und Material durchführen.
- Windkanalmessungen können an vergrößerten Modellen durchgeführt werden, was aus Sicht der Ähnlichkeitsgesetze günstiger ist.

Für die Überprüfung der theoretischen Überlegungen wurden aus den oben genannten Gründen im Kaliber 6.35 mm Modellgeschosse mit den folgenden Spitzen hergestellt:

- 1 Ogive mit 9.45 mm Radius,
- 2 Haackspitze mit 2.5 Kal. Spitzenhöhe,
- 3 Newtonspitze mit gleicher Spitzenhöhe wie 2.

Mit diesen 3 Varianten wurden die folgenden Versuche durchgeführt:

Windkanalmessungen. Für jede Variante wurde ein Modell für den Überschallwindkanal hergestellt, bei dem Würgerille, Züge und die Oberflächenrauigkeit so gut wie möglich nachgebildet waren.

Der Modellmaßstab wurde so gewählt, dass mit guter Übereinstimmung von Mach- und Reynoldszahlen gerechnet werden konnte.

Messungen im Machzahlbereich von 1.5 bis 3.5 ergaben Widerstands-, Auftriebs- und Momentenbeiwerte sowie die zugehörigen Gradienten.

Freiflugversuche. Für die Freiflugversuche wurden von allen 3 Varianten Messinggeschosse hergestellt. Trotz zu geringer Stabilität (wegen ungünstiger Massenverteilung) und daraus folgenden Anstellwinkeln auf dem ersten Bahnabschnitt bestätigen diese Versuche die aus den Windkanalmessungen gewonnenen Erkenntnisse.

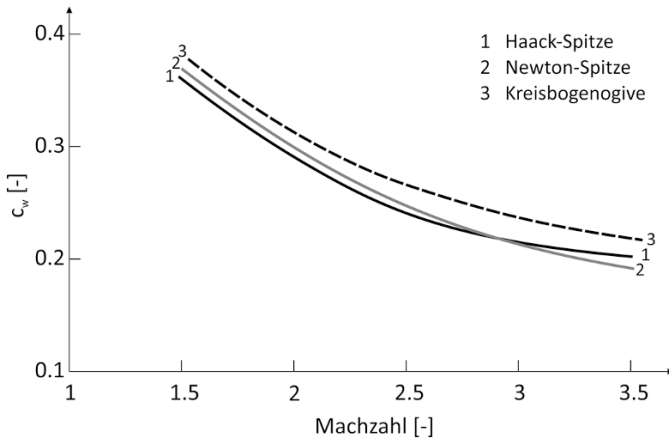


Abb. 5.70 Windkanalmessungen an drei Geschossmodellen mit unterschiedlichen Spitzenformen. Bis etwa Mach 2.9 ergibt die Haack-Spitze den geringsten Luftwiderstand, bei höheren Machzahlen ist es die Newton-Spitze. Beide sind sichtbar besser als die Kreisbogenogive.

In der Abb. 5.70 sind die drei c_w -Kurven aus den Windkanalmessungen dargestellt. Im Bereich zwischen Ma 1.5–2.8 besitzt die Haack-Spitze den geringsten Widerstand. Die bereits im Abschn. 5.7.3.3 geäußerte Vermutung, dass auf Grund der Modellvorstellung die Newton-Spitze für große Geschwindigkeiten geeignet sei, hat sich hier bestätigt. Merklich schlechter als diese beiden schneidet die Ogive ab, dies trotz größerem Schlankheitsgrad.

5.8.3.3 Artilleriegeschosse

105 mm Geschoss. Mitte des letzten Jahrhunderts wurde in der Schweizer Armee ein Haack-Geschoss für das Artilleriekaliber 10.5 cm entwickelt und eingeführt, das gegenüber dem herkömmlichen Geschoss eine Reichweitensteigerung bringen und die Streuung verbessern sollte.

Die 105 mm „Spitzgranate“ (SpG) war ein K-L-Geschoss der Länge 6 Kaliber und mit einer Spitzenhöhe von 4.2 Kaliber, also mit einer sehr schlanken Spitze. Wegen der schlanken Form war die Masse geringer und die Mündungsgeschwindigkeit etwas höher als beim Standardgeschoss.

Der geschossformbedingte Schussweitzuwachs wurde durch Rechnungen mit einem Massenpunktsmodell ermittelt, wobei beide Geschosse mit gleicher Masse und gleicher v_0 versehen wurden. Da für beide Geschosse die Stabilitätszahlen an der Mündung genügend groß waren, durfte mit ungefähr gleichen Flugbedingungen gerechnet werden. So ergab sich eine (gerechnete) Reichweitensteigerung von etwas mehr als 16 % (die wirkliche lag noch etwas höher).

Neben den Resultaten von Schiessversuchen lagen für beide Geschosse auch Ergebnisse von Widerstands-, Auftriebs- und Momentenbeiwerten und deren Gradi-

5.8.3.4 Kleinkalibergeschosse

Angesichts der kurzen Schussdistanzen und damit auch Flugzeiten ist die Frage berechtigt, ob sich die Einführung widerstandsoptimierter Geschosse bei kleinen Kalibern lohnt. Durch eine geringere Verzögerung infolge des Luftwiderstandes wird die Energie besser erhalten und Störungen wirken sich weniger aus. In der Tabelle 5.14 sind mögliche Verbesserungen aufgezeigt, die mit einem Haack-Geschoss gegenüber einem Geschoss mit Ogivenspitze und einem klassischen Jagdgeschoss erreicht werden können, wenn nur die Geschossform geändert wird. Ein Geschoss mit einer Haack-Spitze zu versehen ist kaum aufwändiger als die Herstellung ogivaler Spitzgeschosse.

Beim Trend zu bleikernfreien Geschossen, die aus Konstruktionsgründen oft eine geringere Querschnittsbelastung und damit eine größere Verzögerung aufweisen, könnte dies einen Beitrag zur Energieerhaltung auf der Flugbahn leisten.

5.8.4 Optimierung der Stabilität

5.8.4.1 Optimale Geschosse und gyroskopische Stabilität

Eine geringe Verzögerung eines Geschosses infolge des Luftwiderstandes kann auch erreicht werden, wenn die Querschnittsbelastung möglichst groß gewählt wird, wie dies aus der Gl. (5.4:37) hervorgeht

$$\frac{F_w}{m} = a = c_w \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot \frac{1}{q} \quad [\text{m/s}^2]$$

Bei gegebenem Kaliber bedeutet dies ein schweres und damit auch langes Geschoss. Lange, schwere Geschosse erhalten zwangsläufig größere radiale Trägheitsmomente, was wiederum die Stabilität negativ beeinflusst.

Die Suche nach dem in außenballistischer Hinsicht optimalen Geschoss schließt daher die Frage nach der geometrischen Form mit ein, die dem Geschoss eine möglichst große Stabilität verleiht. Dies könnte es ermöglichen, ein Geschoss länger und damit schwerer zu gestalten. Ausgangspunkt zur Untersuchung dieser Frage ist die (nochmals erwähnte) Gleichung für die gyroskopische Stabilität (5.6:10)

Tabelle 5.14. Ballistische Verbesserungen durch Optimieren der Geschossform bezüglich klassischer Geschossformen

Ballistische Größe	Distanz [m]	Verbesserung bezüglich eines	
		Spitzgeschosses	Jagdgeschosses
Energie	300	+ 8 %	+13 %
	500	+ 17 %	+23 %
Querwindempfindlichkeit	300	– 14 %	–22 %
	500	– 16 %	–24 %

$$(5.8:25) \quad s = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{J_a^2 \cdot \omega^2}{J_r \cdot c'_m \cdot \rho \cdot v^2 \cdot d^3}, \quad [-]$$

in der allerdings noch die Geschwindigkeit v , die Winkelgeschwindigkeit ω und Gradient des Momentenbeiwertes c'_m durch Größen zu ersetzen sind, die eine geometrische Auslegung der Geschossform ermöglichen.

Von einigen wenigen Ausnahmen abgesehen, nimmt die Stabilität eines Geschosses entlang der Flugbahn zu (ω nimmt deutlich weniger rasch ab als v); die Stabilitätszahl ist somit an der Mündung am geringsten. Eine optimale Geschossauslegung wird sich deshalb an diesem Wert orientieren müssen. An der Mündung lässt sich aber die Winkelgeschwindigkeit durch die Mündungsgeschwindigkeit und die Dralllänge Λ ausdrücken

$$(5.8:26) \quad \omega = \frac{2 \cdot \pi \cdot v}{\Lambda}. \quad [1/s]$$

Eingesetzt in die Gl. (5.8:25) ergibt sich für die Stabilitätszahl eine Beziehung, in der nur noch der Gradient des Momentenbeiwertes c'_m nicht bekannt ist

$$(5.8:27) \quad s = \frac{8 \cdot \pi}{\rho} \cdot \frac{J_a^2}{J_r \cdot c'_m \cdot \Lambda \cdot d^3}. \quad [-]$$

Es ist bemerkenswert, dass s nicht direkt von der Geschwindigkeit abhängig ist.

Wenn die Berechnung des c'_m nach Abschn. 5.7.4.1 zu aufwändig erscheint, kann auf die aus der Munk'schen Luftschiffformel folgende Beziehung (5.7:48) zurückgegriffen werden, die ausschließlich geometrische Daten des Geschosses enthält. Eingesetzt in (5.8:27) ergibt sich

$$(5.8:28) \quad s = \frac{\pi^2}{\rho} \cdot \frac{J_a^2}{J_r \cdot \Lambda^2 \cdot [V - (\ell - x_s) \cdot A_B]}, \quad [-]$$

wobei ρ die Luftdichte, Λ die Dralllänge, V das Geschossvolumen, ℓ die Geschosslänge, x_s den Abstand des Schwerpunktes von der Geschossspitze, A_B die Fläche des Geschossbodens und J_a und J_r das axiale bzw. das radiale Trägheitsmoment bedeutet.

Als freier Parameter der Geschossgeometrie bleibt noch die Spitzenhöhe h , angegeben als *Spitzenanteil* h/ℓ der gesamten Geschosslänge ℓ . Zur Abklärung dessen Einflusses auf die gyroscopische Stabilität wurden an vier Modellgeschossen mit $h/\ell = 0, 0.5, 0.67$ und 1 (siehe Abb. 5.73) Windkanalmessungen bei verschiedenen Machzahlen durchgeführt und c'_m bestimmt. Die Ergebnisse sind in der Abb. 5.74 dargestellt und Abb. 5.75 zeigt die zugehörigen Stabilitätszahlen. In beiden Grafiken sind die Werte der Munk'schen Luftschiffformel mit einer punktierten Linie eingetragen.

Zunächst ist beiden Darstellungen zu entnehmen, dass die die Munk'sche Näherung den Momentenbeiwertgradienten zu groß schätzt, mit Ausnahme im schallnahen Bereich, in dem c'_m offensichtlich deutlich zunehmen kann.

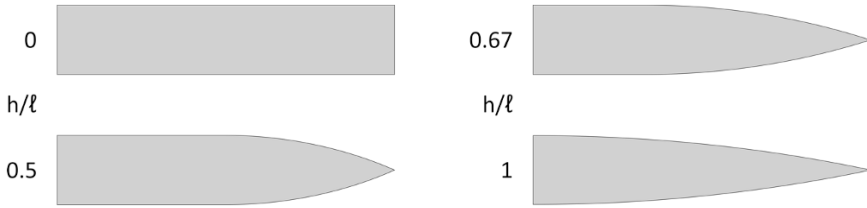


Abb. 5.73 Modellgeschosse für Windkanalmessungen zur Abklärung des Einflusses der Spitzenhöhe h/ℓ .

Dies deckt sich mit den Messungen des Momentenbeiwertderivativs an einem Kleinkalibergeschoss, die in der Abb. 5.46 dargestellt sind und die ebenfalls um Mach 1 einen starken Anstieg aufzeigt.

Die zu großen Munk'schen Werte ergeben folgerichtig zu kleine Stabilitätswerte, wie dies bereits in Absch. 5.7.4.1 erwähnt worden ist. Als weiteres Resultat dieser Modellversuche deutete sich in der Tat ein vom Spitzenanteil abhängiges Maximum der gyroskopischen Stabilität an (siehe Abb. 5.75).

5.8.4.2 Geschosse maximaler Stabilität

Dieses Ergebnis wurde durch Rechnung an realen Geschossformen überprüft und zwar an je einem Geschoss mit Kegel-, Ogiven- und Haackspitze, die alle mit einem Heckkonus versehen waren. Das Ogivengeschoss wurde zudem noch mit einem zylindrischen Heck untersucht. Alle Geschosse wurden mit einer Länge von vier Kalibern angenommen.

Wird der Spitzenanteil variiert, so ergibt sich bei jeder Geschossform ein recht deutliches Maximum der Stabilität (siehe Abb. 5.76). Beim Haackgeschoss liegt dieses bei einem Spitzenanteil von etwa 0.5; bei Kegel- und Ogivenspitze findet es sich um 0.6. Das Ogivengeschoss mit zylindrischem Heck müsste einen Spitzenan-

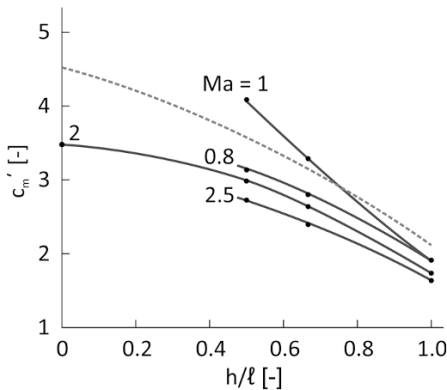


Abb. 5.74. Ergebnis der Windkanalmessungen an den Modellgeschossen nach Abb. 5.73. Verlauf der Momentenbeiwertderivative.

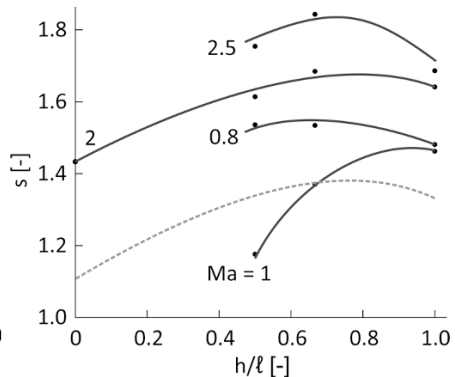


Abb. 5.75. Ergebnis der Windkanalmessungen an den Modellgeschossen nach Abb. 5.73. Verlauf der Stabilitätszahlen.

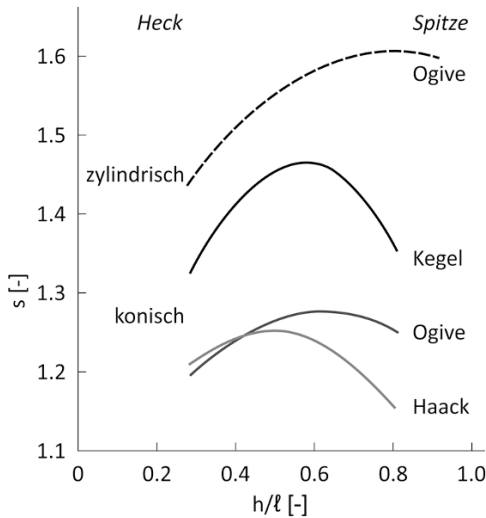


Abb. 5.76. Verlauf der gyroskopischen Stabilität in Abhängigkeit der Spitzenhöhe h / ℓ . Näheres siehe Text.

teil von über 0.8 aufweisen, wenn seine Stabilität maximal sein soll. Dies liegt jedoch bereits außerhalb des praktisch Machbaren.

Ein erstes Resultat dieser Untersuchung zeigt, dass ein Heckkonus die Stabilität verkleinert. Bei gleichem Spitzenanteil weist das spitzere Geschoss die größere maximale Stabilitätszahl auf als stumpfere. So ist mit der Kegelspitze die größte Stabilität zu erreichen, wogegen die gewölbten Spitzen deutlich weniger stabil sind.

Dieses Ergebnis ist zunächst überraschend, da bei spitzen Geschossen der Schwerpunkt nach hinten rutscht und daher eigentlich ein größeres Luftkraftmoment zu erwarten wäre. Zwei Einflüsse sprechen jedoch dagegen: Einerseits wandert bei stumpferen Geschossen nicht nur der Schwerpunkt, sondern auch der Angriffspunkt der Luftkraft nach vorn, sodass dennoch ein größeres Moment entstehen kann. Andererseits ist für die gyroskopische Stabilitätszahl das radiale Trägheitsmoment stark mitbestimmend; bei den gewölbten Geschossformen ist dieses wegen der größeren Masse in der Spitze größer als bei der Kegelform.

Selbstverständlich ist es möglich, mit konstruktiven Maßnahmen auch stumpfe Geschossformen – die beispielsweise im jagdlichen Umfeld oft unumgänglich sind – stabiler zu gestalten. Dazu kann beispielsweise die Spitze durch Anbringen eines Hohlraumes oder durch Wahl eines leichteren Materials entlastet werden.

5.8.4.3 Wie lang darf ein drallstabilisiertes Geschoss sein?

Bei den bisherigen Überlegungen wurden stets eine ausreichende Winkelgeschwindigkeit des Geschosses und damit eine genügende Stabilität vorausgesetzt. In der Praxis wird man entweder ein Geschoss zu einem bestehenden Waffenrohr – also zu einer gegebenen Dralllänge – zu entwerfen haben oder aber (bei gleichzeitiger Entwicklung einer neuen Waffe) dem Waffenkonstrukteur die für das neue Geschoss erforderliche Dralllänge angeben müssen. Für eine allgemeine Aussage zur maximal möglichen Länge eines drallstabilen Geschosses wird man nicht die kali-

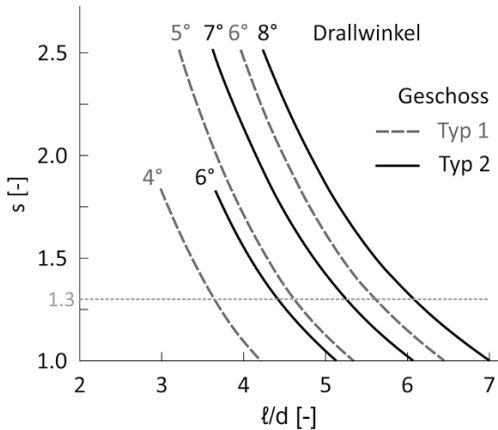


Abb. 5.77. Maximale Länge eines drallstabilisierten Geschosses.
 Typ 1: Kleinkalibergeschoss,
 Typ 2: Artilleriegeschoss.
 Beispiel: Bei einer Stabilitätszahl von 1.3 und einem Drallwinkel von 5° kann ein Kleinkalibergeschoss maximal etwa 4.8 Kaliber lang sein.

berabhängige Dralllänge Λ , sondern den (dimensionslosen) Drallwinkel Γ angeben. Zwischen diesen beiden Größen besteht die folgende Beziehung

$$(5.8:29) \quad \Gamma = \arctan \frac{d \cdot \pi}{\Lambda}, \quad [^\circ], [-]$$

wo d das Kaliber bedeutet.

Wird eine praxisgerechte, jedoch nach den vorgängig dargestellten Prinzipien optimierte Geschossform vorausgesetzt, so bietet die Gleichung (5.8:27) in Verbindung mit (5.8:29) den Zusammenhang zwischen der Drallwinkel Γ und der gyroskopischen Stabilitätszahl, wobei die in Kalibern ausgedrückte Gesamtlänge des Geschosses als weiterer Parameter hinzukommt. Dies ermöglicht einerseits, zu einem vorgegebenen Drallwinkel und einer anzustrebenden Stabilitätszahl das Geschoss mit der maximal möglichen Länge zu bestimmen, andererseits kann bei einem vorliegenden Geschoss und einer gegebenen Stabilitätszahl der erforderliche Drallwinkel der Waffe ermittelt werden. In diesem letzten Fall ist allerdings zu beachten, dass der Drallwinkel aus materialtechnischen Gründen nicht beliebig groß gewählt werden kann. Hier ist ein Kompromiss zwischen Waffenkonstrukteur und Geschossentwickler erforderlich.

Die Stabilitätszahl sollte den Wert 1.3 nicht unterschreiten. Bei Geschossen für Flachbahnwaffen sind sogar Werte von 1.4 bis 1.5 anzustreben. Drallwinkel von Kleinkaliberwaffen sollten nicht größer sein als 6°, bei Artillerierohren sind 6–9° möglich.

In der Abb. 5.77 ist dieser Zusammenhang grafisch dargestellt. Der Grafik liegt die in der Praxis häufig vorkommende Geschossform (Ogive) zu Grunde und zwar in zwei Ausführungen: der Geschosstyp 1, ein Kleinkalibergeschoss mit dichtem Kern (Blei) und einem Mantel geringerer Dichte (Stahl oder Kupfer) und der Geschosstyp 2, eine Artilleriegeschoss mit Kern geringer Dichte (Sprengstoff) und dichter Hülle (Stahl).



Abb. 5.78. Startphase eines „Base bleed“-Geschosses. Sichtbar das Leuchten des Gasgenerators (rechte obere Ecke), die Rauchspur und die Spur der Anfeuerung.

5.8.5 Reduktion des Basiswiderstandes

5.8.5.1 Das „Base bleed“-Prinzip

Eine Formoptimierung des Geschosshecks mit dem Ziel, den Basiswiderstand zu senken, kommt aus aerodynamischen Gründen (der Heckkonuswinkel darf höchstens $10\text{--}12^\circ$ betragen) und wegen der negativen Beeinflussung der Streuung durch einen langen Heckkonus (länger als etwa $\frac{3}{4}$ Kaliber) nur eingeschränkt zur Geltung. Dies ist im Abschn. 5.8.1.4 ausführlich erläutert worden. Eine weitergehende Reduktion des am Geschossboden erzeugten Anteils des Luftwiderstandes wird jedoch möglich, wenn dort der strömungsbedingte Unterdruck reduziert wird.

Zu diesem Zweck wird am Heck des Geschosses ein Gasgenerator angebracht (eine „Base bleed“-Einheit), der während einer längeren Flugphase durch Bodenöffnungen Gas in den Unterdruckbereich ausströmen lässt.

Abbildung 5.78 zeigt die Startphase eines Geschosses mit einer „Base bleed“-Einheit. Auf dem Bild ist das Leuchten des Gasgenerator (rechts oben) und seine Rauchspur gut sichtbar. Zudem zeigt sich auch die dunkle Wolke der Anfeuerung außerhalb der Mündung.

Übliche Konstruktionen sind mit einer größeren zentralen Öffnung (Abb. 5.79) oder mit mehreren kleineren, ringförmig angeordneten Bohrungen ausgestattet. Als Gas-

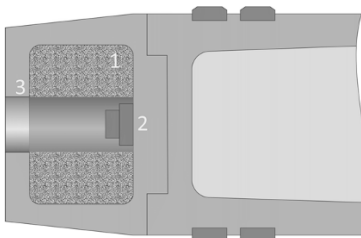


Abb. 5.79. Schematische Darstellung eines Geschosshecks mit „Base bleed“-Einheit.

- 1: Composite-Treibmittel,
- 2: Anzündung,
- 3: Ausströmöffnung.

lieferant kommen in erster Linie Composite-Treibmittel mit Ammoniumperchlorat in Frage (siehe dazu Abschn. 3.2.4.2 und E. M. YOUSSEF et al., 2015).

Die durch die ausströmenden Gase erreichte Druckerhöhung am Geschossboden führt zu einer Reduktion des Basiswiderstandes um etwa 30–50 % im Überschallbereich; weil der Bodensog dort rund 50 % des gesamten Widerstandes ausmacht, verringert sich dieser um etwa 15–25 %. Im Flug mit Unterschallgeschwindigkeit kann sich dieser Prozentsatz noch erhöhen, weil da 80–90 % des Widerstandes am Boden erzeugt wird. Die mit dieser Widerstandsreduktion insgesamt erreichbare Reichweitensteigerung des Geschosses hängt wesentlich von der Einsatzdauer des „Base bleed“-Brennsatzes ab.

Mit den ersten „Base bleed“-Bauformen wurden zusammen mit dem in Abschn. 5.8.3.3 beschriebenen Artilleriegeschoss um 20 % größere Flugweiten erzielt. Mit zwischenzeitlichen Verbesserungen und längeren Brennzeiten sind heute Steigerungen der Schussdistanz bis gegen 30 % möglich.

5.8.5.2 Leuchtspurgeschosse

Nicht als Geschossoptimierung, doch der Vollständigkeit halber, seien in diesem Zusammenhang noch die Leuchtspurgeschosse erwähnt, bei denen zur Darstellung der Flugbahn am Geschossboden ein pyrotechnischer Satz abbrennt. Dies führt analog wie beim „Base bleed“ zu einer Reduktion des Strömungswiderstandes. Entsprechend liegen die c_w -Werte der Leuchtspurgeschosse unterhalb jener der (oft formgleichen) normalen Vollmantelgeschosse (siehe Abb. 5.80).

Messungen des c_w -Verlaufs bei Leuchtspurgeschossen helfen, den Abbrand qualitativ zu beurteilen. Das Versuchsgeschoss in Abb. 5.80 (Kaliber $7,5 \times 55$) wies eine zu langsame Anfeuerungsphase auf und kam offenbar bei Brennschluss leicht ins Trudeln, möglicherweise wegen dem Verlauf des Momentenbeiwertes bei Mach 1 (Abb. 5.46). Ein unregelmäßiger Abbrand zeigt sich ebenfalls unmittelbar in der c_w -Kurve.

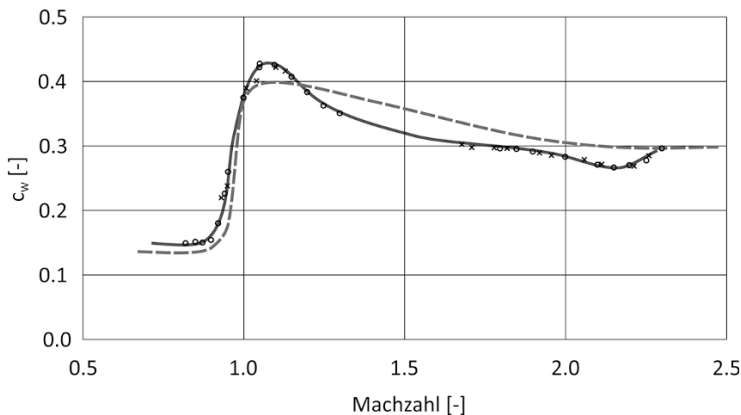


Abb. 5.80. c_w -Verlauf eines Leuchtspurgeschosses (Linie durchgezogen) im Vergleich zum formgleichen Vollmantelgeschoss ohne Leuchtspur (gestrichelte Linie).

5.9 Zur Außenballistik der ungelenkten Rakete

5.9.1 Vorbemerkung

Raketen führen ihre Antriebsenergie oder einen Teil davon mit sich. Sie haben dadurch den Vorteil, mit leichten Abschlusseinrichtungen auszukommen, die auch bei größeren Kalibern durchaus auch von einer einzelnen Person getragen werden können. Als Folge davon wirken während der Flugbahn wesentlich stärkere Kräfte auf das Geschoss, die einen negativen Einfluss auf dessen Streuung im Ziel ausüben. Raketen werden daher oft während des Fluges mit Hilfe von Krafteinwirkungen gelenkt, sei es aerodynamisch durch gesteuerte Flügel oder mittels zusätzlicher Steuerdüsen. Flugbahnen gelenkter Raketen gehören wegen der Beeinflussung durch Lenkbefehle nicht in das Gebiet der klassischen (physikalischen) Außenballistik. In diesem Abschnitt werden daher nur ungelenkte Raketen betrachtet.

Dieser Abschnitt wird noch einer weiteren Einschränkung unterworfen. Raketen sind oft lange, flügelstabilisierte Geschosse, die insbesondere auf dem ersten Bahnabschnitt zum Pendeln neigen. Dadurch wechselt auch die Richtung des Antriebs; dies führt zu aufwändigen Rechnungen, die eigentlich nur mit einem vollständigen 6-FG-Modell zu bewältigen sind. Hierfür sei auf einschlägige Literatur verwiesen (H. MOLITZ, W. STROBEL, 1963, W. WOLFF, 1976). An dieser Stelle wird nur das Massenpunktsmodell vorausgesetzt, das bei stabilen, mit einer gewissen Mündungsgeschwindigkeit startenden Raketen (wie z. B. tragbare Panzerabwehrsysteme, „rocket assisted projectiles“ RAP) durchaus gute Ergebnisse liefert.

5.9.2 Die Flugbahn

5.9.2.1 Allgemeines

Die Flugbahn einer ungelenkten Rakete verläuft stets zweistufig: In einer ersten Stufe wirkt außer den üblichen Luftkräften noch der Schub, der für die Zunahme der Geschwindigkeit sorgt. Diese Beschleunigungsphase ist ein innenballistisches Thema und wurde bereits im Abschn. 3.6 besprochen. Die zweite Stufe beginnt mit dem Ende des Treibmittelabbrandes. Das Geschoss ist nur noch dem Luftwiderstand ausgesetzt; die Flugbahnrechnung erfolgt nach den im Abschn. 5.4 beschriebenen Verfahren. Die Berechnung einer Raketenflugbahn erfolgt somit auch stets in zwei Teilen.

5.9.2.2 Die Antriebsphase

Im Abschn. 3.6.3 ist dargelegt worden, dass der Schub einer Rakete aus zwei Komponenten besteht: einerseits aus dem in der Zeiteinheit erzeugten Impuls des Triebwerks, andererseits aus dem Druckunterschied zwischen dem äußeren Strömungs-

druck auf den Projektilkörper und dem Druck, der sich im Endquerschnitt der Düse einstellt

$$(5.9:1) \quad F_s = \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot v_a + (p_e - p_0) \cdot A_e . \quad [N]$$

Darin bedeuten: $\Delta m/\Delta t$ die pro Zeiteinheit ausströmende Masse, v_a die Ausströmgeschwindigkeit, p_e der Druck im Endquerschnitt, p_0 der Umgebungsdruck und A_e die Endquerschnittsfläche.

In einem Massenpunktsmodell für Flugbahnen ist es nicht möglich, diesen Druckunterschied einzuführen, weshalb die beiden Anteile zu einem Gesamtschub zusammengeführt werden. Die Ermittlung des zugehörigen Zeit-Schub-Diagramms kann nur experimentell erfolgen. Wie im Abschn. 3.6.3.3 beschrieben, gibt es hierzu zwei Möglichkeiten.

Bei der einen wird der sogenannte Standschub auf einem Raketenprüfstand gemessen. Dabei fällt die Umströmung der Rakete weg, wodurch die Druckverhältnisse im Endquerschnitt der Düse und damit der Abbrand des Treibmittels anders verlaufen als im Flug. Zudem fehlt der Druckunterschied zwischen Projektilspitze und -heck. Der zu diesem Standschub gehörende Luftwiderstandsbeiwert ist mit Freiflugmessungen aus der effektiven Beschleunigung zu ermitteln. Die zweite Möglichkeit umfasst Messungen des Geschwindigkeitsverlaufs mittels eines Doppellerradars, aus dem die Beschleunigung unter Verwendung des Luftwiderstandsbeiwertes aus der Freiflugphase extrahiert werden kann. In beiden Fällen wird der fehlende Druckunterschied dem Luftwiderstand zugeschlagen.

Für die Flugbahnrechnung in der Antriebsphase stehen also ein zeitabhängiges Schubdiagramm $F_s(t)$, das ebenfalls die Massenabnahme $m(t)$ beinhaltet, und ein zugehöriger c_w -Verlauf zur Verfügung. Wegen der zeitlichen Abhängigkeit des Schubs wird man vorzugsweise die Zeit als unabhängige Variable wählen. Es ergibt sich somit das folgende Differenzialgleichungssystem

$$(5.9:2) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \dot{v}_x = \frac{F_s(t) - F_w}{m(t)} \cdot \frac{v_x}{v} + g_x + a_{cx} , & [m/s^2] \\ \dot{v}_y = \frac{F_s(t) - F_w}{m(t)} \cdot \frac{v_y}{v} + g_y + a_{cy} , & [m/s^2] \\ \dot{v}_z = \frac{F_s(t) - F_w}{m(t)} \cdot \frac{v_z}{v} + g_z + d_z + a_{cz} , & [m/s^2] \\ \dot{x} = v_x , & [m/s] \\ \dot{y} = v_y , & [m/s] \\ \dot{z} = v_z , & [m/s] \end{array} \right.$$

mit der Luftkraft

$$(5.9:3) \quad F_w = c_w \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot \frac{1}{q} . \quad [N]$$

Mit der Endzeit des Schubdiagramms wird die Integration gestoppt; die Endwerte bilden die Anfangswerte der anschließenden Rechnung der antriebslosen Flugbahn.

5.9.2.3 Die Freiflugphase

Die Rechnung der Freiflugphase im Massenpunktsmodell einer Rakete unterscheidet sich nicht von Rechnungen beliebiger anderer Geschosse. Der einzige Unterschied besteht darin, dass die Anfangswerte (einschließlich der Bahnkoordinaten) von den Endwerten der Antriebsphase zu übernehmen sind.

Bei geeigneter Programmierung des Massenpunktmodells genügt es, bei Brennschluss die Beiwertfunktion des entsprechenden Luftwiderstandes einzulesen und die Rechnung fortzusetzen.

5.9.2.4 Allgemeine Flugbahneigenschaften

Im Abschn. 5.4.5 wurden die Eigenschaften der Flugbahn eines (nicht angetriebenen) Geschosses besprochen und mit den entsprechenden Gleichungen begründet. Wird nun anstelle eines passiven Geschosses eine Rakete betrachtet, wechselt in den Beziehungen das Vorzeichen. Als Folge davon wird man annehmen müssen, dass sich auch die betreffenden Eigenschaften umkehren, vorausgesetzt, das Geschoss wird während des ganzen Fluges angetrieben. Insbesondere wird die Geschwindigkeit auf dem absteigenden Ast höher sein als auf gleicher Höhe im aufsteigenden und der Gipfel wird vor der halben Schussdistanz erreicht. Auch die besonderen Bahnpunkte (Abschn. 5.4.5.4) kehren sich um.

Allerdings wird ein Antrieb nur selten längs der ganzen Bahn aktiv sein. Aus Abb. 5.81 kann entnommen werden, dass die umgekehrte Asymmetrie der Flugbahn nur entsteht, wenn die Beschleunigung eine längere Zeit einwirkt.

Die beiden Bahnen in der Abb. 5.81 sind mit gleicher Anfangsgeschwindigkeit (100 m/s und gleicher Elevation (100 mil) gerechnet, Bahn 1 mit einem kurz brennenden starken Triebwerk, Bahn 2 mit einem länger brennenden Antrieb. Bei Bahn 1 erfolgt der Brennschluss bei einer Flugzeit von 0.7 s und mit einer Geschwindigkeit von 243 m/s, Bahn 2 erreicht eine maximale Geschwindigkeit von 794 m/s bei einer Brennzeit von 2.1 s. Die Schussdistanz ist für beide Bahnen gleich. Man kann sich leicht überlegen, dass dabei auch der Bahnwinkel bei Brennschluss eine wichtige Rolle spielt.

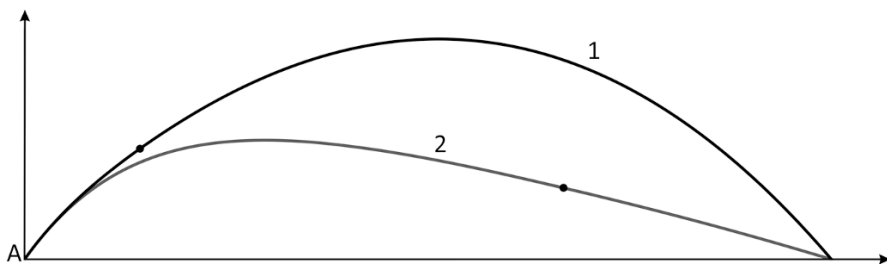


Abb. 5.81. Vergleich der Flugbahnen zweier angetriebener Geschosse bei gleicher Anfangsgeschwindigkeit und Elevation. Beschreibung der beiden Bahnen siehe Text. Die Punkte markieren den jeweiligen Brennschluss. Bei längerer Brenndauer wird die Flugbahn asymmetrischer. Die Bahnen sind stark überhöht dargestellt.

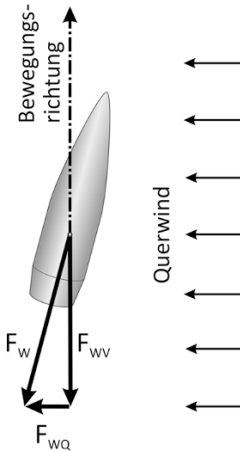
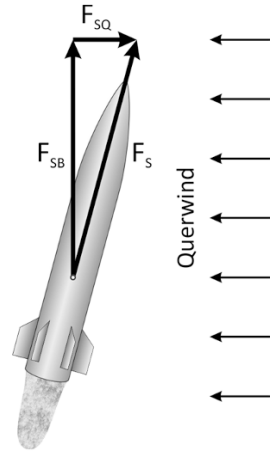


Abb. 5.82. (links). Ist der Luftwiderstand größer als der Schub, ergibt sich eine Kraftkomponente entgegen der Bewegungsrichtung F_{WV} und eine in Windrichtung F_{WQ} . Das Geschoss trifft mit dem Wind ab.

Abb. 5.83. (rechts). Ist der Schub größer als der Widerstand, entsteht eine beschleunigende Kraft in Bewegungsrichtung F_{SB} und eine Kraftkomponente entgegen der Windrichtung F_{SQ} . Das Geschoss fliegt dem Wind entgegen.



5.9.3 Querwindverhalten von Raketen

Die seitliche Abweichung eines Geschosses infolge eines quer zur Flugbahn wirkenden Windes ist bereits im Abschnitt 5.4.4 besprochen worden. Die Transformation der Anfangswerte in ein windfestes Bezugssystem und die Rücktransformation des Endpunktes führte zu der Didion'schen Querwindformel (5.4:64)

$$z_E = v_{wx} \cdot \left(t_E - \frac{x_E}{v_{0x}} \right), \quad [m]$$

worin v_{wx} die Querwindgeschwindigkeit, v_{0x} die Horizontalkomponente der Mündungsgeschwindigkeit bedeuten und die E-indizierten Werte sich auf den Endpunkt beziehen.

Weil bei der Herleitung dieser Beziehung keine Annahmen betreffend die Gleichungen des Massenpunktmodelles getroffen wurden, gilt sie nicht nur für verzögernde, sondern auch für beschleunigende Geschosse. Sie lässt sich qualitativ einfach diskutieren, wenn in der obigen Gleichung die Flugzeit ausgeklammert wird

$$(5.9:4) \quad z_E = v_{wx} \cdot t_E \cdot \left(1 - \frac{\bar{v}_x}{v_{0x}} \right), \quad [m]$$

wobei $\bar{v}_x = x_E / t_E$ die mittlere (horizontale) Bahngeschwindigkeit bedeutet. Wie im Massenpunktmodell üblich, wird zudem vorausgesetzt, dass die Geschossachse mit der Wirklinie von Widerstand und Schub zusammenfällt. Das qualitative Querwindverhalten lässt sich nun mittels des Klammerausdrucks diskutieren.

Fall 1. Ist die Summe aus Widerstand und Schub stets negativ (dazu gehören auch alle passiven Geschosse), so erhält die Resultierende eine Komponente F_{WV} , welche die Bewegung abbremst und eine zweite F_{WQ} , die in Windrichtung wirkt (siehe Abb. 5.82). Das Geschoss wird in Windrichtung abgetrieben. Gemäß den Eigenschaften der Bahngeschwindigkeit (Abschn. 5.4.5.2) nimmt deren Horizon-

talkomponente ständig ab. Der Subtrahend im Klammerausdruck wird stets kleiner als 1 sein und der Klammerausdruck positiv. Damit sind Windrichtung und Ablage des Geschosses auch in der Formel gleichgerichtet.

Fall 2. Ergibt die Summe aus Schub und Widerstand einen positiven Wert, so ergibt sich im Kräfteparallelogramm eine beschleunigende Kraft F_{SB} in Bewegungsrichtung und eine Kraft F_{SQ} , die der Windrichtung entgegengesetzt ist (siehe Abb. 5.83). Dadurch wird sich das Geschoss seitlich dem Wind entgegen bewegen. Entsprechend der Beschleunigung wird nun die mittlere Bahngeschwindigkeit im Subtrahenden in (5.9:4) größer als die Horizontalkomponente der Mündungsgeschwindigkeit, und der Klammerausdruck wird negativ; die seitliche Bewegung des Geschosses erfolgt entgegengesetzt zur Windrichtung.

Fall 3. Man kann den Schub einer Rakete so auslegen, dass er den Luftwiderstand gerade kompensiert („Vakuumschub“). Dadurch bleibt die Fluggeschwindigkeit konstant und in der Formel (5.9:4) wird der Klammerausdruck zu Null. Die Rakete erfährt auch bei starkem Querwind keine seitliche Abweichung.

Solche Antriebsauslegungen sind bei tragbaren Panzerabwehrraketen realisiert worden, und es ist auch für den fachkundigen Zuschauer überraschend zu beobachten, wie ein solches Projektil selbst bei stürmischem Wind einfach geradeaus fliegt.

Üblicherweise wird ein Raketentriebwerk nicht während der ganzen Flugzeit beschleunigen, sodass sich die Flugbahn in einen angetriebenen und einem freifliegenden Abschnitt aufteilt. Dabei ist zu bedenken, dass bei Schubende die Rakete eine ansehnliche seitliche Geschwindigkeit gegen den Wind erreicht hat, die zuerst wieder abgebaut werden muss, bevor eine Bewegung in Windrichtung beginnen kann. Eine Kompensation der Windabweichung der Antriebsphase durch die (entgegengesetzte) Abweichung in der Freiflugphase wird dadurch praktisch nie erreicht.

In Abschn. 5.4.4.5 ist beschrieben worden, wie die seitliche Abweichung durch einen Querwind experimentell bestimmt werden kann. Die dort beschriebene Messmethode kann auch für Raketen verwendet werden. Entsprechend dem beschriebenen Fall 2 wird man auch beim Experiment eine Abweichung „gegen den Wind“ beobachten können und bestätigt finden.



6 Grundzüge der Endballistik

6.1 Einführung

6.1.1 Vorbemerkungen

Das Auftreffen eines Geschosses auf einen festen Gegenstand ist physikalisch gesehen ein sehr komplizierter Prozess, der in äußerst kurzer Zeit und unter Beteiligung großer Kräfte und Drücke abläuft (siehe dazu Tabelle 2.8, S. 51). In diesem Umfeld verhalten sich die Materialien oft anders, als man es sich von relativ langsamen Vorgängen gewohnt ist. Richten sich diese nach den bekannten, unter statischen oder quasistatischen Bedingungen ermittelten Materialeigenschaften, so können bei hochdynamischen Prozessen durchaus wesentlich andere Werte an Dehnung, Festigkeit usw. auftreten.

Ein wesentlicher Grund für dieses Verhalten ist wohl in der Schnelligkeit dieser Ereignisse zu suchen, die den Materialien die Zeit gar nicht lässt, „normal“ zu reagieren. Wird beispielsweise ein Langwaffengeschoss gegen eine Stahlplatte geschossen, so dauert dieser Vorgang nur etwa 50 μs .

Die Folge davon ist, dass sich die meisten endballistischen Vorgänge unserer Vorstellungskraft weitgehend entziehen, was wiederum oft zu ganz falschen Erklärungsversuchen führt. Bei der Interpretation beobachteter Wechselwirkungen zwischen Geschoss und Material ist deshalb stets Zurückhaltung geboten.

Das vorliegende Kapitel ist keine ausführliche Besprechung der Endballistik, sondern soll nur einen Einblick in typische qualitative und empirische Gesetzmäßigkeiten geben. Ausführliche Behandlungen endballistischer Vorgänge finden sich in Z. ROSENBERG, E. DEKEL (2012) und J. A. ZUKAS et al. (1992) für harte Materialien sowie in A. BHATNAGAR et al. (2016) und R. C. LAIBLE et al. (1980) für ballistische Schutzmaterialien auf der Basis von Geweben.

6.1.2 Elementare Gesetzmäßigkeiten

Eindring- und Durchdringungsvorgänge und das Zerstörungspotenzial im Material werden grundsätzlich von zwei Gesetzmäßigkeiten bestimmt, die nur mit der Energie des Geschosses und seiner Querschnittsbelastung zusammenhängen. Eine dabei wichtige Größe ist die Energiedichte

$$(6.1:1) \quad ED = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2}{A} = \frac{1}{2} \cdot q \cdot v^2 . \quad [J/mm^2]$$

Mit A wird hierin die Kontaktfläche zwischen Geschoss und Material bezeichnet; fliegt das Geschoss in normaler Lage, ist es die Querschnittsfläche des Geschosses oder die Kaliberquerschnittsfläche, fliegt es mit hohem Anstellwinkel, ist es die Schattenfläche in der Bewegungsrichtung. Die Querschnittsbelastung q wird natürlich mit derselben Fläche A bestimmt.

Es gelten nun die beiden folgenden Grundregeln:

- Die *Eindringtiefe* s_e eines Geschosses in einem Material ist in einfacher Näherung proportional zu seiner (momentanen) Energiedichte und damit direkt proportional zur Querschnittsbelastung

$$(6.1:2) \quad s_e \propto ED = \frac{1}{2} \cdot q \cdot v^2 . \quad [m], [cm]$$

- Das *lokale Zerstörungspotenzial* eines Geschosses entspricht der Energie, die das Geschoss lokal an das Material überträgt. Die an dieser Stelle abgegebene Energie ist in einfacher Näherung direkt proportional zu seiner momentanen Energie und indirekt proportional zur Querschnittsbelastung

$$(6.1:3) \quad W(x) = \frac{\Delta E_x}{\Delta x} \propto \frac{E(x)}{q} . \quad [J/cm]$$

$W(x)$ bedeutet das lokale Zerstörungspotenzial an der Stelle x , ΔE_x die dort während des Weges Δx abgegebene Energie und $E(x)$ die noch vorhandene Energie des Geschosses. $W(x)$ entspricht also dem Gradienten der Energieabgabefunktion in Abhängigkeit des Eindringweges.

Eindringtiefe und Zerstörungspotenzial stehen somit in umgekehrtem Verhältnis zueinander. Ein Geschoss, das tief eindringt, wird auf dem Eindringweg relativ wenig zerstören und ein Geschoss ähnlicher Auftreffenergie, das nach dem Eindringen viel zerstört, wird nur eine geringe Eindringtiefe erreichen.

6.1.3 Materialarten

Die festen Materialien lassen sich bezüglich ihres Verhaltens beim Beschuss allgemein in zwei Gruppen aufteilen:

- Gläser und glasartige (spröde) Materialien (z. B. Keramik),
- alle übrigen Materialien (auch Kunststoffgläser).

Diese zunächst etwas ungewöhnlich scheinende Einteilung hat ihre Ursache in der Reaktion, mit der ein Material auf eine lokale Belastung (Energieeintrag) antwortet. In Glas bilden sich Risse, die sich mit hoher Geschwindigkeit (4000-6000 m/s) ausbreiten. Sie eilen somit dem Geschoss voraus, das bei seiner Durchdringung nur noch fragmentiertes Glas antrifft. Zudem ergeben sich radiale Risse vom Schuss-

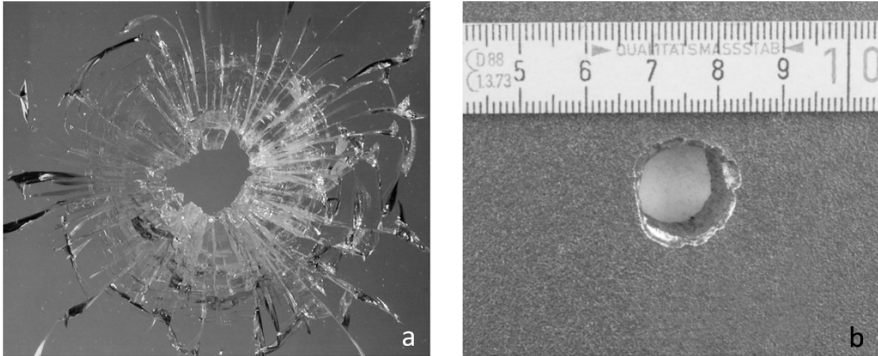


Abb. 6.1. a. Schussloch in Glas. Es entstehen radiale Risse und meist auch ein ringförmiger Riss in einem gewissen Abstand um das Zentrum. In dessen Innern ist das Glas stark zerstört. b. Schussloch in Stahl. Die Zerstörung ist nur geringfügig größer als der Geschossdurchmesser.

loch aus und ringförmige um den Auftreffpunkt. Die Zerstörung erfolgt in einem größeren Bereich um den Schusskanal (Abb. 6.1 a). In allen übrigen Baustoffen bleibt die durch das Geschoss verursachte Schädigung auf einen kleinen Umkreis der Geschossbahn beschränkt (Abb. 6.1 b); in Schussrichtung stellt sich dem Geschoss immer wieder unzerstörtes Material entgegen.

Es zeigt sich, dass für die Durchdringung dieser beiden Materialklassen nicht die gleichen physikalischen Geschosseigenschaften maßgebend sind. Während bei Gläsern die *Auftreffenergie* eine zentrale Rolle spielt, ist die Eindringtiefe in den übrigen Materialien in erster Linie von der *Energiedichte* am Auftreffpunkt gemäß Gl. (6.1:2) abhängig.

6.1.4 Bezeichnungen und Definitionen

Neben Auftreffenergie und Energiedichte sowie den Materialeigenschaften von Ziel und Geschoss spielt auch die Richtung eine wichtige Rolle, unter welcher das Geschoss auf das Ziel auftrifft. Naheliegender ist hierzu die Angabe des *Auftreffwinkels* α , also des Winkels zwischen der *Auftreffrichtung* des Geschosses und der Tangentialebene im Auftreffpunkt (in Abb. 6.2 als *Zielebene* bezeichnet). Bei senkrechten Zielanordnungen und bei Zielen, die um einen gewissen Winkel um eine Drehachse senkrecht zur Auftreffrichtung geneigt sind, lässt sich diese Richtung einfach angeben.

Etwas aufwendiger wird die Bestimmung des Auftreffwinkels, wenn die Zielebene beliebig im Raum steht. Wird sie aus der senkrechten Lage um den Winkel κ geneigt und um δ gedreht, so ergibt sich

$$(6.1:4) \quad \alpha = \arctan\{\tan(90^\circ - \kappa) \cdot \cos \delta\}, \quad \kappa > 0. \quad [-]$$

In der Praxis wird jedoch zumeist nicht mit dem Auftreffwinkel, sondern mit dem Komplementärwinkel zum Lot auf die Zielebene gearbeitet. Dieser sogenannte

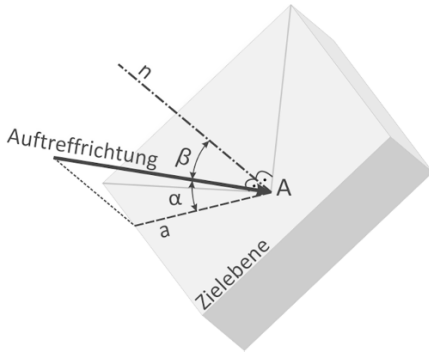


Abb. 6.2. Auftreffwinkel und Stellungswinkel bei einem beliebig geneigten Ziel. n bedeutet das Lot, a die Projektion der Auftreffrichtung auf die Zielebene. Mit α wird der Auftreffwinkel und mit β der Stellungswinkel bezeichnet. Die Auftreffrichtung liegt mit n und a in einer Normalenebene auf die Zielebene.

Stellungswinkel (oft auch als *NATO-Winkel* bezeichnet) lässt sich am Zielobjekt bei bekannter Auftreffrichtung einfach messen, ohne dass Kipp- und Drehwinkel bekannt sein müssen (siehe Abb. 6.2). Senkrechtcs Auftreffen bedeutet also einen Stellungswinkel 0° .

6.1.5 Das Backman-Goldsmith-Diagramm

Die Endballistik als ballistische Teildisziplin befasst sich mit den physikalischen Vorgängen, die sich zwischen einem Geschoss und einem weiteren (festen oder flüssigen) Körper – dem sogenannten Ziel („target“) – abspielen. Dabei gibt es bezüglich des Geschossweges grundsätzlich drei Möglichkeiten:

- Das Geschoss durchdringt das Ziel und tritt an der Gegenseite ganz oder gebrochen aus.
- Das Geschoss bleibt im Ziel stecken.
- Das Geschoss prallt am Ziel ganz oder gebrochen ab.

Welcher dieser drei Fälle eintritt, hängt in erster Linie vom Auftreffwinkel und von der Auftreffenergie des Geschosses ab. Zudem spielen auch dessen Aufbau und Konstruktion sowie Material und Ausdehnung des Zieles eine wesentliche Rolle. Dabei ist stets zu bedenken, dass Geschoss und Ziel sich gegenseitig beeinflussen.

Eine ausgezeichnete Möglichkeit zu einem Überblick über die gesamten Zusammenhänge bei der Wechselwirkung zwischen Geschoss und Ziel bietet das Phasendiagramm nach M. E. BACKMAN, W. GOLDSMITH (1978) (siehe Abb. 6.3). In diesem Diagramm werden die genannten Möglichkeiten des Geschossverhaltens in Abhängigkeit des Auftreffwinkels und der Auftreffgeschwindigkeit (anstelle der Energie) dargestellt.

Es ist klar, dass wegen des entscheidenden Einflusses von Zielmaterial und Geschosskonstruktion jede Geschoss-Ziel-Kombination ihr eigenes Phasendiagramm erhält.

Die Ermittlung eines Backman-Goldsmith-Diagrammes für eine bestimmte Geschoss-Ziel-Kombination erfordert umfangreiche und aufwändige Schießversuche,

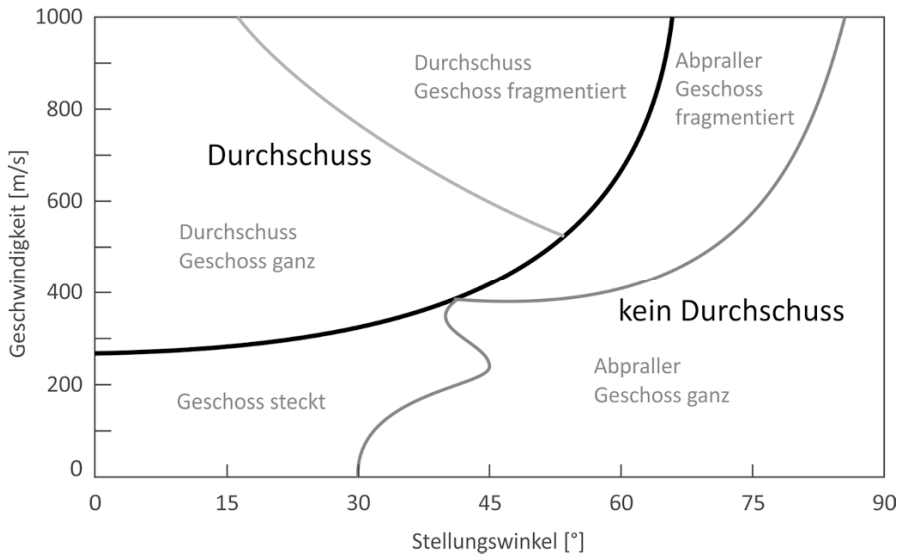


Abb. 6.3. Beispiel eines Backman-Goldsmith-Diagramms für ein 6.35 mm Spitzgeschoss gegen eine 6.35 mm Aluminiumplatte. Die Kurven wurden teils gerechnet, teils experimentell ermittelt (aus M. E. BACKMAN, W. GOLDSMITH, 1978).

da nicht nur der gesamte Winkelbereich, sondern auch ein großer Geschwindigkeitsbereich untersucht werden muss. Die oben genannten Autoren haben ein Beispiel mit einem Spitzgeschoss im Kaliber 6.35 mm (.25") gegen eine 6.35 mm dicke Aluminiumplatte erarbeitet und in ihrer Arbeit dargestellt (Abb. 6.3). Außer diesem Diagramm scheinen keine weiteren erstellt worden zu sein.

6.2 Durchdringungsmodelle

6.2.1 Das Stanzmodell

Dünne Platten aus hartem Material, deren Dicke kleiner ist als die Länge des auftreffenden Geschosses, werden sich beim Durchschuss wenig verformen. Bei Auftreffgeschwindigkeiten kleiner als etwa 500 m/s wird vom Geschoss eine Scheibe oder ein Zapfen aus der Platte herausgestantzt. Der Durchmesser des entstandenen Loches ist meist etwas größer als jener des Geschosses (siehe Abb. 6.4).

In einer ersten, groben Näherung kann mit der Scherbruchspannung und Scherfläche die Scherarbeit bestimmt werden, die der vom Geschoss aufzuwendenden Energie beim Durchschuss entspricht. Damit ergibt sich die folgende Gleichung

$$(6.2:1) \quad E_s = C_s \cdot (\pi \cdot d \cdot D) \cdot D = C_s \cdot \pi \cdot d \cdot D^2 \quad [J]$$

Darin bezeichnen E_s die Scherenergie, d das Kaliber, D die Plattendicke und C_s die unter den betreffenden Bedingungen typische, materialabhängige Scherbruchspannung.

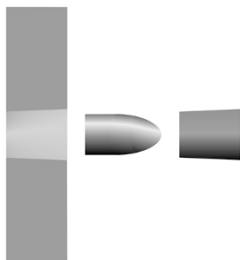


Abb. 6.4. Durchdringung nach dem Stanzmodell. Die für das Ausstanzen erforderliche Energie wird der Geschwindigkeit entnommen.

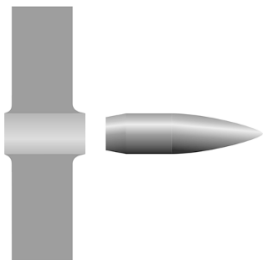


Abb. 6.5. Durchdringung nach dem Verdrängungsmodell. Die aufgewendete Energie ist dem in der Platte erzeugten Volumen proportional und führt zu einer Reduktion der Geschwindigkeit.

Gleichung (6.2:1) kann durch Erweitern und Umstellen zu einer Beziehung für die Durchschlagsdicke in Abhängigkeit der Energiedichte ED umgeformt werden

$$(6.2:2) \quad D = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{C_s}} \cdot \sqrt{ED \cdot d} = K_s \cdot \sqrt{ED \cdot d}, \quad [m]$$

mit einer Konstanten K_s . Die Durchschlagsdicke ist somit der Wurzel aus der Energiedichte und dem Kaliber proportional. Bei gleicher Energiedichte hat das größere Kaliber offenbar die besseren Durchschlageigenschaften.

6.2.2 Das Verdrängungsmodell

In einem plastisch verformbaren Objekt erzeugt ein Geschoss beim Durchschießen einen bleibenden Schusskanal, indem das Material seitlich verdrängt wird. Das dabei gebildete Volumen ist der Energie proportional, die das Geschoss an das Objekt überträgt, dies gilt nicht nur insgesamt, sondern auch lokal.

Dieses Gesetz wird dem französischen Ballistiker E. MARTEL zugeschrieben (*Gesetz von MARTEL*), der um die Jahrhundertwende vom 19. zum 20. Jahrhunderts gewirkt hat. Leider ist es nicht gelungen, eine Referenz hierüber zu finden. MARTEL wird in M. E. BACKMAN, W. GOLDSMITH (1978) im Zusammenhang mit dem Stanzmodell rudimentär mit der Jahreszahl 1897 zitiert.

Die Martel'sche Gesetzmäßigkeit ließ sich jedoch mit hoher Signifikanz durch Beschuss in ballistische Seife unter Verwendung verschiedenster Geschosse experimentell nachweisen (siehe B. P. KNEUBUEHL et al., 2008).

Ab einer gewissen Geschwindigkeit wird beim Beschuss dünner, metallischer Platten nicht mehr ein Stück ausgestanzt, sondern das Material wird offensichtlich seitlich verdrängt (Abb. 6.5). Die Anwendung des Martel'schen Gesetzes ergibt

$$(6.2:3) \quad E_v = C_v \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot D. \quad [J]$$

Mit d ist wiederum das Kaliber, mit D die Plattendicke und mit C_v der materialabhängige Proportionalitätsfaktor bezeichnet.

Wird die Gleichung (6.2:3) durch die Kaliberquerschnittsfläche dividiert, so zeigt sich, dass die Durchschlagsdicke zur Energiedichte ED proportional ist.

$$(6.2:4) \quad D = \frac{1}{C_V} \cdot ED . \quad [m]$$

Es ist bemerkenswert, dass im Gegensatz zum Stanzmodell hier die Durchschlagsdicke vom Kaliber des Geschosses unabhängig ist.

Das Verdrängungsmodell lässt sich bei den meisten harten, verformbaren Materialien für höhere Auftreffgeschwindigkeiten (bei Metallen etwa 600 bis 1000 m/s) anwenden. In der Praxis wird das direkte Verhältnis zwischen Energiedichte und Durchschlagsfähigkeit bestätigt, sofern sich die Geschosse im Zielmaterial bezüglich ihrer Verformung oder der Neigung zum Zerschlagen ähnlich verhalten.

6.2.3 Durchschießen dünner Schichten

Beim Durchschießen dünner Platten oder Schichten aus Metallen oder beliebigem anderem Material (auch Stoffe) lässt sich oft das folgende Verhalten beobachten:

Ein Geschoss mit der Energie E_{gr} wird beim Auftreffen auf dem Ziel gerade noch gestoppt (Grenzenergie). Eine geringfügige Erhöhung der Auftreffenergie auf den Betrag E_{gr+} führt zu einem Durchschuss, wobei hinter der Platte die Restenergie $\alpha \cdot E_{gr+}$ ($\alpha < 1$) festgestellt wird (siehe Abb. 6.6). Die für den Durchschlag aufgewendete Energie E_D beläuft sich somit auf

$$(6.2:5) \quad E_D = E_{gr+} - \alpha \cdot E_{gr+} = (1 - \alpha) \cdot E_{gr+} , \quad [J]$$

wobei für α in der Regel Werte im Bereich 0.7...0.9 gemessen werden. Weil E_{gr+} nur geringfügig größer ist als E_{gr} , gilt nicht unbedingt erwartungsgemäß

$$(6.2:6) \quad E_D \ll E_{gr} . \quad [J]$$

Im Falle des Durchschusses entzieht demnach die Schicht dem Geschoss wesentlich weniger Energie, als sie beim Steckschuss absorbiert. Dieses Verhalten lässt sich wie folgt begründen: Beim beginnenden Durchschuss entsteht in der Schicht eine Bruchlinie rund um das Geschoss, die den Energieabfluss vom Geschoss in die Schicht verhindert. Dem Geschoss verbleibt damit mehr Restenergie.

Wird die Geschossenergie gesteigert, seine Geschwindigkeit also erhöht, wird sich auch die Bruchlinie schneller ausbilden. Damit wird der Anteil der an die

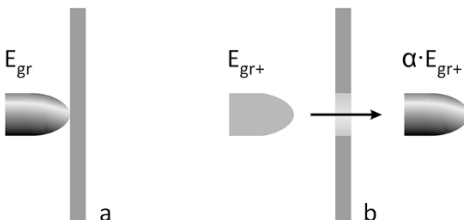


Abb. 6.6. Energieverlust beim Durchschießen dünner Schichten.

a. Bei der Energie E_{gr} wird das Geschoss gerade noch gestoppt.

b. Bei E_{gr+} wird die Schicht gerade durchschlagen. Für die Restenergie kann etwa $\alpha \approx 0.7 \dots 0.9$ gelten.

Schicht abgegebenen Energie noch geringer. In der Tat kann mit zunehmender Geschossgeschwindigkeit auch ein größerer Wert für α ermittelt werden.

Mit dieser Gesetzmäßigkeit lassen sich einige zunächst überraschende Erscheinungen erklären. So wird man bei einem Menschen nie ein Projektil auf der Einschussseite unmittelbar unter der Haut finden. Entweder kann die Haut das Projektil stoppen oder es hat nach dem Durchdringen noch genügend Energie, um mindestens etwa 2 cm weit in das darunter liegende Gewebe einzudringen. Im gleichen Sinn wird ein Geschoss in einer Schutzweste entweder gestoppt, oder es hat im Fall des Durchschusses noch ein merkliches Verletzungspotenzial.

6.2.4 Das Erosionsmodell

Autor: Dipl.-Ing. ETH Wilhelm ODERMATT

6.2.4.1 Modellbeschreibung

Neben dem Stanz- und dem Verdrängungsmodell existiert noch eine weitere Form der Geschoss-Zielwechselwirkung, die bei hohen Geschwindigkeiten und bei Geschossen aus Schwermetall (gesinterte Wolframlegierungen oder abgereichertes Uran) in Erscheinung tritt. Geschoss- und Zielmaterial werden bei Auftreffgeschwindigkeiten ab etwa 1000 m/s plastisch verformt und verhalten sich dadurch annähernd wie Flüssigkeiten.

Im Gegensatz dazu verdrängen Kerngeschosse aus dem Keramikmaterial Wolframkarbid auch bei sehr hohen Auftreffgeschwindigkeiten das Zielmaterial (Panzerstahl) und erzeugen einen Schusskanal von etwas weniger als einem Geschossdurchmesser (entsprechend dem Verdrängungsmodell, Abschn. 6.2.2). Dabei bleiben sie intakt oder zerbrechen, verformen sich aber nicht.

Das Geschossmaterial fließt pilzförmig ab, und das Zielmaterial wird zum Einschussloch hinaus verdrängt. Man spricht deshalb von hydrodynamischem oder erodierendem Eindringen. Die Spitze des kontinuierlich kürzer werdenden Geschosses dringt mit etwas mehr als halber Auftreffgeschwindigkeit in das Zielmaterial ein, während der noch intakte hintere Teil sich praktisch mit unverminderter Geschwindigkeit weiter bewegt (siehe Abb. 6.7–6.9).

Allerdings findet ein stufenweises Abbremsen statt, verursacht durch Stoßwellen, die den Pfeil durchlaufen und am Heck reflektiert werden.

Der Kraterdurchmesser ist etwa doppelt so groß wie der Geschossdurchmesser. Dies führt deshalb gegenüber dem Verdrängungsmodell bei gleicher Eindringtiefe zu einem wesentlich größeren Kratervolumen. Folglich wird auch pro Einheitseindringtiefe rund das Vierfache an kinetischer Energie benötigt. Um trotzdem erhebliche Durchschlagslängen zu erreichen, werden lange, schlanke Stäbe (Stabpenetratoren) verwendet, die für einen stabilen Flug flügelstabilisiert werden müssen (siehe Abschn. 5.6.2.2). Man spricht deshalb auch von *Pfeilgeschossen*, und den Schwermetallteil nennt man *Penetrator*. Zur Beschleunigung im Rohr müssen für diese unterkalibrigen Geschosse Treibkäfte benutzt werden (wie sie in Abschn.

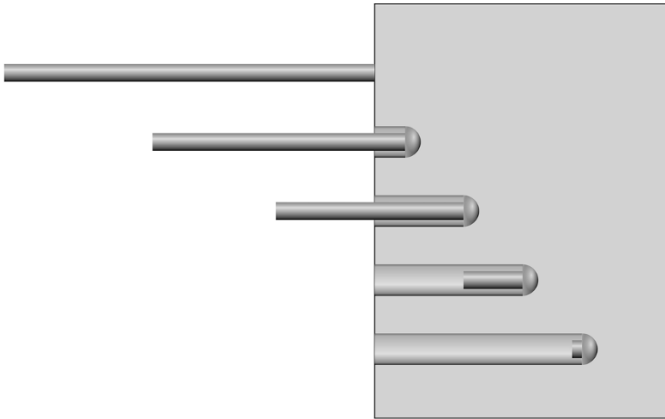


Abb. 6.7. Eindringen eines Pfeilgeschosses in das halbumendliche Ziel, schematisch dargestellt.

3.7.6.3 beschrieben sind). Falls die Auftreffenergie gerade für ein vollständiges Durchdringen des Zieles ausreicht (sogenannter *Grenzdurchschlag*), verlässt ein Reststummel mit einer Länge von einem bis zum anderthalbfachen Penetratordurchmesser die Zielplatte und produziert einen Stanzpfropfen und viele Splitter.

6.2.4.2 Hydrodynamische Betrachtung

Unter Vernachlässigung der dynamischen Festigkeiten und der Annahme eines gleichförmigen Eindringens lässt sich das Gleichgewicht des Druckes im Staupunkt gemäß der Bernoulli-Gleichung wie folgt beschreiben

$$(6.2:7) \quad \frac{1}{2} \cdot \rho_p \cdot (v - u)^2 = \frac{1}{2} \cdot \rho_z \cdot u^2, \quad [\text{J/m}^3]$$

worin ρ_p die Dichte des Penetrators, ρ_z jene des Zielmaterials, v die Auftreff- und u die Eindringgeschwindigkeit bedeutet.

Daraus folgt die Eindringgeschwindigkeit



Abb. 6.8. Röntgenblitzaufnahme eines Pfeildurchschusses.



Abb. 6.9. Penetratorstummel nach Grenzdurchschlag durch eine schiefe Platte.

$$(6.2:8) \quad u = \frac{v}{1 + \sqrt{\frac{\rho_z}{\rho_p}}} . \quad [\text{m/s}]$$

Man kann nun die Zeit, die verstreicht, bis der Penetrator aufgebraucht ist, der Zeit für den gesamten Eindringvorgang gleichsetzen

$$(6.2:9) \quad \frac{L}{v-u} = \frac{P}{u} , \quad [\text{s}]$$

wo L die Penetratorlänge und P die Eindringtiefe bedeuten (beide sind in [m] einzusetzen).

Wird in dieser Zeitgleichheit Gl. (6.2:8) eingesetzt, so ergibt sich nach einer kurzen Rechnung die als *Wurzel-Rho-Gesetz* bekannte Formel

$$(6.2:10) \quad P = L \cdot \sqrt{\frac{\rho_p}{\rho_z}} . \quad [\text{m}], [\text{mm}]$$

Die Eindringtiefe ist also proportional der Wurzel aus dem Dichteverhältnis von Penetrator- und Zielmaterial.

V. P. ALEKSEEVSKI (1966) und A. TATE (1967) modifizierten unabhängig voneinander die Bernoulli-Gleichung, indem sie die dynamischen Festigkeitsgrenzen mitberücksichtigten

$$(6.2:11) \quad \frac{1}{2} \cdot \rho_p \cdot (v-u)^2 + Y_p = \frac{1}{2} \cdot \rho_z \cdot u^2 + R_z , \quad [\text{N/m}^2]$$

wobei Y_p für Festigkeit des Penetrators und R_z für jene des Zieles für erodierendes Eindringen steht. u bedeutet die Geschwindigkeit der Penetratorspitze und v jene am Ende des Penetrators. An Hand dieser Beziehung diskutierte TATE drei mögliche Fälle des hydrodynamischen Eindringens.

Ist die Festigkeit des Zieles größer als jene des Penetrators ($R_z > Y_p$), verhält sich dieser wie eine Flüssigkeit bis zum Ende des Eindringvorganges, der beendet ist, wenn das Penetratorende auf die folgende Geschwindigkeit verzögert hat

$$(6.2:12) \quad v = \sqrt{\frac{2 \cdot |R_z - Y_p|}{\rho_p}} . \quad [\text{m/s}]$$

Übersteigt jedoch die Festigkeit des Penetrators jene des Zieles ($R_z < Y_p$), so erreicht das Penetratorende mit dem Wert nach Gl. 6.2:12 zugleich die Geschwindigkeit der Spitze. Von da an bis zum Ende des Eindringvorganges verhält sich der Penetrator wie ein fester Körper.

Sind die Festigkeiten der beiden Materialien gleich, bleibt das Bild der hydrodynamischen Penetration, bis die Spitze und das Ende des Penetrators zum Stillstand gekommen sind.

Eine ausführliche Darstellung dieses Ansatzes, bei dem allerdings der Schlankheitsgrad des Penetrators und die Neigung des Ziels nicht berücksichtigt sind, findet sich in A. TATE (1967).

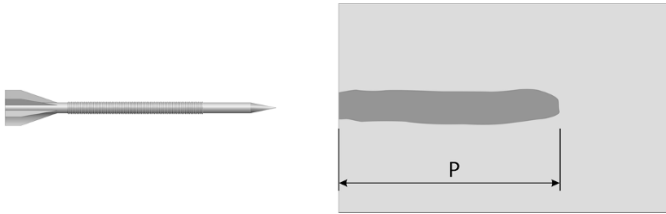


Abb. 6.10. Das halbunendliche Ziel (schematische Darstellung).

6.2.4.3 Referenzziele

Als Referenzziele für Pfeilmunition kommen das *halbunendliche Ziel* und die schief gestellte Panzerplatte (schiefes Einfachziel) in Frage. Das halbunendliche Ziel (eine einzelne Stahlplatte genügender Breite und Tiefe, sodass keine Beeinflussung durch freie Oberflächen erfolgen kann) ist weit verbreitet, weil man mit einem Test im Allgemeinen ein wertbares Resultat erhält (siehe Abb. 6.10). Um die Eindringtiefe messen zu können, muss die Platte jedoch aufgeschnitten werden. Der Krater ist meist mit Geschoss- und Zielplassenresten verstopft.

Bei großkalibrigen Pfeilgeschossen ist die Eindringtiefe oft so groß, dass es notwendig ist, mehrere Platten in einem Stapel anzuordnen (Abb. 6.11). In dieser Zielart werden nur Druckspannungen über die Trennflächen übertragen, Zug- und Schubspannungen dagegen nicht. Dadurch wird die Durchschlagsleistung oft massiv überschätzt. Die Reproduzierbarkeit der Resultate ist nur bei gleichen ballistischen Verhältnissen, Zielanordnung und Materialeigenschaften gegeben (gleiche Anzahl Platten gleicher Dicke und gleicher Festigkeit). Der *Plattenstapel* kann mit dem halbunendlichen Ziel nicht verglichen werden.

Am *schiefen Einfachziel* (Abb. 6.12) kann relativ einfach der Grenzdurchschlag ermittelt werden. Das Pfeilgeschoss soll die Panzerplatte so knapp durchschlagen, dass der durchdringende Restpenetrator praktisch keine Energie mehr besitzt. Es gibt zwei Möglichkeiten, diesen Zustand zu erreichen. Bei konstanter Auftreffgeschwindigkeit wird der Neigungswinkel der Platte solange verändert, bis ein Grenzdurchschlag vorliegt. Im anderen Falle wird auf eine Platte mit fixem Anstellwinkel die Geschwindigkeit solange angepasst, bis man einen Grenzdurchschlag erhält. Die Ergebnisse sind reproduzierbar und, wie im Folgenden gezeigt wird, sogar auf

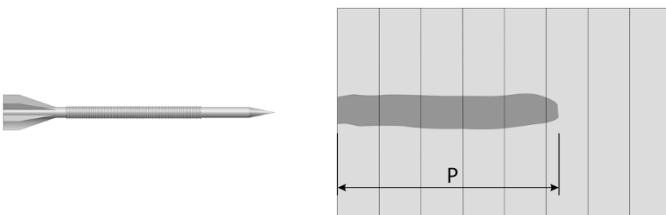


Abb. 6.11. Das Plattenstapel-Ziel (schematische Darstellung).

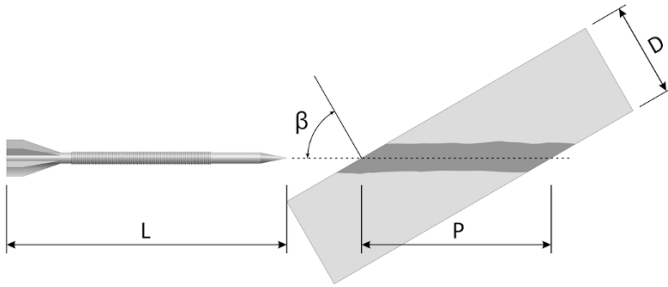


Abb. 6.12. Das schiefe Einfachziel (schematische Darstellung); β ist der Stellungswinkel (siehe dazu Abb. 6.2). P ergibt sich zu $D/\cos \beta$.

andere Verhältnisse übertragbar; sie können bei Bedarf auf vorgegebene Bedingungen umgerechnet werden.

Die Eindringtiefe wird mit P bezeichnet. Beim schiefen Einfachziel wird die Durchschlagslänge als Plattendicke dividiert durch den Cosinus des Stellungswinkels definiert. Im englischen Sprachgebiet spricht man von einer Perforation in „Line of Sight“ (LOS).

6.2.4.4 Maßgebende Parameter, Dimensionsanalyse

Die bestimmenden Einflussgrößen für die Eindringtiefe P im halbunendlichen Ziel bzw. für den Grenzdurchschlag einer Einzelplatte sind der Durchmesser d , die Länge L , die Dichte ρ_p und die Auftreffgeschwindigkeit v des Pfeilgeschosses. Auf das Ziel bezogen sind dies die Zielpattendicke D , der Stellungswinkel β , die Dichte ρ_z und die Zugfestigkeit σ_z . Das halbunendliche Ziel wird im Allgemeinen senkrecht beschossen. Der Stellungswinkel beträgt somit 0° .

Eine Möglichkeit, aus den Einflussgrößen Formeln herzuleiten, bietet die Methode des π -Theorems (E. BUCKINGHAM, 1914). Es sind aus den Ausgangsgrößen dimensionslose Terme zum Problem zu ermitteln, auch wenn der exakte Zusammenhang in Form einer Gleichung noch nicht bekannt ist. Der dimensionslose, relative Grenzdurchschlag (abhängige Variable) könnte wie folgt beschrieben werden

$$(6.2:13) \quad \frac{P}{L} = f\left(\frac{L}{d}, \beta, \frac{\rho_p}{\rho_z}, \frac{\sigma_z}{\rho_p \cdot v^2}\right). \quad [-]$$

Die Auftreffgeschwindigkeit ist die maßgebende Größe für das Eindringen in das Zielmaterial. Der letzte dimensionslose Term in obiger Formel spielt folglich eine wichtige Rolle beim Eindringprozess. Die Analyse vieler Tests mit Penetratoren von gleichem Schlankheitsgrad L/d auf schiefe Ziele gleicher Neigung und unterschiedlicher Festigkeit zeigt, dass sich die resultierenden Grenzdurchschläge P/L sehr gut mit folgendem Exponentialansatz beschreiben lassen

$$(6.2:14) \quad \frac{P}{L} = a \cdot e^{\frac{-c \cdot \sigma_T}{\rho_P \cdot v^2}}. \quad [-]$$

Mit diesem Ansatz wird dem S-förmigen Verlauf des Eindringens in Funktion der Auftreffgeschwindigkeit Rechnung getragen. Der Parameter c kann für gängige Panzerplatten (Zugfestigkeiten von 700–1000 N/mm² bzw. Brinell-Härten von 200–300) als konstant angenommen werden. Wird zusätzlich auch noch die Penetrator-Dichte und die Plattenzugfestigkeit konstant gehalten, führt dies zum sogenannten 2-Parameter-Fit

$$(6.2:15) \quad \frac{P}{L} = a \cdot e^{\left(\frac{b}{v}\right)^2}. \quad [-]$$

Die Parameter a und b lassen sich aus wenigen Testresultaten zuverlässig bestimmen, und daraus kann die Eindringtiefe in Funktion der Auftreffgeschwindigkeit geschätzt werden. Abb. 6.13 zeigt für einen ausgewählten Penetrator-Typ den typischen S-ähnlichen Verlauf des Grenzdurchschlages in Funktion der Auftreffgeschwindigkeit.

Der Einfluss der Dichten von Penetrator- und Zielmaterial kann, wie in Abschn. 6.2.4.2 beschrieben (Gl. 6.2:10), berücksichtigt werden.

$$(6.2:16) \quad \frac{P}{L} \sim \sqrt{\frac{\rho_P}{\rho_Z}}. \quad [-]$$

Das Verhältnis der Festigkeiten des Schwermetallpenetrators zum Zielmaterial Stahl spielt wegen des großen Dichteunterschiedes kaum eine Rolle ($\rho_P/\rho_Z \sim 2.3$).

Der Faktor c im Exponenten der Gl. (6.2:14) ist im oberen Bereich der Zugfestigkeit des Zieles keine Konstante mehr, kann aber sehr gut mit einer linearen Funktion der Festigkeit dargestellt werden (siehe Abschn. 6.2.4.5).

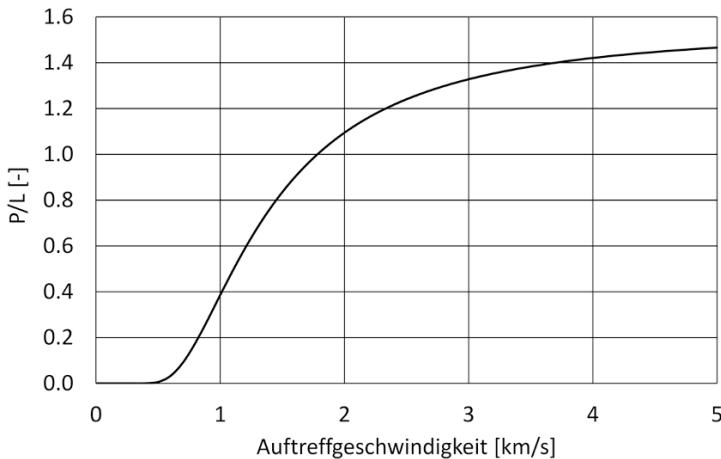


Abb. 6.13. Relativer Grenzdurchschlag eines generischen Pfeilgeschosses.

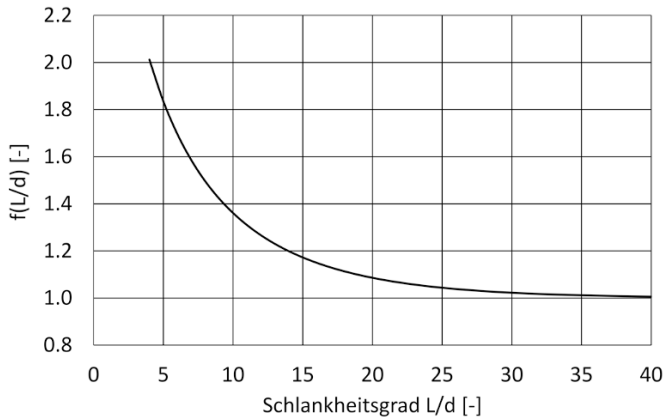


Abb. 6.14. Einfluss des Schlankheitsgrades nach Gl. (6.2:17). Die Koeffizienten b_0 und b_1 sind der Tabelle 6.1, S. 317 entnommen.

Der Einfluss des Schlankheitsgrades L/d lässt sich mit folgendem Ansatz beschreiben, welcher an über 100 Testresultate mit unterschiedlichen Penetrator-Materialien (Wolfram, Uran und Stahl) angepasst worden ist (siehe Abb. 6.14)

$$(6.2:17) \quad f\left(\frac{L}{d}\right) = \frac{1}{\tanh\left(b_0 + b_1 \cdot \frac{L}{d}\right)} \quad [-]$$

Der Gültigkeitsbereich erstreckt sich für L/d von 4 bis ∞ (asymptotische Annäherung an 1). Bei kleinerem Schlankheitsgrad L/d wird die Durchschlagslänge gegenüber rein hydrodynamischem Eindringen vergrößert. Bei modernen Pfeilgeschossen mit L/d grösser als 30 wird dieser Einfluss vernachlässigbar klein (2%).

Der Einfluss des Stellungswinkels kann mit einem modifizierten Cosinus-Gesetz beschrieben werden

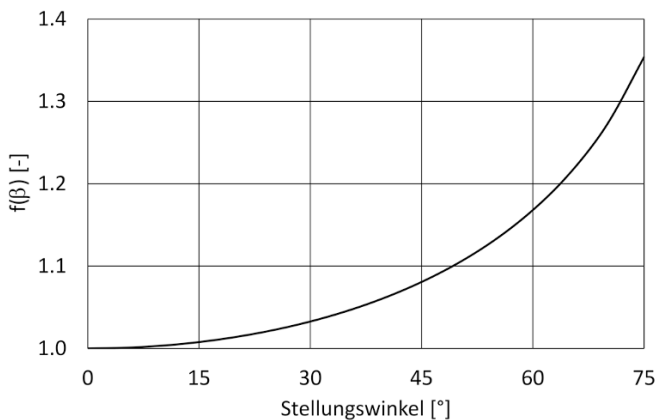


Abb. 6.15. Einfluss des Stellungswinkels nach Gl. (6.2:18).

$$(6.2:18) \quad f(\beta) = \cos^m \beta, \quad m \text{ gemäß Tabelle 6.1.} \quad [-]$$

Die scheinbar größere Durchschlagslänge bei zunehmendem Stellungswinkel (siehe Abb. 6.15) hängt mit der Definition von $P = D/\cos\beta$ zusammen. Das Eindringen verläuft jedoch nur so lange linear, wie der Einfluss der freien Oberfläche an der Hinterseite des Zieles noch keine Wirkung zeigt. Gegen den Austritt aus der Platte hin neigt sich der Schusskanal gegen die Plattennormale. Bei stark geneigten Platten tritt dieser Effekt auf die Durchschlagslänge früher auf als bei schwach geneigten oder gar senkrecht gestellten Platten.

6.2.4.5 Vollständige Näherungsformel des Grenzdurchschlages

Die im vorangegangenen Abschnitt besprochenen Parameter lassen sich nun in eine einzige Gleichung zusammenführen; sie ist für Wolfram und DU-Penetratoren anwendbar. Für systemanalytische Untersuchungen ist es vorteilhaft, dass die einzelnen Einflüsse multiplikativ wirken und sich gegenseitig nicht beeinflussen. Beim Fitten der Parameter erwies es sich als günstig, statt der Zugfestigkeit die Brinell-Härte HBW des Zielmaterials zu benutzen („Odermattformel“)

$$(6.2:19) \quad \frac{P}{L} = a \cdot \frac{1}{\tanh\left(b_0 + b_1 \cdot \frac{L}{d}\right)} \cdot \cos^m \beta \cdot \sqrt{\frac{\rho_P}{\rho_Z}} \cdot e^{-\frac{s^2}{v^2}}, \quad [-]$$

$$\text{mit} \quad s^2 = \frac{(c_0 + c_1 \cdot \text{HBW}_Z) \cdot \text{HBW}_Z}{\rho_P}, \quad [\text{m}^2/\text{s}^2]$$

wobei die Längen in [mm], v in [km/s] und die Dichten in [kg/m³] einzusetzen sind. Die Konstanten a–c sind für zwei Penetratormaterialien in der Tabelle 6.1 zusammengestellt.

Bei zylindrischen Penetratoren entspricht L der gesamten Stablänge. Üblicherweise ist jedoch die Spitze des Penetrators als Konus ausgebildet. In diesem Falle ist der Konus durch einen massengleichen Zylinder mit dem Penetrator-Durchmesser zu ersetzen.

Die untere Gültigkeitsgrenze der Formel (6.2:19) wird durch die Geschwindigkeit gebildet, die aus dem folgende Ausdruck ermittelt werden kann

$$(6.2:20) \quad \frac{s^2}{v^2} = \frac{(c_0 + c_1 \cdot \text{HBW}_Z) \cdot \text{HBW}_Z}{\rho_P \cdot v^2} = 1.5, \quad [-]$$

woraus sich als Grenzgeschwindigkeit ergibt

Tabelle 6.1. Liste der Parameter zu Formel (6.2:19)

Penetrator-Material	b_0	b_1	m	a	c_0	c_1
Wolfram	0.283	0.0656	-0.224	0.994	134.5	-0.148
DU				0.825	90.0	-0.0849

$$(6.2:21) \quad v_{\text{grenz}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot \text{HBW}_Z) \cdot \text{HBW}_Z}{3 \cdot \rho_P}} \quad [\text{m/s}]$$

Es ist bemerkenswert, dass lediglich Materialkennwerte die Grenze bilden. Nach oben besteht eigentlich keine Einschränkung, jedoch können berechnete Werte von Resultaten leicht abweichen, wenn die Auftreffgeschwindigkeit über 2.5 km/s liegt. Die maximalen Geschwindigkeiten der Testresultate, welche zum Fitten der Parameter dienen, lagen knapp unter 2 km/s.

Beispiele der unteren Grenze:

Wolfram	Dichte	17'500 kg/m ³	HBW _Z	250	v > 965 m/s,
Abgereichertes Uran		18'600 kg/m ³		250	v > 785 m/s.

6.3 Verhaltensmerkmale verschiedener Materialien

6.3.1 Grundsätzliche Bemerkungen

In diesem Abschnitt werden einige experimentelle Ergebnisse endballistischer Versuche gegen verschiedene Materialien zusammengestellt. Seitens des Angriffspotenzials handelt es sich dabei naturgemäß um Geschosse aus Kleinwaffen (Kurz- und Langwaffen), also um einen Energiebereich bis etwa 15 kJ.

Regeln, die dabei zutage treten, können nur als unverbindliche Richtlinien oder Hinweise angesehen werden. Materialien und Konstruktionen der Geschosse haben oft einen maßgeblichen Einfluss auf das endballistische Verhalten. Liegen keine gesicherten Ergebnisse vor (wie z. B. ein Prüfzeugnis einer offiziellen Prüfstelle oder eines Beschussamtes), so ist eine spezifische experimentelle Prüfung in der Regel unumgänglich.

Dabei ist auch zu bedenken, dass ein Prüfzeugnis nur bestätigt, dass das der Prüfstelle vorgelegte Muster der Prüfung standgehalten hat. In den meisten Fällen sind diese Muster in den Prüfrichtlinien genau definiert. Ob das geprüfte Material bei einem realen Einbau sich in gleicher Weise verhält, wie in der Prüfung, ist in vielen Fällen ungewiss. Durchschusshemmende Gläser zum Beispiel, werden mit einem Prüfmuster der Dimension 50 × 50 cm geprüft. Eine Untersuchung, die nachweist, dass eine 2 × 3 m große Glaswand beim gleichen Beschussverfahren denselben Schutz bietet, besser oder gar schlechter schützt, ist dem Autor nicht bekannt.

Endballistische Vorgänge sind stets *Wechselwirkungen* zwischen Geschoss und Ziel. Dieser außerordentlich wichtige Punkt sorgt manchmal für erstaunliche und zunächst oft unerklärliche Ereignisse. So kann es beim Beschuss eines Zielmaterials durchaus vorkommen, dass mit steigender Auftreffgeschwindigkeit regulär der Wechsel vom gestoppten Geschoss zum Durchschuss eintritt, bei weiterer Steigerung der Geschwindigkeit die Schüsse jedoch wiederum gestoppt werden. Die Wechselwirkung hat dabei ein Energieniveau erreicht, bei dem das Geschoss so stark deformiert wird, dass die Querschnittsbelastung und damit die Energiedichte wieder unterhalb den Grenzwert für das Durchdringen gefallen sind. Entscheidend

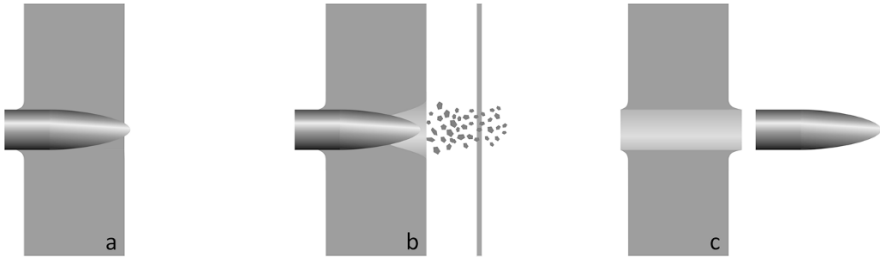


Abb. 6.16. Mögliche Definitionen des Durchschusses. **a.** Das Geschoss ist auf der Rückseite des Zieles sichtbar, **b.** Teile des Geschosses oder des Zieles durchschlagen eine Zeugenfolie, **c.** das Geschoss ist ganz ausgetreten.

dabei ist auch die Zeitdauer der Aktion, die mit zunehmender Geschwindigkeit kürzer wird und dafür sorgt, dass die Verformung des Geschosses schneller vonstattengeht als die Durchdringung. Bei weiterer Erhöhung der Geschwindigkeit wird später wiederum und diesmal endgültig der Durchschuss erzielt.

Dieses Verhalten kann beispielsweise beim Beschuss von textilen Schutzwesten oder bei Stahlplatten beobachtet werden und hängt natürlich auch vom verwendeten Geschoss ab.

In diesem Zusammenhang stellt sich auch die Frage, wann ein Schuss gegen ein Ziel als Durchschuss gewertet wird. Bei dieser Definition wird oft nicht allein das Erscheinen des ganzen Geschosses auf der Rückseite des Zieles betrachtet (Fall c in Abb. 6.16), sondern es werden auch eine mögliche Gefährdung (Fall b) oder statistische Überlegungen (Fall a) in die Beurteilung einbezogen. (Ist nämlich das Geschoss an der Rückseite einer Platte bereits sichtbar, ist ein vollständiger Durchschuss innerhalb der üblichen Streuungen der Auftreffgeschwindigkeit und weiterer Parameter durchaus möglich). Nebst diesen drei Definitionen sind noch eine Reihe weiterer Festlegungen in Prüfrichtlinien möglich und anzutreffen, insbesondere auch für den Fall, wenn das Geschoss nicht mehr im Schusskanal steckt, sondern einschussseitig zurückgeprallt oder zerbrochen ist.

6.3.2 Stahl

Die Durchschlagsgrenzdicken von Kleinwaffengeschossen in Stahlplatten sind stets kleiner als die Länge der Geschosse. Der Geschossweg im Innern des Zielmaterials wird dadurch zu kurz, als dass sich das Geschoss querstellen (z. B. als Folge eines Anstellwinkels beim Auftreffen) und dadurch seine Querschnittsbelastung verändern könnte. Das Durchschlagsverhalten ist daher abgesehen von der Auftreffenergie kaum von andern Auftreffbedingungen des Geschosses (z. B. von kleinen Anstellwinkeln) abhängig.

Nach dem Ansatz des Verdrängungsmodelles (Abschn. 6.2.2) ist die Eindringtiefe in das Ziel in erster Linie von der Energiedichte abhängig und zu dieser nach Gl. (6.2:4) proportional. Über viele Jahre gesammelte Ergebnisse von Schießver-

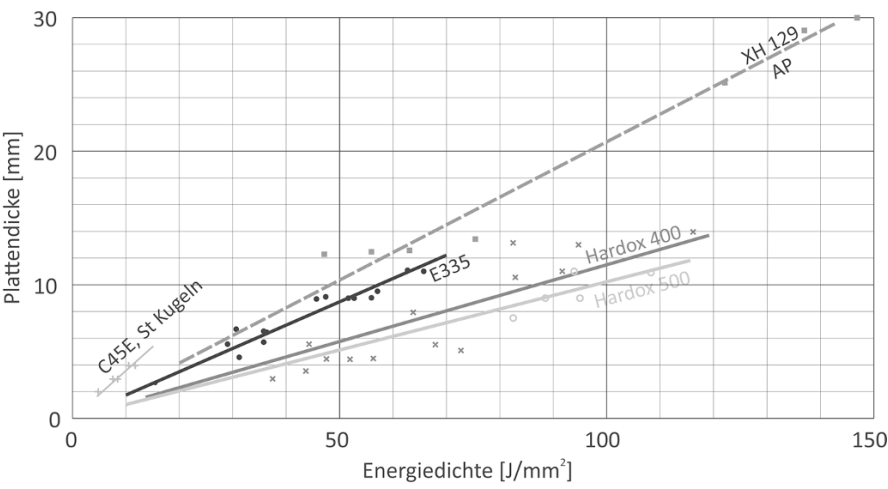


Abb. 6.17. Zusammenhang zwischen Grenzdurchschlagsdicke bei Stahlplatten und der Energiedichte des auftreffenden Geschosses. Die Abhängigkeit ist linear bei guter Korrelation. Die gestrichelte Linie betrifft Stahlkerngeschosse, die andern Linien betreffen Geschosse mit Bleikern. Der Einfluss der Stahlqualität ist offensichtlich.

suchen gegen Stahlplatten zeigten sogar einen linearen Zusammenhang zwischen Energiedichte und Durchschlagsgrenze mit Korrelationskoeffizienten im Bereich von 0.90–0.98. Sie sind in der Abb. 6.17 zusammengestellt. Die durchgezogenen Linien stammen von Versuchen mit Mantelgeschossen mit Bleikern, die gestrichelte Linie wurde mit Stahl- und Hartkerngeschossen ermittelt („AP“ bedeutet „Armour Piercing“).

Dabei zeigt sich deutlich, welche wichtige Rolle die Materialeigenschaften der Zielplatten beim Durchdringungsprozess spielen, wobei in erster Linie die Zugfestigkeit (bzw. die Härte) des Stahls entscheidend ist. Je härter der Stahl ist, desto flacher steigt die mittlere Durchschlagsgrenze (bei gleichem Geschosstyp) mit zunehmender Energiedichte an.

So beträgt die Durchschlagsgrenze eines Vollmantel-Bleikerngeschosses (7.62 mm NATO) mit einer Energiedichte von 63 J/mm² in einem Stahl der Festigkeit 650 N/mm² 11 mm und in einem Stahl hoher Güte (Festigkeit 1250 N/mm²) gerade noch 7 mm. (In der Tabelle 6.2 sind die Festigkeiten typischer Stähle und die zugehörigen Brinell-Härten zusammengestellt).

Tabelle 6.2. Stahlqualitäten

Bezeichnung	Zugfestigkeit [N/mm ²]	Brinell-Härte [-]
S235 (St 37-2)	340–470	102–140
E335 (St 60-2)	570–710	181–211
C45E (Ck 45)	700–850	208–252
Hardox 400	1220–1500	360–440
Hardox 500	1550–1920	450–550
XH 129	1660–1840	480–530

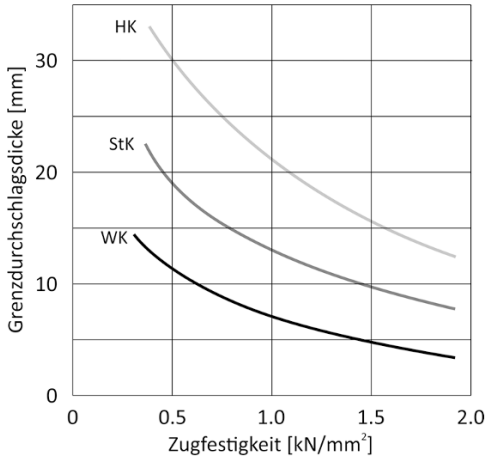


Abb. 6.18. Abhängigkeit der Grenzdurchschlagsdicke von der Zugfestigkeit des Stahls. Experimentelle Ergebnisse mit Weichkern- (WK), Stahlkern- (StK) und Wolframkarbidkerngeschossen (HK) im Kaliber 7.5×55 .

Andere Kaliber und Geschosse ergeben abweichende Kurvenverläufe.

Bei der Anwendung der Grafik in Abb. 6.17 ist zu bedenken, dass die Linien die mittlere Durchschussgrenze darstellen. Aufbau und Konstruktion eines Geschosses können dessen Durchdringungsfähigkeit maßgeblich verbessern oder auch verschlechtern. Von dem aus der Grafik ermittelten Wert muss deshalb stets eine oder zwei Handelsblechdicken höher dimensioniert werden.

Im obigen Beispiel des NATO-Weichkerngeschosses ist vom Stahl geringer Festigkeit bei einer mittleren Durchschussgrenze von 11 mm eine Platte der Dicke 15 mm zu wählen, beim Stahl hoher Güte mit 7 mm mittlerer Durchschussgrenze muss eine 10-mm-Platte eingesetzt werden.

Liegen keine gesicherten Resultate der fraglichen Geschoss-Ziel-Kombination vor (z. B. ein Prüfzeugnis eines Prüfinstitutes), ist eine experimentelle Prüfung sehr zu empfehlen oder gar unumgänglich.

In der Abb. 6.18 wird anhand experimenteller Ergebnisse mit Geschossen im Kaliber 7.5×55 der Einfluss der Stahlqualität noch verdeutlicht. Mit abnehmender Festigkeit steigt die für einen Schutz erforderliche Plattendicke erheblich an, und zwar umso stärker, je härter das Geschossmaterial ist. Der Kurvenverlauf zeigt, wie mit der Verwendung hochfester Stähle das Gewicht durchschusshemmender Konstruktionen um bis zur Hälfte gesenkt werden kann.

Es kommt ab und zu vor, dass der Endballistik unkundige Personen den als Schutz verlangten hochfesten Stahl ohne zu informieren durch Baustahl ersetzen, weil dieser günstiger und besser zu bearbeiten ist und ja die gleiche Dicke gewählt wird. Bei dem immer wieder empfohlenen Testschuss wird ein solcher Tausch sehr rasch aufgedeckt.

6.3.3 Aluminium

Neben Stahl wird auch Aluminium für ballistischen Schutz eingesetzt. Auch bei diesem Material wird man zunächst eine Proportionalität zur Energiedichte annehmen. Entsprechende Versuche ergeben jedoch nicht eine lineare Abhängigkeit, sondern einen Kurvenverlauf, der im Gegensatz zum Stahl mit zunehmender Ener-

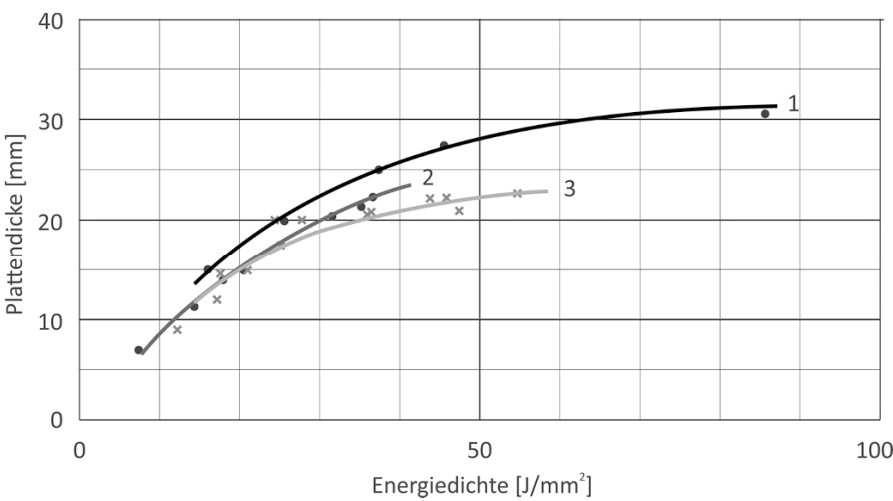


Abb. 6.19. Zusammenhang zwischen Grenzdurchschlagsdicke bei Aluminiumplatten und der Energiedichte des auftreffenden Geschosses. In Gegensatz zum Stahl geht die Kurve mit zunehmender Energiedichte in einen fast horizontalen Verlauf über. *Kurve 1:* Stahlkugeln Ø 12.5 mm gegen Avional, *Kurve 2:* Stahlkugeln Ø 5.56 und 7.5 mm gegen Anticorodal, *Kurve 3:* Langwaffengeschosse gegen Peraluman. Die Materialfestigkeit macht sich auch hier bemerkbar.

giedichte in einen annähernd horizontalen Verlauf übergeht (siehe Abb. 6.19). Dies macht Aluminium für größere Auftreffenergien interessant. Übliche Aluminiumqualitäten sind in der Tabelle 6.3 zusammengestellt.

Die Grafik zeigt, dass bei diesem Material Stahlgeschosse ebenfalls eine größere Plattendicke erfordern (Linien 1 und 2) als übliche Weichkerngeschosse (Linie 3). Allerdings geht der Vorteil der knapp drei Mal kleineren Dichte des Aluminiums im Vergleich zum Stahl bei kleinen Energiedichten (unterhalb etwa 60 J/mm²) durch die erforderlichen Plattendicken nahezu verloren. Dies ist wohl ein Grund, weshalb Aluminium im Bereich des Schutzes gegen Kleinwaffengeschosse kaum eine Rolle spielt.

6.3.4 Beton und Mauerwerk

Mauerwerk in Kalksand- oder Backsteinen und nicht armierter Beton vermögen nur geringe Zug- und Schubspannungen aufzunehmen. Trifft ein Geschoss auf ein

Tabelle 6.3. Aluminiumqualitäten

Bezeichnung	Zugfestigkeit [N/mm²]	Brinell-Härte [-]
Avional 152 (150) EN AW-2024	min. 440	min. 100
Anticorodal 100 EN AW-6082	295–300	95
Peraluman EN AW-5083	275	69

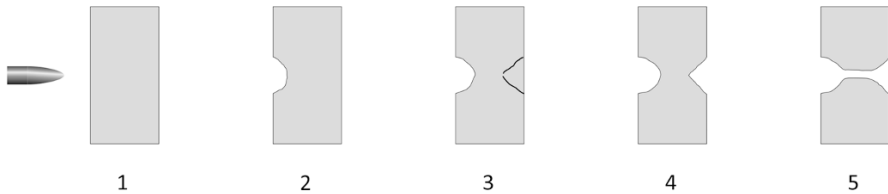




Abb. 6.20. Entstehung eines Durchschusses in Mauerwerk und nicht armiertem Beton. Beim ersten Schuss ergibt sich einschussseitig ein kegelförmiger Ausbruch (2). Einige wenige Schüsse später entsteht an der Rückseite ein ähnliches Rissystem (3), das bei einem weiteren Schuss hinten ausbricht (4). Der folgende Schuss ist meist ein Durchschuss (5).

solches Material, entstehen wegen des hohen Druckes rund um den Auftreffpunkt Spannungen, die einschussseitig zu einem kegelförmigen Ausbruch führen. Treffen ein oder zwei weitere Schüsse an ungefähr derselben Stelle auf, kann es (abhängig von der Mauerdicke) bereits an der Rückseite zu einer Rissbildung kommen, die beim folgenden Schuss zu einem Ausbruch an der Rückseite führt. Der nächste Schuss wird in der Regel ein Durchschuss sein.

In der Tabelle 6.4 sind einige Ergebnisse solcher Experimente zusammengestellt. Die Beschüsse erfolgten gegen speziell hergestellte Mauerstücke der Größe

Tabelle 6.4. Einige Ergebnisse von Mauer- und Betonbeschüssen (Erklärungen siehe Text)

Zielmaterial	Geschoss	E [J]	Ergebnis
Kalksandstein 9 cm, ohne Loch 	9 mm Luger VM-Geschoss	580	Ausbruch hinten nach 6 Schüssen, kein Durchschuss
	44 Rem. Mag. TM-Geschoss	1340	Ausbruch hinten nach 2 Schüssen, Durchschuss beim 3. Schuss
Kalksandstein 12 cm, mit Loch 	44 Rem. Mag. TM-Geschoss	1340	Ausbruch hinten nach 8 Schüssen, kein Durchschuss nach 10 Schüssen
	7.5 × 55, VM-Geschoss	2575	Ausbruch hinten beim 1. Schuss Eindringtiefe 8 cm, Durchschuss beim 2. Schuss
Kalksandstein 15 cm, ohne Loch	7.5 × 55, VM-Geschoss	2575	Nach 3 Schüssen hinten Ausbruch, kein Durchschuss, Eindringtiefe 7 cm
	7.62 mm NATO, StK-Geschoss	2505	1. Schuss Eindringtiefe 8 cm, anschließend zwei Mal Durchschuss
Betonplatte 6 cm, HPC 350 (0-18)	5.56 × 45, VM-Geschoss	1380	Ausbruch hinten nach 3 Schüssen, 4. Schuss Durchschuss
	7.5 × 55, VM-Geschoss	2575	1. Schuss Durchschuss
Betonplatte 7 cm	5.56 × 45, VM-Geschoss	1380	Nach 2 Schüssen hinten noch intakt, 3. Schuss Durchschuss
Betonplatte 10 cm	7.5 × 55, VM-Geschoss	2575	Nach 2 Schüssen hinten Riss, 3. Schuss Durchschuss
	7.62 mm NATO, StK-Geschoss	2505	1. Schuss Eindringtiefe 6 cm, 2. Schuss 8 cm, 3. Schuss Durchschuss

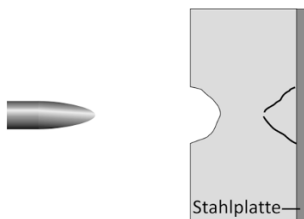


Abb. 6.21. Das Verhindern des Materialausbruchs an der Rückseite von Kalksandsteinmauerwerk und Betonplatten, z. B. durch eine dünne Stahlplatte, erhöht den Schutz gegen Durchschuss beträchtlich.

1,2 × 1,5 m, die Betonplatten stammten von einem Betonwarenhersteller. Die Schussdistanz bei den Kurzwaffen betrug 10 m, und mit den Langwaffen wurde im Abstand von 100 m geschossen. Die Energieangaben entsprechen den Mittelwerten bei diesen Distanzen.

Es fällt auf, dass sowohl Kalksandsteinmauerwerk als auch Betonplatten einen nur geringen Widerstand gegen Beschuss bieten. Eine wesentliche Verbesserung des Schutzes ergibt sich, wenn verhindert wird, dass auf der Rückseite der Stein (bzw. die Platte) ausbrechen kann. Dies geschieht, indem die Rückseite mit einem dünnen Stahlblech (z. B. 3 mm) abgedeckt wird (siehe Abb. 6.21). Die Geschosse erreichen die Rückseite nicht mehr, da sie die Energie beim Zermahlen des Steins verbrauchen. Die Schusszahl bis zu einem Durchschuss kann dadurch verdoppelt oder gar verdreifacht werden. Ein solcher Schutz eignet sich an Stellen, bei denen mit nur wenigen eintreffenden Schüssen gerechnet werden muss, z. B. im weiteren Umfeld einer Scheibenanlage. Selbstverständlich ist auch hier ein vorgängiger Testbeschuss mit den in Frage kommenden Geschossen und den örtlichen Baumaterialien unbedingt erforderlich. Bleikernfreien Geschossen (sogenannten Monoblockgeschossen) ist dabei besonders Aufmerksamkeit zu schenken.

Backsteinmauerwerk der Dicke 18 cm wird von VM-Gewehrsgeschossen beim ersten Schuss durchschossen (Distanz 50 m, 3200 J). Erst bei etwa 1700 J scheint ein gewisser Schutz gegen einen einzelnen Treffer vorhanden zu sein.

In Ytong®-Blöcke (Dicke 25 cm) dringen Kurzwaffengeschosse im Kaliber 9 mm Luger 16–18 cm tief ein. VM-Gewehrsgeschosse mit über 3000 J Energie durchschlagen sie vollständig.

6.3.5 Holz

Bei Materialien, in die das Geschoss mit seiner ganzen Länge eindringen kann, spielen für die Eindringtiefe neben der Energiedichte (nach Abschn. 6.2.2) auch die Stabilität des Geschosses und sein Anstellwinkel im Auftreffpunkt eine merkliche Rolle. Beim Durchschießen von Holz drehen sich Langgeschosse in der Regel um eine Querachse, oft mehr als einmal (sie überschlagen sich). Je stabiler das Geschoss auftrifft und je kleiner sein Anstellwinkel ist, desto länger behält es eine hohe Energiedichte und dringt weiter ein, bis die Drehung beginnt. Durch die Querstellung vergrößert sich die Querschnittsfläche, die Energiedichte wird kleiner und der Eindringweg kürzer.

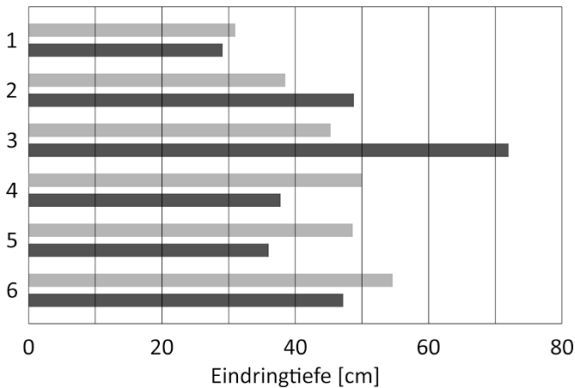


Abb. 6.22. Mittlere Eindringtiefen in astfreies Fichtenholz.

Helle Linie 100 m, dunkle Linie 300 m Schussdistanz.

- 1 223 Rem. Geschoss SS92,
- 2 5.56 mm NATO, SS109
- 3 5.6 mm GP 90,
- 4 7.62 × 39 VM-Geschoss,
- 5 7.62 mm NATO Wk-Geschoss,
- 6 7.5 × 55 GP 11.

Die Durchschlagsfähigkeit in Holz hängt daher wesentlich davon ab, wie rasch sich ein Geschoss im Innern zu drehen beginnt. Der Anstellwinkel im Auftreffpunkt und die Geschossstabilität werden damit zu einer bestimmenden Größe für die Eindringtiefe. Die Energiedichte allein lässt noch keine approximativen Angaben darüber zu, wie dies bei den Stahlplatten der Fall ist.

In der Abb. 6.22 sind experimentell ermittelte Werte in trockenem, astfreiem Fichtenholz von sechs Infanteriegeschossen dargestellt, drei im Kaliber 5.56×45 (223 Rem.) und drei im Kaliberbereich 7.5–7.62 mm. Es ist überraschend und bemerkenswert, dass zwei der kleineren Kaliber nach 300 m Flugweg trotz einer um etwa 25 % geringeren Energiedichte (und 60 % weniger Energie) tiefer in Holz eindringen als die größeren Geschosse.

Der Grund für dieses Verhalten ist zumindest zum Teil darin zu finden, dass nach der Mündung bekanntlich der Anstellwinkel wegen der Störungen beim Geschossabgang am größten ist (siehe Abschn. 4.2 und 4.3). Mit zunehmender Flugdistanz nimmt er ab. Dies kann zur Folge haben, dass gewisse Geschosse bei größeren Schussweiten trotz geringerer Energie und Energiedichte tiefer in Holz eindringen können als bei kurzen Distanzen. Wird die Schussdistanz weiter vergrößert, wird die Eindringtiefe wegen der nun mangelnden Energie wieder abnehmen. Es existiert demnach ein Distanzbereich, für den die Durchdringungsfähigkeit eines Geschosses maximal wird.

Bei den Geschossen 4–6 in der Abb. 6.22 liegt dieses Maximum in der Gegend um 100 m, bei den Geschossen 2 und 3 wird dies eher im Bereich von 300 m auftreten.

Vollmantelgeschosse werden in weichem Holz (Fichte) trotz des oft mehrmaligen Überschlagens überraschend wenig, meist jedoch gar nicht deformiert. In hartem Holz oder bei Auftreffen auf Äste können hingegen Verformungen auftreten.

Auf Grund dieser Ergebnisse ist zu erwarten, dass das Eindringverhalten von Projektilen mit nicht ändernder Querschnittsbelastung wiederum primär der Gesetzmäßigkeit der Energiedichte folgen würde. Versuche mit Kugeln und Würfeln aus Stahl zweier Durchmesser bzw. Kantenlängen ergeben eine sehr gute Korrelation zwischen der Energiedichte und der Eindringtiefe in Fichtenholz, sowohl für

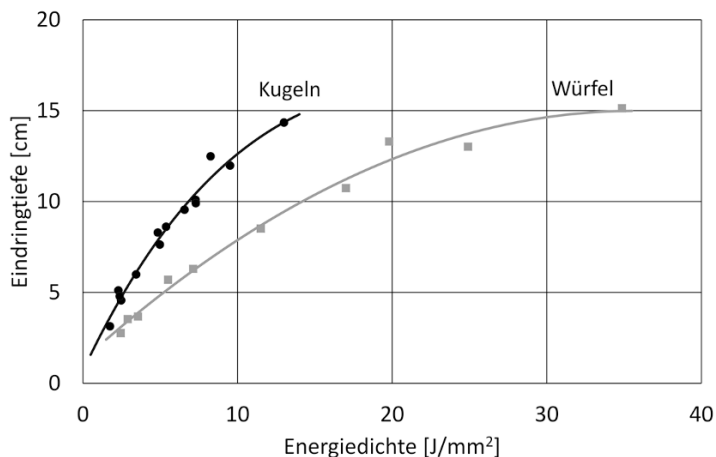


Abb. 6.23. Eindringtiefen von Kugeln und Würfeln aus Stahl in Fichtenholz der Dichte 0.46 kg/dm^3 in Abhängigkeit der Energiedichte.

die Kugeln als auch für die Würfel (siehe Abb. 6.23). Verwendet wurden Kugeln mit 5 und 8 mm Durchmesser und Würfel mit 5.65 und 8 mm Kantenlänge im Geschwindigkeitsbereich von ca. 330 bis 1420 m/s. Mit zunehmender Energiedichte zeigt sich auch hier ein abnehmender Gradient (ähnlich wie im Aluminium). Noch flacher werden diese Kurven, wenn die Projektile in Buchenholz geschossen werden, wie dies aus Abb. 6.24 ersichtlich ist.

Dichte und Feuchtigkeitsgehalt des Holzes bestimmen die Eindringtiefe ebenfalls und nicht wenig mit. Die hier dargestellten ballistischen Zusammenhänge gelten natürlich auch unter anderen Bedingungen, allerdings mit anderen Skalen.

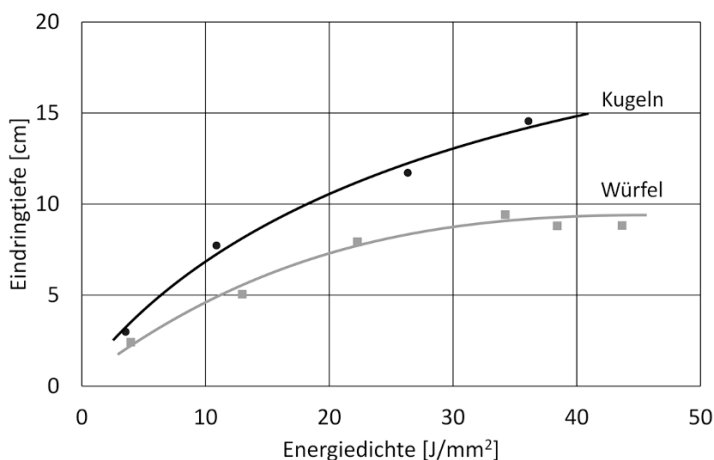


Abb. 6.24. Eindringtiefen von Kugeln und Würfeln aus Stahl in Buchenholz der Dichte 0.66 kg/dm^3 in Abhängigkeit der Energiedichte.

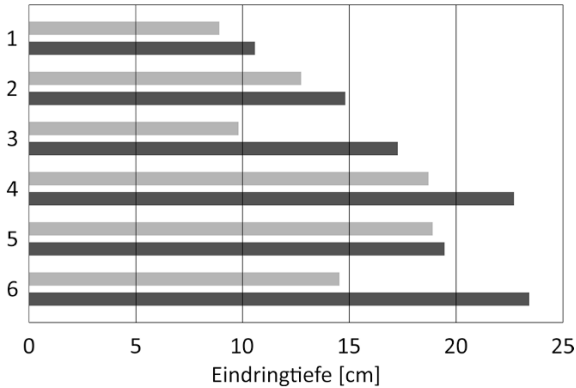


Abb. 6.25. Mittlere Eindringtiefen in trockenem Sand.

Helle Linie 100 m, dunkle Linie 300 m Schussdistanz.

1 223 Rem. Geschoss SS92,

2 5.56 mm NATO, SS109

3 5.6 mm GP 90,

4 7.62 × 39 VM-Geschoss,

5 7.62 mm NATO Wk-Geschoss,

6 7.5 × 55 GP 11.

6.3.6 Sand, Erde

Der Einfluss der Stabilität und des Anstellwinkels zeigt sich beim Schuss in Sand oder Erdreich noch deutlicher als im Holz. Beim Eindringen in diese Materialien stellen sich schnelle Mantelgeschosse (v größer als etwa 500–600 m/s) sehr bald quer; dabei wird ihnen infolge der Biegespannung der Mantel aufgerissen. Dies vergrößert massiv die maßgebende Querschnittsfläche und reduziert entsprechend die Eindringtiefe. Sinkt die Geschwindigkeit unter diese Schranke, bleiben die Geschosse kompakt und die Eindringtiefe nimmt trotz der geringeren Energie zu. Die in der Abb. 6.25, dargestellten Versuchsergebnisse zeigen, dass bei allen sechs getesteten Infanteriegeschossen die Eindringstrecke in Sand bei 300 m Schussdistanz größer ist als bei 100 m.

Besonders auffällig ist der Unterschied bei den beiden Stahlmantelgeschossen 3 und 6.

In relativ trockener, steinfreier Erde zeigten sich bezüglich des Distanzeinflusses sehr ähnliche Verhältnisse. Eine Publikation der Resultate ergibt jedoch wenig Sinn, da „Erde“ sehr verschieden sein kann und sich daher auch sehr unterschiedliche Daten ergeben.

Vollmantel-Pistolen- und Revolvergeschosse zerlegen sich in Sand und in Erde in der Regel nicht. Sie dringen deshalb (bei kurzen Schussdistanzen) tiefer ein als die Gewehrgeschosse. Vollbleigeschosse bleiben bei kleinen Geschwindigkeiten ebenfalls ganz, wobei allerdings deren Oberfläche erodiert wird. Mit zunehmender Geschwindigkeit beginnen diese Geschosse zu deformieren.

Die Eindringtiefe in diese Materialien ist sehr stark von deren Feuchtigkeit und Zusammensetzung abhängig. Es ist deshalb kaum möglich, allgemeine Gesetzmäßigkeiten zu finden. Die Eindringtiefen korrelieren weder mit der Auftreffenergie noch der Energiedichte noch dem Impuls. (Der Impuls käme allenfalls in Frage wegen einer denkbaren Impulsübertragung an die Kornstruktur). Vergleichende Versuche werden am besten mit trockenem Sand und gesiebter Erde durchgeführt, da andernfalls die Resultate kaum miteinander verglichen werden können.

6.4 Schutzanordnungen

6.4.1 Geneigte Platten

Eines der Hauptprobleme ballistischen Schutzes betrifft dessen Gewicht, das eine Folge der Masse ist, die dem Geschoss (unter anderem) entgegengestellt werden muss. Die Idee, Schutzplatten zu neigen und damit den Durchschussweg im Innern des Materials zu verlängern, liegt daher nahe.

Trifft nun ein Geschoss auf eine Platte der Dicke D , die unter dem Stellungswinkel β geneigt ist, so wird der geometrische Geschossweg D_g in der Platte nach dem folgenden Gesetz verlängert

$$(6.4:1) \quad D_g = \frac{D}{\cos \beta} . \quad [\text{mm}]$$

Dies würde den Schluss zulassen, dass bei einer geneigten Platte die Plattendicke um den Cosinus des Stellungswinkels dünner gewählt werden könnte, dass also bei $\beta = 60^\circ$ (Auftreffwinkel $\alpha = 30^\circ$) nur noch eine halb so dicke Platte notwendig wäre. Diese theoretische Gesetzmäßigkeit würde somit der gepunkteten Linie in der Abb. 6.26 folgen.

In Wirklichkeit liegen die Kurven der Grenzdurchschlagsdicke in Abhängigkeit des Stellungswinkels, des sogenannten *Grenzwinkeldiagramms*, fast immer unterhalb der Linie, welche die Cosinus-Funktion vorgibt. In der Abb. 6.26 sind drei Beispiele unterschiedlicher Geschosse eingetragen, und zwar relativ zu der Grenzdurchschlagsdicke bei senkrechtem Auftreffen. Bei einem der Geschosse könnte bereits bei einem Stellungswinkel weniger als 30° die Plattendicke halbiert werden. Der Kurvenverlauf würde beim Grenzwinkel enden, bei dem das Abprallen beginnt. Dieser ist wiederum von Geschoss und Platte abhängig (siehe dazu auch Abb. 6.3).

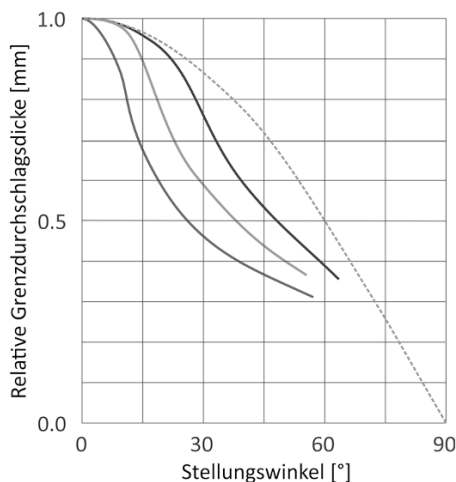


Abb. 6.26. Grenzwinkeldiagramme dreier verschiedener Geschosse. Gepunktet ist die theoretische Cosinus-Kurve eingezeichnet, die drei andern Linien stammen von experimentellen Ergebnissen; sie sind relativ zum senkrechten Grenzdurchschlag gezeichnet. Andere Geschosse und Zielplatten ergeben andere Kurvenverläufe.

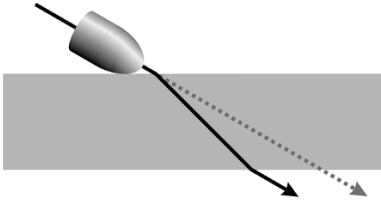


Abb. 6.27. Die Durchdringung einer geneigten Platte erfolgt üblicherweise nicht geradlinig. Das Geschoss wird lichtstrahlähnlich gebrochen.

Bei den experimentell bestimmten Grenzwinkeldiagrammen bereits mit berücksichtigt ist ein zusätzlicher Effekt, der den Winkelbeschuss mitprägt. Das Geschoss durchdringt den Schutz oft nicht geradlinig in der Ankunftsrichtung, sondern es wird (einem Lichtstrahl ähnlich) „gebrochen“ (siehe Abb. 6.27).

Dies könnte mit dem kleinen Drehmoment erklärt werden, das entsteht, wenn der erste Kontaktpunkt mit dem Ziel etwas exzentrisch zur Flugrichtung liegt.

Viele Grenzwinkellinien liegen bis etwa $10\text{--}15^\circ$ Stellungswinkel nahe der Cosinuskurve. Weil der Cosinus bei diesen Winkeln immer noch fast 1 beträgt (die Abweichung bei 15° ist erst knapp 3,5 %), ergibt sich eine wesentliche Verbesserung des Schutzes (oder Reduzierung des Schutzgewichtes bei gleichem Schutz) erst, wenn der Stellungswinkel mehr als $15\text{--}20^\circ$ misst.

Offensichtlich lässt sich für das Durchschussverhalten durch geneigte Platten keine allgemein gültige Regel aufstellen. Es ist sowohl vom Geschoss und seiner Konstruktion als auch von der Qualität der Platte abhängig; beide können sehr vielfältig sein. Man ist also auch bei geneigten Schutzanordnungen auf bekannte Ergebnisse angewiesen, oder die gesuchten Durchschlagsgrenzen sind mittels Schießversuchen zu bestimmen.

Eine bemerkenswerte Besonderheit kann sich bei geschichteten Schutzkonstruktionen einstellen (z. B. textile Schutzwesten oder schichtweise aufgebaute, gepresste Kunststoffplatten). Unter bestimmten Bedingungen ist es möglich, dass beim Beschuss unter relativ großen Stellungswinkeln ($60\text{--}70^\circ$) die Platte oder das Schutzpaket durchdrungen werden (siehe Abb. 6.28), obwohl der lotrechte Schuss zuverlässig gestoppt wird.

Beim lotrechten Schuss wirken alle Schichten gleichzeitig dem Geschoss entgegen; trifft das Geschoss schräg auf, durchdringt es die Schichten einzeln, wird in der Regel kaum deformiert, verliert dabei pro Schicht wesentlich weniger Energie (siehe Abschn. 6.2.3 und 6.4.2) und erzeugt so einen Durchschuss.

Geschichtete Schutzkonstruktionen müssen deshalb nicht nur senkrecht zur Oberfläche, sondern auch unter einem (relativ großen) Stellungswinkel einer Prüfung unterzogen werden.

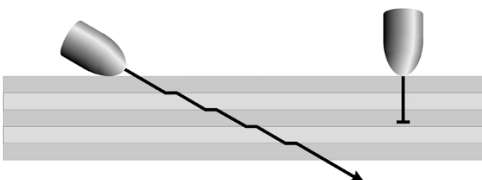


Abb. 6.28. Geschichtete, geneigte Zielanordnungen können unter bestimmten Bedingungen durchschossen werden, auch wenn der lotrechte Schuss gestoppt wird (Näheres siehe Text).

6.4.2 Geschottete Plattenanordnungen

Eine weitere mögliche Verbesserung des Schutzes ergibt sich durch das Aufteilen einer massiven, dicken Schutzplatte in zwei oder mehrere dünnere Platten, die in gewissen Abständen angeordnet werden. In Anlehnung an die Schottwände in Gebäuden oder Schiffen wird dies als *geschottete Plattenanordnung* oder als geschotetetes Ziel bezeichnet.

Allerdings ergibt eine Schottung nicht immer einen besseren Schutz. Zur Erläuterung der Ausnahmefälle sei an Abschn. 6.2.3 über das Durchschießen dünner Platten erinnert, wo festgehalten worden ist, dass die von der Platte absorbierte Energie beim Durchdringen wesentlich geringer ist, als wenn das Geschoss gestoppt wird.

Das prinzipielle Verhalten von Geschossen in geschotteten Zielen wird am einfachsten anhand von Beispielen erläutert, die Ergebnisse realer Versuche sind.

- Wird ein kurzes Pistolengeschoss (Kaliber 9 mm Luger) gegen ein Stahlblech genügender Festigkeit der Dicke 3 mm geschossen, so wird es gestoppt (Abb. 6.29 a, oberes Bild). Ersetzt man das 3-mm-Blech durch drei 1-mm-Bleche derselben Qualität, werden diese glatt durchschlagen und sogar noch 2-3 weitere dazu (Abb. 6.29 a unteres Bild).

Vergleiche hierzu auch Abb. 6.28 und die zugehörige Erklärung.

- Durchdringt ein Stahlkerngeschoss im Kaliber 7.62 mm NATO aus einer Langwaffe eine 12-mm-Stahlplatte einer bestimmten Qualität (Abb. 6.29 b, oberes Bild), so kann durch Anordnung zweier Platten gleicher Qualität und Gesamtdicke, die in einem Abstand von 15–20 cm angeordnet sind, das Geschoss gestoppt werden (Abb. 6.29 b unteres Bild).

Der erste Fall ist eine unmittelbare Folge des in Abschn. 6.2.3 beschriebenen Durchschusses dünner Schichten. Der Energieübertrag an die dünnen Bleche ist deshalb relativ gering. Weil das Geschoss relativ kurz ist, ändert sich die maßgebende Querschnittsfläche kaum, auch wenn es nach dem Blech einen größeren An-

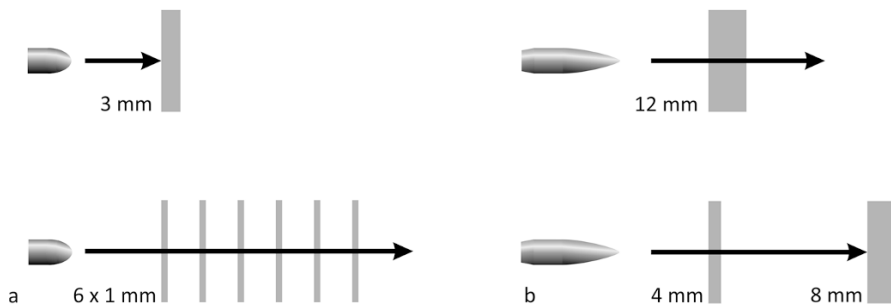


Abb. 6.29. Unterschiedliches Verhalten in geschotteten Plattenanordnungen zwischen kurzen und langen Geschossen. Erläuterung siehe Text.

stellwinkel aufweist. Das zweite Blech wird mit etwas weniger Energie, jedoch ähnlicher Querschnittsbelastung getroffen und ebenfalls durchschlagen. Dieser Vorgang setzt sich fort, bis die Energie für den Durchschlag des 1-mm-Blechtes nicht mehr ausreicht.

Im zweiten Fall erhält das Langgeschoss, das die 12-mm-Platte problemlos durchschlägt, nach Durchschuss der ersten Platte einen großen Anstellwinkel und wird sich auf der zweiten Platte sofort querstellen. Die maßgebende Querschnittsfläche nimmt deutlich zu und die Energiedichte entsprechend ab. Für den Durchschlag der zweiten Platte reicht sie nicht mehr aus.

Wahrscheinlich könnte die zweite Platte sogar dünner gewählt werden; dies ließe sich experimentell ohne weiteres ermitteln.

Die erste Platte hat in diesem Fall nur eine Störfunktion und kann relativ dünn ausgelegt werden. Der Abstand zwischen den Platten ist so groß zu wählen, dass das Geschoss im Zwischenraum einen genügend großen Anstellwinkel aufbauen kann. Das Aufteilen einer Schutzplatte auf zwei oder mehrere dünnere Platten ist vor allem dann sinnvoll, wenn dadurch das Geschoss so gestört wird, dass es seine Querschnittsfläche vergrößert und damit die Querschnittsbelastung reduziert.

Dieses Konstruktionsprinzip kann auch bei anderen Materialien angewendet werden.

Bei einer Nachrüstung eines Bürogebäudes mit durchschusshemmenden Fenstern hoher Schutzklasse wäre wegen der zusätzlichen Belastung durch das Glas eine Fassadenverstärkung notwendig geworden. Durch Einbezug der vorhandenen Dreifach-Verglasung zum Stören des Geschosses und Anordnen des Panzerglases 20 cm innerhalb der vorhandenen Fenster ließ sich die Dicke des Schutzglases halbieren, was die Fassadenverstärkung überflüssig machte.

Schießt man mit einem Gewehrsgeschoss (Kaliber 7.5×55) gegen ein Paket von 90 Lagen Aramid, werden diese glatt durchschossen mit einer Geschwindigkeitseinbuße von etwa 20 %. Hängt man die 90 Lagen auf einer Strecke von 1.5 m verteilt auf, bleibt das Geschoss in der Gegend der siebzigsten Lage stecken und fällt unten heraus.

6.4.3 Asymmetrische Anordnungen

Bei Materialien mit homogenem oder symmetrisch geschichtetem Aufbau sind die Durchschusseigenschaften in beiden Richtungen gleich. Mit einer asymmetrischen Konstruktion kann jedoch erreicht werden, dass eine Platte in der einen Richtung ein Geschoss stoppt, in der andern Richtung vom gleichen Geschoss durchschossen wird (Abb. 6.30). Dies kann sich durch unterschiedliche Deformation des Geschosses in den beiden Schussrichtungen ergeben.

Textile Schutzwesten (z. B. mit Stichschutz) können diese Eigenschaft haben. Die Angriffsseite ist in diesem Fall eindeutig zu bezeichnen.

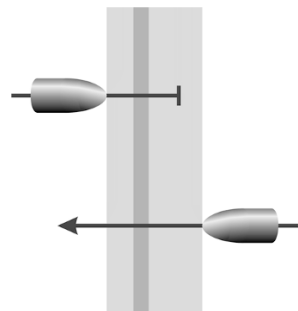


Abb. 6.30. Richtungsabhängige Durchschusseigenschaften bei asymmetrisch aufgebauten Platten.

6.5 Probleme des ballistischen Schutzes

6.5.1 Allgemeines

6.5.1.1 Personenschutz und Sachwertschutz

Durchschusshemmende Materialien werden in erster Linie für den Personenschutz eingesetzt, da das eingesetzte Angriffsmittel – die Schuss- und auch die Stichwaffen – in diesem Zusammenhang vor allem gegen den Menschen selbst gerichtet ist. Weniger häufig kommen gezielte Sachbeschädigungen durch Schusswaffen vor. Hier sind es vor allem wichtige und empfindliche Einrichtungen (Radaranlagen, Computer, Energieanlagen, Steuerungen), die eines Schutzes bedürfen.

Der Personenschutz lässt sich in zwei Gebiete einteilen:

- Schutz, der auf dem Körper getragen wird (Schutzwesten, Helme),
- Schutz des Raumes, in dem sich die Personen aufhalten.

Der Körperschutz ist üblicherweise nur partiell, da einerseits die Beweglichkeit nicht zu stark beeinträchtigt werden darf und andererseits das Gewicht beschränkt bleiben muss.

Geschützte Räume werden in Gebäuden und Gebäudeteilen (Schalteranlagen, Computerräume) sowie bei Fahrzeugen eingerichtet. Die Materialien, die dabei verwendet werden, dürfen in der Regel keine Splitter in den Schutzbereich abgeben. Beim Sachwertschutz ist Splitterfreiheit der Schutzkonstruktion nur dann gefordert, wenn Splitter ebenfalls eine Bedrohung der Sachwerte darstellen.

6.5.1.2 Das Bedrohungspotenzial

Die möglichen Bedrohungen von Personen durch Schusswaffen sind derart vielfältig, dass den Schutzvorrichtungen jeweils ein bestimmtes Bedrohungsbild zugrunde gelegt wird. Die wohl wichtigste Rolle spielen dabei Geschosse aus Kurz- und Langwaffen, deren Wirkungspotenzial in ihrer kinetischen Energie liegt.

Zu den Kurz- und Langwaffen (englisch: „Small Arms“) werden üblicherweise alle Kleinwaffen gezählt, die ein- oder zweihändig zu bedienen sind und die ein Kaliber kleiner als 13 mm aufweisen. Außerdem gehören die Flinten dazu, deren Laufdurchmesser bis rund 20 mm (Kaliber 10) betragen kann.

Obwohl die Vielfalt der Gewehre, Pistolen und Revolver und der zugehörigen Munition außerordentlich groß ist (es gibt etwa 300 verschiedene Lang- und gegen 100 Kurzwaffenkaliber und in gewissen Kalibern Dutzende verschiedener Geschosse), umschreibt diese Abgrenzung das Angriffspotenzial recht eindeutig. Aus Gründen der Handhabbarkeit bleiben sowohl die maximale Mündungsenergie als auch der Mündungsimpuls beschränkt; daraus ergeben sich Grenzen für die Geschossmasse und die Mündungsgeschwindigkeit. Allgemein gelten etwa die folgenden Werte:

Mündungsenergie	<	12	kJ	(18 kJ)
Mündungsimpuls	<	25	Ns	(40 Ns)
Geschossmasse	<	35	g	(50 g)
Mündungsgeschwindigkeit	<	1200	m/s	

Mit Repetiergewehren und Halbautomaten in den Kalibern 50 Browning (USA) (12.7×99) und 12.7×108 (GUS) wurden diese Grenzen jedoch deutlich nach oben verschoben, wie die in Klammern angegebenen Werte zeigen. Allerdings übersteigt auch der Schutz gegen diese Bedrohung „menschliche Maßstäbe“; tragbare Schutzbekleidungen werden kaum in Frage kommen.

6.5.1.3 Maßzahlen des Bedrohungspotenzials

Mit Mündungsenergie und Mündungsimpuls lässt sich die Bedrohung aus Sicht des Angriffsmittels und seiner Handlichkeit klassifizieren. Für die Beurteilung des Schutzes hingegen sei an den Abschn. 6.1.3 erinnert. Feste Materialien lassen sich bei Beschuss in zwei generelle Gruppen einteilen: die glasartigen Werkstoffe (Gläser und Keramik), bei denen primär die Energie für die Durchdringung verantwortlich ist, und die übrigen Materialien, bei denen die Penetrationsfähigkeit in erster Linie von der Energiedichte abhängt.

Energie und Energiedichte werden somit bei der Beurteilung von ballistischem Schutz von zentraler Bedeutung sein. Insbesondere bei Schutzeinrichtungen, die aus beiden Materialgruppen bestehen, wird die Beurteilung einen besonderen Prüfungsaufwand erfordern.

6.5.2 Bedrohungs- und Schutzklassen

6.5.2.1 Allgemeines

Ein Schutz gegen das gesamte unter Abschn. 6.5.1.2 beschriebene Bedrohungspotenzial der Kleinwaffen lässt sich nur bei festen Einrichtungen realisieren. Für einen alltagstauglichen, tragbaren Körperschutz wird man die Anforderungen einschränken müssen. Dies bedeutet aber, dass vor einer Beschaffung von Schutzausrüstungen genau definiert werden muss, gegen welche möglichen Angriffe geschützt werden soll. Das allgemeine Bedrohungspotenzial ist daher in verschiedene Klassen einzuteilen, die realen Angriffsszenarien Rechnung tragen und dadurch ermöglichen, konkrete Anforderungen zu definieren.

In einer ersten groben Aufteilung wird man die Kurz- und die Langwaffen trennen. Die Kurzwaffen ihrerseits lassen sich noch in verbreitete Gebrauchswaffen und in schwere Kurzwaffen separieren. Bei den Langwaffen ist eine Gruppierung in Armeewaffen einerseits und in Waffen für die Jagd naheliegend. Flinten sind getrennt zu betrachten, da sie hohe Energie mit unüblich geringer Energiedichte ver-

Tabelle 6.5. Gebräuchliche Waffenkategorien: Richtwerte für die Mündungsenergie E_0

Waffenkategorie	Kaliberbereich [mm]	mittlere E_0 [J]	maximale E_0 [J]
Gebrauchskurzwaffen	5.5–12	150–500	750
schwere Kurzwaffen	9–12	1000	2500
Langwaffen (Armeen)	5.5–6.5	1600	1800
	6.5–9	3000–3500	4000
12.7 × 99 / 12.7 × 108	12.7	18000	
Langwaffen (Jagdbüchsen)	5.5–6.5	2000	3000
	6.5–12	4000–5500	12000
Langwaffen (Flinten)	12 (18.2 mm)	2500	3500

binden. Bei den Armeewaffen sind noch die unter 6.5.1.2 erwähnten 12.7-mm-Kaliber zu berücksichtigen. Die Tabelle 6.5 zeigt eine solche Aufteilung mit Angabe des Kaliberbereichs und den mittleren und maximalen Mündungsenergien. Für die praktische Anwendung sind diese Kategorien noch zu präzisieren und weiter zu unterteilen (siehe auch B. P. KNEUBUEHL, 2003).

6.5.2.2 Kurzwaffen

Wird die nominelle Mündungsenergie von 26 der üblichsten Kurzwaffenkaliber betrachtet, so zeigen sich recht deutliche Stufen, und zwar bei rund 250 J, 500 J und 750 J. Darüber sind nur noch wenige verschiedene Kaliber vorhanden, wobei die Energie von Kaliber zu Kaliber relativ stark zunimmt. Werden dieselben Kaliber nach zunehmender Energiedichte geordnet, so ergeben sich – allerdings weniger ausgeprägt – Abstufungen bei 5, 8 und 11 J/mm².

Damit lassen sich sowohl bezüglich der Energie als auch der Energiedichte für Kurzwaffen je 4 Bedrohungsklassen definieren (siehe Tabelle 6.6). Bei der Einordnung der betrachteten Kaliber zu den betreffenden Klassen zeigt sich, dass einige davon verschiedenen Klassen zuzuordnen sind, je nachdem welche der beiden physikalischen Maßzahlen entscheidend ist. Daraus lässt sich bereits ersehen, dass es Schutzkonstruktionen gibt, die mit mehreren Kalibern geprüft werden müssen.

Tabelle 6.6. Bedrohungsklassen und zugehörige Kurzwaffenkaliber

Klasse	Energie	Kaliber	Energiedichte	Kaliber
I	bis 250 J	22 L. R. 7.65 Browning	bis 5 J/mm ²	7.65 Browning
II	bis 500 J	9 mm Luger, 38 Spl., 22 Win. Mag.	bis 8 J/mm ²	9 mm Luger 22 L. R.
III	bis 750 J	10 mm Auto	bis 11 J/mm ²	10 mm Auto
IV	über 750 J	357 Mag. 44 Rem. Mag.	über 11 J/mm ²	357 Mag., 44 Rem. Mag. 22 Win. Mag.

Tabelle 6.7. Energien und Energiedichten der wichtigsten Armeepatronen

Kaliber	Energie [J]	Energiedichte [J/mm^2]
5.45 × 39 Kalaschnikow	1400	60.0
223 Remington (5.56 × 45)	1660	68.4
5.56 mm NATO	1700	70.0
7.62 × 39 Kalaschnikow	2070	45.4
7.62 mm NATO (308 Win.)	3270	71.7
30-06 (7.62 × 63)	3400	74.6
7.62 × 54 R	3840	84.2
300 Winchester Magnum	5000	109.6
338 Lapua Magnum	6500	117.3

6.5.2.3 Langwaffen

Wie bereits in der Tabelle 6.5 erwähnt, werden Langwaffen zunächst in zwei Kategorien unterteilt: jene für militärischen Einsatz und jene für die Jagd. Armeegewehre sind in den meisten Fällen für größere Schusszahlen ausgelegt und befähigt, Dauerfeuer zu schießen. Damit eine angemessene Lebensdauer dieser Waffen erreicht werden kann, sind Militärpatronen in ihrer Leistung beschränkt.

Im Verlauf der letzten hundert Jahre wurde die geforderte Einsatzdistanz der Armeegewehre von über 1000 m auf einige hundert Meter verkürzt. Dies hatte eine Kaliberreduktion zur Folge, sodass heute im Zusammenhang mit dem Bedrohungspotenzial in erster Linie zwei Kaliberbereiche zu berücksichtigen sind, der eine um 5.5 mm, der andere um 7.5–8.5 mm (siehe Tabelle 6.7). Bemerkenswert ist, dass der kleinere Bereich trotz etwa halber Energie in Mündungsnähe ähnliche Energiedichten aufweist. Dies ist bei einer Schutzprüfung zu berücksichtigen.

Jagdbüchsen sind Einzelschusswaffen oder auch Repetierer. Die Schusszahlen sind gering, weshalb die zugehörigen Patronen mit höherer Energie ausgestattet

Tabelle 6.8. Energien und Energiedichten einiger typischer Jagdwaffen

Kaliber	Energie [J]	Energiedichte [J/mm^2]
5.6 × 57	2600	105.6
6 mm Remington	3030	107.2
6.5 × 68	4100	123.6
7 × 64	4050	105.2
7 mm Remington Magnum	4800	124.7
8 × 68 S	5700	113.4
9.3 × 62	4800	70.7
460 Weatherby Magnum	9600	93.6
12/70 (Flintenlaufgeschoss)	2800	10.7

werden können. Dies geht aus der Tabelle 6.8 deutlich hervor. Insbesondere bezüglich der Energiedichte übertreffen sie die Armeewaffen deutlich; sie haben somit ein erhebliches Bedrohungspotenzial.

Einen besonderen Fall bilden die Flinten bei Verwendung von Flintenlaufgeschossen. Bei relativ hoher Energie verfügen sie über eine nur geringe Energiedichte. Gegen glasartige Stoffe ist ihre Gefährlichkeit entsprechend einem Gewehr, bezüglich übrigen harten Materialien jedoch nur auf dem Niveau einer Kurzwaffe.

6.5.3 Die Bedrohungswahrscheinlichkeit

6.5.3.1 Anteile der Bedrohungswahrscheinlichkeit

Die Einteilung des Bedrohungspotenzials in verschiedene Klassen hat zur Folge, dass bei der Definition eines Schutzes eine dieser Klassen gewählt werden muss. Das bedeutet aber, dass mit anderen Bedrohungen möglicherweise auch zu rechnen ist. Bedrohungspotenziale werden dadurch stets mit Wahrscheinlichkeiten verbunden sein, die von mehreren Faktoren abhängen. Bestimmend ist dabei

- die Wahrscheinlichkeit, dass die Waffen der betreffenden Klasse verfügbar sind, wobei die Häufigkeit mitbestimmend ist,
- die Wahrscheinlichkeit, dass die Waffen zum Einsatz kommen (Jagd Waffen z. B. bilden selten eine Bedrohung),
- die Wahrscheinlichkeit, dass die eingesetzte Waffe die ballistischen Daten der betreffenden Klasse auch aufweist.

6.5.3.2 Verfügbarkeit und Häufigkeit

Verfügbarkeit und Häufigkeit des Angriffsmittels einer Bedrohungsklasse spielen bei der Eintretenswahrscheinlichkeit einer Bedrohung eine entscheidende Rolle.

Verfügbarkeit und Häufigkeit korrelieren nicht zwingend miteinander. Armeewaffen kommen in vielen Ländern sehr häufig vor, sind aber kaum verfügbar.

Dabei spielen die geografische Verbreitung der betreffenden Waffen, aber auch regionale Unterschiede eine Rolle und sind zu berücksichtigen.

Gebrauchskurzwaffen nach Tabelle 6.5 sind in Europa wesentlich häufiger anzutreffen als schwere Kurzwaffen. Dies hat zur Folge, dass beispielsweise die Bedrohungswahrscheinlichkeit durch Waffen im Kaliber 9 mm Luger viel höher ist als durch solche im Kaliber 44 Rem. Mag.

In Deutschland wird das typische Schweizer Armeekaliber 7.5×55 (GP 11) wegen der geringen Verbreitung ein ausgesprochen kleines Bedrohungspotenzial darstellen, im Gegensatz zur Schweiz, wo es zu den am meisten verwendeten Munitionssorten gehört.

Das Bedrohungspotenzial einer bestimmten Waffe kann auch rasch ändern. Ein typisches Beispiel hierfür bildet das Kaliber 7.62×39 Kalaschnikow. Bis zum Jahr 1989 ging in Westeuropa davon praktisch keine Gefahr aus, da die Waffe kaum

vorhanden war; in den Prüfrichtlinien für ballistischen Schutz erschien sie nicht. Nach 1989 nahm jedoch deren Verbreitung rasch zu und damit auch die potenzielle Bedrohung. Ein Jahrzehnt später wurde ihr eine eigene Beschussklasse zugeordnet.

6.5.3.3 Bedrohungswahrscheinlichkeit bei Kurzwaffen

Bei den bisherigen Überlegungen wurde auf die im jeweiligen Kaliber üblichste Mündungsenergie abgestellt. Diese stellt in der Regel einen Standardwert dar, der mit gebräuchlichen Lauflängen und handelsüblichen Patronen erreicht wird. Soll nun ein Schutz in einer bestimmten Schutzklasse ausgelegt und geprüft werden, ist zu berücksichtigen, dass mit größeren Lauflängen (z. B. Maschinenpistolen) oder speziellen Patronen oft höhere Energien erzielt werden. Es gilt deshalb herauszufinden, welche Mündungsenergien (bzw. Mündungsgeschwindigkeiten) beim Prüfkaliber einer Schutzklasse überhaupt vorkommen. Dies ist insbesondere bei Kurzwaffen wichtig, bei denen eine große Variabilität von Lauflängen und Munitionssorten vorliegt.

Dabei darf man sich nicht auf Firmenunterlagen abstützen, da deren Angaben zumeist mit Standardlauflängen (Messläufen) ermittelt werden.

Aus über 60 Messreihen (mit je mindestens 6 Schuss) mit 8 g Geschossen im Kaliber 9 mm Luger ergab sich mit 18 Patronenfabrikaten und Lauflängen zwischen 90 und 225 mm die in der Abb. 6.31 dargestellte Geschwindigkeitsverteilung, die sich sehr gut durch eine Normalverteilung approximieren lässt (Mittelwert 363.4 m/s, Standardabweichung 24.2 m/s).

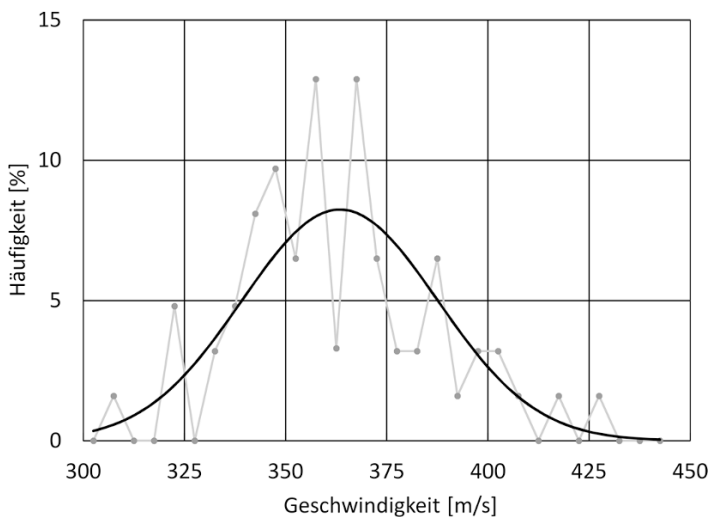


Abb. 6.31. Verteilung der Mündungsgeschwindigkeiten von 8-g-Geschossen im Kaliber 9 mm Luger, unterschiedliche Lauflängen und Patronenfabrikate zusammengefasst.

Wird demnach beim Kaliber 9 mm Luger mit einer Geschwindigkeit von 360 m/s gerechnet, so werden dadurch höchstens 50 % der vorkommenden Mündungsenergien dieses Waffenkalibers abgedeckt. Mit einer Geschwindigkeit von 395 m/s werden bereits 90 % und mit 420 m/s 99 % der mit diesem Kaliber erzielbaren Energien erfasst.

Ein ballistischer Schutz der Prüfstufe 3 (VPAM, 2014) gegen das Kaliber 9 mm Luger wird bei einer Geschwindigkeit von 415 ± 10 m/s geprüft. Die untere Grenze deckt rund 96 % der möglichen Mündungsgeschwindigkeiten ab. Da aber die Häufigkeit von Waffen mit höheren Geschwindigkeiten klein ist, ist auch die Eintretenswahrscheinlichkeit einer solchen Bedrohung gering.

Ähnliche Verteilungen der Mündungsgeschwindigkeit ergeben sich auch bei anderen Kurzwaffenkalibern. Bei geringerer Variabilität der Lauflängen und der Munitionssorten entstehen schmalere Kurven. Zusammenfassend kann aus diesen Darlegungen Folgendes geschlossen werden:

- Standardgeschwindigkeiten von Kurzwaffen eignen sich wohl für eine Klasseneinteilung der Bedrohung, für die Festlegung des effektiven Angriffspotenzials sind sie ungeeignet.
- Bei der Festlegung der Bedrohungswahrscheinlichkeit sind das Angriffspotenzial und die Häufigkeit des Vorkommens zu berücksichtigen.

6.5.3.4 Bedrohungswahrscheinlichkeit bei Langwaffen

Die Lauflängen militärischer Langwaffen sind (aus Normierungsgründen) in geringem Maß unterschiedlich ($< \pm 5$ %); das Gleiche gilt auch für die Munition. Eine Geschwindigkeitsverteilung lässt sich so kaum bestimmen. In der Regel werden die nominellen Mündungsgeschwindigkeiten der verschiedenen Kaliber als wahrscheinlichstes Bedrohungspotenzial angesehen und in Prüfrichtlinien übernommen.

Jagd Waffen scheinen offensichtlich keine Bedrohung zu sein. Die Bedrohungswahrscheinlichkeit ist so gering, dass es in den einschlägigen Richtlinien zu ballistischem Schutz keine Hinweise oder Angaben zu diesen Kalibern gibt.

6.5.4 Schutzwahrscheinlichkeit

6.5.4.1 Durchschusswahrscheinlichkeit eines ballistischen Schutzes

Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen müssen nicht nur bei der Bedrohung, sondern auch beim Schutz angestellt werden. Gemeinhin wird angenommen, dass ein Schutzaufbau einem bestimmten Angriff entweder standhält oder nicht. In der Praxis zeigt sich jedoch ein anderes Bild.

Wird eine Schutzkonstruktion mit steigender Geschwindigkeit (Energie) beschossen, so wird vorerst das Geschoss aufgehalten, dann aber wird einmal eine Geschwindigkeit erreicht, bei der das Material erstmals durchschossen wird. Bei noch höherer Auftreffgeschwindigkeit kann aber das Geschoss durchaus wieder ge-

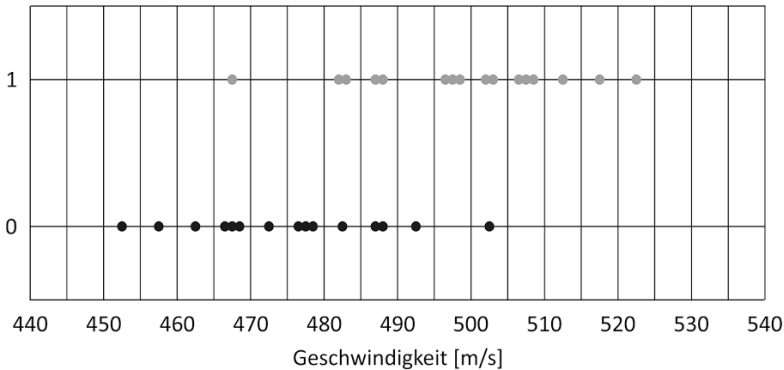


Abb. 6.32. Durchschussdiagramm einer realen Schutzweste, eingeteilt in Geschwindigkeitsklassen von 5 m/s. Die „0“ bedeutet gestoppt, die „1“ durchgeschossen. Durchschüsse und gestoppte Schüsse überlappen sich.

stoppt werden. Insgesamt ergibt sich stets ein Geschwindigkeitsbereich, in dem sich gestoppte Schüsse („Nicht-Durchschüsse“) und Durchschüsse überlappen. Abb. 6.32 zeigt ein reales Bild des Beschusses einer textilen Schutzweste mit 31 Schüssen. Unterhalb von 465 m/s wurden alle Schüsse gestoppt, oberhalb von 505 m/s durchschlugen alle die Weste. Werden die Geschwindigkeiten dazwischen in (statistische) Klassen von beispielsweise 5 m/s eingeteilt, so kann das Geschoss in einer Klasse sowohl gestoppt werden als auch einen Durchschuss erzeugen.

In jeder Klasse lässt sich nun die relative Durchschusshäufigkeit berechnen und aufzeichnen. Dabei ergibt sich die in der Abb. 6.33 wiedergegebene Darstellung. Mit zunehmender Schusszahl wird immer deutlicher, dass die Gauß'sche Normal-

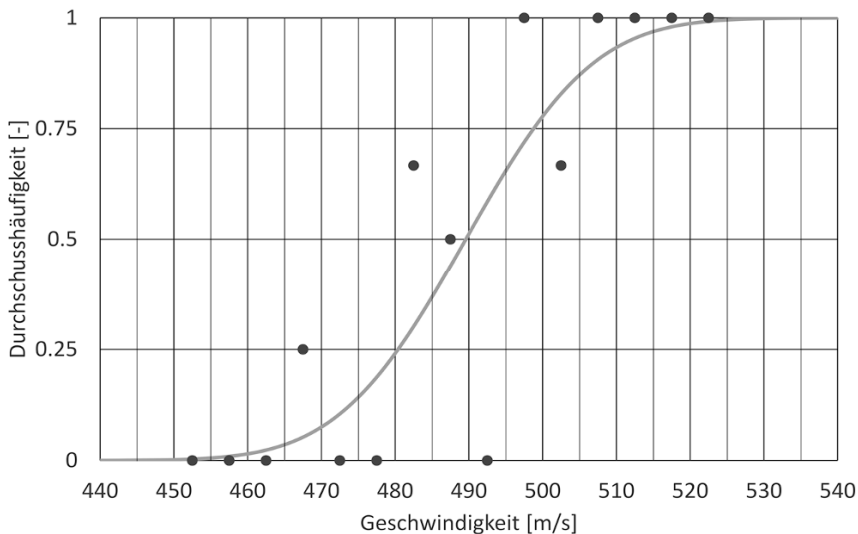


Abb. 6.33. Durchschusshäufigkeiten des Durchschussdiagramms von Abb. 6.32. Eingetragen ist auch die daraus resultierende Gauß'sche Normalverteilung.

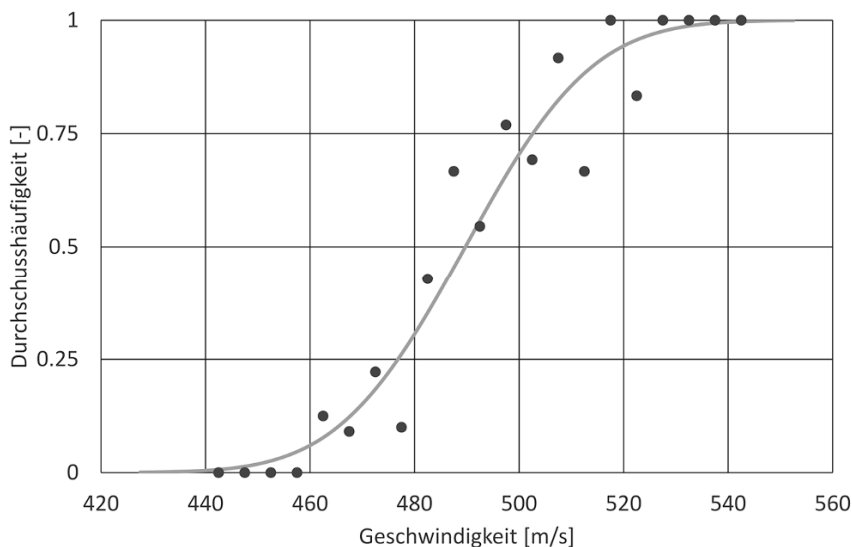


Abb. 6.34. Durchschusssdiagramm der Schutzweste aus Abb. 6.33, nach Prüfung von 5 Exemplaren mit insgesamt 151 Schüssen. Die Normalverteilung tritt bereits recht deutlich zutage.

verteilungsfunktion ein gutes Modell zur Beschreibung der Durchschusswahrscheinlichkeit durch einen ballistischen Schutz liefert. Von der Schutzweste, deren Ergebnisse in den Abb. 6.32 und 6.33 dargestellt sind, wurden insgesamt fünf Exemplare mit 151 Schüssen beschossen. Die Durchschusshäufigkeiten, die sich dabei ergaben, sind in der Abb. 6.34 aufgezeigt. Der Trend, einer Normalverteilung zu folgen, wird bereits gut sichtbar.

Statistische Testmethoden, welche prüfen, ob eine Datenmenge normalverteilt ist oder nicht, bestätigen, dass Durchschusshäufigkeiten durch eine Normalverteilung gut approximiert werden.

Weil sich eine Normalverteilung allein durch zwei Parameter – Mittelwert und Standardabweichung – vollständig beschreiben lässt, gilt dies auch für die Durchschusswahrscheinlichkeit eines ballistischen Schutzes. Der Mittelwert entspricht jener Geschwindigkeit, bei welcher mit 50 % Durchschüssen gerechnet werden muss. Sie wird üblicherweise mit v_{50} bezeichnet. Die Standardabweichung (s) ihrerseits ist ein Maß für die Steilheit des Anstieges der Durchschusswahrscheinlichkeitskurve; je größer sie ist, desto flacher verläuft der Anstieg zwischen gestoppten Schüssen und dem Durchschuss.

Jeder ballistische Schutz – sei es ein durchschusshemmendes Glas, eine Schutzweste oder ein Stahlblech – besitzt eine entsprechende Durchschusswahrscheinlichkeit. Je nach Art und Beschaffenheit des Materials verläuft die Kurve steiler oder flacher. Homogene und gut definierte Materialien (z. B. Stahl) weisen in der Regel steile, stark strukturierte Materialien wie Gewebe eher flachere Verläufe auf.

Bei gewissen Materialien (Keramik, Glas) kann es mitunter schwierig bis unmöglich sein, die Parameter der Durchschusswahrscheinlichkeit zu bestimmen.

Sind v_{50} und s der Verteilung der Durchschüsse eines ballistischen Schutzes einmal bestimmt (zum Verfahren siehe Abschn. 6.5.5.3), so kann zu jeder beliebigen Geschwindigkeit die Durchschusswahrscheinlichkeit berechnet werden.

In dem in Abb. 6.34 dargestellten realen Beispiel ergibt sich eine mittlere Durchschussgeschwindigkeit von 489.7 m/s und eine Standardabweichung von 19.1 m/s. Die Durchschusswahrscheinlichkeit bei der in Abschn. 6.5.3.3 erwähnten Schutzstufe 3 nach VPAM (415 m/s) beträgt bei dieser Weste demnach $4.7 \cdot 10^{-5}$, also 4.7 Durchschüsse pro 100'000 Schüsse.

Wichtig, und für den Benutzer entscheidend, ist das Risiko, bei der durch eine Richtlinie oder Norm vorgegebenen Prüfgeschwindigkeit noch einen Durchschuss zu erhalten. Dieses Risiko kann beispielsweise bei einer Beschaffung vorgegeben werden; die Produkte lassen sich danach prüfen.

6.5.4.2 Schutzwahrscheinlichkeit eines ballistischen Schutzes

Durchschießen und Stoppen schließen sich bei einem ballistischen Schutz aus. Die Wahrscheinlichkeit w_s , dass ein Geschoss im Schutz gestoppt wird, ist somit die Gegenwahrscheinlichkeit der Durchschusswahrscheinlichkeit w_d

$$(6.5:1) \quad w_s = 1 - w_d \quad [-]$$

Im Abschn. 6.5.4.1 ist bei der Bestimmung der Durchschusswahrscheinlichkeit noch nicht berücksichtigt worden, wie häufig ein Angriff mit einer bestimmten Geschwindigkeit überhaupt in Frage kommt. Diese Angriffswahrscheinlichkeit w_b ist nach Abschn. 6.5.3.3 angenähert normalverteilt. Sie ist bei der Angabe der Schutzwahrscheinlichkeit mit zu berücksichtigen. Aus Gl. (6.5:1) entsteht so

$$(6.5:2) \quad w_s = 1 - w_d \cdot (1 - w_b) \quad [-]$$

In der Abb. 6.35 ist diese Schutzwahrscheinlichkeit für das Beispiel aus Abb. 6.34 dargestellt. Bei einer v_{50} von 490 m/s und einer s von 19.1 m/s wird mit Berücksichtigung der Wahrscheinlichkeit des Bedrohungspotenzials bei der Prüfstufe 3 (415 m/s) ein Schutz von 99.9999424 % erreicht.

Die Darstellung der Abb. 6.35 zeigt auch auf, dass bei der Schutzwahrscheinlichkeit ein Minimum existiert (schwarze Linie). Dieses liegt bei einer Geschwindigkeit von ca. 442.6 m/s und beträgt 99.99964 %.

Durch Variation der Parameter lässt sich zudem untersuchen, wie sensitiv die Schutzwahrscheinlichkeit auf Änderungen der v_{50} und der s reagiert. Dies wird in der Abb. 6.35 beispielhaft durch die hellgraue Linie (Reduktion der v_{50} um 20 m/s bei gleicher s) und die gestrichelte Linie (bei gleicher v_{50} Erhöhung der s um 6 m/s) aufgezeigt. Im ersten Fall wird bei der Prüfstufe 3 das Risiko eines Durchschusses um den Faktor 43, im zweiten Fall um 30 erhöht. In beiden Fällen nimmt das Minimum ebenfalls erheblich ab.

Zusammenfassend lässt sich Folgendes festhalten:

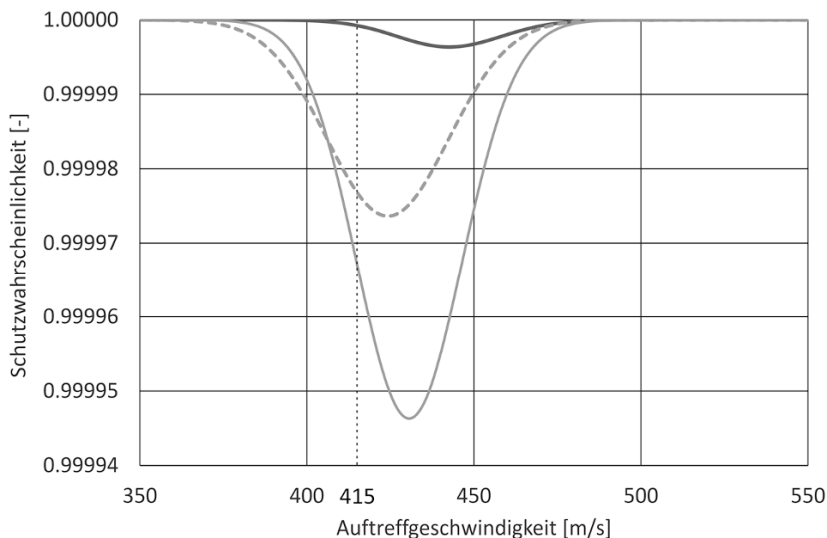


Abb. 6.35. Verlauf der Schutzwahrscheinlichkeit unter Einbezug der Häufigkeit des Bedrohungspotenzials. Die schwarze Linie entspricht dem Beispiel aus Abb. 6.34, die hellgraue Linie ergibt sich bei einer um 20 m/s geringeren v_{50} und die gestrichelte Linie mit einer um 6 m/s höheren Stabw. Eingetragen ist auch die Geschwindigkeit der Prüfstufe 3 (VPAM).

- Die mittlere Durchschussgeschwindigkeit eines ballistischen Schutzes muss deutlich über der zu erwartenden Angriffsgeschwindigkeit liegen, wenn eine hohe Schutzwahrscheinlichkeit erreicht werden soll.
- Die Streuung der Durchschussgeschwindigkeit ist ein Qualitätsmerkmal des Schutzes. Sie sollte so klein wie möglich sein.
- Analoge Untersuchungen und Überlegungen lassen sich selbstverständlich für alle Kaliber durchführen, sofern die Parameter bestimmbar sind.

6.5.5 Prüfung von ballistischem Schutz

6.5.5.1 Allgemeines

Auf den ersten Blick scheint es einfach zu sein, einen ballistischen Schutz zu prüfen. Es würde doch genügen, einige Schüsse mit der Waffe, deren Geschosse aufgehalten werden sollen, dagegen zu schießen. Wenn keiner davon den Schutz durchdrungen hat, könnte dieser bereits verwendet werden (siehe Abb. 6.36). Bei einer solchen Prüfung werden allerdings zwei wichtige Punkte übergangen.

Grundbedingungen. Prüfungen müssen wiederholbar sein und dabei stets zum gleichen Ergebnis führen, und sie dürfen nicht davon abhängen, wo und durch wen sie durchgeführt werden. Diese beiden Grundbedingungen – Wiederholbarkeit und Unabhängigkeit – haben zur Folge, dass alle Modalitäten einer Prüfung genau fest-



Abb. 6.36. Schutzwestenprüfung im Jahre 1931. Originalbildtitel: „Der Kugelschützpanzer ist eine deutsche Erfindung und wird von der Berliner Kriminalpolizei bei Kämpfen mit Verbrechern getragen“. (Quelle siehe Abbildungsnachweis).

gelegt sein müssen. Dies betrifft nicht nur den Angriff (das Geschoss und seine Geschwindigkeit), sondern auch die Art und Weise, wie das Prüfobjekt angeordnet und gehalten wird.

Wird beispielsweise ein durchschusshemmendes Glas einmal hart und einmal weich in einen Rahmen eingespannt, so kann es das eine Mal das Geschoss stoppen, das andere Mal hingegen durchschossen werden.

Auf Fichtenholz aufgespannt, wird jede geprüfte textile Schutzweste glatt durchschlagen.

Prüfnormen und -richtlinien. Beschussprüfungen finden daher stets unter idealisierten Bedingungen statt. Geschosstyp, Geschwindigkeit und Schussdistanz sind genau vorgegeben, das Prüfobjekt (dessen Abmessungen normiert sind) wird in einem definierten Zielaufbau festgehalten, Umgebungsbedingungen wie Temperatur und Feuchtigkeit müssen innerhalb gewisser Schranken liegen. Alle diese Vorgaben sind in Prüfnormen und -richtlinien festgelegt (EN, 1999, VPAM, 2009, NIJ, 2008 und weitere) und müssen durch den Prüfenden eingehalten werden.

Prüfungen sind deshalb nicht in erster Linie dazu da, die „Wirklichkeit“ nachzubilden, sondern verschiedene Produkte unter gleichen Bedingungen und gegenüber einem vorgegebenen Standard (der Prüfnorm) zu vergleichen. Dass dieser Standard sich an der Realität (d. h. am effektiven Angriffspotenzial) orientieren muss, ist selbstverständlich und im Abschn. 6.5.3 dargelegt worden. Eine direkte Umsetzung der Prüfergebnisse in die „Wirklichkeit“ ist allerdings oft nur bedingt möglich, da die Abmessungen und Anordnungen realer Schutzkonstruktionen selten jenen der Prüfmuster entsprechen (siehe dazu auch Abschn. 6.3.1).

Das Messmittelproblem. Die Prüfung von ballistischem Schutz nimmt innerhalb der üblichen Materialprüfungen eine Sonderstellung ein. Sie unterscheidet sich vor allem darin, dass das Messmittel (das Geschoss) mit dem Prüfobjekt wechselwirkt und selbst auch irregulär verformt werden kann. Dies führt gelegentlich zu seltsamen Ergebnissen, die einer individuellen Beurteilung bedürfen.

Wird eine Stahlplatte mit einem Geschoss mit gehärtetem Stahlkern getestet, so wird das Geschoss zunächst gestoppt, bei Erhöhung der Geschwindigkeit durchschlägt es die Platte, vermutlich noch mit relativ intaktem Kern. Bei einer weiteren Steigerung der Auftreffgeschwindigkeit wird es wiederum aufgehalten, möglicherweise, weil der Kern bricht (und dadurch die Energiedichte sinkt). Nimmt die Geschwindigkeit weiter zu, kommt es meist erneut zum Durchschuss.

Ein ähnliches Verhalten kann bei textilen Schutzwesten beobachtet werden, bei denen bei sehr hohen Geschwindigkeiten das Geschoss so stark deformiert wird, dass es nicht mehr durchdringt.

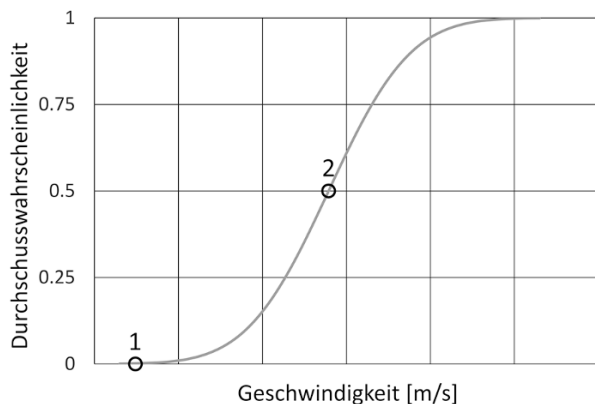


Abb. 6.37. Ansatzpunkte zweier unterschiedlicher Prüfverfahren. Näheres siehe Text.

In der Regel treten solche Ereignisse erst bei Geschwindigkeiten ein, die in der Realität nicht oder nur unter sehr speziellen Bedingungen auftreten; ein übliches Prüfverfahren wird dadurch normalerweise nicht gestört. Dennoch sollte man beim Auffinden einer Durchschussgrenze daran denken, dass es möglicherweise eine zweite darunter oder darüber liegende geben könnte, dies insbesondere bei Stahlzielen und Kerngeschossen.

Prüfverfahren. Anforderungen an einen ballistischen Schutz müssen sich an den möglichen Prüfverfahren orientieren, die auch in den Prüfrichtlinien festgehalten sind. Mit Blick auf die bereits besprochene Kurve der Durchschusswahrscheinlichkeit (siehe Abschn. 6.5.4.1 und Abb. 6.37) stehen hierfür die folgenden drei Möglichkeiten offen:

- 1 Festlegen einer bestimmten (hohen) Angriffsgeschwindigkeit, bei welcher der Schutz mit endlich vielen Prüfschüssen nicht durchdrungen werden darf (Prüfung auf Nicht-Durchschuss, Punkt 1 in Abb. 6.37),
- 2 Forderung einer minimalen mittleren Durchschussgeschwindigkeit v_{50} , die mit dem zugehörigen Prüfverfahren ermittelt wird (Punkt 2 in Abb. 6.37),
- 3 wie Punkt 1, jedoch mit Festlegung einer maximalen Durchschusswahrscheinlichkeit bei der betreffenden Angriffsgeschwindigkeit; das Prüfverfahren erfordert neben der Ermittlung der mittleren Durchschussgeschwindigkeit auch die Bestimmung der zugehörigen Standardabweichung, damit die Durchschusswahrscheinlichkeit berechnet werden kann.

Die bei den Punkten 2 und 3 anzuwendenden Prüfverfahren erfordern sowohl Durchschüsse als auch gestoppte Schüsse im Prüfobjekt. Sie eignen sich vor allem für die Prüfung von Materialien, bei denen in einem gewissen Geschwindigkeitsbereich beide Ereignisse vorkommen.

Das zu Punkt 1 gehörende Prüfverfahren kommt in erster Linie bei kleinen Streuungen der Durchschussgeschwindigkeit zum Zug. Dies ist dann der Fall, wenn zwischen den Geschwindigkeiten, bei denen mit großer Wahrscheinlichkeit kein Durch-

schuss erzielt wird, und den Geschwindigkeiten, bei denen der Schutz fast immer durchschossen wird, nur ein kleiner Unterschied besteht. Bei solchen Materialien kommt es selten vor, dass bei einer bestimmten Geschwindigkeit sowohl Durchschüsse als auch Nicht-Durchschüsse auftreten.

6.5.5.2 Prüfung auf Nicht-Durchschuss

Die Prüfung eines ballistischen Schutzes auf Nicht-Durchschuss ist mit einigen recht heiklen Problemen verbunden, welche besonders zu beachten sind.

Zuverlässigkeit der Prüfung. Diese Prüfmethode basiert auf einer gewissen Anzahl Schüssen pro Prüfobjekt. Durchschlägt ein Schuss, wird das Prüfobjekt zurückgewiesen, durchschlägt kein Schuss, wird es angenommen. Eine solche „gut-schlecht“-Prüfung besitzt stets zwei Möglichkeiten, mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit zu einer Fehlaussage zu gelangen.

- 1 Das Prüfobjekt wird nach n gestoppten Schüssen angenommen (n ist die von der Prüfrichtlinie vorgegebene Anzahl Schüsse), obwohl es eigentlich den realen Anforderungen nicht genügt, z. B. weil der $n+1$ te Schuss ein Durchschuss gewesen wäre.
- 2 Das Prüfobjekt wird zurückgewiesen, obwohl es die realen Anforderungen erfüllen würde. Dies ist dann der Fall, wenn innerhalb der n Prüfschüsse ein Durchschuss entsteht, alle folgenden Schüsse jedoch gestoppt würden, auch wenn es 100'000 wären.

Zu Fall 1. Bei gegebener Anzahl Prüfschüsse n und gegebener effektiver Durchschusswahrscheinlichkeit w_d des Prüfobjektes ergibt sich die Wahrscheinlichkeit der Annahme des Prüfobjektes w_a mittels einer Binominalverteilung

$$(6.5:3) \quad w_a = \binom{n}{k} \cdot w_d^k \cdot (1 - w_d)^{n-k} . \quad [-]$$

Die Zahl k bedeutet die Anzahl Durchschüsse. Wegen der Voraussetzung, dass das Prüfobjekt nur angenommen wird, wenn kein Durchschuss entstanden ist, gilt stets $k = 0$.

Die Annahmewahrscheinlichkeiten nach Gl. (6.5:3) sind in der Abb. 6.38 in Abhängigkeit der Anzahl Prüfschüsse für vier Durchschusswahrscheinlichkeiten dargestellt.

Aus der Grafik lässt sich ablesen, dass ein Prüfobjekt mit einer Durchschusswahrscheinlichkeit von 1 % (1 Durchschuss pro 100 Schüsse) bei einer 10-Schuss-Abnahmeprozedur in 90 % der Fälle angenommen wird, und ein ballistischer Schutz mit einem Durchschuss innerhalb 20 Schüssen wird bei einem 6-Schuss-Test in rund 73 % der Prüfungen als gut befunden.

Eine Erhöhung der Schusszahl führt bei konstanter Durchschusswahrscheinlichkeit zu kleineren Wahrscheinlichkeiten fälschlicher Annahme des Prüfobjektes. Im Bereich praktikabler Prüfschusszahlen bleibt die Annahmewahrscheinlichkeit jedoch stets hoch, und es zeigt sich praktisch keine Information über den wirklichen Schutzgrad des geprüften Objektes.

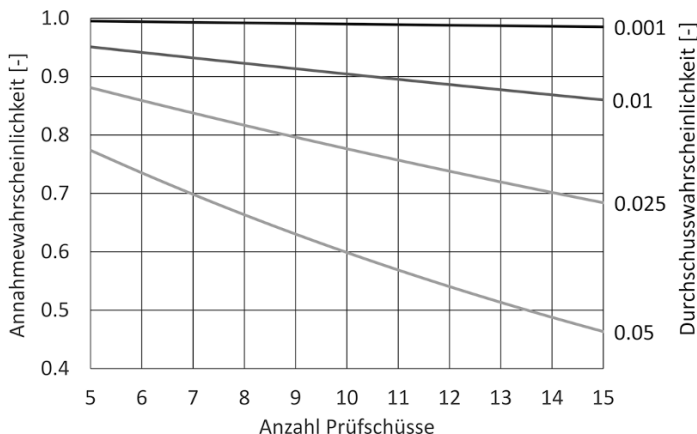


Abb. 6.38. Grafik zur Bestimmung der Annahmewahrscheinlichkeit eines ballistischen Schutzes bei gegebener Durchschusswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit der Anzahl gestoppter Prüfschüsse.

Zu Fall 2: Bei der zweiten möglichen Fehlaussage stellt sich die Frage, mit welcher Wahrscheinlichkeit w_r ein Prüfobjekt bei einem Test mit n Schüssen zurückgewiesen wird, obwohl es der Anforderung, eine gewisse Durchschusswahrscheinlichkeit w_d nicht zu überschreiten, genügen würde. Diese Wahrscheinlichkeit ergibt sich aus der Beziehung

$$(6.5:4) \quad w_r = 1 - [1 - w_d]^n. \quad [-]$$

Die Auswertung dieser Gleichung zeigt, dass dieser Fall einer Fehlentscheidung bei einer Prüfung auf Nicht-Durchschuss nur sehr selten auftreten kann und mit zunehmender Güte des ballistischen Schutzes noch seltener wird.

Wie viele Schüsse sind erforderlich? Es ist bei der Prüfung auf Nicht-Durchschuss eine zentrale Frage, wie viele Schüsse gestoppt werden müssen, damit ein Schutz als durchschusshemmend gegen die betreffende Bedrohung gelten kann. Ein Beispiel stellt die in Abb. 6.39 dargestellte Stahlplatte dar. Hätte der Prüfende diese nach 25 gestoppten Schüssen als Schutz bezeichnen dürfen?

Schutzwesten wurden während langer Zeit mit insgesamt 10 Schüssen geprüft, die Euro-Norm für die Prüfung von Türen, Fenstern und Abschlüssen (EN, 1998)

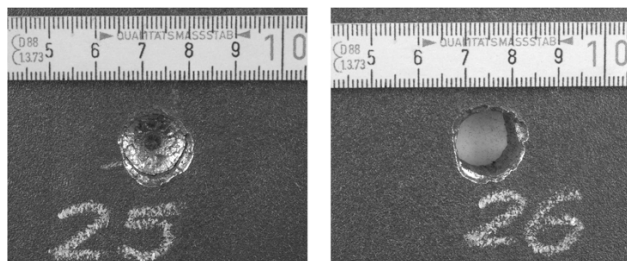


Abb. 6.39. Realer Test gegen eine Stahlplatte. 25 Schüsse wurden gehalten, der 26. ergab einen Durchschuss.

schreibt bei allen kritischen Stellen 3 Schüsse unter gleichen Bedingungen vor. Gewisse Stellen, z. B. Verriegelungen, lassen aus technischen Gründen gar nur einen Prüfschuss zu. Allerdings gestattet das Prüfverfahren dem Prüfenden, den Test mit einem neuen Prüfobjekt zu wiederholen, „falls die Ergebnisse keine eindeutige Interpretation zulassen“. Denkt man in diesem Zusammenhang an den Absatz „Zuverlässigkeit der Prüfung“ am Anfang dieses Abschnittes zurück, kommt man nicht umhin festzustellen, dass es bei der Prüfung auf Nicht-Durchschuss noch weitere qualitative, schwer beschreibbare Beurteilungsmöglichkeiten geben muss.

Zusätzliche Beurteilungsmöglichkeiten. Es gibt in vielen Fällen Hinweise, wie nahe ein gestoppter Schuss an einem Durchschuss war. Bei harten Materialien lässt sich beispielsweise die Rückseite inspizieren, die oft Aufschluss darüber gibt, ob eine Penetration unmittelbar bevorsteht oder nicht.

Wäre auch die Rückseite des Stahlblechs in Abb. 6.39 abgebildet, würde beim Schuss Nr. 25 eine deutliche Beule zu sehen sein, die sich auch schon bei den ersten Schüssen gezeigt haben muss und die ein Anzeichen dafür wäre, dass die Blechdicke als Schutz zu gering ist.

Bei textilen Schutzpaneelen lässt sich feststellen, zwischen welchen Lagen das Geschoss gestoppt worden ist und dies als Anhaltspunkt nehmen, ob sich der Schutz in einem kritischen Bereich befindet oder nicht.

Hier ist allerdings Vorsicht geboten, weil im ungefähr letzten Viertel der Schichten nie ein Geschoss gefunden wird. Entweder wird es vorher gestoppt, oder es durchdringt alle Schichten. Der Grund hierfür kann aus den Erklärungen im Abschn. 6.4 abgeleitet werden.

Solche Hinweise sind meist Erfahrungswerte, die sich nicht leicht in exakt messbare Regeln (z. B. Beulenhöhe, Anzahl textile Lagen) umwandeln lassen, weil sie nicht allgemein gültig sind, sondern von der betreffenden Prüfungssituation abhängen. Man wird sich in diesen Fällen auf die Erfahrung des Prüfenden verlassen müssen. Prüfungen auf Nicht-Durchschuss sind daher keine Prüfungen, die allein nach einem fest vorgegebenen Schema durchgeführt werden können.

6.5.5.3 Bestimmung der Verteilungsparameter

Nach Abschn. 6.5.4.1 kann die Durchschusswahrscheinlichkeit eines ballistischen Schutzes durch eine Gauß'sche Verteilungsfunktion approximiert werden. Die Wahrscheinlichkeit einer Perforation bei einer beliebigen Angriffsgeschwindigkeit kann somit bestimmt werden, wenn die beiden Verteilungsparameter, die mittlere Durchschussgeschwindigkeit (v_{50}) und die Standardabweichung (s), explizit bekannt sind. Für deren Ermittlung aus den in einem Beschusstest erzielten Ergebnissen stehen verschiedene Verfahren zur Verfügung.

Die STANAG-Methode. Im Zusammenhang mit der Prüfung von Splitterschutzwesten wurde im NATO-Standard STANAG 2920 eine einfache Methode beschrieben, mit welcher die v_{50} angenähert bestimmt werden konnte. Es wurde eine gerade Anzahl Schüsse geschossen (mindestens 6), wobei die Hälfte Durchschüsse sein mussten. Die ganze Streuung hatte innerhalb einer durch die Gesamtschusszahl be-

stimmten Spanne zu liegen. Die v_{50} ergab sich als Mittelwert sämtlicher Schüsse. Die s ließ sich dabei nicht ermitteln.

Direkte Bestimmung von v_{50} und s . Beide Parameter der Verteilungsfunktion der Durchschusswahrscheinlichkeit lassen sich schätzen, wenn auf die Grundbeziehungen der Gauß'schen Normalverteilung zurückgegriffen wird

$$(6.5:5) \quad v_m = \int_{-\infty}^{\infty} v \cdot p(v) \cdot dv, \quad [\text{m/s}]$$

$$(6.5:6) \quad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (v - v_m)^2 \cdot p(v) \cdot dv, \quad [\text{m}^2/\text{s}^2]$$

wo v_m den Mittelwert, σ^2 die Varianz und $p(v)$ die Dichtefunktion der Durchschusswahrscheinlichkeit bedeutet.

Beschussprüfungen werden stets mit einer endlichen Anzahl von Schüssen durchgeführt. Die beiden Beziehungen (6.5:5) und (6.5:6) sind daher zu diskretisieren und die Wahrscheinlichkeitsfunktion $p(v)$ ist zu schätzen.

Dies erfolgt durch Einteilen der Geschwindigkeit in Klassen, in denen die Wahrscheinlichkeitsfunktion durch die relative Häufigkeit f_k geschätzt werden kann. Wird die Klassenmitte mit v_k bezeichnet, so ergeben sich aus (6.5:5) und (6.5:6) die Beziehungen

$$(6.5:7) \quad v_{50} \approx \sum v_k \cdot f_k, \quad [\text{m/s}]$$

$$(6.5:8) \quad s \approx \sqrt{\sum (v_k - v_{50})^2 \cdot f_k}. \quad [\text{m/s}]$$

Mit Simulationen ließ sich zeigen, dass die Schätzung von s nach Gl. (6.5:8) für kleine Schusszahlen (< 100) systematisch zu kleine Werte ergibt, die mit

$$(6.5:9) \quad s_{\text{kor}} = s \cdot [1.71 - 0.151 \cdot \ln(n)], \quad [\text{m/s}]$$

zu korrigieren sind.

Eine ausführliche Anleitung für die Durchführung und Auswertung solcher Beschussprüfungen findet sich in B. P. KNEUBUEHL (2003) und in VPAM (2014).

Weitere Verfahren. Anstelle der oben beschriebenen Methode können andere, ähnlich basierte Verfahren angewendet werden, wie z. B. die „Probit“-Analyse (beschrieben in D. J. FINNEY, F. TATTERSFIELD, 1952), das Verfahren nach H. J. LANGLE (1965) oder die „Bruceton“-Methode (R. WILD, E. von COLLANI, 2002). Bei der Probit-Analyse und beim Verfahren nach LANGLE werden keine Klasseneinteilungen benötigt. Eine Übersicht über diese Methoden und ein Vergleich der damit erzielten Resultate finden sich in M. MALDAGUE (2008).

Die erforderliche Schusszahl. Auch bei dem oben beschriebenen Verfahren der direkten Bestimmung von v_{50} und s stellt sich die Frage, wie viele Schüsse für eine einigermaßen zuverlässige Auswertung erforderlich sind. Basierend auf vielen Prüfungen und Simulationen hat sich gezeigt, dass mit 30 Schüssen (etwa 15 ± 3

Tabelle 6.9. Zahlen zur Bestimmung von Durchschusswahrscheinlichkeiten

w_d	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	$2 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$	10^{-1}
α_{wd}	-4.753	-4.265	-3.719	-3.090	-2.326	-2.054	-1.645	-1.282

Durchschüsse und die restlichen gestoppten Schüsse) annehmbare Ergebnisse erzielt werden (siehe Abb. 6.33). Sehr zuverlässige Werte ergeben sich, wenn diese Prüfung mehrfach wiederholt werden kann (siehe Abb. 6.34, bei 5-maliger Wiederholung).

Da solche Versuche recht kostspielig sind, wird man abwägen müssen, wie zuverlässig das Ergebnis sein soll. Es lassen sich auch mit 16–20 Schüssen brauchbare Resultate erzielen. Allerdings sollten diese durch einen erfahrenen Prüfer begleitet werden.

Bestimmung der Durchschusswahrscheinlichkeit. Ist einmal die v_{50} und die zugehörige Standardabweichung s bestimmt, so kann mit Hilfe der Gauß'schen Normalverteilung zu einer gegebenen Durchschusswahrscheinlichkeit w_d die zugehörige Schwellengeschwindigkeit v_{wd} berechnet werden

$$(6.5:10) \quad v_{wd} = v_{50} + \alpha_{wd} \cdot s \quad [\text{m/s}]$$

Die Zahlen α_{wd} sind der standardisierten Normalverteilung entnommen. Für die wichtigsten Durchschusswahrscheinlichkeiten sind sie in der Tabelle 6.9 zusammengestellt.

Umgekehrt lässt sich bei Kenntnis von v_{50} und s zu einer gegebenen Geschwindigkeit v_{wd} die zugehörige Durchschusswahrscheinlichkeit w_d ermitteln.

$$\text{Mit} \quad \alpha_{wd} = \frac{v_{wd} - v_{50}}{s}, \quad [-]$$

ergibt sich

$$(6.5:11) \quad w_d = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\alpha_{wd}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \cdot d\xi \quad [-]$$

Die Werte lassen sich auch Tabellen zur Normalverteilung entnehmen oder können mittels eines Programms zur Normalverteilung berechnet werden.

6.5.6 Beurteilung des Wirkungspotenzials hinter dem Schutz

Schutzmaterialien und -vorrichtungen können Geschosse stoppen und dennoch auf der geschützten Seite Verletzungen erzeugen. Bei harten Materialien geschieht dies durch Abplatzen von Splittern (z. B. bei Glas) oder durch das Herausschlagen von Teilen des Schutzmaterials. Weiche Schutzmaterialien neigen auf der geschützten Seite zu einem sehr schnellen Ausbeulen und somit zu einer stumpfen Gewalteinwirkung. Es gehört mit zu der Prüfung eines ballistischen Schutzes, das Wirkungspotenzials eines gestoppten Schusses hinter dem Schutz zu ermitteln.

In gewissen Regelwerken wird auf der Schutzseite Splitterabgang überhaupt nicht toleriert. Andere beschränken die abgehenden Splitter auf eine maximal zulässige Energiedichte, die hinter dem Prüfobjekt mit Hilfe einer dünnen Folie (z. B. Aluminium) geprüft wird. Wird diese Folie von Splittern durchschlagen, wird der geprüfte Schutz als ungenügend taxiert.

Schutzmaterialien, die bei Schusseinwirkung auf der Rückseite zum Ausbeulen neigen, werden auf ein weiches, verformbares Medium (Plastilin, ballistische Seife) aufgespannt. Das Wirkungspotenzial auf der Schutzseite wird auf Grund der erzeugten Delle beurteilt, deren Volumen ein gewisses Maß nicht überschreiten darf.

Dieses Volumen ist ein Maß für die übertragene Energie, siehe Abschn. 6.2.2. Allerdings fehlen die Grenzwerte zur Beurteilung der Schwere der Verletzungen bei stumpfer Gewalteinwirkung noch weitgehend (siehe dazu B. P. KNEUBUEHL 2008).

Weil die Durchschussfestigkeit von weichen Schutzmaterialien stark von der Verformbarkeit des Hintergrundes abhängig ist, muss für reproduzierbare Prüfungen das Hintergrundmaterial genau definiert sein. Dies geschieht in der Regel durch Festlegen der Eindringtiefe einer schweren Stahlkugel, die aus einer bestimmten Höhe darauf fallen gelassen wird.



7 Abprallende Geschosse

7.1 Einleitung

7.1.1 Vorbemerkung

Das Abprallen von Geschossen ist zwangsläufig stets mit einer Wechselwirkung des Geschosses mit einem festen oder flüssigen Medium verbunden. Der Vorgang gehört somit zum Gebiet der Endballistik; er ist bereits in Abschn. 6.1.5 im Rahmen des Backman-Goldsmith-Diagramms erwähnt worden. Dort ist auch ersichtlich, dass innerhalb der möglichen Auftreffgeschwindigkeiten und -winkel ein großer Bereich existiert, der zum Abprallen des Geschosses führt.

Weil beim Abprallereignis die Geschossflugbahn nicht zu Ende ist, sondern von neuem beginnt, ist dessen Hergang von großem Interesse, liefert er doch die Anfangsdaten der Fortsetzung der Flugbahn. Dadurch ist auch ausreichend begründet, weshalb dem Abprallen eines Geschosses ein eigenes Kapitel gewidmet wird. Die Ausführungen folgen weitgehend Teilen von B. P. KNEUBUEHL (1999).

7.1.2 Begriffserläuterung

Die Bezeichnung „Abpraller“, „Prellschuss“, „Gellerschuss“ oder „Ricochet“ ist im allgemeinen Sprachgebrauch nicht eindeutig. Es ist auch schwierig, in deutschsprachigen Nachschlagewerken genaue Umschreibungen dieser Begriffe zu finden. Die französische und die englische Sprache hingegen kennen das Wort „ricochet“ als Übersetzung der beiden ersten Wörter.

Nach „Le Petit Robert“ wird das Wort „ricochet“ bereits 1611 erwähnt und soll auf das XIII Jahrhundert zurückzuführen sein (fable du Ricochet: ein Kanon, in dem sich das Wort „coq“ wiederholt). Bedeutung: „Rebond d'un objet plat lancé obliquement sur la surface de l'eau ou d'un projectile renvoyé du sol ou d'un corps dur“. (Zurückprallen eines Objektes, das schräg gegen eine Wasseroberfläche geworfen worden ist oder ein Geschoss, das vom Boden oder von einem harten Körper zurückgeworfen wird).

In der deutschen Sprache wird „Ricochet“ (oder eingedeutscht: „Rikoschett“) gelegentlich einem „Querschläger“ gleichgesetzt, also einem instabil fliegenden Geschoss. Da aber Geschosse durchaus instabil fliegen können ohne abgeprallt zu

sein, und abgeprallte Geschosse gelegentlich stabil weiterfliegen können, ist für das folgende Kapitel eine Festlegung des Sprachgebrauchs am Platz.

Von einem *Prellschuss* oder von einem *Ricochet* wird gesprochen, wenn ein Geschoss auf seiner Flugbahn durch Kontakt mit einem festen oder flüssigen Medium eine Richtungsänderung erfährt. Damit kann sowohl die Berührung eines Grashalms wie auch der Schuss auf eine Betonmauer in die Betrachtungen einbezogen werden. Ein instabil fliegendes Geschoss wird als *Querschläger* bezeichnet, unabhängig davon, ob es sich um einen Prellschuss handelt oder nicht.

7.2 Stoßtheorie

7.2.1 Stoßarten

Prallen zwei Körper (Massen) zusammen, so wird dieser Vorgang bekanntlich als *Stoß* bezeichnet. Während der gegenseitigen Berührung tauschen die beiden Körper gewisse Anteile ihrer Energie und ihres Impulses aus. Die beteiligte kinetische Energie kann zudem teilweise in mechanische Arbeit (reversible Deformation) oder in Wärme umgewandelt werden. Demzufolge verändern sich während des Stoßes die Geschwindigkeitsvektoren beider Körper.

Zur Unterscheidung der verschiedenen Stoßarten werden die Bewegungsrichtungen der beiden Körper und die sogenannte *Stoßnormale* herangezogen. Die Stoßnormale ist diejenige Gerade, die im Berührungspunkt der stoßenden Körper senkrecht auf der (gemeinsamen) Tangentialebene steht (siehe Abb. 7.1). Sie ist die Wirkungslinie der Stoßkräfte.

Liegen die Geschwindigkeitsvektoren der beiden Körper auf einer gemeinsamen Geraden, so spricht man von einem *geraden Stoß*. In diesem Fall treten keine Kraftwirkungen quer zur Bewegungsrichtung auf.

Bewegen sich die Schwerpunkte der beiden Massen auf verschiedenen (windschiefen) Geraden, so können sie sich nur berühren, wenn der kürzeste Abstand der beiden Geraden kleiner ist als die Summe der Abstände zwischen den Schwerpunkten und den maßgebenden Körperoberflächen. In diesem Falle wird von einem *schiefen Stoß* gesprochen.

Liegen die Schwerpunkte der beiden Körper im Zeitpunkt der Berührung auf der gemeinsamen Stoßnormalen, so heißt der Stoß *zentrisch*, sonst *exzentrisch*.

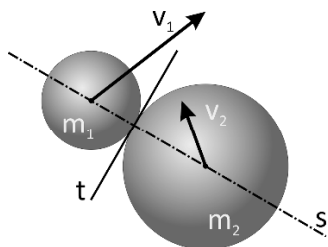
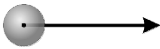





Abb. 7.1. Zur Definition der Stoßnormalen.
 m_1, v_1 : Masse und Geschwindigkeit des ersten Körpers,
 m_2, v_2 : Masse und Geschwindigkeit des 2. Körpers,
 t : Gemeinsame Tangentialebene im Berührungspunkt,
 s : Stoßnormale.

Tabelle 7.1. Stoßarten und Beispiele praktischer Vorkommen in der Ballistik

	gerade	schief
zentrisch	 Kugel senkrecht gegen Prellfläche	 Kugel schräg gegen Prellfläche
exzentrisch	 angestelltes Langgeschoss gegen Prellfläche	 Langgeschoss schräg gegen Prellfläche

Somit ergeben sich in kinematischer Hinsicht vier Stoßprozesse, die alle in der ballistischen Praxis anzutreffen sind (siehe Tabelle 7.1).

Eine weitere Unterscheidung wird bezüglich der Energieerhaltung während des Stoßprozesses gemacht. Bleibt dabei die gesamte kinetische Energie erhalten, so heißt der Stoß *elastisch*. Bewegen sich beide Körper nach dem Stoß mit gleicher Geschwindigkeit, so bezeichnet man den Stoß *inelastisch*. Stöße, bei denen die gesamte kinetische Energie abnimmt, die Körper jedoch auch nach dem Stoß unterschiedliche Geschwindigkeiten aufweisen, nennt man *teilelastisch*.

Im Zusammenhang mit dem Prellschuss ist das häufigste Szenario der schiefe, exzentrische, teilelastische Stoß.

Stoßvorgänge lassen sich oft einfacher behandeln, wenn der eine Körper vor dem Stoß als ruhend angenommen wird. Die Geschwindigkeit des anderen Körpers muss dann auf den ruhenden bezogen werden. Die beiden Körper werden mit den Indizes 1 und 2 unterschieden. Körper 2 sei vor dem Stoß ruhend ($v_2 = 0$). Im Folgenden bezeichnet v stets die Geschwindigkeit vor und u jene nach dem Stoß. Impuls und Energie nach dem Stoß werden mit dem zusätzlichen Index u gekennzeichnet.

7.2.2 Der zentrische, gerade Stoß

Der einfache Fall des zentrischen, geraden Stoßes eignet sich besonders gut, um sich einen ersten Überblick über die Geschwindigkeits- und Energieverhältnisse beim Stoßprozess zu verschaffen. Auf Grund der Voraussetzung gleicher Geschwindigkeit beider Körper nach dem Stoß nimmt dabei der inelastische Stoß eine Sonderstellung ein. Impuls- und Energiesatz liefern

$$(7.2:1) \quad m_1 \cdot v_1 = (m_1 + m_2) \cdot u, \quad [\text{kg} \cdot \text{m/s}]$$

$$(7.2:2) \quad \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot u^2 + Q. \quad [\text{J}]$$

Q bedeutet den in Verformungsarbeit und letztlich in Wärme umgewandelten Teil der kinetischen Energie. Übrige Bezeichnungen gemäß Abschnitt 2.3.1.

Auflösung nach der Geschwindigkeit u und der Verformungsarbeit Q ergibt, mit $\mu = m_1/m_2$

$$(7.2:3) \quad u = \frac{\mu}{\mu + 1} \cdot v_1, \quad [\text{m/s}]$$

$$(7.2:4a) \quad E_u = \frac{\mu}{\mu + 1} \cdot E_1, \quad [\text{J}]$$

$$(7.2:4b) \quad Q = \frac{1}{\mu + 1} \cdot E_1. \quad [\text{J}]$$

E_1 (kinetische Energie des stoßenden Körpers) stellt wegen der Annahme $v_2 = 0$ zugleich die gesamte Energie dar.

Wird ein gewisser Teil der Verformungsarbeit Q wiederum in kinetische Energie zurück verwandelt, so heißt der Stoß teilelastisch. Der Anteil zurückgewonnener kinetischer Energie E_r wird mit der sogenannten *Stoßzahl* k beschrieben, wobei verabredungsgemäß die folgende Beziehung gilt

$$(7.2:5) \quad E_r = k^2 \cdot Q. \quad [\text{J}]$$

Dieser Ansatz ist zur Newton'schen Stoßhypothese äquivalent, wonach die Relativgeschwindigkeit der beiden Körper nach dem Stoß zur Relativgeschwindigkeit vor dem Stoß ein festes Verhältnis hat, dessen Betrag der Stoßzahl k entspricht.

k nimmt Werte zwischen 0 (inelastischer Stoß) und 1 (elastischer Stoß) an. Der Verlust an kinetischer Energie ergibt sich dann zu

$$(7.2:6) \quad Q_w = Q - E_r = (1 - k^2) \cdot Q = \frac{(1 - k^2)}{\mu + 1} \cdot E_1. \quad [\text{J}]$$

Q_w bedeutet auch die verbleibende Verformungsarbeit, die letztlich in Wärme übergeht.

Die Stoßzahl k ist einerseits vom Material und Aufbau sowie von der Konstruktion der beteiligten zwei Körper abhängig, andererseits aber auch von der beteiligten Energie.

Trifft eine Stahlkugel mit kleiner Geschwindigkeit auf eine Stahlplatte, so ist der Stoß fast ganz elastisch ($k = 0.95$). Bei hohen Geschwindigkeiten dringt die Stahlkugel in die Platte ein ($k = 0$).

Aus dem Impuls- und Energiesatz ergeben sich nun für den teilelastischen Stoß die folgenden Beziehungen

$$(7.2:7) \quad m_1 \cdot v_1 = m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2. \quad [\text{kg} \cdot \text{m/s}]$$

$$(7.2:8) \quad \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot u_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot u_2^2 + Q_w . \quad [J]$$

Eine kurze Rechnung unter Einbezug der Gl. (7.2:6) führt zu den folgenden Formeln

$$(7.2:9a) \quad u_1 = \frac{\mu - k}{\mu + 1} \cdot v_1 , \quad [m/s]$$

$$(7.2:9b) \quad u_2 = \frac{(1 + k) \cdot \mu}{\mu + 1} \cdot v_1 , \quad [m/s]$$

$$(7.2:10a) \quad E_{1,u} = \left(\frac{\mu - k}{\mu + 1} \right)^2 \cdot E_1 , \quad [J]$$

$$(7.2:10b) \quad E_{2,u} = \frac{(1 + k)^2 \cdot \mu}{(\mu + 1)^2} \cdot E_1 . \quad [J]$$

Mit $k = 1$ stellen die Beziehungen (7.2:9a, b) und (7.2:10a, b) die Gesetze des elastischen Stoßes dar und mit $k = 0$ gehen sie erwartungsgemäß in die Gleichungen des inelastischen Stoßes (7.2:3) und (7.2:4a) über.

7.2.3 Der zentrische, schiefe Stoß

Der zentrische Stoß ist dadurch charakterisiert, dass im Moment der Berührung die Kraftvektoren durch die Schwerpunkte der beteiligten Körper gehen. Dies hat zur Folge, dass kein Drehmoment auf die Körper einwirkt.

Stoßnormale und Geschwindigkeitsvektor des stoßenden Körpers (1) bilden eine Ebene, die normal auf der Tangentialebene steht. Das Koordinatensystem wird nun so gewählt, dass die x-Achse in der Schnittgeraden der beiden Ebenen liegt und die y-Achse mit der Stoßnormalen zusammenfällt (siehe Abb. 7.2). Der gestoßene Körper (2) sei vor dem Stoß in Ruhe. Der Geschwindigkeitsvektor des stoßenden Körpers schließe mit der Stoßnormalen den Winkel φ ein. Mit

$$\vec{v}_1 = v_1 \cdot \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \end{pmatrix} , \quad [m/s]$$

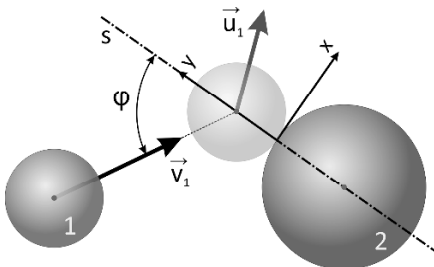


Abb. 7.2. Der zentrisch schiefe Stoß.
s: Stoßnormale.

ergeben sich für die Normal- und die Tangentialkomponente (v_{1n} bzw. v_{1t}) im Berührungspunkt

$$(7.2:11a) \quad v_{1n} = -v_1 \cdot \cos \varphi, \quad [\text{m/s}]$$

$$(7.2:11b) \quad v_{1t} = v_1 \cdot \sin \varphi. \quad [\text{m/s}]$$

Mit der Annahme eines reibungsfreien Stoßes gilt

$$(7.2:12a) \quad u_{1t} = v_{1t}, \quad [\text{m/s}]$$

$$(7.2:12b) \quad u_{2t} = 0. \quad [\text{m/s}]$$

Werden mit u_{1n} und u_{2n} die Beträge der Geschwindigkeiten nach dem Stoß in Richtung der Stoßnormalen bezeichnet, so ist gemäß den Gl. (7.2:9a, b)

$$(7.2:13a) \quad u_{1n} = \frac{\mu - k}{\mu + 1} \cdot v_{1n}, \quad [\text{m/s}]$$

$$(7.2:13b) \quad u_{2n} = \frac{(1 + k) \cdot \mu}{\mu + 1} \cdot v_{1n}. \quad [\text{m/s}]$$

Mit Gl. (7.2:11a), und den Gl. (7.2:12a, b) folgt dann

$$(7.2:14a) \quad \vec{u}_1 = \frac{v_1}{\mu + 1} \cdot \begin{pmatrix} (\mu + 1) \cdot \sin \varphi \\ -(\mu - k) \cdot \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad [\text{m/s}]$$

$$(7.2:14b) \quad \vec{u}_2 = \frac{v_1 \cdot \mu \cdot (1 + k)}{\mu + 1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos \varphi \end{pmatrix}. \quad [\text{m/s}]$$

Der gestoßene Körper bewegt sich demnach in Richtung der Stoßnormalen fort. Für den stoßenden Körper ergibt sich aus Gl. (7.2:14a) der folgende Abgangswinkel β (bezüglich der Tangentialebene im Prellpunkt)

$$(7.2:15) \quad \beta = \arctan \left(\frac{\mu - k}{\mu + 1} \cdot \cot \varphi \right). \quad [-]$$

Die Relativgeschwindigkeit der beiden Körper folgt aus den Gl. (7.2:14a, b)

$$(7.2:16) \quad \vec{u}_{1-2} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2 = v_1 \cdot \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ k \cdot \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad [\text{m/s}]$$

Aus dieser Beziehung lässt sich leicht die Gültigkeit der Newton'schen Stoßhypothese (siehe Abschn. 7.2.2) ablesen. Außerdem ist bemerkenswert, dass die Relativgeschwindigkeit von den Massen der beiden Körper unabhängig ist. Der Verlust an kinetischer Energie beläuft sich (in Analogie zu Gl. 7.2:6) zu

$$(7.2:17) \quad Q_w = \frac{1 - k^2}{\mu + 1} \cdot E_1 \cdot \cos^2 \varphi. \quad [\text{J}]$$

7.2.4 Der exzentrische, gerade Stoß

Der exzentrische Stoß ist dadurch gekennzeichnet, dass neben dem Impulsaustausch auch ein Drehmoment auf die Körper einwirkt. Impuls- und Energiesatz müssen daher mit dem Drehimpulssatz ergänzt werden.

Beim geraden Stoß genügt es, die Gleichungen skalar anzuschreiben. Als weitere Vereinfachung und im Hinblick auf die praktische Anwendung wird angenommen, dass die Stoßnormale durch den Schwerpunkt des gestoßenen Körpers geht (Abb. 7.3). Damit kommt eine Drehbewegung nur für den stoßenden Körper in Frage. Das Koordinatensystem wird auch hier so gewählt, dass sich der gestoßene Körper vor dem Stoß in Ruhe befindet.

Aus den Erhaltungssätzen und unter Verwendung der Newton'schen Stoßhypothese ergibt sich das folgende Gleichungssystem

$$(7.2:18a) \quad m_1 \cdot v_1 = m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2, \quad [\text{kg} \cdot \text{m/s}]$$

$$(7.2:18b) \quad J_1 \cdot \omega_1 = m_1 \cdot (u_1 - v_1) \cdot b, \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}]$$

$$(7.2:18c) \quad k = - \frac{u_1 - u_2 + \omega_1 \cdot b}{v_1}, \quad [-]$$

$$(7.2:18d) \quad \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot u_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot u_2^2 + \frac{1}{2} \cdot J_1 \cdot \omega^2 + Q_T. \quad [\text{J}]$$

Darin bedeutet J_1 das Trägheitsmoment des stoßenden Körpers, ω_1 dessen Winkelgeschwindigkeit nach dem Stoß und b den Abstand des Schwerpunktes des stoßenden Körpers von der Stoßnormalen (Exzentrizität des Stoßes).

Die Gleichungen (7.2:18a-d) bilden ein nichtlineares Gleichungssystem für die Geschwindigkeiten u_1 und u_2 der beiden Körper und für die Winkelgeschwindigkeit ω_1 des stoßenden Körpers nach dem Stoß sowie für den Verlust an kinetischer Energie Q_T . Die Auflösung dieses Gleichungssystems führt, mit Einführung der dimensionslosen Trägheitsmomentenzahl

$$(7.2:19) \quad \theta = \frac{m_1 \cdot b^2}{J_1}, \quad [-]$$

zu den folgenden Beziehungen

$$(7.2:20a) \quad u_1 = \frac{\mu - k + \theta}{\mu + 1 + \theta} \cdot v_1, \quad [\text{m/s}]$$

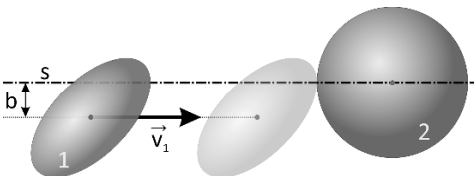


Abb. 7.3. Der exzentrische, gerade Stoß.
s: Stoßnormale,
b: Exzentrizität.

$$(7.2:20b) \quad u_2 = \frac{(1+k) \cdot \mu}{\mu + 1 + \theta} \cdot v_1, \quad [\text{m/s}]$$

$$(7.2:21) \quad \omega_1 = \frac{(1+k) \cdot m_1 \cdot b}{J_1 \cdot (\mu + 1 + \theta)} \cdot v_1, \quad [1/\text{s}]$$

$$(7.2:22) \quad Q_T = \frac{1-k^2}{\mu + 1 + \theta} \cdot E_1. \quad [\text{J}]$$

7.2.5 Der exzentrische, schiefe Stoß

Der allgemeinste und in der Praxis wohl auch häufigste Stoßprozess ist der exzentrische, schiefe Stoß. Hier treten Ablenkung und Drehbewegung des stoßenden Körpers gleichzeitig auf (siehe Abb. 7.4).

Die Herleitung der entsprechenden Formeln für die Geschwindigkeiten und den Verlust an kinetischer Energie verläuft analog zu den Abschnitten 7.2.3 und 7.2.4 (Geschwindigkeitskomponenten in Richtung der Stoßnormalen, eingesetzt in das Gleichungssystem 7.2:18a-d). Dabei ergeben sich unter Verwendung derselben Bezeichnungen wie in Abschnitt 7.2.4 die folgenden Formeln

$$(7.2:23a) \quad \bar{u}_1 = \frac{v_1}{\mu + 1 + \theta} \cdot \begin{pmatrix} (\mu + 1 + \theta) \cdot \sin \varphi \\ -(\mu - k + \theta) \cdot \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad [\text{m/s}]$$

$$(7.2:23b) \quad \bar{u}_2 = v_1 \cdot \frac{(1+k) \cdot \mu}{\mu + 1 + \theta} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos \varphi \end{pmatrix}, \quad [\text{m/s}]$$

$$(7.2:24) \quad \omega_1 = \frac{(1+k) \cdot m_1 \cdot b}{J_1 \cdot (\mu + 1 + \theta)} \cdot v_1 \cdot \cos \varphi, \quad [1/\text{s}]$$

$$(7.2:25) \quad Q_T = \frac{1-k^2}{\mu + 1 + \theta} \cdot E_1 \cdot \cos^2 \varphi, \quad [\text{J}]$$

$$(7.2:26) \quad \beta = \arctan \left(\frac{\mu - k + \theta}{\mu + 1 + \theta} \cdot \cot \varphi \right). \quad [-]$$

β bedeutet wiederum den Abgangswinkel bezüglich der Tangentialebene im Prellpunkt (Winkel zwischen \bar{u} und x-Achse, siehe Abb. 7.4). Der gestoßene Körper bewegt sich auch hier nach dem Stoß in Richtung der Stoßnormalen.

Eine weitere interessante Größe ist der Ablenkwinkel λ , d. h. der Winkel, um den der stoßende Körper von seiner ursprünglichen Bewegungsrichtung abgelenkt worden ist. Zur Bestimmung dieses Winkels wird der Geschwindigkeitsvektor \bar{u}_1 in ein Koordinatensystem transformiert, dessen x-Achse mit der Bewegungsrichtung vor dem Stoß zusammenfällt (siehe Abb. 7.5). Mit dem Drehwinkel

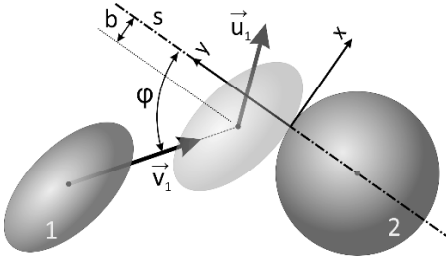


Abb. 7.4. Der exzentrische, schiefe Stoß.
s: Stoßnormale,
b: Exzentrizität.

$$-\left(\frac{1}{2} \cdot \pi - \varphi\right), \quad [-]$$

und den zugehörigen Transformationsformeln

$$(7.2:27a) \quad x^* = x \cdot \sin \varphi - y \cdot \cos \varphi, \quad [m]$$

$$(7.2:27b) \quad y^* = x \cdot \cos \varphi + y \cdot \sin \varphi, \quad [m]$$

resultiert aus (7.2:23a) für die Geschwindigkeit \bar{u}_1 des stoßenden Körpers nach dem Stoß im Stern-System

$$(7.2:28) \quad \bar{u}_1^* = \frac{v_1}{\mu + 1 + \theta} \cdot \left(\frac{\mu + \theta + \sin^2 \varphi - k \cdot \cos^2 \varphi}{(1 + k) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi} \right), \quad [m/s]$$

woraus sich für den Ablenkwinkel λ die folgende Gleichung ergibt

$$(7.2:29) \quad \lambda = \arctan \left(\frac{(1 + k) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{\mu + \theta + \sin^2 \varphi - k \cdot \cos^2 \varphi} \right). \quad [-]$$

Ein Vorteil dieser in den Abschn. 7.2.2 bis 7.2.5 gewählten Darstellung besteht darin, dass alle relevanten Parameter (Massenverhältnis μ , Stoßzahl k und Trägheitsmomentenzahl θ) dimensionslos dargestellt sind. Dies erleichtert die Diskussion von Spezialfällen. So lässt sich beispielsweise sofort ablesen, dass bei Massengleichheit ($\mu = 1$) alle Stoßgesetze (mit Ausnahme der Winkelgeschwindigkeit bei der Drehbewegung) von der Masse unabhängig sind.

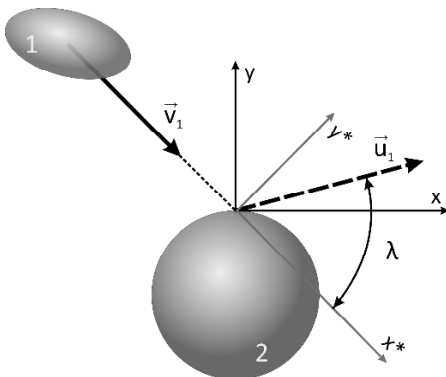


Abb. 7.5. Zur Bestimmung des Ablenkwinkels λ .

7.2.6 Spezialfälle

In der Praxis kommen oft extreme Massenverhältnisse vor, die jeweils eine entscheidende Vereinfachung der Stoßgesetze zulassen. Daher werden im Folgenden drei Spezialfälle unterschieden, deren Reihenfolge der Erwähnung etwa der Häufigkeit ihres Vorkommens bei den Fragestellungen im Umfeld des Prellschusses entspricht:

- A $m_1 \ll m_2$: Die stoßende Masse ist viel leichter als die vor dem Stoß ruhende. Das Massenverhältnis μ wird sehr klein ($\mu \rightarrow 0$).
- B $m_1 \gg m_2$: Die stoßende Masse ist viel schwerer als die gestoßene. Das Massenverhältnis μ wird sehr groß ($\mu + 1 \rightarrow \mu$).
- C $m_1 = m_2$: Die stoßende und die gestoßene Masse sind beide gleich schwer. Das Massenverhältnis μ wird gleich 1.

Fall A: Ist die stoßende Masse klein im Vergleich mit der gestoßenen Masse und der Stoß inelastisch, so kann μ vernachlässigt werden und k ist 0 zu setzen. Die Beziehungen (7.2:23) bis (7.2:26) und (7.2:29) gehen dann über in die folgenden Gleichungen

$$(7.2:30a) \quad \vec{u}_1 = \frac{v_1}{1 + \theta} \cdot \begin{pmatrix} (1 + \theta) \cdot \sin \varphi \\ -\theta \cdot \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad [\text{m/s}]$$

$$(7.2:30b) \quad \vec{u}_2 = 0, \quad [\text{m/s}]$$

$$(7.2:31) \quad \omega_1 = \frac{m_1 \cdot b}{J_1 \cdot (1 + \theta)} \cdot v_1 \cdot \cos \varphi, \quad [1/\text{s}]$$

$$(7.2:32) \quad Q_T = \frac{1}{1 + \theta} \cdot E_1 \cdot \cos^2 \varphi, \quad [\text{J}]$$

$$(7.2:33) \quad \beta = \arctan \left(\frac{\theta}{1 + \theta} \cdot \cot \varphi \right), \quad [-]$$

$$(7.2:34) \quad \lambda = \arctan \left(\frac{\sin(2 \cdot \varphi)}{2 \cdot (\theta + \sin^2 \varphi)} \right). \quad [-]$$

Fall B: Ist μ sehr groß und der Stoß elastisch, so kann $\mu + 1 \rightarrow \mu$ und $k = 1$ gesetzt werden. Aus (7.2:23) bis (7.2:25) und (7.2:29) ergibt sich dann

$$(7.2:35a) \quad \vec{u}_1 = v_{1x} \cdot \frac{1}{\mu + \theta} \cdot \begin{pmatrix} \mu + \theta \\ -\sin(2 \cdot \varphi) \end{pmatrix}, \quad [\text{m/s}]$$

$$(7.2:35b) \quad \vec{u}_2 = v_{1x} \cdot \frac{2 \cdot \mu}{\mu + \theta} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad [\text{m/s}]$$

$$(7.2:36) \quad \omega_1 = \frac{2 \cdot m_1 \cdot b}{J_1 \cdot (\mu + \theta)} \cdot v_1 \cdot \cos \varphi, \quad [1/s]$$

$$(7.2:37) \quad Q_T = 0, \quad [J]$$

$$(7.2:38) \quad \lambda = \arctan \left(\frac{\sin(2 \cdot \varphi)}{\mu + \theta} \right). \quad [-]$$

Wie aus der Beziehung (7.2:38) entnommen werden kann, besitzt der Ablenkwinkel in diesem Spezialfall bei einem Auftreffwinkel von 45° ein Maximum, das im Falle eines zentrischen Stoßes ($\theta = 0$) nur noch vom Massenverhältnis der beiden Körper abhängig ist.

Fall C: Der Fall gleicher Massen von stoßendem und gestoßenem Körper tritt in der Ballistik eigentlich kaum auf. Man findet ihn vor allem beim Billardspiel, wobei dort der Eigendrehimpuls der stoßenden Kugel und dessen Übertragung auf die gestoßene Kugel eine wesentliche Rolle spielen. (Eine ausführliche Darstellung der Physik des Billardspiels findet sich in A. SOMMERFELD (1977). Mit $\mu = 1$ vereinfachen sich die Gleichungen (7.2:23) bis (7.2:26) und (7.2:29) zu

$$(7.2:39a) \quad \vec{u}_1 = \frac{v_1}{2 + \theta} \cdot \begin{pmatrix} (2 + \theta) \cdot \sin \varphi \\ -(1 - k + \theta) \cdot \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad [m/s]$$

$$(7.2:39b) \quad \vec{u}_2 = v_1 \cdot \frac{(1 + k)}{2 + \theta} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos \varphi \end{pmatrix}, \quad [m/s]$$

$$(7.2:40) \quad \omega_1 = \frac{(1 + k) \cdot m_1 \cdot b}{J_1 \cdot (2 + \theta)} \cdot v_1 \cdot \cos \varphi, \quad [1/s]$$

$$(7.2:41) \quad Q_T = \frac{1 - k^2}{2 + \theta} \cdot E_1 \cdot \cos^2 \varphi, \quad [J]$$

$$(7.2:42) \quad \beta = \arctan \left(\frac{1 - k + \theta}{2 + \theta} \cdot \cot \varphi \right), \quad [-]$$

$$(7.2:43) \quad \lambda = \arctan \left(\frac{(1 + k) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{1 + \theta + \sin^2 \varphi - k \cdot \cos^2 \varphi} \right). \quad [-]$$

Ist der Stoß zudem zentrisch ($b = 0$ und $\theta = 0$), so gehen die obigen Formeln in jene des schiefen, zentrischen Stoßes über (Absch. 7.2.3).

7.3 Phänomenologie des Prellschusses

7.3.1 Festlegungen und Symbole

Für die Behandlung des Abprallerproblems werden verschiedene Begriffe benötigt. Sie sind in der Tabelle 7.2 zusammengestellt und teilweise in der Abb. 7.6 veranschaulicht.

In Anlehnung an das ballistische Koordinatensystem wird ein Bezugssystem mit Ursprung im Auftreffpunkt verwendet. Die x-Achse wird durch die Schnittgerade der Prellebene und der Auftreffebene gebildet, die y-Achse steht senkrecht auf der Prellebene und die z-Achse ergänzt das System zu einem Rechtssystem.

Tabelle 7.2. Definitionen und Bezeichnungen

Begriff	Symbol	Beschreibung
Prellobjekt oder Prellkörper	P_A	Fester oder flüssiger Körper, mit dem das Geschoss auf seiner Flugbahn in Berührung kommt
Auftreffpunkt		Punkt, an dem das Geschoss die Oberfläche des Prellkörpers berührt
Prellebene		Tangentialebene an den Prellkörper im Auftreffpunkt
Auftreffebene	α	Normalebene zur Prellebene durch die ungestörte Flugbahn des Geschosses
Auftreffrichtung		Tangentenvektor an die ungestörte Flugbahn des Geschosses im Auftreffpunkt (parallel zum Geschwindigkeitsvektor)
Auftreffwinkel		Winkel zwischen Prellebene und Auftreffrichtung
Stellungswinkel		Winkel zwischen Auftreffrichtung und der Normalen auf die Prellebene im Auftreffpunkt ($\varphi = 90^\circ - \alpha$)
Auftreffgeschwindigkeit	v	Geschwindigkeit, mit der das Geschoss auf dem Prellobjekt auftrifft
Abgangspunkt	P_B	Punkt, an dem das Geschoss die Oberfläche des Prellkörpers verlässt
Abgangsebene		Normalebene zur Prellebene durch die Flugbahn des abgeprallten Geschosses
Abgangsrichtung		Tangentenvektor an die Flugbahn des abgeprallten Geschosses im Abgangspunkt (parallel zum Geschwindigkeitsvektor des abgeprallten Geschosses)
Abgangswinkel		Winkel zwischen der Prellebene und der Tangenten an die Flugbahn des abgeprallten Geschosses im Abgangspunkt
Abgangsgeschwindigkeit		Geschwindigkeit, mit der das Geschoss das Prellobjekt verlässt
Seitenwinkel	γ	Winkel zwischen Auftreffebene und Abgangsebene
Ablenkwinkel	λ	Winkel zwischen Auftreffrichtung und Abgangsrichtung
Spurlänge	s_x	Distanz zwischen Auftreffpunkt und Abgangspunkt
Kontaktzeit	t_s	Dauer der Berührung zwischen Geschoss und Prellkörper

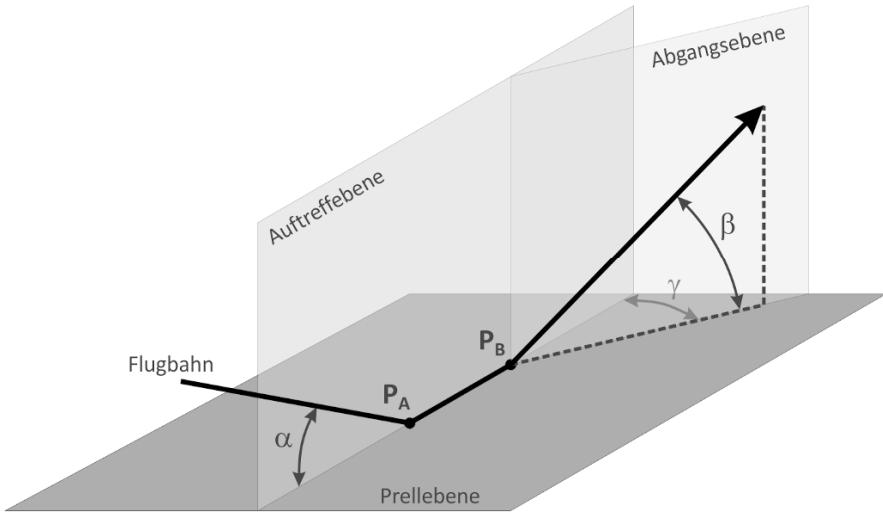


Abb. 7.6. Zur Definition der Begriffe beim Abprallen eines Geschosses (siehe dazu auch Tabelle 7.2).

In vielen Fällen können geometrische Vereinfachungen zugelassen werden, ohne die Allgemeinheit der Aussagen wesentlich zu beeinflussen. So sei vorausgesetzt, dass sich in der Umgebung des Auftreffpunktes die Flugbahnkurve des ungestörten, ankommenden und des abgeprallten Geschosses in je einer Ebene (Auftreff- bzw. Abgangsebene) befinden. Auftreffpunkt und Abgangspunkt sollen beide in der Prellebene liegen.

Auf Grund dieser Vereinfachungen lässt sich der Ablenkwinkel λ mittels einfacher geometrischer Überlegungen aus Auftreff- und Abgangsrichtung berechnen. Es resultiert (als Winkel zwischen windschiefen Geraden)

$$(7.3:1) \quad \lambda = \arccos(\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma - \sin \alpha \cdot \sin \beta) \quad [-]$$

Ist γ klein (so, dass $\cos \gamma \approx 1$ gesetzt werden kann), so kann der Ablenkwinkel als Summe aus Auftreff- und Abgangswinkel berechnet werden.

Für die Bestimmung der Flugbahn eines abgeprallten Geschosses auf größere Distanzen sind selbstverständlich auch geringe Seitenwinkel zu berücksichtigen.

7.3.2 Einflussparameter des Prellschussverhaltens

Die Art und Weise, wie ein Geschoss an einem Gegenstand abprallt, wird weitgehend durch die folgenden Parameter bestimmt:

Masse des Prellobjektes. Das Massenverhältnis von stoßendem (Geschoss) und gestoßenem (Prellobjekt) Körper legt die maßgebenden Stoßgesetze (gemäß Abschn. 7.2.6) fest.

Material und Struktur des Prellobjektes. Es spielt eine entscheidende Rolle, ob das Geschoss während des Kontaktes mit dem Prellobjekt in dieses eindringen kann oder nicht. Das Eindringvermögen in das Prellobjekt hängt von dessen Materialart ab. Dringt ein Geschoss ein, so können andere Ablenkwinkel entstehen als bei einem rein oberflächlichen Prellschuss, dessen Verhalten hingegen von der Struktur der Oberfläche beeinflusst wird.

Abmessungen des Prellobjektes. Sind die Abstände vom Auftreffpunkt bis zum Rand des Prellkörpers von der gleichen Größenordnung wie das Geschosskaliber, wird der Vorgang anders verlaufen als bei einem Schuss in genügendem Abstand vom Rand. Dünne Prellobjekte können deformieren und führen dadurch zu einem anderen Abprallverhalten als dicke Objekte des gleichen Materials.

Geschossmaterial und -konstruktion. Die Eigenschaften des Materials, aus dem das Geschoss gefertigt ist und die Konstruktionsart wirken sich entscheidend auf den Abgangswinkel und die Abgangsgeschwindigkeit aus.

Geschossverhalten. Bei der Berührung mit einem Prellobjekt kann sich ein Geschoss deformieren, in Teile zerbrechen oder aber auch unverändert bleiben. Welcher dieser Fälle wirklich eintritt und in welchem Maß es dann deformiert oder zerfällt, hängt von der Konfiguration des Prellobjektes und vom Aufbau des Geschosses ab (siehe hierzu Abschn. 6.1.5).

Auftreffenergie. Die Energie, die das Geschoss im Moment des Auftreffens besitzt, beeinflusst ebenfalls das Geschehen. So ist zum Beispiel ein Eindringen in das Prellobjekt nur möglich, wenn eine gewisse, vom Material abhängige Mindestenergie vorhanden ist. Wird diese Energie unterschritten, ändert sich das Abprallverhalten. Auch für die Deformation oder das Zerbrechen eines Geschosses ist eine bestimmte, minimale Energie notwendig (siehe ebenfalls Abschn. 6.1.5).

Flugverhalten nach der Berührung. Durch die Berührung werden dem Geschoss ein Kraft- und ein Drehmomentenstoß vermittelt. Je nach Stärke der beiden Stöße fliegt das Geschoss nach der Berührung stabil oder als Querschläger weiter.

7.3.3 Typische Abprallkonstellationen

Prellobjekte lassen sich bezüglich des Abprallverhaltens von Geschossen generell in 3 Kategorien einteilen. Bei den Geschossen sind verformbare (Blei- und Bleikerngeschosse) und formstabile (z. B. Stahlgeschosse) zu unterscheiden.

Harte Prellobjekte. Harte Prellobjekte sind dadurch charakterisiert, dass das Geschoss überhaupt nicht eindringt. Die Spur des Geschosses verläuft gänzlich an der Oberfläche, Verformungen kommen ausschließlich am Geschoss vor. Typische Beispiele sind dicke Stahlplatten (Abb. 7.7 a) und polierte, harte Stein- oder Betonplatten. Der Abgangswinkel ist vom Auftreffwinkel praktisch unabhängig und beträgt nur einige wenige Grad.

Halbharte Prellobjekte. Bei halbharten Prellobjekten werden das Prellobjekt und das Geschoss verformt, sofern es nicht formstabil ist. Es entsteht eine Spur,

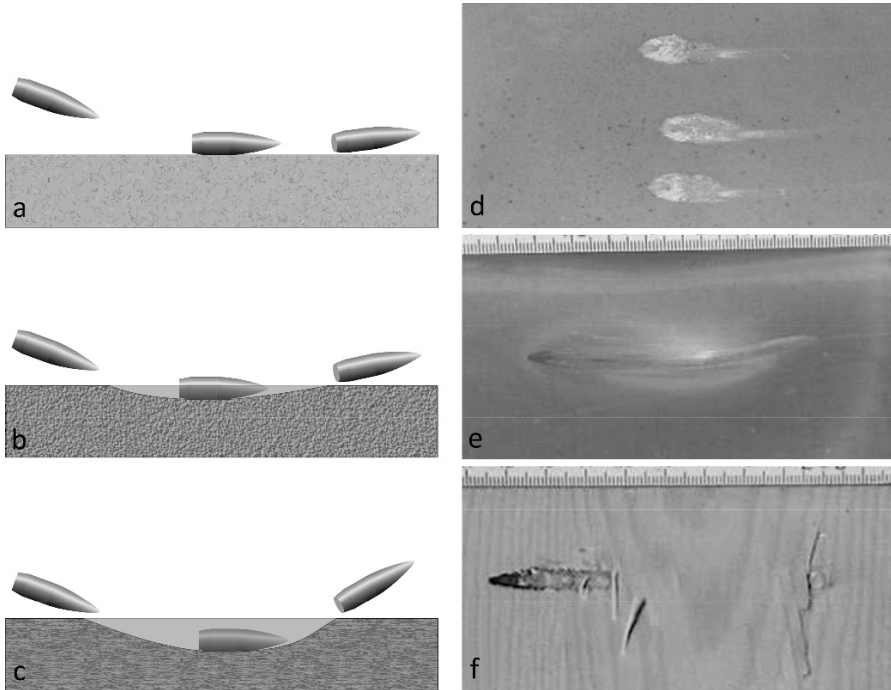


Abb. 7.7. Prellobjekttypen und Abprallerspuren. *Linke Seite:* Geschossweg schematisch, *rechte Seite:* Beispiele aus der Praxis. **a, d** hartes Prellobjekt, dicke Stahlplatte, **b, e** halbhartes Prellobjekt, dünnes Aluminiumblech (2 mm), **c, f** weiches Prellobjekt, Fichtenholz.

deren Tiefe weniger als 1 Kaliber beträgt (Abb. 7.7 b). Beispiele halbharter Prellobjekte sind dünne Bleche, weicher Beton, Asphalt. Der Abgangswinkel kann je nach Geschosskonstruktion und Verhalten des Prellobjektes von einigen wenigen Grad bis zur Größe des Auftreffwinkels betragen. Je stärker sich das Geschoss verformt (z. B. Vollbleigeschosse), desto geringer ist die Zerstörung im Prellobjekt und desto kleiner ist der Abgangswinkel.

Weiche Prellobjekte. Mit zunehmendem Auftreffwinkel wird bei weichen Prellobjekten die Spur immer tiefer und erreicht Größen von über einem Kaliber (siehe Abb. 7.7 c). Beim Überschreiten eines gewissen, materialspezifischen Auftreffwinkels dringt das Geschoss vollständig in das Prellobjekt ein, bevor es wieder austritt. Der Abgangswinkel erreicht in diesen Fällen Werte, die deutlich über dem Auftreffwinkel liegen können. So kann bei einem Auftreffwinkel von 15° ohne weiteres ein Abgangswinkel von 30° entstehen. Typische Vertreter weicher Prellkörper sind Holz (einschließlich Spanplatten), Sand und Wasser. Das Geschoss wird dabei oft nicht verformt, unabhängig von dessen Bauart.

Ein recht spezielles Verhalten kann sich in dünnen Platten (Stahl, Aluminium) bei kleinen Auftreffwinkeln zeigen. Weil der Kontaktpunkt vor dem Schwerpunkt liegt, erhält das Geschoss einen Drehmomentenstoß und beginnt sich um den Schwerpunkt zu drehen. Dadurch wird das Ge-

schosshack durch die Platte gedrückt und das quergestellte Geschoss von der Platte entzweigeschnitten, wodurch beidseits der Platte Geschossteile zu finden sind.

Ein entsprechendes Verhalten ist beim Abprallen eines Bleigeschosses (38 Spl.) an einem Schädelknochen bereits festgestellt worden. Der vordere Teil des Geschosses fand sich außerhalb, das Geschosshack im Gehirn im Innern des Schädels.

Die Energie wird beim Prellschuss relativ gut erhalten (vorausgesetzt, das Geschoss erhält den größten Teil seiner Masse). Bei harten Prellobjekten besitzt das abgehende Geschoss (je nach Auftreffwinkel) ca. 70–95 % der Auftreffenergie, bei weichen Prellobjekten kann sich dieser Bereich auf 20–95 % vergrößern.

7.3.4 Der senkrechte Schuss gegen eine harte Oberfläche

Ein spezieller Fall des Abprallers ist der senkrechte Schuss gegen eine harte Oberfläche, ohne dass das Geschoss dabei in das Prellobjekt eindringt. Dies führt üblicherweise zu Deformationen oder zur Zersplitterung des Geschosses und zu lokalen Zerstörungen im Prellobjekt. Teile des Geschosses oder des Prellkörpers können dabei stark beschleunigt und weggeschleudert werden.

Trifft ein Mantelgeschoss unter steilem Winkel und mit hoher Geschwindigkeit auf eine harte Fläche, so kann durch die Verformung im Bleikern ein so hoher Druck entstehen, dass der Geschossmantel davon platzt und Mantel- und Bleisplitter mehrere Dutzend Meter weit in praktisch jede beliebige Richtung entgegen der Schussrichtung fliegen. Die Anfangsgeschwindigkeit dieser Splitter wird beachtlich hoch. Sie können noch auf größere Distanzen (30 m und mehr) den Schützen und seine Umgebung ernsthaft gefährden (vgl. Fallbeispiel Abschn. 3.8.3.2).

Bei Vollgeschossen oder Geschossen mit hartem Kern ist ein Zurückprallen entgegen der Schussrichtung ebenfalls möglich. Prellflächen mit elastischen Eigenschaften (z. B. die Kunststoffschichten in durchschusshemmenden Gläsern) können dieses Verhalten unterstützen.

7.4 Das Geschoss als Massenpunkt

7.4.1 Prellkörper großer Masse

7.4.1.1 Vorbemerkung

Obwohl zwischen Auftreff- und Abgangspunkt verschiedene Geschosswege mit unterschiedlichem Eindringen in das Prellobjekt zu beobachten sind, können diese in einem Massenpunktmodell zu einem einheitlichen Abprallmodell zusammengefasst werden. Unabhängig davon, welcher der drei Fälle aus Abb. 7.7 eintritt, lässt sich der Geschossweg als direkte Verbindung zwischen Auftreffpunkt und Abgangspunkt darstellen (wie dies in der Abb. 7.6 schematisch dargestellt ist). Zudem sind mit der Annahme des Geschosses als Massenpunkt die Voraussetzun-

gen für den schiefen, zentrischen Stoß gegeben, womit die Beziehungen in Abschn. 7.2.3 mit $\mu \rightarrow 0$ angewendet werden können.

7.4.1.2 Prellschusstheorie

Auf Grund des Gesetzes über die Unabhängigkeit von Bewegungen lässt sich der schiefe Schuss gegen einen Prellkörper in eine zur Prollebene normale und eine parallele Komponente aufspalten, die einzeln behandelt werden können. Mit der Beziehung $\alpha = \frac{1}{2}\pi - \varphi$ ergibt sich aus den Gleichungen (7.2:11a, b) für die beiden Komponenten vor dem Stoß

$$(7.4:1a) \quad v_x = v \cdot \cos \alpha, \quad [\text{m/s}]$$

$$(7.4:1b) \quad v_y = -v \cdot \sin \alpha. \quad [\text{m/s}]$$

Nach dem Stoß nimmt die normale Komponente gemäß Gl. (7.2:14a) den folgenden Wert an

$$(7.4:2) \quad u_y = v \cdot k \cdot \sin \alpha. \quad [\text{m/s}]$$

Die Stoßzahl k ist keine Konstante, sondern eine Funktion des Auftreffwinkels α , da mit wachsender Geschwindigkeitskomponente in normaler Richtung sowohl das Geschoss als auch der Prellkörper eher zu Deformationen neigt und damit die Rückgewinnung kinetischer Energie kleiner wird. Allerdings kann unter bestimmten Bedingungen (z. B. wenn das Geschoss im Prellobjekt eher umgelenkt wird als abprallt) k bei steilerem Auftreffen auch zunehmen.

Im Gegensatz zu der bei der Herleitung der Stoßgesetze vorausgesetzten Reibungsfreiheit ist beim Abprallen von Geschossen auch bei der zur Prollebene parallelen Komponenten mit einer Verminderung der Geschwindigkeit zu rechnen. Diese Verzögerung entsteht einerseits durch Reibung während der Kontaktzeit, andererseits aber auch durch Deformieren des Prellkörpers oder durch Verdrängen von Material entlang der Geschosspur.

Da der Prellvorgang im Massenpunktsmodell betrachtet wird, bietet es sich an, alle Einwirkungen, die die parallele Geschwindigkeitskomponente des Geschosses beeinflussen, zu einer „globalen“ Reibung zusammenzufassen. Dabei ist es aus physikalischer Sicht sinnvoll, diese Reibung R_x proportional zur senkrecht zur Prollebene wirkenden Andruckkraft F_y anzusetzen, die während des ganzen Vorganges als konstant angenommen wird

$$(7.4:3) \quad R_x = \sigma \cdot F_y. \quad [\text{N}]$$

Der Proportionalitätsfaktor, der mit σ bezeichnet wird, ist auch vom Auftreffwinkel α abhängig, da bei zunehmender Geschossdeformation die Kontaktfläche und damit die Reibung wachsen.

Trotz des ähnlichen Ansatzes entspricht die „Reibungszahl“ σ nicht dem üblichen Reibungskoeffizienten aus der Mechanik. Sie beinhaltet nicht nur die Größe der Reibungskraft, sondern auch die Dauer der Einwirkung und einen Anteil der Geschoss- und Prellkörperdeformation, soweit diese von tangentialen Kräften herrührt.

Mit t_s als Kontaktzeit und in Anlehnung an das 2. Newton'sche Axiom gilt weiter

$$(7.4:4) \quad R_x \cdot t_s = m \cdot (u_x - v_x), \quad [N \cdot s]$$

und mit (7.4:2)

$$(7.4:5) \quad F_y \cdot t_s = -m \cdot (u_y - v_y) = m \cdot v_y \cdot (1 + k). \quad [N \cdot s]$$

Werden die beiden Gleichungen (7.4:4) und (7.4:5) in (7.4:3) eingesetzt und das Erhaltene nach u_x aufgelöst, folgt

$$(7.4:6) \quad u_x = v_x + \sigma \cdot v_y \cdot (1 + k). \quad [m/s]$$

Die beiden Komponenten der Geschwindigkeit nach dem Stoß, u_x und u_y , bestimmen den Abgangswinkel β durch

$$\tan \beta = \frac{u_y}{u_x} = \frac{-k \cdot v_y}{v_x + \sigma \cdot v_y \cdot (1 + k)}. \quad [-]$$

Mit $\tan \alpha = -v_y / v_x$ und mit den Präzisierungen $k = k(\alpha)$ und $\sigma = \sigma(\alpha)$ ergibt sich eine Relation zwischen Auftreff- und Abgangswinkel

$$(7.4:7) \quad \tan \beta = \frac{k(\alpha) \cdot \tan \alpha}{1 - \sigma(\alpha) \cdot \tan \alpha \cdot \{1 + k(\alpha)\}}. \quad [-]$$

Bei gegebenem Auftreffwinkel wird der Abgangswinkel demnach durch die Stoßzahl k und die Reibungszahl σ bestimmt.

Liegen Messungen der Geschossgeschwindigkeit vor und nach dem Abprallen wie auch der Auftreff- und Abgangswinkel vor, so lassen sich die entsprechenden Werte für k und σ bestimmen

$$(7.4:8a) \quad k(\alpha) = -\frac{u_y}{v_y}, \quad [-]$$

$$(7.4:8b) \quad \sigma(\alpha) = \frac{u_x - v_x}{u_y + v_y}. \quad [-]$$

Aus (7.4:7) lässt sich dann eine Beziehung zwischen k und σ herleiten

$$(7.4:9) \quad \sigma = \frac{\cot \alpha - k \cdot \cot \beta}{1 + k}. \quad [-]$$

Für k und σ lassen sich – zum Teil grobe – Schranken herleiten. So kann σ als positiv vorausgesetzt werden, womit für k unter Beizug von (7.4:9) die folgenden Schranken abgeleitet werden können

$$(7.4:10a) \quad 0 \leq k(\alpha) \leq \frac{\tan \beta}{\tan \alpha}, \quad \alpha, \beta > 0. \quad [-]$$

In (7.4:7) ist sowohl $\tan \beta$ als auch k und $\tan \alpha$ positiv. Daraus folgt, dass auch der Nenner positiv sein muss. Dies führt zu einer Einschränkung für σ

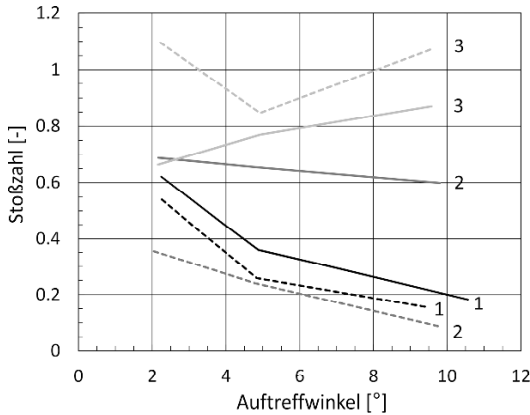


Abb. 7.8. Beispiele von Stoszahlen. Durchgezogene Linie: Vollmantelgeschoss im Kaliber 9 mm Luger, gestrichelte Linie: Vollbleigeschoss im Kaliber 38 Spl. Die Prellobjekte:

- 1 dicke Stahlplatte,
- 2 Betonplatte,
- 3 Fichtenholz.

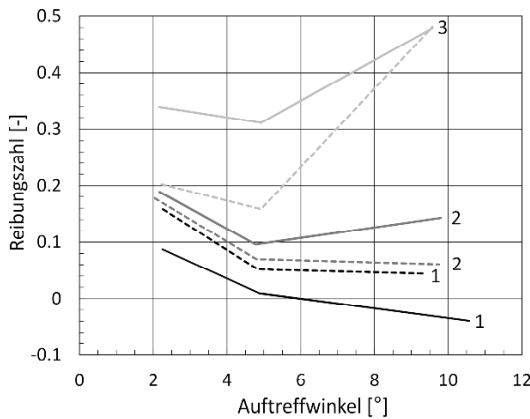


Abb. 7.9. Beispiele von Reibungszahlen. Durchgezogene Linie: Vollmantelgeschoss im Kaliber 9 mm Luger, gestrichelte Linie: Vollbleigeschoss im Kaliber 38 Spl. Die Prellobjekte:

- 1 dicke Stahlplatte,
- 2 Betonplatte,
- 3 Fichtenholz.

Bemerkenswert der negative Wert des Vollmantelgeschosses auf der Stahlplatte. Bei größeren Winkeln nimmt die horizontale Geschwindigkeitskomponente zu (Umlenkung).

$$(7.4:10b) \quad 0 \leq \sigma(\alpha) \leq \frac{\cot \alpha}{1 + k(\alpha)} \quad \alpha > 0. \quad [-]$$

Das Abprallverhalten jeder Geschoss-Prellobjekt-Kombination kann somit mit einem Paar dieser Funktionen beschrieben werden. Bei Kenntnis dieser Funktionen lassen sich für beliebige Auftreffwinkel die Abgangelemente (Winkel, Geschwindigkeit) schätzen. In den Abb. 7.8 und 7.9 sind einige typische Funktionsverläufe dargestellt.

Bleibt ein Geschoss bei Erreichen des Grenzwinkels im (weichen) Prellkörper stecken, so folgt aus der Beziehung (7.4:2) $k = 0$ (wegen $u_y = 0$) und folglich mit (7.4:9b) $\sigma = \cot \alpha$. Die Reibungszahl hat somit einen Grenzwert, der bei der Ermittlung des Kurvenverlaufs dienlich sein kann.

Besteht keine Möglichkeit bei einem Abpraller die Geschwindigkeit nach dem Stoß zu ermitteln, so kann zusätzlich zu den Winkeln die Länge der Kontaktspur s_x gemessen werden. Diese lässt sich bei der Bestimmung der Stoszahl k und der Reibungszahl σ mit einbeziehen. Mit den kinematischen Grundgleichungen gilt

$$(7.4:11) \quad s_x = \frac{1}{2} \cdot t_s \cdot (u_x + v_x) , \quad [m]$$

$$(7.4:12) \quad u_x = \frac{2 \cdot s_x}{t_s} - v_x . \quad [m/s]$$

Durch Vergleich mit der Formel (7.4:6) ergibt sich zwischen der Stoßzahl k , der Reibungszahl σ und der Spurlänge s_x die folgende Beziehung ($v_x / v_y = -\cot \alpha$)

$$(7.4:13) \quad \sigma \cdot (1 + k) = \frac{2 \cdot s_x}{v_y \cdot t_s} + 2 \cdot \cot \alpha . \quad [-]$$

Damit kann im Nenner von (7.4:7) $\sigma \cdot (1 + k)$ ersetzt werden, und nach kurzer Rechnung entsteht eine Gleichung, in der Auftreff- und Abgangswinkel, Spurlänge, Stoßzahl und Kontaktzeit miteinander verknüpft sind

$$(7.4:14) \quad \cot \beta = -\frac{1}{k} \cdot \left(\cot \alpha + \frac{2 \cdot s_x}{v_y \cdot t_s} \right) . \quad [-]$$

Liegen nun Messungen von α , β und s_x vor, so kann die Gleichung (7.4:14) nach t_s aufgelöst werden, wobei zusätzlich zwei Nebenbedingungen gelten, die aus den beiden nachstehenden Extremfällen abgeleitet werden:

- Das Geschoss kommt auf der Strecke s_x zur Ruhe; also gilt $u_x = 0$.
- Das Geschoss verliert in x-Richtung keine Geschwindigkeit, was $u_x = v_x$ bedeutet.

Mit Gleichung (7.4:11) entstehen daraus die folgenden zwei Ungleichungen

$$(7.4:15) \quad \frac{s_x}{v_x} \leq t_s \leq \frac{2 \cdot s_x}{v_x} . \quad [s]$$

Unter Beizug der Bedingungen (7.4:10a,b) lassen sich aus (7.4:14) und (7.4:15) k und t_s mittels einer Optimierung bestimmen, σ folgt dann aus (7.4:9). Allerdings reagiert σ bei kleinen Abgangswinkeln β sehr empfindlich auf Schwankungen in k , was die Ermittlung der Reibungszahl ziemlich erschwert.

7.4.1.3 Verlauf der Abprallfunktionen, Approximationen

Auf Grund physikalischer Überlegungen und mit Blick auf experimentell ermittelte Resultate kommen für die Stoßzahl in Abhängigkeit des Auftreffwinkels im Allgemeinen zwei verschiedene Verläufe in Frage:

- Bei harten Prellobjekten (Beton, dicke Stahlplatten), in die das Geschoss nicht eindringen kann, nimmt die Stoßzahl mit wachsendem Auftreffwinkel monoton ab und zwar umso mehr, je besser sich das Geschoss deformieren kann. Sie ist stets kleiner als 1.
- In weichen und verformbaren Materialien (Holz, dünne Bleche) kann das Geschoss beim Eindringen umgelenkt werden, oft ohne sich dabei wesent-

lich zu deformieren. Dies äußert sich in einer Zunahme der Stoßzahl, die durchaus auch 1 übersteigen kann. Wegen (7.4:8) bleibt sie jedoch beschränkt. Bleibt das Geschoss stecken, springt sie auf Null.

Solange der Auftreffwinkel klein ist ($< 5^\circ$), nimmt die Reibungszahl unabhängig von Geschossart und Prellobjekt mit zunehmendem Winkel zu. Dies lässt sich damit erklären, dass der Kontakt zwischen Geschoss und Prellobjekt weitgehend am zylindrischen Teil stattfindet, bei größerem Winkel jedoch nach der Ogive verschoben wird.

Steigt der Winkel über 5° , dringt das Geschoss in weiche Prellobjekte ein, wodurch die Kontaktfläche stark zunimmt und damit auch die Reibungszahl. Bei harten Prellobjekten bleibt sie nahezu konstant oder vergrößert sich leicht (wenn das Geschoss am Beton einen geringfügigen Ausbruch erzeugt). Bei der Stahlplatte erfährt das Mantelgeschoss sogar eine Erhöhung der horizontalen Geschwindigkeitskomponente; dies entspricht ebenfalls einer Umlenkung.

Für die Approximation der Reibungszahlfunktion kommen auf Grund des beschriebenen Verlaufes in erster Linie Potenzfunktionen in Frage.

Mittels Messungen der Auftreff- und der Abgangsgeschwindigkeiten und deren Komponenten bei einigen Auftreffwinkeln lassen sich Stoß- und Reibungszahl als Funktion des Auftreffwinkels experimentell bestimmen und durch eine Funktion approximieren. Grundsätzlich besteht sogar die Möglichkeit, mit Hilfe der Gleichung (7.4:7) die beiden Abprallfunktionen aus gemessenen Paaren von Auftreff- und Abgangswinkeln und einer entsprechenden Ausgleichsrechnung allein zu ermitteln.

7.4.2 Prellkörper geringer Masse

7.4.2.1 Allgemeines

Aus physikalischer Sicht genau entgegengesetzt ist eine weitere, in der Praxis häufig anzutreffende Prellschusssituation: der Kontakt des Geschosses mit einem Prellkörper, dessen Masse deutlich kleiner ist als die Geschossmasse. Derartige Fälle treten ein, wenn das Geschoss auf seiner Flugbahn Halme oder dünne Zweige berührt oder mit Flüssigkeitstropfen (z. B. Regen) zusammenstößt.

Dabei interessieren in erster Linie die Ablenkungswinkel, um die das Geschoss aus seiner ursprünglichen Bahn ausgelenkt wird, sowie der Geschwindigkeitsverlust, den das Geschoss bei dieser Berührung erfährt. Auch hier wird das Problem im Massenpunktmodell betrachtet, wodurch wiederum die Stoßgleichungen des zentrischen schiefen Stoßes zugrunde gelegt sind. Die Beziehung für den Ablenkungswinkel kann der Gleichung (7.2:29) entnommen werden, indem $\theta = 0$ gesetzt wird.

7.4.2.2 Der maximale Ablenkwinkel

Wird ein kleines Prellobjekt genau zentrisch durchschossen, so ist aus Symmetriegründen keine Ablenkung zu erwarten. Ebenso wird beim tangentialen Vorbeischießen keine Abweichung von der ursprünglichen Bahn festzustellen sein. Dadurch wird die Annahme gerechtfertigt, dass ein Auftreffwinkel (bzw. ein Stellungswinkel) existiert, für den der Ablenkwinkel ein Maximum erreicht.

Gl. (7.2:29) kann wie folgt umgeschrieben werden

$$(7.4:16) \quad \tan \lambda = f(\alpha) = \frac{(1+k) \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\mu + \cos^2 \alpha - k \cdot \sin^2 \alpha} . \quad [-]$$

λ bedeutet den Ablenkwinkel, α den Auftreffwinkel ($\alpha = \frac{1}{2} \cdot \pi - \varphi$), μ das Massenverhältnis m_1/m_2 und k die Stoßzahl.

Diese Funktion zeigt in der Tat den erwarteten Verlauf (siehe Abb. 7.10). Für die Bestimmung des maximalen Ablenkwinkels lässt sich f nach α differenzieren; anschließend wird der erhaltene Differenzialquotient Null gesetzt. Dabei resultiert eine Formel für denjenigen Auftreffwinkel α_m , der zu einem maximalen Ablenkwinkel führt

$$(7.4:17) \quad \tan \alpha_m = \sqrt{\frac{\mu+1}{\mu-k}} , \quad \mu > k . \quad [-]$$

Wird (7.4:17) in (7.4:16) eingesetzt, ergibt sich für den maximal möglichen Ablenkwinkel die folgende Beziehung

$$(7.4:18) \quad \tan \lambda_{\max} = \frac{1+k}{2 \cdot \sqrt{(\mu-k) \cdot (\mu+1)}} , \quad \mu > k . \quad [-]$$

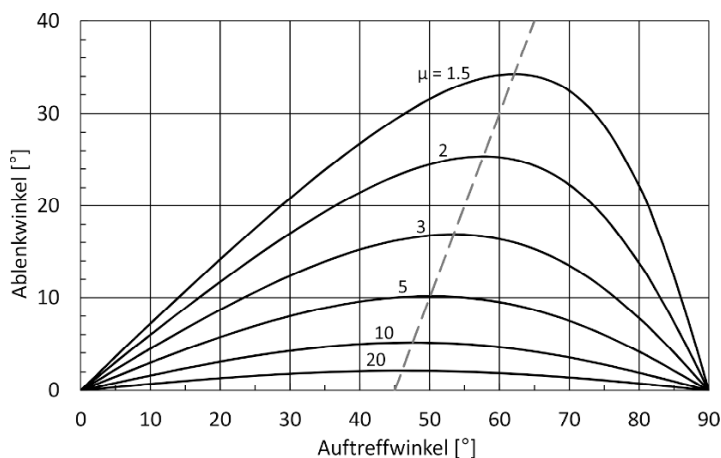


Abb. 7.10. Ablenkwinkel in Abhängigkeit des Auftreffwinkels für verschiedene Massenverhältnisse μ und mit $k = 0.8$. (Nach Gl. 7.4:16). Die gestrichelte Linie stellt die Verbindung der Maxima dar, gemäß Gl. (7.4:19).

Eliminiert man den Parameter k aus den beiden Gln. (7.4:17) und (7.4:18), ergibt sich ein direkter Zusammenhang zwischen dem maximalen Ablenkwinkel und dem zugehörigen Auftreffwinkel

$$(7.4:19) \quad \lambda_{\max} = \arctan[-\cot(2 \cdot \alpha_m)] \quad [-]$$

Diese Funktion stellt eine Gerade mit der Steigung 2 dar. Sie ist in der Abb. 7.10 gestrichelt eingezeichnet. Die maximalen Ablenkwinkel ergeben sich somit für alle Parameter k und μ stets bei den gleichen Auftreffwinkeln.

7.4.2.3 Geschwindigkeit und Energie

Die für den maximalen Ablenkwinkel hergeleiteten Beziehungen können ebenfalls dazu verwendet werden, die zu erwartenden Geschwindigkeits- und Energieverluste zu bestimmen.

Aus der Gleichung (7.2:14a) folgt für den Betrag der Geschwindigkeit nach dem Stoß (wobei wiederum anstelle des Stellungswinkels φ der Auftreffwinkel α eingeführt worden ist)

$$(7.4:20) \quad u_1 = v_1 \cdot \sqrt{\cos^2 \alpha + \left(\frac{\mu - k}{\mu + 1} \right)^2 \cdot \sin^2 \alpha} \quad [\text{m/s}]$$

Im Falle des maximalen Ablenkwinkels, der sich bei dem nach (7.4:17) ermittelten Auftreffwinkel einstellt, ergibt sich der relative Geschwindigkeitsverlust und der relative Energieverlust des Geschosses zu

$$(7.4:21) \quad \frac{\Delta v_1}{v_1} = \frac{v_1 - u_1}{v_1} = 1 - \sqrt{\frac{\mu - k}{\mu + 1}} \quad [-]$$

$$(7.4:22) \quad \frac{\Delta E_1}{E_1} = \frac{1 + k}{\mu + 1} \quad [-]$$

Nach (7.2:14b) erhält das Prellobjekt die folgende (momentane) Anfangsgeschwindigkeit

$$(7.4:23) \quad u_2 = v_1 \cdot \frac{\mu \cdot (1 + k)}{\sqrt{(\mu + 1) \cdot (2 \cdot \mu - k + 1)}} \quad [\text{m/s}]$$

Die Energie des Prellobjektes und die Verringerung der kinetischen Energie des Geschosses ergeben sich direkt aus den beiden letzten Beziehungen.

7.4.2.4 Geschossablenkung an Halmen und Zweigen

Die Anwendung dieser hergeleiteten Beziehungen setzt stets gewisse Modellvorstellungen voraus, die sich insbesondere an der Kurzzeitigkeit des Vorganges zu orientieren haben. Bei einem Halm oder Zweig, dessen Durchmesser nicht we-

sentlich größer ist als der Durchmesser des Geschosses, kann man annehmen, dass ein Stück des Prellobjektes entweder herausgeschlagen oder kurzzeitig weggedrückt (d. h. in Richtung der Stoßnormalen beschleunigt) wird. In beiden Fällen ist die Länge des am Vorgang beteiligten Stückes beschränkt. Bei Halmen kann für diese Länge etwa der doppelte Geschossdurchmesser angenommen werden; mit zunehmendem Durchmesser des Prellobjektes wird sie sich dem Geschossdurchmesser nähern.

Das am Stoßprozess teilnehmende Stück ist jedenfalls so leicht, dass ohne weiteres $\mu \gg 1$ (und damit auch $\mu \gg k$) vorausgesetzt werden kann. Der maximale Ablenkwinkel ergibt sich dann nach (7.4:18) zu

(7.4:24) $\tan \lambda_{\max} = \frac{1 + k}{2 \cdot \mu} \quad [-]$

Der Ablenkwinkel ist somit umso geringer, je größer das Massenverhältnis μ ist. Schwere Geschosse werden demnach weniger abgelenkt als leichte. Die Anfangsgeschwindigkeit des Prellobjektes folgt aus (7.4:23)

(7.4:25) $u_2 = v_1 \cdot \frac{1 + k}{\sqrt{2}} \quad [\text{m/s}]$

Es ist bemerkenswert, dass für $\mu \gg 1$ und bei maximalem Ablenkwinkel die Geschwindigkeit des Prellobjektes nicht vom Massenverhältnis μ abhängig ist.

Verläuft der Stoß elastisch, ergeben sich die größtmöglichen Ablenkwinkel und der größtmögliche Verlust an kinetischer Energie beim Geschoss. In der Tabelle 7.3 sind für verschiedene Geschosstypen einige maximale Ablenkwinkel und die entsprechenden seitlichen Abweichungen in Abhängigkeit der Halm- oder Zweigdicke zusammengestellt.

Tabelle 7.3. Maximale Ablenkwinkel ($k = 1$) und seitliche Abweichung 10 m nach der Prellstelle (Weichholz trocken, $\rho = 550 \text{ kg/m}^3$)

Geschoss	Masse [g]	Halm 1 mm		Zweig 3 mm		Zweig 5 mm	
		[°]	[cm]	[°]	[cm]	[°]	[cm]
22 L. R.	2.6	0.11	1.9	0.72	12.6	1.47	25.6
7.65 Browning	4.7	0.08	1.4	0.54	9.5	1.11	19.3
9 mm Luger	8.0	0.06	1.0	0.38	6.6	0.77	13.4
38 Spl.	10.2	0.045	0.8	0.29	5.2	0.60	10.5
44 Rem. Mag.	15.6	0.035	0.6	0.24	4.2	0.49	8.5
45 ACP	14.9	0.04	0.7	0.26	4.5	0.52	9.1
5.56 × 45	4.0	0.07	1.2	0.46	8.1	0.95	16.5
7.62 × 51	9.5	0.04	0.7	0.27	4.7	0.55	9.5
8 × 68 S	12.1	0.035	0.6	0.22	3.9	0.45	7.9

7.4.2.5 Regentropfen

Regentropfen besitzen einen Durchmesser zwischen 0.5 und 5 mm. Kleinere Tropfen werden als Sprühregen bezeichnet, größere kommen nicht vor, da sie von den Luftkräften zerrissen werden. Die größten Tropfen wiegen rund 65 mg und erreichen eine Fallgeschwindigkeit von rund 12 m/s (siehe Tabelle 7.4).

Bei der Berechnung der Fallgeschwindigkeit wird davon ausgegangen, dass die auf den Tropfen wirkenden Kräfte (Gewicht und Luftwiderstand) im Gleichgewicht sind (sogenannte „Fallschirmgeschwindigkeit“).

Der Zusammenprall zwischen Geschoss und Regentropfen kann als vollständig inelastischer Stoß aufgefasst werden ($k = 0$). Der Einfluss auf die Geschossflugbahn wird vorzugsweise in einem geschossfesten Bezugssystem betrachtet.

Der Regentropfen der Masse m_{rt} und der Geschwindigkeit v_{rt} stößt dann zentrisch mit der Geschwindigkeit v_r und unter dem Winkel ζ gegenüber der Flugrichtung auf das in diesem Bezugssystem ruhende Geschoss der Masse m_p (siehe Abb. 7.11)

$$(7.4:26) \quad v_r = \sqrt{v^2 + v_{rt}^2}, \quad [\text{m/s}]$$

$$(7.4:27) \quad \zeta = \arctan\left(\frac{v_{rt}}{v}\right). \quad [-]$$

v bedeutet die Geschosseschwindigkeit vor dem Stoß und v_{rt} die Geschwindigkeit des Regentropfens.

Für die Geschwindigkeit nach dem Stoß im geschossfesten System kann auf die Gleichung (7.2:3) zurückgegriffen werden. Mit $\mu = m_p/m_{rt}$ ergibt sich

$$(7.4:28) \quad u_r = \frac{1}{\mu + 1} \cdot v_r. \quad [\text{m/s}]$$

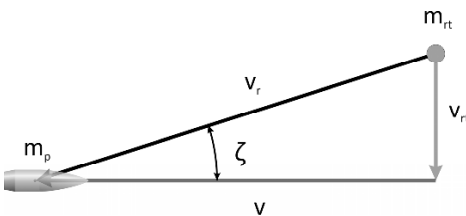


Abb. 7.11: Geschwindigkeit des Regentropfens im geschossfesten System.

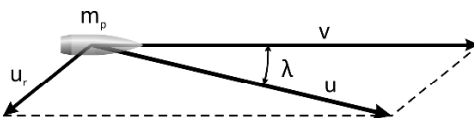


Abb. 7.12 Zur Bestimmung von Geschwindigkeit und Richtung des Geschosses im erdfesten System nach dem Stoß.

Tabelle 7.4. Durchmesser, Masse und Fallgeschwindigkeit von Regentropfen

Durchmesser [mm]	Masse [mg]	v_{rt} [m/s]
0.5	0.1	3.7
1.0	0.5	5.2
1.5	1.8	6.4
2.0	4.2	7.4
2.5	8.2	8.2
3.0	14.1	9.0
3.5	22.4	9.8
4.0	33.5	10.4
4.5	47.7	11.1
5.0	65.4	11.7

Im erdfesten Bezugssystem wird diese Geschwindigkeit der ursprünglichen Geschossgeschwindigkeit überlagert. Mit Blick auf Abb. 7.12 können Ablenkwinkel und Geschwindigkeit des Geschosses nach dem Stoß mit Hilfe trigonometrischer Beziehungen (Anwendung des Cosinus- und des Sinus-Satzes) bestimmt werden. Wegen $v_{rt} \ll v$ lassen sich die genauen Gleichungen für praktische Rechnungen vereinfachen. Dabei ergeben sich für die Geschossgeschwindigkeit nach dem Stoß u und für den Ablenkwinkel λ die folgenden Gleichungen

$$(7.4:29) \quad u = \frac{\mu}{\mu + 1} \cdot v, \quad [\text{m/s}]$$

$$(7.4:30) \quad \sin \lambda = \frac{1}{\mu} \cdot \sqrt{1 + \frac{v_{rt}^2}{v^2}} \cdot \sin \zeta \Rightarrow \lambda \approx \frac{1}{\mu} \cdot \zeta. \quad [-]$$

Schnelle und schwere Geschosse werden von Regen weniger beeinflusst als leichte und langsame.

Stößt beispielsweise ein 4 g schweres Geschoss im Kaliber 5.56×45 (223 Rem.) bei einer Geschwindigkeit von 850 m/s mit einem 3 mm Regentropfen ($m_{rt} = 14 \text{ mg}$, $v_{rt} = 9 \text{ m/s}$) zusammen, so resultiert eine Geschwindigkeitsabnahme von 3 m/s und eine Bahnabweichung nach unten von 0.038 Promille (3.8 mm bei 100 m).

Da sowohl Bahnabweichung wie auch der Geschwindigkeitsverlust eine tiefere Schusslage bewirken, kann das Zusammenstoßen mit mehreren Tropfen eine merkliche Treffpunktabweichung verursachen.

7.5 Das Geschoss als starrer Körper

7.5.1 Allgemeines

Die Beantwortung der Frage nach der Flugstabilität eines Abprallers setzt natürlich voraus, dass das Geschoss mitsamt seinen Eigenbewegungen betrachtet wird. Insbesondere spielt bei drallstabilisierten Projektilen der beim Kontakt mit dem Prellobjekt entstehende Drehmomentenstoß eine entscheidende Rolle. Dies bedeutet, dass die geometrischen Abmessungen und hier vor allem der Abstand der Stoßnormalen vom Schwerpunkt bekannt sein müssen.

Kugelförmige Geschosse, bei denen dieser Abstand trivialerweise Null ist,

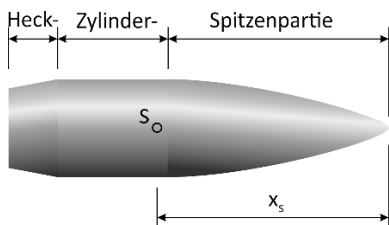


Abb. 7.13 Bezeichnungen der Geschossteile. Die Spitzenpartie kann unterschiedliche Formen aufweisen. S: Schwerpunkt.

kommen heute eher selten vor (Schrote, einige Typen von Flintenlaufgeschossen). Fast alle aktuellen Geschosse für Klein-, Mittel- und Großkaliberwaffen sind 1.5–6 Kaliber lang. Trotz der Formenvielfalt kann deren Kontaktgeometrie mit einem Prellobjekt in drei Klassen eingeteilt werden: runde, ogivale und konische Spitzenpartien.

7.5.2 Lage der Stoßnormalen bei verschiedenen Geschossformen

7.5.2.1 Bezeichnungen

Für die Bestimmung des Drehmomentenstoßes, den das Geschoss beim Aufprall erfährt, ist es notwendig, den Hebelarm des zugehörigen Kraftstoßes zu kennen. Dieser lässt sich aus der Geometrie der Geschossspitze ermitteln. Nachfolgend sind die entsprechenden Beziehungen für die drei erwähnten Spitzenpartien zusammengestellt. Diese lassen sich für die meisten Geschosse anwenden. Dabei gelten die folgenden Bezeichnungen:

S: Schwerpunkt,

N: Schnittpunkt der Stoßnormalen mit der Geschossachse (*Stoßpunkt*),

h: Spitzenhöhe,

d: Kaliber, $r = \frac{1}{2} \cdot d$,

x_s : Abstand Geschossspitze-Schwerpunkt (siehe Abb. 7.13),

x_n : Abstand Geschossspitze-Stoßpunkt,

b: Abstand Stoßpunkt-Schwerpunkt $b = x_s - x_n$ (Hebelarm der Stoßkraft, in Geschossachse gemessen).

Der Abstand x_s des Schwerpunktes von der Geschossspitze wird in der Regel messtechnisch bestimmt. Für einfache Geschosskonstruktionen lässt er sich auch berechnen.

7.5.2.2 Ellipsenförmige Rundkopfgeschosse

Viele der sogenannten Rundkopfgeschosse lassen sich durch einen Zylinder mit aufgesetztem Rotationshalbellipsoid approximieren. Bei Kurzwaffengeschossen beträgt die gesamte Geschosslänge weniger als 2 Kaliber, wovon ungefähr die Hälfte zylindrisch ist. Langwaffengeschosse sind 3 bis 5 Kaliber lang; die Spitzenhöhe h misst etwa ein Drittel der gesamten Geschosslänge.

Der Abstand des Stoßpunktes von der Geschossspitze ergibt sich aus der Geometrie der Ellipse (siehe Abb. 7.14)

$$(7.5:1) \quad x_n = h - \frac{(h^2 - r^2) \cdot \tan \alpha}{\sqrt{h^2 \cdot \tan^2 \alpha + r^2}} \quad [m]$$

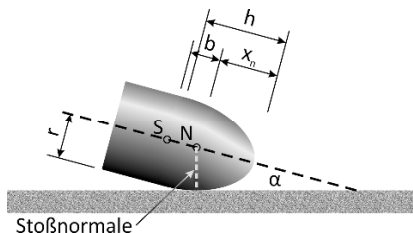


Abb. 7.14. Rundkopfgeschoss. Die Stoßlinie am Prellobjekt ist die Tangente mit Winkel α an die Halbellipse mit den Halbachsen h und r .

7.5.2.3 Parabelförmige Rundkopfgeschosse

Einige der Rundkopfgeschosse weisen eine Geschossspitze auf, die deutlich spitzer zuläuft als mit einer Halbellipse angenähert werden kann. In diesem Falle lässt sich die Geschossspitze durch ein Rotationsparaboloid ersetzen. Die Bestimmung des Abstandes des Stoßpunktes von der Geschossspitze folgt aus der Parabelgeometrie analog zum elliptischen Geschosskopf

$$(7.5:2) \quad x_n = \frac{r^2}{2 \cdot h} \cdot \left(1 + \frac{1}{2 \cdot \tan^2 \alpha} \right). \quad [\text{m}]$$

Da bei einer derartigen Geschossspitze der Übergang von der Spitze zum zylindrischen Teil nicht glatt verläuft, wird üblicherweise ein Ausrundungsradius vorgesehen. Berührt ein Geschoss in diesem Bereich, so kann – sofern erforderlich – die Gleichung der Kreisbogenogive verwendet werden (siehe nächster Abschnitt).

7.5.2.4 Spitzgeschosse

Die Spitzenpartien der Spitzgeschosse werden in den meisten Fällen als Kreisbogenogiven ausgebildet. Der Übergang zum zylindrischen Teil verläuft bei den Kleinkalibergeschossen in der Regel glatt, bei Artilleriegranaten mit einem Winkel von einigen wenigen Grad. Der Ogivenradius kann somit (zumindest angenähert) aus der Spitzenhöhe und dem Geschossdurchmesser bestimmt werden.

Der Abstand des Stoßpunktes von der Geschossspitze folgt aus der Kreisgeometrie, wobei mit den Bezeichnungen der Abb. 7.15 gilt

$$(7.5:3) \quad x_n = h - \frac{(h^2 - r^2) \cdot \tan \alpha}{2 \cdot r}. \quad [\text{m}]$$

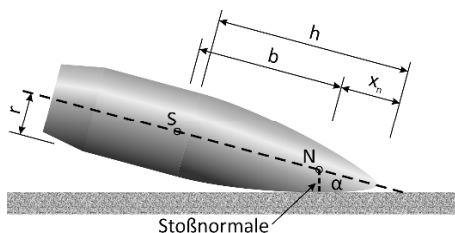


Abb. 7.15. Spitzkopfgeschoss. Die Stoßlinie am Prellobjekt ist Tangente mit Winkel α an den Kreisbogen, dessen Radius aus h und r bestimmt werden kann.

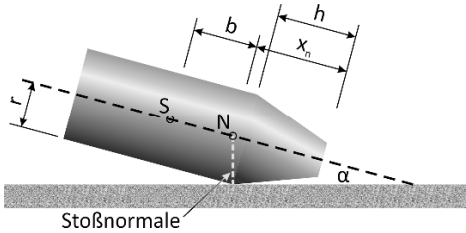


Abb. 7.16. Geschoss mit konischer Spitzenpartie.

Andere Spitzenformen lassen sich durch Kreisbogenogiven annähern (z. B. die Haack-Spitze) oder müssen bei speziellen Meridianfunktionen gesondert berechnet werden (z. B. die $\frac{3}{4}$ -Potenz-Form).

7.5.2.5 Zylinder-, Kegelspitz- und Flachkopfgeschosse

Ist der halbe Spitzenwinkel von Kegelspitz- und Flachkopfgeschossen größer als der Auftreffwinkel (wie es in den meisten Prellschussszenarien der Fall ist), so lassen sie sich gleich behandeln wie die zylindrischen Geschosse (wie z. B. Wadcutter und Semi-Wadcutter).

Der Abstand des Stoßpunktes von der Geschossspitze (bzw. beim zylindrischen Geschoss von dessen Stirnseite) ergibt sich dann zu

$$(7.5:4) \quad x_n = h + r \cdot \tan \alpha, \quad [\text{m}]$$

wobei beim zylindrischen Geschoss selbstverständlich $h = 0$ gesetzt werden muss. Ist bei Kegelspitz- und Flachkopfgeschossen der halbe Spitzenwinkel kleiner als der Auftreffwinkel, so gilt anstelle (7.5:4)

$$(7.5:4a) \quad x_n = r_{\text{sp}} \cdot \tan \alpha, \quad [\text{m}]$$

mit r_{sp} als Radius der Spitzenabplattung.

7.5.3 Der Drehmomentenstoß auf das Geschoss

Wirkt während einer kurzen Zeit Δt eine Kraft außerhalb des Drehpunktes auf die Figurenaxe eines sonst kräftefreien Kreisels, so entsteht ein Drehmomentenstoß \vec{T} und als Folge davon eine Änderung des Drehimpulses

$$(7.5:5) \quad \Delta \vec{L} = \vec{T} \cdot \Delta t = (\vec{F} \times \vec{r}) \cdot \Delta t. \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}]$$

\vec{r} bedeutet den Vektor von Drehpunkt zum Angriffspunkt der Kraft mit $|\vec{r}| = b$.

Die Änderung des Drehimpulses hat die gleiche Richtung wie das Drehmoment. Sie lässt sich in eine parallele und eine senkrechte Komponente zum vorhandenen Drehimpuls aufspalten. Die parallele Komponente ändert den Betrag, nicht aber die Richtung des Drehimpulses. Sie führt demnach (je nach Vorzeichen) zu einer Zu- bzw. Abnahme der Winkelgeschwindigkeit. Die senkrechte Komponente

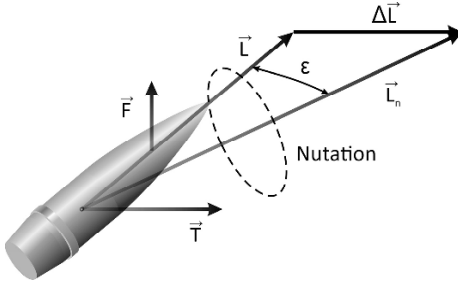


Abb. 7.17. Zur Auswirkung eines Drehmomentenstoßes. Näheres siehe Text.

führt zu einem sprunghaften Wechsel der Richtung des Drehimpulses. Die Figurenachse bewegt sich unmittelbar nach dem Stoß in Richtung der Kraft \vec{F} , führt jedoch anschließend eine Nutationsbewegung aus, bei der sie die neue Richtung des Drehimpulses \vec{L}_n auf einem Kegelmantel umkreist (siehe Abb. 7.17). Sie ist also im Mittel um den Winkel

$$(7.5:6) \quad \tan \varepsilon = \frac{|\Delta \vec{L}|}{|\vec{L}|}, \quad [-]$$

senkrecht zur Kraft in Richtung des Drehmomentes ausgelenkt worden.

Bei einem Geschoss steht der Vektor des Drehmomentes stets senkrecht auf der Krafrichtung und der Figurenachse. Der Drehimpuls ändert damit nur die Richtung, nicht aber den Betrag.

Trifft ein Geschoss auf einen Prellkörper, so wird auf die Geschossachse in Richtung der Stoßnormalen ein Kraftstoß ausgeübt, dessen Betrag gemäß Formel (7.4:5) wie folgt lautet

$$(7.5:7) \quad F_y \cdot t_s = -m \cdot (u_y - v_y) = m \cdot v \cdot (1 + k) \cdot \sin \alpha. \quad [\text{N} \cdot \text{s}]$$

Dieser Kraftstoß kann in eine Komponente in Richtung Geschossachse und in eine Komponente senkrecht dazu aufgespalten werden. Die erste verkleinert die Geschwindigkeit, die zweite bewirkt einen Drehmomentenstoß bezüglich einer Querachse durch den Schwerpunkt.

Die Änderung des Drehimpulses – der Drehmomentenstoß – ergibt sich dann aus (7.5:7) durch Multiplikation mit dem Abstand der Stoßnormalen vom Schwerpunkt. Mit den Bezeichnungen von Abschn. 7.5.2 folgt demnach

$$\begin{aligned} \Delta L &= F_y \cdot t_s \cdot b \cdot \cos \alpha, \\ &= m \cdot v_y \cdot (1 + k) \cdot b \cdot \cos \alpha, \\ (7.5:8) \quad \Delta L &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v \cdot (1 + k) \cdot b \cdot \sin (2 \cdot \alpha). \end{aligned} \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}]$$

Darin bedeuten m die Masse des Geschosses, v dessen Geschwindigkeit, k die Stoßzahl, b der Abstand zwischen Stoßnormalen und Schwerpunkt und α den Auftreffwinkel.

Der Winkel zwischen der Geschossachse und der Drehimpulsachse ist gemäß (7.5:6) durch den Quotienten von Drehimpulsänderung und Drehimpuls gegeben. Unter Verwendung der Beziehungen (7.5:8) und (2.2:25) ergibt sich

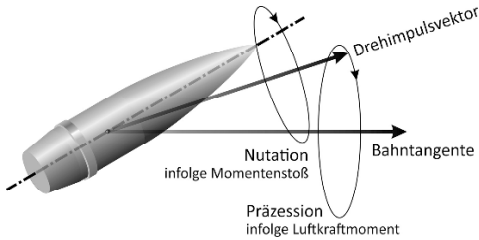


Abb. 7.18. Bewegungsverhältnisse nach dem Stoß. Der Präzession infolge Luftkraftmoment ist eine starke Nutation infolge des Momentenstoßes überlagert. (Nicht maßstäblich gezeichnet).

$$(7.5:9) \quad \tan \varepsilon = \frac{m \cdot v \cdot (1 + k) \cdot (x_s - x_n) \cdot \sin(2 \cdot \alpha)}{2 \cdot J_a \cdot \omega} \quad [-]$$

J_a steht für das axiale Trägheitsmoment des Geschosses und ω für dessen Winkelgeschwindigkeit.

Nach dem Stoß ist das Geschoss weiterhin den Luftkräften ausgesetzt; die Drehimpulsachse wird also zusätzlich zur Nutation eine Präzessionsbewegung um die Bahntangente ausführen (siehe Abb. 7.18). Zudem wird je nach Nutations- und Ablenkungswinkel des Geschosses auch der anfängliche Winkel zwischen Bahntangenten und Drehimpuls beträchtlich sein. Von diesem Winkel hängt es im Wesentlichen ab, ob die Nutation nach kurzer Zeit wieder abzuklingen vermag.

Wird die Nutation des abgeprallten Geschosses für sich betrachtet und von der Luftkraft abgesehen, so lässt sich die Drehfrequenz (und damit auch die Winkelgeschwindigkeit) der Nutation schätzen. Für den freien Kreisel gilt nämlich

$$(7.5:10) \quad v_n = \frac{|J_a - J_q|}{J_q} \cdot \frac{\omega}{2 \cdot \pi} \quad [1/s]$$

Mit diesem Ergebnis lässt sich eine durchaus überraschende Beobachtung erklären. Beim Abprallen eines Geschosses an einem harten Prellobjekt kann es geschehen, dass *ein* Schuss *zwei* Schusspuren hinterlässt (SELLIER 1987). Dies kann an einem Tatort zu falschen Folgerungen über die Anzahl der gefallenen Schüsse führen (siehe Abb. 7.19).

Da sich das Geschoss als freier Körper um den Schwerpunkt dreht, beschreibt das Geschossheck bei der Nutation ebenfalls eine kreisförmige Bewegung. Sind deren Frequenz und der Nutationswinkel genügend groß, kann es in der Nähe der

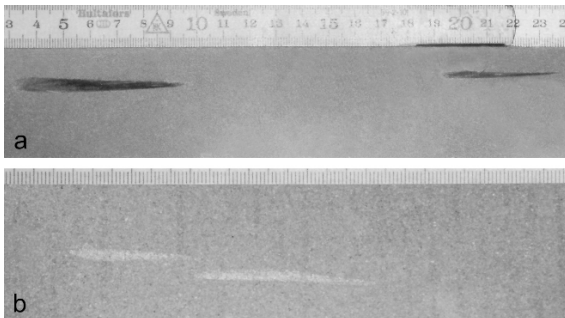


Abb. 7.19. Doppelte Abprallmarken: ein Schuss, zwei Spuren. **a** Bleigeschoss Kaliber 22 L.R. auf Messingblech, **b** Vollmantelgeschoss Kaliber 9 mm Luger auf Beton.

primären Abprallerspur zu einer zweiten Berührung durch das Geschossheck kommen, welche einen zweiten Schuss vortäuscht.

So ergibt sich z. B. beim Kaliber 22 L.R. eine (geschätzte) Drehfrequenz der Nutation von rund 500 s^{-1} . Bei $v = 300 \text{ m/s}$ benötigt das Geschoss somit für eine volle Drehung rund 0.6 m , sodass eine zweite Berührung mit der Prellebene nach ca. 15 cm durchaus realistisch ist (Abb. 7.19 a).

7.5.4 Wann fliegt ein Prellschuss stabil?

Stabilität in physikalischem Sinn liegt dann vor, wenn ein physikalisches System trotz Einwirkung einer Störung stets wieder den Gleichgewichtszustand sucht. In der Ballistik bedeutet dies, dass ein stabil fliegendes Geschoss seine Achse trotz des ständigen Einflusses des Luftkraftmomentes immer wieder nach der Bahntangenten ausrichtet. Die Stabilitätstheorien in der Ballistik (gyroskopische Stabilität, Molitz'sches Stabilitätsdreieck) beziehen sich nur auf die Frage, unter welchen Bedingungen eine Geschosskonstruktion einen stabilen Flug in der Luft gewährleistet (siehe Abschn. 5.6).

Die Frage, wie groß ein Drehmomentenstoß auf die Geschossachse (genauer: die Drehimpulsachse) sein darf, damit das Geschoss auch nach dem Stoß im obigen Sinne stabil ist, lässt sich nur mit großem Aufwand beantworten (Lösen der Euler'schen Kreiselgleichungen mit den entsprechenden Anfangsbedingungen).

Aus der Überlieferung jahrelanger ballistischer Praxis ist jedoch bekannt, dass übliche Geschosse vorübergehend als nicht mehr stabil gelten, wenn der Anstellwinkel nach dem Stoß den Wert von etwa 15° übersteigt.

Dieser Wert ist selbstverständlich von der Geschossauslegung abhängig. Insbesondere wird sich die Winkelgeschwindigkeit deutlich bemerkbar machen. Die angegebene Zahl setzt eine normale Geschosskonstruktion mit $J_q/J_a < 10$ und eine gyroskopischen Stabilitätszahl von 1.5 bis 2 voraus.

In einer ersten Näherung kann nun der anfängliche Anstellwinkel nach dem Abprallen dem Nutationswinkel gemäß Gl. (7.5:6) gleichgesetzt werden, da der durch die Präzession bedingte Anstellwinkel bei einem stabilen Geschoss vor dem Stoß in der Regel kleiner ist als etwa 3° . Damit wird ein Zusammenhang zwischen

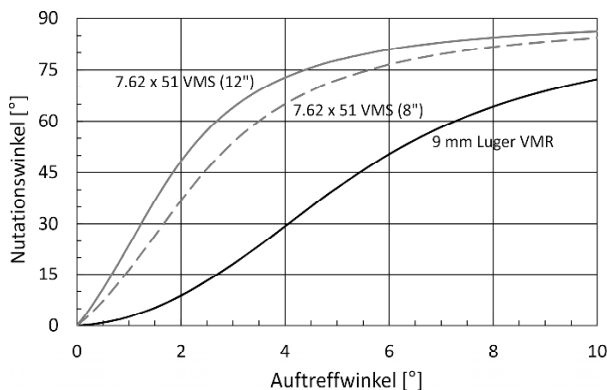


Abb. 7.20. Zusammenhang zwischen Auftreffwinkel und Nutationswinkel (als Schätzung für den Anstellwinkel nach dem Stoß). Einzelheiten siehe Text.

Auftreffwinkel und Anstellwinkel nach dem Stoß geschaffen, der sowohl die Geometrie des Geschosses als auch die Winkelgeschwindigkeit berücksichtigt. In der Abb. 7.20 sind zwei Beispiele einer solchen Relation (eines für das Kurzwaffengeschoss 9 mm Luger, das andere für das Langwaffengeschoss 7.62×51 dargestellt (beide in Vollmantelausführung).

Aus der Grafik lässt sich entnehmen, dass das 9-mm-Luger-Kurzwaffengeschoss bis zu ca. 2.5° Auftreffwinkel stabil abprallen kann. Das Langwaffengeschoss hingegen wird bereits bei Auftreffwinkeln unter 1° nicht mehr stabil weiterfliegen. Beide Werte decken sich überraschend gut mit der praktischen Erfahrung. Beachtenswert ist auch der Einfluss einer Vergrößerung der Winkelgeschwindigkeit, die das Einsetzen der Destabilisierung merklich hinausschiebt (gerechnet mit einer Dralllänge von 203 mm anstelle von 305 mm).

Bei Kenntnis der entsprechenden geometrischen und physikalischen Daten lassen sich diese Kurven für alle Geschosse berechnen.

7.5.5 Eigenbewegung und Fluglage eines Prellschusses

7.5.5.1 Die Eigenbewegung

Aus dem letzten Abschnitt geht hervor, dass beim Abprallvorgang bereits bei kleinen Auftreffwinkeln große Anstellwinkel entstehen können. Es stellt sich nun die Frage, welchen Bewegungen das abgeprallte Geschoss unterworfen sein wird, wenn Geschossachse und Bewegungsrichtung einen großen Winkel einschließen.

Ein Beispiel des Beginns einer solchen Geschossbewegung ist aus Abb. 7.21 ersichtlich. Sie zeigt vier Durchschusslöcher (in dünnem Karton) ein und desselben 7.5-mm-Geschosses, welches kurz nach der Mündung einen Rundstab aus Holz gestreift hat. Richtung und unterschiedliche Länge der Löcher weisen auf die kegelförmige Drehung der Geschossachse und deren Nickbewegung hin.

Bezieht man sich auf ein mit dem Schwerpunkt des Geschosses verbundenes Bezugssystem und sieht zunächst vom Luftwiderstand ab, so vollführt das Geschoss die typische Nutationsbewegung eines prolaten Kreisel (symmetrischer Kreisel mit den Trägheitsmomenten $J_1 = J_2 > J_3$). Diese lässt sich basierend auf der geometrischen Kreiseltheorie (W. GREINER 1989, K. MAGNUS 1971) mittels zwei Kreiskegelmantelflächen darstellen (nach POINSOT, siehe Abb. 7.22). Die Spitzen beider befinden sich im Schwerpunkt des Geschosses. Den einen, den Polkegel,



Abb. 7.21. Karton-Durchschüsse ein und desselben Geschosses, 2, 4, 6 und 8 m nach dessen Störung durch Streifen an einem Rundstab aus Holz. Geschosskaliber 7.5 x 55 Swiss. Näheres siehe Text. Vergleiche auch mit Abb. 5.44 der Karton-Durchschüsse eines unstabilen Schusses.

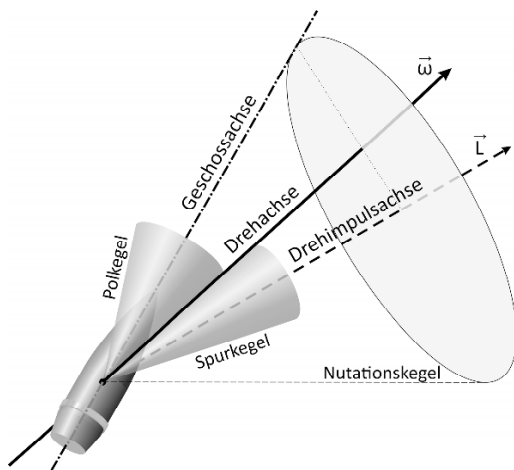


Abb. 7.22. Nutationsbewegung eines abgeprallten Geschosses.

Die fest mit dem Geschoss verbunden gedachte Mantelfläche des Polkegels rollt auf dem Mantel des Spurkegels ab. Die gemeinsame Mantellinie bildet die Drehachse des Systems.

denkt man sich fest mit dem Geschoss verbunden, die Achse des andern, des Spurkegels, fällt mit dem Drehimpulsvektor zusammen. Die Nutationsbewegung ergibt sich nun durch Abrollen des Polkegelmantels auf dem Spurkegelmantel. Die gemeinsame Mantellinie bildet dabei die Drehachse, die sich also ständig ändert. Geschossachse, Drehachse und Drehimpulsachse liegen somit stets in einer Ebene. Bei ihrer Bewegung um die Drehimpulsachse überstreicht die Geschossachse ebenfalls eine Kegelfläche, die Nutationskegelfläche.

In Wirklichkeit ist diese Nutationsbewegung der Präzession des Geschosses überlagert, deren Ursache das ständig einwirkende Moment der Luftkraft ist. Mit zunehmendem Anstellwinkel nimmt der Luftwiderstand zu und damit auch der Präzessionswinkel. Anstellwinkel von 90° und mehr (bis gegen 180°) sind daher durchaus möglich. Tritt dies ein, so ist zu beachten, dass sich beim Überschreiten des rechten Winkels zwischen Bahntangenten und Geschossachse die Drehrichtung des Geschosses im geschossfesten System wegen der Drehimpulserhaltung umkehrt (siehe dazu Abschn. 5.6.4.6 und das dort beschriebene Beispiel).

7.5.5.2 Fluglage und Stabilität

Es stellt sich nun die Frage, ob auf dem weiteren Verlauf der Flugbahn des Geschosses die stoßbedingte Nutation wieder abklingt und sich die Geschossachse auf die Richtung der Bahntangenten einstellt. Eine Antwort darauf lässt sich mittels der Kreiseltheorie kaum geben, da das reale System mit den einwirkenden Strömungs- und Reibungskräften außerordentlich komplex ist.

Würden nach dem Stoß auf das Geschoss keine Kräfte mehr einwirken, blieben der neue Drehimpulsvektor und damit auch die Nutationsbewegung erhalten.

Hingegen gibt es die Möglichkeit, die Geschossbahn zu vermessen und aus den Ergebnissen qualitative Schlüsse über die Fluglage und die Stabilität des Geschos-

ses zu ziehen. Von Abschn. 5.3.2.1 ist bekannt, dass der Luftwiderstand im Massenpunktmodell wie folgt darstellt wird (Gl. 5.3:20)

$$(7.5:11) \quad F_W = c_w \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_0^2 \cdot A_0, \quad [N]$$

wo c_w der Luftwiderstandsbeiwert und A_0 die Bezugsfläche bedeutet. Erhält das Geschoss infolge einer Nutation einen größeren Anstellwinkel δ , nimmt die der Strömung entgegengestellte Fläche $A(\delta)$ zu und damit auch der Luftwiderstand. Wird nun mit einem Doppler-Radar der Geschwindigkeitsverlauf des abgeprallten Geschosses gemessen und daraus die Verzögerung und der Luftwiderstandsbeiwert bestimmt, so übernimmt der Letztere die Änderungen der angeströmten Fläche, wenn als Bezugsfläche A_0 beibehalten wird

$$(7.5:12) \quad F_W = c_w \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_0^2 \cdot \frac{A(\delta)}{A_0} \cdot A_0. \quad [N]$$

Die Doppler-Radar-Messung wird somit den Verlauf der folgenden c_w -Funktion wiedergeben

$$(7.5:13) \quad c_w^* = c_w \cdot \frac{A(\delta)}{A_0}. \quad [-]$$

Nähert sich diese c_w^* -Funktion der Originalfunktion des betreffenden Geschosses, so kann dies nur bedeuten, dass sich $A(\delta)$ wiederum dem Querschnitt des stabil fliegenden Geschosses (Geschossachse nahe an der Bahntangenten) angenähert hat. Dies kann aber auf zwei Arten geschehen: Spitze in Flugrichtung oder Heck in Flugrichtung.

Im durchaus möglichen Fall des Heck voran fliegenden Geschosses gilt natürlich eine andere c_w -Funktion des ungestört fliegenden Geschosses.

In der Abb. 7.23 sind c_w -Messungen zweier abgeprallter Kleinkalibergeschosse im Kaliber 7.62×51 dargestellt, die beide nach einer gewissen Strecke offensichtlich wieder annähernd stabil flogen. Analog zeigt die Abb. 7.24 gemessene

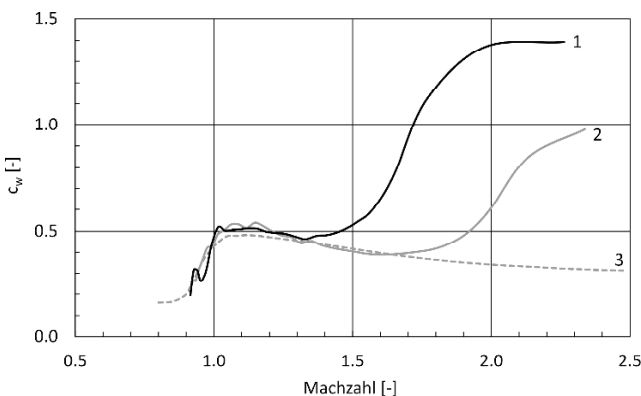


Abb. 7.23. c_w -Verläufe zweier an einem Holzstab abgeprallter Geschosse im Kaliber 7.62×51 . Beide Kurven (1, 2) laufen in den c_w -Graphen des stabil fliegenden Geschosses (3) ein, wobei offensichtlich im schallnahen Bereich der Flug wieder unruhiger wurde.

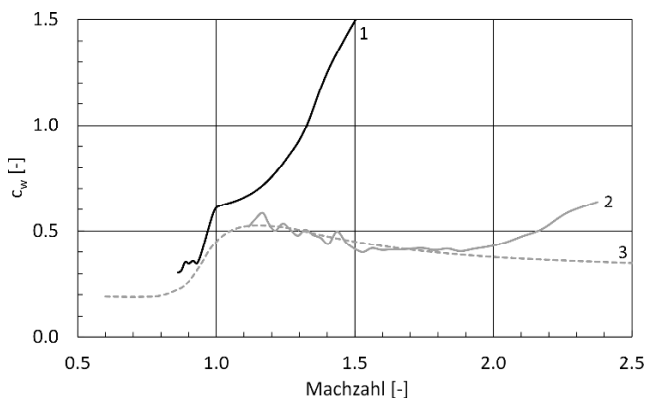


Abb. 7.24. c_w -Verläufe zweier an einem Holzstab abgeprallter Geschosse im Kaliber 5.56×45 . Kurve (1) bleibt nach Wiederstabilisierung etwas oberhalb des c_w -Graphen des stabil fliegenden Geschosses (3), Kurve (2) läuft in diesen ein, ebenfalls mit einem etwas unruhigen Flug.

c_w -Kurven zweier Abpraller im Kaliber 5.56×45 von denen der eine (1) sich möglicherweise Heck voran weiterbewegte.

Die Wiederstabilisierung von Kleinkalibergeschossen Heck voran ist ebenfalls bei Schüssen steil in die Luft bekannt, wenn das Geschoss durch mangelnde Folgsamkeit im Gipfel hohe Anstellwinkel erreicht und sich im absteigenden Ast erneut stabilisiert. Bestätigt wird dies immer wieder durch Schussverletzungen, welche durch herabfallende Geschosse entstehen (siehe Abb. 5.26).

7.6 Die Flugbahn eines Prellschusses

7.6.1 Querschnittsbelastung und Luftwiderstandsbeiwert

Wie bereits erläutert (Abschnitt 7.5.5), führt ein abgepralltes Geschoss eine sehr komplizierte Eigenbewegung um den Schwerpunkt aus, die vor allem aus der durch den Stoß angeregten Nutation besteht. Der Anstellwinkel des Geschosses schwankt daher periodisch zwischen 0° und einem maximalen Winkel, der ohne weiteres gegen 180° betragen kann. Die Größe dieses maximalen Winkels hängt vom Auftreffwinkel und vom Drehmomentenstoß ab.

Bei Kurzwaffengeschossen ist in der Regel ab 3° , bei Langwaffengeschossen ab ca. 1.5° Auftreffwinkel mit einem sehr großen Anstellwinkel zu rechnen (siehe Abschnitt 7.5.4).

In der Flugbahnrechnung für abgeprallte Geschosse stellt sich nun die Frage, mit welchem Wert die Querschnittsbelastung zu berücksichtigen ist und welche Funktion des Luftwiderstandsbeiwertes verwendet werden soll. Eine angenäherte Lösung dieses Problems kann sich auf die Periodizität der Bewegung stützen, deren Schwingungslänge sich im Meterbereich bewegt.

Für weite Schussdistanzen kann die Querschnittsbelastung unter Verwendung der mittleren Schattenfläche des sich um eine Querachse drehenden Geschosses bestimmt werden. Als zugehöriger Luftwiderstandsbeiwert lässt sich beispielsweise ein Mittelwert zwischen den Beiwerten von längs- und querangeströmten

Zylindern heranziehen. Bei kurzen Geschossen (von Kurzwaffen) ist auch der c_w -Wert der Kugel eine akzeptable Wahl.

Bei kurzen Schussdistanzen (Meterbereich) ist eine Rechnung in der Regel nicht erforderlich. Sollte es dennoch notwendig sein, so kann mit der mittleren Querschnittsbelastung und einem konstanten c_w in der Größenordnung von etwa 2 gerechnet werden.

Selbstverständlich ergeben Rechnungen auf dieser Basis nur angenäherte Resultate, die jedoch für den praktischen Gebrauch völlig ausreichend sind.

7.6.2 Maximale Reichweiten

Die Berechnung maximaler Reichweiten abgeprallter Geschosse ist vor allem im Zusammenhang mit den Sicherheitszonen bei Schießanlagen wichtig. Das größte Risiko bilden dabei diejenigen Prellschüsse, die beim Abprallen nicht zersplittern.

Beim Zersplittern eines Geschosses wird die nach dem Prellvorgang verbliebene Energie auf mehrere Projektile verteilt. Zudem wird die Querschnittsbelastung der einzelnen Geschossteile stark reduziert, was eine stark verringerte Reichweite zur Folge hat. Dennoch ist bei Splintern von Weichkerngeschossen mit Reichweiten bis zu 300 m zu rechnen.

Voraussetzung für die Bestimmung der Reichweite eines Prellschusses ist zunächst die Kenntnis von Abgangswinkel und -geschwindigkeit vom Prellobjekt. Möglichkeiten für deren Ermittlung wurden im Abschn. 7.4 dargelegt. Umfangreiche experimentelle Ergebnisse verschiedener Kurzwaffengeschosse sind durch B. P. KNEUBUEHL (1999) zusammengestellt worden. Die erste Phase der Flugbahn, während der das Geschoss stark nutiert, lässt sich dann mit den in Abschn. 7.6.1 gemachten Überlegungen angenähert berechnen.

In Abschn. 7.5.5.2 wurde dargelegt, dass sich das Geschoss nach einer gewissen Flugstrecke wieder stabilisieren kann, also mit seiner Achse wiederum der Flugbahntangente folgt. Diese erneut stabile Fluglage kann sich sowohl mit der Spitze als auch mit dem Heck nach vorne einstellen.

Diese zweite Phase, die nur bei Unterschallgeschwindigkeit stattfindet, ist mit der üblichen Querschnittsbelastung und einem der Geschosslage entsprechenden c_w -Wert zu rechnen.

Spitzgeschosse, die mit dem Heck voran fliegen, können wegen des geringen Basiswiderstandes (der Bodensog wird weitgehend fehlen) durchaus einen geringeren c_w -Wert aufweisen, als wenn sie sich in normaler Fluglage bewegen.

Es reicht für solche Rechnungen völlig aus, das Massenpunktsmodell gemäß Abschn. 5.4.3 zu verwenden. Da diese stabile Flugphase die Reichweite eines Prellschusses deutlich erhöht, ist sie bei der Bestimmung von Sicherheitszonen auf jeden Fall in die Berechnung einzubeziehen.

7.7 Weitere Abprallertheorien

7.7.1 Theorie von SELLIER

In einem Übersichtsreferat zum Thema „Geschossablenkung und Geschossdeformation“ ging K. SELLIER (1971) (auch in K. SELLIER, 1977, abgedruckt) kurz auf die Theorie des Abprallens ein. Dabei wird die Bewegung des Geschosses in eine senkrechte und eine tangentielle Komponente zur Prollebene zerlegt. Die senkrechte Komponente wird nach den Gesetzen des zentrischen, geraden, teilelastischen Stoßes behandelt, während die tangentielle Komponente erhalten bleibt.

Die letztere Annahme gestattet die Bestimmung der Stoßzahl k (bei SELLIER mit ε bezeichnet) allein aus Auftreff- und Abgangswinkel gemäß der folgenden Beziehung

$$(7.7:1) \quad k = \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} . \quad [-]$$

Da k auf Grund der Energieerhaltung und der vorausgesetzten Konstanz der tangentialen Komponente nicht größer als 1 werden kann, lassen sich nur Abprallphänomene erklären, bei denen der Abgangswinkel geringer ist als der Auftreffwinkel. Fälle, bei denen das Geschoss steiler wegfiegt als es aufgetroffen ist (wie sie in der Praxis durchaus vorkommen), werden damit nicht erfasst.

7.7.2 Theorie von JAUHARI

Eine ausführlich ausgearbeitete Theorie zur Phänomenologie des Prellschusses stammt von M. JAUHARI (1971). JAUHARI zerlegte sowohl die Auftreff- als auch die Abgangsgeschwindigkeit in eine tangentielle und eine normale Komponente und führte in beiden Richtungen voneinander unabhängige Reduktionsfaktoren μ und ν (bei JAUHARI α und β genannt) ein

$$(7.7:2a) \quad u_x = \mu \cdot v_x = \mu \cdot v \cdot \cos \alpha , \quad [\text{m/s}]$$

$$(7.7:2b) \quad u_y = \nu \cdot v_y = \nu \cdot v \cdot \sin \alpha . \quad [\text{m/s}]$$

Die Kennzahl ν entspricht betragsmäßig der Stoßzahl k (siehe Abschnitt 7.4.1.2).

Der Abgangswinkel lässt sich dann durch den Auftreffwinkel und die beiden Parameter ausdrücken

$$(7.7:3) \quad \tan \beta = \frac{\nu}{\mu} \cdot \tan \alpha . \quad [-]$$

Da μ und ν voneinander unabhängig sind, lässt dieser Modellansatz – im Gegensatz zur Theorie von SELLIER – auch Abgangswinkel zu, die größer sind als der zugehörige Auftreffwinkel.

Als weitere Information zur Bestimmung der beiden Parameter zog JAUHARI die Länge und die Tiefe der Geschossspur auf dem Prellobjekt hinzu. Mit der Annahme einer konstanten Verzögerung (von v_x auf u_x in tangentialer Richtung und von v_y auf 0 in vertikaler Richtung) leitete er unter Verwendung des Impulssatzes die folgenden zwei Gleichungen für μ und v her

$$(7.7:4a) \quad \mu = -\frac{\tan \alpha}{2 \cdot \tan \beta} - \frac{1}{2} \pm \frac{\tan \alpha}{2 \cdot \tan \beta} \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{\tan \beta}{\tan \alpha}\right)^2 + \frac{4 \cdot s_x \cdot \tan \beta}{s_y}}, \quad [-]$$

$$(7.7:4b) \quad v = -\frac{\tan \beta}{2 \cdot \tan \alpha} - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{\tan \beta}{\tan \alpha}\right)^2 + \frac{4 \cdot s_x \cdot \tan \beta}{s_y}}. \quad [-]$$

Die Spurtiefe ist mit s_y bezeichnet. Die übrigen Bezeichnungen entsprechen den Vereinbarungen der Tabelle 7.2.

Damit ist es grundsätzlich möglich, die beiden für eine gegebene Geschoss-Prellobjekt-Kombination charakteristischen Parameter μ und v aus experimentell ermittelten geometrischen Daten zu bestimmen. Es ist aus physikalischen Gründen allerdings klar, dass beide Kennzahlen nicht Konstanten sind, sondern vom Auftreffwinkel abhängen.

Zur Theorie von JAUHARI lassen sich zwei Anmerkungen machen:

- Es ist nicht einsichtig, weshalb JAUHARI den Parameter v auf das Intervall (0,1) beschränkt. In gewissen Materialien (z. B. Holz) ist es durchaus möglich, dass die vertikale Komponente der Abgangsgeschwindigkeit betragsmäßig größer ist als die entsprechende Komponente der Auftreffgeschwindigkeit (dabei findet eine Kombination von Abprallen und Umlenken statt). Dies lässt sich auch experimentell nachweisen.
- Die Beziehungen (7.7:4a) und (7.7:4b) setzen voraus, dass die Tiefe der Spur s_y größer ist als Null. Bei Prellkörpern aus harten Materialien (dicke Stahlplatten, glatter Beton) und kleinen Auftreffwinkeln ist jedoch keine Spurtiefe zu messen. In diesen Fällen lassen sich die beiden Parameter μ und v nicht bestimmen.

7.7.3 Theorie von BIRKHOFF für Wasseroberflächen

Im Jahre 1944 publizierten G. BIRKHOFF et al. eine Arbeit über das Abprallen von Kugeln an Wasseroberflächen. Er ging dabei von den folgenden Annahmen aus:

- Auf dem Flächenelement, dessen Normalenvektor mit der Bewegungsrichtung den Winkel ζ einschließt (dies entspricht dem Stellungswinkel), wirkt ein Druck von

$$(7.7:5) \quad p = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot \cos^2 \zeta . \quad [\text{Pa}]$$

- Der Druck wirkt nur auf die Kugelfläche, die sich unterhalb der ungestörten Wasseroberfläche befindet.

Eine physikalische Begründung für diese Annahmen wird nicht gegeben. BIRKHOFF erwähnte nur, dass damit eine plausible Schätzung der beteiligten Kräfte erreicht würde. Sein Ansatz erinnert jedoch stark an die NEWTON'sche Strömungshypothese, nach welcher der Widerstand ausschließlich durch Impulsübertragung an die angeströmte Körperoberfläche zustande kommt (siehe dazu auch Abschn. 5.7.3.3). Die Rückseite des Körpers bleibt dabei kräftefrei.

Allerdings tritt bei der NEWTON'schen Druckformel der Faktor $\frac{1}{2}$ nicht auf, für den auch BIRKHOFF keine Erklärung gibt. W. JOHNSON und S. R. REID (1975) variierten deshalb diesen Koeffizienten und verwendeten ihn zur Anpassung an Messresultate.

Auf Grund der beiden Annahmen lässt sich die Druckverteilung der benetzten Fläche an der Kugeloberfläche berechnen, mit der die Bewegungsgleichung senkrecht zur Bahntangenten (in Abhängigkeit des Auftreffwinkels) aufgestellt werden kann. Der Grenzwinkel für das Wiederaustreten aus dem Wasser wird dann erreicht, wenn die Kugel vollständig eingetaucht ist, ihre Bahn horizontal verläuft und zugleich die Querkraft verschwindet. Daraus folgt für den kritischen Auftreffwinkel

$$(7.7:6) \quad \alpha_{\text{krit}} = 17.5 \cdot \sqrt{\frac{\rho_w}{\rho_K}} . \quad [^\circ]$$

ρ_w steht für die Dichte von Wasser und ρ_K für diejenige des Kugelmaterials. Überraschenderweise ist der Grenzwinkel weder von der Auftreffgeschwindigkeit noch vom Kaliber abhängig.

JOHNSON und REID gingen in ihrem Beitrag ausführlich auf die Herleitung dieser Gleichung ein. Sie stellten ebenfalls ein Differenzialgleichungssystem für die Bahn der Kugel auf und berechneten die Bahnen für eine Aluminiumkugel. Sie zeigten auch, dass Gleichung (7.7:6) für weitere flüssigkeitsähnliche Materialien (z. B. Sand) angewendet werden kann, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist

$$(7.7:7) \quad \frac{\rho_m \cdot v_m^2}{Y_m} \gg 1 . \quad [-]$$

Darin bedeutet ρ_m die Dichte und Y_m die Fließgrenze des Materials. v_m ist eine Geschwindigkeit, die etwa der Geschwindigkeit der Materieteilchen während dem Stoßprozess entspricht.

Über das Abprallen von Kugeln in Wasser (und auch in Sand) wurden verschiedentlich Experimente durchgeführt und auch beschrieben, wobei sich die Formel (7.7:6) recht gut bewährte. Eine ausführliche Zusammenstellung findet sich in der Schrift B. P. KNEUBUEHL (1999).



8 Spezielle Anwendungen der Ballistik

8.1 Einleitung

Neben den klassischen Anwendungen der Ballistik in der Wehrtechnik finden sich auch im zivilen Bereich viele praktische Anwendungen ballistischer Methoden. Typische Beispiele bilden all die Sportarten, bei welchen ein Objekt geschlagen, geworfen oder gestoßen wird und anschließend eine kürzere oder längere Strecke durch die Luft fliegt. Hierzu gehören nicht nur Golf, Tennis und Basketball, sondern auch die Wurfdisziplinen der Leichtathletik und Fußball. Der günstigste Abgangswinkel für die größte Flugweite, Anfangsgeschwindigkeit und Elevation für die Flugbahn in den Korb, Eigenrotation des Fußballs zum Erzeugen einer doppelt gekrümmten Bahnkurve (Effet) sind ballistische Fragestellungen, welche der Spieler jedoch fast immer rein intuitiv und auf Grund eingeübter Erfahrung löst.

Sehr häufig genutzt wird ballistisches Wissen im Bereich der forensischen Wissenschaften, wobei alle Teildisziplinen dieses Buches Grundlagen bieten. Gute Kenntnisse über Pulverzusammensetzungen, der Schussentwicklung und des Geschossabgangs spielen bei der Schussdistanzbestimmung im Nahbereich und dem Schusshandnachweis mittels Schmauchspurenanalyse eine wichtige Rolle. Zu den entsprechenden Techniken gibt es mehrere Lehrbücher und Fachbeiträge wie z. B. K. SELLIER (1989, 1991), A. GALLUSSER et al. (2014), C. FRINGS, F. RABE (2016).

Auf das Kapitel Außenballistik zurückgreifen wird man, wenn es gilt, die Herkunft verirrter Projektile oder den Ausgangspunkt von Fehlschüssen abzuklären. Diese Anwendung der Ballistik in den forensischen Wissenschaften wird in der Literatur kaum beschrieben; sie wird daher in diesem Kapitel eingehender besprochen und mit einigen Fallbeispielen illustriert.

Ein analoges Problem stellt sich in der Blutspurenanalyse, also jenem forensischen Teilgebiet, das versucht, aus den am Tatort vorhandenen Blutspuren den Hergang der Tat zu rekonstruieren. Diesem sehr speziellen Einsatz der Außenballistik wird ebenfalls ein Abschnitt gewidmet.

Sicherheitsbeurteilungen von Schießplätzen und Schießständen und die Abklärung von außergewöhnlichen Unfällen und Vorfällen erfordern neben außen- auch endballistische Kenntnisse und Erfahrung. Bei Ersteren geht es hauptsächlich um die Ermittlung möglicher Fehlschüsse, beim zweiten um die Suche nach den Ursachen, wobei sich manchmal ganz unerwartete Zusammenhänge offenbaren.

8.2 Forensische Anwendungen

Mitautor: Dr. sc. forens. Fabiano RIVA

8.2.1 Flugbahnrekonstruktion

8.2.1.1 Kurze und lange Flugbahnen

Gleich zu Beginn der Aufgabe, die Flugbahn eines Geschosses zu rekonstruieren, ist zu entscheiden, ob es sich um einen „kurzen“ oder um eine „langen“ Flugweg gehandelt hat, weil sich das Lösungsverfahren zwischen den beiden Fällen deutlich unterscheidet.

„Kurze“ Schussdistanzen sind dadurch charakterisiert, dass sich der Geschossweg durch eine gerade Linie approximieren lässt. Die Abweichung einer Flugbahn von einer geraden Linie wird (bekanntlich) nur durch die Erdbeschleunigung verursacht. Ein Kriterium, das entscheidet, ob eine Flugbahn „kurz“ ist oder nicht, wird daher allein von der Flugzeit abhängen, die bestimmt, wie lange das Geschoss der Gravitation ausgesetzt ist. Nimmt man beispielsweise als Grenzdistanz für das Prädikat „kurz“ eine Fallhöhe von 1 cm an, so ergibt sich eine Flugzeit von 0.0452 s. Die Verzögerung des Geschosses wird in dieser kurzen Flugzeit eine nur untergeordnete Rolle spielen; für die Grenzdistanz D ergibt sich damit die Beziehung

$$(8.2:1) \quad D = 0.0452 \cdot v_0 \quad [m]$$

Für einige typische Kaliber sind in der Tabelle 8.1 entsprechende Maximalstrecken für die Annahme geradliniger Flugbahnen angegeben.

M. G. HAAG und L. C. HAAG (2011) sowie R. M. GARDNER (2005) geben 18–30 m als Grenzdistanz für kurze Flugwege an, was mit der obigen Beziehung durchaus kompatibel ist.

Größere und sehr weite Schussdistanzen treten in erster Linie bei Jagdunfällen, bei den (unnötigen und gefährlichen) Schüssen in die Luft an Feiertagen oder bei Fehlschüssen in Schießständen auf.

Eine als „lang“ erkannte Flugbahn erfordert einen ungleich größeren Rekonstruktionsaufwand als kurze Flugbahnen, da alle für eine Flugbahnrechnung erforderlichen Parameter zusammengetragen werden müssen. Manche sind einfach zu ermitteln, andere hingegen benötigen einen größeren Aufwand und können oft nur mit einer gewissen Unsicherheit angegeben werden. Mitunter bleiben einige Daten unbekannt und verlangen nach einer möglichst realistischen Schätzung.

Tabelle 8.1. Grenzdistanzen für die Annahme geradliniger Flugbahnen

Kaliber	D [m]	v ₀ [m/s]	Kaliber	D [m]	v ₀ [m/s]
4.5 mm Diabolo	8	175	12/70 Brenneke	19	420
45 Auto	11	245	7.62 × 39	32	710
38 Spl. SWC	13	290	7.5 mm GP 11	34	750
22 L. R.	15	330	7.62 mm NATO	38	830
9 mm Luger	16	350	223 Rem Sierra MK	40	885

8.2.1.2 Daten am Ereignisort

Die Rekonstruktion einer „langen“ Flugbahn aus den Daten eines ihrer Punkte – in der Regel ist es der Aufschlagpunkt – ist dem Anfangswertproblem nahe verwandt (siehe Abschn. 5.4.3.3). Während dieses üblicherweise mit Standarddaten gerechnet wird, ist bei der Rekonstruktion mit den effektiven Daten zum Zeitpunkt des betreffenden Schusses zu rechnen.

Geschossdaten. Ist das Geschoss gefunden worden, stehen in den meisten Fällen die ersten wichtigen Parameter zur Verfügung, nämlich der Geschossdurchmesser (und damit oft das Kaliber), Masse und Durchmesser des Geschosses, seine Form und sein Aufbau. Deformationen am Geschoss sind darauf zu untersuchen, ob sie ausschließlich am Fundort entstanden sind oder ob das Geschoss bereits auf seiner Flugbahn mit andern Objekten in Kontakt gekommen ist.

Falls ein Geschoss keine Verformungen aufweist, heißt dies noch nicht, dass es keinen Kontakt mit festen Gegenständen hatte. So kann z. B. weiches Holz durchschlagen werden, ohne Veränderungen am Geschoss zu erzeugen (siehe Abschn. 6.3.5). Allerdings wird dabei die Stabilität gestört.

Bahnwinkel. Für die Bestimmung einer Flugbahn ist die Kenntnis der räumlichen Richtung einer Bahntangente (also eines Bahnwinkels) in einem beliebigen ihrer Punkte unabdingbar. Am Fundort des Geschosses ist diese Richtung im günstigsten Fall durch zwei Punkte (z. B. Durchschlag durch ein Fenster und der Einschlagspunkt in einer Wand) gegeben; sie kann aber auch durch einen Schusskanal in einem festen Material (Gips, Holz) oder mittels eines elliptischen Schussloches in einer Platte bestimmt werden. In den beiden letzten Fällen ist zunächst der Winkel bezüglich der Wand oder Platte und anschließend deren räumliche Orientierung zu bestimmen. Mit welcher Genauigkeit diese Winkelmessung erfolgt, hängt von der spezifischen Situation ab und muss von Fall zu Fall entschieden werden.

Für den Fall eines Schusskanals in einer Gipsplatte geben M. G. HAAG und L. C. HAAG (2011) einen mittleren Fehler in der gemessenen Auftreffrichtung von $\pm 5^\circ$ an.

Sehr viel schwieriger wird die Bestimmung eines Bahnwinkels, wenn es sich um einen Treffer an einem menschlichen Opfer handelt. Wohl kann bei der Obduktion ein Schusskanal und damit eine Auftreffrichtung bezüglich der Körperoberfläche angegeben werden, jedoch ist über die Körperhaltung zum Zeitpunkt des Treffers kaum etwas bekannt (F. RIVA et al., 2017, W. KERKHOFF et al., 2018). Analoges gilt auch für Treffer in Objekte in Bewegung (wie z. B. Fahrzeuge).

Sind das Geschoss und der Fallwinkel bekannt, ergibt sich bereits ein recht guter Hinweis auf die Flugweite, wenn man eine geschossspezifische Fallwinkel-Schussdistanz-Grafik zur Hand hat (siehe Abb. 8.1). Eine solche Grafik lässt sich ohne weiteres für die gängigsten Kaliber und für die betreffende Ortshöhe vorbereiten. Unabhängig von aktuellen Daten (Mündungsgeschwindigkeit und Wetterdaten) kommt man dem Abschusspunkt schon recht nahe, sofern die räumliche Richtung einigermaßen zuverlässig bestimmt werden kann.

Auftreffgeschwindigkeit. Etwas schwieriger gestaltet sich die Ermittlung der Auftreffgeschwindigkeit des Geschosses. Zunächst hat man über den Fallwinkel und

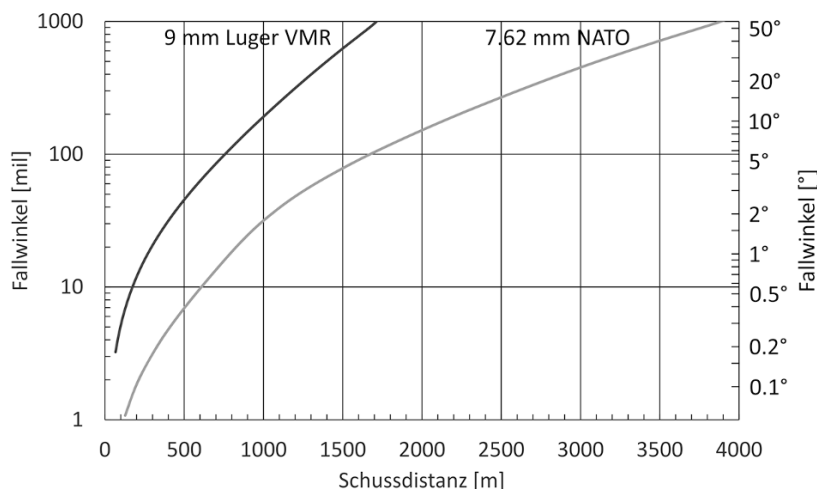


Abb. 8.1. Fallwinkel-Schussdistanz-Grafik zu einer schnellen, angenäherten Bestimmung der Schussdistanz eines Fehlschusses.

die damit verbundene, grob angenäherte Schussdistanz auch eine Schätzung der Endgeschwindigkeit. Am Fundort selbst geben nur die vom Geschoss hinterlassenen Spuren (Eindringtiefe, Schadensausmaß, Geschossdeformation) darüber Auskunft, wie viel Energie das Geschoss noch besaß. Es braucht einige endballistische (und bei Personenschaden auch wundballistische) Erfahrung, um daraus einen einigermaßen brauchbaren Wert zu erhalten.

Hindernisse. Aus dem ermittelten Fallwinkel und der Schussrichtung ergibt sich auch ein vermuteter Flugweg des Geschosses, der in der näheren Umgebung des Ereignisortes auf mögliche Hindernisse (Bäume, Masten, Drähte) zu inspizieren ist. Dies kann Hinweise auf mögliche Ablenkungen vor dem Auftreffen geben.

8.2.1.3 Beschaffung weiterer Daten

Zu den Daten vom Ereignisort sind für die Rekonstruktion der Flugbahn noch weitere Unterlagen zu beschaffen.

Luftwiderstandsbeiwert c_w . Auch wenn das Geschoss Verformungen aufweist, kann seine ursprüngliche Form in den meisten Fällen erkannt werden. Falls die Zuordnung zu einem bekannten Kaliber nicht gelingt, kann durch Vergleichen mit Patronen einer Munitionssammlung eine mögliche Bestimmung des Tatgeschosses erfolgen.

Handelt es sich um ein gängiges Geschoss, liegt allenfalls dessen c_w -Verlauf vor. Ist dieser nicht vorhanden, kann eine c_w -Funktion eines möglichst formähnlichen Geschosses gewählt werden, wobei das Kaliber und die Masse keine Rolle spielen, jedoch der sogenannte *Schlankheitsgrad* (Verhältnis der Spitzenhöhe zur Gesamtlänge) ähnlich sein sollte. Liegt kein adäquater Datensatz vor und lassen sich auch

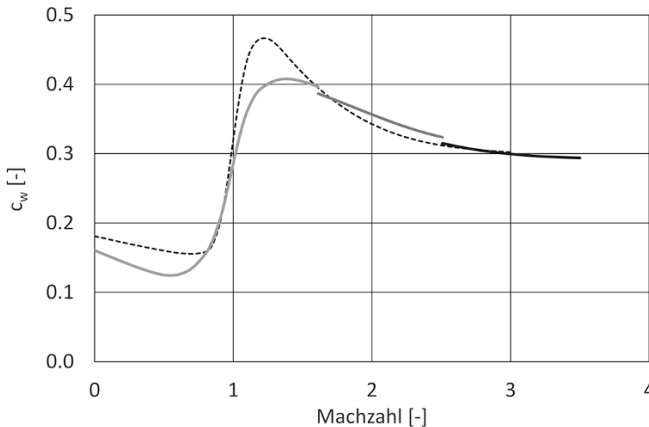


Abb. 8.2. Vergleich des mittels BC und Normalgeschoss generierten c_w -Verlaufs mit der realen c_w -Funktion eines Geschosses (punktierter Kurve).

keine entsprechenden Messungen (z. B. mittels Radar) durchführen, kann man sich der Mayevski'schen Methode eines Normalgeschosses und der ballistischen Koeffizienten (BC) bedienen (siehe dazu Abschn. 5.4.2.4). Dies setzt allerdings voraus, dass die BC des Tatgeschosses für die infrage kommenden Geschwindigkeitsbereiche in Unterlagen des Geschossherstellers nachgeschlagen werden können.

Der BC ist eine Konstante, welche den festen c_w -Verlauf des Normalgeschosses starr in die wahren c_w -Werte des gegebenen Geschosses verschiebt. Weil sich aber dessen c_w -Verlauf von jenem des Normalgeschosses deutlich unterscheiden kann, ist eine Anpassung nur stückweise und in Abhängigkeit der Geschwindigkeit möglich. In der Mayevski'schen Darstellung des Luftwiderstandes erhalten Geschosse daher bis zu 5 BC-Werte.

Geschosshersteller, die mit diesem System arbeiten, gehen in ihren Unterlagen in der Regel vom Normalgeschoss G1 aus; bei schlanken Geschossen wird gelegentlich auch das G7 zugrunde gelegt. Die Anzahl der BC-Werte kann damit reduziert werden.

In der Abb. 8.2 ist ein auf dem Normalgeschoss basierender c_w -Verlauf mit drei BC dargestellt und mit der realen c_w -Funktion des betreffenden Spitzgeschosses (punktierter Kurve) verglichen. Für kürzere und mittlere Schussdistanzen ist das Verfahren mit den BC durchaus brauchbar, wenn diese bekannt sind.

Mündungsgeschwindigkeit. In der Regel ist die Waffe, aus welcher der fragliche Schuss stammte, zunächst nicht verfügbar und die effektive Anfangsgeschwindigkeit der zu rekonstruierenden Flugbahn bleibt unbekannt. In diesem Fall wird man sich mit der nominalen Mündungsgeschwindigkeit des betreffenden Kalibers behelfen müssen. Dabei ist daran zu denken, dass bei vielen Kalibern Waffen unterschiedlicher Rohrlängen verbreitet sind und dass gewisse Kaliber sowohl in Kurz- als auch in Langwaffen eingesetzt werden können. Auch der Zustand des Rohres (Abnützungserscheinungen) oder jener der Munition (Temperatur, Pulverfeuchtigkeit) kann die Anfangsgeschwindigkeit wesentlich beeinflussen.

Besteht Zugriff zur vermuteten Tatwaffe, so kann deren Mündungsgeschwindigkeit mit einer Messreihe (6–10 Schüsse) bestimmt werden. Hierzu ist – wenn immer möglich – die Tatmunition zu verwenden, damit auch deren Geschwindigkeitsstreu-

ung ersichtlich wird. Falls diese nicht mehr vorhanden ist, beschaffe man sich Munition, die bezüglich Alter und Los jener gleich oder ähnlich ist.

Meteorologische Daten. Eine Rekonstruktion wird sich merklich verbessern lassen, wenn der für die Berechnung verwendete Luftwiderstand des Geschosses realen Verhältnissen entspricht. Dies bedeutet, dass die zum Zeitpunkt des Schusses aktuelle Luftdichte angenähert zu bestimmen ist. Die hierzu notwendigen Daten (Luftdruck und Temperatur) können in der Regel bei einer meteorologischen Dienststelle auch rückwirkend angefordert werden. Bei Schussdistanzen mit großen Gipfelhöhen (langen Flugzeiten, erkennbar an großen Fallwinkeln) spielen insbesondere auch die Windgeschwindigkeiten und -richtungen in Abhängigkeit der Höhe eine erhebliche Rolle.

Bei flachen Flugbahnen (bis etwa 1000 m) ist die Flugzeit kurz im Vergleich zu der Zeit, die es für einen Wechsel der Windgeschwindigkeit braucht. Der Schuss findet somit in einem Windprofil unterschiedlicher, aber fester Windgeschwindigkeiten entlang des Geschossweges statt. Für die Flugbahnrechnung wird dieses kaum bestimmbare Profil durch eine konstante Windgeschwindigkeit ersetzt, welche die gleichen Abweichungen ergibt.

Topographie. Bei der Rekonstruktion einer Flugbahn wird der Topographie oft zu wenig Aufmerksamkeit geschenkt, obwohl sie sehr wichtig ist. Die topographischen Daten des Ereignisraumes lassen sich in der Regel bei den Behörden, welche für die Landesvermessung verantwortlich sind, ohne weiteres einholen, sei es in Form topographischer Karten oder dreidimensionaler Datensätze.

Der Grund für die Wichtigkeit der Landschaftskonturen besteht darin, dass bei den gleichen erhobenen ballistischen Daten im Auftreffpunkt (Geschoss, räumlicher Auftreffwinkel) und den daraus folgenden Anfangswerten (Mündungsgeschwindigkeit, Elevation) ganz unterschiedliche Standorte für den Geschossabgang entstehen können, insbesondere wenn der Seitenwinkel eine gewisse Unsicherheit beinhaltet. In der Abb. 8.3 ist ein reales Beispiel dargestellt, bei dem innerhalb der

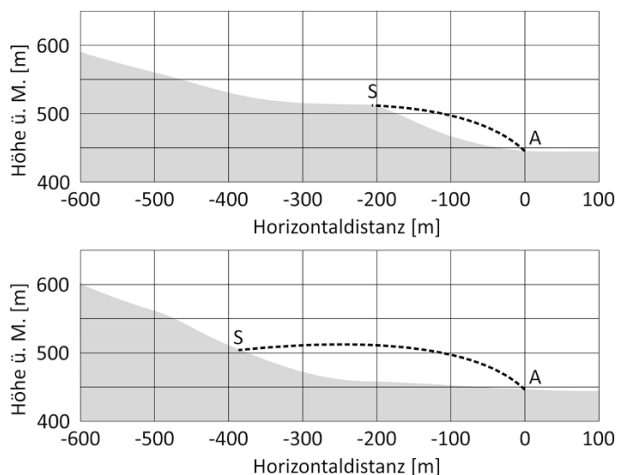


Abb. 8.3. Einfluss der Topographie. Innerhalb der Messungenauigkeit des Seitenwinkels am Ereignisort A können sich unterschiedliche Standorte S des Geschossabgangs ergeben (Darstellung eines realen Falles).

Messunsicherheit des Seitenwinkels im Auftreffpunkt die Geländekontur deutlich änderte, was die in Frage kommende Schussdistanz fast verdoppelte.

Flugbahnrechnung. Die eigentliche Berechnung der rekonstruierten Flugbahn erfolgt mit Hilfe eines Computerprogramms, welches auf der Basis des Massenpunktmodells (siehe dazu Abschn. 5.4.3) arbeitet. Damit lassen sich basierend auf den oben beschriebenen Daten die hauptsächlichsten Parameter des Flugweges (Position, Geschwindigkeit, Flugzeit, Energie, Bahnwinkel) bestimmen.

Auf dem Markt werden verschiedene Programme angeboten, die einen aufwändiger programmiert und genauer in den Ergebnissen als andere. Wichtig ist, dass eines der in Abschn. 5.4.3 beschriebenen Differenzialgleichungssysteme mit einem numerischen Verfahren integriert wird und nicht etwa Polynomapproximationen der Flugbahnparameter verwendet werden.

8.2.1.4 Visualisierung

Es ist nicht die Absicht, in diesem Abschnitt Vorgaben für die bildliche Darstellung der gefundenen Rekonstruktionen zu geben; zu unterschiedlich sind die verschiedenen Fälle. Jedes Ereignis erfordert daher seine eigenen Mittel zur Visualisierung der sachdienlichen Informationen. Die folgenden Überlegungen sind als allgemeine Hinweise und als Beispiele zu verstehen.

Flugbahnen kurzer Distanz lassen sich einfach durch gerade Linien in einem Grundriss des betreffenden Ereignisortes zeichnen. Mit zusätzlichen Auf- und Seitenrissen kann dem räumlichen Aspekt Rechnung getragen werden, wobei vor Ort aufgenommene Fotografien eine solche Darstellung gut ergänzen können. Mit etwas größerem Aufwand können auch für kurze Flugbahnen dreidimensionale Grafiken erstellt werden, die es gestatten, Messunsicherheiten der Winkel am Auftreffpunkt der Flugbahn entlang zurückzuverfolgen (z. B. mittels eines Kegels).

Rekonstruktionen von Flugbahnen langer Distanz benötigen oft deutlich komplexere Visualisierungen, weil sie mit dem Oberflächenprofil des Terrains in Verbindung gebracht werden müssen. Flughöhe und seitliche Abweichung infolge ei-

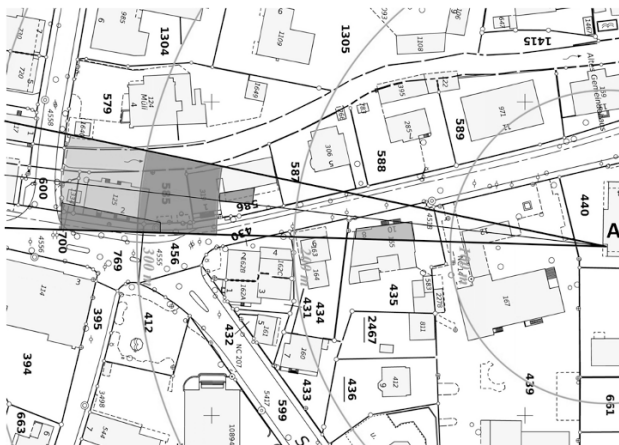


Abb. 8.4. Realer Fall, eingetragen in einen Katasterplan. Mögliche und unmögliche Ausgangspunkte der Geschossbahn sowie Hindernisse können unterschiedlich markiert werden. Der Ereignisort ist mit A bezeichnet.

nes Querwindes sind darauf zu prüfen, ob kein Geländekontakt stattfinden kann. Eine dreidimensionale bildliche Grafik kann sich in diesen Fällen oft als hilfreich erweisen.

Dies lässt sich natürlich auch in verbundenen zweidimensionalen Zeichnungen durch Grund- und Aufriss darstellen.

Öfters wird es erforderlich sein, die Ergebnisse der Rekonstruktionsrechnungen in einer topografischen Karte oder in einem Katasterplan einzutragen, ausgehend vom Ereignisort in Richtung des vermuteten Abgangsortes. Die Unsicherheiten im Seitenwinkel und in der Schussdistanz ergeben eine Zone, die den Ursprung des Schusses mit großer Wahrscheinlichkeit enthält (Beispiel siehe Abb. 8.4).

8.2.2 Flugbahnrekonstruktion instabiler Geschosse

8.2.2.1 Ursachen instabiler Geschosse

In der forensischen Ballistik wird man immer wieder mit unkonventionellen Fällen konfrontiert sein, in denen eine Flugbahnrekonstruktion nach klassischem Muster nicht möglich sein wird. Sie treten dann auf, wenn der Anstellwinkel des Geschosses den Wert von etwa 15° übersteigt (siehe Abschn. 7.5.4). Man kann dann von einem „instabilen“ Geschoss sprechen.

Bei genügendem Drall kann ein solch „instabiles“ Geschoss durchaus später auf der Flugbahn seine Längsachse wieder in die Nähe der Flugbahntangenten bringen, sich also wieder stabilisieren.

Es gibt zwei verschiedene physikalische Gründe, die bei einem Geschoss zu großen Anstellwinkeln führen können. Der eine ist eine ungenügende gyroskopische Stabilität (siehe Abschn. 5.6.3 und 5.6.4.6), der andere ein kurzzeitig auf das Geschoss einwirkender Drehmomentenstoß (beschrieben in Abschn. 7.5.3).

Ungenügende Stabilität ist in den meisten Fällen eine Folge zu geringer Winkelgeschwindigkeit, gelegentlich auch einer Masseverschiebung (z. B. bei Leuchtpurgeschossen), welche die Trägheitsmomente des Geschosses verändert. Die Ursache einer zu kleinen Rotationsgeschwindigkeit ist stets das Waffenrohr, aus dem das Geschoss geschossen wird.

Jedes Geschoss benötigt auf Grund seiner Konstruktion (wobei insbesondere die Trägheitsmomente eine entscheidende Rolle spielen) eine bestimmte minimale Drehzahl, damit seine gyroskopische Stabilitätszahl den erforderlichen Wert erreicht. Das zugehörige Waffenrohr muss daher eine Dralllänge aufweisen, welche den in Abschn. 3.4.3 hergeleiteten Beziehungen genügt. Ist die Dralllänge zu groß, genügt die Winkelgeschwindigkeit nicht und das Geschoss bewegt sich kreiselförmig mit großem, oft zunehmendem Präzessionswinkel (Abschn. 5.6.4.6).

Ein typisches Beispiel ist die im angegebenen Abschnitt bereits erwähnte 5.56-mm-NATO-Patrone mit dem SS109/M855-Geschoss, das eine Dralllänge von 178 mm erfordert. Weil die Patronenmaße kompatibel sind, kann dieses Geschoss auch in einem Gewehr im Kaliber 223 Rem. geschossen

werden, dessen Dralllänge jedoch 305 mm misst. Aus dieser Waffe geschossen, präzisiert dieses Geschoss mit großem Anstellwinkel (siehe Abb. 5.45).

Es kommt gelegentlich auch vor, dass Patronen in Waffen größeren Kalibers geschossen werden, für die sie gar nicht gebaut sind. Die unterkalibrigen Geschosse werden in diesen Fällen in den Zügen gar nicht geführt und verlassen das Rohr unstabil mit der typischen Rotation um eine Querachse (Beispiel siehe Abb. 5.44). Ihre Geschwindigkeit ist bereits reduziert; sie verringert sich nach Verlassen der Mündung rasch. Bei genügendem Durchmesserunterschied können sich die Geschosse im Rohr bereits schräg stellen und an den Rohrwänden deformiert werden. Dabei sind auch Steckschüsse durch Verkanten möglich.

Es gibt nicht viele Möglichkeiten, Patronen in Waffen mit größerem Kaliber tatsächlich auch zur Funktion zu bringen. Bekannt und immer wieder vorgekommen ist die Verwendung von Munition im Kaliber 7.65 Parabellum in 9-mm-Luger-Waffen oder das Verschießen von 9-mm-Luger-Patronen in Waffen des Kalibers 40 S&W. Bei einem Suizidversuch wurden in einem alten Revolver des Kalibers 8 mm Pieper Patronen eines 7.65-mm-Kalibers geladen; in diesem Fall blieben die Geschosse im Lauf stecken.

Mit zunehmender Schussdistanz nimmt die gyroskopische Stabilitätszahl normalerweise zu, weil das Verhältnis ω/v größer wird. Entsprechend nimmt der präzessionsbedingte Anstellwinkel kontinuierlich ab. Es gibt jedoch Fälle von Stabilitätsverlust, wenn das Geschoss in den transsonischen Geschwindigkeitsbereich eintritt. Im Abschn. 5.6.4.6 ist beschrieben worden, dass dort nicht nur der Luftwiderstandsbeiwert ansteigen kann, sondern auch der Momentenbeiwert. Je nach Geschossauslegung kann diese Zunahme des Kippmomentes ausreichen, dass der Geschossflug (vielleicht nur vorübergehend) instabil wird.

Einen größeren Verlust an Winkelgeschwindigkeit kann ein Geschoss auch erfahren, wenn es sich eine längere Strecke durch ein weiches Material bewegt. Die an der Oberfläche entstehende Reibung kann die Drehgeschwindigkeit deutlich reduzieren. Allerdings tritt dieser Effekt stets zusammen mit einem Drehmomentenstoß auf und ist daher zumeist nicht direkt als Ursache einer Destabilisierung erkennbar.

Drehmomentenstöße. Wirkt auf ein Geschoss ein Drehmomentenstoß (also ein Kraftstoß mit einer außerhalb des Schwerpunktes verlaufenden Wirkungslinie), so wird der Drehimpulsvektor aus der Geschossachse ausgelenkt (ausführlich beschrieben in Abschn. 7.5.3). Die dabei entstehende Nutationsbewegung (dargestellt in Abb. 7.22) wird der normalen Präzessionsbewegung überlagert, wodurch ein zeitlich wechselnder, recht großer Anstellwinkel entsteht.

Die durch den Luftwiderstand allein induzierte Präzessionsbewegung ergibt bei einem normal stabilisierten Geschoss einen nur kleinen Anstellwinkel, der im Massenpunktmodell beim Luftwiderstandsbeiwert (und im BC) bereits berücksichtigt ist.

Ein Geschoss kann auf verschiedene Weise einem Drehmomentenstoß ausgesetzt werden. Unvermeidlich ist die Störung, der es unmittelbar nach dem Verlassen des Rohres ausgesetzt ist. Die aus der Mündung nachströmenden Gase überströmen es

von hinten (siehe dazu Abschn. 4.2.1) und erzeugen durch die kurzzeitig einwirkende aerodynamische Kraft einen Drehmomentenstoß am Geschoss; dieses reagiert mit einer Nutationsbewegung. Bei einem normal stabilen Geschoss klingt diese zusätzliche Bewegung in relativ kurzer Zeit ab; besitzt es hingegen einen zu geringen Drall, wirkt sie sich zusätzlich destabilisierend aus.

Der häufigste Fall der Destabilisierung durch einen Drehmomentenstoß entsteht bei einem Kontakt des Geschosses mit einem festen oder flüssigen Medium. Es spielt dabei keine Rolle, ob es sich um eine Durchdringung oder um ein Abprallen an der Oberfläche handelt. Die Beziehungen in Abschn. 7.5.3 zeigen, dass der Anstellwinkel größer wird, je stärker der Drehmomentenstoß ausfällt (höhere Geschwindigkeit, steilere Auftreffwinkel).

Beim Durchschießen einer festen Materie hängt die Störung von deren Dichte, von der Schusskanallänge und von der möglichen Drehung des Geschosses im Innern ab. Stoffe kleiner Dichte (dazu gehören auch biologische Gewebe) werden zu geringeren Anstellwinkeln führen (es sei denn, das Geschoss hätte sich vor dem Austreten quergestellt). In diesen Fällen wird das Geschoss infolge seiner nach wie vor bestehenden gyroskopischen Stabilität recht schnell seine Achse wieder der Bahntangenten angleichen.

8.2.2.2 Querschnittsbelastung und Luftwiderstandsbeiwert

Flugbahnrechnungen beliebiger Projektile im Massenpunktsmodell erfordern die Kenntnis der Querschnittsbelastung des fliegenden Objektes und dessen Luftwiderstandsbeiwert. Beide sind für destabilisierte Geschosse schwierig zu bestimmen, obwohl beim Abprallen unter gleichen Bedingungen recht ähnliche Nutations- und Präzessionsbewegungen entstehen. Im Fall einer Flugbahnrekonstruktion eines Prellschusses ist in der Regel nicht bekannt, wie groß der Anprall und der folgende Anstellwinkelverlauf wirklich waren. Eine angenäherte Lösung dieses Problems kann sich auf die Periodizität der Bewegung stützen, deren Schwingungslänge sich bekanntlich im Meterbereich bewegt. Dies bedeutet auch hier eine Unterteilung in kurze und in weite Schussdistanzen.

Bei kurzen Schussdistanzen (siehe dazu Abschn. 8.2.1.1) kann wegen der kurzen Flugzeiten die Flugbahn als gerade angesehen werden. Eine Rechnung des Geschwindigkeitsverlaufs ist oft dennoch zur Beurteilung der Gefährlichkeit oder der Wirksamkeit erforderlich. Da beim nutierenden Geschoss weder die Querschnittsbelastung noch der Luftwiderstandsbeiwert bekannt sind, wird man in der Regel die Erstere bei Standardwert belassen und die Zunahme des Luftwiderstandes ganz dem Beiwert zuweisen.

L. C. Haag (2007) gibt auf Grund von Radarmessungen bei Kurzwaffengeschossen eine Vergrößerung des Beiwertes um einen Faktor 10–20 an. Messungen an Gewehrgeschossen ergaben Zunahmen auf das 3–4-fache (siehe Abb. 7.23).

Fliegt der Prellschuss über eine größere Schussdistanz, spielt es eine wichtige Rolle, ob er sich im Verlauf des Fluges wieder stabilisiert hat oder ob die ganze Strecke mit großem Anstellwinkel zurückgelegt worden ist. Im ersten Fall wird man den abnehmenden Luftwiderstand bei konstanter Querschnittsbelastung wiederum in den Beiwert abbilden, der sich vom großen Wert des pendelnden Geschosses zum ungefähr normal fliegenden reduziert (siehe Beispiel in Abb. 7.23 und 7.24).

Nutiert oder überschlägt sich das Geschoss während des ganzen Flugweges, kann es entsprechend einem Splitter behandelt werden (siehe Abschn. 5.4.8). Dabei wird der Vergrößerung der Querschnittsbelastung Rechnung getragen und ein Luftwiderstandsbeiwert eines klassischen Splitters (Würfel, Zylinder) gewählt. Bei kurzen Geschossen ist auch der c_w -Wert der Kugel eine akzeptable Wahl.

Selbstverständlich ergeben Rechnungen auf dieser Basis nur angenäherte Resultate, die jedoch für den praktischen Gebrauch völlig ausreichend sind.

8.2.2.3 Rekonstruktion

Kurze Schussdistanzen. Im kurzen Distanzbereich kann die Flugbahn des Geschosses in der Regel als gerade Linie angenommen werden (siehe Abschn. 8.2.1.1). Dabei ist den Gesetzmäßigkeiten des Abprallens Rechnung zu tragen. Ist zum Beispiel der Abgangswinkel an einem Prellobjekt bekannt (durch Prellmarke und Einschlagpunkt des abgeprallten Geschosses), so kann der Auftreffwinkel und damit die Schusslinie recht gut festgelegt werden.

Mittlere und große Schussdistanzen. Es ist sehr schwierig, die Flugbahn abgeprallter Geschosse, die noch über größere Distanzen fliegen, zu rekonstruieren. Fehler beim Schätzen von Querschnittsbelastung und Luftwiderstandsbeiwert wirken sich bei langen Flugzeiten entsprechend stark aus. Insbesondere spielt es eine große Rolle, ob sich das Geschoss wieder stabilisiert oder ob es bis zum Aufprall instabil weiter fliegt.

Hingegen lässt sich in einem solchen Fall die unbekannte Flugbahn auf einen gewissen Bereich beschränken, indem eine Bahn mit einer sicher zu geringen und eine zweite mit einer zu hohen Verzögerung gerechnet werden, wobei man sich bezüglich des Luftwiderstandes an die Überlegungen im vorangehenden Abschnitt halten kann. Auf diese Weise lässt sich beispielsweise für einen Schützenstandort zumindest ein Distanzbereich angeben.

Einen wesentlichen Einfluss auf Flugbahnen großer Schussweite haben die zum Zeitpunkt des Geschehens herrschenden meteorologischen Bedingungen. So sind Luftdruck und -temperatur (zur Bestimmung der Luftdichte) und die vektorielle Windgeschwindigkeit im Bereich der erwarteten Flugbahn zu berücksichtigen.

8.2.3 Fallbeispiele

8.2.3.1 Direkte Schüsse

Fälle, welche zu einer Rekonstruktion von direkten Schüssen führen, ergeben sich durch Fehlverhalten von Schützen oder Soldaten in Schießständen und auf Schießplätzen, häufig aber auch an Feiertagen durch Schüsse in die Luft. Obwohl immer wieder darauf aufmerksam gemacht wird, dass fast alle zurückfallenden Geschosse lebensbedrohende Verletzungen verursachen können, glauben offenbar noch viele Schützen an deren Ungefährlichkeit (siehe auch Abschn. 5.4.6.5).

Fall 1. An einem Nationalfeiertag standen ein Vater und seine Tochter am Ufer eines Sees und schauten dem Feuerwerk zu. Unvermittelt wurde das Kind von einem Geschoss getroffen, das unter steilem Winkel bei der Schulter eindrang und nach ca. 18 cm Eindringweg neben der Aorta stecken blieb. Es handelte sich um ein Projektil des Kalibers 7.62×39 Kalaschnikow. Aus dem sehr großen Fallwinkel und der Eindringtiefe ließ sich nur auf ein steil in die Luft geschossenes Geschoss schließen; wegen dem unbestimmbaren Seitenwinkel im Auftreffpunkt war es nicht möglich, die Richtung anzugeben, aus welcher der Schuss gekommen war.

Nach einem Aufruf der Polizei meldete sich eine ganze Reihe von Personen, die zugaben, an jenem Abend geschossen zu haben. Der Verursacher des betreffenden Schusses war ebenfalls dabei, sodass Abschussort und Mündungsgeschwindigkeit gegeben waren. Der Schütze schoss seine Waffe mit einer Elevation von 1231 mil (69.24°) ab, das Geschoss stieg auf eine Höhe von 1810 m und erreichte den Erdboden wieder nach einer Flugzeit von 38.5 s. Die Schussdistanz betrug 1406 m, die Endgeschwindigkeit 113 m/s (Energie 51 J) und der Fallwinkel 1529 mil (86°). Alle Flugbahndaten korrespondierten mit der relativ geringfügigen Verletzung, die das Mädchen mit viel Glück recht gut überlebte.

Fall 2. Vom Einkauf am Samstag zurück, fand eine Frau die Wände des Schlafzimmers im ersten Stock ihres Einfamilienhauses mit einer schwarz-grauen Schicht belegt. Die herbeigerufene Polizei fand in der Fassade des Holzhauses ein ziemlich genau horizontales Schussloch und in einem Kasten ein Geschoss, das zuvor eine Taschenlampe mit Kohle-Zink-Batterien durchschlagen hatte. Damit war die graue Schicht erklärt, nicht aber die Herkunft des Geschosses.

In rund 4 km Entfernung befand sich ein Truppenübungsplatz, der zunächst als Urheber vermutet wurde. Es wurde jedoch sehr schnell klar, dass ein horizontales Schussloch nur im Bereich des Flugbahngipfels entstehen kann und somit ein 4 km langer Geschossflug nicht in Frage kam. Ein Weitschuss hätte auch nicht die großen Zerstörungen (Hausfassade, Taschenlampe, Kasten) erbringen können. Die Schussrichtung ließ sich aus dem langen Schusskanal in der Fassade gut bestimmen, und die Rekonstruktion der Flugbahn vom Gipfel zurück führte zu einem engen Bereich auf der Straße, die auch an der örtlichen Schießanlage vorbeiführte. Da an jenem Samstag Schießübungen abgehalten worden waren, kam als Verursacher nur ein

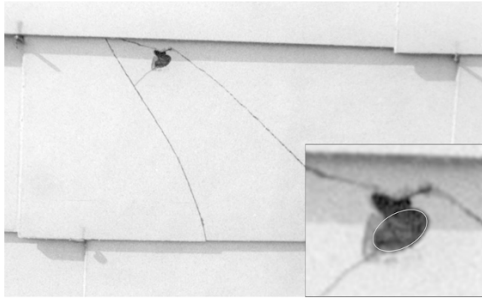


Abb. 8.5. (oben) Schussloch in einer Hausfassade. Das elliptische Loch war geeignet, den Auftreffwinkel approximativ zu bestimmen.

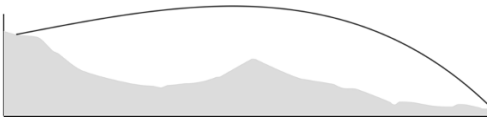


Abb. 8.6. (unten) Mögliche Flugbahn, im Geländeschnitt eingetragen.

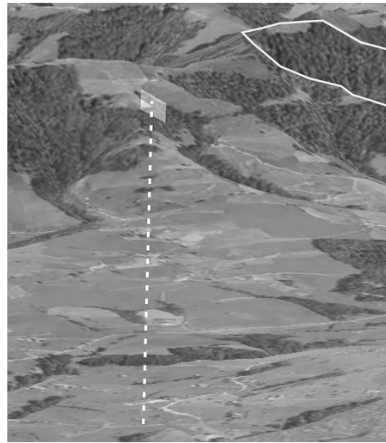


Abb. 8.7. Schussrichtung und der Bereich des vermuteten Abgangsortes des Schusses. Weiss umrandet der Truppenübungsplatz.

Schütze in Frage, der sich entlang jener Straße auf dem Heimweg befand und unabsichtlich oder mutwillig einen letzten Schuss abgab.

Fall 3. Die Familie saß gerade beim Essen, als ein starker Schlag gegen die Fassade unterhalb des Küchenfensters erfolgte. Beim Nachschauen entdeckte man ein vermutliches Schussloch in einer Platte der Fassadenverkleidung. Die herbeigerufene Polizei fand darunter ein ca. 5 cm in das Holz eingedrungenes Gewehrgeschoss. Da mit einem 50 m entfernt wohnenden Nachbarn ein Streit bestand, wurde dieser zuerst verdächtigt, den Schuss abgegeben zu haben. Die geringe Eindringtiefe ins Holz war aber mit einer Schussdistanz von ca. 50 m nicht vereinbar, sondern ließ auf einen Weitschuss schließen. Auch hier war ein Truppenübungsplatz in Reichweite und drei Wochen nach dem Ereignis sollte nun die wirkliche Herkunft des Projektils abgeklärt werden.

Die betroffene Fassadenplatte war bereits ausgewechselt worden, aber jene, die getroffen worden war, fand sich noch im Abfallcontainer. Nach dem Zusammensetzen der Stücke zeigte sich ein genügend elliptisches und scharfrandiges Einschussloch (Abb. 8.5), das eine Bestimmung des Auftreffwinkels mit ausreichender Genauigkeit erlaubte. Aus dieser Richtung bezüglich der Hauswand und der Orientierung des Hauses im Raum ergab sich eine mittlere Schussrichtung mit einem gewissen Seiten- und Fallwinkelfehler. Mit Flugbahnrekonstruktionen (siehe Abb. 8.6) ließen sich im Gelände ein Distanz- und ein Seitenbereich angeben, aus dem der Schuss mit großer Wahrscheinlichkeit gekommen sein musste. Es lag deutlich abseits des Truppenübungsplatzes (siehe Abb. 8.7); dieses Herkunftsgebiet wurde der örtlichen Polizei zur weiteren Bearbeitung angegeben.

Fall 4. Ein Angestellter einer Gerüstfirma arbeitete auf einem Gerüst rund 7 m über Grund, als er einen Schmerz verspürte. Er war von einem Projektil getroffen worden, das von hinten rechts kommend die Leber durchschlug und vorne links unter der Haut der Bauchdecke stecken blieb. Es handelte sich um ein Geschoss im Kaliber 22 L. R., das keine sichtbaren Deformationen aufwies, weshalb nur ein Direktschuss in Frage kam. Für die approximative Bestimmung des Auftreffwinkels und der Auftreffgeschwindigkeit ließ sich die Verletzung des Opfers nutzen, die durch 3D-Computertomografie dokumentiert worden war.

Die Eindringtiefe eines Geschosses in ballistische Gelatine in Abhängigkeit der Geschwindigkeit (siehe hierzu B. P. KNEUBUEHL, 2008) ist mit jener im biologischen Gewebe sehr gut vergleichbar.

Versuche zur Eindringtiefe in Gelatine mit dem betreffenden Geschoss ergaben den in Abb. 8.8 dargestellten Zusammenhang, woraus mit 200 m/s die ungefähre Geschwindigkeit resultierte, mit der das Opfer getroffen wurde. Schwieriger zu bestimmen war die Auftreffrichtung. Einerseits ist die Abweichung zu berücksichtigen, die das Geschoss im Körperinneren erfährt (die auch in der Gelatine ersichtlich ist), andererseits konnte das Opfer seinen Standort und seine Körperhaltung zum Zeitpunkt des Ereignisses nur angenähert angeben. Ein exakter Auftreffpunkt war damit nicht gegeben (F. RIVA et al., 2017, W. KERKHOFF et al., 2018).

Flugbahnrechnungen mit Einbezug der realen meteorologischen Daten ergaben mögliche Schussdistanzen, je nach Mündungsgeschwindigkeit der zunächst noch unbekannten Waffe. Mit Eintrag in eine topografische Karte unter Berücksichtigung der Geländeschnitte (siehe dazu Abb. 8.3) konnte ein Gebiet bezeichnet werden, aus dem der Schuss vermutlich stammte (siehe Abb. 8.9).

8.2.3.2 Abgelenkte Schüsse

Abgelenkte Schüsse stammen in den meisten Fällen aus Schießanlagen oder von Schießplätzen. Dadurch wird der vermutete Abgangspunkt des Geschosses auf ein beschränktes Gebiet eingegrenzt, von dem erfahrungsgemäß die kritischen Stellen in der Regel bekannt sind. Allerdings wird man dadurch nicht davon befreit zu überprüfen, ob der fragliche Schuss nicht doch einen andern Ursprung haben könnte (siehe Fall 3 im vorigen Abschnitt).

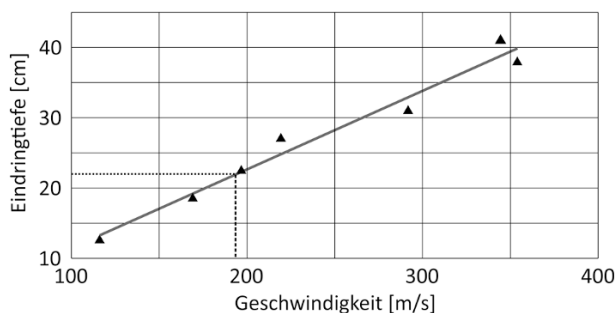


Abb. 8.8. Bestimmung der Auftreffgeschwindigkeit aus der Geschosseindringtiefe in das Opfer mittels Versuchen in Gelatine.

Abb. 8.9. In der Topografie eingetragenes Gebiet, in dem (je nach Mündungsgeschwindigkeit) das Geschoss abgefeuert worden ist.

Fall 1. Die 300-m-Schießanlage war gut abgesichert durch einen hohen Wall hinter den Scheiben und durch zwei Hochblenden; die erste im Abstand 12,5 m zum Schutz gegen unabsichtlich steil abgegebenen Schüssen, die zweite bei 60 m, die den direkten Schuss über den Wall verhinderte. Trotzdem durchschlug eines Tages etwa 700 m hinter dem Wall ein Geschoss das Tor einer Garage und verursachte an einem darin stehenden Fahrzeug eine Beule. Es war nicht ganz einfach, den Weg dieses Geschosses zu finden; schließlich zeigte sich an einem Pfosten der ersten Blende eine Abprallspur so tief unten, dass das abgeprallte Geschoss unter der zweiten Blende durch und über den Wall fliegen konnte (siehe Abb. 8.10, Geschossweg 3).

Als Gegenmaßnahme wurde eine Tiefblende angeordnet, welche solche Abpraller verhindern sollte. Einige Monate später wurde wiederum aus dieser Schießanlage ein Fehlschuss gemeldet, ein Einschlag in einem Gebäude etwa 100 m weniger weit als der erste. Bei der Inspektion wurde festgestellt, dass die Tiefblende irrtümlicherweise mit einem Holzbrett abgedeckt wurde (siehe Abb. 8.11 a). Ein Schuss, der stirnseitig in ein solches Holzbrett eindringt, tritt nach etwa 10 cm unter steilem Winkel auf der Oberseite wieder aus. Ein solcher Schusskanal wurde gefunden, das betreffende Geschoss hatte die zweite Blende überflogen. Nachdem die Tiefblende mit einer (mit Holz abgedeckten) Stahlplatte anstelle des Holzbrettes ausgeführt worden war (siehe Abb. 8.11 b), wurde kein Fehlschuss mehr außerhalb der Schießanlage verzeichnet.

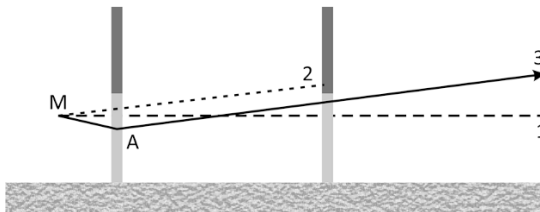
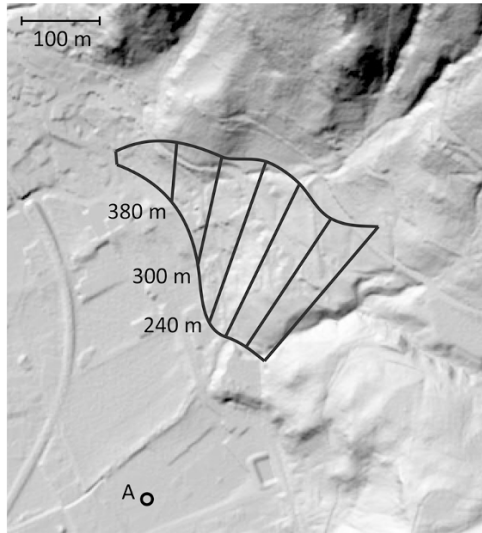


Abb. 8.10. Abpraller am Pfosten einer Hochblende. 1: normale Schussrichtung, 2: Schussrichtung bei Fehlverhalten des Schützen in der Höhe. 3: Fehlschuss bei zu tiefer Schussabgabe (A: Abprallstelle seitlich am Pfosten).

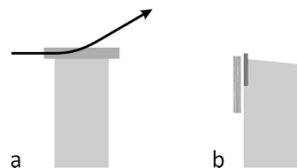


Abb. 8.11. a. Fehlschuss wegen einer Holzabdeckung auf der Tiefblende. b. Stahlplatte mit Holz abgedeckt.

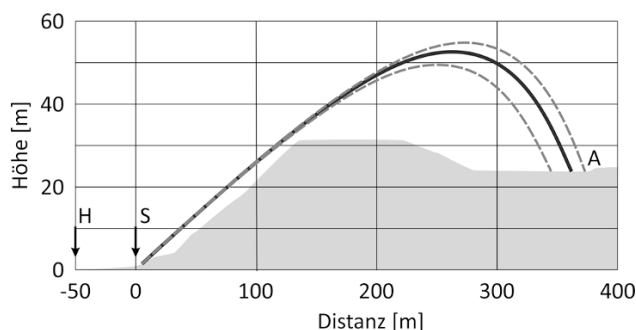


Abb. 8.12. Geländeprofil zum Fall 2. A: Ereignisort, H: Schützenhaus, S: Scheibenstand und Geschosssfang. Gestrichelt gezeichnet sind Flugbahnvarianten mit Geschwindigkeitsvariation, durchgezogen die wahrscheinlichste Flugbahn.

Trifft das Geschoss mit der Spitze unterhalb der Kante auf die Stahlplatte, zerschellt es, liegt die Spitze darüber wird es unter einem geringen Winkel abgelenkt. Die Holz- oder Kunststoffabdeckung verhindert ein Zurückprallen der Splitter.

Fall 2. Eine Person stand am Rand eines dörflichen Fußballfeldes, als sie seitlich an der Brust einen Schlag verspürte. Zu ihren Füßen lag ein 9-mm-Luger-Geschoss und an der Brust fand sich eine oberflächliche Schürfung. In einer Distanz von etwa 400 m und 23 m tiefer befand sich eine Pistolenschießanlage; es galt somit nachzuprüfen, ob das fragliche Geschoss aus dieser Anlage stammen und welchen Weg es zurückgelegt haben könnte. Ein Geländeschnitt ist in Abb. 8.12 dargestellt, mit dem Schützenhaus H und der Scheibenanlage S.

Ein Direktschuss aus dem Schützenhaus kam nicht in Frage, da dieser mit mindestens 10° hätte abgefeuert werden müssen, um die Kante des vorgelagerten Hügels zu überfliegen. Die Reichweite hätte damit mindestens 1300 m betragen. So blieb nur noch die Möglichkeit eines Abprallers aus dem Gebiet der Scheiben und des Geschossfanges oder ein Schuss unbekannter Herkunft.

Auf dem aufgefundenen Geschoss fanden sich kaum mehr Eindrücke von Zügen und Feldern der Waffe; sie wirkten wie wegpoliert. Hingegen war die Oberfläche mit einer Vielzahl feiner Striemen überzogen. Das Geschoss musste weiches Erdreich oder feinen Sand durchdrungen haben. Damit schien der Ausgangspunkt der Geschossflugbahn geklärt. Ein Augenschein in der betreffenden Schießanlage zeigte denn auch offensichtliche Mängel bei der Wartung des Geschossfangs.

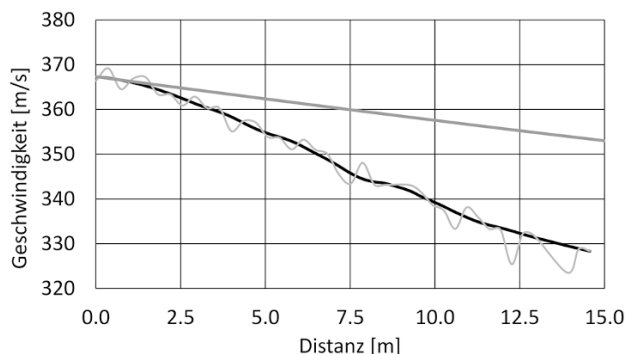


Abb. 8.13. Geschwindigkeitsabfall eines abgeprallten Pistolengeschosses (schwarze Linie) im Vergleich zu jenem eines normalen Fluges (graue Linie). Die gewellte Linie stellt die Original-Radarmessung dar.

Zur abschließenden Bestätigung wurden Flugbahnrechnungen durchgeführt, wobei der Beiwert des Luftwiderstandes (bzw. der BC) auf Radarmessungen eines abgeprallten Pistolengeschosses (siehe Abb. 8.13) basierte. Die Einpassrechnungen ergaben für Geschwindigkeit und Elevation plausible Werte, wobei für den Geschwindigkeitsverlust des Geschosses im Erdreich ebenfalls ein glaubhafter Wert resultierte. Die Flugbahnen sind für drei in Frage kommende Startgeschwindigkeiten in der Abb. 8.12 eingetragen. Die Auftreffgeschwindigkeit am Ereignisort betrug gemäß Rechnung rund 40 m/s (6.4 J); dies korrespondierte ebenfalls sehr gut mit der erzeugten Verletzung.

8.2.4 Ballistik in der Blutspurenanalyse

8.2.4.1 Fragestellung

Eines der wichtigsten Probleme der Analyse von Blutspuren ist die Bestimmung des Ortes, wo die Blutstropfen entstanden und weggeschleudert worden sind. Wie bekannt, lässt sich aus der elliptischen Spur eines aufgetroffenen Tropfens die räumliche Auftreffrichtung bestimmen, welche auch als Tangente an die ballistische Flugbahn im Auftreffpunkt interpretiert werden kann. Die Normalprojektion dieser Tangente in die Horizontalebene geht in jedem Fall durch die Normalprojektion des Ausgangspunktes des betreffenden Blutstropfens. Mehrere solcher Normalprojektionen schneiden sich folglich in einem Bereich, der die Normalprojektion des Ausgangsgebietes darstellt. Hingegen existiert keine ebenso zuverlässige Bestimmung der räumlichen Lage dieses Ausgangsgebietes, es sei denn, die Flugdistanzen der Blutstropfen seien so kurz, dass die Flugbahnen durch Geraden approximiert werden können.

Man wird in diesem Fall wesentlich größere Fallhöhen noch als geradlinig zulassen müssen, als die Regel (8.2:1) aus Abschn. 8.2.1 vorgibt.

In vielen Blutspurenbildern finden sich jedoch Spuren von Tropfen, deren Auftreffrichtungen in der Höhe weit außerhalb des vermuteten Zentrums vorbei gehen (Beispiel in Abb. 8.14). Von diesen Spuren kann es wichtig sein zu wissen, ob sie vom vermuteten Zentrum ausgegangen sind oder möglicherweise einen anderen Ausgangspunkt haben. Um dies festzustellen, ist eine ballistische Berechnung der Flugbahn des betreffenden Tropfens erforderlich. Infolge der kugeligen Form der Tropfen ist hierfür das Massenpunktsmodell völlig ausreichend.

Flugbahnen im Massenpunktsmodell lassen sich berechnen, wenn neben Masse und Form des Projektils auch dessen Flugrichtung und Geschwindigkeit in einem beliebigen Punkt der Flugbahn bekannt sind. Der Widerstandsbeiwert der Kugel bei kleinen Geschwindigkeiten und Reynoldszahlen kann der Abb. 8.15 entnommen werden. Mit Ausnahme der Geschwindigkeit kennt man von einem Blutstropfen alle diese Daten im Auftreffpunkt mit hinreichender Genauigkeit.



Abb. 8.14. Blutspuren an einer Wand nach einer Gewalttat. Es lassen sich mehrere Tropfspuren mit außergewöhnlichen Auftreffrichtungen feststellen.

Fehler in der Bestimmung des Tropfendurchmessers – also auch der Masse – (siehe C. WILLIS et al., 2001, W. F. ROWE, 2006) spielen eine untergeordnete Rolle, weil in der Flugbahnrechnung nicht die Masse oder das Kaliber die entscheidende Rolle spielt, sondern die Querschnittsbelastung, und diese ist nicht kubisch, sondern nur linear vom Durchmesser abhängig. Zudem dienen diese Rechnungen nur dazu, eine Zuordnung zu einem Zentrum zu bestätigen oder zu widerlegen. Die Genauigkeit direkter Messung des Durchmessers ist völlig ausreichend.

Die Kenntnis einer oberen Schranke der Fluggeschwindigkeit eines aufgetroffenen Tropfens würde es jedoch bereits ermöglichen, durch eine ballistische Rechnung zu entscheiden, ob ein bestimmter Tropfen sich einem Zentrum zuordnen lässt oder ob er aus einem andern Ursprung stammt.

8.2.4.2 Die maximale Geschwindigkeit eines Blutstropfens

Blutspuren werden in der Regel nach der Geschwindigkeit des erzeugenden Objektes eingeteilt (T. BEVEL, R. M. GARDNER, 1997, S. H. JAMES, W. G. ECKERT, 1999). So unterscheidet man „low-velocity stains“ bei Geschwindigkeiten bis zu 1.5 m/s, „medium-velocity impact spatter“ bei Geschwindigkeiten zwischen 1.5 und 7.6 m/s und „high-velocity impact spatter“ bei Geschwindigkeiten von über 30 m/s. Entsprechend werden auch unterschiedliche Tropfengrößen beobachtet. Im ersten Bereich kann ihr Durchmesser 4 mm oder größer sein, im zweiten Bereich 1–4 mm und im dritten Bereich 1 mm oder kleiner.

Durch die Luft fliegende Flüssigkeitstropfen haben – zumindest bei kleinen Geschwindigkeiten – eine kugelige Form. Dies ist eine Folge der jeder Flüssigkeit eigenen Oberflächenspannung, welche im Innern des Tropfens einen charakteristischen Innendruck erzeugt. Mit zunehmender Geschwindigkeit steigt der durch den Luftwiderstand bedingte Staudruck an. Übersteigt der Staudruck den Innendruck, wird der Tropfen zerrissen, und er zerfällt in mehrere kleinere Tropfen.

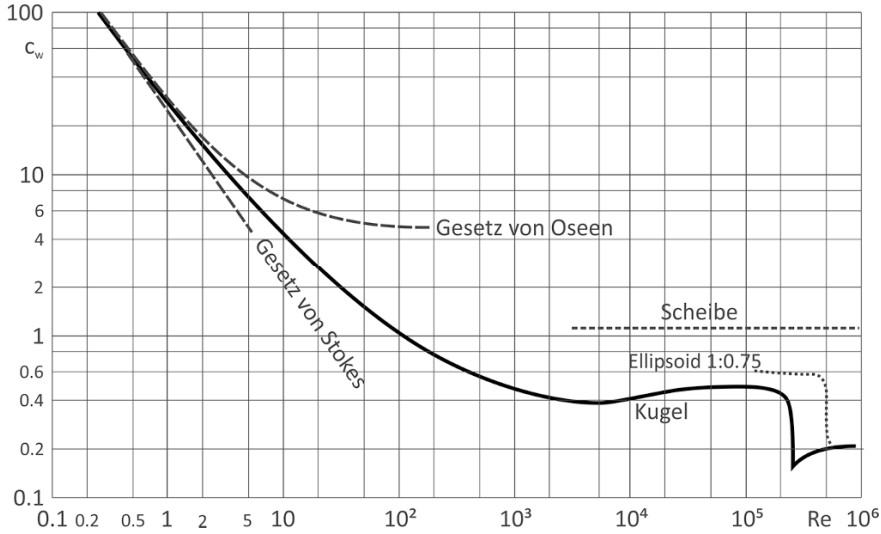


Abb. 8.15. Luftwiderstandsbeiwerte verschiedener Körperformen bei kleinen Reynoldszahlen (Quelle siehe Abbildungsverzeichnis).

Dies bedeutet, dass zwischen der Größe (bzw. dem Durchmesser) eines Flüssigkeitstropfens und seiner maximal möglichen Fluggeschwindigkeit eine eindeutige Beziehung besteht. Ist der Durchmesser eines Blutstropfens bekannt, kann somit auf seine maximal mögliche Fluggeschwindigkeit geschlossen werden, mit der er im Zeitpunkt seiner Entstehung gestartet sein könnte. Kleinere Geschwindigkeiten wären also durchaus möglich, größere jedoch nicht.

Die Zerteilung eines Flüssigkeitstropfens auf Grund einwirkender äußerer (aerodynamischer) Kräfte beginnt, wenn ein gewisses Verhältnis zwischen der Luftkraft und der durch die Oberflächenspannung induzierten Kraft erreicht ist. Dieses Verhältnis wird durch die dimensionslose, sogenannte Weberzahl beschrieben (L. P. HSIANG, G. M. FAETH, 1995, T. G. THEOFANTOUS, 2011, W. WÜRZ, U. GAISBAUER, 2014), deren Definition lautet

$$(8.2:2) \quad We = \frac{d_b \cdot \rho \cdot v^2}{\sigma_s} \quad [-]$$

Darin bedeuten σ_s die Oberflächenspannung, d_b den Kugeldurchmesser, ρ die Luftdichte und v die Tropfengeschwindigkeit.

Experimente im freien Fall haben gezeigt, dass Flüssigkeitstropfen beginnen, zu schwingen und auseinanderzufallen, wenn die Weberzahl größer als etwa 13 wird (L. P. HSIANG, G. M. FAETH, 1995). Die Oberflächenspannung von Blut wird in SCIPP mit $\sigma_s = 0.058$ angegeben. Somit ergibt sich

$$(8.2:3) \quad \frac{d_b \cdot \rho \cdot v^2}{0.058} = 13, \quad [-]$$

oder

$$v^2 = 0.754 \cdot \frac{1}{\rho \cdot d_b} \text{ ,}$$

[m/s]

(8.2:4)

$$v = 0.868 \cdot \sqrt{\frac{1}{\rho \cdot d_b}} \text{ .}$$

[m/s]

Üblicherweise werden Flugbahnrechnungen auf die Normalluftdichte auf Meereshöhe bezogen, die 1.225 kg/m³ beträgt. Eingesetzt folgt

(8.2:5)

$$v = 0.785 \cdot \sqrt{\frac{1}{d_b}} \text{ .}$$

[m/s]

Die Anwendung der Formel (8.2:3) mit der effektiven Luftdichte des Ereignisortes ist nur erforderlich, wenn die Geschwindigkeit nahe am maximalen Wert liegen sollte. Einige Ergebnisse sind in der Tabelle 8.2 zusammengestellt

8.2.4.3 Anwendung

In Blutspurenmustern treten immer wieder Spuren auf, deren Auftreffrichtung in der Projektion zwar mit der Projektion des vermuteten Zentrums zusammenfällt, in der Höhe jedoch weit außerhalb möglicher Ausgangspunkte vorbeigeht. In solchen Fällen kann mit dem aus der Ellipsenform der Spur geschätzten Durchmesser und der daraus ermittelten Masse des Blutropfens eine ballistische Flugbahnrechnung mit dem Luftwiderstandsbeiwert der Kugel für kleine Reynoldszahlen (siehe Abb. 8.15) durchgeführt werden (eine sogenannte Einpassrechnung). Dabei werden – ausgehend vom Auftreffpunkt – Flugbahnen (mit negativer Schrittweite) gerechnet, wobei die Höhe des vermuteten Abgangspunktes und die Geschwindigkeit als Parameter eingesetzt werden. Wird eine geometrisch passende Flugbahn gefunden, die vom vermuteten Ausgangspunkt ausgeht und unter dem gemessenen Raumwinkel am Ort der Spur auftrifft, so muss die zugehörige Anfangsgeschwindigkeit kleiner sein als die für diesen Tropfendurchmesser berechnete Maximalgeschwindigkeit. Ist dies nicht der Fall, kann die Spur nicht von dem vermuteten Abgangspunkt aus entstanden sein.

Das Verfahren entscheidet also darüber, ob die Zuordnung einer Spur zu einem Entstehungszentrum ballistisch und physikalisch widerspruchsfrei möglich ist oder nicht, und dies in erster Linie im Falle von stark gekrümmten Flugbahnen.

Die Kenntnis der maximal möglichen Geschwindigkeit von Blutropfen in Abhängigkeit ihres Durchmessers ermöglicht eine wesentliche Verbesserung der Analyse von Blutspurenbildern. Mit Hilfe von Flugbahn-

Tabelle 8.2. Maximale Tropfengeschwindigkeiten abhängig vom Durchmesser des Blutropfens

d [mm]	max. v [m/s]
1	24.8
2	17.6
3	14.3
4	12.4
5	11.1
6	10.1



Abb. 8.16. Blutsprengungsbild im Fall 1. Alle unklaren Spuren konnten einem der vier Zentren zugeordnet werden.

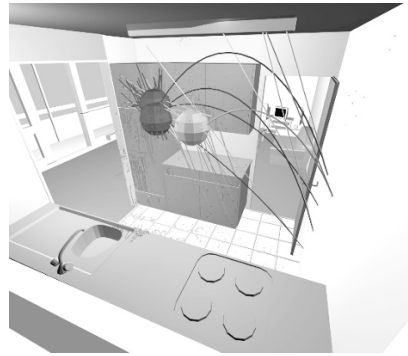


Abb. 8.17. Tropfenbahnen im Fall 2. Die hellgrauen geraden Linien bezeichnen die Auftreffrichtungen zu den dunkel gezeichneten Flugbahnen.

rechnungen kann entschieden werden, ob eine bisher nicht zu beurteilende Blutspur einem der bekannten Ausgangspunkte zugeordnet werden kann oder ob eine weitere noch nicht in Betracht gezogene Quelle in Frage kommt.

8.2.4.4 Fallbeispiele

Fall 1. Im Fall eines Tötungsdeliktes mit einem schweren Hammer an einer vermutlich schlafenden Frau ergaben sich mit der geläufigen Methode vier Ursprungszentren im Bereich des Kopfkissens. 20 Spuren waren räumlich diesen Zentren nicht zuzuordnen und mussten ballistisch untersucht werden, da der Täter behauptete, die Frau sei am Bettrand gesessen (siehe Abb. 8.16). Alle 20 ließen sich jedoch mit ballistischen Flugbahnen in dieselben Zentren zurückführen, wobei die Geschwindigkeiten alle unterhalb der in Tabelle 8.2 angegebenen Grenzwerte lagen. Zudem ließ sich zeigen, dass bei der vom Täter behaupteten Lage des Opfers die entsprechenden Spuren nur mit Geschwindigkeiten über den Grenzwerten hätten entstehen können. Die Aussagen des Täters ließen sich so ballistisch widerlegen.

Fall 2. Im Zusammenhang mit einem weiteren Tötungsdelikt wurden in einer Küche sehr viele Blutspuren gefunden, die weitgehend von drei Zentren stammten. Einige Spuren an der weiter entfernten Wand ließen sich jedoch zunächst keinem dieser Zentren zuordnen (Abb. 8.17). Zu jeder dieser Spuren ließen sich Flugbahnen mit Anfangsgeschwindigkeiten zwischen 3.5 und 6.5 m/s einpassen. Diese lagen deutlich unterhalb der Grenzggeschwindigkeiten, weshalb sich die Ausgangspunkte dieser Blutspuren eindeutig einem der drei Zentren zuordnen ließen.

8.3 Sicherheitsfragen auf Schießplätzen und in Schießanlagen

8.3.1 Sicherheit und Gefährlichkeit

Die Sicherheit bei Schießplätzen und -anlagen ist ein zentrales Anliegen; sie beinhaltet einige ballistische Probleme, die in der Regel unabhängig voneinander untersucht werden können. Zunächst stellt sich die Frage, wie weit Geschosse oder Geschossteile nach dem Auftreffen im Zielgebiet durch Abprallen oder nach Zerlegung noch fliegen können. Zudem sind auch Flugbahnen, die durch ein mögliches Fehlverhalten von Schützen am Abschussort entstehen, zu berücksichtigen. Dies lässt sich mit außenballistischen Mitteln lösen, wie sie in den Kap. 5 und 7 beschrieben worden sind. Falls das Gebiet des Schießplatzes nicht groß genug ist, diese Projektile alle aufzunehmen, sind Schutzmaßnahmen zu treffen, die auf Grund endballistischer Erfahrung (siehe Kap. 6) und entsprechender Versuche zu konzipieren sind. Entscheidend ist jedoch, wie Sicherheit zu definieren ist.

Man kommt nicht umhin, noch den Begriff der Gefährlichkeit einzuführen (ausführlich beschrieben in B. P. KNEUBUEHL et al., 2008, und B. P. KNEUBUEHL, 2013). Projektile sind nicht mehr gefährlich, wenn sie keine Verletzungen verursachen (auch keine geringfügigen) und ihr Auftreffen meist nicht einmal bemerkt wird. Bei kleinen Splittern und Kügelchen (Bleischrote bis etwa 4 mm) besteht oft ein deutlicher Unterschied zwischen deren maximaler Reichweite und der Gefährlichkeitsdistanz.

Bei 4-mm-Bleischrot (Masse 0,38 g) beträgt die Gefährlichkeitsdistanz etwa 75 %, bei 3-mm-Schrot (Masse 0,16 g) rund 65 % der Maximaldistanz. Stahlkügelchen und -splitter erreichen den Ungefährlichkeitspunkt wegen der geringeren Querschnittsbelastung noch früher (4-mm-Stahlkugel bei 65 % der größten Reichweite).

Treten in einem Zielgebiet mit Sicherheit nur kleine Projektile auf, besteht durchaus die Möglichkeit, bei engen Platzverhältnissen nicht die Maximaldistanz, sondern die Gefährlichkeitsdistanz zur Sperrzone zu erklären.

Für sämtliche größeren Geschosse und Splitter gilt unbedingt die Maximalreichweite als Gefährlichkeitsdistanz, da sie im ganzen Bereich zu lebensbedrohenden Verletzungen führen können. Dies gilt insbesondere auch für den Schuss steil in die Luft (siehe Abschn. 5.4.6.5 und Abb. 5.26).

8.3.2 Maximalschussweiten

Maximalschussweiten lassen sich aus ballistischer Sicht recht gut bestimmen. Wichtig ist, dass alle distanzbestimmenden Parameter mit den möglichen Extremwerten eingesetzt werden. Dies betrifft insbesondere Luftdichte, Wind in Schussrichtung und Mündungsgeschwindigkeit. Zu unterscheiden sind dabei die Schießplätze, auf denen mit flachen Flugbahnen geschossen wird, und die Zielgebiete der

Artillerie, bei welchen (nebst der Streuung) nur die Wurfweite der Splitter zu betrachten ist.

Maximale Schussdistanzen bei Direktschusswaffen sind in der Regel derart weit, dass sehr große Übungsschießplätze oder sehr gute Geschossfänge erforderlich sind, insbesondere, wenn auch etwaige Abpraller im Zielgebiet innerhalb des abgesperrten Gebietes bleiben sollen. Da solche Plätze oft nicht verfügbar sind, hat dies zur Entwicklung von sogenannten Kurzbahn-Übungsgeschossen geführt, welche bis zu der üblichen Einsatzdistanz die Flugbahn gut simulieren, danach aber wesentlich weniger weit fliegen.

Kurzbahngeschosse basieren zumeist auf zwei Prinzipien, einem ballistischen und einem aerodynamischen. Die ballistische Lösung geht von einem außerordentlich leichten Geschoss aus, das mit einer entsprechend hohen Mündungsgeschwindigkeit geschossen wird. Die Flugbahn wird anfänglich sehr gestreckt (gestreckter als beim Originalgeschoss); infolge der geringen Querschnittsbelastung erfährt das Geschoss eine hohe Verzögerung und damit eine kurze Reichweite (siehe Abb. 5.23, Flugbahn 1).

Die Geschossmasse einer Plastik-Trainingsmunition (PT) im Kaliber 7.62 mm NATO beträgt 0.7 g, die Mündungsgeschwindigkeit 1480 m/s. Bis 50 m bleibt die Treffpunktlage gleich wie beim Originalgeschoss, bei 100 m trifft das leichte Geschoss 19 cm zu tief. Die maximale Schussdistanz misst nur ca. 300 m. Würde man die Masse auf 1.5 g erhöhen, ergäbe sich eine Flugbahnübereinstimmung bis ca. 100 m, die Maximaldistanz vergrößerte sich auf ca. 575 m statt den etwa 3.8 km des Vollmantelgeschosses.

Die aerodynamische Variante eines Kurzbahngeschosses besitzt eine Röhrenform. Bei entsprechender Auslegung stellt sich bei hohen Geschwindigkeiten eine Umströmung ein, bei welcher der ringförmige Verdichtungsstoß an der Vorderkante das Geschoss selbst im hinteren Teil des Innenraumes nicht berührt (Abb. 8.18 a). Die Röhre wird durchströmt, die Querschnittsbelastung ist groß, da sich nur die ringförmige Stirnfläche der Bewegungsrichtung entgegenstellt; der Widerstandsbeiwert ist klein und entspricht etwa einer stirnseitig angeströmten Platte.

Mit abnehmender Geschwindigkeit öffnet sich der Mach'sche Winkel und bei Erreichen einer bestimmten Grenzgeschwindigkeit wird der Druckstoß im Innern

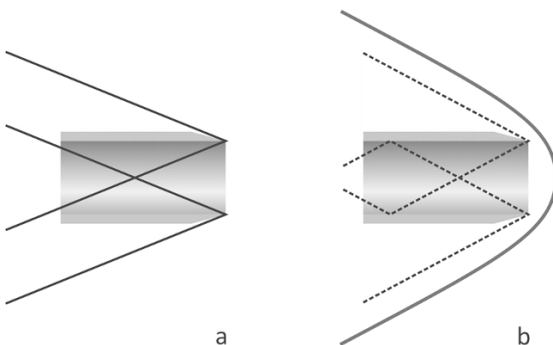


Abb. 8.18. Röhrengeschoss bei verschiedenen Strömungszuständen. **a.** Hohe Geschwindigkeit. Das Rohr wird durchströmt, die Querschnittsbelastung ist groß, c_w klein. **b.** Nach Erreichen des Umschlagpunktes wird das Rohr durch die Stoßwellenreflexionen verschlossen. Die Querschnittsbelastung wird klein und c_w groß.

an den Seitenwänden reflektiert. Dadurch ist die Durchströmung nicht mehr gewährleistet (die Röhre wird „aerodynamisch verschlossen“) und das Geschoss präsentiert sich wie ein sehr leichter Zylinder (Abb. 8.18 b). Die Querschnittsbelastung wird klein und der Widerstandsbeiwert groß. Je nach geometrischer Auslegung steigt der Luftwiderstand um einen Faktor 7 bis 9 an.

Für das Verhältnis der Querschnittsbelastungen vor und nach dem Umschlag der Strömung ergibt sich die Beziehung

$$(8.3:1) \quad \frac{q_n}{q_v} = 1 - \frac{d_i^2}{d^2} . \quad [-]$$

Mit q_v ist die maßgebende Querschnittsbelastung vor dem Umschlag und mit q_n diejenige nach dem Umschlag der Strömung bezeichnet. d_i bedeutet den Innendurchmesser und d das Kaliber.

Die Machzahl, bei welcher der Umschlag erfolgt, ist durch die Geschosslänge ℓ und den Innendurchmesser gegeben

$$(8.3:2) \quad M = \sqrt{1 + \frac{\ell^2}{d_i^2}} . \quad [-]$$

Röhrengeschosse benötigen einen Treibspiegel, der beim Abschuss die Röhre verschließt. Dessen Ablösung bietet jedoch keine besonderen Probleme, da sie axial erfolgt.

Übungspfeilgeschosse mit Lochkegelleitwerk basieren ebenfalls auf diesem Prinzip. Bei hohen Geschwindigkeiten wird der Lochkegel durchströmt, nach dem Umschlag wirkt er als kompaktes Kegelleitwerk mit großem Widerstand.

8.3.3 Kurzschüsse

Es gibt immer wieder Vorkommnisse, die zu einem viel zu frühen Aufschlag des Geschosses auf dem Boden führen. Bei Gefechtsübungen auf Schießplätzen, bei denen Personen mit Kleinwaffen überschossen werden, ist darauf zu achten, dass keine der beteiligten Waffen ein ausgeschossenes Rohr hat. Dies kann zu Querschlägern führen, deren Schussdistanz stark reduziert ist.

Es kommt sogar vor, dass ein Gewehr im kalten oder warmen Zustand perfekte Trefferbilder schießt, wenn es aber mit Dauerfeuer heiß geschossen ist, nur noch Querschläger produziert. Lässt man es erkalten, wird der Geschossflug wieder normal.

Kurzschüsse sind gelegentlich auch bei Leuchtpurgeschossen zu beobachten, zumindest in der Entwicklungsphase. Dies hängt einerseits damit zusammen, dass der am Heck eingebrachte Leuchtsatz für eine Verschiebung des Schwerpunktes sorgt. Andererseits kann durch Wärme des Abbrandes der Bleikern zu schmelzen beginnen. Beobachtet wurden Schrägstellungen von Leuchtsatzhülsen oder auch ein Abtropfen von Blei. Beides destabilisiert das Geschoss, sodass es vorzeitig abstürzt.

Ein Beispiel eines abstürzenden Leuchtspurgeschosses ist bereits im Abschn. 5.6.4.6 erwähnt und beschrieben worden (siehe auch Abb. 5.47).

Mörsergranaten werden in der Regel aus glatten Rohren flügelstabilisiert geschossen, wobei sich stets eine gewisse Pendelfrequenz um eine Querachse einstellt. Durch eine geringe Anstellung der Flügel wird zudem eine leichte Rotation um die Längsachse erzeugt, die einen Ausgleich kleiner Exzentrizitäten bewirken soll. Kommt nun die Pendelfrequenz mit der Rotationsfrequenz in Resonanz, kann sich der Anstellwinkel derart erhöhen, dass das Geschoss abstürzt. Eine kleine Änderung beim Anstellwinkel der Flügel wird sofort Abhilfe schaffen.

In einem realen derartigen Fall reduzierte sich die Schussdistanz um zwei Drittel.

Eine vollständige Destabilisierung eines Geschosses kann auch eintreten, wenn aus irgendeinem Grund im Inneren eine Masse (z. B. eine Flüssigkeit) beweglich ist, die bei der Beschleunigung im Rohr den Drall nur nach und nach übernimmt. Die Stabilität eines solchen Systems zweier ungleich rotierender Massen ist dann nicht mehr gewährleistet und das Geschoss kommt ins Trudeln.

Bei einem Artillerie-Testschießen mit inerten gewärmten Geschossen mit „Base Bleed“ in einen See wurde als Ersatz für den Sprengstoff irrtümlicherweise ein Material verwendet, das bei der vorgeschriebenen Prüftemperatur flüssig war. Statt bei der erwarteten Schussdistanz von 25 km stürzten die Geschosse bereits bei rund 10 km ins Wasser.

Kurzschüsse entstehen zumeist durch Geschosse, denen die Stabilität durch technische Probleme oder Fehler abhandengekommen ist. Diese kommen selten vor und sind zumeist nicht voraussehbar. Sie sind bei der Beurteilung der Sicherheit eines Schießplatzes nicht entscheidend, aber im Auge zu behalten.

8.3.4 Rückpraller

Geschossfänge aus Sand, Kies oder ähnlichen Materialien bergen eine recht erhebliche Gefahr von Geschossumlenkungen, die durch einen Druckunterschied auf gegenüberliegenden Seiten des Geschosses entstehen. Bei einem geneigten oder geschütteten Geschossfang erfolgt die Ablenkung nach oben (ein Beispiel siehe auch in Abschn. 8.2.3.2). In einem geschlossenen Geschossfang können die Geschosse an die Decke prallen und entgegen der Schussrichtung zurückfliegen (Prinzipskizze siehe Abb. 8.19).

Dies geschieht nicht nur bei kleinen Infanterieprojektilen, sondern auch bei inerten Artilleriegeschossen, welche für innenballistische Untersuchungen verwendet werden. Zur Vermeidung solcher Rückpraller werden meist zylinderförmige Geschosse mit baugleicher Heck- und Führungspartie verwendet (sogenannte Stempelgeschosse).

Gefährdende rückprallende Geschosse und Geschossteile entstehen oft auch in (geschlossenen) Schießanlagen kurzer Distanz. Geschossfänge aus Kunststoffen verhärten sich mit zunehmender Trefferzahl und auch altersbedingt, sodass Geschosse nicht mehr eindringen, sondern zurückgeworfen werden (Abb. 8.20). Geschosse,

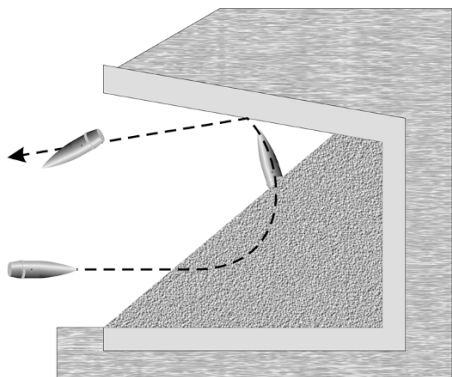


Abb. 8.19. Rückprallen von Artilleriegeschossen in Kiesgeschossfängen. Ähnliches geschieht auch mit Kleinkalibergeschossen in Sand.

die sich an Blenden aus Stahl zerlegen, ergeben Mantelsplitter, die weit entgegen der Schussrichtung fliegen können und auch genügend Energie für Verletzungen mittragen. Hochfeste Stähle, die ständig auftreffenden Geschossen ausgesetzt sind, werden spröde und können ausbrechen (Abb. 8.21). Dies begünstigt das Zerlegen der Geschosse zusätzlich.

Bodenbeläge, Wand- und Deckenverkleidungen in Schießanlagen müssen ebenfalls aus Materialien bestehen, die möglichst keine Ab- und Rückpraller zulassen und auch entsprechend konstruiert sein. Die VPAM hat hierzu eine Prüfrichtlinie herausgegeben, nach der Materialien und Konstruktionen in dieser Hinsicht geprüft werden können (siehe VPAM, 2012).

Bei kurzen Schussdistanzen auf Schießplätzen können rückprallende Geschosssplitter zu schweren Verletzungen führen, wenn unvorsichtigerweise in harte Materialien (Steinbrocken) geschossen wird. Infanteriegeschosse zerplatzen, wobei die entstehenden Mantelsplitter mit hoher Geschwindigkeit seitlich und entgegen der Schussrichtung zurückgeschleudert werden (Fallbeispiel siehe Abschn. 3.8.3.2).

Geschosse mit flacher Flugbahn, welche Sprengstoff enthalten, besitzen grundsätzlich eine Energiequelle, die sie befähigt, ihre Teile in beliebige Richtung zu beschleunigen. Weil sich die Anfangsgeschwindigkeit der Splitter relativ zum Geschoss zur Geschossgeschwindigkeit vektoriell addiert, besitzen diese eine Ge-

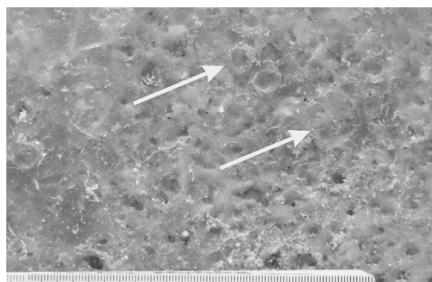


Abb. 8.20. Kunststoffgeschosspfänger. Die Pfeile zeigen auf verhärtete Stellen, an denen die Geschosse zurückgeprall sind.

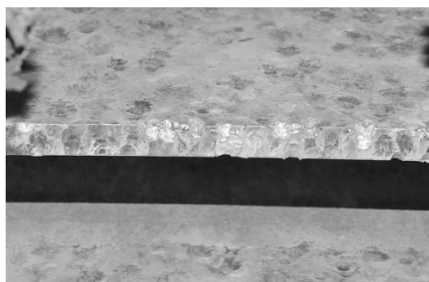


Abb. 8.21. Kante eines Geschosspfängers aus Stahllamellen. Ausbrüche an den Kanten begünstigen das Zurückprallen der Geschosse.

schwindigkeitskomponente in ursprünglicher Flugrichtung. Bei gewissen Geschosskonstruktionen besteht jedoch die Möglichkeit, dass der Geschossboden entgegen der Schussrichtung weggesprengt wird, weil die Splittergeschwindigkeit größer ist als jene des Geschosses. Infolge des Dralls kann dieser Splitter eine stabile Fluglage einnehmen und bis einige 100 m entgegen der Schussrichtung zurückfliegen.

Ein eigenartiger Fall eines Rückwurfs ergab sich bei einem Schießen mit 81-mm-Mörsern, dessen Ursache zunächst nichts mit Ballistik zu tun zu haben schien. Der Fall zeigt auch, wie schwierig es ist, bei Munition und Ballistik all die Zusammenhänge und Verknüpfungen zu überblicken und richtig zu beurteilen.

Damit in den Zielgebieten nicht zu große Schäden entstehen, wurden Übungsschießen mit den 81-mm-Mörsern mit sogenannten Explosiv-Übungsgranaten durchgeführt, welche beim Auftreffen eine kleine Schwarzpulverladung zündeten, die den Treffpunkt durch den entstehenden Rauch markierten und zugleich den Geschosskörper in einige wenige große Splitter zerlegten. Nun wurden wohl aus Kostengründen die aus Grauguss bestehenden Geschosskörper durch solche aus Temperguss ersetzt, der etwas zäher ist. Die Granaten zerlegten sich merklich weniger, blieben gelegentlich auch praktisch ganz, was den Aufräumarbeiten zugutekam.

Anlässlich eines Besuchstages für Angehörige bei der Truppe demonstrierte eine Mörser-Einheit ein Schießen auf eine Distanz von 320 m (Elevation 1260 mil) in ein Zielgelände mit lehmhaltigem Boden. Während des Schießens wurde eine ca. 40 m *hinter* den Geschützstellungen stehende Person von einer Granate am Kopf tödlich getroffen. Die Rekonstruktion des Geschehens mit umfassenden Schießversuchen ergab, dass die Granate im Zielgebiet regulär zündete, die Schwarzpulverladung den Geschosskörper jedoch nicht zerlegte, sondern durch den im Lehm gebildeten Einschusskanal wie aus einem Rohr zurückbeschleunigte. Nach kurzem Flug drehte sich die flügelstabilisierte Granate in ihre normale Fluglage und flog (ohne Zünder) mit fast regulärer Flugbahn etwa 360 m weit entgegen der Schussrichtung (Gipfelhöhe ca. 270 m) bis 40 m hinter die Stellungen, wo sie die zufällig dort stehende Person am Kopf traf. Dass der Entscheid, das Material des Geschosskörpers zu wechseln, zu einem tödlichen Schießunfall führen würde, hat bestimmt niemand bedacht.

Dieses letzte Fallbeispiel zeigt deutlich, wie trotz der physikalischen Modelle und der vielen experimentell ermittelten Fakten im Gebiet der Ballistik immer wieder unerwartete und unberechenbare Ereignisse auftreten können. Vorsicht ist stets am Platz.

Literaturverzeichnis

2 Physikalische Grundlagen

- DAUGERTHY RL, FRANZINI JB, FINNEMORE EJ (1989) Fluid Mechanics with Engineering Applications, MacGraw-Hill Book Company, Singapore
- GERTHSEN C (1966) Physik, Springer Verlag, Berlin
- GREINER W (1989) Theoretische Physik Band 2, Mechanik Teil 2, Verlag Harry Deutsch, Thun
- KUCHLING H (1986) Taschenbuch der Physik, Verlag Harri Deutsch, Thun, 15. Aufl
- KALIDE W (1980) Technische Strömungslehre, Carl Hanser Verlag, München
- MAGNUS K (1971) Kreisel, Theorie und Anwendungen, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
- OSWATITSCH K (1976) Grundlagen der Gasdynamik, Springer Verlag, Wien GmbH
- SCHREIER W (Hrsg) (1991) Geschichte der Physik, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin
- SZABÓ I (1972) Höhere Technische Mechanik, Springer Verlag, Berlin
- WIEGHARDT K (1974) Theoretische Strömungslehre, BG Teubner, Stuttgart
- ZIEREP J (1979) Grundzüge der Strömungslehre, G Braun, Karlsruhe
- ZIEREP J (1991) Theoretische Gasdynamik, G Braun, Karlsruhe

3 Innenballistik

- AKHAVAN J (2008) The Chemistry of Explosives, The Royal Society of Chemistry, Cambridge
- BOLLÉ E, SEITZ G (1941) Einführung in die innere Ballistik, Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig
- BRÖMEL H (2010), QuickLOAD für Windows® 3.6, Software für Innenballistische Berechnung, Hartmut G Brömel, Babenhausen
- CARLUCCI DE, JACOBSON SS (2008) Ballistics, Theory and Design of Guns and Ammunition, CRC Press, Boca Raton
- CHARBONNIER PJ (1908) Balistique intérieure, O Doin, Paris
- CIP (2007) Texte und Tabellen der "Commission Internationale permanente pour l'Épreuve des armes portatives, Bruxelles
- CORNER J (1950) Theory of the Interior Ballistics of Guns, John Wiley & Sons, Inc, New York
- CRANZ C (1926) Lehrbuch der Ballistik Bd. II, Innere Ballistik – Die Bewegung des Geschosses durch das Rohr und ihre Begleiterscheinungen, Springer-Verlag, Berlin
- CRAWFORD BL, HUGGETT C, FARRINGTON D, WILFONG RE (1947) Direct Determination of Burning Rates of Propellant Powders, Analytical Chemistry, 19, 9, 630–633
- DE HALLER P (1948) Une solution graphique du problème de Lagrange en balistique intérieure, Bull tech Suisse romande 74, 1
- DEVA (Hrsg) (2017) Wiederlade-Handbuch der Deutschen Versuchsanstalt für Jagd- und Sportwaffen e V, Altenbeken
- ENGEL S, KOCH A (2003) Gurney Velocity from Expansion Tests, armasuisse, Wissenschaft & Technologie, Thun

- GERMERSHAUSEN R (Hrsg) (1980) Waffentechnisches Taschenbuch, Rheinmetall GmbH, Düsseldorf
- GERMERSHAUSEN R, WITT W, MELCHIOR E (1971) Thermodynamisches Modell der Innenballistik, feste Treibstoffe mit konstanter Oberfläche abbrennend, Wehrtechnik 7, 281–288
- GOSSOT F, LIOUVILLE R (1914) Mém poudres et salpêtre, 17, 1
- HEYDENREICH W (1908) Lehre vom Schuss, Mittler u. Sohn, Berlin
- HUGONIOU H (1889) Sur la propagation du mouvement dans les corps et spécialement dans les gaz parfaits IV, Mouvement d'un fluide dans un tuyau cylindrique, J école polytech 58, 1–144
- KAPUR JN (1958) Lagrange's Ballistic Problem for Unorthodox (H/L, RCL) Guns and Solid-Fuel Rockets, Proc Nat Inst Sci India 24A, 31–39
- KNEUBUEHL BP (1995) Schwarzpulverballistik, Int Waffen Magazin Spezialheft 3
- KNEUBUEHL BP (1998) Physikalisch-ballistische Grundlagen zur Wirksamkeit von Gas- und Schreckschusswaffen, Bericht Nr. 1436, armasuisse Wissenschaft & Technologie, Thun
- KNEUBUEHL BP (1999) Splitterballistik und Splitterwundballistik, Bericht Nr 1486, armasuisse Wissenschaft & Technologie, Thun
- KNEUBUEHL BP (Hrsg) (2008) Wundballistik, Grundlagen und Anwendungen, Springer Medizin-Verlag, Heidelberg
- KNEUBUEHL BP (2013) Geschosse Gesamtausgabe, Ballistik, Messtechnik, Treffsicherheit, Wirkungsweise. Verlag Stocker-Schmid, Dietikon, 3. Aufl
- KOCH A, ARNOLD N, ESTERMANN M (2002) A Simple Relation between the Detonation Velocity of an Explosive and its Gurney Energy, Propellants, Explos, Pyrotech 27, 1–4
- KÖHLER J, MEYER R, HOMBURG A (2008) Explosivstoffe, Wiley-VCH Verlag GmbH, Weinheim, 10. Aufl
- KUTTERER RE (1959) Ballistik, Friedr Vieweg & Sohn, Braunschweig
- KUHN C (1866) Über den elektrobalistischen Chronographen von LE BOULENGÉ und über die gebräuchlichen elektrobalistischen Apparate, Polytech. J 179 Nr XI, 30–50
- LE BOULENGÉ PE (1864) Mémoire sur un chronographe électro-balistique, Paris
- LOVE AEH, PIDDUCK FB (1922) Lagrange's Ballistic Problem, Phil Trans Roy Soc 222, 167–226
- MURAUOUR H, AUNIS G (1949) Étude de la vivacité de combustion de poudres colloïdales, Mém de l'Art fr T 25, 4^e fasc 859–866
- OERLIKON Taschenbuch (1981), Werkzeugmaschinenfabrik Oerlikon-Bührle AG (Hrsg), Zürich
- OSWATITSCH K (1976) Grundlagen der Gasdynamik, Springer-Verlag Wien GmbH
- PIDDUCK FB (1937) The Limiting Problem of Internal Ballistics, J Appl Phys 8, 144
- POISSON SD (1832) Formules relatives au mouvement du boulet dans l'intérieur du canon, extraites des manuscrits de LAGRANGE, J de l'école polytech. 13, cahier 21:187–204
- RIEMANN B (1860) Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen endlicher Schwingungsweite, Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 8, 43–65
- SCHMITZ O (1913) Neue Versuche der Friedr Krupp AG über innere Ballistik und Artillerie, Artill Monatsh Nr. 84:482ff und Nr. 86: 85ff
- SELLIER KG (1982) Schusswaffen und Schusswirkungen, 2. Aufl, Schmidt-Römhild-Verlag, Lübeck
- SUGOT G (1928) Balistique intérieure théorique et tables numériques, Gauthier-Villars et Cie, éditeurs, Paris
- VALLIER E (1899) Comptes Rendues 128, S 1305, 129, S 258, Paris
- VIEILLE P (1893) Étude sur le mode de combustion des matières explosives, Mém des poudres 6:256–391
- VON BÖCKH P (2004) Fluidmechanik, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York
- WITT W, MELCHIOR E (1974) Thermodynamisches Modell der Innenballistik, feste Treibstoffe progressiv oder degressiv abbrennend, Teil 1, Wehrtechnik 6, 222–225
- WITT W, MELCHIOR E (1974) Thermodynamisches Modell der Innenballistik, feste Treibstoffe progressiv oder degressiv abbrennend, Teil 2, Wehrtechnik 8, 288–292
- WOLFF W (2006), Raketen und Raketenballistik, Reprint 5. Aufl, Elbe-Dnjepr-Verlag, Klitzschen
- ZUKAS JA, WALTERS WP (1998) Explosive Effects and Applications, Springer-Verlag, New York

4 Abgangsbalistik

- CARLUCCI DE, JACOBSON SS (2008) Ballistics, Theory and Design of Guns and Ammunition, CRC Press, Boca Raton
- FARRAR CL, LEEMING DW (1983) Military Ballistics, A Basic Manual, Brassey's Defence Publishers, Oxford
- GERMERSHAUSEN R (Hrsg) (1980) Waffentechnisches Taschenbuch, Rheinmetall GmbH, Düsseldorf
- KNEUBUEHL BP (1998) Physikalisch-ballistische Grundlagen zur Wirksamkeit von Gas- und Schreckschusswaffen, Bericht Nr 1436, armasuisse Wissenschaft & Technologie, Thun
- OERLIKON Taschenbuch (1981), Werkzeugmaschinenfabrik Oerlikon-Bührle AG (Hrsg), Zürich

5 Außenballistik

- ATHEN H (1958) Ballistik, Quelle & Meyer, Heidelberg
- AUBIN D (2010) 'I'am just a mathematician' Why and How Mathematicians Collaborated with military Ballisticians at Gâvre, Université Pierre et Marie Curie (UPMC) HAL 00639895
- BENOIST A (1922) Méthode spéciale de détermination des éléments topographiques du tir, Revue d'Artillerie, tome 89, Berger-Levrault, Paris, 366–384
- BILHARZ H (1944) Bemerkung zu einem Satz von HURWITZ, Z angew Math Mech 24, 2, 77–82
- BRUHN G (1961) Querkraften auf langsam pendelnde Rotationskörper im Überschallflug, Z Flugwiss 9, 285–299
- CARLUCCI DE, JACOBSON SS (2008) Ballistics, Theory and Design of Guns and Ammunition, CRC Press, Boca Raton
- CARTOUX E (1974) Balistique extérieure, deuxième partie, Sciences et technique de l'armement, 48, 4^e fasc, 774–811
- CRANZ C (1896) Compendium der theoretischen äußeren Ballistik, BG Teubner, Leipzig
- CRANZ C (1925) Lehrbuch der Ballistik Bd. I, Äußere Ballistik oder Theorie der Bewegung des Geschosses von der Mündung der Waffe ab bis zum Eindringen in das Ziel, Springer-Verlag, Berlin
- DIDION I (1852) Cours élémentaire de balistique, Librairie militaire de J Dumaine, Paris
- EGGERS AJ, RESNIKOFF MM, DENNIS DH (1957) Bodies of Revolution Having Minimum Drag at High Supersonic Airspeeds, <http://naca.central.cranfield.ac.uk/reports/1957/naca-report-1306.pdf>
- ENGELN-MÜLLGES G, NIEDERDRECK K, WODICKA R (2011) Numerik-Algorithmen, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York
- EULER L (1755) Recherche sur la véritable courbe que décrivent les corps jetés dans l'air ou dans un autre fluid quelconque, Mém de l'Académie Royale des Sciences de Berlin IX, 321–352
- FLECK V, MOLITZ H (1977) Contribution to the Study of the Influence of Nonlinear Effects on the Trajectory of Spinning Shells, Proceedings of the 3rd International Symposium on Ballistics, Karlsruhe
- FLECK V (2009) Einführung in die Außenballistik mit Übungen, Lehrgang „Ballistik von Geschossen“ der Carl-Cranz-Gesellschaft (CCG), Saint-Louis
- FARRAR CL, LEEMING DW (1983) Military Ballistics – A Basic Manual, Brassey's Publishers Ltd, Oxford
- GERMERSHAUSEN R (Hrsg) (1980) Waffentechnisches Taschenbuch, Rheinmetall GmbH, Düsseldorf
- GLUCHOFF A (2011) Artillerymen and mathematicians: Forest Ray Moulton and changes in American exterior ballistics, 1885–1934, Historia Mathematica 38, 506–547
- GREINER W (1989) Theoretische Physik Band 2, Mechanik Teil 2, Verlag Harry Deutsch, Thun

- HAACK W (1941) Geschossformen kleinsten Wellenwiderstandes, Bericht 139 der Lilienthal-gesellschaft S 14–28, <https://web.archive.org/web/20070927020313/http://www.lima-wieder-ladetechnik.de/Ballistik/Lilienthal-139-1-Haack.pdf>
- HAACK W (1959) The Calculation of Stability and Damping of Spin-Stabilized Projectiles, in NELSON WC (Ed) “Selected Topics on Ballistics”, Pergamon Press, London
- HANTSCHE G, RINEHART J (1952), Air Drag on Cubes at Mach Number 0.5 to 3.5, J Aeronaut Sci Vol 19, Feb
- HATCHER JS (1962) Hatcher’s Notebook, The Military Publishing Company, Third Edition
- HAUCK G (1972) Äußere Ballistik oder die Theorie der Bewegung des Geschosses von der Mündung der Waffe ab, Militärverlag der DDR, Berlin
- HAUCK G (1990) Der Flug un gelenkter Geschosse und Raketen, Militärverlag der DDR, Berlin, 3. Aufl
- HUND F (1996) Geschichte der physikalischen Begriffe, Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg, Berlin, Oxford
- HURWITZ A (1895) Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt, Math Ann 46:273–285
- INGALL JM (1918) Ingalls’ Ballistic Tables, revised under the Direction of the Ordnance Board 1917, Government Printing Office, Washington
- KLOSE B (2016) Meteorologie, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 3. Aufl
- KNEUBUEHL BP (1976) Über die Herkunft und Gültigkeit der Didion’schen Formel zur Berechnung des Windeinflusses bei Geschossen und Raketen, interner Bericht, armasuisse, Wissenschaft & Technologie, Thun
- KNEUBUEHL BP (1979) Seitenwindsimulation, Wehrtechnik 6, 36–37
- KNEUBUEHL BP (1982) Physical and Mathematical Backgrounds of the Stability Theory of a Spinning Shell, J of Ballistics Vol 6, No 2:1385–1392
- KNEUBUEHL BP (1983₁) Calculation of the Stability and the Tractability Factors of a Spinning Shell, Proceedings of the 7th Int Symposium on Ballistics, The Hague
- KNEUBUEHL BP (1983₂) c_w -Bestimmung in Freifluganlagen, Kursmanuskript, CCG-Kurs „Außenballistik“, Weil am Rhein
- KNEUBUEHL BP (1986) What is the maximum length of a spin stabilized projectile? Proceedings of the 9th Int Symposium on Ballistics, Shrinvenham
- KNEUBUEHL BP (1999) Splitterballistik und Splitterwundballistik, Bericht Nr 1486, armasuisse Wissenschaft & Technologie, Thun
- KNEUBUEHL BP (2002) Splinefunktionen und ihre Anwendung, Bericht Nr 1680, armasuisse Wissenschaft & Technologie, Thun
- KNEUBUEHL BP (Hrsg), COUPLAND RM, ROTHSCILD MA, THALI MJ (2008) Wundballistik, Grundlagen und Anwendungen, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 3. Aufl
- KNEUBUEHL BP (2013) Geschosse Gesamtausgabe, Ballistik, Messtechnik, Treffsicherheit, Wirkungsweise, Verlag Stocker-Schmid, Dietikon, 3. Aufl
- KUTTERER RE (1959) Ballistik, Friedr Vieweg & Sohn, Braunschweig
- KUYERS F, UCKE CH (1994) Steh’ auf Kreisel! Physik in unserer Zeit, 5/94, 214–215
- LAUBE G, KNEUBUEHL BP (1981) A fast Running Solution of the Exterior Boundary Value Problem, Proceedings of the 6th Int Symposium on Ballistics, Orlando FL
- LEDoux T (2011) Quaternionen, Ausarbeitung im Rahmen des Seminars „Geometrie SS 2011“, http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~lschwach/SS11/Seminar_II/Quaternionen.pdf
- LESCHKE K, STEINKRAUß T (2011) Quaterinonen: von Hamilton, Basketbällen und anderen Katastrophen, http://didaktik.mathematik.hu-berlin.de/files/2011_quaternionen.pdf
- LIESKE RF, MCCOY RL (1964) Equations of Motion of a Rigid Projectile, Ballistic Research Laboratories, Report No 1244, Aberdeen Proving Ground, Maryland, <http://www.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/441598.pdf>
- LIESKE RF, REITER ML (1966) Equations of Motion for a Modified Point Mass Trajectory, Ballistic Research Laboratories, Report No 1314, Aberdeen Proving Ground, Maryland <http://www.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/485869.pdf>

- LUST M (2001) Quaternionen – mathematischer Hintergrund und ihre Interpretation als Rotation, https://userpages.uni-koblenz.de/~cg/veranst/ws0001/sem/Lust_quaternion.pdf
- MAY A, WITT WR (1953) Free-Flight Determinations of the Drag Coefficients of Spheres, *J Aeronaut. Sci* Vol 20 Sept, 635–638
- MAYEVSKI N (1872) *Traité de balistique extérieure*, Gauthier-Villars, Paris
- MCCOY RL (1999) *Modern Exterior Ballistics*, Schiffer Military History, Atglen
- MOLITZ H (1957) Das sekundäre Hauptproblem der äußeren Ballistik, *Wehrtech Mh* 54, 8, 333–342
- MOLITZ H, STROBEL R (1963) *Äußere Ballistik*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York
- MUNK MM (1924) The Aerodynamic Forces on Airship Hulls, NACA Report 184, <https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19930091249.pdf>
- OERLIKON Taschenbuch (1981) *Werkzeugmaschinenfabrik Oerlikon-Bührle AG* (Hrsg), Zürich
- PITON-BRESSANT AH (1852) *Formules des portées*, Verlag unbekannt
- PONTRAJAGIN LS (1965) *Gewöhnliche Differenzialgleichungen*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin
- RALSTON A, WILF HS (1967) *Mathematische Methoden für Digitalrechner*, R Oldenbourg Verlag, München/Wien S 203 ff
- REINSCH C (1967) Smoothing by Spline Functions, *Numer Math* 10, 177–183
- ROBINS B (1745) *Neue Grundsätze der Artillerie* enthaltend die Bestimmung der Gewalt des Pulvers nebst einer Untersuchung über den Unterschied der Widerstands der Luft in schnellen und langsamen Bewegungen, aus dem Englischen übersetzt und mit den nötigen Erläuterungen und vielen Anmerkungen versehen von Leonhard EULER, A Haude, Berlin
- ROTH-DESMEULES E (1955) Zur Berechnung der Geschossabweichung unter dem Einfluss eines Seitenwindes, *ZAMP* 6, 6:494–497
- RUTISHAUSER H (1976) *Vorlesungen über numerische Mathematik*, Band I, Birkhäuser-Verlag, Basel
- SCHLICHTING H (1965) *Grenzschicht-Theorie*, 5. Auflage, Verlag G Braun, Karlsruhe
- SCHMIDT WR, HERPFER E (1973) *Zusammenstellung experimenteller Unterlagen zum Heckwiderstand von Flugkörpern im Transschall- und im Überschallbereich und Vergleich mit theoretischen Berechnungsmethoden*, BMVg-FBWT 73-27
- SONNTAG D (1990) Important new Values of the Physical Constants of 1986, Vapour Pressure Formulations based on ITS-90 and Psychrometer Formulae, *Z Meteorol* 40, 5:340–344
- STOER J, BULIRSCH R (1973) *Einführung in die numerische Mathematik*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York
- STÜMKE H (1969) *Grundzüge der Flugmechanik und Ballistik*, Friedr Vieweg & Sohn, Braunschweig
- SUTTERLIN R (1965) *Cours de munitions*, Livre III, Les projectiles, chap IV
- SZABÓ I (1972) *Höhere Technische Mechanik*, Springer Verlag, Berlin
- SZABÓ I (1987) *Geschichte der mechanischen Prinzipien*, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 3. Aufl
- VALLERIANI M (2013) *Metallurgy, Ballistics and Epistemic Instruments*, The *Nova Scientia* of Nicolò TARTAGLIA, A new Edition, Edition Open Access <http://www.edition-open-sources.org/sources/6/index.html>
- WHITEFORD CW, REGAN JM (1961) The Determination of the Striking Velocity of Steel Fragments by Their Mass and Penetration Into Witness Material, BRL Memorandum Report No 1333, April 1961
- WOLFF W (2006), *Raketen und Raketenballistik*, Reprint 5. Aufl, Elbe-Dnjepr-Verlag, Klitzschen
- YOUSSEF EM, RADWAN MA, MOSTAFA HE, HADHOUD MK (2015) *Low Signature Advanced Base Bleed Grains*, *IJSER* Vol 6, 12
- ZIEREP J (1991) *Theoretische Gasdynamik*, G. Braun, Karlsruhe

6 Grundzüge der Endballistik

- ALEKSEEVSKII VP (1966) Penetration of a Rod into a target at High Velocity, Combustion, Explosion and Shock Waves 2, 63–66
- BACKMAN ME, GOLDSMITH W (1978) The mechanics of penetration of projectiles into targets, *Int J Engng Sci*, Vol 16, 1–99
- BHATNAGAR A (Ed) (2016) *Lightweight Ballistics Composites*, Woodhead Publishing (Elsevier) Oxford
- BILLON HH (2007) A New Method for Calculating the Critical Penetration Velocity V_0 , DSTO-TN-0791, Defence Science and Technology Organisation, Fishermans Bend, Victoria 3207, Australia
- BUCKINGHAM E (1914) On physically similar systems; illustrations of the use of dimensional equations, *Physical Review* 4, S 345–376
- EN (1998) EN 1523, Fenster, Türen, Abschlüsse, Durchschusshemmung Prüfverfahren, CEN Comité Européen de Normalisation, Bruxelles
- EN (1999) EN 1063, Sicherheitssonderverglasung, Prüfverfahren und Klasseneinteilung für den Widerstand gegen Beschuss, CEN Comité Européen de Normalisation, Bruxelles
- FINNEY DJ, TATTERSFIELD F (1952) Probit Analysis: A Statistical Treatment of the Sigmoid Response Curve, *JASA*, Vol 47, No 260, 687–691
- GABEAUD ML (1935) Essai sur la théorie de la perforation des blindages, *Mémorial de l'artillerie française*, XIV, 85–92
- GABEAUD ML (1947) Sur la perforation des blindages, *Mém de l'artillerie française*, XXI, 97–112
- KNEUBUEHL BP (2003) Ballistischer Schutz, deutsch und englisch erhältlich unter <http://www.vpam.eu/fileadmin/Wissenswertes/Ballistischer-Schutz.pdf>
<http://www.vpam.eu/fileadmin/Wissenswertes/Ballistic-protection.pdf>
- KNEUBUEHL BP (Hrsg), COUPLAND RM, ROTHSCILD MA, THALI MJ (2008) *Wundballistik, Grundlagen und Anwendungen*, Springer Medizin-Verlag, Heidelberg, 3. Aufl
- LAIBLE RC (Ed.) (1980) *Ballistic Materials and Penetration Mechanics*, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, Oxford, New York
- LANGLIE HJ (1965) A Reliability Test Method for “One Shot” Items, Ford Aerospace Communications Corporation, Aeronautic Division
- MAUCHANT D, RILEY MA, RICE KD, FORSTER AL, LEBER D, SAMAROV D (2011) Analysis of Three Different Regression Models to Estimate the Ballistic Performance of New and Environmentally Conditioned Body Armor, NIST 7760 National Institute of Standards and Technology
- MALDAGUE M (2008) Evaluation of some methods in order to determine v_{50} , *Proceedings of Personal Armour System Symposium*, Brussels
- NIJ (2008) Ballistic Resistance of Body Armor, NIJ Standard 0101.06, National Institute of Justice, Washington DC, <https://www.ncjrs.gov/pdffiles1/nij/223054.pdf>
- ROSENBERG Z, DEKEL E (2012) *Terminal Ballistics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg
- TATE A (1967) A Theory for the Deceleration of Long Rods after Impact, *J Mech Phys Solids*, Vol 15, 6, 387–399
- VPAM (2014) *Allgemeine Prüfgrundlagen für ballistische Material-, Konstruktions- und Produktprüfungen* (APR 2006), Anforderungen, Prüfstufen und Prüfverfahren, VPAM, Vereinigung der Prüfstellen für angriffshemmende Materialien und Konstruktionen, <http://www.vpam.eu/index.php?id=92>
- VPAM (2009) *Ballistische Schutzwesten, Anforderungen, Klassifizierungen und Prüfverfahren*, VPAM, Vereinigung der Prüfstellen für angriffshemmende Materialien und Konstruktionen, <http://www.vpam.eu/index.php?id=106>
- WILD R, VON COLLANI E (2002) Modelling of Explosives Sensitivity, Part 1, *The Bruceton Method*, *Economic Quality Control* Vol 17, No 1, 113–122
- ZUKAS JA, NICHOLAS T, SWIFT HF, GRESZCZUK LB, CURRAN DR (1992) *Impact Dynamics*, Krieger Publishing Company, Malabar FL

7 Abprallende Geschosse

- BIRKHOFF G, BIRKHOFF GD, BLEICK WE, HANDLER EH, MURNAGHAN FD, SMITH TL (1944) Ricochet off Water, A.M.P. Memo. 42.2M (Gemäß JOHNSON, REID (1975) ist die Arbeit unzugänglich weshalb er in seiner Publikation diese Theorie ausführlich erläuterte und diskutierte)
- GREINER W (1989) Theoretische Physik Band 2, Mechanik Teil 2, Verlag Harri Deutsch, 5. Aufl
- JAUHARI M (1971) Mathematical Model for Bullet Ricochet, J Crim Law Criminol Pol Sci 61, 469–473
- JOHNSON W, REID SR (1975) Ricochet of Spheres Off Water, J Mech Eng Sci, 17, 2, 71–81
- KNEUBUEHL BP (1999) Das Abprallen von Geschossen aus forensischer Sicht, Dissertation, Université de Lausanne, Faculté de Droit, École des Sciences Criminelles
- KUYPERS F, UCKE CH (1994) Steh' auf Kreisel! Physik in unserer Zeit, 5/94, 214–215
- MAGNUS K (1971) Kreisel, Theorie und Anwendungen, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York
- REY-DEBOVE J, REY A (1994) Le nouveau Petit Robert, Dictionnaires le Robert, Paris
- SELLIER K (1971) Über Geschoßablenkung und Geschoßdeformation, Z Rechtsmed, 69, 217–251
- SELLIER K (1977) Schusswaffen und Schusswirkungen II, Verlag Schmidt-Römhild, Lübeck
- SELLIER K (1987) Doppelte Rikochettier-Marken, Z Rechtsmed, 90, 241–244
- SOMMERFELD A (1977) Vorlesungen über Theoretische Physik, Band I, Mechanik, Nachdruck der 8. Aufl, Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt/Main

8 Spezielle Anwendungen der Ballistik

- BEVEL T, GARDNER RM (1997) Bloodstain Pattern Analysis, CRC Press, Boca Raton, p 75
- BUCK U, KNEUBUEHL BP, NÄTHER S, ALBERTINI N, SCHMIDT L, THALI M (2011) 3D bloodstain pattern analysis: ballistic reconstruction of the trajectories of blood drops and determination of the centres of origin of the bloodstains, Forensic Sci Int 2011 Mar 20;206(1-3):22–28
- FRINGS C, RABE F (2016) Grundlagen der Kriminaltechnik Bd I und II, Verlag Deutsche Polizeiliteratur, GmbH, Hilden
- GALLUSSER A, BONFANTI M, SCHÜTZ F (2014) Expertise des armes à feu, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 2^{ème} ed
- GARDNER RM (2005) Practical Crime Scene Processing and Investigation, CRC Press, Boca Raton, Florida
- HAAG LC (2002) Balloting Bullets: Exterior and Wound Ballistics of Balloted Bullets, Physical Characteristics of Balloted Bullets and Associated Cartridge Cases, AFTE Journal, 34(4), 375–378
- HAAG LC (2007) Wound Production by Ricocheted and Destabilized Bullets. Am J Forensic Med Pathol, 28, 4–12
- HAAG MG, HAAG LC (2011) Shooting Incident Reconstruction, 2nd edition, Academic Press, San Diego
- HSIANG LP, FAETH GM (1995) Drop Deformation and breakup due to shok-wave and steady disturbances, International Journal of Multiphase Flow 21(4), 545–560
- JAMES SH, ECKERT WG (1999) Interpretation of Bloodstain Evidence at Crime Scenes, 2nd Ed p 15–17
- KERKHOFF W, BOLCK A, ALBERINK I, MATTIJSSEN EJAT, HERMSEN R, RIVA F (2018) Pistol bullet deflection through soft tissue simulants, Forens Sci Int 289, 270–276
- KNEUBUEHL BP (Hrsg), COUPLAND RM, ROTHCHILD MA, THALI MJ (2008) Wundballistik, Grundlagen und Anwendungen, Springer Medizin-Verlag, Heidelberg, 3. Aufl
- KNEUBUEHL BP (2013) Geschosse Gesamtausgabe – Ballistik, Messtechnik, Wirksamkeit, Treffsicherheit, Verlag Stocker-Schmid, Dietikon-Zürich
- LITZ B (2011) Applied Ballistics for Long-Range Shooting, 2nd edition, Applied Ballistics, LLC

- OCSW-WSAD (1968) Office of the Chief of Staff (Army) Washington DC, Weapons Systems Analysis Directorate, Report of the M16 Rifle Review Panel, Ammunition Development Program, Vol. 5, Appendix 4, PN, <http://www.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/a953114.pdf>
- RIVA F, KERKHOFF W, BOLCK A, MATTIJSSEN EJAT (2017) Possible influences on bullet trajectory deflection in ballistic gelatine, *Forens Sci Int* 271 107–112
- ROWE WF (2006) Errors in the determination of the point of origin of bloodstains, *Forens Sci Int* 161, 47–51
- SCIPP, Santa Cruz Institute of Particles Physics, Surface Tension (Manuscript) p 3, <http://scipp.ucsc.edu/~haber/ph5B/bubble.pdf>
- SELLIER K (1988) Schussentfernungsbestimmung, Verlag Schmid-Römhild, Lübeck
- SELLIER K (1991) Shot Range Determination, Forensic Science Progress, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York
- THEOFANOUS TG (2011) Aerobreakup of Newtonian and Viscoelastic Liquids, *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol 43, Palo Alto, Annual Reviews, 43: 661–690
- VPAM (2012) Materialien und Konstruktionen zur Vermeidung von ab- und rückprallenden Geschossen, VPAM, Vereinigung der Prüfstellen für angriffshemmende Materialien und Konstruktionen, <http://www.vpam.eu/index.php?id=112>
- WILLIS C, PIRANIAN AK, DONAGGIO JR, BARNETT RJ, ROWE WF (2001) Errors in the estimation of the distance of fall and angles of impact blood drops, *Forens Sci Int* 123, 1–4
- WÜRZ W, GAISBAUER U (2014) Bedeutung von Ähnlichkeitszahlen (Kennzahlen) Manuskript Institut für Aerodynamik und Gasdynamik, Universität Stuttgart

Abbildungsnachweis

Kap.	Abbildungen	Quelle
2	1–10, 12–19	Beat P. Kneubuehl, CH-3603 Thun
	11	armasuisse, Wissenschaft & Technologie, CH-3602 Thun
3	1–7, 16–18, 20–21, 26–31, 33–35a, 36–42	Beat P. Kneubuehl, CH-3603 Thun
	8–15	Beat P. Kneubuehl, CH-3603 Thun, gezeichnet nach Unterlagen der Fa. Nitrochemie, CH-3752 Wimmis, mit freundlicher Genehmigung der Fa. Nitrochemie
	19	aus A. E. H. LOVE und F. B. PIDDUCK (1922) http://rsta.royalsocietypublishing.org/content/roypta/222/594-604/167.full.pdf , CCC License Id 4386440963596
	22–25, 32	Aus B. P. KNEUBUEHL (1998), Bericht Nr. 1436, armasuisse, Wissenschaft & Technologie, CH-3602 Thun
	35b	Verein Schweizer Armeemuseum, CH-3600 Thun
4	1, 2b, 3b, 4–6, 14, 19–20	armasuisse, Wissenschaft & Technologie, CH-3602 Thun
	2a, 3a, 7–8, 12–13, 15–17	Beat P. Kneubuehl, CH-3603 Thun
	9	Institut für Rechtsmedizin der Universität Bern, Abt. Forensische Physik / Ballistik
	10	http://www.defensie.nl/onderwerpen/materieel/inhoud/comunicatie-en-informatiesystemen/doelgegevens-evaluatie-cel-dec (bearbeitet durch B. P. Kneubuehl)
	11	http://news.soc.mil/Photo%20Archive/2009/2009/album/slides/090502-A-4552H-026.html (bearbeitet durch B. P. Kneubuehl)
	18	A. Mägert, CH-3800 Spiez, mit freundlicher Genehmigung
5	1, 3–25, 27, 31–36, 39–44, 46–51, 54–57, 61–63, 66–68, 70–83	Beat P. Kneubuehl, CH-3603 Thun
	2	http://www.e-rara.ch/zut/wihibe/content/titleinfo/6331451
	26	R. Coupland, IKRK, CH-1200 Genf, mit freundlicher Genehmigung
	28–29, 52–53, 58–59, 64–65, 69	armasuisse, Wissenschaft & Technologie, CH-3602 Thun
	30	Verein Schweizer Armeemuseum, CH-3600 Thun
	37, 38	aus V. FLECK, H. MOLITZ (1977), mit freundlicher Genehmigung des Autors, nachgezeichnet durch B. P. Kneubuehl
	45	Institut für Rechtsmedizin, ZFPB, CH-3012 Bern
	60	aus W. R. SCHMIDT, E. HERPFER (1973), auszugsweise nachgezeichnet durch B. P. Kneubuehl, mit freundlicher Genehmigung des Fachinformationszentrums der Bundeswehr, Bonn

Kap.	Abbildungen	Quelle
6	1–2, 4–6, 16–35, 37–39	Beat P. Kneubuehl, CH-3603 Thun
	3	aus M. E. BACKMAN, W. GOLDSMITH (1978), CCC License Id: 4386431241800, in Größe und Sprache angepasst durch B. P. Kneubuehl
	7–15	W. Odermatt, CH-3612 Steffisburg
	36	Deutsches Bundesarchiv, Bild 102-12610 / CC-BY-SA 3.0
7	1–22	B. P. Kneubuehl, CH-3603 Thun
	23, 24	armasuisse, Wissenschaft & Technologie, CH-3602 Thun
8	1–2, 5–7, 10–11, 18–20	B. P. Kneubuehl, CH-3603 Thun
	3–4, 8–9, 12–13	F. Riva, Institut für Rechtsmedizin der Universität Bern CH-3012 Bern
	14, 16–17	Institut für Rechtsmedizin, CH-3012 Bern
	15	aus L. PRANTL (Hrsg.) Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen, II. Lieferung, 1923, Nachdruck 2009, https://doi.org/10.17875/gup2009-101 , Universitätsverlag Göttingen, mit freundlicher Genehmigung des Verlags
	21	Kantonspolizei Aargau, KTD, CH-5000 Aarau, mit freundlicher Genehmigung

Sachverzeichnis

A

Abbrandgeschwindigkeit 55, 107
 Beeinflussung der 75
Abbrandgesetz 75
Abbrandkoeffizient 72
Abel'sche Gleichung 105
Abgangsfehler 132, 141
 Bestimmung 142
Abgangswinkel 14, 364
 beim Prellschuss 363, 365
 beim Schuss auf- oder abwärts 211
 wirklicher 141
Ablenkwinkel 46, 358, 363
Abpraller *siehe* Prellschuss
Abschussimpuls 117
Abweichung, seitliche 173
Ammoniumnitrat 63
Ammoniumperchlorat 63
Anfangsgeschwindigkeit 14, 58, 154, 211, 395, 416
 der Splitter 125, 128, 224, 226
 des Prellobjektes 373
 von Blutstropfen 410
Anfangswerte 14, 213, 236, 300, 396
Anfangswertproblem 188, 217, 393
Anstellwinkel 170, 171, 229, 231, 238, 258, 304, 382, 384, 386, 398
 bei Schulterstabilisierung 244
 im Auftreffpunkt 325
 im Gipfel 212, 255
 komplexer 236, 238, 250, 262
Antriebsphase 298, 300, 302
Anzündhütchen 65
Anzündmittel 64
Arbeit 8, 47, 67, 121, 125, 146, 199, 263, 352
 eines Gases 27ff
ARISTOTELES 151
Armeegegewehre 335
Artilleriegeschoss 201, 205, 238, 253, 268

 Folgsamkeitsprobleme bei -en 257
Artillerieladungen 75, 80, 141
Auftreffenergie 305, 309ff, 319, 322, 364
Auftreffgeschwindigkeit 130, 306, 311ff, 338, 344, 393
Auftreffrichtung 393
Aufreffwinkel 305, 365
Auftrieb 170, 230, 236
Auftriebsbeiwert 36, 171, 230
 rechnerische Bestimmung 277
Auftriebskraft 36
Ausbreitungsgeschwindigkeit
 des Gasstrahls 137
Auslenkung der Mündung 143
Außendruck 48
Ausströmgeschwindigkeit 42, 136
 beim offenen Rohr 138
Auszieh Widerstand 77
Azimut 164

B

Backman-Goldsmith-Diagramm 306
Bahngeschwindigkeit 199
Bahnwinkel 165, 174, 203, 227, 393
Ballistische Kamera 258
Ballistische Koeffizienten (BC) 182, 395
Ballistischer Schutz
 Prüfung 342
 Prüfung auf Nicht-Durchschuss 345
 Prüfverfahren 344
Bariumnitrat 65
Base bleed Prinzip 296
Basiswiderstand, Reduktion 296
Baumwoll-Linters 59
Bedrohungsklassen 334
Bedrohungswahrscheinlichkeit
 Kurzaffen 337
 Langaffen 338
Begriffe, beim Prellschuss 362
Beiwertfunktionen 229

Benoist-Plan 216
Berechnung, thermodynamische 108
Bernoulli-Gleichung 34, 311
 in der Endballistik 312
Beschleunigung 5
 substanzielle 40
Bewegungen, Unabhängigkeit von 13
Bewegungsgleichungen 13
 4-FG-Modell 240
 außenballistische 154
 bahngeometrisch 175
 bei Windeinwirkung 191
 der Flugbahn im Vakuum 14
 des 6-FG-Modelles 232
 des Massenpunktmodelles 174
 einer Strömung mit Reibung 40
 eines Newton-Fluids 40
 Folgerungen aus den 198
 im Zentralfeld 15
 innenballistisch, Daviskanone 118
 linearisierte 238
 von Rohr und Geschoss 88
Bewegungszerlegung 21
Bezugsabstand 36
Bezugsfläche 35, 167, 171, 223, 271, 385
Bezugshöhe 157, 159
Bezugsstrecke 171
Binder 63
Blenden 416
Blockade, kardanische 233
Blutspurenbilder 410
Bodensog 263, 273ff, 283, 297
Böllergeschütze 137
Boyle-Mariottesches Gesetz 27
Brennkammer 108, 109ff, 119
Brennkammerdruck 109ff
Brennschluss 80, 120, 297, 300
Brinellhärte 317, 320
Brisanz 76

C

C.I.P. 83
Charbonnier P. J. 75
Collodiumwolle 60
Composite-Pulver 63
Compoundbogen 68
Coriolisbeschleunigung 20, 163ff, 174, 186
 längs der Flugbahn 166
Corioliskraft 160, 173
CORNER J. 70, 77, 119, 123
CRANZ C. 77, 131, 185
Crawford-Bombe 55, 107

D

d'Alembert'sches Paradoxon 263
Datenerfassung (forensisch)
 am Ereignisort 393
 weiterer Daten 394
DAUTRICHE, Henri J. 55
Daviskanone 117
Deflagration 55
Derivationsbeschleunigung 185, 224
Destabilisierung 400
Detonation 55, 65
Detonationsgeschwindigkeit 55
Dichte 22, 29, 38, 42, 83, 89ff, 121, 264
Didion'sche Längswindformel 195
Didion'sche Querwindformel 196, 301
Diglycoldinitrat 62
Doppler-Radar 261, 385
Drall 169
Drallabnahme 239
Dralllänge 85, 253, 292, 294, 383, 398
Drallwinkel 85, 253, 295
Drehbewegung 6, 10ff, 21
 beim exzentrischen Stoß 357, 358
 beim Schießen 147
 eines instabilen Geschosses 252
 eines Splitters 222
 um Querachse 11
Drehfrequenz 6
Drehimpuls 11
 Änderung des -es 379
 beim exzentrischen Stoß 357
 beim Schießen 147
 einer Wirbelströmung 37
 eines starren Körpers 21
 Erhaltung beim instabilen Geschoss 252
 Erhaltung des -es 12, 34
 in einer Strömung 34
Drehmoment, beim Schießen 147
Drehmomentenstoß 379, 399
Druckabnahme 156
Druckenergie 28, 33, 64, 101, 105, 263
Druckkoeffizient 35, 267
Druckkurven
 Beispiele 78ff
Druckluftantrieb 70
Druckverhältnis 43, 48
 kritisches 43
 Heydenreich'sches 96
 Raketentriebwerk 115
Druckverlauf 53, 78, 83, 88, 93
 im offenen Rohr 102
 im Raketentriebwerk 113

in der Atmosphäre 156
 in Druckgaswaffe 69
 Druckverteilung 96, 102, 120, 137
 am Geschosskörper 167, 171, 268, 276f
 an der Spitzenabplattung 270
 bei der Schulterstabilisierung 244
 beim Abprallen an Wasser 390
 beim Magnuseffekt 38
 Durchdringungsmodelle 307
 Durchschusskriterien 319
 Durchschusswahrscheinlichkeit 338, 341
 Gauss'sche Normalverteilung 340
 Düse 43, 47ff, 108ff, 119, 299
 angepasste 49, 114
 Auslegung 114
 konvergent-divergente 47
 Düsenkanone 118
 Dynamit 59

E

EGG J. 65
 Eigenbewegung
 des Geschosses 232, 262, 376
 eines Prellschusses 383ff
 Eindringen, hydrodynamisch 310
 Eindringtiefe 304f, 319, 394, 402
 eines Penetrators 310ff
 in Holz 324ff
 in Sand und Erde 327
 Eindringvorgang 303
 Einheitensystem, internationales 3
 Einpresswiderstand 77
 Einschießverfahren 217
 Elevation 14, 17, 141, 144, 185, 211, 407
 im Randwertproblem 213ff
 im windfesten System 193
 Elevationskurve 213
 Endballistik, hydrodynamischer Ansatz 311
 Enddrallwinkel 87
 Endquerschnitt 49
 Energie 9, 23, 54, 64, 67, 76, 117, 125, 148,
 243, 263, 291, 303, 307, 309, 324
 Erhaltung der 12, 33
 innere 28
 kinetische 9, 11, 23, 26, 42, 67, 263, 352
 potenzielle 9, 28, 157
 spezifische 64, 105, 108
 Energie, spezifische 64
 Energiedichte 212, 303, 305, 308, 324ff,
 333ff, 343, 350
 Energiegleichung 74, 76ff, 82, 148
 Energiesatz 95, 125, 138, 199, 245, 353ff

Enthalpie 28
 Entspannungsverhältnis 84
 Erdbeschleunigung 3, 8, 53, 157, 162, 169,
 201, 206, 211, 392
 Erdmasse 16, 162
 Erosionsmodell 310
 EULER L. 153, 154, 177
 Euler'sche Differenzialgleichung 282
 Euler'sche Gleichung 34, 267
 Euler'sche Kreisgleichungen 244, 382
 Euler'sche Winkel 228, 233, 246
 Explosionstemperatur Siehe
 Flammtemperatur
 Explosionswärme 64
 Explosivstoffe 54

F

Fallschirmgeschwindigkeit 201
 Fallwinkel 188, 204, 209ff, 393, 396
 Federwaffen 67
 Fehlerfortpflanzung 260
 Fernwirkung 67
 Feuer aus Mündung 139
 Feuerscheindämpfer 149
 Figurenachse 23
 Flammtemperatur 64, 105, 108
 Flettner-Rotor 38
 Flugbahn
 besondere Punkte 205
 flache 206
 Geschwindigkeitsverlauf 202
 ungelenkte Rakete 298
 von Blutstropfen 407
 Flugbahneigenschaften 198
 der Rakete 300
 Flugbahnen im Vakuum 13
 Flugbahngleichung
 nach PITON-BRESSANT 210, 221
 Flugbahnkarte 216
 Flugbahnrechnung 174, 183, 185, 188ff,
 213, 224, 397
 Flugbahnrekonstruktion 190, 392ff
 instabiler Geschosse 398
 Flügelspannweite 36, 39
 Flügelstabilisierung 243
 Flugzeug 32
 Folgsamkeit 206, 212, 236, 255ff
 Folgsamkeitsprobleme 256
 Folgsamkeitszahl 256
 Formfaktor 181, 184
 Formfunktion 72, 106
 Freiflug 77

Freiflugphase 116, 299, 300
Freiflugversuche 288
Freistrahle 42, 43
Führungsbänder 51, 173, 253, 268, 273

G

GALILEI G. 152
Gaskonstante 27
 der feuchten Luft 155
 der trockenen Luft 155
 von Pulvergasen 105
Gasströmung, an der Mündung 132
Gefährlichkeit 412
Gegenmasse 117
Gellerschuss *siehe* Prellschuss
Geschossablenkung
 an Halmen und Zweigen 373
 an Regentropfen 375
Geschossboden 87, 417
Geschossdurchlaufzeit 98
Geschosse
 instabile 398
 unterkalibrig 399
 mit flüssiger Füllung 415
Geschossfänge 415
Geschossformen 168, 180, 184, 278
 gedrungene 197
 optimale 279, 285, 290ff
Geschossformen, maximaler Stabilität 293
Geschossimpuls 134, 144
Geschossmeridian 265
geschottetes Ziel 330
Geschwindigkeit 4
Geschwindigkeit, maximal mögliche
 durch Pulverantrieb 82
 eines Blutstropfen 408
 eines Regentropfen 375
Geschwindigkeitsfeld
 im Freistrahle 137
Geschwindigkeitsverteilung
 im Freistrahle 44
Gesetz von MARTEL 308
Gewicht 8, 168
Gimbal Lock 233
Gipfel 14, 188, 198, 203
 bei Flugbahnrekonstruktion 402
 Lage des -s 205
 Lage des -s bei Rakete 300
Gipfelhöhe 14, 162, 209
 Fehler bei der Berechnung 238
 Flugbahn im Zentralfeld 18
 in Schusstafeln 215

Glättungsverfahren 259
Gleichungssysteme, innenballistisch
 Daviskanon 118
 für das konische Rohr 123
 für das offene Rohr 100
 gasdynamisches 91, 95
 thermodynamisches 83
Gleichungssysteme, außenballistisch 186
 2-dimensional 187
 3-dimensional 186
 der Raketenflugbahn 299
 mit Windeinfluss 191
Glykol-Pulver 62
Gravitationsbeschleunigung 162
Gravitationskonstante 162
Grenzdistanz (forensisch)
 für kurze Schussdistanz 392
Grenzdurchschlagsdicken
 Aluminium 321
 Beton und Mauerwerk 322
 Holz 324
 Panzerplatten 317
 Sand, Erde 327
 Stahl 319
Grenzschicht 33, 263
Grenzschichtdicke 239
Grenzwinkeldiagramms 328
Gurney-Formel 125
 lokale Anwendung 128
Gurney-Konstante 127

H

Haack'sche Geschossspitze 279, 285, 289
Haackgeschoss 288, 293
halbunendliches Ziel 313
Haupt'sche Gleichung 14, 209
Hauptgleichung der Außenballistik 177
Hauptgleichung der Innenballistik 77
Hebelarm der Luftkraft 169, 171
Heckwiderstandskoeffizient 273
Hexogen 63
HEYDENREICH, Methode von 96
Hochdruck-Niederdruck-System 120
Hochdruckraum 120
Hodographen 177
Höhenstufen, geopotenzielle 157
Höhenstufen (Atmosphäre) 156
HUGONIOT P.-H. 92

I

ICAO-Atmosphäre 157
Impuls 7, 21, 109, 119, 144

Erhaltung des 12, 34
 Impulssatz 13, 44, 88, 116, 233, 354, 389
 Ingalls-Tabellen 182
 Initialsprengstoff 54, 66
 Initiator 65
 Innenbrenner 112
 Inversion 160
 isentrop 42
 Isentropenexponent 29

J

Jagdbüchsen 335
 JOUKOWSKI, Satz von 39

K

Kaliber, Definition 52
 Kaliumperchlorat 63
 Kartusche 100ff
 Kinematik 4
 Kinematograf 131
 Kippmoment 36, 171, 230, 236
 Kippmomentenbeiwert 36, 171, 230
 mit Munkscher Luftschiffformel 278
 rechnerische Bestimmung 277
 Kippmomentenbeiwertderivativ 254
 Kleinwaffen 7, 83, 124, 318, 414
 Bedrohungspotenzial 332
 Kleinwaffenpulver 73
 Klemmung 112
 Knalldruck 149
 Knallquecksilber 65
 Kneifrille 272
 Kohle 57
 Kompensatoren 149
 Kompressibilität 29
 Kontinuitätsgleichung 33
 Koordinatensystem
 Bahntangentensystem 227
 ballistisches 3, 161
 erdfestes 227
 geschossfestes 227
 rotierendes 163
 windfestes 192
 Kraft 7, 11, 13, 35, 77, 108, 121, 167, 170,
 229ff, 242, 263, 302, 379
 Kraterdurchmesser 310
 Kreisel 23, 169
 freier 23, 381
 schwerer 23
 Kreuzpulver 73
 Krümmung der Flugbahn 169
 Krümmungsradius der Bahnkurve 175

Kurzbahngeschosse 413
 Kurzschüsse 414
 Kurzwaffen(geschosse) 3, 41, 79, 124, 147
 Endballistik Mauerwerk 324
 Gasgeschwindigkeit Mündung 145

L

Ladedichte 70, 74, 105
 Laderaum 76, 78, 108, 120
 Lagewinkel 189, 211
 LAGRANGE J. L. 53, 89ff
 Lagrange'sches Ballistik-Problem 89
 Langbogen 68
 Langwaffen 3, 145, 196, 318
 Anzündhütchen 65
 Druckkurven 79
 Endballistik Mauerwerk 324
 Gasgeschwindigkeit Mündung 145
 Lavaldruck 43, 101, 110
 Lavaldüse 47, 49, 108, 114, 119
 Lavalgeschwindigkeit 43
 Lebhaftigkeit 75, 76
 Lebhaftigkeit, dynamische 106
 Leichtgaskanone 120
 Leistenkräfte 86
 Leuchtpurgeschosse 297
 Lichterscheinungen, an der Mündung 139
 LOVA-Pulver 63
 Luftdichte 154, 155, 157, 174, 181, 188,
 214, 254, 260, 396
 Luftdruck 71, 155, 157, 401
 Luftdruckwaffen 69
 Luftfeuchtigkeit 155
 Luftgewehr 69
 Luftwiderstand 116, 152, 167ff, 229
 Luftwiderstandsbeiwert 154, 183, 224, 230,
 235, 394, 400
 bei Splittern 224
 Bestimmung des -es 260, 299
 eines Prellschusses 385

M

Mach'scher Kegel 32
 Mach'scher Winkel 32, 46, 265, 413
 Machzahl 31, 36, 46, 115, 168
 Magnuseffekt 37, 173, 232
 Magnuskraft 38, 172, 231
 Magnusmoment 173, 231
 manometrische Bombe 56, 104
 Marschtriebwerk 108
 Masse 7, 9
 Erhaltung der 12

rotierende 11
Maßeinheiten 3
Massenpunktsmodell 174, 189, 198, 367
Massenpunktsmodell, modifiziertes 238
 Ansatz von Fleck und Molitz 241
 BRL-Ansatz 240
 dynamisches 241
 statisches 241
Massenverhältnis 113, 360
 Splitter-Sprengstoff 127
Materialarten 304
Maximalschussweiten 412
Mehrlochpulver 73
Meteorologische Daten 157, 190, 222, 396
Mittelkaliber, Druckkurven 79
mittlere Durchschussgeschwindigkeit 347
Modelle der Innenballistik
 gasdynamisch 89
 Raketentriebwerk 109
 thermodynamisch 83
Modellgeschosse 288
MOLITZ H. 173, 179, 215, 231, 247ff, 251
Mündung 42, 85, 100, 132ff, 139, 141
Mündungsbremse 148
Mündungsdruck 43, 85, 136, 145
Mündungsfeuer 140
Mündungshorizont 189
Mündungsimpuls 137, 145, 333
Mündungsknall 133
Munition, hülsenlose 63
Munk'sche Luftschiffformel 277, 292

N

Nachbeschleunigung 134
Nachwirkungsimpuls 134, 145
Näherungsformeln
 flache Flugbahnen 206
 Gipfelhöhe 209
 Querwindablage 196
NATO-Winkel *siehe* Stellungswinkel
Navier-Stokes-Gleichungen 40
Nc-Pulver 61, 66
neutrales Pulver 72
NEWTON I. 15, 152, 154, 177
Newton'schen Stoßhypothese 354, 357
Newton'sche Strömungstheorie 269
Newtongeschoss 288
Newton'sche Geschossspitze 281, 286, 289
Ngl-Pulver 62
Niederdruckraum 120
Nigu-Pulver 62
Nitriersäure 60

Nitrocellulose 59ff, 62, 63
Nitroglyzerin 59, 61, 62
Nitroglyzerin-Pulver 62
Nitroguanidin 62
Normalatmosphären 157
Normalgeschoss 395
 Gâvres (G1) 181
 Krupp 180
Normalkraft 171
Nutation 23, 170, 380, 383, 399
 bei Splintern 223
 nach Drehmomentenstoß 380
Nutation, Drehfrequenz der 381
Nutationswinkel 381, 382

O

Oberflächenbehandlung 75
Odermattformel 317
offensive Pulver *siehe* Pulver, degressive
Ogivengeschoss 288, 293
Oktogen 63
optimale Geschosse
 bezüglich Luftwiderstand 279
 bezüglich Stabilität 291
optimales Geschossheck 283, 287
Oxidatoren 63

P

Pendeldämpfungsbeiwert 278
Pendeldämpfungskraft 172, 230
Pendeldämpfungsmoment 172, 231
Pendelmagnuskraft 173, 232
Pendelmagnusmoment 173, 232
Penetrator 310
 -ende 312
 -spitze 312
Personenschutz 332
Pfeilgeschoss 124, 310ff
Pfeilstabilisierung 243
Pi-Theorem 314
Piton-Bressant'sche Formel 144, 210, 221
Plattenstapel 313
Porosität 94
Potenzialfunktion der
 Strömungsgeschwindigkeit 264
Potenzialgleichung 276
Potenzialströmung 37
Potenzialwirbel 37
Prantl-Meyer-Expansion 115
Präzession 24, 170, 245, 249, 381, 382, 384, 399
Präzessionswinkel 238, 253, 256, 384, 398

Prellobjekte
 halbharte 364
 harte 364
 weiche 365
 Prellschuss 351, 353, 360, 362ff, 367
 Kugeln an Wasser 389
 stabiler Flug 382
 Theorie von JAUHARI 388
 Theorie von SELLIER 388
 Prellschusstheorie 367
 Prinzip von D'ALEMBERT 13, 35, 39, 77
 Progressivdrall 87
 Pulver 54, 63, 83, 89, 100, 105, 139
 degressive 72
 dreibasige 61
 einbasige 61
 Mehrloch- 75
 mit Lösungsmittel 60
 neutrale 72
 ohne Lösungsmittel 60
 physikalische Daten 64
 progressive 72
 zweibasige 61
 Pulverformen 73
 Pulvergase 107
 Dichte der - 88
 Geschwindigkeit der - 88
 Isentropenkoeffizient 48, 136
 Kovolumen der - 76, 85, 102
 nachströmende 144
 voreilend 133
 Pulverkraft *siehe* spezifische Energie
 pyrotechnischer Satz 54

Q

Quaternionen 234
 Queranströmung 172
 Querschläger 87, 351
 Querschnittsbelastung 52, 121, 225, 303, 400
 bei Splitter 222
 eines Prellschusses 386
 Querwind 195
 Querwindabweichung
 bei Geschossen 196
 bei Raketen 301
 Querwindempfindlichkeit 197
 QuickLoad Software 84

R

Raketengleichung, allgemeine 113
 Raketpulver 109

Randwertproblem 214
 Iterationsformel 220
 Rauchabsauger 134
 Referenzziele 313
 Reibungsbeiwert 270
 Reibungswiderstand 263
 Reibungszahl, beim Stoß 367
 Reichweite, maximale von Spittern 225
 Rekonstruktion
 kurze Schussdistanzen 401
 mittlere und lange Schussdistanzen 401
 Relativgeschwindigkeit bezüglich Luft 191
 Résal'sche Gleichung 77, 83
 Resonanz 415
 Reynoldszahl 41
 kritische 272
 Ricochet *siehe* Prellschuss
 RIEMANN B. 91, 104
 Rohr
 konisches - 122
 offenes - 100
 Rohrboden 87, 92, 94, 96, 120
 Röhrengeschoss 413
 Röhrenpulver 73
 Rohrlänge 85, 97, 99, 136, 395
 Rohrschwingungen 141, 236, 252
 Rollbremsmoment 172, 231, 239
 Rücklaufgeschwindigkeit 146
 Rückpraller 415
 Rückstände, feste 64
 Rückstoßenergie 146
 rückstoßfreie Kanone *siehe* Düsenkanone
 Rückstoßfreiheit 117
 Rückstoßimpuls 134, 144
 Rückstoßkompensation 118
 Rückstoßkraft 146
 Ruhelage 247
 Runge-Kutta-Verfahren 185, 190

S

SAAMI 84
 Sachwertschutz 332
 Salpeter 57
 Sättigungsdampfdruck der Luft 155
 Schallgeschwindigkeit 30ff, 45, 47, 55, 64, 120, 134, 136, 201
 Schallwellen 30
 Scherspannungen 87
 schiefes Einfachziel 313
 Schießanlagen 404
 Schießbaumwolle 59
 Schießbehelfe 189

- Schießelementerechner 217
 - ballistischer Korrekturrechner 217
 - Korrekturrechner 217
 - Schießplätze 404
 - Schlagladungen 66
 - Schlankheitsgrad 314, 394
 - Schreckschusswaffen 100, 137
 - Schub 108, 113, 298
 - Schubdiagramm 116, 299
 - Schubkoeffizient 115
 - Schulterstabilisierung 244
 - Schuss steil aufwärts 211
 - Schussdistanz, forensisch kurz 392
 - Schussentwicklungszeit 68
 - Schussrichtung 216
 - Schusstafel, grafische 215
 - Schusstafeln 189, 214
 - Schusswinkel 189, 211
 - Schutzanordnungen
 - asymmetrische 331
 - geneigte Platten 328
 - geschottete Platten 330
 - Schutzklassen 333
 - Schutzwahrscheinlichkeit 341
 - SCHWARZ B. 56
 - Schwarzpulver 56, 104
 - Herstellung 58
 - Reaktionsprodukte 58
 - Schwefel 57
 - Sébert'scher Faktor 77, 97
 - Seitenabweichung 185
 - Seitenwinkel 227
 - Sekundärsprengstoff 54
 - SIACCI F. 154, 178, 180, 184
 - Siacci-Funktionen 179
 - Sicherheit 412
 - Siebenlochpulver 73
 - Singularitäten 265
 - SINOXYD®-Zündsätze 65
 - SINTOX®-Zündsätze 65
 - Spannkraft 67
 - Spannung 8
 - spezifische Energie 64, 105
 - Spline-Glättung 260
 - Splitter 401
 - impulsbeschleunigt 129
 - sprengstoffbeschleunigt 125
 - Splitterflugbahnen 224
 - Splittergeschwindigkeit 417
 - Sprengkapseln 66
 - Sprengöle 62
 - Stabilisierung, mit Drall 243
 - Stabilität 242
 - ballistische 249
 - gyroskopische 244, 246, 291ff, 398
 - mathematische Definition 247
 - Stabilitätszahl
 - gyroskopische 246, 251, 254, 287, 382
 - Stahlqualität, Einfluss der 321
 - Stanzmodell 307
 - Starttriebwerk 108
 - Startwerte 188
 - Staudruck 35
 - Steckschüsse 399
 - Stellungswinkel 306, 314
 - Stickstoffgehalt 60
 - Stirnbrenner 112
 - Stoß 352
 - elastischer 353
 - inelastischer 353
 - teilelastischer 353
 - Stoßarten 352
 - exzentrisch, gerader Stoß 357
 - exzentrisch, schiefer Stoß 358
 - zentrisch, gerader Stoß 353
 - zentrisch, schiefer Stoß 355
 - Stoßfront 46
 - Stoßnormale 352
 - bei verschiedenen Geschossformen 377
 - Stoßwelle 46
 - am Geschossheck 134
 - der Luftsäule 133
 - Stoßzahl 354
 - nach SELLIER 388
 - Streifenpulver 73
 - Strömung 39
 - instationär 39
 - reibungsfrei 33
 - stationär 33
 - subsonisch 31
 - supersonisch 31
 - transsonisch 31
 - turbulente 44
 - Strömungsgeschwindigkeit
 - an der Mündung 133
 - Strömungswiderstand 35
- ## T
- Tangentialkraft 171
 - TARTAGLIA N. 151
 - Temperatur 25
 - Temperaturgradient 156
 - Tetrazen 65
 - Thermoplaste 63
 - Topographie 396

Trägermasse 68
 Tragflügel 38
 Trägheitsmoment 11, 22, 223, 357, 383
 axiales - 87, 122, 233, 287, 292
 radiales - 233, 287, 292
 Trägheitstensor 22, 232
 Treibkäfig 132, 150
 Treibkäfiggeschoss 123
 Treibmittel 54, *siehe* auch Pulver
 Treibspiegel 124, 132, 150, 414
 Treibspiegelgeschoss 123, 414

U

Überschallgeschwindigkeit 47, 49, 65, 224, 264, 297
 Umschlagpunkt, laminar-turbulent 270
 Unterkalibergeschoss 121
 Unterschallgeschwindigkeit 47, 49, 201, 226, 264, 297
 Unterschallströmung 276

V

v_{50} *siehe* mittlere
 Durchschussgeschwindigkeit
 van-der-Waals-Gleichung 27, 105
 Venturidüse 120
 Verbrennung 55, 64
 Verbrennungsgeschwindigkeit 54
 Verbrennungswärme 64, 65, 82
 Verdichtungslinien 32
 Verdichtungsstoß 46, 50
 schräger 46
 senkrechter 46
 Verdrängungsmodell 308
 Verpuffungstemperatur 64
 Verstärkerladung 66
 Vertikalwinde 194
 Verzögerung 5
 VIEILLE P. 70
 Gesetz von 70, 109
 Viskosität 30
 dynamische 30
 kinematische 30
 Voltterrasche Integralgleichung 266
 Volumenenergiedichte 90
 Vor-Mündungsknall 133

W

Wärmeenergie 28
 Wärmekapazität 26

Wärmekraftmaschinen 28, 82
 Wärmezustand 25
 Weberzahl 409
 Wechselwirkungen 318
 Wellenwiderstand 264
 Newtonsche Theorie 269
 Widerstand 170
 Widerstandsbeiwert 35, 167
 der Spitzenabplattung 270
 Widerstandsebene 230
 Widerstandsgesetz 179
 Kommission von Gávres 181
 Krupp 180
 Mayevski 182
 Siacci 180
 Widerstandsstabilisierung 243
 Wiederstabilisierung 386, 387
 Windempfindlichkeit 189, 197
 Windgeschwindigkeit 160
 Windkanalmessungen 262
 Windströmung 160
 Winkelbeschleunigung 6
 Winkelgeschwindigkeit 5, 10, 16, 21, 86, 161, 164, 172, 206, 246, 254
 Änderung der - 231, 238, 379, 383, 399
 der Erde 161, 163
 der Nutation 381
 der Präzession 24
 Wirbel 34, 36
 Wirbelströmung 36
 Wirkungsgrad 82
 Wirkungspotenzial, hinter dem Schutz 349
 Wurzel-Rho-Gesetz 312

Z

Zähigkeit 30, 41
 scheinbare 44
 Zentrifugalbeschleunigung 19, 161
 Zentripetalbeschleunigung 6
 Zerstörungspotenzial 303
 lokales 304
 Zielebene 305
 Ziellinie 189
 Zirkulation 36
 Züge und Felder 77
 Zugfestigkeit 314, 317, 320
 Zündkartusche 66
 Zündmittel 65
 Zündschraube 66
 Zustandsgleichung, der Gase 27
 Zylinderpulver 73



Willkommen zu den Springer Alerts

Jetzt
anmelden!

- Unser Neuerscheinungs-Service für Sie:
aktuell *** kostenlos *** passgenau *** flexibel

Springer veröffentlicht mehr als 5.500 wissenschaftliche Bücher jährlich in gedruckter Form. Mehr als 2.200 englischsprachige Zeitschriften und mehr als 120.000 eBooks und Referenzwerke sind auf unserer Online Plattform SpringerLink verfügbar. Seit seiner Gründung 1842 arbeitet Springer weltweit mit den hervorragendsten und anerkanntesten Wissenschaftlern zusammen, eine Partnerschaft, die auf Offenheit und gegenseitigem Vertrauen beruht.

Die SpringerAlerts sind der beste Weg, um über Neuentwicklungen im eigenen Fachgebiet auf dem Laufenden zu sein. Sie sind der/die Erste, der/die über neu erschienene Bücher informiert ist oder das Inhaltsverzeichnis des neuesten Zeitschriftenheftes erhält. Unser Service ist kostenlos, schnell und vor allem flexibel. Passen Sie die SpringerAlerts genau an Ihre Interessen und Ihren Bedarf an, um nur diejenigen Information zu erhalten, die Sie wirklich benötigen.

Mehr Infos unter: springer.com/alert