

LEHRBUCH

Helmut Laux
Robert M. Gillenkirch
Heike Y. Schenk-Mathes

Entscheidungstheorie

10. Auflage

EXTRAS ONLINE



Springer Gabler

Entscheidungstheorie

Helmut Laux · Robert M. Gillenkirch
Heike Y. Schenk-Mathes

Entscheidungstheorie

10., aktualisierte und erweiterte Auflage

Helmut Laux
Bad Homburg, Deutschland

Heike Y. Schenk-Mathes
TU Clausthal
Clausthal-Zellerfeld, Deutschland

Robert M. Gillenkirch
Universität Osnabrück
Osnabrück, Deutschland

Ergänzendes Material zu diesem Buch finden Sie auf <http://extras.springer.com>.

ISBN 978-3-662-57817-9 ISBN 978-3-662-57818-6 (eBook)
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-57818-6>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Gabler

© Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature 1982, 1991, 1995, 1998, 2003, 2005, 2007, 2012, 2014, 2018

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Springer Gabler ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorwort zur zehnten Auflage

Da sich die Grundkonzeption der *Entscheidungstheorie* bewährt hat, wurde sie auch in der zehnten Auflage beibehalten. Die im Vorwort zur achten Auflage beschriebene Gliederung in sechs Teile und 18 Kapitel sowie die jeweiligen Problemstellungen und Untersuchungsgegenstände wurden beibehalten. Entsprechend gelten die Empfehlungen im Vorwort der achten Auflage zur Verwendung in Lehrveranstaltungen auch für die vorliegende Auflage.

Einige Kapitel wurden grundlegend überarbeitet. In Kap. 17 haben wir dabei die Ausführungen stärker auf das grundlegende Problem der Fundierung von Unternehmenszielen bezogen. In allen Kapiteln haben wir zum Teil die Ausführungen gestrafft und das Feedback unserer Studierenden und anderer Leser genutzt, um die Verständlichkeit der Darstellungen zu verbessern.

Die Entscheidungstheorie hat sich auch als begleitendes Lehrbuch für Lehrveranstaltungen bewährt. Mit dieser zehnten Auflage erweitern wir es um Übungen, die sich am Ende jedes einzelnen Kapitels finden. Für Leser, die den Stoff eigenständig anhand der Übungen vertiefen wollen, finden sich am jeweiligen Kapitelende auch Lösungshinweise. Für Dozenten haben wir zudem ausführliche Lösungshinweise erarbeitet, die der Springer-Verlag in seinem Autorenportal für registrierte Nutzer bereitstellt.

Unser herzlicher Dank gilt Frau B.Sc. Judith Plaggenborg und Herrn B.Sc. Markus Wellingshoff, die uns bei der Zusammenstellung der Übungsaufgaben und der Erarbeitung der Lösungshinweise tatkräftig unterstützt haben. Gerade bei Übungsaufgaben und Lösungshinweisen besteht stets die große Gefahr, dass sich Fehler einschleichen. Wir Autoren sind jedem Leser sehr dankbar, der uns (am liebsten per E-Mail) auf solche Fehler hinweist.

Frankfurt am Main, im März 2018

Helmut Laux
Robert M. Gillenkirch
Heike Y. Schenk-Mathes

Vorwort zur neunten Auflage

Das Buch wurde nochmals in allen Kapiteln gründlich überarbeitet. Da sich seine Grundkonzeption bewährt hat, wurde sie beibehalten; die im Vorwort zur achten Auflage beschriebene Gliederung in 6 Teile und 18 Kapitel sowie die Problemstellungen und Untersuchungsgegenstände der einzelnen Kapitel sind nicht verändert worden. Entsprechend gelten die Empfehlungen im Vorwort der achten Auflage zur Verwendung des Buches in Lehrveranstaltungen auch für die neunte Auflage.

In der Entscheidungstheorie und in der Betriebswirtschaftslehre werden für unterschiedliche Entscheidungssituationen allgemeine Modelle entwickelt, mit denen die betreffenden Entscheidungsprobleme strukturiert und gelöst werden können, und es werden Theorien mit empirischem Gehalt erforscht, mit denen die Folgen bzw. die Ergebnisse von Entscheidungen besser prognostiziert werden können.

Entscheidungsmodelle können immer nur in stark vereinfachter Form explizit angewendet werden. Da sie jedoch zeigen, welche Zusammenhänge für die Lösung des jeweiligen Entscheidungsproblems relevant sind, geben sie zugleich Anregungen für Vereinfachungen; erst wenn man ein problemadäquates, theoretisch fundiertes Lösungskonzept kennt, kann man beurteilen, worin sinnvolle Vereinfachungen überhaupt bestehen, wie sie sich auf die Qualität der Entscheidungen auswirken können und welche Informationen für „gute“ Entscheidungen besondere Bedeutung haben.

Entscheidungsmodelle können aber auch dann Orientierung für die Lösung von Entscheidungsproblemen geben, wenn sie nicht explizit angewendet werden. Auf ihrer Grundlage kann für unterschiedliche Entscheidungssituationen untersucht werden, welche Eigenschaften jeweils die optimale Problemlösung aufweist, wie diese von den maßgeblichen Einflussfaktoren abhängt und wie sich Vereinfachungen auswirken können. Solchen Untersuchungen wird in der neuen Auflage mehr Raum als bisher gewidmet.

Aus Gründen der Vereinfachung und der Anschaulichkeit berücksichtigen Entscheidungsmodelle immer nur Ausschnitte aus komplexeren Gesamtzusammenhängen, indem sie explizit nur jene Aspekte berücksichtigen, die für das jeweilige Entscheidungsproblem charakteristisch bzw. von besonderer Bedeutung sind. Stets gibt es entscheidungsrelevante Sachverhalte, die nicht direkt in das Modell einbezogen werden,

sich gleichwohl auf die Bewertung der berücksichtigten Handlungsalternativen bzw. die optimale Problemlösung auswirken. Die Entscheidungsrelevanz eines „modellexogenen“ Bereichs kann insbesondere darin bestehen, dass dieser die Bewertung der im Modell erfassten (der zu bewertenden) Handlungsalternativen beeinflusst. Auch das Problem der impliziten Erfassung eines modellexogenen Bereichs in einer solchen Bewertung wird ausführlicher als bisher behandelt.

Schließlich werden die Anwendungsbereiche dargestellter Entscheidungsmodelle eingehender erläutert, Ergebnisse von Modellanalysen verallgemeinert und/oder eingehender interpretiert. Zusätzliche Querbezüge und Wiederholungen sollen das Verständnis der Zusammenhänge zwischen den Problemstellungen und Lösungsansätzen verschiedener Kapitel sowie die „separate“ Lektüre einzelner Kapitel erleichtern.

Frankfurt am Main, im Oktober 2014

Helmut Laux
Robert M. Gillenkirch
Heike Y. Schenk-Mathes

Vorwort zur achten Auflage

Die *Entscheidungstheorie* wird nunmehr seit über dreißig Jahren und in sieben Auflagen in vielen Lehrveranstaltungen wie auch im Selbststudium erfolgreich eingesetzt. Mit dieser grundlegend überarbeiteten und erweiterten achten Auflage wächst der Autorenkreis: Heike Y. Schenk-Mathes, Professorin für Betriebswirtschaftslehre und Betriebliche Umweltökonomie an der Technischen Universität Clausthal, und Robert M. Gillenkirch, Professor für Betriebswirtschaftslehre mit dem Schwerpunkt Unternehmensführung und Unternehmensrechnung an der Universität Osnabrück, haben bereits als wissenschaftliche Mitarbeiter am ehemaligen Frankfurter Lehrstuhl für Organisation und Management von Helmut Laux an der ersten grundlegenden Überarbeitung des Buches mitgewirkt. Inzwischen haben sie als Hochschullehrer das Buch in ihren eigenen Lehrveranstaltungen eingesetzt und dabei Erfahrungen gewonnen, die sie in die Neuauflage einbringen konnten. Mit dieser achten Auflage tragen sie Verantwortung als Mitautoren und stellen sicher, dass die Erfolgsgeschichte der Entscheidungstheorie mit dieser und weiteren Auflagen auch in den folgenden Jahrzehnten fortgeschrieben werden kann.

Wir haben das Buch in allen Kapiteln umfassend überarbeitet. Besonderen Wert haben wir auf eine anschauliche Einführung in die Problemstellungen, die Darstellung der praktischen Relevanz der behandelten Probleme und die Verbindungen zwischen diesen und den Lösungskonzepten gelegt. Zudem haben wir viele der Darstellungen um (zusätzliche) Beispiele ergänzt. Nach wie vor steht die normative Entscheidungstheorie im Vordergrund des Buches, die zeigt, wie Entscheidungen „rational“ getroffen werden können. Gleichwohl haben wir in die achte Auflage mit Kap. 6 ein umfangreiches Kapitel zur deskriptiven Entscheidungstheorie aufgenommen, die beschreibt und erklärt, wie Entscheidungen real getroffen werden. Drei weitere Kap. 13, 14 und 15, sind ebenfalls neu. Sie schaffen Grundlagen für eine entscheidungstheoretische Fundierung von Unternehmenszielen. Die wahrscheinlichkeitstheoretischen und statistischen Grundlagen des bisherigen Kap. 4 haben wir dagegen gekürzt und in die anderen Kapitel an jeweils passende Stellen verlagert.

Das Lehrbuch hat in der vorliegenden Fassung sechs Teile: Der erste Teil (Kap. 1 bis 6) schafft entscheidungstheoretische Grundlagen, die für jeden Wirtschaftswissenschaftler und Praktiker hilfreich sind. Im zweiten Teil (Kap. 7 bis 10) werden Entscheidungen bei Unsicherheit aus der Sicht eines einzelnen Entscheiders vertiefend betrachtet. Der dritte Teil (Kap. 11 und 12) ist der Teilung von Risiken auf mehrere Entscheider gewidmet und leitet in den vierten Teil (Kap. 13 bis 15) über, der die Fundierung von Unternehmenszielen behandelt. Im fünften Teil (Kap. 16 und 17) werden Gruppenentscheidungen betrachtet. Der sechste Teil (Kap. 18) schließt das Buch mit Überlegungen zur Vereinfachung von Entscheidungsproblemen und zu Grenzen rationaler Entscheidung.

Das Buch eignet sich in der vorliegenden Fassung als Grundlage für einführende und vertiefende Lehrveranstaltungen zur Entscheidungstheorie und als ergänzende Literatur für Lehrveranstaltungen, die die Grundlagen der Entscheidungstheorie anwenden, wie etwa in der Finanzwirtschaft, im Controlling oder im Marketing.

In einer einführenden Vorlesung zur Entscheidungstheorie sollten unserer Meinung nach die Inhalte der Kap. 1 bis 6 und 18 nicht fehlen. Darüber hinaus können je nach Umfang der Veranstaltung und nach der Tiefe der Behandlung der Kap. 1 bis 6 ausgewählte Kapitel des zweiten Teils behandelt werden. Hier empfehlen wir Kap. 7 sowie je nach Schwerpunktlegung weitere Kapitel aus 8 bis 10. Der erste Teil des Buches macht Studentinnen und Studenten mit den Grundlagen der Darstellung und Analyse von Entscheidungsproblemen bei Sicherheit und Unsicherheit aus normativer Sicht vertraut. Das neue Kap. 6 zur deskriptiven Entscheidungstheorie untersucht zudem, inwieweit tatsächliches Entscheidungsverhalten von Menschen in Situationen der Unsicherheit von den Postulaten der normativen Entscheidungstheorie abweicht, und stellt darauf aufbauend wichtige Theorien, die zur Beschreibung menschlichen Entscheidungsverhaltens in wirtschaftlichen Entscheidungssituationen bei Unsicherheit entwickelt wurden, dar. Am Beispiel der betreffenden deskriptiven Ansätze wird auch verdeutlicht, wie in der deskriptiven Entscheidungsforschung methodisch vorgegangen wird, welche Ergebnisse erzielt wurden und wie diese einzuschätzen sind. Erkenntnisse der deskriptiven Entscheidungstheorie sind auch für Personen relevant, die sich gemäß der normativen Entscheidungstheorie „rational“ verhalten (wollen), da sie diesen Entscheidern Hinweise geben, wie sich andere Personen, mit denen sie kooperieren, verhalten.

Eine Vertiefungsveranstaltung zur Entscheidungstheorie, etwa im Master-Studium, wird in der Regel auf den Inhalten der Kap. 1 bis 6 aufbauen können. Soll die Vertiefung den konkreten Einsatz des entscheidungstheoretischen Instrumentariums in den Wirtschaftswissenschaften und insbesondere in der Betriebswirtschaftslehre behandeln, empfehlen sich dafür vor allem die Kap. 7 bis 11 sowie 16 und 17.

Ein neuer Schwerpunkt dieses Buches liegt auf der Fundierung von Unternehmenszielen. Wird dieser Schwerpunkt in einer Lehrveranstaltung gelegt, empfehlen sich hierfür die Kap. 8, 9 und 11 bis 15. Bereits in der siebten Auflage wurde das Buch um die Kap. 11 und 12 erweitert, die sich mit der Aufteilung von Risiken auf mehrere Entscheider befassen. Die dort angestellten Überlegungen werden in der vorliegenden

Auflage um kapitalmarktorientierte Überlegungen in den Kap. 13, 14 und 15 ergänzt, um so die Frage der Fundierung finanzwirtschaftlicher Unternehmensziele zu klären – eine Frage, die große Bedeutung für die betriebswirtschaftliche Entscheidungstheorie hat. Dabei gehen wir davon aus, dass die Gesellschafter eines Unternehmens rational im Sinne der normativen Entscheidungstheorie handeln, und wählen einen methodischen Ansatz, der es ermöglicht, einen anschaulichen Vergleich der Eigenschaften optimaler finanzwirtschaftlicher Entscheidungen für eine Gruppe von Gesellschaftern mit denen für einen individuellen Entscheider, der das Risiko allein trägt, vorzunehmen. Unsere Darstellungen der Kap. 11 bis 15 erlauben es dem Leser, das in Theorie und Praxis populäre Ziel der Maximierung des Marktwertes eines Unternehmens aus entscheidungstheoretischer Sicht zu beurteilen. Insbesondere zeigen wir, unter welchen Bedingungen dieses Ziel im Einklang mit dem Ziel der subjektiven Nutzenmaximierung eines jeden Gesellschafters oder eines Alleineigentümers eines Unternehmens (eines individuellen Entscheiders) steht, welche Entscheidungsprobleme sich jeweils ergeben, wenn dies nicht der Fall ist, und wie diese im Prinzip gelöst werden können. Hierbei hat der Kapitalmarkt eine zentrale Bedeutung. Die Darstellungen schaffen dementsprechend kapitalmarkttheoretische Grundlagen (Kap. 13) und fußen auch nachfolgend (Kap. 14 und 15) auf der Kapitalmarkttheorie.

Die Darstellungen dieses Buches sind für alle Bereiche der Betriebswirtschaftslehre relevant, in denen die Optimalität von Entscheidungen theoretisch analysiert wird. Sie machen auch deutlich, warum es praktisch kaum möglich ist, systematischen Verstößen gegen die Erwartungsnutzentheorie bei der Fundierung von Unternehmenszielen Rechnung zu tragen.

Groß ist wiederum der Kreis jener, ohne deren Unterstützung und Rat das Buch in seiner jetzigen Fassung nicht zustande gekommen wäre. Zunächst möchten wir Rudolf Vetschera für die kritische Durchsicht von Teilen des Manuskripts danken. Für die Lektüre des Manuskripts und die tatkräftige redaktionelle Unterstützung danken wir unseren Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern sowie unseren studentischen Hilfskräften Nazanin Kazemi-Foroos, Magdalena Grobmann, Heike Kreienbaum, Jessica Lindemann, Anna Middendorf und Katrin Tabbert.

Frankfurt am Main, im Mai 2011

Helmut Laux
Robert M. Gillenkirch
Heike Y. Schenk-Mathes

Vorwort zur siebten Auflage

Die siebte Auflage wurde gegenüber der erst 2005 erschienenen sechsten Auflage um zwei Kapitel erweitert, die sich mit pareto-effizienter und anreizkompatibler Risiko-
teilung befassen. Sie ergänzen die beiden Kapitel über Probleme der Entscheidung in
Gruppen und liefern darüber hinaus eine theoretische Grundlage für die Analyse der
Risikoallokation im Kapitalmarkt und die Fundierung von Zielfunktionen für den Fall,
dass die Ergebnisse der Alternativen zwischen mehreren (vielen) Gruppenmitgliedern
(etwa den Gesellschaftern eines Unternehmens) aufgeteilt werden.

Frankfurt am Main, im Februar 2007

Helmut Laux

Vorwort zur sechsten Auflage

Die sechste Auflage unterscheidet sich von der fünften, die 2003 erschienen ist, durch geringfügige Korrekturen und eine Aktualisierung der Literaturangaben.

Frankfurt am Main, im Oktober 2004

Helmut Laux

Vorwort zur fünften Auflage

Da die 1998 erschienene vierte Auflage vollständig überarbeitet worden ist, beschränken sich Änderungen bei der vorliegenden im wesentlichen auf die Aktualisierung der Literatur.

Frau Nicole Wettemann und Herrn Burkhard Eisele danke ich herzlich für die sorgfältige Erstellung des druckfertigen Manuskripts.

Frankfurt am Main, im Juni 2002

Helmut Laux

Vorwort zur vierten Auflage

Die vierte Auflage wurde vollständig überarbeitet. Dabei wurden umfangreiche Verbesserungen und Erweiterungen vor allem in den Kap. 3, 6, 7 und 10 vorgenommen. Neu in dieser Auflage sind die Kap. 13 und 14, die sich mit Entscheidungsprozessen in Gruppen befassen. Auch in der vierten Auflage stehen jene Teile der Entscheidungstheorie im Vordergrund, die für das Verständnis ökonomischer Erklärungs- bzw. Entscheidungsmodelle besondere Bedeutung haben.

Die vorliegende „Entscheidungstheorie“ wurde mit dem Buch „Risikoteilung, Anreiz und Kapitalmarkt“ (LAUX 1998a) abgestimmt (das ebenfalls im Springer-Verlag erschienen ist). In dieser Arbeit wird untersucht, unter welchen Bedingungen Anreizkompatibilität für den Fall besteht, dass sich zwei oder mehr (möglicherweise sehr viele) Personen die Erfolge (bzw. die finanziellen Überschüsse) der riskanten Maßnahmen und entsprechend auch das Erfolgsrisiko teilen.

Bei gegebener Anreizkompatibilität führt die Maximierung des Erwartungsnutzens für irgend einen der Beteiligten (zum Beispiel für einen Gesellschafter eines Unternehmens) dazu, dass simultan auch der Erwartungsnutzen jedes anderen (Gesellschafter) maximiert wird. Die Theorie der Individualentscheidung hat dann unmittelbare Bedeutung auch für die Lösung von Entscheidungsproblemen, bei denen mehrere Personen an den Konsequenzen der Entscheidungen partizipieren. Es wird untersucht, inwieweit Kriterien der Marktwertmaximierung (zum Beispiel die Maximierung des Marktwertes der Aktien des investierenden Unternehmens) im Einklang mit subjektiver Nutzenmaximierung stehen. Außerdem wird gezeigt, warum Zielkonflikte entstehen können und wie dann wenigstens für eine „homogene“ Teilmenge aller Beteiligten optimal entschieden werden kann.

Burkhard Eisele, Robert Gillenkirch, Heike Schenk-Mathes und Louis Velthuis verdanke ich viele wertvolle Verbesserungsvorschläge.

Sylvia Brückner, Carsten Kraft, Matthias Mann, Marcus Oehrich, Matthias Schabel und Jens Wiederstein haben das druckfertige Manuskript erstellt. Auch dafür danke ich herzlich.

Frankfurt am Main, im Oktober 1997

Helmut Laux

Vorwort zur dritten Auflage

Mehrfacher Einsatzes des Buches in Lehrveranstaltungen zur Entscheidungstheorie haben mich in der Absicht bestärkt, auch bei der dritten Auflage die Grundkonzeption des Buches nicht zu verändern. Bewährt hat sich vor allem die enge Verbindung zwischen den Darstellungen der theoretischen Grundlagen und den Anwendungsbeispielen aus verschiedenen Bereichen der Betriebswirtschaftslehre. Die Ergänzungen beschränken sich auf eine Aktualisierung der Literaturangaben.

Frankfurt am Main, im Mai 1995

Helmut Laux

Vorwort zur zweiten Auflage

Im Vordergrund des Buches stehen nach wie vor jene Konzepte der (präskriptiven) Entscheidungstheorie, die Eingang in die betriebswirtschaftliche Theorie gefunden haben. Die zweite Auflage unterscheidet sich von der ersten nur durch geringfügige Änderungen und Ergänzungen.

Frankfurt am Main, im März 1991

Helmut Laux

Vorwort zur ersten Auflage

Entscheidungstheoretische Untersuchungen werden in der Absicht vorgenommen, beschreibende (deskriptive) oder vorschreibende (präskriptive) Aussagen zu gewinnen. Entsprechend wird, je nach dem im Vordergrund stehenden Erkenntnisziel, zwischen deskriptiver und präskriptiver (oder normativer) Entscheidungstheorie unterschieden.

Die deskriptive Entscheidungstheorie will beschreiben, wie in der Realität Entscheidungen getroffen werden und erklären, warum sie gerade in dieser und nicht in anderer Weise zustande kommen. Die präskriptive (oder normative) Entscheidungstheorie will nicht die realen Entscheidungsprozesse beschreiben und erklären, sondern zeigen, wie Entscheidungen „rational“ getroffen werden können. Sie will Ratschläge für die Lösung von Entscheidungsproblemen erteilen, also Antwort geben auf die Frage, was ein Entscheider in unterschiedlichen Entscheidungssituationen tun soll.

Die Arbeit gibt in zwei Bänden einen Überblick über Probleme und Lösungsansätze der präskriptiven Entscheidungstheorie. Der vorliegende erste Band gibt eine Einführung in die (präskriptive) Entscheidungstheorie und behandelt dabei ausschließlich die Problematik der Individualentscheidung. Im Vordergrund stehen diejenigen Problemkreise der Entscheidungstheorie, die für die Konstruktion und Beurteilung von Entscheidungsmodellen (insbesondere im Bereich der Betriebswirtschaftslehre) von grundlegender Bedeutung sind. Im zweiten Band wird die Problemstellung erweitert und vertiefend diskutiert. Besondere Beachtung erfährt in diesem Zusammenhang die Entscheidungsfindung in Gruppen und das Problem der Delegation von Entscheidungsbefugnissen.

Groß ist der Kreis jener, ohne deren Unterstützung und Rat das Buch in seiner jetzigen Fassung nicht zustande gekommen wäre. Zunächst möchte ich den Herren Wiprecht Brodersen, Günter Franke, Rudolf Gümbel und Bernd Rudolph für ihre wertvolle Kritik danken. Auch meine Mitarbeiter am Lehrstuhl für Organisationstheorie haben durch

vielfältige Verbesserungsvorschläge erheblich zum Entstehen des Buches beigetragen. Vor allem danke ich den Herren Michael Horst, Hans-Paul Kaus, Felix Liermann, Michael Spielberger und Richard Winter. Fräulein Margarete Redler und Herr Wolfgang Weil haben die Zeichnungen angefertigt; Frau Luise Wagner hat mit großer Geduld die zahlreichen Fassungen des Manuskripts geschrieben. Auch hierfür danke ich herzlich.

Frankfurt am Main, im Januar 1982

Helmut Laux

Inhaltsverzeichnis

Teil I Grundlagen

1 Probleme und Lösungskonzepte der Entscheidungstheorie:	
ein Überblick	3
1.1 Zum Gegenstand der Entscheidungstheorie	3
1.2 Ziele, Entscheidungsfelder und Alternativen	5
1.2.1 Ziele als Beurteilungsgrundlage von Handlungsalternativen	5
1.2.2 Alternativen und Entscheidungsfelder	5
1.2.3 Abhängigkeiten zwischen Zielen und erwogenen Alternativen	7
1.2.4 Abhängigkeiten zwischen Zielgrößen	7
1.2.5 Abhängigkeiten zwischen Entscheidungsbereichen und Koordinationsbedarf	8
1.3 Entscheidung als Prozess	12
1.3.1 Überblick	12
1.3.2 Problemformulierung	13
1.3.3 Präzisierung des Zielsystems	13
1.3.4 Erforschung von Alternativen	14
1.3.5 Auswahl einer Alternative	15
1.3.6 Entscheidungen in der Realisationsphase	15
1.3.7 Problematik von Phasenschemata	16
1.4 Entscheidungstheorie als Orientierungshilfe für die Lösung von Entscheidungsproblemen	16
1.4.1 Überblick	16
1.4.2 Deskriptive Entscheidungstheorie	17
1.4.3 Präskriptive Entscheidungstheorie	18
1.5 Zum Aufbau der Arbeit	21
1.6 Zusammenfassung	28
1.7 Übungen	29
Literatur	30

2	Struktur und Bedeutung von Entscheidungsmodellen	31
2.1	Problemstellung und Aufbau	31
2.2	Die Basiselemente eines Entscheidungsmodells	32
2.2.1	Überblick	32
2.2.2	Entscheidungsfeld	32
2.2.3	Entscheidungsregel	36
2.2.4	Entscheidungskriterium, Entscheidungsprinzip und Entscheidungsregel	39
2.3	Grundmodell der Entscheidungstheorie	40
2.3.1	Grundstruktur des Modells	40
2.3.2	Bedeutung des Grundmodells der Entscheidungstheorie	42
2.4	Zur Problematik der Abbildung von Zielen in Entscheidungsmodellen	43
2.4.1	Ordnungsaxiom und Transitivitätsaxiom	43
2.4.2	Zielsysteme	46
2.4.3	Unternehmensziele	48
2.4.4	Kompatibilität und Operationalität von Zielen und Zielvorgaben	51
2.5	Systematik von Entscheidungsmodellen	53
2.5.1	Grafische und mathematische Entscheidungsmodelle	53
2.5.2	Weitere Systematisierungen	54
2.6	Allgemeine Bedeutung von Entscheidungsmodellen	55
2.6.1	Entscheidung und Entscheidungsmodell	55
2.6.2	Subjektivität von Entscheidungsmodellen	56
2.7	Zusammenfassung	58
2.8	Übungen	59
2.9	Lösungshinweise	60
	Literatur	61
3	Entscheidungskriterien und Entscheidungsmodelle bei Sicherheit	63
3.1	Problemstellung und Aufbau	63
3.2	Grundprobleme der Entscheidung bei mehreren Zielgrößen	64
3.2.1	Zielgrößenmatrix	64
3.2.2	Vergleich von Ergebnissen und Ordnungsaxiom	66
3.2.3	Entscheidung auf der Grundlage einer Zielgrößenmatrix	67
3.3	Grafische Entscheidungsmodelle mit zwei Zielgrößen	69
3.3.1	Indifferenzkurven	69
3.3.2	Ermittlung einer optimalen Alternative	73
3.3.3	Entscheidung ohne Indifferenzkurven	74
3.3.4	Zur didaktischen Bedeutung des Indifferenzkurven-Konzeptes	74

3.4	Entscheidung bei mehr als zwei Zielgrößen nach dem Transformationskonzept.	75
3.4.1	Darstellung.	75
3.4.2	Illustration	77
3.4.3	Beurteilung.	79
3.4.4	Vergleich von Zahlungs- und Konsumströmen	80
3.5	Zielfunktionen für mathematische Entscheidungsmodelle mit mehreren Zielgrößen	81
3.5.1	Nutzenmaximierung.	81
3.5.2	Grundformen der vereinfachenden Berücksichtigung von Zielen.	83
3.6	Zusammenfassung	87
3.7	Übungen.	88
3.8	Lösungshinweise	90
	Literatur.	91
4	Entscheidung bei Unsicherheit: Grundlagen	93
4.1	Problemstellung und Aufbau	93
4.2	Entscheidung bei Unsicherheit im engeren Sinne	95
4.2.1	Entscheidungssituation und Beispiel	95
4.2.2	Maximin-Regel, Maximax-Regel und Hurwicz-Prinzip	95
4.2.3	Niehans-Savage-Regel	98
4.2.4	Laplace-Regel	99
4.2.5	Zur Bedeutung des Konstrukts der Unsicherheit i. e. S.	100
4.3	Bedeutung und Grundtypen von Wahrscheinlichkeiten.	101
4.3.1	Der klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff.	101
4.3.2	Statistische Wahrscheinlichkeiten	102
4.3.3	Subjektive Wahrscheinlichkeiten	103
4.4	Risikoeinstellungen	105
4.4.1	Inhalt und Bedeutung.	105
4.4.2	Abbildung von Risikoeinstellungen in Präferenzfunktionen.	106
4.5	Dominanzkriterien zur Vorauswahl von Alternativen	107
4.5.1	Inhalt und Bedeutung.	107
4.5.2	Absolute Dominanz und Zustandsdominanz	108
4.5.3	Stochastische Dominanz	109
4.5.4	Grenzen der Vorauswahl durch Dominanzkriterien.	113
4.6	Klassische Entscheidungskriterien.	114
4.6.1	μ -Regel	114
4.6.2	(μ, σ) -Prinzip	117
4.7	Zusammenfassung	122

4.8	Übungen	123
4.9	Lösungshinweise	126
	Literatur	126
5	Rationale Entscheidung bei Risiko: Das Bernoulli-Prinzip	129
5.1	Problemstellung und Aufbau	129
5.2	Begriff und Inhalt des Bernoulli-Prinzips	130
5.2.1	Allgemeine Charakteristik des Bernoulli-Prinzips	130
5.2.2	Eigenschaften der Nutzenfunktion	131
5.3	Bestimmung einer optimalen Alternative	136
5.3.1	Entscheidungsmatrix	136
5.3.2	Ermittlung einer Nutzenfunktion	137
5.3.3	Beispiel	140
5.4	Rationalität des Bernoulli-Prinzips	141
5.4.1	Das Axiomensystem von Luce und Raiffa	141
5.4.2	Ableitung des Bernoulli-Prinzips aus dem Axiomensystem	145
5.4.3	Unabhängigkeitsaxiom	149
5.4.4	Bedeutung der Axiome für die Anwendbarkeit des Bernoulli-Prinzips	150
5.4.5	Bernoulli-Prinzip und Dominanzkriterien	151
5.5	Messung von Risikopräferenzen	152
5.5.1	Arrow-Pratt-Maße für Risikoaversion	152
5.5.2	Spezielle Klassen von Nutzenfunktionen mit konstanter Risikoaversion	154
5.6	Zur Kritik des Bernoulli-Prinzips	155
5.7	Klassische Entscheidungskriterien im Lichte des Bernoulli-Prinzips	157
5.7.1	μ -Regel	157
5.7.2	(μ, σ) -Prinzip	158
5.8	Nutzenfunktionen bei Existenz eines modellexternen Bereichs	165
5.8.1	Relevanz eines modellexternen Bereichs	165
5.8.2	Ermittlung einer Nutzenfunktion für Gewinne bei sicheren Vermögen im modellexternen Bereich	166
5.8.3	Ermittlung einer Nutzenfunktion für Gewinne bei stochastischem Vermögen im modellexternen Bereich	167
5.9	Zusammenfassung	169
5.10	Übungen	170
5.11	Lösungshinweise	174
	Literatur	176

6	Deskriptive Entscheidungstheorie bei Risiko	179
6.1	Problemstellung und Aufbau	179
6.2	Zur Relevanz der deskriptiven Theorie	181
6.3	Experimentelle Ergebnisse zu Individualentscheidungen bei Risiko	182
6.3.1	Vorbemerkungen zur experimentellen Methode	182
6.3.2	Erweiterung der Axiomensysteme um das Invarianzaxiom	183
6.3.3	Verstöße gegen das Unabhängigkeitsaxiom	184
6.3.4	Verstöße gegen das Invarianzaxiom	190
6.3.5	Zusammenfassung	197
6.4	Die Prospect-Theorie von Kahneman und Tversky	198
6.4.1	Grundidee	198
6.4.2	Editing-Phase	199
6.4.3	Bewertungsphase	201
6.4.4	Prospect-Theorie und stochastische Dominanz	209
6.5	Erweiterung der Prospect-Theorie zur Kumulativen Prospect-Theorie	210
6.5.1	Rangplatzabhängige Erwartungsnutzentheorie	210
6.5.2	Kumulative Prospect-Theorie	213
6.5.3	Kumulative Prospect-Theorie und stochastische Dominanz	216
6.6	Prospect-Theorie und Bernoulli-Prinzip: Ein Vergleich	217
6.6.1	Vergleich der Präferenzfunktionen	217
6.6.2	Komplexität der Theorien	219
6.6.3	Vergleichende empirische Befunde	220
6.6.4	Grenzen des Erklärungsgehalts der Prospect-Theorie	222
6.6.5	Verteilte Entscheidungen	227
6.7	Implikationen	230
6.8	Zusammenfassung	232
6.9	Übungen	233
6.10	Lösungshinweise	236
	Literatur	237

Teil II Individualentscheidungen bei Risiko – Vertiefung

7	Bewertung unsicherer Zahlungsüberschüsse	243
7.1	Problemstellung und Aufbau	243
7.2	Sicherheitsäquivalent und Risikoabschlag	245
7.2.1	Definition und Ermittlung	245
7.2.2	Risikoeinstellung und Höhe von Sicherheitsäquivalent und Risikoabschlag	247

7.3	Auswirkungen von Verbundeffekten auf Sicherheitsäquivalent und Risikoabschlag	250
7.3.1	Entscheidungssituation.	250
7.3.2	Bewertungsverbund	252
7.3.3	Risikoverbund	254
7.4	Bewertung aus der Verkäufer- und aus der Käuferperspektive im Vergleich	258
7.5	Spezialfälle.	260
7.5.1	Bewertung eines normalverteilten Überschusses bei exponentieller Nutzenfunktion.	260
7.5.2	Bewertung eines unsicheren Überschusses bei quadratischer Nutzenfunktion	261
7.6	Anwendungsprobleme der Sicherheitsäquivalentmethode	263
7.7	Zusammenfassung	265
7.8	Übungen.	266
7.9	Lösungshinweise	268
	Literatur.	269
8	Mischung von Risiken.	271
8.1	Problemstellung und Aufbau	271
8.2	Vorteile der Risikomischung	273
8.2.1	Diversifikation und Hedging: Die Grundprinzipien.	273
8.2.2	Beispiel.	274
8.3	Die optimale Mischung von Risiken als Entscheidungsproblem.	276
8.3.1	Allgemeine Entscheidungssituation.	276
8.3.2	Alternative Vorgehensweisen zur Bestimmung der optimalen Risikomischung.	278
8.4	Optimale Portfeuillebildung bei Orientierung am (μ, σ) -Prinzip	280
8.4.1	Konkretisierende Annahmen	280
8.4.2	Bestimmung effizienter Mischungen riskanter Wertpapiere	281
8.4.3	Berücksichtigung eines risikolosen Wertpapiers	289
8.5	Optimale Portfeuillebildung bei expliziter Orientierung	296
8.5.1	Konkretisierende Annahmen	296
8.5.2	Bestimmung und Eigenschaften eines optimalen Portfeuille	297
8.5.3	Eigenschaften eines optimalen Portfeuille bei exponentieller Nutzenfunktion und Normalverteilungen.	300
8.6	Bedeutung der Varianzen und Kovarianzen von Wertpapierrückflüssen für das Portfeuilleisiko.	303
8.6.1	Naive Diversifikation als Beurteilungsbasis.	303
8.6.2	Unsystematisches und systematisches Risiko	304

8.7	Zusammenfassung	304
8.8	Übungen	306
8.9	Lösungshinweise	308
	Literatur	309
9	Flexible Planung und Optimierung von Entscheidungsspielräumen.	311
9.1	Problemstellung und Aufbau	311
9.2	Interdependenzen zwischen Maßnahmen zu verschiedenen Zeitpunkten und flexible Planung als Koordinationskonzept	312
9.2.1	Interdependenzen und Koordinationsbedarf	312
9.2.2	Konkretisierung des Entscheidungsproblems	314
9.2.3	Konzept und Bedeutung der flexiblen Planung	316
9.3	Flexible Planung auf der Basis eines Entscheidungsbaumes.	318
9.3.1	Entscheidungsbaum	318
9.3.2	Entscheidung auf der Basis der Ergebnismatrix	320
9.3.3	Roll-Back-Verfahren	321
9.4	Zur Flexiblen Planung mithilfe der mathematischen Programmierung (Zustandsbaumverfahren)	323
9.5	Beispiel zur flexiblen Planung und deren Implikationen	324
9.5.1	Entscheidungssituation.	324
9.5.2	Entscheidungsbaum	325
9.5.3	Entscheidung auf der Basis einer Ergebnismatrix	327
9.5.4	Roll-Back-Verfahren	329
9.6	Starre versus flexible Planung	331
9.6.1	Vergleich	331
9.6.2	Flexible Planung und Revision von Plänen	333
9.6.3	Flexibilität und Elastizität	334
9.6.4	Handlungsspielräume als Optionen und flexible Planung	334
9.7	Zusammenfassung	335
9.8	Übungen	336
9.9	Lösungshinweise	339
	Literatur	339
10	Bildung eines Wahrscheinlichkeitsurteils und Bewertung von Informationen	341
10.1	Problemstellung und Aufbau	341
10.2	Bedeutung der Quantifizierung von Wahrscheinlichkeitsvorstellungen	342
10.3	Quantifizierung von Wahrscheinlichkeiten bei gegebenem Informationsstand	344
10.3.1	Direkte Methoden	344
10.3.2	Indirekte Methode	345

10.4	Informationszugang und Revision des Wahrscheinlichkeitsurteils	347
10.4.1	Wahrscheinlichkeitsurteile vor und nach Informationszugang	347
10.4.2	Theorem von Bayes	350
10.5	Informationsbeschaffung als Entscheidungsproblem	355
10.5.1	Die Entscheidungssituation	355
10.5.2	Definition des Informationswertes	356
10.5.3	Bestimmung des Informationswertes nach dem Prinzip der flexiblen Planung	357
10.5.4	Maximaler und minimaler Informationswert	360
10.5.5	Bestimmung des Informationswertes bei Risikoneutralität	363
10.5.6	Beispiel zur Informationswertbestimmung	367
10.6	Determinanten des Informationswertes	372
10.6.1	Informationsbewertung als ex-ante-Kalkül	372
10.6.2	Risikoneutralität	373
10.6.3	Risikoaversion	376
10.7	Ermittlung eines optimalen Informationsstandes	378
10.7.1	Einstufiger Informationsprozess	378
10.7.2	Mehrstufiger Informationsprozess	380
10.7.3	Notwendigkeit der Komplexitätsreduktion	381
10.8	Informationswert als subjektive Größe	381
10.9	Zusammenfassung	382
10.10	Übungen	384
10.11	Lösungshinweise	387
	Literatur	389

Teil III Teilung von Risiken

11	Pareto-effiziente Risikoteilung	393
11.1	Problemstellung und Aufbau	393
11.2	Entscheidungssituation	395
11.3	Vorteile der Risikoteilung	396
11.4	Ermittlung Pareto-effizienter Teilungsregeln	398
11.4.1	Alternative Optimierungsansätze	398
11.4.2	Bedingung Pareto-effizienter Risikoteilung	403
11.5	Gestalt Pareto-effizienter Teilungsregeln	405
11.5.1	Gestalt bei Risikoneutralität mindestens eines Entscheidungers	405
11.5.2	Gestalt bei Risikoaversion beider Entscheider	406
11.5.3	Lineare Teilungsregeln	408
11.5.4	Nichtlineare Teilungsregeln	411

11.6	Berücksichtigung heterogener Wahrscheinlichkeitsurteile und Einkünfte im privaten Bereich	411
11.6.1	Heterogene Wahrscheinlichkeitsurteile	411
11.6.2	Einkünfte im privaten Bereich	412
11.7	Zusammenfassung	413
11.8	Übungen	414
11.9	Lösungshinweise	416
	Literatur	417
12	Anreizkompatible Risikoteilung	419
12.1	Problemstellung und Aufbau	419
12.2	Praktische Relevanz der Bedingung der Anreizkompatibilität	420
12.3	Entscheidungssituation	422
12.4	Ermittlung und Gestalt anreizkompatibler Teilungsregeln	423
12.4.1	Präzisierung der Bedingung der Anreizkompatibilität	423
12.4.2	Grafische Ermittlung anreizkompatibler Teilungsregeln	425
12.4.3	Gestalt anreizkompatibler Teilungsregeln	428
12.5	Anreizkompatible versus Pareto-effiziente Risikoteilung	432
12.6	Grundformen und Implikationen praktischer Risikoteilung: Endogene und exogene Risikoteilung	435
12.6.1	Charakteristik	435
12.6.2	Vergleich	436
12.7	Zusammenfassung	439
12.8	Übungen	440
12.9	Lösungshinweise	442
	Literatur	443
 Teil IV Fundierung von Unternehmenszielen		
13	Kapitalmarkttheoretische Grundlagen der Fundierung von Unternehmenszielen	447
13.1	Problemstellung und Aufbau	447
13.2	Charakteristik des Kapitalmarktes	449
13.2.1	Vollkommener vs. unvollkommener Kapitalmarkt	449
13.2.2	Vollständiger vs. unvollständiger Kapitalmarkt	450
13.2.3	Arbitrage	455
13.3	Charakteristik von Kapitalmarktmodellen	458
13.3.1	State Preference Ansatz (SPA)	458
13.3.2	Capital Asset Pricing Model (CAPM)	459

13.4	Risikoteilung und Preisbildung am vollständigen Kapitalmarkt:	
	Analyse im State Preference Ansatz	460
13.4.1	Arbitrageüberlegungen.	460
13.4.2	Gleichgewichtsüberlegungen	461
13.5	Lineare Risikoteilung und Preisbildung bei (μ, σ) -Präferenzen:	
	Analyse im CAPM.	464
13.5.1	Von der Portefeuilletheorie zum CAPM	464
13.5.2	Risikoteilung im CAPM.	465
13.5.3	Wertpapierpreise im Marktgleichgewicht	467
13.6	Modellvergleich	472
13.7	Zusammenfassung	473
13.8	Übungen.	474
13.9	Lösungshinweise	477
	Literatur.	478
14	Unternehmensziele und Entscheidungskriterien im Einperioden-Fall	481
14.1	Problemstellung und Aufbau	481
14.2	Nutzenmaximierung und Marktwertmaximierung im	
	State Preference Ansatz	484
14.2.1	Entscheidungssituation.	484
14.2.2	Kompatibilität von Nutzenmaximierung und	
	Marktwertmaximierung bei Handel mit	
	zustandsbedingten Zahlungsansprüchen	486
14.2.3	Problematik der Annahme eines Wertpapierhandels zu	
	unveränderlichen Preisen	492
14.2.4	Marktwertmaximierung als direkte Nutzenmaximierung	
	bei quasi-konstanten Grenznutzenwerten	493
14.2.5	Spanning.	497
14.3	Nutzenmaximierung und Marktwertmaximierung im CAPM.	497
14.3.1	Entscheidungssituation.	497
14.3.2	Existenz eines repräsentativen Investors und	
	Vorteilhaftigkeitsbedingung für eine Investition beim Ziel	
	subjektiver Nutzenmaximierung	499
14.3.3	Vorteilhaftigkeitsbedingung für eine Investition beim	
	Ziel der Marktwertmaximierung.	502
14.3.4	Marktwertmaximierung im Licht subjektiver	
	Nutzenmaximierung.	504
14.4	Subjektive Bewertung durch einen individuellen Investor bei	
	beschränktem Kapitalmarktzugang	510
14.4.1	Entscheidungssituation.	510
14.4.2	Optimales Portefeuille ohne Bewertungsobjekt.	511
14.4.3	Bewertung	512

14.5	Resümee: Unternehmensziele und Unternehmensplanung für börsennotierte und für Einzelunternehmen im Vergleich	517
14.5.1	Möglichkeiten und Grenzen der theoretischen Fundierung von Unternehmenszielen	517
14.5.2	Implikationen für die Unternehmensplanung	520
14.6	Zusammenfassung	523
14.7	Übungen	524
14.8	Lösungshinweise	527
	Literatur	527
15	Unternehmensziele und Entscheidungskriterien im Mehrperioden-Fall	529
15.1	Problemstellung und Aufbau	529
15.2	Nutzenmaximierung	530
15.2.1	Entscheidungssituation	530
15.2.2	Nutzenfunktionen für Konsumausgaben und Überschüsse	532
15.2.3	Ermittlung und Eigenschaften einer Nutzenfunktion für Konsumausgaben	533
15.2.4	Optimale Konsumpläne und Investitionsentscheidungen bei Sicherheit	535
15.2.5	Optimale Konsumpläne und Investitionsentscheidungen bei Risiko	537
15.3	Marktwertmaximierung, (kollektive) Nutzenmaximierung, optimale Konsumströme und Kapitalmarkt	539
15.3.1	Vollkommener und vollständiger Kapitalmarkt	539
15.3.2	Unvollkommener und unvollständiger Kapitalmarkt	544
15.4	Problematik der Vereinfachung im Licht der Sicherheitsäquivalentmethode und der Risikozuschlagsmethode	552
15.4.1	Notwendigkeit und Grundformen der Vereinfachung	552
15.4.2	Sicherheitsäquivalentmethode	553
15.4.3	Risikozuschlagsmethode	558
15.4.4	Vergleichende Beurteilung der vereinfachten Bewertungsfunktionen	564
15.4.5	Erfassung von Abhängigkeiten und Maximierung des Erwartungswertes des Nutzens des Endvermögens	565
15.5	Zusammenfassung	566
15.6	Übungen	567
15.7	Lösungshinweise	570
	Literatur	571

Teil V Gruppenentscheidungen

16	Elemente des Entscheidungsprozesses in Gruppen	577
16.1	Problemstellung und Aufbau	577
16.2	Kommunikation und Abstimmung als Elemente des Gruppenprozesses	579
16.3	Informationsprozess	582
16.3.1	Überblick	582
16.3.2	Die individuellen Präferenzordnungen zu Beginn des Informationsprozesses	582
16.3.3	Aktivitäten zur Beeinflussung individueller Präferenzordnungen	585
16.3.4	Die individuellen Präferenzordnungen am Ende des Informationsprozesses	590
16.4	Abstimmung in der Gruppe	591
16.4.1	Formelle und informelle Abstimmung	591
16.4.2	Abstimmungsregeln	593
16.4.3	Strategisches Verhalten bei der Abstimmung	599
16.4.4	Abstimmung über eine kollektive Präferenzordnung	605
16.5	Zur Vorteilhaftigkeit eines Gremiums	606
16.5.1	Allgemeines Beurteilungsproblem	606
16.5.2	Beurteilung eines Gremiums bei isolierter Problemlösung	607
16.5.3	Beurteilung eines Gremiums bei gemeinsamer Problemlösung	608
16.5.4	Kostenaspekt	611
16.5.5	Zur optimalen Größe und Zusammensetzung eines Entscheidungsremiums	611
16.6	Zusammenfassung	612
16.7	Übungen	613
16.8	Lösungshinweise	616
	Literatur	617
17	„Fairer“ Interessenausgleich in Gruppen und „faire“ Entscheidungen in Unternehmen	619
17.1	Problemstellung und Aufbau	619
17.2	Die Wahl einer kollektiven Wahlfunktion als Entscheidungsproblem	621
17.3	Das Unmöglichkeitstheorem von Arrow	623
17.3.1	Die Anforderungen Arrows an die kollektive Wahlfunktion	623
17.3.2	Darstellung des Unmöglichkeitstheorems	626

17.4	Klassische Abstimmungsregeln im Licht des Unmöglichkeitstheorems	627
17.4.1	Single-Vote-Regel	627
17.4.2	Mehrheitsregel (Regel des paarweisen Vergleichs)	628
17.4.3	Borda-Regel	629
17.4.4	Hare-Regel	630
17.5	Grenzen eines Auswegs aus dem Dilemma	630
17.5.1	Mögliche Einschränkungen der Anforderungen Arrows	630
17.5.2	Eingipfligkeit der individuellen Präferenzordnungen	632
17.5.3	Implikationen	635
17.6	Demokratische Legitimation von Unternehmenszielen im Lichte des Unmöglichkeitstheorems	636
17.6.1	Die Bedeutung der Operationalität kollektiver Ziele	636
17.6.2	Zielkonflikte zwischen Gesellschaftern eines Unternehmens	637
17.6.3	Zur demokratischen Legitimation der Marktwertmaximierung	638
17.6.4	Aufteilung von Entscheidungskompetenzen zwischen Gesellschaftern und Unternehmen bei einer AG und einer OHG	643
17.7	Zusammenfassung	645
17.8	Übungen	646
17.9	Lösungshinweise	649
	Literatur	650

Teil VI Vereinfachung von Entscheidungsmodellen

18	Vereinfachung von Entscheidungsmodellen als Entscheidungsproblem . . .	653
18.1	Problemstellung und Aufbau	653
18.2	Grundformen und Strategien der Modellvereinfachung	654
18.2.1	Modellvereinfachung ex post und ex ante	654
18.2.2	Vereinfachungen im Entscheidungsfeld	655
18.2.3	Vereinfachungen bei der Formulierung einer Entscheidungsregel	659
18.2.4	Vereinfachungen bei mehrperiodigen Entscheidungsproblemen	662
18.3	Vereinfachung aus normativer und deskriptiver Sicht	665
18.3.1	Vereinfachungen im Rahmen der Prospect-Theorie	665
18.3.2	Vereinfachungen bei der Bildung von Wahrscheinlichkeitsurteilen	666

18.4	Vereinfachung durch Zerlegung in Partialmodelle	667
18.4.1	Konzept	667
18.4.2	Bildung von Entscheidungsfeldern als Organisationsproblem	668
18.4.3	Bedeutung des Kapitalmarktes für Vereinfachungen	669
18.5	Grenzen rationaler Entscheidung	671
18.5.1	Problematik der Bestimmung eines „optimalen“ Komplexionsgrades	671
18.5.2	Zur praktischen Bedeutung vereinfachter Entscheidungsmodelle	672
18.6	Zusammenfassung	672
18.7	Übungen	674
	Literatur	674
	Sachverzeichnis	677

Teil I

Grundlagen

Probleme und Lösungskonzepte der Entscheidungstheorie: ein Überblick

1

1.1 Zum Gegenstand der Entscheidungstheorie

Jeden Tag müssen wir – sei es allein oder als Mitglied einer Gruppe (z. B. Familie, Freundeskreis, Arbeitsgruppe, Verein) – Entscheidungen treffen. Das Problem der Entscheidung ist für alle Menschen von existenzieller Bedeutung. Immer wieder müssen wir Entscheidungen treffen, deren Folgen unsere Lebensbedingungen nachhaltig beeinflussen und die uns deshalb stark in Anspruch nehmen. Der Bau eines Hauses z. B. oder die Annahme einer neuen Arbeitsstelle bringen große Veränderungen mit sich und müssen daher sorgfältig überlegt werden.

Die Formulierung und Lösung von Entscheidungsproblemen sind für verschiedene wissenschaftliche Disziplinen zu einem zentralen Thema geworden. Darüber hinaus hat sich als *interdisziplinärer* Forschungsschwerpunkt die Entscheidungstheorie entwickelt, die sich in systematischer Weise mit dem Entscheidungsverhalten von Individuen und Gruppen befasst.

Der Begriff „Entscheidung“ wird im allgemeinen Sprachgebrauch vor allem dann angewendet, wenn ein Wahlproblem von besonderer Bedeutung vorliegt, von dessen Ausgang vieles abhängt. Im Gegensatz dazu wird im Rahmen der Entscheidungstheorie der Entscheidungsbegriff so weit gefasst, dass er *alle* Wahlakte beinhaltet: Unter „Entscheidung“ wird ganz allgemein die (mehr oder weniger bewusste) Auswahl einer von mehreren möglichen Handlungsalternativen verstanden. Eine Entscheidung im Sinne der Entscheidungstheorie ist demnach beispielsweise nicht nur die Festlegung eines Investitionsprogramms durch die Unternehmensleitung, sondern auch der Entschluss eines Haushaltes, in einem bestimmten Geschäft und nicht in einem anderen einzukaufen.

Entscheidungstheoretische Untersuchungen werden in der Absicht vorgenommen, beschreibende (deskriptive) oder vorschreibende (präskriptive) Aussagen zu gewinnen. Entsprechend lässt sich, je nach dem im Vordergrund stehenden Forschungsziel,

zwischen deskriptiver und präskriptiver (oder normativer) Entscheidungstheorie unterscheiden.

Die *deskriptive Entscheidungstheorie* will beschreiben, wie in der Realität Entscheidungen getroffen werden, und erklären, warum sie gerade so und nicht anders zustande kommen. Ihr Ziel ist es, empirisch gehaltvolle Hypothesen über das Verhalten von Individuen und Gruppen im Entscheidungsprozess zu finden, mit deren Hilfe bei Kenntnis der jeweiligen konkreten Entscheidungssituation Entscheidungen prognostiziert bzw. gesteuert werden können.

Die *präskriptive (oder normative) Entscheidungstheorie* will nicht die tatsächlichen Entscheidungsprozesse beschreiben und erklären, sondern zeigen, wie Entscheidungen „rational“ getroffen werden können. Sie will Ratschläge für die Lösung von Entscheidungsproblemen erteilen, also Antwort geben auf die Frage, was ein Entscheider in unterschiedlichen Entscheidungssituationen tun soll. Im Rahmen der präskriptiven Entscheidungstheorie (sie wird auch als Entscheidungslogik bezeichnet) wird vom konkreten Gehalt der jeweiligen Entscheidungssituation weitgehend abstrahiert. Es werden *Grundprobleme* der Auswahl aus mehreren einander ausschließenden Handlungsalternativen untersucht, die in allen oder zumindest in zahlreichen Entscheidungssituationen entstehen.

Dabei stehen Entscheidungen im Vordergrund, die zu treffen sind

- im Hinblick auf *mehrere* zueinander in *Konflikt stehende Zielgrößen* (wie etwa das Ziel der Maximierung des Einkommens einerseits und das der Minimierung der Arbeitszeit andererseits) und/oder
- angesichts einer *ungewissen Zukunft*, einer Ungewissheit z. B. über das Wetter, das Verhalten eines Konkurrenten oder eines (anderen) Beteiligten.

Auch in der Betriebswirtschaftslehre stehen Entscheidungen im Zentrum des wissenschaftlichen Interesses. Nach neuerer Auffassung wird die Betriebswirtschaftslehre überwiegend entscheidungsorientiert gesehen: „Ihre Aufgabe besteht darin, die in betriebswirtschaftlichen Organisationen tätigen Menschen bei ihren Entscheidungen sowie den Gesetzgeber bei der Konzipierung unternehmensrelevanter Normen beratend zu unterstützen“ (Bamberg et al. 2012, S. 11). Die Betriebswirtschaftslehre wird daher häufig als spezielle (oder angewandte) Entscheidungstheorie bezeichnet.

Im vorliegenden ersten Kapitel wird ein Überblick über Probleme praktischer Entscheidungen sowie über Problemstellungen und Lösungskonzepte der Entscheidungstheorie gegeben. Die Ausführungen, die noch recht allgemein sind, sollen es erleichtern, die spezielleren Darstellungen in den nachfolgenden Kapiteln zu verstehen und gedanklich einzuordnen. In diesen Kapiteln werden spezifische Problemstellungen der Entscheidungstheorie dargestellt und Ansätze zu ihrer Lösung beschrieben. Außerdem werden dort die Grundbegriffe der Entscheidungstheorie (z. B. die Begriffe „Handlungsalternative“, „Zielsystem“, „Entscheidungsmodell“, „Risikoeinstellung“, „Zielgröße“, „Bewertungsverbund“), die im vorliegenden Kapitel bereits verwendet werden, genauer definiert und erklärt.

1.2 Ziele, Entscheidungsfelder und Alternativen

1.2.1 Ziele als Beurteilungsgrundlage von Handlungsalternativen

Die präskriptive Entscheidungstheorie will Antwort geben auf die Frage, was ein Entscheider in unterschiedlichen Entscheidungssituationen tun soll. In diese Aufgabenstellung ist ein Grundproblem eingeschlossen, das die „Edamer Katze“ in „Alice im Wunderland“ mit großer Klarheit erkannt hat:

„Würdest du mir bitte sagen, wie ich von hier aus weitergehen soll?“

fragte Alice die Edamer Katze.

„Das hängt zum großen Teil davon ab, wohin du möchtest“, sagte die Katze.

„Ach, wohin ist mir eigentlich gleich -“, sagte Alice.

„Dann ist es auch egal, wie du weitergehst“, sagte die Katze.

„- solange ich nur *irgendwohin* komme“, fügte Alice zur Erklärung hinzu.

„Das kommst du bestimmt“, sagte die Katze, „wenn du nur lange genug weiterläufst.“

Das konnte Alice freilich nicht leugnen.

Ebenso wie die Edamer Katze kann die Entscheidungstheorie nur dann Rat erteilen, wenn ein Entscheider gewisse Zielvorstellungen hat, mit deren Hilfe er die Konsequenzen der Handlungsalternativen nach ihrer Wünschbarkeit beurteilen kann. Die Entscheidungstheorie will einem Entscheider nicht dogmatisch vorschreiben, was er tun soll, sondern will ihm helfen, seine eigenen Zielvorstellungen in ein widerspruchsfreies „Zielsystem“ zu überführen und dann eine Entscheidung zu treffen, die mit diesem Zielsystem im Einklang steht. Die Entscheidungstheorie nimmt – im Gegensatz zur Ethik – keine Wertung der Zielvorstellungen des Entscheiders vor; sie nimmt sie als gegeben an, ohne sie beeinflussen zu wollen.

1.2.2 Alternativen und Entscheidungsfelder

Ein Entscheidungsproblem kann allgemein durch die Frage charakterisiert werden, welche Handlungsalternative (oder auch kurz: welche Alternative) aus einer Menge mehrerer Alternativen gewählt werden soll. Dabei kann eine Alternative auch darin bestehen, dass nichts geschieht, der Status quo also aufrechterhalten wird. Ein Entscheidungsproblem liegt z. B. auch dann vor, wenn es darum geht, ob eine bestimmte Maßnahme durchgeführt werden soll oder nicht. In diesem Fall gibt es zwei Alternativen: Die eine Alternative besteht in der Durchführung der Maßnahme, die andere in ihrem Unterlassen. Ein Entscheidungsproblem kann aber immer nur dann vorliegen, wenn überhaupt eine Wahlmöglichkeit besteht, also *mindestens zwei Alternativen* gegeben sind. Darüber hinaus müssen sich mindestens zwei dieser Alternativen in der Weise unterscheiden, dass mit ihnen ein Ziel mehr oder weniger gut erreicht wird. Andernfalls ist zwar eine Wahlsituation gegeben, aber kein *Entscheidungsproblem*: Der Entscheider kann dann eine beliebige Alternative auswählen.

Zur Lösung eines Entscheidungsproblems werden die Alternativen so definiert, dass sie sich gegenseitig ausschließen. Genau eine der Alternativen ist zu wählen. Welche Alternativen im Einzelfall relevant sind, hängt u. a. davon ab, vor welchem Entscheidungsproblem der Entscheider steht. Angenommen, er erwäge, einen „kurzen“ Spaziergang zu machen (aus welchen Gründen auch immer komme ein „langer“ Spaziergang nicht infrage). Die Alternativen könnten dann lauten: Verzicht auf Spaziergang, Spaziergang in der Stadt, Spaziergang im Park, Spaziergang im nahegelegenen Wald. Würde ein längerer Spaziergang nicht ausgeschlossen, so wären zusätzlich noch Alternativen zu erwägen, die sich aus mindestens zwei Teilaktionen zusammensetzen, z. B.: „Spaziergang durch Park und Stadt“ und „Wanderung durch Park, Stadt und Wald“.

Häufig setzen sich die Alternativen aus sehr vielen Teilaktionen zusammen. Sind z. B. in einem Mehrproduktunternehmen die optimalen Produktionsmengen für die einzelnen Erzeugnisse zu bestimmen, so entspricht jeder Alternative ein Produktionsprogramm, das alle Erzeugnisse einschließt. Im Rahmen der Investitions- und Finanzplanung sind die Alternativen möglicherweise als Investitions- und Finanzierungsprogramme mit sehr vielen Einzelprojekten definiert.

Der Entscheider kann natürlich nur Alternativen realisieren, die überhaupt durchführbar sind. Die Menge der möglichen Alternativen wird durch bestimmte Bedingungen (Nebenbedingungen oder Restriktionen) begrenzt, die aus Gegebenheiten resultieren, die der Entscheider im Rahmen des jeweiligen Entscheidungsproblems nicht beeinflussen kann bzw. will. Im oben skizzierten Beispiel besteht die Restriktion in der Zeitdauer des Spaziergangs. Zu den betriebswirtschaftlich bedeutsamen Restriktionen zählen z. B. technische Kapazitätsbeschränkungen, die im Rahmen des Entscheidungsproblems nicht beeinflusst werden sollen, einzuhaltende Rechtsvorschriften, der vorhandene Bestand an finanziellen Mitteln und die Konditionen, zu denen zusätzliches Kapital beschafft werden kann.

Um ein Entscheidungsproblem zu lösen und eine Alternative auszuwählen, muss ein Entscheider die Alternativen im Hinblick auf ihre Vorziehwürdigkeit bewerten. Hierzu muss er die Ergebnisse prognostizieren, die er mit der Wahl einer Alternative erreichen wird, und er muss einschätzen, wie diese Ergebnisse von Umweltentwicklungen abhängen, d. h. von Entwicklungen, die er nicht beeinflussen kann oder will, z. B. weil er aufgrund von Vorüberlegungen davon überzeugt ist, dass eine Beeinflussung zu hohe Kosten verursachen würde. Die Alternativen, Ergebnisse und Umweltentwicklungen kennzeichnen das *Entscheidungsfeld* (Kap. 2). Ein Entscheidungsfeld bildet also das konkrete Entscheidungsproblem zur Bewertung der Alternativen ab. Für die Bewertung der Alternativen werden zusätzlich die Zielvorstellungen des Entscheiders benötigt.

Der Begriff des Entscheidungsfeldes ist vom Begriff des Entscheidungsbereichs zu unterscheiden. Während sich ein Entscheidungsfeld auf ein konkretes Entscheidungsproblem bezieht, beschreibt ein Entscheidungsbereich eine Menge von (potenziellen) Entscheidungsproblemen, die von anderen Entscheidungsbereichen über eine sachliche oder zeitliche Abgrenzung abgetrennt wird. Ein Entscheider bildet Entscheidungsbereiche

insbesondere, um Komplexität zu reduzieren. So muss ein Unternehmer beispielsweise sowohl im Unternehmensbereich als auch im privaten Bereich Entscheidungen treffen. Obwohl zwischen diesen Entscheidungen gegenseitige Abhängigkeiten bestehen mögen, bildet er möglicherweise zwei getrennte Entscheidungsbereiche, wobei jede Entscheidung in jedem Entscheidungsbereich durch ein spezifisches Entscheidungsfeld gekennzeichnet ist. Entscheidungsbereiche werden regelmäßig gebildet, wenn mehrere Personen kooperieren. Mit der Bildung solcher Entscheidungsbereiche in Organisationen beschäftigt sich die Organisationstheorie (Laux und Liermann 2005).

1.2.3 Abhängigkeiten zwischen Zielen und erwogenen Alternativen

Die von einem Entscheider in Betracht gezogenen Alternativen hängen u. a. davon ab, an welchen Zielgrößen er sich orientiert. Ein Arbeitsloser, der eine Arbeitsstelle sucht, wird andere Maßnahmen ins Auge fassen als jemand, der eine Urlaubsreise plant. Welche Zielgrößen für die Auswahl einer Alternative maßgeblich sind, hängt umgekehrt davon ab, welche Alternativen überhaupt zur Debatte stehen. Unterscheiden sich die einem arbeitssuchenden Entscheider vorliegenden Stellenangebote lediglich durch das Einkommen, wird er die Angebote nach dieser Zielgröße beurteilen. Wenn sich die Stellen sowohl durch das Einkommen als auch die Arbeitszeit unterscheiden, sind beide Zielgrößen bei der Beurteilung der Alternativen zu berücksichtigen.

Unterscheiden sich die Stellen außer in ihrem Einkommen und in der verbleibenden Freizeit noch durch andere Merkmale wie „Arbeitsklima“ und „Aufstiegsmöglichkeiten“, ist ein noch umfassenderes Zielsystem zu formulieren (Kap. 3). Wenn die Konsequenzen der Alternativen nicht mit Sicherheit bekannt sind, wenn also der Entscheider z. B. nicht genau weiß, welche Aufstiegsmöglichkeiten bestehen, dann ergeben sich zusätzliche Probleme bei der Formulierung eines adäquaten Zielsystems. Dieses muss dann auch die „Risikoeinstellung“ des Entscheiders zum Ausdruck bringen (vgl. Kap. 4 bis 7).

1.2.4 Abhängigkeiten zwischen Zielgrößen

Entscheidungen berühren häufig mehrere Zielgrößen. Auch zwischen diesen Zielgrößen bestehen Abhängigkeiten, die zu Zielkonflikten führen können. Gerade in wirtschaftlichen Entscheidungssituationen stehen Zielgrößen regelmäßig in Konflikt zueinander. Wenn keine Alternative existiert, die (zufällig) hinsichtlich aller Zielgrößen besser oder ebenso gut abschneidet wie alle anderen Alternativen, kann eine optimale Entscheidung nur getroffen werden, wenn zuvor festgelegt wird, wie die Zielgrößen gegeneinander abzuwägen sind, um die Alternativen bewerten zu können. So wird ein Entscheider bei der Suche nach einer Arbeitsstelle nur in Ausnahmefällen ein Stellenangebot erhalten, das sowohl hinsichtlich des Gehalts als auch hinsichtlich der Arbeitszeit am besten abschneidet.

Um zu einer Entscheidung zu gelangen, muss er in der Regel beide Zielgrößen so zusammenfassen, dass explizit oder implizit zum Ausdruck kommt, welche Gewichte er den beiden Einzelzielen beimisst.

Wie unterschiedliche und insbesondere zueinander in Konflikt stehende Zielgrößen berücksichtigt werden können, zählt zu den Kernproblemen der Entscheidungstheorie (vgl. Kap. 2 und 3).

1.2.5 Abhängigkeiten zwischen Entscheidungsbereichen und Koordinationsbedarf

1.2.5.1 Das Grundproblem

Ist ein Entscheidungsproblem sehr komplex, so kann es komplizierte Bündel von Einzelmaßnahmen beinhalten, die sich auf unterschiedliche Sachbereiche oder Zeitpunkte beziehen. Im komplexeren Fall hängen alle Einzelmaßnahmen in der Weise voneinander ab, dass die Lösung des Entscheidungsproblems nur über eine simultane Planung aller Einzelmaßnahmen möglich ist. Eine Alternative ist dann ein Bündel von Einzelmaßnahmen in unterschiedlichen Bereichen und zu unterschiedlichen Zeitpunkten.

In einem solchen Fall gibt es streng genommen nur ein einziges Entscheidungsfeld, welches sich nicht in Entscheidungsbereiche unterteilen lässt. Dennoch gebieten Vereinfachungserfordernisse häufig eine Unterteilung des komplexen Entscheidungsfeldes in Entscheidungsbereiche. Innerhalb der Entscheidungsbereiche werden dann weniger komplexe Entscheidungsfelder betrachtet. Gleichwohl entstehen aus der Unterteilung in Entscheidungsbereiche gegenseitige Abhängigkeiten bzw. *Interdependenzen* zwischen diesen Bereichen.

Interdependenzen lassen sich auf *vier* mögliche Verbundeffekte zurückführen: Restriktionsverbund, Erfolgsverbund, Risikoverbund und Bewertungsverbund.

1.2.5.2 Restriktionsverbund

Restriktionsverbund zwischen zwei Entscheidungsbereichen liegt vor, wenn die Aktionsmöglichkeiten in mindestens einem dieser Bereiche davon abhängen, welche Aktionen in dem anderen Bereich durchgeführt werden. Genauer: Der Variationsbereich (d. h. die Grenzen bzw. Restriktionen) für die Entscheidungsvariablen mindestens eines Bereichs hängt von den Ausprägungen der Entscheidungsvariablen im anderen Bereich ab. Beispiele für einen Restriktionsverbund sind:

- Welche Mengen der Absatzbereich von einem Produkt absetzen kann, hängt davon ab, wie viele Einheiten dieses Produktes der Fertigungsbereich herstellt.
- Die maximale Produktionsmenge eines Fertigungsbereichs hängt davon ab, welche Menge eines Zwischenproduktes ein anderer Bereich bereitstellt.

- Gewisse Ressourcen (z. B. Maschinen, Kapital, Rohstoffe) sind nur in begrenztem Umfang vorhanden. Wenn in einem Bereich Ressourcen genutzt bzw. verbraucht werden, stehen sie in dem anderen Bereich nicht zur Verfügung: Dessen Handlungsspielraum wird dadurch eingeengt.

1.2.5.3 Erfolgsverbund

Erfogsverbund (allgemein: Ergebnisverbund) zwischen zwei Entscheidungsbereichen liegt vor, wenn zumindest für einen Bereich gilt: Wie weit der Gesamterfolg bei Durchführung bestimmter Aktionen in diesem Bereich steigt oder fällt (allgemein: wie sich das für beide Bereiche relevante Gesamtergebnis ändert), hängt davon ab, welche Maßnahmen in dem anderen Bereich realisiert werden. Der Gesamterfolg setzt sich also nicht additiv aus den Erfolgen der Einzelmaßnahmen zusammen: es bestehen (positive oder negative) *Synergieeffekte*. Im Folgenden werden hierfür einige Beispiele gegeben:

- Der durch Werbeanstrengungen in einem Bereich erzielte Beitrag zum Gesamterfolg hängt von den Werbemaßnahmen in anderen Bereichen ab.
- Inwieweit der Erfolg des Unternehmens steigt oder sinkt, wenn in der Fertigung bestimmte Produktmengen hergestellt werden, hängt davon ab, ob und zu welchen Bedingungen es gelingt, diese Mengen am Markt abzusetzen.
- Ist der Preis eines Produktionsfaktors eine Funktion der beschafften Menge (z. B. bei Rabatten), so ergibt sich ein Erfolgsverbund über die Kostenkomponente: Wie weit die Kosten des Unternehmens steigen, wenn in einem Bereich eine bestimmte Menge des betreffenden Faktors verbraucht wird, hängt dann davon ab, welche Mengen des Faktors in anderen Bereichen eingesetzt werden.

1.2.5.4 Risikoverbund

Wenn im Fall sicherer Erwartungen zwischen zwei Bereichen weder ein Restriktionsverbund noch ein Erfolgsverbund besteht, dann ist eine Koordination der Bereichsentscheidungen nicht erforderlich. In Risikosituationen kann sich jedoch – sofern nicht gerade der Spezialfall der Risikoneutralität besteht und somit das Risiko für den Entscheider unbeachtlich ist – aufgrund eines *Risikoverbundes* die Notwendigkeit der Koordination ergeben. Risikoverbund liegt vor, wenn die Erfolge der verschiedenen Bereiche voneinander stochastisch abhängig sind.

Zwei beliebige Zufallsereignisse sind voneinander stochastisch unabhängig (abhängig), wenn die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines der Ereignisse unabhängig (abhängig) davon ist, ob das andere Ereignis eintritt oder nicht. Stochastische Unabhängigkeit besteht zum Beispiel beim Roulette: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Kugel auf eine bestimmte Zahl fällt, ist unabhängig von ihrem Verhalten in den Spielen davor. Stochastische Abhängigkeit besteht dagegen zum Beispiel beim Blackjack (Siebzehn und Vier): Die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Karte aufgedeckt wird, hängt davon ab, welche Karten zuvor aufgedeckt wurden („Ziehen ohne Zurücklegen“).

Ökonomische Entscheidungssituationen sind im Allgemeinen durch stochastische Abhängigkeiten gekennzeichnet. So sind zum Beispiel die Kursentwicklungen verschiedener Wertpapiere oder die in einem Unternehmen mit verschiedenen Produkten erzielten Gewinne grundsätzlich voneinander abhängig. Stochastische Abhängigkeiten zwischen entscheidungsrelevanten Größen können vor allem daraus resultieren, dass sie ihrerseits stochastisch von gewissen Entwicklungen abhängen (etwa von der allgemeinen Konjunktur, der Nachfrage nach bestimmten Produkten, Zinssätzen und Wechselkursen).

Bei stochastischer Abhängigkeit gilt: Wie sich die Varianz des Gesamterfolges (als Maßstab des Risikos) verändert, wenn in einem Bereich riskante Maßnahmen durchgeführt werden, hängt davon ab, welche riskanten Entscheidungen in anderen Bereichen getroffen werden und welche stochastischen Beziehungen zwischen den Erfolgen der verschiedenen Bereiche bestehen. Bei Risikoverbund entsteht ein analoger Koordinationsbedarf wie bei Erfolgsverbund (Kap. 5, 8, 9, 14 und 15).

1.2.5.5 Bewertungsverbund

Schließlich kann sich – auch wenn keine anderen Verbundeffekte vorliegen – die Notwendigkeit der Koordination aufgrund eines *Bewertungsverbundes* ergeben. Wie z. B. zusätzliche Risiken für einen Bereich zu bewerten sind, kann davon abhängen, welche riskanten Maßnahmen in anderen Bereichen durchgeführt werden, auch ohne dass stochastische Abhängigkeiten gegeben sind. So mag beispielsweise die Bewertung eines unsicheren Projekts davon abhängen, welches Ausgangsvermögen in Abhängigkeit vom erzielten Erfolg im Rahmen anderer Projekte gegeben ist (vgl. Kap. 7). Es stellt sich dann wieder das Problem, die Risiken verschiedener Bereiche aufeinander abzustimmen.

1.2.5.6 Verbundeffekte und Koordination

Verbundbeziehungen erfordern die Koordination von Entscheidungen. So müssen bei einem Restriktionsverbund zwischen zwei Entscheidungsbereichen die Entscheidungen in dem einen Bereich darauf abgestimmt werden, welche Handlungsspielräume dadurch in dem anderen Bereich entstehen oder verschwinden. Bei Erfolgsverbund zwischen zwei Bereichen müssen die Maßnahmen in mindestens einem der Bereiche auch danach beurteilt werden, wie sie die Erfolgswirkungen der Maßnahmen in dem anderen Bereich verändern.

Bei der Entscheidung über Koordinationsmaßnahmen entsteht ein Konflikt: Einerseits sollten bestehende Interdependenzen bei der Planung möglichst sorgfältig und vollständig erfasst werden. Andererseits verursacht dann die Planung (zu) hohe Kosten. Es muss daher ein Mittelweg gefunden werden, der Vereinfachungen in den Koordinationsüberlegungen in Kauf nimmt.

Im Rahmen eines zentralen Entscheidungssystems in einem Unternehmen werden die einzelnen Teilaktionen unmittelbar von einer einzelnen Instanz (z. B. der Unternehmensleitung) aufeinander abgestimmt. Da die Instanz simultan über alle Teilprobleme entscheidet, findet die Koordination *intrapersonell* in einem Totalkalkül statt, welches das komplexe Entscheidungsproblem in einem einzigen Entscheidungsfeld abbildet.

Dabei werden an die Instanz in der Regel erhebliche Anforderungen hinsichtlich der Beschaffung und Verarbeitung der relevanten Informationen gestellt. Bei komplexeren Entscheidungsproblemen kann die Instanz die Entscheidung allenfalls aufgrund stark vereinfachter Kalküle treffen. Je „umfangreicher“, „variabler“ und „unstrukturierter“ die Entscheidungsprobleme sind, desto größer ist das Ausmaß der gebotenen Komplexitätsreduktion und desto größer ist damit auch die Gefahr von Fehlentscheidungen. (Zu den Möglichkeiten und Konsequenzen der Komplexitätsreduktion vgl. Kap. 18).

Wenn es nicht möglich oder zumindest nicht sinnvoll ist, dass eine einzelne Instanz sämtliche Entscheidungen trifft (und dabei die Koordinationsfunktion wahrnimmt), ist es naheliegend, das Entscheidungsproblem in Teilprobleme zu zerlegen und die Lösungen der Teilprobleme verschiedenen Personen zu übertragen. Bei einer Verteilung von Entscheidungskompetenzen auf mehrere Personen werden an den einzelnen Entscheidungsträger hinsichtlich der Informationsverarbeitung in der Regel (wesentlich) geringere Anforderungen gestellt, als wenn er sämtliche Entscheidungen allein treffen müsste. Auch der Prozess der Informationsbeschaffung bzw. der Informationsübermittlung kann wesentlich vereinfacht sein; die Informationen können eher dort verarbeitet werden, wo sie anfallen. Darüber hinaus kann die Dezentralisation von Entscheidungen die Entscheidungsträger motivieren, sich verstärkt im Sinne des Unternehmensziels einzusetzen. Viele Entscheidungsträger sind stärker motiviert, Informationen zu beschaffen, Ideen zu entwickeln und Entscheidungen umzusetzen, wenn nicht ständig eine Instanz eingeschaltet werden muss, die sich die wesentlichen Entscheidungen vorbehält.

In einem dezentralen Entscheidungssystem stellt sich das Problem der *interpersonellen* Koordination: Die Entscheidungen mehrerer Entscheidungsträger müssen aufeinander abgestimmt werden. Je „stärker“ die Interdependenzen zwischen verschiedenen Entscheidungsproblemen sind, desto enger sind die Grenzen für dezentrale Entscheidungssysteme. In der vorliegenden Arbeit wird vor allem untersucht, wie einem Risikoverbund und gegebenenfalls einem Bewertungsverbund Rechnung getragen werden kann (vgl. insbesondere Kap. 7, 8, 9, 14 und 15).

1.2.5.7 Planung als Entscheidung besonderer Art

Die gegenseitige Abstimmung bzw. Koordination von Aktionen wird als „Planung“ bezeichnet. Ein Bedarf an Planung entsteht immer dann, wenn die Konsequenzen erwogener Aktionen nicht unabhängig voneinander betrachtet werden können, sondern die Einzelmaßnahmen koordiniert werden müssen. Abhängigkeiten sind bei Entscheidungen im Unternehmen praktisch immer zu berücksichtigen.

Ein Bedarf an Planung ergibt sich aber nicht nur aufgrund von sachlichen Interdependenzen, sondern auch deshalb, weil die Aktionen verschiedener Zeitpunkte aufeinander abzustimmen sind.

Planen heißt stets auch Entscheiden, auch wenn die Pläne nur vorläufig sind oder (wie bei flexibler Planung, Kap. 9) als Eventualpläne erstellt und nur unter bestimmten Bedingungen realisiert werden. Dann werden eben die betreffenden Entscheidungen vorläufig oder bedingt getroffen. Jedoch sind „Planung“ und „Entscheidung“ keine

synonymen Begriffe. Bei Planungen geht es um Entscheidungen besonderer Art, nämlich Entscheidungen über abhängige Maßnahmen. Man spricht im Allgemeinen nicht schon dann von Planung, wenn über unabhängige Alternativen oder Einzelmaßnahmen zu entscheiden ist.

1.3 Entscheidung als Prozess

1.3.1 Überblick

Wie in Abschn. 1.2.3 verdeutlicht wurde, bestehen zwischen Zielen und Alternativen enge Interdependenzen. Zum einen hängt es von den Zielen ab, welche Alternativen ein Entscheider in Betracht zieht. Zum anderen hängt es von den erwogenen Alternativen ab, inwieweit er sein Zielsystem präzisieren muss, um die Alternativen beurteilen zu können. In konkreten Entscheidungssituationen erfolgen die Alternativensuche und die Präzisierung des Zielsystems im Rahmen eines mehrstufigen (Entscheidungs-) Prozesses, der nun näher betrachtet werden soll.

Wird mit dem Begriff „Entscheidung“ nicht allein der Entschluss, sondern auch dessen Vorbereitung bezeichnet, so lässt sich eine Entscheidung als ein im Zeitablauf sich vollziehender *Prozess* auffassen, der aus Vorentscheidungen und der Endentscheidung besteht. Der Entscheidungsprozess entspricht in dieser weiten Auffassung einem Problemlösungsprozess, wobei die *möglichen* Lösungen des (Entscheidungs-) Problems durch die erwogenen Alternativen repräsentiert werden und die *tatsächliche* Lösung sich durch die gewählte Alternative ergibt.

Im Zuge eines Entscheidungsprozesses sind bestimmte Aufgaben zu lösen, für die in der Literatur eine gewisse Systematik entwickelt wurde:

1. Problemformulierung,
2. Präzisierung des Zielsystems,
3. Erforschung der möglichen Handlungsalternativen,
4. Auswahl einer Alternative,
5. Entscheidungen in der Realisationsphase.

Dieser Katalog wird im Folgenden erläutert. Einer möglichen Fehlinterpretation soll von vornherein vorgebeugt werden: Der Katalog gibt einen Überblick über Aktivitäten im Rahmen eines Entscheidungsprozesses. Es ist jedoch in der Regel nicht sinnvoll, diese Aktivitäten isoliert voneinander zu betrachten und sie starr in der dargestellten Reihenfolge durchzuführen.

1.3.2 Problemformulierung

Ein Entscheidungsprozess wird im Allgemeinen dadurch angeregt, dass bestimmte Symptome wahrgenommen werden, z. B. der Ausfall einer Maschine, eine Verringerung des Periodengewinns, eine Erhöhung der laufenden Kosten oder eine Veränderung der Konkurrenzsituation. Der Entscheider erkennt, dass sich eine bestimmte Situation unbefriedigend entwickelt und möglicherweise verbessert werden kann (oder dass sogar die „Notwendigkeit“ besteht, sie zu verbessern).

Eine solche Erkenntnis kann routinemäßig zu einer (wenn auch nur vorläufigen) Problemformulierung führen. Wenn etwa in einem Betrieb eine Maschine ausfällt, kann sich unmittelbar das Entscheidungsproblem stellen, ob die Maschine repariert oder durch eine neue ersetzt werden soll. In anderen Fällen erfordert die Problemformulierung einen (langwierigen) kreativen Suchprozess. So mag ein Unternehmer zunächst nur die vage Vermutung haben, dass es ihm durch „geeignete Maßnahmen“ gelingen könnte, die Absatzchancen bestimmter Erzeugnisse seines Unternehmens zu verbessern. Für den Unternehmer stellt sich dann die Aufgabe, das Entscheidungsproblem konkret zu formulieren, etwa: „Verbesserung der Produktqualität“ oder „Verstärkung der Werbebemühungen“.

Wie das zu lösende Entscheidungsproblem beschrieben werden soll, ist eine Frage der Zweckmäßigkeit. Die Problemformulierung stellt somit selbst ein *Entscheidungsproblem* dar. Es kann zweckmäßig sein, die zunächst gewählte Problemformulierung durch eine neue (etwas präzisere) zu ersetzen, um die nachfolgenden Aktivitäten des Entscheidungsprozesses zu vereinfachen oder in erfolgreichere Bahnen zu lenken. Um zu einer schärferen Problemformulierung zu gelangen, kann es insbesondere sinnvoll sein, weitere Informationen über die Besonderheiten der vorliegenden Situation zu beschaffen. So mag etwa die Feststellung, dass eine Maschine ausgefallen ist, für eine adäquate Problemformulierung noch unzureichend sein. Die Informationsbasis wird erweitert, wenn z. B. geklärt wird, wann die Maschine ausgefallen ist, wer die Maschine bedient hat, wie oft die Maschine schon früher ausgefallen war und was an der Maschine defekt ist.

1.3.3 Präzisierung des Zielsystems

Eine rationale Entscheidung kann nur dann getroffen werden, wenn Zielvorstellungen existieren, mit deren Hilfe die Alternativen beurteilt bzw. „bewertet“ werden können. Zwar wird häufig das zu lösende Entscheidungsproblem schon in Gestalt eines (Sach-) Ziels beschrieben, z. B.: Beseitigung eines Schadens, Besetzung einer Stelle, Durchführung einer Ersatzinvestition. Das Ziel besteht hier jeweils darin, einen bestimmten Endzustand zu erreichen. Dieser Endzustand ist jedoch noch sehr unscharf definiert. Die grobe Zielformulierung mag zunächst ausreichen, um den Entscheidungsprozess (vor allem: die Alternativensuche) überhaupt in Gang zu setzen. Im Zuge des

Entscheidungsprozesses muss jedoch das Zielsystem präzisiert werden. Die Präzisierung des Zielsystems dient dazu, der Erforschung der Handlungsalternativen eine konkrete Richtung zu geben; außerdem liefert sie den Beurteilungsmaßstab für die abschließende Auswahl einer Alternative. Dabei hängt die Art und Weise, wie das Zielsystem präzisiert wird, u. a. von den jeweils gefundenen Alternativen und ihren (möglichen) Konsequenzen ab.

1.3.4 Erforschung von Alternativen

1. *Ermittlung der Restriktionen für mögliche Alternativen:* Die Problemanalyse erfordert auch, dass die Restriktionen oder Bedingungen herausgearbeitet werden, denen die Lösung genügen muss. Restriktionen ergeben sich z. B. aus den für die Alternativen verfügbaren Finanzierungsmöglichkeiten oder den freien Produktionskapazitäten. Es ist nicht sinnvoll, Alternativen gegeneinander abzuwägen, die gar nicht realisiert werden können. Es ist auch nicht sinnvoll, Alternativen gegeneinander abzuwägen, die nicht realisiert werden *sollen*, da z. B. mit ihrer Realisation Rechtsvorschriften verletzt würden. Wenn von vornherein die kritischen Restriktionen offengelegt werden, kann der Entscheidungsprozess vereinfacht und beschleunigt werden, da früher erkannt wird, ob die erwogenen Alternativen überhaupt relevant sind oder nicht.

2. *Suche nach Alternativen:* Grundsätzlich gibt es nicht nur eine einzige Möglichkeit, ein Entscheidungsproblem zu lösen. Für den Entscheider stellt sich damit die Aufgabe, Alternativen zu finden bzw. zu erfinden. Welche (mehr oder weniger innovativen) Möglichkeiten dabei entdeckt werden, hängt vom Wissensstand und der Kreativität des Entscheiders ab (Bretzke 1980, S. 109 f.).

Je größer der Erfahrungsbereich des Entscheiders ist, desto mehr Alternativen (er-) kennt er und desto besser ist er in der Lage, deren Folgen abzuschätzen. Oft bietet jedoch die eigene Erfahrung keine hinreichende Basis für das Erkennen von Alternativen. So hat etwa die Geschäftsleitung eines Unternehmens i. d. R. ständig Probleme zu lösen, die über ihre bisherigen Erfahrungen hinausgehen. Die erfolgreichen Problemlösungen der Vergangenheit sind nur in Ausnahmefällen auch den gegenwärtigen Problemen angemessen. Daher erweist es sich oft als notwendig, bei der Suche von Alternativen über den eigenen Erfahrungsbereich hinauszugehen und zu prüfen, welche Ideen andere Personen haben. Durch diese Ergänzung eigener Erfahrungen kann die Anzahl der erwogenen Alternativen vom Entscheider vergrößert und/oder deren „Qualität“ verbessert werden. Die Erfahrungen aus der Vergangenheit – seien es die eigenen Erfahrungen oder die anderer Personen – sind jedoch selten völlig ausreichend für die Suche von Alternativen. Angesichts sich ständig ändernder Problemstellungen erfordert diese stets auch Kreativität. Beides, Erfahrung und Kreativität, bilden die Grundlage für die Alternativensuche.

3. *Prognose der Ergebnisse der Alternativen:* Um eine rationale Entscheidung treffen zu können, muss der Entscheider die Konsequenzen der erwogenen Alternativen abschätzen. Da Entscheidungen grundsätzlich bei unvollkommenem Informationsstand zu treffen sind, ist eine *sichere Prognose* der Ergebnisse nicht möglich (auch wenn aus Gründen der Vereinfachung oft nur eines der möglichen Ergebnisse einer Alternative berücksichtigt wird). Der Entscheider kann sich allenfalls ein Wahrscheinlichkeitsurteil über mögliche Ergebnisse bilden, das von seinem Informationsstand abhängt. Der Informationsstand ist jedoch nicht unabänderlich, sondern kann durch den Entscheider verbessert werden (Kap. 10). Wenn es etwa darum geht, die Folgen absatzpolitischer Maßnahmen abzuschätzen, können Informationen über das Verhalten von Konkurrenten und Nachfragern beschafft werden.

1.3.5 Auswahl einer Alternative

In dieser für die Ausführungen im vorliegenden Buch „entscheidenden“ Phase wird die im Hinblick auf die angestrebten Ziele beste (oder wenigstens eine „gute“) Alternative ausgewählt. Die Gestaltung der Auswahlphase kann sich an verschiedenen Typen von Entscheidungsmodellen orientieren, deren Grundstrukturen in Kap. 2 beschrieben werden.

1.3.6 Entscheidungen in der Realisationsphase

In der Realisationsphase wird die gewählte Alternative realisiert. Auch im Zuge der Realisation sind ständig Entscheidungen zu treffen, denn bei der Auswahl einer Handlungsalternative wird im Allgemeinen noch nicht über alle Details entschieden. Detailentscheidungen werden später „vor Ort“ unter Berücksichtigung der jeweiligen Gegebenheiten getroffen. Bei der Entscheidung für den Bau eines Hauses kann z. B. zunächst noch offen bleiben, wo die Steckdosen angebracht werden und welcher Bodenbelag gewählt wird; möglicherweise wird darüber erst nach Errichtung des Rohbaus entschieden, da sich erst dann ein genaues Bild von den Auswirkungen der einzelnen Maßnahmen machen lässt.

Natürlich werden nicht nur bei der eigentlichen Auswahl der Handlungsalternative und bei deren Realisation Entscheidungen getroffen, sondern im Verlauf des *gesamten* Entscheidungsprozesses. So ist z. B. zu entscheiden über die Problemformulierung, die Vorgehensweise bei der Alternativensuche und bei der Prognose der Ergebnisse der erwogenen Alternativen. Der Entscheidungsprozess ist also ein Prozess der Lösung zahlreicher Einzelentscheidungsprobleme.

1.3.7 Problematik von Phasenschemata

Der in Abschn. 1.3.1 dargestellte Katalog bringt die Einzelaktivitäten im Rahmen eines Entscheidungsprozesses in eine gewisse Systematik, die die gedankliche Einordnung der Überlegungen in den nachfolgenden Kapiteln erleichtert. Wie bereits erwähnt, könnte der Katalog den Eindruck erwecken, es sei stets *sinnvoll*, die einzelnen Aktivitäten bis hin zur Realisation als Teilphasen unabhängig voneinander und starr in der dargestellten Reihenfolge durchzuführen. Dies ist nicht der Fall. Zwischen den einzelnen „Phasen“ bestehen enge Interdependenzen, sodass über die Maßnahmen einzelner Phasen nur dann sinnvoll entschieden werden kann, wenn zugleich Überlegungen hinsichtlich anderer Phasen angestellt werden.

In der „Phase der Problemformulierung“ müssen beispielsweise bereits Überlegungen der anderen Phasen in mehr oder weniger grober Weise vorweggenommen werden. Z. B. erübrigt sich die Problemformulierung, wenn der Entscheider absieht, dass er ohnehin keine sinnvollen Alternativen zur Lösung des Problems durchsetzen kann. Im Allgemeinen ist es auch nicht sinnvoll, die einzelnen Aktivitäten innerhalb der „Suchphase“ (Präzisierung des Zielsystems, Ermittlung der Restriktionen, Suche nach Alternativen, Prognose der Ergebnisse der Alternativen) unabhängig voneinander und starr in der beschriebenen Reihenfolge durchzuführen. So ist es z. B. zweckmäßig, schon bei der Zusammenstellung der Alternativen deren möglichen Folgen mehr oder weniger grob abzuschätzen, um im Rahmen einer Vorentscheidung offensichtlich nachteilige Alternativen auszusondern. Dadurch wird der Planungsaufwand verringert. Wenn umgekehrt bei der genaueren Prognose der Konsequenzen der erwogenen Alternativen deutlich wird, dass keine von ihnen befriedigend ist, kann es sinnvoll sein, zum Punkt „Suche nach Alternativen“ (oder gar zur „Phase der Problemformulierung“) zurückzugehen, um zusätzliche Lösungsmöglichkeiten zu entdecken. Auch die Präzisierung des Zielsystems ist keine in sich geschlossene Aktivität, die eindeutig den weiteren Phasen vorausgeht. Wie bereits erläutert wurde, erfolgt die Präzisierung im Verlauf der Suche nach Alternativen und der Prognose ihrer Ergebnisse.

1.4 Entscheidungstheorie als Orientierungshilfe für die Lösung von Entscheidungsproblemen

1.4.1 Überblick

Die Darstellung der Entscheidung als Prozess bietet einen Orientierungsrahmen zur Beschreibung der Entscheidungshilfen, die die Entscheidungstheorie einem Entscheider geben kann. Die Entscheidungstheorie behandelt die Probleme der Entscheidungsfindung unter verschiedenen Fragestellungen und mit unterschiedlichen Forschungsansätzen. Abb. 1.1 systematisiert diese Ansätze.

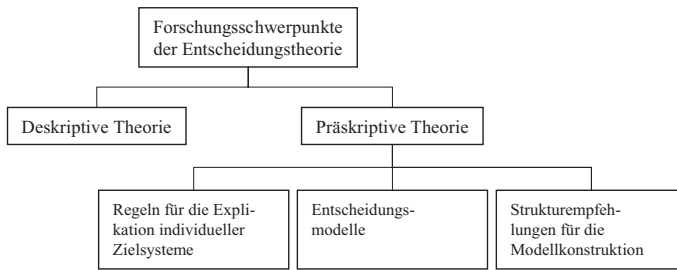


Abb. 1.1 Forschungsschwerpunkte der Entscheidungstheorie

Deskriptive Theorien sind Aussagesysteme, die im Rahmen empirischer Untersuchungen erarbeitet werden. Bei der empirischen Forschung geht es allgemein darum, in der Realität bestehende Beziehungen zwischen Variablen zu erkunden und zu erklären. Die jeweiligen Aussagesysteme, also die deskriptiven Theorien, sollen die Wirklichkeit beschreiben und erklären. Die empirische Forschung liefert Informationsgrundlagen für Entscheidungen. Sie erleichtert es, (u. a.) ein Urteil darüber zu fällen, welche Alternativen in einer Entscheidungssituation realisierbar (zulässig) sind und zu welchen Konsequenzen sie führen werden bzw. führen können.

Präskriptive Theorien beschreiben nicht die Realität, sondern geben Verhaltensempfehlungen für alternative Entscheidungssituationen in der Realität. Sie sind Aussagesysteme, die im Rahmen deduktiver Untersuchungen gewonnen werden. Die deduktive Forschung liefert Orientierungshilfen für die Verarbeitung von Informationen; zugleich entwickelt sie die theoretische Basis, aus der Problemstellungen für die empirische Forschung abgeleitet werden können.

1.4.2 Deskriptive Entscheidungstheorie

Ziel der *deskriptiven Entscheidungstheorie* ist es, empirisch gehaltvolle Hypothesen über das Verhalten von Individuen und (Personen-) Gruppen im Entscheidungsprozess zu formulieren, mit deren Hilfe bei Kenntnis der jeweiligen Ausgangssituation Entscheidungen prognostiziert werden können.

Im Rahmen der deskriptiven Entscheidungstheorie wird u. a. eine Antwort auf folgende Fragen gesucht: In welcher Weise bilden sich Individuen Wahrscheinlichkeitsurteile über ungewisse Ereignisse? Wie bewerten sie riskante Alternativen (Kap. 6)? Wie vollzieht sich die Zielbildung und wie verändern sich die Ziele im Entscheidungsprozess? Wie wirken sich Gruppenbildung und Gruppendiskussion auf die „Risikoeinstellung“ der Mitglieder aus? Wie hängt die Bereitschaft eines Mitglieds, im Problemlösungsprozess Beiträge zu leisten, von der Zahl und den Charaktereigenschaften der anderen Mitglieder ab? Wie hängt der Ablauf des Informationsbeschaffungs- und -verarbeitungsprozesses von der zu lösenden Aufgabe und dem Führungsverhalten des Gruppenleiters ab?

Die deskriptive Entscheidungstheorie befasst sich zwar primär nicht mit dem Problem, wie Entscheidungen „rational“ getroffen werden können; sie versucht zu beschreiben und zu erklären, wie Individuen und Gruppen in der Realität *tatsächlich* entscheiden. Trotzdem werden auf diese Weise auch Informationen für „bessere“ oder „rationale“ Entscheidungen geliefert, denn die Konsequenzen der von einem Entscheider erwogenen Handlungsalternativen sind im Allgemeinen von den (tatsächlichen) Entscheidungen anderer Personen abhängig. Die deskriptive Entscheidungstheorie kann bessere Prognosen dieser Entscheidungen ermöglichen; sie kann somit dazu führen, dass der Entscheider eine (im Hinblick auf sein Zielsystem) bessere Entscheidung trifft. Insbesondere ist zu beachten: Wenn die deskriptive Entscheidungstheorie zur Erkenntnis führt, dass sich Menschen in bestimmten Entscheidungssituationen in typischer Weise „irrational“ verhalten, ist es „rational“, dieses Verhalten bei der eigenen Entscheidung zu antizipieren, sofern davon die Ergebnisse der erwogenen Alternativen abhängen.

Die Ergebnisse der deskriptiven Entscheidungstheorie (vgl. hierzu Kap. 6) können darüber hinaus auch direkt für die präskriptive Entscheidungstheorie von grundlegender Bedeutung sein. Wie erläutert wurde, will die präskriptive Entscheidungstheorie Empfehlungen für die Lösung von Entscheidungsproblemen geben. Derartige Empfehlungen sind jedoch nur dann hilfreich, wenn sie befolgt werden können. Die deskriptive Entscheidungstheorie kann erforschen, welche Anforderungen Entscheider überhaupt erfüllen können und welche nicht (oder erst nach gewissen Lernprozessen). Würde sich beispielsweise zeigen, dass jedermann außerstande ist, sogenannte „Indifferenzwahrscheinlichkeiten“ zu fixieren, wäre die Empfehlung, in Risikosituationen nach dem „Bernoulli-Prinzip“ (Bernoulli 1738) zu entscheiden, kaum sinnvoll (vgl. hierzu Kap. 5, Abschn. 5.3.2).

1.4.3 Präskriptive Entscheidungstheorie

1.4.3.1 Regeln für die Explikation individueller Zielsysteme

Eine rationale Entscheidung kann nur dann getroffen werden, wenn Zielvorstellungen für die Beurteilung der Alternativen existieren. Demnach ist eines der Kernprobleme der präskriptiven Entscheidungstheorie, wie das Zielsystem eines Entscheiders (soweit es für die Lösung eines Entscheidungsproblems überhaupt relevant ist) erforscht und wie es dargestellt werden kann.

Die einfachste Möglichkeit besteht darin, den Entscheider ausdrücklich nach seinem Zielsystem zu befragen. Ist das Zielsystem bekannt, kann man unmittelbar zur Lösung des Entscheidungsproblems übergehen. In komplexeren Entscheidungssituationen wird der Entscheider jedoch möglicherweise keine präzise Antwort auf die Frage nach seinem Zielsystem geben können. Er benötigt dann Hilfestellungen, um sich zunächst einmal selbst darüber Klarheit zu verschaffen, was er eigentlich will (welches Ziel er anstrebt).

In einer solchen Situation könnte man versuchen, das Zielsystem des Entscheiders aus seinem bisherigen Verhalten abzuleiten. Dabei wird mehr oder weniger genau nachvollzogen, wie er in früheren realen Wahlsituationen entschieden hat, um aus seinen Entscheidungen einen Rückschluss auf sein Zielsystem zu ziehen. Dieses Vorgehen ist allerdings ebenfalls problematisch. Um aus vergangenen Entscheidungen einen verlässlichen Rückschluss auf Zielvorstellungen ziehen zu können, muss bekannt sein, welche Alternativen der Entscheider jeweils erwogen und mit welchen Konsequenzen er bei den einzelnen Alternativen gerechnet hat. Diese Aspekte lassen sich aber später oft nur schwer rekonstruieren. Wichtiger ist jedoch folgender Einwand: Reale Entscheidungsprobleme sind im Allgemeinen so komplex, dass man nicht ohne Weiteres davon ausgehen kann, dass die früheren Entscheidungen des Entscheiders im Einklang mit seinem Zielsystem standen. Wenn ein Entscheider stets zieladäquate Entscheidungen treffen könnte, benötigte er keine Hilfe durch die Entscheidungstheorie. Außerdem können sich die Zielvorstellungen im Zeitablauf ändern. Die heutigen Zielvorstellungen können wesentlich von denjenigen abweichen, die für frühere Entscheidungen maßgeblich waren.

Im Vordergrund der präskriptiven Entscheidungstheorie steht das folgende Konzept zur Erforschung des Zielsystems eines Entscheiders: Dem Entscheider werden relativ einfache – in aller Regel hypothetische – Entscheidungsprobleme vorgelegt, die dieser zu „lösen“ hat (vgl. z. B. Kap. 3, Abschn. 3.4, und Kap. 5, Abschn. 5.3.2). Dabei wird angenommen, dass der Entscheider in einfachen Wahlsituationen im Einklang mit seinem (zunächst noch verborgenen) Zielsystem entscheidet, sodass sein Zielsystem wenigstens bruchstückhaft zum Ausdruck gebracht wird. Aus seinen Entscheidungen in alternativen (hypothetischen) Entscheidungssituationen wird dann auf diejenigen Elemente des Zielsystems geschlossen, die für das eigentliche (komplexere) Entscheidungsproblem relevant sind. Danach wird unter Einsatz der Logik und rechnerischer Hilfsmittel dieses Entscheidungsproblem gelöst, d. h. es wird diejenige Alternative bestimmt, die in Bezug auf das explizierte Zielsystem optimal ist. Bei Anwendung dieses Konzeptes stellt sich das Problem, solche hypothetischen Entscheidungsprobleme zu finden, die einerseits einfach überschaubar sind und andererseits eine Brücke zu den jeweiligen realen Entscheidungsproblemen bilden können: Der Entscheider soll mit der Durchführung der einfachen Wahlakte seine *wirklichen* Zielvorstellungen offenbaren, soweit diese für das eigentliche (komplexere) Entscheidungsproblem relevant sind.

1.4.3.2 Entscheidungsmodelle

Zu den wichtigsten Entscheidungshilfen, die im Rahmen der deduktiven Forschung der Entscheidungstheorie und der Betriebswirtschaftslehre erarbeitet werden, zählen die Entscheidungsmodelle. „Als ‚Entscheidungsmodell‘ bezeichnen wir im Folgenden ganz allgemein das Ergebnis eines Versuches, die für wesentlich gehaltenen Elemente und Beziehungen einer als ‚Problem‘ empfundenen Handlungssituation in einer formalisierten Sprache so zu definieren, dass aus dem resultierenden Strukturkomplex die Problemlösung als logische Implikation abgeleitet werden kann“ (Bretzke 1980, S. 8).

Der prinzipielle Aufbau von Entscheidungsmodellen und deren Bedeutung für die Lösung von Entscheidungsproblemen werden in Kap. 2 diskutiert. In den nachfolgenden Kapiteln wird gezeigt, wie derartige Modelle bei „Sicherheit“, bei „Unsicherheit im engeren Sinne“ und bei „Risiko“ konstruiert werden können und welche Eigenschaften die optimalen „Lösungen“ der Modelle aufweisen.

Im Rahmen der deduktiven Forschung entwickelte Entscheidungsmodelle beziehen sich im Allgemeinen nicht auf konkrete, in räumlicher und zeitlicher Hinsicht genau spezifizierte Entscheidungssituationen. Vielmehr werden mit ihnen bestimmte *Typen* von Entscheidungssituationen bzw. Entscheidungsproblemen abgebildet (z. B. das Problem der Risikomischung, Kap. 8) und entsprechende Lösungsverfahren zugeordnet. Die Modellstruktur ist dabei mithilfe allgemeiner Symbole dargestellt; die Parameter der Modelle werden nicht numerisch spezifiziert. Mit solchen allgemeinen Entscheidungsmodellen besteht die Möglichkeit, reale Entscheidungsprobleme des jeweiligen Typs so zu beschreiben bzw. zu strukturieren, dass sie anschließend mithilfe der Logik bzw. bestimmter Rechentechniken „gelöst“ werden können.

Im Gegensatz zu *allgemeinen* Entscheidungsmodellen beziehen sich *konkrete* Entscheidungsmodelle auf *spezifische* Entscheidungssituationen (vgl. hierzu Bretzke 1980, S. 10 f.). In konkreten Modellen sind die jeweiligen Modellparameter durch die betrachtete konkrete Entscheidungssituation festgelegt.

Zur Lösung eines konkreten Entscheidungsproblems mithilfe eines Entscheidungsmodells ist also zunächst ein geeignetes allgemeines Modell auszuwählen, um dieses anschließend in ein konkretes Modell zu überführen, das die vorliegende Entscheidungssituation abbildet. Mit der Wahl eines bestimmten allgemeinen Modells wird der allgemeine Rahmen für die Modellkonstruktion festgelegt.

Die Aufgabe der deduktiven Forschung kann vor allem darin gesehen werden, einen Vorrat unterschiedlicher allgemeiner Modelle zu entwickeln, deren Annahmen möglichst klar darzustellen und Hinweise auf den jeweils zweckmäßigsten Lösungsalgorithmus zu geben. Der Praktiker hat so die Möglichkeit, in einer konkreten Entscheidungssituation – unter Abwägung der jeweiligen Realitätstreue der Modellprämissen einerseits und der Informations- und Planungskosten andererseits – dasjenige Modell auszuwählen, das ihm als das beste erscheint.

Nachdem ein konkretes Modell durch ein System von (im Allgemeinen mathematischen) Symbolen beschrieben worden ist, stellt sich das Problem, eine optimale (oder wenigstens eine „gute“) Lösung des Modells zu bestimmen. Die Lösung bringt zum Ausdruck, welche Handlungsalternative (welches Aktionsprogramm) gewählt werden soll. Zur Ermittlung einer Lösung ist eine geeignete *Rechentechnik* erforderlich. Welche Rechentechnik jeweils geeignet ist, hängt von der formalen Struktur des Modells ab (so z. B. davon, ob alle Funktionen des Modells linear sind oder nicht). Die Entwicklung von Rechentechniken zur Lösung von Entscheidungsmodellen stellt einen eigenständigen Beitrag der Wissenschaft dar; sie erfolgt vor allem im Rahmen des „Operations Research“.

Die Entscheidungstheorie befasst sich nicht mit der Entwicklung von Rechen-techniken. Dies bedeutet jedoch nicht, dass die Entwicklung von Rechenverfahren keine entscheidungstheoretischen Implikationen hat. Die Zweckmäßigkeit von Aufbau und Struktur eines konkreten Modells kann davon abhängen, welche Verfahren für die Lösung des Modells zur Verfügung stehen. Es ist nicht sinnvoll, ein konkretes Modell zu konstruieren, für das kein geeignetes Lösungsverfahren existiert.

1.4.3.3 Strukturempfehlungen für die Modellkonstruktion

Nach Auswahl eines bestimmten allgemeinen Modells stellt sich für den Entscheider das Problem, in welcher Weise er dieses Modell in ein konkretes Modell überführen soll. Die konkrete Ausgestaltung des gewählten Entscheidungsmodells wird somit selbst zum Entscheidungsproblem (Meta-Entscheidungsproblem). Auch für die Lösung dieses Entscheidungsproblems kann die Entscheidungstheorie dem Entscheider Orientierungshilfen geben, indem sie untersucht, nach welchen Regeln und Kriterien in alternativen Entscheidungssituationen die Modellkonstruktion erfolgen soll, um zu einer zielgerechten Entscheidung zu gelangen¹ (vgl. insbesondere Kap. 8, 9, 14, 15 und 18).

1.5 Zum Aufbau der Arbeit

Im Mittelpunkt der Arbeit stehen diejenigen Bestandteile der Entscheidungstheorie, die für die Abbildung und Analyse wirtschaftlicher Entscheidungsproblemen von grundlegender Bedeutung sind.² Abb. 1.2 gibt einen Überblick über den Aufbau des Buches.

Erster Teil: Grundlagen

Der erste Teil der Arbeit umfasst die Kap. 1 bis 6. Darin werden nach dieser Einführung (Kap. 1) zunächst in Kap. 2 allgemeine Probleme der Aufstellung und Analyse von Entscheidungsmodellen diskutiert.

In Kap. 2 wird insbesondere das Grundmodell der Entscheidungstheorie (Schneeweiß 1966) vorgestellt, welches den allgemeinen Aufbau jedes Entscheidungsproblems verdeutlicht und dessen systematische Analyse ermöglicht.

In Kap. 3 wird untersucht, wie Entscheidungsprobleme bei Sicherheit prinzipiell gelöst werden können. Bei Sicherheit kennt der Entscheider die Ergebnisse, die mit den erwogenen Alternativen verbunden sind. Bei Sicherheit besteht nur dann kein triviales

¹Vgl. hierzu Bitz (1977); Gaitanides (1979); Schneeweiß, C. (1984).

²Spieltheoretische Aspekte bleiben unberücksichtigt. Die Spieltheorie befasst sich mit Entscheidungssituationen, bei denen die Folgen der Handlungsalternativen eines Entscheiders (auch) von den Aktionen eines oder mehrerer rationaler „Gegenspieler“ (z. B. des Gegners beim Schach oder der Konkurrenten in einem Oligopolmarkt) abhängen. Vgl. zur Spieltheorie z. B. Bitz (1981, S. 215–285); Camerer (2003); Güth (1999); Holler und Illing (2009); Wiese (2002).

Erster Teil: Grundlagen	
1	Probleme und Lösungskonzepte der Entscheidungstheorie: ein Überblick
2	Struktur und Bedeutung von Entscheidungsmodellen
3	Entscheidungskriterien und Entscheidungsmodelle bei Sicherheit
4	Entscheidung bei Unsicherheit: Grundlagen
5	Rationale Entscheidung bei Risiko: Das Bernoulli-Prinzip
6	Deskriptive Entscheidungstheorie bei Risiko
Zweiter Teil: Individualentscheidungen bei Risiko - Vertiefung	
7	Bewertung unsicherer Zahlungsansprüche
8	Mischung von Risiken
9	Flexible Planung und Optimierung von Entscheidungsspielräumen
10	Bildung eines Wahrscheinlichkeitsurteils und Bewertung von Informationen
Dritter Teil: Teilung von Risiken	
11	Pareto-effiziente Risikoteilung
12	Anreizkompatible Risikoteilung
Vierter Teil: Fundierung von Unternehmenszielen	
13	Kapitalmarkttheoretische Grundlagen der Fundierung von Unternehmenszielen
14	Unternehmensziele und Entscheidungskriterien im Einperioden-Fall
15	Unternehmensziele und Entscheidungskriterien im Mehrperioden-Fall
Fünfter Teil: Gruppenentscheidungen	
16	Elemente des Entscheidungsprozesses in Gruppen
17	„Fairer“ Interessenausgleich in Gruppen und „faire“ Entscheidungen in Unternehmen
Sechster Teil: Vereinfachung von Entscheidungsmodellen	
18	Vereinfachung von Entscheidungsmodellen als Entscheidungsproblem

Abb. 1.2 Überblick über den Aufbau der Arbeit

Entscheidungsproblem, wenn sich der betrachtete Entscheider an mehreren Zielgrößen orientiert. Entsprechend wird gezeigt, wie Entscheidungen bei mehreren Zielgrößen getroffen werden können.

Kap. 4 schafft die Grundlagen der Entscheidung bei Unsicherheit, auf denen alle nachfolgenden Kapitel des ersten, zweiten, dritten und vierten Teils der Arbeit aufbauen. Zunächst werden Entscheidungskriterien für Situationen der Unsicherheit im engeren Sinne (i. e. S.) dargestellt und beurteilt. In einer solchen Situation ist ein Entscheider nicht in der Lage anzugeben, wie wahrscheinlich mögliche Konsequenzen von Handlungsalternativen sind. Risikosituationen haben dagegen wesentlich größere praktische Bedeutung. Sie sind dadurch gekennzeichnet, dass der Entscheider Eintrittswahrscheinlichkeiten (wenn auch nur grob) angeben kann. Es wird gezeigt, welche Relevanz

Wahrscheinlichkeiten für die Lösung von Entscheidungsproblemen haben und es werden Grundtypen von Wahrscheinlichkeiten und Probleme ihrer Ermittlung verglichen. Außerdem werden Kriterien der Selektion (Vorauswahl) nachteiliger Alternativen bei Unsicherheit i. e. S. und Risiko dargestellt sowie einfache Entscheidungskriterien für Risikosituationen diskutiert.

Kap. 5 ist dem „Bernoulli-Prinzip“ gewidmet. Bei dessen Anwendung wird zunächst auf der Grundlage relativ einfacher hypothetischer Entscheidungssituationen eine Nutzenfunktion ermittelt, die jedem möglichen Ergebnis einen (subjektiven) Nutzenwert zuordnet. Gewählt wird dann jene Alternative, mit der der Erwartungswert des Nutzens der möglichen Ergebnisse maximiert wird. Das Bernoulli-Prinzip beruht, anders als z. B. die klassischen Entscheidungskriterien bei Risiko, auf Axiomen rationalen Verhaltens. Das Bernoulli-Prinzip kann daher Menschen, die rational im Sinne der Axiome handeln wollen, zeigen, wie optimale Entscheidungen begründet und getroffen werden können. Allerdings ist es nicht einfach, das Prinzip bei konkreten Entscheidungen konsequent umzusetzen, vor allem wenn die Entscheidungen intuitiv und nicht modellfundiert getroffen werden. Daher ist es nicht verwunderlich, dass in der Realität häufig Entscheidungen beobachtet werden, die im Widerspruch zum Bernoulli-Prinzip stehen.

An diesen Beobachtungen knüpft das Kap. 6 an, das deskriptive Entscheidungstheorien bei Risiko vorstellt. Diese beruhen auf Beobachtungen aus zahlreichen Laborexperimenten, bei denen die Teilnehmer mit einfachen Entscheidungssituationen (bei Risiko) konfrontiert wurden und mit großer Mehrheit und in *systematischer* Weise Entscheidungen getroffen haben, die gegen die Axiome des Bernoulli-Prinzips verstoßen. Deskriptive Entscheidungstheorien versuchen, den beobachteten Verstößen Rechnung zu tragen. Die bekannteste deskriptive Entscheidungstheorie, die Prospect-Theorie nach Kahneman und Tversky, wird erläutert und mit dem Bernoulli-Prinzip verglichen. Erkenntnisse der deskriptiven Entscheidungstheorie sind auch für solche Entscheider von grundlegender Bedeutung, die sich am Bernoulli-Prinzip orientieren und die betreffenden deskriptiven Entscheidungstheorien aus normativer Sicht ablehnen: Wenn das Verhalten anderer die eigene Entscheidungssituation beeinflusst, ist es eben sinnvoll, dieses Verhalten im eigenen Entscheidungskalkül zu berücksichtigen, unabhängig davon, ob man dieses Verhalten als „rational“ oder als „irrational“ beurteilt.

Zweiter Teil: Vertiefung der Analyse von Individualentscheidungen bei Risiko

Der zweite Teil der Arbeit (Kap. 7 bis 10) kehrt zur normativen Entscheidungstheorie und damit zum Bernoulli-Prinzip zurück. Darin werden Entscheidungsprobleme bei Risiko untersucht, die die geschaffenen Grundlagen anwenden und vertiefen. Zunächst werden in den Kap. 7 und 8 direkte Anwendungen des Bernoulli-Prinzips auf zwei zentrale betriebswirtschaftliche Entscheidungsprobleme betrachtet: Die Bewertung riskanter Zahlungsansprüche und die Mischung von Risiken.

In Kap. 7 wird gezeigt, wie ein unsicherer Zahlungsanspruch auf der Basis des Bernoulli-Prinzips aus Verkäuferperspektive und aus Käuferperspektive bewertet werden kann, und es wird die grundsätzliche Relevanz dieser Bewertungskonzepte für die

Lösung von Entscheidungsproblemen bei Risiko erläutert. Dabei wird vor allem auch gezeigt, dass das „Sicherheitsäquivalent“ für die Bewertung grundsätzlich unterschiedliche Bedeutung hat, je nachdem ob sie aus Verkäufer- oder Käufersicht vorgenommen wird und wie sich jeweils Risiko- und Bewertungsverbund auf die Höhe des Wertes auswirken.

Optimale Entscheidungen über riskante Maßnahmen können grundsätzlich nicht unabhängig voneinander, sondern nur im Verbund getroffen werden. In Kap. 8 wird gezeigt, wie riskante Positionen (z. B. Wertpapiere, Investitionen) effizient bzw. optimal gemischt werden können. Außerdem wird untersucht, wie die effizienten bzw. die optimalen Portefeuilles von den stochastischen Eigenschaften der Überschüsse (aus Wertpapieren bzw. aus Investitionen) und der Risikoeinstellung des Entscheiders abhängen. Dabei zeigt sich auch, dass Überschüsse, die für sich gesehen nachteilig sind, in Verbindung mit anderen sich als vorteilhaft erweisen können, weil sie in der Mischung das Risiko relativ wenig erhöhen oder sogar reduzieren.

In den Kap. 9 und 10 werden zwei Entscheidungsprobleme betrachtet, die besondere Bedeutung für die Unternehmensführung haben: Die Bewertung und Ausnutzung von Handlungsspielräumen in mehrperiodigen Entscheidungsproblemen (Kap. 9) und die Bildung von Wahrscheinlichkeitsurteilen über zukünftige Umweltentwicklungen einschließlich der Entscheidung über die Einholung zusätzlicher, prognoserelevanter Informationen zur Verbesserung eines Wahrscheinlichkeitsurteils (Kap. 10).

Hat ein Entscheider über mehrere Perioden Entscheidungen zu treffen, so ist es sinnvoll, über die Maßnahmen eines zukünftigen Zeitpunkts definitiv erst dann zu entscheiden, wenn dieser Zeitpunkt tatsächlich eingetreten ist; es können dann alle relevanten Informationen berücksichtigt werden, die bis zu diesem Zeitpunkt eingehen. Andererseits bestehen zwischen Maßnahmen, die ein Entscheider zu verschiedenen Zeitpunkten ergreift, oft enge Verbundeffekte, sodass über die gegenwärtigen Maßnahmen nicht isoliert von den zukünftigen Maßnahmen entschieden werden sollte. Daher kann ein Entscheider nicht auf die Planung zukünftiger Maßnahmen verzichten, weil ihm sonst die Grundlage für die Beurteilung der gegenwärtigen Maßnahmen fehlt. Einen Ausweg aus diesem Dilemma bietet das *Konzept der flexiblen Planung*, bei dem für zukünftige Zeitpunkte bzw. Perioden *bedingte* (oder *Eventual-*) Pläne erstellt werden. Welcher dieser Pläne tatsächlich realisiert wird, hängt dann von der eintretenden Umweltentwicklung ab. In Kap. 9 wird die Bedeutung der flexiblen Planung als Entscheidungsprinzip gewürdigt und es werden Konzepte der flexiblen Planung dargestellt. Die flexible Planung ist ein geeignetes Instrument für die Bewertung und optimale Gestaltung von Handlungsspielräumen (Optionen) für zukünftige riskante Maßnahmen und die spätere optimale Realisation dieser Maßnahmen.

Ein Grundproblem der Entscheidungsfindung bei Risiko ist die Bildung eines Wahrscheinlichkeitsurteils über die möglichen Ergebnisse der erwogenen Alternativen bzw. die entscheidungsrelevanten Umweltzustände, von denen diese Ergebnisse abhängen. Damit befasst sich Kap. 10. Darin wird zunächst untersucht, wie das subjektive Urteil eines Entscheiders über zukünftige Umweltzustände in Wahrscheinlichkeiten überführt

und entsprechend präzisiert werden kann. Das Wahrscheinlichkeitsurteil eines Entscheiders ist jedoch im Allgemeinen nicht unabänderlich. In der Regel kann der Entscheider durch „aktive“ Beschaffung von Informationen auch selbst dazu beitragen, sein Wahrscheinlichkeitsurteil zu verbessern. Da die Informationsbeschaffung grundsätzlich Kosten in Form von Ausgaben und/oder durch Einsatz von Arbeit und Zeit des Entscheiders verursacht, stellt sich das Problem, wie Informationen bewertet werden können. Es wird untersucht, wie dieses Problem gelöst werden kann und wie der Informationswert von seinen Determinanten abhängt.

Dritter Teil: Teilung von Risiken

Im dritten, vierten und fünften Teil der Arbeit wird nicht mehr ein einzelner Entscheider betrachtet, sondern mehrere Entscheider, deren Nutzen von den Entscheidungen abhängen, die sie gemeinsam treffen oder zu verantworten haben. Dabei beschäftigt sich der dritte Teil der Arbeit mit der Aufteilung eines finanziellen Risikos auf zwei Entscheider. Die dort gewonnenen Erkenntnisse lassen sich unmittelbar auf Gruppen mit mehr als zwei Entscheidern übertragen.

Ein Entscheider kann finanzielles Risiko für sich auch in der Weise reduzieren, dass er die möglichen Erfolge mit anderen Entscheidern teilt. Kap. 11 befasst sich mit der „Pareto-effizienten“ Teilung eines *gegebenen* riskanten Erfolges. Eine Erfolgsteilung ist Pareto-effizient, wenn durch eine Veränderung der Teilung keiner der Beteiligten einen Vorteil erzielen kann, ohne dass ein anderer einen Nachteil erleidet. In Kap. 11 wird gezeigt, wie solche Teilungen ermittelt werden können und welche Eigenschaften sie aufweisen.

Allerdings kann auch eine Pareto-effiziente Erfolgs- bzw. Risikoteilung zu erheblichen Konflikten zwischen den Beteiligten führen, wenn es darum geht, zusätzliche riskante Maßnahmen durchzuführen oder Risiken (etwa durch den Abschluss von Versicherungen) zu reduzieren. Um kontraproduktive Abstimmungsprozesse zu vermeiden, ist es naheliegend, die möglichen Erfolge derart „anreizkompatibel“ zu teilen, dass die Präferenzen aller Beteiligten bezüglich beliebiger Änderungen von Erfolgen bzw. von Risiken übereinstimmen. Kap. 12 befasst sich mit der Ermittlung und Gestalt anreizkompatibler Teilungsregeln.

Vierte Teil: Fundierung von Unternehmenszielen und damit kompatibler finanzwirtschaftlicher Entscheidungsregeln

Im vierten Teil der Arbeit wird auf den Ausführungen im dritten Teil aufgebaut, um grundsätzliche Überlegungen zur Fundierung von Unternehmenszielen und daraus resultierender Entscheidungsregeln anzustellen. Kern dieser Überlegungen ist die Frage, wie ein Unternehmen im Interesse mehrerer Gesellschafter geführt werden kann, die die Entscheidungsregeln, nach denen Entscheidungen im Unternehmen getroffen werden, einmütig akzeptieren, und welche Entscheidungsprobleme sich ergeben, wenn keine Einmütigkeit besteht. Zur Beantwortung dieser Frage ist es notwendig, den Kapitalmarkt in die Überlegungen einzubeziehen, da dieser eine bedeutende Institution der Risikoteilung ist.

Auf einem Kapitalmarkt werden Zahlungsansprüche gehandelt, die in Form von Wertpapieren (Aktien oder Anleihen) verbrieft werden. Die Börsennotierung eines Unternehmens ermöglicht es einem Investor, eine Beteiligung am Unternehmen in Form von Aktien zu relativ geringen Transaktionskosten zu erwerben und anzupassen. Indem der Investor geringe Anteile an verschiedenen Unternehmen hält, kann er zudem die Risiken aus Aktien und anderen Wertpapieren breit streuen. Aufbauend auf Kap. 8 zur Risikomischung wird in Kap. 13 untersucht, wie sich im Gleichgewicht des Kapitalmarktes die Preise der Wertpapiere bilden, die die Investoren zu Portefeuilles mischen. Es wird gezeigt, wie das aus allen Wertpapieren resultierende Risiko zwischen den Investoren geteilt wird und wie die Preise der Wertpapiere deren Nutzenfunktionen und Erwartungen widerspiegeln. Die prinzipielle Kenntnis der Determinanten der Preisbildung am Kapitalmarkt in Abhängigkeit von seinen Eigenschaften ist Voraussetzung für die entscheidungstheoretische Fundierung von Zielen für Unternehmen, insbesondere für diejenigen, deren Anteile am Kapitalmarkt notiert werden.

Vor dem Hintergrund der Darstellungen in Kap. 13 sowie jenen der Kap. 11 und 12 wird in Kap. 14 untersucht, wie im Einperioden-Fall Ziele für börsennotierte Unternehmen entscheidungstheoretisch fundiert werden können und welche finanzwirtschaftlichen Entscheidungskriterien mit ihnen im Einklang stehen. Besondere Beachtung findet dabei das Problem, unter welchen kapitalmarkttheoretischen Bedingungen es möglich ist, simultan den finanziellen Nutzen aller Anteilseigner zu maximieren (kollektive subjektive Nutzenmaximierung), und inwieweit dann das Ziel der Maximierung des Marktwertes (des Eigenkapitals) eines Unternehmens mit der kollektiven Nutzenmaximierung vereinbar ist. Außerdem wird gezeigt, wie sich diese Bedingungen und ihre Verletzungen auf die Bewertung von Investitionen auswirken. Es wird deutlich, warum das Ziel der Marktwertmaximierung für ein Unternehmen im Alleineigentum eines individuellen Investors wesentlich problematischer sein kann als für ein börsennotiertes Unternehmen, bei dem der Erfolg zwischen vielen Personen geteilt wird. Der Kapitalmarkt ist nicht nur für die Investitionsbewertung relevant, sondern praktisch für die Lösung von allen Entscheidungsproblemen mit finanziellen Konsequenzen, zum Beispiel auch für diejenigen, die in den Kap. 7 und 9 bis 12 analysiert werden.

In Kap. 15 wird untersucht, wie finanzwirtschaftliche Unternehmensziele für den Mehrperioden-Fall begründet und operational dargestellt werden können und welche Vorteilhaftigkeitskriterien für Investitionsentscheidungen damit kompatibel sind. Dabei werden wieder Konkretisierungen des Ziels der Marktwertmaximierung einerseits und des Ziels der Maximierung des subjektiven Nutzens andererseits betrachtet und verglichen. Besonderer Raum wird dabei der Frage gewidmet, wie Nutzenfunktionen für mehrperiodige Konsumströme ermittelt werden können und wie auf deren Grundlage ungewisse Ströme an finanziellen Überschüssen, die nicht mit den Konsumausgaben übereinstimmen, bewertet werden können.

Fünfter Teil: Gruppenentscheidungen

Die Gefahr „irrationaler“ oder „schlechter“ Entscheidungen ist neben potenziellen Zielkonflikten ein wesentlicher Grund dafür, dass in der Realität – vor allem auch in Unternehmen – Entscheidungskompetenzen oft nicht an einen einzelnen Entscheidungsträger, sondern an ein Entscheidungsgremium, d. h. eine Gruppe aus mehreren Entscheidern, delegiert werden. Damit die Gruppe zu einer Entscheidung kommen kann, benötigt sie eine Regel, wie die Präferenzen der einzelnen Gruppenmitglieder zu berücksichtigen sind. Soll die Entscheidung nicht diktatorisch durch ein einzelnes Gruppenmitglied erfolgen, ist daher eine demokratische Abstimmungsregel zu definieren. Mit dem Problem der Existenz und der Auswahl geeigneter Abstimmungsregeln für Gruppenentscheidungen beschäftigen sich die Kap. 16 und 17.

In Kap. 16 wird der Kommunikations- und Abstimmungsprozess in Gruppen erörtert und alternative Abstimmungsregeln werden vorgestellt und diskutiert. Zudem werden potenzielle Vor- und Nachteile von Gruppenentscheidungen im Vergleich zu Individualentscheidungen erläutert.

Wenn eine Gruppe von Personen an den Ergebnissen von Entscheidungen (etwa an Unternehmensgewinnen) partizipiert, stellt sich bei Interessenkonflikten das Problem, nach welcher Abstimmungsregel ein „gerechter“ oder „fairer“ Interessenausgleich zwischen diesen Personen vorgenommen werden kann (welche Alternative z. B. einen fairen Kompromiss verkörpert). In Kap. 17 wird gezeigt, dass nur in engen Grenzen sinnvolle Aussagen über „gerechte“ Abstimmungsregeln gemacht werden können. Dies führt zurück zur Fundierung von Unternehmenszielen. Es wird untersucht, ob und wie bei Interessenkonflikten zwischen den Gesellschaftern eines Unternehmens die Marktwerthmaximierung als „fares“ Unternehmensziel mithilfe einer Abstimmungsregel demokratisch legitimiert werden kann und welche Grenzen für faire unternehmerische Entscheidungen bestehen, wenn dies nicht der Fall ist. Wie gezeigt wird, ist für die Wahl des Unternehmensziels nicht nur das Ideal der Fairness, sondern auch die Effizienz der Entscheidungsprozesse von Bedeutung, zwischen denen abzuwägen ist. Die Darstellungen verdeutlichen entscheidungstheoretische Grundprobleme bei Unvollkommenheit und Unvollständigkeit des Kapitalmarktes und stehen damit in enger Beziehung zu den Kap. 13, 14 und 15.

Sechster Teil: Vereinfachung im Entscheidungsprozess

Im Allgemeinen ist es nicht möglich, alle als relevant erscheinenden Aspekte eines Entscheidungsproblems „originalgetreu“ in einem Entscheidungsmodell zu erfassen. Die Konstruktion und Lösung eines solchen Modells würden einen prohibitiv hohen Planungsaufwand erfordern. Es besteht somit ein Zwang zur Modellvereinfachung. Allgemeine Möglichkeiten und Konsequenzen der Vereinfachung werden am Ende des Buches in Kap. 18 untersucht. Zugleich werden Grenzen der Anwendung des entscheidungstheoretischen Instrumentariums bei Vereinfachungen aufgezeigt. Dies macht zugleich auch die Grenzen „rationaler“ Entscheidungen in allen zuvor betrachteten Entscheidungssituationen sichtbar. Trotz dieser Grenzen müssen jedoch Entscheidungen

nicht willkürlich getroffen werden. Die Darstellungen in den vorhergehenden Kapiteln geben in der Weise Orientierung, dass sie zeigen, welche Zusammenhänge bzw. Aspekte entscheidungsrelevant sind und welche Konsequenzen aus ihrer Vernachlässigung resultieren können.

Im Folgenden werden für unterschiedliche Entscheidungsprobleme Entscheidungsmodelle diskutiert, mit denen diese Probleme strukturiert und gelöst werden können. Sie können allerdings immer nur in stark vereinfachter Form explizit angewendet werden. Da sie jedoch zeigen, welche Zusammenhänge für die jeweilige Problemlösung relevant sind, geben sie zugleich Anregungen für Vereinfachungen; erst wenn eine problemadäquate, theoretisch fundierte Modellstruktur bekannt ist, kann beurteilt werden, welche Vereinfachungen überhaupt in Betracht kommen, wie sie sich auf die Qualität der Entscheidungen auswirken können und welche Informationen für „gute“ Entscheidungen besondere Bedeutung haben.

Entscheidungsmodelle können aber auch dann Orientierung für die Lösung von Entscheidungsproblemen geben, wenn sie nicht explizit angewendet werden. Auf ihrer Grundlage wird in den folgenden Kapiteln eingehend untersucht, welche Eigenschaften jeweils die optimale Problemlösung aufweist, wie sie von den maßgeblichen Zusammenhängen (den Entscheidungsdeterminanten) abhängt und wie sich Vereinfachungen auswirken können.

Am Ende jedes Kapitels finden sich eine Zusammenfassung sowie Übungsaufgaben und (mit Ausnahme von Kap. 1 sowie Kap. 18) auch deren Lösungen.

1.6 Zusammenfassung

- Die Entscheidungstheorie befasst sich in systematischer Weise mit Grundproblemen des Entscheidungsverhaltens von Individuen und Gruppen.
- Ziel der *deskriptiven Entscheidungstheorie* ist es zu beschreiben, wie Entscheidungen in der Realität getroffen werden. Hierzu sind empirisch gehaltvolle Hypothesen über das Verhalten von Individuen und Gruppen im Entscheidungsprozess zu entwickeln, mit deren Hilfe Entscheidungen prognostiziert werden können.
- Ziel der *präskriptiven (oder normativen) Entscheidungstheorie* ist es zu zeigen, wie Entscheidungen „*rational*“ getroffen werden können. Hierzu werden *Grundprobleme* der Auswahl aus mehreren einander ausschließenden Handlungsalternativen untersucht, die in allen oder zumindest in zahlreichen Entscheidungssituationen entstehen. Dabei stehen Entscheidungen im Vordergrund, die im Hinblick auf *mehrere zueinander in Konflikt stehende Ziele* und angesichts einer *ungewissen Zukunft* zu treffen sind.
- Um ein Entscheidungsproblem rational zu lösen und eine Alternative auszuwählen, muss ein Entscheider die Ergebnisse bzw. die entsprechenden Zielgrößenausprägungen prognostizieren, die er mit der Wahl einer Alternative erreichen wird. Er muss einschätzen, wie diese Ergebnisse von Umweltentwicklungen (Umweltzuständen)

abhängen, und er muss ein adäquates Zielsystem zur Bewertung der Ergebnisse formulieren.

- Das Zielsystem eines Entscheiders ist durch Konflikte und Komplementaritäten zwischen den einzelnen Zielgrößen sowie dadurch gekennzeichnet, welche Einstellung der Entscheider zur Unsicherheit hat.
- Im Allgemeinen lassen sich die Alternativen eines Entscheidungsproblems nicht als Einzelmaßnahmen beschreiben, über die unabhängig voneinander entschieden werden kann. Vielmehr ist aufgrund von Interdependenzen (Verbundeffekten) die Lösung des Entscheidungsproblems in der Regel nur über eine simultane Planung aller Einzelmaßnahmen möglich. Vier Arten von Interdependenzen werden unterschieden: Restriktionsverbund, Erfolgsverbund, Risikoverbund und Bewertungsverbund.
- Eine rationale Entscheidung kann nur dann getroffen werden, wenn Zielvorstellungen für die Beurteilung der Alternativen existieren. Demnach besteht eines der Kernprobleme der präskriptiven Entscheidungstheorie darin zu untersuchen, wie das Zielsystem eines Entscheiders konkret ermittelt und dargestellt werden kann.
- Zu den wichtigsten Entscheidungshilfen, die im Rahmen der deduktiven Forschung der Entscheidungstheorie und der Betriebswirtschaftslehre erarbeitet werden, zählen Typen allgemeiner Entscheidungsmodelle. Mit solchen allgemeinen Entscheidungsmodellen besteht die Möglichkeit, reale Entscheidungsprobleme des jeweiligen Typs so konkret zu beschreiben bzw. zu strukturieren, dass sie anschließend mithilfe der Logik bzw. bestimmter Rechentechniken „gelöst“ werden können.

Ergänzende und vertiefende Literatur

Bamberg et al. (2012, Kap. 1); Bitz (1977); Bretzke (1980); Dinkelbach (1993); Eisenführ et al. (2010, Kap. 1); Gillenkirch und Velthuis (2007); Hax (1974, S. 11–18); Kahneman und Tversky (1979); Klein und Scholl (2004); Kleindorfer et al. (1993, S. 3–63); Kreikebaum (1997); Laux und Liermann (2005); Schauenberg (1985); Vetschera (1995).

1.7 Übungen

Aufgabe 1.1

- a) Diskutieren Sie die gegenseitige Abhängigkeit (Interdependenz) von Zielgrößen für den Eigentümer eines Unternehmens in der Textilindustrie. Berücksichtigen Sie als Zielgrößen neben dem Gewinn umweltbezogene und sozialbezogene Ziele. Diskutieren Sie zudem, welchen Einfluss die Wettbewerbsbedingungen auf die Abwägung der Zielgrößen haben können.
- b) Auch zwischen den Zielvorstellungen eines Entscheiders und der von ihm betrachteten Alternativenmenge bestehen Abhängigkeiten. Verdeutlichen Sie dies an der Entscheidung über die Aufnahme eines Studiums.
- c) Betrachten Sie eine Molkerei und geben Sie für das Unternehmen Beispiele für einen Restriktionsverbund, einen Erfolgsverbund und einen Risikoverbund.

Aufgabe 1.2

Diskutieren Sie für die folgenden Entscheidungen die Bedeutung der normativen und der deskriptiven Entscheidungstheorie:

- i) Standortwahl eines Unternehmers;
- ii) Preisgestaltung für ein neues Produkt;
- iii) Abgabe eines Angebots bei der Versteigerung eines Kunstwerkes.

Literatur

- Bamberg, G., Coenenberg, A.G., Krapp, M.: Betriebswirtschaftliche Entscheidungslehre, 15. Aufl. Vahlen, München (2012)
- Bernoulli, D.: Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis. Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae **5**, 175–192 (1738) (Dt. Übersetzung von Alfred Pringsheim: Die Grundlagen der modernen Wertlehre: Daniel Bernoulli, Versuch einer neuen Theorie der Wertbestimmung von Glücksfällen. Leipzig 1896)
- Bitz, M.: Die Strukturierung ökonomischer Entscheidungsmodelle. Gabler, Wiesbaden (1977)
- Bitz, M.: Entscheidungstheorie. Vahlen, München (1981)
- Bretzke, W.-R.: Der Problembezug von Entscheidungsmodellen. Mohr, Tübingen (1980)
- Camerer, C.F.: Behavioral Game Theory. Princeton University Press, Princeton (2003)
- Dinkelbach, W.: Entscheidungstheorie. In: Grochla, E., Wittmann, W. (Hrsg.) Handwörterbuch der Betriebswirtschaft, Bd. I/1, 5. Aufl. S. 1290–1301. Schaffer-Poeschel, Stuttgart (1993)
- Gaitanides, M.: Planungsmethodologie. Duncker & Humblot, Berlin (1979)
- Gillenkirch, R., Velthuis, L.: Zielsysteme. In: Köhler, R., Küpper, H.-U., Pfingsten, A. (Hrsg.) Handwörterbuch der Betriebswirtschaftslehre, S. 2029–2037. Schaffer-Poeschel, Stuttgart (2007)
- Güth, W.: Spieltheorie und ökonomische (Bei)Spiele, 2. Aufl. Springer, Berlin (1999)
- Hax, H.: Entscheidungsmodelle in der Unternehmung. Einführung in Operations Research. Rowohlt, Reinbek (1974)
- Holler, M.I., Illing, G.: Einführung in die Spieltheorie, 7. Aufl. Springer, Berlin (2009)
- Kahneman, D., Tversky, A.: Prospect theory: an analysis of decision under risk. *Econometrica* **47**, 263–291 (1979)
- Klein, R., Scholl, A.: Planung und Entscheidung. Vahlen, München (2004)
- Kleindorfer, P.R., Kunreuther, H.C., Schoemaker, P.J.H.: Decision Sciences. Cambridge University Press, Cambridge (1993)
- Kreikebaum, H.: Strategische Unternehmensplanung, 6. Aufl. Kohlhammer, Stuttgart (1997)
- Laux, H., Liermann, F.: Grundlagen der Organisation, 6. Aufl. Springer, Berlin (2005)
- Schauenberg, B.: Jenseits von Logik und Empirie – Anmerkungen zur Pragmatik betriebswirtschaftlicher Entscheidungstheorie. In: Stöppler, S. (Hrsg.) Information und Produktion, S. 277–292. Poeschel, Stuttgart (1985)
- Schneeweiß, C.: Elemente einer Theorie betriebswirtschaftlicher Modellbildung. *Z. Betriebswirtsch.* **54**, 480–504 (1984)
- Schneeweiß, H.: Das Grundmodell der Entscheidungstheorie. *Statistische* **7**, 125–137 (1966)
- Vetschera, R.: Informationssysteme der Unternehmensführung. Springer, Berlin (1995)
- Wiese, H.: Entscheidungs- und Spieltheorie. Springer, Berlin (2002)

Struktur und Bedeutung von Entscheidungsmodellen

2

2.1 Problemstellung und Aufbau

Die Entscheidungsprobleme, mit denen man täglich konfrontiert wird, mögen auf den ersten Blick äußerst heterogen erscheinen. So hat z. B. die Auswahl eines Mittagessens aus einer Speisekarte in materieller Hinsicht nur wenig mit der Entscheidung über eine neue Arbeitsstelle zu tun. Dennoch gibt es eine allgemeine Struktur, auf die alle Entscheidungsprobleme zurückgeführt werden können. Entsprechend existiert auch eine gemeinsame Grundstruktur für *Entscheidungsmodelle*, auch wenn sich diese im Detail sehr unterscheiden mögen.

Wie im Folgenden deutlich wird, besteht jedes Entscheidungsmodell aus den Bausteinen „Handlungsalternativen“, „Ergebnisse“, „Umweltzustände“ (im Allgemeinen unter Berücksichtigung ihrer Eintrittswahrscheinlichkeiten) und „Entscheidungsregel“. Zunächst wird gezeigt, wie diese Bausteine formal dargestellt werden können (Abschn. 2.2). Danach wird untersucht, wie sie in einer universellen Form im Grundmodell der Entscheidungstheorie erfasst werden können (Abschn. 2.3). Ein Entscheidungsmodell kann seine Aufgabe, die logische Ableitung der Entscheidung aus der Darstellung des Entscheidungsproblems im Modell, nur erfüllen, wenn Zielvorstellungen präzisiert werden. Die Problematik der Abbildung von Zielen in Entscheidungsmodellen wird nachfolgend betrachtet (Abschn. 2.4). Abschließend werden unterschiedliche Systematiken von Entscheidungsmodellen diskutiert (Abschn. 2.5) und es wird erläutert, welche grundsätzliche Bedeutung Entscheidungsmodellen für die Lösung von Entscheidungsproblemen zukommt (Abschn. 2.6).

Im vorliegenden zweiten Kapitel geht es um den *prinzipiellen* Aufbau von Entscheidungsmodellen. In den nachfolgenden Kapiteln wird gezeigt, wie derartige Modelle bei Sicherheit und Unsicherheit konstruiert werden können. Dabei wird ein Teil der folgenden Darstellungen präzisiert. Außerdem wird für unterschiedliche Entscheidungssituationen

untersucht, wie die optimale Problemlösung von den jeweils entscheidungsrelevanten Zusammenhängen abhängt. Damit geben die dargestellten Entscheidungsmodelle auch dann Orientierung für das Treffen komplexer Entscheidungen, wenn sie gar nicht explizit angewendet werden.

2.2 Die Basiselemente eines Entscheidungsmodells

2.2.1 Überblick

Ein Entscheidungsmodell setzt sich zusammen aus dem *Entscheidungsfeld*, d. h. den modellmäßig erfassten „Alternativen“, „Umweltzuständen“ (gegebenenfalls unter Berücksichtigung ihrer Eintrittswahrscheinlichkeiten) sowie den jeweiligen „Ergebnissen“, und der *Entscheidungsregel*. Abb. 2.1 bringt die Bausteine (Basiselemente) eines Entscheidungsmodells in eine Systematik.¹

Die formale Darstellung dieser Basiselemente kann in sehr unterschiedlicher Weise geschehen. Es entstehen hierdurch Varianten von Entscheidungsmodellen, deren Auswahl als Entscheidungsgrundlage nach Zweckmäßigkeitsgesichtspunkten erfolgen muss. Zunächst sollen die Basiselemente und ihre Darstellungsweisen erläutert werden.

2.2.2 Entscheidungsfeld

2.2.2.1 Alternativen

Ein Entscheidungsproblem liegt nur dann vor, wenn mindestens zwei Alternativen gegeben sind; dementsprechend muss ein Entscheidungsmodell mindestens zwei Alternativen erfassen. Die Alternativen lassen sich grundsätzlich durch die Werte solcher Größen beschreiben, die der Entscheider (innerhalb bestimmter Grenzen) eigenständig variieren kann. Diese Größen werden als *Entscheidungsvariablen* oder auch als *Aktionsvariablen* bzw. *Aktionsparameter* bezeichnet. Wenn es im Rahmen eines Entscheidungsproblems z. B. um die Festlegung der Produktionsmenge eines einzigen Produktes für eine Periode geht, gibt es nur eine Entscheidungsvariable, eben die Produktionsmenge. Jede Alternative wird dann durch eine bestimmte Anzahl von Produkteinheiten definiert.

¹Abb. 2.1 zeigt, in welche Basiselemente ein Entscheidungsmodell (bzw. ein Entscheidungsfeld) zerlegt werden kann. Die Abbildung besagt nicht, die Entscheidungsregel, Alternativen, Ergebnisse und Umweltzustände stünden isoliert nebeneinander. Zwischen den einzelnen Bausteinen bestehen enge Interdependenzen. So hängen z. B. die für die Konstruktion eines konkreten Entscheidungsmodells maßgeblichen „Ergebnisse“ und „Umweltzustände“ davon ab, welche „Alternativen“ im Kalkül erfasst werden; die erwogenen Alternativen hängen ihrerseits von den Zielvorstellungen des Entscheiders ab, die durch die Entscheidungsregel ausgedrückt werden. Vgl. auch Kap. 1, Abschn. 1.2.

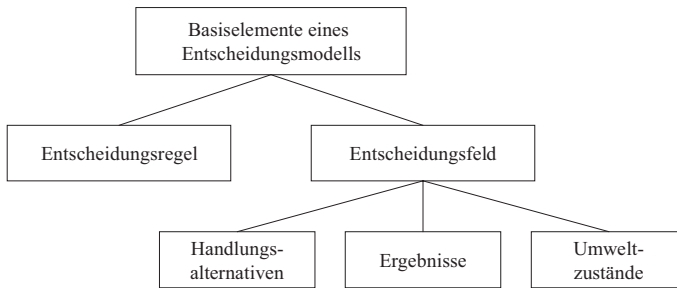


Abb. 2.1 Die Basiselemente eines Entscheidungsmodells

Die Alternativen setzen sich jedoch im Allgemeinen aus mehreren (häufig sehr vielen) Einzelaktionen zusammen (z. B. können die Alternativen verschiedene Produktions- und Absatzprogramme oder verschiedene Investitions- und Finanzierungsprogramme bezeichnen). Es sind dann mehrere Entscheidungsvariablen relevant, sodass die Alternativen durch Tupel von Ausprägungen dieser Variablen (also durch Vektoren) charakterisiert sind: Ist z. B. das Produktionsprogramm für ein Mehrproduktunternehmen zu bestimmen, entspricht jeder Alternative ein bestimmter Vektor über die Produktionsmengen der einzelnen Erzeugnisse.

Die einzelnen Alternativen werden im Folgenden mit $A_1, A_2, \dots$, die Anzahl der möglichen bzw. erwogenen Alternativen mit N_A bezeichnet. Die Menge der relevanten Alternativen wird mit $A = \{A_1, A_2 \dots A_{N_A}\}$ bezeichnet. Es wird demnach von einer endlichen Menge der Alternativen ausgegangen. Zur Kennzeichnung einer beliebigen Alternative aus der Alternativenmenge A wird das Symbol A_a verwendet.

2.2.2.2 Ergebnisse

Damit die Alternativen beurteilt werden können, müssen die damit verbundenen Konsequenzen im Modell abgebildet werden. Eine Alternative hat jedoch im Allgemeinen mehrere sehr verschiedenartige Konsequenzen, die nicht alle „originalgetreu“ erfasst werden können. Dies ist aber auch gar nicht notwendig. Für den Vergleich der zur Wahl stehenden Alternativen sind nur solche Größen als Konsequenzen relevant, deren Ausprägungen für die „Bewertung“ durch den Entscheider von Bedeutung sind. Diese werden als *Zielgrößen* (oder auch als *Zielvariablen*) bezeichnet. Die Zielgrößen bringen zum Ausdruck, welchen Konsequenzen der Alternativen der Entscheider Bedeutung beimisst (etwa Gewinn, Einkommen, Marktanteil, Freizeit); andere Konsequenzen der Alternativen, denen keine Zielgrößen entsprechen, können im Modell vernachlässigt werden.

Eine Wertekonstellation der Zielgrößen wird als *Ergebnis* bezeichnet: Orientiert sich der Entscheider nur an einer Zielgröße (z. B. am Gewinn), so entspricht jedem Ergebnis ein bestimmter Wert dieser Zielgröße. Orientiert er sich an mehr als einer Zielgröße (z. B. am Gewinn und am Umsatz), dann entspricht jedem Ergebnis eine bestimmte Wertekonstellation dieser Zielgrößen; ein Ergebnis ist dann ein Vektor von Zielgrößen-ausprägungen.

Die Zielgrößen müssen sich nicht auf ein und dieselbe Periode beziehen. Ein Ergebnis kann z. B. auch ein Strom von Einkünften in einer Reihe von aufeinanderfolgenden Perioden sein.

In dieser Arbeit werden die Alternativen grundsätzlich nach ihren (möglichen) Ergebnissen beurteilt; die Alternativen haben keine „Eigenwerte“. Wenn jedoch nur ein Teil der relevanten Zielgrößen bei der Charakteristik der Ergebnisse explizit berücksichtigt wird, können Eigenwerte für Alternativen deshalb Bedeutung erlangen, weil damit die vernachlässigten Zielgrößen implizit erfasst werden. Z. B. mögen bei einer Investitionsentscheidung die Ergebnisse ausschließlich mithilfe finanzieller Zielgrößen beschrieben werden, während Zielgrößen bezüglich Umweltschutz, Prestige oder Bequemlichkeit vereinfachend in Eigenwerten erfasst werden.

Ergebnisse werden im Folgenden mit x bezeichnet. Soll klar gestellt werden, dass es sich bei dem Ergebnis um einen Vektor mehrerer Zielgrößenausprägungen handelt, wird x fett gedruckt ($\mathbf{x}$). Soll hervorgehoben werden, dass das Ergebnis nicht sicher, sondern eine Zufallsvariable ist, wird es mit einer „Tilde“, $\tilde{x}$, gekennzeichnet.

2.2.2.3 Umweltzustände

Welches Ergebnis bei der Wahl einer Alternative erzielt wird, hängt auch von Größen ab, die der Entscheider nicht beeinflussen kann oder will (z. B. Zahl der Regentage, Angebotspreise der Lieferanten, Verkaufspreise der Konkurrenten, Nachfragemengen der Kunden). Die Größen, die die Ergebnisse der Alternativen beeinflussen, aber keine Entscheidungsvariablen des Entscheiders darstellen, werden als (entscheidungsrelevante) *Daten* bezeichnet.

Ob bestimmte Parameter Daten oder Entscheidungsvariablen sind, hängt (auch) von der jeweiligen Entscheidungssituation ab. Hat z. B. ein Unternehmer die Produktionsmenge für eine bestimmte Periode festzusetzen und besteht vollkommene Konkurrenz, so ist der zukünftige Absatzpreis Datum und keine Entscheidungsvariable. Hat das Unternehmen eine Monopolstellung, so ist der Absatzpreis Entscheidungsvariable und kein Datum; entscheidungsrelevantes Datum ist dann die Gestalt der Preis-Absatz-Funktion. Wird allerdings erwogen, durch Werbung die Preis-Absatz-Funktion zu beeinflussen, so ist auch die Preis-Absatz-Funktion kein Datum; Daten sind dann die Parameter der Werbewirkungs-Funktion.

Der Entscheider kennt nur in Ausnahmefällen mit Sicherheit die Ausprägungen aller entscheidungsrelevanten Daten. So hegt etwa ein Investor, der ein Investitions- und Finanzierungsprogramm zu planen hat, mehrwertige Erwartungen über die zukünftigen Einzahlungsüberschüsse und Kapitalkosten (denn er kennt z. B. nicht genau die zukünftigen Absatzmöglichkeiten, die Entwicklung der Lohnkosten, die Geldpolitik der EZB).

Die einander ausschließenden Konstellationen von Ausprägungen der entscheidungsrelevanten Daten werden als *Umweltzustände* oder kurz als Zustände bezeichnet. Existiert nur ein entscheidungsrelevantes Datum, so entspricht jedem möglichen Wert dieses Datums ein Zustand. Bei mindestens zwei Daten sind die Zustände durch Vektoren charakterisiert: Jeder möglichen Wertekonstellation der Daten entspricht dann ein bestimmter Zustand.

Im Entscheidungsmodell müssen auch die möglichen Zustände berücksichtigt werden. Hierzu ist die (subjektive) Erwartungsstruktur des Entscheiders über die Zustände zu präzisieren. In dieser Arbeit werden Entscheidungsmodelle für folgende idealtypische Erwartungsstrukturen analysiert:

Bei *Sicherheit* ist dem Entscheider bekannt, welcher Zustand der wahre ist (welche Ausprägungen also die entscheidungsrelevanten Daten annehmen werden). Entsprechend kennt er für jede Alternative auch das Ergebnis, das bei ihrer Wahl erzielt wird (zumindest kann er es eindeutig bestimmen); in einer Entscheidungssituation bei *Sicherheit* gibt es nur „*sichere*“ Alternativen.

In einer Entscheidungssituation bei *Unsicherheit* hält der Entscheider mindestens zwei Zustände für möglich, von denen genau einer eintreten wird. Dabei ist es durchaus möglich, dass nicht alle Alternativen „unsicher“ sind, sondern bei einem Teil der Alternativen in jedem Zustand jeweils dasselbe Ergebnis erzielt wird, das Ergebnis also sicher ist. In der Literatur werden zwei Grenzfälle der Unsicherheit unterschieden, die auch in dieser Arbeit behandelt werden:

- *Unsicherheit i. e. S.*: Bei Unsicherheit im engeren Sinne ist der Entscheider nicht in der Lage, sich ein Wahrscheinlichkeitsurteil über die möglichen Zustände zu bilden. Er kann lediglich angeben, welche Zustände überhaupt eintreten können, also eine positive Eintrittswahrscheinlichkeit aufweisen. Darüber hinaus kann er jedoch keine präziseren Angaben über die Wahrscheinlichkeiten machen.
- *Risiko*: In einer Risikosituation kann der Entscheider den denkbaren Zuständen Eintrittswahrscheinlichkeiten zuordnen. Entsprechend kennt er für jede Alternative die Wahrscheinlichkeiten ihrer möglichen Ergebnisse. Für jede Zielgröße kann er den Erwartungswert und die Wahrscheinlichkeiten ihrer möglichen Abweichungen hiervon ermitteln. Risikosituationen stehen im Vordergrund dieser Arbeit.

Abb. 2.2 veranschaulicht die Systematik möglicher Erwartungsstrukturen.

Die einzelnen Umweltzustände werden im Folgenden mit $S_1, S_2, \dots$ bezeichnet, die (endliche) Anzahl der möglichen Umweltzustände mit N_S . Die Menge der möglichen Umweltzustände wird mit $S = \{S_1, S_2 \dots S_{N_S}\}$ bezeichnet. Zur Kennzeichnung eines beliebigen Zustandes aus der Menge S wird das Symbol S_s verwendet.

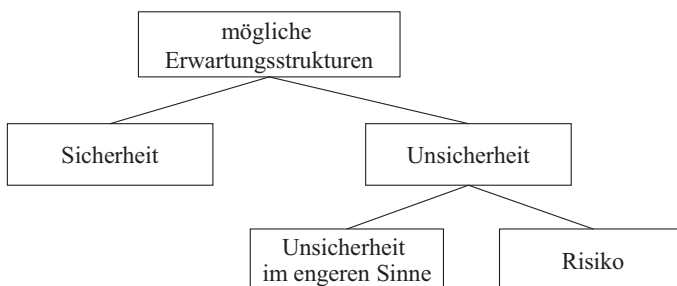


Abb. 2.2 Mögliche Erwartungsstrukturen über die Zustände

2.2.3 Entscheidungsregel

Eine rationale Entscheidung besteht in der Auswahl derjenigen Alternative, welche ein größtmögliches Ausmaß an Bedürfnisbefriedigung des Entscheiders verspricht. Eine *Entscheidungsregel* legt fest, wie im Rahmen eines Entscheidungsmodells aus einer Alternativenmenge ausgewählt wird, um dieses Ziel zu erreichen. Sie besteht aus einer *Präferenzfunktion* $\Phi(A_a)$, die den einzelnen Alternativen A_a Präferenzwerte zuordnet, sowie einem *Optimierungskriterium*, das zum Ausdruck bringt, welche Ausprägung für den Präferenzwert angestrebt wird. Der einer Alternative entsprechende Präferenzwert kann als Indikator für den Grad der Bedürfnisbefriedigung oder Zielerreichung interpretiert werden, der bei Wahl der Alternative realisiert wird. Für die (mehr oder weniger exakte) formale Darstellung der Entscheidungsregel in einem konkreten Entscheidungsmodell wird häufig der Begriff *Zielfunktion* verwendet.

Eine Präferenzfunktion $\Phi(A_a)$ bzw. eine Entscheidungsregel kann nur dann sinnvoll formuliert werden, wenn Zielvorstellungen existieren, mit deren Hilfe die erwogenen Alternativen hinsichtlich ihrer Konsequenzen miteinander verglichen werden können. Solche Zielvorstellungen müssen auch bei der Konstruktion eines Entscheidungsmodells einbezogen werden. Zielvorstellungen bringen gewisse Wünsche (Ziele) zum Ausdruck (Dinkelbach 1978, S. 51 f.). Ein Ziel ist dadurch gekennzeichnet, dass ein zukünftiger Zustand angestrebt wird, der sich im Allgemeinen vom gegenwärtigen (Ausgangs-) Zustand unterscheidet und als Endzustand bezeichnet wird. Das Gefüge von Zielgrößen einer Person wird als individuelles *Zielsystem* bezeichnet. Die Zuordnung des Präferenzwertes $\Phi(A_a)$ zu einer Alternative A_a setzt voraus, dass der Entscheider die (möglichen) Ergebnisse der Alternative bewertet. Hierzu muss er, wenn er sich an mehreren Zielgrößen orientiert, zwischen den unterschiedlichen Ausprägungen der Zielgrößen abwägen und damit die Zielgrößen vergleichbar machen. Mit dem Problem der Zusammenfassung der Ausprägungen unterschiedlicher Zielgrößen befasst sich Kap. 3. Hat die Alternative zudem mehrere mögliche Ergebnisse, besteht also Unsicherheit, so muss die Präferenzfunktion auch eine Regel beinhalten, wie dieser Unsicherheit Rechnung getragen wird. Mit diesem Problem befassen sich die Kap. 4, 5, 14 und 15.

In der Entscheidungslogik wird üblicherweise die Maximierung als Optimierungskriterium unterstellt. Auch in dieser Arbeit wird stets von der Maximierungsvorschrift ausgegangen. Dadurch wird die Allgemeinheit der Darstellungen nicht eingeschränkt, denn die Präferenzfunktion kann immer so definiert werden, dass ihre Maximierung sinnvoll ist (Dinkelbach 1978). Soll beispielsweise eine Alternative mit minimalen Kosten bestimmt werden, so ist dieses Problem der Maximierung der jeweils mit negativem Vorzeichen versehenen Kosten äquivalent. Die Entscheidungsregel besagt dann, dass von zwei beliebigen Alternativen derjenigen mit dem höheren Präferenzwert der Vorzug zu

geben ist; bei gleichen Präferenzwerten sind beide Alternativen gleichwertig. Demgemäß lautet die Entscheidungsregel generell:

$$\Phi(A_a) \rightarrow \underset{a}{\text{Max}} ! \quad (2.1)$$

In Worten: Gesucht ist dasjenige Element (bzw. diejenigen Elemente) A_a aus der Alternativenmenge $\mathbf{A}$, das (bzw. die) den Wert der Präferenzfunktion Φ maximiert (bzw. maximieren).

Durch Anwendung einer Entscheidungsregel soll diejenige Alternative ermittelt werden, welche die Zielvorstellungen des Entscheiders bestmöglich erfüllt. Welche Rangfolge bezüglich der übrigen Handlungsalternativen besteht, bleibt dabei offen. Die Anwendung der Präferenzfunktion auf die Bewertung der Alternativen erlaubt freilich auch die Ermittlung einer Rangfolge über alle erwogenen Alternativen. Die Rangfolge ist vollständig, wenn sie für jedes Alternativenpaar angibt, ob die eine Alternative der anderen strikt vorgezogen wird, ob es umgekehrt ist oder ob der Entscheider indifferent zwischen den Alternativen ist. Sie ist transitiv, wenn die Präferenzrelationen widerspruchsfrei sind (vgl. Abschn. 2.4.1). Eine vollständige und transitive Rangfolge über die Alternativen wird als *Präferenzordnung* bezeichnet. Für eine Entscheidung genügt es in der Regel, wenn der Entscheider durch die Anwendung der Präferenzfunktion eine beste Alternative bestimmt, also einen Spitzenreiter bestimmt. Anders verhält es sich, wenn mehrere Entscheider mit einer Abstimmungsregel eine (demokratische) Entscheidung treffen wollen. In diesem Fall ist es grundsätzlich notwendig, dass die Entscheider Präferenzordnungen bilden (Kap. 16 und 17).²

Mit einer Entscheidungsregel wird – bei gegebenen Vorstellungen über die Konsequenzen der Alternativen – die Bewertung einer Alternative A_a auf einen rein analytischen Vorgang reduziert: Mithilfe der entsprechenden Präferenzfunktion wird eben der Präferenzwert $\Phi(A_a)$ berechnet. Die für eine bestimmte Entscheidungssituation relevante Präferenzfunktion Φ muss vom Entscheider selbst festgelegt werden. Die Wahl einer Präferenzfunktion ist also ihrerseits ein Entscheidungsproblem (ein „Meta-Entscheidungsproblem“), das zu den Kernproblemen der Entscheidungstheorie zählt.

Wie erläutert erfordert die Formulierung der Präferenzfunktion $\Phi(A_a)$ sowohl eine Bewertung der einzelnen Ergebnisse der Alternative als auch die Berücksichtigung von Unsicherheit, sofern diese besteht. Bei Sicherheit dagegen ist mit der Wahl einer Alternative A_a ein eindeutiges Ergebnis $\mathbf{x}_a$ verbunden und das Bewertungsproblem beschränkt

²Die Bestimmung einer Präferenzordnung kann auch dann sinnvoll sein, wenn nicht sicher ist, ob die erwogenen „Alternativen“ überhaupt durchgeführt werden können. Die vorherige Kenntnis der Präferenzordnung kann dann die Wahrnehmung der bestmöglichen Alternative erleichtern. Ein Entscheider plane z. B. seinen Urlaub. Da er eine Ferienwohnung mieten will, hat er sich einen Katalog darüber besorgt. Er sieht nun diesen Katalog durch und bildet eine Präferenzordnung über alle in Frage kommenden Ferienwohnungen. Auf diese Weise kann er bei der Buchung im Reisebüro schnell und zugleich überlegt reagieren, wenn die von ihm am meisten präferierten Ferienwohnungen ausgebucht sind.

sich auf die Bewertung der einzelnen Ergebnisse. Die entsprechende Bewertungsfunktion wird auch als *Nutzenfunktion* $U(\mathbf{x}_a)$ bezeichnet. Bei Sicherheit gilt:

$$\Phi(A_a) = U(\mathbf{x}_a) \quad (2.2)$$

mit $\mathbf{x}_a$ dem sicheren Ergebnis der Alternative A_a . Mit dem Problem der Zusammenfassung der Ausprägungen unterschiedlicher Zielgrößen bei Sicherheit zu einem Präferenzwert für eine Alternative befasst sich Kap. 3.

Bei Unsicherheit ist neben der Ermittlung einer Nutzenfunktion für die Ergebnisse ein zweites Teilproblem zu lösen: Die mehrwertigen, unsicheren Ergebnisse einer Alternative sind zu einem Präferenzwert als einwertige Größe für diese Alternative zusammenzufassen. Hiermit befassen sich die Kap. 4, 5, 14 und 15.

Da bei sicheren Erwartungen jeder Alternative genau ein Ergebnis entspricht, muss die Nutzenfunktion U bei Sicherheit nur die Bedingung erfüllen, dass der Vergleich zweier Nutzenwerte angibt, welches der jeweiligen Ergebnisse vorgezogen wird (oder ob Indifferenz besteht); es kann offen bleiben, mit welcher „Intensität“ dies der Fall ist, d. h. die betragsmäßigen Unterschiede zwischen den Nutzenwerten sind irrelevant. Man bezeichnet eine Nutzenfunktion, die diese Eigenschaft aufweist, als *ordinal*. Da es unendlich viele Nutzenfunktionen gibt, die eine solche Präferenzordnung herstellen, ist dann also die Nutzenfunktion nicht eindeutig bestimmt. Die mathematische Repräsentation dieser Mehrdeutigkeit der Nutzenfunktion erfolgt über eine *monoton wachsende Transformation*. Das bedeutet, dass eine Nutzenfunktion in eine beliebige andere Nutzenfunktion transformiert werden kann, indem z. B. eine beliebige Zahl hinzuaddiert wird, der Nutzenwert mit einer beliebigen positiven Zahl multipliziert wird oder der Nutzenwert quadriert wird. Allgemein gilt: Die Nutzenfunktionen $U(x)$ und $U^*(x)$ mit

$$U^*(x) = g[U(x)], \quad g' > 0, \quad (2.3)$$

führen immer zu identischen Präferenzordnungen.

Bei Sicherheit wird also mithilfe einer ordinalen Nutzenfunktion eine Alternative mit dem besten Ergebnis gewählt, unabhängig davon, ob dieses Ergebnis „wesentlich“ oder nur „geringfügig“ besser ist als die anderen möglichen Ergebnisse. Bei Unsicherheit i. e. S. und bei Risiko entsprechen jedoch einigen oder allen Alternativen *mehrere* mögliche Ergebnisse. Es existiert dann im Allgemeinen keine Alternative, die in jedem Fall zu einem besseren oder ebenso guten Ergebnis führt als alle anderen Alternativen: Wird irgendeine Alternative gewählt, besteht zum einen die Chance, dass ein besseres Ergebnis erzielt wird als bei Wahl einer anderen Alternative; zum anderen besteht aber auch die Gefahr, dass sich ein schlechteres Ergebnis einstellen wird. Bei der Entscheidung müssen derartige Chancen und Gefahren gegeneinander abgewogen werden. Eine Alternative wird einer zweiten vorgezogen, wenn die möglichen Vorteile der einen Alternative (im Vergleich zu denen der zweiten) stärker ins „Gewicht“ fallen als die möglichen Nachteile. Es genügt daher nicht, wenn die Nutzenfunktion U lediglich zum Ausdruck bringt, welches von zwei beliebigen Ergebnissen vorgezogen wird oder ob Indifferenz besteht. Damit aus der Nutzenfunktion U bei Unsicherheit eine Präferenzfunktion Φ

bezüglich der Alternativen abgeleitet werden kann, muss die Nutzenfunktion stärkeren Anforderungen genügen: Sie muss die „Intensität“ zum Ausdruck bringen, mit der ein beliebiges Ergebnis einem anderen vorgezogen wird.

Auch diese Nutzenfunktion ist nicht eindeutig gegeben. Für Entscheidungsprobleme bei Risiko, die im Vordergrund der Arbeit stehen, ist sie nur bis auf eine positiv lineare Transformation bestimmt, d. h. die Nutzenfunktionen $U(x)$ und $U^*(x)$ mit

$$U^*(x) = a \cdot U(x) + b, \quad a > 0, \quad (2.4)$$

führen immer zu derselben Präferenzordnung. Man bezeichnet eine Nutzenfunktion mit dieser Eigenschaft als *kardinal*. In Kap. 5, Abschn. 5.3.2, wird gezeigt, wie eine kardinale Nutzenfunktion für Risikosituationen ermittelt werden kann.

Für die Suche nach einer Präferenzfunktion bei Sicherheit reicht wie erläutert eine ordinale Nutzenfunktion aus. Wenn allerdings mehrere Zielgrößen zu beachten sind, besteht schon bei Sicherheit ein Abwägungsproblem, und zwar auf der Ebene der Zielgrößen. Es müssen bei der Suche nach einer optimalen Alternative Überlegungen angestellt werden, inwieweit Unterschiede in einer Zielgröße durch Unterschiede bei anderen Zielgrößen ausgeglichen werden können.

2.2.4 Entscheidungskriterium, Entscheidungsprinzip und Entscheidungsregel

Wie erläutert, soll eine Entscheidungsregel (die Präferenzfunktion und das Optimierungskriterium für den Präferenzwert) die Lösung eines Entscheidungsproblems ermöglichen. Im Gegensatz zu einer Entscheidungsregel führt ein *Entscheidungsprinzip* grundsätzlich nicht zu einer eindeutigen Lösung des Entscheidungsproblems. Ein Entscheidungsprinzip legt die Präferenzfunktion nicht eindeutig fest, sondern gibt lediglich Richtlinien für die Ermittlung der Präferenzfunktion und somit auch für die Gestalt der Entscheidungsregel vor. Ein Entscheidungsprinzip stellt bestimmte Anforderungen an die Präferenzfunktion und schränkt dadurch den Bereich zulässiger Präferenzfunktionen ein. Es gestattet aber, noch frei zwischen denjenigen Präferenzfunktionen zu wählen, die den gesetzten Anforderungen genügen. Je mehr Entscheidungsprinzipien befolgt werden, desto enger wird im Allgemeinen der Entscheidungsspielraum im Hinblick auf die Wahl einer Präferenzfunktion. Im Grenzfall bleibt nur noch *eine* Präferenzfunktion übrig; dann bilden die betreffenden Entscheidungsprinzipien gemeinsam eine Entscheidungsregel. Der der Entscheidungsregel und dem Entscheidungsprinzip übergeordnete Begriff ist das *Entscheidungskriterium*.

Ein Beispiel mag den Unterschied zwischen Entscheidungsprinzip und Entscheidungsregel verdeutlichen. Ein Entscheider erhält das Angebot, an einem Glücksspiel teilzunehmen, bei dem er mit jeweils der Wahrscheinlichkeit $1/3$ entweder 100 € gewinnen oder 30 € gewinnen oder 100 € verlieren wird. Der Entscheider muss nun die möglichen Ergebnisse in seiner Bewertung des Glücksspiels zusammenfassen, um zu

einer Entscheidung über seine Teilnahme am Glücksspiel zu kommen. Er könnte sich nun an der folgenden Entscheidungsregel orientieren: Nimm teil, wenn der Erwartungswert des Gewinns positiv ist. Da dieser Erwartungswert

$$\frac{1}{3} \cdot 100 + \frac{1}{3} \cdot 30 - \frac{1}{3} \cdot 100 = 10$$

beträgt und somit positiv ist, sollte der Entscheider also nach der Entscheidungsregel am Glücksspiel teilnehmen. Tatsächlich aber gebe er an, dass er zwar bereit sei, einen Erwartungswert zu berücksichtigen, dabei aber den Gewinn von 100 € betraglich anders zu bewerten gedenke als den Verlust von 100 €. Als Begründung gebe er an, dass ein Verlust aus seiner Sicht schwerer wiege als ein betraglich gleicher Gewinn. Bezeichnet $U(x)$ die Bewertungs- bzw. Nutzenfunktion für die Ergebnisse, so orientiert sich der Entscheider nun an

$$\frac{1}{3} \cdot U(100) + \frac{1}{3} \cdot U(30) + \frac{1}{3} \cdot U(-100).$$

Offenbar kann keine Aussage darüber getroffen werden, ob der Entscheider an dem Glücksspiel teilnehmen soll, ohne dass die Nutzenfunktion $U(x)$ spezifiziert wird. Es liegt mithin ein Entscheidungsprinzip vor, nach dem der Entscheider sich am Erwartungswert der mit der Funktion $U(x)$ bewerteten Ergebnisse orientiert, und erst mit Spezifikation dieser Funktion wird daraus eine Entscheidungsregel.

2.3 Grundmodell der Entscheidungstheorie

2.3.1 Grundstruktur des Modells

Bei der Konstruktion eines Entscheidungsmodells stellt sich das Problem, in welcher Weise die einzelnen Basiselemente des Modells dargestellt werden sollen. Ein sehr anschauliches Darstellungskonzept bietet das *Grundmodell der Entscheidungstheorie* (Schneeweiß H. 1966), dessen wesentliche Bausteine die *Entscheidungsregel* und die *Ergebnismatrix* sind. Dabei dient die Ergebnismatrix zur Beschreibung des Entscheidungsfeldes. Tab. 2.1 zeigt die Ergebnismatrix bei Risiko.

In der Vorspalte der Ergebnismatrix sind die erwogenen Alternativen ($A_1, A_2, \dots, A_{N_A}$) aufgeführt. In der Kopfzeile sind die Umweltzustände angegeben, die im Urteil des Entscheiders möglich sind. Als Elemente der Ergebnismatrix werden die jeweiligen Ergebnisse dargestellt. Dabei bezeichnet x_{as} ($a = 1, 2, \dots, N_A$; $s = 1, 2, \dots, N_S$) jenes Ergebnis, das erzielt wird, wenn die Alternative A_a gewählt wird und der Zustand S_s eintritt.

In Risikosituationen ist die Ergebnismatrix durch die Wahrscheinlichkeiten für die Zustände zu ergänzen. Diese finden sich ebenfalls in der Kopfzeile der Ergebnismatrix. Die Wahrscheinlichkeit für den Zustand S_s ($s = 1, 2, \dots, N_S$) wird mit $w(S_s)$ bezeichnet ($w(S_s) > 0$).

Tab. 2.1 Ergebnismatrix bei Risiko

	$w(S_1)$ S_1	$w(S_2)$ S_2	...	$w(S_s)$ S_s	...	$w(S_{N_S})$ S_{N_S}
A_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1s}	...	x_{1N_S}
A_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2s}	...	x_{2N_S}
.	.	.		.		.
.	.	.		.		.
A_a	x_{a1}	x_{a2}	...	x_{as}	...	x_{aN_S}
.	.	.		.		.
.	.	.		.		.
A_{N_A}	$x_{N_A 1}$	$x_{N_A 2}$	...	$x_{N_A s}$	...	$x_{N_A N_S}$

Mit dem Erstellen der Ergebnismatrix ist das Entscheidungsproblem noch nicht gelöst. Es ist ja noch offen, welche Alternative gewählt werden soll. Um eine Entscheidung treffen zu können, müssen die möglichen Ergebnisse gegeneinander abgewogen werden. Dies setzt die Existenz einer Entscheidungsregel voraus. Erst wenn die Ergebnismatrix durch eine Entscheidungsregel ergänzt wird, entsteht ein vollständiges Entscheidungsmodell; es wird als *Grundmodell der Entscheidungstheorie* bezeichnet.

Die Struktur der beiden Bausteine des Modells (Ergebnismatrix und Entscheidungsregel) soll nun näher betrachtet werden. Die in der Ergebnismatrix dargestellten Alternativen $A_1, A_2, \dots, A_{N_A}$ schließen einander aus; nur eine von ihnen kann gewählt werden. Der Entscheider kann natürlich immer nur solche Alternativen in sein Entscheidungskalkül einbeziehen, die er nach mehr oder weniger kreativer Alternativensuche und/oder nach Beratung durch andere Personen überhaupt wahrnimmt. Objektiv wird es im Allgemeinen noch weitere, ihm unbekannte Alternativen geben. Um den Planungsaufwand in akzeptablen Grenzen zu halten, wird der Entscheider seinen Handlungsspielraum andererseits oft *bewusst* einengen. In diesem Fall trifft er eine Vorauswahl, indem er bestimmte, als möglich erkannte Alternativen nicht in sein Entscheidungskalkül (hier: die Ergebnismatrix) einbezieht. Vor allem können solche Alternativen vernachlässigt werden, bei denen von vornherein zu erwarten ist, dass sie den Zielvorstellungen des Entscheiders nicht genügen.

Enthält die Ergebnismatrix alle Zustände, die aus der Sicht des Entscheiders eintreten können, muss sich im Urteil des Entscheiders genau einer der aufgeführten Zustände einstellen. Die Summe der Eintrittswahrscheinlichkeiten aller Umweltzustände beträgt dann eins: $w(S_1) + w(S_2) + \dots + w(S_{N_S}) = 1$. Im Allgemeinen sind jedoch sehr viele Zustände möglich. Gibt es z. B. vier entscheidungsrelevante Daten, die unabhängig voneinander je drei Werte annehmen können, so sind bereits $3^4 = 81$ Zustände möglich. Bei der konkreten Darstellung einer Ergebnismatrix ergibt sich daher im Allgemeinen die Notwendigkeit, die Anzahl der Zustände zu begrenzen. Z. B. können bei der Beschreibung der Zustände weniger „wichtige“ Daten völlig vernachlässigt werden

und/oder jeweils mehrere mögliche Zustände zusammengefasst und durch jeweils einen „mittleren“ Zustand repräsentiert werden (vgl. hierzu Kap. 18).

Auch die Ermittlung und Darstellung der Ergebnisse x_{as} kann einen großen Planungs- und Rechenaufwand verursachen. Das gilt vor allem dann, wenn es mehrere Zielgrößen gibt. Es liegt dann nahe, die weniger „wichtigen“ Zielgrößen zu vernachlässigen.

In dieser Arbeit wird im Allgemeinen davon ausgegangen, dass durch die gewählte Alternative und den eintretenden Umweltzustand der Wert der Zielgröße bzw. (bei mehreren Zielgrößen) die Werte der Zielgrößen deterministisch bestimmt sind; jedem Ergebnis x_{as} entspricht also ein eindeutiger Zielgrößenwert bzw. ein eindeutiger Vektor von Zielgrößenwerten. Je nach Beschreibung der Alternativen und der Zustände ist es aber auch möglich, dass die Ergebnisse x_{as} mehrwertig sind. Wird beispielsweise bei der Beschreibung der Umweltzustände vereinfacht, indem mehrere Umweltzustände zu einem „mittleren“ Zustand zusammengefasst werden, so steht das Ergebnis mit Eintreten dieses mittleren Zustandes nicht notwendigerweise fest, sondern kann stattdessen einer Wahrscheinlichkeitsverteilung entsprechen. Um weiter zu vereinfachen, kann die Wahrscheinlichkeitsverteilung für den mittleren Zustand durch ein „mittleres“ Ergebnis ersetzt werden. Dieser Weg der Zusammenfassung von Zuständen und Ergebnissen ist vor allem dann naheliegend, wenn die jeweiligen Streuungen der Ergebniswerte gering sind. In der Praxis wird man ohne solche Vereinfachungen kaum auskommen.

Wie gesagt, ist mit der Erstellung der Ergebnismatrix das Entscheidungsproblem noch nicht gelöst. Zur Auswahl einer Alternative muss der Entscheider die möglichen Ergebnisse gegeneinander abwägen. Oft kann er dies tun, ohne eine Entscheidungsregel formal darstellen zu müssen. Das Grundmodell der Entscheidungstheorie ist aber erst dann vollständig formuliert, wenn der Entscheider seine Zielvorstellungen explizit durch eine Präferenzfunktion zum Ausdruck gebracht hat, mit deren Hilfe für die erwogenen Alternativen Präferenzwerte bestimmt werden können. In den nächsten Kapiteln wird gezeigt, wie derartige Präferenzfunktionen für Entscheidungssituationen bei Sicherheit und Unsicherheit ermittelt werden können.

2.3.2 Bedeutung des Grundmodells der Entscheidungstheorie

Da die zentralen Begriffe „Alternativen“, „Umweltzustände“ und „Ergebnisse“ sehr allgemein definiert sind, stellt die Ergebnismatrix einen außerordentlich flexiblen Bezugsrahmen dar, der zur Strukturierung sehr unterschiedlicher Entscheidungsprobleme geeignet ist. Bei der konkreten Anwendung müssen allerdings die zentralen Grundbegriffe problemadäquat präzisiert werden: Es muss geklärt werden, welches die relevanten Alternativen sind, wie die Ergebnisse beschrieben werden sollen, von welchen Daten sie abhängen und welche Konstellationen von Ausprägungen für diese Daten möglich sind (und welche Eintrittswahrscheinlichkeiten diesen Konstellationen entsprechen).

Das Formulieren einer Ergebnismatrix zwingt den Entscheider dazu, sich über Alternativen und deren mögliche Ergebnisse Klarheit zu verschaffen. Dies allein kann bereits

zu einer Verbesserung der Entscheidung beitragen. Schon durch die Beschreibung von Alternativen und ihrer möglichen Konsequenzen kann Licht in ein undurchsichtiges Entscheidungsproblem gebracht werden. „Die Erkenntnis, dass die Entscheidungsfindung auf den Vergleich von Alternativen führt, ist für sich betrachtet schon ein Vorteil. Die Erkenntnis, dass die Unsicherheiten, die die Situation beeinflussen, betrachtet werden müssen, veranlasst viele, die Auswirkungen ihrer Entscheidungen sorgfältiger zu überlegen“ (Lindley 1974, S. 9).

Jedoch sind bei komplexeren Entscheidungsproblemen der expliziten Darstellung einer Ergebnismatrix enge Grenzen gesetzt. In der Realität geht die Zahl der relevanten Alternativen oft in die Tausende. Auch die Zahl der möglichen Zustände ist bei komplexeren Entscheidungsproblemen sehr groß. Der mit der Erstellung einer Ergebnismatrix verbundene Planungsaufwand kann dann „von Hand“ kaum bewältigt werden. Es besteht zwar die Möglichkeit, durch bewusste Vernachlässigung möglicher Alternativen und Zustände sowie durch eine mehr oder weniger grobe Beschreibung der relevanten Ergebnisse den Planungsaufwand in praktikablen Grenzen zu halten. Es besteht dann aber zugleich die Gefahr, dass eine „schlechte“ Entscheidung getroffen wird.

In Abschn. 2.5 werden Modelltypen dargestellt, bei denen der Planungsaufwand wesentlich geringer sein kann als bei Anwendung des Grundmodells der Entscheidungstheorie. Obwohl dieses Grundmodell bei komplexeren Entscheidungsproblemen versagt, ist es auch für die Lösung derartiger Probleme von großer Bedeutung. Wie später noch deutlich wird, bietet die Ergebnismatrix einen einheitlichen Bezugsrahmen zur Darstellung und Analyse von entscheidungstheoretischen Grundproblemen, die sich in ganz unterschiedlichen Entscheidungssituationen ergeben können, und zwar auch dann, wenn die Entscheidung gar nicht auf der Basis einer Ergebnismatrix getroffen wird.

2.4 Zur Problematik der Abbildung von Zielen in Entscheidungsmodellen

2.4.1 Ordnungssaxiom und Transitivitätsaxiom

2.4.1.1 Darstellung der Axiome

Wie erläutert wurde, kann eine rationale Entscheidung nur getroffen werden, wenn Zielvorstellungen existieren, auf deren Basis die erwogenen Alternativen beurteilt werden. Das Überführen von Zielvorstellungen in eine Entscheidungsregel stellt in realistischen Entscheidungssituationen ein komplexes Problem dar. Eine Aufgabe der präskriptiven Entscheidungstheorie besteht darin, einen Beitrag zur Lösung dieses Problems zu leisten.

Damit die Entscheidungstheorie einem Entscheider überhaupt helfen kann, rationale Entscheidungen zu treffen, muss er gewisse Mindestanforderungen hinsichtlich der Bildung von Präferenzvorstellungen über die Ergebnisse erfüllen. Üblicherweise wird im Rahmen der (normativen) Entscheidungstheorie von zwei zentralen Annahmen (oder Grundanforderungen) ausgegangen, die durch das *Ordnungs-* und das *Transitivitätsaxiom*

ausgedrückt werden. Zur Darstellung der beiden Axiome werden folgende Symbole eingeführt:

- $x_i \succ x_j \hat{=}$ Der Entscheider zieht das Ergebnis x_i dem Ergebnis x_j vor,
- $x_i \sim x_j \hat{=}$ der Entscheider ist zwischen beiden Ergebnissen indifferent,
- $x_i \prec x_j \hat{=}$ der Entscheider zieht das Ergebnis x_j vor.

Das *Ordnungsaxiom* besagt: Der Entscheider kann für jedes beliebige Ergebnispaar x_i und x_j angeben, ob

$$x_i \succ x_j \text{ oder } x_i \sim x_j \text{ oder } x_i \prec x_j$$

gilt. Der Entscheider soll also die Ergebnisse miteinander vergleichen können.

Das *Transitivitätsaxiom* besagt: Die Präferenzen des Entscheiders bezüglich dreier beliebiger Ergebnisse x_i , x_j und x_k sind im folgenden Sinne konsistent:

Gilt $x_i \sim x_j$ und $x_j \sim x_k$, dann gilt auch $x_i \sim x_k$.

Gilt $x_i \succ x_j$ und $x_j \succ x_k$, dann gilt auch $x_i \succ x_k$.

Gilt $x_i \succ x_j$ und $x_j \sim x_k$, dann gilt auch $x_i \succ x_k$.

Wenn z. B. jemand Bier besser findet als Wein und Wein wiederum Whisky vorzieht, muss er Bier auch gegenüber Whisky bevorzugen. Das Transitivitätsaxiom bezieht sich auf eine gegebene Entscheidungssituation (streng genommen auf *einen* Zeitpunkt), denn die Wertvorstellungen können sich im Zeitablauf ändern. Es stellt keinen Verstoß gegen das Transitivitätsaxiom dar, wenn ein Zwanzigjähriger das Präferenzurteil Turnen $\succ$ Fußballspielen $\succ$ Lesen vertritt, mit 80 Jahren jedoch lieber liest als turnt.

2.4.1.2 Bedeutung der Axiome

Das *Ordnungsaxiom* besagt nicht, dass der Entscheider beliebig komplexe Ergebnisse unmittelbar miteinander vergleichen kann. Die normative Entscheidungstheorie bietet vielmehr Entscheidungshilfen für den Ergebnisvergleich, indem sie zeigt, wie der Vergleich komplexer Ergebnisse auf den (sukzessiven) Vergleich solcher Ergebnisse zurückgeführt werden kann, die möglichst geringe Anforderungen an die Bewertungsfähigkeit des Entscheiders stellen (solche Konzepte werden in den folgenden Kapiteln noch dargestellt). Wenn dann aber der Entscheider immer noch nicht in der Lage ist, die Ergebnisse miteinander zu vergleichen (also das Ordnungsaxiom zu erfüllen), stößt die Entscheidungstheorie an ihre Grenzen. Sie will einem Entscheider nicht dogmatisch vorschreiben, was er tun soll, sondern will ihm helfen, rationale Entscheidungen zu treffen. Eine rationale Entscheidung setzt aber das Vorhandensein von Zielvorstellungen voraus, auf deren Grundlage die Wünschbarkeit bestimmter Handlungsfolgen beurteilt werden kann. Wenn der Entscheider keine Vorstellungen darüber hat, was er eigentlich will, kann

ihm die Entscheidungstheorie allein keine Entscheidungshilfe gewähren. Im Folgenden wird stets angenommen, das Ordnungsaxiom sei erfüllt.

Auch das *Transitivitätsaxiom* ist im Rahmen der präskriptiven (bzw. normativen) Entscheidungstheorie von zentraler Bedeutung. Eine präskriptive Theorie, die zulässt, dass der Entscheider gegen das Transitivitätsaxiom verstößt, könnte kaum akzeptable Empfehlungen für praktisches Handeln geben. Es kann gezeigt werden, dass eine Nichtbefolgung des Transitivitätsaxioms zu unvernünftigen Verhaltensweisen führt. So besteht z. B. die Möglichkeit, einen beharrlich gegen das Transitivitätsaxiom verstoßenden Entscheider beliebig auszubeuten. Besonders einprägsam wurde diese Möglichkeit von Raiffa (1973, S. 99 f.) verdeutlicht:

Herr Meier möchte ein Haus erwerben. Er zieht die Objekte A, B und C in die engere Wahl und kommt zu folgendem (intransitivem) Präferenzurteil:

$$A \succ B, \quad B \succ C, \quad C \succ A.$$

„Es macht Spaß, mit Leuten wie Herrn Meier zu diskutieren, insbesondere, wenn sie sich hartnäckig weigern, ihre Meinung zu ändern.

„Herr Meier, nehmen wir an, daß Sie gerade den Kaufvertrag für das Haus A unterschrieben haben und daß Ihnen der Makler nun C gegen ein kleines Handgeld anbietet. Wenn Ihnen Ihre Präferenzen etwas bedeuten, dann müssen Sie bereit sein, dieses Handgeld zu bezahlen, um Haus A gegen Haus C zu tauschen. Sie sind also jetzt Eigentümer von C. Als nächstes schlägt der Makler Ihnen vor, gegen ein kleines Handgeld B gegen C zu tauschen. Aufgrund Ihrer Präferenzen bezahlen Sie und erwerben B. Warum aber B behalten, wenn Sie A gegen ein kleines Handgeld bekommen können? Warum aber A behalten, wenn Sie C gegen ...? Sie wollen nicht? ... Das verstehe ich nicht, wo Sie C doch A vorziehen? ... Nun gut. Es handelt sich doch nur um ein kleines Handgeld. ... Wollen Sie Ihre Meinung wirklich nicht ändern?“ (Raiffa 1973, S. 100). Wenn Herr Meier sein Präferenzurteil nicht zu revidieren bereit ist, wird ihm schließlich das Geld fehlen, überhaupt ein Haus zu kaufen.

Das Beispiel macht deutlich, welche Bedeutung dem Transitivitätsaxiom für rationale Entscheidungen zukommt. Wie empirische Untersuchungen gezeigt haben, ist das Transitivitätsaxiom in der Realität jedoch nicht immer erfüllt (vgl. z. B. Schauenberg 1978). Es kann vorkommen, dass für ein Individuum $x_i \sim x_j$ und $x_j \sim x_k$ und gleichzeitig auch $x_i \succ x_k$ gilt. Ein solcher Verstoß gegen das Transitivitätsaxiom kann wie folgt erklärt werden (Schneeweiß H. 1966, S. 131): Indifferenz zwischen zwei Ergebnissen bedeutet zwar streng genommen, dass kein „Nutzenunterschied“ besteht. In der Realität werden aber geringe Nutzenunterschiede nicht wahrgenommen, sofern sie innerhalb bestimmter „*Fühlbarkeitsschwellen*“ liegen. Die Ergebnisse x_i und x_j bzw. x_j und x_k können daher als äquivalent erscheinen, obwohl sie es bei genauer Nutzenwahrnehmung gar nicht wären. Beim Vergleich von x_i und x_k ist der Nutzenunterschied jedoch schon so groß, dass die Fühlbarkeitsschwelle überschritten wird: Es gilt $x_i \succ x_k$.

Zur Verdeutlichung wird angenommen, einem Gast, der keinen Zucker im Kaffee mag, werden drei Tassen Kaffee zum Vergleich angeboten, die sich geringfügig durch ihren

Zuckergehalt unterscheiden. In der ersten Tasse ist am wenigsten Zucker und in der dritten am meisten. Trotzdem könnte der Gast zwischen der ersten und der zweiten Tasse indifferent sein, weil er den (geringen) Unterschied im Zuckergehalt nicht wahrnimmt. Analog könnte Indifferenz auch bezüglich der zweiten und der dritten Tasse bestehen. Wenn nun der Gast eine Kostprobe bezüglich der ersten und der dritten Tasse macht, könnte er aber den Kaffee in der ersten Tasse vorziehen, weil er ihn (aufgrund des nun größeren Unterschiedes im Zuckergehalt) als weniger süß empfindet als den in der dritten.

Die Beobachtung, dass das Transitivitätsaxiom in der Realität gelegentlich verletzt wird, spricht jedoch nicht gegen dieses Axiom als Baustein einer präskriptiven Entscheidungstheorie. Die präskriptive Entscheidungstheorie beschäftigt sich nicht primär mit der Frage, inwieweit in der Realität vernünftige Entscheidungen getroffen werden. Sie will rationales Verhalten erst ermöglichen und wäre überflüssig, wenn es bereits ausschließlich rationales Verhalten gäbe. Im Folgenden wird stets davon ausgegangen, das Transitivitätsaxiom sei erfüllt bzw. der Entscheider akzeptiere das Transitivitätsaxiom.

2.4.2 Zielsysteme

2.4.2.1 Gründe für die Relevanz mehrerer Zielgrößen

Die Beachtung mehrerer Zielgrößen bei der Lösung eines Entscheidungsproblems kann insbesondere aus drei Gründen notwendig werden.

Erstens orientiert sich ein Entscheider in der Regel *von vornherein* an mehreren Zielgrößen. Ein typisches Beispiel hierfür ist die gleichzeitige Orientierung an Sachzielen und an Formalzielen, so z. B. an dem Sachziel „Herstellung von Haushaltsgeräten höchster Qualität“ und an dem Formalziel „Maximierung des Gewinns“. Ein *Sachziel* hat einen Bezug sachlicher Art, d. h. das Ziel spezifiziert explizit durch konkrete sachliche Merkmale den anzustrebenden Endzustand. Ein *Formalziel* dagegen spezifiziert explizit nur eine bestimmte formale Eigenschaft des Endzustandes, ohne diesen inhaltlich zu beschreiben, sodass der Endzustand durch das Formalziel in der Regel nicht eindeutig definiert wird. Formalziele beziehen sich häufig auf wirtschaftliche Kennzahlen und Beurteilungskriterien. Die Orientierung eines Entscheiders an Sachzielen und Formalzielen zwingt ihn dazu, die Ziele im Entscheidungsprozess zu verarbeiten. Wie bei mehreren Zielgrößen entschieden werden kann, wird in Kap. 3 beschrieben.

Zweitens mag sich ein Entscheider zwar an nur einer Zielgröße orientieren, jedoch kann diese Zielgröße häufig nicht *operational* gemessen werden, sodass der Entscheider ersatzweise das Entscheidungsproblem über mehrere Zielgrößen formulieren muss. Beispielsweise ist das Ziel, im Sommerurlaub einen „maximalen Erholungswert“ zu erreichen, nicht operational, um alternative Urlaubsangebote zu vergleichen, sodass der Entscheider stattdessen einzelne Zielgrößen (Wetter, Komfort der Unterkunft, Verpflegung, Anreise usw.), die leichter eingeschätzt und gemessen werden können, definieren und seiner Entscheidung zugrunde legen muss.

Drittens ist es auch möglich, dass es zwar zunächst nur eine übergeordnete Zielgröße gibt, diese jedoch aus *formalen Gründen* durch mehrere Zielgrößen ersetzt wird, um die Formulierung einfacherer Entscheidungsmodelle zu ermöglichen. Dieser Sachverhalt ist typisch für Entscheidungen in kollektiven Systemen. Hax beschreibt ihn für betriebliche Entscheidungen: „Es kann ... sein, dass es für den Betrieb zunächst nur ein übergeordnetes Ziel gibt, etwa Gewinnmaximierung, dass aber für den durch das Modell erfassten Bereich die Berücksichtigung mehrerer Unterziele, deren Verfolgung dem übergeordneten Betriebsziel dienen soll, für notwendig erachtet wird. Zum Beispiel kann man einer Fertigungsabteilung die Beachtung der Zielgrößen ‚Auslastungsgrad der Anlagen‘, ‚Kapitalbindung in den Vorräten‘ und ‚Einhaltung der Liefertermine‘ vorgeben, weil diese Unterziele als besonders wichtig für die Gewinnmaximierung des Betriebes angesehen werden. Grundsätzlich ist es möglich, die Beziehungen zwischen derartigen Unterzielen und dem übergeordneten Betriebsziel auch wieder in einem Modell zu erfassen und damit das übergeordnete Ziel direkt in die Modellanalyse einzu beziehen. Häufig geschieht dies jedoch nicht, vor allem wegen der großen Komplexität der Problemstellung. Man hat dann für den vom Modell erfassten Bereich vorgegebene Zielgrößen, die nur aufgrund von Überlegungen außerhalb der Modellanalyse als Unterziele aus einem Oberziel abgeleitet worden sind, für die Modellanalyse aber den Charakter selbständiger Zielgrößen haben“ (Hax 1974, S. 30).

2.4.2.2 Beziehungen zwischen Zielen

Ziele stehen zueinander in einer inhaltlichen (sachlichen, zeitlichen) sowie in einer formalen Beziehung. Formale Zielbeziehungen werden in Zielkomplementarität und Zielkonkurrenz unterschieden.

Zwei Ziele sind komplementär (*Zielkomplementarität*), wenn mit Maßnahmen zur besseren Erreichung des einen Ziels gleichzeitig der Erfüllungsgrad des anderen Ziels verbessert wird. Bei (vollständiger) Zielkomplementarität kann der Entscheider eine der Zielgrößen auswählen und sich allein an dieser einen Zielgröße orientieren. Eine Handlungsalternative, die bezüglich dieser Zielgröße die beste ist, muss auch im Hinblick auf jede andere Zielgröße optimal sein.

Ziele sind konkurrierend oder konfliktär (*Zielkonkurrenz bzw. Zielkonflikt*), wenn mit Maßnahmen zur besseren Erfüllung des einen Ziels der Grad der Erfüllung des anderen Ziels verschlechtert wird. Bei Zielkonflikt müssen also Vorteile in Bezug auf einzelne Zielgrößen durch Nachteile hinsichtlich anderer Zielgrößen „erkauft“ werden. Beim Vorteilsvergleich von Alternativen bzw. ihrer Ergebnisse stellt sich dann das Problem, die Vor- und Nachteile hinsichtlich der verschiedenen Zielgrößen gegeneinander abzuwägen. Zielkonkurrenz dürfte in Bezug auf reale Entscheidungssituationen der Regelfall sein. So sind z. B. Maßnahmen zur Erhöhung des Einkommens häufig mit zusätzlicher Arbeit und entsprechender Reduzierung anderer Aktivitäten verbunden, was als Belastung empfunden wird. Wer bei gegebenem Einkommen heute mehr Konsumgüter erwirbt, muss in Zukunft seine Konsumausgaben einschränken (weil er jetzt weniger sparen kann oder einen Kredit aufnehmen muss). Zielkonflikte sind zudem die Regel bei der Abwägung

zwischen Gütereigenschaften (z. B. bei Konsumausgaben). Wie Zielgrößen gegeneinander abgewogen werden können, wird in Kap. 3 diskutiert.

2.4.2.3 Zielsysteme und Entscheidungen als soziale Prozesse

Eine rationale Entscheidung impliziert nicht, dass der Entscheider seine Entscheidung völlig isoliert und ohne Rücksicht auf die Interessen anderer Personen trifft oder Andere gar gezielt schädigt, um persönliche Vorteile zu erzielen.

Die Entscheidung hängt in starkem Maße von sozialen Aspekten ab. Zum einen kann sich der Entscheider von Anderen über objektive entscheidungsrelevante Daten, über deren subjektive Wahrscheinlichkeitsvorstellungen oder über deren subjektive Bewertungen von Alternativen und möglichen Ergebnisse informieren lassen, um seine Entscheidungsgrundlage zu verbessern. Von seinen „sozialen Fähigkeiten“ und seinem „sozialen Umfeld“ hängt es ab, ob und zu welchen Bedingungen er zusätzlich Informationen besorgen kann. Zum anderen kann er aus sozialen oder altruistischen Gründen bei der Definition der Ergebnisse und/oder deren Bewertung die Präferenzen Anderer einbeziehen, was wiederum Rückwirkungen auf seine Informationsaktivitäten haben wird.

Die Berücksichtigung der Interessen Anderer bei der Ergebnisbeschreibung erfolgt in der Weise, dass Zielgrößen einbezogen werden, die zwar nicht direkt die Interessen des Entscheiders berühren, wohl aber die der Anderen. Z. B. berücksichtigt ein Unternehmer, der sich ansonsten nur am Gewinn orientiert, aus sozialen Gründen auch die Zielgröße „Zahl der in seinem Unternehmen Beschäftigten“ in seiner Ergebnisdefinition bzw. seiner Nutzenfunktion und nimmt in gewissem Umfang auch Gewinneinbußen in Kauf, um Entlassungen zu vermeiden.

Es ist auch möglich, dass die Interessen Anderer zwar nicht in der Ergebnisdefinition berücksichtigt werden, wohl aber in der Bewertung der Ergebnisse. So wird ein Entscheider, der für Frau und Kinder zu sorgen hat, eine andere Nutzenfunktion für „Einkommen“ haben und tendenziell weniger riskante Entscheidungen treffen als für den Fall, dass ihn deren Folgen allein treffen.

Die Interessen Anderer können auch in Nebenbedingungen erfasst werden, die den eigenen Handlungsspielraum einengen. Z. B. maximiert ein Unternehmer den Gewinn bzw. den Erwartungswert des Nutzens aus dem Gewinn unter der Nebenbedingung, dass keine Entlassungen vorgenommen werden. Soziales Handeln findet in der Realität sehr oft nicht in Zielformulierungen ihren Niederschlag, sondern in auferlegten entscheidungsrelevanten Nebenbedingungen.

2.4.3 Unternehmensziele

2.4.3.1 Zielsystem der Unternehmung

Kooperieren im Rahmen eines gemeinsamen Entscheidungsproblems mehrere Personen miteinander, so treten zum Zielsystem einer Person die Zielsysteme der Kooperationspartner. Aus individuellen Zielsystemen wird ein *kollektives Zielsystem*. Welche

Beziehungen zwischen den individuellen Zielen der Mitglieder des Kollektivs bestehen und welche Ordnung sich zwischen ihnen im kollektiven Zielsystem herausbildet, hängt von zahlreichen Faktoren ab, zu denen Machtstrukturen, das wirtschaftliche Umfeld des Kollektivs, rechtliche Rahmenbedingungen wie auch gesellschaftliche und kulturelle Normen und Traditionen gehören.

Wie eine Individualentscheidung setzt auch eine kollektive Entscheidung voraus, dass die zur Verfügung stehenden Handlungsalternativen beurteilt werden. Hierzu stehen dem Kollektiv grundsätzlich zwei Möglichkeiten offen: (i) Es trifft einmütige (Kompromiss-) Entscheidungen oder Mehrheitsentscheidungen im Zuge demokratischer Abstimmungsprozesse (Kap. 16). Dem Abstimmungsprozess geht dann ein Kommunikations- und Verhandlungsprozess voraus, in dem sich die Zielvorstellungen der Mitglieder teilweise annähern und in dem einige Mitglieder des Kollektivs andere durch Transfers dafür kompensieren, dass diese ihre Ziele (teilweise) aufgeben oder deren Umwandlung in Restriktionen zustimmen. (ii) Es wird ex ante eine kollektive Entscheidungsregel für die zu lösenden Entscheidungsprobleme formuliert und von den Mitgliedern des Kollektivs als Basis für die Entscheidungen akzeptiert (was eine Entscheidung über die Entscheidungsregel gemäß (i) voraussetzt, vgl. Kap. 14 und 15 sowie Kap. 17, Abschn. 17.6). Kollektive, die entstehen, weil die beteiligten Personen eine dauerhafte Kooperation anstreben, können nicht auf eine kollektive Entscheidungsregel verzichten: Die Möglichkeit (i) ist grundsätzlich sehr aufwendig und daher gewöhnlich nur wenigen, bedeutsamen Entscheidungen vorbehalten.

Besondere Bedeutung für die Betriebswirtschaftslehre hat das Zielsystem der Unternehmung als kollektives Zielsystem aller Personen, die ein wirtschaftliches Interesse an der Unternehmung haben („Stakeholder“). Konstituierend für das Zielsystem der Unternehmung sind die individuellen Zielsysteme der einzelnen Stakeholder, welche deren persönliche Interessen an der Unternehmung widerspiegeln. Entsprechend kann die Struktur des Zielsystems der Unternehmung normativ aus den Zielen der Stakeholder abgeleitet werden.

Von den individuellen Zielsystemen der Stakeholder und dem Zielsystem der Unternehmung ist als dritte Ebene das System der Zielvorgaben für die (nachgeordneten) Entscheidungsträger im Unternehmen zu unterscheiden. Es resultiert aus dem Zielsystem der Unternehmung, indem die darin (implizit) enthaltenen Ziele für die Unternehmenspolitik im Hinblick auf Unternehmensbereiche oder Unternehmensphasen operationalisiert werden. Abb. 2.3 verdeutlicht den Zusammenhang.

Das Zielvorgabesystem innerhalb der Unternehmung dient als Basis für die Steuerung dezentraler Entscheidungsprozesse. Zielvorgabesysteme der Unternehmung entwerfen Zielhierarchien, indem Teil- bzw. Unterziele in Zweck-Mittel-Beziehungen zu übergeordneten Zielen (bis hin zum Unternehmensziel) gesetzt werden.

2.4.3.2 Ziele für die Unternehmenspolitik

Im Zuge der Gründung und des Wachstums einer Unternehmung bildet sich deren Zielsystem sukzessiv aus den individuellen Zielsystemen der sich ihr anschließenden

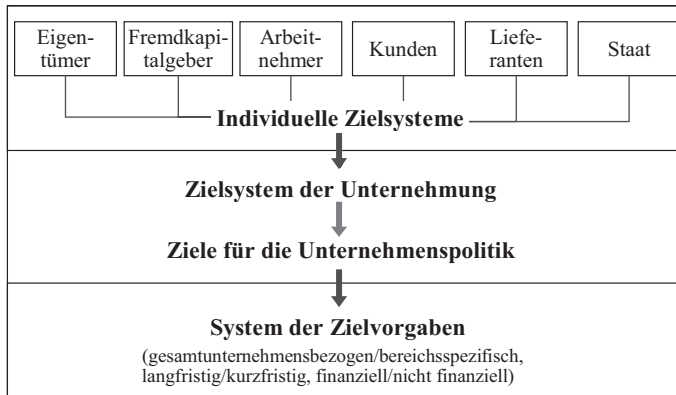


Abb. 2.3 Individuelle Zielsysteme, Zielsystem und Zielvorgabesystem der Unternehmung

Gesellschafter und Mitarbeiter sowie der Kapitalgeber, Lieferanten, Kunden und übrigen Interessengruppen heraus. Auf welche Art und wie stark individuelle Ziele im Zielsystem der Unternehmung berücksichtigt werden, ist insbesondere von den Verhandlungspositionen der Vertragspartner abhängig. Diese wiederum werden primär durch die rechtlichen und wirtschaftlichen Rahmenbedingungen (insbesondere die Marktgegebenheiten) bestimmt. Da sich diese Rahmenbedingungen kontinuierlich verändern, unterliegt das Zielsystem der Unternehmung einer Dynamik, welche zu einer häufigen Verschiebung der Gewichte der darin enthaltenen Ziele wie auch zu einer Veränderung in den Zielen selbst führt.

Die Ziele für die Unternehmenspolitik bringen zum Ausdruck, welchen Interessen welcher Interessengruppen vorrangige Bedeutung in der Unternehmung zukommt. So bringt die „Shareholder Value“-Orientierung, d. h. die Orientierung der Unternehmenspolitik an der Maximierung des Marktwertes des Eigenkapitals, zum Ausdruck, dass die Interessen der Eigentümer bzw. Eigenkapitalgeber explizit in der Unternehmenspolitik verfolgt werden und die Interessen anderer Interessengruppen auf andere Weise Berücksichtigung finden (etwa durch gesetzliche Regelungen, Tarifverträge oder privatrechtliche Verträge; vgl. Kap. 17, Abschn. 17.6).

Mit der Problematik der Fundierung von Unterzielen befassen sich die Kap. 14 und 15 sowie Kap. 17, Abschn. 17.6. Dort wird auch untersucht, unter welchen Bedingungen bei vorausgesetzter Eigentümerorientierung der Unternehmenspolitik die Orientierung am Marktwert des Eigenkapitals kompatibel ist mit der eigentlichen Entscheidungsregel eines Eigenkapitalgebers, der Maximierung des Erwartungswertes des Nutzens aus dem ihm zufließenden Einkommensstrom.

2.4.4 Kompatibilität und Operationalität von Zielen und Zielvorgaben

Die Formulierung der Entscheidungsregel für ein Entscheidungsmodell steht grundsätzlich im Spannungsfeld zwischen der Bedingung der *Kompatibilität* und der Bedingung der *Operationalität* (Berthel 1973). Die Kompatibilitätsbedingung hat dann Bedeutung, wenn im Entscheidungsmodell die Zielvorstellungen des Entscheiders nicht vollständig, sondern vereinfachend nur „bruchstückhaft“ bezogen auf die konkrete Entscheidungssituation erfasst werden. Sie fordert dann, dass die Entscheidungsregel für das Entscheidungsmodell im Einklang steht mit den übergeordneten Zielvorstellungen des Entscheiders. Ist sie verletzt, so kann die „optimale“ Lösung des Modells allenfalls zufällig zielführend sein.

Die Kompatibilitätsbedingung ist auch für den Fall relevant, dass eine Entscheidung im hierarchischen System eines Unternehmens von einer vorgesetzten Instanz an einen Entscheidungsträger delegiert wird und die Zielvorgabe nicht deckungsgleich mit dem Unternehmensziel ist. Sie fordert dann, dass die Zielvorgabe für den Entscheidungsträger immerhin im Einklang steht mit den Zielvorstellungen der delegierenden Instanz (die ihrerseits kompatibel mit dem Unternehmensziel sein sollten). Ist diese Bedingung verletzt, besteht also ein Konflikt zwischen der Zielvorgabe und den übergeordneten Zielvorstellungen der Instanz, so kann die Befolgung des vorgegebenen Ziels durch den Entscheidungsträger zu einer Handlungsweise führen, die vom Standpunkt der Instanz nachteilig ist. Zielkonflikt kann z. B. dann bestehen, wenn sich die Instanz, etwa als Eigentümer einer Unternehmung, am Ziel der Gewinnmaximierung orientiert, jedoch dem Entscheidungsträger, z. B. dem Leiter des Vertriebsbereichs, das Ziel der Umsatzmaximierung vorgibt.

Operationalität von Zielen liegt vor, wenn ex ante bzw. ex post (auf relativ einfache Weise) überprüft werden kann, bis zu welchem Grad sie erreicht werden bzw. erreicht worden sind. Ist das Ziel nicht operational definiert, so fehlt dem Entscheider eine klare Leitlinie nicht nur für die Suche nach Alternativen und die Prognose ihrer Ergebnisse, sondern vor allem auch für deren Bewertung. Soll – wie in Kap. 1, Abschn. 1.4.3.2, erläutert wurde – die Problemlösung als logische Implikation aus einem (numerischen) Entscheidungsmodell abgeleitet werden, so ist eine operationale Entscheidungsregel unverzichtbar.

Die Operationalitätsbedingung ist auch für den Fall relevant, dass die Entscheidung an einen Entscheidungsträger delegiert wird. Wird kein klares, operationales Ziel gesetzt, so können die erwogenen Alternativen nicht eindeutig bewertet werden. Das kann zu folgenden Konsequenzen führen:

- Dem Entscheidungsträger fehlt eine eindeutige Leitlinie für seine Entscheidungen. Selbst wenn sich der Entscheidungsträger bemüht, das vorgegebene Ziel im Sinne der delegierenden Instanz zu interpretieren und zu präzisieren, besteht die Gefahr, dass er Entscheidungen trifft, die vom Standpunkt der Instanz nachteilig sind. Eine adäquate

Präzisierung kann Informationen erfordern, über die der Entscheidungsträger nicht verfügt.

- Wird ein nicht operationales Unterziel gesetzt, so kann sich der Entscheidungsträger in starkem Maße an persönlichen (von den Zielvorstellungen der Instanz abweichenden) Zielen orientieren. Eine Abweichung vom gesetzten Unterziel ist umso schwerer nachzuweisen, je unbestimmter dieses Ziel formuliert worden ist (Kap. 17, Abschn. 17.6).
- Die meisten Menschen haben das Bedürfnis nach Erfolgserlebnissen. Die Befriedigung dieses Bedürfnisses setzt einen *Maßstab* für die Messung des Erfolges voraus. Ein eindeutiger Maßstab fehlt aber dem Entscheidungsträger, wenn ihm ein nicht operationales Ziel vorgegeben wird. Die Güte seiner Entscheidungen kann dann nicht eindeutig überprüft werden. Damit wird nicht nur die Selbstkontrolle des Entscheidungsträgers erschwert; ihm wird auch nicht klar ersichtlich, nach welchem Maßstab die Instanz seine Entscheidung beurteilen wird. Er mag befürchten, dass hierfür Kriterien herangezogen werden, die im gesetzten Ziel nicht zum Ausdruck kommen, jedoch zu einer negativen Beurteilung führen. Solche Unsicherheiten wirken im Allgemeinen demotivierend.

Die Vorgabe eines operationalen Ziels bei Delegation einer Entscheidung ist in praktischen Entscheidungssituationen mit der Problematik verbunden, dass Ergebnisse unsicher sind und die Eintrittswahrscheinlichkeiten für die Umweltzustände nicht (wie z. B. beim Roulette) objektiv gemessen, sondern nur subjektiv geschätzt werden können. Subjektive Wahrscheinlichkeiten eines Entscheiders (vgl. Kap. 4, Abschn. 4.3) beruhen auf seinen Erfahrungen, seinen entscheidungsrelevanten Informationen und persönlichen Schlussfolgerungen. Sie sind nicht objektivierbar, sodass Zielvorgaben, deren Konkretisierung subjektive Wahrscheinlichkeiten erfordert, nicht streng operational sind. Beispielsweise führt die Zielvorgabe „Maximiere den Erwartungswert des Gewinns“ dazu, dass die Alternativenwahl des Entscheidungsträgers durch die Instanz nur relativ zu dem subjektivem Wahrscheinlichkeitsurteil des Entscheiders beurteilt werden kann.

Man mag daher jedes Entscheidungskriterium, das subjektive Wahrscheinlichkeiten berücksichtigt, ablehnen und die Forderung nach einem anderen, *operationalen* Kriterium bzw. einer operationalen Zielvorgabe stellen. Da jedoch in den meisten praktisch relevanten Entscheidungssituationen keine objektiven Wahrscheinlichkeiten existieren, bedeutet der Verzicht auf subjektive Wahrscheinlichkeiten, dass dann der Entscheidungsträger keine Möglichkeit hat, seine allgemeinen Erfahrungen und speziellen Informationen über die jeweiligen Alternativen bei seiner Entscheidung zu berücksichtigen. Diese Erfahrungen und Informationen sollten nicht generell vernachlässigt werden, auch dann nicht, wenn sie nur schwer zu quantifizieren sind. Ein wesentlicher Grund für die Delegation an einen Entscheidungsträger besteht ja gerade darin, sie zu nutzen, damit bessere Entscheidungen getroffen werden. Jedoch darf nicht übersehen werden, dass der

Entscheidungsträger einen weiten Spielraum für die Verfolgung eigener Ziele hat, wenn er bei seiner Entscheidung sein *eigenes* Wahrscheinlichkeitsurteil über die Umweltzustände zugrunde legt: Möglicherweise realisiert er eine von ihm präferierte Alternative und rechtfertigt sie damit, dass sie im Licht seiner wohlfundierten Wahrscheinlichkeiten die höchste Zielerreichung aufweise. Natürlich besteht auch die Gefahr, dass der Entscheidungsträger aufgrund eines schlechten Wahrscheinlichkeitsurteils eine vom Standpunkt der Instanz nachteilige Entscheidung trifft, obwohl er sich bemüht, in ihrem Sinne zu handeln.

2.5 Systematik von Entscheidungsmodellen

2.5.1 Grafische und mathematische Entscheidungsmodelle

Im Prinzip lassen sich *alle* Entscheidungsprobleme (mit endlicher Zahl von Alternativen und Zuständen) im Grundmodell der Entscheidungstheorie abbilden. Dennoch gibt es zwei weitere Modelltypen: grafische Modelle und mathematische Modelle.

Grafische Entscheidungsmodelle zeichnen sich vor allem durch ihre Anschaulichkeit aus. Andererseits können sie nur bei relativ einfachen Problemstrukturen Anwendung finden.

Die Bestimmung der optimalen Lösung eines Entscheidungsproblems auf der Grundlage einer grafischen Darstellung versagt schon bei Sicherheit, wenn mehr als zwei Zielgrößen zu beachten sind. In *mathematischen Modellen* werden die erwogenen Alternativen nicht wie in einer Ergebnismatrix *explizit* abgebildet. Das Modell wird vielmehr durch Entscheidungsvariablen (Aktionsvariablen) definiert, deren zulässige Wertekonstellationen die Alternativen charakterisieren. Die zulässigen Wertebereiche für diese Variablen werden dabei mithilfe von Nebenbedingungen im Modell abgesteckt. Insbesondere bei kontinuierlichen Entscheidungsvariablen bzw. bei sehr vielen Alternativen ist diese Darstellungsform notwendig bzw. zweckmäßig. Außerdem wird im Modell erfasst, wie die Ergebnisse von den Werten der Entscheidungsvariablen und den möglichen Zuständen abhängen. Schließlich werden die Zielvorstellungen des Entscheiders mithilfe einer Zielfunktion abgebildet.

Nachdem ein konkretes Entscheidungsmodell formuliert ist, stellt sich das Problem, diejenigen Werte der Entscheidungsvariablen zu bestimmen, die einerseits die formulierten Nebenbedingungen erfüllen und andererseits die Zielfunktion maximieren. Ob dieses Problem gelöst werden kann, hängt von der Komplexität des Entscheidungsmodells bzw. von der Verfügbarkeit geeigneter Rechentechniken ab. Stehen diese nicht zur Verfügung kann versucht werden, durch systematisches „Probieren“ nach bestimmten Regeln eine „gute“ Lösung zu finden (wobei der Anspruch, auf jeden Fall die optimale Lösung zu finden, aufgegeben wird). Systematische Suchverfahren zum Auffinden guter Lösungen werden als *heuristische Verfahren* bezeichnet.

2.5.2 Weitere Systematisierungen

Es gibt weitere Gesichtspunkte, nach denen eine Typisierung von Entscheidungsmodellen erfolgen kann:

- Entscheidungsmodelle mit *expliziter* Erfassung versus Entscheidungsmodelle mit *impliziter* Erfassung der Alternativen: Im Grundmodell der Entscheidungstheorie werden die erwogenen Alternativen explizit dargestellt, in den grafischen und mathematischen Entscheidungsmodellen in impliziter Weise.
- Entscheidungsmodelle mit *einer* Zielgröße versus Entscheidungsmodelle mit *mehreren* Zielgrößen: Obwohl in der Realität den Entscheidungen meist mehrfache Ziele zugrunde liegen, wird in den Präferenzfunktionen der meisten praktisch verwendeten Entscheidungsmodelle nur eine Zielgröße erfasst. So beruhen die Entscheidungsmodelle der Betriebswirtschaftslehre häufig auf der Zielsetzung der Maximierung des (Erwartungswertes des Nutzens des) Gewinns bzw. der Minimierung der Kosten. In Kap. 3 wird untersucht, wie mehrere Zielgrößen im Entscheidungsmodell berücksichtigt werden können.

- *Einperiodige* versus *mehrperiodige* Entscheidungsmodelle: Diese Unterscheidung ist vor allem unter dem Gesichtspunkt der Abstimmung der Aktionen für verschiedene Zeitpunkte von Bedeutung. Einperiodige Modelle dienen zur Auswahl einer Alternative für eine Periode, wobei die Einzelaktionen nicht in zeitlicher Hinsicht koordiniert werden (es bleibt also offen, wann diese Einzelmaßnahmen innerhalb der Periode realisiert werden). Oft wird auch von der Fiktion ausgegangen, die gewählte Alternative werde zu Beginn der Periode realisiert, während sich das Ergebnis am Ende der Periode einstellt.

Mehrperiodige Modelle (Kap. 9, 15 und 18) dienen dazu, die zeitlichen Interdependenzen zwischen gegenwärtigen und zukünftigen Aktionen zu berücksichtigen und die Maßnahmen verschiedener Zeitpunkte aufeinander abzustimmen. Dabei wird auch hier häufig von der Fiktion ausgegangen, die Aktionen würden nicht kontinuierlich im Zeitablauf, sondern zu diskreten Zeitpunkten t ($t=0,1,\dots,T$) realisiert.

- *Deterministische* versus *stochastische* Entscheidungsmodelle: Deterministische Entscheidungsmodelle berücksichtigen von jedem entscheidungsrelevanten Datum jeweils nur eine Ausprägung. Derartige Modelle können sich daraus ergeben, dass die Ausprägungen der entscheidungsrelevanten Daten mit Sicherheit bekannt sind, aber auch daraus, dass zwar mehrwertige Erwartungen über diese Ausprägungen bestehen, jedoch aus Gründen der Vereinfachung jeweils bestimmte Werte angenommen werden und damit so gerechnet wird, als seien sie (quasi) sicher.

Stochastische Entscheidungsmodelle erfassen mehrwertige Erwartungen über die Ausprägungen der entscheidungsrelevanten Daten, wobei diesen Ausprägungen Eintrittswahrscheinlichkeiten zugeordnet werden. Stochastische Entscheidungsmodelle beziehen sich also auf Risikosituationen. (Bei der Einteilung in deterministische und

stochastische Entscheidungsmodelle wird die – praktisch kaum relevante – Unsicherheitssituation i. e. S. nicht berücksichtigt.) Stochastische Entscheidungsmodelle stehen im Vordergrund dieses Buches (Kap. 7, 8, 9, 14, 15 und 18).

2.6 Allgemeine Bedeutung von Entscheidungsmodellen

2.6.1 Entscheidung und Entscheidungsmodell

Da Entscheidungsmodelle immer nur wenige Eigenschaften der Realität abbilden können, sind sie stets eine *vereinfachte* Darstellung der Wirklichkeit (Friedman 1953, S. 15). „Eine präzise Beschreibung [der Realität] erscheint nicht nur unmöglich, sondern auch unzumutbar (siehe auch Dinkelbach 1973), denn:

- Eine realitätsgetreue Abbildung setzt empirisches Wissen voraus, das zum Teil gar nicht vorhanden ist.
- Wegen des besseren Verständnisses sollte ein Modell übersichtlich sein.
- Eine realitätsgetreue Abbildung führt zu relativ hohen Kosten der Modellformulierung und -lösung. Vermindert man den Grad der Realitätstreue bis zu einem gewissen (im Allgemeinen nur grob schätzbaren) Niveau, so sinken die Kosten der Modellformulierung und -lösung vermutlich stärker als der Ertrag, der mit der Kenntnis der Modelllösung verbunden ist“ (Franke 1977, S. 9).

Aufgrund der Vereinfachung stellt die Lösung eines Entscheidungsmodells nicht notwendig die tatsächlich gewählte Alternative dar. Das Modell dient zunächst nur der Entscheidungsvorbereitung. Nachdem die Lösung vorliegt, ist eine Entscheidung darüber zu treffen,

- ob die entsprechenden Pläne (das entsprechende Aktionsprogramm) in der vorliegenden Form realisiert oder
- ob sie revidiert werden und, wenn ja, in welcher Weise.

Dabei berücksichtigt der Entscheider auch solche Faktoren und Aspekte, die bisher im Modell nicht erfasst worden sind, wobei er mehr oder weniger grob abschätzt, wie sich deren Vernachlässigung im Modell ausgewirkt haben könnte. Kommt er zu dem Ergebnis, dass die Lösung möglicherweise verbessert werden kann, so wird er entweder die Pläne ohne zusätzliche modellhafte Fundierung revidieren und dann die entsprechenden Maßnahmen durchführen oder aber das Entscheidungsmodell selbst revidieren (indem er z. B. im Kalkül zusätzliche Aktionsmöglichkeiten erfasst und/oder die möglichen Folgen der erwogenen Maßnahmen präziser abbildet) und danach eine Lösung des revidierten Modells ermitteln. Nachdem die korrigierte Lösung vorliegt, trifft der Entscheider

die endgültige Entscheidung (wobei er möglicherweise auch von dieser Modelllösung abweicht) oder er revidiert abermals das Modell und bestimmt erneut eine Lösung. Das Modell wird dabei also schrittweise revidiert und der Planungsprozess erst dann abgeschlossen, wenn eine Lösung (eine Alternative) gefunden ist, die intuitiv auch im Lichte bisher vernachlässigter Aspekte als „gut“ erscheint.

Auf die Bedeutung der Intuition bei der Anwendung von Entscheidungsmodellen hat auch Hax hingewiesen: „Beim Arbeiten mit Entscheidungsmodellen kann [...] auf Erfahrung und Intuition des Entscheidenden nicht verzichtet werden. Es gehen praktisch immer irgendwelche Größen in die Modellanalyse ein, die auf intuitiver Schätzung beruhen. Andererseits wird der Entscheidende auch das Ergebnis der Modellanalyse daraufhin überprüfen, ob es mit dem übereinstimmt, was er intuitiv für richtig hält. Ist dies nicht der Fall, so wird er die Ausgangsschätzungen überprüfen [...]“.

Der Vorzug dieser Verfahrensweise gegenüber einer rein intuitiven Entscheidung liegt zum einen darin, dass auf jeden Fall der vorhandene Bestand gesicherten Wissens korrekt verarbeitet wird, zum anderen darin, dass die Widerspruchsfreiheit zwischen intuitiven Schätzungen von Eingangsgrößen und dem intuitiven Urteil über Entscheidungen gewährleistet ist. Bei rein intuitivem Vorgehen würden derartige Widersprüche unerkannt bleiben. Je nach Art und Anwendungsgebiet des Entscheidungsmodells werden gesicherte Erkenntnisse einerseits und intuitive Urteile andererseits mit unterschiedlichem Gewicht in das Modell eingehen. Der Regelfall ist aber, dass das Entscheidungsmodell die Mitwirkung des selbständig urteilenden Menschen bei der Entscheidung nicht überflüssig macht, es vielmehr nur als Hilfsmittel zur Vorbereitung der Entscheidung dient“ (Hax 1974, S. 15 f.).

2.6.2 Subjektivität von Entscheidungsmodellen

Der Zweck eines Entscheidungsmodells kann nicht darin bestehen, ein „objektives Optimum“ zu bestimmen. Ein solcher Anspruch kann nicht erfüllt werden. Entscheidungsmodelle stellen Instrumente dar, deren Anwendung zu einer Alternative führen soll, die optimal oder doch wenigstens „gut“ ist in Bezug auf die Zielvorstellungen des jeweiligen Entscheiders, auf die von ihm wahrgenommenen Aktionsmöglichkeiten sowie auf dessen (subjektive) Erwartungen über die Konsequenzen der erwogenen Maßnahmen. Personen mit anderen Zielen, einem anderen Kenntnisstand hinsichtlich der Alternativen und/oder einer anderen Erwartungsstruktur über die Konsequenzen der Alternativen mag eine ganz andere Entscheidung als optimal erscheinen. Die Konstruktion eines Entscheidungsmodells wird in mehrfacher Hinsicht durch *subjektive* Faktoren geprägt:

1. Zunächst einmal ist die Entscheidungsregel eines Entscheidungsmodells nicht objektiv vorgegeben, sondern durch die subjektiven Zielvorstellungen des jeweiligen Entscheiders bestimmt.

2. Die Alternativen, die einem Entscheider in objektiver Hinsicht offen stehen, hängen weitgehend von seinen subjektiven Lebensumständen ab (etwa von seinen Fähigkeiten; von seiner Vermögenslage; von der Organisation, in der er arbeitet; von seiner Stellung innerhalb der Organisation).
3. Welche Alternativen ein Entscheider aus der Menge der ihm objektiv gegebenen Möglichkeiten tatsächlich wahrnimmt, wird darüber hinaus von weiteren subjektiven Faktoren bestimmt, z. B. seinem Einfallsreichtum, seinem Informationsstand sowie seiner Fähigkeit, aus Informationen Rückschlüsse auf (ihm) bisher unbekannte Alternativen zu ziehen.
4. Auch die Erwartungsstruktur über die maßgeblichen Zustände ist von subjektiven Faktoren abhängig, nämlich vom Informationsstand des jeweiligen Entscheiders und der Art und Weise, wie er Informationen verarbeitet. Zwei Personen können verschiedene Wahrscheinlichkeitsvorstellungen über Zustände haben, weil sie unterschiedlich gut informiert sind oder weil sie aus denselben Informationen unterschiedliche Rückschlüsse auf die Zustände ziehen.
5. Die von einem Entscheider wahrgenommenen Alternativen und deren möglichen Ergebnisse können immer nur in vereinfachter Form in einem Entscheidungsmodell abgebildet werden; das Gleiche gilt grundsätzlich auch für die Zielvorstellungen des Entscheiders. Damit stellt sich das Entscheidungsproblem, in welcher Weise vereinfacht werden soll (Kap. 18). Da dieses dem eigentlichen Entscheidungsproblem (d. h. der Wahl einer Alternative) vorgelagert ist, wird es als *Vorentscheidungsproblem* bezeichnet. Welches konkrete Entscheidungsmodell zur Anwendung kommt, hängt davon ab, wie dieses Problem gelöst wird. Auch die Lösung des Vorentscheidungsproblems wird von subjektiven Faktoren bestimmt, z. B. von den Varianten der Vereinfachung, die der Entscheider (mehr oder weniger bewusst) gegeneinander abwägt, von der Erwartungsstruktur des Entscheiders über die jeweils möglichen Auswirkungen, von seiner Risikoeinstellung und von den ihm entstehenden Kosten der Formulierung und Lösung eines Entscheidungsmodells. Diese Kosten fallen in Form von Ausgaben (etwa für die Inanspruchnahme von Rechenkapazitäten) und/oder durch Einsatz von Arbeit und Zeit des Entscheiders (Opportunitätskosten) an. Er wird den Nutzenentgang (aufgrund einer möglichen Verschlechterung der Entscheidung) durch die vereinfachte Modellformulierung mit den eingesparten Kosten der Formulierung und Lösung des Entscheidungsmodells verglichen.

Die Lösung eines Entscheidungsmodells kann natürlich immer nur zu derjenigen Alternative führen, die in Bezug auf jene Welt von Zielen, Alternativen usw. optimal ist, die im Modell dargestellt ist. Im Lichte anderer Modellkonstruktionen können sich andere Alternativen als optimal erweisen. Da die Modellkonstruktion und Modelllösung nicht zur besten Alternative „schlechthin“ führen, mag es naheliegen, Entscheidungsmodelle als Orientierungshilfe für die Entscheidungsvorbereitung pauschal abzulehnen. Wenn aber die „Entscheidung“ nicht nach irgendeinem Zufallsexperiment getroffen oder das Verhalten anderer Personen (bzw. das eigene Verhalten in früheren Situationen) nicht

völlig ungeprüft nachgeahmt werden soll, ergibt sich stets die Notwendigkeit, Alternativen gegeneinander abzuwägen. Die damit verbundenen Überlegungen werden grundsätzlich nach bestimmten Denkmodellen geordnet, auch wenn das jeweilige Modell nicht explizit (aber implizit doch im „Hinterkopf“ des Entscheiders) angewendet wird. Da die Fähigkeiten der Menschen, komplexe Zusammenhänge zu durchschauen, begrenzt sind, ist bei impliziter Anwendung eines Entscheidungsmodells (das dann durch bestimmte „Gedanken“ zum Ausdruck kommt) grundsätzlich eine stärkere Vereinfachung geboten als bei expliziter Anwendung, bei der das Entscheidungsmodell durch gewisse Zeichen und Symbole beschrieben wird, sodass die Lösung rechnerisch ermittelt werden kann. Das explizite Arbeiten mit Entscheidungsmodellen zwingt überdies den Entscheider dazu, sich mit den Beziehungen zwischen den verschiedenen Aspekten seines Entscheidungsproblems bewusst auseinander zu setzen und dieses Problem als Einheit zu analysieren.

2.7 Zusammenfassung

- Auch wenn sich Entscheidungsprobleme im Detail erheblich voneinander unterscheiden, können sie auf eine allgemeine Grundstruktur zurückgeführt werden. Dasselbe gilt für Entscheidungsmodelle zur Formulierung und Lösung der Entscheidungsprobleme.
- Die Grundstruktur jedes Entscheidungsmodells beinhaltet vier Basiselemente: Die Handlungsalternativen, die Ergebnisse, die Umweltzustände sowie die Entscheidungsregel zur Bewertung der möglichen Ergebnisse.
- Ein Umweltzustand bezeichnet eine Kombination von Ausprägungen derjenigen Daten, von denen die Ergebnisse der erwogenen Alternativen abhängen. Bezüglich der Umwelt kann ein Entscheider sichere oder unsichere Erwartungen haben.
- Bei Sicherheit ist der Umweltzustand bekannt, bei Unsicherheit sind mehrere Zustände möglich. In einer Risikosituation kann der Entscheider den Zuständen Eintrittswahrscheinlichkeiten zuordnen, bei Unsicherheit im engeren Sinn kann er dies nicht.
- Eine Entscheidungsregel legt fest, wie aus einer Alternativenmenge ausgewählt wird. Sie besteht aus einer Präferenzfunktion, die jeder Alternative einen Präferenzwert zuordnet, sowie einem Kriterium, das zum Ausdruck bringt, welche Ausprägung für den Präferenzwert angestrebt wird.
- An die Präferenzen eines Entscheiders stellt die normative Entscheidungstheorie zwei grundlegende Anforderungen: Der Entscheider muss in der Lage sein, Ergebnisse zu vergleichen und anzugeben, ob er ein Ergebnis dem anderen vorzieht oder nicht (Ordnungsaxiom), und seine Angaben müssen widerspruchsfrei sein (Transitivitätsaxiom).
- Die Basiselemente eines Entscheidungsmodells können in unterschiedlicher Form dargestellt werden. Ein anschauliches und flexibles Darstellungskonzept ist das Grundmodell der Entscheidungstheorie, dessen Bausteine die Ergebnismatrix und die Entscheidungsregel sind. Die praktische Anwendung des Grundmodells kann

jedoch hohen Aufwand verursachen. Alternativ können grafische oder mathematische Modelle mit geringerem Planungsaufwand angewendet werden.

- Große Bedeutung für die Betriebswirtschaftslehre hat das Zielsystem der Unternehmung. Die entscheidungsorientierte Betriebswirtschaftslehre geht davon aus, dass Unternehmensziele aus den individuellen Zielen der Interessengruppen der Unternehmung abzuleiten sind.
- Entscheidungsmodelle sind stets vereinfachte Darstellungen der Wirklichkeit, da sie nur die für die Problemstellung wichtigen Elemente und Zusammenhänge enthalten. Das Modell dient zunächst nur der Entscheidungsvorbereitung, seine Lösung stellt nicht zwangsläufig die tatsächlich zu wählende Alternative dar.

Ergänzende und vertiefende Literatur

Bamberg et al. (2012, Kap. 2); Bitz (1977); Cyert und March (1963); Dinkelbach (1973; 1978); Dinkelbach und Kleine (1996); Eisenführ et al. (2010, Kap. 2–4); Franke (1977); Friedmann (1953); Gillenkirch und Velthuis (2007); Hax (1974); Raiffa (1973); Schauenberg (1978); Schneeweiß C. (1984); Schneeweiß H. (1966); Sieben und Schildbach (1994).

2.8 Übungen

Aufgabe 2.1

Herr Fogg will von London nach Paris reisen. Er erkundigt sich nach Flügen, Zugverbindungen, Fernbusverbindungen und erwägt zudem die Fahrt mit dem eigenen PKW. Wichtig ist ihm neben den Reisekosten auch die Reisezeit. Stellen Sie Herrn Fogs Entscheidungsproblem dar. Unterstellen Sie vereinfachend Sicherheit und nehmen Sie (eingermaßen realistische) Werte für die Ergebnisse an.

Aufgabe 2.2

Herr Loman vertreibt medizinische Geräte für einen Hersteller. In seinem Verkaufsgebiet NordWest muss er an einem Tag Rheine (RHE), Greven (GRE), Münster (MS) und Warendorf (WAF) besuchen. Er startet in Osnabrück (OS) und kehrt abends auch dahin zurück. Er muss nun entscheiden, in welcher Reihenfolge er die Termine für den Tag vereinbart. Jeder Termin nimmt eine Stunde Zeit in Anspruch. Herr Loman will die Arbeitszeit für den Tag minimieren. Folgende Tabelle gibt die Entfernungen zwischen den Zielen in Minuten Reisezeit (Fahrt mit dem Auto) an.

	OS	RHE	GRE	MS	WAF
OS		35	40	60	65
RHE			30	40	70
GRE				20	50
MS					30

- a) Wie viele alternative Reiserouten gibt es?
- b) Skizzieren Sie die Darstellung des Entscheidungsproblems im Grundmodell der Entscheidungstheorie.
- c) Stellen Sie das Entscheidungsproblem grafisch dar.

Aufgabe 2.3

Ein Spargelbauer ist in seiner Region der einzige Anbieter von frischem Spargel. Er geht von 5000 kg Gesamternte für die Saison aus und will über den kg-Preis entscheiden, zu dem er den Spargel an seinen Verkaufsständen anbieten möchte. Er ist sich sicher, dass er die gesamte Ernte für jeden Preis bis 5 EUR verkaufen kann. Bei 6 EUR rechnet er damit, nur 4500 kg verkaufen zu können, bei 7 EUR nur 4000 kg, bei 8 EUR nur 3500 kg usw. Seine variablen Produktionskosten betragen 3 EUR je kg, seine Fixkosten 5000 EUR.

- a) Stellen Sie das Entscheidungsproblem des Spargelbauern im Grundmodell der Entscheidungstheorie dar. Berücksichtigen Sie dabei nur ganzzahlige Preise. Für welchen Preis entscheidet sich der Bauer?
- b) Stellen Sie das Entscheidungsproblem als mathematisches Entscheidungsmodell dar. Bestimmen Sie das Gewinnmaximum des Bauern.

Aufgabe 2.4

Ein Händler hat die Möglichkeit, für den nächsten Tag 0, 1, 2 oder 3 Einheiten eines sehr leicht verderblichen Produktes zum Preis von 5 EUR je Einheit einzukaufen. Der Verkaufspreis beträgt 12 EUR je Einheit. Werden die Produkte nicht am selben Tag abgesetzt, so sind sie verdorben und haben einen Wert von Null. Nachfrage, die nicht befriedigt werden kann, verursacht keine Kosten. Die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass am nächsten Tag 0, 1, 2 oder 3 Einheiten nachgefragt werden, sind dem Händler zunächst nicht bekannt.

- a) Handelt es sich bei dem gegebenen Problem um eine Entscheidungssituation unter Sicherheit, Unsicherheit im engeren Sinne oder Risiko?
- b) Stellen Sie die Ergebnismatrix des Händlers auf. Verwenden Sie als Ergebnisse die Differenzen aus Verkaufserlösen und Einkaufskosten.

2.9 Lösungshinweise

Aufgabe 2.1

Alternativen sind in der Problemstellung genannt. Zwei Ziele werden genannt, Reisekosten und Reisezeit. So lange keine Angaben bestehen, wie Herr Fogg Geld und Zeit gegeneinander abwägt, müssen beide separat dargestellt werden. Realistische Werte für

die Alternativen können recherchiert werden (Fahrpreisauskünfte der Fluggesellschaften, Fernbusreise-Anbieter und der Deutschen Bahn, Kostenansätze für den eigenen PKW).

Aufgabe 2.2

a) Herr (Willy) Loman kann $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ Routen nehmen – **b)** 24 Alternativen mit jeweils einem Ergebnis, der Summe der Fahrtzeiten. Z. B.: $A_1 = \text{Osnabrück} \rightarrow \text{Rheine} \rightarrow \text{Greven} \rightarrow \text{Münster} \rightarrow \text{Warendorf} \rightarrow \text{Osnabrück}$ mit dem Ergebnis $35 + 30 + 20 + 30 + 65 = 180$ min. – **c)** Diagramm (Streckennetz) mit den fünf Städten und Pfaden (Verbindungslinien) zwischen allen Städten. Routen sind alle denkbaren Wege durch das Streckennetz, die in Osnabrück beginnen und enden.

Aufgabe 2.3

a) Zielgröße ist der Gewinn. Alternativen A_1 bis A_{10} sind die Verkaufspreise von 5 bis 14. Gewinn von A_1 (Preis = 5) entspricht z. B. $5000 \cdot (5 - 3) - 5000 = 5000$ EUR. Gewinnmaximum beim Verkaufspreis 9. – **b)** Gewinnfunktion: $G = (p - k) \cdot x(p) - K$, mit $p = \text{Verkaufspreis}$, $k = \text{variablen Produktionskosten}$, $K = \text{Fixkosten}$ und $x(p) = 5000 - 500 \cdot (p - 5)$ der Absatzmenge. Gewinnmaximum bei $p = 9$ (wie in a)).

Aufgabe 2.4

a) Unsicherheit im engeren Sinne. – **b)** Alternativen (A_1 bis A_4): Einkauf von 0, 1, 2 oder 3 Einheiten. Umweltzustände (S_1 bis S_4): Nachfrage von 0, 1, 2, 3 Einheiten am nächsten Tag. Gewinn z. B. für A_3 und S_3 : $2 \cdot 12 - 2 \cdot 5 = 14$ oder für A_4 und S_2 : $1 \cdot 12 - 3 \cdot 5 = -3$.

Literatur

- Bamberg, G., Coenenberg, A.G., Krapp, M.: Betriebswirtschaftliche Entscheidungslehre, 15. Aufl. Vahlen, München (2012)
- Berthel, J.: Zielorientierte Unternehmenssteuerung: Die Formulierung operationaler Zielsysteme. Poeschel, Stuttgart (1973)
- Bitz, M.: Die Strukturierung ökonomischer Entscheidungsmodelle. Gabler, Wiesbaden (1977)
- Cyert, R., March, J.G.: A Behavioral Theory of the Firm. Prentice Hall, Englewood Cliffs (1963)
- Dinkelbach, W.: Zur Frage unternehmerischer Zielsetzungen bei Entscheidungen unter Risiko. In: Koch, H. (Hrsg.) Zur Theorie des Absatzes, Festschrift zum 75. Geburtstag von Erich Gutenberg, S. 35–59. Gabler, Wiesbaden (1973)
- Dinkelbach, W.: Ziele, Zielvariablen und Zielfunktionen. Die Betriebswirtschaft **38**, 51–58 (1978)
- Dinkelbach, W., Kleine, A.: Elemente einer betriebswirtschaftlichen Entscheidungslehre. Springer, Berlin (1996)
- Franke, G.: Stellen- und Personalbedarfsplanung. VS Verlag, Opladen (1977)
- Friedman, M.: Essays in Positive Economics. University of Chicago Press, Chicago (1953)
- Gillenkirch, R., Velthuis, L.: Zielsysteme. In: Köhler, R., Küpper, H.-U., Pfingsten, A. (Hrsg.) Handwörterbuch der Betriebswirtschaftslehre, S. 2029–2037. Schaffer-Poeschel, Stuttgart (2007)
- Hax, H.: Entscheidungsmodelle in der Unternehmung. Einführung in Operations Research. Rowohlt, Reinbek (1974)
- Lindley, D.V.: Einführung in die Entscheidungstheorie. Herder & Herder, Frankfurt a. M. (1974) (Titel der Originalausgabe: Making Decisions. Wiley, London 1971)

- Raiffa, H.: Einführung in die Entscheidungstheorie. Oldenbourg, München (1973) (Titel der engl. Originalausgabe: Decision Analysis. Reading 1968)
- Schauenberg, B.: Zur Bedeutung der Transitivitätsvoraussetzung in der Entscheidungstheorie. Z. gesamte Staatswiss. **134**, 166–187 (1978)
- Schneeweiß, C.: Elemente einer Theorie betriebswirtschaftlicher Modellbildung. Z. Betriebswirtsch. **54**, 480–504 (1984)
- Schneeweiß, H.: Das Grundmodell der Entscheidungstheorie. Statistische **7**, 125–137 (1966)
- Sieben, G., Schildbach, T.: Betriebswirtschaftliche Entscheidungstheori, 4. Aufl. Werner, Tübingen (1994)

Entscheidungskriterien und Entscheidungsmodelle bei Sicherheit

3

3.1 Problemstellung und Aufbau

In diesem Kapitel werden Entscheidungsprobleme untersucht, bei denen der Entscheider die Ausprägungen aller entscheidungsrelevanten Daten und folglich auch den Umweltzustand mit Sicherheit kennt. Der Entscheider kann dann das Ergebnis vorhersehen, das bei Wahl einer Alternative erzielt wird. In der Realität sind Entscheidungen zwar im Allgemeinen bei unvollkommenem Informationsstand und mithin bei unsicheren Erwartungen zu treffen. Dennoch haben Entscheidungsmodelle bei Sicherheit große theoretische und praktische Bedeutung.

Wegen der Komplexität realer Entscheidungsprobleme besteht im Allgemeinen ein Zwang zur Modellvereinfachung. Eine Möglichkeit der Vereinfachung besteht darin, nicht alle als möglich erachteten Ausprägungen für die entscheidungsrelevanten Daten im Modell zu berücksichtigen. Im einfachsten Fall werden für alle Daten feste Werte angenommen und dann wird so damit gerechnet, als seien sie *sicher* („Quasi-Sicherheit“). Die Problematik dieses Vorgehens besteht darin, dass diejenigen Konsequenzen im Kalkül vernachlässigt werden, die sich bei anderen als den angenommenen Datenausprägungen ergeben. Die Vernachlässigung dieser Konsequenzen kann aber vor allem dann gerechtfertigt sein, wenn sie für alle erwogenen Alternativen jeweils ähnlich sind oder wenn eine äußerst geringe Wahrscheinlichkeit dafür besteht, dass die entscheidungsrelevanten Daten andere als die angenommenen Werte annehmen. Die Annahme sicherer Erwartungen hat auch didaktische Bedeutung und kann der Entscheidungsvorbereitung dienen. Sie ermöglicht es, Entscheidungsprobleme und Lösungskonzepte in vereinfachter Form zu analysieren. Entscheidungsmodelle, die unter der Annahme sicherer Erwartungen konzipiert werden, können auch für die Lösung von Entscheidungsproblemen bei Unsicherheit nützlich sein, wenn bekannt ist, wie die Modelle für den

Unsicherheitsfall erweitert werden können. Eine Erweiterungsmöglichkeit besteht insbesondere darin, die (Wahrscheinlichkeitsverteilungen der) einzelnen unsicheren Zielgrößenwerte durch ihre Sicherheitsäquivalente, d. h. durch gleichwertige sichere Beträge, zu ersetzen (Kap. 7), und dann ein Entscheidungskriterium bei Sicherheit anzuwenden.

Dieses Kapitel behandelt Entscheidungsprobleme bei Sicherheit und *mehreren* Zielgrößen. Sofern sich der Entscheider nur an einer Zielgröße orientiert, sind Wahlprobleme bei Sicherheit aus entscheidungstheoretischer Sicht einfach zu lösen, wenn auch die praktische Bestimmung einer optimalen Alternative erhebliche rechentechnische Probleme verursachen kann. Der Fall *einer* Zielgröße ist zudem wenig realistisch. In realen Entscheidungssituationen sind im Allgemeinen die Alternativen unter Berücksichtigung *mehrerer* Zielgrößen zu beurteilen.

In Abschn. 3.2 werden Grundprobleme der Entscheidung bei zwei oder mehr Zielgrößen diskutiert. Darauf aufbauend wird in Abschn. 3.3 gezeigt, wie Entscheidungsprobleme bei zwei Zielgrößen grafisch analysiert werden können. Bei mehr als zwei Zielgrößen kann der direkte Vergleich von Ergebnissen (von Zielgrößenvektoren) wesentlich schwieriger sein als bei zwei Zielgrößen. Wie jedoch in Abschn. 3.4 gezeigt wird, kann der Vergleich beliebiger Zielgrößenvektoren mit mehr als zwei Zielgrößen auf den sukzessiven Vergleich solcher Vektoren zurückgeführt werden, die sich nur bezüglich *zweier* Zielgrößen unterscheiden.

Bei der Formulierung eines mathematischen Entscheidungsmodells stellt sich das Problem, die Präferenzvorstellungen des Entscheiders in einer Zielfunktion auszudrücken. In Abschn. 3.5 werden zunächst die Grenzen der Ermittlung und formalen Darstellung einer (Nutzen-) Funktion gezeigt, die die Präferenz „exakt“ widerspiegelt. Danach werden „Ersatzkriterien“ diskutiert, die eine Vereinfachung ermöglichen.

3.2 Grundprobleme der Entscheidung bei mehreren Zielgrößen

3.2.1 Zielgrößenmatrix

Hat der Entscheider sichere Erwartungen, so ordnet er jeder Alternative A_a genau ein Ergebnis x_a zu. Orientiert er sich an mehreren Zielgrößen, so ist das Ergebnis durch den Vektor der entsprechenden Zielgrößenausprägungen charakterisiert.

Die tabellarische Darstellung der (erwogenen) Alternativen A_a und ihrer (sicheren) Zielgrößenwerte wird als *Zielgrößenmatrix* bezeichnet. Sie ist eine spezielle Form der Ergebnismatrix, wobei die Spalten nicht über die Zustände, sondern über die Zielgrößen $Z_1, Z_2, \dots, Z_{N_Z}$ definiert sind (Tab. 3.1).

Das Ergebnis $\mathbf{x}_a$ der Alternative A_a entspricht dem Vektor der Ausprägungen aller Zielgrößen bei Wahl der Alternative A_a :

$$\mathbf{x}_a = [Z_{a1}, Z_{a2}, \dots, Z_{aN_Z}].$$

Tab. 3.1 Zielgrößenmatrix
(bei sicheren Erwartungen und N_Z Zielgrößen)

	Z_1	Z_2	...	Z_z	...	Z_{N_Z}
A_1	Z_{11}	Z_{12}	...	Z_{1z}	...	Z_{1N_Z}
A_2	Z_{21}	Z_{22}	...	Z_{2z}	...	Z_{2N_Z}
·	·	·		·		·
·	·	·		·		·
·	·	·		·		·
A_a	Z_{a1}	Z_{a2}	...	Z_{az}	...	Z_{aN_Z}
·	·	·		·		·
·	·	·		·		·
·	·	·		·		·
A_{N_A}	$Z_{N_A 1}$	$Z_{N_A 2}$	...	$Z_{N_A z}$	...	$Z_{N_A N_Z}$

Tab. 3.2 Die Zielgrößenmatrix der Absolventin

	Z_1 Gehalt	Z_2 Arbeitszeit	Z_3 Flexibilität	Z_4 Attraktivität Stelle	Z_5 Nähe	Z_6 Karriere- chancen
Angebot 1	36	38,5	1	1	0	1
Angebot 2	42	40	1	2	0	2
Angebot 3	40	50	3	3	1	1
Angebot 4	48	60	2	4	1,5	3
Angebot 5	39	40	4	2	0,5	2
Angebot 6	45	50	2	3	2	4

Dabei bezeichnet Z_{az} den Wert, den die Zielgröße Z_z ($z = 1, 2, \dots, N_Z$) bei Wahl der Alternative A_a ($a = 1, 2, \dots, N_A$) annimmt.¹ Orientiert sich der Entscheider im Rahmen eines Entscheidungsproblems nur an einer Zielgröße, Z , so enthält die Zielgrößenmatrix nur eine Ergebnisspalte; Zielgrößenausprägung und Ergebnis sind deckungsgleich, d. h. $x_a = Z_a$.

Zur Veranschaulichung einer Zielgrößenmatrix mit mehreren Zielgrößen wird ein Beispiel betrachtet (Tab. 3.2): Eine Universitätsabsolventin hat sich bei mehreren potenziellen Arbeitgebern beworben und insgesamt sechs konkrete Stellenangebote erhalten, die sie nach folgenden Zielgrößen beurteilt:

$Z_1 \hat{=}$ Bruttojahresgehalt in 1000 €,

$Z_2 \hat{=}$ Wochenarbeitszeit in Stunden,

$Z_3 \hat{=}$ Arbeitszeitflexibilität auf einer Skala von 1 (starr) bis 4 (sehr flexibel),

¹Im Folgenden wird auf die besondere Kennzeichnung von x_a als Vektor (d. h. auf den Fettdruck von x) verzichtet.

$Z_4 \hat{=}$ Attraktivität der Stellenbeschreibung auf einer Skala von 1 (unattraktiv) bis 4 (hervorragend),

$Z_5 \hat{=}$ Nähe des Arbeitsplatzes zu Familie und Freunden in Stunden Fahrtzeit,

$Z_6 \hat{=}$ Karrierechancen auf einer Skala von 1 (keine) bis 4 (hervorragende).

Bei den Zielgrößen Z_1 , Z_3 , Z_4 und Z_6 zieht die Absolventin c. p. einen höheren Wert der Zielgröße einem niedrigeren vor; im Hinblick auf die Zielgrößen Z_2 und Z_5 verhält es sich umgekehrt. Es gibt kein Stellenangebot, das hinsichtlich aller Zielgrößen optimal ist. Je nach Zielgröße schneidet ein anderes Angebot am besten ab. Angebot 1 ist z. B. im Hinblick auf die Zielgrößen Z_2 (Arbeitszeit) und Z_5 (Nähe zu Familie und Freunden) am besten. Andererseits ist das Gehalt gering, die Arbeitszeit ist unflexibel, die Stelle vergleichsweise wenig attraktiv und die Karrierechancen gering. Die Absolventin kann die Zielgrößenwerte Z_1 , Z_3 , Z_4 und Z_6 nur verbessern, indem sie ein anderes Stellenangebot wählt.

3.2.2 Vergleich von Ergebnissen und Ordnungsaxiom

Wie in Kap. 2, Abschn. 2.2.3, erläutert wurde, setzt rationales Entscheiden das Vorhandensein von Zielvorstellungen voraus, auf deren Grundlage die Wünschbarkeit der Konsequenzen von Handlungsalternativen beurteilt werden kann. Der Entscheider muss prinzipiell in der Lage sein, die Ergebnisse miteinander zu vergleichen. Die Forderung nach der Vergleichbarkeit der Ergebnisse wird durch das *Ordnungsaxiom* ausgedrückt (Kap. 2, Abschn. 2.4.1.1). Bei nur einer Zielgröße fordert das Ordnungsaxiom, dass der Entscheider angeben kann, welchen von zwei beliebigen Zielgrößenwerten er vorzieht, oder ob er indifferent zwischen den Werten ist. Bei nur einer Zielgröße kann das Ordnungsaxiom als erfüllt vorausgesetzt werden. Für den Fall mehrerer Zielgrößen $Z_1, Z_2, \dots, Z_{N_Z}$ ($N_Z \geq 2$) verlangt das Ordnungsaxiom, dass der Entscheider für zwei beliebige Vektoren von (konkreten) Zielgrößenwerten, $x^* = [Z_1^*, Z_2^*, \dots, Z_{N_Z}^*]$ und $x^{**} = [Z_1^{**}, Z_2^{**}, \dots, Z_{N_Z}^{**}]$, angeben kann, ob er zwischen diesen Vektoren indifferent ist bzw. welchen er vorzieht. Im Fall mehrerer Zielgrößen stellt das Ordnungsaxioms somit wesentlich höhere Anforderungen, und es ist eher zu erwarten, dass es in der Realität nicht erfüllt ist.

Der Vergleich von Zielgrößenvektoren ist immerhin noch relativ einfach, wenn nur zwei Zielgrößen gegeben sind ($N_Z = 2$). Der Entscheider muss dann (nur) angeben können, um welchen Betrag sich der Wert der Zielgröße Z_2 verbessern muss, damit derjenige Nachteil kompensiert wird, der entsteht, wenn sich ausgehend von einer bestimmten Wertekonstellation der Zielgrößen Z_1 und Z_2 der Wert der Zielgröße Z_1 um einen Betrag Δ verschlechtert. Voraussetzung ist dabei, dass überhaupt ein Z_2 -Wert existiert, bei dem die Änderung von Z_1 kompensiert wird, also Indifferenz zur Ausgangsposition besteht. Diese Bedingung mag aber gar nicht erfüllt sein. Es ist nicht ausgeschlossen, dass für jeden Z_2 -Wert eine strenge Präferenz für den einen oder den anderen Zielgrößenvektor besteht. Davon wird im Folgenden jedoch abgesehen.

Vor allem bei mehr als zwei Zielgrößen stellt der Ergebnisvergleich ein komplexes Problem dar. Das Ordnungsaxiom verlangt jedoch vom Entscheider nicht, dass er Zielgrößenvektoren mit mehr als zwei Komponenten *unmittelbar* gegeneinander abwägen kann. Die Entscheidungstheorie kann gerade Hilfestellungen für den mittelbaren Vergleich von Ergebnissen anbieten. Wenn das Transitivitätsaxiom erfüllt ist, kann (unter bestimmten Bedingungen) der Vergleich zweier beliebiger Zielgrößenvektoren mit *mehr* als zwei Komponenten auf den sukzessiven Vergleich von Vektoren zurückgeführt werden, die sich jeweils nur im Hinblick auf zwei Zielgrößen unterscheiden (*Transformationskonzept*). Ein derartiger Vergleich stellt an den Entscheider im Allgemeinen geringere Anforderungen als der unmittelbare Vergleich von Zielgrößenvektoren, die sich hinsichtlich aller Zielgrößen unterscheiden (vgl. Abschn. 3.4).

3.2.3 Entscheidung auf der Grundlage einer Zielgrößenmatrix

Die Zielgrößenmatrix bietet bei einer überschaubaren Zahl von Alternativen die Möglichkeit, ein Entscheidungsproblem bei Sicherheit in anschaulicher Weise darzustellen. Wenn eine Zielgrößenmatrix vorliegt, kann die Entscheidung auf folgende zwei Arten getroffen werden:

1. Der Entscheider bestimmt seine (vollständige) „*Präferenzordnung*“ bezüglich der Ergebnisse und wählt diejenige Alternative, deren Ergebnis in seiner Präferenzordnung den höchsten Rang einnimmt.
2. Der Entscheider prüft lediglich, welches Ergebnis am besten ist, und realisiert dann die entsprechende Alternative. Er bestimmt also nur den „*Spitzenreiter*“ seiner Präferenzordnung. Welche Ränge die übrigen Ergebnisse (bzw. Handlungsalternativen) in der Präferenzordnung einnehmen, bleibt offen.

Eine *Präferenzordnung* der Ergebnisse ist eine vollständige und transitive Präferenzrelation bezüglich der Ergebnisse. Eine Präferenzrelation ist *vollständig*, wenn sie für jedes Paar möglicher Ergebnisse x_i und x_j angibt, ob $x_i < x_j$, $x_i \sim x_j$ oder $x_i > x_j$ gilt. Sie ist *transitiv*, wenn sie das Transitivitätsaxiom (Kap. 2, Abschn. 2.4.1.1) erfüllt.

Die vollständige Präferenzordnung kann im Prinzip durch paarweise Vergleiche zwischen je zwei Ergebnissen ermittelt werden. Dabei muss nicht notwendig jedes Ergebnis mit jedem anderen Ergebnis explizit verglichen werden. Aufgrund der Transitivitätsbedingung werden im Allgemeinen relativ wenige paarweise Vergleiche benötigt.

Zur Ermittlung der Präferenzordnung werden aus der Menge der Ergebnisse zunächst zwei beliebige Ergebnisse, z. B. x_1 und x_2 (die Ergebnisse der Alternativen A_1 und A_1), ausgewählt. Der Entscheider muss nun feststellen, welches Ergebnis er vorzieht oder ob er zwischen den Ergebnissen indifferent ist. Dieser Ergebnisvergleich erfolgt entweder in unmittelbarer Weise oder mittelbar zum Beispiel nach dem in Abschn. 3.4 dargestellten Transformationskonzept. Es gelte $x_1 > x_2$. Beim zweiten paarweisen Vergleich

wird (z. B.) das Ergebnis x_3 dem Ergebnis x_1 gegenübergestellt. Für den Fall $x_3 \succ x_1$ folgt nach dem Transitivitätsaxiom die Präferenzrelation $x_3 \succ x_1 \succ x_2$, während für den Fall $x_3 \sim x_1$ die Relation $x_3 \sim x_1 \succ x_2$ gilt. In beiden Fällen erübrigt sich folglich der explizite Vergleich der Ergebnisse x_3 und x_2 . Dieser Vergleich ist nur dann notwendig, wenn $x_3 \prec x_1$: Führt der Vergleich zu $x_3 \succ x_2$, folgt die Präferenzrelation $x_1 \succ x_3 \succ x_2$, während für den Fall $x_3 \sim x_2$ (bzw. $x_3 \prec x_2$) $x_1 \succ x_3 \sim x_2$ (bzw. $x_1 \succ x_2 \succ x_3$) gilt.

In analoger Weise werden weitere Ergebnisse sukzessive (soweit notwendig) mit den bereits angeordneten Ergebnissen verglichen. Nachdem schließlich sämtliche Ergebnisse berücksichtigt worden sind, steht die Präferenzordnung fest. Der Präferenzordnung über die Ergebnisse entspricht eine Präferenzordnung über die Alternativen. Den ersten Rang in dieser Präferenzordnung nimmt jene Alternative ein, die das beste Ergebnis bietet. Auf der zweiten Position steht die Alternative mit dem zweitbesten Ergebnis, usw.; Alternativen, die zu gleichwertigen Ergebnissen führen, nehmen den gleichen Rang ein (sie sind äquivalent). Ist die Präferenzordnung über die Alternativen bestimmt, so ist das Entscheidungsproblem gelöst. Die Lösung wird durch den „Spitzenreiter“ der Präferenzordnung repräsentiert; diese Alternative wird realisiert.

Für eine Entscheidung auf der Grundlage einer Zielgrößenmatrix genügt es im Allgemeinen, gemäß der zweiten Vorgehensweise nur das beste Ergebnis zu bestimmen; welches Ergebnis in der Präferenzordnung an zweiter oder dritter Stelle steht, kann unentschieden bleiben, da die entsprechenden Alternativen nicht gewählt werden. Anders verhält es sich, wenn mehrere Entscheider eine demokratische Entscheidung nach einer Abstimmungsregel treffen wollen. In diesem Fall ist es grundsätzlich notwendig, dass sich die Entscheider vollständige Präferenzordnungen bilden (Kap. 16 und 17).

Wenn nur ein „Spitzenreiter“ der Präferenzordnung (also nur eine beste Alternative) bestimmt wird, sind grundsätzlich wesentlich weniger paarweise Vergleiche notwendig als bei Ermittlung einer vollständigen Präferenzordnung. Nach jedem Vergleich zweier Ergebnisse kann dann das schlechtere Ergebnis aussortiert werden. Sind die Ergebnisse äquivalent, scheidet eine beliebige der betrachteten Alternativen aus. Die Alternative, die schließlich beim letzten (also dem $(N_A - 1)$ -ten) paarweisen Vergleich den Vorzug erhält, ist der Spitzenreiter der Präferenzordnung und wird realisiert. Dass diese Alternative nicht schlechter ist als alle diejenigen, denen sie beim paarweisen Vergleich nicht explizit gegenübergestellt wurde, folgt aus dem Transitivitätsaxiom.

Zwar verursacht das beschriebene Vorgehen in der Regel einen geringeren Aufwand als die vollständige Bestimmung einer Präferenzordnung. Trotzdem ist es ebenfalls kaum praktikabel, wenn die Anzahl der Alternativen groß ist. Nicht nur die Durchführung der paarweisen Vergleiche verursacht Aufwand. Damit diese Vergleiche überhaupt erfolgen können, müssen die Alternativen beschrieben und ihnen die jeweiligen Ergebnisse zugeordnet werden.

Im Folgenden wird untersucht, wie ein Entscheider Alternativen bzw. ihre Ergebnisse bei Relevanz mehrerer Zielgrößen bewerten bzw. vergleichen kann, um eine beste oder doch wenigstens eine gute Alternative zu finden. Dabei steht das Problem im Vordergrund,

wie die Zielvorstellungen des Entscheiders im Entscheidungsmodell abgebildet werden können. Der Einfachheit halber wird stets angenommen, der Entscheider ziehe hinsichtlich jeder Zielgröße c. p. einen höheren Wert einem niedrigeren vor.

3.3 Grafische Entscheidungsmodelle mit zwei Zielgrößen

3.3.1 Indifferenzkurven

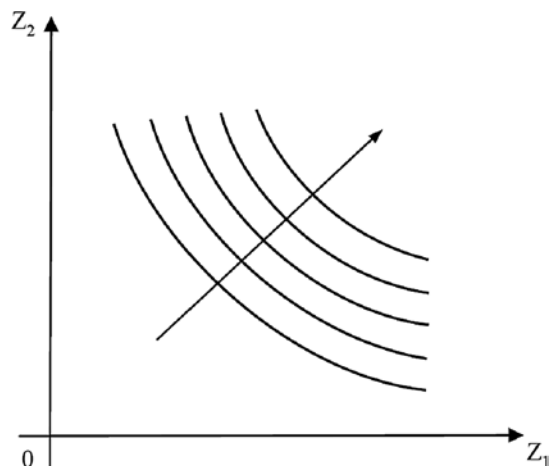
3.3.1.1 Ermittlung

Wenn sich der Entscheider an zwei Zielgrößen (Z_1 und Z_2) orientiert, können seine Präferenzvorstellungen mithilfe von Indifferenzkurven dargestellt werden. Eine Indifferenzkurve ist der geometrische Ort von Wertekombinationen hinsichtlich der beiden Zielgrößen, denen gegenüber der Entscheider indifferent ist. Abb. 3.1 stellt ein Indifferenzkurvensystem dar.

Da annahmegemäß der Entscheider c. p. einen höheren Wert der Zielgröße Z_z ($z = 1, 2$) einem niedrigeren vorzieht, repräsentiert eine Indifferenzkurve umso günstigere (Z_1, Z_2) -Konstellationen, je weiter rechts oben sie im Koordinatensystem verläuft. Jeder Punkt (Z_1, Z_2) des durch die Koordinatenachsen aufgespannten Raumes liegt auf genau einer Indifferenzkurve. In der Abb. 3.1 sind einige der Indifferenzkurven eingezeichnet.

Die Steigungen aller Indifferenzkurven sind negativ. Zur Verdeutlichung dient Abb. 3.2. Alle Punkte rechts oberhalb bzw. links unterhalb von Punkt P repräsentieren (Z_1, Z_2) -Konstellationen, bei denen *beide* Zielgrößen höhere bzw. niedrigere Werte aufweisen als in P. Die betreffenden Punkte können demnach nicht auf derselben Indifferenzkurve liegen wie P. So entspricht z. B. dem Punkt P' (bzw. P'') eine

Abb. 3.1 Indifferenzkurven



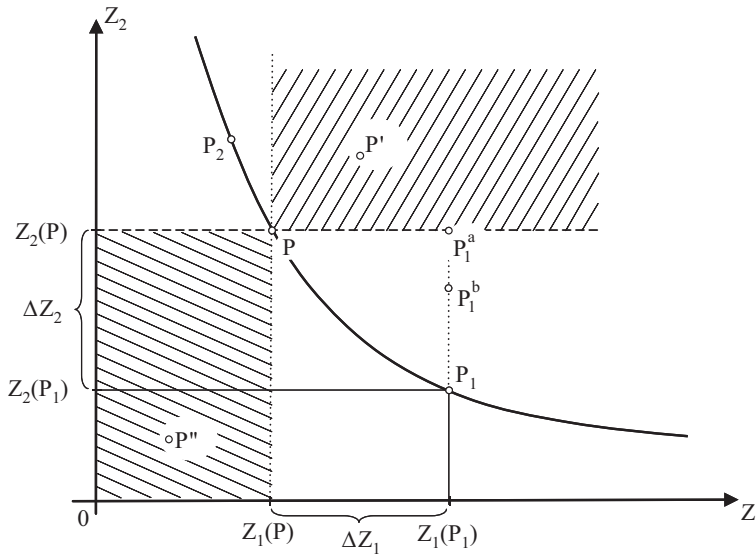


Abb. 3.2 Zur Steigung der Indifferenzkurven

bessere (bzw. schlechtere) (Z_1, Z_2) -Konstellation als dem Punkt P . Kurz: P' wird P vorgezogen und P wird P'' vorgezogen. Auch die Punkte auf den (gestrichelten) Parallelen zu den Koordinatenachsen durch den Punkt P können nicht zu P indifferent sein: Diese Punkte unterscheiden sich von P nur in einer Zielgrößenausprägung. Zu Punkt P indifferente Punkte können nur links oberhalb und rechts unterhalb von P liegen. Solche Punkte unterscheiden sich von P in *beiden* Koordinaten, wobei dem Zuwachs der einen Koordinate gegenüber P eine Verringerung der anderen Koordinate entspricht. Dies gilt unabhängig von der Lage des Punktes P im (Z_1, Z_2) -Diagramm. Die Steigung aller Indifferenzkurven ist demnach negativ.

Die durch den Punkt P in Abb. 3.2 verlaufende Indifferenzkurve kann ermittelt werden, indem sehr viele zu P indifferente Punkte bestimmt und miteinander verbunden werden.² Die empirische Ermittlung indifferenter Punkte ist möglich, wenn das Ordnungssaxiom erfüllt ist. Zur Verdeutlichung wird mithilfe von Abb. 3.2 gezeigt, wie

²Um den Planungsaufwand zu verringern, kann es sinnvoll sein, nur *wenige* Punkte der einzelnen Indifferenzkurven *explizit* zu bestimmen und dann die jeweils äquivalenten Punkte miteinander zu verbinden. Darüber hinaus mag es naheliegen, auch in der Weise zu vereinfachen, dass zunächst nur einige wenige Indifferenzkurven bestimmt werden. Ist ein erster Überblick über die Gestalt der Indifferenzkurven gewonnen, werden weitere Indifferenzkurven in das Koordinatensystem eingezeichnet, ohne genau abzuwägen, welche (Z_1, Z_2) -Konstellationen jeweils äquivalent sind. Die so gewonnenen Indifferenzkurven werden im Allgemeinen nicht exakt mit jenen übereinstimmen, die sich bei genauerem Vorgehen ergäben. Dem damit verbundenen Nachteil einer möglichen Fehlentscheidung steht der Vorteil eines geringeren Planungsaufwandes gegenüber.

derjenige Punkt P_1 bestimmt werden kann, der dem Punkt P äquivalent ist und den Abszissenwert $Z_1(P_1) = Z_1(P) + \Delta Z_1$ ($\Delta Z_1 > 0$) aufweist. Hierzu ist der Ordinatenwert des Punktes P_1 zu ermitteln.

Ausgangspunkt der Befragung ist der Punkt P_1^a (der den gleichen Abszissenwert hat wie P_1 und den gleichen Ordinatenwert wie P). Annahmegemäß zieht der Entscheider die (Z_1, Z_2) -Konstellation P_1^a dem Punkt P vor. Ausgehend von P_1^a wird nun (bei gegebenem Wert für Z_1) sukzessive der Wert für Z_2 verringert und der Entscheider jeweils gefragt, ob er den vorliegenden Punkt (z. B. P_1^b) ebenfalls dem Punkt P vorzieht oder ob er indifferent ist. Wenn das Ordnungsaxiom erfüllt ist, kann der Entscheider derartige Fragen beantworten. Bei entsprechender Variation von Z_2 wird schließlich der dem Punkt P indifferente Punkt P_1 gefunden.

3.3.1.2 Verlauf

Nach dem Transitivitätsaxiom dürfen sich Indifferenzkurven nicht schneiden. In Abb. 3.3 ist ein solcher unzulässiger Fall dargestellt: Die eingezeichneten Indifferenzkurven implizieren zugleich $P_1 \sim P_2$, $P_2 \sim P_3$ jedoch nicht $P_1 \sim P_3$; die Präferenzvorstellungen sind *intransitiv*.

Im Allgemeinen verlaufen die Indifferenzkurven wie in Abb. 3.4 streng konvex. Streng konvexe Indifferenzkurven bringen den folgenden Sachverhalt zum Ausdruck: Steigt die Zielgröße Z_1 sukzessive um einen bestimmten Betrag ΔZ_1 , so muss Z_2 um immer kleinere Beträge fallen, damit wieder äquivalente (Z_1, Z_2) -Konstellationen entstehen. Mit anderen Worten: Je *größer* die Zielgröße Z_1 und je *kleiner* die Zielgröße Z_2 ist, desto weniger Einheiten der Zielgröße Z_2 ist der Entscheider aufzugeben bereit, um ein Ansteigen der Zielgröße Z_1 um den Betrag ΔZ_1 zu „erkaufen“. Dies entspricht einer fallenden *Grenzrate der Substitution*; Letztere ist gleich der mit (-1) multiplizierten Steigung der Indifferenzkurve. Sie gibt an, um welchen Betrag die Zielgröße Z_2 zu vermindern ist, wenn die Zielgröße Z_1 um eine (infinitesimale) Einheit erhöht wird und eine äquivalente (Z_1, Z_2) -Konstellation erzeugt werden soll.

Abb. 3.3 Verstoß gegen das Transitivitätsaxiom

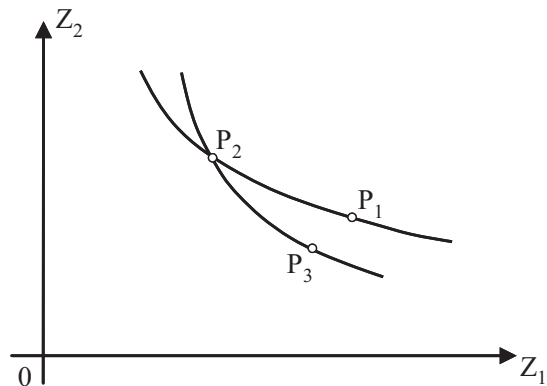
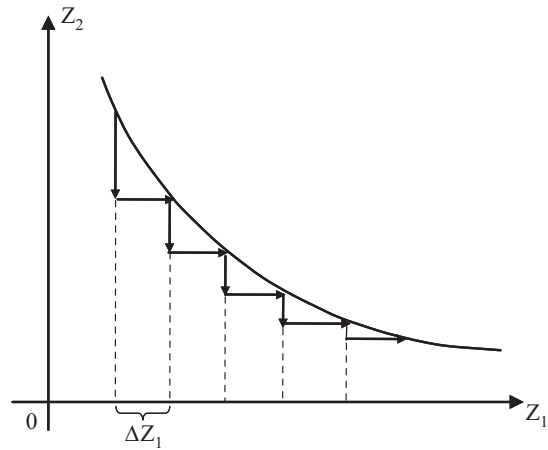


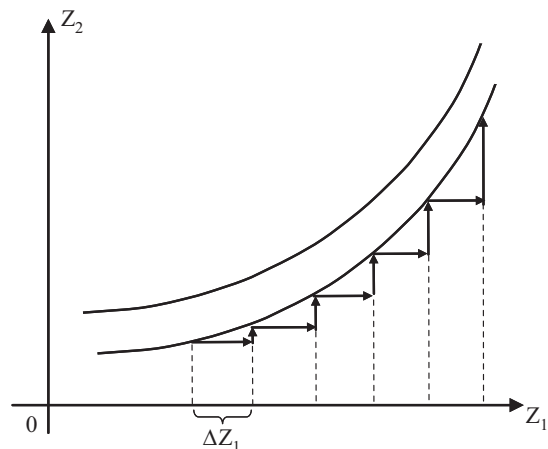
Abb. 3.4 Streng konvexe Indifferenzkurve



Zieht der Entscheidungsträger bei der Zielgröße Z_1 (z. B. Arbeitszeit) c. p. einen niedrigeren Wert einem höheren vor, während er bei der Zielgröße Z_2 (z. B. Einkommen) einen höheren Wert einem niedrigeren vorzieht, so sind die Steigungen der Indifferenzkurven *positiv*. Einer Indifferenzkurve entspricht dann ein umso höherer Präferenzwert, je weiter links oben sie im Koordinatensystem verläuft. Bewegt man sich parallel zur Ordinate nach oben, gelangt man also zu Indifferenzkurven mit einem höheren Präferenzwert. Eine Bewegung parallel zur Abszisse nach rechts führt dagegen zu immer „ungünstigeren“ Indifferenzkurven.

Die in Abb. 3.5 dargestellten *konvex steigenden* Indifferenzkurven implizieren die folgende Präferenzstruktur: Steigt die Zielgröße Z_1 sukzessive um einen Betrag ΔZ_1 , so muss Z_2 um immer größere Beträge steigen, damit wieder äquivalente (Z_1, Z_2) -Konstellationen entstehen. Mit anderen Worten: Je größer die Zielgröße Z_1 ist, desto mehr Einheiten der

Abb. 3.5 Konvexe (steigende) Indifferenzkurven



Zielgröße Z_2 müssen dem Entscheider zusätzlich geboten werden, damit er ein Ansteigen der Zielgröße Z_1 um den Betrag ΔZ_1 gerade akzeptiert. Die Steigungen der Indifferenzkurven sind positiv, die Grenzraten der Substitution demnach negativ. Mit steigendem Z_1 wird in Abb. 3.5 die Grenzrate der Substitution kleiner (betragsmäßig größer), daher ist auch hier eine fallende Grenzrate der Substitution gegeben.

3.3.2 Ermittlung einer optimalen Alternative

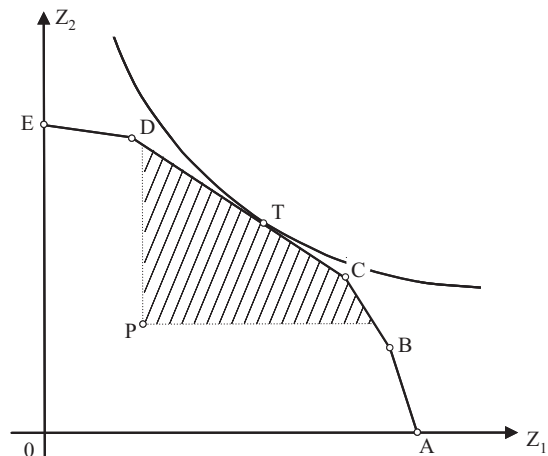
3.3.2.1 Effizienzkurve

Bei gegebenen Indifferenzkurven kann die Entscheidung im Prinzip in der Weise getroffen werden, dass für jede Alternative das jeweilige Ergebnis (Z_1, Z_2) bestimmt wird und die Ergebnisse im (Z_1, Z_2) -Diagramm dargestellt werden. Gewählt wird diejenige Alternative, deren Ergebnis (Z_1, Z_2) auf der Indifferenzkurve mit dem höchsten Präferenzwert liegt. In der Regel entsteht jedoch ein geringerer Planungsaufwand, wenn zunächst die Menge der *effizienten* Alternativen bestimmt und dann daraus die *optimale* Alternative ausgewählt wird. Bei der Darstellung dieses Konzeptes wird wieder davon ausgegangen, dass der Entscheider von jedem Zielgrößenwert c. p. einen höheren Wert einem niedrigeren vorzieht.

Eine Alternative ist in diesem Fall effizient, wenn *keine* andere Alternative existiert, die hinsichtlich einer der beiden Zielgrößen einen höheren Wert bietet und hinsichtlich der anderen Zielgröße keinen niedrigeren. Der geometrische Ort aller (Z_1, Z_2) -Konstellationen, die effizienten Alternativen entsprechen, wird als *Effizienzkurve* bezeichnet.

In Abb. 3.6 ist die Effizienzkurve gleich dem Streckenzug ABCDE: Alle (Z_1, Z_2) -Konstellationen, die rechts oberhalb dieser Kurve liegen, sind nicht realisierbar. Alle (Z_1, Z_2) -Konstellationen links unterhalb dieser Kurve sind zwar realisierbar;

Abb. 3.6 Zur Bestimmung einer optimalen Handlungsalternative



sie entsprechen jedoch ineffizienten Alternativen. So kennzeichnet z. B. der Punkt P eine ineffiziente (Z_1, Z_2) -Konstellation: Alle anderen Punkte der schraffierten Fläche (inklusive der Ränder) sind nach dem Effizienzkriterium dem Punkt P eindeutig überlegen.

3.3.2.2 Optimum

Nur eine *effiziente* Alternative kann optimal sein. Das bedeutet natürlich nicht, dass alle effizienten Alternativen gleichwertig sind. Ihnen entsprechen ja z. T. sehr unterschiedliche Werte für die beiden Zielgrößen. Mit der Bestimmung der Effizienzkurve (der Menge der effizienten Alternativen) ist daher das Entscheidungsproblem noch nicht gelöst. Es muss noch eine Auswahl aus der Menge der effizienten Alternativen getroffen werden. Hierzu wird geprüft, welcher Punkt der Effizienzkurve auf der Indifferenzkurve mit dem maximalen Präferenzwert liegt. Die entsprechende Alternative ist optimal und wird realisiert. In Abb. 3.6 wird das Optimum durch den Tangentialpunkt T determiniert.

3.3.3 Entscheidung ohne Indifferenzkurven

Die Ermittlung von Indifferenzkurven erfordert den paarweisen Vergleich von (Z_1, Z_2) -Konstellationen (vgl. Abschn. 3.3.1). Auf dem Wege eines derartigen Vergleichs kann jedoch das Optimum auch *ohne* explizite Ermittlung von Indifferenzkurven bestimmt werden. Dabei werden in den Vergleich nur Ergebnisse auf der Effizienzkurve einbezogen. Möglicherweise werden dadurch weniger paarweise Vergleiche erforderlich als bei Entscheidung mithilfe von Indifferenzkurven. Das gilt insbesondere dann, wenn erstens die Effizienzkurve konkav oder linear verläuft und zweitens davon ausgegangen werden kann, dass die (nicht explizit ermittelten) Indifferenzkurven konvex sind. In diesem Fall gilt der folgende Satz (vgl. hierzu z. B. Abb. 3.6): Ausgehend von dem effizienten Punkt auf der Abszisse bzw. der Ordinate stellen die benachbarten Effizienzpunkte zunächst immer bessere (Z_1, Z_2) -Konstellationen dar, bis von einem bestimmten Punkt an, dem Optimum, die jeweils folgenden Effizienzpunkte ungünstigere (Z_1, Z_2) -Konstellationen charakterisieren. Die paarweisen Vergleiche entlang der Effizienzkurve müssen also nur bis zu jenem Punkt fortgesetzt werden, von dem an die (Z_1, Z_2) -Konstellationen wieder schlechter werden. Dieser „Gipfelpunkt“ einer Wanderung auf der Effizienzkurve repräsentiert das optimale Ergebnis.

3.3.4 Zur didaktischen Bedeutung des Indifferenzkurven-Konzeptes

Die grafische Bestimmung einer optimalen Lösung mithilfe von Indifferenzkurven ist zwar nur bei zwei Zielgrößen möglich. Dennoch ist das Indifferenzkurven-Konzept in didaktischer Hinsicht auch für Entscheidungssituationen mit mehr als zwei Zielgrößen von

Bedeutung. Zwar werden dann *andere* Lösungsansätze notwendig; das Indifferenzkurven-Konzept eignet sich jedoch außerordentlich gut zur Veranschaulichung der Grundidee und Problematik solcher Lösungskonzepte (vgl. hierzu Abschn. 3.5).

3.4 Entscheidung bei mehr als zwei Zielgrößen nach dem Transformationskonzept

3.4.1 Darstellung

Bei mehr als zwei Zielgrößen ist der Vergleich von Ergebnissen (und damit von Zielgrößenvektoren) grundsätzlich schwieriger als bei zwei Zielgrößen. Wie jedoch bereits in Abschn. 3.2.2 angedeutet wurde, kann – unter bestimmten Bedingungen – der Vergleich zweier beliebiger Zielgrößenvektoren mit mehr als zwei Komponenten auf den sukzessiven Vergleich von Vektoren zurückgeführt werden, die sich jeweils nur bezüglich *zweier* Zielgrößen unterscheiden (*Transformationskonzept*).

Zur Darstellung des Transformationskonzeptes verwenden wir die folgenden Bezeichnungen: Verglichen werden zwei Alternativen A_1 und A_2 . Die relevanten Zielgrößen sind $Z_1, Z_2, \dots, Z_{N_Z}$. Aus der Menge dieser Zielgrößen werden zwei beliebige Zielgrößen Z_i und Z_j herausgegriffen. Der Alternativenvergleich nach dem Transformationskonzept beruht auf der folgenden Indifferenzbedingung:

$$\Phi(Z_{11}, Z_{12}, \dots, Z_{1i}, Z_{1j}, \dots, Z_{1N_Z}) = \Phi(Z_{11}, Z_{12}, \dots, Z_{2i}, Z_{1j}^*, \dots, Z_{1N_Z}). \quad (3.1)$$

In (3.1) steht auf der linken Seite der Präferenzwert für die Alternative A_1 mit ihren tatsächlichen Zielgrößenwerten. Auf der rechten Seite dagegen ist ein Präferenzwert für Alternative A_1 auf der Basis hypothetischer Festlegungen angegeben: Für alle Zielgrößen außer Z_i und Z_j werden zwar die tatsächlichen Werte der Alternative A_1 angenommen. Bei der Zielgröße Z_i dagegen wird nicht der Wert für A_1 , sondern der Wert für die Alternative A_2 zugrunde gelegt. Für die Zielgröße Z_j schließlich wird der Wert Z_{1j}^* eingesetzt, der weder der Zielgrößenwert von A_1 noch derjenige von A_2 ist: Z_{1j}^* ist ein *hypothetischer* Zielgrößenwert, den der Entscheider so angeben muss, dass die Indifferenzbedingung (3.1) erfüllt ist. Gemäß (3.1) muss Z_{1j}^* also so gewählt werden, dass die Beurteilung der Alternative A_1 dieselbe bleibt, nachdem für sie das Niveau der Zielgröße Z_i auf dasjenige der Alternative A_1 verändert wurde. Der betreffende Betrag von Z_{1j}^* wird als *Indifferenzwert* bezeichnet.

Bei der Bestimmung des Indifferenzwertes Z_{1j}^* muss nicht nur die Ausprägung der Zielgröße Z_{2i} , sondern müssen auch die Ausprägungen aller anderen Zielgrößen berücksichtigt werden, da der Vergleich der Zielgrößen Z_i und Z_j grundsätzlich auch vom Erfüllungsgrad anderer Ziele abhängen wird. So kann etwa im Beispiel der Tab. 3.2 die Abwägung zwischen den Zielgrößen „Arbeitszeit“ und „Gehalt“ davon abhängen, welche Ausprägung die Zielgröße „Flexibilität der Arbeitszeitgestaltung“ hat.

Das Transformationskonzept beinhaltet die sukzessive Anwendung des beschriebenen Transformationsschrittes. Nach Bestimmung des ersten Indifferenzwertes Z_{1j}^* wird im zweiten Transformationsschritt eine neue Zielgröße Z_k ausgewählt und das beschriebene Verfahren wird für die Zielgrößen j und k wiederholt. Die neue Indifferenzbedingung lautet also:

$$\Phi(Z_{11}, Z_{12}, \dots, Z_{2i}, Z_{1j}^*, Z_{1k}, \dots, Z_{1N_Z}) = \Phi(Z_{11}, Z_{12}, \dots, Z_{2i}, Z_{2j}, Z_{1k}^*, \dots, Z_{1N_Z}).$$

Auf der linken Seite sind die Zielgrößenwerte für A_1 nach der ersten Transformation angegeben: Aus Z_{1i} bzw. Z_{1j} wurden hierbei die Werte Z_{2i} bzw. Z_{1j}^* . Auf der rechten Seite wurde nun Z_{1j}^* durch Z_{2j} ersetzt und der Entscheider muss einen hypothetischen Wert Z_{1k}^* angeben, für den wiederum Indifferenz besteht.

Wird das Verfahren sukzessive fortgeführt, so werden nach und nach alle Zielgrößenwerte der Alternative A_1 (auch die Werte von Zielgrößen mit einem kleineren Index als i) durch die Werte für Alternative A_2 ersetzt, bis ein letzter hypothetischer Zielgrößenwert für A_1 angegeben werden muss, der danach nicht mehr ersetzt wird. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit gehen wir davon aus, der letzte hypothetische Zielgrößenwert werde für die Zielgröße Z_{N_Z} festgelegt. Die Alternative A_2 und die „transformierte“ Alternative A_1 unterscheiden sich dann allenfalls noch hinsichtlich der Ausprägung dieser Zielgröße. Aus dem Vergleich des hypothetischen Wertes $Z_{1N_Z}^*$ für die „transformierte“ Alternative A_1 mit dem realen Wert Z_{2N_Z} für die Alternative A_2 folgt bei Gültigkeit des Transformationsaxioms unmittelbar die Präferenzrelation zwischen den realen Alternativen A_1 und A_2 :

$$A_1 \succ A_2, \text{ wenn } Z_{1N_Z}^* \succ Z_{2N_Z},$$

$$A_1 \prec A_2, \text{ wenn } Z_{1N_Z}^* \prec Z_{2N_Z} \text{ und}$$

$$A_1 \sim A_2, \text{ wenn } Z_{1N_Z}^* \sim Z_{2N_Z}.$$

Für die Anwendbarkeit des Transformationskonzeptes müssen zwei Bedingungen erfüllt sein.

Transformationsbedingung 1: Die Reihenfolge, in der je zwei ausgewählte Zielgrößen miteinander verglichen werden, hat keinen Einfluss auf die Ergebnisse dieser Vergleiche.

Transformationsbedingung 2: Es existiert eine Reihenfolge des Vergleichs von je zwei Zielgrößen, für die gilt: In jeder Vergleichssituation existiert für die maßgeblichen Zielgrößenvektoren gemäß (3.1) ein Wert Z_{1j}^* , der die Indifferenzbedingung (3.1) erfüllt.

Bedingung 2 fordert, dass der sukzessive Zielgrößenvergleich nicht an einer Stelle scheitert, an der für eine Zielgröße kein Wert existiert, der die Alternativen hinsichtlich des betrachteten Zielgrößenpaares gleichwertig macht. Damit die Bedingung 2 (annähernd) erfüllt sein kann, müssen die Zielgrößenwerte hinreichend teilbar bzw. variierbar sein. Das ist im Beispiel der Zielgrößenmatrix 3.2 für Gehalt, Arbeitszeit und Entfernung der Fall. Die Werte der Zielgrößen Flexibilität, Attraktivität und Karrierechancen werden dort auf

einer Skala von 1 bis 4 abgebildet. Eventuell muss jedoch die Skala verfeinert werden, um zusätzliche (und hinreichende) Differenzierungsmöglichkeiten zu erhalten.

Das Transformationskonzept stellt an den Entscheider in der Regel keine höheren Anforderungen als die Konstruktion von Indifferenzkurven für *zwei* Zielgrößen im Rahmen eines Entscheidungsmodells, in dem nur diese beiden Zielgrößen explizit erfasst werden. Es ist nämlich zu bedenken: Wenn in einem Entscheidungskalkül nur zwei Zielgrößen explizit betrachtet werden, so bedeutet das nicht, dass sich der Entscheider letztlich nur an diesen beiden Zielgrößen orientiert. Die Vernachlässigung der anderen Zielgrößen im Modell kann insbesondere daraus resultieren, dass die im Rahmen des Entscheidungsproblems erwogenen Alternativen keinen Einfluss auf deren Ausprägungen haben. Die betreffenden Zielgrößen werden dann jedoch implizit berücksichtigt, weil von ihnen die Gestalt der Indifferenzkurven abhängt.

3.4.2 Illustration

Zur Verdeutlichung des Transformationskonzeptes wird davon ausgegangen, der Entscheider habe die Zielgrößenvektoren in Tab. 3.3 miteinander zu vergleichen.

Zum Vergleich der beiden Alternativen wird im Folgenden die Alternative A_1 gemäß dem beschriebenen Vorgehen transformiert. Die Zielgrößen werden in der Reihenfolge ihrer Nummerierung betrachtet. Im ersten Schritt muss der Entscheider gemäß der Indifferenzbedingung (3.1) angeben, für welchen Wert Z_{12}^* er zwischen den Vektoren von Zielgrößenwerten in Tab. 3.4 indifferent ist.

Der obere Vektor entspricht dem tatsächlichen Zielgrößenvektor der Alternative A_1 , im unteren Vektor $\bar{A}_1^1$ ist die erste Komponente des Zielgrößenvektors von A_1 (d. h. $Z_{11} = 80$) durch $Z_{21} = 10$ ersetzt worden und die zweite Komponente (d. h. $Z_{12} = 50$) durch Z_{12}^* , d. h. denjenigen Wert für die Zielgröße Z_2 , der Indifferenz herstellt. Der Entscheider hat diesen Wert Z_{12}^* nach subjektivem Ermessen festzulegen. Nach diesem ersten Transformationsschritt beruht der zweite Alternativenvergleich auf der Zielgrößenmatrix in Tab. 3.5.

Tab. 3.3 Zielgrößenmatrix vor Anwendung des Transformationskonzeptes

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6
A_1	80	50	40	10	20	30
A_2	10	60	30	40	60	20

Tab. 3.4 Hypothetische Zielgrößenmatrix für den ersten Transformationsschritt

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6
A_1	80	50	40	10	20	30
$\bar{A}_1^1$	10	Z_{12}^*	40	10	20	30

Tab. 3.5 Zielgrößenmatrix
nach dem ersten
Transformationsschritt

	Z ₁	Z ₂	Z ₃	Z ₄	Z ₅	Z ₆
$\bar{A}_1^1$	10	Z_{12}^*	40	10	20	30
A ₂	10	60	30	40	60	20

Beim zweiten Transformationsschritt wird der Wert Z_{12}^* durch $Z_{22} = 60$ ersetzt und der Wert für die dritte Zielgröße bei Alternative A₁, $Z_{13} = 40$, durch Z_{13}^* . Der Entscheider muss nun angeben, für welchen Wert Z_{13}^* er zwischen den Vektoren von Zielgrößenwerten in Tab. 3.6 indifferent ist.

Auf der Basis dieses neuen Indifferenzwertes ergibt sich die Zielgrößenmatrix in Tab. 3.7 für den dritten Alternativenvergleich.

Beim dritten Transformationsschritt wird der Wert Z_{13}^* durch $Z_{23} = 30$ ersetzt und der Wert für die vierte Zielgröße bei Alternative A₁, $Z_{14} = 10$, durch Z_{14}^* . Der Entscheider muss nun angeben, für welchen Wert Z_{14}^* er zwischen den Vektoren von Zielgrößenwerten in Tab. 3.8 indifferent ist.

Es ergibt sich die Zielgrößenmatrix für den vierten Alternativenvergleich gemäß Tab. 3.9.

Tab. 3.6 Hypothetische
Zielgrößenmatrix für den
zweiten Transformationsschritt

	Z ₁	Z ₂	Z ₃	Z ₄	Z ₅	Z ₆
$\bar{A}_1^1$	10	Z_{12}^*	40	10	20	30
$\bar{A}_1^2$	10	60	Z_{13}^*	10	20	30

Tab. 3.7 Zielgrößenmatrix
nach dem zweiten
Transformationsschritt

	Z ₁	Z ₂	Z ₃	Z ₄	Z ₅	Z ₆
$\bar{A}_1^2$	10	60	Z_{13}^*	10	20	30
A ₂	10	60	30	40	60	20

Tab. 3.8 Hypothetische
Zielgrößenmatrix für den
dritten Transformationsschritt

	Z ₁	Z ₂	Z ₃	Z ₄	Z ₅	Z ₆
$\bar{A}_1^2$	10	60	Z_{13}^*	10	20	30
$\bar{A}_1^3$	10	60	30	Z_{14}^*	20	30

Tab. 3.9 Zielgrößenmatrix
nach dem dritten
Transformationsschritt

	Z ₁	Z ₂	Z ₃	Z ₄	Z ₅	Z ₆
$\bar{A}_1^3$	10	60	30	Z_{14}^*	20	30
A ₂	10	60	30	40	60	20

Tab. 3.10 Zielgrößenmatrix
nach dem fünften
Transformationsschritt

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6
$\bar{A}_1^5$	10	60	30	40	60	Z_{16}^*
A_2	10	60	30	40	60	20

Nach dem vierten und dem fünften (und letzten) Schritt des Transformationskonzeptes ergibt sich schließlich die Zielgrößenmatrix der Tab. 3.10 für den abschließenden Alternativenvergleich. Da die Zielgrößenwerte $Z_1, Z_2, \dots, Z_5$ für beide Vektoren jeweils gleich sind, ist für deren Beurteilung nur noch die Zielgröße Z_6 relevant.

Für $Z_{16}^* = 20$ sind beide Vektoren gleichwertig, sodass nach dem Transitivitätsaxiom $A_1 \sim A_2$ gilt. Für $Z_{16}^* \neq 20$ wird derjenige Vektor vorgezogen, der den besseren Wert für Z_6 aufweist. Wenn der Entscheider z. B. einen höheren Wert einem niedrigeren vorzieht, gilt $A_1 \succ A_2$ ($A_1 \prec A_2$), wenn $Z_{16}^* > 20$ ($Z_{16}^* < 20$).

3.4.3 Beurteilung

Wie das Transformationskonzept zeigt, setzt das Ordnungsaxiom nicht unbedingt voraus, der Entscheider könne beliebige Zielgrößenvektoren mit mehr als zwei Komponenten unmittelbar miteinander vergleichen. Das Ordnungsaxiom ist auch dann erfüllt, wenn die beiden Transformationsbedingungen erfüllt sind. Der Vergleich zweier beliebiger Zielgrößenvektoren kann dann auf den sukzessiven Vergleich zweier Vektoren zurückgeführt werden, die sich jeweils nur hinsichtlich *zweier* Zielgrößen unterscheiden.

Wie bereits erläutert wurde, setzt das Transformationskonzept voraus, dass bei jedem Transformationsschritt für die jeweilige Änderung des Wertes der Zielgröße Z_z ($z = 1, 2, \dots, N_z - 1$) überhaupt eine Änderung des Wertes der Zielgröße Z_{z+1} existiert, die die Änderung von Z_z kompensiert. Diese Bedingung ist jedoch nicht zwingend erfüllt, wie in Abschn. 3.2.2 bereits erläutert wurde.

Das Transformationskonzept setzt implizit auch voraus, dass der betreffende Entscheider zwischen den zu vergleichenden Zielgrößen überhaupt Substitutionsverhältnisse angeben kann. Dies ist ebenfalls nicht zwingend erfüllt. Insbesondere dann, wenn die einzelnen Zielgrößen sehr unterschiedliche Dimensionen haben (z. B. im eingangs vorgestellten Beispiel der Bewertung von Stellenangeboten „Gehalt in 1000 €“, „Attraktivität der Stelle auf einer Skala von 1 bis 4“ und „Nähe zu Familie und Freunden in Fahrtstunden“), stellt der Vergleich von Zielgrößenausprägungen im Rahmen des Transformationskonzeptes (z. B.: „Welche Gehaltseinbuße nehme ich in Kauf, um einen Arbeitsplatz zu haben, der eine Fahrtstunde näher an der Familie und den Freunden liegt?“) an den Entscheider hohe Anforderungen.

Mehrzielentscheidungen beinhalten in aller Regel auch eine wirtschaftliche Zielgröße, welche monetär ist. In diesem Falle kann das Transformationskonzept wie folgt modifiziert werden: Die Dimension der monetären Zielgröße (d. h. Euro) dient als *Numeraire* für alle anderen Zielgrößen und anstelle des sukzessiven paarweisen Vergleichs der Zielgrößen wird jede Zielgröße über das monetäre Ziel transformiert, d. h. der Wert der nicht

monetären Zielgröße wird letztlich durch ein *Geldäquivalent* ersetzt. Handelt es sich bei der monetären Zielgröße z. B. um den Kaufpreis für ein Gut, so wird jeweils gefragt, wie sich der Kaufpreis der Alternative A_1 ändern muss, um die Anpassung des jeweils anderen Zielgrößenwertes an den Wert für die Alternative A_2 zu kompensieren. Wenn nach der letzten Transformation die Alternative A_1 den niedrigeren (fiktiven) Kaufpreis aufweist, wird sie realisiert, andernfalls die Alternative A_2 . Im eingangs vorgestellten Beispiel der Bewertung von Stellenangeboten könnte der Entscheider entsprechend versuchen, die „geldwerten Vorteile“ einer geringeren Arbeitszeit, einer flexibleren Arbeitszeiteinteilung usw. in einem äquivalenten Gehalt zu bemessen.

Wenn die beiden Transformationsbedingungen erfüllt sind, kann das Transformationskonzept nicht nur bei sicheren Ergebnissen angewendet werden, sondern auch in Entscheidungssituationen bei Unsicherheit i. e. S. und bei Risiko (Kap. 4, Abschn. 4.1 und Kap. 5, Abschn. 5.3.2): Die möglichen Zielgrößenvektoren der Alternativen werden für die einzelnen Zustände jeweils so transformiert, dass sie sich nur noch durch die Ausprägung einer einzigen Zielgröße Z^* unterscheiden. Die Entscheidung wird dann mit einem Entscheidungskriterium bei Unsicherheit ebenso getroffen wie für den Fall, dass das Modell deshalb explizit nur diese eine Zielgröße enthält, weil sich die Alternativen hinsichtlich der anderen Zielgrößen von vornherein nicht unterscheiden.

3.4.4 Vergleich von Zahlungs- und Konsumströmen

Das Transformationskonzept kann auch dann angewendet werden, wenn es um den Vergleich von (sicheren) Strömen an Konsumausgaben zu mehreren Zeitpunkten t ($t = 0, 1, 2, \dots, T$) geht. Eine Konsumausgabe bezeichnet den Betrag, der für den Kauf von Konsumgütern gezahlt wird. Dabei resultiert der Nutzen eines Konsumstroms aus dem Nutzen derjenigen Güter und Dienstleistungen, die damit erworben werden. Bei Anwendung des Transformationskonzeptes auf alternative Konsumströme muss der Entscheider sukzessive angeben, wie sich die Konsumausgabe für den Zeitpunkt $t+1$ ändern muss, damit eine bestimmte Änderung der Konsumausgabe zum Zeitpunkt t ($t = 0, 1, \dots, T-1$) kompensiert wird, wobei alle anderen Konsumausgaben jeweils gegeben sind. Gemäß den Darstellungen in Abschn. 3.4.1 dürfen diese allerdings nicht vernachlässigt werden, da von ihnen der Kompensationsbetrag für den Zeitpunkt $t+1$ (die betreffende Austauschrate) abhängt.

In betriebswirtschaftlichen Entscheidungsmodellen (insbesondere in denen der Investitions- und Finanzierungstheorie) werden jedoch im Allgemeinen nicht explizit Konsumausgaben, sondern finanzielle Überschüsse als Zielgrößen zugrunde gelegt. Auch der Vergleich von Zahlungsströmen (z. B. von einander ausschließenden Investitionsprojekten) kann nach dem Transformationskonzept vorgenommen werden. Welche Anforderungen dabei an den Entscheider gestellt werden, hängt von seinen Möglichkeiten ab, Überschüsse durch Anlage und Aufnahme von Kapital in optimale Konsumströme zu transformieren.

Kann der Entscheider in jeder Periode praktisch unbegrenzt Geld zu einem sicheren Zinssatz r anlegen und leihen, ist das Transformationskonzept trivial. Die Erhöhung (bzw. Reduktion) eines Überschusses zum Zeitpunkt t um Δ_t wird dann durch eine Reduktion (bzw. Erhöhung) des Überschusses zum Zeitpunkt $t+1$ um $(1+r)\Delta_t$ kompensiert. Der Entscheider erzielt mit dieser Transformation deshalb weder einen Vorteil noch einen Nachteil, weil er für beide Ströme an Überschüssen in Verbindung mit Anlagen und Aufnahmen von Kapital zum Zinssatz r denselben Konsumstrom realisieren kann. Er kann das Transformationskonzept daher einfach in der Weise anwenden, dass er für jede Alternative die zukünftigen Überschüsse direkt in einen Überschuss zum Zeitpunkt 0 transformiert, indem er diese mit dem Zinssatz r diskontiert. Wird von der Summe der Barwerte jeweils die Anschaffungsauszahlung (zum Zeitpunkt 0) subtrahiert, so erhält man die Kapitalwerte der Zahlungsreihen. Somit führt das Transformationskonzept zur Kapitalwertmethode, wonach die Alternative mit dem höchsten positiven Kapitalwert optimal ist (vgl. Kap. 15).

3.5 Zielfunktionen für mathematische Entscheidungsmodelle mit mehreren Zielgrößen

3.5.1 Nutzenmaximierung

Die Bestimmung der optimalen Lösung eines Entscheidungsproblems auf der Grundlage einer grafischen Darstellung ist nur in einfachen Fällen möglich. Diese Methode versagt insbesondere auch dann, wenn mehr als zwei Zielgrößen zu beachten sind. Mithilfe des Transformationskonzeptes kann dann zwar ein Alternativenvergleich durchgeführt werden. Seiner praktischen Anwendung sind jedoch ebenfalls Grenzen gesetzt, da die Alternativen nur paarweise miteinander verglichen werden können und so der Aufwand bei großer Alternativenzahl sehr hoch wird. In diesem Fall können möglicherweise mathematische Entscheidungsmodelle weiterhelfen, die auf Zielfunktionen beruhen, welche die einzelnen Zielgrößen eines Entscheiders in einfacher Weise zusammenfassen.

Dem Transformationskonzept liegt das Prinzip zugrunde, sukzessive Vergleiche zwischen Paaren von Zielgrößen vorzunehmen. Auf diese Weise werden implizit Austauschverhältnisse zwischen Zielgrößen festgelegt. So muss der Entscheider im Beispiel des Abschn. 3.4.2 angeben, welcher Wert Z_{12}^* für die Zielgröße Z_2 gegeben sein muss, damit die Alternativen A_1 und $\bar{A}_1^1$ bzw. die Ergebnisse $x_1 = \{80, 50, 40, 10, 20, 30\}$ und $\bar{x}_1^1 = \{10, Z_{12}^*, 40, 10, 20, 30\}$ gleichwertig sind, und dies legt das (lokale) Austauschverhältnis $\Delta Z_1 / \Delta Z_2 = (10 - 80) / (Z_{12}^* - 50)$ fest. Eine Möglichkeit, Zielgrößen zu aggregieren, besteht entsprechend darin, in einer mathematischen Funktion explizite Austauschverhältnisse zwischen den Zielgrößen festzulegen (vgl. nachfolgend Abschn. 3.5.2.1).

Wie in Kap. 2, Abschn. 2.2.3, erläutert wurde, kann bei Sicherheit die Präferenzfunktion für Alternativen unmittelbar aus einer Nutzenfunktion über Ergebnisse (Zielgrößenvektoren) hergeleitet werden, die jedem Ergebnis einen Nutzenwert zuordnet, der die jeweils entsprechenden Zielgrößenausprägungen zusammenfasst. Bei Sicherheit ist die Suche nach einer mathematischen Präferenzfunktion also deckungsgleich mit der Suche nach einer Nutzenfunktion für mehrdimensionale (sichere) Ergebnisse. Die Bestimmung einer besten Alternative ist dann gleichbedeutend mit der Maximierung des Nutzens des Ergebnisses.

Damit die Nutzenmaximierung zur bestmöglichen Alternative führt, muss bei Sicherheit allein die Bedingung erfüllt sein, dass von zwei beliebigen Ergebnissen dem besseren ein höherer Nutzenwert zugeordnet wird; die betragsmäßigen Unterschiede zwischen den Nutzenwerten sind irrelevant und die Nutzenfunktion wird als ordinal bezeichnet. Wie bereits in Kap. 2, Abschn. 2.2.3, dargestellt, kann eine ordinale Nutzenfunktion beliebig monoton wachsend transformiert werden, d. h. die Nutzenfunktionen $U(x)$ und $U^*(x)$ mit

$$U^*(x) = g[U(x)], \quad g' > 0, \quad (3.2)$$

führen immer zu identischen Präferenzordnungen.

Bei nur zwei Zielgrößen kann die Nutzenfunktion grafisch in einem (Z_1, Z_2) -Diagramm durch Indifferenzkurven dargestellt werden (Abschn. 3.3.1). Bei mehr als zwei Zielgrößen ist dieses anschauliche Vorgehen nicht mehr möglich. Die Nutzenfunktion kann dann allenfalls durch eine *numerische* Funktion $U(x) = U(Z_1, Z_2, \dots, Z_{N_Z})$ dargestellt werden, die jedem Ergebnis bzw. jedem $(Z_1, Z_2, \dots, Z_{N_Z})$ -Vektor einen Nutzenwert U zuordnet. Das Kernproblem ist dementsprechend die mathematische Aggregation der Zielgrößenausprägungen $Z_1, Z_2, \dots, Z_{N_Z}$ zu Nutzenwerten für die Ergebnisse in der Weise, dass von zwei beliebigen Ergebnissen dem besseren Ergebnis eine höhere Zahl (ein höherer Nutzenwert) zugeordnet wird. Die Zielfunktion lautet entsprechend:

$$U(x_a) = U(Z_{a1}, Z_{a2}, \dots, Z_{aN_Z}) \rightarrow \underset{a}{\text{Max}} ! \quad (3.3)$$

Die konkrete Ermittlung (und explizite Darstellung) einer numerischen Nutzenfunktion

$$U(x) = U(Z_1, Z_2, \dots, Z_{N_Z})$$

ist jedoch praktisch ein kaum lösbares Problem. Die Problematik resultiert insbesondere daraus, dass die Änderung des Nutzens bei Variation eines einzelnen Zielgrößenwertes in der Regel davon abhängt, welche Werte die anderen Zielgrößen aufweisen. Eine numerische Nutzenfunktion kann daher die Präferenzen eines Entscheiders grundsätzlich nur in vereinfachter Weise wiedergeben und damit diese auch nur annähern. Der Entscheider sollte entsprechend, wenn er seiner Entscheidung eine Nutzenfunktion zugrunde legt, die Alternativenwahl kritisch überprüfen.

Nachfolgend werden Möglichkeiten vorgestellt, mehrere Zielgrößen so im Entscheidungsmodell zu berücksichtigen, dass die Entscheidung auf der Basis der Nutzenmaximierung erfolgen kann. Diese Möglichkeiten repräsentieren in der Regel mehr oder weniger starke Vereinfachungen bei der Berücksichtigung der Präferenzen des Entscheiders.

3.5.2 Grundformen der vereinfachenden Berücksichtigung von Zielen

3.5.2.1 Zielgewichtung

Eine naheliegende Form, Zielgrößen zu berücksichtigen, besteht darin, ihnen explizite Gewichtungsfaktoren zuzuweisen. Bei einer linearen Gewichtung der Zielgrößen ergibt sich dann die Nutzenfunktion:

$$U(x) = U(Z_1, Z_2, \dots, Z_{N_Z}) = U(q_1 \cdot Z_1 + q_2 \cdot Z_2 + \dots + q_{N_Z} \cdot Z_{N_Z}) \quad (3.4)$$

Wenn von einer Zielgröße ein höherer Wert einem niedrigeren vorgezogen wird (bzw. umgekehrt), ist der zugehörige Gewichtungsfaktor positiv (bzw. negativ).

Aufgrund ihrer Ordinalität kann die Nutzenfunktion (3.4) so transformiert werden, dass sie der gewichteten Summe der Zielgrößen entspricht:

$$U^*(x) = q_1 \cdot Z_1 + q_2 \cdot Z_2 + \dots + q_{N_Z} \cdot Z_{N_Z}. \quad (3.5)$$

Die Gewichtungsfaktoren legen die Austauschverhältnisse zwischen den Zielgrößen fest. Bei nur zwei Zielgrößen Z_1 und Z_2 ergeben sich lineare Indifferenzkurven im (Z_1, Z_2) -Diagramm, deren Steigung $-q_1/q_2$ beträgt.³

Die Zielgewichtung führt in aller Regel nicht zu einer korrekten Abbildung der tatsächlichen Präferenzen eines Entscheiders. So impliziert sie ein konstantes, von den Niveaus aller Zielgrößenwerte unabhängiges Substitutionsverhältnis zwischen zwei Zielgrößen, das reale Präferenzen in den seltensten Fällen korrekt wiedergeben dürfte. Zudem stellt sich das Problem, welche Gewichtungsfaktoren $q_1, q_2, \dots, q_{N_Z}$ gewählt werden sollen. Zur Lösung dieses Problems muss der Entscheider Vorstellungen über die Implikationen der jeweiligen Gewichte entwickeln. Diese Vorstellungen können von den tatsächlichen Implikationen im konkreten Planungsmodell mehr oder weniger stark abweichen. Es ist möglich, dass die gewählten Zielgewichte eine Alternativenwahl nahelegen, die vom Entscheider als völlig indiskutabel verworfen wird.

³In der Praxis wird häufig die Anwendung der Nutzwertanalyse empfohlen. Es wird für jede Zielgröße eine „Nutzenfunktion“ ermittelt; die resultierenden Nutzenwerte für die einzelnen Ausprägungen werden dann mit Gewichtungsfaktoren multipliziert und aufaddiert. Da die Ermittlung von „Nutzenwerten“ für die einzelnen Zielgrößen nur eine Frage der Messung der Zielgrößen darstellt, lassen sich die Ausführungen zur Zielgewichtung und insbesondere auch die damit verbundenen Probleme auf die Nutzwertanalyse übertragen.

3.5.2.2 Zielunterdrückung

Eine extreme Form der „Verarbeitung“ eines Ziels ist seine Unterdrückung: Der Entscheider vernachlässigt die betreffende Zielgröße bei der Bewertung der Ergebnisse. Im Extremfall gilt dies für alle Zielgrößen außer derjenigen Zielgröße Z_{z^*} , welcher der Entscheider die größte Bedeutung zumisst (die für ihn am „wichtigsten“ ist). Es gilt dann

$$U(x) = U(Z_{z^*}). \quad (3.6)$$

Ist der Nutzen eine monoton steigende bzw. fallende Funktion von Z_{z^*} , kann diese Nutzenfunktion aufgrund ihrer Transformierbarkeit wie folgt dargestellt werden: $U(x) = Z_{z^*}$ bzw. $U(x) = -Z_{z^*}$. Der Entscheider kann sich dann direkt an der Zielgrößenausprägung Z_{z^*} orientieren. Sein Nutzen (sein Präferenzwert) wird maximiert, indem die Zielgröße maximiert bzw. minimiert wird.

Die Vernachlässigung einer Zielgröße im Entscheidungsmodell ist dann sinnvoll, wenn sie für alle Alternativen jeweils denselben Wert aufweist. Eine Vernachlässigung aus Vereinfachungsgründen ist aber auch dann naheliegend, wenn der betreffende Zielgrößenwert zwar von Alternative zu Alternative verschieden ist, die Unterschiede jedoch gering sind.

Es ist möglich, dass sich bei der Maximierung der „wichtigsten“ Zielgröße (Z_{z^*}) keine eindeutige Lösung ergibt, weil mehrere Alternativen existieren, die denselben maximalen Wert für diese Zielgröße aufweisen. Bei strenger Zielunterdrückung bleiben auch in einem solchen Fall die anderen Zielgrößen unberücksichtigt. Aus der Menge der Alternativen mit dem maximalen Z_{z^*} -Wert wird eine *beliebige* Alternative ausgewählt.

Dagegen ist es sinnvoll, bei Gleichwertigkeit mehrerer Alternativen in Bezug auf die zunächst isoliert betrachtete Zielgröße Z_{z^*} weitere Zielgrößen zu berücksichtigen, die zunächst unterdrückt wurden. Geht man hierbei nach einer strengen Hierarchie vor, so entspricht die Präferenzbildung einer *lexikografischen Ordnung* gemäß der „Wichtigkeit“ der Zielgrößen. Entsprechend dieser Ordnung wird die Alternativenmenge im ersten Schritt auf jene Alternativen verengt, die den maximalen Wert für die „wichtigste“ Zielgröße, Z_{z^*} , aufweisen. Im zweiten Schritt werden diese Alternativen gemäß ihren Werten für die „zweitwichtigste“ Zielgröße verglichen, wobei nun diejenigen Alternativen ausscheiden, die bezüglich dieser Zielgröße keinen maximalen Wert aufweisen, usw.

Die Zielunterdrückung und die lexikografische Ordnung führen zu erheblichen Vereinfachungen eines Entscheidungsproblems. Andererseits können sie zu sehr problematischen Entscheidungen führen, weil ein Teil der Unterschiede in den Zielgrößenausprägungen verschiedener Alternativen nicht berücksichtigt wird. Die lexikografische Ordnung beruht aber auf der Voraussetzung, dass es dem Entscheider *nicht* völlig gleichgültig ist, welche Werte die Zielgrößen aufweisen, die der übergeordneten Zielgröße nachgeordnet sind. Dennoch werden diese Zielgrößen selbst dann nicht berücksichtigt, wenn eine Alternative einen auch nur marginal größeren Wert der übergeordneten Zielgröße aufweist als die übrigen Alternativen. Eine strenge Zielunterdrückung trifft diese Kritik noch stärker. Es wird auch deutlich, dass es gar nicht

möglich ist, Zielgrößen ohne Betrachtung der möglichen Ausprägungen hinsichtlich ihrer Wichtigkeit in eine Rangfolge zu bringen. Im Beispiel des Abschn. 3.2.1 wäre die Wahl des Gehalts als wichtigste Zielgröße im Rahmen der Zielunterdrückung oder der lexikografischen Ordnung dann nicht sinnvoll, wenn sich die Angebote hinsichtlich des Gehalts nur um wenige Euro unterscheiden würden, bei den übrigen Zielgrößen aber enorme Unterschiede bestünden.

3.5.2.3 Vorgabe von Anspruchsniveaus für Zielgrößen

Eine Alternative zur expliziten Berücksichtigung und Gewichtung einer Zielgröße in der Zielfunktion ist die implizite Berücksichtigung der betreffenden Zielgröße durch die Formulierung eines Anspruchsniveaus (eines „befriedigenden“ Mindest- oder Höchstwertes) hierfür und die Berücksichtigung dieses Anspruchsniveaus in einer Nebenbedingung des Entscheidungsmodells. Bei zwei Zielgrößen Z_1 und Z_2 , von denen jeweils ein höherer Wert einem niedrigeren vorgezogen wird, und der Formulierung des Anspruchsniveaus $\hat{Z}_2$ für Zielgröße Z_2 wird aus dem ursprünglichen Entscheidungsproblem

$$\text{Max}_a U(Z_{a1}, Z_{a2}) \quad (3.7)$$

das modifizierte Problem (mit der Transformation von $U(Z_{a1})$ in Z_{a1})

$$\text{Max}_a Z_{a1} \text{ unter der Nebenbedingung } Z_{a2} \geq \hat{Z}_2. \quad (3.8)$$

Sind mehr als zwei Zielgrößen ($N_2 > 2$) relevant und werden für alle Zielgrößenwerte außer der Zielgröße Z_{z^*} ein Anspruchsniveau formuliert, so ist Z_{z^*} unter ($N_2 - 1$) Nebenbedingungen zu maximieren:

$$\text{Max}_a Z_{az^*} \text{ unter den Nebenbedingungen} \quad (3.9)$$

$$Z_{az} \geq \hat{Z}_z \text{ für alle } a \in \{1, 2, \dots, N_A\} \quad (3.10)$$

$$\text{und } z \in \{1, 2, \dots, N_Z\}, z \neq z^*.$$

Dabei kennzeichnet $\hat{Z}_z$ das Anspruchsniveau für die Zielgröße Z_z .

Die Berücksichtigung einer Zielgröße über die Formulierung eines Anspruchsniveaus ist die einzige Möglichkeit, das betreffende Ziel zu berücksichtigen, wenn dieses mit den übrigen Zielen unvergleichbar ist. Orientiert sich ein Entscheider bei seinen Konsumentscheidungen z. B. an ethischen Grundsätzen (wie etwa die Vermeidung von Kinderarbeit in der Textilherstellung), so muss er dieses Ziel in eine Nebenbedingung für seine Konsumententscheidung umwandeln, wenn er nicht in der Lage (bzw. nicht Willens) ist, dieses Ziel explizit gegen andere Ziele abzuwägen (etwa anzugeben, wie viel mehr Geld er bereit ist, für ein Produkt zu zahlen, für das die Einhaltung der ethischen Grundsätze gewährleistet ist).

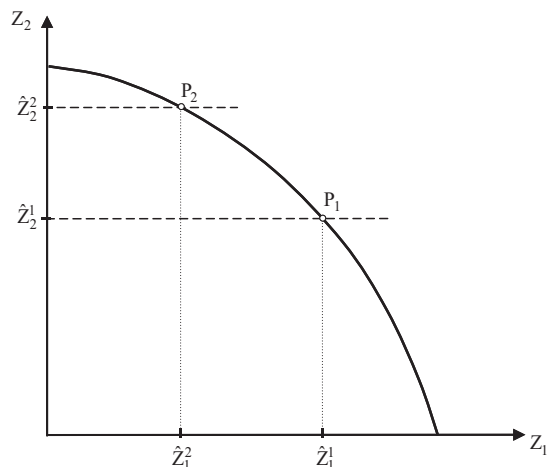
Bei dem Konzept der Festlegung von Anspruchsniveaus stellt sich das Grundproblem, welche der Zielgrößen maximiert werden soll und wie die Anspruchsniveaus

für die anderen Zielgrößen festzulegen sind. „In der Auswahl der zu maximierenden Zielgröße liegt nicht notwendigerweise eine Wertung in dem Sinne, dass dieser Zielgröße besonderes Gewicht beigemessen wird. Für die relative Gewichtung der Ziele ist vielmehr wichtiger, in welcher Höhe die befriedigenden Werte angesetzt werden. Je größer das Gewicht ist, das einer Zielgröße beigemessen wird, desto höher wird der befriedigende Wert sein, den man dafür ansetzt. Andererseits ist das Gewicht der zu maximierenden Zielgröße umso höher, je weniger der Zulässigkeitsbereich durch Nebenbedingungen eingeschränkt wird, je niedriger also die befriedigenden Werte für die übrigen Zielgrößen sind“ (Hax 1974, S. 33).

Ob bei der Maximierung einer bestimmten Zielgröße eine mehr oder weniger „gute“ Lösung erreicht wird, hängt davon ab, wie die Anspruchsniveaus für die übrigen Zielgrößen festgesetzt werden. Zur Verdeutlichung wird der Fall zweier Zielgrößen Z_1 und Z_2 betrachtet, für die der Entscheider jeweils einen höheren Wert einem niedrigeren vorzieht. Der Entscheider kann nun auf die Ermittlung von Indifferenzkurven verzichten und unmittelbar eine Entscheidung treffen, indem er eine Zielgröße, diese sei hier Z_2 , in Form einer Nebenbedingung berücksichtigt. Er legt dann ein Anspruchsniveau für Z_2 fest, welches grafisch durch eine Restriktion abzubilden ist, die parallel zur Z_1 -Achse auf dem Anspruchsniveau für Z_2 verläuft. Abb. 3.7 zeigt mit $\hat{Z}_2^1$ und $\hat{Z}_2^2$ zwei solche Anspruchsniveaus bzw. Restriktionen. Im Fall des Anspruchsniveaus $\hat{Z}_2^1$ ($\hat{Z}_2^2$) wird die Alternative realisiert, die dem Punkt P_1 (P_2) entspricht, sodass die Zielerreichung für Z_1 das Niveau $\hat{Z}_1^1$ ($\hat{Z}_1^2$) aufweist. Je höher das Anspruchsniveau für Z_2 ist, desto geringer ist die Zielerreichung für Z_1 ; beide Ziele stehen offenbar in Konkurrenz zueinander.

Die Bedeutung einer Zielgröße für einen Entscheider bemisst sich also nicht daran, ob die betreffende Zielgröße explizit in der Zielfunktion berücksichtigt wird. Im Extremfall mag das vorgegebene Anspruchsniveau für eine Zielgröße dazu führen, dass nur ein einziges Ergebnis dieses Niveau erfüllt, und so die Alternativenwahl nicht über die

Abb. 3.7 Zur „Güte“ der Lösung bei alternativen Anspruchsniveaus für die Zielgröße Z_2



Maximierung der Zielfunktion, sondern bereits durch das Anspruchsniveau in der Nebenbedingung feststeht.

Dieser Zusammenhang hat große Bedeutung für die Beurteilung von Zielen für die Unternehmenspolitik (vgl. Kap. 2, Abschn. 2.4.3): Finden beispielsweise allein Eigentümerziele explizit Berücksichtigung in der Zielfunktion für unternehmerische Entscheidungen und werden dementsprechend die Ziele anderer Interessengruppen wie z. B. Kreditgeber, Arbeitnehmer oder Lieferanten „nur“ über Anspruchsniveaus berücksichtigt, so legen diese Anspruchsniveaus fest, in welchem Ausmaß die Interessen dieser Interessengruppen verfolgt werden. Die Höhe des Anspruchsniveaus einer Interessengruppe aber wiederum hängt davon ab, wie gut das Anspruchsniveau dieser Gruppe über gesetzliche Regelungen und direkte staatliche Eingriffe und insbesondere über Verhandlungspositionen und entsprechende Verträge (Kreditverträge, Arbeitsverträge, Lieferverträge) gesichert ist. Konkrete unternehmerische Entscheidungen folgen dann umso stärker den Interessen der jeweiligen Gruppen, je besser diese gesetzlich geschützt sind, je stärker der Staat in die Unternehmenspolitik zur Sicherung der Interessen eingreift bzw. je stärker die Verhandlungsposition der Gruppen bei der Aushandlung von Verträgen ist.

3.6 Zusammenfassung

- In der Realität sind Entscheidungsprobleme in der Regel dadurch gekennzeichnet, dass sowohl unsichere Erwartungen bestehen als auch mehrere Zielgrößen relevant sind. Um zu zeigen, wie mehreren Zielgrößen bei der Entscheidung Rechnung getragen werden kann, empfiehlt es sich, zunächst zu vereinfachen, indem man Sicherheit unterstellt.
- Bei mehreren Zielen entspricht jeder Alternative ein Vektor von Zielgrößenausprägungen. Dabei stehen die einzelnen Zielgrößen eines Entscheiders in aller Regel im Konflikt zueinander. Maßnahmen zur Verbesserung einer Zielgröße verschlechtern dann die Ausprägungen anderer Zielgrößen.
- Zur Vorauswahl von Alternativen kann das Effizienzkriterium herangezogen werden. Eine Alternative ist effizient, wenn keine andere existiert, die hinsichtlich einer der Zielgrößen einen besseren Wert bietet und hinsichtlich der anderen Zielgrößen keinen schlechteren.
- Der Vergleich effizienter Alternativen ist relativ einfach, wenn nur zwei Zielgrößen gegeben sind. Die Präferenzen des Entscheiders können dann mithilfe von Indifferenzkurven abgebildet werden. Eine Indifferenzkurve ist der geometrische Ort aller Kombinationen der Werte der beiden Zielgrößen, die der Entscheider als gleichwertig beurteilt, denen gegenüber er also indifferent ist.
- Die Lage einer Indifferenzkurve kennzeichnet das Präferenzniveau, d. h. es gibt nicht eine, sondern (unendlich) viele Indifferenzkurven. Zwei Indifferenzkurven können

- einander nicht schneiden. Die optimale Alternative liegt auf der Indifferenzkurve mit dem höchsten Präferenzniveau.
- Bei mehr als zwei Zielgrößen wird die Alternativenbewertung zu einem komplexen Problem. Jedoch kann der Vergleich zweier beliebiger Zielgrößenvektoren mit mehr als zwei Komponenten auf den sukzessiven Vergleich von Vektoren zurückgeführt werden, die sich jeweils nur im Hinblick auf zwei Zielgrößen unterscheiden (Transformationskonzept).
 - Bei der Formulierung eines mathematischen Entscheidungsmodells stellt sich das komplexe Problem, die Präferenzvorstellungen des Entscheiders in einer Zielfunktion auszudrücken. Da enge Grenzen bezüglich der Ermittlung und formalen Darstellung einer (Nutzen-)Funktion, die die Präferenzen exakt widerspiegelt, bestehen, wurden in der Literatur vereinfachte Kriterien entwickelt. Dazu zählen die Zielgewichtung, die Zielunterdrückung und die Vorgabe von Anspruchsniveaus für einen Teil der Zielgrößen.

Ergänzende und vertiefende Literatur:

Bamberg et al. (2012, Kap. 3); Dinkelbach (1962, 1969); Dinkelbach und Kleine (1996, S. 1–61); Dyckhoff (1988); Eisenführ und Weber (1986); Eisenführ et al. (2010, Kap. 5–6); Fandal (1972, 1979); Fandel und Gal (1980); Hax (1974, S. 21–35); Heinen (1976); Heitrich (1979); Hwang und Yoon (1995); Isermann (1979a, b); Keeney und Raiffa (1976); Laux und Franke (1970); Mag (1977); Webber (1983); Zeleny (1976); Zionts (1978).

3.7 Übungen

Aufgabe 3.1

Ein Unternehmer hat für eine Modernisierungsmaßnahme in einem Werk mehrere Alternativen, die sich im Hinblick auf ihre Rentabilität (Zielgröße Z_1) in % und ihre Umweltstandards (Zielgröße Z_2) auf einer Skala von 1 (niedrigste Standards) bis 10 (höchste Standards) unterscheiden.

In der linken der beiden nachfolgenden Tabellen sehen Sie die Ergebnisse der Alternativen, in der rechten Tabelle sehen Sie, welche Angaben der Unternehmer über die Vorziehwürdigkeit der Alternativen gemacht hat.

	Z_1	Z_2		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	11 %	5	A_1	–	$A_1 > A_2$	$A_1 > A_3$	$A_1 \sim A_4$	$A_1 \sim A_5$
A_2	9 %	7	A_2		–	$A_2 > A_3$	$A_2 < A_4$	$A_2 \sim A_5$
A_3	5 %	4	A_3			–	$A_3 < A_4$	$A_3 < A_5$
A_4	7 %	9	A_4				–	$A_4 \sim A_5$
A_5	13 %	4	A_5					–

- Erläutern Sie das Ordnungsaxiom und das Transitivitätsaxiom.
- Stellen Sie alle Alternativen grafisch in einem (Z_1, Z_2) -Diagramm dar. Prüfen Sie die Alternativen auf Effizienz.
- Prüfen Sie, ob die Angaben des Unternehmers den beiden Axiomen aus Aufgabenteil a) genügen. Verdeutlichen Sie Ihr Ergebnis grafisch.

Aufgabe 3.2

Für einen Kindergeburtstag will ein Vater zwei Sorten Bonbons (x_1 und x_2) kaufen. Er veranschlagt für jedes Kind 1 EUR, die er höchstens ausgeben will. Die Bonbons kosten je Stück 5 (x_1) bzw. 4 (x_2) Cent.

- Stellen Sie eine Tabelle auf, welche mögliche Mengen angibt, die der Vater von den beiden Süßigkeiten pro Kind kaufen kann. Stellen Sie den Zusammenhang grafisch in einem (x_1, x_2) -Diagramm dar. Vernachlässigen Sie Ganzzahligkeitsbeschränkungen, d. h. tun Sie so, als gäbe es z. B. auch halbe Bonbons.
- Nehmen Sie an, der Vater ginge von der folgenden Nutzenfunktion eines Kindes aus: $U(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. (i) Interpretieren Sie die Nutzenfunktion. Stellen Sie hierzu auch die Indifferenzkurven grafisch dar. (ii) Wie sollte der Vater einkaufen?
- Unterstellen Sie nun die Nutzenfunktion $U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 \cdot x_2}$. Wiederholen Sie die Aufgaben (i) und (ii) aus Aufgabenteil b).

Aufgabe 3.3

Herr Schneider prüft Darlehensangebote für die Finanzierung seines Hauses (Kreditbetrag: 300.000 EUR). Er legt die Kriterien Z_1 =Höhe des Zinses (in %), Z_2 =Dauer der Zinsbindung (in Jahren, je mehr, desto besser), Z_3 = Tilgungsmöglichkeiten und Z_4 =Renommé der Bank zugrunde. Für Z_3 und Z_4 hat Herr Schneider Schulnoten zwischen 1 und 5 vergeben. Folgende Angebote liegen ihm vor:

Bank	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
A ₁ : Hypoeins	1,9	15	1	2
A ₂ : DPB	1,6	5	4	3
A ₃ : NL-Bank	1,7	10	2	2
A ₄ : DGH-Bank	1,8	10	3	x_{44}

Da Herr Schneider die DGH-Bank nicht kennt, hat er einen Bekannten gebeten, ihm etwas zu dieser Bank zu sagen. Solange er auf dessen Rückruf wartet, hat Herr Schneider den Platzhalter x_{44} eingetragen.

- Welche Alternativen sind für welche Werte von x_{44} effizient bzw. ineffizient?
- Wie entscheidet Herr Schneider, wenn er die Ziele lexikografisch in der Reihenfolge $Z_1 \succ Z_2 \succ Z_3 \succ Z_4$ ordnet?

- c) Wie entscheidet Herr Schneider, wenn er die Ziele 4:3:2:1 gewichtet und zuvor den Zinssatz und die Zinsbindung in Schulnoten so proportional umrechnet, dass der beste Wert eine 1 und der schlechteste eine 4 erhält? Was halten Sie von diesem Vorgehen?

Aufgabe 3.4

Einem Entscheider stehen fünf Alternativen $A_1, \dots, A_5$ zur Auswahl, die jeweils durch vier Zielgrößen $Z_1, \dots, Z_4$ beschrieben werden. Die Ausprägungen der Zielgrößen sind mit Sicherheit bekannt und können der folgenden Zielgrößenmatrix entnommen werden. Der Entscheider strebt einen möglichst hohen Wert der jeweiligen Zielgröße an.

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
A_1	20	50	6	10
A_2	20	85	4	15
A_3	25	80	1	2
A_4	30	75	6	10
A_5	35	80	6	5

- a) Überprüfen Sie die Zielgrößenmatrix auf Effizienz und vernachlässigen Sie im Folgenden ineffiziente Alternativen.
 b) Der Entscheider verwendet als Entscheidungskriterium die Lexikografische Ordnung und wählt Alternative A_4 . Geben Sie eine mögliche Bewertung der Zielgrößen an, mit der dieses Ergebnis erzielt wird.
 c) Welche Alternative wählt ein Entscheider bei Maximierung unter Anspruchsniveaus, wenn Z_4 maximiert werden soll und als Anspruchsniveau der Zielgrößen Z_1 , Z_2 und Z_3 jeweils der durchschnittliche Zielgrößenwert gesetzt wird?

3.8 Lösungshinweise

Aufgabe 3.1

- a) Siehe Kap. 2, Abschn. 2.4.1. – b) A_3 ist ineffizient. – c) Die angegebenen Präferenzen sind intransitiv ($A_1 \sim A_4 \sim A_5 \sim A_2$ widerspricht $A_1 > A_2$). Grafisch: Angaben implizieren, dass sich Indifferenzkurven schneiden.

Aufgabe 3.2

- a) Grafisch: Gerade mit Steigung $-5/4$ (das Preisverhältnis im (x_1, x_2) -Diagramm). – b) (i) Beide Bonbons stiften den gleichen Nutzen, es zählt nur die Gesamtzahl der Bonbons; vollständige Substitution, Grenzrate der Substitution = 1. (ii) Daher kauft der Vater nur die billigeren, d. h. $x_2 = 25$. – c) (i) Nun ist der Nutzen null, wenn nur eine Sorte gekauft wird; partielle Substitution, Grenzrate hängt von den Mengen ab. (ii) Optimale Lösung ist $x_1 = 10$ und $x_2 = 12,5$, damit nicht ganzzahlig; beste ganzzahlige Lösung ist $x_1 = x_2 = 11$.

Aufgabe 3.3

a) Effizient sind A_1 , A_2 und A_3 . A_4 ist effizient falls $x_{44} = 1$, sonst ineffizient, da von A_3 dominiert. – **b)** Er wählt A_2 . – **c)** Er wählt A_3 (Zielwert $= 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2,5 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 21,5$ oder 2,15 bei Normierung der Gewichte auf 1). Ökonomisch lassen sich sowohl die Umrechnung in Noten als auch die Gewichtungen kaum begründen.

Aufgabe 3.4

a) A_2 , A_4 und A_5 sind effizient. – **b)** Z_3 auf dem ersten Rang, Z_4 auf dem zweiten Rang Reihenfolge der anderen beiden Zielgrößen beliebig. – **c)** A_4

Literatur

- Bamberg, G., Coenenberg, A.G., Krapp, M.: Betriebswirtschaftliche Entscheidungslehre, 15. Aufl. Vahlen, München (2012)
- Dinkelbach, W.: Unternehmerische Entscheidungen bei mehrfacher Zielsetzung. Z. Betriebswirtsch. **32**, 739–747 (1962)
- Dinkelbach, W.: Entscheidungen bei mehrfacher Zielsetzung und die Problematik der Zielgewichtung. In: Colbe, W.B.von, Meyer-Dohm, P. (Hrsg.) Unternehmerische Planung und Entscheidung, S. 55–70. Bertelsmann Universitätsverlag, Bielefeld (1968)
- Dinkelbach, W., Kleine, A.: Elemente einer betriebswirtschaftlichen Entscheidungslehre. Springer, Berlin (1996)
- Dyckhoff, H.: Zeitpräferenz. Z. Betriebswirtsch. Forsch. **40**, 990–1008 (1988)
- Eisenführ, F., Weber, M.: Zielstrukturierung: ein kritischer Schritt im Entscheidungsprozeß. Z. Betriebswirtsch. Forsch. **38**, 907–929 (1986)
- Eisenführ, F., Weber, M., Langer, T.: Rationales Entscheiden, 5. Aufl. Springer, Berlin (2010)
- Fandal, G.: Optimale Entscheidungen bei mehrfacher Zielsetzung. Springer, Berlin (1972)
- Fandel, G.: Zur Theorie der Optimierung bei mehrfachen Zielsetzungen. Z. Betriebswirtsch. **49**, 535–541 (1979)
- Fandel, G., Gal, T.: Multiple Criteria Decision Making – Theory and Application. Springer, Berlin (1980)
- Hax, H.: Entscheidungsmodelle in der Unternehmung. Einführung in Operations Research. Rowohlt, Reinbek (1974)
- Heinen, E.: Grundlagen betriebswirtschaftlicher Entscheidungen. Das Zielsystem der Unternehmung, 3. Aufl. Gabler, Wiesbaden (1976)
- Hettich, G.O.: Entscheidungsprinzipien und Entscheidungsregeln bei mehrfacher Zielsetzung. In: Schanz, G. (Hrsg.) Betriebswirtschaftliche Gesetze, Effekte und Prinzipien, S. 172–191. Vahlen, München (1979)
- Hwang, C.L., Yoon, K.: Multiple Attribute Decision Making. Sage, Thousand Oaks (1995)
- Isermann, H.: Strukturierung von Entscheidungsprozessen bei mehrfacher Zielsetzung. OR Spektrum **1**, 3–26 (1979a)
- Isermann, H.: The enumeration of all efficient solutions for a linear multiple-objective transportation problem. Naval Res. Logistics Q. **26**, 123–139 (1979b)
- Keeney, R.L., Raiffa, H.: Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Trade-Offs. Wiley, New York (1976)

- Laux, H., Franke, G.: Der Erfolg im betriebswirtschaftlichen Entscheidungsmodell. Z. Betriebswirtsch. **40**, 31–52 (1970)
- Mag, W.: Entscheidung und Information. Vahlen, München (1977)
- Weber, M.: Entscheidungen bei Mehrfachzielen. Gabler, Wiesbaden (1983)
- Zeleny, M.: Multiple Criteria Decision Making (Kyoto 1975). Berlin, Springer (1976)
- Zionts, S.: Multiple Criteria Problem Solving. Springer, Berlin (1978)

Entscheidung bei Unsicherheit: Grundlagen

4

4.1 Problemstellung und Aufbau

In der Realität besteht grundsätzlich Unsicherheit über die Ausprägungen der entscheidungsrelevanten Daten. Zu welchem Ergebnis eine unsichere Alternative führt, lässt sich zum Zeitpunkt der Entscheidung nicht mit Sicherheit vorhersagen; das tatsächliche Ergebnis hängt von dem noch unbekannten Umweltzustand ab.

In diesem Kapitel werden einige Grundlagen der Entscheidung bei Unsicherheit geschaffen. Zunächst werden in Abschn. 4.2 klassische Entscheidungskriterien für Unsicherheit im engeren Sinne diskutiert. Unsicherheit i. e. S. liegt definitionsgemäß dann vor, wenn der Entscheider sich zwar ein Urteil darüber bilden kann, welche Zustände (Datenkonstellationen) bzw. Ergebnisse eine positive Eintrittswahrscheinlichkeit haben, darüber hinaus die Wahrscheinlichkeiten aber nicht näher spezifizieren kann. Das Konstrukt der Unsicherheit i. e. S. wird anschließend kritisch beleuchtet.

In einer Entscheidungssituation bei Risiko werden den denkbaren Umweltzuständen bzw. Ergebnissen Eintrittswahrscheinlichkeiten zugeordnet. In Abschn. 4.3 wird die Bedeutung von Wahrscheinlichkeiten für das Treffen von Entscheidungen betrachtet und es werden Grundtypen von Wahrscheinlichkeiten erläutert. Besondere Beachtung finden dabei die subjektiven Wahrscheinlichkeiten, die dazu dienen, persönliche Erfahrungen und Informationen bei Entscheidungen zu berücksichtigen.

In Abschn. 4.4 wird deutlich, dass Entscheider aufgrund unterschiedlicher Risikoeinstellungen in Risikosituationen nicht unbedingt die gleiche Alternative wählen, und es wird diskutiert, wie sich solche Risikopräferenzen im Entscheidungskalkül abbilden lassen.

Abschn. 4.5 behandelt Dominanzkriterien, mit deren Hilfe ein Entscheider möglicherweise eine Vorauswahl aus Alternativen treffen kann, da „dominierte“ Alternativen nicht weiter in Betracht gezogen werden müssen, weil sie im Sinne des letztlich maßgeblichen Entscheidungskriteriums nachteilig sind. Dominanzkriterien stellen relativ geringe

Anforderungen an die Zielvorstellungen eines Entscheiders und ermöglichen damit eine Vereinfachung des Entscheidungsproblems. Mit einem Kriterium der Vorauswahl kann zwar grundsätzlich ein Entscheidungsproblem nicht gelöst werden, es kann jedoch die Entscheidungsfindung durch die mit der Vorauswahl einhergehende Reduzierung der Alternativenmenge erleichtern.

Nach Reduzierung der Alternativenmenge durch Dominanzkriterien wird die eigentliche Entscheidung mithilfe eines Entscheidungskriteriums bei Risiko getroffen. In Abschn. 4.6 werden mit der μ -Regel und dem (μ, σ) -Prinzip zwei klassische Entscheidungskriterien bei Risiko vorgestellt, die eine relativ einfache Auswahl aus einer Alternativenmenge ermöglichen. Bei der μ -Regel wird im Präferenzwert für eine Alternative nur der Erwartungswert der Zielgröße berücksichtigt, beim (μ, σ) -Prinzip zusätzlich noch ihre Standardabweichung σ als Maß des Risikos. Wie gezeigt wird, können beide Kriterien zu problematischen Entscheidungen führen. Grund dafür ist, dass weder bei der μ -Regel noch bei dem (μ, σ) -Prinzip explizit berücksichtigt wird, welche *konkreten* Ergebnisse der Alternativenwahl zugrunde liegen, welche Wahrscheinlichkeiten ihnen entsprechen und welche Konsequenzen sie für den Entscheider haben.

In Kap. 5 wird das Bernoulli-Prinzip als allgemeines Entscheidungsprinzip für Risikosituationen dargestellt und gewürdigt. Es steht im Einklang mit plausiblen Axiomen rationalen Verhaltens und bietet die Möglichkeit, alle möglichen Zielgrößenwerte und deren Eintrittswahrscheinlichkeiten *explizit* zu berücksichtigen, nicht nur den Erwartungswert und die Standardabweichung der Zielgröße.

Im Vordergrund des vorliegenden Kapitels steht der Fall *einer* Zielgröße (z. B. Gewinn). Die Ergebnisse x der Alternativen werden also durch Ausprägungen der betreffenden Zielgröße wiedergegeben. Dabei wird unterstellt, der Entscheider ziehe ein höheres Ergebnis x stets einem niedrigeren vor, und zwar unabhängig davon, in welchen Zuständen die Ergebnisse erzielt werden. Dies impliziert, dass die Bewertung eines Ergebnisses unabhängig davon ist, in welchem Zustand es erzielt wird. Dies ist nicht selbstverständlich: So könnte z. B. der Nutzen eines erreichten Einkommens vom Zustand abhängen, weil die Konsummöglichkeiten des Entscheiders ebenfalls vom Zustand abhängen.

Die folgenden Darstellungen gelten auch für den Fall, dass zwar mehrere Zielgrößen entscheidungsrelevant sind, jedoch die möglichen Zielgrößenvektoren gemäß dem Transformationskonzept (Kap. 3, Abschn. 3.4) derart verändert („standardisiert“) werden, dass sie sich nur noch hinsichtlich der Ausprägung einer einzigen Zielgröße Z^* unterscheiden, bei der ein höherer Wert einem niedrigeren vorgezogen wird, und jede andere Zielgröße jeweils denselben (realen oder hypothetischen) Wert aufweist.

Wenn hervorgehoben werden soll, dass ein Ergebnis x unsicher und damit eine Zufallsvariable darstellt, wird das Tilde-Symbol ($\tilde{x}$) verwendet. Konkrete Ergebnisse werden stets ohne Tilde dargestellt.

4.2 Entscheidung bei Unsicherheit im engeren Sinne

4.2.1 Entscheidungssituation und Beispiel

In diesem Abschnitt werden klassische Entscheidungskriterien für Unsicherheit im engeren Sinne diskutiert. Wie noch gezeigt wird, ist das theoretische Konstrukt der Unsicherheit i. e. S. kaum geeignet, praktische Entscheidungsprobleme zu beschreiben, da sich reale Entscheidungssituationen grundsätzlich als Risikosituationen identifizieren lassen. Bei Risiko verfügt der Entscheider über ein Wahrscheinlichkeitsurteil bezüglich der denkbaren Zustände. Es ist sinnvoll, diese Wahrscheinlichkeitsvorstellungen beim Abwägen der Ergebnisse im Entscheidungskalkül zu erfassen. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung stellt dazu das Instrumentarium bereit.

Damit die Darstellungen übersichtlich bleiben, sollen nur Entscheidungssituationen mit endlich vielen Zuständen und endlich vielen Alternativen betrachtet werden. Zur Illustration der Entscheidungskriterien wird das Beispiel in Tab. 4.1 für eine Ergebnismatrix zugrunde gelegt. Dabei wird davon ausgegangen, dass sich der Entscheider an nur einer Zielgröße orientiert, von der er einen größeren Wert einem kleineren vorzieht.

4.2.2 Maximin-Regel, Maximax-Regel und Hurwicz-Prinzip

Nach der *Maximin-Regel* (Wald 1971) – die auch als Minimax-Regel bezeichnet wird – ist für die Beurteilung einer Alternative nur das Ergebnis maßgeblich, das mit ihr im *ungünstigsten* Fall erzielt wird (Mindestergebnis):

$$\Phi(A_a) = x_a^{\min} = \min_s x_{as}, \quad (4.1)$$

wobei x_{as} das Ergebnis der Alternative A_a ($a = 1, 2, \dots, N_A$) im Zustand S_s ($s = 1, 2, \dots, N_S$) bezeichnet. Gewählt wird die Alternative mit dem maximalen Mindestergebnis. Die Maximin-Entscheidungsregel lautet also:

$$\max_a x_a^{\min} \quad \text{bzw.} \quad \max_a \left(\min_s x_{as} \right). \quad (4.2)$$

Tab. 4.1 Beispiel einer Ergebnismatrix mit Zeilenminima und –maxima

	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	Zeilenminimum	Zeilenmaximum
A ₁	20.000	15.000	20.000	3.000	3.000	20.000
A ₂	3.003	3.010	3.060	3.002	3.002	3.060
A ₃	20.003	3.000	3.000	–100	–100	20.003
A ₄	20.001	3.000	3.000	3.002	3.000	20.001

Im Beispiel der Tab. 4.1 ist die Alternative A_2 zu wählen, die mit 3.002 das höchste Mindestergebnis (maximales Zeilenminimum) aufweist.

Nach der *Maximax*-Regel ist für die Beurteilung einer Alternative nur das Ergebnis maßgeblich, das mit ihr im *besten* Fall erzielt wird:

$$\Phi(A_a) = x_a^{\max} = \max_s x_{as}. \quad (4.3)$$

Gewählt wird die Alternative mit dem größten maximalen Ergebnis. Die *Maximax*-Entscheidungsregel lautet also:

$$\max_a x_a^{\max} \quad \text{bzw.} \quad \max_a \left(\max_s x_{as} \right). \quad (4.4)$$

Im Beispiel der Tab. 4.1 wird die Alternative A_3 gewählt, die mit 20.003 das höchste maximale Ergebnis (maximales Zeilenmaximum) aufweist.

Die *Maximin*-Regel und die *Maximax*-Regel gelten analog für Entscheidungsprobleme mit mehr als einer Zielgröße. Allgemein ist nach der *Maximin*-Regel (der *Maximax*-Regel) für jede Alternative allein das schlechteste (das beste) ihrer möglichen Ergebnisse entscheidungsrelevant; optimal ist die Alternative, deren schlechtestes (bestes) Ergebnis den höchsten Präferenzwert aufweist. Beide Regeln stellen unabhängig von der Zahl der Zielgrößen an den Entscheider im Prinzip keine höheren Anforderungen als ein Entscheidungsproblem bei Sicherheit. Bei Sicherheit muss der Entscheider – sofern er die Entscheidung auf der Grundlage einer Zielgrößenmatrix trifft – auf dem Wege des paarweisen Vergleichs feststellen, welches das beste Ergebnis ist. (Die betreffende Alternative wird realisiert.) Bei Anwendung der *Maximin*-Regel muss der Entscheider zunächst (ebenfalls durch paarweisen Vergleich) für jede Alternative feststellen, welches das jeweils schlechteste der möglichen Ergebnisse ist. Danach muss er (wiederum durch paarweisen Vergleich) prüfen, welches der schlechtesten Ergebnisse der erwogenen Alternativen am besten ist; die betreffende Alternative wird gewählt. Das Analoge gilt für die *Maximax*-Regel: Auch hier reduziert der Entscheider jede Alternative auf nur ein Ergebnis (das beste) und vergleicht daraufhin nur die besten Ergebnisse.

Der Einfachheit der Regeln stehen jedoch schwerwiegende Nachteile gegenüber. Da bei der *Maximin*-Regel von jeder Alternative immer nur das schlechteste Ergebnis berücksichtigt wird, impliziert diese eine extrem pessimistische Einstellung. Die hiermit verbundene Problematik wird am Beispiel der Tab. 4.1 deutlich. Die hier zu wählende Alternative A_2 bietet zwar im ungünstigsten Fall (Zustand S_4) ein Ergebnis, das um 2 Einheiten höher ist als das von Alternative A_1 . Tritt jedoch einer der Zustände S_1 , S_2 und S_3 ein, wird bei A_1 ein wesentlich höheres Ergebnis erzielt als bei A_2 . Es dürfte wenig sinnvoll sein, derartige Erfolgchancen generell zu vernachlässigen.

In kompetitiven Spielsituationen, in denen die Umweltzustände mögliche Strategien rationaler Gegenspieler darstellen, kann es zwar wohlbegründet sein, nur mit dem

schlechtesten Ergebnis zu rechnen.¹ Bei „Spielen gegen die Natur“, d. h. bei der Entscheidung in einer neutralen Umwelt, deren Zustand unabhängig von den Aktionen des Entscheiders eintritt, ist jedoch der in der Maximin-Regel zum Ausdruck kommende extreme Pessimismus unbegründet (Schneeweiß, H. 1967a, S. 23). Vor allem für unternehmerische Entscheidungen dürfte die Maximin-Regel kaum akzeptabel sein: Praktisch alle unternehmerischen Entscheidungen führen möglicherweise zu einem Verlust. Nach der Maximin-Regel ist es vorteilhaft, solche Aktivitäten zu unterlassen und die Mittel zu einem sicheren Zins (etwa als Sparguthaben) anzulegen. Wer nach der Maximin-Regel handelt, „wird nicht Unternehmer, sondern Rentier“ (Hax 1974, S. 56).

Umgekehrt impliziert die Maximax-Regel eine extrem optimistische Einstellung. Die Problematik wird wieder am Beispiel der Tab. 4.1 deutlich: Die (nach der Maximax-Regel) zu wählende Alternative A_3 bietet zwar im günstigsten Fall (Zustand S_1) ein Ergebnis, das um 3 Einheiten höher ist als das von A_1 . Tritt jedoch einer der Zustände S_2 , S_3 und S_4 ein, führt die Alternative A_3 zu einem wesentlich niedrigeren Ergebnis als A_1 . Es ist wenig sinnvoll, derartige Nachteile generell zu vernachlässigen.

Das Hurwicz-Prinzip (Hurwicz 1951) stellt einen Kompromiss zwischen der Maximax- und der Maximin-Regel dar: Für die Beurteilung einer Alternative ist das höchste *und* das niedrigste ihrer möglichen Ergebnisse maßgeblich. Aus diesen Ergebnissen wird ein gewogener Durchschnitt gebildet, wobei das maximale Ergebnis mit einem Parameter α ($0 \leq \alpha \leq 1$), das minimale Ergebnis mit dem Parameter $1 - \alpha$ gewichtet wird:

$$\Phi(A_a) = \alpha \cdot x_a^{\max} + (1 - \alpha) \cdot x_a^{\min}. \quad (4.5)$$

Gewählt wird die Alternative mit dem größten gewogenen Durchschnitt aus maximalem und minimalem Ergebnis. Für den Fall $\alpha = 3/4$ z. B. erweist sich Alternative A_4 als optimal; ihr Präferenzwert beträgt 15.750,75. Der Parameter α ist vom Entscheider nach subjektivem Ermessen festzulegen. Je optimistischer er ist, desto höher ist der von ihm gewählte α -Wert und desto stärker fallen die bestmöglichen Ergebnisse ins Gewicht. Daher wird α als „*Optimismusparameter*“ bezeichnet.

Die Maximin-Regel ($\alpha = 0$) und die Maximax-Regel ($\alpha = 1$) stellen Grenzfälle des Hurwicz-Prinzips dar. Auch das Hurwicz-Prinzip ist problematisch, da von jeder Alternative nur zwei der möglichen Ergebnisse berücksichtigt werden. Die Problematik kann wieder am Beispiel der Tab. 4.1 verdeutlicht werden: Im Falle $\alpha = 3/4$ z. B. wird die Alternative A_4 gewählt. Diese bietet im Zustand S_1 (bzw. S_4) gegenüber A_1 ein zusätzliches Ergebnis von einer Einheit (bzw. von zwei Einheiten). Tritt jedoch einer der Zustände S_2 und S_3 ein, wird bei Wahl von A_1 ein wesentlich höheres Ergebnis erzielt als bei A_4 . Es erscheint wenig vernünftig, entsprechende Erfolgchancen generell zu vernachlässigen.

¹Für solche Spielsituationen wurde die Maximin-Regel gerade geschaffen. Später wurde sie von Wald (1971) auch für „Spiele gegen die Natur“ vorgeschlagen, bei denen der Umweltzustand von den Maßnahmen des Entscheiders unabhängig ist.

4.2.3 Niehans-Savage-Regel

Bei der Niehans-Savage-Regel (vgl. Niehans 1948, insb. S. 446–450, und Savage 1951) erfolgt die Beurteilung der Alternativen nicht auf der unmittelbaren Grundlage der Ergebnisse, sondern aufgrund entsprechender „Bedauernswerte“. Bezeichnet $x_s^{\max} = \text{Max}\{x_{1s}, x_{2s}, \dots, x_{N_{As}}\}$ das im Umweltzustand S_s über alle betrachteten Alternativen maximale Ergebnis (das „Spaltenmaximum“), so wird das Ergebnis x_{as} der Alternative A_a im Umweltzustand S_s durch folgenden Betrag (Bedauernswert) ersetzt:

$$B_{as} = x_s^{\max} - x_{as}.$$
(4.6)

In Worten: Der Bedauernswert der Alternative A_a für den Zustand S_s ist gleich der Differenz aus dem in diesem Zustand maximal erreichbaren Ergebnis und dem Ergebnis der Alternative A_a .

Es wird davon ausgegangen, dass der Entscheider einen möglichst niedrigen Bedauernswert anstrebt. Diejenige Alternative soll dann gewählt werden, bei der der *maximale* Bedauernswert am kleinsten ist:

$$\Phi(A_a) = \text{Max}_s B_{as} \rightarrow \text{Min}_a$$
(4.7)

Der Ergebnismatrix in Tab. 4.1 entspricht die „Bedauernsmatrix“ in Tab. 4.2.

Zu wählen ist hier die Alternative A_1 , die den kleinsten maximalen Bedauernswert aufweist (minimales Zeilenmaximum).

Bei der Beurteilung der Niehans-Savage-Regel können zwei Aspekte betrachtet werden: die Verwendung von Bedauernswerten und das Auswahlkriterium.

Geht es erstens um die Verwendung von Bedauernswerten, muss unterschieden werden, ob die Niehans-Savage-Regel als normatives Entscheidungskriterium dient oder ob sie zur Beschreibung realen Entscheidungsverhaltens verwendet werden soll. Als normatives Entscheidungskriterium ist die Niehans-Savage-Regel wenig sinnvoll: Wenn der Entscheider die Entscheidung für sich selbst trifft, sollte das Bedauern über den ex post erzielten Erfolg nicht die Alternativenwahl ex ante bestimmen. Reale Entscheidungen lassen sich jedoch in manchen Fällen gut durch eine Orientierung an der Niehans-Savage-Regel rekonstruieren. Die Orientierung an Bedauernswerten kann sogar rational sein, wenn beispielsweise der Entscheider die Entscheidung im Auftrag einer Instanz trifft, die ex post die Qualität der getroffenen Entscheidung an der Differenz zwischen dem maximal erreichbaren Erfolg und dem tatsächlich erzielten Ist-Erfolg misst und eine umso

Tab. 4.2 Ergebnismatrix mit Bedauernswerten (Bedauernsmatrix) und Zeilenmaxima

	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	Zeilenmaximum
A ₁	3	0	0	2	3
A ₂	17.000	11.990	16.940	0	17.000
A ₃	0	12.000	17.000	3.102	17.000
A ₄	2	12.000	17.000	0	17.000

höhere Belohnung gewährt (bzw. eine umso geringere Sanktion verhängt), je geringer diese Differenz ist.

In realen Entscheidungssituationen tritt zudem das Phänomen des „Hindsight Bias“ oder „Rückschaufehlers“ (Fischhoff 1975) auf: Ex post werden die Erwartungen über Umweltzustände in Richtung des eingetretenen Zustandes verzerrt, sodass die Wahrscheinlichkeit des eingetretenen Umweltzustandes ex post höher eingeschätzt wird („es musste ja so kommen“). Dadurch erscheint das in diesem Zustand maximale Ergebnis in der Rückschau erreichbar. Wird der Entscheider an diesem maximalen Ergebnis gemessen und antizipiert er das Phänomen des Rückschaufehlers, so besteht eine Tendenz dazu, sich an der Niehans-Savage-Regel zu orientieren.

Die Niehans-Savage-Regel ermöglicht es damit (wenn auch nur in sehr unvollkommener Weise), einem Aspekt Rechnung zu tragen, der für die Betriebswirtschaftslehre von grundlegender Bedeutung ist: In einer Delegationsbeziehung wird sich ein Entscheidungsträger grundsätzlich nicht primär an der Zielgröße der Instanz (hier: dem Erfolg) orientieren, sondern an den Konsequenzen, die sich für ihn selbst ergeben. Hierzu zählen vor allem auch Belohnungen bzw. Sanktionen der Instanz.

Zweitens kann das Auswahlkriterium betrachtet werden. Die Vorgehensweise bei Anwendung der Niehans-Savage-Regel entspricht der Grundidee der Maximin-Regel. Bei der Entscheidung werden nur diejenigen Ergebnisse berücksichtigt, die jeweils im ungünstigsten Fall eintreten können (Zeilenmaxima), und von diesen führt das beste Ergebnis (Minimum der Zeilenmaxima) zu der zu wählenden Alternative. Der Unterschied zur Maximin-Regel besteht lediglich darin, dass bei Bedauernswerten ein möglichst kleiner Wert angestrebt wird, wohingegen bei der Formulierung der Maximin-Regel von einer zu maximierenden Zielgröße ausgegangen wird. Insofern trifft die Kritik an der Maximin-Regel in gleicher Weise auf die Niehans-Savage-Regel zu.

4.2.4 Laplace-Regel

Die Problematik der bisher dargestellten Entscheidungsregeln besteht u. a. darin, dass die Entscheidung nur von dem Ergebnis (bzw. von dem Bedauernswert bei der Niehans-Savage-Regel) in jeweils einem oder in allenfalls zwei Zuständen (Hurwicz-Prinzip) abhängig gemacht wird. Es werden mögliche Ergebnisse vernachlässigt, also vorliegende Informationen nicht berücksichtigt.

Die Laplace-Regel berücksichtigt dagegen alle möglichen Ergebnisse, wobei davon ausgegangen wird, dass alle Zustände gleich wahrscheinlich sind, also jeweils die Eintrittswahrscheinlichkeit $1/N_S$ haben. Die Unsicherheit i. e. S. wird so in eine Risikosituation transformiert. Die Entscheidung ist dementsprechend mithilfe eines Entscheidungskriteriums bei Risiko (vgl. Abschn. 4.4 und Kap. 5) zu treffen. Die Laplace-Regel stellt damit streng genommen keine Entscheidungsregel bei Unsicherheit i. e. S. dar, obwohl sie in der Literatur üblicherweise dazu gezählt wird; es handelt sich eigentlich um

ein Entscheidungskriterium bei Risiko, das nur beinhaltet, wie die Wahrscheinlichkeiten für die Zustände festzulegen sind (und zwar jeweils in Höhe von $1/N_S$).

Die Annahme der Gleichwahrscheinlichkeit der Zustände wird dabei wie folgt begründet: Bei Unsicherheit i. e. S. besteht kein zureichender Grund für die Vermutung, dass irgendein Zustand mit höherer Wahrscheinlichkeit eintritt als ein anderer. Folglich sind nach dem (auf Laplace zurückgehenden) „Prinzip des unzureichenden Grundes“ alle Zustände gleich wahrscheinlich.

Die Laplace-Regel soll hier nicht näher diskutiert werden, da Probleme der Bestimmung der Eintrittswahrscheinlichkeiten für die Zustände und Entscheidungskriterien bei Risiko in Kap. 5 noch eingehend untersucht werden. An dieser Stelle sei nur der folgende Aspekt hervorgehoben: Bei Entscheidung nach der Laplace-Regel stellt sich das Kernproblem, wie die Zustände definiert werden sollen. Diese sind im Allgemeinen nicht von vornherein vorgegeben, sondern müssen bei der Lösung eines konkreten Entscheidungsproblems erst gegeneinander abgegrenzt werden. Je nachdem, wie viele Zustände nun im Kalkül berücksichtigt werden, ergeben sich andere Wahrscheinlichkeiten. Werden z. B. nur die Zustände „der Preis steigt nicht“ und „der Preis steigt“ unterschieden, so erhält der Zustand „der Preis steigt“ die Eintrittswahrscheinlichkeit $1/2$. Werden stattdessen drei Zustände definiert, nämlich „der Preis sinkt“, „der Preis bleibt konstant“ und „der Preis steigt“, ergibt sich für den Zustand „der Preis steigt“ nur noch eine Wahrscheinlichkeit von $1/3$. Es ist in der Realität nicht immer eindeutig anzugeben, wie die Umweltzustände gegeneinander abzugrenzen sind.

4.2.5 Zur Bedeutung des Konstrukts der Unsicherheit i. e. S.

Das theoretische Konstrukt der Unsicherheit i. e. S. hat nur sehr geringe praktische Bedeutung. Reale Entscheidungssituationen lassen sich grundsätzlich besser durch Risikosituationen als durch Unsicherheitssituationen i. e. S. repräsentieren: Zum einen verfügt der Entscheider in aller Regel aufgrund seiner allgemeinen Erfahrungen und seiner speziellen Informationen bezüglich der zur Debatte stehenden Alternativen über gewisse Glaubwürdigkeitsvorstellungen hinsichtlich der Zustände, die durch (subjektive) Wahrscheinlichkeiten dargestellt werden können. Zum anderen kann selbst in den seltenen Fällen, in denen ein Entscheider *keinerlei* Informationen zur Prognose des Zustandes hat, ein bestimmtes Wahrscheinlichkeitsurteil über die Zustände gerechtfertigt sein: Wenn keinerlei Informationen darüber existieren, welches von mehreren sich gegenseitig ausschließenden Ereignissen eintritt, besteht kein Grund anzunehmen, dass irgendeines dieser Ereignisse eher eintritt als ein anderes. Es erscheint dann sinnvoll, sich so zu verhalten, als ob jedes der Ereignisse dieselbe Eintrittswahrscheinlichkeit habe (Prinzip des unzureichenden Grundes).

Wie erläutert, stellt sich allerdings bei Anwendung des Prinzips des unzureichenden Grundes das komplexe Problem, wie die Umweltzustände abzugrenzen sind, damit die Annahme der Gleichwahrscheinlichkeit tatsächlich gerechtfertigt erscheint. Dies schränkt

aber den Anwendungsbereich für stochastische Entscheidungsmodelle kaum ein; im Allgemeinen *existieren* gewisse Glaubwürdigkeitsvorstellungen, die als subjektive Wahrscheinlichkeiten formuliert werden können, sodass es weder notwendig noch sinnvoll ist, auf das Prinzip des unzureichenden Grundes zurückzugreifen.

4.3 Bedeutung und Grundtypen von Wahrscheinlichkeiten

4.3.1 Der klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff

Wie erläutert, lassen sich reale Entscheidungssituationen grundsätzlich als Risikosituationen identifizieren. Bei Risiko verfügt der Entscheider über ein Wahrscheinlichkeitsurteil bezüglich der denkbaren Zustände. Es ist sinnvoll, diese Wahrscheinlichkeitsvorstellungen beim Abwägen der Ergebnisse im Entscheidungskalkül zu erfassen. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung stellt dazu das Instrumentarium bereit.

Die klassische Definition der Wahrscheinlichkeit, die zugleich einen Vorschlag zur praktischen Messung von Wahrscheinlichkeiten enthält, geht auf Jakob Bernoulli und Pierre-Simon Laplace zurück. Dieses Konzept setzt voraus, dass das Ereignisfeld aus endlich vielen gleich wahrscheinlichen Elementarereignissen besteht, die sich gegenseitig ausschließen. Zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Ereignisses ist nach der Grundregel „Anzahl der Günstigen geteilt durch Anzahl der Möglichen“ die Anzahl der einander ausschließenden Elementarereignisse, die das betreffende Ereignis implizieren, ins Verhältnis zu setzen zur Gesamtzahl der möglichen einander ausschließenden Elementarereignisse. Umfasst das Ereignis θ m Elementarereignisse (z. B. beim Würfeln eines Würfels das Ereignis „gerade Zahl“ die drei Elementarereignisse 2, 4 und 6) und sind insgesamt n Elementarereignisse (im Würfelbeispiel die Elementarereignisse 1, 2, ..., 6) möglich, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis θ gleich m/n ($3/6 = 1/2$ im Würfelbeispiel).

Die klassische Wahrscheinlichkeitsdefinition setzt voraus, dass die Elementarereignisse gleich wahrscheinlich sind, d. h. jeweils dieselbe Eintrittswahrscheinlichkeit aufweisen (es muss also bei dem Entscheider bereits ein a-priori-Urteil über die Gleichwahrscheinlichkeit der Elementarereignisse zustande gekommen sein). Der Anwendungsbereich des klassischen Wahrscheinlichkeitskonzeptes erstreckt sich vor allem auf den Bereich der Glücksspiele. Dort gelingt es häufig, Elementarereignisse zu definieren, die als gleich wahrscheinlich angesehen werden können. Die klassische Definition der Wahrscheinlichkeit erklärt sich gerade daraus, dass sich die frühen Wahrscheinlichkeitstheoretiker vor allem mit Glücksspielen befasst haben.

Bei der Bestimmung der Eintrittswahrscheinlichkeiten der denkbaren Umweltzustände in ökonomischen Entscheidungssituationen wird es aber im Allgemeinen nicht möglich sein, auf a priori gleich wahrscheinliche Elementarereignisse zurückzugreifen. Zum Beispiel führen im Urteil eines Kreditgebers bestimmte Ereignisse bei einem Schuldner zu dessen Insolvenz, wohingegen für andere Ereignisse die Zahlungsfähigkeit gesichert ist.

Bei der Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für die Zahlungsfähigkeit des Schuldners kann nun grundsätzlich nicht davon ausgegangen werden, alle betrachteten Ereignisse seien gleich wahrscheinlich. Auch das „Prinzip des unzureichenden Grundes“ versagt im Allgemeinen in solchen Situationen. Aufgrund seiner allgemeinen Erfahrung und seiner speziellen Information über den Schuldner wird der Kreditgeber in der Regel hinreichenden Grund haben, die Ereignisse (und damit auch die dahinter stehenden Verhaltensweisen des Schuldners) *nicht* als gleich wahrscheinlich anzusehen. Es existieren im Allgemeinen auch keine anderen Elementarereignisse, auf die zurückgegangen werden könnte und für die die Anwendung des Prinzips des unzureichenden Grundes akzeptabel wäre.

4.3.2 Statistische Wahrscheinlichkeiten

Die statistische Wahrscheinlichkeit ist empirisch orientiert. Sie wird gemessen durch die relative Häufigkeit, mit der ein bestimmtes Ereignis in einem Kollektiv von tatsächlichen Ereignissen beobachtet wurde. Wird z. B. ein Zufallsexperiment n -mal durchgeführt und dabei m -mal das Ereignis θ beobachtet, so ergibt sich als statistische Wahrscheinlichkeit für das Ereignis θ der Wert m/n . Wenn etwa mit einem (gefälschten) Würfel 1000-mal gewürfelt und dabei in 300 Fällen die Zahl „Sechs“ erzielt wird, so erhält das Ereignis, mit diesem Würfel eine „Sechs“ zu würfeln, die statistische Wahrscheinlichkeit $300/1000 = 0,3$.

Die relative Häufigkeit kann nur dann sinnvoll als Wahrscheinlichkeit interpretiert werden, wenn n „hinreichend“ groß ist und außerdem das Experiment unter stets gleichen Bedingungen wiederholt wird. Diese Voraussetzung ist jedoch im wirtschaftlichen und sozialen Bereich nur selten erfüllt. Je größer die Anzahl n der Beobachtungen ist (und je größer damit der Zeitraum ist, in dem die Experimente durchgeführt werden), desto eher ist zu erwarten, dass sich der Ursachenkomplex des Zufallsexperiments geändert hat. Dann ist aber die relative Häufigkeit, die *früheren* Vorgängen entspricht, kein geeignetes Maß für die Eintrittswahrscheinlichkeit des zur Debatte stehenden zukünftigen Ereignisses.

Beobachtete relative Häufigkeiten können daher nur in wenigen ökonomischen Entscheidungssituationen als Grundlage für die Bildung eines Wahrscheinlichkeitsurteils dienen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Erzeugniseinheit fehlerhaft ist, könnte z. B. gemessen werden durch die Fehlerquote, die bei der Qualitätskontrolle in der Vergangenheit festgestellt worden ist. In vielen Entscheidungssituationen sind hingegen Ereignisse relevant, die das erste Mal eintreten oder gar einmalig sind. Betrachtet man etwa „jene Klasse von Entscheidungen, die als die ‚eigentlich-unternehmerischen‘ anzusehen sind – nämlich Investitionen, Finanzdispositionen, Festlegung des Produktionsprogramms, Auswahl wichtiger Mitarbeiter, Verhandlungen aller Art mit Abnehmern, den Arbeitnehmervertretern, den Behörden und ähnliches –, so wird man in ihnen mehr oder weniger singuläre Fälle erkennen müssen, die sich wohl nie so oft wiederholen, dass sie zahlenmäßig eine hinreichend große Basis darstellen, um daraus statistische Wahrscheinlichkeitsziffern ableiten zu können“ (Wittmann 1975, S. 60).

4.3.3 Subjektive Wahrscheinlichkeiten

4.3.3.1 Charakteristik

Wahrscheinlichkeiten nach dem klassischen Wahrscheinlichkeitskonzept und statistische Wahrscheinlichkeiten sind intersubjektiv, d. h. durch andere überprüfbar. Sie werden daher als *objektive* Wahrscheinlichkeiten bezeichnet. Solche Wahrscheinlichkeiten sind jedoch in der Realität und insbesondere auch in ökonomischen Entscheidungssituationen selten gegeben. Wären stochastische Entscheidungsmodelle nur für objektive Wahrscheinlichkeiten zulässig, wäre deren Anwendung für die meisten praktisch relevanten Entscheidungsprobleme ausgeschlossen. Eine derartige Beschränkung des Anwendungsbereichs stochastischer Modelle ist jedoch unbegründet.

In vielen Entscheidungssituationen bestehen über das Eintreten bestimmter ungewisser Ereignisse (die maßgeblichen Umweltzustände) Glaubwürdigkeitsvorstellungen, auch wenn diesen Ereignissen keine objektiven Wahrscheinlichkeiten entsprechen. Wird z. B. in einer Unternehmung erwogen, ein neues Produkt auf dem Markt einzuführen, so stellt sich für den Leiter der Absatzabteilung das Problem, die Wahrscheinlichkeit dafür zu schätzen, dass die Produkteinführung „erfolgreich“ verlaufen wird. Dies kann natürlich nicht in der Weise geschehen, dass ein Zufallsexperiment „Einführung des Produktes“ 30-mal wiederholt wird. Grundsätzlich kann auch nicht davon ausgegangen werden, dass die bisherigen Erfahrungen mit anderen Produkten eine hinreichende Grundlage dafür sind, die Erfolgswahrscheinlichkeit des erwogenen Produktes in Form einer relativen Häufigkeit zu fixieren. Schließlich kann die Erfolgswahrscheinlichkeit auch nicht in der Weise geschätzt werden, dass auf a priori gleich wahrscheinliche Elementarereignisse zurückgegriffen wird. Obwohl kein objektives Maß für die Erfolgswahrscheinlichkeit existiert, hat der Leiter der Absatzabteilung aufgrund seiner allgemeinen Erfahrung und seiner Kenntnis der Besonderheiten des neuen Produktes trotzdem gewisse Glaubwürdigkeitsvorstellungen über die möglichen Erfolge dieses Produktes. Auch solche subjektiven Vorstellungen und Überzeugungen können in stochastischen Entscheidungsmodellen erfasst werden, indem diese Glaubwürdigkeitsvorstellungen in *subjektiven* Wahrscheinlichkeiten quantifiziert werden.

Auf persönlicher Erfahrung und Intuition beruhende Glaubwürdigkeitsvorstellungen über die entscheidungsrelevanten Ereignisse sind in den meisten realen Entscheidungssituationen zu vermuten. Das Konzept der subjektiven Wahrscheinlichkeit dient dazu, diese Glaubwürdigkeitsvorstellungen in wohl definierten numerischen Werten (eben den subjektiven Wahrscheinlichkeiten) auszudrücken, um auf diesem Wege die Erfahrung und die Intuition eines Entscheiders explizit im Entscheidungskalkül zu erfassen und zugleich die Anwendung stochastischer Entscheidungsmodelle zu ermöglichen.

Subjektive Wahrscheinlichkeiten lassen sich grundsätzlich auf zwei Arten feststellen. Zum einen kann der Entscheider direkt nach seinen Wahrscheinlichkeitsvorstellungen gefragt werden. Zum anderen können (unter bestimmten Voraussetzungen) seine subjektiven Wahrscheinlichkeiten indirekt aus seinen Entscheidungen in bestimmten realen oder hypothetischen Entscheidungssituationen abgeleitet werden. Das erste Vorgehen

wird als direkte Methode bezeichnet, das zweite als indirekte Methode. Die direkte Methode beruht auf Introspektion (Selbstbeobachtung), die indirekte Methode ist verhaltensorientiert. Beide Methoden werden in Kap. 10, Abschn. 10.3, diskutiert.

Subjektive Wahrscheinlichkeiten sind definitionsgemäß nicht intersubjektiv überprüfbar. Es handelt sich um Größen, mit denen die personengebundenen Erwartungen hinsichtlich des Eintretens unsicherer Ereignisse in präziserer Weise ausgedrückt werden als bei rein verbaler Beschreibung. Ebenso wie subjektive Überzeugungen können auch subjektive Wahrscheinlichkeiten von Person zu Person verschieden sein. Die subjektiven Wahrscheinlichkeiten können sich zum einen unterscheiden, weil die betreffenden Personen unterschiedlich „gut“ informiert sind, zum anderen, weil sie aus gleichen Informationen unterschiedliche probabilistische Rückschlüsse auf die ungewissen Ereignisse ziehen.

4.3.3.2 Bedeutung

Da subjektive Wahrscheinlichkeiten nicht objektiv überprüfbar sind, könnte man die Ansicht vertreten, sie seien als Basis für Entscheidungsmodelle ungeeignet. Doch welche Alternativen gibt es gegenüber dem Konzept der subjektiven Wahrscheinlichkeiten? Wenn wohlbegründete objektive Wahrscheinlichkeiten vorliegen, sind diese subjektiven Wahrscheinlichkeiten eindeutig vorzuziehen. Es existieren aber in den meisten praktisch relevanten Entscheidungssituationen gar keine objektiven Wahrscheinlichkeiten. Der Verzicht auf subjektive Wahrscheinlichkeiten bedeutet dann den Verzicht auf Berücksichtigung von Wahrscheinlichkeiten im Entscheidungskalkül schlechthin. Diese Alternative ist jedoch noch problematischer als die Zugrundelegung subjektiver Wahrscheinlichkeiten, da dann der Entscheider keine Möglichkeit hat, seine allgemeinen Erfahrungen und speziellen Informationen über die jeweiligen Handlungsalternativen bei seiner Entscheidung zu berücksichtigen.

Man könnte nun das Argument vorbringen, subjektive Wahrscheinlichkeiten seien deshalb als Basis für Entscheidungsmodelle ungeeignet, weil sie möglicherweise „falsch“ bemessen werden und mithin zu einer „Fehlentscheidung“ führen. So mag das Wahrscheinlichkeitsurteil eines Entscheiders stark von dem Urteil abweichen, das sich eine wesentlich besser informierte Person bilden würde. Der Entscheider trifft dann möglicherweise tatsächlich eine Entscheidung, die sich im Lichte des besseren Informationsstandes als sehr nachteilig erweist. Vor einer derartigen Fehlentscheidung ist der Entscheider jedoch bei keiner Art der Entscheidungsfindung geschützt. Er verfügt eben nicht über den besseren Informationsstand der anderen Person. Die Tatsache, dass er keinen besseren Informationsstand hat, ist aber kein Grund, nicht wenigstens die ihm vorliegenden Informationen und seine Erfahrungen durch subjektive Wahrscheinlichkeiten im Entscheidungskalkül zu berücksichtigen. Wann hat ein Entscheider schon einen Informationsstand, der nicht „verbessert“ werden könnte? Informationen und Erfahrungen sollten nicht generell vernachlässigt werden, auch dann nicht, wenn sie nur schwer zu quantifizieren sind.

Das Konzept der subjektiven Wahrscheinlichkeiten schließt im Übrigen eine Verbesserung des Wahrscheinlichkeitsurteils nicht aus. Der Entscheider hat in der Regel

die Möglichkeit, zusätzliche Informationen einzuholen und im Lichte der zusätzlichen Erkenntnisse sein (subjektives) Wahrscheinlichkeitsurteil zu revidieren. Die Beschaffung von Informationen ist aber im Allgemeinen nicht kostenlos. Die Entscheidung darüber, ob bestimmte Informationen eingeholt werden sollen, erfordert daher ein Abwägen von Kosten und „Nutzen“ bzw. „Wert“ der Informationen (mit diesem Problemkreis befasst sich ausführlich das Kap. 10). Es kann durchaus vernünftig sein, gegebene Informationsmöglichkeiten wegen zu hoher Kosten nicht wahrzunehmen und auf der Basis eines relativ „schlechten“ Wahrscheinlichkeitsurteils eine der Handlungsalternativen auszuwählen. Demgemäß kann es auch dann vernünftig sein, auf der Grundlage subjektiver Wahrscheinlichkeiten zu entscheiden, wenn die Möglichkeit besteht, sich ein *objektives* (z. B. auf beobachteten Häufigkeiten basierendes) Wahrscheinlichkeitsurteil zu bilden. Die zur Bestimmung der objektiven Wahrscheinlichkeiten notwendigen Informationsaktivitäten können eben Kosten verursachen, die höher sind als der durch die Information zu erwartende Nutzenzuwachs.

4.4 Risikoeinstellungen

4.4.1 Inhalt und Bedeutung

Entscheidungen bei Risiko zu treffen, setzt nicht nur die Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Umweltzustände (bzw. für die möglichen Ergebnisse) voraus, sondern auch die Klärung, welche „Einstellung zum Risiko“ der Entscheider hat. Man unterscheidet grundsätzlich drei mögliche Einstellungen zum Risiko: Risikoneutralität, d. h. Indifferenz gegenüber Risiko, Risikoaversion (Risikoabneigung oder Risikoscheu) und Risikofreude (Risikovorliebe).

Eine Aversion gegenüber dem Risiko kann vereinfachend so definiert werden, dass der betrachtete Entscheider bei der Wahl zwischen einer riskanten und einer sicheren, jedoch „im Übrigen äquivalenten“ Alternative die sichere Alternative vorzieht. Bei Risikofreude zieht er die riskante Alternative vor, bei Risikoneutralität ist er zwischen beiden Alternativen indifferent. Diese Definition setzt freilich sowohl eine Definition von „Risiko“ als auch eine Klärung voraus, was „im Übrigen äquivalent“ bedeutet. Eine Entscheidungssituation bei Risiko wurde als eine Situation definiert, in der für einige oder alle Alternativen das Ergebnis unsicher ist, der Entscheider jedoch in der Lage ist, Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten zukünftiger Umweltzustände und somit auch für die Ergebnisse anzugeben. Er ist dann auch in der Lage, die Erwartungswerte aller Zielgrößen zu bestimmen, bei (wie angenommen) nur einer Zielgröße also den Erwartungswert des entsprechenden unsicheren Ergebnisses:

$$E(\tilde{x}) = \sum_{s=1}^{N_S} w(S_s) \cdot x_s. \quad (4.8)$$

Risiko impliziert dann also für eine unsichere (riskante) Alternative, dass ihr Ergebnis mit positiver Wahrscheinlichkeit vom Erwartungswert abweicht und der Entscheider sich ein Wahrscheinlichkeitsurteil über die möglichen Abweichungen bilden kann. Eine sichere und eine riskante Alternative können dann als „im Übrigen äquivalent“ interpretiert werden, wenn das Ergebnis der sicheren Alternative so hoch ist wie der Erwartungswert des Ergebnisses der riskanten Alternative.

Risikoeinstellungen kann man auf dieser begrifflichen Basis wie folgt definieren:

- Bei *Risikoneutralität* ist der Entscheider indifferent zwischen einem riskanten Ergebnis $\tilde{x}$ und einem sicheren Ergebnis in Höhe des Erwartungswertes von $\tilde{x}$. Ist das sichere Ergebnis höher als $E(\tilde{x})$, so zieht er dieses strikt vor, ist es niedriger, so zieht er das unsichere Ergebnis strikt vor.
- Bei *Risikoaversion* zieht der Entscheider einem riskanten Ergebnis $\tilde{x}$ ein sicheres Ergebnis in Höhe des Erwartungswertes $E(\tilde{x})$ strikt vor.
- Bei *Risikofreude* zieht der Entscheider ein riskantes Ergebnis $\tilde{x}$ einem sicheren Ergebnis in Höhe des Erwartungswertes $E(\tilde{x})$ strikt vor.

Die Einstellung eines Entscheiders zum Risiko hat grundlegende Bedeutung für sein Entscheidungsverhalten. So wird ein risikofreudiger Entscheider, der eine unsichere Ergebnisverteilung $\tilde{x}$ nicht gegen ein sicheres Ergebnis in Höhe des Erwartungswertes $E(\tilde{x})$ eintauschen würde, nur unter der notwendigen Bedingung zum Tausch bereit sein, dass das sichere Ergebnis höher ist als $E(\tilde{x})$. Der Entscheider verlangt also einen Zuschlag gegenüber $E(\tilde{x})$, um das Risiko gegen das sichere Ergebnis einzutauschen: Er fordert gewissermaßen eine „Sicherheitsprämie“ für den Verzicht auf Risiko.

Umgekehrt wird ein risikoaverser Entscheider einen Zuschlag auf $E(\tilde{x})$ verlangen, wenn er ein sicheres Ergebnis aufgeben und dafür ein unsicheres Ergebnis erhalten soll: Er fordert eine „Risikoprämie“ für die Übernahme von Risiko. Dieses Entscheidungsverhalten eignet sich zur Erklärung zahlreicher wirtschaftlicher Zusammenhänge bei Risiko: Versicherungsnehmer sind in Grenzen bereit, Versicherungsbeiträge zu leisten, die über dem Erwartungswert des Schadens liegen, den sie ohne Versicherung tragen müssten (anderenfalls könnten Versicherungsunternehmen nicht erwarten, Gewinne zu erzielen). Kapitalmarktanleger fordern von riskanten Anlagemöglichkeiten höhere Erwartungswerte der Renditen als von sicheren Geldanlagen. Arbeitnehmer sind bereit, Gehaltseinbußen für Anstellungen in Kauf zu nehmen, die ihnen sichere (bzw. weniger riskante) Einkommen versprechen.

4.4.2 Abbildung von Risikoeinstellungen in Präferenzfunktionen

Ist ein Entscheidungsproblem durch die Wahl zwischen Alternativen gekennzeichnet, die unterschiedliche „Risiken“ aufweisen, so muss die Präferenzfunktion des Entscheiders explizit oder implizit die Einstellung des Entscheiders zum Risiko abbilden.

Bei einer expliziten Abbildung der Risikoeinstellung ist es notwendig, das Risiko zu quantifizieren, um den Einfluss eines „riskanteren“ bzw. „weniger riskanten“ Ergebnisses auf den Präferenzwert abbilden zu können. Eine sehr einfache Form der expliziten Abbildung der Risikoeinstellung in der Präferenzfunktion erfolgt im (μ, σ) -Prinzip, welches in Abschn. 4.6.2 behandelt wird. Bei diesem Entscheidungsprinzip wird die Standardabweichung (bzw. die Varianz) des Ergebnisses als Maß für das Risiko verwendet und der Präferenzwert einer Alternative über den Erwartungswert (μ) und die Standardabweichung (σ) ihres unsicheren Ergebnisses berechnet.

Die Risikoeinstellung eines Entscheiders kann auch implizit zum Ausdruck kommen. Ein Beispiel soll dies verdeutlichen: Ein Entscheider kann an einem Glücksspiel teilnehmen, bei dem er mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit 0,5 (z. B. durch den Wurf einer Münze) entweder 100 EUR gewinnen oder 100 EUR verlieren wird. Der Erwartungswert des Ergebnisses beträgt 0 und der Entscheider ist indifferent zwischen Teilnahme und Nicht-Teilnahme am Glücksspiel, wenn er risikoneutral ist. Bewertet der Entscheider dagegen einen Gewinn von 100 EUR betraglich niedriger als einen Verlust von 100 EUR, d. h. geht er davon aus, dass sein „Nutzen“ durch den Gewinn von 100 EUR weniger stark steigt als er durch den Verlust von 100 EUR sinkt, so scheut er die Teilnahme am Glücksspiel, mithin das Risiko. Diese implizite Abbildung von Risikopräferenzen wird in Kap. 5 bei der Darstellung des Bernoulli-Prinzips wieder aufgegriffen.

4.5 Dominanzkriterien zur Vorauswahl von Alternativen

4.5.1 Inhalt und Bedeutung

Ein *Dominanzkriterium* prüft, ob eine Alternative in dem Sinne von mindestens einer anderen Alternative dominiert wird, dass jeder Entscheider, der einfache und einfach zu akzeptierende Grundanforderungen an rationale Entscheidungen akzeptiert, diese Alternative niemals wählen würde.

Dominanzkriterien haben sowohl theoretische als auch praktische Bedeutung. In der Entscheidungstheorie dienen sie insbesondere der Beurteilung von Entscheidungskriterien. Weder aus normativer noch aus deskriptiver Sicht sollte ein Entscheidungskriterium gegen Dominanzkriterien verstoßen. Ein normatives Entscheidungskriterium, das gegen plausible Dominanzkriterien verstößt, dürfte Anwender kaum überzeugen. Wenn ein Entscheidungskriterium, das der Erklärung bzw. Prognose realen Verhaltens dient, gegen Dominanzkriterien verstößt, impliziert es, dass Entscheider in der Realität regelmäßig dagegen verstoßen, was den Erklärungsgehalt (den deskriptiven Wert) der betreffenden Entscheidungstheorie infrage stellen kann.

Ein Entscheidungskriterium, welches gegen Dominanzkriterien verstößt, ist das (μ, σ) -Prinzip (vgl. Abschn. 4.6.2). Die wichtigste deskriptive Entscheidungstheorie, die

Prospect-Theorie, verstößt in ihrer ursprünglichen Form ebenfalls gegen Dominanzkriterien (vgl. Kap. 6).

Praktische Entscheidungsprobleme beinhalten vielfach eine nicht überschaubare Anzahl von Alternativen. Für solche Probleme ist es sehr hilfreich, eine Vorauswahl unter den Alternativen über Dominanzkriterien vorzunehmen. Dies kann beispielsweise bei Entscheidungsproblemen der Mischung von Wertpapierportefeuilles oder in der Risikosteuerung von Banken oder Industrieunternehmen geschehen.²

Im Folgenden werden drei Dominanzkriterien dargestellt: Absolute Dominanz, Zustandsdominanz und stochastische Dominanz erster Ordnung. Dabei gehen wir wieder davon aus, dass nur eine Zielgröße relevant ist, bei der ein höherer Wert einem niedrigeren vorgezogen wird.

4.5.2 Absolute Dominanz und Zustandsdominanz

4.5.2.1 Definition und Bedeutung

Bei sicheren Erwartungen über die Ergebnisse dominiert eine Alternative A_a eine andere Alternative $A_{a'}$ im Sinne *absoluter Dominanz*, wenn gilt: $x_a > x_{a'}$. Ist das Ergebnis mindestens einer der beiden Alternativen unsicher, so lautet die Bedingung absoluter Dominanz:

$$x_a^{\min} \geq x_{a'}^{\max} \quad (4.9)$$

Interpretation: Wenn das Ergebnis mindestens einer der beiden Alternativen unsicher ist, impliziert die Bedingung (4.9): Kein Ergebnis x_a der dominierenden (der dominanten) Alternative A_a ist schlechter als das beste Ergebnis der dominierten Alternative, jedoch ist mindestens ein Ergebnis der Alternative A_a besser.

Absolute Dominanz ist ein selbstverständliches und triviales Kriterium der Vorauswahl. Allerdings wird eine solche Dominanz selten existieren. Sind jedoch explizit Umweltzustände definiert, so lässt sich das Dominanzkriterium abschwächen, indem die Dominanz zustandsbezogen formuliert wird. Es gilt dann:

Eine Alternative A_a dominiert eine andere Alternative $A_{a'}$ im Sinne der *Zustandsdominanz*, wenn gilt:

²Vgl. Levy (1992) mit weiteren Nachweisen. Selbst wenn Dominanzkriterien nicht explizit angewendet werden, folgen Entscheidungen häufig dem Prinzip der Vorauswahl anhand von Dominanzen. So wird beispielsweise im Rahmen der Portefeuille-Theorie eine Auswahl aus (μ, σ) -effizienten (in diesem Sinne nicht dominierten) Portefeuilles vorgenommen, nachdem im ersten Schritt die Menge der (μ, σ) -effizienten Portefeuilles aus Wertpapieren ermittelt wurde (Kap. 8, Abschn. 8.4). In der praktischen Anwendung bedeutet dies, dass Finanzdienstleister (z. B. Fondsgesellschaften) die Mischung von Wertpapieren übernehmen können und dann Anleger nur noch darüber entscheiden, welchen Anteil ihres Vermögens sie in welche Mischung (in welchen Fonds) investieren.

$$x_{as} \geq x_{a's} \text{ f\"ur alle } s = 1, 2, \dots, N_S$$
$$\text{und } x_{as} > x_{a's} \text{ f\"ur mindestens ein } s.$$

(4.10)

In Worten: F\"ur jeden m\"oglichen Umweltzustand bietet die dominante Alternative A_a ein mindestens ebenso hohes Ergebnis wie die dominierte Alternative $A_{a'}$, aber in mindestens einem Zustand ein h\"oheres. Wenn f\"ur zwei Alternativen bei gegebenen Zust\"anden eine absolute Dominanzbeziehung festgestellt wird, so ist stets auch Zustandsdominanz gegeben. Die Umkehrung gilt allerdings nicht.

4.5.2.2 Beispiel

Zur Veranschaulichung wird das Zahlenbeispiel in Tab. 4.3 f\"ur eine Risikosituation betrachtet.

Alternative A_4 wird von Alternative A_1 *absolut* dominiert: Das h\"ochste Ergebnis von A_4 ist gerade so hoch wie das (sichere) Ergebnis von A_1 , alle anderen Ergebnisse von A_4 sind jedoch niedriger. Damit wird A_4 auch im Sinne der Zustandsdominanz dominiert.

Alternative A_5 wird von Alternative A_3 im Sinne der *Zustandsdominanz* (nicht aber absolut) dominiert: A_3 bietet in keinem Zustand ein geringeres, in den Zust\"anden S_1 , S_2 und S_4 hingegen ein h\"oheres Ergebnis als A_5 .

4.5.3 Stochastische Dominanz

4.5.3.1 Definition

Die stochastische Dominanz – sie wird auch als Wahrscheinlichkeitsdominanz bezeichnet – ist nicht \"uber den Vergleich einzelner Ergebnisse definiert, sondern \"uber den Vergleich von Wahrscheinlichkeitsverteilungen \"uber Ergebnisse. Stochastische Dominanz impliziert eine zustandsunabh\"angige Bewertung der Ergebnisse durch den Entscheider: F\"ur Entscheidungen sind nur die Werte und Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse relevant, nicht explizit die Zust\"ande, in denen sie erzielt werden; bei zustandsabh\"angiger Nutzenbewertung der Ergebnisse ist die stochastische Dominanz grunds\"atzlich kein sinnvolles Beurteilungskriterium. Auch die absolute Dominanz setzt

Tab. 4.3 Ergebnismatrix

	$w(S_1)=0,15$ S_1	$w(S_2)=0,2$ S_2	$w(S_3)=0,3$ S_3	$w(S_4)=0,2$ S_4	$w(S_5)=0,15$ S_5
A_1	5.000	5.000	5.000	5.000	5.000
A_2	−20.000	0	10.000	20.000	40.000
A_3	−50.000	20.000	10.000	100.000	−30.000
A_4	1.000	2.000	3.000	4.000	5.000
A_5	−60.000	−10.000	10.000	60.000	−30.000
A_6	−30.000	−50.000	10.000	20.000	100.000

bei Unsicherheit die zustandsunabhängige Bewertung der Ergebnisse voraus. Dagegen gilt die Zustandsdominanz, die die möglichen Zustände, in denen die Ergebnisse erzielt werden, explizit berücksichtigt, auch bei zustandsabhängiger Bewertung.

Die Betrachtung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen erfordert eine modifizierte Schreibweise der Alternativen und Ergebnisse. Im Folgenden bezeichnen x_i , $i = 1, \dots, N_X$, die möglichen Ergebnisse, wobei die Ergebnisse aufsteigend sortiert sind; das schlechteste Ergebnis erhält den Index 1 und das beste den Index N_X . $w(x_i)$ bezeichnet die Eintrittswahrscheinlichkeit des Ergebnisses x_i und $W(x_i)$ die Verteilungsfunktion. Für die Verteilungsfunktion gilt:

$$W(x_i) = \sum_{j=1}^i w(x_j). \quad (4.11)$$

$W(x_i)$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ergebnis x_i gerade erreicht oder unterschritten wird. Auf Basis der gewählten Schreibweise kann stochastische Dominanz definiert werden. Dabei unterscheidet man unterschiedliche Ordnungen der stochastischen Dominanz. Die *stochastische Dominanz erster Ordnung* ist ein allgemein anwendbares Kriterium für die Vorauswahl von Alternativen, welches kaum höhere Anforderungen an die Zielvorstellungen eines Entscheiders stellt als die absolute Dominanz und die Zustandsdominanz. Ist ein Entscheider risikoavers, d. h. zieht er einer unsicheren Ergebnisverteilung stets ein sicheres Ergebnis in Höhe des Erwartungswertes dieser Verteilung strikt vor, so kann ein weiteres Kriterium angewendet werden, die *stochastische Dominanz zweiter Ordnung*. Risikoscheues Verhalten kann allerdings nicht als Grundanforderung an das Entscheidungsverhalten formuliert werden, da dann ein Entscheider beispielsweise die Teilnahme an Glücksspielen, bei denen der Erwartungswert des Gewinns unter dem Einsatz liegt (wie etwa beim Lotto), immer strikt ablehnen müsste. Im Folgenden wird nur das Kriterium der stochastischen Dominanz erster Ordnung ausführlich dargestellt.

Eine Alternative A_a dominiert eine andere Alternative $A_{a'}$ im Sinne *stochastischer Dominanz erster Ordnung*, wenn gilt:

$$\begin{aligned} W_a(x_i) &\leq W_{a'}(x_i) \quad \text{für alle } x_i \\ \text{und } W_a(x_i) &< W_{a'}(x_i) \quad \text{für mindestens ein } x_i. \end{aligned} \quad (4.12)$$

In Worten: A_a dominiert $A_{a'}$, wenn für jedes Ergebnis x_i die Verteilungsfunktion für A_a nicht oberhalb, jedoch für mindestens ein x_i unterhalb der für $A_{a'}$ liegt.

Diese Bedingung lässt sich anschaulicher interpretieren, wenn man anstelle der Verteilungsfunktionswerte, d. h. der Wahrscheinlichkeiten für das Unterschreiten oder Erreichen alternativer Ergebnisse x_i , die entsprechenden Gegenwahrscheinlichkeiten, d. h. die Wahrscheinlichkeiten für das *Überschreiten* des Ergebnisses x_i , verwendet. Die Bedingung (4.12) ist dann wie folgt zu schreiben:

$$\begin{aligned} 1 - W_a(x_i) &\geq 1 - W_{a'}(x_i) \quad \text{für alle } x_i \\ \text{und } 1 - W_a(x_i) &> 1 - W_{a'}(x_i) \quad \text{für mindestens ein } x_i. \end{aligned} \quad (4.13)$$

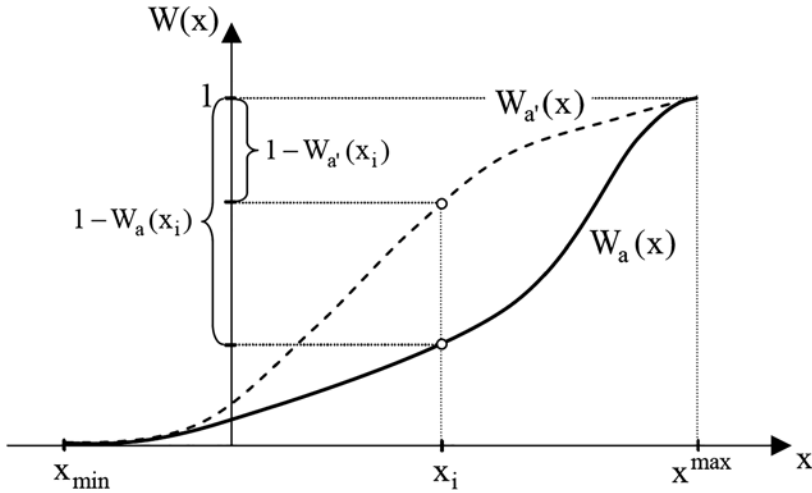


Abb. 4.1 Veranschaulichung der stochastischen Dominanz erster Ordnung

Gemäß (4.13) gilt für die Alternativen A_a und $A_{a'}$ folgende Bedingung: Bei der Alternative A_a wird jedes beliebige Ergebnis x_i mit einer Wahrscheinlichkeit übertroffen, die nicht niedriger ist als bei der Alternative $A_{a'}$, jedoch für mindestens ein Ergebnis höher ist. Höhere Ergebnisse werden also bei Wahl der Alternative A_a anstelle von $A_{a'}$ tendenziell wahrscheinlicher (und insbesondere nie weniger wahrscheinlich).

Abb. 4.1 veranschaulicht die Bedingungen (4.12) und (4.13) grafisch am Beispiel einer stetigen Wahrscheinlichkeitsverteilung im Wertebereich $[x_{\min}, x^{\max}]$. Die Verteilungsfunktionen für die beiden Alternativen treffen sich in $x_{\min}$ und in $x^{\max}$. Im gesamten weiteren Bereich liegt in Abb. 4.1 $W_a(x_i)$ unterhalb von $W_{a'}(x_i)$. Stochastische Dominanz erster Ordnung wäre allerdings auch gegeben, wenn sich die Verteilungsfunktionen in weiteren Punkten zwischen $x_{\min}$ und $x^{\max}$ berühren würden.

Das Kriterium der stochastischen Dominanz erster Ordnung impliziert eine einfache Grundanforderung an einen Entscheider: Er soll von zwei Gewinnchancen immer die günstigere Chance bevorzugen, d. h. diejenige Alternative, die alternative Gewinne $x < x^{\max}$ mit jeweils höherer Wahrscheinlichkeit überbietet. Diese Grundanforderung wird im nächsten Kapitel als Axiom – das Monotonieaxiom – eingeführt.

Stochastische Dominanz erster Ordnung hat eine allgemeine Implikation. Es gilt nämlich für jede streng monoton steigende Funktion $U(x)$:

$$A_a \underset{\text{SD1}}{>} A_{a'} \Rightarrow E_a[U(\tilde{x})] > E_{a'}[U(\tilde{x})]. \quad (4.14)$$

In (4.14) steht „ $\underset{\text{SD1}}{>}$ “ für „dominiert im Sinne der stochastischen Dominanz erster Ordnung“.³ Wenn also die Alternative A_a die Alternative $A_{a'}$ dominiert, entspricht ihr ein höherer Erwartungswert des Nutzens des Ergebnisses x . Das Umgekehrte gilt jedoch

³Zum Beweis von (4.14) vgl. z. B. Levy (1992).

nicht: Aus einem höheren Erwartungswert des Nutzens für die Alternative A_a folgt nicht notwendig, dass sie die Alternative $A_{a'}$ im Sinne der stochastischen Dominanz erster Ordnung dominiert.

Aus (4.14) folgt für den Spezialfall $U(x) = x$:

$$A_a \underset{SD1}{\succ} A_{a'} \Rightarrow E_a(\tilde{x}) > E_{a'}(\tilde{x}), \quad (4.15)$$

d. h. die dominierende Alternative hat einen höheren Erwartungswert des Ergebnisses x . Das Umgekehrte gilt wiederum nicht.

Wie im folgenden Abschnitt an einem Beispiel gezeigt wird, steht die stochastische Dominanz erster Ordnung in einer engen Beziehung zur Zustandsdominanz; tatsächlich lässt sie sich in die Zustandsdominanz überführen, wenn der Entscheider die Ergebnisse wie angenommen zustandsunabhängig bewertet.

4.5.3.2 Beispiel

Wir betrachten erneut das Zahlenbeispiel aus Abschn. 4.5.2.2. Nach Elimination der gemäß absoluter Dominanz und Zustandsdominanz dominierten Alternativen A_4 und A_5 verbleiben vier Alternativen zur Auswahl, die in der Ergebnismatrix in Tab. 4.4 dargestellt sind.

Betrachtet werden nun die Alternativen A_3 und A_6 . Abb. 4.2 verdeutlicht den Zusammenhang.

Tab. 4.4 Ergebnismatrix

	$w(S_1)=0,15$ S_1	$w(S_2)=0,2$ S_2	$w(S_3)=0,3$ S_3	$w(S_4)=0,2$ S_4	$w(S_5)=0,15$ S_5
A_1	5.000	5.000	5.000	5.000	5.000
A_2	-20.000	0	10.000	20.000	40.000
A_3	-50.000	20.000	10.000	100.000	-30.000
A_6	-30.000	-50.000	10.000	20.000	100.000

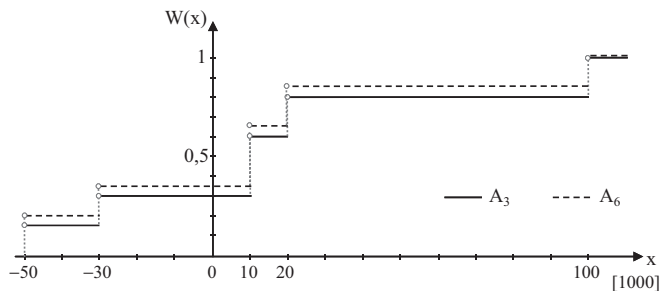


Abb. 4.2 Veranschaulichung der stochastischen Dominanz erster Ordnung am Zahlenbeispiel: Vergleich der Alternativen A_3 und A_6

Tab. 4.5 Ergebnismatrix

	0,15 S_1^*	0,15 S_2^*	0,3 S_3	0,15 S_4^*	0,15 S_5^*	0,05 S_6^*
A_3^*	−30.000	20.000	10.000	100.000	−50.000	100.000
A_6^*	−30.000	20.000	10.000	100.000	−50.000	−50.000

Die Erwartungswerte der Ergebnisse dieser Alternativen betragen 15.000 (A_3) und 7500 (A_6). Prüfung auf stochastische Dominanz erster Ordnung zeigt, dass Alternative A_6 von Alternative A_3 dominiert wird: Die Ergebnisse −30.000, 10.000 und 20.000 sind bei beiden Alternativen gleich wahrscheinlich. Das Ergebnis −50.000 hingegen ist bei Alternative A_3 weniger wahrscheinlich und das Ergebnis 100.000 ist bei A_3 wahrscheinlicher. Dies führt dazu, dass die Verteilungsfunktion für A_3 unterhalb der Verteilungsfunktion von A_6 verläuft; die Bedingung (4.12) ist für A_3 erfüllt.

Die Beziehung der stochastischen Dominanz erster Ordnung zwischen A_3 und A_6 lässt sich auch als Zustandsdominanz darstellen, wenn (wie angenommen), sich der Entscheider allein an den Ergebnissen und ihren Eintrittswahrscheinlichkeiten orientiert, die Nutzenwerte der Ergebnisse also unabhängig davon sind, in welchen Zuständen sie erzielt werden. Bei gegebenen Eintrittswahrscheinlichkeiten der Ergebnisse ist es dann unerheblich, in welchen Zuständen sie erzielt werden. Die Ergebnismatrix in Tab. 4.5, die aus der in Tab. 4.4 hervorgeht, verdeutlicht den Zusammenhang. A_3^* (bzw. A_6^*) entspricht der Alternative A_3 (bzw. A_6) in der Ausgangsmatrix der Tab. 4.4.

Bei den Alternativen A_3^* und A_3 bzw. A_6^* und A_6 treten jeweils die gleichen Ergebnisse mit den gleichen Wahrscheinlichkeiten ein. Z. B. ergibt sich bei A_6 das Ergebnis −50.000 im Zustand S_2 mit der Wahrscheinlichkeit 0,2 und bei A_6^* in den Zuständen S_5^* und S_6^* , sodass es wiederum mit der Wahrscheinlichkeit $(0,15 + 0,05 =) 0,2$ erzielt wird. Entsprechend weist die Alternative A_6^* die gleichen Ergebnisse und Eintrittswahrscheinlichkeiten wie die Alternative A_6 auf. A_3^* dominiert nun A_6^* gemäß Zustandsdominanz. Bei einer stochastischen Dominanzbeziehung erster Ordnung findet man stets mindestens eine Zuordnung der Ergebnisse auf Zustände, sodass auch Zustandsdominanz gegeben ist.

4.5.4 Grenzen der Vorauswahl durch Dominanzkriterien

Wie in Abschn. 4.5.1 erläutert, dienen Dominanzkriterien der Vorauswahl von Alternativen. Im Allgemeinen gelingt es durch Anwendung von Dominanzkriterien noch nicht, die Alternativenmenge auf nur eine Alternative einzugrenzen, welche dann unmittelbar gewählt werden soll. Auch im Zahlenbeispiel, das der Veranschaulichung der Dominanzkriterien diente, blieben selbst nach Anwendung aller drei Dominanzkriterien noch drei Alternativen zur Auswahl.

Im Folgenden werden zwei klassische Entscheidungskriterien vorgestellt und diskutiert, die eine Entscheidung auf der Basis einer Präferenzfunktion über Verteilungsparameter – den Erwartungswert des Ergebnisses und seine Varianz bzw. Standardabweichung – ermöglichen.

4.6 Klassische Entscheidungskriterien

4.6.1 μ -Regel

4.6.1.1 Darstellung

Bei dem einfachsten Entscheidungskriterium für Risikosituationen mit *einer* Zielgröße dient der Erwartungswert des Ergebnisses als Beurteilungsmaßstab. Optimal ist diejenige Alternative, die diesen Erwartungswert maximiert. Da die Präferenzfunktion festgelegt ist, handelt es sich bei diesem Entscheidungskriterium um eine Entscheidungsregel. Da zudem der Erwartungswert einer Zufallsvariablen abkürzend auch mit μ bezeichnet wird, wird die Entscheidungsregel μ -Regel genannt. Für den Präferenzwert einer Alternative A_a ($a = 1, 2, \dots, N_A$) gilt nach der μ -Regel:

$$\Phi(A_a) = \mu_a = \sum_{s=1}^{N_S} w(S_s) \cdot x_{as}. \quad (4.16)$$

Dabei bezeichnet x_{as} das Ergebnis bei Wahl der Alternative A_a ($a = 1, 2, \dots, N_A$) und Eintreten des Zustandes S_s ($s = 1, 2, \dots, N_S$). Entsprechend lautet die μ -Regel:

$$\text{Max}_a \mu_a. \quad (4.17)$$

Die μ -Regel ist wohl die bekannteste Entscheidungsregel für Risikosituationen. Da sie relativ einfach in stochastische Entscheidungsmodelle einbezogen werden kann, findet sie sehr häufig bei der Konstruktion und Analyse solcher Modelle Verwendung. Dies gilt vor allem auch für die Entscheidungsmodelle der Betriebswirtschaftslehre.

4.6.1.2 Beurteilung

Die μ -Regel ist jedoch als generelle Entscheidungsregel äußerst problematisch. Zur Verdeutlichung sei noch einmal das Zahlenbeispiel aus Abschn. 4.5.2.2 betrachtet. Dort wurde gezeigt, dass nach Anwendung der Kriterien der absoluten und der Zustandsdominanz sowie der stochastischen Dominanz erster Ordnung drei Alternativen zur Auswahl verbleiben. Die Ergebnismatrix in Tab. 4.6 stellt diese Alternativen noch einmal dar, wobei in der Spalte der jeweilige Erwartungswert des Ergebnisses hinzugefügt wurde.

Nach der μ -Regel ist die Alternative A_3 optimal, da sie den höchsten Erwartungswert aufweist. Für den Entscheider kann es jedoch überzeugende Gründe geben, diese Alternative abzulehnen und stattdessen A_1 oder A_2 zu wählen. Er könnte die Entscheidung für

Tab. 4.6 Ergebnismatrix mit Erwartungswerten

	w(S ₁)=0,15 S ₁	w(S ₂)=0,2 S ₂	w(S ₃)=0,3 S ₃	w(S ₄)=0,2 S ₄	w(S ₅)=0,15 S ₅	μ _a
A ₁	5.000	5.000	5.000	5.000	5.000	5.000
A ₂	−20.000	0	10.000	20.000	40.000	10.000
A ₃	−50.000	20.000	10.000	100.000	−30.000	15.000

A₁ z. B. mit dem Argument rechtfertigen, die bei Alternative A₃ möglichen Verluste von 50.000 und 30.000 hätten schwerwiegende Nachteile zur Folge, die möglichen Gewinne bis zu 100.000 böten dagegen im Vergleich zum sicheren Gewinn von 5000 der Alternative A₁ nur relativ geringe Vorteile.

Die generelle Problematik der μ -Regel besteht darin, dass sie vernachlässigt, welche subjektive „Bedeutung“ die einzelnen Ergebnisse für den Entscheider haben. Nach dieser starren Entscheidungsregel muss jeder Entscheider in der gleichen Entscheidungssituation (und bei gleichem Wahrscheinlichkeitsurteil über die Zustände) dieselbe Entscheidung treffen. Es bleibt kein Raum für die Erfassung von Unterschieden in den subjektiven Wertschätzungen und Risikoeinstellungen der Individuen.

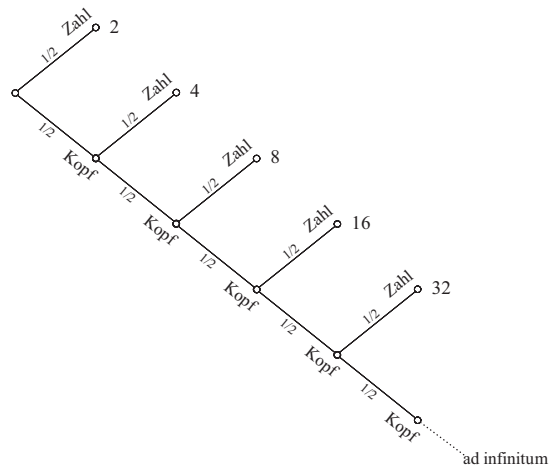
Dass die Maximierung des Gewinnerwartungswertes keine generell gültige Entscheidungsregel darstellt, wurde schon 1738 von Daniel Bernoulli überzeugend nachgewiesen. Sein berühmtes Demonstrationsbeispiel ist das *Petersburger Spiel*. Bei diesem Gedankenexperiment wird einem Spieler die Möglichkeit geboten, eine Münze mit den Seiten „Zahl“ und „Kopf“ so lange zu werfen, bis erstmals „Zahl“ erscheint. Ist dies schon beim ersten Wurf der Fall, erhält er zwei Taler. Erscheint beim ersten Wurf „Kopf“ und „Zahl“ erst beim zweiten, bekommt er 2² Taler. Wenn „Zahl“ erstmals beim n-ten Wurf erscheint, beträgt die Auszahlung an den Spieler 2ⁿ Taler. Da bei jedem Wurf „Zahl“ und „Kopf“ jeweils die Eintrittswahrscheinlichkeit 1/2 haben, kann die Erwartungsstruktur über die Auszahlung an den Spieler mithilfe des *Zustandsbaumes* in Abb. 4.3 dargestellt werden.

Die Wahrscheinlichkeit, dass schon beim ersten Wurf „Zahl“ erscheint, ist 1/2. Die Wahrscheinlichkeit, dass beim zweiten Wurf erstmals „Zahl“ erscheint, ist $1/2 \cdot 1/2 = 1/4$ usw. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass „Zahl“ erstmals beim n-ten Wurf erscheint, ist $(1/2)^n$. Da die einzelnen Spielergebnisse einander ausschließen, beträgt der Erwartungswert der Auszahlung an den Spieler:

$$\mu = 2 \cdot (1/2) + 4 \cdot (1/4) + 8 \cdot (1/8) + \dots = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots = +\infty.$$

Jeder nach der μ -Regel handelnde Entscheider wäre bereit, sein gesamtes Vermögen einzusetzen, um an diesem Spiel teilnehmen zu können. Denn der Erwartungswert des Gewinns (Gewinn = Zahlung an den Spieler minus Einsatz des Spielers) ist bei jedem noch so großen endlichen Einsatz unendlich groß. Tatsächlich dürfte jedoch kaum

Abb. 4.3 Zustandsbaum für das Petersburger Spiel



jemand bereit sein, sein gesamtes Vermögen oder auch nur einen mäßig großen Teil davon bei diesem Spiel einzusetzen.⁴

Um die Problematik der μ -Regel als allgemeingültige Verhaltensnorm aufzuzeigen, braucht freilich kein so extremes Beispiel wie das Petersburger Spiel herangezogen zu werden. Bereits die tägliche Erfahrung zeigt, dass nicht generell nach diesem Kriterium gehandelt wird. So nehmen z. B. viele Menschen an „unfairen“ Glücksspielen teil, d. h. an Spielen, bei denen der Erwartungswert des Gewinns kleiner ist als der Einsatz. Umgekehrt schließen viele Menschen Versicherungen ab, obwohl der Erwartungswert des Schadens kleiner ist als der Versicherungsbeitrag. Solche Beobachtungen zeigen jedoch zunächst nur, dass die μ -Regel für die Beschreibung und Erklärung der *tatsächlichen* Entscheidungen von Individuen nur eine geringe Bedeutung hat; sie sind für sich betrachtet noch kein Indiz dafür, dass die μ -Regel keine generell sinnvolle Verhaltensmaxime darstellt. Man könnte diese Beobachtungen ja auch als Beleg dafür ansehen, dass in der Realität sehr häufig *unvernünftige* Entscheidungen getroffen werden.

Eine solche Argumentation kann jedoch kaum überzeugen. Wer auf ein Glas Bier verzichtet und dafür ein Los kauft, bei dem er (wenn auch mit geringer Wahrscheinlichkeit) 1,5 Mio. EUR gewinnen kann, handelt nicht notwendig unvernünftig, auch wenn der Erwartungswert des Gewinns kleiner ist als der Lospreis. Das gilt auch für

⁴Zur Lösung des Petersburger Paradoxons ging Daniel Bernoulli davon aus, der Spieler orientiere sich am *Erwartungswert des Nutzens des Gewinns* und nicht am Erwartungswert des Gewinns. Dabei gab er der Nutzenfunktion die Form $U(x) = \ln(x)$, wobei x den Gewinn und $U(x)$ den entsprechenden Nutzen bezeichnet. Ein Entscheider mit dieser Nutzenfunktion wäre bereit, nur einen relativ geringen Betrag für die Teilnahme am Spiel einzusetzen. Vgl. Kap. 5, Abschn. 5.2.2.2.

denjenigen, der für einen Jahresbeitrag von 300 EUR sein Haus gegen Feuerschäden versichert, obwohl dieser Beitrag höher ist als der Erwartungswert des Schadens. Rationale Entscheidungskriterien sollten einem Entscheider nicht definitiv vorschreiben, wie er mit Gewinnchancen und Verlustrisiken, allgemein mit riskanten Ergebnisverteilungen, umzugehen hat. Genau dies macht die μ -Regel, indem sie für jede Alternative die Ergebnisverteilung ungeachtet der Risikopräferenzen eines Entscheiders zu nur einem Parameter – dem Erwartungswert des Ergebnisses – verdichtet.

4.6.2 (μ, σ) -Prinzip

4.6.2.1 Darstellung

Eine einfache Möglichkeit, neben dem Erwartungswert des Ergebnisses $\tilde{x}$ auch das Risiko zu erfassen, besteht in der Einbeziehung der Standardabweichung als Maß dafür, wie stark die möglichen Zielgrößenwerte um den Erwartungswert der Zielgröße streuen. Für die Standardabweichung σ gilt

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(\tilde{x})} = \sqrt{\sum_{s=1}^{N_S} w(S_s) \cdot (x_s - \mu)^2}. \quad (4.18)$$

Die Präferenzfunktion hat dann die Form

$$\Phi(\tilde{x}) = \Phi(\mu, \sigma). \quad (4.19)$$

Die Beurteilung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Zielgröße nach den Parametern μ und σ wird als (μ, σ) -Prinzip bezeichnet. Das (μ, σ) -Prinzip ist ein Entscheidungsprinzip, aber keine Entscheidungsregel, denn es macht keine Aussage über die Gestalt der Präferenzfunktion Φ . Es liegt erst dann eine Entscheidungsregel vor, wenn die Funktion Φ spezifiziert ist. Je nach Festlegung dieser Funktion entstehen aus dem (μ, σ) -Prinzip unterschiedliche (μ, σ) -Regeln.

Ein nach dem (μ, σ) -Prinzip handelnder Entscheider wird als risikoscheu (bzw. als risikofreudig) bezeichnet, sofern er von zwei beliebigen Alternativen mit demselben Erwartungswert der Zielgröße jene mit der kleineren (bzw. der größeren) Standardabweichung der Zielgröße vorzieht. Bei Risikoaversion wird also, wie in der Definition in Abschn. 4.4.1 gefordert, ein sicherer Zielgrößenwert in Höhe von μ einer Wahrscheinlichkeitsverteilung mit dem Erwartungswert μ vorgezogen; bei Risikofreude gilt die umgekehrte Präferenzrelation.

Zur Interpretation: In Risikosituationen besteht zum einen die Chance, dass die Zielgröße (z. B. der Gewinn oder das Einkommen) einen Wert annimmt, der höher ist als ihr Erwartungswert μ . Zum anderen besteht aber auch die Gefahr, dass die Zielgröße diesen Erwartungswert unterschreitet. Ein *risikoscheuer* Entscheider misst der Gefahr einer negativen Abweichung vom Erwartungswert ein größeres „Gewicht“ bei als der Chance einer positiven Abweichung; bei gegebenem Erwartungswert strebt er eine möglichst

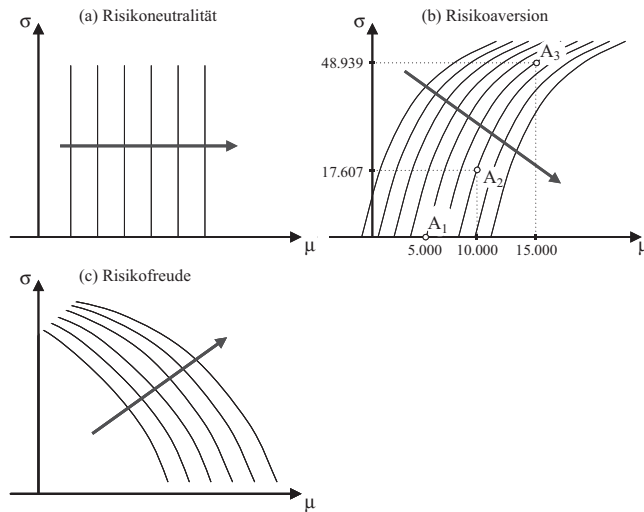


Abb. 4.4 Die Indifferenzkurvensysteme im (μ, σ) -Diagramm

kleine Streuung der Zielgröße an. Ein *risikofreudiger* Entscheider gewichtet die Chance einer positiven Abweichung höher als die Gefahr einer negativen.⁵

In einem (μ, σ) -Diagramm können Indifferenzkurven eingezeichnet werden, die angeben, welche (μ, σ) -Kombinationen nach der vom Entscheider gewählten (μ, σ) -Regel äquivalent sind. Abb. 4.4a–c zeigt drei Indifferenzkurvensysteme.

Bei Risikoaversion sind die Steigungen dieser Kurven *positiv*, bei Risikofreude *negativ*: Bei Risikoaversion (bzw. Risikofreude) liegen die (μ, σ) -Kombinationen bei festem μ und wachsendem σ auf Indifferenzkurven mit immer kleinerem (bzw. größerem) Präferenzwert. Während also eine Erhöhung der Streuung bei Risikoaversion als Nachteil empfunden wird, führt sie bei Risikofreude zu einem Vorteil. Im Spezialfall der Risikoneutralität verlaufen die Indifferenzkurven parallel zur σ -Achse. Abb. 4.4a zeigt solche Indifferenzkurven.

Die Richtung, in der die Indifferenzkurven steigende (μ, σ) -Präferenzwerte repräsentieren, ist jeweils durch einen Pfeil gekennzeichnet. Bei gegebenem Risiko, repräsentiert durch ein gegebenes σ , ist einer Indifferenzkurve ein umso höherer Präferenzwert

⁵Diese Interpretation ist noch recht vage. Eine fundierte Beurteilung und Interpretation des (μ, σ) -Prinzips kann in der Weise erfolgen, dass einfache Verhaltenspostulate herangezogen werden, die leichter beurteilt und eher akzeptiert werden können als das (μ, σ) -Prinzip selbst. Auf solchen Verhaltenspostulaten beruht das Bernoulli-Prinzip (Kap. 5), das als „übergeordnetes“ Entscheidungsprinzip angesehen werden kann. In Kap. 5, Abschn. 5.7.2, wird das (μ, σ) -Prinzip im Licht des Bernoulli-Prinzips diskutiert.

zugeordnet, je höher der Erwartungswert μ ist, je weiter rechts also die Indifferenzkurve verläuft. In Abb. 4.4b sind zudem die drei Alternativen des Beispiels der Ergebnismatrix in Tab. 4.6 eingezeichnet (die Erwartungswerte der Ergebnisse der Alternativen finden sich in Tab. 4.6, die Standardabweichungen wurden gemäß Formel (4.18) berechnet). Bei dem in der Abb. 4.4b gegebenen Verlauf der Indifferenzkurven ist Alternative A_2 optimal. (Bei Indifferenzkurven gemäß Abb. 4.4a wäre A_3 optimal, ebenso bei Indifferenzkurven gemäß Abb. 4.4c.)

4.6.2.2 Beurteilung

Das (μ, σ) -Prinzip bietet eine relativ einfache Möglichkeit, neben dem Erwartungswert μ auch das Risiko zu berücksichtigen. Aufgrund seiner Einfachheit wird das (μ, σ) -Prinzip häufig zur Analyse von Entscheidungsproblemen bei Risiko herangezogen. Vor allem in der *Theorie der optimalen Wertpapiermischung* (Portefeuille-Theorie) (Kap. 8) und der darauf aufbauenden Kapitalmarkttheorie (Kap. 13, 14 und 15) wird es sehr oft zugrunde gelegt.

Die Einfachheit des (μ, σ) -Prinzips hat jedoch ihren Preis: Seine Anwendung kann zu problematischen Entscheidungen führen. Insbesondere kann seine Anwendung den in Abschn. 4.5 diskutierten Dominanzkriterien widersprechen und es steht nur in Spezialfällen im Einklang mit dem Bernoulli-Prinzip (vgl. Kap. 5, Abschn. 5.7.2).

Die Unverträglichkeit des (μ, σ) -Prinzips mit dem Kriterium der Zustandsdominanz lässt sich an einem einfachen Gedankenexperiment in Form eines einmaligen Glücksspiels verdeutlichen. (Ein anderer Beweis der Unverträglichkeit findet sich bei Schneeweiß, H. 1968). Dabei wird explizit nur der Fall der Risikoaversion untersucht. Es wird davon ausgegangen, ein risikoscheuer Entscheider könne kostenlos beliebig viele Lose erhalten. Er gewinnt pro Los 100 EUR (bei Y Losen bekommt er also $100 \cdot Y$ €), sofern ein bestimmtes Zufallseignis eintritt, dessen Wahrscheinlichkeit p ($0 < p < 1$) beträgt.

Je mehr Lose der Entscheider erhält, desto größer ist sein möglicher Gewinn, während er in keinem Fall etwas verlieren kann. Mithin dominiert irgendeine Loszahl $Y > 0$ jede kleinere Loszahl im Sinne der Zustandsdominanz, wobei hier die Zustände „das Ereignis tritt ein“ (und die Lose gewinnen) und das „Ereignis tritt nicht ein“ (und die Lose gewinnen nicht) relevant sind. Nach dem Kriterium der Zustandsdominanz wird also der Entscheider so viele Lose wie möglich haben wollen, wie hoch auch immer die Gewinnwahrscheinlichkeit p ($0 < p < 1$) ist. Zu einer anderen Beurteilung führt jedoch das (μ, σ) -Prinzip.

Zur Verdeutlichung wird vereinfachend angenommen, der Entscheider verfüge, sofern er kein Los erwirbt, über eine *sichere* Vermögensposition V^* . Der Gewinn pro Los wird

mit $\tilde{x}$ bezeichnet. $\tilde{x}$ ist eine Zufallsgröße, die entweder den Wert 100 aufweist oder den Wert 0. Der Erwartungswert des Gewinns pro Los beträgt

$$E(\tilde{x}) = \mu = p \cdot 100 + (1 - p) \cdot 0 = p \cdot 100. \quad (4.20)$$

Die Standardabweichung des Gewinns pro Los beträgt:

$$\sigma(\tilde{x}) = \sqrt{p \cdot (100 - \mu)^2 + (1 - p) \cdot (0 - \mu)^2}, \quad (4.21)$$

bzw., nach Einsetzen von $\mu = p \cdot 100$,

$$\sigma(\tilde{x}) = 100 \cdot \sqrt{p \cdot (1 - p)}. \quad (4.22)$$

Erwirbt der Entscheider Y Lose, so erzielt er einen Gesamtgewinn von $Y \cdot \tilde{x}$ €. Dessen Erwartungswert und Standardabweichung betragen:

$$E(Y \cdot \tilde{x}) = Y \cdot E(\tilde{x}) = Y \cdot p \cdot 100, \quad (4.23)$$

$$\sigma(Y \cdot \tilde{x}) = Y \cdot \sigma(\tilde{x}) = Y \cdot 100 \cdot \sqrt{p \cdot (1 - p)} \quad (4.24)$$

Für den Quotienten aus (4.23 und 4.24) gilt:

$$\frac{\sigma(Y \cdot \tilde{x})}{E(Y \cdot \tilde{x})} = \frac{\sqrt{p \cdot (1 - p)}}{p} = \sqrt{\frac{1 - p}{p}} = \sqrt{\frac{1}{p} - 1}. \quad (4.25)$$

Der Quotient aus der Standardabweichung und dem Erwartungswert des Gesamtgewinns ist also unabhängig von der Anzahl der erworbenen Lose. Die den alternativen Y -Werten entsprechenden (μ, σ) -Kombinationen hinsichtlich der gesamten Vermögensposition des Entscheiders liegen demnach auf einem Fahrstrahl im (μ, σ) -Diagramm, der im Punkt V^* auf der Abszisse (dem sicheren Vermögen bei Verzicht auf Loserwerb) beginnt und gemäß (4.25) die Steigung $\sqrt{(1/p) - 1}$ aufweist. Dieser Fahrstrahl wird im Folgenden als (μ, σ) -Strahl bezeichnet. Geht p gegen 0 (bzw. gegen 1), so geht seine Steigung gegen ∞ (bzw. gegen 0).

Nun können, wie auch immer die Indifferenzkurven des risikoscheuen Entscheiders verlaufen, p -Werte fixiert werden, bei denen nach dem (μ, σ) -Prinzip ein Verstoß gegen das Kriterium der Zustandsdominanz als vorteilhaft erscheint. Mithilfe der Abb. 4.5 soll dies verdeutlicht werden:

Verlaufen die Indifferenzkurven wie in Abb. 4.5a linear, so erscheint nach dem (μ, σ) -Prinzip der Erwerb von Losen immer dann als nachteilig, wenn die Gewinnwahrscheinlichkeit p so niedrig fixiert wird, dass wie in dieser Abbildung der (μ, σ) -Strahl eine größere Steigung aufweist als die Indifferenzkurven. Dabei scheint der Nachteil desto größer zu sein, je mehr Lose erworben werden. Bewegt man sich nämlich ausgehend vom Punkt V^* entlang des (μ, σ) -Strahls, so gelangt man zu Indifferenzkurven, die immer weiter links von jener Indifferenzkurve liegen, die im Punkt V^* ihren Ausgang nimmt.

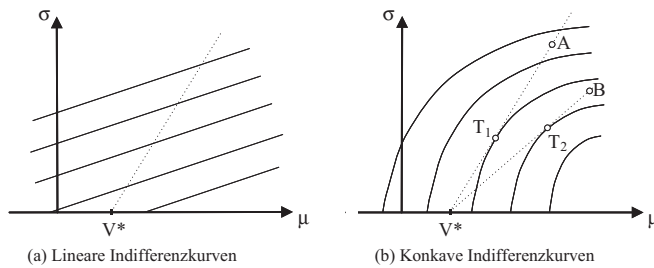


Abb. 4.5 Zum Konflikt zwischen (μ, σ) -Prinzip und Zustandsdominanz bei Risikoaversion

Bei den Indifferenzkurven in Abb. 4.5b ergibt sich z. B. immer dann ein Konflikt zwischen dem (μ, σ) -Prinzip und dem Kriterium der Zustandsdominanz, wenn die Gewinnwahrscheinlichkeit p derart fixiert wird, dass der (μ, σ) -Strahl eine der Indifferenzkurven tangiert. Das ist z. B. bei dem (μ, σ) -Strahl $\overline{V^*A}$ (bzw. $\overline{V^*B}$) der Fall. Als optimal erscheint nach dem (μ, σ) -Prinzip diejenige Anzahl von Losen, die dem Tangentialpunkt T_1 (bzw. T_2) entspricht.⁶ Der Erwerb weiterer Lose erscheint nachteilig, da dies zu (μ, σ) -Kombinationen führt, die auf „ungünstigeren“ Indifferenzkurven liegen als der Punkt T_1 (bzw. T_2).

Auch bei Risikofreude steht das (μ, σ) -Prinzip nicht im Einklang mit dem Kriterium der Zustandsdominanz. Dies kann analog zum Fall der Risikoaversion gezeigt werden, indem in Abänderung des betrachteten Spiels angenommen wird, es handle sich nicht um einen möglichen Gewinn, sondern um einen möglichen Verlust von 100 EUR. Für den Entscheider ist jetzt nach dem Kriterium der Zustandsdominanz jedes Los nachteilig. Je größer die Anzahl Y der von ihm übernommenen Lose ist, desto mehr muss er möglicherweise bezahlen, während er andererseits nichts gewinnen kann. Im Gegensatz zur Implikation des Kriteriums der Zustandsdominanz kann nach dem (μ, σ) -Prinzip die Übernahme von Losen vorteilhaft erscheinen. Wie immer auch die Indifferenzkurven verlaufen, können p -Werte fixiert werden, bei denen nach dem (μ, σ) -Prinzip das Halten (einer gewissen Zahl) von Losen als vorteilhaft erscheint.

Die Unverträglichkeit des (μ, σ) -Prinzips mit dem Kriterium der Zustandsdominanz führt unmittelbar auch zu Verstößen gegen das der stochastischen Dominanz erster Ordnung. Zwar verstößt im obigen Beispiel das (μ, σ) -Prinzip nicht gegen das Kriterium der absoluten Dominanz (danach dominiert zwar jede positive Loszahl den Verzicht auf

⁶Die betreffende Loszahl lässt sich errechnen, indem der Ordinatenwert des Punktes T_1 (bzw. T_2) durch die Standardabweichung des Gewinns pro Los (d. h. durch $100 \cdot \sqrt{p \cdot (1-p)}$) dividiert wird.

Loserwerb, jedoch besteht zwischen positiven Loszahlen keine absolute Dominanzbeziehung). Jedoch können ohne Weiteres Beispiele gebildet werden, in denen das (μ, σ) -Prinzip (auch) gegen das Kriterium der absoluten Dominanz verstößt. Das bedeutet, dass vor der Anwendung des (μ, σ) -Prinzips zunächst auf diese Dominanzkriterien geprüft werden sollte.

4.7 Zusammenfassung

- In der Realität lässt sich in aller Regel nicht mit Sicherheit vorhersagen, zu welchem Ergebnis eine Alternative führen wird. Unsicherheit i. e. S. liegt vor, wenn sich der Entscheider zwar ein Urteil darüber bilden kann, welche Umweltzustände bzw. Ergebnisse der Alternativen möglich sind, aber nicht ihre Eintrittswahrscheinlichkeiten quantifizieren kann.
- Alternative Entscheidungskriterien für Unsicherheit i. e. S. sind die Maximin-Regel, die Maximax-Regel, das Hurwicz-Prinzip, die Niehans-Savage-Regel und die Laplace-Regel.
- Das theoretische Konstrukt der Unsicherheit i. e. S. hat nur geringe praktische Bedeutung. Reale Entscheidungssituationen lassen sich besser als Risikosituationen interpretieren, d. h. als Situationen, in denen der Entscheider Wahrscheinlichkeitsvorstellungen bilden kann.
- In Risikosituationen unterscheidet man objektive und subjektive Wahrscheinlichkeiten. Objektive Wahrscheinlichkeiten sind in Glücksspielen gegeben (klassische Wahrscheinlichkeit) oder werden aus in der Vergangenheit beobachteten Häufigkeiten (statistische Wahrscheinlichkeit) abgeleitet. In den meisten wirtschaftlichen Entscheidungssituationen stehen jedoch nur subjektive Wahrscheinlichkeiten zur Verfügung.
- Entscheidungen bei Risiko hängen von der Risikoeinstellung ab. Ein Entscheider wird als risikoneutral bezeichnet, wenn er zwischen einer unsicheren Ergebnisverteilung mit dem Erwartungswert $E(\tilde{x})$ und einem sicheren Ergebnis in Höhe von $E(\tilde{x})$ indifferent ist. Der Entscheider ist risikoavers, wenn er das sichere Ergebnis vorzieht. Er ist risikofreudig, wenn er die unsichere Verteilung vorzieht.
- Zur Vorauswahl von Alternativen bei Unsicherheit unabhängig von der Risikoeinstellung dienen die Kriterien der absoluten Dominanz, der Zustandsdominanz und der Wahrscheinlichkeitsdominanz.
- Eine Alternative dominiert eine andere absolut, wenn keines ihrer Ergebnisse schlechter ist als das beste Ergebnis der anderen, jedoch mindestens ein Ergebnis besser ist. Zustandsdominanz besteht, wenn die dominierende Alternative in keinem Umweltzustand ein schlechteres Ergebnis bietet als die andere, jedoch in mindestens einem ein besseres. Gemäß Wahrscheinlichkeitsdominanz (stochastischer Dominanz erster Ordnung) dominiert eine Alternative eine andere, wenn sie stets die bessere Ergebnischance bietet.

- Die μ -Regel und das (μ, σ) -Prinzip sind zwei klassische Entscheidungskriterien bei Risiko. Die μ -Regel impliziert Risikoneutralität des Entscheiders, das (μ, σ) -Prinzip kann dagegen jede Risikoeinstellung abbilden. Beide Kriterien haben den Vorteil der Einfachheit, können aber zu problematischen Entscheidungen führen. Insbesondere kann es beim (μ, σ) -Prinzip zur Wahl dominierter Alternativen kommen.

Ergänzende und vertiefende Literatur

Bamberg et al. (2012, Kap. 5–6); Eisenführ et al. (2010, Kap. 7); Hax (1974); Hurwicz (1951); Laux (1976); Markowitz (1952); Niehans (1948); Rommelfanger und Eickemeier (2002); Savage (1951); Schneeweiß, H. (1967a, b, 1968, 1977); Wald (1971); Wittmann (1975).

4.8 Übungen

Aufgabe 4.1

Die Unternehmensleitung steht vor der Entscheidung, eine neue Feuerungsanlage anzuschaffen, für die die Grenzwertentwicklung bezüglich der Schwefeldioxidemission mit Unsicherheit behaftet ist. Der Grenzwert kann für den Zeitraum der Nutzung der Anlage konstant bleiben (S_1), leicht fallen (S_2) oder stark fallen (S_3). Ein Wahrscheinlichkeitsurteil liegt nicht vor. Die Unternehmensleitung zieht fünf Alternativen, die sich hinsichtlich der Einhaltung der Grenzwerte unterscheiden, in die engere Wahl. Je nach Entwicklung der Grenzwerte müssen für die Anlagen Kosten für die Nachrüstung berücksichtigt werden. Als einzige relevante Zielgröße wird der durchschnittliche Gewinn pro Jahr herangezogen. Die Schätzungen dieser Größe für die einzelnen Alternativen in den einzelnen Umweltzuständen können der folgenden Ergebnismatrix entnommen werden.

	S_1	S_2	S_3
A_1	30	24	22
A_2	40	40	10
A_3	36	20	20
A_4	28	26	26
A_5	27	27	27

- a) Ermitteln Sie jeweils die optimale Alternative bei Anwendung folgender Entscheidungskriterien und beurteilen Sie die Kriterien:
- Maximin-Regel;
 - Maximax-Regel;
 - Hurwicz-Regel mit einem Optimismusparameter von 0,5;

- Niehans-Savage-Regel;
 - Laplace-Regel.
- b) Es wird davon ausgegangen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass der Grenzwert konstant bleibt, doppelt so groß ist wie die Wahrscheinlichkeit, dass der Grenzwert fällt. Die Zustände S_2 und S_3 sind in den Augen der Unternehmensleitung gleichwahrscheinlich. Ermitteln Sie eine optimale Alternative mithilfe der μ -Regel.

Aufgabe 4.2

Diskutieren Sie, wie sich ein Entscheider bezüglich der folgenden Umweltentwicklungen ein Wahrscheinlichkeitsurteil bilden kann:

- a) Beim Lotto den Hauptgewinn gewinnen.
- b) Mit einem selbstgeschnitzten, sechs-seitigen Würfel die Augenzahl sechs würfeln.
- c) Nach dem Vorstellungsgespräch das Jobangebot erhalten.

Aufgabe 4.3

Betrachten Sie die folgenden Entscheidungssituationen:

Situation 1: Sie können Lose für eine Münzwurflotterie kaufen. Ein Los bringt einen Gewinn von 2 EUR, wenn Kopf fällt, und von 0,50 EUR, wenn Zahl fällt. Die Münze wird nur einmal geworfen, der Wurf zählt für alle Lose. Ein Los kostet 1 EUR, Ihr Budget beträgt 20 EUR.

Situation 2: Mithilfe einer Luftpumpe wird ein Luftballon aufgeblasen. Die Pumpe bläst bei jedem Stoß immer dieselbe Menge Luft in den Ballon. Mit jedem Stoß der Pumpe erhalten Sie 1 EUR, bis Sie aufhören zu pumpen. Platzt aber der Ballon, so erhalten Sie nichts.

- a) Stellen Sie Entscheidungssituation 1 im Grundmodell der Entscheidungstheorie dar. Erläutern Sie anhand der Ergebnismatrix, inwiefern sich die Situation dazu eignet, die Risikoeinstellung eines Entscheiders zu ermitteln.
- b) Erläutern Sie, inwiefern sich die Entscheidungssituation 2 ebenfalls dazu eignet, die Risikoeinstellung eines Entscheiders zu ermitteln.

Aufgabe 4.4

Ein Entscheider steht einem Entscheidungsproblem bei Risiko gegenüber, das in der folgenden Ergebnismatrix abgebildet ist:

	$w(S_1)=0,1$ S_1	$w(S_2)=0,2$ S_2	$w(S_3)=0,4$ S_3	$w(S_4)=0,2$ S_4	$w(S_5)=0,1$ S_5
A_1	10	10	10	10	10
A_2	0	5	10	20	60
A_3	45	25	10	5	5

	$w(S_1)=0,1$ S_1	$w(S_2)=0,2$ S_2	$w(S_3)=0,4$ S_3	$w(S_4)=0,2$ S_4	$w(S_5)=0,1$ S_5
A_4	5	23	6	0	5
A_5	20	10	5	0	60
A_6	0	8	0	0	6

Prüfen Sie die Alternativen nacheinander auf absolute Dominanz, Zustandsdominanz und stochastische Dominanz (erster Ordnung). Verwenden Sie für die Prüfung der stochastischen Dominanz sowohl eine tabellarische als auch eine grafische Darstellung.

Aufgabe 4.5

Es stehen zwei Alternativen A_1 und A_2 zur Auswahl, die in der folgenden Tabelle dargestellt werden.

	$w(S_1)=0,5$ S_1	$w(S_2)=0,5$ S_2
A_1	4	6
A_2	8	4

- Der Entscheider orientiert sich am (μ, σ) -Prinzip mit $\Phi(\mu, \sigma) = \mu - \sigma^2$. Welche Alternative wählt er? Welche Risikoeinstellung hat er?
- Zeichnen Sie Indifferenzkurven für die Präferenzwerte der beiden Alternativen in ein (μ, σ) -Diagramm ein. Zeichnen Sie zudem die Indifferenzkurve für den Präferenzwert einer beliebigen weiteren Alternative A_3 in das Diagramm ein, die der Entscheider beiden anderen Alternativen A_1 und A_2 vorziehen würde. Bestimmen Sie für diese Alternative grafisch den zugehörigen Präferenzwert.
- Betrachten Sie nun die Alternative A_4 mit dem sicheren Ergebnis 4. Welche der Alternativen A_1 , A_2 oder A_4 bevorzugt der Entscheider? Welches Problem tritt auf?

Aufgabe 4.6

Betrachten Sie erneut die Situation 1 aus Aufgabe 4.3: Ein Entscheider kann Lose für eine Münzwurflotterie kaufen. Ein Los bringt einen Gewinn von 2 EUR, wenn Kopf fällt, und von 0,50 EUR, wenn Zahl fällt. Die Münze wird nur einmal geworfen, der Wurf zählt für alle Lose. Ein Los kostet 1 EUR, das Budget des Entscheiders beträgt 20 EUR.

- Wie viele Lose kauft ein risikoneutraler Entscheider?
- Wie viele Lose kauft ein Entscheider mit der Präferenzfunktion $\Phi(\mu, \sigma) = \mu - 0,02 \cdot \sigma^2$?
- Erläutern Sie die Unterschiede in den Lösungen der Aufgabenteile a und b.

4.9 Lösungshinweise

Aufgabe 4.1

a) Gewählt werden A_5 nach der Maximin-Regel, A_2 nach der Maximax-Regel, A_3 nach der Hurwicz-Regel, A_5 nach der Savage-Niehans-Regel und A_2 nach der Laplace-Regel. – b) $w(S_1)=2/3$, $w(S_2)=w(S_3)=1/6$. Maximales μ bei A_2 ($\mu_2=35$).

Aufgabe 4.2

a) Objektiv-klassisches Wahrscheinlichkeitsurteil: Gewinnchance ca. 1:14 Mio. – b) Statistisches Wahrscheinlichkeitsurteil: Testen, ob der Würfel gleichmäßig ist. – c) Subjektives Wahrscheinlichkeitsurteil: Reflektieren des Gesprächs, Auswertung weiterer Informationen (Bewerberlage, ...).

Aufgabe 4.3

a) 21 Alternativen von $A_1=1$ Los kaufen bis zu $A_{20}=20$ Lose kaufen und $A_{21}=\text{kein Los kaufen}$. Erwartungswert des Gewinns und Gewinnspanne steigen mit der Anzahl der Lose. Ein risikoneutraler wie auch ein risikofreudiger Entscheider wählt A_{20} . Alternativenwahl bei Risikoaversion hängt von deren Stärke ab. – b) Mit jedem Mal Pusten erhöht sich der Gewinn um 1, steigt aber auch die Wahrscheinlichkeit, dass der Ballon platzt. Je risikoaverser (bzw. je weniger risikofreudig) der Entscheider, desto früher hört er auf.

Aufgabe 4.4

A_6 wird von A_1 absolut dominiert. A_4 wird von A_3 gemäß Zustandsdominanz dominiert. A_5 wird von A_2 gemäß Wahrscheinlichkeitsdominanz dominiert.

Aufgabe 4.5

a) Der Entscheider ist risikoavers und wählt A_1 . – b) Die Indifferenzkurven steigen konvex an. Der Präferenzwert entspricht jeweils dem Anfangspunkt der Indifferenzkurve auf der μ -Achse. – c) Der Entscheider bevorzugt A_4 (oder A_1) und verstößt damit gegen absolute Dominanz.

Aufgabe 4.6

a) Er kauft 20 Lose. $\mu=25$. – b) Er kauft 11 Lose. $\Phi=21,39$. – c) Der risikoaverse Entscheider kauft weniger Lose, da er einen Risikoabschlag vornimmt, der mit der Anzahl der erworbenen Lose steigt.

Literatur

Bamberg, G., Coenenberg, A.G., Krapp, M.: Betriebswirtschaftliche Entscheidungslehre. 15. Aufl. München (2012)

- Fischhoff, B.: Hindsight $\neq$ foresight: the Effect of Outcome Knowledge on Judgement under Uncertainty. *J. Exp.l Psychol., Hum. Percept. Perform.* **1**, 288–299 (1975)
- Hax, H.: Entscheidungsmodelle in der Unternehmung. Einführung in Operations Research. Rowohlt, Reinbek (1974)
- Hurwicz, L.: Optimality criteria for decision making under ignorance. Cowles Commission discussion paper no. 370 (1951)
- Laux, H.: Zur Entscheidung bei Fehlen objektiver Wahrscheinlichkeiten. *Z. Betriebswirtsch.* **46**, 59–68 (1976)
- Levy, H.: Stochastic Dominance and Expected Utility: survey and analysis. *Manag. Sci.* **38**, 555–593 (1992)
- Markowitz, H.: Portfolio Selection. *J. Finance* **7**, 77–91 (1952)
- Niehans, J.: Zur Preisbildung bei ungewissen Erwartungen. *Schweizerische Zeitschrift für Volkswirtschaft und Statistik* **84**, 433–456 (1948)
- Rommelfanger, H.R., Eickemeier, S.H.: Entscheidungstheorie – Klassische Konzepte und Fuzzy-Erweiterungen. Springer, Berlin 2002
- Savage, L.J.: The theory of statistical decision. *J. Am. Stat. Assoc.* **46**, 55–67 (1951)
- Schneeweiß, H.: Entscheidungskriterien bei Risiko. Springer, Berlin (1967a)
- Schneeweiß, H.: Theorie der rationalen Entscheidungskriterien bei Ungewißheit. *Industrielle Organisation* **36**, 501–507 (1967b)
- Schneeweiß, H.: Die Unverträglichkeit von (μ, σ) -Prinzip und Dominanzprinzip. *Unternehmensforschung* **12**, 180–184 (1968)
- Schneeweiß, H.: Kritische Bemerkungen zur Kritik am Wahrscheinlichkeitssubjektivismus. *Statistische* **18**, 218–232 (1977)
- Wald, A.: Statistical decision functions. 2. Aufl. Chelsea Pub. Co. (1971)
- Wittmann, W.: Entscheiden unter Ungewißheit. Steiner, Wiesbaden (1975)

Rationale Entscheidung bei Risiko: Das Bernoulli-Prinzip

5

5.1 Problemstellung und Aufbau

Dieses Kapitel befasst sich mit dem Problem, wie Entscheidungen bei Risiko gemäß dem Bernoulli-Prinzip rational getroffen werden können. Nach diesem Entscheidungsprinzip ist im Rahmen eines Entscheidungsproblems diejenige Alternative optimal, mit der der Erwartungswert des Nutzens der möglichen Ergebnisse maximiert wird. Das Bernoulli-Prinzip steht im Einklang mit plausiblen Axiomen rationalen Verhaltens und erlaubt es, alle möglichen Zielgrößenwerte *explizit* zu berücksichtigen. Es setzt nicht voraus, dass sich der Entscheider nur an einer Zielgröße orientiert; die Ergebnisse der Alternativen können auch durch die Ausprägungen mehrerer Zielgrößen charakterisiert sein. Wie gezeigt wird, sind die μ -Regel und das (μ, σ) -Prinzip nur in Spezialfällen mit dem Bernoulli-Prinzip kompatibel.

Aufgrund seiner axiomatischen Fundierung, die auf v. Neumann und Morgenstern (1944) zurückgeht, und aufgrund der Plausibilität der Axiome rationalen Verhaltens aus normativer Sicht ist das Bernoulli-Prinzip das wichtigste normative Entscheidungskriterium bei Risiko. Da sich ein Bernoulli-rationaler Entscheider am Erwartungswert seines Nutzens orientiert, wird die auf dem Bernoulli-Prinzip beruhende normative Entscheidungstheorie bei Risiko auch *Erwartungsnutzentheorie* genannt. Für den speziellen Nutzenbegriff, der dem Bernoulli-Prinzip zugrunde liegt, werden üblicherweise die Bezeichnungen Bernoulli-Nutzen, v. Neumann-Morgenstern-Nutzen oder Risikonutzen verwendet. In dieser Arbeit soll der Terminus „Risikonutzen“ oder einfach „Nutzen“ verwendet werden.

Nach einer kurzen Charakteristik des Bernoulli-Prinzips (Abschn. 5.2) wird erläutert, wie nach diesem Prinzip eine optimale Alternative ermittelt werden kann (Abschn. 5.3). Darauf aufbauend wird gezeigt, dass das Bernoulli-Prinzip im Einklang mit plausiblen Axiomen rationalen Handelns steht (Abschn. 5.4). Nach der Darstellung von Maßen für

Risikopräferenzen (Abschn. 5.5) werden kritische Einwände gegen das Bernoulli-Prinzip diskutiert (Abschn. 5.6) und untersucht (Abschn. 5.7), unter welchen Bedingungen die μ -Regel und das (μ, σ) -Prinzip im Einklang mit dem Bernoulli-Prinzip stehen. Schließlich wird die Ermittlung und Gestalt einer Nutzenfunktion bei Existenz eines „modell-externen“ Bereichs mit einem sicheren oder riskanten Vermögen bzw. Überschuss erläutert (Abschn. 5.8).

5.2 Begriff und Inhalt des Bernoulli-Prinzips

5.2.1 Allgemeine Charakteristik des Bernoulli-Prinzips

Bei den in Kap. 4 dargestellten (klassischen) Entscheidungskriterien wird unterstellt, dass sich der Entscheider nur an einer Zielgröße orientiert. Dabei hängt der konkrete Präferenzwert $\Phi(A_a)$ einer Alternative A_a nicht explizit von der gesamten Wahrscheinlichkeitsverteilung über die Zielgröße ab, sondern nur von einigen Verteilungsparametern: Nach der μ -Regel werden alle Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit demselben Erwartungswert des Ergebnisses als gleichwertig angesehen, auch wenn sich diese Verteilungen ansonsten noch so sehr voneinander unterscheiden. Nach dem (μ, σ) -Prinzip sind Verteilungen mit demselben Erwartungswert zwar nur dann gleichwertig, wenn auch ihre Standardabweichungen übereinstimmen; jedoch können sich hinter derselben (μ, σ) -Konstellation immer noch sehr heterogene Wahrscheinlichkeitsverteilungen verbergen.

Die „Verdichtung“ der Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Ergebnisse zu den genannten Parametern kann zu problematischen Entscheidungen führen, wie in Kap. 4, Abschn. 4.6, für die μ -Regel und für das (μ, σ) -Prinzip verdeutlicht wurde. Um solche Konsequenzen zu vermeiden, liegt es nahe, die möglichen Ergebnisse und deren Eintrittswahrscheinlichkeiten *explizit* zu berücksichtigen. Wenn jedoch die Zahl der möglichen Ergebnisse der einzelnen Alternativen groß ist, kann es extrem schwierig werden, eine Entscheidung zu treffen. Beim direkten paarweisen Vergleich von Alternativen sind dann zahlreiche mögliche Ergebnisse gegeneinander abzuwägen. Ein natürliches Lösungskonzept besteht darin, das eigentliche (komplexe) Entscheidungsproblem in einfachere (hypothetische) Teilprobleme zu zerlegen. Das Bernoulli-Prinzip stellt ein derartiges Konzept dar. Dabei wird das eigentliche Entscheidungsproblem in solche Teilprobleme zerlegt, bei denen jeweils nur drei der möglichen Ergebnisse gegeneinander abzuwägen sind. Nur noch diese Probleme hat der Entscheider nach subjektivem Ermessen zu lösen. Darauf aufbauend wird mithilfe bestimmter Rechenoperationen die optimale Alternative des eigentlichen, komplexeren Entscheidungsproblems ermittelt.

Von besonderer Bedeutung ist, dass beim Bernoulli-Prinzip die Ergebnisse auch als Vektoren $\mathbf{x}$ aus mehreren Zielgrößen definiert sein können. Jedem Element der Ergebnismatrix ist dann ein Vektor $\mathbf{x}_{as}$ mit den Ausprägungen der betrachteten Zielgrößen bei Wahl der Alternative A_a und Eintreten des Umweltzustandes S_s zugeordnet.

Nachfolgend wird allerdings auf die explizite Kennzeichnung des Ergebnisses x als Vektor verzichtet.

Eine Entscheidung nach dem Bernoulli-Prinzip wird in zwei Schritten getroffen:

1. Auf der Grundlage relativ einfacher hypothetischer Entscheidungsprobleme wird eine Nutzenfunktion U bestimmt, die den Ergebnissen x reelle Nutzenwerte $U(x)$ zuordnet.
2. Diejenige Alternative wird gewählt, deren möglichen Ergebnissen der höchste Erwartungswert des Nutzens entspricht. Bieten mehrere Alternativen einen maximalen Erwartungswert des Nutzens, so wird eine beliebige davon realisiert.

Nach dem Bernoulli-Prinzip ist der Präferenzwert der Alternative A_a ($a = 1, 2, \dots, N_A$) definiert als

$$\Phi(A_a) = E[U(\tilde{x}_a)] = \sum_{s=1}^{N_S} w(S_s) \cdot U(x_{as}), \quad (5.1)$$

sodass bei gegebener Nutzenfunktion $U(x)$ die Entscheidungsregel lautet:

$$\sum_{s=1}^{N_S} w(S_s) \cdot U(x_{as}) \rightarrow \underset{a}{\text{Max!}} \quad (5.2)$$

Das Konzept geht auf den Vorschlag von Daniel Bernoulli zur Lösung des *Petersburger Paradoxons* zurück. Bernoullis Lösungsvorschlag wurde vor allem von v. Neumann und Morgenstern (1944) aufgegriffen und axiomatisch begründet. Das Bernoulli-Prinzip gilt unabhängig davon, wie die Ergebnisse definiert werden.

Das Bernoulli-Prinzip macht keine Aussage über die Gestalt der Nutzenfunktion; diese kann von Person zu Person verschieden sein. Demgemäß ist das Bernoulli-Prinzip ein Entscheidungsprinzip und keine Entscheidungsregel. Es wird erst dann zu einer Entscheidungsregel, wenn die Nutzenfunktion explizit festgelegt wurde. Das Bernoulli-Prinzip gibt aber konkrete Anweisungen zur empirischen Bestimmung von Nutzenfunktionen.

5.2.2 Eigenschaften der Nutzenfunktion

5.2.2.1 Kardinalität

Die Ermittlung einer Nutzenfunktion stellt neben der Bildung eines Wahrscheinlichkeitsurteils über die Zustände das Kernproblem der Entscheidung nach dem Bernoulli-Prinzip dar.

Dabei ist die Nutzenfunktion nicht eindeutig bestimmt: Gemäß der Entscheidungsregel (5.2) kann beispielsweise zu jedem Nutzenwert eine beliebige Zahl hinzuaddiert werden, ohne dass sich die Präferenzfolge unter den Alternativen ändert: Wird die Zahl

$b > 0$ (bzw. $b < 0$) zu jedem Nutzenwert hinzuaddiert, so erhöhen (bzw. vermindern) sich auch alle Erwartungswerte des Nutzens um den Betrag b , und es bleibt diejenige Alternative optimal, die es vor Addition von b war. Gleichmaßen könnte jeder Nutzenwert vervielfacht (mit einer positiven Zahl a multipliziert) werden, ohne dass sich die Präferenzfolge ändert.

Allgemein gilt: Die Nutzenfunktion ist nur bis auf eine positiv lineare Transformation bestimmt, d. h. die Nutzenfunktionen $U(x)$ und $U^*(x)$, mit

$$U^*(x) = a \cdot U(x) + b, \quad a > 0, \quad (5.3)$$

ergeben dieselbe Präferenzordnung. Wie in Kap. 2, Abschn. 2.2.3, bereits dargestellt, handelt es sich um eine *kardinale* Nutzenfunktion. Die Äquivalenz der Nutzenfunktionen $U(x)$ und $U^*(x)$ im Hinblick auf die durch sie implizierten Präferenzordnungen über Alternativen erkennt man unmittelbar, wenn man die Nutzenfunktion $U^*(x)$ gemäß (5.3) in die Präferenzfunktion (5.1) einsetzt:

$$\begin{aligned} \Phi^*(A_a) &= \sum_{s=1}^{N_S} w(S_s) \cdot U^*(x_{as}) = \sum_{s=1}^{N_S} w(S_s) \cdot [a \cdot U(x_{as}) + b] \\ &= a \cdot \sum_{s=1}^{N_S} w(S_s) \cdot U(x_{as}) + b \cdot \underbrace{\sum_{s=1}^{N_S} w(S_s)}_{=1} \\ &= a \cdot \Phi(A_a) + b \end{aligned} \quad (5.4)$$

Wenn also der Präferenzwert Φ einer Alternative bei der Nutzenfunktion $U(x)$ höher (ebenso hoch oder niedriger) als der einer anderen Alternative ist, gilt dies wegen $a > 0$ auch für den Präferenzwert Φ^* bei der Nutzenfunktion $U^*(x)$; beiden Nutzenfunktionen entspricht stets dieselbe Präferenzordnung.

5.2.2.2 Abnehmender Grenznutzen und Beschränktheit

In seiner Arbeit „Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis“ („Entwurf einer neuen Theorie zur Bewertung von Lotterien“, 1738) schlug Daniel Bernoulli für die Bewertung eines finanziellen Überschusses x die folgende Nutzenfunktion vor:

$$U(x) = \ln(x). \quad (5.5)$$

Diese logarithmische Nutzenfunktion weist einen streng konkaven, streng monoton steigenden Verlauf auf. Der Grenznutzen des Ergebnisses ist also strikt positiv, nimmt jedoch mit zunehmendem Ergebnissniveau ab. Bernoulli nimmt in seiner Arbeit auf der Basis der logarithmischen Nutzenfunktion eine Neubewertung des Petersburger Spiels vor, bei dem so lange eine Münze geworfen wird, bis erstmals Zahl erscheint, und bei dem der Entscheider 2^n Taler gewinnt, wenn erstmals im n -ten Wurf Zahl fällt. Dieses Spiel wurde bereits in Abschn. 4.6.1.2 des Kap. 4 betrachtet. Dort wurde gezeigt, dass

ein Entscheider, der sich an der μ -Regel orientiert, bereit ist, einen unendlich hohen Geldbetrag einzusetzen, um am Petersburger Spiel teilnehmen zu dürfen, denn es galt für den Erwartungswert des Gewinns aus dem Spiel:

$$\mu = 2 \cdot 1/2 + 4 \cdot 1/4 + 8 \cdot 1/8 + \dots = +\infty.$$

Die Bewertung des Petersburger Spiels mit der Präferenzfunktion (5.1) und auf Basis der logarithmischen Nutzenfunktion dagegen führt zu

$$\Phi = \ln(2) \cdot \frac{1}{2} + \ln(4) \cdot \frac{1}{4} + \ln(8) \cdot \frac{1}{8} + \dots = \ln(4) = 1,3863 \quad (5.6)$$

und damit zu einem endlichen Präferenzwert für das Spiel. Diesem endlichen Präferenzwert entspricht auch eine endliche Zahlungsbereitschaft für die Teilnahme am Spiel (Kap. 7). Bernoulli löst also das „Petersburger Paradoxon“ über die Annahme einer konkaven Nutzenfunktion. Tatsächlich ergibt sich für jede konkave Nutzenfunktion ein endlicher Präferenzwert für das Spiel, bei dem sich mit jedem weiteren Wurf der Gewinn verdoppelt.

Aus Bernoullis Überlegungen lässt sich eine erste allgemeine Implikation ableiten: Nutzenfunktionen für finanzielle Ergebnisse sollten zumindest in einem oberen Ergebnisbereich abnehmenden Grenznutzen des Ergebnisses abbilden, wenn das „Petersburger Paradoxon“, d. h. eine unendliche Zahlungsbereitschaft für die Teilnahme am Spiel, vermieden werden soll. Die Annahme der Konkavität der Nutzenfunktion reicht allerdings nicht aus, um das Paradoxon zu lösen, welches bei möglichen Abwandlungen des Petersburger Spiels erneut entsteht: So schlägt Menger (1934) das „Petersburger Superspiel“ vor, bei dem sich der Gewinn nicht bei jedem Wurf verdoppelt, sondern stärker ansteigt, und zwar von 2, 4, 8, usw. auf $e^2 \approx 7,4$, $e^4 \approx 54,6$, $e^8 \approx 2981$ usw. Wie sich leicht prüfen lässt, ergibt sich dann bei logarithmischer Nutzenfunktion erneut ein unendlicher Präferenzwert:

$$\begin{aligned} \Phi &= \ln(e^2) \cdot \frac{1}{2} + \ln(e^4) \cdot \frac{1}{4} + \ln(e^8) \cdot \frac{1}{8} + \dots \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{8} + \dots = +\infty. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Bernoullis Grundidee, abnehmenden Grenznutzen zu unterstellen, ist also nicht hinreichend für die Lösung des Paradoxons.¹ Zusätzlich sollte man davon ausgehen, dass die Nutzenfunktion für Gewinn nach oben begrenzt ist: Es darf keinen unendlich hohen Nutzen geben. Aus der Beschränkung der Nutzenfunktion nach oben folgt im Übrigen die (lokale) Konkavität der Nutzenfunktion in einem oberen Ergebnisbereich.

¹Gleichwohl lässt sich auch gegen das Petersburger Spiel einwenden, dass es unendlich hohe Gewinnmöglichkeiten beinhaltet, die kein Anbieter des Spiels wirklich bieten kann.

5.2.2.3 Risikoeinstellungen und Krümmung

Wenn sich der Entscheider nur an einer Zielgröße orientiert (z. B. Gewinn, Umsatz oder Einkommen), kann seine Nutzenfunktion durch einen Graphen dargestellt werden. Abb. 5.1 zeigt die Graphen verschiedener Nutzenfunktionen. Verläuft die Nutzenfunktion *streng konkav*, sinkt also der Grenznutzen mit zunehmendem Ergebnis, so wird der Entscheider als *risikoscheu* bezeichnet. Verläuft die Nutzenfunktion *streng konvex*, steigt also der Grenznutzen, so wird er als *risikofreudig* bezeichnet. Ist die Nutzenfunktion *linear* (konstanter Grenznutzen), so wird er als *risikoneutral* bezeichnet.

Der Sinn dieser Sprachkonvention und die Übereinstimmung mit den in Kap. 4 eingeführten Definitionen für Risikoeinstellungen können durch das folgende Beispiel veranschaulicht werden (vgl. bereits Abschn. 4.4 des Kap. 4): Ein Entscheider wird vor die Entscheidung gestellt, an einem Glücksspiel teilzunehmen, bei dem er mit gleicher Wahrscheinlichkeit 0,5 (z. B. durch den Wurf einer Münze) den Betrag Δ gewinnen oder verlieren kann. Beträgt sein gegenwärtiges Vermögen W , so ist das Ergebnis bei Teilnahme am Glücksspiel entweder $W+\Delta$ oder $W-\Delta$. Da beide Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind, beträgt der Erwartungswert W . Ist der Entscheider risikoneutral, so zeigt er sich indifferent bezüglich der Teilnahme am Glücksspiel. Ist er risikoavers, so lehnt er die Teilnahme strikt ab. Ein risikofreudiger Entscheider dagegen begrüßt die Teilnahme.

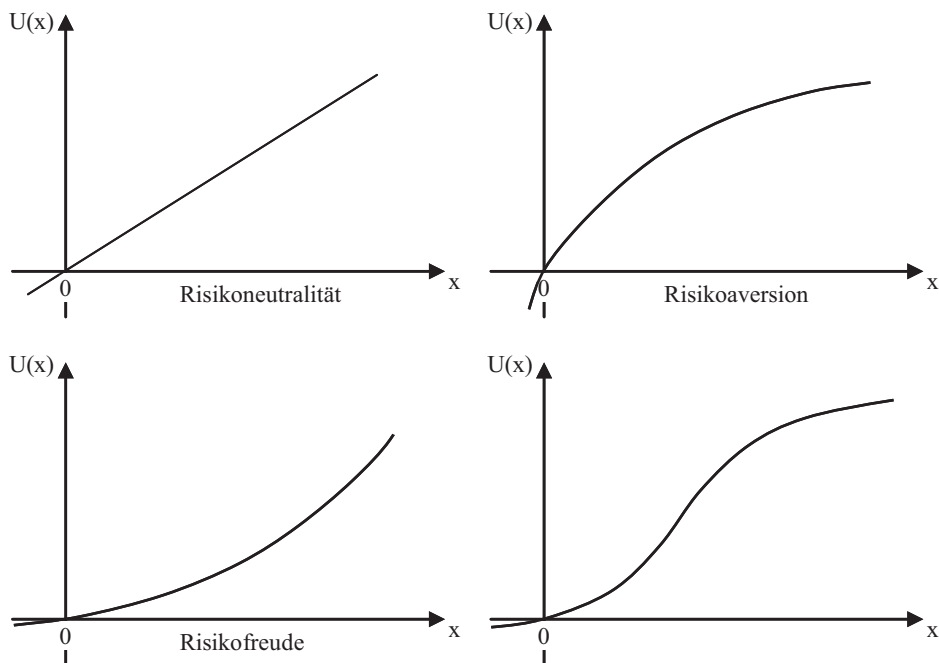


Abb. 5.1 Der Verlauf unterschiedlicher Nutzenfunktionen

Um dieses Entscheidungsverhalten über das Bernoulli-Prinzip, d. h. über die Orientierung an der Präferenzfunktion (5.1) nachzubilden, muss die Nutzenfunktion folgende Eigenschaft haben:

- Ist der Entscheider *risikoneutral*, so ist er indifferent zwischen Teilnahme und Nicht-Teilnahme am Glücksspiel. Entsprechend muss das Bernoulli-Prinzip beim Vergleich beider Alternativen denselben Erwartungswert des Nutzens ausweisen:

$$\frac{1}{2} \cdot U(W + \Delta) + \frac{1}{2} \cdot U(W - \Delta) = U(W).$$

Diese Bedingung ist für beliebige Werte von Δ und W nur für *lineare Nutzenfunktionen* erfüllt.

- Ist der Entscheider *risikoavers*, so zieht er die sichere Position vor. Entsprechend muss nach dem Bernoulli-Prinzip die Nicht-Teilnahme am Glücksspiel einen höheren Erwartungswert des Nutzens als die Teilnahme aufweisen:

$$\frac{1}{2} \cdot U(W + \Delta) + \frac{1}{2} \cdot U(W - \Delta) < U(W).$$

Diese Bedingung ist für beliebige Werte von Δ und W nur für *streng konkave Nutzenfunktionen* erfüllt.²

- Ist der Entscheider *risikofreudig*, so muss nach dem Bernoulli-Prinzip die Teilnahme am Glücksspiel einen höheren Erwartungswert des Nutzens als die Nicht-Teilnahme aufweisen:

$$\frac{1}{2} \cdot U(W + \Delta) + \frac{1}{2} \cdot U(W - \Delta) > U(W)$$

Diese Bedingung ist für beliebige Werte von Δ und W nur für *streng konvexe Nutzenfunktionen* erfüllt.³

Allgemein kann die Nutzenfunktion zugleich über einige Intervalle konkav und über andere konvex verlaufen. Zur Begründung solcher Nutzenfunktionen vgl. Friedman und Savage (1948); Markowitz (1952); Schneeweiß, H. (1967a, S. 64–67); Reilly (1986).

Abb. 5.1 stellt Grundformen der Nutzenfunktion grafisch dar. Da die Nutzenfunktion nur bis auf eine positiv lineare Transformation eindeutig bestimmt ist, kann der Graph einer Nutzenfunktion parallel nach oben und unten verschoben und daher stets durch den Ursprung des Koordinatensystems gezeichnet werden.

²Dies folgt aus der Jensen'schen Ungleichung. Vgl. z. B. Walter (2009, S. 301–302).

³Dies folgt gleichermaßen aus der Jensen'schen Ungleichung.

5.3 Bestimmung einer optimalen Alternative

5.3.1 Entscheidungsmatrix

Beim Bernoulli-Prinzip werden die Nutzenwerte der möglichen Ergebnisse derart fixiert, dass die Maximierung des Erwartungswertes des Nutzens für einen Entscheider sinnvoll ist, sofern er einige einfache Entscheidungspostulate (sogenannte „*Axiome rationalen Verhaltens*“) akzeptiert. Im Folgenden soll zunächst näher erläutert werden, wie nach dem Bernoulli-Prinzip die optimale Alternative bestimmt werden kann. Danach wird gezeigt, dass das Konzept im Einklang mit plausiblen Axiomen rationalen Verhaltens steht.

Bei einer endlichen Zahl möglicher Alternativen und Zustände kann ein Entscheidungsproblem bei Risiko gemäß der in Tab. 5.1 enthaltenen Ergebnismatrix dargestellt werden, wobei hier den Ergebnissen wieder Vektoren von Ausprägungen mehrerer Zielgrößen entsprechen können.

Zur Ermittlung der optimalen Alternative wird jedem Ergebnis x_{as} ein Nutzenwert $U(x_{as})$ zugeordnet. Dadurch entsteht eine sogenannte *Entscheidungsmatrix* (Tab. 5.2).

Tab. 5.1 Ergebnismatrix

	$w(S_1)$ S_1	$w(S_2)$ S_2	...	$w(S_{N_S})$ S_{N_S}
A_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1N_S}
A_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2N_S}
.	.	.		.
.	.	.		.
.	.	.		.
A_{N_A}	$x_{N_A 1}$	$x_{N_A 2}$	...	$x_{N_A N_S}$

Tab. 5.2 Entscheidungsmatrix (mit den jeweiligen Erwartungswerten des Nutzens)

	$w(S_1)$ S_1	$w(S_2)$ S_2	...	$w(S_{N_S})$ S_{N_S}	Erwartungswert des Nutzens
A_1	$U(x_{11})$	$U(x_{12})$	...	$U(x_{1N_S})$	$\sum_{s=1}^{N_S} w(S_s) \cdot U(x_{1s})$
A_1	$U(x_{21})$	$U(x_{22})$	...	$U(x_{2N_S})$	$\sum_{s=1}^{N_S} w(S_s) \cdot U(x_{2s})$
.	.	.		.	.
.	.	.		.	.
.	.	.		.	.
A_{N_A}	$U(x_{N_A 1})$	$U(x_{N_A 2})$	...	$U(x_{N_A N_S})$	$\sum_{s=1}^{N_S} w(S_s) \cdot U(x_{N_A s})$

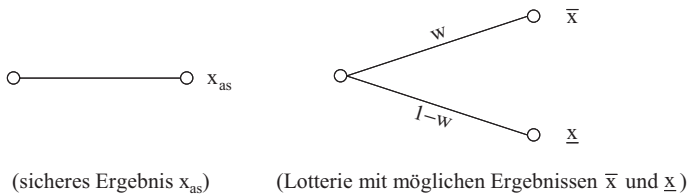


Abb. 5.2 Hypothetischer Vergleich zur Bestimmung des Nutzenwertes $U(x_{as})$

Nachdem die Entscheidungsmatrix vorliegt, wird für jede Alternative der Erwartungswert der Nutzenwerte ihrer möglichen Ergebnisse berechnet und jene Alternative gewählt, bei der der Erwartungswert des Nutzens am größten ist.

5.3.2 Ermittlung einer Nutzenfunktion

Die Ermittlung der Erwartungswerte des Nutzens setzt die Ermittlung der Nutzenfunktion des Entscheiders voraus. Die Nutzenfunktion kann beispielsweise mittels *Bernoulli-Befragung* ermittelt werden. Dabei werden dem Entscheider einfache Wahlsituationen vorgelegt, die jeweils nur aus dem Vergleich eines sicheren Ergebnisses mit einer Lotterie bestehen, wobei die Lotterie nur zwei mögliche Ergebnisse aufweist. Im Folgenden wird eine solche einfache Lotterie häufig wie auf der rechten Seite der Abb. 5.2 als *Zustandsbaum* dargestellt und in der Form

$$L = \{x_1; w \mid x_2; 1 - w\}$$

geschrieben: Spielt ein Entscheider die Lotterie L , so erhält er das Ergebnis x_1 mit der Wahrscheinlichkeit $w(x_1) = w$ und das Ergebnis x_2 mit der Gegenwahrscheinlichkeit $w(x_2) = 1 - w$. Auch ein sicheres Ergebnis x lässt sich gemäß dieser Schreibweise darstellen: Es entspricht der „Lotterie“ $L = \{x; w \mid x; 1 - w\}$ oder einfach $L = \{x; 1\}$.

Bei der Bernoulli-Befragung werden zunächst aus der Menge der möglichen Ergebnisse ein günstigstes Ergebnis $\bar{x}$ und ein ungünstigstes Ergebnis $\underline{x}$ ausgewählt, sodass für alle Ergebnisse $\bar{x} \succsim x_{as} \succsim \underline{x}$ gilt. Dem Ergebnis $\bar{x}$ und allen gleichwertigen Ergebnissen wird der Nutzenwert 1 zugeordnet, dem Ergebnis $\underline{x}$ und allen gleichwertigen Ergebnissen der Nutzenwert 0. Diese Zuordnung entspricht einer Normierung der Nutzenwerte auf das Intervall $[0,1]$. Diese Normierung ist aufgrund der Eigenschaft der Nutzenfunktion, nur bis auf eine positiv lineare Transformation bestimmt zu sein (vgl. Abschn. 5.2.1), immer möglich.⁴

⁴Eine beliebige Nutzenfunktion $U(x)$ wird normiert, indem $U(x)$ in $U^*(x) = a \cdot U(x) + b$ mit $a = 1/[U(\bar{x}) - U(\underline{x})]$ und $b = -U(\underline{x})/[U(\bar{x}) - U(\underline{x})]$ linear transformiert wird.

Zur Ermittlung des Nutzenwertes $U(x_{as})$ eines Ergebnisses x_{as} ($\bar{x} > x_{as} > \underline{x}$) wird dem Entscheider, wenn auch nur hypothetisch, die Wahl angeboten zwischen

- dem *sicheren Ergebnis* x_{as} und
- einer *Lotterie* $L = \{\bar{x}; w | \underline{x}; 1 - w\}$, bei der das Ergebnis $\bar{x}$ mit der Wahrscheinlichkeit w und das Ergebnis $\underline{x}$ mit der Gegenwahrscheinlichkeit $1 - w$ eintritt.

Die betreffenden (hypothetischen) Alternativen sind in Abb. 5.2 dargestellt.

Der Entscheider muss nun angeben, bei welcher Wahrscheinlichkeit w^* er indifferent ist zwischen dem (sicheren) Ergebnis x_{as} und der Lotterie (*Indifferenzwahrscheinlichkeit* w^*). Die Indifferenzwahrscheinlichkeit für das Ergebnis x_{as} ist (wegen $\bar{x} > x_{as} > \underline{x}$) größer als 0 und kleiner als 1: Im Fall $w=0$ zieht der Entscheider das Ergebnis x_{as} vor, da dann bei der „Lotterie“ das schlechteste Ergebnis $\underline{x}$ mit Sicherheit eintritt. Umgekehrt zieht der Entscheider im Fall $w=1$ die „Lotterie“ vor. Bei der empirischen Ermittlung der Indifferenzwahrscheinlichkeit kann daher folgendes Verfahren angewendet werden: Zunächst wird w gleich null gesetzt, sodass der Entscheider das sichere Ergebnis x_{as} der Lotterie vorzieht. Nun wird w sukzessive erhöht und der Entscheider gefragt, ob er immer noch das sichere Ergebnis x_{as} vorzieht. Der Wert für w , bei dem der Entscheider das Ergebnis x_{as} und die Lotterie als gleichwertig einstuft, bei dessen Überschreitung der Entscheider also vom sicheren Ergebnis x_{as} zur Lotterie wechselt, ist die gesuchte Indifferenzwahrscheinlichkeit w^* .

Da für die Indifferenzwahrscheinlichkeit w^* die Präferenzwerte der in Abb. 5.2 dargestellten hypothetischen Alternativen übereinstimmen, müssen sie nach dem Bernoulli-Prinzip denselben Erwartungswert des Nutzens aufweisen:

$$1 \cdot U(x_{as}) = w^* \cdot U(\bar{x}) + (1 - w^*) \cdot U(\underline{x}) = w^* \cdot 1 + (1 - w^*) \cdot 0 = w^*.$$

Es folgt also:

$$U(x_{as}) = w^*. \quad (5.8)$$

Die mittels der Bernoulli-Befragung ermittelte, von der Höhe des Ergebnisses x_{as} abhängige Indifferenzwahrscheinlichkeit $w^*(x_{as})$ ist demnach der gesuchte *Nutzenwert des Ergebnisses* x_{as} : $U(x_{as})$ wird gleich der Indifferenzwahrscheinlichkeit w^* gesetzt.

Bei der Fixierung der Indifferenzwahrscheinlichkeit finden die subjektiven Risiko- und Präferenzvorstellungen des Entscheiders ihren Niederschlag. Er muss überlegen, welche Vorteile bzw. Nachteile sich für ihn ergeben, wenn statt des Ergebnisses x_{as} das Ergebnis $\bar{x}$ bzw. das Ergebnis $\underline{x}$ eintritt. Je kleiner die Vorteile bzw. je größer die Nachteile sind, wenn statt des Ergebnisses x_{as} das Ergebnis $\bar{x}$ bzw. $\underline{x}$ eintritt, desto größer ist die Indifferenzwahrscheinlichkeit und demnach auch der Nutzenwert $U(x_{as})$.

Gilt für zwei beliebige Ergebnisse x_i und x_j die Präferenzrelation $x_i > x_j$, so muss dem Ergebnis x_i eine höhere Indifferenzwahrscheinlichkeit und mithin auch ein höherer Nutzenwert entsprechen als dem Ergebnis x_j , $w^*(x_i) > w^*(x_j)$. Je günstiger das Ergebnis

x_i im Vergleich zu dem Ergebnis x_j ist, umso weiter liegt $w^*(x_i)$ über $w^*(x_j)$ und damit $U(x_i)$ über $U(x_j)$.

Wird jedem möglichen Ergebnis x_{as} ($\bar{x} \succ x_{as} \succ \underline{x}$) der jeweilige Nutzenwert $U(x_{as})$ zugeordnet, so entsteht eine *Nutzenfunktion* U . Die Bestimmung einer Nutzenfunktion nach dem Bernoulli-Prinzip stellt an den Entscheider keine wesentlich höheren Anforderungen als ein Entscheidungsproblem bei Sicherheit: Während bei Sicherheit jeweils einwertige Ergebnisse miteinander zu vergleichen sind, ist nun jedes Ergebnis x_{as} ($\bar{x} \succ x_{as} \succ \underline{x}$) gegen eine Wahrscheinlichkeitsverteilung mit *zwei* möglichen Ergebnissen ($\bar{x}$ und $\underline{x}$) abzuwägen.

Sind die Ergebnisse $\underline{x}$, x_{as} und $\bar{x}$ durch die Ausprägungen *mehrerer* Zielgrößen charakterisiert, so kann die Abwägung zwischen x_{as} einerseits und der Lotterie $L = \{\bar{x}; w \mid \underline{x}; 1 - w\}$ andererseits hingegen äußerst komplex sein. Der Entscheider kann dann die Komplexität reduzieren, indem er zunächst eines der in Kap. 3 beschriebenen Verfahren zur Bewertung von Ergebnissen bei mehreren Zielgrößen anwendet. So entsprechen z. B. nach Anwendung des Transformationskonzepts (Kap. 3, Abschn. 3.4) den Ergebnissen Vektoren von Zielgrößen, welche sich nur in ein und derselben Zielgröße unterscheiden. Die Abwägung zwischen $\underline{x}$, x_{as} und $\bar{x}$ konzentriert sich dann nur noch auf diese repräsentative Zielgröße.

Die Ermittlung einer Nutzenfunktion kann bei einer großen Zahl möglicher Ergebnisse einen erheblichen Aufwand verursachen. Es liegt dann nahe zu vereinfachen. Das kann in der Weise geschehen, dass nur für einen Teil der Ergebnisse x_{as} der jeweilige Nutzenwert (in der beschriebenen Weise) explizit bestimmt wird und die übrigen Nutzenwerte nur durch Approximation fixiert werden. Zur Verdeutlichung wird davon ausgegangen, der Entscheider orientiere sich nur an einer Zielgröße (z. B. Gewinn, Umsatz oder Einkommen). Die Nutzenfunktion kann dann in anschaulicher Weise grafisch dargestellt werden. Der Graph einer Nutzenfunktion lässt sich vereinfachend ermitteln, indem nur für *einige* Ergebnisse bzw. Zielgrößenwerte x der jeweilige Nutzenwert explizit ermittelt und dann die jeweiligen Punkte wie in Abb. 5.3 miteinander verbunden werden.

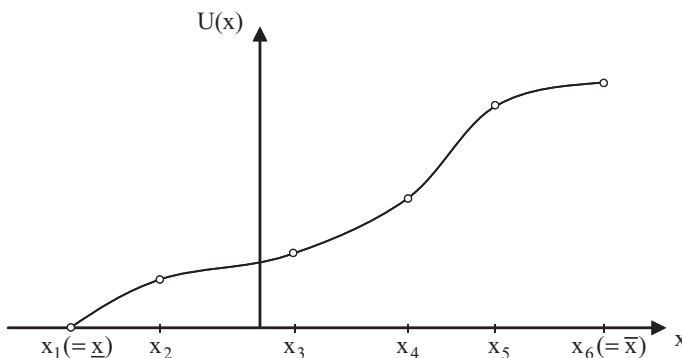


Abb. 5.3 Zur vereinfachten Bestimmung einer Nutzenfunktion

Bei der in Abb. 5.2 verdeutlichten Bernoulli-Befragung muss der Entscheider jeweils eine Indifferenzwahrscheinlichkeit angeben. Alternativ könnte man bei der Befragung aber auch unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten w für die Lotterie $L = \{\bar{x}; w | \underline{x}; 1-w\}$ vorgeben und den Entscheider jeweils danach befragen, bei welchem sicheren Betrag er im Fall des Eintauschs gegen die Lotterie weder einen Vorteil noch einen Nachteil erzielt. Dieser sichere Betrag ist das Sicherheitsäquivalent der Lotterie (vgl. ausführlich Kap. 7). Man sucht dann also für alternative Lotterien das zugehörigen äquivalente sichere Ergebnis, nicht wie zuvor für alternative Ergebnisse die zugehörige äquivalente Lotterie. Eine wiederholte Befragung nach beiden Konzepten kann dazu dienen, die Nutzenfunktion auf Konsistenz hin zu überprüfen.

5.3.3 Beispiel

Zur Veranschaulichung einer Entscheidung nach dem Bernoulli-Prinzip wird nochmals das Beispiel aus Kap. 4, Abschn. 4.5.3.2, aufgegriffen, wobei sich die nachfolgende Betrachtung auf die Alternativen A_1 , A_2 und A_3 beschränkt. Tab. 5.3 stellt deren Ergebnisse noch einmal dar, wobei die Ergebnisse Gewinne bezeichnen.

Wie ist zu entscheiden? Zunächst sind den einzelnen Gewinnen Nutzenwerte zuzuordnen. Für die Bernoulli-Befragung wird der Nutzenwert des Gewinns 100.000 auf 1, der des Gewinns -50.000 auf 0 normiert:

$$U(100.000) = 1, U(-50.000) = 0.$$

Zur Ermittlung der Nutzenwerte der anderen Ergebnisse, z. B. des Nutzenwertes des Gewinns 20.000, wird dem Entscheider (hypothetisch) die Wahl zwischen den in Abb. 5.4 dargestellten Alternativen angeboten.

Der Entscheider muss angeben, bei welcher Wahrscheinlichkeit w^* er indifferent ist zwischen dem sicheren Gewinn und der Lotterie. Er muss dabei überlegen, welche Konsequenzen sich ergeben, wenn ausgehend von 20.000 der Gewinn auf 100.000 steigt bzw. auf -50.000 sinkt. Kann er mit dem zusätzlichen Geldbetrag von $(100.000 - 20.000 =)$ 80.000 besonders vorteilhafte Maßnahmen realisieren oder bestehen dafür nur Verwendungsmöglichkeiten, denen er einen geringen Wert beimisst? Führt ein Gewinn von -50.000 zum Ruin seines Unternehmens oder muss nur

Tab. 5.3 Ergebnismatrix

	$w(S_1)=0,15$ S_1	$w(S_2)=0,2$ S_2	$w(S_3)=0,3$ S_3	$w(S_4)=0,2$ S_4	$w(S_5)=0,15$ S_5
A_1	5.000	5.000	5.000	5.000	5.000
A_2	-20.000	0	10.000	20.000	40.000
A_3	-50.000	20.000	10.000	100.000	-30.000

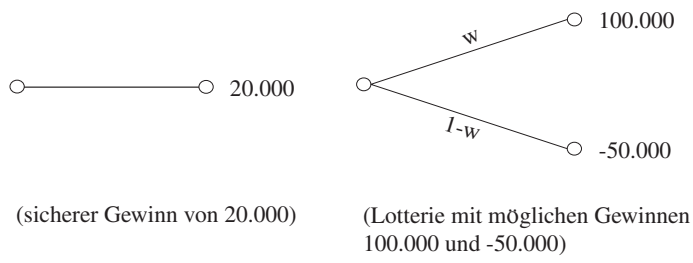


Abb. 5.4 Hypothetischer Vergleich zur Bestimmung des Nutzenwertes des Gewinns von 20.000

Tab. 5.4 Entscheidungsmatrix (zu Ergebnismatrix aus Tab. 5.3) und Erwartungswerte des Nutzens

	S ₁ 0,15	S ₂ 0,2	S ₃ 0,3	S ₄ 0,2	S ₅ 0,15	Erwartungswert des Nutzens
A ₁	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58
A ₂	0,35	0,54	0,62	0,7	0,82	$0,35 \cdot 0,15 + \dots + 0,82 \cdot 0,15 \approx 0,61$
A ₃	0	0,7	0,62	1	0,25	$0 \cdot 0,15 + \dots + 0,25 \cdot 0,15 \approx 0,56$

für kurze Zeit der Konsum geringfügig eingeschränkt werden? Je schwerwiegender die Konsequenzen sind, wenn der Gewinn von 20.000 auf -50.000 sinkt, und je geringer der Vorteil ist, wenn der Gewinn von 20.000 auf 100.000 steigt, desto größer ist die Indifferenzwahrscheinlichkeit w^* und entsprechend der Nutzenwert $U(20.000)$.

Der Entscheider sei indifferent zwischen den Alternativen in Abb. 5.4 bei $w^* = 0,7$. Der Nutzenwert des Gewinns 20.000 ist dann $U(20.000) = 0,7$. Analog werden die Nutzenwerte der übrigen Gewinne ermittelt. Die Entscheidungsmatrix in Tab. 5.4 zeigt beispielhaft Nutzenwerte für alle Ergebnisse und die entsprechenden Erwartungswerte des Nutzens für die drei Alternativen.

Optimal ist die Alternative A_2 , da sie den höchsten Erwartungswert des Nutzens aufweist.

5.4 Rationalität des Bernoulli-Prinzips

5.4.1 Das Axiomensystem von Luce und Raiffa

Das Bernoulli-Prinzip mag auf den ersten Blick recht willkürlich erscheinen. Es kann jedoch gezeigt werden, dass es im Einklang steht mit einfachen Verhaltenspostulaten, die leichter beurteilt und eher akzeptiert werden können als das Bernoulli-Prinzip selbst. Diese Forderungen werden üblicherweise als „Nutzenaxiome“ oder als „Axiome rationalen Verhaltens“ bezeichnet.

Der Begriff „Axiom“ könnte den Eindruck erwecken, die entsprechenden Verhaltenspostulate seien unmittelbar evident und keiner Kritik zugänglich. Diesem Anspruch genügt jedoch allenfalls ein Teil der Axiome des Bernoulli-Prinzips (Kap. 6). Dennoch sind die Axiome des Bernoulli-Prinzips plausibel. Jedenfalls gilt: Wer sie akzeptiert, sollte dem Bernoulli-Prinzip folgen.

In der Literatur wurden mehrere Axiomensysteme entwickelt, die das Bernoulli-Prinzip implizieren und einander relativ ähnlich sind (vgl. Schneeweiß, H. 1967a, S. 73). Im Folgenden wird das Axiomensystem von Luce und Raiffa (1957) dargestellt. Es ist besonders einfach und plausibel und es eignet sich am besten, um zu zeigen, dass das Bernoulli-Prinzip aus den Axiomen logisch deduziert werden kann. Jedoch enthält es eine relativ große Anzahl von Axiomen; ein alternatives Axiomensystem mit einer geringeren Anzahl von Axiomen wird in Abschn. 5.4.3 dargestellt.

Zur Illustration der Axiome wird das durch Tab. 5.5 charakterisierte Entscheidungsproblem betrachtet, wobei die Ergebnisse Gewinne bezeichnen.

Abb. 5.5 stellt die Alternativen in Zustandsbäumen dar.

1. *Ordinales Axiom*

Das ordinale Axiom setzt sich zusammen aus dem Ordnungsaxiom und dem Transitivitätsaxiom.

a) *Ordnungsaxiom*. Der Entscheider kann die möglichen Ergebnisse in eine Rangordnung bringen, d. h. für zwei beliebige Ergebnisse x_i und x_j gilt:

$$x_i > x_j \text{ oder } x_i < x_j \text{ oder } x_i \sim x_j.$$

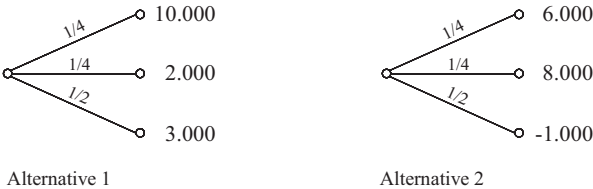
b) *Transitivitätsaxiom*. Die Präferenzordnung über die Ergebnisse ist transitiv, d. h.

$$\text{aus } x_i \succsim x_j \text{ und } x_j \succsim x_k \text{ folgt } x_i \succsim x_k.$$

Tab. 5.5 Ergebnismatrix

	1/4 S ₁	1/4 S ₂	1/2 S ₃
A ₁	10.000	2.000	3.000
A ₂	6.000	8.000	−1.000

Abb. 5.5 Darstellung der Alternativen A₁ und A₂ in Zustandsbäumen



Das Ordnungs- und das Transitivitätsaxiom wurden bereits in Kap. 2, Abschn. 2.4.1.1, für den Fall sicherer Erwartungen dargestellt. Sie sind hier – wie in der Theorie der Entscheidung bei Risiko üblich – zu *einem* Axiom zusammengefasst. Im Beispiel der Tab. 5.5 gilt die transitive Präferenzordnung $10.000 > 8.000 > 6.000 > 3.000 > 2.000 > -1.000$

Eingangs wurde bereits darauf hingewiesen, dass das Bernoulli-Prinzip grundsätzlich auch bei mehreren Zielgrößen anwendbar ist. Das Ordnungsaxiom stellt allerdings höhere Anforderungen, wenn statt von einer einzigen Zielgröße von mehreren Zielgrößen ausgegangen wird (vgl. Kap. 3, Abschn. 3.3.1.1 und 3.4).

2. Stetigkeitsaxiom

Betrachtet werden nun ein Ergebnis x und die Lotterie $L = \{\bar{x}; w \mid \underline{x}; 1 - w\}$. Gilt $\bar{x} > x > \underline{x}$, so existiert eine Wahrscheinlichkeit $w = w^*$ mit $0 < w^* < 1$, sodass $x \sim \{\bar{x}; w^* \mid \underline{x}; 1 - w^*\}$ gilt. Der Entscheider ist in der Lage, diese Indifferenzwahrscheinlichkeit w^* zu fixieren.

Wegen $\bar{x} > x > \underline{x}$ wird für den Fall $w = 1$ die „Lotterie“ $\{\bar{x}; w \mid \underline{x}; 1 - w\}$ dem Ergebnis x vorgezogen und umgekehrt für $w = 0$ das Ergebnis x der „Lotterie“. Nach dem Stetigkeitsaxiom existiert ein Punkt, bei dem der Entscheider zwischen der Lotterie und dem sicheren Ergebnis x indifferent ist, wenn in der Lotterie ausgehend von 0 die Wahrscheinlichkeit w für das günstigste Ergebnis $\bar{x}$ sukzessive erhöht wird. Das Stetigkeitsaxiom fordert also, dass der Entscheider bei steigender Wahrscheinlichkeit w einen stetigen Übergang von der Höferschätzung über die Gleichschätzung zur Geringerschätzung des sicheren Ergebnisses x gegenüber der Lotterie $\{\bar{x}; w \mid \underline{x}; 1 - w\}$ wahrnimmt. Sprünge in der Wertschätzung des Entscheiders werden damit ausgeschlossen. Das Stetigkeitsaxiom besagt aber *nicht*, die auf der Grundlage von Indifferenzwahrscheinlichkeiten ermittelte Nutzenfunktion müsse stetig verlaufen.

Im Beispiel der Tab. 5.5 muss der Entscheider nach dem Stetigkeitsaxiom beispielsweise eine Indifferenzwahrscheinlichkeit für den Vergleich des sicheren Ergebnisses 2.000 mit der Lotterie $\{10.000; w \mid -1.000; 1 - w\}$ angeben. Diese betrage $w = 1/3$.

Auch für das Stetigkeitsaxiom (Festlegung der Indifferenzwahrscheinlichkeit) ist anzumerken, dass beim Übergang auf die Betrachtung mehrerer Zielgrößen höhere Anforderungen an den Entscheider gestellt werden. Bei den folgenden Axiomen jedoch lässt sich die Frage, ob diese von einem Entscheider akzeptiert werden, unabhängig von der Anzahl der Zielgrößen beantworten.

3. Substitutionsaxiom

Wird in einer Wahrscheinlichkeitsverteilung ein Ergebnis x durch die äquivalente Lotterie $\{\bar{x}; w^* \mid \underline{x}; 1 - w^*\}$ substituiert, so ergibt sich eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, die der ursprünglichen Verteilung gleichwertig ist.

Für das Beispiel der Tab. 5.5 wurde angenommen, dass der Entscheider indifferent zwischen der Lotterie $\{10.000; 1/3 \mid -1.000; 2/3\}$ und dem sicheren Gewinn von 2.000 sei. Wird nun der Gewinn 2.000 durch die Lotterie ersetzt, ergibt sich nach dem Substitutionsaxiom für die Alternative A_1 eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über den

Gewinn, die der alten Verteilung gleichwertig ist. Es gilt also die in Abb. 5.6 dargestellte Äquivalenz.

Dem Substitutionsaxiom liegt die folgende Überlegung zugrunde. Ist der Entscheider zwischen einem Ergebnis x und einer Lotterie indifferent, erzielt er weder einen Vorteil noch einen Nachteil, wenn er dieses Ergebnis gegen die Lotterie tauscht. Der Entscheider muss sich nicht erst dann zum Tausch entschließen, wenn das Ergebnis x tatsächlich eingetreten ist. Er kann schon vorher die *bedingte* Entscheidung treffen, den Tausch vorzunehmen, falls das Ergebnis x tatsächlich eintritt. Auch in diesem Fall entsteht für ihn weder ein Nachteil noch ein Vorteil.

4. Reduktionsaxiom

Eine „zusammengesetzte“ Wahrscheinlichkeitsverteilung über die Ergebnisse ist äquivalent einer „einfachen“ Wahrscheinlichkeitsverteilung, sofern jedes Ergebnis bei beiden Verteilungen jeweils dieselbe Eintrittswahrscheinlichkeit aufweist.

Für das Zahlenbeispiel gilt die Äquivalenz in Abb. 5.7: Der linke Zustandsbaum kennzeichnet die *zusammengesetzte* Wahrscheinlichkeitsverteilung aus Abb. 5.6 nach Anwendung des Substitutionsaxioms. Mit der Wahrscheinlichkeit $1/4$ (bzw. $1/2$) wird ein Gewinn von 10.000 (bzw. von 3.000) erzielt, mit der Wahrscheinlichkeit $1/4$ wird ein Lotterielos gewonnen, das mit der Wahrscheinlichkeit $1/3$ den Gewinn 10.000 und mit der Gegenwahrscheinlichkeit $2/3$ den Gewinn -1.000 bietet. Diese Verteilung ist nach dem Reduktionsaxiom jener Verteilung äquivalent, die durch den rechten Zustandsbaum in Abb. 5.7 gekennzeichnet wird, bei der also die Gewinne 10.000, 3.000 und -1.000 mit den Wahrscheinlichkeiten $1/3$, $1/2$ und $1/6$ erzielt werden.

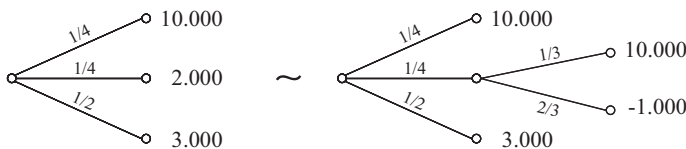


Abb. 5.6 Nach dem Substitutionsaxiom äquivalente Wahrscheinlichkeitsverteilungen

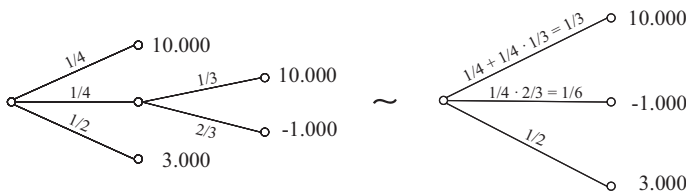


Abb. 5.7 Nach dem Reduktionsaxiom indifferente Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Worin besteht überhaupt der Unterschied zwischen den beiden Wahrscheinlichkeitsverteilungen? Bei der rechten Verteilung erfährt der Entscheider unmittelbar, welchen Gewinn er erzielt, während es bei der linken Verteilung möglich ist, dass ihm zunächst nur eine Information zugeht, die Rückschlüsse auf den Gewinn zulässt, indem er ein Los gewinnt. Das Reduktionsaxiom impliziert unter anderem das Fehlen von Freude bzw. Abneigung am Spiel. Es kommt nur auf die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ergebnisse an, nicht darauf, wie die Verteilung zustande kommt.

5. Monotonieaxiom

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\{\bar{x}; w_1 \mid \underline{x}; 1 - w_1\}$ wird der Wahrscheinlichkeitsverteilung $\{\bar{x}; w_2 \mid \underline{x}; 1 - w_2\}$ vorgezogen, falls $w_1 > w_2$ gilt. Beide sind gleichwertig, wenn $w_1 = w_2$ gilt. Im Falle $w_2 > w_1$ wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\{\bar{x}; w_2 \mid \underline{x}; 1 - w_2\}$ vorgezogen.

Das Monotonieaxiom ist äußerst plausibel: Von zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen, bei denen jeweils nur das günstigste Ergebnis $\bar{x}$ und das ungünstigste Ergebnis $\underline{x}$ eintreten können, ist jene vorzuziehen, bei der das günstigste Ergebnis die größere Eintrittswahrscheinlichkeit aufweist. Diese Präferenzfolge ergibt sich auch nach dem Kriterium der stochastischen Dominanz erster Ordnung: Existieren nur zwei mögliche Ergebnisse, so sind das Monotonieaxiom und das Kriterium der stochastischen Dominanz erster Ordnung inhaltsgleich.

6. Transitivitätsaxiom bezüglich der Handlungsalternativen

Die Präferenzordnung über die Alternativen ist transitiv. Für drei beliebige Alternativen A_i , A_j und A_k gilt: Aus $A_i \succ A_j$ und $A_j \succ A_k$ folgt $A_i \succ A_k$.

Es ist zu beachten, dass dieses Axiom nicht besagt, der Entscheider sei von vornherein in der Lage, sämtliche Alternativen in eine Präferenzordnung zu bringen. Dann benötigte er das Bernoulli-Prinzip als Entscheidungshilfe grundsätzlich gar nicht mehr. Das Transitivitätsaxiom bezüglich der Handlungsalternativen ist nicht deckungsgleich mit dem Transitivitätsaxiom als Bestandteil des ordinalen Axioms, da sich dieses auf die Ergebnisse bezieht und nicht auf die Alternativen. Die explizite Forderung der Transitivität bezüglich der Alternativen ist ein unproblematisches Axiom.

5.4.2 Ableitung des Bernoulli-Prinzips aus dem Axiomensystem

Akzeptiert ein Entscheider die dargestellten Axiome, so sollte er auch dem Bernoulli-Prinzip folgen. Wie nachfolgend gezeigt wird, folgt dieses Konzept logisch zwingend aus den Axiomen. Zur besseren Anschaulichkeit wird beispielhaft wieder die Entscheidungssituation zugrunde gelegt, die durch die Tab. 5.5 repräsentiert ist (wobei die Ergebnisse Gewinne bezeichnen).

Der Beweis kann analog auch für den Fall geführt werden, dass mehr als zwei Alternativen und mehr als drei Zustände relevant sind und die Ergebnisse nicht (ausschließlich) durch Gewinne definiert werden.

Zur Ermittlung der optimalen Alternative nach dem Bernoulli-Prinzip werden den Gewinnen Nutzenwerte zugeordnet. Zur Normierung wird festgesetzt: $U(10.000)=1$, $U(-1.000)=0$. Zur Ermittlung des Nutzenwertes des Gewinns 2.000 wird – wie erläutert – dem Entscheider die Wahl angeboten zwischen dem sicheren Gewinn 2.000 und der Lotterie $\{10.000; w \mid -1.000; 1-w\}$. Der Nutzenwert $U(2.000)$ wird nun determiniert als diejenige Wahrscheinlichkeit w^* , bei der der Entscheider indifferent ist zwischen dem sicheren Gewinn 2.000 und der Lotterie. Analog werden die Nutzenwerte $U(3.000)$, $U(6.000)$ und $U(8.000)$ als Indifferenzwahrscheinlichkeiten fixiert. Der Ergebnismatrix der Tab. 5.5 entspricht die Entscheidungsmatrix der Tab. 5.6.

Gewählt wird die Alternative mit dem höheren Erwartungswert des Nutzens. Sind beide Nutzenerwartungswerte gleich, so sind die Alternativen äquivalent (d. h. der Entscheider ist zwischen ihnen indifferent). Nach dem Bernoulli-Prinzip gilt also:

$$\begin{aligned} A_1 \succcurlyeq A_2, \text{ falls } \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot U(2.000) + \frac{1}{2} \cdot U(3.000) &\geq \frac{1}{4} \cdot U(6.000) + \frac{1}{4} \cdot U(8.000) + \frac{1}{2} \cdot 0 \\ A_1 \prec A_2, \text{ falls } \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot U(2.000) + \frac{1}{2} \cdot U(3.000) &< \frac{1}{4} \cdot U(6.000) + \frac{1}{4} \cdot U(8.000) + \frac{1}{2} \cdot 0 \end{aligned} \quad (5.9a)$$

Es soll nun gezeigt werden, dass zwingend dieselbe Entscheidung getroffen wird, wenn schrittweise jeweils ein Axiom (des in Abschn. 5.4.1 beschriebenen Axiomensystems) herangezogen wird.

1. Ordinales Axiom

Im ersten Schritt werden das günstigste Ergebnis $\bar{x}$ und das ungünstigste $\underline{x}$ ausgewählt. Nach dem 1. Axiom (*Ordinales Axiom*) ist der Entscheider hierzu in der Lage. Im vorliegenden Beispiel gilt trivialerweise $\bar{x} = 10.000$ und $\underline{x} = -1.000$.

2. Stetigkeitsaxiom

Im zweiten Schritt hat der Entscheider für jeden Gewinn unter 10.000 und über -1.000 anzugeben, bei welcher Wahrscheinlichkeit w ($0 < w < 1$) er jeweils indifferent ist zwischen diesem Gewinn und der Lotterie $\{10.000; w \mid -1.000; 1-w\}$. Nach dem 2. Axiom

Tab. 5.6 Entscheidungsmatrix

	1/4 S_1	1/4 S_2	1/2 S_3	Erwartungswert des Nutzens
A_1	1	$U(2.000)$	$U(3.000)$	$1/4 \cdot 1 + 1/4 \cdot U(2.000) + 1/2 \cdot U(3.000)$
A_2	$U(6.000)$	$U(8.000)$	0	$1/4 \cdot U(6.000) + 1/4 \cdot U(8.000) + 1/2 \cdot 0$

(*Stetigkeitsaxiom*) existieren diese Indifferenzwahrscheinlichkeiten und können vom Entscheider fixiert werden. Sie werden mit $U(2.000)$, $U(3.000)$, $U(6.000)$ und $U(8.000)$ bezeichnet. Den Gewinnen 2.000, 3.000, 6.000 und 8.000 entsprechen demnach folgende äquivalente Lotterien:

$$2.000 \sim \{10.000; U(2.000)|-1.000; 1 - U(2.000)\}$$

$$3.000 \sim \{10.000; U(3.000)|-1.000; 1 - U(3.000)\}$$

$$6.000 \sim \{10.000; U(6.000)|-1.000; 1 - U(6.000)\}$$

$$8.000 \sim \{10.000; U(8.000)|-1.000; 1 - U(8.000)\}.$$

3. Substitutionsaxiom

Nun werden die Gewinne 2.000, 3.000, 6.000 und 8.000 durch die äquivalenten Lotterien ersetzt. Nach dem 3. Axiom (*Substitutionsaxiom*) entstehen jeweils äquivalente Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Abb. 5.8 verdeutlicht die Ersetzung für A_1 (oben) und A_2 (unten).

4. Reduktionsaxiom

Im vierten Schritt werden die Wahrscheinlichkeiten für die verbleibenden Gewinne 10.000 und -1.000 berechnet. Nach dem 4. Axiom (*Reduktionsaxiom*) ergeben sich jeweils wieder äquivalente Verteilungen, vgl. Abb. 5.9.

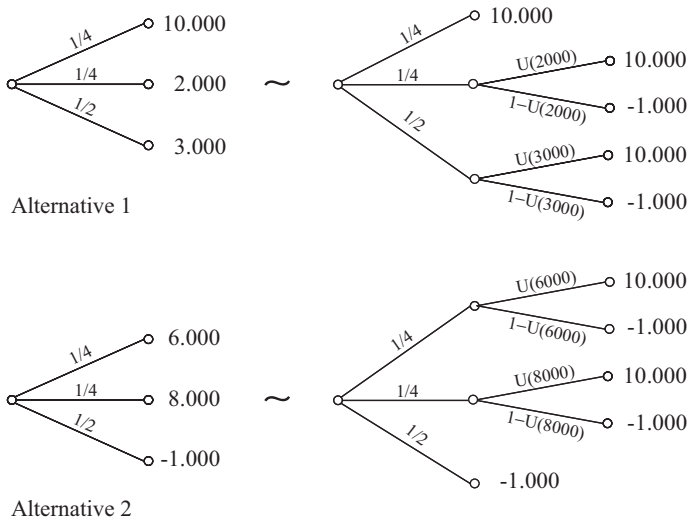


Abb. 5.8 Anwendung des Substitutionsaxioms bei den Alternativen A_1 und A_2

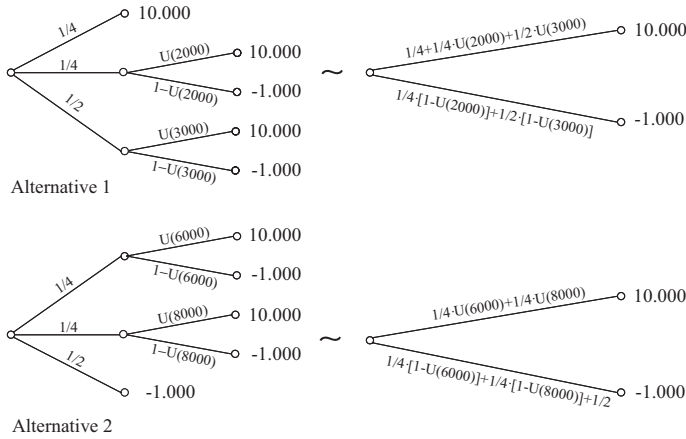


Abb. 5.9 Anwendung des Reduktionsaxioms bei den Alternativen A_1 und A_2

5. Monotonieaxiom

Nach Anwendung des Substitutions- und des Reduktionsaxioms sind die Alternativen A_1 und A_2 so umgeformt worden, dass zwei Lotterien A_1^* und A_2^* entstanden sind, die jeweils nur die beiden möglichen Ergebnisse 10.000 und -1.000 versprechen:

$$A_1^* = \{10.000; w_1 \mid -1.000; 1 - w_1\} \text{ mit } w_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot U(2.000) + \frac{1}{2} \cdot U(3.000)$$

und

$$A_2^* = \{10.000; w_2 \mid -1.000; 1 - w_2\} \text{ mit } w_2 = \frac{1}{4} \cdot U(6.000) + \frac{1}{4} \cdot U(8.000)$$

Nach dem 5. Axiom (*Monotonieaxiom*) wird jene der beiden Verteilungen vorgezogen, bei der der Gewinn 10.000 die höhere Eintrittswahrscheinlichkeit aufweist; ist diese Wahrscheinlichkeit jeweils gleich groß, gilt $A_1^* \sim A_2^*$:

$$A_1^* \succ A_2^* \text{ falls } \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot U(2.000) + \frac{1}{2} \cdot U(3.000) \geq \frac{1}{4} \cdot U(6.000) + \frac{1}{4} \cdot U(8.000),$$

$$A_1^* \prec A_2^* \text{ falls } \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot U(2.000) + \frac{1}{2} \cdot U(3.000) < \frac{1}{4} \cdot U(6.000) + \frac{1}{4} \cdot U(8.000).$$

6. Transitivitätsaxiom (bezüglich der Alternativen)

Nach dem 6. Axiom (Transitivitätsaxiom bezüglich der Handlungsalternativen) gilt $A_1 \sim A_1^*$ sowie $A_2 \sim A_2^*$ und mithin auch: $A_1 \succ A_2$, falls $A_1^* \succ A_2^*$, $A_1 \prec A_2$, falls $A_1^* \prec A_2^*$, sowie $A_1 \sim A_2$, falls $A_1^* \sim A_2^*$. Somit lautet das Ergebnis:

$$A_1 \succ A_2, \text{ falls } \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot U(2.000) + \frac{1}{2} \cdot U(3.000) \geq \frac{1}{4} \cdot U(6.000) + \frac{1}{4} \cdot U(8.000)$$

$$\text{und } A_1 \prec A_2, \text{ falls } \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot U(2.000) + \frac{1}{2} \cdot U(3.000) < \frac{1}{4} \cdot U(6.000) + \frac{1}{4} \cdot U(8.000).$$

(5.9b)

Dies ist aber gerade der Inhalt des Bernoulli-Prinzips, denn (5.9) ist mit (5.9a) identisch: Die Symbole $U(2.000)$, $U(3.000)$, $U(6.000)$ und $U(8.000)$ repräsentieren jeweils dieselben Größen, nämlich die Indifferenzwahrscheinlichkeiten, die als Nutzenwerte der betreffenden Ergebnisse bezeichnet werden. Damit ist gezeigt, dass das Bernoulli-Prinzip zu derselben Alternative führt wie der beschriebene Lösungsweg, bei dem schrittweise die einzelnen Axiome angewendet werden. Folglich steht das Bernoulli-Prinzip im Einklang mit diesen Axiomen.

5.4.3 Unabhängigkeitsaxiom

Die vorgestellten sechs Axiome von Luce und Raiffa erlauben eine schrittweise und anschauliche Ableitung des Bernoulli-Prinzips. Dieses Axiomensystem lässt sich jedoch reduzieren. So können das erste und das sechste Axiom zu einem allgemeinen Ordnungssaxiom zusammengefasst werden, das sich sowohl auf Ergebnisse als auch auf Alternativen bezieht. Eine weitere Reduzierung der Anzahl der Axiome ist mit dem Unabhängigkeitsaxiom verbunden, das bereits von v. Neumann und Morgenstern formuliert wurde.

Zur Erläuterung dieses Axioms werden zwei Lotterien L_1 und L_2 miteinander verglichen. Zudem wird eine dritte Lotterie L betrachtet.

Unabhängigkeitsaxiom

Werden zwei Lotterien L_1 und L_2 jeweils in identischer Weise mit einer dritten Lotterie L über eine Zufallsauswahl kombiniert, bei der die Lotterie L jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p < 1$ gespielt wird, so gilt:

$$L_1 \succsim L_2 \Leftrightarrow \{L_1; p \mid L; (1-p)\} \succsim \{L_2; p \mid L; (1-p)\}. \quad (5.10)$$

In Worten: Nach dem Unabhängigkeitsaxiom stimmen die Präferenzrelationen zwischen L_1 und L_2 einerseits sowie zwischen den entstehenden kombinierten Lotterien andererseits überein: Sind die Lotterien L_1 bzw. L_2 Bestandteile komplexerer, im Übrigen identischer Ergebnisverteilungen, so gilt bezüglich dieser komplexeren Verteilungen dieselbe Präferenzrelation wie zwischen den Lotterien L_1 und L_2 bei deren isolierter Betrachtung. Dabei ist es unerheblich, wie viele mögliche Ergebnisse die Lotterien L_1 , L_2 und L aufweisen; sie können auch zu einem sicheren Ergebnis führen. Umgekehrt können von zwei Lotterien jeweils identische Bestandteile abgetrennt werden, ohne dass sich dadurch die Präferenzrelation ändert.

Das Axiomensystem von Luce und Raiffa lässt sich auf das Unabhängigkeitsaxiom, das ordinale Axiom und das Stetigkeitsaxiom reduzieren: Das ordinale Axiom bezüglich der Ergebnisse und das Transitivitätsaxiom bezüglich der Handlungsalternativen werden

zu einem allgemeinen ordinalen Axiom zusammengefasst, und das Unabhängigkeitsaxiom ersetzt die Axiome Substitution, Reduktion, und Monotonie.⁵

Auf das Unabhängigkeitsaxiom kommen wir im nächsten Kapitel zurück, denn es hat große Bedeutung für die Beurteilung des Bernoulli-Prinzips im Rahmen der deskriptiven Entscheidungstheorie. Verstöße gegen das Bernoulli-Prinzip bei realen Entscheidungen sind nämlich überwiegend auf Verletzungen des Unabhängigkeitsaxioms zurückzuführen, die häufig nicht eindeutig den einzelnen Axiomen Substitution, Reduktion oder Monotonie zugerechnet werden können.

Im Folgenden wird kurz diskutiert, welche Bedeutung die einzelnen Axiome von Luce und Raiffa für die Anwendbarkeit des Bernoulli-Prinzips haben. Kap. 6 wird diese Betrachtungen vertiefen.

5.4.4 Bedeutung der Axiome für die Anwendbarkeit des Bernoulli-Prinzips

Die Axiome von Luce und Raiffa können im Hinblick auf ihre Bedeutung für die Befolgung des Bernoulli-Prinzips in zwei Gruppen eingeteilt werden:

1. *Ordinales Axiom und Stetigkeitsaxiom:* Sind diese Axiome erfüllt, so kann nach dem Bernoulli-Prinzip entschieden werden.
2. *Substitutionsaxiom, Reduktionsaxiom, Monotonieaxiom und Transitivitätsaxiom hinsichtlich der Handlungsalternativen:* Sind auch diese Axiome erfüllt, ist es sinnvoll, nach dem Bernoulli-Prinzip zu entscheiden.

Das ordinale Axiom setzt sich zusammen aus dem Ordnungsaxiom und dem Transitivitätsaxiom bezüglich der Ergebnisse. Nur wenn das Transitivitätsaxiom erfüllt ist,⁶ existiert überhaupt eine Nutzenfunktion. Diese kann bestimmt werden, wenn das Ordnungsaxiom und das Stetigkeitsaxiom erfüllt sind. Der Entscheider kann dann aus der Menge der möglichen Ergebnisse ein bestes und ein schlechtestes Ergebnis auswählen und für die übrigen Ergebnisse Indifferenzwahrscheinlichkeiten fixieren.

Das ordinale Axiom und das Stetigkeitsaxiom implizieren, dass der Entscheider die Ergebnisse unabhängig davon „konsistent“ bewerten kann, wie sie und die entsprechenden Alternativen dargestellt werden; seine Nutzenfunktion und seine Präferenzfunktion ändern sich nicht, wenn dieselbe Wahlsituation inhaltsgleich auf andere Weise dargestellt bzw. dem Entscheider präsentiert wird. Wie jedoch in Kap. 6, Abschn. 6.3.4, gezeigt wird, ist diese Bedingung in der Realität oft nicht erfüllt.

⁵Vgl. z. B. Schneeweiß, H. (1967a, S. 73–77).

⁶Für die intransitive Präferenzrelation $x_1 > x_2 > x_3 > x_1$ z. B. müsste die Größenrelation $U(x_1) > U(x_2) > U(x_3) > U(x_1)$ gelten; das ist aber logisch nicht möglich.

Sind die Axiome der zweiten Gruppe erfüllt, ist es sinnvoll, die Alternative mit dem maximalen Erwartungswert des Nutzens zu wählen. Diese Axiome stellen im Vergleich zu dem ordinalen Axiom und dem Stetigkeitsaxiom keine zusätzlichen Anforderungen an die Beurteilungsfähigkeit des Entscheiders. Sie liefern die normative Basis für den Beweis, dass die Maximierung des Erwartungswertes des Nutzens sinnvoll ist. Sie sind gewissermaßen die Bausteine der Brücke, die von den einfachen hypothetischen Entscheidungsproblemen – auf deren Grundlage die Nutzenwerte fixiert werden – zur Lösung des eigentlichen, komplexeren Entscheidungsproblems führt. Wenn eine Person diese Axiome nicht akzeptiert, fehlt ihr gegenüber die Grundlage für eine rationale Begründung des Bernoulli-Prinzips (vgl. hierzu auch Kap. 6).

5.4.5 Bernoulli-Prinzip und Dominanzkriterien

In Abschn. 4.5 des Kap. 4 wurden Dominanzkriterien zur Vorauswahl von Alternativen für den Fall einer einzigen Zielgröße dargestellt (die absolute Dominanz, die Zustandsdominanz und die stochastische Dominanz erster Ordnung). Die Rationalität des Bernoulli-Prinzips ist auch daran zu messen, ob es im Einklang mit diesen Dominanzkriterien steht. Tatsächlich kann sich bei einer Orientierung am Bernoulli-Prinzip niemals eine Alternative als optimal erweisen, die gegen eines der Dominanzkriterien verstößt.

Zieht der Entscheider ein höheres Ergebnis (einen höheren Zielgrößenwert) strikt einem niedrigeren vor, so ordnet er dem höheren Ergebnis bei Gültigkeit des Stetigkeitsaxioms im Rahmen der Bernoulli-Befragung eine höhere Indifferenzwahrscheinlichkeit zu, sodass die so ermittelte Nutzenfunktion streng monoton steigt. Es kann sich dann kein Verstoß gegen die absolute Dominanz oder die Zustandsdominanz ergeben. Auch Alternativen, die nach dem Kriterium der stochastischen Dominanz erster Ordnung dominiert werden, werden dann niemals gewählt, denn in Kap. 4, Abschn. 4.5.3.1, wurde gezeigt, dass der folgende Zusammenhang für jede streng monoton steigende Funktion $U(x)$ gilt:

$$A_a \underset{\text{SDI}}{>} A_{a'} \Rightarrow E_a[U(\tilde{x})] > E_{a'}[U(\tilde{x})]. \quad (5.11)$$

Damit ergibt sich für den Fall der stochastischen Dominanz erster Ordnung für die dominante Alternative A_a ein höherer Erwartungswert des Nutzens als für die dominierte Alternative.

Das Bernoulli-Prinzip steht also im Einklang mit den Dominanzkriterien, die zur Vorauswahl herangezogen werden können, aber nicht müssen.

5.5 Messung von Risikopräferenzen

5.5.1 Arrow-Pratt-Maße für Risikoaversion

Die Gestalt der Nutzenfunktion impliziert eine bestimmte Risikoeinstellung des Entscheiders. Wie in Abschn. 5.2.2.3 deutlich wurde, lässt sich dies anschaulich für den Fall zeigen, dass nur eine Zielgröße entscheidungsrelevant ist: Ist die betreffende Nutzenfunktion beispielsweise im gesamten Bereich (d. h. „global“) streng konkav, so verhält sich der Entscheider stets risikoavers. Im Folgenden geht es um die Frage, wie Risikoaversion konkret gemessen werden kann. Hierzu wird das Arrow-Pratt-Maß für Risikoaversion vorgestellt, das (wie in nachfolgenden Kapiteln deutlich wird) für die Analyse von Entscheidungsproblemen bei Risiko große Bedeutung hat. Es beruht wiederum auf der Annahme, dass eine einzelne Zielgröße relevant ist, wobei ein höherer Wert einem niedrigeren vorgezogen wird, also $U'(x) > 0$ für alle x gilt.

Risikante Ergebnisverteilungen können grundsätzlich absolut in der Einheit der Ergebnisgröße (also beispielsweise in €) oder relativ als prozentuale Abweichung von einem Referenzpunkt dargestellt werden. Gemäß diesen beiden Darstellungsformen unterscheidet man das Arrow-Pratt-Maß für absolute Risikoaversion von dem entsprechenden Maß für relative Risikoaversion.

Das Arrow-Pratt-Maß für absolute Risikoaversion, das auch kurz als „*Risikoaversionskoeffizient*“ bezeichnet wird, ist wie folgt definiert:

$$AP(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)}. \quad (5.12)$$

$AP(x)$ ist ein Maß für die *lokale* absolute Risikoaversion, d. h. es hängt grundsätzlich von der Höhe des Ergebnisses x selbst ab. Arrow und Pratt entwickelten unabhängig voneinander dieses nach ihnen benannte Maß (Pratt 1964; Arrow 1970).⁷

Der Risikoaversionskoeffizient (5.12) mag zunächst als wenig plausibel erscheinen. Es stellt sich insbesondere die Frage, ob die Risikoaversion für ein gegebenes x nicht einfach durch die Krümmung $U''(x)$ der Nutzenfunktion an dieser Stelle gemessen werden könne. Diese ist jedoch als isoliertes Risikomaß ebenso problematisch wie die alleinige Berücksichtigung der ersten Ableitung $U'(x)$. Wie in Abschn. 5.2.2.1 gezeigt wurde, hat eine positiv lineare Transformation der Nutzenfunktion $U(x)$ keinen Einfluss auf die Präferenzordnung des Entscheiders. Sie sollte daher auch keinen Einfluss auf das Maß der Risikoaversion haben. Bei positiv linearer Transformation der Nutzenfunktion $U(x)$ gemäß $U^*(x) = a \cdot U(x) + b$, $a > 0$, ändert sich jedoch die Krümmung $U''(x)$ für jedes x auf das a -fache. Da das Gleiche für die erste Ableitung $U'(x)$ gilt, ändert sich mit der

⁷Inhaltlich hat sich Arrow bereits vor 1970 in (nicht datierten) Veröffentlichungen damit auseinandergesetzt. Vgl. hierzu Pratt (1964, S. 123).

Transformation der Quotient auf der rechten Seite von (5.12) nicht; die Normierung der Krümmung $U''(x)$ der Nutzenfunktion $U(x)$ durch die Steigung $U'(x)$ der Nutzenfunktion garantiert die Unabhängigkeit des Risikomaßes von jeder positiv linearen Transformation. Um ein positives Maß für Risikoaversion zu erhalten, muss der Quotient der Ableitungen wegen $U'(x) > 0$ und $U''(x) < 0$ für Risikoaversion mit (-1) multipliziert werden; ein negatives Maß zeigt entsprechend Risikofreude an.

Der Kehrwert des Risikoaversionskoeffizienten wird als „*Risikotoleranz*“ bezeichnet. Auch dieser Quotient ist für spätere Analysen von Bedeutung:

$$t(x) = \frac{1}{AP(x)} = -\frac{U'(x)}{U''(x)}. \quad (5.13)$$

Das Arrow-Pratt-Maß für absolute Risikoaversion erklärt das Entscheidungsverhalten eines Entscheiders bei Orientierung am Bernoulli-Prinzip. Die Nutzenfunktion eines Entscheiders lässt sich nämlich aus dem Arrow-Pratt-Maß bis auf eine positiv lineare Transformation ableiten.⁸ Da die Nutzenfunktion aber ohnehin nur bis auf eine positiv lineare Transformation bestimmt ist, ist das Verhalten des Entscheiders eindeutig durch das Arrow-Pratt-Maß bestimmt.

Das Arrow-Pratt-Maß für relative Risikoaversion ist wie folgt definiert:

$$r(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)} \cdot x = AP(x) \cdot x. \quad (5.14)$$

Um den Unterschied zwischen den Maßen für absolute und für relative Risikoaversion zu verdeutlichen, wird das folgende Beispiel betrachtet: Ein Entscheider mit einem Vermögen von 50.000 kann eine Lotterie spielen, bei der er mit gleicher Wahrscheinlichkeit 0,5 entweder 50.000 gewinnt oder 25.000 verliert. Er kann also durch die Lotterie sein Vermögen verdoppeln (Gewinn in Höhe von 100 % des Vermögens) oder aber 50 % seines Vermögens verlieren. Angenommen, der Entscheider nimmt an der Lotterie teil und hat Pech, d. h. sein Vermögen sinkt um 25.000 auf 25.000. Nun wird ihm erneut dieselbe Lotterie angeboten. Absolut handelt es sich nun um dasselbe Einkommensrisiko, relativ hingegen geht es nun um einen Gewinn von 200 % bzw. einen Verlust von 100 % seines Vermögens. Ist die absolute Risikoaversion des Entscheiders unabhängig von seinem Vermögen, so wird er die gleiche Entscheidung treffen wie zuvor und erneut spielen; es gibt keinen „Reichtumseffekt“. Steigt hingegen seine absolute Risikoaversion mit sinkendem Vermögen, so lehnt er die Lotterie nun möglicherweise ab. Ist andererseits seine relative Risikoaversion unabhängig von seinem Vermögen, so würde er die Lotterie nochmals spielen, wenn bei dem erneuten Angebot der mögliche Gewinn und Verlust halbiert würden, d. h. wenn er entweder 25.000 gewinnt oder 12.500 verliert.

⁸Es gilt: $AP(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)} = -\frac{d \ln[U'(x)]}{dx} \Leftrightarrow \int AP(x) dx = -\ln[U'(x)] - b$

$\Leftrightarrow \exp(-\int AP(x) dx) = \exp(\ln[U'(x)] + b) = \exp(b) \cdot U'(x)$

$\Leftrightarrow \int \exp(-\int AP(x) dx) dx = \exp(b) \cdot \int U'(x) dx = \exp(b) \cdot U(x) + \exp(b) \cdot c.$

5.5.2 Spezielle Klassen von Nutzenfunktionen mit konstanter Risikoaversion

Die Frage, ob ein Entscheider sich unabhängig von seinem Vermögen bezüglich absoluter oder relativer Risiken immer gleich verhält, hat Bedeutung für die Analyse von Entscheidungsproblemen und die Erklärung von Entscheidungsverhalten bei Risiko. Beispielsweise wird ein Anleger, dessen Risikoaversion sich mit seinem Vermögen verändert und der Wertpapiere gekauft hat, im Verlauf der Zeit seinen Wertpapierbestand anpassen (d. h. Wertpapiere verkaufen oder hinzukaufen) je nachdem, wie sich die Kurse der Wertpapiere entwickeln. Für die Analyse von Entscheidungsproblemen insbesondere in der Investitions- und Finanzierungstheorie wird häufig unterstellt, ein Entscheider orientiere sich an einer Nutzenfunktion, die aus einer speziellen Klasse von Nutzenfunktionen stammt. Im Folgenden werden die zwei wichtigsten dieser Klassen vorgestellt, die unterschiedliche Annahmen über die absolute bzw. die relative Risikoaversion implizieren.

Eine Nutzenfunktion entstammt der Klasse von Nutzenfunktionen mit *konstanter absoluter Risikoaversion*, wenn gilt:

$$AP(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)} = a \quad \text{für alle } x. \quad (5.15)$$

Der Klasse mit *konstanter absoluter Risikoaversion* gehören nur zwei Nutzenfunktionen an (Pratt 1964, S. 127): Die Nutzenfunktion ist entweder linear oder exponentiell. Für die lineare Nutzenfunktion kann man schreiben

$$U(x) = c \cdot x + d \quad \text{mit } c > 0, \quad (5.16)$$

sodass sich $AP(x) = 0$ ergibt. Für die exponentielle Nutzenfunktion gilt

$$U(x) = b - e^{-a \cdot x} \quad \text{mit } a > 0. \quad (5.17)$$

Hierbei bezeichnet e die Eulersche Zahl (2,718.281...). Für den Risikoaversionskoeffizienten einer exponentiellen Nutzenfunktion ergibt sich

$$AP(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)} = -\frac{-a^2 \cdot e^{-a \cdot x}}{a \cdot e^{-a \cdot x}} = a. \quad (5.18)$$

Die erste Ableitung der Nutzenfunktion vom Typ (5.17) nach x ist positiv, diese Funktion mithin monoton steigend. Die zweite Ableitung nach x ist dagegen negativ, sodass die Nutzenfunktion streng konkav verläuft. Der Risikoaversionskoeffizient stimmt mit dem Exponenten a ($a > 0$) der exponentiellen Nutzenfunktion überein; er ist von x unabhängig. Die exponentielle Nutzenfunktion wird häufig für die Analyse von Entscheidungen mit mehreren Beteiligten, so z. B. bei der Analyse von Entscheidungen von Marktteilnehmern, unterstellt. Sie wird in Abschn. 5.7.2.5 wieder aufgegriffen und genauer erläutert.

Die Klasse von Nutzenfunktionen mit *konstanter relativer Risikoaversion* ist wie folgt definiert:

$$r(x) = AP(x) \cdot x = r \quad \text{bzw.} \quad AP(x) = \frac{r}{x} \quad \text{für alle } x. \quad (5.19)$$

Nutzenfunktionen mit der Eigenschaft konstanter relativer Risikoaversion sind:

$$U(x) = \ln(x), \quad \text{mit } r = 1 \quad (\text{logarithmische Nutzenfunktion}), \quad (5.20)$$

$$U(x) = x^{1-r} \quad \text{für } 0 < r < 1 \quad (\text{Potenznutzenfunktion}). \quad (5.21)$$

Bei konstanter relativer Risikoaversion sinkt die absolute Risikoaversion gemäß einer hyperbolischen Funktion. Nutzenfunktionen mit konstanter relativer Risikoaversion gehören damit zur sogenannten HARA-Klasse, wobei HARA für *Hyperbolic Absolute Risk Aversion* steht.⁹

Wie erläutert, ist nur bei linearen und exponentiellen Nutzenfunktionen die absolute Risikoaversion konstant. Das bedeutet, dass nur bei einer solchen Nutzenfunktion für das Vermögen eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über Gewinne und Verluste (positive und negative Vermögensänderungen) unabhängig davon vorteilhaft bzw. nachteilig ist, wie hoch das aktuelle Vermögen (d. h. das Vermögen in der Ausgangssituation) ist. Bei allen anderen Nutzenfunktionen besteht ein „*Reichtumseffekt*“: Die Beurteilung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung über Gewinne und Verluste hängt vom aktuellen Vermögen ab.

5.6 Zur Kritik des Bernoulli-Prinzips

Der Anspruch des Bernoulli-Prinzips als rationales Entscheidungskriterium für Risikosituationen ist nicht unumstritten. Vor allem in der deutschsprachigen betriebswirtschaftlichen Literatur wurde ein engagierter Meinungsstreit über das Bernoulli-Prinzip ausgetragen.¹⁰ Dabei ging es im Wesentlichen um das Problem, ob die Bernoulli-Nutzenfunktion nur eine reine „Höhenpräferenz“ oder *auch* eine „Risikopräferenz“ widerspiegelt. Diese Diskussion soll hier nicht nachgezeichnet werden. Die Zerlegung der Bernoulli-Nutzenwerte in eine „Höhenpräferenz“ und eine „Risikopräferenz“ ist weder erforderlich noch zweckmäßig (vgl. hierzu auch Bamberg et al. 2012, S. 98–102). Die Nutzenwerte werden gemäß dem Bernoulli-Prinzip derart ermittelt, dass die Maximierung des Erwartungswertes des Nutzens zu derselben Entscheidung führt wie die

⁹Zur HARA-Klasse vgl. z. B. Ingersoll (1987, S. 39–40).

¹⁰Vgl. hierzu Leber (1975); Coenenberg und Kleine-Doecke (1975); Jacob und Leber (1976); Krelle (1976); Bitz und Rogusch (1976); Albrecht (1982); Schildbach und Ewert (1984); Vetschera (1984); Bitz (1984); Wilhelm (1986); Schildbach (1989); Kürsten (1992a, 1992b); Dyckhoff (1993).

explizite Anwendung von sehr plausiblen Axiomen rationalen Verhaltens. Sind diese Axiome erfüllt, so gilt (Abschn. 5.4.4): Einerseits *kann* nach dem Bernoulli-Prinzip entschieden werden. Andererseits ist es *sinnvoll*, danach zu entscheiden. Eine Zerlegung der Nutzenwerte erübrigt sich. Eine kritische Analyse von Axiomen des Bernoulli-Prinzips und deren Implikationen erscheint sinnvoller als der Versuch, die Bernoulli-Nutzenfunktion „wesensgerecht“ in irgendwelche Präferenzarten aufzuteilen.¹¹

Für eine Beurteilung der Axiome des Bernoulli-Prinzips ist die normative von der deskriptiven Sichtweise streng zu unterscheiden. Aus normativer Sicht ist zu fragen, ob die Axiome „vernünftig“ sind, d. h. ob Entscheider, die rational entscheiden wollen, sinnvollerweise die Axiome befolgen sollten. Völlig unkritisch erscheinen in dieser Hinsicht das ordinale Axiom, das Monotonieaxiom und das Transitivitätsaxiom bezüglich der Alternativen. Auch das Substitutionsaxiom sollte von einem Entscheider akzeptiert werden, da er nur dann konsistent gemäß seiner Indifferenz zwischen einem sicheren Ergebnis und der äquivalenten Lotterie handelt.

Nicht ganz unproblematisch auch aus normativer Sicht sind dagegen das Reduktionsaxiom und das Stetigkeitsaxiom. Es ist keineswegs irrational, wenn ein Entscheider z. B. bei einem Glücksspiel „Spielfreude“ oder „Spielabneigung“ empfindet und als eine Zielgröße die „Attraktivität des Spiels“ berücksichtigt und daher „komplizierte Lotterien“ nicht in gleicher Weise beurteilt wie „einfache Lotterien“. Das Entscheidungsproblem ist dann aber eigentlich eines bei Risiko und zwei Zielgrößen; zu berücksichtigen sind nämlich die unsichere finanzielle Zielgröße und die Zielgröße „Attraktivität“, sodass das Reduktionsaxiom im Zusammenhang mit Spielfreude oder Spielabneigung nicht relevant ist.

Das Stetigkeitsaxiom fordert, dass ein Entscheider bei einem Vergleich eines sicheren Ergebnisses x mit einer Lotterie $\{\bar{x}; w \mid \underline{x}; 1 - w\}$ in der Lage ist, eine Indifferenzwahrscheinlichkeit w^* anzugeben, für die er das sichere Ergebnis und die Lotterie gleich bewertet. Hiergegen werden vor allem zwei Einwände vorgebracht, die auch aus normativer Sicht Bedeutung haben: Erstens existiert möglicherweise in einer Entscheidungssituation gar keine Indifferenzwahrscheinlichkeit. Zweitens mag diese existieren, kann jedoch möglicherweise durch den Entscheider nicht angegeben werden. Ein Beispiel mag dies verdeutlichen: Der Entscheider wird gebeten, eine Indifferenzwahrscheinlichkeit für das sichere Ergebnis $x = \{\text{lebendig}, 0 \text{ €}\}$ und die „Lotterie“ $\{\bar{x}; w \mid \underline{x}; 1 - w\}$ mit $\bar{x} = \{\text{lebendig}, 1 \text{ €}\}$ und $\underline{x} = \{\text{tot}, 0 \text{ €}\}$ anzugeben. Der Entscheider kann also an einem „Glücksspiel“ teilnehmen, bei dem er 1 € gewinnen oder aber sein Leben verlieren wird. In diesem Beispiel erscheint es als durchaus „vernünftig“, wenn der Entscheider erklärt, dass er nicht fähig sei, eine Indifferenzwahrscheinlichkeit zu deklarieren oder dass für ihn gar keine Indifferenzwahrscheinlichkeit existiert, weil er für $w = 1$ die

¹¹Ein kritischer Vergleich von Konzepten der Entscheidung bei Unsicherheit mit dem Bernoulli-Prinzip wird in Bamberg und Trost (1996) vorgenommen.

Lotterie vorzieht und für jedes $w < 1$ das sichere Ergebnis $x = \{\text{lebendig}, 0 \text{ €}\}$. Andererseits kann es durchaus vernünftig sein, eine 1-€-Münze von der Straße aufzuheben, auch wenn man dabei das wie auch immer geringe Risiko eingeht, aufgrund eigener Unachtsamkeit überfahren zu werden.

Die praktische Bedeutung dieser Einwände gegen das Reduktionsaxiom und gegen das Stetigkeitsaxiom dürfte eher gering sein. So ist das Reduktionsaxiom außerhalb des Bereichs der Gesellschaftsspiele und der Glücksspiele, in denen es unter Umständen nicht erfüllt ist, gerade auch deshalb eine unproblematische Annahme, weil es sinnvoll sein kann, Gefühle wie Freude und Abneigung am Spiel bei der Entscheidung zu unterdrücken, um die Wahrscheinlichkeitsverteilungen über die Ergebnisse (z. B. Gewinn, Einkommen, Marktanteil) im Sinne des Bernoulli-Prinzips rational beurteilen zu können. Für die Akzeptanz des Bernoulli-Prinzips durch einen einzelnen Entscheider ist es im Übrigen unerheblich, wie *andere* Personen das Reduktionsaxiom beurteilen. Jeder, der selbst das Reduktionsaxiom (und die anderen Axiome) für die vorliegende Entscheidungssituation akzeptieren kann, sollte dem Bernoulli-Prinzip folgen.

Für die Einwände gegen das Stetigkeitsaxiom gilt: Selbst wenn im Einzelfall bei extrem ungünstigen Ergebnissen (wie z. B. Tod oder Konkurs des Unternehmens) das Stetigkeitsaxiom verletzt wäre, könnte das Bernoulli-Prinzip Anwendung finden. Alle Alternativen, die mit positiver Wahrscheinlichkeit zu einem solchen Ergebnis führen, könnten im Voraus ausgeschlossen werden; nach dem Bernoulli-Prinzip würde dann die beste der verbleibenden Alternativen gewählt. Nur in jener ausgewogenen Situation, in der *jede* Alternative möglicherweise zu diesem Ergebnis führt, würde das Bernoulli-Prinzip versagen.

5.7 Klassische Entscheidungskriterien im Lichte des Bernoulli-Prinzips

5.7.1 μ -Regel

Das Bernoulli-Prinzip und die in Kap. 4, Abschn. 4.6, dargestellten klassischen Entscheidungskriterien unterscheiden sich im Wesentlichen durch die Präzision, mit der sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen über die Ergebnisse erfassen: Während das Bernoulli-Prinzip es gestattet, alle möglichen Ergebnisse explizit zu berücksichtigen, erfassen die klassischen Entscheidungskriterien nur eine Zielgröße und außerdem auch nur einige Parameter der Wahrscheinlichkeitsverteilungen über sie.

Die μ -Regel berücksichtigt nur den Erwartungswert μ der Zielgröße. Alle Handlungsalternativen mit demselben μ -Wert werden als gleichwertig angesehen, auch wenn sich die Wahrscheinlichkeitsverteilungen über die Zielgröße ansonsten wesentlich unterscheiden. Das Bernoulli-Prinzip und die μ -Regel stimmen daher dann überein, wenn der Präferenzwert für eine Alternative bei Entscheidung nach dem Bernoulli-Prinzip allein

vom Erwartungswert des Ergebnisses μ abhängt. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn die Nutzenfunktion *linear*, der Entscheider also *risikoneutral* ist. Da die lineare Nutzenfunktion

$$U(x) = c \cdot x + d, \text{ mit } c > 0 \text{ und } d \text{ beliebig,} \quad (5.22)$$

beliebig positiv linear transformiert werden kann, kann sie auch gemäß

$$U(x) = x \quad (5.23)$$

dargestellt werden, sodass für den Präferenzwert einer Alternative unmittelbar folgt:

$$E[U(\tilde{x}_a)] = E(\tilde{x}_a) = \mu_a. \quad (5.24)$$

Der Präferenzwert (der Erwartungswert des Nutzens) stimmt also mit dem Erwartungswert μ des Ergebnisses überein. Die μ -Regel steht also bei linearer Nutzenfunktion im Einklang mit dem Bernoulli-Prinzip. Ist die Nutzenfunktion nicht linear, so ist der Erwartungswert des Nutzens keine monoton steigende Funktion von μ (es sei denn, es werden einschränkende Annahmen über die Wahrscheinlichkeitsverteilung betrachtet). Die μ -Regel folgt dann nicht mehr zwingend aus dem Bernoulli-Prinzip. Aufgrund ihrer Einfachheit kann es trotzdem sinnvoll sein, die μ -Regel anzuwenden, auch wenn die Nutzenfunktion nicht durchgehend linear verläuft. Die Anwendung der μ -Regel ist vor allem dann gerechtfertigt, wenn in der vorliegenden Entscheidungssituation das ungewisse Ergebnis innerhalb eines bestimmten Intervalls liegt, für das die Nutzenfunktion hinreichend genau durch eine lineare Funktion approximiert werden kann. Eine lineare Approximation kann insbesondere dann naheliegen, wenn das Ergebnis bei den erwogenen Alternativen jeweils nur wenig streut.

5.7.2 (μ, σ) -Prinzip

5.7.2.1 (μ, σ) -Präferenzfunktion bei quadratischer Nutzenfunktion

Sollen das Bernoulli-Prinzip und das (μ, σ) -Prinzip zu identischen Präferenzfunktionen führen, so muss sich der Erwartungswert des Nutzens durch äquivalente Umformungen in eine (μ, σ) -Präferenzfunktion überführen lassen. Hierfür gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder führt die Nutzenfunktion des Entscheiders unabhängig von der Verteilung zum (μ, σ) -Prinzip oder die Verteilung über das Ergebnis lässt sich vollständig über die beiden Parameter μ und σ beschreiben.

Zunächst soll die quadratische Nutzenfunktion betrachtet werden, die – wie noch erläutert wird – auf Wahrscheinlichkeitsverteilungen angewendet werden kann, die ein endliches maximales Ergebnis aufweisen. Die quadratische Nutzenfunktion kann allgemein wie folgt geschrieben werden:

$$U(x) = b \cdot x - c \cdot x^2. \quad (5.25)$$

Wir wollen nur den Fall der Risikoaversion betrachten. In diesem Fall ist außer b auch c positiv. Grafisch entspricht dann der Funktion (5.25) eine nach unten geöffnete Parabel mit einem lokalen Maximum an der Stelle $b/(2c)$. Links vom Maximum ist die Funktion streng monoton konkav steigend, rechts vom Maximum dagegen sinkt sie streng monoton, sodass dieser Ergebnisbereich unzulässig ist, wenn davon auszugehen ist, dass der Entscheider ein höheres Ergebnis strikt einem niedrigeren vorzieht. Das bedeutet, dass bei Zugrundelegung der Nutzenfunktion (5.25) das größtmögliche Ergebnis $\bar{x}$ nicht größer sein darf als das Ergebnis mit dem Maximum der Nutzenfunktion,

$$\bar{x} \leq \frac{b}{2c}. \quad (5.26)$$

Dies schränkt die möglichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen über das Ergebnis ein. Abb. 5.10 stellt die quadratische Nutzenfunktion grafisch dar.

Bei quadratischer Nutzenfunktion folgt aus der Orientierung am Bernoulli-Prinzip eine (μ, σ) -Präferenzfunktion. Für den Erwartungswert des Nutzens gilt nämlich:

$$E[U(\tilde{x})] = E[b \cdot \tilde{x} - c \cdot \tilde{x}^2] = b \cdot \mu - c \cdot E(\tilde{x}^2) \quad (5.27)$$

Für die Varianz des Ergebnisses gilt:

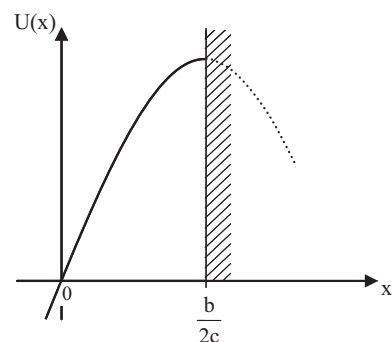
$$\text{Var}(\tilde{x}) = \sigma^2 = E\{[\tilde{x} - E(\tilde{x})]^2\} = E(\tilde{x}^2) - \mu^2 \quad (5.28)$$

Löst man (5.28) nach $E(\tilde{x}^2)$ auf und setzt in (5.27) ein, so folgt für den Erwartungswert des Nutzens die (μ, σ) -Präferenzfunktion:

$$E[U(\tilde{x})] = b \cdot \mu - c \cdot (\mu^2 + \sigma^2) \quad (5.29)$$

Der Präferenzwert einer Alternative bei Orientierung am Bernoulli-Prinzip lässt sich also bei quadratischer Nutzenfunktion äquivalent als spezifischer (μ, σ) -Präferenzwert darstellen, wobei die Parameter b und c über die quadratische Nutzenfunktion (5.25) bestimmt sind.

Abb. 5.10 Quadratische Nutzenfunktion (Risikoaversion)



Die Eigenschaft der Nutzenfunktion, quadratisch zu sein, ist nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig dafür, dass das (μ, σ) -Prinzip unabhängig von der Gestalt der Wahrscheinlichkeitsverteilung über das Ergebnis aus dem Bernoulli-Prinzip folgt (Schneeweiß, H. 1967a, S. 113 ff.).

5.7.2.2 Grafische Repräsentation von Entscheidungsproblemen bei quadratischer Nutzenfunktion

Der Präferenzfunktion $E[U(\tilde{x})] = b \cdot \mu - c \cdot (\mu^2 + \sigma^2)$ entsprechen parabelförmige Indifferenzkurven im (μ, σ^2) -Diagramm. Abb. 5.11 stellt ein Indifferenzkurvensystem dar. Einer Indifferenzkurve entspricht ein umso höherer Erwartungswert des Nutzens, je weiter unten sie verläuft. Punkt P_1 in Abb. 5.11 entspricht also ein höherer Erwartungswert des Nutzens als p_2 . Der Abszissenwert einer Indifferenzkurve an der Stelle $\sigma^2 = 0$ im zulässigen Bereich entspricht demjenigen sicheren Ergebnis, dessen Nutzen dem Niveau der Indifferenzkurve entspricht; es ist das sogenannte Sicherheitsäquivalent (Kap. 7).

Aus (5.29) folgt für die Steigung einer Indifferenzkurve im (μ, σ^2) -Diagramm, d. h. für die Grenzrate der Substitution zwischen μ und σ^2 auf einer Indifferenzkurve:

$$\frac{d\sigma^2}{d\mu} = \frac{b}{c} - 2 \cdot \mu. \quad (5.30)$$

Gemäß (5.30) sind die Steigungen der Indifferenzkurven für gegebenes μ von σ^2 *unabhängig*: Allen Punkten mit demselben μ -Wert entspricht jeweils derselbe Differentialquotient $d\sigma^2/d\mu$. Die Indifferenzkurven verlaufen somit *äquidistant* zueinander; der senkrechte Abstand zwischen zwei Indifferenzkurven ist für jeden μ -Wert gleich groß; verschiebt man eine Indifferenzkurve parallel nach oben oder unten, so gelangt man zu anderen Indifferenzkurven.

Die Steigung einer Indifferenzkurve ist jedoch eine linear fallende Funktion von μ . Für $\mu = 0$ beträgt sie b/c , für $\mu = b/(2c)$ beträgt sie 0. Die Indifferenzkurven erreichen also ihr Maximum an derselben Stelle wie die Nutzenfunktion, rechts davon, im unzulässigen

Abb. 5.11 Indifferenzkurven bei quadratischer Nutzenfunktion im (μ, σ^2) -Diagramm

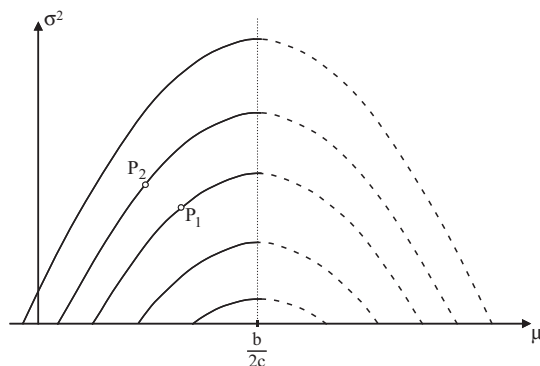
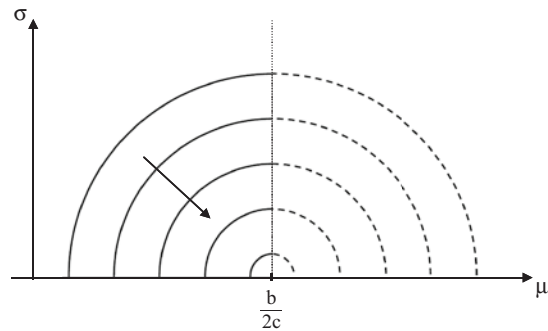


Abb. 5.12 Indifferenzkurven bei quadratischer Nutzenfunktion im (μ, σ) -Diagramm



Bereich, sind die Steigungen aller Indifferenzkurven negativ. Eine Vergrößerung von $b/(2c)$ führt zu einer Parallelverschiebung der Indifferenzkurven nach rechts. Jedem $\mu < b/(2c)$ entspricht dann eine größere Steigung.

Die Indifferenzkurven lassen sich auch in einem (μ, σ) -Diagramm darstellen. Die Präferenzfunktion $E[U(\tilde{x})] = b \cdot \mu - c \cdot (\mu^2 + \sigma^2)$ ist mit den Variablen μ und σ eine Kreisgleichung.¹² Die Indifferenzkurven entsprechen konzentrischen Kreisen im (μ, σ) -Diagramm, deren Zentrum auf der μ -Achse liegt und den Abszissenwert $b/(2c)$ aufweist. Da die Standardabweichung nicht negativ werden kann, ist nur der obere Halbkreis einer Indifferenzkurve definiert. Da zudem alle Werte rechts des Abszissenwertes $b/(2c)$ mit dem Maximum der (quadratischen) Nutzenfunktion wiederum unzulässig sind, stellen die Indifferenzkurven im relevanten Bereich also *Viertelkreise* dar. Abb. 5.12 stellt Indifferenzkurven im (μ, σ) -Diagramm dar.

Im relevanten Bereich ist der Erwartungswert des Nutzens eine monoton steigende Funktion von μ und eine monoton fallende Funktion von σ . Indifferenzkurven mit kleinerem Radius¹³ entsprechen höheren Erwartungswerten des Nutzens.

¹²Die einfachste Kreisgleichung in einem (x, y) -Diagramm lautet $x^2 + y^2 = r^2$. Diese Gleichung liefert konzentrische Kreise um den Ursprung mit Radius r . Wird das Zentrum der Kreise auf der x -Achse um m_x und auf der y -Achse um m_y verschoben, so ergeben sich die Kreise aus der Gleichung $(x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 = r^2$.

¹³Setzt man in der allgemeinen Kreisgleichung $(x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 = r^2$ an die Stelle von x und y die Parameter μ und σ , so lässt sich die Kreisgleichung in die Präferenzfunktion $E[U(\tilde{x})] = b \cdot \mu - c \cdot (\mu^2 + \sigma^2)$ überführen, indem man $m_x = m_\mu = b/(2c)$ sowie $m_y = m_\sigma = 0$ und $r^2 = [b/(2c)]^2 - E[U(\tilde{x})]/c$ setzt. Der Radius beträgt $r = \sqrt{[b/(2c)]^2 - E[U(\tilde{x})]/c}$.

5.7.2.3 Quadratische Nutzenfunktion und Arrow-Pratt-Maß für Risikoaversion

Die absolute Risikoaversion gemäß (5.12) beträgt bei quadratischer Nutzenfunktion $U(x) = b \cdot x - c \cdot x^2$:

$$AP(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)} = -\frac{-2c}{b - 2cx} = \frac{1}{\frac{b}{2c} - x} \quad (5.31)$$

Bei quadratischer Nutzenfunktion ist der Risikoaversionskoeffizient also eine monoton steigende Funktion von x : Es besteht steigende absolute Risikoaversion. Die Risikoaversion wird unendlich groß, wenn sich das Ergebnis x immer weiter dem Betrag $b/(2c)$ mit dem Maximum der (quadratischen) Nutzenfunktion $U(x)$ nähert.

Für den Kehrwert des Risikoaversionskoeffizienten, das Arrow-Pratt-Maß für Risikotoleranz gemäß (5.13), folgt aus (5.31):

$$t(x) = \frac{1}{AP(x)} = \frac{b}{2c} - x. \quad (5.32)$$

Ein Vergleich mit (5.30) zeigt, dass die Steigung der Indifferenzkurven im (μ, σ^2) -Diagramm an der Stelle μ mit der doppelten Risikotoleranz des Entscheiders für $x = \mu$ übereinstimmt. Je geringer diese Risikotoleranz bzw. je größer sein Risikoaversionskoeffizient, desto geringer sind somit die Indifferenzkurvensteigungen im (μ, σ^2) -Diagramm für $\mu = x$.

5.7.2.4 (μ, σ) -Präferenzfunktion bei Normalverteilung

Eine andere Möglichkeit, das Bernoulli-Prinzip in das (μ, σ) -Prinzip zu überführen, besteht darin, von bestimmten Eigenschaften bezüglich der Wahrscheinlichkeitsverteilung über das Ergebnis auszugehen. Im Folgenden soll *Normalverteilung* der Ergebnisse unterstellt werden. Die Normalverteilung ist eine zwei-parametrische Verteilung: Sie wird durch die Parameter μ (den Erwartungswert der Normalverteilung) und σ (die Standardabweichung der Normalverteilung) eindeutig beschrieben, d. h. es gibt keine unterschiedlichen Normalverteilungen mit identischen Parameterwerten für μ und σ . Gleichzeitig sind μ und σ identisch mit dem Erwartungswert und der Standardabweichung der Normalverteilung, die damit unabhängig voneinander sind.¹⁴ Diese Eigenschaft der Normalverteilung, ermöglicht es, für jede beliebige Nutzenfunktion, die über den Wertebereich der Normalverteilung $(-\infty \text{ bis } +\infty)$ definiert ist, eine Entscheidungsregel zu finden, die über μ und σ definiert und äquivalent der Entscheidung nach dem Bernoulli-Prinzip ist.

¹⁴Anders ist dies beispielsweise bei der logarithmischen Normalverteilung. Auch diese ist über zwei Parameter definiert, aber diese Parameter entsprechen nicht dem Erwartungswert und der Standardabweichung dieser Verteilung; letztere hängt von beiden Parametern ab.

Die Annahme der Normalverteilung schließt streng genommen aus, dass die Zahl der möglichen Zielgrößenwerte (der entsprechenden Zustände) endlich ist. Bei großer Zahl möglicher Werte kann jedoch für eine Problemstellung die Annahme der Normalverteilung hinreichend gut erfüllt sein. Die Normalverteilungsannahme mag auch bei Zielgrößen, die nicht negativ werden können, als verfehlt erscheinen. Jedoch kann sie auch hier eine gute Annäherung an die tatsächlichen Verteilung sein, wenn sie (bei hinreichend großem Erwartungswert und hinreichend kleiner Standardabweichung) dem Verlustbereich nur eine verschwindend kleine Wahrscheinlichkeitsmasse zuordnet (vgl. auch Franke und Hax 2009, S. 308–313).

Die Normalverteilung ist zwar nicht die einzige Verteilung, die Eigenschaften aufweist, bei denen sich das Bernoulli-Prinzip als (μ, σ) -Prinzip darstellen lässt (vgl. Ingersoll 1987, S. 104–113). Aufgrund ihrer großen theoretischen und empirischen Bedeutung ist sie jedoch die Verteilung, die regelmäßig unterstellt wird, wenn das Bernoulli-Prinzip vereinfachend über eine (μ, σ) -Präferenzfunktion dargestellt werden soll. Das Problem besteht aber selbst bei Normalverteilung darin, dass zwar eine (μ, σ) -Präferenzfunktion für jede Nutzenfunktion, die im Bereich $(-\infty, +\infty)$ definiert ist, existiert, ihre Ermittlung allerdings mit einer Ausnahme analytisch nicht möglich ist. Diese Ausnahme wird nachfolgend ausführlicher behandelt.

5.7.2.5 Normalverteilung und exponentielle Nutzenfunktion

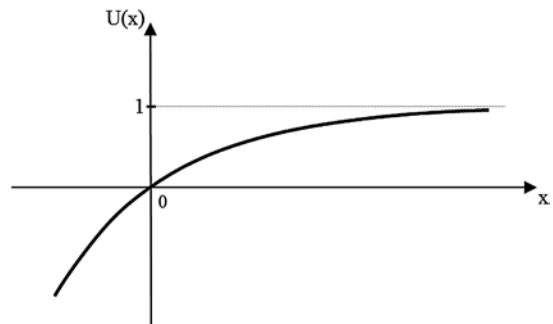
In Abschn. 5.2 wurde bereits die exponentielle Nutzenfunktion,

$$U(x) = b - e^{-a \cdot x}, \quad (5.33)$$

vorge stellt, die die Eigenschaft einer konstanten absoluten Risikoaversion in Höhe von $a > 0$ aufweist. Abb. 5.13 zeigt eine solche Nutzenfunktion, wobei hier $b = 1$ und damit $U(0) = 0$ gilt. Die Nutzenfunktion ist konkav, steigt streng monoton und ist nach oben durch b (hier $b = 1$) beschränkt. Der streng konkave Verlauf impliziert Risikoaversion.

Kombiniert man die Annahme eines normalverteilten Ergebnisses mit der Annahme einer exponentiellen Nutzenfunktion, so gilt für den Erwartungswert des Nutzens (zum Beweis vgl. Freund 1956, S. 255):

Abb. 5.13 Exponentielle Nutzenfunktion



$$\begin{aligned}
 E[U(\tilde{x})] &= U[E(x) - \frac{a}{2} \cdot \text{Var}(\tilde{x})] = U[\mu - \frac{a}{2} \cdot \sigma^2] \\
 &= b - e^{-a \cdot (\mu - \frac{a}{2} \cdot \sigma^2)}
 \end{aligned}
 \tag{5.34}$$

In Worten: Der Erwartungswert des Nutzens eines normalverteilten Ergebnisses ist bei exponentieller Nutzenfunktion mit dem Nutzen eines sicheren Ergebnisses in Höhe von $\mu - (a/2) \cdot \sigma^2$ identisch, der Entscheider ist zwischen beiden, der normalverteilten Größe $\tilde{x}$ und dem sicheren Ergebnis $\mu - (a/2) \cdot \sigma^2$, indifferent.

Man bezeichnet das betreffende sichere Ergebnis als *Sicherheitsäquivalent* (vgl. ausführlich Kap. 7). Gemäß (5.34) ist die Maximierung des Erwartungswertes des Nutzens gleichbedeutend mit der Maximierung des Nutzens des Sicherheitsäquivalents: Da der Nutzen des Sicherheitsäquivalents eine streng monoton steigende Funktion des Sicherheitsäquivalents ist, wird dieser Nutzen seinerseits maximiert, indem das Sicherheitsäquivalent maximiert wird. Damit ergibt sich eine äußerst einfache und anschauliche äquivalente Präferenzfunktion und bei gegebenem a eine einfache Entscheidungsregel: Der Entscheider maximiert das Sicherheitsäquivalent

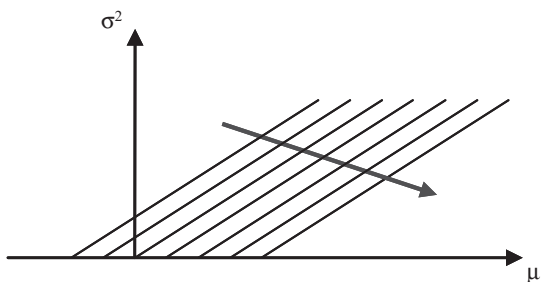
$$\text{SÄ}(\tilde{x}) = \mu - \frac{a}{2} \cdot \sigma^2.
 \tag{5.35}$$

Das Sicherheitsäquivalent lässt sich anschaulich interpretieren: Der Entscheider bewertet das unsichere Ergebnis, indem er vom Erwartungswert einen Abschlag vornimmt, der das Risiko sowie seine Risikoaversion, gemessen als Arrow-Pratt-Maß $AP(x)=a$, berücksichtigt. Konkret nimmt er einen Abschlag in Höhe der Hälfte des Produktes aus seinem Risikoaversionskoeffizienten und der Varianz des Ergebnisses vor.

Da es sich wiederum um eine (μ, σ) -Präferenzfunktion handelt, können Indifferenzkurven in einem entsprechenden Diagramm veranschaulicht werden. Sie sind im (μ, σ^2) -Diagramm linear und haben die Steigung $2/a$; vgl. Abb. 5.14.

Wie bei den Indifferenzkurven der quadratischen Nutzenfunktion in Abb. 5.11 entspricht auch hier der Abszissenwert einer Indifferenzkurve an der Stelle $\sigma^2=0$ dem sogenannten Sicherheitsäquivalent, d. h. demjenigen sicheren Ergebnis, dessen Nutzen dem Niveau der Indifferenzkurve entspricht. Zudem stimmen wie bei quadratischer

Abb. 5.14 Indifferenzkurven bei exponentieller Nutzenfunktion und Normalverteilung



Nutzenfunktion für jedes μ die Steigungen aller Indifferenzkurven mit dem Zweifachen der Risikotoleranz ($t = 1/a$) überein. Da anders als bei quadratischer Nutzenfunktion bei exponentieller Nutzenfunktion die Risikotoleranz jedoch von μ unabhängig ist, sind nun die Steigungen der Indifferenzkurven nicht nur von σ^2 , sondern auch von μ unabhängig; sie verlaufen linear und parallel zueinander. Die Indifferenzkurven lassen sich auch im (μ, σ) -Diagramm darstellen; sie verlaufen streng konkav und haben für alternative Ordinatenwerte jeweils dieselbe Steigung.

5.8 Nutzenfunktionen bei Existenz eines modellexternen Bereichs

5.8.1 Relevanz eines modellexternen Bereichs

Als Zielvariablen betriebswirtschaftlicher Entscheidungsmodelle dienen im Allgemeinen finanzwirtschaftliche Größen wie Gewinne, Überschüsse oder Vermögenswerte. Dabei wird i. d. R. in der Weise vereinfacht, dass im Modell explizit nur diejenigen Ergebnisse erfasst werden, die unmittelbar aus den erwogenen (im Modell erfassten) Alternativen resultieren, und entsprechend die Zustände S_s ($s = 1, 2, \dots, S_{N_S}$) als mögliche Kombinationen von Ausprägungen nur derjenigen entscheidungsrelevanten Daten dargestellt werden, von denen die betreffenden Ergebnisse abhängen. Dies gilt der Einfachheit und Anschaulichkeit halber auch für die Modelle, die in den nachfolgenden Kapiteln behandelt werden. Eine solche Beschränkung des Modellbereichs kann jedoch zu Fehlentscheidungen führen, wenn damit außerhalb des Modells ein „modellexterner“ Bereich entsteht, in dem ebenfalls Ergebnisse wie Gewinne, Überschüsse oder Vermögenswerte erzielt werden. Sie beeinflussen nämlich grundsätzlich selbst dann die Vorteilhaftigkeit der erwogenen Alternativen, wenn diese die Ergebnisse des modellexternen Bereichs gar nicht beeinflussen.

In Kap. 7 wird gezeigt, wie die Bewertung eines unsicheren Überschusses durch weitere Überschüsse im „modellexternen“ Bereich beeinflusst wird, wobei diese Überschüsse explizit in der Bewertung berücksichtigt werden. Eine explizite Berücksichtigung ist aber nicht zwingend. Sind die „modellexternen“ Ergebnisse unabhängig von den im Modellbereich erwogenen Alternativen, so kann ihrem Einfluss *implizit* in der Nutzenfunktion für die Zielgrößen des Modells Rechnung getragen werden, wobei darüber hinaus das Modell nicht modifiziert werden muss. Insbesondere muss auch nicht die Menge der möglichen Umweltzustände erweitert werden (Laux und Schneeweiß 1972). Mit den betreffenden Nutzenfunktionen können die Eigenschaften der (optimalen) Lösung des Modells ebenso analysiert werden wie mit den Nutzenfunktionen ohne den modellexternen Bereich. Wie die betreffenden Nutzenfunktionen ermittelt werden können, wird nachfolgend gezeigt.

5.8.2 Ermittlung einer Nutzenfunktion für Gewinne bei sicheren Vermögen im modellexternen Bereich

Um zu zeigen, wie der modellexterne Bereich implizit über die Nutzenfunktion erfasst werden kann, betrachten wir einen Fall, der für Entscheidungsprobleme in nachfolgenden Kapiteln typisch ist: Wir gehen davon aus, Zielgröße des Modells sei der „Gewinn“ x (oder ein Einzahlungsüberschuss), der im Modellbereich erzielt wird. Er hängt wie üblich davon ab, welcher der Umweltzustände S_s ($s = 1, 2, \dots, S_{N_S}$) eintritt. Im modellexternen Bereich werde das „Vermögen“ V^* (oder ebenfalls ein Einzahlungsüberschuss) erzielt. Zunächst nehmen wir vereinfachend an, dieses Vermögen sei *sicher*, sodass allen im Entscheidungsmodell erfassten Umweltzuständen S_s derselbe V^* -Wert entspricht. Der Nutzenwert eines bestimmten Gewinns ist dann gleich der hiermit bewirkten Änderung des Nutzens des Gesamtvermögens gegenüber dem aktuellen Vermögen V^* .

Bei der Ermittlung der Nutzenfunktion für den Gewinn x kann das konkrete V^* *indirekt* berücksichtigt werden, indem bei der Festlegung der Indifferenzwahrscheinlichkeiten für alternative x -Werte die Konsequenzen berücksichtigt werden, die den jeweils abzuwägenden Gewinnen in Verbindung mit dem Vermögen V^* entsprechen. Die Nutzenfunktion für den Gewinn kann auch bestimmt werden, indem zunächst die Nutzenfunktion für das gesamte Vermögen $V^* + x$ ermittelt wird und dann derjenige Punkt auf dieser Nutzenfunktion als Nullpunkt der Nutzenfunktion für den Gewinn x festgesetzt wird, der dem Vermögen V^* entspricht. Dieses Konzept bietet den Vorteil, dass die Abhängigkeit der Nutzenfunktion für x von V^* anschaulich gezeigt werden kann.

Zur Erläuterung bezeichnen wir die über das Gesamtvermögen $V^* + x$ definierte Nutzenfunktion mit $U^*(V^* + x)$ und die nur über den „Gewinn“ x definierte Nutzenfunktion wie in (5.2) mit $U(x)$. $U(x)$ wird nun so ermittelt, dass gilt:

$$U(x) = U^*(V^* + x) - U^*(V^*).$$

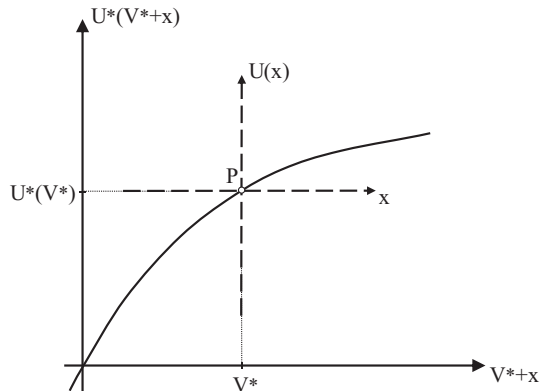
Der Nutzen eines Gewinns x ist also gleich derjenigen Änderung des Nutzens des Gesamtvermögens, der diesem Gewinn entspricht. Wenn, wie angenommen, V^* deterministisch ist, gilt dann für den Erwartungswert des Nutzens des Gewinns:

$$E[U(\tilde{x})] = E[U^*(V^* + \tilde{x})] - U^*(V^*).$$

Mit der Maximierung des Erwartungswertes des Nutzens des Gewinns, $E[U(\tilde{x})]$, wird damit gleich auch der Erwartungswert des Nutzens des Gesamtvermögens, $E[U^*(V^* + \tilde{x})]$, maximiert.

Die Nutzenfunktion $U(x)$ lässt sich grafisch einfach ermitteln. Abb. 5.15 verdeutlicht das Vorgehen. Man erhält den Graph der Nutzenfunktion $U(x) = U^*(V^* + x) - U^*(V^*)$, indem derjenige Punkt P auf dem Graph der Nutzenfunktion $U^*(V^* + x)$ als Nullpunkt der Nutzenfunktion $U(x)$ gewählt wird, der dem Vermögen V^* entspricht; es entsteht das in der Abb. 5.15 gestrichelt dargestellte Koordinatensystem.

Abb. 5.15 Herleitung der Nutzenfunktion $U(x)$ aus der Nutzenfunktion $U^*(V^* + x)$



Die Gestalt der Nutzenfunktion $U(x)$ hängt von der der Nutzenfunktion $U^*(V^* + x)$ und der Lage von P und somit dem aktuellen Vermögen V^* ab. So ist bei streng konkaver Nutzenfunktion U^* wie in Abb. 5.15 die Nutzenfunktion $U(x)$ umso flacher, je höher V^* ist. Nur bei linearer Nutzenfunktion U^* wäre $U(x)$ von V^* unabhängig.

5.8.3 Ermittlung einer Nutzenfunktion für Gewinne bei stochastischem Vermögen im modellexternen Bereich

Die Darstellungen sollen nun auf den Fall erweitert werden, dass auch das Vermögen V^* unsicher ist. Auch in dieser Situation hat ein Gewinn x keinen „Nutzen an sich“: Sein Nutzen ergibt sich wieder erst in Verbindung mit dem Vermögen V^* und hängt davon ab, in welchem Zustand er erzielt wird und welche Wahrscheinlichkeitsverteilung über V^* ihm entspricht. Verschiedene Wahrscheinlichkeitsverteilungen bezüglich x mit denselben möglichen Gewinnen und Eintrittswahrscheinlichkeiten können sehr unterschiedliche Erwartungswerte des Nutzens aufweisen, je nachdem, wie die Gewinne über die Zustände verteilt sind.

Ist für jeden Zustand S_s ($s=1,2,\dots,S_{N_S}$) das Vermögen V^* jeweils deterministisch (einwertig), so kann die Nutzenfunktion $U_s(x)$ für den Gewinn im Zustand S_s ($s=1,2,\dots,S_{N_S}$) in derselben Weise ermittelt werden, wie dies im vorangegangenen Abschnitt für ein zustandsunabhängiges (sicheres) Vermögen V^* beschrieben wurde. Da nun aber jeweils ein besonderer Vermögenswert V_s^* relevant ist, unterscheiden sich die Nutzenfunktionen von Zustand zu Zustand: Die Nutzenfunktion über den Gewinn wird *zustandsabhängig*.

Dass der im Modell berücksichtigte Gewinn und das modellexterne Vermögen durch dieselben Umweltzustände determiniert werden, ist nicht selbstverständlich. Beispielsweise berücksichtige ein Entscheider im Modell weder einen möglichen Lottogewinn, noch den Wert einer (privaten) Immobilie. Sein modellexternes Vermögen V^* wird dann sowohl vom Ergebnis der nächsten Lottoziehung als auch von der Entwicklung des

Immobilienwertes beeinflusst, sodass für sein privates Vermögen Umweltentwicklungen relevant sind, die er nicht oder nur unvollständig in seinem Modell abgebildet hat. Allgemein werden sich also die im Modell berücksichtigten Umweltzustände S_s von den im modellexternen Bereich relevanten Zuständen unterscheiden.

Wenn die Eintrittswahrscheinlichkeiten der möglichen V^* -Werte vom eintretenden Umweltzustand S_s ($s=1,2,\dots,S_{N_S}$) unabhängig und somit $\tilde{x}$ und $\tilde{V}^*$ voneinander stochastisch unabhängig sind, ist die Nutzenfunktion für den Gewinn wie bei sicherem V^* zustandsunabhängig. Der Nutzen $U(x)$ eines Gewinns x ist dann für jeden Zustand jeweils gleich der Änderung des Erwartungswertes des Nutzens des Gesamtvermögens, das diesem Gewinn entspricht.

Man erhält dann den Graph der entsprechenden Nutzenfunktion $U(x)$, indem für jedes mögliche Vermögen V^* , wie für Abb. 5.15 beschrieben wurde, jeweils der Graph der zugehörigen Gewinn-Nutzenfunktion bestimmt wird, jeweils deren Ordinatenwerte mit der Wahrscheinlichkeit des betreffenden Vermögens V^* gewichtet wird und dann die gewichteten Graphen für alle möglichen Vermögenswerte vertikal addiert werden. Im Prinzip handelt es sich bei den Nutzenwerten der Nutzenfunktion $U(x)$ für Gewinne um Erwartungswerte des Nutzens; der Erwartungswertoperator bezieht sich dabei auf die möglichen Vermögenswerte.

Sind dagegen $\tilde{x}$ und $\tilde{V}^*$ voneinander *stochastisch abhängig*, so sind die Wahrscheinlichkeiten der möglichen Vermögenswerte V^* davon abhängig, welcher Zustand S_s eintritt; es besteht Risikoverbund. Die einem Gewinn x entsprechende Wahrscheinlichkeitsverteilung über die Änderung des Nutzens des Gesamtvermögens hängt dann davon ab, in welchem Zustand dieser Gewinn erzielt wird.

Diesem Sachverhalt kann Rechnung getragen werden, indem für jeden möglichen Zustand S_s ($s=1,2,\dots,S_{N_S}$) eine besondere Nutzenfunktion $U_s(x)$ für den Gewinn berücksichtigt wird. Die einem Zustand S_s entsprechende Nutzenfunktion kann analog ermittelt werden wie die zustandsunabhängige Nutzenfunktion $U(x)$ bei stochastischer Unabhängigkeit zwischen $\tilde{x}$ und $\tilde{V}^*$. An die Stelle der unbedingten Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Vermögenswerte V^* treten nun die dem Zustand S_s entsprechenden bedingten Wahrscheinlichkeiten.

Die Steigungen der einem Zustand S_s entsprechenden Nutzenfunktion $U_s(x)$ sind nun für alternative x -Werte tendenziell umso höher (bzw. niedriger), je höher die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass V^* bei Eintreten dieses Zustandes relativ niedrig (bzw. hoch) ist. Bei zustandsabhängiger Nutzenfunktion hängt der Erwartungswert des Nutzens von $\tilde{x}$ davon ab, wie x über die Zustände verteilt ist. Damit wird implizit der stochastischen Abhängigkeit zwischen $\tilde{V}^*$ und $\tilde{x}$ Rechnung getragen. Bei gegebener Wahrscheinlichkeitsverteilung von $\tilde{x}$ ist $E[U(\tilde{x})]$ umso höher, je größer die Tendenz ist, dass x in jenen Zuständen relativ hoch (bzw. niedrig) ist, für die die Wahrscheinlichkeiten niedriger (bzw. hoher) Vermögenswerte V^* relativ hoch sind.

Der Einfachheit halber wird in den nachfolgenden Kapiteln im Allgemeinen davon ausgegangen, die Nutzenfunktionen der maßgeblichen Zielgrößen seien zustandsunabhängig. Jedoch lassen sich jeweils auch zustandsabhängige Nutzenfunktionen erfassen, ohne dass darüber hinaus die Modellstruktur verändert werden müsste.

5.9 Zusammenfassung

- Das Bernoulli-Prinzip ist das wichtigste normative Entscheidungskriterium bei Risiko. Die darauf beruhende normative Theorie rationalen Entscheidens wird auch Erwartungsnutzentheorie (Expected Utility Theory) genannt.
- Nach dem Bernoulli-Prinzip entspricht der Präferenzwert einer Alternative dem Erwartungswert des Nutzens ihrer Ergebnisse: $\Phi(A_a) = E[U(\tilde{x}_a)]$. Gewählt wird die Alternative mit dem höchsten Erwartungswert des Nutzens.
- Die Alternativenbewertung geschieht in zwei Schritten: Zunächst ordnet der Entscheider gemäß seiner Nutzenfunktion jedem Ergebnis einen Nutzenwert zu, danach ermittelt er den Erwartungswert des Nutzens der Alternative.
- Der Nutzenwert eines Ergebnisses wird in einem hypothetischen Vergleich ermittelt (Bernoulli-Befragung): Der Entscheider wird vor die Wahl gestellt zwischen dem (sicheren) Ergebnis einerseits und einer Lotterie mit nur zwei möglichen Ergebnissen andererseits. Er muss angeben, für welche hypothetische Gewinnwahrscheinlichkeit in der Lotterie er gerade indifferent ist. Diese Indifferenzwahrscheinlichkeit ist der Nutzenwert für das Ergebnis.
- Die subjektiven Risiko- und Präferenzvorstellungen des Entscheiders bestimmen die Indifferenzwahrscheinlichkeiten und damit die Nutzenfunktion des Entscheiders. Ist der Entscheider risikoavers, so ist seine Nutzenfunktion konkav, ist er risikofreudig, so ist sie konvex; ist er risikoneutral, so ist seine Nutzenfunktion linear.
- Mithilfe des Arrow-Pratt-Maßes $AP(x) = -U''(x)/U'(x)$ kann die Risikoaversion eines Entscheiders gemessen werden. Da sich die Risikoaversion mit dem Niveau der Ergebnisse verändern kann, spricht man von konstanter, steigender oder sinkender Risikoaversion.
- Die Bedeutung des Bernoulli-Prinzips beruht auf seiner axiomatischen Fundierung: Das Entscheidungsprinzip wird nicht ad hoc aufgestellt, sondern aus Axiomen, d. h. plausiblen Anforderungen an Rationalverhalten, abgeleitet. Zu den Axiomen zählen in dem Axiomensystem von Luce und Raiffa neben dem grundlegenden Ordnungs- und Transitivitätsaxiom das Stetigkeitsaxiom, das Reduktionsaxiom, das Substitutionsaxiom und das Monotonieaxiom.
- Das Bernoulli-Prinzip berücksichtigt bei der Bewertung einer Alternative anders als die μ -Regel und das (μ, σ) -Prinzip nicht nur wenige Parameter der Ergebnisverteilung (μ und σ), sondern explizit jedes mögliche Ergebnis. Beide klassischen Entscheidungskriterien, die anders als das Bernoulli-Prinzip nicht axiomatisch fundiert sind, stehen nur unter bestimmten Bedingungen im Einklang mit dem Bernoulli-Prinzip.
- Werden im Entscheidungsmodell nur diejenigen Ergebnisse berücksichtigt, die aus den erwogenen Alternativen resultieren, so kann es zu Fehlentscheidungen kommen, wenn im modellexternen Bereich ebenfalls Ergebnisse erzielt werden und ein Bewertungs- und/oder Risikoverbund besteht. Dieser Zusammenhang kann über zustandsabhängige Nutzenfunktionen berücksichtigt werden.

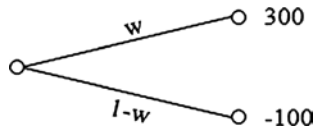
Ergänzende und vertiefende Literatur

Bamberg et al. (2012, Kap. 4); Bamberg und Trost (1996); Bitz (1981); Coenenberg und Kleine-Doepke (1975); Dyckhoff (1993); Eisenführ et al. (2010, Kap. 9), Engelkamp (1980); Hax (1974, S. 36–69); Herstein und Milnor (1953); Laux und Schneeweiß (1972); Luce und Raiffa (1957, S. 12–38 und 275–326); Machina (1987); Mag (1990); Markowitz (1959, S. 205–242); v. Neumann und Morgenstern (1944); Raiffa (1973, S. 71–156 und 328–332); Rommelfanger und Eickemeier (2002); Samuelson (1977); Schneeweiß, H. (1963, 1967a, 1967b, 1968a, 1968b); Weber (1987); Wilhelm (1986).

5.10 Übungen

Aufgabe 5.1

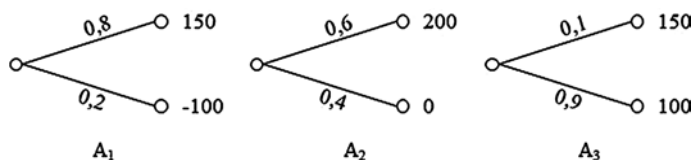
Einem Entscheider wird folgende unsichere Alternative A vorgelegt:



Dem Entscheider wird nun zusätzlich eine Liste mit Ergebnissen vorgelegt, die er mit Sicherheit erhalten würde. Er wird gebeten die Wahrscheinlichkeit w^* anzugeben, bei der er jeweils indifferent ist zwischen dem sicheren Ergebnis x und der unsicheren Alternative A. Die Angaben des Entscheiders sind der folgenden Tabelle zu entnehmen.

x	0	50	100	150	200	250
w^*	0,50	0,61	0,71	0,79	0,87	0,94

- Wie hoch ist der Nutzen U des Entscheiders für das sichere Ergebnis von 200, wenn davon ausgegangen wird, dass $U(-100)=0$ und $U(300)=1$ ist?
- Leiten Sie aus den angegebenen Indifferenzwahrscheinlichkeiten die Nutzenfunktion des Entscheiders grafisch ab, indem Sie die angegebenen Werte zu einer Kurve verbinden. Welche Risikoeinstellung hat der Entscheider?
- Versuchen Sie, die Nutzenfunktion durch eine mathematische Funktion anzunähern. Verwenden Sie dafür den Funktionstyp $U(x) = a \cdot (100 + x)^b$ und suchen Sie nach denjenigen Parameterwerten a und b , für die die Nutzenfunktion möglichst genau die tatsächlichen Nutzenwerte des Entscheiders wiedergibt.
- Dem Entscheider werden folgende Alternativen zur Wahl gestellt:



Bestimmen Sie die Präferenzwerte der einzelnen Alternativen.

Aufgabe 5.2

Gegeben ist folgende Ergebnismatrix:

	$w(S_1)=0,25$ S_1	$w(S_2)=0,5$ S_2	$w(S_3)=0,25$ S_3
A_1	25	25	25
A_2	15	20	55
A_3	5	20	75

Betrachten sie fünf Bernoulli-rationale Entscheider A bis E mit den Nutzenfunktionen:
 $U_A(x) = x$, $U_B(x) = 1 - e^{-0,02 \cdot x}$, $U_C(x) = \sqrt{x}$, $U_D(x) = 3 \cdot x - 0,01 \cdot x^2$ und $U_E(x) = x^{3/2}$.

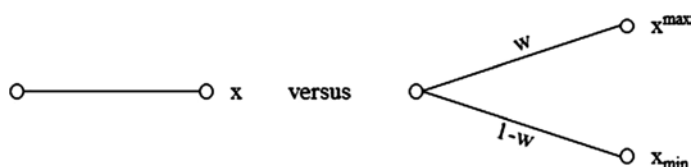
- Skizzieren Sie jede der fünf Nutzenfunktionen und erklären Sie, welche Risikoeinstellung vorliegt.
- Bestimmen Sie für jeden Entscheider A bis E, welche Alternative er bevorzugt. Interpretieren Sie die Unterschiede in den Entscheidungen.
- Normieren Sie die Nutzenfunktion des Entscheiders C so, dass alle Nutzenwerte zwischen 0 und 1 liegen und daher als Indifferenzwahrscheinlichkeiten verstanden werden können. Interpretieren Sie diese Indifferenzwahrscheinlichkeiten.

Aufgabe 5.3

Ein Entscheider gibt im Rahmen einer Bernoulli-Befragung folgende Indifferenzwahrscheinlichkeiten an:

x	0	200	400	600	800	1400
w^*	0	0,3	0,4	0,5	0,75	1

Betrachten Sie nun die folgende Wahlsituation:



Es geht um die Wahl zwischen einem sicheren Ergebnis x und einer Lotterie, bei der der Entscheider mit der Wahrscheinlichkeit w den Gewinn $x^{\max}$ und mit der Gegenwahrscheinlichkeit $1-w$ den Gewinn $x_{\min}$ erreicht. In der folgenden Tabelle sind unterschiedliche Werte für x , w , $x^{\max}$ und $x_{\min}$ abgetragen:

Wahlsituation	x	w	$x^{\max}$	$x_{\min}$
i	200	1/7	1.400	0
ii	400	2/7	1.400	0
iii	600	3/7	1.400	0
iv	800	4/7	1.400	0
v	400	1/2	600	200
vi	600	1/2	800	200

In Situation i geht es also um die Wahl zwischen dem sicheren Ergebnis 200 und einer Lotterie, bei der der Entscheider 1.400 mit der Wahrscheinlichkeit 1/7 gewinnt, usw.

- Prüfen Sie auf der Basis der Tabelle der Indifferenzwahrscheinlichkeiten, welche Wahl der der Entscheider in den Situationen i bis iv treffen würde und welche Risikoeinstellung er in diesen Wahlsituationen zeigt.
- Prüfen Sie nun auch für die Wahlsituationen v und vi, welche Wahl der Entscheider treffen würde. Zeigt der Entscheider durchgängig die gleiche Risikoeinstellung?

Aufgabe 5.4

Gegeben ist dieselbe Ergebnismatrix wie in Aufgabe 5.2:

	$w(S_1)=0,25$ S_1	$w(S_2)=0,5$ S_2	$w(S_3)=0,25$ S_3
A_1	25	25	25
A_2	15	20	55
A_3	5	20	75

Betrachten Sie die vier Bernoulli-rationalen Entscheider A, B, C und D mit den Nutzenfunktionen: $U_A(x) = x$, $U_B(x) = 1 - e^{-0,02 \cdot x}$, $U_C(x) = \sqrt{x}$ und $U_D(x) = 3 \cdot x - 0,01 \cdot x^2$.

- Bestimmen Sie die Arrow-Pratt-Maße für absolute und relative Risikoaversion für alle vier Nutzenfunktionen.
- Bestimmen Sie für jeden Entscheider A bis D, welche Alternative er bevorzugt. [Dieser Aufgabenteil entfällt, wenn Sie die Aufgabe 5.2b bereits bearbeitet haben.]

- c) Addieren Sie nun zu jedem Ergebnis den Betrag 25 (Aus 25 wird 50, aus 15 wird 40 usw.). Bestimmen Sie für jeden der vier Entscheider, welche Alternative er jeweils bevorzugt.
- d) Verdoppeln Sie nun jedes Ergebnis (Aus 25 wird 50, aus 15 wird 30 usw.). Bestimmen Sie für jeden der vier Entscheider, welche Alternative er jeweils bevorzugt.
- e) Vergleichen Sie systematisch die Ergebnisse der Aufgabenteile b, c und d und erklären Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede in den von den Entscheidern jeweils bevorzugten Alternativen mithilfe Ihrer Ergebnisse aus Aufgabenteil a.

Aufgabe 5.5

Betrachten Sie das folgende „Newsboy Problem“: Ein Kioskbesitzer (oder: Zeitungsjunge, also Newsboy) muss jeweils am Vorabend des kommenden Tages die Anzahl y der Tageszeitungen bestellen, die ihm am kommenden Morgen geliefert werden. Wie viele Zeitungen er wird verkaufen können, weiß er zum Zeitpunkt seiner Bestellung nicht mit Sicherheit. Er betrachtet den Absatz (in Stück) daher als Zufallsvariable x und geht vereinfachend davon aus, dass x mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit die Werte 80, 90, 100, 110 und 120 annehmen kann. Er verkauft die Tageszeitungen für 3 EUR und bezieht sie zu Stückkosten von 1,50 EUR.

- a) Stellen Sie das Entscheidungsproblem des Kioskbesitzers im Grundmodell der Entscheidungstheorie dar.
- b) Bestimmen Sie die optimale Bestellmenge unter der Annahme, dass der Kioskbesitzer risikoneutral ist und daher den erwarteten Gewinn maximiert.
- c) Erläutern Sie, welche Kosten dem Kioskbesitzer entstehen, wenn er zu viel oder zu wenig bestellt. Interpretieren Sie auf Basis dieser Erläuterung die Lösung aus Aufgabenteil b.
- d) Gehen Sie nun davon aus, der Kioskbesitzer sei Erwartungsnutzenmaximierer und orientierte sich an der Nutzenfunktion $U(G) = 1 - e^{-0,02 \cdot G}$ (mit G dem Gewinn). Bestimmen Sie erneut die optimale Bestellmenge. Vergleichen Sie die optimale Bestellmenge mit der aus Aufgabenteil b. (Wie) können Sie das Ergebnis verallgemeinern?

Aufgabe 5.6

Ein Investor hat die Möglichkeit, sein Vermögen auf ein riskantes Wertpapier (WP_1) und eine sichere Geldanlage (WP_2) aufzuteilen. Das riskante Wertpapier erbringt über die betrachtete Periode mit gleicher Wahrscheinlichkeit 24 % oder 0 % Rendite, die sichere Geldanlage 8 % Rendite. Der Investor orientiert sich am Erwartungswert des Nutzens mit der Nutzenfunktion $U(x) = 1 - e^{-0,0004 \cdot x}$, mit x seinem Vermögen am Ende der Periode.

- a) Bestimmen Sie die Arrow-Pratt-Maße für absolute und relative Risikoaversion für die angegebene Nutzenfunktion.
- b) Gehen Sie davon aus, dass der Investor 10.000 EUR investiert. Wie viel Prozent dieses Geldbetrages investiert er in das riskante Wertpapier, wie viel Prozent legt er sicher an? Bestimmen Sie die Lösung näherungsweise, indem Sie nur Anteile in 10 %-Schritten betrachten (also 0 %, 10 %, 20 %, ..., 90 %, 100 % in das riskante Wertpapier).
- c) Gehen Sie nun davon aus, die Renditen betragen nicht wie angegeben 24 % und 0 % für WP1 und 8 % für WP2, sondern 28 % und 4 % für WP1 und 12 % für WP2. Wiederholen Sie Aufgabenteil a) und erläutern Sie das Ergebnis.
- d) Gehen Sie nun wieder von den ursprünglichen Angaben bezüglich der Renditen aus. Der Investor könne nun 25.000 EUR investieren. Wiederholen Sie Aufgabenteil a) und erläutern Sie das Ergebnis.
- e) Formulieren Sie das Entscheidungsproblem des Investors nun allgemein für einen Anlagebetrag in Höhe von B und Renditen in Höhe von r^h und r_n des riskanten sowie r des sicheren Wertpapiers. Bestimmen Sie allgemein die Optimallösung und setzen Sie danach die Parameterwerte der Aufgabenteile b) bis d) ein, um die konkreten Lösungen für diese drei Fälle zu bestimmen.
- f) Wiederholen Sie Aufgabenteil e) für einen Investor mit Nutzenfunktion $U(x) = x^{0.5}$. Berechnen Sie konkrete Lösungen für Renditen $r^h = 32$ %, $r_n = -20$ %, $r = 4$ % und die beiden Fälle, dass entweder 10.000 EUR oder 20.000 EUR investiert werden.

5.11 Lösungshinweise

Aufgabe 5.1

a) $U(200) = 0,87$. — b) Die Nutzenfunktion ist konkav. $\Rightarrow$ Risikoaversion. — c) Sehr gute Näherung für $a = 0,05$ und $b = 0,5$. — d) $\Phi(A_1) = 0,632$, $\Phi(A_2) = 0,722$ und $\Phi(A_3) = 0,718$.

Aufgabe 5.2

a) Lineare Funktion U_A , Risikoneutralität; streng monoton steigende, konkave Funktionen U_B und U_C , Risikoaversion; umgekehrte Parabel U_D , damit nur sinnvoll als Nutzenfunktion interpretierbar bis zum Scheitelpunkt $x = 150$, bis dahin konkav, Risikoaversion; konvex steigende Funktion U_E , Risikofreude. — b) A wählt A_3 , B wählt A_2 , C wählt A_2 , D wählt A_3 , E wählt A_3 . — c) Normierte Nutzenfunktion: $U_C(x) = (x/75)^{0.5}$.

Aufgabe 5.3

a) Entscheider zieht in allen Situationen i bis iv das sichere Ergebnis vor $\Rightarrow$ Risikoaversion. — b) Der Entscheider ist in Situation v indifferent ($\Rightarrow$ Risikoneutralität) und wählt in Situation vi die Lotterie ($\Rightarrow$ Risikofreude). Damit kein durchgängig risikoaverses Entscheidungsverhalten.

Aufgabe 5.4

a) $AP_A(x)=0$, $r_A(x)=0$; $AP_B(x)=0,02$, $r_B(x)=0,02 \cdot x$; $AP_C(x)=1/(2 \cdot x)$, $r_C(x)=1/2$; $AP_D(x)=1/(150-x)$, $r_D(x)=x/(150-x)$ — **b)** siehe Aufgabe 5.2 b) — **c)** A wählt A_3 , B wählt A_2 , C wählt A_3 , D wählt A_3 . — **d)** A wählt A_3 , B wählt A_1 , C wählt A_2 , D wählt A_1 , E wählt A_3 . — **e)** Risikoneutralität bei A: Die optimale Alternative bleibt dieselbe. Konstante absolute Risikoaversion bei B: Die optimale Alternative bleibt dieselbe, wenn jedes Ergebnis um 25 erhöht wird, aber nicht bei Verdoppelung. Konstante relative Risikoaversion bei C: Die optimale Alternative bleibt dieselbe, wenn verdoppelt wird, aber nicht, wenn jedes Ergebnis um 25 erhöht wird. Zunehmende Risikoaversion bei D: Der Entscheider tendiert in beiden Fällen zu weniger Risiko.

Aufgabe 5.5

a) Alternativen sind die möglichen Bestellmengen, d. h. A_1 =Bestellmenge 80, ..., A_5 =Bestellmenge 120. Zustände sind die Verkaufszahlen, $S_1=80$, ..., $S_5=120$, jeweils gleich wahrscheinlich. — **b)** optimale Bestellmenge=100, erwarteter Gewinn=132. — **c)** Zwei mögliche Fehler und Kosten daraus: Zu viel bestellt $\rightarrow 1,5$ pagatorische Kosten je Stück. Zu wenig bestellt: $3-1,5=1,5$ Opportunitätskosten (entgangener Gewinn) je Stück. Optimale Bestellmenge wägt die Kosten und die Wahrscheinlichkeiten der Fehler gegeneinander ab. Hier gleiche Kosten, daher mittlere Bestellmenge und so gleich wahrscheinliche Fehler. — **d)** Optimale Bestellmenge nun 90; bei Risikoaversion besteht stets die Tendenz zu einer geringeren Bestellmenge.

Aufgabe 5.6

a) $AP(x)=0,001$, $r(x)=0,001 \cdot x$. — **b)** Mischung riskant:sicher=70:30. — **c)** Anteil bleibt gleich wegen konstanter absoluter Risikoaversion. — **d)** Mischung nun 30:70, Anteil des riskanten Wertpapiers sinkt wegen zunehmender relativer Risikoaversion. — **e)** Mit Anteil α =Anlage in das riskante Wertpapier und $(1-\alpha)$ =Anlage zum sicheren Zins ergibt sich das Vermögen des Investors zu $x_h=\alpha \cdot B \cdot (1+r_h)+(1-\alpha) \cdot B \cdot (1+r)$ bei hoher Rendite r_h und $x_n=\alpha \cdot B \cdot (1+r_n)+(1-\alpha) \cdot B \cdot (1+r)$ bei niedriger Rendite r_n des riskanten Wertpapiers. Damit $E[U(x)]=0,5 \cdot U(x_h)+0,5 \cdot U(x_n)$. Bedingung erster Ordnung für ein Maximum: $dE[U(x)]/d\alpha=0$. Umformungen ergeben $\alpha=\ln((r_h-r)/(r-r_n))/(a \cdot B \cdot (r_h-r_n))$. Aufgabenteil b): Für $B=10.000$, $a=0,0004$, $r_h=0,24$, $r_n=0$ und $r=0,08$ ergibt sich $\alpha=0,7220$, d. h. er investiert 7.220 EUR in das riskante Wertpapier und legt 2.780 EUR sicher an. Aufgabenteil c) α bleibt gleich. Aufgabenteil d): Für $B=25.000$ ergibt sich $\alpha=0,2888$. — **f)** Aufgabenteil a): $AP(x)=1/(2 \cdot x)$, $r(x)=1/2$. Allgemeine Lösung für α : $\alpha=(\omega-1) \cdot r/(r^h-r-\omega \cdot (r_n-r))$ mit $\omega=((r^h-r)/(r_n-r))^2$. Für beide Investitionsbeträge ergibt sich $\alpha=0,619$ wegen konstanter relativer Risikoaversion.

Literatur

- Albrecht, P.: Einige Bemerkungen zur Kritik am Bernoulli-Prinzip. *Z. Betriebswirtsch.* **52**, 641–665 (1982)
- Arrow, K.J.: *Essays in the Theory of Risk-Bearing*. North-Holland, Amsterdam (1970)
- Bamberg, G., Coenenberg, A.G., Krapp, M.: *Betriebswirtschaftliche Entscheidungslehre*, 15. Aufl. München (2012)
- Bamberg, G., Trost, R.: Entscheidungen unter Risiko. Empirische Evidenz und Praktikabilität. *Betriebswirtsch. Forsch. Praxis* **48**, 640–662 (1996)
- Bernoulli, D.: *Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis. Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* 5, S. 175–192 (1738). (Dt. Übersetzung von Alfred Pringsheim: *Die Grundlagen der modernen Wertlehre: Daniel Bernoulli, Versuch einer neuen Theorie der Wertbestimmung von Glücksfällen*. Leipzig 1896)
- Bitz, M.: *Entscheidungstheorie*. München (1981)
- Bitz, M.: Zur Diskussion um die präferenztheoretischen Implikationen des Bernoulli-Prinzips. *Z. Betriebswirtsch.* **54**, 1077–1089 (1984)
- Bitz, M., Rogusch, M.: Risiko-Nutzen, Geldnutzen und Risikoeinstellung. Zur Diskussion um das Bernoulli-Prinzip. *Z. Betriebswirtsch.* **46**, 853–868 (1976)
- Coenenberg, A.G., Kleine-Doecke, R.: Zur Abbildung der Risikopräferenz durch Nutzenfunktionen. Stellungnahme zur Kritik Jacobs und Lebers am Bernoulli-Prinzip. *Z. Betriebswirtsch.* **45**, 663–665 (1975)
- Dyckhoff, H.: Ordinale versus kardinale Messung beim Bernoulli-Prinzip. Eine Analogiebetrachtung von Risiko- und Zeitpräferenzen. *OR Spektrum* **15**, 139–146 (1993)
- Engelkamp, P.: *Entscheidungsverhalten unter Risikobedingungen: Die Erwartungsnutzentheorie*. Freiburg im Breisgau (1980)
- Eisenführ, F., Weber, M., Langer, T.: *Rationales Entscheiden*. 5. Aufl. Berlin (2010)
- Franke, G., Hax, H.: *Finanzwirtschaft des Unternehmens und Kapitalmarkt*. 6. Aufl. Springer, Berlin (2009)
- Freund, R.: The introduction of risk into a programming model. *Econometrica* **5**, 253–256 (1956)
- Friedman, M., Savage, L.J.: The utility analysis of choices involving risk. *J. Polit. Econ.* **56**, 279–304 (1948)
- Hax, H.: *Entscheidungsmodelle in der Unternehmung. Einführung in Operations Research*, Reinbek (1974)
- Herstein, I.N., Milnor, J.: An axiomatic approach to measurable utility. *Econometrica* **21**, 291–297 (1953)
- Ingersoll, J.E.: *Theory of Financial Decision Making*. Totowa (1987)
- Jacob, H., Leber, W.: Bernoulli-Prinzip und rationale Entscheidung bei Unsicherheit. *Z. Betriebswirtsch.* **46**, 177–204 (1976)
- Krelle, W.: Einige Bemerkungen zu Jacobs und Lebers “Rationaler Entscheidung bei Unsicherheit”. *Z. Betriebswirtsch.* **46**, 522–527 (1976)
- Kürsten, W.: Präferenzmessung, Kardinalität und sinnmachende Aussagen. *Z. Betriebswirtsch.* **62**, 459–477 (1992a)
- Kürsten, W.: Meßtheorie. Axiomatik und Bernoulli-Prinzip. *Z. Betriebswirtsch.* **62**, 485–488 (1992b)
- Laux, H., Schneeweiß, H.: On the onassis problem. *Theor. Decis.* **2**, 353–370 (1972)
- Leber, W.: Zur Rationalität von Entscheidungskriterien bei Unsicherheit. *Z. Betriebswirtsch.* **45**, 493–496 (1975)
- Luce, R.D., Raiffa, H.: *Games and Decisions*. New York (1957)

- Machina, M.J.: Choice under uncertainty: Problems and unsolved. *Econ. Perspect.* **1**, 121–154 (1987)
- Mag, W.: Grundzüge der Entscheidungstheorie. Vahlen, München (1990)
- Markowitz, H.M.: The utility of wealth. *J. Polit. Econ.* **60**, 151–158 (1952)
- Markowitz, H.M.: Portfolio Selection. New York (1959)
- Menger, K.: Das Unsicherheitsmoment in der Wertlehre. Betrachtungen im Anschluß an das sogenannte Petersburger Spiel. *Z. Nationalökon.* **5**, 459–485 (1934)
- v. Neumann, J., Morgenstern, O.: Theory of Games and Economic Behavior. Princeton, (1944). (Dt. Übersetzung: Spieltheorie und wirtschaftliches Verhalten. 3. Aufl. Würzburg (1961))
- Pratt, J.W.: Risk aversion in the small and in the large. *Econometrica* **32**, 122–136 (1964)
- Raiffa, H.: Einführung in die Entscheidungstheorie. München 1973 (Titel der engl. Originalausgabe: Decision Analysis. Reading 1968)
- Reilly, R.J.: The Markowitz utility function and some experimental evidence for small speculative risks. *J. Risk Insur.* **53**, 724–733 (1986)
- Rommelfanger, H.R., Eickemeier, S.H.: Entscheidungstheorie – Klassische Konzepte und Fuzzy-Erweiterungen. Berlin (2002)
- Samuelson, P.A.: St. Petersburg paradoxes: Defanged, dissected, and historically described. *J. Econ. Literatur.* **15**, 24–55 (1977)
- Schildbach, T.: Zur Diskussion über das Bernoulli-Prinzip in Deutschland und im Ausland. *Z. Betriebswirtsch.* **59**, 766–778 (1989)
- Schildbach, T., Ewert, R.: Bernoulli-Prinzip und Risikopräferenz. *Z. Betriebswirtsch.* **54**, 891–893 (1984)
- Schneeweiß, H.: Nutzenaxiomatik und Theorie des Messens. *Statistische Hefte* **4**, 178–220 (1963)
- Schneeweiß, H.: Entscheidungskriterien bei Risiko. Berlin (1967a)
- Schneeweiß, H.: Theorie der rationalen Entscheidungskriterien bei Ungewißheit. *Ind. Organ.* **36**, 501–507 (1967b)
- Schneeweiß, H.: Die Unverträglichkeit von (μ, σ) -Prinzip und Dominanzprinzip. *Unternehmensforschung* **12**, 180–184 (1968a)
- Schneeweiß, H.: Die angebliche Ausschaltung des Risikos durch das Gesetz der großen Zahlen. *Unternehmensforschung* **12**, 96–105 (1968b)
- Vetschera, R.: Welche “Risikopräferenzen” berücksichtigt das Bernoulli-Prinzip? *Z. Betriebswirtsch.* **54**, 401–407 (1984)
- Walter, W.: Analysis I. Springer, Berlin (2009)
- Weber, M.: Decision making with incomplete information. *Eur. J. Oper. Res.* **28**, 44–57 (1987)
- Wilhelm, J.: Zum Verhältnis von Höhenpräferenz und Risikopräferenz. *Z. Betriebswirtsch. Forsch.* **38**, 467–492 (1986)

Deskriptive Entscheidungstheorie bei Risiko

6

6.1 Problemstellung und Aufbau

Im Vordergrund dieses Buches steht die präskriptive Entscheidungstheorie, die zeigen will, wie Entscheidungen „rational“ getroffen werden können. Dazu entwickelt sie Entscheidungsmodelle und leitet aus Rationalitätsprinzipien Entscheidungskriterien ab, die Alternativenvergleiche und damit optimale Entscheidungen ermöglichen. Beispiel dafür ist die Erwartungsnutzentheorie (das Bernoulli-Prinzip), die auf Axiomen rationalen Verhaltens beruht, aus denen das Entscheidungskriterium „Maximierung des Erwartungswertes des Nutzens“ folgt. Ein Entscheider, der rational handeln will und die Axiome des Bernoulli-Prinzips als vernünftige Anforderungen an sein eigenes Verhalten akzeptiert, sollte nach dem Bernoulli-Prinzip entscheiden.

Gleichwohl kann ein Entscheider, der die Axiome ablehnt, nicht objektiv mit wissenschaftlichen Methoden als „unvernünftig“ eingestuft werden. Entsprechend können Entscheidungen, die nicht mit dem Bernoulli-Prinzip vereinbar sind, nicht einfach als „unvernünftig“ bewertet werden. Die Definition „rationalen Entscheidens“ stellt vielmehr eine Sprachkonvention dar: Wenn ein Verhalten als irrational bezeichnet wird, so ist zunächst nur gemeint, dass es aus welchen Gründen auch immer nicht im Einklang mit dem Bernoulli-Prinzip steht.

Verstöße tatsächlicher Entscheidungen gegen das Bernoulli-Prinzip können zufällig sein, sie können aber auch in dem Sinne systematische Verstöße sein, dass die betreffenden Entscheider trotzdem klare und konsistente Präferenzen in alternativen Entscheidungssituationen bilden. Die deskriptive Entscheidungstheorie will diese von der Rationalität abweichenden Präferenzen beschreiben. Sie untersucht daher, wie Menschen (oder Personengruppen) in der Realität tatsächlich entscheiden, gegen welche Axiome rationalen Entscheidens sie dabei verstoßen und durch welche (deskriptive)

Entscheidungskriterien bzw. Modelle das beobachtete Verhalten erklärt und darauf aufbauend vorhergesagt werden kann.

Um typische Entscheidungsmuster aufzuspüren, werden in der deskriptiven Entscheidungstheorie häufig Laborexperimente durchgeführt, in denen die Teilnehmer einfache Entscheidungsprobleme zu lösen haben. Bei solchen Experimenten traten systematische Verstöße gegen die Axiome präskriptiver Theorien auf, die als „Paradoxien“ bezeichnet werden. Auf Basis der Beobachtungen dieser Abweichungen wurden sogenannte Non-Expected-Utility-Theorien (NEU-Theorien) oder verallgemeinerte Nutzentheorien entwickelt, mit denen das tatsächliche Entscheidungsverhalten besser eingefangen werden soll und die der präskriptiven Erwartungsnutzentheorie gegenübergestellt wurden. Die verallgemeinerten Nutzentheorien erweitern die Menge der modellierbaren Präferenzen und können damit einige der experimentell festgestellten Paradoxien erklären. Allerdings liegt bis heute keine verallgemeinerte Theorie vor, die *alle* bekannten Paradoxien erklären kann.

Die in deskriptiven Theorien entwickelten Entscheidungskriterien sind nicht als Kriterien rationaler Entscheidungen gedacht. Umgekehrt sind präskriptive Theorien wie die Erwartungsnutzentheorie nicht als deskriptive Theorien gedacht. Das bedeutet allerdings nicht, dass präskriptive Theorien aus deskriptiver Sicht generell ungeeignet sind: Dass Entscheider gegen das Bernoulli-Prinzip in bestimmten Situationen verstoßen, bedeutet nicht, dass sie dies stets tun. Alternative deskriptive Entscheidungstheorien müssen sich daher im Hinblick darauf, wie gut sie reale Entscheidungen erklären, nicht nur gegeneinander, sondern auch gegen präskriptive Theorien behaupten.

In Abschn. 6.2 wird die Relevanz deskriptiver Entscheidungstheorien näher erörtert. Danach werden in Abschn. 6.3 experimentelle Ergebnisse zur Individualentscheidung bei Risiko dargestellt, in denen insbesondere erforscht wird, inwieweit bestimmte Axiome der Erwartungsnutzentheorie erfüllt sind und welche systematischen Abweichungen hiervon beobachtet wurden. Wie erläutert, wird in der deskriptiven Entscheidungstheorie versucht, Entscheidungskriterien bzw. Modelle zu entwickeln, die den beobachteten Paradoxien Rechnung tragen. In Abschn. 6.4 wird die bekannteste dieser Theorien, die Prospect-Theorie von Kahneman und Tversky, vorgestellt. Hiernach werden Präferenzwerte nicht mit einer Nutzenfunktion gemäß dem Bernoulli-Prinzip ermittelt, sondern mit einer speziellen „Wertfunktion“, wobei die Werte der Ergebnisse nicht mit deren Eintrittswahrscheinlichkeiten multipliziert werden, sondern mit davon abhängigen subjektiven „Wahrscheinlichkeitsgewichten“. Abschn. 6.5 befasst sich mit der Erweiterung der Prospect-Theorie zur Kumulativen Prospect-Theorie. Abschn. 6.6 ist dem Vergleich der deskriptiven Ansätze mit der Erwartungsnutzentheorie gewidmet. Dabei steht der Erklärungsgehalt der deskriptiven Ansätze für komplexe Entscheidungssituationen im Mittelpunkt der Betrachtung. In Abschn. 6.7 werden Implikationen für die normativen Darstellungen in den nachfolgenden Kapiteln erörtert.

6.2 Zur Relevanz der deskriptiven Theorie

Akzeptiert ein Entscheider ein Axiomensystem, so ist es, wie in Kap. 5 für das Bernoulli-Prinzip gezeigt wurde, für ihn folgerichtig, daraus resultierende Entscheidungsprinzipien zu verwenden, um zu einer optimalen Entscheidung zu gelangen. Geht man davon aus, dass sich Menschen in der Realität stets rational in dem definierten Sinne verhalten, dann liefert die präskriptive Entscheidungstheorie darüber hinaus Modelle, mit denen das Verhalten von Menschen in alternativen Entscheidungssituationen auch gut prognostiziert werden kann, sofern ihre jeweils maßgeblichen Entscheidungsdeterminanten wie Alternativenmenge, Zielgrößen, Nutzenwerte und Eintrittswahrscheinlichkeiten hinreichend genau bekannt sind.

Entscheidungen anderer Menschen zu prognostizieren, ist in vielen Entscheidungssituationen unerlässlich, da das Verhalten anderer die Konsequenzen der eigenen Entscheidungen beeinflusst. So ist es z. B. für einen Unternehmer bei der Gestaltung einer Werbekampagne oder der Einführung eines neuen Produktes rational, die Entscheidungskriterien der potenziellen Nachfrager für die Prognose ihrer Reaktionen anzuwenden, auch wenn er diese als „irrational“ ansieht. Bei der Konzeption eines Entlohnungssystems für einen Entscheidungsträger, der im Auftrag einer (vorgesetzten) Instanz handelt, ist es von Interesse, wie dieser auf die Anreize *tatsächlich* reagieren wird. Aus Sicht der Instanz ist es rational, dasjenige Entlohnungssystem auszuwählen, das ihr bei dem induzierten Verhalten des Entscheidungsträgers den höchsten Erwartungswert des Nutzens erbringt, unabhängig davon, ob dieses Verhalten im Einklang mit den Axiomen rationalen Verhaltens steht.

Bei der Prognose von Entscheidungen geht es primär nicht darum, welche Entscheidungen gemäß der präskriptiven Entscheidungstheorie (etwa dem Bernoulli-Prinzip) getroffen werden *sollten*, sondern um die *tatsächlich zugrunde gelegten* Entscheidungskriterien. Für die Prognose von Entscheidungen benötigt man somit gehaltvolle Informationen darüber, wie in der Realität Alternativen bewertet und wie Wahrscheinlichkeitsurteile gebildet werden. Abweichungen vom rationalen Verhalten sind also zu sammeln, zu organisieren und zu möglichst wenigen Prinzipien zusammenzufassen, um als Grundlage für die Vorhersage von menschlichem Entscheidungsverhalten herangezogen werden zu können. Dabei stellt sich wie bei präskriptiven Entscheidungsmodellen das Problem der Vereinfachung. Deskriptive Entscheidungstheorien basieren daher auf Beobachtungen menschlichen Entscheidungsverhaltens in sehr einfachen (im Allgemeinen hypothetischen) Entscheidungssituationen. Inwieweit die Vorhersagen der resultierenden Modelle sich in komplexeren, realen Entscheidungssituationen wie z. B. bei der Bildung eines Portefeuilles aus Wertpapieren oder bei verteilten Entscheidungen, bei der ein Mitarbeiter im Auftrag einer Instanz agiert, bewähren, soll nach Darstellung der deskriptiven Ansätze in Abschn. 6.6 diskutiert werden.

6.3 Experimentelle Ergebnisse zu Individualentscheidungen bei Risiko

6.3.1 Vorbemerkungen zur experimentellen Methode

Jede deskriptive Entscheidungstheorie bei Risiko fußt, wie erläutert, auf Beobachtungen menschlichen Entscheidungsverhaltens in Risikosituationen. Diese Beobachtungen werden in der Regel in Laborexperimenten gemacht, in denen den Teilnehmern unter kontrollierten Bedingungen Wahlsituationen vorgelegt werden. Die beobachteten Ergebnisse werden insbesondere analysiert, um empirische Gesetzmäßigkeiten in dem Verhalten von Menschen in wirtschaftlichen Situationen aufzudecken, die daraufhin zu Bestandteilen deskriptiver Theorien werden.

In einem Experiment werden Einflussfaktoren auf das Entscheidungsverhalten der Experimentteilnehmer, das beobachtet und erklärt werden soll, auf drei mögliche Weisen berücksichtigt (vgl. Friedman und Sunder 1994, Kap. 3). Einflussfaktoren können zum einen bewusst manipuliert werden. Beispielsweise verändert der Experimentator bewusst die Alternativenmenge in einer Wahlsituation bei Risiko, die er den Teilnehmern vorlegt. Einflussfaktoren können zum anderen kontrolliert, d. h. über das gesamte Experiment hinweg identisch gehalten werden. So werden beispielsweise alle Teilnehmer auf Basis identischer Instruktionen mit dem Experiment vertraut gemacht. Schließlich bleiben Einflussfaktoren, die weder manipuliert noch kontrolliert werden sollen oder können. Solche Einflussfaktoren versucht man, durch Randomisieren auszuschalten, d. h. durch zufällige Gestaltung der Experimentbedingungen im Hinblick auf die betreffenden Faktoren. Hierzu zählt beispielsweise die Zusammensetzung der Teilnehmergruppe an einem Experiment. Die zufällige Zuordnung aller Teilnehmer zu einer Gruppe soll gewährleisten, dass sich die Beobachtungen auf die bewusst manipulierten Einflussfaktoren zurückführen lassen und nicht auf die Eigenschaften der Teilnehmer.

Um Gesetzmäßigkeiten in menschlichem Verhalten bei Risiko aufzudecken, können alle Teilnehmer an einem Experiment mit denselben Wahlsituationen konfrontiert werden, oder es werden Gruppen gebildet und unterschiedlichen Gruppen werden unterschiedliche Wahlsituationen vorgelegt. Beide Ausgestaltungsformen eines Experiments haben ihre Vor- und Nachteile, die an dieser Stelle nicht diskutiert werden sollen. Die Ergebnisse von Experimenten werden nachfolgend aus Gründen der Anschaulichkeit i. d. R. so interpretiert, als beruhten sie auf den Entscheidungen derselben Personen, was bei den dargestellten Experimenten in der Regel auch der Fall war.

Beobachtet man menschliches Entscheidungsverhalten bei Risiko in der Realität, so stellt man vielfältige Abweichungen vom „rationalen“ Verhalten fest. Dabei zeigt sich, dass die Abweichungen nicht zufällig, sondern in dem Sinne „systematisch“ sind, dass die Entscheider mehrheitlich im Prinzip in gleicher Weise gegen Axiome „rationalen“ Verhaltens verstoßen. Einige der festgestellten Paradoxien werden im Folgenden dargestellt. Da es sich bei den Experimenten in der Regel um einfache Wahlsituationen

handelt, die die kognitiven menschlichen Fähigkeiten nicht überfordern dürften, lassen sich die beobachteten Abweichungen vom Bernoulli-Prinzip in vielen Fällen nicht mit beschränkter Rationalität erklären. Um gute (unverzerrte) Rückschlüsse auf die Präferenzbildung ziehen zu können, werden darüber hinaus in den Experimenten die Eintrittswahrscheinlichkeiten für die Ergebnisse der Alternativen vorgegeben, sodass „irrationales“ Verhalten bei der Bildung von Wahrscheinlichkeitsurteilen nicht zur Erklärung der experimentellen Ergebnisse herangezogen werden kann.

6.3.2 Erweiterung der Axiomensysteme um das Invarianzaxiom

Verstöße gegen das Bernoulli-Prinzip sind immer Verstöße gegen eines oder mehrere der hierfür maßgeblichen Axiome. In Kap. 5, Abschn. 5.4, wurde das Axiomensystem von Luce und Raiffa (1957) zugrunde gelegt, um daraus das Bernoulli-Prinzip abzuleiten. Es umfasst sechs Axiome:

1. Ordinales Axiom
2. Stetigkeit
3. Substitution
4. Reduktion
5. Monotonie
6. Transitivität bezüglich der Handlungsalternativen.

Im Folgenden wird es vornehmlich um die Axiome Substitution und Reduktion gehen, da sich die bedeutendsten Verstöße gegen das Bernoulli-Prinzip auf diese Axiome beziehen. Jedoch ist es häufig nicht möglich, einen beobachteten Verstoß eindeutig einem dieser Axiome zuzuordnen. Aus diesem Grund werden wir uns primär auf das Unabhängigkeitsaxiom beziehen, das diese Axiome in einem Axiom zusammenfasst (vgl. ausführlich Kap. 5, Abschn. 5.4.3).

Einige Verstöße gegen das Bernoulli-Prinzip beziehen sich allerdings nicht explizit auf eines oder mehrere der oben genannten Axiome. Der Grund hierfür ist der Folgende: Dem Bernoulli-Prinzip liegen, wie jeder anderen Theorie rationalen Entscheidens auch, Anforderungen implizit zugrunde, die zwar als selbstverständlich vorausgesetzt werden, aber in den bekannten Axiomensystemen nicht explizit formuliert werden. Eine bedeutende implizite Voraussetzung wird im Folgenden explizit gemacht, indem wir mit dem sogenannten Invarianzaxiom ein zusätzliches Axiom einführen. Das Invarianzaxiom lässt sich in Darstellungsinvarianz (Tversky und Kahneman 1986; siehe auch bereits Arrow 1982) und Prozedurinvarianz unterteilen (Tversky et al. 1990).

Invarianzaxiom

Verschiedene inhaltsgleiche Darstellungen derselben Wahlsituation führen zu identischen Präferenzen über die Alternativenmenge (*Darstellungsinvarianz*). Zudem hat die Art

(bzw. die Prozedur) der Erhebung von Präferenzen keinen Einfluss auf die Präferenzen selbst (*Prozedurinvarianz*).

Das Invarianzaxiom erscheint aus der Sicht des Bernoulli-Prinzips als selbstverständlich: Unterschiedliche (inhaltsgleiche) Darstellungsformen ein und derselben Wahlsituation sind irrelevant für die Entscheidung. Genauso wenig hat die konkrete Art der Ermittlung einer Nutzenfunktion (d. h. die konkrete Bernoulli-Befragung) einen Einfluss auf deren Gestalt.

Die Überprüfung des Invarianzaxioms erhält in der deskriptiven Entscheidungstheorie eine besondere Bedeutung, da es im Gegensatz zu Verstößen gegen andere Axiome nicht möglich ist, eine „Präferenzfunktion“ zu formulieren (und sei diese noch so komplex), bei der die Präferenzordnung über die Alternativen in systematischer Weise von der Art der Darstellung der Ergebnisse und ihrer Wahrscheinlichkeiten abhängt. Insbesondere gibt es keine Möglichkeit, eine Bewertung allein auf der Grundlage der Wahrscheinlichkeiten und der Ergebnisse vorzunehmen, die ein Verhalten abbildet, welches das Invarianzaxiom verletzt. Um Verstöße gegen das Invarianzaxiom erklären zu können, muss die Phase des Entscheidungsprozesses, die der eigentlichen Auswahl einer Alternative vorgelagert ist, genauer betrachtet werden.

Im Folgenden werden experimentelle Ergebnisse dargestellt, die Verstöße gegen das Unabhängigkeitsaxiom (Abschn. 6.3.3) und gegen das Invarianzaxiom (Abschn. 6.3.4) repräsentieren. Die experimentelle Evidenz gegen die Gültigkeit der Axiome des Bernoulli-Prinzips beruht auf Beobachtungen der Entscheidungen von Personen in sehr einfachen Wahlsituationen. Diese Wahlsituationen sind in der Regel so gestaltet, dass sich aus dem Verhalten einer Person in einer Wahlsituation eine eindeutige Vorhersage für ihr Verhalten in einer anderen Wahlsituation machen lässt, sofern sie Bernoulli-rational entscheidet.

Die Wahlsituationen werden im Folgenden mit (a), (b), (c),... bezeichnet und die Lotterien bzw. Alternativen in den einzelnen Wahlsituationen immer neu von 1 an nummeriert. Mit $\{x_1; w_1 | x_2; w_2 | \dots | x_{N_X}; w_{N_X}\}$ wird eine Lotterie bzw. eine Alternative notiert, bei der das Ergebnis x_s mit der Wahrscheinlichkeit w_s , $s = 1, \dots, N_X$, erzielt werden kann. Die Summe der Wahrscheinlichkeiten über alle N_X Ergebnisse ist stets gleich eins.

6.3.3 Verstöße gegen das Unabhängigkeitsaxiom

6.3.3.1 Sicherheitseffekt

Nach dem Unabhängigkeitsaxiom gilt für zwei Lotterien L_1 , L_2 und für eine dritte Lotterie L

$$L_1 \succsim L_2 \Leftrightarrow \{L_1; p | L; (1-p)\} \succsim \{L_2; p | L; (1-p)\} \quad (\text{mit } 1-p < 1) \quad (6.1)$$

d. h. die Präferenzrelation zwischen L_1 und L_2 muss erhalten bleiben, wenn beide Lotterien mit einer dritten auf identische Weise kombiniert werden. Umgekehrt können von zwei Lotterien jeweils identische Bestandteile abgetrennt werden, ohne dass sich dadurch die Präferenzrelation ändert.

Wahlsituation (a): Wählen Sie zwischen L_{a1} und L_{a2}

L_{a1} : 1 Million Francs mit Sicherheit.

L_{a2} : 5 Millionen Francs mit der Wahrscheinlichkeit 0,1,
1 Million Francs mit der Wahrscheinlichkeit 0,89,
kein Gewinn mit der Wahrscheinlichkeit 0,01.

Wahlsituation (b): Wählen Sie zwischen L_{b1} und L_{b2}

L_{b1} : 1 Million Francs mit der Wahrscheinlichkeit 0,11,
kein Gewinn mit der Wahrscheinlichkeit 0,89.

L_{b2} : 5 Millionen Francs mit der Wahrscheinlichkeit 0,1,
kein Gewinn mit der Wahrscheinlichkeit 0,9.

Abb. 6.1 Wahlsituationen (a) und (b)

Das berühmteste Experimentdesign zu den Verstößen gegen das Unabhängigkeitsaxiom stammt von Allais (1953): Einer Person werden zwei Wahlsituationen (a) und (b) vorgelegt (Abb. 6.1).¹

Nach Allais (1953, S. 527) kann man beobachten, dass Personen oft erklären, in der ersten Wahlsituation (a) L_{a1} vorzuziehen, in der zweiten Wahlsituation (b) hingegen L_{b2} . Der Wechsel von L_{a1} zu L_{b2} steht im Widerspruch zum Bernoulli-Prinzip und hat als „Allais-Paradoxon“ in der Literatur große Beachtung gefunden: Wenn ein Entscheider die Lotterie L_{a1} der Lotterie L_{a2} vorzieht, muss er bei Orientierung am Bernoulli-Prinzip eine Nutzenfunktion haben, bei der logisch zwingend auch der Erwartungswert des Nutzens von L_{b1} größer ist als der von L_{b2} , sodass der Entscheider L_{b1} der Lotterie L_{b2} vorziehen müsste. Die Präferenzrelation $L_{a1} \succ L_{a2}$ impliziert nach dem Bernoulli-Prinzip:

$$U(1) > 0,1 \cdot U(5) + 0,89 \cdot U(1) + 0,01 \cdot U(0).$$

Für $L_{b2} \succ L_{b1}$ müsste nach dem Bernoulli-Prinzip zugleich gelten:

$$0,1 \cdot U(5) + 0,9 \cdot U(0) > 0,11 \cdot U(1) + 0,89 \cdot U(0).$$

Die beiden Ungleichungen sind jedoch unvereinbar, wie immer die Nutzenfunktion U auch aussehen mag. Die Addition beider Ungleichungen macht dies deutlich:

$$0,1 \cdot U(5) + U(1) + 0,9 \cdot U(0) > 0,1 \cdot U(5) + U(1) + 0,9 \cdot U(0).$$

Personen, die L_{a1} der Lotterie L_{a2} vorziehen, müssen also bei einer Entscheidung nach dem Bernoulli-Prinzip notwendig auch L_{b1} der Lotterie L_{b2} vorziehen.

Umgekehrt gilt: Wenn ein Entscheider eine Nutzenfunktion hat, bei der er in der ersten Wahlsituation (a) L_{a2} vorzieht, so muss er nach dem Bernoulli-Prinzip in der zweiten Wahlsituation (b) L_{b2} vorziehen.

Der Wechsel von L_{a1} zu L_{b2} stellt (wie ein Wechsel von L_{a2} zu L_{b1}) einen Verstoß gegen das Unabhängigkeitsaxiom dar, der in zahlreichen *kontrollierten* Experimenten

¹Im Original entsprechen die Zahlen dem Hundertfachen der hier angegebenen Werte.

Tab. 6.1 Verdeutlichung der Common Consequences

Wahrscheinlichkeit	0,89	0,1	0,01
L _{a1}	1 Mio.	1 Mio.	1 Mio.
L _{a2}	1 Mio.	5 Mio.	0
L _{b1}	0	1 Mio.	1 Mio.
L _{b2}	0	5 Mio.	0

Wahlsituation (c): Wählen Sie zwischen L _{c1} und L _{c2} L _{c1} : 3.000 mit Sicherheit. L _{c2} : 4.000 mit der Wahrscheinlichkeit 0,8, kein Gewinn mit der Wahrscheinlichkeit 0,2.
Wahlsituation (d): Wählen Sie zwischen L _{d1} und L _{d2} L _{d1} : 3.000 mit der Wahrscheinlichkeit 0,25, kein Gewinn mit der Wahrscheinlichkeit 0,75. L _{d2} : 4.000 mit der Wahrscheinlichkeit 0,2, kein Gewinn mit der Wahrscheinlichkeit 0,8.

Abb. 6.2 Wahlsituationen (c) und (d)

bestätigt wurde. Um diesen Verstoß nochmals zu verdeutlichen, werden die vier Lotterien der Wahlsituationen (a) und (b) in einer Ergebnismatrix dargestellt (Tab. 6.1).

Sowohl die Lotterien L_{a1} und L_{a2} als auch die Lotterien L_{b1} und L_{b2} haben jeweils eine gemeinsame Komponente („Common Consequence“): Bei L_{a1} und L_{a2} handelt es sich um das Ergebnis von 1 Mio. Francs, das mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,89 erzielt wird. Bei L_{b1} und L_{b2} gibt es das gemeinsame Ergebnis von null, das ebenfalls mit der Wahrscheinlichkeit von 0,89 auftritt. Durch Änderung einer *Common Consequence* jedoch darf sich nach dem Unabhängigkeitsaxiom die Präferenzrelation zwischen den Alternativen nicht verändern. Die Differenzen der Erwartungswerte des Nutzens $EU(L_{a1}) - EU(L_{a2})$ und $EU(L_{b1}) - EU(L_{b2})$ stimmen überein. Ist dieser Wert positiv (bzw. negativ), so müsste ein rationaler Entscheider in beiden Wahlsituationen die erste (bzw. die zweite) Alternative vorziehen.

Der Verstoß gegen das Unabhängigkeitsaxiom hat vor allem damit zu tun, dass der Gewinn von 1 Mio. Francs in der Wahlsituation (a) mit Sicherheit erzielbar ist, in der Wahlsituation (b) hingegen kein sicherer Gewinn erreichbar ist. Sehr viele Menschen werden in Wahlsituationen mit sicheren Gewinnen diese tendenziell stärker bevorzugen als dieselben Gewinne in Situationen, in denen alle Alternativen riskant sind. Dieser Zusammenhang wird als *Sicherheitseffekt* bezeichnet.

Kahneman und Tversky haben den Sicherheitseffekt anhand folgender Wahlsituationen experimentell nachgewiesen.² Sie legten den Teilnehmern in ihrem Experiment die in Abb. 6.2 dargestellten Wahlsituationen (c) und (d) vor.

²Vgl. Kahneman und Tversky (1979); Tversky und Kahnemann (1981). Bei den Experimenten wurden den Teilnehmern hypothetische Wahlsituationen vorgelegt, d. h. tatsächlich gab es nichts zu gewinnen. Bei Gewinnen wurde entsprechend auf die Angabe einer Währungseinheit verzichtet.

In dem Experiment von Kahneman und Tversky wählte in der Wahlsituation (c) die Mehrheit (80 %) der Befragten (der betreffenden Gruppe) die Alternative L_{c1} . In der Wahlsituation (d) hingegen entschied sich die Mehrheit (65 %) für die Alternative L_{d2} . Diese Mehrheiten implizieren, dass eine große Zahl von Personen von L_{c1} auf L_{d2} wechseln würde, was einen Verstoß gegen das Unabhängigkeitsaxiom bedeutet. Der Verstoß lässt sich analog nachweisen wie beim Allais-Paradoxon: Die Lotterien L_{d1} und L_{d2} entstehen aus den Lotterien L_{c1} und L_{c2} , indem man diese mit dem sicheren Ergebnis null kombiniert, wobei L_{c1} und L_{c2} jeweils die Eintrittswahrscheinlichkeit 0,75 erhalten.

Die Abb. 6.3 und 6.4 verdeutlichen den Zusammenhang. In Abb. 6.3 werden zunächst die beiden Wahlsituationen (c) und (d) dargestellt. In Abb. 6.4 wurden das Substitutions- und das Reduktionsaxiom angewendet: 3.000 wurde jeweils durch die äquivalente Lotterie $L^* = \{4.000; w^* | 0; 1 - w^*\}$ ersetzt, danach wurden die Bäume reduziert.

Der Entscheider zieht nach dem Monotonieaxiom die Lotterie L_{c1} der Lotterie L_{c2} vor, wenn gilt:

$$w^* > 0,8.$$

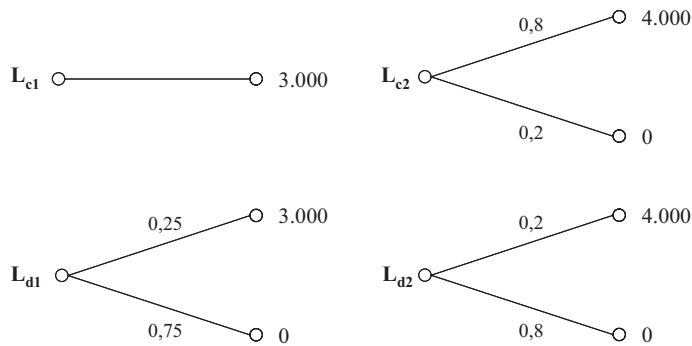


Abb. 6.3 Darstellung der Wahlsituationen (c) und (d)

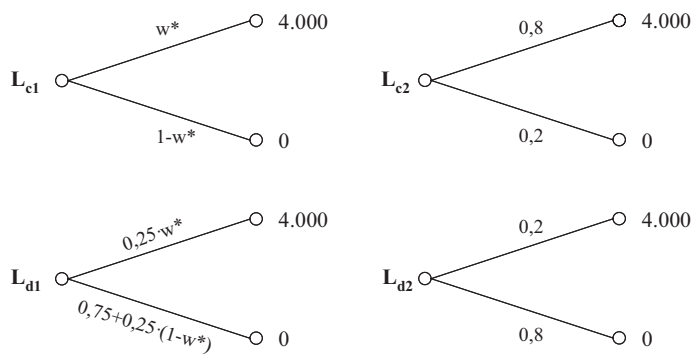


Abb. 6.4 Wahlsituationen (c) und (d) nach Anwendung der Axiome Substitution und Reduktion

Er zieht zudem die Lotterie L_{d1} der Lotterie L_{d2} vor, wenn gilt:

$$0,25 \cdot w^* > 0,2 \Leftrightarrow w^* > \frac{0,2}{0,25} = 0,8.$$

Die Bedingung für die Vorziehwürdigkeit ist also jeweils dieselbe, ein Bernoulli-rationaler Entscheider würde daher entweder das Paar L_{c1} und L_{c2} oder das Paar L_{c2} und L_{d2} bevorzugen. Die Gemeinsamkeit der beiden Wahlsituationen liegt nun, anders als in den Wahlsituationen (a) und (b), nicht in einer *Common Consequence* (also in einem jeweils gemeinsamen Ergebnis), sondern vielmehr in einer *Common Ratio*, d. h. darin, dass in beiden Wahlsituationen die Wahrscheinlichkeitsverhältnisse für die Gewinne gleich sind: $0,8 : 1 = 0,2 : 0,25$.

Die Ergebnismatrix in Tab. 6.2 stellt die vier Lotterien noch einmal dar. Während also bei einer *Common Consequence* dem zweiten Alternativenpaar eine *andere* gemeinsame Komponente hinzugefügt wird, entsteht bei der *Common Ratio* das zweite Alternativenpaar, wie in der Tab. 6.2 ersichtlich, erst *durch das Hinzufügen einer gemeinsamen* Komponente (und zwar hier der Komponente 0). Ist die Nutzenfunktion so normiert, dass $U(0) = 0$ gilt, so ist im Beispiel die Differenz $EU(L_{c1}) - EU(L_{c2})$ viermal so groß wie die Differenz $EU(L_{d1}) - EU(L_{d2})$. Entweder sind also beide Differenzen positiv, sodass ein rationaler Entscheider in beiden Wahlsituationen die erste Alternative vorziehen müsste, oder beide Differenzen sind negativ, sodass jeweils die zweite Alternative zu wählen wäre.

Auch bei den Wahlsituationen (c) und (d) ist das Verhalten der Entscheider maßgeblich darauf zurückzuführen, dass in der Wahlsituation (c) eine sichere Alternative zur Verfügung steht, nicht aber in der Wahlsituation (d). Auch hier tritt also der Sicherheits-effekt auf.

6.3.3.2 Effekt kleiner Wahrscheinlichkeiten

Kahneman und Tversky (1979) haben nicht nur Verstöße gegen das Unabhängigkeits-axiom in Wahlsituationen mit sicheren Alternativen aufgezeigt, sondern auch in Situationen mit ausschließlich riskanten Alternativen. Dabei zeigte sich, dass in Wahlsituationen mit Lotterien, bei denen das Verhältnis der Gewinnwahrscheinlichkeiten jeweils gleich bleibt, Entscheider dazu neigen, Unterschiede in diesen Wahrscheinlichkeiten umso weniger wahrzunehmen, je kleiner die Gewinnwahrscheinlichkeiten sind. Zur Verdeutlichung dieses Zusammenhangs dienen die Wahlsituationen (e) und (f) in Abb. 6.5.

Tab. 6.2 Verdeutlichung der Common-Ratios

Wahrscheinlichkeit		0,8	0,2
L_{c1}		3.000	3.000
L_{c2}		4.000	0
Wahrscheinlichkeit	0,75	0,2	0,05
L_{d1}	0	3.000	3.000
L_{d2}	0	4.000	0

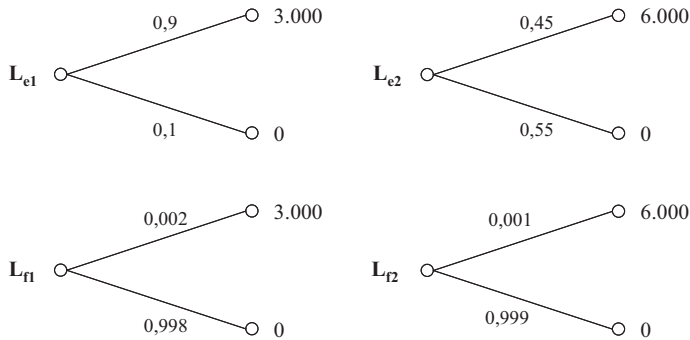


Abb. 6.5 Wahlsituationen (e) und (f)

Für beide Wahlsituationen ist das Verhältnis der Gewinnwahrscheinlichkeiten der zu vergleichenden Lotterien gleich (nämlich $0,45/0,9 = 0,01/0,02 = 1/2$), sodass zwischen ihnen eine Gemeinsamkeit im Sinne einer Common Ratio der Alternativen besteht. Kahneman und Tversky berichten jedoch, dass in der Wahlsituation (e) 86 % der betreffenden Gruppenmitglieder die Lotterie L_{e1} der Lotterie L_{e2} vorzogen. In Wahlsituation (f) hingegen entschieden sich 73 % der Teilnehmer dieser Gruppe gegen L_{f1} und für L_{f2} . Wiederum bedeutet der Wechsel der eindeutigen Mehrheit von L_{e1} auf L_{f2} einen Verstoß gegen das Unabhängigkeitsaxiom.³

Die Präferenz für L_{f2} in der Wahlsituation (f) wird damit begründet, dass in dieser Situation aufgrund der geringen Wahrscheinlichkeiten für einen positiven Gewinn die Befragten sich auf die Höhe des Gewinns konzentrieren. Wenn ein Gewinn zwar möglich ist, aber eine geringe Wahrscheinlichkeit aufweist, ist die Gewinnhöhe für die Wahl ausschlaggebend. Obwohl in beiden Wahlsituationen (e) und (f) die Wahrscheinlichkeit für einen positiven Gewinn bei der ersten Lotterie (L_{e1} bzw. L_{f1}) jeweils doppelt so hoch ist wie bei der zweiten Lotterie (L_{e2} bzw. L_{f2}), wird der Unterschied in den Wahrscheinlichkeiten in der Wahlsituation (f) praktisch nicht mehr wahrgenommen⁴. In der Wahlsituation (e) ist dagegen eine Orientierung an der Gewinnwahrscheinlichkeit ausschlaggebend. Die Wahl der Lotterie L_{e1} mit dem kleineren Gewinn kann nur dadurch erklärt werden, dass die betreffenden Teilnehmer den Unterschied in den Gewinnwahrscheinlichkeiten in der Wahlsituation (e) bei ihren Entscheidungen berücksichtigen.

³Kombiniert man nämlich die Lotterien L_{e1} und L_{e2} jeweils mit einem Gewinn von null, wobei der Gewinn von null die Wahrscheinlichkeit 449/450 hat und die jeweilige Lotterie die Wahrscheinlichkeit 1/450, so werden die Lotterien L_{f1} und L_{f2} erzeugt.

⁴Der Effekt der kleinen Wahrscheinlichkeiten wurde von Prelec (1990) sowie Wu und Gonzalez (1996) auch bei Vorliegen von common consequences nachgewiesen.

6.3.3.3 Isolationseffekt

Anders als die bisherigen Effekte lässt sich der *Isolationseffekt* (*Isolation Effect*) eindeutig an einem Axiom des Systems von Luce und Raiffa festmachen, dem Reduktionsaxiom. Der Isolationseffekt besagt, dass Entscheider bei mehrstufigen Lotterien diejenigen Stufen, in denen zwischen den zur Wahl stehenden Alternativen keine Unterschiede bestehen, vernachlässigen und damit diejenigen Stufen isolieren, bezüglich derer sich die Alternativen unterscheiden.

Zur Verdeutlichung wird die Wahlsituation (g) in Abb. 6.6 betrachtet. In einem Experiment von Kahneman und Tversky (1979) entschieden sich 78 % der Teilnehmer für L_{g1} . Je nach Ansicht handelt es sich bei (g) um eine Situation, die mit der Wahlsituation (c) oder aber mit der Wahlsituation (d) (vgl. Abschn. 6.3.3.1) identisch ist: Wendet der Entscheider zunächst Bernoulli-rational das Reduktionsaxiom an, so fasst er die Wahrscheinlichkeiten in L_{g2} zusammen und vergleicht die Lotterie $L_{g1} = \{3.000; 0,25 \mid 0; 0,75\} = L_{d1}$ mit der Lotterie $L_{g2} = \{4.000; 0,2 \mid 0; 0,8\} = L_{d2}$. Er befindet sich damit de facto in der Entscheidungssituation (d). In dieser Situation aber wählten nicht 78 %, sondern nur 35 % der Teilnehmer am Experiment von Kahneman und Tversky (1979) $L_{g1} = L_{d1}$, was für einen großen Teil der beobachteten Entscheidungen einen Verstoß gegen das Reduktionsaxiom impliziert.

Betrachtet der Entscheider hingegen allein diejenigen Teile der Zustandsbäume, die sich unterscheiden, so vergleicht er nicht L_{g1} mit L_{g2} , sondern $\{3.000; 1\} = L_{c1}$ mit $\{4.000; 0,8 \mid 0; 0,2\} = L_{c2}$, d. h. er befindet sich de facto in der Entscheidungssituation (c). Für diese haben Kahneman und Tversky (1979) ein Wahlverhalten beobachtet (80 % der Teilnehmer bevorzugten L_{c1}), das mit dem beobachteten Wahlverhalten in der Situation (g) (78 % für L_{g1}) nahezu identisch ist. Die Beobachtungen deuten darauf hin, dass der Isolationseffekt in den Experimenten von Kahneman und Tversky (1979) tatsächlich auftrat.

6.3.4 Verstöße gegen das Invarianzaxiom

6.3.4.1 Framing-Effekt

Die erste Anforderung des Invarianzaxioms besagt, dass unterschiedliche Darstellungsformen einer Entscheidungssituation keinen Einfluss auf die Alternativenwahl haben dürfen. Darstellungsformen einer Entscheidungssituation werden „Frames“ genannt.

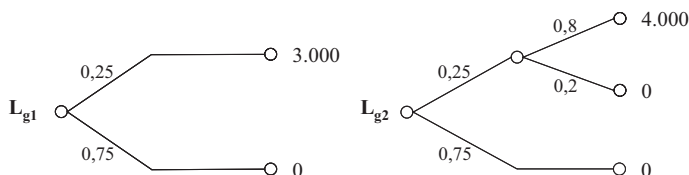


Abb. 6.6 Wahlsituation (g)

Besteht ein Einfluss der Darstellungsform auf die Entscheidung, so spricht man von einem *Framing-Effekt*. Solche Effekte stellen Verstöße gegen das Invarianzaxiom und damit gegen das Bernoulli-Prinzip dar. In Kap. 2, Abschn. 2.2, wurde zwischen Umweltzuständen und ihren Eintrittswahrscheinlichkeiten, Alternativen und Ergebnissen als Basiselemente einer Entscheidungssituation bei Risiko unterschieden. Ein Framing-Effekt, der sich auf die Darstellung der Eintrittswahrscheinlichkeiten von Umweltzuständen (bzw. Ergebnissen) bezieht, wurde mit dem Isolationseffekt bereits im vorangegangenen Abschnitt gezeigt: Das Reduktionsaxiom bezieht sich letztlich darauf, dass „komplizierte“ Zustandsbäume von Bernoulli-rationalen Entscheidern auf einfache(re) Zustandsbäume reduziert werden, ohne dass dieser Wechsel in der Darstellung der Alternativen einen Einfluss auf die Entscheidung hat.

Framing-Effekte resultieren allerdings weit häufiger aus der Beschreibung von *Ergebnissen*. Ein berühmtes Beispiel hierfür liefert das in Abb. 6.7 dargestellte Experiment von Tversky und Kahneman, das unter dem Begriff Asian Disease Problem bekannt ist (Tversky und Kahneman 1981; Übersetzung siehe Kopp 1995).

Die Ergebnisse der Programme sind in beiden Wahlsituationen identisch. Gleichwohl werden sie in Wahlsituation (h) positiv dargestellt, d. h. es wird von „geretteten Menschenleben“ gesprochen, wohingegen die Ergebnisse in Wahlsituation (i) negativ dargestellt sind. Die befragten Teilnehmer haben wie folgt entschieden: In der Wahlsituation (h) bevorzugten 72 % Programm A, in der bis auf die Darstellung der Ergebnisse identischen Wahlsituation (i) hingegen 78 % Programm B.

Der Framing-Effekt bezieht sich hier auf die Darstellung von Entscheidungsproblemen bei Risiko. Er gilt jedoch ganz allgemein und hat weitreichende Bedeutung

Allgemeine Erläuterung:

Bitte stellen Sie sich folgende Situation vor. Eine ungewöhnliche asiatische Krankheit steht bevor, die (ohne medizinische Behandlung) 600 Menschen das Leben kosten wird. Zwei unterschiedliche Programme zur Bekämpfung dieser Krankheit wurden vorgesehen. Dabei sind die exakten wissenschaftlichen Schätzungen der Folgen der beiden Programme wie folgt:

Wahlsituation (h)

Programm A: Bei Anwendung des Programms A werden 200 Menschen gerettet.

Programm B: Bei Anwendung des Programms B gibt es eine Wahrscheinlichkeit von $1/3$, dass 600 Personen gerettet werden, und eine Wahrscheinlichkeit von $2/3$, dass keine Person gerettet wird.

Wahlsituation (i)

Programm A: Bei Anwendung des Programms A werden 400 Personen sterben.

Programm B: Bei Anwendung des Programms B gibt es eine Wahrscheinlichkeit von $1/3$, dass niemand sterben wird, und eine Wahrscheinlichkeit von $2/3$, dass 600 Personen sterben werden.

Abb. 6.7 Wahlsituationen (h) und (i)

für betriebswirtschaftliche (aber auch für viele andere) Entscheidungsprobleme. Einige Beispiele dienen der Verdeutlichung:

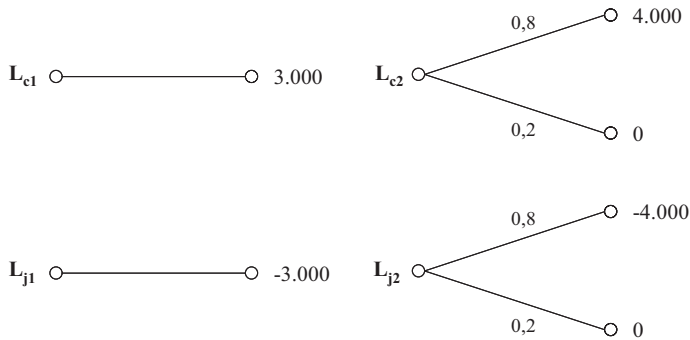
- Das Verhalten von Konsumenten kann nachweislich dadurch beeinflusst werden, wie Produkteigenschaften dargestellt werden (vgl. z. B. Puto 1987; Levin und Gaeth 1988). Zudem bemühen sich Händler, Preisunterschiede als Preisnachlässe und nicht als Preisaufschläge zu kommunizieren. Ein Verzicht auf einen Preisnachlass wird nämlich eher akzeptiert als ein entsprechender Preisaufschlag (Thaler 1980; Tversky und Kahneman 1986).
- Investoren und andere Akteure am Kapitalmarkt werden in ihren Erwartungsbildungen davon beeinflusst, wie Unternehmen über ihre Geschäftstätigkeit berichten (vgl. z. B. Glaser et al. 2007).
- Mitarbeiter reagieren auf Anreizsysteme je nach deren Darstellung (z. B. als „Bonus“ oder „Malus“) in unterschiedlicher Weise (vgl. z. B. Hannan et al. 2005).

Wie beim Asian Disease Problem geht es auch bei diesen Beispielen um die Darstellung der Ergebnisse. Z. B. sollen Konsumenten dadurch beeinflusst werden, dass Produkteigenschaften in positiver Weise dargestellt werden („Das Fleischprodukt enthält 75 % mageres Fleisch“, nicht „Das Fleischprodukt enthält 25 % Fett“). Investoren sollen beeinflusst werden, indem Unternehmensentwicklungen positiv kommuniziert werden (Ein Unternehmen, das in vier Geschäftsbereiche untergliedert ist, berichtet: „Drei Geschäftsbereiche konnten ihren Gewinn im vergangenen Jahr steigern“, und nicht „In einem Geschäftsbereich musste ein Gewinnrückgang hingenommen werden“). Mitarbeiter sollen beeinflusst werden, indem positive Aussichten beschrieben werden („Bei guter Leistung erreichen Sie den Bonus“, nicht „Bei mittlerer oder schlechter Leistung verlieren Sie den Bonus“). Werden Ergebnisse in einer Entscheidungssituation bei Risiko positiv dargestellt, so spricht man auch von einem „Gewinnframe“, anderenfalls von einem „Verlustframe“. Der Einfluss dieser Frames auf das Entscheidungsverhalten ist offenbar darauf zurückzuführen, dass sich das menschliche Entscheidungsverhalten beim Übergang von Gewinnen auf Verluste verändert. Dieses Phänomen nennt man den *Spiegeleffekt (Reflection Effect)*.

6.3.4.2 Spiegeleffekt

Um auf einfache Weise zu testen, ob das Entscheidungsverhalten einer Person von der Darstellung der Ergebnisse als Gewinne oder Verluste abhängt, haben Kahneman und Tversky (1979) den Teilnehmern zwei Wahlsituationen mit betraglich identischen Gewinnen und Verlusten vorgelegt. Die beiden Wahlsituationen werden in Abb. 6.8 dargestellt.

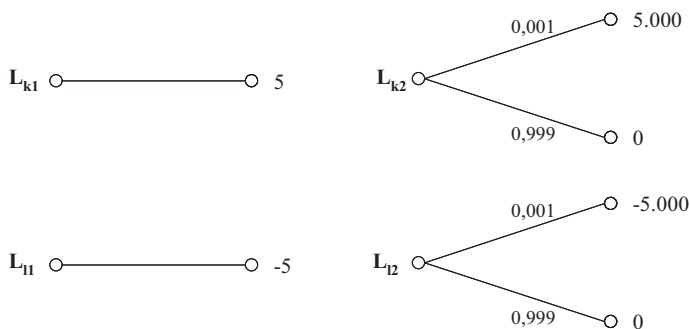
Die erste Wahlsituation (c) wurde bereits in Abschn. 6.3.3.1 betrachtet. Die zweite Wahlsituation (j) stellt die identischen Beträge als Verluste dar. Zwar haben 80 % der befragten Teilnehmer in der Wahlsituation (c) den sicheren Gewinn von 3.000 vorgezogen, jedoch nur 8 % der in der Wahlsituation (j) Befragten den sicheren Verlust in gleicher Höhe, 92 % dagegen bevorzugten die Lotterie, bei der eine 20 %ige Chance auf die Vermeidung eines Verlustes besteht. Das Entscheidungsverhalten wird um den Nullpunkt der

**Abb. 6.8** Wahlsituationen (c) und (j)

Ergebnisse also gerade gespiegelt (Spiegeleffekt bzw. Reflection Effect): Die Teilnehmer verhalten sich bei Gewinnen überwiegend *risikoavers* (der Erwartungswert der Lotterie L_{c2} beträgt 3.200 und liegt über dem sicheren Gewinn von L_{c1}), bei Verlusten hingegen überwiegend *risikofreudig* (der Erwartungswert des Verlustes bei L_{j2} beträgt 3.200 und ist somit höher als der sichere Verlust bei L_{j1}). Die Risikoeinstellung ist also nicht über gesamte Vermögensbereiche zu definieren, sondern hängt davon ab, ob die Ergebnisse als Gewinne oder als Verluste empfunden werden.

Ein weiteres von Kahneman und Tversky (1979) durchgeführtes Experiment zum Spiegeleffekt beinhaltet die Wahlsituationen (k) und (l) in Abb. 6.9.

Im Bereich der Gewinne, Wahlsituation (k), entscheidet sich die Mehrheit der Befragten (72 %) für die Lotterie L_{k2} , wohingegen bei Verlusten, d. h. in Wahlsituation (l), die Lotterie L_{l1} sehr viel häufiger gewählt wird (nämlich von 83 % der Befragten). Da in jeder Wahlsituation die Erwartungswerte der Alternativen jeweils gleich sind, können die experimentellen Ergebnisse nur wie folgt interpretiert werden: Im Bereich der Gewinne tritt nun risikofreudiges Verhalten auf, wohingegen im Bereich der Verluste risikoaverses Verhalten gegeben ist. Offensichtlich kehren sich die Risikoeinstellungen um, wenn die Gewinne nicht mit relativ hohen, sondern mit sehr geringen Wahrscheinlichkeiten auftreten.

**Abb. 6.9** Wahlsituationen (k) und (l)

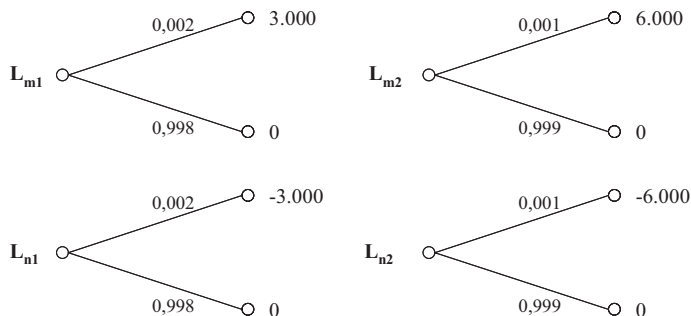


Abb. 6.10 Wahlsituationen (m) und (n)

Das Beispiel der Abb. 6.10 mit den Wahlsituationen (m) und (n) zeigt, dass der Spiegeleffekt nicht nur bei Beteiligung von sicheren Ereignissen auftritt. Wieder gilt mehrheitlich Risikofreude bei Gewinnen (73 % der Befragten hatten eine Präferenz für L_{m2}) und Risikoaversion bei Verlusten (70 % Prozent hatten eine Präferenz für L_{n1}).

Offenbar überlagern sich in den Wahlsituationen (k) und (l) sowie (m) und (n) zwei Effekte: Anders als in den Wahlsituationen (c) und (j) nämlich sind die Wahrscheinlichkeiten der (betraglich) hohen Ergebnisse sehr gering, d.h. es geht nicht nur um die Risikoeinstellung der Entscheider im Gewinn- und Verlustbereich, sondern auch um eine potenzielle Übergewichtung geringer Wahrscheinlichkeiten. Das Wahlverhalten in den Situationen (k) und (l) lässt sich dann damit erklären, dass der betreffende Entscheider zwar im Gewinnbereich risikoavers und im Verlustbereich risikofreudig ist und daher eigentlich L_{k1} und L_{l2} wählen würde, gleichzeitig aber die Wahrscheinlichkeit des Gewinns 5.000 bzw. Verlusts -5.000 (stark) übergewichtet, und sich daher jeweils gerade anders entscheidet. Auf gleiche Weise lässt sich das Wahlverhalten in den Situationen (m) und (n) erklären. Erhöht man dagegen in den Wahlsituationen (m) und (n) die Wahrscheinlichkeit für die von null verschiedenen Ergebnisse, dann drehen sich die Präferenzen für beide Wahlsituationen wieder um, d. h. es bleibt bei der Risikoaversion bei Gewinnen und Risikofreude bei Verlusten. Kahneman und Tversky nennen dieses Phänomen *fourfold pattern of risk attitudes* (vgl. Tversky und Kahneman 1992, S. 297).

Die beobachteten Unterschiede in den Risikoeinstellungen im Gewinn- und im Verlustbereich sind ein stabiles Phänomen und wurden auch in nachfolgenden Untersuchungen bestätigt. Von großer Bedeutung ist dabei, dass die *generelle* Betrachtung von Gewinnen und Verlusten gegenüber einer bestimmten Ausgangssituation grundsätzlich nicht vereinbar mit dem Bernoulli-Prinzip ist, da es zu sogenannten Referenzpunkteffekten kommt.

6.3.4.3 Referenzpunkteffekt

Ein wesentlicher Verstoß gegen die Erwartungsnutzentheorie kann daraus resultieren, dass Ergebnisse relativ zu einem Referenzpunkt bewertet werden. Sind aufgrund der Darstellungsform von Alternativen unterschiedliche Referenzpunkte für die Bewertung relevant oder verändert sich der Referenzpunkt eines Entscheiders, so kann es zu einem Entscheidungsverhalten kommen, das nicht mit der Erwartungsnutzentheorie vereinbar ist.

Zur Verdeutlichung betrachten wir zwei weitere Wahlsituationen (o) und (p) aus den Experimenten von Tversky und Kahneman (1986), die in Abb. 6.11 dargestellt werden (vgl. auch schon Kahneman und Tversky 1979, S. 273).

Beide Wahlsituationen sind identisch, wenn man das jeweilige Endvermögen (Vermögen nach Gewinn bzw. Verlust) des Entscheiders als Zielgröße betrachtet: Unter Berücksichtigung des Vermögenszuwachses von 300 bzw. von 500 in der Ausgangssituation steigt es jeweils bei Wahl der sicheren Alternative um 400 und bei Wahl der unsicheren Alternative mit gleicher Wahrscheinlichkeit um 300 oder um 500. Nach dem Bernoulli-Prinzip ist somit einheitlich für bzw. gegen die Lotterie zu entscheiden. Jedoch entschieden sich in der Wahlsituation (o) 72 % der Befragten für die sichere Einkommensposition und in der Wahlsituation (p) 64 % der Befragten *gegen* die sichere Position. Dieses Verhalten belegt den Spiegeleffekt, der hier seine Wirkung dadurch entfaltet, dass die Entscheider offensichtlich mehrheitlich von einem Referenzpunkt ausgehen – dem Vermögen unmittelbar vor der Entscheidung, also nach der Schenkung – und nicht die Vermögenswerte als Ganzes betrachten.

Der Verstoß gegen das Invarianzaxiom ist also nicht allein darauf zurückzuführen, dass Ergebnisse in unterschiedlicher Weise dargestellt werden, sondern vor allem darauf, dass Entscheider generell Ergebnisse relativ zu einem Referenzpunkt beurteilen und aus diesem Grunde die Darstellungsform einen Einfluss auf die Entscheidung hat, wenn sie die Referenzpunktabhängigkeit der Bewertung berührt.

Die Referenzpunktabhängigkeit von Entscheidungen ist ein zentrales Phänomen realen Entscheidungsverhaltens. Zwar führt eine konkave Nutzenfunktion stets dazu, dass ausgehend von einem bestimmten Vermögensniveau eine Absenkung des Niveaus (ein Verlust) zu einer Nutzeneinbuße führt, deren Betrag höher ist als der Nutzengewinn einer betragsgleichen Erhöhung des Vermögens (des Gewinns), sodass Unterschiede in der Bewertung von Gewinnen und Verlusten als solche nicht im Widerspruch zum Bernoulli-Prinzip stehen. Experimentelle Befunde allerdings zeigen, dass die beobachteten Unterschiede zu groß sind, um mit rationalem Entscheiden erklärt werden zu können. Kahneman und Tversky haben daher den Begriff der *Verlustaversion* geprägt, um damit das Phänomen zu beschreiben, dass Verluste generell schwerer wiegen als Gewinne (Abschn. 6.4.3.2).

Die systematischen Unterschiede in der Bewertung von Gewinnen und Verlusten zeigen sich aber nicht allein in der unterschiedlichen Bewertung *unsicherer* Gewinn- und Verlustverteilungen, sondern auch darin, wie *sichere* Gewinne und Verluste bewertet werden.

Wahlsituation (o):

Stellen Sie sich vor, Sie seien um 300 reicher geworden und müssten nun wählen zwischen einem sicheren Gewinn von 100 und einer Lotterie, bei der Sie mit gleicher Wahrscheinlichkeit 200 oder nichts gewinnen.

Wahlsituation (p):

Stellen Sie sich vor, Sie seien um 500 reicher geworden und müssten nun wählen zwischen einem sicheren Verlust von 100 und einer Lotterie, bei der Sie mit gleicher Wahrscheinlichkeit 200 oder nichts verlieren.

Abb. 6.11 Wahlsituationen (o) und (p)

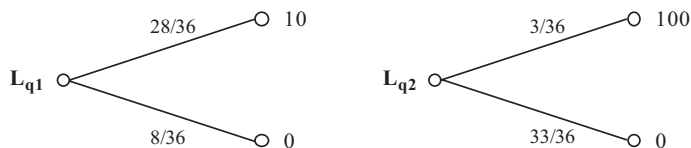


Abb. 6.12 Wahlsituation (q)

So bewerteten potenzielle Verkäufer eines Gutes dieses höher als potenzielle Käufer, weil sie die Hergabe des Gutes als besonderen Verlust empfinden, wohingegen die Käufer den Erwerb des Gutes als vergleichsweise geringeren Gewinn empfinden. Die in Experimenten beobachteten Unterschiede lassen sich nicht auf eine allgemein höhere Attraktivität des Gutes für die Verkäufer zurückführen (Tversky und Kahneman 1991; Kahneman et al. 1990, 1991; Loewenstein und Kahneman 1991).

6.3.4.4 Effekte zur Prozedurinvarianz

Schließlich sollen in diesem Abschnitt zwei Effekte vorgestellt werden, die zu einem Verstoß gegen die zweite Anforderung des Invarianzprinzips, der Prozedurinvarianz, führen.

Der sogenannte *Präferenzumkehr*effekt wurde erstmals von Lichtenstein und Slovic (1971) im Experiment nachgewiesen.⁵ Die Teilnehmer wählten aus Lotteriepaaren eine Lotterie aus. Sie wurden auch gebeten, für die Lotterien Grenzpreise aus Verkäuferperspektive, d. h. minimale Preise zu nennen, zu denen sie die Lotterien gerade noch zu verkaufen bereit waren. Die zur Wahl stehenden Alternativen waren so konzipiert, dass bei einer Lotterie mit relativ geringer Wahrscheinlichkeit ein relativ hoher Gewinn erreicht werden konnte, wohingegen bei der anderen Lotterie ein niedriger Gewinn mit hoher Wahrscheinlichkeit möglich war. Abb. 6.12 zeigt eine entsprechende Wahlsituation (Beispiel aus Tversky et al. 1990, S. 204).

Ein rationaler Entscheider sollte in jeder Wahlsituation diejenige Alternative wählen, der er auch einen höheren minimalen Verkaufspreis zuweist. In Experimenten wurde allerdings beobachtet, dass sich Versuchspersonen bei der Konfrontation mit Lotterien wie L_{q1} und L_{q2} häufig für die Lotterie mit dem niedrigen Gewinn (L_{q1}) entschieden, dieser aber zugleich einen geringeren Grenzpreis aus Verkäuferperspektive zuwies. Die Erhebungsmethode der Präferenzen ist hier also nicht irrelevant. Je nachdem, ob die Versuchspersonen Lotterien direkt auswählen oder ob ihre Präferenzen auf der Grundlage von Grenzpreisen ermittelt werden, kann es zur Präferenzumkehr kommen. Eine Erklärung des Phänomens könnte darin liegen, dass der mögliche Gewinn der Lotterie jeweils als Anker bei der Festlegung von Grenzpreisen fungiert. Passt ein Entscheider diesen Betrag unzureichend an, um der Unsicherheitssituation Rechnung zu tragen, so kommt er zu einem zu niedrigen Grenzpreis für L_{q1} .

⁵Für eine ausführlichere Diskussion des Effekts vgl. Tversky et al. (1990).

Es wurde auch eine Vielzahl von Experimenten durchgeführt, die unterschiedliche Methoden der Ermittlung von Nutzenfunktionen im Rahmen des Bernoulli-Prinzips testen. In Kap. 5, Abschn. 5.3.2, wurde mit der Bernoulli-Befragung eine Ermittlungsmethode vorgestellt, bei der der Entscheider in einem einfachen hypothetischen Entscheidungsproblem (sicheres Ergebnis versus Lotterie mit zwei möglichen Ergebnissen) eine Indifferenzwahrscheinlichkeit angeben muss. Eine andere Möglichkeit zur Ermittlung der Nutzenfunktion, die ebenfalls kurz beschrieben wurde, wäre die Vorgabe dieser Wahrscheinlichkeit, sodass der Entscheider die Höhe des sicheren Ergebnisses so festlegen müsste, dass wieder Indifferenz herrscht. In Experimenten wurde gezeigt, dass Menschen unterschiedliche Risikoeinstellungen (*response mode bias*) zeigen, je nachdem, welche Methode zur Anwendung kommt (vgl. z. B. Fishburn und Kochenberger 1979, und zu einer aktuellen Diskussion über den Einfluss der Höhe der Wahrscheinlichkeiten auf diesen Effekt Schwand et al. 2010).

6.3.5 Zusammenfassung

Die Darstellungen der Abschn. 6.3.3 und 6.3.4 konzentrierten sich auf wesentliche Verstöße gegen das zentrale Axiom des Bernoulli-Prinzips, das Unabhängigkeitsaxiom, sowie gegen ein weiteres Axiom, welches jeder Theorie rationalen Entscheidens zumindest implizit zugrunde liegt, dem Invarianzaxiom. Die Evidenz gegen beide Axiome, die vorgestellt wurde, ergibt das folgende Bild:

- Entscheider weisen der Sicherheit eines Ergebnisses einen besonderen Wert zu: Sie nehmen Alternativenvergleiche in unterschiedlicher Weise vor, je nachdem, ob eine der zur Wahl stehenden Alternativen sicher ist oder nicht.
- Entscheider reagieren weniger stark auf Unterschiede in Wahrscheinlichkeiten für Ergebnisse, wenn es sich generell um geringe Wahrscheinlichkeiten handelt; sie orientieren sich dann eher an Unterschieden in den Ergebnissen.
- Entscheider wenden nicht konsequent das Reduktionsaxiom an. Sie entscheiden daher in unterschiedlicher Weise, je nachdem, wie unsichere Alternativen im Hinblick auf die Umweltzustände dargestellt werden.
- Entscheider werden grundsätzlich durch die Art der Darstellung von Entscheidungsproblemen, insbesondere durch die Art der Darstellung der Ergebnisse von Entscheidungen beeinflusst.
- Entscheider orientieren sich an Referenzpunkten. Diese sind nicht stabil, sondern können sich je nach Entscheidungssituation verändern.
- Entscheider sind verlustavers, d. h. sie bewerten Verluste so viel stärker als betragsgleiche Gewinne, dass dies nicht mit Argumenten wie Konkavität der Nutzenfunktion oder Reichtumseffekten als rational im Sinne des Bernoulli-Prinzips erklärt werden kann.

- Entscheider bewerten unsichere Verluste anders als unsichere Gewinne: Die Risikoeinstellung wird um den Gewinn/Verlust-Referenzpunkt gespiegelt.
- Entscheider werden durch die Art der Befragung bei der Festlegung ihrer Präferenzen beeinflusst.

Im folgenden Abschnitt wird mit der Prospect-Theorie von Kahneman und Tversky die wichtigste deskriptive Theorie individuellen Entscheidungsverhaltens bei Risiko dargestellt. Sie ist eine direkte Konsequenz der Erkenntnisse, die maßgeblich auf die Arbeiten von Kahneman und Tversky zurückgehen und hier zusammengefasst wurden.

6.4 Die Prospect-Theorie von Kahneman und Tversky

6.4.1 Grundidee

Die Prospect-Theorie wurde von Kahneman und Tversky im Jahr 1979 erstmals vorgestellt und in den frühen 90er Jahren auf der Basis „Rangplatzabhängiger Erwartungsnutzentheorien“ zur Kumulativen Prospect-Theorie weiterentwickelt (Abschn. 6.5).

Die in Abschn. 6.3 beschriebenen, in Experimenten festgestellten Abweichungen vom Bernoulli-Prinzip sind Ausgangspunkt für die Entwicklung der Prospect-Theorie für Entscheidungen unter Risiko. Kahneman und Tversky geht es also zunächst um Entscheidungen *bei gegebenem Wahrscheinlichkeitsurteil über die Ergebnisse der Alternativen* (Lotterien), die als *finanzielle* Größen (Gewinne bzw. Verluste) interpretiert werden. In den 90er Jahren erweitern sie ihre Theorie um Entscheidungen bei Unsicherheit i. e. S. (Ungewissheit).

In der Prospect-Theorie wird der Entscheidungsprozess in zwei Phasen zerlegt, die Editing-Phase und die Bewertungsphase. Sie unterscheiden sich gegenüber einer Entscheidung nach dem Bernoulli-Prinzip in folgender Weise:

1. **Editing-Phase:** Vor der eigentlichen Bewertung findet das „Editing“ der Alternativen statt. Dabei werden die Ergebnisse von Alternativen in Abhängigkeit von Referenzpunkten betrachtet und die Darstellung der Alternativen vereinfacht. Die Alternativen werden von Kahneman und Tversky nach deren Bearbeitung in der Editing-Phase als *prospects* bezeichnet.
2. **Bewertungsphase:** In der Bewertungsphase werden die „Wertfunktion“ für die Ergebnisse und die *subjektiven* „Wahrscheinlichkeitsgewichte“ festgelegt, mit denen die Präferenzwerte der Alternativen ermittelt werden. Der Präferenzwert einer Alternative ergibt sich als gewichtete Summe der Werte ihrer möglichen Ergebnisse, wobei die Gewichtung nicht direkt mit den Eintrittswahrscheinlichkeiten der Ergebnisse vorgenommen wird, sondern mit den daraus abgeleiteten (subjektiven) Wahrscheinlichkeitsgewichten.

Die Vereinfachungen der Editing-Phase können zwar auch bei Anwendung des Bernoulli-Prinzips vorgenommen werden, jedoch sind sie hierfür nicht charakteristisch; das Bernoulli-Prinzip lässt offen, wie Entscheidungsprobleme dargestellt oder wie sie vereinfacht werden können bzw. sollen.

Die Wertfunktion, mit der die Ergebnisse bewertet werden, weist besondere Eigenschaften auf, die im Wesentlichen unabhängig vom gewählten Referenzpunkt sind, sodass sich die Wertfunktion in spezifischer Weise von einer Nutzenfunktion nach dem Bernoulli-Prinzip unterscheidet (Abschn. 6.4.3.2 und 6.4.3.3): Insbesondere verläuft die Wertfunktion unabhängig vom Referenzpunkt im Gewinnbereich mit positiven Abweichungen vom Referenzpunkt stets streng konkav und im Verlustbereich mit negativen Abweichungen stets streng konvex. Positive oder negative Abweichungen vom Referenzpunkt „an sich“ haben für den Entscheider besondere Bewertungsrelevanz, weniger die konkreten Implikationen von Ergebnissen, die sich für ihn z. B. unter Berücksichtigung eines bereits vorhandenen (aktuellen) Vermögens oder eines Vermögens in nachfolgenden Entscheidungssituationen (Abschn. 6.6.4.1) ergeben.

Wie erwähnt, werden gemäß der Prospect-Theorie für die Bewertung von Alternativen nicht direkt die Wahrscheinlichkeiten der Umweltzustände bzw. der Ergebnisse zugrunde gelegt, sondern *Wahrscheinlichkeitsgewichte*, die aus einer subjektiven Transformation der Wahrscheinlichkeiten durch den Entscheider hervorgehen.. Dies verstößt eindeutig gegen das Bernoulli-Prinzip, bei dem explizit die Wahrscheinlichkeiten entscheidungsrelevant sind.

Die Transformation der Wahrscheinlichkeiten und die Ermittlung der Ergebnisse (Gewinne und Verluste) als Abweichungen von einem Referenzpunkt sind in Verbindung mit einer in ihren charakteristischen Eigenschaften referenzpunktunabhängigen Wertfunktion die wesentlichen Merkmale der Prospect-Theorie und zugleich die bedeutenden Neuerungen gegenüber den bis zu ihrer Entwicklung bekannten deskriptiven Theorien.

Im Folgenden sollen Gewinne und Verluste relativ zum Referenzpunkt als „Ergebnisse“ bezeichnet werden. Mit $\{x_1; w_1 | x_2; w_2 | \dots | x_{N_X}; w_{N_X}\}$ wird wieder eine Lotterie bzw. eine Alternative notiert, bei der das Ergebnis x_s mit der Wahrscheinlichkeit w_s , $s = 1, \dots, N_X$, erzielt wird. Die Summe der Wahrscheinlichkeiten über alle N_X Ergebnisse ist gleich eins.

6.4.2 Editing-Phase

In der Editing-Phase werden Alternativen bearbeitet, um den Bewertungs- und Auswahlprozess vorzubereiten und zu vereinfachen. Kahneman und Tversky (1979) nennen sechs Operationen der Editing-Phase. Die ersten drei Operationen, Kodierung, Kombination und Abtrennung, werden für jede Alternative separat durchgeführt, die weiteren drei Operationen, Streichung gemeinsamer Bestandteile, Vereinfachung und Vorauswahl über Dominanzkriterien, sind übergreifende, die gesamte Alternativenmenge betreffende Operationen.

1. *Kodierung (Coding)*

Nach Kahneman und Tversky nehmen Menschen Konsequenzen in Form von Gewinnen und Verlusten als positive oder negative Abweichungen von einem Referenzpunkt wahr. Die experimentellen Ergebnisse zu den Wahlsituationen (o) und (p) können beispielsweise über die Verwendung eines Referenzpunktes erklärt werden. Bei der Kodierung wird der Referenzpunkt festgelegt und es werden die entsprechenden Gewinne und Verluste der Alternativen ermittelt und diesen Eintrittswahrscheinlichkeiten zugeordnet. Naheliegend ist die Wahl der aktuellen Vermögensposition als Referenzpunkt. Dies ist jedoch nicht zwingend, da die Wahl beispielsweise auch von Erwartungen über zukünftige Vermögensänderungen abhängen kann, sodass der Referenzpunkt stochastisch wäre. Stochastische Referenzpunkte werden in der Prospect-Theorie allerdings nicht explizit betrachtet.

Nimmt man beispielsweise als Referenzpunkt ein Ausgangsvermögen von 10.000 EUR an und betrachtet eine Alternative, bei der mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5 ein Verlust von 200 EUR und mit der Gegenwahrscheinlichkeit ein Gewinn von 350 EUR auftritt, dann kann die Alternative in der Prospect-Theorie als $\{-200; 0,5 \mid 350; 0,5\}$ dargestellt werden, wohingegen die Betrachtung von Vermögenspositionen als Zielgrößen bei Zugrundelegung der Erwartungsnutzentheorie zu $\{9.800; 0,5 \mid 10.350; 0,5\}$ führt.

2. *Kombination (Combination)*

Diese Operation dient der Vereinfachung von Alternativen, indem Wahrscheinlichkeiten identischer Ergebnisse addiert werden. Bei Combination würde dann z. B. ein Entscheider eine Alternative $\{10; 0,5 \mid 10; 0,2 \mid 5; 0,3\}$ auf $\{10; 0,7 \mid 5; 0,3\}$ reduzieren.

3. *Abtrennung (Segregation)*

Bei dieser Operation werden sichere Bestandteile von den riskanten getrennt. Bei einer Alternative $\{100; 0,6 \mid 350; 0,4\}$ wird der sichere Gewinn in Höhe von 100 „vereinnahmt“ und daraufhin nur die Chance betrachtet, mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,4 einen Gewinn von 250 zu erzielen.

4. *Streichung gemeinsamer Bestandteile (Cancellation)*

Gemeinsame Bestandteile von Alternativen werden bei dem Vergleich dieser Alternativen ignoriert. Z. B. wird ein Ergebnis, das bei allen zu vergleichenden Alternativen jeweils mit derselben Wahrscheinlichkeit eintritt, vernachlässigt. Auch bei einem mehrstufigen Entscheidungsproblem soll eine Stufe, die bei allen Alternativen vorkommt, unberücksichtigt bleiben. Dieser Schritt trägt dem Isolationseffekt Rechnung (vgl. Wahlsituation (g)).

5. *Vereinfachung (Simplification)*

Diese Operation bezieht sich auf das Auf- und Abrunden von Wahrscheinlichkeiten und Ergebnissen. Dabei wird ein Entscheider z. B. anstelle der exakten Alternative $\{1.001; 0,49 \mid 0; 0,51\}$ eher mit $\{1.000; 0,5 \mid 0; 0,5\}$ rechnen. Häufig ist es dabei so, dass Ergebnisse, die eine sehr geringe Wahrscheinlichkeit aufweisen, vernachlässigt werden.

6. Vorauswahl über Dominanzkriterien (*Detection of dominance*)

Von Kahneman und Tversky (1979) wird gefordert, dass bereits in der Editing-Phase nach stochastisch dominierten Alternativen gesucht wird und diese eliminiert werden. Mit dieser letzten Operation wird verhindert, dass stochastisch dominierte Alternativen überhaupt in die Bewertungsphase gelangen.

Die Reihenfolge der (vereinfachenden) Operationen 2 bis 6 ist nicht vorgegeben, sie hat aber einen Einfluss auf das Ergebnis. Z. B. besteht zwischen den Alternativen $\{1.001; 0,49 | 0; 0,51\}$ und $\{950; 0,5 | 0; 0,5\}$ keine Dominanzbeziehung, die unter 5. beschriebene Vereinfachung der ersten Alternative zu $\{1.000; 0,5 | 0; 0,5\}$ würde jedoch zur Dominanz gegenüber der zweiten Alternative führen, die deren Vernachlässigung zur Konsequenz hätte.

Eine Editing-Phase, die in dem Ansatz von Kahneman und Tversky durch eine gewisse Willkür gekennzeichnet ist, was die Reihenfolge oder das Ausmaß der Anwendung der oben erläuterten Operationen anbelangt, könnte auch anderen deskriptiven Entscheidungstheorien vorangestellt werden. In der Literatur werden Elemente von Editing-Phasen diskutiert (vgl. z. B. Ranyard 1995), eine allgemein akzeptierte Vorgehensweise in dieser Phase existiert jedoch nicht. Festzuhalten bleibt, dass Menschen Alternativen bearbeiten und vereinfachen, bevor sie diese einer näheren Beurteilung unterziehen. Insofern ist eine Editing-Phase als durchaus realistisch anzusehen, wenn man auch nicht allgemein vorhersagen kann, wie diese tatsächlich abläuft.

Die beiden Operationen „Kombination“ und „Streichung gemeinsamer Bestandteile“ dienen im Wesentlichen der Vereinfachung von Alternativen. Dabei wird durch die Kombination das Reduktionsprinzip bei einstufigen Entscheidungen akzeptiert. Die Operation Abtrennung ist in dem Ansatz von Kahneman und Tversky notwendig, da, wie noch gezeigt wird, in der Bewertungsphase die riskanten Ergebnisbestandteile einer Alternative separat von sicheren (Mindest-) Ergebnissen bewertet werden.

Es lassen sich hier erste Beziehungen zu den aufgezeigten Paradoxien herstellen. Durch die Streichung gemeinsamer Bestandteile wird bereits in der Editing-Phase dem Isolationseffekt Rechnung getragen und der Widerspruch zum Reduktionsprinzip bei Mehrstufigkeit (bzw. zur ersten Anforderung des Invarianzprinzips) als typisches menschliches Entscheidungsverhalten akzeptiert. Mit der Kodierung wird durch die Wahl eines Referenzpunkts außerdem eine ungleiche Behandlung von Gewinnen und Verlusten ermöglicht, die im Zusammenhang mit der Bewertungsphase weitere der aufgezeigten Paradoxien auflösen kann.

6.4.3 Bewertungsphase

6.4.3.1 Ermittlung der Präferenzwerte

Kahneman und Tversky betrachten im Rahmen ihrer Prospect-Theorie nur Alternativen (Lotterien) mit maximal zwei von null verschiedenen möglichen Ergebnissen, x_1 und

x_2 (wobei stets $x_1 > x_2$ gilt), für die die Editing-Phase abgeschlossen ist. Sie bezeichnen eine riskante Alternative (bzw. Lotterie) als strikt positiv bzw. strikt negativ, wenn nur die Ergebnisse x_1 und x_2 möglich und beide positiv bzw. beide negativ sind. Alle anderen Alternativen werden als regulär bezeichnet. Eine reguläre Alternative hat also entweder 0 als mögliches Ergebnis oder die möglichen Ergebnisse sind nur x_2 und x_1 mit $x_2 < 0$ und $x_1 > 0$.

Zur Bewertung der Alternativen werden eine Wertfunktion und eine Wahrscheinlichkeitsgewichtungsfunktion eingeführt. Mit der Wertfunktion $V(x)$ werden Abweichungen x vom Referenzpunkt bewertet; dabei gilt $V(0) = 0$. Die Wertfunktion verläuft streng monoton steigend. Die Wahrscheinlichkeitsgewichtungsfunktion $\pi(w)$ ordnet den Wahrscheinlichkeiten w subjektive Gewichte $\pi(w)$ zu, wobei $\pi(0) = 0$ und $\pi(1) = 1$ gilt. Die Wahrscheinlichkeitsgewichtungsfunktion verläuft monoton steigend in w .

Nach Kahneman und Tversky gilt für den Präferenzwert einer regulären Lotterie L_a auf der Basis der Wert- und der Wahrscheinlichkeitsgewichtungsfunktion:

$$\Phi(L_a) = \pi(w_1) \cdot V(x_1) + \pi(w_2) \cdot V(x_2). \quad (6.2)$$

Für den Präferenzwert einer strikt positiven oder strikt negativen Lotterie L_b gilt dagegen:

$$\Phi(L_b) = V(x_2) + \pi(w_1) \cdot [V(x_1) - V(x_2)]. \quad (6.3)$$

Der Präferenzwert einer strikt positiven bzw. negativen Alternative entspricht also dem Wert des gemeinsamen sicheren Bestandteils der Ergebnisse ergänzt um den Wertzuwachs aus dem besseren Ergebnis x_1 , der mit einer gewichteten Wahrscheinlichkeit in den Präferenzwert eingeht. Für (6.3) kann man schreiben

$$\Phi(L_b) = \pi(w_1) \cdot V(x_1) + [1 - \pi(w_1)] \cdot V(x_2). \quad (6.4)$$

Mithin stimmt die Bewertungsgleichung (6.3) mit (6.2) nur überein, wenn $1 - \pi(w_1) = \pi(w_2)$ gilt, also die Summe der Wahrscheinlichkeitsgewichte gleich eins ist, was im Ansatz von Kahneman und Tversky jedoch nicht der Fall ist, wie noch gezeigt werden wird.

6.4.3.2 Eigenschaften der Wertfunktion

Die Wertfunktion der Prospect-Theorie hat die folgenden drei Eigenschaften:

1. *Betrachtung der Abweichungen von einem Referenzpunkt als Ergebnisse:*

Die Betrachtung von subjektiven Werten für Abweichungen von einem Referenzpunkt als solche anstelle einer Nutzenbewertung unter Berücksichtigung der konkreten Implikationen der Ergebnisse (etwa in Verbindung mit einer bereits vorhandenen Vermögensposition oder bereits gegebenen anderen Überschüssen) steht im Fokus der Prospect-Theorie.

2. Verlustaversion:

Für die Wertfunktion wird Verlustaversion angenommen. Verlustaversion ist gegeben, wenn für ein beliebiges x die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$V(x) < -V(-x) \text{ und } V'(x) < V'(-x). \quad (6.5)$$

Verlustaversion bedeutet also, dass der Wert eines beliebigen Gewinns x kleiner ist als der Betrag des Wertes eines gleich hohen Verlustes, $-x$, und dass die Steigung der Wertfunktion für jeden Gewinn kleiner ist als für einen betraglich gleich großen Verlust. Verlustaversion impliziert strikt risikoaverses Verhalten gegenüber Lotterien $L = \{x; 0,5 \mid -x; 0,5\}$ mit zwei möglichen Ergebnissen, die betraglich identisch und gleich wahrscheinlich sind, aber unterschiedliche Vorzeichen aufweisen. Die Lotterie vom Typ L ist unabhängig von x stets nachteilig. Mit steigendem x wird sie immer unattraktiver, der Präferenzwert der Lotterie also immer kleiner. Verlustaversion kann in den Wahlsituationen (h) und (i) die experimentellen Befunde erklären.

Verlustaversion stellt keinen Widerspruch zum Bernoulli-Prinzip dar, vielmehr führt (zum Beispiel) jede streng konkave Risikonutzenfunktion über Gewinne bzw. Vermögenspositionen und mithin risikoaverses Verhalten zu diesem Ergebnis. Die Wertfunktion wird allerdings bei Kahneman und Tversky nicht als durchgängig streng konkav sowohl für Verluste als auch für Gewinne angenommen, sodass bei der Prospect-Theorie die Annahme der Verlustaversion als explizite Eigenschaft zu formulieren ist.

3. Streng konkave Wertfunktion im Gewinnbereich und streng konvexe Wertfunktion im Verlustbereich:

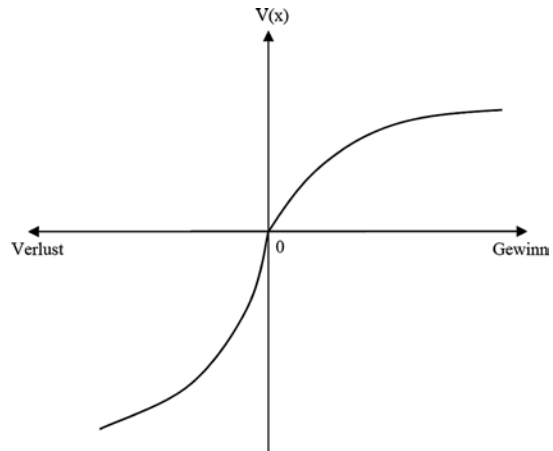
Kahneman und Tversky begründen dieses Krümmungsverhalten mit abnehmendem Wertzuwachs einer zusätzlichen Einheit Gewinn bzw. mit abnehmendem Wertverlust einer zusätzlichen Einheit Verlust. Diese Eigenschaft der Wertfunktion wird auch *abnehmende Sensitivität (diminishing sensitivity)* bezeichnet.

Die Wertfunktion in Abb. 6.13 erfüllt die genannten Eigenschaften.⁶

Nach der Prospect-Theorie können zwar die Werte für Gewinne und Verluste nicht nur von deren Höhe, sondern auch vom gewählten Referenzpunkt abhängen. Die dargestellte Grundform der Wertfunktion ist jedoch vom Referenzpunkt unabhängig; im Verlustbereich verläuft sie stets (streng) konvex und im Gewinnbereich stets (streng) konkav, wobei sie im Verlustbereich jeweils steiler verläuft als im Gewinnbereich. Kahneman und Tversky sind allerdings der Meinung, dass die Präferenzordnungen über Alternativen von kleineren Änderungen des Referenzpunkts kaum beeinflusst werden dürften, sodass man hierbei davon ausgehen könne, dass es ausreicht, die Bewertung nur in Abhängigkeit von der Höhe der Gewinne bzw. Verluste vorzunehmen (vgl. Kahneman und Tversky 1979, S. 278).

⁶Bei der dargestellten Wertfunktion sinkt die Steigung im Nullpunkt beim Übergang von Verlusten auf Gewinne abrupt. Ein Vorschlag, die Wertfunktion derart darzustellen, findet sich z. B. bei Tversky und Kahnemann (1992, S. 310).

Abb. 6.13 Zum Verlauf der Wertfunktion nach Kahneman und Tversky



6.4.3.3 Eigenschaften der Wahrscheinlichkeitsgewichtungsfunktion

Wie erläutert werden bei der Prospect-Theorie die Werte der Ergebnisse nicht mit deren Eintrittswahrscheinlichkeiten w multipliziert, sondern mit Gewichten $\pi(w)$, die als Funktion der Eintrittswahrscheinlichkeiten definiert und ermittelt werden. Diese Gewichte bringen nicht allein Glaubwürdigkeitsvorstellungen zum Ausdruck, sondern auch subjektive Bewertungen von Ereignissen, unabhängig von den entsprechenden Ergebnissen. Insbesondere bringt die Wahrscheinlichkeitsgewichtungsfunktion zum Ausdruck, dass sichere Ereignisse gegenüber „fast sicheren“ Ereignissen höher bewertet werden, als dies der Unterschied in den Wahrscheinlichkeiten implizieren würde, und Unterschiede in den Wahrscheinlichkeiten kaum noch wahrgenommen werden, wenn diese sehr gering sind. Konkret weist nach der Prospect-Theorie die Wahrscheinlichkeitsgewichtungsfunktion $\pi(w)$ die folgenden Eigenschaften auf.

1. Normierung:

$\pi(w)$ ist eine monoton steigende Funktion von w mit $\pi(0) = 0$ und $\pi(1) = 1$. Unmögliche Ereignisse werden also ignoriert und das sichere Ereignis erhält das Wahrscheinlichkeitsgewicht von eins.

2. Subadditivität:

$\pi(w)$ ist eine subadditive Funktion für geringe Wahrscheinlichkeiten, d. h. $\pi(r \cdot w) > r \cdot \pi(w)$ für $0 < r < 1$ und kleine w .

3. Übergewichtung geringer Wahrscheinlichkeiten:

Für geringe Wahrscheinlichkeiten sind die Wahrscheinlichkeitsgewichte größer als die Wahrscheinlichkeiten selbst, d. h. $\pi(w) > w$ für kleine w .

4. Subsicherheit:

Die Summe der Wahrscheinlichkeitsgewichte für eine beliebige Wahrscheinlichkeit w ($0 < w < 1$) und ihre Gegenwahrscheinlichkeit $1 - w$ ist kleiner als eins, d. h. $\pi(w) + \pi(1 - w) < 1$.

5. Subproportionalität:

Subproportionalität besagt, dass bei gegebenem Verhältnis von Wahrscheinlichkeiten, wobei im Zähler die kleinere Wahrscheinlichkeit steht, das Verhältnis der dazugehörigen Gewichte umso kleiner ist, je größer die Wahrscheinlichkeiten sind, d. h. für zwei Wahrscheinlichkeiten w_1 und w_2 mit $w_1 > w_2$ gilt:

$$\frac{\pi(w_2)}{\pi(w_1)} < \frac{\pi(r \cdot w_2)}{\pi(r \cdot w_1)} \text{ mit } 0 < r < 1. \quad (6.6)$$

Die Eigenschaften der Wahrscheinlichkeitsgewichtungsfunktion sind nicht unabhängig voneinander. So führen Subproportionalität und Übergewichtung kleiner Wahrscheinlichkeiten zur Subadditivität in dem relevanten Bereich (vgl. Kahneman und Tversky 1979, S. 282).

6. Die Gewichtungsfunktion ist für sehr kleine $w > 0$ und für sehr große $w < 1$ nicht eindeutig definiert (wohl aber auf $\pi(0) = 0$ und $\pi(1) = 1$ normiert).

Kahneman und Tversky argumentieren, dass Menschen Ereignisse mit extrem kleinen Wahrscheinlichkeiten in nicht allgemein vorhersagbarer Weise berücksichtigen: Es kann sowohl zur Vernachlässigung dieser Ereignisse kommen als auch zur Übergewichtung ihrer Wahrscheinlichkeiten. Gleichmaßen sei das Verhalten bei Ereignissen mit einer Wahrscheinlichkeit von annähernd 1 nicht allgemein vorhersagbar: Die Gleichsetzung mit Sicherheit sei ebenso möglich wie die Untergewichtung einer sehr hohen Wahrscheinlichkeit.

In Abb. 6.14 ist eine Wahrscheinlichkeitsgewichtungsfunktion dargestellt, die die oben genannten Eigenschaften erfüllt.

Es ist zu beachten, dass die Prospect-Theorie nicht besagt, dass Entscheider Eintrittswahrscheinlichkeiten „verzerrt“ wahrnehmen. Die Wahrscheinlichkeiten werden ja in den Experimenten vorgegeben. Diese werden allerdings nicht explizit bei der Bewertung erfasst, sondern implizit über die zugehörigen Gewichte.

6.4.3.4 Erklärung der experimentellen Ergebnisse

Wie erläutert, fußt die Prospect-Theorie auf den Beobachtungen zu Abweichungen von den Axiomen rationalen Verhaltens, die Kahneman und Tversky in zahlreichen Experimenten gemacht haben. Die drei wesentlichen Bausteine der Prospect-Theorie, die Editing-Phase, die Wertfunktion und die Wahrscheinlichkeitsgewichtungsfunktion, tragen diesen Beobachtungen Rechnung.

a) Zum Unabhängigkeitsaxiom

Wie gezeigt wurde, kann ein wesentlicher Grund für ein im Widerspruch zum Bernoulli-Prinzip stehendes Entscheidungsverhalten darin bestehen, dass gegen das Unabhängigkeitsaxiom verstoßen wird. In Abschn. 6.3.3.1 wurden zwei Experimentdesigns betrachtet, bei denen der Verstoß mit einem Sicherheitseffekt erklärt werden konnte. Bei dem ersten Design, das dem Allais-Paradoxon zugrunde liegt, wurde in der Wahlsituation

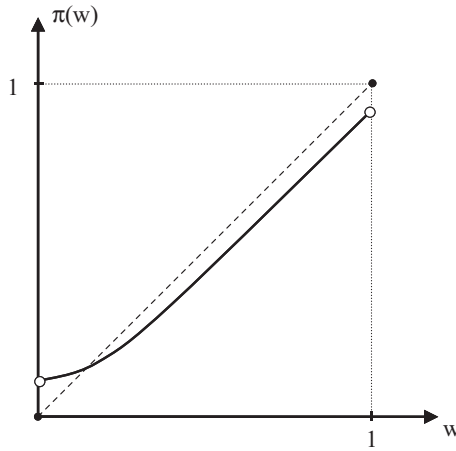


Abb. 6.14 Verlauf der Wahrscheinlichkeitsgewichtungsfunktion nach Kahneman und Tversky

(a) mehrheitlich die Lotterie L_{a1} vorgezogen und in der Wahlsituation (b) mehrheitlich die Lotterie L_{b2} . Wie erläutert wurde, ist dieses Entscheidungsverhalten logisch widersprüchlich, wenn man davon ausgeht, dass Entscheider nach dem Bernoulli-Prinzip handeln. Die Alternativenwahl ist jedoch dann nicht mehr unbedingt widersprüchlich, wenn man davon ausgeht, dass sich das Verhalten der Entscheider durch die Prospect-Theorie beschreiben lässt.

Zieht ein Entscheider $L_{a1} = \{1; 1\}$ der Lotterie $L_{a2} = \{5; 0,1 \mid 1; 0,89 \mid 0; 0,01\}$ vor, so gilt nach der Prospect-Theorie (wegen $V(0) = 0$):

$$\begin{aligned} V(1) &> \pi(0,1) \cdot V(5) + \pi(0,89) \cdot V(1) \\ \text{bzw. } [1 - \pi(0,89)] \cdot V(1) &> \pi(0,1) \cdot V(5). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Analog gilt für den Fall, dass derselbe Entscheider $L_{b2} = \{5; 0,1 \mid 0; 0,9\}$ gegenüber $L_{b1} = \{1; 0,11 \mid 0; 0,89\}$ bevorzugt:

$$\pi(0,1) \cdot V(5) > \pi(0,11) \cdot V(1). \quad (6.8)$$

Zwischen den Vorteilhaftigkeitsbedingungen (6.7) und (6.8) besteht nun nicht mehr logisch zwingend ein Widerspruch. Sie können allerdings nur dann miteinander in Einklang stehen, wenn die Bedingung

$$\pi(0,11) \cdot V(1) < [1 - \pi(0,89)] \cdot V(1) \text{ bzw. } \pi(0,11) + \pi(0,89) < 1 \quad (6.9)$$

gilt, also die Eigenschaft der Subsicherheit erfüllt ist. Die Prospect-Theorie kann also grundsätzlich das beobachtete Verhalten des Wechsels von L_{a1} auf L_{b2} erklären, steht aufgrund der Subjektivität der Wahrscheinlichkeitsgewichtungsfunktion aber auch nicht im Widerspruch zu anderen Wahlverhalten. Dagegen sind die Präferenzrelationen $L_{a1} \succ L_{a2}$ und $L_{b2} \succ L_{b1}$ unter der Hypothese, dass der Entscheider rational nach dem

Bernoulli-Prinzip entscheidet, überhaupt nicht (bei keiner Nutzenfunktion und keinen Wahrscheinlichkeiten für die Ergebnisse) miteinander in Einklang zu bringen.

Das zweite in Abschn. 6.3.3.1 vorgestellte Beispiel zum Beleg des Sicherheitseffekts war durch eine Common Ratio, d. h. durch ein gleiches Wahrscheinlichkeitsverhältnis bezüglich der Gewinne der jeweiligen Alternativen in den Wahlsituationen (c) und (d), gekennzeichnet. Dabei ging es in Wahlsituation (c) um den Vergleich von $L_{c1} = \{3.000; 1\}$ mit $L_{c2} = \{4.000; 0,8 \mid 0; 0,2\}$, in der Wahlsituation (d) um den Vergleich zwischen $L_{d1} = \{3.000; 0,25 \mid 0; 0,75\}$ und $L_{d2} = \{4.000; 0,2 \mid 0; 0,8\}$. Die letzten beiden Lotterien lassen sich auch wie folgt schreiben: $L_{d1} = \{3.000; r \cdot 1 \mid 0; 1 - r \cdot 1\}$ und $L_{d2} = \{4.000; r \cdot 0,8 \mid 0; 1 - r \cdot 0,8\}$, mit $r=0,25$. Die Präferenzen $L_{c1} \succ L_{c2}$ und $L_{d2} \succ L_{d1}$ lassen sich nun im Rahmen der Prospect-Theorie erklären, denn es gilt:

$$\begin{aligned} L_{c1} \succ L_{c2} &\Leftrightarrow V(3.000) > V(4.000) \cdot \pi(0,8) \\ \text{und } L_{d2} \succ L_{d1} &\Leftrightarrow V(4.000) \cdot \pi(r \cdot 0,8) > V(3.000) \cdot \pi(r \cdot 1). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Zwischen den beiden Vorteilhaftigkeitsbedingungen in (6.10) besteht nicht zwingend ein Widerspruch. Sie können miteinander kompatibel sein, wenn

$$\frac{\pi(r \cdot 0,8)}{\pi(r \cdot 1)} > \pi(0,8) \quad (6.11)$$

gilt, und dies wird durch die Subproportionalität der Wahrscheinlichkeitsgewichtungsfunktion eingefangen. Auch der Effekt kleiner Wahrscheinlichkeiten kann durch die Subproportionalität der Wahrscheinlichkeitsgewichtungsfunktion erklärt werden. So ergibt sich in den Wahlsituationen (e) und (f) für die Präferenzen $L_{e1} \succ L_{e2}$ (mit $L_{e1} = \{3.000; 0,9 \mid 0; 0,1\}$ und $L_{e2} = \{6.000; 0,45 \mid 0; 0,55\}$) sowie $L_{f2} \succ L_{f1}$ (mit $L_{f1} = \{3.000; 0,002 \mid 0; 0,998\}$ und $L_{f2} = \{6.000; 0,001 \mid 0; 0,999\}$) zwar ein Widerspruch zum Unabhängigkeitsaxiom, aber kein Widerspruch zur Prospect-Theorie, solange gilt:

$$\frac{\pi(r \cdot 0,45)}{\pi(r \cdot 0,9)} > \frac{\pi(0,45)}{\pi(0,9)}. \quad (6.12)$$

In Abschn. 6.3.3.3 wurde der Isolationseffekt als Verstoß gegen das Reduktionsaxiom beschrieben. Dieser wird bereits in der Editing-Phase vermieden.

b) Zum Invarianzaxiom

Die Betrachtung eines Referenzpunkts und die ungleiche Behandlung von Gewinnen und Verlusten ermöglichen die Erklärung von Framing-Effekten (z. B. in den Wahlsituationen (h) und (i)) und greifen damit den ersten Teil des Invarianzaxioms auf. Die Wahl unterschiedlicher Alternativen trotz gleicher Gesamtergebnisse in einem „Gewinnframe“ und einem „Verlustframe“ ist damit möglich.

Der Spiegeleffekt führt zu risikoaverm Verhalten bei Gewinnen und risikofreudigem Verhalten bei Verlusten (z. B. in den Wahlsituation (c) und (j)), sofern die Alternativen keine kleinen Wahrscheinlichkeiten beinhalten. Dieses Verhalten wird durch das Krümmungsverhalten der Wertfunktion ermöglicht. Menschen verhalten

sich aber bei kleinen Wahrscheinlichkeiten und Gewinnen eher risikofreudig, wohingegen sie bei kleinen Wahrscheinlichkeiten und Verlusten risikoaverses Verhalten zeigen (Abschn. 6.3.4.2). Dieses Verhalten kann nicht allein durch die Wertfunktion erklärt werden, wohl aber durch deren Zusammenspiel mit der Wahrscheinlichkeitsgewichtungsfunktion. So kann beispielsweise in der Wahlsituation (k) mit $L_{k1} = \{5; 1\}$ und $L_{k2} = \{5.000; 0,001 \mid 0; 0,999\}$ die Wahl der riskanten Alternative L_{k2} erklärt werden, denn nach der Prospect-Theorie gilt:

$$L_{k2} \succ L_{k1} \Leftrightarrow \pi(0,001) > \frac{V(5)}{V(5.000)}. \quad (6.13)$$

Aufgrund des konkav steigenden Verlaufs der Wertfunktion im Gewinnbereich gilt zwar $V(5)/V(5.000) > 0,001$, die Übergewichtung kleiner Wahrscheinlichkeiten führt aber zu $\pi(0,001) > 0,001$, sodass (6.13) erfüllt sein kann. Analog lässt sich Risikoaversion in der Wahlsituation (l) erklären, in der trotz konvex verlaufender Wertfunktion $L_{l1} = \{5; 1\}$ der Lotterie $L_{l2} = \{-5.000; 0,001 \mid 0; 0,999\}$ von der Mehrheit der Befragten vorgezogen wird. Für die Erklärung des Spiegeleffektes in den Wahlsituationen (m) und (n) kann schließlich die Eigenschaft der Subadditivität der Wahrscheinlichkeitsgewichtungsfunktion herangezogen werden. Für Entscheider, die in der Wahlsituation (m) $L_{m1} = \{6.000; 0,001 \mid 0; 0,999\}$ der Lotterie $L_{m2} = \{3.000; 0,002 \mid 0; 0,998\}$ vorziehen, gilt gemäß der Prospect-Theorie:

$$L_{m1} \succ L_{m2} \Leftrightarrow \frac{\pi(0,001)}{\pi(0,002)} > \frac{V(3.000)}{V(6.000)}. \quad (6.14)$$

Da die Wertfunktion im Bereich der Gewinne streng konkav verläuft, ist das Verhältnis der Werte und mithin auch der Gewichte in der obigen Ungleichung größer als $\frac{1}{2}$. Also gilt $\pi(\frac{1}{2} \cdot 0,002) > \frac{1}{2} \cdot \pi(0,002)$. Hier zeigt sich Subadditivität für $w = 0,002$ und $r = \frac{1}{2}$. Beim Bernoulli-Prinzip wäre das experimentelle Ergebnis nur bei konvexer Risikonutzenfunktion möglich. Durch die Gestalt der Wahrscheinlichkeitsgewichtungsfunktion kann also wieder trotz der Konkavität der Wertfunktion die Tendenz zu riskanteren Lotterien bei kleinen Eintrittswahrscheinlichkeiten für Gewinne erklärt werden. Entsprechend kann man zeigen, dass ein Entscheider trotz der Konvexität der Wertfunktion im Verlustbereich bei gleichem Erwartungswert die weniger riskante Lotterie vorzieht.

Der Präferenzumkehr Effekt und damit der Widerspruch zur zweiten Anforderung des Invarianzprinzips werden in der Prospect-Theorie nicht problematisiert. In Schmidt et al. (2008) wird der Ansatz von Kahneman und Tversky um stochastische Referenzpunkte erweitert, sodass auch das Problem der Präferenzumkehr betrachtet werden kann (vgl. auch Abschn. 6.3.4.4).

6.4.4 Prospect-Theorie und stochastische Dominanz

In der ursprünglichen Version der Prospect-Theorie besteht ein wesentlicher Kritikpunkt in der möglichen Wahl von stochastisch dominierten Alternativen (vgl. z. B. Birnbaum 1997). Dass diese Wahl möglich ist, lässt sich durch ein einfaches Beispiel zeigen. Hierzu wird die Abb. 6.15 betrachtet.

Die Abbildung zeigt auf der linken Seite noch einmal die Wahrscheinlichkeitsgewichtungsfunktion aus Abb. 6.14. Auf der rechten Seite werden zwei Lotterien dargestellt, L_1 und L_2 (mit $\Delta > 0$). L_1 dominiert L_2 im Sinne der stochastischen Dominanz erster Ordnung: L_1 liefert gegenüber L_2 mit der Wahrscheinlichkeit 0,1 ein um Δ höheres Ergebnis als L_2 . Nach der Prospect-Theorie sind aber für den Vergleich der Alternativen nicht die Wahrscheinlichkeiten relevant, sondern deren Gewichte. Für die in Abb. 6.15 dargestellte Wahrscheinlichkeitsfunktion gilt $\pi(0,1) > \pi(0,9) - \pi(0,8)$ bzw. $\pi(0,1) + \pi(0,8) > \pi(0,9)$, sodass durchaus $\pi(0,1) \cdot V(96 - \Delta) + \pi(0,8) \cdot V(96) > \pi(0,9) \cdot V(96)$ gelten kann, die dominierte Alternative also vorgezogen wird.

In einer präskriptiven Theorie ist dieser Verstoß gegen rationales Verhalten nicht tragbar. Aber auch für die deskriptive Theorie handelt es sich um eine äußerst unerwünschte Implikation. Selbst wenn es in Entscheidungssituationen zur Wahl von stochastisch dominierten Alternativen kommen kann, sollte eine deskriptive Theorie dieses Verhalten nicht systematisch zulassen.

Im Folgenden wird die Erweiterung der Prospect-Theorie zur Kumulativen Prospect-Theorie betrachtet. Die Kumulative Prospect-Theorie führt nicht nur zur Verbesserung des empirischen Erklärungsgehalts, sondern es kann auch nicht mehr zu Verstößen gegen stochastische Dominanz kommen, da keine direkten (isolierten) Trans-

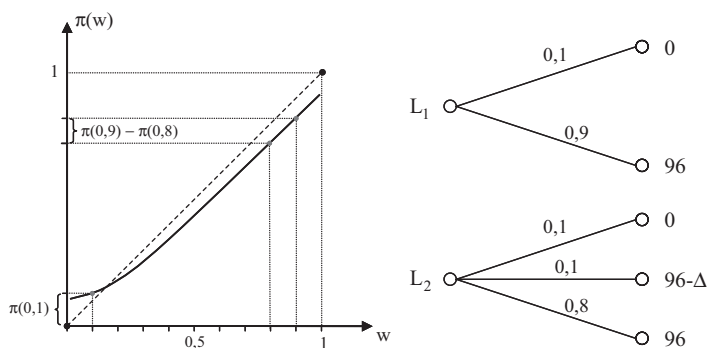


Abb. 6.15 Beispiel zum Verstoß der Prospect-Theorie gegen stochastische Dominanz

formationen von Wahrscheinlichkeiten w in Gewichte $\pi(w)$ verwendet, sondern Transformationen auf der Basis „kumulierter“ Wahrscheinlichkeiten vorgenommen werden. Dadurch werden immer ganze Ergebnisverteilungen berücksichtigt.

6.5 Erweiterung der Prospect-Theorie zur Kumulativen Prospect-Theorie

6.5.1 Rangplatzabhängige Erwartungsnutzentheorie

Bevor die Kumulative Prospect-Theorie dargestellt wird, wird im Folgenden zunächst einführend eine deskriptive Nutzentheorie aufgegriffen, die dem Bernoulli-Prinzip (der Erwartungsnutzentheorie) angelehnt ist, bei der jedoch die Nutzenwerte der Ergebnisse statt mit deren Wahrscheinlichkeiten mit Wahrscheinlichkeitsgewichten multipliziert werden, die aus Transformationen kumulierter Wahrscheinlichkeiten hervorgehen. Diese Transformations-Idee wird im Prinzip auch im Rahmen der Kumulierten Prospect-Theorie zugrunde gelegt.

Wie noch näher erläutert wird, werden die kumulativen Wahrscheinlichkeiten für die Ergebnisse einer Alternative auf der Grundlage einer Sortierung dieser Ergebnisse nach steigenden Werten ermittelt. Daher wird eine auf solchen Wahrscheinlichkeitsgewichten beruhende Nutzentheorie auch „Rangplatzabhängige Erwartungsnutzentheorie“ („Rank Dependent Expected Utility Theory“, RDEU) genannt, obwohl es sich streng genommen gar nicht um eine „Erwartungsnutzentheorie“ handelt, sondern um eine spezielle Variante eines *Non-Expected-Utility*-Modells.

Eine Rangplatzabhängige Erwartungsnutzentheorie wurde erstmals von Quiggin (1982) eingeführt und axiomatisch fundiert. Quiggin wollte die in der Realität beobachteten Widersprüche zum Unabhängigkeitsaxiom in einer allgemeinen Theorie einfangen. Gleichzeitig sollte diese Theorie nicht zur Wahl stochastisch dominierter Alternativen führen. Die Rangplatzabhängige Erwartungsnutzentheorie von Quiggin berücksichtigt wiederum nur eine Zielgröße, die nun allerdings nicht wie in der (Kumulativen) Prospect-Theorie als Gewinn bzw. Verlust interpretiert wird. Es kann sich auch um eine Zielgröße (wie etwa „Kosten“) handeln, bei der ein kleinerer Wert einem größeren vorgezogen wird.

Zur Ermittlung des Präferenzwertes Φ einer Alternative werden zunächst ihre N_X möglichen (unterschiedlichen) Ergebnisse gemäß ihrem Rang aufsteigend sortiert und so indiziert, dass $x_1 < x_2 < \dots < x_{N_X}$ gilt; das schlechteste Ergebnis der Alternative erhält somit den Index 1 und das beste Ergebnis den Index N_X . Entsprechend bezeichnet w_s die Eintrittswahrscheinlichkeit des Ergebnisses x_s . Der Präferenzwert einer Alternative wird dann wie folgt als gewichtete Summe der Nutzenwerte aller Ergebnisse ermittelt:

$$\Phi(x_1; w_1 | x_2; w_2 | \dots | x_{N_X}; w_{N_X}) = \sum_{s=1}^{N_X} U(x_s) \cdot (w_1, \dots, w_s) \quad (6.15)$$

mit

$$\pi(w_1) = g(w_1)$$

und

$$\pi(w_1, \dots, w_s) = g\left(\sum_{j=1}^s w_j\right) - g\left(\sum_{j=1}^{s-1} w_j\right) \text{ f\"ur } s = 2, \dots, N_X, \quad (6.16)$$

wobei $g(0) = 0$ und $g(1) = 1$.

Mit U wird die Nutzenfunktion bezeichnet. Sie entspricht nicht der Wertfunktion mit Referenzpunkt aus der Prospect-Theorie, sondern ist eher mit einer Risikonutzenfunktion des Bernoulli-Prinzips vergleichbar.

$\pi(w_1, \dots, w_s)$ bezeichnet das Wahrscheinlichkeitsgewicht f\"ur das Ergebnis x_s . Der Nutzenwert dieses Ergebnisses wird mit diesem Wahrscheinlichkeitsgewicht statt mit seiner Eintrittswahrscheinlichkeit multipliziert. Es h\"angt von der Wahrscheinlichkeit des betreffenden Ergebnisses, den Wahrscheinlichkeiten aller schlechteren Ergebnisse sowie vom Verlauf der Funktion g ab. Nur das schlechteste Ergebnis x_1 erh\"alt ein Wahrscheinlichkeitsgewicht $\pi(w_1) = g(w_1)$, das neben g allein von der Eintrittswahrscheinlichkeit dieses Ergebnisses abh\"angt. F\"ur jedes bessere Ergebnis wird das Wahrscheinlichkeitsgewicht als Differenz zweier Werte der Funktion g berechnet, wobei jeweils kumulierte Wahrscheinlichkeiten (bzw. Verteilungsfunktionswerte) in diese Funktion eingesetzt werden. Die Funktion g soll im Folgenden mit *Transformationsfunktion* bezeichnet werden.

F\"ur die Wahrscheinlichkeitsgewichte ist es irrelevant, wie stark sich bei gegebener Rangordnung die Ergebnisse unterscheiden. Wenn sich also Ergebnisse einer Alternative bei unver\"anderlicher Rangfolge und unver\"anderlichen Wahrscheinlichkeiten \"andern, so bleiben die Wahrscheinlichkeitsgewichte konstant. Der Pr\"aferenzwert der Alternative \"andert sich dann direkt um die Summe der mit den gegebenen Wahrscheinlichkeitsgewichten multiplizierten Wert\"anderungen f\"ur die betreffenden Ergebnisse. \"andert sich jedoch die Rangordnung \"uber die Ergebnisse einer Alternative, so \"andert sich grunds\"atzlich ihr Pr\"aferenzwert auch indirekt, weil sich einige oder alle Wahrscheinlichkeitsgewichte \"andern.

Unter der Annahme, dass die Transformationsfunktion g streng konkav verl\"auft, werden die schlechten Ergebnisse st\"arker und die besten Ergebnisse schw\"acher gewichtet als bei Verwendung der tats\"achlichen Wahrscheinlichkeiten. Ein Beispiel soll dies verdeutlichen. In der Tab. 6.3 ist eine Verteilung \"uber vier Ergebnisse dargestellt, die bereits (aufsteigend) sortiert sind, wobei davon ausgegangen wird, dass ein gr\"o\"eres Ergebnis einem kleineren vorgezogen wird.

Tab. 6.3 Beispiel
f\"ur die Ermittlung der
Wahrscheinlichkeitsgewichte

S_1 $w_1 = 0,2$	S_2 $w_2 = 0,4$	S_3 $w_3 = 0,3$	S_4 $w_4 = 0,1$
20	40	60	80

Der Präferenzwert ergibt sich hierfür zu:

$$\begin{aligned}\Phi = & g(0,2) \cdot U(20) + [g(0,6) - g(0,2)] \cdot U(40) \\ & + [g(0,9) - g(0,6)] \cdot U(60) + [g(1) - g(0,9)] \cdot U(80).\end{aligned}\quad (6.17)$$

In Abb. 6.16 ist die Ermittlung der Wahrscheinlichkeitsgewichte für eine streng konkave Transformationsfunktion skizziert. Dabei bezeichnet W die kumulierte Wahrscheinlichkeit, die das Argument der Transformationsfunktion bildet.

Die beschriebene Transformation der kumulierten Wahrscheinlichkeiten führt zu Wahrscheinlichkeitsgewichten, deren Summe wie die der Eintrittswahrscheinlichkeiten der möglichen Ergebnisse (bzw. Zustände) gleich eins ist. Jedoch können sich je nach Verlauf der Transformationsfunktion und der Rangordnung der Ergebnisse die einzelnen Wahrscheinlichkeitsgewichte erheblich von den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten unterscheiden. So geht im Beispiel der Abb. 6.16 das schlechteste Ergebnis 20 in den Präferenzwert mit einem Gewicht ein, das (weit) über seiner Eintrittswahrscheinlichkeit von 0,2 liegt. Dagegen erhält das beste Ergebnis 80 ein Gewicht, das (weit) unter seiner Eintrittswahrscheinlichkeit von 0,1 liegt. Allgemein gilt: Im Bereich niedriger (hoher) Ergebnisse mit kumulativen Wahrscheinlichkeiten, für die die Steigung der Transformationskurve größer (kleiner) ist als 1, sind die Wahrscheinlichkeitsgewichte für die einzelnen Ergebnisse höher (niedriger) als die Eintrittswahrscheinlichkeiten. Verliefe die Transformationsfunktion linear (mit der Steigung 1), so würden die „Wahrscheinlichkeitsgewichte“ mit den Eintrittswahrscheinlichkeiten übereinstimmen.

Eine streng konkave Transformationsfunktion spiegelt eine eher pessimistische Einstellung des Entscheiders wider. Eine streng konvexe Transformationsfunktion hingegen bringt Optimismus zum Ausdruck, da der Entscheider schlechte Ergebnisse unterbewertet

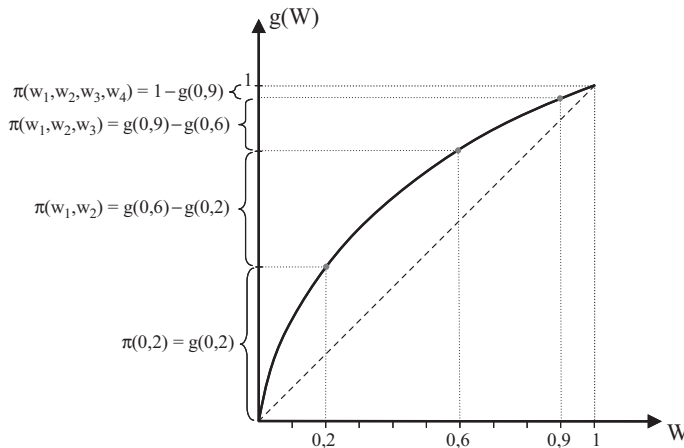


Abb. 6.16 Ermittlung der Wahrscheinlichkeitsgewichte π aus der Transformationsfunktion g

und gute Ergebnisse überbewertet. Weder eine streng konkave noch eine streng konvexe Transformationsfunktion bildet allerdings die Phänomene ab, die den Wahrscheinlichkeitsgewichten der (Kumulativen) Prospect-Theorie zugrunde liegen. In der Literatur wird daher insbesondere ein zunächst konkaver und für größere Wahrscheinlichkeiten konvexer Verlauf diskutiert. Die Masse der Wahrscheinlichkeitsgewichte wird damit zu den Rändern der Funktion hin verschoben. Auf diesen Verlauf kommen wir im nächsten Abschnitt zurück.

6.5.2 Kumulative Prospect-Theorie

Auf der Arbeit von Quiggin (1982) und anderen aufbauend erweiterten Tversky und Kahneman im Jahr 1992 ihren Ansatz zur Kumulativen Prospect-Theorie. Die wesentliche Änderung gegenüber der (ursprünglichen) Prospect-Theorie ist dabei die Ermittlung der Wahrscheinlichkeitsgewichte für die Ergebnisse einer Alternative auf der Basis der gesamten Wahrscheinlichkeitsverteilung über diese Ergebnisse in Anlehnung an die Vorgehensweise in der Rangplatzabhängigen Erwartungsnutzentheorie. Darüber hinaus stellt die Kumulative Prospect-Theorie eine Verallgemeinerung des ursprünglichen Ansatzes dar, da – wie noch gezeigt wird – die Beschränkung auf maximal drei Ergebnisse je Alternative aufgehoben wird. Zudem erfolgt die Erweiterung des Anwendungsbereichs auf Entscheidungen unter Unsicherheit i. e. S. (Ungewissheit). Die folgenden Ausführungen beziehen sich allerdings nur auf Entscheidungen unter Risiko.

Auch in der Kumulativen Prospect-Theorie findet eine Editing-Phase statt, die allerdings nicht weiter konkretisiert wird. Grundsätzlich sind vor der Bewertung Entscheidungen über die Darstellung von Alternativen zu treffen. Wie bei der Prospect-Theorie werden die Ergebnisse als Abweichungen von einem Referenzpunkt (z. B. dem aktuellen Vermögen) definiert und gemessen, die Wertfunktion der Prospect-Theorie wird also in der Kumulativen Prospect-Theorie übernommen.

Für die Darstellung der Kumulativen Prospect-Theorie werden die Ergebnisse zunächst wieder relativ zum Referenzpunkt definiert und so in Verluste und Gewinne unterschieden. Eine Alternative bzw. Lotterie L mit m möglichen Verlusten und n möglichen Gewinnen wird gemäß

$$L = \{x_{-m}; w_{-m} | \dots | x_{-1}; w_{-1} | 0; w_0 | x_1; w_1 | \dots | x_n; w_n\} \quad (6.18)$$

notiert, wobei alle Ergebnisse aufsteigend sortiert sind sowie die Verluste mit negativen Indices und die Gewinne mit positiven Indices versehen sind. Der größte Verlust hat den Index $-m$, der größte Gewinn den Index n . Das Ergebnis x_0 entspricht dem Referenzpunkt, sodass $x_0 = 0$ gilt.

Zur Berechnung des Präferenzwertes einer Alternative werden neben der bereits diskutierten Wertfunktion *zwei* Wahrscheinlichkeitsgewichtungsfunktionen verwendet, und zwar eine für die Gewichtung der Werte im Verlustbereich und eine für die Gewichtung

der Werte im Gewinnbereich. Der Präferenzwert einer riskanten Ergebnisverteilung berechnet sich dann wie folgt:

$$\Phi(L) = \sum_{s=-m}^{-1} \pi_s^- \cdot V(x_s) + \sum_{s=1}^n \pi_s^+ \cdot V(x_s). \quad (6.19)$$

Die Wahrscheinlichkeitsgewichte betragen für die Gewinne x_s

$$\pi_s^+ = \pi^+(w_s, \dots, w_n) = g^+ \left(\sum_{j=s}^n w_j \right) - g^+ \left(\sum_{j=s+1}^n w_j \right) \text{ für } s = 1, \dots, n-1,$$

und $\pi_n^+(w_n) = g^+(w_n).$ (6.20)

Für die Verluste x_s betragen die Wahrscheinlichkeitsgewichte:

$$\pi_{-m}^-(w_{-m}) = g^-(w_{-m})$$

und $\pi_s^- = \pi^-(w_{-m}, \dots, w_s) = g^- \left(\sum_{j=-m}^s w_j \right) - g^- \left(\sum_{j=-m}^{s-1} w_j \right)$ (6.21)

für $s = -m+1, \dots, -1.$

g^+ und g^- sind monoton steigende Funktionen, die Transformationsfunktionen werden auf $g^+(0) = g^-(0) = 0$ und $g^+(1) = g^-(1) = 1$ normiert. Dabei bezieht sich $g^+(1) = 1$ auf den Fall, dass nur Gewinne, und $g^-(1) = 1$ auf den Fall, dass nur Verluste möglich sind.

Wie bei der Wahrscheinlichkeitsgewichtungsfunktion (6.16) der Rangplatzabhängigen Erwartungsnutzentheorie hängt in (6.19) das Gewicht für das schlechteste Ergebnis (nun also für den höchsten Verlust) nur von der Wahrscheinlichkeit für diesen Verlust ab. Die Wahrscheinlichkeitsgewichte der niedrigeren Verluste hängen analog zu (6.16) von der Wahrscheinlichkeit des jeweiligen Verlustes und den Wahrscheinlichkeiten der höheren Verluste (also der schlechteren Ergebnisse) ab. Im Bereich der Gewinne ergibt sich dagegen das Wahrscheinlichkeitsgewicht für das beste Ergebnis (mit dem höchsten Gewinn) nur über die Wahrscheinlichkeit für dieses Ergebnis. Die Wahrscheinlichkeitsgewichte für die anderen Ergebnisse im Bereich der Gewinne hängen nun neben der Wahrscheinlichkeit für das jeweilige Ergebnis von den Wahrscheinlichkeiten für die besseren Ergebnisse ab.

Bei verschiedenen Alternativen kann somit ein und derselbe Gewinn bzw. Verlust bei gleicher Eintrittswahrscheinlichkeit verschiedene Wahrscheinlichkeitsgewichte erhalten, je nachdem, welchen „Rang“ er in der jeweiligen Wahrscheinlichkeitsverteilung über Gewinne und Verluste einnimmt und welche Wahrscheinlichkeiten die anderen Gewinne bzw. Verluste aufweisen.

Kahneman und Tversky nehmen im Rahmen ihrer Kumulativen Prospect-Theorie für die Wertfunktion wieder die Eigenschaft der abnehmenden Sensitivität (*diminishing sensitivity*) an, d. h. sie gehen davon aus, dass sukzessiv steigende Gewinne abnehmende Wertzuwächse und steigende Verluste abnehmende Wertverluste verursachen. Die Wertfunktion hat daher wieder einen konvex-konkaven Verlauf. Dieselbe Eigenschaft der *abnehmenden Sensitivität* nehmen Kahneman und Tversky auch für die Transformationsfunktionen an, wobei hier *zwei Referenzpunkte* unterstellt werden: Sicherheit ($W = 1$) und Unmöglichkeit ($W = 0$). W bezeichnet wieder die kumulierte Wahrscheinlichkeit als Argument der Transformationsfunktionen. Kahneman und Tversky gehen entsprechend davon aus, dass die Transformationsfunktionen g^+ und g^- einen konkav-konvexen Verlauf haben. Abb. 6.17 verdeutlicht einen für beide Transformationsfunktionen typischen Verlauf beispielhaft.

Gemäß Abb. 6.17 verläuft die Transformationsfunktion sowohl für sehr niedrige W als auch für sehr hohe W steiler als im übrigen Bereich. Das bedeutet in Bezug auf den Verlustbereich, dass sowohl sehr hohe Verluste (die kumulierte Wahrscheinlichkeit W ist niedrig) als auch sehr niedrige Verluste (die kumulierte Wahrscheinlichkeit W ist hoch) ein größeres Wahrscheinlichkeitsgewicht erhalten als mittlere Verluste. Der Zusammenhang gilt ähnlich für den Gewinnbereich, in dem aufgrund der umgekehrten Sortierung hohe Gewinne eine niedrige und niedrige Gewinne eine hohe kumulierte Wahrscheinlichkeit haben. Zur Ermittlung der Wahrscheinlichkeitsgewichte für extreme Ergebnisse befindet man sich also stets in den Randbereichen der Transformationsfunktionen. Aufgrund der Gestalt der Transformationsfunktionen werden damit sowohl extreme Gewinne als auch extreme Verluste über die Wahrscheinlichkeitsgewichte tendenziell überbewertet

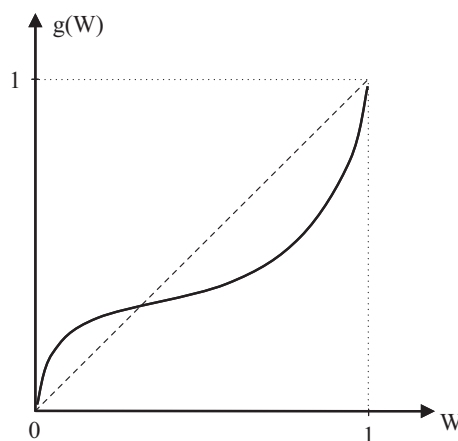


Abb. 6.17 Transformationsfunktion in der Kumulativen Prospect-Theorie

6.5.3 Kumulative Prospect-Theorie und stochastische Dominanz

Die Kumulative Prospect-Theorie stellt (wie die Rangplatzabhängige Erwartungsnutzentheorie) ein Modell dar, das mit dem Unabhängigkeitsaxiom nicht vereinbares Verhalten erklären kann, ohne gegen stochastische Dominanz zu verstoßen. Dies soll an dem Beispiel aus Abschn. 6.4.4 verdeutlicht werden. Dort wurde die in Abb. 6.18 dargestellte Wahlsituation betrachtet.

Für die Lotterie L_1 ergibt sich der Präferenzwert:

$$\Phi(L_1) = \pi^+(0,9) \cdot V(96) = g^+(0,9) \cdot V(96). \quad (6.22)$$

Für die Lotterie L_2 ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Phi(L_2) &= \pi^+(0,1; 0,8) \cdot V(96 - \Delta) + \pi^+(0,8) \cdot V(96) \\ &= [g^+(0,9) - g^+(0,8)] \cdot V(96 - \Delta) + g^+(0,8) \cdot V(96). \end{aligned} \quad (6.23)$$

(6.23) lässt sich auch wie folgt schreiben:

$$\Phi(L_2) = \Phi(L_1) - [g^+(0,9) - g^+(0,8)] \cdot [V(96) - V(96 - \Delta)]. \quad (6.24)$$

Somit ist der Präferenzwert der dominierten Lotterie L_2 für monoton steigende Funktionen V und g^+ niemals größer als der Präferenzwert für L_1 , ein Verstoß gegen stochastische Dominanz ist mithin ausgeschlossen. Ursache dafür ist, dass die Summe der Wahrscheinlichkeitsgewichte zweier Zustände dem Wahrscheinlichkeitsgewicht für den zusammengefassten Zustand entspricht. Im Beispiel gilt

$$\pi^+(0,9) = \pi^+(0,1; 0,8) + \pi^+(0,8) = g^+(0,9). \quad (6.25)$$

Dies gilt allgemein auch für den Bereich der Verluste. Es ist daher nicht möglich, ein Beispiel zu konstruieren, bei dem ein Widerspruch zur stochastischen Dominanz gegeben ist.

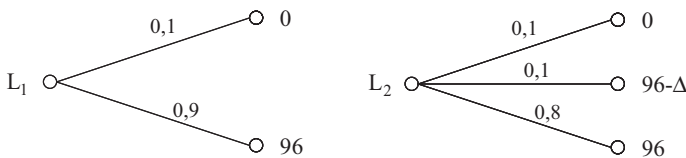


Abb. 6.18 Betrachtete Lotterien zur Illustration stochastischer Dominanz

6.6 Prospect-Theorie und Bernoulli-Prinzip: Ein Vergleich

6.6.1 Vergleich der Präferenzfunktionen

Nach dem Bernoulli-Prinzip entspricht der Präferenzwert einer Alternative dem Erwartungswert des Nutzens der möglichen Ergebnisse dieser Alternative. In die Präferenzfunktion gehen die Nutzenfunktion des Entscheiders sowie die Eintrittswahrscheinlichkeiten der Umweltzustände ein. In der Präferenzfunktion der Prospect-Theorie tritt an die Stelle der Nutzenfunktion die Wertfunktion, und an die Stelle der Eintrittswahrscheinlichkeiten selbst die Wahrscheinlichkeitsgewichtungsfunktion.

Die Tatsache, dass die Wertfunktion nach Kahneman und Tversky im Gewinnbereich konkav und im Verlustbereich konvex verläuft und dass die Gewinne als Abweichungen von einem Referenzpunkt ermittelt werden, stellt an sich noch keinen allgemeinen Widerspruch zum Bernoulli-Prinzip dar. Das Bernoulli-Prinzip lässt nämlich offen, welche Zielgröße(n) und welcher Verlauf der Nutzenfunktion (welche Risikoeinstellung bezüglich alternativer Ergebnisbereiche) maßgeblich sein sollen. Es ergibt sich kein Widerspruch zum Bernoulli-Prinzip, wenn für eine konkrete Entscheidungssituation angenommen wird, die Nutzenfunktion sei mit einer Wertfunktion gemäß der Prospect-Theorie identisch. Hingegen kommt es immer dann zum Widerspruch, wenn sich der Referenzpunkt *verändert*.

Zur Verdeutlichung wird Abb. 6.19 betrachtet. Darin wird eine streng konkave Nutzenfunktion dargestellt, der betrachtete Entscheider ist also risikoavers. Der Entscheider könne an einer Lotterie $L = \{\Delta; w \mid -\Delta; 1 - w\}$ teilnehmen. Sein aktuelles Vermögen betrage V , und das Ergebnis x entspreche diesem Vermögen, wenn er nicht an

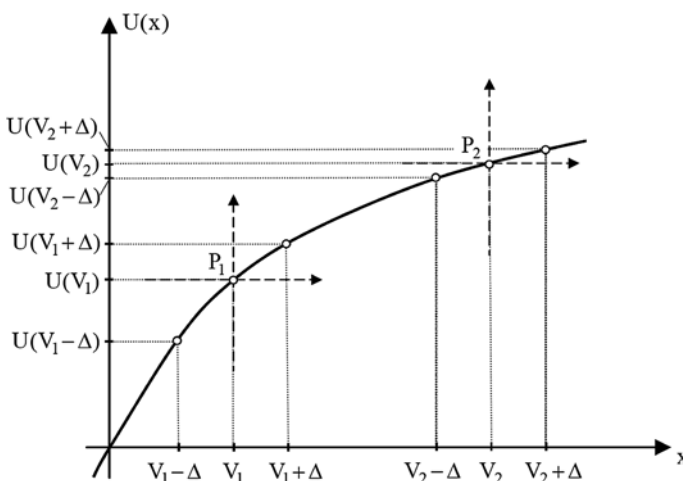


Abb. 6.19 Vermögensabhängige Bewertung von Lotterien nach dem Bernoulli-Prinzip

der Lotterie teilnimmt, oder aber diesem Vermögen zuzüglich des Gewinns Δ bzw. des Verlustes $-\Delta$ aus der Lotterie. In der Abb. 6.19 entsprechen die Punkte P_1 und P_2 zwei unterschiedlichen Vermögenswerten V_1 und V_2 , mit $V_2 > V_1$. Die entsprechenden möglichen Ergebnisse aus der Lotterie sind $V_1 - \Delta$ und $V_1 + \Delta$ für das Vermögen V_1 sowie $V_2 - \Delta$ und $V_2 + \Delta$ für das Vermögen V_2 . Aus der Abbildung wird ersichtlich, dass der Entscheider im Falle des hohen Vermögens (V_2) eher an der Lotterie teilnehmen wird als im Falle des niedrigen Vermögens (V_1). Dieses Verhalten impliziert fallende absolute Risikoaversion; vgl. Kap. 5, Abschn. 5.5. Die Beurteilung der Lotterie durch den Entscheider hängt also grundsätzlich von seinem aktuellen Vermögen ab.⁷

Soll die Entscheidung über die Teilnahme an der Lotterie mithilfe einer Nutzenfunktion getroffen werden, die einzig über die Ergebnisse der Lotterie ($+\Delta$ oder $-\Delta$) definiert ist, so muss die Nutzenfunktion in Abhängigkeit des aktuellen Vermögens definiert werden. Dieses Vermögen bestimmt dann den Nullpunkt des Koordinatensystems. Dies wird in Abb. 6.19 ebenfalls verdeutlicht: Die jeweils durch P_1 und P_2 gezeichneten Koordinatensysteme definieren den Nullpunkt der jeweils relevanten modifizierten Nutzenfunktion. Es wird deutlich, dass die durch P_1 verlaufende modifizierte Nutzenfunktion einen anderen Verlauf hat als die durch P_2 verlaufende. Durch die Änderung des aktuellen Vermögens verändert sich die zugrunde liegende Nutzenfunktion für das gesamte Vermögen nicht.

In der Prospect-Theorie hingegen gibt es keine Nutzenfunktion für Vermögen oder für eine andere, den Referenzpunkt bestimmende Größe, aus der die Wertfunktion abgeleitet werden kann. Zwar gehen Kahneman und Tversky (1979, S. 277–278) grundsätzlich davon aus, dass die Gestalt der Wertfunktion vom Referenzpunkt abhängen kann. Sie nehmen allerdings auch an, dass zumindest bei kleineren Änderungen des Referenzpunktes die konkrete Gestalt der Wertfunktion unverändert bleibt. Die Gewinne und Verluste werden dann unabhängig vom Referenzpunkt und damit vom aktuellen Vermögen stets gleich bewertet. Das bedeutet, dass in Abb. 6.19 durch die Punkte P_1 und P_2 jeweils *dieselbe* Wertfunktion gezeichnet werden müsste. Nach der Prospect-Theorie haben eben Abweichungen vom Referenzpunkt als solche (hier Gewinne und Verluste) besondere Bewertungsrelevanz, während bei der beschriebenen (und üblichen) Anwendung des Bernoulli-Prinzips die Konsequenzen der mit den Gewinnen (bzw. Verlusten) erzielten Gesamtvermögenspositionen letztlich bewertungsrelevant sind. Die Wertfunktion der Prospect-Theorie ist daher grundsätzlich nicht vereinbar mit dem Bernoulli-Prinzip.

Nicht vereinbar mit dem Bernoulli-Prinzip ist auch die Wahrscheinlichkeitsgewichtungsfunktion der Prospect-Theorie. Zwar mag das subjektive Wahrscheinlichkeitsurteil eines Entscheiders aus der Sicht anderer verzerrt sein, zum Beispiel weil der Entscheider die Eintrittswahrscheinlichkeit bestimmter Umweltzustände überschätzt.

⁷Es gibt nur zwei Ausnahmen, für die das Vermögen nicht die Bewertung von Lotterien beeinflusst: Lineare und exponentielle Nutzenfunktion. Vgl. ausführlich Kap. 7, Abschn. 7.3.

Die Wahrscheinlichkeitsgewichtungsfunktion findet aber selbst dann Anwendung, wenn die Wahrscheinlichkeiten, wie es in Glücksspielen regelmäßig der Fall ist, objektiv gegeben sind. Dies ist unvereinbar mit dem Bernoulli-Prinzip.

6.6.2 Komplexität der Theorien

Bei der Beurteilung der Prospect-Theorie muss man sich deutlich machen, welchen Anspruch Kahneman und Tversky mit diesem Ansatz verfolgten. Sie entwickelten ihre Ideen auf der Basis experimenteller Daten und versuchten, die Ergebnisse in die Beschreibung des menschlichen Verhaltens einzubeziehen. Durch die Einführung der Wertfunktion mit einem Referenzpunkt und der Wahrscheinlichkeitsgewichtung wird die Ermittlung eines Präferenzwertes weiter gefasst. Damit lassen sich Verhaltensmuster abbilden, die mit dem Bernoulli-Prinzip nicht erklärt werden können, in Experimenten jedoch systematisch auftraten. Das Vorgehen von Kahneman und Tversky repräsentiert die typische Vorgehensweise der deskriptiven Theorie: Das Erklärungsmodell wird so konzipiert, dass die zuvor aus Beobachtungen gewonnenen Daten bzw. Ergebnisse möglichst gut reproduziert werden können. Die Prospect-Theorie bietet dementsprechend den Vorteil, dass in Experimenten beobachtetes Verhalten besser abgebildet und damit eventuell auch tatsächliches Entscheidungsverhalten für einen Entscheider besser als mit der Erwartungsnutzentheorie prognostiziert werden kann. Der Vorteil einer besseren Reproduktion der Daten wird allerdings durch die höhere Komplexität der Theorie erkauft.

Bei Entscheidungsproblemen in der Realität sind grundsätzlich nicht wie in Labor-experimenten die Alternativen mit den möglichen Ergebnissen und deren Eintrittswahrscheinlichkeiten ex ante vorgegeben. Um Entscheidungen konkret prognostizieren zu können, muss man die erwogenen Alternativen mit den jeweils möglichen Ergebnissen und die Wahrscheinlichkeitsvorstellungen des Entscheiders bezüglich dieser Ergebnisse kennen. Darüber hinaus muss bei Zugrundelegung der Erwartungsnutzentheorie „nur“ noch seine Nutzenfunktion bekannt sein, während auf der Basis der Prospect-Theorie sowohl seine Wertfunktion als auch seine Wahrscheinlichkeitsgewichtungsfunktion geschätzt werden müssen, um sein Verhalten prognostizieren zu können. Da in der Kumulativen Prospect-Theorie grundsätzlich *zwei* Gewichtungsfunktionen für die Wahrscheinlichkeiten relevant sind, ist hier die Schätzung der maßgeblichen Entscheidungsdeterminanten sogar noch schwieriger (aufwendiger) als in der ursprünglichen Prospect-Theorie oder der Rangplatzabhängigen Erwartungsnutzentheorie.

Beide Elemente, die Wertfunktion und die Wahrscheinlichkeitsgewichtungsfunktion(en), können wie die Nutzenfunktion in der Erwartungsnutzentheorie von Person zu Person verschieden sein. Im Gegensatz zur Erwartungsnutzentheorie werden in der Prospect-Theorie keine konkreten Hinweise gegeben, wie die Wertfunktion festzulegen ist; es wird lediglich die charakteristische Form erklärt. Die Technik der Ermittlung der Risikonutzenfunktion auf der Basis hypothetischer Wahlakte ist nicht ohne Weiteres auf

die Ermittlung einer Wertfunktion übertragbar. Auch wenn bekannt ist, dass ein Entscheider gemäß der Prospect-Theorie entscheidet, lassen sich in der Realität seine Entscheidungen nur vage vorhersagen. Die Prognose ist gegenüber einer Orientierung des Entscheiders an der Erwartungsnutzentheorie sogar noch schwieriger, weil dann zusätzlich seine Wahrscheinlichkeitsgewichtung bekannt sein muss.

Die höhere Komplexität der Prospect-Theorie wie auch anderer deskriptiver Entscheidungstheorien ist der Preis, den man für eine mögliche höhere deskriptive Kraft der Theorien in Kauf nehmen muss. Die Entwicklung einer komplexen deskriptiven Entscheidungstheorie garantiert nicht, dass diese sich bei der Prognose realer Entscheidungen so viel besser bewährt als die einfachere, normative Erwartungsnutzentheorie, dass ihre höhere Komplexität bzw. der damit verbundene höhere Prognose- und Erklärungsaufwand gerechtfertigt wäre. Im Folgenden werden daher einige vergleichende empirische Befunde zur Prognosequalität bzw. zum Erklärungsgehalt der Erwartungsnutzentheorie und der Prospect-Theorie präsentiert.

6.6.3 Vergleichende empirische Befunde

Die Darstellungen dieses Kapitels konzentrierten sich auf Verletzungen der Axiome rationalen Verhaltens und auf die Prospect-Theorie in ihrer ursprünglichen sowie ihrer kumulativen Variante, die diese Verletzungen erklären können. Die Prospect-Theorie ist zwar die wichtigste Theorie zur Erklärung individuellen Entscheidungsverhaltens in Risikosituationen, sie ist jedoch keineswegs die einzige Theorie. Neben ihr wurden nicht nur die in Abschn. 6.5.1 beschriebene rangplatzabhängige Erwartungsnutzentheorie nach Quiggin entwickelt, sondern zahlreiche andere Theorien, die bestimmte Annahmen über die Gewichte von Ergebnissen bei der Präferenzbildung machen. Einen Überblick gibt Starmer (2000). Als Reaktion auf die Entwicklung dieser konkurrierenden deskriptiven Theorien wurden experimentelle Studien durchgeführt, um ihren Erklärungsgehalt zu überprüfen. Einen Überblick über die insbesondere in den 90er Jahren in großer Zahl durchgeführten Studien gibt ebenfalls Starmer (2000).

Ein Beispiel für solche Studien ist der Beitrag von Currim und Sarin (1989), der die Prospect-Theorie und die Erwartungsnutzentheorie miteinander vergleicht. Die Experimente wurden in zwei Teilen vorgenommen. Im ersten Teil wurden den Teilnehmern Fragen zur Ermittlung der individuellen Modellparameter wie z. B. der Wahrscheinlichkeitsgewichtungsfunktion gestellt. Im zweiten Teil konfrontierte man die Teilnehmer mit Paaren von Lotterien, für die sie jeweils angeben sollten, welche Lotterie sie vorziehen. Die hierbei zum Ausdruck gebrachten tatsächlichen, intuitiven Präferenzen wurden dann mit denjenigen verglichen, die mit den im ersten Teil ermittelten individuellen Modellparametern prognostiziert wurden. Die Vereinfachungen im Rahmen der Editing-Phase der Prospect-Theorie wurden von Currim und Sarin nicht berücksichtigt, weil sie als

„loosely defined guidelines“ (S. 26) in Experimenten nur schwer zu überprüfen sind. Currim und Sarin kommen u. a. zu folgenden Ergebnissen:

- Die Eigenschaften der Wert- und Wahrscheinlichkeitsgewichtungsfunktion nach der Prospect-Theorie werden weitgehend bestätigt.
- Für Alternativenpaare, die sich nicht durch Transformationen unterscheiden, die dem Allais-Paradoxon entsprechen, sagen die Prospect-Theorie und die Erwartungsnutzentheorie die Entscheidungen gleich gut voraus.
- Für Alternativenpaare, die zu widersprüchlichen Entscheidungen gemäß dem Allais-Paradoxon führen, ist dagegen die Prognosekraft der Prospect-Theorie signifikant besser als die der Erwartungsnutzentheorie.

Außerdem haben zahlreiche nachfolgende Studien gezeigt, dass die Vorhersagekraft des Bernoulli-Prinzips immer dann vergleichsweise schlecht ist, wenn die Wertebereiche der Ergebnisse unterschiedlicher Alternativen verschieden sind (z. B. weil eine Alternative sicher und eine andere Alternative riskant ist) und wenn Ergebnisse mit geringen Wahrscheinlichkeiten auftreten. Camerer und Loewenstein haben aus den experimentellen Studien zum Vergleich des Bernoulli-Prinzips mit deskriptiven Entscheidungstheorien gar geschlossen, dass die Evidenz gegen die Erwartungsnutzentheorie „überwältigend“ sei (Camerer und Loewenstein 2004, S. 20).

Die (Kumulative) Prospect-Theorie verdankt ihren Rang als führende deskriptive Entscheidungstheorie der Tatsache, dass sie in zahlreichen vergleichenden Studien vergleichsweise gute Erklärungen der beobachteten Verhaltensweisen lieferte. Dennoch gilt die Prospect-Theorie keineswegs als „die“ deskriptive Entscheidungstheorie mit dem eindeutig größten Erklärungsgehalt. So gibt es weitere viel beachtete deskriptive Ansätze, z. B. die sogenannten Regret-Theorien, die analog zur Niehans-Savage-Regel (Kap. 4) bei der Beurteilung einer Alternative Bedauernswerte im Vergleich zu den möglichen Ergebnissen der anderen Alternativen der Alternativenmenge einbeziehen (vgl. Loomes und Sugden 1982). Auch nach vielen Studien hat die Schlussfolgerung von Camerer (1989, S. 94) weiterhin Gültigkeit: „Each theory can account for some of the violations [of expected utility theory], but not for all“.

Trotz ihrer nicht bestreitbaren Bedeutung für die Beurteilung alternativer deskriptiver Entscheidungstheorien haben experimentelle Ergebnisse einen Nachteil: In Laborumgebungen können in aller Regel nur Wahlsituationen betrachtet werden, die eine Auswahl zwischen einfachen Lotterien beinhalten. Die Evidenz gegen die Erwartungsnutzentheorie und für deskriptive Entscheidungstheorien wäre daher überzeugender, wenn sie sich auf empirische Beobachtungen aus der „realen Welt“ stützen könnte.

Die Überlegenheit der Prospect-Theorie gegenüber dem Bernoulli-Prinzip in Bezug auf die Erklärung menschlichen Entscheidungsverhaltens in Risikosituationen gilt gleichwohl nicht generell. Im folgenden Abschnitt werden daher Entscheidungssituationen untersucht, in denen die Prospect-Theorie ähnliche oder gar größere Probleme hat, reales Entscheidungsverhalten zu erklären, als die Erwartungsnutzentheorie.

6.6.4 Grenzen des Erklärungsgehalts der Prospect-Theorie

6.6.4.1 Referenzpunkte und dynamische Entscheidungsprobleme

Da die Prospect-Theorie aus experimentellen Befunden heraus entwickelt wurde, die auf einfachen Wahlsituationen beruhen, ist der Erklärungsgehalt der Prospect-Theorie zunächst auf solche einfachen Wahlsituationen beschränkt. Im Folgenden geht es jedoch darum zu prüfen, inwieweit die Prospect-Theorie sich als erklärende Theorie auch in komplexeren Entscheidungssituationen bewährt.

Hierzu betrachten wir zunächst eine einfache und naheliegende Erweiterung, indem die Wahlsituationen, die den Experimenten von Kahneman und Tversky sowie anderen Experimenten zugrunde liegen, *wiederholt* betrachtet werden. Zur Verdeutlichung dienen die in Abb. 6.20 dargestellten Wahlsituationen (r) und (s) (vgl. Thaler und Johnson 1990).

Die Wahlsituation (s) bildet dieselben Wahrscheinlichkeitsverteilungen über das Endvermögen (das Vermögen nach Gewinn bzw. Verlust) des Entscheiders ab wie die Wahlsituation (r). Ein Entscheider, der sich am Bernoulli-Prinzip orientiert, wird sich folglich jeweils gleich entscheiden. Das bedeutet allerdings nicht, dass nach dem Bernoulli-Prinzip in der Wahlsituation (r) über die zweite Lotterie genau so zu entscheiden ist wie für den Fall, dass *keine* 100 EUR gewonnen worden sind. Grundsätzlich besteht eben ein Reichtumseffekt (vgl. ausführlicher Abschn. 6.6.4.2 und Kap. 7, Abschn. 7.3.2). Nur bei konstanter absoluter Risikoaversion (d. h. bei Risikoneutralität oder bei exponentieller Nutzenfunktion für das Vermögen) würde der Entscheider die Lotterie $L_r = \{10; w \mid -10; 1 - w\}$ unabhängig von dem Gewinn aus der vorangegangenen Lotterie gleich bewerten.

Eine komplexere Entscheidungssituation ergibt sich, wenn die erste Lotterie noch nicht gespielt, der Gewinn von 100 EUR also noch gar nicht erzielt worden ist, sondern darüber zu entscheiden ist, ob diese Lotterie überhaupt gespielt werden soll. Weiß der Entscheider bereits bei der Bewertung der ersten Lotterie, dass ihm nach Teilnahme an dieser Lotterie die zweite Lotterie L_r angeboten wird, wird er bei Orientierung am Bernoulli-Prinzip den Präferenzwert für die erste Lotterie gemäß dem Konzept der flexiblen Planung ermitteln (vgl. hierzu ausführlich Kap. 9). Dabei trifft er für jedes mögliche

Abb. 6.20 Wahlsituationen (r) und (s)

Wahlsituation (r):

Versetzen Sie sich in die Lage, dass Sie gerade bei einer „ersten“ Lotterie 100 € gewonnen haben. Bei dieser Lotterie konnten Sie 100 € mit der Wahrscheinlichkeit 0,75 gewinnen und 100 € mit der Gegenwahrscheinlichkeit 0,25 verlieren. Entscheiden Sie nun darüber, ob sie eine zweite Lotterie L_r spielen, bei der Sie 10 € mit der Wahrscheinlichkeit 0,6 gewinnen und 10 € mit der Wahrscheinlichkeit 0,4 verlieren.

Wahlsituation (s):

Wählen Sie bitte zwischen einem sicheren Gewinn von 100 € und einer Lotterie L_s , bei der Sie 110 € mit der Wahrscheinlichkeit 0,6 und 90 € mit der Wahrscheinlichkeit 0,4 gewinnen.

Ergebnis dieser Lotterie (Gewinn von 100 EUR bzw. Verlust von 100 EUR) eine bedingte Entscheidung darüber, ob er die zweite Lotterie spielt. Bei Teilnahme an der ersten Lotterie realisiert er nach Kenntnis des Ergebnisses dieser Lotterie die jeweils zugeordnete Entscheidung.

In den beiden bedingten Entscheidungen für bzw. gegen die zweite Lotterie werden etwaige Reichtumseffekte vorweggenommen. Nur dann, wenn keine Reichtumseffekte auftreten, die Risikoaversion des Entscheiders also konstant ist, wird der Entscheider unabhängig vom Ergebnis der ersten Lotterie immer gleich bezüglich der zweiten Lotterie entscheiden. Unabhängig davon, ob ein Reichtumseffekt besteht oder nicht, handelt der Entscheider bei Orientierung am Bernoulli-Prinzip „*dynamisch konsistent*“: Er wird nach Kenntnis des Ergebnisses der ersten Lotterie von der zugeordneten bedingten Entscheidung nicht abweichen, sondern diese in jeden Fall realisieren.

Wir betrachten nun einen Entscheider, der sich nicht am Bernoulli-Prinzip orientiert, dessen Wahlverhalten vielmehr in einfachen Wahlsituationen mit der Prospect-Theorie erklärt werden soll. Die Prospect-Theorie macht nun allerdings zunächst keine Aussagen darüber, wie der Entscheider die Wahlsituation (r) beurteilt, da nicht klar ist, wie er den Referenzpunkt für die Beurteilung der Lotterie L_r setzt. Es gibt zwei Möglichkeiten: Bei der ersten Möglichkeit setzt der Entscheider den Referenzpunkt auf null und addiert die Ergebnisse der Lotterie zu den gerade gewonnenen 100, sodass er die Wahlsituation (r) genauso darstellt wie die Wahlsituation (s) und zu folgendem Präferenzwert gemäß der Prospect-Theorie kommt:

$$\Phi = V(90) + \pi(w) \cdot [V(110) - V(90)] \text{ mit } w = 0,6. \quad (6.26)$$

Er bewertet die gesamte Einkommensverteilung also gemäß dem sicheren Mindesteinkommen von 90 (bei Pech in der Lotterie) zuzüglich der Chance, dass sich sein Vermögen auf 110 erhöht.

Bei der zweiten Möglichkeit setzt der Entscheider den Referenzpunkt auf 100 und bewertet die Lotterie L_r gemäß

$$\Phi = \pi(w) \cdot V(10) + \pi(1 - w) \cdot V(-10) \text{ mit } w = 0,6. \quad (6.27)$$

Es ist aufgrund der Gestalt der Wertfunktion (strenge Konvexität im Verlustbereich und strenge Konkavität im Gewinnbereich) offensichtlich, dass der Entscheider bei den beiden Referenzpunkten (0 bzw. 100) nicht zu denselben Präferenzwerten kommt und daher auch möglicherweise unterschiedliche Entscheidungen über die zweite Lotterie treffen wird, je nachdem, wie er den Referenzpunkt setzt. Die Prospect-Theorie lässt jedoch offen, wie dieser festgesetzt wird.

Die theoretische Unbestimmtheit der Wahl des Referenzpunkts kann dazu führen, dass sich der Entscheider nicht dynamisch konsistent verhält, wodurch die Prognose seines Verhaltens weiter erschwert wird. Setzt er beispielsweise den Referenzpunkt jeweils auf das unmittelbar vor einer Wahlsituation bestehende Vermögen, so wird er vor der ersten Lotterie möglicherweise zu dem Schluss kommen, dass er auch die zweite Lotterie spielen wird, sofern er mit der ersten den Gewinn von 100 erzielt, weil bei aggregierter

Betrachtung dieses Gewinns und des Ergebnisses der zweiten Lotterie so wie in Wahlsituation (s) nur der Gewinnbereich relevant ist. Wenn er nun an der ersten Lotterie teilnimmt und tatsächlich den Gewinn 100 erzielt, ist hingegen die zweite Lotterie isoliert dargestellt und über Gewinne und Verluste definiert, sodass die Verlustaversion des Entscheiders zur Ablehnung der Lotterie führen kann: Das Verhalten des Entscheiders wird *dynamisch inkonsistent* (vgl. auch Starmer 2000).

Kahneman und Tversky haben selbst bereits sehr früh darauf hingewiesen, dass dynamische Entscheidungssituationen nicht leicht zu lösende Probleme für eine deskriptive Theorie aufweisen. So würden Entscheider zwar häufig nur die Konsequenzen der unmittelbar vor ihnen liegenden Wahlsituation berücksichtigen (Tversky und Kahneman 1981, S. 456), andererseits gebe es aber auch Situationen, in denen Gewinne und Verluste relativ zu einer Erwartung oder einem gesetzten Anspruchsniveau bewertet würden, der sich vom Status quo unterscheidet (Kahneman und Tversky 1979, S. 286).

Wie erläutert, tritt das für die Prospect-Theorie beschriebene Problem der dynamischen Inkonsistenz des Verhaltens bei einer Orientierung an der Erwartungsnutzentheorie nicht auf. Daraus sollte man allerdings nicht schließen, dass die Erwartungsnutzentheorie den höheren deskriptiven Gehalt für dynamische Entscheidungssituationen hat als die Prospect-Theorie, denn es bleibt ja bei den beobachteten Verstößen gegen die Axiome des Bernoulli-Prinzips. Eine gute deskriptive Theorie dynamischen Entscheidungsverhaltens sollte stattdessen Erweiterungen statischer deskriptiver Entscheidungstheorien vornehmen (vgl. hierzu z. B. Thaler und Johnson 1990).

Bei der Diskussion des Beispiels mit den Wahlsituationen (r) und (s) haben wir nicht berücksichtigt, dass bei der Beurteilung von Eintrittswahrscheinlichkeiten kognitive Verzerrungen auftreten können. So kann die Wahlsituation (r) deshalb anders als die Wahlsituation (s) wahrgenommen werden, weil der Entscheider in der Wahlsituation (r) aus dem Glück in der ersten Lotterie die (irrationale) Zuversicht gewinnt, dass er weiter Glück haben wird. Andererseits könnte er zu dem (ebenfalls irrationalen) Schluss kommen, sein Glück „nicht weiter herausfordern“ zu dürfen. Kognitive Verzerrungen haben potenziell einen großen Einfluss auf das Wahlverhalten von Personen, sind aber nicht Gegenstand der vorliegenden Arbeit (vgl. z. B. Kahneman et al. 1982).

6.6.4.2 Reichtums- und Besitztumseffekte

Ein Reichtumseffekt tritt im Rahmen des Bernoulli-Prinzips auf, wenn die Risikoaversion eines Entscheiders (gemessen durch das Arrow-Pratt-Maß) nicht konstant ist und so sein Entscheidungsverhalten bei Risiko vom seinem Vermögensniveau abhängt. Reichtumseffekte können im Rahmen dieses Prinzips erklären, dass sich die Werte eines riskanten Zahlungsanspruchs aus Käufer- und aus Verkäufersicht selbst dann voneinander unterscheiden, wenn der potenzielle Käufer und der potenzielle Verkäufer dieselbe Nutzenfunktion für Vermögen haben und ohne Berücksichtigung des Zahlungsanspruchs über dasselbe sichere Vermögen verfügen (Kap. 7, Abschn. 7.4, Kap. 14, Abschn. 14.4.3). Der Grund liegt darin, dass der Verkäufer den Zahlungsanspruch besitzt

und damit reicher ist als der Käufer. Der Bewertungsunterschied kann aber in der Realität so groß sein, dass er allein mit einem Reichtumseffekt nicht erklärt werden kann.

Unterschiedliche Bewertungen aus Käufer- und Verkäufersicht wurden in zahlreichen Experimenten als stabiles Phänomen beobachtet. Tests dieses Phänomens beruhten allerdings überwiegend darauf, dass Unterschiede in der Bewertung eines nichtfinanziellen Gutes durch potenzielle Verkäufer, die das Gut geschenkt bekamen, und potenzielle Käufer, die anstelle des Gutes Geld erhielten, festgestellt wurden. Dabei gaben potenzielle Verkäufer einen Grenzpreis für den Verkauf des Gutes an, der wesentlich über dem Grenzpreis der potenziellen Käufer lag. Die Größenordnung dieser Unterschiede lässt sich im Rahmen der Erwartungsnutzentheorie nicht erklären. Erklärt wird der Unterschied vielmehr damit, dass der Besitz des (zuvor geschenkten) Gutes als solcher einen zusätzlichen Nutzen stiftet, denn der Bewertungsunterschied lässt sich nicht auf eine generell höhere Attraktivität des Gutes für die Verkäufer, die in den Experimenten ebenso zufällig ausgewählt wurden wie die Käufer, zurückführen (Tversky und Kahneman 1991; Kahneman et al., 1990; Loewenstein und Kahneman 1991). Das Phänomen ist Ausdruck der Verlustaversion (hier Aversion gegen den „Verlust“ des Gutes). Es wird als *Besitztumseffekt* (Endowment Effect) im Sinne von „Was ich einmal habe, möchte ich ungern wieder verlieren“ bezeichnet (Thaler 1980).

Verlustaversion bezogen auf riskante finanzielle Ergebnisse (Gewinne bzw. Verluste) wird in der Wertfunktion der Prospect-Theorie durch deren unterschiedliche Steigung links und rechts des Referenzpunkts abgebildet. Angenommen, ein Entscheider wähle als Referenzpunkt für eine kurzfristige Wertpapieranlage (wie üblicherweise angenommen wird) sein gegenwärtiges sicheres Vermögen ohne die Wertpapiere. Er komme zu dem Ergebnis, dass ein bestimmter Wertpapierbestand optimal ist. Bevor er nun die Wertpapiere erwirbt, erzielt er einen unerwarteten Vermögenszuwachs (etwa einen Lottogewinn). Wenn er als Referenzpunkt nun sein neues Vermögen (wiederrum ohne Wertpapiere) zugrunde legt, hat er bei gegebener Bewertungsfunktion gemäß der Prospect-Theorie keinen Grund, das Portefeuille nicht zu kaufen. Es gibt keinen „Reichtumseffekt“; die ursprüngliche Verlustaversion bleibt erhalten. Nach dem Bernoulli-Prinzip dagegen existiert ein solcher Effekt immer dann, wenn die Nutzenfunktion für Vermögen weder linear noch exponentiell verläuft.

Nach Eisenführ et al. (2010, S. 400) ist „die ‘Entdeckung’ des Konzeptes des Referenzpunkts ... die vielleicht wichtigste in der deskriptiven Entscheidungstheorie.“ Auch andere Autoren unterstreichen die Bedeutung des Referenzpunkts. Offen bleibt nach den experimentellen Ergebnissen hingegen, ob der Besitztumseffekt auch bei der Bewertung von Anwartschaften auf finanzielle Überschüsse, mit denen man zu handeln gewohnt ist, eine große Rolle spielt (Kahneman et al. 1990, S. 1328). Andererseits wurde im vorangegangenen Abschnitt gezeigt, dass die Prospect-Theorie je nachdem, wie der Entscheider den Referenzpunkt für seine Entscheidungen setzt, Reichtumseffekte gar nicht abbildet. Es bleibt daher eine offene Frage, wie beobachtete Verhaltensweisen auf die beiden möglichen Effekte – Besitztumseffekt und Reichtumseffekt – zurückgeführt werden können. Schließlich hat sich in experimentellen Studien auch gezeigt, dass der Besitztumseffekt schwächer wird, wenn die Erfahrung der Entscheider zunimmt (List 2004).

6.6.4.3 Risikomischung

Die Prospect-Theorie macht zunächst keine Aussagen darüber, wie Entscheider sich in Situationen verhalten, in denen sie nicht die Wahl haben zwischen einfachen einander ausschließenden riskanten Alternativen, sondern stattdessen Risiken mischen können, indem sie riskante Alternativen kombinieren. Aufbauend auf dem Bernoulli-Prinzip bzw. auf dem mit dem Bernoulli-Prinzip unter bestimmten Bedingungen vereinbaren (μ, σ) -Prinzip wird dieses Problem der Risikomischung im Rahmen der Theorie der Portfeuilleauswahl eingehend untersucht (vgl. ausführlich Kap. 8).

Eine zentrale Implikation des Bernoulli-Prinzips in Bezug auf die Mischung von Risiken ist die, dass es effiziente und ineffiziente Mischungen gibt. Ist der Entscheider risikoavers, so wird er keine Mischung vornehmen, deren Risiko größer ist als „notwendig“. Auf der Basis von (μ, σ) -Präferenzen lässt sich dies konkretisieren: Der Entscheider wird nur solche Risikomischungen erwägen, die bei gegebenem Erwartungswert (μ) ein minimales Risiko (σ) bzw. bei gegebenem Risiko einen maximalen Erwartungswert aufweisen.⁸

Die Darstellung der Präferenzen eines Entscheiders über die Verteilungsparameter μ und σ ist eine wesentliche Stärke der Portfeuille-Theorie nach Markowitz (1952), da sie Vorhersagen bezüglich des Verhaltens von Entscheidern erheblich erleichtert. Anders als aus dem Bernoulli-Prinzip lässt sich hingegen aus der Prospect-Theorie keine (μ, σ) -Präferenz ableiten. Dies liegt zum einen daran, dass nach dieser Theorie die Präferenzwerte alternativer Wahrscheinlichkeitsverteilungen über Ergebnisse von den komplexen Verläufen der Wert- und der Wahrscheinlichkeitsgewichtungsfunktion(en) abhängen. So erlaubt es die Wahrscheinlichkeitsgewichtung nicht, die Verteilungen unsicherer Ergebnisse auf Verteilungsparameter zu reduzieren (Levy und Levy 2004). Zum anderen müsste zunächst die der Bewertung vorgeschaltete Editing-Phase für das Problem der Risikomischung konkretisiert werden, um die Portfeuillewahl zu prognostizieren. Somit lassen sich allgemeine Aussagen über das Risikomischungsverhalten eines Entscheiders auf der Basis der Prospect-Theorie, sei es in ihrer ursprünglichen oder in der kumulativen Form, nicht machen. Immerhin gelingt es Levy und Levy (2004) für den Fall normal- oder lognormalverteilter Rückflüsse zu zeigen, dass die Menge effizienter Portfeuille für einen Entscheider, der nach der Kumulativen Prospect-Theorie handelt, stets eine Teilmenge der Menge der effizienten Mischungen in der Standard-Portfeuilletheorie ist. Welche Portfeuille nun ineffizient gemäß der Prospect-Theorie sind, kann jedoch allgemein nicht angegeben werden.

Deskriptive Theorien der Risikomischung treffen dementsprechend in der Regel zusätzliche konkretisierende Annahmen, um Aussagen über das Entscheidungsverhalten abzuleiten (Benartzi und Thaler 1995; Barberis et al. 2001; Levy und Levy 2004). Levy und Levy (2004) ermitteln empirisch die Menge effizienter Risikomischungen

⁸Entsprechende Regeln für die Vorauswahl effizienter Mischungen auf der Basis einer allgemeinen Nutzenfunktion beruhen auf dem Konzept der stochastischen Dominanz. Vgl. Hadar und Russel (1971); Bawa (1975, 1978).

für einen Entscheider, der gemäß der Prospect-Theorie entscheidet, unter speziellen Annahmen über die Ergebnisverteilungen sowie die Wertfunktion und Wahrscheinlichkeitsgewichtungsfunktion der Prospect-Theorie. Daraufhin vergleichen sie die für diesen speziellen Fall ermittelte Menge effizienter Risikomischungen mit der sich aus der Standard-Portefeuilletheorie ergebenden Menge und finden eine hohe Übereinstimmung beider Mengen: Der Entscheider, der nach der Prospect-Theorie unter Berücksichtigung der vorgenommenen Spezifikation handelt, trifft also eine Vorauswahl, die durch die traditionelle, normative Theorie der Portefeuilleauswahl in sehr ähnlicher Form vorhergesagt werden würde.

6.6.4.4 Märkte

Die Prospect-Theorie ist wie die Erwartungsnutzentheorie eine Theorie zur Erklärung des Entscheidungsverhaltens von Individuen. Aufbauend auf der Erwartungsnutzentheorie lassen sich (anschauliche) Aussagen über die Funktionsweise und die Preisbildung von Märkten ableiten (vgl. hierzu Kap. 13, 14 und 15 für die Preisbildung auf dem Kapitalmarkt und deren Implikationen für die Fundierung von Unternehmenszielen). Auf analoge Weise können Markttheorien aus deskriptiven Entscheidungstheorien wie der Prospect-Theorie abgeleitet werden. Solche Theorien sind in den vergangenen Jahren insbesondere für Kapitalmärkte entwickelt worden (für einen Überblick vgl. Subrahmanyam 2008).

Angesichts der oben beschriebenen Probleme, individuelles Entscheidungsverhalten in dynamischen Situationen und für Risikomischungsprobleme vorherzusagen, verwundert es allerdings nicht, dass die Wissenschaft derzeit noch weit davon entfernt ist, eine schlüssige deskriptive Theorie der Funktionsweise von Märkten vorzulegen. Gleichzeitig legen empirische Befunde nahe, dass das Verhaltensmodell des Bernoulli-rationalen Entscheiders als Basis für die Vorhersage der Funktionsweise von Märkten sehr viel besser abschneidet als bei der Vorhersage individuellen Entscheidungsverhaltens in Laborsituationen (vgl. z. B. List 2004).

6.6.5 Verteilte Entscheidungen

Die normative Entscheidungstheorie will Empfehlungen für rationales Verhalten geben. So sollten sich Entscheider am Bernoulli-Prinzip orientieren, wenn sie die Axiome rationalen Verhaltens als „vernünftig“ akzeptieren. Dieses Grundprinzip lässt sich zwar auf Entscheidungssituationen übertragen, in denen *mehrere Entscheider* miteinander kooperieren, die Entscheidungen also „*verteilt*“ sind, jedoch ergibt sich dabei für den einzelnen Entscheider ein zusätzliches Problem: Er muss bei seinen Entscheidungen in Betracht ziehen, dass sich seine Kooperationspartner (seine Mitarbeiter, seine Vorgesetzten, seine Kunden, Lieferanten, Kapitalgeber usw.) möglicherweise *nicht* Bernoulli-rational verhalten.

Betrachtet man z. B. Entscheidungen in hierarchisch organisierten Unternehmen, so ergeben sich aus diesem Grundproblem insbesondere zwei Fragen:

1. Wie soll sich ein Entscheider verhalten, wenn sich andere, ihm hierarchisch nachgeordnete Entscheider keine Bernoulli-rationalen Präferenzen bilden?
2. Wie soll ein Entscheider damit umgehen, dass andere, ihm hierarchisch übergeordnete Entscheider keine Bernoulli-rationalen Präferenzen haben?

Zu 1: Zur Verdeutlichung der ersten Fragestellung betrachten wir einen Entscheider, der in einem Unternehmen als Vorgesetzter, als (sogenannte) „Instanz“, erwägt, Entscheidungen an einen nachgeordneten Mitarbeiter als „Entscheidungsträger“ zu delegieren. Die Instanz wird ihre Delegationsentscheidung nicht in der Weise treffen, dass sie die Entscheidungen des Entscheidungsträgers für alle möglichen Entscheidungssituationen konkret prognostiziert, sondern allgemein die „Motivation“ und die „Qualifikation“ des Entscheidungsträgers einschätzen, in ihrem Sinne optimale Entscheidungen zu treffen (Laux und Liermann 2005). Orientiert sich die Instanz am Bernoulli-Prinzip, hat sie ein Interesse daran, dass der Entscheidungsträger den Erwartungswert ihres Nutzens maximiert. Damit der Entscheidungsträger hierzu in der Lage ist, muss er die Nutzenfunktion der Instanz (bzw. deren Risikopräferenzen) hinreichend genau kennen. Die Instanz kann dem Entscheidungsträger entsprechend seine Nutzenfunktion mitteilen oder eine Entscheidungsregel für die Bewertung von Alternativen vorgeben, die ihre Nutzenfunktion widerspiegelt. Orientiert sich der Entscheidungsträger ebenfalls am Bernoulli-Prinzip, so können Fehlentscheidungen aus Sicht der Instanz im Wesentlichen nur daraus resultieren, dass er abweichende persönliche Ziele verfolgt und nicht das Ziel der Instanz. Dem kann allerdings die Instanz in gewissen Umfang begegnen, indem sie ein anreizkompatibles Entlohnungssystem mit dem Entscheidungsträger vereinbart (Kap. 12).

Handelt der Entscheidungsträger dagegen nicht Bernoulli-rational, so könnte er selbst dann gegen die Interessen der Instanz verstoßen, wenn er sich explizit an ihren Zielen orientiert; er kann nicht beurteilen, wie nach dem Bernoulli-Prinzip zu entscheiden ist. Dem kann die Instanz allerdings durch Vorgabe einer Entscheidungsregel begegnen. Wenn der Entscheidungsträger in der betrachteten Beziehung keine persönlichen Ziele verfolgt und sich an die Vorgaben hält, kann davon ausgegangen werden, dass er im Sinne der Instanz agiert (sofern er sich ein aus Sicht der Instanz „gutes“ Wahrscheinlichkeitsurteil über die Ergebnisse der Alternativen bilden kann).

Anders ist die Situation zu beurteilen, wenn der Entscheidungsträger zum Zweck der Motivation an Gewinnen und Verlusten beteiligt wird. In diesem Falle haben seine Entscheidungen finanzielle Konsequenzen für ihn selbst und dies könnte dazu führen, dass die Prospect-Theorie auch die Entscheidungen, die er in der Delegationsbeziehung trifft, beschreibt. Dadurch allerdings würde das Verhalten des Entscheidungsträgers für die Instanz äußerst schwer prognostizierbar, da sie sowohl die Wertfunktion als auch die Wahrscheinlichkeitsgewichtungsfunktion(en) des Entscheidungsträgers schätzen müsste.

Da aber bei der Kumulativen Prospect-Theorie die Wahrscheinlichkeitsgewichte *alternativenabhängig* sind, müsste die Instanz zudem die möglichen Alternativen ermitteln. Der damit verbundene Planungsaufwand würde eine Delegation hinfällig machen.

Zu 2.: Versetzen wir uns nun in die Situation eines Bernoulli-rationalen Entscheidungsträgers, der im Auftrag einer übergeordneten Instanz handelt, von der er weiß, dass sie sich ihre Präferenzen gemäß der Prospect-Theorie bildet. Sollte er Entscheidungen treffen, die diese Präferenzen maximieren? Sollte er wissentlich gegen das Unabhängigkeitsaxiom verstoßen? Betrachten wir die konkrete Situation eines Geschäftsführers, der das Unternehmen für einen im Management nicht aktiven Eigentümer führt. Grundsätzlich sollten die Ziele und Präferenzen des Eigentümers maßgeblich für das zu verfolgende Unternehmensziel sein. Gleichwohl wird der rationale Geschäftsführer antizipieren, wie der Eigentümer seine Entscheidungen ex post beurteilen wird. Dies impliziert, dass der Geschäftsführer nicht notwendigerweise so handelt, wie es dem deskriptiven Verhaltensmodell für den Eigentümer entspricht, sondern danach, wie er ex post eine möglichst gute Beurteilung durch den Eigentümer erhalten wird. Da er sich am Bernoulli-Prinzip orientiert, beurteilt er jede Alternativen nach dem Erwartungswert des Nutzens der für ihn maßgeblichen Konsequenzen.

Zur Verdeutlichung dient das folgende Beispiel: Der Geschäftsführer hat eine Entscheidung bei Risiko zu treffen. Wenn er diese im Sinne des nicht Bernoulli-rationalen Eigentümers trifft (wobei wir unterstellen, dass er den hohen Planungsaufwand, die Präferenzen des Eigentümers abzubilden, erfolgreich bewältigt hat), so sei eine Alternative zu wählen, die zu den riskantesten zählt. Der Eigentümer verstoße nun aber nicht nur gegen die Axiome rationalen Verhaltens, er leide auch unter kognitiven Verzerrungen in Bezug auf Wahrscheinlichkeiten, konkret unter dem sogenannten Rückschaufehler (hindsight bias, vgl. Fischhoff 1975). Dieser besagt, dass Menschen nach Realisation eines Umweltzustandes bzw. eines Ergebnisses dazu neigen, seine Eintrittswahrscheinlichkeit heraufzusetzen („es musste ja so kommen“). Antizipiert der Geschäftsführer den Rückschaufehler des Eigentümers, so kommt er ex ante möglicherweise zu einer anderen Alternativenwahl: Er orientiert sich nicht an den ex-ante-Präferenzen seines Eigentümers, sondern daran, wie dieser die Entscheidung ex post beurteilen wird.

Das Beispiel verdeutlicht, dass die Abkehr von der vollen Rationalität dazu führen kann, dass sich Entscheidungsträger, an die Entscheidungen delegiert werden, rationalerweise nicht an den eigentlichen Präferenzen ihrer übergeordneten Instanzen orientieren werden. Dabei muss eine einigermaßen klare Vorstellung darüber existieren, wie die Instanz die Entscheidungssituation beurteilen wird.

Bedenkt man, dass Entscheidungsträger häufig auch im Auftrag einer Gruppe von Personen tätig sind (so z. B. ein Geschäftsführer im Auftrag mehrerer Eigentümer), so wird deutlich, dass man kaum in der Lage sein wird, die unterschiedlichen Präferenzen in angemessener Form zu berücksichtigen. Wieder zeigt sich die Notwendigkeit von Vereinfachungen für Prognosemodelle, die darin bestehen kann, von Bernoulli-rationalen Präferenzen der „Auftraggeber“ auszugehen.

6.7 Implikationen

In diesem Kapitel wurde gezeigt, dass in einfachen Wahlsituationen bei Risiko typische Verstöße gegen Axiome des Bernoulli-Prinzips vorkommen. Aus dem Nachweis dieses Verhaltens sollte jedoch nicht geschlossen werden, dass die Beschreibung „rationalen“ Verhaltens durch die Axiome problematisch bzw. „fehlerhaft“ ist. Menschen machen Fehler, auch wenn sie im Sinne des Bernoulli-Prinzips rational handeln wollen. Weist man sie auf Verstöße gegen Axiome rationalen Verhaltens hin, so sind sie häufig bereit, ihr Verhalten zu korrigieren. So legte Allais das inzwischen berühmte Experiment, bei dem die Mehrheit der Befragten gegen das Unabhängigkeitsprinzip verstoßen, L. Savage vor, der seine Präferenzen ebenfalls zunächst in inkonsistenter Weise äußerte, nach entsprechendem Hinweis jedoch seinen Irrtum erkannte und seine Wahl korrigierte. In der Realität werden solche Irrtümer jedoch selten aufgedeckt und bleiben so unkorrigiert. Es ist daher wenig sinnvoll, davon auszugehen, das reale Verhalten einer Person sei allein deshalb im Sinne des Bernoulli-Prinzips rational, weil sie dieses Entscheidungsprinzip akzeptiert.

Selbstverständlich ist auch keineswegs gesagt, dass die Frage, was unter rationalem Verhalten zu verstehen ist, mit den Axiomen des Bernoulli-Prinzips abschließend beantwortet ist. Es kommt oft vor, dass Menschen das scheinbar irrationale Verhalten auch nach entsprechenden Hinweisen beibehalten (vgl. z. B. bereits Maccrimmon 1968, oder Slovic und Tversky 1974). Sie empfinden ihr Verhalten offensichtlich als rational. Rationales Entscheidungsverhalten nach dem Bernoulli-Prinzip ist *definiert* als ein Verhalten, das im Einklang mit bestimmten Axiomen steht. Es kann nicht bewiesen werden, dass Menschen, die einzelne Axiome ablehnen und entsprechende Entscheidungen treffen, „unvernünftig“ handeln, denn es existieren keine (logisch zwingende) übergeordnete Axiome, auf deren Grundlage die Axiome des Bernoulli-Prinzips als Bedingungen rationaler Entscheidungen *bewiesen* werden können. Dass bisher noch keine grundlegende Kritik an den Axiomen des Bernoulli-Prinzips als präskriptives bzw. normatives Entscheidungsprinzip insbesondere für ökonomische Entscheidungssituationen gefunden wurde, wurde bereits in Kap. 5, Abschn. 5.6, gezeigt. Das Bernoulli-Prinzip stellt zurzeit *das* akzeptierte präskriptive Entscheidungsmodell bei Risiko dar und kann daher als übergeordnetes Entscheidungskriterium angesehen werden, an dem sich andere Kriterien (wie etwa das (μ, σ) -Prinzip) messen lassen müssen. Aus präskriptiver Sicht kann demnach (zumindest zurzeit) keine bessere Theorie als die Erwartungsnutzentheorie angeboten werden. Bei den Analysen von Entscheidungsproblemen aus normativer Sicht wird daher in den folgenden Kapiteln stets davon ausgegangen, alle beteiligten Entscheider würden sich am Bernoulli-Prinzip orientieren. Damit wird die präskriptive Entscheidungstheorie als deskriptive Theorie zugrunde gelegt, mit der *reales* Verhalten erklärt und prognostiziert werden soll.

Hier zeigt sich ein Grundproblem der Theoriebildung. Welche Hypothesen über das tatsächliche Entscheidungsverhalten von Menschen sollen für die Fundierung allgemeiner ökonomischer Theorien und/oder für die Prognose ökonomischer Größen

und Zusammenhänge angenommen werden? Soll vorausgesetzt werden, dass sich die Beteiligten gemäß der Erwartungsnutzentheorie verhalten, ist also dem Bernoulli-Prinzip auch aus deskriptiver Sicht der Vorzug zu geben? Oder soll etwa ein Ansatz von Kahneman und Tversky zur Beschreibung des menschlichen Entscheidungsverhaltens herangezogen werden? In einfachen Entscheidungssituationen, in denen mit bestimmten Entscheidungsmustern gemäß einem der deskriptiven Ansätze gerechnet werden kann, sind diese bei der Prognose von Entscheidungen selbstverständlich zu berücksichtigen. In komplexeren Entscheidungssituationen ist es jedoch eher vertretbar, aus Vereinfachungsgründen davon auszugehen, dass die Entscheidungen gemäß dem Bernoulli-Prinzip rational getroffen werden.

Theoriebildung steht allgemein im Spannungsfeld zwischen „Realitätsnähe“ und „Anschaulichkeit“. Je komplexer die Welt, desto größer ist der Bedarf an sinnvollen Vereinfachungen. Eine Theorie, die versuchte, in „realistischer“ Weise weitgehend mögliche Verstöße gegen rationales Verhalten zu antizipieren, dürfte kaum Orientierung bieten; die Gefahr wäre zu groß, dass angesichts der vielfältigen komplexen Zusammenhänge und Details der Überblick verloren ginge. Auch die Rationalität, Theorien mit Verständnis aufzunehmen, zu speichern und praktisch umzusetzen ist beschränkt.

Selbst die Ansätze der deskriptiven Entscheidungstheorie für äußerst einfache Wahlsituationen sind nicht in der Lage, *alle* Verstöße gegen Axiome rationalen Verhaltens einzufangen. Bei der Auswahl eines Prognosemodells ist grundsätzlich abzuwägen zwischen der erwarteten Verbesserung in der Prognose einerseits und dem zusätzlichen Aufwand des komplexeren Modells mit der Gefahr, Entscheidungsparameter des Modells falsch einzuschätzen, andererseits.

Immerhin kann es sinnvoll sein, wenigstens empirisch erforschte *stabile* und in ihren Auswirkungen auf das Entscheidungsverhalten *bedeutende* Phänomene zu erfassen. Zu diesen zählen vor allem die Verlustaversion und die nichtlineare Gewichtung von Wahrscheinlichkeiten. Zahlreiche Versuche, etablierte Theorien um stabile Phänomene menschlichen Entscheidungsverhaltens zu erweitern, haben bereits zu gewissen Fortschritten in der Erklärung von Entscheidungen in unterschiedlichsten Bereichen geführt, etwa der Preisbildung an Kapitalmärkten (Barberis und Thaler 2003), von Investitions- und Finanzierungsentscheidungen in Unternehmen (Baker et al. 2007) oder der Bereitstellung und Verarbeitung von Informationen im internen und externen Rechnungswesen (Birnberg et al. 2006; Koonce und Mercer 2005).

Inwieweit es sinnvoll bzw. geboten ist, bei der theoretischen Analyse Erkenntnisse der empirischen Verhaltensforschung zu berücksichtigen, hängt auch vom Zweck der Theoriebildung ab. Wie erläutert, dienen die kapitalmarkttheoretischen Darstellungen in dieser Arbeit insbesondere der Fundierung von Unternehmenszielen und damit kompatibler finanzwirtschaftlicher Entscheidungskriterien. Um Zusammenhänge in relativ einfacher und anschaulicher Weise nachweisen und interpretieren zu können, wird die in der Kapitalmarkttheorie übliche Annahme Bernoulli-rationalen Verhaltens der Investoren auf dem Kapitalmarkt getroffen. Sie lässt sich auch damit rechtfertigen, dass empirische Befunde vermuten lassen, dass das Verhaltensmodell des Bernoulli-rationalen

Entscheidung als Basis für die Vorhersage der Funktionsweise von Märkten sehr viel besser abschneidet als bei der Vorhersage individuellen Entscheidungsverhaltens in Labor-situationen (Abschn. 6.3.4).

Auch wenn empirisch erkannte Abweichungen vom Bernoulli-Prinzip (der Erwartungsnutzentheorie) bei der Theoriebildung nicht explizit berücksichtigt werden (können), zeigen die Erkenntnisse der empirischen Verhaltensforschung immerhin, aus welchen Gründen die Ergebnisse der Theorie (auch der Kapitalmarkttheorie) mit Vorsicht zu beurteilen sind. Darüber hinaus geben sie Orientierung für gebotene Korrekturen und Modifikationen.

Die nachfolgenden Kapitel kehren zurück zu den Fragen der präskriptiven Entscheidungstheorie. Dabei wird in Risikosituationen stets das Bernoulli-Prinzip zugrunde gelegt. Die Ergebnisse der deskriptiven Entscheidungstheorie werden dabei aber nicht ignoriert. Vielmehr wird gezeigt, wie die präskriptive Theorie solchen Entscheidern Hilfestellung geben kann, die nicht intuitiv, sondern intendiert rational auf der Basis einer systematischen Darstellung des Entscheidungsproblems handeln wollen.

6.8 Zusammenfassung

- Um typische Entscheidungsmuster aufzuspüren, werden in der deskriptiven Entscheidungstheorie Laborexperimente durchgeführt, in denen die Teilnehmer einfache Entscheidungsprobleme zu lösen haben. Dabei treten regelmäßig Abweichungen von den Vorhersagen normativer Modelle auf.
- In der deskriptiven Entscheidungstheorie werden Entscheidungskriterien bzw. Modelle diskutiert, die diesen beobachteten Abweichungen vom rationalen Verhalten Rechnung tragen und der Erklärung und Prognose individuellen Verhaltens dienen sollen. Die bekannteste deskriptive Entscheidungstheorie bei Unsicherheit ist die Prospect-Theorie von Kahneman und Tversky.
- In Rahmen der Prospect-Theorie wird der Entscheidungsprozess in zwei Phasen zerlegt, die Editing-Phase und die Bewertungsphase. In der Editing-Phase werden Alternativen bearbeitet, um den Bewertungs- und Auswahlprozess vorzubereiten und zu vereinfachen. Zentraler Bearbeitungsschritt ist die Wahrnehmung von Ergebnissen, die nicht absolut, sondern vom Entscheider relativ zu einem Referenzpunkt als Gewinne und Verluste „kodiert“ werden. In der Bewertungsphase werden die Alternativen auf der Basis der Wertfunktion und der Wahrscheinlichkeitsgewichtungsfunktion bewertet.
- Die Wertfunktion ordnet den kodierten Ergebnissen (Nutzen-)Werte zu. Sie erfasst mit der Verlustaversion und dem Spiegeleffekt zwei Eigenschaften realen Entscheidungsverhaltens, die häufig beobachtet wurden. Verlustaversion bedeutet, dass Verluste stärker wiegen als gleich hohe Gewinne. Der Spiegeleffekt beschreibt den Wechsel der Risikoeinstellung beim Übergang von Gewinnen zu Verlusten.

- Die Wahrscheinlichkeitsgewichtungsfunktion ordnet den Eintrittswahrscheinlichkeiten für die Ergebnisse Wahrscheinlichkeitsgewichte zu und spiegelt wider, dass Entscheider Wahrscheinlichkeiten über- oder untergewichten.
- Kahneman und Tversky haben die ursprüngliche Prospect-Theorie zur Kumulativen Prospect-Theorie erweitert, um Schwächen der ursprünglichen Theorie zu beheben und den Erklärungsgehalt zu verbessern.
- Die charakteristischen Formen der Wertfunktion und der Wahrscheinlichkeitsgewichtungsfunktion der Prospect-Theorie dienen dazu, häufig auftretendes Entscheidungsverhalten zu erklären. Sie sind nicht als spezifische Funktionen für konkrete Entscheider zu verstehen.
- Zahlreiche Untersuchungen haben die Prognosekraft der Erwartungsnutzentheorie (des Bernoulli-Prinzips) mit der Prognosekraft der Prospect-Theorie und anderer deskriptiver Theorien verglichen. Die Untersuchungen zeigen, dass die Prospect-Theorie zwar in bestimmten Situationen reales Verhalten besser vorhersagt als insbesondere die Erwartungsnutzentheorie, sich dies aber nicht verallgemeinern lässt.

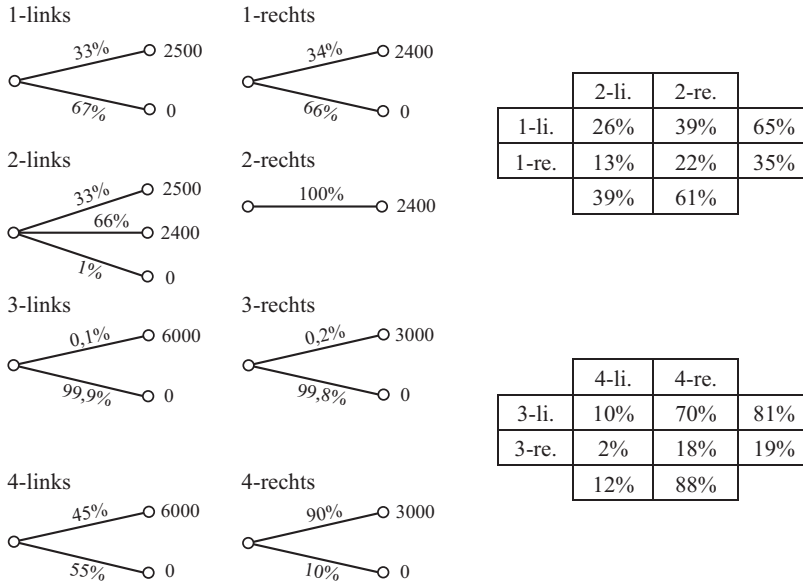
Ergänzende und vertiefende Literatur

Allais (1979); Bazerman und Moore (2008); Bubenheim (2000); Camerer (1995, S. 587–703); Camerer und Loewenstein (2004); Eisenführ et al. (2010, Kap. 13); Kahneman und Tversky (1979); Kahneman et al. (1991); Machina (1987); Quiggin (1982); Starmer (2000); Thaler und Johnson (1990); Tversky und Kahneman (1981; 1992); Weber und Camerer (1987).

6.9 Übungen

Aufgabe 6.1

In Hörsaalexperimenten an der Universität Osnabrück wurden in den Jahren 2015 und 2016 insgesamt ca. 800 Studierenden zwei mal zwei Wahlsituation vorgelegt, bei denen sie stets zwischen zwei Alternativen („links“ und „rechts“) wählen mussten. Die nachfolgende Tabelle präsentiert die Alternativen der Wahlsituationen sowie Häufigkeiten (in %) der getroffenen Entscheidungen.



Die erste Tabelle zu den Wahlsituationen 1 und 2 ist wie folgt zu lesen (die Tabelle zu den Situationen 3 und 4 analog): 26 % der Teilnehmer haben in den Entscheidungssituationen (1) und (2) jeweils die linke Alternative gewählt, 22 % jeweils die rechte, und 39 % bzw. 13 % einmal die linke und einmal die rechte Alternative. Insgesamt haben damit 65 % die linke Alternative in Situation (1) gewählt, jedoch nur 39 % die linke Alternative in Situation (2).

Beantworten Sie für jede der beiden Tabellen separat die folgenden Fragen:

- Wie viele Entscheider sind Bernoulli-rational, wie viele sind es nicht?
- Wie können Sie das Verhalten der Experimententeilnehmer erklären?

Aufgabe 6.2

In Ihrem Aufsatz „Advances in Prospect Theory: Cumulative Representation of Uncertainty“ (Journal of Risk and Uncertainty 5, 297–323) geben Kahneman und Tversky folgende Wertfunktion an:

$$v(x) = \begin{cases} x^a & \text{für } x \geq 0 \\ -\lambda \cdot (-x)^b & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

- Stellen Sie diese Wertfunktion für die Werte $a = b = 0,5$ und $\lambda = 2$ grafisch dar.
- Wie können sich die unten dargestellten Ereignisse in den betrachteten Fällen jeweils auf einen Entscheider mit der angegebenen Wertfunktion auswirken?
 - Der Entscheider findet 50 EUR auf der Straße.
 - Am nächsten Tag verliert er die 50 EUR wieder.

- (ii) 1. Der Entscheider hat eine Wette verloren und schuldet dem Wettpartner 50 EUR
 2. Der Wettpartner bieten ihm eine zweite „doppelt oder quitt“-Wette an.
- (iii) Wie (ii), aber der Entscheider hat die erste Wette gewonnen.
- c) Erläutern Sie, wie sich mithilfe der angegebenen Wertfunktion der Effekt erklären lässt, dass Kapitalanleger erfolgreiche Aktien häufig zu früh, aber erfolglose Aktien häufig zu spät verkaufen.

Aufgabe 6.3

Gehen Sie davon aus, dass ein Entscheider sich an folgender Wertfunktion orientiert:

$$v(x) = \begin{cases} -[1 - \exp(0,05 \cdot x)] & \text{für } x < 0 \\ 0,5 \cdot [1 - \exp(-0,05 \cdot x)] & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

Der Entscheider hat die Wahl zwischen zwei Alternativen. A_1 führt in Zustand S_1 zu einem Verlust von -1 , in S_2 dagegen zu einem Gewinn von $+5$. A_2 führt in S_1 zu -8 , in S_2 zu $+30$. Zum Zeitpunkt der Entscheidung beträgt das Vermögen des Entscheiders 10. Die Zustände sind gleich wahrscheinlich. Gehen Sie davon aus, dass der Entscheider die Wahrscheinlichkeiten *nicht* über eine Wahrscheinlichkeitsgewichtungsfunktion transformiert.

- a) Wie entscheidet der Entscheider, wenn er sich am Endvermögen orientiert?
- b) Welche Alternative wählt der Entscheider, wenn er die Ergebnisse der Alternativen als Gewinne und Verluste gegenüber seinem Anfangsvermögen bewertet?
- c) Erklären Sie den Referenzpunkteffekt und gehen Sie dabei auf die Ergebnisse der Teilaufgaben a und b ein.

Aufgabe 6.4

Diskutieren Sie, ob und warum in den folgenden Beispielen Framing-Effekte über die Darstellungsalternativen auftreten können.

- a) Den Teilnehmern an einem Wettkampf wird Folgendes mitgeteilt:
Darstellung 1: Alle Teilnehmer zahlen zunächst eine Teilnahmegebühr von 100 EUR. Wer es ins Finale der besten 8 schafft, erhält seine Teilnahmegebühr zurück. Zudem erhält der Erstplatzierte 500 EUR.
Darstellung 2: Der Erstplatzierte erhält 500 EUR. Wer es nicht ins Finale der besten 8 schafft, muss 100 EUR bezahlen.
- b) Den Mitarbeitern eines Unternehmens wird Folgendes mitgeteilt:
Darstellung 1: Wird im laufenden Geschäftsjahr der Gewinn des Vorjahres erreicht oder übertroffen, so erhält jeder Mitarbeiter einen Bonus von 5.000 EUR.
Darstellung 2: Aufgrund der anhaltend guten Geschäftslage erhält jeder Mitarbeiter 5.000 EUR Bonus. Der Bonus wird nicht sofort ausbezahlt, sondern erst am Ende des Geschäftsjahres. Sollte der Gewinn des laufenden Jahres jedoch nicht mindestens Vorjahresniveau erreichen, so geht der Bonus verloren.

Aufgabe 6.5

Gehen Sie von folgenden Alternativen und möglichen Gewinnen aus:

	$w(S_1)=0,4$ S_1	$w(S_2)=0,1$ S_2	$w(S_3)=0,5$ S_3
A_1	100	x	0
A_2	0	0	x

x ist nicht weiter spezifiziert, es gelte jedoch $x < 100$.

- Liegt eine stochastische Dominanzbeziehung zwischen den Alternativen vor? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Zeigen Sie, dass sich bei Anwendung der Prospect-Theorie ein Widerspruch zum Dominanzprinzip ergeben kann, wenn die Wahrscheinlichkeitsgewichtungsfunktion so verläuft, dass $\pi(w) < w$ für alle Wahrscheinlichkeiten des Beispiels gilt.
- Zeigen Sie nun anhand des Beispiels, dass dieser Widerspruch bei Verwendung der Wahrscheinlichkeitsgewichtung gemäß der kumulativen Prospect-Theorie nicht auftreten kann.

6.10 Lösungshinweise
Aufgabe 6.1

- a) Bernoulli-rationale Entscheider wählen in den Situationen 1 und 2 sowie in den Situationen 3 und 4 jeweils entweder beide Male links oder beide Male rechts. Damit sind Bernoulli-rational: 48 % in den Situationen 1 und 2 und 28 % in den Situationen 3 und 4. – b) In den Situationen 1 und 2: Sicherheitseffekt; in den Situationen 3 und 4: Effekt kleiner Wahrscheinlichkeiten.

Aufgabe 6.2

- a) Konkaver Verlauf im Gewinnbereich, konvexer Verlauf im Verlustbereich, (betraglich) größere Steigung im Verlustbereich. --- b) (i) Referenzpunkteffekt und Verlustaversion, (ii) und (iii) Referenzpunkteffekt und Spiegeleffekt. --- c) Wiederum Referenzpunkt- und Spiegeleffekt. Der Effekt ist als Dispositionseffekt bekannt.

Aufgabe 6.3

- a) Entscheider wählt A_2 --- b) Entscheider wählt A_1 . --- c) Referenzpunkteffekt in Kombination mit Verlustaversion erklärt den Unterschied in der Alternativenwahl zwischen a) und b).

Aufgabe 6.4

a) Darstellung 1 als Gain Frame, Darstellung 2 als Loss Frame; möglicher Effekt: höhere Anstrengungen der Wettkämpfer bei Darstellung 2. --- **b)** Wiederum Gain Frame (Darstellung 1) versus Loss Frame (Darstellung 2); möglicher Effekt: höhere Anstrengungen der Mitarbeiter bei Darstellung 2.

Aufgabe 6.5

a) A_1 dominiert A_2 gemäß Wahrscheinlichkeitsdominanz --- **b)** Wegen $v(0)=0$ bewertet der Entscheider A_2 mit $\Phi(A_2) = \pi(0,5) \cdot v(x)$, und er bewertet A_1 mit $\Phi(A_1) = \pi(0,45) \cdot v(100) + \pi(0,05) \cdot v(x)$. Da $\pi(0,45) + \pi(0,05) > \pi(0,5)$ möglich ist, kann sich $\Phi(A_2) > \Phi(A_1)$ ergeben. --- **c)** Bei A_1 ergeben sich Wahrscheinlichkeitsgewichte von $\pi(0,55) - \pi(0,5)$ für das Ergebnis x und $1 - \pi(0,55)$ für das Ergebnis 100. Bei A_2 ist das Gewicht für x : $1 - \pi(0,5)$. Dann aber ist auch $\Phi(A_1) > \Phi(A_2)$.

Literatur

- Allais, M.: Le Comportement de l'Homme Rationnel devant le Risque: Critique des Postulats et Axiomes de l'Ecole Américaine. *Econometrica* **21**, 503–546 (1953)
- Allais, M.: The foundations of a positive theory of choice involving risk and a criticism of the postulates and axioms of the American school. In: Allais, M., Hagen, O. (Hrsg.) *Expected Utility Hypothesis and the Allais Paradox*, S. 27–145. D. Reidel, Dordrecht (1979)
- Arrow, K.J.: Risk perception in psychology and economics. *Econ. Inq.* **20**, 1–9 (1982)
- Baker, M., Ruback, R.S., Wurgler, J.: Behavioral corporate finance. In: Eckbo, B.E. (Hrsg.) *Handbook of Corporate Finance*, Bd. 1, S. 145–186. North Holland, Amsterdam (2007)
- Barberis, N., Thaler, R.H.: A survey of behavioral finance. In: Constantinides, G.M., Harris, M., Stulz, R.M. (Hrsg.) *Handbook of the Economics of Finance*, S. 1052–1121. North Holland, Amsterdam (2003)
- Barberis, N., Huang, M., Santos, T.: Prospect theory and asset prices. *Quart. J. Econ.* **116**, 1–53 (2001)
- Bawa, V.S.: Optimal rules for ordering uncertain prospects. *J. Financ. Econ.* **2**, 95–121 (1975)
- Bawa, V.S.: Safety-first, stochastic dominance, and optimal portfolio choice. *J. Financ. Quant. Anal.* **13**, 255–271 (1978)
- Bazerman, M.H., Moore, D.A.: *Judgement in Managerial Decision Making*, 7. Aufl. Wiley, New York (2008)
- Benartzi, S., Thaler, R.H.: Myopic loss aversion and the equity premium puzzle. *Quart. J. Econ.* **110**, 73–92 (1995)
- Birnbaum, M.H.: Violations of monotonicity in judgment and decision making. In: Marley, A.A.J. (Hrsg.) *Choice, Decision, and Measurement: Essays in Honor of R. Duncan Luce*, S. 73–100. Psychology, LEA, London (1997)
- Birnberg, J., Luft, J., Shields, M.D.: Psychology theory in management accounting research. In: Chapman, C., Hopwood, A., Shields, M.D. (Hrsg.) *Handbook of Management Accounting Research 1*. Elsevier, Amsterdam (2006)
- Bubenheim, M.: Verallgemeinerter Nutzen und "Ähnlichkeit". Lang, Frankfurt a. M. (2000)
- Camerer, C.F.: An experimental test of several generalized utility theories. *J. Risk. Uncertain.* **2**, 61–104 (1989)

- Camerer, C.F.: Individual decision making. In: Kagel, J.H., Roth, A.E. (Hrsg.) *The Handbook of Experimental Economics*, S. 587–703. Princeton University Press, Princeton (1995)
- Camerer, C.F., Loewenstein, G.: Behavioral economics: past, present, and future. In: Camerer, C.F., Loewenstein, G., Rabin, M. (Hrsg.) *Advances in Behavioral Economics*, S. 3–52. Princeton University Press, Princeton (2004)
- Currim, I.S., Sarin, R.K.: Prospect versus utility. *Manag. Sci.* **35**, 22–41 (1989)
- Eisenführ, F., Weber, M., Langer, M.: *Rationales Entscheiden*, 5. Aufl. Springer, Berlin (2010)
- Fischhoff, B.: Hindsight $\neq$ foresight: the effect of outcome knowledge on judgement under uncertainty. *J. Exp. Psychol. Hum. Percept. Perform.* **1**, 288–299 (1975)
- Fishburn, P.C., Kochenberger, G.A.: Two-piece von Neumann-Morgenstern utility functions. *Decis. Sci.* **10**, 503–518 (1979)
- Friedman, D., Sunder, S.: *Experimental Methods: A Primer for Economists*. Cambridge University Press, Cambridge (1994)
- Glaser, M., Langer, T., Reynnders, J., Weber, M.: Framing effects in stock market forecasts: the difference between asking for prices and asking for returns. *Rev. Financ.* **11**, 325–357 (2007)
- Hadar, J., Russell, W.R.: Stochastic dominance and diversification. *J. Econ. Theor.* **3**, 288–305 (1971)
- Hannan, R.L., Hoffman, V.B., Moser, D.V.: Bonus versus penalty: does contract frame affect employee effort? In: Rapoport, A., Zwick, R. (Hrsg.) *Experimental Business Research II*, S. 151–169. Springer, Dordrecht (2005)
- Kahneman, D., Knetsch, J.L., Thaler, R.H.: Experimental test of the endowment effect and the coase theorem. *J. Polit. Econ.* **98**, 1325–1348 (1990)
- Kahneman, D., Knetsch, J.L., Thaler, R.H.: Anomalies: the endowment effect, loss aversion, and status quo bias. *J. Econ. Perspect.* **5**, 193–206 (1991)
- Kahneman, D., Slovic, P., Tversky, A.: *Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases*. Cambridge University Press, Cambridge (1982)
- Kahneman, D., Tversky, A.: Prospect theory: an analysis of decision under risk. *Econometrica* **47**, 263–291 (1979)
- Koonce, L., Mercer, M.: Using psychology theories in archival financial accounting research. *J. Account. Lit.* **24**, 175–214 (2005)
- Kopp, J.: Zur Stabilität von Framing-Effekten bei Entscheidungssituationen. *Z. Sozialpsychologie* **26**, 107–118 (1995)
- Laux, H., Liermann, F.: *Grundlagen der Organisation*, 6. Aufl. Springer, Berlin (2005)
- Levin, I.P., Gaeth, G.J.: How consumers are affected by the framing of attribute information before and after consuming the product. *J. Consum. Res.* **15**, 374–378 (1988)
- Levy, H., Levy, M.: Prospect theory and mean-variance analysis. *Rev. Financ. Stud.* **17**, 1015–1041 (2004)
- Lichtenstein, S., Slovic, P.: Reversals of preference between bids and choices. *J. Exp. Psychol.* **89**, 46–55 (1971)
- List, J.A.: Neoclassical theory versus prospect theory: evidence from the marketplace. *Econometrica* **72**, 615–625 (2004)
- Loewenstein, G., Kahneman, D.: Explaining the endowment effect. Working paper, Department of Social and Decision Sciences, Carnegie Mellon University 1991
- Loomes, G., Sugden, R.: Regret theory: an alternative theory of rational choice under uncertainty. *Econ. J.* **92**, 805–824 (1982)
- Luce, R.D., Raiffa, H.: *Games and Decisions*. Dover, New York (1957)
- MacCrimmon, K.: Descriptive and normative implications of the decision theory postulates. In: Borch, K., Mossin, J. (Hrsg.) *Risk and Uncertainty*, S. 3–23. Macmillan, London (1968)

- Machina, M.J.: Choice under uncertainty: problems and unsolved. *Econ. Perspect.* **1**, 121–154 (1987)
- Markowitz, H.M.: Portfolio selection. *J. Financ.* **7**, 77–91 (1952)
- Prelec, D.: A ‘Pseudo-Endowment’ effect, and its implications for some recent nonexpected utility models. *J. Risk. Uncertain.* **3**, 247–259 (1990)
- Puto, C.P.: The framing of buying decisions. *J. Consum. Res.* **14**, 301–315 (1987)
- Quiggin, E.: A theory of anticipated utility. *J. Econ. Behav. Organ.* **3**, 323–343 (1982)
- Ranyard, R.: Reversal of preferences between compound and simple risks: the role of editing heuristics. *J. Risk. Uncertain.* **11**, 159–175 (1995)
- Schmidt, U., Starmer, C., Sugden, R.: Third-generation prospect theory. *J. Risk. Uncertain.* **36**, 203–223 (2008)
- Schwand, C., Vetschera, R., Wakolbinger, L.M.: The influence of probabilities on the response mode bias in utility elicitation. *Theor. Decis.* **69**, 395–416 (2010)
- Slovic, P., Tversky, A.: Who accepts savages axiom? *Behav. Sci.* **19**, 368–373 (1974)
- Starmer, C.: Developments in non-expected utility theory: the hunt for a descriptive theory of choice under risk. *J. Econ. Lit.* **38**, 332–382 (2000)
- Subrahmanyam, A.: Behavioural finance: A review and synthesis. *Eur. Financ. Manag.* **14**, 12–29 (2008)
- Thaler, R.: Toward a positive theory of consumer choice. *J. Econ. Behav. Organ.* **1**, 39–60 (1980)
- Thaler, R.H., Johnson, E.J.: Gambling with the house money and trying to break even: the effects of prior outcomes on risky choice. *Manag. Sci.* **36**, 643–660 (1990)
- Tversky, A., Kahneman, D.: The framing of decisions and the psychology of choice. *Science* **211**, 453–458 (1981)
- Tversky, A., Kahneman, D.: Rational choice and the framing of decisions. *J. Bus.* **59**, 251–278 (1986)
- Tversky, A., Kahneman, D.: Loss aversion in riskless choice: a reference dependent model. *Quart. J. Econ.* **106**, 1039–1061 (1991)
- Tversky, A., Kahneman, D.: Advances in prospect theory: cumulative representation of uncertainty. *J. Risk. Uncertain.* **5**, 297–323 (1992)
- Tversky, A., Slovic, P., Kahneman, D.: The causes of preference reversal. *Am. Econ. Rev.* **80**, 204–217 (1990)
- Weber, M., Camerer, C.: Recent developments in modelling preferences under risk. *OR-Spektrum* **9**, 129–151 (1987)
- Wu, G., Gonzalez, R.: Curvature of the probability weighting function. *Manag. Sci.* **42**, 1676–1690 (1996)

Teil II

Individualentscheidungen bei Risiko – Vertiefung

Bewertung unsicherer Zahlungsüberschüsse

7

7.1 Problemstellung und Aufbau

In diesem Kapitel werden die Grundlagen des rationalen Entscheidens bei Risiko angewendet, um ein in realen wirtschaftlichen Entscheidungssituationen allgegenwärtiges Problem zu analysieren: Die Bewertung unsicherer Zahlungsüberschüsse bzw. Ansprüche darauf. Ansprüche auf unsichere Zahlungsüberschüsse entstehen beispielsweise in den folgenden Fällen:

- Kauf einer Aktie oder eines anderen Wertpapiers, bei dem die Rückflüsse (Dividenden, Zinsen, Kursgewinne beim späteren Verkauf) nicht sicher sind,
- Vergabe eines Kredits durch eine Bank an ein Unternehmen oder eine Privatperson,
- Verkauf einer Versicherung durch ein Versicherungsunternehmen,
- Verkauf von Waren und Fakturierung in Fremdwährung, wobei der Umtauschwert nicht sicher ist,
- Erbringung von Handwerksleistungen für einen Bauherren, wobei nicht sicher ist, ob und wie viel dieser für die erbrachten Leistungen zahlen wird,
- Durchführung einer Investition mit ungewissen Einzahlungsüberschüssen,
- Annahme eines Arbeitsvertrages mit ungewissem Einkommen.
- Teilnahme an Glücksspielen (z. B. Lotterien),

Diese Beispiele stehen für eine Vielzahl von Bereichen des täglichen Wirtschaftslebens, in denen Menschen Entscheidungen über den Kauf oder Verkauf von Ansprüchen auf unsichere Zahlungsüberschüsse treffen. Im Folgenden schreiben wir auch kurz „Kauf bzw. Verkauf von Überschüssen“. Der Begriff „Überschuss“ ist hierbei weit gefasst: Er bezeichnet den Erlös aus dem Verkauf von Wertpapieren, die Summe aus Zins- und Tilgungsleistungen an eine Bank, die Schadensersatzleistung abzüglich der gezahlten

Versicherungsbeiträge aus einem versicherten Schadensfall, usw. Entsprechend vielfältig sind auch die Interpretationsmöglichkeiten, wenn im Folgenden von „Kauf“ („Verkauf“) eines Überschusses die Rede ist.

Die Darstellungen in den Kap. 4 und 5 dienen der Ermittlung einer optimalen Alternative bei Risiko. Dabei konnten die betrachteten Alternativen natürlich auch unsichere Zahlungsüberschüsse repräsentieren. Im vorliegenden Kapitel geht es nicht explizit darum, eine optimale Alternative aus einer gegebenen Alternativenmenge auszuwählen, sondern den mit einer gegebenen Maßnahme verbundenen unsicheren Überschuss in Form eines subjektiven „*Grenzpreises*“ zu bewerten, d. h. eines „kritischen“ Preises, bei dem der Kauf bzw. der Verkauf für den Entscheider weder vorteilhaft noch nachteilig ist. Dabei ist die Perspektive des Entscheiders zu berücksichtigen. Erwägt er, den Überschuss zu kaufen, so ist der Grenzpreis aus der *Käuferperspektive* zu bestimmen. Erwägt er, ihn zu verkaufen, so ist der Grenzpreis aus der *Verkäuferperspektive* maßgeblich. Beide Grenzpreise sind grundsätzlich nicht identisch.

Der Grenzpreis wird auch als *Wert* bezeichnet, seine Ermittlung als *Bewertung*. Der Wert aus Käufersicht kennzeichnet den maximalen Preis, den der Entscheider bereit ist zu zahlen, um den Überschuss zu kaufen. Der Wert aus Verkäufersicht kennzeichnet den minimalen Preis, den der Entscheider erzielen muss, damit er bereit ist, den Überschuss zu verkaufen. Im Folgenden soll aufbauend auf dem Bernoulli-Prinzip gezeigt werden, wie Werte (Grenzpreise) von Überschüssen ermittelt werden können und welche Höhe sie aufweisen. Der Wert aus der Verkäuferperspektive ist nach dem Bernoulli-Prinzip derjenige Preis, bei dem der Verkauf zu einem Erwartungswert des Nutzens führt, der mit dem Erwartungswert des Nutzens im Status quo übereinstimmt. Dieser Wert aus der Verkäuferperspektive entspricht dem sogenannten *Sicherheitsäquivalent*.

Um die Darstellungen einfach zu halten, gehen wir davon aus, der zu bewertende unsichere Überschuss beziehe sich auf einen einzigen Zeitpunkt; das Bewertungsproblem wird als statisches Problem formuliert und gelöst. In Kap. 15 wird untersucht, wie Überschüsse im Mehrperioden-Fall bewertet werden können.

In Abschn. 7.2 wird das grundlegende Konzept der Bewertung abgeleitet. In Abschn. 7.3 wird das Konzept auf die Bewertung eines unsicheren Überschusses angewendet, der nicht isoliert, sondern im Kontext mit anderen Einkommensquellen des Entscheiders zu betrachten ist. Dabei wird deutlich, dass die Bewertung durch Risiko- und Bewertungsverbundeffekte beeinflusst wird. So hängt der Wert eines unsicheren Zahlungsanspruchs grundsätzlich davon ab, welche stochastische Beziehung zwischen diesem und anderen Einkommensquellen des Entscheiders bestehen. Die Darstellungen bilden die Grundlage für die Darstellungen des nachfolgenden Kap. 8, das sich mit der optimalen Kombination stochastisch abhängiger Zahlungsansprüche beschäftigt. In Abschn. 7.4 werden die Verkäufer- und die Käuferperspektiven der Bewertung miteinander verglichen. In Abschn. 7.5 werden zwei Spezialfälle betrachtet, die auch in späteren Kapiteln zu Zwecken der Veranschaulichung der Zusammenhänge wiederholt aufgegriffen werden. Beide Spezialfälle – die Annahme einer quadratischen Nutzenfunktion sowie die Annahmenkombination einer exponentiellen Nutzenfunktion und

eines normalverteilten Zahlungsanspruchs – erlauben eine Repräsentation der Präferenzfunktion des Entscheiders als (μ, σ) -Präferenzfunktion. Abschn. 7.6 schließt das Kapitel mit einer kurzen Diskussion von Anwendungsproblemen der Bewertung.

7.2 Sicherheitsäquivalent und Risikoabschlag

7.2.1 Definition und Ermittlung

Das Konzept des Sicherheitsäquivalents beruht auf dem (hypothetischen) Vergleich eines unsicheren Überschusses mit einem sicheren Überschuss (allgemein eines unsicheren Zielgrößenwertes mit einem sicheren), zwischen denen der Entscheider wählen kann. Abb. 7.1 verdeutlicht diesen Vergleich.

Der Entscheider hat also die Wahl zwischen einer riskanten Alternative, die mit der Wahrscheinlichkeit w_i den Überschuss x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, liefert, und einer sicheren Alternative, die ihm einen Überschuss x garantiert (wobei die Überschüsse zu demselben Zeitpunkt anfallen). Ist der Entscheider für einen bestimmten Wert von x indifferent, so ist das Sicherheitsäquivalent gefunden:

Das *Sicherheitsäquivalent* eines stochastischen Überschusses $\tilde{x}$ ist derjenige *sichere Überschuss*, der im Urteil des Entscheiders dem stochastischen Überschuss gleichwertig ist. Es wird mit $S\ddot{A}(\tilde{x})$ bezeichnet. Das Sicherheitsäquivalent ist eine subjektive Größe; es hängt von den Präferenzen, aber auch von den Erwartungen des Entscheiders bezüglich $\tilde{x}$ ab.

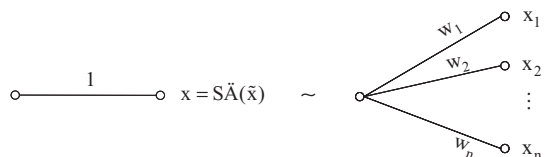
Als Kriterium für die rationale Ermittlung eines Sicherheitsäquivalents bietet sich das Bernoulli-Prinzip an. Mit der Präferenzfunktion des Bernoulli-Prinzips lässt sich die Definition des Sicherheitsäquivalents wie folgt formalisieren:

$$U[S\ddot{A}(\tilde{x})] = E[U(\tilde{x})]. \quad (7.1)$$

In Worten: Das Sicherheitsäquivalent eines stochastischen Überschusses $\tilde{x}$ ist derjenige sichere Überschuss, dessen Nutzen mit dem Erwartungswert des Nutzens des unsicheren Überschusses übereinstimmt. Das Sicherheitsäquivalent hängt von der Wahrscheinlichkeitsverteilung über $\tilde{x}$ und der Nutzenfunktion des Entscheiders ab.

(7.1) lässt offen, wie das Sicherheitsäquivalent ermittelt wird. Bei wenigen möglichen Ergebnissen mag es der Entscheider direkt angeben können. Bei einer größeren

Abb. 7.1 Ermittlung des Sicherheitsäquivalents durch hypothetischen Alternativenvergleich



Zahl möglicher Ergebnisse stellt jedoch das folgende Vorgehen geringere Anforderungen an den Entscheider: Zunächst werden eine Nutzenfunktion $U(x)$ und der entsprechende Erwartungswert $E[U(\tilde{x})]$ ermittelt. Sodann wird jener sichere x -Wert gesucht, dessen Nutzen mit diesem Erwartungswert übereinstimmt. (Dabei wird allerdings vorausgesetzt, dass die Nutzenfunktion invertierbar ist.).

Das Sicherheitsäquivalent ermöglicht es dem Entscheider, dem unsicheren Überschuss $\tilde{x}$ einen gleichwertigen sicheren Überschuss gegenüberzustellen. Unter dem Aspekt der Ermittlung des Grenzpreises für den unsicheren Überschuss $\tilde{x}$ trägt die Formel (7.1) der Verkäuferperspektive Rechnung: $S\ddot{A}(\tilde{x})$ ist derjenige Preis (Verkaufserlös), bei dem der Entscheider weder einen Vorteil noch ein Nachteil erzielt, wenn er den unsicheren Überschuss $\tilde{x}$ verkauft.

Die Differenz zwischen dem Erwartungswert und dem Sicherheitsäquivalent von $\tilde{x}$ wird als *Risikoabschlag* $RA(\tilde{x})$ bezeichnet:

$$RA(\tilde{x}) = E(\tilde{x}) - S\ddot{A}(\tilde{x}). \quad (7.2)$$

Der Risikoabschlag lässt sich anschaulich interpretieren: Der Entscheider ist nur dann bereit, einen unsicheren Überschuss $\tilde{x}$ zu verkaufen, wenn der (sichere) Preis nicht um mehr als dem Risikoabschlag $RA(\tilde{x})$ unter dem Erwartungswert des unsicheren Überschusses liegt (und somit der Preis nicht niedriger als das Sicherheitsäquivalent $S\ddot{A}(\tilde{x})$ ist). Ist $RA(\tilde{x})$ negativ, so ist der Entscheider nur dann zum Verkauf bereit, wenn Preis mindestens um den Betrag von $RA(\tilde{x})$ über dem Erwartungswert des unsicheren Überschusses liegt.

Zur Veranschaulichung dient das folgende Beispiel: Bei einem Glücksspiel hat ein Kandidat einen bisherigen Gewinn von 10.000 EUR erzielt, den er bei Abbruch des Spiels erhalten würde. Er kann aber auch an einer weiteren Runde des Spiels teilnehmen. Dabei wird ein Glücksrad mit 100 Feldern gedreht, bei dem n Felder blau und $100 - n$ Felder rot sind. Bleibt das Glücksrad bei einem blauen Feld stehen, verdoppelt sich der Gewinn des Kandidaten. Bleibt es auf einem roten Feld stehen, verliert er den bisherigen Gewinn von 10.000 EUR. n gibt die Gewinnwahrscheinlichkeit in % an. Der Kandidat hat also die Wahl zwischen der Lotterie $\{20.000; n/100 \mid 0; 1 - n/100\}$ und dem sicheren Gewinn 10.000 EUR. Der Erwartungswert des Gewinns der Lotterie beträgt $(n/100) \cdot 20.000$. Er liegt für jedes $n > 50$ über dem sicheren Gewinn. Entscheidet sich der Kandidat dafür, nicht weiter zu spielen, so ist das Sicherheitsäquivalent der Lotterie höchstens 10.000 EUR und der Risikoabschlag beträgt mindestens

$$RA(\tilde{x}) \geq (n/100) \cdot 20.000 - 10.000, \quad (7.3)$$

für $n=80$ also beispielsweise mindestens 6000 EUR. Mit anderen Worten: Der Entscheider „opfert“ mindestens 6000 EUR an erwartetem Gewinn, um dafür Sicherheit bezüglich des Gewinns von 10.000 EUR zu erhalten.

Der Risikoabschlag kann als eine *geforderte Risikoprämie* interpretiert werden: Eine riskante Alternative kann für einen risikoaversen Entscheider gegenüber einer sicheren

Alternative nur vorteilhaft sein, wenn ihr Erwartungswert mindestens um den Risikoabschlag über dem sicheren Überschuss liegt, wenn also die riskante Alternative eine Risikoprämie mindestens in Höhe des Risikoabschlages bietet.

Das Sicherheitsäquivalent ist zwar durch seine Bestimmungsgleichung (7.1),

$$U[S\ddot{A}(\tilde{x})] = E[U(\tilde{x})],$$

nicht explizit definiert. Ist aber die Nutzenfunktion invertierbar, wovon hier ausgegangen wird, so kann das Sicherheitsäquivalent analytisch durch die Umformung

$$S\ddot{A}(\tilde{x}) = U^{-1}\{E[U(\tilde{x})]\} \quad (7.4)$$

ermittelt werden. Für den Risikoabschlag gilt entsprechend

$$RA(\tilde{x}) = E(\tilde{x}) - U^{-1}\{E[U(\tilde{x})]\}. \quad (7.5)$$

Beide expliziten Bestimmungsgleichungen verdeutlichen noch einmal, dass Sicherheitsäquivalent und Risikoabschlag sowohl von der Wahrscheinlichkeitsverteilung über $\tilde{x}$ als auch von der Nutzenfunktion des Entscheiders abhängen.

7.2.2 Risikoeinstellung und Höhe von Sicherheitsäquivalent und Risikoabschlag

7.2.2.1 Der allgemeine Zusammenhang

Die in dieser Arbeit verwendete Definition von Risikoeinstellung besagt *allgemein*, dass ein Entscheider bei Risikoneutralität bereit ist, ein unsicheres Ergebnis $\tilde{x}$ gegen ein sicheres Ergebnis in Höhe des Erwartungswertes $E(\tilde{x})$ einzutauschen und umgekehrt. Bei Risikoaversion zieht er ein sicheres Ergebnis in Höhe des Erwartungswertes des unsicheren Ergebnisses strikt vor und ist damit auch innerhalb bestimmter Grenzen bereit, das unsichere Ergebnis gegen ein sicheres Ergebnis einzutauschen, das niedriger ist als $E(\tilde{x})$. Bei Risikofreude muss das sichere Ergebnis höher sein als $E(\tilde{x})$, damit der Entscheider bereit ist, die unsichere Verteilung gegen dieses sichere Ergebnis einzutauschen. Die Risikoeinstellung eines Entscheiders kann damit gleichermaßen am Sicherheitsäquivalent wie am Risikoabschlag festgemacht werden. Es gilt:

1. $S\ddot{A}(\tilde{x}) = E(\tilde{x}) \Leftrightarrow RA(\tilde{x}) = 0 \Leftrightarrow$ Risikoneutralität,
- $S\ddot{A}(\tilde{x}) < E(\tilde{x}) \Leftrightarrow RA(\tilde{x}) > 0 \Leftrightarrow$ Risikoaversion,
- $S\ddot{A}(\tilde{x}) > E(\tilde{x}) \Leftrightarrow RA(\tilde{x}) < 0 \Leftrightarrow$ Risikofreude.

Diese Relationen lassen sich über die formale Definition des Sicherheitsäquivalents auf der Basis der Bernoulli-Präferenzfunktion bestätigen:

- Bei Risikoneutralität ist die Nutzenfunktion linear. Da sie aufgrund ihrer positiv linearen Transformierbarkeit vereinfachend $U(x) = x$ geschrieben werden kann, folgt aus der Definition des Sicherheitsäquivalents und des Risikoabschlags:

$$U[S\ddot{A}(\tilde{x})] = E[U(\tilde{x})] \Leftrightarrow S\ddot{A}(\tilde{x}) = E(\tilde{x}) \Leftrightarrow RA(\tilde{x}) = 0.$$

- Bei Risikoaversion ist die Nutzenfunktion streng konkav. Es gilt dann:¹

$$U[E(\tilde{x})] > E[U(\tilde{x})] \Leftrightarrow S\ddot{A}(\tilde{x}) < E(\tilde{x}) \Leftrightarrow RA(\tilde{x}) > 0.$$

In Worten: Der Nutzen eines sicheren Ergebnisses in Höhe des Erwartungswertes von $\tilde{x}$, $U[E(\tilde{x})]$, ist bei streng konkaver Nutzenfunktion immer größer als der Erwartungswert des Nutzens von $\tilde{x}$, $E[U(\tilde{x})]$. In Verbindung mit der Definition des Sicherheitsäquivalents gemäß $U[S\ddot{A}(\tilde{x})] = E[U(\tilde{x})]$ folgt unmittelbar $U[S\ddot{A}(\tilde{x})] < U[E(\tilde{x})]$ und wegen der streng monoton steigenden Nutzenfunktion U damit auch $S\ddot{A}(\tilde{x}) < E(\tilde{x})$.

- Bei Risikofreude ist die Nutzenfunktion streng konvex. Für jede streng konvexe Nutzenfunktion gilt der folgende Zusammenhang:²

$$U[E(\tilde{x})] < E[U(\tilde{x})] \Leftrightarrow S\ddot{A}(\tilde{x}) > E(\tilde{x}) \Leftrightarrow RA(\tilde{x}) < 0.$$

In Worten: Der Nutzen eines sicheren Ergebnisses in Höhe des Erwartungswertes von $\tilde{x}$, $U[E(\tilde{x})]$, ist bei streng konvexer Nutzenfunktion immer kleiner als der Erwartungswert des Nutzens von $\tilde{x}$, $E[U(\tilde{x})]$. In Verbindung mit der Definition des Sicherheitsäquivalents folgt entsprechend $S\ddot{A}(\tilde{x}) > E(\tilde{x})$.

7.2.2.2 Grafische Veranschaulichung

Zur Veranschaulichung und Interpretation von Sicherheitsäquivalent und Risikoabschlag wird angenommen, es gebe nur zwei mögliche Überschüsse, es werde also eine einfache Lotterie $\{x_2; w \mid x_1; 1-w\}$ (mit $x_2 > x_1$) bewertet. Für den Erwartungswert gilt:

$$E(\tilde{x}) = w \cdot x_2 + (1-w) \cdot x_1 = x_1 + w \cdot (x_2 - x_1). \quad (7.6)$$

Für den Erwartungswert des Nutzens gilt analog:

$$\begin{aligned} 2. \quad E[U(\tilde{x})] &= w \cdot U(x_2) + (1-w) \cdot U(x_1) \\ &= U(x_1) + w \cdot [U(x_2) - U(x_1)] \end{aligned} \quad (7.7)$$

¹Dies folgt aus der Jensen'schen Ungleichung. Vgl. Kap. 5, Abschn. 5.2.2.3.

²Dies folgt ebenfalls aus der Jensen'schen Ungleichung.

Für das Sicherheitsäquivalent muss gelten:

$$U[\text{SÄ}(\tilde{x})] = U(x_1) + w \cdot [U(x_2) - U(x_1)]. \quad (7.8)$$

Abbildung 7.2 verdeutlicht die Bestimmungsgleichungen grafisch für den Fall einer (streng) konkaven Nutzenfunktion, wobei angenommen wird, es gelte $w = 2/3$. Der Abszissenwert des Punktes P_1 ist gleich $E(\tilde{x})$. Die Senkrechte durch P_1 schneidet die Strecke $\overline{P_2P_3}$ im Punkt S_2 . Dessen Ordinatenwert ist gleich $U(x_1) + 2/3 \cdot [U(x_2) - U(x_1)]$, also gemäß (7.7) gleich $E[U(\tilde{x})]$ bzw. gemäß (7.8) gleich $U[\text{SÄ}(\tilde{x})]$.

$\text{SÄ}(\tilde{x})$ ist gleich dem Abszissenwert des Punktes S_3 , dessen Ordinatenwert mit dem von S_2 übereinstimmt; der Nutzenwert von $\text{SÄ}(\tilde{x})$ ist gleich $E[U(\tilde{x})]$. Da die Nutzenfunktion monoton steigt und streng konkav verläuft, liegt der Punkt S_3 links von S_2 . Das Sicherheitsäquivalent ist also kleiner als $E(\tilde{x})$. Der Ordinatenwert des Punktes S_1 ist gleich dem Nutzenwert eines sicheren Überschusses in Höhe von $E(\tilde{x})$. Da der Ordinatenwert von S_1 höher ist als der Ordinatenwert $E[U(\tilde{x})]$ des Punktes S_2 , wird dieser Überschuss der Verteilung (und somit auch ihrem Sicherheitsäquivalent $\text{SÄ}(\tilde{x})$) vorgezogen.

Die Größenrelation $\text{SÄ}(\tilde{x}) < E(\tilde{x})$ gilt bei streng konkaver Nutzenfunktion (also bei Risikoaversion) auch für jede andere Wahrscheinlichkeit w ($0 < w < 1$). Sie resultiert daraus, dass der Nutzenzuwachs, der erzielt wird, wenn der Überschuss ausgehend von $\text{SÄ}(\tilde{x})$ um einen bestimmten Betrag steigt, *kleiner* ist als die Nutzenminderung für den Fall, dass der Überschuss um denselben Betrag unter $\text{SÄ}(\tilde{x})$ sinkt (sinkender Grenznutzen mit steigendem Überschuss).

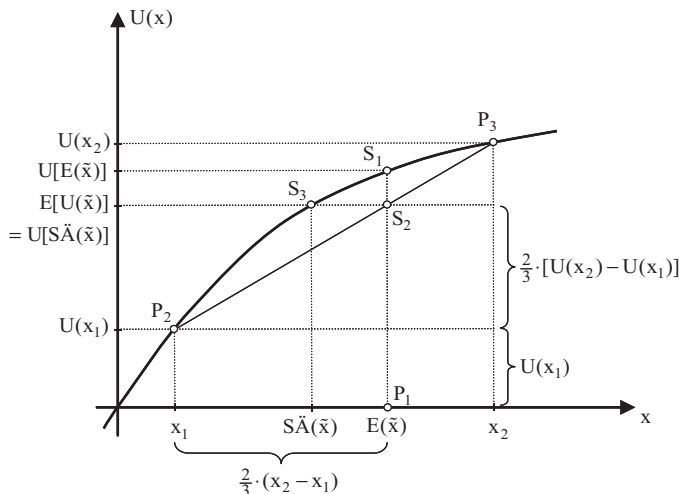


Abb. 7.2 Zum Sicherheitsäquivalent bei Risikoaversion

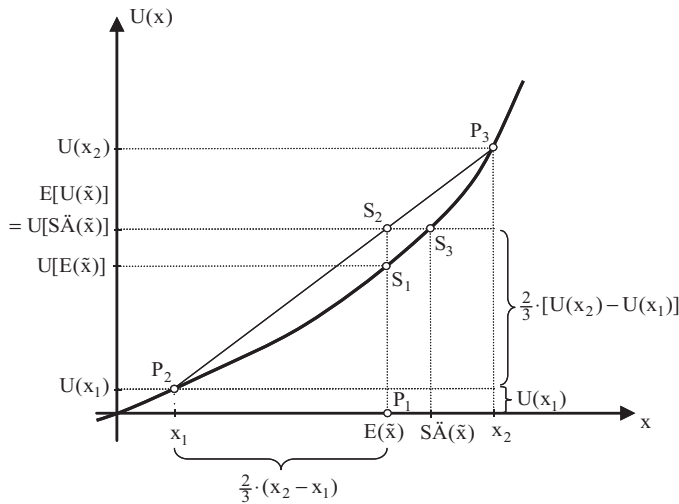


Abb. 7.3 Zum Sicherheitsäquivalent bei Risikofreude

Bei Risikofreude, d. h. bei konvexer Nutzenfunktion, lässt sich der umkehrte Zusammenhang, $S\ddot{A}(\tilde{x}) > E(\tilde{x})$ ebenfalls grafisch veranschaulichen. Zur Verdeutlichung wird Abb. 7.3 betrachtet, wobei wieder $w = 2/3$ angenommen wird.

Die Horizontale durch den Punkt S_2 schneidet jetzt die Nutzenfunktion im Punkt S_3 . Dessen Abszissenwert stimmt mit dem Sicherheitsäquivalent $S\ddot{A}(\tilde{x})$ überein. Es gilt nun also:

$$S\ddot{A}(\tilde{x}) > E(\tilde{x}). \quad (7.9)$$

Diese Größenrelation gilt bei streng konvexer Nutzenfunktion (bei Risikofreude) auch für jeden anderen Wert von w ($0 < w < 1$). Sie rührt daher, dass der Nutzenzuwachs, der (bei streng konvexer Nutzenfunktion) erzielt wird, wenn der Überschuss ausgehend von $S\ddot{A}(\tilde{x})$ um einen bestimmten Betrag wächst, *größer* ist als die Nutzenminderung für den Fall, dass der Überschuss um diesen Betrag unter $S\ddot{A}(\tilde{x})$ sinkt (steigender Grenznutzen mit steigendem Überschuss).

7.3 Auswirkungen von Verbundeffekten auf Sicherheitsäquivalent und Risikoabschlag

7.3.1 Entscheidungssituation

In Kap. 1, Abschn. 1.2.5.1, wurde erläutert, dass Entscheidungsprobleme in der Praxis vereinfacht werden können und in der Regel auch müssen, indem Entscheidungsbereiche gebildet werden, in deren Rahmen die betreffenden Entscheidungsprobleme

separat voneinander betrachtet werden. Im Rahmen der bisherigen Darstellungen wurde das Sicherheitsäquivalent eines Überschusses $\tilde{x}$ ohne *explizite* Berücksichtigung anderer möglicher Überschüsse betrachtet. Insofern wurde ebenfalls ein Entscheidungsbereich isoliert betrachtet, denn die Bewertung eines Überschusses erfolgt in der Realität durch Entscheider, die nicht nur diesen, sondern auch andere Zahlungsüberschüsse erzielen. Die isolierte Bewertung eines Überschusses ohne Beachtung anderer Überschüsse kann zu großen Bewertungsfehlern führen, wenn zwischen dem zu bewertenden Zahlungsüberschuss und den anderen Zahlungsüberschüssen Verbundeffekte bestehen. Für eine korrekte Bewertung müssen bei Vorliegen von Verbundeffekten daher auch die anderen Überschüsse explizit oder implizit berücksichtigt werden.

In Kap. 1, Abschn. 1.2.5, wurden vier Verbundeffekte diskutiert: Restriktionsverbund, Erfolgsverbund, Risikoverbund und Bewertungsverbund. *Restriktionsverbund* zwischen zwei Entscheidungsbereichen liegt vor, wenn die Alternativenmenge in mindestens einem der Bereiche davon beeinflusst wird, welche Alternative im anderen Bereich gewählt wird. *Erfolgsverbund* zwischen zwei Entscheidungsbereichen liegt vor, wenn die Auswirkungen der Alternativenwahl in mindestens einem Entscheidungsbereich auf das Gesamtergebnis (aus beiden Entscheidungsbereichen) davon abhängt, welche Alternative in dem anderen Bereich gewählt wird. Im Folgenden sollen Restriktionsverbund und Erfolgsverbund nicht betrachtet werden.

Relevant für die Bewertung eines Überschusses sind jedoch grundsätzlich sowohl Risikoverbund als auch Bewertungsverbund. *Risikoverbund* liegt vor, wenn der zu bewertende Überschuss und die anderen Überschüsse stochastisch voneinander abhängen. *Bewertungsverbund* liegt vor, wenn der Entscheider selbst dann zu einer falschen Bewertung käme, wenn er einen anderen *sicheren* Überschuss bei der Bewertung vernachlässigen würde. Um die Einflüsse dieser beiden Verbundeffekte isolieren zu können, gehen wir in zwei Schritten vor: Zunächst wird eine Situation betrachtet, in der kein Risikoverbund, sondern allenfalls ein Bewertungsverbund vorliegt. Im zweiten Schritt wird auch ein Risikoverbund berücksichtigt.

Risikoverbund und Bewertungsverbund haben allerdings dann keinen Einfluss auf die Bewertung, wenn der Entscheider risikoneutral ist. Dann nämlich kann er jeden Überschuss tatsächlich unabhängig von allen anderen Überschüssen korrekt bewerten, indem er dessen Erwartungswert bestimmt. Im Folgenden nehmen wir daher an, der Entscheider sei nicht risikoneutral, sondern risikoavers. Die unter der Annahme der Risikoaversion nachfolgend abgeleiteten Ergebnisse lassen sich auf den Fall der Risikofreude übertragen.

Der Einfachheit halber werden wir nur zwei Überschüsse betrachten, x_a und x_n . x_a steht für den anderen (oder „alten“) Überschuss, x_n für den zu bewertenden („neuen“) Überschuss. x_n ist riskant, x_a kann sicher oder ebenfalls riskant sein. Der vom Entscheider erzielte gesamte Überschuss ist entsprechend $x = x_a + x_n$.

7.3.2 Bewertungsverbund

7.3.2.1 Der allgemeine Zusammenhang

Der sichere Überschuss x_a kann als Vermögen des Entscheiders im Status quo interpretiert werden. Bei Sicherheit von x_a kann kein Risikoverbund mit x_n bestehen, jedoch ein Bewertungsverbund. Dieser drückt sich dadurch aus, dass der Wert des unsicheren Überschusses $\tilde{x}_n$ von der Höhe von x_a , also vom Vermögen des Entscheiders abhängt: $S\ddot{A}(\tilde{x}_n)$ ist abhängig von der Höhe von x_a . Man spricht von einem *Reichtumseffekt* auf die Bewertung, wenn solch eine Abhängigkeit besteht.

Wie in Kap. 5, Abschn. 5.5.1, gezeigt wurde, ist die Nutzenfunktion eines Entscheiders eindeutig durch das Arrow-Pratt-Maß für absolute Risikoaversion $AP(x)$ bestimmt. Das bedeutet, dass sich ein etwaiger Reichtumseffekt auf die Bewertung des unsicheren Zahlungsanspruchs am Arrow-Pratt-Maß festmachen lassen muss: Wenn es keinen Reichtumseffekt geben soll, dann muss die Risikoaversion konstant, d. h. reichtumsunabhängig sein: $AP(x)=a$ für alle x , wobei hier $x=x_a+x_n$ gilt. In Kap. 5, Abschn. 5.5.2, wurde gezeigt, dass nur zwei Typen von Nutzenfunktionen eine konstante absolute Risikoaversion aufweisen, die lineare Nutzenfunktion, die Risikoneutralität des Entscheiders impliziert ($a=0$), und die exponentielle Nutzenfunktion $U(x)=b - e^{-a \cdot x}$ mit dem Risikoaversionskoeffizienten $a>0$.

Bei konstanter absoluter Risikoaversion ist das Sicherheitsäquivalent $S\ddot{A}(\tilde{x}_n)$ also unabhängig von der Höhe von x_a . Ist die Risikoaversion dagegen nicht konstant, die Nutzenfunktion also weder vom linearen noch vom exponentiellen Typ, so kommt es grundsätzlich zu einem Reichtumseffekt, sodass das Sicherheitsäquivalent und damit auch der Risikoabschlag für $\tilde{x}_n$ von der Höhe von x_a abhängen. Für den Reichtumseffekt gilt: Sinkt der Risikoaversionskoeffizient mit zunehmendem Reichtum (mit zunehmendem x_a) so sinkt der Risikoabschlag $RA(\tilde{x}_n)$. Steigt hingegen der Risikoaversionskoeffizient, so steigt auch der Risikoabschlag.

Dass sich nur für die lineare und die exponentielle Nutzenfunktion eine konstante absolute Risikoaversion ergibt und daher kein Reichtumseffekt auftritt, hängt mit der Eigenschaft der *Separierbarkeit* zusammen, die beide Nutzenfunktionen aufweisen. Man unterscheidet dabei additive und multiplikative Separierbarkeit. Das heißt, dass der Nutzen der Summe der Überschüsse x_a und x_n in die Summe (additive Separierbarkeit) oder das Produkt (multiplikative Separierbarkeit) der einzelnen Nutzenwerte der beiden Überschüsse zerlegt werden kann. Additive und multiplikative Separierbarkeit spielen eine große Rolle bei der Vereinfachung von Bewertungsproblemen. Hierauf kommen wir zurück, wenn wir Probleme der Bewertung eines Zahlungsanspruchs im Mehrperioden-Fall untersuchen (Kap. 15, Abschn. 15.2.3.2).

7.3.2.2 Beispiel

Die Abhängigkeit des Sicherheitsäquivalents $S\ddot{A}(\tilde{x}_n)$ von einem sicheren Überschuss x_a soll an einem Beispiel verdeutlicht werden. Ein Entscheider mit diesem Einkommen kann an einem Glücksspiel teilnehmen, bei dem er mit der Wahrscheinlichkeit w den

Betrag Δ gewinnen und mit der Gegenwahrscheinlichkeit $1-w$ denselben Betrag Δ verlieren kann. $\tilde{x}_n$ ist also die Lotterie $\{\Delta; w \mid -\Delta; 1-w\}$. Der Erwartungswert des Gewinns beträgt $E(\tilde{x}_n) = w \cdot \Delta - (1-w) \cdot \Delta$, der Erwartungswert des Nutzens des entsprechenden Gesamteinkommens $x_a + \tilde{x}_n$ beträgt

$$E[U(x_a + \tilde{x}_n)] = w \cdot U(x_a + \Delta) + (1-w) \cdot U(x_a - \Delta).$$

Das Sicherheitsäquivalent für $\tilde{x}_n$ ist also implizit definiert durch

$$U[(x_a + S\ddot{A}(\tilde{x}_n))] = E[U(x_a + \tilde{x}_n)] = w \cdot U(x_a + \Delta) + (1-w) \cdot U(x_a - \Delta).$$

Im Folgenden betrachten wir drei Nutzenfunktionen:

$$U_1(x) = -e^{-0,005 \cdot x}, \quad U_2(x) = \sqrt{x} \quad \text{und} \quad U_3(x) = x - \frac{1}{600} \cdot x^2.$$

Die exponentielle Nutzenfunktion U_1 erlaubt die Bewertung des unsicheren Zahlungsanspruchs $\tilde{x}_n$ separat vom sicheren Überschuss x_a , wie im vorangegangenen Abschnitt erläutert wurde. Hier wird sich entsprechend ein Risikoabschlag ergeben, der unabhängig von x_a ist. Die Wurzel-Nutzenfunktion U_2 weist abnehmende Risikoaversion auf, d. h. das Arrow-Pratt-Maß fällt mit steigendem Ergebnis x . Dagegen weist die quadratische Nutzenfunktion U_3 zunehmende absolute Risikoaversion auf. Sowohl bei U_2 als auch bei U_3 hängt jeweils der Risikoabschlag von der Höhe von x_a ab.

Abbildung 7.4 zeigt die Risikoabschläge $RA_i(\tilde{x}_n|x_a)$ für die drei Nutzenfunktionen ($i=1, 2, 3$) in Abhängigkeit von der Höhe des sicheren Einkommens x_a . Für die Rechnungen wurden die Parameterwerte $w=0,8$ und $\Delta=100$ gewählt, der Erwartungswert des

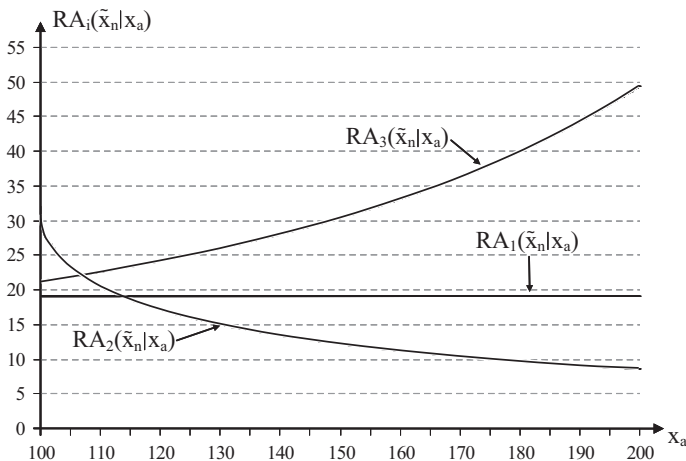


Abb. 7.4 Abhängigkeit des Risikoabschlags für $\tilde{x}_n$ von der Höhe des Vermögens x_a (Reichtumseffekt) für drei beispielhafte Nutzenfunktionen

unsicheren Ergebnisses $\tilde{x}_n$ beträgt im Beispiel also $E(\tilde{x}_n) = 0,8 \cdot 100 - 0,2 \cdot 100 = 60$. x_a variiert zwischen 100 und 200.

Der Risikoabschlag ist bei konstanter absoluter Risikoaversion, d. h. für die exponentielle Nutzenfunktion $U_1(x)$, konstant; er beträgt 19,08, das Sicherheitsäquivalent $S\ddot{A}(\tilde{x}_n)$ entsprechend 40,92. Es gilt z. B. für $x_a = 100$:

$$E[U_1(x_a + \tilde{x}_n)] = 0,8 \cdot [-e^{-0,005 \cdot (100+100)}] + 0,2 \cdot [-e^{-0,005 \cdot (100-100)}] = -0,4943$$

und somit:

$$\begin{aligned} U_1[S\ddot{A}(x_a + \tilde{x}_n)] &= -e^{-0,005 \cdot S\ddot{A}(x_a + \tilde{x}_n)} = -0,4943 \\ \Leftrightarrow S\ddot{A}(x_a + \tilde{x}_n) &= -\frac{1}{0,005} \cdot \ln(0,4943) = 140,92. \end{aligned}$$

Wegen $E(x_a + \tilde{x}_n) = 160$ und da x_a sicher ist, entspricht diesem Sicherheitsäquivalent ein Risikoabschlag für $\tilde{x}_n$ in Höhe von $160 - 140,92 = 19,08$, sodass $S\ddot{A}(\tilde{x}_n) = 60 - 19,08 = 40,92$ gilt.

Bei der Wurzel-Nutzenfunktion $U(x) = \sqrt{x}$ beträgt der Risikoabschlag 32 für ein Einkommensniveau von $x_a = 100$ und sinkt bis auf den Wert 8,57 für $x_a = 200$. Würde x_a weiter steigen, so würde auch der Risikoabschlag weiter sinken; ginge x_a gegen unendlich, so ginge der Risikoabschlag gegen null. Bei der quadratischen Nutzenfunktion $U(x) = x - (1/600) \cdot x^2$ verhält es sich umgekehrt: Der Risikoabschlag steigt ausgehend von dem Niveau 21,25 für $x_a = 100$ bis auf 49,44 für $x_a = 200$ an.³

7.3.3 Risikoverbund

7.3.3.1 Der allgemeine Zusammenhang

Wir betrachten nun den Fall, dass nicht nur der zu bewertende Überschuss $\tilde{x}_n$ unsicher ist, sondern auch der andere Überschuss $\tilde{x}_a$. Stochastische Unabhängigkeit zwischen beiden Überschüssen liegt vor, wenn gilt:

$$w(x_n | x_a) = w(x_n) \quad \text{für alle } x_n, x_a. \quad (7.10)$$

In Worten: Die Eintrittswahrscheinlichkeit für jeden möglichen Überschuss x_n ist unabhängig von x_a . Bei stochastischer Abhängigkeit sind die Eintrittswahrscheinlichkeiten der möglichen Überschüsse x_n davon abhängig, welcher der möglichen Überschüsse x_a erzielt wird.

³Das Maximum der quadratischen Nutzenfunktion liegt bei $\bar{x} = 300$, eine Steigerung von x_a über das Niveau von 200 hinaus würde also bei einem Gewinn aus dem Glücksspiel in den unzulässigen Bereich der Nutzenfunktion führen.

Ein Beispiel für stochastische Unabhängigkeit ist das Ziehen mit Zurücklegen: Wird aus einer Urne mit blauen und roten Kugeln wiederholt eine Kugel gezogen, so verändert sich die Wahrscheinlichkeit, eine rote Farbe zu erhalten, nur dann nicht mit den Ergebnissen der vorangegangenen Ziehungen, wenn jede Kugel wieder zurückgelegt und danach neu gemischt wird. Stochastische Abhängigkeit besteht dagegen beim Ziehen *ohne* Zurücklegen: Je mehr blaue Kugeln gezogen wurden, desto wahrscheinlicher wird es, dass nachfolgend eine rote Kugel gezogen wird.

Bei stochastischer Abhängigkeit besteht ein Risikoverbund und damit, wenn der Entscheider nicht risikoneutral ist, auch ohne Bewertungsverbund eine Bewertungsabhängigkeit zwischen x_n und x_a . In dieser Situation kann das Sicherheitsäquivalent des Überschusses $\tilde{x}_n$ ermitteln, indem man zwei Situationen vergleicht: Diejenige, in der der Entscheider beide Überschüsse $\tilde{x}_a$ und $\tilde{x}_n$ erhält, mit derjenigen, in der er $\tilde{x}_n$ gegen $S\ddot{A}(\tilde{x}_n)$ eintauscht und entsprechend $\tilde{x}_a + S\ddot{A}(\tilde{x}_n)$ erhält. Der Nutzen aus dem gesamten Einkommen $\tilde{x}_a + \tilde{x}_n$ des Entscheiders beträgt $U(\tilde{x}_a + \tilde{x}_n)$, der Erwartungswert des Nutzens entsprechend $E[U(\tilde{x}_a + \tilde{x}_n)]$. Aufbauend auf der Definition (7.1) kann das Sicherheitsäquivalent von $\tilde{x}_n$ gemäß dem Bernoulli-Prinzip daher wie folgt definiert werden:

$$E[U(\tilde{x}_a + S\ddot{A}(\tilde{x}_n))] = E[U(\tilde{x}_a + \tilde{x}_n)]. \quad (7.11)$$

Das Sicherheitsäquivalent des Zahlungsanspruchs $\tilde{x}_n$ ist also dasjenige *sichere* zusätzliche Einkommen, das dem unsicheren zusätzlichen Einkommen aus $\tilde{x}_n$ gleichwertig ist. (7.11) unterstellt wie auch die Basisdefinition des Sicherheitsäquivalents in (7.1) eine *Verkäuferperspektive*: Das Sicherheitsäquivalent des Überschusses $\tilde{x}_n$ ist dasjenige sichere Einkommen $S\ddot{A}(\tilde{x}_n)$, das der Entscheider im Austausch gegen den Zahlungsanspruch $\tilde{x}_n$ mindestens erhalten muss, damit sich seine Nutzenposition nicht verschlechtert.

Das Sicherheitsäquivalent $S\ddot{A}(\tilde{x}_n)$ hängt nun nicht nur davon ab, welche (erwartete) Höhe das weitere Einkommen $\tilde{x}_a$ hat, d. h. es besteht nicht nur ein Reichtumseffekt. Es hängt vor allem auch davon ab, welche Form die stochastische Abhängigkeit zwischen $\tilde{x}_a$ und $\tilde{x}_n$ annimmt. So kann das Sicherheitsäquivalent von $\tilde{x}_n$ bei Betrachtung beider Größen $\tilde{x}_a$ und $\tilde{x}_n$ z. B. höher sein als bei isolierter Betrachtung von $\tilde{x}_n$, weil $\tilde{x}_a$ und $\tilde{x}_n$ negativ miteinander korreliert sind und so das Gesamtrisiko aus $\tilde{x}_a + \tilde{x}_n$ geringer ist als die Summe der Einzelrisiken von $\tilde{x}_a$ und $\tilde{x}_n$. Umgekehrt kann das Sicherheitsäquivalent von $\tilde{x}_n$ bei Betrachtung beider Größen $\tilde{x}_a$ und $\tilde{x}_n$ niedriger sein als bei isolierter Betrachtung von $\tilde{x}_n$ weil $\tilde{x}_a$ und $\tilde{x}_n$ positiv miteinander korreliert sind und somit das Gesamtrisiko aus $\tilde{x}_a + \tilde{x}_n$ höher ist als die Summe der Einzelrisiken von $\tilde{x}_a$ und $\tilde{x}_n$.

Die Auswirkung der Korrelation zwischen $\tilde{x}_a$ und $\tilde{x}_n$ auf die Bewertung dieser unsicheren Zahlungsansprüche hat grundlegende Bedeutung für die Investitions- und Finanzierungstheorie. Auf die hier aufgezeigten Zusammenhänge werden auch die späteren Kap. 8, 13, 14 und 15 aufbauen. In Kap. 8 wird das Prinzip der Bewertung bei Risikoverbund auf das Problem der Risikomischung angewendet. Dabei wird nach einem Wertpapierportefeuille als Kombination von Zahlungsansprüchen gesucht, welches eine

„optimale Mischung“ dieser Zahlungsansprüche aufweist und dabei Risikoverbundeffekte bestmöglich ausnutzt. In den Kap. 13, 14 und 15 geht es um die Fundierung von Unternehmenszielen. Dort wird sich zeigen, dass das Unternehmensziel der Marktwertmaximierung ebenfalls auf der Grundlage der Bewertung bei Risikoverbund beruht.

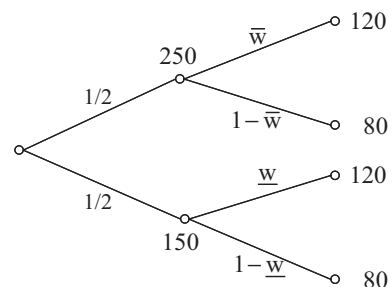
7.3.3.2 Beispiel

Zur Verdeutlichung der Auswirkungen eines Risikoverbundes zwischen $\tilde{x}_a$ und $\tilde{x}_n$ auf die Bewertung des unsicheren Zahlungsanspruchs $\tilde{x}_n$ betrachten wir erneut ein Beispiel. Abb. 7.5 stellt einen zweistufigen Zustandsbaum dar: In der ersten Stufe gibt es zwei gleich wahrscheinliche Umweltzustände, die zu unterschiedlichen Überschüssen $\bar{x}_a = 250$ oder $\underline{x}_a = 150$ führen. Danach folgt eine zweite Stufe und es wird eines der beiden Ergebnisse $\bar{x}_n = 120$ oder $\underline{x}_n = 80$ eintreten.

Es gibt also vier mögliche Gesamtergebnisse: $250 + 120 = 370$, $250 + 80 = 330$; $150 + 120 = 270$ und $150 + 80 = 230$. An den Ästen des Zustandsbaumes in der zweiten Stufe stehen die bedingten Eintrittswahrscheinlichkeiten für die Ergebnisse $\bar{x}_n = 120$ und $\underline{x}_n = 80$. Dabei bezeichnet $\bar{w}$ die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis $\bar{x}_n = 120$ unter der Bedingung, dass das Ergebnis $\bar{x}_a = 250$ eintritt bzw. eingetreten ist. Entsprechend ist $\underline{w}$ die Wahrscheinlichkeit für $\bar{x}_n = 120$ unter der Bedingung, dass das Ergebnis $\underline{x}_a = 150$ eintritt. Die jeweiligen Gegenwahrscheinlichkeiten gelten jeweils für das niedrige Ergebnis $\underline{x}_n = 80$. Betrachtet wird ein Entscheider mit einer exponentiellen Nutzenfunktion: $U(x) = -e^{-0,02 \cdot x}$. Stochastische Unabhängigkeit zwischen den Zahlungsansprüchen besteht nur dann, wenn $\bar{w} = \underline{w}$ gilt. Unterscheiden sich dagegen die beiden Wahrscheinlichkeiten, so besteht stochastische Abhängigkeit.

Tab. 7.1 verdeutlicht die Implikationen unterschiedlicher Abhängigkeiten für die Bewertung des Zahlungsanspruchs $\tilde{x}_n$. Elf Fälle werden betrachtet, wobei die Wahrscheinlichkeiten gegenläufig über die Fälle variieren: $\bar{w}$ steigt ausgehend von dem Wert 0 (unter der Bedingung, dass $\bar{x}_a$ eintritt, ist das Ergebnis $\underline{x}_n$ sicher) in gleichmäßigen Schritten auf den Wert 1 (unter der Bedingung, dass $\bar{x}_a$ eintritt, ist dann das Ergebnis $\bar{x}_n$ sicher) an, im Gegenzug sinkt $\underline{w}$ sukzessive von dem Wert 1 (unter der Bedingung, dass $\underline{x}_a$ eintritt, ist das Ergebnis $\bar{x}_n$ sicher) auf den Wert 0 (unter der Bedingung, dass $\underline{x}_a$ eintritt, ist das Ergebnis $\underline{x}_n$ sicher) ab. Die Wahrscheinlichkeiten $\bar{w}$ und $\underline{w}$ addieren sich in

Abb. 7.5 Zustandsbaum für das Beispiel



Tab. 7.1 Beispiel zur Auswirkung eines Risikoverbundes auf das Sicherheitsäquivalent

Fall	$\bar{w}$	$\underline{w}$	$E(\tilde{x}_n)$	k	Isolierte Bewertung		Berücksichtigung des Risikoverbundes	
					$S\ddot{A}(\tilde{x}_n)$	$RA(\tilde{x}_n)$	$S\ddot{A}(\tilde{x}_n)$	$RA(\tilde{x}_n)$
1	0,0	1,0	100	-1,0	96,10	3,90	113,18	-13,18
2	0,1	0,9	100	-0,8	96,10	3,90	109,27	-9,27
3	0,2	0,8	100	-0,6	96,10	3,90	105,64	-5,64
4	0,3	0,7	100	-0,4	96,10	3,90	102,25	-2,25
5	0,4	0,6	100	-0,2	96,10	3,90	99,08	0,92
6	0,5	0,5	100	0,0	96,10	3,90	96,10	3,90
7	0,6	0,4	100	0,2	96,10	3,90	93,29	6,71
8	0,7	0,3	100	0,4	96,10	3,90	90,63	9,37
9	0,8	0,2	100	0,6	96,10	3,90	88,10	11,90
10	0,9	0,1	100	0,8	96,10	3,90	85,69	14,31
11	1,0	0,0	100	1,0	96,10	3,90	83,39	16,61

allen Fällen zu eins, daher bleiben die unbedingten (die a-priori-) Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse $\bar{x}_n = 120$ und $\underline{x}_n = 80$ (also die Wahrscheinlichkeitsverteilung über $\tilde{x}_n$ bei isolierter Betrachtung) immer dieselben; sie betragen 0,5. Entsprechend ergäbe sich für jede betrachtete $(\bar{w}, \underline{w})$ -Konstellation bei isolierter Ermittlung des Sicherheitsäquivalents $S\ddot{A}(\tilde{x}_n)$ jeweils derselbe Wert; vom Erwartungswert $E(\tilde{x}_n) = 100$ würde jeweils derselbe Risikoabschlag $RA(\tilde{x}_n)$ in Höhe von 3,90 bei der betrachteten Nutzenfunktion $U(x) = -e^{-0,02 \cdot x}$ vorgenommen werden. Entsprechend folgt für $\tilde{x}_n$ ein Sicherheitsäquivalent bei isolierter Bewertung in Höhe von 96,10.

Die zweite und die dritte Spalte der Tabelle zeigen die Eintrittswahrscheinlichkeiten $\bar{w}$ und $\underline{w}$ für das hohe Ergebnis $\bar{x}_n = 120$ in Abhängigkeit von der Umweltentwicklung. Die vierte Spalte weist den Erwartungswert des Ergebnisses $E(\tilde{x}_n)$ aus (der für jeden betrachteten Fall derselbe ist). Die fünfte Spalte der Tabelle gibt die Korrelation k zwischen den Ergebnissen an. Der Korrelationskoeffizient liegt zwischen -1 (perfekt negative Korrelation) und $+1$ (perfekt positive Korrelation). Für Fall 1 mit $\bar{w} = 0$ und $\underline{w} = 1$ ist die Korrelation $k = -1$, die Zahlungen sind gegenläufig: Auf ein hohes (bzw. niedriges) Ergebnis x_a folgt (mit Sicherheit) ein niedriges (bzw. hohes) Ergebnis x_n . In Fall 11 dagegen mit $\bar{w} = 1$ und $\underline{w} = 0$ sind die Zahlungen gleichläufig, die Korrelation beträgt $+1$: Auf ein hohes (bzw. niedriges) Ergebnis x_a folgt mit Sicherheit ein hohes (bzw. niedriges) Ergebnis x_n . Stochastische Unabhängigkeit entspricht einer Korrelation von null, vgl. Fall 6.

In der sechsten und siebten Spalte der Tabelle finden sich das Sicherheitsäquivalent und der Risikoabschlag für das Ergebnis $\tilde{x}_n$ bei *isolierter* Bewertung, d. h. für den Fall, dass der Entscheider das andere Einkommen $\tilde{x}_a$ bei der Bewertung von $\tilde{x}_n$ ignorieren

würde; es beträgt, wie oben erläutert, 96,10, der Entscheider nimmt also jeweils einen Risikoabschlag in Höhe von 3,90 vor. Die letzten beiden Spalten schließlich weisen das Sicherheitsäquivalent $S\ddot{A}(\tilde{x}_n)$ und den Risikoabschlag $RA(\tilde{x}_n)$ bei Berücksichtigung des Risikoverbundes zwischen den Ergebnissen, also unter Anwendung von (7.11), aus.

Betrachtet man zunächst die Konstellation des Falls 6, $\bar{w} = \underline{w} = 0,5$, so sieht man, dass sich die Sicherheitsäquivalente bei isolierter Betrachtung und bei Berücksichtigung des Risikoverbundes nicht unterscheiden, da die Ergebnisse stochastisch unabhängig sind, also gar kein Risikoverbund besteht. In allen anderen Fällen dagegen weichen die Sicherheitsäquivalente bzw. Risikoabschläge voneinander ab. In den Fällen 7–11 liegt der Risikoabschlag bei korrekter Bewertung, d. h. bei Berücksichtigung des Risikoverbundes, über dem Risikoabschlag bei Vernachlässigung des Risikoverbundes: Würde der Entscheider $\tilde{x}_n$ isoliert bewerten, so käme es zu einer Überbewertung von $\tilde{x}_n$. In den Fällen 1–5 dagegen liegt der korrekte Risikoabschlag *unter* dem Risikoabschlag bei isolierter Bewertung: Der Entscheider würde nun jeweils bei isolierter Betrachtung den Wert von $\tilde{x}_n$ unterschätzen.

Wie kommt es zu diesen Zusammenhängen? Vergleichen wir noch einmal die Fälle 6 und 11. In Fall 6 sind alle möglichen Gesamtergebnisse $x_a + x_n$ (370, 330, 270 und 230) gleich wahrscheinlich. In Fall 11 dagegen gibt es nur zwei mögliche Ergebnisse, das größte (370) und das kleinste (230). Das Gesamtergebnis ist damit in Fall 11 riskanter, ohne dass der Erwartungswert des Ergebnisses höher wäre: Der risikoaverse Entscheider ermittelt entsprechend für das Gesamtergebnis im Fall 11 einen niedrigeren Wert als in Fall 6. Ein ganz ähnliches Bild ergibt sich bei einem Vergleich der Fälle 1 und 6: Nun bedeutet der Übergang von Fall 6 auf Fall 1, dass nur noch die beiden mittleren Ergebnisse (330 und 270) möglich sind, die Wahrscheinlichkeit für extreme Ergebnisse (370 und 230) sinkt also (von 0,25 auf null), wohingegen die Wahrscheinlichkeit für Ergebnisse, die näher am Erwartungswert liegen, steigt (von 0,25 auf 0,5). Fall 1 impliziert also bei gleichem Erwartungswert des Gesamtergebnisses eine weniger riskante Wahrscheinlichkeitsverteilung über $x_a + x_n$ als Fall 6 und der risikoaverse Entscheider bewertet diese Verteilung des Falls 1 entsprechend höher, was sich in einem höheren Sicherheitsäquivalent für $\tilde{x}_n$ ausdrückt.

7.4 Bewertung aus der Verkäufer- und aus der Käuferperspektive im Vergleich

Wie erläutert wurde, impliziert die Übereinstimmung von Wert (subjektivem Grenzpreis) und Sicherheitsäquivalent des unsicheren Überschusses $\tilde{x}_n$ gemäß

$$E[U(\tilde{x}_a + S\ddot{A}(\tilde{x}_n))] = E[U(\tilde{x}_a + \tilde{x}_n)], \quad (7.11)$$

eine Bewertung aus der Perspektive eines Entscheiders, der erwägt, den unsicheren Überschuss $\tilde{x}_n$ zu verkaufen, also im Austausch gegen einen sicheren Verkaufspreis aufzugeben. Soll dieser Überschuss hingegen aus der Perspektive eines potenziellen Käufers bewertet werden, der bisher nur über den Überschuss $\tilde{x}_a$ verfügt, so ist die Bestimmungsgleichung anzupassen. Im Folgenden behalten wir die Bezeichnung $S\ddot{A}(\tilde{x}_n)$ für den Wert aus der Perspektive eines (potenziellen) Verkäufers bei und bezeichnen mit $WK(\tilde{x}_n)$ den Wert des Überschusses aus der Perspektive eines (potenziellen) Käufers. $WK(\tilde{x}_n)$ ist wie folgt definiert:

$$E[U(\tilde{x}_a)] = E[U(\tilde{x}_a + \tilde{x}_n - WK(\tilde{x}_n))]. \quad (7.12)$$

Wie $S\ddot{A}(\tilde{x}_n)$ in (7.11) ist auch $WK(\tilde{x}_n)$ in (7.12) nur implizit bestimmt. Mit dem Erwerb des unsicheren Überschusses $\tilde{x}_n$ zu einem Preis in Höhe seines Wertes verändert sich der Überschuss des Entscheiders von $\tilde{x}_a$ zu $\tilde{x}_a + \tilde{x}_n - WK(\tilde{x}_n)$ wobei dann der Erwartungswert des Nutzens ebenso hoch ist wie bei Verzicht auf den Kauf und alleinigem Erhalt des Überschusses $\tilde{x}_a$. Für den Erwerb des unsicheren Überschusses $\tilde{x}_n$ ist also der Entscheider bereit, maximal $WK(\tilde{x}_n)$ zu zahlen, da ihn dieser Grenzpreis nicht schlechter (allerdings auch nicht besser) stellt als bei Verzicht auf den Kauf. (7.12) impliziert analog zu (7.11), dass der Kaufpreis zum Zeitpunkt der Realisation von $\tilde{x}_n$ zu leisten ist.

Da $S\ddot{A}(\tilde{x}_n)$ und $WK(\tilde{x}_n)$ deterministisch sind, zeigt der Vergleich der beiden Bestimmungsgleichungen (7.11) und (7.12) für das Sicherheitsäquivalent (den Wert) aus Verkäufersicht und den Wert aus Käufersicht, dass diese sich nur durch einen *Reichtumseffekt* unterscheiden können: Bei der Beurteilung aus Verkäufersicht ist dieser reicher, da er über den Überschuss bereits verfügt bzw. im Austausch dafür $S\ddot{A}(\tilde{x}_n)$ erhält, wohingegen der Käufer den Grenzpreis $WK(\tilde{x}_n)$ verliert. Daraus folgt unmittelbar, dass beide Werte dann und nur dann übereinstimmen, wenn die Nutzenfunktion des Entscheiders eine konstante absolute Risikoaversion aufweist, der Entscheider mithin entweder risikoneutral ist oder seine Nutzenfunktion vom exponentiellen Typ ist.

Ist die absolute Risikoaversion (der Risikoaversionskoeffizient) des Entscheiders vom (Gesamt-)Überschuss abhängig, so unterscheiden sich die beiden Werte voneinander. Dabei gilt allgemein: Wenn der Überschuss x_a sicher ist, dann ist das Sicherheitsäquivalent $S\ddot{A}(\tilde{x}_n)$ immer größer als der Wert $WK(\tilde{x}_n)$, wenn die Risikoaversion mit steigendem (Gesamt-)Überschuss sinkt, und immer kleiner als der Wert, wenn die Risikoaversion steigt. Ist dagegen $\tilde{x}_a$ unsicher, so wird der Reichtumseffekt durch den Risikoverbund zwischen $\tilde{x}_a$ und $\tilde{x}_n$ überlagert. Dies führt dazu, dass der Zusammenhang zwischen Sicherheitsäquivalent und Wert nicht mehr eindeutig von der Entwicklung der Risikoaversion abhängt. Ein Beispiel hierfür findet sich in Abschn. 7.5.2.

Im Folgenden werden zur Vertiefung der bisherigen Erkenntnisse zwei Spezialfälle betrachtet, für die die Orientierung am Bernoulli-Prinzip äquivalent mit der Orientierung am (μ, σ) -Prinzip ist, was die Analyse erheblich erleichtert.

7.5 Spezialfälle

7.5.1 Bewertung eines normalverteilten Überschusses bei exponentieller Nutzenfunktion

Bei *exponentieller Nutzenfunktion und Normalverteilung* eines Überschusses $\tilde{x}$ gilt für das Sicherheitsäquivalent (vgl. Kap. 5, Abschn. 5.7.2.5):

$$S\ddot{A}(\tilde{x}) = \mu - \frac{a}{2} \cdot \sigma^2. \quad (7.13)$$

Da die exponentielle Nutzenfunktion konstante absolute Risikoaversion aufweist, gibt dieses Sicherheitsäquivalent sowohl den Wert aus der Verkäuferperspektive als auch den Wert aus der Käuferperspektive an.

Im Folgenden betrachten wir wieder explizit die zwei unsicheren Überschüsse $\tilde{x}_a$ und $\tilde{x}_n$, wobei erneut $\tilde{x}_n$ bewertet werden soll. Beide Zahlungsansprüche seien normalverteilt mit den Erwartungswerten μ_a und μ_n und den Standardabweichungen σ_a und σ_n . Es gilt nun für die isoliert ermittelten Sicherheitsäquivalente von $\tilde{x}_a$ und $\tilde{x}_n$:

$$S\ddot{A}(\tilde{x}_a) = \mu_a - \frac{a}{2} \cdot \sigma_a^2 \quad \text{und} \quad S\ddot{A}(\tilde{x}_n) = \mu_n - \frac{a}{2} \cdot \sigma_n^2 \quad (7.14)$$

und für das Sicherheitsäquivalent bei gemeinsamer Betrachtung:

$$\begin{aligned} S\ddot{A}(\tilde{x}_a + \tilde{x}_n) &= E(\tilde{x}_a + \tilde{x}_n) - \frac{a}{2} \cdot \text{Var}(\tilde{x}_a + \tilde{x}_n) \\ &= \mu_a + \mu_n - \frac{a}{2} \cdot \left(\sigma_a^2 + \sigma_n^2 + 2 \cdot \sigma_{an} \right). \end{aligned} \quad (7.15)$$

In (7.15) bezeichnet σ_{an} die Kovarianz zwischen $\tilde{x}_a$ und $\tilde{x}_n$. Da $S\ddot{A}(\tilde{x}_a + \tilde{x}_n) = S\ddot{A}[\tilde{x}_a] + S\ddot{A}[\tilde{x}_n]$ gilt, folgt aus (7.15) und (7.14) für die Bewertung von $\tilde{x}_n$:

$$\begin{aligned} E[U(\tilde{x}_a + \tilde{x}_n)] &= E[U(\tilde{x}_a + \tilde{x}_n)] \\ \Leftrightarrow \underbrace{S\ddot{A}[\tilde{x}_a + \tilde{x}_n]}_{=S\ddot{A}(\tilde{x}_a)+S\ddot{A}(\tilde{x}_n)} &= S\ddot{A}(\tilde{x}_a + \tilde{x}_n) \\ \Leftrightarrow S\ddot{A}(\tilde{x}_n) &= \mu_a + \mu_n - \frac{a}{2} \cdot \left(\sigma_a^2 + \sigma_n^2 + 2 \cdot \sigma_{an} \right) - \mu_a - \frac{a}{2} \cdot \sigma_a^2. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Unter Berücksichtigung des potenziellen Risikoverbundes zwischen $\tilde{x}_a$ und $\tilde{x}_n$ ergibt sich also das Sicherheitsäquivalent des unsicheren Überschusses $\tilde{x}_n$ (also der Wert aus Verkäufersicht und wegen fehlender Reichtumseffekte auch aus Käufersicht):

$$S\ddot{A}(\tilde{x}_n) = \mu_n - \frac{a}{2} \cdot \left(\sigma_n^2 + 2 \cdot \sigma_{an} \right). \quad (7.17)$$

Das Sicherheitsäquivalent von $\tilde{x}_n$ ist somit gleich dem Erwartungswert von $\tilde{x}_n$ abzüglich der mit $a/2$ gewichteten Erhöhung der Varianz der Wahrscheinlichkeitsverteilung über den Gesamtüberschuss, wenn x_n zu x_a hinzuaddiert wird. Ein Vergleich der Bestimmungsgleichung (7.17) mit dem Sicherheitsäquivalent von $\tilde{x}_n$ bei dessen isolierter Betrachtung gemäß (7.14) zeigt, dass sich beide Gleichungen allein darin unterscheiden, dass der Risikoabschlag in (7.17) nicht nur die Varianz von $\tilde{x}_n$, sondern auch die doppelte Kovarianz von $\tilde{x}_n$ mit $\tilde{x}_a$ enthält.

Ist diese Kovarianz positiv, so liegt der Risikoabschlag bei Bewertung mit Risikoverbund über dem Risikoabschlag bei isolierter Bewertung von $\tilde{x}_n$. Ist sie negativ, so liegt der Risikoabschlag darunter. Dies bestätigt den Zusammenhang, der sich bereits im Beispiel des Abschn. 7.3.3.2 zeigte.

Wie erläutert, stimmen der Grenzpreis eines Verkäufers und eines (potenziellen) Käufers bei konstanter absoluter Risikoaversion miteinander überein. (7.17) gibt demnach beide Werte an, den Wert des unsicheren Überschusses aus der Sicht eines Verkäufers wie auch aus Sicht eines Käufers.

7.5.2 Bewertung eines unsicheren Überschusses bei quadratischer Nutzenfunktion

Bei *quadratischer Nutzenfunktion* $U(x) = b \cdot x - c \cdot x^2$ für ein beliebiges Ergebnis x besteht ein Bewertungsverbund. Dem Erwartungswert des Nutzens entspricht, wie in Kap. 5, Abschn. 5.7.2.1, gezeigt wurde, die (μ, σ^2) -Präferenzfunktion

$$E[U(\tilde{x})] = \Phi(\mu, \sigma) = b \cdot \mu - c \cdot (\mu^2 + \sigma^2). \quad (7.18)$$

Die Indifferenzkurven im (μ, σ^2) -Diagramm verlaufen streng konkav und äquidistant zueinander, vgl. Kap. 5, Abschn. 5.7.2.2. Allen Wahrscheinlichkeitsverteilungen über ein Ergebnis $\tilde{x}$, deren (μ, σ^2) -Konstellationen auf derselben Indifferenzkurve liegen, entspricht dasselbe Sicherheitsäquivalent, das auf der μ -Achse zu finden ist: Es entspricht dem Abszissenwert desjenigen Punktes, in dem die betreffende Indifferenzkurve beginnt, da in diesem Punkt σ^2 gleich null ist.

Wir betrachten im Folgenden wieder die beiden Überschüsse $\tilde{x}_a$ und $\tilde{x}_n$. Abb. 7.6 stellt zwei Indifferenzkurven im (μ, σ^2) -Diagramm dar. Der waagrechte Abstand zwischen den dargestellten Indifferenzkurven wird mit steigendem Ordinatenwert immer größer. Diese Eigenschaft der Indifferenzkurven hat grundsätzliche Bedeutung für die Bewertung.

In der Abbildung kennzeichne der Punkt P_1 die (μ, σ^2) -Konstellation für den Überschuss $\tilde{x}_a$ bei dessen isolierter Betrachtung. Die Indifferenzkurve IK_1 , auf der der Punkt P_1 liegt, entspricht dem Präferenzniveau bei isolierter Betrachtung von $\tilde{x}_a$; das entsprechende Sicherheitsäquivalent $SA(\tilde{x}_a)$ stimmt mit dem Abszissenwert des Ausgangspunktes der Indifferenzkurve IK_1 überein. P_2 kennzeichne die (μ, σ^2) -Konstellation für den Gesamtüberschuss $\tilde{x}_a + \tilde{x}_n$. Die Indifferenzkurve IK_2 entspricht dem Präferenzniveau

des Gesamtüberschusses, das entsprechende Sicherheitsäquivalent $\ddot{S}\ddot{A}(\tilde{x}_a + \tilde{x}_n)$ kann wiederum auf der Abszisse abgelesen werden.

Gesucht sei nun zunächst das Sicherheitsäquivalent $\ddot{S}\ddot{A}(\tilde{x}_n)$, d. h. der Grenzpreis aus Sicht eines (potenziellen) Verkäufers des Überschusses $\tilde{x}_n$, unter Berücksichtigung des Risiko- und Bewertungsverbandes mit $\tilde{x}_a$. Gemäß der allgemeinen Bestimmungsgleichung

$$E[U(\tilde{x}_a + \ddot{S}\ddot{A}(\tilde{x}_n))] = E[U(\tilde{x}_a + \tilde{x}_n)] \quad (7.11)$$

lässt sich dieses Sicherheitsäquivalent grafisch wie folgt bestimmen: In der Ausgangssituation, d. h. mit dem Gesamtüberschuss $\tilde{x}_a + \tilde{x}_n$, erzielt der Entscheider einen Erwartungswert des Nutzens, der dem Punkt P_2 entspricht. Wenn er nun den Überschuss $\tilde{x}_n$ verkauft, so erzielt er ohne Berücksichtigung des Verkaufspreises einen Erwartungswert des Nutzens, der dem Punkt P_1 entspricht. Da der Verkaufserlös (annahmegemäß) sicher ist und somit nicht das Risiko (σ^2) verändert, muss sich bei dessen Berücksichtigung ein Punkt rechts von P_1 mit demselben Ordinatenwert ergeben. Der Grenzpreis wiederum muss zurück auf die Indifferenzkurve IK_2 und damit zum Punkt P^* führen. Das Sicherheitsäquivalent (der Grenzpreis) $\ddot{S}\ddot{A}(\tilde{x}_n)$ entspricht also dem waagrechten Abstand zwischen den Indifferenzkurven IK_1 und IK_2 auf der Höhe (dem Ordinatenwert) des Punktes P_1 , der durch die Strecke $\overline{P_1 P^*}$ gegeben ist. Es ist zu beachten, dass das Sicherheitsäquivalent $\ddot{S}\ddot{A}(\tilde{x}_n)$ größer ist als die Differenz der Sicherheitsäquivalente $\ddot{S}\ddot{A}(\tilde{x}_a + \tilde{x}_n)$ und $\ddot{S}\ddot{A}(\tilde{x}_a)$.

Wird stattdessen der Grenzpreis eines Käufers gesucht, so ist die Bestimmungsgleichung $E[U(\tilde{x}_a)] = E[U(\tilde{x}_a + \tilde{x}_n - WK(\tilde{x}_n))]$ zugrunde zu legen. Die Ausgangssituation, in der der Entscheider $\tilde{x}_a$, nicht aber $\tilde{x}_n$ hat, gibt nun der Punkt P_1 wieder. Kauft der Entscheider nun $\tilde{x}_n$, so würde er bei einem Kaufpreis von null zum Punkt P_2 gelangen. Ein positiver Kaufpreis dagegen führt zu einem Punkt links, aber auf gleicher Höhe (bei gleichem Ordinatenwert) wie P_2 , denn der Kaufpreis ist sicher und verändert nicht das Risiko (σ^2). Der Grenzpreis des Käufers führt zurück zur Indifferenzkurve IK_1 und damit zum Punkt P^{**} . Der Wert $WK(\tilde{x}_n)$ aus Käufersicht ist also gleich dem waagrechten Abstand zwischen den beiden Indifferenzkurven IK_1 und IK_2 auf der Höhe (dem Ordinatenwert) des Punktes P_2 , der durch die Strecke $\overline{P^{**} P_2}$ gegeben ist.

Im Beispiel der Abb. 7.6 ist der Wert aus Käufersicht, $WK(\tilde{x}_n)$, größer als der Wert aus Verkäufersicht, $\ddot{S}\ddot{A}(\tilde{x}_n)$. Ist jedoch der Ordinatenwert von P_2 kleiner als der von P_1 gilt das Umgekehrte. Jede Wahrscheinlichkeitsverteilung über den Überschuss $\tilde{x}_n$, die zu demselben Präferenzwert $E[U(\tilde{x}_a + \tilde{x}_n)]$ über den Gesamtüberschuss und somit zu einem Punkt auf derselben Indifferenzkurve IK_2 führt, weist bei gegebener Wahrscheinlichkeitsverteilung über $\tilde{x}_a$ und somit bei gegebener Position des Punktes P_1 dasselbe Sicherheitsäquivalent (denselben Verkäuferwert) $\ddot{S}\ddot{A}(\tilde{x}_n)$ auf. Der analoge Zusammenhang gilt nicht für den Wert aus Käufersicht: Wandert der Punkt P_2 auf der Indifferenzkurve IK_2 nach rechts oben (bzw. links unten), so steigt (bzw. sinkt) $WK(\tilde{x}_n)$, da der waagrechte Abstand zwischen den Indifferenzkurven IK_1 und IK_2 zunimmt (bzw. abnimmt).

(dem Zeitpunkt 1) an und wird der Verkaufspreis zu Beginn dieser Periode (dem Zeitpunkt 0) erzielt, so ist der Grenzpreis aus Sicht eines potenziellen *Verkäufers* wie folgt zu ermitteln, sofern er zu einem risikolosen Zinssatz r unbegrenzt Geld anlegen und aufnehmen kann:⁵

$$GP_0(\tilde{x}_{n1}) = (1 + r)^{-1} \cdot S\ddot{A}(\tilde{x}_{n1}). \quad (7.19)$$

$\tilde{x}_{n1}$ bezeichnet den unsicheren Überschuss, der zum Zeitpunkt 1 realisiert wird, und $S\ddot{A}(\tilde{x}_{n1})$ den sicheren Zufluss zum Zeitpunkt 1, der diesem Überschuss gleichwertig ist. Da der potenzielle Verkaufspreis schon zum Zeitpunkt 0 erzielt wird, ist $S\ddot{A}(\tilde{x}_{n1})$ mit dem risikolosen Zinssatz r auf den Zeitpunkt 0 zu diskontieren, um Vergleichbarkeit herzustellen. $GP_0(\tilde{x}_{n1})$ bezeichnet den entsprechenden Grenzpreis, den der potenzielle Verkäufer zum Zeitpunkt 0 mindestens erhalten muss, damit er bereit ist, den Überschuss zu verkaufen.

Um dem für den Wert des Überschusses $\tilde{x}_{n1}$ relevanten Risiko- und Bewertungsverbund mit anderen Überschüssen des Entscheiders Rechnung zu tragen, ist es, wie gezeigt wurde, notwendig, auch diese Überschüsse explizit in die Ermittlung des Sicherheitsäquivalents $S\ddot{A}(\tilde{x}_{n1})$ einzubeziehen. Dies wird jedoch bei der theoretischen Diskussion und insbesondere bei der praktischen Anwendung häufig unterlassen. Unproblematisch ist dies nur, wenn $\tilde{x}_{n1}$ von den anderen Überschüssen stochastisch unabhängig ist und entweder keine Reichtumseffekte auftreten oder diese durch eine entsprechende Transformation der Nutzenfunktion $U(x_{n1})$ implizit berücksichtigt werden. Besteht Risiko-verbund zwischen $\tilde{x}_{n1}$ und den anderen Überschüssen, so führt die isolierte Bewertung von $\tilde{x}_{n1}$ mit einer zustandsunabhängigen Nutzenfunktion $U(x_{n1})$ regelmäßig zu Fehlern (Kap. 5, Abschn. 5.8, sowie Kap. 14 und 15).

Analog zu (7.19) könnte man für den Fall, dass mit einem Bewertungsobjekt unsichere Überschüsse zu mehreren zukünftigen Zeitpunkten erzielt werden, zeitpunktbezogene Sicherheitsäquivalente ermitteln und diese mit dem risikolosen Zinssatz r diskontieren und aufsummieren, um zum Wert des unsicheren Zahlungsstroms zu gelangen (Kap. 15, Abschn. 15.4.2). Allerdings erfordert ein solches Vorgehen eine Fundierung aus einem mehrperiodigen Erwartungsnutzenkalkül, wenn die Sicherheitsäquivalente analog zur impliziten Definition (7.11) nach dem Bernoulli-Prinzip abgeleitet werden sollen. Insbesondere müsste bei der Bewertung *auch* berücksichtigt werden, wie Risiko- und Bewertungsverbund (Reichtumseffekte) zwischen den Überschüssen des Bewertungsobjekts zu verschiedenen Zeitpunkten deren Sicherheitsäquivalente beeinflussen.

Wenn die Bewertung aus Sicht eines potenziellen Käufers statt eines potenziellen Verkäufers vorgenommen werden soll, ist bei Reichtumseffekten die Sicherheitsäqui-

⁵Vgl. Ballwieser (1981, S. 101); Franke und Hax (2009, S. 314 f.); Kruschwitz (2001, S. 2409 und 2411); Kruschwitz und Löffler (2003, S. 1339).

valentmethode noch problematischer. Gemäß den Darstellungen in Abschn. 7.4 ist es bei potenziellem Kauf nicht sinnvoll, die unsicheren Überschüsse der verschiedenen Zeitpunkte durch ihr jeweiliges Sicherheitsäquivalent (die jeweils gleichwertige sichere Einzahlung) zu repräsentieren. Soll bei potenziellem Kauf die Bewertung analog zur Sicherheitsäquivalentmethode vorgenommen werden, so sind bei Reichtumseffekten statt der Sicherheitsäquivalente die „Werte“ der einzelnen riskanten Überschüsse zugrunde zu legen, d. h. jeweils die (äquivalente) sichere *Auszahlung*, die den Überschuss kompensiert. Der subjektive Grenzpreis ergibt sich dann als Barwert der den ungewissen Überschüssen entsprechenden sicheren äquivalenten Auszahlungen (Kap. 15, Abschn. 15.4.2.1). In (7.19) z. B. ist statt $\text{SÄ}(\tilde{x}_{n1})$ der Wert $\text{WK}(\tilde{x}_{n1})$ zu berücksichtigen, also diejenige äquivalente sichere Auszahlung zum Zeitpunkt 1, die den Geldzufluss $\tilde{x}_{n1}$ kompensiert.

Im vorliegenden Kapitel wurde unter Anderem gezeigt, wie ein Überschuss in Verbindung mit einem anderen Überschuss bewertet werden kann und welche Höhe der Wert in Abhängigkeit von den Eigenschaften des anderen Überschusses (und der Nutzenfunktion des Entscheiders) aufweist. Dabei wurde der andere Überschuss als gegeben angenommen. In aller Regel besteht jedoch die Möglichkeit, einen anderen Überschuss optimal an den zu bewertenden anzupassen, sodass dessen Wert steigt. Damit befassen sich das nachfolgende Kapitel, das sich mit der optimalen Kombination stochastisch abhängiger Zahlungsansprüche (der optimalen Kombination von Risiken) beschäftigt, und darauf aufbauend die Kap. 13, 14 und 15.

7.7 Zusammenfassung

- Im Rahmen des Bernoulli-Prinzips bewertet ein Entscheider Alternativen, indem er den Erwartungswert des Nutzens aus ihren Ergebnissen ermittelt. Aus praktischer Sicht ist dagegen wünschenswert, den Alternativen in Situationen, in denen die Ergebnisse finanzielle Überschüsse sind, Geld- statt Nutzenwerte zuzuordnen. Diese Möglichkeit der Bewertung bietet das Sicherheitsäquivalent.
- Das Sicherheitsäquivalent $\text{SÄ}(\tilde{x})$ einer Alternative mit unsicheren finanziellen Überschüssen $\tilde{x}$ ist derjenige sichere Geldbetrag, der einem BERNOULLI-rationalen Entscheider denselben Nutzen bringt wie der unsichere Überschuss der Alternative; d. h., der Nutzen des Sicherheitsäquivalents stimmt mit dem Erwartungswert des Nutzens des unsicheren Überschusses überein: $U[\text{SÄ}(\tilde{x})] = E[U(\tilde{x})]$.
- Die Differenz zwischen dem Erwartungswert und dem Sicherheitsäquivalent wird als Risikoabschlag bezeichnet. Die Höhe des Sicherheitsäquivalents (und damit des Risikoabschlags) hängt von der Wahrscheinlichkeitsverteilung über den Überschuss und der Nutzenfunktion des Entscheiders ab. Bei Risikoneutralität stimmt das Sicherheitsäquivalent mit dem Erwartungswert überein, der Risikoabschlag ist null. Bei Risikoaversion (Risikofreude) liegt das Sicherheitsäquivalent unter (über) dem Erwartungswert, der Risikoabschlag ist positiv (negativ).

- Das Sicherheitsäquivalent ist der Grenzpreis aus Verkäufersicht (englisch: willingness to accept): Dem Entscheider muss mindestens ein Betrag in Höhe des Sicherheitsäquivalents geboten werden, wenn er bereit sein soll, den unsicheren Überschuss zu verkaufen. Dagegen entspricht der Grenzpreis aus Käufersicht (englisch: willingness to pay) demjenigen Betrag, den der Entscheider höchstens zu zahlen bereit ist, um den Überschuss zu kaufen. Beide Grenzpreise (aus Verkäufer- und aus Käufersicht) stimmen nur dann miteinander überein, wenn die Risikoeinstellung des Entscheiders konstant ist, d. h. nicht von seinem Reichtum abhängt.
- Ein Risikoverbund wirkt sich auf die Bewertung mit dem Sicherheitsäquivalent aus, denn die Höhe des Sicherheitsäquivalents eines Überschusses hängt davon ab, ob der Entscheider weitere Überschüsse erzielt und wie die Überschüsse miteinander korreliert sind. Bei positiver Korrelation wirkt der betrachtete Überschuss risikoe erhöhend, was seinen Wert für einen risikoaversen Entscheider senkt. Bei negativer Korrelation wirkt er dagegen risikosenkend, was seinen Wert für einen risikoaversen Entscheider erhöht. Ein Risikoverbund beeinflusst je nach Korrelation der Überschüsse auch den Grenzpreis aus Käufersicht.
- Fragen der Bewertung bei Risikoverbund haben zentrale Bedeutung für finanzwirtschaftliche Modelle, etwa der Bewertung von Aktien oder anderen Wertpapieren.

Ergänzende und vertiefende Literatur

Ballwieser (1981, 1990); Franke und Hax (2009); De Groot (1970); Hershey und Shoemaker (1985); Kruschwitz (2001); Kruschwitz und Löffler (2003); Machina (1987); Pratt (1964).

7.8 Übungen

Aufgabe 7.1

- a) Nehmen Sie an, Sie können entweder einen sicheren Geldbetrag x EUR erhalten oder an einer Lotterie teilnehmen, bei der eine Münze geworfen wird und Sie 1000 EUR erhalten, wenn Kopf fällt, aber nichts, wenn Zahl fällt. (i) Bei welchem Geldbetrag x EUR sagen Sie: „nun bin ich indifferent zwischen x und der Lotterie“? (ii) Skizzieren Sie eine Nutzenfunktion und ermitteln Sie grafisch das Sicherheitsäquivalent der Lotterie für die skizzierte Nutzenfunktion. Achten Sie dabei darauf, dass das Ergebnis der grafischen Ermittlung zu Ihrer Antwort aus (i) passt.
- b) Bestimmen Sie rechnerisch das Sicherheitsäquivalent einer Alternative mit den Ergebnissen 10.000 (Wahrscheinlichkeit: 0.2), 2500 (Wahrscheinlichkeit: 0.4) und 0 (Wahrscheinlichkeit: 0.4) für einen Bernoulli-rationalen Entscheider mit der Nutzenfunktion $U(x) = \sqrt{x}$.

- c) Betrachten Sie einen Bernoulli-rationalen Entscheider mit der Nutzenfunktion $U(x) = (W+x)^{0,4}$ und eine Alternative mit den drei gleich wahrscheinlichen Ergebnissen 100, 100, 200. Bestimmen Sie das Sicherheitsäquivalent und den Risikoabschlag für die drei Fälle $W=100$, $W=200$ und $W=300$. Interpretieren Sie die Ergebnisse.
- d) Bestimmen Sie den Wert einer Lotterie mit den gleich wahrscheinlichen Gewinnen 100 oder 0 sowohl aus der Verkäuferperspektive als auch aus der Käuferperspektive. Unterstellen Sie alternativ die folgenden Nutzenfunktionen: (i) $U(x) = 1 - e^{-0,01 \cdot x}$, (ii) $U(x) = \ln(50+x)$. Interpretieren Sie die Ergebnisse.

Aufgabe 7.2

Gegeben ist dieselbe Ergebnismatrix wie in Aufgabe 5.4:

	$w(S_1)=0,25$ S_1	$w(S_2)=0,5$ S_2	$w(S_3)=0,25$ S_3
A_1	25	25	25
A_2	15	20	55
A_3	5	20	75

Betrachten Sie die vier Bernoulli-rationalen Entscheider A, B, C und D mit den Nutzenfunktionen: $U_A(x) = x$, $U_B(x) = 1 - e^{-0,02 \cdot x}$, $U_C(x) = \sqrt{x}$ und $U_D(x) = 3 \cdot x - 0,01 \cdot x^2$.

- Bestimmen Sie für jeden Entscheider und für jede Alternative das Sicherheitsäquivalent und den Risikoabschlag.
- Addieren Sie nun zu jedem Ergebnis den Betrag 25 (Aus 25 wird 50, aus 15 wird 40 usw.) und bestimmen Sie erneut alle Sicherheitsäquivalente und Risikoabschläge.
- Verdoppeln Sie nun jedes Ergebnis (Aus 25 wird 50, aus 15 wird 30 usw.) und bestimmen Sie erneut alle Sicherheitsäquivalente und Risikoabschläge.
- Vergleichen Sie systematisch die Ergebnisse der Aufgabenteile a, b und c.

Aufgabe 7.3

Betrachten Sie die folgende Ergebnismatrix:

	$w(S_1)=0,1$ S_1	$w(S_2)=0,4$ S_2	$w(S_3)=0,4$ S_3	$w(S_4)=0,1$ S_4
A_1	60	80	120	140
A_1	50	100	150	450

Der Entscheider maximiere den Erwartungswert des Nutzens auf Basis der Nutzenfunktion $U(x) = x^{2/3}$.

- Bestimmen sie separat die Sicherheitsäquivalente für die beiden Alternativen.
- Bestimmen sie nun das Sicherheitsäquivalent für den Fall, dass beide Alternativen gleichzeitig gewählt werden. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Summe der Sicherheitsäquivalente aus Aufgabenteil a) und erklären einen etwaigen Unterschied.
- Nehmen Sie nun an, das Einkommen des Entscheiders bestehe bereits aus den Ergebnissen von A_1 und A_2 , der Entscheider könne aber A_2 verkaufen. Welchen Preis muss er mindestens verlangen, um sich nicht schlechter zu stellen als ohne Verkauf? Bestimmen Sie den Preis durch Ausprobieren.
- Tauschen Sie in der Ergebnismatrix die Reihenfolge der Ergebnisse von A_2 . D. h.: Das Ergebnis 50 der Alternative A_2 fällt nun auf Zustand S_4 , das Ergebnis 100 auf S_3 , 150 auf S_2 und 450 auf S_1 . Wiederholen Sie daraufhin die Aufgabenteile a bis c. Wie sind Sie die Unterschiede zu den vorangegangenen Ergebnissen zu erklären?

Aufgabe 7.4

Gegeben sind zwei unsichere Zahlungsansprüche x_a und x_n . Für den bereits bestehenden (alten) Zahlungsanspruch x_a gilt $x_a=0$ oder $x_a=1$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Für x_n gilt $x_n=1$ oder $x_n=4$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Die Zahlungsansprüche sind unkorreliert. Die Nutzenfunktion des betrachteten Entscheiders lautet $U(x) = x - 1/20 \cdot x^2$ mit x dem jeweiligen Einkommen (aus x_a , aus x_n oder aus x_a+x_n). Für den Erwartungswert des Nutzens gilt dann:

$$E[U(x)] = E(x) - 1/20 \cdot E(x^2) = \mu - 1/20 \cdot (\sigma^2 + \mu^2)$$

- Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von x sowie den Erwartungswert des Nutzens aus x für die drei Fälle $x=x_a$, $x=x_n$ und $x=x_a+x_n$.
- Stellen Sie die Indifferenzkurven des Entscheiders im (μ, σ^2) -Diagramm für die Nutzenniveaus dar, die Sie in Aufgabenteil a) bestimmt haben. Zeichnen Sie die (μ, σ^2) -Punkte für $x=x_a$, $x=x_n$ und $x=x_a+x_n$ ein.
- Bestimmen Sie grafisch das Sicherheitsäquivalent für jeden der drei Fälle $x=x_a$, $x=x_n$ und $x=x_a+x_n$.
- Bestimmen Sie grafisch das Sicherheitsäquivalent sowie den Wert aus Käuferperspektive von x_n bei gemeinsamer Bewertung mit x_a .

7.9 Lösungshinweise

Aufgabe 7.1

a) Es gibt keine generelle, nur Ihre eigene subjektive Antwort. --- **b)** $S\ddot{A}(x) = 1600$. --- **c)** $S\ddot{A}(x) = -10,38$ und $RA(x) = 77,04$ für $W = 100$; $S\ddot{A}(x) = 44,95$ und $RA(x) = 21,71$ für $W = 200$; $S\ddot{A}(x) = 52,24$ und $RA(x) = 14,43$ für $W = 300$. Abnehmender Risikoabschlag wegen abnehmender absoluter Risikoaversion. --- **d)** (i) Wert Verkäufer = Wert Käufer = 37,99; (ii) Wert Verkäufer = 36,60, Wert Käufer = 29,29.

Aufgabe 7.2

a) Entscheider A: $S\ddot{A}_1=25$, $RA_1=0$; $S\ddot{A}_2=27,5$, $RA_2=0$; $S\ddot{A}_3=30$, $RA_3=0$; Entscheider B: $S\ddot{A}_1=25$, $RA_1=0$; $S\ddot{A}_2=25,24$, $RA_2=2,26$; $S\ddot{A}_3=24,13$, $RA_3=5,87$; Entscheider C: $S\ddot{A}_1=25$, $RA_1=0$; $S\ddot{A}_2=25,59$, $RA_2=1,91$; $S\ddot{A}_3=24,60$, $RA_3=5,40$; Entscheider D: $S\ddot{A}_1=25$, $RA_1=0$; $S\ddot{A}_2=26,46$, $RA_2=1,04$; $S\ddot{A}_3=27,07$, $RA_3=2,93$.
 --- **b)** Entscheider A: $S\ddot{A}_1=50$, $RA_1=0$; $S\ddot{A}_2=52,5$, $RA_2=0$; $S\ddot{A}_3=55$, $RA_3=0$; Entscheider B: $S\ddot{A}_1=50$, $RA_1=0$; $S\ddot{A}_2=50,24$, $RA_2=2,26$; $S\ddot{A}_3=49,13$, $RA_3=5,87$; Entscheider C: $S\ddot{A}_1=50$, $RA_1=0$; $S\ddot{A}_2=51,43$, $RA_2=1,07$; $S\ddot{A}_3=52,18$, $RA_3=2,82$; Entscheider D: $S\ddot{A}_1=50$, $RA_1=0$; $S\ddot{A}_2=51,19$, $RA_2=1,31$; $S\ddot{A}_3=51,32$, $RA_3=3,68$.
 --- **c)** Entscheider A: $S\ddot{A}_1=50$, $RA_1=0$; $S\ddot{A}_2=55$, $RA_2=0$; $S\ddot{A}_3=60$, $RA_3=0$; Entscheider B: $S\ddot{A}_1=50$, $RA_1=0$; $S\ddot{A}_2=47,14$, $RA_2=7,86$; $S\ddot{A}_3=40,85$, $RA_3=19,15$; Entscheider C: $S\ddot{A}_1=50$, $RA_1=0$; $S\ddot{A}_2=51,17$, $RA_2=3,83$; $S\ddot{A}_3=49,21$, $RA_3=10,79$; Entscheider D: $S\ddot{A}_1=50$, $RA_1=0$; $S\ddot{A}_2=49,75$, $RA_2=5,25$; $S\ddot{A}_3=45,36$, $RA_3=14,64$.
 --- **d)** Keine Kurzlösung verfügbar.

Aufgabe 7.3

a) A_1 : $S\ddot{A}(x_1)=98,91$; A_2 : $S\ddot{A}(x_2)=141,39$. --- **b)** $S\ddot{A}(x_1+x_2)=241,61$ vs. $S\ddot{A}(x_1)+S\ddot{A}(x_2)=240,29$. Zwei Effekte: Risikoverbund und Bewertungsverbund wegen abnehmender absoluter Risikoaversion. --- **c)** Verkaufswert von $A_2=142,05$. --- **d)** Wiederholung a): Kein Unterschied; Wiederholung b): $S\ddot{A}(x_1+x_2)=246,19$; Wiederholung c): Verlaufswert von $A_2=146,63$.

Aufgabe 7.4

a) $E(x_a)=0,5$, $E(x_n)=2,5$, $E(x_a+x_n)=3$; $\text{Var}(x_a)=0,25$, $\text{Var}(x_n)=2,25$, $\text{Var}(x_a+x_n)=2,5$. $E[U(x_a)]=0,475$, $E[U(x_n)]=2,075$, $E[U(x_a+x_n)]=2,425$. --- **b), c), d)** Keine Kurzlösungen verfügbar.

Literatur

- Ballwieser, W.: Die Wahl des Kalkulationszinsfußes bei der Unternehmensbewertung unter Berücksichtigung von Risiko und Geldentwertung. Betriebswirtschaftliche Forschung und Praxis **33**, 97–114 (1981)
- Ballwieser, W.: Unternehmensbewertung und Komplexitätsreduktion, 3. Aufl. Gabler, Wiesbaden (1990)
- De Groot, M.H.: Optimal Statistical Decisions. Bogotá, New York (1970)
- Franke, G., Hax, H.: Finanzwirtschaft des Unternehmens und Kapitalmarkt, 6. Aufl. Springer, Berlin (2009)
- Hershey, J.C., Schoemaker, P.J.H.: Probability Versus Certainty Equivalence Methods in Utility Measurement: Are they Equivalent? Manage. Sci. **31**, 1213–1231 (1985)
- Kruschwitz, L.: Risikoabschläge, Risikozuschläge und Risikoprämien in der Unternehmensbewertung. Der Betrieb **54**, 2409–2413 (2001)

- Kruschwitz, L., Löffler, A.: Semi-subjektive Bewertung. *Z. Betriebswirtsch.* **73**, 1335–1345 (2003)
- Machina, M.J.: Choice under uncertainty: problems and unsolved. *Econ. Perspect.* **1**, 121–154 (1987)
- Pratt, J.W.: Risk aversion in the small and in the large. *Econometrica* **32**, 122–136 (1964)

8.1 Problemstellung und Aufbau

Aufbauend auf den Überlegungen des vorangegangenen Kapitels wird in diesem Kapitel das Problem untersucht, wie ein Entscheider Risiken durch *Portefeuillebildung* mischen und auf diese Weise eine optimale Gesamtposition herstellen kann. Der klassische Anwendungsfall für dieses allgemeine Problem ist die Bildung eines Wertpapierportefeuilles, die im Rahmen der *Portefeuilletheorie* (Markowitz 1952, 1959) untersucht wird. Allgemein versteht man unter einem Portefeuille einen Bestand aus verschiedenen Vermögenspositionen. Ein Portefeuille muss also nicht unbedingt nur aus Wertpapieren bestehen. Es kann auch ausschließlich Realinvestitionsprojekte enthalten oder eine Mischung von Realinvestitionen und Wertpapieren.

Bei Risikoneutralität würde sich das Problem der Risikomischung erübrigen. Der Entscheider würde ohne Rücksicht auf das Risiko die Portefeuillebildung nur aufgrund von Ertragschancen vornehmen. In ein Portefeuille von Wertpapieren z. B. würde er nur dasjenige Papier aufnehmen, das den höchsten Erwartungswert der Rendite bietet, und er würde von diesem so viele Einheiten erwerben, wie er finanzieren kann.

In der Realität sind jedoch die Investoren im Allgemeinen risikoavers. Sie setzen nicht alles auf „eine Karte“. Vielmehr realisieren sie von mehreren riskanten Positionen tendenziell relativ kleine Bestände und nehmen aus Gründen der Risikomischung auch solche Positionen ins Portefeuille auf, mit denen der Erwartungswert der Zielgröße (Rendite, Gewinn oder Endvermögen) sinkt. Im Folgenden wird für den Einperioden-Fall untersucht, wie Vorteile der Risikomischung entscheidungstheoretisch erklärt werden können, wie ein optimales Portefeuille ermittelt werden kann und welche Eigenschaften es aufweist. Dabei gehen wir davon aus, der Entscheider orientiere sich am Ziel, den Erwartungswert des Nutzens seines Endvermögens (seines Vermögens am Ende der betrachteten Periode) zu maximieren, indem er ein anfänglich gegebenes Barvermögen

in Wertpapiere investiert. Da der Nutzen des Sicherheitsäquivalents des Endvermögens mit diesem Erwartungswert des Nutzens übereinstimmt (Kap. 7), geht es letztlich auch darum, wie durch Risikomischung dieses Sicherheitsäquivalent maximiert werden kann und wie seine Höhe von den Portfeuilleeigenschaften abhängt.

Zwar sind die prinzipiellen Vorteile der Portfeuillebildung unabhängig davon, ob Realinvestitionsprojekte gemischt werden oder Wertpapiere. Der Anschaulichkeit halber betrachten wir im vorliegenden Kapitel jedoch explizit nur Wertpapiere, wobei wir grundsätzlich davon ausgehen, sie seien praktisch beliebig teilbar.¹ Die Annahme beliebiger Teilbarkeit ist zwar für Wertpapiere näherungsweise erfüllt, grundsätzlich jedoch nicht für Realinvestitionen. Ein Modell der Ermittlung eines optimalen Portfolios muss für Realinvestitionen in der Regel durch Ganzzahligkeitsbedingungen ergänzt werden. Da die später diskutierten Bedingungen „effizienter“ und optimaler Portfolios beliebige Teilbarkeit voraussetzen, sind sie nicht auf Realinvestitionsprojekte übertragbar. Bei ihnen können Ganzzahligkeitsbedingungen erhebliche „Strukturverzerrungen“ bewirken.

In Abschn. 8.2 werden potenzielle Vorteile der Risikomischung gezeigt. Dabei wird deutlich, dass bei großer Zahl von Portfolioalternativen und Umweltzuständen das Grundmodell der Entscheidungstheorie als Basis praktischer Portfolioplanung kaum geeignet ist. Es zeigt sich somit der Bedarf an Modellen der Portfolioplanung mit konzeptionell geringerem Analyse- bzw. Planungsaufwand.

In Abschn. 8.3 wird daraufhin eine allgemeine Entscheidungssituation zur Beschreibung des Problems der optimalen Risikomischung formuliert und es werden zwei alternative Vorgehensweisen zur Ermittlung einer optimalen Risikomischung unterschieden. Bei der ersten wird das Optimum direkt ermittelt. Die zweite ist zweistufig und liegt der klassischen Portfolio-Theorie zugrunde. Diese unterstellt, der Entscheider orientiere sich am (μ, σ) -Prinzip. Es wird dann zunächst die Menge der (μ, σ) -effizienten Portfolios (Risikomischungen) ermittelt, um da-raus anschließend auf der Basis der (μ, σ) -Präferenzfunktion des Entscheiders das für ihn optimale Portfolio auszuwählen.

Die klassische Portfolio-Theorie wird in Abschn. 8.4 behandelt. Wie in Kap. 5, Abschn. 5.7.2, gezeigt wurde, ist eine Orientierung am (μ, σ) -Prinzip nur unter speziellen Voraussetzungen mit dem Bernoulli-Prinzip kompatibel. Die optimale Risikomischung wird daher in Abschn. 8.5 auch bei expliziter Orientierung des Entscheiders am Bernoulli-Prinzip analysiert. Abschn. 8.6 diskutiert die Bedeutung unterschiedlicher Risikotypen für die optimale Risikomischung.

¹Zur optimalen Abstimmung eines Wertpapierportfolios mit dem aus einem Realinvestitionsprojekt resultierenden Risiko und zum Einfluss der Portfoliobildung auf dessen Wert vgl. Kap. 14, Abschn. 14.4.

Auf der Basis der Darstellungen im vorliegenden Kapitel wird im Kap. 13 untersucht, wie die Preisbildung auf dem Kapitalmarkt erklärt werden kann und wie die Gleichgewichtspreise von Wertpapieren von ihren Determinanten abhängen. Es wird dann auch gezeigt, wie sich Vorteile der Portfeuillebildung in den Preisen der Wertpapiere niederschlagen.

8.2 Vorteile der Risikomischung

8.2.1 Diversifikation und Hedging: Die Grundprinzipien

In Kap. 7 wurde gezeigt, dass ein risikoaverser Bernoulli-rationaler Entscheider mit einer streng konkaven Nutzenfunktion bei der Bewertung eines einzigen unsicheren Zahlungsanspruchs einen Risikoabschlag vom Erwartungswert des betreffenden Überschusses vornimmt, um zum Sicherheitsäquivalent zu kommen. Es wurde zudem gezeigt, wie sich Risikoverbund (und Bewertungsverbund) zwischen einem zu bewertenden Überschuss und *anderen gegebenen* Überschüssen des Entscheiders auf den Wert des unsicheren Zahlungsanspruchs auswirkt. Im Rahmen der Portfeuilleplanung sind jedoch die anderen Überschüsse gar nicht gegeben, sondern ihrerseits Gegenstand von Bewertungs- bzw. Optimierungsproblemen; es muss simultan über die verschiedenen Portfeuillebestände entschieden werden. Im Folgenden soll gezeigt werden, wie ein risikoaverser Entscheider Risikoverbundbeziehungen zwischen Anlagemöglichkeiten gezielt ausnutzen kann, um Vorteile durch Risikomischung bzw. *Diversifikation* zu realisieren, und wie er sich gezielt gegen einzelne Risiken absichern kann, um so ebenfalls sein Gesamtrisiko zu reduzieren.

Kauft der Entscheider Wertpapiere nur eines einzigen Typs, so sind die Rückflüsse aus den einzelnen Wertpapieren perfekt positiv miteinander korreliert. Kauft er stattdessen Wertpapiere unterschiedlicher Typen, so ist davon auszugehen, dass deren Korrelationen kleiner als +1 sind. Dadurch sinkt bei gegebenem Anlagebetrag das Gesamtrisiko der Vermögensposition des Entscheiders. Man bezeichnet diese Senkung des Gesamtrisikos durch eine Aufteilung des Anlagebetrags auf unterschiedliche, nicht perfekt positiv miteinander korrelierte Wertpapiere als Risikomischungseffekt oder *Diversifikationseffekt*. Grundsätzlich kann ein Investor einen Diversifikationseffekt auf folgende Arten herstellen:

- Der Investor sucht gezielt nach Anlagemöglichkeiten bzw. Wertpapieren, die möglichst gering (oder gar negativ) miteinander korreliert sind, und kombiniert diese, um das Risiko seiner Gesamtposition zu verringern.
- Der Investor sucht gezielt nach Anlagemöglichkeiten bzw. Wertpapieren, die positiv und möglichst hoch miteinander korreliert sind, und kombiniert diese Wertpapiere, indem er einige Wertpapiere mit negativer Stückzahl in sein Portfeuille aufnimmt. Eine negative Stückzahl impliziert, dass der Rückfluss des betreffenden Wertpapiers mit -1 zu multiplizieren ist; bei einer positiven Korrelation ergibt sich dann eine Senkung des Gesamtrisikos. Natürlich stellt sich die Frage, wie ein Investor negative

- Stückzahlen eines Wertpapiers halten soll. Technisch kann er dies zum Beispiel durch einen sogenannten Leerverkauf (vgl. Abschn. 8.3.1) bewerkstelligen.
- Der Investor diversifiziert „naiv“, d. h. er nimmt mehr oder weniger wahllos Wertpapiere in sein Portefeuille auf. Da die Wertpapiere nicht alle perfekt positiv miteinander korreliert sein werden, kann er so ohne Suchkosten das Risiko seiner Gesamtposition reduzieren.

Eine direktere Form der Reduzierung des Gesamtrisikos besteht darin, sich gegen gegebene *spezifische* Einzelrisiken zu „versichern“, indem man riskante Zahlungsansprüche kauft oder verkauft, sodass diese Risiken eliminiert oder zumindest reduziert werden. So kann sich ein Unternehmer gegen Fremdwährungsrisiken schützen, indem er einer Fremdwährungsforderung ein Termingeschäft gegenüberstellt, bei dem er den Fremdwährungsbetrag zu einem Terminkurs verkauft. Er sichert sich damit den Forderungsbetrag gemäß der Umrechnung nach dem Terminkurs in einheimischer Währung. Das Erzielen solcher direkter Versicherungswirkungen durch den Kauf oder Verkauf von Zahlungsansprüchen nennt man *Hedging*.

In diesem Kapitel stehen die Mischung von Risiken und damit die Diversifikation im Vordergrund. Hedging wird nur am Rande behandelt. Im nächsten Abschnitt sollen der Diversifikationseffekt und Arten seiner Herstellung anhand eines Beispiels verdeutlicht werden. Das Beispiel dient zunächst noch nicht dazu, zu untersuchen, wie Risiken zu mischen sind, um einen „optimalen Diversifikationseffekt“ zu erzielen. Diese Frage wird erst in den Abschn. 8.4 und 8.5 untersucht.

8.2.2 Beispiel

Zur Verdeutlichung unterschiedlicher Arten der Diversifikation und ihrer Auswirkungen betrachten wir ein Beispiel. Ein Entscheider möchte 1000 € in Wertpapiere anlegen, die er nach einem Jahr wieder verkauft. Der dann erzielte Rückzahlungsbetrag, der vereinfachend seinem gesamten Endvermögen entspreche, setzt sich zusammen aus dem Verkaufserlös und den Zinsen oder Dividenden der Wertpapiere. Der Einfachheit halber werden nur drei riskante Wertpapiere und fünf mögliche Umweltzustände betrachtet. Die Renditen der Wertpapiere (hier: Aktien unterschiedlicher Gesellschaften) werden in der Ergebnismatrix der Tab. 8.1 dargestellt. Diese weist zudem die Erwartungswerte und die (gerundeten) Standardabweichungen der Renditen aus.

Tab. 8.1 Renditen für drei Wertpapieranlagen

	S ₁ 0,1	S ₂ 0,2	S ₃ 0,4	S ₄ 0,2	S ₅ 0,1	erwartete Rendite	Standard-abweichung
WP ₁	−0,1	0,02	0,11	0,16	0,3	0,1	0,10
WP ₂	0,465	0,01	0,32	0,41	−0,585	0,2	0,30
WP ₃	−0,2	−0,13	0,52	0,42	0,54	0,3	0,30

- WP₁: Aktie der Gesellschaft A. Der Erwartungswert der Rendite der Aktie beträgt 10 %. Die Aktie weist im Vergleich zu den beiden anderen Aktien das gemessen an der Standardabweichung geringste Risiko auf. Dennoch verliert die Aktie mit einer Wahrscheinlichkeit von 10 % an Wert (im Zustand S₁) und mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 % (S₂) ist die Verzinsung zwar positiv, aber mit 2 % deutlich geringer als die erwartete Rendite von 10 %.
- WP₂: Aktie der Gesellschaft B. Der Erwartungswert der Rendite einer Aktie der Gesellschaft B ist höher als derjenige der Aktie der Gesellschaft A. Aktie B hat wesentlich höhere Gewinnchancen in den Umweltzuständen S₁, S₃ und S₄. Sie ist aber im Vergleich zur Aktie der Gesellschaft A auch mit wesentlich höheren Verlustgefahren verbunden; in Zustand S₅ verliert sie mehr als die Hälfte ihres Wertes.
- WP₃: Aktie der Gesellschaft C. Auch diese Aktie ist riskant, aber gemessen an der Standardabweichung nicht riskanter als die Aktie B. Zugleich hat aber die Aktie C eine höhere erwartete Rendite als Aktie B. Der mögliche Verlust der Aktie ist auf 20 % begrenzt; dieser Verlust tritt in Zustand S₁ ein.

Bei isolierter Betrachtung der Wertpapiere (Aktien) scheinen lediglich die Papiere WP₁ und WP₃ für einen risikoaversen Entscheider infrage zu kommen, nicht aber das Papier WP₂, das einen geringeren Erwartungswert der Rendite als WP₃ aufweist, aber gemessen an der Standardabweichung genauso riskant ist. Betrachtet man dagegen auch Portefeuilles von Wertpapieren, so zeigt sich, dass gerade das Papier WP₂ dem Entscheider zu einer verbesserten Vermögensposition verhelfen kann. Dies wird in Tab. 8.2 deutlich, in der zu den alternativen Anlagen der 1000 € in die einzelnen Wertpapiere beispielhaft die Portefeuilles PF₁, PF₂ und PF₃ hinzugefügt wurden.

- PF₁ beinhaltet eine Mischung der Wertpapiere WP₁ und WP₂ im Verhältnis 3:1. Der Entscheider investiert also 750 € in WP₁ und 250 € in WP₂. Er erreicht damit eine Einkommensposition, die ihm einen höheren Erwartungswert der Rendite verspricht als die Anlage der gesamten 1000 € in WP₁, ohne dass die Position riskanter wird. Im Gegenteil: PF₁ liefert mit Sicherheit keine negative Rendite und die Standardabweichung

Tab. 8.2 Bildung von Portefeuilles und Vorteile der Risikomischung

	S ₁ 0,1	S ₂ 0,2	S ₃ 0,4	S ₄ 0,2	S ₅ 0,1	Erwartete Rendite	Standard- abweichung
WP ₁	−0,1	0,02	0,11	0,16	0,3	0,1	0,10
WP ₂	0,465	0,01	0,32	0,41	−0,585	0,2	0,30
WP ₃	−0,2	−0,13	0,52	0,42	0,54	0,3	0,30
PF ₁	0,041	0,018	0,163	0,223	0,079	0,125	0,075
PF ₂	0,226	−0,092	0,544	0,517	−0,152	0,310	0,291
PF ₃	0,055	−0,033	0,317	0,330	0,085	0,200	0,152

der Rendite des Portefeuilles ist geringer als die Standardabweichung der Rendite des Wertpapiers WP_1 .

- PF_2 beinhaltet eine Anlage von jeweils 700 € in die Wertpapiere WP_2 und WP_3 . Die über das Budget von 1000 € hinaus gehenden 400 € zur Finanzierung dieser Käufe erlässt der Investor aus einem Leerverkauf des Wertpapiers WP_1 , d. h. er verkauft WP_1 , ohne es zu besitzen. Auf diese Weise erreicht er eine Position, deren erwartete Rendite über derjenigen des Wertpapiers WP_3 liegt, deren Standardabweichung aber geringer ist als die der Rendite des Wertpapiers WP_3 .
- PF_3 beinhaltet eine „naive“ Mischung der drei Wertpapiere: Der Investor nimmt alle Wertpapiere zu gleichen Teilen in sein Portefeuille, investiert also in jedes Wertpapier je ein Drittel des Anlagebetrages von 1000 €. Er erreicht damit eine Position, die das Verlustrisiko weitgehend, wenn auch nicht vollständig ausschließt, aber bessere Gewinnchancen verspricht als PF_1 .

Portefeuille PF_1 illustriert den Diversifikationseffekt, der durch die Kombination negativ korrelierter Wertpapiere erreicht wird: Die Korrelation der Renditen von WP_1 und WP_2 ist negativ, sie beträgt (gerundet) $-0,5$. Durch diese „Gegenläufigkeit“ der Wertpapierrenditen gelingt es, Verluste in den Umweltzuständen S_1 und S_5 zu vermeiden, die bei einer isolierten Anlage in WP_1 (S_1) oder WP_2 (S_5) auftreten können. Die Renditen der Wertpapiere WP_1 und WP_3 sind stark positiv korreliert, der Korrelationskoeffizient beträgt hier (wiederum gerundet) $0,8$. WP_2 und WP_3 schließlich sind (nahezu) unkorreliert, der Korrelationskoeffizient beträgt (gerundet) 0 . Durch den Leerverkauf von WP_1 in der Mischung PF_2 und der Kombination von WP_2 und WP_3 gelingt es offensichtlich, die Verlustrisiken gegenüber einer alleinigen Anlage in WP_2 oder WP_3 zu verringern und dennoch hohe Gewinnchancen in den Umweltzuständen S_3 und S_4 zu generieren.

Die drei gemischten Portefeuilles dienen der Illustration der drei beschriebenen Formen, Diversifikationseffekte zu generieren. Welches Portefeuille der Investor bilden wird, kann jedoch erst beurteilt werden, wenn seine Präferenzfunktion bekannt ist, da keine Dominanzbeziehungen zwischen den einzelnen Wertpapieren vorliegen und auch keine Portefeuillemischung existiert, die alle anderen möglichen Mischungen dominiert.

Im Beispiel wurden Renditen der Wertpapiere und Portefeuilles betrachtet. In den folgenden allgemeinen Darstellungen wird von *absoluten Beträgen* (Auszahlungen für den Kauf von Wertpapieren und Rückflüssen) ausgegangen.

8.3 Die optimale Mischung von Risiken als Entscheidungsproblem

8.3.1 Allgemeine Entscheidungssituation

Die nun betrachtete allgemeine Entscheidungssituation beruht auf dem nachfolgenden Annahmenkatalog. In den Abschn. 8.4 und 8.5 wird dieser um konkrete Annahmen bezüglich der Präferenzfunktion des Entscheiders ergänzt.

1. Es wird ein einperiodiges Planungsproblem betrachtet. Die Periode beginnt zum Zeitpunkt $t=0$ mit der Bildung eines Wertpapierportefeuilles durch den Investor, der zunächst nur über das Barvermögen V_0 verfügt.²
2. Der Investor kann *riskante* Wertpapiere der Typen $i=1,2,\dots,N$ kaufen und (erst) am Periodenende, dem Zeitpunkt $t=1$, wieder verkaufen. Der Preis des Wertpapiers vom Typ i zum Zeitpunkt $t=0$ wird mit P_i bezeichnet, der Rückfluss zum Zeitpunkt $t=1$, der dem Verkaufserlös einschließlich Dividenden bzw. Zinsen entspricht, mit x_i . Die Anzahl der Wertpapiere vom Typ i , die der Investor in sein Portefeuille aufnimmt, wird mit q_i bezeichnet. Die Preise P_i sind dem Investor bekannt.
3. Der Investor kann Geld in beliebiger Höhe risikolos zum Zinssatz $r>0$ anlegen oder aufnehmen. Der Geldanlagebetrag wird mit B bezeichnet. Ist B negativ, so wird der betreffende Betrag geliehen.
4. Der Investor orientiert sich an seinem Endvermögen V_1 .³ Er verfügt über keine anderen sicheren oder riskanten Vermögens- oder Einkommenspositionen, die bei der Ermittlung des optimalen Wertpapierbestands berücksichtigt werden müssen. V_1 resultiert also ausschließlich aus seinem Wertpapierportefeuille und der Anlage oder Aufnahme von Kapital zum Zinssatz r .
5. Mit dem Kauf und Verkauf von Wertpapieren sind keine Transaktionskosten verbunden. Alle Wertpapiere sind zudem beliebig teilbar, sodass keine Ganzzahligkeitsbedingungen beachtet werden müssen.
6. Der Investor kann negative Bestände an Wertpapieren halten, die betreffenden Papiere also auch verkaufen, obwohl er sie gar nicht besitzt. Man nennt dies einen *Leerverkauf*. Der Kauf und der Leerverkauf eines Wertpapiers führen zu betraglich identischen, aber vorzeichenverkehrten Auszahlungen und Rückflüssen.⁴
7. Der Investor nimmt bei seinen Dispositionen die Wertpapierpreise als gegeben an (Preisnehmerverhalten).

²Allgemein würde man von einem gegebenen Bestand an Bargeld und Wertpapieren ausgehen und neue, optimale Bestände an Wertpapieren ermitteln. Aufgrund der folgenden Annahme 5 kann jedoch stets vereinfachend davon ausgegangen werden, der Investor würde zunächst alle Wertpapiere, die er bereits besitzt, verkaufen und daraufhin von dem resultierenden Barvermögen V_0 ausgehen. Die Annahme eines gegebenen Barvermögens schränkt also die Allgemeinheit der Darstellungen nicht ein.

³Der Entscheider könnte ein Interesse daran haben, simultan mit dem optimalen Portefeuille seine optimale Konsumausgabe für den Zeitpunkt 0 zu ermitteln (Kap. 15, Abschn. 15.2). Davon wird hier abgesehen. Über die Höhe der Konsumausgabe sei bereits entschieden, sodass nur noch das Problem zu lösen ist, wie das verbleibende Barvermögen V_0 optimal anzulegen ist, um den Erwartungswert des Nutzens des Endvermögens zu maximieren.

⁴In der Realität werden Leerverkäufe im Allgemeinen wie folgt abgewickelt: Der Leerverkäufer *leiht* sich die Papiere bei einer Finanzinstitution (Bank, Fonds) und verkauft sie an der Börse. Bei Ablauf des Leihvertrags kauft er die Papiere zu den dann maßgeblichen Kursen an der Börse und gibt sie dem Verleiher zurück. Transaktionskosten eines Leerverkaufs resultieren vor allem aus den Leihgebühren, die der Verleiher verlangt. Diese werden wie alle anderen Transaktionskosten über Annahme 5 aus der Betrachtung ausgeschlossen. Zur praktischen Abwicklung, den Problemen und Grenzen des Leerverkaufs vgl. Single (2001) und Shleifer (2000, S. 89–111).

Die Präferenzfunktion des Investors wurde bisher noch nicht spezifiziert. Grundsätzlich bieten sich hierfür zwei Möglichkeiten an:

- a) Der Investor wird als (μ, σ) -Entscheider dargestellt. Die Rückflüsse der Wertpapiere können dann über ihre Erwartungswerte, Standardabweichungen und Kovarianzen abgebildet werden. Diese Annahme, die der klassischen Portefeuilletheorie zugrunde liegt, werden wir in Abschn. 8.4 treffen und so das Problem der optimalen Risikomischung für einen Entscheider untersuchen, der sich am (μ, σ) -Prinzip orientiert.
- b) Der Investor maximiert explizit den Erwartungswert seines Nutzen (z. B. weil das (μ, σ) -Prinzip nicht im Einklang mit dem Bernoulli-Prinzip steht). Dabei sind die Rückflüsse der Wertpapiere explizit über die Formulierung endlich vieler Umweltzustände abzubilden. Das Problem der optimalen Risikomischung für einen Entscheider, der sich direkt am Bernoulli-Prinzip orientiert, wird in Abschn. 8.5 untersucht. Wiederum wird gezeigt, welche Eigenschaften ein optimales Portefeuille aufweist.

Die nachfolgende Aufstellung fasst die verwendeten Symbole zusammen:

- $V_0 \equiv$ Barvermögen (Geldvermögen) des Investors zum Zeitpunkt $t=0$,
 $V_1 \equiv$ Endvermögen des Investors zum Zeitpunkt $t=1$,
 $B \equiv$ zum Zinssatz r angelegter ($B > 0$) bzw. aufgenommener ($B < 0$) Kapitalbetrag,
 $P_i \equiv$ Preis des Wertpapiers vom Typ i ,
 $x_i \equiv$ Rückfluss (Verkaufserlös einschließlich Dividende bzw. Zinsen) des Wertpapiers i ,
 $q_i \equiv$ Zahl der Wertpapiere vom Typ i , die im Portefeuille gehalten werden

Der Rückfluss eines Portefeuilles wird mit x_{PF} bezeichnet. Er beträgt:

$$x_{PF} = \sum_{i=1}^N q_i \cdot x_i. \quad (8.1)$$

Der Kaufpreis des Portefeuilles beträgt P_{PF} :

$$P_{PF} = \sum_{i=1}^N q_i \cdot P_i. \quad (8.2)$$

8.3.2 Alternative Vorgehensweisen zur Bestimmung der optimalen Risikomischung

8.3.2.1 Direkte Optimierung

Ungeachtet der Spezifikation der Präferenzfunktion des Entscheiders können der optimale Anlagebetrag und die optimale Risikomischung in einem Schritt oder aber in zwei Schritten ermittelt werden. Bestimmt der Investor das optimale Portefeuille in einem

einzigem Schritt, so berechnet er direkt die optimale Stückzahl für jedes Wertpapier. Sein Optimierungsproblem lässt sich dann wie folgt darstellen:

$$\text{Max}_{B, q_1, q_2, \dots, q_N} \Phi(\tilde{V}_1 | B, q_1, q_2, \dots, q_N) \quad (8.3)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{i=1}^N q_i \cdot P_i + B \leq V_0 \quad (8.4)$$

und

$$\{B, q_1, q_2, \dots, q_N\} \in \text{PF}. \quad (8.5)$$

In (8.3) bezeichnet Φ die Präferenzfunktion des Investors bezüglich der Wahrscheinlichkeitsverteilung über sein Endvermögen $\tilde{V}_1$. Diese maximiert er über die Wahl des Betrags B der risikolosen Anlage sowie der Stückzahlen für die verfügbaren Wertpapiere, $q_1, q_2, \dots, q_N$. Dabei muss er zwei Restriktionen beachten.

Erstens berücksichtigt (8.4), dass er zum Zeitpunkt $t=0$ nicht mehr Geld als sein Barvermögen V_0 zur Verfügung hat, um Wertpapiere zu kaufen bzw. risikolos anzulegen. Der Kauf von q_i Stück des Wertpapiers i kostet den Investor $q_i \cdot P_i$. Die Summe der Ausgaben für alle Wertpapiere $i=1, 2, \dots, N$ zuzüglich einer risikolosen Geldanlage ($B > 0$) bzw. abzüglich einer Kreditaufnahme ($B < 0$) darf das Budget V_0 des Investors nicht übersteigen. Gilt in (8.4) $B > 0$, so legt er nicht sein gesamtes Barvermögen risikant an, sondern einen Teil davon risikolos. Gilt hingegen $B < 0$, so verschuldet er sich, um mehr als sein Barvermögen risikant zu investieren. Bei Leerverkauf eines Wertpapiers erlässt der Investor den Preis dieses Papiers zum Zeitpunkt 0. Leerverkäufe erhöhen damit wie eine Kreditaufnahme das Budget für den Kauf von anderen riskanten Wertpapieren oder die Anlage zum risikolosen Zinssatz r .

Zweitens sind manche Wertpapiermischungen möglicherweise auch dann nicht zulässig, wenn sie die Budgetrestriktion erfüllen. Bezeichnet **PF** die Menge der zulässigen Wertekonstellationen für $B, q_1, q_2, \dots, q_N$, so muss gemäß (8.5) das realisierte Portefeuille in dieser Menge enthalten sein.

Da der Entscheider die Möglichkeit hat, Kapital zu einem risikolosen Zinssatz $r > 0$ anzulegen, kann Kassenhaltung nicht optimal sein. Somit ist im Optimum die Budgetbedingung (8.4) immer als Gleichung erfüllt und man kann sie von vornherein auch so darstellen:

$$V_0 = \sum_{i=1}^N q_i \cdot P_i + B. \quad (8.6)$$

8.3.2.2 Optimierung nach Vorauswahl von Portefeuilles

Anstatt das optimale Portefeuille, wie im vorangegangenen Abschnitt erläutert, direkt zu bestimmen, kann der Investor auch in zwei Schritten vorgehen. In einem ersten Schritt kann er z. B. mithilfe von Dominanzkriterien (vgl. Kap. 4, Abschn. 4.5) eine Vorauswahl unter den Portefeuilles vornehmen und dann im zweiten Schritt aus der Menge der verbleibenden Portefeuilles das optimale Portefeuille ermitteln. Für einen Bernoulli-rationalen Investor bietet es sich beispielsweise an, alternative Wertpapiermischungen zunächst daraufhin zu überprüfen, ob sie stochastisch dominiert werden, und dann die Optimierung nur noch auf die nicht-dominierten Portefeuilles anzuwenden.

Besondere praktische Bedeutung hat das Vorgehen in zwei Schritten, wenn sich der Investor am (μ, σ) -Prinzip orientiert. Dann kann er in einem ersten Schritt „ (μ, σ) -effiziente“ Portefeuilles ermitteln und im zweiten Schritt aus der Menge dieser Portefeuilles das optimale auswählen. Dieses Vorgehen wird im folgenden Abschnitt näher erläutert.

8.4 Optimale Portefeuillebildung bei Orientierung am (μ, σ) -Prinzip

8.4.1 Konkretisierende Annahmen

Im nachfolgenden Abschn. 8.5 werden grundlegende Zusammenhänge der Risikomischung auf der direkten Grundlage des Bernoulli-Prinzips gezeigt, wobei die möglichen Umweltzustände gemäß der Darstellung in Abschn. 8.3.2.1 explizit betrachtet werden. Dieses Vorgehen hat den Vorteil, dass kein Ersatzkriterium unterstellt werden muss, das gegen das Bernoulli-Prinzip verstoßen könnte. Es hat aber auch einen Nachteil: Außer für einen Spezialfall (der in Abschn. 8.5.3 behandelt wird) ist es bei direkter Orientierung am Bernoulli-Prinzip modelltechnisch relativ schwierig, die optimalen Wertpapierbestände explizit zu ermitteln und deren Eigenschaften zu veranschaulichen.

Im diesem Abschn. 8.4 wird daher die Theorie der optimalen Wertpapiermischung zunächst in ihrer klassischen Form dargestellt. Sie nimmt vereinfachend an, dass sich der Investor nicht explizit am Bernoulli-Prinzip, sondern am (μ, σ) -Prinzip orientiert. Damit einher geht die Abbildung der Wertpapiere nur über die Erwartungswerte, Standardabweichungen bzw. Varianzen und Korrelationen bzw. Kovarianzen ihrer Renditen bzw. Rückflüsse ohne explizite Erfassung von Umweltzuständen. Die entsprechenden konkretisierenden Annahmen lauten somit:

8. Die Rückflüsse der Wertpapiere werden nur über deren Erwartungswerte, Standardabweichungen bzw. Varianzen und Korrelationen bzw. Kovarianzen erfasst.
9. Der Investor orientiert sich am Ziel, die Präferenzfunktion $\Phi(\mu, \sigma^2)$ zu maximieren. Dabei bezeichnen μ den Erwartungswert seines Endvermögens, $E(\tilde{V}_1)$, und σ^2 die Varianz seines Endvermögens, $\text{Var}(\tilde{V}_1)$.

Wie nachfolgend gezeigt wird, erlaubt die Spezifizierung der Präferenzfunktion des Investors als Funktion von μ und σ^2 (bzw. σ), das Problem der optimalen Mischung von Wertpapieren anschaulich darzustellen und zu lösen. Alle möglichen Portefeuilles können dann in einem (μ, σ) -Diagramm dargestellt und so die Eigenschaften optimaler Wertpapierportefeuilles (insbesondere ihre Mischungen) grafisch veranschaulicht werden.

8.4.2 Bestimmung effizienter Mischungen risikanter Wertpapiere

8.4.2.1 Das Optimierungsproblem

Wie erläutert, kann bei Orientierung am (μ, σ) -Prinzip die Ermittlung der optimalen Wertpapiermischung in zwei Schritten erfolgen, indem zunächst die Menge der effizienten Portefeuilles ermittelt und dann daraus das optimale Portefeuille ausgewählt wird. Das Vorauswahlkriterium ist hier also das der (μ, σ) -Effizienz:

Bei *Risikoaversion* ist ein Portefeuille (μ, σ) -effizient oder kurz effizient, wenn kein anderes Portefeuille existiert, das

- bei gleichem oder geringerem σ ein höheres μ oder
- bei gleichem oder höherem μ ein geringeres σ aufweist.

Von großer praktischer Bedeutung ist, dass die Menge der effizienten Portefeuilles ermittelt werden kann, ohne die genaue Präferenzfunktion des Investors im Modell abbilden zu müssen: Es genügt zu wissen, dass er sich am (μ, σ) -Prinzip orientiert und risikoavers ist; die Indifferenzkurven des Investors im (μ, σ) - bzw. im (μ, σ^2) -Diagramm steigen dann mit wachsendem μ streng monoton. Der geometrische Ort der effizienten (μ, σ) - bzw. (μ, σ^2) -Kombinationen wird als *Effizienzkurve* bezeichnet.

Im Folgenden wird gezeigt, wie die Menge der effizienten Portefeuilles ermittelt werden kann. Um grundlegende Eigenschaften optimaler Mischungen risikanter Wertpapiere zu zeigen, wird analog zu den Darstellungen der klassischen Portefeuilletheorie zunächst unterstellt, es existiere keine risikolose Geldanlage- und Geldaufnahmemöglichkeit (es gilt dann $B=0$).⁵ Entsprechend wird genau das vorhandene Barvermögen V_0 in Wertpapieren angelegt. Danach erst wird die risikolose Geldanlage- und Geldaufnahmemöglichkeit berücksichtigt und erläutert, wie die zuvor erzielten Ergebnisse zu modifizieren sind.

Für $B=0$ ist das Endvermögen des Investors durch

$$\tilde{V}_1 = \sum_{i=1}^N q_i \cdot \tilde{x}_i \quad (8.7)$$

⁵Tatsächlich besteht immer eine „Anlagemöglichkeit“ darin, Liquidität zu halten, das Geld also unter die Matratze zu legen. Wird dies als risikolos angesehen, besteht darin eine risikolose Geldanlage zu 0 % (vor Inflation). Wir vernachlässigen auch diese Möglichkeit.

gegeben. Entsprechend lautet nun die Budgetrestriktion:

$$V_0 = \sum_{i=1}^N q_i \cdot P_i. \quad (8.8)$$

Für den Erwartungswert und die Varianz des Endvermögens ergeben sich die Bestimmungsgleichungen

$$E(\tilde{V}_1) = \sum_{i=1}^N q_i \cdot E(\tilde{x}_i) \quad (8.9)$$

und

$$\text{Var}(\tilde{V}_1) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N q_i \cdot q_j \cdot \text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j) \quad (8.10)$$

mit

$$\text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j) = \text{Var}(\tilde{x}_i) \text{ für } j = i.$$

In (8.9) und (8.10) bezeichnet $E(\tilde{x}_i)$ den Erwartungswert des Rückflusses eines Wertpapiers i , $\text{Var}(\tilde{x}_i)$ die Varianz dieses Rückflusses und $\text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j)$ die Kovarianz der Rückflüsse der Wertpapiere i und j . Die Menge der effizienten Portefeuilles kann nun ermittelt werden, indem zunächst die *Umhüllende* bestimmt wird. Diese gibt an, welche minimale Varianz bzw. Standardabweichung des Endvermögens durch Portefeuillebildung für alternative Erwartungswerte des Endvermögens realisiert werden kann.

Ein Punkt auf der Umhüllenden kann über das folgende Minimierungsproblem bestimmt werden:

$$\text{Min}_{q_1, q_2, \dots, q_N} \text{Var}(\tilde{V}_1) \quad (8.11)$$

unter den Nebenbedingungen

$$E(\tilde{V}_1) = \bar{\mu} \quad (8.12)$$

und

$$V_0 = \sum_{i=1}^N q_i \cdot P_i. \quad (8.13)$$

$\bar{\mu}$ bezeichnet ein vorgegebenes Niveau für den Erwartungswert des Endvermögens, für welches das Portefeuille mit der minimalen Varianz bzw. Standardabweichung des Endvermögens gesucht wird. Indem das Optimierungsprogramm für jedes mögliche Niveau von $\bar{\mu}$ angewendet wird, entsteht die gesuchte Umhüllende, d. h. eine Kurve, die die Menge aller möglichen Portefeuilles nach „unten“ eingrenzt: Im (μ, σ^2) - bzw. (μ, σ) -

Diagramm, in dem an der Abszisse der Erwartungswert des Endvermögens und an der Ordinate die Varianz bzw. die Standardabweichung abgetragen wird, liegen alle mit V_0 realisierbaren Portefeuilles auf oder oberhalb der Umhüllenden. Abb. 8.1 verdeutlicht den Zusammenhang für das (μ, σ) -Diagramm.

In der Abbildung werden ausgewählte Portefeuilles aus einzelnen Wertpapieren sowie Risikomischungen als Punkte dargestellt. Dem Punkt A liege das Wertpapier vom Typ 1 zugrunde. Er gebe also an, welchen Erwartungswert und welche Standardabweichung seines Endvermögens der Investor erreicht, wenn er sein gesamtes Barvermögen V_0 in dieses Papier investiert. Er kauft dann $q_1 = V_0/P_1$ Stück dieses Papiers und erreicht eine Vermögensposition mit

$$E(\tilde{V}_1) = q_1 \cdot E(\tilde{x}_1) = \frac{V_0}{P_1} \cdot E(\tilde{x}_1)$$

und

$$\sigma(\tilde{V}_1) = \sqrt{\text{Var}(\tilde{V}_1)} = \sqrt{q_1^2 \cdot \text{Var}(\tilde{x}_1)} = q_1 \cdot \sigma(\tilde{x}_1) = \frac{V_0}{P_1} \cdot \sigma(\tilde{x}_1).$$

Denselben Erwartungswert des Endvermögens kann er allerdings auch erreichen, indem er eine Mischung aus mehreren Wertpapieren herstellt, die durch den Punkt B auf der Umhüllenden repräsentiert wird. Gemäß Abb. 8.1 reduziert er die Standardabweichung bei gegebenem Erwartungswert des Endvermögens auf das Niveau $\sigma_{\text{PF}}(\tilde{V}_1)$. Analog kann der Investor für andere Erwartungswerte des Endvermögens Mischungen riskanter Wertpapiere mit jeweils minimaler Varianz bzw. Standardabweichung ermitteln. Grundsätzlich enthalten varianzminimale Portefeuilles nicht nur Wertpapiere eines einzigen Typs.

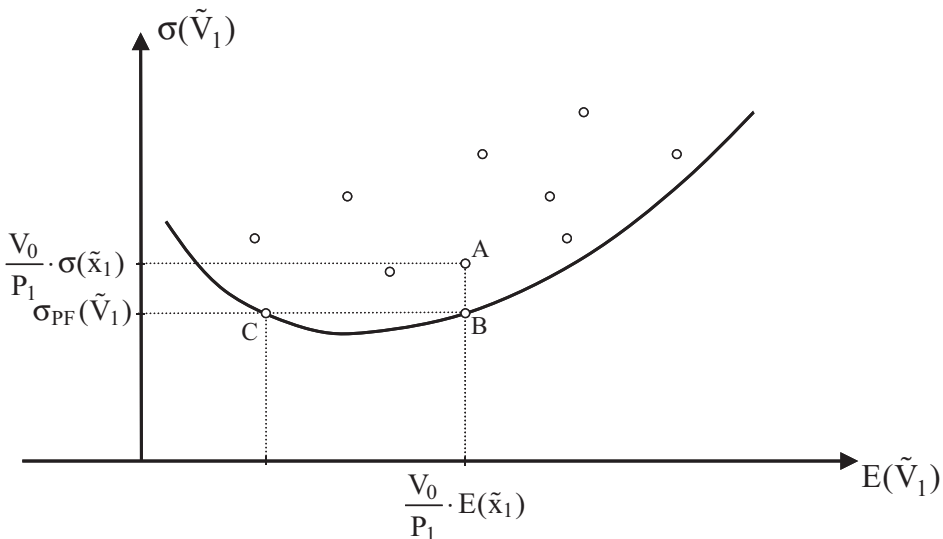


Abb. 8.1 Zur Gestalt der Umhüllenden und der Effizienzkurve im (μ, σ) -Diagramm

In der Abb. 8.1 ergibt sich nicht nur für die Wertpapiermischung gemäß Punkt B die Standardabweichung $\sigma_{PE}(\tilde{V}_1)$, sondern auch für eine zweite Wertpapiermischung gemäß Punkt C. Diese Mischung ist allerdings (μ, σ) -ineffizient, da sie bei gleicher Standardabweichung einen geringeren Erwartungswert des Endvermögens liefert als das Portefeuille gemäß Punkt B. Analog ist jede Wertpapiermischung ineffizient, die links vom Minimum der Umhüllenden liegt, was zur Definition der Effizienzkurve (oder des „effizienten Randes“) führt: Die *Effizienzkurve* umfasst alle Punkte auf dem streng monoton steigenden Teil der Umhüllenden.

8.4.2.2 Zwei Wertpapiere

Zur näheren Analyse von Implikationen der Portefeuillemischung betrachten wir nun den Fall nur zweier riskanter Wertpapiere A und B. Der Erwartungswert und die Standardabweichung des Portefeuillerückflusses hängen davon ab, in welchem Verhältnis diese Papiere gemischt werden und auf welchem „Niveau“ die Mischung vorgenommen wird. Wir gehen wieder davon aus, dass der Investor jeweils genau sein vorhandenes Barvermögen V_0 in Wertpapiere investiert.

Bei Verzicht auf Portefeuillemischung wird das Barvermögen V_0 entweder ausschließlich in das Papier A oder in das Papier B investiert. Das (ungemischte) Portefeuille nur aus Papieren A bzw. B wird mit WP_A bzw. mit WP_B bezeichnet. Für WP_A beträgt der Erwartungswert des Rückflusses $E(\tilde{x}_A)$ und die Standardabweichung $\sigma(\tilde{x}_A)$. Für WP_B beträgt der Erwartungswert des Rückflusses $E(\tilde{x}_B)$ und die Standardabweichung $\sigma(\tilde{x}_B)$. Ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit wird angenommen, es gelte $E(\tilde{x}_B) > E(\tilde{x}_A)$ und $\sigma(\tilde{x}_B) > \sigma(\tilde{x}_A)$. Wenn nun der Investor eine Wertpapiermischung vornimmt, bedeutet dies, dass er eine entsprechende Kombination der beiden „reinen“ Portefeuilles aus den Wertpapieren A und B realisiert. Schließt man negative Wertpapierbestände (d. h. Leerverkäufe) aus, was wir im Folgenden zunächst tun werden (vgl. jedoch Abschn. 8.4.2.3), so sind die möglichen Risikomischungen durch Konvexkombinationen der reinen Portefeuilles, WP_A und WP_B , gekennzeichnet.

Eine *Konvexkombination* von zwei Positionen (Portefeuilles) besteht darin, dass von beiden Positionen ein *nichtnegativer* Teil realisiert wird, wobei sich die beiden Teile zu eins addieren.⁶ Eine Konvexkombination kann durch die Variable y abgebildet werden, die den Anteil des Barvermögens V_0 bezeichnet, den der Investor in das Wertpapier B investiert. Entsprechend bezeichnet $1 - y$ den Anteil, den er in das Wertpapier A investiert. Gilt $y = 1$, so investiert er den vollen Betrag V_0 in das Wertpapier B. Wir bezeichnen den Erwartungswert und die Standardabweichung seines Endvermögens für diesen Fall mit $\mu_B(\tilde{V}_1)$ und $\sigma_B(\tilde{V}_1)$ oder kurz mit μ_B und σ_B , wobei $\mu_B = E(\tilde{x}_B)$ und $\sigma_B = \sigma(\tilde{x}_B)$ gilt. Analog bezeichnen $\mu_A(\tilde{V}_1)$ und $\sigma_A(\tilde{V}_1)$ oder kurz μ_A und σ_A den

⁶Eine Konvexkombination ist eine spezielle Linearkombination. Bei letzterer addieren sich die Gewichte zwar auch zu eins, sie dürfen aber auch negativ sein.

Erwartungswert und die Standardabweichung des Endvermögens im Falle $y = 0$, d. h. bei vollständiger Anlage des Barvermögens V_0 in das Wertpapier A.

Für den Erwartungswert des Endvermögens gilt nun:

$$E(\tilde{V}_1) = (1 - y) \cdot \mu_A + y \cdot \mu_B = \mu_A + y \cdot (\mu_B - \mu_A). \quad (8.14)$$

Da annahmegemäß $\mu_B > \mu_A$ gilt, ist $E(\tilde{V}_1)$ eine linear steigende Funktion von y . Löst man (8.14) nach y auf, so erhält man

$$Y = \frac{E(\tilde{V}_1) - \mu_A}{\mu_B - \mu_A}. \quad (8.15)$$

Gibt der Investor also ein erwartetes Endvermögen $E(\tilde{V}_1)$ vor, welches er erreichen will, so ist y dadurch eindeutig bestimmt. Für die Standardabweichung des Endvermögens gilt:

$$\sigma(\tilde{V}_1) = \sqrt{(1 - y)^2 \cdot \sigma_A^2 + 2 \cdot (1 - y) \cdot y \cdot k \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B + y^2 \cdot \sigma_B^2}. \quad (8.16)$$

k misst die Korrelation zwischen den Rückflüssen der beiden „reinen“ Portefuilles aus den Wertpapieren A einerseits und B andererseits (die Korrelation der Renditen beträgt ebenfalls k). Für jedes y ($0 < y < 1$) ist die Standardabweichung der Konvexkombination eine monoton steigende Funktion des Korrelationskoeffizienten k . Für $k = 1$ folgt aus (8.16):

$$\sigma(\tilde{V}_1) = (1 - y) \cdot \sigma_A + y \cdot \sigma_B = \sigma_A + y \cdot (\sigma_B - \sigma_A). \quad (8.17)$$

Wegen $\sigma_B > \sigma_A$ ist dann also $\sigma(\tilde{V}_1)$ eine *linear* steigende Funktion von y . Da, wie gezeigt wurde, auch $E(\tilde{V}_1)$ eine linear steigende Funktion von y ist, folgt unmittelbar: Für $k = 1$ ist $\sigma(\tilde{V}_1)$ eine linear steigende Funktion von $E(\tilde{V}_1)$. Gilt dagegen $-1 < k < 1$, so ist $\sigma(\tilde{V}_1)$ keine linear steigende und je nach Höhe von k auch keine monoton steigende Funktion von $E(\tilde{V}_1)$ mehr.

Abbildung 8.2 verdeutlicht den Zusammenhang, wobei die Punkte WP_A bzw. WP_B die Positionen bei vollständiger Anlage von V_0 in Wertpapier A bzw. B bezeichnen. Sie zeigt für unterschiedliche Korrelationen k , welche Standardabweichungen mit unterschiedlichen Konvexkombinationen der Portefuilles WP_A und WP_B erreicht werden können.

Für eine Korrelation der Wertpapiere von 1 stellt die Verbindungslinie zwischen WP_A und WP_B die Effizienzkurve dar. Sinkt die Korrelation, so wird die Effizienzkurve streng konvex. Für Werte der Korrelation nahe bei 1 steigt sie zwar weiterhin monoton. Mit Unterschreiten eines kritischen Wertes für k dagegen ist $\sigma(\tilde{V}_1)$ zunächst eine sinkende Funktion von $E(\tilde{V}_1)$ und die Effizienzkurve beginnt erst im Minimum und verläuft rechts davon streng monoton steigend (die ineffizienten Bereiche der Kurven sind jeweils gestrichelt gezeichnet).

Sinkt die Korrelation gar auf -1 , so ist die Effizienzkurve wiederum linear. Sie beginnt jetzt auf der Abszisse: Bei perfekt negativ korrelierten Wertpapieren ist es

also möglich, die Standardabweichung auf null zu reduzieren. Die beiden Wertpapierportefeuilles müssen dann gemäß dem Verhältnis ihrer Standardabweichungen gemischt werden, denn es gilt:

$$\begin{aligned}\sigma(\tilde{V}_1) = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{(1-y)^2 \cdot \sigma_A^2 - 2 \cdot (1-y) \cdot y \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B + y^2 \cdot \sigma_B^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow y = \frac{\sigma_B}{\sigma_A + \sigma_B}.\end{aligned}\quad (8.18)$$

Das sichere Endvermögen beträgt dann (vgl. den Punkt P in Abb. 8.2):

$$V_1 = \mu_A + \frac{\sigma_B}{\sigma_A + \sigma_B} \cdot (\mu_B - \mu_A)$$

Die Untersuchung der Gestalt der Effizienzkurve für den Fall nur zweier Wertpapiere liefert Einsichten, die sich auf den Fall beliebig vieler Wertpapiere übertragen lassen. Die Darstellungen zur Konvexkombination der beiden „reinen“ Portefeuilles aus den Wertpapieren A (WP_A) und B (WP_B) lassen sich nämlich unmittelbar auf die Konvexkombination zweier beliebiger Wertpapiermischungen übertragen: Auch durch Konvexkombinationen zweier Wertpapiermischungen ergeben sich Mischungen, die auf einer Verbindungskurve zwischen den beiden kombinierten Mischungen liegen. Das bedeutet letztlich, dass auch im allgemeinen Fall von $N > 2$ riskanten Wertpapieren immer Kurven gebildet werden können, deren Gestalt einer der Kurven aus Abb. 8.2 gleicht.

Bei nur zwei Wertpapieren lässt sich anschaulich und einfach zeigen, wie sich die Standardabweichung eines Portefeuilles in Abhängigkeit des Mischungsverhältnisses und der Korrelation der Wertpapiere entwickelt und welche grundsätzliche Gestalt die

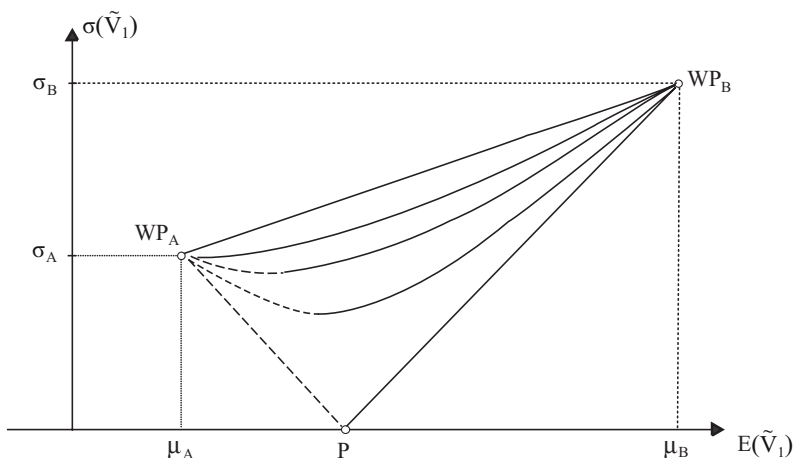


Abb. 8.2 Portefeuilles als Konvexkombinationen zweier riskanter Wertpapiere

Effizienzkurve dann hat. Dabei gibt es für jeden Erwartungswert $E(\tilde{V}_1)$ für das Endvermögen jeweils nur eine einzige Konvexkombination der beiden Wertpapiere, die diesen Erwartungswert generiert. Somit hat das „Optimierungsproblem“ (8.11, 8.12 und 8.13) bei zwei Wertpapieren für jedes $\bar{\mu}$ jeweils nur *eine zulässige* Lösung.

8.4.2.3 Mehr als zwei Wertpapiere

Können hingegen Portefeuilles aus mehr als zwei Wertpapieren gebildet werden, so bestehen genügend Freiheitsgrade, um eine „echte“ Optimierung durchzuführen. Wie in Abschn. 8.4.2.1 erläutert wurde, ergibt sich allgemein ein bestimmter Punkt auf der Umhüllenden als Lösung eines Optimierungsproblems, bei dem die Varianz bzw. die Standardabweichung für den diesem Punkt entsprechenden Erwartungswert minimiert wird. Der Weg zu solch einem Optimum lässt sich grafisch anschaulich darstellen. Dazu unterstellen wir, es gebe drei Wertpapiere A, B und C. Beim Portefeuille WP_A wird wieder das vorhandene Barvermögen V_0 ausschließlich in Papiere A investiert. Analog sind die Portefeuilles WP_B und WP_C definiert. Abb. 8.3 stellt die betreffenden Portefeuilles in einem (μ, σ) -Diagramm dar. WP_C bietet den höchsten Erwartungswert des Endvermögens und somit auch die höchste erwartete Rendite, aber auch die höchste Standardabweichung. WP_A entspricht das geringste erwartete Endvermögen und die geringste Standardabweichung. Der Erwartungswert des Endvermögenswertes und die Standardabweichung des Portefeuilles WP_B liegen zwischen denen der Portefeuilles WP_A und WP_C .

In der Abbildung werden über die Kurve, die die Punkte WP_A und WP_B verbindet, Mischungen (Konvexkombinationen) zwischen den Portefeuilles WP_A und WP_B dargestellt. Die Korrelation der beiden Wertpapiere A und B ist nicht stark positiv, was man

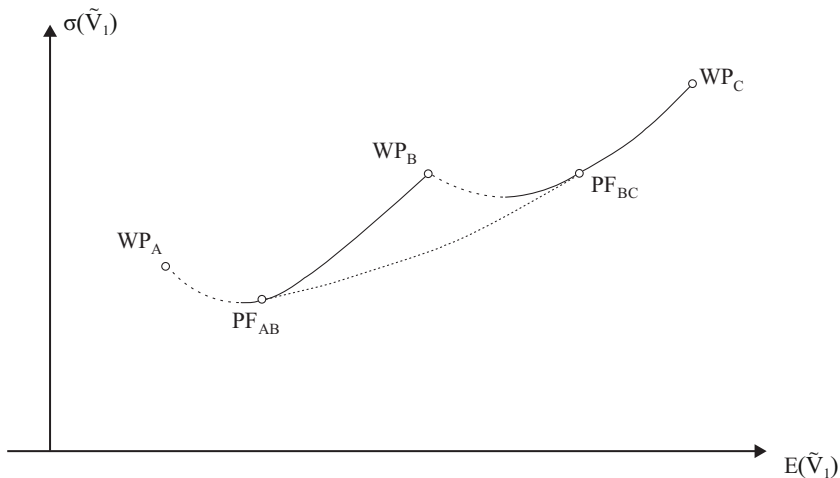


Abb. 8.3 Zur Analyse der Implikationen von Konvexkombinationen aus mehr als zwei riskanten Wertpapierportefeuilles

an der Gestalt der Kurve sehen kann. Gleichermäßen bildet die Kurve, die die Punkte WP_B und WP_C verbindet, Mischungen (Konvexkombinationen) der Portefeuilles aus den beiden Wertpapieren B und C ab, die offenbar ebenfalls nicht stark positiv miteinander korreliert sind. In der Abbildung sind zwei Mischungen markiert: PF_{AB} kennzeichnet eine Mischung der Wertpapiere A und B, bei der der Anteil der Papiere A im Portefeuille etwas größer ist als der der Papiere B (die Abszissenkoordinate des Punktes WP_{AB} liegt links von der Mitte zwischen den Punkten WP_A und WP_B). PF_{BC} kennzeichnet eine Mischung der Wertpapiere B und C zu etwa gleichen Teilen. Bildet man nun alternative Konvexkombinationen dieser beiden Mischungen, so erhält man die gepunktete Kurve, die die Punkte PF_{AB} und PF_{BC} miteinander verbindet. Das aber bedeutet, dass die Mischungen aus WP_A und WP_B , die zwischen den Punkten PF_{AB} und WP_B liegen, nicht effizient sind. Genauso wenig effizient sind die Portefeuilles, die bis zum Punkt PF_{BC} auf dem ansteigenden Teil der Verbindungskurve zwischen WP_B und WP_C liegen.

Auch die gepunktete Verbindungskurve, die die Punkte PF_{AB} und PF_{BC} verbindet, wird letztlich nicht (durchgängig) effiziente Portefeuilles enthalten: Durch weitere Konvexkombinationen können weitere, bei jeweils gegebenem Erwartungswert weniger risikante Positionen gefunden werden.

Bei der bisherigen Betrachtung von Konvexkombinationen wurde von Leerverkäufen abgesehen. Wenn sie vorgenommen werden können, kann grundsätzlich die Effizienzkurve verbessert werden. Unter Berücksichtigung von Leerverkäufen kann in ein Portefeuille auch dann ein größerer Geldbetrag als V_0 investiert werden, wenn nicht die Möglichkeit besteht, Geld zum Zinssatz r zu leihen. Es erfolgt dann eine „stochastische“ Fremdfinanzierung, indem riskante Wertpapiere leer verkauft werden. Ohne Leerverkauf wird der maximale Erwartungswert des Endvermögens erzielt, indem das gesamte Barvermögen V_0 in das Wertpapier des Typs C (mit dem höchsten Erwartungswert der Rendite) angelegt wird. Mit Leerverkauf kann ein höherer Erwartungswert erzielt werden, indem z. B. zusätzliche Papiere des Typs C gekauft und Papiere mit geringerer erwarteter Rendite leer verkauft werden. Ob dabei die Varianz bzw. die Standardabweichung des Endvermögens steigt oder sinkt, hängt von der Höhe der maßgeblichen Korrelationskoeffizienten ab. In Abb. 8.3 werden durch Mischung der Wertpapiere B und C und Leerverkauf des Wertpapiers B beispielsweise auch Punkte rechts oben von WP_C erreicht. Das Wertpapier C hat dann in der Mischung ein Gewicht über 1, Wertpapier B ein negatives Gewicht.

Die Ermittlung der Umhüllenden stellt allgemein ein komplexes Problem dar. Wie die Abb. 8.4 beispielhaft zeigt, können jedoch die Umhüllende und die entsprechende Effizienzkurve als monoton steigender Teil der Umhüllenden auch ohne Optimierung mit Rechnerunterstützung gefunden werden. Die Darstellungen in Abb. 8.4 beruhen auf den Wertpapieren A, B und C des Beispiels in Abschn. 8.2.2, die leer verkauft werden können. Ihre erwarteten Renditen betragen $E(\tilde{r}_A) = 0,1$, $E(\tilde{r}_B) = 0,2$, und $E(\tilde{r}_C) = 0,3$ und ihre Standardabweichungen $\sigma(\tilde{r}_A) = 0,1$, $\sigma(\tilde{r}_B) = 0,3$ und $\sigma(\tilde{r}_C) = 0,3$. Die Korrelationen zwischen den Renditen betragen $-0,5$ zwischen den Papieren A und B, $0,8$ zwischen den

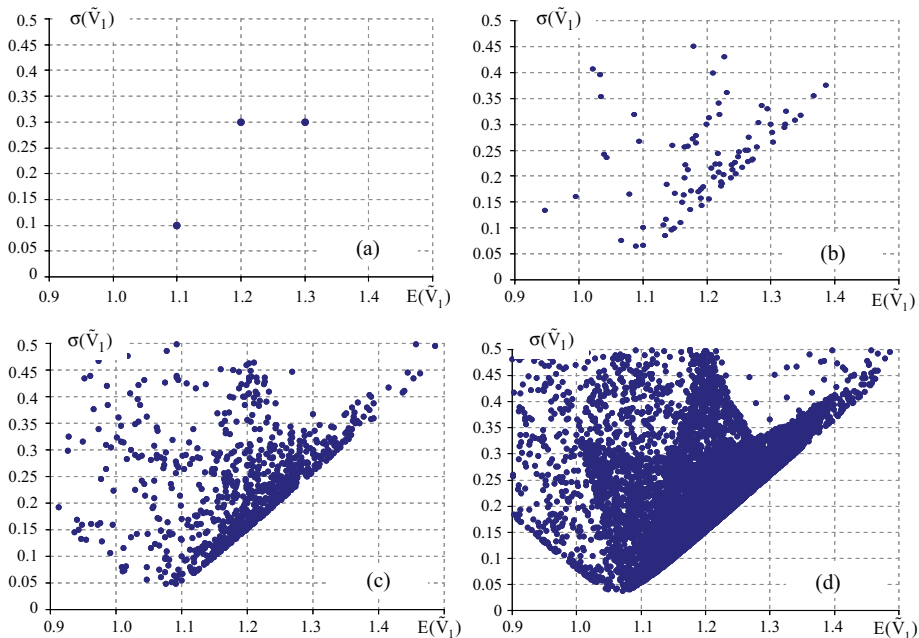


Abb. 8.4 Herausbildung des effizienten Randes bei zufälligen Portfeuilleemischungen

Papieren A und C sowie 0 zwischen den Papieren B und C. Das Barvermögen V_0 wurde für die Darstellungen auf $V_0 = 1$ normiert.

In Abb. 8.4a werden zunächst die Erwartungswerte und Standardabweichungen bei Anlage von V_0 in je eines der drei Wertpapiere dargestellt. die Abb. 8.4b–d zeigen daraufhin 100, 1000 und 10.000 zufällige Mischungen der Wertpapiere. Der effiziente Rand wird von Abbildung zu Abbildung immer besser erkennbar.

8.4.3 Berücksichtigung eines risikolosen Wertpapiers

8.4.3.1 Charakteristik effizienter Portfeuilleemischungen mit risikolosem Wertpapier

a) Kombinationen riskanter Portfeuillees mit einer sicheren Anlage

Im Folgenden wird ein risikoloses Wertpapier berücksichtigt, d. h. die Möglichkeit des Investors, Geld risikolos zu einem einheitlichen Zinssatz r anzulegen und aufzunehmen. Wie sich zeigen wird, hat diese Annahme weitreichende Implikationen für die effiziente bzw. die optimale Risikomischung. Das Endvermögen des Investors ist nun durch

$$\tilde{V}_1 = \sum_{i=1}^N q_i \cdot \tilde{x}_i + B \cdot (1+r) \quad (8.19)$$

gegeben. B ist der risikolos angelegte ($B > 0$) bzw. aufgenommene ($B < 0$) Geldbetrag. Die Budgetrestriktion lautet nun:

$$V_0 = \sum_{i=1}^N q_i \cdot P_i + B. \quad (8.20)$$

Formt man diese Budgetbedingung nach B um und ersetzt danach B in (8.19), so erhält man für das Endvermögen

$$\tilde{V}_1 = V_0 \cdot (1+r) + \sum_{i=1}^N q_i \cdot [\tilde{x}_i - (1+r) \cdot P_i]. \quad (8.21)$$

Dessen Erwartungswert beträgt:

$$E(\tilde{V}_1) = V_0 \cdot (1+r) + \sum_{i=1}^N q_i \cdot [E(\tilde{x}_i) - (1+r) \cdot P_i]. \quad (8.22)$$

Die Gl. (8.21) und entsprechend (8.22) lassen sich anschaulich interpretieren: Kauft bzw. verkauft der Investor keine riskanten Wertpapiere, d. h. wählt er $q_1 = q_2 = \dots = q_N = 0$, so legt er sein Barvermögen V_0 vollständig risikolos an und erzielt am Periodenende das sichere Vermögen $V_0 \cdot (1+r)$. Kauft er dagegen riskante Wertpapiere, so steigt für jedes Stück des Wertpapiers i das Endvermögen um die Differenz aus dem Rückfluss $\tilde{x}_i$ und den mit dem risikolosen Zinssatz r aufgezinsten Kaufpreis P_i für dieses Papier. Die Differenz $\tilde{x}_i - (1+r) \cdot P_i$ ist ein sogenannter *Residualgewinn*: Er entspricht dem Gewinn $\tilde{x}_i - P_i$ aus dem Wertpapierkauf abzüglich der Kosten auf das in das Wertpapier investierte Kapital, $r \cdot P_i$. Die Kapitalkosten werden dabei mit dem risikolosen Zinssatz berechnet: Da der Investor das Geld risikolos anlegen kann, vergleicht er den Rückfluss aus dem Wertpapierkauf implizit mit der risikolosen Anlage des Kaufpreises P_i . Der Erwartungswert des Residualgewinns,

$$E[\tilde{x}_i - (1+r) \cdot P_i] = E(\tilde{x}_i) - (1+r) \cdot P_i, \quad (8.23)$$

kennzeichnet den Anstieg des Erwartungswertes des Endvermögens bei Kauf einer (zusätzlichen) Einheit des Papiers i gegenüber der Anlage des Kaufpreises P_i zum Zinssatz r . Diese Differenz wird auch als *Risikoprämie* des Wertpapiers in absoluten Größen (in Euro) bezeichnet. Der Risikoprämie in absoluten Größen entspricht die folgende Risikoprämie in Renditeschreibweise:

$$\frac{E(\tilde{x}_i) - (1+r) \cdot P_i}{P_i} = E(\tilde{r}_i) - r \quad \text{mit} \quad \tilde{r}_i \equiv \frac{\tilde{x}_i - P_i}{P_i}. \quad (8.24)$$

$\tilde{r}_i$ ist die Rendite des Wertpapiers i . Die Risikoprämie des Papiers i in Renditeschreibweise entspricht also der Differenz aus dem Erwartungswert ihrer Rendite und dem Zinssatz r .

Wie in Kap. 13, Abschn. 13.5.3.3, gezeigt wird, kann die Risikoprämie eines Papiers auch *negativ* sein. Dessen Kauf bewirkt dann, dass im Vergleich zur risikolosen Anlage der Erwartungswert des Endvermögens sinkt.

Für die Varianz des Endvermögens gilt:

$$\text{Var}(\tilde{V}_1) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N q_i \cdot q_j \cdot \text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j). \quad (8.25)$$

Die Menge der effizienten Portfeuille bei Existenz eines risikolosen Wertpapiers lässt sich grundsätzlich auf dieselbe Weise ermitteln wie in Abschn. 8.4.2.3 beschrieben. Wie jedoch im Folgenden gezeigt wird, kann diese Menge auch durch eine relativ einfache Überlegung aus der Menge der effizienten Portfeuille ohne Existenz des risikolosen Wertpapiers abgeleitet werden.

Ein beliebiges Portfeuille auf der Effizienzkurve, die sich ohne das risikolose Wertpapier ergab, kann nun eben auch mit der risikolosen Anlage kombiniert werden. Eine solche Kombination bedeutet, dass bei gleichem Mischungsverhältnis zwischen den riskanten Wertpapieren (also bei gleicher Portfeuillestruktur) das y -fache ($y \neq 1$) des betreffenden effizienten Portfeuille realisiert wird. Der riskant angelegte Betrag ist dann $y \cdot V_0$, der risikolos angelegte Betrag entsprechend

$$B = (1 - y) \cdot V_0. \quad (8.26)$$

Für $y > 1$ wird allerdings Geld nicht risikolos angelegt, sondern aufgenommen. Wird der Rückfluss des betrachteten Portfeuille riskanter Wertpapiere mit $\tilde{x}_{PF}$ bezeichnet, so gilt für den Erwartungswert und die Standardabweichung des Endvermögens bei Kombination dieses Portfeuille mit der risikolosen Anlage:

$$\begin{aligned} E(\tilde{V}_1) &= (1 - y) \cdot V_0 \cdot (1 + r) + y \cdot E(\tilde{x}_{PF}) \\ &= V_0 \cdot (1 + r) + y \cdot [E(\tilde{x}_{PF}) - (1 + r) \cdot V_0] \end{aligned} \quad (8.27)$$

und

$$\sigma(\tilde{V}_1) = y \cdot \sigma(\tilde{x}_{PF}). \quad (8.28)$$

Formt man (8.28) nach y um und setzt y in (8.27) ein, so erhält man die folgende lineare Beziehung zwischen $\sigma(\tilde{V}_1)$ und $E(\tilde{V}_1)$:

$$\sigma(\tilde{V}_1) = \frac{\sigma(\tilde{x}_{PF})}{E(\tilde{x}_{PF}) - (1 + r) \cdot V_0} \cdot [E(\tilde{V}_1) - V_0 \cdot (1 + r)]. \quad (8.29)$$

Alle Linearkombinationen eines Portfeuille riskanter Papiere mit dem risikolosen Papier liegen also auf einer Gerade, die ihren Ursprung auf der Abszisse bei dem Wert

$E(\tilde{V}_1) = V_0 \cdot (1 + r)$ hat. Abb. 8.5 verdeutlicht den Zusammenhang. In dieser Abbildung ist die Effizienzkurve ohne Existenz eines risikolosen Wertpapiers eingezeichnet. Auf dieser Effizienzkurve sind mit den Punkten M und T zwei Mischungen riskanter Wertpapiere markiert. Dabei kennzeichnet M das sogenannte *Minimum-Varianz-Portefeuille*, d. h. dasjenige Portefeuille aus riskanten Wertpapieren, das ohne Berücksichtigung eines risikolosen Wertpapiers (d. h. bei Anlage genau des Barvermögens V_0 in riskante Wertpapiere) die geringst mögliche Varianz (bzw. Standardabweichung) herstellt. Das risikolose Wertpapier erlaubt es nun, beliebige Geldbeträge in die den Punkten M bzw. T entsprechenden Portefeuilles oder in jedes andere Portefeuille auf dem effizienten Rand zu investieren. Grafisch drückt sich dies darin aus, dass der Investor jede Kombination aus Standardabweichung und Erwartungswert des Endvermögens herstellen kann, die auf einem Strahl liegt, der vom Punkt $V_0 \cdot (1 + r)$ ausgeht und durch denjenigen Punkt auf dem effizienten Rand führt, der dem betreffenden effizienten Portefeuille entspricht.

So kann der Investor jeden Punkt auf der Linie zwischen den Punkten P und M in Abb. 8.5 erreichen, indem er entsprechend sein Barvermögen auf die risikolose Anlage und das Minimum-Varianz-Portefeuille M aufteilt. Verschuldet er sich und investiert mehr als sein Barvermögen V_0 in das Minimum-Varianz-Portefeuille, so erreicht er einen entsprechenden Punkt auf der gestrichelten Linie rechts oberhalb von M.

Offensichtlich jedoch repräsentiert kein Punkt auf der gestrichelten Linie (und damit auch nicht das Minimum-Varianz-Portefeuille) ein effizientes Portefeuille. So kann der Investor beispielsweise anstelle des Minimum-Varianz-Portefeuilles M das Portefeuille M' realisieren, indem er einen bestimmten Anteil y_M seines Barvermögens in das dem Punkt T entsprechende Portefeuille investiert und den Restbetrag $(1 - y_M) \cdot V_0$ risikolos anlegt. Er erreicht so bei gleichem Erwartungswert des Endvermögens eine Standardabweichung von $y_M \cdot \sigma_T < \sigma_M$.

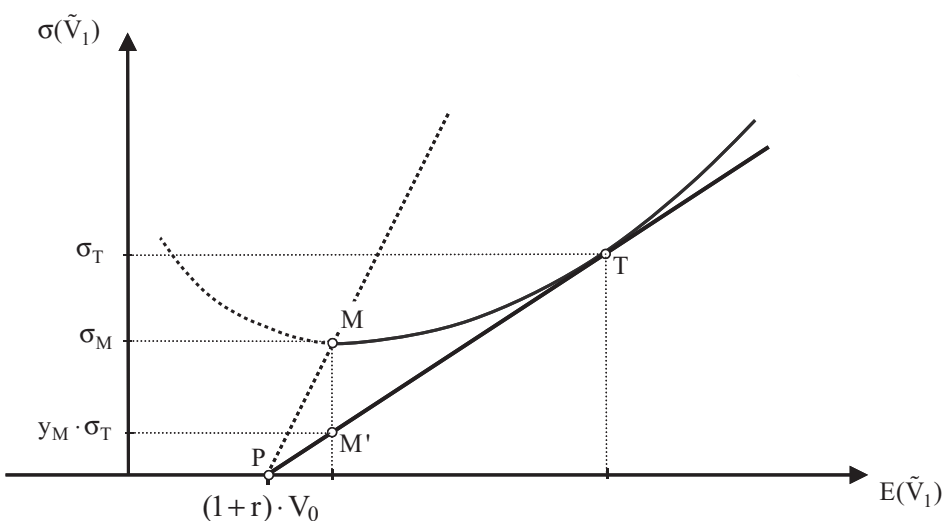


Abb. 8.5 Zur Ermittlung effizienter (μ, σ) -Konstellationen mit risikolosem Wertpapier

b) *Tangentialportefeuille und Menge effizienter Portefeuilles*

Nur *ein* Strahl in der Abb. 8.5, nämlich der durchgezogene Strahl mit den Punkten P und T, repräsentiert bei Berücksichtigung eines risikolosen Wertpapiers die Menge der effizienten Portefeuilles: Dieser Strahl *tangiert* die ursprüngliche Effizienzkurve (ohne die Existenz des risikolosen Wertpapiers) im Punkt T. Dasjenige Portefeuille, das dem Tangentialpunkt T entspricht, wird als *Tangentialportefeuille* bezeichnet.

Investiert der Investor nicht mehr als sein Barvermögen V_0 in riskante Wertpapiere, so kann er nur Punkte auf der Strecke zwischen P und T erreichen. Verschuldet er sich zum sicheren Zinssatz, so kann er auch Positionen auf der durchgezogenen Linie rechts oberhalb von T erreichen.

Die Berücksichtigung einer risikolosen Anlage- und Aufnahmemöglichkeit hat weitreichende Folgen für die Planungen des Investors:

- Die Menge der effizienten Portefeuilles ist im (μ, σ) -Diagramm durch einen Strahl gekennzeichnet. Effiziente Portefeuilles sind also durch eine lineare Beziehung zwischen der Standardabweichung und dem Erwartungswert des Endvermögens gekennzeichnet.
- Die Menge der effizienten Portefeuilles enthält das Tangentialportefeuille T. Es ist dadurch gekennzeichnet, dass der Investor sein gesamtes Barvermögen V_0 in riskante Wertpapiere investiert und daneben Geld weder risikolos anlegt noch aufnimmt. Legt er hingegen einen Teil seines Barvermögens risikolos an, so investiert er entsprechend weniger in das Tangentialportefeuille. Verschuldet er sich risikolos, so tut er dies, um mehr als sein Barvermögen V_0 in das Tangentialportefeuille zu investieren. Immer aber gilt: Es existiert nur ein einziges Mischungsverhältnis riskanter Wertpapiere, das für den Investor optimal ist, und dieses Mischungsverhältnis wird durch das Tangentialportefeuille repräsentiert.
- Das Tangentialportefeuille ist ein effizientes Portefeuille, dessen Zusammensetzung allein von den Erwartungswerten, Standardabweichungen und Kovarianzen bzw. Korrelationen der Wertpapierrückflüsse abhängt. Das Tangentialportefeuille ist also allein durch die Erwartungen des Investors bestimmt, nicht durch seine Risikopräferenz. Die Risikopräferenz bestimmt hingegen, wie er das Tangentialportefeuille mit dem risikolosen Wertpapier mischt, wie in Abschn. 8.4.3.2 gezeigt wird.
- Der Investor kann seine Portefeuilleplanung in zwei Schritte separieren: Im ersten Schritt plant er die optimale Mischung riskanter Wertpapiere (das Tangentialportefeuille T). Im zweiten Schritt entscheidet er, welchen Anteil seines Barvermögens V_0 er in dieses Portefeuille investiert. Diese Implikation geht auf 19 zurück und wird daher Tobin-Separation genannt.

Die Rendite des risikolosen Wertpapiers, d. h. der risikolose Zinssatz r , bestimmt bei gegebenem V_0 die Lage des Punktes P in Abb. 8.5 und damit auch die Lage des Tangentialportefeuilles T. Je höher c. p. der risikolose Zinssatz r ist, desto weiter rechts liegt der Punkt P, desto weiter rechts oben liegt auch der dem Tangentialportefeuille ent-

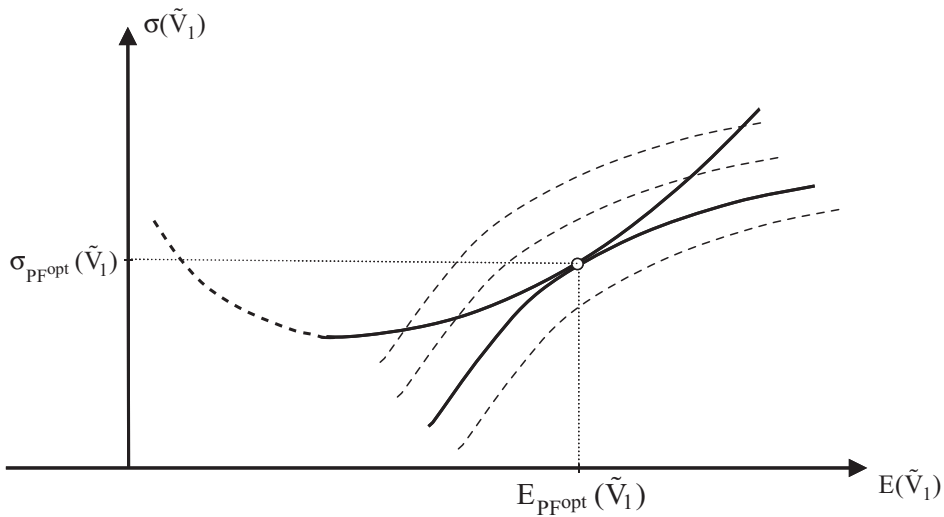


Abb. 8.6 Optimales Portefeuille ohne risikoloses Wertpapier als Tangentiallösung

sprechende Punkt T, und desto steiler ist die Effizienzlinie. Wie erläutert, repräsentieren Punkte rechts oberhalb von T Portefeuilles, bei denen sich der Investor verschuldet. Ist Verschuldung ausgeschlossen, so ist die Effizienzkurve bis zum Punkt T die Verbindungslinie zwischen P und T, danach jedoch entspricht sie der Effizienzkurve ohne das risikolose Wertpapier.⁷

8.4.3.2 Zur Bestimmung des optimalen Portefeuilles

In den Abb. 8.6 und 8.7 sind Indifferenzkurven des (risikoaversen) Investors im (μ, σ) -Diagramm mit dem Erwartungswert des Endvermögens an der Abszisse und der Standardabweichung an der Ordinate abgetragen. Das Optimum ist jeweils durch denjenigen Punkt auf der Effizienzkurve determiniert, der auf der am weitesten rechts unten verlaufenden Indifferenzkurve liegt, bei dem also die Effizienzkurve eine Indifferenzkurve tangiert. Würde kein risikoloses Wertpapier existieren und der Investor sein gesamtes Vermögen V_0 riskant anlegen, so ergäbe sich das optimale Portefeuille wie in Abb. 8.6 veranschaulicht. Seine Struktur, d. h. das Mischungsverhältnis riskanter Wertpapiere, würde dann von der Lage des Tangentialpunktes mit einer Indifferenzkurve und damit von der Gestalt der Indifferenzkurven, also der konkreten Risikoaversion des Investors, abhängen.

Mit dem risikolosem Wertpapier hingegen ergibt sich eine doppelte Tangentiallösung: Nachdem die Effizienzlinie über das Tangentialportefeuille ermittelt wurde, bestimmt der Investor das optimale Portefeuille, d. h. die optimale Mischung aus Tangential-

⁷Auch ohne eine zinsbringende Geldanlage besteht für den Investor immer die Möglichkeit, Geld zu 0 % anzulegen, indem er Liquidität hält. Sieht er dies als risikolos an, ergibt sich eine Effizienzlinie, die auf der Abszisse bei V_0 beginnt und in einem Tangentialpunkt T endet.

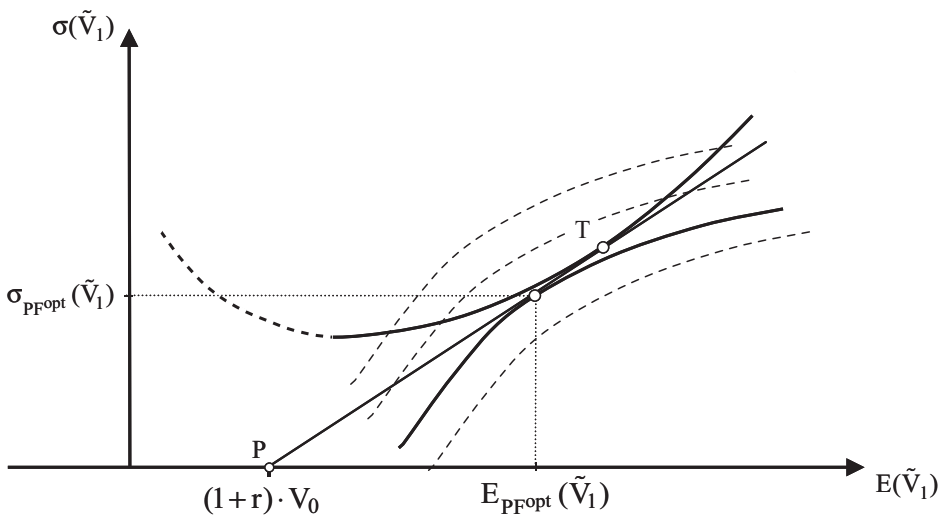


Abb. 8.7 Optimales Portfeuille mit risikolosem Papier als doppelte Tangentiallösung

portfeuille und risikolosem Wertpapier, als Tangentiallösung, d. h. als diejenige Mischung, die dem Tangentialpunkt der linearen Effizienzlinie mit einer Indifferenzkurve entspricht. Abb. 8.7 verdeutlicht den Zusammenhang. Ein Vergleich mit Abb. 8.6 zeigt, dass mit dem risikolosen Wertpapier eine „bessere“ Indifferenzkurve erreicht wird, d. h. ein höherer Präferenzwert erzielt wird.

8.4.3.3 Vereinfachte Ermittlung der Effizienzlinie und Eigenschaften des optimalen Portfeuillees

Die Darstellungen zur Ermittlung und Gestalt der Umhüllenden und der zugehörigen Effizienzkurve ohne und mit dem risikolosen Wertpapier zeigen, welche grundsätzliche Bedeutung die Portfeuille Mischung sowie die risikolose Anlage oder Aufnahme von Kapital für die effiziente bzw. die optimale Portfeuillebildung haben. Für die praktische Ermittlung der Effizienzlinie mit dem risikolosen Wertpapier muss jedoch kein einziger Punkt auf der V_0 entsprechenden Umhüllenden (und somit auch nicht das Tangentialportfeuille) explizit ermittelt werden. Da alle effizienten Portfeuillees bei Einbeziehung der risikolosen Anlage- und Aufnahmemöglichkeit von Kapital dieselbe Struktur haben, genügt es eines dieser effizienten Portfeuillees explizit zu ermitteln. Man erhält dann alle anderen effizienten Portfeuillees, indem man das Volumen des ermittelten effizienten Portfeuillees bei gegebener Struktur erhöht oder reduziert, d. h. die einzelnen Wertpapierbestände proportional erhöht oder senkt. Somit ergibt sich die Effizienzlinie als derjenige Strahl, der ausgehend vom Punkt P mit dem Abszissenwert $(1+r) \cdot V_0$ durch denjenigen Punkt im (μ, σ) -Diagramm verläuft, der dem explizit ermittelten effizienten Portfeuille entspricht.

Man kann ein effizientes Portfeuille ermitteln, indem man die Varianz des Portfeuillees unter der Nebenbedingung minimiert, dass ein beliebiger vorgegebener Erwartungswert $\bar{\mu} > (1+r) \cdot V_0$ des Endvermögens erzielt wird. Stattdessen kann auch

gefordert werden, dass mit dem Portefeuille eine beliebige vorgegebene positive Risikoprämie $\overline{RP}_p > 0$ erzielt wird. Das Optimierungsprogramm lautet dann:

$$\text{Min}_{q_1, q_2, \dots, q_N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N q_i \cdot q_j \cdot \text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j) \quad (8.30)$$

unter der Nebenbedingung

$$\sum_{i=1}^N q_i \cdot [E(\tilde{x}_i) - (1+r) \cdot P_i] = \overline{RP}_p. \quad (8.31)$$

Bei dieser Darstellung des Optimierungsproblems erübrigt sich die Budgetgleichung. In der Definitionsgleichung für die Risikoprämie des Portefeuilles wird nämlich berücksichtigt, dass bei Kauf eines Wertpapiers i die Anlage (Aufnahme) von Kapital zum Zinssatz r um P_i sinkt (steigt), womit eine Endvermögenseinbuße von $(1+r) P_i$ verbunden ist.

Das Optimierungsprogramm (8.30) und (8.31) lässt sich relativ einfach mithilfe eines quadratischen Programmierungsansatzes unter einer linearen Nebenbedingung lösen. Das eigentliche Optimierungsproblem ist allerdings weniger die rechentechnische Ermittlung der Lösung eines Modells als dessen Formulierung, insbesondere die Schätzung der maßgeblichen Erwartungswerte, Varianzen und Kovarianzen.

8.5 Optimale Portefeuillebildung bei expliziter Orientierung

8.5.1 Konkretisierende Annahmen

Das (μ, σ) -Prinzip ist, wie in Kap. 5, Abschn. 5.7.2, gezeigt wurde, bei Risikoaversion nur für quadratische Nutzenfunktionen oder für spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen des Ergebnisses (z. B. Normalverteilung) mit dem Bernoulli-Prinzip kompatibel. Im Folgenden werden wir daher das Portefeuille-Problem erneut analysieren, dabei jedoch unterstellen, der risikoaverse Entscheider orientiere sich explizit am Bernoulli-Prinzip. Wir berücksichtigen nun von Anfang an eine risikolose Geldanlage- und Geldaufnahmemöglichkeit zum Zinssatz r .

Bei expliziter Orientierung am Bernoulli-Prinzip wird für die optimale Portefeuillebildung direkt der Erwartungswert des Nutzens des Endvermögens maximiert, wobei im Modell die Ergebnisse in den möglichen Umweltzuständen explizit berücksichtigt werden (und nicht implizit über die Erwartungswerte, Varianzen und Kovarianzen der Papiere). Obwohl das Modell also kein ausdrückliches Risikomaß berücksichtigt, führt es zu einer optimalen Risikomischung, die aus dem Erwartungsnutzenkalkül des Investors erkennbar wird. Das Modell beruht auf folgenden zusätzlichen Annahmen über die Präferenzfunktion des Entscheiders sowie über die Rückflüsse der Wertpapiere:

Der Rückfluss eines Wertpapiers in $t=1$ hängt davon ab, welcher Zustand S_s dann eintritt. Die Zahl P_i der möglichen Zustände ist endlich. Die zustandsabhängigen Rück-

flüsse werden nun explizit berücksichtigt (und nicht über ihre Erwartungswerte, Varianzen und Kovarianzen). Der Rückfluss eines Papiers i ($i=1,2,\dots,N$) im Zustand S_s ($s=1, 2,\dots,N_s$) wird mit x_{is} bezeichnet.

Der Investor orientiert sich am Ziel, den Erwartungswert des Nutzens seines Endvermögens V_1 zu maximieren. Seine Nutzenfunktion ist zustandsunabhängig, streng konkav, stetig und differenzierbar.

Die Präferenzfunktion des Investors ist wie folgt definiert:

$$E[U(\tilde{V}_1)] = \sum_{s=1}^{N_s} w(S_s) \cdot U(V_{1s}) \quad (8.32)$$

mit

$$V_{1s} = \sum_{i=1}^N q_i \cdot x_{is} + B \cdot (1 + r).$$

In Worten: Der Investor orientiert sich am Erwartungswert des Nutzens aus seinem Vermögen zum Zeitpunkt $t=1$. Dieses setzt sich zusammen aus den Rückflüssen der Wertpapiere, die er mit positivem Bestand in seinem Portefeuille hält ($q_i > 0$), vermindert um die Auszahlungen zum Zeitpunkt $t=1$, die aus Leerverkäufen von Wertpapieren ($q_i < 0$) resultieren, zuzüglich (bzw. abzüglich) des in $t=0$ angelegten (bzw. aufgenommenen) Betrags B unter Berücksichtigung der Zinsen $B \cdot r$. Dabei bringen dem Investor q_i Stück des Wertpapiers i , die er in seinem Portefeuille hält, eine Einzahlung in Höhe von $q_i \cdot x_{is}$, wenn der Zustand S_s eintritt. Bei Leerverkauf handelt es sich um eine entsprechende Auszahlung.

Bei der Ermittlung des Optimums muss der Investor die Budgetrestriktion (8.6) für den Zeitpunkt $t=0$ beachten. Kann er keine negativen Wertpapierbestände halten, sind also Leerverkäufe nicht möglich, so muss er als Spezifizierung von (8.5) die Nichtnegativitätsbedingungen $q_i \geq 0$, $i=1,2,\dots,N$, als Restriktionen beachten. Bei der folgenden Analyse wird jedoch von Nichtnegativitätsbedingungen abgesehen.

8.5.2 Bestimmung und Eigenschaften eines optimalen Portefeuilles

8.5.2.1 Das Optimierungsproblem

Es wird nun die direkte Bestimmung des optimalen Portefeuilles betrachtet. Der Investor maximiert seine Präferenzfunktion (8.32), den Erwartungswert seines Nutzens, über die Wahl des Anlagebetrags B sowie der Wertpapierstückzahlen q_i unter Beachtung der Budgetrestriktion (8.6). Wird diese nach B aufgelöst,

$$B = V_0 - \sum_{i=1}^N q_i \cdot P_i, \quad (8.33)$$

und B in die Bestimmungsgleichung für das Endvermögen im Zustand s gemäß (8.32) eingesetzt, so erhält man:

$$\begin{aligned} V_{1s} &= \sum_{i=1}^N q_i \cdot x_{is} + (V_0 - \sum_{i=1}^N q_i \cdot P_i) \cdot (1+r) \\ &= V_0 \cdot (1+r) + \sum_{i=1}^N q_i \cdot [x_{is} - (1+r) \cdot P_i] \end{aligned} \quad (8.34)$$

Gleichung (8.34) lässt sich wiederum anschaulich interpretieren: Kauft bzw. verkauft der Investor keine riskanten Wertpapiere, legt er also sein Barvermögen vollständig risikolos an, so erzielt er am Periodenende das sichere Endvermögen $V_0 \cdot (1+r)$. Kauft er dagegen riskante Wertpapiere i , so erhält er im Zustand S_s für jedes Stück dieses Wertpapiers die Differenz aus dessen Rückfluss x_{is} in diesem Zustand und dessen mit dem risikolosen Zinssatz aufgezinsten Kaufpreis P_i , den Residualgewinn für den Zustand S_s .

Wäre der Rückfluss eines riskanten Wertpapiers i in jedem Umweltzustand nicht kleiner als der mit r aufgezinsten Preis, gelte also $x_{is} - (1+r) \cdot P_i \geq 0$ für alle s , so würde das Wertpapier mit Sicherheit eine Verzinsung erbringen, die nicht unter dem risikolosen Zinssatz r liegt. Da dies unvereinbar mit gleichgewichtsorientierten Überlegungen zur Preisbildung von Wertpapieren auf dem Kapitalmarkt wäre, schließen wir diesen Fall aus: Ein Wertpapier i mag zwar eine positive Risikoprämie $E(\tilde{x}_i) - (1+r) \cdot P_i$ bzw. $E(\tilde{r}_i) - r$ aufweisen, es wird jedoch in mindestens einem Umweltzustand einen Rückfluss liefern, der niedriger als der aufgezinsten Kaufpreis, $(1+r) \cdot P_i$, ist und somit eine Rendite liefern, die unter dem risikolosen Zinssatz r liegt.

Setzt man die Bestimmungsgleichung (8.34) für V_{1s} in die Präferenzfunktion (8.32) des Investors ein, so kann sein Optimierungsproblem wie folgt dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \text{Max}_{q_1, q_2, \dots, q_N} \quad E[U(\tilde{V}_1)] &= \sum_{s=1}^{N_S} w(S_s) \cdot U \left(V_0 \cdot (1+r) + \sum_{i=1}^N q_i \cdot [x_{is} - (1+r) \cdot P_i] \right). \end{aligned} \quad (8.35)$$

Bei dieser Darstellung des Optimierungsproblems muss die Budgetrestriktion (8.33) nicht explizit dargestellt werden. Sie ist implizit in (8.35) enthalten. Im Vordergrund der folgenden Darstellungen stehen die Eigenschaften des optimalen Portefeuilles.

8.5.2.2 Eigenschaften des optimalen Portefeuilles

Die notwendigen Bedingungen für das Optimum lauten:

$$\frac{\partial E[U(\tilde{V}_1)]}{\partial q_i} = \sum_{s=1}^{N_S} w(S_s) \cdot U'(V_{1s}) \cdot [x_{is} - (1+r) \cdot P_i] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (8.36.i)$$

Interpretation: Im optimalen Portfeuille sind so viele Stücke des Wertpapiers vom Typ i enthalten, dass der Erwartungswert des Produktes aus dem Grenznutzen $U'(V_{1s})$ des Investors und dem Residualgewinn $x_{is} - (1+r) \cdot P_i$ dieses Wertpapiers über alle Zustände gleich null ist. Ist das Wertpapier i nicht im optimalen Portfeuille nicht enthalten, so gilt die Bedingung (8.36.i) für $q_i = 0$.

Gilt für ein Portfeuille mit einem Wertpapierbestand $\hat{q}_i$ und Endvermögenswerten $\hat{V}_{1s}$ die Relation

$$\sum_{s=1}^{N_s} w(S_s) \cdot U'(\hat{V}_{1s}) \cdot [x_{is} - (1+r) \cdot P_i] > 0,$$

so kann es nicht optimal sein; der Erwartungswert des Nutzens steigt, wenn der Bestand des Wertpapiers i erhöht wird. Gilt die umgekehrte Relation, so verbessert sich die Lösung, wenn der Bestand des Wertpapiers i gesenkt und dabei möglicherweise ein (zusätzlicher) Leerverkauf vorgenommen wird.

Schreibt man für den Erwartungswert des Grenznutzens des Investors

$$E[U'(\tilde{V}_1)] = \sum_{s=1}^{N_s} w(S_s) \cdot U'(V_{1s}),$$

so lassen sich die Optimumbedingungen (8.36.i) auch wie folgt formulieren:

$$\frac{\partial E[U(\tilde{V}_1)]}{\partial q_i} = \sum_{s=1}^{N_s} w(S_s) \cdot x_{is} \cdot U'(V_{1s}) - (1+r) \cdot P_i \cdot E[U'(\tilde{V}_1)] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (8.37.i)$$

Es ist zu beachten, dass die Grenznutzenwerte $U'(V_1)$ von der Höhe des Endvermögens abhängen und damit nicht exogen vorgegeben sind. Es handelt sich um modellendogene Größen, die durch das optimale Portfeuille (die entsprechende optimale Wahrscheinlichkeitsverteilung über das Endvermögen) bestimmt sind.

Durch das System der Optimumbedingungen (8.36.i) bzw. (8.37.i) sind also die optimalen Wertpapierbestände $q_1, q_2, \dots, q_N$ nur *implizit* bestimmt. Da zudem $U'(V_{1s})$ grundsätzlich eine nichtlineare Funktion des Endvermögens und damit der Wertpapierbestände ist, lässt sich das Gleichungssystem in der Regel nicht explizit lösen. In Abschn. 8.5.3 wird ein Spezialfall betrachtet, in dem allerdings die optimalen Wertpapierbestände explizit ermittelt werden können.

Da die Grenznutzenwerte $U'(V_1)$ nicht exogen vorgegeben sind, sondern ihrerseits vom gesuchten optimalen Portfeuille abhängen, stellt die Analyse seiner Eigenschaften auf der Basis der Bedingungen (8.36.i) bzw. (8.37.i) ein komplexes Problem dar. Dies ist der Grund dafür, dass es in der Portfeuilletheorie üblich ist, die Eigenschaften optimaler Portfeuille nicht explizit auf der Basis von Grenznutzenwerten, sondern auf der Grundlage des (μ, σ) -Prinzips zu analysieren. Entsprechende Optimumbedingungen werden im folgenden Abschnitt dargestellt.

Hier sollen anhand der Optimumbedingungen (8.37.i) nur einige elementare Grundeigenschaften des optimalen Portefeuilles angedeutet werden. Aus komparativ statischen Analysen der Optimumbedingung für Wertpapier i ergeben sich die folgenden intuitiv nachvollziehbaren Zusammenhänge:

- Steigt c. p. der Rückfluss x_{is} des Wertpapiers im Zustand S_s , so erhöht der Investor seinen Bestand an diesem Wertpapier.
- Steigt c. p. der Preis P_i des Wertpapiers i , so senkt der Investor dessen Bestand.
- Steigt c. p. der risikolose Zinssatz, so senkt er den Bestand aller riskanten Wertpapiere (bzw. er erhöht Leerverkäufe) und legt mehr Geld risikolos an.

Die dargestellten Zusammenhänge gelten allerdings nur, wenn diejenigen (indirekten) Effekte vernachlässigt werden, die aus Änderungen von Grenznutzenwerten des Investors resultieren können. So kann beispielsweise eine Erhöhung des Preises des Papiers i über einen Reichtumseffekt dazu führen, dass der Investor *mehr* davon kauft, weil seine Risikoaversion sinkt und damit der direkte Effekt der Verteuerung des Wertpapiers überkompensiert wird. Außerdem bewirken Änderungen des Bestandes x_i grundsätzlich, dass sich auch die optimalen Bestände der anderen Papiere ändern, was wiederum zu Änderungen der Grenznutzenwerte führt, die Rückwirkung auf den optimalen Bestand des Papiers i haben, usw.

8.5.3 Eigenschaften eines optimalen Portefeuilles bei exponentieller Nutzenfunktion und Normalverteilungen

Im Folgenden sollen die Bedingungen für ein optimales Portefeuille für einen Spezialfall hergeleitet werden, und zwar für die Annahmenkombination einer exponentiellen Nutzenfunktion und normalverteilter Wertpapierrückflüsse. Diese Annahmenkombination bietet den Vorteil, dass dann zum einen das (μ, σ) -Prinzip im Einklang mit dem Bernoulli-Prinzip steht und zum andern die optimalen Wertpapierbestände explizit ermittelt und deren Eigenschaften relativ anschaulich dargestellt werden können. Darauf aufbauend lassen sich auch anschaulich die Determinanten der Wertpapierpreise am Kapitalmarkt und entsprechende Vorteilhaftigkeitskriterien für Investitionen in börsennotierten Unternehmen analysieren (Kap. 13, Abschn. 13.5, und Kap. 14, Abschn. 14.3).

Sind die Rückflüsse aller riskanten Wertpapiere normalverteilt, so gilt dies, da (annahmegemäß) der Portefeuillerückfluss das einzige riskante Einkommen des Investors ist, auch für sein Endvermögen $\tilde{V}_1$. Er orientiert sich dann an dem folgenden Sicherheitsäquivalent, wobei a den (konstanten) absoluten Risikoaversionskoeffizienten in seiner (exponentiellen) Nutzenfunktion bezeichnet (Kap. 5, Abschn. 5.7.2.5):

$$S \ddot{A}(\tilde{V}_1) = E(\tilde{V}_1) - \frac{a}{2} \cdot \text{Var}(\tilde{V}_1). \quad (8.38)$$

Die Maximierung des Erwartungswertes des Nutzens kann also durch die Maximierung des Sicherheitsäquivalents ersetzt werden. Der Investor orientiert sich am (μ, σ) -Prinzip und seine (μ, σ) -Präferenzfunktion hat eine sehr einfache Form. Für das Sicherheitsäquivalent gemäß (8.38) gilt:

$$\underbrace{(1+r) \cdot V_0 + \sum_{i=1}^N q_i \cdot [E(\tilde{x}_i) - (1+r) \cdot P_i]}_{=E(\tilde{V}_1)} - \underbrace{\frac{a}{2} \cdot \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N q_i \cdot q_j \cdot \text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j)}_{=\text{Var}(\tilde{x}_{PF})=\text{Var}(\tilde{V}_1)} \quad (8.39)$$

Da der Portefeullerückfluss $\tilde{x}_{PF}$ das einzig riskante Einkommen des Investors ist, stimmt dessen Varianz mit der seines gesamten Endvermögens überein. Da der Risikoaversionskoeffizient a exogen gegeben ist, kann das Sicherheitsäquivalent (8.38) bzw. (8.39) direkt über $q_1, q_2, \dots, q_N$ maximiert werden. Die notwendigen Bedingungen für ein Optimum lauten gemäß (8.39):

$$E(\tilde{x}_i) - (1+r) \cdot P_i - \frac{a}{2} \cdot 2 \cdot \sum_{j=1}^N q_j \cdot \text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (8.40.i)$$

(8.40.i) ($i = 1, 2, \dots, N$) beschreibt ein System mit N Gleichungen und N Variablen ($q_1, q_2, \dots, q_N$). Sind alle Gleichungen voneinander linear unabhängig, existiert eine *eindeutige* Lösung. Wegen

$$\sum_{j=1}^N q_j \cdot \text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j) = \text{Kov}(\tilde{x}_i, \sum_{j=1}^N q_j \cdot \tilde{x}_j) = \text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_{PF}) = \text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{V}_1)$$

kann (8.40.i) wie folgt dargestellt werden:

$$RP_i \equiv E(\tilde{x}_i) - (1+r) \cdot P_i = a \cdot \text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{V}_1) \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (8.41.i)$$

Im Optimum stimmt also für jedes Papier die Risikoprämie mit dem Produkt aus dem Risikoaversionskoeffizienten a und dem Risikobeitrag des Papiers zum Portefeuille überein. Das geeignete Risikomaß für das Papier i liefert dabei nicht die Varianz von $\tilde{x}_i$, sondern die Kovarianz $\text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{V}_1)$.

Multipliziert man beide Seiten der Bedingung (8.41.i) ($i = 1, 2, \dots, N$) mit q_i und bildet die Summe über alle N Bedingungen, so erhält man:

$$\sum_{i=1}^N q_i \cdot [E(\tilde{x}_i) - (1+r) \cdot P_i] = a \cdot \sum_{i=1}^N q_i \cdot \text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{V}_1). \quad (8.42)$$

Die linke Seite von (8.42) entspricht der Risikoprämie des gesamten Portefeuilles, die wir mit RP_{PF} bezeichnen:

$$\sum_{i=1}^N q_i \cdot [E(\tilde{x}_i) - (1+r) \cdot P_i] = E(\tilde{x}_{PF}) - (1+r) \cdot P_{PF} = RP_{PF} \quad (8.43)$$

Auf der rechten Seite von (8.42) entspricht der Summenausdruck der Kovarianz des gesamten Portefeuillerückflusses mit dem Endvermögen des Investors:

$$\sum_{i=1}^N q_i \cdot \text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{V}_1) = \text{Kov}\left(\sum_{i=1}^N q_i \cdot \tilde{x}_i, \tilde{V}_1\right) = \text{Kov}(\tilde{x}_{PF}, \tilde{V}_1).$$

Da der Portefeuillerückfluss das einzig riskante Einkommen des Investors ist, handelt es sich bei der Kovarianz $\text{Kov}(\tilde{x}_{PF}, \tilde{V}_1)$ de facto um die Varianz $\text{Var}(\tilde{V}_1)$ seines Endvermögens. Somit folgt gemeinsam mit (8.43) aus (8.42):

$$RP_{PF} = a \cdot \text{Var}(\tilde{V}_1) = a \cdot \text{Var}(\tilde{x}_{PF}). \quad (8.44)$$

Dies ist die Optimumbedingung für das Portefeuille als Ganzes. Der Vergleich mit der Optimumbedingung (8.41.i) für ein einzelnes Wertpapier i zeigt, dass sich nur für die Gesamtbetrachtung des Portefeuilles die Varianz als das relevante Risikomaß ergibt, nicht aber für ein einzelnes Wertpapier i ; hierfür liefert die Kovarianz $\text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{V}_1)$ das geeignete Risikomaß.

Die Abhängigkeit des optimalen Portefeuilles von a zeigt sich anschaulich, wenn die Optimumbedingung (8.44) wie folgt dargestellt wird:

$$\frac{\text{Var}(\tilde{x}_{PF})}{RP_{PF}} = \frac{1}{a}. \quad (8.44a)$$

Gemäß (8.44.a) ist das Verhältnis aus Varianz und Risikoprämie des optimalen Portefeuilles gleich der Risikotoleranz $1/a$: je größer die Risikotoleranz des Investors (je geringer seine Risikoaversion a) desto größer ist dieses Verhältnis im Optimum. Da die optimale Portefeuillestruktur (das optimale Mischungsverhältnis zwischen den riskanten Wertpapieren) unabhängig vom Risikoaversionskoeffizienten a ist (Tobin-Separation), folgt: Mit abnehmender Risikoaversion erhöht der Investor die Risikoprämie und die Varianz seines Portefeuilles, indem er bei gegebener Struktur den Umfang des Portefeuilles erhöht und weniger risikolos anlegt bzw. sich stärker verschuldet.

Aus (8.41.i) und (8.44) folgt:

$$\frac{\text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{V}_1)}{RP_i} = \frac{\text{Var}(\tilde{V}_1)}{RP_{PF}} = \frac{\text{Var}(\tilde{x}_{PF})}{RP_{PF}} = \frac{1}{a} \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (8.45i)$$

Interpretation: Für das optimale Portefeuille ist das Verhältnis zwischen der Kovarianz einer Einheit des Papiers i ($i=1,2,\dots,N$) mit dem Endvermögen bzw. dem gesamten

Portefeullerückfluss und der Risikoprämie dieser Einheit gleich dem Verhältnis zwischen der Varianz und der Risikoprämie des gesamten Portefeulles. Dieses Verhältnis stimmt wiederum mit der Risikotoleranz $1/a$ des Entscheiders überein.

8.6 Bedeutung der Varianzen und Kovarianzen von Wertpapierrückflüssen für das Portefeullerisiko

8.6.1 Naive Diversifikation als Beurteilungsbasis

Für die Portefeulleplanung ist von grundlegender Bedeutung, dass das Gesamtrisiko eines Portefeulles (gemessen als Varianz bzw. Standardabweichung) nicht nur von den Varianzen der Endwerte der einzelnen Wertpapiere, sondern auch von den Kovarianzen (bzw. den Korrelationskoeffizienten) zwischen ihnen als Maß des Risikoverbundes abhängt. Für die Beurteilung des Risikos haben die Kovarianzen tendenziell eine erheblich größere Bedeutung als die Varianzen, sodass es für eine praktische Portefeulleplanung vor allem darauf ankommt, gute Schätzungen bezüglich der Kovarianzen vorzunehmen.

Dies lässt sich am einfachsten verdeutlichen, indem man den Risikomischungseffekt einer naiven Diversifikationsstrategie untersucht. Mit naiver Diversifikation wird eine Portefeulleplanung bezeichnet, bei der der Investor den in Wertpapieren investierten Betrag, den wir im Folgenden mit K_0 bezeichnen, gleichmäßig auf alle M Wertpapierarten aufteilt, die er ins Portefeulle aufnimmt. In jedes dieser Wertpapierarten wird dann der Betrag K_0/M investiert, sodass gilt: $q_i \cdot P_i = K_0/M$ für alle $i = 1, 2, \dots, M$. Normiert man vereinfachend alle Wertpapierpreise auf $P_i = 1$, so ist K_0 identisch mit der Gesamtzahl gekaufter Wertpapiere und es gilt $q_i = K_0/M$ für alle i . Für die Varianz des Endvermögens gilt in diesem Fall:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\tilde{V}_1) &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M q_i \cdot q_j \cdot \text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j) = K_0^2 \cdot \frac{1}{M^2} \cdot \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j) \\ &= K_0^2 \cdot \frac{1}{M^2} \cdot \left[\sum_{i=1}^M \text{Var}(\tilde{x}_i) + \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j) \right]. \end{aligned} \quad (8.46)$$

Bezeichnet man die durchschnittliche Varianz der riskanten Wertpapiere mit $\overline{\text{Var}}$ und den Durchschnitt aller Kovarianzen zwischen je zwei Wertpapieren mit $\overline{\text{Kov}}$, so lässt sich die Varianz des Endvermögens auch wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\tilde{V}_1) &= K_0^2 \cdot \frac{1}{M^2} \cdot (M \cdot \overline{\text{Var}} + M \cdot (M - 1) \cdot \overline{\text{Kov}}). \\ &= K_0^2 \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{M} \cdot \overline{\text{Var}}}_{\text{„Varianzrisiko“}} + \underbrace{\frac{M-1}{M} \cdot \overline{\text{Kov}}}_{\text{„Kovarianzrisiko“}} \right). \end{aligned} \quad (8.47)$$

An (8.47) lässt sich anschaulich zeigen, welcher Effekt von einer immer breiteren Streuung der Risiken im Sinne des Investierens in eine zunehmende Anzahl M unterschiedlicher Wertpapiertypen ausgeht: Mit zunehmender Anzahl unterschiedlicher Wertpapiere wird das „Varianzrisiko“, d. h. der Ausdruck $(1/M) \cdot \overline{\text{Var}}$, bei unveränderlicher bzw. sinkender Durchschnittsvarianz $\overline{\text{Var}}$ immer kleiner, wohingegen das „Kovarianzrisiko“, d. h. der Ausdruck $[(M - 1)/M] \cdot \overline{\text{Kov}}$, sich dem Wert $\overline{\text{Kov}}$ annähert. Die Bedeutung des isolierten Risikos eines Wertpapiers, gemessen als Varianz seines Rückflusses, wird also immer geringer, je mehr Wertpapiertypen M im Portefeuille enthalten sind. Das Gesamtrisiko hängt stattdessen maßgeblich davon ab, wie groß das Kovarianzrisiko ist, d. h. die Kovarianzen der Wertpapiere im Durchschnitt sind.

Obwohl das Varianzrisiko mit steigendem M tendenziell gegen null geht, ist es nicht ohne Weiteres sinnvoll, M zu maximieren, also möglichst viele Wertpapiertypen in das Portefeuille aufzunehmen. Mit steigendem M sinkt zwar das Varianzrisiko, jedoch wird gemäß (8.47) das Gewicht der $\overline{\text{Kov}}$ immer größer. Der funktionale Zusammenhang zwischen $\text{Var}(\tilde{V}_1)$ und M hängt dann davon ab, wie $\overline{\text{Var}}$ und $\overline{\text{Kov}}$ ihrerseits von M abhängen.

8.6.2 Unsystematisches und systematisches Risiko

Die Darstellungen des vorangegangenen Abschnitts verdeutlichen die grundsätzliche Bedeutung der Varianzen und Kovarianzen für die Risikoanalyse. Das Varianzrisiko kann durch weitreichende Diversifikation praktisch eliminiert werden. Es wird daher auch als diversifizierbares oder *unsystematisches* Risiko bezeichnet. Als besonders beachtenswert für die Schätzung der Portefeuillevarianz erscheint das Kovarianzrisiko, vor allem dann, wenn die Wertpapiere positiv und (zum Teil) stark miteinander korreliert sind, sodass die durchschnittliche Kovarianz hoch ist. Da das Kovarianzrisiko durch Diversifikation nicht eliminiert werden kann, wird es auch als *systematisches* Risiko bezeichnet. Die durchschnittliche Kovarianz ist umso höher, je mehr die Endwerte der Papiere von allgemeinen Marktdaten abhängen, die bewirken, dass diese Endwerte stark in die gleiche Richtung streuen.

Die Möglichkeit, das Varianzrisiko durch Diversifikation praktisch zu beseitigen, resultiert aus der weitgehenden Teilbarkeit der Wertpapiere. Enthält das „Portefeuille“ ein größeres, nicht teilbares Objekt, kann dagegen die Varianz seines Überschusses einen großen Einfluss auf die Varianz des Endvermögens haben (Kap. 14, Abschn. 14.4).

8.7 Zusammenfassung

- Die Mischung von Risiken geschieht durch die Bildung eines Portefeuilles riskanter Überschüsse. Risikomischung hat für einen risikoaversen Entscheider Vorteile, weil er die Korrelationen, die zwischen den unsicheren Überschüssen bestehen, ausnutzen kann, um dadurch eine weniger riskante Gesamtposition zu erreichen (Diversifikation).

- Die optimale Mischung von Risiken kann als einstufiges oder als zweistufiges Entscheidungsproblem dargestellt werden. Das einstufige Vorgehen (direkte Optimierung) ist äußerst komplex. Einfacher ist ein zweistufiges Vorgehen, nach dem der Entscheider zunächst eine Vorauswahl von Portefeuilles anhand eines Effizienzkriteriums vornimmt und seinen Präferenzwert erst danach durch Auswahl aus der Menge der effizienten Portefeuilles maximiert.
- Eine Analyse der optimalen Mischung von Risiken auf Basis des Bernoulli-Prinzips ist sehr komplex und vergleichsweise wenig anschaulich. Einfacher und anschaulicher ist die Analyse auf Basis des (μ, σ) -Prinzips, das der Portfolio-Selection Theorie von Markowitz zugrunde liegt.
- Orientiert sich der Entscheider am (μ, σ) -Prinzip und ist er risikoavers, so lassen sich seine Präferenzen durch monoton steigende Indifferenzkurven im (μ, σ) -Diagramm abbilden.
- Bei Risikoaversion ist ein Portefeuille effizient, wenn es kein anderes Portefeuille gibt, das bei gleichem oder niedrigerem Risiko (σ) einen höheren erwarteten Überschuss (μ) oder bei gleichem oder höheren erwarteten Überschuss ein niedrigeres Risiko hat.
- Sind alle Anlagemöglichkeiten riskant, so ist die Menge der effizienten Portefeuilles eine konvex steigende Kurve im (μ, σ) -Diagramm (Effizienzkurve). Besteht dagegen auch die Möglichkeit, Geld zu einem einheitlichen Zinssatz risikolos anzulegen und aufzunehmen, so ist die Menge der effizienten Portefeuilles eine Gerade (Effizienzlinie). Die Effizienzkurve und die Effizienzlinie tangieren sich in einem Punkt, der das Tangentialportefeuille repräsentiert.
- Aus der Menge der effizienten Portefeuilles ist dasjenige optimal, für das eine Indifferenzkurve des Entscheiders die Effizienzkurve (bzw. Effizienzlinie) tangiert. Je risikoverser der Entscheider ist, desto weniger riskant ist die für ihn optimale Wertpapiermischung und desto geringer ist der erwartete Überschuss.
- Für die Portefeuilleplanung ist von grundlegender Bedeutung, dass das Gesamtrisiko eines Portefeuilles nicht nur von den Varianzen der einzelnen Überschüsse, sondern auch von den Kovarianzen zwischen den Überschüssen abhängt. Für die Beurteilung des Risikos haben die Kovarianzen tendenziell eine erheblich größere Bedeutung als die Varianzen.

Ergänzende und vertiefende Literatur

Bitz (1977, S. 110–151); Brealey et al. (2013, Kap. 7, 8); Copeland et al. (2013, Kap. 5); Dinkelbach und Kleine (1996, S. 62–161); Elton und Gruber (1995); Franke und Hax (2009, Kap. VI.2); Hax (1985, S. 133–145); Ingersoll (1987, S. 65–113); Kruschwitz (2009, Abschn. 5.8); Laux und Schabel (2009, Kap. IX und X); Markowitz (1952, 1959); Riess (1996); Rudolph (1979, S. 1–59); Schmidt und Terberger (1997, Kap. 8); Sharpe et al. (1999, Kap. 6); Tobin 1958.

8.8 Übungen

Aufgabe 8.1 Betrachten Sie einen Entscheider mit der Nutzenfunktion $U(x) = 1 - e^{-x}$. Der Entscheider kann in zwei riskante Wertpapiere investieren:

Wertpapier	$w(S_1)=0,25$ S_1	$w(S_2)=0,5$ S_2	$w(S_3)=0,25$ S_3	Preis
WP ₁	0,8	1,2	1,2	1
WP ₂	0,6	1	2,2	1

WP₁ erbringt also bei einem Preis von 1 Geldeinheit (GE) einen Rückfluss von 0,8 GE in Zustand S_1 , was einer Rendite von -20% entspricht, dagegen eine Rendite von 20% in den anderen Zuständen. Die möglichen Renditen von WP₂ sind -40% in S_1 , 0% in S_2 und 120% in S_3 . Gehen Sie davon aus, dass der Entscheider 1 GE in die Wertpapiere investiert, die er beliebig kombinieren kann. Sein Einkommen x entspricht dem Rückfluss aus dem Portefeuille.

- Vergleichen Sie die folgenden drei Anlagealternativen: 100 % des Budgets in WP₁ investieren, 100 % des Budgets in WP₂ investieren oder jeweils 50 % in WP₁ und WP₂ investieren.
- Berechnen Sie die Korrelation der Wertpapierrenditen. Versuchen Sie eine Mischung der Wertpapiere zu finden, die noch besser ist als die beste Alternative aus Aufgabenteil a).
- Vertauschen Sie nun die Werte 0,6 und 2,2 von WP₂. D. h., dass nun der Rückfluss 2,2 des WP₂ in S_1 liegt, nicht mehr in S_3 . Wiederholen Sie alle Rechnungen aus den Aufgabenteilen a) und b) und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.

Aufgabe 8.2

Bei exponentieller Nutzenfunktion $U(x) = 1 - e^{-a \cdot x}$ und normalverteiltem Ergebnis orientiert sich ein Entscheider an dem Sicherheitsäquivalent $S\ddot{A}(x) = E(x) - (a/2) \cdot \text{Var}(x)$. Gehen Sie davon aus, dieser Entscheider könne ein Budget B auf zwei Anlagemöglichkeiten aufteilen, eine Anleihe und eine Aktie. Die Anleihe bringe die sichere Rendite i , die Aktie die unsichere Rendite r mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 . x bezeichnet die Summe aller Rückflüsse aus der Anleihe und der Aktie.

- Stellen Sie das Portefeuille-Entscheidungsproblem des Entscheiders formal dar.
- Ermitteln sie denjenigen Teil seines Budgets, den der Entscheider in die Aktie anlegt. Wovon hängt dieser Anlagebetrag ab?

Aufgabe 8.3

Die Werte der folgenden Tabelle geben die unsicheren Renditen zweier Wertpapiere wieder (alles in %). Alle Umweltzustände seien gleichwahrscheinlich.

	S ₁	S ₂	S ₃
WP ₁	−2	6	8
WP ₂	−3	9	12

- Berechnen Sie die Erwartungswerte und Standardabweichungen der beiden Wertpapiere.
- Berechnen Sie die Kovarianz und den Korrelationskoeffizienten.
- Zeigen Sie anhand der Formel zur Berechnung der Portefeuillevarianz, dass es im vorliegenden Fall nicht möglich ist, ein risikoloses Portefeuille herzustellen, wenn Leerverkäufe der beiden Wertpapiere verboten sind.
- Nehmen Sie nun an, dass ein Wertpapier WP₃ mit $\mu_3 = 10$ und $\sigma_3^2 = 58$ am Markt existiert, das mit WP₂ unkorreliert ist. WP₁ kann nun nicht mehr ins Portefeuille aufgenommen werden. Der Investor möchte ein Portefeuille bestehend aus WP₂ und WP₃ mit einer Portefeuillevarianz von 33 halten. Berechnen Sie die möglichen Kombinationen der beiden Wertpapiere WP₂ und WP₃, die eine Varianz in dieser Höhe erzeugen!
Falls es mehrere mögliche Kombinationen gibt: Stellt eine der Kombinationen ein ineffizientes Portefeuille dar?

Aufgabe 8.4

Ein risikoaverser (μ, σ) -Entscheider sucht nach effizienten Portefeuillemischungen für drei Wertpapiere mit folgenden Erwartungswerten μ und Standardabweichungen σ der Renditen:

Wertpapier	μ	σ
WP1	8 %	10 %
WP2	12 %	20 %
WP3	20 %	30 %

- Betrachten Sie nur WP1 und WP2 und nehmen Sie an, die beiden Wertpapiere seien unkorreliert. Stellen Sie alle Wertpapiermischungen, bei denen kein Wertpapier ein negatives Gewicht erhält, im (μ, σ) -Diagramm dar. Wie viele Portefeuilles mit einer Standardabweichung der Rendite in Höhe von 10 % gibt es? Sind sie effizient?
- Betrachten Sie nur WP2 und WP3 und nehmen Sie an, die beiden Wertpapiere seien +1 korreliert. Stellen Sie alle Wertpapiermischungen, bei denen kein Wertpapier ein negatives Gewicht erhält, im (μ, σ) -Diagramm dar. Gibt es ineffiziente Portefeuilles?

- c) Betrachten Sie nur WP1 und WP3 und nehmen Sie an, die beiden Wertpapiere seien -1 korreliert. Stellen Sie alle Wertpapiermischungen, bei denen kein Wertpapier ein negatives Gewicht erhält, im (μ, σ) -Diagramm dar. Kennzeichnen Sie die ineffizienten und die effizienten Portefeuilles.
- d) Betrachten Sie nun alle drei Wertpapiere. Die Korrelationen seien $+0.5$ zwischen WP1 und WP2, $+0.8$ zwischen WP2 und WP3 und $+0.2$ zwischen WP1 und WP3. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung der Rendite jeweils für folgende Mischungen: grafisch.
- (i) WP1 und WP2 werden zu gleichen Teilen gemischt
 - (ii) WP2 und WP3 werden zu gleichen Teilen gemischt
 - (iii) Die Mischungen aus (i) und (ii) werden zu gleichen Teilen gemischt. Interpretieren Sie die Ergebnisse und verdeutlichen Sie sie

Aufgabe 8.5

Betrachten Sie ein Entscheidungsproblem der Risikomischung mit vier Wertpapieren WP1, WP2, WP3 und WP4, von denen WP2, WP3 sowie WP4 riskant sind, WP1 hingegen eine risikolose Geldanlagemöglichkeit (zu 4 %) darstellt. WP2, WP3 und WP4 seien alle miteinander unkorreliert. Gehen Sie weiterhin davon aus, das Tangentialportefeuille beinhalte 20 % von WP2, 50 % von WP3 und 30 % von WP4 und habe eine erwartete Rendite von 12 % sowie eine Standardabweichung der Rendite von 16 %.

- a) Welche Anteile seines Budgets investiert der Entscheider in die Wertpapiere 1 bis 4, wenn er eine effiziente Mischung mit einer erwarteten Rendite von 20 % erreichen will?
- b) Ist eine Mischung mit erwarteter Rendite von 5 % und Standardabweichung 10% effizient?

8.9 Lösungshinweise

Aufgabe 8.1

a) 100 % in WP₁: $E[U(x)] = 0,6618$; 100 % in WP₂: $E[U(x)] = 0,6512$; je 50 % in WP₁, WP₂: $E[U(x)] = 0,6637$. --- b) Korrelation = 0,5774; Bessere Mischung z. B. WP₁:WP₂ = 70:30 mit $E[U(x)] = 0,6650$. --- c) Wiederholung von a): je 50 % in WP₁, WP₂ $\rightarrow E[U(x)] = 0,6761$, sonst kein Unterschied. Wiederholung von b): Korrelation = -0,9623; bessere Mischung z. B. 60:40 mit $E[U(x)] = 0,6770$.

Aufgabe 8.2

a) $y \cdot V_0$ = Geldbetrag, der in die Aktien investiert wird; $(1-y) \cdot V_0$ wird in die Anleihe investiert. Endvermögen des Investors: $V_1 = y \cdot V_0 \cdot (1+r) + (1-y) \cdot V_0 \cdot (1+i) = V_0 \cdot (1+i) + y \cdot V_0 \cdot (r-i)$. $E(V_1) = V_0 \cdot (1+i) + y \cdot V_0 \cdot (\mu - i)$, $\text{Var}(V_1) = (y \cdot V_0)^2 \cdot \sigma^2$. Optimierungsansatz: Max $S\ddot{A}(V_1)$ über $y \cdot V_0$. --- b) Bedingung erster Ordnung: $dS\ddot{A}(V_1)/d(y \cdot V_0) = 0 \Leftrightarrow y \cdot V_0 = (\mu - i)/(a \cdot \sigma^2)$.

Aufgabe 8.3

a) $\mu_1=4$, $\sigma_1=4,32$; $\mu_2=6$, $\sigma_2=6,48$. --- **b)** $\sigma_{12}=28$, $\rho=1$. --- **c)** Mit $x_{PF}=q \cdot x_1 + (1-q) \cdot x_2$ gilt: $\text{Var}(x_{PF})=0$ für $q=3$, damit $1-q=-2$. --- **d)** Mit $x_{PF}=q \cdot x_1 + (1-q) \cdot x_2$ gibt es zwei Lösungen für q : $q=0,2861$ und $q=0,8740$. Die erste Lösung ist ineffizient.

Aufgabe 8.4

a) Zwei Mischungen: 100 % in WP_1 sowie 60 % in WP_1 und 40 % in WP_2 . Nur die zweite Mischung ist effizient. --- **b)** Es gibt keine ineffizienten Portefeuilles. --- **c)** Mischung 75 % in WP_1 und 25 % in WP_3 führt zu $\mu = 0,15$ und $\sigma = 0$. Alle Mischungen mit $\mu < 0,15$ sind ineffizient. --- **d)** i): $\mu = 0,10$, $\sigma = 0,1323$; ii): $\mu = 0,16$, $\sigma = 0,2377$; iii): $\mu = 0,13$, $\sigma = 0,1573$.

Aufgabe 8.5

a) Das Doppelte des Budgets wird in das Tangentialportefeuille investiert (davon 20 % in WP_2 , 50 % in WP_3 und 30 % in WP_4), diese Anlage wird durch Kreditaufnahme in Höhe des Budgets finanziert. --- **b)** Nein, sie ist ineffizient.

Literatur

- Bitz, M.: Die Strukturierung ökonomischer Entscheidungsmodelle. Gabler, Wiesbaden (1977)
- Brealey, R.A., Myers, S.C., Allen, F.: Principles of Corporate Finance, 11. Aufl. McGraw-Hill, New York (2013)
- Copeland, T.E., Weston, J.F., Shastri, K.: Financial Theory and Corporate Policy, 4. Aufl. Addison-Wesley, Reading (2013)
- Dinkelbach, W., Kleine, A.: Elemente einer betriebswirtschaftlichen Entscheidungslehre. Springer, Berlin (1996)
- Elton, E.J., Gruber, M.J.: Modern Portfolio Theory and Investment Analysis, 5. Aufl. Wiley, New York (1995)
- Franke, G., Hax, H.: Finanzwirtschaft des Unternehmens und Kapitalmarkt, 6. Aufl. Springer, Berlin (2009)
- Hax, H.: Investitionstheorie, 5. Aufl. Physica, Würzburg (1985)
- Ingersoll, J.E.: Theory of Financial Decision Making. Rowman & Littlefield, Totowa (1987)
- Kruschwitz, L.: Investitionsrechnung, 12. Aufl. Springer Gabler, München (2009)
- Laux, H., Schabel, M.M.: Subjektive Investitionsbewertung, Marktbewertung und Risikoteilung. Springer, Berlin (2009)
- Markowitz, H.M.: Portfolio selection. J. Finance **7**, 77–91 (1952)
- Markowitz, H.M.: Portfolio Selection. Wiley, New York (1959)
- Riess, M.: Effizienzkonzepte und nutzentheoretische Ansätze zur Lösung stochastischer Entscheidungsmodelle. Physica, Heidelberg (1996)
- Rudolph, B.: Zur Theorie des Kapitalmarktes – Grundlagen, Erweiterungen und Anwendungsbereiche des „Capital Asset Pricing Model (CAPM)“. Z. Betriebswirtsch. **49**, 1034–1067 (1979)

- Schmidt, R.H., Terberger, E.: Grundzüge der Investitions- und Finanzierungstheorie, 4. Aufl. Gabler, Wiesbaden (1997)
- Sharpe, W.F., Alexander, G.J., Bailey, J.W.: Investments, 6. Aufl. MIT Press, Englewood Cliffs (1999)
- Shleifer, A.: Inefficient Markets: An Introduction of Behavioral Finance. Oxford University Press, Oxford (2000)
- Single, G.L.: Hedge-Fonds – Anlageform der Zukunft. Z. das gesamte Kreditwesen **26**, 240–244 (2001)
- Tobin, J.: Liquidity preference as behavior towards risk. Rev. Econ. Stud. **25**, 65–86 (1958)

Flexible Planung und Optimierung von Entscheidungsspielräumen

9

9.1 Problemstellung und Aufbau

In der bisherigen Analyse von Entscheidungsproblemen bei Risiko wurden die nachfolgenden Entscheidungen zukünftiger Zeitpunkte nicht explizit berücksichtigt. Die Trennung der *gegenwärtigen* Entscheidungen von zukünftigen mag sinnvoll erscheinen, weil es im Grunde (sofern von Aspekten wie „Neugierde“ und „Vorfreude“ abgesehen wird) zunächst nur darum geht, welche Maßnahmen gegenwärtig zu ergreifen sind; über die Aktionen zukünftiger Zeitpunkte kann immer noch dann entschieden werden, wenn diese Aktionen zur Auswahl stehen.

Zwischen den Entscheidungen über Aktionen zu verschiedenen Zeitpunkten bestehen jedoch im Allgemeinen enge (intertemporale) Interdependenzen aufgrund von Restriktionsverbund, Erfolgsverbund, Risiko- und Bewertungsverbund, sodass die jetzigen Aktionen nicht isoliert von den zukünftigen optimal bestimmt werden können. Andererseits sind in Risikosituationen die zukünftigen Aktionsmöglichkeiten sowie die zukünftigen Ausprägungen entscheidungsrelevanter Daten (die „Umweltentwicklung“) nicht mit Sicherheit bekannt. Da sich der Informationsstand im Zeitablauf verbessert, erscheint es sinnvoll, über die Maßnahmen eines zukünftigen Zeitpunkts letztlich erst dann zu entscheiden, wenn dieser Zeitpunkt eingetreten ist. Es können dann alle relevanten Informationen berücksichtigt werden, die bis zu diesem Zeitpunkt eingehen. Trotzdem darf nicht auf die Planung zukünftiger Maßnahmen verzichtet werden, da sonst die Basis für die Beurteilung *gegenwärtiger* Maßnahmen fehlt.

Einen Ausweg aus diesem Dilemma bietet das *Konzept der flexiblen Planung*, bei dem für zukünftige Zeitpunkte bzw. Perioden *bedingte* (oder *Eventual-*) Pläne erstellt werden. Welcher dieser Pläne realisiert wird, hängt dann von der eintretenden Umweltentwicklung ab. Im vorliegenden Kapitel wird die Bedeutung der flexiblen Planung

als Entscheidungsprinzip gewürdigt und es werden Modelle der flexiblen Planung dargestellt und verglichen.

In Abschn. 9.2 werden zunächst die Ursachen für Interdependenzen zwischen den Entscheidungen verschiedener Zeitpunkte erläutert und verdeutlicht, dass aufgrund dieser (intertemporalen) Interdependenzen die gegenwärtigen Aktionen nur in Verbindung mit den zukünftigen Maßnahmen beurteilt und optimal bestimmt werden können. Da die zukünftigen Aktionsmöglichkeiten und die Umweltentwicklung ungewiss sind, können die zukünftigen Maßnahmen allerdings nur in Form bedingter Pläne, d. h. im Rahmen flexibler Planung, antizipiert werden. Nach Konkretisierung des Entscheidungsproblems kann die grundsätzliche Bedeutung der flexiblen Planung anschaulich gewürdigt werden.

Darauf aufbauend werden in den Abschn. 9.3 und 9.4 Modelle der flexiblen Planung diskutiert. In Abschn. 9.5 werden mithilfe eines Beispiels Konzept und Implikationen der flexiblen Planung verdeutlicht.

In Abschn. 9.6 werden Implikationen der flexiblen Planung mit Implikationen der („rollenden“) „starrten“ Planung verglichen. Dabei zeigt sich, dass auch bei flexibler Planung im Zeitablauf ständig Neuplanungen bzw. Planrevisionen erforderlich sind („rollende“ flexible Planung). Abschließend wird verdeutlicht, wie Handlungsspielräume als Optionen für zukünftige Maßnahmen interpretiert werden können und welche Bedeutung das Konzept der flexiblen Planung für die Gestaltung und Nutzung von Handlungsspielräumen hat.

9.2 Interdependenzen zwischen Maßnahmen zu verschiedenen Zeitpunkten und flexible Planung als Koordinationskonzept

9.2.1 Interdependenzen und Koordinationsbedarf

Zwischen den Maßnahmen können, wie in Kap. 1, Abschn. 1.2.5, erläutert, aus folgenden Gründen Interdependenzen bestehen, die sich hier auf verschiedene Zeitpunkte beziehen:

- a) Die zu einem Zeitpunkt durchgeführten Maßnahmen beeinflussen den *Handlungsspielraum* für spätere Aktionen; es besteht *Restriktionsverbund*. So hängen z. B. die Produktionsmöglichkeiten späterer Zeitpunkte davon ab, welche Anlagen zu den vorhergehenden Zeitpunkten installiert werden. Das zukünftige Absatzpotenzial eines Unternehmens wird u. a. durch die jetzigen Werbemaßnahmen bestimmt. Die gegenwärtigen Investitions- und Finanzierungsmaßnahmen beeinflussen den zukünftigen Finanzierungsspielraum.
- b) Wie weit der *Erfolg* (allgemein: die Ausprägung der Zielgröße) steigt bzw. sinkt, wenn zu einem Zeitpunkt bestimmte Maßnahmen durchgeführt werden, hängt in der Regel auch von den Aktionen anderer Zeitpunkte ab; es besteht *Erfolgsverbund*.

Der Erfolg wird also nicht allein von Einzelmaßnahmen bestimmt, sondern von der Gesamtheit aller Aktionen, die im Zeitablauf realisiert werden. So hängen etwa die Erfolge zukünftiger Werbemaßnahmen im Allgemeinen (auch) davon ab, welche Werbeaktivitäten gegenwärtig vorgenommen werden. Die Einzahlungsüberschüsse zukünftiger Investitionen werden u. a. dadurch bestimmt, welche Investitionen zu den vorhergehenden Zeitpunkten durchgeführt werden.

- c) Sofern der Entscheider nicht risikoneutral ist, gibt es (in Risikosituationen) grundsätzlich eine dritte Ursache für Interdependenzen zwischen den Maßnahmen zu verschiedenen Zeitpunkten, den *Risikoverbund*. Wie sich die Maßnahmen eines Zeitpunkts auf das „Gesamtrisiko“ auswirken, hängt davon ab, welche Risiken den Maßnahmen anderer Zeitpunkte entsprechen und welcher Risikoverbund zwischen den verschiedenen Maßnahmen besteht.
- d) Auch wenn kein Risikoverbund existiert, ergeben sich in Risikosituationen grundsätzlich Interdependenzen aufgrund eines Bewertungsverbundes; wie die Risiken der Maßnahmen eines Zeitpunkts bewertet werden, hängt von den Risiken der Maßnahmen zu anderen Zeitpunkten ab.

Die unter a) bis d) beschriebenen intertemporalen Interdependenzen existieren in der Realität sehr häufig, vor allem auch im betriebswirtschaftlichen Bereich. Bei intertemporalen Interdependenzen können die gegenwärtigen Aktionen (d. h. die Maßnahmen für den Zeitpunkt 0) nicht isoliert von den zukünftigen Aktionen optimal bestimmt werden. Die zukünftigen Aktionen beeinflussen die jetzigen (und umgekehrt); es besteht *Koordinationsbedarf*.

Zu a): Die gegenwärtigen Maßnahmen beeinflussen die Entscheidungsspielräume zukünftiger Zeitpunkte: Ob bestimmte Maßnahmen „vorteilhaft“ oder „nachteilig“ sind, hängt auch davon ab, ob sie die zukünftigen Entscheidungsspielräume in „vorteilhafter“ oder in „nachteiliger“ Weise beeinflussen. Das kann aber nur in der Weise festgestellt werden, dass im Voraus geprüft wird, welcher Gebrauch jeweils von den zukünftigen Entscheidungsspielräumen gemacht wird und welche Erfolge damit verbunden sind. Bei der Planung der jetzigen Aktionen müssen daher zugleich auch die zukünftigen Aktionen in das Kalkül einbezogen werden. So muss z. B. im Voraus die zukünftige Verwendung einer Maschine geplant werden, damit festgestellt werden kann, ob ihr Kauf vorteilhaft ist oder nicht.

Zu b): Die Erfolge der Einzelmaßnahmen sind nicht additiv: Der einer Kombination von Einzelmaßnahmen entsprechende (Gesamt-) Erfolg kann wesentlich höher oder niedriger sein als die Summe der Erfolge der Einzelmaßnahmen bei jeweils isolierter Durchführung. So mögen z. B. jetzige und zukünftige Werbemaßnahmen, jeweils isoliert durchgeführt, wenig wirksam sein, während sie in Kombination miteinander zu einem großen Erfolg führen (können). Entsprechend hängt der Einfluss gegenwärtige Maßnahmen auf den (Gesamt-)Erfolg und somit auch die Vorteilhaftigkeit diese Maßnahmen von den zukünftigen Aktionen ab. Dies ist ein weiterer Grund dafür, dass die gegenwärtigen Aktionen nur gemeinsam mit den zukünftigen Aktionen optimal ermittelt werden können.

Zu c) und d): Ob bestimmte gegenwärtige Maßnahmen vorteilhaft sind, hängt auch davon ab, welcher Risiko- und Bewertungsverband zwischen den Erfolgen dieser Maßnahmen und den Erfolgen der zukünftigen Aktionen besteht: Das Optimum kann wieder nur erreicht werden, indem die gegenwärtigen Maßnahmen mit den zukünftigen abgestimmt (koordiniert) werden.

Wenn derartige Abhängigkeiten zwischen mehreren zeitlich aufeinanderfolgenden Entscheidungen bestehen, liegt eine sogenannte „Entscheidungssequenz“ vor. Zur expliziten Erfassung der Interdependenzen sind mehrstufige (sequenzielle) Entscheidungsmodelle erforderlich, die mit den jetzigen Maßnahmen (mehr oder weniger grob) zugleich auch die Aktionen für spätere Zeitpunkte festlegen. Im Folgenden sollen der Aufbau und die Struktur solcher Modelle für Risikosituationen beschrieben werden.

9.2.2 Konkretisierung des Entscheidungsproblems

Zur anschaulichen Würdigung des Konzeptes der flexiblen Planung soll das Entscheidungsproblem wie folgt konkretisiert werden.

1. Der Beginn der Periode t wird als Zeitpunkt $t-1$ bezeichnet, das Ende der Periode als Zeitpunkt t . Das Ende der letzten Periode wird mit T ($T \geq 2$) bezeichnet. Zu jedem Entscheidungszeitpunkt t ($t=0,1,\dots,T-1$) ist mit Sicherheit bekannt, welche Aktionen jeweils möglich sind. Unter der Aktion eines Zeitpunkts wird die Gesamtheit der Maßnahmen verstanden, die zu diesem Zeitpunkt ergriffen werden. Die Menge der Aktionsmöglichkeiten eines Zeitpunkts wird als *Entscheidungsspielraum* (oder *Aktionsraum*) dieses Zeitpunkts bezeichnet.
2. Der Entscheidungsspielraum zum Zeitpunkt 0 hängt von der zu diesem Zeitpunkt gegebenen Umwelt (und im Allgemeinen auch von Maßnahmen vor diesem Zeitpunkt) ab. Der Entscheidungsspielraum zum Zeitpunkt t ($t=1,2,\dots,T-1$) hängt von den Aktionen ab, die zu den Zeitpunkten $0,\dots,t-1$ realisiert werden, und von der bis zum Zeitpunkt t eintretenden Umweltfolge. Dabei wird unter der Umwelt eines Zeitpunkts die zu diesem Zeitpunkt eintretende Konstellation von entscheidungsrelevanten Daten verstanden, die durch den Entscheider nicht beeinflusst werden können bzw. sollen. Die zum Zeitpunkt 0 gegebene Umwelt bildet den Ausgangszustand zum Zeitpunkt 0, der mit S_0 bezeichnet wird. Ein Umweltzustand zu einem späteren Zeitpunkt t wird mit $S_{t,s}$ bezeichnet. Er ist das Ende einer Umweltfolge über die Zeitpunkte $0,1,2,\dots,t$. Es wird davon ausgegangen, dass jedem Zustand $S_{t,s}$ eine eindeutige Umweltfolge bis t entspricht, dass also unterschiedliche Umweltfolgen nie in demselben Zustand enden. Der Zustandsbaum ist dann ein „verbundener Graph ohne Rundwege“ und der Zustand $S_{t,s}$ bezeichnet gleichzeitig die Umweltfolge, die in diesem Zustand endet. Gleichzeitig existiert zu jedem Umweltzustand $S_{t,s}$ nur ein Umweltzustand der Periode $t-1$, der dem Zustand $S_{t,s}$ unmittelbar vorausgeht; wir bezeichnen diesen Zustand mit $S_{t-1}(S_{t,s})$.

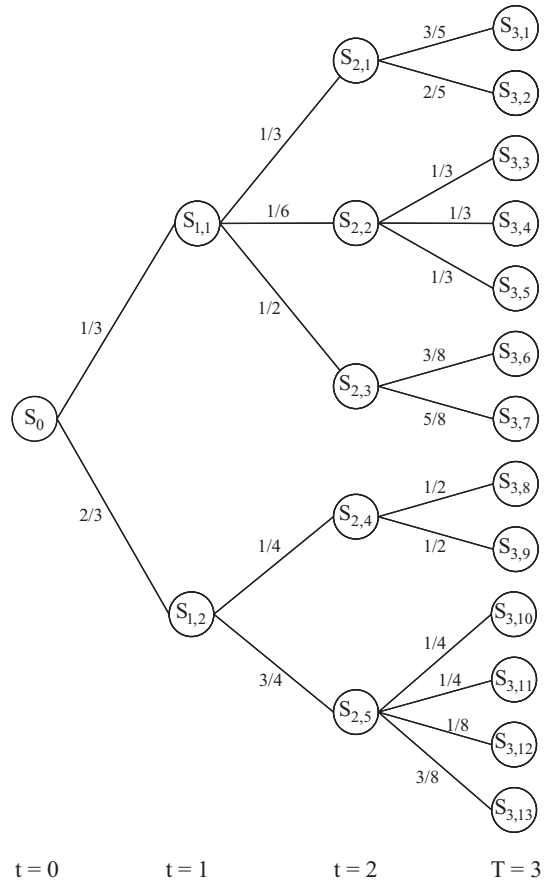
3. Das Endergebnis der gesamten Entscheidungssequenz zum Zeitpunkt T (etwa das Vermögen zu diesem Zeitpunkt) hängt davon ab, welche Aktionen zu den Zeitpunkten $0, 1, \dots, T-1$ realisiert werden und welche Umweltentwicklung bis zum Zeitpunkt T bzw. welcher Umweltzustand $S_{T,s}$ eintritt.
4. Der Entscheider kennt zu Beginn des Planungszeitraums die Umwelt dieses Zeitpunkts bzw. den entsprechenden Umweltzustand S_0 . Zu einem späteren Zeitpunkt t kennt er die Umweltentwicklung bis t (den Umweltzustand $S_{t,s}$). Jedoch ist noch ungewiss, welche Umweltentwicklung in den nachfolgenden Zeitpunkten $t+1, t+2, \dots, T$ eintreten wird. Der Investor verfügt jeweils über subjektive Wahrscheinlichkeiten für die denkbaren Umweltentwicklungen. Dabei hängt das Wahrscheinlichkeitsurteil zum Zeitpunkt t ($t = 1, 2, \dots, T-1$) von der Umweltfolge bis zu diesem Zeitpunkt ab.

Die Erwartungsstruktur hinsichtlich der möglichen Entwicklungen der Umwelt kann in anschaulicher Weise mithilfe eines Zustandsbaumes dargestellt werden, der für die flexible Planung von grundlegender Bedeutung ist. Die Abb. 9.1 zeigt einen sehr einfachen Zustandsbaum. Die Knoten repräsentieren die zu den verschiedenen Zeitpunkten möglichen Zustände.

Der Knoten für $t=0$ kennzeichnet den Ausgangszustand S_0 . Die von einem Knoten für den Zeitpunkt t ($t=0, 1, \dots, T-1$) ausgehenden Kanten repräsentieren die Übergänge zu den Zuständen, die zum Zeitpunkt $t+1$ noch eintreten können, wenn zum Zeitpunkt t der diesem Knoten entsprechende Zustand eintritt. Jeder Kante ist eine Übergangswahrscheinlichkeit $w(S_{t,s} | S_{t-1}(S_{t,s})) > 0$ zugeordnet, die angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Zustand $S_{t,s}$ eintritt, nachdem zuvor der vorausgehende Zustand $S_{t-1}(S_{t,s})$ eingetreten ist. Für den Zustandsbaum in Abb. 9.1 ist z. B. die Wahrscheinlichkeit für den Zustand $S_{2,1}$ zum Zeitpunkt 2 unter der Bedingung, dass zum Zeitpunkt 1 der Zustand $S_{1,1}$ ($= S_1(S_{2,1})$) eingetreten ist, gleich $1/3$. Mithilfe der den Kanten zugeordneten Wahrscheinlichkeiten können die unbedingten Eintrittswahrscheinlichkeiten zukünftiger Zustände berechnet werden. Dabei wird deutlich, wie sich diese Wahrscheinlichkeiten im Zeitablauf ändern können. Zur Verdeutlichung betrachten wir erneut den Zustandsbaum in Abb. 9.1. Zum Zeitpunkt 0 ist die Wahrscheinlichkeit für den Zustand $S_{1,1}$ (bzw. $S_{1,2}$) gleich $1/3$ (bzw. $2/3$). Die Wahrscheinlichkeit eines Zustandes für den Zeitpunkt 2 oder 3 ermittelt sich als Produkt derjenigen Wahrscheinlichkeiten, die dem Kantenzug vom Zustand S_0 zum jeweiligen Zustand $S_{t,s}$ zugeordnet sind. z. B. ist die (unbedingte) Wahrscheinlichkeit für den Zustand $S_{3,13}$ zum Zeitpunkt 0 gleich $2/3 \cdot 3/4 \cdot 3/8 = 3/16$.

Zum Zeitpunkt 1 sind die Wahrscheinlichkeiten eines Zustandes für den Zeitpunkt 2 oder 3 davon abhängig, ob der Zustand $S_{1,1}$ oder $S_{1,2}$ eintritt. Tritt der Zustand $S_{1,2}$ ein, haben die Zustände $S_{2,1}$, $S_{2,2}$ und $S_{2,3}$ wie auch alle ihre Folgezustände $S_{3,1}$ bis $S_{3,7}$ eine Wahrscheinlichkeit von null. Lediglich die Zustände $S_{2,4}$ und $S_{2,5}$ sowie deren Folgezustände $S_{3,8}$ bis $S_{3,13}$ sind noch möglich. Der Zustand $S_{2,4}$ (bzw. $S_{2,5}$) hat dann die Wahrscheinlichkeit $1/4$ (bzw. $3/4$). Die Wahrscheinlichkeit für einen Zustand $S_{3,s}$,

Abb. 9.1 Beispiel eines Zustandsbaumes ($T=3$)



$s \in \{8, \dots, 13\}$, ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten, die dem Kantenzug vom Zustand $S_{1,2}$ zum jeweiligen Zustand $S_{3,s}$ zugeordnet sind. z. B. ist die Wahrscheinlichkeit für Zustand $S_{3,13}$ nun nicht mehr $3/16$ (siehe oben), sondern gleich $3/4 \cdot 3/8 = 9/32 > 3/16$.

Zum Zeitpunkt 2 sind die Eintrittswahrscheinlichkeiten für die Zustände des Zeitpunkts 3 davon abhängig, welcher der Zustände $S_{2,1}$ bis $S_{2,5}$ eintritt. Tritt z. B. Zustand $S_{2,5}$ ein, so sind nur noch die Zustände $S_{3,10}$ bis $S_{3,13}$ möglich. Zustand $S_{3,13}$ hat dann die Wahrscheinlichkeit $3/8 > 3/16$.

9.2.3 Konzept und Bedeutung der flexiblen Planung

Im Rahmen des beschriebenen Entscheidungsproblems beeinflussen die Aktionen des Zeitpunkts 0 nicht unmittelbar das Endergebnis der gesamten Entscheidungsfolge, sondern mittelbar in Verbindung mit den zukünftigen Aktionen; die gegenwärtigen Aktionen können nur gemeinsam mit den zukünftigen (Folge-) Aktionen optimal bestimmt werden.

Wären die Umweltentwicklung sowie neben den gegenwärtigen auch alle zukünftigen Aktionsmöglichkeiten mit Sicherheit bekannt, so könnten alle zukünftigen Aktionen endgültig und unwiderruflich festgelegt werden; es könnten dann keine Ereignisse eintreten, die eine Revision der Pläne erforderlich machen. In Risikosituationen bestehen jedoch zumindest mehrwertige Erwartungen über die Umweltentwicklung, wobei sich, wie gerade gezeigt, grundsätzlich die Wahrscheinlichkeiten für die weiteren Entwicklungen der Umwelt im Zeitablauf je nach den zugehenden Informationen über die bisherige Umweltentwicklung ändern. (z. B. erhält der Entscheider Informationen über die Entwicklung der Preise seiner Erzeugnisse, über die Anschaffungsauszahlungen für Investitionsprojekte, die Entwicklung des Kapitalmarktes usw.)

Da in Zukunft weitere Informationen zugehen, ist es nicht sinnvoll, zukünftige Aktionen vorher schon endgültig festzulegen. Über die zu einem zukünftigen Zeitpunkt zu ergreifende Aktion sollte erst dann definitiv entschieden werden, wenn dieser Zeitpunkt tatsächlich eingetreten ist. Nur dann können alle Informationen berücksichtigt werden, die bis dahin vorliegen. Trotzdem darf nicht auf die Planung zukünftiger Maßnahmen verzichtet werden, da sonst die Voraussetzung für die optimale Entscheidung über die Maßnahmen zu Beginn des Planungszeitraums fehlt.

Einen Lösungsweg bietet die *flexible Planung*, bei der nur die zu Beginn des Planungszeitraums zu ergreifende Aktion endgültig festgelegt wird. Simultan damit wird für jeden zukünftigen Aktionszeitpunkt ein System von Eventualplänen erstellt, wobei die intertemporalen Interdependenzen zwischen den Aktionen berücksichtigt werden. Welcher Plan zu einem zukünftigen Zeitpunkt t tatsächlich realisiert (welche Aktion dann also gewählt) wird, hängt von der Umweltentwicklung ab, die bis zu diesem Zeitpunkt eintritt.

Sofern keine Vereinfachung erfolgt, wird die flexible Planung technisch in der Weise vorgenommen, dass jedem Knoten des Zustandsbaumes ein optimaler Teilplan zugeordnet wird. Die optimale Aktion für den Zeitpunkt 0 wird dabei ermittelt unter Antizipation der in Zukunft möglichen Umweltzustände und den in diesen Zuständen optimalen (Folge-) Aktionen. Die Zuordnung von optimalen Teilplänen zu den künftigen Zuständen dient primär nicht der Festlegung *künftiger* Entscheidungen, sondern dazu, eine möglichst gute Entscheidung über die Aktion *zu Beginn des Planungszeitraums* (dem Zeitpunkt 0) zu treffen: Die Erstellung von Eventualplänen ermöglicht die Erfassung temporaler Interdependenzen bei mehrwertigen Erwartungen über die zukünftige Umweltentwicklung. Später werden dann die Eventualpläne realisiert, die der im Zeitablauf eintretenden Zustandsfolge entsprechen, es sei denn, die Eventualpläne erscheinen im Lichte zwischenzeitlich zugegangener Informationen nicht mehr optimal.

Flexible Planung führt zu einem gegenwärtigen Aktionsprogramm, das einen optimalen (nicht notwendig maximalen) Spielraum für zukünftige Anpassungen an die möglichen Umweltentwicklungen offen lässt bzw. erzeugt. Dies liegt daran, dass bei der Formulierung der Eventualentscheidungen schon berücksichtigt wird, welche zukünftigen Entscheidungsspielräume bestehen oder neu geschaffen werden und welcher Gebrauch jeweils davon gemacht wird.

Im Folgenden werden verschiedene Verfahren der flexiblen Planung dargestellt. Die Modelle beruhen auf der Voraussetzung, dass der Entscheider zu jedem Zeitpunkt t den eingetretenen Umweltzustand und die Umweltentwicklung bis dahin kennt. Es wird nicht diskutiert, wie bei Unkenntnis darüber der optimale Informationsstand ermittelt werden kann. Ebenso wenig wird das Problem der Beschaffung von Informationen zur Verbesserung des Wahrscheinlichkeitsurteils über zukünftige Umweltentwicklungen untersucht. (Zur Bestimmung des optimalen Informationsstandes vgl. Kap. 10 und speziell im Rahmen flexibler Investitionsplanung Laux 1971a, S. 83–85.)

9.3 Flexible Planung auf der Basis eines Entscheidungsbaumes

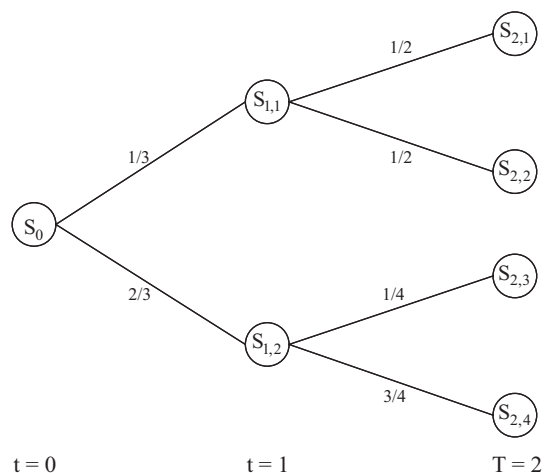
9.3.1 Entscheidungsbaum

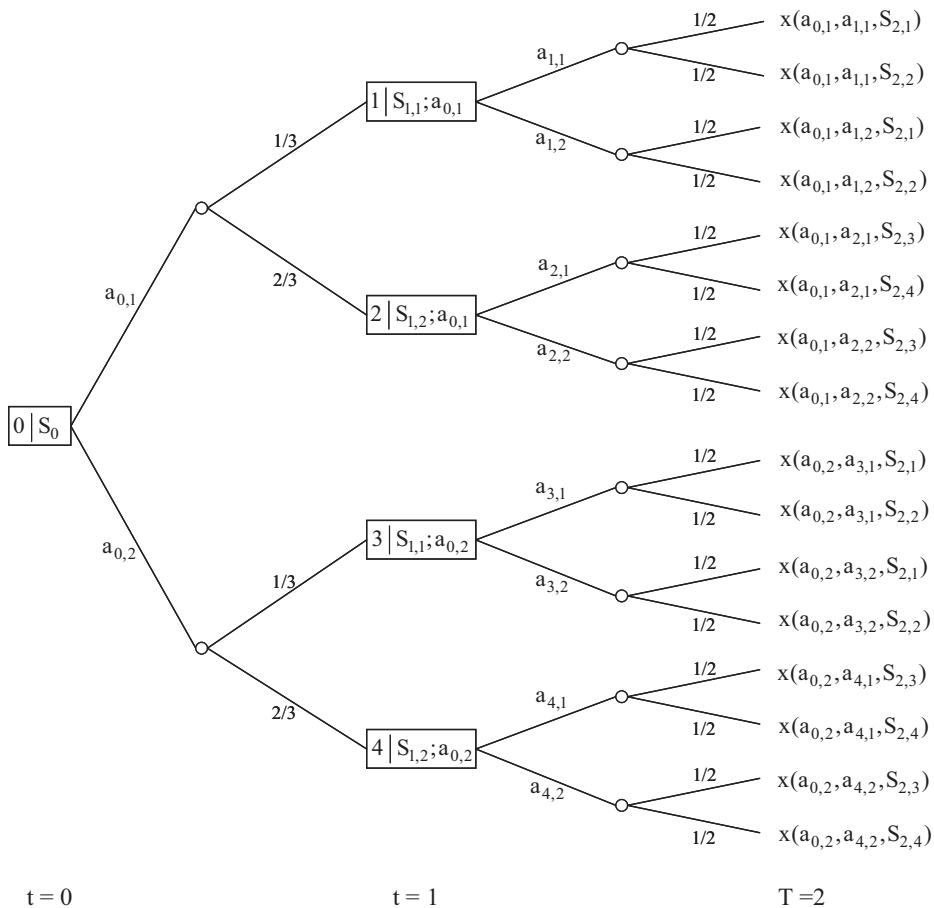
In der Literatur wird häufig die flexible Planung auf der Basis eines *Entscheidungsbaumes* diskutiert. Der Entscheidungsbaum stellt eine Erweiterung des Zustandsbaumes dar und kennzeichnet nicht nur die Erwartungsstruktur des Entscheiders über die möglichen Umweltentwicklungen, sondern auch die in den einzelnen Zuständen möglichen Aktionen sowie die Endergebnisse der möglichen Aktionsfolgen.

Abb. 9.2 und 9.3 dienen zur Veranschaulichung. Abb. 9.2 zeigt einen Zustandsbaum mit je zwei möglichen Umweltentwicklungen in den Perioden 1 und 2.

Kann in jeder sich im Zeitablauf ergebenden Entscheidungssituation jeweils zwischen zwei Handlungsmöglichkeiten gewählt werden, ergibt sich der in Abb. 9.3 dargestellte Entscheidungsbaum.

Abb. 9.2 Beispiel eines Zustandsbaumes ($T = 2$)



**Abb. 9.3** Beispiel eines Entscheidungsbaum ($T=2$)

In einem Entscheidungsbaum gibt es allgemein zwei Arten von Knoten: Die durch Rechtecke gekennzeichneten *Entscheidungsknoten* stellen die möglichen Entscheidungssituationen des jeweiligen Zeitpunkts dar. Die Entscheidungssituation zum Zeitpunkt 0 wird gekennzeichnet durch den Zustand S_0 und durch die Aktionsmöglichkeiten zu diesem Zeitpunkt. Diese Aktionsmöglichkeiten werden mit a bezeichnet und tragen den Index des Entscheidungsknotens sowie einen Laufindex. So ist $a_{0,1}$ die erste von zwei möglichen Aktionen im Entscheidungsknoten 0. Eine Entscheidungssituation zum Zeitpunkt t ($t=1,2,\dots,T-1$) wird durch den Zustand $S_{t,s}$, durch die bis dahin getroffenen Entscheidungen sowie durch die nun bestehenden Aktionsmöglichkeiten charakterisiert. Jeder alternativen Aktionsmöglichkeit in einer Entscheidungssituation entspricht eine von dem entsprechenden Knotenpunkt ausgehende (Aktions-)Kante. Sie führt bei Unsicherheit zu einem Verzweigungsknoten (diese Knoten sind durch kleine Kreise

gekennzeichnet), bei Sicherheit würde sie direkt zu einem Ergebnis oder zu einem weiteren Entscheidungsknoten führen.

Die durch Kreise gekennzeichneten *Verzweigungsknoten* repräsentieren die Unsicherheit hinsichtlich der Umweltentwicklung zum folgenden Zeitpunkt. Die von ihnen ausgehenden (Zustands-)Kanten kennzeichnen den Übergang von einem Umweltzustand zum Zeitpunkt t zu einem Zustand zum Zeitpunkt $t+1$; sie führen in die entsprechenden Entscheidungsknoten zum Zeitpunkt $t+1$. Jeder dieser Kanten wird die gleiche Wahrscheinlichkeit zugeordnet wie der ihr entsprechenden Kante des Zustandsbaumes.

Die Entscheidungssituationen sind im Entscheidungsbaum der Abb. 9.3 vereinfachend von 0 bis 4 nummeriert. Neben der Ziffer für den Entscheidungsknoten werden der Zustand angezeigt, der eingetreten ist, sowie die Entscheidung(en), die zuvor getroffen wurde(n). Zum Zeitpunkt 0 bzw. im Zustand S_0 ist die Entscheidungssituation 0 gegeben, zum Zeitpunkt 1 sind die Entscheidungssituationen 1, 2, 3, und 4 möglich. In der Entscheidungssituation 0 hat der Entscheider die beiden Aktionsmöglichkeiten $a_{0,1}$ und $a_{0,2}$.

9.3.2 Entscheidung auf der Basis der Ergebnismatrix

Es stellt sich nun die Frage, wie der optimale Aktionsplan bestimmt werden kann. Jeder Aktionsplan wird durch eine *Strategie* beschrieben, die angibt, welche Aktion zum Zeitpunkt 0 gewählt wird und welche Aktionen in den nachfolgenden (möglichen) Entscheidungssituationen gewählt werden. Da jeder Entscheidungssituation ein bestimmter Zustand entspricht, wird damit auch jedem Zustand eine besondere Aktion zugeordnet. Das Prinzip der flexiblen Planung findet dadurch Berücksichtigung.

Im Entscheidungsbaum der Abb. 9.3 sind alle möglichen Strategien abgebildet. Eine davon ist die folgende: In Zustand S_0 wird Aktion $a_{0,1}$ gewählt. Falls danach Zustand $S_{1,1}$ eintritt, wird die Aktion $a_{1,1}$ gewählt. Tritt dagegen Zustand $S_{1,2}$ ein, so wird die Aktion $a_{2,2}$ gewählt. Insgesamt beinhaltet der Entscheidungsbaum $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ Strategien.

Jeder Strategie entspricht eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über das Endergebnis. Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen können in einer Ergebnismatrix zusammengestellt werden: In der Vorspalte werden die Strategien dargestellt, in den Kopfzeilen die möglichen Umweltentwicklungen (gekennzeichnet durch die entsprechende Knotenfolge des Zustandsbaumes) und deren Eintrittswahrscheinlichkeiten. Jeder Konstellation von Strategie und Umweltfolge wird das entsprechende Endergebnis zugeordnet. Dem Entscheidungsbaum in Abb. 9.3 entspricht die Ergebnismatrix in Tab. 9.1.

Es zeigt sich, dass auch mehrstufige Entscheidungsprobleme mittels einer Ergebnismatrix dargestellt werden können, sofern die Alternativen als Strategien ermittelt werden. Wenn die Ergebnismatrix bekannt ist, kann die optimale Strategie (die optimale Alternative) so bestimmt werden, wie in Kap. 5, Abschn. 5.3, gezeigt wurde. Jedoch verursacht die explizite Erstellung einer Ergebnismatrix selbst bei relativ einfachen Entscheidungssequenzen einen sehr großen Planungsaufwand. Im Folgenden wird gezeigt,

Tab. 9.1 Ergebnismatrix zum Entscheidungsbaum in Abb. 9.3

	S _{2,1}	S _{2,2}	S _{2,3}	S _{2,4}
	w(S _{2,1}) = 1/6	w(S _{2,2}) = 1/6	w(S _{2,3}) = 1/6	w(S _{2,4}) = 1/2
A ₁ (a _{0,1} ; a _{1,1} ; a _{2,1})	x(a _{0,1} ; a _{1,1} ; S _{2,1})	x(a _{0,1} ; a _{1,1} ; S _{2,2})	x(a _{0,1} ; a _{2,1} ; S _{2,3})	x(a _{0,1} ; a _{2,1} ; S _{2,4})
A ₂ (a _{0,1} ; a _{1,1} ; a _{2,2})	x(a _{0,1} ; a _{1,1} ; S _{2,1})	x(a _{0,1} ; a _{1,1} ; S _{2,2})	x(a _{0,1} ; a _{2,2} ; S _{2,3})	x(a _{0,1} ; a _{2,2} ; S _{2,4})
A ₃ (a _{0,1} ; a _{1,2} ; a _{2,1})	x(a _{0,1} ; a _{1,2} ; S _{2,1})	x(a _{0,1} ; a _{1,2} ; S _{2,2})	x(a _{0,1} ; a _{2,1} ; S _{2,3})	x(a _{0,1} ; a _{2,1} ; S _{2,4})
A ₄ (a _{0,1} ; a _{1,2} ; a _{2,2})	x(a _{0,1} ; a _{1,2} ; S _{2,1})	x(a _{0,1} ; a _{1,2} ; S _{2,2})	x(a _{0,1} ; a _{2,2} ; S _{2,3})	x(a _{0,1} ; a _{2,2} ; S _{2,4})
A ₅ (a _{0,2} ; a _{3,1} ; a _{4,1})	x(a _{0,2} ; a _{3,1} ; S _{2,1})	x(a _{0,2} ; a _{3,1} ; S _{2,2})	x(a _{0,2} ; a _{4,1} ; S _{2,3})	x(a _{0,2} ; a _{4,1} ; S _{2,4})
A ₆ (a _{0,2} ; a _{3,2} ; a _{4,2})	x(a _{0,2} ; a _{3,1} ; S _{2,1})	x(a _{0,2} ; a _{3,1} ; S _{2,2})	x(a _{0,2} ; a _{4,2} ; S _{2,3})	x(a _{0,2} ; a _{4,2} ; S _{2,4})
A ₇ (a _{0,2} ; a _{3,2} ; a _{4,1})	x(a _{0,2} ; a _{3,2} ; S _{2,1})	x(a _{0,2} ; a _{3,2} ; S _{2,2})	x(a _{0,2} ; a _{4,1} ; S _{2,3})	x(a _{0,2} ; a _{4,1} ; S _{2,4})
A ₈ (a _{0,2} ; a _{3,2} ; a _{4,2})	x(a _{0,2} ; a _{3,2} ; S _{2,1})	x(a _{0,2} ; a _{3,2} ; S _{2,2})	x(a _{0,2} ; a _{4,2} ; S _{2,3})	x(a _{0,2} ; a _{4,2} ; S _{2,4})

wie eine optimale Strategie bestimmt werden kann, ohne dass sämtliche Strategien explizit betrachtet werden müssen.

9.3.3 Roll-Back-Verfahren

Auf der Grundlage des Entscheidungsbaumes kann eine optimale Strategie rekursiv auf der Basis einperiodiger Entscheidungsmodelle bestimmt werden (vgl. hierzu auch das Beispiel in Abschn. 9.5.4):

In der *ersten Phase* der Planaufstellung werden die Teilpläne (die optimalen Aktionen) für die letzten Entscheidungsknoten (bzw. die entsprechenden Entscheidungssituationen) bestimmt, d. h. die optimalen Alternativen für den letzten Zeitpunkt ermittelt, zu dem noch Entscheidungen getroffen werden. Allgemein ist dies der Zeitpunkt $T-1$, im Beispiel der Abb. 9.3 entspricht dieser dem Zeitpunkt $t=1$. Da es sich jeweils um eine letzte Entscheidung handelt, kann dieses Problem im Rahmen eines *einstufigen* Entscheidungsmodells gelöst werden. Jedem Entscheidungsknoten wird dann derjenige Erwartungswert des Nutzens des Endergebnisses zugeordnet, der in der betreffenden Entscheidungssituation in Verbindung mit der jeweils optimalen Aktion erzielt wird.

In der *zweiten Phase* der Planaufstellung wird jedem Entscheidungsknoten des vorletzten Entscheidungszeitpunkts, $T-2$, ein optimaler Teilplan (eine optimale Aktion) zugeordnet. Diese Zuordnung kann wiederum im Rahmen *einstufiger* Entscheidungsmodelle vorgenommen werden. Jeder Aktion zum Zeitpunkt $T-2$ entspricht nämlich eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über diejenigen Entscheidungssituationen, die bei ihrer Realisation zum Zeitpunkt $T-1$ noch eintreten können, und die als die möglichen Ergebnisse dieser Aktion interpretiert werden können. Da jedem entsprechenden Entscheidungsknoten bereits in der ersten Phase der Erwartungswert des Nutzens zu geordnet wurde, der in dieser Entscheidungssituation in Verbindung mit der jeweils optimalen Folgeaktion

erzielt wird, erweist sich jeweils diejenige Aktion als optimal, bei der der Erwartungswert über diese Erwartungswerte am größten ist.

In analoger Weise werden in der dritten, vierten und den folgenden Phasen sukzessive den Entscheidungsknoten der betreffenden Zeitpunkte $T-3$, $T-4$, ... optimale Teilpläne zugeordnet. Es handelt sich auch hier jeweils um einstufige Entscheidungsprobleme, bei denen die Ergebnisverteilungen aus den bereits in früheren Phasen bestimmten optimalen Teilplänen für die nachfolgenden Entscheidungsknoten resultieren. In der letzten Phase wird schließlich der optimale Plan für den Entscheidungsknoten zum Zeitpunkt 0 ermittelt. Dieser berücksichtigt alle nachfolgenden Teilpläne über die mit diesen Plänen verbundenen Ergebnisverteilungen.

Nach Abschluss der Planungsphase wird nun zu Beginn des Planungszeitraums (dem Zeitpunkt 0) die Aktion realisiert, die dem Entscheidungsknoten für den Zeitpunkt 0 als optimal zugeordnet wurde. Zum Zeitpunkt 1 wird die Aktion realisiert, die dem Entscheidungsknoten als optimal zugeordnet wurde, der sich nach Eintreten der Umweltentwicklung der ersten Periode einstellt. Zum Zeitpunkt 2 wird die Aktion realisiert, die im Rahmen der Planung für den betreffenden Entscheidungsknoten als optimal erkannt wurde, usw.

Nach dem beschriebenen Planungsverfahren wird das gesamte Entscheidungsproblem in einstufige Teilentscheidungsprobleme zerlegt, die in einer natürlichen Ordnung aufeinanderfolgen. Indem diese Teilentscheidungsprobleme gelöst werden, konstituiert sich auch die Lösung des Gesamtproblems. Das beschriebene Planungsverfahren, bei dem das Entscheidungsproblem gewissermaßen von hinten aufgerollt wird, heißt „Roll-Back“-Verfahren.

Beim „Roll-Back“-Verfahren entsteht im Allgemeinen ein niedrigerer Planungsaufwand als bei expliziter Erstellung einer Ergebnismatrix. In der Ergebnismatrix wird für jede mögliche Strategie die gesamte Wahrscheinlichkeitsverteilung über das Endergebnis dargestellt. Ein solch umfassender Überblick ist aber für die Auswahl der optimalen Strategie gar nicht notwendig. Im Entscheidungsbaum der Abb. 9.3 gibt es z. B. vier Strategien (A_1 bis A_4 in der Ergebnismatrix 9.1), bei denen jeweils die Entscheidungssituation 1 möglich ist. Bei zwei dieser Strategien (A_1 und A_2) wird in der Entscheidungssituation 1 die Aktion $a_{1,1}$ gewählt, bei den beiden anderen Strategien (A_3 und A_4) die Aktion $a_{1,2}$. Um die Frage beantworten zu können, welche Aktion in der Entscheidungssituation 1 gewählt werden soll, müssen die vier Strategien jedoch nicht explizit miteinander verglichen werden. Was immer auch in den anderen Entscheidungssituationen geschieht, in der Entscheidungssituation 1 ist jene der beiden Aktionen ($a_{1,1}$ und $a_{1,2}$) optimal, die zu dem höheren Erwartungswert des Nutzens des Endergebnisses führt. Wird diese Aktion bestimmt, so sinkt die Zahl der ursprünglich betrachteten Strategien von vier auf zwei. Analog wird beim Aufrollen des Entscheidungsproblems die Zahl der für das Optimum in Betracht kommenden Alternativen (Strategien) schrittweise verringert, bis schließlich die optimale Alternative (Strategie) übrig bleibt.

9.4 Zur Flexiblen Planung mithilfe der mathematischen Programmierung (Zustandsbaumverfahren)

In komplexeren Entscheidungssituationen wird der Entscheidungsbaum so umfangreich, dass praktisch nicht mehr damit gearbeitet werden kann. Es besteht jedoch auch die Möglichkeit, unmittelbar auf dem Zustandsbaum aufbauend die optimale Strategie zu bestimmen, ohne sämtliche Strategien explizit zu beschreiben (Zustandsbaumverfahren). Jedem Knoten des Zustandsbaumes werden dabei besondere *Entscheidungsvariablen* zugeordnet; jede Wertekonstellation der einem Knoten zugeordneten Entscheidungsvariablen bezeichnet eine Teilaktion (eine Menge von Einzelmaßnahmen) für den entsprechenden Zustand. Außerdem werden für jeden Knoten besondere *Nebenbedingungen* aufgestellt, die den Aktionsspielraum des zugehörigen Zustandes abgrenzen. Dabei wird berücksichtigt, dass der Aktionsspielraum in einem zukünftigen Zustand $S_{t,s}$ außer von den entsprechenden Datenausprägungen auch von den Maßnahmen abhängt, die in denjenigen Zuständen realisiert werden, die dem Zustand $S_{t,s}$ vorausgehen. Unter bestimmten Voraussetzungen lassen sich diese Nebenbedingungen als lineare Gleichungen oder Ungleichungen formulieren (Hax 1974; Laux 1969; 1971a, b). In Laux und Schabel (2009, Kap. 8) wird gezeigt, wie in einem solchen Modell auch Transaktionen auf dem Kapitalmarkt erfasst werden können.

In der *Zielfunktion* des Modells wird berücksichtigt, dass bei der Planung noch unbekannt ist, welche Folge von Zuständen im Zeitablauf eintreten wird. Hierzu wird für jede mögliche Zustandsfolge (d. h. für jeden Kantenzug des Zustandsbaumes vom Ausgangszustand S_0 zu einem der Endzustände $S_{T,s}$) der Nutzen der Zielgröße(n) in Abhängigkeit von der jeweiligen Zustands- und Aktionsfolge ausgedrückt. Außerdem werden in der Zielfunktion die Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Zustandsfolgen erfasst. Jedem möglichen Aktionsplan entspricht also eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über die Zielgröße(n).

Unter bestimmten Voraussetzungen – z. B. bei Maximierung des Erwartungswertes des Vermögens am Ende des Planungszeitraums (des Endvermögens) – ist die Zielfunktion linear. Sind außerdem auch die Nebenbedingungen linear, kann die optimale Lösung mithilfe der (ganzzahligen) linearen Programmierung ermittelt werden. Diese Rechentechnik setzt jedoch nicht generell voraus, der Entscheider sei risikoneutral: Auch der Fall der Nichtrisikoneutralität lässt sich berücksichtigen. Die dann nichtlineare Nutzenfunktion für das Endvermögen kann durch eine stückweise lineare Funktion approximiert werden.

Allerdings sind auch beim Zustandsbaumverfahren radikale Vereinfachungen unabdingbar, da sonst ein prohibitiv hoher Planungsaufwand entstünde (Kap. 18). Die Zahl der Variablen und Nebenbedingungen des Modells kann auch bei wesentlichen Vereinfachungen so groß werden, dass die optimale Lösung nicht in vertretbarer Rechenzeit gefunden werden kann. Eine Lösungsmöglichkeit kann dann darin bestehen, das Entscheidungsmodell nach dem Prinzip der dynamischen Programmierung zu zerlegen

(Bellman 1957; Hax 1985, S. 176–182, 187–195; Laux 1971a, S. 52–60; Bühler 1981). Jedoch ist zu beachten, dass der eigentliche Aufwand nicht in der Lösung eines konkreten Modells besteht, sondern in der Erforschung der möglichen entscheidungsrelevanten Zusammenhänge und ihrer Abbildung im Modell (in der Zielfunktion und den zustandsbezogenen Entscheidungsvariablen und Nebenbedingungen).

9.5 Beispiel zur flexiblen Planung und deren Implikationen

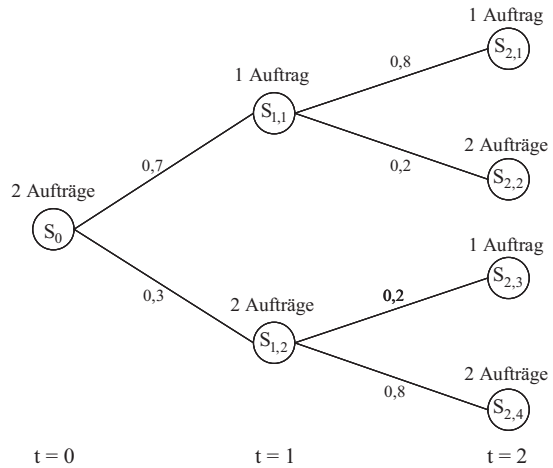
9.5.1 Entscheidungssituation

Mithilfe eines einfachen Beispiels soll das Grundkonzept der flexiblen Planung und Implikationen dieses Konzeptes erläutert werden. Das Beispiel beruht auf folgenden Annahmen:

1. Es besteht die Möglichkeit, zur Erledigung bestimmter Aufträge ein Werk aufzubauen. Die zukünftigen Auftragseingänge sind unsicher.
2. Der Planungszeitraum umfasst drei Perioden ($T=3$).
3. Lediglich zu den Zeitpunkten 0, 1 und 2 (also zu Beginn der Perioden 1, 2 und 3) können Aufträge eingehen. Zu jedem Zeitpunkt muss sofort entschieden werden, welche der Aufträge angenommen werden. Es ist nicht möglich, die Entscheidung aufzuschieben, bis sich der Informationsstand bezüglich weiterer Auftragseingänge verbessert hat. Jeder Auftrag, der zu Beginn einer Periode angenommen wird, muss zum Ende dieser Periode ausgeführt sein.
4. Zur Erledigung der Aufträge werden Produktionsanlagen eines bestimmten Typs benötigt. Mit einer Anlage kann je Periode höchstens ein Auftrag abgewickelt werden. Bisher ist noch keine Anlage vorhanden. Neue Anlagen können zu den Zeitpunkten 0, 1 und 2 angeschafft werden. Jede Anlage kann bis zum Zeitpunkt 3, dem Ende des Planungszeitraums, genutzt werden und ist dann wertlos. Die Anschaffungskosten je Anlage betragen 500 €.
5. Jeder Auftrag bietet einen zahlungswirksamen Deckungsbeitrag (Differenz aus Erlös und variablen Kosten) von 300 €. Der betreffende Überschuss wird zum Ende jener Periode erzielt, zu deren Beginn der Auftrag angenommen wird.
6. Zum Zeitpunkt 0 ist ein Geldvermögen von V_0 vorhanden. Der Investor kann in jeder Periode zum risikolosen Zinssatz r Kapital anlegen und aufnehmen. (Handel mit risikanten Wertpapieren wird nicht berücksichtigt.)
7. Hinsichtlich der Zahl der eingehenden Aufträge hat der Investor Erwartungen, die als *Zustandsbaum* dargestellt werden können (Abb. 9.4).

Zustand (bzw. Zustandsknoten) S_0 kennzeichnet die zu Beginn des Planungszeitraums eingehenden Aufträge. Jeder weitere Zustand kennzeichnet eine bestimmte Auftragsentwicklung. So entspricht zum Beispiel dem Zustand $S_{2,2}$ die Auftragsfolge: 2 Aufträge in Periode 1 (Zeitpunkt 0), 1 Auftrag in Periode 2 (Zeitpunkt 1), 2 Aufträge in Periode 3 (Zeitpunkt 2).

Abb. 9.4 Zustandsbaum für das Beispiel



8. Optimal sei für den Investor die Strategie, bei der der Erwartungswert des Endvermögens (des Vermögens zum Zeitpunkt 3) maximiert wird. Diese Zielfunktion ist sehr einfach. Es geht hier darum, die allgemeine Modellstruktur zu erläutern. In späteren Darstellungen werden realistischere Zielfunktionen erfasst (Kap. 15).

9.5.2 Entscheidungsbaum

Die optimale Strategie des Investors kann auf der Basis eines Entscheidungsbaumes bestimmt werden, in dem nicht nur die möglichen Folgen von Auftragseingängen und die stochastischen Beziehungen zwischen den Auftragseingängen aufeinanderfolgender Zeitpunkte dargestellt sind, sondern auch mögliche Aktionsstrategien. Dabei wird ohne Einschränkung der Allgemeinheit vereinfachend angenommen, der Zinssatz r sei gleich null.

Da die explizite Erfassung von Aktionsstrategien einen hohen Aufwand verursacht, ist es beim Entscheidungsbaumverfahren besonders wichtig, zu vereinfachen. Im Beispiel kann die Vereinfachung wie folgt vorgenommen werden, ohne dass die Gefahr von Fehlentscheidungen besteht:

1. Da in keiner Periode mehr als zwei Aufträge eingehen können, ist es nicht sinnvoll, mehr als zwei Produktionsanlagen zu beschaffen. Sämtliche Strategien, bei denen mehr als zwei Anlagen gekauft werden, können daher als suboptimal vernachlässigt werden.
2. Da in jeder Periode mindestens ein Auftrag eingeht, über die drei Perioden also mindestens drei Aufträge abgewickelt werden können, ist es sinnvoll, zum Zeitpunkt 0 *mindestens* eine Anlage zu beschaffen: Die Summe der Deckungsbeiträge ($3 \cdot 300 = 900$), die mit der Anlage erzielt werden können, übersteigt die Anschaffungskosten (500) der Anlage.

3. Es ist nachteilig, zum Zeitpunkt 2 eine zweite Anlage zu beschaffen, da mit ihr allenfalls noch ein Auftrag abgewickelt werden kann, dessen Deckungsbeitrag (300) niedriger ist als die Anschaffungskosten der Anlage (500). Entsprechend kann es auch nicht vorteilhaft sein, zum Zeitpunkt 1 eine zweite Anlage anzuschaffen, sofern dann nur ein Auftrag eingeht, also Zustand $S_{1,1}$ eintritt.
4. Es ist nachteilig, zu einem Zeitpunkt t ($t=0,1,2$) einen Auftrag abzulehnen, der mit einer vorhandenen Anlage abgewickelt werden kann.

Im Entscheidungsbaum der Abb. 9.5 sind diese Vereinfachungsgesichtspunkte berücksichtigt. Darin bezeichnet a_k die Zahl der Produktionsanlagen, die im Entscheidungsknoten k erworben werden. Da jeweils so viele Aufträge angenommen werden wie

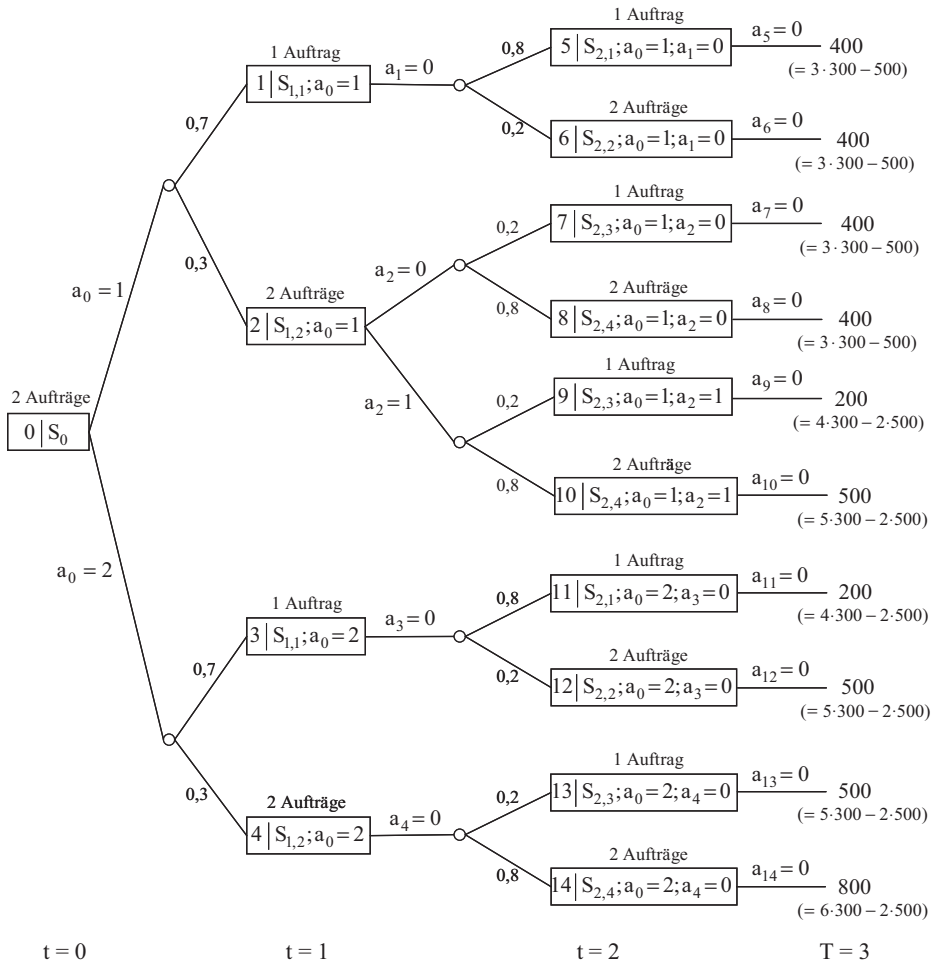


Abb. 9.5 Entscheidungsbaum für das Beispiel

eingehen und mit der vorhandenen Kapazität abgewickelt werden können, muss die Zahl der angenommenen Aufträge bei der Beschreibung der Handlungsalternativen für die möglichen Entscheidungssituationen nicht explizit berücksichtigt werden, sondern nur die Zahl der jeweils zu erwerbenden Anlagen. In Zustand S_0 kommen nur die Anschaffung einer oder zwei Anlagen ($a_0=1$ oder $a_0=2$) in Betracht. (Entsprechend werden ein oder zwei Aufträge angenommen.) Nach Anschaffung von zwei Anlagen in Entscheidungssituation 0 ($a_0=2$) werden danach keine weiteren Anlagen mehr angeschafft ($a_3=a_4=a_{11}=a_{12}=a_{13}=a_{14}=0$). Auch in den Entscheidungssituationen 5 bis 10 des Zeitpunkts 2 werden keine weiteren Anlagen mehr angeschafft ($a_5=\dots=a_{10}=0$). In der Entscheidungssituation 1 (Zustand $S_{1,1}$) wird ebenfalls nicht in eine weitere Anlage investiert ($a_1=0$).

Jeder möglichen Entscheidungssituation des Zeitpunkts 1 bzw. 2 entspricht eine bestimmte Folge von Auftragseingängen – also ein bestimmter Zustand – und bestimmte Aktionen, die bereits vor diesem Zeitpunkt durchgeführt worden sind. Für die Entscheidungssituation 10 gilt zum Beispiel: Zustand $S_{2,4}$ ist eingetreten und es sind zwei Produktionsanlagen gekauft und drei Aufträge bearbeitet worden. Nun können zwei weitere Aufträge bearbeitet werden.

Von jedem Entscheidungsknoten geht eine oder gehen zwei Kanten aus, von denen jede eine zulässige Aktion kennzeichnet. Jede (Aktions-) Kante, die aus einem dem Zeitpunkt 0 bzw. 1 zugeordneten Entscheidungsknoten herausführt, mündet in einen runden Verzweigungsknoten, der die unsicheren Erwartungen hinsichtlich des folgenden Umweltzustandes (der Auftragslage) repräsentiert. Die entsprechenden (Zustands-) Kanten kennzeichnen den Übergang zu der Entscheidungssituation im nachfolgenden Zeitpunkt. Die diesen Kanten zugeordneten Übergangswahrscheinlichkeiten sind gleich den entsprechenden Übergangswahrscheinlichkeiten des Zustandsbaumes. Jede Aktionskante, die aus einem Entscheidungsknoten herausführt, der dem Zeitpunkt 2 entspricht, führt direkt zu einem Endergebnis, da hier der Planungszeitraum endet und nach der letzten Entscheidung keine weitere Unsicherheit mehr besteht. Ein Endergebnis entspricht dem Gesamtgewinn der jeweiligen Strategie in dem entsprechenden Zustand. z. B. beträgt das Endergebnis der Strategie, zunächst eine Anlage und danach keine weitere Anlage zu beschaffen, in Zustand $S_{2,1}$ $x(S_{2,1}; a_0=1; a_1=0) = 3 \cdot 300 - 500 = 400$ (insgesamt werden 3 Aufträge angenommen, die Investitionsausgaben betragen 500).

9.5.3 Entscheidung auf der Basis einer Ergebnismatrix

Die optimale Strategie kann in der Weise bestimmt werden, dass auf der Basis des Entscheidungsbaumes 9.5 eine Ergebnismatrix konstruiert wird. Hierzu werden zuerst die drei Strategien beschrieben, die im Entscheidungsbaum enthalten sind:

Strategie A₁: In der Entscheidungssituation 0, also zum Zeitpunkt 0, werden zwei Produktionsanlagen angeschafft und beide Aufträge angenommen. In jeder später noch

möglichen Entscheidungssituation werden keine weiteren Produktionsanlagen gekauft und alle jeweils eingehenden Aufträge angenommen.

Strategie A₂: In der Entscheidungssituation 0 wird eine Produktionsanlage angeschafft und ein Auftrag angenommen. In allen später möglichen Entscheidungssituationen wird keine weitere Anlage beschafft und es wird immer ein Auftrag angenommen.

Strategie A₃: In der Entscheidungssituation 0 wird eine Produktionsanlage beschafft und ein Auftrag angenommen. Tritt zum Zeitpunkt 1 der Zustand $S_{1,1}$ und damit die Entscheidungssituation 1 ein, wird keine weitere Produktionsanlage beschafft und in der Folge immer ein Auftrag angenommen. Tritt dagegen zum Zeitpunkt 1 der Zustand $S_{1,2}$ ein, d. h. können zwei Aufträge angenommen werden, so wird eine weitere Anlage beschafft und damit die Kapazität auf zwei Anlagen erhöht. Beide Aufträge der Periode 2 werden angenommen. In Periode 3 werden alle Aufträge angenommen, die Kapazität wird nicht weiter erhöht.

Jeder Strategie entspricht eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über den Gesamtgewinn. Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden mithilfe der Ergebnismatrix in Tab. 9.2 dargestellt. In der Vorspalte werden die Strategien aufgeführt, in der Kopfzeile die möglichen Auftragsfolgen, gekennzeichnet durch die entsprechenden Knotenfolgen des *Zustandsbaumes*, und deren Wahrscheinlichkeiten. Jeder Konstellation von Strategie und Auftragsfolge wird der entsprechende Gesamtgewinn zugeordnet.

Zur Bestimmung der optimalen Alternative wird zunächst davon ausgegangen, der Investor sei risikoneutral. Die Erwartungswerte der Gesamtgewinne sind in der Spalte der Ergebnismatrix aufgeführt. Optimal ist damit die Strategie A₃: Zum Zeitpunkt 0 wird zunächst nur eine Produktionsanlage beschafft. Die endgültige Entscheidung über die zweite Anlage wird um eine Periode „verschoben“. Sie wird zum Zeitpunkt 1 genau dann erworben, wenn dann zwei Aufträge eingehen, d. h. Zustand $S_{1,2}$ eintritt.

Ist der Entscheider nicht risikoneutral, so wird zunächst die Ergebnismatrix 9.2 in eine Entscheidungsmatrix überführt, indem die Gewinne durch Nutzenwerte substituiert werden. Dann werden die Erwartungswerte des Nutzens für die Alternativen A₁, A₂ und A₃ berechnet. Optimal ist die Alternative mit dem höchsten Erwartungswert des Nutzens.

Tab. 9.2 Ergebnismatrix für das Beispiel

	$S_{2,1}$	$S_{2,2}$	$S_{2,3}$	$S_{2,4}$	
	(4 Aufträge)	(5 Aufträge)	(5 Aufträge)	(6 Aufträge)	
	$w(S_{2,1}) = 0,56$	$w(S_{2,2}) = 0,14$	$w(S_{2,3}) = 0,06$	$w(S_{2,4}) = 0,24$	$E(x)$
A ₁	200	500	500	800	404
A ₂	400	400	400	400	400
A ₃	400	400	200	500	412

9.5.4 Roll-Back-Verfahren

Die Planungsarbeit kann vereinfacht werden, indem keine Ergebnismatrix ermittelt, sondern auf dem Entscheidungsbaum aufbauend durch retrogrades (rekursives) Aufrollen des Entscheidungsproblems die optimale Strategie bestimmt wird („Roll-Back“-Verfahren). Dabei ist es nicht notwendig, alle Strategien explizit zu bewerten. Zunächst wird wieder angenommen, der Investor sei risikoneutral.

Zur Verdeutlichung des Roll-Back-Verfahrens betrachten wir den Entscheidungsbaum, der in Abb. 9.6 nochmals dargestellt wird. Dabei wurden, um die Übersicht zu verbessern, die Informationen über die Zahl der eingegangenen Aufträge entfernt.

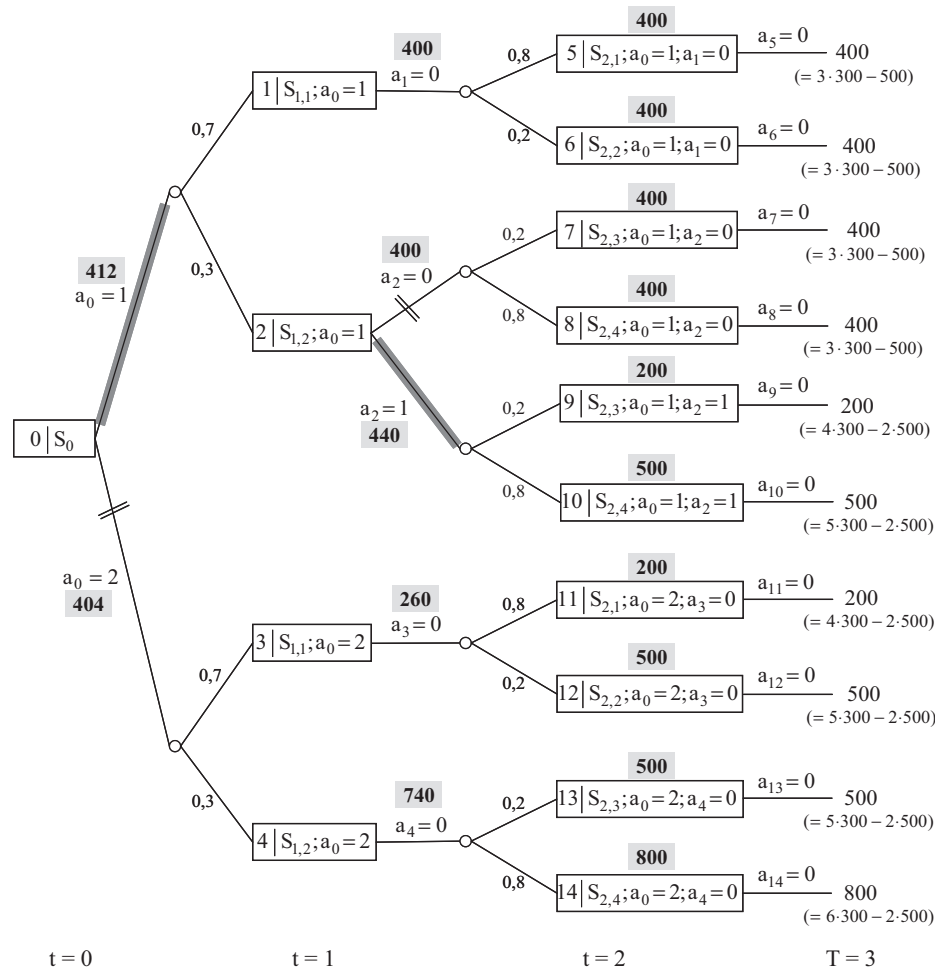


Abb. 9.6 Roll-Back-Verfahren zur Ermittlung der optimalen Strategie im Beispiel

Ausgangspunkt für die Lösung des Entscheidungsproblems ist der Zeitpunkt 2. Im Entscheidungsbaum wurde bereits jedem der Entscheidungsknoten 5,6,7,...,14 derjenige Gesamtgewinn zugeordnet, der bei Eintreten der entsprechenden Entscheidungssituation erzielt wird (grau unterlegte Zahlen über den Entscheidungsknoten in $t=2$).

Darauf aufbauend wird der optimale bedingte Plan für jeden der Entscheidungsknoten des Zeitpunkts 1 bestimmt. Hierzu wird für jeden Entscheidungsknoten 1, 2, 3 und 4 jeweils jeder möglichen Aktion derjenige Erwartungswert des Gesamtgewinns zugeordnet, der bei ihrer Wahl erzielt wird. Die jeweiligen bedingten Erwartungswerte des Gewinns stehen bei den Aktionen und sind ebenfalls grau unterlegt. Beispielsweise ergibt sich der Erwartungswert für die Aktion $a_2 = 1$ im Entscheidungsknoten 2 aus der Rechnung $0,2 \cdot 200 + 0,8 \cdot 500 = 440$. Da in den Entscheidungssituationen 1, 3 und 4 jeweils nur eine Aktion erwogen wird, ist nur in Entscheidungssituation 2 ein optimaler bedingter Plan zu bestimmen. Er lautet: Tritt die Entscheidungssituation 2 ein, so soll eine weitere Anlage beschafft werden, da der erwartete Gesamtgewinn dann höher liegt als bei Beibehaltung der Kapazität. Um im Entscheidungsbaum den optimalen bedingten Plan kenntlich zu machen, wird die betreffende Aktionskante markiert und die Aktionskante der suboptimalen Aktion durchgestrichen.

Schließlich wird die optimale Aktion für die Entscheidungssituation 0 bestimmt. Hierzu werden wiederum die Erwartungswerte der Gewinne der Aktionsmöglichkeiten ermittelt. Jeder der Entscheidungssituationen 1, 2, 3 und 4 wurde bereits der entsprechende bedingte Gewinnerwartungswert zugeordnet. Mithilfe dieser Erwartungswerte kann die optimale Aktion für die Entscheidungssituation 0 bestimmt werden. Hierzu berechnet der Entscheider die Erwartungswerte der Gewinne der in Entscheidungsknoten 0 wählbaren Aktionen über die bedingten Erwartungswerte der nachfolgenden Entscheidungsknoten. So ergibt sich der erwartete Gewinn für die Aktion $a_0 = 1$ zu:

$$0,7 \cdot 400 + 0,3 \cdot 440 = 412$$

und der erwartete Gewinn der Aktion $a_0 = 2$ beträgt:

$$0,7 \cdot 260 + 0,3 \cdot 740 = 404$$

Wiederum wird die optimale Aktion kenntlich gemacht und die suboptimale Aktion gestrichen. Damit ist das Entscheidungsproblem gelöst, der *optimale flexible Plan* steht fest, es ist die Strategie A_3 .

Bei Risikoaversion kann die optimale Strategie im Prinzip ebenso bestimmt werden wie bei Risikoneutralität: Anstelle der Gewinne treten die entsprechenden Nutzenwerte. Den Entscheidungssituationen werden keine Erwartungswerte des Gewinns, sondern Erwartungswerte des Nutzens zugeordnet. Optimal ist die Strategie mit dem maximalen Erwartungswert des Nutzens. Sie hängt von der Gestalt der Nutzenfunktion ab.

Der Entscheidungsbaum stellt lediglich ein Instrument zur Strukturierung und Beschreibung von Strategien dar. Er lässt offen, wie diese zu bewerten sind. Hier wurde vom Ziel subjektiver Nutzenmaximierung (Maximierung des Erwartungswertes

des Endvermögens bzw. des Erwartungswertes seines Nutzens) ausgegangen. Das Roll-Back-Verfahren kann jedoch analog auch beim Ziel der Maximierung des Marktwertes des Investitionsprogramms angewendet werden. Dieses Ziel wird in den Kap. 14 und 15 eingehend untersucht.

9.6 Starre versus flexible Planung

9.6.1 Vergleich

Bei starrer Planung wird in der Weise gegen das Prinzip der flexiblen Planung verstoßen, dass zwar simultan über gegenwärtige und zukünftige Maßnahmen entschieden wird, die zukünftigen Maßnahmen aber nicht in Form bedingter Pläne (Eventualpläne), sondern ohne Rücksicht auf die Umweltentwicklung festgelegt werden. Starre Planung impliziert, es müsse schon bei der Festlegung der Aktion für den Beginn des Planungszeitraums eine unwiderrufliche Entscheidung darüber getroffen werden, welche Folgeaktionen in den späteren Perioden des Planungszeitraums realisiert werden.

In der einfachsten Variante der starren Planung wird von der Fiktion ausgegangen, die zukünftige Umweltentwicklung sei mit Sicherheit bekannt. Nur für die entsprechende (als sicher angenommene) Umweltentwicklung werden Pläne aufgestellt. Die Aktionen werden also im Rahmen eines deterministischen Entscheidungsmodells bestimmt. Starre Planung kann aber auch auf der Grundlage eines stochastischen Entscheidungsmodells erfolgen. Im Modell werden dann zwar mehrere mögliche Umweltentwicklungen berücksichtigt; für alle diese Umweltentwicklungen wird aber dieselbe Folge von Entscheidungen festgelegt. Bei der Modellkonstruktion wird nicht explizit berücksichtigt, dass für alternative Umweltentwicklungen verschiedene Aktionsfolgen optimal sein können.¹

Natürlich müssen auch bei starrer Planung die ursprünglichen Pläne nicht unbedingt eingehalten werden. Diese Pläne können im Zeitablauf immer wieder revidiert werden, wenn Zustände eintreten, für die sie nachteilig erscheinen. Starre Planung mit ständiger Planrevision wird als „rollende“ bzw. „revolvierende“ Planung bezeichnet.² Auf der Grundlage eines deterministischen Ansatzes kann die rollende Planung z. B. wie

¹Beispiele für solche Entscheidungsmodelle sind Chance-constrained-programming-Ansätze der Investitionsplanung (Naslund 1966; Jaaskelainen 1966; Albach 1967).

²Bei rollender Planung erfolgt im Allgemeinen noch eine weitere Vereinfachung in der Weise, dass der Planungszeitraum „verkürzt“ wird. Dabei werden bei der Planung im Zeitpunkt 0 noch nicht alle Zeitpunkte bis zum Zeitpunkt T explizit berücksichtigt, sondern nur diejenigen bis zu einem Zeitpunkt $T^* < T$. Bei der Planung in zukünftigen Zeitpunkten wird dann der Planungshorizont (bis zu dem explizite Pläne erstellt werden) sukzessive erweitert, sodass den laufenden Planungsaktivitäten jeweils dieselbe Anzahl von Planperioden zugrunde liegt (vgl. auch Kap. 18, Abschn. 18.2.4.1).

folgt ablaufen (wobei die Aktionszeitpunkte mit $0, 1, \dots, T-1$ bezeichnet werden): Zum Zeitpunkt 0 werden auf der Basis einer als sicher angenommenen Umweltentwicklung (etwa jener mit der größten Eintrittswahrscheinlichkeit) Aktionspläne für die Zeitpunkte $0, 1, \dots, T-1$ bestimmt. Der Plan für den Zeitpunkt 0 wird anschließend realisiert. Zum Zeitpunkt 1 wird – je nach dem dann tatsächlich eingetretenen Umweltzustand $S_{1,s}$ – der ursprüngliche Plan für den Zeitpunkt 1 revidiert, wobei gleichzeitig auch eine Revision der Pläne für die Zeitpunkte $2, 3, \dots, T-1$ erfolgt. Die neuen Aktionspläne werden wieder unter der Fiktion ermittelt, die zukünftige Umweltentwicklung sei mit Sicherheit bekannt. Dabei stimmt der für den Zeitpunkt t ($t=2, \dots, T$) unterstellte Umweltzustand im Allgemeinen nicht mit jenem überein, der bei der Planung zum Zeitpunkt 0 zugrunde gelegt worden ist; die ursprüngliche Annahme über diesen Zustand wird zum Zeitpunkt 1 im Licht des dann eingetretenen Zustandes revidiert.

Zum Zeitpunkt 1 wird nun der neue (der revidierte) Aktionsplan für diesen Zeitpunkt realisiert, während für den Zeitpunkt 2, je nach dem eintretenden Umweltzustand $S_{2,s}$ zum Zeitpunkt 2, der Plan erneut revidiert wird, usw.

Bei rollender Planung werden also die Pläne im Zeitablauf immer wieder der eintretenden Umweltentwicklung angepasst. Trotzdem handelt es sich um starre Planung, da die Möglichkeiten einer späteren Anpassung nicht von vornherein gesehen und einkalkuliert werden. Dem Prinzip der flexiblen Planung wird nicht schon damit entsprochen, dass die Planung im Zeitablauf fortwährend revidiert wird; die Revisionsmöglichkeiten und deren Folgen sind im Rahmen *bedingter Pläne vorweg im Kalkül zu erfassen*.

Starre und flexible Planung können zu unterschiedlichen Aktionen (auch) für den Zeitpunkt 0 führen. Bei starrer Planung werden eben die Aktionen für den Zeitpunkt 0 nur mit genau *einer* Folge späterer Aktionen „optimal“ abgestimmt. Zwar können in Zukunft die Pläne für die Zeitpunkte $1, 2, \dots, T-1$ revidiert werden. Der Plan für den Zeitpunkt 0 ist dann aber realisiert, sodass vorteilhafte Anpassungen an die Besonderheiten alternativer Umweltentwicklungen möglicherweise von vornherein „verbaut“ sind. Die Erstellung von Eventualplänen für zukünftige Zeitpunkte ermöglicht dagegen, für den Beginn des Planungszeitraums einen Aktionsplan zu bestimmen, der unter Berücksichtigung der möglichen Folgeaktionen zu einer guten Wahrscheinlichkeitsverteilung über das Gesamtergebnis führt.

Zur Verdeutlichung dient nochmals das Beispiel von Abschn. 9.5, wobei angenommen wird, der Entscheider sei risikoneutral. Bei flexibler Planung erweist sich die Strategie A_3 als optimal. Diese Strategie wird bei starrer Planung überhaupt nicht in Betracht gezogen. Mit der Zahl der zum Zeitpunkt 0 anzuschaffenden Produktionsanlagen wird (bei starrer Planung) zugleich die Zahl der in Zukunft zu installierenden Anlagen definitiv (nicht zustandsabhängig) festgelegt. Bei starrer Planung werden daher nur die Alternativen A_1 und A_2 erwogen, von denen A_1 den höheren Gewinnerwartungswert in Höhe von 404 aufweist. Bei starrer Planung werden somit zum Zeitpunkt 0 *zwei* Anlagen beschafft (statt einer einzigen Anlage bei flexibler Planung). Dadurch sinkt der Gewinnerwartungswert gegenüber der Wahl der Alternative A_3 um $(412 - 404 =) 8$. Diese Differenz kann als

Wert der Flexibilität oder auch als *Optionswert* interpretiert werden: Sie entspricht dem Wert der Option des Entscheiders, nicht sofort zwei Anlagen zu beschaffen, sondern mit der Entscheidung über die Beschaffung der zweiten Anlage zu warten.

Bei bestimmten Problemstrukturen kann natürlich die starre Planung zu (annähernd) ebenso guten Aktionen führen wie die flexible Planung. A priori ist jedoch in komplexeren Entscheidungssituationen nur schwer abzuschätzen, ob sich bei starrer Planung wesentliche oder nur geringfügige Nachteile ergeben.

9.6.2 Flexible Planung und Revision von Plänen

Im Grundmodell der flexiblen Planung wird davon ausgegangen, dass im Planungszeitraum keine Zustände eintreten, die vorher nicht als möglich erkannt worden sind. Wie aber die Erfahrung zeigt, treten häufig Zustände ein, mit denen vorher nicht gerechnet wurde. In der Realität kann es daher notwendig werden, sich an Entwicklungen anzupassen, die bei der Aufstellung der Pläne nicht vorhergesehen wurden. Darüber hinaus können sich Anpassungen auch deshalb als vorteilhaft erweisen, weil neue Aktionsmöglichkeiten entdeckt werden. Es ist also auch bei flexibler Planung notwendig, im Zeitablauf ständig Planrevisionen vorzunehmen. Diese können wieder nach dem Prinzip der flexiblen Planung erfolgen.

Bei Verzicht auf Modellvereinfachung würde schon zu Beginn des Planungszeitraums eine umfassende Strategie bis zum Ende des Planungszeitraums erarbeitet werden. Für alle als möglich erkannten Umweltentwicklungen würde eine Folge detaillierter (bedingter) Teilpläne erstellt. Von diesen (ursprünglichen) Plänen würde man allenfalls dann abweichen, wenn in Zukunft eine bisher nicht als möglich erkannte Umweltentwicklung eintritt und/oder neue Aktionsmöglichkeiten entdeckt werden. Falls derartige Ereignisse nicht eintreten, erübrigen sich spätere Planungsaktivitäten. Im Zeitablauf werden jene der bereits vorliegenden Teilpläne realisiert, die der eintretenden Umweltentwicklung entsprechen.

Es ist unmittelbar einsichtig, dass eine solch umfassende Planung in der Regel nicht möglich ist, da hierzu die Planungskapazität nicht ausreicht; zumindest würden zu hohe Planungskosten entstehen. Es stellt sich daher das Problem, an der als theoretisch richtig erkannten Modellstruktur Vereinfachungen vorzunehmen. (Dieses Problem wird in Kap. 18 ausführlich behandelt.) Eine Vereinfachung kann vor allem dadurch erfolgen, dass zunächst ein Detailplan nur für den Beginn des Planungszeitraums ermittelt wird, wobei die zukünftigen Folgemaßnahmen in Form einer Globalplanung antizipiert werden. Dabei wird die (im Allgemeinen) immense Vielzahl möglicher Umweltentwicklungen durch wenige „repräsentative“ Entwicklungen erfasst, für die mehr oder weniger global festgelegt wird, was jeweils zu tun ist. Zu späteren Zeitpunkten werden, je nach der eintretenden Umweltentwicklung, vorhandene Pläne verworfen und neue (Detail- oder Global-) Pläne erstellt und/oder es werden vorhandene Pläne revidiert bzw.

detaillierter ausgestaltet. Die Notwendigkeit der Modellvereinfachung ist also ein weiterer Grund dafür, dass auch bei flexibler Planung im Zeitablauf ständig Neuplanungen bzw. Planrevisionen erforderlich sind („*rollende flexible Planung*“).

9.6.3 Flexibilität und Elastizität

In dieser Arbeit wird Flexibilität als Eigenschaft eines Planungsverfahrens definiert, das dadurch gekennzeichnet ist, dass Eventualentscheidungen für spätere Zeitpunkte getroffen werden, soweit die zu früheren Zeitpunkten gewählten Aktionen noch einen Handlungsspielraum belassen (Hax und Laux 1972, S. 322). Eine andere Bedeutung hat der Ausdruck „Flexibilität“, wenn damit eine Eigenschaft eines bestimmten Aktionsprogramms bezeichnet wird. Flexibel in diesem Sinne ist ein Programm in dem Maße, wie es für zukünftige Zeitpunkte noch ein Entscheidungsspielraum belässt, also „anpassungsfähig“ ist.

Flexible Planung führt nicht notwendig zur Wahl eines elastischen, d. h. an unterschiedliche Umweltentwicklungen anpassungsfähigen, Aktionsprogramms. Sie kann auch zu dem Ergebnis führen, dass man sich für ein unelastisches Programm entscheidet. Flexible Planung bedeutet lediglich, dass man für jede Alternative die Möglichkeit bedingter Entscheidungen über zukünftige Aktionen berücksichtigt. Allerdings wird nur bei flexibler Planung der Vorteil korrekt erfasst, der in der Elastizität eines Aktionsprogramms liegt. Dies folgt daraus, dass die flexible Planung in Form von Eventualentscheidungen vorwegnimmt, welchen Gebrauch man von zukünftigen Entscheidungsspielräumen machen wird.

9.6.4 Handlungsspielräume als Optionen und flexible Planung

Handlungsspielräume lassen sich als Optionen interpretieren. Man unterscheidet allgemein Finanzoptionen von Realoptionen. *Finanzoptionen* sind bedingte Zahlungsansprüche und beziehen sich in der Regel auf börsengehandelte Wertpapiere oder Güter, wie etwa Aktien, Währungen oder Rohstoffe. Der Inhaber einer Kaufoption (Call-Option) auf eine Aktie beispielsweise hat das Recht aber nicht die Verpflichtung, die Aktie zu einem bestimmten Preis (dem Basispreis) innerhalb eines bestimmten Zeitraums oder aber zu einem festgelegten Zeitpunkt zu kaufen.

Realoptionen bilden Handlungsspielräume im Rahmen von Realinvestitionen ab. Zu den Realoptionen zählen allgemein Aufschuboptionen, Abbruchoptionen, Erweiterungsoptionen, Stilllegungs- und Umstellungsoptionen (Copeland et al. 1993; Laux 1993). So hat z. B. ein Unternehmer die Optionen, sein Werk zu erweitern, Rohstoffe sofort oder erst später zu fördern oder einen Produktionsprozess (vorübergehend) zu stoppen.

Der Kauf eines Investitionsprojekts (eines Bewertungsobjekts) lässt sich auch als Kauf von Realoptionen für zukünftige Folgeaktionen interpretieren. Zum Beispiel wird

mit dem Kauf einer Produktionsanlage die Option erworben, innerhalb der Nutzungsdauer Produkte herzustellen. Im Beispiel von Abschn. 9.5 wird mit dem Kauf eines Unternehmens, in dem die betreffenden Maßnahmen durchgeführt werden können, die Option erworben, in Produktionsanlagen zu investieren und Aufträge anzunehmen und abzuwickeln. Der Kauf nur *einer* Anlage zum Zeitpunkt 0 bedingt die Option, zum Zeitpunkt 1 eine zweite zu erwerben.

Realoptionen schaffen Aktionsräume, die in Zukunft je nach der Entwicklung der entscheidungsrelevanten Daten optimal genutzt werden. Ihr Wert hängt von den damit verbundenen möglichen Überschüssen ab. Da es auch bei flexibler Planung letztlich um das Problem geht, wie Aktionsräume gestaltet und genutzt werden, besteht eine enge Verbindung zwischen ihr und der Theorie der Optionsbewertung. Die flexible Planung liefert nicht nur das Instrumentarium, solche Realoptionen optimal zu nutzen, sondern auch, sie zu bewerten. Dies gilt unabhängig davon, welche Präferenzfunktion der betreffende Entscheider zugrunde legt.

9.7 Zusammenfassung

- Zwischen im Zeitablauf zu treffenden Entscheidungen bestehen im Allgemeinen enge Abhängigkeiten, sodass die gegenwärtigen Maßnahmen nicht isoliert von den zukünftigen geplant werden können. Da sich der Informationsstand über zukünftige Handlungsmöglichkeiten und Umweltentwicklungen im Zeitablauf verbessert, ist es sinnvoll, Entscheidungen definitiv erst dann zu treffen, wenn der Zeitpunkt dafür gekommen ist. Trotzdem darf nicht auf die zukunftsgerichtete Planung verzichtet werden, da es sonst zu Fehlentscheidungen in der Gegenwart kommen kann.
- Einen Lösungsweg bietet die flexible Planung. Dabei wird für zukünftige Aktionszeitpunkte ein System von Eventualplänen erstellt, und nur die zu Beginn des Planungszeitraums zu ergreifende Aktion wird endgültig festgelegt. Welcher Plan zu einem zukünftigen Zeitpunkt tatsächlich realisiert wird, hängt von der Umweltentwicklung ab, die bis dahin eintritt.
- Das Vorgehen lässt sich mithilfe eines Entscheidungsbaumes veranschaulichen. Der Entscheidungsbaum erweitert den Zustandsbaum, der die Erwartungsstruktur hinsichtlich der möglichen Entwicklungen der Umwelt abbildet, um die in den einzelnen Zuständen bestehenden Aktionsmöglichkeiten. Er beschreibt damit alle möglichen Strategien, und jeder Strategie entspricht eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über das Endergebnis (zum Beispiel das Endvermögen).
- Im Entscheidungsbaum kann die optimale Strategie nach dem Roll-Back-Verfahren bestimmt werden. Hierbei wird das gesamte Entscheidungsproblem in einperiodige Teilprobleme zerlegt, die ausgehend von der letzten Planungsperiode „rückrollend“ sukzessive gelöst werden, bis schließlich der optimale Plan für den Beginn des Planungszeitraums feststeht.

- Bei der starren Planung wird zwar auch simultan über gegenwärtige und zukünftige Aktionen entschieden. Im Gegensatz zur flexiblen Planung werden die Pläne jedoch nicht in Abhängigkeit von der Umweltentwicklung formuliert. Dadurch werden die Möglichkeiten einer Anpassung an die Umweltentwicklung bei der Ermittlung der anstehenden Aktion nicht berücksichtigt.
- Da es bei flexibler Planung letztlich um das Problem geht, wie Aktionsräume gestaltet und genutzt werden, besteht eine enge Verbindung zwischen ihr und der Theorie der Bewertung sogenannter Realloptionen. Die flexible Planung liefert nicht nur das Instrumentarium, solche Realloptionen optimal zu nutzen, sondern auch, sie zu bewerten.

Ergänzende und vertiefende Literatur

Bamberg et al. (2012, Kap. 9); Bellman (1957); Buhler (1981); Franke und Hax (2009, Kap. V); Hax (1985, S. 165–195); Hax und Laux (1972); Hellwig (1987; 1989); Hespos und Strassmann (1965); Inderfurth (1979; 1982); Laux, C. (1993); Laux (1971a, b); Laux und Schabel 2009 (Kap. XIII); Magee (1964a, b); Mellwig (1972a, b); Moore und Thomas (1976, S. 53–73); Pratt et al. (2008, Kap. 6); Raiffa (1973, S. 22–58, 157–171); Schlaifer (1969, S. 3–83).

9.8 Übungen

Aufgabe 9.1

Ein Bekannter verfügt über eine Innenstadtimmobilie, die er veräußern will. Er bittet Sie darum, den optimalen Verkaufszeitpunkt zu bestimmen. Infrage kommen nur drei Verkaufszeitpunkte: $t=0$ (heute), $t=1$ (in einem Jahr) und $t=2$ (in zwei Jahren). Derzeit beträgt der erzielbare Preis für die Immobilie 1 Mio. EUR. Der Bekannte hat folgende Erwartungen:

Er rechnet damit, dass der erzielbare Preis innerhalb des kommenden Jahres mit der Wahrscheinlichkeit 0,7 um 20 % steigt und mit der Wahrscheinlichkeit 0,3 um 10 % sinkt. Er rechnet zudem damit, dass der erzielbare Preis im zweiten Jahr (bis $t=2$) mit der jeweils gleichen Wahrscheinlichkeit 0,5 um weitere 20 % steigt oder um 10 % sinkt, wenn er zuvor gestiegen ist. Ist er aber zuvor gesunken, rechnet er mit gleicher Wahrscheinlichkeit damit, dass der Preis entweder um weitere 10 % sinkt oder gleich bleibt.

Gehen Sie von Risikoneutralität aus und vernachlässigen Sie alle Zins- und Zinseszinsseffekte.

- a. Zeichnen Sie den Zustandsbaum für die Entwicklung des Immobilienpreises.
- b. Zeichnen Sie den Entscheidungsbaum und bestimmen Sie den optimalen flexiblen Plan.

Aufgabe 9.2

Ein Obstbauer erwägt den Anbau einer neuen Beerensorte auf einem bisher brach liegenden Areal. Seine Investitionsrechnung ergibt folgendes Bild: Bei Erschließung des gesamten Areals fallen zunächst Kosten in Höhe von 36.000 EUR an. Der Obstbauer rechnet danach mit einem Gesamtgewinn (über den gesamten Zeitraum des Anbaus der neuen Sorte vor Abzug der Erschließungskosten) in Höhe von entweder 60.000 EUR für den Fall, dass die Sorte bei den Konsumenten gut ankommt (Erfolgsfall), bzw. von 16.000 EUR im Misserfolgsfall. Beide Fälle sind gleich wahrscheinlich. Ob die Beerensorte erfolgreich sein wird oder nicht, zeigt sich sofort nach der ersten Ernte.

Gehen Sie davon aus, dass der Bauer sich am Erwartungswert des Gesamtgewinns abzüglich Erschließungskosten orientiert (vernachlässigen Sie Zeitunterschiede, d. h. rechnen Sie mit einem Zinssatz von 0 %).

Ein Freund rät dem Bauern, zunächst nur einen Teil (10 %) des Areals mit der neuen Sorte zu bebauen und den Markterfolg der Sorte abzuwarten. Danach könne er immer noch entscheiden, das gesamte Feld zu bebauen. Gehen Sie für den Anbau auf nur eines Teils des Areals von 10 % der angegebenen Kosten und davon aus, dass der Gewinn in der Testphase vernachlässigbar gering ist. Die Erweiterung des Anbaus auf die volle Fläche erbringt den oben angegebenen Gewinn, verursacht jedoch zusätzlich zu den Kosten für die Erschließung des Testareals noch einmal die vollen oben angegebenen Kosten von 36.000 EUR.

- a. Bestimmen Sie, den Rat des Freundes prüfend, den optimalen flexiblen Plan des Bauern.
- b. Welchen Wert hat die Option des Bauern, mit der vollständigen Bepflanzung des Feldes zu warten und zunächst nur 10 % des Feldes zu erschließen?

Aufgabe 9.3

Für einen Zeitraum von zwei Wochen soll die Auftragsplanung in der Fertigungsabteilung einer Unternehmung durchgeführt werden. Folgende Auftragsangebote liegen vor, die stets vollständig erfüllt werden müssen (d. h. die Aufträge sind nicht teilbar):

- Auftrag A 8000 Mengeneinheiten (ME) pro Woche zu 12 EUR pro Stück, Entscheidung sofort
- Auftrag B 6000 ME pro Woche zu 13 EUR pro Stück, Entscheidung sofort
- Auftrag C 4000 ME in der 2. Woche zu 10 EUR pro Stück, Entscheidung spätestens zu Beginn der zweiten Woche

Die Normalkapazität beträgt 10.000 ME pro Woche, in der zweiten Woche kann durch Überstunden der Mitarbeiter zusätzliche Kapazität in Höhe von 2000 ME geschaffen werden. Die Kosten steigen dann aufgrund von Überstundenzuschlägen.

Grundsätzlich kann sich eine günstige oder ungünstige Kostensituation einstellen (gK und uK). Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Kostensituation in der ersten Woche günstig ist, beträgt 0,5. Eine günstige (bzw. ungünstige) Kostensituation in der ersten

Woche führt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,8 auch in der zweiten Woche zu einer günstigen (bzw. ungünstigen) Kostensituation.

Die Stückkosten sind der folgenden Tabelle zu entnehmen.

Stückkosten in EUR	gk	uk
Normalkapazität	4	6
Zusatzkapazität	8	18

Verwenden Sie als Zielsetzung die Maximierung des erwarteten Deckungsbeitrags.

- Geben Sie alle zu analysierenden Strategien an.
- Entwickeln Sie den Entscheidungsbaum und ermitteln Sie die optimale Strategie anhand des Roll-Back-Verfahrens.
- Bestimmen Sie die optimale Strategie auch auf der Basis einer Ergebnismatrix. Vergleichen Sie den Rechenaufwand mit jenem aus Teilaufgabe b.

Aufgabe 9.4

Ein Nahrungsmittelhersteller (N) erwägt, einen Lieferanten (L) auf Schadenersatz in Höhe von 120 TEUR zu verklagen. Die Beweislage ist allerdings nicht eindeutig, und die Wahrscheinlichkeit, dass N den Prozess gegen L gewinnt, beträgt nur 50 %. N erwägt daher ein Vergleichsangebot in Höhe von 80 TEUR und rechnet mit drei möglichen Konsequenzen:

- Der Vergleich scheitert zunächst (Wahrscheinlichkeit: 0,4)
- Es kommt zum Vergleich von 80 TEUR (Wahrscheinlichkeit: 0,2)
- N erhält einen Gegenvorschlag über 40 TEUR (Wahrscheinlichkeit: 0,4)

N kann nach dem Scheitern des Vergleichs immer noch den Klageweg beschreiten, würde aber nur noch auf 100 TEUR klagen. Eine zweite Möglichkeit wäre ein erneutes Vergleichsangebot von N, jedoch nur in Höhe von 55 TEUR und nur, wenn der Vergleich zunächst scheitert. N ist sich absolut sicher, dass dieser Vergleich zustande käme. Erhält N aber einen Gegenvorschlag, kann er diesen nur annehmen oder auf 100 TEUR klagen. Für den Prozess gilt in allen Fällen: Gewinnt N, erhält er den eingeklagten Betrag und muss keine Prozesskosten tragen. Verliert N, geht er leer aus und muss zudem Prozesskosten in Höhe von 10 TEUR zahlen.

- Beschreiben Sie das Entscheidungsproblem von N mithilfe eines Entscheidungsbaums.
- Welche Strategien kann N wählen?
- Ermitteln Sie mithilfe des Roll-Back-Verfahrens die optimale Strategie für den risikoneutralen N.

9.9 Lösungshinweise

Aufgabe 9.1

a) Zwei Zustände in $t=1$ (Preis = 1,2 vs. Preis = 0,9), jeweils zwei folgende Zustände.
--- b) Optimale Strategie: Warten bis $t=1$, danach weiter warten, wenn der Preis auf 1,2 gestiegen ist, aber verkaufen, wenn er auf 0,9 gefallen ist.

Aufgabe 9.2

a) Optimal ist zunächst der Testanbau; wird es ein Erfolg, sollte der Bauer auf ganzer Fläche anbauen, anderenfalls das Projekt aufgeben. Erwarteter Gesamtgewinn abzüglich Erschließungskosten = 8,4. --- b) 6,4.

Aufgabe 9.3

a) Strategien sind: A_1 = nur A; A_2 = A und C; A_3 = A, C nur bei günstiger Kostensituation in der ersten Woche; A_4 = A und C nur bei ungünstiger Kostensituation in der 1. Woche; A_5 = B und C. --- b) Die optimale Strategie ist A_3 . --- c) Keine Kurzlösung verfügbar.

Aufgabe 9.4

a) Keine Kurzlösung verfügbar. --- b) Strategien: A_1 = sofort klagen; A_2 = Klage immer vermeiden; A_3 = Zunächst Vergleich anbieten, danach immer klagen; A_4 = Vergleich anbieten, bei Ablehnung klagen, aber den Gegenvorschlag annehmen; A_5 = Vergleich anbieten, bei Ablehnung neuen Vergleich anbieten und bei Gegenvorschlag klagen. --- c) A_5 ist die optimale Strategie, erwartete Einzahlung = 56 TEUR.

Literatur

- Albach, H.: Das optimale Investitionsbudget bei Unsicherheit. Z. Betriebswirtsch. **37**, 503–518 (1967)
- Bellmann, R.: Dynamic Programming. Princeton University Press, Princeton (1957)
- Bühler, W.: Flexible Investitions- und Finanzplanung bei unvollkommen bekannten Übergangswahrscheinlichkeiten. OR Spektrum **2**, 207–221 (1981)
- Copeland, T. E., Koller, T., Murrin, J.: Unternehmenswert: Methoden und Strategien für eine wertorientierte Unternehmensführung. Campus, Frankfurt a. M. (1993)
- Hax, H.: Entscheidungsmodelle in der Unternehmung. Einführung in Operations Research. Rowohlt, Reinbek (1974)
- Hax, H.: Investitionstheorie, 5. Aufl. Physica, Würzburg (1985)
- Hax, H., Laux, H.: Flexible Planung – Verfahrensregeln und Entscheidungsmodelle für die Planung bei Ungewißheit. Z. Betriebswirtsch. Forsch. **24**, 318–340 (1972)
- Hellwig, K.: Bewertung von Ressourcen. Physica, Heidelberg (1987)
- Hellwig, K.: Flexible Planung und Kapitalerhaltung. Z. Betriebswirtsch. Forsch. **41**, 404–414 (1989)

- Hespos, R., Strassmann, P.A.: Stochastic decision trees for the analysis of investment decisions. *Manage. Sci.* 11:244–259 (1965) (Dt. Übersetzung in: Albach, H. (Hrsg.): *Investitionstheorie*, S. 229–247. Köln 1975)
- Inderfurth, K.: Starre und flexible Investitionsplanung bei laufender Planrevision. *Z. Betriebswirtsch. Forsch.* **31**, 440–467 (1979)
- Inderfurth, K.: *Starre und flexible Investitionsplanung*. Physica, Wiesbaden (1982)
- Jääskeläinen, V.: *Optimal Financing and Tax Policy of the Corporation*. Research Institute for Business Economics, Helsinki (1966)
- Laux, H.: Flexible Planung des Kapitalbudgets mithilfe der linearen Programmierung. *Z. Betriebswirtsch. Forsch.* **21**, 728–742 (1969)
- Laux, H.: *Flexible Investitionsplanung*. VS Verlag, Opladen (1971a)
- Laux, H.: Unternehmensbewertung bei Unsicherheit. *Z. Betriebswirtsch.* **41**, 525–540 (1971b)
- Laux, C.: Handlungsspielräume im Leistungsbereich des Unternehmens: Eine Anwendung der Optionspreistheorie. *Z. Betriebswirtsch. Forsch.* **45**, 933–958 (1993)
- Laux, H., Schabel, M.M.: *Subjektive Investitionsbewertung. Marktbewertung und Risikoteilung*. Springer, Berlin (2009)
- Magee, J.F.: Decision trees for decision making. *Harv. Bus. Rev.* **42**, 126–138 (1964a)
- Magee, J.F.: How to use decision trees in capital investment. *Harv. Bus. Rev.* **42**, 79–96 (1964b)
- Mellwig, W.: Anpassungsfähigkeit und Ungewißheitstheorie: zur Berücksichtigung der Elastizität des Handelns in der Unternehmenstheorie. Mohr, Tübingen (1972a)
- Mellwig, W.: Flexibilität als Aspekt unternehmerischen Handelns. *Z. Betriebswirtsch. Forsch.* **24**, 724–744 (1972b)
- Moore, P.G., Thomas, H.: *The Anatomy of Decisions*. Penguin Books, Harmondsworth (1976)
- Näslund, B.: A model of capital budgeting under risk. *J. Bus.* **39**, 257–271 (1966)
- Raiffa, H.: *Einführung in die Entscheidungstheorie*. Oldenbourg, München (1973) (Titel der engl. Originalausgabe: *Decision Analysis*. Reading 1968)
- Schlaifer, R.: *Analysis of Decisions under Uncertainty*. McGraw-Hill, New York (1969)

Bildung eines Wahrscheinlichkeitsurteils und Bewertung von Informationen

10

10.1 Problemstellung und Aufbau

In der Arbeit stehen Entscheidungsprinzipien und Entscheidungsmodelle für Risikosituationen im Vordergrund. Eine Entscheidungssituation bei Risiko liegt definitionsgemäß vor, wenn für einen Teil der Alternativen oder für alle das Ergebnis, z. B. der zukünftige Gewinn, unsicher ist, der Entscheider jedoch über ein Wahrscheinlichkeitsurteil bezüglich der maßgeblichen Umweltzustände verfügt. Die Bildung eines Wahrscheinlichkeitsurteils erweist sich dabei als ein zentraler Bestandteil der Analyse von Alternativen. Damit befasst sich das vorliegende Kapitel.¹

Ein gegebenes Wahrscheinlichkeitsurteil kann auf zweierlei Weise verbessert werden: Zum einen kann sich der Entscheider auf der Basis seiner bereits vorhandenen Informationen ein besseres Wahrscheinlichkeitsurteil bilden als bisher, indem er zusätzliche (tiefer gehende) Überlegungen darüber anstellt, wie er diese Informationen in ein Wahrscheinlichkeitsurteil transformieren soll. Zum anderen ist der Informationsstand im Allgemeinen nicht unabänderlich. Der Entscheider kann insbesondere auch selbst dazu beitragen, ihn zu verbessern.

Maßnahmen zur Verbesserung eines Wahrscheinlichkeitsurteils sind im Allgemeinen nicht kostenlos. Kosten entstehen in Form von Ausgaben und/oder durch Einsatz von Arbeit und Zeit des Entscheiders (Opportunitätskosten). Unter Umständen können einzelne Aktionen gar nicht mehr realisiert werden, wenn erst (umfangreiche) Maßnahmen zur Verbesserung des Wahrscheinlichkeitsurteils vorgenommen werden. Die Entscheidung erfordert daher ein Abwägen der Kosten und des Wertes solcher Maßnahmen.

¹Informationsaktivitäten können auch darauf ausgerichtet sein, neue Alternativen zu finden bzw. zu erfinden, und die Ergebnisse von Alternativen in den möglichen Zuständen genauer abzuschätzen. Davon soll im Folgenden abgesehen werden.

Im Folgenden wird gezeigt, wie Wahrscheinlichkeitsurteile gebildet und auf die beiden beschriebenen Arten verbessert werden können. Den größten Raum wird die Darstellung des *Informationswertkonzeptes* einnehmen, welches zeigt, wie der subjektive Wert zusätzlicher Informationen (ihr subjektiver Grenzpreis aus Sicht eines potenziellen Käufers) formal ermittelt werden kann. Das Informationswertkonzept hat prinzipielle Bedeutung auch für die Bewertung kognitiver Prozesse zur Präzisierung eines Wahrscheinlichkeitsurteils bei gegebenem Informationsstand. Die Bedeutung dieses Konzeptes besteht weniger in der unmittelbaren praktischen Anwendung (der Berechnung von Informationswerten), sondern primär darin zu zeigen, welche Determinanten den Informationswert bestimmen und wie er von ihnen abhängt. Damit bietet es Orientierungshilfe für die Entscheidung darüber, ob zusätzliche Informationen eingeholt werden sollen oder nicht, auch wenn es nicht explizit angewendet wird.

Zunächst wird in Abschn. 10.2 die mögliche Unschärfe einer verbalen Beschreibung von Wahrscheinlichkeitsvorstellungen erläutert. Es erweist sich daher als sinnvoll, diese Vorstellungen durch quantitative (subjektive) Wahrscheinlichkeiten auszudrücken.

Abschn. 10.3 befasst sich mit der Quantifizierung subjektiver Wahrscheinlichkeiten für die Umweltzustände bei gegebenem Informationsstand. Eine *direkte* Schätzung von Wahrscheinlichkeiten bzw. von Wahrscheinlichkeitsrelationen setzt ein relativ großes Differenzierungsvermögen voraus. Daher sind *indirekte* Messverfahren entwickelt worden, bei denen der Entscheider einfache Entscheidungsprobleme zu lösen hat, in denen Wahrscheinlichkeiten nur implizit angesprochen werden.

In Abschn. 10.4 wird gezeigt, wie sich bei Zugang zusätzlicher Informationen die Wahrscheinlichkeitsvorstellungen ändern (können). Bei der Bewertung solcher Informationen sind die möglichen Änderungen sowie deren Einfluss auf die „Qualität“ der Alternativenwahl zu antizipieren.

In Abschn. 10.5 wird das Informationswertkonzept vorgestellt. Es wird gezeigt, wie der Informationswert definiert ist und allgemein bestimmt werden kann. Ein ausführliches Beispiel unterstützt das Verständnis der Darstellungen. Das Informationswertkonzept liefert auch eine Formalisierung des Begriffs der „Entscheidungsnützlichkeit“ von Informationen.

Aufbauend auf dem Informationswertkonzept werden in Abschn. 10.6 die Determinanten des Informationswertes untersucht. Abschn. 10.7 befasst sich mit der Problematik der Ermittlung eines optimalen *Informationsstandes* bei mehreren Informationsmöglichkeiten. Abschn. 10.8 diskutiert abschließend den subjektiven Charakter der Informationsverarbeitung und Informationsbewertung.

10.2 Bedeutung der Quantifizierung von Wahrscheinlichkeitsvorstellungen

Glaubwürdigkeitsvorstellungen hinsichtlich ungewisser Ereignisse werden in der Realität – vor allem auch im Geschäftsleben – oft verbal ausgedrückt in Formulierungen wie „es ist sehr wahrscheinlich“, „die Chancen stehen gut“, „es ist möglich“, „es

ist zweifelhaft“, „es ist kaum damit zu rechnen“ oder „es ist äußerst unwahrscheinlich“. Derartige Formulierungen sind jedoch im Allgemeinen problematisch, weil Worte nur dann Inhalte und Vorstellungen eindeutig übermitteln, wenn Autor und Leser (oder Sprecher und Zuhörer) den jeweiligen Begriffen hinreichend genau dieselbe inhaltliche Bedeutung beimessen. Diese Voraussetzung ist aber gerade bei der verbalen Darstellung von Glaubwürdigkeitsvorstellungen in der Regel nicht erfüllt. Wie empirische Untersuchungen gezeigt haben, können sich die Wahrscheinlichkeitsvorstellungen, die durch dieselben verbalen Beschreibungen dargestellt werden, von Person zu Person erheblich unterscheiden (Moore und Thomas 1976, S. 132 f.).

Die Mehrdeutigkeit der verbalen Sprache lässt es sinnvoll erscheinen, die Glaubwürdigkeitsvorstellungen mithilfe einer *quantitativen* Sprache auszudrücken. Aus diesem Grund kommt dem formalen Wahrscheinlichkeitskonzept für die Beschreibung von Glaubwürdigkeitsvorstellungen und deren Berücksichtigung bei der Analyse von Entscheidungsproblemen eine besondere Bedeutung zu. Dies gilt nicht nur für den Fall, dass sich zwei oder mehr Personen im Rahmen eines Entscheidungsprozesses gegenseitig über Wahrscheinlichkeitsvorstellungen informieren, sondern auch dann, wenn ein Entscheider die Entscheidung allein trifft. Einerseits wird er dazu angeregt, sich kritisch mit seinem eigenen Wahrscheinlichkeitsurteil auseinander zu setzen. Andererseits ist die Darstellung der Glaubwürdigkeitsvorstellungen durch (quantitative) Wahrscheinlichkeiten die formale Voraussetzung für die Anwendung von Entscheidungsmodellen bei Risiko.

Zwar fehlt im Allgemeinen die Basis für die Ermittlung objektiver Wahrscheinlichkeiten. Der Entscheider hat jedoch in der Regel aufgrund seiner allgemeinen Erfahrung und/oder seiner speziellen Informationen über die konkrete Entscheidungssituation gewisse Glaubwürdigkeitsvorstellungen bezüglich der Zustände. Werden diese Vorstellungen durch *subjektive* Wahrscheinlichkeiten ausgedrückt, entsteht eine sinnvolle Basis für die Analyse von Wahlproblemen als Entscheidungsprobleme bei Risiko. Die subjektive Wahrscheinlichkeit, die ein Entscheider einem Ereignis (einem Zustand) zuordnet, kann als Glaubwürdigkeitsgrad interpretiert werden, mit dem er den Eintritt dieses Ereignisses erwartet. Je höher diese Wahrscheinlichkeit ist, desto eher rechnet der Entscheider mit dem Eintreten des betreffenden Ereignisses. Dabei hat ein unmögliches Ereignis die Wahrscheinlichkeit 0 und ein sicheres die Wahrscheinlichkeit 1.

Subjektive Wahrscheinlichkeiten können grundsätzlich auf zwei Arten gemessen werden. Bei den direkten Methoden (Abschn. 10.3.1) wird der Entscheider explizit nach seinen Wahrscheinlichkeitsvorstellungen gefragt (oder er fragt sich selbst danach). Bei den indirekten Methoden (Abschn. 10.3.2) wird versucht, diese Wahrscheinlichkeitsvorstellungen aus den Wahlakten des Entscheiders in bestimmten (realen oder hypothetischen) Entscheidungssituationen abzuleiten. Einige dieser Methoden sollen im Folgenden dargestellt werden. Dabei werden nur Entscheidungssituationen betrachtet, bei denen die Zahl der möglichen Zustände *endlich* ist. Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind dann diskret.

10.3 Quantifizierung von Wahrscheinlichkeiten bei gegebenem Informationsstand

10.3.1 Direkte Methoden

Der einfachste Versuch, die Wahrscheinlichkeitsvorstellung des Entscheiders über einen Umweltzustand zu erkunden, besteht darin, ihn danach fragen. Wenn er über Kenntnisse des Wahrscheinlichkeitskonzeptes verfügt, kann er gegebenenfalls seine Vorstellung durch eine Glaubwürdigkeitsziffer zwischen 0 und 1 zum Ausdruck bringen.

Eine direkte Befragung ist zwar einfach und im Prinzip schnell durchzuführen. Der befragte Entscheider kann aber nur dann seine Wahrscheinlichkeitsvorstellungen unmittelbar in kardinalen Größen ausdrücken, wenn er über ein ausreichendes Differenzierungsvermögen verfügt. Vor allem bei einer größeren Zahl von Zuständen kann die direkte Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten Schwierigkeiten bereiten, weil der Entscheider im Allgemeinen nicht in der Lage ist, in seinen Überlegungen simultan alle möglichen Zustände zu berücksichtigen. Es entsteht somit das Problem, wie die Zusammenhänge überschaubarer gemacht werden können. Eine Möglichkeit besteht darin, den Entscheider nach den Wahrscheinlichkeitsrelationen zwischen je zwei Zuständen zu befragen. Der Entscheider muss dann jeweils nur die relativen Chancen von zwei Zuständen abwägen. Nachdem die Wahrscheinlichkeitsrelationen fixiert sind, werden die absoluten Werte der subjektiven Wahrscheinlichkeiten derart normiert, dass ihre Summe 1 ergibt.

Eine derartige Berechnung lässt sich an folgendem Beispiel verdeutlichen. Dabei wird angenommen, die Zahl der möglichen Zustände sei drei. Nach gewissen Überlegungen komme der Entscheider zu dem Urteil, der Zustand S_1 sei dreimal so wahrscheinlich wie S_2 und S_2 zweimal so wahrscheinlich wie S_3 . Da die Summe der Wahrscheinlichkeiten eins betragen muss, folgen aus diesen Angaben die subjektiven Wahrscheinlichkeiten $w(S_1) = 6/9$, $w(S_2) = 2/9$ und $w(S_3) = 1/9$.

Bei den direkten Methoden besteht die Gefahr, dass der befragte Entscheider inkonsistente Aussagen über seine subjektiven Wahrscheinlichkeiten (bzw. Wahrscheinlichkeitsrelationen) macht. Es kann dann sinnvoll sein, ihn zusätzlich mit weiteren Fragen zu konfrontieren, um seine Aussagen auf Konsistenz zu prüfen. Angenommen, ein risikoneutraler Entscheider behauptet, er ordne dem Zustand S_1 die Wahrscheinlichkeit 0,8 zu. Um die Konsistenz seiner Wahrscheinlichkeitsangabe zu überprüfen, kann er gefragt werden, ob er bereit wäre, an einer Lotterie teilzunehmen, die bei einem Einsatz von 40 € genau dann zu einem Gewinn von 50 € führt, wenn der Zustand S_1 eintritt (wenn S_1 nicht eintritt, verliert er seinen Einsatz). Wenn der Entscheider diese Lotterie ablehnt, sollte er sein Wahrscheinlichkeitsurteil überdenken. Denn der Gewinnerwartungswert der Lotterie ist bei der genannten Wahrscheinlichkeit ebenso groß wie der geforderte Einsatz ($0,8 \cdot 50 = 40$). Der Entscheider müsste seiner Risikoeinstellung entsprechend (gerade noch) bereit sein, die Wette anzunehmen.

10.3.2 Indirekte Methode

Direkte Methoden sind zwar einfach und schnell anzuwenden, sie setzen jedoch ein entsprechendes Differenzierungsvermögen beim Befragten voraus. Daher sind *indirekte* Messverfahren entwickelt worden. Vielen Menschen fällt es leichter, einfache und vertraute Entscheidungsprobleme zu lösen, als Fragen nach der Höhe von Eintrittswahrscheinlichkeiten explizit zu beantworten. Die indirekten Methoden tragen diesem Sachverhalt Rechnung.

Die unbekannte Länge eines Gegenstandes lässt sich messen, indem sie mit bekannten Längen verglichen wird. Durch einen derartigen Vergleich können auch subjektive Wahrscheinlichkeiten ermittelt werden. Dazu werden einem Entscheider (hypothetische) Entscheidungssituationen vorgelegt, die i. d. R. als *Spiel-* bzw. *Wettprobleme* formuliert werden. Da die Entscheidung eines Individuums in solchen Situationen nicht nur von seinen zunächst noch verborgenen subjektiven Wahrscheinlichkeiten abhängt, sondern auch von seinen subjektiven Nutzensvorstellungen und seiner grundsätzlichen Einstellung gegenüber Wetten oder Spielen, sollte für die Bestimmung der subjektiven Wahrscheinlichkeiten nach einer indirekten Methode für diese Determinanten einer Entscheidung die *ceteris paribus*-Annahme Gültigkeit haben. Das heißt, dass eine subjektive Wahrscheinlichkeit durch den Vergleich von Spielen bzw. Wetten ermittelt wird, und dass dieser Vergleich allein von Wahrscheinlichkeiten abhängt, nicht aber von subjektiven Nutzensvorstellungen oder der Einstellung gegenüber Wetten.

Um das subjektive Wahrscheinlichkeitsurteil eines Entscheiders über das Eintreten eines Zustands S_s indirekt zu ermitteln, kann ihm hypothetisch eine Wette auf den betreffenden Umweltzustand und alternativ ein Glücksspiel angeboten werden:

- Alternative I* Der Entscheider erhält 1000 €, sofern der Zustand S_s eintritt. Wenn sich ein anderer Zustand einstellt, erhält er nichts.
- Alternative II* Er erhält die 1000 € genau dann, wenn er aus einer Urne mit 100 roten oder blauen Kugeln mit geschlossenen Augen eine rote Kugel entnimmt. Die Zahl n ($0 \leq n \leq 100$) der roten Kugeln in der Urne wird dem Entscheider bekannt gegeben.

Beide Alternativen werden in Abb. 10.1 einander gegenübergestellt.

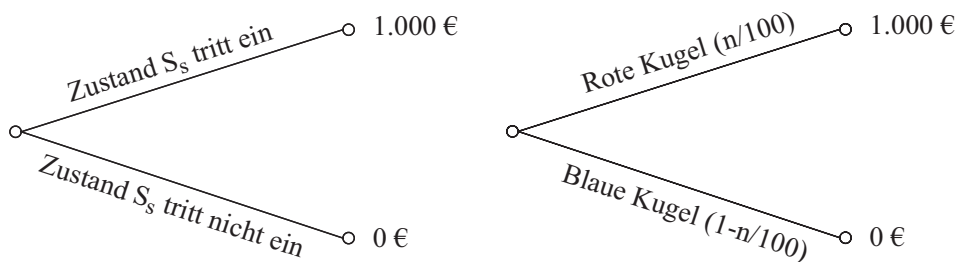


Abb. 10.1 Zum Vergleich der Alternativen I und II

Die objektive Wahrscheinlichkeit, aus der Urne eine rote Kugel zu entnehmen, beträgt $n/100$. Wenn der Entscheider bei einem bestimmten n -Wert die Alternative I vorzieht, muss in seinen Augen eine größere Chance bestehen, mit dieser Alternative die 1000 € zu gewinnen, als mit der Alternative II. Im Urteil des Entscheiders ist dann also die Eintrittswahrscheinlichkeit für den Zustand S_s größer als $n/100$. Wenn der Entscheider die Alternative II vorzieht, gilt $w(S_s) < n/100$.

Bezeichnet n^* die Zahl der roten Kugeln, bei der Indifferenz besteht, so gilt

$$w(S_s) = n^* / 100.$$

Die Alternative II wird damit zur *äquivalenten Urne*, wenn diese n^* rote Kugeln enthält. n^* kann empirisch z. B. in der Weise bestimmt werden, dass zunächst $n=50$ zugrunde gelegt wird (die Wahrscheinlichkeit für die Entnahme einer roten Kugel beträgt dann 0,5). Der Entscheider wird nun gefragt, ob er zwischen den Alternativen I und II indifferent ist und wenn nicht, welche er vorzieht. Bei Indifferenz gilt $n^*=50$ und mithin $w(S_s)=0,5$. Wenn der Entscheider die Alternative I vorzieht, wird die Zahl der roten Kugeln in der Urne sukzessive erhöht (und die der blauen entsprechend verringert). Der Entscheider wird jeweils gefragt, ob er immer noch die Alternative I vorzieht.

Schließlich ergibt sich eine Mischung aus roten und blauen Kugeln, bei welcher der Entscheider hinsichtlich beider Alternativen indifferent ist. Zwar könnte der Entscheider Schwierigkeiten haben, zu präzisieren, ob etwa bei 77, 78, ..., 82 oder 83 roten Kugeln die Alternativen gleichwertig sind. Eine ungenaue Angabe der Indifferenzwahrscheinlichkeit ist aber immer noch besser, als auf die Angabe der Wahrscheinlichkeit völlig zu verzichten, und in der Regel genauer als die Angabe bei direkter Befragung des Entscheiders. Solche feinen Unterschiede sind zudem häufig irrelevant. Das „kritische“ Intervall zwischen 77 und 83 lässt sich durch den mittleren Wert 80 repräsentieren: Es könnte dann z. B. davon ausgegangen werden, der Entscheider sei indifferent zwischen beiden Alternativen, wenn die Zahl der roten Kugeln gleich 80 ist, d. h. es würde $w(S_s)=0,8$ angenommen.

Im Zuge der Bestimmung der Wahrscheinlichkeit $w(S_s)$ müssen keine Fragen gestellt werden, die komplexer sind als die Frage: „Ziehen Sie die Alternative I oder II vor oder sind Sie zwischen beiden indifferent?“ Aus den Antworten auf diese Fragen ergibt sich schließlich ein numerischer Wert für den Glaubwürdigkeitsgrad, mit dem der Zustand S_s erwartet wird.

Das beschriebene Verfahren besticht durch seine Einfachheit. Gleichwohl ist es nur anwendbar, wenn wie oben beschrieben die *ceteris paribus*-Annahme beim Vergleich der Alternativen I und II erfüllt ist. Die Annahme ist zum Beispiel verletzt, wenn der Gewinn von 1000 € dem Entscheider bei Eintreten des Umweltzustands S_s einen höheren Nutzen stiftet als in jedem anderen Zustand, da dadurch Alternative I attraktiver wird und die angegebene Wahrscheinlichkeit nach unten „verzerrt“ angegeben würde. In einem solchen Fall ist es praktisch nur sehr schwer möglich, das genaue Wahrscheinlichkeitsurteil eines Entscheiders zu ermitteln, die Verzerrung also herauszurechnen.

10.4 Informationszugang und Revision des Wahrscheinlichkeitsurteils

10.4.1 Wahrscheinlichkeitsurteile vor und nach Informationszugang

Bei den Darstellungen in Abschn. 10.3 ging es um die Quantifizierung derjenigen Wahrscheinlichkeiten für die Umweltzustände, die einem *gegebenen* Informationsstand entsprechen. Im Folgenden soll gezeigt werden, wie ein Entscheider durch das Einholen zusätzlicher Informationen sein Wahrscheinlichkeitsurteil verbessern kann. Ob er bestimmte Informationen einholen sollte, ob die Informationsbeschaffung also bei gegebenen Kosten vorteilhaft ist, hängt im Wesentlichen davon ab, in welcher Weise die Informationen das Wahrscheinlichkeitsurteil des Entscheiders beeinflussen können. Damit befasst sich der vorliegende Abschnitt.

Informationen sind das Ergebnis der Überprüfung von Größen bzw. Sachverhalten, welche als Grundlage für die Prognose der Ausprägungen der entscheidungsrelevanten Daten dienen. Diese Größen bzw. Sachverhalte werden als *Indikatoren* bezeichnet. Indikatoren sind z. B. die bisherige Preisentwicklung, Bilanzen, Berichte in Zeitungen, die Auskunft eines Informanten (die auch die Gestalt eines Wahrscheinlichkeitsurteils haben kann), die Daten des internen Rechnungswesens oder das bisherige Verhalten von Individuen.

Zum Zeitpunkt der Entscheidung darüber, ob bestimmte Informationen beschafft werden sollen, sind die Ausprägungen der entsprechenden Indikatoren (also der Inhalt der betreffenden Informationen) dem Entscheider noch unbekannt. Wären sie bereits bekannt, so würde sich das Problem der Informationsbeschaffung gar nicht stellen. Die im Zuge des Informationsprozesses festgestellten Ausprägungen der beobachteten Indikatoren werden als *Informationsergebnis* bezeichnet. Die a priori (d. h. vor Information) als möglich erachteten Informationsergebnisse werden durch I_i , $i = 1, 2, \dots, N_I$, charakterisiert. Wie diese möglichen Informationsergebnisse im konkreten Fall zu beschreiben sind, hängt davon ab, welche Indikatoren überprüft werden sollen und welche Ausprägungen diese aus Sicht des Entscheiders vor Information aufweisen können.

Um zu beschreiben, wie eine Information das Wahrscheinlichkeitsurteil eines Entscheiders beeinflusst, ist es notwendig, zwei Typen von Wahrscheinlichkeiten zu unterscheiden:

1. Sofern der Entscheider keine weiteren Informationen einholt, bildet er sich sein Wahrscheinlichkeitsurteil über die künftigen Zustände auf der Basis seines bisherigen Informationsstandes. Die betreffenden Wahrscheinlichkeiten (vor Information) werden als *a-priori*-Wahrscheinlichkeiten bezüglich der Umweltzustände bezeichnet: $w(S_s)$.
2. Im Fall der Informationsbeschaffung korrigiert der Entscheider auf der Basis seiner neuen Kenntnisse sein bisheriges Wahrscheinlichkeitsurteil. Die betreffenden Wahrscheinlichkeiten nach Information werden als *a-posteriori*-Wahrscheinlichkeiten bezeichnet: $w(S_s | I_i)$.

Die Unterschiede zwischen den a-posteriori- und den a-priori-Wahrscheinlichkeiten kennzeichnen, in welcher Weise der Entscheider sein ursprüngliches Wahrscheinlichkeitsurteil bei Informationszugang revidiert. Dabei hängen Richtung und Umfang der Revision eines Wahrscheinlichkeitsurteils nicht nur davon ab, welches Informationsergebnis eintritt, sondern auch davon, welche *Prognosequalität* die Indikatoren (bzw. der Indikator) aus Sicht des Entscheiders haben. Diese Prognosequalität drückt sich im Urteil des Entscheiders darüber aus, mit welchen Wahrscheinlichkeiten er alternative Informationsergebnisse unter der Bedingung erhalten wird, dass der Zustand S_s ($s = 1, 2, \dots, N_S$) eintritt. Zur Verdeutlichung betrachten wir das folgende Beispiel.

Beispiel 10.1 Das Ergebnis einer heute zu treffenden Entscheidung sei vom morgigen Wetter abhängig. Für den Entscheider stellt sich daher das Problem, sich ein Wahrscheinlichkeitsurteil über das Wetter zu bilden. Der Einfachheit halber werden nur die Zustände „schönes Wetter“ (S_1) und „schlechtes Wetter“ (S_2) voneinander abgegrenzt. Außerdem gebe es nur zwei mögliche Informationsergebnisse: die Vorhersagen guten Wetters (I_1) und schlechten Wetters (I_2).

Bei seinem bisherigen Informationsstand (z. B. Kenntnis der heutigen Wetterlage) ordne der Entscheider jedem Zustand die gleiche Wahrscheinlichkeit 0,5 zu. Der Entscheider habe nun die folgenden Informationsmöglichkeiten:

- a) Er kann einen „Wahrsager“ befragen, von dem er annimmt, dass dieser heimlich würfelt und seine Wetterprognose nach der erzielten Augenzahl abgibt.
- b) Er kann sich den lokalen Wetterbericht für den kommenden Tag beschaffen.

Zu a): Die Prognose des „Wahrsagers“ ist offenbar unabhängig vom Wetter. Sie lässt folglich keinen Rückschluss darauf zu. Konkret gibt es aus Sicht des Entscheiders keinen Zusammenhang zwischen den beiden möglichen Informationsergebnissen und dem morgigen Wetter: Die Vorhersage guten Wetters ist gleich wahrscheinlich, unabhängig davon, ob das Wetter morgen tatsächlich gut wird oder nicht. Formal lässt sich dieser Zusammenhang über die folgenden bedingten Wahrscheinlichkeiten ausdrücken:

$$w(I_1|S_1) = w(I_1|S_2) \quad \text{und} \quad w(I_2|S_1) = w(I_2|S_2).$$

Das aber bedeutet, dass die Eintrittswahrscheinlichkeit für jedes Informationsergebnis jeweils unabhängig vom Umweltzustand ist:

$$w(I_i|S_1) = w(I_i|S_2) = w(I_i) \quad (i=1, 2).$$

Informationsergebnis und Umweltzustand sind damit voneinander *stochastisch unabhängig*. Die Information hat keinen Einfluss auf das Wahrscheinlichkeitsurteil.

Zu b): Es liegt für den Entscheider nahe, die Prognosequalität des Wetterdienstes danach zu beurteilen, mit welcher *relativen* Häufigkeit dieser in der Vergangenheit korrekte Prognosen für den nächsten Tag abgegeben hat. Man erhält z. B. die relative

Häufigkeit korrekter Vorhersagen schönen Wetters, indem man die Zahl dieser (korrekten) Vorhersagen durch die Zahl aller Tage mit schönem Wetter dividiert. Diese relative Häufigkeit kann der Entscheider in die bedingte Wahrscheinlichkeit $w(I_1|S_1)$ übersetzen, wenn er davon ausgeht, dass die Prognosequalität des Wetterdienstes über die Zeit stabil ist. Analog kann er die relative Häufigkeit vergangener, korrekter Schlechtwettervorhersagen in die bedingte Wahrscheinlichkeit $w(I_2|S_2)$ übersetzen. Vorhersagefehler des Wetterdienstes in der Vergangenheit übersetzt er entsprechend in die bedingten Wahrscheinlichkeiten $w(I_1|S_2)$ (eine Schönwetterprognose bewahrheitet sich nicht) und $w(I_2|S_1)$ (eine Schlechtwetterprognose bewahrheitet sich nicht). Es ist keineswegs selbstverständlich, dass der Wetterdienst in der Vergangenheit schlechtes Wetter mit der gleichen Zuverlässigkeit vorhergesagt hat wie schönes Wetter, d. h. es gilt nicht zwangsläufig $w(I_1|S_1) = w(I_2|S_2)$. Dennoch gehe der Entscheider in diesem Beispiel davon aus, die beiden Prognosen seien gleichermaßen zuverlässig. Die Wahrscheinlichkeit einer korrekten Vorhersage bezeichnen wir im Folgenden kurz mit $p(w(I_1|S_1) = w(I_2|S_2) = p)$ und nehmen an, es gelte $p > 0,5$, der Wetterdienst liege mit seinen Prognosen also häufiger richtig als falsch.

Die Wahrscheinlichkeiten, die der Entscheider nach Kenntnis der Wettervorhersage den Zuständen S_1 (schönes Wetter) und S_2 (schlechtes Wetter) zuordnet, hängen nun davon ab, welches Wetter prognostiziert wird und welche Prognosequalität die Vorhersage hat. Dabei sind die folgenden Zusammenhänge zu vermuten:

- Gilt wie angenommen $p > 0,5$, so sollte der Entscheider das prognostizierte Wetter nach der Prognose für wahrscheinlicher halten als vorher, d. h. die a-posteriori-Wahrscheinlichkeit für gutes Wetter liegt nach einer entsprechenden Prognose über der a-priori-Wahrscheinlichkeit: $w(S_1|I_1) > w(S_1) = 0,5$. Dasselbe gilt für eine Schlechtwetterprognose: $w(S_2|I_2) > w(S_2) = 0,5$.
- Je höher die Prognosequalität ist, d. h. je größer p ist, desto stärker sollte sich der Entscheider auf die Prognose verlassen: Er passt dann sein Wahrscheinlichkeitsurteil umso stärker an, d. h. die a-posteriori-Wahrscheinlichkeit für das vorhergesagte Wetter liegt c. p. umso mehr über der a-priori-Wahrscheinlichkeit $w(S_i) = 0,5$, je höher p ist.
- Würde $w(S_1) \neq w(S_2)$ gelten, wäre außerdem zu vermuten: Je weniger sicher sich der Entscheider über die Wetterentwicklung a priori ist, desto stärker sollte er der Wetterprognose vertrauen. Je näher also die Wahrscheinlichkeiten $w(S_1)$ und $w(S_2)$ an $0,5$ liegen, desto stärker weicht ceteris paribus die a-posteriori-Wahrscheinlichkeit für das vorhergesagte Wetter von der a-priori-Wahrscheinlichkeit dieses Wetters ab.

Die beschriebenen Zusammenhänge sind zwar intuitiv nachvollziehbar, sie erlauben jedoch noch keine Quantifizierung der Wahrscheinlichkeitsvorstellungen des Entscheiders nach Informationszugang. Im folgenden Abschnitt wird daher das *Theorem von Bayes* vorgestellt, das zeigt, wie die a-priori-Wahrscheinlichkeitsvorstellungen für die Umweltzustände in diejenigen a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten umzurechnen sind, die möglichen Informationsergebnissen entsprechen.

10.4.2 Theorem von Bayes

10.4.2.1 Darstellung

Der Zusammenhang zwischen der vor Informationszugang gegebenen (a-priori-) Wahrscheinlichkeit für den Zustand S_s ($s = 1, 2, \dots, N_S$) und der (a-posteriori-) Wahrscheinlichkeit dieses Zustandes nach Eintreten des Informationsergebnisses I_i ($i = 1, 2, \dots, N_I$) kann mithilfe des Theorems von Bayes beschrieben werden. Hierzu wird die stochastische Abhängigkeit zwischen den Informationsergebnissen und den Zuständen durch Wahrscheinlichkeiten ausgedrückt, die nachfolgend noch einmal definiert werden:

$w(I_i|S_s) \hat{=}$ (bedingte) a-priori-Wahrscheinlichkeit für das Informationsergebnis I_i ($i = 1, 2, \dots, N_I$) unter der Hypothese, dass der Zustand S_s ($s = 1, 2, \dots, N_S$) eintritt (bzw. bereits eingetreten ist, ohne dass der Entscheider ihn kennt).

Sind die a-priori-Wahrscheinlichkeiten $w(I_i|S_s)$ und $w(S_s)$ bekannt, können auch die folgenden Wahrscheinlichkeiten ermittelt werden:

$w(S_s|I_i) \hat{=}$ (bedingte) Wahrscheinlichkeit für den Zustand S_s ($s = 1, 2, \dots, N_S$) unter der Voraussetzung, dass I_i ($i = 1, 2, \dots, N_I$) das Ergebnis der Informationsbeschaffung ist.

$w(I_i) \hat{=}$ (unbedingte) a-priori-Wahrscheinlichkeit für das Informationsergebnis I_i ($i = 1, 2, \dots, N_I$).

$w(S_s|I_i)$ ist die sogenannte *a-posteriori*-Wahrscheinlichkeit, $w(S_s)$ die *a-priori*-Wahrscheinlichkeit für den Zustand S_s .

Wie können nun die Wahrscheinlichkeiten $w(I_i)$ und $w(S_s|I_i)$ bestimmt werden? Für die Wahrscheinlichkeit des gemeinsamen Eintretens der Ereignisse S_s und I_i gilt allgemein:

$$w(S_s \cap I_i) = w(I_i|S_s) \cdot w(S_s). \quad (10.1)$$

$w(S_s \cap I_i)$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sowohl der Zustand S_s eintritt als auch das Informationsergebnis I_i erzielt wird. Es gilt aber auch:

$$w(S_s \cap I_i) = w(S_s|I_i) \cdot w(I_i). \quad (10.2)$$

Hieraus folgt in Verbindung mit (10.1):

$$w(S_s|I_i) = \frac{w(I_i|S_s) \cdot w(S_s)}{w(I_i)} \quad (10.3)$$

Für die unbedingte Wahrscheinlichkeit $w(I_i)$ des Informationsergebnisses I_i gilt („Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit“):

$$w(I_i) = \sum_{s=1}^{N_S} w(S_s \cap I_i) = \sum_{s=1}^{N_S} w(I_i|S_s) \cdot w(S_s) \quad (i = 1, 2, \dots, N_I) \quad (10.4)$$

Mit (10.3) entsteht daraus die grundlegende Gleichung (*Theorem von Bayes*):

$$w(S_s|I_i) = \frac{w(I_i|S_s) \cdot w(S_s)}{\sum_{s=1}^{N_S} w(I_i|S_s) \cdot w(S_s)} \quad (i = 1, 2, \dots, N_I; \quad s = 1, 2, \dots, N_S). \quad (10.5)$$

(10.5) gibt an, wie die a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten $w(S_s|I_i)$ aus den a-priori-Wahrscheinlichkeiten $w(S_s)$ berechnet werden können, wenn die bedingten Wahrscheinlichkeiten $w(I_i|S_s)$ gegeben sind.

Die Wahrscheinlichkeiten, die der Entscheider *nach* Information den Zuständen $S_1, S_2, \dots, S_{N_S}$ zuordnet, hängen gemäß (10.5) davon ab,

- welche (a-priori-)Wahrscheinlichkeiten $w(S_1), w(S_2), \dots, w(S_{N_S})$ er den Zuständen vor Information, also bei seinem bisherigen Informationsstand, beimisst,
- wie er vor Information die stochastische Abhängigkeit zwischen den möglichen Informationsergebnissen $I_1, I_2, \dots, I_{N_I}$ und den Zuständen $S_1, S_2, \dots, S_{N_S}$ einschätzt und
- welches Informationsergebnis I_i tatsächlich erzielt wird.

Indikatoren sind nur dann prognoserelevant, d. h. sie ermöglichen nur dann einen Rückschluss auf den Zustand, wenn ihre Ausprägungen (stochastisch) vom Zustand abhängen. Im Allgemeinen sind auch prognoserelevante Informationen in dem Sinne „*unvollkommen*“, dass sie nur einen *probabilistischen* Rückschluss auf den Zustand ermöglichen. Nach Information liegt dann immer noch eine Risikosituation vor, jedoch ist das Wahrscheinlichkeitsurteil „besser“ als *vor* Information. „*Vollkommene*“ Informationen ermöglichen einen *sicheren* Rückschluss: Bei jedem Informationsergebnis hat jeweils ein Zustand die Wahrscheinlichkeit 1, alle anderen die Wahrscheinlichkeit 0. Bei vollkommener Information entspricht jedem Zustand genau ein Informationsergebnis, nämlich die Information, dass der betreffende Zustand eintreten wird. Es gibt dann also genau so viele mögliche Informationsergebnisse wie mögliche Umweltzustände ($N_I = N_S$).

Zur Illustration des Bayes-Theorems betrachten wir im folgenden Abschnitt einige Beispiele.

10.4.2.2 Beispiele

Beispiel 10.1 (a) Wir greifen zunächst das Wettervorhersagebeispiel aus Abschn. 10.4.1 wieder auf. Wird das morgige Wetter durch einen „Wahrsager“ prognostiziert, dessen Prognose von der Augenzahl eines Würfels abhängt, so gilt wie bereits erläutert wurde: $w(I_1|S_1) = w(I_1|S_2) = w(I_1)$ und $w(I_2|S_1) = w(I_2|S_2) = w(I_2)$ (mit $w(I_1) + w(I_2) = 1$). Entsprechend gilt allgemein für eine Information, die vom Umweltzustand stochastisch unabhängig ist:

$$w(I_i|S_1) = w(I_i|S_2) = \dots = w(I_i|S_{N_S}) = w(I_i) \quad (i = 1, 2, \dots, N_I). \quad (10.6)$$

Setzt man dies in (10.5), das Theorem von Bayes, ein, so folgt:

$$w(S_s|I_i) = \frac{w(I_i|S_s) \cdot w(S_s)}{w(I_i)} = \frac{w(I_i) \cdot w(S_s)}{w(I_i)} = w(S_s) \quad (10.7)$$

$$(s = 1, 2, \dots, N_S; i = 1, 2, \dots, N_I).$$

Bei stochastischer Unabhängigkeit stimmen also bei jedem Informationsergebnis I_i die a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten der Zustände S_s mit den a-priori-Wahrscheinlichkeiten überein: Die Information verändert das Wahrscheinlichkeitsurteil des Entscheiders nicht, sie ist irrelevant und damit für ihn vollkommen wertlos.

b) Der Wetterdienst habe in der Vergangenheit mit der relativen Häufigkeit p korrekte Vorhersagen gemacht und der betrachtete Entscheider setze diese Häufigkeit gleich mit einer korrekten Prognose für den folgenden Tag. Es gelte demnach $w(I_1|S_1) = w(I_2|S_2) = p$ und es bezeichnen wieder:

$S_1 \hat{=}$ das Wetter wird schön sein,

$S_2 \hat{=}$ das Wetter wird morgen schlecht sein,

$I_1 \hat{=}$ Vorhersage schönen Wetters,

$I_2 \hat{=}$ Vorhersage schlechten Wetters

Weiterhin ordne der Entscheider in seinem a-priori-Urteil beiden Zuständen die Wahrscheinlichkeit 0,5 zu: $w(S_1) = w(S_2) = 0,5$. Der Zustandsbaum in Abb. 10.2 verdeutlicht den stochastischen Zusammenhang zwischen dem Wetterbericht (dem Informationsergebnis) und dem morgigen Wetter (dem Umweltzustand).

Gemäß (10.5) gilt nun:

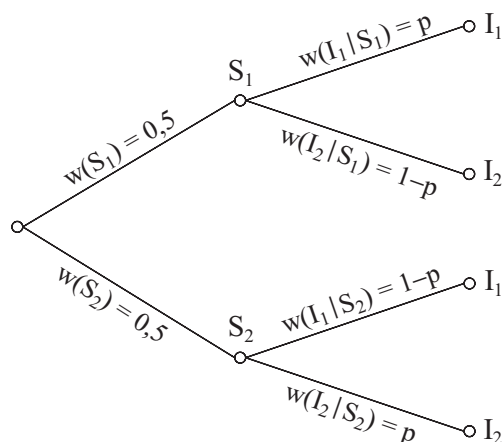
$$w(S_1|I_1) = \frac{p \cdot 0,5}{p \cdot 0,5 + (1-p) \cdot 0,5} = p, \quad w(S_2|I_1) = \frac{(1-p) \cdot p \cdot 0,5}{p \cdot 0,5 + (1-p) \cdot 0,5} = (1-p),$$

$$w(S_1|I_2) = \frac{(1-p) \cdot 0,5}{(1-p) \cdot 0,5 + p \cdot 0,5} = (1-p), \quad w(S_2|I_2) = \frac{p \cdot 0,5}{(1-p) \cdot 0,5 + p \cdot 0,5} = p$$

Wird also der Zustand S_s ($s=1, 2$) vorausgesagt, so ordnet der Entscheider diesem Zustand die Wahrscheinlichkeit p und dem anderen die Wahrscheinlichkeit $1-p$ zu. Die a-posteriori-Wahrscheinlichkeit des prognostizierten Zustandes stimmt also mit der Wahrscheinlichkeit dafür überein, dass eine richtige Prognose abgegeben wird. Die Tatsache, dass hier die a-posteriori-Eintrittswahrscheinlichkeit des prognostizierten Zustandes unabhängig davon ist, *welcher* Zustand vorhergesagt wird, hat zwei Gründe: Zum einen haben beide Zustände dieselbe a-priori-Wahrscheinlichkeit ($w(S_1) = w(S_2) = 0,5$). Zum anderen ist die Wahrscheinlichkeit p für eine richtige Prognose unabhängig davon, welcher Umweltzustand tatsächlich eintreten wird.

Beispiel 10.2 Zwei Taxigesellschaften sind in einer Stadt tätig. Die Taxis der Gesellschaft A sind grün, die der Gesellschaft B blau. Die Gesellschaft A stellt 15 % der Taxis, die Gesellschaft B die verbleibenden 85 %. Eines Nachts kommt es zu einem Unfall mit

Abb. 10.2 Stochastische
Abhängigkeit der Prognose
vom Zustand



Fahrerflucht. Das fliehende Auto war ein Taxi. Ein Zeuge sagt aus, es habe sich um ein grünes Taxi gehandelt. Das Gericht lässt den Zeugen auf seine Fähigkeit untersuchen, grüne und blaue Taxis unter nächtlichen Sichtbedingungen zu unterscheiden. Das Untersuchungsergebnis ist: In 80 % der Fälle identifizierte der Zeuge die Farbe zutreffend, in 20 % der Fälle irrte er sich. Kann der Richter aus der Aussage des Zeugen darauf schließen, am Unfall wäre ein grünes Taxi beteiligt gewesen? Wie sicher kann er sich sein? Mit

$S_1 \hat{=}$ das Taxi war grün,

$S_2 \hat{=}$ das Taxi war blau,

$I_1 \hat{=}$ der Zeuge gibt an, er habe ein grünes Taxi gesehen,

$I_2 \hat{=}$ der Zeuge gibt an, er habe ein blaues Taxi gesehen

ergibt sich der folgende Zusammenhang:

$$w(S_1 | I_1) = \frac{0,8 \cdot 0,15}{0,8 \cdot 0,15 + 0,2 \cdot 0,85} = 0,4138, \quad w(S_2 | I_1) = \frac{0,2 \cdot 0,85}{0,8 \cdot 0,15 + 0,2 \cdot 0,85} = 0,5862,$$

$$w(S_1 | I_2) = \frac{0,2 \cdot 0,15}{0,2 \cdot 0,15 + 0,8 \cdot 0,85} = 0,0423, \quad w(S_2 | I_2) = \frac{0,8 \cdot 0,85}{0,2 \cdot 0,15 + 0,8 \cdot 0,85} = 0,9577$$

A priori ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein blaues Taxi am Unfall beteiligt war, gleich 0,85 und damit größer als die Wahrscheinlichkeit, dass das Taxi grün war. Auch nach der Zeugenaussage (I_1 : das Taxi war grün) ist es immer noch wahrscheinlicher, dass ein blaues und kein grünes Taxi am Unfall beteiligt war: $w(S_2 | I_1) = 0,5862 > w(S_1 | I_1) = 0,4138$. Der Richter kann sich also nach der Zeugenaussage keineswegs sicher sein, dass das Unfall-Taxi grün war.

Beispiel 10.3 Im Rahmen eines Entscheidungsproblems seien die beiden folgenden Zustände relevant:

$S_1 \hat{=}$ Der Auftraggeber ist „zahlungsfähig“,

$S_2 \hat{=}$ Der Auftraggeber ist „nicht zahlungsfähig“.

Bei seinem bisherigen Informationsstand ordnet der Entscheider den Zuständen die a-priori-Wahrscheinlichkeiten $w(S_1)=0,8$ und $w(S_2)=0,2$ zu. Der Entscheider erwägt nun, bei einem Informanten eine Auskunft über die Zahlungsfähigkeit des Auftraggebers einzuholen. Der Informant gibt entweder die Auskunft I_1 oder I_2 :

$I_1 \hat{=}$ Der Auftraggeber ist zahlungsfähig,

$I_2 \hat{=}$ Der Auftraggeber ist nicht zahlungsfähig.

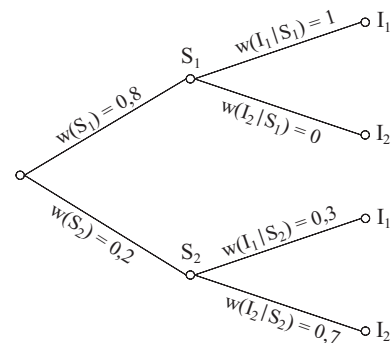
Im Urteil des Entscheiders bestehe (vor Information) der in Abb. 10.3 dargestellte stochastische Zusammenhang zwischen der Auskunft (dem Informationsergebnis) und dem Zustand.

Aus Sicht des Entscheiders gibt also der Informant unter der Hypothese, dass der Zustand S_1 vorliegt, mit Sicherheit die richtige Auskunft: Bleibt der Auftraggeber solvent, so wird dies der Informant auch mit Sicherheit vorhersagen. Falls der Zustand S_2 relevant ist, erwartet der Entscheider nur mit der Wahrscheinlichkeit 0,7 eine richtige, mit der Gegenwahrscheinlichkeit 0,3 eine falsche Auskunft. Die Gefahr der Fehlinformation im Fall der Zahlungsunfähigkeit kann etwa daraus resultieren, dass der Auftraggeber möglicherweise gegenüber dem Informanten mit Erfolg vortäuscht, zahlungsfähig zu sein.

Wie hoch sind nun die a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten $w(S_s|I_i)$ ($s=1,2$; $i=1,2$)? Gemäß (10.5) gilt:

$$w(S_1|I_1) = \frac{1 \cdot 0,8}{1 \cdot 0,8 + 0,3 \cdot 0,2} \approx 0,93, \quad w(S_2|I_1) = \frac{0,3 \cdot 0,2}{1 \cdot 0,8 + 0,3 \cdot 0,2} \approx 0,07,$$

Abb. 10.3 Die stochastische Abhängigkeit des Informationsergebnisses vom Zustand. (Beispiel 10.3)



$$w(S_1|I_2) = \frac{0 \cdot 0,8}{0 \cdot 0,8 + 0,7 \cdot 0,2} = 0, \quad w(S_2|I_2) = \frac{0,7 \cdot 0,2}{0 \cdot 0,8 + 0,7 \cdot 0,2} = 1$$

Wenn also die Auskunft I_2 (der Auftraggeber ist nicht zahlungsfähig) gegeben wird, entspricht dem Zustand S_1 („zahlungsfähig“) die Wahrscheinlichkeit Null und dem Zustand S_2 („zahlungsunfähig“) die Wahrscheinlichkeit 1. Dieses Ergebnis ist unmittelbar plausibel, denn die Auskunft I_2 ist nur dann möglich, wenn S_2 tatsächlich der wahre Zustand ist. Aus der Auskunft I_1 („zahlungsfähig“) kann dagegen kein sicherer Rückschluss auf den Zustand gezogen werden; diese Auskunft wird ja möglicherweise auch dann gegeben, wenn „Zahlungsunfähigkeit“ besteht: Dem Zustand S_1 entspricht jedoch bei dieser Auskunft eine höhere, dem Zustand S_2 eine geringere Wahrscheinlichkeit als in der Ausgangssituation, und zwar 0,93 statt 0,8 bzw. 0,07 statt 0,2.

10.5 Informationsbeschaffung als Entscheidungsproblem

10.5.1 Die Entscheidungssituation

Aus den möglichen Änderungen der Wahrscheinlichkeiten für die Umweltzustände nach Informationszugang kann nicht unmittelbar geschlossen werden, ob es für den betrachteten Entscheider überhaupt vorteilhaft ist, die betreffenden Informationen zu beschaffen. Dies hängt zum einen von den Kosten der Informationen ab und zum anderen von deren Wert, der seinerseits davon abhängt, ob die betreffenden Informationen potenziell *entscheidungsrelevant* sind. Eine Information ist nur dann potenziell entscheidungsrelevant, wenn der Entscheider im Fall ihrer Beschaffung bei mindestens einem Informationsergebnis eine andere Alternative wählt als bei Entscheidung ohne Information. Die Entscheidungsrelevanz einer Information ist zwar keine hinreichende, aber eine notwendige Bedingung dafür, dass der Entscheider die Information beschafft: Ist sie nicht entscheidungsrelevant, so weiß der Entscheider bereits vor der Informationsbeschaffung, dass er bei keinem möglichen Informationsergebnis eine andere Alternative wählen würde als ohne die Information. Die Informationsbeschaffung kann ihm dann nicht nützen.

Die Entscheidung darüber, ob bestimmte Indikatoren beobachtet werden sollen, erfordert allgemein ein Abwägen der *Kosten* und des *Wertes* der betreffenden Information. Nachfolgend wird gezeigt, wie der Wert einer Information bestimmt werden kann. Dabei gehen wir von den folgenden Annahmen aus:

1. Der Entscheider orientiert sich nur an einer Zielgröße, dem „Gewinn“ x . Sein Entscheidungsproblem ist insoweit bereits strukturiert, dass die erwogenen Alternativen und deren zustandsabhängigen Gewinne feststehen. Bei Wahl der Alternative A_a ($a=1,2,\dots,N_A$) und Eintreten des Zustandes S_s ($s=1,2,\dots,N_S$) wird (vor Abzug der Informationskosten) der Gewinn X_{as} erzielt.

2. Die Alternativenmenge ist unabhängig davon, ob Informationen beschafft werden oder nicht. Z. B. ist ausgeschlossen, dass eine Alternative gar nicht mehr realisiert werden kann, wenn nicht sofort entschieden wird, sondern erst (zeitraubende) Informationen über ihre möglichen Gewinne eingeholt werden.
3. Auch die Gewinne X_{as} (allgemein die Ergebnisse) der Alternativen sind unabhängig davon, ob Informationen beschafft werden oder nicht. Auch diese Bedingung ist in der Realität nicht immer erfüllt. Z. B. können sich die möglichen Erfolge der Alternative „Aufnahme eines neuen Erzeugnisses in das Produktionsprogramm“ erheblich unterscheiden, je nachdem, ob das Produkt direkt auf dem Markt eingeführt wird oder erst, nachdem auf einem Testmarkt seine Erfolgchancen erkundet worden sind. Durch diese Form der Informationsbeschaffung (Verkauf auf einem Testmarkt) kann nämlich die Konkurrenz auf die Pläne aufmerksam werden und frühzeitig Gegenmaßnahmen ergreifen, sodass die (Brutto-) Gewinne möglicherweise sinken.
4. Der Entscheider orientiert sich am Bernoulli-Prinzip.

10.5.2 Definition des Informationswertes

Der Informationswert lässt sich allgemein als Grenzpreis aus Käufersicht definieren: Er entspricht demjenigen kritischen Kostenbetrag, bei dem die Informationsbeschaffung, also die Beobachtung der betreffenden Indikatoren, für den Entscheider weder vorteilhaft noch nachteilig ist. Sind die tatsächlichen Kosten niedriger (bzw. höher) als der Informationswert, so ist die Informationsbeschaffung vorteilhaft (bzw. nachteilig).

Entscheidend für die Bestimmung des Informationswertes ist die Tatsache, dass dieser Wert ermittelt werden muss, *bevor* das Informationsergebnis bekannt ist. Der Informationswert wird also auf die Entscheidungssituation *vor Kenntnis des Informationsergebnisses* bezogen. Denn die Entscheidung darüber, ob bestimmte Informationen eingeholt werden oder nicht, muss ja ebenfalls vor Informationszugang getroffen werden. Die Informationsbewertung stellt mithin ein *ex-ante*-Kalkül dar, bei dem im Voraus für jedes mögliche Informationsergebnis I_i ($i=1,2,\dots,N_I$) die jeweils zu realisierende Alternative A_a bestimmt wird. Es wird entsprechend ein System von Eventualplänen für den Fall der Informationsbeschaffung erstellt. Welcher Eventualplan (d. h. welche Alternative) nach Informationszugang tatsächlich realisiert wird, hängt vom Informationsergebnis ab; die Informationsbewertung folgt dem Prinzip der *flexiblen Planung* (Kap. 9). Informationen können im Prinzip ebenso bewertet werden wie Aufschuboptionen, die das Recht einräumen, eine ansonsten sofort zu treffende Entscheidung über Alternativen aufzuschieben, bis sich der Informationsstand über deren Konsequenzen aus welchen Gründen auch immer verbessert hat (Kap. 9, Abschn. 9.6.4).

Im Folgenden bezeichne WI den Wert der Information aus Sicht des Entscheiders. KI seien die Informationskosten. Die Informationsbeschaffung ist vorteilhaft, wenn $WI > KI$ gilt. Wenn der Entscheider die Information nicht beschafft, so wählt er auf der

Basis seines a-priori-Wahrscheinlichkeitsurteils, d. h. auf Basis der Wahrscheinlichkeiten $w(S_i)$, diejenige Alternative, die den Erwartungswert seines Nutzens maximiert. Diesen Erwartungswert bezeichnen wir im Folgenden mit $E_{oi}[U(\tilde{x})]$, wobei oi für „ohne Information“ steht. Die ohne Informationsbeschaffung gewählte Alternative wird mit $A_{\tilde{a}}$ bezeichnet.

Holt der Entscheider dagegen die Information zu Kosten KI ein, so ergibt sich sein Erwartungswert des Nutzens aus dem optimalen flexiblen Plan. Diesen Erwartungswert bezeichnen wir im Folgenden mit $E_{mi}[U(\tilde{x} - KI)]$, wobei mi für „mit Information“ steht. In diesem Erwartungswert ist berücksichtigt, dass der Entscheider von dem jeweils erzielten Gewinn die Kosten der Informationsbeschaffung KI abziehen muss. Beide Erwartungswerte, sowohl $E_{oi}[U(\tilde{x})]$ als auch $E_{mi}[U(\tilde{x} - KI)]$, sind *a priori* zu bestimmen. Wie dies geschehen kann, wird im folgenden Abschnitt gezeigt.

Auf Basis der beiden Erwartungswerte $E_{oi}[U(\tilde{x})]$ und $E_{mi}[U(\tilde{x} - KI)]$ kann nun der Informationswert wie folgt formal definiert werden:

$$E_{mi}[U(\tilde{x} - WI)] = E_{oi}[U(\tilde{x})]. \quad (10.8)$$

In Worten: Der Informationswert WI entspricht demjenigen kritischen Kostenwert $KI=WI$, für den der Erwartungswert des Nutzens mit Information und der Erwartungswert des Nutzens ohne Information identisch sind.

10.5.3 Bestimmung des Informationswertes nach dem Prinzip der flexiblen Planung

Wie erläutert wurde, folgt die Bewertung einer Information dem Prinzip der flexiblen Planung: Der Entscheider muss dabei die unbedingte Entscheidung treffen, ob er die Information beschafft oder nicht. Zu diesem Zweck ermittelt er bedingte Pläne, die angeben, welche Alternative er im Fall der Informationsbeschaffung in Abhängigkeit vom erzielten Informationsergebnis wählt. Zur Verdeutlichung betrachten wir den Fall zweier Alternativen, zweier Umweltzustände und zweier Informationsergebnisse. Das Informationsergebnis I_1 (I_2) beinhalte die Vorhersage des Zustandes S_1 (S_2). Abb. 10.4 verdeutlicht den Entscheidungsbaum für das entsprechende flexible Planungsproblem.

Der Entscheidungsbaum weist zunächst die Entscheidung zwischen der Informationsbeschaffung und der Auswahl einer der Alternativen ohne Information aus. Entscheidet der Entscheider ohne Information, so erreicht er bei Wahl der Alternative A_1 (A_2) entweder den Gewinn x_{11} (x_{21}) oder den Gewinn x_{12} (x_{22}). Die entsprechenden Erwartungswerte des Nutzens betragen:

$$\begin{aligned} E[U(\tilde{x}_1)] &= w(S_1) \cdot U(x_{11}) + w(S_2) \cdot U(x_{12}) \\ \text{und } E[U(\tilde{x}_2)] &= w(S_1) \cdot U(x_{21}) + w(S_2) \cdot U(x_{22}). \end{aligned}$$

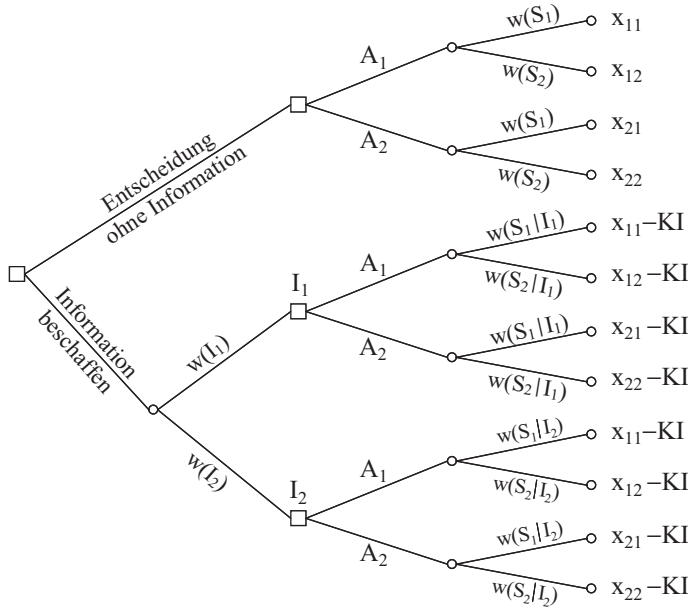


Abb. 10.4 Darstellung des Informationsbeschaffungsproblems im Entscheidungsbaum

Ohne Information wählt der Entscheider die Alternative mit dem höheren dieser Erwartungswerte. Im Beispiel gilt somit $E_{ol}[U(\tilde{x})] = \max \{E[U(\tilde{x}_1)], E[U(\tilde{x}_2)]\}$. Dies lässt sich ohne Weiteres auf eine beliebige Anzahl von Alternativen, Umweltzustände und Informationsergebnisse verallgemeinern:

$$E_{ol}[U(\tilde{x})] = \sum_{s=1}^{N_s} w(S_s) \cdot U(x_{\hat{a}s}) = \max_a \sum_{s=1}^{N_s} w(S_s) \cdot U(x_{as}). \quad (10.9)$$

Hierin bezeichnet $\hat{a}$ definitionsgemäß den Index der Alternative, die sich ohne Information als optimal erweist.

Beschafft der Entscheider die Information, so trifft er die Alternativenwahl in Abhängigkeit vom Informationsergebnis auf Basis der zugehörigen revidierten Bayes-Wahrscheinlichkeiten. Entsprechend werden im Beispiel zwei bedingte Pläne bezüglich der Alternativenwahl erstellt, einen für das mögliche Informationsergebnis I_1 und einen für I_2 . Für das Informationsergebnis I_1 wählt der Entscheider bei gegebenen Informationskosten KI die Alternative nach dem Vergleich der folgenden bedingten Erwartungswerte des Nutzens.

$$E[U(\tilde{x}_1 - KI)|I_1] = w(S_1|I_1) \cdot U(x_{11} - KI) + w(S_2|I_1) \cdot U(x_{12} - KI)$$

und $E[U(\tilde{x}_2 - KI)|I_1] = w(S_1|I_1) \cdot U(x_{21} - KI) + w(S_2|I_1) \cdot U(x_{22} - KI).$

Das Analoge gilt für das Informationsergebnis I_2 . Für beide Informationsergebnisse wählt der Entscheider also jeweils die Alternative, die bei den entsprechenden a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten den maximalen Erwartungswert des Nutzens aufweist.

Verallgemeinert erzielt er beim Informationsergebnis I_i ($i=1,2, \dots, I_{N_I}$) den Erwartungswert des Nutzens:

$$E[U(\tilde{x} - KI)|I_i] = \max_a \sum_{s=1}^{N_S} w(S_s|I_i) \cdot U(x_{as} - KI) \quad (i=1,2, \dots, N_I) \quad (10.10)$$

Schließlich kann der Entscheider ex ante den unbedingten Erwartungswert des Nutzens mit Information aus den bedingten Erwartungswerten $E[U(\tilde{x} - KI)|I_i]$ bestimmen. In allgemeiner Form gilt:

$$E_{ml}[U(\tilde{x} - KI)] = \sum_{i=1}^{N_I} w(I_i) \cdot E[U(\tilde{x} - KI)|I_i] = \sum_{i=1}^{N_I} w(I_i) \cdot \left[\max_a \sum_{s=1}^{N_S} w(S_s|I_i) \cdot U(x_{as} - KI) \right]. \quad (10.11)$$

Gemäß der impliziten Bestimmungsgleichung (10.8)

$$E_{ml}[U(\tilde{x} - WI)] = E_{ol}[U(\tilde{x})]$$

für den Informationswert WI (d. h. dem Kostenbetrag, bei dem die Information weder vorteilhaft noch nachteilig ist) folgt aus (10.11) und (10.9) für WI:

$$\sum_{i=1}^{N_I} w(I_i) \cdot \left[\max_a \sum_{s=1}^{N_S} w(S_s|I_i) \cdot U(x_{as} - WI) \right] = \max_a \sum_{s=1}^{N_S} w(S_s) \cdot U(x_{as}) \quad (10.12)$$

Der Informationswert WI ist durch diese Gleichung nicht explizit, sondern nur implizit bestimmt. Er kann jedoch im Prinzip durch Iteration ermittelt werden, indem in (10.12) für WI ein *hypothetischer* Geldbetrag eingesetzt und damit der Erwartungswert des Nutzens bei Entscheidung mit Information ermittelt wird. Ist damit die Bestimmungsgleichung (10.12) erfüllt, so stimmt WI mit dem eingesetzten Geldbetrag überein. Anderenfalls versucht man es im nächsten Iterationsschritt mit einem höheren (wenn die linke Seite von (10.12) größer ist als die rechte) oder niedrigeren Betrag (wenn die linke Seite kleiner ist) und berechnet erneut Erwartungswert des Nutzens bei Entscheidung mit Information. Zu beachten ist dabei, dass sich aufgrund eines Reichtumseffekts andere optimale bedingte Entscheidungen ergeben können als im vorherigen Iterationsschritt (vgl. auch Abschn. 10.6.3.). Das Verfahren wird wiederholt, bis die Gleichung erfüllt und WI gefunden ist. Aufgrund von Reichtumseffekten kann.

10.5.4 Maximaler und minimaler Informationswert

10.5.4.1 Maximaler Informationswert

Der maximale Informationswert ergibt sich für eine sogenannte „vollkommene“ Information, die für jedes Informationsergebnis einen sicheren Rückschluss auf den eintretenden Umweltzustand ermöglicht. Bei vollkommener Information entspricht jedem Zustand genau ein Informationsergebnis, nämlich die Information, dass der betreffende Zustand eintreten wird. Es gibt dann also genau so viele mögliche Informationsergebnisse wie mögliche Umweltzustände ($N_I = N_S$), sodass die möglichen Informationsergebnisse ebenso indiziert werden können wie die zugehörigen Zustände; I_s besagt dann, dass der Zustand S_s eintritt. Es ergeben sich folgende a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten für die Umweltzustände::

$$\begin{aligned} w(S_s|I_s) &= 1 \text{ für den Umweltzustand } S_s \\ \text{und } w(S'_s|I_s) &= 0 \text{ für alle anderen Umweltzustände } S'_s \text{ (} s' \neq s \text{)}. \end{aligned} \quad (10.13.)$$

Mit dem Theorem von Bayes lässt sich leicht prüfen, dass diese a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten nur auftreten, wenn für die (bedingten) a-priori-Wahrscheinlichkeiten des Informationsergebnisses I_s ($s = 1, 2, \dots, N_S$) gilt:

$$\begin{aligned} w(I_s|S_s) &= 1 \text{ für den Umweltzustand } S_s \\ \text{und } w(I_s|S'_s) &= 0 \text{ für alle anderen Zustände } S'_s \text{ (} s' \neq s \text{)}. \end{aligned} \quad (10.14.)$$

Für die Wahrscheinlichkeiten des Eintretens des Informationsergebnisses I_s folgt dann:

$$w(I_s) = \underbrace{w(I_s|S_s)}_{=1} \cdot w(S_s) + \sum_{\substack{s'=1 \\ s' \neq s}}^{N_S} \underbrace{w(I_s|S'_s)}_{=0} \cdot w(S'_s) = w(S_s). \quad (10.15)$$

In Worten: Ist die Information vollkommen, so erwartet der Entscheider die Vorhersage des Umweltzustandes S_s (d. h. die Information I_s = „Umweltzustand S_s tritt ein“) mit derselben Wahrscheinlichkeit, mit der er den Umweltzustand selbst erwartet.

Bei Beschaffung der vollkommenen Information wählt der Entscheider die Alternative, die in dem eintretenden (und vorausgesagten) Zustand den höchsten Gewinn bietet. Somit folgt analog zu (10.11) für den Erwartungswert des Nutzens mit Information:

$$E_{ml}[U(\tilde{x} - KI)] = \sum_{s=1}^{N_S} w(S_s) \cdot U(x_s^{\max} - KI), \text{ mit } x_s^{\max} = \max_a x_{as} \quad (10.16)$$

In Worten: Der Erwartungswert des Nutzens mit vollkommener Information ist gleich dem auf Basis der a-priori-Wahrscheinlichkeiten für die Umweltzustände ermittelten Erwartungswert des Nutzens aus der Differenz zwischen dem in den einzelnen

Umweltzuständen jeweils maximal erreichbaren Gewinn $x_s^{\max} = \max_a x_{as}$ und den Informationskosten KI.

Der maximale Informationswert $WI^{\max}$ ergibt sich analog zu (10.12):

$$\begin{aligned} E_{\text{ml}}[U(\tilde{x} - WI^{\max})] &= \sum_{s=1}^{N_S} w(S_s) \cdot [U(x_s^{\max} - WI^{\max})] \\ &= \max_a \sum_{s=1}^{N_S} w(S_s) \cdot U(x_{as}) = E_{\text{ol}}[U(\tilde{x})] \end{aligned} \quad (10.17)$$

Wegen

$$\max_a \sum_{s=1}^{N_S} w(S_s) \cdot U(x_{as}) = \sum_{s=1}^{N_S} w(S_s) \cdot U(x_{\hat{a}s}),$$

wobei $A_{\hat{a}}$ die Alternative mit dem höchsten a-priori-Erwartungswert des Nutzens bezeichnet, kann (10.17) wie folgt dargestellt werden:

$$\sum_{s=1}^{N_S} w(S_s) \cdot [U(x_s^{\max} - WI^{\max}) - U(x_{\hat{a}s})] = 0. \quad (10.17a.)$$

Der Informationswert ist damit umso größer, je weiter der im Zustand S_s ($s = 1, 2, \dots, N_S$) maximal erreichbare Gewinn über dem Gewinn der a priori optimalen Alternative $A_{\hat{a}}$ in diesem Zustand liegt.

Analog zu WI in (10.12) ist $WI^{\max}$ durch die Gl. 10.17a) nicht explizit, sondern nur implizit bestimmt und muss entsprechend durch ein Iterationsverfahren bestimmt werden. Dabei tritt allerdings nicht das Problem auf, dass sich während der Iteration die optimalen bedingten Pläne ändern können, da ja für jeden Zustand die Alternative mit dem höchsten Gewinn gewählt wird.

$WI^{\max}$ ist als *kritische* Größe von besonderer Bedeutung. Sind die Kosten der Information größer oder gleich $WI^{\max}$, so kann die Informationsbeschaffung unter keinen Umständen vorteilhaft sein. Alle Informationsmöglichkeiten, deren Kosten nicht niedriger als $WI^{\max}$ sind, brauchen nicht weiter in Betracht gezogen zu werden.

10.5.4.2 Minimaler Informationswert

Eine Information ist nutzlos, wenn sie für kein Informationsergebnis irgendeinen Rückschluss auf den Umweltzustand erlaubt, d. h. wenn allgemein gilt:

$$w(S_s | I_i) = w(S_s) \text{ für alle } i \text{ und alle } s. \quad (10.18)$$

Setzt man dies in die Bestimmungsgleichung (10.12) für den Informationswert ein, so erhält man:

$$E_{ml}[U(\tilde{x}-WI)] = E_{ol}[U(\tilde{x})] \quad (10.19)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N_I} w(I_i) \cdot [\max_a \sum_{s=1}^{N_S} w(S_s) \cdot U(x_{as}-WI)] = \max_a \sum_{s=1}^{N_S} w(S_s) \cdot U(x_{as}).$$

Der Ausdruck $\max_a \sum_{s=1}^{N_S} w(S_s) \cdot U(x_{as}-WI)$ ist unabhängig vom Informationsergebnis.

Wegen $\sum_{i=1}^{N_I} w(I_i) = 1$ folgt daher aus (10.19):

$$E_{ml}[U(\tilde{x}-WI)] = E_{ol}[U(\tilde{x})] \quad (10.20)$$

$$\Leftrightarrow \max_a \sum_{s=1}^{N_S} w(S_s) \cdot U(x_{as}-WI) = \max_a \sum_{s=1}^{N_S} w(S_s) \cdot U(x_{as})$$

und damit $WI = 0$. Wenn also eine Information bei keinem Informationsergebnis einen Rückschluss auf den Umweltzustand ermöglicht, ist ihr Wert gleich null. Die a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten $w(S_s|I_i) = w(S_s)$ für alle i und alle s ergeben sich gemäß dem Theorem von Bayes genau dann, wenn für die bedingten Wahrscheinlichkeiten der Informationsergebnisse gilt:

$$w(I_i|S_s) = w(I_i) \quad \text{für alle } i \text{ und alle } s.$$

Der Informationswert ist somit stets gleich null, wenn das Informationsergebnis stochastisch unabhängig vom Umweltzustand ist; die Information ist dann nutzlos.

Bei stochastischer Abhängigkeit stellt null die *Untergrenze* für den Informationswert dar. Er kann zwar positiv, aber in keinem Fall negativ sein. Die Relation $WI \geq 0$ ist unmittelbar einleuchtend: Der Entscheider kann nach Information immer noch die Alternative $A_{\hat{a}}$ wählen, die sich bei Verzicht auf Information als optimal erweist. Falls jedoch im Licht des erzielten Informationsergebnisses bzw. der entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für die Umweltzustände eine andere Alternative als besser erscheint, kann der Entscheider stattdessen diese Alternative wählen. Wenn für $KI=0$ bei mindestens einem Informationsergebnis ein höherer Erwartungswert des Nutzens erzielt wird als bei Entscheidung ohne Information, ist WI positiv.

Wenn zwar das Informationsergebnis stochastisch vom Umweltzustand abhängt, sich aus Sicht des Entscheiders jedoch trotz des nach Informationszugang veränderten Wahrscheinlichkeitsurteils für $KI=0$ bei jedem Informationsergebnis stets diejenige Alternative als optimal erweist, die auch ohne Informationsbeschaffung gewählt würde, so ist der Informationswert wie bei stochastischer Unabhängigkeit gleich null. Damit ist vor allem dann zu rechnen, wenn eine der Alternativen im a-priori-Urteil des Entscheiders mit großem Abstand den höchsten Präferenzwert aufweist.

10.5.5 Bestimmung des Informationswertes bei Risikoneutralität

10.5.5.1 Explizite Bestimmungsgleichung für den Informationswert

Wie erläutert, ist der Informationswert durch die Bestimmungsgleichung $E_{ml}[U(\tilde{x} - WI)] = E_{ol}[U(\tilde{x})]$ nur implizit definiert. Bei Risikoneutralität des Entscheiders (bei linearer Nutzenfunktion, bei der kein Reichtumseffekt besteht) lässt sich diese Gleichung jedoch vereinfachen, sodass der Informationswert explizit definiert und ermittelt werden kann. Bei Risikoneutralität orientiert sich der Entscheider am Erwartungswert des Ergebnisses, und für den Informationswert WI gilt:

$$E_{ml}(\tilde{x} - WI) = E_{ml}(\tilde{x}) - WI = E_{ol}(\tilde{x})$$

Der Informationswert ist also bei Risikoneutralität explizit definiert:

$$WI = E_{ml}(\tilde{x}) - E_{ol}(\tilde{x}), \quad (10.21)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } E_{ml}(\tilde{x}) &= \sum_{i=1}^{N_I} w(I_i) \cdot E(\tilde{x}|I_i), \\ E(\tilde{x}|I_i) &= \max_a \sum_{s=1}^{N_S} w(S_s|I_i) \cdot x_{as} \\ \text{und } E_{ol}(\tilde{x}) &= \sum_{s=1}^{N_S} w(S_s) \cdot x_{\hat{a}s} = \max_a \sum_{s=1}^{N_S} w(S_s) \cdot x_{as}. \end{aligned}$$

Im Folgenden wird gezeigt, wie bei Risikoneutralität der Informationswert in drei Schritten ermittelt werden kann: Zunächst wird der Erwartungswert des Ergebnisses ohne Information bestimmt (Abschn. 10.5.5.2), danach der Erwartungswert des Ergebnisses mit Information (Abschn. 10.5.5.3), um schließlich den Informationswert zu berechnen (Abschn. 10.5.5.4).

10.5.5.2 Erwartungswert des Ergebnisses ohne Information

Bei Entscheidung ohne Information wird die Alternative mithilfe der Ergebnismatrix in Tab. 10.1 ausgewählt.

Der Entscheider wählt dann die Alternative $A_{\hat{a}}$, die den höchsten a-priori-Erwartungswert des Ergebnisses (des Gewinns) aufweist. Bei Entscheidung *ohne* Information wird mithin ein Erwartungswert in Höhe von

$$E_{ol}(\tilde{x}) = \sum_{s=1}^{N_S} w(S_s) \cdot x_{\hat{a}s} = \max_a \sum_{s=1}^{N_S} w(S_s) \cdot x_{as} \quad (10.22)$$

erzielt.

Tab. 10.1 A-priori-
Ergebnismatrix (vor
Information)

	$w(S_1)$ S_1	$w(S_2)$ S_2		$w(S_{N_S})$ S_{N_S}	A-priori-Gewinn- erwartungswerte
A_1	x_{11}	x_{12}	...	X_{1N_S}	$\sum_{s=1}^{N_S} w(S_s) \cdot x_{1s}$
A_2	x_{21}	x_{22}	...	X_{2N_S}	$\sum_{s=1}^{N_S} w(S_s) \cdot x_{2s}$
.	.	.		.	.
.	.	.		.	.
.	.	.		.	.
A_{N_A}	$x_{N_A 1}$	$x_{N_A 2}$	...	$x_{N_A N_S}$	$\sum_{s=1}^{N_S} w(S_s) \cdot x_{N_A s}$

10.5.5.3 Erwartungswert des Ergebnisses mit Information

Welche Alternative nach Information gewählt wird, hängt vom Informationsergebnis ab. Für jedes mögliche Informationsergebnis I_i ($i=1,2,\dots,N_I$) wird (unabhängig von den Informationskosten KI) die Wahl der Alternative auf Basis der Ergebnismatrix in Tab. 10.2 getroffen; relevant sind die a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten $w(S_s|I_i)$. Der Entscheider wählt jeweils die Alternative, die bei diesen Wahrscheinlichkeiten den höchsten a-posteriori-Erwartungswert des Ergebnisses aufweist (Tab. 10.2).

Mithin wird beim Informationsergebnis I_i ($i=1,2,\dots,N_I$) ein Gewinnerwartungswert (vor Informationskosten) in Höhe von

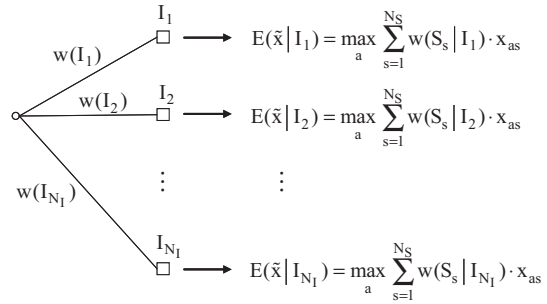
$$E(\tilde{x}|I_i) = \max_a \sum_{s=1}^{N_S} w(S_s|I_i) \cdot x_{as} \tag{10.23}$$

erzielt. Zum Zeitpunkt der Bewertung der Information ist das Informationsergebnis noch unbekannt. Es liegt die in Abb. 10.5 dargestellte Situation bei Risiko vor.

Tab. 10.2 Ergebnismatrix für das Informationsergebnis I_i

	$w(S_1 I_i)$ S_1	$w(S_2 I_i)$ S_2		$w(S_{N_S} I_i)$ S_{N_S}	A-posteriori-Gewinnerwartungswerte beim Informations-ergebnis I_i
A_1	x_{11}	x_{12}	...	X_{1N_S}	$\sum_{s=1}^{N_S} w(S_s I_i) \cdot x_{1s}$
A_2	x_{21}	x_{22}	...	X_{2N_S}	$\sum_{s=1}^{N_S} w(S_s I_i) \cdot x_{2s}$
.	.	.		.	.
.	.	.		.	.
.	.	.		.	.
A_{N_A}	$x_{N_A 1}$	$x_{N_A 2}$	...	$x_{N_A N_S}$	$\sum_{s=1}^{N_S} w(S_s I_i) \cdot x_{N_A s}$

Abb. 10.5 Die möglichen Informationsergebnisse mit ihren Eintrittswahrscheinlichkeiten und den zugehörigen a-posteriori-Erwartungswerten



Mithin ergibt sich bei Entscheidung mit Information ein Gewinnerwartungswert (vor Informationskosten) von:

$$E_{ml}(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^{N_I} w(I_i) \cdot \max_a \sum_{s=1}^{N_S} w(S_s | I_i) \cdot x_{as} = \sum_{i=1}^{N_I} w(I_i) \cdot E(\tilde{x} | I_i) \quad (10.24)$$

In Worten: Der Gewinnerwartungswert bei Entscheidung mit Information ist gleich der gewichteten Summe der a-posteriori-Erwartungswerte $E(\tilde{x} | I_i)$, die den möglichen Informationsergebnissen I_i entsprechen. Als Gewichtungsfaktoren dienen dabei die unbedingten Wahrscheinlichkeiten $w(I_i)$ für die einzelnen Informationsergebnisse.

10.5.5.4 Informationswert

Die Differenz zwischen dem Erwartungswert des Ergebnisses bei Entscheidung mit Information und dem Erwartungswert des Ergebnisses bei Entscheidung ohne Information ergibt den Wert der Information:

$$WI = E_{ml}(\tilde{x}) - E_{ol}(\tilde{x}). \quad (10.25)$$

Setzt man die Bestimmungsgleichungen (10.24) für $E_{ml}(\tilde{x})$ und (10.22) für $E_{ol}(\tilde{x})$ in die Bestimmungsgleichung (10.25) für WI ein, so erhält man:

$$WI = \sum_{i=1}^{N_I} w(I_i) \cdot \max_a \sum_{s=1}^{N_S} w(S_s | I_i) \cdot x_{as} - \sum_{s=1}^{N_S} w(S_s) \cdot x_{as}. \quad (10.26)$$

Für das Verständnis des Informationswertes ist es zweckmäßig, die Wertbestimmungsgleichung (10.26) geringfügig zu modifizieren. Es gilt die Hilfspengleichung:

$$\sum_{s=1}^{N_S} w(S_s) \cdot x_{as} = \sum_{i=1}^{N_I} w(I_i) \cdot \sum_{s=1}^{N_S} w(S_s | I_i) \cdot x_{as}. \quad (10.27)$$

In Worten: Der a-priori-Gewinnerwartungswert einer Alternative A_a ist gleich der gewichteten Summe ihrer a-posteriori-Gewinnerwartungswerte für die Informationsergebnisse I_i ($i=1,2,\dots,N_I$), $\sum_{s=1}^{N_S} w(S_s | I_i) \cdot x_{as}$. Gewichtungsfaktoren sind dabei deren Wahrscheinlichkeiten $w(I_i)$.

Verwendet man die Schreibweise (10.27) für die Darstellung des Erwartungswertes $\sum_{s=1}^{N_S} w(S_s) \cdot x_{\hat{a}s}$, so folgt aus (10.26):

$$WI = \sum_{i=1}^{N_I} w(I_i) \cdot \left[\max_a \sum_{s=1}^{N_S} w(S_s | I_i) \cdot x_{as} - \sum_{s=1}^{N_S} w(S_s | I_i) \cdot x_{\hat{a}s} \right]. \quad (10.28)$$

Im Folgenden bezeichnen wir die Alternative, die bei Vorliegen des Informationsergebnisses I_i den maximalen bedingten Erwartungswert des Gewinns aufweist, mit $A_{a^*|I_i}$. Es gilt dann:

$$E(\tilde{x}|I_i) = \sum_{s=1}^{N_S} w(S_s | I_i) \cdot x_{a^*|I_i, s} = \max_a \sum_{s=1}^{N_S} w(S_s | I_i) \cdot x_{as}. \quad (10.29)$$

Entsprechend kann gemäß (10.28) der Wert WI wie folgt dargestellt werden:

$$WI = \sum_{i=1}^{N_I} w(I_i) \cdot [E(\tilde{x}|I_i) - E(\tilde{x}_{\hat{a}}|I_i)] \quad (10.30.)$$

$$\text{mit } E(\tilde{x}|I_i) = \sum_{s=1}^{N_S} w(S_s | I_i) \cdot x_{a^*|I_i, s}$$

$$\text{und } E(\tilde{x}_{\hat{a}}|I_i) = \sum_{s=1}^{N_S} w(S_s | I_i) \cdot x_{\hat{a}s}.$$

Interpretation: Bei Entscheidung *ohne zusätzliche Information* wird die Alternative $A_{\hat{a}}$ gewählt, der im Licht des Informationsergebnisses I_i ($i=1,2,\dots,N_I$) der a-posteriori-Erwartungswert $E(\tilde{x}_{\hat{a}} | I_i)$ entspricht. Bei Entscheidung *mit Information* wird dagegen beim Informationsergebnis I_i der Erwartungswert $E(\tilde{x} | I_i)$ derjenigen Alternative $A_{a^*|I_i}$ erzielt, die bei diesem Informationsergebnis gewählt wird, weil sie dann den höchsten Erwartungswert des Gewinns bietet. Mithin bezeichnet die Differenz in der eckigen Klammer in (10.30) den Zuwachs im Erwartungswert, der gegenüber der Entscheidung ohne Information unter der Bedingung erzielt wird, dass das Informationsergebnis I_i eintritt. Gemäß (10.30) ist der Wert der Information gleich dem Erwartungswert der bedingten Zuwächse, wobei dieser Erwartungswert mit den Wahrscheinlichkeiten $w(I_i)$ ermittelt wird.

Der Zugewinn beim Informationsergebnis I_i ist gleich null, wenn sich bei diesem Ergebnis die Alternative $A_{\hat{a}}$ als optimal erweist, die der Entscheider auch ohne Information wählt. Der Zugewinn ist positiv, wenn sich bei Zugang des Informationsergebnisses I_i eine andere Alternative als optimal erweist als $A_{\hat{a}}$.

Es wird unmittelbar ersichtlich, dass der Informationswert nicht negativ werden kann. Der Informationswert ist maximal, wenn die Information vollkommen ist. Wie bereits erläutert wurde, gilt dann $w(I_i) = w(S_s)$ und für den maximalen Informationswert folgt die Bestimmungsgleichung:

$$WI^{\max} = \sum_{s=1}^{N_S} w(S_s) \cdot \max_a x_{as} - E(\tilde{x}_{\hat{a}}) = \sum_{s=1}^{N_S} w(S_s) \cdot (\max_a x_{as} - \tilde{x}_{\hat{a}}). \quad (10.31)$$

10.5.6 Beispiel zur Informationswertbestimmung

10.5.6.1 Betrachtete Entscheidungssituation

Gegeben sei eine Entscheidungssituation, deren Daten in der Ergebnismatrix in Tab. 10.3 zusammengefasst sind.

Der risikoneutrale Entscheider steht vor dem Problem, ob von einem bestimmten Erzeugnis eine „große“ (Alternative A_1), „mittlere“ (Alternative A_2) oder „kleine“ Menge (Alternative A_3) produziert werden soll. Der Gewinn, der bei einer bestimmten Produktionsmenge erzielt wird, hängt von der Nachfrage nach dem Erzeugnis ab. Der Entscheider rechnet bei seinem bisherigen Informationsstand damit, dass entweder eine „große“ (Zustand S_1), „mittlere“ (Zustand S_2) oder „niedrige“ Nachfrage (Zustand S_3) besteht. Das a-priori-Wahrscheinlichkeitsurteil bezüglich der möglichen Nachfrageentwicklungen ist in der Ergebnismatrix wiedergegeben.

Bei Verzicht auf Information wählt der Entscheider diejenige Produktionsmenge, die im Licht seiner a-priori-Wahrscheinlichkeiten $w(S_1)$, $w(S_2)$ und $w(S_3)$ den höchsten Gewinnerwartungswert aufweist, also die Alternative A_2 . Damit erzielt er einen Gewinnerwartungswert von $E_{0I}(\tilde{x}) = 118$.

10.5.6.2 Wert einer vollkommenen Information

Zunächst wird angenommen, der Entscheider könne Informationen einholen, die einen sicheren Rückschluss auf den in Zukunft eintretenden Zustand zulassen, sodass ihm nach Information die Nachfragemenge bekannt ist. Wie bereits in Abschn. 10.5.4.1 erläutert

Tab. 10.3 A-priori-Ergebnismatrix des Entscheiders vor Information für das Beispiel

		0,5	0,3	0,2	
		S_1	S_2	S_3	
		hohe Nachfrage	mittlere Nachfrage	niedrige Nachfrage	A-priori-Gewinnerwartungswerte
A_1	(große Produktionsmenge)	200	100	−120	106
A_2	(mittlere Produktionsmenge)	150	150	−10	118
A_3	(kleine Produktionsmenge)	50	50	50	50

wurde, entspricht einer solchen *vollkommenen* Information der maximale Informationswert $WI^{\max}$. Wie hoch ist er im Beispiel?

Bei Informationsbeschaffung wird erst nach Informationszugang die Produktionsmenge festgelegt. Da zu diesem Zeitpunkt der Entscheider den Zustand kennt, wählt er diejenige Menge, die in diesem Zustand den höchsten Gewinn bietet. Unter der Hypothese, dass der Zustand S_s ($s = 1, 2, 3$) eintritt, wird mithin der folgende Gewinn erzielt:

$$\begin{aligned} S_1 &\rightarrow A_1 \rightarrow 200, \\ S_2 &\rightarrow A_2 \rightarrow 150, \\ S_3 &\rightarrow A_3 \rightarrow 50. \end{aligned}$$

Zum *Zeitpunkt der Informationsbewertung* ist jedoch dem Entscheider der Zustand (die Nachfrage) noch unbekannt; den möglichen Zuständen entsprechen die (a-priori-) Wahrscheinlichkeiten, die in der Ergebnismatrix 10.3 aufgeführt sind. Somit ergibt sich für den Fall der *Entscheidung mit vollkommener Information* ein Gewinnerwartungswert $E_{\text{ml}}^{\max}(\tilde{x})$ (vor Informationskosten) in Höhe von:

$$E_{\text{ml}}^{\max}(\tilde{x}) = \sum_{s=1}^{N_s} w(S_s) \cdot \max_a x_{as} = 0,5 \cdot 200 + 0,3 \cdot 150 + 0,2 \cdot 50 = 155.$$

Definitionsgemäß ist bei Risikoneutralität der *Wert der Information*, WI , gleich der Differenz aus dem Gewinnerwartungswert bei Entscheidung *mit* Information (vor Informationskosten) und dem Gewinnerwartungswert bei Entscheidung *ohne* Information (im Beispiel 118). Somit folgt für den Wert der vollständigen Information, $WI^{\max}$:

$$WI^{\max} = E_{\text{ml}}^{\max}(\tilde{x}) - E_{\text{ol}}(\tilde{x}) = 155 - 118 = 37.$$

Woraus resultiert dieser Wert? Bei Entscheidung ohne Information wird definitiv A_2 gewählt. Bei Entscheidung mit Information wird stattdessen A_1 (bzw. A_3) gewählt, wenn der Zustand S_1 (bzw. S_3) relevant ist; dabei wird gegenüber der Wahl von A_2 ein Gewinnzuwachs von $200 - 150 = 50$ (bzw. von $50 - (-10) = 60$) erzielt. Die Wahrscheinlichkeit für Zustand S_1 (bzw. S_3) und somit für den entsprechenden Gewinnzuwachs ist zum Zeitpunkt der Informationsbewertung gleich 0,5 (bzw. 0,2). Der Erwartungswert der möglichen Gewinnzuwächse ergibt wiederum den Informationswert:

$$WI^{\max} = 0,5 \cdot 50 + 0,2 \cdot 60 = 37.$$

Sind die Kosten der Information niedriger (bzw. höher) als 37, ist die Informationsbeschaffung gegenüber der Entscheidung ohne Information vorteilhaft (bzw. nachteilig).

Die Aussage, die Information sei vorteilhaft, wenn die Informationskosten niedriger als 37 sind, bezieht sich auf die Entscheidungssituation vor Kenntnis des Informationsergebnisses (hier: des Zustandes). Die Entscheidung darüber, ob die Information

beschafft werden soll oder nicht, muss ja ebenfalls vor Kenntnis des Informationsergebnisses getroffen werden.

Von einer solchen *ex-ante*-Beurteilung ist die Beurteilung der Situation zu unterscheiden, die sich *ex post* einstellt (d. h. nachdem das Informationsergebnis bekannt ist). Sind die Informationskosten positiv, jedoch kleiner als 37, ist die Informationsbeschaffung *ex ante* zwar vorteilhaft, *ex post* kann sich jedoch gegenüber dem Verzicht auf Information ein Nachteil ergeben: Zeigt sich, dass der Zustand S_2 der wahre ist, wird bei Entscheidung mit Information die Alternative A_2 gewählt und ein (Netto-) Gewinn von 150 abzüglich der Informationskosten erzielt. Die Alternative A_2 wird indessen auch bei *Verzicht* auf Information gewählt, wobei *keine* Informationskosten anfallen. Wenn der Zustand S_2 der wahre ist, führt demnach die Informationsbeschaffung *ex post* zu einem Nachteil in Höhe der Informationskosten.

Wie erwähnt, impliziert jedoch das Informationswertkonzept eine *ex-ante*-Betrachtung. Entsprechend werden im Bewertungskalkül *alle* möglichen Zustände (S_1, S_2, S_3) berücksichtigt. Die Vorteilhaftigkeit der Information bei Informationskosten, die kleiner als 37 sind, resultiert daraus, dass der *mögliche* *ex-post*-Nachteil (im Zustand S_2) durch *mögliche* *ex-post*-Vorteile (in den Zuständen S_1 und S_3) überkompensiert wird.

10.5.6.3 Wert einer unvollkommenen Information

In den meisten Entscheidungssituationen gibt es keine Informationen, die einen sicheren Rückschluss auf den Zustand ermöglichen; zumindest sind die Kosten vollkommener Informationen so hoch, dass deren Beschaffung von vornherein als nachteilig ausgeschlossen werden kann. Es wird nun gezeigt, wie der Wert einer *unvollkommenen* Information bestimmt werden kann. Hierzu wird angenommen, es bestehe die Möglichkeit, das Produkt zunächst auf einem *Testmarkt* einzuführen und erst nach Kenntnis der dort erzielten Absatzmenge die Produktionsmenge für den eigentlichen Markt (den „*Absatzmarkt*“) festzulegen. Der Entscheider rechne damit, dass auf dem Testmarkt entweder eine „große“, eine „mittlere“ oder eine „kleine“ Absatzmenge erzielt wird.

Der Testmarkt kann als Informationsquelle und die erzielte Absatzmenge auf dem Testmarkt als Indikator aufgefasst werden. Dabei werden die möglichen Informationsergebnisse wie folgt definiert:

$$\left. \begin{array}{l} I_1 \hat{=} \text{gro\ss e} \\ I_2 \hat{=} \text{mittlere} \\ I_3 \hat{=} \text{kleine} \end{array} \right\} \text{ Absatzmenge auf dem Testmarkt.}$$

Im Urteil des Entscheiders bestehe zwischen der Absatzmenge auf dem Testmarkt und der Nachfragemenge auf dem Absatzmarkt die in Tab. 10.4 dargestellte stochastische Abhängigkeit.

Die Tabelle ist wie folgt zu lesen: Unter der Hypothese, dass der Zustand S_1 eintritt, die Nachfrage also hoch sein wird, wird man mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,75 auch auf dem Testmarkt eine hohe Nachfrage beobachten, usw.

Tab. 10.4 Bedingte Wahrscheinlichkeiten für die Testmarktergebnisse, $w(I_i|S_s)$

	S_1	S_2	S_3
I_1	0,75	0,30	0,10
I_2	0,20	0,60	0,20
I_3	0,05	0,10	0,70

Die Absatzmenge auf dem Testmarkt lässt offenbar keinen sicheren Rückschluss auf die Nachfrage auf dem Absatzmarkt zu. Auch nach Kenntnis der Absatzmenge auf dem Testmarkt hegt der Entscheider noch unsichere Erwartungen darüber, welcher der Zustände S_1 , S_2 oder S_3 der wahre ist. Das Testergebnis bewirkt jedoch eine Änderung des Wahrscheinlichkeitsurteils über diese Zustände. Die den möglichen Absatzmengen auf dem Testmarkt entsprechenden a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten können mithilfe des *Bayes'schen Theorems* bestimmt werden. Tab. 10.5 fasst die Ergebnisse der Berechnungen zusammen.

Die Tabelle ist wie folgt zu lesen: Unter der Hypothese, dass die Information I_1 zugeht, die Testmarktnachfrage also hoch ist, wird man mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,7732 auch auf dem Absatzmarkt eine hohe Nachfrage erreichen. Die unbedingte Wahrscheinlichkeit für eine hohe Testmarktnachfrage beträgt 0,485, usw.

Bei Einführung des Produktes auf dem Testmarkt wird erst nach Kenntnis der Absatzmenge auf diesem Markt die Produktionsmenge für den eigentlichen Absatzmarkt definitiv festgelegt. Wenn das Informationsergebnis I_i ($i=1,2,3$) bzw. die entsprechende Absatzmenge auf dem Testmarkt erzielt wird, wird diejenige Menge produziert, die im Licht der a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten $w(S_s|I_i)$ ($s=1,2,3$) den höchsten Gewinnerwartungswert aufweist. Den möglichen Informationsergebnissen I_1 , I_2 und I_3 entsprechen die Ergebnismatrizen in den Tab. 10.6, 10.7 und 10.8.

Tab. 10.5 Wahrscheinlichkeiten der Testmarktergebnisse, $w(I_i)$, und a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten für die Mengen auf dem Absatzmarkt für die möglichen Testmarktergebnisse, $w(S_s|I_i)$

	$w(I_1)=0,485$	$w(I_2)=0,320$	$w(I_3)=0,195$
	I_1	I_2	I_3
S_1	0,7732	0,3125	0,1282
S_2	0,1856	0,5625	0,1538
S_3	0,0412	0,1250	0,7180

Tab. 10.6 Ergebnismatrix für Informationsergebnis I_1 (große Absatzmenge auf dem Testmarkt)

I_1	0,7732 S_1	0,1856 S_2	0,0412 S_3	$E(x_a I_1)$
A_1	200	100	-120	168,26
A_2	150	150	-10	143,41
A_3	50	50	50	50

Tab. 10.7 Ergebnismatrix für das Informationsergebnis I_2 . (mittlere Absatzmenge auf dem Testmarkt)

I_2	0,3125 S_1	0,5625 S_2	0,1250 S_3	$E(x_a I_2)$
A_1	200	100	-120	103,75
A_2	150	150	-10	130
A_3	50	50	50	50

Tab. 10.8 Ergebnismatrix für das Informationsergebnis I_3 . (niedrige Absatzmenge auf dem Testmarkt)

I_3	0,1282 S_1	0,1538 S_2	0,7179 S_3	$E(x_a I_3)$
A_1	200	100	-120	-45,14
A_2	150	150	-10	35,12
A_3	50	50	50	50

Da bei jedem Informationsergebnis die Alternative mit dem höchsten a-posteriori-Gewinnerwartungswert realisiert wird, besteht die in Abb. 10.6 dargestellte Zuordnung zwischen Informationsergebnis, gewählter Alternative und a-posteriori-Gewinnerwartungswert.

Zum Zeitpunkt der Bewertung der Information ist noch nicht bekannt, welches Informationsergebnis eingehen wird. Aus Abb. 10.6 bzw. Tab. 10.5 sind jedoch die Eintrittswahrscheinlichkeiten für die einzelnen Informationsergebnisse zu entnehmen. Werden diese Wahrscheinlichkeiten mit den entsprechenden a-posteriori-Gewinnerwartungswerten multipliziert und die Summe dieser Produkte gebildet, so ergibt sich der Gewinnerwartungswert $E_{ml}(\tilde{x})$ bei Entscheidung mit Information (vor Abzug der Informationskosten):

$$E_{ml}(\tilde{x}) = 0,485 \cdot 168,26 + 0,32 \cdot 130 + 0,195 \cdot 50 = 132,95.$$

Wird hiervon der Gewinnerwartungswert bei Entscheidung ohne Information subtrahiert, so erhält man den Wert WI der Information:

$$WI = 132,95 - 118 = 14,95.$$

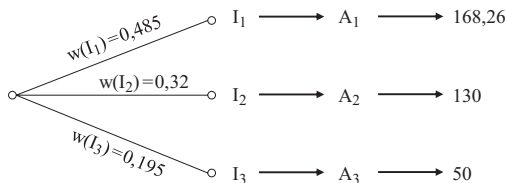


Abb. 10.6 Die möglichen Informationsergebnisse mit der jeweils gewählten Alternative und dem entsprechenden a-posteriori-Gewinnerwartungswert

Dieser Informationswert ist kleiner als der Wert $WI^{\max}$ der vollkommenen Information: Bei vollkommener Information wird mit Sicherheit die Alternative gewählt, die im tatsächlich eintretenden Zustand den höchsten Gewinn bietet. Bei unvollkommener Information ist das nicht der Fall.

10.6 Determinanten des Informationswertes

10.6.1 Informationsbewertung als ex-ante-Kalkül

Wie erläutert wurde, ist die Informationsbeschaffung vorteilhaft, wenn der Informationswert höher ist als die Informationskosten. Dieses Kriterium bezieht sich stets auf die Entscheidungssituation vor Kenntnis des Informationsergebnisses. Die Entscheidung darüber, ob Informationen beschafft werden sollen, muss ja ebenfalls vor Kenntnis des Informationsergebnisses getroffen werden. Von einer solchen *ex-ante*-Beurteilung ist die Beurteilung der Situation zu unterscheiden, die sich *ex post* ergibt, d. h. nachdem das Informationsergebnis bekannt ist. Sind die Informationskosten positiv, jedoch geringer als der Informationswert, so ist die Informationsbeschaffung *ex ante* zwar vorteilhaft. *Ex post* kann sie sich jedoch gegenüber dem Verzicht auf Information als nachteilig erweisen. So wird der Entscheider die unvollkommene Information im Beispiel des vorangegangenen Abschnitts beschaffen, wenn die Kosten KI unter ihrem Wert in Höhe von 14,95 liegen. Tritt aber das Informationsergebnis I_2 ein, so wählt der Entscheider nach Information dieselbe Alternative (A_2) wie ohne Information. Der Gewinn sinkt dann also bei Informationszugang I_2 gegenüber dem bei Verzicht auf die Informationsbeschaffung um die Informationskosten KI. Diesem „Nachteil“ stehen freilich die Vorteile gegenüber, die der Entscheider erzielt, wenn eines der beiden anderen Informationsergebnisse, I_1 oder I_3 , zugeht und er darauf reagieren und eine bessere Alternative als A_2 wählen kann.

Selbst wenn ein Informationsergebnis erzielt wird, in deren Licht sich die Information als vorteilhaft erweist, ist nicht garantiert, dass sie sich auch dann noch als vorteilhaft erweist, nachdem einer der Umweltzustände eingetreten ist. Es ist möglich, dass die bei dem erzielten Informationsergebnis optimale Alternative in dem betreffenden Zustand zu einem Gewinn führt, der kleiner ist als der Gewinn der ohne Informationsbeschaffung optimalen Alternative (A_2). So wählt der Entscheider im Beispiel des Abschn. 10.5.6 die Alternative A_1 , wenn er die Information I_1 erhält. Da A_1 riskant ist, ist damit aber nicht ausgeschlossen, dass das Ergebnis schlechter ausfällt als bei Wahl der ohne Informationsbeschaffung optimalen Alternative A_2 . Tatsächlich erzielt der Entscheider mit A_1 ein schlechteres Ergebnis, wenn einer der Zustände S_2 (100 bei A_1 , 150 bei A_2) oder S_3 (−120 bei A_1 , −10 bei A_2) eintritt. Diesem „Nachteil“ steht freilich der Vorteil eines höheren Ergebnisses in Zustand S_1 (200 bei A_1 , 150 bei A_2) gegenüber. Dabei ist die Wahrscheinlichkeit für diesen Vorteil beim Informationsergebnis I_1 hoch, nämlich 0,7732.

Dass Informationen zu Entscheidungen führen können, die sich im Nachhinein, bei Kenntnis des Informationsergebnisses oder gar des eingetretenen Umweltzustandes, als „suboptimal“ erweisen, ist jedoch für die Bewertung der Information irrelevant: Die Entscheidung über die Informationsbeschaffung und über die Alternativenwahl muss vor Kenntnis des Umweltzustandes und damit bei Risiko geschehen. Nur eine kostenlose, vollkommene Information kann sich im Nachhinein niemals als nachteilig erweisen, da die Alternativenwahl nach Informationszugang bei Sicherheit erfolgt. Wie erläutert, ist das Informationswertkonzept ein ex-ante-Kalkül, in dem *alle* möglichen Informationsergebnisse berücksichtigt werden. Die Vorteilhaftigkeit der Information für den Fall, dass der Informationswert höher ist als die Informationskosten, resultiert daraus, dass die möglichen ex-post-Nachteile durch mögliche ex-post-Vorteile überkompensiert werden.

Im Folgenden sollen Determinanten der Höhe des Informationswertes bei Risikoneutralität und Risikoaversion dargestellt und ihre Implikationen verglichen werden.

10.6.2 Risikoneutralität

10.6.2.1 Einfluss der Alternativenmenge

Der Wert einer Information hängt allgemein davon ab, welche Alternativen der Entscheider realisieren kann und insbesondere davon, wie die möglichen Ergebnisse der Alternativen über die Umweltzustände verteilt sind. Für Risikoneutralität gelten die folgenden Tendenzaussagen:

- a) Je höher der a-priori-Erwartungswert des Gewinns der ohne Informationsbeschaffung gewählten Alternative A_a im Vergleich zu den a-priori-Erwartungswerten des Gewinns der übrigen Alternativen ist, desto geringer ist der Informationswert.
- b) Je stärker bei gegebenen a-priori-Gewinnerwartungswerten die Ergebnisse der Alternativen positiv miteinander korreliert sind, desto geringer ist der Informationswert.

Zu a): Je vorteilhafter die Alternative A_a ist, die der Entscheider ohne Information auf der Basis seiner a-priori-Erwartungen wählt, desto eher wird sich diese Alternative auch a posteriori als optimal erweisen. Dann aber führt die Informationsbeschaffung mit geringerer Wahrscheinlichkeit zu einer Revision der Entscheidung (der Alternativenwahl) mit der Folge, dass der Erwartungswert des Ergebnisses mit Information relativ wenig über dem erwarteten Ergebnis ohne Information liegt.

Besonders deutlich wird der Zusammenhang, wenn man davon ausgeht, die Alternative A_a dominiere alle anderen Alternativen im Sinne der absoluten Dominanz oder der Zustandsdominanz (vgl. Kap. 4, Abschn. 4.5.2). Dann nämlich ist es nicht möglich, dass die Informationsbeschaffung zu einer Revision der Entscheidung führt: Bei jedem Informationsergebnis I_i ($i = 1, 2, \dots, I_N$) wird A_a einen maximalen a-posteriori-Gewinnerwartungswert aufweisen und es gilt $WI = 0$. Die Alternativenwahl ist dann vom Ergebnis der Informationsbeschaffung *unabhängig*, die Information hat keinen Einfluss auf die Entscheidung und der Informationswert ist null.

Der Informationswert ist auch dann null, wenn die Alternative $A_{\hat{a}}$ zwar nicht die übrigen Alternativen dominiert, aber dennoch bei jedem Informationsergebnis einen maximalen Gewinnerwartungswert aufweist, weil die Revision des Wahrscheinlichkeitsurteils in keinem Fall ausreicht, um eine andere Alternative als optimal erscheinen zu lassen: Die a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten weichen dann von den a-priori-Wahrscheinlichkeiten nur so wenig ab, dass für jedes mögliche Informationsergebnis wiederum $A_{\hat{a}}$ den höchsten Erwartungswert des Gewinns bietet.

Zu b): Sind die Ergebnisse der Alternativen positiv korreliert, so bedeutet dies, dass die Ergebnisse der Alternativen, die a priori nicht optimal sind, tendenziell in jenen Umweltzuständen niedrige (bzw. hohe) Ergebnisse aufweisen, in denen auch die a priori optimale Alternative $A_{\hat{a}}$ ein niedriges (bzw. hohes) Ergebnis aufweist. Der Zuwachs im Erwartungswert des Ergebnisses, der sich durch die Wahl einer anderen Alternative als $A_{\hat{a}}$ erzielen lässt, ist dann wiederum tendenziell gering.

Dies soll an den Beispielen 10.4 und 10.5 verdeutlicht werden (Tab. 10.9 und 10.10).

In beiden Ergebnismatrizen weist die Alternative A_1 den höchsten a-priori-Erwartungswert auf, es gilt also jeweils $\hat{a} = 1$.

Im Beispiel 10.4 sind die Ergebnisse der Alternativen sehr stark positiv korreliert: Der Korrelationskoeffizient liegt für jedes Paar von Alternativen über 0,999. Der maximale Informationswert beträgt hier:

$$WI^{\max} = \frac{1}{3} \cdot (30.300 - 30.000) + \frac{1}{3} \cdot (60.450 - 60.000) + \frac{1}{3} \cdot (90.000 - 90.000) = 250$$

In Beispiel 10.5 dagegen sind die Ergebnisse der Alternativen A_1 und A_2 sehr stark negativ korreliert ($\rho < -0,999$) und auch die Ergebnisse der Alternativen A_1 und A_3 sind negativ korreliert. Der maximale Informationswert beträgt hier:

Tab. 10.9 Ergebnismatrix für Beispiel 10.4

	1/3 S ₁	1/3 S ₂	1/3 S ₃	A-priori-Gewinn- erwartungswerte
A ₁	30.000	60.000	90.000	60.000
A ₂	30.300	60.000	89.400	59.900
A ₃	29.400	60.450	90.000	59.950

Tab. 10.10 Ergebnismatrix für Beispiel 10.5

	1/3 S ₁	1/3 S ₂	1/3 S ₃	A-priori-Gewinn- erwartungswerte
A ₁	30.000	60.000	90.000	60.000
A ₂	89.400	60.000	30.300	59.900
A ₃	60.450	90.000	29.400	59.950

$$WI^{\max} = \frac{1}{3} \cdot (89.400 - 30.000) + \frac{1}{3} \cdot (90.000 - 60.000) + \frac{1}{3} \cdot (90.000 - 90.000) = 29.800$$

Obwohl also die a-priori-Erwartungswerte der einzelnen Alternativen für beide Matrizen übereinstimmen, ergeben sich große Unterschiede im maximalen Informationswert. Dieser Zusammenhang gilt auch für den Wert einer unvollkommenen Information, aus der *kein sicherer* Rückschluss auf den Zustand gezogen werden kann.

10.6.2.2 Einfluss des a-priori-Urteils

Der Wert einer Information hängt auch davon ab, welche a-priori-Erwartungen der Entscheider bezüglich der Umweltzustände hat. Je „präziser“ diese sind, desto geringer ist tendenziell der Informationswert. Wir bezeichnen die a-priori-Erwartungen des Entscheiders als umso präziser, je ungleicher die Wahrscheinlichkeiten der möglichen Umweltzustände sind. Die Erwartungen sind entsprechend am präzisesten, wenn der Entscheider einem Zustand die Wahrscheinlichkeit 1 und allen anderen Zuständen die Wahrscheinlichkeit 0 zuweist, mithin sichere Erwartungen hat. Der Informationswert ist dann gleich null. Das Wahrscheinlichkeitsurteil des Entscheiders ist dagegen am unpräzisesten, wenn er allen möglichen Zuständen dieselbe Wahrscheinlichkeit $1/N_S$ zuordnet. Der Informationswert ist in diesem Fall c. p. am höchsten. Zur Verdeutlichung betrachten wird das einfache Beispiel 10.6 (Tab. 10.11).

Beispiel 10.5 Die a-priori-Erwartungen des Entscheiders werden hier über den Parameter w abgebildet, der die a-priori-Wahrscheinlichkeit für den Umweltzustand S_2 angibt. w sei nicht kleiner als 0,5, a priori liefere also die Alternative A_2 einen maximalen Erwartungswert, $E_{01}(\tilde{x} = w \cdot 100$. Der Informant sage den korrekten Zustand jeweils mit der Wahrscheinlichkeit 0,8 voraus, d. h. es gelten $w(I_1|S_1) = w(I_2|S_2) = 0,8$ und $w(I_1|S_2) = w(I_2|S_1) = 0,2$. Der Entscheider wähle beim Informationsergebnis I_1 die Alternative A_1 und beim Informationsergebnis I_2 die Alternative A_2 . Dies gilt allerdings nur, solange die a-priori-Wahrscheinlichkeit w für den Zustand S_2 nicht so groß ist, dass der Entscheider die Alternative A_2 auch nach dem Informationsergebnis I_1 wählt. Der kritische Wert hierfür ist 0,8: Liegt w über 0,8, so wählt der Entscheider bei jedem Informationsergebnis die Alternative A_2 , der Informationswert ist dann null. Im Folgenden werden entsprechend für die Wahrscheinlichkeit w nur Werte $0,5 \leq w \leq 0,8$ betrachtet.

Da der Entscheider ohne Information die Alternative A_2 wählt, resultiert der Wert der Information allein aus dem Zuwachs im Erwartungswert des Gewinns, wenn das

Tab. 10.11 Ergebnismatrix für Beispiel 10.6

	$S_1 [w(S_1) = 1 - w]$	$S_2 [w(S_2) = w]$
A_1	100	0
A_2	0	100

Informationsergebnis I_1 eintritt und der Entscheider entsprechend A_1 und nicht A_2 wählt. Tritt I_1 ein, so betragen die bedingten Erwartungswerte des Gewinns bei Wahl von A_1 $w(S_1|I_1) \cdot 100$ und bei Wahl von A_2 $w(S_2|I_1) \cdot 100$, der Zuwachs bei Wahl von A_1 anstelle von A_2 beträgt also $[w(S_1|I_1) - w(S_2|I_1)] \cdot 100$. Der Informationswert beträgt daher²

$$WI = w(I_1) \cdot 100 \cdot [w(S_1|I_1) - w(S_2|I_1)] = 80 - 100 \cdot w.$$

und ist eine linear fallende Funktion von w (bis zur Obergrenze des betrachteten Wertebereichs, $w=0,8$). Der Informationswert ist also umso geringer, je stärker sich die a-priori-Wahrscheinlichkeiten für die beiden Zustände, $1-w$ und w , voneinander unterscheiden. Der Unterschied zwischen w und $1-w$ ist tendenziell umso größer, je besser der Entscheider a priori über den Umweltzustand informiert ist.

10.6.3 Risikoaversion

Die Tendenzaussagen des vorangegangenen Abschnitts über die Höhe des Informationswertes bei Risikoneutralität des Entscheiders lassen sich nur zum Teil auf den Fall der Risikoaversion übertragen. Wie in Abschn. 10.5.3 erläutert wurde, kann bei Risikoaversion der Wert der Information, der nur implizit durch

$$E_{ml}[U(\tilde{x} - WI)] = E_{ol}[U(\tilde{x})] \quad (10.8)$$

bestimmt ist, über ein Iterationsverfahren ermittelt werden.

Dass sich bei Risikoaversion kaum noch allgemeine Aussagen über Determinanten des Informationswertes machen lassen, lässt sich anschaulich für den Einfluss der Alternativenmenge aufzeigen. Der Wert der Information ist bei Risikoaversion nicht nur davon abhängig, welche Alternativen zur Auswahl stehen und welche stochastische Abhängigkeit zwischen den Ergebnissen der verschiedenen Alternativen besteht, sondern insbesondere auch davon, welche Risikoeigenschaften die Alternativen aufweisen, die ohne und mit Informationsbeschaffung gewählt werden. Wird nämlich ohne Informationsbeschaffung eine Alternative gewählt, die ein geringes Risiko aufweist, so kann der Informationswert deshalb relativ gering sein, weil sich durch die informationsabhängige Alternativenwahl das Gesamtrisiko erhöht. Umgekehrt kann der Informationswert deshalb relativ hoch sein, weil in Folge der informationsabhängigen Alternativenwahl das Gesamtrisiko sinkt. Zur Verdeutlichung betrachten wir das Beispiel 10.7 (Tab. 10.12).

²Es gelten $w(S_1|I_1) = \frac{0,8 \cdot (1-w)}{w(I_1)}$, $w(S_2|I_1) = \frac{0,2 \cdot w}{w(I_1)}$, und $w(I_1) = 0,8 \cdot (1-w) + 0,2 \cdot w$, somit $w(I_1) \cdot [w(S_1|I_1) - w(S_2|I_1)] = 0,8 \cdot (1-w) - 0,2 \cdot w = 0,8 - w$ und $WI = 100 \cdot (0,8 - w) = 80 - 100 \cdot w$.

Tab. 10.12 Ergebnismatrix für Beispiel 10.7

	$S_1 [w(S_1)=0,5]$	$S_2 [w(S_2)=0,5]$
A_1	$\bar{x}$	$\bar{x}$
A_2	100	0
A_3	0	100

Beispiel 10.6 Alternative A_1 liefert das sichere Ergebnis $\bar{x}$. Im Folgenden betrachten wir zwei Werte von $\bar{x}$: $\bar{x} = 30$ und $\bar{x} = 45$. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten für die Ergebnisse der Information seien wie in Beispiel 10.6 $w(I_1|S_1) = w(I_2|S_2) = 0,8$. Nach dem Theorem von Bayes folgen wegen $w(S_1) = w(S_2) = 0,5$ die gleichen Werte für die a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten: $w(S_1|I_1) = w(S_2|I_2) = 0,8$. Die Nutzenfunktion des Entscheiders sei exponentiell, $U(x) = 1 - e^{-0,01 \cdot x}$. Es tritt dann kein Reichtumseffekt auf. Daher können wir im Folgenden für den risikoaversen Entscheider den Wert der Information als Differenz des Sicherheitsäquivalents bei Entscheidung mit Information (ohne Informationskosten) und dem Sicherheitsäquivalent bei Entscheidung ohne Information ermitteln.

Wäre der Entscheider risikoneutral, so würde er unabhängig davon, ob $\bar{x} = 30$ oder $\bar{x} = 45$ gilt, die Alternative A_1 weder ohne noch mit Information wählen. Ohne Information würde er eine der Alternativen A_2 und A_3 wählen. Der entsprechende Erwartungswert des Gewinns ohne Information beträgt jeweils 50. Mit Information würde er beim Informationsergebnis I_1 die Alternative A_1 und beim Informationsergebnis I_2 die Alternative A_2 wählen. Der bedingte Erwartungswert des Gewinns beträgt jeweils 80, sodass ein Erwartungswert des Gewinns mit Information in Höhe von ebenfalls 80 erzielt würde. Der Informationswert ergäbe sich somit bei Risikoneutralität des Entscheiders sowohl für $\bar{x} = 30$ als auch für $\bar{x} = 45$ zu:

$$WI = 30.$$

Mit der unterstellten Nutzenfunktion $U(x) = 1 - e^{-0,01 \cdot x}$ hingegen gilt für die Alternative A_2 (und gleichermaßen für A_3) bei Entscheidung ohne Information:

$$E[U(\tilde{x}_2)] = 0,5 \cdot (1 - e^{-0,01 \cdot 100}) + 0,5 \cdot (1 - e^{-0,01 \cdot 0}) = 0,3161.$$

Dies entspricht einem Sicherheitsäquivalent in Höhe von

$$S\ddot{A}(\tilde{x}_2) = -100 \cdot \ln\{1 - E[U(\tilde{x}_2)]\} = 37,99.$$

Offenbar wählt nun der Entscheider ohne Information im Fall $\bar{x} = 30$ nicht die Alternative A_1 , sondern nur im zweiten Fall $\bar{x} = 45$.

Fall 1: $\bar{x} = 30$. Der Entscheider wählt ohne Information die Alternative A_2 (oder A_3). Mit Information erreicht er den folgenden Erwartungswert des Nutzens bzw. das folgende Sicherheitsäquivalent:

$$E_{ml}[U(\tilde{x})] = 0,8 \cdot (1 - e^{-0,01 \cdot 100}) = 0,5057 \text{ bzw. } S\ddot{A}_{ml}(\tilde{x}) = 70,46$$

Der Wert der Information beträgt daher

$$WI = S\ddot{A}_{\text{ml}}(\tilde{x}) - S\ddot{A}_{\text{ol}}(\tilde{x}) = 70,46 - 37,99 = 32,47$$

Der Wert der Information ist höher als der Wert bei Risikoneutralität.

Fall 2: $\bar{x} = 45$. Der Entscheider wählt nun ohne Information die Alternative A_1 womit er das Sicherheitsäquivalent $S\ddot{A}_{\text{ol}}(\tilde{x}) = 45$ erzielt. Der Informationswert beträgt damit nur noch

$$WI = S\ddot{A}_{\text{ml}}(\tilde{x}) - S\ddot{A}_{\text{ol}}(\tilde{x}) = 70,46 - 45 = 25,46.$$

Der Informationswert ist nun sowohl geringer als der Informationswert bei Risikoneutralität als auch geringer als der Informationswert in Fall 1.

In keinem der beiden Fälle wird nach Informationszugang die Alternative A_1 gewählt: Der Entscheider zieht ihr bei dem Informationsergebnis I_1 die Alternative A_2 vor und bei dem Informationsergebnis I_2 die Alternative A_3 . Dennoch hat A_1 einen Einfluss auf den Informationswert:

Zu Fall 1 ($\bar{x} = 30$): Wie erläutert, wird hier ohne Information eine der riskanten Alternativen A_2 oder A_3 gewählt. Das Sicherheitsäquivalent ist dann entsprechend gering. Mit der Informationsbeschaffung steigt nicht nur die Wahrscheinlichkeit, das hohe Ergebnis von 100 zu erreichen, und damit der Erwartungswert des Gewinns. Aufgrund der höheren Wahrscheinlichkeit für 100 sinkt zugleich das Risiko. Dies drückt sich in einem geringeren Risikoabschlag aus: Während dieser für die Alternative A_2 ohne Information $50 - 37,99 = 12,01$ beträgt, sinkt er mit Information auf $80 - 70,46 = 9,54$.

Zu Fall 2 ($\bar{x} = 45$): In diesem Fall wird ohne Information die sichere Alternative A_1 gewählt. Der Risikoabschlag ist dann gleich 0. Erst durch die Informationsbeschaffung wird nun die Ergebnisverteilung riskant, der Risikoabschlag steigt von 0 auf 9,54, was sich negativ auf den Informationswert auswirkt.

Wegen des Einflusses der Risikoeigenschaften der ohne Informationsbeschaffung gewählten Alternative auf den Informationswert sind allgemeingültige Aussagen über die Abhängigkeit des Informationswertes von den stochastischen Beziehungen zwischen den wählbaren Alternativen nicht mehr möglich. Eine Tendenz dafür, dass der Informationswert mit zunehmender Korrelation der Ergebnisse der Alternativen sinkt, bleibt jedoch erhalten.

10.7 Ermittlung eines optimalen Informationsstandes

10.7.1 Einstufiger Informationsprozess

Bisher wurde vor allem gezeigt, wie der Wert einer einzelnen Informationsbeschaffungsmaßnahme ermittelt werden kann und wie dieser Wert von seinen Bestimmungsgrößen abhängt. Ist der Wert bestimmter Informationen höher als deren Kosten, so ist zwar die

Beschaffung dieser Informationen gegenüber der Entscheidung ohne zusätzliche Information vorteilhaft. Ob sie allerdings *optimal* ist, hängt davon ab, welche Informationsmöglichkeiten sonst noch gegeben sind, welche Kosten diese verursachen und welche Rückschlüsse sie auf die maßgeblichen Zustände ermöglichen.

Bei der Bestimmung eines optimalen Informationsstandes geht es somit im Allgemeinen nicht allein darum, ob *bestimmte* Informationen beschafft werden sollen oder nicht. Vielmehr sind verschiedene Informationsmöglichkeiten gegeneinander abzuwägen.³ Optimal ist diejenige Informationsalternative, bei der die Differenz aus *Wert* und *Kosten* am größten ist. Wenn allerdings die maximale Differenz negativ ist, so ist es optimal, überhaupt keine Informationen zu beschaffen; der Entscheider trifft dann die Entscheidung auf der Grundlage seines bisherigen Informationsstandes.

In der Realität ist es weder möglich noch sinnvoll, für alle Informationsalternativen explizit die Differenz aus Wert und Kosten zu bestimmen. Im Allgemeinen kann nur ein Teil der Alternativen in einem Bewertungskalkül berücksichtigt werden. Es sind dann in einer Vorauswahl jene Informationsalternativen zu bestimmen, die nicht weiter untersucht werden. Ein Kriterium für diese Vorauswahl liefert der maximale Informationswert $WI^{\max}$. Sind die Kosten einer Informationsalternative gleich $WI^{\max}$ oder höher, so kann diese nicht vorteilhaft sein; alle Informationsalternativen, deren Kosten nicht niedriger sind als der maximale Informationswert, können vernachlässigt werden. Darüber hinaus liegt es nahe, auch jene Alternativen der Informationsbeschaffung zu vernachlässigen, deren Kosten nur wenig unter $WI^{\max}$ liegen und bei denen eine schwache stochastische Abhängigkeit zwischen den Ausprägungen der Indikatoren und dem Zustand besteht.

Es ist im Allgemeinen nicht möglich, den Wert der Information über *mehrere* Indikatoren in der Weise (exakt) zu bestimmen, dass zunächst für jeden Indikator der Wert der alleinigen Information darüber ermittelt und dann die Summe über die einzelnen Informationswerte gebildet wird. Dieses Vorgehen führt nur in Spezialfällen zum richtigen Informationswert; in der Regel sind die Informationswerte nicht additiv.⁴ Zur Verdeutlichung betrachten wir das Beispiel 10.8 (Tab. 10.13).

³Können z. B. die Indikatoren r_1 , r_2 und r_3 beobachtet werden, so gibt es folgende Möglichkeiten M_m der Informationsbeschaffung: $M_1=(r_1)$, $M_2=(r_2)$, $M_3=(r_3)$, $M_4=(r_1, r_2)$, $M_5=(r_1, r_3)$, $M_6=(r_2, r_3)$, $M_7=(r_1, r_2, r_3)$. Bei der Alternative M_1 z. B. wird nur der Indikator r_1 , bei M_7 werden alle drei Indikatoren beobachtet.

⁴Es ist z. B. möglich, dass bei Information allein über den Indikator r_1 bzw. r_2 die a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten der Zustände bei jedem Informationsergebnis nur so wenig von den a-priori-Wahrscheinlichkeiten abweichen, dass jeweils dieselbe Alternative gewählt wird wie bei Verzicht auf Information. Der Informationswert eines einzelnen Indikators ist dann gleich null. Gleichzeitig kann sich aber bei Information über beide Indikatoren das Wahrscheinlichkeitsurteil so stark ändern, dass mit positiver Wahrscheinlichkeit eine andere Alternative gewählt wird als bei Verzicht auf Information; der Informationswert beider Indikatoren ist dann positiv. Andererseits kann der Informationswert beider Indikatoren auch ebenso hoch sein wie der eines einzelnen Indikators. Dies ist z. B. dann der Fall, wenn beide Indikatoren mit Sicherheit dieselbe Aussage beinhalten.

Tab. 10.13 Ergebnismatrix für Beispiel 10.8

	$S_1 [w(S_1) = 1/3]$	$S_2 [w(S_2) = 1/3]$	$S_3 [w(S_3) = 1/3]$
A_1	300	0	0
A_2	0	300	0
A_3	0	0	300

Beispiel 10.7 Der Entscheider sei risikoneutral. Es gelten dann $E_{0l}(\tilde{x}) = 100$ und $WI^{\max} = 200$. Wir betrachten zwei Fälle.

Fall 1: Der Entscheider kann eine Information beschaffen, die einen der möglichen Umweltzustände mit Sicherheit ausschließt, d. h. nach Informationszugang wird der Entscheider die verbleibenden beiden Zustände für gleich wahrscheinlich erachten. Der Wert dieser Information beträgt $WI = 150 - 100 = 50$. Kann der Entscheider aber diese Information im Prinzip zweimal beschaffen, d. h. kann er Informationen erhalten, nach denen zunächst einer der Umweltzustände ausgeschlossen wird und danach ein zweiter, so kennt der Entscheider nach beiden Informationen mit Sicherheit den eintretenden Umweltzustand. Die beiden Informationen sind in ihrer Summe also $WI^{\max} = 200$ wert, isoliert betrachtet hingegen jede Information nur 50; die Informationswerte sind nicht additiv.

Fall 2: Der Entscheider kann eine Information beschaffen, die mit der Wahrscheinlichkeit p den richtigen Umweltzustand vorhersagt und jeden der falschen Zustände mit jeweils der Wahrscheinlichkeit $(1-p)/2$ nennt. Dabei gelte $p > 1/3$. Wie sich nachrechnen lässt, beträgt der Wert dieser Information $WI(p) = 300 \cdot p - 100$. Die a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten für die Umweltzustände nach Informationszugang betragen p für den vorhergesagten Zustand und jeweils $(1-p)/2$ für die beiden anderen Zustände. Könnte nun der Entscheider eine zweite Information beschaffen, die den Umweltzustand perfekt vorhersagt, so wäre der Wert dieser Information ohne Berücksichtigung der ersten Information $WI^{\max} = 200$, mit deren Berücksichtigung dagegen nur $200 - (300 \cdot p - 100) = 300 - 300 \cdot p$, und dieser Wert liegt für alle $p > 1/3$ unter 200. Umgekehrt wäre der Wert der ersten Information, wenn die zweite (perfekte) Information bereits vorläge, nicht $WI(p) = 300 \cdot p - 100$, sondern null. Wiederum sind die Informationswerte nicht unabhängig.

10.7.2 Mehrstufiger Informationsprozess

Im Allgemeinen ist es nicht sinnvoll, im Voraus definitiv und unwiderruflich festzulegen, welche Indikatoren beobachtet werden und welche nicht. Der Informationsprozess ist in der Regel ein mehrstufiger Entscheidungsprozess, wobei die weiteren Informationsaktivitäten davon abhängen, zu welchem Ergebnis diejenigen davor geführt haben: Der Entscheider beginnt mit der Überprüfung eines oder mehrerer Indikatoren. In Abhängigkeit von den festgestellten Ausprägungen stellt er daraufhin entweder die Informationsbeschaffung ein und wählt eine der Handlungsalternativen $A_1, A_2, \dots, A_{N_A}$ oder er

unternimmt zusätzliche Informationsaktivitäten. Wenn er zusätzliche Informationen einholt, hängt das weitere Vorgehen vom Inhalt dieser Informationen ab: Je nach den Ausprägungen der zusätzlich beobachteten Indikatoren werden weitere Indikatoren überprüft oder der Informationsprozess wird eingestellt und die Handlungsalternative mit dem höchsten a-posteriori-Gewinnerwartungswert gewählt. In Laux (1993, S. 103 ff.) wird gezeigt, wie ein optimaler *mehrstufiger* Informationsprozess gemäß dem Prinzip der flexiblen Planung bestimmt werden kann.

10.7.3 Notwendigkeit der Komplexitätsreduktion

Da die Ermittlung eines „optimalen“ Informationsstandes hohe Kosten insbesondere durch Einsatz von Arbeit und Zeit des Entscheiders verursacht, stellt sich auch hier das Problem der Vereinfachung. Insbesondere ist es nicht sinnvoll, Informationen mithilfe eines Modells zu bewerten, das höhere Kosten verursacht als die Informationen selbst. Der Entscheider erzielt dann einen Vorteil, wenn er die Informationen definitiv beschafft und damit die Kalkülkosten einspart. Einen noch größeren Vorteil kann er allerdings erzielen, wenn er die Bewertung auf der Grundlage eines *vereinfachten* Modells vornimmt.

Wie bereits erläutert wurde, kann im Allgemeinen nur ein Teil der Informationsmöglichkeiten in einem Informationswertkalkül erfasst werden. Darüber hinaus kann vereinfacht werden, indem nur ein Teil der möglichen Zustände S_s ($s = 1, 2, \dots, N_s$) und Informationsergebnisse berücksichtigt wird. Selbst wenn das Informationswert-Modell nicht explizit angewendet wird, kann es wichtige Orientierungshilfen geben; es zeigt, wie der Informationswert von seinen Determinanten abhängt, und erleichtert somit die mehr oder weniger pauschale Schätzung von Informationswerten.

10.8 Informationswert als subjektive Größe

Der Informationswert ist eine *subjektive*, keine objektive Größe. Er hängt neben der subjektiven Risikoeinstellung des Entscheiders davon ab, welche Handlungsalternativen er erwägt, welche Gewinne sie aus seiner Sicht in den relevanten Zuständen bieten und welche subjektiven Wahrscheinlichkeiten $w(S_s)$ und $w(I_i|S_s)$ er bei der Informationsbewertung zugrunde legt. Für verschiedene Individuen können die Informationswerte erheblich voneinander abweichen. Abweichungen können auch daraus resultieren, dass im Rahmen eines Informationswertkalküls bzw. bei der Schätzung des Informationswertes unterschiedliche Vereinfachungen vorgenommen werden.

Wie erläutert wurde, wird der Informationswert auf die Entscheidungssituation vor Kenntnis des Informationsergebnisses bezogen. Die Informationsbewertung erfolgt dabei vor dem Hintergrund von „Vorinformationen“, über die der Entscheider bereits verfügt, bevor er über die Beschaffung zusätzlicher Informationen entscheidet. Die betreffenden

Vorinformationen finden bei gegebener Alternativenmenge ihren Niederschlag in den a-priori-Wahrscheinlichkeiten $w(S_s)$ für die Zustände und in den bedingten Wahrscheinlichkeiten $w(I_i|S_s)$ für die Informationsergebnisse. Je nach bereits vorhandenen Vorinformationen können zusätzliche Informationen einen hohen oder einen niedrigeren Wert aufweisen. Für einen Entscheider, der bereits a priori einen „guten“ Informationsstand hat und damit rechnet, dass die Informationsbeschaffung nur mit geringer Wahrscheinlichkeit zur Wahl einer anderen Alternative als A_a führen wird, ist der Informationswert tendenziell gering. Für einen Entscheider mit „schlechtem“ Informationsstand kann dieselbe Information einen hohen Wert aufweisen.

Bei gegebenen a-priori-Wahrscheinlichkeiten $w(S_s)$ und Gewinnen x_{as} hängt – wie erläutert wurde – der Informationswert von den (subjektiven) bedingten Wahrscheinlichkeiten $w(I_i|S_s)$ ab. Diese wiederum hängen von der allgemeinen Erfahrung des Entscheiders und seinen speziellen Informationen über den stochastischen Zusammenhang zwischen dem Informationsergebnis und dem Zustand ab. Es ist möglich, dass der Entscheider bisher wenig konkrete Informationen zur Prognose der maßgeblichen Zustände besitzt, jedoch über Informationen (die Kenntnis von Theorien) verfügt, die es ihm ermöglichen, aus dem Informationsergebnis einen guten Rückschluss zu ziehen; der Informationswert ist dann für ihn tendenziell hoch. Für einen anderen Entscheider, der die betreffenden Indikatoren nicht interpretieren kann, sodass aus seiner Sicht bei jedem möglichen Informationsergebnis die a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten für die Zustände mit deren a-priori-Wahrscheinlichkeiten übereinstimmen, ist dagegen der Informationswert gleich null.

Es ist freilich auch möglich, dass ein Entscheider Informationen deshalb einen hohen Wert beimisst, weil er die betreffenden Indikatoren „falsch“ interpretiert; er vermutet einen stochastischen Zusammenhang, der gar nicht gegeben ist. (Vom Standpunkt einer besser informierten Person, die zum Beispiel aufgrund von empirischen Untersuchungen weiß, dass die Ausprägungen der betreffenden Indikatoren vom Zustand unabhängig sind, ist der Informationswert gleich null.) Ein Entscheider kann aber bei der Informationsbewertung ebenso wie bei jedem anderen Entscheidungsproblem bei Risiko immer nur jenes Wahrscheinlichkeitsurteil berücksichtigen, das er sich selbst aufgrund seines bisherigen Informationsstandes gebildet hat. Hält er es für möglich, dass er den stochastischen Zusammenhang zwischen dem Informationsergebnis und dem Zustand „falsch“ einschätzt, so kann er wiederum darüber Informationen einholen. Sind deren Kosten positiv, so stellt sich allerdings das Problem, auch diese Informationen zu bewerten.

10.9 Zusammenfassung

- Die Bildung eines Wahrscheinlichkeitsurteils ist ein zentraler Bestandteil der Lösung von Entscheidungsproblemen bei Risiko. Hierzu können direkte und indirekte Methoden angewendet werden.

- Ein Wahrscheinlichkeitsurteil kann dadurch verbessert werden, dass der Entscheider zusätzliche Informationen beschafft. Er verarbeitet die Information, indem er sein anfängliches Wahrscheinlichkeitsurteil (a-priori-Urteil) nach Zugang der Information revidiert und ein neues Urteil (a-posteriori-Urteil) bildet.
- Die rationale Informationsverarbeitung folgt dem Bayes'schen Theorem. Danach gilt für das a-posteriori-Urteil $w(S_s|I_i) = w(I_i|S_s) \cdot w(S_s)/w(I_i)$ mit S_s dem Umweltzustand und I_i der Information.
- Wesentlich für die Revision eines Wahrscheinlichkeitsurteils sind die Anfangserwartungen des Entscheiders über die Umweltzustände $w(S_s)$ (das a-priori-Urteil) und über die Zuverlässigkeit der Information $w(I_i|S_s)$. Je zuverlässiger die Information und je größer die anfängliche Unsicherheit des Entscheiders über die Umweltzustände, desto stärker wird er sein Urteil nach Informationszugang anpassen.
- Um zu beurteilen, ob er eine Information beschaffen soll, muss der Entscheider die Information bewerten, bevor er ihren genauen Inhalt kennt. Dazu stellt er ein System von Eventualplänen für den Fall der Informationsbeschaffung auf; die Informationsbewertung folgt dem Prinzip der flexiblen Planung.
- Der Wert einer Information (WI) leitet sich aus einem Vergleich der optimalen Pläne mit und ohne Information ab. Bei Risikoneutralität entspricht er der Differenz aus den Erwartungswerten des Gewinns mit und ohne Information: $WI = E_{ml}(\tilde{x}) - E_{ol}(\tilde{x})$. Bei Risikoaversion ist der Informationswert nur implizit durch $E_{ml}[U(\tilde{x} - WI)] = E_{ol}[U(\tilde{x})]$ bestimmt, und seine Berechnung ist wesentlich komplizierter, da die Eventualpläne und deren Bewertung von der Risikoeinstellung des Entscheiders abhängen.
- Nach Bestimmung des Informationswertes ist dieser mit den Kosten für die Informationsbeschaffung zu vergleichen. Der Informationswert kann nicht negativ sein. Er ist tendenziell umso größer, je stärker der Entscheider sein Urteil nach Informationszugang anpasst und je vorteilhafter die im Lichte eines revidierten Urteils optimale Alternative gegenüber der ohne Informationsbeschaffung optimalen Alternative ist.
- Der Informationswert ist gleich null, wenn die Informationsergebnisse von den Umweltzuständen stochastisch unabhängig sind. Er ist maximal, wenn die Information einen sicheren Rückschluss auf den Umweltzustand ermöglicht.
- Der Informationsprozess ist in der Regel ein mehrstufiger Entscheidungsprozess, bei dem die weiteren Informationsaktivitäten davon abhängen, welche Informationen zuvor eingegangen sind.
- Der Informationswert ist eine subjektive Größe, bei dessen expliziter Ermittlung erhebliche Vereinfachungen vorgenommen werden müssen.

Ergänzende und vertiefende Literatur

Altrogge (1975); Bamberg et al. (2012, Kap. 6); Bass (1963); Bitz (1975); Bitz und Wenzel (1974); Deukarczyk (1974); Engelkamp (1980, S. 71–80); Laux (1976); Liermann (2004); Marschak (1959; 1964); Moore und Thomas (1976, S. 132–153); Pratt et al. (2008, Kap. 11,12,14); Pfohl (1977); Raiffa (1973, S. 128–156); Savage (1972); Schneeweiß, H. (1977); Wenzel (1975).

10.10 Übungen

Aufgabe 10.1

- a) Ein Mann geht zum Arzt mit dem Verdacht, eine bestimmte Krankheit zu haben. Der Arzt wird den Mann untersuchen und daraufhin eine Diagnose stellen. Der Mann geht von den folgenden Wahrscheinlichkeiten aus: Die a-priori-Wahrscheinlichkeit dafür, die Krankheit zu haben, schätzt er auf 50 % ein. Hat er die Krankheit tatsächlich, so schätzt er die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Arzt die Krankheit auch diagnostiziert, auf 80 %. Hat er die Krankheit nicht, so schätzt er die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Arzt die Krankheit nicht diagnostiziert, auf 98 % ein. Bestimmen und interpretieren Sie die a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten.
- b) Bei einem Wissensquiz sollen Sie die Frage beantworten, wer den Roman „Deutschstunde“ verfasst habe. Als möglichen Antworten werden Ihnen angezeigt: a) Heinrich Böll, b) Günter Grass, c) Hermann Hesse und d) Siegfried Lenz. Sie können die Frage nun sofort beantworten, haben aber auch folgende weitere Möglichkeiten: 1) Sie bitten eine andere Person um Rat. Die Person hat keinen Zugang zu Hilfsmitteln, mit denen sie die richtige Antwort recherchieren kann, und sie darf Ihnen lediglich sagen, welche Antwort sie wählen würde. 2) Das Computersystem streicht zwei falsche Antworten. Bilden Sie beide Möglichkeiten als Problem der Informationsbeschaffung ab. Erläutern Sie jeweils, wie sich Ihre Erwartungen nach Informationszugang verändern.
- c) Der Vorstand einer börsennotierten Aktiengesellschaft kündigt an, dass der Gewinn des laufenden Geschäftsjahres den Vorjahresgewinn um 8 % übersteigen wird. Dennoch kommt es an der Börse zu einem Kursrückgang. Welche Gründe könnte es dafür geben?

Aufgabe 10.2

Sie müssen an einem Freitag entscheiden, ob Sie am kommenden Sonntag zu einem Straßenfest einen Eis- oder einen Würstchenstand errichten, und noch an diesem Freitag alle notwendigen Einkäufe tätigen. Vereinfachend gehen Sie von nur zwei möglichen Situationen aus: Entweder es gibt keine anderen Eisstände (S_1), dann lohnt sich der Eisstand, oder es gibt Konkurrenz unter mehreren Eisständen (S_2), dann sollten Sie möglicherweise lieber einen Würstchenstand planen.

	$w(S_1) = 0,75$ S_1	$w(S_2) = 0,25$ S_2
Eisstand	800	200
Würstchenstand	600	600

Die angegebenen Wahrscheinlichkeiten für S_1 und S_2 entsprechen Ihren gegenwärtigen Erwartungen. Gehen Sie im Folgenden von Risikoneutralität aus.

- a) Bestimmen Sie den maximalen Informationswert.
- b) Sie können beim Veranstalter anrufen und erfragen, welche Stände für Sonntag geplant sind. Sie glauben, dass die telefonische Auskunft mit 70 %iger Wahrscheinlichkeit korrekt sein wird. Alternativ können Sie einen Freund bitten zu recherchieren, dem Sie dafür als Dankeschön ein Geschenk im Wert von 30 EUR machen würden. Sie gehen davon aus, dass die Recherche mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % korrekt sein wird. Bestimmen Sie jeweils den Wert der beiden Informationssysteme (Anruf und Recherche); welches ziehen Sie vor?
- c) Bilden Sie das Entscheidungsproblem als flexibles Planungsproblem ab. Berücksichtigen Sie dabei nur das aus Aufgabenteil b) vorteilhaftere Informationssystem. Bestimmen Sie den optimalen starren Plan, den optimalen flexiblen Plan und den Unterschied in den erwarteten Gewinnen der beiden Pläne.
- d) Gehen Sie nun davon aus, Sie hätten bereits bei dem Veranstalter angerufen und Auskunft erhalten. Nun überlegen Sie, ob Sie zusätzlich die Recherche durch Ihren Freund für 30 EUR machen lassen. Gehen sie dabei vereinfachend von denselben Wahrscheinlichkeiten wie unter b) aus. Welchen Wert hat die zusätzliche Analyse nun? Wie hängt ihr Wert von der ersten Information ab, die Sie erhalten haben?

Aufgabe 10.3

Ein Bergbauunternehmen kann Schürfrechte an einem Gebiet erwerben, in dem seltene Erden vermutet werden. Die Schürfrechte kosten 10 Mio. EUR. Sollten seltene Erden gefunden werden, so rechnet das Unternehmen mit einem Gewinn von mindestens 50 Mio. EUR aus deren Gewinnung (vor Abzug der Kosten für die Schürfrechte). Anderenfalls sind die Kosten für die Rechte verloren. Da sich das Bergbauunternehmen derzeit äußerst unsicher ist, ob seltene Erden in dem Gebiet vorkommen (man rechnet hierfür mit einer Wahrscheinlichkeit von nur 10 %) soll ein geologisches Gutachten in Auftrag gegeben werden. Aus der Vergangenheit weiß man, dass solch ein Gutachten in 72 % der Fälle zuverlässig ist. Welchen (Mindest-)wert hat das Gutachten für das Unternehmen? (Unterstellen Sie Risikoneutralität.)

Aufgabe 10.4

Eine risikoneutrale Instanz steht vor einem Entscheidungsproblem, das durch folgende Ergebnismatrix beschrieben werden kann. Die Elemente der Matrix stellen Gewinne dar. Die Zustände sind gleichwahrscheinlich.

	S ₁	S ₂	S ₃
A ₁	120	0	0
A ₂	0	120	0
A ₃	0	0	120

- a) Bestimmen Sie den minimalen und den maximalen Informationswert.
- b) Die Instanz erwägt, von einem „Experten“ ein Urteil über den eintretenden Umweltzustand einzuholen. Die Instanz nimmt an, dass dieser Experte mit einer Wahrscheinlichkeit p den wahren Umweltzustand nennt. Nennt der Experte nicht den wahren Umweltzustand, geht die Instanz davon aus, dass er mit der gleichen Wahrscheinlichkeit einen der beiden anderen Zustände, also einen falschen Zustand meldet. Geben Sie die Werte der Information für die Fälle
- i) $p = 0$, ii) $p = 1/5$, iii) $p = 2/5$, iv) $p = 1$ an.
- a) Ermitteln Sie den Informationswert für den Fall $p = 1/3$ und interpretieren Sie Ihr Ergebnis.
- b) Nehmen Sie Stellung zu folgender Aussage: „Eine vollkommene Information besteht entweder darin, den eintretenden Umweltzustand mit Sicherheit vorherzusagen, oder darin, mit Sicherheit einen Umweltzustand vorherzusagen, der nicht eintritt. Beide Informationen sind vollkommen äquivalent.“

Aufgabe 10.5

Gegeben sei ein Entscheidungsproblem mit drei Handlungsalternativen und drei Umweltzuständen. Die Entscheidungssituation lässt sich durch folgende Matrix abbilden:

	$w(S_1) = 0,2$	$w(S_2) = 0,4$	$w(S_3) = 0,4$
	S_1	S_2	S_3
A_1	5.000	5.000	5.000
A_2	3.000	6.000	5.000
A_3	10.000	1.800	8.000

- a) Ein risikoneutraler Entscheider besitzt die Möglichkeit, Informationen einzuholen. Zwischen der Information und den möglichen Umweltzuständen besteht folgender Zusammenhang:

$$\begin{aligned}
 w(I_1|S_1) &= 0,25, & w(I_2|S_1) &= 0,125, & w(I_3|S_1) &= 0,625, \\
 w(I_1|S_2) &= 0,4, & w(I_2|S_2) &= 0,4, & w(I_3|S_2) &= 0,2, \\
 w(I_1|S_3) &= 0,7, & w(I_2|S_3) &= 0,1, & w(I_3|S_3) &= 0,2.
 \end{aligned}$$

Welche Alternative wählt der Entscheider, wenn er keine zusätzlichen Informationen einholt? Wie hoch sind die a-posteriori-Erwartungswerte der einzelnen Alternativen für die unterschiedlichen Informationsergebnisse? Welche Alternative wählt der Entscheider jeweils? Wie hoch ist der Wert der Information?

- b) Ein anderer Entscheider mit der Nutzenfunktion $U(x) = \ln x$ steht ebenfalls vor dem oben beschriebenen Entscheidungsproblem.

Ermitteln Sie die a-priori-Erwartungsnutzenwerte. Ermitteln Sie ebenfalls die a-posteriori-Erwartungsnutzenwerte der einzelnen Alternativen für die unterschiedlichen Informationsergebnisse. Gehen Sie hierbei von Informationskosten in Höhe von $KI = 10$ aus. Lohnt es sich für den Entscheider, zusätzliche Informationen einzuholen?

Aufgabe 10.6

Gegeben sei ein Entscheidungsproblem mit drei Handlungsalternativen und zwei Umweltzuständen. Die Entscheidungssituation lässt sich durch folgende Matrix abbilden:

	$w(S_1) = 0,4$	$w(S_2) = 0,6$
	S_1	S_2
A_1	-20	300
A_2	180	80
A_3	-50	280

Die Nutzenfunktion des Entscheiders lautet: $U(x) = -e^{-0,01 \cdot x}$.

- Berechnen Sie die a-priori-Erwartungsnutzenwerte. Welche Alternative wählt der Entscheider bei Verzicht auf Information?
- Der Entscheider hat nun die Möglichkeit Informationen einzuholen. Der Informant nennt den Umweltzustand. Der Entscheider geht davon aus, dass der Informant in 2 von 3 Fällen den Zustand richtig vorhersagt. Bestimmen Sie die a-posteriori-Erwartungsnutzenwerte der einzelnen Alternativen für die unterschiedlichen Informationsergebnisse ohne Berücksichtigung von Informationskosten. Welche Alternative wählt der Entscheider jeweils?
- Dem Entscheider wird mitgeteilt, dass die Kosten zur Beschaffung der Information $KI = 5$ betragen. Ist die Informationsbeschaffung von Vorteil? (Beachten Sie bei der Beantwortung dieser Frage, dass für die Nutzenfunktion konstante absolute Risikoaversion gegeben ist.)

10.11 Lösungshinweise

Aufgabe 10.1

- a) $w(\text{krank} \mid \text{Diagnose} = \text{„krank“}) = 0,9756$; $w(\text{nicht krank} \mid \text{Diagnose} = \text{„nicht krank“}) = 0,8305$. --- b) 1) Bezeichnungen: S_s , $s = a, b, c, d$, mit $S_s = \text{„Antwort s) stimmt“}$, I_i , $i = a, b, c, d$ mit $I_i = \text{„Ich denke, Antwort i) stimmt“}$; wesentlich sind nicht nur die Wahrscheinlichkeiten $w(S_s)$ (Ihr Wissen als Kandidat), sondern auch $w(I_i \mid S_s)$ (Ihre Einschätzungen über

das Wissen des Ratgebers, die subjektiv sind). 2) Bezeichnungen: S_s wie zuvor, I_{ij} =die Antworten i und j bleiben stehen; es gibt sechs verschiedene Informationen ($I_{ab}=a$ und b bleiben stehen, usw.); $w(I_{ij}|S_s)$ beträgt entweder 0 (z. B. $w(I_{ab}|S_d) = 0$, denn a und b können nicht stehen bleiben, wenn d richtig ist) oder $1/3$ (z. B. sind die drei Informationen I_{ab} , I_{bd} und I_{cd} möglich und gleich wahrscheinlich, wenn d richtig ist). --- c) Die Reaktion der Anleger hängt auch von Ihren a-priori-Erwartungen ab: Haben Sie ein noch besseres Ergebnis erwartet, ist eine negative Reaktion (Kursrückgang) plausibel.

Aufgabe 10.2

a) $WI^{\max} = 100$. --- b) $WI(\text{Anruf}) = 25$, $WI(\text{Analyse}) - KI(\text{Analyse}) = 75 - 30 = 45$. --- c) Starrer Plan: Informationsbeschaffung kann nicht vorteilhaft sein, daher ohne Information Eisstand planen, $E_{ol}(x) = 650$. Optimaler flexibler Plan: Information (Analyse) beschaffen, bei zu erwartender Konkurrenz den Würstchenstand planen, anderenfalls den Eisstand; $E_{ml}(x) = 725 - 30 = 695$. Differenz = WI. --- d) A-priori-Urteil für die Analyse = a-posteriori-Urteil nach dem Anruf. (1) Auskunft bei Anruf: Keine Konkurrenz $\Rightarrow WI - KI = 27,5 - 30 = -2,5$; (2) Auskunft bei Anruf: Konkurrenz $\Rightarrow WI - KI = 83,75 - 30 = 53,75$.

Aufgabe 10.3

$WI = 0,36$ Mio.

Aufgabe 10.4

a) $WI_{\min} = 0$; $WI^{\max} = 80$. --- b) i) $WI = 20$; ii) $WI = 8$; iii) $WI = 8$; iv) $WI = 80$. --- c) $WI = 0$ --- d) Die Aussage ist falsch.

Aufgabe 10.5

a) Ohne zusätzliche Information: Wahl von A_3 , $E_{ol}(x) = 5920$. Mit Information I_1 : Wahl von A_3 , $E(x_3) = 6.178,9$; mit I_2 : Wahl von A_2 , $E(x_2) = 5.488,9$; mit I_3 : Wahl von A_3 , $E(x_3) = 7.136,86$. $E_{ml}(x) = 6.296,67$. $WI = 376,67$. --- b) Wahl von A_1 ohne Information, $EU_{ol} = 8,5172$. Nach Zugang von I_1 : Wahl von A_2 , $EU = 8,5217$; nach Zugang von I_2 : Wahl von A_2 , $EU = 8,5882$; nach Zugang von I_3 : Wahl von A_3 , $EU = 8,6640$. $EU_{ml} = 8,5772$, der Entscheider sollte die Information beschaffen.

Aufgabe 10.6

a) Wahl von A_2 , $U_{ol}[U(x)] = -0,3357$. --- b) Nach Zugang von I_1 : Wahl von A_2 , $E[U(x)] = -0,2870$; nach Zugang von I_2 : Wahl von A_1 , $E[U(x)] = -0,3427$. --- c) $S\ddot{A}_{ml} - S\ddot{A}_{ol} = 5,8263 > 5 \Rightarrow$ Informationsbeschaffung ist vorteilhaft.

Literatur

- Altrogge, G.: Möglichkeiten und Problematik der Bewertung von (Zusatz-) Informationen mit Hilfe der Bayes-Analyse. *Z. Betriebswirtsch.* **45**, 821–846 (1975)
- Amershi, A., Stoeckenius, J.: The theory of syndicates and linear sharing rules. *Econometrica* **51**, 1407–1416 (1983)
- Bamberg, G., Coenenberg, A.G., Krapp, M.: Betriebswirtschaftliche Entscheidungslehre, 15. Aufl. Vahlen, München (2012)
- Bass, B.M.: Marketing research expenditures: a decision model. *J. Bus.* **36**, 77–90 (1963)
- Bitz, M.: Modelle zur Informationsbewertung. *Z. Betriebswirtsch.* **45**, 521–546 (1975)
- Bitz, M., Wenzel, F.: Zur Preisbildung bei Informationen. *Z. Betriebswirtsch. Forsch.* **26**, 451–472 (1974)
- Demski, J.S.: Uncertainty and evaluation based on controllable performance. *J. Acc. Res.* **5**, 230–245 (1976)
- Drukarczyk, J.: Zum Problem der Bestimmung des Wertes von Informationen. *Z. Betriebswirtsch.* **44**, 1–18 (1974)
- Engelkamp, P.: Entscheidungsverhalten unter Risikobedingungen: Die Erwartungsnutzentheorie. Haufe, Freiburg im Breisgau (1980)
- Laux, H.: Zur Entscheidung bei Fehlen objektiver Wahrscheinlichkeiten. *Z. Betriebswirtsch.* **46**, 59–68 (1976)
- Laux, H.: Entscheidungstheorie II, 3. Aufl. Springer, Berlin (1993)
- Liermann, F.: Zum Wert von Controlling-Informationen – ein entscheidungsorientierter Erklärungsansatz. In: Gillenkirch, R.M., Schauenberg, B., Schenk-Mathes, H.Y., Velthuis L.J. (Hrsg.), Wertorientierte Unternehmenssteuerung, Festschrift zum 65. Geburtstag von Helmut Laux, S. 153–180. Springer, Heidelberg (2004)
- Marschak, J.: Remarks on the economics of information. In: Western Data Processing Center (Hrsg.) Contributions to Scientific Research in Management, S. 79–100. University of California, Los Angeles (1959)
- Marschak, J.: Problems in information economics. In: Bonini, C.P., Jaedicke, R.K., Wagner, H.M. (Hrsg.): Management Controls – New Directions in Basic Research, S. 38–74. McGraw Hill, New York (1964)
- Moore, P.G., Thomas, H.: The Anatomy of Decisions. Penguin Books, Harmondsworth (1976)
- Pfohl, H.-C.: Messung subjektiver Wahrscheinlichkeiten. In Pfohl, H.-C., Rurup, B. (Hrsg.) Wirtschaftliche Meßprobleme, S. 23–35. Hanstein, Köln (1977)
- Pratt, J.W., Raiffa, H., Schlaifer, R.: Introduction to Statistical Decision Theory. MIT, Cambridge (2008)
- Raiffa, H.: Einführung in die Entscheidungstheorie. Oldenbourg, München (1973) (Titel der engl. Originalausgabe: Decision Analysis. Reading 1968)
- Rees, R.: The theory of principal and agent, part 1. *Bull. Econ. Res.* **37**, 3–26 (1985)
- Savage, L.J.: The Foundations of Statistics. 2. Aufl. Dover, New York (1972)
- Schneeweiß, H.: Kritische Bemerkungen zur Kritik am Wahrscheinlichkeitssubjektivismus. *Statistische Hefte* **18**, 218–232 (1977)
- Wenzel, F.: Entscheidungsorientierte Informationsbewertung. Westdeutscher Verlag, Opladen (1975)

Teil III

Teilung von Risiken

11.1 Problemstellung und Aufbau

In allen vorangegangenen Kapiteln wurden Entscheidungsprobleme aus der Sicht eines einzelnen Entscheiders untersucht. Diese Sicht diene der Vereinfachung. Sie ist aber für viele Entscheidungssituationen nicht charakteristisch, denn regelmäßig partizipieren mehrere Personen an den durch eine Entscheidung verursachten Ergebnissen. Betrachtet man Entscheidungen in Unternehmen, so sind es regelmäßig Gruppen (die Gesellschafter, der Vorstand), die Entscheidungen treffen und/oder deren Konsequenzen gemeinsam tragen.

Gruppenbildung erfolgt oft unter dem Gesichtspunkt, Risiken aus ungewissen Erfolgen auf die Mitglieder der Gruppe zu verteilen. Unternehmerische Risiken werden z. B. dann geteilt, wenn der bisherige Alleineigentümer eines Unternehmens neue Gesellschafter aufnimmt, die gegen eine Kapitaleinlage an den unsicheren Gewinnen und Verlusten beteiligt werden. Darüber hinaus partizipieren auch Andere explizit oder implizit am Unternehmensrisiko, so etwa die Mitarbeiter (über erfolgsabhängige Vergütungen oder über die Risiken des Arbeitsplatzverlustes bei schlechter wirtschaftlicher Entwicklung des Unternehmens) oder die Kreditgeber (über Forderungsausfälle bei Insolvenz).

Risikoteilung ermöglicht den Beteiligten zwei Vorteile: Erstens können sie durch Teilung des Risikos im Allgemeinen schon bei *gegebenen* riskanten Investitionen Vorteile erzielen. Zweitens können finanzielle Vorteile auch realisiert werden, indem gemeinsam zusätzliche riskante Investitionen durchgeführt werden, die für einen Einzelnen zu riskant gewesen wären.

Eine bedeutende Institution zur Teilung von Risiken ist der Kapitalmarkt, auf dem Anwartschaften auf ungewisse Zahlungen gehandelt werden. Insbesondere für börsennotierte Unternehmen besteht die Möglichkeit, die Gesamtheit ihrer Risiken auf viele

Gesellschafter in einfacher Weise aufzuteilen (Kap. 8, 14 und 15). Der Wertpapierhandel an der Börse erleichtert auch die Umverteilung von Risiken für den Fall, dass in einem Unternehmen Risiko erhöhende oder reduzierende Maßnahmen durchgeführt werden, die für einen Teil der Beteiligten nachteilig sind.

Bei Orientierung am Bernoulli-Prinzip ist eine Teilungsregel hinsichtlich einer beliebigen Wahrscheinlichkeitsverteilung über ein Ergebnis dann Pareto-effizient, wenn es *nicht* möglich ist, durch Umverteilung der zustandsabhängigen Ergebnisse den Erwartungswert des Nutzens mindestens eines der Beteiligten zu erhöhen, ohne den Erwartungswert des Nutzens mindestens eines anderen zu reduzieren. Im Folgenden wird untersucht, wie Pareto-effiziente Teilungsregeln ermittelt werden können und wie diese von den Risikoeinstellungen der Beteiligten sowie ihren subjektiven Wahrscheinlichkeitsvorstellungen bezüglich der Ergebnisse (bzw. der entsprechenden Umweltzustände) abhängen. Zur Erleichterung der Interpretationen gehen wir davon aus, dass ein finanzieller „Erfolg“ x zu teilen sei. Die Darstellungen gelten jedoch allgemein für beliebige Ergebnisse, die durch eine einzelne, teilbare Zielgröße repräsentiert werden können.

Das Kapitel beruht auf der Annahme einer gegebenen Wahrscheinlichkeitsverteilung über den Erfolg x . Es geht um das Problem, wie der Erfolg auf zwei oder mehr Parteien „optimal“ aufgeteilt werden soll, wobei sich jede am Bernoulli-Prinzip orientieren. Für die Aufteilung des Risikos werden von den Parteien nur Pareto-effiziente Teilungsregeln in Betracht gezogen, weil bei Pareto-inferioren Teilungen die Möglichkeit besteht, durch Umverteilung der zustandsabhängigen Erfolge den Erwartungswert des Nutzens mindestens einer Partei zu erhöhen, ohne den der anderen Parteien zu schmälern.

Mit der Eliminierung Pareto-inferiorer (also „dominierter“) Teilungsregeln wird der Verhandlungsprozess über die Wahl einer Teilungsregel erheblich vereinfacht. Bezüglich der Auswahl einer der Pareto-effizienten Teilungsregeln bestehen allerdings Konflikte: Je besser eine Teilungsregel für einen Entscheider ist, desto schlechter ist sie für mindestens einen anderen.

In Abschn. 11.2 wird zunächst die Entscheidungssituation dargestellt sowie die Problemstellung präzisiert und interpretiert. In Abschn. 11.3 werden daraufhin mögliche Vorteile der Risikoteilung mithilfe eines Beispiels illustriert. In Abschn. 11.4 wird gezeigt, wie Pareto-effiziente Teilungsregeln ermittelt werden können. Aus der Bedingung für Pareto-effiziente Risikoteilung werden daraufhin in Abschn. 11.5 Aussagen über die Gestalt der Teilungsregel in Abhängigkeit der Risikoeinstellungen der Entscheider abgeleitet. In Abschn. 11.6 werden die Darstellungen verallgemeinert.

Die Darstellungen im vorliegenden Kapitel sind auch für das Verständnis der Kapitalmarkttheorie und die Fundierung von Unternehmenszielen von grundlegender Bedeutung. Mithilfe von Bedingungen Pareto-effizienter Risikoteilung kann untersucht werden, wie der Kapitalmarkt unter verschiedenen Voraussetzungen Erfolgsrisiken teilt und welche Implikationen sich jeweils für die Fundierung von Unternehmenszielen und damit kompatibler finanzwirtschaftlicher Entscheidungskriterien ergeben (Kap. 13, 14 und 15).

11.2 Entscheidungssituation

Der Anschaulichkeit halber betrachten wir explizit nur *zwei* Entscheider, A und B, zwischen denen das Risiko geteilt werden soll. Die gezeigten Zusammenhänge gelten jedoch analog für mehr als zwei Parteien.¹ Die Darstellungen beruhen auf folgenden Grundannahmen:

1. Zu teilen ist ein Erfolg $\tilde{x}$ (allgemein ein Ergebnis, das durch eine einzelne, teilbare Zielgröße repräsentiert werden kann). Der Erfolg kann ex post kostenlos verifiziert (d. h. intersubjektiv überprüft) werden. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung über den Erfolg ist gegeben; keiner der Entscheider kann Einfluss auf die Ergebnisse oder deren Eintrittswahrscheinlichkeiten nehmen.
2. Der Entscheider B erhält aus der Teilung den Betrag (das Einkommen) $s(x)$, A das Residuum $x - s(x)$. Die Vorschrift $s(x)$ wird als *Teilungsregel* bezeichnet. Bei einer 50:50-Teilung des Erfolges gilt zum Beispiel $s(x) = 0,5 \cdot x$ und beide erhalten denselben Anteil. Mit der Aufteilung des Erfolges auf A und B wird auch das Erfolgsrisiko auf die beiden Entscheider verteilt. Beispielsweise tragen für $s(x) = 0,5 \cdot x$ beide zu gleichen Teilen das Risiko. $s(x)$ kann beliebig von x abhängen, z. B. neben einer variablen Beteiligung wie bei der Teilungsregel $s(x) = F + 0,5 \cdot x$ auch einen (positiven oder negativen) fixen Term F beinhalten, sodass neben der Aufteilung des Erfolges eine *sichere* Transferzahlung zwischen beiden Parteien erfolgt. Auch nicht lineare Teilungsregeln sind möglich.
3. A und B ordnen den möglichen Ergebnissen bzw. Umweltzuständen dieselben Wahrscheinlichkeiten zu, sie haben also homogene Erwartungen. Außerhalb der Kooperation (im „privaten“ Bereich) erzielen sie weder ein sicheres noch ein unsicheres Einkommen oder Vermögen; es besteht nicht das Problem, einem Bewertungs- und/oder Risikoverbund Rechnung zu tragen. In Abschn. 11.6 werden diese Annahmen aufgehoben und die Darstellungen entsprechend erweitert.
4. A und B bewerten ihren jeweiligen Anteil am Erfolg (ihr entsprechendes „Einkommen“) gemäß dem Bernoulli-Prinzip nach dem Erwartungswert ihres Nutzens. Die Nutzenfunktion des A wird mit U_A bezeichnet und ist über sein Einkommen aus der Erfolgs- teilung definiert: $U_A[x - s(x)]$. Die Nutzenfunktion von B ist entsprechend $U_B[s(x)]$.
5. Beide Entscheider sind nur unter der *notwendigen* Bedingung zur Kooperation bereit, dass sie sich gegenüber dem Status quo (ohne Kooperation) nicht verschlechtern. Diese Bedingung wird als *Kooperationsbedingung* bezeichnet. Die Kooperationsbedingungen für A und B setzen absolute Grenzen, innerhalb derer die Teilungsregel liegen muss. Sie ist aber über die Beachtung dieser Grenzen hinaus grundsätzlich nicht festgelegt.

¹Probleme Pareto-effizienter Risikoteilung werden u. a. eingehend im Rahmen der Versicherungstheorie untersucht. Vgl. hierzu z. B. Eeckhoudt und Kimball (1991) und den Überblicksartikel Schlesinger und Doherty (1991).

11.3 Vorteile der Risikoteilung

Zur Verdeutlichung der Vorteile der Risikoteilung betrachten wir ein Zahlenbeispiel. Gegeben sei ein „Projekt“, das zu einem unsicheren Erfolg gemäß der Ergebnismatrix in Tab. 11.1 führt.

Die beiden betrachteten Entscheider A und B orientieren sich an exponentiellen Nutzenfunktionen, $U_A[x - s(x)] = 1 - e^{-a_A \cdot [x - s(x)]}$ und $U_B[s(x)] = 1 - e^{-a_B \cdot s(x)}$, für ihr Einkommen aus der Erfolgsteilung. Für ein Einkommen von null ist der Nutzen für A und B jeweils $1 - e^{-0} = 0$.

Zunächst betrachten wir den Fall $a_A = a_B = 0,01$. Führt der Entscheider A das Projekt allein durch und erhält so den gesamten Erfolg, so erzielt er einen Erwartungswert des Einkommens in Höhe von 100 und einen Erwartungswert des Nutzens bzw. ein Sicherheitsäquivalent in Höhe von:²

$$E[U_A(\tilde{x})] = -0,0453 \quad \text{bzw.} \quad S\bar{R}_A(\tilde{x}) = -4,43.$$

Das Projekt als Ganzes hat für den Entscheider A also einen negativen Wert, es ist für ihn nachteilig. Auch für den Entscheider B wäre das Projekt nachteilig.

Die Entscheider können sich aber zusammentun. Teilen sie den Erfolg zu gleichen Teilen [$s(x) = 0,5 \cdot x$], so ergeben sich die in Tab. 11.2 dargestellten zustandsabhängigen Einkommen für A und B:

Beide Entscheider verbessern sich also bei Realisation des Projekts gegenüber dem Verzicht darauf (das Sicherheitsäquivalent steigt jeweils von 0 auf 19,10). Obwohl jeder der Entscheider das Projekt allein nicht durchgeführt hätte, führen sie es bei 50:50-Teilung durch.

Eine Aufteilung des Erfolgsrisikos zu gleichen Teilen ist eine Möglichkeit der Risikoteilung, die im Beispiel zu Vorteilen für A und B führt. Wir betrachten nun eine Modifikation des Beispiels: Die Risikoaversionskoeffizienten von A und B seien nun nicht mehr gleich, sondern betragen $a_A = 0,01$ und $a_B = 0,02$. B ist nun also risikoaverser als A. Wiederum würden weder A noch B das Projekt allein durchführen. Bei 50:50-Teilung würden nun die in Tab. 11.3 dargestellten Zusammenhänge folgen:

Das Sicherheitsäquivalent für den Entscheider B ist nun negativ, d. h. er würde sich gegenüber dem Verzicht auf die Projektdurchführung trotz der Risikoteilung mit A verschlechtern. A kann jedoch B eine Transferzahlung anbieten: Zahlt A einen Betrag an B, der höher ist als 2,22 und niedriger als 19,10, so wird für beide die Durchführung der Investition vorteilhaft.

² $E[U_A(\tilde{x})] = 1/3 \cdot (1 - e^{-0,01 \cdot (-100)}) + 1/3 \cdot (1 - e^{-0,01 \cdot 100}) + 1/3 \cdot (1 - e^{-0,01 \cdot 300}) = -0,0453$,
 $S\bar{A}_A(\tilde{x}) = -100 \cdot \ln(1 - E[U_A(\tilde{x})]) = -4,43$.

Tab. 11.1 Ergebnismatrix

S_1	S_2	S_3
$w(S_1) = 1/3$	$w(S_1) = 1/3$	$w(S_1) = 1/3$
-100	100	300

Tab. 11.2 50:50-Teilung des Projekterfolges zwischen den Entscheidern A und B

	S_1	S_2	S_3			
	1/3	1/3	1/3	$E(\cdot)$	$E[U(\cdot)]$	$S\ddot{A}(\cdot)$
A: $x - s(x)$	-50	50	150	50	0,1739	19,10
B: $s(x)$	-50	50	150	50	0,1739	19,10

Tab. 11.3 Modifikation des Beispiels und 50:50-Teilung des Projekterfolges zwischen A und B

	S_1	S_2	S_3			
	1/3	1/3	1/3	$E(\cdot)$	$E[U(\cdot)]$	$S\ddot{A}(\cdot)$
A: $x - s(x)$	-50	50	150	50	0,1739	19,10
B: $s(x)$	-50	50	150	50	-0,0453	-2,22

Die Teilung lässt sich aber noch weiter verbessern: A kann dem B nämlich anbieten, dass er selbst 2/3 des Erfolgsrisikos übernimmt und B entsprechend nur 1/3. Es ergeben sich dann ohne Transferzahlung die in Tab. 11.4 dargestellten Implikationen für A und B:

Dass diese Teilung besser ist als die 50:50-Teilung, kann man erkennen, indem man die Sicherheitsäquivalente von A und B addiert: Bei der 50:50-Teilung beträgt die Summe der Sicherheitsäquivalente $19,10 - 2,22 = 16,88$. Bei der 2/3:1/3-Teilung ist die Summe höher: $14,45 + 7,22 = 21,67$. Das aber bedeutet: Jede 50:50-Teilung mit beliebiger Transferzahlung zwischen A und B (wobei A mindestens 2,22 an B zahlen muss und höchstens 19,10 zahlen wird, damit die Kooperationsbedingung erfüllt bleibt) kann durch eine 2/3:1/3-Teilung mit geeigneter Transferzahlung ersetzt werden, sodass sich mindestens einer der Beteiligten besser und der andere nicht schlechter stellt. Dabei ist zu beachten, dass unabhängig von der Höhe einer Transferzahlung die Summe der Sicherheitsäquivalente stets 21,67 beträgt. Wie der Wert 21,67 verteilt wird, ist Verhandlungssache: Die Höhe der Transferzahlungen ist über die Beachtung der Kooperationsbedingungen für A und B hinaus nicht festgelegt.

Nachfolgend wird gezeigt, wie Pareto-effiziente Teilungsregeln ermittelt werden können und welche Eigenschaften sie aufweisen.

Tab. 11.4 Modifikation des Beispiels und 2/3:1/3-Teilung des Projekterfolges zwischen A und B

	S_1	S_2	S_3			
	1/3	1/3	1/3	$E(\cdot)$	$E[U(\cdot)]$	$S\ddot{A}(\cdot)$
A: $x - s(x)$	-66,67	66,67	200	66,67	0,1345	14,45
B: $s(x)$	-33,33	33,33	100	33,33	0,1345	7,22

11.4 Ermittlung Pareto-effizienter Teilungsregeln

11.4.1 Alternative Optimierungsansätze

11.4.1.1 Umhüllende als geometrischer Ort Pareto-effizienter Risikoteilungen

Eine *Pareto-effiziente* Teilungsregel liegt definitionsgemäß dann vor, wenn durch Umverteilung der zustandsabhängigen Erfolge x , d. h. durch Änderung der Funktion $s(x)$, der Erwartungswert des Nutzens *keiner* Partei erhöht werden kann, ohne dass der Erwartungswert des Nutzens der anderen Partei sinkt.

Bei gegebenen zustandsabhängigen Erfolgen lässt sich die Menge aller Pareto-effizienten Teilungsregeln sowohl analytisch als auch durch eine einfache Simulation ermitteln (Raiffa 1973; Borch 1962; Demski 1976; Rees 1985). Abb. 11.1 veranschaulicht die Ermittlung durch Simulation; die analytische Ermittlung wird im folgenden Abschnitt dargestellt.

Die Abbildung beruht auf den Zahlen des Beispiels in Abschn. 11.3. In der Abbildung ist auf der Abszisse der Erwartungswert des Nutzens von A und auf der Ordinate der Erwartungswert des Nutzens von B abgetragen. Dabei wurde davon ausgegangen, dass A und B das Projekt gemeinsam durchführen und $a_A = a_B = 0,01$ gilt. Die einzelnen Punkte in der Abbildung repräsentieren zufällig generierte Teilungen zwischen den Entscheidern

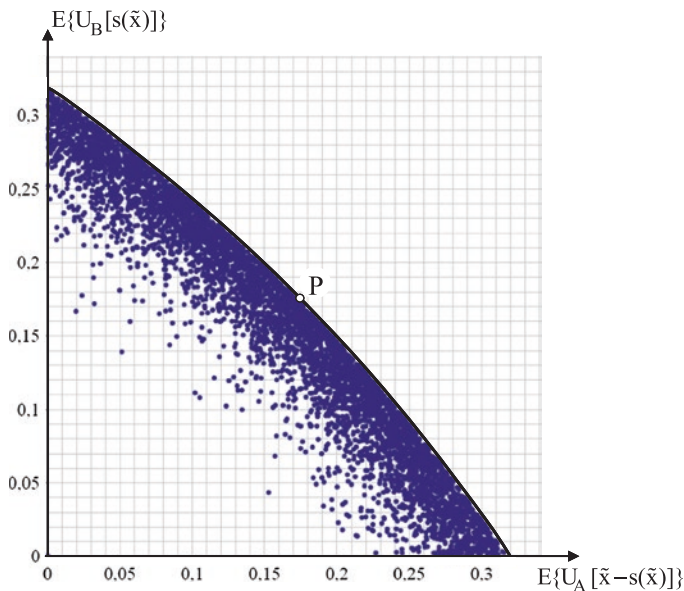


Abb. 11.1 Zufallssimulation von Risikoteilungen und effizienter Rand aller möglichen Risikoteilungen im $(E\{U_A[\tilde{x} - s(\tilde{x})]\}, E\{U_B[s(\tilde{x})]\})$ -Diagramm

A und B. Ein einzelner Punkt ist entstanden, indem die möglichen Erfolge des Projekts auf eine zufällige Weise auf A und B aufgeteilt wurden und zudem zufällig eine Ausgleichzahlung zwischen A und B festgelegt wurde. Alle Ergebnisse der Simulation, für die sich ein negativer Erwartungswert des Nutzens für mindestens einen der Entscheider ergab, wurden eliminiert, weil sie die Kooperationsbedingung nicht erfüllen und somit nicht „zulässig“ sind (insgesamt wurden 5000 zulässige Punkte simuliert). In der Abbildung entsteht so die Menge der entsprechenden Risikoteilungen zwischen A und B. Die 50:50-Teilung des Ergebnisses (ohne Transferzahlung), vgl. Tab. 11.2, wird durch den Punkt P in Abb. 11.1 repräsentiert.

Die Umhüllende dieser Punkte möglicher Risikoteilungen, die in die Abbildung zusätzlich eingezeichnet ist, ist die Menge der Pareto-effizienten Risikoteilungen (die die Kooperationsbedingungen erfüllen): Jeder Punkt links unterhalb der Umhüllenden stellt keine effiziente Risikoteilung dar, denn er wird in dem Sinne „dominiert“, dass sich immer Punkte auf der Umhüllenden finden, für die der Erwartungswert des Nutzens mindestens einer Partei erhöht werden kann, ohne dass der der anderen Partei verringert wird. Der Punkt $P = \{0,1739; 0,1739\}$ liegt auf dieser Umhüllenden: Die 50:50-Teilung ist offenbar Pareto-effizient. Dieses Ergebnis resultiert daraus, dass beide Parteien exponentielle Nutzenfunktionen mit derselben Risikoaversion haben ($a_A = a_B = 0,01$).

Ein streng konkaver Verlauf der Umhüllenden wie in Abb. 11.1 ergibt sich nicht nur für den Fall exponentieller Nutzenfunktionen, sondern immer dann, wenn beide Entscheider eine streng konkave Nutzenfunktion haben, also risikoavers sind. Bei anderen Nutzenfunktionen ist es auch möglich, dass die Umhüllende in einzelnen Bereichen linear oder konvex verläuft; auch ein durchgehend linearer Verlauf kann sich ergeben. Darauf kommen wir in Abschn. 11.4.1.3 zurück. Zunächst gehen wir weiterhin von einem streng konkaven Verlauf der Umhüllenden aus.

11.4.1.2 Ermittlung von Punkten auf der Umhüllenden

Ein Punkt auf einer Umhüllenden³ bzw. die entsprechende Pareto-effiziente Teilungsregel kann bei konkavem Verlauf der Umhüllenden mithilfe zweier äquivalenter Ansätze ermittelt werden. Beim ersten Ansatz wird der Erwartungswert des Nutzens einer Partei unter der Nebenbedingung maximiert, dass der Erwartungswert des Nutzens der anderen Partei einen bestimmten Mindestwert nicht unterschreitet. Beim zweiten Ansatz wird die gewichtete Summe der Erwartungswerte des Nutzens von A und B maximiert.

Abb. 11.2 verdeutlicht die beiden Ansätze, wobei $U_A^{\max}$ bzw. $U_B^{\max}$ den maximal erreichbaren Erwartungswert des Nutzens von A bzw. B bezeichnet. In Abb. 11.2a ist für den Erwartungswert des Nutzens des B das Niveau $\bar{U}_B$ vorgegeben: Alle Teilungsregeln auf der Umhüllenden, für die der Erwartungswert des Nutzens von B unter $\bar{U}_B$ liegt, sind

³Die Umhüllende entspricht im Prinzip der Effizienzkurve für den Fall eines einzigen Entscheiders, der sich an zwei Zielgrößen orientiert (Kap. 3, Abschn. 3.3.1).

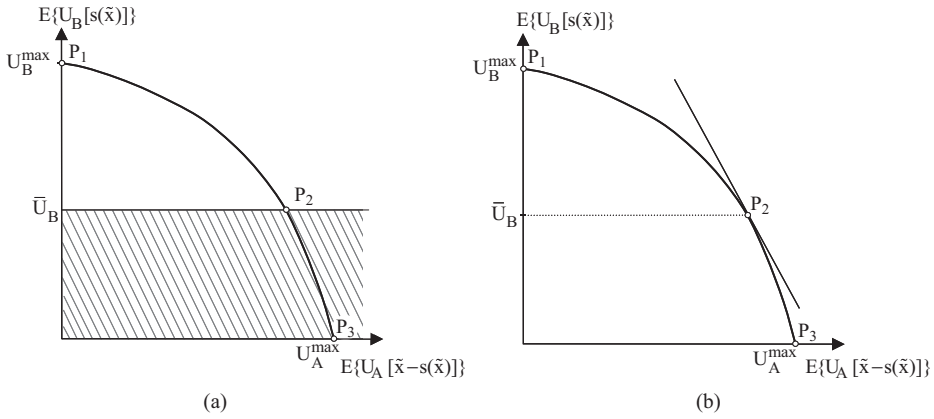


Abb. 11.2 Grafische Illustration der alternativen Vorgehensweisen zur Ermittlung der Pareto-effizienten Risikoteilung

dann also unzulässig. Um den Erwartungswert des Nutzens von A so weit wie möglich zu steigern, wird die Teilungsregel realisiert, die dem Punkt P_2 entspricht. Das dieser Vorgehensweise entsprechende Pareto-Programm lautet:

$$\max_{s(\tilde{x})} E\{U_A[\tilde{x} - s(\tilde{x})]\} \quad (11.1)$$

unter der Nebenbedingung

$$E\{U_B[s(\tilde{x})]\} \geq \bar{U}_B. \quad (11.2)$$

Variiert man den Mindestnutzen $\bar{U}_B$ zwischen $\bar{U}_B = 0$ und $\bar{U}_B = \bar{U}_B^{\max}$, so kann jeder Punkt auf der Umhüllenden und damit jede relevante Pareto-effiziente Risikoteilung ermittelt werden. Für $\bar{U}_B = 0$ wird der Punkt P_3 realisiert, wobei A den für ihn maximal möglichen Erwartungswert des Nutzens erreicht. Für $\bar{U}_B = \bar{U}_B^{\max}$ wird der Punkt P_1 realisiert, wobei nun B den für ihn maximal möglichen Erwartungswert des Nutzens erzielt.

In Abb. 11.2b ist derselbe Punkt P_2 wie in Abb. 11.2a dargestellt, nun als Tangentialpunkt der Umhüllenden mit einer Geraden. Die Gleichung einer solchen Geraden lautet allgemein:

$$Z = E\{U_A[x - s(\tilde{x})]\} + \lambda \cdot E\{U_B[s(\tilde{x})]\} \text{ mit } \lambda > 0. \quad (11.3)$$

Dabei wird der Erwartungswert des Nutzens von A mit 1 und der von B mit λ gewichtet. Z bezeichnet die gewichtete Summe der Erwartungswerte des Nutzens von A und von B. Die Steigung dieser Geraden beträgt:

$$\text{Stg} = \frac{dE\{U_B[s(\tilde{x})]\}}{dE\{U_A[x - s(\tilde{x})]\}} = -\frac{1}{\lambda} < 0. \quad (11.4)$$

Man erhält den Punkt P_2 , indem man (11.3) für denjenigen λ -Wert maximiert, für den die Steigung $-1/\lambda$ mit der Steigung der in Abb. 11.2b dargestellten Tangente übereinstimmt. Durch Variation von λ kann wiederum jeder Punkt auf der Umhüllenden und damit jede entsprechende Pareto-effiziente Risikoteilung von $\tilde{x}$ ermittelt werden. Dabei ist jeweils das folgende Pareto-Programm zu lösen:

$$\text{Max}_{s(\tilde{x})} [E\{U_A[x - s(\tilde{x})]\} + \lambda \cdot E\{U_B[s(\tilde{x})]\}]. \quad (11.5)$$

Für $\lambda = 0$ wird der Punkt P_3 realisiert. A erreicht dann den für ihn maximal möglichen Erwartungswert des Nutzens. Für $\lambda \rightarrow +\infty$ wird der Punkt P_1 realisiert. Nun erreicht B den für ihn maximal möglichen Erwartungswert des Nutzens.

Die beiden Optimierungsansätze, die Maximierung des Erwartungswertes des Nutzens von A unter der Nebenbedingung, dass B einen bestimmten Mindestnutzen $\bar{U}_B$ erhält, sowie die Maximierung einer gewichteten Summe der Erwartungswerte des Nutzens von A und von B, sind äquivalent. Sie führen immer dann zu derselben Pareto-effizienten Risikoteilung, wenn λ in der gewichteten Summe (11.5) so gewählt wird, dass B genau das Nutzenniveau $\bar{U}_B$ erreicht.

Dies lässt sich an dem Beispiel aus Abschn. 11.3 veranschaulichen. So kann man den Punkt $P = \{0,1739; 0,1739\}$ in Abb. 11.1 ermitteln, indem man $\bar{U}_B = 0,1739$ vorgibt und den Erwartungswert des Nutzens von A maximiert. A erreicht dann wie B den Präferenzwert 0,1739. Derselbe Punkt P lässt sich aber auch ermitteln, indem die gewichtete Summe $E\{U_A[x - s(\tilde{x})]\} + \lambda \cdot E\{U_B[s(\tilde{x})]\}$ mit $\lambda = 1$ maximiert wird. Die Steigung der Tangente beträgt dann $-1/\lambda = -1$. Je höher der Mindestnutzen $\bar{U}_B$ des Entscheiders B in dem ersten Optimierungsansatz ist, desto größer muss in (11.5) der Gewichtungsfaktor λ sein, damit sich hiermit dieselbe Teilungsregel ergibt.

11.4.1.3 Gestalt der Umhüllenden

Bisher sind wir von einem streng konkaven Verlauf der Umhüllenden ausgegangen. Dieser ergibt sich stets dann, wenn beide Entscheider risikoavers sind. Im Folgenden soll verdeutlicht werden, welche Konsequenzen sich für die Gestalt der Umhüllenden ergeben, wenn nicht beide Entscheider risikoavers sind.

Sind beide Entscheider risikoneutral, so orientieren sie sich am Erwartungswert ihres jeweiligen Einkommens. Die Erhöhung (bzw. Verringerung) des Erwartungswertes von $s(x)$ führt dann zwangsläufig zu einer betragsgleichen Verringerung (bzw. Erhöhung) des Erwartungswertes von $x - s(x)$. Jede Teilungsregel ist dann Pareto-effizient und der geometrische Ort aller möglichen Risikoteilungen, d. h. aller Kombinationen von Präferenzwerten des A und des B, ist eine Gerade mit der Steigung -1 . Das bedeutet aber auch, dass überhaupt keine Teilungsregeln existieren, die Punkten links unterhalb der „Umhüllenden“ entsprechen.

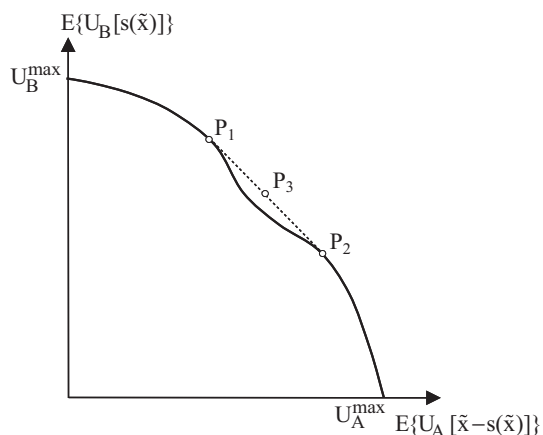
Dass die Umhüllende dagegen überall zumindest schwach konkav (d. h. linear oder streng konkav) verläuft, wenn kein Entscheider risikofreudig und mindestens einer risikoavers ist, lässt sich auf einfache Weise veranschaulichen (vgl. im Folgenden auch

Raiffa 1973, S. 236 ff.). Hierzu betrachten wir Abb. 11.3, in die eine fiktive, nicht durchgängig konkave Kurve eingezeichnet ist. Diese repräsentiert nicht die Menge der Pareto-effizienten Risikoteilungen.

Die Entscheider können sich nämlich auf das folgende Vorgehen einigen: Sie definieren zwei Risikoteilungen, die den Punkten P_1 und P_2 in der Abb. 11.3 entsprechen, und definieren zudem einen Zufallsmechanismus, nach dem eine der beiden Risikoteilungen (bzw. einer der Punkte) ausgewählt wird. Durch eine solche Zufallsauswahl können A und B alle Punkte auf der Verbindungslinie zwischen P_1 und P_2 erreichen. Einigen sie sich z. B. darauf, eine (faire) Münze zu werfen, so wird mit einer Wahrscheinlichkeit von jeweils 50 % einer der Punkte P_1 oder P_2 realisiert. Der Erwartungswert des Nutzens des A liegt nun in der Mitte zwischen den Abszissenwerten der Punkte P_1 und P_2 , der Erwartungswert des Nutzens des B liegt in der Mitte zwischen den Ordinatenwerten der Punkte P_1 und P_2 , und so ist P_3 der Punkt, der den Erwartungswerten des Nutzens von A und B bei diesem Vorgehen entspricht. Offenbar könnte jede „Delle“ im effizienten Rand, wenn es sie gäbe, auf diese Weise „glattgebügelt“ werden: Der effiziente Rand kann keine konvexen Bereiche haben, sondern ist überall zumindest schwach konkav.

Abschließend betrachten wir kurz den Fall, dass mindestens einer der Beteiligten *risikofreudig* ist. In diesem Fall lassen sich Fragen der Risikoteilung nicht mehr sinnvoll erörtern. Geht man z. B. davon aus, A sei risikofreudig, B dagegen risikoneutral, so zieht A eine Lotterie immer einem sicheren Ergebnis in Höhe des Erwartungswertes der Lotterie vor, während B indifferent gegenüber beiden ist. In einer solchen Situation kann A den Erwartungswert seines Nutzens beliebig steigern, indem er B immer wieder faire Lotterien anbietet, die jeweils einen erwarteten Gewinn von null versprechen. B ist bezüglich seiner Teilnahme an den Lotterien indifferent, während A hingegen mit jeder zusätzlichen Lotterie den Erwartungswert seines Nutzens steigern kann. Es existiert dann auch kein effizienter Rand der möglichen Risikoteilungen, und folglich auch keine Pareto-effiziente Teilungsregel.

Abb. 11.3 Zur Begründung des konkaven Verlaufs der Umhüllenden



Die Schaffung zusätzlicher Risiken über die Teilung des gegebenen riskanten Ergebnisses $\tilde{x}$ hinaus ist immer nachteilig, wenn beide Entscheider risikoavers sind. Dies bringt es auch mit sich, dass die Teilungsregel, die aus der Menge der Pareto-effizienten Risikoteilungen ausgewählt wird, unter rationalen Partnern das Ergebnis eines deterministischen Verhandlungsprozesses ist: Risikoaverse Entscheider sollten nicht den Zufall entscheiden lassen, welche Teilungsregel aus der Menge der Pareto-effizienten Regeln sie auswählen.

11.4.2 Bedingung Pareto-effizienter Risikoteilung

Im Folgenden werden Eigenschaften Pareto-effizienter Teilungsregeln näher untersucht. Dabei legen wir dasjenige Pareto-Programm zugrunde, das dem in Abb. 11.2a illustrierten Ansatz entspricht. Zur Ermittlung einer Pareto-effizienten Teilungsregel wird also für den Entscheider B ein Mindestnutzen $\bar{U}_B$ vorgegeben, um ihn bei der Maximierung des Erwartungswertes des Nutzens für A gemäß (11.1) in der Nebenbedingung gemäß (11.2) zu berücksichtigen. Dabei gehen wir wieder von einem streng konkaven Verlauf der Umhüllenden aus.

Da die Nutzenfunktionen U_A und U_B für die Einkommen aus der Erfolgsteilung streng monoton steigen, wird die Nebenbedingung (11.2) im Optimum immer als strikte Gleichung erfüllt sein: B erreicht seinen Mindestnutzen $\bar{U}_B$, aber nicht mehr. Dabei wird davon ausgegangen, dass dieser Mindestnutzen nicht größer als $U_B^{\max}$ ist und damit mindestens eine zulässige Lösung existiert. Die Nebenbedingung kann daher wie folgt dargestellt werden:

$$E\{U_B[s(\tilde{x})]\} - \bar{U}_B = 0. \quad (11.2a)$$

Nach dem Ansatz von Lagrange liegt der Maximalwert der Funktion (11.1) unter der Nebenbedingung (11.2a) dort, wo die folgende zusammengesetzte Funktion, die sogenannte Lagrange-Funktion

$$L = E\{U_A[\tilde{x} - s(\tilde{x})]\} + \lambda \cdot (E\{U_B[s(\tilde{x})]\} - \bar{U}_B), \quad (11.6)$$

ihren Maximalwert annimmt. Dafür muss $s(x)$ für jeden möglichen Erfolg x so gewählt werden, dass gilt (notwendige Bedingung):

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial s} &= w(x) \cdot \frac{\partial U_A[x - s(x)]}{\partial s} + \lambda \cdot w(x) \cdot \frac{\partial U_B[s(x)]}{\partial s} \\ &= w(x) \cdot \frac{dU_A[x - s(x)]}{d[x - s(x)]} \cdot \underbrace{\frac{\partial [x - s(x)]}{\partial s}}_{=-1} + \lambda \cdot w(x) \cdot \frac{dU_B[s(x)]}{ds} \\ &= -w(x) \cdot U'_A[x - s(x)] + \lambda \cdot w(x) \cdot U'_B[s(x)] = 0 \quad \text{für jedes } x. \end{aligned} \quad (11.7)$$

Zudem muss gelten

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = E\{U_B[s(\tilde{x})]\} - \bar{U}_B = 0. \quad (11.8)$$

In (11.7) bezeichnen $w(x)$ die Eintrittswahrscheinlichkeit (bei stetig verteiltem Erfolg: die Wahrscheinlichkeitsdichte) des Erfolges x und U'_A bzw. U'_B die Grenznutzen von A bzw. von B in Abhängigkeit ihres jeweiligen Einkommens $x - s(x)$ bzw. $s(x)$. (11.7) entsteht aus einer sogenannten punktweisen Optimierung der Lagrange-Funktion: Zu optimieren ist über jeden Wert von $s(x)$ und damit für jedes einzelne mögliche Ergebnis x , sodass L nach jedem $s(x)$ partiell abgeleitet wird. Im Beispiel aus Abschn. 11.3 wären entsprechend drei partielle Ableitungen nach $s(-100)$, $s(100)$ und $s(300)$ zu bilden. Die Ableitung von L nach λ , (11.8), reproduziert die Mindestnutzenbedingung für B.

(11.7) kann wie folgt dargestellt werden:

$$\frac{U'_A[x - s(x)]}{U'_B[s(x)]} = \lambda \quad (\text{für jedes } x). \quad (11.9)$$

(11.9) ist die Grundbedingung der Pareto-effizienten Risikoteilung. Für drei mögliche Ergebnismerte, x_1 , x_2 und x_3 , lautet diese Bedingung:

$$\frac{U'_A[x_1 - s(x_1)]}{U'_B[s(x_1)]} = \frac{U'_A[x_2 - s(x_2)]}{U'_B[s(x_2)]} = \frac{U'_A[x_3 - s(x_3)]}{U'_B[s(x_3)]} = \lambda.$$

Jeder mögliche Erfolg x wird also derart aufgeteilt, dass das Verhältnis aus dem Grenznutzen des Entscheiders A und dem des Entscheiders B gleich einer Konstanten λ ist. Wäre das Verhältnis der Grenznutzenwerte nicht für jeden möglichen Erfolg identisch, könnte durch Umverteilung der möglichen Erfolge der Erwartungswert des Nutzens mindestens einer Partei vergrößert werden, ohne dass der der anderen sinken würde.

Die Bedingung (11.9) gilt analog für mehr als zwei Parteien: Es muss sich dann bei Pareto-effizienter Risikoteilung für jedes mögliche Paar von Entscheidern ein konstantes Grenznutzenverhältnis ergeben.

Von besonderer Bedeutung ist, dass die Gestalt einer Pareto-effizienten Teilungsregel unabhängig von den Eintrittswahrscheinlichkeiten der möglichen Zustände bzw. Erfolge ist, solange die Erwartungen der Beteiligten (die subjektiven Wahrscheinlichkeiten der beiden Parteien) homogen sind. Ist eine Teilungsregel Pareto-effizient, so gilt dies auch dann, wenn sich bei gegebenen zustandsabhängigen Erfolgen x die (homogenen) Wahrscheinlichkeitsvorstellungen der Parteien ändern.

Gemäß (11.9) muss wegen der positiven Grenznutzenwerte von A und B auch $\lambda > 0$ gelten. Die konkrete Höhe von λ hängt bei gegebener Wahrscheinlichkeitsverteilung über x von $\bar{U}_B$ sowie den Nutzenfunktionen U_A und U_B ab. λ gibt allgemein an, wie weit der Erwartungswert des Nutzens von A sinkt, wenn $\bar{U}_B$ um eine marginale Einheit erhöht wird.

11.5 Gestalt Pareto-effizienter Teilungsregeln

11.5.1 Gestalt bei Risikoneutralität mindestens eines Entscheiders

Ist einer der beiden Entscheider risikoneutral, der andere hingegen risikoavers, so besteht die Pareto-effiziente Risikoteilung darin, dass der risikoneutrale Entscheider das gesamte Risiko übernimmt. Dies lässt sich aus der Bedingung (11.9) ableiten.

Ist A risikoneutral, so kann seine Nutzenfunktion gemäß $U_A[x - s(x)] = x - s(x)$ dargestellt werden. Es folgt dann wegen $U'_A[x - s(x)] = 1$ aus (11.9):

$$U'_B[s(x)] = \frac{1}{\lambda} \quad (\text{für jedes } x). \quad (11.10)$$

Gemäß (11.10) muss bei Pareto-effizienter Risikoteilung für jeden möglichen Erfolg x der Grenznutzen $U'_B[s(x)]$ von B gleich hoch sein, nämlich gleich $1/\lambda$. Wenn B risikoavers ist, ist sein Grenznutzen jedoch eine streng monoton (fallende) Funktion von $s(x)$. Ein für alle Erfolge x gleich hoher Grenznutzen $U'_B[s(x)]$ impliziert daher, dass B jeweils ein gleich hohes Einkommen erhält. Wird dieser Betrag als Fixum F bezeichnet, so folgt: $s(x) = F$ für jedes x . A erhält das Residuum $x - F$, trägt also das Erfolgsrisiko allein. Die Höhe des Fixums F hängt von der Höhe des Mindestnutzens $\bar{U}_B$ ab; je höher $\bar{U}_B$ ist, desto höher ist das zugehörige Fixum.

Ist umgekehrt A risikoavers, B hingegen risikoneutral (mit $U'_B[s(x)] = 1$), so muss gemäß (11.9)

$$U'_A[x - s(x)] = \lambda \quad (\text{für jedes } x) \quad (11.11)$$

gelten. Nun muss also der Grenznutzen des A konstant sein. Dies ist nur dann der Fall, wenn $s(x) = x + F$, nun also der Entscheider B das Risiko alleine trägt.

Sind beide Entscheider A und B risikoneutral, so hat das Pareto-Programm keine eindeutige Lösung. Dann nämlich ist jede Form der Risikoteilung und damit jede beliebige Teilungsregel $s(x)$ Pareto-effizient. Dass bei Risikoneutralität beider Parteien jede beliebige Teilungsregel Pareto-effizient ist, ist unmittelbar plausibel: Beide bewerten dann ihren Erfolgsanteil nach deren Erwartungswert. Wenn nun aufgrund einer Umverteilung der zustandsabhängigen Erfolge der Erwartungswert des Erfolgsanteils eines Entscheiders steigt, so sinkt der des anderen um denselben Betrag; es ist nicht möglich, durch Umverteilung den Erwartungswert des Einkommens einer Partei zu erhöhen, ohne den der anderen Partei (um den gleichen Betrag) zu schmälern. Sind beide Entscheider indifferent gegenüber dem Risiko, so stellt also die Risikoteilung kein Problem dar; beiden ist für alternative Erwartungswerte $E[s(\tilde{x})]$ jeweils egal, wie viel Risiko der eine bzw. der andere übernimmt.

Die Zusammenhänge lassen sich auf den Fall verallgemeinern, dass das Risiko auf mehr als zwei Entscheider zu verteilen ist: Ist einer der beteiligten Entscheider risikoneutral, die anderen hingegen risikoavers, so trägt der risikoneutrale Entscheider das

gesamte Risiko. Sind mehrere, aber nicht alle Entscheider risikoneutral, so übernehmen sie (als Gruppe) das gesamte Risiko; wie sie es bei gegebenen Erwartungswerten ihrer Erfolgsanteile untereinander aufteilen, ist egal.

Im Folgenden soll nur noch der realistische Fall betrachtet werden, dass beide Parteien risikoavers sind.

11.5.2 Gestalt bei Risikoaversion beider Entscheider

Sind beide Entscheider A und B risikoavers, so kann (11.9) nur erfüllt sein, wenn *beide* am Risiko beteiligt werden. Würde z. B. B nicht am Risiko beteiligt und erhielte statt dessen ein Fixum $s(x)=F$, so wäre sein Grenznutzen für jedes mögliche Ergebnis konstant, wohingegen der Grenznutzen des Entscheiders A, $U'_A[x - s(x)] = U'_A(x - F)$, mit steigendem x sinken würde; (11.9) wäre nicht für alle x erfüllbar. B muss also am Risiko beteiligt werden. Analog gilt dies auch für A.

Die Eigenschaften betreffender Pareto-effizienter Teilungsregeln sollen nun genauer untersucht werden. Dabei wird davon ausgegangen, der Erfolg sei stetig verteilt, sodass auch die Teilungsregel stetig ist. Eine stetige Teilungsregel lässt sich auch auf jede diskrete Erfolgsverteilung anwenden und dient daher als allgemeine Teilungsregel für A und B. Die notwendige Bedingung 11.9 für Pareto-effiziente Risikoteilung kann wie folgt dargestellt werden:

$$U'_A[x - s(x)] = \lambda \cdot U'_B[s(x)] \quad (\text{für jedes } x). \quad (11.9a)$$

Da (11.9a) für jeden x -Wert erfüllt sein muss, muss sich bei Variation von x das Einkommen $s(x)$ in der Weise ändern, dass die Gleichung erhalten bleibt. Folglich muss die Ableitung nach x für beide Seiten von (11.9a) identisch sein:

$$U''_A[x - s(x)] \cdot [1 - s'(x)] = \lambda \cdot U''_B[s(x)] \cdot s'(x) \quad (\text{für jedes } x). \quad (11.12)$$

Ersetzt man hierin den Lagrange-Multiplikator λ gemäß der Grundbedingung (11.9) durch $U'_A[x - s(x)]/U'_B[s(x)]$, so erhält man

$$U''_A[x - s(x)] \cdot [1 - s'(x)] = \frac{U'_A[x - s(x)]}{U'_B[s(x)]} \cdot U''_B[s(x)] \cdot s'(x) \quad (11.13)$$

$$\text{bzw.} \quad \frac{U''_A[x - s(x)]}{U'_A[x - s(x)]} \cdot [1 - s'(x)] = \frac{U''_B[s(x)]}{U'_B[s(x)]} \cdot s'(x).$$

Löst man (11.13) nach $s'(x)$ auf und verwendet die Arrow-Pratt-Maße für absolute Risikoaversion,

$$AP_A[x - s(x)] = -\frac{U''_A[x - s(x)]}{U'_A[x - s(x)]} \quad \text{und} \quad AP_B[s(x)] = -\frac{U''_B[s(x)]}{U'_B[s(x)]}, \quad (11.14)$$

so erhält man:

$$s'(x) = \frac{AP_A[x - s(x)]}{AP_A[x - s(x)] + AP_B[s(x)]} = \frac{1}{1 + \frac{AP_B[s(x)]}{AP_A[x - s(x)]}}. \quad (11.15)$$

Da beide Parteien annahmegemäß risikoscheu sind, sind ihre Risikoaversionskoeffizienten positiv. Aus (11.15) folgt somit die Relation $0 < s'(x) < 1$ für jedes x , sodass sowohl s (wegen $s'(x) > 0$) als auch $x - s$ (wegen $s'(x) < 1 \Leftrightarrow 1 - s'(x) > 0$) streng monoton steigende Funktionen von x sind.⁴

Über das Krümmungsverhalten einer *Pareto-effizienten* Teilungsregel $s(x)$ macht (11.15) folgende allgemeine Aussagen: Ist das Verhältnis der Risikoaversionskoeffizienten $AP_B[s(x)]$ und $AP_A[x - s(x)]$ bei der betreffenden Teilungsregel unabhängig von x , so ist auch $s'(x)$ konstant, die Teilungsregel also *linear*. Verändert sich hingegen bei Variation von x das Verhältnis der Risikoaversionskoeffizienten, so ist die Teilungsregel nicht linear. Das Verhältnis der Risikoaversionskoeffizienten verändert sich z. B. dann, wenn sich der Risikoaversionskoeffizient einer Partei mit ihrem Einkommen verändern (also bei dieser Partei Reichtumseffekte auftreten), der Risikoaversionskoeffizient der anderen Partei hingegen konstant ist. Wäre z. B. die Risikoaversion des A konstant und würde die Risikoaversion des B mit steigendem Einkommen sinken, so würde der Quotient $AP_B[s(x)] / AP_A[x - s(x)]$ sinken und $s'(x)$ würde mit zunehmendem Erfolg x steigen: die Teilungsregel wäre konvex.

(11.15) kann mithilfe der Risikotoleranzen, d. h. der Kehrwerte der Risikoaversionskoeffizienten, auch wie folgt dargestellt werden:

$$s'(x) = \frac{\frac{1}{AP_B[s(x)]}}{\frac{1}{AP_A[x - s(x)]} + \frac{1}{AP_B[s(x)]}}. \quad (11.15a)$$

Das Grenzeinkommen von B ist somit gleich dem Quotienten aus seiner eigenen Risikotoleranz und der Summe beider Risikotoleranzen.

(11.15a) lässt sich auf den Fall mit mehr als zwei Entscheidern übertragen. Wird die Anzahl der Entscheider mit N_K und das Einkommen des Entscheiders k ($k = 1, 2, \dots, N_K$) mit $s_k(x)$ bezeichnet, wobei $s_1(x) + s_2(x) + \dots + s_{N_K}(x) = x$ für jedes x gilt, so folgt:

$$s'_k(x) = \frac{\frac{1}{AP_k[s_k(x)]}}{\sum_{j=1}^{N_K} \frac{1}{AP_j[s_j(x)]}} \quad (k = 1, 2, \dots, N_K). \quad (11.16)$$

⁴Mithilfe des mittleren Ausdrucks von (11.15) lässt sich das Ergebnis aus dem vorherigen Abschnitt bezüglich der Gestalt der Pareto-effizienten Teilungsregel bei Risikoneutralität einer der Parteien nochmals bestätigen: Ist A risikoavers und B risikoneutral, gilt also $AP_A > 0$ und $AP_B = 0$ und somit $s'(x) = 1$. Ist B risikoavers und A risikoneutral, folgt aus (11.15) $s'(x) = 0$.

Im Folgenden wird repräsentativ für zwei Entscheider näher untersucht, unter welchen Bedingungen die Pareto-effiziente Teilungsregel *linear* ist. Hierzu werden zunächst zwei spezielle Typen von Nutzenfunktionen betrachtet, bei denen dies der Fall ist. Danach wird verdeutlicht, dass es nur wenige andere Typen von Nutzenfunktionen gibt, für welche die Pareto-effiziente Risikoteilung ebenfalls linear ist. Das Ergebnis linearer Pareto-effizienter Risikoteilung hat grundlegende Bedeutung für die Kapitalmarkttheorie. Bei den betreffenden Nutzenfunktionen und homogenen Erwartungen der Investoren auf dem Kapitalmarkt wird im Marktgleichgewicht das aus allen Wertpapieren resultierende Risiko ebenfalls linear geteilt.

11.5.3 Lineare Teilungsregeln

11.5.3.1 Exponentielle Nutzenfunktionen

Bei exponentiellen Nutzenfunktionen, d. h. $U_A[x - s(x)] = b_A - e^{-a_A \cdot [x - s(x)]}$ und $U_B[s(x)] = b_B - e^{-a_B \cdot s(x)}$, sind die Risikoaversionskoeffizienten beider Parteien konstant: $AP_A[x - s(x)] = a_A$ und $AP_B[s(x)] = a_B$. Aus (11.15) folgt dann unmittelbar:

$$s'(x) = \frac{a_A}{a_A + a_B} = \frac{1}{1 + \frac{a_B}{a_A}}. \quad (11.17)$$

Die Steigung der Pareto-effizienten Teilungsregel ist somit für jeden Erfolg x identisch; die Teilungsregel ist *linear* (Raiffa 1973, S. 243 f.). Eine Pareto-effiziente Teilungsregel kann dann wie folgt dargestellt werden:

$$s(x) = s \cdot x + F \quad \text{mit} \quad s \equiv \frac{a_A}{a_A + a_B} = \frac{1}{1 + \frac{a_B}{a_A}} \quad (0 < s < 1). \quad (11.18)$$

B erhält hierbei ein Fixum F und den proportionalen Anteil s am Erfolg x . A erhält den Betrag $x - s(x) = (1 - s) \cdot x - F$. Dabei kann F auch negativ sein. Im Fall $F < 0$ zahlt B den Betrag $|F|$ an A.

Der Pareto-effiziente s -Wert ist gemäß (11.18) nur von den Risikoaversionskoeffizienten abhängig; jedem Mindestnutzen $\bar{U}_B$ entspricht dieselbe Steigung der Pareto-effizienten Teilungsregel. Die Pareto-effizienten (s, F) -Konstellationen unterscheiden sich nur in F ; F ist eine monoton steigende Funktion von $\bar{U}_B$.

Je geringer die Risikoaversion von B im Vergleich zu der von A ist, desto höher ist gemäß (11.18) der Anteil s und desto stärker partizipiert B am Erfolgsrisiko. Umgekehrt partizipiert A umso stärker am Erfolgsrisiko, je geringer seine Risikoaversion im Vergleich zu der von B ist und desto niedriger somit gemäß (11.18) der Anteil s von B am Erfolg x ist. Geht das Verhältnis a_B/a_A gegen null, so geht s gegen eins; geht das umgekehrte Verhältnis a_A/a_B gegen null, so geht auch s gegen null. Bei gleich hohen Risikoaversionskoeffizienten gilt $s = 0,5$.

Im Beispiel des Abschn. 11.3 wurden zwei Fälle betrachtet: A und B hatten dabei ebenfalls exponentielle Nutzenfunktionen, wobei im ersten Fall die Risikoaversionskoeffizienten identisch waren und im zweiten Fall die Risikoaversion des B doppelt so hoch war wie die des A. Aus (11.18) folgt nun, dass im ersten Fall nur eine 50:50-Teilung ($s=0,5$) Pareto-effizient ist, im zweiten Fall nur eine 2/3:1/3-Teilung ($s=1/3$) zwischen A und B.

Bei exponentiellen Nutzenfunktionen tragen also beide Entscheider A und B jeweils einen proportionalen Teil des Erfolgsrisikos. Dabei trägt derjenige mehr Risiko, der weniger risikoavers ist: Für $a_B > a_A$ liegt s unter 0,5, für $a_A > a_B$ liegt s über 0,5.

Bei N_K Entscheidern mit exponentiellen Nutzenfunktionen (mit den Risikoaversionskoeffizienten a_k , $k=1,2,\dots,N_K$) gilt gemäß (11.16) für die Erfolgsanteile der einzelnen Entscheider:

$$s_k = \frac{\frac{1}{a_k}}{\sum_{j=1}^{N_K} \frac{1}{a_j}} \quad (k=1,2,\dots,N_K). \quad (11.19)$$

Dabei bezeichnet s_k den konstanten Anteil des Entscheiders k am Erfolg x und N_K ($N_K \geq 2$) die Zahl der Parteien, zwischen denen der Erfolg geteilt wird. Bei den s_k -Werten gemäß (11.19) ist die Teilungsregel unabhängig davon Pareto-effizient, welche sicheren Transferzahlungen sie für die Beteiligten vorsieht; wird eine Pareto-effiziente Teilungsregel nur in der Weise geändert, dass Transferzahlungen verändert werden, bleibt die Pareto-Effizienz erhalten.

Dieser Sachverhalt resultiert daraus, dass bei exponentiellen Nutzenfunktionen konstante absolute Risikoaversion besteht; es gibt keinen Reichtumseffekt, sodass die Pareto-effiziente Risikoteilung unabhängig von sicheren Transferzahlungen ist.

11.5.3.2 Quadratische Nutzenfunktionen

Auch bei quadratischen Nutzenfunktionen, $U_B[s(x)] = b_B \cdot s(x) - c_B \cdot s(x)^2$ und $U_A[x - s(x)] = b_A \cdot [x - s(x)] - c_A \cdot [x - s(x)]^2$, sind alle Pareto-effizienten Teilungsregeln linear. Im Gegensatz zu exponentiellen Nutzenfunktionen ist nun jedoch nicht nur F , sondern auch die Steigung $s'(x)$ von $\bar{U}_B$, dem Mindestnutzen für B, abhängig. Zur Ableitung dieses Zusammenhangs betrachten wir direkt die Grundbedingung (11.9a):

$$U'_A[x - s(x)] = \lambda \cdot U'_B[s(x)] \quad (11.9a)$$

$$\text{bzw.} \quad b_A - 2 \cdot c_A \cdot [x - s(x)] = \lambda \cdot [b_B - 2 \cdot c_B \cdot s(x)] \quad (\text{für jedes } x).$$

Auflösen nach $s(x)$ ergibt:

$$s(x) = \underbrace{\frac{\lambda \cdot b_B - b_A}{2 \cdot (c_A + \lambda \cdot c_B)}}_{=F} + \underbrace{\frac{c_A}{c_A + \lambda \cdot c_B}}_{=s} \cdot x. \quad (11.20)$$

Auch bei quadratischen Nutzenfunktionen ist also die Pareto-effiziente Teilungsregel $s(x)$ *linear*. Dabei ist gemäß (11.20) s eine monoton *fallende* und F eine monoton *steigende* Funktion von λ ;⁵ F ist positiv, wenn $\lambda \cdot b_B$ größer ist als b_A . Da λ sowohl s als auch F beeinflusst, sind beide auch vom Mindestnutzens $\bar{U}_B$ abhängig: Je höher $\bar{U}_B$, desto höher ist nämlich auch λ .⁶

Dies ist wie folgt zu erklären: Soll der Mindestnutzen des B steigen, so könnte dies zwar allein durch die Erhöhung von F erreicht werden. Da aber die Risikoaversion bei der quadratischen Nutzenfunktion mit zunehmendem Reichtumsniveau steigt, wäre dann die Risikoteilung nicht mehr Pareto-effizient. B wird daher zugleich weniger stark am Risiko beteiligt, d. h. s sinkt.

11.5.3.3 Andere Nutzenfunktionen

Das Ergebnis einer linearen Pareto-effizienten Risikoteilung hat deshalb große Bedeutung, weil es zeigt, unter welchen Bedingungen das Risiko auf sehr einfache Weise Pareto-effizient geteilt werden kann, nämlich durch die prozentuale Aufteilung des Erfolgs (die entsprechende Steigung der linearen Teilungsregel) verbunden mit Transferzahlungen (das Fixum der linearen Teilungsregel).

Trivialerweise ist die Pareto-effiziente Teilung immer dann linear, wenn die Nutzenfunktionen der Parteien identisch sind: Dann teilen sie den Erfolg zu gleichen Teilen und damit linear auf. Wie die für alle Parteien geltende Nutzenfunktion dabei aussieht, ist unerheblich. Allgemeine Ergebnisse zur Linearität Pareto-effizienter Teilungsregeln wurden von Wilson (1968, 1969), Ross (1974), Amerski und Stockenius (1983) und Huang und Litzenberger (1985) abgeleitet. Die Ergebnisse zeigen, dass neben den beiden beschriebenen Typen von Nutzenfunktionen, der exponentiellen und der quadratischen, und neben dem Spezialfall identischer Nutzenfunktionen nur wenige andere Typen von Nutzenfunktionen existieren, für die sich ebenfalls eine lineare Pareto-effiziente Teilungsregel ergibt. Dies schränkt den Gültigkeitsbereich des Ergebnisses, dass eine Pareto-effiziente Teilungsregel linear ist, sehr stark ein; letztlich gilt daher: Pareto-Effizienz wird bis auf wenige Ausnahmefälle bei linearer Teilung *verletzt*.

⁵Dass F eine monoton steigende Funktion von λ ist, erkennt man, wenn man F in (11.20) wie folgt darstellt:

$$F = \frac{b_B - (1/\lambda) \cdot b_A}{2 \cdot [(1/\lambda) \cdot c_A + c_B]}$$

Mit steigendem λ wird der Zähler des Quotienten auf der rechten Seite dieser Gleichung größer, der Nenner kleiner und folglich F größer.

⁶Dies folgt aus der Äquivalenz der beiden in Abschn. 11.4.1 dargestellten Optimierungsansätze: Da mit zunehmendem $\bar{U}_B$ die Pareto-effiziente Teilung durch die Maximierung der gewichteten Summe der Erwartungswerte des Nutzens nur nachgebildet werden kann, wenn λ steigt, wird auch der Lagrange-Multiplikator λ mit zunehmendem $\bar{U}_B$ steigen.

11.5.4 Nichtlineare Teilungsregeln

Ändert sich bei einer Pareto-effizienten Teilungsregel $s(x)$ mit steigendem Erfolg x der Quotient der Arrow-Prate-Maße für absolute Risikoaversion, so ist sie gemäß (11.15) nicht linear. Wenn der Quotient $AP_B[s(x)] / AP_A[x - s(x)]$ steigt, sinkt gemäß (11.15) $s'(x)$ und die Teilungsregel verläuft streng konkav. Wenn der Quotient sinkt, ist die Teilungsregel streng konvex. Es ist auch möglich, dass eine Pareto-effiziente Teilungsregel in einem Bereich linear verläuft, in einem anderen streng konkav und in wieder einem anderen streng konvex.

Hat B eine exponentielle Nutzenfunktion (mit konstanter absoluter Risikoaversion), so verläuft gemäß (11.15) eine Pareto-effiziente Teilungsregel bei steigender absoluter Risikoaversion von A streng konvex und bei sinkender absoluter Risikoaversion von A streng konkav. Der Grund ist, dass A bei steigender (bzw. sinkender) absoluter Risikoaversion im Vergleich zum konstant risikoaversen B immer risikoaverser (bzw. immer weniger risikoavers) wird und daher B in zunehmendem (bzw. in abnehmendem) Maße am Risiko beteiligt werden sollte.

11.6 Berücksichtigung heterogener Wahrscheinlichkeitsurteile und Einkünfte im privaten Bereich

11.6.1 Heterogene Wahrscheinlichkeitsurteile

Haben die beiden Entscheider verschiedene Wahrscheinlichkeitsvorstellungen bezüglich der Zustände (bzw. der Erfolge), so ist bei Pareto-effizienter Risikoteilung den Unterschieden in den Wahrscheinlichkeiten Rechnung zu tragen. Auch wenn zwei oder mehr Zuständen derselbe Erfolg x entspricht, kann es sinnvoll sein, jeweils unterschiedliche Erfolgsanteile $s(x)$ und $x - s(x)$ zu vereinbaren. Die Erfolgsteilung erfolgt dann in dem Sinn zustandsabhängig, dass für die Höhe von $s(x)$ bzw. von $x - s(x)$ nicht nur die Höhe des erzielten Erfolges x maßgeblich ist, sondern auch der Zustand S_s , in dem er erzielt wird. Im Folgenden wird gezeigt, wie der Erfolg zustandsabhängig Pareto-effizient geteilt werden kann. Dabei wird davon ausgegangen, die Zahl N_S der möglichen Zustände sei *endlich* und der eintretende Zustand wie der Erfolg (kostenlos) verifizierbar. Die Wahrscheinlichkeit, die der Entscheider A bzw. B dem Zustand S_s ($s = 1, 2, \dots, N_S$) zuordnet, wird mit $w_A(S_s)$ bzw. mit $w_B(S_s)$ bezeichnet. Für jeden Zustand S_s gelte $w_A(S_s) > 0$ und $w_B(S_s) > 0$.

Die notwendige Bedingung für eine Pareto-effiziente Risikoteilung lautet nun:

$$\frac{U'_A[x - s(x)]}{U'_B[s(x)]} = \frac{w_B(S_s)}{w_A(S_s)} \cdot \lambda \quad (s = 1, 2, \dots, N_S). \quad (11.21)$$

Für den Zustand S_s ($s=1,2,\dots,N_S$) wird der Erfolg derart geteilt, dass das Verhältnis aus dem Grenznutzen des Entscheiders A und dem des Entscheiders B gleich $[\lambda \cdot w_B(S_s)]/w_A(S_s)$ ist. Die einem Zustand S_s entsprechende Pareto-effiziente Teilungsregel kann also ebenso ermittelt und analysiert werden wie die zustandsunabhängige Pareto-effiziente Teilungsregel bei homogenen Erwartungen. Anstelle des Faktors λ wird jetzt lediglich für den Zustand S_s der Faktor

$$\lambda_s^* = \frac{w_B(S_s)}{w_A(S_s)} \cdot \lambda \quad (11.22)$$

zugrunde gelegt. Gilt $w_A(S_s)=w_B(S_s)$, so gilt $\lambda_s^*=\lambda$ und für den Zustand S_s wird ein beliebiger Erfolg ebenso geteilt wie für den Fall, dass A und B homogene Wahrscheinlichkeitsvorstellungen bezüglich *aller* Zustände haben (vgl. 11.9). Bei heterogenen Erwartungen erhält ein Entscheider in denjenigen Zuständen relativ hohe (niedrige) Erfolgsanteile, denen er höhere (niedrigere) Wahrscheinlichkeiten zuordnet als der andere Entscheider. Je mehr die Wahrscheinlichkeitsvorstellungen der beiden Parteien voneinander abweichen, desto mehr unterscheiden sich tendenziell ihre Erfolgsanteile von Zustand zu Zustand.

11.6.2 Einkünfte im privaten Bereich

Bei den bisherigen Darstellungen sind wir von der Annahme ausgegangen, dass beide Parteien im privaten Bereich weder ein sicheres noch ein unsicheres Einkommen oder Vermögen erzielen; es stellte sich weder das Problem, einem Bewertungsverbund noch einem Risikoverbund Rechnung zu tragen. Im Folgenden sollen die Darstellungen entsprechend erweitert werden, indem wir davon ausgehen, der Entscheider A (B) erziele im privaten Bereich das Vermögen V_A^* (V_B^*)⁷.

Sind beide Vermögenswerte sicher, so behalten die bisherigen Darstellungen ihre Gültigkeit, sofern die Nutzenfunktionen der beiden Parteien exponentiell sind.

Bei anderen (nichtlinearen) Nutzenfunktionen sind den aus den Vermögenswerten V_A^* und V_B^* resultierenden Reichtumseffekten Rechnung zu tragen. Dies erfordert allerdings nicht, dass die bisherigen Darstellungen explizit um diese Vermögenswerte erweitert werden müssen. Es müssen lediglich die Nutzenfunktionen $U_A[x - s(x)]$ und $U_B[s(x)]$ so angepasst werden, wie dies in Kap. 5, Abschn. 5.8.2, beschrieben wurde. Die Nutzenfunktionen und damit auch die Pareto-effizienten Teilungsregeln hängen nun von den Vermögenswerten V_A^* und V_B^* ab.

Sind die Vermögenswerte V_A^* und V_B^* stochastisch und außerdem wie x ex post kostenlos verifizierbar (d. h. intersubjektiv überprüfbar), so ist es grundsätzlich vorteilhaft, nicht nur x , sondern das Gesamtvermögen $\tilde{x} + \tilde{V}_A^* + \tilde{V}_B^*$ der beiden Parteien Pareto-effizient

⁷Vgl. zu den folgenden Darstellungen ausführlich Laux 1998a, S. 53–66).

aufzuteilen, sodass durch Umverteilung dieses Vermögens keine Partei einen Vorteil erzielen kann, ohne dass die andere einen Nachteil erleidet. Pareto-effiziente Teilungsregeln für das Gesamtvermögen können in der gleichen Weise ermittelt werden wie für den Gewinn $\tilde{x}$ ohne die privaten Vermögenswerte $\tilde{V}_A^*$ und $\tilde{V}_B^*$.

Eine „ideale“ Risikoteilung durch Teilung des Gesamtvermögens $\tilde{x} + \tilde{V}_A^* + \tilde{V}_B^*$ ist jedoch dann nicht möglich, wenn V_A^* und V_B^* ex post nicht verifizierbar sind. Wird entsprechend nur der Erfolg x pareto-effizient geteilt, so können die Vermögenswerte $\tilde{V}_A^*$ und $\tilde{V}_B^*$ nur noch implizit berücksichtigt werden, indem sie wie in Kap. 5, Abschn. 5.8.3, erläutert wurde, in den Nutzenfunktionen der beiden Parteien für ihre Einkünfte $x - s(x)$ bzw. $s(x)$ erfasst werden.

Wenn die Vermögenswerte $\tilde{V}_A^*$ und $\tilde{V}_B^*$ stochastisch vom eintretenden Umweltzustand S_s abhängen, so ergeben sich *zustandsabhängige* Nutzenfunktionen $U_A(\cdot)$ und $U_B(\cdot)$, sodass analog zu den Darstellungen in Abschn. 11.6.1 die Pareto-effizienten Teilungsregeln grundsätzlich auch dann zustandsabhängig sind, wenn beide Parteien homogene Wahrscheinlichkeitsvorstellungen bezüglich der Zustände haben. Wenn z. B. der Entscheider A bei Eintreten des Zustandes S_s mit relativ hoher Wahrscheinlichkeit ein relativ hohes (bzw. niedriges) Vermögen V_A^* erzielt, so erhält er in diesem Zustand einen relativ niedrigen (bzw. hohen) Anteil am Erfolg x .

11.7 Zusammenfassung

- In vielen Entscheidungssituationen stellt sich das Problem, wie ein riskanter Erfolg bzw. das entsprechende Risiko auf mehrere Personen aufgeteilt werden soll. Dieses Problem ist schon dann komplex, wenn die Wahrscheinlichkeitsverteilung darüber gegeben ist und nicht verändert werden soll.
- Auf das Problem der Aufteilung von Risiken lässt sich das allgemeine Kriterium der Pareto-Effizienz übertragen. Danach ist eine Risikoteilung effizient, wenn es nicht möglich ist, einen Entscheider durch eine Veränderung der Aufteilung besser zu stellen, ohne einen anderen Entscheider schlechter zu stellen.
- Bei Kenntnis der Menge der Pareto-effizienten Teilungsregeln wird der Verhandlungsprozess zur abschließenden Vereinbarung einer Teilungsregel erheblich vereinfacht, weil rationale Entscheider alle anderen Teilungsregeln ausschließen.
- Pareto-effiziente Teilungsregeln lassen sich vergleichsweise einfach ermitteln und analysieren, wenn nur zwei Entscheider A und B einen unsicheren Erfolg x miteinander teilen. Die Teilungsregel ist dann eindeutig durch die Funktion $s(x)$ definiert, die festlegt, welchen Betrag (welches Einkommen) der eine Entscheider (B) aus der Aufteilung von x erhält; der andere (A) erhält entsprechend das Residuum $x - s(x)$.
- Eine Pareto-effiziente Teilungsregel kann grundsätzlich mithilfe zweier äquivalenter Ansätze ermittelt werden. Beim ersten wird der Erwartungswert des Nutzens einer Partei unter der Nebenbedingung maximiert, dass der Erwartungswert des Nutzens der anderen Partei einen bestimmten Mindestwert nicht unterschreitet. Beim zweiten

Ansatz wird die gewichtete Summe der Erwartungswerte des Nutzens beider Parteien (A und B) maximiert. Die Menge der Pareto-effizienten Teilungsregeln kann bei zwei Entscheidern anschaulich grafisch durch eine Umhüllende dargestellt werden.

- Unter der Annahme, dass keine der Parteien risikofreudig ist, wird bei Pareto-effizienter Risikoteilung der riskante Erfolg zwischen den Entscheidern derart aufgeteilt, dass das Verhältnis der Grenznutzen der beiden Entscheider, $U'_A[x - s(x)] / U'_B[s(x)]$, stets dasselbe ist.
- Wie stark ein Entscheider am Erfolg beteiligt wird, hängt vom Verhältnis seiner Risikoeinstellung (gemessen als Arrow-Pratt-Maß) und der Risikoeinstellung des anderen Entscheiders ab.
- Sind beide Entscheider risikoneutral, besteht kein Problem der Risikoteilung. Ist einer risikoneutral, der andere hingegen risikoavers, so übernimmt der risikoneutrale Entscheider das gesamte Risiko, erhält also das gesamte Ergebnis x ; das Einkommen des risikoaversen Entscheiders ist erfolgsunabhängig. Sind beide Entscheider risikoavers, so trägt derjenige mehr Risiko (d. h. wird stärker an x beteiligt), der weniger risikoavers ist.

Ergänzende und vertiefende Literatur

Demski (1976); Gillenkirch (1997, S. 29–52); Hairshleifer und Railey (1979); Laux (1998a; 1998b; 2006a); Raiffa (1973); Rees (1985); Schlesinger und Doherty (1991); Velthuis (1998, S. 15–39, 2004).

11.8 Übungen

Aufgabe 11.1

Bei Pareto-effizienter Risikoteilung muss die Bedingung $U'_A[x - s(x)] / U'_B[s(x)] = \lambda$ erfüllt sein.

- Was können Sie über $s(x)$ sagen, wenn A risikoneutral, B hingegen risikoavers ist?
- Was können sie über $s(x)$ sagen, wenn A eine konstante absolute Risikoaversion hat, B hingegen eine abnehmende absolute Risikoaversion?

Aufgabe 11.2

Ein Unternehmer kann 1 Mio. vorhandene Eigenmittel in ein Projekt investieren, dessen Rückfluss unsicher ist. Im Erfolgsfall ist der Rückfluss 6 Mio. (Wahrscheinlichkeit: 20 %) oder 2 Mio. (Wahrscheinlichkeit: 30 %). Im Misserfolgsfall (Wahrscheinlichkeit 50 %) jedoch ist das eingesetzte Kapital verloren. Der Unternehmer hat drei Möglichkeiten: Entweder er verzichtet auf die Investition und legt seine Mittel zu 2 % an. Oder er führt das Projekt durch und finanziert es vollständig selbst. Oder er wendet sich an einen Investor, der sich an der Finanzierung beteiligen würde und entsprechend auch einen Anteil am Rückfluss erhielte. Unterstellen Sie für alle Beteiligten (den Unternehmer

wie auch den Investor), dass diese sich am Bernoulli-Prinzip mit der Nutzenfunktion $U_i(W_i) = 1 - e^{-0,5 \cdot W_i}$ orientieren, wobei W_i das Einkommen des betreffenden Entscheiders (in Mio.) bezeichnet.

- Würde der Unternehmer das Projekt durchführen und vollständig selbst finanzieren?
- Wie würde der Unternehmer über die Realisation des Projektes entscheiden, wenn der Investor ihm anbietet, 20 % der Finanzierung zu übernehmen und dafür 20 % des Rückflusses zu erhalten?
- Wie würde der Unternehmer über die Realisation des Projektes entscheiden, wenn der Investor ihm anbietet, 50 % der Finanzierung zu übernehmen und dafür 50 % des Rückflusses zu erhalten? Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem des Aufgabenteils b).

Aufgabe 11.3

Ein Unternehmer kann 100 in ein Projekt investieren, dessen unsicherer Rückfluss einen Erwartungswert von 130 und eine Varianz von 5000 hat. Der Unternehmer möchte zusätzliche Eigenkapitalgeber gewinnen, die sich an der Finanzierung des Projektes beteiligen. Gehen Sie für alle Entscheider von der Präferenzfunktion $\Phi(\mu, \sigma^2) = \mu - 0,01 \cdot \sigma^2$ aus. Nehmen Sie an, Gelder könnten sicher nur zu 0 % angelegt werden.

- Würde der Unternehmer das Projekt durchführen, wenn er es vollständig selbst finanzieren müsste?
- Nehmen Sie an, ein Investor würde sich an der Finanzierung beteiligen und 50 % des Rückflusses erhalten. Welchen Kapitalbetrag wird der Investor maximal für diesen Anteil am Rückfluss einbezahlen? Wird das Projekt unter diesen Umständen durchgeführt? Welche erwartete Rendite erzielt der Investor?
- Verallgemeinern Sie die Lösungen des Aufgabenteils b), indem Sie nun annehmen, eine Gruppe von N Investoren würde sich an der Finanzierung beteiligen. Der Unternehmer behalte 50 % der Anteile, die anderen 50 % würden zu gleichen Teilen auf die Investoren aufgeteilt (jeder erhält also $50/N\%$ vom Rückfluss). Beantworten Sie erneut die in b) gestellten Fragen.

Aufgabe 11.4

Die beiden Gesellschafter A und B eines Unternehmens haben die Durchführung eines Projektes beschlossen, das die folgenden unsicheren Überschüsse bietet:

$w(S_1) = 0,2$ S_1	$w(S_2) = 0,2$ S_2	$w(S_3) = 0,3$ S_3	$w(S_4) = 0,3$ S_4
1.200	5.000	0	-500

- a) Ermitteln Sie die Pareto-effiziente Teilungsregel $s(x)$ für den Fall folgender Nutzenfunktionen:

$$U_A[x - s(x)] = 1 - e^{-0,0005 \cdot (x - s(x))}; \quad U_B[s(x)] = -e^{-0,0002 \cdot s(x)}$$

Gehen Sie davon aus, dass der Gesellschafter B ein Sicherheitsäquivalent in Höhe von 550 erzielen soll.

- b) Wie verändert sich die Pareto-effiziente Teilungsregel, wenn der Gesellschafter B ein Sicherheitsäquivalent in Höhe von 650 erzielen soll?
- c) Lösen Sie die Teilaufgabe a für den Fall eines risikoneutralen Gesellschafters A. Alle anderen Angaben gelten unverändert.

11.9 Lösungshinweise

Aufgabe 11.1

a) $s(x)$ muss eine Konstante sein, B trägt kein Risiko. — **b)** Da beide risikoavers sind, steigen sowohl $s(x)$ als auch $x - s(x)$ in x . $AP_A[x - s(x)]$ konstant ist, aber $AP_B[s(x)]$ sinkt, wird progressiv an x beteiligt.

Aufgabe 11.2

a) Investition: $E[U(x)] = 0,3797$; Geldanlage: $E[U(x)] = 0,3995 \Rightarrow$ keine Durchführung. — **b)** Unternehmer investiert 0,8 Mio. in das Projekt und legt 0,2 Mio. an. Investition: $E[U(x)] = 0,4104$; Geldanlage: $E[U(x)] = 0,3995 \Rightarrow$ Durchführung. — **c)** Unternehmer investiert 0,5 Mio. in das Projekt und legt 0,5 Mio. an. Investition: $E[U(x)] = 0,4370$; Geldanlage: $E[U(x)] = 0,3995 \Rightarrow$ Durchführung; besser als in b), da bessere (hier: Pareto-effiziente) Risikoteilung.

Aufgabe 11.3

a) Projekt: $\Phi = 80$; Geldanlage: $\Phi = 100$. Keine Durchführung. — **b)** Kapitalbetrag = 52,5; erwartete Rendite = 23,81 %; Projekt: $\Phi = 105 \Rightarrow$ Durchführung. — **c)** Bezeichnung: α = Anteil jedes Investors am Projektrückfluss; $\alpha = 0,5$ für $N = 1$ (ein Investor), $\alpha = 0,25$ für $N = 2$ usw. Kapitalbetrag: $EK = 130 \cdot \alpha - 50 \cdot \alpha^2$; erwartete Rendite = $(130 \cdot \alpha - EK) / EK$; mit Projekt: $\Phi = N \cdot EK + 52,5$. Das Projekt wird für alle $N > 0$ durchgeführt.

Aufgabe 11.4

a) $s(x) = 5/7 \cdot x - 40,54$. — **b)** $s(x) = 5/7 \cdot x + 59,46$. — **c)** B erhält ein Fixum in Höhe von 550.

Literatur

- Amershi, A., Stoeckenius, J.: The theory of syndicates and linear sharing rules. *Econometrica* **51**, 1407–1416 (1983)
- Borch, K.H.: Equilibrium in a reinsurance market. *Econometrica* **30**, 424–444 (1962)
- Demski, J.S.: Uncertainty and evaluation based on controllable performance. *J. Acc. Res.* **5**, 230–245 (1976)
- Eeckhoudt, L., Kimball, M.: Background risk, prudence, and the demand for insurance. In: Dione, G. (Hrsg.) *Contributions to Insurance Economics*, S. 239–254. Boston, Springer (1991)
- Gillenkirch, R.M.: Gestaltung optimaler Anreizverträge – Motivation, Risikoverhalten und beschränkte Haftung, Wiesbaden (1997)
- Hirshleifer, J., Riley, J.G.: The analytics of uncertainty and information: an expository survey. *J. Econ. Lit.* **17**, 1375–1421 (1979)
- Huang, C.-F., Litzenberger, R.H.: On the necessary condition for linear sharing and separation – a note. *J. Fin. Quant. Anal.* **20**, 381–384 (1985)
- Laux, H.: Risikoteilung, Anreiz und Kapitalmarkt. Springer, Berlin (1998a)
- Laux, H.: Mehrperiodige anreizkompatible Erfolgsbeteiligung und Kapitalmarkt. In: Franke, G., Laux, H. (Hrsg.) *Unternehmensführung und Kapitalmarkt, Festschrift zum 65. Geburtstag Herbert Hax*, S. 133–174. Springer, Berlin (1998b)
- Laux, H.: Wertorientierte Unternehmenssteuerung und Kapitalmarkt, 2. Aufl. Springer, Berlin (2006a)
- Raiffa, H.: Einführung in die Entscheidungstheorie. München, Oldenbourg (1973) (Titel der engl. Originalausgabe: *Decision Analysis*. Reading 1968)
- Rees, R.: The theory of principal and agent, Part 1. *Bull. Econ. Res.* **37**, 3–26 (1985)
- Ross, S.A.: On the economic theory of agency and the principle of similarity. In: Balch, M., McFadden, D., Wu, S. (Hrsg.) *Essays on Economic Behavior under Uncertainty*, S. 215–237. North-Holland, Amsterdam (1974)
- Schlesinger, H., Doherty, N.A.: Incomplete markets for insurance – an overview. In: Dione, G. (Hrsg.) *Foundations of Insurance Economics*, S. 134–155. Boston, Springer (1991)
- Velthuis, L.J.: Lineare Erfolgsbeteiligung: Grundprobleme der Agency-Theorie im Lichte des LEN-Modells. Physica, Heidelberg (1998)
- Velthuis, L.J.: Anreizkompatible Erfolgsbeteiligung und Erfolgsrechnung. Deutscher Universitäts-Verlag, Wiesbaden (2004)
- Wilson, R.: The theory of syndicates. *Econometrica* **36**, 119–132 (1968)
- Wilson, R.: The structure of incentives for decentralization under uncertainty. In: Gilbaud, M. (Hrsg.) *La Décision*, S. 287–307. Centre National de la Recherche Scientifique, Paris (1969)

12.1 Problemstellung und Aufbau

Ausgehend von einer Pareto-effizienten Risikoteilung kann zwar bei *gegebener* Wahrscheinlichkeitsverteilung über den Erfolg $\tilde{x}$ der Erwartungswert des Nutzens keines Entscheiders (keines Mitglieds der Gruppe, in der das Risiko geteilt wird) erhöht werden, ohne dass der eines anderen sinkt. Bei einer *Änderung* der Wahrscheinlichkeitsverteilung durch Investitionen oder andere Maßnahmen können jedoch bei der betreffenden Teilungsregel *alle* einen Vorteil bzw. einen Nachteil erzielen. Möglicherweise erzielen aber auch einige einen Vorteil und andere einen Nachteil. Wenn die Wahrscheinlichkeitsverteilung über den Erfolg durch wen auch immer beeinflusst werden kann, können sich dann Konflikte bezüglich der Durchführung der betreffenden Maßnahmen ergeben.

Wie in Kap. 17 gezeigt wird, ist es kaum möglich, eine akzeptable „faire“ Lösung von Interessenkonflikten herbeizuführen. Es kann daher sinnvoll sein, eine Teilungsregel für den Erfolg $\tilde{x}$ zu wählen, die zwar unter dem Gesichtspunkt der Risikoteilung nicht optimal ist, andererseits aber Konflikte im Hinblick auf Maßnahmen zur Änderung der Wahrscheinlichkeitsverteilung von $\tilde{x}$ vermeidet oder immerhin reduziert. Dies kann sogar die Voraussetzung dafür sein, dass die Risikoteilung bzw. die Gruppenbildung überhaupt gelingt.

Um Konflikte zu vermeiden oder abzuschwächen, können die Gruppenmitglieder ein Interesse daran haben, eine *anreizkompatible* Teilungsregel zu vereinbaren, mit der bei beliebigen Maßnahmen alle Beteiligten simultan einen finanziellen Vorteil oder Nachteil erzielen. Ideal wäre es, wenn die vereinbarte Teilungsregel zugleich das Risiko Pareto-effizient teilen würde. Wie jedoch gezeigt wird, steht die Aufteilung des Erfolges grundsätzlich im Spannungsfeld zwischen den Zielen der Pareto-effizienten und der anreizkompatiblen Risikoteilung.

Im Folgenden wird untersucht, wie anreizkompatible Teilungsregeln ermittelt werden können und welche Gestalt sie aufweisen. Bei Orientierung am Bernoulli-Prinzip erfüllt eine Teilungsregel die Bedingung der Anreizkompatibilität, wenn sie jeden möglichen Erfolg (jedes mögliche finanzielle Ergebnis) derart teilt, dass für jede Partei der Erwartungswert des Nutzens seines Einkommens aus der Teilung eine monoton steigende Funktion des Erwartungswertes des Nutzens aller anderen Parteien ist. Bei einer Änderung der Wahrscheinlichkeitsverteilung über den Erfolg durch beliebige Maßnahmen oder nicht beeinflussbare Ereignisse kann dann eine Partei nur einen finanziellen Vorteil erzielen bzw. Nachteil erleiden, wenn dies zugleich für alle anderen der Fall ist. Die Bedingung der Anreizkompatibilität kann man daher auch als „Win-Win-Bedingung“ bezeichnen.

Zunächst werden die Bedeutung der Bedingung der Anreizkompatibilität (Abschn. 12.2) und die betrachtete Entscheidungssituation (Abschn. 12.3) erläutert. Sodann wird die notwendige und hinreichende Bedingung der Anreizkompatibilität in allgemeiner Form dargestellt (Abschn. 12.4.1). Darauf aufbauend wird in Abschn. 12.4.2 gezeigt, wie anreizkompatible Teilungsregeln ermittelt werden können. In Abschn. 12.4.3 wird das Krümmungsverhalten solcher Teilungsregeln für unterschiedliche Konstellationen von Risikoeinstellungen untersucht und Konflikte bei nicht anreizkompatiblen Teilungsregeln verdeutlicht. In Abschn. 12.5 wird gezeigt, dass im Allgemeinen ein Konflikt zwischen anreizkompatibler und Pareto-effizienter Risikoteilung besteht. Nur *lineare* Pareto-effiziente Teilungsregeln $s(x) = s \cdot x + F$ (mit $0 < s < 1$) implizieren Anreizkompatibilität für beliebige Änderungen der zustandsabhängigen Erfolge. In Abschn. 12.6 werden zwei Grundformen der Risikoteilung, die „endogene“ (oder explizite) und die „exogene“ (oder implizite über Portfeuillebildung), dargestellt und ihre Implikationen verglichen.

Die folgenden Darstellungen sind (auch) Grundlage für die theoretische Fundierung von Unternehmenszielen (Kap. 13, 14 und 15) und die Gestaltung von Anreizsystemen für Manager, die diese Ziele verfolgen sollen (vgl. z. B. Gillenkirch 2004; Velthuis 2004; Laux 2006a, b).

12.2 Praktische Relevanz der Bedingung der Anreizkompatibilität

Das theoretische Konstrukt „Anreizkompatibilität“ hat allgemeine Bedeutung für alle Entscheidungssituationen, in denen Personen im Rahmen von Transaktionen mit finanziellen Auswirkungen miteinander kooperieren. Wenn sich die Analyse auf eine Gruppe von Personen bezieht, die sich ausschließlich an den finanziellen Konsequenzen von Maßnahmen orientieren, für die nichtfinanzielle Ziele also irrelevant sind, impliziert Anreizkompatibilität zugleich *Einmütigkeit*; alle Gruppenmitglieder haben die gleiche Präferenzordnung über die erwogenen Alternativen, sodass sich die explizite Anwendung einer Abstimmungsregel erübrigt. Bezüglich dieser Personengruppe sind „Anreizkompatibilität“

und „Einmütigkeit“ letztlich synonyme Begriffe. Wenn ein einzelnes Gruppenmitglied die Entscheidung trifft, handelt es auch im Sinne aller anderen.

Wird dagegen eine Gruppe von Personen betrachtet, von denen sich einige oder alle auch an nichtfinanziellen Zielen orientieren, garantiert Anreizkompatibilität keine Einmütigkeit, sodass die grundsätzliche Problematik von Gruppenabstimmungen und eines „fairen“ Interessenausgleichs bestehen bleibt (Kap. 16 und 17). Dies schmälert jedoch nicht die Bedeutung von Anreizkompatibilität. Sie kann dazu beitragen, Unterschiede in den Präferenzordnungen der Gruppenmitglieder immerhin teilweise aufzuheben und damit den Konfliktbereich einzuengen.

Geht es zum Beispiel um eine bei anreizkompatibler Teilung für alle Beteiligten finanziell vorteilhaft Maßnahme, so steht einem potenziellen immateriellen Nachteil der Maßnahme für eine Person (z. B. weil sie Arbeitseinsatz erbringen muss, um die Maßnahme umzusetzen, oder weil sie einen Prestigeverlust erleidet), ein *finanzieller* Vorteil gegenüber. Wenn dieser Vorteil den immateriellen Nachteil kompensiert, besteht kein Interessenkonflikt; für alle ist es vorteilhaft, die Maßnahme durchzuführen. Inwieweit Konflikte durch Anreizkompatibilität vermieden werden, hängt nicht nur von den Ausprägungen und den Gewichten immaterieller Zielgrößen ab, sondern auch davon, wie hoch die Anteile der Personen mit nichtfinanziellen Zielen an den möglichen Überschüssen bzw. Erfolgen sind. Daher ist es wichtig, dass es nicht nur *eine* anreizkompatible Teilungsregel gibt, sondern unendlich viele, bei denen die einzelnen Parteien unterschiedlich stark am Erfolg beteiligt werden (Abschn. 12.4.2).

Mithilfe der Bedingung der Anreizkompatibilität wird in den Kap. 14 und 15 vor dem Hintergrund von Modellen der Risikoallokation und der Preisbildung auf dem Kapitalmarkt (Kap. 13) untersucht, ob zwischen den Gesellschaftern (Anteilseignern) eines Unternehmens Zielkonformität oder Zielkonflikt besteht. Dabei wird stets davon ausgegangen, dass die Anteilseigner Bernoulli-rational entscheiden und sich ausschließlich an ihren finanziellen Überschüssen orientieren. Andere Zielgrößen (etwa die Umweltfreundlichkeit von Produkten oder die Sozialverträglichkeit von Personalmaßnahmen) sind für die Anteilseigner irrelevant. Anreizkompatibilität zwischen Anteilseignern impliziert dann zugleich *Einmütigkeit*; entweder sind die betreffenden Anteilseigner einmütig für oder einmütig gegen bestimmte Maßnahmen im Unternehmen. Dabei bleibt wie auch bei den nachfolgenden Darstellungen im vorliegenden Kapitel offen, *wer* die Entscheidungen im Unternehmen trifft.

Grundsätzlich werden jedoch die Anteilseigner (allgemein: die Gruppe der Personen, zwischen denen das Risiko geteilt wird) nicht selbst die Entscheidungen treffen. Sie delegieren die Entscheidungskompetenzen an einen (oder mehrere) Entscheidungsträger. Ist auch der Entscheidungsträger Anteilseigner des Unternehmens und besteht Anreizkompatibilität zwischen allen Anteilseignern, so ist wiederum Einmütigkeit zwischen allen Beteiligten gegeben, sofern sich auch der Entscheidungsträger ausschließlich an finanziellen Zielen orientiert; indem er den Erwartungswert seines eigenen finanziellen Nutzens maximiert, maximiert er zugleich auch den Erwartungswert des finanziellen Nutzens jedes anderen Anteilseigners.

Jedoch besteht in der Realität die Gefahr, dass für den Entscheidungsträger im Gegensatz zu den (anderen) Anteilseignern gerade auch nichtfinanzielle Zielgrößen wie etwa Arbeitsleid (oder Arbeitsfreude), Prestige und Macht relevant sind und er Maßnahmen durchführt bzw. unterlässt, die aus Sicht der Anteilseigner nachteilig bzw. vorteilhaft sind. Wenn für den Entscheidungsträger auch nichtfinanzielle Zielgrößen maßgeblich sind, impliziert die Bedingung der Anreizkompatibilität, die definitionsgemäß nur finanzielle Auswirkungen berücksichtigt, keine Einmütigkeit zwischen allen Beteiligten. Konflikte zwischen dem Entscheidungsträger und den (anderen) Anteilseignern können sich trotz genereller Anreizkompatibilität vor allem dann ergeben, wenn nichtfinanzielle Zielgrößen für den Entscheidungsträger ein relativ großes Gewicht haben und er als Anteilseigner nur wenig am Unternehmenserfolg beteiligt oder gar kein Anteilseigner ist.¹

Es stellt sich daher das Problem, den Entscheidungsträger direkt am Erfolg zu beteiligen, um ihn zu motivieren, die Interessen der (anderen) Anteilseigner wahrzunehmen. Um die Entscheidungen in die richtige „Richtung“ zu lenken, sollte dabei angestrebt werden, das Belohnungssystem so zu gestalten, dass Anreizkompatibilität zwischen dem Entscheidungsträger und den Anteilseignern besteht. Für die Analyse von Anreizkompatibilität zwischen dem Entscheidungsträger einerseits und den Anteilseignern andererseits sind dieselben Prinzipien relevant wie für die Anreizkompatibilität zwischen den Anteilseignern untereinander.

12.3 Entscheidungssituation

Die Darstellungen dieses Kapitels unterscheiden sich von denen des vorangegangenen Kapitels im Wesentlichen durch die Annahme, dass nun die Wahrscheinlichkeitsverteilung über den Erfolg nicht gegeben ist, sondern beeinflusst werden kann. Der Anschaulichkeit halber wird wie in Kap. 11 davon ausgegangen, der Erfolg x werde auf zwei Parteien, A und B, aufgeteilt. Die Darstellungen gelten jedoch analog für den Fall, dass der Erfolg auf mehr als zwei Personen aufgeteilt wird (Laux 1979, S. 303–309). Die maßgeblichen Grundannahmen sind nun:

1. Zu teilen ist ein Erfolg $\tilde{x}$, der ex post kostenlos verifiziert (d. h. intersubjektiv überprüft) werden kann. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung über den Erfolg ist anders als in Kap. 11 *nicht* gegeben: Die Entscheider können durch ihre Maßnahmen Einfluss auf die Ergebnisse und/oder deren Eintrittswahrscheinlichkeiten nehmen.

¹Die explizite Berücksichtigung auch nicht finanzieller Zielgrößen des Entscheidungsträgers wäre im Prinzip sinnvoll. Man unterlässt es, weil man vereinfachen muss bzw. die nichtfinanziellen Zielgrößen sowie deren Ausprägungen und auch die konkreten finanziellen Wirkungen gar nicht kennt. Stattdessen wird gefordert, dass es bei den bekannten finanziellen Zielgrößen zumindest in die richtige Richtung geht.

2. Die Teilungsregel wird wie in Kap. 11 mit $s(x)$ bezeichnet: B erhält den Betrag (das Einkommen) $s(x)$ und A das Residuum $x - s(x)$.
3. A und B bewerten ihren jeweiligen Anteil am Erfolg (ihr entsprechendes „Einkommen“) gemäß dem Bernoulli-Prinzip nach dem Erwartungswert ihres Nutzens. Beide erzielen außerhalb der betrachteten Kooperation keine anderen finanziellen Überschüsse, die vom Erfolg bzw. dem eintretenden Zustand stochastisch abhängen (es besteht nicht das Problem, einem Risikoverbund Rechnung zu tragen), sodass die Nutzenfunktionen für ihre (absoluten) Anteile am Erfolg zustandsunabhängig sind. Die Nutzenfunktion von A wird wieder mit U_A bezeichnet und ist über sein Einkommen aus der Erfolgsteilung definiert: $U_A[x - s(x)]$. Die Nutzenfunktion von B ist entsprechend $U_B[s(x)]$. Damit bewerten A und B die maßgeblichen Alternativen nach dem Erwartungswert des Nutzens ihres jeweiligen Einkommens aus der Erfolgsteilung. Für die folgenden Darstellungen ist von Bedeutung, dass nach dem Bernoulli-Prinzip die Nutzenfunktion nur bis auf eine positiv lineare Transformation eindeutig bestimmt ist.
4. Beide Parteien kennen a priori, d. h. bei Wahl der Teilungsregel, weder die zukünftigen Aktionsmöglichkeiten noch die entsprechenden zustandsabhängigen Erfolge. Sie halten *jede beliebige* Ergebnisverteilung für möglich.
5. Beide Entscheider haben homogene Wahrscheinlichkeitsvorstellungen über die entscheidungsrelevanten Zustände S_s bzw. die möglichen Erfolge x .² Diese Annahme mag insbesondere dann als problematisch erscheinen, wenn einer der Entscheider als delegierende „Instanz“ die Entscheidungskompetenz an den anderen als „Entscheidungsträger“ übertragen hat. Die Instanz kennt dann grundsätzlich nicht die Wahrscheinlichkeiten, die der Entscheidungsträger bei seinen Entscheidungen den relevanten Zuständen beimisst; es besteht Informationsasymmetrie. Jedoch sind die folgenden Darstellungen auch dann gültig, wenn zwar Informationsasymmetrie besteht, aber die Instanz davon überzeugt ist, dass sie das Wahrscheinlichkeitsurteil des Entscheidungsträgers teilen würde, wenn sie seine Informationen hätte. Die Teilungsregel schafft dann einen Anreiz, Entscheidungen zu treffen, die bei den Wahrscheinlichkeitsvorstellungen des Entscheidungsträgers auch vom Standpunkt der Instanz vorteilhaft sind.

12.4 Ermittlung und Gestalt anreizkompatibler Teilungsregeln

12.4.1 Präzisierung der Bedingung der Anreizkompatibilität

Anreizkompatibilität besagt, dass alle beteiligten Entscheider, hier also A und B, mit beliebigen Maßnahmen simultan entweder einen finanziellen Vorteil oder einen finanziellen Nachteil erzielen. Da sich beide Entscheider am Bernoulli-Prinzip orientieren,

²Zur Berücksichtigung heterogener Wahrscheinlichkeitsvorstellungen und/oder zustandsabhängiger Nutzenfunktionen durch zustandsabhängige Erfolgsteilung vgl. Laux (1998, S. 87 f.).

muss also eine streng monoton steigende Beziehung zwischen den Erwartungswerten des Nutzens von A und von B bestehen. Bedingung 12.1 formuliert diese Eigenschaft als Grundbedingung der Anreizkompatibilität:³

Bedingung 12.1

Eine Teilungsregel $s(x)$ ist genau dann anreizkompatibel, wenn der Erwartungswert des Nutzens des Entscheiders A aus seinem Einkommen $x - s(x)$, $E\{U_A[\tilde{x} - s(\tilde{x})]\}$, eine streng monoton steigende Funktion des Erwartungswertes des Nutzens des Entscheiders B aus seinem Einkommen $s(x)$, $E\{U_B[s(\tilde{x})]\}$, ist.

Es ist zu beachten, dass die Bedingung der Anreizkompatibilität nicht einfach fordert, das Residuum $x - s(x)$ solle eine monoton steigende Funktion des Einkommens $s(x)$ sein. Dieses Kriterium würde grundsätzlich nur bei *sicheren* Erfolgen bzw. bei *sicheren* Erfolgsänderungen Anreizkompatibilität gewährleisten.

Da beide Parteien bei Vereinbarung der Teilungsregel noch nicht wissen, in welcher Weise die Wahrscheinlichkeitsverteilung über den Erfolg durch neue Maßnahmen beeinflusst werden kann, wird die Bedingung der Anreizkompatibilität so konkretisiert, dass sie für *beliebige* Wahrscheinlichkeitsverteilungen und nicht nur für bestimmte Verteilungstypen gilt. Bei beliebiger Wahrscheinlichkeitsverteilung ist die Bedingung 12.1 der Anreizkompatibilität unter der *notwendigen* und *hinreichenden* Bedingung erfüllt, dass der folgende Zusammenhang besteht:⁴

Bedingung 12.2

Der Nutzen des Entscheiders A aus seinem Einkommen, $U_A[x - s(x)]$, ist eine *linear* steigende Funktion des Nutzens des Entscheiders B aus seinem Einkommen, $U_B[s(x)]$, ist:

$$U_A[x - s(x)] \stackrel{!}{=} \alpha \cdot U_B[s(x)] + \beta \quad \text{für jedes } x, \text{ mit } \alpha > 0. \quad (12.1)$$

Jedem Parameterpaar α und β entspricht eine eigene anreizkompatible Teilungsregel, sodass durch Variation der Parameter Teilungsregeln mit sehr unterschiedlichen Aufteilungen des Erfolges x erzeugt werden können, die verschieden starke Anreizwirkungen entfalten, die Erfolgssituation zu verbessern.

Interpretation: In Kap. 5, Abschn. 5.2.2.1, wurde gezeigt, dass eine Nutzenfunktion im Rahmen des Bernoulli-Prinzips nur bis auf eine positiv lineare Transformation genau definiert ist. Das bedeutet, dass zwei Entscheider A und B beliebige Ergebnisverteilungen gleich bewerten, wenn sich ihre Nutzenfunktionen nur bis auf eine positiv lineare Transformation unterscheiden. Die Bedingung 12.2 der Anreizkompatibilität bzw. die Formel (12.1) greift diese Eigenschaft der Nutzenfunktion auf: Sie fordert, die

³Vgl. zu den Bedingungen 12.1 sowie 12.2 Wilson (1968, 1969); Ross (1973, 1974); Laux (1972; 1979); Velthuis (1998).

⁴Vgl. Laux (1998, S. 102 f.) und Velthuis (2004).

Teilungsregel $s(x)$ so zu gestalten, dass sich für alle möglichen Erfolge x die Nutzenwerte der Entscheider A und B für ihre entsprechenden Einkommen nur bis auf eine positiv lineare Transformation unterscheiden. Dann stehen auch die Erwartungswerte des Nutzens von A und B in einer streng monoton steigenden (linearen) Beziehung zueinander; die Bedingung 12.1 ist erfüllt.

Der Nutzen, den ein Entscheider einem Ergebnis x zuordnet, ist der Nutzen seines Einkommens für dieses Ergebnis. Somit kann die Bedingung der Anreizkompatibilität auch wie folgt formuliert werden: Die Teilungsregel $s(x)$ ist so zu gestalten, dass sich die Nutzenfunktionen der Entscheider A und B *bezüglich des Erfolges* nur bis auf eine positiv lineare Transformation unterscheiden.

Gemäß Formel (12.1) ist die Teilungsregel $s(x)$ nur implizit bestimmt. Bezeichnet man die positiv linear transformierte Nutzenfunktion von B mit

$$U_B^*[s(x)] \equiv \alpha \cdot U_B[s(x)] + \beta, \quad (12.1a)$$

so kann die Formel (12.1) auch wie folgt formuliert werden: Die Teilungsregel ist so zu wählen, dass für jeden möglichen Erfolg x der Nutzen von A mit dem transformierten Nutzen von B übereinstimmt.

Nachfolgend wird gezeigt, wie die einem beliebigen Parameterpaar (α, β) entsprechende anreizkompatible Teilungsregel ermittelt werden kann und welche Form sie aufweist.

12.4.2 Grafische Ermittlung anreizkompatibler Teilungsregeln

Wie erläutert wurde, muss gemäß Gleichung (12.1) jeder mögliche Erfolg x derart geteilt werden, dass jeweils der Nutzenwert $U_A[x - s(x)]$ mit dem Nutzenwert $U_B^*[s(x)] \equiv \alpha \cdot U_B[s(x)] + \beta$ übereinstimmt. Die einer beliebigen (α, β) -Kombination entsprechende Teilungsregel $s(x)$ kann nach dem folgenden „Umsetzungsverfahren“ grafisch ermittelt werden (vgl. im Folgenden Abb. 12.1):

1. Zunächst werden in einem Koordinatensystem die Nutzenfunktionen von A und B, $U_A[x - s(x)]$ und $U_B^*[s(x)] \equiv \alpha \cdot U_B[s(x)] + \beta$, dargestellt.
2. Da sich s und $x - s$ zu x addieren, erhält man im oberen Teil der Abb. 12.1 für jede Kombination von s und $x - s$ mit jeweils denselben Nutzenwerten U_A und U_B^* das zugehörige Ergebnis x , indem man die beiden Nutzenkurven *horizontal addiert*: Zur Ermittlung desjenigen Punktes P^* der aggregierten (gestrichelt dargestellten) Kurve, der den Ordinaten- bzw. Nutzenwert H^* aufweist, wird eine Parallele zur Abszisse im Abstand von H^* gezeichnet. Der Abszissenwert des Punktes P^* ergibt sich dann, indem die Abszissenwerte der Schnittpunkte S_1 und S_2 addiert werden.
3. Dem Punkt P^* ist der Erfolg x^* zugeordnet, der wie folgt geteilt wird: A erhält den Betrag $x - s(x^*)$ in Höhe des Abszissenwertes des Punktes S_2 . B erhält den Betrag $s(x^*)$ in Höhe des Abszissenwertes des Punktes S_1 . Dieser Betrag entspricht aufgrund

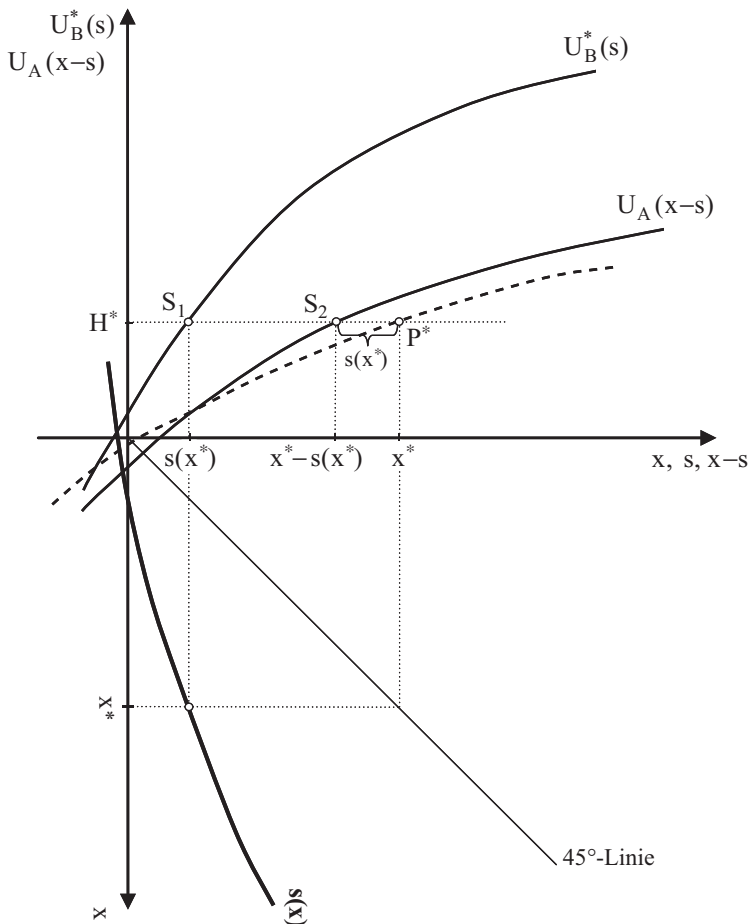


Abb. 12.1 Zur Bestimmung einer anreizkompatiblen Teilungsregel

der Horizontaladdition der Strecke zwischen S_2 und P^* . Für die erzielte Zuordnung gilt also: Einerseits ist die Summe beider Einkommen (Erfolgsteile) gleich x^* , andererseits ist für beide Erfolgsteile der Nutzen identisch, nämlich H^* .

4. Werden analog zu H^* für alternative Nutzenniveaus der jeweils zugehörige Erfolg x und die entsprechende Aufteilung in $s(x)$ und $x - s(x)$ explizit ermittelt, so erhält man die anreizkompatible Teilungsregel $s(x)$, die den in Abb. 12.1 dargestellten Nutzenfunktionen $U_A[x - s(x)]$ und $U_B^*[s(x)] \equiv \alpha \cdot U_B[s(x)] + \beta$ entspricht.
5. Der Graph dieser Teilungsregel wird im unteren Teil der Abb. 12.1 dargestellt. Darin wird der Erfolg x auf der Ordinate (nach unten steigend) abgetragen und der jeweilige $s(x)$ -Wert auf der Abszisse. Man erhält den einem beliebigen Abszissenwert $s(x)$ entsprechenden Ordinatenwert x , indem man denjenigen Abszissenwert x an der eingezeichneten 45°-Linie spiegelt, der gemäß dem oberen Teil der Abb. 12.1 dem

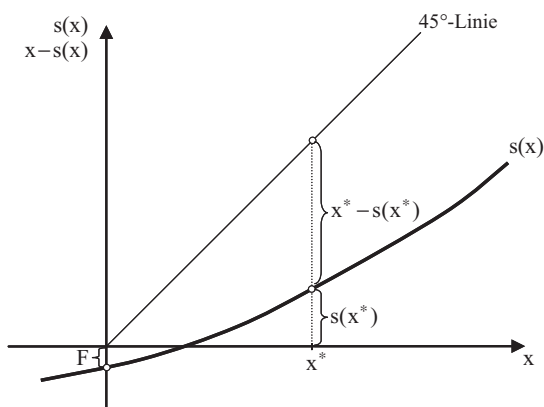
betreffenden $s(x)$ -Wert entspricht. Die Abbildung verdeutlicht das Vorgehen beispielhaft für $s(x) = s(x^*)$ mit der entsprechenden Spiegelung des zugehörigen Erfolges $x = x^*$. Der Graph der Teilungsregel zeigt für alternative Erfolge x nicht nur das Einkommen $s(x)$ von B, sondern auch das Residuum von A als waagrechter Abstand dieses Graphen von der 45°-Linie.

Die den Nutzenfunktionen in Abb. 12.1 entsprechende Teilungsregel ist noch einmal in Abb. 12.2 dargestellt.

Der Ordinatenwert der Kurve $s(x)$ gibt hier für alternative x -Werte das Einkommen von B an, der senkrechte Abstand zwischen der 45°-Linie und der Kurve $s(x)$ bezeichnet das Einkommen $x - s(x)$ von A. Der Ordinatenwert der Kurve $s(x)$ an der Stelle $x=0$ kann als Fixum F interpretiert werden, das B unabhängig von x an A zu zahlen hat. (Das Fixum ist im Beispiel der Abb. 12.1 bzw. 12.2 negativ; wäre der Ordinatenwert positiv, so würde B den Betrag von A erhalten.)

Außer der in Abb. 12.1 bzw. 12.2 dargestellten Teilungsregel existiert eine unendliche Anzahl anderer Teilungsregeln, die ebenfalls anreizkompatibel sind: Ordnet man mindestens einem der Parameter α und β ($\alpha > 0$) in der Nutzenfunktion von B einen anderen Wert zu, so ergibt sich nach dem beschriebenen Umsetzungsverfahren eine andere Teilungsregel, die ebenfalls die Gleichung (12.1) und mithin die Grundbedingung 12.1 erfüllt. Durch entsprechende positiv lineare Transformation der Nutzenfunktion $U_B(s)$ können sowohl Teilungsregeln erzeugt werden, denen *hohe* $s(x)$ -Werte entsprechen, als auch solche mit *niedrigen* $s(x)$ -Werten. Zudem können Teilungsregeln konstruiert werden, bei denen $s(x)$ mehr oder weniger stark mit dem Erfolg x variiert. Allgemein gilt: Werden ausgehend von einer gegebenen anreizkompatiblen Teilungsregel α und/oder β erhöht, so steigt c. p. für jedes x der Term auf der rechten Seite der Gleichung (12.1). Damit sie für alternative x -Werte wieder erfüllt sein kann, muss $U_A(x - s)$ steigen und damit $U_B(s)$ sinken. Dies impliziert eine Reduktion von $s(x)$ und eine entsprechende Erhöhung von $x - s(x)$.

Abb. 12.2 Darstellung der anreizkompatiblen Teilungsregel, aus Abb. 12.1



12.4.3 Gestalt anreizkompatibler Teilungsregeln

12.4.3.1 Allgemeine Charakteristik

Im Folgenden wird untersucht, welche Form eine anreizkompatible Teilungsregel hat (Velthuis 1998, S. 28 ff.). Dabei wird von einer stetigen Verteilung über x ausgegangen, sodass auch $s(x)$ stetig ist. Wie erläutert, wird die einer Nutzenfunktion $U_B^*[s(x)]$ entsprechende anreizkompatible Teilungsregel so ermittelt, dass

$$U_A[x - s(x)] = U_B^*[s(x)] \equiv \alpha \cdot U_B[s(x)] + \beta \quad (\text{für jedes } x) \quad (12.1)$$

gilt. Das aber bedeutet, dass die Ableitungen beider Seiten dieser Gleichung nach x identisch sein müssen, da sonst die Gleichung nach einer (marginalen) Veränderung von x nicht mehr erfüllt wäre. Es muss also auch gelten:

$$\frac{dU_A[x - s(x)]}{dx} = \frac{dU_B^*[s(x)]}{ds(x)} \quad (\text{für jedes } x). \quad (12.2)$$

Hierfür kann man schreiben:

$$\frac{dU_A[x - s(x)]}{d[x - s(x)]} \cdot \frac{d[x - s(x)]}{dx} = \frac{dU_B^*[s(x)]}{ds(x)} \cdot \frac{ds(x)}{dx} \quad (\text{für jedes } x) \quad (12.3)$$

oder (in Kurzschreibweise):

$$U'_A[x - s(x)] \cdot [1 - s'(x)] = U^{*'}_B[s(x)] \cdot s'(x) \quad (\text{für jedes } x). \quad (12.4)$$

Umstellung der Gleichung (12.4) nach $s'(x)$ führt zu:

$$s'(x) = \frac{U'_A[x - s(x)]}{U'_A[x - s(x)] + U^{*'}_B[s(x)]} \quad (\text{für jedes } x). \quad (12.5)$$

Aus (12.5) folgt wegen der jeweils positiven Grenznutzenwerte von A und B unmittelbar die Beziehung $0 < s'(x) < 1$ für jedes x : Sowohl das Einkommen $s(x)$ für B als auch das Residuum $x - s(x)$ für A steigen streng monoton in x . Aussagen über die Krümmung der anreizkompatiblen Teilungsregel lassen sich ebenfalls aus der Gleichung (12.5) ableiten.

Im Folgenden betrachten wir drei Fälle: Risikoneutralität beider Entscheider, Risikoneutralität eines der Entscheider und Risikoaversion des anderen sowie Risikoaversion beider Entscheider.

12.4.3.2 Gestalt der Teilungsregel bei Risikoneutralität beider Entscheider

Sind beide Entscheider A und B risikoneutral, so sind beider Grenznutzen in der Bestimmungsgleichung (12.5) konstant. Damit ist auch $s'(x)$ konstant, die Teilungsregel ist also *linear* (steigend):

$$s(x) = s \cdot x + F \quad (0 < s < 1 \text{ und } F \text{ beliebig}). \quad (12.6)$$

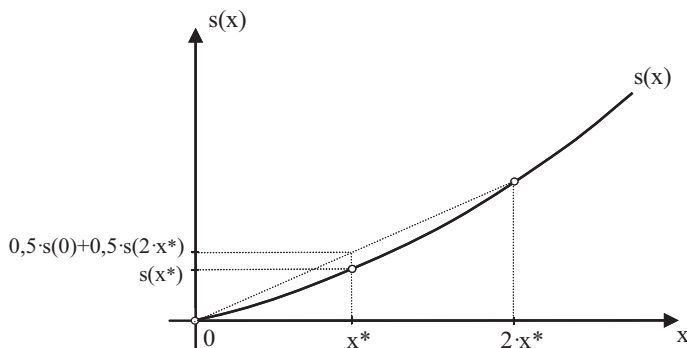


Abb. 12.3 Erwartungswert von $s(x)$ bei zwei Alternativen und konvexer Teilungsregel

Gilt $F > 0$, so erhält B den Betrag F von A, für $F < 0$ zahlt B den Betrag von F an A. Jede Teilungsregel mit $0 < s < 1$ und beliebigem Fixum F ist anreizkompatibel.

Ist das Einkommen eines Entscheiders nicht linear in x , so verhält er sich gegenüber riskanten Verteilungen des Ergebnisses $\tilde{x}$ nicht wie ein risikoneutraler Entscheider. Zur Verdeutlichung betrachten wir die Abb. 12.3. In dieser Abbildung sind eine Teilungsregel $s(x)$ sowie zwei Alternativen dargestellt, eine sichere Alternative mit dem Ergebnis x^* sowie eine riskante Alternative mit den möglichen Ergebnissen 0 und $2 \cdot x^*$, die beide die Wahrscheinlichkeit $0,5$ aufweisen, sodass der Erwartungswert des unsicheren Ergebnisses ebenfalls x^* beträgt.

Da beide Alternativen denselben Erwartungswert des Ergebnisses (von x^*) aufweisen und beide Entscheider annahmegemäß risikoneutral sind, sollten sie indifferent gegenüber den beiden Alternativen sein. Ist jedoch die Teilungsregel $s(x)$ wie in Abb. 12.3 konvex, so ist der Erwartungswert des Einkommens für B bei Wahl der riskanten Alternative höher als bei der sicheren, sodass er die riskante strikt vorzieht. A hingegen ist strikt gegen diese Alternative, da der Erwartungswert seines Einkommens entsprechend niedriger ist als beim sicheren Ergebnis. Umgekehrt würde A bei konkaver Teilungsregel die riskante Alternative vorziehen, B hingegen die sichere.

Bei Konvexität der Teilungsregel beurteilt B die Alternativen wie ein risikofreudiger Entscheider, obwohl er risikoneutral ist. Umgekehrt beurteilt A die Alternativen aufgrund der konkaven Beziehung zwischen seinem Einkommens und dem Erfolg wie ein risikoaverser Entscheider, obwohl auch er risikoneutral ist.

Bei Risikoneutralität von A und B gilt also: Da beide Entscheider bereits identische Risikopräferenzen aufweisen, kann nur eine lineare Teilungsregel die Identität erhalten. Nichtlineare Teilungsregeln würden Anreizkompatibilität zerstören.

12.4.3.3 Gestalt der Teilungsregel bei Risikoaversion eines Entscheiders

Ist A risikoneutral, B hingegen risikoavers, also seine Nutzenfunktion streng konkav, so ist der Zähler der rechten Seite von (12.5),

$$s'(x) = \frac{U'_A[x - s(x)]}{U'_A[x - s(x)] + U'^*_B[s(x)]} \quad (\text{für jedes } x), \quad (12.5)$$

unabhängig von $s(x)$, wohingegen der Nenner aufgrund des abnehmenden Grenznutzens von B mit zunehmendem $s(x)$ sinkt. Somit wird die rechte Seite von (12.5) mit zunehmendem $s(x)$ größer. Die Steigung von $s(x)$, $s'(x)$, nimmt also zu; die anreizkompatible Teilungsregel ist bei Risikoneutralität von A und Risikoaversion von B streng *konvex*. Ist umgekehrt B risikoneutral und A risikoavers, so folgt, dass die anreizkompatiblen Teilungsregel streng *konkav* ist.

Eine lineare Teilungsregel ist also in dem betrachteten Fall der Risikoaversion von B und Risikoneutralität von A nicht anreizkompatibel: Die Teilungsregel soll dafür sorgen, dass der Risikoaversion von B entgegengewirkt wird, und dies geschieht über eine konvexe Gestalt von $s(x)$. Dabei ist jedoch Folgendes zu beachten: Ist $s(x)$ streng konvex, so muss zwangsläufig das Residuum $x - s(x)$ eine streng konkave Funktion von x sein. Der risikoneutrale Entscheider A verhält sich dann aber gegenüber riskanten Verteilungen des Erfolges $\tilde{x}$ nicht mehr risikoneutral, sondern risikoavers. Die anreizkompatible Teilungsregel führt also dazu, dass *beide* Entscheider gegenüber $\tilde{x}$ risikoavers eingestellt sind; eine riskante Alternative mit $E(\tilde{x}) = 0$ ist für beide nachteilig.

Ist B risikoneutral und A risikoavers, so ist eine lineare Teilungsregel ebenfalls nicht anreizkompatibel. Stattdessen muss nun die Teilungsregel dafür sorgen, dass der Risikoaversion des A entgegengewirkt wird, und dies geschieht durch die Konvexität des Residuums $x - s(x)$ und damit durch Konkavität der Teilungsregel $s(x)$. Wiederum aber gilt: Durch die Vereinbarung der Teilungsregel verändert sich auch die Einstellung von B gegenüber Risiken von Alternativen: Auch der risikoneutrale B verhält sich nun gegenüber riskanten Verteilungen des Erfolges $\tilde{x}$ nicht mehr risikoneutral, sondern risikoavers. Die anreizkompatible Teilungsregel führt also wiederum dazu, dass beide Entscheider gegenüber riskanten Ergebnisverteilungen risikoavers eingestellt sind.

12.4.3.4 Gestalt der Teilungsregel bei Risikoaversion beider Entscheider

Sind beide Parteien risikoavers, so hängen ihre Grenznutzen von der Höhe ihrer Einkommen ab. Die Gestalt der anreizkompatiblen Teilungsregel hängt dann gemäß (12.5) davon ab, wie sich die entsprechenden Grenznutzenwerte bei Variation von x ändern. Der Zusammenhang lässt sich mithilfe der Abb. 12.1 verdeutlichen, deren oberer Teil in Abb. 12.4 noch einmal dargestellt wird.

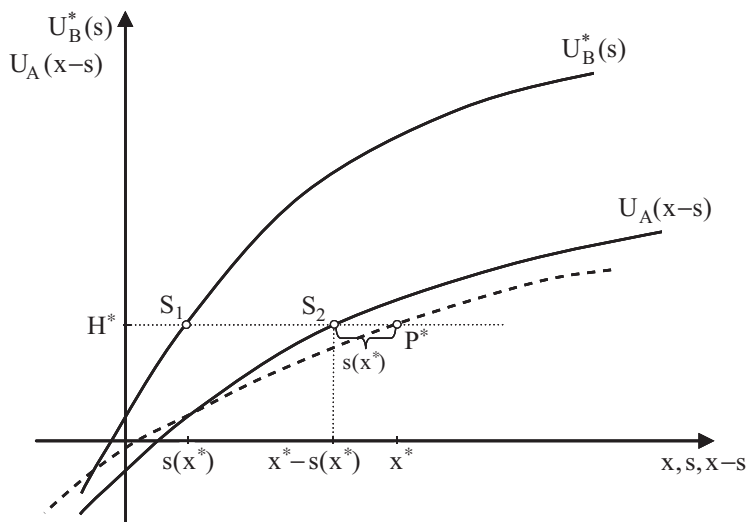


Abb. 12.4 Bestimmung und Gestalt einer anreizkompatiblen Teilungsregel bei Risikoaversion beider Entscheider

Dividiert man den Zähler und den Nenner auf der rechten Seite der Bedingung (12.5) durch $U'_A[x - s(x)]$, so erhält man:

$$s'(x) = \frac{1}{1 + \frac{U'_B[s(x)]}{U'_A[x - s(x)]}} \quad (\text{für jedes } x). \quad (12.5a)$$

Bei dem in Abb. 12.4 dargestellten Erfolg $x = x^*$ ist $s(x)$ gleich dem Abszissenwert von Punkt S_1 und $x - s(x)$ gleich dem Abszissenwert von S_2 . Der Quotient aus den zugehörigen Grenznutzenwerten bestimmt gemäß (12.5a) $s'(x)$ für $x = x^*$. Da die Grenznutzenwerte mit den Steigungen der Nutzenkurven in den Punkten S_1 und S_2 übereinstimmen, folgt:

$$s'(x|x = x^*) = \frac{1}{1 + \frac{\text{Steigung der Nutzenkurve } U_B^* \text{ im Punkt } S_1}{\text{Steigung der Nutzenkurve } U_A \text{ im Punkt } S_2}}. \quad (12.7)$$

Wird die Parallele zur Abszisse (mit der Höhe H^* in der Ausgangssituation) nach oben verschoben, so wandern die Punkte S_1 und S_2 nach rechts oben. Zugleich steigt der Erfolg x , der nach dem beschriebenen Umsetzungsverfahren den entsprechenden Einkommen $s(x)$ und $x - s(x)$ zugeordnet wird. Wenn dabei das Verhältnis der Steigungen in den Punkten S_1 und S_2 steigt (bzw. sinkt), so wird $s'(x)$ kleiner (bzw. größer); die Funktion $s'(x)$ ist streng konkav (bzw. streng konvex) in x . Analoge Zusammenhänge gelten für den Fall, dass die Parallele nach unten verschoben wird.

Ist für *jeden* Ordinatenwert H der Parallele zur Abszisse das Verhältnis der Kurvensteigungen in den Punkten S_1 und S_2 bzw. das Verhältnis der betreffenden Grenznutzenwerte *identisch*, so ist gemäß (12.5a) bzw. (12.7) auch $s'(x)$ für jedes x identisch. Es ergibt sich dann eine lineare Teilungsregel vom Typ (12.6).

Das Verhältnis der Kurvensteigungen in den Punkten S_1 und S_2 ist genau dann für alle Ordinatenwerte H identisch, wenn die *Inverse* der Nutzenfunktion $U_B^*(s)$ *positiv linear* von der *Inversen* der Nutzenfunktion $U_A[x - s(x)]$ abhängt.⁵ Selbst wenn diese Bedingung zunächst erfüllt sein sollte, gilt gleichwohl: Wird die Nutzenfunktion $U_B^*(s)$ positiv linear transformiert, so ergibt sich nach dem dargestellten Umsetzungsverfahren eine neue anreizkompatible Teilungsregel, die *nicht* ebenfalls linear sein muss. Die neue Teilungsregel ist nur dann linear, wenn auch die Inverse der aus der Transformation hervorgehenden Nutzenfunktion von B positiv linear von der Inversen der Nutzenfunktion $U_A[x - s(x)]$ von A abhängt.

12.5 Anreizkompatible versus Pareto-effiziente Risikoteilung

Bei den bisherigen Darstellungen in diesem Kapitel ging es allein darum, Anreizkompatibilität zu erzeugen. Beide Parteien haben indessen ein Interesse daran, zugleich eine *Pareto-effiziente* Teilung des ungewissen und noch beeinflussbaren Erfolges vorzunehmen. Welche Wahrscheinlichkeitsverteilung über den Erfolg auch immer erzielt werden mag, entsteht bei Pareto-ineffizienter Teilung ein Wohlfahrtsverlust. Wie jedoch im Folgenden gezeigt wird, besteht im Allgemeinen ein Konflikt zwischen dem Ziel anreizkompatibler Entscheidungssteuerung und dem Ziel Pareto-effizienter Risikoteilung. Dabei wird wieder von homogenen Wahrscheinlichkeitsvorstellungen und zustandsunabhängigen Nutzenfunktionen ausgegangen. Die Teilungsregeln sind dann wieder zustandsunabhängig.⁶

Der Konflikt zeigt sich anschaulich für den Fall, dass B risikoavers und A risikoneutral ist. Wie gezeigt wurde, können dann nur Teilungsregeln $s(x)$ anreizkompatibel sein, bei denen B konvex am Erfolgsrisiko beteiligt wird. Die Pareto-effiziente Teilungsregel besteht dagegen darin, dass B ausschließlich ein Fixum F erhält und A das gesamte Erfolgsrisiko trägt. B hat dann aber kein Interesse an einer Verbesserung der Erfolgssituation; es besteht keine Anreizkompatibilität. Das Analoge gilt für den Fall, dass A risikoavers und B risikoneutral ist.

Zur weiteren Analyse der Beziehung zwischen Anreizkompatibilität und Pareto-Effizienz vergleichen wir die Bedingung (12.4) der Anreizkompatibilität,

⁵Dies ist z. B. dann der Fall, wenn beider Nutzenfunktionen identisch sind. Die Punkte S_1 und S_2 sind dann ebenfalls identisch, sodass nach dem in Abb. 12.1 dargestellten Umsetzungsverfahren $s(x) = 0,5 x$ folgt.

⁶Zur Erweiterung der Darstellungen auf den Mehrperioden-Fall vgl. Velthuis (2004).

$$U'_A[x-s(x)] \cdot [1-s'(x)] = U'^*_B[s(x)] \cdot s'(x) \quad (\text{für jedes } x), \quad (12.4)$$

mit der Bedingung (11.9) der Pareto-effizienten Risikoteilung (Kap. 11, Abschn. 11.4.2), die wie folgt dargestellt werden kann:

$$U'_A[x-s(x)] = \lambda \cdot U'_B[s(x)] \quad (\text{für jedes } x). \quad (12.8)$$

Da aus (12.1a) $U'^*_B[s(x)] = \alpha \cdot U'_B[s(x)]$ folgt, kann man für (12.4) auch schreiben:

$$U'_A[x-s(x)] = \alpha \cdot \frac{s'(x)}{1-s'(x)} \cdot U'_B[s(x)] \quad (\text{für jedes } x). \quad (12.9)$$

Offenbar stimmen die Bedingung (12.4) bzw. (12.9) der Anreizkompatibilität und die Bedingung (12.8) der Pareto-Effizienz dann und nur dann überein, wenn

$$\alpha \cdot \frac{s'(x)}{1-s'(x)} = \lambda \quad (\text{für jedes } x)$$

gilt, der Ausdruck $\alpha \cdot s'(x)/[1-s'(x)]$ also unabhängig von x ist. Dies wiederum ist dann und nur dann der Fall, wenn $s'(x)$ konstant ist, die Teilungsregel mithin *linear* ist. Nur lineare anreizkompatible Teilungsregeln teilen also das Risiko Pareto-effizient. Eine nichtlineare anreizkompatible Teilungsregel kann dagegen das Risiko nicht zugleich auch Pareto-effizient teilen. Bei nichtlinearer Teilungsregel ist $s'(x)$ und mithin auch $s'(x)/[1-s'(x)]$ von x abhängig. Folglich kann dann gemäß der Bedingung (12.9) der Anreizkompatibilität das Verhältnis der Grenznutzenwerte nicht unabhängig von x sein, sodass die Bedingung der Pareto-effizienten Risikoteilung verletzt ist (vgl. Wilson 1969; Ross 1974; Horst et al. 1982; Velthuis 1998, S. 28–31).

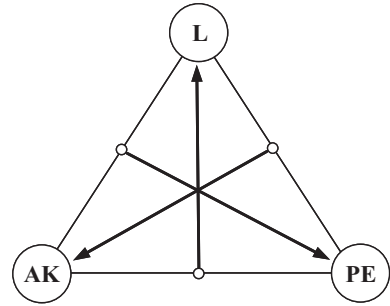
Die bisherige Analyse hat gezeigt, dass keine anreizkompatible Teilungsregel existiert, die das Risiko zugleich Pareto-effizient teilt, wenn eine Partei risikoneutral und die andere risikoavers ist. Sind beide risikoneutral, so ist zwar jede beliebige Teilungsregel Pareto-effizient, jedoch sind nur *lineare* Teilungsregeln des Typs $s(x) = s \cdot x + F$ ($0 < s < 1$) zugleich auch anreizkompatibel, weil nur bei solchen Teilungsregeln der Quotient $s'(x)/[1-s'(x)]$ von x unabhängig ist.

Der Zusammenhang für den Fall der Risikoneutralität beider Parteien lässt sich für den Fall der Risikoaversion beider wie folgt *verallgemeinern*: Je zwei der drei Bedingungen

- Anreizkompatibilität der Teilungsregel (AK),
- Pareto-Effizienz der Teilungsregel (PE) und
- Linearität der Teilungsregel (L)

bedingen die jeweils dritte. Ist also eine anreizkompatible Teilungsregel linear, so teilt sie (wie gezeigt) das Risiko auch Pareto-effizient. Umgekehrt ist eine lineare Teilungsregel, die das Risiko Pareto-effizient teilt, zugleich anreizkompatibel. Und schließlich gilt, dass Teilungsregeln, die das Risiko sowohl anreizkompatibel als auch Pareto-effizient teilen, linear sind.

Abb. 12.5 Zur Beziehung zwischen den Bedingungen PE, AK und L



Dieser Zusammenhang wird in Abb. 12.5 verdeutlicht. Sind zwei beliebige mit einer Kante verbundenen Bedingungen erfüllt, so gilt dies auch für die dritte. Bezüglich einer Teilungsregel sind also nur folgende Fälle möglich: Entweder sind alle drei Bedingungen erfüllt oder nur eine oder gar keine. Ist von zwei mit einer Kante verbundenen Bedingungen genau eine erfüllt, so kann die dritte nicht erfüllt sein; der Fall, dass genau zwei Bedingungen erfüllt sind, ist eben ausgeschlossen. Ist keine der mit einer Kante verbundenen Bedingungen erfüllt, so kann allerdings die dritte Bedingung erfüllt sein, muss aber nicht.

Der beschriebene Zusammenhang weist der Linearität einer Teilungsregel eine große Bedeutung zu: Lineare Teilungsregeln sind nicht nur einfach, sie sind auch die einzigen Teilungsregeln, die zugleich Anreizkompatibilität und Pareto-Effizienz gewährleisten können. Es folgt nämlich auch: Wenn eine Teilungsregel nicht linear ist, so kann sie nicht zugleich anreizkompatibel und Pareto-effizient sein. Zudem gilt die Beziehung für eine beliebige Anzahl von Entscheidern: Nur wenn das Risiko unter allen Entscheidern linear geteilt wird, kann die Teilung zugleich anreizkompatibel und Pareto-effizient für alle Beteiligten sein. Das bedeutet freilich nicht, dass jede lineare Teilungsregel anreizkompatibel und Pareto-effizient ist. Dies gilt nur für den Fall der Risikoneutralität der Parteien, wobei dann bei zwei Parteien für die Teilungsregel $s(x) = s \cdot x + F$ immerhin $0 < s < 1$ gelten muss.

Wie in Kap. 11, Abschn. 11.5, gezeigt wurde, ist eine Pareto-effiziente Teilungsregel nur unter restriktiven Annahmen bezüglich der Nutzenfunktionen der beiden Entscheider linear. Dies schränkt den Gültigkeitsbereich der Eigenschaft einer Teilungsregel, sowohl Pareto-effizient als auch anreizkompatibel zu sein, stark ein. Daher gilt: Anreizkompatibilität und Pareto-Effizienz sind bis auf wenige Ausnahmefälle *nicht* gleichzeitig herstellbar.

Heterogene Erwartungen oder zustandsabhängige Nutzenfunktionen führen zudem dazu, dass sowohl anreizkompatible als auch Pareto-effiziente Teilungsregeln *zustandsabhängig* sind, also die Erfolge x in Abhängigkeit davon geteilt werden, welcher Zustand S_s eintritt. Wie in Laux (1998, S. 92 f.) gezeigt wird, können zustandsabhängige Teilungsregeln nie zugleich Pareto-effizient und anreizkompatibel sein.

Wenn ein Konflikt zwischen der Bedingung der Anreizkompatibilität und der der Pareto-Effizienz besteht, stellt sich das Problem, welcher Bedingung das „größere Gewicht“ beigemessen werden soll. Die Lösung hängt davon ab, welche Möglichkeiten bestehen, Anreize durch Vertragsgestaltung zu setzen. Wenn eine delegierende „Instanz“ (Person oder Personengruppe) einem „Entscheidungsträger“ eine gut strukturierte Aufgabe überträgt, bei der die gegenseitigen Rechte und Pflichten einfach und konkret vertraglich vereinbart und durchgesetzt werden können, liegt es nahe, auf Pareto-effiziente Risikoteilung zu achten und entsprechende Verträge zu schreiben. Werden von der Instanz (etwa den Eigentümern eines Unternehmens) an den Entscheidungsträger (die Unternehmensleitung) auf Dauer unstrukturierte und variable Aufgaben übertragen, die in ihrer Qualität schwer zu kontrollieren sind, liegt es nahe, primär Anreizkompatibilität anzustreben.

12.6 Grundformen und Implikationen praktischer Risikoteilung: Endogene und exogene Risikoteilung

12.6.1 Charakteristik

Wir unterscheiden im Folgenden zwischen *endogener* und *exogener* Risikoteilung. Eine entsprechende Umverteilung von Risiken wird als endogene oder exogene Risikotransformation bezeichnet. Der Unterschied besteht in der dem Teilungsvertrag zugrunde liegenden Bemessungsgrundlage. Zur Erläuterung der beiden Grundformen und ihrer möglichen Implikationen betrachten wir einen Unternehmer, der bisher das Unternehmensrisiko allein trägt und erwägt, Risiko auf andere Personen zu transferieren (Laux und Laux 2009). Der Erfolg am Ende der Periode vor Transferzahlung wird wieder mit $\tilde{x}$ bezeichnet.

Bei *endogener* Risikotransformation dienen als Determinanten der Transferzahlung explizit unternehmensspezifische Variablen und/oder Ereignisse, insbesondere Überschüsse (Gewinne) bzw. Teile davon. Diese Zahlungsauslöser können unternehmensintern beeinflusst (kontrolliert) werden, wobei der Unternehmer im Allgemeinen bessere Informationen über deren Ausprägungen hat als externe Investoren.

Charakteristisch für die endogene Risikotransformation ist die Aufnahme von Gesellschaftern, die an den Unternehmensüberschüssen (Erfolgen) beteiligt werden. Die Gesellschafter partizipieren am allgemeinen Unternehmensrisiko, sodass sie vor allem bei großen Gesellschaftsanteilen ein hohes und ex ante schwer abschätzbares Risiko eingehen. Das Risiko hängt insbesondere auch davon ab, welche riskanten Maßnahmen in Zukunft im Unternehmen realisiert werden. Da es grundsätzlich weder möglich noch sinnvoll ist, die Unternehmensstrategie ex ante vertraglich vollständig festzulegen und über Kontrollen die Vereinbarungen durchzusetzen, werden den Gesellschaftern Mitentscheidungsrechte eingeräumt. Eine spezielle Variante der Aufnahme von Gesellschaftern besteht darin, dass der Unternehmer sein Unternehmen an die Börse bringt und mit dem Erlös ein optimales Portefeuille bildet, das auch Aktien „seines“ Unternehmens enthält.

Eine andere charakteristische endogene Risikotransformation stellt der Abschluss von Versicherungen dar. Der Versicherer wird grundsätzlich nicht am allgemeinen Unternehmenswagnis beteiligt, sondern an spezifischen Einzelrisiken, wie z. B. Feuerschäden, Schäden aus Diebstahl, Schwund und Forderungsverlusten. Versicherbar sind vor allem solche Risiken, bei denen Schäden relativ einfach prognostiziert und verifiziert werden können und Maßnahmen zur Reduktion der Schadenswahrscheinlichkeit und Schadenshöhe ohne besondere Transaktionskosten vereinbart und kontrolliert werden können.

Basis *exogener* Risikotransformation sind unternehmensexterne Variablen und/oder Ereignisse, die vom Unternehmer und seinen potenziellen Transferpartnern (praktisch) nicht beeinflusst werden können. Der Unternehmer transformiert das Risiko durch Handel mit Wertpapieren (einschließlich Leerverkauf) wie Aktien, Anleihen und Derivaten (Termingeschäfte wie Optionen oder Futures). Die Derivate können sich auf Aktien oder Anleihen beziehen, aber auch auf sehr spezifische Risikofaktoren wie Zinssätze, Wechselkurse, Preise von Inputfaktoren oder Ereignisse wie Wetter oder Umweltkatastrophen. Dabei ist zu beachten, dass ein privater Handel mit Wertpapieren, deren Zahlungsansprüche explizit von unternehmensinternen Variablen oder Ereignissen abhängen, definitionsgemäß keine exogene, sondern eine endogene Risikotransformation darstellt.

Der Risikotransfer über Aktien anderer Unternehmen kommt unter Umständen dann in Betracht, wenn deren zukünftigen Kurse und Dividenden stark positiv oder negativ mit Überschüssen des Unternehmens korreliert sind. Bei negativer (bzw. positiver) Korrelation werden Aktien gekauft (bzw. leer verkauft). Positive oder negative Korrelationen können vor allem dadurch zustande kommen, dass die zukünftigen Aktienkurse in tendenziell gleicher oder in entgegen gesetzter Richtung von solchen Risikofaktoren abhängen, die die Unternehmensüberschüsse beeinflussen. Zum Beispiel trägt der Unternehmer bei Zugehörigkeit seines Unternehmens zu einer Branche ein gewisses „Branchenrisiko“, das er eventuell hedgen kann, indem er ein Portefeuille von Anteilen an Gesellschaften der Branche leer verkauft.

Potenzielle Vorteile einer externen Risikotransformation ergeben sich daraus, dass der Unternehmer die dem Vertrag zugrunde liegenden Variablen praktisch nicht beeinflussen kann und normalerweise keinen systematischen Informationsvorsprung gegenüber potenziellen Transaktionspartnern hat.

12.6.2 Vergleich

12.6.2.1 Pareto-Effizienz

Ein wichtiges Kriterium zur Beurteilung der Qualität von Risikotransformationsmaßnahmen ist das der „Pareto-Effizienz“. Wie in Kap. 11 erläutert, ist eine Teilungsregel für eine gegebene Wahrscheinlichkeitsverteilung von $\tilde{x}$ bezüglich einer gegebenen Menge von Parteien dann *Pareto-effizient*, wenn es keine andere Teilungsregel gibt, bei der eine Partei einen Vorteil (einen höheren Erwartungswert ihres Nutzens) erzielen kann, ohne

dass eine andere einen Nachteil erleidet. Eine Teilungsregel kann daher bei gegebener Wahrscheinlichkeitsverteilung von $\tilde{x}$ für den Unternehmer nicht optimal sein, wenn sie nicht Pareto-effizient ist; es existieren andere Teilungsregeln, mit denen er einen Vorteil realisieren kann, ohne dass andere Parteien schlechter gestellt werden.

Der Unternehmer wird bei der Wahl der Teilungsregel versuchen, den Erwartungswert seines Nutzens zu maximieren. Dabei muss er berücksichtigen, dass ein potenzieller Vertragspartner (Investor) eine Teilungsregel nur dann akzeptiert, wenn er damit einen bestimmten (von seiner Marktposition abhängigen) Mindestnutzen erzielt. Bei Risikoaversion muss ihm eine Risikoprämie geboten werden, die eine konvex steigende Funktion seines Anteils an $\tilde{x}$ darstellt. Wenn Gesellschafter eine Risikoprämie fordern, ist es vorteilhaft, Risiken mit vielen Gesellschaftern zu teilen, um die Summe der geforderten Risikoprämien zu reduzieren. Ohne Transaktionskosten oder Anreiz- und Informationsprobleme ist es bei Risikoaversion aller Individuen einer Gesellschaft optimal, alle an den Risiken zu beteiligen (wenn zum Teil auch nur in äußerst geringem Maße).

Wie in Kap. 13, Abschn. 13.4.2.1, gezeigt wird, können im Idealfall eines „vollkommenen“ und „vollständigen“ (eines sogenannten friktionslosen) Kapitalmarktes beliebige zustandsabhängige Zahlungsansprüche kostenlos gehandelt werden, sodass ideale Bedingungen für die exogene Risikoteilung mit anderen Investoren bestehen. Dies impliziert, dass eine endogene Risikoteilung, z. B. durch die Emission von Aktien bzw. die Aufnahme von Anteilseignern, grundsätzlich irrelevant ist. Der Unternehmer kann im friktionslosen Kapitalmarkt das Risiko ebenso gut durch Handel mit Wertpapieren (exogener Risikotransfer) hedgen.

Erst bei Unvollkommenheit oder Unvollständigkeit des Kapitalmarktes wird der Risikotransfer zu einem komplexen Problem. Die endogene Risikotransformation gewinnt dann an Bedeutung und es ist zu entscheiden, ob endogene oder exogene Risikotransformation größere Effizienzverluste aufweist.

12.6.2.2 Konfliktpotenzial und Motivation

Wenn die Wahrscheinlichkeitsverteilung über $\tilde{x}$ (durch wen auch immer) beeinflusst werden kann, können sich durch den Risikotransfer Konflikte bezüglich der Durchführung der betreffenden Maßnahmen ergeben. Um sie zu vermeiden, haben die Parteien ein Interesse daran, eine *anreizkompatible* Teilungsregel zu vereinbaren. Prinzipiell mag es erstrebenswert erscheinen, eine Teilungsregel zu vereinbaren, die sowohl Pareto-effizient als auch anreizkompatibel ist. Wie jedoch gezeigt wurde, besteht grundsätzlich ein Konflikt zwischen beiden Kriterien.

Die Bedingung der Anreizkompatibilität bezieht sich wie die der Pareto-Effizienz auf den Erfolg $\tilde{x}$ als Ganzes. Die Beteiligung eines Investors nur an einzelnen Erfolgskomponenten führt grundsätzlich zu Zielkonflikten. Der Unternehmer kann dann mit Maßnahmen Vorteile erzielen, welche die eigenen Überschusskomponenten zulasten derer des Investors verbessern. Charakteristisch sind Versicherungen. Hier kann es für den Unternehmer z. B. vorteilhaft sein, Investitionen zur Vermeidung von Schäden zu unterlassen.

Wenn Anreizkompatibilität erzielt wird, sind alle Parteien einmütig für oder gegen bestimmte Maßnahmen, sofern sie sich nur an finanziellen Zielgrößen orientieren. Diese Bedingung ist jedoch grundsätzlich gar nicht erfüllt. Konflikte können zum Beispiel daraus resultieren, dass der Unternehmer als Entscheidungsträger Ressourcenpräferenzen hat und die übrigen Parteien als anonyme Gesellschafter allein an finanziellen Überschüssen interessiert sind. Ressourcenpräferenz kann sich etwa darin äußern, dass der Unternehmer aus Prestige Gründen die Produktionsanlagen auf dem neuesten technischen Stand hält oder eine relativ große Zahl von Mitarbeitern beschäftigt und dabei innerhalb gewisser Grenzen in Kauf nimmt, dass der Unternehmenserfolg sinkt (vgl. auch Kap. 17, Abschn. 17.6). Konflikte können auch daraus resultieren, dass der Unternehmer und die anderen Beteiligten Arbeitsleid empfinden, das sie meiden wollen. Je geringer der Anteil einer Partei am Erfolg $\tilde{x}$, desto geringer ist tendenziell ihre Motivation, Anstrengungen zu unternehmen, die Wahrscheinlichkeitsverteilung über $\tilde{x}$ zu verbessern. Sie trägt das Arbeitsleid allein, erhält aber nur einen kleinen Anteil am finanziellen Vorteil.

Je mehr Gesellschafter der Unternehmer aufnimmt, desto besser mag er zwar das Risiko teilen können, desto kleiner ist jedoch tendenziell sein Anteil am Erfolg und desto geringer ist seine Motivation, die Erfolgssituation zu verbessern. Zudem wird er eher dazu neigen, Maßnahmen nach anderen als finanziellen Gesichtspunkten zu beurteilen (Consumption on the Job, Entscheidung nach Ressourcenpräferenzen). Die potenziellen Gesellschafter antizipieren dies und sind für ihre Erfolgsanteile nur geringe Beträge zu zahlen bereit, sodass der Unternehmer die finanziellen Nachteile grundsätzlich selbst zu tragen hat. Er kann zwar den Mitgesellschaftern umfangreiche Kontroll- und Entscheidungsrechte einräumen. Bezüglich der Ausübung dieser Rechte besteht jedoch ein analoges Problem: Die Motivation, die Entscheidungen des Unternehmers (oder anderer Entscheidungsträger im Unternehmen) zu kontrollieren und zu steuern, ist bei geringen Anteilen an $\tilde{x}$ ebenfalls gering. Anreizprobleme können insbesondere auch einem Börsengang im Wege stehen.

Teilt der Unternehmer den Erfolg mit wenigen Gesellschaftern so, dass er und die anderen einen relativ hohen Anteil halten, mag zwar die Motivation aller hoch sein. Daraus folgt aber nicht, dass sie sich *einmütig* für die Verbesserung der Erfolgssituation einsetzen. Sie können – vor allem bei fehlender Anreizkompatibilität oder bei heterogenen Erwartungen über zukünftige Überschüsse – auch hoch motiviert sein, kontraproduktive Konflikte auszutragen, um abweichende persönliche Interessen durchzusetzen.

12.6.2.3 Informationsverteilung und Transaktionskosten

Für die Vorteilhaftigkeitsbeurteilung alternativer Formen der Risikotransformation ist auch von Bedeutung, welche Informationsverteilung zwischen dem Unternehmer und potenziellen Transferpartnern besteht und welche Transaktionskosten die Suche von Vertragspartnern, die Vertragsgestaltung und die Vertragsdurchsetzung verursachen.

Bei endogener Risikotransformation sind unternehmensspezifische Überschüsse bzw. Ereignisse relevant, über die der Unternehmer grundsätzlich besser informiert ist

als externe Investoren. Dabei besteht die Gefahr, dass er seinen Informationsvorsprung zu deren Nachteil ausnutzt. Dies gilt nicht nur für die ursprüngliche Vertragsgestaltung, etwa die Vereinbarung eines Gesellschafts- oder Versicherungsvertrags, sondern auch für die Vertragsabwicklung. Da der Unternehmer die Folgen der Informationsasymmetrie letztlich selbst zu tragen hat, stellt sich für ihn ein komplexes Informationsproblem. Da subjektive Urteile stark manipulationsgefährdet sind, muss er über verifizierbare Indikatoren berichten, wodurch hohe Kosten entstehen können. Aber nicht nur die Beschaffung, Übermittlung und Aufnahme von Informationen durch potenzielle Vertragspartner verursachen Transaktionskosten, sondern auch deren Folgemaßnahmen zur Steuerung der Entscheidungen des Unternehmers.

Da bei exogener Risikotransformation der Unternehmer keinen systematischen Informationsvorsprung hat, ist hierbei das Informationsproblem relativ gering. Außerdem entstehen relativ geringe Transaktionskosten, wenn der Unternehmer im Zeitablauf durch Handel mit Wertpapieren – insbesondere mit Standardtiteln auf liquiden Märkten – Anpassungen an die Entwicklung des Unternehmensrisikos vornimmt. Dagegen erfordern solche Anpassungen bei endogener Risikoteilung durch Aufnahme von Gesellschaftern Änderungen des Gesellschaftsvertrags, über die der Unternehmer nicht allein entscheiden kann. Vor allem bei heterogenen Erwartungen über zukünftige Überschüsse kann deren endogene Transformation via Änderungen der Anteile daran prohibitiv hohe Kosten verursachen. Der exogenen Risikotransformation sind jedoch aufgrund von Unvollkommenheit und Unvollständigkeit des Kapitalmarktes Grenzen gesetzt.

12.7 Zusammenfassung

- Bei der Aufteilung eines unsicheren Erfolgs stellt sich nicht nur die Frage nach Pareto-effizienter Risikoteilung, sondern vor allem auch die Frage, ob die beteiligten Entscheider gleiche oder unterschiedliche Präferenzen darüber haben, welche Maßnahmen durchgeführt oder unterlassen werden sollen. Diese Präferenzen können über die Aufteilung des Erfolges beeinflusst werden.
- Eine anreizkompatible Aufteilung des Erfolges gleicht die finanziellen Präferenzen der Entscheider einander an. So können Konflikte hinsichtlich der Durchführung (oder Unterlassung) von Maßnahmen vermieden oder zumindest (wenn die Entscheider auch nichtfinanzielle Präferenzen bezüglich der Maßnahmen haben) abgeschwächt werden.
- Zwischen zwei Entscheidern A und B besteht Anreizkompatibilität, wenn beide mit der Entscheidung für eine vorteilhafte (nachteilige) Alternative zugleich einen höheren (niedrigeren) Erwartungswert des Nutzens erzielen. Die notwendige Bedingung dafür lautet $U_A[x - s(x)] = \alpha \cdot U_B[s(x)] + \beta$, mit $\alpha > 0$, d. h. die Nutzenwerte von A und B dürfen sich nur bis auf eine positiv lineare Transformation unterscheiden.

- Durch Variation von α und β können unterschiedliche anreizkompatible Aufteilungen des Erfolges erzeugt werden können, die mehr oder weniger starke Anreizwirkungen für A und B entfalten, die Erfolgssituation zu verbessern.
- Die einem beliebigen Paar von Nutzenfunktionen entsprechende Teilungsregel kann (auch) mithilfe eines grafischen Umsetzungsverfahrens ermittelt werden.
- Sind beide Entscheider risikoneutral, so ist die anreizkompatible Teilungsregel linear. Ist A risikoneutral, B hingegen risikoavers, so muss B progressiv am Erfolg beteiligt werden, um seiner Risikoaversion entgegenzuwirken; $s(x)$ ist eine konvex steigende Funktion von x . Ist umgekehrt A risikoavers, B hingegen risikoneutral, so ist $s(x)$ konkav ($x - s(x)$ ist entsprechend konvex). Sind beide risikoavers, so hängt die Gestalt der Teilungsregel davon ab, wer risikoaverser ist und wie sich die Risikoaversion der Entscheider mit zunehmendem Einkommen verändert.
- Grundsätzlich besteht ein Konflikt zwischen dem Ziel anreizkompatibler und dem Pareto-effizienter Risikoteilung, d. h., anreizkompatible Teilungsregeln führen in der Regel nicht zu Pareto-effizienter Risikoteilung, mit einer Ausnahme: Ist die Pareto-effiziente Teilungsregel linear, so ist sie auch anreizkompatibel.
- Zur Analyse des Problems, wie Unternehmensrisiken auf verschiedene Risikoträger transferiert bzw. aufgeteilt werden sollen, ist es sinnvoll, als Basis von Transferzahlungen nicht wie bisher nur unternehmensinterne Variablen und Ereignisse zu berücksichtigen (endogene Risikoteilung), sondern auch unternehmensexterne, die vom Unternehmer und seinen Transferpartnern nicht beeinflusst werden können (exogene Risikoteilung). Der Unternehmer transformiert dabei das Risiko durch Handel mit Wertpapieren wie Aktien, Anleihen und Derivaten.

Ergänzende und vertiefende Literatur

Gillenkirch (1997, 1999, S. 77 ff.); Grossman und Hart (1983); Holm Strom und Milrom (1987); Horst et al. (1982); Kiener (1990); Laux (1992, 1979, S. 287–309, 1998, 2006a, 2006b); Laux Schenk-Mathes (1992); Pratt (2000); Ross (1973, 1974); Velthuis (1998, S. 15–39, 2004); Wilson (1968, 1969).

12.8 Übungen

Aufgabe 12.1

Zwei Entscheider A und B teilen ein unsicheres Ergebnis x so, dass B $s(x)$ erhält und A das Residuum, $x - s(x)$. A ist risikoneutral, B hingegen risikoavers mit der Nutzenfunktion $U_B[s(x)] = 1 - e^{-0.02 \cdot s(x)}$. Beide Entscheider müssen sich zwischen den Alternativen A_1 und A_2 mit folgenden Ergebnissen entscheiden:

Zustand (Wahrscheinlichkeit)	$S_1(0,25)$	$S_2(0,5)$	$S_3(0,25)$
A_1	100	100	100
A_2	−200	200	400

- a) Gehen Sie davon aus, A und B teilen das Ergebnis zu gleichen Teilen (50:50) auf. Befürworten beide dann dieselbe Alternative?
- b) Betrachten Sie nun die folgenden zwei alternativen Aufteilungsregeln:
- $s(x) = 200$, falls $x > 200$ und 20 sonst.
 - $s(x) = 0,2 \cdot x$ für $x \leq 200$ und $s(x) = 0,4 \cdot x$ für $x > 200$.
- Welche Alternativen befürworten A und B jeweils? Stellt eine der Aufteilungsregeln i) oder ii) allgemein Anreizkompatibilität her? Wenn nein, warum nicht?

Aufgabe 12.2

Eigentümer A möchte den Geschäftsführer B anstellen. Derzeit ist für das Unternehmen mit einem sicheren Gewinn von 500 zu rechnen. Der Geschäftsführer kann jedoch auch (riskante) Investitionen tätigen. Dadurch würde der Gewinn mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit 250, 400 oder 1000 betragen. Zudem kann der Geschäftsführer besonders außerordentlich Anstrengungen leisten. In diesem Falle kann er den Gewinn um 10 % erhöhen, wenn er die Investitionen nicht tätigt, aber um 30 % mit den Investitionen. Der Geschäftsführer bezog zuvor ein Gehalt von 100 und möchte sich nicht schlechter stellen als zuvor: er erwartet ein entsprechendes Angebot des Eigentümers. Ob B tatsächlich hohe Anstrengungen leistet, ist für A nicht beobachtbar. B würde diese als Belastung empfinden und nur wählen, wenn es sich für ihn lohnt; B berücksichtigt dies, indem er bei hohen Anstrengungen so rechnet, als wäre sein Einkommen um 20 niedriger.

Gehen Sie von den folgenden Nutzenfunktionen aus: $U_A[x - s(x)] = 1 - e^{-0,004 \cdot s(x)}$ und $U_B[s(x)] = 1 - e^{-0,036 \cdot s(x)}$.

- Unterstellen Sie, die Investitionen würden durchgeführt und B zeige hohe Anstrengungen. A biete B folgende Vergütung an: 10 % Beteiligung am Gewinn plus Gehalt in Höhe von 64,30. Wie beurteilen Sie diese Teilungsregel im Hinblick auf Risikoteilung?
- Prüfen Sie, wie B bei der Teilungsregel aus a) tatsächlich über die Investitionen und seine Anstrengungen entscheidet.
- Betrachten Sie nun folgendes Vertragsangebot des A: 18 % Gewinnbeteiligung und Gehalt in Höhe von 17,61. Prüfen Sie, wie B nun über die Investitionen und seine Anstrengungen entscheidet.
- Interpretieren und verallgemeinern (sofern möglich) Sie die Ergebnisse aus den Aufgabenteilen b) und c).

Aufgabe 12.3

Ein Unternehmen wird von den beiden Gesellschaftern A und B geführt. Deren absolute Risikoaversion ist konstant und beträgt 0,004 für Gesellschafter A und 0,007 für Gesellschafter B. Es gilt: $U_A[x - s(x)] = -e^{-0,004 \cdot (x - s(x))}$ und $U_B[s(x)] = -e^{-0,007 \cdot s(x)}$

- a) Geben Sie die grundsätzliche Gestalt einer Pareto-effizienten Teilungsregel an. Wie sieht diese im vorliegenden Fall konkret aus?
- b) Anreizkompatibilität wäre z. B. dann erfüllt, wenn der Nutzen des A stets doppelt so groß ist wie der Nutzen des B. Ermitteln Sie die anreizkompatible Teilungsregel, die dies gewährleistet.
- c) Geben Sie Beispiele für Kombinationen von Risikoeinstellungen bzw. Nutzenfunktionen des A und des B, für die gleichzeitig die drei Bedingungen der Pareto-effizienz (PE), der Anreizkompatibilität (AK) und der Linearität (L) der Teilungsregel erfüllt sind, bzw. für die die Bedingungen nicht gleichzeitig erfüllt werden können.

Aufgabe 12.4

Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Antworten.

- a) Eine Teilungsregel heißt dann anreizkompatibel, wenn der Erwartungswert des Nutzens des A eine steigende Funktion des Erwartungswertes des Nutzens des B ist.
- b) Für zwei Entscheider, die sich einen Überschuss teilen, findet man, wenn sie überhaupt existiert, stets nur eine anreizkompatible Teilungsregel.
- c) Ist für eine lineare (nicht konstante) Teilungsregel Anreizkompatibilität gegeben, dann muss sie auch Pareto-effizient sein.
- d) Ist die Teilungsregel eine konstante Funktion und Pareto-effizienz gegeben, dann muss die Teilungsregel auch anreizkompatibel sein.

12.9 Lösungshinweise

Aufgabe 12.1

- a) A befürwortet A_2 , B dagegen A_1 . --- b) Beide Teilungsregeln gewährleisten, dass A und B A_2 befürworten. Aber keine stellt allgemein Anreizkompatibilität her.

Aufgabe 12.2

- a) Es besteht Pareto-effiziente Risikoteilung --- b) Bezeichnungen: EU = Erwartungswert des Nutzens des B; I^d/I^{nd} = Investition wird durchgeführt/nicht durchgeführt; A^h/A^{nh} Anstrengungen des B sind besonders hoch/nicht besonders hoch. Es gilt $EU(I^{nd}, A^h) < EU(I^d, A^h) < EU(I^{nd}, A^{nh}) < EU(I^d, A^{nh})$, B wird zwar investieren, sich aber nicht besonders anstrengen. --- c) Nun gilt $EU(I^{nd}, A^h) < EU(I^d, A^{nh}) < EU(I^d, A^h) < EU(I^{nd}, A^{nh})$, bei Durchführung der Investition würde sich B also besonders anstrengen, jedoch führt er die Investition nicht durch. --- d) Grundproblematik: Stärkere Erfolgsbeteiligung zur Verstärkung von Leistungsanreizen verschlechtert nicht nur Risikoteilung, sondern kann auch Anreizkompatibilität verletzen.

Aufgabe 12.3

a) Jede lineare Teilungsregel $s(x) = s \cdot x + F$ mit $s = 4/11$ ist Pareto-effizient. --- b) Umformung der Bedingung $U_A[x - s(x)] = 2 \cdot U_B[s(x)]$ führt zu $s(x) = 4/11 \cdot x + 63,01$ --- c) Bei Risikoneutralität von A und B sind alle drei Bedingungen erfüllt. Bei Risikoaversion beider Parteien kann in bestimmten Fällen Kompatibilität gegeben sein, z. B. bei konstanter Risikoaversion sowohl des A als auch des B. Ist nur einer risikoavers, widersprechen sich PE und AK.

Aufgabe 12.4

a) Richtig. --- b) Falsch. --- c) Richtig. --- d) Falsch.

Literatur

- Gillenkirch, R.M.: Gestaltung optimaler Anreizverträge – Motivation, Risikoverhalten und beschränkte Haftung. Springer, Wiesbaden (1997)
- Gillenkirch, R.M.: Anreizwirkungen und Bewertungen von Erfolgsbeteiligungen im Fonds-Management. Z. Betriebswirtsch., Ergänzungsheft **3**, 61–85 (1999)
- Gillenkirch, R.M.: Gewinn- und aktienkursorientierte Managementvergütung. Deutscher Universitäts-Verlag, Wiesbaden (2004)
- Grossman, S.J., Hart, O.D.: An analysis of the principal-agent problem. *Econometrica* **51**, 7–45 (1983)
- Holmström, B.T., Milgrom, P.R.: Aggregation and linearity in the provision of intertemporal incentives. *Econometrica* **55**, 303–328 (1987)
- Horst, M., Schmidt, R.H., Terberger, E.: Risikoaufteilung durch Prämiensysteme. Z. Betriebswirtsch. **52**, 942–958 (1982)
- Kiener, S.: Die Prinzipal-Agent-Theorie aus informationsökonomischer Sicht. Physica, Heidelberg (1990)
- Laux, H.: Anreizsysteme bei unsicheren Erwartungen. Z. Betriebswirtsch. Forsch. **24**, 783–803 (1972)
- Laux, H.: Grundfragen der Organisation: Delegation. Anreiz und Kontrolle, Berlin (1979)
- Laux, H.: Risikoteilung, Anreiz und Kapitalmarkt. Springer, Berlin (1998)
- Laux, H.: Wertorientierte Unternehmenssteuerung und Kapitalmarkt, 2. Aufl. Springer, Berlin (2006a)
- Laux, H.: Unternehmensrechnung, Anreiz und Kontrolle, 3. Aufl. Springer, Berlin (2006b)
- Laux, H., Laux, C.: Risikotransformation und Kapitalmarkt. In: Schäfer, K., Burghof, H.-P., Johanning, L., Wagner, H.F., Rodt, S. (Hrsg.) Risikomanagement und kapitalmarktorientierte Finanzierung, Festschrift zum 65. Geburtstag von Bernd Rudolph, S. 165–197. Knapp, Frankfurt a. M. (2009)
- Laux, H., Schenk-Mathes, H.Y.: Lineare und nichtlineare Anreizsysteme. Physica, Berlin (1992)
- Pratt, J.W.: Efficient risk sharing: the last frontier. *Manag. Sci.* **46**, 1545–1553 (2000)
- Ross, S.A.: The economic theory of agency – the principal's problem. *American Economic Review* **63**, Papers and Proceedings, S. 134–139 (1973)
- Ross, S.A.: On the economic theory of agency and the principle of similarity. In: Balch, M., McFadden, D., Wu, S. (Hrsg.) *Essays on Economic Behavior under Uncertainty*, S. 215–237. North-Holland, Amsterdam (1974)

- Velthuis, L.J.: Lineare Erfolgsbeteiligung: Grundprobleme der Agency-Theorie im Lichte des LEN-Modells. Physica, Heidelberg (1998)
- Velthuis, L.J.: Anreizkompatible Erfolgsteilung und Erfolgsrechnung. Deutscher Universitäts-Verlag, Wiesbaden (2004)
- Wilson, R.: The theory of syndicates. *Econometrica* **36**, 119–132 (1968)
- Wilson, R.: The structure of incentives for decentralization under uncertainty. In: Gilbaud, M. (Hrsg.) *La Décision*, S. 287–307. Centre National de la Recherche Scientifique, Paris (1969)

Teil IV

Fundierung von Unternehmenszielen

Kapitalmarkttheoretische Grundlagen der Fundierung von Unternehmenszielen

13

13.1 Problemstellung und Aufbau

In diesem Kapitel und den nachfolgenden Kap. 14 und 15 wenden wir uns einer grundlegenden Frage der (betriebswirtschaftlichen) Entscheidungstheorie zu: Welche Ziele bzw. welches Ziel sollten den Entscheidungen zugrunde gelegt werden, die in einem Unternehmen getroffen werden? Diese Frage nach der Fundierung von Unternehmenszielen hat gerade für ein aus dem Blickwinkel der Betriebswirtschaftslehre konzipiertes Lehrbuch zentrale Bedeutung, werden doch die Adressaten dieses Lehrbuches wesentliche wirtschaftliche Entscheidungen als Personen treffen, die unternehmerische Verantwortung tragen. Außerdem kann im Rahmen der Betriebswirtschaftslehre als wissenschaftlicher Disziplin nur dann allgemein die Rationalität von Entscheidungen in einem Unternehmen analysiert werden, wenn ein klares und fundiertes Unternehmensziel sowie damit im Einklang stehende Entscheidungskriterien zugrunde gelegt werden.

Bei der Beantwortung der Frage nach der Fundierung von Unternehmenszielen folgen wir der Auffassung, dass Unternehmensziele aus den individuellen Zielen bzw. Zielsystemen der Interessengruppen einer Unternehmung abzuleiten sind (methodologischer Individualismus). Beschränkt man sich bei den betrachteten Interessengruppen auf die Eigentümer einer Unternehmung (vgl. hierzu auch Kap. 17) und wird eine Unternehmung betrachtet, die das Alleineigentum einer einzelnen Person ist, so ist es naheliegend, die Unternehmensziele aus den Zielen dieser Person abzuleiten. Die Fundierung von Unternehmenszielen fällt dagegen ungleich schwerer, wenn es mehrere, möglicherweise sogar sehr viele Personen gibt, die Eigentumsanteile am Unternehmen halten. In beiden Fällen aber gilt, dass die betrachteten Entscheider, der Alleineigentümer wie auch die Gruppe mehrerer Eigentümer, ein grundsätzliches Interesse daran haben, *Risiken zu teilen*, und dass die Teilung einen Einfluss auf die Formulierung von Unternehmenszielen hat.

Für die Beurteilung von Unternehmenszielen ist der Kapitalmarkt von entscheidender Bedeutung, da er eine Institution zur Risikoteilung zwischen den Eigentümern ist: Werden Unternehmensanteile am Kapitalmarkt gehandelt, dann können die Anteilseigner die Aufteilung des Unternehmensgewinns und damit des Risikos auch ohne die (explizite) Vereinbarung einer Teilungsregel (Kap. 11 und 12) beeinflussen, indem sie Unternehmensanteile kaufen und verkaufen. Zudem kann jeder Investor das Risiko, das er trägt, auch durch den Handel mit anderen Wertpapieren individuell verändern.

In diesem Kapitel geht es also erneut um Risikoteilung, jedoch betrachten wir nicht (allein) die endogene Teilung von Risiken über explizite Teilungsregeln wie in den Kap. 11 und 12, sondern (zusätzlich) die exogene Risikoteilung über den Kauf und Verkauf von Wertpapieren. Mit dem Wertpapierhandel zusammen hängt die Bildung der Preise dieser Wertpapiere. Die Fragen der Risikoteilung am Kapitalmarkt und der Bestimmung von Wertpapierpreisen im Zuge des Wertpapierhandels werden im vorliegenden Kapitel untersucht.

Die Möglichkeiten der Risikoteilung über den Kapitalmarkt haben große Bedeutung für die theoretische Fundierung von Unternehmenszielen und damit kompatibler finanzwirtschaftlicher Entscheidungskriterien. In den beiden nachfolgenden Kap. 14 und 15 werden vor dem Hintergrund der in diesem Kapitel behandelten Kapitalmarktmodelle und -eigenschaften Ziele und Entscheidungskriterien für börsennotierte Unternehmen und für Einzelunternehmen analysiert und verglichen. Dabei wird insbesondere untersucht, inwieweit die Maximierung des Marktwertes eines Unternehmens im Einklang steht mit der Nutzenmaximierung der Anteilseigner bzw. des Alleineigentümers des Unternehmens, und es werden mögliche Konflikte zwischen Anteilseignern in Abhängigkeit von den Kapitalmarkeigenschaften und den Risikoeinstellungen aufgezeigt.

Die Risikoteilung und Preisbildung am Kapitalmarkt hängen auch davon ab, nach welchen Kriterien bzw. Kalkülen die Investoren ihre optimalen Portefeuilles bilden. Wir legen die Darstellungen zur Portefeuilleplanung aus Kap. 8 zugrunde und untersuchen die jeweiligen Implikationen für die Risikoteilung und die Wertpapierpreise im Kapitalmarktgleichgewicht. Dabei wird insbesondere auch gezeigt, wie die Preise von den Erwartungen und den Nutzenfunktionen der Investoren auf dem Kapitalmarkt abhängen.

Für die Fundierung von Unternehmenszielen ist es von entscheidender Bedeutung, welche Eigenschaften der Kapitalmarkt aufweist. In Abschn. 13.2 werden die Voraussetzungen der Vollkommenheit, der Vollständigkeit und der Arbitragefreiheit des Kapitalmarktes dargestellt. In Abschn. 13.3 werden mit dem State Preference Ansatz (SPA) und dem Capital Asset Pricing Model (CAPM) zwei Modelle vorgestellt, die der Erklärung der Preisbildung auf dem Kapitalmarkt dienen. In Abschn. 13.4 bzw. 13.5 werden die Risikoteilung und die Preisbildung im SPA bzw. im CAPM untersucht. In Abschn. 13.6 wird ein Vergleich der beiden Modellanalysen vorgenommen.

Bei den folgenden Darstellungen werden wie in den vorangegangenen Kapiteln vorwiegend absolute Einkommensgrößen bzw. Überschüsse betrachtet und nicht, wie in Lehrbüchern zur Finanzwirtschaft üblich, Renditedarstellungen verwendet. Die Darstellungsform in absoluten Größen erleichtert die Analyse der Determinanten von

Wertpapierpreise und darauf aufbauend von Unternehmenszielen und finanzwirtschaftlicher Entscheidungskriterien. Bei der Beurteilung von Unternehmenszielen und damit kompatibler Entscheidungskriterien legen wir stets die Situation einer Investitionsentscheidung zugrunde und gehen davon aus, dass sich der oder die Eigentümer ausschließlich an finanziellen Zielen orientieren (vgl. jedoch Kap. 17). Die in einem Unternehmen zu treffenden Entscheidungen, insbesondere die bedeutenden Entscheidungen, die die Rahmenbedingungen für Routineaufgaben bestimmen, sind eben im Wesentlichen Investitionsentscheidungen, auch wenn häufig die erwogenen Alternativen nicht als Investitionen bezeichnet werden, sondern z. B. als Marketingstrategien, Produktionsprogramme, organisatorische Umstrukturierungen oder Bonussysteme für das Management, und dabei die Ergebnisse nicht explizit als finanzielle Überschüsse definiert werden.

13.2 Charakteristik des Kapitalmarktes

13.2.1 Vollkommener vs. unvollkommener Kapitalmarkt

Im Rahmen der Darstellungen im vorliegenden Kapitel und den Kap. 14 und 15 wird von einem „vollkommenen“ Kapitalmarkt ausgegangen, sofern nicht einzelne Prämissen explizit aufgehoben werden.

Ein Kapitalmarkt ist *vollkommen*, wenn gilt:

1. Es gibt keine Informationskosten.
2. Es gibt keine Transaktionskosten und keine Steuern.
3. Alle Wertpapiere sind beliebig teilbar.
4. Jeder Investor auf dem Kapitalmarkt handelt rational im Sinne des Bernoulli-Prinzips und maximiert den Erwartungswert seines *finanziellen* Nutzens.
5. Es besteht vollkommene Konkurrenz auf dem Kapitalmarkt: Diejenigen Akteure, die Wertpapiere kaufen oder verkaufen, agieren als *Mengenanpasser*. Jeder handelt so, als habe er keinen Einfluss auf die Wertpapierpreise (genauer: sein Einfluss ist für seine Entscheidungen vernachlässigbar gering).
6. Gleicher Marktzugang: Investoren können auf dem Kapitalmarkt Transaktionen, die Unternehmen durchführen können, auch privat zu denselben Konditionen durchführen. Jedes Wertpapier, das von einem Unternehmen gehandelt werden kann, kann also auch von jedem individuellen Investor zu denselben Bedingungen gekauft und verkauft werden. Die Prämisse gleichen Marktzugangs beinhaltet außerdem, dass jedes Wertpapier (jede Anwartschaft auf Zahlungen), das von einem Unternehmen ausgegeben werden kann, von jedem Investor auch privat auf seinen Namen zu denselben Bedingungen ausgegeben werden kann. Wertpapiere können unbeschränkt leer verkauft werden.

Der Leerverkauf eines Wertpapiers besteht darin, es zu verkaufen, obwohl man es gar nicht besitzt (vgl. ausführlicher Kap. 8, Abschn. 8.3.1). Im vollkommenen Kapitalmarkt lässt sich auch der Leerverkauf ohne Transaktionskosten durchführen, sodass sich Kauf und Leerverkauf nur um das Vorzeichen der Zahlungsüberschüsse unterscheiden.

Ist mindestens eine der oben dargestellten Bedingungen verletzt, so wird der Kapitalmarkt als unvollkommen bezeichnet.

13.2.2 Vollständiger vs. unvollständiger Kapitalmarkt

13.2.2.1 Subjektiver Grenzpreis als Marktwert bei Duplizierbarkeit und Vollkommenheit des Kapitalmarktes

Für die Charakteristik des Kapitalmarktes und die Bewertung riskanter Überschüsse (bzw. von Ansprüchen darauf) ist auch von entscheidender Bedeutung, inwieweit die Überschüsse durch Portefeuilles von Wertpapieren dupliziert (oder repliziert) werden können. Duplizierbarkeit eines Überschusses bedeutet, dass am Kapitalmarkt Wertpapiere so gekauft und (leer) verkauft werden können, dass die dadurch entstehende Gesamtposition (der Rückfluss des betreffenden Duplikationsportefeuilles) exakt mit dem Überschuss übereinstimmt. In dem hier betrachteten Einperioden-Fall geht es ausschließlich um die Duplizierbarkeit von Überschüssen, die am Ende einer Periode, dem Zeitpunkt $t=1$, anfallen. Das Duplikationsportefeuille eines Überschusses wird zum Zeitpunkt $t=0$ gebildet und hat zum Zeitpunkt $t=1$ einen Wert, der in jedem Umweltzustand S_s ($s=1, 2, \dots, N_S$) mit dem Überschuss übereinstimmt.

Bei Duplizierbarkeit und Vollkommenheit des Kapitalmarktes stimmen sowohl der Marktwert eines Überschusses als auch dessen subjektiver Wert (bzw. Grenzpreis) für einen potenziellen Käufer oder Verkäufer des Überschusses mit dem Marktwert des *Duplikationsportefeuilles* überein. Dieser Marktwert kann aus den Marktpreisen der im Duplikationsportefeuille enthaltenen Wertpapiere berechnet werden. Duplizierbarkeit erleichtert also die Bewertung von Zahlungsansprüchen (z. B. aus Investitionen), weil die Werte aus Preisen am Kapitalmarkt gehandelter Wertpapiere abgeleitet werden können.

Dass unter den genannten Bedingungen der subjektive Grenzpreis eines Überschusses für einen potenziellen Käufer mit dem Marktwert des Überschusses bzw. seines Duplikationsportefeuilles übereinstimmt, folgt aus der einfachen Überlegung, dass bei Kauf des Überschusses (bzw. eines Anspruchs darauf) dieser durch (Leer-)Verkauf seines Duplikationsportefeuilles kompensiert werden wird¹. Der Entscheider kann seine Verpflichtung aus einem Leerverkauf erfüllen, indem er am Ende der Periode

¹Wenn der Käufer die betreffenden Papiere bereits besitzt, nimmt er einen realen Verkauf vor, andernfalls einen Leerverkauf, der im vollkommenen Kapitalmarkt unbeschränkt möglich ist. Da die Implikationen beider Verkaufsvarianten dieselben sind, kann zur Vereinfachung der Darstellung von einem realen Verkauf abgesehen werden.

den erzielten Überschuss an den Käufer abführt. Entscheidungsrelevant sind jetzt also nur noch der Kaufpreis (die Anschaffungsauszahlung) des Überschusses und der Erlös aus dem Verkauf seines Duplikationsportefeuilles, der mit dem Marktwert des Überschusses übereinstimmt. Der Kauf des Überschusses ist unabhängig von der Risikoeinstellung des Entscheiders vorteilhaft (bzw. nachteilig), wenn sein Preis niedriger (bzw. höher) ist als sein Marktwert. Der Grenzpreis stimmt folglich mit dem Marktwert überein. Wenn der Preis niedriger ist als der Marktwert, erzielt der Entscheider bei Kauf zum Zeitpunkt 0 einen sicheren Gewinn, über den er frei verfügen kann. Analog stimmt auch für den potenziellen Verkäufer eines Überschusses der Grenzpreis mit dem Marktwert überein; der Verkauf ist vorteilhaft, wenn der Erlös höher als der Marktwert ist. Für die Bewertung ist es hier somit unerheblich, ob die Käufer- oder die Verkäuferperspektive maßgeblich ist.

Die Differenz zwischen dem Grenzpreis des Überschusses einer Investition und ihrer Anschaffungsauszahlung wird als deren *Kapitalwert* bezeichnet und die darauf beruhende Vorteilhaftigkeitsbeurteilung als *Kapitalwertmethode*. Wie erläutert, stimmt der Grenzpreis unter den genannten Voraussetzungen unabhängig von den Risikopräferenzen des Investors mit dem Marktwert des Überschusses überein. Bei der Bewertung wird lediglich vorausgesetzt, dass der Investor einen höheren Überschuss einem niedrigeren vorzieht. Die Bewertung wird in diesem Sinne „präferenzfrei“ vorgenommen.

Die Idee der Duplikation lässt sich einfach an dem folgenden Beispiel verdeutlichen. Relevant seien nur zwei Umweltzustände S_1 und S_2 . Ein Zahlungsanspruch führe zu einem Überschuss in Höhe von 200 in Umweltzustand S_1 und von 100 in Umweltzustand S_2 . Am Kapitalmarkt werden zwei Wertpapiere gehandelt, deren Rückflüsse und Preise wie auch der Überschuss des Zahlungsanspruchs in Tab. 13.1 wiedergegeben werden. Dabei entspricht der Rückfluss eines Wertpapiers dem Preis, zu dem es zum Zeitpunkt 1 verkauft werden kann (einschließlich Zinsen oder Dividenden).

Offenbar wird mit dem Zahlungsanspruch derselbe Überschuss erzielt, wie mit dem Kauf von je einem Stück beider Wertpapiere. Das Duplikationsportefeuille für den Überschuss ergibt sich also aus der Kombination der beiden Wertpapiere. Der Wert des Überschusses (bzw. des Anspruchs darauf) für den Entscheider beträgt damit 150, und zwar unabhängig davon, ob er den Überschuss kaufen oder verkaufen kann: Gelten die angegebenen Wertpapierpreise sowohl für den Kauf als auch für den Verkauf, wie es auf einem vollkommenen Kapitalmarkt der Fall ist, so ist der relevante Grenzpreis jeweils 150.

Tab. 13.1 Beispiel zur Veranschaulichung des Prinzips der Duplikation

	Rückfluss bzw. Preis in $t = 1$		Anschaffungsauszahlung bzw. Preis in $t = 0$
	S_1	S_2	
Wertpapier 1	100	100	90
Wertpapier 2	100	0	60
Zahlungsanspruch	200	100	

13.2.2.2 Allgemeine Ermittlung eines Duplikationsportefeuilles

Für die Bewertung von Investitionen (von stochastischen Überschüssen) ist von grundlegender Bedeutung, ob überhaupt unter den gegebenen Kapitalmarktbedingungen Duplikationsportefeuilles existieren und wie sie gegebenenfalls ermittelt werden können. Existiert ein Duplikationsportefeuille für einen unsicheren Zahlungsanspruch mit den Überschüssen $x_1, x_2, \dots, x_{N_S}$ in den Zuständen $S_1, S_2, \dots, S_{N_S}$, so kann es als dasjenige Portefeuille ermittelt werden, welches das Gleichungssystem in Tab. 13.2 erfüllt, wobei die einzelnen Gleichungen in den Spalten dieser Tabelle dargestellt sind.

q_i bezeichnet wie in Kap. 8 die Menge des Wertpapiers i , die der Entscheider (Investor) kauft ($q_i > 0$) bzw. leer verkauft ($q_i < 0$). x_{is} ist der Preis bzw. der Rückfluss des Wertpapiers i im Zustand S_s zum Zeitpunkt $t = 1$. Insgesamt werden N riskante Wertpapiere und eine risikolose Anlage betrachtet. Mit B wird der Betrag bezeichnet, den der Investor risikolos zum Zinssatz r anlegt ($B > 0$) bzw. aufnimmt ($B < 0$). Diese risikolose Anlage ist das Wertpapier $N + 1$.

Der Vektor der möglichen Rückflüsse des Wertpapiers i ist die Menge $\{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iN_S}\}$ der Rückflüsse dieses Wertpapiers in den N_S Umweltzuständen. Das Gleichungssystem in Tab. 13.2 beinhaltet N_S Gleichungen, d. h. so viele Gleichungen, wie es Umweltzustände gibt. Dieses Gleichungssystem hat dann und nur dann mindestens eine Lösung, sodass mindestens ein Duplikationsportefeuille für die Überschüsse $x_1, x_2, \dots, x_{N_S}$ existiert, wenn diese Überschüsse als Linearkombination von Vektoren von Wertpapierrückflüssen darstellbar sind. Je nach den Überschüssen und den Wertpapierrückflüssen kann die Duplikation möglicherweise nur mit wenigen Papieren gelingen, möglicherweise aber auch überhaupt nicht.

Im Beispiel der Tab. 13.1 gibt es zwei Wertpapiere mit den Vektoren $\{100, 100\}$ und $\{100, 0\}$. Diese sind linear unabhängig: der Vektor $\{100, 0\}$ kann nicht durch eine lineare

Tab. 13.2 Zur Ermittlung eines Duplikationsportefeuilles eines Überschusses $\tilde{x}$

Zustand	S_1	S_2	...	S_{N_S}
Wertpapier				
1	$q_1 \cdot x_{11}$	$q_1 \cdot x_{12}$	...	$q_1 \cdot x_{1N_S}$
	+	+		+
2	$q_2 \cdot x_{21}$	$q_2 \cdot x_{22}$	...	$q_2 \cdot x_{2N_S}$
	+	+		+
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	+	+		+
N	$q_N \cdot x_{N1}$	$q_N \cdot x_{N2}$	...	$q_N \cdot x_{NN_S}$
	+	+		+
N + 1 (Anlage zu r)	$B \cdot (1+r)$	$B \cdot (1+r)$	...	$B \cdot (1+r)$
	=	=	...	=
Zahlungsanspruch	x_1	x_2	...	x_{N_S}

Transformation aus dem Vektor $\{100,100\}$ generiert werden. Deshalb kann in Tab. 13.1 der Überschuss $\{200,100\}$ dupliziert werden. Würde dagegen das Wertpapier 2 im Beispiel die Rückflüsse $\{200,200\}$ aufweisen, so wären die Wertpapiere 1 und 2 linear voneinander abhängig, da dann der Rückfluss des einen Wertpapiers gerade der Hälfte (bzw. dem Doppelten) des Rückflusses des anderen Wertpapiers entspräche. Der Überschuss $\{200,100\}$ wäre mit diesen Wertpapieren nicht duplizierbar.

13.2.2.3 Universelle Duplizierbarkeit als Charakteristikum des vollständigen Kapitalmarktes

Die Lösbarkeit des in Tab. 13.2 dargestellten Gleichungssystems für jeden beliebigen stochastischen Überschuss $\tilde{x}$ entscheidet über die Eigenschaft des Kapitalmarktes, „vollständig“ oder „unvollständig“ zu sein. Ein Kapitalmarkt wird *vollständig* genannt, wenn es für jeden beliebigen Überschuss $\tilde{x}$ ein Duplikationsportefeuille gibt, also universelle Duplizierbarkeit besteht; er ist *unvollständig*, wenn dies nicht der Fall ist.

Dies bedeutet, dass es auf einem vollständigen Kapitalmarkt genau so viele Wertpapiere mit linear unabhängigen Vektoren von Rückflüssen wie mögliche Umweltzustände gibt. Dabei ist zu beachten, dass die Zahl linear unabhängiger Vektoren nicht größer sein kann als die der möglichen Umweltzustände. Liegt die Anzahl der linear unabhängigen Vektoren von Wertpapierrückflüssen unter der Anzahl der möglichen Umweltzustände, so ist der Kapitalmarkt unvollständig und das Gleichungssystem in Tab. 13.2 hat möglicherweise keine Lösung, d. h. nicht jeder beliebige Überschuss $\tilde{x}$ ist dann duplizierbar (d. h. als Linearkombination der Vektoren von Wertpapierrückflüssen darstellbar).

Die Zahl der linear unabhängigen Vektoren von Wertpapierrückflüssen liegt natürlich immer dann unter der Zahl der möglichen Umweltzustände, wenn es (einschließlich des risikolosen Wertpapiers) weniger Wertpapiere als mögliche Zustände gibt ($N + 1 < N_S$). Gibt es ebenso viele Wertpapiere wie Zustände ($N + 1 = N_S$), so müssen für alle Wertpapiere die Vektoren von Rückflüssen voneinander linear unabhängig sein, damit der Kapitalmarkt vollständig ist, d. h. für jeden beliebigen Überschuss ein Duplikationsportefeuille existiert. Gibt es mehr Wertpapiere als Zustände ($N + 1 > N_S$), so existiert eine Teilmenge mit mindestens $N + 1 - N_S$ Vektoren von Wertpapierrückflüssen, die linear von Vektoren der anderen Teilmenge abhängig sind und sich somit als Linearkombination dieser Vektoren darstellen lassen, denn es kann nicht mehr linear unabhängige Vektoren von Wertpapierrückflüssen geben als mögliche Zustände. Im vollständigen Kapitalmarkt sind genau N_S solcher Vektoren voneinander linear unabhängig, sodass es (für den Fall $N + 1 > N_S$) unendlich viele Vektoren $\{q_1, q_2, \dots, q_N, B\}$ gibt, die das Gleichungssystem in Tab. 13.2 erfüllen. Eine Lösung kann dann ermittelt werden, indem für $N + 1 - N_S$ der Variablen $q_1, q_2, \dots, q_N, B$ mit linear *abhängigen* Vektoren von Rückflüssen beliebige Werte vorgegeben werden und dann das Gleichungssystem nach den anderen Variablen gelöst wird.

Eine Lösung des in Tab. 13.2 dargestellten Gleichungssystems zur Duplikation eines Überschusses $\tilde{x}$ ist ein Vektor $\{q_1, q_2, \dots, q_N, B\}$, der angibt, welche Stückzahl

von jedem Wertpapier $i = 1, 2, \dots, N$ gekauft bzw. verkauft und welcher Geldbetrag B angelegt bzw. aufgenommen werden muss oder kann (wenn das Gleichungssystem beliebig viele Lösungen hat), um mit dem Portefeuille in jedem Zustand einen Rückfluss in Höhe des Überschusses $\tilde{x}$ zu erzielen. Der Preis (der Marktwert), zu dem das Duplikationsportefeuille gekauft oder verkauft werden kann, beträgt

$$\sum_{i=1}^N q_i \cdot P_i + B. \quad (13.1)$$

Hierbei bezeichnet P_i den Preis des Wertpapiers i zum Zeitpunkt 0.

Ein Duplikationsportefeuille kann auch negative Bestände an Wertpapieren enthalten, und zwar selbst dann, wenn alle möglichen Überschüsse x_s ($s = 1, 2, \dots, N_S$) positiv sind.

13.2.2.4 Handelbarkeit zustandsbedingter Zahlungsansprüche im vollständigen Kapitalmarkt

Da es in einem vollständigen Kapitalmarkt möglich ist, jeden beliebigen Überschuss zu duplizieren, lassen sich durch Wertpapierkombinationen auch Zahlungsansprüche herstellen, welche in nur einem einzigen Umweltzustand zu einem Rückfluss führen. Ein Anspruch auf eine Zahlung in einem einzigen Zustand wird *zustandsbedingter Zahlungsanspruch* genannt.

Wenn für jeden Zustand S_s ($s = 1, 2, \dots, N_S$) ein „reines“ Wertpapier existiert, das genau in diesem Zustand zu einem positiven Rückfluss (und in jedem anderen Zustand zu einem Rückfluss von 0) führt, so kann *explizit* bzw. direkt mit zustandsbedingten Zahlungsansprüchen gehandelt werden. Die Vektoren der Rückflüsse der reinen Wertpapiere sind dann linear unabhängig und der Kapitalmarkt ist unabhängig von der Zahl der „normalen“ Wertpapiere vollständig. Wenn dagegen keine reinen Wertpapiere existieren, muss die Zahl der „normalen“ Wertpapiere (unter Berücksichtigung des risikolosen Wertpapiers der Anlage bzw. Aufnahme von Kapital zum Zinssatz r) mit linear unabhängigen Vektoren von Rückflüssen mit N_S übereinstimmen, damit der Kapitalmarkt vollständig ist; zustandsabhängige Zahlungsansprüche können dann (nur) durch Handel mit Portefeuilles aus normalen Papieren gekauft und verkauft werden. Da im vollkommenen Kapitalmarkt keine Transaktionskosten anfallen, wird hierdurch der Handel mit zustandsbedingten Zahlungsansprüchen nicht beeinträchtigt. Es besteht dann im Grunde gar kein Bedarf an reinen Wertpapieren.

Durch die Kombination von zustandsbedingten Zahlungsansprüchen kann jeder beliebige stochastische Überschuss $\tilde{x}$ auf einfache Weise dupliziert werden, indem man auf jeden Zustand S_s ($s = 1, 2, \dots, N_S$) eine Anzahl zustandsbedingter Zahlungsansprüche auf 1 EUR kauft, die mit dem Überschuss x_s in diesem Zustand übereinstimmt. Die Idee, dass auf einem vollständigen Kapitalmarkt zustandsbedingte Zahlungsansprüche gehandelt und mit diesen beliebige Überschüsse dupliziert werden können, liegt einem kapitalmarkttheoretischen Ansatz zugrunde, der State Preference Ansatz („Zustandspräferenzansatz“) genannt wird. Dieser Ansatz wird in den Abschn. 13.3.1 und 13.4 vorgestellt.

Ist der Kapitalmarkt *unvollständig*, ist zwar *keine* universelle Duplizierbarkeit gegeben, d. h. es existiert nicht für jeden beliebigen Überschuss ein Duplikationsportefeuille. Jedoch kann dennoch im konkreten Einzelfall ein Duplikationsportefeuille existieren; möglicherweise kann ein Überschuss mit einem einzigen oder mit nur wenigen Wertpapieren dupliziert werden. Ein sicherer Überschuss x kann in besonders einfacher Weise dupliziert werden, nämlich durch die Anlage des Betrags $B = (1 + r)^{-1} \cdot x$ in das risikolose Wertpapier (also zum sicheren Zinssatz r).

13.2.2.5 Grenzen praktischer Ermittlung von Duplikationsportefeuilles

Wie gezeigt wurde, sind Duplikationsportefeuilles wohldefiniert, es können Bedingungen angegeben werden, unter denen sie existieren, und es kann gezeigt werden, wie sie theoretisch ermittelt werden können. Jedoch stellt die praktische Umsetzung der Idee der Duplikation grundsätzlich hohe Anforderungen an den Entscheider. Er muss Zustände gegeneinander abgrenzen und abschätzen, welcher Überschuss x_s und welche Rückflüsse mit den einzelnen Wertpapieren jeweils erzielt werden. Dabei können praktisch nur relativ wenige Zustände erfasst werden. Der einem Zustand S_s entsprechende Überschuss x_s und die entsprechenden Rückflüsse der Papiere sind dann als Erwartungswerte zu interpretieren und zu schätzen, um die die tatsächlichen Größen streuen. Es ist dann grundsätzlich schwierig zu beurteilen, ob ein bestimmtes Portefeuille eine „gute“ Approximation eines Duplikationsportefeuilles für $\tilde{x}$ ist.

Möglicherweise kann jedoch auf einfache Weise ein Wertpapier oder ein Portefeuille identifiziert werden, das annähernd in die gleiche Risikoklasse fällt wie der Überschuss, etwa ein Portefeuille aus Aktien von Unternehmen der gleichen Branche. Eventuell kann auch eine Realinvestition derselben oder einer ähnlichen Risikoklasse als Vergleichsinvestition dienen (Kap. 15, Abschn. 15.4.3).

13.2.3 Arbitrage

13.2.3.1 Arbitragefreiheit als notwendige Bedingung für ein Kapitalmarktgleichgewicht

Wie eingangs erläutert, geht es in diesem Kapitel um die Risikoteilung am Kapitalmarkt und damit um die kapitalmarkttheoretischen Grundlagen der Fundierung von Unternehmenszielen. Die Komplexität der Betrachtung des Kapitalmarktes ergibt sich daraus, dass, anders als in der Portefeuille-Theorie (Kap. 8), nun nicht mehr davon ausgegangen werden kann, dass die Preise der am Markt gehandelten Wertpapiere exogen gegeben sind. Da die Kosten alternativer Risikoteilungen am Kapitalmarkt davon abhängen, zu welchen Preisen die Wertpapiere gehandelt werden können, ist es notwendig, auch Fragen der Preisbildung in diesem Kapitel zu behandeln.

Wesentliche Erkenntnisse über die Preise von Wertpapieren bzw. über Beziehungen zwischen ihnen lassen sich bereits mithilfe von einfachen Arbitrageüberlegungen gewinnen. *Arbitrage* bedeutet „gewinnbringendes Ausnutzen von Preisdifferenzen durch simultanen Kauf und Verkauf von Gütern“ (Franke und Hax 2009, S. 368).

Im einfachsten Fall einer Arbitrage kauft jemand (der Arbitrageur) ein Gut von einem Geschäftspartner und verkauft es gleichzeitig zu einem höheren Preis an einen anderen. Die Differenz zwischen Ein- und Verkaufspreis ist der Arbitragegewinn. Dem Arbitragegewinn des einen entspricht ein gleich hoher Verlust des anderen. Wäre es anders, so könnten sich alle durch Arbitrage bereichern. Niemand nimmt freiwillig und bewusst einen Arbitrageverlust in Kauf. Unvollkommenheiten des Marktes können zu unbewussten Arbitrageverlusten führen. Zum Beispiel weiß jemand nicht, dass er das Gut anderswo billiger einkaufen kann. Bei vollkommenem Markt ist jedoch jeder Akteur über alles informiert. Daher kann es weder Arbitrageverluste noch -gewinne geben. Folglich kostet das Gut überall gleich viel, es gilt das „Gesetz des Einheitspreises“. Dieser Preis kann sich natürlich im Zeitablauf ändern (Franke und Hax 2009, S. 368).

Auf dem Kapitalmarkt erfolgt Arbitrage durch simultanen Kauf und Verkauf einzelner Wertpapiere oder Portefeuilles von Wertpapieren. Eine Arbitragemöglichkeit auf dem Kapitalmarkt gestattet es, Handelsgewinne durch simultanen Kauf und Verkauf von Wertpapieren zu erzielen, die mit keinen oder zumindest mit tolerierbaren Risiken verbunden sind. Gibt es am Kapitalmarkt eine (gewinnbringende) Arbitragemöglichkeit, so kann der Markt nicht im Gleichgewicht sein. Nur wenn keine Arbitragegewinne (mehr) erzielt werden können, der Kapitalmarkt wird dann als „arbitragefrei“ bezeichnet, kann ein Kapitalmarktgleichgewicht vorliegen. Arbitragefreiheit ist daher eine notwendige (wie noch erläutert wird, jedoch keine hinreichende) Bedingung für ein Gleichgewicht.

13.2.3.2 Arbitrage und deren Implikationen für die Preisbildung

Im Folgenden werden mit der Differenzarbitrage und der Dominanzarbitrage zwei Grundformen der Arbitrage erläutert. (Arbitragestrategien können Kombinationen dieser beiden Grundformen darstellen.) Dabei wird gezeigt, wie ein Investor auf der Basis von Duplikationsportefeuilles Arbitragegewinne erzielen kann. Arbitrage und Duplikation sind daher zwei zusammengehörige Grundlagen der Bewertung von Zahlungsansprüchen am Kapitalmarkt. So liegen sie beispielsweise der gesamten Theorie der Bewertung derivativer Finanztitel zugrunde. Die folgenden Darstellungen beruhen auf den in Abschn. 13.2.1 dargestellten Annahmen eines vollkommenen Kapitalmarktes.

Bei der *Differenzarbitrage* („free lunch“) werden Preisunterschiede durch simultanen Kauf und Verkauf von Wertpapieren so ausgenutzt, dass zum Zeitpunkt $t=0$ ein sicherer Arbitragegewinn erzielt wird. Bei der *Dominanzarbitrage* („free lottery“) wird durch Kauf und Verkauf von Wertpapieren zum Zeitpunkt $t=0$ weder ein Gewinn noch ein Verlust erzielt; stattdessen steigt das Vermögen des Investors am Ende der Periode in mindestens einem Zustand S_s , während es in keinem anderen Zustand sinkt. Zur Erläuterung betrachten wir noch einmal das Beispiel in Tab. 13.1 und fügen nun zwei Wertpapiere hinzu (Tab. 13.3).

Die Preise der vier Wertpapiere sind in der letzten Spalte angegeben. Ein Investor kann nun auf zwei Arten einen sicheren Rückfluss in Höhe von 100 EUR zum Zeitpunkt 1 erhalten: Er kann entweder eine Einheit des Papiers 1 kaufen oder dessen Duplikationsportefeuille aus je einer Einheit der Papiere 2 und 3. Da für das Papier 1 90 EUR zu zahlen sind und für die Papiere 2 und 3 zusammen 95 EUR, zeigt sich eine

Tab. 13.3 Beispiel zur Veranschaulichung des Prinzips der Arbitrage

	Rückfluss bzw. Preis in $t = 1$		Anschaffungs- zahlung bzw. Preis in $t = 0$
	S_1	S_2	
Wertpapier 1	100	100	90
Wertpapier 2	100	0	60
Wertpapier 3	0	100	35
Wertpapier 4	55	50	45

gewinnbringende Gelegenheit zur Differenzarbitrage: Es werden die Papiere 2 und 3 leer verkauft und das Papier 1 gekauft, wobei zum Zeitpunkt 0 ein Einzahlungsüberschuss von $(95 - 90) = 5$ EUR erzielt wird. Da der Überschuss des gesamten Portefeuilles am Ende der Periode in jedem Zustand gleich null ist, beträgt der sichere Arbitragegewinn (zur Bezahlung eines „free lunch“) 5 EUR. Da dieser „free lunch“ möglich ist, kann kein Marktgleichgewicht vorliegen. Ein Gleichgewicht kann nur dann existieren, wenn die Papiere 2 und 3 zusammen ebenso viel kosten wie das Papier 1; nur dann kann Arbitragefreiheit bestehen. Allgemein kann der Kapitalmarkt nur dann arbitragefrei sein, wenn zwei beliebige Portefeuilles, die in jedem Zustand S_s ($s = 1, 2, \dots, N_S$) jeweils denselben Rückfluss aufweisen, zum Zeitpunkt $t=0$ denselben Marktwert haben; Investitionen in beliebige Portefeuilles an Wertpapieren haben dann einen Kapitalwert von null.

Betrachtet man die Wertpapiere 1 und 4, so lässt sich eine Gelegenheit zur Dominanzarbitrage erkennen: Durch Leerverkauf einer Einheit des Wertpapiers 1 und Kauf von zwei Einheiten des Wertpapiers 4 kann ein Investor ein zusätzliches Einkommen erzielen, falls Zustand S_1 eintritt, ohne zum Zeitpunkt 0 Geld investieren zu müssen und ohne in Zustand S_2 Geld verlieren zu können: Der Verkauf des Wertpapiers 1 finanziert gerade den Kauf der zwei Einheiten von Wertpapier 4. Tritt Zustand S_2 ein, so beträgt der Rückfluss aus dem Portefeuille $2 \cdot 50 - 100 = 0$. Tritt hingegen der Zustand S_1 ein, so macht der Investor einen (bedingten) Arbitragegewinn in Höhe von $2 \cdot 55 - 100 = 10$.

Ist der Kapitalmarkt wie angenommen vollkommen, so kann ein Gleichgewicht nur dann vorliegen, wenn keine gewinnbringenden Arbitragemöglichkeiten mehr gegeben sind, also der Markt „arbitragefrei“ ist.

Arbitrageüberlegungen führen zu Aussagen über Beziehungen zwischen Preisen von Wertpapieren am Kapitalmarkt, die ohne Annahmen über die (Risiko)-Präferenzen und die Wahrscheinlichkeitsvorstellungen bezüglich der Umweltzustände der am Kapitalmarkt agierenden Investoren abgeleitet werden können. Arbitrageüberlegungen reichen allerdings nicht aus, um das Preissystem von Wertpapieren als Ganzes zu bestimmen, da dieses auch von den Risikopräferenzen und Wahrscheinlichkeitsvorstellungen aller Investoren abhängt. Ein Kapitalmarktgleichgewicht ist dadurch gekennzeichnet, dass jeder am Markt handelnde Investor ein individuelles Portefeuilleoptimum erreicht, welches seine Risikopräferenzen und Wahrscheinlichkeitsvorstellungen berücksichtigt, und dass der Markt geräumt ist, d. h. keine unbefriedigte Nachfrage bzw. kein unbefriedigtes Angebot nach einem Wertpapier mehr besteht.

13.3 Charakteristik von Kapitalmarktmodellen

13.3.1 State Preference Ansatz (SPA)

Da Arbitrageüberlegungen lediglich voraussetzen, dass ein höheres Endvermögen (ein höherer Überschuss) einem niedrigerem vorgezogen wird, ist Arbitragefreiheit nur eine notwendige und keine hinreichende Bedingung für ein Marktgleichgewicht. Auch wenn keine Gelegenheiten für Arbitragegewinne bestehen, können Investoren möglicherweise durch Transaktionen auf dem Kapitalmarkt Vorteile erzielen. So können sich Käufe und Verkäufe von Wertpapieren insbesondere deshalb als vorteilhaft erweisen, weil die vorliegende Risikoteilung nicht Pareto-effizient ist. Eine über Arbitrageüberlegungen hinausgehende Erklärung der Preise und eine Analyse der Risikoteilung am Kapitalmarkt setzen konkretere Annahmen über die Portfeuilleentscheidungen der Investoren und entsprechend über ihre Risikopräferenzen und ihre Wahrscheinlichkeitsvorstellungen bezüglich der Zustände voraus. Diese Annahmen kennzeichnen Kapitalmarktmodelle, die aus Gleichgewichtsüberlegungen Aussagen über Wertpapierpreise und die Risikoteilung am Kapitalmarkt ableiten.

Ein solches Kapitalmarktmodell ist der sogenannte *State Preference Ansatz* (Hirshleifer 1966; Robichek und Myers 1965; Myers 1968). Er wird deshalb so bezeichnet, weil er (wie bei der Portfeuilleoptimierung in Kap. 8, Abschn. 8.5) die Umweltzustände explizit betrachtet und außerdem Wertpapierpreise aus den Präferenzen der Investoren abgeleitet werden. Im State Preference Ansatz (SPA) wird unterstellt, dass der Kapitalmarkt vollkommen und vollständig ist. Wie in Abschn. 13.2.2 erläutert wurde, können auf einem vollkommenen und vollständigen Kapitalmarkt für jeden Zustand S_s ($s = 1, 2, \dots, N_S$) unbeschränkt zustandsbedingte Zahlungsansprüche gehandelt (gekauft und verkauft) werden, wobei keine Transaktionskosten anfallen. Definitionsgemäß wirft ein zustandsbedingter Zahlungsanspruch genau dann den entsprechenden Geldbetrag ab, wenn der zugrunde liegende Zustand eintritt. Ein Anspruch auf 1 EUR im Zustand S_s zum Beispiel bringt dem Inhaber bei Eintreten dieses Zustandes 1 EUR; tritt ein anderer Zustand ein, erhält er aus diesem Anspruch keine Zahlung. Im Folgenden bezeichne π_s den Preis zum Zeitpunkt $t=0$ für einen zustandsbedingten Zahlungsanspruch von 1 EUR auf den Zustand S_s ($s = 1, 2, \dots, N_S$).

Im Rahmen des SPA werden die Prämissen 1, 3, 4 und 6 des vollkommenen Kapitalmarktes (Abschn. 13.2.1) wie folgt konkretisiert:

1. Es gibt keine Informationskosten bezüglich der Preise π_s ($s = 1, 2, \dots, N_S$), sie sind allen Akteuren bekannt. Das Gleiche gilt für die Preise und die zustandsabhängigen Rückflüsse aller anderen Wertpapiere.
3. Nicht nur die „normalen“ Wertpapiere, sondern auch *zustandsbedingte Zahlungsansprüche* sind beliebig teilbar; z. B. kann man auch Ansprüche auf einen marginalen Geldbetrag kaufen und verkaufen.

4. Die Investoren sind risikoscheu; ihre Nutzenfunktionen für das Vermögen am Ende der betrachteten Periode sind streng konkav. Sie können auch zustandsabhängig sein.
6. Der Preis π_s , zu dem im Zeitpunkt $t=0$ Ansprüche für einen Zustand S_s gehandelt werden können, ist für alle Unternehmen und private Investoren identisch. (Die Prämisse gleicher Preise gilt auch für alle anderen Wertpapiere.) Auch der (Leer-) Verkauf zustandsbedingter Zahlungsansprüche ist nicht beschränkt.

Die übrigen Prämissen des vollkommenen Kapitalmarktes gelten unverändert.

13.3.2 Capital Asset Pricing Model (CAPM)

Ein anderes Kapitalmarktmodell, in dem ebenfalls nicht nur Wertpapierpreise erklärt, sondern auch die Risikoteilung unter den Investoren anschaulich analysiert werden kann, ist das Capital Asset Pricing Model (CAPM). Das CAPM ist ein einperiodiges Modell zur Erklärung der Preisbildung auf dem Kapitalmarkt, das auf der klassischen Portefeuilletheorie aufbaut. Das Modell wurde in den grundlegenden Arbeiten von Lintner (1965a, b), Mossin (1966) und Sharpe (1964, 1970) entwickelt. Es ist auch heute noch das wichtigste Gleichgewichtsmodell des Kapitalmarktes. Dies liegt daran, dass es aufgrund strenger Voraussetzungen eine einfache Struktur aufweist. Dabei werden (wie bei der Portefeuilleoptimierung in Kap. 8, Abschn. 8.4) einfache Präferenzfunktionen der Investoren unterstellt und die Umweltzustände nicht explizit berücksichtigt, sondern nur implizit über die Erwartungswerte, Varianzen und Kovarianzen der Wertpapierrückflüsse. In Literatur und Praxis wird auch bei der Analyse von Entscheidungs- und Bewertungsproblemen im Mehrperioden-Fall regelmäßig auf das einperiodige CAPM zurückgegriffen (vgl. Kap. 15, Abschn. 15.4).

Im CAPM werden die Prämissen 1, 4 und 6 des vollkommenen Kapitalmarktes (Abschn. 2.1) wie folgt konkretisiert:

1. Die Investoren auf dem Kapitalmarkt haben *homogene* Vorstellungen über die Erwartungswerte, Varianzen und Kovarianzen der Rückflüsse aller Wertpapiere am Periodenende.
4. Die Investoren orientieren sich bei ihren Portefeuilleentscheidungen wie in Kap. 8, Abschn. 8.4, am (μ, σ) -Prinzip und sind risikoscheu. Die Risikoaversion der Investoren kann unterschiedlich hoch sein.
6. Alle privaten Investoren können ebenso wie die Unternehmen Kapital zum risikolosen Zinssatz r aufnehmen und anlegen.

Die übrigen Prämissen des vollkommenen Kapitalmarktes gelten unverändert, insbesondere auch die Annahme der beliebigen Teilbarkeit der Wertpapiere.

13.4 Risikoteilung und Preisbildung am vollständigen Kapitalmarkt: Analyse im State Preference Ansatz

13.4.1 Arbitrageüberlegungen

Die Pareto-effiziente Risikoteilung wurde bereits in Kap. 11 behandelt. Dort ging es um die direkte Aufteilung eines unsicheren Erfolges x auf zwei Personen, A und B, mittels einer Teilungsregel $s(x)$. Diese wurde so festgelegt, dass für jedes mögliche Ergebnis x bzw. jeden möglichen Umweltzustand das Verhältnis der Grenznutzen von A und B identisch ist (Formel (11.9) in Kap. 11, Abschn. 11.4.2). Im Folgenden geht es um die Teilung von Risiken mittels Kauf und Verkauf von Wertpapieren. Indem beispielsweise zwei Investoren A und B Aktien einer Gesellschaft kaufen, teilen sie das Risiko dieser Gesellschaft untereinander und mit allen anderen Aktienbesitzern.

Ist der Kapitalmarkt vollkommen und vollständig, so kann immer über den Kauf und Verkauf von Wertpapieren PARETO-effiziente Risikoteilung unter allen Marktteilnehmern hergestellt werden (Rubinstein 1974; Ingersoll 1987, S. 190–192; Laux 2006a, S. 161 ff.). Dies ist ein zentrales Ergebnis des State Preference Ansatzes (SPA), der im Folgenden für die Analyse der Preisbildung und Risikoteilung am Kapitalmarkt zugrunde gelegt wird. Dabei werden zunächst Preise von Wertpapieren aus Arbitrageüberlegungen abgeleitet, um anschließend weitere Gleichgewichtsüberlegungen anzustellen.

Da der Kapitalmarkt annahmegemäß arbitragefrei ist, lassen sich mit gegebenen Preisen π_s ($s = 1, 2, \dots, N_S$) für zustandsbedingte Zahlungsansprüche auf je 1 EUR die Preise aller anderen Papiere herleiten. Ein Papier i , das im Zustand S_s ($s = 1, 2, \dots, N_S$) den Rückfluss x_{is} aufweist, kann interpretiert werden als ein Portefeuille aus x_{i1} Ansprüchen auf 1 EUR im Zustand S_1 , x_{i2} Ansprüchen auf 1 EUR im Zustand S_2 , ... und x_{iN_S} Ansprüchen auf 1 EUR im Zustand S_{N_S} . Für den Preis dieses Wertpapiers muss (bei Arbitragefreiheit) gelten:

$$P_i = \sum_{s=1}^{N_S} \pi_s \cdot x_{is} \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (13.2)$$

Diese Gleichung folgt aus dem Grundprinzip, das bereits in Abschn. 13.2.2 erläutert wurde: Da der Kapitalmarkt annahmegemäß vollständig ist, können explizit (mit „reinen“ Wertpapieren) oder implizit (über Portefeuillebildung mit „normalen“ Wertpapieren) zustandsbedingte Zahlungsansprüche gehandelt werden, mit denen das Wertpapier i dupliziert werden kann. Da der Preis eines Zahlungsanspruchs auf 1 EUR im Zustand S_s gleich π_s beträgt, ist der Marktwert des Duplikationsportefeuilles gleich dem Summenausdruck auf der rechten Seite von (13.2). P_i muss bei Arbitragefreiheit damit übereinstimmen.

(13.2) kann unmittelbar als (Markt-) Bewertungsfunktion für *alle* Wertpapiere des Typs i interpretiert werden. Handelt es sich also bei Wertpapier i um eine Aktie der Gesellschaft i , so folgt aus (13.2) durch Multiplikation mit der Anzahl der Aktien der Marktwert (der Aktien) dieser Gesellschaft.

Bei der Ermittlung der Preise gemäß (13.2) wird auf die Präferenzen der Investoren nicht direkt Bezug genommen. In diesem Sinne werden die Preise „präferenzfrei“ ermittelt. Jedoch setzt (13.2) voraus, dass die Preise π_s gegeben sind. Diese aber hängen ihrerseits von den Nutzenfunktionen und Wahrscheinlichkeitsvorstellungen der Investoren auf dem Kapitalmarkt ab, sodass die Präferenzen implizit berücksichtigt werden.

Wird zum Zeitpunkt $t=0$ für jeden Zustand S_s ($s = 1, 2, \dots, N_S$) ein Anspruch auf 1 EUR gekauft, so wird zum Zeitpunkt 1 mit Sicherheit eine Einzahlung von 1 EUR erzielt. Dafür ist der Preis $\sum_{s=1}^{N_S} \pi_s$ zu entrichten. Andererseits kann ein sicherer Zahlungsanspruch auf 1 EUR auch dadurch erworben werden, dass $(1+r)^{-1}$ EUR zum risikolosen Zins r angelegt werden. Daher muss bei Arbitragefreiheit gelten:

$$\sum_{s=1}^{N_S} \pi_s = (1+r)^{-1}. \quad (13.3)$$

Die Summe der Preise π_s ist somit gleich dem Abzinsungs- oder Diskontfaktor für einen sicheren Überschuss am Ende der Periode auf der Basis des risikolosen Zinssatzes r . Auch für die risikolose Geldanlage existiert also ein Duplikationsportefeuille, dessen Rendite mit r übereinstimmen muss, wenn keine Arbitragemöglichkeiten bestehen sollen.

13.4.2 Gleichgewichtsüberlegungen

13.4.2.1 Pareto-effiziente Risikoteilung

Die Preise π_s können letztlich nur erklärt werden, indem man explizit die Nutzenfunktionen der Investoren auf dem Kapitalmarkt und ihre Wahrscheinlichkeitsvorstellungen bezüglich der Zustände S_s berücksichtigt. Im Folgenden nehmen wir an, alle Investoren k , $k = 1, 2, \dots, N_K$, hätten dieselben Wahrscheinlichkeitsvorstellungen. Es ist dann nicht notwendig, die Wahrscheinlichkeiten $w(S_s)$ oder Erwartungswerte $E(\cdot)$ investorspezifisch zu indizieren. Zudem gehen wir vereinfachend davon aus, die Nutzenfunktionen der Investoren bezüglich ihres Endvermögens $\tilde{V}_1$ seien zustandsunabhängig.

Wie in Kap. 8, Abschn. 8.5.2.2, gezeigt wurde, gelten für das Portefeuille des Investors k folgende Optimalitätsbedingungen:

$$\sum_{s=1}^{N_S} w(S_s) \cdot x_{is} \cdot U'_k(V_{1k,s}) - (1+r) \cdot P_i \cdot E[U'_k(\tilde{V}_{1k})] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (13.4)$$

Dabei bezeichnen $\tilde{V}_{1k}$ (bzw. $V_{1k,s}$) das riskante Endvermögen des Investors k (bzw. sein Endvermögen im Zustand S_s) und $U'_k(\cdot)$ seinen entsprechenden Grenznutzen *im Optimum*. Die Bedingungen (13.4) gelten unabhängig von den Eigenschaften der gehandelten Wertpapiere. Sie müssen analog auch für einzelne zustandsbedingte Zahlungsansprüche (bzw. für Portefeuilles, die hiermit identische Rückflüsse aufweisen) gelten. Der Rückfluss eines zustandsbedingten Zahlungsanspruchs auf 1 EUR im Zustand S_s beträgt definitionsgemäß in diesem Zustand 1 EUR und in jedem anderen 0 EUR. Da sein Preis π_s beträgt, folgt aus (13.4):

$$w(S_s) \cdot 1 \cdot U'_k(V_{1k,s}) = (1+r) \cdot \pi_s \cdot E[U'_k(\tilde{V}_{1k})] \quad (s = 1, 2, \dots, N_S). \quad (13.5)$$

Interpretation: Wird ausgehend vom optimalen Portefeuille ein zusätzlicher Anspruch von 1 EUR für den Zustand S_s erworben, so wird in diesem Zustand eine Einzahlung von 1 EUR erzielt; der entsprechende Zuwachs des Erwartungswertes des Nutzens für den Investor k beträgt $w(S_s) \cdot 1 \cdot U'_k(V_{1k,s})$. Andererseits muss zum Zeitpunkt 0 ein Preis von π_s gezahlt werden. Entsprechend sinkt das Endvermögen für *jeden* möglichen Zustand S_s um $(1+r) \cdot \pi_s$. Dies bewirkt für den Zustand S_s ($s = 1, 2, \dots, N_S$) eine Nutzeneinbuße von $(1+r) \cdot \pi_s \cdot U'_k(\tilde{V}_{1k,s})$. Mithin sinkt aufgrund der Zahlung des Preises π_s der Erwartungswert des Nutzens um den Betrag $(1+r) \cdot \pi_s \cdot E[U'_k(\tilde{V}_{1k})]$. Gemäß Bedingung (13.5) für das optimale Portefeuille muss dieser Betrag mit der Erhöhung des Erwartungsnutzens übereinstimmen, der der Einzahlung von 1 EUR im Zustand S_s entspricht.

(13.5) kann wie folgt dargestellt werden:

$$\pi_s = (1+r)^{-1} \cdot \frac{w(S_s) \cdot U'_k(V_{1k,s})}{E[U'_k(\tilde{V}_{1k})]} \quad (s = 1, 2, \dots, N_S). \quad (13.6)$$

Mithilfe dieser Bestimmungsgleichungen für die Preise zustandsbedingter Zahlungsansprüche lässt sich unmittelbar nachweisen, dass im Gleichgewicht des SPA das Risiko unter allen Investoren Pareto-effizient geteilt wird. Da nämlich (13.6) im Gleichgewicht für jeden Investor $k = 1, 2, \dots, N_K$ erfüllt sein muss, gilt für je zwei beliebige Investoren k und j :

$$(1+r)^{-1} \cdot \frac{w(S_s) \cdot U'_k(V_{1k,s})}{E[U'_k(\tilde{V}_{1k})]} = (1+r)^{-1} \cdot \frac{w(S_s) \cdot U'_j(V_{1j,s})}{E[U'_j(\tilde{V}_{1j})]} \quad (s = 1, 2, \dots, N_S). \quad (13.7)$$

Nach Umformung von (13.7) folgt für das Grenznutzenverhältnis der beiden Investoren:

$$\frac{U'_k(V_{1k,s})}{U'_j(V_{1j,s})} = \underbrace{\frac{E[U'_k(\tilde{V}_{1k})]}{E[U'_j(\tilde{V}_{1j})]}}_{\lambda} \quad (s = 1, 2, \dots, N_S). \quad (13.8)$$

Das Grenznutzenverhältnis bezüglich der Endvermögenswerte ist also über alle Umweltzustände hinweg konstant; es entspricht dem Verhältnis der Erwartungswerte des Grenznutzens von k und j . (13.8) entspricht der Bedingung (11.9) für Pareto-effiziente Risikoteilung aus Kap. 11: Die Investoren (k und j) teilen also durch den Wertpapierhandel die Wertpapierrisiken untereinander Pareto-effizient auf. Es zeigt sich: Da am vollkommenen und vollständigen Kapitalmarkt ideale Bedingungen bestehen, Risiken zu transformieren, ist es nicht erforderlich, gemäß den Darstellungen in Kap. 11 eine Teilungsregel zur Pareto-effizienten Risikoteilung zu vereinbaren, denn *jede beliebige* Teilungsregel führt in Verbindung mit Transaktionen am Kapitalmarkt zu einer Pareto-effizienten Verteilung.

13.4.2.2 Erklärung der Preise für zustandsbedingte Zahlungsansprüche

Um den Preis eines zustandsbedingten Zahlungsanspruchs π_s zu erklären, ist explizit das Marktgleichgewicht zu betrachten. Darin muss für alle Wertpapiere und damit auch für die zustandsbedingten Zahlungsansprüche die gesamte Wertpapiernachfrage mit dem gesamten Wertpapierangebot übereinstimmen (Bedingung der *Markträumung*). Die Analyse der Höhe der Gleichgewichtspreise unter Berücksichtigung der Nutzenfunktionen und (Anfangs-) Vermögenswerte vor Portfeuillebildung aller Investoren stellt ein äußerst komplexes Problem dar. Sie kann wesentlich vereinfacht werden, „indem man von einem repräsentativen Aktionär ausgeht. Wenn z. B. alle Investoren von denselben Wahrscheinlichkeiten ausgehen, ihre Nutzenfunktion und ihre Anfangsvermögen übereinstimmen, dann stimmen auch ihre optimalen Entscheidungen überein. Ein Investor ist dann repräsentativ für alle Investoren. Aber auch unter schwächeren Voraussetzungen existiert ein repräsentativer Investor“ (Franke und Hax 2009, S. 386).

Bei identischen Wahrscheinlichkeitsvorstellungen, Nutzenfunktionen und Anfangsvermögenswerten hält bei N_K Investoren auf dem Kapitalmarkt jeder Investor den Anteil $z = 1/N_K$ am Bestand aller riskanten Wertpapiere, der als „*Marktportfolio*“ bezeichnet wird. Für das Endvermögen V_{1s} eines repräsentativen Investors im Zustand S_s ($s = 1, 2, \dots, N_S$) gilt somit $V_{1s} = (1/N_K) \cdot x_{Ms}$, wobei x_{Ms} den Rückfluss des Marktportfolios im Zustand S_s bezeichnet. Würde der Investor für einen Zustand einen größeren Teil des Rückflusses x_M halten als für andere Zustände, so müsste das Umgekehrte für mindestens einen anderen Marktteilnehmer gelten. Der Investor k wäre also nicht repräsentativ. Unter Berücksichtigung von $V_{1s,k} = (1/N_K) \cdot x_{Ms}$ folgt aus (13.6):

$$\pi_s = (1 + r)^{-1} \cdot \frac{w(S_s) \cdot U'(x_{Ms}/N_K)}{E[U'(\tilde{x}_M/N_K)]} \quad (s = 1, 2, \dots, N_S). \quad (13.9)$$

Interpretation: $w(S_s)$ bezeichnet die für alle Investoren (Anteilseigner) gleiche Wahrscheinlichkeit für den Zustand S_s und U die für alle gleiche Nutzenfunktion. Da der Grenznutzen mit wachsendem Endvermögen sinkt, ist der Preis für einen Anspruch von 1 EUR im Zustand S_s c. p. umso *niedriger*, je *höher* der Rückfluss des Marktportfolios

in diesem Zustand ist. Der Preis ist c. p. umso *höher*, je *höher* die Wahrscheinlichkeit des Zustandes S_s ist.

Die Annahme „identischer“ Investoren in dem hier beschriebenen Sinne ermöglicht zwar eine einfache und anschauliche Gleichgewichtsanalyse. Jedoch ist diese Annahme wenig realistisch. Grundsätzlich haben die Investoren weder homogene Wahrscheinlichkeitsvorstellungen noch dieselben Nutzenfunktionen und Ausgangsvermögenswerte. Je größer die Zahl der Investoren ist, desto größer ist dann die Zahl der Entscheidungsdeterminanten, die die Gleichgewichtspreise bestimmen, und desto schwieriger wird die Gleichgewichtsanalyse. (Zur Erweiterung und Vertiefung der Darstellungen vgl. L aux 2006a, S. 181 ff. und S. 320 ff.).

Wenn keine vereinfachenden Annahmen getroffen werden, ist zwar die Analyse der Preisbildung unter expliziter Berücksichtigung aller (möglichen) Transaktionen auf dem Kapitalmarkt kaum möglich. Wie in Abschn. 13.4.2.1 für zustandsunabhängige Nutzenfunktionen und homogene Wahrscheinlichkeitsvorstellungen deutlich wurde, kann jedoch in einfacher Weise gezeigt werden, dass im Gleichgewicht des SPA das aus allen Wertpapieren resultierende Risiko Pareto-effizient geteilt wird. Darauf kommen wir in Kap. 14 zurück.

13.5 Lineare Risikoteilung und Preisbildung bei (μ, σ) -Präferenzen: Analyse im CAPM

13.5.1 Von der Portfeuilletheorie zum CAPM

Die Annahmen des CAPM bauen direkt auf den Annahmen der klassischen Portfeuilletheorie auf, in der der Investor ebenfalls ein risikoscheuer (μ, σ) -Entscheider ist. In Kap. 8, Abschn. 8.4.3, wurde gezeigt, dass bei Existenz einer risikolosen Anlage- und Aufnahmemöglichkeit für den Investor nur *ein* Mischungsverhältnis riskanter Wertpapiere existiert, das (μ, σ) -effizient ist. Wie die Wertpapiere zu mischen sind, hängt davon ab, welche Vorstellungen der Investor über die Erwartungswerte, Varianzen und Kovarianzen der Rückflüsse der riskanten Wertpapiere hat.

Im CAPM wird nun angenommen, dass diese Vorstellungen für alle Investoren *identisch* sind. Dann aber muss für alle Investoren die Menge der effizienten Portfeuillees riskanter Wertpapiere ebenfalls *identisch* sein. Die linearen Effizienzkurven im (μ, σ) -Diagramm weisen somit für alle Investoren dieselbe Steigung auf. (Jedoch können sie bei verschiedenen Abszissenwerten $(1+r) \cdot V_0$ ihren Ursprung haben.) Da die effizienten Portfeuillees riskanter Wertpapiere aller Investoren dieselbe Struktur haben, gilt dies auch für ihre optimalen Portfeuillees; sie können sich nur in ihrem Umfang unterscheiden. Da zudem im Marktgleichgewicht alle Papiere des Marktes in den Portfeuillees der Investoren enthalten sein müssen, stellen sich deren Preise zum Zeitpunkt $t=0$ so ein, dass die Struktur jedes individuellen Portfeuillees mit der des *Marktportfeuillees* übereinstimmt, das alle umlaufenden riskanten Wertpapiere enthält. Im Gleichgewicht halten

somit alle Investoren einen Anteil am Marktportefeuille (wobei die Summe der Anteile gleich 1 ist). Grundsätzlich hält jedes Individuum einen positiven Anteil am Marktportefeuille, auch wenn dieser aufgrund hoher Risikoaversion sehr gering sein mag. Damit ist ausgeschlossen, dass Leerverkäufe von Wertpapieren vorgenommen werden; jeder hält von jedem Wertpapier einen positiven Anteil. Wäre es bei gegebenen Preisen für einen Investor optimal, einen Leerverkauf vorzunehmen, so würde dies auch für alle anderen Investoren gelten und niemand wäre bereit, die betreffenden Papiere zu halten.

13.5.2 Risikoteilung im CAPM

Im Folgenden bezeichne z_k den Anteil am Marktportefeuille (das alle umlaufenden risikanten Wertpapiere enthält), den der Investor k im Gleichgewicht hält ($\sum_{k=1}^{N_K} z_k = 1$). Sein Endvermögen beträgt entsprechend $\tilde{V}_{1k} = z_k \cdot \tilde{x}_M + B_k \cdot (1 + r)$, wobei B_k den von Investor k risikolos angelegten (im Falle $B_k < 0$ aufgenommenen) Betrag und $\tilde{x}_M$ den Rückfluss aus dem Marktportefeuille bezeichnen. Für den Erwerb des Anteils z_k am Marktportefeuille zahlt der Investor $z_k \cdot P_M$, wobei P_M den Marktwert des Marktportefeuilles zum Zeitpunkt 0 bezeichnet. Da jeder Investor einen Anteil am Marktportefeuille hält, teilen die Investoren den Rückfluss aus dem Marktportefeuille $\tilde{x}_M$ bzw. das gesamte Risiko linear untereinander auf: Die Risikoteilung im CAPM ist *linear*.

In Kap. 11, Abschn. 11.5, wurde untersucht, welche Gestalt Pareto-effiziente Teilungsregeln haben, wobei vorausgesetzt wurde, dass sich die Investoren explizit am Bernoulli-Prinzip orientieren. Es wurde gezeigt, dass nur bei bestimmten Nutzenfunktionen der Investoren eine lineare Teilungsregel das Risiko Pareto-effizient teilt (und damit gemäß den Darstellungen in Kap. 12, Abschn. 12.5, zugleich auch anreizkompatibel ist). Die sich im CAPM ergebende lineare Risikoteilung ist Pareto-effizient, wenn die Investoren solche Nutzenfunktionen haben und bei diesen ihre (μ, σ) -Präferenzen kompatibel mit der Orientierung am Bernoulli-Prinzip sind. Zwei Fälle sollen hier näher betrachtet werden.

Wie in Kap. 5, Abschn. 5.7.2, erläutert wurde, steht das (μ, σ) -Prinzip bei beliebiger Wahrscheinlichkeitsverteilung im Einklang mit dem Bernoulli-Prinzip, wenn die Nutzenfunktion quadratisch ist. Haben alle Investoren auf dem Kapitalmarkt quadratische Nutzenfunktionen, so ist die lineare Risikoteilung im CAPM für alle Investoren auch Pareto-effizient (Kap. 11, Abschn. 11.5.3.2). Das (μ, σ) -Prinzip steht auch dann im Einklang mit dem Bernoulli-Prinzip, wenn die Nutzenfunktion exponentiell ist und alle Wertpapierrückflüsse normalverteilt sind. Haben alle Investoren exponentielle Nutzenfunktionen, so ist wiederum die lineare Risikoteilung im CAPM Pareto-effizient (Kap. 11, Abschn. 11.5.3.1).

Pareto-Effizienz der linearen Risikoteilung im CAPM hat grundlegende Bedeutung für Investitionsentscheidungen: Es besteht dann nämlich Anreizkompatibilität und damit (weil im CAPM alle Investoren den Erwartungswert ihres finanziellen Nutzens maximieren) Einmütigkeit; wenn eine Investition in einem börsennotierten Unternehmen für

irgendeinen Anteilseigner vorteilhaft ist, gilt dies auch für alle anderen. Darauf kommen wir in Kap. 14 zurück.

Welchen Anteil seines Vermögens ein Investor k ($k = 1, 2, \dots, N_K$) in riskante Wertpapiere und damit in das Marktportefeuille investiert, hängt von seiner Risikoaversion ab. Der Anteil des Investors k am Marktportefeuille im Gleichgewicht hängt allerdings nicht nur von seiner eigenen Risikoeinstellung ab, sondern auch von den Risikoeinstellungen aller anderen Investoren. Dies lässt sich relativ anschaulich für den Fall exponentieller Nutzenfunktionen aller Investoren und Normalverteilung der Rückflüsse der Wertpapiere zeigen. Für diesen Fall ergibt sich die folgende Bedingung für das optimale Portefeuille des Investors k (vgl. hierzu Kap. 8, Abschn. 8.5.3):

$$\frac{E(\tilde{x}_i) - (1+r) \cdot P_i}{\text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{V}_{1k})} = \frac{E(\tilde{V}_{1k}) - (1+r) \cdot V_{0k}}{\text{Var}(\tilde{V}_{1k})} = a_k \quad (k = 1, \dots, N_K). \quad (13.10.k)$$

Hierbei bezeichnet a_k den Risikoaversionskoeffizienten des Investors k und V_{0k} (bzw. $\tilde{V}_{1k}$) sein Barvermögen zum Zeitpunkt 0 (bzw. 1). Da der Investor k im Gleichgewicht des CAPM den (optimalen) Anteil z_k am gesamten Marktportefeuille hält, gelten die beiden Gleichungen $E(\tilde{V}_{1k}) - (1+r) \cdot V_{0k} = z_k \cdot [E(\tilde{x}_M) - (1+r) \cdot P_M]$ und $\text{Var}(\tilde{V}_{1k}) = z_k^2 \cdot \text{Var}(\tilde{x}_M)$. $\tilde{x}_M$ bezeichnet den Marktwert des Marktportefeuilles zum Zeitpunkt 1 und P_M den Marktwert dieses Portefeuilles zum Zeitpunkt 0. $E(\tilde{x}_M) - (1+r) \cdot P_M$ ist die Risikoprämie des Marktportefeuilles, die nachfolgend mit RP_M bezeichnet wird. Aus den Optimumbedingungen (13.10.k) folgt somit:

$$\frac{z_k \cdot RP_M}{z_k^2 \cdot \text{Var}(\tilde{x}_M)} = \frac{RP_M}{z_k \cdot \text{Var}(\tilde{x}_M)} = a_k \quad (k = 1, \dots, N_K). \quad (13.11.k)$$

Der Anteil des Investors k am Marktportefeuille beträgt also

$$z_k = \frac{1}{a_k} \cdot \frac{RP_M}{\text{Var}(\tilde{x}_M)} \quad (k = 1, \dots, N_K). \quad (13.12)$$

Der optimale Anteil des Investors k am Marktportefeuille ist also c. p. eine proportional steigende Funktion seiner Risikotoleranz $1/a_k$. Wird z. B. die Risikotoleranz verdoppelt, steigt der Umfang des Portefeuilles (bei gegebener Struktur) ebenfalls auf das Doppelte. Das Analoge gilt für jeden Anteilseigner $j \neq k$. Der Quotient $RP_M/\text{Var}(\tilde{x}_M)$ stellt die Risikoprämie je Risikoeinheit auf das Marktportefeuille dar und wird als *Marktpreis des Risikos* bezeichnet (vgl. Lintner 1969, S. 363). Summiert man alle Anteile auf, so erhält man gemäß (13.12):

$$\sum_{k=1}^{N_K} z_k = \sum_{k=1}^{N_K} \frac{1}{a_k} \cdot \frac{RP_M}{\text{Var}(\tilde{x}_M)} = \frac{RP_M}{\text{Var}(\tilde{x}_M)} \cdot \sum_{k=1}^{N_K} \frac{1}{a_k}. \quad (13.13)$$

Wegen $\sum_{k=1}^{N_K} z_k = 1$ folgt hieraus für den Marktpreis des Risikos:

$$\frac{RP_M}{\text{Var}(\tilde{x}_M)} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{N_K} \frac{1}{a_k}}. \quad (13.14)$$

Der Marktpreis des Risikos entspricht also dem Kehrwert der Summe der Risikotoleranzen aller Investoren. Dieser Wert wird auch als Marktrisikoaversionskoeffizient oder kurz als *Marktrisikoaversion* bezeichnet (vgl. Lintner 1970, S. 92; Rudolph 1979, S. 79). Setzt man schließlich die Marktrisikoaversion für den Marktpreis des Risikos in (13.12) ein, so erhält man:

$$z_k = \frac{\frac{1}{a_k}}{\sum_{j=1}^{N_K} \frac{1}{a_j}} \quad (k = 1, \dots, N_K). \quad (13.15)$$

Der Anteil des Anteilseigners (Investors) k am Marktportefeuille ist also im Gleichgewicht gleich dem Verhältnis aus seiner eigenen Risikotoleranz zur Summe aller Risikotoleranzen. Je geringer die Risikotoleranz des Anteilseigners k im Verhältnis zur Summe der Risikotoleranzen aller Anteilseigner ist, desto kleiner ist sein Anteil am Marktportefeuille.

13.5.3 Wertpapierpreise im Marktgleichgewicht

13.5.3.1 Gleichgewichtspreise als diskontierte Marktsicherheitsäquivalente

Wie erläutert, lautet für den Fall exponentieller Nutzenfunktionen aller Investoren und Normalverteilung der Rückflüsse aller Wertpapiere die Optimalitätsbedingung für das Wertpapier i im Portefeuille des Investors k ($k = 1, 2, \dots, N_K$):

$$\frac{E(\tilde{x}_i) - (1+r) \cdot P_i}{\text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{V}_{1k})} = \frac{E(\tilde{V}_{1k}) - (1+r) \cdot V_{0k}}{\text{Var}(\tilde{V}_{1k})} = a_k. \quad (13.10.k)$$

Da der Investor k den Anteil z_k am Marktportefeuille hält, gilt

$$\frac{E(\tilde{V}_{1k}) - (1+r) \cdot V_{0k}}{\text{Var}(\tilde{V}_{1k})} = \frac{z_k \cdot [E(\tilde{x}_M) - (1+r) \cdot P_M]}{z_k^2 \cdot \text{Var}(\tilde{x}_M)} \quad (13.16)$$

und

$$\text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{V}_{1k}) = z_k \cdot \text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_M). \quad (13.17)$$

Aus der Optimumbedingung (13.10.k) folgt daher:

$$\frac{E(\tilde{x}_i) - (1+r) \cdot P_i}{z_k \cdot \text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_M)} = \frac{z_k \cdot [E(\tilde{x}_M) - (1+r) \cdot P_M]}{z_k^2 \cdot \text{Var}(\tilde{x}_M)}. \quad (13.18)$$

Löst man diese Bedingung nach P_i , dem Preis des Wertpapiers i im Gleichgewicht des CAPM, auf und schreibt wiederum vereinfachend RP_M für die Marktrisikoprämie $E(\tilde{x}_M) - (1+r) \cdot P_M$, so erhält man:

$$P_i = (1+r)^{-1} \cdot \left[E(\tilde{x}_i) - \frac{RP_M}{\text{Var}(\tilde{x}_M)} \cdot \text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_M) \right]. \quad (13.19)$$

Die Differenz in den eckigen Klammern auf der rechten Seite der Bewertungsfunktion (13.19) kann als *Marktsicherheitsäquivalent* $S\ddot{A}(\tilde{x}_i)$ des riskanten Rückflusses $\tilde{x}_i$ interpretiert werden. Dieses Sicherheitsäquivalent ergibt sich als Differenz zwischen dem Erwartungswert von $\tilde{x}_i$ und einem *Marktrisikoabschlag*, der dem Produkt aus dem Marktpreis des Risikos, $RP_M/\text{Var}(\tilde{x}_M)$, und der Kovarianz $\text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_M)$, entspricht. Gemäß (13.19) ist P_i gleich dem mit dem risikolosen Zinssatz r diskontierten Marktsicherheitsäquivalent.

13.5.3.2 Gleichgewichtspreise und erwartete Renditen

Zwischen dem Wertpapierrückfluss und der Rendite r_i eines Papiers i besteht die Beziehung:

$$\tilde{r}_i = \frac{\tilde{x}_i - P_i}{P_i} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{x}_i = P_i \cdot (1 + \tilde{r}_i). \quad (13.20)$$

Analog gilt für die Rendite r_M des Marktportefeuilles:

$$\tilde{r}_M = \frac{\tilde{x}_M - P_M}{P_M} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{x}_M = P_M \cdot (1 + \tilde{r}_M). \quad (13.21)$$

Setzt man $\tilde{x}_i = P_i \cdot (1 + \tilde{r}_i)$ und $\tilde{x}_M = P_M \cdot (1 + \tilde{r}_M)$ in die Bestimmungsgleichung (13.19) für den Preis des Wertpapiers i ein und formt nach dem Erwartungswert der Rendite dieses Wertpapiers um, so erhält man die *Renditegleichung des CAPM*:

$$E(\tilde{r}_i) = r + \frac{E(\tilde{r}_M) - r}{\text{Var}(\tilde{r}_M)} \cdot \text{Kov}(\tilde{r}_i, \tilde{r}_M) \quad (13.22)$$

Interpretation: Da das Marktportefeuille riskant ist, sind Investoren nur dann bereit, einen Teil dieses Portefeuilles zu halten, wenn sie eine *positive* Risikoprämie erzielen. Somit muss $E(\tilde{r}_M) - r > 0$ gelten. Diese Risikoprämie wird als *Überrendite* des Marktportefeuilles bezeichnet. Da auch $\text{Var}(\tilde{r}_M) > 0$ gilt, ist der Quotient auf der rechten Seite von (13.22), die renditebezogene Risikoprämie je Risikoeinheit des Marktportefeuilles, positiv. Folglich ist der Erwartungswert $E(\tilde{r}_i)$ eine linear steigende Funktion von

$\text{Kov}(\tilde{r}_i, \tilde{r}_M)$. Für $\text{Kov}(\tilde{r}_i, \tilde{r}_M) = 0$ stimmt $E(\tilde{r}_i)$ mit dem risikolosen Zinssatz r überein, bei positiver (bzw. negativer) Kovarianz ist $E(\tilde{r}_i)$ höher (bzw. niedriger) als r .

Die Renditegleichung (13.22) wird regelmäßig in der Form

$$E(\tilde{r}_i) = r + \beta_i \cdot [E(\tilde{r}_M) - r] \quad (13.23)$$

geschrieben (Renditegleichung des CAPM in Standardform). Dabei bezeichnet

$$\beta_i \equiv \frac{\text{Kov}(\tilde{r}_i, \tilde{r}_M)}{\text{Var}(\tilde{r}_M)} \quad (13.24)$$

den sogenannten Beta-Faktor des Wertpapiers i . Ist der Beta-Faktor gleich null, so stimmt gemäß (13.23) der Erwartungswert der Rendite des Wertpapiers i mit dem risikolosen Zinssatz r überein. Ist der Beta-Faktor positiv (bzw. negativ), liegt dieser Erwartungswert über (bzw. unter) r . Für $\beta_i = 1$ entspricht dieser Erwartungswert gerade dem Erwartungswert der Rendite des Marktportefeuilles, $E(\tilde{r}_M)$. Der Beta-Faktor hat nicht nur theoretische Bedeutung. Er wird von der Praxis der Finanzanalyse allgemein genutzt. Auch in die Praxis der Investitionsrechnung und der Unternehmensbewertung sind daraus abgeleitete Verfahren der rechnerischen Berücksichtigung des Risikos eingegangen (Rudolph 1979; Hachmeister 2000).

Mithilfe der Renditegleichung (13.23) des CAPM lässt sich der Marktpreis P_i des Wertpapiers i wegen $E(\tilde{x}_i) = P_i \cdot [1 + E(\tilde{r}_i)]$ wie folgt schreiben:

$$P_i = \frac{E(\tilde{x}_i)}{1 + E(\tilde{r}_i)} = [1 + E(\tilde{r}_i)]^{-1} \cdot E(\tilde{x}_i) = \{1 + r + \beta_i \cdot [E(\tilde{r}_M) - r]\}^{-1} \cdot E(\tilde{x}_i). \quad (13.25)$$

Diese Bestimmungsgleichung für P_i entspricht der Ermittlung des Marktwertes des Wertpapiers i nach der sogenannten *Risikozuschlagsmethode*. Bei dieser Methode wird bei der Bewertung das Risiko durch einen Risikozuschlag zum risikolosen Zinssatz r im Kalkulationszinsfuß berücksichtigt. Demgegenüber steht die Ermittlung von P_i als diskontiertes Marktsicherheitsäquivalent von $\tilde{x}_i$ nach der sogenannten *Sicherheitsäquivalentmethode* (vgl. Kap. 7, Abschn. 7.6), bei der gemäß (13.19) das Risiko durch einen Risikoabschlag vom Erwartungswert des zu bewertenden Rückflusses erfasst wird (und die Diskontierung mit dem risikolosen Zinssatz r vorgenommen wird).

Der Erwartungswert $E(\tilde{r}_i)$ kann als risikoangepasster Kalkulationszinsfuß interpretiert werden, mit dem der „Markt“ im Gleichgewicht den Erwartungswert des Rückflusses des Wertpapiers diskontiert. Er bringt die „Renditeforderung“ der Investoren zum Ausdruck.

Im Vergleich zur Preisgleichung (13.25) auf der Basis des Beta-Faktors wird die Preisgleichung (13.19) auf der Basis des Marktsicherheitsäquivalents $\text{SÄ}(\tilde{x}_i)$ von der Praxis der Finanzanalyse kaum genutzt. Der Grund ist, dass die in (13.25) eingehenden Größen einfacher geschätzt werden können, zumal dabei auf umfangreiche Ergebnisse der empirischen Kapitalmarktforschung zurückgegriffen werden kann. (13.19) bietet dagegen den Vorteil, dass damit anschaulich die Determinanten der Preisbildung ana-

lysiert werden können und dabei auch explizit der Einfluss der Risikoeinstellungen der Investoren auf dem Kapitalmarkt gezeigt werden kann. Die Kenntnis dieser Zusammenhänge ist nicht nur von theoretischer Bedeutung, sie erleichtern die Prognose des Einflusses von Investitionen auf Marktwerte. Außerdem eignet sich (13.19) auch besser als (13.25) dazu, den Unterschied zwischen Marktwertmaximierung, Reichtumsmaximierung und Maximierung des Erwartungswertes des finanzwirtschaftlichen Nutzens der Anteilseiner zu untersuchen (Kap. 14, Abschn. 14.3.4).

13.5.3.3 Determinanten der Wertpapierpreise und der Renditen

Wie gezeigt, beträgt der Marktpreis des Wertpapiers i im CAPM-Gleichgewicht in der Formulierung als diskontiertes Marktsicherheitsäquivalent

$$P_i = (1 + r)^{-1} \cdot \left[E(\tilde{x}_i) - \frac{RP_M}{\text{Var}(\tilde{x}_M)} \cdot \text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_M) \right]. \quad (13.19)$$

Dabei ist der Marktrisikoausschlag $[RP_M / \text{Var}(\tilde{x}_M)] \cdot \text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_M)$ umso größer, je größer der Marktpreis des Risikos $RP_M / \text{Var}(\tilde{x}_M)$ und die Kovarianz $\text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_M)$ sind.

Der Marktpreis des Risikos ist aufgrund der Risikoaversion aller Investoren stets positiv. Er ist bei gegebener Varianz $\text{Var}(\tilde{x}_M)$ umso größer, je risikoaverser die Investoren sind und je weniger Investoren es gibt: Je risikoaverser die Investoren sind, desto größer sind die Risikoabschläge, die sie bei der Bewertung ihrer Portefeuilles vornehmen, und desto größer ist entsprechend auch der Marktpreis des Risikos. Je geringer die Zahl der Investoren am Kapitalmarkt ist, desto geringer ist die Zahl der Personen, auf die das Risiko der Wertpapiere verteilt werden kann, sodass jeder Einzelne entsprechend mehr Risiko tragen muss, was ebenfalls zu einem größeren Marktpreis des Risikos führt. Diese Zusammenhänge lassen sich besonders anschaulich an Formel (13.14) in Abschn. 13.5.2 für den Fall exponentieller Nutzenfunktionen und normalverteilter Wertpapierrückflüsse erkennen; der Marktpreis des Risikos ist dann gleich dem Kehrwert der Summe der Risikotoleranzen aller Investoren am Kapitalmarkt.

Je geringer der Marktpreis des Risikos, desto weniger weicht gemäß (13.19) das Sicherheitsäquivalent vom Erwartungswert von $\tilde{x}_i$ ab. Wäre auch nur einer der Investoren risikoneutral, so wäre der Marktpreis des Risikos gleich null. Dann nämlich sähe die Pareto-effiziente Risikoteilung vor, dass der risikoneutrale Investor das gesamte Marktportefeuille hält und alle anderen Investoren keinerlei Risiko übernehmen. Der risikoneutrale Investor aber würde keine Risikoprämie für die Übernahme von Risiken verlangen; entsprechend wäre der Marktpreis des Risikos gleich null.

Der Marktrisikoausschlag für das Wertpapier i ist gemäß (13.19) bei gegebenem Marktpreis des Risikos umso größer, je größer das Risiko dieses Wertpapiers, *gemessen als Kovarianz* $\text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_M)$, ist. Dieser Zusammenhang, d. h. die Messung des Risikos eines Papiers nicht über die Varianz seines Rückflusses, sondern über die Kovarianz dieses Rückflusses mit dem Rückfluss aus dem gesamten Marktportefeuille, ist von grundlegender Bedeutung. Für die Bewertung eines Papiers spielen daher nicht nur die Informationen bzw. Erwartungen bezüglich dieses Papiers eine Rolle, sondern auch

die bezüglich aller anderen Papiere. Es zeigen sich wiederum die Implikationen der Bewertung unsicherer Zahlungsansprüche bei Risikoverbund (Kap. 7, Abschn. 7.3.3, und Kap. 8).

Ist die Kovarianz $\text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_M)$ positiv, so ist auch der Marktrisikoabschlag in (13.19) positiv, sodass $P_i < (1+r)^{-1} \cdot E(\tilde{x}_i)$ folgt. Gilt $\text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_M) = 0$, so folgt $P_i = (1+r)^{-1} \cdot E(\tilde{x}_i)$, bei der Bewertung wird also kein Marktrisikoabschlag vorgenommen. Im Fall $\text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_M) < 0$ wird aus dem Marktrisikoabschlag ein *Marktrisiko-zuschlag*, sodass $P_i > (1+r)^{-1} \cdot E(\tilde{x}_i)$ gilt. Bei negativer Kovarianz $\text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_M)$ besteht die Tendenz, dass der Rückfluss des Wertpapiers i gerade dann relativ hoch ist, wenn die Überschüsse aus der Gesamtheit aller Investitionen relativ niedrig und somit die Grenznutzenwerte der Investoren relativ hoch sind. Allerdings dürfte der Fall $\text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_M) < 0$ die Ausnahme sein. Im Allgemeinen ist die Kovarianz $\text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_M)$ deshalb positiv, weil die Marktdaten, von denen $\tilde{x}_M$ abhängt, tendenziell auch $\tilde{x}_i$ in der gleichen Richtung beeinflussen.

Da das Wertpapier i im Marktportefeuille enthalten ist, ist auch dessen Rückfluss $\tilde{x}_i$ im Rückfluss $\tilde{x}_M$ des Marktportefeuilles enthalten, sodass die Kovarianz $\text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_M)$ zum einen $N-1$ „echte“ Kovarianzen des Wertpapiers i mit allen anderen Wertpapieren enthält, zum anderen aber auch die Varianz $\text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_i) = \text{Var}(\tilde{x}_i)$ des Rückflusses des Wertpapiers i . Die $N-1$ „echten“ Kovarianzen können insgesamt eine erheblich größere Bedeutung für den Marktwert P_i haben als die Varianz $\text{Var}(\tilde{x}_i)$ als einzelne Größe; das Varianzrisiko $\text{Var}(\tilde{x}_i)$ hat im Vergleich zu den Kovarianzen einen tendenziell vernachlässigbar geringen Einfluss auf den Marktwert P_i . Dieses Ergebnis entspricht den Darstellungen in Kap. 8, Abschn. 8.6, wonach im Rahmen stark diversifizierter Portefeuilles das Varianzrisiko einzelner Wertpapiere als unsystematisches Risiko praktisch eliminiert werden kann und für das Risiko eines Portefeuilles das Kovarianzrisiko von ausschlaggebender Bedeutung ist.

Die Ergebnisse gelten analog für die erwartete Rendite des Wertpapiers i mit dem Unterschied, dass diese keinen Risikoabschlag, sondern (bei positiver Kovarianz) einen Risikozuschlag enthält:

$$E(\tilde{r}_i) = r + \frac{E(\tilde{r}_M) - r}{\text{Var}(\tilde{r}_M)} \cdot \text{Kov}(\tilde{r}_i, \tilde{r}_M). \quad (13.22)$$

Dieser Risikozuschlag, $\frac{E(\tilde{r}_M) - r}{\text{Var}(\tilde{r}_M)} \cdot \text{Kov}(\tilde{r}_i, \tilde{r}_M)$, ist wiederum das Produkt aus dem Marktpreis des Risikos und dem Risiko, gemessen als Kovarianz, nun jedoch bezogen auf Renditegrößen. Die Risikoeinstellungen der Investoren auf dem Kapitalmarkt finden hier ihren Niederschlag in der Rendite des Marktportefeuilles $\tilde{r}_M$. Jedoch wird der Einfluss anders als in (13.19) nicht explizit ersichtlich.

13.6 Modellvergleich

In den Abschn. 13.4 und 13.5 wurden mit dem SPA und dem CAPM zwei Kapitalmarktmodelle vorgestellt, die es erlauben, die Risikoteilung zwischen Investoren über den Kapitalmarkt zu analysieren. Gleichzeitig liefern die Modelle Bewertungsgleichungen für Wertpapiere im Kapitalmarktgleichgewicht.

Im SPA wird der Marktwert eines Wertpapiers aus den Gleichgewichtspreisen π_s für zustandsbedingte Zahlungsansprüche abgeleitet. Diese wiederum werden aus den optimalen Wertpapiermischungen der Investoren erklärt. Der Preis π_s eines (bedingten) Zahlungsanspruchs auf 1 EUR im Zustand S_s hängt davon ab, wie wahrscheinlich dieser Zustand ist und wie sich der Grenznutzen eines (repräsentativen) Investors in diesem Zustand zum Erwartungswert des Grenznutzens über alle Zustände verhält: Sind alle Investoren in diesem Zustand „arm“, d. h. liefern ihre Portefeuilles geringe Rückflüsse, so sind ihre Grenznutzenwerte für diesen Zustand vergleichsweise hoch und der Preis des betreffenden zustandsbedingten Zahlungsanspruchs ist ebenfalls relativ hoch. Ein Wertpapier, das in „armen“ Zuständen (in denen die Portefeuilles der Investoren relativ niedrige Rückflüsse abwerfen und somit die Grenznutzenwerte relativ hoch sind) vergleichsweise hohe Rückflüsse bietet, hat daher c. p. einen höheren Wert als ein Wertpapier, das zwar denselben Erwartungswert des Rückflusses aufweist, dessen Rückflüsse dagegen in „reichen“ Zuständen vergleichsweise hoch sind.

Ein analoges Ergebnis liefert das CAPM, das Wertpapierpreise aus Gleichgewichtsüberlegungen ableitet, die auf der klassischen Portefeuilletheorie aufbauen. Hier ist der Wert P_i eines Papiers i bei gegebenem Erwartungswert $E(\tilde{x}_i)$ umso größer, je niedriger die Kovarianz $\text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_M)$ ist. Da der Grenznutzen jedes Investors eine monoton fallende Funktion seines Vermögens zum Zeitpunkt 1 und somit auch von x_M ist, kann dieser Zusammenhang wie folgt interpretiert werden: P_i ist umso größer, je größer die „Tendenz“ ist, dass x_i in jenen Zuständen relativ hoch ist, in denen die Grenznutzenwerte der Investoren ebenfalls relativ hoch sind.

SPA und CAPM unterscheiden sich in ihren Annahmen über die Vollständigkeit des Kapitalmarktes: Während im SPA angenommen wird, dass der Kapitalmarkt vollständig ist, fehlt eine solche Annahme im CAPM. Stattdessen wird im CAPM angenommen, alle Investoren seien (μ, σ) -Entscheider, eine Annahme, die sehr einschränkend ist, da von Bernoulli-rationalen Investoren ausgegangen wird. Da das (μ, σ) -Prinzip zudem nicht explizit berücksichtigt, welche Zustände den einzelnen Wertpapierrückflüssen entsprechen, setzt es eine *zustandsunabhängige* Nutzenfunktion voraus. Dies impliziert, dass im CAPM kein Investor auf dem Kapitalmarkt neben dem Überschuss aus seinem Portefeuille riskante private Überschüsse (z. B. aus selbstständiger oder unselbstständiger Arbeit oder Privatvermögen) erzielt, die stochastisch vom Zustand bzw. den Rückflüssen von Wertpapieren abhängen und damit seine optimale Portefeuillestruktur beeinflussen. Wenn solche privaten Einkünfte existieren, so impliziert das CAPM, dass auch Ansprüche darauf am Kapitalmarkt gehandelt werden.

Im SPA wird *nicht* vorausgesetzt, dass sich die Investoren auf dem Kapitalmarkt am (μ, σ) -Prinzip orientieren. Es wird lediglich angenommen, die Nutzenfunktionen für die Rückflüsse aus den Portefeuilles seien streng konkav, wobei sie auch zustandsabhängig sein können. Der Nutzen des Rückflusses eines Portefeuilles kann somit nicht nur von dessen Höhe abhängen, sondern auch davon, in welchem Zustand der Rückfluss erzielt wird, weil zustandsabhängige private Einkünfte erzielt werden. Da die Preise π_s von den Grenznutzenwerten der Investoren abhängen, beeinflussen private Einkünfte indirekt diese Preise.

Im SPA wird auch *nicht* vorausgesetzt, dass die Investoren homogene Wahrscheinlichkeitsvorstellungen über die Zustände haben. Heterogene Erwartungen können daraus resultieren, dass sich die individuellen Informationsstände unterscheiden, aber auch daraus, dass aus denselben Informationen unterschiedliche Schlüsse gezogen werden. Unterschiede in den Informationsständen können insbesondere aus unterschiedlichen Informationskosten der Investoren resultieren. Das CAPM setzt zwar homogene Erwartungen voraus, es lässt sich aber auf heterogene Erwartungen erweitern (Lintner 1969).

Das CAPM und der SPA stellen keine strengen Gegensätze dar. Bei homogenen Erwartungen und unter den Voraussetzungen, bei denen das (μ, σ) -Prinzip aus dem Bernoulli-Prinzip folgt, können die Bewertungsfunktionen des CAPM für riskante Überschüsse in die des SPA überführt werden und umgekehrt (Franke und Hax 2009, S. 388 ff.; Laux 2006a, S. 90 ff.).

13.7 Zusammenfassung

- Ein grundlegendes Problem der (betriebswirtschaftlichen) Entscheidungstheorie besteht darin, welches Ziel den Entscheidungen, die in Unternehmen getroffen werden, zugrunde gelegt werden soll.
- Für die Beurteilung von Unternehmenszielen ist der Kapitalmarkt von entscheidender Bedeutung, weil Investoren durch den Handel mit Unternehmensanteilen die Unternehmensrisiken aufeinander aufteilen. Der Kapitalmarkt dient nicht nur der Preisbildung, sondern auch der Risikoteilung.
- Ein Kapitalmarkt ist vollkommen, wenn es keine Informations- oder Transaktionskosten und keine Steuern gibt, wenn keine Teilbarkeitsprobleme bestehen und wenn alle Teilnehmer gleichen, freien Marktzugang haben, sich an ihrem finanziellen Nutzen orientieren und als Mengenanpasser agieren. Ein Kapitalmarkt ist vollständig, wenn jeder beliebige Überschuss durch ein Portefeuille von Wertpapieren dupliziert werden kann.
- Bei Vollkommenheit und Vollständigkeit des Kapitalmarktes stimmt der Marktwert eines beliebigen Überschusses mit dem seines Duplikationsportefeuilles überein. Notwendige Voraussetzung für ein Gleichgewicht am Kapitalmarkt ist Arbitragefreiheit, d. h. es darf nicht möglich sein, risikolose Gewinne durch das Ausnutzen von Preisunterschieden zu erzielen.

- Eine über Arbitrageüberlegungen hinausgehende Erklärung der Preisbildung und der Risikoteilung am Kapitalmarkt setzt Kapitalmarktmodelle wie den State Preference Ansatz (SPA) oder das Capital Asset Pricing Model (CAPM) voraus, die konkrete Annahmen über die Präferenzen von Investoren machen.
- Der SPA nimmt an, dass Bernoulli-rationale Entscheider auf einem vollkommenen und vollständigen Kapitalmarkt zustandsbedingte Zahlungsansprüche handeln können. Der Marktwert eines Wertpapiers (bzw. irgendeines finanziellen Überschusses) entspricht dann der Summe der Preise aller zustandsbedingten Zahlungsansprüche, die das Wertpapier (den Überschuss) duplizieren. Im SPA wird das Risiko zwischen allen Investoren Pareto-effizient geteilt.
- Das CAPM beruht auf der Theorie der Portfolio Selection und nimmt an, dass risikoaverse (μ, σ) -Entscheider Wertpapiere auf einem vollkommenen aber nicht (notwendigerweise) vollständigen Kapitalmarkt handeln können und homogene Vorstellungen über die Erwartungswerte, Varianzen und Kovarianzen der Rückflüsse aller Wertpapiere haben. Geld kann risikolos zum Zinssatz r angelegt und aufgenommen werden.
- Im Gleichgewicht des CAPM halten alle Investoren einen Anteil am Marktportefeuille, das alle Wertpapiere enthält. Damit ist die Risikoteilung unter allen Investoren linear.
- Der Preis P_i des Wertpapiers i im Gleichgewicht des CAPM, $P_i = (1 + r)^{-1} \cdot [E(x_i) - (RP_M / \text{Var}(x_M)) \cdot \text{Kov}(x_i, x_M)]$, entspricht einem abgezinnten Sicherheitsäquivalent; vom Erwartungswert des Überschusses $E(\tilde{x}_i)$ wird ein Marktrisikoabschlag $(RP_M / \text{Var}(\tilde{x}_M)) \cdot \text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_M)$ vorgenommen.
- Der Preisgleichung des CAPM entspricht die Renditegleichung $E(\tilde{r}_i) = r + \beta_i \cdot [E(\tilde{r}_M) - r]$ mit $\beta_i = \text{Kov}(\tilde{r}_i, \tilde{r}_M) / \text{Var}(\tilde{r}_M)$. Danach erzielt das Wertpapier i eine erwartete Rendite in Höhe des risikolosen Zinssatzes r zuzüglich der Risikoprämie $\beta_i \cdot [E(\tilde{r}_M) - r]$, die dem Produkt aus dem Beta des Wertpapiers (β_i) und der Risikoprämie auf das Marktportefeuille, $E(\tilde{r}_M) - r$, entspricht.

Ergänzende und vertiefende Literatur

Brealey et al. (2013, Kap. 8); Copeland et al. (2013, Kap. 4,6); Franke und Hax (2009, Kap. VII); Hax (1997); Kruschwitz und Husmann (2009, Kap. 4 bis 6); Laux (2006a, Kap. VII und VIII); Lintner (1965a, 1969, 1970); Myers (1968); Rudolph (1979); Schmidt und Terberger (1997, Kap. 9); Sharpe (1964).

13.8 Übungen

Aufgabe 13.1

Betrachten Sie die folgende Tabelle mit den Rückflüssen und Preisen von vier Wertpapieren:

	Rückfluss des Wertpapiers in $t = 1$ in Umweltzustand ...			Preis des Wertpapiers in $t = 0$
	S_1	S_2	S_3	
Wertpapier 1	11	14	17	15,00
Wertpapier 2	6	8	9	7,05
Wertpapier 3	5	6	8	5,80
Wertpapier 4	4	5	6	4,60

- Zeigen Sie an den Wertpapieren 1, 2 und 3, dass in der dargestellten Situation eine Arbitragemöglichkeit im Sinne der Differenzarbitrage („free lunch“) besteht.
- Zeigen Sie an den Wertpapieren 1, 3 und 4, dass in der dargestellten Situation eine Arbitragemöglichkeit im Sinne der Dominanzarbitrage („free lottery“) besteht.

Aufgabe 13.2

Gehen Sie von einem vollkommenen und vollständigen Kapitalmarkt aus, auf dem die folgenden drei riskanten Wertpapiere gehandelt werden. Die Preise in $t=0$ sowie die Überschüsse in den Zuständen S_1 , S_2 und S_3 zum Zeitpunkt 1 sind in der folgenden Tabelle abgebildet:

	S_1	S_2	S_3	Preis in $t=0$
Wertpapier A	24	10	30	20,10
Wertpapier B	20	12	40	21,60
Wertpapier C	36	20	10	22,90

- Kombinieren Sie die Wertpapiere so, dass ein sicherer Rückfluss entsteht. Welche Rendite bietet das so entstandene Wertpapier?
- Kombinieren Sie die Wertpapiere so, dass ein Rückfluss von 1 Geldeinheit (GE) in S_1 und von 0 GE in S_2 und S_3 entsteht. Welchen Preis hat das so entstandene Wertpapier?
- Wiederholen Sie Aufgabenteil b zweimal: Einmal, um ein Wertpapier herzustellen, das einen Rückfluss von 1 GE nur in S_2 (und 0 GE in S_1 und S_3) erbringt, und einmal, um ein Wertpapier herzustellen, das einen Rückfluss von 1 GE nur in S_3 (0 GE in S_1 und S_2) erbringt.
- Vergleichen und Interpretieren Sie die Preise der in den Aufgabenteilen a) bis c) geschaffenen Wertpapiere.
- Ein Investor hat die Möglichkeit, ein Investitionsprojekt zu realisieren, das ihm in den Zuständen S_1 und S_2 jeweils einen Überschuss in Höhe von 32 GE bieten würde. Die Anschaffungsauszahlung für das Projekt beträgt 24,50 GE. Wie hoch muss der Überschuss in S_3 mindestens sein, damit das Projekt bei Marktwertmaximierung von Vorteil ist?

Aufgabe 13.3

Betrachten Sie einen Kapitalmarkt, auf dem zehn Investoren $k = 1, \dots, 10$ mit jeweils identischer Präferenzfunktion $\Phi_k = E(\tilde{V}_{1k}) - 0,01 \cdot \text{Var}(\tilde{V}_{1k})$ jeweils denselben Anteil, d. h. 10 %, an jeder der drei Aktiengesellschaften AG₁, AG₂ und AG₃ halten. (Weitere börsennotierte Unternehmen gibt es nicht.) V_{1k} bezeichnet das Vermögen des Investors k am Ende der Periode. Die erwarteten Rückflüsse der AGs in $t=0,01$ $E(x_{1i})$ ($i = 1, 2, 3$), sowie die Varianzen und Kovarianzen der Rückflüsse sind in der folgenden Tabelle dargestellt. Das Marktportefeuille entspricht den drei AGs, der Rückfluss des Marktportefeuilles ist also gleich der Summe der Rückflüsse der drei AGs. Der risikolose Zinssatz beträgt 2 %. Nehmen Sie an, alle Annahmen des CAPM seien erfüllt.

	$E(x_{1i})$	VAR/KOV	AG ₁	AG ₂	AG ₃
AG ₁	100	AG ₁	2.500	1.750	4.000
AG ₂	300	AG ₂	1.750	10.000	18.000
AG ₃	600	AG ₃	4.000	18.000	40.000

- Der Risikoaversionskoeffizient jedes Investors beträgt wie angegeben $a_k = 0,01$. Bestimmen Sie den Marktrisikoaversionskoeffizienten a_M .
- Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz des Rückflusses des Marktportefeuilles sowie den Wert des Marktportefeuilles zu Periodenbeginn (in $t=0$).
- Bestimmen Sie die Marktwerte der drei AGs in $t=0$ und darauf aufbauend die erwarteten Renditen auf die Aktien der drei AGs.
- Bestimmen Sie die Beta-Faktoren der drei AGs.

Aufgabe 13.4

Betrachten Sie folgende Daten zu zwei Aktien und einen Aktienindex:

	Aktie A	Aktie B
Volatilität (Standardabweichung)	0,36	0,48
Korrelation mit Index	0,8	0,5
Rendite Bundesanleihe	0,02	
Rendite Index	0,08	
Volatilität (Standardabweichung) Index	0,32	

Gehen Sie davon aus, dass das Marktportefeuille im CAPM vereinfachend durch den Index repräsentiert wird.

- Bestimmen Sie die Marktrisiko­prämie, die Betas der Aktien sowie die erwarteten Renditen gemäß CAPM.
- Bestimmen Sie den Marktpreis des Risikos (= Risikoprämie auf den Index pro Einheit Risiko gemessen als Varianz).

- c) Welche Kapitalkostensätze sollte ein Investor für die Bewertung der Aktien jeweils zugrunde legen, wenn er ein Aktienportefeuille hält, dessen Zusammensetzung derjenigen des Index entspricht?
- d) Gehen Sie nun davon aus, ein Investor sei nicht diversifiziert und halte nur Aktien von A bzw. von B. Er nimmt einen Risikozuschlag je Einheit Risiko (gemessen als Varianz) in Höhe des Marktpreises des Risikos vor (vgl. Aufgabenteil b), orientiert sich aber nicht am CAPM, sondern am individuellen Risiko der Aktie (d. h. an σ_A^2 bzw. σ_B^2). Wie hoch ist der Kapitalkostensatz für diesen Investor?
- e) Interpretieren sie die Unterschiede zwischen c) und d).

Aufgabe 13.5

Betrachten Sie einen Kapitalmarkt mit nur einem risikolosen und einem riskanten Wertpapier sowie nur eine Periode ($t=0$ bis $t=1$). Das riskante Wertpapier liefert einen erwarteten Rückfluss von $\mu = 150$ Geldeinheiten (GE) bei einer Standardabweichung von $\sigma = 25$ GE. Das sichere Wertpapier liefert eine Rendite von 4 %. Am Markt handeln 100 Investoren $k = 1, 2, \dots, 100$. Jeder Investor k orientiert sich an der folgenden Präferenzfunktion: $\Phi_k = E(V_{1k}) - 0,5 \cdot a_k \cdot \text{Var}(V_{1k})$. Darin bezeichnet V_{1k} das Vermögen des Investors k in $t=1$. Investor k verfügt über Barmittel V_{0k} in $t=0$, die er in das riskante Wertpapier und die risikolose Anlage investiert. Der Preis des riskanten Wertpapiers beträgt P_0 .

- a) Bestimmen Sie die Nachfrage des Investors k nach dem riskanten Wertpapier allgemein in Abhängigkeit seines Preises P , seines Rückflusses (μ und σ) sowie der Risikoaversion a_k des Investors.
- b) Gehen Sie davon aus, das Angebot des riskanten Wertpapiers sei 1. Bestimmen Sie allgemein den Preis des Wertpapiers im Marktgleichgewicht.
- c) Gehen Sie nun zusätzlich davon aus, es gelte $a_k = 100/k$. D. h. Investor 1 hat eine Risikoaversion von $a_1 = 100$, Investor 2 eine Risikoaversion von $a_2 = 50$, ..., und Investor 100 eine Risikoaversion von $a_{100} = 1$. Berechnen Sie den Gleichgewichtspreis des Wertpapiers und die Wertpapierbestände, die die einzelnen Investoren halten.
- d) Wie wird im Marktgleichgewicht das Risiko unter den Investoren aufgeteilt? Vergleichen Sie die Wertpapierbestände der Investoren mit der Pareto-effizienten Teilungsregel.

13.9 Lösungshinweise

Aufgabe 13.1

- a) Verkauf von WP_1 und Kauf von WP_2 und WP_3 . --- b) Verkauf von WP_1 und Kauf von WP_3 sowie zweimal WP_4 .

Aufgabe 13.2

a) Gewichte der Wertpapiere: -0.1082 (WP_A), 0.0943 (WP_B) und 0.0475 (WP_C) und Vielfache davon; Rendite: $5,26\%$. --- **b)** Gewichte der Wertpapiere: 0.1393 (WP_A), -0.1025 (WP_B) und -0.0082 (WP_C); Preis $= 0,4$. --- **c)** Zustand S_2 : -0.2541 (WP_A), 0.1721 (WP_B) und 0.0738 (WP_C); Preis $= 0,3$. Zustand S_3 : 0.0066 (WP_A), 0.0246 (WP_B) und -0.0180 (WP_C); Preis $= 0,25$. --- **d)** Summe der Wertpapiere aus b) und c) entspricht dem Wertpapier aus a). --- **e)** $8,4$.

Aufgabe 13.3

a) $\alpha_M = 0,001$. --- **b)** $E(x_M) = 1.000$, $\text{Var}(x_M) = 100.000$. Marktwert: $MW_{0M} = 882,35$. --- **c)** Marktwerte: $MW_{01} = 89,95$, $MW_{02} = 264,95$, $MW_{03} = 527,45$; erwartete Renditen: $E(r_1) = 11,17\%$, $E(r_2) = 13,23\%$, $E(r_3) = 13,75\%$. --- **d)** $\beta_1 = 0,8093$, $\beta_2 = 0,9907$, $\beta_3 = 1,0372$.

Aufgabe 13.4

a) Marktrisikoprämie $= 0,06$; $A = 0,9$ und $E(r_A) = 0,074$; $B = 0,75$ und $E(r_B) = 0,065$. --- **b)** $0,5859$. --- **c)** siehe a): $r_A = 0,074$ und $r_B = 0,065$. --- **d)** $r_A = 0,0959$, $r_B = 0,1550$. --- **e)** Unterschied zwischen isoliertem Risiko (Varianz) und Risikobeitrag zum Portefeuille (Kovarianz).

Aufgabe 13.5

a) Investor k kauft den Anteil q_k am riskanten Wertpapier, zahlt dafür $q_k \cdot P$ und legt $V_{0k} - q_k \cdot P$ risikolos an. Damit $V_{1k} = q_k \cdot x + (V_{0k} - q_k \cdot P_0) \cdot (1+i)$ mit x dem Rückfluss des Wertpapiers und i dem risikolosen Zinssatz. $\phi_k = q_k \cdot \mu + (V_{0k} - q_k \cdot P_0) \cdot (1+i) - 1/2 \cdot a_k \cdot q_k^2 \cdot \sigma^2$. Bedingung erster Ordnung: $d\phi_k/dq_k = 0 \Leftrightarrow q_k = (\mu - (1+i) \cdot P_0)/(a_k \cdot \sigma^2)$. --- **b)** Angebot = Nachfrage: $1 = \sigma^2 q_k$. Auflösen nach P liefert $P_0 = (1+i)^{-1} \cdot (\mu - a_M \cdot \sigma^2)$ mit $a_M = (\sum_k 1/a_k)^{-1}$. --- **c)** $a_M = 0,0198$, damit $P_0 = 132,33$. $q_k = 1/a_k \cdot 0,0198$, also $q_1 = 0,000,198$, ..., $q_{10} = 0,00,198$, $q_{100} = 0,0198$. --- **d)** Es besteht Pareto-effiziente Risikoteilung.

Literatur

- Copeland, T.E., Weston, J.F., Shastri, K.: Financial Theory and Corporate Policy, 4. Aufl. Pearson Education Addison-Wesley, Reading (2013)
- Franke, G., Hax, H.: Finanzwirtschaft des Unternehmens und Kapitalmarkt, 6. Aufl. Springer, Berlin (2009)
- Hachmeister, D.: Der Discounted Cash Flow als Maß der Unternehmenswertsteigerung, 4. Aufl. Lang, Frankfurt a. M. (2000)
- Hax, H.: Entwicklung und Bedeutung der betriebswirtschaftlichen Theorie, Festschrift zum 100. Geburtstag von Erich Gutenberg. In: Koch, H. (Hrsg.) Unternehmensfinanzierung und Theorie der Finanzmärkte, S. 57–74. Gabler, Wiesbaden (1997)

- Hirshleifer, J.: Investment Decision under Uncertainty: Applications of the State-Preference Approach. *Q. J. Econ.* **80**, 252–277 (1966)
- Ingersoll, J.E.: *Theory of Financial Decision Making*. Rowman & Littlefield, Totowa (1987)
- Kruschwitz, L., Husmann, S.: *Finanzierung und Investition*, 6. Aufl. Oldenbourg, München (2009)
- Laux, H.: *Wertorientierte Unternehmenssteuerung und Kapitalmarkt*, 2. Aufl. Springer, Berlin (2006)
- Lintner, J.: The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. *Rev. Econ. Stat.* **47**, 13–37 (1965a)
- Lintner, J.: Security prices, risk and maximal gains. *J. Finan.* **20**, 587–615 (1965b)
- Lintner, J.: The aggregation of investor's diverse judgments and preferences in purely competitive security markets. *J. Finan. Quant. Anal.* **4**, 347–400 (1969)
- Lintner, J.: The market price of risk, size of market and investor's risk aversion. *Rev. Econ. Stat.* **52**, 87–99 (1970)
- Mossin, J.: Equilibrium in a capital asset market. *Econometrica* **34**, 768–783 (1966)
- Myers, S.C.: A time-state-preference model of security valuation. *J. Finan. Quant. Anal.* **3**, 1–33 (1968)
- Robichek, A.A., Myers, S.C.: Problems in the theory of optimal capital structure. *J. Finan. Quant. Anal.* **1**, 1–35 (1965)
- Rubinstein, M.: An aggregation theorem for securities markets. *J. Financ. Econ.* **1**, 225–244 (1974)
- Rudolph, B.: Zur Theorie des Kapitalmarktes – Grundlagen, Erweiterungen und Anwendungsbereiche des „Capital Asset Pricing Model (CAPM)“. *Z. Betriebswirtsch.* **49**, 1034–1067 (1979)
- Schmidt, R.H., Terberger, E.: *Grundzüge der Investitions- und Finanzierungstheorie*, 4. Aufl. Gabler, Wiesbaden (1997)
- Sharpe, W.F.: Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *J. Financ.* **19**, 425–442 (1964)
- Sharpe, W.F.: *Portfolio Theory and Capital Markets*. McGraw-Hill, New York (1970)

Unternehmensziele und Entscheidungskriterien im Einperioden-Fall

14

14.1 Problemstellung und Aufbau

Ein Kernproblem der entscheidungsorientierten Betriebswirtschaftslehre ist die theoretische Fundierung finanzwirtschaftlicher Unternehmensziele, die Deduktion damit kompatibler Entscheidungskriterien und die Analyse der Eigenschaften optimaler risikanter unternehmerischer Entscheidungen. Diese Probleme können nicht unabhängig vom Kapitalmarkt als Institution der Risikoteilung bzw. der Risikotransformation und seinen Eigenschaften sinnvoll analysiert werden. Bei der folgenden Analyse solcher Probleme für den Einperioden-Fall wird auf den Darstellungen in Kap. 13 aufgebaut. Dabei wird wie in Kap. 13 stets davon ausgegangen, dass sich der Eigentümer bzw. die Gesellschafter des jeweils betrachteten Unternehmens am Ziel orientieren, den Erwartungswert des Nutzens des Endvermögens zum Zeitpunkt 1 bzw. der finanziellen Überschüsse, kurz seinen bzw. ihren finanziellen „Nutzen“, zu maximieren.

Wir betrachten und vergleichen zwei Unternehmenstypen mit verschiedenen, charakteristischen Eigentümerstrukturen, das börsennotierte Unternehmen und das Einzelunternehmen. Am börsennotierten Unternehmen sei eine große Zahl von Anteilseignern mit breit gestreuten Portefeuilles beteiligt, deren Anteile am Unternehmen jeweils relativ gering sind. Das Einzelunternehmen ist im Eigentum eines individuellen Investors. Dieser teilt das Unternehmensrisiko zwar nicht explizit mit anderen Gesellschaftern, kann es jedoch durch Handel mit Wertpapieren am Kapitalmarkt reduzieren und gegebenenfalls sogar perfekt *hedgen*, d. h. durch Kapitalmarkttransaktionen eliminieren. Die Darstellungen zum Einzelunternehmer gelten unmittelbar auch für einen einzelnen privaten Investor.

Für das börsennotierte Unternehmen stellt sich das Problem, unter welchen Bedingungen bezüglich der Entscheidungen über riskante Maßnahmen Konflikte zwischen den Gesellschaftern herrschen oder Einmütigkeit besteht. Bei Einmütigkeit

erzielen alle Anteilseigner mit beliebigen Maßnahmen zugleich einen Vorteil oder einen Nachteil. Jeder Gesellschafter ist dann in dem Sinne repräsentativ, dass mit der Maximierung seines Nutzens zugleich auch der Nutzen jedes anderen Anteilseigners maximiert wird (kollektive Nutzenmaximierung). Da annahmegemäß alle Investoren ihren finanziellen Nutzen maximieren, folgt Einmütigkeit aus Anreizkompatibilität (Kap. 12, Abschn. 12.2).

Für den Fall der Einmütigkeit geht es darum, ob ein konkretes Ziel für die Unternehmenspolitik existiert, das im Einklang mit den Zielen aller Eigentümer des Unternehmens steht, und wie dieses Ziel aussieht. Die Existenz eines repräsentativen Eigentümers impliziert zwar, dass eine Unternehmenspolitik, die sich an seinem finanziellen Nutzen orientiert, von allen einmütig akzeptiert wird. Jedoch ist das Ziel der Maximierung des finanziellen Nutzens irgendeines Anteilseigners grundsätzlich deshalb nicht operational, weil seine Erwartungen (Wahrscheinlichkeitsvorstellungen) und seine Nutzenfunktion der Unternehmensleitung gar nicht bekannt sein dürften.

Von großer praktischer Bedeutung ist daher die Suche nach einem einmütig akzeptierten und zugleich *operationalisierbaren* Unternehmensziel, das personen-unabhängig als Orientierung für die Unternehmenspolitik vorgegeben werden kann. Es wird gezeigt, dass unter bestimmten Bedingungen die Maximierung des Marktwertes der Aktien des börsennotierten Unternehmens (des Marktwertes des Eigenkapitals bzw. des „Shareholder Value“), kurz die *Marktwertmaximierung*, im Einklang mit kollektiver subjektiver Nutzenmaximierung steht, und welche Gefahren von Fehlentscheidungen bei Marktwertmaximierung bestehen können, wenn diese Bedingungen nicht erfüllt sind.

Das Ziel der Marktwertmaximierung erleichtert die Entscheidungsfindung auch für den Fall, dass der Alleineigentümer eines Unternehmens die Entscheidungskompetenz an einen Entscheidungsträger (einen Geschäftsführer) delegiert. Wie jedoch noch gezeigt wird, ist dieses Ziel für das Einzelunternehmen grundsätzlich wesentlich problematischer als für das börsennotierte.

Der Marktwert des Eigenkapitals kann als Marktwert des Unternehmens aus Sicht des Eigentümers bzw. der Gesellschafter interpretiert werden. Wenn im Folgenden vom Marktwert des Unternehmens die Rede ist, so ist diese Sichtweise gemeint. Dabei ist allerdings zu beachten, dass viele Aussagen, die den Marktwert des Eigenkapitals betreffen, aufgrund der angenommenen Vollkommenheit des Marktes zugleich für den Marktwert des Unternehmens als Ganzes, die Summe aus den Marktwerten des Eigenkapitals und des Fremdkapitals, gelten.

Vereinfachend nehmen wir an, die Investitionen im jeweils betrachteten Unternehmen hätten keinen Einfluss auf die Überschüsse anderer Unternehmen. Es sind dann bei ihrer Vorteilhaftigkeitsbeurteilung keine entsprechenden Auswirkungen auf andere Unternehmen, an denen der oder die Eigentümer des betrachteten Unternehmens sonst noch beteiligt sind, zu berücksichtigen. Restriktionsverbund und Erfolgsverbund sind nicht gegeben, nur Risikoverbund und gegebenenfalls Bewertungsverbund werden explizit betrachtet.

In Abschn. 14.2 wird der State Preference Ansatz (Kap. 13) zugrunde gelegt, der auf der Annahme eines vollkommenen und vollständigen Kapitalmarktes beruht, auf dem

für alle entscheidungsrelevanten Zustände S_s zu Preisen π_s bedingte Zahlungsansprüche gehandelt werden können. Es wird untersucht, welche Beziehung zwischen der Maximierung des Marktwertes und der Maximierung des finanziellen Nutzens des Eigentümers bzw. der Gesellschafter des Unternehmens besteht.

In Abschn. 14.3 wird das CAPM (Kap. 13, Abschn. 13.3.2 und 13.5) zugrunde gelegt. Unter den Voraussetzungen dieses Modells wird der Endwert des Marktportefeuilles bzw. das gesamte Risiko stets *linear* zwischen den Anteilseignern geteilt. Ist diese Teilung Pareto-effizient (und nur dann), besteht Anreizkompatibilität, sodass es möglich ist, simultan die Nutzenerwartungswerte aller Anteilseigner zu maximieren.

Das optimale Investitionsprogramm kann im CAPM auf der Basis der Nutzenfunktion und des Unternehmensanteils eines beliebigen Anteilseigners ermittelt werden, der dann repräsentativ für alle Anteilseigner ist. Unter bestimmten Bedingungen steht auch im CAPM die Maximierung des Marktwertes der Aktien des investierenden Unternehmens annähernd im Einklang mit kollektiver subjektiver Nutzenmaximierung.¹

Abschn. 14.4 befasst sich mit der Frage, inwieweit Marktwertmaximierung als Ziel für das Einzelunternehmen geeignet ist. Es wird gezeigt, dass bei Unvollkommenheit und/oder Unvollständigkeit des Kapitalmarktes der subjektive Grenzpreis eines Bewertungsobjekts, dessen Kauf durch einen individuellen Investor erwogen wird, grundsätzlich niedriger ist als der Marktwert seines Überschusses. Der subjektive Grenzpreis ist diejenige Preisobergrenze, bis zu der bei Kauf der Erwartungswert des Nutzens des Investors steigt. Es wird untersucht, wie die Differenz aus Marktwert und subjektivem Grenzpreis von ihren Determinanten abhängt.

Vor dem Hintergrund der Darstellungen in den Abschn. 14.2, 14.3 und 14.4 wird in Abschn. 14.5 ein Vergleich von Möglichkeiten und Grenzen der theoretischen Fundierung von Zielen für das Einzelunternehmen und das börsennotierte Unternehmen vorgenommen. Dabei zeigt sich, dass Aspekte der Unvollkommenheit und der Unvollständigkeit des Kapitalmarktes das Ziel der Marktwertmaximierung für das börsennotierte Unternehmen (weit) weniger infrage stellen als für das Einzelunternehmen. Auf den Darstellungen aufbauend werden für beide Eigentümerstrukturen charakteristische Probleme der Entscheidung bzw. der Unternehmensplanung dargestellt und verglichen.

In Kap. 15 werden einige der Darstellungen vertieft und auf den Mehrperioden-Fall erweitert.

Wie im vorliegenden und dem nachfolgenden Kapitel deutlich wird, ist der Kapitalmarkt für die Art der Bewertung und die Höhe der Werte von Investitionen von entscheidender Bedeutung. Der Kapitalmarkt ist aber nicht nur in diesem Zusammenhang relevant, sondern praktisch für die Lösung aller Entscheidungsprobleme, bei denen die Ergebnisse (auch) finanzielle Zielgrößen enthalten. Dies gilt auch für die in den Kap. 7 und 9 bis 12 behandelten Probleme.

¹Vgl. hierzu auch Saelzle (1976, S. 153–220); Gillenkirch und Velthuis (1997); Schabel (2004); Laux (2006).

14.2 Nutzenmaximierung und Marktwertmaximierung im State Preference Ansatz

14.2.1 Entscheidungssituation

Im Folgenden betrachten wir zunächst den State Preference Ansatz (SPA), in dem der Kapitalmarkt annahmegemäß vollkommen und vollständig ist. Jeder Investor kann explizit durch Handel mit „reinen“ Wertpapieren oder implizit mit Portefeuilles aus „normalen“ Wertpapieren zustandsbedingte Zahlungsansprüche kaufen und verkaufen. Dabei nimmt jeder Investor deren Preise als *gegeben* hin.

Zunächst betrachten wir einen individuellen Investor, der (etwa als Einzelunternehmer) Investitionen allein durchführt. Ohne Investition ist für ihn im Zustand S_s das Endvermögen (Vermögen am Ende der betrachteten Periode) V_{1s} optimal. Der Marktwert des Endvermögens zum Zeitpunkt $t=0$, den wir mit MV_0 bezeichnen, beträgt dann also ohne die Investition:

$$MV_0 = \sum_{s=1}^{N_S} \pi_s \cdot V_{1s}. \quad (14.1)$$

π_s bezeichnet den Preis für einen Zahlungsanspruch auf 1 EUR im Zustand S_s .

Ein Investitionsprojekt p führe nun zum Zeitpunkt $t=0$ zu einer Auszahlung und zum Zeitpunkt $t=1$ zu einem Überschuss, der zustandsabhängig ist. Der Marktwert dieses Überschusses zum Zeitpunkt $t=0$ wird auch kurz als Marktwert des Projekts M_{0p} bezeichnet und der Marktwert nach Abzug der Anschaffungsauszahlung als dessen Kapitalwert K_{0p} . Der Investor geht davon aus, dass auch Investitionen, die er durchführt (wie seine Transaktionen auf dem Kapitalmarkt), keinen Einfluss auf die Preise π_s haben.

Bezeichnet x_{0p} die Anschaffungsauszahlung und $x_{1p,s}$ den Überschuss der Investition im Zustand S_s zum Zeitpunkt 1, so gilt für den Kapitalwert der Investition, K_{0p} :

$$K_{0p} = \sum_{s=1}^{N_S} \pi_s \cdot x_{1p,s} - x_{0p}. \quad (14.2)$$

Wegen

$$\sum_{s=1}^{N_S} \pi_s = (1+r)^{-1} \quad \text{bzw.} \quad \sum_{s=1}^{N_S} \pi_s \cdot (1+r) = 1,$$

(vgl. Kap. 13, Abschn. 13.4.1), kann man für den Kapitalwert auch schreiben:

$$K_{0p} = \sum_{s=1}^{N_S} \pi_s \cdot \underbrace{[x_{1p,s} - (1+r) \cdot x_{0p}]}_{G_{ps}}. \quad (14.3)$$

G_{ps} bezeichnet den Residualgewinn des Investitionsprojekts im Zustand S_s , d. h. den Gewinn $x_{1,ps} - x_{0p}$ abzüglich der Kapitalkosten $r \cdot x_{0p}$, wobei die Kapitalkosten mit dem risikolosen Zinssatz r berechnet werden. Führt der Investor die Investition durch, so verändert sich der Marktwert seines Endvermögens MV_0 gerade um den Kapitalwert K_{0p} . Der Marktwert MV_0 steigt also, wenn der Kapitalwert positiv ist. Wird die Investition im Unternehmen des Investors (oder einem börsennotierten Unternehmen) durchgeführt, so steigt dessen Marktwert um deren Kapitalwert; Maximierung des Kapitalwertes des gesamten Investitionsprogramms und des Marktwertes des Unternehmens sind identische Ziele.

Der Erwartungswert des Nutzens des betrachteten Investors bezüglich seines Endvermögens verändert sich bei Durchführung des Projekts um:

$$E[U(\tilde{V}_1 + \tilde{G}_p)] - E[U(\tilde{V}_1)] = \sum_{s=1}^{N_S} w(S_s) \cdot [U(V_{1s} + G_{ps}) - U(V_{1s})]$$

sofern er keine Transaktionen auf dem Kapitalmarkt vornimmt.

Der Investor kann allerdings nicht nur die Investition durchführen, sondern begleitend dazu auch zustandsbedingte Zahlungsansprüche bzw. Wertpapiere am Kapitalmarkt handeln. Bezeichnet man den Residualgewinn aus dem Wertpapierhandel des Investors im Zustand S_s mit G_{hs} , so ergibt sich für die Veränderung des Erwartungswertes des Nutzens bei Durchführung des Projekts:

$$E[U(\tilde{V}_1 + \tilde{G}_p + \tilde{G}_h)] - E[U(\tilde{V}_1)] = \sum_{s=1}^{N_S} w(S_s) \cdot [U(V_{1s} + G_{ps} + G_{hs}) - U(V_{1s})]. \quad (14.4)$$

Die Investition ist vorteilhaft, wenn ihr in Verbindung mit den entsprechenden *optimalen* Kapitalmarkttransaktionen eine positive Änderung gemäß (14.4) entspricht. Dies wiederum hängt bei gegebener Wahrscheinlichkeitsverteilung über den Residualgewinn des Projekts allgemein von den Möglichkeiten ab, Wertpapiere am Kapitalmarkt zu handeln. Das Bewertungskriterium (14.4) gilt analog für den Fall, dass der Investor das Projekt nicht allein, sondern gemeinsam mit anderen Investoren durchführt, wobei dann an die Stelle des Residualgewinns $\tilde{G}_p$ sein Anteil $z \cdot \tilde{G}_p$ daran tritt.

Im Folgenden geht es zunächst um die Frage, ob die beiden Bewertungskriterien Marktwert und Erwartungswert des Nutzens zu denselben Entscheidungen führen, ob also die Bewertungen gemäß (14.3) und (14.4) äquivalent sind. Es wird gezeigt, dass unter Berücksichtigung optimaler Kapitalmarkttransaktionen die Maximierung des Marktwertes eines Investitionsprogramms und damit die Orientierung am Kapitalwert im Einklang mit der Maximierung des Erwartungswertes des Nutzens des Investors steht, sofern er, wie im SPA angenommen wird, unbeschränkt mit zustandsbedingten Zahlungsansprüchen handeln kann und er davon ausgeht, dass seine Investitionen und

Kapitalmarkttransaktionen *keinen* Einfluss auf die Preise π_s ($s = 1, 2, \dots, N_s$) haben.² In Abschn. 14.4 wird untersucht, wie sich Beschränkungen der Leerverkaufsmöglichkeiten auf die Bewertung auswirken.

14.2.2 Kompatibilität von Nutzenmaximierung und Marktwertmaximierung bei Handel mit zustandsbedingten Zahlungsansprüchen

14.2.2.1 Ausgangssituation

Wir betrachten zunächst wieder einen einzelnen Investor und erweitern die Überlegungen danach auf den Fall mehrerer Investoren. Zudem betrachten wir vereinfachend nur zwei Umweltzustände, da hier das Kalkül des Investors anschaulich grafisch verdeutlicht werden kann. Abb. 14.1 zeigt ein (S_{11}, S_{12}) -Diagramm mit dem Endvermögen des Investors in Zustand S_1 auf der Ordinate und dem Endvermögen in Zustand S_2 auf der Abszisse. Der Erwartungswert des Nutzens beträgt

$$E[U(\tilde{V}_1)] = w(S_1) \cdot U(V_{11}) + w(S_2) \cdot U(V_{12}). \quad (14.5)$$

In das Diagramm sind Indifferenzkurven des Investors eingetragen. Einer Indifferenzkurve entsprechen alle (V_{11}, V_{12}) -Kombinationen, die zum gleichen Erwartungswert des Nutzens führen. Je höher der Erwartungswert des Nutzens, desto weiter rechts oben verläuft die Indifferenzkurve. Jede Indifferenzkurve ist bei Risikoaversion des Investors konvex, d. h. ihre Steigung,

$$\frac{dV_{11}}{dV_{12}} = - \frac{w(S_2) \cdot U'(V_{12})}{w(S_1) \cdot U'(V_{11})}, \quad (14.6)$$

sinkt mit zunehmendem V_{12} und abnehmendem V_{11} .

Eine Investition ist offensichtlich dann vorteilhaft, wenn keiner ihrer Residualgewinne negativ und mindestens ein Residualgewinn positiv ist. Deshalb wird angenommen, der Residualgewinn der Investition sei in einem Zustand positiv und in dem anderen negativ: $G_{p1} > 0$ und $G_{p2} < 0$. Der Punkt P_1 in Abb. 14.1 kennzeichne die Ausgangssituation, vor Handel mit zustandsbedingten Zahlungsansprüchen und vor Investition, mit den Endvermögenswerten $\bar{V}_{11}$ (im Zustand S_1) und $\bar{V}_{12}$ (im Zustand S_2). Dabei wird ohne Einschränkung der Allgemeinheit davon ausgegangen, dass der Investor zum Zeitpunkt $t=0$ über kein Barvermögen verfügt. Da die Aufnahme bzw. Anlage von Kapital zum risikolosen Zinssatz r gegenüber einem Handel mit zustandsbedingten Zahlungsansprüchen keinen Vorteil (aber auch keinen Nachteil) mit sich

²Vgl. hierzu Deangelo (1981); Franke und Hax (2009, S. 332 ff.); Grossman und Stiglitz (1977); Rubinstein (1974); Schmidt und Terberger (1997, S. 56 f.); Wilhelm (1983).

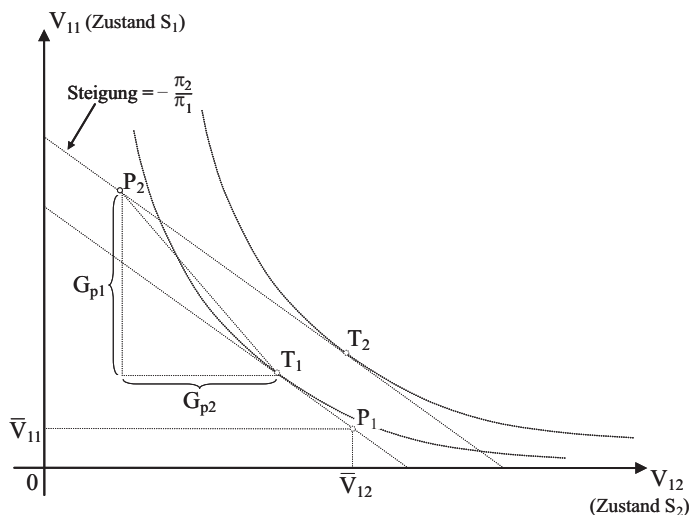


Abb. 14.1 Zur Konformität von Marktwertmaximierung und subjektiver Nutzenmaximierung bei unveränderlichen Preisen für zustandsbedingte Zahlungsansprüche

bringen kann, werden explizit nur Käufe und Verkäufe solcher Zahlungsansprüche berücksichtigt.

Der Investor kann die durch den Punkt P_1 repräsentierte Situation verändern, indem er zustandsbedingte Zahlungsansprüche kauft und verkauft. Dabei gilt: Senkt er das Endvermögen in Zustand S_2 um 1 €, so erzielt er durch den entsprechenden Verkauf des zustandsbedingten Zahlungsanspruchs den Erlös π_2 €. Da ein Zahlungsanspruch für den Zustand S_1 π_1 € kostet, kann er durch die Investition dieses Erlöses in diesen Zahlungsanspruch sein Endvermögen in Zustand S_1 um π_2/π_1 € erhöhen. Das Austauschverhältnis beträgt also π_2/π_1 . Die *Marktwertgerade*, die zum Ausdruck bringt, welche (V_{11}, V_{12}) -Positionen ausgehend von der P_1 entsprechenden Position durch Handel mit zustandsbedingten Zahlungsansprüchen realisiert werden können, ist ebenfalls in Abb. 14.1 eingezeichnet. Ihre Bestimmungsgleichung ist

$$V_{11} = \bar{V}_{11} - \frac{\pi_2}{\pi_1} \cdot (V_{12} - \bar{V}_{12}). \quad (14.7)$$

Die Steigung der Marktwertgerade beträgt also $-\pi_2/\pi_1$. Die Marktwertgerade spiegelt die Budgetrestriktion für den Investor wider: Durch den Kauf und Verkauf zustandsbedingter Zahlungsansprüche kann er seine Endvermögensposition entlang dieser Gerade verändern. Er erreicht damit sein Nutzenmaximum im Punkt T_1 , dem Tangentialpunkt mit einer Indifferenzkurve. T_1 stellt daher die optimale Situation ohne Investition dar.

14.2.2.2 Subjektiver Grenzpreis als Marktwert der Investition

Nun wird das Investitionsprojekt berücksichtigt, dessen Residualgewinne $G_{p1} > 0$ und $G_{p2} < 0$ betragen, und gezeigt, dass der subjektive Grenzpreis des Projekts mit dessen Marktwert übereinstimmt, das Projekt also genau dann zu einem höheren Erwartungswert des Nutzens führt, wenn der Marktwert seines Überschusses höher ist als die Anschaffungsauszahlung.

Führt der Investor das Projekt durch und unternimmt er keine weiteren Maßnahmen, so realisiert er den Punkt P_2 in Abb. 14.1. Dieser Punkt entspricht einem niedrigeren Indifferenzkurvenniveau als T_1 : Die Investition wäre ohne weitere Maßnahmen für den Investor nachteilig. Er kann allerdings wieder zustandsbedingte Zahlungsansprüche kaufen und verkaufen. Die nun relevante Marktwertgerade verläuft parallel zu der ursprünglichen durch den Punkt P_2 . Das neue Nutzenmaximum des Investors liegt im Tangentialpunkt T_2 , dem ein höheres Nutzenniveau als dem Punkt T_1 entspricht: Die Investition ist also *in Verbindung mit dem Kauf und Verkauf zustandsbedingter Zahlungsansprüche* vorteilhaft. Voraussetzung dafür ist allerdings, dass sich die Preise der zustandsbedingten Zahlungsansprüche weder durch die Investition noch durch den Handel des Investors verändern, sondern konstant bleiben.

Das maßgebliche Kriterium für die Vorteilhaftigkeit der Investition in Abb. 14.1 ist damit nicht, auf welcher Indifferenzkurve der Punkt P_2 liegt, sondern auf welcher Marktwertgerade er liegt: Liegt die Marktwertgerade, die durch P_2 läuft, rechts oberhalb der Marktwertgeraden, die durch P_1 (und T_1) verläuft, so liegt auch T_2 rechts oberhalb von T_1 , der Erwartungswert des Nutzens erhöht sich bei Durchführung des Projekts. P_2 liegt nur dann auf derselben Gerade wie P_1 , sodass also das Projekt weder vorteilhaft noch nachteilig ist, wenn gilt:

$$-\frac{\pi_2}{\pi_1} = \frac{G_{p1}}{G_{p2}}, \quad (14.8)$$

d. h. wenn die Steigung der Marktwertgeraden dem Verhältnis der Residualgewinne entspricht. Dann aber gilt, wie eine einfache Umformung von (14.8) zeigt:

$$-\frac{\pi_2}{\pi_1} = \frac{G_{p1}}{G_{p2}} \Leftrightarrow \pi_1 \cdot G_{p1} + \pi_2 \cdot G_{p2} = 0 \Leftrightarrow K_{0p} = 0. \quad (14.9)$$

Das Projekt ist also genau dann weder vorteilhaft noch nachteilig, wenn sein Kapitalwert null ist. Ein Projekt mit $G_{p1} > 0$ und $G_{p2} < 0$ wie in dem in Abb. 14.1 betrachteten Beispiel ist vorteilhaft, wenn der Betrag der Steigung der Marktwertgeraden kleiner ist als der Betrag des (negativen) Verhältnisses der beiden Residualgewinne, d. h. wenn die Verbindungsstrecke zwischen T_1 und P_2 in Abb. 14.1 steiler ist als die Marktwertgerade. Der Kapitalwert des Projektes ist in diesem Falle positiv. Im umgekehrten Falle ist das Projekt nachteilig, der Kapitalwert negativ.

In der Abb. 14.1 dominiert die Endvermögensverteilung nach Investition und optimalem Handel mit zustandsbedingten Zahlungsansprüchen (Punkt T_2) die Endvermögensverteilung vor Investition (Punkt T_1) im Sinne der Zustandsdominanz: T_2 liegt rechts

oberhalb von T_1 . Würden T_1 und T_2 auf einer 45° -Linie liegen, so würden sich die Endvermögen in beiden Zuständen gleich stark erhöhen, und zwar gerade um den mit dem risikolosen Zinssatz r aufgezinsten Kapitalwert der Investition: Durch den Handel mit zustandsbedingten Zahlungsansprüchen würde der Investor das Investitionsrisiko *vollständig hedgen*, d. h. eine sichere Netto-Position schaffen, sodass sich sein Endvermögen um einen sicheren Betrag erhöhen würde.

Besteht die Wahl zwischen zwei einander ausschließenden Projekten, ist jenes mit dem höheren positiven Kapitalwert optimal. Entsprechend steigt der Marktwert des Unternehmens. Die Marktwertmaximierung steht somit bei beliebigen Projektüberschüssen im Einklang mit subjektiver Nutzenmaximierung, sofern auf dem Markt *beliebige* Zahlungsansprüche zu *unveränderlichen* Preisen gekauft und verkauft werden können. Unter dieser Voraussetzung löst sich der Widerspruch zwischen Marktwert- und subjektiver Nutzenmaximierung auf; der subjektive Grenzpreis einer Investition stimmt mit dessen Marktwert überein.

14.2.2.3 Verallgemeinerung auf mehr als zwei Umweltzustände

Die Darstellungen lassen sich ohne Weiteres auf mehr als zwei Zustände übertragen. Man kann dabei vereinfachend von der Fiktion ausgehen, dass der Investor bei Durchführung des Projekts zum Zeitpunkt 0 für jeden Zustand S_s dessen jeweiligen Residualgewinn G_{ps} durch Verkauf bzw. Kauf eines entsprechenden bedingten Zahlungsanspruchs kompensiert. Für Zustände mit positivem Residualgewinn verkauft er jeweils einen gleich hohen Zahlungsanspruch, für Zustände mit negativem kauft er jeweils einen Zahlungsanspruch in Höhe des Verlustes.

Da der Investor verkaufte (gekaufte) Ansprüche zurückkaufen (wieder verkaufen) kann, ist mit den beschriebenen Kapitalmarkttransaktionen kein Nachteil verbunden. Da er am Ende der Periode in jedem Zustand S_s mit positivem Gewinn seine Verpflichtung aus dem jeweiligen Leerverkauf erfüllen kann, indem er den erzielten Residualgewinn an den Käufer abgibt, und da außerdem jeder mögliche Verlust durch den entsprechenden Kauf eines Zahlungsanspruchs kompensiert wird, steht der Überschuss aus den Kapitalmarkttransaktionen zur freien Verfügung. Das Projekt ist somit vorteilhaft, wenn dieser Überschuss positiv ist, also

$$K_{0p} = \sum_{s=1}^{N_S} \pi_s \cdot \underbrace{[x_{1p,s} - (1+r) \cdot x_{0p}]}_{G_{ps}} = \sum_{s=1}^{N_S} \pi_s \cdot x_{1p,s} - x_{0p} > 0 \quad (14.10)$$

gilt, d. h. der Kapitalwert des Projekts positiv ist. Mit diesem Überschuss zum Zeitpunkt 0 kann der Investor zustandsbedingte Zahlungsansprüche erwerben, sodass sich eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über sein Endvermögen ergibt, die jene ohne Durchführung des Projekts dominiert. Je größer die Differenz aus Marktwert und Preis des Bewertungsobjekts (sein Kapitalwert), desto größer ist der Nutzenzuwachs für den Investor. Ist der Preis höher als der Marktwert, ist der Kauf nachteilig.

Analog ist der Marktwert des Überschusses auch der subjektive Grenzpreis für einen potenziellen Verkäufer des Überschusses; nun ist der Verkauf vorteilhaft, wenn der Verkaufserlös höher ist als der Marktwert.

Aufgrund dieser Dominanzüberlegung kann der Investor die Vorteilhaftigkeit des Projekts beurteilen, auch wenn er die konkrete optimale Wahrscheinlichkeitsverteilung über sein Endvermögen weder mit noch ohne Projekt kennt. Wenn das Kriterium (14.10) erfüllt ist, wird das Projekt gekauft und via Handel mit zustandsbedingten Zahlungsansprüchen die entsprechende optimale Wahrscheinlichkeitsverteilung über das gesamte Endvermögen realisiert. Wenn das Projekt nicht gekauft wird, so wird (nur) die optimale Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Status quo bestimmt. Bei der Ermittlung der jeweils optimalen Wahrscheinlichkeitsverteilung über das Endvermögen muss der Nutzenfunktion des Entscheiders (seiner Risikoeinstellung) explizit Rechnung getragen werden. Dagegen kann die Bewertung des Investitionsprojekts selbst davon unabhängig „präferenzfrei“ vorgenommen werden. Die Bewertungen gemäß (14.3) und (14.4) sind bei unbeschränktem Handel mit zustandsbedingten Zahlungsansprüchen stets äquivalent.

Es ist von grundlegender Bedeutung, dass bei der Ermittlung von Marktwerten die Eintrittswahrscheinlichkeiten für die Zustände aus Sicht des Investors nicht explizit berücksichtigt werden, sondern nur die Preise π_s , die allerdings von den Wahrscheinlichkeitsvorstellungen aller Akteure auf dem Kapitalmarkt abhängen. Erst beim Handel mit zustandsbedingten Zahlungsansprüchen zur Erreichung des subjektiven Nutzenmaximums wird diesen Wahrscheinlichkeiten Rechnung getragen, denn sie beeinflussen die Steigungen der Indifferenzkurven.

Für den Fall, dass der Projektüberschuss sicher ist, also $x_{1,ps} = x_{1,p}$ ($s = 1, 2, \dots, N_s$) gilt, degeneriert die Vorteilhaftigkeitsbedingung (14.10) zu:

$$K_{0p} = \sum_{s=1}^{N_s} \pi_s \cdot \underbrace{[x_{1p} - (1+r) \cdot x_{0p}]}_{G_{ps}} = x_{1p} \cdot \sum_{s=1}^{N_s} \pi_s - (1+r) \cdot x_{0p} \cdot \sum_{s=1}^{N_s} \pi_s > 0. \quad (14.10a)$$

Wegen $\sum_{s=1}^{N_s} \pi_s = (1+r)^{-1}$ folgt somit:

$$K_{0p} = (1+r)^{-1} \cdot x_{1p} - x_{0p} > 0. \quad (14.10b)$$

Das Projekt ist jetzt also wieder vorteilhaft, wenn sein Kapitalwert positiv ist. Dieser ist nun gleich dem Barwert des sicheren Überschusses x_{1p} beim risikolosen Zinssatz r abzüglich der Anschaffungsauszahlung. Die Vorteilhaftigkeit des Projekts kann dann in einfacher Weise allein auf der Basis des Zinssatzes r überprüft werden.

14.2.2.4 Verallgemeinerung auf mehrere Investoren

Die Überlegungen lassen sich unmittelbar auf den Fall übertragen, dass die Investition nicht von einem, sondern von mehreren Investoren gemeinsam durchgeführt wird, die proportional an den Überschüssen beteiligt sind. Sind die Investoren Eigenkapitalgeber einer Unternehmung, in der die Investition durchgeführt wird, so gilt: Bei Durchführung

der Investition ändert sich der Marktwert des Vermögens eines Investors, der einen Eigenkapitalanteil in Höhe von z hält, um das z -fache des Kapitalwertes des Projekts. Bei unveränderlichen Preisen π_s ($s = 1, 2, \dots, N_S$) steigt in Verbindung mit den beschriebenen Kapitalmarkttransaktionen der Erwartungswert des Nutzens jedes Investors, wenn der Kapitalwert des Projekts positiv ist. Der Erwartungswert des Nutzens *jedes Investors* wird maximiert, indem der Marktwert des Eigenkapitals (z. B. der Aktien) des Unternehmens maximiert wird; das Marktwertkriterium steht bei unveränderlichen Preisen π_s auch hier in Einklang mit subjektiver Nutzenmaximierung.

Es besteht also Anreizkompatibilität zwischen allen Investoren, die proportional an den Überschüssen beteiligt sind, und zwar unabhängig von deren Risikoeinstellungen. Dieses Ergebnis steht im Widerspruch zu dem Ergebnis des Kap. 12; dort wurde gezeigt, dass eine anreizkompatible Teilungsregel grundsätzlich nicht linear ist (also keine proportionale Risikoteilung vorsieht), sondern nur für Spezialfälle. Der Widerspruch löst sich dadurch, dass man sich klar macht, wie die Existenz des vollkommenen und vollständigen Kapitalmarktes sich auf die Präferenz jedes Investors auswirkt: Jeder Investor orientiert sich am Marktwert, und dieser ist unabhängig von seiner Risikoeinstellung.

14.2.2.5 Marktwertmaximierung und Separation

Existiert ein Markt für zustandsbedingte Zahlungsansprüche und haben die realisierten Projekte keinen Einfluss auf die Preise π_s , kann ein Entscheidungsträger bei proportionaler Teilung der Überschüsse ein für alle Anteilseigner optimales Investitionsprogramm ermitteln, ohne ihre Nutzenfunktionen bzw. Risikoeinstellungen (und Wahrscheinlichkeitsvorstellungen bezüglich der Zustände) explizit zu berücksichtigen („risikopräferenzfreie“ Bewertung). Er muss somit diese Nutzenfunktionen gar nicht kennen und er muss auch keinen Konflikten zwischen Anteilseignern Rechnung tragen. Ausgehend vom optimalen Programm kann dann jeder Anteilseigner durch privaten Kauf und Verkauf zustandsbedingter Zahlungsansprüche die entsprechende optimale Wahrscheinlichkeitsverteilung über sein Endvermögen realisieren, wobei erst dann die individuellen Nutzenfunktionen und Wahrscheinlichkeitsvorstellungen für die Zustände explizit in die Kalküle einzu beziehen sind. Natürlich müssen hierzu die Anteilseigner über die zustandsabhängigen Residualgewinne des gewählten Investitionsprogramms informiert werden. Im vollkommenen Kapitalmarkt ist dies zwar kostenlos möglich, nicht aber in der Realität.

Das Ziel der Marktwertmaximierung setzt nicht voraus, dass im *Unternehmen* die Risiken des Leistungsbereichs durch Kapitalmarkttransaktionen gehedgt werden. Das bedeutet aber nicht, dass Maßnahmen der Risikostreuung für die Anteilseigner irrelevant sind. Wie erläutert, nehmen sie die optimalen Risikotransformationen privat vor. Im Vergleich dazu können sie keinen Vorteil erzielen, wenn Hedgemaßnahmen unternehmensintern durchgeführt werden. Werden Kapitalmarkttransaktionen *nur* im Unternehmen (nicht privat) vorgenommen, ergeben sich für einige oder alle Anteilseigner sogar Nachteile, weil dann keine optimalen Differenzierungen gemäß den individuellen Risikoeinstellungen und Wahrscheinlichkeitsvorstellungen über die Zustände, sondern nur für alle Anteilseigner einheitliche Hedgemaßnahmen realisiert werden können.

Es besteht nicht nur Separierbarkeit zwischen den marktwertorientierten Investitionsentscheidungen im Unternehmen einerseits und den der subjektiven Nutzenmaximierung dienenden Transaktionen der Anteilseigner auf dem Kapitalmarkt andererseits, sondern auch bezüglich der Entscheidungen über verschiedene Investitionsprojekte im Unternehmen, sofern zwischen diesen weder Restriktionsverbund noch Erfolgsverbund besteht. Der (Markt-) Wert eines einzelnen Projekts ist dann unabhängig davon, welche Projekte sonst noch durchgeführt werden. Eine Simultanplanung eines Investitionsprogramms erübrigt sich, sodass die Möglichkeit erheblicher Vereinfachung besteht (vgl. Kap. 18, Abschn. 18.4.3).

14.2.3 Problematik der Annahme eines Wertpapierhandels zu unveränderlichen Preisen

Zwar steht bei (vollkommenem und) vollständigem Kapitalmarkt die Orientierung am Marktwertkriterium im Einklang mit subjektiver Nutzenmaximierung, sofern sich die Preise π_s mit der Durchführung neuer Projekte *nicht ändern*. Damit sollte jedoch eine Rechtfertigung des Ziels der Marktwertmaximierung nicht enden; die Annahme unveränderlicher Preise bedarf ihrerseits einer theoretischen Begründung. Es ist nicht ohne Weiteres sinnvoll, sie mit dem Argument der Vereinfachung ohne Bezug auf die Entscheidungskalküle der Investoren auf dem Kapitalmarkt modellexogen einzuführen.

Wird – wie in Abschn. 14.2.2.1 – davon ausgegangen, dass ein einzelner privater Investor ein Investitionsprojekt (oder ein Investitionsprogramm) erwägt, kann die Bedingung unveränderlicher Preise π_s damit gerechtfertigt werden, dass im State Preference Ansatz ein vollkommener Kapitalmarkt unterstellt wird, auf dem definitionsgemäß ein einzelner Investor (Anteilseigner) praktisch keinen Einfluss auf die Wertpapierpreise hat. Das setzt wiederum voraus, dass das Projekt und die entsprechenden Kapitalmarkttransaktionen des Investors einen relativ geringen „Umfang“ haben.

Wird jedoch davon ausgegangen, dass in einem Unternehmen mit großer Zahl von Anteilseignern ein entsprechend umfangreiches Investitionsprojekt durchgeführt wird, so wird es schwieriger, die Hypothese unveränderlicher Preise π_s sinnvoll zu begründen. Auch wenn ein Einzelner einen vernachlässigbaren Einfluss hat, kann der Einfluss vieler Investoren ins Gewicht fallen. Zur Verdeutlichung betrachten wir Abb. 14.2, die eine leicht veränderte Fassung der Abb. 14.1 darstellt. Betrachtet wird jetzt die Situation aus der Sicht eines Investors, der einen Eigenkapitalanteil von z an dem Unternehmen hält, in dem die Investition durchgeführt wird.

In der Situation der Abb. 14.2 erreicht der betrachtete Investor ausgehend vom Punkt P_2 den Punkt T_2 , indem er zustandsbedingte Zahlungsansprüche auf den Zustand S_1 verkauft und auf den Zustand S_2 kauft. Nun ist aber betrachtete Investor nur einer von vielen Investoren, für die sich die Situation unabhängig von der konkreten Höhe ihres Eigenkapitalanteils in derselben Weise darstellt wie in Abb. 14.2. Das aber bedeutet: Alle Investoren, die an dem betreffenden Unternehmen beteiligt sind, wollen zustandsbedingte

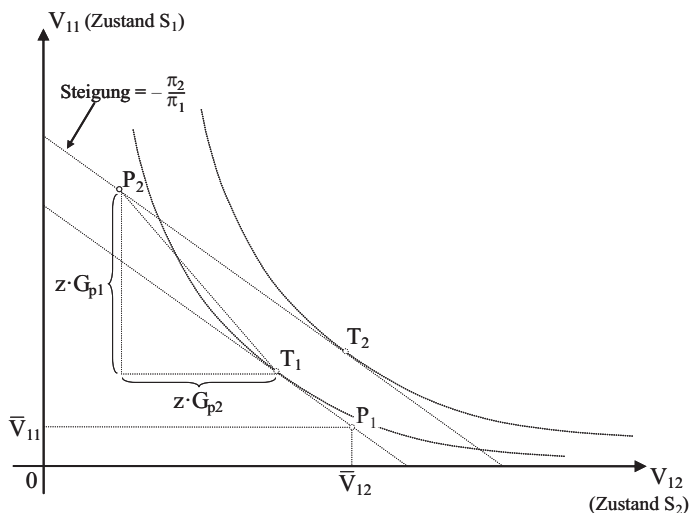


Abb. 14.2 Zur Problematik der Annahme gegebener Preise für zustandsbedingte Zahlungsansprüche

Zahlungsansprüche auf S_1 verkaufen und auf S_2 kaufen. Die Gesamtheit der Kapitalmarkttransaktionen kann also durchaus ins Gewicht fallen. Die Problematik der Annahme eines Handels mit Wertpapieren zu unveränderlichen Preisen zeigt sich am anschaulichsten für den Fall, dass sämtliche Investoren auf dem Kapitalmarkt am betrachteten Unternehmen beteiligt sind: Dann muss der Preis π_2 steigen, und der Preis π_1 muss sinken.

Die Bedingung unveränderlicher Preise π_s kann generell nur sinnvoll analysiert werden, indem die Reaktionen *aller* Anteilseigner berücksichtigt werden. Dann aber erweist sich die Annahme unveränderlicher Preise als problematisch.

14.2.4 Marktwertmaximierung als direkte Nutzenmaximierung bei quasi-konstanten Grenznutzenwerten

14.2.4.1 Nachweis der Kompatibilität von Marktwert- und subjektiver Nutzenmaximierung

Wie erläutert, ist es bei streng konkaven Nutzenfunktionen der Anteilseigner nicht möglich, potenzielle Konflikte zwischen Marktwertwertmaximierung und subjektiver Nutzenmaximierung generell durch Handel mit zustandsbedingten Zahlungsansprüchen zu unveränderlichen Preisen π_s aufzulösen. Der Widerspruch zwischen Marktwertmaximierung und subjektiver Nutzenmaximierung kann dagegen dann nicht auftreten, wenn von der Annahme ausgegangen wird, dass sich bei Durchführung eines Projekts die zustandsabhängigen Grenznutzenwerte aller Anteilseigner (praktisch) nicht ändern, also die maßgeblichen Nutzenfunktionen im planungsrelevanten Bereich (*quasi-*) *linear* verlaufen. Dann wird allerdings durch das Projekt gar kein Handel mit zustandsbedingten

Zahlungsansprüchen ausgelöst, wobei zugleich eine Erklärung dafür gegeben wird, *warum* sich die Preise π_s und somit die Preise beliebiger Wertpapiere, die nicht an den Überschüssen des Unternehmens partizipieren, nicht ändern. Mit Marktwertmaximierung wird dann direkt der subjektive Nutzen jedes Anteilseigners maximiert, sodass Marktwert- und subjektive Nutzenmaximierung (bei proportionaler Überschuss- bzw. Erfolgsbeteiligung) letztlich wieder „identische“ Ziele sind und für jedes Bewertungsobjekt ein kollektiver Grenzpreis existiert, der mit dem Marktwert seines Überschusses übereinstimmt.

Zur Erläuterung dient Abb. 14.3. Der Punkt T_1 kennzeichnet die Position vor Durchführung des Projekts für den betrachteten Anteilseigner. Da in der Ausgangssituation ein Marktgleichgewicht besteht, muss die dem Punkt T_1 entsprechende Indifferenzkurve in T_1 eine Marktwertgerade tangieren. Mithin muss die Indifferenzkurvensteigung in T_1 gleich $-\pi_2/\pi_1$ sein. Die Annahme (quasi-) konstanter zustandsabhängiger Grenznutzenwerte bei Durchführung eines Investitionsprojekts impliziert, dass die Indifferenzkurven im planungsrelevanten Bereich (*quasi*) linear verlaufen und dieselbe Steigung $-\pi_2/\pi_1$ aufweisen. Wenn das Projekt bei den gegebenen Preisen π_1 und π_2 einen positiven Marktwert nach Anschaffungsauszahlung (einen positiven Kapitalwert) aufweist, also zu einer „höheren“ Marktwertgerade für diese Preise führt, führt es direkt auch zu einer Indifferenzkurve mit höherem Nutzenniveau. In Abb. 14.3 bewirkt das Projekt, dass für den betrachteten Anteilseigner die bessere Position P_2^a erreicht wird. Das Analoge gilt bei unveränderlichen Grenznutzenwerten im planungsrelevanten Bereich für alle anderen Anteilseigner.

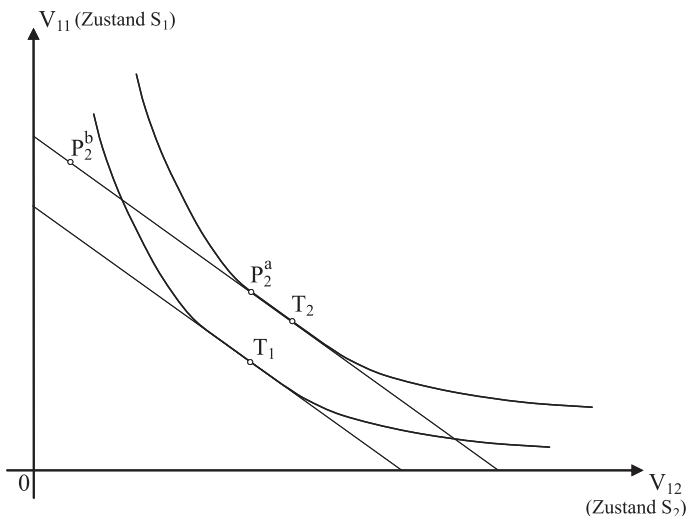


Abb. 14.3 Zur Äquivalenz von subjektiver Nutzenmaximierung und Marktwertmaximierung bei (quasi-)konstanten Grenznutzenwerten im planungsrelevanten Bereich

Wenn sich die Grenznutzenwerte bzw. die Steigungen der Indifferenzkurven (im planungsrelevanten Bereich) nicht ändern, ist bei unveränderlichen Preisen π_1 und π_2 der durch das Projekt induzierte Punkt P_2^a im Indifferenzkurvensystem wiederum Tangentialpunkt einer Indifferenzkurve mit einer Marktwertgeraden. Es wird kein Handel mit zustandsbedingten Zahlungsansprüchen ausgelöst, sodass die Preise π_1 und π_2 in der Tat unveränderlich sind. Marktwertmaximierung steht dann direkt im Einklang mit subjektiver Nutzenmaximierung und nicht indirekt über einen Handel mit zustandsbedingten Zahlungsansprüchen. Entsprechend müssen die Anteilseigner auch nicht über die zustandsabhängigen Projektüberschüsse informiert werden, um optimale Portfeuilleanpassungen (Hedgemaßnahmen) vornehmen zu können.

Würde das Projekt einen Übergang von T_1 auf P_2^b bewirken, würde der Bereich quasi-linear verlaufender Indifferenzkurven für den betrachteten Anteilseigner verlassen. Würde das Gleiche auch für viele andere Anteilseigner gelten, so behielten die Aussagen des Abschn. 14.2.3 ihre Gültigkeit.

14.2.4.2 Relevanz quasi-konstanter Grenznutzenwerte

Die Annahme quasi-konstanter Grenznutzenwerte besagt nicht, dass die individuellen Nutzenfunktionen *durchgehend* linear verlaufen, also „Risikoneutralität“ besteht. Die Grenznutzenwerte können insbesondere aufgrund unterschiedlicher Endvermögenswerte für den einen Zustand hoch und für den anderen niedrig sein. Es wird lediglich vorausgesetzt, dass die Anteile am Projekterfolg in den beiden Zuständen die jeweils maßgeblichen Grenznutzenwerte nicht ändern, diese also lokal „hinreichend konstant“ sind.

Die Annahme unveränderlicher Grenznutzenwerte im planungsrelevanten Bereich ist vor allem dann gerechtfertigt, wenn dieser Bereich hinsichtlich seiner wirtschaftlichen Bedeutung für den Investor klein ist. Dies ist tendenziell dann der Fall, wenn das Projekt einen geringen Umfang hat und viele Anteilseigner mit geringen Anteilen daran beteiligt sind; das Entscheidungskalkül ist dann aus Sicht eines Einzelnen praktisch ein *Marginalkalkül*. Es besteht „partielle“ Anreizkompatibilität, für kleine Änderungen. Während bei einem börsennotierten Unternehmen auch für „große“ Projekte die auf die einzelnen Anteilseigner entfallenden anteiligen Projekterfolge bzw. Überschüsse sehr klein können, impliziert die Annahme quasi-konstanter Grenznutzenwerte für einen individuellen Investor, dass die Investition *selbst* marginal ist; für größere Projekte ist diese Annahme (bei Risikoaversion) kaum sinnvoll begründbar. Die Annahme quasi-konstanter Grenznutzenwerte hat daher für die Begründung der Kompatibilität von Marktwertmaximierung mit subjektiver Nutzenmaximierung grundsätzlich unterschiedliche Bedeutung, je nachdem, ob die Investitionen von einem individuellen Investor durchgeführt werden oder in einem börsennotierten Unternehmen, an dem viele Gesellschafter mit sehr kleinen Anteilen beteiligt sind. Für die Begründung der

Kompatibilität ist im zweiten Fall ein Handel mit Wertpapieren irrelevant; bei konstanten Grenznutzenwerten findet er gar nicht statt.³

Zwar ist die Annahme unveränderlicher Grenznutzenwerte für einen individuellen Investor kaum begründbar, wohl aber die Annahme, dass er keinen Einfluss auf die Preise für zustandsbedingte Zahlungsansprüche hat, sodass für ihn Kompatibilität von Marktwertmaximierung und subjektiver Nutzenmaximierung gemäß den Darstellungen in Abschn. 14.2.2.1 gezeigt werden kann.

Das oben beschriebene Konzept der Begründung der Kompatibilität von Marktwertmaximierung und subjektiver Nutzenmaximierung, bei dem aufgrund konstanter Grenznutzenwerte bei Durchführung neuer Investitionen ein Kapitalmarktgleichgewicht erhalten bleibt, wird im Folgenden als *Gleichgewichtsvariante* bezeichnet, das in den Abschn. 14.2.2.1 und 14.2.2.2 beschriebene Konzept auf der Basis eines Handels mit Wertpapieren zu unveränderlichen Preisen als *Hedgevariante*.

Natürlich sind weder die Annahme, dass bei Durchführung eines neuen Projekts das Risiko durch Handel mit Wertpapieren zu unveränderlichen Preisen gehedgt werden kann, noch die Annahme, dass sich aufgrund quasi-konstanter Grenznutzenwerte dieser Handel erübrigt, streng erfüllt. Sie dienen der Vereinfachung. Die Annahme konstanter Grenznutzenwerte muss jedoch nicht wie der Handel zu unveränderlichen Preisen modellexogen eingeführt werden, sondern kann auf der Basis der Entscheidungskalküle der Investoren erklärt werden.

Hat ein Investitionsprojekt einen Einfluss auf die Grenznutzenwerte, müsste bei der Beurteilung seiner Vorteilhaftigkeit für einen Anteilseigner antizipiert werden, ob und gegebenenfalls wie dieser sein Portefeuille umschichtet und welchen Erwartungswert des Nutzens er hiermit bei Durchführung des Projekts erzielt. Dabei müsste berücksichtigt werden, dass seine optimalen Transaktionen von den Wertpapierpreisen abhängen, die durch die Transaktionen aller Investoren auf dem Kapitalmarkt bestimmt werden.

Es ist unmittelbar einleuchtend, dass eine derart weitreichende Antizipation nur unter stark vereinfachenden Annahmen über die Entscheidungskalküle des betreffenden Anteilseigners und aller anderen Investoren auf dem Kapitalmarkt vorgenommen werden kann. Auf solchen vereinfachenden Annahmen beruht das CAPM, das in Abschn. 14.3 aufgegriffen wird. Auf seiner Grundlage kann auch relativ anschaulich gezeigt werden, welche unterschiedlichen Anforderungen an ein Projekt bei Marktwertmaximierung und subjektiver Nutzenmaximierung gestellt werden.

³Die Annahme konstanter Grenznutzenwerte kann zwar auch für einen Anteilseigner problematisch sein, der einen relativ großen Anteil am Unternehmen hält. Wenn jedoch *andere* Anteilseigner bzw. Investoren auf dem Kapitalmarkt konstante Grenznutzenwerte haben und mithin bereit sind, zu unveränderlichen Preisen zustandsbedingte Zahlungsansprüche zu handeln, orientieren sich wieder alle einmütig am Ziel der Marktwertmaximierung.

14.2.5 Spanning

Im Folgenden ist die Duplizierbarkeit von Projektüberschüssen von Bedeutung. Ein Überschuss ist duplizierbar, wenn ein Portefeuille gebildet werden kann, dessen Rückfluss (in jedem Zustand) mit diesem Überschuss übereinstimmt. (Zur Existenz und Ermittlung eines Duplikationsportefeuilles vgl. Kap. 13, Abschn. 13.2.2.) Damit die Duplizierbarkeit bei beliebiger Wahrscheinlichkeitsverteilung eines Überschusses gelingt, muss zwar der Kapitalmarkt vollständig sein. Je nach der Wahrscheinlichkeitsverteilung kann aber auch bei Unvollständigkeit des Kapitalmarktes der Überschuss eines Projekts duplizierbar sein. Das Projekt ist dann wiederum (bei unbeschränkter Leerverkaufsmöglichkeit des Duplikationsportefeuilles und unveränderlichen Preisen) für alle Anteilseigner vorteilhaft (nachteilig), wenn sein Marktwert größer (kleiner) ist als seine Anschaffungsauszahlung und somit sein Kapitalwert positiv (negativ) ist.

Sind alle in einem Unternehmen realisierbaren Investitionen duplizierbar, so steht unter den dargestellten Voraussetzungen die Maximierung seines Marktwertes im Einklang mit subjektiver Nutzenmaximierung. Die Möglichkeit, die Überschüsse *aller* in einem Unternehmen realisierbaren Projekte zu duplizieren, wird als „*Spanning Property*“ bezeichnet (Grossman und Stiglitz 1977, S. 390; Mossin 1977, S. 128). Die möglichen Überschüsse aller erwogenen Projekte werden dann gewissermaßen durch die bereits am Kapitalmarkt gehandelten Überschüsse „aufgespannt“ (Wilhelm 1983). Im vollständigen Kapitalmarkt ist die Spanning-Bedingung immer erfüllt, sodass universelle Duplizierbarkeit besteht. Ist die Klasse der möglichen Investitionsprojekte eines Unternehmens entsprechend beschränkt, *kann* die Spanning-Bedingung aber auch im *unvollständigen* Kapitalmarkt erfüllt sein.

Ist die Spanning-Bedingung *nicht* erfüllt, so kann trotzdem für einen Teil der Projekte des Unternehmens die Duplikation der Überschüsse möglich sein, sodass für diese Marktwertmaximierung im Einklang mit subjektiver Nutzenmaximierung steht. Bezüglich der anderen Projekte besteht dagegen ein Konflikt zwischen beiden Zielen.

Die Bewertung auf der Grundlage von Duplikationsportefeuilles kann nicht nur deshalb an Grenzen stoßen, weil diese nicht existieren, sondern auch deshalb, weil ihre praktische Ermittlung einen zu hohen Planungsaufwand erfordern würde. Es stellt sich daher das Problem, wie ohne Bezug auf Duplikationsportefeuilles die Vorteilhaftigkeit von Projekten beurteilt werden kann. Einen relativ einfachen und anschaulichen Rahmen hierfür bietet das CAPM.

14.3 Nutzenmaximierung und Marktwertmaximierung im CAPM

14.3.1 Entscheidungssituation

Im Folgenden betrachten wir Investitionen eines börsennotierten Unternehmens im Rahmen des CAPM, in dem sich die Investoren auf dem Kapitalmarkt annahmegemäß am

(μ, σ) -Prinzip orientieren und homogene Erwartungen haben. Die Bewertungsfunktionen dieses Kapitalmarktmodells, die in der Praxis bei der marktwertorientierten Planung und Bewertung oft zugrunde gelegt werden, setzen nicht voraus, dass die entscheidungsrelevanten Überschüsse duplizierbar sind. Aber auch bei Duplizierbarkeit mag ihre Anwendung naheliegen, weil die Ermittlung von Duplikationsportefeuilles Schwierigkeiten bereitet und die Bewertungsfunktionen des CAPM aufgrund seiner strengen Prämissen relativ einfach anwendbar sind. Es fragt sich allerdings, inwieweit unter den Prämissen des CAPM Marktwertmaximierung und subjektive Nutzenmaximierung kompatible Unternehmensziele sind.

In der Praxis der Finanzanalyse wird bei Anwendung des CAPM die Risikozuschlagsmethode unter Berücksichtigung des Beta-Faktors (Kap. 13, Abschn. 13.5.3.2) gegenüber der praktisch schwerer umsetzbaren Sicherheitsäquivalentmethode gemäß (13.19) bevorzugt. Bei der folgenden Analyse der Marktwertmaximierung gehen wir trotzdem von der Sicherheitsäquivalentmethode aus, weil damit die Darstellungen einfacher und anschaulicher werden. Bei der praktischen Investitionsplanung kann die Marktbewertung natürlich trotzdem nach der Risikozuschlagsmethode vorgenommen werden.

Da im CAPM alle Investoren einen Anteil am Marktportefeuille halten, das alle Wertpapiere enthält, sind sie im gleichen Verhältnis auch Anteilseigner des betrachteten Unternehmens; alle Anteilseigner des Unternehmens halten einen Anteil am Marktportefeuille. Wiederum sei in dem Unternehmen eine Investition zu beurteilen, deren Anschaffungsauszahlung x_{0p} und deren Überschuss im Zustand S_s $x_{1,ps}$ betrage. Bei der Darstellung wird ohne Einschränkung der Allgemeinheit angenommen, die Finanzierung der Anschaffungsauszahlung erfolge durch Aufnahme risikolosen Kapitals zum Zinssatz r . Der Residualgewinn des Projekts im Zustand S_s , $G_{ps} = x_{1,ps} - (1 + r) \cdot x_{0p}$, entspricht dann dem Projektüberschuss in diesem Zustand abzüglich der Zinsen und der Tilgungszahlungen. Die Rückflüsse der Aktien des Unternehmens zum Zeitpunkt 1 ändern sich dann um die Residualgewinne des Projekts.

Bei Durchführung des Projekts ändert sich der Erwartungswert des Endvermögens aller Anteilseigner um den Erwartungswert des Residualgewinns des Projekts, $E(\tilde{G}_p) = E(\tilde{x}_{1p}) - (1 + r) \cdot x_{0p}$. Da im Gleichgewicht alle Anteilseigner einen Anteil am Marktportefeuille halten, ist für die Beurteilung der Investition aus Sicht jedes Anteilseigners auch von Bedeutung, wie die Investition das Risiko des Marktportefeuilles verändert. Die Veränderung wird mit $\Delta\sigma^2$ bezeichnet. Sie beträgt:

$$\Delta\sigma^2 = \text{Var}(\tilde{x}_{1p} + \tilde{x}_M) - \text{Var}(\tilde{x}_M) = \text{Var}(\tilde{x}_{1p}) + 2 \cdot \text{Kov}(\tilde{x}_{1p}, \tilde{x}_M). \quad (14.11)$$

Dabei bezeichnet $\tilde{x}_M$ den Marktwert des Marktportefeuilles zum Zeitpunkt 1 vor der Investition. Nachfolgend wird untersucht, welche Beziehung zwischen Marktwertmaximierung und subjektiver Nutzenmaximierung im CAPM besteht und wie jeweils die Vorteilhaftigkeit neuer Projekte beurteilt werden kann. Die Besonderheit des CAPM besteht darin, dass es aufgrund spezieller Annahmen relativ einfache Bewertungsfunktionen für Überschüsse bietet, bei denen die möglichen Umweltzustände nicht

explizit berücksichtigt werden müssen. Zunächst geht es um die Frage, ob ein repräsentativer Anteilseigner existiert, aus dessen Sicht stellvertretend für alle über die Investition optimal entschieden werden kann.

14.3.2 Existenz eines repräsentativen Investors und Vorteilhaftigkeitsbedingung für eine Investition beim Ziel subjektiver Nutzenmaximierung

Da im Gleichgewicht des CAPM jeder Investor auf dem Kapitalmarkt (und damit auch jeder Anteilseigner des Unternehmens) einen Anteil am Marktportefeuille hält, wird das gesamte Risiko unter den Anteilseignern *linear* geteilt. Die Frage, ob es in dieser Situation einen repräsentativen Investor gibt, dessen Entscheidungskriterium von allen anderen Investoren einmütig akzeptiert wird, ist gleichbedeutend mit der Frage, ob unter den Investoren Anreizkompatibilität und damit Einmütigkeit besteht, wenn sich diese, wie angenommen, ausschließlich an den Rückflüssen ihrer Wertpapiere orientieren. In Kap. 12 wurde untersucht, unter welchen Bedingungen eine lineare Risikoteilung anreizkompatibel ist. Dort wurde in Abschn. 12.5 gezeigt, dass Linearität und Pareto-Effizienz der Teilungsregel immer auch implizieren, dass Anreizkompatibilität besteht, jedoch beide Voraussetzungen nur für Spezialfälle erfüllt sind, so z. B. wenn alle Entscheider (hier Anteilseigner) quadratische oder alle exponentielle Nutzenfunktionen haben. Im Fall exponentieller Nutzenfunktionen muss zudem Normalverteilung der Rückflüsse gegeben sein, damit die Orientierung am (μ, σ) -Prinzip kompatibel ist mit dem Bernoulli-Prinzip (Kap. 5, Abschn. 5.7.2.5). Zumindest in diesen beiden Fällen ist *jeder* Investor repräsentativ.

Wir untersuchen im Folgenden explizit nur den Fall exponentieller Nutzenfunktionen und normalverteilter Rückflüsse⁴. In diesem Fall werden (da aufgrund der konstanten absoluten Risikoaversionen kein Reichtumseffekt besteht) bei Durchführung zusätzlicher Investitionen die individuellen Anteile am Marktportefeuille nicht verändert; die Wertpapierpreise und damit die Grenznutzenwerte der Anteilseigner ändern sich so, dass kein Wertpapierhandel stattfindet. Der Vergleich von Marktwertmaximierung und subjektiver Nutzenmaximierung kann daher nicht wie für den SPA auf der Grundlage eines solchen Handels vorgenommen werden. Daher wird im Folgenden modellendogen argumentiert, indem die Implikationen der Bewertungsfunktionen des CAPM und die Risikoaversionen der Anteilseigner, die für ihre Anteile am Marktportefeuille maßgeblich sind, explizit berücksichtigt werden.

⁴Die Annahmenkombination exponentieller Nutzenfunktionen und Normalverteilungen wird häufig verwendet, um in (statischen) Gleichgewichtsmodellen des Kapitalmarktes öffentliche und private Informationen und daraus resultierende Erwartungen abzubilden. Vgl. den Überblick in Gillenkirch (2004, Kap. 3).

Aus der allgemeinen Tatsache, dass Anreizkompatibilität besteht, folgt noch kein konkretes Entscheidungskriterium. Wir betrachten daher einen beliebigen Anteilseigner k und zeigen explizit, welches Vorteilhaftigkeitskriterium beim Ziel der Maximierung des Erwartungswertes seines Nutzens maßgeblich ist. Dabei bestätigt sich, dass dieses Kriterium gleichermaßen für alle anderen Anteilseigner gilt. Danach stellen wir das Kriterium subjektiver Nutzenmaximierung dem der Marktwertmaximierung gegenüber und zeigen charakteristische Unterschiede.

In der Ausgangssituation ohne das neue Projekt bestehe bereits ein Marktgleichgewicht. Darin hält der Investor (der Anteilseigner) k einen Anteil am Marktportefeuille, der mit dem Verhältnis aus seiner Risikotoleranz und der Summe der Risikotoleranzen aller Investoren übereinstimmt (Kap. 13, Abschn. 13.5.2):

$$z_k = \frac{\frac{1}{a_k}}{\sum_{j=1}^{N_K} \frac{1}{a_j}} \quad (k = 1, \dots, N_K). \quad (14.12)$$

Dabei bezeichnet $1/a_k$ die Risikotoleranz des Anteilseigners k und N_K die Zahl der Anteilseigner. Der optimale Anteil eines Investors gemäß (14.12) ändert sich bei Durchführung einer Investition nicht: Zwar mag das Projekt die Wertpapierpreise beeinflussen, dies führt jedoch nicht dazu, dass Handel am Kapitalmarkt ausgelöst wird, denn die Anteile der Investoren am Marktportefeuille hängen allein von deren konstanten Risikotoleranzen bzw. Risikoaversionen ab. Da sich diese durch die Investition nicht ändern, kommt es nicht zum Wertpapierhandel. Die Wertpapierpreise passen sich gerade so an, dass das Marktgleichgewicht erhalten bleibt.

Für die Projektbeurteilung aus Sicht der Investoren sind somit (bei unveränderlichen Risikotoleranzen bzw. exponentiellen Nutzenfunktionen und normalverteilten Rückflüssen) Anteile am Marktportefeuille relevant, die für die betrachtete Periode unveränderlich sind. Der Anteilseigner k beurteilt die Investition anhand des Sicherheitsäquivalents

$$\begin{aligned} & z_k \cdot E(\tilde{G}_p) - \frac{a_k}{2} \cdot z_k^2 \cdot \Delta\sigma^2 \\ \text{mit} \quad & E(\tilde{G}_p) = E(\tilde{x}_{1p}) - (1+r) \cdot x_{0p} \\ \text{und} \quad & \Delta\sigma^2 = \text{Var}(\tilde{x}_{1p} + \tilde{x}_M) - \text{Var}(\tilde{x}_M) = \text{Var}(\tilde{x}_{1p}) + 2 \cdot \text{Kov}(\tilde{x}_{1p}, \tilde{x}_M). \end{aligned} \quad (14.13)$$

Das Projekt ist für den Anteilseigner k vorteilhaft, wenn das Sicherheitsäquivalent (14.13) positiv ist, bzw. wenn (wegen $z_k > 0$) gilt:

$$E(\tilde{G}_p) - \frac{a_k}{2} \cdot z_k \cdot \Delta\sigma^2 > 0. \quad (14.14)$$

Aufgrund der Anreizkompatibilität steigt unter dieser Bedingung auch der Erwartungswert des Nutzens jedes anderen Anteilseigners. Für die Vorteilhaftigkeitsbeurteilung

muss jedoch nicht nur die Risikoaversion des Anteilseigners k bekannt sein, sondern auch sein Anteil am Marktportefeuille. Man kann allerdings die Bedingung (14.14) so umformen, dass sie nur noch marktbezogene Größen enthält. Setzt man in (14.14) die Bestimmungsgleichung (14.12) für z_k ein, erhält man:

$$E(\tilde{G}_p) - \frac{a_k}{2} \cdot \frac{\frac{1}{a_k}}{\sum_{j=1}^{N_K} \frac{1}{a_j}} \cdot \Delta\sigma^2 = E(\tilde{G}_p) - \frac{1}{2} \cdot a_M \cdot \Delta\sigma^2 > 0, \quad (14.15)$$

mit $a_M = \frac{1}{\sum_{j=1}^{N_K} \frac{1}{a_j}},$

wobei a_M die Marktrisikoaversion (den Kehrwert der Marktrisikoaversion, d. h. der Summe der Risikotoleranzen aller Investoren) bezeichnet.

Die Vorteilhaftigkeitsbedingung (14.15) gilt offensichtlich nicht nur für den Anteilseigner k , sondern auch für jeden anderen Anteilseigner $j \neq k$, der den z_j -ten Anteil am Marktportefeuille hält; alle nehmen denselben subjektiven Risikoabschlag vor. Der in (14.15) dargestellte „subjektive“ Risikoabschlag ist im Grunde ein Marktrisikoabschlag, der für alle Anteilseigner gilt, sodass sich auch hier wieder zeigt, dass für alle dasselbe Vorteilhaftigkeitskriterium maßgeblich ist; es besteht *Anreizkompatibilität* (Laux 1971; Gillenkirch und Velthuis 1997), wenn die Investition anhand des subjektiven Sicherheitsäquivalents (14.15) beurteilt wird.

Setzt man in (14.15) für $E(\tilde{G}_p)$ die Definition $E(\tilde{G}_p) = E(\tilde{x}_{1p}) - (1+r) \cdot x_{0p}$ und für $\Delta\sigma^2$ die Bestimmungsgleichung (14.11) ein, so erhält man als Vorteilhaftigkeitsbedingung beim Ziel subjektiver Nutzenmaximierung:

$$E(\tilde{x}_{1p}) - (1+r) \cdot x_{0p} > \frac{1}{2} \cdot a_M \cdot [\text{Var}(\tilde{x}_{1p}) + 2 \cdot \text{Kov}(\tilde{x}_{1p}, \tilde{x}_M)]. \quad (14.16)$$

Das Projekt ist also vorteilhaft, wenn seine *Risikoprämie* $E(\tilde{x}_{1p}) - (1+r) \cdot x_{0p}$ größer als der *subjektive Risikoabschlag* $0,5 \cdot a_M \cdot [\text{Var}(\tilde{x}_{1p}) + 2 \cdot \text{Kov}(\tilde{x}_{1p}, \tilde{x}_M)]$ des repräsentativen Investors ist. Stellt man (14.16) nach der Anschaffungsauszahlung x_{0p} des Investitionsprojekts um, so erhält man den *kollektiven subjektiven Grenzpreis* für das Projekt, bis zu dem die Erwartungswerte des Nutzens *aller* Anteilseigner steigen, wenn es realisiert wird. Zu beachten ist, dass (14.16) keine subjektiven Bewertungselemente, die sich von Anteilseigner zu Anteilseigner unterscheiden könnten, sondern nur für alle Anteilseigner gleiche Marktgrößen enthält. Außerdem wird nicht wie in Abschn. 14.2.4 vorausgesetzt, die zustandsabhängigen Grenznutzenwerte seien quasi-konstant; sie können sich je nach Investitionsprogramm beliebig ändern.

14.3.3 Vorteilhaftigkeitsbedingung für eine Investition beim Ziel der Marktwertmaximierung

Bei den weiteren Darstellungen bezeichnen wir das Unternehmen, in dem die Investition durchgeführt werden kann, mit i . Aus Gründen der Anschaulichkeit normieren wir die Anzahl der Aktien dieses Unternehmens auf eins; diese eine Aktie verbrieft dann den gleichen Rückfluss wie die ursprüngliche Zahl an Aktien. Da die Wertpapiere ohnehin beliebig teilbar sind, wird dadurch die Allgemeinheit der Darstellungen nicht eingeschränkt. Für jeden Investor ist dann sein Bestand an Aktien des Unternehmens i mit seinem Anteil z an allen umlaufenden Aktien identisch.

Die normierte Aktie hat ohne Berücksichtigung der erwogenen Investition den risikanten Rückfluss $\tilde{x}_i$. Deren Marktwert und entsprechend der des Unternehmens i für die Anteilseigner beträgt (Kap. 13, Abschn. 13.5.3.1)

$$P_i = (1 + r)^{-1} \cdot \left[E(\tilde{x}_i) - \frac{RP_M}{\text{Var}(\tilde{x}_M)} \cdot \text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_M) \right]. \quad (14.17)$$

$RP_M/\text{Var}(\tilde{x}_M)$ ist der Marktpreis des Risikos. Wird die Investition durchgeführt, die zum Residualgewinn $\tilde{G}_p$ führt, so hat dies grundsätzlich weitreichende Auswirkungen: Es ändert sich nicht nur der Rückfluss der Aktien des investierenden Unternehmens i um $\tilde{G}_p$, sondern auch der des Marktportefeuilles, denn dieses enthält ja auch die Aktien des Unternehmens i . Aus x_i wird entsprechend $x_i + G_p$, und aus x_M wird $x_M + G_p$. Wenn die Risikoaversionskoeffizienten der Anteilseigner nicht konstant und somit Reichtumseffekte bewertungsrelevant wären, würde außerdem die Investition einen Einfluss auf den Marktpreis des Risikos haben. Bei den angenommenen konstanten Risikoaversionskoeffizienten ist jedoch der Marktpreis des Risikos unveränderlich, es gibt keinen Reichtumseffekt. Obwohl die Investition den Marktpreis des Risikos nicht verändert, bewirkt sie aufgrund von Risikoverbundeffekten Änderungen des Marktwertes des bisherigen Rückflusses $\tilde{x}_i$ der Aktien des investierenden Unternehmens i und der Marktwerte der Rückflüsse aller anderen Wertpapiere am Kapitalmarkt. Für alle diese Marktwerte sind nämlich die Kovarianzen der entsprechenden Rückflüsse mit dem Rückfluss des Marktportefeuilles relevant, der sich eben bei Durchführung der Investition um $\tilde{G}_p$ ändert.

Von dieser Implikation soll jedoch der Einfachheit halber zunächst abgesehen werden (vgl. jedoch Abschn. 14.3.4.2). Für die Vorteilhaftigkeitsbeurteilung des Projekts werden die Bewertungsfunktionen des *Status quo* (d. h. die vor dem Projekt) zugrunde gelegt; die Marktwerte bereits gegebener stochastischer Wertpapierrückflüsse ändern sich dann nicht. Die Vernachlässigung von $\tilde{G}_p$ im Endwert des Marktportefeuilles entspricht der in der finanzwirtschaftlichen Literatur üblichen Annahme, dass sich bei Durchführung einer zusätzlichen Investition die Rendite $\tilde{r}_M$ des Marktportefeuilles nicht ändert (vgl. z. B. Franke und Hax 2009, S. 358 f.). Gemäß (13.24) (Kap. 13, Abschn. 13.5.3.2) ändern sich dann auch nicht die Beta-Faktoren für die bereits gegebenen stochastischen Überschüsse und somit auch nicht deren Marktwerte; ihre Bewertung erfolgt unverändert nach den

Bewertungsfunktionen des Status quo. Die Annahme im Rahmen des CAPM, dass sich bei Durchführung zusätzlicher Investitionen die Marktwerte bereits gegebener Überschüsse nicht ändern, ist wiederum vergleichbar mit der Annahme im Rahmen des SPA, dass sich die Preise für zustandsbedingte Zahlungsansprüche nicht ändern (Abschn. 14.2.4).

Unter der Hypothese, dass sich die Marktwerte bereits gegebener stochastischer Wertpapierrückflüsse nicht ändern, folgt: Zum einen ist die Maximierung des Marktwertes des Unternehmens gleichbedeutend mit der Maximierung des Marktwertes aller Wertpapiere (Reichtumsmaximierung). Zum andern impliziert die Maximierung des Marktwertes des Unternehmens die Maximierung des Kapitalwertes aller hierin erwogener Investitionen (also ihres Marktwertes unter Berücksichtigung der Anschaffungsauszahlungen).

Bei Durchführung der betrachteten Investition ändert sich der Marktwert des Unternehmens i um den folgenden Kapitalwert:

$$K_p = (1 + r)^{-1} \cdot \left[E(\tilde{x}_{1p}) - \frac{RP_M}{\text{Var}(\tilde{x}_M)} \cdot \text{Kov}(\tilde{x}_{1p}, \tilde{x}_M) \right] - x_{0p}. \quad (14.18)$$

Der Kapitalwert ist positiv, das Projekt also im Sinne der Marktwertmaximierung vorteilhaft, wenn gilt:

$$(1 + r)^{-1} \cdot \left[E(\tilde{x}_{1p}) - \frac{RP_M}{\text{Var}(\tilde{x}_M)} \cdot \text{Kov}(\tilde{x}_{1p}, \tilde{x}_M) \right] - x_{0p} > 0, \quad (14.19)$$

bzw.

$$\underbrace{E(\tilde{x}_{1p}) - (1 + r) \cdot x_{0p}}_{=E(\tilde{G}_p)} > \frac{RP_M}{\text{Var}(\tilde{x}_M)} \cdot \text{Kov}(\tilde{x}_{1p}, \tilde{x}_M). \quad (14.20)$$

Hierin steht auf der linken Seite die Risikoprämie des Projekts, auf der rechten der Marktrisikoausschlag als Produkt aus dem Marktpreis des Risikos und der Kovarianz zwischen dem Überschuss des Projekts und dem Rückfluss des Marktportefeuilles. Das bewertungsrelevante Risiko ist also wiederum ein Kovarianzrisiko, nicht die Varianz des Projektüberschusses. Das Projekt ist vorteilhaft, wenn seine Risikoprämie größer ist als der Marktrisikoausschlag.

Können im Unternehmen auch andere Investitionsprojekte durchgeführt werden, so gilt (14.20) analog auch für diese, sofern wiederum von der vereinfachenden Annahme ausgegangen wird, ihr Einfluss auf die Bewertung anderer Zahlungsansprüche sei vernachlässigbar. Die Projekte können dann unabhängig voneinander bewertet werden, sofern weder Restriktions- noch Erfolgsverbund besteht; Risiko- und Bewertungsverbund machen keine Simultanplanung erforderlich.

In dem betrachteten Spezialfall exponentieller Nutzenfunktionen und normalverteilter Rückflüsse gilt für den Marktpreis des Risikos (vgl. Kap. 13, Abschn. 13.5.2):

$$\frac{RP_M}{\text{Var}(\tilde{x}_M)} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{N_K} \frac{1}{a_k}} \equiv a_M. \quad (13.14)$$

Die Vorteilhaftigkeitsbedingung (14.20) vereinfacht sich dann zu

$$E(\tilde{x}_{1p}) - (1 + r) \cdot x_{0p} > a_M \cdot \text{Kov}(\tilde{x}_{1p}, \tilde{x}_M). \quad (14.21)$$

14.3.4 Marktwertmaximierung im Licht subjektiver Nutzenmaximierung

14.3.4.1 Marktbewertungen mit den Bewertungsfunktionen des Status quo

Im Folgenden wird die Vorteilhaftigkeitsbedingungen (14.21) für die Investition bei Marktwertmaximierung mit der Vorteilhaftigkeitsbedingung (14.16) bei subjektiver Nutzenmaximierung verglichen. Beide gelten unter den Annahmen normalverteilter Rückflüsse und exponentieller Nutzenfunktionen, die den Vergleich erheblich erleichtern. Wie erläutert, hat dann die Investition keinen Einfluss auf die Anteile der Investoren (Anteilseigner) am Marktportefeuille, sodass beim Vergleich keine Implikationen aus dem Wertpapierhandel berücksichtigt werden müssen, der durch die Investition ausgelöst werden könnte. Zum anderen hat dann die Investition keinen Einfluss auf den Marktpreis des Risikos, sodass keine indirekten Auswirkungen der Investition auf die Wertpapierpreise über eine Änderung des Marktpreises des Risikos erfasst werden müssen.

Bei Nutzenmaximierung ist die Investition vorteilhaft, wenn gilt (Abschn. 14.3.2):

$$E(\tilde{x}_{1p}) - (1 + r) \cdot x_{0p} > \frac{1}{2} \cdot a_M \cdot \underbrace{[\text{Var}(\tilde{x}_{1p}) + 2 \cdot \text{Kov}(\tilde{x}_{1p}, \tilde{x}_M)]}_{=\Delta\sigma^2}. \quad (14.16)$$

Bei Marktwertmaximierung dagegen lautet das Kriterium (Abschn. 14.3.3):

$$E(\tilde{x}_{1p}) - (1 + r) \cdot x_{0p} > a_M \cdot \text{Kov}(\tilde{x}_{1p}, \tilde{x}_M). \quad (14.21)$$

Beide Kriterien stimmen offenbar nicht miteinander überein (Gillenkirch und Velthuis, 1997, S. 135 ff.), denn der Risikoabschlag bei subjektiver Nutzenmaximierung übersteigt den Risikoabschlag bei Marktwertmaximierung um den Betrag

$$\frac{1}{2} \cdot a_M \cdot [\text{Var}(\tilde{x}_{1p}) + 2 \cdot \text{Kov}(\tilde{x}_{1p}, \tilde{x}_M)] - a_M \cdot \text{Kov}(\tilde{x}_{1p}, \tilde{x}_M) = \frac{1}{2} \cdot a_M \cdot \text{Var}(\tilde{x}_{1p}).$$

Marktwertmaximierung führt also grundsätzlich nicht zu einer Investitionsentscheidung im Sinne der Investoren. Da der bei Marktwertmaximierung vorgenommene Risikoabschlag um den Betrag $\frac{1}{2} \cdot a_M \cdot \text{Var}(\tilde{x}_{1p})$ zu niedrig ist, kann bei einer Orientierung am Marktwert ein Projekt vorteilhaft erscheinen, das den Erwartungswert des Nutzens jedes Anteilseigners senkt. Maximierung des Marktwertes des Unternehmens ist damit kein einmütig akzeptiertes Unternehmensziel. Stattdessen werden die Investoren die Maximierung des individuellen Sicherheitsäquivalents eines beliebigen (weil repräsentativen)

Investors als Unternehmensziel einmütig akzeptieren, wobei die Investitionsentscheidung entsprechend auf der Grundlage von (14.16) getroffen wird.

Der Unterschied in den Bewertungskalkülen ist allerdings gering, wenn das Projektrisiko bei isolierter Betrachtung, also die Varianz $\text{Var}(\tilde{x}_{1p})$ des Projektüberschusses, gering ist. Marktwertmaximierung steht dann „*annähernd*“ im Einklang mit subjektiver Nutzenmaximierung. Bei gegebener Varianz $\text{Var}(\tilde{x}_{1p})$ ist der Unterschied in den Bewertungskalkülen umso niedriger, je niedriger die Marktrisikotoleranz a_M ist, je niedriger also gemäß (13.14) bei gegebener Zahl N_K von Investoren auf dem Kapitalmarkt (bzw. von Anteilseignern) deren Risikotoleranzen sind bzw. je größer bei gegebenen Risikotoleranzen die Zahl der Investoren ist.

Subjektive Nutzenmaximierung und Marktwertmaximierung unterscheiden sich im Übrigen *nicht* dadurch, dass im ersten Fall explizit subjektive Präferenzen und im zweiten Fall Marktgrößen bewertungsrelevant sind. Wie gezeigt, besteht der Unterschied ausschließlich in der Bewertung der Marktgrößen. Das Ziel subjektiver Nutzenmaximierung ist somit gleichermaßen operational wie das der Marktwertmaximierung. Da es außerdem (modellendogen) theoretisch fundiert ist, kann es als Referenzziel für die Beurteilung der Marktwertmaximierung zugrunde gelegt werden.

14.3.4.2 Korrekte Marktbewertungen

a) Einfluss der Investition auf den Marktwert der Aktien des Unternehmens und den Marktwert des Marktportefeuilles („Reichtum“ der Aktionäre)

Bei den bisherigen Darstellungen wurde der Einfachheit halber vernachlässigt, dass sich bei Durchführung der Investition der Marktwert des bisherigen Rückflusses $\tilde{x}_i$ der Aktien des investierenden Unternehmens i und die Marktwerte der Rückflüsse aller anderen Wertpapiere am Kapitalmarkt deshalb ändern (können), weil sich der Rückfluss des Marktportefeuilles um den stochastischen Residualgewinn $\tilde{G}_p$ der Investition und entsprechend die Kovarianz von $\tilde{x}_i$ sowie die Kovarianzen der Rückflüsse aller anderen Wertpapiere mit dem Rückfluss des Marktportefeuilles ändern. Die Vernachlässigung dieses Sachverhalts impliziert letztlich, dass die Investition keinen Einfluss auf die zustandsabhängigen Grenznutzenwerte der Anteilseigner hat.

Wird explizit der Einfluss der Investition auf den Endwert des Marktportefeuilles berücksichtigt, so zeigt sich, dass bei deren Durchführung (für Normalverteilungen und exponentielle Nutzenfunktionen) der Marktwert der Aktien des Unternehmens i bzw. der Marktwert des Marktportefeuilles (der Marktwert der Aktien des Unternehmens i zuzüglich des Marktwertes aller anderen Wertpapiere), dann steigt, wenn folgende Bedingung erfüllt ist (Gillenkirch und Velthuis 1997; Laux 1971, 2006, S. 268 ff.):

$$(1+r)^{-1} \cdot \{E(\tilde{x}_{1p}) - a_M \cdot [\text{Kov}(\tilde{x}_{1p}, \tilde{x}_M) + \text{Var}(\tilde{x}_{1p}) + \text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_{1p})]\} > x_{0p} \quad (14.22)$$

bzw.

$$(1 + r)^{-1} \cdot \{E(\tilde{x}_{1p}) - a_M \cdot [\text{Kov}(\tilde{x}_{1p}, \tilde{x}_M) + \text{Var}(\tilde{x}_{1p}) + \text{Kov}(\tilde{x}_M, \tilde{x}_{1p})]\} > x_{0p}. \quad (14.23)$$

(14.22) ist die Vorteilhaftigkeitsbedingung für das Projekt beim Ziel der Maximierung des Marktwertes der Aktien des Unternehmens i (kurz: Ziel der Marktwertmaximierung). (14.23) ist die Vorteilhaftigkeitsbedingung beim Ziel der Maximierung des Marktwertes des Marktportefeuilles (aus allen umlaufenden Wertpapieren), an dem die Anteilseigner des Unternehmens i im gleichen Verhältnis beteiligt sind wie am Unternehmen i (Reichtumsmaximierung).

Interpretation: In (14.22) wird berücksichtigt, dass die maßgebliche Kovarianz des Residualgewinns $\tilde{x}_{1p} - (1 + r) \cdot x_{0p}$ und somit des Überschusses $\tilde{x}_{1p}$ mit dem Endwert des Marktportefeuilles nicht, wie in den Vorteilhaftigkeitskriterien (14.18) und (14.21) angenommen, $\text{Kov}(\tilde{x}_{1p}, \tilde{x}_M)$ beträgt, sondern $\text{Kov}(\tilde{x}_{1p}, \tilde{x}_M + \tilde{x}_{1p}) = \text{Kov}(\tilde{x}_{1p}, \tilde{x}_M) + \text{Var}(\tilde{x}_{1p})$. Außerdem wird in (14.22) berücksichtigt, dass sich bei Durchführung der Investition die Kovarianz des bisherigen Rückflusses $\tilde{x}_i$ der Aktien des Unternehmens i mit dem Endwert des Marktportefeuilles um $\text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_M + \tilde{x}_{1p}) - \text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_M) = \text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_{1p})$ ändert. Entsprechend ändert sich der Marktwert von $\tilde{x}_i$ um den Barwert $-(1 + r)^{-1} \cdot a_M \cdot \text{Kov}(\tilde{x}_{1p}, \tilde{x}_i)$, der in (14.22) korrekt erfasst wird.

Im Vorteilhaftigkeitskriterium (14.23) für Reichtumsmaximierung wird zusätzlich berücksichtigt, dass sich bei Durchführung des Projekts die Kovarianz des gesamten Rückflusses $\tilde{x}_M - \tilde{x}_i$ aller anderen Wertpapiere mit dem Endwert des Marktportefeuilles um $\text{Kov}(\tilde{x}_M - \tilde{x}_i, \tilde{x}_{1p}) = \text{Kov}(\tilde{x}_M, \tilde{x}_{1p}) - \text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_{1p})$ ändert. Entsprechend unterscheidet sich das Vorteilhaftigkeitskriterium (14.23) für Reichtumsmaximierung von dem für die Maximierung des Marktwertes der Aktien des Unternehmens i , (14.22), dadurch, dass nicht nur die Kovarianz $\text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_{1p})$ berücksichtigt wird, sondern die gesamte Kovarianz $\text{Kov}(\tilde{x}_M, \tilde{x}_{1p})$, die die Änderung des Marktwertes aller bereits gegebenen Überschüsse (einschließlich $\tilde{x}_i$) verursacht. Da diese Kovarianz mit der für die Marktbewertung des Projekts relevanten Kovarianz $\text{Kov}(\tilde{x}_{1p}, \tilde{x}_M)$ übereinstimmt, wird in (14.23) die Kovarianz $\text{Kov}(\tilde{x}_{1p}, \tilde{x}_M)$ doppelt erfasst und nicht nur einfach wie in (14.22).

Es zeigt sich hier ein grundsätzlicher Widerspruch für den Fall, dass wie in den Abschn. 14.3.3 und 14.3.4.1 (und wie in der finanzwirtschaftlichen Literatur üblich) modellexogen angenommen wird, das Projekt habe keinen Einfluss auf die Marktwerte der bereits gegebenen Überschüsse. Diese Unterstellung impliziert, dass die Kovarianz $\text{Kov}(\tilde{x}_M, \tilde{x}_{1p})$ und entsprechend auch die Kovarianz $\text{Kov}(\tilde{x}_{1p}, \tilde{x}_M)$ gleich null ist. Unter der Bedingung $\text{Kov}(\tilde{x}_{1p}, \tilde{x}_M) = 0$ folgt aber unabhängig von der Höhe des Marktpreises des Risikos, $\text{RP}_M / \text{Var}(\tilde{x}_M)$, aus der Bewertungsfunktion (14.18) für den Kapitalwert des Projekts die Bewertungsfunktion $K_p = (1 + r)^{-1} \cdot E(\tilde{x}_{1p}) - x_{0p}$ und somit das Vorteilhaftigkeitskriterium $E(\tilde{x}_{1p}) - (1 + r) \cdot x_{0p} > 0$. Mit der Annahme, das Projekt habe keinen Einfluss auf den Marktwert der bereits gegebenen Überschüsse, wird dann also implizit unterstellt, dass es überhaupt kein bewertungsrelevantes Risiko aufweist.

Im Vorteilhaftigkeitskriterium (14.22) bleiben für $\text{Kov}(\tilde{x}_{1p}, \tilde{x}_M) = 0$ immerhin die Terme $\text{Var}(\tilde{x}_{1p})$ und $\text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_{1p})$ übrig. Es wird dann wenigstens ein Teil der Änderung der Varianz des Rückflusses des Marktportefeuilles zum Zeitpunkt 1 bei Durchführung der Investition berücksichtigt, die insgesamt $\text{Var}(\tilde{x}_{1p}) + 2 \cdot \text{Kov}(\tilde{x}_{1p}, \tilde{x}_M)$ beträgt. Nun wird aber in der Literatur besonders hervorgehoben, dass der Bewertungsfehler bei Vernachlässigung des unternehmensindividuellen Risikos relativ gering sei und es primär darauf ankomme, dem Risikoverbund mit dem Marktportefeuille, also gerade der Kovarianz $\text{Kov}(\tilde{x}_{1p}, \tilde{x}_M)$ Rechnung zu tragen.

Beim CAPM in Standardform (d. h. in Renditeschreibweise) zeigt sich die Problematik der impliziten Annahme $\text{Kov}(\tilde{x}_{1p}, \tilde{x}_M) = 0$ darin, dass dann der Beta-Faktor für die Investition ebenfalls gleich null ist und somit gemäß der Renditegleichung des CAPM (Kap. 13, Abschn. 13.5.3.2) der entsprechende bewertungsrelevante „risikoangepasste“ Kalkulationszinsfuß r beträgt. Je größer das Marktportefeuille gemessen durch den Erwartungswert $E(\tilde{x}_M)$ seines Endwertes, desto geringer ist zwar tendenziell der Einfluss eines zusätzlichen Projekts auf die Rendite des Marktportefeuilles und desto geringer ist der Fehler bei der Marktbewertung des Projekts, wenn bei der Ermittlung des Beta-Faktors vereinfachend angenommen wird, es habe keinen Einfluss auf diese Rendite. Diese Annahme impliziert, dass auch der Erwartungswert der Rendite dieses Portefeuilles unveränderlich ist. Je größer nun aber $E(\tilde{x}_M)$, desto größer ist der Bewertungsfehler bezüglich des Marktwertes P_M aller bereits gegebenen Überschüsse, wenn der Erwartungswert der Rendite des Marktportefeuilles als unveränderlich angesehen wird, obwohl er sich um einen bestimmten Betrag ändert. Die Annahme, dass das Projekt keinen Einfluss auf die Marktwerte der bereits gegebenen Überschüsse hat, lässt sich für $\text{Kov}(\tilde{x}_{1p}, \tilde{x}_M) \neq 0$ theoretisch nicht begründen. Dass die Problematik dieser Annahme im CAPM in Standardform nicht direkt ersichtlich ist, liegt daran, dass die Renditeschreibweise Zusammenhänge komprimiert, die bei der Betrachtung absoluter Größen (Endwerte der Wertpapiere statt Renditen und explizite Erfassung der Nutzenfunktionen für Endvermögenswerte) explizit erkennbar werden⁵.

b) Marktwertwertmaximierung als Approximation an subjektive Nutzenmaximierung

Es fragt sich nun, inwieweit das Ziel der Marktwertmaximierung theoretisch fundiert werden kann, wenn bedacht wird, dass die Investitionen eines Unternehmens nicht nur den Marktwert seiner Aktien, sondern auch den Marktwert der anderen Wertpapiere beeinflusst. Da die Anteilseigner des Unternehmens i im CAPM im gleichen Verhältnis auch an allen anderen Wertpapieren (an allen anderen börsennotierten Unternehmen)

⁵Da der Einfluss des Projekts auf die Rendite des Marktportefeuilles (auch) von dessen Umfang (gemessen durch $E(\tilde{x}_M)$ abhängt), kann dieser Einfluss im Rahmen einer reinen Renditebetrachtung nicht analysiert werden. Vielmehr muss man das CAPM in Standardform analog zu den Darstellungen im vorliegenden Kapitel um die explizite Betrachtung von Preis und Endwert des Marktportefeuilles erweitern.

beteiligt sind und mithin ihr Vermögen vom Marktwert P_M des gesamten Marktportefeuilles und nicht allein von P_i abhängt, liegt die Vermutung nahe, dass Reichtumsmaximierung eine bessere Approximation an subjektive Nutzenmaximierung darstellt als Marktwertmaximierung. Wie im Folgenden gezeigt wird, ist dies jedoch grundsätzlich nicht der Fall. Um dies zu zeigen, vergleichen wir die Vorteilhaftigkeitsbedingung für Marktwertmaximierung und die für Reichtumsmaximierung mit der für subjektive Nutzenmaximierung.

Das „exakte“ Vorteilhaftigkeitskriterium (14.22) für das Ziel der Marktwertmaximierung kann wie folgt umgeformt werden:

$$E(\tilde{x}_{1p}) - (1 + r) \cdot x_{0p} > a_M \cdot [\text{Kov}(\tilde{x}_{1p}, \tilde{x}_M) + \text{Var}(\tilde{x}_{1p}) + \text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_{1p})]. \quad (14.24)$$

Auch dieses Kriterium stimmt nicht mit dem Vorteilhaftigkeitskriterium (14.16) für subjektive Nutzenmaximierung überein. Die Differenz zwischen dem Risikoabschlag für subjektive Nutzenmaximierung und dem für Marktwertmaximierung beträgt nun $-a_M \cdot [1/2 \cdot \text{Var}(\tilde{x}_{1p}) + \text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_{1p})]$.

Für $\text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_{1p}) \geq 0$ ist der Fehlerterm $-a_M \cdot [1/2 \cdot \text{Var}(\tilde{x}_{1p}) + \text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_{1p})]$ negativ. Der Risikoabschlag für Marktwertmaximierung ist dann *höher* als der für subjektive Nutzenmaximierung, sodass es möglich ist, dass das Projekt bei Marktwertmaximierung abgelehnt wird, obwohl es den Erwartungswert des Nutzens für jeden Anteilseigner erhöhen würde. Für den Fall $\text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_{1p}) < 0$ kann der Fehlerterm positiv sein, sodass der Risikoabschlag für Marktwertmaximierung niedriger ist als der für subjektive Nutzenmaximierung. Möglicherweise wird nun das Projekt bei Marktwertmaximierung angenommen, obwohl es den Erwartungswert des Nutzens jedes Anteilseigners reduziert. Ist jedoch der Betrag des Fehlerterms sehr gering (für $\text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_{1p}) = -1/2 \cdot \text{Var}(\tilde{x}_{1p})$ ist er gleich null), so steht die Marktwertmaximierung wiederum „*annähernd*“ im Einklang mit subjektiver Nutzenmaximierung. Dabei ist zu beachten, dass die Kovarianz $\text{Kov}(\tilde{x}_{1p}, \tilde{x}_M)$, die erheblich von $1/2 \cdot \text{Var}(\tilde{x}_{1p}) + \text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_{1p})$ abweichen kann, bei Marktwertmaximierung in gleicher Weise berücksichtigt wird wie bei subjektiver Nutzenmaximierung.

c) Konflikt zwischen Reichtumsmaximierung (Maximierung des Marktwertes aller Wertpapiere) und subjektiver Nutzenmaximierung

Jedoch kann ein erheblicher Konflikt zwischen dem Ziel der Maximierung des Marktwertes aller Wertpapiere (Reichtumsmaximierung) und dem Ziel subjektiver Nutzenmaximierung bestehen. Zur Verdeutlichung wird das Vorteilhaftigkeitskriterium (14.23) für das Ziel der Reichtumsmaximierung wie folgt umgeformt:

$$E(\tilde{x}_{1p}) - (1 + r) \cdot x_{0p} > a_M \cdot \underbrace{[\text{Var}(\tilde{x}_{1p}) + 2 \cdot \text{Kov}(\tilde{x}_{1p}, \tilde{x}_M)]}_{=\Delta\sigma_p^2}. \quad (14.25)$$

Die Differenz zwischen dem Risikoabschlag für subjektive Nutzenmaximierung gemäß (14.16) und dem Risikoabschlag in (14.25) für Reichtumsmaximierung beträgt $-a_M \cdot [1/2 \cdot \text{Var}(\tilde{x}_{1p}) + \text{Kov}(\tilde{x}_M, \tilde{x}_{1p})]$. Da der Betrag dieses Fehlerterms den Betrag von $-a_M \cdot [1/2 \cdot \text{Var}(\tilde{x}_{1p}) + \text{Kov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_{1p})]$ erheblich übersteigen kann, ist die Marktwertmaximierung tendenziell eine wesentlich bessere Approximation an subjektive Nutzenmaximierung als Reichtumsmaximierung. Zwar wird in den Kriterien (14.16) und (14.25) exakt die Änderung $\Delta\sigma_p^2$ der Varianz des Endwertes des Marktportefeuilles bei Durchführung der Investition einbezogen, jedoch wird diese Änderung in (14.16) nur mit $a_M/2$ gewichtet und in (14.25) mit a_M . Der Unterschied zwischen diesen Gewichten resultiert daraus, dass für den Marktwert des Marktportefeuilles bzw. dessen Änderung bei Durchführung des Projekts Grenznutzenwerte relevant sind, während bei subjektiver Nutzenmaximierung die Änderung des Erwartungswertes des Nutzens des repräsentativen Anteilseigners k (und somit analog für alle anderen) über die Änderung des Sicherheitsäquivalents für sein Endvermögen direkt und vollständig berücksichtigt wird.

Beindet sich der Markt in einem Übergang in ein neues Gleichgewicht und wird die Investitionsentscheidung getroffen, bevor die Anteilseigner ihre Anteile am Marktportefeuille ändern, so gewinnt der Marktwert des gesamten Marktportefeuilles für die Beurteilung des Unternehmensziels grundlegende Bedeutung.⁶

Im vorangegangenen und im vorliegenden Abschnitt wurde eine etwaige (annähernde) Übereinstimmung von Marktwertmaximierung und subjektiver Nutzenmaximierung nicht wie in Abschn. 14.2.2 in Verbindung mit einem Handel mit Wertpapieren (einem Handel mit zustandsbedingten Zahlungsansprüchen) gezeigt. Bei Normalverteilungen und exponentiellen Nutzenfunktionen findet er gar nicht statt. Im vorliegenden Abschnitt wurde auch nicht wie in Abschn. 14.2.4 davon ausgegangen, die Grenznutzenwerte der

⁶Zwar haben bei exponentiellen Nutzenfunktionen neue Projekte keinen Einfluss auf die Risikoaversionen der Anteilseigner und somit auch keinen Einfluss auf ihre optimalen Anteile am Marktportefeuille. Die Risikoaversionen können sich jedoch aufgrund modellexogener Ereignisse ändern. Dann ändern sich grundsätzlich gemäß (13.12) auch die optimalen Anteile am Marktportefeuille. Der Erlös bei Reduktion bzw. die Auszahlung bei Erhöhung eines Anteils hängt dann nicht nur davon ab, in welcher Weise der Anteil geändert wird, sondern auch vom Marktwert des Marktportefeuilles, der seinerseits davon abhängt ob die Investition durchgeführt wird und welche stochastischen Eigenschaften sie aufweist. Nun ergeben sich, anders als im Rahmen der obigen (und in der finanzwirtschaftlichen Literatur üblichen) statischen Gleichgewichtsanalyse, Interessenkonflikte zwischen Anteilseignern, und zwar zwischen denjenigen, die in unterschiedlichem Verhältnis ihre Marktanteile ändern (Laux 1971, 2006, S. 288–296). Maximierung des Marktwertes der Aktien des investierenden Unternehmens steht jetzt nur noch für diejenigen Anteilseigner (annähernd) im Einklang mit subjektiver Nutzenmaximierung, die ihren Anteil am Marktportefeuille nicht ändern. Für andere Anteilseigner ist zusätzlich auch der Marktwert des Marktportefeuilles entscheidungsrelevant und zwar mit einem Gewicht, das davon abhängt, in welchem Verhältnis sie ihre Anteile am Marktportefeuille verringern bzw. erhöhen. Für einen Anteilseigner z. B., der seinen Anteil nahezu vollständig verkauft, ist das Ziel der Reichtumsmaximierung das präferierte Unternehmensziel.

Anteilseigner seien quasi-konstant. Vielmehr wurde modellendogen argumentiert, indem die Implikationen der Bewertungsfunktionen des CAPM und die Risikoeinstellungen der Anteilseigner explizit berücksichtigt wurden.

14.4 Subjektive Bewertung durch einen individuellen Investor bei beschränktem Kapitalmarktzugang

14.4.1 Entscheidungssituation

Alle vorangegangenen Erläuterungen und Analysen gingen von der Annahme eines vollkommenen (und im SPA auch eines vollständigen) Kapitalmarktes aus. Ein Kapitalmarkt ist vollkommen, wenn es keine Informations- und Transaktionskosten und keine Steuern gibt, wenn alle Wertpapiere beliebig teilbar sind, wenn sich die Investoren nutzenmaximierend verhalten, sich dabei allein an finanziellen Zielgrößen orientieren und Mengenanpasser sind, und wenn alle Investoren unbeschränkten Zugang zum Kapitalmarkt haben. Freilich ist keine dieser Annahmen in der Realität in dieser reinen Form erfüllt. Eine Diskussion der Auswirkungen der Verletzungen aller einzelnen Annahmen auf die Fundierung von Unternehmenszielen würde den Rahmen (nicht nur) dieses Lehrbuches sprengen. Dennoch soll nachfolgend zumindest beispielhaft für einen (μ, σ) -Entscheider gezeigt werden, welche Implikationen sich ergeben, wenn der Kapitalmarkt nicht vollkommen ist. (Vgl. zu den folgenden Darstellungen Laux et al. 2009, Laux und Laux 2009, Laux und Schabel 2009, Kap. XI und XII.) Hierzu werden wir die Annahme des unbeschränkten Marktzugangs aufheben, sodass die Möglichkeiten der Portfeuillebildung begrenzt sind. Konkret gehen wir davon aus, dass der betrachtete Investor keine Leerverkäufe durchführen kann. Dabei nehmen wir jedoch weiterhin an, dass der Handel mit Wertpapieren keine Transaktionskosten verursacht.

Es wird gezeigt, dass bei begrenzten Möglichkeiten der Portfeuillebildung der *subjektive Grenzpreis* eines nicht teilbaren Bewertungsobjekts (eines riskanten Investitionsprojekts bzw. eines ganzen Investitionsprogramms), das ein individueller Investor, z. B. der Alleineigentümer eines Unternehmens, kaufen kann, grundsätzlich niedriger ist als dessen Marktwert. Dabei gehen wir davon aus, dass der Überschuss der Investition duplizierbar sei, sodass der Marktwert der Investition mit dem seines Duplikationsportefeuilles übereinstimmt. Der Grenzpreis bezeichnet diejenige Anschaffungsauszahlung, bei der der Investor bei Kauf weder einen Vorteil noch einen Nachteil erzielt, also denselben Erwartungswert des Nutzens erzielt wie bei Verzicht auf Kauf. Es wird untersucht, wie die Differenz zwischen Marktwert und subjektivem Grenzpreis von ihren Determinanten abhängt. Dabei wird deutlich, dass das Ziel der Marktwertmaximierung für ein Einzelunternehmen grundsätzlich problematisch ist. Vielmehr sollte sich der Investor bei seinen Investitionsentscheidungen explizit am Bernoulli-Prinzip orientieren, wobei er *simultan* mit der Bewertung ein optimales Wertpapierportefeuille ermittelt

(vgl. hierzu auch die analogen Darstellungen für den Mehrperioden-Fall in Kap. 15, Abschn. 15.3.2).

Wir untersuchen die Beziehung zwischen dem Marktwert des Bewertungsobjekts und dem (individuellen) subjektiven Grenzpreis vor dem Hintergrund des CAPM. Diese Betrachtungsweise ermöglicht eine anschauliche Interpretation einiger grundlegender Zusammenhänge. Jedoch kann die Analyse analog für den Fall durchgeführt werden, dass die spezifischen Annahmen des CAPM nicht erfüllt sind. Dabei kann offen bleiben, wie die Preisbildung im Kapitalmarkt erklärt werden kann. Jedoch muss der Investor die Wertpapierpreise zum Zeitpunkt 0 immerhin kennen und er muss sich außerdem ein Wahrscheinlichkeitsurteil über die Wertpapierrückflüsse zum Zeitpunkt 1 bilden.

In der Ausgangssituation verfüge der Investor über ein Geldvermögen (Barvermögen) in Höhe von V_0 , darüber hinaus über kein sicheres oder unsicheres Einkommen. In dieser Situation wird er bei Verzicht auf Kauf des Bewertungsobjekts gemäß den Darstellungen in Kap. 8, Abschn. 8.4, ein optimales Wertpapierportefeuille bilden (Abschn. 14.4.2). Wenn er das Bewertungsobjekt kauft, wird er stattdessen dasjenige Portefeuille realisieren, das mit seinem Überschuss optimal abgestimmt ist.

Entsprechend wird die Bewertung in zwei Phasen vorgenommen: Zunächst wird das optimale Portefeuille für den Fall bestimmt, dass der Investor das Bewertungsobjekt nicht erwirbt (Abschn. 14.4.2). Dieses Portefeuille ist die Ausgangsbasis der Bewertung. Darauf aufbauend wird in Abschn. 14.4.3 derjenige Preis als subjektiver Grenzpreis ermittelt, bei dem der Investor bei Kauf des Bewertungsobjekts denselben Erwartungswert des Nutzens erzielt (eine Position auf derselben Indifferenzkurve im (μ, σ) -Diagramm erreicht) wie bei Verzicht auf Kauf. Dabei wird berücksichtigt, dass der Investor bei Kauf dasjenige Portefeuille wählt, das in Verbindung mit dem Überschuss $\tilde{x}_{1p}$ des Bewertungsobjekts und (bei Reichtumseffekt) dem hierfür gezahlten Preis optimal ist.

Gemäß diesem Bewertungskonzept wird unter vereinfachenden Annahmen gezeigt, dass der subjektive Grenzpreis des Bewertungsobjekts grundsätzlich niedriger ist als sein Marktwert und wie die Abweichung von ihren Determinanten abhängt.

14.4.2 Optimales Portefeuille ohne Bewertungsobjekt

Die Menge aller effizienten (μ, σ) -Konstellationen für das Endvermögen ohne Berücksichtigung der Investition (des Bewertungsobjekts) lässt sich grafisch mithilfe einer Effizienzlinie darstellen, die beim Abszissenwert $(1 + r) \cdot V_0$ beginnt und zeigt, welcher minimale σ -Wert alternativen Risikoprämien des Portefeuilles und somit alternativen Erwartungswerten des Endvermögens entspricht (Kap. 8, Abschn. 8.4.3). Sie wird im Folgenden als „*Basiseffizienzlinie*“ (*BEL*) bezeichnet (Abb. 14.4) und ist von der „modifizierten“ Effizienzkurve zu unterscheiden, die sich für den Investor bei beschränktem Marktzugang ergibt, wenn die Investitionsmöglichkeit berücksichtigt wird.

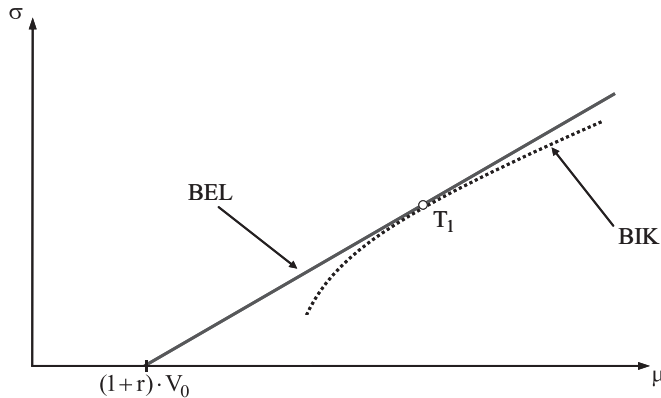


Abb. 14.4 Portfeuillebildung in der Ausgangssituation (ohne Investition)

Unter der getroffenen Annahme, dass der Investor ohne die Investition gemäß dem CAPM einen Anteil am Marktportfeuille hält, gibt die Basiseffizienzlinie die (μ, σ) -Positionen für alternative Anteile am Marktportfeuille an, sodass ihre Steigung mit dem Quotienten aus der Standardabweichung und der Risikoprämie dieses Portfeuillees übereinstimmt (sofern, wie in dieser Arbeit üblich, der Erwartungswert des Endvermögens auf der Abszisse und der Standardabweichung auf der Ordinate abgetragen wird).

Die subjektive Risikoeinstellung hat zwar ohne das Bewertungsobjekt keinen Einfluss auf die Struktur des optimalen Portfeuillees, bestimmt aber dessen Umfang. Das optimale Portfeuille (der optimale Anteil am Marktportfeuille) entspricht dem Tangentialpunkt T_1 der Basiseffizienzlinie (BEL) mit einer Indifferenzkurve, die im Folgenden als „Basisindifferenzkurve“ (BIK) bezeichnet wird.

14.4.3 Bewertung

Nun wird die (nicht teilbare) Investition einbezogen, die zu dem riskanten Zahlungsüberschuss $\tilde{x}_{1p}$ am Periodenende führt. Wie erläutert, ist die Bewertung aus Sicht des Investors aus dem Vergleich seiner Positionen ohne und mit Investition abzuleiten, wobei auch die optimalen Kapitalmarkttransaktionen des Investors bei Realisation der Investition zu berücksichtigen sind: Der Wert des Bewertungsobjekts für den Investor entspricht demjenigen *subjektiven Grenzpreis*, für den seine Portfeuilleposition mit Kauf des Bewertungsobjekts zu demselben Erwartungswert des Nutzens führt wie seine Portfeuilleposition ohne Bewertungsobjekt.

Auch bei Kauf des Bewertungsobjekts kann nur ein effizientes Portfeuille optimal sein. Die entsprechende, an den Kaufpreis und den Überschuss des Bewertungsobjekts angepasste Effizienzkurve im (μ, σ) -Diagramm bezeichnen wir als *modifizierte*

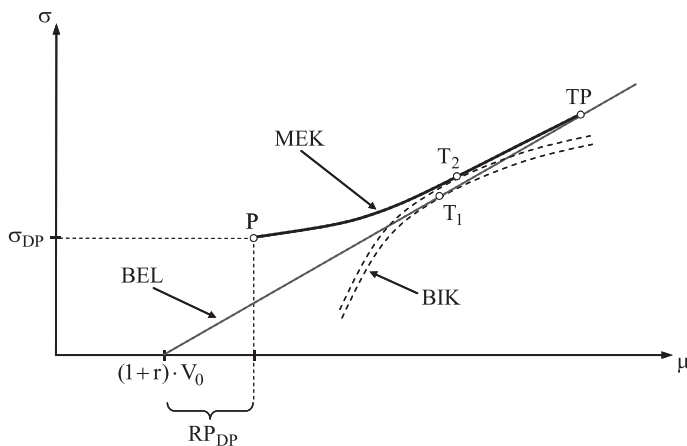


Abb. 14.5 Subjektive Bewertung bei beschränktem Kapitalmarktzugang

Effizienzkurve (MEK). Die MEK weicht grundsätzlich von der Basiseffizienzlinie (BEL) ab, weil sie vom Preis der Investition abhängt und außerdem der Investor aufgrund der Beschränkung seines Kapitalmarktzugangs nicht in der Lage ist, die Überschüsse der Investition durch Leerverkauf des Duplikationsportefeuilles perfekt zu hedgen. Anders als die BEL ist die MEK keine Gerade. Gleichwohl gilt: Da die Menge der effizienten Wertpapierportefeuilles für den Fall des Kaufs unabhängig vom sicheren Kaufpreis ist (es wird davon ausgegangen, dass kein Reichtumseffekt besteht), ist die Krümmung der MEK vom Kaufpreis unabhängig; eine Reduktion (bzw. Erhöhung) des Preises um einen Betrag impliziert lediglich eine Parallelverschiebung der MEK um den mit dem Zinssatz r aufgezinsten Betrag nach rechts (bzw. links), sodass die alternativen Standardabweichungen entsprechenden Erwartungswerte des Endvermögens in gleicher Weise steigen (bzw. sinken). Wie die MEK konkret ermittelt werden kann und wie ihre Gestalt von den Kapitalmarktbeschränkungen des Investors und den stochastischen Eigenschaften der Wertpapiere und des Überschusses der Investition abhängt, wird in Laux und Schabel (2009) gezeigt.

Abb. 14.5 zeigt eine MEK⁷ für den Fall, dass der Preis der Investition mit ihrem Marktwert übereinstimmt, und verdeutlicht, wie der Investor die Investition bewerten,

⁷Der Darstellung liegen die vereinfachenden Annahme zugrunde, dass i) sämtliche Wertpapiere positiv mit dem Marktportefeuille korreliert sind, sodass die Risikoprämien aller Wertpapiere ebenfalls positiv sind, und dass ii) der Überschuss der Investition mit dem Rückfluss eines Wertpapiers negativ korreliert ist, sodass das Risiko bei Kauf des Bewertungsobjekts nicht durch Portefeuillebildung reduziert werden kann. Die MEK verläuft dann durchgehend konvex steigend. Vgl. zur Gestalt der MEK unter anderen Voraussetzungen und den entsprechenden Implikationen für den subjektiven Grenzpreis Laux und Schabel (2009), Kapitel IX.

d. h. einen subjektiven Grenzpreis ermitteln kann. Da der Überschuss der Investition annahmegemäß duplizierbar ist, stimmt ihre Risikoprämie mit der Risikoprämie RP_{DP} des Duplikationsportefeuilles überein. Der Tangentialpunkt T_1 in Abb. 14.5 kennzeichnet wie in Abb. 14.4 die optimale Situation ohne Bewertungsobjekt. In dieser Situation hat der Investor ein für ihn optimales aus der Menge der effizienten Portefeuilles ausgewählt. Demgegenüber kennzeichnet der Punkt P in Abb. 14.5 die (μ, σ) -Position, die der Investor hätte, wenn er das Bewertungsobjekt zu *seinem Marktwert* erwerben und daneben kein Wertpapierportefeuille halten würde. P liegt oberhalb der Basiseffizienzlinie BEL. Dies impliziert, dass die Risikostruktur der Investition (bzw. ihres Duplikationsportefeuilles) nicht mit derjenigen des Marktportefeuilles übereinstimmt und daher ineffizient ist. Würde P auf der BEL liegen, so würde ein entsprechender Anteil am Marktportefeuille den Überschuss der Investition exakt duplizieren. P kann nicht unterhalb der BEL liegen, da dies implizieren würde, dass das Marktportefeuille ineffizient wäre; die Anlage im Duplikationsportefeuille würde die Anlage im Marktportefeuille dominieren. P liegt tendenziell umso weiter über der BEL, je stärker der Überschuss der Investition (bzw. ihr Duplikationsportefeuille) gegenüber dem Marktportefeuille „strukturverzerrt“ ist.

Könnte der Investor das Duplikationsportefeuille, das den Zahlungsanspruch aus der Investition perfekt nachbildet, vollständig (leer) verkaufen, so könnte er ausgehend vom Punkt P jene risikolose Position erreichen, die dem Abszissenabschnitt $(1 + r) \cdot V_0$ entspricht, und daraufhin wieder das für ihn optimale Portefeuille bilden, das ihn zum Punkt T_1 in Abb. 14.5 führen würde. Er hätte dann die Investition annahmegemäß zu ihrem Marktwert gekauft und das Duplikationsportefeuille zu demselben Marktwert wieder verkauft. Aufgrund der Beschränkung seines Kapitalmarktzugangs jedoch kann der Investor den Punkt T_1 nicht mehr erreichen, sondern nur einen Punkt links oberhalb der BEL.

Die modifizierte Effizienzkurve MEK in Abb. 14.5 repräsentiert die Menge aller für den Investor erreichbaren μ - σ -effizienten Punkte für den Fall, dass der Kaufpreis der Investition mit ihrem Marktwert übereinstimmt. Die modifizierte Effizienzkurve erreicht die BEL im Punkt TP. In diesem Punkt hat der Investor zu dem Überschuss der Investition Wertpapiere gerade in der Weise hinzugemischt, dass die gesamte Position aus Überschuss und den betreffenden Wertpapierrückflüssen dem Mischungsverhältnis des Marktportefeuilles entspricht und der Überschuss der gesamten Position mit dem eines bestimmten Anteils am Marktportefeuille übereinstimmt.⁸ TP entspricht dem kleinsten Teil des Marktportefeuilles, der das Duplikationsportefeuille des Überschusses der Investition als Teilmenge enthält.

⁸Lässt sich z. B. der Überschuss der Investition durch ein einzelnes Wertpapier duplizieren, so wird TP erst erreicht, wenn alle anderen Wertpapiere in denjenigen Stückzahlen gekauft worden sind, die dazu führen, dass das Mischungsverhältnis der Wertpapiere einschließlich $\tilde{x}_{1P}$ dem Mischungsverhältnis des Marktportefeuilles entspricht.

Das optimale Portefeuille des Investors mit Kauf der Investition zu seinem Marktwert und mit Wertpapierhandel entspricht in Abb. 14.5 dem Tangentialpunkt T_2 zwischen der MEK und einer Indifferenzkurve des Investors. In T_2 erreicht der Investor ein geringeres Nutzenniveau als in T_1 . Würde er die Investition zu ihrem Marktpreis kaufen, so würde also sein Nutzenniveau gegenüber dem Verzicht auf die Investition sinken: *Der subjektive Grenzpreis des Investors muss unter dem Marktpreis liegen*. Dies gilt immer dann, wenn der Punkt TP rechts oberhalb des Punktes T_1 liegt. Läge T_1 rechts oberhalb von TP auf der MEK, so wäre die Kapitalmarktbeschränkung des Investors nicht bindend: Er würde die Investition zum Marktwert kaufen und durch den Kauf von Wertpapieren wieder die Risikostruktur des Marktportefeuilles herstellen, bis er das für ihn optimale Portefeuille ohne die Investition erreicht. Konkret würde er das in diesem Portefeuille enthaltene Duplikationsportefeuille für den Überschuss durch die Investition ersetzen.

Grundsätzlich aber ist davon auszugehen, dass der subjektive Grenzpreis der Investition unter deren Marktwert liegt. Der subjektive Grenzpreis kann allgemein wie folgt ermittelt werden: Zunächst wird für einen beliebig angenommenen *hypothetischen* Preis (in Abb. 14.5 ist dies beispielhaft der Marktwert des Bewertungsobjekts), den wir als „Referenzpreis“ bezeichnen, die MEK ermittelt und geprüft, ob damit in Verbindung mit dem entsprechenden optimalen Portefeuille derselbe (μ, σ) -Präferenzwert erreicht wird wie in der Situation ohne Projekt. Dies ist dann der Fall, wenn die dem Referenzpreis entsprechende MEK die BIK, die den maximalen Präferenzwert ohne Bewertungsobjekt charakterisiert, tangiert. Ergibt sich kein Tangentialpunkt mit der BIK, wird der Referenzpreis derart reduziert oder erhöht, dass die MEK die BIK tangiert und somit die Präferenzwerte mit und ohne Bewertungsobjekt übereinstimmen. Der subjektive Grenzpreis ist damit gefunden. Von Bedeutung ist dabei, dass die Krümmung der MEK vom Kaufpreis unabhängig ist, sodass eine Reduktion (bzw. Erhöhung) des Preises um einen Betrag lediglich eine Parallelverschiebung der MEK um den mit dem Zinssatz r aufgezinsten Betrag nach rechts (bzw. links) impliziert.

Entsprechend erhält man die Differenz zwischen dem Marktwert und dem subjektiven Grenzpreis, indem man die für den Marktwert maßgebliche MEK derart parallel nach rechts verschiebt, dass sie die BIK tangiert, und den Betrag der Parallelverschiebung mit dem Zinssatz r diskontiert.

Der subjektive Grenzpreis liegt tendenziell umso weiter unter dem Marktwert, je stärker die Kapitalmarktbeschränkung wirkt. Diese wirkt umso stärker, je größer die Risikoaversion des Investors ist (je kleiner somit sein Anteil am Marktportefeuille ohne das Bewertungsobjekt ist), je größer das Volumen des Bewertungsobjekts ist und je mehr sein Überschuss gegenüber dem Marktportefeuille bzw. Anteilen daran strukturverzerrt ist: Je größer die Risikoaversion des Investors, je größer das Volumen der Investition, und je stärker das Risiko der Investition von dem des Marktportefeuilles abweicht, desto

wichtiger ist es für ihn, die mit der Investition verbundenen Risiken zu hedgen, und desto stärker wirken sich Beschränkungen seiner Hedgemöglichkeiten aus.⁹

Die Tendenz, dass der subjektive Grenzpreis c. p. umso näher beim Marktwert liegt bzw. umso eher damit übereinstimmt, je kleiner das Volumen des Bewertungsobjekts ist, verdeutlicht nochmals die (näherungsweise) Übereinstimmung von Marktwertmaximierung und subjektiver Nutzenmaximierung beim börsennotierten Unternehmen: Je größer die Zahl der Anteilseigner und je kleiner entsprechend ihre Anteile am Unternehmen sind, desto kleiner ist für jeden das anteilige Projektvolumen und desto eher ist zu erwarten, dass auch bei „größeren“ Investitionsprojekten die Abweichungen zwischen den anteiligen Marktwerten und den anteiligen subjektivem Grenzpreisen gleich null oder vernachlässigbar gering sind.

Die Darstellungen haben nicht nur gezeigt, dass für einen individuellen Investor der subjektive Grenzpreis grundsätzlich niedriger ist als der Marktwert und somit das Marktwertkriterium als generelles Entscheidungskriterium versagt. Sie haben zugleich auch deutlich gemacht, wie schwierig es ist, subjektive Grenzpreise praktisch zu ermitteln. Ein subjektiver Grenzpreis als kritische Preisobergrenze muss allerdings nur dann bekannt sein, wenn der Preis des Bewertungsobjekts nicht ex ante gegeben, sondern Verhandlungssache ist. Wenn der Preis bereits feststeht, muss im Grunde nur geprüft werden, ob bei *diesem* der Kauf in Verbindung mit optimaler Portefeuillebildung vorteilhaft ist. Schließlich wird auch ersichtlich, wie schwierig es ist, die Darstellungen in Kap. 12 zur anreizkompatiblen Teilung eines riskanten Erfolges x durch Berücksichtigung von Handel mit Wertpapieren im unvollkommenen und/oder unvollständigen Kapitalmarkt zu erweitern.

⁹Selbst dann, wenn der Punkt P auf der BEL liegt, kann der subjektive Grenzpreis niedriger sein als der Marktwert des Bewertungsobjekts. Er ist genau dann niedriger, wenn P rechts oberhalb von T_1 in Abb. 14.5, dem Tangentialpunkt der BEL mit der BIK liegt. Der Investor erreicht dann zwar durch den Kauf des Bewertungsobjekts dieselbe Risikomischung wie durch den Kauf des optimalen Anteils am Marktportefeuille, jedoch trägt er ein zu hohes Risiko, dessen er sich nicht durch Leerverkauf eines entsprechenden Anteils am Marktportefeuille entledigen kann. Für den Investor ist es nun nachteilig, zusätzlich zum Bewertungsobjekt überhaupt Wertpapiere zu halten. Auch in anderen Fällen kann es für den Investor optimal sein, neben dem Bewertungsobjekt keinerlei Wertpapiere zu halten. Allgemein kommt es dazu, wenn im Punkt P die Steigung der modifizierten Effizienzkurve größer ist als die Steigung der durch P verlaufenden Indifferenzkurve oder damit übereinstimmt. (Zu einem solchen Fall kann es insbesondere dann kommen, wenn zum Hedgen des Projektüberschusses nur wenige Wertpapiere berücksichtigt werden.) Die Differenz zwischen dem subjektiven Grenzpreis und dem Marktwert entspricht dann dem mit dem Zinssatz r diskontierten waagrechten Abstand zwischen dem Punkt P und der BIK.

14.5 Resümee: Unternehmensziele und Unternehmensplanung für börsennotierte und für Einzelunternehmen im Vergleich

14.5.1 Möglichkeiten und Grenzen der theoretischen Fundierung von Unternehmenszielen

14.5.1.1 Übereinstimmung von Marktwert- und Nutzenmaximierung

Vor dem Hintergrund der Darstellungen in den Abschn. 14.2, 14.3 und 14.4 wird im Folgenden ein zusammenfassender Vergleich von Möglichkeiten und Grenzen der Ableitung finanzwirtschaftlicher Ziele für das Einzelunternehmen und das börsennotierte Unternehmen vorgenommen.

Entscheidungen in einem börsennotierten Unternehmen können nur dann im Sinne aller Eigentümer des Unternehmens getroffen werden, wenn der Unternehmensleitung ein Ziel zur Verfügung steht, welches einerseits von den Eigentümern akzeptiert wird und andererseits operational ist, d. h. bei vertretbarem Planungsaufwand konkret ermittelt und praktisch angewendet werden kann. Dabei ist zu beachten, dass ein Kapitalmarktumfeld gegeben ist, in dem sowohl das Unternehmen als auch Privatpersonen Wertpapiere kaufen und verkaufen können. Der Zugang der beteiligten Personen und Institutionen zum Kapitalmarkt hat zentrale Bedeutung für die Fundierung von Unternehmenszielen. Überlegungen hierzu fußen daher grundsätzlich auf Kapitalmarktmodellen. Sie lassen sich in einer Frage zusammenfassen: Unter welchen Bedingungen ist die Marktwertmaximierung ein einmütig akzeptiertes Unternehmensziel?

In diesem Kapitel wurde gezeigt, dass unter idealisierten Annahmen über den Kapitalmarkt – Vollkommenheit und Vollständigkeit – die Marktwertmaximierung für ein börsennotiertes Unternehmen durch die Annahme begründet werden kann, die Anteilseigner als Ganzheit (und nicht nur einzelne Investoren) könnten die zustandsbedingten Zahlungsansprüche zu *unveränderlichen* Preisen handeln. Diese von uns als Hedgevariante bezeichnete Begründung der Marktwertmaximierung führt deshalb zur Übereinstimmung von Marktwert- und Nutzenmaximierung, weil die Anteilseigner unabhängig von ihren konkreten Präferenzen durch Kauf und Verkauf zustandsbedingter Zahlungsansprüche stets eine dominante Portefeuilleposition herstellen können, nachdem die Unternehmensleitung marktwertmaximierende Entscheidungen getroffen hat.

Wie aber auch gezeigt wurde, ist die Annahme eines generellen Handels mit Wertpapieren zu unveränderlichen Preisen nicht überzeugend begründbar. Die Marktwertmaximierung als Unternehmensziel muss vielmehr streng genommen aus Gleichgewichtsüberlegungen abgeleitet werden (sogenannte Gleichgewichtsvariante), die Wertpapierpreise endogen erklären und nicht exogen als gegeben annehmen. Dabei allerdings zeigt sich, dass die Marktwertmaximierung immerhin näherungsweise mit der Nutzenmaximierung übereinstimmt, entweder weil man davon ausgehen kann, dass sich die Grenznutzenwerte der Eigentümer deshalb nicht spürbar ändern, weil sie sehr kleine Anteile am Unternehmen halten (Abschn. 14.2.4), oder weil das isolierte Risiko eines

Investitionsprojekts im Vergleich zu seinem Kovarianzrisiko vernachlässigbar gering ist (Abschn. 14.3.4).

In jedem Fall aber beruht die Marktwertmaximierung als Unternehmensziel auf einer Näherung. Marktwertmaximierung resultiert also immer aus der Notwendigkeit zu vereinfachen, um ein operationales Ziel für die Unternehmenspolitik abzuleiten, welches unabhängig von den individuellen Präferenzen der Eigentümer ist. Diese Vereinfachung beruht letztlich auf dem Ideal eines vollkommenen Kapitalmarktes, das in der Realität nicht erfüllt ist. Sie ist daher nur dann unproblematisch, wenn Unvollkommenheiten des Kapitalmarktes nur geringe Auswirkungen auf die Bewertung haben. (Zur möglichen „demokratischen Legitimation“ der Marktwertmaximierung als Unternehmensziel bei „größeren“ Interessenkonflikten zwischen den Gesellschaftern, die nicht nur aus Abweichungen zwischen Marktwerten und subjektiven Werten, sondern auch aus anderen Gründen resultieren, vgl. Kap. 17, Abschn. 17.6. Dort wird auch gezeigt, welche Bedeutung die Marktwertmaximierung als „faïres“ Unternehmensziel hat, wenn diese Legitimation nicht möglich ist.)

Marktwertmaximierung als Unternehmensziel ist jedoch dann nicht sinnvoll, wenn Einzelunternehmen mit konzentriertem Anteilsbesitz betrachtet werden, da Unvollkommenheiten des Kapitalmarktes in diesem Falle gravierende Auswirkungen haben können (Abschn. 14.4). Die Eigentümerstruktur hat somit große Bedeutung für die Rechtfertigung von Unternehmenszielen.

14.5.1.2 Relevanz von Kapitalmarkttransaktionen

Auch wenn kapitalmarkttheoretische Modelle nicht explizit der praktischen Bewertung zugrunde gelegt werden, lehren sie, dass finanzwirtschaftliche Unternehmensziele weder für börsennotierte Unternehmen noch für Einzelunternehmen unabhängig von Überlegungen zu Kapitalmarkttransaktionen abgeleitet werden können.

So beruht die „klassische“ Begründung der Orientierung am Marktwert (Hed-gevariante) wie erläutert auf der Annahme, die Eigentümer könnten zu unveränderlichen Preisen zustandsbedingte Zahlungsansprüche kaufen und verkaufen. Bei der in Abschn. 14.2.2 dargestellten Begründung sind wir der Anschaulichkeit halber davon ausgegangen, dass der Investor oder die Investoren (bzw. der oder die Eigentümer) bereits über ihre Konsumausgaben zum Zeitpunkt $t=0$ entschieden haben und sich am Ziel orientieren, den Erwartungswert des Nutzens ihres Vermögens am Ende der Periode zu maximieren. Die erläuterte Kompatibilität von Marktwertmaximierung und subjektiver Nutzenmaximierung gilt jedoch analog für den Fall, dass die Konsumausgaben zum Zeitpunkt $t=0$ noch nicht feststehen, sondern jeder Investor sich am Ziel orientiert, den Erwartungswert des Nutzens seines Konsumstroms für die Zeitpunkte $t=0$ und $t=1$ zu maximieren (wobei dann das Endvermögen mit der Konsumausgabe zum Zeitpunkt $t=1$ übereinstimmt).

Bei Sicherheit aller Unternehmensüberschüsse würde sich die Annahme, die Eigentümer könnten zu unveränderlichen Preisen zustandsbedingte Zahlungsansprüche

kaufen und verkaufen, darauf reduzieren, dass sie Geld zu einem unveränderlichen risikolosen Zinssatz r beliebig anlegen und aufnehmen könnten. Die Fundierung der Marktwertmaximierung als Unternehmensziel bei Sicherheit ist Gegenstand einflussreicher Lehrbücher zur Investitionstheorie. Dort wird – üblicherweise eben für den Fall der Sicherheit – das Separationstheorem von Fisher dargestellt (vgl. z. B. Schimdt und Terberger 1997, Kap. 3, Franke und Hax 2009, Kap. 4). Es besagt, dass bei vollkommenem Kapitalmarkt Investitionsentscheidungen unabhängig von Konsumentscheidungen getroffen werden können, weil jeder Investor über seine Investitionsentscheidungen zunächst den Marktwert bzw. Kapitalwert maximieren und daraufhin aufgrund der Geldanlage- und Geldaufnahmemöglichkeit zum risikolosen Zinssatz den von ihm präferierten (sicheren) Konsumstrom herstellen kann. Ist der Kapitalwert der Investitionen positiv, so dominiert der präferierte Konsumstrom mit ihnen den ohne sie. Die Hedgevariante der Begründung der Marktwertmaximierung bei Risiko ist damit nicht anderes als ein verallgemeinertes Fisher-Separationstheorem (vgl. ausführlicher Kap. 15, Abschn. 15.3.1.2).

Für einen individuellen Investor (einen Einzelunternehmer) besteht in Risikosituationen aufgrund von Beschränkungen des Handels mit Wertpapieren grundsätzlich ein Konflikt zwischen dem Ziel der Marktwertmaximierung und dem subjektiver Nutzenmaximierung. Aber auch bei expliziter Nutzenmaximierung sind Kapitalmarkttransaktionen von unmittelbarer Bedeutung für die Vorteilhaftigkeitsbeurteilung von risikanten Maßnahmen und damit für die Unternehmenspolitik. Es besteht dann allerdings nicht die Möglichkeit der Separierbarkeit. Vielmehr kann ein optimales Investitionsprogramm nur simultan mit einem optimalen Handel mit Wertpapieren ermittelt werden. Je stärker der Investor im Handel mit Wertpapieren beschränkt ist, desto mehr liegt tendenziell der Wert einer Investition unter ihrem Marktwert.

Für ein börsennotiertes Unternehmen kommt man bezüglich der Bedeutung von Beschränkungen des Handels am Kapitalmarkt je nach dem gewählten theoretischen Bezugsrahmen zu unterschiedlichen Schlussfolgerungen. So hält im Gleichgewicht des CAPM jeder Investor einen Anteil am Marktportefeuille. Leerverkaufsbeschränkungen sind nicht relevant, da in den Anteilen am Marktportefeuille (wie in diesem Portefeuille selbst) nur positive Bestände an Wertpapiere enthalten sind. Das CAPM setzt allerdings voraus, dass die Investoren am Kapitalmarkt und entsprechend die Eigentümer des Unternehmens keine privaten Überschüsse (etwa aus einem privaten Unternehmen) erzielen, von denen die Endwerte der Wertpapiere stochastisch abhängen. Auch müssen die Investoren homogene Erwartungen haben. Sind diese Voraussetzungen nicht erfüllt, so werden Kapitalmarktbeschränkungen wie Leerverkaufsverbote grundsätzlich relevant. Dadurch werden sich Konflikte zwischen den Eigentümern des Unternehmens ergeben, sodass Marktwertmaximierung nicht generell im Einklang mit subjektiver Nutzenmaximierung stehen kann.

14.5.2 Implikationen für die Unternehmensplanung

14.5.2.1 Berücksichtigung von Kapitalmarkttransaktionen

Aufbauend auf den Überlegungen der Abschn. 14.2, 14.3 und 14.4 und den zusammenfassenden Schlussfolgerungen des vorangegangenen Abschnitts sollen nun für beide Eigentümerstrukturen (breit gestreuter Anteilsbesitz versus Einzelunternehmen) charakteristische Probleme optimaler Entscheidungen dargestellt und verglichen werden.

Unter der Bedingung, dass für ein Einzelunternehmen Marktwertmaximierung im Einklang mit subjektiver Nutzenmaximierung steht, brauchen – wie erläutert – bei der Ermittlung des optimalen Investitionsprogramms Kapitalmarkttransaktionen nicht explizit betrachtet werden. Aufgrund der dann gegebenen Separierbarkeit genügt es, sie erst dann vorzunehmen, nachdem das Investitionsprogramm mit dem höchsten Kapitalwert ermittelt worden ist. Es werden dann seine Rückflüsse gemäß dem Bernoulli – Prinzip in eine optimale Wahrscheinlichkeitsverteilung über das Endvermögen transformiert.

Wie gezeigt wurde, besteht jedoch für ein Einzelunternehmen grundsätzlich ein Konflikt zwischen Marktwertmaximierung und subjektiver Nutzenmaximierung. Die Ermittlung eines Optimums gemäß dem Bernoulli-Prinzip erfordert dann, dass mit dem optimalen Investitionsprogramm simultan das zugehörige optimale Wertpapierportefeuille für den Eigentümer bestimmt wird. Dabei ist es gleichgültig, ob die betreffenden Kapitalmarkttransaktionen im Unternehmen oder privat vorgenommen werden.

Können wie im SPA und im CAPM die Eigentümer eines börsennotierten Unternehmens privat dieselben Kapitalmarkttransaktionen vornehmen wie das Unternehmen, so erübrigen sich die Transaktionen im Unternehmen; sie können die Nutzenerwartungswerte der Eigentümer nicht verbessern. Wenn jedoch im Unternehmen (z. B. aufgrund privater Leerverkaufsbeschränkungen) „bessere“ Kapitalmarkttransaktionen durchgeführt werden können, können Eigentümer einen Vorteil erzielen, wenn diese vorgenommen werden. Allerdings besteht dann grundsätzlich keine Einmütigkeit bezüglich der Kapitalmarkttransaktionen (und anderen Investitionen) im Unternehmen.

14.5.2.2 Erfassung von Varianz- und Kovarianzrisiken

Auch hinsichtlich der Erfassung von Varianz- und Kovarianzrisiken bei Orientierung am (μ, σ) -Prinzip bestehen erhebliche Unterschiede zwischen Einzelunternehmen und börsennotiertem Unternehmen. Zur Erläuterung gehen wir davon aus, dass im betrachteten Unternehmen jeweils ein einziges Investitionsprojekt durchgeführt werden kann und noch keine anderen Investitionsprojekte realisiert worden sind.

Besteht für das Einzelunternehmen ein Konflikt zwischen Marktwertmaximierung und Nutzenmaximierung, so ist der subjektive Grenzpreis des Projekts niedriger als sein Marktwert. Bei der Bestimmung des subjektiven Grenzpreises gemäß dem (μ, σ) -Prinzip ist dann simultan das optimale Wertpapierportefeuille zu ermitteln. Von Bedeutung für die Bewertung sind dann sowohl die Varianzen des Investitionsüberschusses und der

Rückflüsse der einzelnen Wertpapiere als auch die Kovarianzen zwischen den Rückflüssen der Papiere untereinander sowie zwischen ihnen und dem Investitionsüberschuss. Nur auf deren Grundlage kann eine optimale Abstimmung des Portefeuilles mit dem Investitionsüberschuss vorgenommen werden (Abschn. 14.4).

Anders ist die Situation für ein börsennotiertes Unternehmen im Rahmen des CAPM. Hier spielt die Varianz des Investitionsüberschusses (des Unternehmensüberschusses) als einzelne Größe eine eher untergeordnete Rolle, da sie im Rahmen der gut gemischten Portefeuilles der Eigentümer kaum spürbar ist. Viel wichtiger ist es hier, die Kovarianz des Investitionsüberschusses mit dem Endwert des Marktportefeuilles zu erfassen, die sich (da im Unternehmen noch keine Investitionen durchgeführt worden sind) bei N Wertpapieren aus $N - 1$ Kovarianzen zusammensetzt. Von Bedeutung ist zudem, dass nicht wie bei der Bewertung im Einzelunternehmen die Kovarianzen mit den einzelnen Wertpapieren bekannt sein müssen; es genügt, die Kovarianz mit dem Endwert des Marktportefeuilles als Ganzes zu schätzen.

14.5.2.3 Bedarf an unternehmensinterner Koordination

Sind im Unternehmen bereits Investitionen realisiert worden oder werden neben dem Bewertungsobjekt weitere Investitionen erwogen, so besteht grundsätzlich aufgrund von Risiko- und/oder Bewertungsverbund selbst dann unternehmensinterner Koordinationsbedarf, wenn weder Restriktionsverbund noch Erfolgsverbund existiert. Ist allerdings der Kapitalmarkt vollkommen und vollständig und haben neue Investitionsprojekte keinen Einfluss auf die Preise für zustandsbedingte Zahlungsansprüche, so können bei Fehlen von Restriktions- und Erfolgsverbund die Investitionen unabhängig voneinander bewertet werden; es besteht kein Koordinationsbedarf. Unabhängig davon, ob eine Investition im Einzelunternehmen oder im börsennotierten Unternehmen erwogen wird, ist sie vorteilhaft, wenn ihr Marktwert größer ist als ihre Anschaffungsauszahlung. Diese Unabhängigkeit ist eine Folge der Wertadditivität der Orientierung am Marktwert. Wertadditivität besagt, dass der Marktwert der Summe mehrerer Zahlungsansprüche mit der Summe der Marktwerte der einzelnen Zahlungsansprüche übereinstimmt (Franke und Hax 2009, Kap. 6).

Sind nicht alle genannten Bedingungen erfüllt, so besteht grundsätzlich ein unternehmensinterner Koordinationsbedarf, der allerdings für das börsennotierte Unternehmen weniger entscheidungsrelevant ist als für das Einzelunternehmen. Zur Erläuterung betrachten wir wieder für das börsennotierte Unternehmen die Bewertungsfunktionen des CAPM. Im CAPM ist für den Marktwert eines börsennotierten Unternehmens die Varianz seines Überschusses im Vergleich zur Kovarianz mit dem gesamten Endwert aller anderen Wertpapiere von untergeordneter Bedeutung. Dies impliziert, dass stochastische Abhängigkeiten zwischen dem Überschuss einer Investition und den sonstigen Überschüssen des Unternehmens der Einfachheit halber vernachlässigt werden können. Entsprechend besteht ohne Restriktions- und Bewertungsverbund kein Bedarf an unternehmensinterner Koordination, jedoch müssen die Investitionen im Unternehmen mit den Risiken aller anderen Unternehmen optimal abgestimmt werden.

Anders ist die Situation für das Einzellunternehmen. Hier sind die Investitionen nicht nur mit optimaler Portfeuilleplanung abzustimmen, sondern grundsätzlich auch untereinander.

Bei fehlender Duplizierbarkeit kann ein Investitionsprojekt auch bei negativem Kapitalwert vorteilhaft sein, weil es vorteilhafte Hedgemöglichkeiten für die anderen Überschüsse des Unternehmens bietet, die mit Portfeuillebildung nicht realisierbar sind; wiederum besteht Koordinationsbedarf.

14.5.2.4 Informationsbedarf

Da im Einzelunternehmen andere entscheidungsrelevante Zusammenhänge maßgeblich sind als im börsennotierten, ergibt sich natürlich auch ein anderer Informationsbedarf über die Entscheidungsgrundlagen. Wenn für ein Einzelunternehmen kein Konflikt zwischen Marktwertmaximierung und Nutzenmaximierung besteht, muss ein Entscheidungsträger im Unternehmen die Nutzenfunktion des Eigentümers nicht kennen. Nachdem er das marktwertmaximale Investitionsprogramm realisiert hat, muss er jedoch den Eigentümer über die zustandsabhängigen Überschüsse bzw. Residualgewinne des Unternehmens informieren, damit er ihre Transformation in eine optimale Wahrscheinlichkeitsverteilung über sein Endvermögen (seine Konsumausgaben) vornehmen kann. Bei Vollkommenheit des Kapitalmarktes ist dies kostenlos möglich, nicht jedoch in der Realität.

Bei Konflikt zwischen Marktwert- und Nutzenmaximierung muss der Entscheidungsträger über die Nutzenfunktion des Eigentümers und eventuell auch über seine privaten Aktionsmöglichkeiten am Kapitalmarkt (etwa seine Leerverkaufsmöglichkeiten), die nicht auch im Unternehmen bestehen, informiert werden, damit er gemäß dem Bernoulli-Prinzip ein für den Eigentümer optimales Investitionsprogramm und Wertpapierportfeuille ermitteln kann.

Wenn im CAPM das Risiko Pareto-effizient geteilt wird, somit Einmütigkeit besteht und Marktwertmaximierung (näherungsweise) im Einklang mit subjektiver Nutzenmaximierung steht, muss der Entscheider über die Nutzenfunktion keines Anteilseigners informiert werden, um das nutzenmaximale Investitionsprogramm ermitteln zu können. Sie müssen zu Beginn der Periode auch nicht über die neuen Investitionen informiert werden, um entsprechende optimale Portfeuilleanpassungen vornehmen zu können; sie ändern ihre Anteile am Marktportfeuille ohnehin nicht. Es genügt, sie am Ende der Periode über den tatsächlich erzielten Überschuss bzw. Residualgewinn zu informieren, damit sie entsprechend ihrem Anteil daran ihre Konsumententscheidungen und Anteile am Marktportfeuille für die zweite Periode daran optimal anpassen können.

Die Gleichgewichts- und die Hedgevariante der Erklärung von Einmütigkeit für ein börsennotiertes Unternehmen im Rahmen des SPA stellen unterschiedliche Anforderungen an die Informationspolitik des Unternehmens gegenüber den Anteilseignern. Die Hedgevariante impliziert, dass die Anteilseigner über die zustandsabhängigen Residualgewinne oder Überschüsse neuer Projekte informiert werden, damit sie die zum Nutzenmaximum führenden Kapitalmarkttransaktionen vornehmen können.

Bei der Gleichgewichtsvariante wird eine solche Information nicht vorausgesetzt. Sie löst bei (quasi-) konstanten Grenznutzenwerten ohnehin keine Transaktionen aus. Es genügt wiederum, die Anteilseigner am Ende der Periode über den tatsächlich erzielten Residualgewinn zu informieren, damit sie ihre Konsumententscheidungen und ihre Portefeuilles für die zweite Periode daran optimal anpassen können.

14.6 Zusammenfassung

- Mithilfe von Kapitalmarktmodellen wie dem State-Preference-Ansatz (SPA) und dem Capital Asset Pricing Model (CAPM) kann untersucht werden, unter welchen Kapitalmarktbedingungen sich Entscheidungskriterien für die Unternehmenspolitik definieren lassen, die mit den Präferenzen aller Anteilseigner kompatibel sind, sodass vorteilhafte Entscheidungen im Unternehmen zugleich alle Anteilseigner besser stellen.
- Der State Preference Ansatz (SPA) unterstellt mit der Vollkommenheit und Vollständigkeit des Kapitalmarktes ideale Bedingungen, um Überschüsse zu duplizieren und durch Handel mit Wertpapieren zu transformieren.
- Im SPA wird bei (quasi-)konstanten Preisen der Wertpapiere mit der Maximierung des Marktwertes eines Unternehmens auch der Erwartungswert des Nutzens jedes proportional am Unternehmen beteiligten Eigentümers maximiert. Damit wird die Marktwertmaximierung zum einmütig akzeptierten Unternehmensziel.
- Im SPA ist das Ziel der Marktwertmaximierung operational, da ein optimales Investitionsprogramm unabhängig von den Nutzenfunktionen der Anteilseigner „präferenzfrei“ ermittelt werden kann. Entscheidungen (über verschiedene Investitionen im Unternehmen, über Maßnahmen im Unternehmen und private Maßnahmen der Anteilseigner) lassen sich separieren.
- Die Annahme unveränderlicher Preise von Wertpapieren ist bei der Durchführung großer Projekte in einem börsennotierten Unternehmen jedoch problematisch. Bei veränderlichen Preisen können sich Interessenkonflikte zwischen Anteilseignern ergeben.
- Im Capital Asset Pricing Model (CAPM) hält jeder Investor einen Anteil am Marktportefeuille, das gesamte Risiko wird daher linear zwischen den Anteilseignern geteilt; alle halten von allen Unternehmen denselben Anteil. Ist diese Teilung Paretoeffizient, besteht Anreizkompatibilität, sodass es möglich ist, simultan die Nutzen-erwartungswerte aller Anteilseigner zu maximieren. Dies ist jedoch ein Ausnahmefall. In der Regel besteht keine Anreizkompatibilität.
- Aus dem CAPM lässt sich die Marktwertmaximierung als von allen Anteilseignern akzeptiertes Unternehmensziel nicht ohne Weiteres ableiten. Insbesondere besteht grundsätzlich ein Unterschied zwischen der Marktbewertung und der Nutzenbewertung von Maßnahmen, der daraus resultiert, dass die jeweiligen Risikoabschläge sich bei Marktwert- und Nutzenmaximierung voneinander unterscheiden.

- Alternativ zur Maximierung des Marktwertes des Unternehmens könnte auch das Ziel der Maximierung des Marktwertes aller Wertpapiere (Reichtumsmaximierung) verfolgt werden, da ja im CAPM jeder Investor das Marktportefeuille hält. Hier kann jedoch ein erheblicher Konflikt zur Nutzenmaximierung bestehen. Die individuelle Marktwertmaximierung ist tendenziell eine wesentlich bessere Approximation an subjektive Nutzenmaximierung als Reichtumsmaximierung.
- Bei Unvollkommenheit und/oder Unvollständigkeit des Kapitalmarktes ist der subjektive Grenzpreis eines Bewertungsobjekts für einen individuellen Investor (für den Alleineigentümer eines Unternehmens) grundsätzlich niedriger als der Marktwert seines Überschusses, sodass ein Konflikt zwischen Marktwert- und subjektiver Nutzenmaximierung besteht.
- Der subjektive Grenzpreis liegt tendenziell umso mehr unter dem Marktwert des Bewertungsobjekts, je größer seine Varianz und die Risikoaversion des Investors sind und je stärker sein Kapitalmarktzugang (seine Duplikations- und Leerverkaufsmöglichkeiten) beschränkt ist. Die Investitionsplanung muss sich dann an der Nutzenmaximierung orientieren, Entscheidungen sind grundsätzlich nicht mehr separierbar.

Ergänzende und vertiefende Literatur

Deangelo (1981); Franke und Hax (2009, Kapitel VI.3); Gillenkirch und Velthuis (1997); Grossman und Stiglitz (1977); Hax et al. (1988); Laux (1971, 1975, 1994, 2006); Laux und Velthuis (2005); Makowski und Pepall (1985); Rubinstein (1974); Rudolph (1983); Velthuis (2004); Wilhelm (1983).

14.7 Übungen

Aufgabe 14.1

Ein Entscheider steht einem Entscheidungsproblem bei Risiko gegenüber, das in der folgenden Ergebnismatrix abgebildet ist:

	$w(S_1)=0,25$	$w(S_2)=0,50$	$w(S_3)=0,25$
	S_1	S_2	S_3
A_1	100	100	100
A_2	60	90	200
A_3	0	50	380

A_1 , A_2 und A_3 bezeichnen die Alternativen, S_1 , S_2 und S_3 die Umweltzustände und $w(S_1)$, $w(S_2)$, $w(S_3)$ die zugehörigen Eintrittswahrscheinlichkeiten.

- a) Unterstellen Sie, der Entscheider sei risikoneutral. Für welche Alternative entscheidet er sich?

- b) Unterstellen Sie nun, der Entscheider sei risikoavers und orientiere sich an der Nutzenfunktion $U(x) = 1 - e^{-0.01 \cdot x}$. Für welche Alternative entscheidet er sich?
- c) Gehen Sie nun davon aus, auf dem Kapitalmarkt werden drei Wertpapiere $s = 1, 2, 3$ mit folgenden Rückflüssen und Preisen gehandelt: Wertpapier s hat einen Rückfluss von 1 Geldeinheit (GE) in Zustand S_s und 0 GE in den beiden anderen Zuständen und hat den Preis π_s , mit $\pi_1 = 0,30$ (Wertpapier 1), $\pi_2 = 0,48$ (Wertpapier 2) und $\pi_3 = 0,20$ (Wertpapier 3). Bestimmen Sie die Alternative mit dem höchsten Marktwert.
- d) Zeigen Sie, welche Alternative der risikoneutrale Entscheider wählt und welche Einkommensposition er herstellen wird, wenn er mit zustandsbedingten Zahlungsansprüchen handeln kann.
- e) Zeigen Sie, dass der risikoaverse Entscheider aus Aufgabenteil b eine dominante Einkommensposition herstellen kann, wenn er die Alternative mit dem höchsten Marktwert wählt und nicht die Alternative, die er in Aufgabenteil b gewählt hat.

Aufgabe 14.2

Gehen Sie von einem vollkommenen und vollständigen Kapitalmarkt mit einem Planungszeitraum von einer Periode aus, auf dem zustandsbedingte Zahlungsansprüche auf 1 Geldeinheit (GE) für die beiden möglichen Zustände am Ende der Periode gehandelt werden. Deren Preise betragen $\pi_1 = 0,28$ und $\pi_2 = 0,7$.

- a) Wie hoch ist der risikolose Zinssatz?
- b) Der Investor rechnet mit einem Endvermögen in Höhe von 200 GE in S_1 und 50 GE in S_2 . Ermitteln Sie den Marktwert seines Endvermögens für den gegenwärtigen Zeitpunkt und zeichnen Sie die dazugehörige Marktwertgerade in ein passendes Diagramm. Geben Sie einen weiteren Punkt an, der zu dieser Marktwertgerade gehört.
- c) Der Investor könnte nun ein Investitionsprojekt mit einer Anschaffungsauszahlung von 100 GE durchführen, das ihm in S_1 einen Überschuss von 80 GE und in S_2 von 140 GE einbrächte. Würde er dieses Projekt durchführen? Zeichnen Sie die Marktwertgerade in das Diagramm, die sich bei Durchführung dieser Investition ergeben würde. Geben Sie auch die zustandsbezogenen Residualgewinne an.
- d) Kann man davon ausgehen, dass der Investor das Projekt stets realisieren würde, wenn er nicht die Möglichkeit hätte, zusammen mit dem Projekt Kapitalmarkttransaktionen durchzuführen? Illustrieren Sie die Antwort grafisch.
- e) Gehen Sie davon aus, dass der Investor im Optimum ein Vermögen von 100 GE in S_1 anstrebt. Welche Kapitalmarkttransaktionen müsste dieser Investor zusammen mit dem Investitionsprojekt durchführen?
- f) Diskutieren Sie die Kompatibilität von Marktwertmaximierung und subjektiver Nutzenmaximierung im vorliegenden Fall, also für einen individuellen Investor. Diskutieren Sie die Kompatibilität zudem für den Fall, dass viele Kapitalmarktteilnehmer an einem großen Unternehmen beteiligt sind.

Aufgabe 14.3

Betrachten Sie noch einmal die Aufgabe 13.3: Auf dem Kapitalmarkt halten zehn Investoren $k=1, \dots, 10$ mit jeweils identischer Präferenzfunktion $\Phi_k = E(\tilde{V}_{1k}) - 0.01 \cdot \text{Var}(\tilde{V}_{1k})$ jeweils denselben Anteil, d. h. 10 %, an jeder der drei Aktiengesellschaften AG₁, AG₂ und AG₃. (Weitere börsennotierte Unternehmen gibt es nicht.) V_{1k} bezeichnet das Vermögen des Investors k am Ende der Periode. Die erwarteten Rückflüsse der AGs, $E(x_{1i})$ ($i=1,2,3$), sowie die Varianzen und Kovarianzen der Rückflüsse sind in der folgenden Tabelle dargestellt. Das Marktportefeuille entspricht den drei AGs, der Rückfluss des Marktportefeuilles ist also gleich der Summe der Rückflüsse der drei AGs. Der risikolose Zinssatz beträgt 2 %. Nehmen Sie an, alle Annahmen des CAPM seien erfüllt.

	$E(x_{1i})$	VAR/KOV	AG ₁	AG ₂	AG ₃
AG ₁	100	AG ₁	2.500	1.750	4.000
AG ₂	300	AG ₂	1.750	10.000	18.000
AG ₃	600	AG ₃	4.000	18.000	40.000

In AG₁ kann ein Projekt durchgeführt werden, das einen erwarteten (Netto-)Rückfluss von 20 und eine Varianz des Rückflusses von 100 hat. Der Rückfluss des Projekts ist mit den übrigen Rückflüssen der AG₁ perfekt positiv (+1) korreliert und mit den Rückflüssen der anderen AGs so korreliert wie die bisherigen Rückflüsse der AG₁.

- Bestimmen Sie den Marktrisikoaversionskoeffizienten a_M sowie Erwartungswert und Varianz des Rückflusses des Marktportefeuilles ohne (vgl. bereits Aufgabe 13.3) und mit Berücksichtigung des Projekts.
- Wie würde ein Investor das Projekt subjektiv bewerten, wenn er 100 % der Aktien von AG₁ besäße und sonst kein anderes Einkommen?
- Welcher Marktwert des Projekts ergibt sich, wenn er mit der Standard-Bewertungsgleichung des CAPM ermittelt wird und man dabei i) vereinfachend vernachlässigt, dass das Projekt den Rückfluss des Marktportefeuilles beeinflusst oder aber ii) berücksichtigt, dass das Marktportefeuille das Projekt nach deren Durchführung beinhaltet?
- Wie verändert sich der Marktwert der AG₁ durch das Projekt?
- Wie verändert sich der Marktwert des Marktportefeuilles durch das Projekt?
- Vergleichen Sie die Bewertungen aus den Aufgabenteilen b) bis e) und interpretieren Sie die Unterschiede.

14.8 Lösungshinweise

Aufgabe 14.1

a) A_3 . --- b) A_1 . --- c) A_2 . --- d) Der Entscheider wählt A_2 und verkauft alle Ansprüche in S_1 und S_2 . Mit dem Erlös kauft er Ansprüche auf S_3 . $E(x) = 126,50$. --- e) Wahl von A_2 und z. B. Verkauf von 100 in S_3 , mit dem Erlös $0,2 \cdot 100 = 20$ Kauf von 10 in S_2 (Kosten $= 0,48 \cdot 10 = 4,8$) und $15,2/0,3 = 50,67$ in S_1 .

Aufgabe 14.2

a) $1/0,98 - 1 = 2,04\%$. --- b) Marktwert $= 91$. Gerade im (V_{12}, V_{11}) -Diagramm mit Achsenabschnitten $(0, 325)$ und $(130, 0)$; weiterer Punkt z. B. $(100, 75)$. --- c) Marktwert des Projekts $= 20,4$, damit vorteilhaft; Marktwertgerade mit Projekt hat die Achsenabschnitte $(0, 397,86)$ und $(159,14, 0)$; zustandsbezogene Residualgewinne: $G_{p1} = -2,04$, $G_{p2} = 37,96$. --- d) Nein, denn einer der Residualgewinne ist negativ. Es ist dann nicht ausgeschlossen, dass der Investor mit dem Projekt auf einer Indifferenzkurve mit niedrigerem Nutzenniveau landet. --- e) Verkauf von 77,96 GE in S_1 , Erlös $= 77,96 \cdot 0,28 = 21,8288$, damit Kauf von 31,18 GE in S_2 , Einkommen hier $50 + 37,96 + 31,18 = 119,14$. --- f) Keine Kurzlösung verfügbar.

Aufgabe 14.3

a) Bezeichnungen: x_p = Projektrückfluss, x_1^{ohne} (x_1^{mit}) = Rückfluss der AG_1 ohne (mit) Projekt; x_M^{ohne} (x_M^{mit}) = Rückfluss des Marktportefeuilles ohne (mit) Projekt. $a_M = 0,001$; $E(x_M^{\text{ohne}}) = 1000$, $E(x_M^{\text{mit}}) = 1020$; $\text{Kov}(x_p, x_1^{\text{ohne}}) = 500$; $\text{Kov}(x_p, x_2) = 350$; $\text{Kov}(x_p, x_3) = 800$; damit $\text{Var}(x_M^{\text{ohne}}) = 100.000$, $\text{Var}(x_M^{\text{mit}}) = 103.400$. --- b) Subjektiver Wert $= 8,82$. --- c) i) 17,99; ii) 17,89. --- d) Marktwert der AG_1 steigt um 17,40. --- e) Marktwert des Marktportefeuilles steigt um 16,27. --- f) Unterschiede in c, d und e aufgrund unterschiedlicher Berücksichtigungen von Rückwirkungen des Projekts auf Bewertungen der AG_1 und AG_2, AG_3 .

Literatur

- DeAngelo, H.: Competition and unanimity. *Am. Econ. Rev.* **71**, 18–27 (1981)
- Franke, G., Hax, H.: *Finanzwirtschaft des Unternehmens und Kapitalmarkt*, 6. Aufl. Springer, Berlin (2009)
- Gillenkirch, R.M.: *Gewinn- und aktienkursorientierte Managementvergütung*. Deutscher Universitäts-Verlag, Wiesbaden (2004)
- Gillenkirch, R., Velthuis, L.: Lineare Anreizverträge für Manager bei systematischen und unsystematischen Risiken. *Z. Betriebswirtsch. Forsch.* **49**, 121–140 (1997)
- Grossman, S.J., Stiglitz, J.E.: On value maximization and alternative objectives of the firm. *J. Financ.* **32**, 389–402 (1977)

- Hax, H., Hartmann-Wendels, T., Hinten, P.: Moderne Entwicklung der Finanzierungstheorie. In: Christians, F.W. (Hrsg.) *Finanzierungshandbuch*, 2. Aufl., S. 689–713. Gabler, Wiesbaden (1988)
- Laux, H.: *Flexible Investitionsplanung*. Westdeutscher Verlag, Opladen (1971)
- Laux, H.: Marktwertmaximierung, Kapitalkonzept und Nutzenmaximierung. *Z. gesamte Staatswiss.* **131**, 113–133 (1975)
- Laux, H.: Anreizkompatible Erfolgsbeteiligung und Kapitalmarkt. In: Ballwieser, W., Böcking, H.-J., Drukarczyk, J. (Hrsg.) *Bilanzrecht und Kapitalmarkt*, Festschrift zum 65. Geburtstag von Adolf Moxter, S. 1259–1291. IDW-Verlag, Düsseldorf (1994)
- Laux, H.: *Wertorientierte Unternehmenssteuerung und Kapitalmarkt*, 2. Aufl. Springer, Berlin (2006)
- Laux, H., Gillenkirch, R.M., Schabel, M.M.: Incentive compensation, valuation and capital market access. *Schmalenbach Bus. Rev.* **61**, 335–360 (2009)
- Laux, H., Laux, C.: Risikotransformation und Kapitalmarkt. In: Schäfer, K., Burghof, H.-P., Johanning, L., Wagner, H.F., Rodt, S. (Hrsg.) *Risikomanagement und kapitalmarktorientierte Finanzierung*, Festschrift zum 65. Geburtstag von Bernd Rudolph, S. 165–197. Knapp, Frankfurt (2009)
- Laux, H., Schabel, M.M.: *Subjektive Investitionsbewertung. Marktbewertung und Risikoteilung*. Springer, Berlin (2009)
- Laux, H., Velthuis, L.J.: Stimmigkeit im Rahmen der Bewertung. In: Spengler, T., Lindstädt, H. (Hrsg.) *Strukturelle Stimmigkeit in der Betriebswirtschaftslehre*, Festschrift zum 65. Geburtstag von Hugo Kossbiel, S. 237–257. Springer Gabler, München (2005)
- Makowski, L., Peppall, L.M.: Easy proofs of unanimity and optimality without spanning. *J. Finan.* **40**, 1245–1250 (1985)
- Mossin, J.: *The Economic Efficiency of Financial Markets*. Lexington Books, Lexington (1977)
- Rubinstein, M.: An aggregation theorem for securities markets. *J. Financ. Econ.* **1**, 225–244 (1974)
- Rudolph, B.: Zur Bedeutung der kapitalmarkttheoretischen Separationstheoreme für die Investitionsplanung. *Z. Betriebswirtsch.* **53**, 261–287 (1983)
- Saelzle, R.: *Investitionsentscheidungen und kapitalmarkttheorie*. Gabler, Wiesbaden (1976)
- Schabel, M.M.: *Investitionssteuerung. Periodenerfolgsrechnung und economic value added*, Wiesbaden (2004)
- Schmidt, R.H., Terberger, E.: *Grundzüge der Investitions- und Finanzierungstheorie*, 4. Aufl. Gabler, Wiesbaden (1997)
- Velthuis, L.J.: *Anreizkompatible Erfolgsteilung und Erfolgsrechnung*. Deutscher Universitäts-Verlag, Wiesbaden (2004)
- Wilhelm, J.: Marktwertmaximierung – Ein didaktisch einfacher Zugang zu einem Grundlagenproblem der Investitions- und Finanzierungstheorie. *Z. Betriebswirtsch.* **53**, 516–534 (1983)

Unternehmensziele und Entscheidungskriterien im Mehrperioden-Fall

15

15.1 Problemstellung und Aufbau

Die in Kap. 14 angenommene Einperiodigkeit der Entscheidungsprobleme ermöglichte zwar eine relativ einfache und anschauliche Analyse von Unternehmenszielen und den Eigenschaften damit kompatibler finanzwirtschaftlicher Entscheidungskriterien. Jedoch ist die Annahme der Einperiodigkeit wenig realistisch. Im vorliegenden Kapitel sollen daher Probleme der Erweiterung von Ergebnissen des Kap. 14 auf den Mehrperioden-Fall untersucht werden.

Es wird gezeigt, dass für mehrperiodige Entscheidungsprobleme keine theoretisch fundierten und zugleich operationalen Zielfunktionen existieren. Entsprechend sind die folgenden Darstellungen auch eher problemorientiert statt unmittelbar lösungsorientiert. Es wird gezeigt, welche theoretischen Zusammenhänge überhaupt relevant sind, warum diese in einem Entscheidungsmodell nur bruchstückhaft erfasst werden können und welche bedeutsamen Aspekte bei praktischen Konzepten der Bewertung bzw. der Zielformulierung vernachlässigt werden. Damit geben die Analysen Orientierung für den kritischen Umgang mit solchen Konzepten sowie für die eigenständige Formulierung von Unternehmenszielen und entsprechender Entscheidungskriterien für die Lösung konkreter Probleme.

Da unternehmerische Aktivitäten letztlich dazu dienen, den Konsumnutzen des Eigentümers bzw. der Anteilseigner des Unternehmens zu maximieren, sollte die Zielformulierung im Einklang mit ihren Nutzenfunktionen für Konsumausgaben stehen. Abschn. 15.2 befasst sich mit Eigenschaften und Problemen der Ermittlung mehrperiodiger Nutzenfunktionen und Möglichkeiten ihrer Vereinfachung.¹

¹Eine explizite Betrachtung der Nutzenfunktionen für Konsumausgaben war im Einperioden-Fall (Kap. 13 und 14 wie auch 8) nicht notwendig, da jeweils von gegebenen Konsumausgaben zum Zeitpunkt 0 und entsprechendem Geldvermögen V_0 ausgegangen wurde. Siehe auch Abschn. 15.4.5.

In Abschn. 15.3 werden die Ergebnisse des Kap. 14 zur Kompatibilität von Marktwertmaximierung und subjektiver Nutzenmaximierung auf den Mehrperioden-Fall übertragen. Ist der Kapitalmarkt vollkommen und vollständig, so entsteht zwar auch im Mehrperioden-Fall bei einer Orientierung am Marktwert kein Widerspruch zur subjektiven Nutzenmaximierung, sodass ein optimales Investitionsprogramm ohne explizite Berücksichtigung der zugehörigen optimalen Konsumausgaben ermittelt werden kann. Ein optimaler Konsumplan muss nach Bestimmung des Investitionsprogramms dennoch ermittelt werden. Es wird gezeigt, wie dies im Prinzip geschehen kann.

Ist der Kapitalmarkt unvollständig und/oder unvollkommen, so besteht wie im Einperioden-Fall grundsätzlich ein Konflikt zwischen Marktwertmaximierung und subjektiver Nutzenmaximierung. Auch im Mehrperiodenfall können dann die aus Sicht eines einzelnen Investors optimalen Investitionsentscheidungen theoretisch exakt nur auf der Basis eines Totalmodells getroffen werden, das simultan die Investitionsplanung, die Portfeuilleplanung und die Konsumplanung beinhaltet. Bei Orientierung am Bernoulli-Prinzip setzt nun das Modell die Kenntnis der mehrperiodigen Nutzenfunktion des Investors für Konsumausgaben wie auch seiner Aktionsmöglichkeiten am Kapitalmarkt voraus. Selbst in dem utopischen Idealfall, dass diese Bedingung erfüllt ist, werden die Formulierung und Lösung eines Totalmodells am prohibitiv hohen Planungsaufwand scheitern. Es ist grundsätzlich nicht möglich, den Informations- und Planungsprozess zu vereinfachen, indem die Nutzenfunktion für Konsumausgaben durch eine äquivalente Nutzenfunktion für Investitionsüberschüsse, die noch in optimale Konsumströme transformiert werden müssen, ersetzt wird.

In der Praxis behilft man sich trotzdem gerade mit solchen Planungs- und Bewertungsmethoden, die starke Vereinfachungen bezüglich der Bewertung zukünftiger Investitionsüberschüsse vornehmen, ohne dabei den Implikationen für entsprechende Konsumnutzenwerte Rechnung zu tragen. Charakteristisch hierfür sind die Sicherheitsäquivalent- und die Risikozuschlagsmethode, die in Abschn. 15.4 diskutiert werden. Beide Methoden werden nicht nur für die Ermittlung von Marktwerten, sondern auch für die Ermittlung subjektiver Grenzpreise empfohlen und praktisch angewendet.

15.2 Nutzenmaximierung

15.2.1 Entscheidungssituation

Mit Ausnahme des Kap. 9 haben wir bei allen bisherigen Darstellungen einperiodige Planungsprobleme unterstellt. Zudem wurde die Nutzenfunktion des Entscheiders allein über Zielgrößen definiert, die sich auf das Ende der Planungsperiode beziehen. Auch im vorangegangenen Kapitel haben wir diese Annahme getroffen, indem wir davon ausgegangen sind, dass die Konsumententscheidungen aller Investoren zu Beginn der Periode bereits erfolgt und gegeben sind, sodass sich alle allein an ihrem (End-)Vermögen am Periodenende orientierten.

In diesem Kapitel sollen zwar weiterhin allein finanzielle Zielgrößen betrachtet, jedoch neben den Überschüssen nun auch Konsumausgaben zu unterschiedlichen Zeitpunkten explizit berücksichtigt werden. Dabei nehmen wir wie für den Einperioden-Fall an, Geldanlagen und Kreditaufnahmen seien zu einem einheitlichen risikolosen Zinssatz r möglich; der Zinssatz verändere sich im Zeitablauf nicht.

Zunächst gehen wir davon aus, dass ein *individueller* Investor eine Investition durchführen kann, die zu zukünftigen Überschüssen $x_1, x_2, \dots, x_T$ führt und in $t=0$ eine Anschaffungsauszahlung von x_0 verlangt. Darüber hinaus fließt dem Entscheider zum Zeitpunkt t ($t=0, 1, \dots, T$) ein zusätzliches Einkommen (bzw. Geldvermögen) zu, das nunmehr mit V_t bezeichnet wird. Dieses stamme aus Quellen, z. B. dem Arbeitseinkommen des Entscheiders, welche er als exogen betrachtet, weil er V_t nicht verändern kann oder will.

Weiterhin bezeichnen wir die Konsumausgaben des Entscheiders mit $c_0, c_1, c_2, \dots, c_T$. c_t entspricht dem Geldbetrag, den der Entscheider im Zeitpunkt t für Konsumzwecke ausgibt, also weder spart noch investiert. Grundsätzlich kann der Entscheider Konsum in die Zukunft verlagern, indem er Geld zum Zinssatz r sicher anlegt, riskante Wertpapiere kauft oder (zusätzliche) Realinvestitionen durchführt. Er kann Geld in die Gegenwart verlagern, indem er sich zum Zinssatz r risikolos verschuldet oder Wertpapiere (leer) verkauft. Zunächst werden wir neben der betrachteten Investition nur (risikolose) Geldanlagen bzw. Geldaufnahmen zum Zinssatz r berücksichtigen. B_t bezeichnet den Geldbetrag, den der Entscheider zum Zeitpunkt t anlegt ($B_t > 0$) bzw. aufnimmt ($B_t < 0$).

In der betrachteten Entscheidungssituation trifft der Entscheider auch explizit Entscheidungen über seinen Konsumstrom: Zum Zeitpunkt $t=0$ entscheidet er über den Konsum zu diesem Zeitpunkt, c_0 , und erstellt einen Plan über seinen zukünftigen Konsumstrom $c_1, c_2, \dots, c_T$. Zum Zeitpunkt $t=1$ entscheidet er definitiv über c_1 und revidiert gegebenenfalls seinen Plan bezüglich $c_2, c_3, \dots, c_T$. Seine Entscheidung zum Zeitpunkt $t=1$ ist grundsätzlich sowohl von der Höhe des Konsums in $t=0$ als auch davon abhängig, welcher Umweltzustand in $t=1$ eingetreten ist.

Für den aktuellen und jeden zukünftigen Zeitpunkt muss der Entscheider eine Budgetrestriktion beachten. Bei Durchführung der Investition mit dem Zahlungsstrom $-x_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_T$ lauten die im Zeitablauf maßgeblichen Budgetrestriktionen:

$$\begin{aligned} c_0 + B_0 &= V_0 - x_0, \\ c_t + B_t &= V_t + x_t + (1+r) \cdot B_{t-1} \quad (t = 1, 2, \dots, T-1), \\ \text{und} \quad c_T &= V_T + x_T + (1+r) \cdot B_{T-1}. \end{aligned} \quad (15.1)$$

Ohne Möglichkeit zur Geldaufnahme wären zudem die Bedingungen

$$B_t \geq 0 \quad (t = 0, 1, 2, \dots, T-1) \quad (15.2)$$

zu beachten. Gemäß (15.1) teilt der Entscheider bei Durchführung der Investition das verbleibende Geldvermögen $V_0 - x_0$ auf Konsum c_0 und Geldanlage B_0 auf. Im Falle $x_0 > V_0$ ist die Investition für den Entscheider ohne Verschuldung nicht finanzierbar.

Zum Zeitpunkt $t=1$ erhält der Entscheider das exogene Einkommen V_1 , den Überschuss x_1 aus der Investition und den Rückfluss $(1+r) \cdot B_0$ aus seiner Geldanlage in $t=0$. (Für $B_0 < 0$ entspricht $(1+r) \cdot B_0$ den Zins- und Tilgungszahlungen, die der Entscheider zum Zeitpunkt $t=1$ leisten muss.) Die Summe dieser Beträge teilt er wiederum auf Konsum c_1 und Geldanlage B_1 auf, usw. Zum Ende des Betrachtungszeitraums konsumiert der Entscheider den gesamten dann verfügbaren Geldbetrag.²

15.2.2 Nutzenfunktionen für Konsumausgaben und Überschüsse

Nutzen entsteht aus Konsum. Die Nutzenfunktion des Entscheiders sei zustandsunabhängig, sodass sie sich wie folgt schreiben lässt:

$$U(c_0, c_1, \dots, c_t, \dots, c_T). \quad (15.3)$$

Bei nur zwei Zeitpunkten $t=0$ und $t=1$ würde für die Budgetbedingungen gelten:

$$c_0 + B_0 = V_0 - x_0 \quad \text{und} \quad c_1 = V_1 + x_1 + (1+r) \cdot B_0. \quad (15.4)$$

Würde man zudem, so wie in den vorangegangenen Kapiteln bei der Betrachtung von Einperiodenmodellen, annehmen, der Konsum in $t=0$ sei gegeben, so wäre B_0 ebenfalls gegeben, sobald der Entscheider entschieden hat, ob er die Investition durchführt. Man kann dann die Budgetrestriktion für $t=0$ nach B_0 auflösen und in die Budgetgleichung für $t=1$ einsetzen. Bei Durchführung der Investition folgt:

$$\begin{aligned} c_1 &= V_1 + x_1 + (1+r) \cdot (V_0 - x_0 - c_0) \\ &= x_1 - (1+r) \cdot x_0 + (1+r) \cdot (V_0 - c_0) + V_1. \end{aligned} \quad (15.5)$$

In (15.5) sind V_0, V_1 exogen gegebene Größen. Die Orientierung am Konsum c_1 ist damit gleichbedeutend mit der Orientierung am Residualgewinn $x_1 - (1+r) \cdot x_0$: bei Durchführung der Investition steigt der Konsum c_1 und somit der Konsumnutzen, wenn der Residualgewinn positiv ist: Anstelle einer Konsumnutzenfunktion kann somit von einer Nutzenfunktion ausgegangen werden, die über die Überschüsse der Investition (über die Zahlungsreihe) definiert ist.

Die Äquivalenz der Orientierung an Nutzenfunktionen für Konsumausgaben einerseits und Überschüsse andererseits gilt nicht allgemein: Selbst wenn optimale Investitionsentscheidungen ohne Rückgriff auf eine Nutzenfunktion für Konsumausgaben ermittelt werden können, kann der entsprechende optimale Konsumstrom nur anhand einer Konsumnutzenfunktion $U(c_0, c_1, \dots, c_t, \dots, c_T)$ ermittelt werden. Diese kann also nicht ex ante durch eine Nutzenfunktion $U(x_0, x_1, \dots, x_t, \dots, x_T)$ für Überschüsse ersetzt werden. Darauf kommen wir in Abschn. 15.3.2.2 zurück.

²Anstelle des Konsumbetrags c_T könnte auch ein Vermögenswert V_T stehen, der in Konsum zum Zeitpunkt T und Kapitalanlage zur Finanzierung späterer Konsumausgaben aufgeteilt wird. Es müsste dann berücksichtigt werden, welchen Nutzen der Entscheider daraus erfährt.

15.2.3 Ermittlung und Eigenschaften einer Nutzenfunktion für Konsumausgaben

15.2.3.1 Ermittlung einer Nutzenfunktion

$c_0, c_1, \dots, c_t, \dots, c_T$ stellt den Konsumstrom des Entscheiders über den gesamten Betrachtungszeitraum dar. Die Nutzenfunktion (15.3) ordnet jedem Konsumstrom einen Nutzenwert zu. Dabei besteht grundsätzlich *Periodennutzenabhängigkeit*: Wie sich der Nutzen eines Konsumstroms ändert, wenn ein einzelner Konsumbetrag c_t steigt oder sinkt, hängt nicht nur von der bisherigen Höhe dieses Betrages ab, sondern auch von den anderen Konsumausgaben $c_0, c_1, \dots, c_{t-1}, c_{t+1}, \dots, c_T$ dieses Stroms.

Nutzenwerte für alternative Konsumströme können für Risikosituationen analog zu den Darstellungen in Kap. 5, Abschn. 5.3.2, ermittelt werden. Als „Ergebnisse“ sind nun die Konsumströme zu interpretieren. Dem „besten“ der entscheidungsrelevanten Konsumströme wird der Nutzenwert 1 zugeordnet, dem „schlechtesten“ der Nutzenwert 0. Die Nutzenwerte der anderen Konsumströme werden als Indifferenzwahrscheinlichkeiten ermittelt. Jedoch stellt insbesondere die Ermittlung dieser Wahrscheinlichkeiten an den Entscheider hohe Anforderungen, vor allem wenn die Zahl der betrachteten Perioden hoch ist und Nutzenabhängigkeiten bestehen.

Der Nutzen eines Stroms von Konsumausgaben wird durch den Nutzen der mit den betreffenden Beträgen erworbenen *optimalen* Mengen an Gütern und Dienstleistungen bestimmt. Wenn sich der Preis eines Konsumgutes ändert, wird eine andere Güterkombination optimal. Der Nutzen eines gegebenen Konsumstroms kann davon abhängen, in welcher Folge von Umweltzuständen er realisiert wird. Die Nutzenfunktion ist dann zustandsabhängig. Z. B. können die Nutzenwerte des gleichen Konsumstroms für zwei verschiedene Umweltentwicklungen deshalb verschieden sein, weil bei der einen die Konsumgüterpreise steigen und bei der anderen konstant sind. Im Folgenden wird jedoch vereinfachend davon ausgegangen, die Nutzenfunktion sei zustandsunabhängig.

Eine Vereinfachungsmöglichkeit bezüglich der Ermittlung einer Nutzenfunktion besteht dann darin, die betrachteten möglichen Konsumströme nach dem in Kap. 3, Abschn. 3.4, beschriebenen Transformationskonzept sukzessive derart zu verändern, dass sie sich nur noch bezüglich der Konsumausgabe in einem einzigen Zeitpunkt (etwa T) unterscheiden. Der transformierte Konsumstrom, der für diesen Zeitpunkt die höchste (niedrigste) Konsumausgabe aufweist, erhält den Nutzenwert 1 (0). Die übrigen Nutzenwerte werden als Indifferenzwahrscheinlichkeiten bestimmt, wobei jetzt explizit nur den Unterschieden der alternativen Konsumausgaben zu dem betreffenden Zeitpunkt Rechnung getragen werden muss.

Selbst wenn sich die Nutzenwerte alternativer konkreter Konsumströme ermitteln lassen, stellt die mathematische Darstellung einer Nutzenfunktion in einem Entscheidungsmodell einen (prohibitiv) hohen Aufwand dar. Dabei ist zu beachten, dass bei der Formulierung eines mehrperiodigen Entscheidungsmodells grundsätzlich noch gar nicht

bekannt ist, welche Konsumströme mit den erwogenen Maßnahmen überhaupt realisierbar sind. Der Definitionsbereich der Nutzenfunktion müsste daher das gesamte Feld möglicher Ströme, die sich als optimal erweisen könnten, umfassen.

15.2.3.2 Separierbarkeit von Nutzenfunktionen

Wie erläutert besteht grundsätzlich Periodennutzenabhängigkeit, d. h. ein Bewertungsverband zwischen Konsumausgaben unterschiedlicher Perioden. Dieser Bewertungsverband verkompliziert die Bewertung von Konsumströmen sehr stark. Eine Form der Vereinfachung kann daher darin bestehen, Periodennutzenunabhängigkeit zu unterstellen.³ Die Nutzenfunktion ist dann separierbar, d. h. der Nutzenwert eines einzelnen Konsumbetrags ist unabhängig von den anderen Konsumniveaus.

Die Nutzenfunktion $U(c_0, c_1, \dots, c_t, \dots, c_T)$ heißt (universell) *additiv separierbar*⁴, wenn gilt:

$$U(c_0, \dots, c_t, \dots, c_T) = U_0(c_0) + \dots + U_t(c_t) + \dots + U_T(c_T). \quad (15.6)$$

Dabei können sich die Nutzenfunktionen $U_t(\cdot)$ für die Konsumausgaben zu verschiedenen Zeitpunkten unterscheiden (daher der Zeitindex), sie müssen aber nicht. Es ist unmittelbar ersichtlich, dass gemäß (15.6) der Erwartungswert des Nutzens aus dem Konsum zum Zeitpunkt t unabhängig von den Konsumausgaben aller übrigen Zeitpunkte ist. Entsprechend können auch die Sicherheitsäquivalente der einzelnen Konsumausgaben separat ermittelt werden.

Da nach der Definition des Sicherheitsäquivalents (Kap. 7, Abschn. 7.2.1) der Nutzen des Sicherheitsäquivalents der unsicheren Konsumausgabe zum Zeitpunkt t , c_t , dem Erwartungswert des Nutzens aus diesem Konsum entspricht, kann der Erwartungswert des Nutzens des gesamten Konsumstroms bei additiver Separierbarkeit als Summe der Nutzenwerte aller einzelnen Sicherheitsäquivalente geschrieben werden. Additive Separierbarkeit bedeutet allerdings *nicht*, dass der Erwartungswert des Nutzens des gesamten Konsumstroms mit der Summe der Sicherheitsäquivalente der einzelnen Konsumausgaben übereinstimmt oder eine monoton steigende Funktion dieser Summe ist.

Additive Separierbarkeit bedeutet eine starke Vereinfachung im Hinblick auf die Ermittlung eines optimalen Konsumplans. Da bei Separierbarkeit die Konsumausgabe zu einem Zeitpunkt unabhängig von der Konsumausgabe zu irgendeinem anderen Zeitpunkt bewertet werden kann (also Bewertungsunabhängigkeit besteht), ist es irrelevant, welcher Risikoverbund zwischen beiden Konsumausgaben besteht. Da man aber davon ausgehen muss, dass in der Realität sehr wohl Bewertungsabhängigkeiten zwischen den

³Vgl. zu den folgenden Darstellungen Fama (1970); Hakansson (1970); Merton (1990, Kap. 4); Velthuis (2004, S. 69–75).

⁴Allgemein unterscheidet man additive und multiplikative Separierbarkeit. Wir beschränken uns auf additive Separierbarkeit. Universell bedeutet, dass *jede* Konsumausgabe von allen anderen Konsumausgaben separierbar ist, nicht nur von Konsumausgaben einzelner Zeitpunkte.

Konsumausgaben verschiedener Zeitpunkte bestehen, ist die Annahme der Separierbarkeit der Nutzenfunktion als Basis der Bewertung mit Skepsis zu beurteilen, auch wenn es sich um ein „in der Finanzierungstheorie übliches Vorgehen“ (Kruschwitz und Löffler 2003, S. 1338) handelt.

Separierbarkeit der Bewertung impliziert natürlich nicht, dass der Konsum eines Zeitpunkts t unabhängig vom Konsum anderer Zeitpunkte geplant werden kann, denn die Konsummöglichkeiten zu einem Zeitpunkt t hängen von den Konsumniveaus aller vorangegangenen Zeitpunkte und den Planungen bezüglich der Konsumniveaus aller nachfolgenden Zeitpunkte ab.

Obwohl bei Separierbarkeit die Nutzenfunktion relativ einfach dargestellt werden kann, ist ihre Ermittlung weiterhin äußerst schwierig. Beispielsweise kann $U(c_0, \dots, c_t, \dots, c_T)$ nur als Ganzes beliebig positiv linear transformiert werden. Jede positiv lineare Transformation der Nutzenfunktion $U_t(c_t)$ für eine einzelne Konsumausgabe dagegen würde den optimalen Konsumplan beeinflussen, weil sich mit der positiv linearen Transformation von $U_t(c_t)$ zwar das Sicherheitsäquivalent der Konsumausgabe c_t nicht ändert, wohl aber dessen Nutzenwert und somit die Grenzrate der Substitution.

15.2.4 Optimale Konsumpläne und Investitionsentscheidungen bei Sicherheit

15.2.4.1 Optimaler Konsumplan ohne Investition

Im Folgenden gehen wir zunächst davon aus, es bestehe Sicherheit bezüglich der Überschüsse der Investition und der exogenen Geldzuflüsse V_t ($t=1,2,\dots,T$). Die Entscheidungssituation wird in zwei Stufen analysiert: In diesem Abschnitt blenden wir zunächst die Investitionsmöglichkeit aus und nehmen an, der Entscheider könne am Kapitalmarkt nur Geld zum Zinssatz r sicher anlegen und aufnehmen. In Abschn. 15.2.4.2 werden wir zusätzlich die Investition betrachten. Die Darstellungen werden anschließend auf den Fall unsicherer Zahlungsströme erweitert.

Der optimale Konsumplan zum Zeitpunkt $t=0$ ohne Investition ergibt sich aus:

$$\max_{c_0, c_1, \dots, c_t, \dots, c_T} U(c_0, c_1, \dots, c_t, \dots, c_T) \quad (15.7)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} c_0 + B_0 &= V_0, \\ c_t + B_t &= V_t + (1+r) \cdot B_{t-1} \quad (t=1, 2, \dots, T-1), \\ \text{und} \quad c_T &= V_T + (1+r) \cdot B_{T-1}. \end{aligned} \quad (15.8)$$

Der optimale Konsumstrom kann ermittelt werden, indem man die Nebenbedingungen jeweils nach c_t auflöst und die entsprechenden Ausdrücke in die Nutzenfunktion einsetzt.

Zu optimieren ist dann über $B_0, B_1, \dots, B_{T-1}$. Die notwendigen Bedingungen für ein Maximum lauten:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U(c_0, c_1, \dots, c_t, \dots, c_T)}{\partial B_{t-1}} \\ &= (1+r) \cdot U'_t(c_0, c_1, \dots, c_t, \dots, c_T) - U'_{t-1}(c_0, c_1, \dots, c_t, \dots, c_T) = 0 \end{aligned} \quad (15.9)$$

bzw.

$$\frac{U'_{t-1}(c_0, c_1, \dots, c_t, \dots, c_T)}{U'_t(c_0, c_1, \dots, c_t, \dots, c_T)} = 1+r \quad (t = 1, 2, \dots, T). \quad (15.10)$$

In (15.10) bezeichnet $U'_t(c_0, c_1, \dots, c_t, \dots, c_T)$ die partielle Ableitung der Nutzenfunktion nach dem Konsum im Zeitpunkt t :

$$U'_t(c_0, c_1, \dots, c_t, \dots, c_T) = \frac{\partial U(c_0, c_1, \dots, c_t, \dots, c_T)}{\partial c_t}. \quad (15.11)$$

Gemäß (15.10) ist im Optimum die Grenzrate der Substitution zwischen dem Konsum zu zwei aufeinanderfolgenden Zeitpunkten (also die linke Seite der Gleichung), stets gleich $1+r$, d. h. der Rate, mit der der Entscheider Konsum zeitlich verlagern kann: Die Grenzrate der Substitution muss also der *Transformationsrate* entsprechen, die dem Aufzinsungsfaktor $1+r$ entspricht. Dieses Ergebnis gilt unabhängig von der konkreten Gestalt der Nutzenfunktion.

15.2.4.2 Optimaler Konsumplan mit Geldanlage und Investition: Fisher-Separation

Im Folgenden berücksichtigen wir zusätzlich die Investitionsmöglichkeit aus Abschn. 15.2.1, wobei nun annahmegemäß nicht nur die Anschaffungsauszahlung x_0 , sondern auch die Überschüsse $x_1, x_2, \dots, x_T$ *sicher* sind. Die Darstellungen lassen sich ohne großen theoretischen Aufwand auf mehrere Investitionen erweitern, die zu unterschiedlichen Zeitpunkten durchgeführt werden können.

Im Prinzip kann der Entscheider die Vorteilhaftigkeit der Investition überprüfen, indem er zwei Optima vergleicht: Einen optimalen Konsumplan für den Fall, dass er die Investition durchführt, und einen optimalen Konsumplan für den Fall, dass er sie unterlässt. Da bei Durchführung der Investition ihre (Einzahlungs-) Überschüsse wie exogenes Einkommen behandelt werden können, ergeben sich mit Investition formal dieselben Optimumbedingungen für die Konsumausgaben wie für den Fall ohne Investition, d. h. es gelten wiederum die Bedingungen (15.10).⁵ Die Investition ist nun vorteilhaft (nachteilig),

⁵Ohne Durchführung der Investition entspricht der Optimierungsansatz dem des vorangegangenen Abschnitts. Mit Investition verändern sich die Budgetgleichungen in $t=0$ um die Auszahlung und in $t>0$ um die Rückflüsse der Investition. An die Stelle von V_0, V_t und V_T in den Budgetrestriktionen (15.8) ist also jeweils $V_0 - x_0, V_t + x_t$ und $V_T + x_T$ zu setzen.

wenn der Nutzen des optimalen Konsumstroms mit dem Projekt höher (niedriger) ist als der ohne das Projekt.

Die Beurteilung der Vorteilhaftigkeit der Investition kann jedoch im vorliegenden Fall sehr viel einfacher vorgenommen werden: Da der Entscheider Geld zu r anlegen und aufnehmen kann, kann er damit die Überschüsse der Investition zeitlich transformieren. Er kann z. B. jeden Überschuss x_t ($t=1,2,\dots,T$) in den Zeitpunkt 0 verlagern, indem er jeweils einen Kredit von $(1+r)^{-t} \cdot x_t$ aufnimmt und diesen einschließlich der Zinsen und Zinseszinsen aus dem Überschuss x_t bedient. Insgesamt fließen ihm dann bei Durchführung der Investition Mittel in Höhe des Barwertes aller Projektüberschüsse zu, über die er frei verfügen kann. Dies führt in Bezug auf die Beurteilung der Investition zum Kapitalwertkriterium: Die Investition ist immer dann vorteilhaft, wenn der gesamte Zufluss, d. h. der Barwert $\sum_{t=1}^T (1+r)^{-t} \cdot x_t$ aller zukünftigen Überschüsse, größer ist als die Anschaffungsauszahlung x_0 der Investition, deren Kapitalwert also positiv ist. Das bedeutet jedoch nicht, dass der Entscheider bei Durchführung der Investition seinen Konsum zum Zeitpunkt $t=0$ um den positiven Kapitalwert der Investition erhöht. Er wird mit diesem Kapitalwert in Verbindung mit Anlagen zum Zinssatz r einen Konsumstrom herstellen, der gegenüber dem optimalen Konsumstrom ohne Investition dominant ist. Der Entscheider kann seine Investitionsentscheidung offenbar *unabhängig* von seiner Konsumplanung treffen. Diese Separierbarkeit von Investitions- und Konsumentscheidungen kennzeichnet das *Separationstheorem* von Fisher.

Für die Ermittlung eines optimalen Investitionsprogramms nach der Kapitalwertmethode muss zwar nicht bekannt sein, welche Konsumströme mit den einzelnen Investitionsprojekten und ohne sie optimal sind. Damit wird allerdings das Problem der Ermittlung eines optimalen Konsumstroms nicht gegenstandslos. Wenn das optimale Investitionsprogramm ermittelt ist, muss der optimale Konsumstrom bestimmt werden, der mit den entsprechenden Überschüssen in Verbindung mit Anlage und Aufnahme von Kapital zum Zinssatz r erzielt werden kann.

Im Übrigen gilt bei sicheren Erwartungen das beschriebene Kapitalwertkriterium nicht nur für den Fall, dass die Investitionen aus Sicht eines individuellen Investors zu beurteilen sind, sondern auch, wenn die Überschüsse zwischen mehr oder weniger vielen Gesellschaftern eines Unternehmens (linear) geteilt werden.

15.2.5 Optimale Konsumpläne und Investitionsentscheidungen bei Risiko

Bei sicheren Projektüberschüssen gilt das in Abschn. 15.2.4 beschriebene Kapitalwertkriterium auch dann, wenn die Geldzuflüsse V_t ($t=1,2,\dots,T$) riskant sind und außerdem der Investor die Möglichkeit hat, mit riskanten Wertpapieren zu handeln. Stets kann dann mit einem sicheren Investitionsprojekt eine dominante Wahrscheinlichkeitsverteilung über den Konsumstrom generiert werden, wenn sein Kapitalwert positiv ist.

Selbst wenn außer den Investitionsüberschüssen auch die exogenen Geldzuflüsse V_t sicher sind, hat analog zu den Darstellungen in Kap. 8 der Handel mit riskanten Wertpapieren als Instrument einer Verbesserung des Konsumstromes grundlegende Bedeutung. Bei riskanten Geldzuflüssen V_t gewinnt jedoch die Portfeuillebildung zusätzliche Bedeutung, weil sie es ermöglicht, das mit diesen Zuflüssen verbundene Risiko zu hedgen (zu reduzieren).

Sind darüber hinaus auch die Überschüsse der Investitionen riskant, so ist die Portfeuilleplanung auch mit ihnen abzustimmen. Wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird, kann nur dann generell über riskante Investitionen unabhängig von riskanten exogenen Geldzuflüssen und optimaler Portfeuilleplanung entschieden werden, wenn die Investitionen dupliziert und die Duplikationsportfeuille unbeschränkt (leer) verkauft werden können; optimal ist dann das Investitionsprogramm mit dem maximalen Kapitalwert. Von Duplikation und Leerverkauf soll jedoch zunächst noch abgesehen werden.

Allgemein orientiert sich der Bernoulli-rationale Entscheider bei Risiko am Erwartungswert des Nutzens aus seinem Konsumstrom. Zum Zeitpunkt $t=0$ ist grundsätzlich nur der Konsum c_0 mit Sicherheit bekannt. Es gilt:

$$E[U(c_0, \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_t, \dots, \tilde{c}_T)]. \quad (15.12)$$

Jedem möglichen Konsumstrom wird also ein Bernoulli-Nutzen und die Nutzenwerte werden mit den Eintrittswahrscheinlichkeiten der entsprechenden Umweltentwicklungen bis zum Zeitpunkt T gewichtet. Die Wahrscheinlichkeit eines Konsumstroms entspricht dem Produkt der (bedingten) Wahrscheinlichkeiten für jene Konsumausgaben, die Element dieses Stromes sind.

Die Ableitung eines optimalen Konsumplans bei Risiko setzt voraus, dass alle Möglichkeiten erfasst werden, Geld riskant anzulegen oder aufzunehmen. Das Planungsproblem entspricht damit dem der optimalen Risikomischung über mehrere Perioden, wobei jetzt die Mischung aus Wertpapieren und Realinvestitionen besteht. Eine solche Risikomischung herzustellen, ist ein ungleich komplexeres Problem als die optimale Risikomischung im Einperioden-Fall (Kap. 8). So hängt die optimale Risikomischung für eine zukünftige Periode unter anderem davon ab, welche Konsumniveaus in den Perioden davor erreicht wurden und welche Umweltentwicklung eingetreten ist. Zudem kann für jede Periode die Mischung nicht unabhängig von den Mischungen zukünftiger Perioden vorgenommen werden.

Ein mehrperiodiges Portfeuille-Problem ist grundsätzlich nach dem Prinzip der flexiblen Planung zu lösen, das in Kap. 9 vorgestellt wurde. Dort wurde allerdings vereinfacht, indem als Zielgröße das Vermögen des Investors am Ende des Planungszeitraums zugrunde gelegt und nicht explizit der Erwartungswert des Nutzens seines Konsumstroms maximiert wurde. Eine besondere Form der Vereinfachung besteht darin, Bedingungen zu unterstellen, unter denen ein mehrperiodiges Portfeuille-Planungsproblem in ein einperiodiges Problem überführt werden kann, auf das dann entsprechend die Erkenntnisse der klassischen Portfeuille-Theorie angewendet werden können. Dabei spielt die Annahme der Separierbarkeit der Konsumnutzenfunktion eine zentrale Rolle.

Dieses Vorgehen soll hier jedoch nicht verfolgt werden. Stattdessen soll untersucht werden, wie und unter welchen Bedingungen bei Mehrperiodigkeit und Unsicherheit eine Zielfunktion für die Unternehmenspolitik abgeleitet werden kann, die kompatibel mit der Maximierung des Erwartungswertes des Nutzens eines Gesellschafters (Anteilseigners) oder aller Gesellschafter ist.

15.3 Marktwertmaximierung, (kollektive) Nutzenmaximierung, optimale Konsumströme und Kapitalmarkt

15.3.1 Vollkommener und vollständiger Kapitalmarkt

15.3.1.1 Time State Preference Ansatz

In Kap. 13, Abschn. 13.3.1 und 13.4, wurde der State Preference Ansatz (SPA) vorgestellt, der auf der Annahme eines vollkommenen und vollständigen Kapitalmarktes beruht. In Kap. 14 wurde darauf aufbauend für den Einperioden-Fall gezeigt, dass Marktwertmaximierung und Nutzenmaximierung äquivalente Ziele sind, wenn man davon ausgeht, dass sich die Preise für zustandsbedingte Zahlungsansprüche im State Preference Ansatz bei Realisation der erwogenen Maßnahmen nicht ändern. Der State Preference Ansatz lässt sich ohne Weiteres auf den Mehrperioden-Fall erweitern. Nach Myers (1968) wird der mehrperiodigen SPA auch als Time State Preference Ansatz (TSPA) bezeichnet.

Im TSPA wird explizit berücksichtigt, dass für alle möglichen entscheidungsrelevanten Zustände und Zeitpunkte unbeschränkt bedingte Zahlungsansprüche gekauft und verkauft werden können. Diese Möglichkeit folgt aus der zugrunde liegenden Annahme, dass der Kapitalmarkt vollkommen und vollständig ist. Der Handel kann entweder direkt mit „reinen“ Wertpapieren erfolgen oder indirekt durch Portfeuillebildung mit „normalen“ Papieren (die im TSPA wie im SPA unbeschränkt leer verkauft werden können). Für die Preise der zustandsbedingten Zahlungsansprüche ist der Zeitpunkt maßgeblich, zu dem diese gehandelt werden. Mit $\pi_{t-i}(S_{t,s})$ wird der Preis eines Zahlungsanspruchs von 1 EUR im Zustand $S_{t,s}$ ($t \geq 1$) im Zeitpunkt t bezeichnet, der zu einem früheren Zeitpunkt $t-i$ zu bezahlen ist. Der Preis, zum Zeitpunkt $t-1$ ($i=1$) wird sich von den Preisen unterscheiden, die zu früheren Zeitpunkten $t-i$ ($i>1$) gelten. Beispielsweise mag der Zustand $S_{t,s}$ zum Zeitpunkt $t=0$ eine sehr geringe Eintrittswahrscheinlichkeit haben, sodass der Preis von 1 EUR auf diesen Zustand zum Zeitpunkt $t=0$, $\pi_0(S_{t,s})$, sehr gering ist. Aufgrund der bis zum Zeitpunkt $t-1$ eingetretenen Umweltentwicklung hingegen mag der Zustand $S_{t,s}$ sehr viel wahrscheinlicher geworden sein, sodass der Preis des zustandsbedingten Zahlungsanspruchs über die Zeit gestiegen sein muss. Zudem müssen sich die Preise auch wegen Zinseffekten verändern.

Im Folgenden bezeichne $N_{S(t)}$ die Anzahl der Umweltzustände zum Zeitpunkt t , die zum Zeitpunkt 0 für möglich gehalten werden. Die entsprechenden Zustände, tragen die Indices t,s mit $s=1, \dots, N_{S(t)}$.

Im TSPA wird wie im Einperioden-Fall im Kapitalmarktgleichgewicht das Risiko zwischen allen Investoren PARETO-effizient geteilt. Durch Umverteilung zustandsabhängiger Überschüsse kann dann kein Investor einen höheren Erwartungswert seines Konsumnutzens erzielen, ohne dass der Erwartungswert des Konsumnutzens mindestens eines anderen Investors sinkt. Bei homogenen Wahrscheinlichkeitsvorstellungen der Investoren am Kapitalmarkt über die Zustände wird analog zu den Darstellungen in Kap. 11, Abschn. 11.4.2, das Risiko derart geteilt, dass für jeden Zustand und jeden Zeitpunkt das Verhältnis der Grenznutzenwerte zweier beliebiger Investoren identisch ist.

15.3.1.2 Marktwertmaximierung und verallgemeinerte Fisher-Separation

Das Separationstheorem von Fisher für den Fall sicherer Erwartungen beruht auf der Annahme, dass beliebige Beträge über beliebige Zeiträume zu einem einheitlichen Zinssatz r angelegt und aufgenommen werden können. In einer Welt generell sicherer Erwartungen impliziert dies Vollkommenheit und Vollständigkeit des Kapitalmarktes. Wie im Folgenden gezeigt wird, gilt das Fisher-Separationstheorem aber auch bei Risiko, wenn der Kapitalmarkt weiterhin vollkommen und vollständig ist: Im TSPA ergibt sich ein *verallgemeinertes Fisher-Separationstheorem*. Es gilt nicht nur für den Fall, dass ein einzelner Investor Investitionen durchführt, sondern auch, dass beliebig viele linear an den Überschüssen der Investitionen beteiligt sind.

Im Gleichgewicht des TSPA stimmt für jeden Investor in allen möglichen Umweltzuständen jeweils der gesamte Überschuss aus Portfeuillebildung einschließlich eines exogenen Überschusses (zum Beispiel aus selbstständiger und nichtselbstständiger Arbeit oder Privatvermögen) mit der Konsumausgabe überein; die Grenznutzenwerte der Überschüsse sind mit denen der Konsumausgaben identisch.

Da im SPA das aus allen Überschüssen resultierende Risiko Pareto-effizient geteilt wird, führt bei quasi-konstanten Grenznutzenwerten eine Investition, deren Marktwert höher ist als die Anschaffungsauszahlung, die also einen positiven Kapitalwert aufweist, wie im Einperioden-Fall direkt für jeden Investor zu einem höheren Erwartungswert des Nutzens; ein Handel mit Wertpapieren findet nicht statt. Das Kapitalwertkriterium folgt aus einer einfachen Überlegung: Ausgehend vom Marktgleichgewicht erzielt jeder Investor weder einen Vorteil noch einen Nachteil, wenn er beliebige Überschüsse im Bereich konstanter Grenznutzenwerte auf dem Wege der Portfeuillebildung kauft oder verkauft, wobei jeweils ein Preis in Höhe des Marktwertes der Überschüsse zu zahlen ist. Wenn nun im Unternehmen eine Investition realisiert wird, deren Anschaffungsauszahlung niedriger ist als der Marktwert ihrer Überschüsse, erzielt jeder, der daran beteiligt ist, direkt einen Vorteil.

Bei veränderlichen Grenznutzenwerten führen Investitionen mit positivem Kapitalwert *in Verbindung mit Wertpapierhandel* zu einem höheren Erwartungswert des Nutzens, sofern die Wertpapierpreise quasi-konstant sind. Die Annahme unveränderlicher Preise ist aber nicht unproblematisch, wenn in börsennotierten Unternehmen „größere“ Projekte realisiert werden und Käufe und Verkäufe der verschiedenen Wertpapiere

durch die Gesellschafter tendenziell in die gleiche Richtung zielen. Andererseits ist die Annahme unveränderlicher Grenznutzenwerte für einen individuellen Investor oder für wenige Investoren, die an den Überschüssen nichtmarginaler Projekte beteiligt sind, ebenfalls problematisch.

Im Folgenden wird bei der Analyse von Separationsmöglichkeiten, wie in der Theorie üblich, vereinfachend davon ausgegangen, dass Investitionen im Unternehmen und der daraus resultierende Handel mit Wertpapieren keinen Einfluss auf die Wertpapierpreise haben. Die dargestellten Separationstheoreme gelten aber auch für den Fall, dass Investitionen keinen Einfluss auf die Grenznutzenwerte haben. Die Annahme unveränderlicher Grenznutzenwerte ist insbesondere dann gerechtfertigt, wenn viele Investoren mit kleinen Anteilen an den Investitionen beteiligt sind, aus deren Sicht die Investitionskalküle des Unternehmens Marginalkalküle mit konstanten Grenznutzenwerten sind.

Können alle Investoren am Kapitalmarkt unbeschränkt zustandsbedingte Zahlungsansprüche kaufen und verkaufen, so ist jeder Überschuss duplizierbar. Der Marktwert eines Zahlungsstroms zum Zeitpunkt $t=0$, der zu unsicheren Überschüssen in den folgenden Zeitpunkten und Zuständen führt, ist dann aufgrund von Arbitrageüberlegungen eindeutig durch

$$MV_0(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_t, \dots, \tilde{x}_T) = \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^{N_{S(t)}} \pi_0(S_{t,s}) \cdot x_{t,s} \quad (15.13)$$

gegeben. Definitionsgemäß bezeichnet $\pi_0(S_{t,s})$ den Preis eines Zahlungsanspruchs auf 1 EUR im Zustand $S_{t,s}$ des Zeitpunkts t , der in $t=0$ zu bezahlen ist. Das betreffende Investitionsprojekt ist für einen Investor vorteilhaft, wenn der Marktwert (15.13) der Überschüsse abzüglich der Anschaffungsauszahlung x_0 (der Kapitalwert des Projekts) positiv ist; der Erwartungswert seines Konsumnutzens steigt bei dessen Realisation.

Die Kompatibilität der Orientierung am Kapitalwert $MV_0 - x_0$ mit der Orientierung am Erwartungswert des Nutzens folgt aus denselben Überlegungen, die auch der Darstellung im Einperioden-Fall bei Risiko (Kap. 14, Abschn. 14.2.2) sowie der Darstellung im Mehrperioden-Fall bei Sicherheit (Abschn. 15.2.4.2) zugrunde lagen. Zunächst betrachten wir einen individuellen Investor. Wegen der Duplizierbarkeit des Zahlungsstroms $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_t, \dots, \tilde{x}_T)$ kann ihn der Investor mithilfe eines Duplikationsportefeuilles perfekt hedgen und durch Verkauf dieses Portefeuilles dessen Marktwert in $t=0$ Erlösen. Ist der Erlös größer als die Anschaffungsauszahlung x_0 , der Kapitalwert also positiv, so erzielt er bei Durchführung der Investition einen sicheren Vermögenszuwachs, mit dem er durch (Rück-)Kauf zustandsbedingter Zahlungsansprüche einen (dominanten) Konsumstrom mit höherem Erwartungswert des Nutzens gemäß (15.12) erreichen kann als ohne das Projekt. Je größer der Kapitalwert, desto größer ist der Erwartungswert des Konsumnutzens mit dem Projekt.

Separierbarkeit der Bewertung gilt nicht nur für das Projekt als Ganzes, sondern auch bezüglich der einzelnen Überschüsse; der Wert des Überschusses jedes Zeitpunkts kann

separat von den Überschüssen anderer Zeitpunkte ermittelt werden. Ein Überschuss kann nicht deshalb einen geringen Wert haben, weil er mit anderen Überschüssen positiv korreliert ist und somit das aus allen Überschüssen resultierende Risiko stark erhöht; das aus dem Überschuss resultierende Risiko kann eben durch Portefeuillebildung ideal dupliziert und durch Leerverkauf beseitigt werden. Ein Überschuss kann analog auch nicht deshalb einen besonderen Wert haben, weil er mit anderen Überschüssen negativ korreliert ist und somit deren Risiko hedgt; genauso gut kann das Risiko mit Wertpapieren gehedgt werden.

Gemäß der verallgemeinerten Fisher-Separation gilt also: Beliebige Investitionsentscheidungen können anhand des Marktwertkriteriums ohne Rücksicht auf sonstige Überschüsse und konkrete Konsumpläne getroffen werden.

Das Marktwertkriterium gilt auch dann, wenn die Investitionen nicht von einem individuellen Investor, sondern in einem Unternehmen durchgeführt werden, an dem mehrere (sehr viele) Anteilseigner proportional an den Anschaffungsauszahlungen und den Projektüberschüssen beteiligt sind. Ein Investitionsprojekt ist unabhängig von den Konsumplänen der Anteilseigner für alle vorteilhaft, wenn der Marktwert seiner Überschüsse größer ist als die Anschaffungsauszahlung, also sein Kapitalwert positiv ist; die Investitionsentscheidungen im Unternehmen können separat von der Konsumplanung jedes einzelnen Anteilseigners getroffen werden. Die Zielfunktion für die Unternehmenspolitik ist entsprechend wieder die Marktwertmaximierung.

Damit jedoch die Anteilseigner ihre Anteile an den realisierten Investitionen überhaupt in optimale Konsumströme überführen können, müssen sie über die Kapitalwerte der neu ins Programm aufgenommenen Investitionsprojekte informiert werden. Sie müssen jedoch nicht wissen, welche konkreten Überschüsse sich hinter den Kapitalwerten verbergen; die optimalen Konsumströme können separat davon ermittelt werden.

Die verallgemeinerte Fisher-Separation impliziert auch die Irrelevanz der Dividendenpolitik (bei gegebenen Investitionen) (Miller und Modigliani 1961): Das Management eines Unternehmens kann sich auf die Schaffung von Werten durch Realisation von Investitionen mit positiven Kapitalwerten konzentrieren. Wann die betreffenden Überschüsse an die Anteilseigner ausgeschüttet werden, ist unerheblich. Wird z. B. bei gegebenem Investitionsprogramm die Ausschüttung um einen Betrag verringert und dieser beliebig am Kapitalmarkt angelegt, so kann dies ein Anteilseigner kompensieren, indem er denjenigen Anteil des betreffenden Portefeuilles (leer) verkauft, der seinem Anteil am Unternehmen entspricht. Kapitalmarkttransaktionen im Unternehmen sind für die Anteilseigner weder vorteilhaft noch nachteilig.

Wäre die Ausschüttungspolitik relevant, so könnten die Investitionsbewertungen nicht ohne Rücksicht auf die Ausschüttungen allein auf Basis von Anschaffungsauszahlungen und Einzahlungsüberschüssen vorgenommen werden. Vielmehr müsste explizit berücksichtigt werden, wie die Überschüsse in Ausschüttungen transformiert werden.

15.3.1.3 Bewertung nach dem Prinzip der Duplikation

Wie erläutert wurde, existieren am vollkommenen und vollständigen Kapitalmarkt Preise für zustandsbedingte Zahlungsansprüche, mit denen für beliebige Investitionsprojekte das Kapitalwertkriterium theoretisch begründet und darauf aufbauend das Ziel der Marktwertmaximierung anschaulich fundiert werden kann. Wenn der Investor die Preise für alle entscheidungsrelevanten Zustände ex ante kennt, kann er die Marktwerte beliebiger Investitionsprojekte mithilfe eines relativ einfachen Bewertungsprinzips ermitteln. Aus der Tatsache, dass diese Preise existieren, folgt aber noch nicht, dass der Investor sie auch tatsächlich kennt. Das wäre nur dann der Fall, wenn zum Zeitpunkt 0 für alle maßgeblichen Zustände zu gegebenen Preisen reine Wertpapiere gehandelt würden. Diese Bedingung (ist in der Realität nicht erfüllt und) wird auch im TSPA nicht als notwendig vorausgesetzt.

Für alle Zustände, für die keine reinen Wertpapiere existieren, müssen die Preise $\pi_0(S_{t,s})$ auf der Basis einer Portfeuillebildung mit normalen Wertpapieren ermittelt werden. Wie noch näher erläutert wird, stellt dies jedoch ein äußerst komplexes Problem dar. Der Bewertungsprozess kann oft erheblich vereinfacht werden, indem das Duplikationsprinzip nicht explizit zur Ermittlung der Preise $\pi_0(S_{t,s})$ angewendet wird, sondern der Marktwert der Überschüsse einer Investition unmittelbar aus dem Marktwert seines spezifischen Duplikationsportfolios abgeleitet wird, das in jedem Zustand $S_{t,s}$ einen Überschuss in Höhe des Investitionsüberschusses von $x_{t,s}$ bietet.

Im Einperioden-Fall kann in relativ einfacher Weise für jedes Projekt in $t=0$ ein Portfolio aus am Kapitalmarkt gehandelten (normalen) Wertpapieren gefunden werden, das seinen Überschuss zum Zeitpunkt 1 dupliziert (Kap. 13, Abschn. 13.2.2). Die Anwendung des Bewertungsprinzips der Duplikation verkompliziert sich hingegen erheblich bei mehrperiodiger Betrachtung. Anders als im Einperioden-Fall ist es im Mehrperioden-Fall grundsätzlich nicht möglich, Überschüsse zu duplizieren, indem zum Zeitpunkt 0 ein statisches Portfolio gebildet wird, das über den gesamten Bewertungszeitraum hinweg unveränderlich ist und erst zum Ende dieses Zeitraums wieder aufgelöst wird. Vielmehr ist auch zwischenzeitlich mit Wertpapieren zu handeln. Die Duplikation der Überschüsse erfordert dann einen zustandsabhängigen Handel gemäß dem Prinzip der flexiblen Planung (insbesondere einen Handel in Abhängigkeit von dem im jeweiligen Zustand erzielten Überschuss des Bewertungsobjekts). Es ist dann eine sogenannte „dynamische“ Duplikation vorzunehmen (vgl. z. B. Laux 2006a, S. 315 – 318). Dynamische Portfoliobildung ist nicht nur für die Duplikation von Investitionsüberschüssen erforderlich, sondern auch für deren Transformation in optimale zustandsabhängige Konsumausgaben. Auch wenn das Investitionsproblem gelöst ist, verbleiben komplexe Entscheidungsprobleme. Im TSPA allerdings kann jeder Investor aufgrund der zugrunde liegenden Annahme unbeschränkter Rationalität diese Probleme ohne weiteres lösen.

Es zeigt sich, warum es in der Realität äußerst schwierig ist, nach dem Duplikationsprinzip explizit die Preise $\pi_0(S_{t,s})$ für alle bewertungsrelevanten Zustände zu bestimmen. Zur Duplikation des Zahlungsanspruchs von 1 EUR in einem Zustand $S_{t,s}$ ($t > 1$) ist eine dynamische Duplikation erforderlich, bei der die Portfoliobildung derart an alternative

Zustandsfolgen angepasst wird, dass sich die Ein- und Auszahlungen in der Weise kompensieren, dass nur im Zustand $S_{t,s}$ ein Überschuss (von 1 EUR) erzielt wird. Nur wenn zahlreiche Investitionsprojekte zu bewerten sind, könnte der Planungsaufwand aufgrund expliziter Ermittlung der Preise $\pi_0(S_{t,s})$ reduziert werden, weil dann das Preissystem einheitlich zur Bewertung aller Projekte gemäß (15.13) verwendet werden kann.

Die unmittelbare Duplikation ist für eine Investition dann relativ unproblematisch, wenn ihr Zahlungsstrom durch eine geringe Anzahl von Wertpapieren dupliziert werden kann. So kann beispielsweise eine Kaufoption auf eine Aktie durch die Aktie selbst und eine risikolose Geldanlagemöglichkeit dynamisch dupliziert werden, ein Prinzip, welches der Bewertung derivativer Finanztitel zugrunde liegt.⁶

In der Regel wird allerdings der Zahlungsstrom einer Investition im Unternehmen nicht einfach zu duplizieren sein, sodass die Identifikation des Duplikationsportefeuilles mit entsprechender dynamischer Anpassung einen prohibitiv hohen Planungsaufwand erfordert. Damit das Duplikationsportefeuille überhaupt gebildet werden kann, müssen auch die zukünftigen zustandsabhängigen Preise der Wertpapiere über den Bewertungszeitraum hinweg bekannt sein oder geschätzt werden können. Der praktischen Anwendung des Duplikationsprinzips sind daher enge Grenzen gesetzt.

Für die Bewertung müssen Zustände gegeneinander abgegrenzt und abgeschätzt werden, welcher Investitionsüberschuss jeweils erzielt wird und welche Preise und Rückflüsse den einzelnen Wertpapieren jeweils entsprechen. Dabei können in der Realität, anders als unter der Rationalitätsbedingung und der Annahme fehlender Informationskosten im vollkommenen Kapitalmarkt, nur relativ wenige Zustände erfasst werden. Der einem Zustand entsprechende Überschuss und die entsprechenden Preise und Rückflüsse der Papiere sind dann als Erwartungswerte zu interpretieren und zu schätzen, um die tatsächlichen Größen streuen. Es ist dann schwierig zu beurteilen, ob ein bestimmtes Portefeuille eine „gute“ Approximation eines Duplikationsportefeuilles für einen Strom an Überschüssen ist, sodass aus praktischen Gesichtspunkten vereinfachte Bewertungsverfahren eine große Bedeutung haben (Abschn. 15.4).

15.3.2 Unvollkommener und unvollständiger Kapitalmarkt

15.3.2.1 Subjektive Bewertung versus Marktbewertung in einem Einzelunternehmen

- a) Erfordernis der expliziten Berücksichtigung der Transaktionsmöglichkeiten von Überschüssen und der Nutzenfunktion für Konsumausgaben

⁶Einführend zur Bewertung derivativer Finanzinstrumente (wie z. B. Optionen) nach dem Prinzip der dynamischen Duplikation vgl. Franke und Hax (2009, S. 382–393); Uhlir und Steiner 2001, Kap. 4); Hull (2008, Kap. 11).

Wir betrachten nun den Fall, dass der Kapitalmarkt unvollkommen in dem Sinne ist, dass Wertpapiere nicht beliebig leer verkauft werden können sowie Informationskosten relevant sind und/oder der Kapitalmarkt unvollständig ist, sodass nicht für alle Zustände bedingte Zahlungsansprüche gehandelt werden können und folglich die Duplikationsmöglichkeiten beschränkt sind.

Insbesondere für ein Einzelunternehmen, dessen Eigentümer das Unternehmensrisiko nicht mit anderen Gesellschaftern teilt (allgemein für einen individuellen Investor) kann aufgrund von Leerverkaufsbeschränkungen und unvollständiger Duplizierbarkeit ein erheblicher Konflikt zwischen Marktwert- und subjektiver Nutzenmaximierung bestehen (Kap. 14, Abschn. 14.4). Obwohl der Marktwert beliebiger Überschüsse mit dem Marktwert aller hiermit ermöglichten Konsumausgaben übereinstimmt, impliziert Marktwertmaximierung grundsätzlich nicht Nutzenmaximierung. Ein Investitionsprogramm mit maximalem Marktwert kann deshalb gegenüber einem anderen nachteilig sein, weil seine Überschüsse im Gegensatz zu denen des anderen Investitionsprogramms nicht in Konsumausgaben mit optimaler Struktur transformiert werden können; nur bei vollständiger Duplizierbarkeit und unbeschränktem Leerverkauf ermöglicht der maximale Marktwert generell einen dominanten Konsumstrom.

Die subjektive Bewertung aus der Sicht des Eigentümers eines Einzelunternehmens erfordert nicht nur, dass sich die Bewertung *explizit* an seiner Nutzenfunktion für Konsumausgaben orientiert, sondern auch, dass hinreichend genau seine Möglichkeiten erfasst werden, Überschüsse des Leistungsbereichs des Unternehmens durch Wertpapierhandel in Konsumausgaben zu transformieren. Dabei ist es gleichgültig, ob diese Transformationen im Unternehmen oder im privaten Bereich des Investors durchgeführt werden. Werden sie *ausschließlich* im Unternehmen durchgeführt, so stimmt zu jedem Zeitpunkt t der Überschuss des Unternehmens (die Ausschüttung an den Eigentümer bzw. seine Entnahme) mit der Konsumausgabe überein, sodass die Nutzenfunktion für diese Überschüsse mit der für die Konsumausgaben übereinstimmt.

b) Grenzen der Vereinfachung durch Zugrundelegung einer Nutzenfunktion für Überschüsse

Aus Gründen der Vereinfachung mag es naheliegen, bei den Investitionsentscheidungen im Unternehmen Transformationen auf dem Kapitalmarkt *nicht explizit* zu berücksichtigen. Werden sie ausschließlich im privaten Bereich durchgeführt, so stimmen die Ausschüttungen des Unternehmens grundsätzlich nicht mit den Konsumausgaben des Investors überein; sie müssen über private Kapitalmarkttransaktionen noch in optimale Konsumausgaben transformiert werden. Die Nutzenfunktion für Konsumausgaben kann dann nicht direkt für Entscheidungsmodelle im Unternehmen zugrunde gelegt werden, da die Konsumausgaben im Modell nicht erfasst werden. Vielmehr muss eine Nutzenfunktion für *Überschüsse* des Unternehmens (die Ausschüttungen) formuliert werden. Da jedoch die Nutzenfunktion für Konsumausgaben letztlich den Maßstab bildet, ist eine Verbindung zwischen der Nutzenfunktion für Unternehmensüberschüsse und der für Konsumausgaben herzustellen.

Die Ermittlung einer Nutzenfunktion für Ströme an Überschüssen ist wesentlich komplexer als die für Konsumströme. Bei der Ermittlung der Nutzenfunktion bzw. der Indifferenzwahrscheinlichkeiten für Konsumströme sind „nur“ alternative Konsumströme gegeneinander abzuwägen, bei der Ermittlung der Nutzenfunktion für Ströme an Überschüssen sind Wahrscheinlichkeitsverteilungen über Konsumströme gegeneinander abzuwägen. Der Nutzen eines Stroms an Überschüssen in einer Folge von Umweltzuständen hängt eben nicht nur davon ab, wie dieser Strom in den betreffenden Zuständen in Konsumausgaben transformiert wird, sondern auch von den Transformationen in die Zustände der anderen möglichen Umweltentwicklungen. Die betreffenden optimalen Transformationen hängen wiederum davon ab, welche Überschüsse in diesen Zuständen bereits erzielt werden und wie diese ihrerseits optimal transformiert werden. Die „exakte“ Erfassung dieses Zusammenhangs in der Nutzenfunktion für Überschüsse erfordert die explizite Berücksichtigung der optimalen Transformationen aller Überschüsse, die aber aus Gründen der Vereinfachung nicht vorgenommen werden sollen. Somit kann selbst bei Kenntnis der Nutzenfunktion für die Konsumausgaben eine Nutzenfunktion für die Überschüsse des Unternehmens allenfalls aufgrund äußerst pauschaler Überlegungen festgelegt werden.

Bei der Zuordnung von Präferenzwerten zu Wahrscheinlichkeitsverteilungen für Überschüsse des Unternehmens müssen diese als *Einheit* betrachtet werden. Die entsprechende Präferenzfunktion muss so formuliert werden, dass der Präferenzwert eine monoton steigende Funktion des Nutzenerwartungswertes der entsprechenden optimalen Konsumströme ist. Die Ermittlung einer solchen Funktion stellt jedoch ein komplexes Problem dar. Es ist allgemein einfacher, Kapitalmarkttransaktionen und entsprechende zustandsabhängige Konsumausgaben explizit in einem Totalmodell zu erfassen statt implizit über eine Nutzenfunktion für Überschüsse.

15.3.2.2 Subjektive Bewertung versus objektivierte Marktbewertung in einem börsennotierten Unternehmen

Ist der Kapitalmarkt, unvollkommen und/oder unvollständig, ist Marktwertmaximierung grundsätzlich auch nicht mit (kollektiver) subjektiver Nutzenmaximierung für die Anteilseigner eines börsennotierten Unternehmens kompatibel. Die Vorteilhaftigkeit einer Investition für einen einzelnen Anteilseigner kann dann nicht allein aufgrund des Kapitalwertes der Investition ohne Rücksicht auf seine exogenen Geldzuflüsse und seine Risikotransformationsmöglichkeiten auf dem Kapitalmarkt beurteilt werden.

Bei unterschiedlichen Transaktionsmöglichkeiten des Unternehmens und der Anteilseigner auf dem Kapitalmarkt ist die Ausschüttungspolitik des Unternehmens grundsätzlich nicht mehr irrelevant, sofern nicht ausgeschüttete Überschüsse von Investitionen im Unternehmen in riskanten Wertpapieren angelegt werden, da dann von den Ausschüttungen die optimalen Konsumpläne der Anteilseigner abhängen. Außerdem bestehen Konflikte zwischen den Anteilseignern bezüglich der Ausschüttungspolitik, wobei die optimalen Investitionen im Unternehmen für einen einzelnen Anteilseigners ebenfalls von der Ausschüttungspolitik abhängen.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit gehen wir im Folgenden davon aus, dass die Überschüsse der Investitionen als Ganzes direkt ausgeschüttet werden. (Im Fall negativer Überschüsse z. B. aufgrund von Anschaffungsauszahlungen bringen die Anteilseigner entsprechend ihrer Anteile am Unternehmen den betreffenden Betrag in das Unternehmen ein.) Das für einen Anteilseigner optimale Investitionsprogramm entspricht dann demjenigen für den Fall, dass die Investitionen für ihn als Alleineigentümer (als individueller Investor) exakt auf demjenigen Niveau durchgeführt werden können, das mit seinem Anteil am Unternehmen übereinstimmt. Voraussetzung dabei ist, dass dieser Anteil im Zeitablauf konstant bleibt, wovon wir im Folgenden ausgehen. Die getroffene Annahme hat dieselben Implikationen wie die, dass sich die Ausschüttungen von den Investitionsüberschüssen nur aufgrund von Anlagen bzw. Aufnahmen von Kapital im Unternehmen zum risikolosen Zinssatz r unterscheiden können.

Das aus Sicht eines Anteilseigners optimale Investitionsprogramm kann dann analog zum Fall eines individuellen Investors ermittelt und analysiert werden (Abschn. 15.3.2.1). Es kann wiederum theoretisch exakt nur im Rahmen eines „Totalkalküls“ ermittelt werden, das den Zahlungsstrom (bzw. seinen Anteil daran) simultan mit der Planung derjenigen Kapitalmarkttransaktionen bewertet, die zu seinem optimalen Konsumplan führen. Es besteht keine Separationsmöglichkeit mehr. Das bedeutet auch, dass die Investitionsprojekte im Unternehmen selbst bei Fehlen von Restriktions- und Erfolgsverbund nicht separat bewertet werden können⁷ Darauf kommen wir bei der Beurteilung der Sicherheitsäquivalentmethode in Abschn. 15.4.2 zurück.

Wie im Abschn. 15.3.2.1 erläutert wurde, ist die simultane Planung von Investitionen und Kapitalmarkttransaktionen vor allem für einen individuellen Investor geboten. Sie kann jedoch auch dann erforderlich sein, wenn es darum geht, die Vorteilhaftigkeit von Investitionen aus Sicht von Anteilseignern eines börsennotierten Unternehmens zu beurteilen.

Für einen Anteilseigner kann z. B. auch ein Investitionsprojekt mit negativem Kapitalwert vorteilhaft sein, weil mit seinem Anteil am Überschuss sein exogener Geldzufluss besser gehedgt wird als dies mit den bisher umlaufenden Wertpapieren möglich war. Konflikte zwischen den Anteilseignern können nicht nur bezüglich der Durchführung eines einzelnen Investitionsprojekts bestehen, sondern auch darüber, welches von mehreren einander ausschließenden Projekten realisiert werden soll.

⁷Ist der Kapitalmarkt unvollständig und/oder aufgrund von Leerverkaufsbeschränkungen unvollkommen, so mag trotzdem unter speziellen Voraussetzungen Marktwertmaximierung für ein börsennotiertes Unternehmen im Einklang mit subjektiver Nutzenmaximierung für alle Anteilseigner stehen. Wie in Kap. 14, Abschn. 14.3.4, gezeigt wurde, stimmen im CAPM beide Ziele immerhin näherungsweise überein. Zum einen spielt es keine Rolle, inwieweit Duplikationsmöglichkeiten bestehen, zum anderen werden im CAPM-Gleichgewicht ohnehin keine Leerverkäufe vorgenommen. Die speziellen Voraussetzungen bestehen im CAPM darin, dass alle Investoren homogene Erwartungen haben, dass sie keine exogenen, von den Wertpapierrückflüssen stochastisch abhängige Geldzuflüsse V_1 , erzielen und sich alle am (μ, σ) -Prinzip orientieren, also „ähnliche“ Präferenzen haben.

Ein Entscheidungsträger im Unternehmen (die Unternehmensleitung) kann aber in alternativen Entscheidungssituationen gar nicht beurteilen, welche Konflikte entscheidungsrelevant sind und welche Investitionen einen „fairen“ Interessenausgleich ermöglichen. Die maßgeblichen Unternehmensziele müssen so weit wie möglich „objektiviert“, d. h. unabhängig von den subjektiven Präferenzen der Anteilseigner sein. Eine Mindestanforderung an die objektivierte Bewertung besteht darin, dass sie sich an finanziellen Überschüssen, die im Unternehmen erwirtschaftet werden, orientiert, und nicht an Konsumausgaben. Die Marktwertmaximierung stellt eine „Kompromisszielfunktion“ dar, die eine solche objektivierte Bewertung ermöglicht. Es gibt gute Gründe dafür, dass die Anteilseigner (einmütig) Marktwertmaximierung als Unternehmensziel akzeptieren (vgl. hierzu Kap. 17, Abschn. 17.6).

Beim Ziel der Marktwertmaximierung können auf der Basis interner Überschüsse im Rahmen des betrieblichen Rechnungswesens relativ gut objektivierte Erfolgskomponenten ermittelt werden, die Rückschlüsse auf die Qualität von Entscheidungen ermöglichen und/oder als Bemessungsgrundlagen für finanzielle Anreize geeignet sind (vgl. einführend Laux 2006b). Dies ist eine wichtige Voraussetzung dafür, Entscheidungsträger zu motivieren, „gute“ Entscheidungen zu treffen, und bei Fehlentscheidungen frühzeitig korrigierend eingreifen zu können.

Da jedoch Überschüsse letztlich erwirtschaftet werden, um Konsumausgaben zu finanzieren, lassen sich überschussbezogene Präferenzfunktionen theoretisch nicht ohne Bezug auf Konsumnutzenfunktionen sinnvoll begründen. Nur unter den Bedingungen, unter denen Marktwertmaximierung im Einklang mit subjektiver Nutzenmaximierung steht, muss dieser Bezug nicht explizit hergestellt werden. Die Marktbewertungsfunktion kann dann als implizite Darstellung von Nutzenfunktionen für Konsumausgaben interpretiert werden.

Unabhängig davon, welches Unternehmensziel verfolgt wird, ist es (sofern von Informationskosten abgesehen wird) erforderlich, dass die Anteilseigner über die zustandsabhängigen Überschüsse der neu in das Programm aufgenommenen Investitionsprojekte informiert werden, damit sie ihre optimalen Konsumpläne daran anpassen können. Im Gegensatz zur Vollkommenheit und Vollständigkeit des Kapitalmarktes genügt es für die Ermittlung der optimalen Konsumpläne nicht, nur über die Kapitalwerte der neuen Investitionen zu berichten.

15.3.2.3 Bewertung in einem börsennotierten Unternehmen und einem Einzelunternehmen im Vergleich

Wenn ein Anteilseigner einen kleinen (bzw. marginalen) Anteil am Unternehmen hält, ergeben sich folgende Besonderheiten gegenüber dem Fall, dass er die Investitionen als Einzelunternehmer (als individueller Investor) durchführen kann: Wenn er sie allein durchführt und somit deren Risiko allein trägt, ist es zwar besonders wichtig, dass er bei seinen Entscheidungen seiner Nutzenfunktion und seinen möglichen Kapitalmarkttransaktionen explizit Rechnung trägt. Dazu ist er im Prinzip aber auch in der Lage, weil er seine eigenen Präferenzen und seinen eigenen Kapitalmarktzugang (relativ gut) kennt.

Dagegen sind diese (sowie die Nutzenfunktionen und Transformationsmöglichkeiten der anderen anonymen Anteilseigner) den Entscheidungsträgern im börsennotierten Unternehmen weitgehend unbekannt. Für den Fall, dass der betrachtete Investor einen kleinen Anteil am börsennotierten Unternehmen hält, ist allerdings die Orientierung am Marktwertkriterium überzeugender begründbar als für den Fall, dass er als Alleineigentümer das volle Investitionsrisiko trägt. Bei Orientierung am Marktwertkriterium müssen individuelle Nutzenfunktionen und Transformationsmöglichkeiten am Kapitalmarkt nicht bekannt sein.

Marktwerte sind überdies (tendenziell) objektiver als subjektive Grenzpreise und folglich ist ihre Ermittlung besser nachvollziehbar bzw. kontrollierbar. Wie erläutert ist dieser Aspekt für das börsennotierte Unternehmen von besonderer Bedeutung, weil dann der Investor (wie auch die anderen Anteilseigner) nicht selbst entscheidet. Wenn der Investor die Entscheidungen für sich selbst trifft, spielt für ihn der Aspekt der Objektivierbarkeit keine Rolle. Er wird aber möglicherweise dann relevant, wenn er Entscheidungskompetenzen an einen Entscheidungsträger, etwa den Geschäftsführer seines Unternehmens, delegiert.

15.3.2.4 Implikationen für die Bewertungspraxis

Mit der Problematik der Bewertung im Mehrperioden-Fall befasst sich im deutschsprachigen Raum vor allem die Literatur zur Unternehmensbewertung⁸, wobei als Bewertungsobjekte ganze Unternehmen oder Teile davon (Investitionsprogramme) betrachtet werden. Besondere Beachtung finden jeweils die Aspekte der Vereinfachung und der Objektivierung (bzw. der Nachvollziehbarkeit). Dabei geht es nicht nur um die praktische Ermittlung von Marktwerten, sondern auch um die Ermittlung subjektiver Grenzpreise für individuelle Investoren. Dabei stellt sich jeweils das komplexe Problem, die betreffenden Aspekte sinnvoll gegen die Forderung nach Relevanz der erzielten Bewertungsergebnisse abzuwägen.

Wie die Ausführungen der vorangegangenen Abschnitte zeigen, steht ein Investor bei unvollkommenem und/oder unvollständigem Kapitalmarkt vor einem Dilemma: Nutzenmaximierung als Zielsetzung heißt nicht nur explizite Orientierung an einer Konsumnutzenfunktion, sondern beinhaltet auch die Planung der Kapitalmarkttransaktionen zur Transformation von Investitionsüberschüssen in Konsum. Bei ersatzweiser Orientierung an Marktwerten dagegen ist kaum abschätzbar, wie gravierend der Konflikt zur eigentlichen Nutzenmaximierung ist.

Mit Blick auf die Bewertungspraxis wird in der Literatur argumentiert, dass die individuelle subjektive Bewertung deshalb nicht in Betracht komme, weil die Nutzenfunktion eines Investors nicht bekannt sei bzw. nicht ermittelt werden könne und

⁸Vgl. z. B. Ballwieser (2011); Copeland et al. (1993); Drukarczyk und Schüler (2009); Kruschwitz und Löffler (2006); Kruschwitz et al. (2009).

sie sich im Zeitablauf auch noch ändern könne.⁹ Daher sei es geboten, auch dann auf Marktwerte zurückzugreifen, wenn die Bewertung aus Sicht eines individuellen Investors vorgenommen wird. Diese Argumentation ist problematisch. Sie stellt nicht nur die Fähigkeit eines Investors zur Lösung von Entscheidungsproblemen nach eigenen Präferenzvorstellungen pauschal infrage, sondern auch die Marktbewertung selbst. Wie soll der Investor entscheiden, wenn er z. B. bei einem potenziellem Unternehmenskauf zwar feststellt, dass der ermittelte Marktwert höher ist als der Preis, aber nicht beurteilen kann, wie er bei Kauf des Unternehmens diesen Vorteil in nutzensteigernde Konsumpläne überführen kann? Wenn der Investor nicht in der Lage ist, Konsumströme hinreichend zu bewerten, ist es kaum sinnvoll, einen hohen Aufwand in Kauf zu nehmen, um einen „genauen“ Marktwert zu ermitteln. Innerhalb gewisser Grenzen ist es dann irrelevant, ob er eine Investition unterlässt (bzw. durchführt), obwohl ihr Marktwert höher (bzw. niedriger) ist als ihre Anschaffungsauszahlung.

Wenn man Investoren generell nicht zutraut, gemäß eigener Präferenzvorstellungen zu entscheiden bzw. zu bewerten, und pauschal empfiehlt, subjektive Bewertungen von Realinvestitionen analog zur Preisbildung im Kapitalmarkt vorzunehmen, also implizit statt des Ziels subjektiver Nutzenmaximierung das der Marktwertmaximierung empfiehlt, so ergibt sich ein theoretischer Widerspruch: Die Preisbildung im Kapitalmarkt resultiert aus den Portefeuilleentscheidungen der Investoren auf diesem Markt. Für die Portefeuillebildung selbst ist aber das Ziel der Marktwertmaximierung deshalb nicht entscheidungsrelevant, weil (bei Arbitragefreiheit) für jedes Portefeuille der Preis mit dem Marktwert seines Rückflusses übereinstimmt und somit jedes Portefeuilles einen marktbezogenen Kapitalwert von null aufweist. Bei der Ermittlung ihrer Portefeuilles müssen die Investoren *explizit* ihre individuellen Präferenzen berücksichtigen (Kap. 8). Welchen Sinn macht dann die ausschließliche Bewertung von Realinvestitionen gemäß der am Kapitalmarkt beobachteten Preisbildung, wenn die betreffenden Marktpreise zwar von subjektiven Portefeuilleentscheidungen abhängen, den Investoren jedoch pauschal die Fähigkeit abgesprochen wird, nach eigenen Präferenzen zu entscheiden?

Natürlich können Nutzenfunktionen in mehrperiodigen Entscheidungsmodellen nur unvollkommen berücksichtigt werden. Daraus folgt aber nicht, dass es sinnvoll sei, sie überhaupt nicht zu berücksichtigen und Entscheidungsprobleme stattdessen auf der Basis reiner Marktbewertungen zu lösen. Auch die Möglichkeit, dass sich die Nutzenfunktion im Zeitablauf unvorhergesehen ändert, ist kein Grund, generell den Marktwert als subjektiven Grenzpreis zu verwenden. Bei veränderlicher Nutzenfunktion ist die Marktbewertung tendenziell sogar noch problematischer als bei „stabiler“.

⁹Vgl. z. B. Ballwieser (2002, S. 738; 1981, S. 102 f.; 1990, S. 171 mit weiteren Hinweisen); Moxter (1983, S. 139).

Wenn ein Investor den seiner „aktuellen“ Nutzenfunktion entsprechenden subjektiven Wert eines Unternehmens ermittelt bzw. geschätzt hat und nun damit rechnet, dass sich seine Nutzenfunktion in nicht antizipierbarer Weise ändern kann, sollte er einen *Abschlag* von diesem Wert vornehmen, wenn bei Kauf des Unternehmens aufgrund begrenzter Elastizität des Produktionsprogramms, begrenzter Liquidationsmöglichkeiten sowie beschränkter Duplikations- und Leerverkaufsmöglichkeiten Anpassungen an Änderungen der Nutzenfunktion gegenüber reiner Finanzanlage erschwert werden. Da aber unter den betreffenden Kapitalmarktbeschränkungen der Marktwert grundsätzlich *höher* ist als der individuelle subjektive Grenzpreis, zielt die Wertkorrektur bei Wahl des Marktwertes als Grenzpreis in die falsche Richtung; statt eines Abschlags vom ermittelten Grenzpreis wird ein Zuschlag vorgenommen. Je größer das Bewertungsobjekt und die Risikoaversion des Entscheiders sind, desto größer ist tendenziell der Bewertungsfehler, wenn statt eines reduzierten subjektiven Grenzpreises der höhere Marktwert herangezogen wird.

In der Bewertungspraxis wird die Marktbewertung häufig auf der theoretischen Basis des CAPM vorgenommen.¹⁰ Dabei wird ein risikoangepasster Zinssatz über die Renditegleichung des einperiodigen CAPM geschätzt und für die Diskontierung auch von Überschüssen (an die Anteilseigner ausschüttbare Beträge) nachfolgender Perioden verwendet. Dieses Bewertungskonzept beruht auf der Voraussetzung, dass die Eigentümer des Unternehmens nur kleine Anteile daran halten und ihre privaten Risiken durch Portefeuillebildung breit gestreut haben. Diese Voraussetzung ist jedoch für den Alleineigentümer eines Unternehmens nicht erfüllt. Für ihn ist nicht wie für die Anteilseigner eines börsennotierten Unternehmens praktisch nur das systematische Risiko bewertungsrelevant, sondern das Gesamtrisiko unter Berücksichtigung des unsystematischen Risikos. Außerdem sind seine Möglichkeiten, durch Portefeuillebildung das Unternehmensrisiko zu reduzieren, beschränkt, sodass der subjektive Grenzpreis unter dem Marktwert liegt. Aus Beschränkungen der Hedgemöglichkeiten folgt aber nicht, dass es sinnvoll ist, bei subjektiver Bewertung wie in der *traditionellen* Bewertungsliteratur auch gegebene Möglichkeiten völlig zu vernachlässigen;¹¹ sie ermöglichen eine Annäherung des subjektiven Grenzpreises an den Marktwert (Kap. 14, Abschn. 14.4).

¹⁰Fernandez (2002), Kap. 11; Loderer u. a. (2010), Band 2, Kap. 6.

¹¹Zur Problematik der Verwendung eines für ein börsengehandeltes Unternehmen maßgeblichen Kalkulationszinsfußes einerseits und der völligen Vernachlässigung von Portefeuilleeffekten bei der Ermittlung eines individuellen subjektiven Grenzpreises andererseits vgl. Tschpöel (2004, S. 80); Baetge und Krause (1994); Hering (2006, S. 182–184); Born (2003, S. 113); Schildbach (1998, S. 309); Laux und Schabel (2009).

15.4 Problematik der Vereinfachung im Licht der Sicherheitsäquivalentmethode und der Risikozuschlagsmethode

15.4.1 Notwendigkeit und Grundformen der Vereinfachung

Unter der Bedingung der Duplizierbarkeit der Überschüsse der Investitionen und der unbeschränkten Leerverkaufsmöglichkeit der Duplikationsportefeuilles lässt sich zwar relativ anschaulich die Kompatibilität von Marktwertmaximierung und Nutzenmaximierung zeigen. Wie erläutert, stellt aber auch unter dieser Bedingung die praktische Ermittlung eines optimalen Investitionsprogramms ein komplexes Problem dar, da das Prinzip der Duplikation bei der praktischen Bewertung regelmäßig nicht theoretisch exakt umsetzbar ist. Hinzu kommt, dass bereits die Anwendungsvoraussetzungen für die Duplikation in der Regel nicht uneingeschränkt erfüllt sind, sodass (auch unter Berücksichtigung beschränkter Leerverkaufsmöglichkeiten) eigentlich eine subjektive Bewertung erfolgen müsste, die die Kenntnis der Nutzenfunktion des betrachteten Investors und seiner Handelsmöglichkeiten am Kapitalmarkt voraussetzt.

In der Praxis behilft man sich mit Bewertungsverfahren, die sehr starke Vereinfachungen vornehmen. So werden regelmäßig die Anwendungsvoraussetzungen für die Duplikation implizit als gegeben angenommen und bei der Bewertung auf Wertpapiere zurückgegriffen, für die Marktpreise vorliegen und deren Risikostruktur derjenigen des zu bewertenden Zahlungsstroms zwar nicht exakt entsprechen, sondern „ähnlich“ sind. Dabei wird das Konzept der Risikoklasse verwendet: Für die Bewertung sucht man nach Wertpapieren, die nach Möglichkeit derselben oder zumindest einer ähnlichen Risikoklasse entstammen wie der zu bewertende Zahlungsstrom. Diese Wertpapiere dienen dann als Surrogate für das (exakte) Duplikationsportefeuille.

Im Folgenden werden vor dem Hintergrund der Darstellungen in Abschn. 15.3 zwei andere vereinfachende Verfahren diskutiert, die Sicherheitsäquivalentmethode und die Risikozuschlagsmethode. Beide Methoden werden in Literatur und Praxis insbesondere für die Ermittlung von Marktwerten herangezogen, aber auch für die Ermittlung davon abweichender subjektiver Grenzpreise. Die folgenden Darstellungen zeigen, welche Gefahren von Fehlbewertungen bei beiden Methoden bestehen und wie schwierig es ist, sie zielkonform zu modifizieren. Damit wird nochmals ein allgemeines und grundlegendes Problem deutlich, nämlich der Konflikt zwischen der Operationalität von Bewertungskonzepten bzw. von Entscheidungsregeln einerseits und ihrer Kompatibilität mit dem übergeordneten Ziel der Maximierung des Erwartungswertes des Konsumnutzens (also ihrer Entscheidungsrelevanz) andererseits. Natürlich wird ein *vereinfachtes* Bewertungskonzept grundsätzlich nicht theoretischen „Idealvorstellungen“ genügen können. Jedoch sollte man die möglichen Implikationen von Vereinfachungen kennen, um die Ergebnisse der Bewertung kritisch beurteilen und gebotene Korrekturen abschätzen zu können.

Die Problematik der Sicherheitsäquivalent- und der Risikozuschlagsmethode soll am Beispiel der Ermittlung des Wertes eines Investitionsprojekts vom Standpunkt eines individuellen Investors diskutiert werden. Die Darstellungen gelten jedoch im Prinzip auch für den Fall, dass mehrere Personen (proportional) an den Überschüssen beteiligt sind.

Können alle Investitionsüberschüsse dupliziert und die Duplikationsportefeuilles unbeschränkt leer verkauft werden, so stimmt der subjektive Wert mit dem Marktwert der Investition überein, sodass die Sicherheitsäquivalent- bzw. die Risikozuschlagsmethode der vereinfachten Ermittlung dieses Marktwertes dient. Bei beschränkten Duplikations- und Leerverkaufsmöglichkeiten ist der subjektive Wert grundsätzlich niedriger als der Marktwert (Kap. 14, Abschn. 14.4). Wie deutlich wird, ist die Ermittlung eines subjektiven Wertes gemäß einer der beiden Methoden grundsätzlich problematischer als die Ermittlung eines Marktwertes. Es zeigt sich auch wieder die Problematik der Ermittlung eines vom Marktwert abweichenden subjektiven Grenzpreises ausschließlich auf der Basis von Überschüssen ohne expliziter Berücksichtigung entsprechender optimaler Konsumströme und ihrer Nutzenwerte.

15.4.2 Sicherheitsäquivalentmethode

15.4.2.1 Darstellung

In Kap. 7 wurde gezeigt, wie ein Bernoulli-rationaler Entscheider einen riskanten Überschuss mit dem Sicherheitsäquivalent subjektiv bewerten kann. Dort lag der Einperioden-Fall zugrunde, d. h. der Entscheider bewertete einen einzelnen, auf den Zeitpunkt $t=1$ bezogenen Überschuss $\tilde{x}$. Das Sicherheitsäquivalent wurde wie folgt definiert (Kap. 7, Abschn. 7.2.1):

$$E[U(\tilde{x})] = U[\bar{S}\ddot{A}(\tilde{x})]. \quad (15.14)$$

Die verallgemeinerte Sicherheitsäquivalentmethode erweitert die subjektive Bewertung auf mehrere Perioden, indem für jeden unsicheren Überschuss $\tilde{x}_t$ ($t=1,2,\dots,T$) ein Sicherheitsäquivalent $\bar{S}\ddot{A}(\tilde{x}_t)$ ermittelt wird. Die Reihe der Sicherheitsäquivalente $\bar{S}\ddot{A}(\tilde{x}_1), \bar{S}\ddot{A}(\tilde{x}_2), \dots, \bar{S}\ddot{A}(\tilde{x}_T)$ wird daraufhin wie ein *sicherer Zahlungsstrom* behandelt und bewertet. Bei konstantem risikolosem Periodenzinssatz r ergibt sich dann die folgende Bewertungsfunktion für den subjektiven Wert:

$$SW_0(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_T) = \sum_{t=1}^T (1+r)^{-t} \cdot \bar{S}\ddot{A}(\tilde{x}_t). \quad (15.15)$$

Es ist zu beachten, dass sich hier die Sicherheitsäquivalente auf Überschüsse beziehen und nicht wie in Abschn. 15.2.3.2 explizit auf Konsumausgaben.

Bei Risikoneutralität stimmt für jeden Zeitpunkt t das Sicherheitsäquivalent für $\tilde{x}_t$ mit dem Erwartungswert von $\tilde{x}_t$ überein. Diskontiert werden dann gemäß (15.15) die Erwartungswerte der Überschüsse. Im allgemeinen Fall der Risikoaversion ist jedoch das

Sicherheitsäquivalent $\ddot{S}\ddot{A}(\tilde{x}_t)$ grundsätzlich kleiner als der Erwartungswert $E(\tilde{x}_t)$, sodass vom Erwartungswert ein Risikoabschlag vorgenommen werden muss, um das Sicherheitsäquivalent zu erhalten. Daher wird die Sicherheitsäquivalent-Methode auch als *Risikoabschlags-Methode* bezeichnet. Die Risikoabschläge entsprechen den geforderten Risikoprämien für die Übernahme des Risikos, das mit den unsicheren Überschüssen verbunden ist.

Die Sicherheitsäquivalentmethode zerlegt die Gesamtbewertung eines Zahlungsstroms in Einzelbewertungen der Überschüsse zu den verschiedenen Zeitpunkten. Die Methode folgt damit dem Prinzip, bei der Bewertung mehrperiodiger Zahlungsströme auf einperiodige Bewertungsmodelle zurückzugreifen.

Die Bewertung gemäß (15.15) setzt grundsätzlich voraus, dass es sich bei $\tilde{x}_t$ um das einzige bewertungsrelevante Einkommen (den einzigen bewertungsrelevanten finanziellen Überschuss) des Investors zum Zeitpunkt t handelt. Diese Bedingung ist allerdings im Fall des potenziellen Kaufs des Bewertungsobjekts nicht einmal im Einperioden-Fall erfüllt, selbst wenn der Entscheider nur zum Zeitpunkt $t=1$ eine Konsumausgabe vornimmt und im exogenen (oder externen) Bereich keine Überschüsse bezieht. Zusätzlich zu x ist dann immerhin die Anschaffungsauszahlung für die Investition maßgeblich, die die Konsumausgabe zum Zeitpunkt 1 um den aufgezinsten Betrag verringert. Ist die Nutzenfunktion für die Konsumausgabe zum Zeitpunkt $t=1$ weder linear noch exponentiell, so ergibt sich ein Reichtumseffekt und damit das folgende *Zirkularitätsproblem*: Einerseits hängt das Sicherheitsäquivalent von x vom gezahlten Preis ab. Andererseits soll der Grenzpreis, bei dem der Kauf weder vorteilhaft noch nachteilig ist, auf der Basis des Sicherheitsäquivalents ermittelt werden.

Jedoch lässt sich die Sicherheitsäquivalentmethode modifizieren, um Reichtumseffekte aufgrund der Anschaffungsauszahlung zu berücksichtigen. Dies wurde bereits in Kap. 7, Abschn. 7.6, für den Einperioden-Fall gezeigt. Statt des Sicherheitsäquivalents für den Überschuss zum Zeitpunkt 1 wird die ihn kompensierende (äquivalente) sichere Auszahlung zu diesem Zeitpunkt diskontiert.

15.4.2.2 Grenzen einer entscheidungstheoretischen Fundierung

a) Additive Separierbarkeit der Nutzenfunktion für die zukünftigen Überschüsse als implizite theoretische Grundlage

Bei der folgenden Analyse der Sicherheitsäquivalentmethode für den Mehrperioden-Fall und der betrachteten Modifikationen dieser Methode gehen wir stets davon aus, der Investor könne zum risikolosen Zinssatz r Geld leihen und anlegen. Wäre diese Bedingung nicht erfüllt, so wäre die Diskontierung der Sicherheitsäquivalente mit diesem Zinssatz gemäß (15.15) nicht nachvollziehbar.

Nach der Sicherheitsäquivalentmethode wird im Mehrperioden-Fall gemäß der Bewertungsgleichung (15.15) jeder Überschuss $\tilde{x}_t$ unabhängig von allen anderen Überschüssen $\tilde{x}_\tau$ ($\tau \neq t$) und auch unabhängig von sonstigen Überschüssen des Entscheiders

bewertet. Eine separate Bewertung gemäß (15.15) ist jedoch nur dann sinnvoll, wenn es um die Ermittlung eines Marktwertes geht und somit die Sicherheitsäquivalente als Marktsicherheitsäquivalente interpretiert werden. Bei der Ermittlung eines subjektiven Grenzpreises ist dagegen jedem Bewertungs- und Risikoverbund explizit Rechnung zu tragen. Die separate Ermittlung der Sicherheitsäquivalente nach der Bewertungsfunktion (15.15) impliziert zudem *additive Separierbarkeit* der Nutzenfunktion für die zukünftigen Überschüsse des Bewertungsobjekts:

$$U(x_1, x_2, \dots, x_T) = U_1(x_1) + U_2(x_2) + \dots + U_T(x_T).$$

Nur unter dieser Annahme kann für jeden Zeitpunkt t ($t = 1, 2, \dots, T$) das Sicherheitsäquivalent $\tilde{S}(\tilde{x}_t)$ auf der Basis der Nutzenfunktion $U_t(x_t)$ isoliert von den Überschüssen anderer Zeitpunkte ermittelt werden.

Die Annahme additiver Separierbarkeit der Überschüsse ermöglicht zwar eine relativ einfache Bewertung. Sie ist jedoch wesentlich problematischer als die Annahme additiver Separierbarkeit der Nutzenfunktion für Konsumströme. Tatsächlich nämlich bezieht sich die eigentliche Nutzenbewertung eines rationalen Entscheiders auf Konsumströme und nicht auf Überschüsse. Die Überschüsse haben keinen Wert an sich, ihr Wert resultiert aus den optimalen Konsumströmen, die sie ermöglichen. Die Bewertung von Überschüssen kann daher, anders als die Bewertung von Konsumströmen, nicht unabhängig von den Aktionsmöglichkeiten am Kapitalmarkt vorgenommen werden. Zwei stochastische Ströme an Überschüssen, die unter Berücksichtigung optimaler Transformationen auf dem Kapitalmarkt denselben Erwartungswert des Konsumnutzens bieten, sollten gleich bewertet werden, auch wenn sie sich noch so sehr unterscheiden. Dies ist aber bei der Bewertungsfunktion (15.15) gar nicht der Fall: Transformationen verändern die Barwerte der Sicherheitsäquivalente grundsätzlich auch dann, wenn diese Transformationen keinen Einfluss auf den Erwartungswert des Nutzens des Konsumstroms haben. Die Bewertung gemäß (15.15) steht damit im Widerspruch zu elementaren finanzwirtschaftlichen Anforderungen an die Bewertung.

b) Impliziter Ausschluss von Risiko- und Bewertungsverbundeffekten

Um die grundlegende Problematik der Bewertung gemäß (15.15) näher zu verdeutlichen, genügt es, die Verkäuferperspektive zu betrachten. Hierbei nehmen wir zunächst vereinfachend an, dass der Investor bei Verzicht auf Verkauf des Bewertungsobjekts keine riskanten Wertpapiere hält und außerdem zu keinem Zeitpunkt t einen exogenen (positiven oder negativen) Geldzufluss V_t erzielt. Dies impliziert unter anderem, dass er zum Zeitpunkt 0 einen Überschuss x_0 aus dem Bewertungsobjekt konsumiert und in der Ausgangssituation weder Kapital zum Zinssatz r angelegt hat noch verschuldet ist. Wir betrachten zwei Überschussströme $\tilde{x}_1^a, \tilde{x}_2^a, \dots, \tilde{x}_T^a$ und $\tilde{x}_1^b, \tilde{x}_2^b, \dots, \tilde{x}_T^b$, die sich lediglich im Hinblick auf die Überschüsse zu den Zeitpunkten t und $t+1$ unterscheiden, und nehmen hierfür zwei Fälle an: i) Im ersten Fall unterscheide sich der Überschussstrom b von a dadurch, dass $\tilde{x}_t^b = \tilde{x}_t^a + \Delta$ und $\tilde{x}_{t+1}^b = \tilde{x}_{t+1}^a - (1+r) \cdot \Delta$ gelten. ii) Im zweiten Fall seien $x_t^b = 0$ und $\tilde{x}_{t+1}^b = \tilde{x}_{t+1}^a + (1+r) \cdot \tilde{x}_t^a$.

- i) Der Zahlungsstrom b unterscheidet sich also vom Zahlungsstrom a im ersten Fall dadurch, dass ein sicherer Betrag Δ von $t+1$ nach t unter Beachtung einer sicheren Verzinsung zu r vorverlagert wird. Der subjektive Wert der beiden Überschussströme ist zwar identisch. Da der Investor jedoch beim Überschussstrom b in t ärmer und in $t+1$ reicher ist als bei Überschussstrom a , können Reichtumseffekte auftreten, die die Bewertung nach der Sicherheitsäquivalentmethode beeinflussen: Nur wenn die Nutzenfunktionen bezüglich der Überschüsse *linear* oder *exponentiell* sind (Kruschwitz und Löffler 2003), d. h. nur bei konstanter absoluter Risikoaversion des Investors, würden $\bar{S}\ddot{A}(\tilde{x}_t^b) = \bar{S}\ddot{A}(\tilde{x}_t^a) + \Delta$ und $\bar{S}\ddot{A}(\tilde{x}_{t+1}^b) = \bar{S}\ddot{A}(\tilde{x}_{t+1}^a) - (1+r) \cdot \Delta$ gelten; andernfalls dagegen weichen die Bewertungen der Überschussströme a und b nach der Sicherheitsäquivalentmethode grundsätzlich voneinander ab.
- ii) Im zweiten Fall unterscheidet sich der Zahlungsstrom b vom Zahlungsstrom a dadurch, dass der Überschuss $\tilde{x}_t^a$ nicht in t , sondern erst eine Periode später, in $t+1$, realisiert wird, dafür aber sein Betrag um den Aufzinsungsfaktor $(1+r)$ höher ist. Die Sicherheitsäquivalentmethode berücksichtigt nun bei der Bewertung des Zahlungsstroms a keinen Risikoverbund zwischen $\tilde{x}_t^a$ und $\tilde{x}_{t+1}^a$, bei der Bewertung des Zahlungsstroms b dagegen wird die Summe $\tilde{x}_{t+1}^a + (1+r) \cdot \tilde{x}_t^a$ bewertet, und daher wirkt sich ein Risikoverbund auf die Bewertung aus. Nur die Annahme der Risiko-neutralität würde diesen Widerspruch „lösen“.

Die Bewertungsfunktion (15.15) mit separierter Ermittlung der Sicherheitsäquivalente $\bar{S}\ddot{A}(\tilde{x}_t)$ ohne Rücksicht auf Bewertungsverbund und Risikoverbund zwischen Überschüssen zu verschiedenen Zeitpunkten lässt sich offenbar mit realistischen Annahmen über die Nutzenfunktion für zukünftige Überschüsse nicht überzeugend entscheidungstheoretisch begründen. In der Realität ist grundsätzlich neben Bewertungsverbund auch Risikoverbund zwischen Überschüssen zu verschiedenen Zeitpunkten bewertungsrelevant, der in einer additiv separierbaren Nutzenfunktion und entsprechend in (15.15) nicht erfasst wird. Grundsätzlich führt jeder Bewertungsverbund und jeder Risikoverbund zwischen Überschüssen unterschiedlicher Zeitpunkte zu einem Barwert der isoliert ermittelten Sicherheitsäquivalente gemäß (15.15), der sich von dem subjektiven Grenzpreis bei expliziter Orientierung am Erwartungswert des Nutzens von Konsumströmen unterscheidet. Die Annahme additiver Separierbarkeit und die ihr entsprechende Bewertungsfunktion (15.15) führen letztlich zu *willkürlichen* Ergebnissen.¹²

¹²Zur Analyse entscheidungstheoretischer Anwendungsvoraussetzungen der Sicherheitsäquivalent-Methode im Mehrperioden-Fall, bei denen von simultaner optimaler Portfeuillebildung zum Hedgen der zu bewertenden Überschüsse abgesehen wird, vgl. auch Kürsten (2002, S. 137–142); Schwetzler (2000a, b); Diedrich (2003); Wiese (2003, 2006); Kruschwitz und Löffler (2003) mit weiteren Literaturhinweisen.

Andererseits ist das Problem, wie stochastische Abhängigkeiten (Kovarianzen) zwischen Überschüssen verschiedener Zeitpunkten überhaupt ohne explizite Berücksichtigung entsprechender Konsumströme und deren Nutzenwerte in Sicherheitsäquivalente transformiert werden sollen, ungelöst.

c) Verbundeffekte mit Überschüssen außerhalb des Bewertungsobjekts

Wenn der potenzielle Verkäufer, anders als bisher angenommen, exogene Geldzuflüsse V_t bezieht, sind zusätzliche Aspekte bewertungsrelevant, die in der Bewertungsfunktion (15.15) ebenfalls nicht berücksichtigt werden; die Bewertung muss nun mit den exogenen Überschüssen abgestimmt werden, die in der Bewertungsfunktion (15.15) grundsätzlich nicht erfasst werden. Grundsätzlich ist dann bei der Ermittlung der Sicherheitsäquivalente $\ddot{S}\tilde{A}(\tilde{x}_t)$ den exogenen Überschüssen Rechnung zu tragen.

Sind die exogenen Geldzuflüsse $\tilde{V}_t$ riskant, so kann auch ein *Risikoverbund* zwischen den Überschüssen $\tilde{x}_t$ und diesen Geldzuflüssen bestehen. Die Bewertungsfunktion (15.15) unterstellt hingegen – sieht man von Risikoneutralität des Investors ab – auch stochastische Unabhängigkeit zwischen den Überschüssen $\tilde{x}_t$ und den exogenen Geldzuflüssen $\tilde{V}_t$.

Zusätzlich ist noch zu berücksichtigen, dass der Investor auf Überschüsse, die er neben denjenigen aus dem Bewertungsobjekt erzielt, durch Portefeuillebildung Einfluss nehmen kann. Der Investor wird seine Portefeuillebildung mit den Investitionsüberschüssen und den Geldzuflüssen $\tilde{V}_t$ optimal abstimmen, sodass die Sicherheitsäquivalente $\ddot{S}\tilde{A}(\tilde{x}_t)$ allenfalls in Abstimmung mit optimaler Portefeuilleplanung ermittelt werden können. Die Sicherheitsäquivalentmethode lässt offen, wie diese Abstimmung vorgenommen werden kann. Einerseits erhöht der Handel mit Wertpapieren den subjektiven Grenzpreis, andererseits erschwert die Berücksichtigung des Handels grundsätzlich seine Ermittlung.

Sind allerdings die Überschüsse $\tilde{x}_t$ duplizierbar und können alle Duplikationsportefeuilles zu gegebenen Preisen unbeschränkt leer verkauft werden, so stimmt der subjektive Grenzpreis des Bewertungsobjekts mit dem Marktwert seiner Überschüsse überein. Für jeden Zeitpunkt t ($t = 1, 2, \dots, T$) ist dann das Sicherheitsäquivalent $\ddot{S}\tilde{A}(\tilde{x}_t)$ ein Marktsicherheitsäquivalent und der Risikoabschlag ein Marktrisikoabschlag, der von den Überschüssen zu anderen Zeitpunkten und von riskanten exogenen Geldzuflüssen $\tilde{V}_t$ unabhängig ist.

Dem Überschuss $\tilde{x}_t$ ($t = 1, 2, \dots, T$) entspricht dann der folgende Risikoabschlag $RA(\tilde{x}_t)$:

$$MW_0(\tilde{x}_t) = (1 + r)^{-t} \cdot [E(\tilde{x}_t) - RA(\tilde{x}_t)] \Leftrightarrow RA(\tilde{x}_t) = (1 + r)^t \cdot MW_0(\tilde{x}_t) - E(\tilde{x}_t).$$

Ist für jeden Überschuss $\tilde{x}_t$ der Marktwert $MW_0(\tilde{x}_t)$ seines Duplikationsportefeuilles bekannt, so können zwar alle Risikoabschläge und entsprechend auch alle Sicherheitsäquivalente (separat) ermittelt werden, jedoch sind dann die Sicherheitsäquivalente für die Bewertung *irrelevant*; der Marktwert der Investition ergibt sich als Summe der Marktwerte der einzelnen Duplikationsportefeuilles.

Da, wie erläutert, die Ermittlung der (genauen) Duplikationsportefeuilles einen (prohibitiv) hohen Aufwand verursacht, wäre die Sicherheitsäquivalentmethode für die Ermittlung eines Marktwertes besonders hilfreich, wenn sie zeigen könnte,

wie Sicherheitsäquivalente ohne Rückgriff auf Duplikationsportefeuilles operational und „hinreichend“ genau ermittelt werden können. Immerhin müssen bei der Ermittlung eines Marktwertes nach der Sicherheitsäquivalentmethode im Gegensatz zur Ermittlung eines davon abweichenden subjektiven Grenzpreises weder Bewertungs- noch Risikoverbund in den Sicherheitsäquivalenten erfasst werden, wodurch die Bewertung vereinfacht wird.

Vor allem bezüglich der Ermittlung eines vom Marktwert abweichenden subjektiven Grenzpreises ergibt sich ein ernüchterndes Bild: So einfach die Bewertung nach der Sicherheitsäquivalentmethode ist und so naheliegend sie erscheint, so eng sind die Voraussetzungen, unter denen sie kompatibel mit der Nutzenmaximierung ist. Letztlich schließt die Sicherheitsäquivalentmethode sowohl jeden Bewertungsverbund als auch jeden Risikoverbund aus, und dies impliziert streng genommen eine risikoneutrale Bewertung von Zahlungsströmen. Die Sicherheitsäquivalentmethode kann daher allenfalls als näherungsweise Bewertung begriffen werden.

15.4.3 Risikozuschlagsmethode

15.4.3.1 Darstellung

a) Einperioden-Fall

Nach der Risikozuschlagsmethode wird ein unsicherer Überschuss bewertet, indem dessen Erwartungswert mit einem risikoangepassten Kalkulationszinssatz diskontiert wird. Im Einperioden-Fall mit einem unsicheren Überschuss $\tilde{x}$ in $t=1$ wird dieser Überschuss gemäß

$$SW_0(\tilde{x}) = \frac{E(\tilde{x})}{1 + r^*} \quad (15.16)$$

bewertet. Dabei bezeichnet r^* den risikoangepassten Kalkulationszinssatz. r^* kann in den risikolosen Zinssatz r und einen Risikozuschlag d zerlegt werden: $r^* = r + d$. Wird der Risikozuschlag d beispielsweise aus der einperiodigen CAPM-Renditegleichung gewonnen (Kap. 13, Abschn. 13.5.3.2), so gilt $d = \beta \cdot [E(\tilde{r}_M) - r]$, wobei sich β auf den zu bewertenden Überschuss $\tilde{x}$ bezieht.

Wenn der subjektive Wert $SW_0(\tilde{x})$ mit dem Marktwert des Überschusses $\tilde{x}$ übereinstimmt, folgt die Bewertung gemäß (15.16) direkt aus der Grundidee der Bewertung mithilfe eines Duplikationsprinzips, wenn r^* als Erwartungswert der Rendite einer Vergleichsinvestition mit „vergleichbarem Risiko“ (z. B. eines kapitalmarktgehandelten Wertpapiers, eines Portefeuilles oder einer Realinvestition) ermittelt wird. „Vergleichbares Risiko“ besteht dann, wenn der Überschuss $\tilde{x}$ des Bewertungsobjekts und der Überschuss $\tilde{x}^*$ der Vergleichsinvestition in dieselbe Risikoklasse fallen. Dies ist dann der Fall, wenn gilt: $\tilde{x} = \lambda \cdot \tilde{x}^*$, $\lambda > 0$, d. h. der Überschuss des Bewertungsobjekts in jedem möglichen Umweltzustand demselben Vielfachen λ des anderen Überschusses entspricht.

Der Erwartungswert der Rendite bzw. der interne Zinsfuß r^* der Vergleichsinvestition kann dann als risikoangepasster Zinssatz der maßgeblichen Risikoklasse interpretiert werden. Es ist zu beachten, dass sich der interne Zinsfuß r^* der Vergleichsinvestition auf ihren Marktwert bezieht und nicht auf eine davon abweichende reale Anschaffungsauszahlung; wir sprechen daher auch von einem „wertorientierten“ internen Zinsfuß r^* .

Ist die Vergleichsinvestition (mit dem vergleichbaren Risiko) ein kapitalmarktgehandeltes Wertpapier oder ein Portefeuille, so kann der Überschuss $\tilde{x}$ direkt mit dem λ -fachen der Vergleichsinvestition *dupliziert* werden. Dann stimmt der subjektive Grenzpreis des Bewertungsobjekts mit seinem Marktwert überein, wenn der Investor das Duplikationsportefeuille (leer) verkaufen kann. Ist die Vergleichsinvestition jedoch eine Realinvestition, deren Überschuss $\tilde{x}^*$ nicht durch kapitalmarktgehandelte Wertpapiere duplizierbar ist, so kann der subjektive Wert von $\tilde{x}$ grundsätzlich nicht als das λ -fache des Marktwertes von x^* bewertet werden.

Ist der Marktwert der Vergleichsinvestition nicht bekannt, verliert die Marktbewertung von $\tilde{x}$ auf deren Basis ihren Sinn; die explizite Ermittlung des Marktwertes der Vergleichsinvestition ist nicht einfacher als die direkte Ermittlung des Marktwertes des Bewertungsobjekts.

b) Mehrperioden-Fall

Die Anwendung der Risikozuschlagsmethode im Mehrperioden-Fall kann auf zwei Arten erfolgen: Mithilfe periodenspezifischer risikoangepasster Zinssätze oder mithilfe eines einzigen, periodeneinheitlichen risikoangepassten Zinssatzes.

Mit Verwendung *periodenspezifischer risikoangepasster Zinssätze* kann die Bewertungsfunktion der Risikozuschlagsmethode wie folgt dargestellt werden:

$$SW_0(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_T) = \sum_{t=1}^T \frac{E(\tilde{x}_t)}{(1 + r_t^*) \cdot (1 + r)^{t-1}}. \quad (15.17)$$

Gemäß (15.17) wird der Wert des unsicheren Überschusses $\tilde{x}_t$ ermittelt, indem sein Erwartungswert mit einem periodenspezifischen risikoangepassten Zinssatz r_t^* von t auf den Zeitpunkt $t - 1$ diskontiert wird und dann mit dem risikolosen Zinssatz r eine Diskontierung von $t - 1$ auf den Zeitpunkt 0 vorgenommen wird.

Bei Verwendung eines *einheitlichen risikoangepassten Zinssatzes* über alle Perioden lautet die Bewertungsfunktion der Risikozuschlagsmethode:

$$SW_0(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_T) = \sum_{t=1}^T \frac{E(\tilde{x}_t)}{(1 + r^*)^t} \quad (15.18)$$

Ist der Kaufpreis x_0 (die Anschaffungsauszahlung) für den Zahlungsstrom $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_T$ gleich dem subjektiven Wert $SW_0(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_T)$ gemäß (15.18), so ist der (subjektive) Kapitalwert der betreffenden Investition gleich null und der interne Zinsfuß der Zahlungsreihe $-x_0, E(\tilde{x}_1), E(\tilde{x}_2), \dots, E(\tilde{x}_T)$ gleich r^* .

15.4.3.2 Grenzen einer entscheidungstheoretischen Fundierung

a) Analogien zur Sicherheitsäquivalentmethode

Die Problematik der Risikozuschlagsmethode kann im Prinzip analog gezeigt werden wie die der Sicherheitsäquivalentmethode. Beide Varianten der Risikozuschlagsmethode, (15.17) und (15.18), lassen sich nämlich in spezielle Varianten der Sicherheitsäquivalentmethode überführen.

Beim Bewertungskonzept (15.17) lässt sich der Erwartungswert des Überschusses $\tilde{x}_t$, $E(\tilde{x}_t)$, über den periodenspezifischen Risikozuschlag im Zinssatz r_t^* , $d_t = r_t^* - r$, in ein Sicherheitsäquivalent $S\ddot{A}(\tilde{x}_t)$ umrechnen. Es gilt nämlich:

$$\frac{E(\tilde{x}_t)}{(1 + r_t^*) \cdot (1 + r)^{t-1}} = \frac{S\ddot{A}(\tilde{x}_t)}{(1 + r)^t} \quad \text{und somit} \quad S\ddot{A}(\tilde{x}_t) = E(\tilde{x}_t) \cdot \frac{1 + r}{1 + r_t^*}. \quad (15.19)$$

Die Risikozuschlagsmethode gemäß (15.17) mit jeweils einem periodenspezifischen risikoangepassten Zinssatz für jeden Erwartungswert $E(\tilde{x}_t)$ entspricht also der Sicherheitsäquivalentmethode, wobei im Sicherheitsäquivalent $S\ddot{A}(\tilde{x}_t)$ der folgende implizite Risikoabschlag $RA(\tilde{x}_t)$ vom Erwartungswert des Überschusses $E(\tilde{x}_t)$ enthalten ist:

$$RA(\tilde{x}_t) = E(\tilde{x}_t) - S\ddot{A}(\tilde{x}_t) = E(\tilde{x}_t) \cdot \frac{r_t^* - r}{1 + r_t^*} = E(\tilde{x}_t) \cdot \frac{d_t}{1 + r + d_t}. \quad (15.20)$$

Aufgrund ihrer Äquivalenz sind die hier beschriebene Variante der Risikozuschlagsmethode und die Sicherheitsäquivalentmethode aus entscheidungstheoretischer Sicht in gleicher Weise zu beurteilen. Auch die Bewertung gemäß (15.17) ist allenfalls in Ausnahmefällen (kein Bewertungsverbund, kein Risikoverbund) mit Nutzenmaximierung kompatibel.

Auch die Variante (15.18) der Risikozuschlagsmethode kann in die Sicherheitsäquivalentmethode überführt werden. Jedoch impliziert die Variante (15.18) grundsätzlich andere Sicherheitsäquivalente bzw. Risikoabschläge als die Variante (15.17). Einem einheitlichen Zinssatz für die Diskontierung entsprechen implizite Risikoabschläge in Höhe von:

$$RA(\tilde{x}_t) = E(\tilde{x}_t) - S\ddot{A}(\tilde{x}_t) = E(\tilde{x}_t) \cdot \left(1 - \left(\frac{1 + r}{1 + r^*} \right)^t \right) \quad (t = 1, 2, \dots, T). \quad (15.21)$$

Diese Risikoabschläge folgen aus

$$\frac{E(\tilde{x}_t)}{(1 + r^*)^t} = \frac{S\ddot{A}(\tilde{x}_t)}{(1 + r)^t} \Rightarrow RA(\tilde{x}_t) = E(\tilde{x}_t) - S\ddot{A}(\tilde{x}_t) = E(\tilde{x}_t) \cdot \left(1 - \left(\frac{1 + r}{1 + r^*} \right)^t \right).$$

Die Risikoabschläge gemäß (15.21) erscheinen als äußerst unplausibel und verdeutlichen damit die besondere Problematik der Risikozuschlagsmethode in der Variante (15.18). Sie steigen im üblichen Fall $r^* > r$ exponentiell über die Zeit, was sich nur durch entsprechend exponentiell steigendes Risiko oder durch eine entsprechend exponentiell steigende Risikoaversion des Entscheiders rechtfertigen lässt. Mit steigendem t nähern sich die Risikoabschläge den Beträgen $E(\tilde{x}_t)$.

Es zeigt sich auch, dass es grundsätzlich zu Fehlbewertungen kommt, wenn – wie in Theorie und Praxis üblich – mit dem aus dem einperiodigen CAPM hergeleiteten risikoangepassten Zinssatz auch die Überschüsse der Zeitpunkte $t > 1$ bewertet werden. Dies ist nur bei speziellen und wenig plausiblen stochastischen Eigenschaften der Überschüsse sinnvoll.

Wie in Abschn. 15.4.2 allgemein erläutert wurde, ist die Sicherheitsäquivalentmethode entscheidungstheoretisch nicht fundiert. Da die Risikozuschlagsmethode mit periodenspezifischen risikoangepassten Zinssätzen gemäß (15.17) und mit einem einheitlichen Zinssatzes r^* für alle Perioden gemäß (15.18) der Sicherheitsäquivalentmethode mit jeweils spezifischen Sicherheitsäquivalenten entspricht, gelten die allgemeinen Aussagen des Abschn. 15.4.2 auch für diese beiden Varianten der Risikozuschlagsmethode. Hinzu kommt, dass die spezifischen impliziten Sicherheitsäquivalente in (15.18) nur über den Zinssatz r^* einheitlich gesteuert werden können. Es besteht hierbei kein Spielraum für eine Differenzierung der Sicherheitsäquivalente für verschiedene Zeitpunkte gemäß den jeweiligen spezifischen Verteilungen der Überschüsse.

b) Korrekte Bewertung

Die Verwendung eines einheitlichen Zinssatzes r^* für alle Perioden ist allerdings dann für die Ermittlung eines subjektiven Grenzpreises gerechtfertigt, wenn dieser mit dem Marktwert des Bewertungsobjekts übereinstimmt und dem Investor (aus welchen Gründen auch immer) eine Vergleichsinvestition bekannt ist (z. B. ein kapitalmarktgerechtes Wertpapier, ein Portefeuille oder eine Realinvestition), deren Überschüsse aus derselben Risikoklasse stammen wie die des Bewertungsobjekts. Die Bedingung gleicher Risikoklasse ist im Mehrperioden-Fall dann erfüllt, wenn für die Überschüsse $\tilde{x}_t$ des Bewertungsobjekts und die Überschüsse $\tilde{x}_t^*$ der Vergleichsinvestition folgende Bedingungen gelten:

$$\tilde{x}_t = \lambda \cdot \tilde{x}_t^*, \quad \lambda > 0 \quad (t = 1, 2, \dots, T). \quad (15.22)$$

Auf der Basis der Erwartungswerte der Überschüsse der Vergleichsinvestition und ihres Marktwertes kann dann der interne Zinsfuß der Vergleichsinvestition ermittelt werden, um daraufhin die erwarteten Überschüsse des Bewertungsobjekts damit zu diskontieren. Der interne Zinsfuß der Vergleichsinvestition kann wiederum als risikoangepasster Zinssatz der maßgeblichen Risikoklasse interpretiert werden. Bezeichnet man den Marktwert der Vergleichsinvestition mit MVI_0 , so gilt für ihren internen Zinsfuß r^* :

$$MVI_0 \stackrel{!}{=} \sum_{t=1}^T \frac{E(\tilde{x}_t^*)}{(1 + r^*)^t}. \quad (15.23)$$

Es ist auch hier zu beachten, dass sich r^* nicht (wie ein interner Zinsfuß im üblichen Sinn) auf eine reale Anschaffungsauszahlung für die Vergleichsinvestition bezieht, sondern auf ihren *Marktwert*; r^* ist wie für die einperiodige Vergleichsinvestition (Abschn. 15.4.3.1) ein „wertorientierter“ interner Zinsfuß. Damit der Investor r^* gemäß (15.23) ermitteln kann, muss er nicht nur hinreichend genau abschätzen können, welche Erwartungswerte $E(\tilde{x}_t^*)$ ihm zugrunde liegen, er muss auch den Marktwert MVI_0 kennen.

Wenn er den Marktwert der Vergleichsinvestition erst ermitteln muss, verliert analog zum Einperioden-Fall die Risikozuschlagsmethode ihren Sinn; die Bestimmung von MVI_0 ist nicht einfacher als die direkte Ermittlung des Marktwertes des Bewertungsobjekts. Vor allem bei einer Realinvestition (in dem eigenen oder einem anderen Unternehmen) als Vergleichsinvestition dürfte die Bedingung eines bekannten Marktpreises kaum erfüllt sein. Bei einer Vergleichsinvestition auf der Basis kapitalmarktgehandelter Wertpapiere kann dagegen der Marktwert aus den Börsenpreisen der betreffenden Wertpapiere hergeleitet werden.

Wenn das Duplikationsportefeuille allerdings nicht (leer) verkauft werden kann, so ist der subjektive Grenzpreis grundsätzlich niedriger als der Marktwert, wobei die Abweichung und entsprechend der bewertungsrelevante (subjektive) Kalkulationszinssatz r^* von den Handelsmöglichkeiten des Investors auf dem Kapitalmarkt, seiner Konsumnutzenfunktion und seinen Wahrscheinlichkeitsvorstellungen bezüglich der zukünftigen Überschüsse des Bewertungsobjekts abhängen.

Der interne Zinsfuß r^* gemäß (15.23) stellt grundsätzlich einen „Durchschnittszins“ dar, der nur für die Bewertung des Zahlungsstroms als Ganzes geeignet ist. Er impliziert nicht, dass jeder einzelne Überschuss des Bewertungsobjekts isoliert bewertet werden kann, indem sein Erwartungswert mit r^* diskontiert wird. Der Zinssatz r^* ist für einzelne Überschüsse höher und für andere niedriger als der jeweils spezifische risikoadäquate Kalkulationszinssfuß.

c) Schwierigkeiten praktischer Identifikation einer Vergleichsinvestition

Die Risikozuschlagsmethode lässt sich zwar dann entscheidungstheoretisch fundieren, wenn der subjektive Grenzpreis mit dem Marktwert übereinstimmt und der risikoangepasste Zinssatz dem wertorientierten internen Zinsfuß einer Vergleichsinvestition derselben Risikoklasse entspricht. Die Suche nach einer solchen Vergleichsinvestition ist aus praktischer Sicht jedoch nahezu vergeblich. Die Bewertung nach der Risikozuschlagsmethode nimmt dann Bewertungsfehler in Kauf, deren Ausmaße schwer abzuschätzen sind.

Aus praktischer Sicht ist hinsichtlich der Risikozuschlagsmethode auf der Basis des internen Zinsfußes einer Vergleichsinvestition besonders problematisch, dass Veränderungen in Zahlungsströmen, die für die Markt- und Nutzenbewertung irrelevant sind, zu Fehlbewertungen bei der Risikozuschlagsmethode führen, wenn diese Methode nicht entsprechend angepasst wird. Zur Verdeutlichung dient wieder der erste der bereits bei der Diskussion der Sicherheitsäquivalentmethode angeführten Fälle: Zwei riskante Überschussströme $\tilde{x}_1^a, \tilde{x}_2^a, \dots, \tilde{x}_T^a$ und $\tilde{x}_1^b, \tilde{x}_2^b, \dots, \tilde{x}_T^b$ unterscheiden sich nur in den Zeitpunkten

t und $t+1$ über eine zeitliche Verlagerung von *sicheren* Zahlungen; es gelte $\tilde{x}_t^a = \tilde{x}_t^b + \Delta_t$ und $\tilde{x}_{t+1}^a = \tilde{x}_{t+1}^b - (1+r) \cdot \Delta_t$. Zahlungsstrom a geht also aus Zahlungsstrom b hervor, indem dessen Überschuss in t um Δ_t erhöht und in $t+1$ um $(1+r) \cdot \Delta_t$ reduziert wird. Der Marktwert und der Erwartungswert des Nutzens des Entscheiders sind für beide Zahlungsströme gleich hoch: Sein optimaler Konsumplan wird durch die Differenzen $-\Delta_t$ und $(1+r) \cdot \Delta_t$ nicht beeinflusst, da er sie durch private Aufnahme bzw. Anlage zum Zinssatz r herstellen bzw. kompensieren kann.

Die Bewertung nach der Risikozuschlagsmethode kommt gleichwohl nur dann zur gleichen Bewertung der beiden Zahlungsströme, wenn unterschiedliche risikoangepasste Zinssätze verwendet werden, denn bei einem einheitlichen risikoangepassten Zinssatz r^* für beide Zahlungsströme würde gelten:

$$\begin{aligned} \frac{E(\tilde{x}_t^a)}{(1+r^*)^t} + \frac{E(\tilde{x}_{t+1}^a)}{(1+r^*)^{t+1}} &= \frac{E(\tilde{x}_t^b) + \Delta_t}{(1+r^*)^t} + \frac{E(\tilde{x}_{t+1}^b) - (1+r) \cdot \Delta_t}{(1+r^*)^{t+1}} \\ &= \frac{E(\tilde{x}_t^b)}{(1+r^*)^t} + \frac{E(\tilde{x}_{t+1}^b)}{(1+r^*)^{t+1}} + \underbrace{\frac{\Delta_t}{(1+r^*)^t} \cdot \left(1 - \frac{1+r}{1+r^*}\right)}_{>0 \text{ für } r^* > r}. \end{aligned} \quad (15.24)$$

Da die Überschüsse der Zahlungsströme a und b für jeden Zeitpunkt t' ($t' \neq t$; $t' \neq t+1$) identisch sind, würde also der Wert des Zahlungsstroms a für $r^* > r$ über dem Wert des Zahlungsstroms b liegen, sodass der risikoangepasste Zinssatz für a über demjenigen für b liegen muss.

Allgemein gilt: Transformationen von Zahlungsströmen verändern grundsätzlich deren Risikoklassen, sodass solche Transformationen stets eine Neubestimmung des risikoangepassten Zinssatzes erforderlich machen, selbst wenn diese Transaktionen keinen Einfluss auf den Marktwert haben und die mit den Transaktionen verbundenen Überschüsse duplizierbar sind und das Duplikationsportefeuille (leer-) verkauft werden kann, sodass die Transformationen auch keinen Einfluss auf den subjektiven Grenzpreis haben.

Eventuell kommt als Vergleichsinvestition die Anlage in Aktien eines Unternehmens in Betracht, weil für ihre Investitionen ähnliche Erfolgsdeterminanten, etwa vergleichbare Produkte und Märkte, maßgeblich sind wie für das Bewertungsobjekt. Diese Anlage ist jedoch nur in Grenzen als Vergleichsinvestition geeignet, wenn in dem Unternehmen auch Investitionen anderer Risikoklassen durchgeführt werden und der Investor nicht abschätzen kann, wie sich diese auf den Marktwert der Aktien auswirken. Zwar könnte auch eine Realinvestition, deren Überschüsse nicht durch kapitalmarktgehandelte Wertpapiere verbrieft sind, als Vergleichsinvestition in Betracht kommen. Dann ist aber kaum anzunehmen, dass der Investor deren Marktwert *ex ante* kennt. Eventuell kann eine Investition im Unternehmen des Investors, dessen Marktwert bereits ermittelt worden ist, als Vergleichsinvestition geeignet sein.

Keine besonderen Probleme ergeben sich allerdings, wenn eine „Vergleichsinvestition“ gefunden ist, dessen Zahlungsstrom sich nur durch Transformationen der Überschüsse zum risikolosen Zinssatz r von dem des Bewertungsobjekts unterscheidet.

Zwar fallen dann beide Zahlungsströme in verschiedene Risikoklassen, sodass zunächst der interne Zinsfuß der „Vergleichsinvestition“ nicht für die Bewertung des Bewertungsobjekts in Betracht kommt. Jedoch können die Unterschiede in den Überschüssen durch gedankliche (hypothetische) Transformation des Zahlungsstroms der Vergleichsinvestition zum risikolosen Zinssatz r kompensiert werden, sodass dann die Bedingung (15.22) gleicher Risikoklasse erfüllt ist. Indessen erübrigt sich dann die Diskontierung der Überschüsse des Bewertungsobjekts; sein Marktwert stimmt bereits vor Transformation der Überschüsse der Vergleichsinvestition mit deren Marktwert überein.

Das Analoge gilt für den Fall, dass sich der Zahlungsstrom der Vergleichsinvestition durch stochastische Beträge von dem des Bewertungsobjekts unterscheidet, die durch Handel mit riskanten Wertpapieren kompensiert werden können. Zwar verändert sich durch eine entsprechende Transformation ihrer Überschüsse der Marktwert der Vergleichszahlungsreihe nicht, wohl aber die Risikoklasse der Vergleichsinvestition und somit der zugehörige risikoangepasste Zinssatz, der nun aufgrund gleicher Risikoklasse zur Bewertung des Bewertungsobjekts herangezogen werden kann.

15.4.4 Vergleichende Beurteilung der vereinfachten Bewertungsfunktionen

Unter der Bedingung der Duplizierbarkeit und des unbeschränkten Leerverkaufs lässt sich zwar relativ anschaulich die Kompatibilität von Marktwertmaximierung und Nutzenmaximierung zeigen. Bei der praktischen Bewertung wird man Duplikationsportefeuilles allerdings nur mehr oder weniger pauschal schätzen können. Dies kann in der Weise geschehen, dass auf die Marktwerte von Vergleichsinvestitionen mit ähnlicher Risikostruktur zurückgegriffen wird und die Risikozuschlagsmethode für eine vereinfachte Bewertung verwendet wird.

Wenn solche Vergleichsinvestitionen hingegen nicht existieren, müssen „eigenständige“ Bewertungen vorgenommen werden. Die Anwendung der Risikozuschlagsmethode wirft dann erhebliche Probleme auf, sodass die Abschätzung des relevanten risikoangepassten Zinssatzes r^* nur sehr grob erfolgen kann und daher die Risiken der einzelnen Überschüsse in der Regel nur in unvollkommener Weise berücksichtigt werden können. Die Sicherheitsäquivalentmethode bietet demgegenüber den Vorteil, dass der Investor gezwungen ist, die Risiken der einzelnen Überschüsse explizit zu analysieren und zu berücksichtigen. Dem steht der Nachteil gegenüber, dass stochastische Abhängigkeiten zwischen den Investitionsüberschüssen unterschiedlicher Zeitpunkte und zwischen diesen Überschüssen und den sonstigen Überschüssen des Investors bei dieser Methode praktisch ausgeblendet werden; bei der Risikozuschlagsmethode können sie immerhin implizit berücksichtigt werden, sofern eine Vergleichsinvestition mit bekanntem Marktwert existiert.

Beide vereinfachten Bewertungsverfahren führen zu massiven Fehlbewertungen, wenn Überschüsse einer Investition isoliert bewertet werden, obwohl sie im Risikoverbund mit

anderen Überschüssen des Investors stehen. Ein solcher Risikoverbund lässt sich jedoch innerhalb gewisser Grenzen berücksichtigen. So kann der für das Sicherheitsäquivalent eines Überschusses $\tilde{x}_t$ maßgebliche Risikoabschlag ermittelt werden, indem statt des isolierten Risikos dieses Überschusses sein Risikobeitrag zur gesamten Einkommensposition des Investors zum Zeitpunkt t als Risikomaß verwendet wird. Bei der Risikozuschlagsmethode kann entsprechend der Risikozuschlag zum Zinssatz r aus diesem Risikobeitrag abgeleitet werden. Dieses Vorgehen wurde bereits ausführlich für den Einperioden-Fall erläutert (Kap. 14).

15.4.5 Erfassung von Abhängigkeiten und Maximierung des Erwartungswertes des Nutzens des Endvermögens

Wie erläutert wurde, sind bei subjektiver Bewertung bzw. der Investitionsplanung die konkreten Möglichkeiten des Investors, am Kapitalmarkt zu handeln, zu berücksichtigen. Dabei verursacht allerdings die explizite Erfassung von Nutzenabhängigkeiten in der Zielfunktion einen prohibitiv hohen Aufwand. Andererseits ist es kaum sinnvoll, in der Weise zu vereinfachen, dass Nutzenabhängigkeiten pauschal vernachlässigt werden und die Bewertung nach der Sicherheitsäquivalent- oder der Risikozuschlagsmethode vorgenommen wird. Entsprechend ist es auch kaum sinnvoll, in einem Entscheidungsmodell den nach der Sicherheitsäquivalent- oder der Risikozuschlagsmethode ermittelten Wert zu maximieren.

Eine erhebliche Vereinfachung, die weniger problematisch sein kann als die Bewertung auf der Basis von Sicherheitsäquivalenten oder risikoangepassten Zinssätzen, kann erzielt werden, indem die Konsumausgaben für die Zeitpunkte vor T modellexogen (zustandsabhängig) vorgegeben werden und unter Berücksichtigung der betreffenden Ausgaben analog zu dem in Kap. 9 dargestellten Modell der flexiblen Planung der Erwartungswert des Nutzens des Endvermögens maximiert wird. Bei dieser Form der Vereinfachung muss „nur“ die Nutzenfunktion für das Endvermögen ermittelt und explizit im Modell berücksichtigt werden. Der subjektive Grenzpreis eines Bewertungsobjekts ist dann als derjenige Preis zu ermitteln, bei dem mit dem Bewertungsobjekt derselbe Erwartungswert des Nutzens erzielt wird wie ohne es (Laux und Schabel 2009).

Bei Maximierung des Erwartungswertes des Nutzens des Endvermögens ist zum einen die Nutzenfunktion relativ einfach darstellbar, zum andern muss keine generelle Separierbarkeit der Nutzenfunktion für Konsumströme unterstellt werden: Insbesondere wenn die exogen vorgegebenen Konsumausgaben für Zeitpunkte $t < T$ zustandsabhängig sind, ist allerdings zu vermuten, dass auch die Nutzenfunktion für das Endvermögen zustandsabhängig zu formulieren ist, um Nutzenabhängigkeiten zwischen dem Endvermögen und den exogen vorgegebenen Konsumausgaben implizit zu erfassen.

15.5 Zusammenfassung

- Wird davon ausgegangen, dass Investitionsüberschüsse dazu dienen, Konsumausgaben zu finanzieren, bilden die Konsumausgaben letztlich den Maßstab für die Bewertung dieser Überschüsse. Da die explizite Berücksichtigung der Konsumausgaben und der entsprechenden Nutzenfunktion bei der Investitionsplanung einen prohibitiv hohen Aufwand verursachen kann, sind Bedingungen entscheidungsrelevant, unter denen die Investitionsentscheidungen separat von Konsumententscheidungen getroffen werden können.
- Bei Sicherheit der Investitionsüberschüsse und bei Existenz einer risikolosen Geldanlage- und -aufnahmemöglichkeit können Investitions- von Finanzierungs- und Konsumententscheidungen separiert und Investitionen nach der Kapitalwertmethode bewertet werden (Fisher-Separation).
- Ist der Kapitalmarkt vollkommen und vollständig, so ist die Separation auch in Risikosituationen möglich, weil dann Marktwertmaximierung im Einklang mit subjektiver Nutzenmaximierung steht (verallgemeinerte Fisher-Separation).
- Der State-Preference-Ansatz (SPA) kann auf den Mehrperioden-Fall erweitert werden. Wie im Einperioden-Fall sind dann Marktwertmaximierung und Nutzenmaximierung miteinander kompatibel, wenn die Preise von Wertpapieren (quasi) konstant bleiben. Die Annahme unveränderlicher Preise ist zwar üblich, wie im Einperioden-Fall aber nicht unproblematisch.
- Gemäß dem Ziel der Marktwertmaximierung kann zwar ein optimales Investitionsprogramm separat von den zugehörigen optimalen Konsumplänen ermittelt werden. Jedoch müssen nach dessen Bestimmung die entsprechenden optimalen zustandsabhängigen Konsumpläne ermittelt werden.
- In der Realität existieren anders als im SPA keine Preise für zustandsbedingte Zahlungsansprüche, mit denen die Marktwerte beliebiger Investitionsprojekte auf einfache Weise ermittelt werden können. Dann entsteht ein prohibitiv hoher Planungsaufwand bei der Bewertung der Investitionen und der Bestimmung optimaler Konsumpläne.
- Ist der Kapitalmarkt nicht vollkommen und/oder vollständig, so besteht grundsätzlich ein Konflikt zwischen Marktwertmaximierung und subjektiver Nutzenmaximierung. Die optimalen Investitionsentscheidungen für den Alleineigentümer eines Unternehmens können dann theoretisch „exakt“ nur auf der Grundlage eines Totalmodells getroffen werden, das simultan die Investitionsplanung, die Portfeuilleplanung und die Konsumplanung beinhaltet.
- Es besteht dann grundsätzlich auch ein Konflikt zwischen den Gesellschaftern eines börsennotierten Unternehmens, sodass Marktwertmaximierung nicht im Einklang mit kollektiver subjektiver Nutzenmaximierung stehen kann. Es existiert auch kein anderes Unternehmensziel, das im Sinne aller Gesellschafter ist. Marktwertmaximierung kann jedoch deshalb eine weitgehend akzeptierte „Kompromisszielfunktion“ sein, weil sie operational und relativ gut kontrollierbar ist.

- Unvollkommenheit und Unvollständigkeit des Kapitalmarktes erschweren auch die Ermittlung von Marktwerten. In der Praxis behilft man sich, indem versucht wird, Marktwerte von Bewertungsobjekten aus den bekannten Marktwerten bzw. Renditen von Vergleichsinvestitionen mit ähnlicher Risikostruktur abzuleiten.
- Für die vereinfachte praktische Bewertung bieten sich zwei Methoden an, die Sicherheitsäquivalent- und die Risikozuschlagsmethode. Bei der Sicherheitsäquivalentmethode reduziert der Bewertende einen erwarteten Überschuss um einen Risikoabschlag und diskontiert das so bestimmte Sicherheitsäquivalent mit dem risikolosen Zinssatz. Bei der Risikozuschlagsmethode diskontiert der Bewertende den Erwartungswert des Überschusses mit einem risikoangepassten Zinssatz, der einen Risikozuschlag auf den risikolosen Zins enthält.
- Die Sicherheitsäquivalentmethode ist für die Ermittlung von Marktwerten weniger problematisch als für die Ermittlung subjektiver Werte. Kapitalmarktbezogene Sicherheitsäquivalente können unabhängig von den Überschüssen zu anderen Zeitpunkten und unabhängig von zusätzlichen Überschüssen des Investors ermittelt werden, während bei der Ermittlung subjektiver Sicherheitsäquivalente komplexen Risiko- und Bewertungsverbundeffekten Rechnung zu tragen ist.
- Das übliche Vorgehen in der Praxis besteht in der Anwendung der Risikozuschlagsmethode, wobei der Risikozuschlag im Zinssatz auf der Basis der CAPM-Renditegleichung ermittelt wird; zumeist wird ein einheitlicher Risikozuschlag für alle Bewertungszeitpunkte verwendet, das einperiodige CAPM also auf den Mehrperioden-Fall übertragen.
- Da sich die Risikozuschlags- und die Sicherheitsäquivalentmethode ineinander überführen lassen, kann das übliche Vorgehen der Praxis im Licht der Sicherheitsäquivalentmethode beurteilt werden; es erweist sich als problematisch.

Ergänzende und vertiefende Literatur

Ballwieser (2011); Diedrich (2003); Drukarczyk und Schüler (2009); Fama (1996); Hakansson (1970); Ingersoll (1987, S. 220–297); Kruschwitz und Löffler (2003); Laux (1999; 2006a Kapitel XII, XIII und XIV); Laux und Schabel (2009, Kapitel XIV und XV); Richter (1999); Schwetzler (2000a, b); Wiese (2003, 2006).

15.6 Übungen

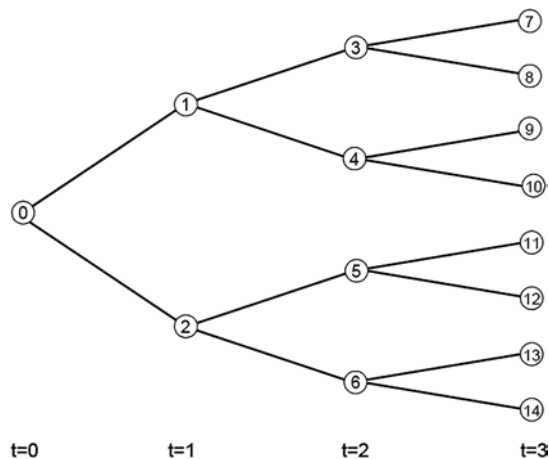
Aufgabe 15.1

Ein Investor wird in den kommenden Jahren $t=1,2,3$ ein Einkommen von jeweils 100 erzielen. Er kann dieses Einkommen direkt konsumieren oder zum Zinssatz r anlegen. Er kann aber auch Kredite zu r aufnehmen, wenn er in einer Periode mehr konsumieren möchte als sein Einkommen. Die Kredite müssen allerdings mit dem späteren Einkommen zurückgezahlt werden. Die Nutzenfunktion des Entscheiders aus seinem Konsum c_1, c_2, c_3 beträgt $U(c_1, c_2, c_3) = c_1^{0.5} + c_2^{0.5} + c_3^{0.5}$.

- Bestimmen Sie den Gesamtnutzen des Entscheiders für den Fall, dass er in jeder Periode sein Einkommen von 100 konsumiert.
- Nehmen Sie an, der Entscheider erwägt, in den Jahren 1 und 2 10 % seines Einkommens zu sparen und (einschließlich Zinsen) in Jahr 3 zu konsumieren. Prüfen Sie, ob er damit seinen Gesamtnutzen erhöht. Nehmen Sie dazu alternativ 1) $r=4\%$ und 2) $r=8\%$ an. Interpretieren Sie die Ergebnisse.
- Nehmen Sie nun an, der Entscheider erwägt, in Jahr 1 mehr zu konsumieren und dies über eine Reduktion seines Konsums in den Jahren 2 und 3 um jeweils 10 % zu finanzieren. Prüfen Sie, ob er damit seinen Gesamtnutzen erhöht. Nehmen Sie dazu alternativ 1) $r=4\%$ und 2) $r=8\%$ an. Interpretieren und vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen des Aufgabenteils b).
- Der Entscheider kann in Jahr 1 in ein Projekt investieren, das 50 kostet und in den beiden folgenden Jahren 30 bringt. Zeigen Sie, dass die Investition nachteilig ist, wenn der Investor seinen Konsum nicht durch Sparen oder Kreditaufnahme anpasst. Prüfen Sie daraufhin, ob die Investition vorteilhaft ist, wenn der Investor die Investition durch ein Annuitätendarlehen finanziert. Unterstellen Sie einen Zinssatz von $r=8\%$.
- Verallgemeinern Sie das Ergebnis zur Vorteilhaftigkeit der Investition aus Aufgabenteil d), indem Sie folgenden Zusammenhang nachweisen: Ist der Kapitalwert der Investition positiv, so kann der Entscheider mit der Investition und Kreditaufnahme und/oder Sparen einen Konsumstrom herstellen, der ihm einen höheren Gesamtnutzen bietet als ohne Investition.

Aufgabe 15.2

In $t=0$ investiert ein Entscheider 200 EUR in ein Projekt. Betrachten Sie den folgenden Zustandsbaum:



Jeder Ast des Baums kennzeichnet eine Umweltentwicklung. Alle Umweltentwicklungen sind gleich wahrscheinlich. Untenstehende Tabelle gibt zwei unterschiedliche Verteilungen über die Rückflüsse (in EUR) aus der Investition an. Unterstellen Sie einen risikolosen Zinssatz von 5 %.

Zeitpunkt	Zustand (Knoten)	Cashflow 1	Cashflow 2
t=0	0	–100	–100
t=1	1	130	130
	2	90	90
t=2	3	169	141
	4	117	101
	5	117	141
	6	81	101
t=3	7	219,7	153,1
	8	152,1	113,1
	9	152,1	153,1
	10	105,3	113,1
	11	152,1	153,1
	12	105,3	113,1
	13	105,3	153,1
	14	72,9	113,1

Unterstellen sie alternativ die folgenden Vorgehensweisen:

- Der Bewertende nimmt von dem Erwartungswert der Cashflows in t=1,2,3 einen Risikoabschlag in Höhe von 5 EUR vor (Sicherheitsäquivalentmethode).
 - Der betrachtete Entscheider diskontiert die erwarteten Cashflows mit einem einheitlichen risikoangepassten Kapitalkostensatz von 10 % (Risikozuschlagsmethode).
- a) Betrachten Sie nur die Cashflows in t=0 und t=1. Weisen Sie die Äquivalenz der beiden oben aufgeführten Vorgehensweisen nach.
 - b) Betrachten Sie nun die gesamten Cashflow-Reihen. Ermitteln Sie jeweils den Marktwert der zukünftigen Zahlungsströme gemäß beiden Vorgehensweisen.
 - c) Berechnen Sie die impliziten Risikoabschläge der Risikozuschlagsmethode.
 - d) Beurteilen Sie die Angemessenheit der beiden Verfahren für die Bewertung der beiden Cashflow-Verteilungen.

Aufgabe 15.3

Ein Investor erwägt ein Projekt durchzuführen, das in den folgenden zwei Perioden jeweils einen unsicheren Überschuss erbringt. Der Überschuss in t=1 beträgt mit

gleicher Wahrscheinlichkeit entweder 120 oder 140, der Überschuss in $t=2$ beträgt mit gleicher Wahrscheinlichkeit entweder 160 oder 300. Die Anschaffungsauszahlung für das Projekt beträgt 300. Sichere Überschüsse werden auf dem Kapitalmarkt mit 4 % verzinst. Gehen Sie bei den Berechnungen von folgender Risikonutzenfunktion des Investors aus:

$$U(x_1, x_2) = U_1(x_1) + U_2(x_2) \quad \text{mit } U_t(x_t) = 1 - e^{-0,02 \cdot x_t}$$

x_t bezeichnet hierbei den Überschuss zum Zeitpunkt t .

- Ermitteln Sie das Sicherheitsäquivalent und den Risikoabschlag für die unsicheren Überschüsse zu den Zeitpunkten 1 und 2.
- Bewerten Sie das Projekt nach der Sicherheitsäquivalentmethode auf der Basis der in Aufgabenteil a) berechneten Sicherheitsäquivalente.
- Beurteilen Sie nun das Projekt, indem Sie den Erwartungswert des Nutzens bei seiner Durchführung mit dem Nutzen vergleichen, den der Investor aus der Anlage der Investitionssumme zu 4 % ziehen kann. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem des Aufgabenteils b).

Aufgabe 15.4

Im Rahmen einer Unternehmensbewertung hat der Bewertende folgende Flows to Equity geschätzt (in Mio. EUR):

t = 1	t = 2	t = 3	t = 4	t = 5	ab t = 6
30	40	50	60	70	80

Der Bewertende verwendet zur Diskontierung der Flows to Equity einen Eigenkapitalkostensatz von $r^* = 8\%$. Der risikolose Zins betrage 4 %.

- Bestimmen Sie den Marktwert des Eigenkapitals in $t=0$.
- Bestimmen Sie die impliziten Risikoabschläge der hier verwendeten Risikozuschlagsmethode für die Perioden 1 bis 6, 10 und 20. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.

15.7 Lösungshinweise

Aufgabe 15.1

a) $c_1 = c_2 = c_3 = 100$; $U = 30$. --- **b)** (1) $r = 4\%$: $c_1 = c_2 = 90$, $c_3 = 121,22$; $U = 29,98$. (2) $r = 8\%$: $c_3 = 122,46$; $U = 30,04$. --- **c)** (1) $r = 4\%$: $c_2 = c_3 = 90$, $c_1 = 118,86$; $U = 29,88$. (2) $r = 8\%$: $c_1 = 117,83$; $U = 29,83$. --- **d)** Ohne Anpassung: $c_1 = 50$, $c_2 = c_3 = 130$; $U = 29,87$. Mit Darlehen: $c_1 = 100$, $c_2 = c_3 = 101,96$; $U = 30,20$. --- **e)** Bei positivem Kapitalwert kann der Investor einen dominanten Konsumstrom herstellen.

Aufgabe 15.2

a) Für beide Cashflow-Reihen: $E(CF_1) = 110$; $MW_0 = (110 - 5) / 1,05 = 100$ nach Sicherheitsäquivalentmethode (SÄM); $MW_0 = 110 / 1,1 = 100$ nach Risikozuschlagsmethode (RZM). --- **b)** Für beide Cashflow-Reihen: $MW_0 = 315,87$ nach SÄM; $MW_0 = 300,00$ nach RZM. --- **c)** Implizite Risikoabschläge: 5 in $t = 1$, 10,75 in $t = 2$ und 17,34 in $t = 3$. --- **d)** Steigendes Risiko über die Zeit bei Cashflow-Reihe 1, konstantes Risiko bei Cashflow-Reihe 2. Konstanter Risikoabschlag der SÄM daher bei Reihe 1 wenig plausibel, bei Reihe 2 eher plausibel, genau umgekehrt bei der RZM.

Aufgabe 15.3

a) $S\ddot{A}(x_1) = 129,01$; $RA(x_1) = 0,99$; $S\ddot{A}(x_2) = 191,71$; $RA(x_2) = 38,29$. --- **b)** Wert in $t = 0$: $(1+i)^{-1} \cdot S\ddot{A}(x_1) + (1+i)^{-2} \cdot S\ddot{A}(x_2) = 301,29 > 300$, das Projekt ist vorteilhaft. --- **c)** Mit Projekt ergibt sich $E[U(x_1, x_2)] = E[U(x_1)] + E[U(x_2)] = 0,9242 + 0,9784 = 1,9026$; das Projekt ist nachteilig, denn bei Geldanlage kann ein höherer Gesamtnutzen erreicht werden, z. B. durch Schaffung zweier gleich hoher Überschüsse $x_1 = x_2 = 159,06$; dann gilt $U(x_1 + x_2) = 1,9169$. Widerspruch ergibt sich daraus, dass in b) nicht berücksichtigt wird, dass der Investor gleiche Einkommen in $t = 1$ und $t = 2$ ungleichen Einkommen vorzieht.

Aufgabe 15.4

a) $MW_0 = 874,09$. --- **b)** Implizite Risikoabschläge RA_t^* : $RA_1^* = 1,11$; $RA_2^* = 2,91$; $RA_3^* = 5,35$; $RA_4^* = 8,41$; $RA_5^* = 12,04$; $RA_6^* = 16,21$; $RA_{10}^* = 25,15$; $RA_{20}^* = 42,39$. Impliziter Risikoabschlag steigt exponentiell an, macht in $t = 20$ mehr als 50 % des Cashflows aus.

Literatur

- Baetge, J., Krause, C.: Die Berücksichtigung des Risikos bei der Unternehmensbewertung. Betriebswirtsch. Forsch. praxis **46**, 433–456 (1994)
- Ballwieser, W.: Die Wahl des Kalkulationszinsfußes bei der Unternehmensbewertung unter Berücksichtigung von Risiko und Geldentwertung. Betriebswirtsch. Forsch. praxis **33**, 97–114 (1981)
- Ballwieser, W.: Unternehmensbewertung und Komplexitätsreduktion, 3. Aufl. Gabler, Wiesbaden (1990)
- Ballwieser, W.: Der Kalkulationszinsfuß in der Unternehmensbewertung: Komponenten und Ermittlungsprobleme. Wirtschaftsprüfung **55**, 736–743 (2002)
- Ballwieser, W.: Unternehmensbewertung. Schäffer, Stuttgart (2011)
- Born, K.: Unternehmensanalyse und Unternehmensbewertung, 2. Aufl. Schäffer-Poeschel, Stuttgart (2003)
- Copeland, T.E., Koller, T., Murrin, J.: Unternehmenswert: Methoden und Strategien für eine wertorientierte Unternehmensführung. Campus, Frankfurt a. M. (1993)
- Diedrich, K.: Die Sicherheitsäquivalentmethode der Unternehmensbewertung: ein (auch) entscheidungstheoretisch wohlbegründbares Verfahren. Anmerkungen zu dem Beitrag von Wolfgang Kürsten. Z. Betriebswirtsch. Forsch. **55**, 281–286 (2003)

- Drukarczyk, J., Schüler, A.: Unternehmensbewertung, 6. Aufl. Vahlen, München (2009)
- Fama, E.F.: Multiperiod consumption-investment decisions. *Am. Econ. Rev.* **60**, 163–174 (1970)
- Fama, E.F.: Discounting under uncertainty. *J. Bus.* **69**, 415–428 (1996)
- Fernandez, P.: Valuation Models and Shareholder Value Creation. Academic Press, Amsterdam (2002)
- Franke, G., Hax, H.: Finanzwirtschaft des Unternehmens und Kapitalmarkt, 6. Aufl. Springer, Berlin (2009)
- Hakansson, N.H.: Optimal investment and consumption strategies under risk for a class of utility functions. *Econometrica* **38**, 587–607 (1970)
- Hering, T.: Unternehmensbewertung, 2. Aufl. De Gruyter Oldenbourg, München (2006)
- Hull, J. C.: Options, Futures, and Other Derivatives. Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River (2008)
- Ingersoll, J.E.: Theory of Financial Decision Making. Rowman & Littlefield, Totowa (1987)
- Kruschwitz, L., Löffler, A.: Semi-subjektive Bewertung. *Z. Betriebswirtsch.* **73**, 1335–1345 (2003)
- Kruschwitz, L., Löffler, A.: Discounted Cash Flow. A Theory of the Valuation of Firms, Chichester (2006)
- Kruschwitz, L., Löffler, A., Essler, W.: Unternehmensbewertung für die Praxis: Fragen und Antworten. Schäffer-Poeschel, Stuttgart (2009)
- Kürsten, W.: “Unternehmensbewertung unter Unsicherheit”, oder: Theoriedefizit einer künstlichen Diskussion über Sicherheitsäquivalent- und Risikozuschlagsmethode. *Z. Betriebswirtsch. Forsch.* **54**, 128–144 (2002)
- Laux, H.: Unternehmensführung, Ethik und Umwelt, Festschrift zum 65. Geburtstag von Hartmut Kreikebaum. In: Wagner, G.R. (Hrsg.) Marktwertmaximierung und CAPM im Ein- und Mehrperioden-Fall, S. 226–251. Gabler, Wiesbaden (1999)
- Laux, H.: Wertorientierte Unternehmenssteuerung und Kapitalmarkt, 2. Aufl. Springer, Berlin (2006a)
- Laux, H.: Unternehmensrechnung, Anreiz und Kontrolle, 3. Aufl. Springer, Berlin (2006b)
- Laux, H., Schabel, M.M.: Subjektive Investitionsbewertung. Marktbewertung und Risikoteilung, Berlin (2009)
- Loderer, C., Jörg, P., Pichler, K., Perrin, P.J.: Handbuch der Bewertung. Verlag Neue Zürcher Zeitung, Zürich (2010)
- Merton, R.C.: Continuous Time Finance. Basil Blackwell, Oxford (1990)
- Miller, M.H., Modigliani, F.: Dividend policy, growth and the valuation of shares. *J. Bus.* **34**, 411–433 (1961)
- Moxter, A.: Grundsätze ordnungsmäßiger Unternehmensbewertung, 2. Aufl. Gabler, Wiesbaden (1983)
- Myers, S.C.: A time-state-preference model of security valuation. *J. Finan. Quant. Anal.* **3**, 1–33 (1968)
- Richter, F.: Wachstum. Kapitalkosten und Finanzierungseffekte. Eine Anwendung des CAPM auf Investitionsentscheidungen, Regensburg (1999)
- Schildbach, T.: Ist die Kölner Funktionslehre der Unternehmensbewertung durch die Discounted Cash-Flow-Verfahren überholt? In: Matschke, M.J., Schildbach, T. (Hrsg.) Unternehmensbewertung und Wirtschaftsprüfung, Festschrift zum 65. Geburtstag von Günter Sieben, S. 301–322. Schäffer-Poeschel, Stuttgart (1998)
- Schwetzler, B.: Unternehmensbewertung unter Unsicherheit – Sicherheitsäquivalentmethode oder Risikozuschlagsmethode. *Z. Betriebswirtsch. Forsch.* **52**, 469–486 (2000a)
- Schwetzler, B.: Stochastische Verknüpfung und implizite bzw. maximal zulässige Risikozuschläge bei der Unternehmensbewertung. *Betriebswirtsch. Forsch. praxis* **52**, 478–492 (2000b)
- Tschöpel, A.: Risikoberücksichtigung bei Grenzpreisbestimmungen im Rahmen der Unternehmensbewertung. Eul, Lohmar (2004)

- Uhlir, H., Steiner, P.: Wertpapieranalyse, 4. Aufl. Physica, Heidelberg (2001)
- Velthuis, L.J.: Anreizkompatible Erfolgsteilung und Erfolgsrechnung. Deutscher Universitäts-Verlag, Wiesbaden (2004)
- Wiese, J.: Zur theoretischen Fundierung der Sicherheitsäquivalentmethode und des Begriffs der Risikoauflösung bei der Unternehmensbewertung. Z. Betriebswirtsch. Forsch. **55**, 287–305 (2003)
- Wiese, J.: Komponenten des Zinsfußes in Unternehmensbewertungskalkülen – Theoretische Grundlagen und Konsistenz. Lang, Frankfurt a. M. (2006)

Teil V

Gruppenentscheidungen

Elemente des Entscheidungsprozesses in Gruppen

16

16.1 Problemstellung und Aufbau

In Unternehmen und vielen anderen Lebensbereichen werden Entscheidungen oft nicht durch einzelne Entscheider, sondern einmalig oder auf Dauer durch Gruppen von Personen (Entscheidungsgremien) getroffen. Dies geschieht in der Erwartung, dass „gerechtere“ bzw. „fairere“ Entscheidungen und/oder im Hinblick auf (vor-) gegebene Ziele „bessere“ Entscheidungen getroffen werden als bei Entscheidung durch einen Einzelnen. Im vorliegenden Kapitel und nachfolgend in Kap. 17 werden daher Entscheidungen in Gruppen untersucht.

Das Problem eines „gerechten“ Interessenausgleichs kann sich insbesondere deshalb stellen, weil die Entscheidungen nicht nur die Interessen eines Einzelnen berühren, sondern die einer Gruppe von Personen, etwa der Mitglieder einer Familie, eines Freundeskreises, eines Vereins, einer Partei oder wie z. B. in den Kapiteln 11 bis 15 der Gesellschafter eines Unternehmens. Je nach den Konsequenzen erwogener Alternativen für die einzelnen Gruppenmitglieder und ihre Nutzenfunktionen können sich ihre Präferenzordnungen über erwogene Alternativen erheblich unterscheiden. Die Beteiligung der Gruppenmitglieder an den Entscheidungen im Rahmen demokratischer Wahlverfahren, deren Kern Abstimmungsregeln sind, soll dann dazu dienen, die individuellen Präferenzordnungen in eine „gerechte“ oder „faire“ kollektive Präferenzordnung für die Gruppe als Ganze zu überführen und damit dem Aspekt einer „fairen Konfliktlösung“ Rechnung zu tragen.

Entscheidungen werden häufig auch von Personengruppen (von Entscheidungsgremien wie z. B. dem Aufsichtsrat, dem Vorstand oder der Gruppe von Abteilungsleitern eines Unternehmens) getroffen, die nicht für „sich selbst“, sondern für Andere entscheiden. Sie werden durch eine „übergeordnete“ Instanz eingesetzt, die ihrerseits aus einer Gruppe von Personen bestehen kann. Die Instanz gibt dann im Allgemeinen der

Gruppe ein Ziel vor, an dem sich diese bei ihren Entscheidungen zu orientieren hat. Im Vergleich zur Delegation der Entscheidungen an einen einzelnen Entscheidungsträger können dann z. B. deshalb bessere Entscheidungen bezüglich des betreffenden Ziels getroffen werden, weil in der Gruppe mehr Informationen vorhanden sind bzw. beschafft werden, aus gegebenen Informationen bessere Prognosen bezüglich entscheidungsrelevanter Umweltzustände abgeleitet werden oder Mitglieder mit schlechten Prognosen oder abweichenden persönlichen Zielen überstimmt werden.

Die Delegation der Entscheidungen ist vor allem dann naheliegend, wenn die Instanz als Gruppe (etwa die Gruppe der Gesellschafter eines Unternehmens) aus sehr vielen Mitgliedern besteht und somit die explizite Bildung einer Präferenzordnung durch jedes einzelne Mitglied prohibitiv hohe Kosten in Form von Ausgaben und/oder durch Einsatz von Arbeit und Zeit verursachen würde, und außerdem die Gruppenmitglieder sich an einem einheitlichen (einmütigen) und operationalen Ziel orientieren. Das Problem gerechter Entscheidungen stellt sich dann gar nicht, wobei das betreffende Ziel dem Entscheidungsgremium vorgegeben werden kann.

Oft setzen sich Entscheidungsgremien auch aus Mitgliedern zusammen, die die konfliktären Interessen verschiedener Personen oder Personengruppen vertreten sollen. Es geht dann darum, Aspekten fairer Konfliktlösung Rechnung zu tragen und zugleich den Entscheidungsprozess effizienter zu gestalten als dies bei Entscheidung durch die Gesamtheit dieser Personen möglich wäre.

In größeren Unternehmen (und anderen Organisationen) werden Entscheidungen oft über mehrere Hierarchieebene hinweg durch Gruppen getroffen. So sieht beispielsweise das Aktiengesetz vor, dass die Hauptversammlung der Aktionäre unter anderem über die Verwendung des Gewinns und über Kapitalerhöhungen bzw. Kapitalherabsetzungen entscheidet sowie die Aktionärsvertreter im Aufsichtsrat bestellt (§ 119 Aktiengesetz). Der Aufsichtsrat bestellt z. B. gemeinsam die Mitglieder des Vorstands und regelt sein Vergütungssystem; der Vorstand entscheidet im Rahmen von Abstimmungen darüber, welche Ziele verfolgt werden sollen; die Leiter der Geschäftsbereiche des Unternehmens legen gemeinsam Investitionsprogramme fest. Die steigende Komplexität vieler Entscheidungsprobleme und die fortschreitende Demokratisierung unserer Gesellschaft haben dazu geführt, dass nicht nur im politischen Bereich, sondern auch in Unternehmen, in zunehmendem Maße Gruppen (Entscheidungsgremien) mit Problemlösungen betraut werden.

Entscheidungsprozesse in Gruppen sind allgemein durch zwei Phasen gekennzeichnet: Der ersten Phase des gegenseitigen Informationsaustausches, in der jedes Mitglied eine individuelle Präferenzordnung über die erwogenen Alternativen bildet bzw. überdenkt, folgt die zweite Phase der eigentlichen Entscheidungsfindung, in der eine Abstimmungsregel zum Einsatz kommt. In diesem Kapitel werden die Elemente eines solchen Entscheidungsprozesses zunächst in eine Systematik gebracht (Abschn. 16.2). Danach wird verdeutlicht, wie die Gruppenmitglieder im Verlauf des Entscheidungsprozesses wechselseitig ihre Präferenzordnungen beeinflussen und aus welchen Gründen sich die Präferenzordnungen der Gruppenmitglieder (auch noch) zum Zeitpunkt

der Abstimmung unterscheiden können. (Abschn. 16.3). Anschließend werden formale Abstimmungsregeln erörtert und deren möglichen Implikationen bezüglich des Abstimmungsergebnisses verglichen. Darauf aufbauend wird gezeigt, wie Gruppenmitglieder durch „strategisches“ Verhalten im Abstimmungsprozess Einfluss auf das Ergebnis der Abstimmung nehmen können (Abschn. 16.4).

Anschließend werden die möglichen Vor- und Nachteile von Gremienentscheidungen im Vergleich zur Entscheidung durch ein Individuum gezeigt (Abschn. 16.5). Dabei wird auch deutlich, dass mit der Vergrößerung eines Entscheidungsgremiums nicht nur die Kosten steigen, sondern ab einer bestimmten Mitgliederzahl die Qualität der Entscheidung wieder sinkt. Entsprechend gibt es eine „optimale“ Gruppengröße.

Die Darstellungen im vorliegenden Kapitel und in Kap. 17, das sich mit der Problematik der Aggregation der Präferenzordnungen der Mitglieder einer Gruppe zu einer „gerechten“ oder „fairen“ (kollektiven) Präferenzordnung für die Gruppe als Einheit befasst, stehen in enger Beziehung zu den Kap. 11 bis 15, in denen jeweils Entscheidungen für eine Gruppe von Gesellschaftern eines Unternehmens, die an den resultierenden Erfolgen oder Einzahlungsüberschüssen beteiligt sind, untersucht wurden. Dabei blieb allerdings weitgehend offen, *wer* die diskutierten Entscheidungsprobleme lösen soll. Die Kap. 11 bis 15 bieten jedoch theoretische Grundlagen, um in Verbindung mit Darstellungen im vorliegenden Kapitel und in Kap. 17 zu untersuchen, wie die Entscheidungskompetenzen zwischen den Gesellschaftern und Entscheidungsträgern im Unternehmen (Gruppen oder Individuen) verteilt werden sollen. Darauf kommen wir in Kap. 17 zurück.

16.2 Kommunikation und Abstimmung als Elemente des Gruppenprozesses

Um den allgemeinen Verlauf des Entscheidungsprozesses in einer Gruppe anschaulich zu erläutern, wird eine relativ einfache Entscheidungssituation betrachtet:

1. Die Gruppe hat aus einer gegebenen Menge $\{A_1, A_2, \dots, A_{N_A}\}$ von Alternativen eine auszuwählen.¹
2. Die Konsequenzen der Alternativen hängen davon ab, welcher Zustand eintreten wird. Die möglichen Zustände werden mit $S_1, S_2, \dots, S_{N_S}$ bezeichnet.

¹Durch die Annahme, die Menge der Handlungsalternativen sei bereits gegeben, wird die Problemstellung nicht wesentlich eingeeengt. Natürlich stellt sich einer Gruppe im Rahmen eines Entscheidungsproblems im Allgemeinen auch die Aufgabe, (zusätzliche) Alternativen zu finden bzw. zu erfinden. In dieser Hinsicht unterscheidet sich jedoch der Entscheidungsprozess in einer Gruppe nicht von dem eines Einzelnen. Der Aspekt der Alternativensuche lässt sich außerdem leicht in die folgenden Darstellungen einbeziehen.

3. Die Gruppenmitglieder $M_1, M_2, \dots, M_{N_M}$ ($N_2 \geq 2$) orientieren sich bei der Bildung ihrer Präferenzordnungen am Bernoulli-Prinzip.

Die endgültige Auswahl einer Alternative erfolgt in Form einer Abstimmung (Abschn. 16.4). Der Abstimmung geht im Allgemeinen ein mehr oder weniger intensiver Informationsprozess voraus: Die Gruppenmitglieder

- beschaffen Informationen außerhalb der Gruppe (d. h. sie überprüfen die Ausprägungen von Indikatoren, die Rückschlüsse auf die Zustände ermöglichen),
- sie informieren sich gegenseitig über die Ausprägungen von Indikatoren (Kommunikation) und
- diskutieren darüber, welche Schlüsse aus Informationen (d. h. den Ausprägungen von Indikatoren) zu ziehen sind.

Einzelne Mitglieder versprechen möglicherweise auch Belohnungen (bzw. drohen Sanktionen an) für den Fall, dass eine bestimmte Alternative gewählt (bzw. nicht gewählt) wird. Der Entscheidungsprozess einer Gruppe besteht also aus dem Informations- und dem Abstimmungsprozess; vgl. Abb. 16.1.

Wenn in einer bestimmten Phase des Informationsprozesses nicht alle Mitglieder dieselbe Alternative als die beste ansehen, liegt ein Interessenkonflikt vor. Er kann den Informationsprozess der Gruppe fördern, aber auch beeinträchtigen. Wenn etwa die Mitglieder schon bald nach Beginn des Informationsprozesses dieselbe Alternative als die beste ansehen, wird die Motivation fehlen, weitere Informationen zu beschaffen und zu verarbeiten. Interessenkonflikte bewirken dagegen auch häufig, dass der Informationsprozess fortgesetzt wird, um eine größere Übereinstimmung der individuellen Präferenzordnungen zu erreichen. Jedoch besteht bei Interessenkonflikten auch die Gefahr, dass die Mitglieder ihre Energien nicht auf den Entscheidungsprozess verwenden, sondern für die Sicherung und Verbesserung der eigenen Position in der Gruppe einsetzen.

Im Folgenden werden die Aktivitäten der einzelnen Mitglieder im Rahmen des Informationsprozesses der Gruppe näher untersucht und systematisiert; danach wird der Abstimmungsprozess betrachtet. Hierzu ist es zweckmäßig, zunächst einmal die Determinanten darzustellen, von denen die Präferenzordnung eines Mitglieds über die Alternativen $A_1, A_2, \dots, A_{N_A}$ abhängt.

Bei gegebenen Konsequenzen der Alternativen in den Zuständen $S_1, S_2, \dots, S_{N_S}$ ist die Präferenzordnung eines Gruppenmitglieds abhängig von seiner Entscheidungsregel und seinem Wahrscheinlichkeitsurteil über die Zustände.

Abb. 16.1 Der Entscheidungsprozess einer Gruppe im Überblick



Die *Entscheidungsregel* eines Mitglieds ist gekennzeichnet durch die Zielgrößen, an denen es sich bei seiner Entscheidung orientiert, und durch die Gestalt seiner Nutzenfunktion, in der u. a. seine Risikoeinstellung zum Ausdruck kommt.

Das *Wahrscheinlichkeitsurteil* eines Mitglieds hängt ab von seinen Informationen und davon, welche Rückschlüsse es aus diesen Informationen zieht (welches Prognosemodell es also anwendet).

Zur Präzisierung dieser Aussage dienen folgende Begriffe:

- *Indikatoren*: Jedes Mitglied bildet sich sein Wahrscheinlichkeitsurteil auf der Basis bestimmter Informationen. Die Größen (bzw. Ereignisse), die als Prognosegrundlage dienen, werden als Indikatoren bezeichnet.
- *Informationsmenge*: Die Menge der Indikatoren, deren Ausprägungen einem Mitglied bekannt sind, bezeichnen wir im Folgenden als dessen Informationsmenge (oder Informationsstand).
- *Informationsstruktur*: Das Wahrscheinlichkeitsurteil eines Gruppenmitglieds hängt nicht nur davon ab, welche Indikatoren es beobachtet, sondern auch von deren Ausprägungen. So können etwa für die Preisprognose eines Mitglieds historische Preise als Indikatoren Verwendung finden. Wichtig ist es dann zu wissen, wie sich diese Preise konkret entwickelt haben, also z. B. wie stark sie gefallen oder gestiegen sind. Um zu berücksichtigen, dass für eine Prognose nicht nur der vorhandene Informationsstand, sondern auch der Inhalt der betreffenden Informationen relevant ist, wird der Begriff der Informationsmenge zum Begriff der Informationsstruktur spezifiziert. Die Informationsstruktur eines Mitglieds ist determiniert (i) durch seine Informationsmenge und (ii) durch die Ausprägungen der zu seiner Informationsmenge gehörenden Indikatoren.
- *Prognosefunktion*: Durch die Informationsstruktur allein sind die Wahrscheinlichkeiten, die ein Mitglied den Zuständen zuordnet, noch nicht eindeutig determiniert. Zwei Individuen mit identischer Informationsstruktur können zu unterschiedlichen (subjektiven) Wahrscheinlichkeitsurteilen kommen, weil sie aus den Informationen unterschiedliche (probabilistische) Schlüsse ziehen. Zur Erfassung dieses Sachverhalts wird der Begriff „Prognosefunktion“ eingeführt. Die Prognosefunktion eines Individuums gibt an, welche Wahrscheinlichkeiten es den Zuständen bei alternativen Informationsstrukturen zuordnet; sie bringt zum Ausdruck, in welcher Weise Informationen in (subjektive) Wahrscheinlichkeitsurteile transformiert werden.

Die Abb. 16.2 gibt einen Überblick über die Determinanten der Präferenzordnung eines Gruppenmitglieds (bei gegebenen Konsequenzen der Alternativen).

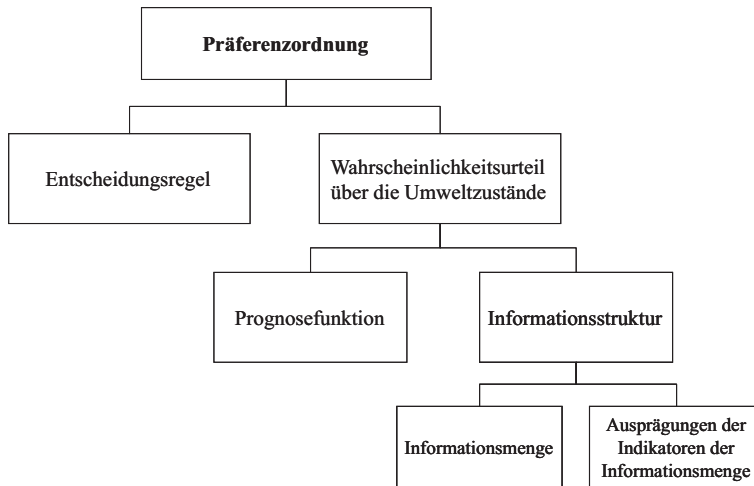


Abb. 16.2 Die Determinanten der Präferenzordnung eines Gruppenmitglieds

16.3 Informationsprozess

16.3.1 Überblick

Zur Analyse des Informationsprozesses der Gruppe wird angenommen, jedes Mitglied habe schon zu Beginn dieses Prozesses (mehr oder weniger präzise) Vorstellungen über die eigene Präferenzordnung. Während des Informationsprozesses versuchen die Mitglieder, ihre eigenen Präferenzordnungen zu „verbessern“ und die der anderen Mitglieder im eigenen Sinne zu beeinflussen.

Zunächst wird untersucht, aus welchen Gründen sich die individuellen Präferenzordnungen zu Beginn des Informationsprozesses der Gruppe unterscheiden können. Danach werden die Aktivitäten eines Gruppenmitglieds im Informationsprozess systematisiert. Schließlich wird gezeigt, warum sich auch am Ende des Informationsprozesses die individuellen Präferenzordnungen (noch) unterscheiden können. Unterschiede in den individuellen Präferenzordnungen machen eine explizite Abstimmung notwendig. Der Abstimmungsprozess wird in Abschn. 16.4 untersucht.

16.3.2 Die individuellen Präferenzordnungen zu Beginn des Informationsprozesses

Vor allem zu Beginn des Informationsprozesses werden nur in Ausnahmesituationen alle Gruppenmitglieder dieselbe Alternative als die beste ansehen. (Eine solche Situation liegt z. B. dann vor, wenn von vornherein ein einzelnes Mitglied eine besonders starke Machtposition hat, sodass niemand es wagt, ein abweichendes Urteil zu vertreten.)

Die Präferenzordnungen der Mitglieder können vor allem deshalb voneinander abweichen, weil sie verschiedene *Ziele* verfolgen: Zum einen mögen sich die Mitglieder an verschiedenen Zielgrößen orientieren, zum anderen können sich aufgrund verschiedener Risikoeinstellungen selbst dann unterschiedliche Präferenzordnungen ergeben, wenn sich die Mitglieder an derselben Zielgröße orientieren und zudem ihre Wahrscheinlichkeitsurteile über die Zustände identisch sind.

Orientieren sich etwa die Gesellschafter eines Unternehmens nur am Unternehmensgewinn, so können bei gegebenen Risikoeinstellungen auch daraus sehr unterschiedliche Präferenzordnungen über die Alternativen resultieren, dass der Unternehmensgewinn nicht anreizkompatibel geteilt wird (Kap. 12, 14 und 15). Wenn die Gesellschafter privat keine Risiken tragen, ist Einmütigkeit nur dann garantiert und die Präferenzordnungen aller Gesellschafter stimmen überein, wenn die möglichen Gewinne derart geteilt werden, dass für einen beliebigen Gesellschafter der Nutzen seines Einkommens eine linear steigende Funktion des Nutzens des Einkommens eines beliebigen anderen Gesellschafters ist (Kap. 12, Abschn. 12.4.1).

Es könnte eingewendet werden, Unterschiede in den individuellen Zielvorstellungen seien in der Realität kaum zu erwarten: Den von einer übergeordneten Instanz (etwa der Leitung eines Unternehmens) „eingesetzten“ Gruppen (Entscheidungsgremien) wird von der Instanz ein Ziel vorgegeben, an dem sich die Mitglieder zu orientieren haben (Abschn. 16.6), während „autonome“ Gruppen (etwa die Mitglieder einer Familie oder eines Clubs) ein selbstbestimmtes „gemeinsames Ziel“ verfolgen.

Allein die Tatsache, dass eine übergeordnete Instanz der Gruppe ein Ziel setzt, gibt jedoch noch nicht die Gewähr, dass sich jedes Mitglied dieses Ziel zu eigen macht. Einzelne oder alle Mitglieder können sich an abweichenden persönlichen Zielen orientieren. Angenommen, das Ziel der Instanz sei Maximierung des Gewinnerwartungswertes oder des Marktwertes der Aktien des Unternehmens (Kap. 13, 14 und 15). Ein Gruppenmitglied könnte sich dann außer am Gewinn z. B. auch an Zielgrößen wie Umsatz, Betriebsgröße und Zahl der unterstellten Mitarbeiter orientieren, um seine Beförderungschancen und/oder sein Ansehen zu erhöhen. Möglicherweise hat es deshalb eine Präferenz für eine Alternative, weil diese einen geringen persönlichen Arbeits-einsatz fordert. Auch wenn sich ein Gruppenmitglied primär nur am Gewinn orientiert, kann es die Zielvorgabe verletzen. Es mag bei niedrigen Gewinnen besondere persönliche Nachteile erwarten (z. B. sinkt seine erfolgsabhängige Prämie, die Wahrscheinlichkeit einer Beförderung oder die Wahrscheinlichkeit der Vergrößerung seiner Abteilung) und deshalb für eine Alternative eintreten, die zwar im eigenen Urteil nicht den maximalen Gewinnerwartungswert aufweist, bei der aber die Wahrscheinlichkeit für einen niedrigen Gewinn gering ist. Die Nutzenwerte, die ein Gruppenmitglied alternativen Gewinnen zuordnet, hängen eben von den persönlichen Konsequenzen ab, die damit verbunden sind. Natürlich wird ein Mitglied kaum offen bekennen, dass es (abweichende) persönliche Ziele verfolgt. Es wird in der Diskussion abweichende Präferenzen mit abweichenden Wahrscheinlichkeitsurteilen bezüglich der maßgeblichen Zustände begründen. Eine Orientierung an persönlichen Zielen ist im Allgemeinen umso eher zu

erwarten, je schwieriger es ist, eine Missachtung des von der Instanz vorgegebenen Ziels nachzuweisen.

Autonome Gruppen verfolgen zwar im Allgemeinen ein „gemeinsames Ziel“, jedoch ist dieses Ziel in der Regel so allgemein definiert, dass sehr unterschiedliche Zielpräzisierungen möglich sind. Das Ziel eines Kegelklubs z. B. bestehe „im gemeinsamen Kegeln“. Trotzdem kann etwa deshalb zwischen zwei Mitgliedern Zielkonflikt bestehen, weil das eine ehrgeizig ist und für härteres Training plädiert, während das andere eher die Geselligkeit sucht.

Unternehmensziele werden häufig vereinfachend mit „Gewinnmaximierung“ charakterisiert. Damit wird aber nicht dem Sachverhalt Rechnung getragen, dass der Gewinn unsicher ist und folglich die Beurteilung von Alternativen nur nach einem Entscheidungskriterium bei Risiko vorgenommen werden kann. Wie erläutert, können sich bei der Beurteilung konkreter Alternativen sehr unterschiedliche Präferenzordnungen ergeben, je nachdem wie der Gewinn zwischen den Gesellschaftern aufgeteilt wird und welche Nutzenfunktionen sie haben.

Unter bestimmten Kapitalmarktbedingungen ist die Maximierung des Marktwertes der Aktien eines Unternehmens mit der Maximierung des Erwartungswertes des finanziellen Nutzens für jeden Anteilseigner kompatibel (Kap. 14 und 15). Konflikte in der Gruppe der Anteilseigner können sich dann bei homogenen Erwartungen über die Ergebnisse der Alternativen nur ergeben, wenn für einige oder alle Anteilseigner auch nichtfinanzielle Zielgrößen entscheidungsrelevant sind (Kap. 17, Abschn. 17.6). Sieht man von solchen Zielgrößen ab (dies ist vor allem für Aktiengesellschaften mit vielen anonymen Anteilseignern mit jeweils kleinem Unternehmensanteil naheliegend), so gilt als Formalziel des Unternehmens die „Marktwertmaximierung“. Wie erläutert, folgt daraus jedoch nicht, dass die Mitglieder von Entscheidungsgremien (oder einzelne Entscheidungsträger) im Unternehmen, an die die Entscheidungskompetenzen delegiert werden, sich dieses Ziel zu eigen machen.

Die Präferenzordnung eines Gruppenmitglieds hängt auch von seiner *Informationsstruktur* ab. Diese ist definitionsgemäß gekennzeichnet durch die Menge der entscheidungsrelevanten Indikatoren, die das Mitglied kennt (seine Informationsmenge), und die Ausprägungen dieser Indikatoren. Vor allem zu Beginn des Informationsprozesses ist zu erwarten, dass sich die *Informationsmengen* der Mitglieder unterscheiden. Für eine Instanz kann es gerade sinnvoll sein, eine solche Gruppe einzusetzen, deren Mitglieder in der Ausgangssituation über unterschiedliche Informationsmengen verfügen. Weichen die Informationsmengen der Mitglieder voneinander ab, so unterscheiden sich im Allgemeinen auch ihre Wahrscheinlichkeitsurteile über die Zustände und ihre Präferenzordnungen über die Alternativen.

Selbst bei identischen Informationsmengen können die Wahrscheinlichkeitsurteile der Mitglieder verschieden sein. Dies ist dann der Fall, wenn sie aus den Informationen verschiedene Schlüsse ziehen. Unterschiede in den individuellen *Prognosefunktionen* (also im Prognoseverhalten der einzelnen Mitglieder) sind gerade zu Beginn des Gruppenprozesses zu erwarten. Im Verlauf der Gruppendiskussion können sich die individuellen Prognosefunktionen einander angleichen.

16.3.3 Aktivitäten zur Beeinflussung individueller Präferenzordnungen

16.3.3.1 Überblick

Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass die Aktivitäten jedes Mitglieds im Informationsprozess der Gruppe dazu dienen, das Wahlergebnis (aus eigener Sicht) „günstig“ zu beeinflussen. Wenn ein Mitglied sich nicht in der Lage fühlt, Einfluss auf die Entscheidung der Gruppe auszuüben, wird es in der Gruppe nicht aktiv mitwirken.² Im Verlauf des Informationsprozesses bemüht sich i. d. R. jedes Mitglied (wenn auch mit unterschiedlicher Intensität),

- (a) Informationen für die „Verbesserung“ der eigenen Präferenzordnung über die Alternativen zu erhalten und/oder
- (b) die Präferenzordnungen anderer Mitglieder so zu beeinflussen, dass die Wahrscheinlichkeit dafür steigt, dass die im eigenen Urteil beste oder wenigstens eine „gute“ Alternative als Wahlsieger aus der Abstimmung hervorgeht.

Zu (a): Die Maßnahmen der Informationsbeschaffung eines Mitglieds zielen zum einen darauf ab, die Konsequenzen der Alternativen besser zu prognostizieren, um bei der *Abstimmung* die Stimme bzw. Stimmen zielgerechter vergeben zu können. Zum anderen dienen die zusätzlichen Informationen als Beurteilungsgrundlage dafür, wie die Präferenzordnungen der übrigen Mitglieder im *Informationsprozess* der Gruppe beeinflusst werden sollen.

Zu (b): Ein Gruppenmitglied kann daran interessiert sein, die Präferenzordnungen anderer Mitglieder zu beeinflussen, um die Wahrscheinlichkeit zu erhöhen, dass der Spitzenreiter der eigenen Präferenzordnung oder zumindest eine ranghohe Alternative gewählt wird. Dabei kann das betreffende Mitglied seine Präferenzordnung nach seinen persönlichen Zielvorstellungen bilden oder nach dem Ziel einer das Gremium einsetzenden Instanz.

Die unter (a) und (b) genannten Aktivitäten werden aus Gründen der Übersichtlichkeit im Folgenden getrennt betrachtet. In der Realität lassen sie sich jedoch nicht immer streng trennen. Erfragt z. B. ein Gruppenmitglied eine Information in der Gruppe, so hat diese Information möglicherweise nicht nur Auswirkungen auf die Präferenzordnung des betreffenden Mitglieds, sondern auch auf die Präferenzordnungen anderer Mitglieder, die den Informationsaustausch „mithören“. Aus diesem Grund lassen sich die Aktivitäten (a) und (b) auch nicht zeitlich in eine bestimmte Reihenfolge bringen, sondern sie verlaufen in der Regel „parallel“ zueinander. Dabei stellt sich das folgende *Grundproblem*:

²In der Realität könnte ein Mitglied z. B. aus Prestige Gründen auch dann Beiträge leisten (es dokumentiert etwa seinen guten Informationsstand), wenn es davon überzeugt ist, dass die Beiträge keinen Einfluss auf die Entscheidung der Gruppe haben.

Von seiner eigenen Präferenzordnung hängt es ab, in welche Richtung ein Gruppenmitglied die Präferenzordnungen der anderen Mitglieder zu lenken versucht. Während des Informationsprozesses kann sich jedoch die eigene Präferenzordnung (insbesondere aufgrund zusätzlicher Informationen und/oder anderer Schlussfolgerungen) noch ändern. Wenn nun aber das Mitglied mit seinen Aktivitäten zur Beeinflussung der Präferenzordnungen anderer Mitglieder erst dann beginnt, wenn sich seine eigene Präferenzordnung „gefestigt“ hat, besteht unter Umständen gar nicht mehr die Möglichkeit, die Präferenzordnungen der anderen Mitglieder zu verändern.

16.3.3.2 Beeinflussung der eigenen Präferenzordnung

Die Aktivitäten, die ein Mitglied zur Verbesserung der eigenen Präferenzordnung unternimmt, hängen (außer von der bisherigen Gestalt der Präferenzordnung) vor allem ab

- (a) von seinem Urteil über die Möglichkeiten, sein Wahrscheinlichkeitsurteil über die Konsequenzen der zur Debatte stehenden Alternativen zu verbessern, und
- (b) von seiner Einschätzung des eigenen Potenzials hinsichtlich der Beeinflussung des Abstimmungsergebnisses.

Zu (a): Jedes Mitglied hat grundsätzlich zwei Möglichkeiten, sein Wahrscheinlichkeitsurteil zu verbessern: Es kann seinen Informationsstand erweitern und/oder seine Prognosefunktion korrigieren. Zur Verbesserung seines Informationsstandes informiert sich das betreffende Mitglied über die Ausprägungen entscheidungsrelevanter Indikatoren, wobei als Informanten vor allem auch die übrigen Gruppenmitglieder in Betracht kommen. Zur Korrektur seiner Prognosefunktion beschafft es sich (auch) Informationen darüber, welche Rückschlüsse andere Mitglieder aus bestimmten Informationen auf die Zustände bzw. auf einzelne entscheidungsrelevante Daten ziehen und mit welchen Argumenten und Theorien diese Schlussfolgerungen begründet werden.

Welche Aktivitäten zur Verbesserung seines Informationsstandes ein Gruppenmitglied unternimmt, hängt davon ab, wie es die bisherigen Informationsstände der anderen Mitglieder und/oder ihre Möglichkeiten zur Beschaffung zusätzlicher Informationen einschätzt. Wenn es damit rechnet, dass andere Mitglieder keine zusätzlichen entscheidungsrelevanten Informationen haben, wird es auch nicht nach weiteren Informationen fragen, sondern allenfalls die Anregung geben, zusätzliche Informationen außerhalb der Gruppe zu beschaffen. Wenn das Mitglied erwartet, dass andere Mitglieder die Ausprägungen „wichtiger“ Indikatoren kennen, wird es vielleicht (in der Gruppensitzung oder außerhalb) die Ausprägungen erfragen oder darauf warten, dass die betreffenden Mitglieder von sich aus diese Informationen geben. Wer selbst keine Informationen gibt, erhält häufig auch keine. Aus diesem Grund wird ein Mitglied allein schon deshalb Informationen der Gruppe liefern, um die Informationsbereitschaft anderer Mitglieder zu erhöhen.

Zu (b): Ein Mitglied wird im Zuge seiner Aktivitäten zur „Verbesserung“ der eigenen Präferenzordnung auch seinen Einfluss auf das Wahlergebnis abschätzen, um beurteilen

zu können, ob sich diese Aktivitäten überhaupt lohnen. Wenn das Mitglied zur Überzeugung kommt, dass es keinen Einfluss auf das Wahlergebnis hat, wird ihm die Motivation fehlen, durch entsprechende Informationsaktivitäten zu einer „fundierteren“ eigenen Präferenzordnung zu gelangen. Zugleich wird auch die Motivation fehlen, anderen Mitgliedern Rat und Informationen zu geben. In größeren Gruppen (etwa ab 7 Mitgliedern) ist der einzelne Teilnehmer oft der Meinung, „dass seine eigenen Anstrengungen keinen großen Einfluss auf das Endergebnis haben werden und dass er von der Entscheidung der Sitzung in gleicher Weise betroffen wird, unabhängig davon, mit wie viel oder wenig Aufwand er die fraglichen Probleme studiert“ (Olson 2004, S. 52). Die geringere Motivation der Mitglieder kann sich z. B. darin äußern, dass immer weniger Personen ihre Informationen anderen Gruppenmitgliedern freiwillig zur Verfügung stellen, wenn die Zahl der Gruppenmitglieder wächst (Gibb 1951).

Möglichkeiten zur Beeinflussung des Wahlergebnisses durch ein einzelnes Mitglied können zum einen im Verlauf des *Informationsprozesses* der Gruppe (das Mitglied kann versuchen, die Präferenzordnungen der anderen Mitglieder im eigenen Sinne zu beeinflussen) und zum anderen bei der *Abstimmung* bestehen.

16.3.3.3 Beeinflussung der Präferenzordnungen anderer Gruppenmitglieder

Die Aktivitäten, die ein Mitglied zur Beeinflussung der Präferenzordnungen anderer Mitglieder unternimmt, hängen außer von seiner eigenen Präferenzordnung vor allem ab von seiner Erwartungsstruktur hinsichtlich

- (a) der bisherigen Präferenzordnungen der anderen Mitglieder (sowie den Ausprägungen der Determinanten dieser Präferenzordnungen),
- (b) der Möglichkeit, die Präferenzordnungen der anderen Mitglieder (durch Beeinflussung ihrer Determinanten) zu verändern, und
- (c) dadurch einer besseren Alternative zum Wahlsieg zu verhelfen.

Zu (a): Zunächst stellt sich für das betreffende Mitglied das Problem, sich ein (Wahrscheinlichkeits-) Urteil über die Präferenzordnungen der anderen Mitglieder zu bilden. Wenn es z. B. zur Überzeugung kommt, dass die anderen Mitglieder ohnehin dieselbe Präferenzordnung haben wie es selbst, wird es keine Aktivitäten speziell zur Änderung der Präferenzordnungen der anderen Mitglieder vornehmen. Es wird allenfalls dafür plädieren, (bestimmte) zusätzliche Informationen zu beschaffen und einander zu übermitteln, um die gemeinsame Basis für die Prognose der Konsequenzen der Alternativen zu verbessern.

Die Präferenzordnungen der anderen Mitglieder (sowie die Ausprägungen der sie bestimmenden Determinanten) sind vor allem zu Beginn des Informationsprozesses der Gruppe oft nur schwer abzuschätzen. Der Verlauf dieses Prozesses liefert möglicherweise (zusätzliche) Informationen, die Rückschlüsse darauf zulassen. Ein Mitglied setzt sich z. B. offen für die Wahl einer bestimmten Alternative ein. Ein anderes Mitglied gibt

immer nur Informationen, die eine bestimmte Alternative als vorteilhaft erscheinen lassen. Ein drittes Mitglied plädiert immer wieder für die Verfolgung eines bestimmten Ziels, sodass offenkundig wird, welche Gestalt seine Präferenzordnung hat. Trotz solcher Informationen werden zumindest die Präferenzordnungen eines Teils der anderen Mitglieder nicht mit Sicherheit bekannt sein. Um abschätzen zu können, ob die Präferenzordnungen anderer Mitglieder beeinflusst werden können bzw. sollen und in welcher Weise, muss sich das einzelne Mitglied ein *Wahrscheinlichkeitsurteil* über die bisherigen Präferenzordnungen dieser Mitglieder und die jeweiligen Determinanten (die jeweilige Entscheidungsregel, Informationsstruktur und Prognosefunktion) bilden.

Zu (b): Ist ein Mitglied davon überzeugt, dass andere Mitglieder dieselbe Entscheidungsregel anwenden wie es selbst und dass deren Präferenzordnung nur deshalb von der eigenen abweicht, weil sie umfassender informiert sind und/oder ihre Prognosefunktionen „besser“ sind, wird es natürlich nicht versuchen, deren Präferenzordnung in Richtung auf die eigene Präferenzordnung zu beeinflussen. Es wird deren Präferenzordnung übernehmen.

Wenn das Mitglied vermutet, dass die abweichenden Präferenzordnungen der anderen Mitglieder aus „schlechteren“ Informationsmengen, „schlechteren“ Prognosefunktionen und/oder abweichenden Entscheidungsregeln resultieren, wird es sich möglicherweise bemühen, die Präferenzordnungen der anderen Mitglieder zu beeinflussen. Dazu können folgende Möglichkeiten bestehen:³

- Beeinflussung der Informationsstrukturen,
- Beeinflussung der Prognosefunktionen,
- Beeinflussung der Entscheidungsregeln.

Wenn das betrachtete Mitglied vermutet, dass die Präferenzordnungen anderer Mitglieder (auch) deshalb von der eigenen Präferenzordnung abweichen, weil diese Mitglieder einen „schlechteren“ Informationsstand haben, ist es für das betrachtete Mitglied naheliegend, ihnen fehlende Informationen entweder selbst zu geben oder andere Personen zu veranlassen, sie zu übermitteln.

Ist das Mitglied davon überzeugt, dass die Präferenzordnungen anderer Mitglieder (auch) deshalb von der eigenen Präferenzordnung abweichen, weil diese Mitglieder über „schlechtere“ Prognosefunktionen verfügen, wird es versuchen, diese Funktionen zu beeinflussen. Es kann z. B. erläutern, welche Schlüsse es selbst aus Informationen zieht, und Argumente liefern, die diese Schlussfolgerungen rechtfertigen.

³Gegebenenfalls kann das Mitglied die Präferenzordnungen anderer Mitglieder auch dadurch beeinflussen, dass es Belohnungen verspricht (bzw. Sanktionen androht) für den Fall, dass eine bestimmte Handlungsalternative gewählt (bzw. nicht gewählt) wird. Darauf wird im Folgenden nicht weiter eingegangen.

Im Fall abweichender Entscheidungsregeln wird das Mitglied versuchen, die Ziele der anderen Mitglieder zu beeinflussen, sodass diese Ziele mit dem eigenen Ziel übereinstimmen oder ihm zumindest näher kommen.

Zu (c): Die beschriebenen Aktivitäten zur Beeinflussung der Präferenzordnungen anderer Mitglieder lohnen sich für das betrachtete Mitglied nur dann, wenn dadurch die Chance steigt, dass eine Alternative die Wahl gewinnt, die aus der Sicht dieses Mitglieds besser ist als jene Alternative, die ohne diese Aktivitäten gewinnen würde. Wenn z. B. eine Mehrheit von Mitgliedern eine bestimmte Alternative bevorzugt und das betrachtete Mitglied sich nicht in der Lage sieht, genügend viele Mitglieder zu beeinflussen, dann unternimmt es auch keine derartigen Aktivitäten. Es wird allenfalls versuchen, die Präferenzvorstellungen eines solchen Mitglieds zu beeinflussen, das seinerseits möglicherweise in der Lage ist, die „Mehrheitsverhältnisse“ zu verändern. Die Möglichkeit der Beeinflussung des Wahlergebnisses hängt (auch) von der Abstimmungsregel ab (Abschn. 16.4).

16.3.3.4 Ende des Informationsprozesses

Das Ende des Informationsprozesses der Gruppe kann auf verschiedene Weisen bestimmt werden:

1. Es wird entweder durch die einsetzende Instanz, einen Gruppenleiter oder die Gruppe (im Rahmen einer Abstimmung) von vornherein festgelegt.
2. Das Ende des Informationsprozesses wird nicht im Voraus fixiert; die Gruppenmitglieder einigen sich vielmehr nach einer bestimmten Zeit (ohne dass es zu einer formellen Abstimmung kommt), den Informationsprozess zu beenden und über die zu realisierende Alternative abzustimmen. Ein einmütiger Abbruch der Gruppendiskussion ist vor allem dann zu erwarten, wenn jedes Gruppenmitglied davon überzeugt ist, dass eine Fortsetzung der Diskussion nicht zur Wahl einer anderen Alternative führen würde.
3. Das Ende des Informationsprozesses wird wieder nicht im Voraus festgelegt, sondern es erfolgt nach einer bestimmten Zeit eine formelle Abstimmung: Falls die Mehrheit der Mitglieder für die sofortige Beendigung des Informationsprozesses stimmt, erfolgt unmittelbar danach die Abstimmung über die zu realisierende Alternative. Falls die Mehrheit gegen die Beendigung ist, wird der Informationsprozess fortgesetzt und später erneut über die Beendigung des Informationsprozesses abgestimmt, usw.

Der Zeitpunkt, zu dem der Informationsprozess *spätestens* beendet sein muss, kann auch durch äußere Gegebenheiten bestimmt sein. (Der Beschluss eines Vorstands über die Tagesordnung der Gesellschafterversammlung muss unter Beachtung der satzungsgemäßen Ladefristen erfolgen; eine übergeordnete Instanz setzt der Gruppe eine Frist, bis zu der die Entscheidung getroffen werden muss.)

16.3.4 Die individuellen Präferenzordnungen am Ende des Informationsprozesses

Auch am Ende des Gruppenprozesses werden die Mitglieder im Allgemeinen nicht alle dieselbe Präferenzordnung haben. Die Ursachen hierfür lassen sich mithilfe der Determinanten der individuellen Präferenzordnungen (den individuellen Entscheidungsregeln, Informationsstrukturen und Prognosefunktionen) erläutern:

Trotz des Informationsaustausches in der Gruppe können die individuellen *Ziele* bzw. *Entscheidungsregeln* am Ende des Gruppenprozesses verschieden sein (die Ausführungen von Abschn. 16.3.2 gelten hier analog).

Die *Informationsmengen* der Mitglieder sind im Allgemeinen auch zum Zeitpunkt der Abstimmung nicht identisch. Eine umfassende gegenseitige Übermittlung der in der Gruppe (asymmetrisch) verteilten Informationen würde im Allgemeinen zu hohe Kosten verursachen. Außerdem sind manche Mitglieder gar nicht bereit, über alle ihnen bekannten Indikatoren zu berichten, etwa weil sie sich Vorteile versprechen, wenn sie bestimmte Informationen später allein nutzen können, oder weil sie mit Sanktionen durch Außenstehende rechnen, wenn sie bestimmte Informationen weitergeben.

In der Gruppe wird zwar i. d. R. darüber diskutiert, welche Rückschlüsse Informationen ermöglichen. Diese Diskussion bewirkt aber im Allgemeinen nicht, dass Unterschiede in den individuellen *Prognosefunktionen* völlig aufgehoben werden. Daher können die Gruppenmitglieder selbst bei identischer Informationsstruktur auch am Ende des Informationsprozesses den Zuständen verschiedene subjektive Wahrscheinlichkeiten zuordnen. Bei subjektiven Wahrscheinlichkeiten kann definitionsgemäß nicht intersubjektiv überprüfbar nachgewiesen werden, welches der individuellen Wahrscheinlichkeitsurteile „richtig“ ist.

Obwohl die Präferenzordnungen der Gruppenmitglieder (auch am Ende ihres Informationsprozesses) im Allgemeinen nicht identisch sind, bestehen in der Regel doch gewisse Abhängigkeiten, d. h. die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich ein Mitglied M_m eine bestimmte Präferenzordnung bilden wird, hängt von den Präferenzordnungen der anderen Mitglieder ab.

Oft besteht zwischen den Präferenzordnungen verschiedener Gruppenmitglieder eine stochastische Abhängigkeit des folgenden Typs: Wenn sich ein Mitglied eine bestimmte Präferenzordnung bildet, dann wird sich ein zweites Mitglied mit relativ hoher Wahrscheinlichkeit dieselbe oder eine „ähnliche“ Präferenzordnung bilden, während die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich die Präferenzordnungen „erheblich“ voneinander unterscheiden, niedrig ist.

Eine enge stochastische Abhängigkeit besteht vor allem dann, wenn Mitglieder mit hoher Wahrscheinlichkeit die Präferenzordnung eines anderen Mitglieds übernehmen, z. B. weil dieses Mitglied für besonders kompetent gehalten wird. Die Präferenzordnung eines Mitglieds mag auch übernommen werden, um persönliche Vorteile zu erlangen oder Sanktionen zu vermeiden. So mag z. B. ein Mitglied wie sein Vorgesetzter stimmen, um die Beförderungschancen nicht zu beeinträchtigen, oder sich am Votum eines

ihm nahestehenden Mitglieds orientieren, weil es die persönlichen Beziehungen nicht belasten möchte. Wie in empirischen Untersuchungen beobachtet wurde, geben Individuen oft auch dann das gleiche Urteil ab wie andere, wenn sie diese nicht näher kennen und deren Urteil sogar als falsch ansehen. Dabei geben sie dem Bedürfnis nach, „nicht als verschieden von den anderen oder minderwertig zu erscheinen. Sie sind nicht fähig, den Anschein der Fehlerhaftigkeit in den Augen der Gruppe zu ertragen. Die Versuchspersonen unterdrücken ihre Beobachtungen und gleichen ihre Aussagen bewusst denen der Mehrheit an“ (Asch 1973, S. 65). Nach dem Befund von Asch sinkt die Zahl der Mitglieder, die ihr Urteil an das der Mehrheit angleichen, wenn sie durch andere Mitglieder unterstützt werden.

Abhängigkeiten zwischen den Präferenzordnungen bestehen im Allgemeinen auch dann, wenn jedes Mitglied im Rahmen eines eigenen Kalküls seine Präferenzordnung ermittelt, ohne die Präferenzordnungen anderer Mitglieder „ungeprüft“ zu übernehmen. Bei eingesetzten Gruppen z. B. wird der Gruppe von einer Instanz ein bestimmtes *Ziel* vorgegeben. Wenn alle Mitglieder dieses Ziel befolgen, ist die Wahrscheinlichkeit relativ hoch, dass sie sich ähnliche Präferenzordnungen bilden werden; Unterschiede können dann nur noch aus abweichenden Informationsmengen und/oder abweichenden Prognosefunktionen resultieren. Ob ein Mitglied die Verhaltensnorm befolgt oder nicht, hängt vor allem auch von den Zielen und Kontrollmöglichkeiten der anderen Mitglieder ab. Sind diese gut informiert und mit dem Entscheidungsproblem vertraut, kann es schwierig sein, persönliche Ziele zu verfolgen, ohne dass dies erkannt wird. Eine Verletzung der Verhaltensnorm ist jedoch auch bei guten gegenseitigen Kontrollmöglichkeiten zu erwarten, wenn die Mitglieder ähnliche persönliche Ziele verfolgen, also keine persönlichen Zielkonflikte zwischen ihnen auftreten. Auch in diesem Fall bestehen wieder enge Abhängigkeiten zwischen den Präferenzordnungen.

Da die Mitglieder gemeinsam Informationen beschaffen und austauschen, verfügen sie im Zeitpunkt der Abstimmung über „ähnliche“ *Informationsmengen*. Das kann – je nach den individuellen Prognosefunktionen und Entscheidungsregeln – dazu führen, dass sie auch ähnliche Präferenzordnungen vertreten werden. Die Gruppenarbeit kann schließlich eine Annäherung der individuellen *Prognosefunktionen* bewirken. Dass Abhängigkeiten bestehen, bedeutet freilich nicht zwingend, dass alle Mitglieder dieselbe Alternative auf den ersten Platz ihrer Präferenzordnung setzen werden; dies ist eher der Ausnahmefall.

16.4 Abstimmung in der Gruppe

16.4.1 Formelle und informelle Abstimmung

Die endgültige Auswahl einer Alternative durch die Gruppe erfolgt in Form einer Abstimmung, die formell oder informell stattfinden kann. Bei formeller Abstimmung erfolgt die Wahl einer Alternative durch explizite Anwendung einer Abstimmungsregel

Tab. 16.1 Beispiel eines Präferenzordnungsprofils

M ₁	M ₂	M ₃	M ₄	M ₅
A ₁	A ₁	A ₂	A ₃	A ₁ , A ₂
A ₂	A ₂	A ₁ , A ₃	A ₂	A ₃
A ₃	A ₃		A ₁	

(die entweder von einer übergeordneten Instanz vorgegeben oder durch die Gruppe selbst bestimmt wird); dabei kann die Abstimmung offen (durch Akklamation) oder geheim erfolgen. Bei informeller Abstimmung wird zwar ebenfalls eine bestimmte Abstimmungsregel angewendet (auch wenn sich die Gruppenmitglieder dessen häufig gar nicht bewusst sind); die Abstimmungsregel ist aber nicht explizit vorgegeben und sie wird auch nicht offiziell angewendet. Angenommen, es seien zwei Alternativen (A₁ und A₂) gegeben. Bei der Gruppendiskussion werde deutlich, dass eine Mehrheit der Gruppenmitglieder die Alternative A₁ präferiert. Wenn sich nun die Minderheit der Gruppenmitglieder der Mehrheit beugt und die Alternative A₁ realisiert wird, so wird (implizit) die sogenannte Mehrheitsregel (Abschn. 16.4.2.3) angewendet, auch wenn nicht offiziell die Stimmen gezählt werden, die für bzw. gegen die Alternative A₁ sind.

Welche Alternative von der Gruppe bei formeller Abstimmung gewählt wird, hängt von der *Abstimmungsregel* und den *Präferenzordnungen* der einzelnen Mitglieder zum Zeitpunkt der Abstimmung ab. Eine Konstellation individueller Präferenzordnungen heißt *Präferenzordnungsprofil*.

Bei drei Alternativen und fünf Mitgliedern kann das Präferenzordnungsprofil z. B. die in Tab. 16.1 dargestellte Gestalt haben. In der Präferenzordnung der Mitglieder M₁ und M₂ nimmt die Alternative A₁ den ersten und A₁ den letzten Rang ein, bei Mitglied M₄ ist es genau umgekehrt. Mitglied M₃ ist indifferent zwischen A₁ und A₃, beiden Alternativen wird A₂ vorgezogen, und Mitglied M₅ zieht beide Alternativen A₁ und A₂, zwischen denen er indifferent ist, der Alternative A₃ vor.

Bei gegebenem Präferenzordnungsprofil hängt das Wahlergebnis von der Abstimmungsregel ab. In der Literatur werden zahlreiche Abstimmungsregeln diskutiert (vgl. z. B. Black 1958; Barbut 1961; Sen 1970), die zu der Wahl einer Alternative führen. Im Folgenden werden zunächst einige der prominentesten Regeln dargestellt und mögliche Wahlergebnisse miteinander verglichen. Dabei wird zunächst angenommen, die Mitglieder verhielten sich bei der Abstimmung nicht „strategisch“. Anschließend werden Möglichkeiten und Konsequenzen strategischen Verhaltens bei der Abstimmung untersucht.

16.4.2 Abstimmungsregeln

16.4.2.1 Beispiele für Präferenzordnungsprofile

Bei der Darstellung der Abstimmungsregeln werden die Präferenzordnungsprofile in den Tab. 16.2, 16.3 und 16.4 als Beispiele verwendet.

16.4.2.2 Einstimmigkeitsregel

Nach der Einstimmigkeitsregel hat jedes Mitglied eine Stimme; gewählt ist diejenige Alternative, die die Stimmen sämtlicher Mitglieder erhält. Eine Entscheidung kommt also nur dann zustande, wenn sich alle Mitglieder auf eine Alternative einigen. Ist kein Mitglied bereit, bei der Abstimmung von seiner Präferenzordnung abzuweichen, so kommt eine Entscheidung nur zustande, wenn in den Präferenzordnungen aller Mitglieder dieselbe Alternative an erster Stelle steht.

Tab. 16.2 Präferenzordnungsprofil für $N_A = 6$ und $N_M = 9$

M ₁	M ₂	M ₃	M ₄	M ₅	M ₆	M ₇	M ₈	M ₉
A ₁	A ₂	A ₅	A ₅	A ₄	A ₃	A ₃	A ₃	A ₄
A ₅	A ₁	A ₄	A ₃	A ₆	A ₆	A ₆	A ₆	A ₆
A ₆	A ₃	A ₁	A ₄	A ₅	A ₄	A ₄	A ₂	A ₁
A ₄	A ₄	A ₂	A ₁	A ₃	A ₅	A ₅	A ₁	A ₂
A ₃	A ₆	A ₃	A ₆	A ₁	A ₂	A ₁	A ₄	A ₃
A ₂	A ₅	A ₆	A ₂	A ₂	A ₁	A ₂	A ₅	A ₅

Tab. 16.3 Präferenzordnungsprofil für $N_A = 7$ und $N_M = 11$

M ₁	M ₂	M ₃	M ₄	M ₅	M ₆	M ₇	M ₈	M ₉	M ₁₀	M ₁₁
A ₁	A ₃	A ₆	A ₄	A ₅	A ₂	A ₆	A ₆	A ₅	A ₅	A ₆
A ₂	A ₁	A ₂	A ₇	A ₇	A ₇	A ₃	A ₇	A ₇	A ₄	A ₂
A ₇	A ₆	A ₁	A ₅	A ₂	A ₆	A ₇	A ₅	A ₄	A ₃	A ₁
A ₆	A ₂	A ₅	A ₁	A ₄	A ₃	A ₄	A ₄	A ₃	A ₁	A ₄
A ₅	A ₅	A ₄	A ₂	A ₁	A ₄	A ₅	A ₃	A ₁	A ₂	A ₇
A ₃	A ₄	A ₇	A ₃	A ₃	A ₁	A ₂	A ₁	A ₂	A ₇	A ₅
A ₄	A ₇	A ₃	A ₆	A ₆	A ₅	A ₁	A ₂	A ₆	A ₆	A ₃

Tab. 16.4 Präferenzordnungsprofil für $N_A = 3$ und $N_M = 3$

M ₁	M ₂	M ₃
A ₁	A ₂	A ₃
A ₂	A ₃	A ₁
A ₃	A ₁	A ₂

Die Einstimmigkeitsregel wird oft für Entscheidungen gefordert, die besondere Bedeutung für die betroffenen Personen(-gruppen) haben, allgemein von großer Tragweite sind und eher einmaligen als wiederkehrenden Charakter haben. So muss beispielsweise der Rat der Europäischen Union bei Fragen der gemeinsamen Außen- und Sicherheitspolitik oder der Steuerpolitik einstimmig entscheiden. Der Vorstand einer Aktiengesellschaft darf nach § 77 Abs. (2) Aktiengesetz über die Geschäftsordnung nur einstimmig beschließen.

Die Voraussetzung der Einstimmigkeit ist vor allem bei größeren Gruppen in der Regel nicht erfüllt. Man mag einwenden, dann müsse eben der Informationsbeschaffungs- und Informationsverarbeitungsprozess (die Beratungen der Gruppe) so lange fortgesetzt werden, bis schließlich alle Mitglieder dieselbe Alternative als die beste ansehen. Bei einem solchen Vorgehen entstehen indessen möglicherweise hohe Kosten in Form von Ausgaben und/oder durch Einsatz von Arbeit und Zeit. Außerdem weichen die Prognosefunktionen und Entscheidungsregeln der Mitglieder oft derart voneinander ab, dass auch langwierige Gruppenprozesse keine übereinstimmenden Urteile bewirken können. Die Einstimmigkeitsregel ist vor allem dann problematisch, wenn die Entscheidung rasch getroffen werden muss, um gegebene Aktionsmöglichkeiten überhaupt realisieren zu können. Bei den folgenden Abstimmungsregeln wird keine Einstimmigkeit gefordert.

16.4.2.3 Regel des paarweisen Vergleichs (Mehrheitsregel)

Bei der Regel des paarweisen Vergleichs werden – etwa durch den Vorsitzenden der Gruppe oder nach dem Zufallsprinzip – aus der Menge der Alternativen zunächst zwei Alternativen ausgewählt und über sie abgestimmt, wobei jedes Mitglied eine Stimme abgibt.⁴ Die Alternative mit den wenigsten Stimmen scheidet aus. Die andere wird einer weiteren Alternative gegenübergestellt und es kommt zu einer erneuten Abstimmung. Dieser Prozess wiederholt sich so lange, bis alle Alternativen beteiligt waren. Diejenige, die beim letzten Wahlgang die Mehrheit der Stimmen erhält, ist schließlich gewählt. Erhalten bei einem Wahlgang beide Alternativen die gleiche Stimmenzahl, entsteht eine Pattsituation. Die Auswahl der Alternative kann dann nach einem Zufallsprozess (z. B. durch Würfeln) erfolgen. Als gewählt kann aber auch die Alternative gelten, die die Stimme des Vorsitzenden erhält. Die Mehrheitsregel wird vor allem bei Personalwahlen angewendet.

Eine Alternative, die im paarweisen Vergleich mit jeder anderen Alternative die Mehrheit der Stimmen erhält, wird als *Condorcet-Alternative* bezeichnet (nach dem Marquis de Condorcet, französischer Philosoph und Mathematiker).

⁴Für den Fall, dass ein Mitglied zwischen beiden Alternativen indifferent ist, kann die Regel vorsehen, dass es jeder Alternative eine halbe Stimme gibt. Im Folgenden werden die Abstimmungsregeln grundsätzlich nur für den Fall dargestellt und analysiert, dass kein Mitglied zwischen zwei oder mehr Alternativen indifferent ist.

In Tab. 16.2 ist A_3 Condorcet-Alternative: Bei einer Abstimmung über A_3 und A_1 gewinnt A_3 mit 5:4 Stimmen. Für A_3 stimmen die Mitglieder M_4 bis M_8 , die anderen Mitglieder stimmen für A_1 . Bei einer Abstimmung über A_3 und A_2 gewinnt A_3 mit 6:3 Stimmen, wobei A_3 je eine Stimme von den Mitgliedern M_1 und M_4 bis M_8 erhält. Werden A_3 und A_4 einander gegenübergestellt, gewinnt A_3 mit 5:4. Bei einer Abstimmung zwischen A_3 und A_5 (bzw. A_3 und A_6) gewinnt A_3 ebenfalls, und zwar mit 5:4 (bzw. mit 6:3) Stimmen.

Existiert eine Condorcet-Alternative, so wird sie bei der Regel des paarweisen Vergleichs zwingend gewählt. Da die Condorcet-Alternative definitionsgemäß bei jeder paarweisen Abstimmung gewinnt, kann sie durch keine Alternative verdrängt werden, wann immer sie in den Abstimmungsprozess aufgenommen wird. Existiert *keine* Condorcet-Alternative, hängt das Wahlergebnis davon ab, in welcher Reihenfolge über die Alternativen abgestimmt wird.

In Tab. 16.4 existiert z. B. keine Condorcet-Alternative. Hier ergibt sich der Zyklus $A_1 > A_2 > A_3 > A_1$: Bei einer Abstimmung über A_1 und A_2 gewinnt A_1 (M_1 und M_3 stimmen für A_1 , M_2 stimmt für die Alternative A_2 , die damit unterliegt), bei einer Abstimmung über A_2 und A_3 gewinnt A_2 und schließlich gewinnt bei einer Abstimmung über A_3 und A_1 die Alternative A_3 . Jede Alternative wird also von genau einer anderen Alternative geschlagen und jede Alternative kann als Sieger hervorgehen, je nachdem, welche Abstimmungsreihenfolge festgelegt wird.⁵

Auch im Beispiel der Tab. 16.3 kann jede Alternative die Wahl gewinnen:

Reihenfolge der Abstimmung	gewählte Alternative
$A_6, A_7, A_4, A_5, A_2, A_3, A_1$	A_1
$A_1, A_7, A_6, A_5, A_4, A_3, A_2$	A_2
$A_6, A_7, A_4, A_5, A_2, A_1, A_3$	A_3
$A_7, A_5, A_2, A_1, A_6, A_3, A_4$	A_4
$A_6, A_2, A_7, A_1, A_3, A_5, A_4$	A_5
$A_2, A_7, A_1, A_3, A_4, A_5, A_6$	A_6
$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$	A_7

Wenn z. B. zunächst über die Alternativen A_6 und A_7 abgestimmt wird und die anderen Alternativen in der Reihenfolge A_4, A_5, A_2, A_3, A_1 in die Wahlgänge aufgenommen werden, gewinnt A_1 : Im ersten Wahlgang gewinnt A_7 mit 6:5 Stimmen; das Gleiche gilt für

⁵Für einen außenstehenden Beobachter mag das Verhalten des Gremiums als paradox erscheinen. Es präferiert erst A_1 gegenüber A_2 , dann präferiert es A_3 gegenüber A_1 , obwohl A_3 schlechter als A_2 eingestuft wurde. Der paradoxe Effekt, dass beim paarweisen Vergleich trotz transitiver individueller Präferenzordnungen eine intransitive kollektive Präferenzrelation entstehen kann, wird als Wahlparadoxon (paradox of voting; vgl. Arrow 1963, S. 3) oder Condorcet-Effekt bezeichnet. Er wurde schon 1785 von Condorcet beschrieben. Vgl. Condorcet (1785).

die Wahlgänge 2 (A_7 gegen A_4) und 3 (A_7 gegen A_5). Im vierten Wahlgang (A_7 gegen A_2) gewinnt A_2 mit 6:5 Stimmen; das Gleiche gilt auch für den fünften Wahlgang (A_2 gegen A_3). Im letzten Wahlgang schließlich gewinnt A_1 mit 6:5 Stimmen gegen A_2 und ist damit endgültig gewählt.

16.4.2.4 Single-Vote-Regel

Die Single-Vote-Regel (Black 1958, S. 156 f.) erfordert nur *einen* Wahlgang. Jedes Mitglied gibt dabei eine Stimme ab; die Alternative, die die meisten Stimmen erhält, ist gewählt.⁶ Es werden also nur die Erstpräferenzen berücksichtigt.

Die Single-Vote-Regel kann problemlos angewendet werden, wenn nur zwei Alternativen zur Auswahl stehen. In diesem Fall hat die Alternative mit der größeren Anzahl von Stimmen die absolute Mehrheit der Gruppenmitglieder, die sich nicht enthalten. Die Single-Vote-Regel wird auch bei mehr als zwei Alternativen vor allem in politischen Wahlen eingesetzt. Zum Beispiel gilt derjenige Direktkandidat eines Wahlkreises bei der Wahl zum Deutschen Bundestag als gewählt, der die einfache Mehrheit aller Erststimmen erhält.

Die Single-Vote-Regel stellt bei mehr als zwei Alternativen nicht sicher, dass die gewählte Alternative eine breite Unterstützung hat. Häufig soll daher eine Alternative nicht mit einfacher, sondern mit absoluter Mehrheit der Stimmen gewählt werden, d. h. sie gilt nur als gewählt, wenn sie mehr als 50 % der Stimmen erhält. Erfüllt zunächst keine der Alternativen diese Bedingung, kann die Single-Vote-Regel wiederholt angewendet werden (sogenanntes „runoff“-Verfahren), wobei nach jedem Schritt nach einer bestimmten Regel Alternativen eliminiert werden, bis eine Alternative die absolute Mehrheit erringt. Beispielsweise kann bei einer Kandidatenwahl eine Stichwahl von zwei Bewerbern stattfinden, wenn keiner der Bewerber im ersten Wahlgang die absolute Mehrheit erringen konnte. Eine spezielle Variante einer wiederholten Anwendung der Single-Vote-Regel ist die Hare-Regel, die in Abschn. 16.4.2.6 erläutert wird.

Im Beispiel der Tab. 16.2 erhalten die Alternativen folgende Anzahl von Stimmen:

$$A_1 \rightarrow 1 \quad A_2 \rightarrow 1 \quad A_3 \rightarrow 3 \quad A_4 \rightarrow 2 \quad A_5 \rightarrow 2 \quad A_6 \rightarrow 0.$$

Gewählt ist demnach die Alternative A_3 . Bei Tab. 16.3 wird A_6 gewählt. Bei Tab. 16.4 erhält jede Alternative eine Stimme; es entsteht eine Pattsituation. Im Beispiel der Tab. 16.2 führt die Single-Vote-Regel zur Wahl der Condorcet-Alternative. Das ist aber nicht zwingend bei jedem Präferenzordnungsprofil der Fall, wie das Beispiel in Tab. 16.5 zeigt.

⁶Erhalten mehr als eine Alternative die (gleiche) maximale Stimmenzahl, so ist das Wahlergebnis noch nicht endgültig determiniert. Aus der Menge der Alternativen mit maximaler Stimmenzahl ist noch eine Auswahl zu treffen: Als gewählt könnte dann die Alternative gelten, die in der Rangordnung des Vorsitzenden den höchsten Platz einnimmt; die Auswahl könnte z. B. aber auch nach dem Zufallsprinzip erfolgen.

Tab. 16.5 Präferenzordnungsprofil für $N_A=5$ und $N_M=6$

M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
A_1	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_3	A_2	A_3	A_2	A_2	A_2
A_4	A_5	A_5	A_4	A_3	A_3
A_5	A_3	A_4	A_5	A_5	A_4
A_2	A_4	A_1	A_1	A_1	A_1

Nach der Single-Vote-Regel erhält die Alternative A_1 zwei Stimmen, jede andere nur eine. Folglich wird A_1 gewählt. Condorcet-Alternative ist jedoch A_2 , die bei paarweisem Vergleich mit 4:2 Stimmen gegen A_1 und auch gegen jede andere Alternative gewinnen würde. Da A_1 in den Präferenzordnungen der Mitglieder M_3 bis M_6 an letzter Stelle steht, würde auch jede andere Alternative mit 4:2 gegen A_1 gewinnen. Dies impliziert z. B.: Wenn die Gruppe erfährt, dass neben A_1 nur noch eine der Alternativen A_3 bis A_5 realisiert werden kann, und über die beiden verbleibenden Alternativen erneut nach der Single-Vote-Regel abstimmt, verliert nun A_1 zwingend die Wahl.

16.4.2.5 Borda-Regel

Nach der Borda-Regel (benannt nach Jean-Charles de Borda, französischer Mathematiker) gibt bei einer Abstimmung über N_A Alternativen jedes Mitglied der Alternative auf dem ersten Platz seiner Präferenzordnung N_A Stimmen, der auf dem zweiten Platz $N_A - 1$ Stimmen usw., der Alternative auf dem letzten Platz 1 Stimme (Black 1958, S. 156–158). Gewählt ist die Alternative mit der höchsten Gesamtstimmenzahl. Die Borda-Regel wird häufig (in modifizierter Form) angewendet, um Sieger in Wettbewerben zu ermitteln, etwa im Eurovision Song Contest. Bei dem Beispiel in Tab. 16.2 erhalten die Alternativen folgende Stimmen:

$$\begin{aligned}
 A_1 &\rightarrow 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 2 + 3 + 4 = 30 & A_2 &\rightarrow 1 + 6 + 3 + 1 + 1 + 2 + 1 + 4 + 3 = 22 \\
 A_3 &\rightarrow 2 + 4 + 2 + 5 + 3 + 6 + 6 + 6 + 2 = 36 & A_4 &\rightarrow 3 + 3 + 5 + 4 + 6 + 4 + 4 + 2 + 6 = 37 \\
 A_5 &\rightarrow 5 + 1 + 6 + 6 + 4 + 3 + 3 + 1 + 1 = 30 & A_6 &\rightarrow 4 + 2 + 1 + 2 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 34.
 \end{aligned}$$

Gewählt wird also A_4 . Im Beispiel der Tab. 16.3 wird A_7 gewählt. Im Beispiel der Tab. 16.4 erhält jede Alternative $(3+2+1=)6$ Stimmen; es entsteht eine Pattsituation.

Die Borda-Regel führt bei den Beispielen in Tab. 16.2 und 16.3 zu einer anderen Alternative als die *Single-Vote*-Regel: Bei der Borda-Regel werden eben nicht nur die ersten, sondern auch die nachfolgenden Ränge in den Präferenzordnungen der Mitglieder berücksichtigt. Nach der Borda-Regel kann eine Alternative auch gewinnen, wenn sie bei keinem Mitglied in der Präferenzordnung den ersten Rang einnimmt. Eine Condorcet-Alternative wird auch nach der Borda-Regel nicht zwingend gewählt, wie Tab. 16.2 zeigt. Dort gewinnt A_4 die Wahl, während A_3 Condorcet-Alternative ist. Auch im

Tab. 16.6 Präferenzordnungsprofil für $N_A = 5$ und $N_M = 5$

M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
A_1	A_1	A_1	A_2	A_2
A_2	A_2	A_2	A_3	A_5
A_3	A_4	A_5	A_4	A_4
A_4	A_5	A_4	A_1	A_3
A_5	A_3	A_3	A_5	A_1

Beispiel der Tab. 16.6 führt die Borda-Regel nicht zur Wahl der Condorcet-Alternative. Nach der Borda-Regel gewinnt A_2 die Wahl mit 22 Stimmen. Die Condorcet-Alternative dagegen ist A_1 . Sie steht dreimal auf dem ersten Platz, jedoch auch einmal an vorletzter und einmal an letzter Stelle. Damit kann sie nach der Borda-Regel nicht gegen A_2 gewinnen, die zwar nur zweimal auf dem ersten Platz steht, dafür aber in den restlichen Präferenzordnungen den zweiten Rang einnimmt.

Existieren nur zwei Alternativen, so stehen die Mehrheitsregel (die Regel des paarweisen Vergleichs), die *Single-Vote*- und die Borda-Regel miteinander im Einklang; nach jeder dieser Regeln wird die Alternative gewählt, die bei der Mehrheit der Mitglieder in der Präferenzordnung den ersten Rang einnimmt.

16.4.2.6 Hare-Regel

Nach der Hare-Regel (nach dem englischen Juristen und Politologen Thomas Hare, auch *Single-Transferable-Vote*-Regel genannt) gibt jedes Mitglied zunächst eine Stimme ab, d. h. es votiert wie bei der *Single-Vote*-Regel für *eine* Alternative. Erzielt dabei eine Alternative die absolute Mehrheit der Stimmen, ist sie gewählt. Andernfalls wird die Alternative mit der geringsten Stimmenzahl eliminiert⁷ und die Abstimmung mit den verbleibenden Alternativen wiederholt. Die Entscheidung des Gremiums ist getroffen, wenn erstmals eine Alternative die absolute Mehrheit der Stimmen erhält. Möglicherweise erfüllt sich diese Bedingung erst bei Abstimmung über die beiden letzten verbleibenden Alternativen.⁸ Die Hare-Regel wird beispielsweise vom Internationalen Olympischen Komitee bei der Vergabe der Olympischen Spiele wie auch vom Welt-Fußballverband bei der Vergabe der Weltmeisterschaften angewendet.

Im Beispiel der Tab. 16.6 wird die Entscheidung schon beim ersten Wahlgang getroffen; gewählt wird hier die Condorcet-Alternative A_1 . Die Wahl einer Condorcet-Alternative ist aber nicht zwingend. Es ist z. B. möglich, dass diese Alternative schon

⁷Erzielen zwei oder mehr Alternativen eine minimale Stimmenzahl, so kann z. B. die Elimination einer dieser Alternativen durch den Vorsitzenden des Gremiums oder nach einem Zufallsprozess erfolgen.

⁸Im letzten Wahlgang mit zwei verbleibenden Alternativen kann bei gerader Mitgliederzahl auch wieder eine Pattsituation entstehen, sodass keine Alternative die absolute Mehrheit besitzt. Auch in diesem Fall kann durch den Vorsitzenden oder per Zufall entschieden werden. Zur Diskussion dieser Regel vgl. insbesondere Schauenberg (1992).

beim ersten Wahlgang ausscheidet, weil sie in keiner der individuellen Präferenzordnungen den ersten Rang einnimmt. Würde sie zum Schluss dem Wahlsieger gegenübergestellt, würde sie dagegen die Stimmenmehrheit erlangen.

In diesem Abschnitt wurden nur einige Abstimmungsregeln dargestellt, die besondere theoretische und praktische Bedeutung haben. Sie genügen alle der Bedingung der Gleichbehandlung der Mitglieder; kein Mitglied wird bei der Abstimmung bevorzugt. Mit Ausnahme der Einstimmigkeitsregel führen sie bei zwei Alternativen zu derselben Alternative. Wenn keine Pattsituation entsteht, ist es diejenige, die die meisten Stimmen erhält. Die Darstellung ist keinesfalls vollständig. In der Literatur finden sich zahlreiche andere Abstimmungsregeln. Mit etwas Fantasie lassen sich beliebig viele solcher Regeln entwickeln. Diese kurze Darstellung genügt jedoch, um den Einfluss der Abstimmungsregel auf das Abstimmungsergebnis zu erkennen. Damit wird die Problematik der Auswahl einer Abstimmungsregel bei Gruppenentscheidungen deutlich. Darauf wird in Kap. 17 nochmals eingegangen.

16.4.3 Strategisches Verhalten bei der Abstimmung

16.4.3.1 Definition

Bisher wurde unterstellt, dass jedes Mitglied seine Stimme bzw. seine Stimmen gemäß seiner tatsächlichen Präferenzordnung abgibt, eine Voraussetzung, die nicht erfüllt sein muss. Wenn sich nämlich ein Mitglied bei der Abstimmung so verhält, als hätte es eine andere Präferenzordnung, kann das zur Wahl einer Alternative führen, die in seiner eigentlichen Präferenzordnung einen höheren Rang einnimmt. Ein Abweichen von der eigentlichen Präferenzordnung mit dem Ziel, die Wahl einer „besseren“ Alternative durchzusetzen, wird als *strategisches Verhalten* bezeichnet. (Vgl. zu diesem Problemkreis Farquharson 1956; Kramer 1972; Gibbard 1973; Pattanaik 1973; Schauenberg 1992).

Das strategische Verhalten kann sich auch darauf richten, die Reihenfolge der Abstimmung zu beeinflussen. Zwei oder mehr Mitglieder können ihr strategisches Verhalten gezielt aufeinander abstimmen, also eine *Koalition* bilden. Wenn ein Mitglied sich strategisch verhält, ohne eine Koalition einzugehen, spricht man von *isoliertem strategischem Verhalten* dieses Mitglieds.

16.4.3.2 Isoliertes strategisches Verhalten

a) Single-Vote-Regel:

Zunächst wird davon ausgegangen, keines der Mitglieder stimme sein strategisches Verhalten mit anderen Mitgliedern ab. Es wird untersucht, über welche strategischen Möglichkeiten ein einzelnes Mitglied bei alternativen Abstimmungsregeln verfügt, das Wahlergebnis in seinem Sinne zu beeinflussen. Gegeben sei das Präferenzordnungsprofil in Tab. 16.7, wobei die Single-Vote-Regel zur Anwendung komme.

Tab. 16.7 Präferenzordnungsprofil für $N_A = 3$ und $N_M = 5$

M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
A_1	A_1	A_3	A_3	A_2
A_2	A_2	A_2	A_2	A_3
A_3	A_3	A_1	A_1	A_1

M_1 sei Vorsitzender der Gruppe, dessen Stimme in einer Pattsituation den Ausschlag gibt. Verhält sich kein Mitglied strategisch, so gibt jedes Mitglied derjenigen Alternative die Stimme, die in seiner Präferenzordnung an erster Stelle steht. A_1 und A_3 erhalten dann je zwei Stimmen und A_2 eine. Damit ist die Alternative A_1 gewählt, da sie die Stimme des Vorsitzenden erhält. A_1 steht aber in der Präferenzordnung von Mitglied M_5 an letzter Stelle. Wenn nun M_5 nicht für A_2 , sondern für A_3 stimmt, wird A_3 mit drei Stimmen gewählt (sofern sich die anderen Mitglieder nicht auch strategisch verhalten). Indem also Mitglied M_5 für die Alternative auf dem zweiten Platz seiner Präferenzordnung stimmt, bewirkt es, dass diese Alternative und nicht seine rangletzte Alternative (A_1) gewählt wird.

Beim Präferenzordnungsprofil in Tab. 16.7 kann keines der Mitglieder M_3 und M_4 allein das Wahlergebnis zu seinen Gunsten beeinflussen. Gibt nur eines dieser Mitglieder seiner Zweitpräferenz A_2 anstelle von A_3 die Stimme, gewinnt nach wie vor A_1 die Wahl, da M_1 als Vorsitzender in der entstehenden Pattsituation zwischen A_1 und A_2 den Ausschlag gibt. Stimmen jedoch beide Mitglieder für A_2 , wird diese Alternative gewählt, falls M_5 sich nicht auch strategisch verhält.⁹

Wenn M_5 für A_3 stimmt und sich zugleich mindestens eines der Mitglieder M_3 und M_4 ebenfalls strategisch verhält und A_2 die Stimme gibt, ergibt sich vom Standpunkt der Mitglieder M_3 , M_4 und M_5 kein Vorteil; es wird dann wieder A_1 gewählt. (Es wird hier bereits deutlich, dass es für die Mitglieder M_3 , M_4 und M_5 sinnvoll sein kann, eine Koalition zu bilden und ihr strategisches Verhalten aufeinander abzustimmen.)

Man unterscheidet zwischen geheimer und offener Abstimmung. Bei geheimer Abstimmung können die Mitglieder bei ihrer Stimmabgabe nicht direkt beobachten, wie sich die anderen Mitglieder im Abstimmungsprozess verhalten, wohingegen bei offener Abstimmung das Verhalten der anderen Mitglieder (zumindest teilweise) beobachtet werden kann. Letzteres ist z. B. der Fall, wenn die Alternativen

⁹Diese (simultane) Alternativenwahl der Mitglieder (M_1 und M_2 stimmen für A_1 , die anderen Mitglieder für A_2) stellt spieltheoretisch ein sogenanntes Nash-Gleichgewicht dar: Kein Mitglied kann sich durch Wechsel der Alternative bei unveränderter Alternativenwahl der anderen Mitglieder verbessern. Würde nur ein Nash-Gleichgewicht existieren, wäre die dazugehörige Alternativenwahl der Mitglieder die einzige plausible Lösung. Hier finden sich allerdings mehrere Nash-Gleichgewichte. So stellt z. B. auch das oben beschriebene isolierte strategische Verhalten des Mitglieds M_5 (M_1 und M_2 stimmen wieder für A_1 , die anderen Mitglieder für A_3) ein Nash-Gleichgewicht dar. Spieltheoretisch hat man es also hier mit einem Auswahlproblem bei Vorliegen multipler Nash-Gleichgewichte zu tun.

nacheinander zur Wahl stehen. Bei strategischem Verhalten bezüglich der Stimmabgabe kann dann das Wahlergebnis davon abhängen, in welcher Reihenfolge bei offener Abstimmung die Stimmen abgegeben werden. Wird die Alternative A_3 vor A_2 aufgerufen, so werden die Mitglieder M_3 und M_4 ihre Stimme A_3 geben. M_5 wird dann ebenfalls für diese Alternative stimmen, um die Wahl von A_1 zu verhindern. Wird jedoch A_2 vor A_3 aufgerufen, so wird Mitglied M_5 für A_2 stimmen. Nun werden sich die Mitglieder M_3 und M_4 dem Votum von M_5 anschließen, um A_1 zu verhindern.

Die Reihenfolge der Stimmabgabe kann sich auch auf die Mitglieder selbst beziehen; sie muss z. B. bei namentlicher Stimmabgabe festgelegt werden.

Ist die Reihenfolge der Stimmabgabe nicht von vornherein festgelegt, so kann sich bei offener Abstimmung das strategische Verhalten Einzelner oder aller Mitglieder auch darauf richten, die Reihenfolge zu beeinflussen.

b) Regel des paarweisen Vergleichs (Mehrheitsregel):

Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass die Mitglieder in jedem Wahlgang simultan abstimmen. Auch bei der Regel des paarweisen Vergleichs verbleiben dann zwei grundsätzlich verschiedene strategische Verhaltensweisen:

- (a) bei der Festlegung der *Reihenfolge der Abstimmung* bezüglich der Alternativen,
- (b) bei der *Abstimmung* selbst.

Zu (a): Zunächst wird davon ausgegangen, bei der Abstimmung verhalte sich kein Mitglied strategisch. In diesem Fall ist das Wahlergebnis von der Reihenfolge der Abstimmung bezüglich der Alternativen unabhängig, sofern eine Condorcet-Alternative existiert. Wenn keine Condorcet-Alternative existiert, hängt das Wahlergebnis von der Reihenfolge der Abstimmung ab. Kennt dann ein Mitglied die Präferenzordnungen der anderen Mitglieder, kann es das Wahlergebnis für jede Abstimmungsfolge eindeutig vorhersehen und vielleicht die Auswahl der Abstimmungsfolge entsprechend beeinflussen. So wird sich z. B. beim Präferenzordnungsprofil in Tab. 16.3 Mitglied M_1 für die Reihenfolge $A_6, A_7, A_4, A_5, A_2, A_3, A_1$ einsetzen, weil dann die Alternative A_1 gewählt wird, die in seiner Präferenzordnung an erster Stelle steht. Sieht es keine Chance, diese Reihenfolge durchzusetzen, wird es für die Reihenfolge $A_1, A_7, A_6, A_5, A_4, A_3, A_2$ eintreten, die zur Wahl der Alternative A_2 führt, die immerhin auf dem zweiten Platz seiner Präferenzordnung steht, usw.

Zu (b): Es soll nun die Beeinflussung des Wahlergebnisses durch strategisches Verhalten im Abstimmungsprozess anhand des Präferenzordnungsprofils in Tab. 16.8 betrachtet werden. Hier ist A_4 Condorcet-Alternative. Wenn sich kein Mitglied bei der

Tab. 16.8 Präferenzordnungsprofil für $N_A = 4$ und $N_M = 3$

M_1	M_2	M_3
A_4	A_2	A_2
A_1	A_4	A_1
A_2	A_3	A_4
A_3	A_1	A_2

Abstimmung strategisch verhält, gewinnt A_4 die Wahl. Wird stattdessen A_2 gewählt, ergibt sich für Mitglied M_2 ein Vorteil, wird eine der Alternativen A_1 und A_3 gewählt, erzielt Mitglied M_3 einen Vorteil.

Ob nun für ein Mitglied die Möglichkeit besteht, durch isoliertes strategisches Verhalten bei der Abstimmung die Wahl zu seinen Gunsten zu beeinflussen, hängt davon ab, wann die Condorcet-Alternative in den Wahlprozess aufgenommen wird. Wird sie erst beim letzten Wahlgang aufgenommen, gewinnt sie zwingend die Wahl. Kein Mitglied kann dann durch strategisches Verhalten das Wahlergebnis zu seinen Gunsten verändern, unabhängig davon, welche Alternative der Condorcet-Alternative noch gegenübergestellt wird.

Wird die Condorcet-Alternative dagegen früher in den Abstimmungsprozess aufgenommen, gibt es strategische Verhaltensweisen, bei denen genau ein Mitglied einen Vorteil erzielt. Gegeben sei z. B. die Reihenfolge A_4, A_2, A_1, A_3 . Wenn sich keines der Mitglieder M_1 und M_2 strategisch verhält, kann M_3 die Wahl von A_3 bewirken, indem es beim ersten Wahlgang (A_4 gegen A_2) für die Alternative A_2 stimmt, die bei ihm den letzten Rang einnimmt; A_2 gewinnt dann mit 2:1 Stimmen. Beim zweiten Wahlgang (A_2 gegen A_1) gewinnt A_1 (mit den Stimmen von M_1 und M_3), beim dritten Wahlgang schließlich gewinnt A_3 (mit den Stimmen von M_2 und M_3), die in der Präferenzordnung von M_3 an erster Stelle steht.

Das beschriebene Verhalten des Mitglieds M_3 führt nicht zwingend zur Wahl von A_3 , wenn sich mindestens eines der Mitglieder M_1 und M_2 ebenfalls strategisch verhält. A_3 steht auf dem letzten Platz der Präferenzordnung von M_1 . Wenn M_1 beim zweiten Wahlgang (A_2 gegen A_1) statt für A_2 für A_2 stimmt, gewinnt A_2 diesen und dann auch den letzten Wahlgang. A_2 steht auf dem letzten Platz der Präferenzordnung von M_3 . Hätte M_3 beim ersten Wahlgang nicht strategisch gestimmt, so hätte immerhin die Alternative A_4 die Wahl gewonnen.

c) Borda-Regel:

Es sei das Präferenzordnungsprofil in Tab. 16.9 gegeben.

Wenn sich kein Mitglied strategisch verhält, erhalten die Alternativen folgende Anzahl von Stimmen:

$A_1 \rightarrow 6 + 4 + 4 = 14$ $A_2 \rightarrow 3 + 5 + 3 = 11$ $A_3 \rightarrow 5 + 3 + 2 = 10$ $A_4 \rightarrow 1 + 6 + 1 = 8$ $A_5 \rightarrow 2 + 2 + 6 = 10$ $A_6 \rightarrow 4 + 1 + 5 = 10.$

Tab. 16.9 Präferenzordnungsprofil für $N_A=6$ und $N_M=3$

M_1	M_2	M_3
A_1	A_4	A_5
A_3	A_2	A_6
A_6	A_1	A_1
A_2	A_3	A_2
A_5	A_5	A_3
A_4	A_6	A_4

Gewählt ist somit die Alternative A_1 , die in der Präferenzordnung von Mitglied M_2 an dritter Stelle steht. Wenn sich nun keines der Mitglieder M_1 und M_3 strategisch verhält, kann M_2 die Wahl von A_2 (die auf dem zweiten Platz seiner Präferenzordnung steht) durchsetzen, indem es sich bei der Verteilung seiner Stimmen so verhält, als ob es die Präferenzordnung ($A_2, A_4, A_3, A_5, A_6, A_1$) hätte. Auf die Alternativen entfallen dann folgende Stimmen:

$$\begin{array}{lll} A_1 \rightarrow 6 + 1 + 4 = 11 & A_2 \rightarrow 3 + 6 + 3 = 12 & A_3 \rightarrow 5 + 4 + 2 = 11 \\ A_4 \rightarrow 1 + 5 + 1 = 7 & A_5 \rightarrow 2 + 3 + 6 = 11 & A_6 \rightarrow 4 + 2 + 5 = 11. \end{array}$$

Somit sinkt gegenüber dem nichtstrategischen Verhalten die Stimmenzahl für A_1 , während die für A_2 so weit steigt, dass A_2 gewählt wird.¹⁰

Das beschriebene strategische Verhalten von M_2 führt nicht zwingend zur Wahl von A_2 , wenn sich mindestens eines der Mitglieder M_1 und M_3 ebenfalls strategisch verhält.

d) Hare-Regel:

Strategisches Verhalten bei der Hare-Regel soll beispielhaft für das Präferenzordnungsprofil in Tab. 16.7 gezeigt werden. Wenn sich kein Mitglied strategisch verhält, wird die Alternative A_3 gewählt. Im ersten Wahlgang erreicht keine Alternative die absolute Mehrheit von drei Stimmen. Daraufhin wird die Alternative A_2 gestrichen. Im zweiten Wahlgang treten die Alternativen A_1 und A_3 gegeneinander an und A_3 gewinnt mit drei Stimmen. Aus Sicht des Mitglieds M_1 ist dies der ungünstigste Ausgang der Abstimmung. M_1 könnte sich strategisch verhalten und im ersten Wahlgang der Alternative A_2 die Stimme geben. Verhalten sich die anderen Mitglieder nicht strategisch, wird die Alternative A_1 gestrichen und es kommt im nächsten Wahlgang zur Wahl der Alternative A_2 . Zwar kann das Mitglied M_1 seine Erstpräferenz nicht durchsetzen, aber mit der Wahl von A_2 immerhin seine Zweitpräferenz. (Zum strategischen Verhalten bei der Wahl von Atlanta als Ort der Olympischen Sommerspiele 1996 durch das IOC vgl. Schauenberg 1992; Eichner et al. 1996.)

e) Strategisches Verhalten als Entscheidungsproblem:

Für jedes Gruppenmitglied stellt sich das Entscheidungsproblem, aus der Menge seiner möglichen Strategien diejenige zu bestimmen, die zu der Alternative führt, die in seiner Präferenzordnung einen möglichst hohen Rang einnimmt.¹¹ Die Ermittlung der optimalen Strategie eines Mitglieds ist relativ einfach, wenn bekannt ist, wie sich die anderen Mitglieder bei der Abstimmung (im Abstimmungsprozess) verhalten werden. Diese Voraussetzung ist aber i. d. R. nicht erfüllt, vor allem nicht bei geheimer

¹⁰ M_2 kann (wenn M_1 und M_3 nicht strategisch stimmen) nicht die Wahl von A_4 bewirken, da diese Alternative von den Mitgliedern M_1 und M_3 jeweils nur eine Stimme erhält.

¹¹Erste Überlegungen zu diesem Problem finden sich schon bei Farquharson (1956, 1969); Kramer (1972) und Pattanaik (1973).

Abstimmung. Da der Erfolg der Alternativenwahl eines Mitglieds von den gewählten Strategien der anderen Mitglieder abhängt, handelt es sich hierbei eigentlich um ein spieltheoretisches Problem. An die Stelle von nicht beeinflussbaren Umweltzuständen treten hierbei (in der präskriptiven Theorie) die ihrerseits rational agierenden anderen Mitglieder. Da die spieltheoretische Lösung jedoch nur in sehr einfachen Situationen eindeutig ist (vgl. Fußnote 9), ist davon auszugehen, dass ex ante nicht bekannt ist, zu welchen Alternativen die möglichen Strategien eines Mitglieds führen werden. Die Bestimmung seiner optimalen Strategie stellt mithin ein komplexes Entscheidungsproblem bei Unsicherheit dar. Einige Anhaltspunkte für das strategische Verhalten eines Mitglieds seien kurz skizziert.

Bei der *Single-Vote-Regel* wird das Mitglied der „erstrebten“ Alternative die Stimme geben. Die „erstrebte“ Alternative muss nicht diejenige sein, die in seiner Präferenzordnung den ersten Platz einnimmt; es könnte z. B. auch die Alternative auf dem dritten Rang sein, weil keine Chance besteht, eine Alternative mit höherem Rang durchzusetzen.

Bei der *Regel des paarweisen Vergleichs* wird das Mitglied zunächst bemüht sein, die Reihenfolge der Abstimmung zu beeinflussen. Es wird zu erreichen versuchen, dass die von ihm erstrebte Alternative möglichst spät in den Wahlprozess aufgenommen wird und die Alternativen, die gegen sie gewinnen könnten, möglichst früh. Je später nämlich die erstrebte Alternative in den Wahlprozess aufgenommen wird, umso kleiner ist die Zahl der Alternativen, gegen die sie gewinnen muss, um endgültig als Wahlsieger hervorzugehen; je früher die Alternativen, die gegen die erstrebte gewinnen könnten, in den Wahlprozess aufgenommen werden, desto eher ist zu erwarten, dass diese Alternativen im Laufe des Abstimmungsprozesses überstimmt werden und folglich der erstrebten nicht gegenübergestellt werden. Bei den einzelnen Abstimmungen wird das Mitglied jeweils so stimmen, dass möglichst eine Alternative verbleibt, die beim paarweisen Vergleich mit der erstrebten Alternative verliert.

Bei der *Borda-Regel* liegt es nahe, der erstrebten Alternative möglichst viele Stimmen zu geben und den Alternativen, die gegen sie gewinnen könnten, möglichst wenige.

16.4.3.3 Bildung von Koalitionen

Vom Standpunkt eines Teils der Mitglieder kann sich ein Vorteil ergeben, wenn sie ihr Verhalten gezielt aufeinander abstimmen, also eine Koalition bilden (Riker 1975; Riker und Ordeshook 1973). Das Präferenzordnungsprofil in Tab. 16.10 diene zur Verdeutlichung.

Tab. 16.10 Präferenzordnungsprofil für $N_A = 5$ und $N_M = 7$

M ₁	M ₂	M ₃	M ₄	M ₅	M ₆	M ₇
A ₁	A ₁	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅
A ₃	A ₃	A ₃	A ₃	A ₂	A ₂	A ₂
A ₄	A ₄	A ₄	A ₄	A ₅	A ₃	A ₄
A ₅	A ₅	A ₅	A ₁	A ₁	A ₁	A ₁
A ₂	A ₂	A ₂	A ₅	A ₄	A ₅	A ₃

M_1 sei Vorsitzender der Gruppe, dessen Stimme in einer Pattsituation entscheidet. Wenn jedes Mitglied für die Alternative auf dem ersten Rang seiner Präferenzordnung stimmt, wird bei der *Single-Vote-Regel* die Alternative A_1 gewählt, die in den Präferenzordnungen der Mitglieder M_4 bis M_7 auf dem vierten Rang steht. Wenn nun diese Mitglieder eine Koalition bilden und für A_2 stimmen, wird die Alternative A_2 gewählt, die bei ihnen einen höheren Rang einnimmt als A_1 . Wenn nur drei der Mitglieder M_4 bis M_7 für die Alternative A_2 stimmen, gewinnt nach wie vor A_1 die Wahl, da M_1 in einer Pattsituation den Ausschlag gibt.

Welche Alternative von einer Gruppe gewählt wird, hängt also (auch) von den gemeinsamen Strategien ab, die die Gruppenmitglieder bei der Abstimmung verfolgen.

16.4.4 Abstimmung über eine kollektive Präferenzordnung

Bisher stand die Gruppe vor dem Problem, aus einer Menge von Alternativen nur eine auszuwählen, nämlich diejenige, die realisiert werden soll. In der Realität müssen Entscheidungsgremien jedoch häufig eine (kollektive) *Präferenzordnung* über mehrere oder sogar alle zur Debatte stehenden Alternativen bestimmen:

- Der Vorstand einer Aktiengesellschaft muss die Rangfolge der verschiedenen Unternehmensziele festlegen.
- Eine Kommission muss sich eine Präferenzordnung über mehrere Bewerber um eine Stelle bilden: Lehnt der Bewerber auf dem ersten Platz der Präferenzordnung (nach mehr oder weniger intensiven Verhandlungen) ab, so wird mit dem Bewerber auf dem zweiten Platz verhandelt; lehnt auch er ab, so kommt der Bewerber auf dem dritten Platz zum Zuge, usw.
- Ein Gemeinderat muss über die Reihenfolge entscheiden, in der bestimmte Projekte abgewickelt werden.

Um eine kollektive Präferenzordnung demokratisch zu ermitteln, kann im Prinzip ebenso vorgegangen werden wie bei alleiniger Entscheidung über eine der Alternativen.

Nach der Einstimmigkeitsregel wird eine kollektive Präferenzordnung nur dann gewählt, wenn sich alle Mitglieder auf eine gemeinsame Präferenzordnung einigen. Ist kein Mitglied bereit, bei der Abstimmung von seiner Präferenzordnung abzuweichen, wird eine kollektive Präferenzordnung nur dann festgelegt, wenn sämtliche individuellen Präferenzordnungen identisch sind. Diese Voraussetzung ist vor allem bei größeren Gremien in der Regel nicht erfüllt.

Nach einer anderen Abstimmungsregel wie der *Single-Vote-* oder der Borda-Regel kann die kollektive Präferenzordnung aus dem Ergebnis der Abstimmung über die Alternativen abgeleitet werden. Danach würde die Alternative mit der höchsten Stimmenzahl auf Rang eins der kollektiven Präferenzordnung stehen, die Alternative mit der zweithöchsten Stimmenzahl auf Rang zwei usw. Nach beiden Regeln kann jedoch eine

Alternative auf einem höheren Rang in der kollektiven Präferenzordnung stehen als eine Condorcet-Alternative.

Wenn nach der Mehrheitsregel überhaupt eine kollektive Präferenzordnung existiert,¹² erfüllt sie folgende Bedingung: Den ersten Rang nimmt diejenige Alternative ein, die den paarweisen Vergleich gegen jede andere gewinnt. Auf dem zweiten Platz steht diejenige Alternative, die zwar von der auf dem ersten Rang geschlagen wird, jedoch den paarweisen Vergleich gegen jede andere Alternative gewinnt, usw.

16.5 Zur Vorteilhaftigkeit eines Gremiums

16.5.1 Allgemeines Beurteilungsproblem

Als *zielgebunden* wird eine Gruppe bezeichnet, an die von einer einzelnen Person oder einer Gruppe – wir bezeichnen sie als Instanz – Entscheidungsbefugnisse delegiert werden. Dabei gibt die Instanz ein Ziel vor, an dem sich die Mitglieder zu orientieren haben. Die Gruppe wird in der Erwartung eingesetzt, dass vom Standpunkt der Instanz aus gesehen eine bessere Entscheidung getroffen wird als bei alleiniger Entscheidung durch sie selbst oder ein anderes Individuum. Bei zielgebundenen Gruppen stellt sich vor allem das Problem, welche Abstimmungsregel und welche Größe und Zusammensetzung der Gruppe aus der Sicht der Instanz optimal ist. Beurteilungsgrundlage ist dabei das Ziel der Instanz.

Mit dem Einsatz einer (Entscheidungs-) Gruppe ist aus der Sicht der Instanz gegenüber der Delegation der Entscheidung an einen einzelnen Entscheidungsträger zwar die Chance verbunden, dass z. B. mehr und „gehaltvollere“ Informationen im Entscheidungsprozess verarbeitet werden und/oder aufgrund eines größeren Sachverständes aus Informationen bessere Rückschlüsse auf die Folgen von Alternativen gezogen werden. Andererseits besteht aber auch die Gefahr, dass sich bei der Abstimmung z. B. Mitglieder durchsetzen, die sich an persönlichen Zielen orientieren (statt am Ziel der Instanz) oder die aus Informationen problematische Wahrscheinlichkeitsurteile über die Folgen von Alternativen ableiten. Außerdem setzt sich das einzelne Mitglied in der Gruppe möglicherweise wesentlich weniger ein als bei alleiniger Entscheidung, weil es sich nicht persönlich für das Ergebnis des Gruppenentscheidungsprozesses verantwortlich fühlt.

Es kann also nicht generell davon ausgegangen werden, eine Gruppe treffe bessere Entscheidungen als ein Individuum. Vielmehr muss im Einzelfall geprüft werden, ob der Einsatz einer Gruppe vorteilhaft ist. Dies erfordert jedoch die Lösung eines komplexen Bewertungsproblems, in dem die genannten Chancen und Risiken gegeneinander abzuwägen sind.

¹²Wie in Abschn. 16.4.2.3 gezeigt wurde, kann sich bei der Mehrheitsregel eine intransitive kollektive Präferenzrelation ergeben. Präferenzordnungen sind jedoch definitionsgemäß transitiv.

Ob der Einsatz eines Gremiums vorteilhaft ist, lässt sich u. a. deshalb nur schwer beurteilen, weil es sehr viele Varianten des Gruppeneinsatzes und der Steuerung Entscheidungsprozesses der Gruppe durch die einsetzende Instanz gibt, die in Abhängigkeit vom Entscheidungsproblem zu sehr unterschiedlichen Konsequenzen führen können (Kaus 1985; Lindstädt 1997). Als Gestaltungs- bzw. Steuerungsvariablen der Instanz kommen u. a. in Betracht: Gruppengröße, Gruppenzusammensetzung, Abstimmungsregel, Normen über den Verlauf des Entscheidungsprozesses (z. B. welche Informationen einzuholen sind, wie die Aufgaben in der Gruppe zu verteilen sind, wie oft und wie lange jeweils Gruppensitzungen stattfinden sollen) und die Kompetenzverteilung in der Gruppe (sind z. B. alle Gruppenmitglieder gleichberechtigt oder wird ein Vorsitzender bestimmt, der den anderen Mitgliedern im Entscheidungsprozess bestimmte Aufgaben zuweisen darf bzw. soll).

16.5.2 Beurteilung eines Gremiums bei isolierter Problemlösung

Bei Delegation der Entscheidung über die Wahl einer Alternative an eine Gruppe kann im Vergleich zur Delegation an einen einzelnen Entscheidungsträger schon dann ein Vorteil entstehen, wenn die Gruppenmitglieder völlig isoliert voneinander arbeiten und anschließend abstimmen. Notwendige (jedoch nicht hinreichende) Voraussetzung ist allerdings, dass nicht mit Sicherheit alle Mitglieder im Rahmen ihrer Individualkalküle dieselbe Alternative als die beste einstufen. Die Wahrscheinlichkeit für die Wahl einer (vom Standpunkt der Instanz) guten Alternative durch die Gruppe kann unter dieser Voraussetzung auch dann hoch sein, wenn sie bei alleiniger Entscheidung durch ein beliebiges Mitglied niedrig ist. Mit der Entscheidung durch die Gruppe ist die Chance verbunden, dass diejenigen Mitglieder überstimmt werden, die bei alleiniger Entscheidung eine ungünstige Alternative wählen würden. Allerdings besteht zugleich die Gefahr, dass gerade diese Mitglieder bei der Abstimmung den Ausschlag geben und jene Mitglieder überstimmen, die bei alleiniger Entscheidung eine gute Alternative gewählt hätten.

Zur Verdeutlichung dieses Zusammenhangs wird ein einfaches Beispiel mit zwei Alternativen betrachtet, von denen eine zu wählen (und zu realisieren) ist. Als Entscheidungsträger kommen die Personen M_1 , M_2 und M_3 in Betracht. Jeder Entscheidungsträger würde bei alleiniger Entscheidung mit der Wahrscheinlichkeit p die (nach irgendeinem Kriterium) günstigere Alternative wählen und mit der Gegenwahrscheinlichkeit $1-p$ die andere. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit P für die Wahl der günstigeren Alternative, wenn über die Alternativen abgestimmt und dann jene Alternative realisiert wird, die die Mehrheit der Stimmen bekommt?

Es werden zwei Fälle, $p=0,8$ und $p=0,3$, betrachtet. Außerdem wird vereinfachend angenommen, die Voten der einzelnen Entscheidungsträger seien voneinander stochastisch unabhängig. Die Tab. 16.11 zeigt, welche Abstimmungsergebnisse möglich sind und welche Wahrscheinlichkeiten ihnen entsprechen. „+“ bzw. „-“ heißt dabei, dass der betreffende Entscheidungsträger für bzw. gegen die günstigere Alternative stimmt.

Tab. 16.11 Mögliche Abstimmungsergebnisse und deren Wahrscheinlichkeiten

	Voten von			Wahrscheinlichkeiten	Wahrscheinlichkeiten
	M ₁	M ₂	M ₃	(p = 0,8)	(p = 0,3)
1	+	+	+	$0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,8 = 0,512$	$0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3 = 0,027$
2	+	+	–	$0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 0,128$	$0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,7 = 0,063$
3	+	–	+	$0,8 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 0,128$	$0,3 \cdot 0,7 \cdot 0,3 = 0,063$
4	–	+	+	$0,2 \cdot 0,8 \cdot 0,8 = 0,128$	$0,7 \cdot 0,3 \cdot 0,3 = 0,063$
5	–	–	+	$0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 0,032$	$0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,3 = 0,147$
6	–	+	–	$0,2 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 0,032$	$0,7 \cdot 0,3 \cdot 0,7 = 0,147$
7	+	–	–	$0,8 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,032$	$0,3 \cdot 0,7 \cdot 0,7 = 0,147$
8	–	–	–	$0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,008$	$0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7 = 0,343$

Die günstigere Alternative wird dann gewählt, wenn sie die Mehrheit der Stimmen erhält. Das ist bei den Abstimmungsergebnissen 1–4 der Fall. Die Wahrscheinlichkeit P dafür, dass eines dieser Ergebnisse eintritt, ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten dieser Ergebnisse. Somit gilt:

$$P = 0,512 + 3 \cdot 0,128 = 0,896 \quad \text{falls } p=0,8$$

und

$$P = 0,027 + 3 \cdot 0,063 = 0,216 \quad \text{falls } p=0,3.$$

Die Gruppe wählt die günstigere der beiden Alternativen also im Fall $p=0,8$ mit höherer Wahrscheinlichkeit, im Fall $p=0,3$ mit geringerer Wahrscheinlichkeit als ein einzelner Entscheidungsträger. Die günstigere Alternative wird immer dann von der Gruppe mit einer höheren Wahrscheinlichkeit gewählt, wenn $p > 0,5$ gilt.

16.5.3 Beurteilung eines Gremiums bei gemeinsamer Problemlösung

16.5.3.1 Einfluss der Gruppenbildung auf die Informationsmengen und Prognosefunktionen der Mitglieder

Die Mitglieder einer Gruppe arbeiten im Allgemeinen jedoch nicht völlig isoliert voneinander. Im Rahmen eines arbeitsteiligen Entscheidungsprozesses werden Informationen beschafft, gegenseitig übermittelt und verarbeitet. Die Präferenzordnungen der Mitglieder am Ende des Gruppenprozesses sind daher häufig nicht identisch mit jenen, die sie bei alleiniger Entscheidung vertreten würden.

Schon bei der Konstituierung der Gruppe können die Mitglieder gemeinsam mehr entscheidungsrelevante Informationen besitzen als jedes einzelne Mitglied allein. Bei geeigneter Arbeitsteilung können außerdem von einer Gruppe mehr zusätzliche

Informationen beschafft werden als von einem Einzelnen. Durch den gegenseitigen Austausch der bereits vorhandenen und der neu beschafften Informationen kann der Informationsstand jedes Gruppenmitglieds gegenüber individueller Entscheidung wesentlich verbessert werden. Die Mitglieder können sich dann bei der Bildung ihrer Präferenzordnungen auf eine breitere Informationsbasis stützen.

Darüber hinaus wird in einer Gruppe auch darüber diskutiert, welche (probabilistischen) Rückschlüsse aus den Informationen zu ziehen sind. Dadurch können die Prognosefunktionen einiger oder aller Mitglieder beeinflusst werden. Ein Mitglied kann folglich auch dann zu einem anderen Wahrscheinlichkeitsurteil über die Umweltzustände und mithin zu einer anderen Präferenzordnung kommen als bei alleiniger Entscheidung, wenn es in der Gruppe keine zusätzlichen Informationen erhält. Ob das vom Standpunkt der Instanz vorteilhaft ist oder nicht, kann allerdings nicht allgemeingültig beurteilt werden.

Ob der Einsatz einer Gruppe gegenüber der Entscheidung durch einen Einzelnen vorteilhaft ist, hängt vor allem auch von den Möglichkeiten der Arbeitsteilung ab, die wiederum vom Entscheidungsproblem sowie von den Informationen und Fähigkeiten der einzelnen Mitglieder abhängen (Hackman und Katz 2010, S. 1212 ff.; Kelley und Thibaut 1969, S. 65 f.; Collins 1970, S. 180 ff.). Kann das Entscheidungsproblem in weitgehend unabhängig voneinander zu bearbeitende Teilaufgaben zerlegt werden und ergänzen sich die Informationen und Fähigkeiten der Mitglieder gerade so, dass diese Aufgaben gut verteilt werden können, ist der Vorteil der Gruppenbildung relativ hoch. Sind indessen die Teilaufgaben nicht unabhängig voneinander zu lösen und besteht die Gruppe nur aus hoch spezialisierten Mitgliedern, die nicht beurteilen können, wie sich die Lösungen ihrer jeweiligen Teilprobleme auf andere Bereiche auswirken, so ist der Vorteil der Gruppenbildung gering. In dieser Situation wird die Vorteilhaftigkeit der Gruppe ansteigen, wenn als zusätzliches Mitglied ein „Generalist“ aufgenommen wird, der die Teilaufgaben gut aufeinander abstimmen kann.

16.5.3.2 Einfluss der Gruppenbildung auf die Ziele und die Motivation der Mitglieder

Zwar wird den Mitgliedern ein Ziel gesetzt, an dem sie sich bei ihrer Entscheidung zu orientieren haben. Damit besteht aber noch nicht die Gewähr, dass dieses Ziel auch tatsächlich verfolgt wird. Ob ein Individuum die Verhaltensnorm befolgt oder nicht, ist im Allgemeinen nicht unabhängig davon, ob es allein entscheidet oder Mitglied einer Gruppe ist und aus welchen Personen sich die Gruppe zusammensetzt. Entscheidet ein Individuum allein, so ist die Wahrscheinlichkeit relativ hoch, dass eine Zielabweichung zugunsten eigener Interessen nicht erkannt wird. Bei Gruppenentscheidung werden dagegen auch andere Personen mit den Alternativen und den entscheidungsrelevanten Daten vertraut gemacht. Die dadurch ermöglichte gegenseitige Kontrolle erschwert es, sich von eigenen Interessen leiten zu lassen. Dadurch kann die Wahrscheinlichkeit steigen, dass die Verhaltensnorm befolgt und eine vom Standpunkt der Instanz gute Alternative gewählt wird. Das gilt vor allem dann, wenn auch neutrale Mitglieder ins

Gremium aufgenommen werden, die von der Entscheidung nicht persönlich betroffen sind.

Es ist andererseits auch möglich, dass einzelne Mitglieder, die bei individueller Entscheidung die Verhaltensnorm befolgen würden, in der Gruppe ihre persönlichen Ziele vertreten und andere Mitglieder in ihrem Sinne beeinflussen. Nachdem auch andere Personen für dieselbe (suboptimale) Alternative gestimmt haben, trifft sie nicht mehr allein die Verantwortung. Einzelne Mitglieder können sich auch an materiellen oder immateriellen Belohnungen und Sanktionen durch andere Mitglieder orientieren und die Stimmabgabe von deren Präferenzen abhängig machen. Eine solche Orientierung kann dazu führen, dass das betreffende Mitglied eine Präferenzordnung über die Alternativen vertritt, die vom Standpunkt der Instanz weniger gut, möglicherweise aber auch besser ist als jene, die das Mitglied bei alleiniger Entscheidung erarbeitet hätte.

Ein Gruppenmitglied kann gegenüber alleiniger Entscheidung deshalb weniger motiviert sein, sich für die Lösung des Entscheidungsproblems einzusetzen, weil es sich nicht mehr persönlich für das Ergebnis der Entscheidung verantwortlich fühlt und/oder weil es damit rechnet, dass sein Beitrag keinen Einfluss auf das Ergebnis hat. Eine solche Einstellung ist vor allem bei größeren Gruppen zu erwarten. Empirische Befunde zeigen, dass in größeren Gruppen (mit mehr als sieben Mitgliedern) beim Einzelnen verstärkt das Gefühl aufkommt, sein Beitrag sei von untergeordneter Bedeutung für die Gruppe (Olson 2004, S. 52). Hieraus resultiert eine geringere Teilnahme am Gruppengeschehen; die Anzahl der Mitglieder, die ihre Ideen zum Ausdruck bringen und ihre Informationen zur Verfügung stellen, sinkt.

Es gibt empirische Untersuchungen, die gezeigt haben, dass eine bezüglich der Persönlichkeit der Mitglieder heterogene Zusammensetzung der Gruppe sich auf die Motivation der Mitglieder positiv auswirkt (Deutsch 1968, S. 269). Obwohl im Allgemeinen bei Individuen die Tendenz besteht, lieber mit Personen gleicher Einstellungen und Interessen zusammenzuarbeiten, zeigte sich, dass aufgabenbezogene Konflikte, deren Ursprung in der Heterogenität der Mitglieder zu suchen ist, eine positive Wirkung auf die Leistung der Gruppe haben können (Collins 1970, S. 221). Die Aussagen in der Literatur zur Wirkung einer heterogenen Zusammensetzung einer Gruppe auf die Motivation sind jedoch nicht eindeutig (vgl. z. B. Hackman und Katz 2010, S. 1233; Thomas 1999).

16.5.3.3 „Ausgleichende“ Wirkung der Abstimmung

Wie bereits erläutert wurde, besteht aufgrund der Abstimmung die Chance, dass Mitglieder, die sich eine vom Standpunkt der Instanz „nachteilige“ Präferenzordnung bilden, von anderen überstimmt werden. Andererseits kann aber auch die Gefahr bestehen, dass gerade diejenigen Mitglieder von anderen überstimmt werden, die bei alleiniger Entscheidung eine vom Standpunkt der Instanz „gute“ Alternative gewählt hätten. Orientiert sich z. B. jedes Gruppenmitglied mit der Wahrscheinlichkeit p ($0,5 < p < 1$) am Ziel der Instanz und sind die Ziele der einzelnen Mitglieder voneinander stochastisch unabhängig, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als die Hälfte der Mitglieder

das Ziel der Instanz verfolgt, größer als p . Dabei liegt die betreffende Wahrscheinlichkeit umso weiter über p , je größer die Mitgliederzahl N_M ist (Laux 1979a, S. 233). Im Falle $0 < p < 0,5$ gilt die umgekehrte Beziehung. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Mehrheit der Mitglieder das Ziel der Instanz verfolgt, sinkt hier mit steigender Mitgliederzahl immer weiter unter p . Analoge Aussagen gelten auch für die anderen Determinanten der individuellen Präferenzordnungen.

Die Gruppe kann zwar schon dann mit höherer Wahrscheinlichkeit eine (aus der Sicht der Instanz) „gute“ Alternative wählen als jedes einzelne Mitglied bei alleiniger Entscheidung, wenn keinerlei Interaktionen in der Gruppe erfolgen. Je nach den Wahrscheinlichkeiten für die Präferenzordnungen der einzelnen Mitglieder und der Abstimmungsregel ist es jedoch auch möglich, dass die Gruppe mit geringerer Wahrscheinlichkeit eine „gute“ Alternative wählt als jedes einzelne Mitglied bei alleiniger Entscheidung.

16.5.4 Kostenaspekt

Gruppenentscheidungsprozesse sind oft langwieriger als Individualentscheidungen. Insbesondere bei sinnvoller Arbeitsteilung kann jedoch eine Gruppe auch wesentlich schneller zu einer Entscheidung kommen als ein Individuum.

Je größer die Zahl der Mitglieder ist und je langwieriger sich der Entscheidungsprozess gestaltet, desto größer sind tendenziell die (Opportunitäts-) Kosten eines Entscheidungsgremiums. Die Dauer des Entscheidungsprozesses ist im Allgemeinen umso größer, je mehr Interdependenzen bei der Lösung von Teilproblemen zu beachten sind, je weniger gut also das gesamte Entscheidungsproblem in unabhängige Teilprobleme zerlegt werden kann und je mehr sich folglich das einzelne Mitglied mit dem Entscheidungsproblem als Ganzem befassen muss. Auch die Vorgabe der Einstimmigkeitsregel wird in der Regel bewirken, dass die Dauer des Entscheidungsprozesses größer wird und mithin die Kosten des Gremiums steigen.

16.5.5 Zur optimalen Größe und Zusammensetzung eines Entscheidungsgremiums

Ob eine Gruppe (ein Entscheidungsgremium) „bessere“ Entscheidungen trifft als ein einzelner Entscheider, hängt, wie erläutert, von ihrer Größe und Zusammensetzung ab. Diese sind aber bei Entscheidungsgremien im Allgemeinen gar nicht a priori gegeben, sondern sie werden von einer das Gremium einsetzenden („übergeordnete“) Instanz festgelegt¹³. Geht man davon aus, dass die (Opportunitäts-) Kosten eines Gremiums

¹³Zur Problematik der Ermittlung eines optimalen Gremiums aus Sicht einer delegierenden Instanz vgl. Laux 1979a, S. 139–236, b.

mit steigender Mitgliederzahl steigen, so ist Aufnahme weiterer Mitglieder nur dann sinnvoll, wenn sich die „Qualität“ der Entscheidungen entsprechend verbessert. Diese Bedingung wird aber im Allgemeinen schon bei kleineren Gremien gar nicht erfüllt sein. Vielmehr kann die Qualität z. B. deshalb sinken, weil die zusätzlichen Mitglieder wenig motiviert und/oder qualifiziert sind, sich gute Präferenzordnungen zu bilden und Abstimmungsergebnisse entsprechend verschlechtern. Die Erweiterung der Gruppe kann auch bewirken, dass die Motivation der anderen Mitglieder, im Kommunikationsprozess entscheidungsrelevante Beiträge zu leisten und sich gute Präferenzordnungen zu bilden, beeinträchtigt wird. Mit abnehmender Motivation der einzelnen Gruppenmitglieder bei steigender Gruppengröße ist vor allem dann zu rechnen, wenn sie dabei immer weniger an den Ergebnissen der Alternativen partizipieren (vgl. hierzu auch Kap. 17, Abschn. 17.6.4).

Die Delegation von Entscheidungen an eine Gruppe kann daher auch dann sinnvoll sein, wenn die delegierende Instanz selbst eine Gruppe ist (etwa die Gruppe der Gesellschafter eines Unternehmens), die für qualifizierte Entscheidungen zu groß ist. Bestehen bezüglich gewisser Grundsatzentscheidungen Interessenkonflikte, und bezüglich der verbleibenden Entscheidungsprobleme einheitliche operationale Ziele, so kann es sinnvoll sein, dass die Instanz als Gruppe die Grundsatzentscheidungen trifft und die verbleibenden Entscheidungen an ein Entscheidungsgremium oder einen Individualentscheider delegiert. Dieses Vorgehen ist vor allem dann geboten, wenn die Mitglieder der delegierenden Gruppe nicht die Zeit, die Informationsmöglichkeiten, Fähigkeiten und Motivation haben, sich auch noch bei den delegierten Entscheidungen „gute“ Präferenzordnungen zu bilden.

16.6 Zusammenfassung

- Entscheidungsprozesse in Gruppen sind allgemein durch zwei Phasen gekennzeichnet, den Informations- und den Abstimmungsprozess. Der Informationsprozess führt zu einer Verbesserung und gegenseitigen Beeinflussung der Urteile der Gruppenmitglieder. Im Abstimmungsprozess wählt die Gruppe eine Alternative auf der Basis einer Abstimmungsregel aus. In der Praxis werden unterschiedliche Abstimmungsregeln eingesetzt.
- Nach der Einstimmigkeitsregel hat jedes Mitglied eine Stimme; gewählt ist diejenige Alternative, die die Stimmen aller Mitglieder erhält, eine Entscheidung kommt also nur bei Einmütigkeit zustande.
- Bei der Regel des paarweisen Vergleichs wird stets nur über zwei Alternativen nach einer zuvor festgelegten Reihenfolge abgestimmt. Die Alternative, die am Ende die Mehrheit der Stimmen erhält, ist gewählt. Eine Alternative, die den paarweisen Vergleich mit jeder anderen Alternative gewinnt, heißt Condorcet-Alternative.
- Die Single-Vote-Regel erfordert nur einen Wahlgang. Jedes Mitglied gibt dabei eine Stimme ab; die Alternative, die die meisten Stimmen erhält, ist gewählt. Es werden hier nur die Erstpräferenzen der Gruppenmitglieder berücksichtigt.

- Nach der Hare-Regel wird die Single-Vote-Regel wiederholt angewendet, und nach jedem Wahlgang scheidet die Alternative mit der geringsten Stimmenzahl aus. Die Alternative, die erstmals die absolute Mehrheit der Stimmen erhält, ist gewählt.
- Nach der Borda-Regel gibt jedes Mitglied der Alternative auf dem ersten Rang seiner Präferenzordnung ebenso viele Stimmen wie Alternativen zur Abstimmung stehen, der auf dem zweiten Rang eine Stimme weniger usw., der Alternative auf dem letzten Rang 1 Stimme. Gewählt ist die Alternative mit der höchsten Gesamtstimmenzahl.
- Stehen mehr als zwei Alternativen zur Auswahl, haben alle Abstimmungsregeln problematische Implikationen. Diese bringen es mit sich, dass sich den Gruppenmitgliedern unterschiedliche Möglichkeiten bieten, das Wahlergebnis durch strategisches Verhalten im Abstimmungsprozess zu beeinflussen.
- Bei Delegation von Entscheidungen stellt sich die Frage, ob sie an eine Gruppe oder einen individuellen Entscheider erfolgen soll. Beide Optionen haben Vor- und Nachteile. Ob der Einsatz einer Gruppe gegenüber der Delegation an einen Individualentscheider vorteilhaft ist, lässt sich u. a. deshalb nur schwer beurteilen, weil es sehr viele Varianten des Gruppeneinsatzes und der Steuerung ihres Entscheidungsprozesses durch die einsetzende Instanz gibt. Als Gestaltungsvariablen kommen u. a. die Gruppengröße, die Gruppenzusammensetzung und die Abstimmungsregel in Betracht.

Ergänzende und vertiefende Literatur

Bamberg et al. (2012, Kap. 8); Black (1958); Cartwright und Zander (1968); Collins (1970); Deutsch (1968); Eichner et al. (1996); Eisenführ et al. (2010, Kap. 12); Farquharson (1956, 1969); Hackman und Katz (2010); Kaus (1985); Kelley und Thibaut (1969); Kramer (1972); Laux (1979a, S. 139–236, b); Lazear (1998); Lindstädt (1997); Manke (1980); Schauenberg (1992); Thomas (1999); Türk (1973); Vetschera (1991, 2004).

16.7 Übungen

Aufgabe 16.1

Die drei Mitbewohner einer WG, Anna, Bernd und Clara, diskutieren darüber, welches Abendessen es geben soll. Zur Auswahl stehen Nudeln, Salat und Risotto. Alle drei haben klare Präferenzen: Anna mag am liebsten Nudeln essen und lieber Salat als Risotto. Bernd wäre für das Risotto, dann folgen Nudeln, dann Salat. Clara schließlich hätte am liebsten Salat, dann folgt Risotto, dann Nudeln.

- a) Erfüllen die abgegebenen Präferenzen der drei Personen das Ordnungs- und das Transitivitätsaxiom?
- b) Stellen Sie sich vor, die drei entscheiden durch Abstimmung, was sie essen. Dazu stimmen Sie paarweise ab („Nudeln gegen Salat: Wer ist für Nudeln?“ usw.), bis jedes

Gericht mit jedem anderen Gericht verglichen wurde. Erfüllen die so durch Abstimmung gebildeten Präferenzen der WG das Ordnungs- und das Transitivitätsaxiom?

Aufgabe 16.2

Ein Gremium mit fünf Gruppenmitgliedern (M_1 , M_2 , M_3 , M_4 und M_5) kann zwischen fünf Alternativen (A_1 , A_2 , A_3 , A_4 und A_5) wählen. In einer Pattsituation entscheidet Mitglied M_1 über die endgültige Wahl. Gehen Sie von folgendem Präferenzordnungsprofil aus:

M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
A_1	A_5	A_4	A_3	A_1
A_2	A_4	A_2	A_2	A_5
A_4	A_1	A_5	A_5	A_4
A_3	A_2	A_3	A_4	A_3
A_5	A_3	A_1	A_1	A_2

- Welche Alternative wählt das Gremium, wenn jedes Mitglied eine Stimme hat und die (einfache) Mehrheit entscheidet?
- Welche Alternative wählt das Gremium, wenn es paarweise über die Alternativen in der Abstimmungsreihenfolge $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4 \rightarrow A_5$ abstimmt?
- Welche Alternative wählt das Gremium, wenn es nach der Borda-Regel abstimmt?
- Betrachten Sie erneut die Abstimmungsregel aus Aufgabenteil b. Wie kann Mitglied M_1 das Abstimmungsergebnis durch Wahl einer anderen Abstimmungsreihenfolge strategisch beeinflussen? Welche Möglichkeit besteht für Mitglied M_3 ?
- Überprüfen Sie, ob Mitglied M_2 durch „Veränderung“ seiner Präferenzordnung nach dem Borda-Kriterium die von ihm präferierte Alternative durchsetzen kann, sofern sich alle anderen nicht strategisch verhalten.

Aufgabe 16.3

Bei der Abstimmung eines Sportverbandes über den Austragungsort der nächsten Meisterschaften wurde die Hare-Regel angewendet. Es kam zu folgendem Abstimmungsergebnis unter den 25 Delegierten:

Wahlgang	München	Hamburg	Berlin	Frankfurt
Erster	8	8	5	4
Zweiter	10	12	3	
Dritter	13	12		

München gewann also die Wahl. Ist das Wahlergebnis damit vereinbar, dass sich kein Delegierter strategisch verhalten hat? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 16.4

In einem Gremium, bestehend aus fünf Gremienmitgliedern M_m , $m = 1, \dots, 5$, wird eine Abstimmung über drei Alternativen A_a , $a = 1, 2, 3$, durchgeführt. Eines der Mitglieder möchte sich gerne im Vorfeld über den möglichen Wahlausgang informieren. Es kennt sowohl seine eigene Präferenzordnung bezüglich der Alternativen als auch die von drei der verbleibenden vier Gremienmitglieder. Diese Rangordnungen der Alternativen der Gremienmitglieder sind der folgenden Tabelle zu entnehmen.

M_1	M_2	M_3	M_4
A_1	A_3	A_1	A_2
A_2	A_1	A_3	A_3
A_3	A_2	A_2	A_1

Über die Präferenzordnung des fünften Mitglieds ist nur bekannt, dass es sich um eine vollständige Ordnung ohne Indifferenz handelt und Alternative A_1 von ihm **nicht** als beste Alternative angesehen wird.

- Ermitteln Sie unter Vernachlässigung strategischen Handelns die möglichen kollektiven Präferenzordnungen des oben beschriebenen Gremiums bei Verwendung der Borda-Regel.
- Da M_4 der Vorgesetzte des Gremienmitglieds M_5 ist, überredet er M_5 genauso abzustimmen, wie er es auch tut. Als Abstimmungsregel schlägt er dem Gremium den Paarweisen Vergleich vor. Bewerten Sie diesen Vorschlag aus Sicht des Mitglieds M_4 anhand seiner tatsächlichen Präferenzen.

Aufgabe 16.5

Das Präferenzordnungsprofil eines Gremiums mit vier Mitgliedern M_m , $m = 1, \dots, 4$, und vier Alternativen A_a , $a = 1, \dots, 4$, ist der folgenden Tabelle zu entnehmen.

M_1	M_2	M_3	M_4
A_1	A_4	A_1	A_2
A_2	A_3	A_3	A_4
A_4	A_2	A_2	A_1
A_3	A_1	A_4	A_3

- Ermitteln Sie, für welche Alternative sich das Gremium entscheidet, bei Verwendung der folgenden Abstimmungsregeln: (i) Borda-Regel (Indifferenzrelationen des Gremiums sind zugelassen), (ii) Hare-Regel (mit Vorsitzendem M_1 , der in Pattsituationen entscheidet).
- Welche Möglichkeiten isoliert strategischen Verhaltens besitzen die Entscheider M_1 und M_2 bei Verwendung der Borda-Regel in der obigen Entscheidungssituation?

Aufgabe 16.6

Gegeben sei folgendes Präferenzordnungsprofil eines Gremiums mit fünf Mitgliedern M_m , $m = 1, \dots, 5$, und vier Alternativen A_a , $a = 1, \dots, 4$. In Pattsituationen entscheidet der Vorsitzende M_1 .

M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
A_1	A_1	A_2	A_4	A_3
A_2	A_3	A_4	A_3	A_4
A_4	A_2	A_1	A_2	A_1
A_3	A_4	A_3	A_1	A_2

- a) Für die Abstimmung ist die Borda-Regel vorgesehen.
- (i) Bestimmen Sie die kollektive Präferenzordnung für das Gremium.
 - (ii) Welche Möglichkeit isoliert strategischen Verhaltens besitzt der Entscheider M_3 ?
- b) Das Gremium hat sich nunmehr auf die Auswahl einer Alternative mittels paarweisen Vergleichs geeinigt. Nennen Sie *eine* mögliche Reihenfolge, die der Vorsitzende M_1 für den paarweisen Vergleich vorschlagen wird. Wie verläuft die Abstimmung dann?

16.8 Lösungshinweise**Aufgabe 16.1**

- a) Ja. --- b) Nein, die Präferenzen der WG sind intransitiv.

Aufgabe 16.2

- a) A_1 . --- b) A_5 . --- c) A_4 . --- d) M_1 schlägt (z. B.) die Abstimmungsreihenfolge A_5 - A_4 - A_3 - A_2 - A_1 vor; M_3 schlägt (z. B.) die Abstimmungsreihenfolge A_5 - A_2 - A_1 - A_3 - A_4 vor. --- e) M_2 tauscht A_3 mit A_4 , gibt A_3 also nicht 1, sondern 4 Stimmen, A_5 entsprechend nur 1 Stimme.

Aufgabe 16.3

Nein, es muss strategisches Verhalten gegeben haben, denn die Erststimmen für Berlin müssten auch in der zweiten Abstimmungsrunde noch 5 betragen.

Aufgabe 16.4

- a) Mögliche kollektive Präferenzordnungen sind (i) $A_1 > A_2 > A_3$, (ii) $A_1 \sim A_3 > A_2$, (iii) $A_3 > A_1 > A_2$ und (iv) $A_1 \sim A_2 \sim A_3$. --- b) $A_1 > A_2 > A_3 > A_1$. Wenn M_4 diese Abstimmungsregel anwenden möchte, dann wird er versuchen, die Abstimmungsreihenfolge zu beeinflussen.

Aufgabe 16.5

a) (i) Borda-Regel: $A_1 \sim A_2 \succ A_4 \succ A_3$; (ii) Hare-Regel: A_1 . --- **b)** M_1 tauscht A_2 und A_3 , dann wird A_1 eindeutig gewählt. M_2 tauscht z. B. A_2 mit A_4 , dann wird A_2 eindeutig gewählt.

Aufgabe 16.6

a) (i) $A_1 \sim A_4 \succ A_2 \sim A_3$ und A_1 wird gewählt. (ii) M_3 tauscht z. B. A_4 und A_2 , A_4 wird gewählt. --- **b)** Z. B. A_2, A_4, A_3, A_1 .

□

Literatur

- Arrow, K.J.: Social Choice and Individual Values, 2. Aufl. Wiley, New Haven (1963)
- Asch, S.E.: Änderung und Verzerrung von Urteilen durch Gruppendruck. In: Irle, M. (Hrsg.) Texte aus der experimentellen Sozialpsychologie, 2. Aufl, S. 57–73. Herman Luchterhand Verlag, Neuwied (1973)
- Bamberg, G., Coenenberg, A.G., Krapp, M.: Betriebswirtschaftliche Entscheidungslehre, 15. Aufl. Vahlen, München (2012)
- Barbut, M.: Does the majority ever rule? Portfolio Art News Ann. **4**, S. 79–83, 161–168 (1961)
- Black, D.: The Theory of Committees and Elections. Cambridge University Press, Cambridge (1958)
- Cartwright, D., Zander, A.: Group Dynamics, 3. Aufl. Harper & Row, New York (1968)
- Collins, B.E.: Social Psychology. Social Influence, Attitude Change, Group Processes, and Prejudice. Addison-Wesley, Massachusetts (1970)
- Condorcet (Marquis de), J.A.N.C.: Essai sur l'Application de l'Analyse à la Probabilité des Décisions Rendues à la Pluralité des Voix. Impr. royale, Paris (1785)
- Deutsch, M.: Group behavior. Int. Encycl. Soc. Sci. **6**, 265–275 (1968)
- Eichner, T., Pfingsten, A., Krapp, M.: Strategisches Abstimmungsverhalten bei Verwendung der Hare-Regel. Z. Betriebswirtsch. Forsch. **48**, 466–474 (1996)
- Eisenführ, F., Weber, M., Langer, T.: Rationales Entscheiden, 5. Aufl. Springer, Berlin (2010)
- Farquharson, R.: Straightforwardness in voting procedures. Oxf. Econ. Pap. **8**, 80–89 (1956)
- Farquharson, R.: Theory of Voting. Yale University Press, New Haven (1969)
- Gibb, J.R.: The effects of group size and of threat reduction upon creativity in a problem-solving situation. Am. Psychol. **6**(5), 324 (1951)
- Gibbard, A.: Manipulation of voting schemes: A general result. Econometrica **41**, 587–601 (1973)
- Hackman, J.R., Katz, N.: Group behavior and performance. In: Fiske, S.T., Gilbert, D.T., Lindzey, G. (Hrsg.) Handbook of Social Psychology, 5. Aufl, S. 1208–1251. Wiley, Hoboken (2010)
- Kaus, H.-P.: Die Steuerung von Entscheidungsgremien über Verhaltensnormen. Physica, Würzburg (1985)
- Kelley, H.H., Thibaut, J.W.: Group problem solving. In: Lindzey, G., Aronson, E. (Hrsg.) The Handbook of Social Psychology, Vol. IV, 2. Aufl, S. 1–101. McGraw-Hill, Massachusetts (1969)
- Kramer, G.H.: Sophisticated voting over multidimensional choice spaces. J. Math. Sociol. **2**, 165–180 (1972)

- Laux, H.: Grundfragen der Organisation: Delegation, Anreiz und Kontrolle. Springer, Berlin (1979a)
- Laux, H.: Der Einsatz von Entscheidungsgremien – Grundprobleme der Organisationslehre in entscheidungstheoretischer Sicht. Springer, Berlin (1979b)
- Lazear, E.P.: Personnel Economics for Managers. Wiley, New York (1998)
- Lindstädt, H.: Optimierung der Qualität von Gruppenentscheidungen: ein simulationsbasierter Beitrag zur Principal-Agent-Theorie. Physica, Heidelberg (1997)
- Manke, J.: Gremien im Entscheidungsprozeß. Gabler, Wiesbaden (1980)
- Olson, M.: Die Logik des kollektiven Handelns, 5. Aufl. Mohr Siebeck, Tübingen (2004)
- Pattanaik, P.K.: On the stability of sincere voting situations. J. Econ. Theor. **6**, 558–574 (1973)
- Riker, W.H.: The Theory of Political Coalitions, 6. Aufl. Yale University Press, New Haven (1975)
- Riker, W.H., Ordeshook, P.C.: An Introduction to Positive Political Theory. Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1973)
- Schauenberg, B.: Die Hare-Regel und das IOC. Z. Betriebswirtsch. Forsch. **44**, 426–444 (1992)
- Sen, A.K.: Collective Choice and Social Welfare. Springer, San Francisco (1970)
- Thomas, A.: Gruppeneffektivität: Balance zwischen Heterogenität und Homogenität. Gruppendynamik **30**, 117–130 (1999)
- Türk, K.: Gruppenentscheidungen – Sozialpsychologische Aspekte der Organisation kollektiver Entscheidungsprozesse. Z. Betriebswirtsch. **43**, 295–322 (1973)
- Vetschera, R.: Entscheidungsunterstützende Systeme für Gruppen: Ein rückkopplungsorientierter Ansatz. Physica, Heidelberg (1991)
- Vetschera, R.: Private Präferenzinformationen und strategisches Verhalten in Gruppenentscheidungen bei mehrfacher Zielsetzung. In: Gillenkirch, R.M., Schauenberg, B., Schenk-Mathes, H.Y., Velthuis, L.J. (Hrsg.) Wertorientierte Unternehmenssteuerung, Festschrift zum 65. Geburtstag von Helmut Laux, S. 325–345. Springer, Heidelberg (2004)

„Fairer“ Interessenausgleich in Gruppen und „faire“ Entscheidungen in Unternehmen

17

17.1 Problemstellung und Aufbau

In vielen Lebensbereichen, etwa in einer Familie, einem Freundeskreis, einem Verein, einer Partei, einem Unternehmen oder einer anderen Organisation, berühren die Entscheidungen nicht nur die Interessen eines Einzelnen, sondern die einer mehr oder weniger großen Personengruppe. Je nach den Erwartungen und Zielvorstellungen der einzelnen Gruppenmitglieder können sich ihre Präferenzordnungen über die erwogenen Alternativen erheblich unterscheiden, sodass Interessenkonflikte bestehen; in Kap. 16 (Abschn. 16.3) wurden bereits Ursachen für solche Interessenkonflikte erläutert. Die fortschreitende Demokratisierung unserer Gesellschaft hat dazu geführt, dass nicht nur im politischen Bereich, sondern auch in Unternehmen Entscheidungen in zunehmendem Maße von Gruppen (Entscheidungsgremien) getroffen werden, damit in Konfliktsituationen „gerechtere“ oder „fairere“ Entscheidungen getroffen werden als bei Entscheidung durch einen Einzelnen. Die Gruppenmitglieder mögen sich dabei ihre Präferenzordnungen ausschließlich nach ihren persönlichen Interessen bilden. Es ist aber auch möglich, dass sie die Interessen verschiedener Personengruppen vertreten, von denen sie ins Gremium gewählt worden sind (und wiedergewählt werden wollen).

Immer dann, wenn Entscheidungen in Gruppen getroffen werden, stellt sich das Problem, wie die Präferenzordnungen der Gruppenmitglieder „möglichst gerecht“ oder „fair“ zu einer „kollektiven Präferenzordnung“ für die Gruppe als Einheit aggregiert werden sollen. Im vorliegenden Kapitel wird dieses Problem präzisiert und gezeigt, welche Schwierigkeiten seiner Lösung entgegenstehen.

Für das Verständnis der folgenden Inhalte ist es wesentlich zu klären, wie der Begriff „fair“ bzw. „gerecht“ in diesem Kapitel gebraucht wird. In der Literatur werden typischerweise drei Formen der Fairness unterschieden: Distributive, interaktionale und prozedurale Fairness. Distributive Fairness oder Verteilungsgerechtigkeit

fragt nach der Verteilung von Gütern oder Geld, von Rechten oder Pflichten auf Mitglieder einer Gruppe. So kann die Verteilung des Gewinns, den eine Gruppe gemeinsam erzielt hat, als fair angesehen werden, wenn alle Gruppenmitglieder denselben Anteil am Gewinn erhalten, aber auch, wenn die Anteile der Gruppenmitglieder proportional zu ihren Leistungen sind, sofern diese Leistungen hinreichend genau und objektiv gemessen werden können. Interaktionale Fairness bezieht sich auf persönliche Beziehungen, z. B. zwischen einem Vorgesetzten und seinen Mitarbeitern. Prozedurale Fairness schließlich bezieht sich nicht auf die Beurteilung von Ergebnissen und nicht auf persönliche Beziehungen, sondern auf die Entscheidungsprozesse, die zu bestimmten Entscheidungen und Ergebnisverteilungen führen. So kann die Verteilung des Gewinns auf die Mitglieder einer Gruppe als unfair angesehen werden, weil für einige Gruppenmitglieder nicht nachvollziehbar ist, wie verteilt wurde. Ein Urteil vor Gericht kann als unfair wahrgenommen werden, weil der Gerichtsprozess selbst als unfair wahrgenommen wird. Eine Beförderung eines Mitarbeiters können seine Kollegen als unfair empfinden, weil sie ihnen willkürlich erscheint. Ein Gesetz kann von Bürgern als unfair wahrgenommen werden, weil sie vermuten, dass Interessengruppen es zu ihren Gunsten beeinflusst haben.

In diesem Kapitel geht es um Fairness nicht im Sinne der Verteilungsgerechtigkeit, sondern im Sinne der prozeduralen Gerechtigkeit: Es geht es um die Frage, auf welche Weise die individuellen Präferenzordnungen der Mitglieder einer Gruppe „möglichst gerecht“ bzw. „fair“ zu einer „*kollektiven Präferenzordnung*“ aggregiert werden können; sie ist gleichbedeutend mit der Suche nach einer „besten“ Abstimmungsregel. Es geht also um den Prozess der Willensbildung in der Gruppe, nicht um das Ergebnis dieser Willensbildung.

In Abschn. 17.2 wird in die Problematik der Aggregation der (individuellen) Präferenzordnungen der Gruppenmitglieder zu einer kollektiven Präferenzordnung eingeführt. Darauf aufbauend werden in Abschn. 17.3 das Unmöglichkeitstheorem und die zugrunde liegenden Anforderungen (Bedingungen) dargestellt und interpretiert. In Abschn. 17.4 wird untersucht, gegen welche Bedingungen einige der klassischen Abstimmungsregeln, die als kollektive Wahlfunktionen interpretiert werden können, verstoßen und wie diese Verstöße zu beurteilen sind.

In Abschn. 17.5 werden Versuche diskutiert, durch Modifikationen bzw. Abschwächungen von Anforderungen einen Ausweg aus dem Unmöglichkeitstheorem zu finden. Besondere Beachtung findet dabei, dass in Gruppen auch bei Konflikten oft gewisse Ähnlichkeiten bei den Präferenzordnungen bestehen, die es erlauben, die Anforderungen nur für einen Teil der logisch möglichen Präferenzordnungsprofile zu stellen.

In Abschn. 17.6 werden exemplarisch Entscheidungsprobleme in einem Unternehmen aus Sicht der Gesellschafter betrachtet. Es wird gezeigt, dass bei einer bestimmten plausiblen Einschränkung nur die Mehrheitsregel stets zu einer kollektiven Präferenzordnung führt und zugleich die übrigen Bedingungen von Arrow erfüllt sind. Mit der Mehrheitsregel ist nur die Marktwertmaximierung als Unternehmensziel kompatibel.

Die folgenden Darstellungen verdeutlichen die Schwierigkeiten, allgemeingültige Aussagen über „Gerechtigkeit“ bzw. „Fairness“ zu machen und entsprechende Entscheidungen zu treffen, wenn an diese theoretischen Konstrukte einigermaßen anspruchsvolle Anforderungen gestellt werden. Es zeigt sich auch, wie wichtig es ist, bei Transaktionen zwischen mehreren Personen mit finanziellen Auswirkungen ex ante Verträge zu schließen, bei denen Anreizkompatibilität besteht (Kap. 12 bis 15), statt darauf zu vertrauen, Konflikte im Rahmen späterer Abstimmungen fair lösen zu können.

17.2 Die Wahl einer kollektiven Wahlfunktion als Entscheidungsproblem

Zur Präzisierung der Problemstellung werden die Mitglieder der Gruppe wie im vorangegangenen Kapitel mit $M_1, M_2, \dots, M_{N_M}$ ($N_M \geq 2$) bezeichnet, die Alternativenmenge mit $A = \{A_1, A_2, \dots, A_{N_A}\}$ ($N_A \geq 2$). A_x und A_y kennzeichnen zwei beliebige Alternativen der Menge A .

O_m kennzeichnet die Präferenzordnung des Mitglieds M_m ($m = 1, 2, \dots, N_M$) über die Alternativen $A_1, A_2, \dots, A_{N_A}$. Werden die Präferenzordnungen der N_M Mitglieder zu dem N_M -Tupel $(O_1, O_2, \dots, O_{N_M})$ zusammengefasst, so entsteht ein sogenanntes *Präferenzordnungsprofil*. Dagegen bezeichnet O die *kollektive Präferenzordnung* der Gruppe: O gibt an, welche Präferenzen die Gruppe gegenüber den Alternativen aus der Alternativenmenge hat. Bei den folgenden Darstellungen bedeutet $A_x P A_y$ (bzw. $A_x I A_y$), dass in der kollektiven Präferenzordnung die Alternative A_x der Alternative A_y streng vorgezogen wird (bzw. zwischen beiden Indifferenz gegeben ist).

Das Problem lautet nun: Nach welchem Aggregationsmechanismus soll aus dem Präferenzordnungsprofil $(O_1, O_2, \dots, O_{N_M})$ eine kollektive Präferenzordnung O hergeleitet werden? Dabei sind an die kollektive Präferenzordnung dieselben Anforderungen zu stellen wie an eine individuelle Präferenzordnung: Auch O ist definitionsgemäß vollständig und transitiv.

Ein Aggregationsmechanismus, der je einem Präferenzordnungsprofil eine kollektive Präferenzordnung zuordnet, wird als *kollektive Wahlfunktion* bzw. als *Sozialwahlfunktion* oder *soziale Wohlfahrtsfunktion* bezeichnet. Eine kollektive Wahlfunktion ist eine Zuordnung F , die jedem im Definitionsbereich von F liegenden Präferenzordnungsprofil eine kollektive Präferenzordnung zuordnet. Damit die kollektive Wahlfunktion die Gruppe nicht in bestimmten Situationen „im Stich“ lässt, sollte ihr Definitionsbereich alle logisch möglichen Präferenzordnungen umfassen. Der Definitionsbereich von F ist dann unbeschränkt.

Einige der im vorangegangenen Kap. 16 beschriebenen Abstimmungsregeln sind kollektive Wahlfunktionen. So repräsentiert die Single-Vote-Regel eine kollektive Wahlfunktion, weil jedem logisch möglichen Präferenzordnungsprofil jeweils eine kollektive Präferenzordnung entspricht, die aus der Abstimmung hervorgeht: auf dem ersten Platz steht die Alternative mit der höchsten Stimmenzahl, auf dem zweiten Platz die mit der

zweithöchsten usw.; Alternativen mit der gleichen Stimmenzahl nehmen denselben Rang ein. Auch die Borda-Regel konstituiert eine kollektive Wahlfunktion mit unbeschränktem Definitionsbereich, da auch hier eine vollständige Reihung aller Alternativen aus der Abstimmung hervorgeht.

Andere Abstimmungsregeln repräsentieren zwar an sich keine kollektive Wahlfunktion, können aber eingesetzt werden, um zu einer kollektiven Wahlfunktion zu gelangen. So könnte man bei der Hare-Regel, um zu einer kollektiven Präferenzordnung zu gelangen, in den einzelnen Wahlgängen die jeweils ausgeschiedenen Alternativen auf den letzten, vorletzten, usw. Rang der kollektiven Präferenzordnung setzen. Da jedoch die Wahl beendet ist, sobald eine Alternative die absolute Mehrheit erreicht, wird es bei Anwendung dieses Verfahrens in der Regel mehr als eine Alternative auf dem zweiten Rang der kollektiven Präferenzordnung geben, ohne dass ein Vergleich dieser Alternativen untereinander stattgefunden hat (Kap. 4).

Die Mehrheitsregel (Regel des paarweisen Vergleichs) führt nicht bei jedem Präferenzordnungsprofil zu einer transitiven kollektiven Präferenzordnung, weil das Abstimmungsergebnis von der Abstimmungsreihenfolge abhängt. Die Mehrheitsregel impliziert daher grundsätzlich keine kollektive Wahlfunktion. Um die Mehrheitsregel zu einer kollektiven Wahlfunktion zu machen, müsste man ihren Definitionsbereich auf solche Präferenzordnungsprofile beschränken, bei denen die Abstimmungsreihenfolge das Abstimmungsergebnis nicht beeinflusst, also kein Zyklus in der kollektiven Präferenzordnung entsteht (Abschn. 16.4.2.3).

Wie in Kap. 16 deutlich wurde, können unterschiedliche Abstimmungsregeln zu unterschiedlichen kollektiven Präferenzordnungen führen. Entsprechend lassen sich (viele) unterschiedliche kollektive Wahlfunktionen formulieren, die zu unterschiedlichen kollektiven Präferenzordnungen führen und die a priori nicht ohne Weiteres als „unvernünftig“ bzw. „unfair“ abgelehnt werden können. Eine allgemein akzeptierte Abstimmungsregel ist für Gruppen jedoch von großer Bedeutung, damit nicht zu viel Zeit und zu viele Ressourcen in langwierige und schließlich auch unproduktive Diskussionen, von denen auch unnötige Konflikte ausgehen können, gesteckt werden. So können sich z. B. die Gesellschafter einer Kapitalgesellschaft auf eine Prioritätenliste für Forschungsprojekte oder auf eine Rangfolge der Unternehmensziele, ein politisches Gremium auf eine Kandidatenliste oder eine Rangfolge wirtschaftspolitischer Ziele, eine Berufungskommission auf eine Berufsungsliste, eine Familie auf die Reihenfolge für Urlaubsaktivitäten einigen. (Zu diesen und weiteren Beispielen siehe Bamberg et al. 2012, S. 210 f.) Eine Präferenzordnung über alle Alternativen festzulegen, kann gerade auch dann von Vorteil sein, wenn nicht sicher ist, ob die einzelnen Alternativen überhaupt realisiert werden können.

Es stellt sich damit ein komplexes Problem: Nach welcher der zahlreichen möglichen kollektiven Wahlfunktionen soll die kollektive Präferenzordnung bestimmt werden? Die kollektive Wahlfunktion soll einen „fairen“ Ausgleich der Interessen im Sinne der prozeduralen Fairness gewährleisten. Was dabei aber unter „fair“ zu verstehen ist, muss zunächst präzisiert werden. Dabei entsteht das grundsätzliche Problem, dass

Urteile darüber, welche Wahlfunktion gerecht bzw. fair ist, nicht mit wissenschaftlichen Methoden in ihrem Wahrheitsgehalt bewiesen oder widerlegt werden können. Es handelt sich um *subjektive* Werturteile, wobei die Urteile verschiedener Personen sehr unterschiedlich sein können. Urteile mögen zwar logisch aus bestimmten Anforderungen an eine Abstimmungsregel deduzierbar sein, jedoch impliziert dann die Wahl dieser Anforderungen subjektive Werturteile. Auch kann eine faire Abstimmungsregel nicht dadurch ermittelt werden, dass die Gruppenmitglieder über alternative Abstimmungsregeln abstimmen, denn diese würde zu einem infiniten Regress führen (nach welcher Abstimmungsregel wird über die Abstimmungsregeln abgestimmt?).

Ein Ausweg könnte darin bestehen, Anforderungen an eine Abstimmungsregel zu formulieren, die *alle* Gruppenmitglieder einmütig akzeptieren, und dann eine Abstimmungsregel zu verwenden, die diese Anforderungen erfüllt. Genügt nur eine der möglichen kollektiven Wahlfunktionen den gestellten Anforderungen, so wird sie für die Ableitung einer kollektiven Präferenzordnung zugrunde gelegt. Genügen hingegen *mehrere* kollektive Wahlfunktionen den Anforderungen, so ist das Problem noch immer nicht gelöst; die Gruppe muss dann entweder weitere einmütig akzeptierte Anforderungen finden, um Wahlfunktionen auszuschließen, oder sich auf einen fairen Prozess einigen, wie aus der Menge der Wahlfunktionen, die den Anforderungen genügen, eine ausgewählt werden kann.

Arrow (1963) hat indessen gezeigt, dass eine Gruppe von Entscheidern unter Umständen gar nicht so weit kommen wird, mehrere Wahlfunktionen zu identifizieren, die alle gestellten Anforderungen erfüllen. Er hat nämlich einige wenige, plausible und harmlos erscheinende Anforderungen an eine Wahlfunktion formuliert und gezeigt, dass bei mehr als zwei Alternativen *überhaupt keine* kollektive Wahlfunktion existiert, die alle Bedingungen erfüllt. Dieses grundlegende Ergebnis Arrows ist als „*Unmöglichkeitstheorem*“ berühmt geworden.

17.3 Das Unmöglichkeitstheorem von Arrow

17.3.1 Die Anforderungen Arrows an die kollektive Wahlfunktion

17.3.1.1 Darstellung

Für die folgenden Darstellungen ist folgende Sprachregelung nützlich: Betrachtet man zwei Alternativen A_x und A_y , so stimmen zwei Präferenzordnungsprofile auf $\{A_x, A_y\}$ überein, wenn die Präferenzordnungen aller Gruppenmitglieder auf $\{A_x, A_y\}$ übereinstimmen.

Dem Theorem von Arrow liegen die folgenden vier Anforderungen an die kollektive Wahlfunktion zugrunde.

Bedingung U: *Unbeschränkter Definitionsbereich*

Jedes logisch mögliche Präferenzordnungsprofil (jede logisch mögliche Kombination an Präferenzordnungen der Gruppenmitglieder) gehört zum Definitionsbereich der kollektiven Wahlfunktion.

Bedingung P: Pareto-Prinzip

Sind A_x und A_y zwei beliebige Alternativen der Menge $A = \{A_1, A_2, \dots, A_{N_A}\}$ und zieht jedes Mitglied M_m ($m = 1, 2, \dots, N_M$) die Alternative A_x der Alternative A_y (streng) vor, so soll auch die Gruppe die Alternative A_x der Alternative A_y (streng) vorziehen ($A_x P A_y$).

Bedingung I: Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen¹

Sind A_x und A_y zwei beliebige Alternativen der Menge $A = \{A_1, A_2, \dots, A_{N_A}\}$ und stimmen zwei Präferenzordnungsprofile $(O_1, O_2, \dots, O_{N_M})$ und $(O'_1, O'_2, \dots, O'_{N_M})$ auf $\{A_x, A_y\}$ überein, so müssen auch die ihnen nach der kollektiven Wahlfunktion zugeordneten kollektiven Präferenzordnungen $O = F(O_1, O_2, \dots, O_{N_M})$ und $O' = F(O'_1, O'_2, \dots, O'_{N_M})$ auf $\{A_x, A_y\}$ übereinstimmen.

Zur Verdeutlichung der Bedingung I dienen die Präferenzordnungsprofile in Tab. 17.1 und 17.2. Beide Profile stimmen auf $\{A_2, A_3\}$ überein:

- M_1 präferiert jeweils die Alternative A_2 gegenüber A_3 ,
- M_2 präferiert jeweils A_3 gegenüber A_2 ,
- M_3 ist jeweils zwischen A_2 und A_3 indifferent.

Gemäß Bedingung I muss nun gelten: Wenn die kollektive Wahlfunktion beim Präferenzordnungsprofil $(O_1, O_2, \dots, O_{N_M})$ die Alternative A_2 besser als (bzw. schlechter als oder ebenso wie) A_3 einstuft, so muss dies auch beim Präferenzordnungsprofil $(O'_1, O'_2, \dots, O'_{N_M})$ der Fall sein. Die unterschiedliche Einstufung der Alternativen A_1 und A_4 bei beiden Präferenzordnungsprofilen ist für den kollektiven Vergleich zwischen den Alternativen A_2 und A_3 irrelevant.

Tab. 17.1 Präferenzordnungsprofil (O_1, O_2, O_3)

M_1	M_2	M_3
A_1	A_4	A_4
$\langle A_2 \rangle$	$\langle A_3 \rangle$	A_1
$\langle A_3 \rangle$	$\langle A_2 \rangle$	$\langle A_2, A_3 \rangle$
A_4	A_1	

Tab. 17.2 Präferenzordnungsprofil (O'_1, O'_2, O'_3)

M_1	M_2	M_3
$\langle A_2 \rangle$	$\langle A_3, A_1 \rangle$	$\langle A_2, A_3 \rangle$
A_4	$\langle A_2 \rangle$	A_1
A_1	A_4	A_4
$\langle A_3 \rangle$		

¹Zur Darstellung der Bedingung vgl. Bamberg et al. (2012, S. 217).

Bedingung D: Diktator-Verbot

Es existiert kein Mitglied M_m^* , sodass bei jedem Alternativenpaar $A_x, A_y \in A$ die Gruppe immer dann A_x gegenüber A_y präferieren muss, wenn das Mitglied M_m^* die Alternative A_x gegenüber A_y (streng) präferiert.

17.3.1.2 Interpretation

Die *Bedingung U* fordert, dass die kollektive Wahlfunktion jedem logisch möglichen Präferenzordnungsprofil eine kollektive Präferenzordnung zuordnet. Es dürfen keine Präferenzordnungsprofile existieren, für die der Aggregationsmechanismus nicht definiert ist und mithin die Gruppe durch diesen Mechanismus „im Stich“ gelassen wird.

Die *Bedingung P* besagt: Ziehen alle Mitglieder der Gruppe die Alternative A_x der Alternative A_y (streng) vor, so soll auch die Gruppe als Ganzes die Alternative A_x (streng) vorziehen (präferieren). Dies ist äußerst plausibel: Wenn sich alle Mitglieder hinsichtlich einer Präferenz für eine Alternative einig sind, so sollte dies auch in der kollektiven Präferenzordnung zum Ausdruck kommen. Die Bedingung sichert in gewisser Weise die Autonomie der Gruppe. Es gibt keine Alternative, deren Wahl tabu ist, unabhängig von den individuellen Präferenzen.

Gemäß *Bedingung I* darf die kollektive Präferenzrelation zwischen zwei beliebigen Alternativen A_x und A_y nur von den individuellen Präferenzrelationen hinsichtlich *der beiden* Alternativen abhängen. Die kollektive Präferenzrelation bezüglich der Alternativen A_x und A_y darf also nicht davon abhängen, wie die Mitglieder die übrigen Alternativen in ihren individuellen Präferenzordnungen einstufen.

Die Bedingung I ist von allen Anforderungen Arrows wohl am meisten umstritten. Insbesondere wird eingewandt, es werde damit die Intensität der individuellen Präferenzen vernachlässigt. Zur Verdeutlichung des Arguments werden die Präferenzordnungsprofile (O_1, O_2, O_3) und (O'_1, O'_2, O'_3) in Tab. 17.1 und 17.2 betrachtet. Beim ersten Profil stuft Mitglied M_1 die Alternative A_2 unmittelbar vor A_3 ein, während es beim zweiten Profil die Alternativen A_4 und A_1 zwischen A_2 und A_3 anordnet. Dies könnte ein Indiz dafür sein, dass Mitglied M_1 beim zweiten Profil die Alternative A_2 gegenüber A_3 „stärker“ präferiert als beim ersten Profil. Mithin könnte es durchaus sinnvoll sein, wenn beim ersten Profil (z. B.) kollektive Indifferenz zwischen den Alternativen A_2 und A_3 besteht ($A_2 I A_3$), während beim zweiten Profil die Gruppe A_2 gegenüber A_3 vorzieht ($A_2 P A_3$).

Bei einer derartigen Argumentation wird jedoch die Problemstellung Arrows verkannt: Informationen über die Intensität der individuellen Präferenzen sollen gar nicht ausgenutzt werden. Gemäß der Definition der kollektiven Wahlfunktion soll die kollektive Präferenzordnung allein von den individuellen Präferenzordnungen abhängen. Die Erfassung der Intensität individueller Präferenzen würde zur Problematik des interpersonellen Nutzenvergleichs führen. Es gibt jedoch kein befriedigendes Konzept, um „Präferenzintensitäten“ Rechnung zu tragen (Abschn. 17.5.1).

Ist die Bedingung I erfüllt, so ändert sich die Präferenzordnung bezüglich der bisherigen Alternativen nicht, wenn weitere Alternativen entdeckt werden oder aus anderen Gründen zusätzlich in Betracht gezogen werden. Die neue Alternative ist irrelevant für die Bewertung der „alten“ Alternativen in der kollektiven Präferenzordnung, unabhängig davon, an welcher Stelle die neue Alternative in den individuellen Präferenzordnungen eingefügt wird. Umgekehrt ändert sich auch die Präferenzordnung bezüglich der verbleibenden Alternativen nicht, wenn sich erweist, dass bestimmte Alternativen nicht realisiert werden können oder diese aus anderen Gründen nicht mehr in Betracht gezogen werden. Wäre die Bedingung I nicht erfüllt, dann könnte ein Mitglied durch Einbringung neuer Alternativen die kollektive Präferenzordnung verändern. Solche Manipulationsmöglichkeiten sind mit einem fairen Interessenausgleich nicht vereinbar.

Die *Bedingung D* ist wohl unter allen Bedingungen Arrows am wenigsten umstritten. Sie schließt aus, dass die kollektive Wahlfunktion „diktatorisch“ ist. Ein Diktator im Sinne der Bedingung D lässt der Gruppe nur dann einen Entscheidungsspielraum zwischen zwei Alternativen, wenn er indifferent ist. Wenn er eine Alternative präferiert, ist seine Präferenz ausschlaggebend, unabhängig von den Präferenzen der anderen Mitglieder; wiederum kann von einem „fairen“ Interessenausgleich nicht die Rede sein.

Es ist zu beachten, dass an die individuellen Präferenzordnungen selbst keine Anforderungen gestellt werden, etwa in dem Sinn, dass Präferenzordnungen, die ihnen nicht genügen, nicht oder nur mit geringem Gewicht berücksichtigt werden. Andernfalls würde sich das zusätzliche Problem stellen, mit welcher Abstimmungsregel „fair“ über die Anforderungen an die individuellen Präferenzordnungen entschieden werden soll und wie „fair“ zu entscheiden ist, wenn in einer Entscheidungssituation Meinungsverschiedenheiten darüber herrschen, welche Präferenzordnungen die gestellten Anforderungen erfüllen. Insbesondere wird auch nicht gefordert, dass die Präferenzordnungen gegenüber anderen Gruppenmitgliedern „fair“ sein sollen; der „faire“ Interessenausgleich soll über den Aggregationsmechanismus vorgenommen werden.

17.3.2 Darstellung des Unmöglichkeitstheorems

Bei unbeschränktem Definitionsbereich ist schon bei kleinen Problemen die Zahl der möglichen Wahlfunktionen äußerst groß. Man würde erwarten, dass darunter mindestens eine Wahlfunktion ist, die die auf den ersten Blick als recht harmlos erscheinenden Bedingungen U, P, I und D erfüllt. Wie jedoch Arrow (1963, S. 98–100) nachgewiesen hat, gibt es *überhaupt keine* kollektive Wahlfunktion, die alle diese Bedingungen erfüllt, sofern die Anzahl der Gruppenmitglieder mindestens 2 ($N_M \geq 2$) und die Anzahl der Alternativen (einschließlich der Unterlassungsalternative) mindestens 3 ($N_A \geq 3$) beträgt. Dieses Ergebnis wird von Arrow als „general possibility theorem for social welfare functions“ (d. h. als allgemeines Möglichkeitstheorem für kollektive Wahlfunktionen) bezeichnet. Treffender dürfte jedoch die weiter verbreitete Bezeichnung *Unmöglichkeitstheorem* sein.

Das Unmöglichkeitstheorem schließt die Fälle $N_M = 1$ und $N_A \leq 2$ aus: Im Fall $N_M = 1$ besteht die „Gruppe“ nur aus einem Mitglied; das Problem der Aggregation mehrerer

individueller Präferenzordnungen zu einer kollektiven Präferenzordnung existiert dann gar nicht. Im Fall $N_A = 1$ liegt kein Entscheidungsproblem vor. Erst für $N_M \geq 2$ und $N_A \geq 2$ ergibt sich ein *kollektives* Entscheidungsproblem. Der Fall $N_A = 2$ bereitet jedoch – unabhängig von der Mitgliederzahl N_M ($N_M \geq 2$) – noch keine Probleme. Bei zwei Alternativen sind die Bedingungen U, P, I und D miteinander zu vereinbaren. Eine kollektive Wahlfunktion, die diese Bedingungen erfüllt, ist die Mehrheitsregel (Arrow 1963, S. 46 f.).

17.4 Klassische Abstimmungsregeln im Licht des Unmöglichkeitstheorems

17.4.1 Single-Vote-Regel

Um das Unmöglichkeitstheorem näher zu verdeutlichen, werden einige der in Kap. 16, Abschn. 16.4.2, dargestellten klassischen Abstimmungsregeln daraufhin untersucht, ob sie kollektive Wahlfunktionen implizieren und die Bedingungen U, P, I und D erfüllen.

Die *Single-Vote-Regel* impliziert eine kollektive Wahlfunktion, die die Bedingung U (unbeschränkter Definitionsbereich) erfüllt. Sie führt bei jedem logisch möglichen Präferenzordnungsprofil zu einer kollektiven Präferenzordnung: Auf dem ersten Platz steht jeweils die Alternative mit der höchsten Stimmenzahl, auf dem zweiten Platz die mit der zweithöchsten, usw.; Alternativen mit derselben Stimmenzahl werden als kollektiv indifferent eingestuft.

Die *Single-Vote-Regel* erfüllt zwar auch die Bedingung D (Diktator-Verbot), verletzt jedoch die Bedingung P (Pareto-Prinzip). Zum Beweis wird das Präferenzordnungsprofil in Tab. 17.3 betrachtet.

Bei diesem Präferenzordnungsprofil erhalten die Alternativen folgende Stimmen:

$$A_1 \rightarrow 3, A_2 \rightarrow 1, A_3 \rightarrow 0, A_4 \rightarrow 0.$$

Mithin entsteht die kollektive Präferenzordnung:

A_1
 A_2
 A_3, A_4 .

Die Alternativen A_3 und A_4 erscheinen als sozial indifferent. Da jedes Mitglied die Alternative A_3 der Alternative A_4 vorzieht, müsste jedoch nach der Bedingung P die

Tab. 17.3 Präferenzordnungsprofil 1

M_1	M_2	M_3	M_4
A_1	A_1	A_1	A_2
A_2	A_2	A_2	A_1
A_3	A_3	A_3	A_3
A_4	A_4	A_4	A_4

Tab. 17.4 Präferenzordnungsprofil 2

M ₁	M ₂	M ₃	M ₄
A ₃	A ₃	A ₃	A ₂
A ₁	A ₁	A ₁	A ₃
A ₂	A ₂	A ₂	A ₁
A ₄	A ₄	A ₄	A ₄

Alternative A₃ in der kollektiven Präferenzordnung *vor* der Alternative A₄ stehen. Die Bedingung P ist folglich verletzt.

Auch die Bedingung I (Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen) ist bei der *Single-Vote*-Regel verletzt. Zum Beweis wird dem Präferenzordnungsprofil 1 (Tab. 17.3) das Präferenzordnungsprofil 2 in Tab. 17.4 gegenübergestellt.

Hier entsteht nach der *Single-Vote*-Regel folgende kollektive Präferenzordnung:

A₃

A₂

A₁, A₄.

Da für beide Tabellen die Präferenzordnungsprofile 1 und 2 auf {A₃, A₄} übereinstimmen (bei beiden Profilen zieht jedes Mitglied die Alternative A₃ der Alternative A₄ streng vor), müssten auch die entsprechenden kollektiven Präferenzordnungen auf {A₃, A₄} übereinstimmen. Dies ist jedoch nicht der Fall: Beim Präferenzordnungsprofil 1 werden die Alternativen A₃ und A₄ als indifferent eingestuft, während beim Profil 2 die Alternative A₃ in der kollektiven Präferenzordnung einen höheren Rang einnimmt als A₄; die Bedingung I ist mithin verletzt.

17.4.2 Mehrheitsregel (Regel des paarweisen Vergleichs)

Nach der Mehrheitsregel gilt für zwei beliebige Alternativen A_x und A_y ∈ A:

$$\begin{cases} A_x P A_y, & \text{falls } N_{xy} > N_{yx}, \\ A_x I A_y, & \text{falls } N_{xy} = N_{yx}, \\ A_y P A_x, & \text{falls } N_{xy} < N_{yx} \end{cases} \quad (17.1)$$

Dabei bezeichnet N_{xy} (bzw. N_{yx}) die Zahl der Mitglieder, in deren Präferenzordnung die Alternative A_x vor A_y (bzw. A_y vor A_x) steht.²

²Es wird hier wieder davon ausgegangen, dass kein Mitglied indifferent zwischen zwei oder mehr Alternativen ist. Die Vorgehensweise zur Ermittlung der kollektiven Präferenzordnung und die folgenden Ausführungen gelten aber auch für den Fall, dass Mitglieder, die indifferent zwischen zwei Alternativen sind, sich der Stimme enthalten, und Stimmenthaltungen nicht berücksichtigt werden.

Wie bereits gezeigt wurde (Kap. 16, Abschn. 16.4.2.3)³, führt die Mehrheitsregel nicht bei jedem Präferenzordnungsprofil zu einer kollektiven Präferenzordnung. Die Mehrheitsregel stellt folglich nur dann eine kollektive Wahlfunktion dar, wenn ihr Definitionsbereich entsprechend eingeschränkt wird. Dann ist aber die Bedingung U verletzt.

Die Mehrheitsregel erfüllt jedoch die Bedingung P (Pareto-Prinzip): Wenn jedes Mitglied die Alternative A_x der Alternative A_y (streng) vorzieht, gilt $N_{xy} = N_M$ und $N_{yx} = 0$, sodass gemäß (17.1) auch die Gruppe die Alternative A_x der Alternative A_y vorzieht ($A_x P A_y$).

Die Mehrheitsregel erfüllt auch die Bedingung I (Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen): Stimmen zwei Präferenzordnungsprofile auf $\{A_x, A_y\}$ überein, so sind für beide Profile sowohl N_{xy} als auch N_{yx} jeweils gleich groß. Folglich müssen gemäß (17.1) auch die kollektiven Präferenzordnungen, die den beiden Profilen entsprechen, auf $\{A_x, A_y\}$ übereinstimmen.

Wie unmittelbar plausibel ist, erfüllt die Mehrheitsregel auch die Bedingung D (Verbot eines Diktators).

17.4.3 Borda-Regel

Die Borda-Regel impliziert eine kollektive Wahlfunktion, die die Bedingung U erfüllt. Sie führt bei jedem logisch möglichen Präferenzordnungsprofil zu einer kollektiven Präferenzordnung: Auf dem ersten Platz steht jeweils die Alternative mit der höchsten Stimmenzahl, auf dem zweiten die mit der zweithöchsten, usw.; Alternativen mit derselben Stimmenzahl werden als kollektiv indifferent eingestuft. Die Borda-Regel erfüllt auch die Bedingungen D und P.

Die Bedingung I ist jedoch verletzt. Zum Beweis werden die Präferenzordnungsprofile in Tab. 17.5 und 17.6 betrachtet.

Beide Profile stimmen auf $\{A_1, A_3\}$ überein. Diese Übereinstimmung gilt jedoch nicht für die kollektiven Präferenzordnungen, die diesen Profilen entsprechen. Auf die einzelnen Alternativen entfallen die folgenden Stimmenzahlen:

Profil 3	Profil 4
$A_1 \rightarrow 2+2+3=7$	$A_1 \rightarrow 2+2+3=7$
$A_2 \rightarrow 1+1+2=4$	$A_2 \rightarrow 1+1+1=3$
$A_3 \rightarrow 3+3+1=7$	$A_3 \rightarrow 3+3+2=8$

³Für das Präferenzordnungsprofil in Tab. 16.4 (Kap. 16, Abschn. 16.4.2.1) z. B. ergibt sich der folgende Zyklus: $A_1 P A_2 P A_3 P A_1$.

Tab. 17.5 Präferenz-
ordnungsprofil 3

M ₁	M ₂	M ₃
⟨A ₃ ⟩	⟨A ₃ ⟩	⟨A ₁ ⟩
⟨A ₁ ⟩	⟨A ₁ ⟩	A ₂
A ₂	A ₂	⟨A ₃ ⟩

Tab. 17.6 Präferenz-
ordnungsprofil 4

M ₁	M ₂	M ₃
⟨A ₃ ⟩	⟨A ₃ ⟩	⟨A ₁ ⟩
⟨A ₁ ⟩	⟨A ₁ ⟩	⟨A ₃ ⟩
A ₂	A ₂	A ₂

Mithin besteht für das Präferenzordnungsprofil 3 die kollektive Indifferenz $A_1 I A_3$ (beide Alternativen erhalten 7 Stimmen), für das Profil 4 jedoch die Präferenz $A_3 P A_1$ (A_3 erhält mehr Stimmen als A_1). Die Borda-Regel verletzt somit die Bedingung I.

17.4.4 Hare-Regel

Um mit der Hare-Regel zu einer kollektiven Präferenzordnung zu gelangen, könnte man in den einzelnen Wahlgängen die jeweils ausgeschiedenen Alternativen auf den letzten, vorletzten, usw. Rang der kollektiven Präferenzordnung setzen. Da jedoch die Wahl beendet ist, sobald eine Alternative die absolute Mehrheit erreicht, wird es nach diesem Verfahren in der Regel mehr als eine Alternative auf dem zweiten Rang der kollektiven Präferenzordnung geben, obwohl gar nicht gesagt ist, dass Indifferenz zwischen diesen Alternativen besteht. Die so ermittelte kollektive Präferenzordnung würde also gegen die Bedingung P verstoßen.

17.5 Grenzen eines Auswegs aus dem Dilemma

17.5.1 Mögliche Einschränkungen der Anforderungen Arrows

Ein Ausweg aus dem von Arrow aufgezeigten Dilemma könnte sich dadurch ergeben, dass eine oder mehrere der Anforderungen Arrows an die kollektive Wahlfunktion gelockert werden.

Die Anforderung D zu modifizieren, ist allerdings unmöglich, ohne damit die demokratische Willensbildung in der Gruppe an sich infrage zu stellen. Es ist unplausibel davon auszugehen, dass die Gruppe dies einmütig als ein faires Vorgehen akzeptieren würde.

Auch eine Modifikation der Anforderung P wäre problematisch. Nach dieser Bedingung muss die kollektive Wahlfunktion zum Ausdruck bringen, ob sich alle Mitglieder hinsichtlich einer Alternative einig sind. Zweck der kollektiven Wahlfunktion ist es, eine Rangfolge unter allen Alternativen für die Gruppe zu erstellen und daraufhin auf der Basis dieser Rangfolge zu entscheiden. Eine kollektive Wahlfunktion ergibt keinen Sinn, wenn die Gruppe über die Alternativen gar nicht nach dieser Rangfolge entscheidet und statt dessen z. B. zum Abstimmungsprozess zurückkehrt, wenn sich zeigt, dass die erste Präferenz der Gruppe nicht (mehr) realisiert werden kann. Es ist daher nicht plausibel anzunehmen, dass die Gruppenmitglieder einen Abstimmungsprozess als fair empfinden, aus dem die Einigkeit der Gruppe in der Beurteilung einer Alternative gar nicht hervorgeht.

Wie bereits erläutert wurde (Abschn. 17.3.1.2), impliziert eine Verletzung der Bedingung I, d. h. der Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen, dass die kollektive Wahlfunktion Unterschiede in den Präferenzintensitäten der Gruppenmitglieder zum Ausdruck bringt: Würde man eine irrelevante Alternative berücksichtigen und diese in der Präferenzordnung eines Gruppenmitglieds zwischen zwei anderen Alternativen A_x und A_y stehen, bei einem anderen Gruppenmitglied hingegen nicht zwischen A_x und A_y , so würde z. B. bei Anwendung des Borda-Kriteriums die irrelevante Alternative die Stimmenzahl für A_x bzw. A_y verändern, weil das eine Gruppenmitglied einen größeren Abstand zwischen A_x und A_y sieht als das andere. Damit kommt es implizit zum interpersonellen Nutzenvergleich zwischen den beiden Gruppenmitgliedern.

Die Berücksichtigung von Präferenzintensitäten und damit eine entsprechende Modifikation der Bedingung I mögen zunächst plausibel erscheinen. Angenommen, Mitglied M_1 erziele nur einen „geringen Nachteil“, wenn statt A_x die Alternative A_y gewählt wird, während Mitglied M_2 einen „enormen Vorteil“ erzielt. Warum soll diese Asymmetrie in der Bewertung der Alternativen nicht berücksichtigt werden? Das Problem besteht darin, dass die Berücksichtigung von individuellen Präferenzintensitäten interpersonelle Nutzenvergleiche erfordert, es aber kein Konzept für einen sinnvollen derartigen Vergleich gibt (vgl. Pattanaik 1971, S. 146–166). Hinzu kommt die Problematik strategischen Verhaltens, denn um „Präferenzintensitäten“ zu berücksichtigen, müssen sie geäußert werden, und dies ermöglicht Über- oder Untertreibungen. Beide Probleme machen es unplausibel, dass eine Gruppe eine Abstimmungsregel, die zu interpersonellen Nutzenvergleichen führt, als fair wahrnehmen und einmütig akzeptieren wird.

Gleichwohl existieren Abstimmungsregeln, die höhere Anforderungen als nur die Angabe von ordinalen Präferenzen bezüglich der Alternativenmenge stellen und bei denen versucht wird, die „Intensität“ von Präferenzen bei der Stimmabgabe eines Mitglieds zu berücksichtigen. Hierzu zählt z. B. *Approval Voting* (Wahl durch Zustimmung; Brams und Fishburn 2007): Jedes Mitglied kann selbst bestimmen, wie viele Stimmen es vergeben möchte, dabei darf allerdings pro Alternative höchstens eine Stimme vergeben werden. Jedes Mitglied bestimmt hierzu eine Menge „akzeptabler“ Alternativen. Dabei muss es in der Lage sein, anhand eines Anspruchsniveaus, das mindestens erzielt werden soll, zu entscheiden, welche Alternativen zu dieser Menge gehören. Um ein Anspruchsniveau

festlegen zu können, mag es hilfreich sein, auch die Unterschiede zwischen den einzelnen Alternativen bewerten zu können. So wird beispielsweise ein kleiner Unterschied zwischen den ersten beiden Alternativen in der Präferenzordnung möglicherweise dazu führen, dass ein Mitglied beiden Alternative jeweils eine Stimme gibt. Wird der Unterschied als groß empfunden, mag das Mitglied dagegen nur der erstplatzierten Alternative eine Stimme geben. Bei Anwendung der Abstimmungsregel Approval Voting ist die Alternative gewählt, die die meisten Stimmen erhält. Diese Abstimmungsregel lässt sich auch wieder als kollektive Wahlfunktion interpretieren, bei der die Alternativen nach der Stimmenzahl in eine Reihenfolge gebracht werden. Ungeachtet dessen bleibt das beschriebene Problem des interpersonellen Nutzenvergleichs bestehen.

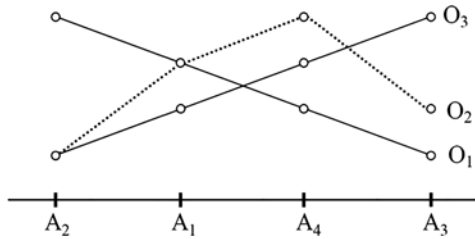
17.5.2 Eingipfligkeit der individuellen Präferenzordnungen

Im Gegensatz zu den Bedingungen P, I und D bezieht sich die Bedingung U nicht auf Anforderungen, wie die Abstimmungsregel die Präferenzen der Gruppenmitglieder aggregieren soll, sondern stellt statt dessen eine Anforderung bezüglich der Präferenzen selbst: Nach der Bedingung U muss der Definitionsbereich der kollektiven Wahlfunktion alle logisch möglichen Präferenzordnungsprofile einschließen.

Für den Beweis des Unmöglichkeitstheorems kann dann auch auf Kombinationen sehr konträrer individueller Präferenzordnungen zurückgegriffen werden, wodurch gerade der Beweis gelingt. Nun sind aber bei vielen Gruppen gewisse „Ähnlichkeiten“ zwischen den individuellen Präferenzordnungen der Mitglieder zu erwarten, sodass möglicherweise die Bedingung U eine zu harte Anforderung an die kollektive Wahlfunktion stellt. Ähnlichkeiten können gerade ein Grund dafür sein, dass man sich der Gruppe anschließt bzw. in ihr verbleibt. Es mag daher naheliegen, den Definitionsbereich der kollektiven Wahlfunktion einzuschränken, also die Bedingung U durch eine Bedingung zu ersetzen, bei der nur eine Teilmenge der logisch möglichen Präferenzordnungsprofile (der Kombinationen an individuellen Präferenzordnungen) relevant ist. Einschränkungsmöglichkeiten, die zu Möglichkeitstheoremen führen, beschreiben z. B. Arrow (1963, S. 75 ff.), Inada (1964) und Schauenberg (1978, S. 154–252).

Eine vielbeachtete Einschränkung, die zu einem Möglichkeitstheorem führt, ist die auf Black (1958) zurückgehende Bedingung der „Eingipfligkeit“ (single peakedness condition). Um den Begriff der Eingipfligkeit zu erläutern, betrachten wir ein Beispiel mit vier Alternativen und drei Mitgliedern, dargestellt in Abb. 17.1, in der entlang der Abszisse die Alternativen in einer bestimmten Reihenfolge angeordnet sind. Für jede Präferenzordnung sind bei ordinaler Skalierung die Präferenzwerte für die Alternativen eingetragen und die entsprechenden Punkte durch einen Polygonzug verbunden. Ein Präferenzordnungsprofil genügt der Bedingung der Eingipfligkeit, wenn mindestens eine Anordnung der Alternativen existiert, bei der für jedes Gruppenmitglied der Polygonzug genau einen Gipfel aufweist und damit entweder gar nicht oder genau einmal die Richtung (von steigend auf fallend) wechselt. Im Beispiel der Abb. 17.1 gilt dies für die dargestellte Anordnung der

Abb. 17.1 Zur Bedingung der Eingipfligkeit



Alternativen, das dazugehörige Präferenzordnungsprofil erfüllt mithin die Bedingung der Eingipfligkeit.

Hier hat für jede individuelle Präferenzordnung (dargestellt durch eine beliebige ordinale Präferenzfunktion) der zugehörige Polygonzug genau einen „Gipfel“. Zum Beispiel nimmt in der Präferenzordnung O_2 des Mitglieds M_2 die Alternative A_4 den ersten Rang ein. Diese Alternative wird A_1 und A_3 vorgezogen (die untereinander auch denselben Rang einnehmen könnten, ohne dass die Bedingung der Eingipfligkeit verletzt wäre). A_1 wird ihrerseits A_2 vorgezogen.

Ist die Bedingung der Eingipfligkeit erfüllt, so ist es nicht mehr nötig, von der kollektiven Wahlfunktion zu fordern, dass ihr Definitionsbereich unbeschränkt sei. Anstelle der Bedingung U kann die Bedingung U^* treten, die die Menge der möglichen Präferenzordnungsprofile entsprechend einschränkt:

Bedingung U^* : Zum Definitionsbereich der kollektiven Wahlfunktion gehören nur Präferenzordnungsprofile, die der Bedingung der Eingipfligkeit genügen.

Diese Einschränkung überwindet das Unmöglichkeitstheorem: Streicht man die gleichgültigen Mitglieder, also diejenigen, die bezüglich aller Alternativen und somit auch bei jedem paarweisen Vergleich indifferent sind, aus dem Präferenzordnungsprofil und verbleibt eine *ungerade* Mitgliederzahl, dann ist die Mehrheitsregel (Regel des paarweisen Vergleichs) ein Aggregationsmechanismus, der die Bedingungen U^* , P , I und D simultan erfüllt (vgl. z. B. Arrow 1963, S. 78 f.).

In Abschn. 17.4.2 wurde bereits gezeigt, dass die Mehrheitsregel auch bei unbeschränktem Definitionsbereich die Bedingungen P , I und D erfüllt. Die Mehrheitsregel verletzt jedoch bei unbeschränktem Definitionsbereich die Transitivitätsbedingung, sodass sie keine kollektive Wahlfunktion im definierten Sinne darstellt. Dieser Aggregationsmechanismus führt dagegen bei ungerader Mitgliederzahl zwingend zu einer kollektiven Präferenzordnung, wenn nur individuelle Präferenzordnungen relevant sind, die der Bedingung U^* der Eingipfligkeit genügen. Im Beispiel der Abb. 17.1 ergibt sich die kollektive Präferenzordnung $A_4 P A_1 P A_3 P A_2$: A_4 gewinnt den paarweisen Vergleich gegen jede andere Alternative, A_1 schlägt A_2 und A_3 , A_3 gewinnt den paarweisen Vergleich mit A_2 . Die Eingipfligkeit wäre bei der Darstellung in Abb. 17.1 z. B. auch dann erfüllt, wenn Mitglied M_2 indifferent zwischen A_1 und A_3 wäre und beide Alternativen gegenüber A_2 präferierte. Dann ergäbe sich die kollektive Präferenzordnung

$A_4 P A_1 I A_3 P A_2$. Dabei wird hier davon ausgegangen, dass sich M_2 beim paarweisen Vergleich zwischen A_1 und A_3 der Stimme enthält, sodass die Wahl zwischen beiden Alternativen unentschieden ausgeht und beide als sozial indifferent eingestuft werden.

Arrow (1963, S. 80) hat auch gezeigt, dass die Voraussetzung einer ungeraden Anzahl nicht gleichgültiger Mitglieder nicht überflüssig ist. Zur Verdeutlichung wird das Präferenzordnungsprofil der Tab. 17.7 betrachtet.

Dieses Präferenzordnungsprofil erfüllt mit der Anordnung A_1, A_2, A_3 die Bedingung der Eingipfligkeit, aber nach der Mehrheitsregel ergibt sich:

$$A_3 I A_1 \text{ und } A_1 I A_2, \text{ aber } A_2 P A_3 \text{ (und nicht } A_2 I A_3).$$

Die Mehrheitsregel verletzt hier trotz Eingipfligkeit des Präferenzordnungsprofils die Transitivitätsbedingung und stellt somit keine kollektive Wahlfunktion dar.

Die Bedingung der Eingipfligkeit kann z. B. im politischen Bereich durchaus plausibel sein. So mögen im Beispiel der Abb. 17.1 M_1, M_2 und M_3 „Wähler“ (oder homogene Wählergruppen) repräsentieren, die eine kollektive Präferenzordnung über die Kandidaten A_1, A_2, A_3 und A_4 erstellen wollen, die sich durch ihren politischen Standpunkt unterscheiden. A_2 steht am weitesten „links“ und A_3 am weitesten „rechts“. Der Wähler M_1 ist „linksgerichtet“; in seiner Präferenzordnung (O_1) nimmt ein Kandidat einen umso höheren Rang ein, je weiter „links“ er steht. Beim Wähler M_3 verhält es sich umgekehrt. Der Wähler M_2 ist „liberal“; Spitzenreiter seiner Präferenzordnung ist der Kandidat A_4 . Der Kandidat rechts von A_4 nimmt einen niedrigeren Rang ein, ein Kandidat links von A_4 nimmt einen umso niedrigeren Rang ein, je weiter sein Standpunkt von dem des Kandidaten A_4 entfernt ist. Die „Ähnlichkeit“ bei der Erstellung der Präferenzordnungen besteht hier darin, dass für jeden Wähler bzw. jede Wählergruppe eine bevorzugte politische Position existiert und die Alternativen hierzu umso schlechter bewertet werden, je weiter sie von dieser gewünschten Position entfernt sind.

Im betriebswirtschaftlichen Bereich dürfte (insbesondere bei größerer Zahl von Gruppenmitgliedern) die Bedingung der Eingipfligkeit kaum erfüllt sein. Ist sie verletzt, so kann sich nach der Mehrheitsregel eine intransitive kollektive Präferenzrelation ergeben; die Mehrheitsregel ist dann keine kollektive Wahlfunktion. Es stellt sich generell das Problem, welche Einschränkungen des Definitionsbereichs der kollektiven Wahlfunktion für betriebswirtschaftliche Entscheidungen in der Realität sinnvoll sind. Die Bedingung der Eingipfligkeit ist zwar hinreichend dafür, dass die Mehrheitsregel zu einem Möglichkeitstheorem führt, aber nicht notwendig. (Vgl. hierzu die Bedingung U^{**} in Abschn. 17.6.3.)

Tab. 17.7 Präferenzordnungsprofil

O_1	O_2
A_1	A_2
A_2	A_3
A_3	A_1

In der Literatur wird auch versucht, die anderen Anforderungen von Arrow zu modifizieren, bisher allerdings mit geringem Erfolg (vgl. z. B. den Überblick bei Bamberg et al. 2012, S. 219–223).

17.5.3 Implikationen

Wie verdeutlicht wurde, kann eine sinnvolle Modifikation der Bedingungen von Arrow allenfalls für die Bedingung U vorgenommen werden. Gruppen erwägen oft nur solche Alternativen, bei denen ihre Präferenzordnungen trotz Konflikten „ähnlich“ sind; die Bedingung U stellt dann eine zu harte Anforderung dar. Je nach den konkreten Entscheidungsproblemen kann eine Einschränkung der Bedingung U maßgeblich sein, für die ein Möglichkeitstheorem gilt, d. h. eine Abstimmungsregel existiert, die bei jedem real möglichen Präferenzordnungsprofil zu einer kollektiven Präferenzordnung führt und die Bedingungen D, P und I erfüllt sind. Dabei ist zu beachten: Ist die Abstimmungsregel nicht nur für ein einzelnes Entscheidungsproblem maßgeblich, sondern auf „Dauer“ für alle zu lösenden Entscheidungsprobleme, so soll die Einschränkung für alle diese Entscheidungssituationen relevant sein.

Ähnlichkeiten zwischen Präferenzordnungen können auch aus individuellen Fairnessurteilen resultieren. Mitglieder mögen es z. B. für unfair halten, wenn andere ständig überstimmt werden. Sie modifizieren in Entscheidungssituationen ihre Präferenzordnungen aus sozialen oder altruistischen Gründen in deren Sinn (Kap. 2, Abschn. 2.4.2.3) und versuchen, im Kommunikationsprozess der Gruppe auch weitere Präferenzordnungen entsprechend zu beeinflussen (Kap. 16, Abschn. 16.3.3). Mit solchem Verhalten ist insbesondere in kleineren Gruppen zu rechnen, deren Mitglieder einander kennen und schätzen und auf Dauer miteinander kooperieren (wollen), weniger jedoch in anonymen Großgruppen mit hoher Fluktuationsrate, in denen man die Präferenzordnungen anderer kaum kennt und der Einzelne eine geringe Chance hat, Abstimmungsergebnisse zu beeinflussen. Typische Beispiele für beide Fälle sind die Eigentümergruppen von Unternehmen: Im ersten Fall die Partner einer Personengesellschaft, im zweiten Fall die Aktionäre einer großen Aktiengesellschaft (Abschn. 17.6).

Für die Wahl von Abstimmungsregeln und die Bildung individueller und kollektiver Präferenzordnungen können neben dem oder gar anstelle des Ziels des „fai-
ren“ Interessenausgleichs auch andere, „übergeordnete“ Kriterien Bedeutung haben. So mag bei Entscheidungen in Unternehmen die „ökonomische Effektivität“ über einem Interessenausgleich stehen, oder bei (partei-)politischen Entscheidungen die „Geschlossenheit“ (eine sehr hohe Zustimmung in einer Wahl) wichtiger sein, als der Stimme jedes Mitglieds mit abweichenden Präferenzen Ausdruck zu verleihen.

17.6 Demokratische Legitimation von Unternehmenszielen im Lichte des Unmöglichkeitstheorems

17.6.1 Die Bedeutung der Operationalität kollektiver Ziele

Explizite Abstimmungen über Alternativen mit einer bestimmten Abstimmungsregel erübrigen sich, wenn aus ihr ein *operationales* Ziel deduziert werden kann, das bei allen möglichen Präferenzordnungsprofilen jeweils zu derselben kollektiven Präferenzordnung bzw. Entscheidung führt wie die Abstimmungsregel. Damit aber ein Ziel durch die Gruppenmitglieder einmütig als fair akzeptiert wird, muss dies auch für die Abstimmungsregel gelten, mit der das Ziel kompatibel ist, d. h. es muss *demokratisch legitimiert* sein. Die demokratische Legitimation eines kollektiven Ziels hat deshalb große praktische Bedeutung, weil es ein stabiles Gleichgewicht erzeugt; kein Gruppenmitglied kann einen Vorteil für den Fall erwarten, dass Entscheidungen gemäß diesem Ziel nicht akzeptiert werden und die Gruppenmitglieder mit der zugrunde liegenden („fainen“) Abstimmungsregel abstimmen; es wird dann dieselbe kollektive Präferenzordnung gebildet bzw. dieselbe Entscheidung getroffen. Zudem kann ein als fair akzeptiertes Ziel die Entscheidungsprozesse erheblich vereinfachen, wenn die Gruppenmitglieder die Entscheidungen nicht selbst treffen (wollen oder können), sondern an Entscheidungsträger delegieren.

Notwendige Voraussetzung für die demokratische Legitimation eines kollektiven Ziels ist aber nicht nur, dass es akzeptiert wird, sondern auch, dass es *operational* ist, also unter „vertretbarem“ Aufwand praktisch angewendet werden kann. (Zur Bedeutung von Operationalität vgl. auch Kap. 2, Abschn. 2.4.4.) Ist das Ziel nicht operational, können in der Gruppe ständig Konflikte darüber entstehen, welche Entscheidungen mit dem Ziel im Einklang steht, sodass jeweils wieder explizite Abstimmungen notwendig werden. Werden andererseits die Entscheidungen an einen Entscheidungsträger delegiert und ist das Ziel nicht operational, so gibt ihm das Ziel keine eindeutige Orientierung für seine Entscheidungen; ein praktisch inhaltsleeres Ziel ist mit keiner Abstimmungsregel kompatibel. Aber auch ein präzises Ziel ist nicht operational, wenn das Treffen zielführender Entscheidungen Informationen erfordert, die vom Entscheidungsträger nicht beschafft oder nicht verarbeitet werden können. Es werden dann (willkürliche) Vereinfachungen notwendig, die aus Sicht der Gruppenmitglieder den Prozess der Entscheidungsfindung ebenso unfair werden lassen wie die Verwendung eines operationalen Ziels, das nicht mit der Abstimmungsregel kompatibel ist.

Bei einem nicht operationalen Ziel hat bei Delegation von Entscheidungen der betreffende Entscheidungsträger außerdem einen weiten Ermessensspielraum für die Befolgung persönlicher Ziele. Die Wahl persönlich präferierter Alternativen kann er damit rechtfertigen, dass sie aus *seiner Sicht* bezüglich des vorgegebenen Ziels optimal sind. Bei fehlender Operationalität können die Gruppenmitglieder die Argumentation kaum widerlegen. Auch eine von ihnen eingesetzte Kontrollinstanz hat bei fehlender

Operationalität nur sehr begrenzte Kontrollmöglichkeiten. Im Übrigen hat sie dann auch selbst einen weiten Spielraum für die Befolgung persönlicher Ziele.

Wenn kein Ziel demokratisch legitimierbar ist, kann es trotzdem gute Gründe geben, ein *operationales* Ziel zu wählen, das effektiv in dem Sinn ist, dass es in Bezug auf alle möglichen Entscheidungssituationen tendenziell zu einer guten Gesamtauswahl an Alternativen führt. Bei fehlender demokratischer Legitimation erzeugt ein solches Ziel jedoch kein stabiles Gleichgewicht, sodass entgegen seiner ursprünglichen Wahl immer wieder Konflikte um explizite Abstimmungen und Abstimmungsregeln resultieren können.

17.6.2 Zielkonflikte zwischen Gesellschaftern eines Unternehmens

Im Folgenden sollen die Darstellungen für Entscheidungen über die Maßnahmen in einem Unternehmen vom Standpunkt der Gruppe der Eigentümer (die Gruppe der Gesellschafter oder Aktionäre bzw. Shareholder) vertieft und erweitert werden. Damit wird von vorne herein ausgeschlossen, dass die unternehmerischen Maßnahmen aus einem Willensbildungsprozess hervorgehen, an dem auch andere Interessengruppen (andere sogenannte Stakeholder) der Unternehmung explizit beteiligt werden. Mit anderen Worten: Es geht bei den folgenden Darstellungen nicht um eine Diskussion der Shareholder- versus Stakeholder-Orientierung der Unternehmenspolitik, sondern allein darum zu untersuchen, wie die Eigentümergruppe (die Gruppe der Shareholder) zu einer kollektiven Wahlfunktion bzw. zu einem einmütig akzeptierten Unternehmensziel gelangen kann.

Wie in den Kap. 14 und 15 gezeigt wurde, hat der Kapitalmarkt große Bedeutung für die Existenz eines von allen Gesellschaftern eines Unternehmens einmütig akzeptierten Unternehmensziels: Es lautet Marktwertmaximierung, wenn alle Gesellschafter nur finanzielle Präferenzen haben und der Kapitalmarkt vollkommen und vollständig ist. Dann bestehen zwischen den Gesellschaftern keine Zielkonflikte in Bezug auf Entscheidungen im Unternehmen. Umgekehrt führen die Existenz nichtfinanzieller Ziele sowie Kapitalmarktunvollkommenheiten und/oder -unvollständigkeiten zu potenziellen Interessenkonflikten zwischen den Gesellschaftern.

Nichtfinanzielle Ziele eines Gesellschafters lassen sich dadurch abbilden, dass der Gesellschafter den Alternativen positive oder negative *Eigenwerte* beimisst, die monetär (in €) gemessen werden können. Der Eigenwert einer Alternative für einen Gesellschafter kann „*extrinsisch*“ und/oder „*intrinsisch*“ sein. Ein intrinsischer Eigenwert liegt in der Alternative selbst begründet. Die Alternative als solche (z. B. der Erhalt von Arbeitsplätzen, die Verbesserung der Produktqualität, die Wahl eines Standortes oder der persönliche Arbeits-einsatz in Verbindung mit der Realisation von Alternativen) bietet dem Gesellschafter eigenständige Vorteile oder Nachteile. Ein extrinsischer Eigenwert einer Alternative dagegen resultiert aus ihrem Einfluss auf die Zielgrößen des Gesellschafters außerhalb der Unternehmenssphäre. Z. B. könnte das Ansehen eines Gesellschafters in der Öffentlichkeit davon abhängen, welche Maßnahmen im Unternehmen realisiert werden. Auch wenn

nach dem Kriterium der Marktwertmaximierung Arbeitsplätze nicht erhalten werden sollten, mag ein Gesellschafter deren Erhalt befürworten, weil er ihn als solchen befürwortet (intrinsischer Eigenwert), oder weil er um sein Ansehen fürchtet, wenn er mit der Entscheidung zum Stellenabbau in Verbindung gebracht wird (extrinsischer Eigenwert).

Unvollständigkeiten und/oder Unvollkommenheiten des Kapitalmarktes führen ebenfalls dazu, dass die Marktwertmaximierung kein einmütig akzeptiertes Unternehmensziel mehr ist. Auch ohne dass die Gesellschafter unterschiedliche Eigenwerte für die Alternativen haben, können Interessenkonflikte entstehen, weil die Überschüsse der Alternativen unterschiedliche Eigenschaften (Unsicherheit, zeitliche Struktur) haben, nicht beliebig kostenlos transformierbar sind und daher von Gesellschaftern mit unterschiedlichen Präferenzen unterschiedlich bewertet werden. Die subjektive Bewertung einer Alternative durch einen Gesellschafter weicht dann vom Marktwert der Alternative ab.

Bei Interessenkonflikten aufgrund unterschiedlicher Eigenwerte oder aufgrund von Unterschieden in den Abweichungen zwischen subjektiven finanzwirtschaftlichen Werten und anteiligen Kapitalwerten (Marktwert nach Abzug der Anschaffungsauszahlung) ist die Marktwertmaximierung kein selbstverständliches Unternehmensziel mehr. Bei der folgenden Analyse des Zieles der Marktwertmaximierung bezeichnen wir solche Abweichungen als „*Modifikationswerte*“. Der Modifikationswert eines Gesellschafters für eine Alternative kann null, positiv oder negativ sein. Der entsprechende Präferenzwert stimmt mit der Summe aus seinem anteiligen Kapitalwert und seinem Modifikationswert überein. Die Modifikationswerte verschiedener Gesellschafter für dieselbe Alternative können unterschiedliche Vorzeichen und Beträge aufweisen: Gesellschafter können Alternativen positive Eigenwerte beimessen, andere negative. Für Gesellschafter kann die Differenz zwischen anteiligem Marktwert und subjektivem finanzwirtschaftlichem Wert positiv sein, für andere negativ.

17.6.3 Zur demokratischen Legitimation der Marktwertmaximierung

Trotz möglicher Interessenkonflikte ist die Praxis vor allem großer börsennotierter Gesellschaften dadurch gekennzeichnet, dass sich die Unternehmensleitung in der Regel explizit zum Ziel der Marktwertmaximierung bekennt. Dieses Ziel ist auch bei Interessenkonflikten in dem beschriebenen Sinn demokratisch legitimiert, wenn es im Einklang mit einer Abstimmungsregel steht, die die Bedingungen D, P und I von Arrow erfüllt und mit der bei einer Abstimmung durch die Gesellschafter über die im Unternehmen zur Wahl stehenden Maßnahmen diejenige mit dem höchsten Kapitalwert gewählt würde bzw. eine kollektive Präferenzordnung nach fallenden Kapitalwerten gebildet würde. Wie in Abschn. 17.5 erläutert wurde, lässt sich Arrows Unmöglichkeitstheorem vor allem dadurch überwinden, dass die Bedingung U eingeschränkt wird: Kann man für eine Gruppe von Gesellschaftern davon ausgehen, dass eben nicht irgendein Präferenzordnungsprofil vorliegen kann, sondern nur bestimmte Mengen von Profilen, dann besteht die Chance auf ein Möglichkeitstheorem, d. h. darauf, eine Abstimmungsregel zu finden,

die alle Anforderungen Arrows erfüllt. Entsprechend erfordert auch die Begründung der Marktwertmaximierung als Unternehmensziel eine Einschränkung der Bedingung U.

Für die demokratische Legitimation der Marktwertmaximierung hat grundlegende Bedeutung, inwieweit sich die einzelnen Gesellschafter bei *paarweisen Vergleichen von je zwei Alternativen* eine *marktwertkonforme* bzw. eine *marktwertkonträre* Präferenz bilden. Ein Gesellschafter bildet sich eine marktwertkonforme bzw. marktwertkonträre Präferenz, wenn er die Alternative mit dem höheren bzw. dem niedrigeren Kapitalwert vorzieht. Bei *gegebenen* Modifikationswerten ist die Tendenz, dass ein Gesellschafter von zwei beliebigen Alternativen diejenige mit dem höheren Marktwert präferiert, umso größer, je mehr dieser Marktwert über dem der anderen Alternative liegt und je stärker er an den Überschüssen bzw. am Marktwert beteiligt ist (je größer z. B. die Zahl seiner Aktien ist oder je geringer die Zahl der Gesellschafter bei gleichmäßiger Aufteilung der Überschüsse ist).

Das Ziel der Marktwertmaximierung ist unter der folgenden notwendigen und hinreichenden Bedingung demokratisch legitimierbar:

*Bedingung U**:* In allen möglichen Entscheidungssituationen existieren nur solche Präferenzordnungsprofile der Gesellschafter, bei denen für jedes Alternativenpaar jeweils eine Mehrheit an Gesellschafterstimmen eine marktwertkonforme Präferenz bildet.

In der Bedingung U** wird berücksichtigt, dass etwa in der Aktiengesellschaft nicht jeder Gesellschafter eine Stimme hat, sondern die Stimmrechte der Gesellschafter proportional zu ihrem Anteilsbesitz sein können. Haben wie in der OHG alle Gesellschafter eine Stimme, so gilt die Bedingung U** für die Mehrheit der Gesellschafter. Zur näheren Interpretation der Bedingung U** gehen wir der Anschaulichkeit halber davon aus, dass jeder Gesellschafter eine Stimme hat. U** fordert dann, dass nur Präferenzordnungsprofile möglich sind, bei denen bezüglich jedes paarweisen Vergleiches jeweils die Zahl der Gesellschafter mit marktwertkonträrer Präferenz niedriger ist als die der anderen Gesellschafter. Damit ist bei gegebenen Modifikationswerten insbesondere dann zu rechnen, wenn in jeder Entscheidungssituation die Unterschiede zwischen den Marktwerten hoch sind und die Zahl der Gesellschafter gering ist, sodass die individuellen Anteile der Gesellschafter am Marktwert hoch sind. Je nach der Verteilung der Modifikationswerte über die Alternativen und Gesellschafter kann die Bedingung U** aber auch dann erfüllt sein, wenn deren Beträge hoch sind.

Die Gruppe der Gesellschafter, die sich bezüglich eines Alternativenpaares eine marktwertkonforme Präferenz bildet, setzt sich zusammen aus den Gesellschaftern, die sich hierbei nur am Kapitalwert orientieren oder der Alternative mit dem höheren Kapitalwert denselben oder einen höheren Modifikationswert zuordnen oder der Alternative mit dem höheren Kapitalwert zwar einen niedrigeren Modifikationswert beimessen, der betreffende Nachteil aber durch den höheren anteiligen Kapitalwert kompensiert wird. Nur diejenigen Gesellschafter bilden sich bei dem betreffenden Vergleich eine marktwertkonträre Präferenz, für die der Modifikationswert der Alternative mit dem kleineren Kapitalwert entsprechend weit über dem der anderen Alternative liegt.

Ist Bedingung U^{**} erfüllt, gilt also für die Menge der Präferenzordnungsprofile die entsprechende Einschränkung, dann erfüllt die Mehrheitsregel in jeder Entscheidungssituation Arrows Anforderungen: Da die Mehrheitsregel (die Regel des paarweisen Vergleichs) generell die Bedingungen D, P und I erfüllt, gilt dies auch unter der Bedingung U^{**} . Entscheidungen im Unternehmen können dann auf Basis des Ziels der Marktwertmaximierung getroffen werden, weil bei Anwendung der Mehrheitsregel stets die Alternative mit dem höheren Kapitalwert gewählt würde. Marktwertmaximierung ist bei Geltung von U^{**} demokratisch legitimiert.

Unter der Bedingung U^{**} führt *nur* die Mehrheitsregel zu einem Möglichkeitstheorem, sodass unter dieser Bedingung nur die Marktwertmaximierung demokratisch legitimiert werden kann. Bei jeder anderen Abstimmungsregel kann die kollektive Präferenz bei einem oder mehreren paarweisen Vergleichen marktwertkonträr sein und so die Präferenz der jeweiligen Mehrheit der Gesellschafter verletzen; die Bedingung I wäre verletzt, möglicherweise auch P.

Zur Veranschaulichung betrachten wir folgendes Beispiel: Ein Gremium mit drei Mitgliedern stimmt über fünf Alternativen ab (Tab. 17.8).

Mitglied M_3 bilde sich seine Präferenzordnung nach fallenden Kapitalwerten. Die Präferenzordnungen der beiden anderen Mitglieder weichen hiervon aufgrund entsprechender Modifikationswerte ab. Wie leicht zu überprüfen ist, stellt das Profil aus Tab. 17.8 trotz deutlicher Unterschiede in den individuellen Präferenzordnungen ein Präferenzordnungsprofil dar, das die Bedingung U^{**} erfüllt. Nach der Mehrheitsregel ergibt sich die kollektive Präferenzordnung $A_1 P A_2 P A_3 P A_4 P A_5$, also die Präferenzordnung des Mitglieds M_3 nach fallenden Kapitalwerten. Bei anderen Abstimmungsregeln können sich zwar andere kollektive Präferenzordnungen ergeben, jedoch können unter der Bedingung U^{**} andere Abstimmungsregeln deshalb nicht zur demokratischen Legitimation anderer Ziele als das der Marktwertmaximierung herangezogen werden, weil sie im Gegensatz zur Mehrheitsregel die Bedingung I und möglicherweise auch P verletzen, und somit nicht zu einem Möglichkeitstheorem führen. Wählt man z. B. die Single-Vote-Regel, so landen die Alternativen A_1 , A_4 und A_5 trotz unterschiedlicher Kapitalwerte gemeinsam auf dem ersten Rang gefolgt von den beiden anderen Alternativen. Würde man A_5 streichen, wäre auch A_2 auf dem ersten Rang zu platzieren und es käme zu einer marktwertkonträren Präferenz bezüglich A_1 und A_2 . Obwohl die Präferenzordnungsprofile auf $\{A_1, A_2\}$ übereinstimmen, kommt es zu unterschiedlichen

Tab. 17.8 Präferenzordnungsprofil

M_1	M_2	M_3
A_5	A_4	A_1
A_2	A_1	A_2
A_1	A_2	A_3
A_3	A_3	A_4
A_4	A_5	A_5

Urteilen in den kollektiven Präferenzordnungen, die Bedingung I ist verletzt. Darüber hinaus verletzt die Single-Vote-Regel die Bedingung P. Die Einschränkung der Bedingung U auf U^{**} führt bei der Single-Vote-Regel offensichtlich nicht zu einem Möglichkeitstheorem. Analog lassen sich auch für die anderen Abstimmungsregeln Beispiele finden.

Wenn jeder Gesellschafter eine Stimme hat, ist die Bedingung U^{**} gleichbedeutend mit der Annahme, dass stets eine Condorcet-Alternative existiert: Auf dem ersten Platz der kollektiven Präferenzordnung steht die Alternative mit dem höchsten Kapitalwert; sie ist Condorcet-Alternative, die den paarweisen Vergleich gegen jede andere Alternative gewinnt. Auf dem zweiten Platz steht die Alternative mit dem zweithöchsten Kapitalwert; sie wäre selbst Condorcet-Alternative, wenn es die marktwertmaximale Alternative nicht gäbe, usw.

Von Bedeutung ist auch, dass unter der Bedingung U^{**} das Ziel der Marktwertmaximierung in dem Sinn zu einem *stabilen* Gleichgewicht führt, dass kein Gesellschafter einen Vorteil für den Fall erwarten kann, dass Entscheidungen der Unternehmensleitung nicht akzeptiert werden und die Gesellschafter mit der Mehrheitsregel abstimmen; es wird dann dieselbe Entscheidung getroffen.

Bedingung U^{**} setzt nicht voraus, dass ex ante für alle möglichen entscheidungsrelevanten Alternativen die Marktwerte und die Modifikationswerte (die Abweichungen der subjektiven Bewertung der einzelnen Gesellschafter von den anteiligen Kapitalwerten) bekannt sind. Sie fordert auch nicht, dass sich für jedes Alternativenpaar jeweils dieselben Gesellschafter eine marktwertkonforme Präferenz bilden; die konkreten Mehrheitsverhältnisse können sich erheblich unterscheiden, vor allem im Hinblick auf alternative Entscheidungssituationen; ein Gesellschafter, der bei paarweisen Vergleichen der Minderheit angehört, kann bei anderen zur Mehrheit zählen.

Bedingung U^{**} macht also das Ziel der Marktwertmaximierung zum demokratisch legitimierten Unternehmensziel, ohne dass unter dieser Bedingung Gesellschafter, die sich nicht streng an diesem Ziel orientieren, systematisch benachteiligt werden müssen: Negative Modifikationswerte für Alternativen, die bei diesem Ziel in gewissen Entscheidungssituationen gewählt werden, können durch positive Modifikationswerte damit in anderen Entscheidungssituationen gewählter Alternativen kompensiert werden. Dies ist ein entscheidender Grund für eine mögliche allgemeine Akzeptanz der Marktwertmaximierung als Unternehmensziel.

Wie erläutert, resultieren Interessenkonflikte zwischen Gesellschaftern unter anderem daraus, dass der Kapitalmarkt unvollkommen und/oder unvollständig ist. Trotzdem gleicht er die Präferenzen der Gesellschafter einander an. So bewerten z. B. Gesellschafter, die Anteile nicht nur einer Gesellschaft halten, sondern Portefeuilles gebildet haben, Unternehmensrisiken trotz der Unterschiede in den individuellen Risikoeinstellungen in ähnlicher Weise, indem sie Varianz- von Kovarianzrisiken bzw. systematische von unsystematischen Risiken unterscheiden. Allgemein erlaubt es auch der unvollkommene Kapitalmarkt den Gesellschaftern, Zahlungsströme zu transformieren und so deren zeitliche Struktur oder deren Risiko zu verändern. Dies führt dazu, dass die

spezifischen Charakteristika eines Überschusses etwa aus einer Investitionsentscheidung im Unternehmen an Bedeutung verlieren und stattdessen der Marktwert des Überschuss (bzw. der Kapitalwert der Investition) an Bedeutung gewinnt.

Anders ist es vor allem mit intrinsischen Eigenwerten der Gesellschafter. Man kann realistischerweise nicht davon ausgehen, dass sich die Mehrheit der Gesellschafter marktwertkonforme Präferenzen über Alternativen bildet, die in starkem Maße wesentliche nichtfinanzielle Ziele, etwa den Erhalt von Arbeitsplätzen oder deren sozialverträglichen Abbau, den Schutz der Umwelt oder den Schutz der Gesundheit der Verbraucher, beeinträchtigen. Allerdings ist zu beachten, dass solchen Zielen in gewissem Umfang bereits durch generelle Rechtsregeln des Staates für besonders schutzbedürftige Interessen Rechnung getragen wird, die den Handlungsspielraum des Unternehmens einengen, z. B. mit Arbeitsgesetzen, Umweltschutzgesetzen und behördlichen Auflagen. Wenn trotzdem für die verbleibenden Alternativen in bestimmten Entscheidungssituationen aufgrund intrinsischer Eigenwerte der Gesellschafter die Bedingung U^{**} nicht erfüllt ist, ist die demokratische Legitimation des Ziels der Marktwertmaximierung nur für den übrigen Entscheidungsbereich möglich. Diesem Sachverhalt kann im Prinzip Rechnung getragen werden, indem die Entscheidungen nur für diesen Bereich mit dem Ziel der Marktwertmaximierung an die Unternehmensleitung delegiert werden und die Gesellschafter sich ansonsten die Entscheidungen oder die Genehmigung der von der Unternehmensleitung geplanten Entscheidungen (nach hinreichender Information durch die Unternehmensleitung) vorbehalten. Sie können auch ex ante den Handlungsspielraum der Unternehmensleitung durch allgemeine Verhaltensnormen bzw. Prinzipien einengen, die ihren intrinsischen Eigenwerten Rechnung tragen. Auch diese Verhaltensnormen sollten hinreichend operational sein. Das Unternehmensziel wird dann nicht nur durch die Marktwertmaximierung repräsentiert, sondern implizit auch durch die Normen, an die die Unternehmensleitung gebunden wird bzw. nach denen die Gesellschafter ihre Entscheidungen treffen.

Bei den Entscheidungen durch die Gesellschafter stellt sich wiederum das Problem, welche Abstimmungsregel zugrunde gelegt soll. Es ist denkbar, dass sie aufgrund von Selektionseffekten auch bei hohen intrinsischen Eigenwerten ähnliche Präferenzen haben, z. B. weil alle Gesellschafter des betreffenden Unternehmens dessen Anteile gar nicht halten würden, wenn sie grundlegende Einwände gegen dessen Geschäftsmodell hätten. Bei der betreffenden Einschränkung der Bedingung U kann dann durchaus eine Abstimmungsregel existieren, die zu einem Möglichkeitstheorem führt. Aus ihr kann dann allerdings nicht die Marktwertmaximierung als generelles Ziel abgeleitet werden. Immerhin müssen die Gesellschafter bei der Bildung ihrer Präferenzordnungen den Kapitalwerten insoweit Rechnung tragen, dass sie längerfristig immaterielle Eigenwerte realisieren können.

Bei bedeutsamen nichtfinanziellen Zielen der Gesellschafter ist grundsätzlich nicht zu erwarten, dass irgendeine *andere* Einschränkung der Bedingung U als U^{**} maßgeblich ist, mit der ein Unternehmensziel im definierten Sinn demokratisch legitimierbar ist und mit dem zugleich eine weitreichende Delegation der Entscheidungen an die

Unternehmensleitung vorgenommen werden kann. Die Unternehmensleitung müsste bei ihren Entscheidungen stets explizit den individuellen Präferenzordnungen der Gesellschafter Rechnung tragen. Dies wäre schon bei geringer Zahl an Gesellschaftern und Alternativen nicht operational. Operationalität ist jedoch eine notwendige Bedingung für die demokratische Legitimation eines Unternehmensziels im definierten Sinn.

Gerade im Hinblick auf die Anforderung der Operationalität hat die Marktwertmaximierung auch dann große Vorteile, wenn die Bedingung U^{**} nicht erfüllt ist und somit dieses Ziel nicht zu einem stabilen Gleichgewicht führt. Beim Ziel der Marktwertmaximierung besteht nicht das Problem, Risiko- und Bewertungsverbund Rechnung zu tragen; Koordinationsbedarf resultiert nur aus Restriktions- und Erfolgsverbund. Entscheidungsprobleme können deshalb eher als bei Vorgabe anderer Ziel (oder gar der expliziten Berücksichtigen der Gesellschafterpräferenzen) in Teilprobleme zerlegt und die Lösungen der Teilprobleme verschiedenen Personen bzw. Entscheidungsbereichen übertragen werden. Vereinfachungen werden hierbei vor allem dann erzielt, wenn die Entscheidungsbereiche so gebildet werden, dass die Entscheidungen dort getroffen werden können, wo die Informationen eingehen, und außerdem die Entscheidungen in relativ einfacher Weise koordiniert werden können. Außerdem ermöglicht es die Marktwertmaximierung, aus dem übergeordneten Unternehmensziel kompatible und zugleich operationale Unterziele für nachgeordnete Entscheidungsträger herzuleiten.

Operationalität ist allerdings kein hinreichendes Kriterium für die praktische Auswahl eines Unternehmensziels: Auch das Ziel der „Umsatzmaximierung“ ist z. B. operational. Es geht vielmehr darum, dass das betreffende Ziel operational ist und nicht in einem grundsätzlichen Konflikt mit den Gesellschafterpräferenzen steht. Im Vergleich zu anderen Zielen werden mit dem Ziel *Marktwertmaximierung* tendenziell Entscheidungen getroffen, die in ihrer Gesamtheit alle Gesellschafter zumindest finanziell besser stellen.

17.6.4 Aufteilung von Entscheidungskompetenzen zwischen Gesellschaftern und Unternehmen bei einer AG und einer OHG

17.6.4.1 Aufteilung bei einer AG

Bei einem börsennotierten Unternehmen wie einer AG haben die Gesellschafter vor allem deshalb weder die Zeit noch die Qualifikation, um zielführende Beiträge im Entscheidungsprozess zu leisten, weil sie gemäß den Darstellungen in Kap. 8 und 13 breit gestreute Portefeuilles halten und damit an vielen Unternehmen beteiligt sind. Je größer die Zahl der Gesellschafter eines Unternehmens ist, desto geringer sind tendenziell deren Anteile daran und damit an den Kapitalwerten der Investitionen und desto weniger ist der einzelne Gesellschafter motiviert, Kosten und Arbeitseinsatz in Kauf zu nehmen, um die Erfolgssituation zu verbessern.

Bei „demokratischer“ Abstimmung über die laufenden Geschäftsvorfälle durch die Gesellschafter wären kaum Investoren bereit, sich an börsennotierten Unternehmen

zu beteiligen. Um die Beteiligung daran zu erleichtern und die Funktionsfähigkeit des Kapitalmarktes zu gewährleisten, ist es daher geboten, die Entscheidungskompetenzen der Gesellschafter verlässlich zu begrenzen, ihnen aber auch genügend Mitwirkungsrechte zu belassen, um die Entscheidungen im Unternehmen wirksam kontrollieren und steuern zu können. Für Aktiengesellschaften erfolgt dies insbesondere durch das Aktiengesetz. Es bestimmt, welche Entscheidungen durch die Aktionäre getroffen werden und dass die betreffenden Entscheidungen in der *Hauptversammlung* der Aktionäre zu treffen sind. Die Beschlüsse der Hauptversammlung sind ebenfalls geregelt. Sie bedürfen der Mehrheit der abgegebenen Stimmen (einfache Mehrheit), soweit nicht Gesetz oder Satzung eine größere Mehrheit oder weitere Erfordernisse bestimmen (§ 133 Abs. (1) AktG). Das Stimmrecht wird nach Aktiennennbeträgen, bei Stückaktien nach deren Zahl ausgeübt ... (§ 134 Abs. (1) AktG).

Die Aktionäre entscheiden im Wesentlichen nur über die Verwendung des Bilanzgewinns, die Bestellung der Aktionärsvertreter im Aufsichtsrat (der unter anderem den Vorstand der Gesellschaft bestellt und kontrolliert), die Entlastung der Mitglieder des Aufsichtsrats sowie der Mitglieder des Vorstandes und über Änderungen der Satzung des Unternehmens (§ 179 Abs. (1) AktG). In der Satzung finden relativ selten zu treffende Grundsatzentscheidungen ihren Niederschlag wie z. B. über Firma und Sitz der Gesellschaft, Gegenstand des Unternehmens, Höhe des Grundkapitals und Zusammensetzung des Vorstandes. Um eine gewisse Kontinuität zu wahren, bedarf eine Satzungsänderung in der Regel einer Mehrheit, die mindestens drei Viertel des bei der Abstimmung vertretenen Grundkapitals umfasst. Nach § 119 Abs. (2) AktG dürfen die Aktionäre einer Aktiengesellschaft nur dann über Fragen der Geschäftsführung entscheiden (und das auch nur in der Hauptversammlung), wenn es der Vorstand verlangt.

17.6.4.2 Aufteilung bei einer OHG

Das Ziel der Marktwertmaximierung kann für eine OHG wesentlich problematischer sein als für börsennotierte Unternehmen. Analog zum Fall eines individuellen Investors (Kap. 14, Abschn. 14.6) können bei Unvollkommenheit und/oder Unvollständigkeit des Kapitalmarktes vor allem dann erhebliche Abweichungen zwischen anteiligen Marktwerten und subjektiven finanzwirtschaftlichen Werten bestehen, wenn wenige Gesellschafter mit hohen Anteilen am Unternehmenserfolg beteiligt sind, die unbeschränkt für die Schulden der Gesellschaft haften und sehr risikoavers sind. Dies kann bewirken, dass die Bedingung U^{**} nicht erfüllt ist. Wie erläutert, gibt es dann kein demokratisch legitimiertes (operationales) Unternehmensziel, mit dem Konflikte „fair“ gelöst werden. Dies kann für die Gesellschafter ein wesentlicher Grund sein, Entscheidungen über Investitionen von besonderer Tragweite nicht zu delegieren, sondern selbst zu treffen. Bei hohen Risiken kommt dabei wegen der unbeschränkten Haftung in erster Linie die Einstimmigkeitsregel in Betracht, bei der jeder Gesellschafter ein Veto-recht hat. Ein weiterer Grund für eine Abstimmung durch die Gesellschafter kann auch darin bestehen, dass Interessenkonflikte aufgrund von Eigenwerten bestehen.

Ein Investor wird grundsätzlich nur dann Gesellschafter einer OHG, wenn er hinreichende und (gerichtlich) durchsetzbare Mitwirkungsrechte bei der Leitung des Unternehmens erhält (und die Zahl der Gesellschafter relativ klein ist). Entsprechende Regelungen finden sich im HGB: Nach § 116 Abs. (2) HGB ist in einer OHG für die „Vornahme von Handlungen“, die über „den gewöhnlichen Betrieb des Handelsgewerbes der Gesellschaft“ hinausgehen, „ein Beschluss sämtlicher Gesellschafter erforderlich“.

- Für die von den Gesellschaftern zu fassenden Beschlüsse bedarf es der Zustimmung aller zur Mitwirkung bei der Beschlussfassung berufenen Gesellschafter (§ 119 Abs. (1) HGB).
- Hat nach dem Gesellschaftsvertrag die Mehrheit der Stimmen zu entscheiden, so ist die Mehrheit im Zweifel nach der Zahl der Gesellschafter zu berechnen (§ 119 Abs. (2) HGB).

Die Gesellschafter können jedoch im Gesellschaftsvertrag auch andere Abstimmungsregeln vereinbaren.

17.7 Zusammenfassung

- Wenn sich die individuellen Präferenzordnungen der Mitglieder einer Gruppe (einer Familie, eines Vereins, einer Partei, einer Gruppe aus Gesellschaftern eines Unternehmens) über erwogene Alternativen unterscheiden, stellt sich das Problem, wie die Präferenzordnungen der einzelnen Individuen „möglichst gerecht“ oder „fair“ zu einer kollektiven Präferenzordnung, d. h. zu einer Präferenzordnung für die Gruppe als Einheit, aggregiert werden können.
- Die Frage, wie die individuellen Präferenzordnungen „möglichst gerecht“ zu einer *kollektiven Präferenzordnung* aggregiert werden sollen, ist gleichbedeutend mit der Suche nach der „besten“ Abstimmungsregel.
- Da die Abstimmung über die Abstimmungsregel zu einem infiniten Regress führen würde, könnte die Gruppe versuchen, sich auf gewisse Anforderungen zu einigen, um zu einer einmütig akzeptierten Abstimmungsregel (einer kollektiven Wahlfunktion) zu gelangen.
- Arrow hat indessen gezeigt, in welches Dilemma dieser Weg führt. Er hat für einige plausible Anforderungen nachgewiesen, dass keine kollektive Wahlfunktion existiert, die diese erfüllt, wenn über mehr als zwei Alternativen abzustimmen ist (Unmöglichkeitstheorem).
- Die Bedingungen lauten: Unbeschränkter Definitionsbereich der kollektiven Wahlfunktion (U), Einhaltung des Pareto-Prinzips (P), Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen (I) und Diktator-Verbot (D).
- Die vier Bedingungen U, P, I und D sind nur miteinander zu vereinbaren, wenn lediglich zwei Alternativen zur Wahl stehen; dann kann die Mehrheitsregel angewendet

werden. In der Literatur wurde versucht, die Bedingungen zu modifizieren, um zu Möglichkeitstheoremen zu gelangen, bisher mit geringem Erfolg.

- Explizite Abstimmungen erübrigen sich, wenn ein Ziel zugrunde gelegt werden kann, mit dem dieselben Entscheidungen getroffen werden wie mit dieser Abstimmungsregel. Existiert ein solches Ziel, so können die Gruppenmitglieder (etwa die Gesellschafter eines Unternehmens) Entscheidungen an einen „Entscheidungsträger“ (die Unternehmensleitung) delegieren.
- Jedoch können Konflikte zwischen Gesellschaftern bezüglich unternehmerischer Maßnahmen bestehen, die daraus resultieren, dass sie bestimmten Maßnahmen subjektive Eigenwerte zuschreiben oder die finanziellen Rückflüsse der Maßnahmen abweichend subjektiv bewerten. Es geht dann darum, ob und wie bei Existenz solcher Konflikte die Bedingung U derart eingeschränkt werden kann, dass ein Ziel für die Gruppe der Gesellschafter „demokratisch legitimiert“ werden kann.
- Als demokratisch legitimiert wird ein Ziel bezeichnet, wenn es operational ist und außerdem im Einklang mit einer Abstimmungsregel steht, die neben der maßgeblichen Einschränkung der Bedingung U die Bedingungen P, I und D erfüllt. Es zeigt sich, dass unter dieser Einschränkung nur die Mehrheitsregel die Bedingungen erfüllt; das implizierte operationale Unternehmensziel ist das der Marktwerthmaximierung. Ist diese nicht erfüllt, kann kein Ziel demokratisch legitimiert werden.
- Aber auch bei fehlender demokratischer Legitimation des Ziels der Marktwerthmaximierung sprechen Effizienzüberlegungen für dieses Ziel, da es langwierige, komplexe Informations- und Entscheidungsprozesse vermeidet. Die Gesellschafter können sich zudem auf die Delegation der Entscheidungen mit Marktwerthmaximierung als Unternehmensziel einigen, jedoch für besondere Entscheidungsprobleme eine explizite Abstimmung durch sie selbst nach einem anderen Aggregationsmechanismus vereinbaren.
- Gesetzliche Regelungen bezüglich der Aufteilung der Entscheidungskompetenzen zwischen Unternehmen und Gesellschaftern bei einer AG und einer OHG werden dargestellt und begründet.

Ergänzende und vertiefende Literatur

Arrow (1963); Bamberg et al. (2012, Kap. 8); Brams und Fishburn (2007); v.d. Bellen (1976); Bossert und Stehling (1990); Colquitt et al. (2005); Kelly (1978); Laux (2006a, b); Mayston (1974); Pattanaik (1971); Ponick (2007); Rapoport (1989); Schauenberg (1978b); Sen (1970).

17.8 Übungen

Aufgabe 17.1

Bei der Entscheidung durch eine Gruppe stellt sich das Problem, wie die individuellen Präferenzordnungen der Mitglieder über die erwogenen Alternativen zu einer kollektiven

Präferenzordnung der Gruppe mithilfe einer kollektiven Wahlfunktion aggregiert werden können. Arrow hingegen hat gezeigt, dass es keine kollektive Wahlfunktion gibt, die bestimmten, plausiblen Anforderungen genügt.

- a) Erläutern Sie die Anforderung „Pareto-Prinzip“. Zeigen Sie anhand des folgenden Beispiels mit drei Gremiumsmitgliedern und vier Alternativen, dass diese Anforderung beim Single Vote-Kriterium grundsätzlich nicht erfüllt ist.

M ₁	M ₂	M ₃
A ₁	A ₁	A ₂
A ₂	A ₂	A ₃
A ₃	A ₃	A ₁
A ₄	A ₄	A ₄

Gehen Sie wie folgt vor:

- (i) Ermitteln Sie das Abstimmungsergebnis nach dem Single Vote-Kriterium.
 - (ii) Vergleichen Sie das Abstimmungsergebnis mit den individuellen Präferenzordnungen aller Mitglieder sowie die Präferenzordnungen der Mitglieder untereinander.
- b) Erläutern Sie die Anforderung der „Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen“. Zeigen Sie anhand des folgenden Beispiels mit drei Gruppenmitgliedern und vier Alternativen, dass diese Anforderung beim Borda-Kriterium grundsätzlich nicht erfüllt ist.

Präferenzordnungsprofil O			Präferenzordnungsprofil O'		
M ₁	M ₂	M ₃	M ₁	M ₂	M ₃
A ₁	A ₁	A ₃	A ₁	A ₁	A ₃
A ₂	A ₄	A ₂	A ₂	A ₂	A ₁
A ₃	A ₂	A ₁	A ₃	A ₃	A ₄
A ₄	A ₃	A ₄	A ₄	A ₄	A ₂

Gehen Sie wie folgt vor:

- (i) Ermitteln Sie jeweils das Abstimmungsergebnis bei Präferenzordnungsprofil O und O'.
- (ii) Vergleichen Sie die Rangfolgen zwischen den Alternativen A₂ und A₃ in beiden Abstimmungsergebnissen.
- (iii) Vergleichen Sie die Rangfolgen zwischen den Alternativen A₂ und A₃ in den Präferenzordnungen der Mitglieder für beide Präferenzordnungsprofile O und O'.

Aufgabe 17.2

- a) Zeigen Sie anhand eines selbst gewählten Beispiels mit drei Alternativen und drei Gremienmitgliedern, dass die Borda-Regel gegen die Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen verstoßen kann.
- b) Zeigen Sie anhand eines selbst gewählten Präferenzordnungsprofils mit drei Mitgliedern und drei Alternativen, dass das Single-Vote-Kriterium gegen das „Pareto-Prinzip“ verstößt.

Aufgabe 17.3

- a) Erläutern Sie den Begriff der Condorcet-Alternative. Zeigen Sie am Beispiel eines Präferenzordnungsprofils für drei Gremienmitglieder und vier Alternativen, dass die Existenz einer Condorcet-Alternative im Hinblick auf das Single-Vote-Kriterium nicht garantiert, dass diese Alternative auch vom Gremium gewählt wird.
- b) Existiert für ein Gremium, das aus fünf Entscheidern besteht und über zwei Alternativen abstimmen muss, die Möglichkeit, eine Wahlfunktion zu finden, welche die von Arrow aufgestellten Forderungen erfüllt?

Aufgabe 17.4

- a) Überprüfen Sie für die folgenden Präferenzordnungsprofile, ob die Bedingung der Eingipfligkeit erfüllt ist. Erläutern Sie Ihr Vorgehen mithilfe einer Grafik.

Präferenzordnungsprofil O					Präferenzordnungsprofil O'		
M ₁	M ₂	M ₃	M ₄	M ₅	M ₁	M ₂	M ₃
A ₁	A ₂	A ₂	A ₃	A ₁	A ₂	A ₁	A ₄
A ₂	A ₁	A ₃	A ₂	A ₂	A ₁	A ₃	A ₃
A ₃	A ₃	A ₁	A ₁	A ₃	A ₃	A ₄	A ₁
					A ₄	A ₂	A ₂

- b) Welche Bedeutung hat die Eingipfligkeitsbedingung für das Unmöglichkeitstheorem von Arrow? Interpretieren Sie die Bedingung der Eingipfligkeit für realistische Wahlsituationen.

Aufgabe 17.5

Gehen Sie von folgendem Präferenzordnungsprofil aus:

M ₁	M ₂	M ₃	M ₄	M ₅
A ₁	A ₃	A ₂	A ₄	A ₄
A ₂	A ₁	A ₁	A ₁	A ₂
A ₃	A ₂	A ₃	A ₂	A ₁
A ₄	A ₄	A ₄	A ₃	A ₃

- a) Existiert eine Condorcet-Alternative? Wenn ja, streichen Sie diese und suchen erneut nach einer Condorcet-Alternative. Wiederholen Sie den Vorgang, solange dies möglich ist.
- b) Gehen Sie davon aus, dass sich nur das Mitglied M_1 eine marktwertkonforme Präferenz bildet. Zeigen Sie, dass das obige Präferenzordnungsprofil die Bedingung U^{**} (marktwertkonforme Bewertung im paarweisen Vergleich) erfüllt. Erläutern Sie Ihr Vorgehen.
- c) Geben Sie die kollektive Präferenzordnung gemäß der Mehrheitsregel an, wobei alle möglichen Alternativenpaare gegeneinander antreten. Gehen Sie davon aus, dass alle möglichen Präferenzordnungsprofile im betrachteten Unternehmen die Bedingung U^{**} erfüllen. Welche Aussage können Sie bezüglich der Legitimation der Zielsetzung der Marktwertmaximierung treffen?
- d) Ermitteln Sie die kollektive Präferenzordnung gemäß der Borda-Regel. Lässt sich auch mit dieser Regel das Ziel der Marktwertmaximierung unter der Bedingung U^{**} rechtfertigen? Begründen Sie Ihre Antwort.

17.9 Lösungshinweise

Aufgabe 17.1

- a) A_3 und A_4 erhalten beide null Stimmen, aber alle ziehen A_3 vor. --- b) Bei Abstimmung nach der Borda-Regel liegt A_2 vor A_3 bei O, aber hinter A_3 bei O', obwohl alle Mitglieder in O dieselbe Präferenz beim Vergleich von A_2 und A_3 haben wie in O'.

Aufgabe 17.2

- a) Beispiel: Es gehe eigentlich nur um A_1 vs. A_2 , kein Mitglied hat eine Erstpräferenz für A_3 ; ob aber A_3 zwischen A_1 und A_2 oder nach A_1 und A_2 platziert wird, beeinflusst deren Stimmenzahl. --- b) Beispiel: Alle stimmen für A_1 , sodass A_2 und A_3 keine Stimme erhalten; dennoch gelte für jeden $A_2 \succ A_3$.

Aufgabe 17.3

- a) Siehe Kap. 16, Abschn. 16.4.2.3. Beispiel: Jedes Gruppenmitglied habe eine andere Erstpräferenz, die nicht A_1 ist, jedoch gewinnt A_1 jede Abstimmung, weil es für jedes Mitglied die zweite Präferenz ist. --- b) Ja, z. B. die Mehrheitsregel.

Aufgabe 17.4

- a) Eingipfligkeit ist für das Präferenzordnungsprofil O gegeben, wenn die Alternativen in der Reihenfolge A_1 , A_2 und A_3 auf der Abszisse abgetragen werden. Eingipfligkeit ist für das Präferenzordnungsprofil O' gegeben, wenn die Alternativen in der Reihenfolge A_2 , A_1 , A_3 und A_4 auf der Abszisse abgetragen werden. --- b) Siehe Kap. 17, Abschn. 17.5.1. Ein Beispiel sind politische Wahlen, bei denen Wähler mit einer klaren „linken“ („rechten“) Haltung Parteien „von links nach rechts“ („von rechts nach links“) sortieren.

Oder aber sie tendieren zu gemäßigten Parteien in der Mitte und bewerten alle Parteien schlechter, je weiter links oder rechts sie sind.

Aufgabe 17.5

a) Ja; zunächst ist es A_1 , danach A_2 , danach A_3 . --- **b)** Da A_1 Condorcet-Alternative ist, gewinnt sie jeden paarweisen Vergleich. Wie in a) gezeigt, gewinnt A_2 gegen A_3 und A_4 und schließlich A_3 gegen A_4 . Es ergibt sich im paarweisen Vergleich also stets eine Präferenz im Sinne von M_1 , dessen Präferenzordnung marktwertkonform ist. --- **c)** Die kollektive Präferenzordnung (vollständig und transitiv) entspricht der von M_1 . Wenn alle vorstellbaren Präferenzordnungen die Bedingung U^{**} erfüllen, genügt die Mehrheitsregel den Anforderungen Arrows. Gemäß Bedingung U^{**} ist die kollektive Präferenzbildung dann auch kompatibel mit Marktwertmaximierung. --- **d)** Rechtfertigung der Marktwertmaximierung ist auch unter der Bedingung U^{**} nicht möglich, da sich wie gezeigt keine marktwertkonforme kollektive Präferenzordnung ergibt.

Literatur

- Arrow, K.J.: Social Choice and Individual Values, 2. Aufl. Yale University Press, New Haven (1963)
- Bamberg, G., Coenenberg, A.G., Krapp, M.: Betriebswirtschaftliche Entscheidungslehre, 15. Aufl. Vahlen, München (2012)
- Bellen, Avd: Mathematische Auswahlfunktionen und gesellschaftliche Entscheidungen. Birkhäuser, Basel-Stuttgart (1976)
- Black, D.: The Theory of Committees and Elections. Cambridge University Press, Cambridge (1958)
- Bossert, W., Stehling, F.: Theorie kollektiver Entscheidungen. Springer, Berlin (1990)
- Brams, S.J., Fishburn, P.C.: Approval Voting, 2. Aufl. Springer, Berlin (2007)
- Colquitt, J.A., Greenberg, J., Zapata-Phelan, C.P.: What is organizational justice ? A historical overview. In: Colquitt, J.A., Greenberg, J. (Hrsg.) Handbook of Organizational Justice, S. 3–58. LEA, Mahwah, New Jersey (2005)
- Inada, K.: A note on the simple majority decision Rule. *Econometrica* **32**, 525–531 (1964)
- Kelly, J.S.: Arrow Impossibility Theorems. Academic, New York (1978)
- Laux, H.: Wertorientierte Unternehmenssteuerung und Kapitalmarkt, 2. Aufl. Springer, Berlin (2006a)
- Laux, H.: Unternehmensrechnung, Anreiz und Kontrolle, 3. Aufl. Springer, Berlin (2006b)
- Mayston, D.J.: The Idea of Social Choice. Macmillan, London (1974)
- Pattanaik, P.K.: Voting and Collective Choice. Cambridge University Press, Cambridge (1971)
- Ponick, E.: Gremienentscheidungen unter Beachtung nicht vergleichbarer Alternativen. Kölner Wissenschaftsverlag, Köln (2007)
- Rapoport, A.: Decision Theory and Decision Behavior. Springer, Dordrecht (1989)
- Schauenberg, B.: Zur Logik kollektiver Entscheidungen. Gabler, Wiesbaden (1978)
- Sen, A.K.: Collective Choice and Social Welfare. Springer, San Francisco (1970)

Teil VI

Vereinfachung von Entscheidungsmodellen

Vereinfachung von Entscheidungsmodellen als Entscheidungsproblem

18

18.1 Problemstellung und Aufbau

Die Formulierung eines Entscheidungsmodells zur Beurteilung der Qualität von Handlungsalternativen stellt selbst ein Entscheidungsproblem dar. Da es dem eigentlichen Entscheidungsproblem (welche Handlungsalternative soll gewählt werden?) vorgelagert ist, wird es als Vorentscheidungsproblem bezeichnet. Bei der Lösung dieses Problems geht es im Kern darum, in welchem „Umfang“ und in welcher Weise gegebene Informationen im Modell abgebildet werden sollen. Dabei besteht in realen Entscheidungssituationen stets die Notwendigkeit zu vereinfachen. Das Entscheidungsmodell ist somit immer eine mehr oder weniger stark vereinfachte Abbildung der Wirklichkeit. Daher sollte auch die Lösung des Entscheidungsmodells, d. h. die aus dem Modell als optimal hervorgehende Alternative, nicht ohne Weiteres realisiert werden. Statt dessen sollte der Entscheider zunächst abschätzen, wie die im Modell als optimal ermittelte Alternative vor dem Hintergrund von Determinanten zu beurteilen ist, die nicht explizit im Entscheidungsmodell berücksichtigt wurden. Beispielsweise mag der Entscheider in seinem Entscheidungsmodell eine oder mehrere Zielgrößen vernachlässigt haben. Er wird daher die im Rahmen des Modells optimale Alternative zumindest grob in Bezug auf diese zusätzlichen Zielgrößen beurteilen.

Die Vereinfachung eines Entscheidungsmodells ist ihrerseits ein komplexes Entscheidungsproblem. Für die Entscheidung darüber, wie die Vereinfachung erfolgen soll, sind die *Kosten* der Formulierung und Lösung des Modells (*Planungskosten*) in Form von Ausgaben und/oder durch Einsatz von Arbeit und Zeit gegen den *Ertrag* abzuwägen, der mit der Kenntnis der Modelllösung verbunden ist (mit anderen Worten die „Güte“ der Entscheidung, zu der das Modell führen wird). Vor allem der Ertrag lässt sich in der Regel jedoch nur schwer abschätzen.

Dabei ist zu beachten, dass die Kosten der technischen Lösung eines konkreten Entscheidungsmodells im Vergleich zu den Kosten der Erforschung von Handlungsalternativen und deren Konsequenzen sowie deren Erfassung bei der Modellkonstruktion tendenziell gering sein dürften.

Es mag naheliegen, bei *gegebenen Kosten der Planung* im Rahmen der Modellkonstruktion eine möglichst „originalgetreue“ Abbildung der Realität anzustreben (was immer das auch heißen mag). Dieses Vorgehen ist jedoch nicht ohne Weiteres sinnvoll. Es kommt primär nicht darauf an, dass das Modell möglichst originalgetreu ist, sondern zu einer (möglichst) guten Entscheidung führt. Eine größere Annäherung des Modells an die Realität hat nicht notwendigerweise eine bessere Lösung zur Folge. Im Gegenteil: Eine weitere Vernachlässigung von Aspekten der Realität kann zu einer *besseren* Lösung führen, wenn die bisher vernachlässigten Aspekte das Modell in einer bestimmten Weise verzerren. So sollte ein Entscheider, wenn er negative Ergebnisse nur grob abschätzt, darauf achten, dass er dadurch die Ergebnisverteilungen nicht zu optimistisch (oder zu pessimistisch) darstellt. Entsprechende Vereinfachungen bei der Abschätzung positiver Ergebnisse könnten dem entgegenwirken.

Im vorliegenden Kapitel wird die Konstruktion von Entscheidungsmodellen als (Vor-)Entscheidungsproblem untersucht. Im Vordergrund steht dabei die Diskussion der Möglichkeiten und Konsequenzen von Modellvereinfachungen. Zugleich werden Grenzen der Anwendung des entscheidungstheoretischen Instrumentariums im Hinblick auf die Lösung des Vorentscheidungsproblems und daraus resultierende Grenzen rationaler Entscheidungen verdeutlicht.

In Abschn. 18.2 werden Grundformen der Modellvereinfachung diskutiert. Zudem wird verdeutlicht, dass die Vereinfachung ihrerseits ein Entscheidungsproblem ist, welches ein Entscheider grundsätzlich nach dem Prinzip der flexiblen Planung (Kap. 9) angehen sollte. In Abschn. 18.3 werden Modellvereinfachungen aus normativer Sicht mit Erkenntnissen der deskriptiven Entscheidungstheorie verglichen. Abschn. 18.4 behandelt Möglichkeiten und Grenzen der Vereinfachung komplexer Entscheidungsmodelle durch ihre Zerlegung in Partialmodelle. Abschn. 18.5 diskutiert abschließend die Grenzen rationaler Modellvereinfachung und rationaler Entscheidungen.

18.2 Grundformen und Strategien der Modellvereinfachung

18.2.1 Modellvereinfachung ex post und ex ante

In Kap. 9 wurde gezeigt, wie ein Entscheider im Mehrperiodenfall Entscheidungen nach dem Prinzip der flexiblen Planung treffen kann. Dabei werden für zukünftige Zeitpunkte bzw. Perioden *bedingte* Pläne erstellt. Welcher der Pläne tatsächlich realisiert wird, hängt von der zukünftigen Umweltentwicklung ab. In Kap. 10 wurde gezeigt, dass die Beurteilung und Bewertung von Informationen demselben Muster folgen: Der Wert einer Information ergibt sich aus den Abweichungen der zukünftigen, informationsbedingten

Eventualpläne von dem Plan, den der Entscheider ohne zusätzliche Informationen realisieren würde.

Die Vereinfachung eines Entscheidungsmodells kann ebenfalls nach dem Prinzip der flexiblen Planung vorgenommen werden. Denn bereits ex ante, bei der Aufstellung eines Entscheidungsmodells, sollte der Entscheider abschätzen, welche zusätzlichen Entscheidungsprobleme sich ex post, nach Lösung dieses Modells, ergeben können. Wird er die Lösung akzeptieren oder im Licht von Informationen, die nicht explizit in das Modell eingegangen sind, die Lösung modifizieren und eine andere Alternative bevorzugen? Wird er das Modell seinerseits revidieren, dabei zusätzliche Modellvereinfachungen vornehmen, andere rückgängig machen oder das Modell in anderer Hinsicht erweitern und dann eine neue, möglicherweise wiederum nur vorläufige Lösung ermitteln?

Bereits bei der Aufstellung eines Entscheidungsmodells ist es notwendig abzuschätzen, wie die Antworten auf diese Fragen lauten werden: Der Entscheider sollte die zukünftigen möglichen Eventualpläne bezüglich der Modifikation seines Entscheidungsmodells antizipieren, um dadurch zu einem (ersten) Entscheidungsmodell zu kommen, das er nicht bereits ex ante als inadäquat für die Abbildung seines Entscheidungsproblems beurteilt. Wenn der Entscheider annimmt, dass sich die aus einem Entscheidungsmodell als optimal hervorgehende Alternative nach Berücksichtigung zusätzlicher Informationen ex post nicht mehr als optimal erweisen wird, so sollte er das Entscheidungsmodell ex ante entsprechend erweitern oder ganz verwerfen. Andererseits gibt die Lösung eines ersten Entscheidungsmodells Anhaltspunkte dafür, wie ein besseres Entscheidungsmodell zu gestalten ist: Die Implikation des Entscheidungsmodells selbst ist eine relevante Information, auf deren Basis der Entscheider ex post zu neuen Lösungen kommen kann.

Das Prinzip der flexiblen Planung widerspricht nicht dem Zwang zur Vereinfachung. Es macht nur deutlich, dass Vereinfachungen nicht in der Weise erfolgen sollten, dass sich der Entscheider keine Gedanken hinsichtlich der Konsequenzen dieser Vereinfachungen für die Qualität des Entscheidungsmodells und damit seiner Empfehlungen macht.

18.2.2 Vereinfachungen im Entscheidungsfeld

18.2.2.1 Vereinfachung bei der Erfassung von Alternativen

Die erste Möglichkeit der Vereinfachung eines Entscheidungsmodells, etwa einer Ergebnismatrix als wesentliches Element des Grundmodells der Entscheidungstheorie, besteht darin, Alternativen zu vernachlässigen (bzw. zunächst nicht näher in Betracht zu ziehen). Wenn z. B. ein Teil der Alternativen sehr ähnliche Ergebnisprofile aufweist, deren Ergebnisse also bei ähnlichen Erwartungswerten hoch positiv miteinander korreliert sind, mag (zunächst) nur eine dieser Alternativen berücksichtigt werden. Sollte sie sich gegenüber den anderen im Modell erfassten Alternativen als vorteilhaft erweisen, kann in einem zweiten Schritt die Auswahl zwischen ihr und vernachlässigten ähnlichen Alternativen

erwogen werden, um eventuell eine weitere (wenn auch relativ geringe) Verbesserung zu erreichen.

Vereinfachungen resultieren auch aus der Vorauswahl von Alternativen über Dominanzkriterien (Kap. 4, Abschn. 4.5). Auch nicht dominierte Alternativen können vernachlässigt werden, wenn der Entscheider bereits bei grober Abschätzung ihrer Ergebnisse erkennt, dass er sie nicht wählen wird.

Das Problem einer Vereinfachung bei der Erfassung von Alternativen besteht nicht nur darin, welche Alternativen berücksichtigt werden, sondern auch darin, wie die betreffenden Alternativen im Modell abgebildet werden sollen. Werden die Alternativen (als Kombinationen von Einzelaktionen) mithilfe von Entscheidungsvariablen dargestellt, so sinkt bei Vernachlässigung einzelner Aktionsmöglichkeiten die Zahl der für die Definition der Alternativen maßgeblichen Entscheidungsvariablen, sodass sich unter Umständen ein wesentlich einfacheres Entscheidungsmodell ergibt.

Die Vernachlässigung einzelner Aktionsmöglichkeiten kann insbesondere auch deshalb sinnvoll sein, weil sie sich nur dann korrekt im Modell mit Entscheidungsvariablen abbilden lassen, wenn für diese Variablen zusätzliche, möglicherweise komplexe (Neben-)Bedingungen formuliert werden. Kann eine Variable z. B. nur ganzzahlige Werte annehmen, so kann man vereinfachen, indem man die betreffende Variable als stetige Variable definiert, dabei auf die Berücksichtigung von Ganzzahligkeitsbedingungen (zunächst) verzichtet und nach der Lösung des Modells die Ganzzahligkeit durch Auf- oder Abrunden wieder herstellt. Die Implikationen einer solchen Vereinfachung hängen davon ab, inwieweit die betreffenden Einzelaktionen teilbar sind. Handelt es sich um die Durchführung von größeren unteilbaren Realinvestitionen, so ist die Gefahr von Fehlentscheidungen relativ groß, weil dann für den Fall, dass nicht ganzzahlige Werte als optimal ausgewiesen werden, die Implikationen der erforderlichen modellexogenen Rundungen schwer zu durchschauen sind und somit zu erheblichen Fehlern führen können. Verzichtet man dagegen in einem Modell der Portefeuilleplanung, in dem die Entscheidungsvariablen die Bestände an handelbaren Wertpapieren im Portefeuille charakterisieren (Kap. 8, Abschn. 8.3, 8.4 und 8.5) auf Ganzzahligkeitsbedingungen, so führt dies zu Vereinfachungen, die in aller Regel vertretbar sein dürften.

18.2.2.2 Vereinfachung bei der Erfassung von Ergebnissen

Eine weitere Vereinfachungsmöglichkeit besteht darin, die Ergebnisse der Alternativen weniger genau zu beschreiben. Der Entscheider überprüft dann nicht exakt, zu welchen Ergebnissen die Alternativen in den einzelnen Zuständen führen, sondern setzt mehr oder weniger grobe Schätzwerte ein. Ein solches Vorgehen kann vor allem im Hinblick auf Zustände mit sehr geringer Wahrscheinlichkeit sinnvoll sein. Der Entscheider kann auch Zielgrößen, die zwar für ihn relevant sind, aber keine große Bedeutung besitzen, bei der Beschreibung der Ergebnisse vernachlässigen.

Insbesondere die Reduzierung der Ergebnisse auf Ausprägungen nur einer Zielgröße führt zu großen Vereinfachungen in der Darstellung eines Entscheidungsmodells. Andererseits ist die Reduzierung auf eine Zielgröße möglicherweise ein Grund dafür,

dass ein Entscheider der Empfehlung des Entscheidungsmodells, eine bestimmte Alternative zu wählen, nicht folgt. Diese Problematik ergibt sich vor allem dann, wenn die Zielgrößen des Entscheiders in Konkurrenz zueinander stehen: Die Vernachlässigung einer Zielgröße führt dann tendenziell dazu, dass eine Alternative gewählt wird, die eine besonders geringe Ausprägung dieser Zielgröße verspricht.

18.2.2.3 Vereinfachung bei der Erfassung der Umweltzustände und bei der Bildung eines Wahrscheinlichkeitsurteils

Für reale Entscheidungen sind auch Vereinfachungen bei der Erfassung von Umweltzuständen unumgänglich. Unproblematisch ist dabei die Zusammenfassung von Umweltzuständen zu einem „repräsentativen“ Umweltzustand, wenn sich die Ergebnisse der erwogenen Alternativen in den betreffenden Umweltzuständen jeweils kaum voneinander unterscheiden. Die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Umweltzustände werden dann zur Wahrscheinlichkeit des repräsentativen Zustands zusammengefasst.

Darüber hinaus können Umweltzustände völlig vernachlässigt werden. Bedingung hierfür ist allerdings, dass diese Zustände eine (sehr) geringe Wahrscheinlichkeit aufweisen und/oder dass in diesen Umweltzuständen jeweils keine hohe Unterschiede in den Ergebnissen der Alternativen auftreten. Die völlige Vernachlässigung vieler Zustände kann jedoch selbst bei geringen Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Zustände problematisch sein, wenn sich Bewertungsfehler kumulieren würden.

Bei der praktischen Planung werden häufig nur drei typisierte Umweltentwicklungen als „Szenarien“ berücksichtigt. Das mittlere Szenario repräsentiert dabei die wahrscheinlichste Entwicklung. Daneben wird ein *best case* und ein *worst case* berücksichtigt, die eine sehr günstige bzw. sehr ungünstige Umweltentwicklung abbilden sollen, ohne zwangsläufig das höchst- bzw. geringstmögliche Ergebnis zu erfassen, da deren Wahrscheinlichkeiten äußerst gering sein können. Das Risiko kann vielmehr transparenter gemacht werden, indem als *best case* bzw. als *worst case* eine Entwicklung mit jeweils höherer Wahrscheinlichkeit zugrunde gelegt wird. Der *best case* ist dann nicht die beste aller möglichen Entwicklungen, sondern die beste der im Kalkül berücksichtigten. Das Analoge gilt für den *worst case*.

Ein typisches Vorgehen der Praxis besteht auch darin, ausschließlich die mittlere, wahrscheinlichste Umweltentwicklung zu berücksichtigen. Die Entscheidung erfolgt dann letztlich unter der Annahme der Quasi-Sicherheit und impliziert Risikoneutralität. Solch ein Vorgehen ist möglicherweise dann vertretbar, wenn die vernachlässigten Umweltentwicklungen insgesamt eine sehr geringe Eintrittswahrscheinlichkeit haben und/oder wenn die Ergebnisse der Alternativen in diesen Umweltentwicklungen nur wenig vom Ergebnis bei der berücksichtigten Umweltentwicklung abweichen. Das Hauptproblem bei diesem Vorgehen besteht aber grundsätzlich darin, dass man ex post das erzielte Ergebnis an einer Planung misst, die unter Quasi-Sicherheit erfolgte, sodass keinerlei Anhaltspunkte bestehen, wie das Ergebnis zu beurteilen ist.

Gegen die Berücksichtigung mehrerer möglicher Umweltzustände bei der Aufstellung eines Entscheidungsmodells mag man einwenden, dass ein Entscheider deren

Eintrittswahrscheinlichkeiten in der Regel gar nicht oder zumindest nicht ohne großen Aufwand angeben kann. Daher besteht auch bezüglich der Festlegung von Wahrscheinlichkeiten der Bedarf zu vereinfachen. In Kap. 10, Abschn. 10.3.2, wurde gezeigt, wie ein Entscheider seine subjektiven (und zunächst noch „verborgenen“) Wahrscheinlichkeitsvorstellungen auf der Basis einfacher (hypothetischer) Entscheidungsprobleme ans „Licht bringen“ (messen) kann. Dieses sehr aufwendige indirekte Vorgehen kann vereinfacht werden, indem die subjektiven Wahrscheinlichkeiten in mehr oder weniger grober Form direkt geschätzt werden. Danach hat der Entscheider immer noch die Möglichkeit, wenigstens einen Teil der geschätzten Wahrscheinlichkeiten mithilfe einer indirekten Methode zu überprüfen. Dabei testet er auf der Basis einfacher (hypothetischer) Entscheidungssituationen, ob er sich im Einklang mit den geschätzten Wahrscheinlichkeiten verhält; ist das nicht der Fall, so kann er sein Wahrscheinlichkeitsurteil überdenken und gegebenenfalls revidieren.

18.2.2.4 Grenzen der Vereinfachung eines Entscheidungsfeldes

Wie erläutert, muss ein Entscheider bei der Vereinfachung eines Entscheidungsmodells bereits ex ante abschätzen, welche möglichen Konsequenzen sich bei alternativen Varianten der Vereinfachung ergeben. Damit überhaupt eine ins Gewicht fallende Verringerung der Planungsarbeit erreicht wird, sind schon *vor* Kenntnis des „genauen“ Modells, etwa einer „genauen“ Ergebnismatrix, Vereinfachungen vorzunehmen. Zu diesem Zeitpunkt allerdings sind nur vage Anhaltspunkte über die Konsequenzen von Modellvereinfachungen vorhanden.

So wird die Entscheidung, eine bestimmte Alternative *nicht* weiter auf ihre Vorteilhaftigkeit hin zu überprüfen, im Allgemeinen zu einem Zeitpunkt getroffen, zu dem noch gar nicht genau untersucht worden ist, welche möglichen Ergebnisse ihr entsprechen und welche Wahrscheinlichkeiten diese aufweisen. Würden die möglichen Ergebnisse und deren Eintrittswahrscheinlichkeiten genau überprüft, um besser beurteilen zu können, ob sich eine weitere Berücksichtigung der Alternative im Entscheidungskalkül lohnt, könnte sich keine wesentliche Vereinfachung mehr ergeben: Bei Vernachlässigung der Alternative würde nur noch die Berechnung ihres Präferenzwertes entfallen. Zum Zeitpunkt der Entscheidung über Vereinfachungen sind daher viele Alternativen noch äußerst unscharf definiert. Die Vernachlässigung einer unscharf formulierten Alternative im weiteren Entscheidungsprozess aber bedeutet letztlich die Vernachlässigung einer Vielzahl von konkreten Alternativen, die noch gar nicht spezifiziert sind. Es ist daher nur schwer abzuschätzen, welche Konsequenzen sich aus solchen Vereinfachungen ergeben.

Auch die Entscheidung, einen möglichen Zustand im Kalkül zu vernachlässigen, wird in der Regel schon zu einem Zeitpunkt getroffen, in dem nur vage Vorstellungen darüber bestehen, welche Wahrscheinlichkeit er aufweist und welche Ergebnisse die Alternativen in diesem Zustand bieten. Würden diese Vorstellungen präzisiert, um die Konsequenzen einer Vernachlässigung des Zustandes besser beurteilen zu können, so entstünde von vornherein jener Planungsaufwand, den man zu vermeiden versucht.

Dieses Dilemma der Vereinfachung gilt vor allem auch für sequenzielle Entscheidungsmodelle. Wären der Zustandsbaum und die jeweiligen Aktionsmöglichkeiten eines mehrperiodigen Entscheidungsproblems detailliert beschrieben, so wären die Konsequenzen verschiedener Varianten der Modellvereinfachung noch relativ gut überschaubar. Wenn aber der Zustandsbaum sowie die Aktionsmöglichkeiten detailliert beschrieben werden, bevor die Entscheidungen über Modellvereinfachungen getroffen werden, wird der Planungsaufwand kaum sinken. Daher sind grundsätzlich ohne genaue Beschreibung des Zustandsbaumes und der (bedingten) Aktionsmöglichkeiten Vereinfachungen des Kalküls vorzunehmen. Dann sind aber wiederum die Vorstellungen über die Konsequenzen der Vereinfachung (des Verzichts auf ein tieferes Eindringen in das Entscheidungsproblem) noch sehr vage.

18.2.3 Vereinfachungen bei der Formulierung einer Entscheidungsregel

18.2.3.1 Zur praktischen Anwendung von Entscheidungskriterien bei Risiko unter dem Gesichtspunkt der Vereinfachung

Im ersten Teil dieses Buches wurden die Grundlagen der Entscheidungstheorie behandelt. Besonderen Raum nahmen dabei Entscheidungskriterien bei Risiko ein. Den „klassischen“ Entscheidungskriterien, die sich an wenigen Parametern der Ergebnisverteilung orientieren und sich daher vergleichsweise einfach anwenden lassen, wurde das Bernoulli-Prinzip als normatives Entscheidungskriterium gegenübergestellt. Dieses beruht auf der zentralen Annahme, dass ein Entscheider in der Lage ist, eine Nutzenfunktion zu ermitteln, um diese daraufhin der Bewertung der möglichen Ergebnisse zugrunde zu legen. Obwohl die Ermittlung einer Nutzenfunktion durch Bernoulli-Befragung (Kap. 5, Abschn. 5.3.2 und 5.3.3) relativ geringe Anforderungen an Entscheider stellt, zählen Entscheidungen auf der expliziten Basis des Bernoulli-Prinzips nicht zu den real beobachtbaren Phänomenen menschlichen Entscheidungsverhaltens.

Dies bedeutet allerdings nur, dass nicht davon ausgegangen werden kann, Entscheider würden in der Realität eine konkrete Nutzenfunktion ermitteln, um diese der Entscheidungsregel „Maximiere den Erwartungswert des Nutzens“ zugrunde zu legen. Auch wenn Entscheider nicht explizit Nutzenfunktionen ermitteln, bedeutet das nicht, dass das Bernoulli-Prinzip als normatives Entscheidungskriterium in der Praxis überhaupt nicht befolgt würde. Ein zentrales Konzept, das dem Bernoulli-Prinzip auch in der Praxis in vereinfachter Weise zur Anwendung verhilft bzw. verhelfen soll, ist das Konzept des subjektiven Sicherheitsäquivalents. Wie in Kap. 7, Abschn. 7.3 und 7.4, gezeigt wurde, ist das subjektive Sicherheitsäquivalent einer (finanziellen) Überschussverteilung gleich demjenigen Grenzpreis, zu dem ein Bernoulli-rationaler Entscheider sie gerade noch verkaufen würde. In Kap. 7 wurde auch gezeigt, wie das zugrunde liegende Bewertungsprinzip modifiziert werden kann, um einen Grenzpreis für die Ergebnisverteilung aus Käufersicht zu ermitteln.

Es ist zu beachten, dass der auf der Basis eines subjektiven Sicherheitsäquivalents ermittelte Grenzpreis einer Alternative noch keinen Präferenzwert für diese Alternative im Sinne des Bernoulli-Prinzips darstellt. Er ergibt sich erst dann, wenn dem Grenzpreis der tatsächlich erzielbare Verkaufspreis bzw. der zu zahlende Kaufpreis gegenüber gestellt wird. Außerdem muss der ermittelte Grenzpreis die Bernoulli-Präferenzen bezüglich der Überschüsse exakt widerspiegeln. Die Bewertung auf der Basis von subjektiven Sicherheitsäquivalenten führt vor allem im Mehrperioden-Fall zu einer aggregierten Größe (in Form eines Barwertes), deren Qualität als Repräsentant des Grenzpreises der betreffenden Überschüsse schwer zu beurteilen ist. Darauf kommen wir im nächsten Abschnitt zurück.

Das Konzept des Sicherheitsäquivalents findet explizit oder implizit in der Praxis breite Anwendung, vor allem auch bei der Bewertung von Wertpapieren und (darauf aufbauend) von Realinvestitionen. Das in der Praxis am stärksten verbreitete Bewertungsmodell für Wertpapiere ist das Capital Asset Pricing Model (CAPM). Es dient Investoren insbesondere zur Schätzung erwarteter Renditen von Wertpapieren bzw. von Kapitalkosten für Investitionsentscheidungen. In Kap. 13, Abschn. 13.5.3.1, wurde jedoch gezeigt, dass der Marktwert eines Wertpapiers oder eines Investitionsprojekts im Rahmen des CAPM analog auch nach der Sicherheitsäquivalentmethode ermittelt werden kann, indem das Marktsicherheitsäquivalent seines unsicheren Rückflusses mit dem risikolosen Zinssatz diskontiert wird.

Das Konzept des Sicherheitsäquivalents liegt implizit auch den klassischen Entscheidungskriterien zugrunde. Nach der μ -Regel orientiert sich der Entscheider am Erwartungswert des Ergebnisses, der mit dem Sicherheitsäquivalent des Ergebnisses übereinstimmt. Nach dem (μ, σ) -Prinzip wählt der Entscheider die Alternative mit dem maximalen Präferenzwert $\Phi(\mu, \sigma)$. Dieser lässt sich grundsätzlich ebenfalls als Sicherheitsäquivalent interpretieren. So würde beispielsweise eine additive Separation der Präferenzfunktion in $\Phi(\mu, \sigma) = \Phi_1(\mu) + \Phi_2(\sigma)$ es erlauben, diese bei linearer Funktion $\Phi_1(\mu)$ so zu normieren, dass der Präferenzwert ein Geldbetrag ist, der μ zuzüglich einer Risikoprämie ($\Phi_2(\sigma) > 0$) bzw. abzüglich eines Risikoabschlages ($\Phi_2(\sigma) < 0$) entspricht.

18.2.3.2 Aggregation im Rahmen von Bewertungen

Bei Anwendung des Bernoulli-Prinzips werden die Ausprägungen der Zielvariablen einer Alternative zu einem einzigen Indikator aggregiert, dem Erwartungswert des Nutzens bzw. dem Präferenzwert der Alternative. Eine solche Aggregation erfolgt im Prinzip auch im Rahmen anderer Entscheidungsregeln, auch wenn diese in mehr oder weniger vereinfachter Form vorgenommen wird. Die Qualität der resultierenden Größe als Indikator für einen „exakten“ Präferenzwert im Sinne des Bernoulli-Prinzips hängt von der Art der Aggregation ab.

Wenn sich der Entscheider an mehreren Zielvariablen orientiert, stellt sich das Problem der (vereinfachten) Aggregation bereits für den Einperioden-Fall und für sichere Erwartungen. Zu aggregieren sind dann die Ausprägungen der verschiedenen

Zielvariablen (Kap. 3, Abschn. 3.3, 3.4 und 3.5). Bei Risiko bezieht sich die Aggregation zusätzlich auf die Variation der Ergebnisse über die Umweltzustände. Im Mehrperioden-Fall ist darüber hinaus eine Aggregation über die Ergebnisse zu den relevanten Zeitpunkten bzw. Perioden vorzunehmen (Kap. 15, Abschn. 15.3 und 15.4). Durch Aggregation der Zielgrößenausprägungen in einen einzigen Wert werden implizit Substitutionsverhältnisse zwischen diesen festgelegt. Aggregation impliziert daher immer auch Kompensation zwischen Zielgrößenausprägungen: „Der Umfang, in dem ein Entscheidungskriterium Kompensation zulässt, ist von zentraler Bedeutung für seine praktische Anwendung“ (Dyckhoff 1985, S. 196).

In Kap. 3 wurden Möglichkeiten und Grenzen der Entscheidung bei Sicherheit und mehreren Zielvariablen erläutert. Hierfür ist die Aggregation der Ausprägungen der verschiedenen Zielvariablen durch lineare Gewichtung zu einer einzigen Größe eine typische Form der Vereinfachung, wobei unterstellt wird, dass lineare Kompensationsmöglichkeiten bestehen (Kap. 3, Abschn. 3.5.2.1). Inwieweit die gewichtete Summe der Zielgrößen einer Alternative von ihrem „exakten“ Präferenzwert abweicht, hängt von den Zielgewichten ab. Da dieser Präferenzwert aber aus Gründen der Vereinfachung nicht explizit ermittelt wird, lässt sich die Abweichung nur schwer abschätzen.

Eine weitergehende Möglichkeit der Vereinfachung kann in der Weise vorgenommen werden, dass nur eine der Zielvariablen im Modell erfasst wird (Zielunterdrückung). Wie in Kap. 3, Abschn. 3.5.2.2, erläutert wurde, bietet sich hierfür die Zielvariable Einkommen bzw. Überschuss an, da viele immaterielle Zielvariablen implizit über Einkommens- bzw. Geldäquivalente berücksichtigt werden können. (Finanzielle Zielgrößen standen auch in den vorhergehenden Kapiteln im Vordergrund.) Jedoch birgt dieses Vorgehen die Gefahr in sich, die Zielvorstellungen auf solche Ziele zu verengen, die sich als „geldwerte“ Vorteile bzw. Nachteile interpretieren lassen, und Zielgrößen zu unterdrücken, die für den Entscheider ebenfalls große Bedeutung haben und bei deren Vernachlässigung absehbar ist, dass er der Empfehlung des Entscheidungsmodells nicht folgen wird.

Eine Vereinfachung bei der Darstellung einer Entscheidungsregel im Mehrperioden-Fall bei Risiko besteht insbesondere darin, das Konzept des Sicherheitsäquivalents mit dem Konzept des Barwerts zu kombinieren (Kap. 15, Abschn. 15.4.2). Dabei werden die Sicherheitsäquivalente für die Überschüsse zu verschiedenen Zeitpunkten t ebenfalls linear gewichtet, und zwar mit Diskontfaktoren auf Basis des risikolosen Zinssatzes. Hierbei erfolgt die Aggregation aller Überschüsse in zwei Phasen: Zum einen werden für alternative Zeitpunkte deren Werte für die verschiedenen Umweltzustände in Sicherheitsäquivalente transformiert. Zum anderen erfolgt eine Aggregation der zeitunterschiedlichen Ergebnisse über die Summe der Barwerte der Sicherheitsäquivalente.

Eine wesentliche Vereinfachung kann vor allem im Mehrperioden-Fall auch darin bestehen, statt eines Entscheidungskriteriums nach dem Bernoulli-Prinzip das Ziel der Marktwertmaximierung heranzuziehen, auch wenn es nicht streng im Einklang mit subjektiver Nutzenmaximierung steht. Zwar sind auch bei der Ermittlung von Marktwerten vor allem im Mehrperioden-Fall wesentliche Vereinfachungen geboten, wenn

keine Vergleichsinvestitionen mit ähnlicher Risikostruktur bekannt sind und somit eine Duplikation nur über dynamische Portfeuillebildung möglich ist. Jedoch sind Marktwerte von Strömen an Überschüssen grundsätzlich wesentlich einfacher zu ermitteln als deren subjektiven Werte.

Das gilt vor allem auch für die Anwendung der Sicherheitsäquivalentmethode. Die Marktwerte einzelner Überschüsse (deren Marktsicherheitsäquivalente) können unabhängig von den Überschüssen zu anderen Zeitpunkten und unabhängig von weiteren Überschüssen eines Entscheiders ermittelt werden, während bei subjektiver Bewertung (bei der Ermittlung subjektiver Sicherheitsäquivalente) komplexe Risiko- und Bewertungsverbundeffekte berücksichtigt werden müssen, um Fehlbewertungen zu vermeiden.

Unter bestimmten Kapitalmarktbedingungen ist die vereinfachte Bewertung von Überschüssen anhand eines Barwertes von Marktsicherheitsäquivalenten mit subjektiver Nutzenbewertung kompatibel (Kap. 14, Abschn. 14.2 und 14.3, sowie Kap. 15, Abschn. 15.3.1). Aber auch oder vielleicht gerade dann, wenn die Vereinfachung nicht durch kapitalmarkttheoretische Überlegungen fundiert werden kann und somit die Vereinfachung ein komplexes Problem darstellt, ist die Bewertung von Alternativen anhand des Barwertes ihrer (subjektiven) Sicherheitsäquivalente (vor allem in der Praxis) eine wesentliche Form der Vereinfachung. Die Grenzen dieser Form der Vereinfachung wurden in Kap. 15, Abschn. 15.3.2 und 15.4, diskutiert.

18.2.4 Vereinfachungen bei mehrperiodigen Entscheidungsproblemen

18.2.4.1 Entscheidungsfeld

Zur Ermittlung optimaler Pläne im Mehrperioden-Fall wurde in Kap. 9 das Konzept der flexiblen Planung vorgestellt. Die flexible Planung dient dazu, unsichere zukünftige Entwicklungen und Handlungsmöglichkeiten bei der Entscheidung über die *gegenwärtigen* Aktionsmöglichkeiten zu berücksichtigen. Sie zielt darauf ab, dass gegenwärtig ein Aktionsprogramm gewählt wird, welches einen „guten“ Entscheidungsspielraum für zukünftige Entwicklungen offen lässt. Bei Verzicht auf Modellvereinfachung würde zu Beginn des Planungszeitraums eine umfassende Strategie bis zum Ende des Planungszeitraums erarbeitet werden. Der Entscheider würde für alle als möglich erkannten Umweltentwicklungen eine Folge detaillierter Eventualpläne erstellen und von diesen Plänen allenfalls dann abweichen, wenn eine bisher nicht als möglich erkannte Umweltentwicklung eintritt und/oder neue Aktionsmöglichkeiten entdeckt werden. Falls derartige Ereignisse nicht eintreten, würden sich (bei Verzicht auf Modellvereinfachung) in Zukunft weitere Planungsaktivitäten erübrigen: Der Entscheider realisierte dann im Zeitablauf jene der vorliegenden (bedingten) Teilpläne, die der eintretenden Umweltentwicklung entsprechen.

Es ist unmittelbar einleuchtend, dass eine solche umfassende Planung in der Realität nicht möglich oder zumindest nicht sinnvoll ist. Es stellt sich wieder das Problem der Vereinfachung. Im Prinzip sind die gleichen Vereinfachungsmöglichkeiten gegeben wie im Einperioden-Fall. So folgen Vereinfachungen bei der Darstellung zukünftiger Umweltentwicklungen denselben Grundprinzipien wie Vereinfachungen bezüglich der Umweltzustände bei einperiodiger Betrachtung. Allerdings muss der Entscheider dabei nicht nur die unmittelbaren Konsequenzen des Eintretens eines Umweltzustand zu einem bestimmten Zeitpunkt abschätzen, sondern auch die „Spätfolgen“ dieser Entwicklung. Ähnliches gilt für Vereinfachungen bei Handlungsalternativen: Dabei muss der Entscheider auch berücksichtigen, welche zukünftigen Handlungsmöglichkeiten aus gegenwärtigen Maßnahmen resultieren. Die Vernachlässigung zukünftiger Handlungsmöglichkeiten kann insbesondere dazu führen, dass der Entscheider den Wert von Handlungsspielräumen unterschätzt.

Einige Aspekte der Vereinfachung sind für die flexible Planung charakteristisch. Die Vereinfachungen sollten dabei so vorgenommen werden, dass sich nur geringe Rückwirkungen auf den für den Beginn des Planungszeitraums ermittelten Plan ergeben. Vereinfachungen bezüglich zukünftiger Perioden können im Zeitablauf entsprechend der eintretenden Umweltentwicklung behoben werden. So kann zu Beginn des Planungszeitraums insbesondere vereinfacht werden, indem noch keine umfassende Strategie bestimmt wird: Ein Detailplan wird zunächst nur für die unmittelbar anstehenden Aktionen erstellt. Damit diese Aktionen zu einer guten Ausgangsposition für spätere Anpassungen an mögliche Umweltentwicklungen führen, werden die zukünftigen Folgemaßnahmen nicht völlig vernachlässigt. Sie werden jedoch nur in Form einer *Grobplanung* erfasst, d. h. es werden für zukünftige Entscheidungszeitpunkte relativ wenige Eventualpläne erstellt, die mehr oder weniger umrissartig vorsehen, was jeweils zu tun ist. Die Aktionen eines zukünftigen Zeitpunkts werden erst zu diesem Zeitpunkt detailliert festgelegt. Dabei werden je nach der eintretenden Umweltentwicklung vorhandene grobe Eventualpläne verfeinert oder völlig neue Pläne (grob oder detailliert) aufgestellt.

Darüber hinaus kann ein Entscheider insbesondere dadurch vereinfachen, dass er den Planungszeitraum verkürzt und die Ergebnisse nach dem Ende des verkürzten Planungszeitraums nur mehr oder weniger grob abschätzt. Die Konsequenzen von Entscheidungen nach Ende des verkürzten Planungszeitraums können in der Weise berücksichtigt werden, dass die bis dahin noch nicht abgeschlossenen Projekte für das Ende des verkürzten Planungszeitraums bewertet und die betreffenden Wertansätze in die Zielfunktion des Modells einbezogen werden (Hax 1985, S. 91 f.).

18.2.4.2 Entscheidungsregel

Schließlich besteht die Möglichkeit, Vereinfachungen bei der Darstellung und Erfassung der Entscheidungsregel im Entscheidungsmodell vorzunehmen. Dabei ergeben sich unabhängig davon, ob das Ziel subjektiver Nutzenmaximierung oder der Marktwertmaximierung verfolgt wird, letztlich dieselben Probleme wie im Einperioden-Fall. Es ist jedoch zu beachten, dass sowohl das Ziel der Marktwertmaximierung als auch das

der subjektiven Nutzenmaximierung im Mehrperioden-Fall wesentlich komplexer sind, sodass hier ein besonderer Bedarf an Vereinfachung besteht.

Radikale Vereinfachungen bei der Ermittlung von Marktwerten für den Leistungsbereich oder für einzelne Investitionsprojekte sind selbst dann unvermeidlich, wenn es im Prinzip möglich ist, sie aus den Marktwerten von Duplikationsportefeuilles oder mit Preisen für zustandsbedingte Zahlungsansprüche herzuleiten. Z. B. können Duplikationsportefeuilles nicht „exakt“ dynamisch ermittelt, sondern nur mehr oder weniger global approximiert (geschätzt) werden.

In der Praxis sind die Sicherheitsäquivalent- und die Risikozuschlagsmethode (Kap. 15, Abschn. 15.4.2 und 15.4.3) für die Bewertung vor allem im Mehrperioden-Fall weit verbreitet. Das Problem der Vereinfachung ist damit natürlich letztlich noch nicht gelöst; es wird auf die Ebene der Ermittlung der Sicherheitsäquivalente bzw. der risikoangepassten Zinssätze verlagert. Wie in Kap. 15, Abschn. 15.4.3.2, gezeigt wurde, kann möglicherweise die Ermittlung des Marktwertes eines Unternehmens oder eines einzelnen Investitionsprojekts vereinfacht werden, indem man auf eine Vergleichsinvestition derselben „Risikoklasse“ mit *bekanntem* Marktwert zurückgreift, auf der Basis der Erwartungswerte ihrer Überschüsse und ihres Marktwertes ihren internen Zinsfuß ermittelt und damit die erwarteten Überschüsse des Bewertungsobjekts diskontiert. Dabei ist es irrelevant, ob diese Vergleichsinvestition zum Marktwert tatsächlich gekauft werden kann.

Bei Konflikt zwischen Marktwertmaximierung und subjektiver Nutzenmaximierung stellt sich das Problem, dasjenige Investitionsprogramm simultan mit den Kapitalmarkttransaktionen zur Transformation von Investitionsüberschüssen in Konsumausgaben zu ermitteln, mit dem der Erwartungswert des Nutzens maximiert wird. Jedoch können die Ermittlung und die Erfassung einer „korrekten“ Nutzenfunktion für Konsumströme im Mehrperioden-Fall vor allem bei Nutzenabhängigkeiten zwischen den Konsumausgaben zu verschiedenen Zeitpunkten einen prohibitiv hohen Aufwand verursachen. Wie in Kap. 15, Abschn. 15.4.5, erläutert wurde, kann hier eine erhebliche Vereinfachung erzielt werden, indem die Konsumausgaben für die Zeitpunkte vor T dem Modell exogen vorgegeben werden und der Erwartungswert des Nutzens des Endvermögens (zum Zeitpunkt T) maximiert wird. Es muss dann explizit nur die Nutzenfunktion für das Endvermögen ermittelt und im Modell berücksichtigt werden.

Bei Maximierung des Erwartungswertes des Endvermögensnutzens ist zum einen die Nutzenfunktion relativ einfach darstellbar, zum anderen muss keine generelle Separierbarkeit der Nutzenfunktion unterstellt werden: Insbesondere wenn die exogen vorgegebenen Konsumausgaben für die Zeitpunkte vor T zustandsabhängig sind, ist allerdings zu vermuten, dass die Nutzenfunktion für das Endvermögen zustandsabhängig zu formulieren ist, um Nutzenabhängigkeiten zwischen dem Endvermögen und den vorgegebenen Konsumausgaben zu erfassen.

18.3 Vereinfachung aus normativer und deskriptiver Sicht

18.3.1 Vereinfachungen im Rahmen der Prospect-Theorie

Die in den vorangegangenen Abschnitten dargestellten Vereinfachungen von Entscheidungsmodellen wurden aus normativer Sicht diskutiert. Vereinfachungen dienen in diesem Sinne dazu, den Nutzen einer mehr oder weniger detailgenauen Abbildung eines Entscheidungsproblems im Entscheidungsmodell gegen die jeweiligen Kosten dieser Abbildung abzuwägen.

Gleichwohl haben die diskutierten Vereinfachungen zum Teil große Ähnlichkeit mit den Vereinfachungen im Rahmen der Editing-Phase der Prospect-Theorie, die in Kap. 6, Abschn. 6.4.2, beschrieben wurden. Die Editing-Phase sieht sechs Maßnahmen vor: Kodierung, Kombination, Abtrennung, Streichung gemeinsamer Bestandteile, Vereinfachung und Vorauswahl über Dominanzkriterien.

Kombination und Vereinfachung, d. h. die Zusammenfassung von Umweltzuständen und das Auf- oder Abrunden ihrer Eintrittswahrscheinlichkeiten, beziehen sich auf die Vereinfachung in der Erfassung der Umweltzustände und ihrer Wahrscheinlichkeiten, die in Abschn. 18.2.2.3 beschrieben wurde. Die Vorauswahl durch Dominanzkriterien wurde in Kap. 4, Abschn. 4.5, ausführlich dargestellt. Abtrennung, d. h. das Herauslösen von garantierten Mindestbeträgen aus Ergebnisverteilungen, und die Streichung gemeinsamer Bestandteile bei der Bewertung, d. h. das Ignorieren von Bestandteilen, die in allen Ergebnissen in gleicher Höhe enthalten sind, führen dagegen zu einer vor dem Hintergrund des Bernoulli-Prinzips grundsätzlich unzulässigen Vereinfachung in der Darstellung der Ergebnisse, da Reichtumseffekte generell ausgeschlossen werden. Dennoch kann es aus Gründen der Kostenersparnis auch aus normativer Sicht sinnvoll sein, solche Vereinfachungen vorzunehmen.

Die Operation der Kodierung dagegen, d. h. die Festlegung eines Referenzpunktes für die Definition von Gewinnen und Verlusten als relevante Ergebnisse, widerspricht jedoch grundsätzlich dem Bernoulli-Prinzip und lässt sich aus normativer Sicht auch grundsätzlich nicht aus Vereinfachungsgründen rechtfertigen. Abgesehen von dieser Operation kann jedoch die Editing-Phase der Prospect-Theorie als eine (sinnvolle) Vorgehensbeschreibung für die Vereinfachung des Entscheidungsfeldes eines Entscheidungsmodells interpretiert werden. Jedoch endet diese Vorgehensbeschreibung bei der Formulierung einer Entscheidungsregel; die Prospect-Theorie (und mit ihr die überwiegende Anzahl deskriptiver Entscheidungstheorien) gibt keine Hinweise darauf, wie Entscheider mit der Komplexität mehrdimensionaler Zielsysteme tatsächlich umgehen bzw. umgehen sollten.

18.3.2 Vereinfachungen bei der Bildung von Wahrscheinlichkeitsurteilen

Vereinfachungen bei der Bildung von Wahrscheinlichkeitsurteilen betreffen insbesondere auch die Verarbeitung von Informationen. In Kap. 10, Abschn. 10.4.2, wurde gezeigt, wie diese rational nach dem Theorem von Bayes vorzunehmen ist. In der praktischen Anwendung sind einem solchen Vorgehen jedoch enge Grenzen gesetzt, sodass sich ein Entscheider mit mehr oder weniger groben Abschätzungen behelfen wird, wie eine Information in ein neues Wahrscheinlichkeitsurteil umzusetzen ist.

Die deskriptive Entscheidungstheorie hat sich damit spätestens seit den Arbeiten von Kahneman und Tversky zur Verwendung von Heuristiken bei der Urteilsbildung (Tversky und Kahneman 1974; Kahneman et al. 1982) intensiv auseinandergesetzt. Heuristiken, d. h. vereinfachte Regeln der Beurteilung von Wahrscheinlichkeiten und der Prognose von Umweltentwicklungen, dienen dazu, insbesondere wiederkehrende Indikatoren in einfacher und schneller Weise zu einem (veränderten) Wahrscheinlichkeitsurteil zu verarbeiten. Sie sind daher grundsätzlich nützliche Instrumente der Vereinfachung, bergen allerdings immer auch die Gefahr von Fehlurteilen: „In general, these heuristics are quite useful, but sometimes they lead to severe and systematic errors“ (Tversky und Kahneman 1974, S. 1124).

Aus normativer Sicht sollte ein Entscheider Heuristiken anwenden, wenn diese sich in der Vergangenheit bewährt haben und er auch in der gegebenen Situation abschätzen kann, dass sie nicht zu einem (zu stark) verfälschten Wahrscheinlichkeitsurteil führen. Das Problem dabei besteht jedoch darin, dass viele Heuristiken, die zu Verzerrungen in der Urteilsbildung führen, *unbewusst* angewendet werden, sodass eine rationale „Entscheidung“ für oder gegen die Anwendung einer Heuristik erschwert wird oder gar nicht möglich ist.

Ein anschauliches Beispiel hierfür ist die „Anchoring and Adjustment“-Heuristik (Tversky und Kahneman 1974). In berühmt gewordenen Experimenten haben Tversky und Kahneman Versuchspersonen Schätzaufgaben gestellt. Beispielsweise mussten Personen schätzen, wie hoch der Anteil afrikanischer Staaten in den Vereinten Nationen sei. Dabei wurde noch vor der Antwort ein Glücksrad mit Zahlen von 0 bis 100 gedreht. Nachdem so eine Zufallszahl ermittelt worden war, wurden die Versuchspersonen gebeten anzugeben, ob sie den Anteil in Prozent höher oder niedriger als die Zufallszahl einschätzten und wie hoch sie den Anteil schätzten. Dabei ergaben sich ausgeprägte Abhängigkeiten der Schätzungen von den Zufallszahlen: In einer Gruppe, in der die Zufallszahl 10 betrug, wurde der Anteil im Mittel auf 25 % geschätzt, in einer anderen Gruppe mit der Zufallszahl 65 wurde der Anteil dagegen im Mittel auf 45 % geschätzt. Dabei war den Versuchspersonen sicher bewusst, dass das Drehen des Glücksrades nichts mit der Beantwortung der Frage zu tun hatte. Dennoch wurde das Ergebnis als Anker verwendet.

18.4 Vereinfachung durch Zerlegung in Partialmodelle

18.4.1 Konzept

Eine Vereinfachung kann auch in der Weise erfolgen, dass anstelle eines Totalmodells, das simultan alle Aktionsmöglichkeiten erfasst, mehrere Partialmodelle konstruiert und gelöst werden, die jeweils nur einen Teilbereich des gesamten Entscheidungsfeldes berücksichtigen. Dabei sollten die Partialmodelle so formuliert werden, dass ihre Lösungen eine „gute“ Annäherung an die optimale Lösung des gesamten Entscheidungsproblems darstellen.

Bei Anwendung des Grundmodells der Entscheidungstheorie z. B. besteht die Vereinfachung darin, dass keine umfassende Ergebnismatrix erstellt wird, in der die einander ausschließenden Alternativen als Kombinationen von Ausprägungen sämtlicher Entscheidungsvariablen dargestellt werden. Vielmehr wird die Entscheidung auf der Basis „partieller“ Ergebnismatrizen getroffen, die jeweils nur Wertekonstellationen für einen Teil der Entscheidungsvariablen (einen Teil des Entscheidungsfeldes) erfassen und somit auch nur potenzielle Lösungen für einen Teil des Entscheidungsproblems darstellen. Entsprechend müssen die Zustände auch nicht als Kombinationen von Ausprägungen aller entscheidungsrelevanten Daten dargestellt werden. In einer partiellen Ergebnismatrix werden nur diejenigen Daten berücksichtigt, die die Ergebnisse der darin enthaltenen Einzelmaßnahmen beeinflussen.

Die Zerlegung des gesamten Entscheidungsfeldes in mehrere Entscheidungsbereiche ist ohne Weiteres sinnvoll, wenn zwischen ihnen keine Interdependenzen bzw. Verbundeffekte bestehen oder diese in einfacher Weise berücksichtigt werden können. Bestehen Interdependenzen (Restriktionsverbund, Erfolgsverbund, Risikoverbund und/oder Bewertungsverbund, vgl. Kap. 1, Abschn. 1.2.5), so führt eine Zerlegung des Entscheidungsfeldes grundsätzlich zu suboptimalen Plänen, da die Wechselwirkungen der Alternativen unterschiedlicher Entscheidungsfelder nicht erfasst werden.

Die Vereinfachung durch Zerlegung in Partialmodelle sollte nicht primär unter dem Gesichtspunkt vorgenommen werden, die einzelnen Partialmodelle übersichtlich zu halten, sondern vor allem mit dem Ziel, starke und schwer erfassbare Interdependenzen zwischen den Entscheidungsfeldern möglichst zu vermeiden. Im Idealfall werden die Partialmodelle so formuliert, dass der größte Teil der Interdependenzen innerhalb der einzelnen Partialmodelle erfasst wird, zwischen den verschiedenen Partialmodellen hingegen nur schwache oder leicht erfassbare Verbundeffekte bestehen.

Verbundeffekte lassen sich in relativ einfacher Weise berücksichtigen, wenn das Entscheidungsfeld derart zerlegt werden kann, dass für die Partialmodelle der folgende Zusammenhang gilt: Im ersten (Partial-) Modell können die Interdependenzen mit dem restlichen Entscheidungsfeld einfach (mit relativ wenigen Informationen) erfasst werden, im zweiten Modell die Interdependenzen mit den Entscheidungsbereichen der nachfolgenden Modelle, usw. Hier wird zunächst die Lösung des ersten Partialmodells bestimmt, dann die des zweiten, wobei die Interdependenzen zu den im ersten

Modell ermittelten Maßnahmen berücksichtigt werden. Anschließend werden im dritten Modell die betreffenden Maßnahmen mit den Lösungen des ersten und zweiten Modells abgestimmt, usw.

Eine solche sukzessive Lösung von Entscheidungsproblemen (Sukzessivplanung) kann unabhängig davon vorgenommen werden, ob die Entscheidungen durch einen einzigen Entscheider getroffen werden (intrapersonelle Koordination) oder durch mehrere Personen, die für verschiedene Teilbereiche zuständig sind (interpersonelle Koordination).

18.4.2 Bildung von Entscheidungsfeldern als Organisationsproblem

Die Bildung von Entscheidungsbereichen ist Kennzeichen von Unternehmen und anderen Organisationen, in denen (zahlreiche) Personen miteinander kooperieren. Die oberste Leitungsinstanz steht vor dem Problem, die Entscheidungen der anderen Entscheidungsträger zu koordinieren (vgl. ausführlich Laux und Liermann 2005, Kap. XII). Dieses Organisationsproblem kann sie grundsätzlich nicht dadurch lösen, dass sie diesen Entscheidungsträgern explizite Weisungen erteilt, die die bestehenden Interdependenzen berücksichtigen. Stattdessen wird sie in großem Umfang Entscheidungskompetenzen delegieren und Entscheidungsbereiche (Abteilungen und Unterabteilungen) bilden, die die Entscheidungsprozesse erleichtern. Interdependenzen, die innerhalb der einzelnen Bereiche bestehen, sind in den bereichsbezogenen Planungen zu berücksichtigen. Interdependenzen zwischen den Bereichen muss die Instanz durch geeignete Abteilungsbildung und sonstige Maßnahmen Rechnung tragen.

Bei der Koordination von Entscheidungsbereichen in einer Organisation kommen vor allem die hierarchische Planung und die Sukzessivplanung zum Einsatz. Diese Verfahren dienen insbesondere dazu, Restriktions- und Erfolgsverbundeffekte zu berücksichtigen. Bei der hierarchischen *Top-Down*-Planung beginnt die Planung an der Spitze der Unternehmenshierarchie, wobei im Rahmen von Globalplänen den Interdependenzen zwischen den (Haupt-)Abteilungen Rechnung getragen wird. Danach werden von Hierarchieebene zu Hierarchieebene unter Berücksichtigung der jeweils bereichsspezifischen Informationen die Pläne immer mehr präzisiert, bis schließlich über alle Maßnahmen konkret entschieden ist.

Die Sukzessivplanung erfolgt i. A. in der Weise, dass die Teilpläne verschiedener Bereiche der gleichen Hierarchieebene (z. B. Absatz, Produktion und Beschaffung) nacheinander festgelegt werden. Wird der Ausgangsplan z. B. durch den Absatzbereich erstellt, so wird im Produktionsbereich als zweiter Teilplan der entsprechende Produktionsplan erarbeitet. Darauf aufbauend wird anschließend die Beschaffungsplanung durchgeführt. Die Koordination erfolgt bei Sukzessivplanung dadurch, dass jeder Teilplan auf den ihm unmittelbar vorhergehenden (kumulierten) Teilplan ausgerichtet wird.

Der Planungsprozess wird bei Sukzessivplanung in starkem Maße durch den Ausgangsplan geprägt. Damit ein „guter“ Gesamtplan entsteht, sollte daher bei der Ausgangsplanung bereits (im Rahmen des Möglichen) antizipiert werden, wie damit die Entscheidungen in den übrigen Teilbereichen optimal abgestimmt werden und welche Konsequenzen für das Unternehmen als Ganzes resultieren. Es ist naheliegend, dass derjenige Teilbereich mit der Planung beginnt, der in relativ einfacher Weise über die maßgeblichen Daten und Aktionsmöglichkeiten der übrigen Bereiche informiert werden kann. Im Allgemeinen wird dies der Absatzbereich sein. Bei der Absatzplanung werden die vielfältigen Informationen verarbeitet, die die Entscheidungsträger im Absatzbereich über Kunden und Konkurrenz haben. Dem Produktionsbereich werden dann Produktionsaufträge erteilt. Darauf aufbauend werden im Produktionsbereich unter Berücksichtigung der bereichsspezifischen Informationen die Produktionspläne und dann im Beschaffungsbereich die Beschaffungspläne erstellt. Damit der Absatzbereich die Auswirkungen seiner Entscheidungen auf die Produktionsdauer und Produktionskosten beurteilen kann, wird er vom Produktionsbereich über die Höhe der Stückkosten der einzelnen Produkte und bei erwarteten Engpässen auch über die Produktionskapazitäten informiert.

Die Koordination kann in komplexeren Situationen auch in der Weise erfolgen, dass die Leiter verschiedener Bereiche die Abstimmung in Form von Gruppenentscheidungen vornehmen (Kap. 16).

Das besondere Problem von Erfolgsverbundeffekten besteht darin, dass die Bewertung von Handlungsalternativen in unterschiedlichen Entscheidungsbereichen nicht additiv ist: Die isoliert ermittelten Werte zweier Alternativen addieren sich nicht zum Gesamtwert beider Alternativen. Zwar folgt dieses Problem grundsätzlich auch aus Risiko- und Bewertungsverbundeffekten. Wie im folgenden Abschnitt erläutert wird, ist jedoch das Problem der Erfassung von Risiko- und Bewertungsverbund unter bestimmten Kapitalmarktbedingungen relativ gering. Das Problem des Restriktions- und/oder Erfolgsverbundes ist dagegen grundsätzlich unabhängig von den Kapitalmarktbedingungen.

18.4.3 Bedeutung des Kapitalmarktes für Vereinfachungen

In den Kap. 13, 14 und 15 wurde die Bedeutung des Kapitalmarktes für die Fundierung von Unternehmenszielen herausgearbeitet. Die Bedeutung des Kapitalmarktes ergibt sich insbesondere daraus, dass er den Gesellschaftern einer Unternehmung die Möglichkeit bietet, die Zahlungsströme aus der Unternehmung durch den Handel mit Wertpapieren zeitlich sowie über die möglichen Umweltzustände zu transformieren. Damit verbunden sind sogenannte Separationstheoreme der Investitions- und Finanzierungstheorie, die in den Kap. 14 und 15 erläutert wurden. Für die Vereinfachung von Entscheidungsproblemen haben diese Separationstheoreme große Bedeutung: Sie erlauben es, ein komplexes Entscheidungsmodell trotz grundsätzlich bestehender Risiko- oder

Bewertungsverbundeffekte in Partialmodelle zu unterteilen und in deren Rahmen Entscheidungen anhand relativ einfacher Entscheidungsregeln zu treffen. Voraussetzung ist allerdings, dass weder Restriktions- noch Erfolgsverbund zwischen den Projekten bestehen.

Der Kapitalmarkt hat im Übrigen nicht nur Bedeutung für die Fundierung von Unternehmenszielen und die Vereinfachung von Investitionsentscheidungen in Unternehmen, sondern auch für die Lösung und Vereinfachung aller Probleme, die in den Kap. 7 und 9 bis 12 diskutiert werden.

Mit der Separation in Partialmodelle einher geht die Eigenschaft der *Wertadditivität* der Bewertungsfunktionen, die den Entscheidungsregeln zugrunde liegen. Wertadditivität liegt dann vor, wenn die Summe der Werte zweier Ergebnisverteilungen mit dem Wert der Summe der Ergebnisverteilungen übereinstimmt (vgl. Kap. 14, Abschn. 14.5.2.3). Wertadditivität besteht immer dann, wenn der Kapitalmarkt vollkommen und vollständig ist: Der Entscheider kann dann jede Alternative eines Entscheidungsfeldes anhand ihres Marktwertes beurteilen, wobei die Summe der Marktwerte aller realisierten Alternativen der einzelnen Entscheidungsbereiche dem Marktwert des Gesamtprogramms entspricht.

Auf einem vollkommenen und vollständigen Kapitalmarkt besteht *universelle* Fisher-Separation: Ein Entscheider kann nicht nur die Entscheidungen über einzelne Investitionen unabhängig von allen übrigen Investitionsentscheidungen treffen, sondern auch seine Investitionsplanungen unabhängig von seiner Konsumplanung vornehmen: Das Separationstheorem von Fisher ist das Spiegelbild der Wertadditivität. Dieser Zusammenhang gilt allerdings nicht, wenn zwischen den Investitionen Restriktions- und/oder Erfolgsverbundeffekte bestehen.

Aufgrund der Separierbarkeit der Planungen kann der Entscheider über seine Investitionen und seine Konsumausgaben im Rahmen einer Sukzessivplanung vereinfachend wie folgt entscheiden: Zunächst bestimmt er das Investitionsprogramm mit dem höchsten Marktwert nach Abzug der Anschaffungsauszahlung. Dabei berücksichtigt er gegebenenfalls Restriktions- und Erfolgsverbundeffekte. Daraufhin plant er diejenigen Kapitalmarkttransaktionen, die die Überschüsse aus den Investitionen in einen optimalen (stochastischen) Konsumstrom transformieren. Das Analoge gilt für den Fall, dass die Investitionen in einem Unternehmen mit vielen Gesellschaftern durchgeführt werden, die proportional an den Überschüssen beteiligt sind.

Jedoch können die optimalen Kapitalmarkttransaktionen nicht ebenfalls vereinfacht nach dem Marktwertkriterium ermittelt werden. Da die Marktwerte der Überschüsse der Wertpapiere mit ihren Preisen identisch sind, stimmt der Marktwert des Konsumstroms stets mit dem der Überschüsse des Investitionsprogramms bzw. (bei mehreren Gesellschaftern) mit dem Anteil daran überein. Die optimalen Kapitalmarkttransaktionen sind nach dem Bernoulli-Prinzip vorzunehmen, wobei vor allem im Mehrperioden-Fall wieder radikale Vereinfachungen geboten sind.

Ist der Kapitalmarkt nicht vollkommen und/oder vollständig, so besteht grundsätzlich ein Konflikt zwischen Marktwertmaximierung und subjektiver Nutzenmaximierung, und die Separationsmöglichkeiten sind eingeschränkt. Die optimalen Investitionsentscheidungen

können dann nicht mehr separat von der Konsumplanung getroffen werden, wodurch das Entscheidungsmodell wesentlich komplexer wird. Hinzu kommt, dass auch die einzelnen Investitionsprojekte selbst dann nicht unabhängig voneinander bewertet werden können, wenn weder Restriktions- noch Erfolgsverbund bestehen. Jede vereinfachende, willkürliche Trennung der Entscheidungsbereiche führt dann grundsätzlich zu suboptimalen Entscheidungen.

Bei Konflikt zwischen Marktwertmaximierung und subjektiver Nutzenmaximierung bestehen Interessenkonflikte zwischen Gesellschaftern bzw. Anteilseignern eines Unternehmens. Für die Unternehmensleitung könnte sich dann das Problem stellen, einen „fairen“ Interessenausgleich zwischen den Eigentümern herzustellen. Hierzu benötigt sie aber Informationen über deren Präferenzen, die sie praktisch gar nicht beschaffen kann. Abgesehen davon ist es selbst bei bekannten Präferenzordnungen der Gesellschafter kaum möglich, überzeugende Aussagen über deren „faire“ Aggregation in eine kollektive Präferenzordnung für die Anteilseigner als Gruppe zu machen. Eine erhebliche Vereinfachung wird in dieser Situation erzielt, indem als Unternehmensziel die Marktwertmaximierung festgelegt wird (Kap. 17, Abschn. 17.6). Dieses Ziel ist relativ objektiviert und operational, sodass es nicht nur die Unternehmensplanung vereinfacht, sondern auch die Gestaltung anreizkompatibler Belohnungs- und Kontrollsysteme zur zielkonformen Steuerung der Entscheidungen im Unternehmen.

18.5 Grenzen rationaler Entscheidung

18.5.1 Problematik der Bestimmung eines „optimalen“ Komplexionsgrades

Bei der Konstruktion eines Entscheidungsmodells stellt sich allgemein das Problem, welchen Komplexionsgrad es aufweisen soll. Da die Bestimmung des optimalen Komplexionsgrades selbst ein Entscheidungsproblem darstellt, mag es naheliegen, dessen Lösung mithilfe eines Entscheidungsmodells anzustreben, d. h. ein „Meta-Modell“ zur Bestimmung des optimalen Komplexionsgrades des eigentlichen Entscheidungsmodells zu konstruieren. In einem solchen Modell müssten jedoch alle relevanten Gegebenheiten (z. B. Handlungsmöglichkeiten und Umweltzustände) berücksichtigt werden, die im eigentlichen Modell (für das der optimale Komplexionsgrad gesucht wird) enthalten sein können. Das Meta-Modell wäre daher mindestens ebenso komplex wie das nicht vereinfachte eigentliche Modell und das Problem der Vereinfachung würde sich jetzt analog für das Meta-Modell stellen. Hierzu müsste ein *Meta-Meta-Modell* formuliert werden, für das sich wieder das Problem der Vereinfachung ergäbe usw. Dieses Vorgehen führt somit zu einem *infinitem Regress*. Auf diesem Weg ist das Problem der Modellvereinfachung nicht sinnvoll zu lösen. Eine tatsächliche Vereinfachung wird nur erreicht, wenn die Auswirkungen der Vereinfachung nicht „theoretisch exakt“ ermittelt werden.

18.5.2 Zur praktischen Bedeutung vereinfachter Entscheidungsmodelle

Wie deutlich wurde, müssen bei der Konstruktion von Entscheidungsmodellen im Allgemeinen Entscheidungen über Vereinfachungen getroffen werden, die nicht in Form präziser Abwägungen der möglichen Konsequenzen „theoretisch exakt“ fundiert sind, sondern auf einem mehr oder weniger groben, subjektiven Ermessensurteil beruhen. Die Modellkonstruktion ist demnach nicht frei von einer gewissen Willkür. Die explizite Anwendung von Entscheidungsmodellen stößt aus diesem Grund gelegentlich auf grundsätzliche Bedenken. Doch welche Alternativen gibt es hierzu und wie sind *diese* zu beurteilen?

Wird die Entscheidung völlig intuitiv getroffen, so erfolgt die Auswahl einer Alternative im Rahmen eines sehr groben Kalküls, wobei weitgehend im Verborgenen bleibt, welche Informationen in die Entscheidung einfließen, wie sie verarbeitet werden und welche Vereinfachungen damit einhergehen.

Das Verhalten *anderer* Personen kann ungeprüft nachgeahmt werden. (Z. B. werden bestimmte Maßnahmen durchgeführt, weil die Konkurrenz dies tut.) Dieses Vorgehen ist ebenfalls problematisch. Entscheidungen, die im Hinblick auf die Aktionsmöglichkeiten und Zielvorstellungen anderer Personen „gut“ sind, können sehr schlecht sein bezüglich der eigenen Möglichkeiten und Ziele. Selbst bei gleichen Zielen und Möglichkeiten ist eine kritiklose Orientierung an den Entscheidungen anderer problematisch. Die Bezugspersonen treffen möglicherweise sehr schlechte Entscheidungen (was gerade darauf zurückzuführen sein mag, dass sie es ebenfalls ablehnen, mit Entscheidungsmodellen zu arbeiten).

Im Allgemeinen ist es sinnvoller, die Entscheidung auf der Grundlage *eigener* Überlegungen zu treffen (wobei freilich die Informationen und der Rat anderer in den Entscheidungsprozess einfließen können). Derartige Überlegungen werden immer an bestimmten Leitlinien ausgerichtet und sind somit stets modellorientiert. Man hat gar nicht die Wahl zwischen einer Entscheidung mit oder ohne Entscheidungsmodell. Man hat nur die Entscheidungsfreiheit, *wie* mit einem Modell gearbeitet wird. Man kann ein Modell implizit anwenden oder explizit. Der Vorteil einer expliziten Anwendung besteht darin, dass man gezwungen wird, die Prämissen der Entscheidungsfindung offenzulegen und dass außerdem die Informationen besser verarbeitet werden können. Wie in der Arbeit gezeigt wurde, gibt die Entscheidungstheorie allgemeine Orientierung und konkrete Hilfestellungen für die eigenständige Wahrnehmung, Präzisierung und Lösung von Entscheidungsproblemen.

18.6 Zusammenfassung

- Die Formulierung eines Entscheidungsmodells stellt selbst ein Entscheidungsproblem dar, bei dessen Lösung es darum geht, in welchem Umfang und in welcher Weise gegebene Informationen im Modell abgebildet werden sollen. Dabei besteht stets die

Notwendigkeit zu vereinfachen; ein Entscheidungsmodell ist immer eine mehr oder weniger stark vereinfachte Abbildung der Wirklichkeit.

- Um über Vereinfachungen zu entscheiden, sind die Kosten der Formulierung und Lösung des Modells (Planungskosten) gegen den möglichen Ertrag abzuwägen, der mit der Kenntnis der Modelllösung verbunden ist.
- Die Möglichkeiten der Vereinfachung sind im Prinzip für alle Entscheidungsprobleme dieselben: Reduktion der Alternativenmenge, Vereinfachung in der Beschreibung von Ergebnissen, Zusammenfassung von Umweltzuständen, Vernachlässigung von Zielgrößen. Schließlich kann auch die Entscheidungsregel vereinfacht werden.
- Bei flexibler Planung sind im Prinzip die gleichen Vereinfachungen möglich wie im Einperioden-Fall, der Bedarf nach Vereinfachungen ist aufgrund der Komplexität mehrstufiger Planungsprobleme bei Unsicherheit jedoch ungleich größer. Dabei sollten die Vereinfachungen so vorgenommen werden, dass nur geringe Rückwirkungen auf den Plan für die erste Periode des Planungszeitraums resultieren.
- Der Kapitalmarkt hat grundlegende Bedeutung für Vereinfachungen. Unter bestimmten Kapitalmarktbedingungen (Vollkommenheit und Vollständigkeit) können Investitions- und Konsumentenentscheidungen separat nacheinander getroffen werden. Für Investitionsentscheidungen kann statt eines individuellen Nutzenkalküls das Ziel der Marktwertmaximierung herangezogen werden.
- Vereinfachungen können auch ohne strenge Separierbarkeit der Entscheidungen vorgenommen werden, indem anstelle eines Totalmodells mehrere Partialmodelle aufgestellt werden, die jeweils nur einen Teilbereich des gesamten Entscheidungsfeldes berücksichtigen.
- Die Idee der Zerlegung findet auch Anwendung, wenn in einem Unternehmen Entscheidungsbereiche (Abteilungen) gebildet werden. Dabei wird der Planungsaufwand in besonderem Maße reduziert, wenn die wesentlichen Interdependenzen jeweils bereichsintern anfallen und koordiniert werden können und bereichsübergreifenden Verbundeffekten relativ einfach Rechnung getragen werden kann.
- Bei der Konstruktion von Entscheidungsmodellen müssen grundsätzlich Entscheidungen über Vereinfachungen getroffen werden, die auf mehr oder weniger groben Schätzungen beruhen. Damit werden die Grenzen rationaler Entscheidungen sichtbar. Trotzdem müssen Entscheidungen nicht willkürlich getroffen werden. Entscheidungsmodelle zeigen, welche Zusammenhänge für Problemlösungen relevant sind. Damit geben sie Anregungen und Orientierung für vereinfachte Modellkonstruktionen sowie für den Fall, dass Entscheidungen nicht explizit auf Modelle gestützt werden.

Ergänzende und vertiefende Literatur

Ballwieser (1980, 1990); Bitz (1977); Braybrooke und Lindblom (1963); Bretzke (1980); Dinkelbach (1973); Dyckhoff (1985); Gäfgen (1974, S. 199–218 und 461–491); Gaitanides (1979); Hax (1967); Kahneman et al. (1982); Schenk (1991); Schmidt (1983); Simon (1957); Tversky und Kahneman (1974); Zentes (1976).

18.7 Übungen

Aufgabe 18.1

Diskutieren Sie, wie ein Entscheider das Problem der Anlage eines kleinen Barvermögens sinnvoll vereinfachen kann. Gehen Sie insbesondere auf Vereinfachungen bei der Alternativenmenge und der Darstellung der Ergebnisse und Umweltzustände ein.

Aufgabe 18.2

Diskutieren Sie die folgenden Aussagen:

- a) Komplexitätsreduktion ist in realen Entscheidungssituationen stets notwendig.
- b) Bei der Konstruktion eines Modells sollte eine möglichst originalgetreue Abbildung der Realität erfolgen.
- c) Das Problem der Modellvereinfachung lässt sich als Problem der Informationswertermittlung auffassen.
- d) Die Bewertung anhand von subjektiven Sicherheitsäquivalenten führt zur gleichen Entscheidung wie die Anwendung des Bernoulli-Prinzips.
- e) Wertadditivität ist auf dem Kapitalmarkt gegeben, wenn dieser vollkommen und vollständig ist.

Literatur

- Ballwieser, W.: Möglichkeiten der Komplexitätsreduktion bei einer prognose-orientierten Unternehmensbewertung. *Z. Betriebswirtsch. Forsch.* **32**, 50–73 (1980)
- Ballwieser, W.: Unternehmensbewertung und Komplexitätsreduktion, 3. Aufl. Gabler, Wiesbaden (1990)
- Bitz, M.: Die Strukturierung ökonomischer Entscheidungsmodelle. Gabler, Wiesbaden (1977)
- Braybrooke, D., Lindblom, C.E.: *A Strategy of Decision*. The Free Press, New York (1963)
- Bretzke, W.-R.: Der Problembezug von Entscheidungsmodellen. Mohr, Tübingen (1980)
- Dinkelbach, W.: Zur Frage unternehmerischer Zielsetzungen bei Entscheidungen unter Risiko. In: Koch, H. (Hrsg.) *Zur Theorie des Absatzes*, Festschrift zum 75. Geburtstag von Erich Gutenberg, S. 35–59. Gabler, Wiesbaden (1973)
- Dyckhoff, H.: Kompensation bei Entscheidungskriterien. *OR Spektrum* **7**, 195–207 (1985)
- Gäfigen, G.: *Theorie der wirtschaftlichen Entscheidung: Untersuchungen zur Logik und Bedeutung des rationalen Handelns*, 3. Aufl. Mohr, Tübingen (1974)
- Gaitanides, M.: *Planungsmethodologie*. Duncker & Humblot, Berlin (1979)
- Hax, H.: Bewertungsprobleme bei der Formulierung von Zielfunktionen für Entscheidungsmodelle. *Z. Betriebswirtsch. Forsch.* **19**, 749–761 (1967)
- Hax, H.: *Investitionstheorie*, 5. Aufl. Physica-Verlag, Würzburg (1985)
- Kahneman, D., Slovic, P., Tversky, A.: *Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases*. Cambridge University Press, Cambridge (1982)
- Laux, H., Liermann, F.: *Grundlagen der Organisation*, 6. Aufl. Springer, Berlin (2005)

- Schenk, H.Y.: Entscheidungshorizonte im deterministischen dynamischen Lagerhaltungsmodell. Physica, Heidelberg (1991)
- Schmidt, R.H.: Zur Lösbarkeit von Vorentscheidungsproblemen. In: Bühler, W., Jäger, K.E., Steckhan, H. (Hrsg.) Operations Research Proceedings, S. 417–425. Springer, Berlin (1983)
- Simon, H.A.: Models of Man. Wiley, New York (1957)
- Tversky, A., Kahneman, D.: Judgment under uncertainty: heuristics and biases. *Science* **185**, 1124–1131 (1974)
- Zentes, J.: Die Optimalkomplexion von Entscheidungsmodellen. Heymanns, Köln (1976)

Sachverzeichnis

A

Abhängigkeit

- Bewertungsverbund, 10
- Erfolgsverbund (Ergebnisverbund), 9
- intertemporale, 311
- Restriktionsverbund, 8
- Risikoverbund, 9
- stochastische, 10, 168, 244, 254, 350, 354, 362, 521, 590
- und Koordinationsbedarf, 8
- Verbundeffekt, 10
- zwischen Entscheidungsbereichen, 8

Abstimmung in der Gruppe

- formelle, 591
- informelle, 591
- strategisches Verhalten, 599
- über eine kollektive Präferenzordnung, 605

Abstimmungsregeln, 593

- Borda-Regel, 597, 602
- Einstimmigkeitsregel, 593
- Hare-Regel, 598, 603
- Regel des paarweisen Vergleichs (Mehrheitsregel), 594, 601
- Single-Vote-Regel, 596, 599

Alternative

- Definition, 5
- dominante, 108
- effiziente, 73
- Erforschung, 14
- optimale, 73

Anreizkompatibilität

Bedingung, 420

Teilungsregeln

- Ermittlung, 425
- Gestalt, 428
- lineare, 428
- nichtlineare, 433
- Vergleich mit Pareto-Effizienz, 432

Anspruchsniveaus für Zielgrößen, 85

Arbitrage, 455

- Differenzarbitrage, 456
- Dominanzarbitrage, 456

Arrow-Pratt-Maß, 152, 162, 164, 224, 252

Axiom

- ordinales, 142
- rationalen Verhaltens, 129, 136, 141

B

Basiselement eines Entscheidungsmodells, 32

- Alternativen, 32
- Ergebnisse, 33
- Umweltzustände, 34

Basisindifferenzkurve, 512

Bayes-Theorem, 349

Bedauernswert, 98

Bernoulli-Nutzen, 129, 538

Bernoulli-Prinzip, 129, 146

- Axiomensystem, 141, 145

- Begriff und Inhalt, 130

- Dominanzkriterien, 151

- Rationalität, 141

Beta-Faktor, 469

Bewertung

- bei Arbitragefreiheit, 456
- eines unsicheren Zahlungsanspruchs, 243
- im CAPM, 459, 464
- im SPA, 458
- mit Duplikationsportefeuilles, 497
- mit Preisen für zustandsbedingte Zahlungsansprüche, 460, 463
- nach Risikozuschlagsmethode, 469, 552, 558
- nach Sicherheitsäquivalentmethode, 264, 469, 553
- von Informationen, 341

C

Capital Asset Pricing Model (CAPM), 459

- Marktbewertung, 448
- Preisbildung, 460
- Renditegleichung, 468
- Risikoteilung, 461
- Vergleich mit dem SPA, 472

CAPM s. Capital Asset Pricing Model

Condorcet-Alternative, 595, 597, 598, 601

D

Diktatorverbot, 625

Dominanz

- absolute, 108
- stochastische, 109, 209, 216
- erster Ordnung, 110, 145, 151

Dominanzkriterien, 107

- absolute Dominanz, 108
- stochastische Dominanz, 109
- Zustandsdominanz, 108

Duplikation, 451

- Bewertung, 543
- Duplikationsportefeuilles, 450
- dynamische, 543

E

Editing-Phase der Prospect-Theorie, 199, 213

Effizienz einer Alternative, 73

Effizienzkurve, 281, 284

- (μ, σ) -Diagramm, 293
- im (μ, σ^2) -Diagramm, 261

modifizierte, 511

Umhüllende, 283

Einmütigkeit, 421

Einstimmigkeitsregel, 593

Elastizität, 334

Entscheidung

- als Prozess, 12
- Begriff, 3
- bei Unsicherheit, 80, 93
- rationale, 4, 107, 129, 654

Entscheidungsbaum, 318

Entscheidungsbereich, 6, 8

Entscheidungsfelder, 8, 668

Entscheidungskriterien, 95, 114

- bei Risiko, 114

- bei Sicherheit, 63

Entscheidungsmatrix, 136

Entscheidungsmodell

- Basiselemente, 32
- deterministisches, 54, 331
- einperiodiges, 54
- grafisches, 53
- mathematisches, 53
- mehrperiodiges, 54
- sequenzielles, 314
- stochastisches, 54
- Struktur, 31
- Subjektivität, 56
- Systematik, 53

Entscheidungsprinzip, 39, 341

Entscheidungsprozess, 13

- bei Entscheidung durch eine Gruppe, 577

Entscheidungsregel, 25, 31, 32, 36, 39, 40, 581

Entscheidungstheorie

- als Orientierungshilfe für die Lösung von Entscheidungsproblemen, 16
- deskriptive, 4, 16, 17, 150
- Gegenstand, 3
- Grundmodell, 40
- präskriptive, 4

Entscheidungsvariable, 32

Ergebnis, 33

- experimentelles, zu

- Individualentscheidungen bei

- Risiko, 182

- paarweiser Vergleich, 68

Ergebnismatrix, 40, 267, 320, 322, 327, 328

Erwartungsnutzentheorie

- im Sinne des Bernoulli-Prinzips, 129
- rangplatzabhängige, 210

Erwartungswert des Nutzens, 111
Eventualplan, 317, 331

F

Fisher-Separation, 519, 536
 verallgemeinerte, 540
Flexibilität, 334
Framing-Effekt, 190

G

Gremium, Vorteilhaftigkeit, 606
Grenznutzen, 493
 Charakteristik, 132
Grenznutzenwert
 quasi-konstanter, 493, 495
 unveränderlicher, 494, 495
Grenzpreis
 als Marktwert, 450
 aus Käufer- und Verkäufersicht, 244
 Ermittlung und Höhe, 551
 kollektiver, 494
 kollektiver subjektiver, 501
 Marktwert, 510
 Sicherheitsäquivalent, 244
 subjektiver, 450, 483, 488, 510
Gruppenentscheidung
 Abstimmung, 599
 Kommunikations- und
 Entscheidungsprozess, 612

H

Handlungsspielraum, 312, 334
Hare-Regel, 598, 603, 630
Hurwicz-Prinzip, 95

I

Indifferenzkurve, 70
 im (μ, σ) -Diagramm, 118
 konvex steigende, 72
Indifferenzwahrscheinlichkeit, 138
Indikator, 347
 Prognosequalität, 348
Informationsbeschaffung, 347, 355
Informationsergebnis, 347
Informationsprozess

 einstufiger, 378
 in einer Gruppe, 582
 mehrstufiger, 380
Informationsstand, optimaler, 378
Informationswert, 342
 Bestimmung, 356, 357, 367
 Definition, 356
 Determinanten, 372
 Höhe, 361
Interessenausgleich
 fairer, 619
 in Gruppen, 619
Invarianzaxiom, 183
 Verstöße, 184, 190
Investitionsplanung, 498, 530, 565
Investor, repräsentativer, 463
Isolationseffekt, 190

K

Kalkulationszinsfuß, risikoangepasster, 469, 507
Kapitalmarkt
 arbitragefreier, 456
 Bedeutung für die Vereinfachung von
 Entscheidungsmodellen, 669
 Preisbildung, 448, 456
 unvollkommener, 437, 450
 unvollständiger, 437, 450, 455
 vollkommener, 437, 449
 vollständiger, 437, 450, 453
Koalition in einer Gruppe, 604
Kommunikationsprozess in einer Gruppe, 612
Kompatibilität von Zielen, 51
Konsumplan, 530, 534, 535
Konvexkombination, 284
Koordination von Entscheidungen, 10, 668
Kovarianz (Bedeutung für Marktwerte im
 CAPM), 464
Kumulative Prospect-Theorie, 180, 198, 213
 Darstellung, 210

L

Laborexperiment, 180, 182
Laplace-Regel, 99
Leerverkauf, 277, 288, 450
Lotterie, 132, 137, 140, 146

M

- Marktgleichgewicht
 - Risikoteilung im CAPM, 465
 - Risikoteilung im SPA, 472
- Marktportfeuille, 463, 464
 - Rendite, 468
- Marktpreis des Risikos, 466, 470
- Marktsicherheitsäquivalent, 467
- Marktwert
 - eines Wertpapiers, 469
 - im SPA, 472
 - eines Zahlungsstroms, 541
- Marktwertmaximierung, 470, 482, 491
 - demokratische Begründung, 518
 - Mehrperioden-Fall, 530
 - Reichtumsmaximierung, 503
 - versus Nutzenmaximierung, 484
- Maximax-Regel, 96
- Maximin-Regel, 95
- Mehrheitsregel, 592, 594, 601, 622, 628
- Mischung von Risiken, 226
- Monotonieaxiom, 145
- μ -Regel, 114, 157
- (μ, σ) -Prinzip
 - Bernoulli-Prinzip, 230
 - Darstellung, 117

N

- Niehans-Savage-Regel, 98
- Nutzenfunktion
 - Eigenschaften, 131
 - Ermittlung, 130, 137
 - exponentielle, 154
 - für Konsumströme, 533
 - Separation, 534
 - Kardinalität, 132
 - positiv lineare Transformation, 152
 - quadratische, 158, 159
- Nutzenmaximierung
 - im CAPM, 497
 - im Mehrperioden-Fall, 530
 - Investitionen, 499
 - versus Marktwertmaximierung, 484, 497

O

- Operationalität von Zielen, 636
- Optimierungskriterium, 36
- Ordnung, lexikografische, 84

P

- Petersburger Spiel, 132
- Phasenschema, 16
- Planrevision, 312
- Planung
 - als Entscheidung besonderer Art, 11
 - flexible, 311, 317, 334
 - mithilfe der mathematischen Programmierung, 323
 - mithilfe von Entscheidungsbäumen, 318
 - Optionen, 334
 - Prinzip, 320
 - Revision von Plänen, 333
 - versus starre, 331
 - rollende bzw. revolvierende, 331
 - starre, 312
 - Vereinfachung, 654
- Portfeuille, effizientes, 226
- Portfeuillebildung, 271
 - bei Orientierung am (μ, σ) -Prinzip, 280
 - Bestimmung effizienter Portfeuille, 281
 - Ermittlung und Eigenschaften des optimalen Portfeuille, 295
 - Ermittlung und Verlauf der Effizienzkurve, 281
 - Konvexkombinationen von Wertpapieren, 286
- Portfeuilleplanung, 303, 530
- Präferenzfunktion, 106
- Präferenzordnung, 577, 578
 - Determinanten, 581
 - Ermittlung, 603
 - kollektive, 605
- Präferenzordnungsprofil, 592
- Preise für zustandsbedingte Zahlungsansprüche, 460
- Prinzip des unzureichenden Grundes, 100
- Prospect-Theorie, 198, 202
 - Bewertungsphase, 198, 201
 - Editing-Phase, 198, 199
 - Erweiterung zur Kumulativen Prospect-Theorie, 210
 - Grenzen des Erklärungsgehalts, 222
 - kumulative s. dort
 - stochastische Dominanz, 209
 - Vergleich mit Bernoulli-Prinzip, 217
- Prozedurinvarianz, 184

R

Rationalität

des Bernoulli-Prinzips, 141

Grenzen, 654

Reduktionsaxiom, 144

Referenzpunkteffekt, 194

Regel des paarweisen Vergleichs, 594, 601,
604, 622, 628

Reichtumseffekt, 224

Rendite

erwartete, 468

Wertpapierpreise, 470

Renditegleichung des CAPM, 468

Residualgewinn, 290, 485

Risiko

Entscheidungskriterien, 129

systematisches, 304

unsystematisches, 304

Risikoabschlag

am Kapitalmarkt, 470

Definition und Ermittlung, 245

Risikoaversion, 152

absolute, 152

relative, 153

Risikoaversionskoeffizient, 152

Risikofreude, 153, 194, 247

Risikomischung, 271, 273

optimale, 278

Risikoneutralität, 247, 271, 363

Risikonutzen, 129

Risikoprämie, 466, 501

des Duplikationsportefeuilles, 514

des Wertpapiers, 290

Risikoteilung

Anreizkompatible, 419

bei exponentieller Nutzenfunktion, 396, 408

bei quadratischer Nutzenfunktion, 409

endogene, 420

exogene, 420

lineare

im CAPM, 465

im SPA, 472

Pareto-effiziente, 393, 394

alternative Optimierungsansätze, 398

Grundbedingung, 403, 406

lineare, 408

nichtlineare, 411

Risikotoleranz, 153

Risikoverbund (Sicherheitsäquivalent), 257

Risikozuschlagsmethode, 469

Roll-Back-Verfahren, 321

S

Separation

Marktwertmaximierung, 491

Theorem von Fisher, 519

Separierbarkeit von Nutzenfunktionen

additive, 534

multiplikative, 534

Sicherheitsäquivalent

Anwendungsprobleme, 263

Definition und Ermittlung, 245

Risikoverbund, 251, 254

aus der Käuferperspektive, 258

aus der Verkäuferperspektive, 255, 258

Sicherheitseffekt, 184

Single-Vote-Regel, 596, 597, 599, 627

Spanning, 497

Spiegeleffekt, 192

State Preference Ansatz (SPA), 454, 458

Erweiterung auf den Mehrperiodenfall

(Time State Preference Ansatz), 539

Risikoteilung, 460

Vergleich mit dem CAPM, 472

Stetigkeitsaxiom, 143

Strategie, 320

Substitutionsaxiom, 143, 144, 147

T

Time State Preference Ansatz (TSPA), 539

Transformation einer Nutzenfunktion

monoton wachsende, 38

positiv lineare, 39

Transformationskonzept, 67

Transitivitätsaxiom, 43, 45, 67, 143, 145

U

Umhüllende, 282, 398

Unabhängigkeit von irrelevanten

Alternativen, 624

Unabhängigkeitsaxiom, 149

Verstöße gegen, 150, 184

Unmöglichkeitstheorem von Arrow
 Abstimmungsregeln, 627
 Anforderungen an die kollektive
 Wahlfunktion, 623
 Darstellung, 626
Unsicherheit, 93
Unternehmensplanung, 517
Unternehmensziel, 48, 394, 447, 481, 517, 529
Untersuchung, empirische, zur Entscheidung
 bei Risiko, 382

V

Varianz (Bedeutung für Marktwerte im
 CAPM), 464
Verbundeffekt
 Bewertungsverbund, 10
 Erfolgsverbund (Ergebnisverbund), 9
 Restriktionsverbund, 8
 Risikoverbund, 9
Vereinfachung
 Bedeutung des Kapitalmarkts, 669
 im Entscheidungsfeld, 655
 mehrperiodige Modelle, 662
 Problematik und Grenzen, 671
 von Entscheidungsmodellen, 653
Verhalten, strategisches, 579, 599
Verlustaversion, 195
von Neumann-Morgenstern-Nutzen, 129
Vorteilhaftigkeit eines Gremiums, 606

W

Wahlfunktion, kollektive, 620, 621
Wahlparadoxon, 595

Wahrscheinlichkeit, 315
 a-posteriori, 350
 a-priori, 350
 bedingte, 348, 350
 Revision, 373
 statistische, 102
 subjektive, 100, 103
 unbedingte, 350
Wahrscheinlichkeitsgewicht, 180, 198, 199,
 204, 210
Wahrscheinlichkeitsmessung
 direkte Methoden, 344
 indirekte Methoden, 345
Wahrscheinlichkeitsurteil
 Bildung, 341
 Revision, 347

Z

Zahlungsanspruch, zustandsbedingter, 454
Zielfunktion, 81, 85
Zielgewichtung, 83
Zielgröße, 4, 7
Zielgrößenmatrix, 64
Zielkomplementarität, 47
Zielkonflikt, 47
Zielsystem, 36, 46
Zielunterdrückung, 84
Zustandsbaum, 323
Zustandsdominanz, 108