

IT kompakt

Bettina Just

# Quantencomputing kompakt

Spukhafte Fernwirkung und  
Teleportation endlich verständlich

**EBOOK INSIDE**



Springer Vieweg

---

IT kompakt

Die Bücher der Reihe „IT kompakt“ zu wichtigen Konzepten und Technologien der IT:

- ermöglichen einen raschen Einstieg,
- bieten einen fundierten Überblick,
- eignen sich für Selbststudium und Lehre,
- sind praxisorientiert, aktuell und immer ihren Preis wert.

Weitere Bände in der Reihe:

<http://www.springer.com/series/8297>

---

Bettina Just

# Quantencomputing kompakt

Spukhafte Fernwirkung und  
Teleportation endlich  
verständlich



Springer Vieweg

Bettina Just  
THM Technische Hochschule Mittelhessen  
Gießen, Deutschland

ISSN 2195-3651

ISSN 2195-366X (eBook)

IT kompakt

ISBN 978-3-662-61888-2

ISBN 978-3-662-61889-9 (eBook)

<https://doi.org/10.1007/978-3-662-61889-9>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnetet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Vieweg

© Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature 2020

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Planung: Martin Börger

Springer Vieweg ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

*Für meine ganze wunderbare  
Familie, und posthum für  
Steffen Bohrmann.*

---

# Vorwort

- Was ist Quantenverschränkung?
- Wie funktionieren Quantenalgorithmen?

Das sind die beiden zentralen Fragen, die in diesem Buch beantwortet werden.

Über Quantencomputing wird in Zeiten der künstlichen Intelligenz und der schnellen Algorithmen gesprochen. Man findet Artikel nicht nur in der Fachliteratur und der populärwissenschaftlichen Literatur, sondern auch in ganz normalen Tageszeitungen und Journals. Man hört von superschnellen Computern, die Verschlüsselungssysteme brechen, im Materialdesign und in der Simulation von Verkehrsflüssen und Logistik eingesetzt werden, und alle Anwendungen der künstlichen Intelligenz enorm beschleunigen könnten.

Das Thema ist jedoch schwer zugänglich. Wer verstehen will, wie die Algorithmen funktionieren, und warum sie so schnell sind, findet in der populärwissenschaftlichen Literatur seltsame Begründungen. Es ist die Rede davon, dass ein Quantenbit zugleich „0“ und „1“ ist, oder von Socken, die zugleich rot und blau, aber gleichzeitig einfarbig sind. In der Fachliteratur liest man schnell von unitären Transformationen in hochdimensionalen Räumen, die im Formalismus der Quantenphysik versteckt sind. Wobei deren Bedeutung nicht direkt einleuchtet, selbst wenn man die Formeln nachrechnen kann. Hier will das vorliegende Buch eine Brücke bauen und einen Einstieg in das Thema „Quantencomputing“ zu schaffen, der wissenschaftlich korrekt

ist, aber ohne besondere Mathematik- und Physikvorkenntnisse auskommt.

Quantencomputer bestehen (wie herkömmliche Computer auch) aus der Hardware, also den Geräten selbst, und aus der Software, also aus den Algorithmen, die auf den Geräten laufen. Das kleinste Stückchen Hardware eines Quantencomputers ist das Quantenbit.

Quantenbits sind kleinste Teilchen, etwa in der Größe von Elektronen oder Photonen (Lichtteilchen), die den Gesetzen der Quantenphysik gehorchen. Diese Gesetze widersprechen unserer klassisch mechanistischen Vorstellung von der Welt. Sie muten so seltsam an, dass der große Physiker Niels Bohr dazu angeblich sagte: „Wer die Quantenphysik verstanden hat, und nicht entsetzt ist, der hat sie nicht verstanden.“

Das seltsamste Phänomen der Quantenphysik ist dabei die sogenannte „Quantenverschränkung“. Quantenteilchen scheinen sich gegenseitig mit Überlichtgeschwindigkeit über beliebig weite Strecken zu beeinflussen. Ein einzelnes Quantenteilchen kann also nicht isoliert betrachtet werden, sondern muss immer als Teil eines Systems gesehen werden – wenn es verändert wird, verändert sich das ganze System. Diese Eigenschaft machen sich die Quantenalgorithmen zunutze.

Das vorliegende Buch behandelt in seinem ersten Teil, welche Experimente (idealtypisch) gemacht werden, welche Resultate sie liefern, und warum diese Resultate der klassischen Mechanik wirklich widersprechen. Dafür wird ein Gedankenexperiment von Einstein, Podolsky und Rozen aus dem Jahr 1935 auf Photonen angepasst. Von Photonen muss man (für die Zwecke dieses Buches) nur akzeptieren, dass sie eine Polarisationsrichtung haben können – mehr wird nicht benötigt.

Auf die experimentalphysikalischen Aspekte wird dabei nicht eingegangen, denn es geht „nur“ um das grundsätzliche Verständnis der Experimente und ihrer Resultate.

Vom einzelnen (Quanten)Bit zum (Quanten)computer ist es dann ein weiter Weg. Viele Bits müssen bereitgestellt und koordiniert werden. Das ist bei Quantenbits besonders schwierig, denn sie sind sehr empfindlich. Sie ändern ihren Wert, wenn sie mit Materie in Kontakt kommen. Und ihre „Koordination“ umfasst

---

auch, dass sie miteinander verschränkt werden können. Die Hardware des Quantencomputers ist aktuell die größte Schwierigkeit im Einsatz von Quantencomputern. Ein kurzer Abriss über die Hardware von Quantencomputern findet sich im letzten Kapitel des Buchs.

Der zweite Teil des Buchs beschäftigt sich dann – jenseits der Hardware – ausführlich mit der Software, also mit der Funktionsweise von Quantenalgorithmen. Schaltkreise bilden die Basis von Algorithmen, also werden Quantenschaltkreise betrachtet. Vorgestellt werden einige Quantengatter und der Algorithmus zur Teleportation, einer der spannendsten und zugleich einfachsten Algorithmen in der Welt des Quantencomputing.

Besondere mathematische Kenntnisse sind dafür nicht erforderlich. Denn alle Gatter und der Teleportationsalgorithmus werden in diesem Buch graphisch dargestellt. Sie werden zwar außerdem auch nachgerechnet, aber wer nicht gerne rechnet, kann alle Gatter und den Teleportationsalgorithmus auch nur anhand der Abbildungen verstehen. Alle Formeln können einfach übersprungen werden.<sup>1</sup>

Das Buch richtet sich an Leser, die Quantencomputing genauer verstehen möchten, und eine einfach, wissenschaftlich saubere Brücke bauen möchten zwischen populärwissenschaftlichen Darstellungen und der Fachliteratur. Es werden keine Kenntnisse in Mathematik, Physik oder Informatik benötigt. Benötigt wird aber für den ersten Teil die Bereitschaft, das klassische mechanistische physikalische Weltbild zu erweitern. Für den zweiten Teil wird die Bereitschaft benötigt, einen ganz neuen Welt von Algorithmen zu betreten. Es handelt sich um Algorithmen, bei denen die Veränderung an einem Quantenbit potentiell das Verhalten aller anderen Quantenbits verändert – sozusagen systemische Algorithmen.

Wenn Sie dieses Buch gelesen haben, werden Sie wissen, wie die Quantenverschränkung nachgewiesen wird, und warum sie

---

<sup>1</sup>Quantenalgorithmen mit z. B. drei QBits werden normalerweise mit unitären Operationen auf einem  $2^3$ , also 8-dimensionalen Vektorraum beschreiben. In diesem Buch wird erstmals eine anschaulichere Darstellung auf den 8 Ecken eines normalen Würfels gewählt (ein normaler Würfel hat 8 Ecken).

von Einstein „spukhafte Fernwirkung“ genannt wurde. Sie verstehen die grundsätzliche Funktionsweise von Quantenalgorithmen. Sie können – je nach ihrem Fachgebiet – weiter in die mathematische, physikalische oder informative Fachliteratur einsteigen. Und Sie können populärwissenschaftliche Artikel einordnen.

Diese Buch entstand aus Vorlesungen, die die Autorin an der technischen Hochschule Mittelhessen (THM) hielt, und aus zahlreichen Vorträgen über Quantencomputing innerhalb und außerhalb der THM. Dank geht an alle Hörer dieser Vorlesungen und Vorträge, ohne deren konstruktive und lebendige Fragen und Anregungen das Buch gar nicht möglich gewesen wäre.

Besonderer Dank geht an Janka Cholevas für das geduldige und engagierte Erstellen der vielen Grafiken, an Philipp Rangel Martinez für das selbständig erstellte und kreative Programm zur Visualisierung des Würfels und an Jakob Czekansky für seine unermüdlichen und universellen technischen Hilfestellungen. Helmut Roth danke ich für das Probelesen und seine sehr hilfreichen Anmerkungen. Dank geht auch an meine Kollegen Klaus Rinn, Andreas Dominik, Berthold Franzen und Christof Gallus, sowie an Antonia Just und an Carlo Trentanove für ihre große Bereitschaft, zuzuhören und ihre Sichtweise der Dinge mit mir zu teilen. Adrian Just, Yvonne Arnold, Ulrike Beckenkamp und Martin Launert und allen Freunden und Freundinnen danke ich für das stets offene Ohr für Gespräche. Besonderer Dank geht dabei an Jochen Rau und Thomas Stahl für zahlreiche Treffen bei Kaffee und Abendessen, und für das bisweilen schwer zu ertragend ehrliche, aber immer sehr konstruktive und zielführende Feedback.

Natürlich geht Dank an Martin Boerger und Sophia Leonhard vom Springer Verlag für die Anregung, das Buch überhaupt zu schreiben, und für ihre wunderbare Begleitung auf dem Weg von der Idee zum Buch. Und ein vorausgenommener Dank geht an alle Leser für Kommentare und Anregungen – viel Spaß beim Lesen :).

Gießen  
August 2020

Bettina Just

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	1
<b>Teil I Quantenverschränkung</b>		
<b>2</b>	<b>Photonen als QBits</b>	7
2.1	Die Entdeckung der Quanten	7
2.2	Eigenschaften von Photonen	10
2.3	Die Experimente dieses Buches	16
	Literatur	18
<b>3</b>	<b>Das erste Experiment – Unabhängigkeit</b>	21
3.1	Aufbau des Experiments	21
3.2	Ergebnis des Experiments	23
3.3	Interpretation des Ergebnisses – Unabhängigkeit	23
<b>4</b>	<b>Das zweite Experiment – Gleichheit</b>	25
4.1	Aufbau des Experiments	25
4.2	Ergebnis des Experiments	27
4.3	Interpretation des Ergebnisses	27
4.3.1	Klassische Interpretation: Verborgene Variablen	27
4.3.2	Quantenmechanische Interpretation: Systemzustand, instantan	28

<b>5</b>	<b>Das dritte Experiment – Spukhafte</b>	
	<b>Fernwirkung</b> .....	31
5.1	Aufbau des Experiments .....	31
5.2	Ergebnis des Experiments .....	33
5.3	Interpretation des Ergebnisses .....	33
5.3.1	Klassische Interpretation: Verborgene Variablen .....	33
5.3.2	Quantenmechanische Interpretation: Systemzustand, instantan .....	36
	Literatur .....	38
<b>6</b>	<b>Auswertungen und Deutungen</b> .....	39
6.1	Strukturelle Beobachtungen in den Experimenten .....	39
6.2	Modellierung in der Quantentheorie und philosophische Auswirkungen .....	40
	Literatur .....	43

## Teil II Quantencomputing mit dem Beispiel Teleportation

<b>7</b>	<b>Quantenalgorithmen anschaulich</b> .....	47
<b>8</b>	<b>Quantenbits und Quantenregister</b> .....	53
8.1	Darstellung eines QBits für Algorithmen .....	53
8.2	Quantenregister aus zwei und drei QBits .....	58
8.3	Messen in Quantenregistern .....	65
	Literatur .....	72
<b>9</b>	<b>Quantengatter auf einem QBit</b> .....	73
9.1	Pauli-X, Pauli-Z und Hadamard (X, Z und H): Gatter auf einem QBit .....	74
9.2	X, Z, H, angewandt auf ein QBit in einem Quantenregister .....	76
<b>10</b>	<b>CNOT – ein Quantengatter auf zwei QBits</b> .....	89
10.1	CNOT in einem Register aus zwei QBits .....	89
10.2	CNOT in einem Register aus drei QBits .....	93
	Literatur .....	94

<b>11 Teleportation .....</b>	95
11.1 Der Algorithmus zur Teleportation .....	96
11.2 Stand der praktischen Umsetzung .....	101
Literatur .....	103
<b>12 Weitere Quantenalgorithmen und Hardware .....</b>	105
12.1 Weitere Quantenalgorithmen .....	105
12.2 Hardware .....	109
Literatur .....	112

# Einführung

# 1

Ein **klassisches Bit** ist (bekanntlich) ein Objekt, das genau zwei unterschiedliche Zustände annehmen kann. Diese werden gewöhnlich mit „0“ und „1“ bezeichnet. Klassische Schaltgatter führen Schaltungen zwischen Bits durch, und sind die Basis klassischer Computer.

Für klassische Bits gibt es die unterschiedlichsten physikalischen Realisationsmöglichkeiten. Gewöhnlich handelt es sich um einen Draht, der keinen Strom führt oder Strom führt. Man könnte sich aber auch eine Lampe vorstellen, die leuchtet oder nicht leuchtet. Oder einen Zeiger (vergleichbar dem Zeiger auf einer Uhr), der die beiden Positionen „waagrecht“ oder „senkrecht“ annehmen kann.

Klassische Bits haben die folgenden beiden Eigenschaften, die so selbstverständlich sind, dass sie zumeist gar nicht genannt werden:

- (Realismus für Bits)

Der Wert eines Bits ist zu jedem Zeitpunkt der Berechnung eindeutig definiert. Er kann ausgelesen werden, und der Auslesevorgang ändert den Wert nicht.

- (Lokalität für Bits)  
Wird der Wert eines bestimmten einzelnen Bits verändert, so ändert das nicht den Wert irgend eines anderen Bits.

Die beiden Eigenschaften sind uns selbstverständlich, weil sie zu den Fundamenten der klassischen Mechanik gehören:

- (Realismus)  
Objekte haben Eigenschaften wie ihr Gewicht, ihre Farbe, ihre Geschwindigkeit oder ihre Größe, die man messen kann, und die dadurch nicht verändert werden.
- (Lokalität)  
Eine Aktion an einem Punkt des Raumes wirkt sich nicht unmittelbar auf physikalische Objekte an einem anderen Punkt des Raumes aus. Die Wirkung der Aktion am ersten Punkt muss über physikalische Medien an den anderen Punkt übertragen werden, und das dauert zumindest so lange, wie das Licht braucht, um vom ersten zum zweiten Punkt zu gelangen.

**Quantenbits** gehorchen im Gegensatz zur klassischen Bits nicht den Gesetzen der klassischen Mechanik. Sie folgen den Gesetzen der Quantenmechanik, also der Physik der allerkleinsten Teilchen.

Ein Quantenbit ist (grob gesprochen) ein Objekt, dass die Werte „0“ oder „1“ oder irgendetwas DAZWISCHEN annehmen kann. Quantengatter führen Operationen auf QBits durch, und sind die Basis für Quantencomputer.

Quantenbits werden aktuell vor allem mit Photonen, Ionen und mit Supraleitung realisiert. Man kann sich aber auch einen Zeiger vorstellen, der die beiden Positionen „waagrecht“ oder „senkrecht“ annehmen kann – oder jede beliebige Position DAZWISCHEN.

Quantenbits haben nicht die beiden oben genannten Eigenschaften des Realismus und der Lokalität aus der klassischen Mechanik. Für sie gelten statt dessen die folgenden beiden Eigenschaften, die die wesentlichen Grundlagen für das Quantencomputing sind:

- (Veränderung beim Messen)  
Wird ein Quantenbit gemessen, so liefert es einen der beiden Werte „0“ oder „1“, und niemals einen Wert dazwischen. Es nimmt den gemessenen Wert beim Messen selbst auch an. Wenn es also vor der Messung einen Wert zwischen „0“ und „1“ hatte, wird dieser durch das Messen überschrieben.
- (Quantenverschränkung)  
Veränderung eines Quantenbits an einem Punkt des Raumes kann unmittelbar, also im selben Augenblick, die Eigenschaften eines anderen Quantenbits verändern. Diese Veränderung erfolgt schneller als das Licht braucht, um die Entfernung zwischen beiden QBits zurückzulegen.

Dass Objekte ihre Eigenschaften durch die Messung verändern, ist in der klassischen Informatik nicht vorgesehen, aber in der uns umgebenden Welt durchaus bekannt. Es gibt Situationen, in denen die Messung selbst die Situation verändert, z. B. in der Qualitätsprüfung von Bauteilen. Wird hier ein Belastungstest durchgeführt, ist das Bauteil hinterher nicht mehr so belastbar wie zuvor. Und wer Kinder hat, weiß ohnehin, dass sie sich anders verhalten, wenn sie beobachtet werden.

Das Phänomen der Quantenverschränkung ist jedoch so verblüffend, dass es von Einstein „spukhafte Fernwirkung“ genannt wurde, und Bohr angeblich sagte: „Wer über die Quantentheorie nicht entsetzt ist, der hat sie nicht verstanden.“ Die Eigenschaften der kleinsten Teilchen können sich so ändern wie die Eigenschaften eines Thronfolgers, der in dem Moment König wird, in dem der alte Monarch stirbt. Egal, wie weit er weg ist, ist er sofort König – schneller als das Licht braucht, um die Distanz zwischen ihm und dem alten Monarchen zu überwinden.

Der erste Teil des vorliegenden Buches erläutert das Phänomen der Quantenverschränkung. Welche Experimente wurden gemacht, und warum lassen sie keinen anderen Schluss zu als die „spukhafte Fernwirkung“?

Im zweiten Teil des Buches geht es dann um Quantenalgorithmen, also Algorithmen auf Quantenbits. Wie kann man sich

Quantenalgorithmen vorstellen, warum sind sie so schnell? Die Grundidee besteht darin, dass – wegen der Quantenverschränkung – eine Veränderung an einem QBit das ganze System verändert. Eine Operation an einem QBit kann gegebenenfalls alle anderen QBits ebenfalls verändern. Beispiele von solchen Operationen auf QBits, und der Algorithmus zur Teleportation als Anschauungsbeispiel werden im zweiten Teils des Buchs behandelt.

---

# Teil I

## Quantenverschränkung

# Photonen als QBits

# 2

## 2.1 Die Entdeckung der Quanten

Zu Beginn des 20. Jahrhunderts wurden in der Physik zwei wichtige neue Theorien entwickelt, die das bekannte Weltbild grundlegend veränderten: Die Relativitätstheorie und die Quantenphysik.

Die Relativitätstheorie mit ihrer Kernbotschaft „nichts ist schneller als das Licht“ revolutionierte die Vorstellung von Raum und Zeit.

Die Quantenphysik beschäftigt sich mit den kleinsten Teilchen. Das ursprüngliche Ziel war es, das Verhalten von Licht mit seinen Brechungen und Spiegelungen zu verstehen. Es ging also um Phänomene wie die Spiegelung einer Landschaft in einem See oder das Farbenspiel auf einer Ölpfütze. Fortschritte im Bereich der Lasertechnologie machten hier Experimente möglich, die zuvor einfach nicht durchgeführt werden konnten. Das berühmteste davon ist sicherlich das „Doppelspaltexperiment“. Es zeigt, dass sich Licht je nach Umfeld wie eine Welle oder ein Teilchen verhält. „Quanten“ waren zunächst Photonen (also Lichtteilchen) und Elektronen.

Um das Verhalten von Licht und anderen Quantenteilchen zu erklären, wurde die Quantenmechanik entwickelt. Sie ist ein mathematischer Formalismus für physikalische Systeme. Sie macht Vorhersagen darüber, welche Ergebnisse Experimente mit Quanten liefern werden. Die Vorhersagen der Quantenmechanik wurden seither immer wieder in Experimenten bestätigt, und nie widerlegt.<sup>1</sup>

Das Verhalten der Quanten ist experimentell nachgewiesen, aber mit unserem mechanistischen Weltbild nicht vereinbar. Denn dieses postuliert:

- Die Wirklichkeit ist „lokal“: Eine Aktion an einem Punkt im Raum wirkt nicht unmittelbar auf einen anderen Punkt im Raum. Die Wirkung im anderen Punkt tritt frühestens nach der Zeit ein, die das Licht braucht, um die Distanz zwischen beiden Punkten zurückzulegen.
- Die Wirklichkeit ist „real“: Physikalische Objekte haben Eigenschaften, z. B. eine Masse, eine Temperatur oder eine Geschwindigkeit. Sind geeignete Messinstrumente vorhanden, können diese Eigenschaften gemessen werden. Eine korrekte Messung legt nicht die Eigenschaft erst fest – die Eigenschaft besteht schon vor der Messung.

---

<sup>1</sup>Quantenmechanik ist heute ein Pflichtkurs in jedem Physik-Studium, aber es gibt auch sehr viele populärwissenschaftliche Bücher darüber, für Leser mit wenigen mathematischen und physikalischen Kenntnissen. Hier einige Empfehlungen: Die Bücher von Ripota [7] und Fischer [6] erläutern die Entwicklung geschichtlich. Sie gehen aus von den Forscherpersönlichkeiten und stellen deren Beitrag in den Gesamtkontext. Die Bücher von Zeilinger [11, 12] erläutern die Physik bis ins 21. Jahrhundert sehr unterhaltsam, physikalisch korrekt und ohne dass besondere mathematische oder physikalische Vorkenntnisse benötigt werden. Feynmans „QED – (Quantenelektrodynamik)“ [5] ist ein Meilenstein in der populärwissenschaftlichen Erklärung der Quantenphysik. Wer mehr mathematische und physikalische Kenntnisse besitzt, kann z. B. über Schwindts „Tutorium Quantenmechanik“ [9] in die Theorie einsteigen.

- Die zu messenden Objekte bestimmen nicht, welche Messungen wir Menschen an ihnen durchführen. Unser freier Wille bestimmt, welche Messungen wir an den Objekten durchführen.

Experimente der Quantenphysik zeigen, dass in der Welt der Quanten nicht diese drei Postulate zugleich erfüllt sein können. Mindestens eines davon ist verletzt. Das hat tiefgreifende philosophische Auswirkungen: Die Welt ist nicht, wie sie uns klassisch scheint. Das Verhalten der kleinsten Teilchen ist für unser klassisches Weltbild nicht erklärlich. Und dies nicht, weil wir Dinge nicht wissen, oder sie zu klein zum Messen sind – das wären ja noch mögliche Erklärungen innerhalb des mechanistischen Weltbildes.

Die Experimente, die in diesem Buch vorgestellt werden, wurden ihrer Struktur nach erstmals in einer Arbeit von Einstein, Podolsky und Rozen [4] im Jahr 1935 vorgestellt. In dieser Arbeit wurden sie als Gedankenexperimente behandelt, um das Paradoxon der Quantentheorie auf den Punkt zu bringen. Das Paradoxon wurde später nach den Autoren „EPR-Paradoxon“ genannt. Es besagt, ganz grob gesprochen, dass sich Quantenteilchen mit Überlichtgeschwindigkeit gegenseitig beeinflussen. Dabei könnten die Quantenteilchen z. B. Photonen (also Lichtteilchen), Elektronen, Ionen oder sogar Atome sein. Die Experimente konnten seinerzeit aus technischen Gründen noch nicht praktisch durchgeführt werden. Im Laufe der Jahrzehnte verbesserte sich die Technik immer weiter, und das paradox scheinende Verhalten der Quanten wurde immer wieder bestätigt, z. B. 2015 für Photonen von einer großen internationalen Arbeitsgruppe [10], 2017 für Atome an der LMU München [8] oder in einem spektakulären Versuch mit 100.000 Internet-Teilnehmern in 2018 [1]. Für Photonen kann es im Rahmen von Optik-Physik-Kursen bereits an Schulen gelehrt werden [3].

Im ersten Teil dieses Buches werden die Experimente und ihre Ergebnisse idealtypisch für Photonen vorgestellt. Es wird dabei nicht auf die experimentalphysikalischen Aspekte eingegangen,

wie etwas den genauen Versuchsaufbau oder das Vermeiden fehlerhafter oder ungenauer Messergebnisse (das wäre ein eigenes Buch). Die Experimente werden nur idealtypisch vorgestellt, d. h. mit ihrem grundsätzlichen Aufbau und ihren Experimentalfehler-bereinigten Ergebnissen. Quantenteilchen sind also ab jetzt Photonen.

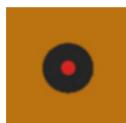
## 2.2 Eigenschaften von Photonen

Die Lasertechnik ist inzwischen so ausgereift, dass man mit einer physikalischen Apparatur einzelne Photonen, also einzelne Lichtteilchen, herstellen und entlang einer vorgegebenen Richtung aussenden („emittieren“) kann. Für die Zwecke dieses Buches ist die Apparatur einfach ein Kasten, aus dem auf Wunsch einzelne Photonen, also einzelne kleine Teilchen, entlang einer Strahlrichtung emittiert werden, vgl. Abb. 2.1 und 2.2.

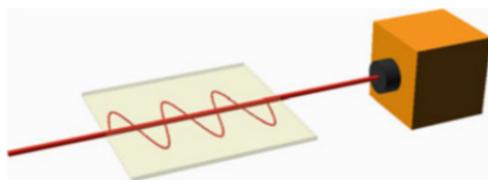


**Abb. 2.1** Ein Photon wird in Richtung der Strahlrichtung aus einem Photonenkasten emittiert, Ansicht von der Seite

**Abb. 2.2** Aus einem Photonenkasten wird ein Photon emittiert, Ansicht von vorne



Ein Photon kann (muss aber nicht) eine „Polarisationsrichtung“ haben. Es schwingt dann in einer Ebene, auf der die Strahlrichtung liegt. Die Schwingung ist eine Sinuskurve, deren genaue Eigenschaften für die Zwecke dieses Buches nicht interessieren. Interessant ist nur die Ebene selbst. Wir können sie uns als eine Glasplatte vorstellen, in der das Photon gefangen ist. Abb. 2.3 und 2.4 zeigen die Situation, wenn ein polarisiertes Photon aus dem Photonenkasten emittiert wird.



**Abb. 2.3** Aus einem Photonenkasten wird ein polarisiertes Photon emittiert, Ansicht von der Seite mit Strahlrichtung und Ebene der Schwingung



**Abb. 2.4** Aus einem Photonenkasten wird ein polarisiertes Photon emittiert, Ansicht von vorne. Man blickt genau entlang der Ebene, und sieht deshalb nur eine Gerade – etwa so, wie wenn man genau von vorne auf eine Glasplatte blickt

Photonen sind so klein, dass man sie mit bloßem Auge, und auch unter einem Mikroskop, nicht sehen kann. Um sie zu „sehen“, muss man sie mit einem Objekt interagieren lassen. Aber die Interaktion kann sie bereits verändern – und jede Messung ist eine Interaktion. Wie kann man also Eigenschaften finden, wenn das reine Messen die Eigenschaften ändert?<sup>2</sup>

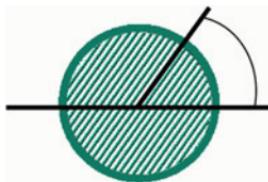
Man kann Licht – wie Fotografen wissen – durch einen Polarisationsfilter schicken. Für die Zwecke dieses Buches ist ein Polarisationsfilter eine runde Scheibe mit einem feinen Linienmuster aus parallelen Linien, vgl. Abb. 2.5.

<sup>2</sup>Nach einer unwahren, aber schönen Geschichte hat Newton die Gravitationsgesetze gefunden, als er den Fall eines Apfels vom Baum beobachtete. Bei der Beobachtung wurden Photonen zwischen Newtons Netzhaut und dem Apfel ausgetauscht, wie immer, wenn ein Mensch etwas sieht. Diese Tatsache beeinflusste nicht den Fall des Apfels. Man stelle sich aber vor, die einzige Beobachtungsmöglichkeit für Newton wäre gewesen, andere Äpfel auf den fallenden Apfel zu werfen. Dies hätte den Fall des beobachteten Apfels verändert. In etwa so kann man sich die Situation vorstellen, wenn man die kleinsten Teilchen beobachten möchte.

**Abb. 2.5** Polarisationsfilter (Ansicht von vorne)



**Abb. 2.6** Winkel des Polarisationsfilters (stets in Bezug zur Waagrechten), hier etwa 55 Grad



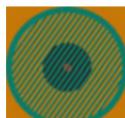
Je nachdem, wie der Polarisationsfilter gedreht wird, haben die Linien einen Winkel zur Waagrechten. Diesen Winkel nennen wir den „Winkel des Polarisationsfilters“, vgl. Abb. 2.6.

Mithilfe eines Polarisationsfilters kann ein Photon, das aus einem Photonenkasten emittiert wird, „gemessen“ werden. Diese Messung wird durchgeführt, indem der Polarisationsfilter im vorgegebenen Winkel senkrecht zum Strahl des Photons gehalten wird. Abb. 2.7 und 2.8 zeigen die Situation für unpolarisierte Photonen von der Seite bzw. von vorne.



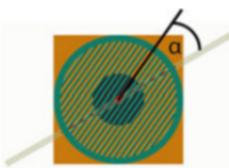
**Abb. 2.7** Messung eines Photons mit einem Polarisationsfilter, Ansicht von der Seite

**Abb. 2.8** Messung eines Photons mit einem Polarisationsfilter, Ansicht von vorne





**Abb. 2.9** Messung eines polarisierten Photons mit einem Polarisationsfilter, Ansicht von der Seite



**Abb. 2.10** Messung eines polarisierten Photons mit einem Polarisationsfilter, Ansicht von vorne. Entscheidend für das Messergebnis ist der Differenzwinkel  $a$  zwischen der Polarisation des Photons und dem Winkel des Polarisationsfilters

Abb. 2.9 und 2.10 zeigen die Situation für polarisierte Photonen von der Seite bzw. von vorne.

Die Messung eines Photons mit einem Polarisationsfilter wird manchmal mit der Situation eines Frisbees verglichen, das auf einen Gullideckel fliegt. Denn sie liefert stets eines der beiden folgenden Ergebnisse:

- Entweder das Photon passiert den Polarisationsfilter. Dann fliegt es weiter, und ist in Richtung des Polarisationsfilters polarisiert. Hatte es also vor der Messung eine andere Polarisation als die des Filters, oder war es nicht polarisiert, ändert es durch die Messung seine Polarisation.
- Oder das Photon wird absorbiert. Dann passiert es nicht den Polarisationsfilter, sondern bleibt gewissermaßen in ihm hängen.

Für die idealisierten Experimente dieses Buchs setzen wir voraus, dass wir bei der Messung stets eindeutig entscheiden können, ob das Photon passiert ist, oder ob es absorbiert wurde. Tatsächlich

kann das inzwischen auch praktisch erreicht werden, mit erheblichem Aufwand für die Signalverstärkung.

Einstein ging davon aus, dass es in der Natur keinen Zufall gibt. „Gott würfelt nicht“ soll er gesagt haben. Er meinte, dass z. B. auch ein Münzwurf mit einer normalen Münze keinen Zufall enthält. Er ging davon aus, dass man das Ergebnis vorher berechnen könnte, falls man die Eigenschaften der Münze genau kennen würde und genau wüsste, in welchem Winkel und mit welcher Geschwindigkeit sie auftrifft. Man könnte es natürlich nicht genau vorhersagen. Dies läge aber nach Meinung Einsteins an der Unmöglichkeit, das Experiment genau genug zu beschreiben und durchzuführen, und nicht daran, dass das Ergebnis grundsätzlich nicht bestimmt ist. Demnach gibt es seiner Meinung nach sogenannte „verborgene Variablen“ im Experiment, aus denen sich das Ergebnis eindeutig berechnen lässt.

Die Quantenmechanik, die u. A. das Verhalten von Photonen beschreibt, postuliert etwas anderes. Für sie ist das Ergebnis bei der Messung eines Photons echt zufällig (sofern sie nicht exakt im Winkel des Polarisationsfilters polarisiert sind). Die Quantenmechanik macht folgende – in Experimenten wieder bestätigte – Aussagen darüber, ob ein Photon einen Polarisationsfilter passieren wird, oder absorbiert wird:

- Ist das Photon nicht polarisiert, so ist für jeden Winkel die Wahrscheinlichkeit, dass es passiert oder absorbiert wird, jeweils  $1/2$ . Misst man also viele unpolarisierte Photonen nacheinander in demselben Winkel oder auch in unterschiedlichen Winkeln, so wird statistisch jeweils die Hälfte von ihnen passieren oder absorbiert werden. Die Situation ist wie bei einer Münze, über die nichts bekannt ist. Hier würde man als bestmöglichen Ansatz auch jeweils  $1/2$  für Kopf und für Zahl ansetzen.
- Ist das Photon polarisiert, und ist  $\alpha$  der Differenzwinkel zwischen dem Polarisationswinkel des Photons und dem Winkel

---

des Polarisationsfilters, so passiert das Photon mit Wahrscheinlichkeit  $(\cos \alpha)^2$ .<sup>3</sup> Das bedeutet insbesondere:

- Wird ein polarisiertes Photon in Richtung seiner Polarisierung gemessen, so passiert es immer (denn  $\cos 0 = 1$ ).
- Wird ein polarisiertes Photon senkrecht zu seiner Polarisierung gemessen, so passiert es niemals (denn  $\cos 90 = 0$ ).
- Wird ein polarisiertes Photon in einem Differenzwinkel von  $\alpha = 30$  Grad zu seiner Polarisierung gemessen, so passiert es mit Wahrscheinlichkeit  $3/4$  (denn  $\cos 30 = \sqrt{3}/2$ ). Von einem einzelnen Photon kann man also nicht vorhersagen, ob es passieren wird oder nicht. Aber führt man das Experiment oft durch, so passieren statistisch  $3/4$  der Photonen.
- Wird ein polarisiertes Photon in einem Differenzwinkel von  $\alpha = 60$  Grad zu seiner Polarisierung gemessen, so passiert es mit Wahrscheinlichkeit  $1/4$  (denn  $\cos 60 = 1/2$ ). Wieder kann man also bei einem einzelnen Photon nicht vorhersagen, ob es passieren wird oder absorbiert werden wird, aber man kann vorhersagen, dass statistisch für eine große Zahl Photonen ein Anteil von  $1/4$  passieren wird, und ein Anteil von  $3/4$  absorbiert werden wird.

Experimente bestätigen die statistischen Vorhersagen der quantenmechanischen Berechnungsweise. Das Gesetz von Malus aus der klassischen Physik sagt ebenfalls aus, dass

---

<sup>3</sup>Wer die Cosinus-Funktion nicht präsent hat, und auch nicht in Wikipedia nachschauen möchte, braucht nur zu wissen: Die Cosinus-Funktion ordnet jedem Winkel eine Zahl zwischen -1 und 1 zu. Der Cosinus des rechten Winkels, also von  $90^\circ$ , ist 0. Sein Quadrat ist also ebenfalls 0. Das entspricht dem Bild, dass Photonen niemals passieren, wenn sie senkrecht zu ihrer Polarisierung gemessen werden. Der Cosinus des Winkels von  $0^\circ$  ist 1. Je näher ein Winkel an der Waagrechten ist, desto größer ist also das Quadrat seines Cosinus. Das passt zum Bild mit den Photonen: Je ähnlicher die Polarisierung des Photons und der Winkel, in dem es gemessen wird, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit, dass es passiert.

statistisch  $(\cos \alpha)^2$  der Photonen passieren werden, wenn im Differenzwinkel  $\alpha$  gemessen wird.

Diese Experimente sagen aber nichts darüber aus, ob für jedes einzelne polarisierte Photon vor Auftreffen auf den Polarisationsfilter schon definiert ist, ob es passieren wird. Es ist möglich, dass dem so ist. Es ist aber auch möglich, dass für jedes einzelne Photon tatsächlich ein echt zufälliges Messergebnis entsteht, wie es die quantenmechanische Deutung besagt.

---

## 2.3 Die Experimente dieses Buches

In diesem Buch wird erläutert, was genau im Experiment beobachtet wird, wenn von dem seltsamen Verhalten „verschränkter“ Photonen gesprochen wird.

Die beschriebenen Experimente sind dabei sinngemäß die von Einstein, Podolski und Rozen [4] vorgeschlagenen Gedankenexperimente, die inzwischen auch praktisch durchgeführt werden können.

Bell [2] zeigte 1964, dass es nicht möglich ist, die Quantenmechanik um „verborgene Variablen“ zu verallgemeinern. D. h., die Welt verhält sich nicht so, wie es das klassische Weltbild vorschreibt. Die Herleitung und Erläuterung dieses Sachverhalts aus den Messergebnissen im folgenden Buch folgt einem Spezialfall von Bell's Gedankengängen.

Es wird also gezeigt, welche idealisierten Experimente an Paaren von Photonen durchgeführt werden, um das seltsame Verhalten der Quanten herauszuarbeiten. „Idealisierte Experimente“ bedeutet, dass wir Photonen wie oben beschrieben als Objekte betrachten, die aus einem Photonenkasten kommen, in einem Winkel gemessen werden und dann passieren und die Polarisierung des Winkels annehmen, oder absorbiert werden. Auf die Realisation der Experimente wird dabei höchstens ansatzweise eingegangen, und auf die Behandlung von Messfehlern gar nicht – in idealisierten Experimenten gibt es keine Messfehler.

Für die Experimente werden immer Paare von Photonen betrachtet, von denen das eine nach links (wie in den Zeichungen



**Abb. 2.11** Aufbau der Experimente. Photonenpaare werden emittiert, jeweils ein Photon in Richtung Alice und eines in Richtung Bob. Beide messen dann ihr jeweiliges Photon

oben) emittiert wird, und das andere nach rechts. Links wartet eine Person namens Alice, um das Photon auf der linken Seite zu messen. Rechts wartet eine andere Person, Bob, um das Photon auf der rechten Seite zu messen. Wir nennen die Photonen auch kürzer „Alices Photon“ und „Bobs Photon“.

Abb. 2.11 zeigt die Situation.

Im ersten Experiment werden unverschränkte Photonenpaare betrachtet. Diese erhält man gedanklich, indem man zwei Photonenkästen nebeneinanderstellt. Alice und Bob messen, und beobachten nichts überraschendes.

Im zweiten Experiment werden verschränkte Photonenpaare betrachtet. Hier werden aus einem großen Photonenkasten jeweils zwei Photonen emittiert. Diese sind innerhalb des Kastens aus einem Photon in einer ganz bestimmten Weise erzeugt worden. Alice und Bob messen im selben Winkel, und ihre Ergebnisse sind für jedes Paar immer gleich. Das lässt eigentlich nur den Schluß auf verborgene Variablen zu, obwohl es, wie wir sehen werden, auch eine absurd klingende quantenmechanische Interpretation gibt, die das Verhalten erklärt.

Im dritten Experiment geht es wieder um verschränkte Photonenpaare, aber jetzt messen Alice und Bob nicht mehr im gleichen Winkel. Statt dessen messen sie sehr geschickt und zufällig in Winkeln von 0 Grad, 30 Grad oder 60 Grad (andere Winkel kommen in diesem Buch nicht mehr vor). Sie beobachten, wie wir sehen werden, statistisch ein Verhalten, dass die Existenz verborgener Variablen ausschließt. Durch die absurd klingende quantenmechanische Interpretation wird es aber vollständig erklärt.

Will man die Ergebnisse klassisch erklären, wird somit die Existenz verborgener Variablen zugleich gefordert und ausge-

schlossen – das ist nicht möglich, also gibt es keine klassische Erklärung. Die quantenmechanische Berechnungsweise sagt das statistische Verhalten perfekt voraus. Aber sie besagt, dass die Welt nicht lokal, oder nicht real ist, oder dass die Photonen und nicht der Beobachter bestimmen, was der Beobachter misst.

---

## Literatur

1. Carlos Abellan and 106 other authors. Challenging local realism with human choices. *Nature*, 557(7704):212–216, May 2018.
2. J. S. Bell. On the einstein podolsky rosen paradox. *Physics Physique Fizika*, 1(3):195–200, November 1964.
3. Patrick Bronner. *Quantenoptische Experimente als Grundlage eines Curriculums zur Quantenphysik des Photons*. Logos Berlin, Berlin, 2010.
4. A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 47:777–780, May 1935.
5. R. Feynman. *QED: Die seltsame Theorie des Lichts und der Materie*. Piper Verlag GmbH, May 2018.
6. Ernst Peter Fischer. *Die Hintertreppe zum Quantensprung: Die Erforschung der kleinsten Teilchen von Max Planck bis Anton Zeilinger*. FISCHER Taschenbuch, Aug 2012.
7. Peter Ripota. *Das Rätsel der Quanten (German Edition)*. Books on Demand, Dec 2016.
8. Benjamin Rosenfeld, Daniel Burchardt, Robert Garthoff, Kai Redecker, Norbert Ortegel, Markus Rau, and Harald Weinfurter. Event-ready bell test using entangled atoms simultaneously closing detection and locality loopholes. *Phys. Rev. Lett.*, 119:010402, Jul 2017.
9. Jan-Markus Schwindt. *Tutorium Quantenmechanik: von einem erfahrenen Tutor – für Physik- und Mathematikstudenten (German Edition)*. Springer Spektrum, Jun 2016.
10. Lynden K. Shalm, Evan Meyer-Scott, Bradley G. Christensen, Peter Bierhorst, Michael A. Wayne, Martin J. Stevens, Thomas Gerrits, Scott Glancy, Deny R. Hamel, Michael S. Allman, Kevin J. Coakley, Shellee D. Dyer, Carson Hodge, Adriana E. Lita, Varun B. Verma, Camilla Lambrocco, Edward Tortorici, Alan L. Miggall, Yanbao Zhang, Daniel R. Kumor, William H. Farr, Francesco Marsili, Matthew D. Shaw, Jeffrey A. Stern, Carlos Abellán, Waldimar Amaya, Valerio Pruneri, Thomas Jennewein, Morgan W. Mitchell, Paul G. Kwiat, Joshua C. Bienfang,

- Richard P. Mirin, Emanuel Knill, and Sae Woo Nam. Strong loophole-free test of local realism. *Phys. Rev. Lett.*, 115:250402, Dec 2015.
11. Anton Zeilinger. *Einstiens Spuk: Teleportation und weitere Mysterien der Quantenphysik*. Goldmann Verlag, Jan 2007.
12. Anton Zeilinger. *Einstiens Schleier*. Goldmann Wilhelm GmbH, Mar 2020.

# Das erste Experiment – Unabhängigkeit

# 3

Die Photonenkästen des letzten Kapitels stehen symbolisch für einen Versuchsaufbau, bei dem einzelne Photonen in Richtung einer Strahlrichtung ausgesendet (emittiert) werden.

Die Photonen können wie beschrieben polarisiert oder nicht polarisiert sein. Außerdem können sie mit einem Polarisationsfilter gemessen werden. Sie passieren dann, oder werden absorbiert. Bei zufälliger Messung an nicht polarisierten Photonen passiert statistisch die Hälfte der Photonen passiert, und die Hälfte wird absorbiert.

Das erste der drei Experimente zur Illustration der Quantenverschränkung nutzt nun zwei solche Photonenfilter. Es wird in diesem Kapitel beschrieben. Sein Ergebnis ist nicht verblüffend.

---

## 3.1 Aufbau des Experiments

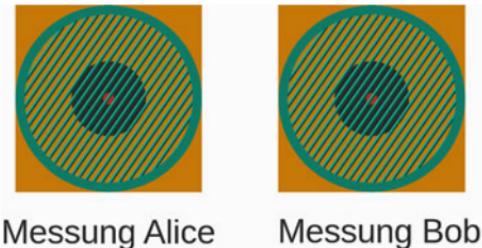
Zwei Photonenkästen werden nebeneinander gestellt. Sie emittieren synchronisiert jeweils ein nicht polarisiertes Photon: Der linke emittiert mit Strahlrichtung nach links, wo Alice bereit steht, es zu messen. Der rechte Kasten emittiert mit Strahlrichtung nach rechts, wo Bob bereit steht. Siehe Abb. 3.1 und Abb. 3.2.



**Abb. 3.1** Aufbau des ersten Experiments. Nicht polarisierte Photonenpaare werden emittiert, jeweils ein Photon in Richtung Alice und eines in Richtung Bob



**Abb. 3.2** Sicht von Alice bzw. Bob auf die Kästen



**Abb. 3.3** Messung von Alice, danach von Bob, im gleichen Winkel (hier abgebildet: 60 Grad)

Für ein Photonenpaar misst jeweils Alice zuerst, dann Bob. Die Polarisationsfilter von Alice und Bob haben dabei jeweils den gleichen Winkel (zur Waagrechten). Dieser Winkel kann zuvor feststehen. Er kann aber auch erst festgelegt werden, wenn beide Photonen bereits aus ihren Kästen herausgetreten sind (Abb. 3.3).

Die Frage, die in diesem Experiment interessiert, ist weniger, welche Photonen genau bei Alice und bei Bob passieren oder

absorbiert werden. Interessant ist vielmehr, bei welchem **Anteil** der Photonenpaare Alice und Bob **dasselbe** Ergebnis erhalten.

---

## 3.2 Ergebnis des Experiments

Es stellt sich heraus, dass sowohl bei Alice als auch bei Bob statistisch jeweils die Hälfte der Photonen passieren und die Hälfte absorbiert werden. Die Messungen von Alice und Bob scheinen außerdem nichts miteinander zu tun zu haben. Die vier möglichen Ergebnisse für ein Photonenpaar sind:

- Das Photon auf der Seite von Alice passiert, das auf der Seite von Bob ebenfalls;
- das Photon auf der Seite von Alice passiert, das auf der Seite von Bob wird absorbiert;
- das Photon auf der Seite von Alice wird absorbiert, das auf der Seite von Bob passiert;
- das Photon auf der Seite von Alice wird absorbiert, das auf der Seite von Bob ebenfalls.

Alle vier Ergebnisse kommen statistisch gleich oft vor.

Alice und Bob erhalten also (statistisch) **in der Hälfte der Fälle dasselbe** Ergebnis.

---

## 3.3 Interpretation des Ergebnisses – Unabhängigkeit

Das Experiment ist leicht zu interpretieren. Es handelt sich bei den Messungen von Alice und Bob im Grunde um zwei unabhängige Münzwürfe mit einer Münze, die jeweils mit Wahrscheinlichkeit 1/2 „passiert“ oder „absorbiert“ anzeigt.

# Das zweite Experiment – Gleichheit

# 4

Das zweite der drei Experimente zur Illustration der Quantenverschränkung sieht von außen aus wie das erste. Allerdings werden die Photonenpaare jetzt nicht aus zwei unabhängigen Kästen emittiert. Sie kommen aus nur einem Kasten, in dessen Inneren die Photonen „verschränkt“ werden. Alice und Bob messen wie zuvor. Das Ergebnis des Experiments ist völlig anders als das des ersten Experiments, aber für sich genommen ebenfalls gut erklärbar.

---

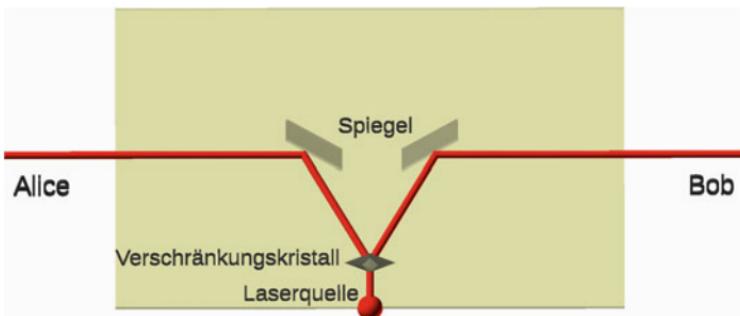
## 4.1 Aufbau des Experiments

Aus einem speziell präparierten Photonenkasten werden Photonenpaare emittiert – wieder jeweils eines nach links zu Alice und eines nach rechts zu Bob, siehe Abb. 4.1

Der Kasten sieht von außen aus wie der Kasten aus dem ersten Experiment (siehe vorheriges Kapitel). Im Inneren entstehen die beiden Photonen aber nicht unabhängig voneinander. Sondern sie entstehen aus einem einzigen Photon, dass durch einen „Verschränkungskristall“ geführt wird. Dadurch wird es aufgespalten in zwei Photonen mit jeweils halber Energie, die dann in Richtung



**Abb. 4.1** Aufbau des zweiten Experiments. Photonenpaare werden aus EINEM Kasten emittiert, jeweils ein Photon in Richtung Alice und eines in Richtung Bob



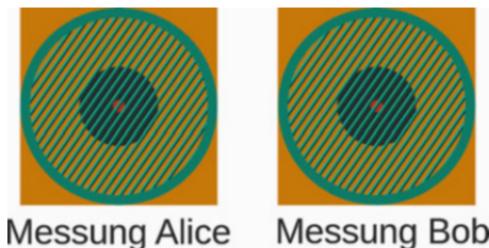
**Abb. 4.2** Blick ins Innere des Kasten mit Verschränzungskristall

Alice und Bob aus dem Kasten herausgeleitet werden, siehe Abb. 4.2.

Auf die technischen Details wird hier nicht näher eingegangen. Für den Zweck dieses Buches genügt es zu wissen, dass eine Herstellung derart „verschränkter“ Photonen ohne Weiteres möglich ist, und dass sie dann von Alice und Bob wie im ersten Experiment gemessen werden können.

Das bedeutet wieder: Für ein Photonenpaar misst jeweils Alice zuerst, dann Bob. Die Polarisationsfilter von Alice und Bob haben dabei jeweils den gleichen Winkel (zur Waagrechten, siehe Abb. 4.3).<sup>1</sup> Dieser Winkel kann zuvor feststehen. Er kann aber auch erst festgelegt werden, wenn beide Photonen bereits aus ihren Kästen herausgetreten sind.

<sup>1</sup>Technisch versierte Leser bemerken: Hier wird in der Darstellung unterschlagen, dass Bob zusätzlich eine Drehung um 90 Grad gegenüber Alice ausgleichen muss. Das stimmt und möge verziehen werden, da es nichts an den Effekten verändert, jedoch die Darstellung komplizierter machen würde.



**Abb. 4.3** Messung von Alice, danach von Bob, im gleichen Winkel (hier abgebildet: 55 Grad)

Auch hier interessiert uns wieder vor allem, bei welchem **Anteil** der Photonenpaare Alice und Bob **dasselbe** Ergebnis erhalten.

---

## 4.2 Ergebnis des Experiments

Es stellt sich wieder heraus, dass sowohl bei Alice als auch bei Bob statistisch jeweils die Hälfte der Photonen passieren und die Hälfte absorbiert werden.

Aber:

Alice und Bob erhalten **in allen Fällen** dasselbe Ergebnis.

---

## 4.3 Interpretation des Ergebnisses

### 4.3.1 Klassische Interpretation: Verborgene Variablen

Die perfekte Korrelation, die in diesem Experiment beobachtet wird, tritt bei unabhängigen Münzwürfen nicht auf. Das Ergebnis erinnert eher an das folgende Experiment mit „verborgenen Variablen“ (ein Begriff von Albert Einstein):

Es werden, für den Beobachter verborgen, jeweils zwei Kugeln entweder beide rot oder beide blau gefärbt. Sie werden dann einzeln verpackt. Eine der Kugeln wird zu Alice und eine zu Bob

geschickt. Für Alice und Bob ist die Wahrscheinlichkeit jeweils  $1/2$ , eine rote oder eine blaue Kugel zu finden. Alice öffnet ihr Päckchen zuerst. Sie sieht die Farbe ihrer Kugel, und kennt damit auch die Farbe von Bobs Kugel.

In diesem Experiment gibt es echten Zufall, wenn überhaupt, nur ganz zu Beginn bei der Auswahl der Farbe eines Kugelpaares. Danach hat jedes Kugelpaar seine Farbe (seine „verborgene Variable“). Die Unsicherheit im Experiment ist somit auf unvollständiges Wissen von Alice und Bob zurückzuführen, und nicht auf Eigenschaften der physikalischen Realität.

Die klassische Interpretation des Ergebnisses des zweiten Experiments wäre also folgende: Für jedes Photonenpaar liegt bei Austritt aus dem Kasten für jeden Winkel bereits eindeutig bestimmt, ob (beide) passieren werden, oder ob (beide) absorbiert werden. In diesem Sinne besitzen die Photonenpaare eine verborgene Variable für jeden Winkel. Diese können sich für unterschiedliche Photonenpaare unterscheiden, aber nicht für die beiden Photonen eines Photonenpaares.

### **4.3.2 Quantenmechanische Interpretation: Systemzustand, instantan**

In der quantenmechanischen Interpretation ist bis zur Messung unbestimmt, ob Alices Photon passiert oder absorbiert wird. Bei ihrer Messung passiert es mit Wahrscheinlichkeit  $1/2$ , und ist danach in Richtung ihres Polarisationsfilters polarisiert. Mit Wahrscheinlichkeit  $1/2$  wird es absorbiert.

**Bobs Photon nimmt nach quantenmechanischer Interpretation in dem Moment von Alices Messung den Zustand von Alices Photon an.** Das heißt, falls Alices Photon passiert, ist seines instantan, also ohne Zeitverzug, ebenfalls in diese Richtung polarisiert. Es passiert dann ebenfalls, denn es wird ja von Bob in Richtung seiner Polarisationsrichtung gemessen. Falls Alices Photon absorbiert wird, nimmt Bobs Photon eine Polarisierung senkrecht zur Messrichtung des Polarisationsfilters an, und wird damit bei Bobs Messung selbstverständlich ebenfalls absorbiert.

Diese Interpretation klingt völlig abwegig. Einstein nannnte die instantane Informationsübertragung „spukhafte Fernwirkung“. Denn wie soll die Messung von Alice dazu führen, dass sich ohne jeden Zeitverlust (also mit Überlichtgeschwindigkeit) die Eigenschaften von Bobs Photon ändern? Widerspricht das nicht der Relativitätstheorie? Gut, der Relativitätstheorie widerspricht die Interpretation nicht. Denn diese besagt nur, dass sich keine Materie schneller als das Licht durch den Raum bewegen kann. Und Materie wird ja nicht transportiert, nur eine Information.

Die quantenmechanische Interpretation besagt auch, dass verschränkte Photonen als System betrachtet werden müssen, unabhängig vom zugrunde liegenden Raum. Änderung einer Stelle im System ändern instantan den gesamten Systemzustand.

Da die quantenmechanische Interpretation sehr befremdlich ist, wird ein drittes Experiment gemacht, um zu sehen, welche Interpretation tragfähiger ist.

# Das dritte Experiment – Spukhafte Fernwirkung

# 5

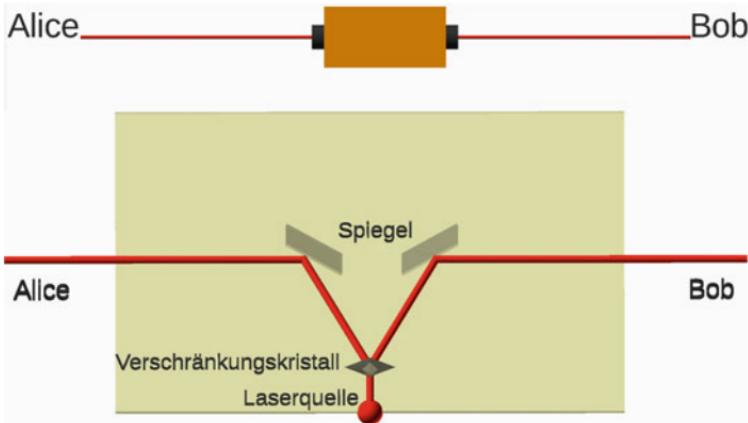
Das dritte Experiment wird eigentlich gemacht, um die quantenmechanische Interpretation des zweiten zu widerlegen. Es soll zeigen, dass es keine „spukhafte Fernwirkung“ gibt. Aber es bestätigt die quantenmechanische Vorhersage und zeigt statt dessen, dass es bei verschränkten Photonenpaaren keine verborgenen Variablen bezüglich des Passierens oder der Absorbtion an Polarisationsfiltern geben kann.

---

## 5.1 Aufbau des Experiments

Wie im zweiten Experiment werden Paare verschränkter Photonen nach links zu Alice und nach rechts zu Bob gesendet, vgl. Abb. 5.1.

Alice entscheidet für jedes Photonenpaar zufällig und mit Wahrscheinlichkeit 1/2, ob sie im Winkel von 0 Grad oder 30 Grad (zur Waagrechten) misst. Bob entscheidet ebenfalls zufällig und mit Wahrscheinlichkeit 1/2, und unabhängig von Alice, ob er bei 30 Grad oder bei 60 Grad misst. Wieder können beide auch erst nach Abflug des Photonenpaares entscheiden, in welchem

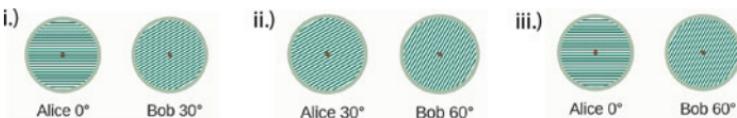


**Abb. 5.1** Die Emission verschränter Photonen ist beim zweiten und dritten Experiment identisch. Beide Experimente unterscheiden sich in der Art, wie Alice und Bob messen

Winkel sie messen, und wieder misst Alice zuerst.<sup>1</sup> Bob kann aber unmittelbar danach messen – schneller, als das Licht bräuchte, um von Alice zu ihm zu kommen. Ergebnisse, bei denen beide bei 30 Grad gemessen haben, werden gelöscht. Denn Messungen im gleichen Winkel wurden ja schon im zweiten Experiment analysiert.

Mögliche Messungen sind also, siehe Abb. 5.2:

- (i) Alice misst bei 0 Grad, Bob bei 30 Grad;
- (ii) Alice misst bei 30 Grad, Bob bei 60 Grad;
- (iii) Alice misst bei 0 Grad, Bob bei 60 Grad.



**Abb. 5.2** Mögliche Messungen im dritten Experiment

<sup>1</sup> Jemand muss zuerst messen – eine wirklich exakt gleichzeitige Messung ist experimentell nicht möglich.

## 5.2 Ergebnis des Experiments

Sowohl bei Alice als auch bei Bob passieren statistisch wieder die Hälfte der Photonen, und die Hälfte wird absorbiert. Dies ist auch der Fall, wenn man nur die Messungen in Bezug auf einen der bei Alice bzw. Bob vorkommenden Winkel betrachtet.

Wir betrachten nun wieder, bei welchem **Anteil** der Photonenpaare von Alice und Bob dasselbe Ergebnis erhalten. Dies wird unterschieden, je nachdem, wie Alice und Bob gemessen haben. Es stellt sich heraus:

- Der Anteil **gleicher** Ergebnisse ist statistisch **3/4**, wenn Alice bei 0 Grad und Bob bei 30 Grad misst;
  - Der Anteil **gleicher** Ergebnisse ist statistisch **3/4**, wenn Alice bei 30 Grad und Bob bei 60 Grad misst;
  - Der Anteil **verschiedener** Ergebnisse ist statistisch **3/4**, wenn Alice bei 0 Grad und Bob bei 60 Grad misst.
- 

## 5.3 Interpretation des Ergebnisses

Ist der Differenzwinkel von Alices und Bobs Messung 30 Grad, so ist, wie beschrieben, der Anteil gleicher Ergebnisse (statistisch) 3/4. Ist der Differenzwinkel von Alices und Bobs Messung 60 Grad, so ist der Anteil unterschiedlicher Ergebnisse (statistisch) 3/4.

Es zeigt sich nun, dass das mit der Existenz verborgener Variablen nicht verträglich ist, aber perfekt der quantenmechanischen Interpretation entspricht.

### 5.3.1 Klassische Interpretation: Verborgene Variablen

In dieser Interpretation wird angenommen, dass es für jedes Photonenpaar verborgene Variablen für die Messungen bei 0 Grad, 30 Grad und 60 Grad gibt. D. h., für jedes Photonenpaar ist bei Emission bereits festgelegt, ob beide bei Messung mit

einem Polarisationsfilter in Richtung 0 Grad, 30 Grad und 60 Grad passieren werden oder absorbiert werden. Dass stets beide passieren oder absorbiert werden, ist das Ergebnis des zweiten Experiments.

Es gibt theoretisch acht Möglichkeiten, wie die verborgenen Variablen für ein Photonenpaar für die drei Winkel aussehen können, siehe Tab. 5.1. Diese Möglichkeiten haben noch nichts mit der tatsächlich durchgeführten Messung zu tun. Sie beschreiben nur die möglichen Werte der verborgenen Variablen.

**Tab. 5.1** Möglichkeiten verborgener Variablen für 0 Grad, 30 Grad, 60 Grad

0 Grad	30 Grad	60 Grad
absorbiert	absorbiert	absorbiert
absorbiert	absorbiert	passiert
absorbiert	passiert	absorbiert
absorbiert	passiert	passiert
passiert	absorbiert	absorbiert
passiert	absorbiert	passiert
passiert	passiert	absorbiert
passiert	passiert	passiert

Für jede Belegung der verborgenen Variablen ist eindeutig bestimmt, ob Alice und Bob bei ihrer Messung dieselben Ergebnisse erhalten oder nicht.

Ein Beispiel: Bei der vierten Möglichkeit (Absorption bei 0 Grad, Passieren bei 30 und 60 Grad) erhalten Alice und Bob verschiedene Ergebnisse, wenn Alice bei 0 Grad und Bob bei 30 Grad oder bei 60 Grad misst. Sie erhalten das gleiche Ergebnis, wenn Alice bei 30 Grad und Bob bei 60 Grad misst.

Der Differenzwinkel zwischen der Messung von Alice und der von Bob ist stets 30 Grad oder 60 Grad. Andere Differenzwinkel kommen nicht vor. Die zentrale Idee von John Bell [1] war es 1964 (als Einstein schon lange tot war), die folgenden beiden Fragen geschickt zu kombinieren:

- Erhalten Alice und Bob dasselbe Ergebnis, wenn die Differenz ihrer Messwinkel 30 Grad ist (also bei kleinem Differenzwinkel)?

- Erhalten Alice und Bob ein unterschiedliches Ergebnis, wenn die Differenz ihrer Messwinkel 60 Grad ist (also bei großem Differenzwinkel)?

Je nach Belegung der verborgenen Variablen sind die Ergebnisse unterschiedlich. Sie sind in Tab. 5.2 gelistet.

**Tab. 5.2** Messergebnisse bei gegebenen verborgenen Variablen

0 Grad	30 Grad	60 Grad	Alice 0 Bob 30 Ergebnisse gleich?	Alice 30 Bob 60 Ergebnisse gleich?	Alice 0 Bob 60 Ergebnisse verschieden?
absorbiert	absorbiert	absorbiert	ja	ja	nein
absorbiert	absorbiert	passiert	ja	nein	ja
absorbiert	passiert	absorbiert	nein	nein	nein
absorbiert	passiert	passiert	nein	ja	ja
passiert	absorbiert	absorbiert	nein	ja	ja
passiert	absorbiert	passiert	nein	nein	nein
passiert	passiert	absorbiert	ja	nein	ja
passiert	passiert	passiert	ja	ja	nein

Die beiden Teilfragen werden zu der folgenden Frage kombiniert:

**Frage:** „Wenn Alice bei 0 Grad und Bob bei 30 Grad gemessen hat, sind dann die Ergebnisse beider Messungen gleich? Ansonsten, wenn Alice bei 30 Grad und Bob bei 60 Grad gemessen hat, sind dann die Ergebnisse beider Messungen gleich? Ansonsten, wenn also Alice bei 0 Grad und Bob bei 60 Grad gemessen hat, sind dann die Ergebnisse beider Messungen verschieden?“

Diese Frage wird von den tatsächlich erzielten Messergebnissen, wie im vorigen Abschn. 5.2 beschrieben, insgesamt statistisch in 3/4 aller Fälle mit „ja“ beantwortet. Denn dort wurde beobachtet:

- Der Anteil **gleicher** Ergebnisse ist statistisch **3/4**, wenn Alice bei 0 Grad und Bob bei 30 Grad misst;
- Der Anteil **gleicher** Ergebnisse ist statistisch **3/4**, wenn Alice bei 30 Grad und Bob bei 60 Grad misst;

- Der Anteil **verschiedener** Ergebnisse ist statistisch **3/4**, wenn Alice bei 0 Grad und Bob bei 60 Grad misst.

Aber die Tabelle mit den Messergebnissen bei gegebenen verborgenen Variablen besagt etwas anderes: Sind die verborgenen Variablen fest, und wird die Messung von Alice und Bob unabhängig davon festgelegt, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Frage mit „ja“ beantwortet wird, in allen Fällen höchstens 2/3. Das macht einen – wie auch immer gewichteten – statistischen Mittelwert von 3/4 unmöglich.

Aber wenn es keine verborgenen Variablen gibt – wie ist dann das Ergebnis des zweiten Experiments möglich? Gleich zeigt sich, wie die Quantenmechanik es erklären kann.

### **5.3.2 Quantenmechanische Interpretation: Systemzustand, instantan**

Noch einmal zur Erinnerung, wie schon beim zweiten Experiment geschildert: In der quantenmechanischen Interpretation ist bis zur Messung unbestimmt, ob Alices Photon passiert oder absorbiert wird. Es passiert bei ihrer Messung mit Wahrscheinlichkeit 1/2, und ist danach in Richtung ihres Polarisationsfilters polarisiert. Mit Wahrscheinlichkeit 1/2 wird es absorbiert.

Bobs Photon nimmt nach quantenmechanischer Interpretation **in dem Moment von Alices Messung den Zustand von Alices Photon an**. Genauer: Falls Alices Photon passiert, ist Bobs Photon instantan, also ohne Zeitverzug, ebenfalls in diese Richtung polarisiert. Falls Alices Photon absorbiert wird, nimmt Bobs Photon die Polarisation senkrecht zur Messrichtung von Alices Polarisationsfilters an. Die möglichen Zustände der Messungen von Alice und Bob sind in Abb. 5.3 illustriert.

### Quantenmechanische Interpretation: Messwinkel von Bobs Photon nach Alices Messung

Messung Photon Alice	Alice 0°	Bob 30°	Alice 30°	Bob 60°	Alice 0°	Bob 60°
passiert						
absorbiert						

**Abb. 5.3** Mögliche Zustände nach Alices Messung bei der quantenmechanischen Interpretation

Wir zeigen jetzt, dass die quantenmechanische Interpretation perfekt mit den Ergebnissen des dritten Experiments übereinstimmt.

Denn:

- Hat Alices Photon ihren Polarisationsfilter passiert, so ist laut quantenmechanischer Interpretation Bobs Photon in die Richtung ihres Polarisationsfilters polarisiert.

Wird Bobs Photon dann in einem Differenzwinkel von 30 Grad gemessen, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass es ebenfalls passiert, nach dem (klassischen) Gesetz von Malus  $(\cos 30)^2 = 3/4$ .

Wird Bobs Photon in einem Differenzwinkel von 60 Grad gemessen, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass es passiert, nach dem Gesetz von Malus  $(\cos 60)^2 = 1/4$ . Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es **nicht** passiert (und das wird ja abgefragt) ist also 3/4.

- Hat Alices Photon ihren Polarisationsfilter nicht passiert, so ist laut quantenmechanischer Interpretation Bobs Photon in die Richtung polarisiert, die senkrecht zu Alices Polarisationsfilter steht.

Wird Bobs Photon dann in einem Differenzwinkel von 30 Grad zu Alices Messung gemessen, so ist das ein Differenzwinkel von 60 Grad zu seiner Polarisationsrichtung. Die Wahrscheinlichkeit, dass es passiert, nach dem Gesetz von Malus  $(\cos 60)^2 = 1/4$ . Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es **nicht** passiert (und das wird ja abgefragt – ob es ebenso wie Alices Photon nicht passiert) ist also 3/4.

Wird Bobs Photon in einem Differenzwinkel von 60 Grad zu Alices Messung gemessen, so ist entspricht das einem Winkel von 30 Grad zu seiner Polarisation. Die Wahrscheinlichkeit, dass es passiert (und seine Messung sich somit von der Messung von Alices Photon unterscheidet), nach dem Gesetz von Malus  $(\cos 30)^2 = 3/4$ .

Die quantenmechanische Interpretation deckt sich perfekt mit den beobachteten Ergebnissen. Aber wie kann es sein, dass die Messung an Alices Photon instantan (d. h., augenblicklich) die Eigenschaften von Bobs Photon beeinflusst? Das widerspricht unserem klassischen Weltbild. Experimentell nachgewiesen ist aber, dass eine wie auch immer geartete „Information“, die von Alices Photon zu Bobs Photon gelangt, mit mindestens 10.000-facher Lichtgeschwindigkeit unterwegs ist.<sup>2</sup> Das ist der Grund für den Bohr zugeschriebenen Ausspruch „Denn wenn man nicht zunächst über die Quantentheorie entsetzt ist, kann man sie doch unmöglich verstanden haben.“

---

## Literatur

1. J. S. Bell. On the einstein podolsky rosen paradox. *Physics Physique Fizika*, 1(3):195–200, November 1964.
2. Juan Yin, Yuan Cao, Hai-Lin Yong, Ji-Gang Ren, Hao Liang, Sheng-Kai Liao, Fei Zhou, Chang Liu, Yu-Ping Wu, Ge-Sheng Pan, and et al. Lower bound on the speed of nonlocal correlations without locality and measurement choice loopholes. *Physical Review Letters*, 110(26), Jun 2013.

---

<sup>2</sup>Hierzu gibt es viele Experimente, z. B. [2]

# Auswertungen und Deutungen

# 6

## 6.1 Strukturelle Beobachtungen in den Experimenten

Die drei Experimente aus den letzten Kapiteln haben die folgenden Beobachtungen über die Eigenschaften von verschränkten Photonen geliefert:<sup>1</sup>

- Bei Messung in jedem beliebigen, auch vom Beobachter zufällig bestimmten Winkel verhalten sich stets beide Photonen gleich, d. h., beide passieren oder beide werden absorbiert. Das gilt auch, wenn der Winkel erst bestimmt wird, nachdem beide Photonen bereits die Photonenquelle verlassen haben. (Ergebnis des zweiten Experiments)

---

<sup>1</sup>Dabei wurde stets vorausgesetzt, dass der Beobachter seine Messungen unabhängig von den beobachteten Photonen durchführen kann. Das ist nicht der Fall, falls alles vorherbestimmt ist, und sowohl die durchgeführten Versuche als auch deren Ergebnisse in einem Sinn bereits festgelegt sind, den der Beobachter nicht beeinflussen kann. Manche glauben das, aber es widerspricht dem freien Willen des Beobachters.

- Es kann keine „verborgenen Variablen“ der Photonenpaare geben, sodass das Messergebnis schon vor der Messung definiert ist, aber dem Beobachter noch nicht bekannt ist – ihm also nur verborgen ist. (Analyse des dritten Experiments.)
- Sollte irgend eine „Information“ über das Messergebnis von einem zum anderen Photon übertragen werden, so erfolgt diese mit mindestens 10.000-facher Lichtgeschwindigkeit. (Experimentalphysikalisch nachgewiesen, siehe z. B. [7].)
- Die gleiche Versuchsanordnung liefert in der Welt der Photonen nicht immer das gleiche Messergebnis (erstes Experiment). Es handelt sich dabei nicht um Fehler im Versuchsaufbau, sondern die Messergebnisse entstehen tatsächlich erst durch die Messung, und sind nicht durch den Versuchsaufbau bereits definiert.

---

## 6.2 Modellierung in der Quantentheorie und philosophische Auswirkungen

Die Quantentheorie ist ein mathematisches Modell. Sie sagt die Versuchsergebnisse der Experimente statistisch korrekt vorher. Sie beinhaltet die folgenden Modellannahmen:

- Nicht-Realismus: Es gibt echten Zufall. Die gleiche Versuchsanordnung liefert nicht immer das gleiche Ergebnis. Dies wird in der Quantenphysik mithilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung modelliert. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung, die der Zufälligkeit zugrunde liegt, ist die sogenannte „Wellenfunktion“. Sie ordnet jedem Messergebnis eine Wahrscheinlichkeit zu, und kann dann durch Experimente statistisch bestätigt werden. Wird tatsächlich gemessen, so haben die möglichen Ergebnisse keine Wahrscheinlichkeiten mehr, sondern eines ist eingetreten, und die anderen nicht. Man spricht dann vom „Kollaps der Wellenfunktion“ bei der Messung.

Im Beispiel der Messung eines waagrecht polarisierten Photons im 45-Grad Winkel ist die Wellenfunktion diejenige

eines Münzwurfs: Mit Wahrscheinlichkeit  $1/2$  passiert das Photon, mit Wahrscheinlichkeit  $1/2$  wird es absorbiert.

Somit hat ein Quantenteilchen nicht per se eine Eigenschaft, die dann durch die Messung nachgewiesen wird. Sondern erst durch die Messung erhält das Teilchen eine Eigenschaft. In diesem Sinne verhalten sich Quantenteilchen wie ein Wähler, der auf dem Weg zur Wahlkabine noch überlegt, wen er wählt. Auch dieser bekommt erst durch die Messung, also durch das Kreuz auf dem Stimmzettel, die Eigenschaft, Wähler eines bestimmten Kandidaten zu sein. Vorher war er „zugleich“ Wähler aller Kandidaten, die für ihn in Frage kommen.

- Nicht-Lokalität: Bei verschränkten Quantenpaaren beeinflusst die Messung eines Quantenteilchens den Zustand des anderen instantan, d. h., im selben Moment, den Zustand des anderen Quantenteilchens. Die Zustandsänderung erfolgt also mit Überlichtgeschwindigkeit.

Beide Modellannahmen widersprechen den Annahmen der klassischen Mechanik.

- Die klassische Mechanik geht davon aus, dass man das Ergebnis eines Experiments eindeutig ausrechnen kann, wenn man alle notwendigen Eingangsgrößen kennt. In diesem Sinne ist ein Würfelwurf nicht zufällig. Würde man die genauen Kräfte, die beim Wurf angewendet werden, kennen, ebenso die Materialeigenschaften von Würfel und Tisch, die Eigenschaften der werfenden Hand usw., so könnte man – nach der klassischen Mechanik – ausrechnen, welches Ergebnis herauskommt.

Denn in der klassischen Mechanik haben Objekte Eigenschaften, z. B. ihr Gewicht, ihre Position im Raum oder ihre Farbe. Korrekte Versuchsaufbauten liefern diese Eigenschaften, und die Versuche können wiederholt werden und liefern immer dieselben Resultate. Unbelebte Objekte verhalten sich nach den Regeln der klassischen Mechanik nicht wie noch unsichere Wähler.

- Die klassische Mechanik geht davon aus, dass Experimente in einem räumlich abgeschlossenen Bereich in einem „geschlossenen System“ durchgeführt werden. Wenn ein Teilsystem

ein anderes beeinflusst, so benötigt das Zeit. Der Stoß einer Billardkugel beeinflusst z. B. die Bande erst, nachdem die Billardkugel dort angekommen ist.

Die skurril anmutenden Annahmen der Quantenphysik wurden experimentell immer wieder bestätigt, und nie widerlegt. Sie werfen allerdings einige philosophische Fragen auf:

- Gibt es echten Zufall in der unbelebten Welt? Einstein meinte noch „Gott würfelt nicht“. Er starb allerdings bereits 1955, und konnte so die Überlegungen von Bell (1964) nicht kennen.
- Die alte Vorstellung vom außenstehenden Beobachter, der eine von ihm unabhängige objektive Realität feststellt, gerät ins Wanken. Der Beobachter wird Teil des Systems, das er beobachtet, und beeinflusst es durch seine Beobachtung.<sup>2</sup>
- Die Vorstellung vom Raum und dem Informationsfluss im Raum wird auf den Prüfstand gestellt. Materie kann sich nach der Relativitätstheorie nicht mit Überlichtgeschwindigkeit durch den Raum bewegen. Doch bei verschränkten Teilchenpaaren beeinflusst die Messung eines Teilchens instantan den Zustand des anderen Teilchens. Materie wird dabei nicht bewegt, von daher widerspricht es nicht der Relativitätstheorie. Aber wie fließt diese Information?

Im Rahmen dieses Buches kann auf die philosophischen Aspekte nicht näher eingegangen werden. Daher hier Empfehlungen zu weiterführender Literatur:

---

<sup>2</sup>Eine geradezu menschliche Eigenschaft des Systems: Menschen verhalten sich auch unterschiedlich, je nachdem, ob sie sich beobachtet glauben oder nicht.

- Für die Physik der unbelebten Materie ist die weitest akzeptierte Vorstellung die „Kopenhagener Deutung“. Sie wurde 1927 von Heisenberg und Bohr erarbeitet, und seither immer wieder beleuchtet und ausdifferenziert. Einen schönen Übersichtsartikel findet man in Wikipedia, es gibt auch zahlreiche youtube-Videos dazu.
- Heisenberg hat einige Aufsätze über die Verbindung zwischen (Quanten)physik und Philosophie geschrieben, siehe [4, 5].
- Bohr und Einstein hatten unterschiedliche Meinungen zur Rolle des Zufalls in der Physik. Sie führten darüber die sogenannte „Bohr-Einstein-Debatte“, siehe [6].
- Über Physik, Spiritualität und Transzendenz haben sich alle großen Physiker zu Beginn des 20 Jahrhunderts im Ange- sicht von Quantenphysik und Relativitätstheorie Gedanken gemacht. Ein Überblick findet sich z. B. in [3]. Eine Verbindung zwischen der Quantenphysik und Hinduismus/Buddhismus zieht ganz explizit Capra [2].
- Die Mathematik der Quantenmechanik kommt inzwischen auch bei der Beschreibung menschlichen Verhaltens zum Einsatz. Man stelle sich ein Ehepaar vor, das ein Auto kaufen will. Beide sind noch unentschlossen, ob es Marke A oder Marke B sein wird, aber beide sind sich sicher, dass sie sich einigen werden. Die Situation ähnelt der eines Paars verschränkter Photonen – das Ergebnis ist ungewiss, aber es wird bei beiden gleich sein. Eine Einführung zu quantenphysikalischen Modellen bei der Beschreibung menschlichen Verhaltens und menschlicher Entscheidungsfindung findet sich in [1].

---

## Literatur

1. Jerome Busemeyer and Peter Bruza. *Quantum models of cognition and decision*. Cambridge University Press, Cambridge, 2012.
2. Fritjof Capra. *The Tao of Physics (Flamingo)*. Flamingo Harpercollins, Mar 1992.
3. Hans P. Dürr. *Physik und Transzendenz die großen Physiker unserer Zeit über ihre Begegnung mit dem Wunderbaren*. Driediger, Bad Essen, 2010.
4. Werner Heisenberg. *Quantentheorie und Philosophie : Vorlesungen u. Aufsätze*. Reclam, Stuttgart, 1979.

5. Werner Heisenberg. *Physik und Philosophie*. Hirzel S. Verlag, Aug 2011.
6. Manjit Kumar. *Quanten : Einstein, Bohr und die große Debatte über das Wesen der Wirklichkeit*. Berlin Verlag, Berlin, 2009.
7. Juan Yin, Yuan Cao, Hai-Lin Yong, Ji-Gang Ren, Hao Liang, Sheng-Kai Liao, Fei Zhou, Chang Liu, Yu-Ping Wu, Ge-Sheng Pan, and et al. Lower bound on the speed of nonlocal correlations without locality and measurement choice loopholes. *Physical Review Letters*, 110(26), Jun 2013.

---

## Teil II

# Quantencomputing mit dem Beispiel Teleportation

# Quantenalgorithmen anschaulich

# 7

In der klassischen Informatik ist ein Bit ein Objekt, dass die beiden Werte „0“ oder „1“ annehmen kann. Die Werte werden manchmal auch mit „falsch“ und „wahr“ bezeichnet. In der klassischen Informatik sind die beiden folgenden Fakten so klar, dass sie meist gar nicht explizit aufgeführt werden:

- (Realismus)  
Der Wert eines Bits ist zu jedem Zeitpunkt der Berechnung eindeutig definiert. Er kann ausgelesen werden, und der Auslesevorgang ändert den Wert nicht.
- (Lokalität)  
Wird der Wert eines bestimmten einzelnen Bits verändert, so ändert das nicht den Wert irgend eines anderen Bits.

In der Quanteninformatik ist ein QBit ein Objekt, dass die Werte „0“ oder „1“ *oder irgendetwas dazwischen* annehmen kann. Die beiden Randwerte werden normalerweise mit „ $|0\rangle$ “ und „ $|1\rangle$ “ bezeichnet. Das sind zunächst einmal einfach seltsam aussehende Bezeichnungen. Photonen, wie sie im ersten Teil des Buches betrachtet wurden, sind typische Beispiele von QBits. Die Polarisation eines Photons ist „waagrecht“ (entspricht „ $|0\rangle$ “) oder

„senkrecht“ (entspricht „ $|1\rangle$ “), oder *irgendetwas dazwischen* – ein beliebiger Polarisationswinkel ist möglich.

Bei der Arbeit mit QBits müssen aber die Annahmen von Realismus und Lokalität, die für klassische Bits so selbstverständlich sind, teilweise aufgegeben werden. Die Gründe dafür wurden für die Photonen im ersten Teil des Buches erläutert:

- (Eingeschränkung des Realismus)

Messen verändert im Allgemeinen die Polarisation eines Photons.

Wird z. B. ein im  $45^\circ$ -Winkel polarisiertes Photon mit einem waagrechten Polarisationsfilter gemessen, so gibt es zwei mögliche Messergebnisse: Entweder das Photon passiert den Filter, und ist anschließend selbst waagrecht polarisiert, oder es wird vom Filter absorbiert. Nach der Messung ist es also auf keinen Fall mehr im  $45^\circ$ -Grad-Winkel polarisiert.

Und: Wenn wir die Polarisation des Photons vor der Messung nicht kennen, können wir sie durch eine Messung nicht herausfinden. Denn das Messen ändert die Polarisation des Photons.

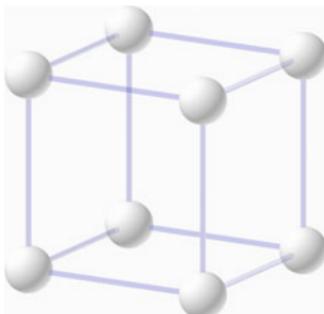
- (Einschränkung der Lokalität)

Wird der Wert eines bestimmten einzelnen Bits verändert, so ändert das möglicherweise den Wert eines (oder sogar mehrerer) anderer Bits. Im zweiten Experiment im ersten Teil des Buches haben wir gesehen, dass Messen eines Photons den Messwert eines mit ihm verschränkten Photons festlegt, auch wenn dieser (wie im dritten Experiment gezeigt) zuvor nicht festgelegt war.

Wie kann man sich dann Berechnungen mit solchen QBits vorstellen? Es folgt zunächst eine graphische Veranschaulichung, um eine allererste Idee zu bekommen. Weitere Details und eine technisch wirklich saubere Darstellung sind dann Gegenstand der nachfolgenden Kapitel.

Für drei QBits stellen wir uns für die allererste Anschauung einen normalen dreidimensionalen Würfel vor. Dieser hat acht Ecken (man überzeuge sich davon).

**Abb. 7.1** Ein Würfel mit Glaskugeln an den Ecken und Glasröhren an den Kanten – für die allererste Anschauung eines Quantenalgorithmus



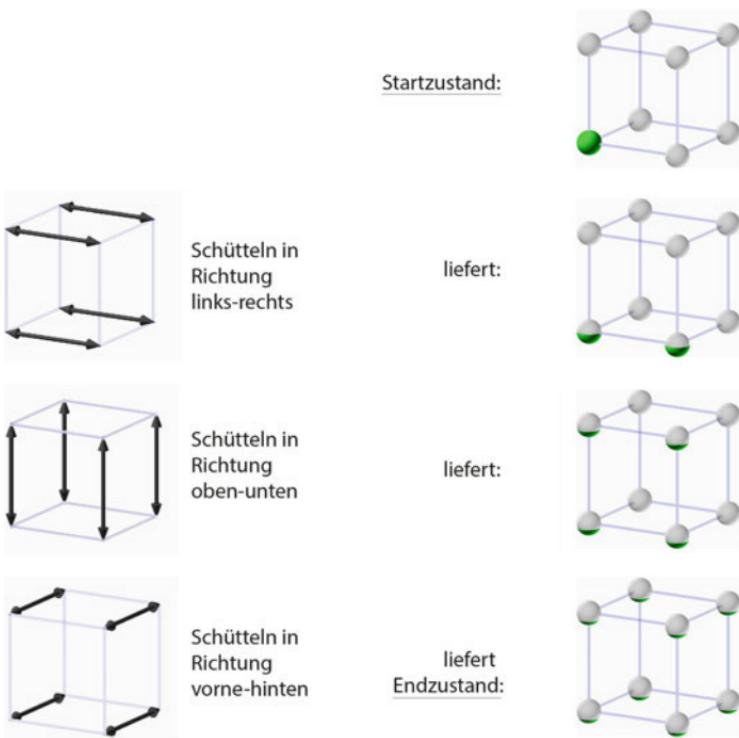
Weiter stellen wir uns vor, dass sich an jeder Ecke des Würfels eine hohle Glaskugel befindet. Alle diese Kugeln sind gleich groß, sie können jeweils eine Einheit einer Flüssigkeit fassen. Die Kugeln sind entlang der Kanten des Würfels (und nur dort) mit dünnen Glasröhren verbunden, durch die die Flüssigkeit fließen kann. Sie kann sich aber dort nicht aufhalten. Das ganze Gebilde erinnert an das Atomium in Brüssel, siehe Abb. 7.1 .

Ein Quantenalgorithmus ist nun eine Abfolge von „Schüttelungen“ des Würfels. Was eine „Schüttelung“ genau ist, ist für den Moment noch nicht interessant. Wir stellen uns einfach vor, dass man in die drei Raumrichtungen (also links-rechts, unten-oben und vorne-hinten) „schütteln“ kann. Eine Schüttelung in eine bestimmte Richtung bewirkt, dass sich Flüssigkeit entlang der Glasröhren in dieser Richtung (und nur entlang dieser Glasröhren) auf die benachbarten beiden Kugeln verteilt.

Hier kommt eine konkrete Aufgabe: Die linke untere vordere Glaskugel sei vollständig gefüllt, alle anderen Glaskugeln seien leer. Wie oft muss man schütteln, damit die Flüssigkeit gleichmäßig in allen 8 Kugeln verteilt ist?

Abb. 7.2 zeigt ein Verfahren, das mit drei Schüttelungen auskommt.

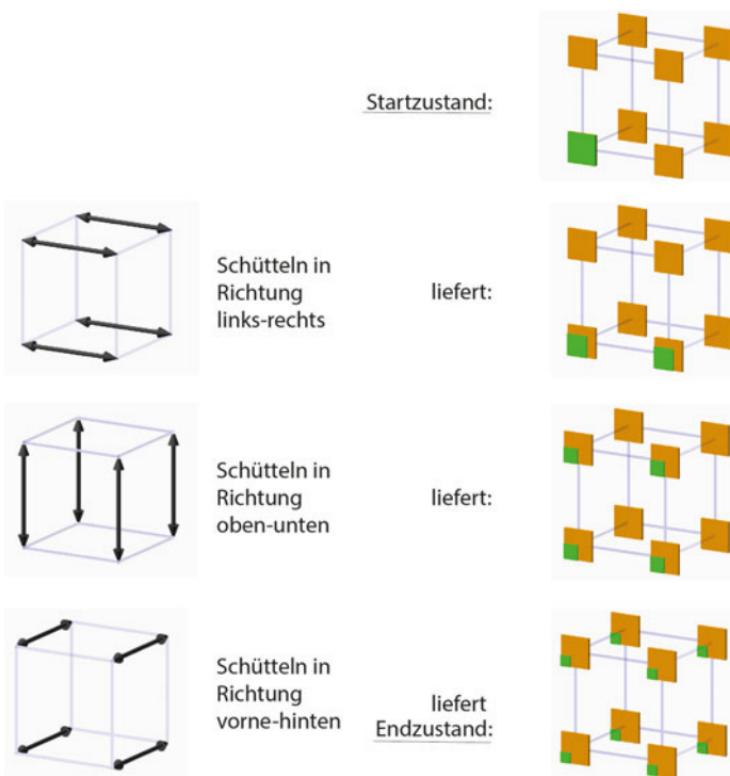
Man sieht: Drei Schritte reichen aus, um acht Werte zu verändern. Ein klassischer Algorithmus braucht zum Ändern von acht Werten mindestens acht Schritte, denn er muss ja auf jeden einzelnen Wert zumindest einmal zugreifen. Hier kann man zum erstenmal erahnen, warum Quantenalgorithmen so schnell sind.



**Abb. 7.2** Illustration eines einfachen Quantenalgorithmus auf drei QBits – mit Kugeln für eine erste Vorstellung. Dreimaliges Schütteln verteilt die Flüssigkeit von einer Kugel gleichmäßig auf alle acht Kugeln

Um etwas exakter zu beschreiben, was Quantenalgorithmen tun, muss die allererste Vorstellung mit den Kugeln etwas angepasst werden. Statt der Kugeln müssen wir uns vorstellen, dass an den Ecken Quadrate mit Seitenlänge 1 (und also auch mit Fläche 1) befestigt sind. Der Algorithmus oben sieht also technisch sauberer so aus, wie in Abb. 7.3 dargestellt ist.

Man beachte, dass die Seitenlänge des kleinen Quadrats im Startzustand 1 ist. Nach dem ersten Schütteln haben die beiden kleinen Quadrate jeweils die Seitenlänge  $1/\sqrt{2}$ , also jeweils die Fläche  $1/2$ . Das zweite Schütteln liefert 4 kleine Quadrate mit Seitenlänge  $1/2$ , also Fläche jeweils  $1/4$ , und im Endzustand sind



**Abb. 7.3** Illustration des Quantenalgorithmen auf drei QBits – mit Quadrate, der korrekten Darstellung

es 8 kleine Quadrate mit Seitenlänge  $1/\sqrt{8}$ , also Fläche jeweils  $1/8$ .

Zählt man die Flächen aller kleinen Quadrate zusammen, erhält man stets die ursprüngliche Gesamtfläche von 1.

In den nachfolgenden Kapiteln dieses Buchteils wird gezeigt, was diese Veranschaulichung mit Quantenbits (kurz: „QBits“) zu tun hat, und was das „Schütteln“ genau bedeutet.

Vorab nur soviel:

- Jedes QBit ist für eine bestimmte Raumrichtung zuständig. Das erste QBit für die Richtung links-rechts, das zweite für die Richtung unten-oben, und das dritte für die Richtung vorne-hinten.
- Jede der acht Ecken des Würfels stellt ein mögliches Messergebnis dar, das herauskommen kann, wenn man alle drei QBits misst.

Das erste QBit kann das Messergebnis  $|0\rangle$  oder  $|1\rangle$  liefern, ebenso das zweite und das dritte QBit. Die möglichen Messergebnisse sind also

$|0\rangle|0\rangle|0\rangle$ ,  $|0\rangle|0\rangle|1\rangle$ ,  $|0\rangle|1\rangle|0\rangle$ ,  $|0\rangle|1\rangle|1\rangle$ ,  $|1\rangle|0\rangle|0\rangle$ ,  $|1\rangle|0\rangle|1\rangle$ ,  $|1\rangle|1\rangle|0\rangle$  oder  $|1\rangle|1\rangle|1\rangle$ . Kürzer schreibt man dafür, einfach um senkrechte Striche und eckige Klammern zu sparen:

$|000\rangle$ ,  $|001\rangle$ ,  $|010\rangle$ ,  $|011\rangle$ ,  $|100\rangle$ ,  $|101\rangle$ ,  $|110\rangle$  und  $|111\rangle$ .

- Die Flächensumme der 8 kleinen Quadrate ist zu jedem Zeitpunkt 1.

Es wird sich herausstellen, dass es sich bei den Flächen der kleinen Quadrate um Wahrscheinlichkeiten handelt: Die Fläche des kleinen Quadrats am möglichen Messergebnis ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim Messen aller drei QBits genau dieses Messergebnis herauskommt.

- Änderungen an einem einzelnen der drei QBits können dazu führen, dass sich sämtliche acht Wahrscheinlichkeiten ändern. Dies ist z. B. im letzten Schritt des oben dargestellten Schüttelalgorithmus der Fall. Hier wird nur entlang des dritten QBits geschüttelt, und doch ändern sich alle Wahrscheinlichkeiten.



# Quantenbits und Quantenregister

# 8

## 8.1 Darstellung eines QBits für Algorithmen

Ein QBit  $|q\rangle$  ist in der Quanteninformatik definiert als ein Objekt der Gestalt

$$|q\rangle = a \cdot |0\rangle + b \cdot |1\rangle,$$

das man „messen“ kann.<sup>1</sup>

Dabei sind  $|0\rangle$  und  $|1\rangle$  die sogenannten „Basiszustände“.  $a$  und  $b$  sind in diesem Buch reelle Zahlen zwischen  $-1$  und  $+1$ , sie heißen „Wahrscheinlichkeitsamplituden“.<sup>2</sup> Es muss gelten  $a^2 + b^2 = 1$ . Messen des QBits liefert einen der Basiszustände,

<sup>1</sup>Es ist seltsam, dass hier eine Klammer mit „|“ aufgeht, und mit „,|“ wieder geschlossen wird. Dies ist aber die gängige Bezeichnung für QBits. Es handelt sich um die Bra-Ket-Notation von Dirac, die sich auf das Skalarproduktes  $(\cdot | \cdot)$  bezieht. Der „Ket-Vektor“  $| \cdot \rangle$  ist der rechte Teil des Skalarprodukts.

<sup>2</sup>Die Beschränkung auf reelle Zahlen ist eine Vereinfachung für die elementare Einführung in diesem Buch. In der Literatur sind  $a$  und  $b$  komplexe Zahlen, deren Betragsquadrate sich zu 1 addieren. Für Leser, die sich mit komplexen Zahlen auskennen, findet sich hierzu eine Ausführung am Ende des Kapitels.

und zwar den Basiszustand  $|0\rangle$  mit Wahrscheinlichkeit  $a^2$ , und den Basiszustand  $|1\rangle$  mit Wahrscheinlichkeit  $b^2$ .

Ein im Winkel  $\alpha$  zur Waagrechten polarisiertes Lichtteilchen ist eine mögliche physikalische Realisation eines solchen QBits.<sup>3</sup> An polarisierten Photonen kann man gut erkennen, warum die Wahrscheinlichkeiten  $a^2$  bzw.  $b^2$  sind, und nicht etwa  $a$  und  $b$ . Abb. 8.1 zeigt die Situation an den Beispielwinkeln  $30^\circ$  bzw.  $120^\circ$ .

Wer genau hinschauen möchte (und sich ein wenig an Sinus und Cosinus erinnert) findet hier in der Abbildung mit dem  $30^\circ$ -Grad-Winkel ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seitenlängen  $\cos 30^\circ$ ,  $\sin 30^\circ$  und 1 (da der Kreis den Radius 1 hat). Der Satz von Pythagoras führt zur Gleichung  $\cos 30^\circ + \sin 30^\circ = 1$ . Und im Punkt  $(\cos 30^\circ, \sin 30^\circ)$  schneidet die Polarisationsgerade den Einheitskreis. Man kann also  $a$  und  $b$  sehen, es sind die Koordinatenabschnitte  $\cos 30^\circ$  und  $\sin 30^\circ$ .

Die Zahlenwerte der hier vorkommenden sin und cos sind für das mit  $30^\circ$  polarisierte Photon  $a = \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2 \approx 0.866$ , und  $b = \sin 30^\circ = 0.5$ . Es ist also das QBit

$$0.886 \cdot |0\rangle + 0.5 \cdot |1\rangle.$$

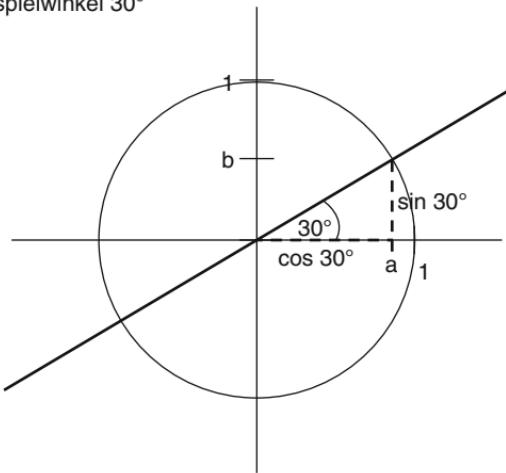
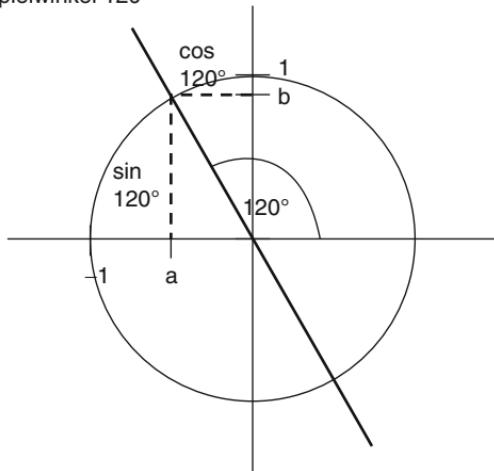
Analog ist die Situation beim Winkel von  $120^\circ$ . Hier kann man erkennen, warum  $a$  und  $b$  grundsätzlich auch negativ sein können (ihre Quadrate sind natürlich stets positiv). Denn für das mit  $120^\circ$  polarisierte Photon sind die Zahlenwerte  $a = \cos 120^\circ = -0.5$  und  $b = \sin 120^\circ = \sqrt{3}/2 \approx 0.866$ .

Es ist also das QBit

$$-0.5 \cdot |0\rangle + 0.886 \cdot |1\rangle.$$

---

<sup>3</sup>Andere physikalische Realisationen basieren auf dem Spin von Ionen in Ionenfallen oder auf Supraleitung. Generell eignen sich als Quantenbits alle physikalischen Objekte, die sich nach den Gesetzen der Quantenphysik verhalten, also insbesondere verschränkt sein können.

Beispielwinkel  $30^\circ$ Beispielwinkel  $120^\circ$ 

**Abb. 8.1** Im Winkel von  $30^\circ$  bzw.  $120^\circ$  polarisierte Photonen als QBits mit ihren Wahrscheinlichkeitsamplituden. Die resultierenden Wahrscheinlichkeiten sind  $1/4$  und  $3/4$

Wer nicht so genau hinschauen möchte, oder sich nicht mit Sinus und Cosinus befassen möchte, rechnet einfach nach:

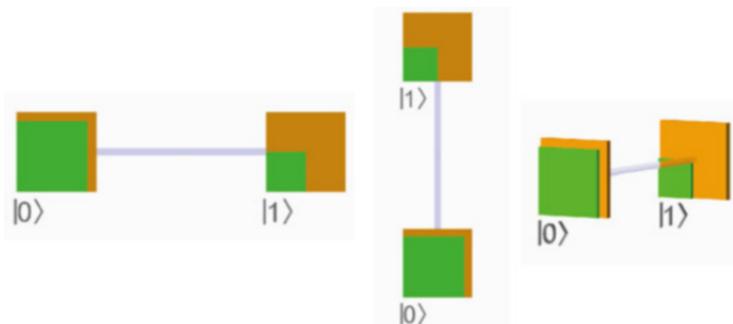
$$0.886^2 + 0.5^2 = 1 \text{ (bis auf Rundung), und } (-0.5)^2 + 0.886^2 = 1.$$

Die graphische Darstellung eines QBits als Gerade in einer Ebene, wie in Abb. 8.1, ist anschaulich. Sie ist ein gutes Modell für ein polarisiertes Photon. Aber sie kann nur schwer auf ein System von mehreren QBits erweitert werden. Denn schon bei nur zwei QBits muss in der graphischen Darstellung Unterschieden werden können, ob diese verschränkt sind oder nicht. Es reicht also nicht aus, einfach beide QBits in zwei Zeichnungen nebeneinander zu zeichnen – hier wäre die Information über Verschränkung nicht enthalten.

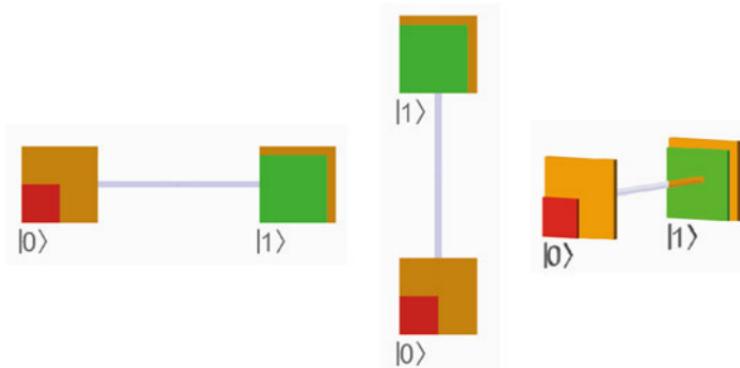
Für die Darstellung eines QBits  $|q\rangle = a \cdot |0\rangle + b \cdot |1\rangle$  wählen wir daher in diesem Buch eine neue Darstellung, die besser auf mehrere QBits erweitert werden kann, und an der man sich gleichzeitig die elementaren Quantenoperationen gut vorstellen kann.

Diese graphische Darstellung des QBits  $|q\rangle = a \cdot |0\rangle + b \cdot |1\rangle$  besteht aus zwei Quadranten mit Seitenlänge 1, die durch eine Linie verbunden sind. Dabei steht eines der Quadrate für den Basiszustand  $|0\rangle$ , das andere für den Basiszustand  $|1\rangle$ . Innerhalb der Quadrate befinden sich kleinere Quadrate mit der Fläche der Wahrscheinlichkeiten  $a^2$  bzw.  $b^2$ , also mit den Seitenlängen der Wahrscheinlichkeitsamplituden  $a$  bzw.  $b$ , wobei das Vorzeichen der Amplitude die Farbe des inneren Quadrates bestimmt. Ist die Amplitude positiv, so ist das innere Quadrat grün. Ist sie negativ, so ist es rot.

Abb. 8.2 zeigt dreimal das QBit  $0.886 \cdot |0\rangle + 0.5 \cdot |1\rangle$ . Die Ausrichtung im Raum ist noch unerheblich, sie wird später die Position des QBits in einem System bestimmen.



**Abb. 8.2** Drei unterschiedliche Darstellungen des QBits  $0.886 \cdot |0\rangle + 0.5 \cdot |1\rangle$



**Abb. 8.3** Drei unterschiedliche Darstellungen des QBits  $-0.5 \cdot |0\rangle + 0.886 \cdot |1\rangle$

Abb. 8.3 zeigt dreimal das QBit  $-0.5 \cdot |0\rangle + 0.886 \cdot |1\rangle$ . Wieder ist die Ausrichtung im Raum ist noch unerheblich. Man beachte aber, dass die Summe der beiden kleinen Quadratflächen stets 1 ergibt.

### Anmerkung für Leser mit Kenntnissen in komplexen Zahlen

In diesem Buch geht es um eine Einführung der Basics in Quantencomputing, um einen ersten Einstieg. Zur besseren Verständlichkeit beschränken wir die Wahrscheinlichkeitsamplituden deshalb auf reelle Zahlen. Das ist unüblich, und für fortgeschrittene Quantenalgorithmen auch nicht ausreichend. In der Fachliteratur sind die Wahrscheinlichkeitsamplituden stets komplexe Zahlen.

Ein Quantenbit ist also in der weiterführenden Literatur also ein Objekt der Gestalt

$$|q\rangle = a \cdot |0\rangle + b \cdot |1\rangle,$$

wobei die Wahrscheinlichkeitsamplituden  $a$  und  $b$  KOMPLEXE Zahlen sind mit  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ . Die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten sind wieder die quadrierten Beträge.

Die graphische Darstellung eines QBits (und später auch eines Systems von QBits) kann man anpassen, indem man in Anlehnung an Richard Feynman [1] die Amplituden als Vektoren

der komplexen Zahlenebene darstellt, die Wahrscheinlichkeiten als Quadrate gegen den Uhrzeigersinn einzeichnet, und die grundeliegenden maximal möglichen Quadrate mit Seitenlänge 1 gedreht ergänzt. Auf die Farbgebung der kleinen Quadrate kann dann verzichtet werden, „rote“ kleine Quadrate würde man an ihrer Positionierung in der rechten oberen Ecke erkennen. Abb. 8.4 zeigt ein Beispiel.



**Abb. 8.4** Beispiel für Erweiterung der graphischen Darstellung auf komplexe Amplituden: Das QBit  $0.5 \cdot e^{i \cdot 90^\circ} \cdot |0\rangle + 0.886 \cdot e^{-i \cdot 135^\circ} \cdot |1\rangle$

Zur physikalischen Bedeutung des komplexen Anteils: Bei den Photonen als Beispiel von QBits bezieht sich der komplexe Anteil der Wahrscheinlichkeitsamplitude auf die Phase, eine Eigenschaft der Schwingung des Lichtteilchens „innerhalb“ seiner Polarisationsebene. Diese Größe ist physikalisch natürlich bedeutsam. Sie wurde aber im ersten Teil des Buches, zur Beschreibung des Phänomens der Verschränkung, nicht benötigt, und wird auch für die Einführung in Quantengatter und für die Teleportation im zweiten Teil nicht benötigt.

## 8.2 Quantenregister aus zwei und drei QBits

Ein Quantenregister  $|q_1 q_2\rangle$  aus zwei QBits ist in der Quanteninformatik ein Objekt der Gestalt

$$|q_1 q_2\rangle = c \cdot |00\rangle + d \cdot |01\rangle + e \cdot |10\rangle + f \cdot |11\rangle,$$

das man messen kann.

Dabei sind  $|00\rangle$ ,  $|01\rangle$ ,  $|00\rangle$ ,  $|10\rangle$  und  $|11\rangle$  die sogenannten „Basiszustände“ des Registers. Es sind die Zustände  $|0\rangle|0\rangle$ ,  $|0\rangle|1\rangle$ ,  $|1\rangle|0\rangle$  und  $|1\rangle|1\rangle$  in einer verkürzten Schreibweise. Der erste Zustand bezieht sich immer auf erst QBit, der zweite Zustand auf das zweite QBit.  $c$ ,  $d$ ,  $e$  und  $f$  sind in diesem Buch wieder reelle Zahlen zwischen  $-1$  und  $+1$ , sie heißen „Wahrscheinlichkeitsamplituden“ der Basiszustände.<sup>4</sup> Es muss gelten  $c^2 + d^2 + e^2 + f^2 = 1$ .

Hier kommt ein Beispiel. Es sei  $c = 1/2$ ,  $d = 1/\sqrt{2}$ ,  $e = -1/\sqrt{8}$  und  $f = 1/\sqrt{8}$ , also  $c = 0.5$ ,  $d \approx 0.707$ ,  $e \approx -0.354$  und  $f \approx 0.354$ .

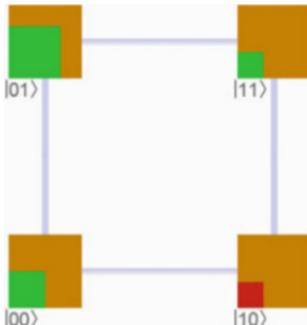
Man überzeuge sich, dass  $c^2 + d^2 + e^2 + f^2$  wirklich 1 ergibt.

Das Beispiel-Quantenregister ist also

$$\begin{aligned} |q_1 q_2\rangle &= \frac{1}{2} \cdot |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |01\rangle - \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot |10\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot |11\rangle \\ &\approx 0.5 \cdot |00\rangle + 0.707 \cdot |01\rangle - 0.354 \cdot |10\rangle + 0.354 \cdot |11\rangle. \end{aligned}$$

Schwer vorstellbar? Abb. 8.5 zeigt die graphische Darstellung des Beispielregisters:

**Abb. 8.5** Des Quantenregister  $0.5 \cdot |00\rangle + 0.707 \cdot |01\rangle - 0.354 \cdot |10\rangle + 0.354 \cdot |11\rangle$  aus zwei QBits in der graphischen Darstellung



<sup>4</sup>Für fortgeschrittenere Anwendungen sind  $c$ ,  $d$ ,  $e$  und  $f$  wie schon bei einem einzelnen QBit komplexe Zahlen, deren Betragsquadrate sich zu 1 addieren.

Die graphische Darstellung eines Quantenregisters mit zwei QBits

$$c \cdot |00\rangle + d \cdot |01\rangle + e \cdot |10\rangle + f \cdot |11\rangle$$

besteht immer aus vier Quadranten mit Seitenlänge 1, die an den Ecken eines großen Quadrates angeordnet sind.

Dabei steht das Quadrat links unten für den Basiszustand  $|00\rangle$ , das Quadrat links oben für den Basiszustand  $|01\rangle$ , das Quadrat rechts unten für den Basiszustand  $|10\rangle$  und das Quadrat rechts oben für den Basiszustand  $|11\rangle$ . Es ist also das erste QBit für die erste Zahl im Basiszustand zuständig, welche in der links-rechts Achse dargestellt wird. Das zweite QBit ist für die zweite Zahl im Basiszustand zuständig, welche in der unten-oben-Achse dargestellt wird.

Innerhalb der Quadrate befinden sich, wie schon in der graphischen Darstellung eines einzelnen QBits, wieder kleinere Quadrate mit der Fläche der Wahrscheinlichkeiten  $c^2$ ,  $d^2$ ,  $e^2$  bzw.  $f^2$ , also mit den Seitenlängen der Wahrscheinlichkeitsamplituden  $c$ ,  $d$ ,  $e$  bzw.  $f$ , wobei das Vorzeichen der Amplitude die Farbe des inneren Quadrates bestimmt. Ist die Amplitude positiv, so ist das innere Quadrat grün. Ist sie negativ, so ist es rot.

Messen des Registers  $c \cdot |00\rangle + d \cdot |01\rangle + e \cdot |10\rangle + f \cdot |11\rangle$  liefert die folgenden Ergebnisse:

- Misst man das erste QBit des Registers, so erhält man mit Wahrscheinlichkeit  $c^2 + d^2$  den Basiszustand  $|0\rangle$  und mit Wahrscheinlichkeit  $e^2 + f^2$  den Basiszustand  $|1\rangle$  für dieses eine QBit. In welchem Zustand sich das zweite QBit dann befindet, wird im nächsten Kapitel behandelt.
- Misst man das zweite QBit des Registers, so erhält man mit Wahrscheinlichkeit  $c^2 + e^2$  den Basiszustand  $|0\rangle$  und mit Wahrscheinlichkeit  $d^2 + f^2$  den Basiszustand  $|1\rangle$ . In welchem Zustand sich das erste QBit dann befindet, ist wieder Gegenstand des nächsten Kapitels.
- Misst man beide QBits des Registers, so erhält man mit Wahrscheinlichkeit  $c^2$  den Basiszustand  $|0\rangle$  für das erste QBit

und ebenfalls den Basiszustand  $|0\rangle$  für das zweite QBit. Dafür schreiben wir kurz  $|00\rangle$  als Messergebnis.

Analog erhält man mit Wahrscheinlichkeit  $d^2$  den Basiszustand  $|0\rangle$  für das erste QBit und den Basiszustand  $|1\rangle$  für das zweite QBit (Kurzschreibweise  $|01\rangle$ ). Mit Wahrscheinlichkeit  $e^2$  erhält man den Basiszustand  $|1\rangle$  für das erste QBit und den Basiszustand  $|0\rangle$  für das zweite QBit (Kurzschreibweise  $|10\rangle$ ), und mit Wahrscheinlichkeit  $f^2$  erhält man für beide QBits den Basiszustand  $|1\rangle$  (Kurzschreibweise  $|11\rangle$ ).<sup>5</sup>

Im ersten Teil des Buches wurden Systeme aus zwei Photonen betrachtet, das erste war bei Alice, das zweite war bei Bob. Im ersten Experiment waren beide Photonen unverschränkt. Messen lieferte jedes der vier möglichen Ergebnisse des Passierens oder der Absorbtion des Photons bei Alice und Bob mit gleicher Wahrscheinlichkeit  $1/4$ .

Als Quantenregister befinden sich diese beiden Photonen im Zustand

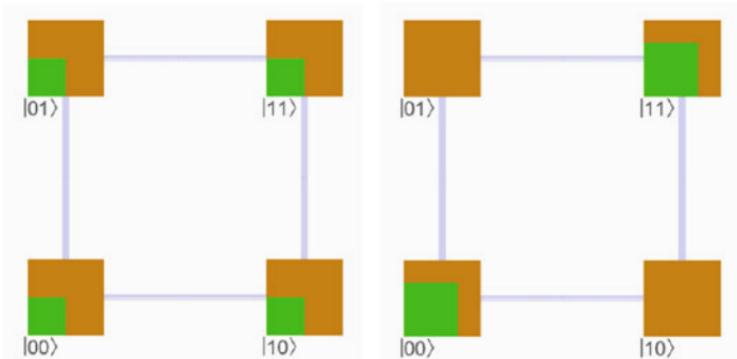
$$|q_1 q_2\rangle = \frac{1}{2} \cdot |00\rangle + \frac{1}{2} \cdot |01\rangle + \frac{1}{2} \cdot |10\rangle + \frac{1}{2} \cdot |11\rangle.$$

Im zweiten Experiment waren beide Photonen dann verschränkt: Jedes einzelne ergab beim Messen mit gleicher Wahrscheinlichkeit  $1/2$  das Ergebnis des Passierens oder der Absorbtion. Aber die Ergebnisse beider Messungen waren stets gleich. Als Quantenregister befinden sich die Photonen des zweiten Experiments im Zustand

$$|q_1 q_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |00\rangle + 0 \cdot |01\rangle + 0 \cdot |10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |11\rangle.$$

---

<sup>5</sup>Für das Berechnungsmodell der Quantenalgorithmen gibt es keine weiteren Beschränkungen an die Amplituden  $c$ ,  $d$ ,  $e$  und  $f$  (außer dass sich ihre Quadrate zu 1 aufzaddieren müssen). Physikalisch ist es allerdings bisher nicht gelungen, ein beliebig vorgegebenes Quantenregister aus nur 2 QBits zu realisieren, geschweige denn aus noch mehr QBits. Dies ist Gegenstand der Forschung in der Hardware von Quantencomputing. Im letzten Kapitel des Buchs wird darauf kurz eingegangen.



**Abb. 8.6** Graphische Darstellung der Photonenpaare aus Experiment 1 (links, unverschränkt) und Experiment 2 (rechts, verschränkt)

Abb. 8.6 zeigt die graphische Darstellung beider Register.

Will man ganz allgemein herausfinden, ob die beiden QBits eines gegebenen Registers  $c \cdot |00\rangle + d \cdot |01\rangle + e \cdot |10\rangle + f \cdot |11\rangle$  verschränkt oder unverschränkt sind, kann man das ausrechnen.

Denn wenn sie unverschränkt sind, hat das erste QBit die Gestalt  $a_1 \cdot |0\rangle + b_1 \cdot |1\rangle$  und das zweite QBit die Gestalt  $a_2 \cdot |0\rangle + b_2 \cdot |1\rangle$ . Beide kann man ausmultiplizieren, das Register hat dann die Gestalt

$$(a_1 \cdot |0\rangle + b_1 \cdot |1\rangle) \cdot (a_2 \cdot |0\rangle + b_2 \cdot |1\rangle) = \\ a_1 a_2 \cdot |00\rangle + a_1 b_2 \cdot |01\rangle + a_2 b_1 \cdot |10\rangle + b_1 b_2 \cdot |11\rangle.$$

Ist es also möglich,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  und  $b_2$  zu finden mit  $a_1 \cdot a_2 = c$ ,  $a_1 \cdot b_2 = d$ ,  $a_2 \cdot b_1 = e$  und  $a_2 \cdot b_2 = f$ , so besteht das Register aus unverschränkten QBits. Ansonsten besteht es aus verschränkten QBits.

### Quantenregister aus drei und mehr QBits

Das Konzept des Quantenregisters mit zwei QBits kann man verallgemeinern auf Quantenregister mit drei QBits (für die Be lange dieses Buchs) oder auf Quantenregister mit einer beliebigen

Anzahl  $n$  von QBits (für die Lektüre weiterer Bücher über Quantenalgorithmen).

Ein Quantenregister  $|q_1 \ q_2 \ q_3\rangle$  aus drei QBits ist in der Quanteninformatik ein Objekt der Gestalt

$$|q_1 \ q_2 \ q_3\rangle = p \cdot |000\rangle + q \cdot |001\rangle + r \cdot |010\rangle + s \cdot |011\rangle \\ + t \cdot |100\rangle + u \cdot |101\rangle + v \cdot |110\rangle + w \cdot |111\rangle$$

das man messen kann. Wieder sind die  $|\dots\rangle$  die Basiszustände, und die Faktoren  $p, q, r, s, tu, v$  und  $w$  ihre Wahrscheinlichkeitsamplituden. Die Wahrscheinlichkeitsamplituden sind wieder reelle (in der weiterführenden Literatur komplexe) Zahlen, deren Quadrate sich zu 1 aufaddieren. Die erste Zahl in einem Basiszustand bezeichnet den Zustand des ersten QBits in diesem Zustand, die zweite Zahl den des zweiten QBits, und die dritte Zahl den des dritten QBits.

Die graphische Darstellung eines Quantenregisters aus drei QBits besteht aus acht Quadranten mit Seitenlänge 1, die an den Ecken eines großen Würfels angeordnet sind.

Dabei steht das Quadrat links unten vorne für den Basiszustand  $|000\rangle$ , das Quadrat links unten hinten für den Basiszustand  $|001\rangle$ , das Quadrat rechts unten vorne für den Basiszustand  $|100\rangle$  und so weiter. Es ist also das erste QBit für die erste Zahl im Basiszustand zuständig, welche in der links-rechts Achse dargestellt wird. Das zweite QBit ist für die zweite Zahl im Basiszustand zuständig, welche in der unten-oben-Achse dargestellt wird. Und das dritte QBit ist für die dritte Zahl im Basiszustand zuständig, welche in der vorne-hinten-Achse dargestellt wird.

Innerhalb der Quadrate befinden sich, wie schon in der graphischen Darstellung eines einzelnen QBits, und eines Registers aus zwei QBits, wieder kleinere Quadrate mit der Fläche der Wahrscheinlichkeiten, also mit den Seitenlängen der Wahrscheinlichkeitsamplituden, wobei das Vorzeichen der Amplitude die Farbe des inneren Quadrates bestimmt. Ist die Amplitude positiv, so ist das innere Quadrat grün. Ist sie negativ, so ist es rot.

**Abb. 8.7** Des Quantenregister  $0.5 \cdot |000\rangle - 0.612 \cdot |001\rangle - 0.354 \cdot |100\rangle - 0.5 \cdot |111\rangle$  aus drei QBits in der graphischen Darstellung

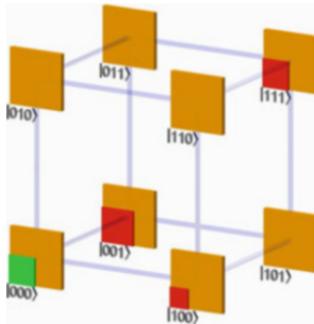


Abb. 8.7 zeigt das Beispiel

$$\begin{aligned}
 |q_1 q_2 q_3\rangle &= \frac{1}{2} \cdot |000\rangle - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} \cdot |001\rangle + 0 \cdot |010\rangle + 0 \cdot |011\rangle \\
 &\quad - \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot |100\rangle + 0 \cdot |101\rangle + 0 \cdot |110\rangle - \frac{1}{2} \cdot |111\rangle \\
 &\approx 0.5 \cdot |000\rangle - 0.612 \cdot |001\rangle \\
 &\quad - 0.354 \cdot |100\rangle - 0.5 \cdot |111\rangle.
 \end{aligned}$$

Messen kann man ein einzelnes QBit, zwei QBits oder alle drei QBits. Aus den Quadraten der Wahrscheinlichkeitsamplituden kann man zusammenzählen, mit welcher Wahrscheinlichkeit man ein bestimmtes Messergebnis erhält.

Misst man z. B. das zweite QBit, so erhält man mit Wahrscheinlichkeit  $p^2 + q^2 + t^2 + u^2$  den Wert  $|0\rangle$ . Denn das ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten von den Basiszuständen, in denen das zweite QBit den Wert  $|0\rangle$  hat. Mit Wahrscheinlichkeit  $r^2 + s^2 + v^2 + w^2$  erhält man den Wert  $|1\rangle$ .

Misst man z. B. das erste und das zweite QBit, so erhält man mit Wahrscheinlichkeit  $p^2 + q^2$  den Wert  $|00\rangle$ . Wer will, sieht selbst nach, mit welchen Wahrscheinlichkeiten man die anderen Werte erhält :).

Das Messen wird im nächsten Kapitel im graphischen Modell erläutert.

Ganz allgemein ist ein Quantenregister aus einer beliebigen Zahl  $n$  von QBits ein Objekt der Gestalt

$$|q_1 q_2 \dots q_n\rangle = x_0 \cdot |0 \dots 00\rangle + x_1 \cdot |0 \dots 01\rangle + \dots + x_{2^n-1} \cdot |11 \dots 1\rangle,$$

wobei  $x_0, \dots, x_{2^n-1}$  wieder die Wahrscheinlichkeitsamplituden sind, deren Quadrate (wenn man komplex denkt: Betragsquadrate) aufsummiert 1 ergeben. Graphisch kann dieses Register als  $n$ -dimensionaler Würfel dargestellt werden. Für  $n=4$  kann man sich noch innen – außen als zusätzliche Achse vorstellen, ab  $n=5$  wird es aber schwierig. Trotzdem erweist sich die Vorstellung als hilfreich beim Betrachten von fortgeschrittenen Quantenalgorithmen.

---

### 8.3 Messen in Quantenregistern

Misst man ein einzelnes QBit im Zustand  $a \cdot |0\rangle + b \cdot |1\rangle$ , so erhält man mit Wahrscheinlichkeit  $a^2$  den Basiszustand  $|0\rangle$ , und das QBit befindet sich dann auch in diesem Basiszustand. Mit Wahrscheinlichkeit  $b^2$  erhält man den Basiszustand  $|1\rangle$ , und das QBit befindet sich dann auch in diesem Basiszustand.

Was passiert aber mit einem Quantenregister, wenn man eines (oder mehrere) der QBits darin misst?

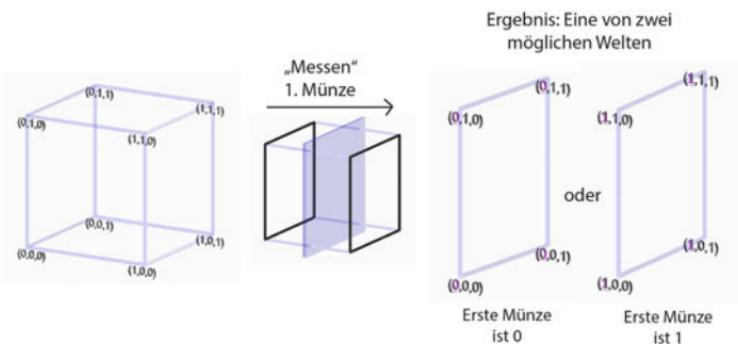
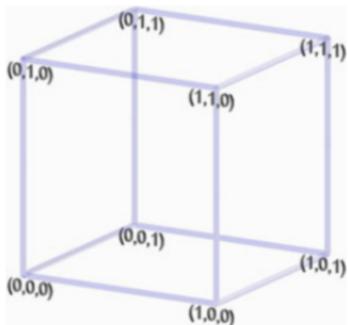
Zur Beantwortung dieser Frage verlassen wir zunächst die Quantenwelt.

Wir stellen uns vor, drei Münzen (nämlich die erste, die zweite und die dritte) zu werfen. Jede liefert als Ergebnis entweder 0 oder 1. Solange wir nicht nachgeschaut haben, können wir über das Ergebnis nur sagen, dass es eine der folgenden 8 Möglichkeiten ist:

$(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0)$   
oder  $(1, 1, 1)$ .

Diese Welt der Möglichkeiten bildet den **Zustandsraum** des Experiments. Man kann ihn graphisch an den Ecken eines Würfels anordnen, wobei die erste Münze die links-rechts Position des jeweiligen Ergebnisses bestimmt, die zweite Münze die unten-

**Abb. 8.8** Der Zustandsraum eines Wurfes mit drei Münzen, graphisch dargestellt als Ecken eines Würfels



**Abb. 8.9** Die erste der drei Münzen wird angeschaut. Ergebnis ist eine von zwei möglichen Welten (sogenannten „Zustandsräumen“)

oben-Position und die dritte Münze die vorne-hinten-Position, siehe Abb. 8.8.

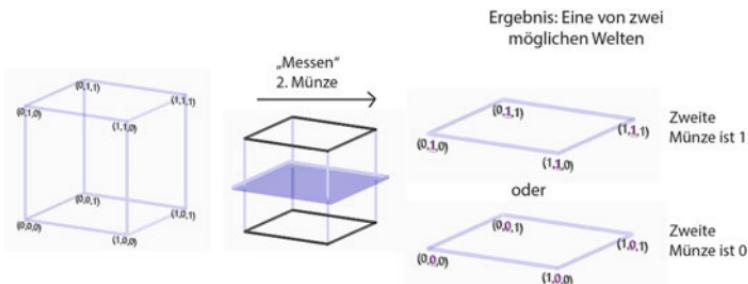
„Misst“ man nun die erste der drei Münzen, indem man nachschaut, was ihr Ergebnis ist, verändert sich der Zustandsraum des Experiments. Ist das Ergebnis der Münze 0, so leben wir in einer Welt, in der der Zustandsraum aus den Ergebnissen  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 0)$  oder  $(0, 1, 1)$  besteht. Ist das Ergebnis der Münze 1, so leben wir in einer Welt, in der der Zustandsraum aus den Ergebnissen  $(1, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 1)$ ,  $(1, 1, 0)$  oder  $(1, 1, 1)$  besteht. Abb. 8.9 zeigt, wie dies graphisch dargestellt werden kann. Das Messen entfernt die Kanten des Würfels, die die Unsicherheit bezüglich der ersten Münze anzeigen, also die links-rechts-Kanten. Übrig bleiben, wenn die erste Münze 0 zeigte, die Kanten und Ecken der linken Seitenfläche des Würfels. Zeigte die erste Münze 1,

so bleiben die Kanten und Ecken der rechten Seitenfläche des Würfels übrig.

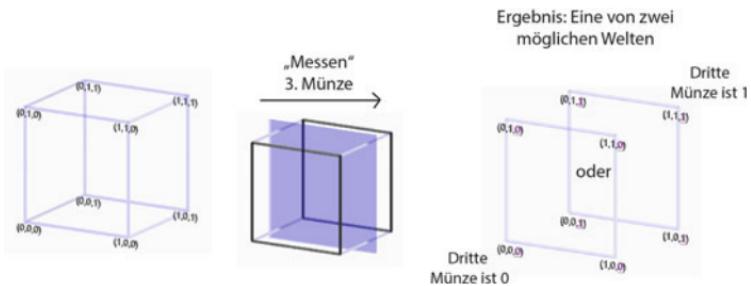
Analog erhält man beim „Messen“ (also nachschauen) der zweiten Münze entweder den Zustandsraum mit den Ergebnissen  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ ,  $(1, 0, 0)$  oder  $(1, 0, 1)$ , wenn das Ergebnis der zweiten Münze 0 war. Oder man erhält den Zustandsraum mit den Ergebnissen  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 1, 1)$ ,  $(1, 1, 0)$  oder  $(1, 1, 1)$ , wenn das Ergebnis der zweiten Münze 0 war. Graphisch werden im ursprünglichen Zustandsraum die Kanten von unten nach oben entfernt, die die Unsicherheit bezüglich der zweiten Münze anzeigen. Übrig bleiben die Kanten und Ecken der unteren und der oberen Seitenfläche. Abb. 8.10 zeigt die Situation.

Messen der dritten Münze unterteilt ganz analog den Zustandsraum in die beiden Teilräume, in denen die dritte Münze 0 bzw. 1 ist. Graphisch werden im Würfel die vorne-hinten-Kanten entfernt, die die Unsicherheit bezüglich der dritten Münze zeigen. Abb. 8.11 zeigt, wie in der graphischen Darstellung die Kanten und Ecken der vorderen und hinteren Seitenfläche des ursprünglichen Zustandsraums übrig bleiben.

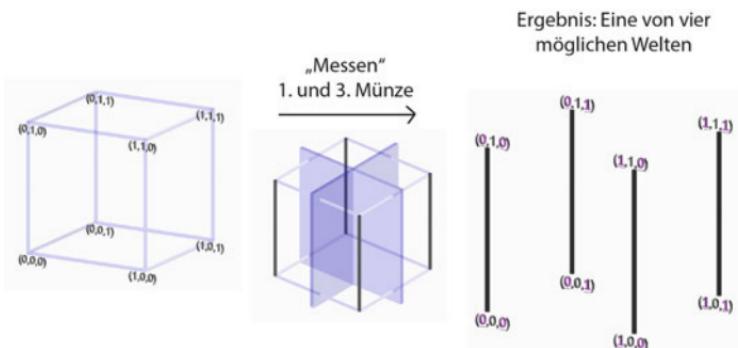
„Misst“ man zwei Münzen, indem man sie anschaut, sind nur noch zwei Ergebnisse möglich. Misst man z. B. die erste und die dritte Münze, so sind entweder beide 0. Dann ist das Gesamtsystem im Zustand  $(0, 0, 0)$  oder  $(0, 1, 0)$ . Oder die erste ist 0, die dritte 1. Dann ist das Gesamtsystem im Zustand  $(0, 0, 1)$  oder  $(0, 1, 1)$ . Oder die erste ist 1, die dritte 0. Dann ist das



**Abb. 8.10** Die zweite der drei Münzen wird angeschaut. Ergebnis ist wieder eine von zwei möglichen Welten



**Abb. 8.11** Die dritte der drei Münzen wird angeschaut. Ergebnis ist die vordere oder die hintere „Teilwelt“

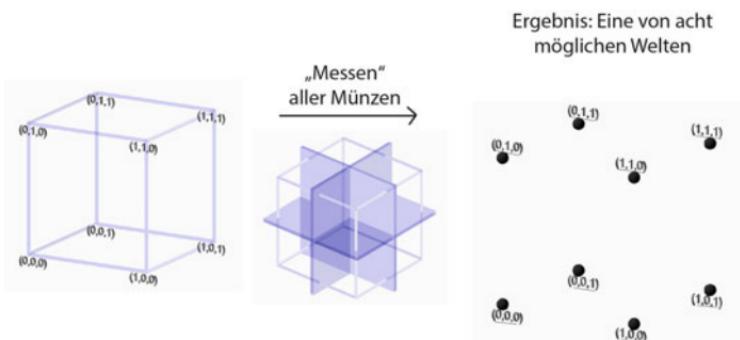


**Abb. 8.12** Die erste und dritte der drei Münzen werden angeschaut. Ergebnis ist eine von vier möglichen Welten

Gesamtsystem im Zustand  $(1, 0, 0)$  oder  $(1, 1, 0)$ . Oder beide sind 1. Dann ist das Gesamtsystem im Zustand  $(1, 0, 1)$  oder  $(1, 1, 1)$ .

Das Messen zweier Münzen führt also in eine von vier Welten wiederfinden, die jeweils noch zwei mögliche Ergebnisse enthalten: 0 und 1 für die dritte, nicht gemessene Münze. Graphisch wird das dargestellt, indem alle Kanten des ursprünglichen Würfels entfernt werden, die Unsicherheit bezüglich der ersten und der dritten Münze anzeigen. Das sind alle links-rechts-Kanten und alle vorne-hinten-Kanten. Übrig bleiben die Kanten der zweiten Münze, siehe Abb. 8.12.

Schaut man alle drei Münzen an, gibt es keine Unsicherheit mehr. Als Zustandsraum bleibt eine von acht möglichen Welten



**Abb. 8.13** Alle Münzen werden angeschaut. Ergebnis ist eine von acht Welten, es gibt keine Unsicherheit mehr

übrig. Graphisch wird das dargestellt, indem alle Kanten des ursprünglichen Würfels entfernt werden, siehe Abb. 8.13.

Diese graphische Veranschaulichung des Messvorgangs lässt sich auf die Situation übertragen, in der nicht Münzwürfe nachgeschaut werden, sondern QBits in Quantenregistern gemessen werden.

Die Situation ist hier nur insoweit komplexer, als nicht alle acht möglichen Ergebnisse dieselbe Wahrscheinlichkeit haben, so wie beim Münzwurf der Fall war. Verschränkte Zustände eines Quantenregisters lassen sich nicht durch Münzwürfe mit Münzen simulieren. Selbst dann nicht, wenn die Münzen unfair sein dürfen, also Kopf und Zahl nicht dieselbe Wahrscheinlichkeit haben. Ein weiterer Unterschied zwischen Münzen und Quanten ist, dass die Münzen sich in einem Zustand befinden, wenn sie geworfen sind, und dieser bleibt beim Messen erhalten. QBits nehmen erst durch das Messen einen Zustand an.

Dennoch ist der Vorgang des Messens ganz analog zum Nachschauen des Ergebnisses bei einem Münzwurf: Die Kenntnis des Ergebnisses entfernt Unsicherheit bezüglich des Zustands des Gesamtregisters. Graphisch kann das genau wie bei den Münzen dargestellt werden, indem im Zustandsraum die entsprechenden Kanten entfernt werden.

Ein Beispiel illustriert das Messen. Das Beispiel hat keine besondere physikalische Bedeutung, sondern wurde ausgewählt,

weil es nicht zu komplex ist, aber doch alle wesentlichen Effekte zeigt. Betrachtet wird ein Quantenregister mit drei QBits im Zustand

$$\begin{aligned} |q_1 q_2 q_3\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot |000\rangle + 0 \cdot |001\rangle - \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot |010\rangle - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot |011\rangle \\ &\quad - \frac{1}{4} \cdot |100\rangle + \frac{1}{4} \cdot |101\rangle + \frac{1}{2} \cdot |110\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot |111\rangle. \end{aligned}$$

Messen des ersten QBits liefert das Ergebnis  $|0\rangle$  mit Wahrscheinlichkeit

$$\frac{2}{16} + 0 + \frac{2}{16} + \frac{3}{16} = \frac{7}{16}.$$

Das Quantenregister ist dann in einem Zustand, der in der grafischen Darstellung der linken Seite des Würfels entspricht: das erste QBit ist hier  $|0\rangle$ . Die kleinen Quadrate in dieser Welt behalten ihre Farbe bei. Ihre Größe wird angepasst, damit die Flächensumme der kleinen Quadrate wieder 1 ergibt. Das wird durch Multiplikation der Flächen mit  $16/7$  erreicht, also durch Multiplikation der Kantenlängen mit  $\sqrt{16/7}$ .<sup>6</sup>

Das Quantenregister ist also in dem Fall, dass das erste QBit das Messergebnis  $|0\rangle$  ergab, im Zustand

$$\begin{aligned} |q_1 q_2 q_3\rangle &= \sqrt{\frac{16}{7}} \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot |000\rangle + 0 \cdot |001\rangle \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot |010\rangle - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot |011\rangle \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \cdot |000\rangle + 0 \cdot |001\rangle - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \cdot |010\rangle - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \cdot |011\rangle. \end{aligned}$$

---

<sup>6</sup>Es handelt sich um ein Rechnen mit bedingten Wahrscheinlichkeiten, wobei für Quanten jede Wahrscheinlichkeit aus einer Wahrscheinlichkeitsamplitude kommt.

Mit Wahrscheinlichkeit  $9/16$  liefert Messen des ersten QBits das Ergebnis  $|1\rangle$ . Das Quantenregister ist dann in einem Zustand, der in der graphischen Darstellung der rechten Seitenfläche des Würfels entspricht.

Der Zustand ist (nach Multiplikation der Wahrscheinlichkeitssamplituden mit  $\sqrt{16/9}$ , um wieder auf eine Flächensumme von 1 zu kommen):

$$|q_1 q_2 q_3\rangle = -\frac{1}{3} \cdot |100\rangle + \frac{1}{3} \cdot |101\rangle - \frac{2}{3} \cdot |110\rangle - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot |111\rangle.$$

Abb. 8.14 zeigt die graphische Darstellung.

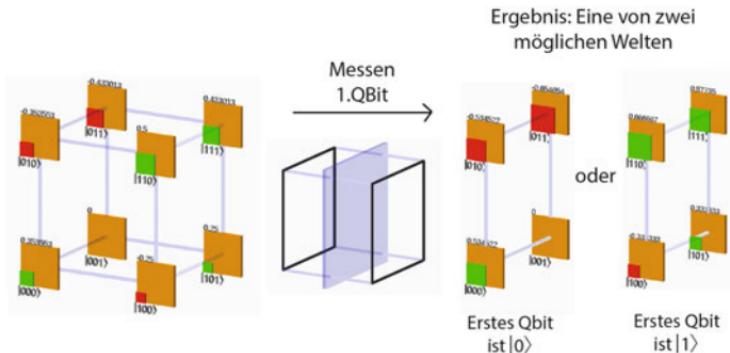


Abb. 8.14 Das erste der drei QBits wird gemessen. Ergebnis ist eine von zwei Welten

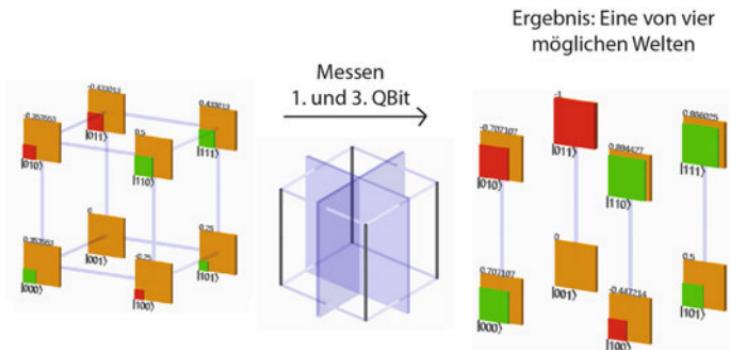


Abb. 8.15 Die erste und dritte QBit wird gemessen. Es gibt vier mögliche Ergebnisse

Misst man im Register aus Abb. 8.14 nicht nur das erste, sondern das erste und das dritte QBit, erhält man (wie bei den Münzen) einen Zustandsraum, der aus vier möglichen Welten besteht:

- Mit Wahrscheinlichkeit 1/4 sind beide QBits  $|0\rangle$ .  
Das Register ist dann im Zustand  $\sqrt{1/2} \cdot |000\rangle - \sqrt{1/2} \cdot |010\rangle$ .
- Mit Wahrscheinlichkeit 3/16 ist das erste QBit  $|0\rangle$ , und das dritte  $|1\rangle$ .  
Das Register ist dann im Zustand  $0 \cdot |000\rangle - 1 \cdot |010\rangle$ .  
(Hier gibt es also auch keine Unsicherheit mehr bezüglich des zweiten QBits, es ist stets im Zustand  $|1\rangle$ .)
- Mit Wahrscheinlichkeit 5/16 ist das erste QBit  $|1\rangle$ , und das dritte  $|0\rangle$ .  
Das Register ist dann im Zustand  $-\sqrt{1/5} \cdot |100\rangle + \sqrt{4/5} \cdot |110\rangle$ .
- Mit Wahrscheinlichkeit 1/4 sind beide QBits  $|1\rangle$ .  
Das Register ist dann im Zustand  $\sqrt{1/4} \cdot |101\rangle + \sqrt{3/4} \cdot |111\rangle$ .

Abb. 8.15 zeigt die graphische Darstellung des Quantenregisters, wenn das erste und das dritte QBit gemessen werden.

Werden alle drei QBits gemessen, ist der Zustand des Registers ein Basiszustand. Hierfür gibt es acht Möglichkeiten:

$|000\rangle, |001\rangle, |010\rangle, |011\rangle, |100\rangle, |101\rangle, |110\rangle$  und  $|111\rangle$ .

---

## Literatur

1. R. Feynman. *QED: Die seltsame Theorie des Lichts und der Materie*. Piper Verlag GmbH, May 2018.



# Quantengatter auf einem QBit

9

Die klassische Informatik basiert auf Schaltkreisen. In diesen werden in einer vorgegebenen Reihenfolge Schaltgatter auf Bits angewandt. Die bekanntesten Gatter sind: Das NOT-Gatter (wird auf ein Bit angewandt, macht aus dem Wert 0 den Wert 1 und umgekehrt), sowie das AND-, das OR- und das XOR-Gatter, die auf zwei Bits angewandt werden.

Der Begriff des „Algorithmus“ ist viel abstrakter. Wer z. B. ein Computerspiel entwickelt, denkt normalerweise nicht in Schaltkreisen. Dennoch bilden Schaltkreise die Grundlage, die Hardware, für alle klassischen Computer.

Auch für Quantenalgorithmen bilden Schaltkreise die Grundlage. Es handelt sich hierbei um Quantenschaltkreise, in denen Quantengatter auf QBits angewandt werden. Die wichtigsten Gatter auf einem QBit sind das (Pauli)-X-Gatter, das (Pauli)-Z-Gatter und das Hadamard-Gatter. Sie werden im folgenden vorgestellt und kommen mit reellen Zahlen aus.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Es gibt weitere Gatter auf einem QBit, deren Beschreibungen die komplexen Zahlen benötigen. Das bekannteste davon ist das (Pauli)-Y-Gatter.

## 9.1 Pauli-X, Pauli-Z und Hadamard (X, Z und H): Gatter auf einem QBit

Das Pauli-X-Gatter (kurz X-Gatter) und das Pauli-Z-Gatter (kurz Z-Gatter) sind nach dem Physiker Wolfgang Pauli benannt, das Hadamard-Gatter (kurz H-Gatter oder H) ist nach dem Mathematiker Jacques Hadamard benannt.

Es ist nicht leicht zu sehen, welche Operationen man überhaupt auf ein Photon anwenden kann, ohne seine Polarisation zu zerstören. Es stellt sich aber heraus, dass man die Polarisation an bestimmten einfachen Winkeln spiegeln kann.<sup>2</sup> Genau das tun Pauli-X, Pauli-Z und H:

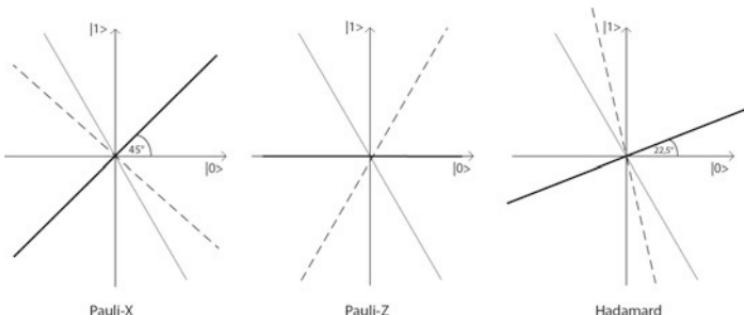
- Pauli-X spiegelt am  $45^\circ$ -Grad-Winkel,
- Pauli-Z spiegelt am  $0^\circ$ -Grad-Winkel, und
- H spiegelt am  $22.5^\circ$ -Grad-Winkel, also am halben Winkel von Pauli-X.

Abb. 9.1 zeigt, welche neue Polarisation entsteht, wenn man die Gatter auf ein bei  $120^\circ$  polarisiertes Photon anwendet, also auf  $-0.5 \cdot |0\rangle + \sqrt{3/4} \cdot |1\rangle$ .

---

<sup>2</sup>Einige Anmerkungen zur technischen Realisation mit Photonen:

- Photonen können (theoretisch) an hochreflektierenden Spiegeln gespiegelt werden, ohne dass ihre Verschränkungseigenschaften wesentlich beeinträchtigt oder aufgehoben werden. Das Spiegeln an solchen Spiegeln ist also keine „Messung“ im quantenphysikalischen Sinne.
- Die Spiegelung an einem solchen Spiegel spiegelt allerdings nicht die Polarisation eines QBits, ist also keine Realisation von Pauli-X, Pauli-Z oder Hadamard. Die Spiegelung verändert nur die Flugrichtung eines Photons.
- Um Pauli-X, Pauli-Z und Hadamard für Photonen technisch zu realisieren, werden Strahleiter und Verzögerungsplatten (und hochreflektierende Spiegel) als Bauteile benutzt. Dies ist technisch anspruchsvoll und nicht ohne Fehler möglich. Es muss auch hier darauf geachtet werden, dass es sich bei der Manipulation der Photonen nicht um einen physikalischen Messvorgang handelt, der die Verschränkungseigenschaften beeinflussen würde.



**Abb. 9.1** Anwendung der Quantengatter X, Z und H auf ein im  $120^\circ$ -Winkel polarisiertes Photon

Die neue Polarisation kann man auch ausrechnen, statt sie zu zeichnen. Hier kommen die Berechnungsvorschriften, die nicht nur für Photonen, sondern für alle QBits gelten.

Angewandt auf ein QBit  $a \cdot |0\rangle + b \cdot |1\rangle$  liefern Pauli-X, Pauli-Z und H die folgenden Ergebnisse:

$$\text{Pauli-X} : b \cdot |0\rangle + a \cdot |1\rangle$$

$$\text{Pauli-Z} : a \cdot |0\rangle - b \cdot |1\rangle$$

$$\text{Hadamard} : \frac{a+b}{\sqrt{2}} \cdot |0\rangle + \frac{a-b}{\sqrt{2}} \cdot |1\rangle$$

Angewandt auf den Basiszustand  $|0\rangle$  liefert also Pauli-X den Basiszustand  $|1\rangle$ . Pauli-Z liefert den Zustand  $|0\rangle$  zurück, und Hadamard liefert den Zustand  $\sqrt{1/2} \cdot |0\rangle + \sqrt{1/2} \cdot |1\rangle$ . Hadamard ist das „Schütteln“ aus Kap. 7. Denn Hadamard transformiert eine Wahrscheinlichkeit von 1 (also ein sicher vorhersagbares Messergebnis, ein voll gefülltes Quadrat in der graphischen Darstellung) auf zwei Wahrscheinlichkeiten von 1/2.

Angewandt auf den Basiszustand  $|1\rangle$  liefert Pauli-X den Basiszustand  $|0\rangle$ . Pauli-Z liefert den Zustand  $-|1\rangle$ , und Hadamard liefert den Zustand  $\sqrt{1/2} \cdot |0\rangle - \sqrt{1/2} \cdot |1\rangle$ .

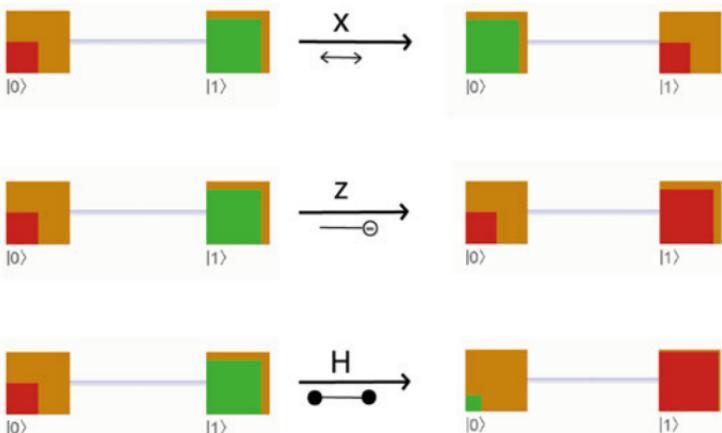
Angewandt auf das Beispiel-QBit  $-0.5 \cdot |0\rangle + \sqrt{3/4} \cdot |1\rangle$  liefern die Gatter folgende Ergebnisse:

$$\text{Pauli-X: } \sqrt{3/4} \cdot |0\rangle - 0.5 \cdot |1\rangle$$

$$\text{Pauli-Z: } -0.5 \cdot |0\rangle - \sqrt{3/4} \cdot |1\rangle$$

$$\text{Hadamard: } \frac{-1 + \sqrt{3}}{\sqrt{8}} \cdot |0\rangle + \frac{-1 - \sqrt{3}}{\sqrt{8}} \cdot |1\rangle.$$

Abb. 9.2 zeigt das Beispiel in der graphischen Darstellung:



**Abb. 9.2** Auf das QBit  $-0.5 \cdot |0\rangle + \sqrt{3/4} \cdot |1\rangle$  werden das X-, Z- und H-Gatter angewandt

---

## 9.2 X, Z, H, angewandt auf ein QBit in einem Quantenregister

X, Z und H sind Quantengatter, die stets auf ein einzelnes QBit angewandt werden. Befindet sich dieses QBit jedoch in einem Quantenregister aus mehreren QBits, so verändert seine Veränderung den Zustand des gesamten Registers.

Wie sich ein Register aus zwei oder drei QBits verändert, wenn X, Z oder H auf eines der QBits darin angewandt wird, ist Gegenstand der nachfolgenden Überlegungen. Dabei wird stets zum

Einen berechnet, wie sich die Wahrscheinlichkeitsamplituden der Basiszustände verändern, und zum Anderen auch gezeigt, wie sich die Veränderung anschaulich graphisch darstellen lässt.

Betrachtet wird zunächst die Veränderung eines Registers aus zwei QBits, wenn Pauli-X auf das erste der beiden QBits angewandt wird. Befindet sich das Register in einem Basiszustand, liefert Pauli-X wieder einen Basiszustand. Dieser lässt das zweite QBit unverändert, und macht aus dem ersten 1, wenn es 0 war, und umgekehrt. Man erhält also durch Pauli-X, angewendet auf das erste der beiden QBits

aus dem Zustand  $|00\rangle$  den Zustand  $|10\rangle$ ;  
 aus dem Zustand  $|01\rangle$  den Zustand  $|11\rangle$ ;  
 aus dem Zustand  $|10\rangle$  den Zustand  $|00\rangle$ ;  
 aus dem Zustand  $|11\rangle$  den Zustand  $|01\rangle$ .

Zustände, die keine Basiszustände sind, heißen „gemischte Zustände“. Befindet sich das Register in einem gemischten Zustand, so erhält man durch Pauli-X wieder einen gemischten Zustand. Dieser vertauscht die Amplituden der Basiszustände entsprechend.

Hierzu das Beispiel des Registers aus Abb. 8.5 :

$$\begin{aligned} |q_1 q_2\rangle &= \frac{1}{2} \cdot |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |01\rangle - \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot |10\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot |11\rangle \\ &\approx 0.5 \cdot |00\rangle + 0.707 \cdot |01\rangle - 0.354 \cdot |10\rangle + 0.354 \cdot |11\rangle. \end{aligned}$$

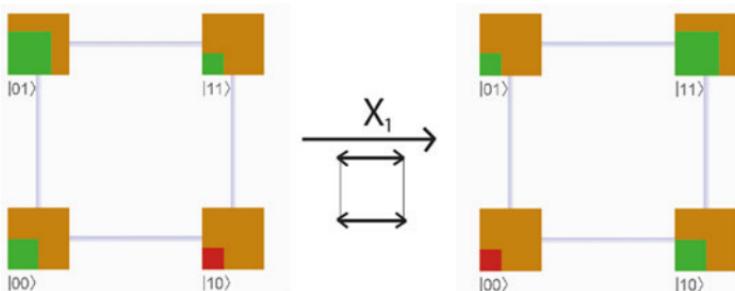
Anwendung von Pauli-X liefert als neuen Registerzustand

$$\begin{aligned} |q_1 q_2\rangle &= \frac{1}{2} \cdot |10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |11\rangle - \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot |01\rangle \\ &\approx 0.5 \cdot |10\rangle + 0.707 \cdot |11\rangle - 0.354 \cdot |00\rangle + 0.354 \cdot |01\rangle, \end{aligned}$$

also in der üblichen Gruppierung der Basiszustände, durch Umstellen der Summanden

$$\begin{aligned}
 |q_1 q_2\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{8}} \cdot |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot |01\rangle + \frac{1}{2} \cdot |10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |11\rangle \\
 &\approx -0.354 \cdot |00\rangle + 0.354 \cdot |01\rangle + 0.5 \cdot |10\rangle + 0.707 \cdot |11\rangle.
 \end{aligned}$$

In der graphischen Darstellung erhält man den neuen Zustand, indem man die Amplituden längs der beiden waagrechten Kanten im Viereck vertauscht. Denn das erste QBit ist in der graphischen Darstellung für die links-rechts-Achse zuständig, siehe Abb. 9.3:

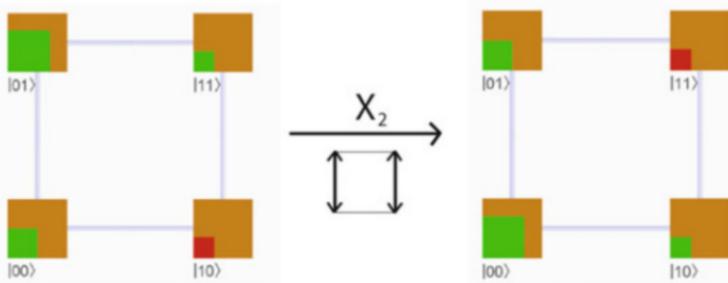


**Abb. 9.3** Auf das erste QBit des Quantenregisters  $0.5 \cdot |00\rangle + 0.707 \cdot |01\rangle - 0.354 \cdot |10\rangle + 0.354 \cdot |11\rangle$  wird Pauli-X angewandt: Graphische Darstellung

Wird Pauli-X auf das zweite QBit eines Registers aus zwei QBits angewandt, so wird für die Basiszustände

- aus dem Zustand  $|00\rangle$  der Zustand  $|01\rangle$ ;
- aus dem Zustand  $|01\rangle$  der Zustand  $|00\rangle$ ;
- aus dem Zustand  $|10\rangle$  der Zustand  $|11\rangle$ ;
- aus dem Zustand  $|11\rangle$  der Zustand  $|10\rangle$ .

Befindet sich das Register in einem gemischten Zustand, so erhält man durch Pauli-X wie bei der Anwendung auf das erste QBit wieder einen gemischten Zustand. Dieser vertauscht die Amplituden der Basiszustände in der graphischen Darstellung entlang der oben-unten-Kanten, denn für diese ist das zweite QBit zuständig.



**Abb. 9.4** Auf das zweite QBit des Quantenregisters  $0.5 \cdot |00\rangle + 0.707 \cdot |01\rangle - 0.354 \cdot |10\rangle + 0.354 \cdot |11\rangle$  wird Pauli-X angewandt: Graphische Darstellung

Abb. 9.4 veranschaulicht die Anwendung von Pauli-X auf das zweite QBit im Beispiel von oben.

Rechnerisch erhält man aus dem Ursprungszustand:

$$\begin{aligned}
 |q_1 q_2\rangle &= \frac{1}{2} \cdot |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |01\rangle - \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot |10\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot |11\rangle \\
 &\approx 0.5 \cdot |00\rangle + 0.707 \cdot |01\rangle - 0.354 \cdot |10\rangle + 0.354 \cdot |11\rangle.
 \end{aligned}$$

durch Anwendung von Pauli-X auf das zweite QBit den neuen Registerzustand

$$\begin{aligned}
 |q_1 q_2\rangle &= \frac{1}{2} \cdot |01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |00\rangle - \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot |11\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot |10\rangle \\
 &\approx 0.5 \cdot |01\rangle + 0.707 \cdot |00\rangle - 0.354 \cdot |11\rangle + 0.354 \cdot |10\rangle,
 \end{aligned}$$

also in der üblichen Gruppierung der Basiszustände, durch Umstellen der Summanden

$$\begin{aligned}
 |q_1 q_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |00\rangle + \frac{1}{2} \cdot |01\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot |10\rangle - \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot |11\rangle \\
 &\approx 0.707 \cdot |00\rangle + 0.5 \cdot |01\rangle + 0.354 \cdot |10\rangle - 0.354 \cdot |11\rangle.
 \end{aligned}$$

Wendet man Pauli-X auf ein QBit in einem Register aus drei QBits an, so führt das ebenfalls zu einer Vertauschung der Wahrscheinlichkeitsamplituden. In der graphischen Darstellung kann man gut erkennen, welche Amplituden vertauscht werden. Wird Pauli-X auf das erste QBit im Register angewandt, so werden die Amplituden entlang der vier Kanten in links-rechts-Richtung vertauscht, denn dafür ist das erste QBit zuständig. Anwendung von Pauli-X auf das zweite QBit vertauscht entlang der vier unten-oben-Kanten, und Anwendung von Pauli-X auf das dritte QBit vertauscht entlang der vier vorne-hinten Kanten.

Als Beispiel wird ein Pauli-X-Gatter auf das dritte QBit des Quantenregisters aus Abb. 8.7 angewandt. Das Register ist vor der Anwendung im Zustand

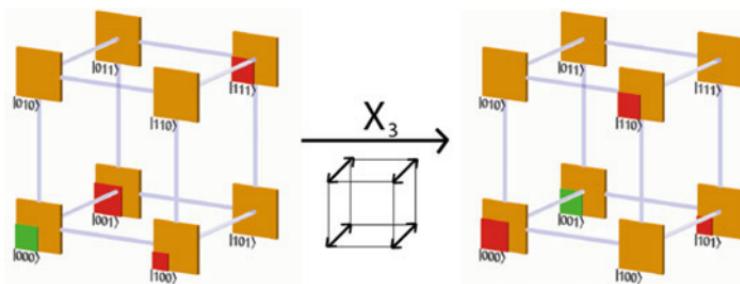
$$\begin{aligned}
 |q_1 q_2 q_3\rangle &= \frac{1}{2} \cdot |000\rangle - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} \cdot |001\rangle + 0 \cdot |010\rangle + 0 \cdot |011\rangle \\
 &\quad - \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot |100\rangle + 0 \cdot |101\rangle + 0 \cdot |110\rangle - \frac{1}{2} \cdot |111\rangle \\
 &\approx 0.5 \cdot |000\rangle - 0.612 \cdot |001\rangle \\
 &\quad - 0.354 \cdot |100\rangle - 0.5 \cdot |111\rangle.
 \end{aligned}$$

Durch die Anwendung von Pauli-X auf das dritte QBit werden jeweils die Amplituden der Basiszustände, die sich genau an der dritten Stelle unterscheiden, vertauscht.

Man erhält

$$\begin{aligned}
 |q_1 q_2 q_3\rangle &= \frac{1}{2} \cdot |001\rangle - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} \cdot |000\rangle + 0 \cdot |011\rangle + 0 \cdot |010\rangle \\
 &\quad - \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot |101\rangle + 0 \cdot |100\rangle + 0 \cdot |111\rangle - \frac{1}{2} \cdot |110\rangle \\
 &\approx 0.5 \cdot |001\rangle - 0.612 \cdot |000\rangle \\
 &\quad - 0.354 \cdot |101\rangle - 0.5 \cdot |110\rangle.
 \end{aligned}$$

Die graphische Darstellung aus Abb. 9.5 ist übersichtlicher:



**Abb. 9.5** Im Quantenregister  $0.5 \cdot |000\rangle - 0.612 \cdot |001\rangle - 0.354 \cdot |100\rangle - 0.5 \cdot |111\rangle$  wird Pauli-X auf das dritte QBit angewandt

Pauli-X, angewandt auf ein QBit in einem Register aus mehreren QBits, vertauscht also die Wahrscheinlichkeitsamplituden entlang der Kanten, für die das QBit in der graphischen Darstellung zuständig ist.

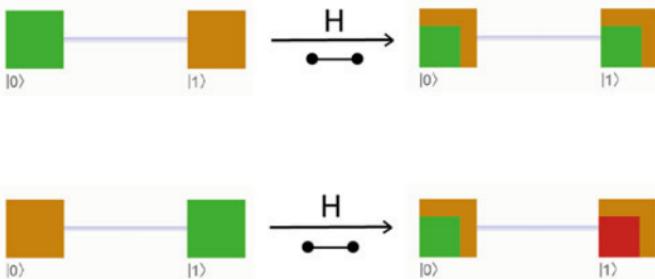
Betrachtet wird nun, wie die Hadamard-Transformation H auf ein Register wirkt, wenn sie auf eines der QBits im Register angewandt wird. Zur Erinnerung: Wird H auf ein einzelnes QBit angewandt, so wird

- aus dem Basiszustand  $|0\rangle$  der Zustand  $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |1\rangle$ , also approximiert der Zustand  $0.707 \cdot |0\rangle + 0.707 \cdot |1\rangle$ , und
- aus dem Basiszustand  $|1\rangle$  der Zustand  $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |1\rangle$ , also approximiert der Zustand  $0.707 \cdot |0\rangle - 0.707 \cdot |1\rangle$ .

Abb. 9.6 zeigt das in der graphischen Darstellung.

Ist das QBit nicht in einem Basiszustand, so überlagern sich die beiden Effekte, wie im Beispiel aus Abb. 9.2 am Anfang des Kapitels.<sup>3</sup>

<sup>3</sup>Wer will, rechnet nach: Zweimaliges Anwenden der Hadamard-Transformation liefert wieder den Ursprungszustand. Bei der Realisation mit Photonen ist das klar: Zweimaliges Spiegeln liefert stets wieder den Urzustand.



**Abb. 9.6** Die Hadamard-Transformation H wird auf ein einzelnes QBit in einem Basiszustand angewandt. Im Übergang in der oberen Zeile ist der Basiszustand  $|0\rangle$ , im Übergang in der unteren Zeile ist er  $|1\rangle$

Wird H auf ein (einzelnes) QBit in einem Register aus zwei oder drei QBits angewandt, so ändert sich, genau wie beim Anwenden von Pauli-X, der Gesamtzustand des Registers. In der graphischen Darstellung werden, genau wie bei Pauli-X, die Kanten betrachtet, für die das QBit zuständig ist, also die links-rechts-Kanten für das erste QBit, die unten-oben-Kanten für das zweite QBit, und die vorne-hinten-Kanten für das dritte QBit. Entlang dieser Kanten werden bei H die Wahrscheinlichkeitssamplituden „verschmiert“, während sie bei Pauli-X vertauscht wurden.

Abb. 7.3 aus dem Kapitel „Quantenalgorithmen anschaulich“ zeigte in der graphischen Darstellung bereits die Veränderung eines Quantenregisters aus drei QBits, wenn auf den Startzustand  $|000\rangle$  die Hadamard-Transformation H zunächst auf das erste, dann auf das zweite und dann auf das dritte QBit angewandt wird.

Betrachtet wird hier nun das Beispiel, wenn H in einem Register aus drei QBits zunächst auf das erste, dann auf das zweite und dann auf das dritte QBit angewandt wird, und das Register sich zu Beginn im Basiszustand  $|001\rangle$  befindet. Rechnerisch erhält man folgende Übergänge, wobei jeweils aus einem Summanden nach einer Hadamard-Transformation zwei Summanden werden (die hier jeweils in einer Zeile stehen):

$$\begin{aligned}
 |001\rangle &\xrightarrow{H_1} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |001\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |101\rangle \\
 &\xrightarrow{H_2} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |001\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |011\rangle \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |101\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |111\rangle \\
 &\xrightarrow{H_3} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |000\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |001\rangle \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |011\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |011\rangle \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |100\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |101\rangle \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |110\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |111\rangle,
 \end{aligned}$$

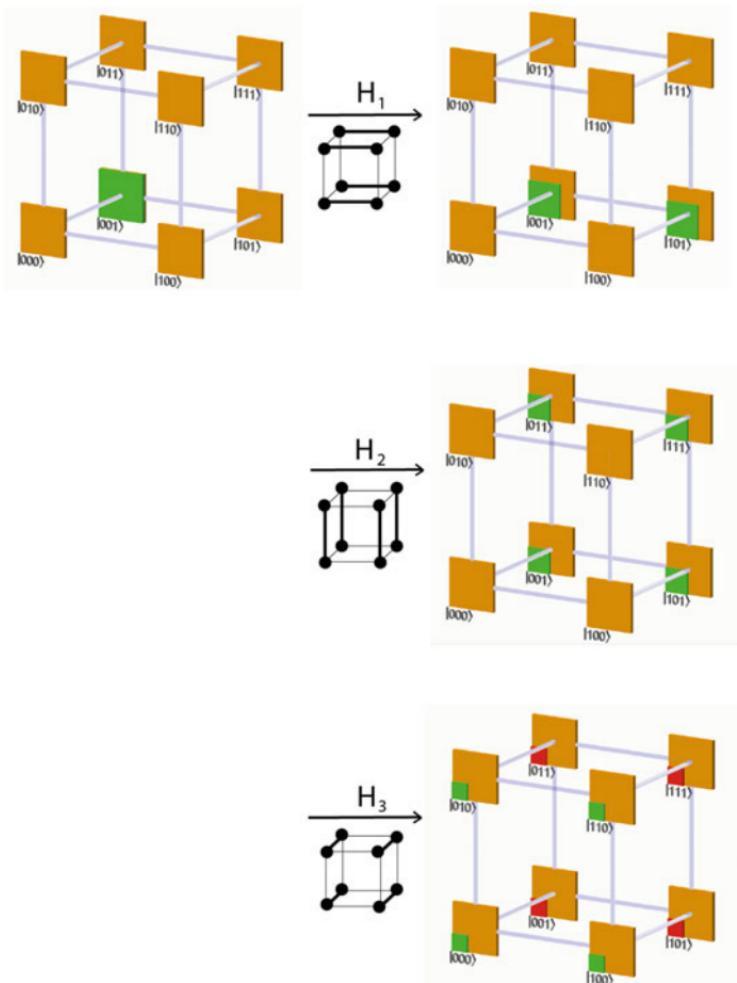
also gerundet das Ergebnis

$$\begin{aligned}
 &\approx 0.354 \cdot (|000\rangle - |001\rangle + |010\rangle - |011\rangle \\
 &\quad + |100\rangle - |101\rangle + |110\rangle - |111\rangle).
 \end{aligned}$$

In der graphischen Darstellung in Abb. 9.7 ist es anschaulicher.

Zum Abschluss des Kapitels wird noch geschaut, wie Pauli-Z, angewandt auf ein einzelnes QBit in einem Quantenregister aus mehreren QBits, den Zustand des Registers verändert.

Pauli-Z, angewandt auf ein einzelnes QBit  $a|0\rangle + b|1\rangle$ , ändert das Vorzeichen der Wahrscheinlichkeitamplitude von  $|1\rangle$ . Das Ergebnis ist also  $a|0\rangle - b|1\rangle$ . In der graphischen Darstellung bedeutet das: Aus einem kleinen grünen Quadrat beim Zustand  $|1\rangle$  wird ein rotes derselben Größe, aus einem roten kleinen Quadrat beim Zustand  $|1\rangle$  wird ein grünes derselben Größe, und alles andere bleibt unverändert. Ein Beispiel findet sich in Abb. 9.2 in der Mitte.



**Abb. 9.7** Auf ein Quantenregister im Basiszustand  $|001\rangle$ , wird die Hadamard-Transformation zuerst auf das erste, dann auf das zweite und dann auf das dritte QBit angewandt

Wird Pauli-Z also auf ein QBit in einem Quantenregister aus zwei oder drei QBits angewandt, so ändern die Wahrscheinlichkeitsamplituden derjenigen Basiszustände ihr Vorzeichen (in der graphischen Darstellung ihre Farbe), bei denen dieses QBit  $|1\rangle$  ist.

Drei Beispiele veranschaulichen diesen komplizierten Satz.

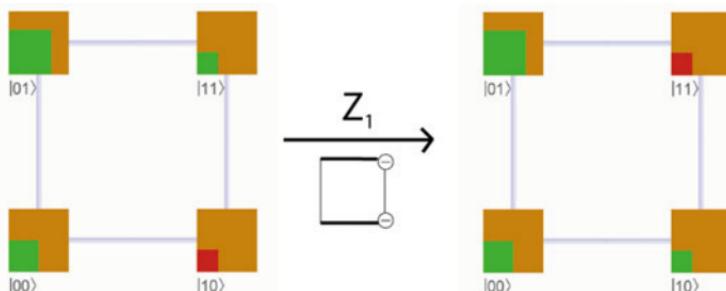
(i) Pauli-Z wird im Quantenregister

$$\begin{aligned}
 |q_1 q_2\rangle &= \frac{1}{2} \cdot |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |01\rangle - \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot |10\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot |11\rangle \\
 &\approx 0.5 \cdot |00\rangle + 0.707 \cdot |01\rangle - 0.354 \cdot |10\rangle + 0.354 \cdot |11\rangle.
 \end{aligned}$$

auf das erste QBit angewandt. Das Ergebnis ist

$$\begin{aligned}
 |q_1 q_2\rangle &= \frac{1}{2} \cdot |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |01\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot |10\rangle - \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot |11\rangle \\
 &\approx 0.5 \cdot |00\rangle + 0.707 \cdot |01\rangle + 0.354 \cdot |10\rangle - 0.354 \cdot |11\rangle.
 \end{aligned}$$

Abb. 9.8 zeigt die graphische Darstellung.



**Abb. 9.8** Auf das erste QBit des Quantenregisters  $0.5 \cdot |00\rangle + 0.707 \cdot |01\rangle - 0.354 \cdot |10\rangle + 0.354 \cdot |11\rangle$  wird Pauli-Z angewandt: Graphische Darstellung

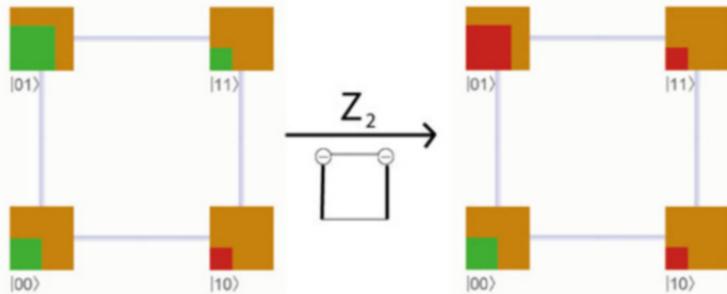
(ii) Pauli-Z wird im Quantenregister

$$\begin{aligned}
 |q_1 q_2\rangle &= \frac{1}{2} \cdot |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |01\rangle - \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot |10\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot |11\rangle \\
 &\approx 0.5 \cdot |00\rangle + 0.707 \cdot |01\rangle - 0.354 \cdot |10\rangle + 0.354 \cdot |11\rangle.
 \end{aligned}$$

auf das zweite QBit angewandt. Das Ergebnis ist

$$\begin{aligned}
 |q_1 q_2\rangle &= \frac{1}{2} \cdot |00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |01\rangle - \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot |10\rangle - \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot |11\rangle \\
 &\approx 0.5 \cdot |00\rangle - 0.707 \cdot |01\rangle - 0.354 \cdot |10\rangle - 0.354 \cdot |11\rangle.
 \end{aligned}$$

Abb. 9.9 zeigt die graphische Darstellung.



**Abb. 9.9** Auf das zweite QBit des Quantenregisters  $0.5 \cdot |00\rangle + 0.707 \cdot |01\rangle - 0.354 \cdot |10\rangle + 0.354 \cdot |11\rangle$  wird Pauli-Z angewandt: Graphische Darstellung

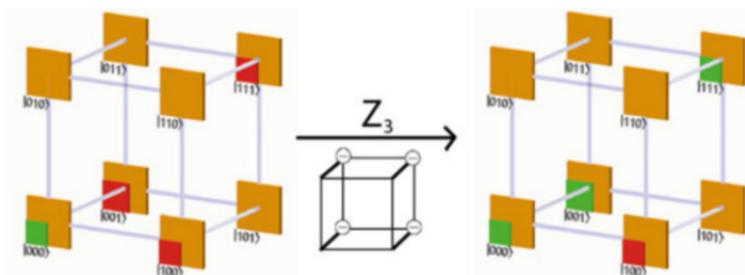
(iii) Pauli-Z wird im Quantenregister

$$\begin{aligned}
 |q_1 q_2 q_3\rangle &= \frac{1}{2} \cdot |000\rangle - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} \cdot |001\rangle + 0 \cdot |010\rangle + 0 \cdot |011\rangle \\
 &\quad - \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot |100\rangle + 0 \cdot |101\rangle + 0 \cdot |110\rangle - \frac{1}{2} \cdot |111\rangle \\
 &\approx 0.5 \cdot |000\rangle - 0.612 \cdot |001\rangle \\
 &\quad - 0.354 \cdot |100\rangle - 0.5 \cdot |111\rangle.
 \end{aligned}$$

auf das dritte QBit angewandt. Das Ergebnis ist

$$\begin{aligned}
 |q_1 q_2 q_3\rangle &= \frac{1}{2} \cdot |000\rangle + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} \cdot |001\rangle + 0 \cdot |010\rangle - 0 \cdot |011\rangle \\
 &\quad - \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot |100\rangle - 0 \cdot |101\rangle + 0 \cdot |110\rangle + \frac{1}{2} \cdot |111\rangle \\
 &\approx 0.5 \cdot |000\rangle + 0.612 \cdot |001\rangle \\
 &\quad - 0.354 \cdot |100\rangle + 0.5 \cdot |111\rangle.
 \end{aligned}$$

Abb. 9.10 zeigt die graphische Darstellung.



**Abb. 9.10** Im Quantenregister  $0.5 \cdot |000\rangle - 0.612 \cdot |001\rangle - 0.354 \cdot |100\rangle - 0.5 \cdot |111\rangle$  wird Pauli-Z auf das dritte QBit angewandt

# CNOT – ein Quantengatter auf zwei QBits 10

CNOT (controlled NOT), also „gesteuerte Negation“ ist ein Quantengatter, das zwei QBits als Input benötigt: Ein Controlbit (Steuerbit), und ein Targetbit (Zielbit). Die Funktionsweise ist ganz grob gesprochen: So sehr, wie das Controlbit im Zustand  $|1\rangle$  ist, so sehr wird das Targetbit negiert, d. h., so sehr werden seine Amplituden vertauscht. Das klingt vielleicht im Moment noch etwas kryptisch und wird unten genauer erläutert.

Besteht das Quantenregister aus zwei QBits, kann CNOT also auf zwei Arten angewandt werden: Entweder mit dem ersten QBit als Controlbit und dem zweiten als Targetbit, oder umgekehrt.

Besteht das Quantenregister aus drei QBits, kann es auf 6 verschiedene Weisen angewandt werden. Wer möchte, zählt nach.

---

## 10.1 CNOT in einem Register aus zwei QBits

Die Negation eines klassischen Bits besteht darin, seinen Zustand „0“ zu setzen, wenn er zuvor „1“ war, und umgekehrt.

Die Negation eines QBits ist das Pauli-X: Sein Zustand wird  $b \cdot |0\rangle + a \cdot |1\rangle$ , wenn er vorher  $a \cdot |0\rangle + b \cdot |1\rangle$  war, und umgekehrt.

Die gesteuerte Negation CNOT im Quantencomputing lässt sich am ehesten mit einer bedingten Negation im klassischen Computing vergleichen: Wenn die Bedingung erfüllt ist, findet die Negation statt, ansonsten nicht. CNOT wendet Pauli-X auf das Targetbit an, wenn das Controlbit  $|1\rangle$  ist. Wenn das Controlbit  $|0\rangle$  ist, wird Pauli-X nicht auf das Targetbit angewandt. Und wenn das Controlbit weder ganz  $|0\rangle$  noch ganz  $|1\rangle$  ist, sondern einen gemischten Zustand hat? Dann wird Pauli-X „so sehr“ auf das Targetbit angewandt, wie das Controlbit  $|1\rangle$  war.

Für ein System  $|q_1\ q_2\rangle$  aus zwei QBits bedeutet das, wenn CNOT mit dem ersten QBit als Controlbit und dem zweiten QBit als Targetbit angewandt wird:<sup>1</sup>

- Ist das System im Zustand  $|00\rangle$ , so ist es nach dem CNOT immer noch im Zustand  $|00\rangle$ .
- Ist das System im Zustand  $|01\rangle$ , so ist es nach dem CNOT immer noch im Zustand  $|01\rangle$ .
- Ist das System im Zustand  $|10\rangle$ , so ist es nach dem CNOT im Zustand  $|11\rangle$ .
- Ist das System im Zustand  $|11\rangle$ , so ist es nach dem CNOT im Zustand  $|10\rangle$ .
- Ist das System im Zustand  $c \cdot |00\rangle + d \cdot |01\rangle + e \cdot |10\rangle + f \cdot |11\rangle$ , so ist es nach dem CNOT im Zustand  $c \cdot |00\rangle + d \cdot |01\rangle + e \cdot |11\rangle + f \cdot |10\rangle$ , also im Zustand  $c \cdot |00\rangle + d \cdot |01\rangle + f \cdot |10\rangle + e \cdot |11\rangle$ .

---

<sup>1</sup>Die technische Realisation eines CNOT-Gatters ist für Photonen (und auch für andere Realisationen von QBits) schwierig, aber unabdingbar für die meisten Quantenalgorithmen. Wie kann z. B. ein Photon ein anderes steuern?

Die grundsätzliche Vorgehensweise ist immer wie folgt: Das Controlbit wird in eine „Umgebung“ gebracht und erzeugt dort eine Resonanz. Die „Umgebung“ kann dabei z. B. ein Atom sein, das in einem Käfig gefangen ist, wobei der Käfig bei Photonen z. B. aus Spiegeln und Laserstrahlen aufgebaut sein kann. Das Targetbit wird danach in die Umgebung gebracht, die sich durch den Kontakt mit dem Controlbit in einem bestimmten Schwingungszustand befindet. Dieser Schwingungszustand bewirkt dann die Veränderung beim Targetbit. Siehe z. B. [1, 2].

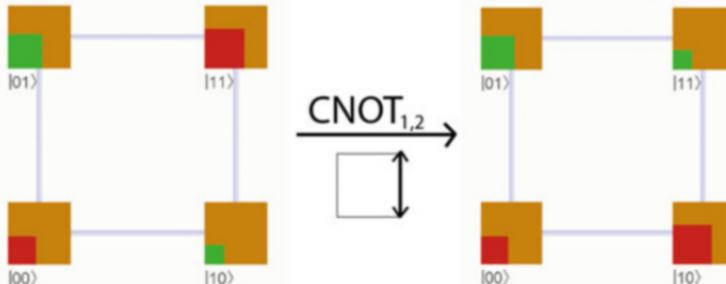
Hierzu ein Beispiel in einem Register aus zwei QBits, das sich in folgendem Zustand befindet:

$$\begin{aligned} |q_1 q_2\rangle &= -\sqrt{0.2} \cdot |00\rangle + \sqrt{0.3} \cdot |01\rangle + \sqrt{0.1} \cdot |10\rangle - \sqrt{0.4} \cdot |11\rangle \\ &\approx -0.447 \cdot |00\rangle + 0.548 \cdot |01\rangle + 0.316 \cdot |10\rangle - 0.633 \cdot |11\rangle. \end{aligned}$$

Wird CNOT angewandt mit dem ersten QBit als Controlbit, und dem zweiten QBit als Targetbit, so erhält man:

$$\begin{aligned} |q_1 q_2\rangle &= -\sqrt{0.2} \cdot |00\rangle + \sqrt{0.3} \cdot |01\rangle - \sqrt{0.4} \cdot |10\rangle + \sqrt{0.1} \cdot |11\rangle \\ &\approx -0.447 \cdot |00\rangle + 0.548 \cdot |01\rangle - 0.633 \cdot |10\rangle + 0.316 \cdot |11\rangle. \end{aligned}$$

Abb. 10.1 zeigt die graphische Darstellung. Es werden grundsätzlich die Amplituden entlang von oben-unten-Kanten vertauscht, denn für diese ist das zweite QBit (das Targetbit) zuständig. Aber nicht entlang beider Kanten wird vertauscht, sondern nur bei den Basiszuständen, wo das Targetbit, also das erste QBit,  $|1\rangle$  ist. Mithin nur bei der rechten unten-oben-Kante des Quadrats.



**Abb. 10.1** Ein CNOT wird in einem Register aus zwei QBits angewandt. Controlbit ist das erste, Targetbit das zweite QBit

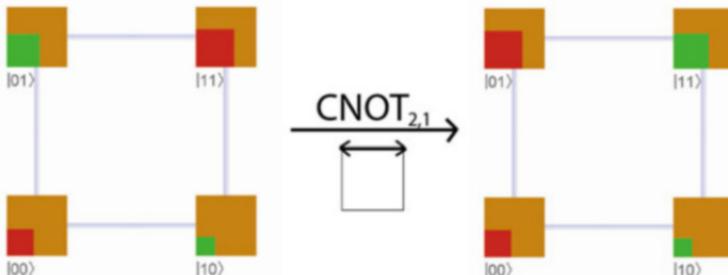
Wird bei demselben Ausgangsregisterzustand

$$\begin{aligned}|q_1 q_2\rangle &= -\sqrt{0.2} \cdot |00\rangle + \sqrt{0.3} \cdot |01\rangle + \sqrt{0.1} \cdot |10\rangle - \sqrt{0.4} \cdot |11\rangle \\ &\approx -0.447 \cdot |00\rangle + 0.548 \cdot |01\rangle + 0.316 \cdot |10\rangle - 0.633 \cdot |11\rangle\end{aligned}$$

CNOT angewandt, wobei jetzt das zweite QBit Controlbit ist, und das erste QBit Targetbit, so erhält man

$$\begin{aligned}|q_1 q_2\rangle &= -\sqrt{0.2} \cdot |00\rangle - \sqrt{0.4} \cdot |01\rangle + \sqrt{0.1} \cdot |10\rangle + \sqrt{0.3} \cdot |11\rangle \\ &\approx -0.447 \cdot |00\rangle - 0.633 \cdot |01\rangle + 0.316 \cdot |10\rangle + 0.584 \cdot |11\rangle.\end{aligned}$$

Abb. 10.2 zeigt die graphische Darstellung. Es werden die Amplituden entlang von links-rechts-Kanten vertauscht, denn für diese ist das erste QBit zuständig. Das zweite QBit steuert, entlang welcher Kanten vertauscht wird: Nur bei den Basiszuständen, wo das zweite QBit  $|1\rangle$  ist, wird vertauscht. Das ist die obere links-rechts-Kante des Quadrats.



**Abb. 10.2** Ein CNOT wird in einem Register aus zwei QBits angewandt. Controlbit ist das zweite, Targetbit das erste QBit

## 10.2 CNOT in einem Register aus drei QBits

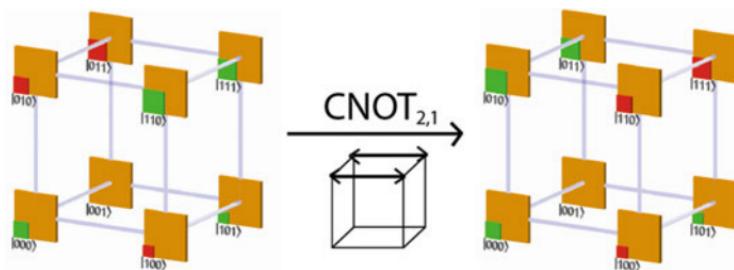
Ein Beispiel illustriert nun ein CNOT, wenn es auf zwei QBits in einem Register aus drei QBits angewandt wird. Betrachtet wird ein Quantenregister mit drei QBits im Zustand

$$\begin{aligned} |q_1 q_2 q_3\rangle = & \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot |000\rangle + 0 \cdot |001\rangle - \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot |010\rangle - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot |011\rangle \\ & - \frac{1}{4} \cdot |100\rangle + \frac{1}{4} \cdot |101\rangle + \frac{1}{2} \cdot |110\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot |111\rangle. \end{aligned}$$

Auf dieses wird ein CNOT mit dem zweiten QBit als Controlbit und dem ersten QBit als Targetbit angewandt. Das bewirkt, dass Pauli-X auf diejenigen Basiszustände des ersten QBits (des Targetbits) angewandt wird, bei denen das zweite QBit im Zustand  $|1\rangle$  ist. Das heißt, die Amplituden der Zustände  $|010\rangle$  und  $|110\rangle$  werden miteinander vertauscht, Amplituden der Zustände  $|011\rangle$  und  $|111\rangle$  werden miteinander vertauscht. Das Register ist nach dem CNOT im Zustand

$$\begin{aligned} |q_1 q_2 q_3\rangle = & \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot |000\rangle + 0 \cdot |001\rangle + \frac{1}{2} \cdot |010\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot |011\rangle \\ & - \frac{1}{4} \cdot |100\rangle + \frac{1}{4} \cdot |101\rangle - \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot |110\rangle - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot |111\rangle. \end{aligned}$$

Abb. 10.3 zeigt die graphische Darstellung. Es werden die Amplituden entlang von links-rechts-Kanten vertauscht, denn für diese ist das erste QBit zuständig. Aber nicht entlang aller vier Kanten wird vertauscht. Das zweite QBit steuert, entlang welcher Kanten vertauscht wird: Nur bei den Basiszuständen, wo das zweite QBit  $|1\rangle$  ist. Das sind die beiden oberen links-rechts-Kanten des Würfels.



**Abb. 10.3** Ein CNOT wird in einem Register aus drei QBits angewandt. Controlbit ist das zweite, Targetbit das erste QBit

---

## Literatur

1. Wei-Bo Gao, Ping Xu, Xing-Can Yao, Otfried Gühne, Adán Cabello, Chao-Yang Lu, Cheng-Zhi Peng, Zeng-Bing Chen, and Jian-Wei Pan. Experimental realization of a controlled-not gate with four-photon six-qubit cluster states. *Phys. Rev. Lett.*, 104:020501, Jan 2010.
2. Bastian Hacker, Stephan Welte, Gerhard Rempe, and Stephan Ritter. A photon-photon quantum gate based on a single atom in an optical resonator. *Nature*, 536(7615):193–196, July 2016.

# Teleportation

# 11

Teleportation ist einer der spektakulärsten Algorithmen der Quanteninformatik. Aber es ist keine Materie, die hier teleportiert wird, sondern Information.<sup>1</sup> Teleportation eignet sich, um Information im Vakuum schnell über weite Strecken zu übertragen, z. B. zwischen Satelliten.

In diesem Kapitel finden sich die einzelnen Schritte des Algorithmus. Vorab aber das grobe Setting, und die Struktur des Algorithmus, anhand von Photonen:

An zwei unterschiedlichen Orten im Raum, bei Alice und bei Bob, befindet sich je ein Photon aus einem verschrankten Photonenpaar. Dieses Photonenpaar wurde vorher hergestellt und je ein Photon zu Alice und Bob geschickt, die es nun bei sich z. B. in Glasfaserkabeln speichern.

Alice hat ein drittes Photon. Das Ziel ist, die Polarisation dieses Photons (also nicht das Photon selbst) auf das Photon von Bob zu übertragen.

Dies geschieht, indem Alice geschickt die Hadamard-Transformation und CNOT auf ihr Photon und das dritte Photon anwendet. Dann misst sie ihr Photon und das dritte Photon.

---

<sup>1</sup>Ein „beam me up, Scotty“ kann die Quantenphysik also nicht leisten.

Dadurch ändert das Photon bei Bob seine Eigenschaften, nach den Regeln der Quantenphysik, über die spukhafte Fernwirkung.

Das Photon bei Bob speichert dann alle Eigenschaften zur ehemaligen Polarisierung des dritten Photons, aber es ist noch nicht selbst so polarisiert. Dazu muss Bob noch in geeigneter Weise Pauli-X und/oder Pauli-Z auf sein Photon anwenden. Was er genau machen muss, teilt ihm Alice auf einem klassischen Kanal (z. B: per Telefon) mit. Es hängt von ihrem Messergebnis ab, und das ist zufällig. Erst nachdem Bob diese geeigneten Pauli-Transformationen angewendet hat, ist sein Photon so polarisiert, wie es vormals das dritte Photon bei Alice war.

Der aufmerksame Leser stellt fest:

- (i) Bobs Photon wird nicht instantan, also insbesondere nicht mit Überlichtgeschwindigkeit, in den Zustand des dritten Photons versetzt. Denn Alice muss Bob ihr Messergebnis mitteilen, und das geht höchstens mit Lichtgeschwindigkeit.
- (ii) Weder Alice noch Bob kennen die Polarisierung des dritten Photons, die übertragen wird. Sie können sie auch nicht messen, denn dadurch würde sie sich verändern. Sie wissen nur, das Bobs Photon nach der Teleportation diese Polarisierung hat.

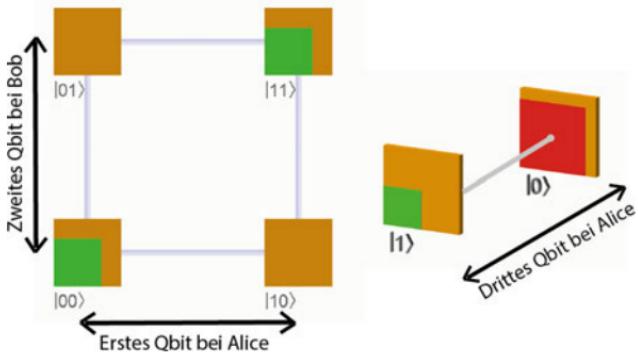
---

## 11.1 Der Algorithmus zur Teleportation

Der **Startzustand** für die Teleportation besteht aus drei QBits. Bei Alice und Bob ist jeweils ein QBit eines verschrankten Photonenpaares. Außerdem hat Alice noch ein QBit im Zustand  $a \cdot |0\rangle + b \cdot |1\rangle$ . Sie kennt den Zustand jedoch selbst nicht, hat also keine Information über  $a$  und  $b$ .

Alices und Bobs QBit befinden sich also im Zustand  $\sqrt{1/2} \cdot |00\rangle + \sqrt{1/2} \cdot |11\rangle$ , siehe Abb. 8.6 aus dem Kap. 8.

Abb. 11.1 zeigt nun den Startzustand, wenn das dritte QBit im (für Alice und Bob unbekannten) Zustand  $0.5 \cdot |0\rangle - \sqrt{3/4} \cdot |1\rangle$  ist.



**Abb. 11.1** Der Startzustand für die Teleportation: Alice und Bob besitzen je eines von zwei verschchränkten QBits, dazu ein QBit bei Alice. Sie kennt dessen Status nicht, für die graphische Darstellung ist er beispielhaft  $0.5 \cdot |0\rangle - \sqrt{3}/4 \cdot |1\rangle$

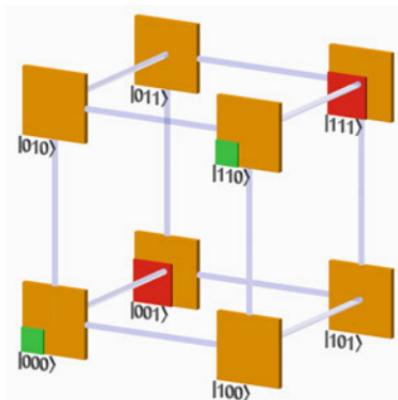
Anhand dieses Beispiels werden die Schritte der Teleportation in diesem Abschnitt illustriert. Man kann daran sehen, wie die Information über  $a$  und  $b$  durch den Würfel wandert.

Die drei QBits werden zunächst als ein Quantenregister mit drei QBits betrachtet. Es befindet sich im Zustand

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot a \cdot |000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot b \cdot |001\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot a \cdot |110\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot b \cdot |111\rangle.$$

Abb. 11.2 zeigt den Startzustand gesamthaft für die Werte  $a = 0.5$ , und  $b = -\sqrt{3}/4$ , also  $b \approx -0.612$ .

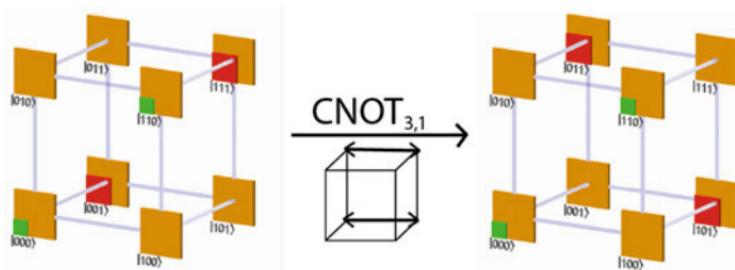
**Abb. 11.2** Der Startzustand für die Teleportation: Das Register aus Abb. 11.1 gesehen als EIN Register aus drei QBits



**Schritt 1** Alice wendet CNOT mit dem dritten QBit als Steuerbit und ihrem eigenem, dem ersten, QBit als Targetbit an. Dadurch kommt das Quantenregister mit den drei QBits in den Zustand

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot a \cdot |000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot b \cdot |011\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot b \cdot |101\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot a \cdot |110\rangle.$$

Abb. 11.3 zeigt die Transformation wieder für  $a=0.5$ , und  $b=-\sqrt{3}/4$ .

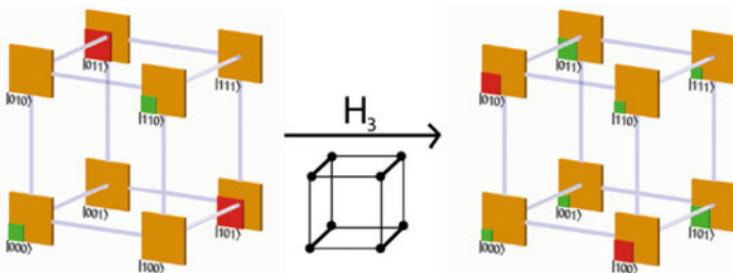


**Abb. 11.3** Schritt 1: Alice wendet CNOT mit dem dritten QBit als Steuerbit und ihrem eigenen (dem ersten) QBit als Targetbit an

**Schritt 2** Alice wendet die Hadamard-Transformation auf das dritte QBit an. Wer will rechnet nach, dass sich das Register dadurch im folgenden Zustand befindet:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot a \cdot |000\rangle + \frac{1}{2} \cdot a \cdot |001\rangle + \frac{1}{2} \cdot b \cdot |010\rangle + \frac{1}{2} \cdot (-b) \cdot |011\rangle \\ & + \frac{1}{2} \cdot b \cdot |100\rangle + \frac{1}{2} \cdot (-b) \cdot |101\rangle + \frac{1}{2} \cdot a \cdot |110\rangle + \frac{1}{2} \cdot a \cdot |111\rangle. \end{aligned}$$

Abb. 11.4 zeigt den Schritt für das Beispiel von oben mit  $a=0.5$ , und  $b=-\sqrt{3}/4$ .



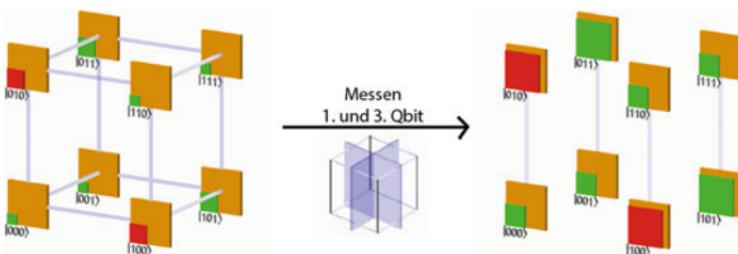
**Abb. 11.4** Schritt 2: Alice wendet die Hadamard-Transformation auf das dritte QBit an

**Schritt 3** Alice misst die beiden QBits, die sich bei ihr befinden. Im Register sind das QBit 1 und QBit 3. Jedes kann im Zustand  $|0\rangle$  oder im Zustand  $|1\rangle$  sein, es gibt also vier mögliche Messergebnisse. Alice weiß je nach Messergebnis, in welchem Zustand sich Bobs QBit befindet. Das sieht man gut an der graphischen Darstellung. Alices Messungen entfernen sämtliche links-rechts-Kanten (für die das erste QBit zuständig ist), und vorne-hinten-Kanten (für die das dritte QBit zuständig ist). Übrig bleibt eine von vier Welten, in denen sich das zweite QBit (bei Bob) befindet, siehe Abb. 11.5 für das Beispiel  $a=0.5$ , und  $b=-\sqrt{3/4}$ .

Der guten Ordnung halber hier noch die rechnerischen Werte für Alices Wissen über Bobs QBit:

- Sind bei ihrer Messung beide Messergebnisse  $|0\rangle$ , so ist Bobs QBit im Zustand  $a \cdot |0\rangle + b \cdot |1\rangle$ .
- Sind bei ihrer Messung beide Messergebnisse  $|1\rangle$ , so ist Bobs QBit im Zustand  $-b \cdot |0\rangle + a \cdot |1\rangle$ .
- Ist das Messergebnis ihres Qbits  $|0\rangle$ , und das des dritten QBits  $|1\rangle$ , so ist Bobs QBit im Zustand  $a \cdot |0\rangle - b \cdot |1\rangle$ .
- Ist das Messergebnis ihres Qbits  $|1\rangle$ , und das des dritten QBits  $|0\rangle$ , so ist Bobs QBit im Zustand  $b \cdot |0\rangle + a \cdot |1\rangle$ .

Wer will, rechnet es anhand der Regelung für Messung von QBits nach, siehe Abschn. 8.3 über das Messen in Quantenregistern. Anschaulicher ist aber sicher die graphische Darstellung.



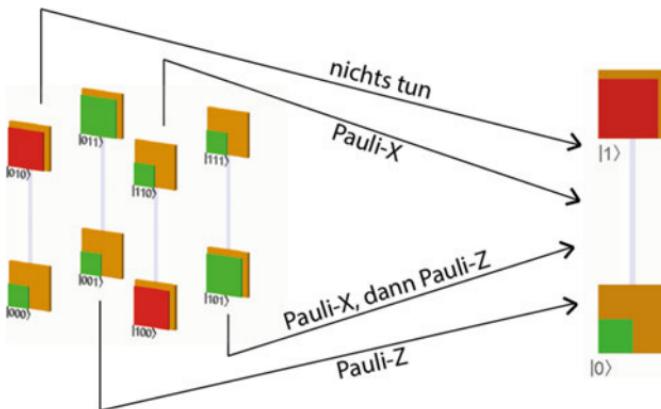
**Abb. 11.5** Schritt 3: Alice misst das erste und dritte QBit

**Schritt 4** Alice ruft Bob an, und teilt ihm ihr Messergebnis mit. Bob weiß jetzt ebenfalls, in welcher Welt er sich befindet.

**Schritt 5** Bob bringt sein QBit auf Basis der Information von Alice in den ursprünglichen Zustand  $a \cdot |0\rangle + b \cdot |1\rangle$  des dritten QBits:

- Waren beide Messergebnisse von Alice  $|0\rangle$ , so ist Bobs QBit bereits im Zustand  $a \cdot |0\rangle + b \cdot |1\rangle$ . Er tut dann nichts.
- Waren beide Messergebnisse von Alice  $|1\rangle$ , so ist Bobs QBit im Zustand  $-b \cdot |0\rangle + a \cdot |1\rangle$ . Er wendet erst Pauli-X, und dann Pauli-Z an, und erhält  $a \cdot |0\rangle + b \cdot |1\rangle$ .
- War das Messergebnis des Qbits von Alice  $|0\rangle$ , und das des dritten QBits  $|1\rangle$ , so ist Bobs QBit im Zustand  $a \cdot |0\rangle - b \cdot |1\rangle$ . Er wendet Pauli-Z an und bringt es damit in den Zustand  $a \cdot |0\rangle + b \cdot |1\rangle$ .
- War das Messergebnis des Qbits von Alice  $|1\rangle$ , und das des dritten QBits  $|0\rangle$ , so ist Bobs QBit im Zustand  $b \cdot |0\rangle + a \cdot |1\rangle$ . Er wendet Pauli-X an und bringt es in den Zustand  $a \cdot |0\rangle + b \cdot |1\rangle$ .

Für das Beispiel  $a = 0.5$ , und  $b = -\sqrt{3/4}$  zeigt Abb. 11.6 Bobs Aktionen.



**Abb. 11.6** Schritt 5: Je nach Messresultat von Alice bringt Bob durch geeignete Anwendung von Pauli X und / oder Pauli-Z sein QBit in den Zustand, den zuvor das einzelne QBit bei Alice hatte

Bobs QBit ist jetzt im Zustand, in dem das dritte QBit bei Alice ursprünglich war.

Theoretisch ist also Quantenteleportation möglich. Es stellt sich die Frage, ob sie auch in der Praxis durchgeführt werden kann.

## 11.2 Stand der praktischen Umsetzung

Der Quantenteleportationsalgorithmus wurde als theoretische Möglichkeit 1993 von einer Gruppe amerikanischer, kanadischer, französischer und israelischer Forscher gefunden [1]. Experimentell wurden dann im Laufe der Jahre immer größere Distanzen via Teleportation von Photonen überwunden. Hier kommt eine Liste von Meilensteinen.

- 1997 gelang es einer Arbeitsgruppe um Zeilinger in Wien erstmals, Teleportation im Labor nachzuweisen;
- 2003 gelang in Genf eine Arbeitsgruppe um Gisin eine Teleportation über 55 m, erstmals außerhalb des Labors;

- 2004 gelang der Gruppe um Zeilinger die Überbrückung einer Distanz von 600 m, von einem Ufer der Donau zu ihrem anderen Ufer;
- 2010 gelang einer chinesischen Arbeitsgruppe in Shanghai um Xian Min Lin die Überbrückung einer Distanz von 16 km;
- 2012 überbrückte eine Arbeitsgruppe an der chinesischen Universität für Wissenschaft und Technik um Pan Jian-Wei eine Distanz von 97 km;
- Ebenfalls 2012 überbrückte die Arbeitsgruppe um Zeilinger die Entfernung von 143 km zwischen La Palma und Teneriffa;
- 2017 überbrückte eine internationale Arbeitsgruppe, u. A. mit Beteiligung von Zeilinger und Pan Jian-Wei, die Entfernung von 1400 km von der Erde zum chinesischen Quantensatelliten Micius;
- Die Arbeitsgruppe überbrückte 2017 auch eine Distanz von 7600 km zwischen Österreich und China.

Es wurden außerdem erfolgreich Experimente zur Teleportation von Eigenschaften anderer Objekte, also nicht von Photonen, sondern z. B. Atomen gemacht. Auch die Teleportation komplexerer Eigenschaften von sogenannten „QTrits“, einer Art Paaren von QBits, wurde durchgeführt.

Die Überbrückung großer Entfernung mit Quantenverschränkung oder Quantenteleportation ist interessant im Rahmen eines zu bauenden „Quanteninternets“, an dem derzeit intensiv geforscht wird. Die Kommunikation zwischen räumlich weit entfernten Teilnehmern an diesem Internet könnte über den instantanen, kabellosen „Verschränkungskanal“ laufen.

Wichtig (und aktuell stärker beforscht als die großen Entfernungen) sind allerdings auch die sehr kleinen Entfernungen. Denn Chips innerhalb eines Quantencomputers sollen nach Möglichkeit auch ohne materielle Verbindung über den „Verschränkungskanal“ miteinander kommunizieren können. Bei kleinen Distanzen ist nicht so sehr wichtig, dass die Kommunikation schnell ist, sondern vor allem, dass sie auch ohne Energieverbrauch und damit ohne Erhitzung abläuft.

## Literatur

1. Charles H. Bennett, Gilles Brassard, Claude Cr  peau, Richard Jozsa, Asher Peres, and William K. Wootters. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and einstein-podolsky-rosen channels. *Phys. Rev. Lett.*, 70:1895–1899, Mar 1993.



# Weitere Quantenalgorithmen und Hardware

# 12

## 12.1 Weitere Quantenalgorithmen

Im Jahr 1982 beschäftigte sich Richard Feynmann mit der Frage, ob auf klassischen Computern alle physikalischen Prozesse simuliert werden können [4]. Es stellt sich heraus, dass dies nicht möglich ist, denn klassische Computer können keinen echten Zufall erzeugen. Aber die Quantenphysik enthält echten Zufall. Also wurde (zunächst gedanklich) ein Computer entwickelt, der auf Quantenbits basiert, und der den Gesetze der Quantenphysik folgt. 1984 war mit einer Arbeit von David Deutsch klar, wie ein Quantencomputer funktionieren muss [3].

Geforscht wurde seither in zwei Richtungen:

- Hardware: Wie kann man Quantencomputer bauen? Dazu mehr im Abschn. 12.2.
- Software: Wenn man Quantencomputer hätte, welche Probleme könnte man damit (schnell) lösen, und wie sehen Quantenalgorithmen aus?

Die Brücke zwischen beiden ist – wie bei klassischen Computern auch – der Schaltkreis. Schaltkreise sind die kleinste

Hardware-Steuereinheit eines Computers. Und ein Algorithmus besteht aus einer gedanklichen Reihe von Schaltkreisen, für jede Input-Größe einer. Man kann sich das gut am Addierer vorstellen: Der Algorithmus zum schriftlichen Addieren funktioniert im Prinzip für Zahlen mit beliebig vielen Ziffern, aber um tatsächlich eine Addition auf einer Maschine durchzuführen, benötigt man einen Schaltkreis (mit endlich vielen Eingängen).

Die ersten Quantenalgorithmen waren Quantenschaltkreise wie die im letzten Abschnitt vorgestellte Teleportation. Weitere Quantenschaltkreise dienten der abhörsicheren Kommunikation oder dem abhörsicheren Austausch von Schlüsseln in der Kryptographie [1, 2]. Das Forschungsgebiet galt als eine etwas exotische Disziplin, die von Quantenphysikern mit Interesse an der Informatik betrieben wurde.

Das änderte sich schlagartig, als Peter Shor 1994 einen schnellen Quantenalgorithmus vorstellte, der das Faktorisierungsproblem löst [7]. Denn mit der Lösung des Faktorisierungsproblems war klar: Ein Quantencomputer würde, einmal gebaut, einen großen Teil der Internet-Verschlüsselung brechen.<sup>1</sup>

Shors Algorithmus ist ein echter Algorithmus, also gedanklich eine ganze Folge von Schaltkreisen: Für jede Anzahl von Ziffern einer zu faktorisierenden Zahl liefert er einen Schaltkreis (wie beim klassischen Addierer).

Seit Shors Algorithmus wurden eine ganze Reihe Quantenalgorithmen entwickelt, wer will googlet nach „Quantum Algorithm Zoo“. Sie sind teilweise erheblich schneller als klassische Algorithmen. Was ist die Idee hinter diesen Algorithmen? Was

---

<sup>1</sup>Das Faktorisierungsproblem ist die Umkehrung der Multiplikation. Die Multiplikation ist leicht. Es sollte keine Schwierigkeit darstellen, z. B.  $5153 \cdot 6397$  auszurechnen. Schriftliche Multiplikation oder ein kleiner Taschenrechner liefert das Ergebnis 32963741. Bei der Faktorisierung ist nun umgekehrt das Produkt gegeben, und die Faktoren sollen gefunden werden. Hierzu ist bis heute kein klassischer schneller Algorithmus bekannt. Weder schriftlich noch mit einem kleinen Taschenrechner kann man leicht herausfinden, wie man z. B. 34903109 in Faktoren zerlegt (für neugierige Leser: Die Antwort ist  $4967 \cdot 7027$ ). Das RSA-Verschlüsselungssystem, das im Internet zumeist benutzt wird, benutzt die Tatsache, dass Faktorisierung schwierig ist.

---

macht Quantenschaltkreise so viel schneller als klassische Schaltkreise?

Quantenschaltkreise können sich „einschwingen“, und so verborgene Strukturen im Problem erkennen.<sup>2</sup>

Man stelle sich dafür ein normales Schachbrett mit  $8 \times 8$  Feldern vor, und eine Spielfigur, die einer Ecke startet und dann Feld für Feld geradeaus vorzieht. Wenn sie am Ende einer Reihe ankommt, biegt sie ab, dreht sich um, und geht die nächste Reihe (in entgegengesetzter Richtung) weiter. So läuft sie das ganze Spielfeld ab.

Diese Spielfigur „bemerkt“ irgendwann, dass eine reguläre Struktur vorliegt, die mit der Zahl 8 zu tun hat (obwohl sie selbst das Schachbrett nicht von oben sieht). Ein Mensch, der die Aufgabe der Spielfigur hätte, würde sich recht schnell „einschwingen“ auf die 8-er Reihen (der Leser möge es sich vorstellen).

Sieht das Schachbrett anders aus, hat z. B. 65 Felder, die als  $5 \times 13$ -Feld angeordnet sind, würde (ja nach Laufrichtung) sehr schnell auf die 5 oder die 13 „eingeschwungen“. Aber wenn die Anzahl der Felder eine Primzahl ist, z. B. 67 Felder, kann kein „Einschwingen“ stattfinden. Das Schachbrett bestünde hier aus einer einzigen langen Reihe mit 67 Feldern.

Das „Einschwingen“ ist eine natürliche Eigenschaft von komplexen Systemen aller Art in der Natur, aber auch von sozialen Systemen. Selbstorganisierende Systeme streben nach einem stabilen Gleichgewicht, und erreichen das oft über eine gleichförmigen Schwingungszustand. Hier kommen Beispiele:

- Eine Saite eines Musikinstruments, die angeregt wird, geht in eine harmonische Schwingung und dann zurück in die Ruhelage.
- Chemische Reaktionen aller Art streben, einmal angeregt, einen Zustand niedrigster Energie an.
- Soziale Systeme (z. B. soziale Netzwerke) schwingen sich ein auf eine im Großen und ganzen stabile Struktur an eng verbun-

---

<sup>2</sup>Mathematiker nennen solche Strukturen vornehm „verborgene Untergruppen im Lösungsraum“.

- denen Peergrups und einige wenige Verbindungen zwischen diesen Peergrups.
- Ökonomische Modelle von Märkten gehen davon aus, dass Märkte sich schwingend in Richtung eines Gleichgewichtszustands bewegen.
  - Verkehrsflüsse organisieren sich (wenn nicht reguliert) selbst in Richtung eines optimalen Durchflusses.
  - Neuronale Netze in der künstlichen Intelligenz schwingen sich ein auf ein (zumindest lokales) Optimum.

All diese Vorgänge laufen ohne Steuerung von außen sehr schnell ab.

Ein Quantenschaltkreis ist in diesem Sinne ebenfalls ein selbst-organisierendes System. Denn die QBits können nicht (wie im klassischen Fall) nur als einzelne Bits gesehen werden, sondern sie beeinflussen sich über die Quantenverschränkung systemisch.

Daher können Quantenalgorithmen benutzt werden, um schnell das Verhalten komplexer Systeme zu simulieren. Am einfachsten können sie natürlich das Verhalten eines Quantencomputers selbst simulieren (womit ein klassischer Computer große Probleme hat). Aber durch geschickte Verschlüsselung der Eingabe können sie auch andere Systeme simulieren. Das ist von besonderem Interesse z. B. bei Versuchsplanungen, oder bei der Entwicklung neuer Materialien oder Medikamente. Die Fähigkeit von Quantenalgorithmen, verborgene Strukturen aufzuspüren, ist bei auch der Analyse von großen Datenmengen aller Art von großer Bedeutung.<sup>3</sup>

So gibt es inzwischen für Quantenalgorithmen viele Anwendungen in der zivilgesellschaftlichen Nutzung auch jenseits der Kryptographie. Auch zur Programmierung von Quantenalgorith-

---

<sup>3</sup>Dabei können Quantencomputer zunächst nichts, das klassische Computer nicht auch könnten – sie sind nur schneller. Es fordert einige Mühe, ein Problem zu konstruieren, das klassische Computer gar nicht lösen können, Quantencomputer aber schon. Hier wird benutzt, dass Quantencomputer echten Zufall realisieren können. Probleme im Bereich der Überprüfung von Zufälligkeit können sie also qualitativ besser lösen als klassische Computer [6].

---

men gibt es bereits gute Tools. Jeder Einsteiger kann sich ohne Vorkenntnisse sich bei IBM online anmelden, und kann dort mit selbst erstellten Quantenschaltkreisen spielen. Fortgeschrittene Entwickler finden mit Q# eine Quanten-Programmiersprache auf einer Entwicklungsumgebung wie C#.

Die größten Probleme bei der Realisierung von Quantencomputern liegen derzeit bei der Hardware, denn der Weg von einem Quantenschaltkreis auf dem Papier zu einem wirklich physisch vorhandenem Quantenschaltkreis ist weit.

---

## 12.2 Hardware

Schnelle Quantenalgorithmen benötigen Quantencomputer mit etwa einigen wenige hundert QBits, die alle miteinander verschränkt werden können, die angesteuert werden können, und die einigermaßen stabil sind.<sup>4</sup> Chips für solche Quantencomputer gibt es allerdings derzeit noch nicht, und ihre technische Realisierbarkeit ist auch im Moment nicht absehbar. Einige Forscher glauben, früher oder später werden solche Chips geschaffen, andere glauben, das wird nie der Fall sein.

Aktuell befinden wir uns im NISQ-Zeitalter.

„NISQ“ ist die „Noisy Intermediate-Scale Quantum“-Technologie [5]. Die größten derzeit existierenden Quantenchips sind der google bristlecone (72 QBits, aus dem Jahr 2018), der google sycamore (54 QBits, aus dem Jahr 2019) und der intel Tangle lake (49 QBits, aus dem Jahr 2018). Dies sind aber nur einzelne Chips, nicht ein ganzer Quantencomputer. Der einzige vollständige Quantencomputer, der bereits als ganzer Computer verkauft wird, ist der IBM Q-System one. Es handelt sich um einen Würfel mit 2 m Kantenlänge, und 20 QBits.<sup>5</sup>

---

<sup>4</sup>Ganz grob können  $n$  QBits  $2^n$  klassische Bits simulieren. 10 QBits simulieren also 1024 klassische Bits, 20 QBits simulieren etwa eine Million klassische Bits, und 40 QBits simulieren ein Petabyte.

<sup>5</sup>Die Firma D-Wave aus Kanada stellt „Quantencomputer“ her mit mehreren tausend „QBits“. Das Konzept ist hier aber nicht das Konzept verschränkte Quanten, sondern ein anderes Konzept, das sogenannte „adiabatische

Das Problem aller derzeit verfügbarer Quantenchips ist ihre hohe Fehleranfälligkeit. Quantenbits dürfen mit nichts interagieren, sonst ist das wie eine Messung für sie, die ihren Zustand verändert. Dies ist in der Praxis sehr schwer machbar. Die wesentlichen physikalischen Techniken zur Realisation von Quantenregistern auf Quantenchips sind:

- Photonen. Diese werden vor allem im Bereich von Quantenkommunikation eingesetzt und können damit ein wesentlicher Baustein für ein künftiges Quanteninternet sein. Photonen haben den Vorteil, Entfernungen sehr schnell (mit Lichtgeschwindigkeit) im Glasfaserkabel oder im Vakuum des Weltalls zwischen Satelliten zu überwinden. Bis jetzt ist es aber außerhalb jeder technischen Reichweite, mehr als etwa 10 Photonen miteinander zu verschränken.
- Supraleitung. Die oben genannten Chips von Google, IBM und intel basieren auf kleinen supraleitenden Kreiselchen. Damit Supraleitung funktioniert, muss die Temperatur nahe des absoluten Nullpunkts sein. Extreme Kühlung muss also sichergestellt sein. In den heute existierenden Chips sind aber bei weitem nicht alle Photonen miteinander verschränkt, sondern nur einige, die auf dem Chip räumlich nebeneinander liegen. Die Fehleranfälligkeit ist außerdem leider hoch. Es gibt Verfahren zur Fehlerkorrektur, doch diese benötigen pro zu korrigierendem QBit acht zusätzliche QBits. Die 72 QBits auf dem Google bristlecone entsprechen also einem Byte aus korrigierten QBits.
- Gefangene Ionen (trapped ions). Hier handelt es sich um Ionen, also Atome oder Elektronen, die in einem starken Magnetfeld gefangen sind. Auch hier wird im Moment noch extreme

---

Quantencomputing“. Hier wird eine Problemstellung in einen Zustand eines physikalischen Systems codiert, das dann von sich aus in den Grundzustand niedrigster Energie übergeht. Dieser Grundzustand entspricht der Lösung des Problems. Sicher ein sehr interessantes Konzept zur Approximation von Optimierungsproblemen, aber kein Quantencomputing im eigentlichen Sinne (teilweise wird D-Wave vorgeworfen, unter falscher Flagge zu segeln, da sie ihren Computer „Quantencomputer“ nennen).

---

Kühlung benötigt, es gibt aber theoretisch die Chance, dass diese eines Tages nicht mehr von Nöten sein wird. Forscher in Innsbruck haben 20 gefangene Ionen verschränkt. Das kann besser sein als größere Chips, wenn die Fehleranfälligkeit geringer ist.

Quantencomputing im NISQ-Zeitalter funktioniert, indem einige (fehleranfällige) NISQ-Chips über konventionelle Rechenverfahren miteinander verbunden sind. Die praktisch durchgeführten Algorithmen sind also Hybride – teils arbeiten sie auf Quantenchips, teils auf konventioneller Technik. Es werden dabei gegebenenfalls auch Quantenschaltkreise mit wenigen QBits auf klassischen Computern geschickt simuliert.

Google hat in 2019 die Quantum-Supremacy bekannt gegeben, sie ist jedoch umstritten.

„Quantum Supremacy“ bedeutet, dass ein Problem auf wirklich physisch existierenden Rechnern schneller von einem bestehenden Quantencomputer berechnet werden konnte, als es ein klassischer Rechner kann. Das Problem, das Google als Beweis anführt, ist sehr speziell auf Quantencomputer zugeschnitten. Im Grunde handelt es sich um die Simulation eines (fehleranfälligen) Quantencomputers. In einen Chat wurde über das Setting gelästert, eine Kaffeetasse sei gemäß dieser Logik einem Quantencomputer überlegen. Denn sie könne schneller als ein Quantencomputer simulieren, was genau passiert, wenn eine Kaffeetasse vom Tisch fällt und auf dem Boden zerschellt.

Die dem Quantencomputing zugrunde liegende Physik mit ihrer spukhaften Fernwirkung ist faszinierend. Die Funktionsweise von Quantenalgorithmen ebenfalls. Die Hardware ist eine Herausforderung für Physiker, und wird international mit großem Aufwand beforscht. Die Anwendungen von schnellen Quantenalgorithmen sind sehr vielfältig. Wie lange wird das NISQ-Zeitalter andauern? Wird eine echte, unbestrittene Überlegenheit von Quantencomputern über klassische Computer je erreicht? Diese Fragen wird die Zukunft beantworten. Für Physiker, Mathematiker, Informatiker, Philosophen, Gesellschaftstheoretiker, Materialwissenschaftler, Logistiker und Datenanalysten ist Quantencomputing aber schon jetzt ein hochaktuelles Gebiet.

## Literatur

1. C. H. Bennett and G. Brassard. Quantum cryptography: Public key distribution and coin tossing. In *Proceedings of IEEE International Conference on Computers, Systems, and Signal Processing*, page 175, India, 1984.
2. Charles H. Bennett, François Bessette, Gilles Brassard, Louis Salvail, and John Smolin. Experimental quantum cryptography. *Journal of Cryptology*, 5(1):3–28, January 1992.
3. David Deutsch. Quantum theory, the church–turing principle and the universal quantum computer. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 400(1818):97–117, July 1985.
4. Richard P. Feynman. Simulating physics with computers. *International Journal of Theoretical Physics*, 21(6–7):467–488, Jun 1982.
5. John Preskill. Quantum Computing in the NISQ era and beyond. *Quantum*, 2:79, August 2018.
6. Ran Raz and Avishay Tal. Oracle separation of BQP and PH. In Moses Charikar and Edith Cohen, editors, *Proceedings of the 51st Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing, STOC 2019, Phoenix, AZ, USA, June 23–26, 2019*, pages 13–23. ACM, 2019.
7. P. W. Shor. Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring. In *Proceedings 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 124–134, 1994.