Heinz Klaus Strick

Mathematik – einfach genial!

Bemerkenswerte Ideen und Geschichten von Pythagoras bis Cantor

SACHBUCH

Springer

Mathematik – einfach genial!

Heinz Klaus Strick

Mathematik – einfach genial!

Bemerkenswerte Ideen und Geschichten von Pythagoras bis Cantor

Mit Porträtzeichnungen von Andreas Strick

Springer

Heinz Klaus Strick
Leverkusen, Deutschland

ISBN 978-3-662-60448-9 ISBN 978-3-662-60449-6 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-662-60449-6

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Zeichnungen: Heinz Klaus Strick, Leverkusen; einige Abb. von Stephan Meyer, Dresden
Einbandabbildung: nach Heinz Klaus Strick, Leverkusen

Planung/Lektorat: Iris Ruhmann
Springer ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorwort

Wer sich mit der Geschichte der Mathematik beschäftigt, mit den vielen Ideen, die im Laufe der Jahrhunderte entwickelt wurden, der kommt aus dem Staunen nicht heraus – da kann man nur feststellen: „Einfach genial!“.

Und es gibt auch eine Reihe von genialen Ansätzen, die von der Nachwelt regelrecht vergessen wurden – die Universalgelehrten aus dem islamischen Kulturkreis etwa sind in Europa kaum noch bekannt, obwohl sie wesentliche Beiträge zur Entwicklung der Mathematik geleistet haben.

In dem vorliegenden Buch werden einige dieser bemerkenswerten genialen Ideen dargestellt. Ausgewählt habe ich 18 Themen, die mithilfe zahlreicher farbiger Abbildungen anschaulich entwickelt und durch möglichst einfache Beispiele verdeutlicht werden. Manche der Ideen haben eine Vorgeschichte, auf die ich zunächst eingehe – so wird noch klarer, welcher Fortschritt durch diese Idee erreicht wurde.

Die Menschen hinter diesen Ideen haben in ihrer jeweiligen Zeit gelebt, und oft wurden ihre Schicksale von dramatischen historischen Veränderungen beeinflusst. Daher war es naheliegend, auch die Lebensgeschichten dieser Personen zu erzählen – so wie ich es seit 2006 jeden Monat im *Mathematischen Monatskalender* versuche (Überblick auf www.spektrum.de/mathematik/monatskalender/index/).

Die meisten dieser Mathematiker hatten nicht nur eine einzige geniale Idee. So finden Sie im jeweiligen Kapitel einen dritten Abschnitt, in dem beschrieben wird, mit welchen Themen sich diese Gelehrten auch noch beschäftigt haben. In einigen Fällen (Archimedes, Fermat, Euler, Lagrange) ist dies umfangreich und kann – insbesondere bei Leonhard Euler – nur andeuten, wie außergewöhnlich diese Mathematiker waren.

Die Literaturhinweise in jedem Kapitel und am Ende des Buches geben Anregungen für eine weitere Beschäftigung mit den angesprochenen Themen. Erfreulicherweise hat die Qualität der deutschen Wikipedia-Beiträge (und der darin enthaltenen Literaturhinweise) in den letzten Jahren deutlich zugenommen. Manchmal werden sie in der englisch- bzw. französischsprachigen Version noch übertroffen; daher sind auch diese Quellen genannt. An etlichen Stellen ergaben sich Querverweise zu meinen ebenfalls im Springer-Verlag erschienenen Büchern *Mathematik ist schön, Mathematik ist wunderschön* und *Mathematik ist wunderwunderschön*. Außerdem enthalten die Literaturhinweise auch jeweils konkrete Angaben über die Spektrum-Kalenderblätter sowie ggf. auch über Beiträge im *MNU Journal,* wo ich einige der genialen Ideen (in Kurzfassung) beschrieben hatte.

Der gewählte Aufbau – und natürlich der vorgegebene Gesamtumfang des Buches – haben dazu geführt, dass es *nur* 18 geniale Ideen sind, die hier vorgestellt werden können. Mir war es sehr wichtig, über mehr zu berichten als nur über die einzelnen Ideen. Ich hoffe, es wird deutlich, wie spannend es sein kann, sich mit den Schicksalen der ausgewählten Personen zu beschäftigen, die oft durch besondere historische Ereignisse mit geprägt wurden.

Die Auswahl der genialen Ideen mag willkürlich erscheinen. Keinesfalls erhebe ich den Anspruch, dass alle Epochen und alle Länder (Kulturen) *repräsentativ* vertreten sind. Die Resonanz auf dieses Buch wird zeigen, ob es eine weitere Gelegenheit geben wird, beispielsweise auch über geniale Ideen von Mathematiker*innen* oder über indische und chinesische Mathematiker zu berichten. Weitere geniale Ideen wie beispielsweise der euklidische Algorithmus, diophantische Gleichungen, Faulhaber'sche Formeln usw. bieten sich für eine Fortsetzung ebenfalls an.

Die Kapitel dieses Buches sind weitgehend unabhängig voneinander lesbar – wo es sinnvoll ist, werden Bezüge zu anderen Kapiteln aufgezeigt.

Die Themen sind durchweg mit schulischem Vorwissen aus der Mittel- oder Oberstufe nachvollziehbar; in diesem Buch werden also keine mathematischen Theorien entwickelt, die deutlich über das an der Schule erreichbare Niveau hinausgehen. Daher empfiehlt sich das Buch für alle, die sich gern mit Mathematik beschäftigen, und ist beispielsweise auch für Arbeitsgemeinschaften an Schulen und als Anregung für Facharbeiten geeignet.

Herzlich bedanke ich mich bei allen, die mich bei der Vorbereitung und Umsetzung des Buchprojekts unterstützt haben,

- bei meiner Frau, die es geduldig ertrug, dass ich mich auch diesmal wieder in die schöne Welt der Mathematik vertiefte,
- bei meinem Sohn Andreas, der die Porträts der ausgewählten Mathematiker im Stile des urban sketching zeichnete (www.kunst-a-s.de),
- bei Wilfried Herget, dessen hilfreiche Formulierungsvorschläge wesentlich zur besseren Lesbarkeit meiner Texte beigetragen haben, sowie
- bei Robert Kragler, der alle Kapitel sorgfältig überprüft hat,

und nicht zuletzt bei Andreas Rüdinger, Iris Ruhmann und Carola Lerch vom Springer Verlag, die dieses Buch ermöglichten.

Heinz Klaus Strick

Inhaltsverzeichnis

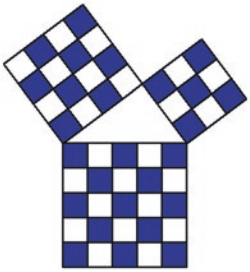
1 Pythagoras von Samos – Sektenführer und Philosoph

Die Zahl ist das Wesen aller Dinge. Das Universum ist auf der Macht der Zahlen aufgebaut.

Beim Stichwort *Pythagoras* fällt den meisten natürlich die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ ein und vermutlich auch der Zusammenhang mit einem rechtwinkligen Dreieck.

Nach Meinung der Postverwaltung Nicaraguas zählt diese Gleichung zu den *zehn Formeln, die das Antlitz der Erde veränderten*.

H. K. Strick, *Mathematik – einfach genial!*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-60449-6_1



Die Aussage des *Satzes des Pythagoras* enthält aber etwas mehr als nur die bekannte Gleichung mit den Quadraten über den drei Seiten eines Dreiecks …

Satz

Satz des Pythagoras

- Wenn in einem Dreieck der Winkel γ ein rechter Winkel ist, dann gilt zwischen den Längen der Katheten a, b und der Hypotenuse c die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$, d. h., die Quadrate über den beiden Katheten sind zusammen genauso groß wie das Quadrat über der Hypotenuse.

Es gilt aber auch die
Umkehrung des Satzes

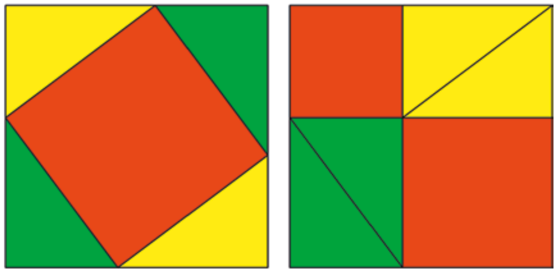
- Wenn für die Seitenlängen von a, b, c eines Dreiecks die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, dann ist der Winkel γ, welcher der Seite c gegenüberliegt, ein rechter Winkel.

Dies sind wirklich bemerkenswerte Aussagen:

- Wenn die drei Streckenlängen die Gleichung erfüllen, dann ist eine Aussage über einen der Winkel in dem Dreieck möglich.
- Wenn in einem Dreieck ein rechter Winkel vorliegt, dann ist eine Aussage über die Streckenlängen möglich.

Der Satz wurde in Ägypten und Babylonien bereits viele Jahrhunderte *vor* Pythagoras angewandt. Und daher fragt man sich mit Recht, warum der Satz nach dem berühmten Griechen benannt ist, von dem einige Forscher sogar sagen, dass er gar kein Mathematiker war.

Zweifel sind daher auch angebracht, dass es tatsächlich Pythagoras selbst war, der den Satz (genauer: den ersten Teil des Satzes) anhand der folgenden beiden Abbildungen bewies. Das jedenfalls behauptete der griechische Mathematiker **Proclos** (412–485 n. Chr.), der viele Jahrhunderte nach Pythagoras lebte.



Ein solcher *Beweis ohne Worte* passt aber wunderbar zu den *genialen Ideen,* die in diesem Kapitel angesprochen werden.

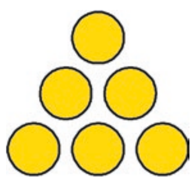
Und diese beiden zum Beweis gehörenden Abbildungen belegen auch:

- Mathematische Einsichten lassen sich auch ohne Rechnung gewinnen!

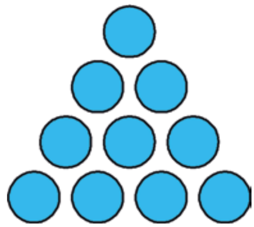
1.1 Einfach genial: Pythagoreische Zahlenmuster

Bei Pythagoras und seinen Schülern, den Pythagoreern, hatte jede Zahl ihre eigene, mystische Persönlichkeit:

- Die Eins ist keine eigentliche Zahl, aber sie ist Ausgangspunkt aller Zahlen.
- Gerade Zahlen sind weiblich, ungerade sind männlich.
- Die Zahl 5 ist als Summe der beiden kleinsten echten Zahlen, nämlich der kleinsten geraden und der kleinsten ungeraden Zahl, Symbol für die Ehe.
- Die Zahl 6 ist gleich der Summe ihrer echten Teiler: $6 = 1 + 2 + 3$; die Pythagoreer bezeichneten sie als *vollkommene* Zahl (vgl. hierzu auch Kap. 11).



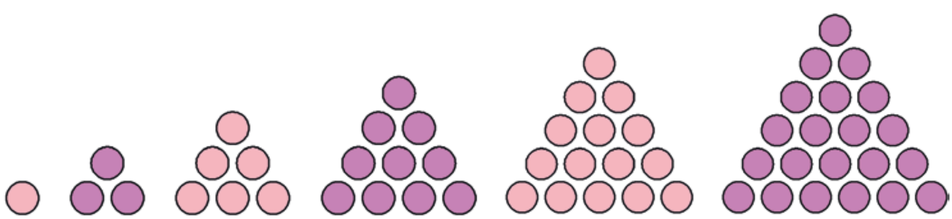
- Die Zahl 10 gilt als heilige Zahl; sie ist Summe der ersten vier Zahlen und Basis unseres Zahlensystems. Außerdem lässt sie sich in Form eines wunderbar symmetrischen gleichseitigen Dreiecks darstellen (**Tetraktys** = Vierheit).



- Die Tetraktys steht auch für die *Elemente* Feuer, Luft, Wasser und Erde sowie für die *Dimensionen* (1 = ein Punkt; 2 = Linie aus zwei Punkten; 3 = Fläche, definiert durch die drei Punkte eines gleichseitigen Dreiecks; 4 = Raum, definiert durch die vier Punkte eines regelmäßigen Tetraeders).
- Zehn ist auch die Anzahl der Objekte im Kosmos der Pythagoreer: Erde und Gegenerde (Antichthon), Sonne, Mond, Merkur, Venus, Mars, Jupiter, Saturn und die Fixsternsphäre.
- Die Zahlen 1, 2, 3 und 4 der Tetraktys spielen in der musikalischen Harmonik eine entscheidende Rolle: Wenn man die Länge einer Saite von ihrer ursprünglichen Länge auf die Hälfte verkürzt, also im Verhältnis 2:1 verändert, dann liegt der neue Ton um eine Oktave höher, bei Verkürzung im Verhältnis 3:2 bzw. 4:3 um eine Quinte bzw. Quarte.
- Die Zahl 17 gilt als Unglückszahl, die zu meiden ist; denn sie liegt zwischen den Zahlen 16 und 18. Diese beiden Zahlen sind besondere Zahlen; es sind nämlich die einzigen natürlichen Zahlen, die sowohl für den Flächeninhalt als auch für den Umfang einer Figur stehen können:
  $16 = 4 \times 4 = 4 + 4 + 4 + 4$ für ein Quadrat der Seitenlänge 4 und
  $18 = 3 \times 6 = 3 + 6 + 3 + 6$ für ein Rechteck mit den Seitenlängen 3 und 6.

1.1.1 Dreieckszahlen

Nicht nur die beiden Zahlen 6 und 10 lassen sich mithilfe von bunten Steinen in Form eines gleichseitigen Dreiecks darstellen, vgl. folgende Abb.



Diese so darstellbaren natürlichen Zahlen werden als **Dreieckszahlen** bezeichnet. Es handelt sich um eine Zahlenfolge mit den Elementen 1, 3, 6, 10, 15, 21, …

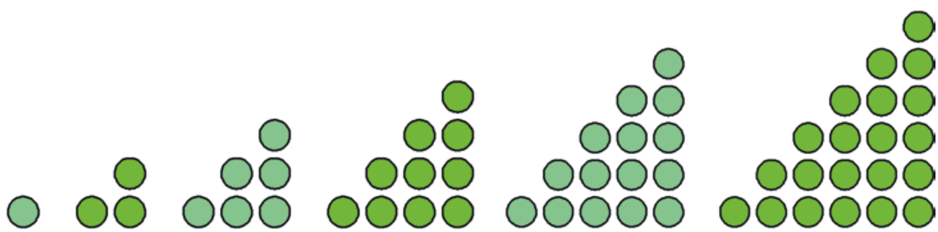
Im Verzeichnis der Folgen mit ganzzahligen Elementen (OEIS = Online Encyclopedia of Integer Sequences) trägt diese Folge der *Triangular Numbers* die Nummer A000217.

Die n-te Dreieckszahl $\Delta(n)$ ist definiert als die Summe der ersten n natürlichen Zahlen:

$$\Delta(1) = 1;\ \Delta(2) = 1 + 2 = 3;\ \Delta(3) = 1 + 2 + 3 = 6;\ \Delta(4) = 1 + 2 + 3 + 4 = 10;$$

$$\Delta(5) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \sum_{k=1}^{5} k = 15; \quad \Delta(6) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = \sum_{k=1}^{6} k = 21; \ldots$$

Die Dreieckszahlen können auch in der Form eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks veranschaulicht werden:

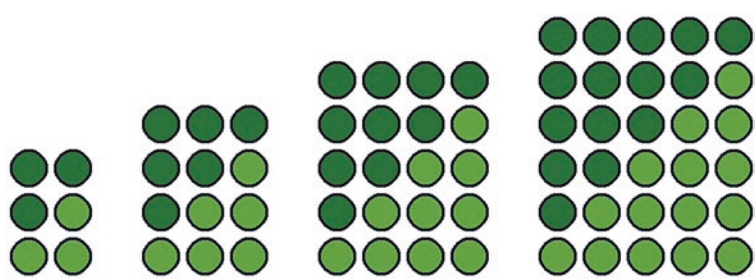


Wählt man diese Form der Darstellung, dann werden unmittelbar zwei Gesetzmäßigkeiten deutlich:

- Durch Verdopplung des rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks erhält man ein Rechteck mit der gleichen Breite wie das Dreieck und mit einer Höhe, die um 1 größer ist als die Breite:

$$2 \cdot \Delta(2) = 2 \cdot 3;\ 2 \cdot \Delta(3) = 3 \cdot 4;\ 2 \cdot \Delta(4) = 4 \cdot 5;\ 2 \cdot \Delta(5) = 5 \cdot 6$$

Es gilt also allgemein: $2 \cdot \Delta(n) = n \cdot (n + 1)$



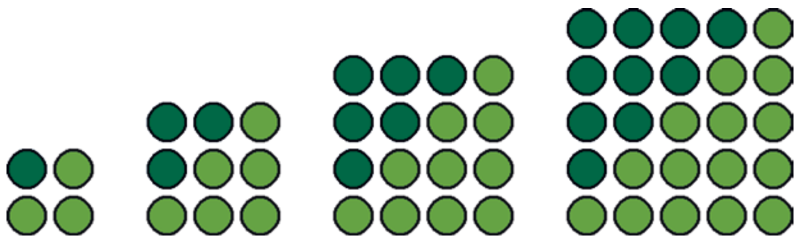
Formel

Summe der ersten *n* natürlichen Zahlen

Für die n-te Dreieckszahl $\Delta(n)$, also für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen, gilt:

$$\Delta(n) = \sum_{k=1}^{n} k = \tfrac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$$

Eine alternative Möglichkeit, diese Formel herzuleiten, ergibt sich aus der folgenden Abbildungssequenz, bei der jeweils zwei aufeinanderfolgende Dreieckszahlen-Muster sich zu einem Quadrat ergänzen:



$$\Delta(1) + \Delta(2) = 2^2;\ \ \Delta(2) + \Delta(3) = 3^2\ \ \Delta(3) + \Delta(4) = 4^2;\ \ \Delta(4) + \Delta(5) = 5^2.$$

Es gilt also allgemein für $n \geq 2:\ \Delta(n-1) + \Delta(n) = n^2$, in Worten:

- Die Summe zweier aufeinanderfolgender Dreieckszahlen ergibt eine Quadratzahl.

Da sich die beiden aufeinanderfolgenden Dreieckszahlen $\Delta(n-1)$ und $\Delta(n)$ nur um die natürliche Zahl n unterscheiden, nämlich $\Delta(n) = \Delta(n-1) + n$, ergibt sich hieraus

$\Delta(n-1) + \Delta(n) = [\ \Delta(n) - n\ ] + \Delta(n) = n^2$, also

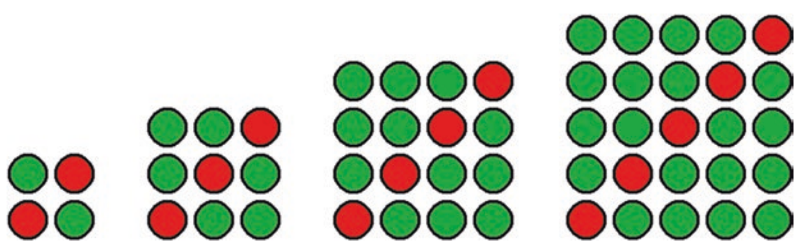
$2 \cdot \Delta(n) = n^2 + n$ und somit ebenfalls $\Delta(n) = \frac{1}{2} \cdot (n^2 + n) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$.

Aus der folgenden Sequenz ergibt sich

$$2 \cdot \Delta(1) + 2 = 2^2;\ \ 2 \cdot \Delta(2) + 3 = 3^2;\ \ 2 \cdot \Delta(3) + 4 = 4^2;\ \ 2 \cdot \Delta(4) + 5 = 5^2,$$

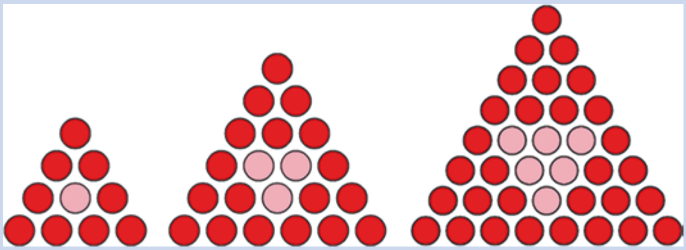
also allgemein $2 \cdot \Delta(n) + (n+1) = (n+1)^2$.

Hieraus folgt: $2 \cdot \Delta(n) = (n+1)^2 - (n+1)$ und weiter $2 \cdot \Delta(n) = n^2 + n$, vgl. Abb.



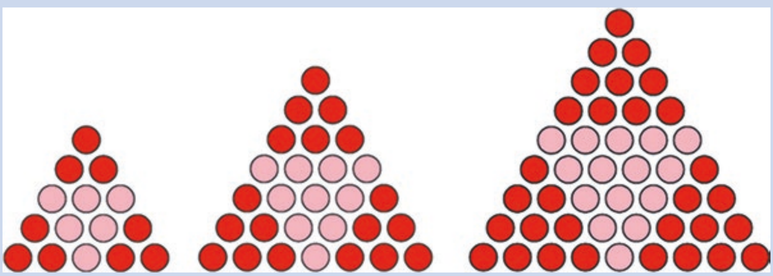
Durch unterschiedliche Färbungen von Teilfiguren lassen sich mithilfe der beiden Darstellungsformen weitere Gesetzmäßigkeiten für Dreieckszahlen entdecken, vgl. die folgenden Beispiele. Ob die Pythagoreer diese Zusammenhänge auch entdeckt haben, ist nicht bekannt, es erscheint aber durchaus möglich …

Beispiel 1



$\Delta(4) = 3 \cdot \Delta(2) + \Delta(1)$; $\Delta(6) = 3 \cdot \Delta(3) + \Delta(2)$; $\Delta(8) = 3 \cdot \Delta(4) + \Delta(3)$.

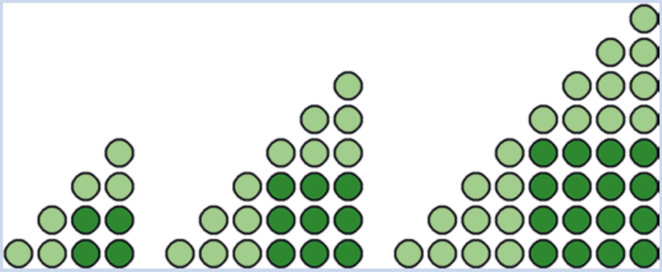
- Für gerade Zahlen $2n$ gilt also allgemein: $\Delta(2n) = 3 \cdot \Delta(n) + \Delta(n-1)$.



$\Delta(5) = 3 \cdot \Delta(2) + \Delta(3)$; $\Delta(7) = 3 \cdot \Delta(3) + \Delta(4)$; $\Delta(9) = 3 \cdot \Delta(4) + \Delta(5)$.
Die Beziehung gilt auch für $n = 3$: $\Delta(3) = 6 = 3 \cdot \Delta(1) + \Delta(2)$.

- Für ungerade Zahlen $2n + 1$ gilt also allgemein:
$\Delta(2n+1) = 3 \cdot \Delta(n) + \Delta(n+1)$.

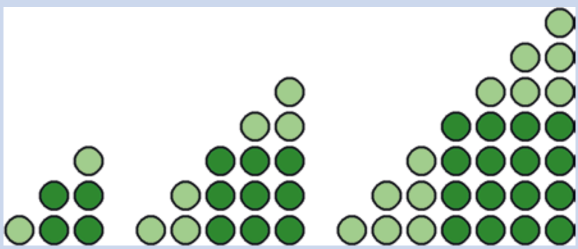
Beispiel 2



$\Delta(4) = 2 \cdot \Delta(2) + 2^2$; $\Delta(6) = 2 \cdot \Delta(3) + 3^2$; $\Delta(8) = 2 \cdot \Delta(4) + 4^2$.

- Für gerade Zahlen $2n$ gilt also allgemein: $\Delta(2n) = 2 \cdot \Delta(n) + n^2$

Wegen $\Delta(n-1) + \Delta(n) = n^2$ folgt hieraus:
$\Delta(2n) = 3 \cdot \Delta(n) + \Delta(n-1)$, vgl. Beispiel 1.

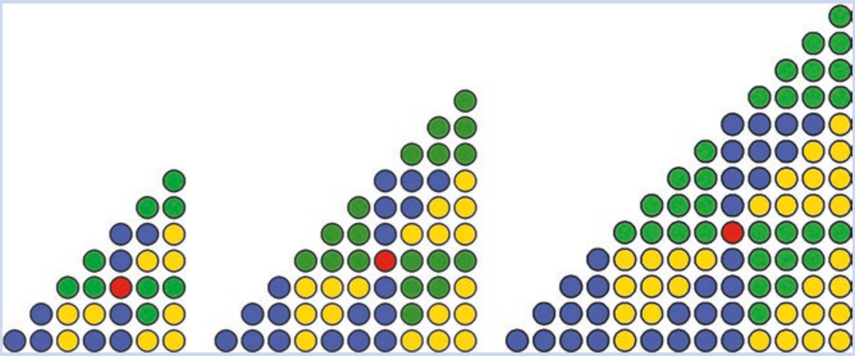


$\Delta(3) = 2 \cdot \Delta(1) + 2^2$; $\Delta(5) = 2 \cdot \Delta(2) + 3^2$; $\Delta(7) = 2 \cdot \Delta(3) + 4^2$.

- Für ungerade Zahlen $2n+1$ gilt also allgemein: $\Delta(2n+1) = 2 \cdot \Delta(n) + (n+1)^2$

Wegen $\Delta(n) + \Delta(n+1) = (n+1)^2$ folgt hieraus:
$\Delta(2n+1) = 3 \cdot \Delta(n) + \Delta(n+1)$, vgl. Beispiel 1.

Beispiel 3

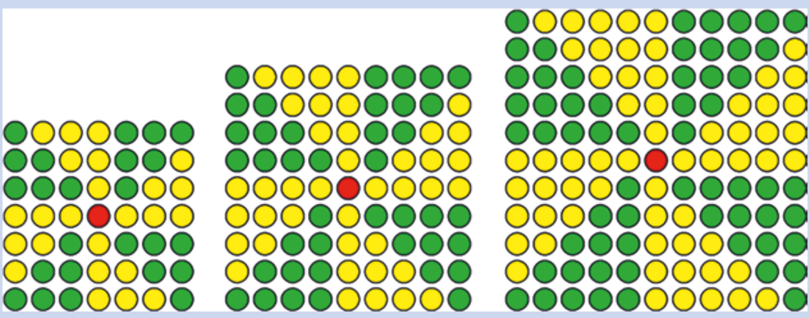


$\Delta(7) = 9 \cdot \Delta(2) + 1$; $\Delta(10) = 9 \cdot \Delta(3) + 1$; $\Delta(10) = 9 \cdot \Delta(4) + 1$.

- Für natürliche Zahlen vom Typ $3n + 1$, also für Zahlen, die bei der Division durch 3 den Rest 1 lassen, gilt allgemein: $\Delta(3n + 1) = 9 \cdot \Delta(n) + 1$

Die Beziehung gilt auch für $n = 1$: $\Delta(4) = 10 = 9 \cdot \Delta(1) + 1$.

Beispiel 4



$8 \cdot \Delta(3) + 1 = 7^2$; $8 \cdot \Delta(4) + 1 = 9^2$; $8 \cdot \Delta(5) + 1 = 11^2$.

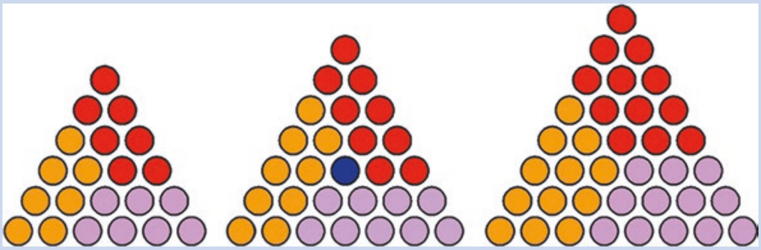
- Allgemein gilt: $8 \cdot \Delta(n) + 1 = (2n + 1)^2$.

Die Beziehung gilt auch für $n = 1$: $8 \cdot \Delta(1) + 1 = 3^2$ sowie für $n = 2$: $8 \cdot \Delta(2) + 1 = 5^2$.

Auf diese Formel machte der griechische Mathematiker **Diophant** (ca. 250 n. Chr.) aufmerksam; vielleicht wurde sie aber bereits vorher entdeckt.

Beispiel 5
Die *Differenz* von Dreieckszahlen kann man durch symmetrische Trapeze veranschaulichen. Die drei abgebildeten Figuren zeigen die Beziehungen

$$3 \cdot [\ \Delta(4) - \Delta(2)\ ] = \Delta(6);\ \ 3 \cdot [\Delta(5) - \Delta(3)\ ] + 1 = \Delta(7);\ \ 3 \cdot [\ \Delta(5) - \Delta(2)] = \Delta(8)$$



Allgemein gilt:

$$3 \cdot [\Delta(2n) - \Delta(n)] = \Delta(3n),\ 3 \cdot [\Delta(2n+1) - \Delta(n+1)] + 1 = \Delta(3n+1) \text{ und}$$
$$3 \cdot [\ \Delta(2n+1) - \Delta(n)\ ] = \Delta(3n+2).$$

1.1.2 Summe der ersten *n* ungeraden natürlichen Zahlen

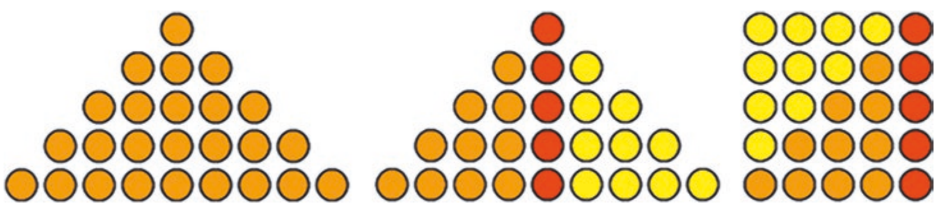
Bildet man fortlaufend die Summe der ersten ungeraden natürlichen Zahlen, so erhält man die Zahlenfolge

$$1 = 1^2;\ \ 1+3 = 2^2;\ \ 1+3+5 = 3^2;\ \ 1+3+5+7 = 4^2;\ \ 1+3+5+7+9 = 5^2 \ldots$$

also die Folge der Quadratzahlen.

Die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen kann man durch *symmetrische* Dreiecke veranschaulichen, vgl. die folgende Abb. links.

Durch Umlegen der Steine kann man leicht zeigen, dass sich als Summe der ersten n ungeraden Zahlen tatsächlich stets eine Quadratzahl ergibt, vgl. die Abbildungen in der Mitte und rechts.



Eine alternative Möglichkeit, um nachzuweisen, dass die Summe der ersten n ungeraden Zahlen eine Quadratzahl ergibt, kann man den folgenden Abbildungen entnehmen.

Hier ist:
$4 \cdot 1 = 2^2$; $4 \cdot (1 + 3) = 4^2$; $4 \cdot (1 + 3 + 5) = 6^2$; $4 \cdot (1 + 3 + 5 + 7) = 8^2$.

Allgemein gilt also $4 \cdot [\ 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)\ ] = (2n)^2 = 4n^2$ und daher

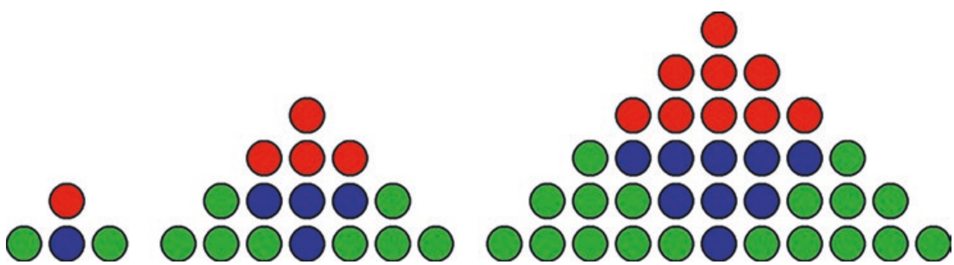
$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

Wenn die Anzahl der waagerechten Reihen in dieser symmetrischen Figur *gerade* ist, kann man ein besonderes Muster bilden:

Die symmetrische Figur kann in vier zueinander kongruente Teilfiguren unterteilt werden.

- Die erste 2-zeilige Figur links setzt sich aus vier einzelnen Steinen zusammen, also $1 + 3 = 4 \cdot 1$;
- die zweite 4-zeilige Figur enthält viermal die erste (2-zeilige) Figur, also $(1 + 3) + (5 + 7) = 4 \cdot (1 + 3)$;
- die dritte 6-zeilige Figur enthält viermal die 3-zeilige Figur, also $(1 + 3 + 5) + (7 + 9 + 11) = 4 \cdot (1 + 3 + 5)$;

usw.



Man kann dies auch so beschreiben: Oberhalb einer gedachten horizontalen Mittellinie liegt ein Viertel aller Steine der Figur, unterhalb liegen drei Viertel.

$$\frac{1}{3} = \frac{1+3}{5+7} = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \frac{1+3+5+7}{9+11+13+15} \ldots$$

Allgemein gilt also:

Regel

Eigenschaft der Summe der ersten 2*n* ungeraden natürlichen Zahlen

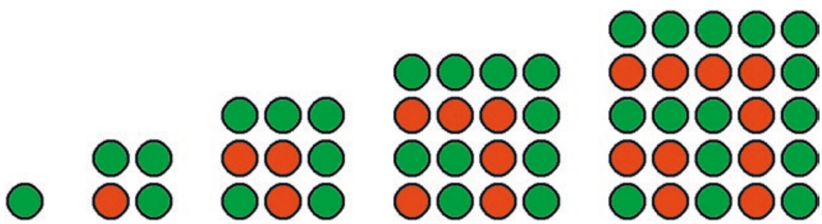
Betrachtet man die Summe der ersten $2n$ ungeraden natürlichen Zahlen, dann ist der Anteil der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen ein-Drittel-mal so groß wie die Summe der nächsten n ungeraden natürlichen Zahlen.

Diese Eigenschaft der Summe der ungeraden natürlichen Zahlen wurde von Galileo Galilei (1564–1642) dokumentiert; sie hätte aber durchaus bereits von den Pythagoreern entdeckt werden können.

1.1.3 Winkelhaken

Wie in Abschn. 1.1.1 zu sehen war, lassen sich Quadrate auf unterschiedliche Weise durch Dreiecksformen aus bunten Steinen auslegen.

Ein weiteres Muster entsteht durch das Legen von sog. **Gnomonen,** auch Winkelhaken genannt: Oberhalb und rechts von einem vorhandenen Quadrat wird noch eine zusätzliche Reihe von bunten Steinen hinzugefügt.



Die Anzahl der hinzukommenden Steine ist jeweils *ungerade.*

In den Beispielen der Abbildung gilt:

$$1 = 1^2;\ 1+3 = 2^2;\ 1+3+5 = 3^2;\ 1+3+5+7 = 4^2;\ 1+3+5+7+9 = 5^2.$$

Hieraus ergibt sich die folgende Regel:

Formel

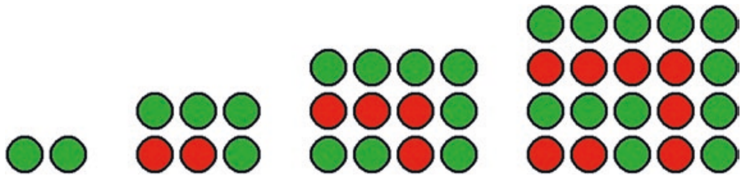
Summe der ersten *n* ungeraden natürlichen Zahlen

Die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen ist eine Quadratzahl und es gilt:

$$1+3+5+\ldots+(2n-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$$

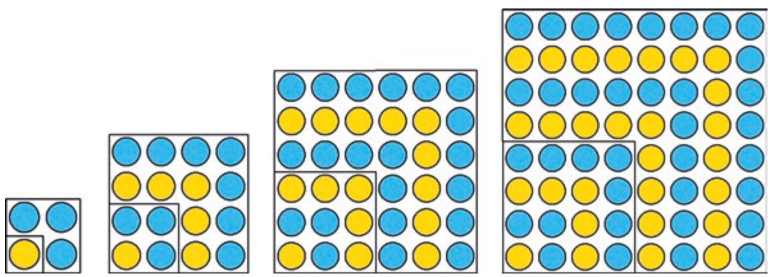
Analog könnte man auch *verlängerte* Winkelhaken betrachten, um eine Formel für die Summe der ersten n *geraden* natürlichen Zahlen aufzustellen:

$$2 = 1 \cdot 2;\ \ 2 + 4 = 2 \cdot 3;\ \ 2 + 4 + 6 = 3 \cdot 4;\ \ 2 + 4 + 6 + 8 = 4 \cdot 5,$$



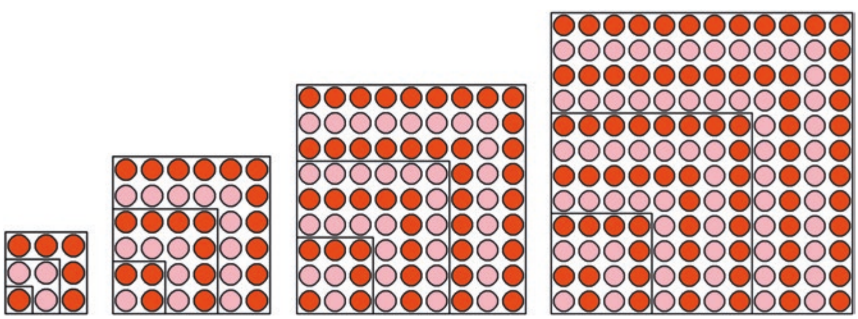
allgemein: $2 + 4 + 6 + \ldots + (2n) = \sum_{k=1}^{n} (2k) = n \cdot (n+1)$; diese Formel folgt natürlich unmittelbar aus der Formel für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen.

An der Winkelhakenfigur lässt sich auch die in Abschn. 1.1.2 beschriebene Eigenschaft des 1-zu-3-Verhältnisses der Summe ungerader Zahlen ablesen.

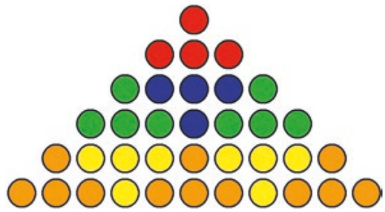


An der Darstellungsform mit Winkelhaken kann man außerdem entdecken, wie sich die o. a. Regel verallgemeinern lässt:

$$\begin{aligned} 1 : 3 : 5 &= (1+3) : (5+7) : (9+11) = (1+3+5) : (7+9+11) : (13+15+17) \\ &= (1+3+5+7) : (9+11+13+15) : (17+19+21+23) \end{aligned}$$



Hinweis Diese Verallgemeinerung lässt sich auch an den in Abschn. 1.1.2 betrachteten symmetrischen Dreiecken veranschaulichen, vgl. die folgende Abbildung.



1.1.4 Pythagoreische Zahlentripel

Zahlentripel (a; b; c) aus natürlichen Zahlen a, b, c werden als **pythagoreische Zahlentripel** bezeichnet, wenn sie die Bedingung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen.

Bereits den Babyloniern war bekannt, dass man *alle* diese Zahlentripel (a; b; c) mithilfe des Ansatzes $a = u^2 - v^2$, $b = 2 \cdot u \cdot v$ und $c = u^2 + v^2$ finden kann (wobei u, $v \in \mathbb{N}$ mit $u > v$).

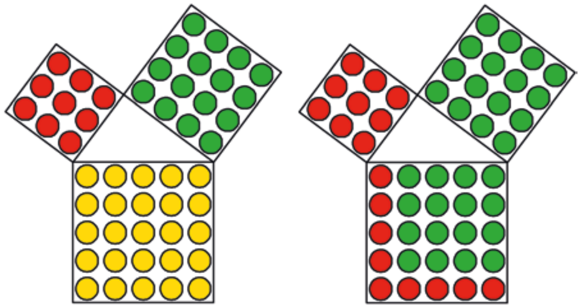
Zum Beweis vgl. beispielsweise *Mathematik ist schön,* Abschn. 2.7.4.

Die Tripel mit $u \leq 5$ können der folgenden Tabelle entnommen werden.

u	v	$a = u^2 - v^2$	$b = 2 \cdot u \cdot v$	$c = u^2 + v^2$
2	1	3	4	5
3	1	8	6	10
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	2	12	16	20
4	3	7	24	25
5	1	24	10	26
5	2	21	20	29
5	3	16	30	34
5	4	9	40	41

Um solche Zahlentripel zu finden, kann man aber auch anschaulich vorgehen und geeignete Muster aus bunten Steinen verwenden. Die folgenden beiden Abbildungen verdeutlichen die zugrunde liegende Idee:

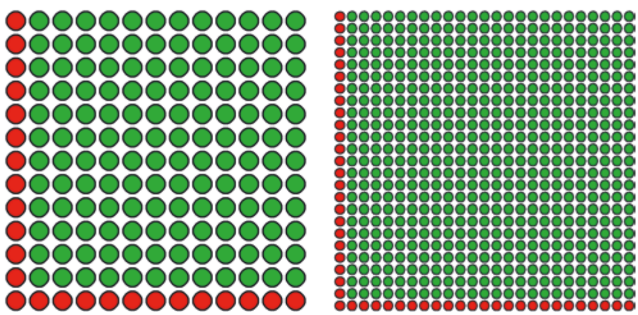
Damit die Bedingung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllt ist, muss die Anzahl der rot gefärbten Steine sowohl eine Quadratzahl sein als auch durch einen Winkelhaken dargestellt werden können.



Und da die Winkelhaken aus einer ungeraden Anzahl von Steinen bestehen, kommen also nur die ungeraden Quadratzahlen infrage. Die kleinste ungerade Quadratzahl ist die Zahl 9; die Wurzel aus dieser Zahl bestimmt die Seitenlänge des kleineren Kathetenquadrats in der o. a. Pythagoras-Figur.

Die nächstgrößere ungerade Quadratzahl ist 25: Ein Winkelhaken aus 25 Steinen begrenzt ein Quadrat der Seitenlänge 12, d. h., die Zahlen 5, 12 und 13 bilden ein pythagoreisches Zahlentripel, vgl. Abb. links.

Dann folgt die ungerade Quadratzahl 49: Ein Winkelhaken aus 49 Steinen begrenzt ein Quadrat der Seitenlänge 24, d. h., die Zahlen 7, 24 und 25 bilden ein pythagoreisches Zahlentripel, vgl. Abb. rechts.



Auf diese Weise findet man *unendlich viele* pythagoreische Zahlentripel, die alle die Eigenschaft haben, dass sich die Länge der größeren Kathete von der Länge der Hypotenuse um 1 LE unterscheidet, da nur *ein* Winkelhaken um das größere Kathetenquadrat gelegt ist:

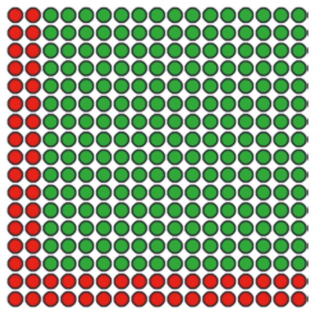
$(3;\ 4;\ 5); (5;\ 12;\ 13); (7;\ 24;\ 25); (9;\ 40;\ 41); (11;\ 60;\ 61)$ usw.

- Allgemein ergibt sich: Die Zahlen $(2n+1;\ 2n\cdot(n+1);\ 2n\cdot(n+1)+1)$ bilden ein pythagoreisches Zahlentripel. Die längere Kathete und die Hypotenuse unterscheiden sich dabei um 1 LE.

Hinweis Die Terme für die Seitenlängen b und $c = b + 1$ ergeben sich aus folgender Rechnung: Aus $(2n + 1)^2 + b^2 = (b + 1)^2$ ergibt sich $(2n + 1)^2 = 2b + 1$, also $2b = 4n^2 + 4n$ und somit $b = 2n^2 + 2n = 2n \cdot (n + 1)$.

In der o. a. Tabelle mit Pythagoras-Tripeln kommen aber auch Zahlentripel vor, die nicht mithilfe nur *eines* Winkelhakens dargestellt werden können.

Beim Tripel (8; 15; 17) unterscheiden sich die Seitenlängen von b und c um 2. Daher werden für die Darstellung *zwei* Winkelhaken (aus $31 + 33 = 64 = 8^2$ Steinen) benötigt, vgl. die folgende Abbildung.



- Allgemein kann man zeigen: Die Zahlen $(2n;\ n^2 - 1;\ n^2 + 1)$ bilden ein pythagoreisches Zahlentripel. Die längere Kathete und die Hypotenuse unterscheiden sich dabei um 2 LE.

Im Prinzip kann man mithilfe angelegter Winkelhaken alle möglichen pythagoreischen Zahlentripel ermitteln. Bei dieser Vorgehensweise entdeckt man allerdings nicht bei jeder möglichen Figur ein neues Tripel.

Setzt man beispielsweise $n = 2$ in die allgemeine Form $(2n;\ n^2 - 1;\ n^2 + 1)$ ein, so ergibt sich das Tripel (4; 3; 5).

Beim Einsetzen von $n = 3$ erhält man (6; 8; 10) – das ist das Doppelte des bekannten Tripels (3; 4; 5).

Man kann beweisen, dass durch Hinzufügen von *drei* Winkelhaken kein einziges Tripel hinzukommt, das nicht bereits durch das Anhängen von einem oder zwei Winkelhaken entdeckt wurde.

Übrigens Das in der Tabelle oben enthaltene pythagoreische Tripel (20; 21; 29) kann mithilfe eines Quadrats der Seitenlänge 21 und *acht* Winkelhaken mit $43 + 45 + 47 + 49 + 51 + 53 + 55 + 57 = 400 = 20^2$ Steinen veranschaulicht werden.

1.2 Wer war Pythagoras? Wer waren die Pythagoreer?

Von Pythagoras kennt man weder die genauen Lebensdaten, noch sind Schriften von ihm überliefert. In der Literatur findet man bezüglich seiner Lebenszeit Angaben, die ungefähr den Zeitraum 570–495 v. Chr. umfassen. Quellen aus dieser Zeit fehlen und Berichte über sein Leben wurden erst Jahrzehnte nach seinem Tod verfasst – u. a. von Herodot (ca. 480–420 v. Chr.) und von Aristoteles (384–322 v. Chr.). Auch die meisten Legenden über Pythagoras entstanden erst Jahrhunderte später.

Man kann mit Sicherheit sagen, dass Pythagoras nicht so aussah wie vom berühmten Renaissance-Maler Raffael in seinem berühmten Fresco *La scuola di Atene* (Die Schule von Athen) dargestellt (auf den beiden Briefmarken jeweils links sitzend); denn Raffael porträtierte zeitgenössische Personen (beispielsweise wählte er Leonardo da Vinci als Modell für Plato). Auch andere Porträts entsprechen eher den Vorstellungen der Künstler als der Realität.

Ob Pythagoras der Sohn eines Gemmenschneiders war oder eines Kaufmanns, ist ebenso unklar wie der Zeitpunkt und die Dauer seiner Reisen, die ihn möglicherweise nach Phönizien, Ägypten und Mesopotamien führten. Lernte er Thales von Milet (ca. 624–547 v. Chr.) persönlich kennen, der in unmittelbarer Nachbarschaft lebte? War Anaximander (ca. 610–547 v. Chr.), einer der Schüler des Thales, vielleicht einer der Lehrer des Pythagoras?

Dass ein Satz der Mathematik nach einer Person benannt ist, die mit Sicherheit *nicht* der Entdecker des Satzes war, erscheint zunächst rätselhaft, lässt aber auf die Bedeutung der Person schließen und auf deren Wirkung auf ihre Nachwelt.

Vielleicht war es Pythagoras, der das Wissen über den Zusammenhang zwischen den Seitenlängen im rechtwinkligen Dreieck aus Ägypten oder aus Mesopotamien mit nach Griechenland brachte und dort als Erster bekannt gemacht hat. Warum aber geschah dies nicht bereits durch Thales, von dem es heißt, dass er seine mathematischen und astronomischen Kenntnisse in Ägypten erworben hatte?

In vielen Darstellungen wird Pythagoras in erster Linie als Philosoph und religiöser Prophet beschrieben, weniger als Mathematiker. In den Überlieferungen, beispielsweise bei Aristoteles, ist meistens von den *Pythagoreern* die Rede, also von der „Schule" des Pythagoras, sodass man eher davon ausgehen kann, dass viele Ideen, die Pythagoras zugeordnet werden, erst von seinen Schülern entwickelt wurden.

Vermutlich um 530 (520?) v. Chr. ließ sich Pythagoras in der griechischen Kolonie Kroton in Süditalien nieder und gründete dort einen Geheimbund. Unter seinen Jüngern galt Pythagoras als der vollkommene Weise; auf ihn geht die Bezeichnung *Philosoph* zurück als *ein Mensch, der die Weisheit liebt.*

Die Jünger lebten nach strengen Ordensregeln; ihre asketische, vegetarische Lebensweise war für manche Zeitgenossen Anlass zu Spott. Sie glaubten an die Unsterblichkeit der Seele und waren der Überzeugung, dass man dem Schicksal der Seelenwanderung und dem ewigen Kreislauf der Wiedergeburt nur entgehen kann, wenn man sich mit den *Mysterien der Zahlen* und der *Harmonie* beschäftigt.

Der Kosmos der Pythagoreer war nach Zahlen geordnet; in diesem Sinne war Mathematik ein Teil ihrer Religion. Das von ihnen geprägte Wort *Mathematik* entstand aus dem Begriff $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha$ (mathema, die wissbaren Dinge).

Die Arithmetik war für die Pythagoreer keine Rechenkunst, sondern vielmehr die Lehre von den Zahlen $(=\alpha\rho\iota\theta\mu o\varsigma$, arithmos). Sie interessierten sich für die *Eigenschaften* der Zahlen; erst später wuchs das Interesse an Gesetzmäßigkeiten und an Rechentechniken.

So übten die **vollkommenen Zahlen** (Zahlen wie beispielsweise 6 und 28, die jeweils gleich der Summe ihrer echten Teiler sind) und **befreundete Zahlen** (das sind Zahlenpaare wie beispielsweise 220 und 284, bei denen die Summe der echten Teiler jeweils gleich der Partnerzahl ist) eine besondere Faszination aus, vgl. auch Kap. 11 und 14.

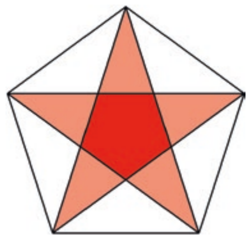
Der niederländische Mathematiker und Mathematikhistoriker Bartel Leendert van der Waerden bezeichnete es als das Verdienst der Pythagoreer, dass sie *die Mathematik von den praktischen Anwendungen befreiten,* also Mathematik betrieben, *um dem Göttlichen näherzukommen.*

Die Pythagoreer beschäftigten sich mit Astronomie und Astrologie, mit Arithmetik und Musiktheorie *(Harmonika).* Nach den Lehren ihres Meisters war der Weg zum Transzendenten nur durch die Beschäftigung mit den Eigenschaften der (natürlichen) Zahlen möglich, denn: **Alles ist Zahl.**

Hierbei spielen Zahlenverhältnisse (Proportionen) eine wichtige Rolle. Die Pythagoreer beschäftigten sich sowohl mit dem arithmetischen als auch dem geometrischen wie dem harmonischen Mittel.

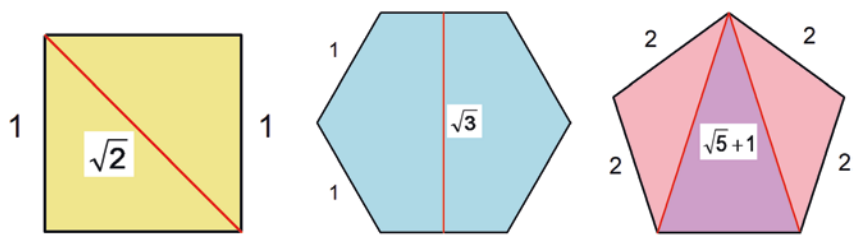
Von den regulären Körpern kannten die Pythagoreer nur das regelmäßige Tetraeder, das Hexaeder (Würfel) und das Dodekaeder.

Das Sternfünfeck *(Pentagramm)* war das Erkennungszeichen des Geheimbundes der Pythagoreer. Die Diagonalen dieser symmetrischen Figur schneiden einander gegenseitig nach dem *Goldenen Schnitt* (diese Bezeichnung für das besondere Zahlenverhältnis wurde aber erst im 19. Jahrhundert geprägt).



Ob es tatsächlich ein doppelter Schock für die Pythagoreer war, dass ausgerechnet einer der ihren herausfand, dass sich das Teilungsverhältnis der Diagonalen nicht mithilfe von natürlichen Zahlen darstellen lässt, mag bezweifelt werden. Immerhin war es legendenbildend: Angeblich wurde der Entdecker der Eigenschaft, Hippasos von Metapont (ca. 530–450 v. Chr.), von den Göttern für seinen Frevel bestraft und ertrank im Meer.

Vermutlich war es aber eher so, dass sich unter den Schülern des Pythagoras über die Jahre die Mathematik aus einer begrenzten mystischen Zahlenlehre zu einer exakten Wissenschaft entwickelte. Dass es geometrische Figuren mit *inkommensurablen* Strecken gibt, also mit *irrationalen* Streckenlängen, trug möglicherweise dazu bei, dass sich die Mathematiker in den folgenden Jahrhunderten intensiver mit geometrischen Konstruktionen beschäftigten als mit dem Rechnen mit Wurzeltermen.



Viele dieser Erkenntnisse wurden in die *Elemente* des Euklid (325–265 v. Chr.) übernommen.

Die Vereinigung der Pythagoreer zerfiel im Laufe eines Jahrhunderts wegen zunehmend unterschiedlicher politischer Ansichten. Pythagoras selbst wurde um das Jahr 510 v. Chr. aus Kroton vertrieben und siedelte sich im benachbarten Metapont an, wo er vermutlich 495 v. Chr. starb.

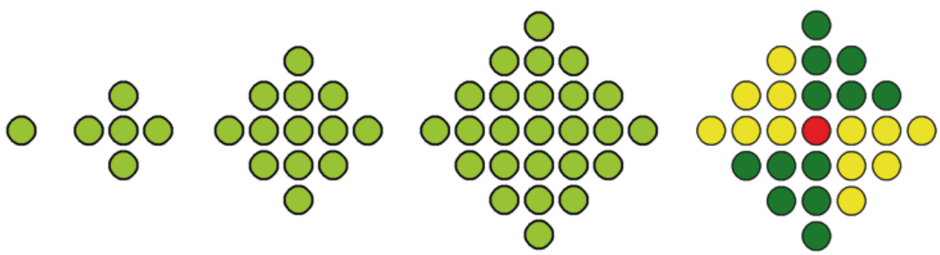
1.3 Weitere pythagoreische Zahlenmuster

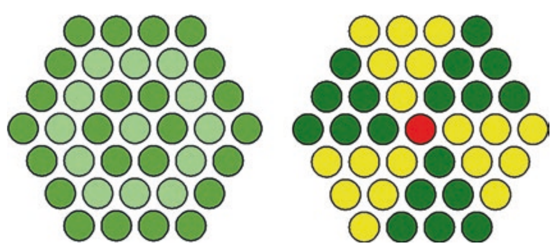
Die Idee, farbige Steine in Mustern auszulegen, war von nachhaltiger Wirkung.

- **Abu Ali al-Hasan Ibn al-Haitham** (965–1039) leitete mithilfe dieser Methode eine Formel für die Summe der ersten *n* Quadratzahlen her, vgl. Kap. 4.
- Der persische Mathematiker **Abu Bakr ibn Muhammad ibn al-Husayn al-Karaji** (953–1029) veranschaulichte die Summe der ersten *n* Kubikzahlen mithilfe einer Anordnung von bunten Steinen, die man Abb. 1.1 entnehmen kann (vgl. *Mathematik ist schön*, Abschn. 2.6.1).

Über die Mathematiker des islamischen Kulturkreises gelangten die Ideen der Pythagoreer wieder nach Europa zurück. So beschäftigte sich Pierre de Fermat (1607/08–1665) intensiv mit Dreiecks- und Quadratzahlen, allgemein mit den sog. **Polygonalzahlen**, vgl. Kap. 11.

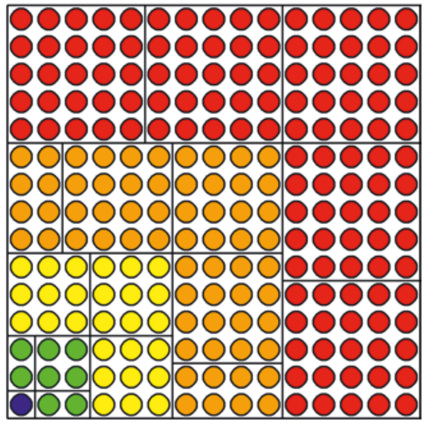
Darüber hinaus ergaben sich aus der Beschäftigung mit den sog. **zentrierten Polygonalzahlen** weitere interessante Zusammenhänge, auf die hier nicht näher eingegangen werden kann. Die folgenden Abbildungen veranschaulichen die Folge der zentrierten Quadratzahlen 1, 5, 13, 25, … und die Folge der zentrierten Sechseckzahlen 1, 7, 19, 37, … sowie jeweils den Zusammenhang mit den Dreieckszahlen.





- Der englische Mathematiker James-Joseph Sylvester (1814–1897) untersuchte die Frage, auf wie viele Arten man eine natürliche Zahl als Summe *aufeinanderfolgender* natürlicher Zahlen darstellen kann. Auch hier kann man durch Umlegen von Steinen zu ersten Erkenntnissen kommen.

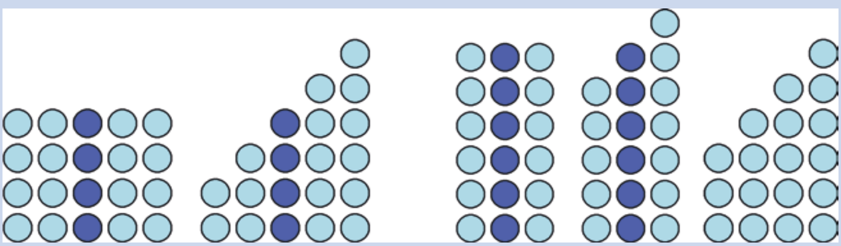
Abb. 1.1 Darstellung der Summe der ersten fünf Kubikzahlen



Beispiele zum Satz von Sylvester

Die Zahl 20 kann man durch fünf Säulen mit jeweils vier Steinen darstellen; durch Umverteilen findet man so die Darstellung $2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$, vgl. Abb. links.

Analog erhält man für die Zahl 18 die Darstellung $5 + 6 + 7 = 18$; aber es gibt noch eine weitere Möglichkeit: $3 + 4 + 5 + 6 = 18$, vgl. Abb. rechts.



Hinweis Sylvester zeigte, dass die Anzahl der möglichen Summendarstellungen gleich der Anzahl der ungeraden Teiler ist, vgl. *Mathematik ist schön,* Abschn. 2.4.

1.4 Literaturhinweise

Eine wichtige Adresse zum Auffinden von Informationen über Mathematiker und deren wissenschaftliche Leistungen ist die Homepage der St. Andrews University.

Informationen über Pythagoras und die Pythagoreer findet man unter:

- www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pythagoras.html
- Strick, Heinz Klaus (2008): *Kalenderblatt über Pythagoras*, www.spektrum.de/wissen/pythagoras-von-samos-580-500-v-chr/943152

- Strick, Heinz Klaus (2013): *Geniale Ideen großer Mathematiker (2): Pythagoreische Muster*, MNU Journal, 66 (6)
- Strick, Heinz Klaus (2017): *Mathematik ist schön*, Springer, Heidelberg, Kap. 2 (Muster aus bunten Steinen), Kap. 17 (Der Satz des Pythagoras)

Ausführliche Darstellungen über Pythagoras und die Pythagoreer findet man u. a. in:

- van der Waerden, Bartel Leendert (1956): *Erwachende Wissenschaft,* Birkhäuser, Basel
- Merbach, Uta C., Boyer, Carl B. (2011): *A History of Mathematics,* 3rd Edition, John Wiley & Sons, Hoboken N.J.
- Herrmann, Dietmar (2014): *Die antike Mathematik,* Springer Spektrum, Berlin

Zahlreiche Anregungen über Punktmuster findet man u. a. in:

- Nelsen, Roger B. (1993/2000/2015): *Proofs without Words I, II, III,* The Mathematical Association of America, Washington

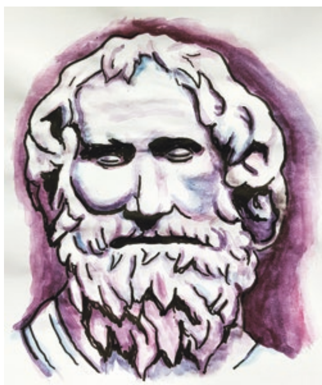
Wikipedia-Artikel in deutscher, englischer und französischer Sprache zu den Stichwörtern:

- Pythagoras* (Pythagoras*, Pythagore)
- Pythagoreer* (Pythagoreanism, École pythagoricienne)
- Tetraktys (Tetractys, –)
- Dreieckszahl (Triangular number, Nombre triangulaire)
- Polygonalzahl (Polygonal number, Nombre polygonal)
- Zentrierte Polygonalzahl (Centered polygonal number, Nombre polygonale centré)
- Figurierte Zahl (Figurate number, Nombre figuré)

*) Auszeichnung als lesenswerter Artikel

2 Archimedes von Syrakus – Mathematiker, Physiker und Ingenieur

Es gibt Dinge, die den meisten Menschen unglaublich erscheinen, die sich nicht mit Mathematik beschäftigt haben.



Archimedes gilt als der bedeutendste Mathematiker und Physiker des Altertums. Er verfasste zahlreiche Schriften, deren Inhalt aber nur zum Teil durch die Veröffentlichungen von Gelehrten des islamischen Kulturkreises erhalten blieb.

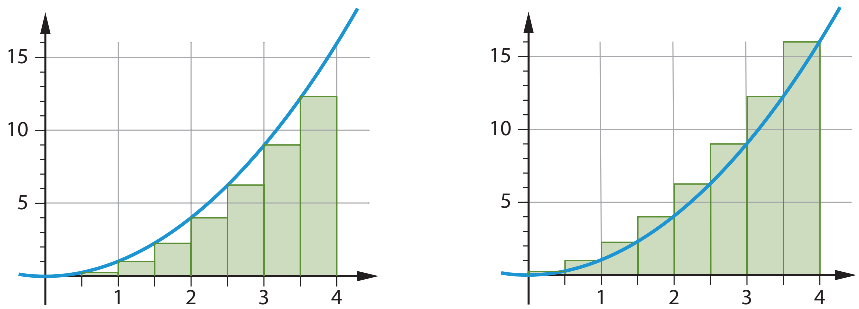
Wahrhaft sensationell war daher der Fund eines Palimpsests (doppelt beschriebenes Dokument) im Jahr 1906 durch den dänischen Mathematikhistoriker Johan Ludvig Heiberg (1854–1928) in Konstantinopel. Dieses enthielt umfangreiche, fast vollständige Texte aus sieben Büchern des Archimedes, sodass wir erst seit Beginn des 20. Jahrhunderts einen Überblick über die Themenvielfalt haben, mit denen sich dieses Universalgenie (Thomas Sonar: „ein Gigant") beschäftigte, beispielsweise die Berechnung des Flächeninhalts eines Parabelsegments, die Volumen- und Oberflächenberechnungen bei Kugel, Kegel, Zylinder, Ellipsoid, Rotationsparaboloid und von Segmenten dieser Körper sowie Schwerpunktbestimmungen bei diesen Körpern.

H. K. Strick, *Mathematik – einfach genial!*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-60449-6_2

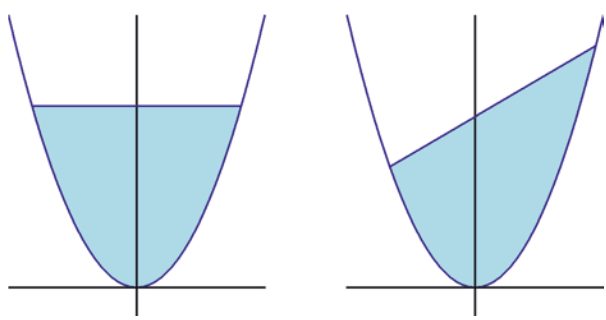
2.1 Einfach genial: Archimedes bestimmt den Flächeninhalt eines Parabelsegments

Im Schulunterricht erfolgt die Berechnung von Flächen unter Parabeln im Rahmen der Integralrechnung – so wie sie im 17. Jahrhundert entwickelt und durch **Bernhard Riemann** im 19. Jahrhundert vollendet wurde.

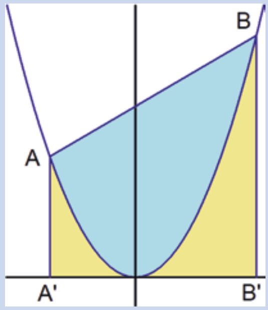
Die folgenden Abbildungen zeigen den Graphen einer Normalparabel mit $y = x^2$ sowie zwei Folgen von Rechtecken, mit denen die Fläche unter dem Graphen der Normalparabel näherungsweise bestimmt werden kann (sog. Untersumme bzw. Obersumme).



Ein Parabelsegment (Parabelabschnitt) entsteht, wenn eine Gerade durch zwei Punkte der Parabel gezeichnet wird.



Bestimmung des Flächeninhalts eines Parabelsegments mithilfe der Integralrechnung
Der Flächeninhalt ergibt sich als Differenz aus der Fläche des Trapezes *AA'B'B* und der Fläche unter der Parabel zwischen *A'* und *B'* (*A'*, *B'* sind jeweils die Punkte auf der *x*-Achse, die man durch senkrechte Projektion von *A*, *B* auf die *x*-Achse erhält, vgl. Grafik).



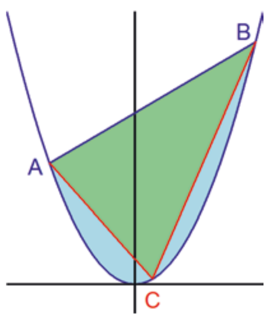
Für den Flächeninhalt F_{Seg} eines Parabelsegments zwischen den Punkten $A\,(a|a^2)$ und $B\,(b|b^2)$ gilt:

$$\begin{aligned} F_{\text{Seg}} &= \frac{1}{2}\cdot(a^2+b^2)\cdot(b-a)-\int_a^b x^2dx \\ &= \frac{1}{2}\cdot a^2b+\frac{1}{2}\cdot b^3-\frac{1}{2}\cdot a^3-\frac{1}{2}\cdot ab^2-\frac{1}{3}\cdot(b^3-a^3) \\ &= \frac{1}{6}\cdot b^3-\frac{1}{2}\cdot ab^2+\frac{1}{2}\cdot a^2b-\frac{1}{6}\cdot a^3=\frac{1}{6}\cdot(b-a)^3 \end{aligned}$$

Archimedes fand bereits 2000 Jahre vor der Erfindung der „klassischen" Integralrechnung eine geniale Methode, den Flächeninhalt eines Parabelsegments zu bestimmen.

Wir führen hier die Rechnung *in einem Koordinatensystem* für die Normalparabel mit $y=x^2$ durch. Dies entspricht so natürlich nicht der Vorgehensweise des Archimedes, sondern ist den Methoden angepasst, wie sie heute in der Schule vermittelt werden.

Zu den beiden Punkten $A\,(a|a^2)$ und $B\,(b|b^2)$ der Parabel wird zunächst ein Punkt C der Parabel bestimmt, dessen x-Koordinate gleich dem arithmetischen Mittelwert von a und b ist, d. h. $C\left(\frac{a+b}{2}\middle|\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)$.



Den Flächeninhalt F_{ABC} des Dreiecks ABC kann man bestimmen, indem man vom Flächeninhalt des Trapezes $AA'B'B$ die Flächeninhalte der Trapeze $AA'C'C$ und $CC'B'B$ subtrahiert:

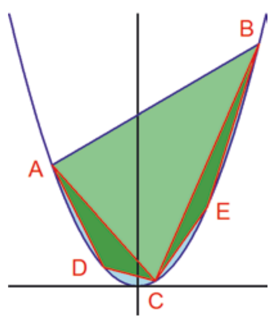
$$\begin{aligned}
F_{ABC} &= F_{\text{Trapez}}(A,B) - F_{\text{Trapez}}(A,C) - F_{\text{Trapez}}(C,B)\\
&= \frac{1}{2}\cdot(a^2+b^2)\cdot(b-a) - \frac{1}{2}\cdot\left(a^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot(b-a)\\
&\quad - \frac{1}{2}\cdot\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+b^2\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot(b-a)\\
&= \frac{1}{2}\cdot(b-a)\cdot\left[a^2+b^2-\frac{1}{2}\cdot a^2-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\cdot b^2\right]\\
&= \frac{1}{2}\cdot(b-a)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[a^2+b^2-2\cdot\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]\\
&= \frac{1}{2}\cdot(b-a)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[a^2+b^2-\frac{1}{2}\cdot a^2-a\cdot b-\frac{1}{2}\cdot b^2\right]\\
&= \frac{1}{2}\cdot(b-a)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\right]\\
&= \frac{1}{8}\cdot(b-a)^3
\end{aligned}$$

Diese Formel gilt für beliebige Punkte A und B einer Parabel sowie für den Punkt C, dessen x-Koordinate gleich dem arithmetischen Mittel der x-Koordinaten der Punkte A und B ist.

$$F_{ABC} = \frac{1}{8}\cdot(b-a)^3$$

Wenn man also – wie beschrieben – ein Dreieck in ein Parabelsegment einzeichnet, dann entstehen zwei neue Parabelsegmente, in die man wiederum jeweils ein Dreieck eintragen kann usw.

Im zweiten Schritt bestimmt man also zwei Punkte D und E der Parabel, deren x-Koordinaten gleich dem arithmetischen Mittelwert von a und $\frac{a+b}{2}$ bzw. von $\frac{a+b}{2}$ und b sind, d. h. $D\left(\frac{1}{2}\cdot\left(a+\frac{a+b}{2}\right)\middle|\frac{1}{4}\cdot\left(a+\frac{a+b}{2}\right)^2\right)$ und $E\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a+b}{2}+b\right)\middle|\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{a+b}{2}+b\right)^2\right)$.



Die Flächeninhalte der neu entstandenen Dreiecke *ADC* und *CEB* kann man mithilfe der oben hergeleiteten Formel bestimmen:

$$F_{ADC} = \frac{1}{8} \cdot (c-a)^3 = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{a+b}{2} - a\right)^3 = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^3 = \frac{1}{64} \cdot (b-a)^3 = \frac{1}{8} \cdot F_{ACB}$$

$$F_{CEB} = \frac{1}{8} \cdot (b-c)^3 = \frac{1}{8} \cdot \left(b - \frac{a+b}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^3 = \frac{1}{64} \cdot (b-a)^3 = \frac{1}{8} \cdot F_{ACB}$$

Die beiden neu entstandenen Dreiecke *ADC* und *CEB* sind also gleich groß und deren Flächeninhalt beträgt jeweils ein Achtel des Flächeninhalts des Ausgangsdreiecks *ACB*. Zusammen machen diese beiden Erweiterungen der Figur ein Viertel des Flächeninhalts des Ausgangsdreiecks *ACB* aus.

Das Verfahren lässt sich beliebig oft wiederholen; mit jedem Schritt kommen jeweils doppelt so viele Dreiecke hinzu, deren Flächeninhalte *zusammen* jeweils ein Viertel der Flächeninhalte der Dreiecke des vorangegangenen Schritts ausmachen.

Durch diese unendliche Folge von Dreiecken wird die Fläche des Parabelsegments *ausgeschöpft.*

Mithilfe dieses sog. **Exhaustionsverfahren** (s. u.) kann also der Flächeninhalt des Parabelsegments als eine unendliche Summe von Flächeninhalten von Teilflächen (hier: Dreiecken) ermittelt werden.

Bezeichnet man den Flächeninhalt des Ausgangsdreiecks *ACB* kurz mit *F,* dann ergibt sich für den Flächeninhalt des Parabelsegments die unendliche Summe von Gliedern einer geometrischen Folge

$F + \frac{F}{4} + \frac{F}{4^2} + \frac{F}{4^3} + \ldots = \frac{F}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \cdot F.$

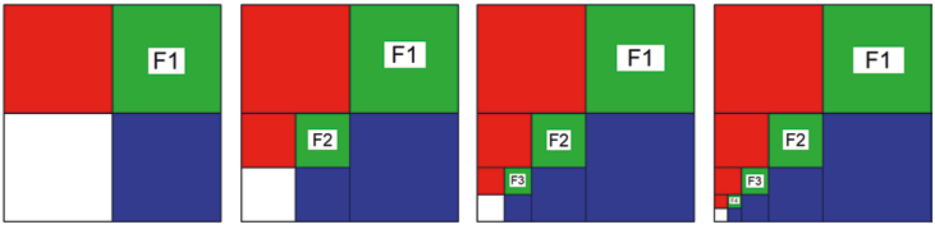
Zusammen mit $F = \frac{1}{8} \cdot (b-a)^3$ folgt wie oben $F_{\text{Seg}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{8} \cdot (b-a)^3 = \frac{1}{6} \cdot (b-a)^3$.

Formel

Fläche eines Parabelsegments

Sind $A\,(a|a^2)$ und $B\,(b|b^2)$ zwei Punkte einer Normalparabel, dann ist der Flächeninhalt F_{Seg} des Parabelsegments, das durch diese beiden Punkte bestimmt ist, vier Drittel mal so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten *A, B* und $C\left(\frac{a+b}{2}\middle|\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)$, nämlich gleich $F_{\text{Seg}} = \frac{4}{3} \cdot F_{ABC} = \frac{1}{6} \cdot (b-a)^3$.

Die Begründung für die Berechnung der unendlichen Summe kann anschaulich so erfolgen:



Man beginnt mit dem (äußeren, vollständigen) Quadrat, dessen Flächeninhalt für den Flächeninhalt F des Dreiecks ACB steht. Die Flächeninhalte (z. B.) der grün gefärbten Quadrate $F_1, F_2, F_3, F_4, \ldots$ sind jeweils ein Viertel so groß wie die der jeweils vorangehenden Glieder der Folge.

Da „schließlich" jeweils ein Drittel des Ausgangsquadrats rot bzw. grün bzw. blau gefärbt ist, gilt:

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + \ldots = \tfrac{1}{3} \cdot F$$

Hieraus folgt daher: $F + F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + \ldots = \tfrac{4}{3} \cdot F$

Hinweis Die Anwendung der Summenformel

$$a + a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + \ldots = \frac{a}{1-q} \quad (0 < q < 1)$$

für die unendliche geometrische Reihe entspricht nicht der Vorgehensweise des Archimedes, denn Grenzwerte sind eine „Errungenschaft" der Mathematik der Neuzeit.

Dennoch kam Archimedes zum selben Ergebnis, und zwar mit den folgenden Überlegungen:

Betrachtet man beispielsweise fünf Summanden A, B, C, D, E einer geometrischen Folge, bei der das jeweils folgende Glied ein Viertel so groß ist wie das vorangegangene Glied, dann gelten die folgenden Beziehungen:

$$B + \frac{1}{3}B = \frac{4}{3}B = \frac{1}{3}A,\ C + \frac{1}{3}C = \frac{4}{3}C = \frac{1}{3}B,\ D + \frac{1}{3}D = \frac{4}{3}D = \frac{1}{3}C,\ E + \frac{1}{3}E = \frac{4}{3}E = \frac{1}{3}D.$$

Durch Addition erhält man hieraus:

$$B + C + D + E + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{3}D + \frac{1}{3}E = \frac{4}{3} \cdot (B + C + D + E) = \frac{1}{3} \cdot (A + B + C + D)$$

Lässt man die auf beiden Seiten stehenden Summanden $\tfrac{1}{3}B + \tfrac{1}{3}C + \tfrac{1}{3}D$ weg, dann bleibt $B + C + D + E + \tfrac{1}{3}E = \tfrac{1}{3}A$ und schließlich ergibt sich $A + B + C + D + E + \tfrac{1}{3}E = \tfrac{4}{3}A$.

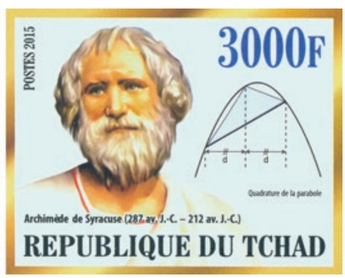
Eine entsprechende Überlegung kann für beliebig viele Summanden A, B, C, …, X, Y, Z angestellt werden und stets gilt: $\frac{4}{3}A - (A + B + C + \ldots + X + Y + Z) = \frac{1}{3}Z$, d. h., die Differenz zwischen dem Grenzwert und einer beliebigen endlichen Teilsumme ist gerade ein Drittel so groß wie der letzte Summand, und da die einzelnen Summenglieder eine geometrische Folge bilden, wird dieser beliebig klein!

Um jeden Zweifel an der Richtigkeit seiner Überlegungen zu beseitigen, führte Archimedes im Anschluss an die o. a. Rechnung noch zwei indirekte Beweise. Bezeichnen wir mit A_1 den Flächeninhalt des Parabelsegments und mit A_2 die Summe der Flächeninhalte der unendlich vielen einbeschriebenen Dreiecke, dann führte er den Beweis für $A_1 = A_2$, indem er zeigte, dass sowohl die Annahme $A_1 < A_2$ als auch die Annahme $A_1 > A_2$ zu einem Widerspruch führt.

Das von Archimedes in vielen seiner Beweise angewandte **Exhaustionsprinzip** geht zurück auf den griechischen Mathematiker **Eudoxos von Knidos** (ca. 395–340 v. Chr.); auch Euklid hielt das Prinzip für so bedeutsam, dass er es in das 10. Buch der *Elemente* aufnahm.

Satz

Exhaustionsprinzip des Eudoxos
Nimmt man von einer Größe die Hälfte weg oder mehr als die Hälfte, und wiederholt man diesen Vorgang für die so verkleinerte Größe, dann wird von der ursprünglichen Größe irgendwann nur noch ein Rest übrig bleiben, der kleiner ist als jede beliebig kleine Größe.



2.2 Wer war Archimedes?

Über sein Leben ist nur wenig bekannt: Vermutlich wurde Archimedes im Jahr 288 v. Chr. in Syrakus, einer griechischen Stadt auf Sizilien, geboren; sein Vater war Phidias, ein Astronom. Archimedes studierte in Alexandria (Ägypten), dem damaligen Wissenschaftszentrum der hellenistischen Welt, und lernte dort u. a. den Mathematiker Eratosthenes kennen, mit dem er später noch korrespondierte.

Nach seiner Studienzeit wirkte Archimedes als Wissenschaftler und Ingenieur in seiner Heimatstadt im Dienste des Königs Hieron II., mit dem er (nach Plutarch) verwandt war.

Im Jahr 212 v. Chr. kam er bei der Eroberung der Stadt Syrakus durch die Römer (im Zusammenhang mit dem 2. Punischen Krieg, 218–201 v. Chr.) gewaltsam ums Leben.

Um das Leben und den Tod des Archimedes ranken sich viele Anekdoten, die von verschiedenen römischen Schriftstellern berichtet werden, deren Wahrheitsgehalt sich nicht mehr überprüfen lässt; sie werden sich aber vermutlich wohl kaum so ereignet haben, wie sie berichtet wurden.

- *Heureka! Heureka!*

Vitruv (ca. 80–15 v. Chr.) und Plutarch (ca. 45–125 n. Chr.) berichten, dass Archimedes nackt und „Heureka!" rufend durch die Stadt gelaufen sein soll, nachdem er in der Badewanne das nach ihm benannte *archimedische Prinzip* (s. u.) entdeckt hatte.

Ob Archimedes das Prinzip des Auftriebs tatsächlich beim Überlaufen seiner Badewanne entdeckt hat, wie Jahrhunderte später notiert wurde, mag dahingestellt sein; das *Heureka* („ich habe es gefunden") des Archimedes wird seitdem als geflügeltes Wort verwendet, wenn ein schwieriges Problem gelöst ist.

Anlass für die Entdeckung des *archimedischen Prinzips* soll ein Auftrag seines Königs Hieron II. an Archimedes gewesen sein. Dieser sollte prüfen, ob eine von einem Goldschmied gefertigte Krone tatsächlich aus dem Gold war, das er (der König) dafür zur Verfügung gestellt hatte, oder ob der beauftragte Handwerker das Edelmetall teilweise durch Silber ersetzt hatte.

Passt die Badewannen-Anekdote eigentlich zum königlichen Auftrag? Spielte das Phänomen „Auftrieb" für die Lösung des Kronen-Problems wirklich eine Rolle? Wie könnte Archimedes vorgegangen sein?

- Archimedes war in der Lage, Gewicht und Volumen der Krone zu bestimmen, und hiermit hätte er das spezifische Gewicht der vermuteten Metalllegierung ermitteln können. Da die spezifischen Gewichte von Gold (in unseren Maßeinheiten: 19,3 g/cm^3) bzw. von Silber (10,5 g/cm^3) stark voneinander abweichen, wäre der mögliche Betrug des Goldschmieds auf diese Weise nachweisbar – wenigstens vom Prinzip her.

Aber: Waren in der damaligen Zeit so präzise Messungen überhaupt möglich?

- Eine andere denkbare Version der Geschichte wäre die folgende: Archimedes legt die vom Goldschmied gefertigte Krone auf eine der beiden Schalen einer Balkenwaage und auf die andere Schale so viel Gold, dass die Waage im Gleichgewicht ist. Dann taucht er die Krone in ein Gefäß mit Wasser, sodass eine gewisse Menge Wasser überläuft. Wenn er die Krone wieder herausnimmt und stattdessen die abgemessene Menge Gold von der anderen Waagschale in das Wassergefäß legt, dann würde der Wasserspiegel wieder bis zum Gefäßrand steigen, wenn der Goldschmied *nicht* betrogen hat, aber erneut würde eine gewisse Menge Wasser überlaufen, wenn der

Goldschmied eine Legierung für die Krone verwendet hat (da diese ein größeres Volumen einnehmen würde als das „reine“ Gold).

Das Überlaufen auch nur einer geringen Menge Wassers wäre der Beweis für den Betrug gewesen.

Vielleicht war es dann doch das Auftriebsprinzip, das von Archimedes zur Überprüfung genutzt wurde:

- In einem ersten Schritt legte er die Krone bzw. eine Menge an Gold auf die beiden Waagschalen, sodass die Waage im Gleichgewicht ist. Dann stellte er diese im Gleichgewicht befindliche Balkenwaage vollständig ins Wasser. Wenn der Goldschmied betrogen hat, dann bewegt sich der Hebelarm, auf dem die Krone liegt, nach oben, da die minderwertige Legierung ein größeres Volumen an Wasser verdrängt als das reine Gold und diese Seite der Waage daher eine größere Auftriebskraft erfährt.

Bei dieser Vorgehensweise genügen bereits geringe Unterschiede bzgl. des spezifischen Gewichts (also des Volumens), um die Balkenwaage in der Flüssigkeit aus dem Gleichgewicht zu bringen – eine präzise Gewichts- und Volumenbestimmung ist nicht erforderlich.

Die hierbei angewandte Gesetzmäßigkeit besagt:

Regel

Archimedisches Prinzip

Wird ein Körper teilweise oder vollständig in eine Flüssigkeit getaucht, dann erfährt er eine Auftriebskraft, die gleich der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit ist.

Die griechische Europa-Briefmarke aus dem Jahr 1983 erinnert an das von Archimedes entdeckte Phänomen des Auftriebs (siehe den Versuchsaufbau im Hintergrund), außerdem an gewisse geometrische Konstruktionen, mit denen sich Archimedes beschäftigt hatte.

Die Auftriebskraft erklärt sich aus den Druckunterschieden innerhalb der Flüssigkeit (unterschiedliche Höhe der Flüssigkeitssäulen über dem Körper beim unteren und oberen Niveau).

Das Gesetz gilt entsprechend auch in unterschiedlichen gasförmigen Medien, was man z. B. bei dem mit Heliumgas gefüllten Zeppelin-Luftschiff nutzt, mit dem große Lasten transportiert werden können.

Beispiele

a) **Vollständig eingetauchte Stahlkugel**
Um eine Stahlkugel mit Radius 5 cm zu halten, wird eine Gewichtskraft $F_G \approx 40{,}37$ N benötigt:
Masse: $m_{\text{Stahl}} = \rho_{\text{Stahl}} \cdot V = 7{,}86\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (5\text{ cm})^3\right) \approx 4115{,}5\text{ g} = 4{,}1155\text{ kg}$
Zugehörige Gewichtskraft: $F_G = \text{g} \cdot \text{m} \approx 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 4{,}1155\text{ kg} \approx 40{,}373\text{ N}$
Wird die Kugel vollständig in Wasser eingetaucht, dann wird die zum Festhalten benötigte Gewichtskraft F_G um die Auftriebskraft F_A vermindert:
$F_A = \text{g} \cdot (\rho_{\text{Wasser}} \cdot V) = 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1{,}0\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (5\text{ cm})^3 \approx 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}524\text{ kg} \approx 5{,}137\text{ N}$

b) **Schwimmender Quader**
Ein Holzquader mit den Maßen $a = 20$ cm (Länge), $b = 10$ cm (Breite) und $c = 8$ cm (Höhe) aus Eichenholz (Dichte $\rho = 0{,}67\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$) wird in ein Wasserbecken gelegt.
Volumen des Körpers: $V = 1600\text{ cm}^3$
Gewicht des Körpers:
$F_G = \text{g} \cdot \text{m} \approx 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}67\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 1600\text{ cm}^3 \approx 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1{,}072\text{ kg}$ ($\approx 10{,}516$ N)

Der Quader schwimmt auf dem Wasser, d. h., er taucht nicht vollständig ins Wasser ein. Die Eintauchtiefe werde mit x bezeichnet (Angabe in cm).
Der Holzquader erfährt durch die verdrängte Flüssigkeit eine Auftriebskraft von $F_A = \text{g} \cdot \text{m} = 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1{,}0\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 200x\text{ cm}^3 = 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}2 \cdot x\text{ kg}$, die den Holzquader im Gleichgewicht hält.
Aus der Gleichgewichtsbedingung ergibt sich $9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1{,}072\text{ kg} = 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}2x\text{ kg}$, und hieraus $1{,}072 = 0{,}2x$, also eine Eintauchtiefe von $x = 5{,}36$ (cm)

- *Gebt mir einen Hebel, der lang genug ist, und gebt mir einen Punkt, wo ich sicher stehen kann, dann kann ich die Erde mit einer Hand bewegen. (Δός μοι ποῦ στῶ, καὶ τὴν γῆν κινήσω)*

Archimedes soll sich mit diesem Spruch gegen die These des Aristoteles gewandt haben, der verkündet hatte, dass die menschliche Kraft begrenzt sei. Als der Neubau eines sehr großen Schiffs beendet war, ließ es Archimedes – noch vor dem Stapellauf – beladen und die Mannschaft an Bord gehen. Er schaffte es dann allein mit seiner Muskelkraft, die er durch eine Kombination von Hebeln, Flaschenzügen und ähnlichen Hilfsmitteln verstärkte, das Schiff einige Meter fortzubewegen.

Archimedes gilt als der Erfinder zahlreicher sog. **einfacher Maschinen.** Hierzu zählen Hebel, Seilwinden, Flaschenzüge und auch die sog. **archimedische Schraube,** mit der man Wasser auf ein höheres Niveau befördern kann, wie eine italienische Europa-Briefmarke aus dem Jahr 1983 zeigt.

Als **Hebel** werden starre Körper bezeichnet, die sich um einen Punkt drehen lassen. Der Hebelarm ist dann der Abstand des Drehpunkts zu einem „Ende" des Hebels. Wirkt auf das Ende eines Hebels eine Kraft, z. B. das Gewicht eines dort aufgehängten Körpers, dann dreht sich der Hebel. Das Produkt aus Hebelarm und der wirkenden Kraft nennt man daher **Drehmoment.** Eine Balkenwaage ist ein Hebel mit zwei gleich langen Hebelarmen.

Folgt man den Herausgebern der Briefmarkenserie aus Nicaragua aus dem Jahr 1971, dann gehört das von Archimedes entdeckte Hebelgesetz zu den zehn mathematischen Formeln, die das Antlitz der Erde veränderten *(las 10 formulas matematicas que cambiaron la faz de la tierra).*

Regel

Das Hebelgesetz

Ein Hebel ist im Gleichgewicht, wenn die Summe der Drehmomente gleich null ist.

Besteht der Hebel aus einer Stange, die drehbar aufliegt oder aufgehängt ist, dann gilt also:

- Kraft mal Länge des Kraftarms = Last mal Länge des Lastarms

Man könnte dies auch so formulieren:
Zwei auf den beiden Seiten eines Hebels liegende Körper befinden sich im Gleichgewicht, wenn deren Abstände zum Drehpunkt umgekehrt proportional zu deren Gewichten sind.

Über die Wirkung der von Archimedes erfundenen „Kriegsmaschinen" liegen ausführliche Berichte römischer Schriftsteller vor:

Im 2. Punischen Krieges verbündete sich der Nachfolger König Hierons mit Karthago gegen Rom, und Archimedes wurde mit der Verteidigung von Syrakus gegen die von der Meeres- und der Landseite her angreifenden römischen Truppen beauftragt. Während der über zwei Jahre andauernden Belagerung entwickelte Archimedes viele Ideen, um die Angreifer abzuwehren:

- Wurfmaschinen, mit denen Felsbrocken auf Schiffe geschleudert wurden;
- Bau eines Krans, mit dem sogar ganze Schiffe hochgehoben und dann wieder fallen gelassen wurden;
- angeblich auch Brennspiegel, mit denen die Segel der angreifenden Schiffe in Brand gesetzt wurden.

Während letztere Erfindung mit Sicherheit in das Reich der Fantasie gehört (es wurde mehrfach vergeblich versucht, eine solche Situation nachzustellen – selbst heutzutage ist eine solche Energiebündelung kaum möglich), können die Beschreibungen der ersten beiden Kriegsmaschinen durchaus der Realität entsprochen haben.

Möglicherweise treffen aber auch die zuerst genannten Abwehrmaßnahmen nur teilweise zu. Zweifelsohne war Archimedes in der Lage, mithilfe von Flaschenzügen u. Ä. außergewöhnlich schwere Gegenstände wie Felsbrocken oder Schiffe anzuheben (s. o.).

Man überlege aber einmal, was man als Geschichtsschreiber tun kann, um in möglichst günstiger Weise darzustellen, dass die eigenen Truppen mehr als zwei Jahre benötigten, die Stadt Syrakus zu erobern. Könnte das die Nachwelt nicht als Versagen der römischen Truppen ansehen? Wenn man dagegen darauf verweist, dass die Eroberung gelang, *obwohl* aufseiten der gegnerischen Truppen ein „göttergleicher" Held mit „übermenschlichen" Kräften kämpfte, dann wirft dies ein günstigeres Bild auf die römische Kriegskunst.

- *Noli turbare circulos meos*.

Es wird wohl nicht mehr zu klären sein, warum der römische Autor Valerius Maximus im ersten Jahrhundert unserer Zeitrechnung Archimedes den Satz *Noli turbare circulos meos* („Störe meine Kreise nicht") als letzte Worte in den Mund gelegt hat. Das mit Sicherheit erfundene Zitat zum gewaltsamen Tod des Archimedes hat jedoch über die zwei Jahrtausende kaum an Wirkung verloren. Hört man diesen Satz, hat man unmittelbar das Bild eines unbeherrschten Soldaten vor Augen, der ohne Respekt einen Menschen tötet, der offensichtlich in Gedanken vertieft ist.

Wie Plutarch und Livius berichten, hat Marcus Claudius Marcellus, der Befehlshaber der römischen Truppen, nachträglich angeblich versucht, die grausame Tat durch besondere Ehrungen des Toten wiedergutzumachen. Auch hier sind Zweifel erlaubt: Nachdem die römischen Truppen (wohl aufgrund eines Verrats) in die Festung Syrakus eindringen konnten, zogen sie plündernd durch die Stadt – in einer Weise, dass der Senat den sonst üblichen Triumphzug in Rom für den Feldherrn Marcellus versagte.

Marcellus selbst nahm die kostbaren, von Archimedes gefertigten wissenschaftlichen Geräte (Himmelsglobus, Planetarium) in seinen Besitz, die dann in Rom für Aufsehen sorgten.

Besonders groß und dauerhaft kann die Verehrung des ermordeten Archimedes durch die römischen Eroberer wohl nicht gewesen sein, berichtet doch Marcus Tullius Cicero im Jahr 75 v. Chr., dass er den zugewucherten Grabstein des Archimedes (s. u.) nur mit Mühe gefunden habe (er hat ihn dann wieder herrichten lassen).

2.3 Mit welchen (mathematischen) Themen beschäftigte sich Archimedes außerdem?

Bis zur Auffindung des Palimpsests im Jahr 1906 konnten in einigen Themenbereichen nur Vermutungen aufgestellt werden, ob und inwieweit Archimedes hier eine Abhandlung verfasst hat. Dass Archimedes als Autor sehr produktiv war, berichteten islamische Wissenschaftlern des Mittelalters, denen teilweise auch noch Abschriften von Werken vorlagen, die aber nicht bis in die Neuzeit erhalten blieben – bis sie dann 1906 erfreulicherweise entdeckt wurden.

Folgende Hauptschriften des Archimedes sind (größtenteils bzw. vollständig) erhalten:

- *Über die Methode*
- *Über das Gleichgewicht ebener Flächen* (2 Bücher)
- *Kreismessung*
- *Über Spiralen*
- *Über Kugel und Zylinder* (2 Bücher)
- *Über Konoide und Sphäroide*
- *Die Sandrechnung*
- *Quadratur der Parabel*
- *Über schwimmende Körper* (2 Bücher)

Erläuterungen zu den beiden letztgenannten Büchern sind in den Abschn. 2.1 und 2.2 enthalten.

Darüber hinaus sind Teile aus anderen Werken des Archimedes erhalten, auf die weiter unten eingegangen wird:

- *Stomachion*
- *Buch der Lemmata*

Aus einer Abhandlung des Pappus von Alexandria (290–350 n. Chr.) weiß man, dass Archimedes außerdem noch eine Schrift über regelmäßige Körper verfasst hat; diese ging jedoch verloren. Wir verwenden hier den Titel

- *Über regelmäßige Körper.*

Im Folgenden werden einzelne Aspekte und Probleme aus den genannten Schriften des Archimedes erläutert.

2.3.1 Über die Methode

Zu den erst 1906 entdeckten Schriften gehört die *Methodenlehre* des Archimedes. Aus dieser Abhandlung (die Archimedes in Form eines Briefes an Eratosthenes formulierte) geht hervor, wie der geniale Wissenschaftler bei der Suche nach mathematischen Gesetzmäßigkeiten vorgegangen ist:

- **Schritt 1:** Durch Wiegen von geeigneten Modellen kam Archimedes zu einer Vermutung.
- **Schritt 2:** Durch Anwenden des Hebelgesetzes wurde die Vermutung bestätigt. (Heinrich Winter bezeichnete diesen Schritt als „mathematisches Wiegen".)
- **Schritt 3:** Exakter Beweis der Vermutung – oft mithilfe eines indirekten Beweises.

Ein Beispiel für Schritt 3 ist die oben im ersten Abschnitt bewiesene Formel für den Flächeninhalt eines Parabelsegments.

Weiter unten ist am Beispiel der Volumenverhältnisse von Zylinder, Kegel und Kugel ausgeführt, wie man sich Schritt 2 vorstellen muss.

2.3.2 Über das Gleichgewicht ebener Flächen

Grundlage für die in diesem Buch dargestellten Gesetzmäßigkeiten ist das **Hebelgesetz** (s. o.). Mithilfe dieses Gesetzes bestimmte Archimedes u. a. Schwerpunkte bei Dreiecken, Parallelogrammen, Trapezen und Parabeln.

Dreiecke

Um den Schwerpunkt zu ermitteln, kann man experimentell so vorgehen, dass man an einem dreieckigen Modell (z. B. aus Holz) zunächst die drei Schwerlinien bestimmt, die durch die Eckpunkte des Dreiecks verlaufen. Unterstützt man das Modell längs einer solchen Linie, dann ist es im Gleichgewicht.

Man stellt dann fest,

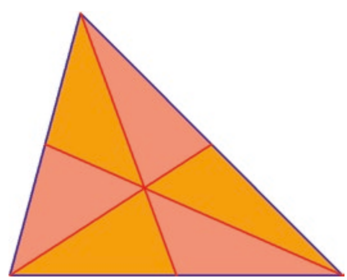
- dass diese drei Schwerlinien jeweils auch durch die gegenüberliegenden Seitenmitten verlaufen,
- dass es einen gemeinsamen Schnittpunkt der drei Schwerlinien gibt – dies ist der Schwerpunkt des Dreiecks – und
- dass durch den Schwerpunkt die Schwerlinien jeweils im Verhältnis 2:1 geteilt werden.

Den mathematisch exakten Beweis (Schritt 3), dass die Seitenhalbierenden sich in einem Punkt schneiden, führte Archimedes in Form eines indirekten Beweises (angenommen der Schwerpunkt des Dreiecks liegt nicht auf einer Seitenhalbierenden …) und führte dies dann zum Widerspruch.

Satz

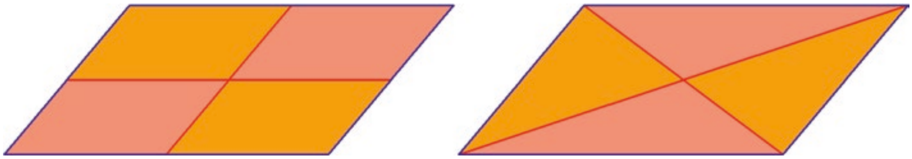
Der Schwerpunkt eines Dreiecks

- Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks verbinden einen Eckpunkt mit der gegenüberliegenden Seitenmitte. Jede der Seitenhalbierenden zerlegt das Dreieck in zwei Teildreiecke mit gleich großem Flächeninhalt.
- Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dem Flächenschwerpunkt S des Dreiecks.
- Der Flächenschwerpunkt S teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1.



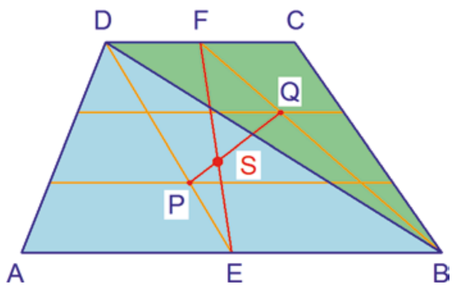
Parallelogramm

Der Schwerpunkt eines Parallelogramms liegt im Schnittpunkt der Mittelparallelen. Dies ist auch der Schnittpunkt der Diagonalen des Parallelogramms.



Trapez

Der Schwerpunkt eines Trapezes (ABCD) liegt im Schnittpunkt der Geraden durch die Mittelpunkte (E, F) der beiden zueinander parallelen Seiten des Trapezes und der Geraden durch die Schwerpunkte (P, Q) der beiden Teildreiecke (ABD und BCD), aus denen sich das Trapez zusammensetzt.

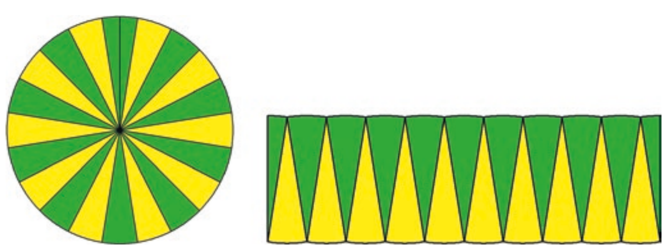


2.3.3 Kreismessung

Zusammenhang zwischen Umfang und Flächeninhalt eines Kreises

Die Kreiszahl π ist *definiert* durch das Verhältnis des Umfangs u eines Kreises zu seinem Durchmesser d (= doppelter Radius r).

Um den Zusammenhang zwischen dem Flächeninhalt und dem Umfang eines Kreises aufzudecken, zerlegte Archimedes den Kreis in n Sektoren und ordnete die „Tortenstücke" so an, dass (mit wachsendem n immer genauer) die Form eines Rechtecks mit Breite $u/2$ und Höhe r entstand.



Der Flächeninhalt A der Figur aus Tortenstücken ergibt sich dann näherungsweise aus der Breite $\frac{1}{2} \cdot u$ und der Höhe r. Aus der Definition der Kreiszahl π ergibt sich so eine Formel für die Berechnung des Flächeninhalts eines Kreises.

Definition/Satz

Flächeninhalt A eines Kreises

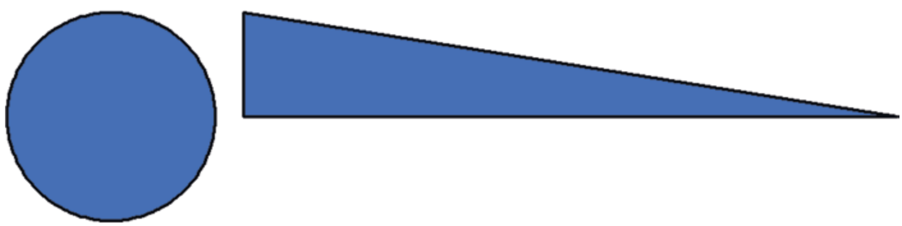
Die Kreiszahl π ist *definiert* als das Verhältnis des Umfangs u des Kreises zu seinen Durchmesser d.

Für den Umfang u eines Kreises gilt also $u = \pi \cdot d = 2\pi \cdot r$.

Für den Flächeninhalt A eines Kreises ergibt sich dann $A = \frac{1}{2} \cdot u \cdot r$, also $A = \pi \cdot r^2$.

Folgerung **(Kreissatz des Archimedes):**

Ein Kreis mit Radius r hat den gleichen Flächeninhalt wie ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten die Längen r und u haben.



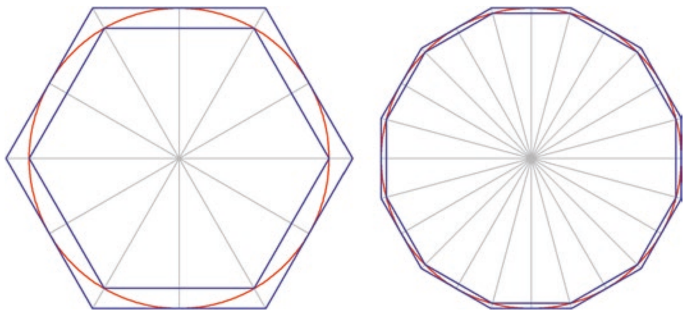
Bereits Eudoxos von Knidos hatte die Einsicht festgehalten, dass die Umfänge von zueinander ähnlichen ebenen Figuren proportional zu den Längen entsprechender Seiten der Figur sind und dass für die Flächeninhalte eine Proportionalität zum Quadrat dieser Seitenlängen gilt. Dies gilt nicht nur für Dreiecke oder Vierecke, sondern analog auch für Kreise. Diese beiden Sätze übernahm Euklid in das 12. Buch seiner *Elemente*.

Durch die o. a. Überlegung konnte Archimedes also zeigen, dass es sich bei den beiden Proportionalitätskonstanten k_1 und k_1 in der Formel $u = k_1 \cdot 2r$ (der Umfang ist proportional zum Durchmesser) und in der Formel $A = k_2 \cdot r^2$ (der Flächeninhalt ist proportional zum Quadrat des Radius) um dieselbe Konstante handelt.

Die Verwendung des griechischen Buchstabens π für das Verhältnis von Umfang zu Durchmesser stammt übrigens nicht – wie man vielleicht vermuten könnte – aus der Antike, sondern setzte sich erst im 18. Jahrhundert durch, nachdem Leonhard Euler von 1736 an diese Bezeichnung konsequent benutzt hatte.

Näherungsweise Bestimmung der Kreiszahl π
Archimedes entwickelte einen Algorithmus, mit dem man die Kreiszahl π näherungsweise bestimmen kann. Die hierzu benötigte Idee, den Einheitskreis durch regelmäßige Vielecke ein- und umzubeschreiben, war bereits vor Archimedes bekannt. Dadurch, dass er einen Zusammenhang zwischen dem regelmäßigen n-Eck und dem regelmäßigen $2n$-Eck darstellen konnte, gelang es ihm, den Wert von π einzuschachteln.

Beginnend mit dem regelmäßigen 6-Eck verdoppelte er schrittweise die Anzahl der Ecken bis hin zum regelmäßigen ein- bzw. umbeschriebenen 96-Eck.



Mithilfe geometrischer Überlegungen, auf die hier nicht näher eingegangen werden kann, fand Archimedes die folgenden Rekursionsformeln für den Umfang U_{2n} des umbeschriebenen bzw. u_{2n} des einbeschriebenen $2n$-Ecks:

$U_{2n} = \frac{2 \cdot U_n \cdot u_n}{U_n + u_n}$ (harmonisches Mittel der beiden Umfänge) sowie

$u_{2n} = \sqrt{U_{2n} \cdot u_n}$ (geometrisches Mittel).

Hinweis Der chinesische Mathematiker **Zu Chongzhi** (429–500) benutzte für die Berechnung der Seitenlänge des regelmäßigen $2n$-Ecks die Rekursionsformel $s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$. **Jamshid al-Kashi** bestimmte um das Jahr 1400 die Kreiszahl π auf 16 Dezimalstellen genau, vgl. Kap. 7.

Für das regelmäßige 6-Eck am Einheitskreis (also $r = 1$) ergibt sich: $u_6 = 6$ und $U_6 = 4 \cdot \sqrt{3} \approx 6{,}93$.

Für Wurzeln, hier also für die irrationale Zahl $\sqrt{3}$, benutzte Archimedes zur Abschätzung rationale Näherungswerte: $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$, denn $265^2 = 70225 < 70227 = 3 \cdot 153^2$, und $1351^2 = 1825201 > 1825200 = 3 \cdot 780^2$. Mithilfe dieser Brüche kann dann der Umfang U_{2n} des umbeschriebenen $2n$-Ecks eingegrenzt werden. Es ist allerdings nicht bekannt, mithilfe welchen Algorithmus' Archimedes die Näherungswerte für Wurzeln ermittelt hat, um den Umfang u_{2n} des einbeschriebenen $2n$-Ecks zu bestimmen.

Archimedes führte seine Rechnung weiter bis zum regelmäßigen 96-Eck und erhielt schließlich die Abschätzung $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$.

2.3.4 Über Spiralen

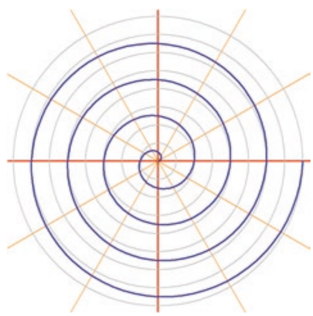
In seinem Buch *Über Spiralen* untersuchte Archimedes die Eigenschaften einer besonderen Kurve, die heute nach ihm benannt ist.

Definition

Archimedische Spirale

Ein sich um einen festen Punkt drehender Körper bewegt sich längs einer archimedischen Spirale, wenn sein Abstand r zu diesem Punkt proportional mit dem Drehwinkel φ wächst, d. h., es gibt eine (Proportionalitäts-)Konstante $a > 0$, sodass gilt: $r = a \cdot \varphi$.

In einem kartesischen Koordinatensystem mit festem Punkt $O(0|0)$ gehören alle Punkte $(x; y)$ zu der Kurve, die sich mithilfe der Parameterdarstellung $(x; y) = (a \cdot \varphi \cdot \cos(\varphi);\; a \cdot \varphi \cdot \sin(\varphi))$ darstellen lassen.



Hinweis Für eine Wertetabelle muss der Drehwinkel φ ggf. im Bogenmaß angegeben werden.

Zu den Besonderheiten einer archimedischen Spirale (vgl. Abb.) gehört die folgende Eigenschaft:

- Ein vom Ursprung ausgehender Strahl schneidet die Kurve unendlich oft, und zwar so, dass benachbarte Schnittpunkte stets den gleichen Abstand $a \cdot 2\pi$ voneinander haben. Die Abstände der auf einem Strahl liegenden Schnittpunkte zu dem festen Punkt bilden also eine arithmetische Folge.

Hinweis Es wäre nicht korrekt zu sagen, dass der *Abstand zwischen den Kurven* $a \cdot 2\pi$ beträgt – Abstände werden als senkrechte Abstände von Tangenten bestimmt; die Strahlen schneiden die Kurve jedoch nicht unter einem rechten Winkel.

In der Abbildung oben sind Beispiele für die vom Ursprung ausgehenden Strahlen durch rote und gelbe Linien angedeutet. Dargestellt sind die ersten vier Windungen einer Spirale.

Archimedes untersuchte u. a. die erste Windung der Spirale und verglich sie mit der Kreislinie, die genau durch den Endpunkt des betrachteten Spiralbogens verläuft.

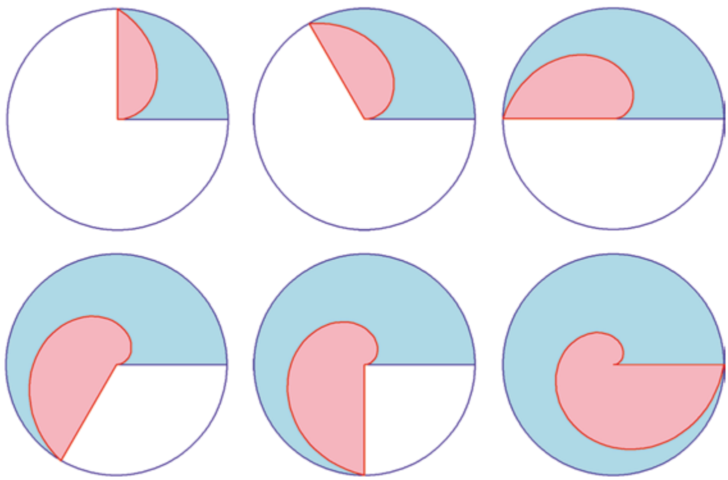
Mithilfe von Untersummen (Exhaustion der Fläche) und Obersummen (Überdeckung der Fläche) – so wie heute im Mathematikunterricht in die Integralrechnung eingeführt wird – konnte er einen Satz über den Flächeninhalt des Flächenstücks zwischen Spirale und Strahl beweisen.

Satz

Flächeninhalt einer archimedischen Spirale

Während der ersten Umdrehung gilt für jeden Winkel φ:

Der Flächeninhalt der Fläche zwischen der Spiralkurve und dem vom Ursprung unter dem Winkel φ ausgehenden Strahl ist genau ein Drittel der Fläche des zugehörigen Kreissektors.



Am Beispiel eines regelmäßigen 36-Ecks (vgl. die folgende Abbildung) soll die von Archimedes gefundene Formel nachvollzogen werden. Wir beschränken uns dabei jeweils auf die Obersummen und verzichten auf die entsprechende Untersuchung der zugehörigen Untersummen.

In der Figur sind alle Eckpunkte mit dem Mittelpunkt verbunden. Rundlaufend wurde dann in den 36 Dreiecken jeweils ein Dreieck abgetrennt, dessen Höhe in gleichen Schritten größer wird (in der Abbildung sind diese Dreiecke und deren Grundseite rot gefärbt).

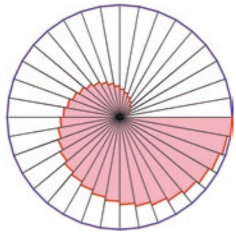
Für das vollständig rot gefärbte Dreieck (am Ende der „Spirale“) gilt:

Die Grundseite hat ungefähr die Länge $\frac{1}{36} \cdot 2\pi \cdot r$, die Höhe des Dreiecks hat ungefähr die Länge r; daher gilt für den Flächeninhalt dieses Dreiecks $A_{36} \approx \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{36} \cdot 2\pi \cdot r\right) \cdot (r)$.

Für die nächsten Dreiecke gilt dann entsprechend $A_{35} \approx \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{36} \cdot 2\pi \cdot r \cdot \frac{35}{36}\right) \cdot \left(r \cdot \frac{35}{36}\right)$,

$$A_{34} \approx \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{36} \cdot 2\pi \cdot r \cdot \frac{34}{36}\right) \cdot \left(r \cdot \frac{34}{36}\right), \ldots,$$

$$A_2 \approx \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{36} \cdot 2\pi \cdot r \cdot \frac{2}{36}\right) \cdot \left(r \cdot \frac{2}{36}\right),\ A_1 \approx \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{36} \cdot 2\pi \cdot r \cdot \frac{1}{36}\right) \cdot \left(r \cdot \frac{1}{36}\right).$$



Hieraus ergibt sich für die gesamte rot gefärbte Fläche:

$$\begin{aligned} A &\approx \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{36} \cdot 2\pi \cdot r\right) \cdot (r) \cdot \left[\left(\frac{1}{36}\right)^2 + \left(\frac{2}{36}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{35}{36}\right)^2 + \left(\frac{36}{36}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{36} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \left(\frac{1}{36}\right)^2 \cdot \left[1^2 + 2^2 + \ldots + 35^2 + 36^2\right] \\ &= \pi \cdot r^2 \cdot \left(\frac{1}{36}\right)^3 \cdot \left[1^2 + 2^2 + \ldots + 35^2 + 36^2\right] \\ &= \pi \cdot r^2 \cdot \frac{16206}{36^3} \approx \pi \cdot r^2 \cdot 0{,}347 \approx \tfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \end{aligned}$$

Betrachtet man statt des regelmäßigen 36-Ecks ein beliebiges regelmäßiges n-Eck, dann ergibt sich analog:

$$A \approx \pi \cdot r^2 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^3 \cdot \left[1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2\right]$$

Für die Summe der ersten n Quadratzahlen gilt:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$$

Somit ergibt sich $A \approx \pi \cdot r^2 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right)$ und für $n \to \infty$ folgt dann die o. a. Formel.

2.3.5 Über Kugel und Zylinder

Durch Wiegen kann man – zumindestens ungefähr – herausfinden, welche Zusammenhänge zwischen den Volumina von Zylinder, Kegel und Kugel bestehen. Dass ein Kegel (ebenso wie eine Pyramide) ein Drittel des Volumen eines Zylinders bzw. eines Prismas mit gleicher Grundfläche und Höhe hat, war bereits Eudoxos von Knidos bekannt. Dadurch dass Archimedes den Zusammenhang zwischen den Volumina von Zylinder, Kegel und Kugel aufdeckte, war er in der Lage, eine Formel für das Volumen einer Kugel herzuleiten.

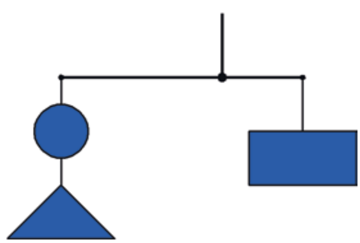
Satz

Volumina von Kugel, Kegel und Zylinder und deren Größenverhältnisse

- Ein Zylinder mit Grundflächenradius r und Höhe h hat das Volumen $V_{\text{Zylinder}} = \pi \cdot r^2 \cdot h$.
  Stimmen Grundflächenradius und Höhe überein, also $h = r$, so gilt $V_{\text{Zylinder}} = \pi \cdot r^3$.
- Ein Kegel mit Grundflächenradius r und Höhe h hat das Volumen $V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$.
  Stimmen Grundflächenradius und Höhe überein, also $h = r$, so gilt $V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^3$.
- Eine Kugel mit Radius r hat das Volumen $V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$.
- Für eine Kugel, die in einen Zylinder eingepasst ist, bei der also $h = 2r$ ist, gilt $V_{\text{Zylinder}} : V_{\text{Kugel}} = 3 : 2$.
- Stimmen bei einem Kegel und einem Zylinder Grundflächenradius r und Höhe h überein, dann gilt $V_{\text{Zylinder}} : V_{\text{Kegel}} = 3 : 1$.
- Stimmen bei einem Kegel und einem Zylinder Grundflächenradius r und Höhe h überein und ist außerdem noch eine Kugel in den Zylinder eingepasst, dann gilt $V_{\text{Zylinder}} : V_{\text{Kugel}} : V_{\text{Kegel}} = 3 : 2 : 1$.
- Eine Kugel mit Radius r und ein Kegel mit dem Grundflächenradius $2r$ und der Höhe $2r$ haben zusammen ein Volumen, das halb so groß ist wie das eines Zylinders mit Grundflächenradius $2r$ und der Höhe $2r$: $(V_{\text{Kugel}} + V_{\text{Kegel}}) : V_{\text{Zylinder}} = 1 : 2$.

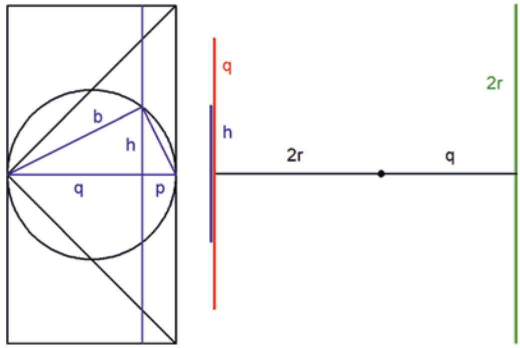
Um eine Formel für das Volumen einer Kugel herzuleiten, untersuchte Archimedes eine (vollständige) Kugel mit dem Radius r und gleichzeitig einen Kegel sowie einen Zylinder, bei denen sowohl der Grundflächenradius als auch die Höhe gleich $2r$ sind.

Beim Auswiegen ergab sich aus der Länge der Hebelarme (vgl. folgende Abbildung), dass der Zylinder (rechts) doppelt so schwer ist wie Kugel und Kegel (links) zusammen.



Um dies zu beweisen, führte Archimedes in Gedanken Schnitte durch die drei Körper durch (d. h., er zerlegte die Körper in dünne „Scheiben“, deren Schnittflächen er bestimmte).

Die folgende Abbildung links zeigt einen solchen Schnitt im Abstand p parallel zu den Grundflächen von Kegel und Zylinder.



Für die Schnittfläche der Kugel gilt hier $A_{\text{Kugel}} = \pi \cdot h^2$ und für die Schnittfläche des Kegels $A_{\text{Kegel}} = \pi \cdot q^2$.

Aus dem Satz von Pythagoras ergibt sich $q^2 + h^2 = b^2$ und aus dem Kathetensatz folgt $b^2 = q \cdot (p + q) = q \cdot 2r$, also $q^2 + h^2 = q \cdot 2r$.

Das Verhältnis der Größe der Schnittflächen von Kugel und Kegel zusammengenommen zur Größe der Schnittfläche des Zylinders $A_{\text{Zylinder}} = \pi \cdot (2r)^2$ ist demnach:

$$\frac{A_{\text{Kegel}} + A_{\text{Kugel}}}{A_{\text{Zylinder}}} = \frac{q^2 + h^2}{(2r)^2} = \frac{q \cdot 2r}{(2r)^2} = \frac{q}{2r}$$

Archimedes interpretiert dieses Verhältnis im Sinne des Hebelgesetzes:

Die beiden aus Kugel und Kegel herausgeschnittenen „Scheiben“ und eine aus dem Zylinder herausgeschnittene „Scheibe“ sind im Gleichgewicht, wenn sich die beiden erstgenannten „Scheiben“ im Abstand $2r$ vom Drehpunkt eines Hebels befinden und die aus dem Zylinder herausgeschnittene „Scheibe“ im Abstand $q = 2r - p$, vgl. die oben stehende Abbildung rechts.

Da die Werte von p und damit auch die Werte von q das gesamte Intervall $[0; 2r]$ durchlaufen, ergibt sich im Mittel ein Wert von r, mit anderen Worten:

- Werden Kugel und Kegel an einem Hebelarm der Länge $2r$ aufgehängt, dann sind diese beiden Körper zusammen mit dem Zylinder im Gleichgewicht, der an dem anderen Hebelarm der Länge r aufgehängt ist.

Ähnliche Gleichgewichts-Argumentationen bzgl. der Schnittflächen (Scheiben) findet man in den Abhandlungen von Archimedes zur Schwerpunktbestimmung bei Rotationskörpern wie für das Paraboloid, das Hyperboloid und für ein Kugelsegment.

- Die Oberfläche einer Kugel ist viermal so groß ist wie die Fläche eines Großkreises der Kugel.

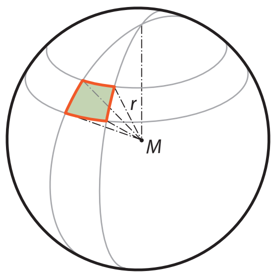
Archimedes gibt für die Oberfläche einer Kugel die Formel $O_{\text{Kugel}} = 4 \cdot \pi \cdot r^2$ an, also eine Fläche, die vierfach so groß ist wie die Fläche eines Großkreises, die man also erhält, wenn man eine Kugel längs eines Kugeläquators schneidet.

Wie er in seinem Buch *Über Kugel und Zylinder* schreibt, fand er diese Gesetzmäßigkeit durch eine Analogieüberlegung heraus:

Die Fläche eines Kreises ist so groß wie der Flächeninhalt eines Dreiecks mit der Grundseite $u = 2\pi \cdot r$ und der Höhe r (vgl. Abschn. 2.3.3). Dann müsste das Volumen einer Kugel entsprechend so groß sein wie das Volumen eines Kegels, dessen Grundfläche so groß ist wie die Oberfläche der Kugel und die Höhe gleich dem Radius, also

$$V_{\text{Kugel}} = \frac{1}{3} \cdot O_{\text{Kugel}} \cdot r, \text{ und aus } V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \text{ folgt dann } O_{\text{Kugel}} = 4 \cdot \pi \cdot r^2.$$

Den Zusammenhang zwischen dem Volumen und der Oberfläche einer Kugel kann man sich wie folgt verdeutlichen: Der Kugelkörper ist aus unendlich vielen Pyramiden zusammengesetzt, deren Grundflächen zusammen die Oberfläche O der Kugel bilden und deren Höhe durch den Kugelradius r gegeben ist – die Pyramidenspitzen liegen alle im Mittelpunkt der Kugel.

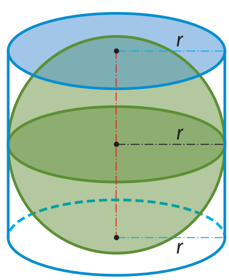


Es gilt also: $V_{\text{Kugel}} = \sum \left(V_{\text{Pyramide}}\right) = \sum \left(\frac{1}{3} \cdot G \cdot r\right) = \frac{1}{3} \cdot r \cdot \sum (G) = \frac{1}{3} \cdot r \cdot O_{\text{Kugel}}$

Aus $V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ folgt dann $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{1}{3} \cdot r \cdot O_{\text{Kugel}}$ und weiter $O_{\text{Kugel}} = 4 \cdot \pi \cdot r^2$.

Wie oben angegeben, gilt für eine Kugel, die in einen Zylinder eingepasst ist: $V_{\text{Zylinder}}{:}V_{\text{Kugel}} = 3 : 2$. Nun berechnet sich aber die Oberfläche eines solchen Zylinders wie folgt: $O_{\text{Zylinder}} = \pi \cdot r^2 + (2\pi \cdot r) \cdot (2r) + \pi \cdot r^2 = 6 \cdot \pi \cdot r^2$, d. h., auch für die Oberflächen der beiden Körper gilt das gleiche Verhältnis $O_{\text{Zylinder}}{:}O_{\text{Kugel}} = 3 : 2$.

Für Archimedes war diese Übereinstimmung von Verhältnissen bei der Oberfläche *und* beim Volumen eine solch bemerkenswerte Eigenschaft, dass er den Wunsch äußerte, dass diese beiden Körper auf seinem Grabmal zu sehen sein sollen.



2.3.6 Archimedisches Axiom

Bei seinen Beweisen verwendete Archimedes eine Eigenschaft über positive reelle Zahlen, die heute als **archimedisches Axiom** bezeichnet wird (also als eine Einsicht, an deren Gültigkeit keine Zweifel bestehen). Die Zuordnung zu Archimedes ist historisch nicht ganz korrekt; eigentlich wurde die Eigenschaft bereits von Eudoxos von Knidos (ca. 395–340 v. Chr.) beschrieben und von Euklid in das Buch V der *Elemente* aufgenommen.

Axiom

Archimedisches Axiom

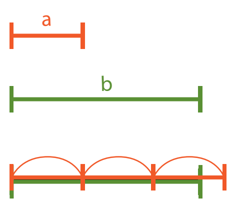
Zu jeder beliebig kleinen reellen Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl n, sodass der Kehrwert von n kleiner ist als ε: $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Das Axiom enthält die Aussage: *Es gibt keine kleinste positive reelle Zahl x.*

(Denn wenn es eine solche gäbe, dann könnte man eine natürliche Zahl n finden, deren Kehrwert kleiner ist als x).

Diese Eigenschaft der reellen Zahlen kann auch so formuliert werden:

Zu zwei verschieden großen Zahlen a und b mit $a < b$ kann man eine natürliche Zahl n finden, sodass das n-Fache von a größer ist als b: $n \cdot a > b$.

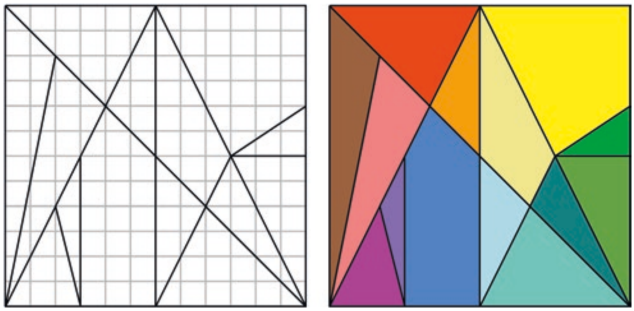


(Die Ungleichung ergibt sich unmittelbar aus der o. a. ersten Beschreibung, wenn man ε durch das Verhältnis $\varepsilon = \frac{a}{b}$ definiert).

2.3.7 Stomachion

Aus Fragmenten und einer arabischen Übersetzung weiß man, dass Archimedes eine Schrift mit dem Titel *Stomachion* (eigentlich *Ostomachion*) verfasst hat. Es geht hier um ein Puzzlespiel, bei dem elf Dreiecke, zwei Vierecke und ein Fünfeck zu einem Quadrat zusammengelegt werden können. Wörtlich übersetzt bedeutet *Ostomachion* so viel wie „das, was Wut hervorbringt“. Wie beim Tangram ist es das Ziel des Spiels, interessante Figuren zu legen und dabei *alle* Puzzlestücke zu verwenden.

Es ist aber bereits eine Herausforderung, die 14 Teile wieder in die abgebildete Form eines Quadrats zu legen. Mithilfe eines Computerprogramms hat man herausgefunden, dass es 17.152 Möglichkeiten hierfür gibt; wenn man Drehungen und Spiegelungen nicht berücksichtigt, bleiben immer noch 536 Variationen. 256 Beispiele für solche Variationen findet man u. a. unter: http://www.logelium.de/Stomachion/StomachionSolutions.pdf.



2.3.8 Sandrechner

Mit seiner Schrift *Der Sandrechner* stellt Archimedes auch bzgl. der Arithmetik unter Beweis, dass er seiner Zeit weit voraus ist: Das damals übliche Zahlensystem reicht bis zur Bezeichnung *Myriade* für 10.000. Dies lässt sich noch bis zu *eine Myriade von Myriaden* erweitern. Archimedes bezeichnet diese Zahl $\omega = 10^8$ als eine *Zahl erster Ordnung;* verwendet man diese Zahl als neue Einheit, dann kann man entsprechend bis $\omega^2 = 10^{16}$ weiterzählen (Zahl zweiter Ordnung) usw.

Mithilfe dieses Systems der Zahlendarstellung ermittelt er einen Schätzwert für die Anzahl der Sandkörner, mit der man eine Kugel von der Größe der Erde füllen könnte; die Größe des Weltalls schätzte er auf ein Volumen von (in unserer Schreibweise) $8 \cdot 10^{63}$ Sandkörnern – also auf jeden Fall eine endliche Anzahl, anders als die damals übliche Vorstellung von „unendlich vielen“ Sandkörnern.

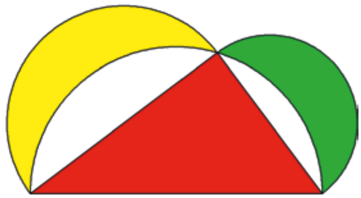
2.3.9 Das Buch der Lemmata

Sichelförmige Kreisfiguren

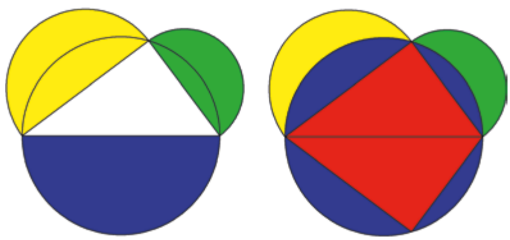
Der griechische Mathematiker Hippokrates von Chios hatte um 450 v. Chr. eine sensationelle Entdeckung gemacht: Eine geradlinig begrenzte Fläche kann genauso groß sein wie eine krummlinig begrenzte Fläche!

Konkret gilt:

Die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks (in der folgenden Abbildung rot gefärbt) ist flächengleich zur Summe der Flächen der beiden Möndchen (Möndchen des Hippokrates, gelb und grün gefärbt) über den Katheten.



Beim Beweis wendet man den verallgemeinerten Satz von Pythagoras an: Die Fläche des Halbkreises über der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist genauso groß wie die Summe der Halbkreisflächen über den Katheten (vgl. Abb. links). Klappt man dann den Halbkreis „unter" der Hypotenuse nach oben (vgl. Abb. rechts), erkennt man den Zusammenhang.

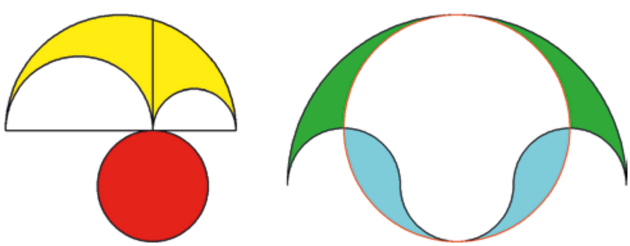


In seinem *Buch der Lemmata* untersuchte Archimedes dann ebenfalls sichelförmige Figuren.

Satz

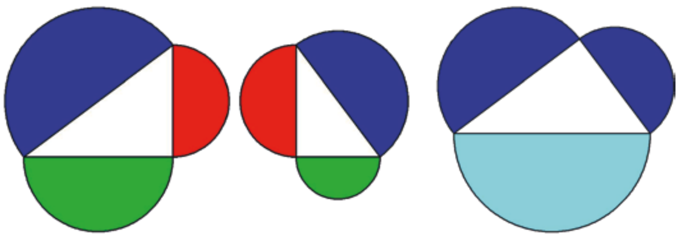
Schustermesser und Salzfässchen des Archimedes

- Die in der folgenden Abbildung links gelb gefärbte sichelförmige Figur, das sog. **Schustermesser des Archimedes** (griech. *arbelos*), ist flächengleich zu dem rot gefärbten Kreis, dessen Durchmesser genauso groß wie die oben eingezeichnete „Höhe".
- Die in der folgenden Abbildung rechts durch vier Halbkreise entstehenden grün bzw. blau gefärbten Flächenstücke sind ebenfalls gleich groß (wegen ihrer Form wird diese Figur als **Salinon** [Salzfässchen] bezeichnet).

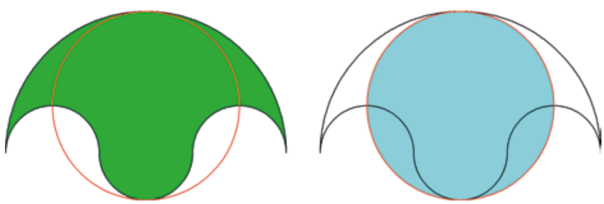


Beim Beweis zur Abbildung links wird wieder der verallgemeinerte Satz des Pythagoras angewandt: Die Fläche des hellblauen Halbkreises über der Hypotenuse ist genauso groß wie die der beiden dunkelblauen Halbkreise über den Katheten. Diese blauen Halbkreise wiederum sind genauso groß wie die grünen und roten Halbkreise im (durch die Höhe) unterteilten rechtwinkligen Dreieck, d. h., Grün + Rot = Hellblau, also Hellblau − Grün = Gelb.

Schneidet man die grünen Halbkreise aus dem hellblauen Halbkreis heraus, dann hat man das gelb gefärbte Schustermesser, also Gelb = Rot.



Für den Beweis der zweiten Aussage zeigt man zunächst, dass die in der Abbildung links grün gefärbte Fläche genauso groß ist wie die Fläche des hellblau gefärbten Kreises in der Abbildung rechts.



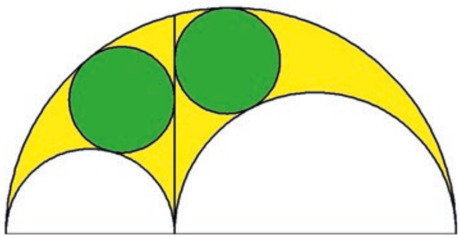
Die grün gefärbte Fläche setzt sich zusammen aus der Fläche eines Halbkreises mit Radius r, aus der zwei Halbkreise mit Radius $\frac{r}{3}$ herausgenommen sind und ein Halbkreis mit Radius $\frac{r}{3}$ ergänzt wurde:

$$A_{\text{grün}} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(r^2 - 2 \cdot \left(\frac{r}{3}\right)^2 + \left(\frac{r}{3}\right)^2\right) = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{8}{9} \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\frac{2}{3} r\right)^2.$$

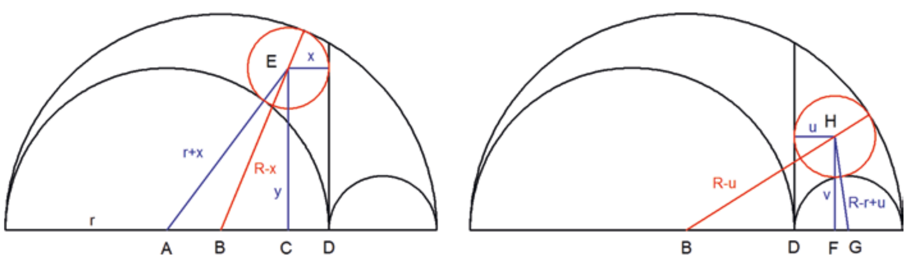
Der hellblau gefärbte Kreis hat den Durchmesser $r + \frac{r}{3}$, also den Radius $\frac{2}{3} \cdot r$, d. h., für den Flächeninhalt gilt: $A_{\text{blau}} = \pi \cdot \left(\frac{2}{3} r\right)^2$.

Die beiden Figuren links und rechts stimmen insgesamt überein; daher sind auch die jeweils *nicht* gefärbten Flächenstücke gleich groß.

Übrigens In die beiden Teile des Schustermessers kann man zwei Kreise eintragen, die jeweils die Halbkreise und die Höhe berühren (sog. Zwillingskreise des Archimedes). Diese beiden Kreise (in der Abbildung grün gefärbt) sind gleich groß.



Der Beweis kann durch Anwendung des Satzes von Pythagoras mithilfe der beiden folgenden Abbildungen geführt werden (vgl. auch *Mathematik ist schön,* Kap. 17). Auch die italienische Briefmarke zum Archimedes-Jahr 2013 zeigt die zugehörige Konstruktion (außerdem eine Hilfsfigur aus dem Buch *Über Kugel und Zylinder* sowie im Hintergrund die Dezimalzahlentwicklung der Kreiszahl π).



Zueinander orthogonale Kreissehnen

In einem weiteren Abschnitt des *Buches der Lemmata* formuliert Archimedes zwei Sätze über sich senkrecht schneidende Kreissehnen.

Satz

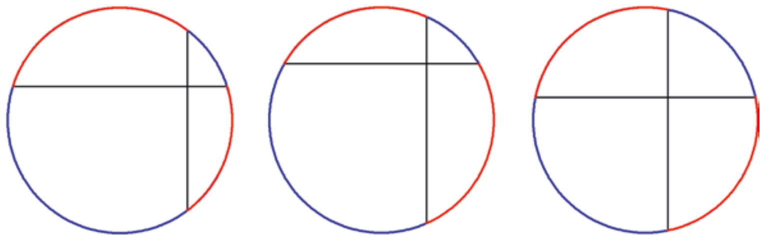
Eigenschaften in Sehnenvierecken mit zueinander orthogonalen Diagonalen

Schneiden sich zwei Sehnen eines Kreises im rechten Winkel, dann gilt:

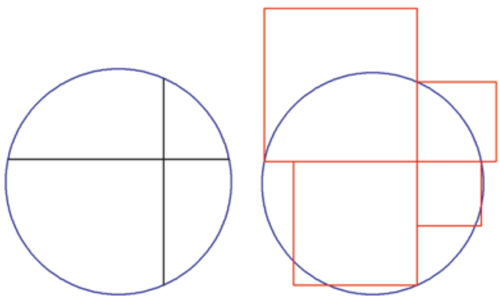
a) Die Summe der Bogenlängen der jeweils einander gegenüberliegenden Kreisbögen ist gleich.

b) Die Quadrate über den Sehnenabschnitten sind zusammen genauso groß wie das Quadrat über einem Durchmesser.

Grafik zu (a):



Grafik zu (b):

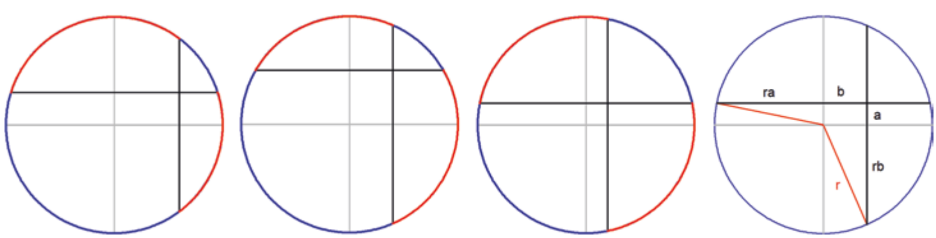


Beweis zu (a): Zeichnet man die parallel zu den Sehnen liegenden Durchmesser ein, erkennt man unmittelbar den Zusammenhang, vgl. die ersten drei Abbildungen.

Beweis zu (b): Nach dem Satz von Pythagoras gilt für die halben Sehnenlängen r_a und r_b: $r_a^2 = r^2 - a^2$ und $r_b^2 = r^2 - b^2$.

Die vier Quadrate über den Sehnenabschnitten haben zusammen den folgenden Flächeninhalt:

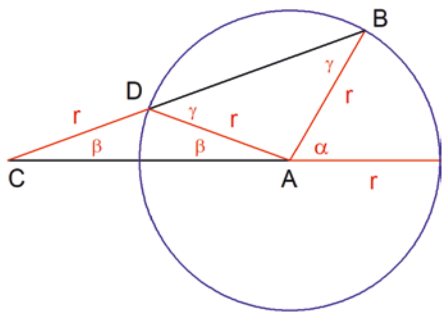
$$\begin{aligned}
&(r_a + b)^2 + (r_b - a)^2 + (r_a - b)^2 + (r_b + a)^2 \\
&= (r_a^2 + 2r_a b + b^2) + (r_b^2 - 2r_b a + a^2) + (r_a^2 - 2r_a b + b^2) + (r_b^2 + 2r_b a + a^2) \\
&= 2 \cdot (r_a^2 + r_b^2 + a^2 + b^2) \\
&= 2 \cdot (r^2 - a^2 + r^2 - b^2 + a^2 + b^2) = 4r^2
\end{aligned}$$



Dreiteilung eines Winkels

In der klassischen euklidischen Geometrie der Griechen wurde das Lineal nur zum Zeichnen von geraden Linien verwendet, z. B. um zwei Punkte miteinander zu verbinden. Bei seiner Konstruktion zur Dreiteilung eines Winkels wich der Ingenieur Archimedes von dieser strengen Benutzung eines Lineals ab. Insofern steht seine „Konstruktion“ nicht im Widerspruch zu der Aussage, dass eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal nicht *möglich ist* (zuerst bewiesen durch Pierre Wantzel 1836).

Ein gegebener Winkel α soll gedrittelt werden. Zunächst verlängert man den unteren Schenkel des Winkel α (nach links). Dann schlägt man um den Scheitel A des Winkels einen Kreis mit beliebigem Radius r und markiert auf dem Lineal eine Strecke genau dieser Länge. Schließlich legt man das Lineal in B an und dreht und schiebt es so lange, bis der eine Endpunkt der auf dem Lineal markierten Strecke auf der Kreislinie liegt (Punkt D) und der andere auf der Verlängerung des unteren Schenkels (Punkt C).



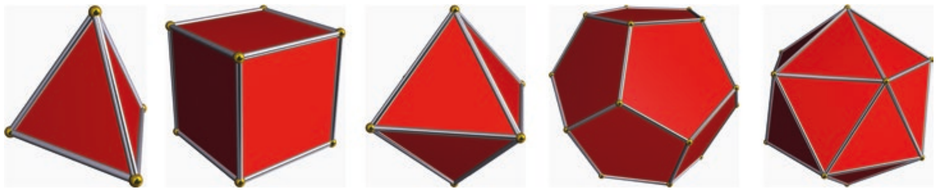
Da die Dreiecke CAD und ABD gleichschenklig sind, ergibt sich $\gamma = 2\beta$ und $\alpha + \beta + (180° - 2\gamma) = 180°$, also $\alpha + \beta = 2\gamma$, und hieraus $\alpha + \beta = 4\beta$ und somit $\alpha = 3\beta$.

2.3.10 Über regelmäßige Körper

Archimedes untersuchte nicht nur die Eigenschaften der fünf **platonischen Körper,** sondern auch die derjenigen Polyeder, die man durch *Abstumpfen,* d. h. durch „gleichmäßiges Abschneiden“ von Ecken aus den platonischen Körpern erhält. Diese abgestumpften platonischen Körper werden als **archimedische Körper** bezeichnet.

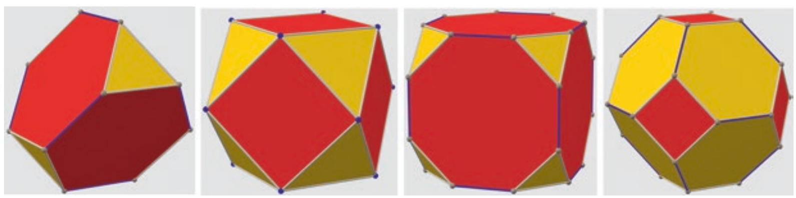
Während die Oberfläche der platonischen Körpern aus lauter gleichen, also zueinander kongruenten regelmäßigen Polygonen besteht (gleichseitige Dreiecke, Quadrate oder regelmäßige Fünfecke), setzt sich die Oberfläche der archimedischen Körper aus *verschiedenen* regelmäßigen Vielecken zusammen.

Die ersten fünf Abbildungen zeigen die fünf platonischen Körper: Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder.



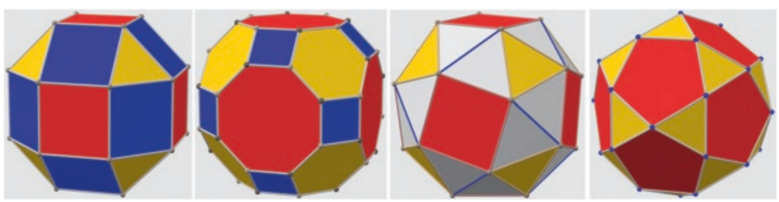
Wikipedia watchduck a.k.a. Tilman Piesk, CC-BA 4.0

Die nächsten Abbildungen zeigen:
Tetraederstumpf, Kuboktaeder, Hexaederstumpf, Oktaederstumpf,



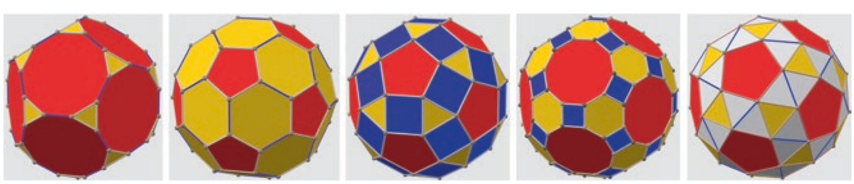
Wikipedia watchduck a.k.a. Tilman Piesk, CC-BA 4.0

kleines Rhombenkuboktaeder, großes Rhombenkuboktaeder (Kuboktaederstumpf), abgeschrägtes Hexaeder, Ikosidodekaeder,



Wikipedia watchduck a.k.a. Tilman Piesk, CC-BA 4.0

Dodekaederstumpf, Ikosaederstumpf, kleines Rhombenikosidodekaeder, großes Rhombenikosidodekaeder (Ikosidodekaederstumpf), abgeschrägtes Dodekaeder.



Wikipedia watchduck a.k.a. Tilman Piesk, CC-BA 4.0

2.4 Literaturhinweise

Eine wichtige Adresse zum Auffinden von Informationen über Mathematiker und deren wissenschaftliche Leistungen ist die Homepage der St. Andrews University.

Informationen über Archimedes findet man unter:

- www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Archimedes.html
- Strick, Heinz Klaus (2007): *Kalenderblatt über Archimedes,* www.spektrum.de/wissen/archimedes-von-syrakus-287–212-v-chr/876829
- Strick, Heinz Klaus (2017): *Mathematik ist schön,* Springer, Heidelberg, Kap. 4 (Kreise und Kreisringe), Kap. 17 (Der Satz des Pythagoras)
- Strick, Heinz Klaus (2018): *Mathematik ist wunderschön,* Springer, Heidelberg, Kap. 4 (Umkreise, Inkreise und Schwerpunkte bei Dreiecken, Vierecken, Fünfecken, …), Kap. 10 (Platonische und andere regelmäßige Körper)
- Strick, Heinz Klaus (2019): *Mathematik ist wunderwunderschön,* Springer, Heidelberg, Kap. 12 (Spiralen)

Ausführliche Darstellungen über Archimedes findet man u. a. in:

- van der Waerden, Bartel Leendert (1956): *Erwachende Wissenschaft – Ägyptische, babylonische und griechische Mathematik,* Birkhäuser, Basel
- Winter, Heinrich (1991): *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht – Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik,* Vieweg, Braunschweig
- Gericke, Helmuth (1992): *Mathematik in Antike und Orient,* Fourier, Wiesbaden
- Sonar, Thomas (2011): *3000 Jahre Analysis,* Springer, Heidelberg
- Herrmann, Dietmar (2014): *Die antike Mathematik,* Springer Spektrum, Berlin
- Schneider, Ivo (2016): *Archimedes – Ingenieur, Naturwissenschaftler, Mathematiker,* Springer Spektrum, Berlin
- Konforowitsch, Andrej Grigorewitsch (1986), *Guten Tag, Herr Archimedes,* Harri Deutsch, Thun/Frankfurt
- Ortoli, Sven, Witkowski, Nicolas (2004): *Die Badewanne des Archimedes – berühmte Legenden aus der Wissenschaft,* Piper, München

Wikipedia-Artikel in deutscher, englischer und französischer Sprache zu den Stichwörtern:

- Archimedes (Archimedes, Archimède)
- Archimedischer Körper (Archimedean solid, Solide d’Archimède)
- Archimedische Schraube (Archimedes’ screw, Vis d’Archimède)
- Archimedische Spirale (Archimedean spiral, Spirale d’Archimède)
- Archimedisches Prinzip (Archimedes’ principle, Poussée d’Archimède)
- Archimedisches Axiom (Archimedean property, Archimédien)
- – (The sand reckoner, L’Arénaire)
- Buch der Lemmata (Book of lemma, –)
- Exhaustionsmethode (Method of exhaustion, Méthode d’exhaustion)
- Stomachion (Ostomachion, Loculus d’Archimède)
- Dreiteilung des Winkels (Angle trisection, Trisection d’angle)

3 Muhammed al-Khwarizmi – Vater der Algebra

Diese Gewogenheit für die Wissenschaften, diese Freundlichkeit und Zuwendung, die Gott den Gelehrten erweist, diese Unmittelbarkeit, mit der er sie beschützt und unterstützt, dass ihnen Unklares klar wird und Schwierigkeiten beseitigt werden, hat mich ermutigt, ein kurzes Werk über das Rechnen mit al-jabr und al-muqabala zu verfassen, wobei ich mich auf das einfachste und nützlichste in der Arithmetik beschränkte.

Der aus Persien stammende Mathematiker Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi gilt als der *Vater der Algebra.*

Die Bezeichnung „Algebra" für eines der Teilgebiete der Mathematik hat etwas mit dem Titel eines Werks zu tun, das al-Khwarizmi um 825 verfasste. Aus *Al Kitab al-muhtasar fi hisab al-gabr wa-al-muqabala* („Ein kurz gefasstes Buch über die Rechenverfahren durch Ergänzen und Ausgleichen") wurde im 12. Jahrhundert in der lateinischen Übersetzung des Werks *Liber algebrae et almucabala,* und durch Verballhornung des Worts *al-gabr* entstand der heute übliche Begriff.

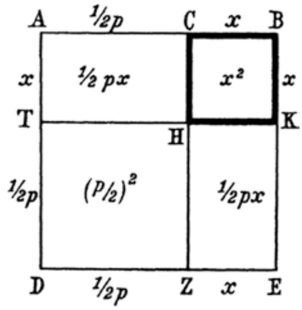
H. K. Strick, *Mathematik – einfach genial!*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-60449-6_3

al-gabr bedeutet so viel wie „ergänzen“; im Zusammenhang mit den „algebraischen“ Umformungen heißt das: Auf beiden Seiten einer Gleichung werden gleiche Terme addiert, um aus einer Gleichung, in der eine *Differenz* steht, eine Gleichung zu erzeugen, in der eine *Summe* vorkommt; beispielsweise wird die Gleichung $ax^2 - bx = c$ durch Addition des Terms bx auf beiden Seiten umgeformt zu $ax^2 = bx + c$.

Die in al-Khwarizmis Werk verwendeten Methoden beruhen auf Ideen, die viele Jahrhunderte zuvor entwickelt worden waren: Bereits babylonische Mathematiker hatten Probleme untersucht, die auf quadratische Gleichungen führten, und sie gaben „Rezepte“ an, wie man die (positive) Lösung bestimmen kann. Die im Laufe der folgenden Jahrhunderte systematisierten Lösungsstrategien wurden von Euklid (ca. 325–265 v. Chr.) in seinen Büchern *Elemente* und *Data* aufgegriffen und zusammengestellt.

Beispielsweise findet man in Buch II,4 der *Elemente* den Satz:

- *Wird eine Strecke beliebig geteilt, so ist ihr Quadrat gleich der Summe der Quadrate der Teilstrecken, vermehrt um ihr doppeltes Rechteck.*



Tropfke 1934

Hinweis *Veranschaulichung des Satzes von Euklid nach Tropfke, siehe Literaturverzeichnis*

Dieser Satz ist nichts anderes als eine Anleitung, eine Gleichung der Form $x^2 + px = q$ (p, $q > 0$) mithilfe der Methode einer quadratischen Ergänzung zu lösen.

Auch zu den anderen Normalformen quadratischer Gleichungen $x^2 + q = px$ und $x^2 = px + q$ findet man im Buch II von Euklids *Elementen* die notwendigen geometrischen Konstruktionen, um die betreffenden quadratischen Gleichungen zu lösen. Dass bei Euklid *geometrische Konstruktionen* zur Lösung von Gleichungen angegeben werden, hängt insbesondere damit zusammen, dass es für irrationale Lösungen nur die Möglichkeit gab, Zahlen als Strecken in geometrischen Figuren darzustellen.

3.1 Einfach genial: al-Khwarizmis Methode zur Lösung quadratischer Gleichungen

Al-Khwarizmi listet in seinem Buch sechs Typen von Gleichungen auf, die er mit Worten beschreibt. Er unterscheidet hierbei drei Arten von Größen: *Quadrat (x^2), Wurzel (x)* und *Zahl*.

Eine formale Schreibweise, wie wir sie heute wie selbstverständlich benutzen, wird erst Jahrhunderte später entwickelt.

Für positive Zahlen *a, b, c* betrachtet er die sechs Fälle:

1. $ax = b$ *(Wurzeln sind gleich Zahlen)*
2. $ax^2 = bx$ *(Quadrate sind gleich Wurzeln)*
3. $ax^2 = b$ *(Quadrate sind gleich Zahlen)*
4. $ax^2 + bx = c$ *(Quadrate und Wurzeln sind gleich Zahlen)*
5. $ax^2 + c = bx$ *(Quadrate und Zahlen sind gleich Wurzeln)*
6. $ax^2 = bx + c$ *(Quadrate sind gleich Wurzeln und Zahlen)*

Die Gleichungen löst al-Khwarizmi durch Angabe eines **Rechenverfahrens:** Dabei gibt er die einzelnen Rechenschritte an, die zur Lösung führen.

Der *Beweis,* dass diese Rechenschritte tatsächlich zur Lösung des Problems führen, erfolgt mithilfe einer *geometrischen Figur.*

Und da man mit geometrischen Mitteln nur positive Zahlen darstellen kann, existieren für al-Khwarizmi auch nur positive Lösungen. Dass beispielsweise $x = 0$ eine Lösung von Gleichungen vom Typ (2) ist, wird erst im 17. Jahrhundert akzeptiert.

Im Folgenden werden die drei normierten Typen gemischt-quadratischer Gleichungen betrachtet, zu denen man kommt, wenn man bei den Typen (4), (5) und (6) beide Seiten der Gleichung durch *a* dividiert.

Konkret werden wir dabei die drei von al-Khwarizmi selbst angegebenen Zahlenbeispiele erläutern. Auch in späteren Jahrhunderten haben Autoren von Mathematikbüchern genau diese Beispiele für quadratische Gleichungen gewählt – was deutlich macht, wie sehr al-Khwarizmis Buch die Entwicklung der Mathematik beeinflusst hat.

3.1.1 Lösung des Aufgabentyps „Quadrate und Wurzeln sind gleich Zahlen“

Beispiel: $\mathbf{x^2 \quad 10x \quad 39}$

In Worten: Wie groß muss eine Quadratzahl x^2 sein, die, um das 10-Fache der Wurzel aus der Quadratzahl ergänzt, die Zahl 39 ergibt?

Geometrische Lösung

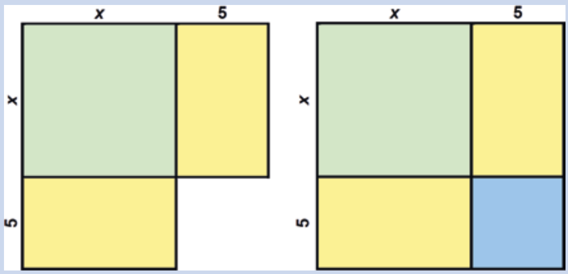
Das in der Abbildung links gezeichnete Quadrat (grün) hat die Seitenlänge x. Dieses wird um zwei Rechtecke (gelb) mit den Seitenlängen 5 und x ergänzt. Die Figur hat also insgesamt den Flächeninhalt $x^2 + 10x$, also 39.

Ergänzt man die Figur zu einem Quadrat, vgl. Abb. rechts („quadratische Ergänzung“), dann setzt es sich zusammen aus dem inneren Quadrat, den beiden

Rechtecken sowie dem kleinen Quadrat (blau) der Seitenlänge 5 (also mit Flächeninhalt 25).

Der Flächeninhalt der neuen Quadratfigur ist also $39+25=64$. Die Seitenlänge des großen Quadrats ist demnach 8.

Hieraus ergibt sich, dass das grün gefärbte Quadrat die Seitenlänge $x = 3$ haben muss.



Die Ergänzung der (aus dem grünen Quadrat und den gelben Rechtecken bestehenden) Winkelhaken-Figur durch das blau gefärbte Quadrat zu einem *größeren* Quadrat ist genau das, was wir in der uns bekannten algebraischen Vorgehensweise als **quadratische Ergänzung** bezeichnen:

$$x^2 + 10x = 39$$

$$x^2 + 10x + 5^2 = 39 + 5^2$$

$$(x + 5)^2 = 64$$

$$x + 5 = 8$$

$$x = 3$$

Al-Khwarizmi gibt zur Lösung der Aufgabe $x^2 + 10x = 39$ die folgenden **Rechenschritte** an:

- Halbiere die Anzahl der Wurzeln; im Beispiel ergibt dies 5.
- Multipliziere die erhaltene Zahl mit sich selbst; hier ist dieses Produkt gleich 25.
- Addiere dies zu der 39; die Summe ist 64.
- Ziehe die Wurzel hieraus (dies ergibt hier 8).
- Subtrahiere hiervon die Hälfte der Anzahl der Wurzeln (also 5); der Rest ist 3. Dies ist die Wurzel aus der gesuchten Quadratzahl.
- Das Quadrat hiervon, also 9, ist die gesuchte Quadratzahl.

Die Gleichung $x^2 + 10x = 39$ hat also die (positive) Lösung $\sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + 39} - \frac{10}{2} = 3$.

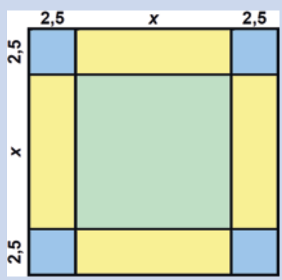
Allgemein müssen also zur Lösung einer Aufgabe vom Typ $x^2 + px = q$ die folgenden Rechenschritte vorgenommen werden:

$$\boxed{p} \xrightarrow{/2} \boxed{\frac{p}{2}} \xrightarrow{(\ )^2} \boxed{\left(\frac{p}{2}\right)^2} \xrightarrow{+q} \boxed{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} \xrightarrow{\sqrt{\ }} \boxed{\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}}$$

$$\boxed{\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}} \xrightarrow{-\frac{p}{2}} \boxed{\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}}$$

Da die beiden Koeffizienten p und q positive Zahlen sind, ist auch die Summe $\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$ positiv und die Wurzel kann gezogen werden; und da die Zahl $\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$ auf jeden Fall größer ist als $\frac{p}{2}$, ergibt sich bei diesem Aufgabentyp immer eine positive Zahl als Lösung.

Hinweis Alternativ verwendete al-Khwarizmi auch eine Darstellung, bei der das Quadrat mit Seitenlänge x (grün) um vier Rechtecke (gelb) mit den Seitenlängen x und $\frac{10}{4} = 2{,}5$ erweitert wird, sodass die Figur schließlich durch vier Quadrate (blau) mit Seitenlänge 2,5 zu einem Quadrat der Seitenlänge $x + 2 \cdot 2{,}5$ ergänzt werden kann.



3.1.2 Lösung des Aufgabentyps „Quadrate und Zahlen sind gleich Wurzeln“

Die im Folgenden von al-Khwarizmi betrachtete Gleichung $x^2 + 21 = 10x$ besitzt *zwei* (positive) Lösungen.

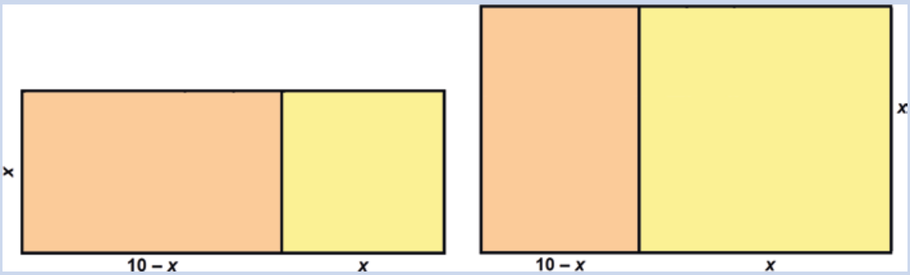
Beispiel: $x^2 + 21 = 10x$
In Worten: Wie groß muss eine Quadratzahl x^2 sein, die, um 21 vermehrt, gleich dem 10-Fachen der Wurzel aus der Quadratzahl ist?

Geometrische Lösung

Die beiden abgebildeten Rechtecke haben die Seitenlängen 10 und x, also den Flächeninhalt $10x$.

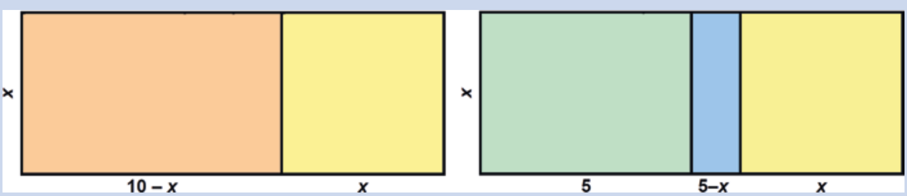
Die beiden Rechtecke unterteilt man jeweils in ein Quadrat mit der Seitenlänge x (gelb), also mit dem Flächeninhalt x^2, und in ein Rechteck mit den Seitenlängen $10 - x$ und x (orange). Die orange gefärbten Rechtecke haben jeweils den Flächeninhalt 21.

Im ersten Fall ist die Seitenlänge x des Quadrats kleiner als die Hälfte der Seitenlänge 10, im zweiten Fall größer als die Hälfte der Seitenlänge 10.

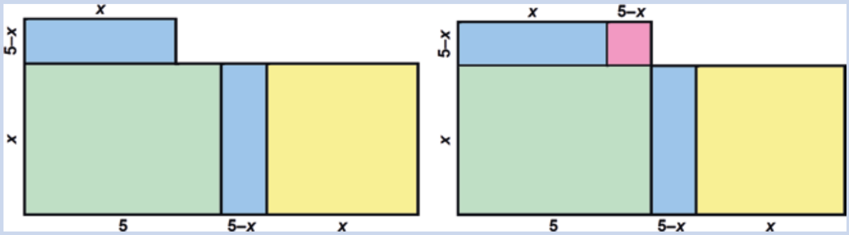


Wir betrachten zunächst den ersten Fall:

Wenn man die Grundseite des Rechtecks halbiert, dann erhält man die in der Abbildung rechts dargestellte Aufteilung: Aus dem orange gefärbten Rechteck wird nun ein grün sowie ein blau gefärbtes Rechteck; die grün gefärbte Fläche (mit den Seitenlängen 5 und x) ist genauso groß wie das blau gefärbte Rechteck (Seitenlängen $5 - x$ und x) und das gelb gefärbte Quadrat (mit der Seitenlänge x) zusammen.



Im nächsten Schritt zeichnet man das blau gefärbte Rechteck (mit den Seitenlängen $5 - x$ und x) zusätzlich oben auf das Ausgangsrechteck (vgl. Abb. links); dann ergänzt man die linke Hälfte der Figur zu einem Quadrat (rosa gefärbt, vgl. Abb. rechts).



Das neu entstandene Quadrat setzt sich also aus drei Teilflächen zusammen: Es besteht aus dem grün gefärbten Rechteck (mit den Seitenlängen 5 und x), aus dem oben ergänzten, blau gefärbten Rechteck (mit den Seitenlängen $5 - x$ und x) sowie dem rosa gefärbten Quadrat (mit der Seitenlänge $5 - x$). Dieses Quadrat hat also den Flächeninhalt 25.

Das neu entstandene Quadrat hat die Seitenlängen $(5 - x) + x$, also 5 (LE), und somit den Flächeninhalt 25 (FE). Die beiden Teilrechtecke (blau und grün) haben zusammen den Flächeninhalt 21 (s. o.).

Daher hat das ergänzte Quadrat (rosa, mit der Seitenlänge $5 - x$) den Flächeninhalt 4; die Seitenlänge dieses Quadrats ist also 2.

Aus $5 - x = 2$ folgt schließlich, dass die gesuchte Länge x gleich 3 sein muss.

Anders als im Fall „Quadrate und Wurzeln sind gleich Zahlen“ kann man hier eigentlich nicht von einer *algebraischen* Umformung der Gleichung $x^2 + 21 = 10x$ im Sinne einer quadratischen Ergänzung sprechen; jedoch wird auch hier ein Quadrat ergänzt (rosa) und damit ein größeres Quadrat erzeugt.

Bei der geometrisch begründeten Lösung der quadratischen Gleichung lauten die nächsten Schritte:

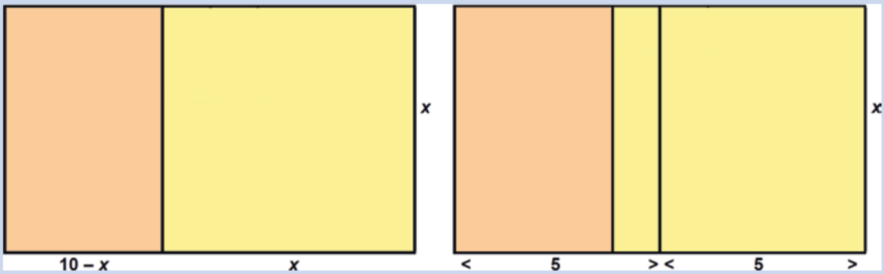
$$(5 - x)^2 + 21 = 5^2$$

$$(5 - x)^2 = 4$$

$$5 - x = 2$$

$$x = 3$$

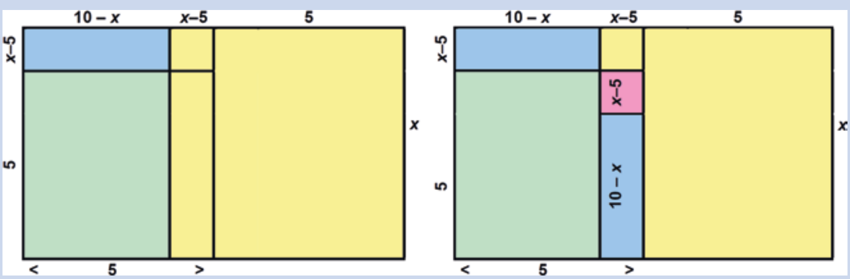
Auch im zweiten Fall wird die Grundseite der Länge 10 des Ausgangsrechtecks halbiert.



Dann zeichnet man in die linke Hälfte der Figur ein Quadrat mit Seitenlänge 5 ein. Das Rechteck mit Flächeninhalt 21 (ursprünglich orange) wird hierdurch in zwei Rechtecke geteilt: Das blau gefärbte Rechteck (mit den Seitenlängen $x - 5$ und $10 - x$) liegt *außerhalb* des Quadrats mit der Seitenlänge 5; das grün gefärbte Rechteck (mit den Seitenlängen 5 und $10 - x$) liegt innerhalb des Quadrats.

Das außerhalb des Quadrats mit Seitenlänge 5 liegende blaue Rechteck ist auch in dem gelben Rechteck innerhalb des Quadrats der Seitenlänge 5 enthalten. Zeichnet man dieses ein, dann erkennt man, dass eine quadratische Restfläche übrig bleibt; diese wird rosa gefärbt.

Das Quadrat mit Seitenlänge 5 (also Flächeninhalt 25) setzt sich also aus drei Teilflächen zusammen: Es besteht aus dem grün gefärbten Rechteck (mit den Seitenlängen 5 und $10 - x$), aus dem blau gefärbten Rechteck (mit den Seitenlängen $x - 5$ und $10 - x$) sowie dem rosa gefärbten Quadrat (mit der Seitenlänge $x - 5$).



Da die beiden Teilrechtecke (blau und grün) zusammen den Flächeninhalt 21 haben (s. o.), das neu entstandene Quadrat den Flächeninhalt 25, hat das ergänzte Quadrat (rosa, mit der Seitenlänge $x - 5$) den Flächeninhalt 4; die Seitenlänge dieses Quadrats ist also 2.

Aus $x - 5 = 2$ folgt schließlich, dass die gesuchte Länge x gleich 7 sein muss.

Auch bei der zweiten Lösung der Gleichung $x^2 + 21 = 10x$ wird ein Quadrat (rosa) ergänzt, damit ein größeres Quadrat gebildet werden kann – im Unterschied zur ersten Lösung entsteht dies aber *im Innern* der Figur.

Hier ergibt sich also aus der geometrisch begründeten Umformung:

$$(x-5)^2 + 21 = 25$$

$$(x-5)^2 = 4$$

$$x - 5 = 2$$

$$x = 7$$

Al-Khwarizmi gibt zur Bestimmung der beiden Lösungen der Aufgabe $x^2 + 21 = 10x$ die folgenden **Rechenschritte** an:

- Halbiere die Anzahl der Wurzeln; im Beispiel ergibt dies 5.
- Multipliziere die erhaltene Zahl mit sich selbst; hier ist dieses Produkt gleich 25.
- Subtrahiere hiervon die 21; das Ergebnis ist 4.
- Ziehe die Wurzel hieraus (dies ergibt hier 2).

1. Lösung:
   - Subtrahiere dies von der Hälfte der Anzahl der Wurzeln (also von 5); dies ergibt 3. Dies ist die Wurzel aus der gesuchten Quadratzahl.
   - Das Quadrat hiervon, also 9, ist die gesuchte Quadratzahl.
2. Lösung:
   - Addiere dies zur Hälfte der Anzahl der Wurzeln (also zu 5); dies ergibt 7. Dies ist die Wurzel aus der gesuchten Quadratzahl.
   - Das Quadrat hiervon, also 49, ist die gesuchte Quadratzahl.

Die Gleichung $x^2 + 21 = 10x$ hat also die beiden Lösungen $\frac{10}{2} - \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 21}$ bzw. $\frac{10}{2} + \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 21}$.

Al-Khwarizmi misst der Tatsache, dass die Gleichung $x^2 + 21 = 10x$ *zwei* Lösungen besitzt, keine besondere Bedeutung bei. Er gibt (sinngemäß) den Rat:

Wenn eine Gleichung von diesem Typ vorliegt, dann probiere den Weg mit der Addition (2. Lösung); *wenn dies nicht passt, dann den Weg mit der Subtraktion* (1. Lösung). *Denn bei diesem Aufgabentyp darf beides gemacht werden, was bei den anderen Aufgabentypen nicht möglich ist.*

Dass grundsätzlich alle Typen quadratischer Gleichungen zwei Lösungen besitzen können, gelangte erst in späteren Jahrhunderten in das Bewusstsein der Mathematiker, als negative Zahlen „zugelassen“ wurden.

Allgemein müssen also zur Lösung einer Aufgabe vom Typ $x^2 + q = px$ die folgenden Rechenschritte vorgenommen werden:

$$\boxed{p} \xrightarrow{/2} \boxed{\tfrac{p}{2}} \xrightarrow{(\;)^2} \boxed{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2} \xrightarrow{+q} \boxed{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q} \xrightarrow{\sqrt{\;}} \boxed{\sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

$$\boxed{\sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q}} \xrightarrow{\frac{p}{2} \mp} \boxed{\tfrac{p}{2} \mp \sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

Interessant ist der Kommentar, den al-Khwarizmi allgemein zur Lösbarkeit von Aufgaben dieses Typs abgibt:

- Wenn sich in einem konkreten Zusammenhang herausstellt, dass das Quadrat der Hälfte der Wurzeln (also $\left(\frac{p}{2}\right)^2$) kleiner ist als die Zahlen (also q), dann ist dieser Vorgang *nicht möglich,* d. h., eine solche Situation kann in der Realität gar nicht auftreten. (In unserer heutigen Sprechweise sagen wir dazu: Da die Diskriminante $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$ negativ ist, besitzt die quadratische Gleichung keine reelle Lösung.)

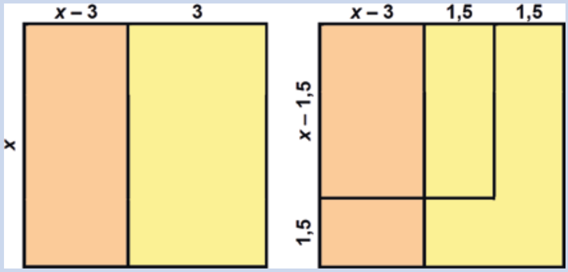
Und weiter:

- Wenn das Quadrat der Hälfte der Wurzeln (also $\left(\frac{p}{2}\right)^2$) genauso groß ist wie die Zahlen (also q), dann ist die Lösung gleich der Hälfte der Wurzeln und man braucht nichts zu addieren oder subtrahieren. (Wenn $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0$, existiert nur die Lösung $\frac{p}{2}$.)

3.1.3 Lösung des Aufgabentyps „Quadrate sind gleich Wurzeln und Zahlen“

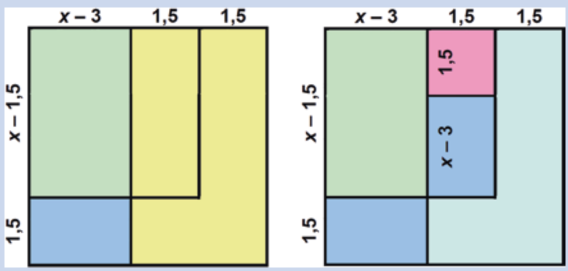
Beispiel: $x^2 = 3x + 4$
In Worten: Wie groß muss eine Quadratzahl x^2 sein, die genauso groß ist wie das 3-Fache der Wurzel aus der Quadratzahl, vermehrt um 4?

Geometrische Lösung
Das Quadrat mit Seitenlänge x setzt sich zusammen aus einem Rechteck (gelb) mit den Seitenlängen x und 3 sowie einem Rechteck mit den Seitenlängen x und $x - 3$ sowie dem Flächeninhalt 4 (orange), vgl. Abb. links. Halbiert man die Rechteckseite der Seitenlänge 3, dann kann man ein Quadrat mit Seitenlänge $x - 1,5$ einzeichnen, vgl. Abb. rechts.



Im Rechteck mit den Seitenlängen x und $x - 3$ sowie dem Flächeninhalt 4 wird durch das eingezeichnete Quadrat (mit der Seitenlänge $x - 1{,}5$) unten ein Rechteck mit den Seitenlängen 1,5 und $x - 3$ abgetrennt (in der Abb. links blau gefärbt). Eine solche Rechteckfläche kann auch im rechten Teil des neu eingezeichneten Quadrats (mit Seitenlänge $x - 1{,}5$) markiert werden (ebenfalls blau gefärbt). Übrig bleibt eine quadratische Fläche mit der Seitenlänge 1,5.

Dieses Quadrat (mit der Seitenlänge $x - 1{,}5$) setzt sich also zusammen aus zwei Rechtecken (blau und grün), deren Flächeninhalt insgesamt 4 beträgt, sowie einem Quadrat der Seitenlänge 1,5 (rosa).



Das eingezeichnete Quadrat der Seitenlänge $x - 1{,}5$ hat demnach insgesamt den Flächeninhalt $4 + 1{,}5^2$, also 6,25, woraus sich für die Seitenlänge $x - 1{,}5$ der Wert 2,5 ergibt und somit für x der Wert 4.

Bei der Lösung der Gleichung $x^2 = 3x + 4$ wird im Innern eines Quadrats (Seitenlänge $x - 1{,}5$) ein Quadrat (rosa) hervorgehoben, von dessen Seitenlänge 1,5 aus erschlossen werden kann, wie groß x ist.

Hier ergibt sich also aus der geometrisch begründeten Umformung:

$$x^2 = 3x + 4 \qquad \text{(schrittweise)}$$

$$(x - 1{,}5)^2 = 4 + 1{,}5^2$$

$$(x - 1{,}5)^2 = 6{,}25$$

$$x - 1{,}5 = 2{,}5$$

$$x = 4$$

Al-Khwarizmi gibt zur Bestimmung der beiden Lösungen der Aufgabe $x^2 = 3x + 4$ die folgenden **Rechenschritte** an:

- Halbiere die Anzahl der Wurzeln; im Beispiel ergibt dies 1,5.
- Multipliziere die erhaltene Zahl mit sich selbst; hier ist dieses Produkt gleich 2,25.
- Addiere dies zu 4; das Ergebnis ist 6,25.
- Ziehe die Wurzel hieraus (dies ergibt hier 2,5).
- Addiere dies zu der Hälfte der Anzahl der Wurzeln (also zu 1,5); dies ergibt 4. Dies ist die Wurzel aus der gesuchten Quadratzahl.
- Das Quadrat hiervon, also 16, ist die gesuchte Quadratzahl.

Die Gleichung $x^2 = 3x + 4$ hat die Lösung $\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4} + \frac{3}{2}$.

Allgemein müssen also zur Lösung einer Aufgabe vom Typ $x^2 = px + q$ die folgenden Rechenschritte vorgenommen werden:

$$\boxed{p} \xrightarrow{/2} \boxed{\frac{p}{2}} \xrightarrow{(\ )^2} \boxed{\left(\frac{p}{2}\right)^2} \xrightarrow{+q} \boxed{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} \xrightarrow{\sqrt{\ }} \boxed{\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}}$$

$$\boxed{\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}} \xrightarrow{-\frac{p}{2}} \boxed{\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}}$$

Dieser Gleichungstyp besitzt stets eine (positive) Lösung.

3.2 Wer war al-Khwarizmi?

In der Zeit von 786 bis 809 regierte der Kalif Harun-al-Rashid von Bagdad aus ein Weltreich, das sich von Spanien bis zu den Ausläufern des Himalaja erstreckte. Unter seiner Regierung wurden die Künste und die Wissenschaften gefördert; an seinem Hof entwickelte sich ein vielfältiges kulturelles Leben. Sein Nachfolger auf dem Thron wurde – nach blutigem Machtkampf – sein jüngerer Sohn al-Mamun. Dieser gründete in Bagdad das „Haus der Weisheit“ als Zentrum der Wissenschaft. Dort entstand eine umfassende Bibliothek – vergleichbar mit der Bibliothek in Alexandria; hier wurden bedeutende Werke aus anderen Kulturkreisen ins Arabische übersetzt, darunter auch die der griechischen Philosophen und Mathematiker.

Zu den bedeutenden Wissenschaftlern des „Hauses der Weisheit“ gehörten Abu Jafar Muhammed ibn Musa al-Khwarizmi (780–850), außerdem die drei Brüder Abu Jafar Muhammed, Ahmed und Al-Hasan ibn Musa ibn Shakir sowie der Philosoph Abu Yusuf Yaqub ibn Ishaq al-Sabbah al-Kindi, vgl. die folgenden beiden Briefmarken aus Syrien.

Von Muhammed al-Khwarizmi kennt man weder Geburtsort noch genaue Lebensdaten; möglicherweise stammt seine Familie aus der persischen Stadt Khwarizm (heute in Usbekistan).

Als Leiter der Bibliothek übersetzte und kommentierte er u. a. die Werke verschiedener griechischer Autoren. Angeregt durch die Schriften des indischen Mathematikers Brahmagupta (598–670) verfasste er um das Jahr 820 ein Buch, das die weitere Entwicklung der Mathematik im Orient und in Europa wesentlich beeinflusste: *Das Buch der Addition und Subtraktion gemäß der indischen Rechnung.*

Durch dieses Werk wurde das dezimale Stellenwertsystem im islamischen Kulturkreis eingeführt. Al-Khwarizmi verdanken wir also auch die Übernahme der indischen Ziffern, die seitdem als **arabisch-indische Ziffern** bezeichnet werden. Er erkannte die Vorteile der Dezimalschreibweise – insbesondere auch die Rolle der Null als Platzhalter für nicht besetzte Stellen im Stellenwertsystem. Al-Khwarizmi bezeichnete die Null als „as-sifr“ (die Leere), woraus sich in den europäischen Sprachen die Wörter „cifra“ (Italienisch und Spanisch), „chiffre“ (Französisch), „Ziffer“ (Deutsch) sowie „zero“ bzw. „zéro“ (Englisch, Italienisch, Portugiesisch, Polnisch, Französisch) entwickelten.

Der Name al-Khwarizmi selbst ist auch Ursprung eines Worts unserer heutigen Sprache: Robert von Chester hatte 1145 das Buch über die indischen Ziffern ins Lateinische übersetzt (es war das erste arabisch-sprachige Buch, das ins Lateinische übersetzt wurde) und gab ihm den Titel *Algoritmi de numero Indorum;* es wurde kurz als *Algorizmi dixit* zitiert. Aus al-Khwarizmi wurde so die Bezeichnung „Algorithmus“ für ein Rechenverfahren.

3.3 Mit welchen (mathematischen) Themen beschäftigte sich al-Khwarizmi außerdem?

Im ersten Abschnitt wurde erläutert, welche Anleitungen al-Khwarizmi in seinem Werk *Hisab al-gabr w-al-muqabala* gab, um die drei Typen quadratischer Gleichungen systematisch lösen zu können.

Zur Übung stellte al-Khwarizmi verschiedene Aufgaben, die auf quadratische Gleichungen führen, wie z. B.:

Beispiele

a) Die Zahl 10 werde in zwei Summanden zerlegt. Teilt man die erste Zahl durch die zweite Zahl und auch die zweite Zahl durch die erste Zahl, dann ergibt dies als Summe $2\frac{1}{6}$.

b) Subtrahiert man von einem Quadrat das Vierfache der Wurzel, dann ist ein Drittel der Differenz gleich dem Vierfachen der Wurzel.

Al-Khwarizmi reflektierte auch darüber, welche Regeln für das Rechnen mit Termen gelten, z. B. wie Terme des Typs $a + bx$ miteinander multipliziert werden, und wie man Maßzahlen von Flächen und Volumina bestimmt (Kreis, Kugel, Kegel, Pyramide).

Einen großen Raum in al-Khwarizmis Algebra-Buch nehmen Aufgaben ein, die dazu dienen sollen, schwierige Alltagsprobleme zu lösen; darunter sind vor allem auch solche Probleme, die sich aus der **Anwendung islamischen Rechts** ergeben.

Beispiele

a) Eine Frau stirbt und hinterlässt ihrem Ehemann, ihrem Sohn und ihren drei Töchtern ein Vermögen. Nach islamischem Recht erbt der Ehemann ein Viertel, die Söhne doppelt so viel wie die Töchter.
Al-Khwarizmi erläutert, dass es in diesem Fall am einfachsten ist, das Vermögen in zwanzig gleiche Teile aufzuteilen; der Ehemann erhält dann fünf Teile, der Sohn sechs und die Töchter jeweils drei Teile aus der Erbschaft.

b) Wenn ein Mann stirbt, ohne Kinder zu hinterlassen, dann erhält die Witwe ein Viertel und die Mutter ein Sechstel des Vermögens, die Brüder des Mannes erhalten doppelt so viel wie seine Schwestern.
c) Jeder gläubige Muslim, der über ein bestimmtes Mindestvermögen (sog. *nisab*) verfügt, muss gemäß den Vorschriften des Korans in jedem Jahr (= Mondjahr mit 354 Tagen) ein Vierzigstel seines Vermögens (= Barvermögen + verliehenes Geld + Gold + Silber – Kredite/Schulden) an Bedürftige geben („Armensteuer").

Al-Khwarizmi verfasste auch mehrere Abhandlungen zur Astronomie mit Tabellen zur Bewegung der Sonne, des Mondes und der Planeten – Grundlage vieler nachfolgender Werke von Astronomen des islamischen Kulturkreises und Europas. Er erfand Geräte zur Himmelsbeobachtung und entwickelte die Sonnenuhren weiter, sodass die gläubigen Moslems die Zeitpunkte des vorgeschriebenen Gebets leichter ablesen konnten. Andere Schriften beschäftigten sich mit dem Problem, Kalender so zu gestalten, dass Sonnen- und Mondbewegung angemessen berücksichtigt werden.

Ausgehend von der *Geographia* des Claudius Ptolemäus (100–175) stellte al-Khwarizmi in seinem Buch *Kitab Surat al-ard* („Bild von der Erde") die Längen- und Breitenkreis-Koordinaten von 2402 Städten, Bergen, Inseln usw. der damals bekannten Welt zusammen. Er korrigierte die Angaben des Ptolemäus hinsichtlich der Ausdehnung des Mittelmeers in Ost-West-Richtung (50 statt 63 Längengrade), wobei er den Längengrad durch die Ostküste des Mittelmeers als Nullmeridian seines Erd-Koordinatensystems wählte.

3.4 Literaturhinweise

Eine wichtige Adresse zum Auffinden von Informationen über Mathematiker und deren wissenschaftliche Leistungen ist die Homepage der St. Andrews University.

Informationen über al-Khwarizmi findet man unter:

- www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Khwarizmi.html
- Strick, Heinz Klaus (2009): *Kalenderblatt über al-Khwarizmi,* www.spektrum.de/wissen/mohammed-al-khwarizmi-780-850/979324
- Strick, Heinz Klaus (2015): *Geniale Ideen großer Mathematiker (7): Al-Khwarizmis Methode zur Lösung quadratischer Gleichungen*, MNU Journal, 68 (1)

Ausführliche Darstellungen über al-Khwarizmi und das Lösen quadratischer Gleichungen findet man u. a. in:

- Berggren, J. Lennart (2011): *Mathematik im mittelalterlichen Islam,* Springer, Heidelberg
- Berggren, J. Lennart (2016): *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam* (2nd edition), Springer, New York
- Herrmann, Dietmar (2016): *Mathematik im Mittelalter*, Springer Spektrum, Berlin
- Jahnke, Hans Niels (1997): *Zur geometrischen Deutung der quadratischen Gleichung,* in: K. P. Müller (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht, Franzbecker, Hildesheim https://www.uni-due.de/imperia/md/content/didmath/ag_jahnke/wt97_1.pdf
- Rosen, Fredrick (1831): *The algebra of Mohammed ben Musa* (erste Übersetzung des arabischsprachigen Buchs ins Englische), Download möglich über: www.uni-due.de/didmath/ag_jahnke/historische_musa1
- Tropfke, J. (1934): *Zur Geschichte der quadratischen Gleichungen über dreieinhalb Jahrtausend*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, Leipzig/Berlin: Teubner
  gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PPN=GDZPPN00213036X
  gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PPN=GDZPPN002130777
  gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PPN=GDZPPN002130831

Wikipedia-Artikel in deutscher, englischer und französischer Sprache zu den Stichwörtern:

- al-Chwarizmi (Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi, Al-Khwârizmî)
- Quadratische Gleichung (Quadratic equation, Équation du second degré)
- Mathematik in der Blütezeit des Islam (Mathematics in medieval Islam, Mathématiques arabes)

4 Ali al-Hasan Ibn al-Haitham – Vater der Optik

Jemand, der die Wahrheit sucht, wird sich nicht damit begnügen, die Schriften der Alten zu studieren und ihnen aus Hochachtung zu vertrauen, sondern vielmehr diesen misstrauen und sie infrage stellen. Wer also die Wahrheit sucht, muss sich selbst zum Kritiker von allem machen, was er liest, und all seinen Verstand einsetzen, um den Inhalt kritisch zu überprüfen und von allen Seiten zu betrachten, ja, sogar seiner eigenen kritischen Überprüfung misstrauen.

In Kap. 1 wurde erläutert, wie die Pythagoreer mithilfe von Mustern aus bunten Steinen einfache Gesetzmäßigkeiten für natürliche Zahlen herausgefunden hatten.

Im Laufe der Jahrhunderte beschäftigten sich viele Mathematiker mit der Frage, wie man die Summen der Potenzen der ersten natürlichen Zahlen mithilfe eines Terms berechnen kann, ohne mühsam jede einzelne natürliche Zahl zu potenzieren und die Potenzen aufaddieren zu müssen.

Auch einer der Mathematiker des islamischen Kulturkreises leistete hierzu einen Beitrag.

H. K. Strick, *Mathematik – einfach genial!*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-60449-6_4

4.1 Einfach genial: Ibn al-Haitham leitet eine Summenformel für Quadratzahlen her

Der Universalgelehrte Abu Ali al-Hasan Ibn al-Haitham (965–1040), in Europa auch unter dem Namen Alhazen bekannt, entdeckte eine anschauliche Methode, mit deren Hilfe man die Summe der ersten n Quadratzahlen von natürlichen Zahlen mithilfe eines Terms direkt berechnen kann.

Formel

Summe der ersten *n* Quadratzahlen von natürlichen Zahlen

Die Summe der ersten n Quadratzahlen der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$ kann mithilfe der Formel $1^1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$ berechnet werden.

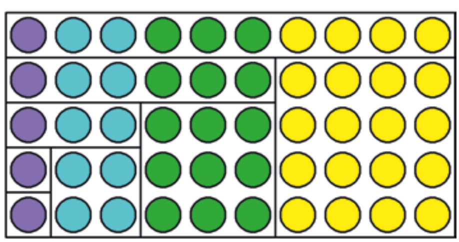
Beispiel: Bestimmung der Summe der ersten 100 Quadratzahlen

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 100^2 = \frac{1}{6} \cdot 100 \cdot (100+1) \cdot (200+1) = 338350$$

Beispielgebundene Herleitung der Summenformel für $n = 4$

Man kann für die Herleitung der Formel die Methode der bunten Steine anwenden (vgl. Kap. 1).

Die Steine werden in Form eines Rechtecks angeordnet, das die Breite $1+2+3+4$ und die Höhe $4+1$ hat. Das Rechteck ist unterteilt in nebeneinanderliegende Quadrate mit 1^2, 2^2, 3^2 bzw. 4^2 Steinen sowie in vier Rechteckstreifen mit 1, $1+2$, $1+2+3$ bzw. $1+2+3+4$ Steinen.



Das Rechteck mit den Seitenlängen $1+2+3+4$ und $4+1$, also mit dem Flächeninhalt $(1+2+3+4) \cdot (4+1)$, enthält also Quadrate mit einem Gesamtflächeninhalt von $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$ und Rechteckstreifen mit dem Gesamtflächeninhalt $(1) + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + (1 + 2 + 3 + 4)$.

Es gilt also die Beziehung

$$\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2\right) + (1) + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + (1 + 2 + 3 + 4) = (1 + 2 + 3 + 4) \cdot 5.$$

Im nächsten Schritt wendet man die bekannte Summenformel für die ersten n natürlichen Zahlen an (vgl. Kap. 1) und ersetzt auf der linken Seite der Gleichung die in Klammern stehenden Summen durch die zugehörigen Summenterme, also $1 + 2 + 3 + 4$ durch $\frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 4^2$, $1 + 2 + 3$ durch $\frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 3^2$, $1 + 2$ durch $\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2^2$ und sogar den einzelnen Summanden 1 durch $\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1^2$.

Somit ergibt sich die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}&(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) + \left(\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1^2\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2^2\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 3^2\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 4^2\right)\\ &= (1 + 2 + 3 + 4) \cdot 5\end{aligned}$$

Auflösen der Klammern und Umordnen ergibt dann die folgende Darstellung:

$$\begin{aligned}&1 \cdot \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2\right) + \tfrac{1}{2} \cdot (1 + 2 + 3 + 4) + \tfrac{1}{2} \cdot \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2\right)\\ &= 5 \cdot (1 + 2 + 3 + 4)\end{aligned},$$

also $\frac{3}{2} \cdot \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2\right) = \frac{9}{2} \cdot (1 + 2 + 3 + 4)$.

Auflösen nach der Summe der Quadratzahlen ergibt dann

$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 3 \cdot (1 + 2 + 3 + 4)$.

Ersetzt man noch auf der rechten Seite den Summenterm für die ersten vier natürlichen Zahlen, so erhält man $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 3 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5\right)$.

Allgemeine Herleitung der Summenformel für die ersten *n* Quadratzahlen

Alle Schritte lassen sich entsprechend für eine beliebige natürliche Zahl n durchführen, d. h., man betrachtet allgemein ein Rechteck mit der Breite $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ und der Höhe $n + 1$, also mit dem Flächeninhalt $(1 + 2 + 3 + \ldots + n) \cdot (n + 1)$. Dieses enthält dann Quadrate mit einem Gesamtflächeninhalt von $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ und Rechteckstreifen der Höhe 1 mit dem Gesamtflächeninhalt $(1) + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + \ldots + (1 + 2 + 3 + \ldots + n)$.

Umformungen analog zum Beispiel oben führen dann zu

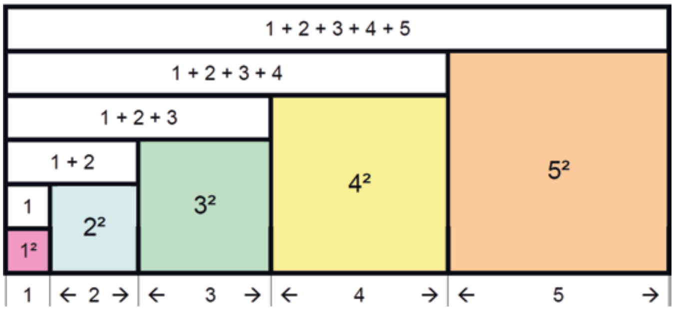
$\frac{3}{2} \cdot \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2\right) = \left(n + 1 - \frac{1}{2}\right) \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + n)$ und weiter

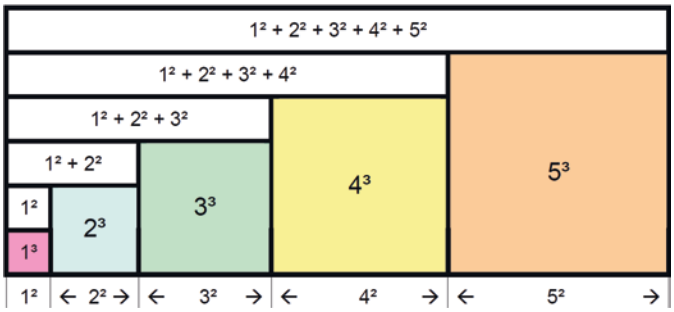
$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2n+1}{2} \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + n)$

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2n+1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1)\right)$, also

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n + 1)(2n + 1)$.

Das Geniale an der Idee Ibn al-Haithams ist, dass sich dieser Ansatz verallgemeinern lässt:





Löst man sich von der Vorstellung, dass durch die Quadrate (in der Zeichnung bunt gefärbt) Quadratzahlen dargestellt werden, und fasst man diese beispielsweise als dritte Potenzen von natürlichen Zahlen auf (vgl. untere Abbildung), dann kann man ablesen:

Die Summe der „Flächeninhalte“ der einzelnen Flächenstücke ist gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks mit der Breite $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$ und der Höhe $n+1$:

$$\left[1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3\right]+\left[1^2+\left(1^2+2^2\right)+\left(1^2+2^2+3^2\right)+\ldots+\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)\right]$$
$$=(n+1)\cdot\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)$$

Analoge Überlegungen wie oben führen dann zu einer Gleichung, in der ein Zusammenhang hergestellt wird zwischen der Summe der ersten n Kubikzahlen und der Summe der ersten n Quadratzahlen bzw. der ersten n natürlichen Zahlen, für die man ja schon Summenformeln vorliegen hat.

Auf diese Weise kann man schrittweise Summenformeln für beliebige Potenzen der ersten n natürlichen Zahlen entwickeln, vgl. *Mathematik ist schön,* Abschn. 16.3.

4.2 Wer war Ibn al-Haitham?

Ibn al-Haitham gilt als einer der bedeutendsten Universalgelehrten des islamischen Mittelalters. Al-Haitham verfasste über 200 Werke, in denen er sich mit mathematischen, medizinischen, philosophischen und insbesondere mit physikalischen Fragen beschäftigte.

Es gibt unterschiedliche und sich widersprechende Informationen über die einzelnen Phasen seines Lebens – in einer seiner Schriften, die autobiografische Hinweise enthält, ging er „nur“ auf seine Irritationen hinsichtlich der verschiedenen religiösen Lehrmeinungen ein.

In Basra (damals Persien, heute Irak), wo er im Jahr 965 geboren wurde, begann er eine Beamtenlaufbahn, die ihn bis zum Amt eines Wesirs (Minister) führte. Diese Tätigkeit erfüllte ihn jedoch nicht. Es gelang ihm, eine gewisse „Unzurechnungsfähigkeit“ vorzugaukeln, die ihn von Verwaltungstätigkeiten befreite und ihm die Möglichkeit bot, sich intensiv mit den Schriften des Aristoteles zu beschäftigen sowie eigene wissenschaftliche Studien zu beginnen.

Währenddessen errichteten die Fatimiden (eine religiöse islamische Bewegung, die sich auf Fatima, die Tochter des Propheten Mohammed, berief) in Nordafrika ein neues Reich und gründeten Kairo als dessen Hauptstadt. Dem zweiten Kalifen der Herrscher-Dynastie, al-Hakim, wurde von den Fähigkeiten al-Haithams berichtet; er lud ihn ein, nach Ägypten zu kommen, damit er das Nil-Hochwasser reguliere. Al-Haitham nahm die Einladung des Kalifen an, musste aber nach einer Expedition zu den Katarakten in Assuan erkennen, dass auch ihm nicht gelingen würde, was den alten Ägyptern schon nicht gelungen war: Eine Regulierung des Nils war in jenen Tagen technisch nicht zu bewältigen.

Al-Hakim war sehr enttäuscht über diese negative Rückmeldung Ibn al-Haithams, bot ihm dennoch einen Verwaltungsposten an. Ibn al-Haitham bemerkte aber schnell, wie gefährlich und unberechenbar der Herrscher war. Erneut griff er zu dem Trick der „geistigen Umnachtung“. Er wurde unter Hausarrest gestellt und ihm der Zugriff auf sein Vermögen genommen; aber der Trick garantierte ihm die körperliche Unversehrtheit und die beinahe uneingeschränkte Möglichkeit zu forschen.

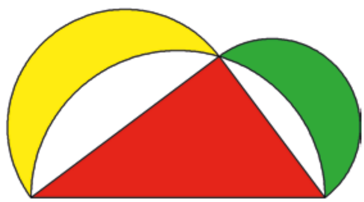
Nach dem Tod al-Hakims im Jahre 1021 konnte Ibn al-Haitham endlich wieder – nach seiner wundersamen „Genesung“ – ins öffentliche Leben zurückkehren. Er erhielt sein Vermögen zurück und reiste nach Syrien sowie nach Spanien (zu dieser Zeit unter arabischer Herrschaft). Danach verdiente er seinen Lebensunterhalt als Lehrer an der Universität in Kairo, aber auch als sachkundiger Übersetzer von mathematischen, physikalischen und medizinischen Texten des Altertums. Dort starb er vermutlich im Jahr 1039.

4.3 Mit welchen (mathematischen) Themen beschäftigte sich al-Haitham außerdem?

Quadratur des Kreises

Ibn al-Haitham versuchte vergeblich, die Fläche eines Kreises (also die Kreiszahl π) dadurch zu bestimmen, dass er Schnittflächen von Kreisen („Möndchen“) untersuchte.

Hippokrates von Chios (um 450 v. Chr.) hatte entdeckt, dass der Flächeninhalt der beiden durch Kreislinien begrenzten Möndchen (in der folgenden Abb. gelb und grün gefärbt) zusammen genauso groß ist wie der Flächeninhalt des durch gerade Linien begrenzten rechtwinkligen Dreiecks (rot gefärbt). Und da die hierfür notwendige Konstruktion einfach ist, hielt es Ibn al-Haitham prinzipiell für möglich, ein Quadrat durch eine geeignete Konstruktion in einen flächengleichen Kreis (und umgekehrt) umwandeln zu können („Quadratur des Kreises“).



Ob Ibn al-Haitham geahnt hat, dass das Problem nicht mithilfe von Zirkel und Lineal gelöst werden kann? Der Beweis für die Unmöglichkeit einer solchen Konstruktion erfolgte erst viele Jahrhunderte später, nämlich 1882 durch den deutschen Mathematiker Ferdinand von Lindemann (1852–1939).

Parallelenaxiom

Ibn al-Haitham betrachtete ein Viereck mit drei rechten Winkeln und versuchte zu beweisen, dass der vierte Winkel weder ein spitzer noch ein stumpfer Winkel sein konnte – er erkannte also die besondere Rolle, die das Parallelenaxiom des Euklid spielte, und versuchte es mithilfe der anderen Axiome zu „beweisen“.

Teilbarkeit von Zahlen

Ibn al-Haitham beschäftigte sich als Erster mit der folgenden Aufgabe (und mit der Verallgemeinerung des Problems):

- Gesucht ist eine Zahl, die nach Division durch 2, 3, 4, 5 und 6 den Rest 1 lässt, die aber durch 7 teilbar ist.

Er erkannte, dass es unendlich viele Lösungen für dieses Problems gibt und dass $6! + 1$ ($= 721$) eine mögliche Lösung ist.

700 Jahre nach Ibn al-Haitham untersuchte der englische Mathematiker John Wilson (1741–1793) ebenfalls dieses Problem; sein Universitätslehrer Edward Waring (1736–1798) veröffentlichte es im Jahr 1770 unter der Bezeichnung *Satz von Wilson*.

Als Erstem gelang 1771 dem französischen Mathematiker italienischer Herkunft Joseph-Louis Lagrange (Giuseppe-Lodovico Lagrangia, 1736–1813, vgl. Kap. 15) ein Beweis des von Ibn al-Haitham und Wilson vermuteten Satzes. Weitere alternative Beweise erfolgten u. a. durch Leonhard Euler (1773) und Carl Friedrich Gauß (1807).

Satz von Wilson

Eine natürliche Zahl p ist genau dann eine Primzahl, wenn $(p-1)!+1$ durch p teilbar ist.

Beispiele zum Satz von Wilson

$p=3:(3-1)!+1=3$ ist teilbar durch 3 und daher eine Primzahl; $(3-1)!+1=3$ lässt bei der Division durch 2 den Rest 1,

$p=4:(4-1)!+1=7$ ist *nicht* teilbar durch 4 und daher keine Primzahl; $(4-1)!+1=7$ lässt bei der Division durch 2 und 3 jeweils den Rest 1,

$p=5:(5-1)!+1=25$ ist teilbar durch 5 und daher eine Primzahl; $(5-1)!+1=25$ lässt bei der Division durch 2, 3 und 4 jeweils den Rest 1,

$p=6:(6-1)!+1=121$ ist *nicht* teilbar durch 6 und daher keine Primzahl; $(6-1)!+1=121$ lässt bei der Division durch 2, 3, 4, 5 und auch bei der Division durch 6 jeweils den Rest 1,

$p=7:(7-1)!+1=721$ ist teilbar durch 7 und daher eine Primzahl; $(7-1)!+1=721$ lässt bei der Division durch 2, 3, 4, 5 und 6 jeweils den Rest 1,

$p=8:(8-1)!+1=5041$ ist *nicht* teilbar durch 8 und daher keine Primzahl; $(8-1)!+1=5041$ lässt bei der Division durch 2, 3, 4, 5, 6, 7 und auch bei der Division durch 8 jeweils den Rest 1,

$p=9:(9-1)!+1=40321$ ist *nicht* teilbar durch 9 und daher keine Primzahl; $(9-1)!+1=40321$ lässt bei der Division durch 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und auch bei der Division durch 9 jeweils den Rest 1,

$p=10:(10-1)!+1=362881$ ist *nicht* teilbar durch 10 und daher keine Primzahl; $(10-1)!+1=362881$ lässt bei der Division durch 2, 3, 4, … 9 und auch bei der Division durch 10 jeweils den Rest 1,

$p=11:(11-1)!+1=3628801$ ist teilbar durch 11 und daher eine Primzahl; $(11-1)!+1=3628801$ lässt bei der Division durch 2, 3, 4, …, 9 und 10 jeweils den Rest 1.

Vollkommene Zahlen

Euklid hatte in Band VII seiner *Elemente* bewiesen: Wenn $n=2^{k-1}$ eine Primzahl ist, dann ist $m=2^{k-1}\cdot\left(2^k-1\right)$ eine vollkommene Zahl, d. h., die Summe der *echten* Teiler von m (also ohne die Zahl n selbst) ist gleich m.

Al-Haitham stellte fest, dass auch die Umkehrung dieses Satzes gilt: Wenn eine Zahl der Form $2^{k-1}\cdot\left(2^k-1\right)$ eine vollkommene Zahl ist, dann ist 2^{k-1} eine Primzahl. Allerdings gelang der formale Beweis der Umkehrung des Satzes erst Leonhard Euler (1707–1783, vgl. Kap. 14).

Alhazens Problem

Im *Kitab al-Manazir* findet man auch ein Problem, das als „Alhazens Problem“ in die Literatur eingegangen ist – es ist ein Problem, das sowohl mathematisch als auch physikalisch interpretiert werden kann:

- *In einer Kreisfläche sind zwei Punkte A und B gegeben. Welche Punkte der Kreislinie kann man mit den beiden Punkten verbinden, sodass die Halbierende des entstehenden Winkels durch den Kreismittelpunkt geht?*

Als Problem der Optik kann man die Frage wie folgt beschreiben:

- *Auf welchen Punkt eines kreisförmigen Spiegels muss ein innerhalb des Kreises stehender Beobachter B schauen, um das reflektierte Bild eines Gegenstandes A zu sehen, der ebenfalls innerhalb des Kreises liegt?*

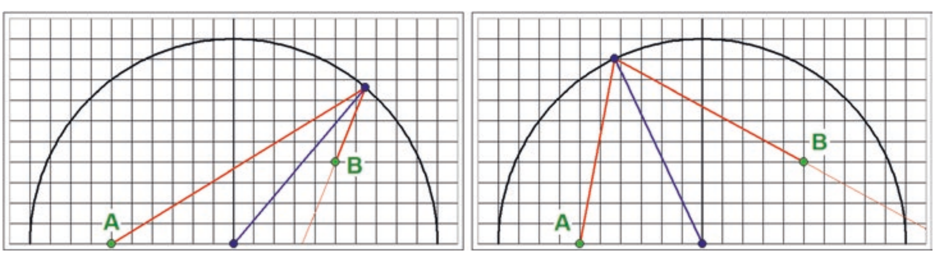
Noch anschaulicher wird das Problem, wenn man es als „Billard-Problem“ formuliert **(Alhazens Billard-Problem):**

- *Wie muss man eine Kugel A auf einem kreisförmigen Billardtisch gegen die Bande spielen, damit eine Kugel B getroffen wird?*

Ibn al-Haitham löste die Aufgabe mithilfe von Kegelschnitten.

Nachdem *Kitab al-Manazir* 1572 in einer lateinischen Übersetzung in Basel erschienen war, beschäftigten sich zahlreiche Mathematiker mit der Lösung des Problems, darunter Isaac Barrow und Christiaan Huygens (vgl. die französische Wikipedia-Seite). Die gesuchten Punkte auf der Kreislinie (i. A. existieren vier Lösungen) sind nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar; die algebraische Lösung führt auf eine Gleichung 4. Grades.

Die folgenden Abbildungen zeigen die beiden Lösungen im oberen Halbkreis für das Beispiel $r = 1$, $M(0 \mid 0)$, $A(-0{,}6 \mid 0)$, $B(0{,}5 \mid 0{,}3)$, d. h., das Koordinatensystem wurde hier so gewählt, dass der Punkt A auf der x-Achse liegt.



Alhazens Beitrag zur Optik

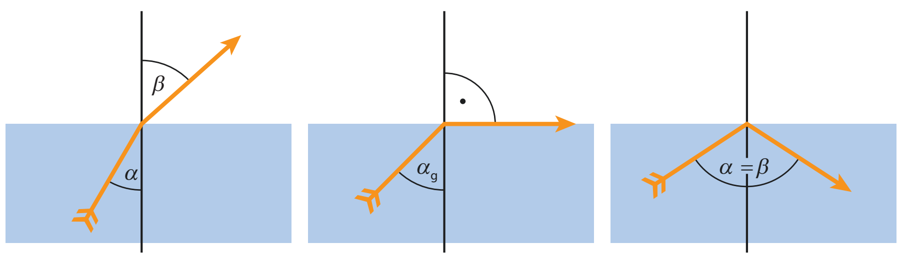
Ibn al-Haithams wichtigster wissenschaftlicher Beitrag war ein 7-bändiges Werk zur Optik (*Kitab al-Manazir* – „Schatz der Optik"), das im Jahre 1270 als *Opticae thesaurus Alhazeni* ins Lateinische übersetzt wurde und die Entwicklung der Physik im Abendland maßgeblich beeinflusst hat. Besonders bemerkenswert ist seine „moderne" wissenschaftliche Vorgehensweise, die sich auf wiederholbare Experimente und nicht auf spekulative Theorien oder subjektive Meinungen stützte; wenn er eine Hypothese aufstellte, so überprüfte er sie wiederum durch ein Experiment.

Ibn al-Haitham beschrieb in diesem Werk auch den physikalischen Aufbau des Auges, erklärte die Funktionsweise der „Camera obscura" (Lochkamera) und stellte fest, dass das Sehen dadurch funktioniert, dass Gegenstände Licht reflektieren (und nicht dass Strahlen vom Auge ausgehen und so die beobachteten Gegenstände erfassen, wie es noch vor ihm Ptolemäus und Euklid vermuteten).

Er stellte die Reflexionsgesetze auf und beschrieb die Konstruktion der reflektierten Strahlen in ebenen, sphärischen, zylindrischen und parabolischen Flächen.

Bei seiner Beschreibung des Phänomens der Lichtbrechung beim Übergang von einem Medium in ein anderes bediente er sich der korrekten Vorstellung, dass die (Licht-)Geschwindigkeit im dichteren Medium kleiner ist.

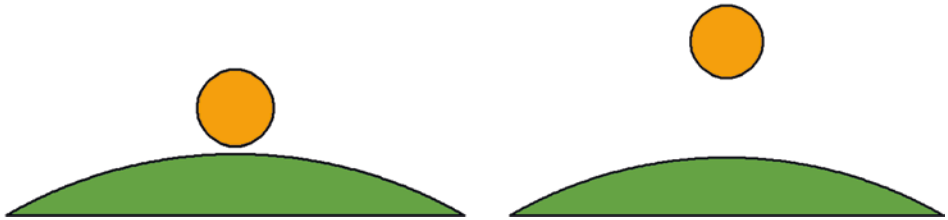
Auch bestimmte er experimentell den Grenzwinkel der Totalreflexion.



Ibn al-Haitham beschrieb auch die Wirkungsweise gekrümmter Gläser (Linsen). Nach der Übersetzung seines Hauptwerks ins Lateinische wurden von Mönchen „Lesesteine" (kugelförmige Glaskörper) entwickelt, die Vorläufer der Lupen und Brillen.

Er erklärte, wieso es am Morgen und am Abend eine Dämmerung gibt (Lichtbrechung an der Erdatmosphäre), und schätzte aus dem dabei bestimmten Grenzwinkel von 19° eine „Höhe" der Erdatmosphäre von ungefähr 15 km.

Er beschäftigte sich mit dem Phänomen, dass Sonne und Mond in der Nähe des Horizonts größer erscheinen, und bewies durch Messung, dass dies nur eine Täuschung ist.



Auch führte er Experimente durch, um die Dispersion des Sonnenlichts zu untersuchen.

Dies alles begründet eindrucksvoll, warum er „Vater der Optik“ genannt wird, vgl. auch die pakistanische Briefmarke aus dem Jahr 1969.

4.4 Literaturhinweise

Eine wichtige Adresse zum Auffinden von Informationen über Mathematiker und deren wissenschaftliche Leistungen ist die Homepage der St. Andrews University.

Informationen über al-Haitham findet man unter:

- www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Al-Haytham.html
- Strick, Heinz Klaus (2007): *Kalenderblatt über al-Haitham,* www.spektrum.de/wissen/abu-ali-al-hasan-ibn-al-haitham-965-1039/893657
- Strick, Heinz Klaus (2014): *Geniale Ideen großer Mathematiker (3): Alhazens Herleitung von Summenformeln,* MNU Journal, 67 (1)
- Strick, Heinz Klaus (2017): *Mathematik ist schön,* Springer, Heidelberg, Kap. 2 (Muster aus bunten Steinen), Kap. 16 (Summen von Potenzen aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen)

Ausführliche Darstellungen über al-Haitham findet man u. a. in:

- Berggren, Len (2011): *Mathematik im islamischen Mittelalter,* Springer, Heidelberg

Die Methode zur Herleitung der Potenzsummenformeln findet man unter:

- www.maa.org/press/periodicals/convergence/sums-of-powers-of-positive-integers-abu-ali-al-hasan-ibn-al-hasan-ibn-al-haytham-965-1039-egypt

Informationen zu *Alhazens Problem:*

- Dörrie, Heinrich (1967): *100 Great Problems of Elementary Mathematics: Their History and Solution,* Dover Publications Inc.
- Elkin, Jack M. (1965): *A deceptively easy problem,* Mathematics Teacher, 58 (3), S. 194–199
- Sabra, Abdelhamid I. (1982): *Ibn al-Haytham's Lemmas for Solving „Alhazen's Problem",* Archive for History of Exact Sciences, 26 (4), S. 299–324

Wikipedia-Artikel in deutscher, englischer und französischer Sprache zu den Stichwörtern:

- Alhazen (Ibn al-Haytham, Alhazen)
- (Alhazen's problem, Problème d'Alhazen)

5 Abu Arrayhan al-Biruni – Universalgelehrter aus Afghanistan

Der störrische Kritiker sagt: „Was ist der Nutzen dieser Wissenschaften?“ Denn er kennt nicht die Eigenschaft, welche die Menschen von den Tieren unterscheidet: Es ist das Wissen, das nur vom Menschen angestrebt wird, und das nur um des Wissens willen angestrebt wird, denn der Erwerb des Wissens ist wahrhaftig köstlich. Denn Gutes kann nicht hervorgebracht und Böses kann nicht vermieden werden, außer durch Wissen.

Wie die Vielfalt der in diesem Kapitel gezeigten Briefmarken zeigt, wurde der tausendste Geburtstag von **Abu Arrayhan al-Biruni** (973–1048) in zahlreichen Ländern gefeiert, u. a. in der Sowjetunion, weil al-Biruni in einem Ort südlich des Aralsees geboren wurde, der heute zu Usbekistan gehört (1973 noch eine der asiatischen Teilrepubliken der Sowjetunion), im Iran, weil seine Muttersprache Persisch war, und in Afghanistan, weil er lange Zeit in dieser Region lebte und dort auch starb.

Auch arabische Staaten feierten den Universalgelehrten, denn die Mehrzahl der von ihm verfassten 146 Werke mit insgesamt 13.000 Seiten schrieb er in arabischer Sprache.

H. K. Strick, *Mathematik – einfach genial!*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-60449-6_5

5.1 Einfach genial: Abu Arrayhan al-Biruni bestimmt den Erdradius

Eine dieser Schriften al-Birunis trug den Titel *Über die Bestimmung der Koordinaten von Städten.* Mit diesem Werk knüpfte al-Biruni an das an, was vor ihm u. a. **Eratosthenes von Cyrene** (ca. 276–194 v. Chr.), **Claudius Ptolemäus** (100–160) und **Muhammed al-Khwarizmi** (780–850, vgl. Kap. 3) an wichtigen Daten zusammengetragen hatten.

Aus mathematischer Sicht ist an diesem Werk vor allem die geniale Methode hervorzuheben, den Erdradius zu bestimmen.

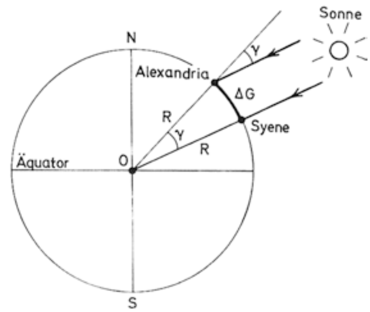
Al-Biruni geht in seiner Schrift zunächst auf die Methode ein, wie Eratosthenes, der über mehrere Jahrzehnte der Leiter der berühmten Bibliothek in Alexandria war, den Erdradius ermittelt hatte.

5.1.1 Bestimmung des Erdradius durch Eratosthenes

Aufgrund der zahlreichen Daten aus der 500.000 Schriftrollen umfassenden Bibliothek von Alexandria wusste Eratosthenes, dass die Entfernung zwischen den Städten Alexandria und Syene (am nördlichen Wendekreis, heute: Assuan) etwa 5000 *Stadien* betrug. Solche Streckenmessungen wurden im Altertum durch besonders ausgebildete *Schrittzähler* ermittelt.

Für seine Berechnung ging Eratosthenes davon aus, dass die beiden Städte auf demselben Längengrad liegen, außerdem dass die Sonnenstrahlen parallel zueinander in den beiden Orten eintreffen (was beides nicht ganz genau stimmt).

Am Tag der Sommersonnenwende ließ er mittags an beiden Orten den Winkel der Sonnenhöhe messen: In Syene stand die Sonne im Zenit, in Alexandria war sie 7° 12′ vom Zenit entfernt, das ist ein Fünfzigstel von 360°. Die Entfernung zwischen den beiden Städten entspricht daher ebenfalls einem Fünfzigstel des Erdumfangs, d. h., der Erdumfang beträgt also 250.000 Stadien.



Geof, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Eratosthenes-Erdmessung.png

Man weiß leider nicht genau, welches heutige Maß der Länge von einem *Stadion* entspricht. Betrachtet man aber die *tatsächliche* Entfernung zwischen den beiden Orten (835 km), dann ergibt sich hieraus ein Erdumfang von ca. 41.750 km – eine Abweichung von nur 4,2 % von der Realität.

Seinen historischen Rückblick setzt al-Biruni fort, indem er als Nächstes auf einen Bericht al-Khwarizmis eingeht: Anfang des 9. Jahrhunderts hatte der Kalif al-Mamun (786–833) angeordnet, die von Ptolemäus überlieferten Daten zum Erdumfang zu überprüfen.

Dazu ließ er in einer Wüstenebene in der Nähe von Mossul (heute: Irak) zwei Vermessungsteams starten, das eine nach Norden, das andere nach Süden ziehend, und zwar so lange, bis sie feststellten, dass *der Unterschied in der Mittagshöhe auf 1 Grad angewachsen war.* Aus der Messung der zurückgelegten Strecken ergab sich dann ein Wert von ca. 56 *arabischen Meilen* pro Grad des Erdmeridians, also insgesamt ein Erdumfang von 20.160 *arabischen Meilen* (Abweichung ca. 2 % vom wahren Wert).

Übrigens Im 15. Jahrhundert kam es wohl zu einer Verwechslung der Längeneinheit: Aus arabischen Meilen wurden italienische Meilen, die etwa 25 % kürzer sind, sodass Kolumbus von einem zu kleinen Erdumfang ausging und somit die Strecke nach Indien zu kurz einschätzte.

Als Drittes folgt dann al-Birunis Erläuterung seines eigenen Vorschlags.

Er beginnt dies mit den herrlich humorvollen Worten: *Hier eine weitere Methode zur Bestimmung des Erdumfangs. Sie verlangt nicht, dass man in Wüsten umherwandert.*

Die Idee zu seiner Messmethode, schreibt er weiter, sei ihm gekommen, als er in Indien eine Bergfestung besucht habe; man geht heute davon aus, dass es sich um die Festung Nandana im Punjab handelt (heute in Pakistan gelegen). Von dort aus hatte er nämlich einen weiten, ungehinderten Blick über eine Ebene – ein Blick bis zum Horizont.

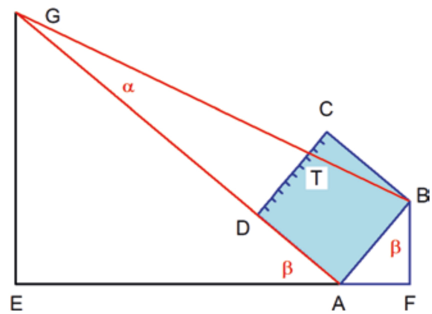
Vom Berggipfel aus konnte er also den Neigungswinkel γ zwischen dem *astronomischen Horizont* (Senkrechte zum Lot zum Erdmittelpunkt) und dem *wahren Horizont* (Sichtlinien-Tangente an die Erdkugel) messen.

Dann habe er sich an eine Methode erinnert, die ein Astronom vom Hof des Kalifen al-Mamun entwickelt hatte – ein in der Praxis bewährtes Verfahren zur Bestimmung der Höhe eines Berges.

Wie weiter unten gezeigt wird, kann man aus der Kenntnis der berechneten Berghöhe h und des gemessenen Neigungswinkels γ dann den Erdradius bestimmen.

5.1.2 Messungen und Rechnungen zur Bestimmung einer Berghöhe

Die folgende Abbildung zeigt die Messmethode: Ein quadratisches Brett wird senkrecht auf eine der Ecken gestellt und so fixiert, dass die untere Kante AD auf die Spitze G des Berges ausgerichtet ist.



Vom Punkt B aus wird ebenfalls die Bergspitze G angepeilt; aus der Lage der auf der gegenüberliegenden Seite des Quadrats vorgenommenen Markierung in T kann man dann mithilfe der Strahlensätze die Höhe des Berges berechnen.

Die Gerade durch B und die Bergspitze G unterteilt die Quadratfläche *ABCD;* im oben liegenden rechtwinkligen Dreieck BCT können alle Seitenlängen und Winkel *gemessen* werden.

Al-Biruni empfiehlt für die Durchführung der Messung, in B ein ausreichend langes Lineal drehbar zu montieren; mit diesem visiert man zunächst den Punkt G an, um so den Punkt T zu bestimmen. Dann benutzt man das Lineal als Lot und bestimmt den Punkt F als Fußpunkt des Lotes.

Der spitze Winkel $\alpha = \angle CBT$ im rechtwinkligen Dreieck BCT stimmt mit dem spitzen Winkel an der Bergspitze im Dreieck ABG überein.

Mithilfe der Seitenlänge a des quadratischen Bretts und des Winkels α berechnet man die Länge der Strecke $e = |AG|$.

Es gilt $\tan(\alpha) = \frac{a}{e}$, also e $= \frac{a}{\tan(\alpha)}$.

Aus der Ausrichtung des quadratischen Bretts zur Bergspitze ergibt sich ein Winkel $\beta = \angle GAE$ und hieraus die Berghöhe $h = |EG|$.

Es gilt $\sin(\beta) = \frac{h}{e}$, also $h = e \cdot \sin(\beta)$.

Durch Einsetzen erhält man dann:

$$h = e \cdot \sin(\beta) = \frac{a \cdot \sin(\beta)}{\tan(\alpha)}$$

Zur Bestimmung der Berghöhe werden also zwei Winkelmessungen und die Angabe der Kantenlänge des Bretts benötigt.

Al-Biruni schlug auch einen zweiten Lösungsweg vor, bei dem nur Streckenlängen zu messen sind. Dabei benutzte er die Eigenschaft, dass in der Figur ähnliche Dreiecke auftreten:

Die Dreiecke BCT und GAB sind zueinander ähnlich, daher gilt

$|BC|:|CT| = |AG|:|AB|$, also $|AG| = |AB| \cdot \frac{|BC|}{|CT|}$.

Auch die Dreiecke AFB und GEA sind zueinander ähnlich, also gilt

$|EG|:|AG| = |AF|:|AB|$, also $|EG| = |AG| \cdot \frac{|AF|}{|AB|}$.

Einsetzen des Terms für $|AG|$ ergibt schließlich:

$$h = |EG| = |AB| \cdot \frac{|BC|}{|CT|} \cdot \frac{|AF|}{|AB|} = |AF| \cdot \frac{|BC|}{|CT|}$$

5.1.3 Messungen und Rechnungen zur Bestimmung des Erdradius

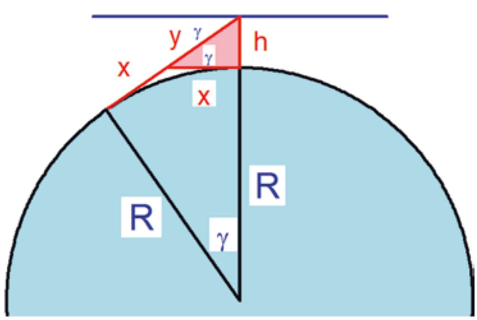
In der folgenden Figur sind zwei rechtwinklige Dreiecke enthalten:

- ein Dreieck mit den Katheten R und $x + y$ sowie der Hypotenuse $R + h$,
- ein Dreieck mit den Katheten x und h sowie der Hypotenuse y (rosa gefüllt).

Dabei sind die Strecken mit der Bezeichnung x jeweils Abschnitte der Tangenten an den Kreis (= Erdkugel).

Die Fläche des „großen“ rechtwinkligen Dreiecks setzt sich aus einem symmetrischen Drachen mit den Seitenlängen x und R und dem rosa gefüllten rechtwinkligen Dreieck zusammen.

Gemessen wird der Neigungswinkel γ, der sowohl in dem rosa Dreieck (Winkel zwischen den beiden Tangenten an die Erdkugel) als auch in dem großen Dreieck (am Erdmittelpunkt) auftritt; die Höhe h des Berges wird als bekannt vorausgesetzt.



Mithilfe von γ und h können alle weiteren Größen berechnet werden:

$\sin(\gamma) = \frac{h}{y}$, also $y = \frac{h}{\sin(\gamma)}$,

$\tan(\gamma) = \frac{h}{x}$, also $x = \frac{h}{\tan(\gamma)}$,

$\tan(\gamma) = \frac{x+y}{R}$, also $R = \frac{x+y}{\tan(\gamma)}$.

Alternativ kann man den Erdradius R auch direkt bestimmen:

Aus $\cos(\gamma) = \frac{R}{R+h}$ folgt

$R \cdot \cos(\gamma) + h \cdot \cos(\gamma) = R$, also $h \cdot \cos(\gamma) = R \cdot (1 - \cos(\gamma))$.

Hieraus ergibt sich schließlich:

Formel

Al-Birunis Formel zur Berechnung des Erdradius

Kennt man den Neigungswinkel γ zwischen dem *astronomischen Horizont* (Senkrechte zum Lot zum Erdmittelpunkt) und dem *wahren Horizont* (Sichtlinien-Tangente an die Erdkugel) und kennt man den Höhenunterschied h zwischen dem Aussichtspunkt und der Erdoberfläche, dann kann man wie folgt den Radius R der Erdkugel berechnen:

$$R = h \cdot \frac{\cos(\gamma)}{1-\cos(\gamma)}$$

Alternativ wäre heute auch eine Berechnung mithilfe des Sinussatzes möglich (dieser Satz wurde erst um das Jahr 1000 zum ersten Mal bewiesen):

Im rosa gefüllten Dreieck gilt $x{:}h = \sin(\gamma) : \sin(90° - \gamma)$,

also $x = h \cdot \frac{\sin(\gamma)}{\sin(90°-\gamma)}$.

Dann berechnet man die Länge der Seite y mithilfe des Satzes von Pythagoras und wendet schließlich noch einmal den Sinussatz im „großen" Dreieck an:

$R : (x + y) = \sin(90° - \gamma) : \sin(\gamma)$, also $R = (x + y) \cdot \frac{\sin(90°-\gamma)}{\sin(\gamma)}$.

5.1.4 Ergebnis der Messungen und Berechnungen al-Birunis

Bei Berggren (u. a.) findet man über al-Birunis Messungen die folgenden Ergebnisse (vgl. Literaturhinweise):

Aus einem Neigungswinkel γ von 34 Bogenminuten berechnete al-Biruni einen Höhenunterschied zwischen Beobachtungspunkt und Ebene von [652; 3, 18] *Cubits,* was umgerechnet etwa 321 m sind. Hieraus schloss er dann auf einen Erdradius von 12.851.370 *Cubits* ($\approx$ 6336 km).

Heute, 1000 Jahre nach al-Biruni, geht man von einem tatsächlichen mittleren Erdradius von 6371 km aus, was mit dem von al-Biruni ermittelten Wert erstaunlich gut übereinstimmt.

Es ist vielfach bezweifelt worden, dass al-Biruni tatsächlich so wie oben beschrieben vorgegangen ist. Abgesehen von der Problematik einer derart klaren Sicht, dass man im Innern eines Landes den tatsächlichen Horizont sehen kann, erscheint es ziemlich zweifelhaft, dass er einen Winkel von exakt 34 Bogenminuten hat messen können – al-Biruni selbst gab an, dass der Winkel *etwas weniger als ein Drittel plus ein Viertel* von einem Grad war, also etwas weniger als $20' + 15' = 35'$. Ein weiteres mögliches Problem stellten auch die Sinus- und Tangenstabellen dar, deren Genauigkeit keinesfalls ausreichte (die Schrittweite der vorliegenden Tabellen betrug bestenfalls 15', Zwischenwerte mussten interpoliert werden).

Geringfügige Abweichungen zwischen gemessenem und tatsächlichem Winkel würden aber Abweichungen von Hunderten von Kilometern hinsichtlich des Erdradius bedeuten, wie man leicht nachrechnen kann.

Gomez (vgl. Literaturhinweise) geht davon aus, dass al-Biruni tatsächlich so vorgegangen ist, wie er es selbst beschrieben hat, allerdings nur um die *prinzipielle* Durchführbarkeit seiner Vorgehensweise zu überprüfen. Auch wenn er – wie oben zitiert – das *Wandern in der Wüste* humorvoll kommentierte, habe er die im 9. Jahrhundert ermittelten Werte (und die damit verbundene Leistung) nicht infrage stellen wollen.

Daher habe er – von diesen Daten der al-Mamum-Expedition ausgehend – rückwärts gerechnet und den hieraus zu erwartenden Neigungswinkel berechnet, der (ungefähr) mit seiner tatsächlichen Messung übereinstimmte.

5.2 Wer war al-Biruni?

Über die Herkunft des 973 in Kath (heute Usbekistan) geborenen Universalgelehrten al-Biruni ist nichts bekannt; seine Muttersprache war Persisch.

Einen ersten Hinweis auf seine bevorstehende Laufbahn gibt eine Veröffentlichung aus dem Jahr 990: In dieser Schrift erläuterte der 17-Jährige, wie er die geografische Breite seines Heimatorts bestimmt hatte: Er ermittelte denjenigen Tag des Jahres, an dem die Sonne mittags am höchsten stand, und konnte dann aus dem gemessenen Höhenwinkel die geografische Breite Kaths (heutiger Name: Biruni) ablesen.

Al-Birunis Lehrer und Förderer war der Mathematiker und Astronom Abu Nasr Mansur (960–1036), der der Herrscherfamilie angehörte.

Wegen eines Bürgerkriegs floh al-Biruni 995 aus seiner Heimat; einige Zeit hielt er sich in der Nähe der heutigen Stadt Teheran auf. Seine Aufenthaltsorte lassen sich aus astronomischen Ereignissen wie Sonnen- und Mondfinsternissen rekonstruieren, bei denen er Messungen durchführte, diese auswertete und die Daten veröffentlichte.

Solche astronomischen Berechnungen machten ihm keine Mühe; beispielsweise war er in der Lage, aus den Daten, die Abu'l-Wafa (940–998) während einer Mondfinsternis in Bagdad bestimmt hatte, und eigenen Messwerten die Differenz der geografischen Längen der beiden Orte Kath und Bagdad zu ermitteln. Damit solche Beobachtungen von astronomischen Ereignissen in verschiedenen Ländern in Beziehung zueinander gebracht werden konnten, erstellte der mittlerweile berühmte Gelehrte eine Übersicht über die in verschiedenen Ländern verwendeten Kalender.

1004 konnte er wieder in seine Heimat zurückkehren und zusammen mit Abu Nasr Mansur weitere astronomische Beobachtungen durchführen.

Als 1017 der Herrscher Mahmud von Ghazna (heute in Afghanistan gelegen) auch die Gebiete südlich des Aralsees annektierte, wurden die beiden als Gefangene in die Hauptstadt des Regenten verschleppt. Al-Biruni beklagte später die geringe Unterstützung, die sie durch diesen Herrscher erfahren haben. Zwar ließ er ihnen die Möglichkeit zu forschen, aber sie mussten – als Gefangene des Regenten – diesen überallhin begleiten, damit sie ihm als Berater stets zur Verfügung standen.

1022 begann Mahmud mit der Eroberung Indiens, vor allem der Gebiete, die zum heutigen Pakistan gehören; die Truppen stießen sogar bis zum Indischen Ozean vor.

Al-Biruni nutzte den Feldzug auf seine Weise: Nach seiner Rückkehr verfasste er ein umfangreiches Werk, *Kitab tarich al-Hind,* in dem er sich – vergleichend und niemals bewertend – mit dem Hinduismus auseinandersetzte, das Kastensystem Indiens beschrieb sowie die geografischen Gegebenheiten der eroberten Gebiete darstellte.

Bei seinen Exkursionen entdeckte er in Nordindien Erdformationen, die Muscheln und Fossilien enthielten; hieraus zog er den Schluss, dass hier früher einmal ein Meer gewesen sein musste.

Mit besonderem Interesse studierte er Sprache und Schrift des Landes, sodass er bald in der Lage war, Texte aus dem Sanskrit ins Arabische zu übersetzen. Der sprachbegabte Universalgelehrte übersetzte sogar Texte aus dem Arabischen und dem Griechischen in Sanskrit, darunter die *Elemente* des Euklid. Er verschaffte sich einen Überblick über die indische Literatur zu Astronomie und Astrologie, Geschichte und Geografie, Mathematik und Medizin. Das mehrere Bände umfassende Werk beschäftigte sich auch mit der in Indien gebräuchlichen Ziffernschreibweise sowie den Maß- und Gewichtseinheiten.

Als Mahmud starb, blieb al-Biruni in Ghazna, da die neuen Herrscher ihm endlich Bewegungsfreiheit gewährten. Bis zu seinem Lebensende im Jahr 1048 verfasste er noch zahlreiche Abhandlungen zu sehr unterschiedlichen Themen.

5.3 Mit welchen Themen beschäftigte sich al-Biruni außerdem?

Bereits im Alter von 22 Jahren beschäftigte sich al-Biruni mit der Frage, wie man die kugelförmige Erde durch ebene Karten angemessen darstellen kann, und entwickelte dazu die Methode der Zylinderprojektion, die dann im 16. Jahrhundert von Gerhard Mercator (1512–1594) noch einmal entdeckt wurde.

Er systematisierte die Verfahren zur Landvermessung, wendete dabei den Sinussatz der ebenen Trigonometrie ebenso an wie den der sphärischen Geometrie, um die Entfernungen zwischen Orten zu ermitteln.

Wie oben erwähnt, überprüfte al-Biruni die u. a. von Ptolemäus und al-Khwarizmi erstellten Verzeichnisse der bedeutenden Städte und geografischen Punkte der *Oikumene* (= der bekannte besiedelte Bereich der Erde) hinsichtlich der Angaben über deren Lage mithilfe eines kartografischen Netzes; außerdem gab er für alle Orte die für die Gläubigen bedeutsame Richtung nach Mekka an *(Quibla).*

In diesem Zusammenhang wies der amerikanische Wissenschaftler Frederick Starr darauf hin, dass al-Biruni als der *geistige Entdecker Amerikas* gelten kann, denn bereits vor 1000 Jahren habe dieser die Ansicht vertreten, dass es wegen der unterschiedlichen spezifischen Dichte von Wasser und der Mineralien noch weitere Landmassen zwischen Asien und Europa geben müsse – es wäre unvorstellbar, dass sich bei der Entstehung der Kontinente die Landmassen so ungleichmäßig über die Erde verteilt hätten.

Der Universalgelehrte al-Biruni führte Messungen zu Licht- und Schallgeschwindigkeit durch. Er bestimmte die Dichte von verschiedenen Stoffen, indem er die von den Objekten verdrängte Flüssigkeitsmenge wog – das ist die Grundidee eines sog. Pyknometers; beispielsweise untersuchte er hiermit die während seiner Expeditionen genommenen Gesteinsproben.

Die beiden folgenden Briefmarken sind dem Astronomen al-Biruni gewidmet, der anschaulich eine Begründung für die Mondphasen gab.

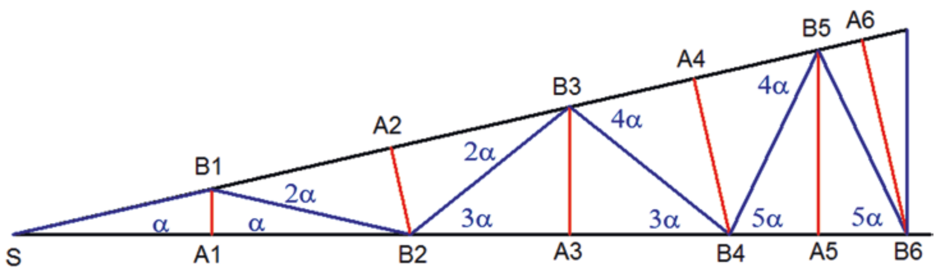
Auch erstellte al-Biruni ein Verzeichnis mit 720 Heilpflanzen und deren Wirkungsweise, einschließlich der Bezeichnungen in Arabisch, Griechisch, Persisch, Syrisch und einer indischen Sprache, die al-Biruni beherrschte. Auch dieses Verzeichnis wurde noch Jahrhunderte lang verwendet.

Mit seinem Zeitgenossen Ibn Sina (980–1038, in Europa auch unter dem Namen Avicenna bekannt) diskutierte er über die Lehren des Aristoteles. Insbesondere kritisierte er die *philosophische Methode* des Aristoteles, Theorien ohne empirische Überprüfung aufzustellen.

Die folgende iranische Briefmarke erinnert an den *Philosphen* al-Biruni (Mitte), eingerahmt zwischen al-Farabi (872–950, links) und Ibn Sina (rechts).

Abschließend sei noch auf eine weitere geniale Idee verwiesen, die möglicherweise (vgl. S. Gericke, S. 203) ebenfalls von al-Biruni stammt.

Herleitung der Mehrfachwinkelsätze anhand einer Zickzack-Figur



Die folgende Figur mit Winkel α und Scheitelpunkt S entsteht wie folgt:

Auf einem der Schenkel wird eine Strecke der Länge $|SB_1| = 1$ (LE) abgetragen (blau), dann von B_1 aus ein Lot auf den anderen Schenkel gefällt, sodass ein rechtwinkliges Dreieck SA_1B_1 entsteht.

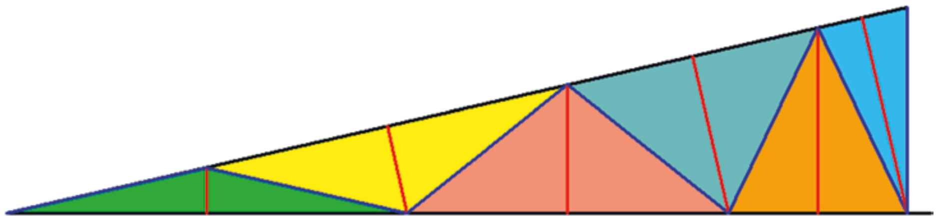
In diesem Dreieck gilt $\sin(\alpha) = |A_1B_1|$ und $\cos(\alpha) = |SA_1|$. Das Dreieck SA_1B_1 wird dann an A_1B_1 gespiegelt und man erhält das kongruente Dreieck $A_1B_2B_1$.

Fällt man von B_2 aus ein Lot auf den gegenüberliegenden Schenkel, dann entsteht wieder ein rechtwinkliges Dreieck $B_1B_2A_2$. Für den spitzen Winkel mit Scheitelpunkt B_1 gilt $\angle(A_2B_1B_2) = 180° - 2(90° - \alpha) = 2\alpha$.

Wegen $|B_1B_2| = 1$ folgt daher $\sin(2\alpha) = |B_2A_2|$ und $\cos(2\alpha) = |B_1A_2|$.

Das Dreieck $B_1B_2A_2$ wiederum wird dann an A_2B_2 gespiegelt und man erhält das kongruente Dreieck $A_2B_2B_3$.

Von B_3 aus wird dann wieder ein Lot auf den gegenüberliegenden Schenkel gefällt usw.



So entstehen nacheinander rechtwinklige Dreiecke mit den Winkeln α, 2α, 3α, 4α usw.

Der Zickzack-Streckenzug $S - B_1 - B_2 - B_3 - \ldots - B_k$ kann gezeichnet werden, solange $k \cdot \alpha \leq 90°$.

Durch die (hier rot gezeichneten) Lote entsteht eine Folge von zueinander ähnlichen Dreiecken $SA_1B_1, SB_2A_2, SA_3B_3, SB_4A_4, \ldots$ mit den Seiten

- $SA_1, SA_2, SA_3, SA_4, \ldots$ als *anliegende* Katheten zum Winkel α,
- $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4, \ldots$ als *gegenüberliegende* Katheten zum Winkel α,
- $SB_1,\ SB_2, SB_3, SB_4, \ldots$ als Hypotenusen der Dreiecke.

Für die Verhältnisse einander entsprechender Seiten gilt daher:

$$\frac{|SA_1|}{|SB_1|} = \frac{|SA_2|}{|SB_2|} = \frac{|SA_3|}{|SB_3|} = \frac{|SA_4|}{|SB_4|} = \ldots$$

Dies kann man für die anderen ähnlichen Dreiecke fortsetzen und erhält:

$$\frac{|SA_1|}{|SB_1|} = \frac{\cos(\alpha)}{1}, \frac{|SA_2|}{|SB_2|} = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2\cos(\alpha)}, \frac{|SA_3|}{|SB_3|} = \frac{2\cos(\alpha)+\cos(3\alpha)}{1+2\cos(2\alpha)}, \frac{|SA_4|}{|SB_4|} = \frac{1+2\cos(2\alpha)+\cos(4\alpha)}{2\cos(\alpha)+2\cos(3\alpha)}, \ldots$$

Da diese Brüche untereinander alle gleich sind, folgt
aus den ersten beiden Termen

$\frac{\cos(\alpha)}{1} = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2\cos(\alpha)}$, also $2\cos^2(\alpha) = 1 + \cos(2\alpha)$, d. h. $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$,

aus dem ersten und dritten Term

$\frac{\cos(\alpha)}{1} = \frac{2\cos(\alpha)+\cos(3\alpha)}{1+2\cos(2\alpha)}$, also $\cos(\alpha) + 2\cos(\alpha)\cos(2\alpha) = 2\cos(\alpha) + \cos(3\alpha)$, d. h.

$$\cos(3\alpha) = 2\cos(\alpha)\cos(2\alpha) - \cos(\alpha) = 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)$$

usw.

Analog ergibt sich die Gleichungskette

$\frac{\sin(\alpha)}{1} = \frac{\sin(2\alpha)}{2\cos(\alpha)} = \frac{\sin(3\alpha)}{1+2\cos(2\alpha)} = \frac{\sin(4\alpha)}{2\cos(\alpha)+2\cos(3\alpha)} = \ldots$ und hieraus nacheinander

$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$,

$\sin(3\alpha) = \sin(\alpha) + 2\sin(\alpha)\cos(2\alpha) = \ldots = 3\sin(\alpha) - 4\sin^3(\alpha)$, usw.

5.4 Literaturhinweise

Eine wichtige Adresse zum Auffinden von Informationen über Mathematiker und deren wissenschaftliche Leistungen ist die Homepage der St. Andrews University.

Informationen über a-Biruni findet man unter:

- www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Biruni.html
- Strick, Heinz Klaus (2010): *Kalenderblatt über al-Biruni* www.spektrum.de/wissen/abu-arrayhan-al-biruni-973-1048/1036358
- Strick, Heinz Klaus (2019): *Kalenderblatt über Eratosthenes* www.spektrum.de/wissen/eratosthenes-der-erfinder-der-geographie/1646030
- Strick, Heinz Klaus (2015): *Geniale Ideen großer Mathematiker (8): al-Birunis Methode zur Vermessung der Erdkugel*, MNU-Journal, 68 (5)

Ausführliche Darstellungen über al-Biruni findet man u. a. in:

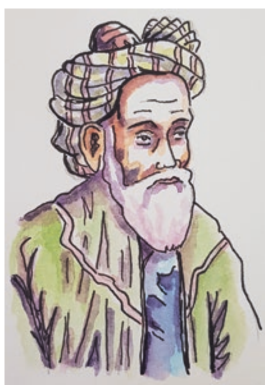
- al-Khalili, Jim (2013): *Im Haus der Weisheit – die arabischen Wissenschaften als Fundament unserer Kultur*, Frankfurt: Fischer Taschenbuch
- Berggren, Len (2011): *Mathematik im mittelalterlichen Islam,* Heidelberg: Springer
- Gericke, Helmut (1992): *Mathematik in Antike und Orient,* Wiesbaden: Fourier
- Gomez, Alberto (2001/2014): *Biruni's measurement of the Earth,* www.academia.edu/8166456/Birunis_measurement_of_the_Earth
- Scriba, C.J., Schreiber, P.(2005): *5000 Jahre Geometrie,* Berlin: Springer
- Starr, Frederick (2013): *So, who did discover America?* www.historytoday.com/s-frederick-starr/so-who-did-discover-america

Wikipedia-Artikel in deutscher, englischer und französischer Sprache zu den Stichwörtern:

- al-Biruni
- Eratosthenes
- Erdradius (Earth radius, Rayon de la Terre)

6 Omar Khayyam – Mathematiker, Philosoph und Dichter

Die meisten aber, die sich heute den Anschein von Gelehrtheit geben, bemänteln das Falsche mit dem Wahren, kommen niemals über den Betrug und die gelehrte Prahlerei hinaus, und nutzen ihr weniges Wissen für rein weltliche und schändliche Zwecke. Wenn sie aber einem begegnen, der sich allein um die Wahrheit bemüht, der die Ehrlichkeit bevorzugt und die Falschheit und die Lüge mit Nachdruck ablehnt, so verkaufen sie ihn als einen Dummkopf und verhöhnen ihn.



Muhammad al-Khwarizmi hatte in seinem Buch *Al Kitab al-muhtasar fi hisab al-gabr wa-al-muqabala* erläutert, wie man die verschiedenen Typen *quadratischer* Gleichungen systematisch lösen kann, vgl. Kap. 3.

Danach gelang es verschiedenen Mathematikern des islamischen Kulturkreises, auch spezielle kubische Gleichungen zu lösen, aber es dauerte bis zum Jahr 1079, bis der persische Mathematiker, Astronom, Philosoph und Dichter Omar Khayyam Lösungsverfahren für *alle* möglichen Typen *kubischer* Gleichungen vorlegte.

H. K. Strick, *Mathematik – einfach genial!*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-60449-6_6

Der Titel von Omar Khayyams Buch *Risalah fi'l-barahin 'ala masa'il al-jabr wa-al-muqabala* enthält ebenfalls die Hinweise auf *al-gabr* und *al-muqabala* – aus heutiger Sicht würden wir sein Werk wohl eher unter *Analytischer Geometrie* als unter *Algebra* einordnen.

So wie al-Khwarizmi quadratische Gleichungen als Aussagen über bestimmte Eigenschaften von Rechtecken interpretierte, deutete Khayyam kubische Gleichungen entsprechend als Aussagen über Volumina von Quadern, deren Seitenlängen zu bestimmen sind.

Bei der Lösung von kubischen Gleichungen ging es also um die Bestimmung von Streckenlängen, die eine vorgegebene Bedingung erfüllen. Khayyams besondere Leistung war es, dass er *für jeden* der möglichen Aufgabentypen eine geeignete Konstruktion angeben konnte.

Khayyam selbst bezeichnete die von ihm angewandten Methoden als *algebraisch,* denn „… was man in der algebraischen Kunst sucht, das sind die Beziehungen, die vom Bekannten zum Unbekannten führen", notierte er zu Beginn seines Werkes.

Dennoch hoffte er darauf, dass es irgendwann einmal möglich sein würde, die Lösungen der Gleichungen als *Zahlen* und nicht nur als *Strecken* anzugeben: „Wir haben versucht, diese Lösungen mithilfe der Algebra auszudrücken, sind aber damit gescheitert. Es könnte jedoch sein, dass dies Männern gelingt, die nach uns kommen."

Wenn man die folgenden Erläuterungen zu den jeweils verwendeten Konstruktionen mithilfe von Kegelschnitten anschaut, wird man staunen, welche algebraischen Fertigkeiten Omar Khayyam bereits beherrscht haben muss, um jeweils eine geeignete Wahl von Kreisen, Parabeln oder Hyperbeln zu treffen.

Rein algebraische Verfahren zur Lösung von Gleichungen 3. Grades wurden erst im 16. Jahrhundert von Scipione del Ferro, Niccolò Tartaglia, Girolamo Cardano und Lodovico Ferrari entwickelt, vgl. Kap. 8.

6.1 Einfach genial: Omar Khayyams geometrische Methode zur Lösung kubischer Gleichungen

In seiner *Abhandlung über Probleme der Algebra* listet Omar Khayyam insgesamt 25 mögliche Typen von Gleichungen auf, die wir hier unter Verwendung der heute üblichen Schreibweise notieren. Dass er so viele Typen unterscheiden musste, hängt damit zusammen, dass für die Mathematiker seiner Zeit nur *positive* Zahlen a, b, c als Koeffizienten infrage kamen.

Man beachte weiter, dass die algebraische Schreibweise, die wir heute benutzen, erst seit dem 16. Jahrhundert üblich ist (Vieta sei Dank!). Khayyam musste noch alles mit Worten ausdrücken:

Kubus = kubischer Term, *Quadrat* = quadratischer Term, *Wurzel* = linearer Term, *Zahl* = absolutes Glied.

Eine Gleichung beispielsweise der Form $x^3 + bx = ax^2 + c$ wurde von ihm als

Kubus und Wurzeln ist gleich Quadrate und Zahlen

zitiert, vgl. auch Kap. 3.

6.1.1 Die 25 möglichen Typen von Gleichungen maximal 3. Grades

Zu den den 25 Gleichungstypen gehören

- sechs „einfache“ Gleichungen

$$x = c,\, x^2 = c,\, x^3 = c,\, x^2 = bx,\, x^3 = ax^2,\, x^3 = bx$$

und 19 zusammengesetzte Gleichungen. Letztere unterteilt Omar Khayyam wie folgt:

- drei *quadratische* Gleichungen, die aus drei Termen bestehen:

$$x^2 + bx = c,\, x^2 + c = bx,\, x^2 = bx + c,$$

- drei *kubische* Gleichungen aus drei Termen, die sich durch Division durch x auf quadratische Gleichungen reduzieren lassen (bekanntlich wurde null als Lösung einer Gleichung von den Mathematikern des Mittelalters nicht akzeptiert):

$$x^3 + ax^2 = bx,\, x^3 + bx = ax^2,\, x^3 = ax^2 + bx,$$

- sechs kubische Gleichungen aus drei Termen, die sich nicht auf quadratische Gleichungen reduzieren lassen:

$$x^3 + bx = c,\; x^3 + c = bx,\; x^3 = bx + c,\; x^3 + ax^2 = c,\; x^3 + c = ax^2,\; x^3 = ax^2 + c,$$

- vier kubische Gleichungen aus vier Termen, bei denen die Summe von drei Termen gleich dem vierten Term ist:

$$x^3 + ax^2 + bx = c,\, x^3 + ax^2 + c = bx,\, x^3 + bx + c = ax^2,\, x^3 = ax^2 + bx + c,$$

- drei kubische Gleichungen aus vier Termen, bei denen die Summe von zwei Termen gleich einer Summe von zwei Termen ist:

$$x^3 + ax^2 = bx + c,\, x^3 + bx = ax^2 + c,\, x^3 + c = ax^2 + bx.$$

Somit bleiben 14 Typen von tatsächlich kubischen Gleichungen, vgl. die Tabelle in Abb. 6.1.

Die zugehörigen Konstruktionen erfolgten mithilfe von Kegelschnitten (Kreis, Parabel, Hyperbel) gemäß den *Elementen* des Euklid und den *Konica* des Apollonius von Perge – ohne Verwendung eines Koordinatensystems.

Kegelschnitte als Objekte der Analytischen Geometrie spielen im Mathematikunterricht heute keine Rolle mehr; daher werden wir diese Kurven mithilfe von Koordinatengleichungen beschreiben. Für weitergehende Informationen über die verschiedenen Möglichkeiten der Beschreibung von Kegelschnitten verweisen wir z. B. auf die zugehörigen Wikipedia-Artikel, vgl. Literaturverzeichnis.

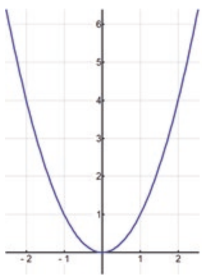
Abb. 6.1 Typen kubischer Gleichungen und Omar Khayyams Auswahl geeigneter Kegelschnitte zu deren Lösung

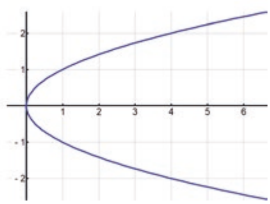
Typen kubischer Gleichungen	Lösung durch Schnitt von
(1) $x^3 = c$	zwei Parabeln
(2) $x^3 + bx = c$	Kreis und Parabel
(3) $x^3 + c = bx$	Parabel und Hyperbel
(4) $x^3 = bx + c$	Parabel und Hyperbel
(5) $x^3 + ax^2 = c$	Parabel und Hyperbel
(6) $x^3 + c = ax^2$	Parabel und Hyperbel
(7) $x^3 = ax^2 + c$	Parabel und Hyperbel
(8) $x^3 + ax^2 + bx = c$	Kreis und Hyperbel
(9) $x^3 + ax^2 + c = bx$	zwei Hyperbeln
(10) $x^3 + bx + c = ax^2$	Kreis und Hyperbel
(11) $x^3 = ax^2 + bx + c$	zwei Hyperbeln
(12) $x^3 + ax^2 = bx + c$	zwei Hyperbeln
(13) $x^3 + bx = ax^2 + c$	Kreis und Hyperbel
(14) $x^3 + c = ax^2 + bx$	zwei Hyperbeln

Definition

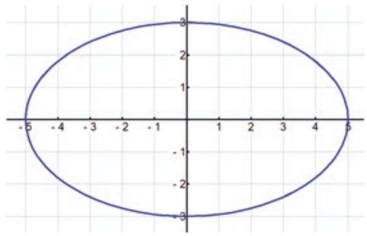
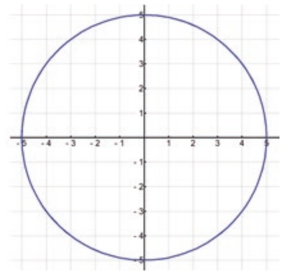
Parabeln, Ellipsen, Kreise und Hyperbeln im Koordinatensystem

- Punkte auf einer **Parabel**, deren Scheitelpunkt im Ursprung liegt, können mithilfe der Gleichungen $y = ax^2$ bzw. $x = ay^2$ beschrieben werden; in den beiden Grafiken sind Parabeln mit $a = 1$ gezeichnet.



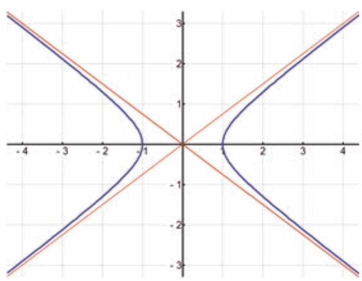
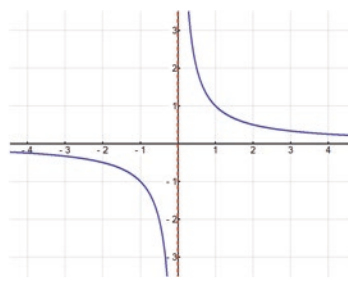


- Die Punkte einer **Ellipse** mit Mittelpunkt $(0 \mid 0)$ können durch die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ beschrieben werden, wobei mit a, b die Länge der Halbachsen bezeichnet wird.
- Im Fall, dass $a = b = r$ ist, ergibt sich ein Kreis mit Radius r, dessen Koordinatengleichung also mit $x^2 + y^2 = r^2$ dargestellt werden kann.
- In der Grafik links wurden die Parameterwerte $a = 5$ und $b = 3$ gewählt, in der Grafik rechts $r = a = b = 5$.

- Die Punkte einer **Hyperbel**, die symmetrisch zur x-Achse liegt, können durch die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ beschrieben werden, wobei die Punkte $(\,a \mid 0\,)$ und $(\,-a \mid 0\,)$ die Scheitelpunkte der Hyperbel sind. Die beiden Äste der Hyperbel nähern sich asymptotisch den Geraden mit den Gleichungen $y = \pm\frac{b}{a} \cdot x$.
  In der Grafik links wurden die Parameterwerte $a = 1$ und $b = \frac{3}{4}$ gewählt.

Dreht man den Graphen einer zur x-Achse symmetrischen Hyperbel mit $a = b = 1$ um 45°, so erhält man den Graphen der punktsymmetrischen Kehrwertfunktion mit $y = \frac{1}{x}$; die x-Achse und die y-Achse sind jeweils Asymptoten der Funktion (vgl. Grafik rechts).

Verschiebt man die Parabeln, Kreise, Ellipsen und Hyperbeln im Koordinatensystem, dann ändern sich die Koordinatengleichungen entsprechend.

Im Folgenden werden exemplarisch einige der Lösungsansätze Omar Khayyams erläutert und durch jeweils *ein* Beispiel konkretisiert. Auf die ausführlichen Darstellungen der Konstruktionen sei auf Sebastian Linden (vgl. Literaturhinweise) verwiesen.

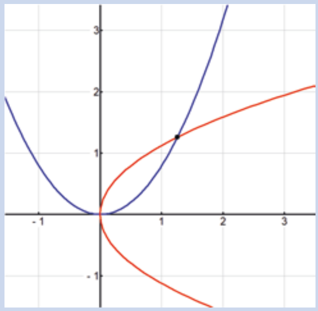
6.1.2 Lösungen der verschiedenen Gleichungstypen

(Typ 1) Lösung einer Gleichung vom Typ $x^3 = c$
Omar Khayyam betrachtete zwei zueinander kongruente Parabeln, die um 90° gegeneinander gedreht sind, nämlich die gestreckten Parabeln $y = \frac{1}{\sqrt[3]{c}} \cdot x^2$ und $x = \frac{1}{\sqrt[3]{c}} \cdot y^2$.

Durch Quadrieren der ersten Gleichung ergibt sich $y^2 = \frac{1}{\sqrt[3]{c^2}} \cdot x^4$.

Setzt man dies in die zweite Gleichung ein, so folgt $x = \frac{1}{\sqrt[3]{c}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{c^2}} \cdot x^4 = \frac{1}{c} \cdot x^4$
und hieraus für $x \neq 0$: $x^3 = c$.

Beispiel
In der folgenden Abbildung ist dargestellt, wie man mithilfe der beiden Parabeln mit $y = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot x^2$ und $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot y^2$ die Lösung $x = \sqrt[3]{2} \approx 1{,}260$ der Gleichung $x^3 = 2$ erhält. Da ausdrücklich $x \neq 0$ vorausgesetzt wird, trägt der Schnittpunkt $(0 \mid 0)$ nicht zur Lösung der Gleichung bei.



- Aus der grafischen Darstellung wird deutlich: Gleichungen vom Typ (1) besitzen jeweils *genau eine* positive Lösung.

(Typ 2) Lösung einer Gleichung vom Typ $x^3 + bx = c$
Omar Khayyam löste diese Gleichung, indem er den Schnittpunkt einer Parabel mit einem Kreis bestimmte:

Gleichung der gestreckten Parabel: $y = \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot x^2$, quadriert ergibt sich $y^2 = \frac{1}{b} \cdot x^4$,

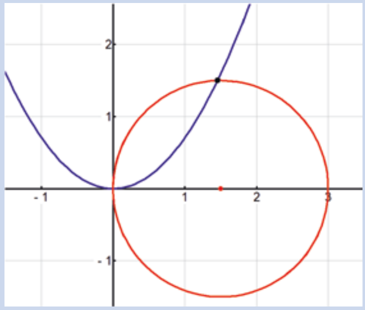
Gleichung eines Kreises mit Radius $r = \frac{c}{2b}$ um den Mittelpunkt $(\frac{c}{2b} \mid 0)$:

$$(x - \tfrac{c}{2b})^2 + (y-0)^2 = \left(\tfrac{c}{2b}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 - \tfrac{c}{b} \cdot x + \left(\tfrac{c}{2b}\right)^2 + y^2 = \left(\tfrac{c}{2b}\right)^2 \Leftrightarrow y^2 = -x^2 + \tfrac{c}{b} \cdot x$$

Gleichsetzen der Terme für y^2: $\frac{1}{b} \cdot x^4 = -x^2 + \frac{c}{b} \cdot x$.

Nach Division durch $x \neq 0$ und Umformung der Gleichung ergibt sich die vorgegebene Gleichung $x^3 + bx = c$.

Beispiel
In der folgenden Abbildung ist dargestellt, wie man die Lösung $x \approx 1{,}456$ der Gleichung $x^3 + 2x = 6$ mithilfe der Parabel mit $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot x^2$ und dem Kreis mit Radius $r = 1{,}5$ um den Mittelpunkt $(1{,}5 \mid 0)$ bestimmen kann. Da ausdrücklich $x \neq 0$ vorausgesetzt wird, trägt der Schnittpunkt $(0 \mid 0)$ nicht zur Lösung der Gleichung bei.



- Aus der grafischen Darstellung wird deutlich: Gleichungen vom Typ (2) besitzen jeweils *genau eine* positive Lösung.

(Typ 3) Lösung einer Gleichung vom Typ $x^3 + c = bx$

Omar Khayyam löste diese Gleichung, indem er den Schnittpunkt einer Parabel mit einer Hyperbel bestimmte:

Gleichung der gestreckten Parabel: $y = \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot x^2$, quadriert ergibt sich $y^2 = \frac{1}{b} \cdot x^4$.

Gleichung der geeigneten verschobenen Hyperbel: $\left(x - \frac{c}{2b}\right)^2 - y^2 = \left(\frac{c}{2b}\right)^2$, umgeformt ergibt sich $x^2 - \frac{c}{b} \cdot x + \left(\frac{c}{2b}\right)^2 - y^2 = \left(\frac{c}{2b}\right)^2$, also $x^2 - \frac{c}{b} \cdot x = y^2$.

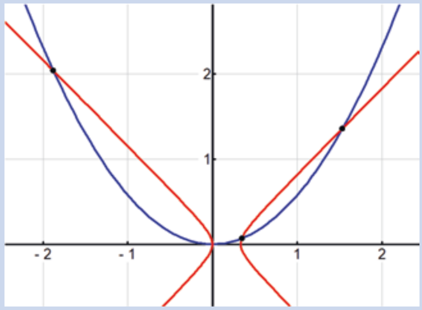
Gleichsetzen der Terme für y^2: $\frac{1}{b} \cdot x^4 = x^2 - \frac{c}{b} \cdot x$.

Nach Division durch $x \neq 0$ und Umformung der Gleichung ergibt sich die vorgegebene Gleichung $x^3 + c = bx$.

Beispiel

In der folgenden Abbildung ist dargestellt, wie man die beiden positiven Lösungen $x \approx 0{,}347$ bzw. $x \approx 1{,}355$ der Gleichung $x^3 + 1 = 3x$ mithilfe der Parabel mit $y = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot x^2$ und dem rechten Ast der (um $\frac{1}{6}$ nach rechts verschobenen) Hyperbel mit $\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - y^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2$ bestimmen kann.

Der durch den Ursprung verlaufende linke Ast der Hyperbel enthält einen Schnittpunkt mit der Parabel, der die negative Lösung bei $x \approx -1{,}879$ liefert, die aber von Khayyam nicht beachtet wird. Da ausdrücklich $x \neq 0$ vorausgesetzt wird, trägt der Schnittpunkt $(\,0 \mid 0\,)$ nicht zur Lösung der Gleichung bei.



Aus dem Beispiel wird deutlich: Für größere Werte des Parameters c „wandert" der rechte Ast der Hyperbel weiter nach rechts; gleichzeitig laufen die beiden positiven Lösungen der kubischen Gleichung aufeinander zu. Für $c = 2$ fallen die beiden Schnittpunkte in *einem* Punkt zusammen; in diesem Punkt $(\,1 \mid \frac{1}{\sqrt{3}}\,)$ berühren Parabel und Hyperbel einander. Für $c > 2$ hat die Gleichung $x^3 + c = 3x$ *keine* positive Lösung.

- Aus der grafischen Darstellung wird deutlich: Gleichungen vom Typ (3) besitzen jeweils entweder *zwei positive* Lösungen oder *genau eine* positive Lösung oder *keine* positive Lösung.

(Typ 5) Lösung einer Gleichung vom Typ $x^3 + ax^2 = c$

Omar Khayyam löst Gleichungen dieses Typs, indem er die Schnittpunkte

einer um 45° gedrehten gestreckten Hyperbel mit $y = \sqrt[3]{c^2} \cdot \frac{1}{x}$ und

einer um 90° gedrehten und verschobenen Parabel mit $x = \frac{1}{\sqrt[3]{c}} \cdot y^2 - a$ bestimmt.

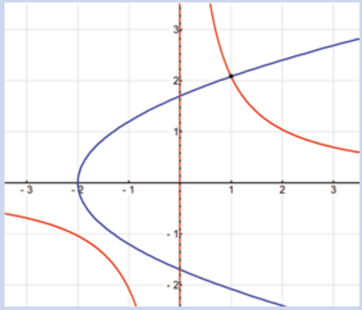
Quadrieren der Hyperbelgleichung $y^2 = \sqrt[3]{c^4} \cdot \frac{1}{x^2}$ und Einsetzen in die Parabelgleichung ergibt dann

$x = \frac{1}{\sqrt[3]{c}} \cdot \sqrt[3]{c^4} \cdot \frac{1}{x^2} - a = c \cdot \frac{1}{x^2} - a.$

Durch Umformen erhält man dann $x^3 = c - ax^2$, also $x^3 + ax^2 = c$.

Beispiel

Zur Lösung der Gleichung $x^3 + 2x^2 = 3$ zeichnet man die gestreckte und um 45° gedrehte Hyperbel mit $y = \sqrt[3]{9} \cdot \frac{1}{x}$ und die um 2 nach links verschobene, nach rechts geöffnete Parabel mit $x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \cdot y^2 - 2$. Die beiden Graphen haben nur *einen* Schnittpunkt mit positivem x-Wert, nämlich bei $x = 1$. (Wie aus der Grafik ablesbar ist, hat die Gleichung keine negativen Lösungen. Eine oder zwei solcher Lösungen treten nur dann auf, wenn die Parabel weiter nach links verschoben wird.)



- Aus der grafischen Darstellung wird deutlich: Gleichungen vom Typ (5) besitzen jeweils *genau eine* positive Lösung.

(Typ 8) Lösung einer Gleichung vom Typ $x^3 + ax^2 + bx = c$

Omar Khayyam betrachtet hier die möglichen Schnittpunkte der um 45° gedrehten, außerdem gestreckten und verschobenen Hyperbel mit $y = \frac{c}{\sqrt{b}} \cdot \frac{1}{x} - \sqrt{b}$ mit einem Kreis mit Radius $r = \frac{1}{2} \cdot (a + \frac{c}{b})$ um den Mittelpunkt $(-\frac{1}{2} \cdot (a - \frac{c}{b}) \mid 0)$.

Die Kreisgleichung kann man umformen:

$$(x + \tfrac{1}{2} \cdot (a - \tfrac{c}{b}))^2 + y^2 = \left(\tfrac{1}{2} \cdot (a + \tfrac{c}{b})\right)^2 \Leftrightarrow y^2 = \left(\tfrac{1}{2} \cdot (a + \tfrac{c}{b})\right)^2 - (x + \tfrac{1}{2} \cdot (a - \tfrac{c}{b}))^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \tfrac{1}{4} \cdot (a + \tfrac{c}{b})^2 - x^2 - x \cdot (a - \tfrac{c}{b}) - \tfrac{1}{4} \cdot (a - \tfrac{c}{b})^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \tfrac{ac}{b} - x^2 - x \cdot a + x \cdot \tfrac{c}{b}$$

$$\Leftrightarrow y^2 = (x + a) \cdot (\tfrac{c}{b} - x)$$

Eine Umformung der Hyperbelgleichung ergibt:

$$y = \tfrac{c}{\sqrt{b}} \cdot \tfrac{1}{x} - \sqrt{b} \Leftrightarrow \left(y + \sqrt{b}\right) \cdot x = \tfrac{c}{b} \cdot \sqrt{b} \Leftrightarrow y \cdot x = \tfrac{c}{b} \cdot \sqrt{b} - \sqrt{b} \cdot x$$

$$\Leftrightarrow y \cdot x = \left(\tfrac{c}{b} - x\right) \cdot \sqrt{b} \Leftrightarrow \frac{y}{\frac{c}{b} - x} = \frac{\sqrt{b}}{x} \quad (x \neq \tfrac{c}{b}).$$

Hieraus folgt durch Quadrieren: $\frac{y^2}{(\frac{c}{b} - x)^2} = \frac{b}{x^2}$

Aus der umgeformten Kreisgleichung ergibt sich andererseits die Beziehung

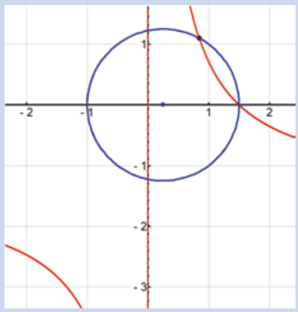
$$\frac{y^2}{(\frac{c}{b} - x)^2} = \frac{x + a}{\frac{c}{b} - x}.$$

Gleichsetzen der jeweils rechts stehenden Terme ergibt dann $\frac{b}{x^2} = \frac{x+a}{\frac{c}{b} - x}$ und hieraus weiter $c - bx = x^3 + ax^2$ und somit $x^3 + ax^2 + bx = c$.

Beispiel

Zur Lösung der Gleichung $x^3 + x^2 + 2x = 3$ zeichnet man die um 45° gedrehte, außerdem gestreckte und verschobene Hyperbel mit $y = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{x} - \sqrt{2}$ und den Kreis mit Radius $r = \frac{1}{2} \cdot (1 + \frac{3}{2}) = \frac{5}{4}$ um den Mittelpunkt $(-\frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{3}{2}) \mid 0) = (\frac{1}{4} \mid 0)$. Der Grafik kann man die positive Lösung $x \approx 0{,}844$ entnehmen; eine negative Lösung liegt nicht vor. Der zusätzliche Schnittpunkt von Hyperbel und Kreis bei $x = 1{,}5$ ist wegen $x \neq \frac{c}{b} = 1{,}5$ keine Lösung der Gleichung.

Wenn der Kreis einen größeren Radius hätte, könnte der Kreis evtl. den linken Ast berühren oder in zwei Punkten schneiden (genau eine oder genau zwei negative Lösungen).



- Aus der grafischen Darstellung wird deutlich: Gleichungen vom Typ (8) besitzen jeweils *genau eine* positive Lösung.

(Typ 9) Lösung einer Gleichung vom Typ $x^3 + ax^2 + c = bx$

Die Lösungen für Gleichungen dieses Typs erhält man mithilfe der Schnittpunkte einer um 45° gedrehten gestreckten Hyperbel mit $y = \frac{c}{\sqrt{b}} \cdot \frac{1}{x}$ sowie der verschobenen Hyperbel mit $(x + \frac{1}{2} \cdot (a - \frac{c}{b}))^2 - (y - \sqrt{b})^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot (a + \frac{c}{b})\right)^2$.

Diese Hyperbelgleichung kann man umformen:

$$(x + \tfrac{1}{2} \cdot (a - \tfrac{c}{b}))^2 - (y - \sqrt{b})^2 = \left(\tfrac{1}{2} \cdot (a + \tfrac{c}{b})\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (x + \tfrac{1}{2} \cdot (a - \tfrac{c}{b}))^2 - \left(\tfrac{1}{2} \cdot (a + \tfrac{c}{b})\right)^2 = (y - \sqrt{b})^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (a - \tfrac{c}{b}) \cdot x + \tfrac{1}{4}(a - \tfrac{c}{b})^2 - \tfrac{1}{4} \cdot (a + \tfrac{c}{b})^2 = (y - \sqrt{b})^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + a \cdot x - \tfrac{c}{b} \cdot x - \tfrac{ac}{b} = (y - \sqrt{b})^2$$

$$\Leftrightarrow (x + a) \cdot (x - \tfrac{c}{b}) = (y - \sqrt{b})^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y-\sqrt{b})^2}{(x-\frac{c}{b})^2} = \frac{x+a}{x-\frac{c}{b}} \quad (x \neq \tfrac{c}{b})$$

Die erste Hyperbelgleichung kann ebenfalls umgeformt werden:

$$y = \tfrac{c}{\sqrt{b}} \cdot \tfrac{1}{x} \Leftrightarrow y-\sqrt{b} = \tfrac{c}{\sqrt{b}} \cdot \tfrac{1}{x} - \sqrt{b} \Leftrightarrow y-\sqrt{b} = \sqrt{b} \cdot \tfrac{c}{b} \cdot \tfrac{1}{x} - \sqrt{b}$$

$$\Leftrightarrow y-\sqrt{b} = -\frac{\sqrt{b}}{x} \cdot (x-\frac{c}{b}) \Leftrightarrow \frac{y-\sqrt{b}}{x-\frac{c}{b}} = -\frac{\sqrt{b}}{x},$$

also quadriert: $\dfrac{(y-\sqrt{b})^2}{(x-\frac{c}{b})^2} = \dfrac{b}{x^2}$

Für die Schnittpunkte der beiden Hyperbeln muss also gelten:

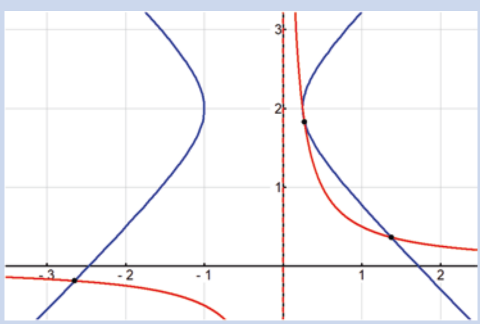
$$\frac{x+a}{x-\frac{c}{b}} = \frac{b}{x^2} \Leftrightarrow x^3+ax^2 = bx-c \Leftrightarrow x^3+ax^2+c = bx$$

Beispiel

Zur Lösung der Gleichung $x^3+x^2+1=4x$ zeichnet man die um 45° gedrehte gestreckte Hyperbel mit $y = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}$ und die Hyperbel mit $(x+\frac{3}{8})^2 - (y-2)^2 = \left(\frac{5}{8}\right)^2$.

Der Grafik kann man die positiven Lösungen $x \approx 0{,}274$ bzw. $x \approx 1{,}377$ entnehmen; eine negative Lösung liegt bei $x \approx -2{,}651$. Der zusätzliche Schnittpunkt der beiden Hyperbeln bei $x = 0{,}25$ ist wegen $x \neq \frac{c}{b} = 0{,}25$ keine Lösung der Gleichung.

Bei einer anderen Wahl der Parameter kann auch der Fall eintreten, dass die beiden rechten Äste der Hyperbeln sich in *genau einem* Punkt berühren oder sich nur bei $x = \frac{c}{b}$ schneiden. (Auf jeden Fall haben Gleichungen dieses Typs eine negative Lösung.)



- Die grafische Darstellung lässt vermuten: Gleichungen vom Typ (9) besitzen entweder *keine* oder *genau eine* oder *zwei* positive Lösungen.

6.2 Wer war Omar Khayyam?

Der Mathematiker, Astronom, Philosoph und Dichter Omar Khayyam (mit vollem Namen: Ghiyath al-Din Abu al-Fath Umar ibn Ibrahim Al-Nisaburi al Khayyami, auch Chajjam oder Chayyam geschrieben) wurde im Jahr 1048 in Nischapur geboren, einer Stadt im Nordosten des heutigen Iran, an der Seidenstraße gelegen und mit schätzungsweise 100.000 Einwohnern eine der größten Städte der damaligen Welt.

Der Name „al-Khayyam" bedeutet „der Zeltmacher" oder auch „der Tuchmacher"; dies war möglicherweise der Beruf seines Vaters; denkbar ist aber auch, dass Omar Khayyam aus einer Familie von Tuchhändlern stammte.

In Nishapur studierte Khayyam die – alle Wissenschaften umfassende – Philosophie; schnell verbreitete sich sein Ruhm als Gelehrter. Es heißt, dass er ein Buch nur siebenmal zu lesen brauchte, bis er es auswendig vollständig richtig aufschreiben konnte. Mit 25 Jahren hatte er bereits Aufsätze zu Arithmetik und Algebra sowie über Fragen der Musik verfasst.

Auf der Suche nach möglichst vollständigen Manuskripten des Apollonius reiste der wissbegierige junge Gelehrte auch nach Buchara und Samarkand (heute Usbekistan); dort schrieb er die o. a. Abhandlung über Probleme der Algebra.

In der Mitte des 11. Jahrhunderts hatte das aus Mittelasien einfallende Volk der Seldschuken ein Reich gegründet, das von der Ägäis bis weit über das heutige Usbekistan hinaus reichte. Nachdem Malik-Shah 1073 die Herrschaft des Landes übernommen hatte, ernannte er Omar Khayyam zum Hofastronomen und lud ihn ein, in Isfahan ein neues großes Observatorium zu bauen.

Hier erstellte Khayyam ein Verzeichnis der Sterne und bestimmte die Länge eines Jahres mit unvorstellbarer Präzision. Der islamische Kalender richtet sich nach den Mondphasen und war deshalb nicht gut geeignet, die Jahreszeiten angemessen zu erfassen, beispielsweise um den günstigsten Zeitpunkt für die Aussaat zu bestimmen. Omar Khayyam schlug dem Herrscher eine Kalenderreform vor mit acht Schaltjahren in 33 Jahren; dieser war „genauer" als der 500 Jahre später in Europa eingeführte *Gregorianische Kalender*.

Omar Khayyam entwickelte auch eine Methode, um n-te Wurzeln zu ziehen; das Werk ging verloren, aber man kann davon ausgehen, dass er den Umgang mit den binomischen Formeln beherrschte, also insbesondere die Binomialkoeffizienten kannte, die in Europa erst 500 Jahre später durch Blaise Pascal (wieder-)entdeckt werden, vgl. Kap. 12.

Wie al-Haitham beschäftigte er sich auch mit dem Parallelenaxiom des Euklid und versuchte es zu beweisen (*Erläuterung der Schwierigkeiten in Euklids Postulaten,* veröffentlicht 1077).

Omar Khayyam gilt als einer der bedeutendsten Mathematiker des Mittelalters. In Europa jedoch wurde er vor allem durch seine Gedichte bekannt, die 1859 von Edward FitzGerald unter dem Titel *Rubaiyat* herausgegeben wurden; vermutlich stammen nicht alle Gedichte dieser Sammlung tatsächlich von Omar Khayyam.

Edward FitzGerald und Übersetzer in anderen Ländern versuchten in ihren freien Übersetzungen Inhalt und Form der Vierzeiler des *Rubaiyat* zu erhalten. Der Erfolg der Gedichte war im 19. Jahrhundert so groß, dass manche Verse als geflügelte Worte in die englische Sprache eingegangen sind.

Die Gedichte zeigen einen Menschen, der sich mit der Frage der Unbeständigkeit und Unsicherheit des Lebens ebenso auseinandersetzte wie mit der Frage der Existenz Gottes. Er äußerte seine Zweifel daran, dass es so etwas wie eine göttliche Vorsehung oder ein Leben nach dem Tod gibt. Gerne machte er sich über die bigotten Frommen lustig und sah Erfüllung in den irdischen Freuden:

> Nütze die Zeit, die dir noch bleibt, bevor auch du zu Staub zerfällst, Staub unter Staub und ohne Wein, und ohne Lieder – ohne Ende!
>
> Die Offenbarung aller Heiligen und Weisen, die vor uns lebten und als Ketzer brannten, sind nur Geschichten, die sie träumten und, als sie kurz erwachten, uns erzählten.
>
> Der Himmel ist das Trugbild unserer Wünsche, die Hölle nur der Schatten einer Seele dort auf dem Feuer in dem Dunkel, aus dem wir kamen und in das wir gehen.
>
> (Übersetzungen von Martin Rometsch)

Dass die Veröffentlichung solcher Gedanken in der Welt des islamischen Mittelalters nicht folgenlos blieb, kann man sich leicht vorstellen. Als sein Herrscher und Förderer Malik-Shah im Jahr 1094 starb, musste sich der freigeistige Dichter vor der orthodoxen Geistlichkeit rechtfertigen. Das von ihm geleitete Observatorium wurde geschlossen, die von ihm initiierte Kalenderreform wieder rückgängig gemacht. Man zwang ihn zu einer Pilgerfahrt nach Mekka. Danach lebte er bis zu seinem Tod im Jahr 1131 zurückgezogen in seiner Heimatstadt.

Die beiden im Folgenden abgebildeten albanischen Briefmarken erinnern an die beiden Seiten von Omar Khayyam, an den Wissenschaftler *und* an den Dichter.

Hierzu passt die Aussage des deutschen Mathematikers Karl Weierstraß (1815–1897) in einem Brief an seine Schülerin Sofia Kowalewskaja (1850–1891): „Ein Mathematiker, der nicht etwas Poet ist, wird nimmer ein vollkommener Mathematiker sein.“

6.3 Vierzeiler von Omar Khayyam

Auf den folgenden 1967 in Dubai erschienenen Briefmarken sind sechs der Vierzeiler Edward FitzGeralds illustriert. In Klammern ist jeweils dahinter die Nachdichtung von Adolf Friedrich Graf von Schack aus dem Jahr 1878 abgedruckt (eine deutsche Nachdichtung des dritten Vierzeilers ist dem Autor nicht bekannt).

The Moving Finger writes; and, having writ,
Moves on: nor all thy Piety nor Wit
Shall lure it back to cancel half a Line,
Nor all thy Tears wash out a Word of it.

(Des Ew'gen Finger schreibt der Menschen Schicksalsbuch;
Fruchtlos, ihr Frommen, ist, ihr Weisen, eu'r Versuch,
Daß ihr nur einen Spruch, auch nur ein Wort von denen,
Die er geschrieben hat, auslöscht mit euren Tränen.)

Hinweis Einer der bekanntesten *Miss Marple*-Kriminalromane von Agatha Christie trägt den Titel *Die Schattenhand* (The moving finger, La plume empoisonnée).

Here with a Loaf of Bread beneath the Bough,
A Flask of Wine, a Book of Verse – and Thou
Beside me singing in the Wilderness –
And Wilderness is Paradise enow.

(Eine Flasche roten Weines und ein Büchlein mit Gedichten
Und die Hälfte eines Brotes, anders wünsch' ich mir mit nichten;
Dann nur irgend eine Wüste, um mit dir darin zu wohnen,
Und beneiden will ich fürder keinen Herrscher von Millionen.)

Hinweis Der irischstämmige Autor und Nobelpreisträger Eugene O'Neill bezieht sich im Titel seines Dramas *Ah Wilderness!* auf dieses Gedicht.

So while the Vessels one by one were speaking,
One spied the little Crescent all were seeking:
And then they jogg'd each other, "Brother! Brother!
Hark to the Porter's Shoulder-knot a-creaking!"

Myself when young did eagerly frequent
Doctor and Saint, and heard great Argument
About it and about; but evermore
Came out by the same Door as in I went.

(Den Hörsaal mancher Weisen, mancher Frommen
Hab' ich besucht, von Wissensdurst entglommen,
Doch durch die Tür, durch die ich eingegangen,
Stets bin ich auch herausgekommen.)

One moment in Annihilation's Waste,
One Moment, of the Well of Life to taste –
The Stars are setting and the Caravan
Starts for the Dawn of Nothing – Oh, make haste!

(Kaum daß der Ruhe wir am Lebensquell
Auf unsrer Erdenwüstenreise pflegen,
So bricht die Karawane auf und schnell
Geht unsre Fahrt dem Nichts entgegen.)

And, strange to tell, among that Earthen Lot
Some could articulate, while others not:
And suddenly one more impatient cried –
"Who *is* the Potter, pray, and who the Pot?"

(Bei einem Töpfer sah ich gestern zweitausend Krüge,
Die einen stumm, die andern redend als ob jeder früge:
Wer hat uns geformt und wo stammen wir her?
Wer ist hier der Käufer, und der Verkäufer, wer?)

6.4 Literaturhinweise

Eine wichtige Adresse zum Auffinden von Informationen über Mathematiker und deren wissenschaftliche Leistungen ist die Homepage der St. Andrews University.

Informationen über Omar Khayyam findet man unter:

- www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Khayyam.html
- Strick, Heinz Klaus (2006): *Kalenderblatt über Omar Khayyam,* www.spektrum.de/wissen/omar-khayyam-1048-1131/858711
- Strick, Heinz Klaus (2015): *Geniale Ideen großer Mathematiker (9): Omar Khayyams Methode zur Lösung kubischer Gleichungen,* MNU Journal, 68 (6)

Ausführliche Darstellungen über Omar Khayyam findet man insbesondere in:

- Linden, Sebastian (2017): *Die Algebra des Omar Chayyam* (2. Auflage), Springer Spektrum, Berlin,
  außerdem in:
- Berggren, J. Lennart (2011), *Mathematik im mittelalterlichen Islam*, Springer, Heidelberg
- Berggren, J. Lennart (2016), *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam* (2nd edition), Springer, New York
- Connor, Minna Burgess (1956): *A historical survey of methods of solving cubic equations*, Master's Theses, Paper 114, Download möglich unter: http://scholarship.richmond.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1113&context=masters-theses
- Woepcke, Franz (1850): *Notice sur un manuscrit Arabe d'un traité d'algèbre par Aboul Fath Omar Ben Ibrahîm Alkhayâmî contenant la construction géométrique des équations cubiques*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Berlin

Die zitierten Übersetzungen von Martin Rometsch sind einem Exemplar der Urania-Minibibliothek aus dem Jahr 1999 entnommen: *Omar Khayyams Rubaiyat*, Urania Verlags AG, Neuhausen am Rheinfall (Schweiz).

Eine Übersicht über die Vielfalt der Nachdichtungen der Vierzeiler Omar Khayyams findet man unter:

- www.omarkhayyamnederland.com/index.html

Unter den zahlreichen Veröffentlichungen über den Dichter Omar Khayyam (einschließlich zahlreicher Nachdichtungen) verweisen wir das folgende Werk, das unmittelbar nach Erscheinen von den deutschen Behörden verboten wurde:

- Rempis, Christian Herrnhold (1935): *Omar Chajjam und seine Vierzeiler*, Verlag der Deutschen Chajjam-Gesellschaft, New York

Wikipedia-Artikel in deutscher, englischer und französischer Sprache zu den Stichwörtern:

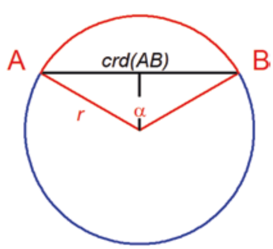
- Omar Chayyam (Omar Khayyam, Omar Khayyam)
- Kubische Gleichung (Cubic function, Équation cubique)
- Kegelschnitt (Conic section, Conique)
- Parabel (Parabola, Parabole)
- Hyperbel (Hyperbola, Hyperbole)
- Ellipse (Ellipse, Ellipse)

7 Jamshid al-Kashi – letzter bedeutender Mathematiker des islamischen Mittelalters

„6; 16, 59, 28, 1, 34, 51, 46, 50"

Astronomische Beobachtungen waren von jeher untrennbar verbunden mit Winkelmessungen und Berechnungen in Dreiecken und Kreisen. Grundlage hierfür sind Verhältnisgleichungen, die für Winkelgrößen und Seitenlängen gelten.

Die griechischen Mathematiker des Altertums nutzten die Eigenschaft, dass in einem Kreis mit festem Radius r jedem Mittelpunktswinkel α die Länge *chord* der Sehne zugeordnet werden kann.



H. K. Strick, *Mathematik – einfach genial!*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-60449-6_7

Eine Tabelle mit den Werten der trigonometrischen Funktion *crd (chord)* wurden bereits im 2. Jahrhundert v. Chr. von **Hipparchos von Rhodos** zusammengestellt. Die bedeutendste Astronomie-Abhandlung des Altertums, der *Almagest* des **Ptolemäus von Alexandria,** enthielt eine Tabelle mit der Angabe der zu einem Kreisbogen AB gehörenden Sehnenlänge $crd(AB)$ mit einer Schrittweite von 30'.

Indische Astronomen des 5. Jahrhunderts ersetzten die *crd*-Funktion durch die Sinusfunktion. Der Zusammenhang zwischen der Sinus- und der Chord-Funktion lässt sich an der Abbildung oben ablesen. Es gilt:

$$crd(AB) = 2 \cdot r \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Die bei uns übliche Bezeichnung *sinus* stammt von **Leonardo von Pisa** (genannt **Fibonacci**, 1170–1250); dieser übersetzte den aus dem Indischen übernommenen Ausdruck *jiba*, der zwischenzeitlich zum arabischen Wort *jaib* (= Falte) mutiert war, mit dem lateinischen Wort *sinus.*

Die Genauigkeit der Tafelwerke nahm im Laufe der Jahrhunderte zu: Während die Sinustabelle von **Abu Abdulla al-Battani** (um 900) nur 3-stellige Werte mit einer Schrittweite von 30' enthielt, erstellte **Abu Reyhan al-Biruni** (973–1048, vgl. Kap. 5) bereits eine 4-stellige Tabelle mit Schrittweite 15', bis **Ulugh Beg** (1394–1449) schließlich 5-stellige Sinus- und Tangenstabellen mit Schrittweite 1' veröffentlichte – abgeleitet aus al-Kashis Berechnung von $\sin(1°)$, siehe unten.

Mit der Zunahme der Seefahrt wurde die Genauigkeit der Tabellen von immer größerer Bedeutung: Seefahrer bestimmten ihre jeweilige Position anhand der Position der Sterne, und Ungenauigkeiten der Tabellen und der Messung konnten zu erheblichen Kursabweichungen führen.

Für die islamischen Länder war die hohe Präzision der astronomischen Berechnungen aus religiösen Gründen besonders wichtig, vor allem bei der Bestimmung der Mekka-Richtung *(Quibla)* und hinsichtlich des Beginns eines islamischen Monats (Festlegung des Augenblicks, in dem die Mondsichel nach einem Neumond zum ersten Mal sichtbar ist).

7.1 Einfach genial: Jamshid al-Kashi bestimmt sin(1°) auf 18 Stellen genau

In seinem letzten Werk *Die Abhandlung über Sehne und Sinus* aus dem Jahr 1427 beschäftigte sich der geniale persische Mathematiker al-Kashi (1380–1429) mit der Bestimmung eines sehr genauen Werts für $\sin(1°)$.

Die besondere Leistung al-Kashis besteht in der unfassbar hohen Genauigkeit seiner Rechnungen – nicht ohne Grund erhielt er schon zu Lebzeiten den Spitznamen *der Rechner*. Und es waren etliche Schritte notwendig, um zu dem Wert zu kommen, von dem aus dann mithilfe der Additions- und Halbwinkelsätze weitergearbeitet werden konnte.

Für die 18-stellige Genauigkeit waren notwendig: die exakte Bestimmung der Sinuswerte für die Innenwinkel aus speziellen regelmäßigen n-Ecken und der damit verbundenen *handschriftlichen* Berechnung der Quadratwurzelterme, ferner die multiplikative und additive Verknüpfung der zuvor ermittelten Werte sowie das abschließende Iterationsverfahren.

Im Folgenden wird die Vorgehensweise al-Kashis vorgestellt. Es ist allerdings unklar, ob al-Kashi den Wert von $\sin(3°)$ tatsächlich mithilfe von $\sin(36°)$ und $\sin(30°)$ sowie von $\cos(36°)$ und $\cos(30°)$ berechnet hat, wie man bei Scriba (S. 179) nachlesen kann, oder ob zunächst $\sin(12°)$ mithilfe der Sinus- und Kosinuswerte von 72° und 60° bestimmt wurde (vgl. Berggren, S. 167).

In diesem Buch wird nur der erste Weg beschrieben, bei dem ein Rechenschritt weniger notwendig ist als bei dem anderen Ansatz.

Um zu einem möglichst genauen Wert für $\sin(3°)$ zu gelangen, geht man zunächst einmal von den folgenden vier Sinus- bzw. Kosinuswerten aus:

- $\sin(30°) = \frac{1}{2}$, $\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (aus dem gleichseitigen Dreieck),
- $\cos(36°) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$, $\sin(36°) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ (aus dem regelmäßigen Fünfeck).

Diese Werte kann man mit *beliebiger* Stellengenauigkeit als Dezimalzahl bestimmen, aber auch als Zahl im 60er-System.

Hinweis Islamische Mathematiker des Mittelalters fassten den Sinus und den Kosinus eines Winkels nicht wie wir als Verhältniszahlen auf, sondern als Streckenlängen in einem Kreis mit Radius $R = 60$. Daher findet man in den Tafelwerken aus dieser Zeit die folgenden Angaben (im 60er-System, hier in eckigen Klammern notiert):

$$\begin{aligned}
\sin_R(30°) &= [\,30\,] = \frac{1}{2} \cdot R;\\
\cos_R(30°) &= [51;\ 57, 41, 29, 13, 58, 58, \ldots]\\
&= 51 + \frac{57}{60} + \frac{41}{60^2} + \frac{29}{60^3} + \ldots;\\
\cos_R(36°) &= [48;\ 32, 27, 40, 14, 49, 33, \ldots];\\
\sin_R(36°) &= [35;\ 16, 1, 36, 52, 10, 57, \ldots]
\end{aligned}$$

Für das Umrechnen von Dezimalzahlen in das 60er-System kann man eine Tabellenkalkulation benutzen, da von Schritt zu Schritt derselbe Algorithmus angewandt wird und man dies durch Drag & Drop von einer Zelle auf die nächste übertragen kann.

Beispiel

Die erste Zelle der folgenden Excel-Tabelle enthält die Dezimalzahl $\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}86602\ldots$. (Die sechste in der Tabelle angezeigte Dezimalstelle wird von Excel gerundet; intern rechnet das Programm mit 16-stelliger Genauigkeit.)

Multipliziert man dies mit 60, so ergibt sich 51,96152 …, d. h., in der 60er-Darstellung der Zahl steht *vor* dem Semikolon die Zahl 51.

Subtrahiert man von 51,96152… den ganzzahligen Anteil (also 51), so bleibt noch die Dezimalzahl 0,96152 …; multipliziert man diese mit 60, so erhält man die Dezimalzahl 57,69145 …, d. h., in der 60er-Darstellung der Zahl $\frac{\sqrt{3}}{2}$ steht als erste Zahl *hinter* dem Semikolon die Zahl 57.

0	0,866025
1	51,961524
2	57,691454
3	41,487217
4	29,233046
5	13,982780
6	58,966771

Subtrahiert man von 57,69145… den ganzzahligen Anteil (also 57), so bleibt noch die Dezimalzahl 0,69145 …; multipliziert man diese mit 60, so erhält man die Dezimalzahl 41,48721 …, d. h., in der 60er-Darstellung der Zahl $\frac{\sqrt{3}}{2}$ steht als zweite Zahl hinter dem Semikolon die Zahl 41 usw.

Mithilfe von $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$ – die Formel war bereits Abu al-Wafa im 10. Jahrhundert bekannt – ergibt sich hieraus

$$\cos(6°) = \cos(36°) \cdot \cos(30°) + \sin(36°) \cdot \sin(30)$$
$$= \frac{\sqrt{5}+1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \cdot (\sqrt{15} + \sqrt{3} + \sqrt{10-2\sqrt{5}} = 0{,}9945218953)\ldots,$$

im 60er-System: $\cos_R(6°) = [\,59\,;\ 40,\ 16,\ 43,\ 45,\ 50,\ 18,\ \ldots]$

Um $\sin(3°)$ zu berechnen, wendet man die Halbwinkelformel $\sin(\alpha) = \sqrt{\frac{1-\cos(2\alpha)}{2}}$ an und erhält $\sin(3°) = \sqrt{\frac{1-\cos(6°)}{2}} = 0{,}0523359562\ldots$, also $\sin_R(3°) = [\,3\,;\ 8,\ 24,\ 33,\ 59,\ 34,\ 28,\ \ldots]$.

Die Halbwinkelformeln lassen sich leicht aus den Doppelwinkelformeln herleiten.

Da für kleine Winkel der Sinus fast linear wächst, kann man als ersten Schätzwert angeben:

$$\sin(1°) \approx \frac{1}{3} \cdot \sin(3°) = 0{,}0174453187\ldots$$

Es geht aber noch genauer: Zwischen $\sin(3°)$ und $\sin(1°)$ besteht ein Zusammenhang über den Dreifachwinkelsatz: $\sin(3\alpha) = 3\sin(\alpha) - 4\sin^3(\alpha)$

Setzt man $x = \sin(1°)$, dann gilt also $\sin(3°) = 3x - 4x^3$.

Um diese kubische Gleichung zu lösen, formt al-Kashi sie um:

Aus $\sin(3°) = 3x - 4x^3$ ergibt sich $x = \frac{1}{3} \cdot \sin(3°) + \frac{4}{3}x^3$ und hieraus gewinnt al-Kashi die Rekursionsvorschrift

$x_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot \sin(3°) + \frac{4}{3}x_n^3$,

im 60er-System für $R = 60$

$$x_{n+1} = \frac{1}{45} \cdot (15 \cdot \sin_R(3°) + x_n^3) = \frac{1}{45} \cdot (x_n^3 + [47;\ 6,\ 8,\ 29,\ 53,\ 37,\ 3,\ \ldots]).$$

Wie in Berggren (Kap. 5) ausgeführt wird, lässt sich mithilfe dieser Methode die Genauigkeit des Näherungswerts für $\sin(1°)$ von Schritt zu Schritt deutlich verbessern.

Al-Kashi war nicht der erste Mathematiker des islamischen Kulturkreises, der ein Iterationsverfahren anwandte, aber sicherlich der Erste, der das Konvergenzverhalten reflektiert hat.

Die schnelle Konvergenz des Verfahrens (und damit eine hohe Genauigkeit) lässt sich mit unseren heutigen Mitteln erahnen, wenn wir eine Excel-Tabelle betrachten:

n	x_n
0	0,0174453187476479
1	0,0174523978055319
2	0,0174524064267671
3	0,0174524064372707
4	0,0174524064372835
5	0,0174524064372835

7.2 Wer war al-Kashi?

Ghyath-al-Din Jamshid al-Kashi gilt als der letzte große Mathematiker des islamischen Mittelalters.

Geboren um das Jahr 1380 in Kashan (im heutigen Iran), erlebte er als Kind die Eroberung der Region durch mongolische Heere unter dem Regenten Timur. Erst nach dessen Tod im Jahr 1405 und der Teilung des Reiches erblühte das kulturelle und wissenschaftliche Leben wieder. Der Thronfolger Timurs, Shak Rokh, ernannte seinen Sohn **Ulugh Beg** (1394–1449, der Name bedeutet „Großprinz“) zum neuen Herrscher der Hauptstadt des Landes, der Stadt Samarkand (heute in Usbekistan).

Erste Berichte über al-Kashi stammen aus dem Jahr 1406: In der Umgebung der Stadt Kashan arbeitete er als Astronom und Mathematiker, und 1406 war ein Jahr, in dem man dort eine Mondfinsternis beobachten konnte.

Kurze Zeit danach schloss er die Arbeit an einem Werk ab, in dem er sich kritisch mit den Überlegungen seiner Vorgänger hinsichtlich der Größe des Kosmos auseinandersetzte. 1414 veröffentlichte er die korrigierte und erweiterte Fassung der großen astronomischen Tafeln des Nasir al-Din al-Tusi (s. u.), die er – wie es üblich war – seinem Herrscher widmete.

Die „Tafeln des Khan“ *(Khagani Zij)* enthielten (neben umfangreichen trigonometrischen Tabellen) einen Sternenkatalog sowie Angaben über die Bewegungen der Sonne, des Mondes und der Planeten – beschrieben durch Äquatorialkoordinaten, also durch ein Koordinatensystem, das durch die Äquatorebene und die Polachse gegeben ist, sowie durch Ekliptikalkoordinaten.

1416 folgte eine Abhandlung über astronomische Instrumente; darunter waren auch Erfindungen al-Kashis, z. B. ein Gerät zur Vorhersage von Planetenkonjunktionen.

Um 1420 lud Ulugh Beg die sechzig besten Wissenschaftler seines Landes ein, als Forscher und Lehrer an die neu gegründete Hochschule (arab. *Madrasa*) nach Samarkand zu kommen; al-Kashi war sicherlich der Fähigste von ihnen.

Aus Briefen, die al-Kashi an seinen Vater schrieb (und die erhalten sind), weiß man, dass al-Kashi und sein Herrscher Ulugh Beg sich mit großem gegenseitigem Respekt begegneten; denn Ulugh Beg war selbst ein hervorragender Astronom.

Im Jahr 1424 begann der 13 Jahre währende Bau des berühmten großen Observatoriums in Samarkand, dessen Fertigstellung al-Kashi allerdings nicht mehr erlebte. Der geniale Gelehrte, von der Nachwelt auch *Zweiter Ptolemäus* genannt, starb im Jahr 1429.

Ulugh Beg, der acht Jahre nach al-Kashis Tod sein eigenes Tabellenwerk herausbrachte, erinnerte an die Verdienste al-Kashis an diesem Werk; er bezeichnete ihn als „den bewundernswerten Mullah, bekannt unter den Berühmten der Welt, der die Wissenschaften der Alten meisterte und vollendete und der die schwierigsten Fragen lösen konnte“.

7.3 Mit welchen (mathematischen) Themen beschäftigte sich al-Kashi außerdem?

Al-Kashi verfasste mehrere bedeutende Werke:

1424 erschien die *Abhandlung über den Kreisumfang*. In dieser Schrift verfolgte al-Kashi das ehrgeizige Ziel, die Kreiszahl π so genau zu bestimmen, dass der auftretende Fehler bei einem Kreis von der Ausdehnung der Himmelskugel (seine damalige Schätzung: 600.000 Erddurchmesser) kleiner sein soll als die „Breite eines Pferdehaars“ (alte Maßeinheit, entspricht etwa 0,7 mm).

Die Berechnungen führte er im Sexagesimalsystem an einem regelmäßigen Vieleck mit $805.306.368 = 3 \cdot 2^{28}$ Ecken durch, mit 10-stelliger Genauigkeit im 60er-System (umgerechnet 16-stellige Genauigkeit im Dezimalsystem).

Sein Ergebnis für den Umfang eines Kreises mit Durchmesser 1 im Sexagesimalsystem:

- **6; 16, 59, 28, 1, 34, 51, 46, 50** (= 6,28318530719 … im Dezimalsystem).

Damit übertraf er alle bis dahin durchgeführten Berechnungen, z. B. die des chinesischen Mathematikers Zu Chongzhi aus dem 5. Jahrhundert, der eine 7-stellige Genauigkeit erreichte.

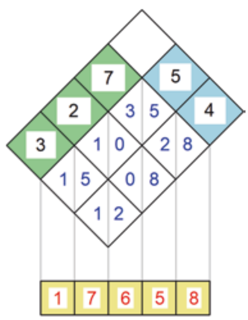
1427 wurde das Buch *Der Schlüssel zur Arithmetik* veröffentlicht, ein Kompendium der Mathematik. Es war als Lehrwerk für Studenten geschrieben und wurde noch bis ins 17. Jahrhundert als Lehrbuch verwendet. Das Buch sollte künftigen Astronomen, Vermessern, Architekten, Buchhaltern und Händlern die notwendigen Kenntnisse der Mathematik vermitteln.

Im ersten Teil des Werkes wird das Rechnen mit natürlichen Zahlen unter Verwendung der aus Indien eingeführten Ziffernschreibweise erläutert; der zweite Teil beschäftigt sich mit dem Rechnen mit Brüchen sowohl im Sexagesimalsystem, so wie dies im arabisch-islamischen Kulturraum damals üblich war, als auch im Dezimalsystem, das in Europa erst 150 Jahre später von Simon Stevin (1548–1620) eingeführt wurde.

Dass in der damaligen Zeit Brüche vor allem im 60er-System notiert wurden, hängt mit dem Rechnen mit Winkelgrößen und Zeiten zusammen (1° = 60'; 1' = 60'', 1 h = 60 min); aber auch die damals verwendete Währung enthielt diese 60er-Unterteilung (1 *Dirham* = 60 *Fulus*).

Bei der Multiplikation wandte er die Gelosia-Methode an, die später auch im Mittelmeerraum stark verbreitet war.

Das folgende Beispiel zeigt die Multiplikation der natürlichen Zahlen 327 und 54 (vgl. *Mathematik ist wunderwunderschön,* Abschn. 2.3).

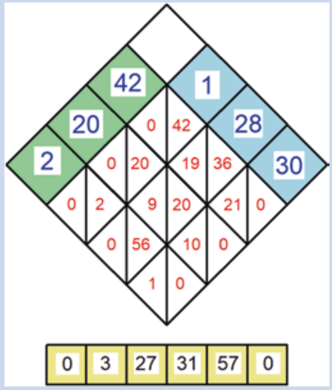


Das Verfahren eignet sich auch für die Multiplikation von Sexagesimalzahlen.

Beispiel

Im folgenden Schema wird das Produkt der Sexagesimalzahlen [2; 20, 42] (= 2,345) und [1; 28, 30] (= 1,475) berechnet; hierbei bestimmt man für jedes Feld des Schemas das Produkt der beiden zugehörigen, am Rand stehenden Zahlen und trägt das Ergebnis in die rechte Hälfte des zugehörigen Quadrats ein. Falls das Ergebnis die nächste Stufe im 60er-System übersteigt, muss ein entsprechender „Übertrag" in die jeweilige linke Hälfte eines Quadrats eingetragen werden, z. B.

$$20 \cdot 28 = 560 = 9 \cdot 60 + 20,$$
$$42 \cdot 28 = 1176 = 19 \cdot 60 + 36.$$



Anschließend wird spaltenweise addiert; dabei entsteht ggf. ein Übertrag für die nächste Spalte, z. B. $42 + 19 + 20 + 10 = 91 = 1 \cdot 60 + 31$. Das Ergebnis der Multiplikation ist also [3; 27, 31, 57].

(Und zur Kontrolle die Rechnung im Dezimalsystem: $2{,}345 \cdot 1{,}475 = 3{,}458875$)

Zu den Rechenarten, die in al-Kashis Buch behandelt werden, gehört auch das schriftliche Wurzelziehen. Er erläutert das Verfahren zum Ziehen der fünften Wurzel am Beispiel der 14-stelligen Zahl 44.240.899.506.197 im Dezimalsystem.

Zur Vorbereitung des Algorithmus geht er zunächst auf die benötigten Binomialkoeffizienten ein, d. h., er erläutert den Aufbau dieses Zahlenschemas, das Pascal 227 Jahre später wiederentdeckte, entwickelt dann den benötigten binomischen Lehrsatz

$$(A + B)^5 = A^5 + 5A^4B + 10A^3B^2 + 10A^2B^3 + 5AB^4 + B^5$$

und führt anschließend schrittweise das Verfahren durch, durch das nacheinander die drei Ergebnisziffern 5, 3, 6 für diese fünfte Wurzel gewonnen werden.

Die ausführliche Darstellung entnehme man dem Buch von Berggren; eine Anleitung zum schriftlichen Ziehen von Quadrat- und Kubikwurzeln findet man in *Mathematik ist wunderwunderschön,* Abschn. 7.8.

Al-Kashi gab als Ergebnis des Wurzelziehens die gemischte Zahl

$$536 + \frac{21}{414.237.740.281}$$

an; den Bruchteil erhielt er durch lineare Interpolation zwischen den beiden benachbarten fünften Potenzen: $537^5 - 536^5 = 414.237.740.281$

Die anderen Teile des Werks beschäftigen sich u. a. mit der Berechnung von Flächen und Volumina, u. a. von regulären und halbregulären Polyedern (platonischen und archimedischen Körpern) sowie von anderen, in der islamischen Architektur verwendeten Formen (Kuppeln).

Einer der Vorgänger al-Kashis, der persische Gelehrte **Nasir al-Din al-Tusi** (1201–1274), hatte in seinem Werk *Abhandlung über Vierecke* den Sinussatz bewiesen (für Einzelheiten zum Beweis vgl. Berggren, S. 153).

Mithilfe dieses Satzes kann man in beliebigen Dreiecken eine Seitenlänge berechnen, wenn die Winkel im Dreieck und eine Seite gegeben sind (Kongruenzsatz *WSW*); und man kann einen Winkel berechnen, wenn die gegenüberliegende Seite gegeben ist und außerdem eine weitere Seite und deren gegenüberliegender Winkel (Kongruenzsätze *SWS* und SSW_g).

Satz

Sinussatz von Nasir al-Din al-Tusi

In einem beliebigen Dreieck verhalten sich die Seiten wie die Sinus der zugehörigen Winkel, also

$$a : b : c = \sin(\alpha) : \sin(\beta) : \sin(\gamma), \text{ d. h. } \frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}.$$

Es ist nicht bekannt, welcher Mathematiker des islamischen Kulturkreises als Erster den Kosinussatz entdeckt hat – auf jeden Fall war es al-Kashi, der seine Bedeutung für Aufgabenstellungen vom Typ des Kongruenzsatzes *SSS* erkannte und durch sein Buch allgemein verbreitete.

In Frankreich wird heute noch dieser Satz als *Le théorème d' al-Kashi* bezeichnet (seit einigen Jahren aber auch als *théorème de Pythagore généralisé* – Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras).

Satz

Kosinussatz von Jamshid al-Kashi

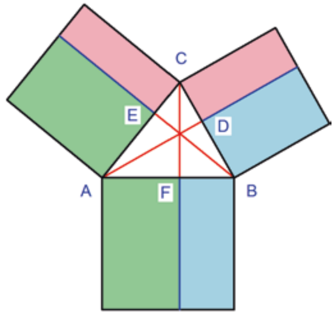
In einem beliebigen Dreieck gilt (mit den üblichen Bezeichnungen der Seiten und Winkel):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos(\beta)$$

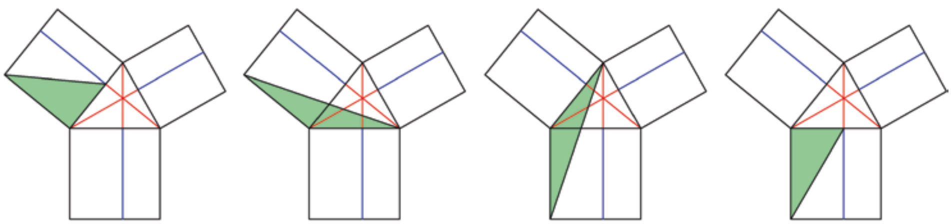
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

Al-Kashis Beweis für ein spitzwinkliges Dreieck kann der folgenden Figur entnommen werden:



Über den Seiten des Dreiecks ABC werden Quadrate gezeichnet, außerdem die Höhen im Dreieck, durch deren Verlängerungen die Quadrate unterteilt werden.

- *1. Schritt:* Die beiden grün gefärbten Rechtecke sind flächengleich (Nachweis durch Scherung des halben Rechtecks, Drehung um 90° und Scherung).



- *2. Schritt:* Die beiden blau gefärbten Rechtecke sind flächengleich (Nachweis analog).
- *3. Schritt:* Das rosa gefärbte Rechteck links hat die Seitenlängen $b = |AC|$ und $|EC| = |CB| \cdot \cos(\gamma) = a \cdot \cos(\gamma)$, also den Flächeninhalt $b \cdot a \cdot \cos(\gamma)$.
- *4. Schritt:* Das rosa gefärbte Rechteck rechts hat die Seitenlängen $a = |BC|$ und $|CD| = |AC| \cdot \cos(\gamma) = b \cdot \cos(\gamma)$, also ebenfalls den Flächeninhalt $b \cdot a \cdot \cos(\gamma)$.

Dann folgt:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (\text{grün} + \text{rosa}) + (\text{rosa} + \text{blau}) = (\text{grün} + \text{blau}) + 2 \cdot \text{rosa} \\ &= c^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)\,, \end{aligned}$$

also $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$.

Beim Beweis für stumpfwinklige Dreiecke muss beachtet werden, dass zwei der drei Höhen außerhalb des Dreiecks verlaufen.

7.4 Literaturhinweise

Eine wichtige Adresse zum Auffinden von Informationen über Mathematiker und deren wissenschaftliche Leistungen ist die Homepage der St. Andrews University.

Informationen über al-Kashi und al-Tusi findet man unter:

- www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Kashi.html
- www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Tusi_Nasir.html
- Strick, Heinz Klaus (2009): *Kalenderblatt über al-Kashi,* www.spektrum.de/wissen/jamshid-al-kashi-1380-1429/996326
- Strick, Heinz Klaus (2008): *Kalenderblatt über al-Tusi*
- www.spektrum.de/wissen/nasir-al-din-al-tusi-1201-1274/950444
- Strick, Heinz Klaus (2018): *Geniale Ideen großer Mathematiker (11): al-Kashis Berechnung von sin(1°)*, MNU-Journal, 71 (2)

Hierzu erschien ein interessanter ergänzender Artikel:

- Ullrich, Peter (2019): *Nicht nur al-Kashi konnte Nullstellen von Polynomen näherungsweise bestimmen*, MNU-Journal, 72 (4)

- Strick, Heinz Klaus (2019): *Mathematik ist wunderwunderschön*, Springer, Heidelberg, Kap. 2 (Multiplikation natürlicher Zahlen)

Weitere Informationen findet man u. a. in:

- Berggren, Len (2011): *Mathematik im mittelalterlichen Islam*, Springer, Heidelberg
- Gericke, Helmut (1992): *Mathematik in Antike und Orient*, Fourier, Wiesbaden
- Scriba, Christoph J., Schreiber, Peter (2005): *5000 Jahre Geometrie*, Springer, Berlin

Wikipedia-Artikel in deutscher, englischer und französischer Sprache zu den Stichwörtern:

- al-Kashi
- al-Tusi
- Kosinussatz (Law of cosines, Loi des cosinus*)
- Sinussatz (Law of sines, Loi des sinus)
  *) Auszeichnung als lesenswerter Artikel

8 Niccolò Tartaglia und Girolamo Cardano – wem gebührt die Ehre?

„Quando chel cubo con le cose appresso
Se agguaglia à qualche numero discreto
Trouan dui altri differenti in esso.“
(Wenn der Kubus mit den Coßen daneben gleich ist einer diskreten Zahl, finden sich als Differenz zwei andere in dieser).
(Tartaglia)

Erfindungen bedürfen der ungestörten Ruhe, des stillen, beständigen Nachdenkens und eifrigen Erprobens, und all dies gibt nur die Einsamkeit, nicht die Gesellschaft der Menschen.
(Cardano)

Um das Jahr 1500 wurden Gleichungen noch immer nur mit Worten wiedergegeben. Beispielsweise beschrieb der italienische Mathematiker **Luca Pacioli** (1445–1517) in seiner 1494 erschienenen *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* („Zusammenfassende Darstellung über Arithmetik, Geometrie und Algebra“) die Gleichung

H. K. Strick, *Mathematik – einfach genial!*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-60449-6_8

$x^4 + x = x^2 + a$ (in unserer heutigen Schreibweise)

als „Censo de censo e cosa equale a censo e numero“ (*cosa* = unbekannte Zahl, *censo* = Quadrat dieser Zahl, *censo de censo* = vierte Potenz, *numero* = bestimmte Zahl).

Und da das Rechnen mit negativen Zahlen noch nicht entwickelt war, traten in den Gleichungen nur „Plus“-Zeichen auf, d. h., als Koeffizienten von Polynomen kamen nur positive Zahlen infrage.

Bei den kubischen Gleichungen beispielsweise mussten daher 14 verschiedene Typen betrachtet werden (vgl. auch Kap. 6).

Neben der einfachen kubischen Gleichung $x^3 = c$ sind dies sieben Gleichungstypen, in denen alle Potenzen enthalten sind ($x^3 + ax^2 + bx + c = 0$; $x^3 + bx + c = ax^2$; $x^3 + ax^2 + c = bx$; $x^3 + ax^2 + bx = c$; $x^3 + c = ax^2 + bx$; $x^3 + bx = ax^2 + c$; $x^3 + ax^2 = bx + c$), sowie sechs Typen, bei denen jeweils ein Summand fehlt ($x^3 + bx + c = 0$; $x^3 + c = bx$; $x^3 + bx = c$; $x^3 + ax^2 + c = 0$; $x^3 + c = ax^2$; $x^3 + ax^2 = c$).

Nachdem Jahrhunderte lang vergeblich nach allgemeinen algebraischen Lösungsmethoden für kubische Gleichungen gesucht worden war (vergleichbar den Verfahren zur Lösung quadratischer Gleichungen, vgl. Kap. 3), kam Luca Pacioli zum Schluss:

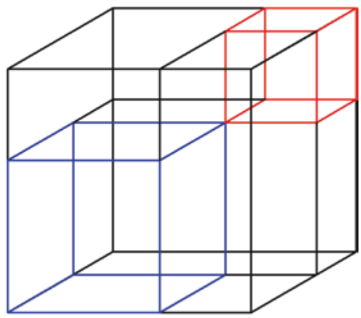
Kubische Gleichungen sind nicht lösbar („impossibile“).

Und Luca Pacioli war nicht irgendwer: Die italienische Briefmarke aus dem Jahr 1994 erinnert daran, dass Pacioli in seiner *Summa,* dem ersten Mathematikbuch in italienischer Sprache, das gesamte mathematische Wissen der Zeit zusammenfasste. Auf der Briefmarke aus Sri Lanka wird hervorgehoben, dass Pacioli auch als „Vater der Buchhaltung“ gilt, denn durch sein Buch wurde die Methode der doppelten Buchführung verbreitet (Kap. 8 in seiner *Summa*).

Allerdings gab es in den 50 Jahren nach der Veröffentlichung von Paciolis Buch eine rasante Entwicklung hinsichtlich der Lösung kubischer Gleichungen.

Es war ebenfalls ein italienischer Mathematiker, **Girolamo Cardano** (1501–1576), der in seiner 1545 veröffentlichten *Ars magna* nicht nur ein Lösungsverfahren für Gleichungen 3. Grades angeben konnte, sondern sogar für Gleichungen 4. Grades.

Ein erster Schritt war dreißig Jahre zuvor **Scipione del Ferro** (1465–1526) gelungen; aber der Dozent der Universität Bologna gab seine Idee eines Lösungsverfahrens für den Gleichungstyp $x^3 + bx = c$ nur an seinen Schüler **Antonio Maria del Fiore** weiter. Dieser nutzte seine – ohne eigene Anstrengung erlangten – Kenntnisse jedoch großspurig dazu, die Öffentlichkeit auf sich aufmerksam zu machen: Er verkündete, dass er in der Lage sei, kubische Gleichungen zu lösen, und forderte – wie es damals üblich war – andere Mathematiker zum öffentlichen Wettstreit heraus.



Niccolò Tartaglia (1500–1557) hatte lange nach einem Verfahren für kubische Gleichungen gesucht und fand schließlich – in der Nacht vor dem Wettstreit mit del Fiore – die in der Abbildung dargestellte dreidimensionale Figur. Dabei erweiterte er die Idee von Muhammed al-Khwarizmi. Dieser hatte seine Lösungsverfahren für *quadratische Gleichungen* an zweidimensionalen Flächenstücken veranschaulicht; dazu fasste er die auftretenden Koeffizienten sowie die Variable x als Seitenlängen auf (vgl. Kap. 3).

Wie der Wettstreit zwischen Antonio Maria del Fiore und Niccolò Tartaglia verlief und wie Girolamo Cardano die Bühne betrat, wird in Abschn. 8.2 dargestellt.

8.1 Einfach genial: Niccolò Tartaglia entwickelt ein Lösungsverfahren für eine kubische Gleichung

Abb. 8.1 zeigt, wie ein Würfel mit der Kantenlänge r so zerlegt werden kann, dass zwei Würfel und drei zueinander kongruente Quader entstehen.

Im Einzelnen ergibt sich:

Der blaue Würfel hat die Seitenlänge $r - s$, der rote Würfel die Seitenlänge s und die drei kongruenten Quader haben die Seitenlängen r, s und $r - s$.

Zwischen den Variablen r und s besteht also der folgende Zusammenhang:

$$r^3 = s^3 + (r - s)^3 + 3 \cdot r \cdot s \cdot (r - s), \text{ also}$$

$$(r - s)^3 + 3 \cdot r \cdot s \cdot (r - s) = r^3 - s^3.$$

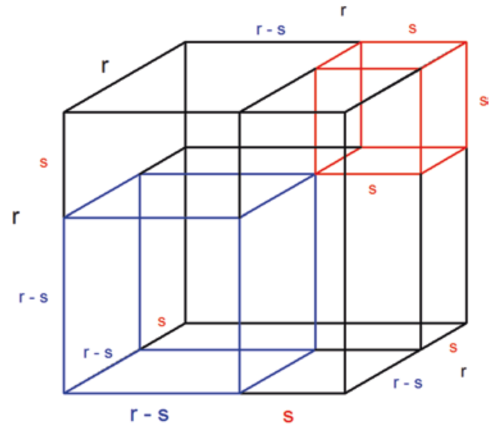


Abb. 8.1 Zerlegung eines Würfels

8.1.1 Lösung der speziellen Gleichung $x^3 + 6x = 20$

Wenn die Variable x in der Gleichung durch die Seitenlänge $r - s$ dargestellt wird, dann ergibt sich durch Koeffizientenvergleich mit der zu lösenden Gleichung $x^3 + 6x = 20$, dass folgende Bedingungen für r und s erfüllt sein müssen:

$3 \cdot r \cdot s \cdot x = 6x$, also $3 \cdot r \cdot s = 6$, und $r^3 - s^3 = 20$.

Aus $3 \cdot r \cdot s = 6$ folgt $r \cdot s = 2$ und hieraus folgen die beiden Bedingungen

$r = \frac{2}{s}$ sowie $s = \frac{2}{r}$.

Nun lassen sich die Variablen r und s in der Gleichung $r^3 - s^3 = 20$ ersetzen:

$\left(\frac{2}{s}\right)^3 - s^3 = 20$ sowie $r^3 - \left(\frac{2}{r}\right)^3 = 20$.

Nach Multiplikation mit dem Hauptnenner ergibt sich dann

$s^6 + 20s^3 = 8$ sowie $r^6 - 20r^3 = 8$.

Diese Gleichungen kann man als quadratische Gleichungen mit den Variablen $y = s^3$ und $z = r^3$ auffassen und durch entsprechende Substitution wie folgt notieren:

$y^2 + 20y = 8$ und $z^2 - 20z = 8$

Quadratische Ergänzung führt zu

$(y + 10)^2 = 108$ und $(z - 10)^2 = 108$.

Die positiven Lösungen dieser beiden Gleichungen sind

$y = -10 + \sqrt{108}$ sowie $z = 10 + \sqrt{108}$

Da $y = s^3$ und $z = r^3$, folgt daher

$s = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{108}}$ und $r = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}}$.

Somit haben wir mit

$$x = r - s = \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} - \sqrt[3]{-10 + 6\sqrt{3}}.$$

eine Lösung der kubischen Gleichung $x^3 + 6x = 20$ gefunden.

Offensichtlich ist aber $x = 2$ eine Lösung dieser kubischen Gleichung.

- Ist etwa die o. a. Differenz aus geschachtelten Wurzeln gleich 2?

Um $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} - \sqrt[3]{-10+6\sqrt{3}} = 2$ nachzuweisen, muss man prüfen, ob sich die beiden geschachtelten Wurzeln nicht jeweils auf einfachere Weise darstellen lassen.

Hier erweist sich der folgende Ansatz als erfolgreich:

Gesucht sind Koeffizienten e, f, g, h derart, dass

$10+6\sqrt{3} = (e+f\cdot\sqrt{3})^3$, also $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} = e+f\cdot\sqrt{3}$, und

$-10+6\sqrt{3} = (g+h\cdot\sqrt{3})^3$, also $\sqrt[3]{-10+6\sqrt{3}} = g+h\cdot\sqrt{3}$.

Anwenden der binomischen Formel für die dritte Potenz ergibt für den ersten Term

$$(e+f\cdot\sqrt{3})^3 = e^3+3\cdot e^2\cdot f\cdot\sqrt{3}+9\cdot e\cdot f^2+3\cdot f^3\cdot\sqrt{3}.$$

Durch Koeffizientenvergleich mit $10+6\sqrt{3}$ findet man so heraus:

$$e^3+9\cdot e\cdot f^2 = 10 \text{ und } e^2\cdot f+f^3 = 2.$$

Ausklammern von e bzw. f führt zu

$$e\cdot\left(e^2+9\cdot f^2\right) = 10 \text{ und } f\cdot\left(e^2+f^2\right) = 2.$$

An den auftretenden Zahlen erkennt man sofort, dass $e = f = 1$ sein muss, d. h., es gilt

$$10+6\sqrt{3} = (1+\sqrt{3})^3$$

Analog bestimmt man die Koeffizienten g und h und erhält

$$-10+6\sqrt{3} = (-1+\sqrt{3})^3.$$

Damit gilt: $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} - \sqrt[3]{-10+6\sqrt{3}} = (1+\sqrt{3})-(-1+\sqrt{3}) = 2$

8.1.2 Lösung der allgemeinen Gleichung $x^3 + bx = c$

Analog zu oben kommt man hier zu den Gleichungen

$3\cdot r\cdot s = b$ und $r^3 - s^3 = c$ und hieraus zu

$r = \frac{b}{3s}$ sowie $s = \frac{b}{3r}$.

Einsetzen in die Gleichung $r^3 - s^3 = c$ führt zu

$\left(\frac{b}{3s}\right)^3 - s^3 = c$, also $s^6 + cs^3 = \frac{b^3}{27}$, und somit zu $\left(s^3+\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{b^3}{27}+\frac{c^2}{4}$

sowie zu

$r^3 - \left(\frac{b}{3r}\right)^3 = c$, also $r^6 - cr^3 = \frac{b^3}{27}$, und schließlich $\left(r^3-\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{b^3}{27}+\frac{c^2}{4}$.

Mit der Substitution $y = s^3$ und $z = r^3$ ergeben sich dann die quadratischen Gleichungen

$\left(y+\frac{c}{2}\right)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{3}\right)^3$ sowie $\left(z-\frac{c}{2}\right)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{3}\right)^3$.

Wegen b, $c > 0$ ist die Bedingung $\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3 \geq 0$ erfüllt; daher haben diese Gleichungen die positiven Lösungen

$y = -\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3}$ sowie $z = \frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3}$, also

$s = \sqrt[3]{-\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3}}$ sowie $r = \sqrt[3]{\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3}}$.

Wegen $x = r - s$ ergibt sich schließlich die Lösung

$$x = \sqrt[3]{\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3}}.$$

8.1.3 Lösung der anderen Gleichungstypen

In seiner *Ars magna* stellte Cardano dar, wie die anderen Gleichungstypen auf die Lösung des o. a. Typs $x^3 + bx = c$ zurückgeführt werden können.

Lösung des Gleichungstyps $x^3 = bx + c$

Cardano macht hier den Ansatz $x = r + s$.

Wegen $(r+s)^3 = r^3 + 3 \cdot r^2 \cdot s + 3 \cdot r \cdot s^2 + s^3$ folgt

$x^3 = (r+s)^3 = 3 \cdot r \cdot s \cdot (r+s) + \left(r^3 + s^3\right) = 3 \cdot r \cdot s \cdot x + \left(r^3 + s^3\right)$.

Durch Koeffizientenvergleich ergeben sich dann zwei Bedingungen, nämlich

$3 \cdot r \cdot s = b$ und $r^3 + s^3 = c$.

Analog zu oben ergibt sich schließlich

$$x = r + s = \sqrt[3]{\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{c}{2} - \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3}}.$$

Lösung des Gleichungstyps $x^3 + c = bx$

Zwischen den Gleichungstypen $x^3 + c = bx$ und $x^3 = bx + c$ besteht ein einfacher Zusammenhang:

Wenn x_1 eine Lösung der Gleichung $x^3 + c = bx$ ist und x_2 eine Lösung der Gleichung $x^3 = bx + c$, dann gilt für diese beiden Lösungen

$$x_1^3 + x_2^3 = b \cdot x_1 - c + b \cdot x_2 + c = b \cdot (x_1 + x_2).$$

Andererseits lässt sich die Summe zweier dritter Potenzen als Produkt darstellen:

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2) \cdot \left(x_1^2 - x_1 \cdot x_2 + x_2^2\right),$$

d. h., es gilt

$$x_1^2 - x_1 \cdot x_2 + x_2^2 = b.$$

Kennt man also eine Lösung $x_2 = d$ der Gleichung $x^3 = bx + c$, dann erfüllt diese Zahl d die Bedingung $x_1^2 - d \cdot x_1 + d^2 = b$. Um x_1 zu bestimmen, muss man also nur noch die quadratische Gleichung

$x_1^2 - d \cdot x_1 + (d^2 - b) = 0$ lösen.

Lösung der übrigen Gleichungstypen

Cardano fand heraus, dass die übrigen Gleichungstypen mithilfe der Substitution

$$x = y + \tfrac{1}{3} \cdot a \quad \text{bzw.} \quad x = y - \tfrac{1}{3} \cdot a$$

auf einen der beiden Gleichungstypen $x^3 + c = bx$ bzw. $x^3 = bx + c$ zurückgeführt werden können. Da er aber noch nicht über den notwendigen allgemeinen algebraischen Kalkül verfügte, musste er jede der Substitutionen einzeln geometrisch begründen.

Probleme mit dem Fall $\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3 < 0$ – casus irreducibilis

Bei der Lösung der Aufgabe $x^3 = 15x + 4$ hatte Cardano erhebliche Schwierigkeiten: Im Ergebnis traten negative Radikanden in der Quadratwurzel auf:

$$x = \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{15}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{15}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Cardano bezeichnete die Quadratwurzeln aus negativen Zahlen als *ausgeklügelte, gekünstelte* Größen *(vere sophisticae),* denn durch einfaches Einsetzen sieht man, dass $x = 4$ eine Lösung der Gleichung ist.

Solche Wurzeln aus negativen Zahlen können bekanntlich auch bei quadratischen Gleichungen auftreten. Beispielsweise führt die Aufgabenstellung

Kann man die Zahl 10 so in zwei Summanden zerlegen, dass deren Produkt 40 ergibt?

auf die Lösungen $5 + \sqrt{-15}$ und $5 - \sqrt{-15}$, die Cardano als *ebenso raffiniert wie nutzlos* bezeichnete.

Mit einem Ansatz ähnlich wie oben hätte Cardano auch bei dem o. a. Term herausfinden können, dass es sich „nur" um eine etwas komplizierte Darstellung der Zahl 4 handelt – wenn er seine „Vorbehalte" bzgl. des seltsamen Gebildes $\sqrt{-1}$ mutig abgelegt hätte:

$2 + 11 \cdot \sqrt{-1} = (e + f \cdot \sqrt{-1})^3$, also $\sqrt[3]{2 + 11 \cdot \sqrt{-1}} = e + f \cdot \sqrt{-1}$, und

$(e + f \cdot \sqrt{-1})^3 = e^3 + 3 \cdot e^2 \cdot f \cdot \sqrt{-1} - 3 \cdot e \cdot f^2 - f^3 \cdot \sqrt{-1}$.

Durch Koeffizientenvergleich findet man heraus:

$e^3 - 3 \cdot e \cdot f^2 = 2$ und $3 \cdot e^2 \cdot f - f^3 = 11$, also

$e \cdot \left(e^2 - 3 \cdot f^2\right) = 2$ und $f \cdot \left(3e^2 - f^2\right) = 11$.

An den auftretenden Zahlen erkennt sofort, dass $e = 2$ und $f = 1$ sein muss, d. h., es gilt

$\sqrt[3]{2 + 11 \cdot \sqrt{-1}} = 2 + \sqrt{-1}$.

Analog erhält man $\sqrt[3]{2 - 11 \cdot \sqrt{-1}} = 2 - \sqrt{-1}$ und somit

$$\sqrt[3]{2 + 11 \cdot \sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11 \cdot \sqrt{-1}} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4.$$

Nur wenige Jahre nach Cardanos *Algebra magna* erkannte der italienische Ingenieur **Rafael Bombelli** (1526–1572), dass man mit den Wurzeln aus negativen Zahlen im Prinzip genauso rechnen kann wie mit den übrigen Zahlen. Und da er außerdem das Rechnen mit *negativen* Zahlen beherrschte, entfielen all die mühsamen Fallunterscheidungen, die Cardano noch vornehmen musste. Daher ist es etwas irreführend, wenn man heute die reelle Lösung für eine reduzierte Gleichung 3. Grades $y^3 + py + q = 0$, also die Formel

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

als **Cardanische Lösungsformel** bezeichnet – insbesondere auch deshalb, weil es Tartaglia war, der diese Formel als Rechenvorschrift zur Auffindung einer Lösung verfasste.

Zu erwähnen ist noch, dass es Bombelli auch gelang nachzuweisen, dass man allgemein zu beliebigen reellen Zahlen α, β geeignete reelle Zahlen r; s finden kann, für die gilt:

$$\sqrt[3]{\alpha + \beta \cdot \sqrt{-1}} + \sqrt[3]{\alpha - \beta \cdot \sqrt{-1}} = (r + s \cdot \sqrt{-1}) + (r - s \cdot \sqrt{-1}) = 2r$$

8.2 Wer waren Girolamo Cardano und Niccolò Tartaglia?

8.2.1 Cardanos erste Lebensjahre

Girolamo (auch Geronimo/Hieronimo) Cardano wurde 1501 als uneheliches Kind eines Rechtsanwalts in Mailand geboren. Der Vater war als Dozent an der Universität in Pavia tätig; außerdem lehrte er Geometrie an der angesehenen *Scuole Piatti* in Mailand. Vom Vater in Mathematik unterrichtet, plante der Heranwachsende eine akademische Laufbahn, entschied sich aber mit 19 Jahren für ein Studium der Medizin, das er in Pavia aufnahm und – wegen des Kriegs zwischen Habsburg und Frankreich um die Vorherrschaft in Oberitalien – in Padua fortsetzte.

Nach dem Tod des Vaters war das geerbte Vermögen schnell vergeudet; Cardano finanzierte sein weiteres Studium durch Karten- und Würfelspiele. Dabei beschäftigte er sich u. a. mit der Frage, wie groß die Chancen sind, beim zwei- bzw. dreifachen Würfeln eine bestimmte Augensumme zu erzielen, nachdem bereits einmal gewürfelt worden ist.

Diese ersten Erkenntnisse (verbunden mit Ratschlägen zum taktischen Verhalten) fasste er um 1524 in einem Buch zusammen. Das *Buch vom Würfelspiel (Liber de Ludo Aleae)* enthielt bereits im Ansatz den Laplace'schen Wahrscheinlichkeitsbegriff sowie korrekte Rechenregeln zur Addition und Multiplikation von Wahrscheinlichkeiten. Cardano war allerdings nicht an einer Veröffentlichung interessiert, denn er wollte seinen Wissensvorsprung möglichst lange für sich selbst nutzen.

Der vielseitig begabte Student Cardano schloss sein Medizinstudium mit dem Doktorgrad ab und bewarb sich – ohne Zögern und mit Erfolg – um die Stelle des Rektors der Universität Padua. Sein Versuch, sich als Arzt in Mailand niederzulassen, wurde von den ortsansässigen Ärzten mit dem Hinweis auf die illegitime Herkunft verweigert. Dies war allerdings nur ein Vorwand: Cardano war ein eigenwilliger, kompromissloser Mensch, der oft in aggressiver Weise seinen Mitmenschen begegnete – die Mailänder Ärzteschaft fürchtete, dass Auseinandersetzungen mit ihm ausarten könnten.

Daher ließ sich Cardano als Arzt in einem Dorf in der Nähe von Padua nieder; von seinen geringen Einkünften konnte er jedoch seine junge Familie kaum ernähren. Auch bei den Würfel- und Kartenspielen verließ ihn sein Glück: Nach einer Pechsträhne musste er die Möbel und den Schmuck seiner Frau verkaufen und vorübergehend ins Armenhaus ziehen.

So war er froh, als ihm eine Stelle als Mathematiklehrer an der *Scuole Piatti* angeboten wurde, wo einst sein Vater unterrichtet hatte. Nunmehr in Mailand lebend, konnte er dort heimlich kranke Menschen behandeln. Und dabei war er so erfolgreich, dass ihn schließlich sogar ortsansässige Ärzte um Rat fragten. Dann aber veröffentlichte er 1536 ein Buch, in dem er die Qualifikation und charakterliche Eignung der Mailänder Ärzte infrage stellte, und verscherzte so erneut seine Chancen, als Arzt offiziell in Mailand zugelassen zu werden. In der Zwischenzeit war jedoch die Zahl der Bewunderer seiner Fähigkeiten als Arzt so groß geworden, dass man ihm 1539 schließlich doch die Zulassung für Mailand erteilte. Als Begründung wurde jetzt angegeben, dass sein Vater die Mutter später ja noch geheiratet habe und dadurch seine Geburt nachträglich legitimiert worden sei.

Im selben Jahr veröffentlichte Cardano zwei Mathematikbücher, darunter *Practica arithmetice et mensurandi singularis,* worin auch seine Lösung für das Teilungsproblem enthalten ist (vgl. Kap. 12).

1539 war auch das Jahr, in dem Cardano Kontakt zu Tartaglia aufnahm …

8.2.2 Tartaglias erste Lebensjahre

Niccolò Fontana wurde im Jahr 1500 in Brescia (Republik Venedig) geboren; sein Vater war als reitender Bote tätig, d. h., er transportierte Post von Brescia aus in benachbarte Städte. Als der Vater Opfer eines Raubmordes wurde, verarmte die Familie und die Witwe hatte große Schwierigkeiten, ihre drei Kinder zu ernähren.

Im Jahr 1512 eroberten französische Truppen die Stadt und nahmen Rache für eine zuvor erlittene Niederlage. Über 40.000 Einwohner der Stadt wurden wahllos umgebracht. Der 12-jährige Niccolò nahm Zuflucht in der Kathedrale; aber auch dort konnte er dem Gemetzel nicht entgehen. Er überlebte schwer verletzt; sein Gesicht war durch tiefe Wunden entstellt. Daher versuchte er als Erwachsener die Narben durch einen mächtigen Bart zu verdecken.

Seit dem furchtbaren Erlebnis stotterte er; von seinen Nachbarn wurde er daher *Tartaglia* gerufen, d. h. *Stotterer* – selbstbewusst nahm er diesen Namen als Rufnamen an. Niccolò fiel wegen seiner Begabung für Mathematik auf und seine Mutter fand jemanden, der bereit war, ihn zu fördern. Bald schon gab er selbst Mathematikunterricht, zunächst für Eingangsklassen, später in Verona und Venedig auch für ältere Schüler.

Tartaglia beschäftigte sich mit kubischen Gleichungen, für die bis dahin noch keine Lösungsmethode veröffentlicht worden war. Als er zu Beginn des Jahres 1535 hörte, dass Antonio Maria del Fiore andere Mathematiker zum öffentlichen Wettstreit herausgefordert habe, meldete er sich zu diesem besonderen Duell. Denn in der Zwischenzeit hatte er eine Methode gefunden, Gleichungen des Typs $x^3 + ax^2 = c$ zu lösen. (Es ist leider nicht bekannt, welche Methode er dafür gefunden hatte.)

Der Wettstreit bestand darin, dass jeder der Kontrahenten dem anderen jeweils dreißig Aufgaben stellen musste, die dieser innerhalb einer Frist von vierzig Tagen lösen sollte. Während aber Tartaglia sich Probleme mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad ausdachte, hatten alle dreißig Del-Fiore-Aufgaben etwas mit Gleichungen vom Typ $x^3 + bx = c$ zu tun; beispielsweise lautete das erste Problem:

Finde mir eine Zahl derart, dass, wenn ihr Kubus addiert wird, das Resultat 6 ist.

Das heißt, die Gleichung $x^3 + x = 6$ war zu lösen.

Wie oben erwähnt, fand Tartaglia erst in der letzten Nacht vor Ablauf der Frist ein geeignetes Lösungsverfahren. Del Fiore hingegen erwies sich als mittelmäßiger Mathematiker, der sich allein darauf verlassen hatte, dass sein Gegner grundsätzlich nicht in der Lage sein würde, kubische Gleichungen zu lösen.

Großzügig verzichtete Tartaglia auf den für den Wettstreit ausgesetzten Preis; für ihn war der Ruhm wichtig, der – wie er hoffte – endlich zu einer Beschäftigung führen würde, die sicherer und angesehener war als die bisherige.

8.2.3 Cardano nimmt Kontakt zu Tartaglia auf

Cardano, der bis dahin der Aussage Paciolis vertraut hatte, dass kubische Gleichungen nicht lösbar seien, hörte von dem Ausgang des Wettstreits.

Über einen Buchhändler ließ er bei Tartaglia nachfragen, ob er die von ihm gefundene Methode für ein Buch über Algebra zur Verfügung stellen könne, das in Vorbereitung sei. Tartaglia ließ Cardano ausrichten, dass er beabsichtige, das von ihm gefundene Verfahren in einem eigenen Buch zu veröffentlichen.

Cardano drängte nun persönlich auf die Mitteilung der Methode. Dabei deutete er an, dass er seine guten Kontakte zum Gouverneur von Mailand nutzen könne, um für Tartaglia endlich eine angemessene Anstellung zu finden. Jetzt war Tartaglia bereit, sein Geheimnis preiszugeben; er ließ aber Cardano schwören, dass er die Methode für sich behalten und *nicht* veröffentlichen werde.

Die von ihm in der entscheidenden Nacht gefundene Methode gab Tartaglia an Cardano in Versform (vgl. Anfangszeilen des Kapitels) weiter – in Kurzfassung lautete diese wie folgt:

Um die Lösung einer Gleichung vom Typ $x^3 + bx = c$ zu finden, muss man folgende Aufgabe lösen:

- *Suche zwei Zahlen u und v, deren Differenz c ergibt und deren Produkt gleich dem Kubus von* $b/3$ *ist, dann ist* $\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$ *die gesuchte Lösung.*

Noch auf der Heimreise von Mailand bereute Tartaglia, was er getan hatte. Als er aber feststellte, dass seine Methode in keinem der im selben Jahr erschienenen Mathematikbücher Cardanos vorkam, war er beruhigt.

Cardano aber genügten die o. a. Informationen von Tartaglia, um nunmehr Methoden zur Lösung *aller* Typen von kubischen Gleichungen zu entwickeln. Seinem Schüler und Assistenten **Ludovico Ferrari** (1522–1565) gelang es sogar, Gleichungen 4. Grades zu lösen, indem er sie auf Gleichungen 3. Grades zurückführte (vgl. z. B. Eschenburg, S. 53).

1543 erfuhren die beiden von del Ferros Schwiegersohn, dass del Ferro bereits 1515 einen ersten Typ von kubischen Gleichungen hatte lösen können und Tartaglia somit *nicht* der Erste war, der dazu in der Lage war.

Im Jahr 1545 erschien dann in Nürnberg Cardanos Hauptwerk in lateinischer Sprache *Ars magna (Artis magnae sive de Regulis Algebraicis).* In 40 Kapiteln stellte Cardano dar, wie man die verschiedenen Typen von Gleichungen 3. und 4. Grades lösen kann.

Ausdrücklich nannte er del Ferro und Tartaglia sowie Ferrari als Entdecker der Lösungen bestimmter Gleichungstypen.

Die *Ars magna* enthält natürlich noch keine Umformungen, wie sie oben abgedruckt sind; vielmehr gibt Cardano Anweisungen, wie man aus den Koeffizienten b und c schrittweise den Term der Lösungsformel aufbaut.

8.2.4 Das Ende der dramatischen Geschichte

Tartaglia geriet außer sich, als er von der Veröffentlichung Cardanos erfuhr, und beschuldigte ihn des Meineids. Dieser aber reagierte nicht auf die Vorwürfe; vielmehr überließ er die öffentliche Auseinandersetzung seinem Schüler Ferrari.

Nach langem Zögern ließ Tartaglia sich schließlich 1548 auf einen öffentlichen Wettstreit mit Ferrari ein; denn man versprach ihm – im Falle eines Sieges – eine herausragende Stellung in Brescia. Am Ende des ersten Wettkampftages erkannte Tartaglia, dass Ferrari ihm überlegen war, und verließ den Ort des Wettstreits.

Trotz seiner Niederlage konnte er in Brescia noch ein Jahr lang Vorlesungen halten, bevor man ihm eröffnete, dass er dafür kein Honorar erwarten könne – schließlich habe er ja den Wettstreit mit Ferrari verloren!

Seine letzten Lebensjahre verbrachte Tartaglia als Lehrer in Venedig; 1557 starb er verbittert und verarmt.

Auch wenn er durch Cardano hinsichtlich der Lösung kubischer Gleichungen übertroffen wurde, ist Tartaglias Lebensleistung nicht unbedeutend: 1537 veröffentlichte er das Werk *Nova Scientia,* das sich mit ballistischen Fragen beschäftigte; u. a. enthält es die Feststellung, dass die größte Schussweite bei einem Schusswinkel von 45° erzielt wird. Auch als Übersetzer war Tartaglia tätig: Als Erster übertrug er die *Elemente* des Euklid ins Italienische und gab eine Übersetzung der Werke des Archimedes heraus.

Cardano hingegen genoss nach Veröffentlichung der *Ars magna* seinen Ruhm als – zweifelsohne – bedeutendster Mathematiker seiner Zeit.

Erfolgreich war er jedoch nicht nur in der Mathematik: Insgesamt veröffentlichte Cardano mehr als 200 Werke zu medizinischen, mathematischen, physikalischen und philosophischen Themen. Als erster Mediziner beschrieb er die Symptome von Typhuserkrankungen und stellt die Unterschiede zwischen Syphilis und Gonorrhö heraus. Ihn erreichten Angebote verschiedener europäischer Herrscherhäuser, aber nur einmal verließ er Italien: In Schottland heilte er den Erzbischof von St. Andrews, der unter lebensbedrohlichem Asthma litt; dieser zahlte ihm dafür ein Vermögen.

Seinen Ruf als Universalgelehrter bewies er u. a. durch die Beschreibung eines technischen Prinzips, das heute noch seinen Namen trägt: Eine *kardanische* Aufhängung ermöglicht es, Messinstrumente durch zwei zueinander senkrecht stehende Achsen drehbar zu lagern; dieses Prinzip wird auch beim sog. Kardangelenk berücksichtigt.

1560 veränderte sich Cardanos Leben jedoch in dramatischer Weise: Die Ehe seines ältesten Sohnes geriet aus den Fugen; am Ende vergiftete der Sohn seine Ehefrau und wurde dafür vom Gericht zum Tode verurteilt.

Als Vater eines Mörders verlor Cardano Ansehen und Anstellung. Er nahm eine Medizin-Professur in Bologna an, schaffte sich aber durch arrogantes Auftreten schnell wieder Feinde.

Sein zweiter Sohn verspielte alles, was er besaß, und brach, als der Vater ihm kein Geld mehr gab, in dessen Haus ein, um ihn zu bestehlen. Nach der Anzeige des Vaters wurde der Sohn aus der Stadt verbannt.

1570 dann wurde Cardano selbst inhaftiert – wegen Ketzerei: Er hatte ein Horoskop über Jesus Christus erstellt. Die Inquisition wollte an ihm ein abschreckendes Exempel statuieren; aber der Papst, der Cardano als medizinischen Berater schätzte, vergab ihm und gewährte ihm sogar eine Leibrente. Bis zu seinem Lebensende lebte Cardano in Rom und verfasste seine Memoiren.

Leibniz schrieb über Cardano: „Er war trotz all seiner Fehler ein großer Mann; ohne sie wäre er aber unvergleichlich gewesen.“

8.3 Literaturhinweise

Eine wichtige Adresse zum Auffinden von Informationen über Mathematiker und deren wissenschaftliche Leistungen ist die Homepage der St. Andrews University.

Informationen über Tartaglia und Cardano findet man unter:

- www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Tartaglia.html
- www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cardan.html

Außerdem findet man auf der Homepage von St. Andrews einen Beitrag mit vielen Originalzitaten zur Auseinandersetzung zwischen Tartaglia und Cardano unter:

- www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Tartaglia_v_Cardan.html

- Strick, Heinz Klaus (2012): *Kalenderblatt über Cardano und Tartaglia,* www.spektrum.de/alias/der-mathematische-monatskalender/girolamo-cardano-1501–1576-und-nicolo-tartaglia-1500–1557/1160795
- Strick, Heinz Klaus (2016): *Kalenderblatt über Bombelli,* www.spektrum.de/wissen/rafael-bombelli-1526-1572/1416043
- Strick, Heinz Klaus (2016): *Geniale Ideen großer Mathematiker (10): Cardano und Tartaglia lösen kubische Gleichungen,* MNU Journal, 69/3

Eine spannende Darstellung der dramatischen Geschichte um Tartaglias Entdeckung findet man im folgenden Roman:

- Jörgensen, Dieter (1999): *Der Rechenmeister,* Rütten & Loening, Berlin

Weitere Informationen findet man u. a. in:

- Eschenburg, Jost-Hinrich (2017): *Sternstunden der Mathematik,* Springer-Spektrum, Wiesbaden
- Führer, Lutz (1996): *Kubische Gleichungen und die widerwillige Entdeckung der komplexen Zahlen,* Download möglich unter: www.math.uni-frankfurt.de/~fuehrer/Schriften/1996_Cardano.pdf

- Humenberger, Hans (2013): *Wie können die komplexen Zahlen in die Mathematik gekommen sein? – Gleichungen dritten Grades und die Cardano-Formel,* Download möglich unter:
  homepage.univie.ac.at/hans.humenberger/Aufsaetze/04_ISTRONHumenberger.pdf

Wikipedia-Artikel in deutscher, englischer und französischer Sprache zu den Stichwörtern:

- Niccolò Tartaglia (Niccolò Fontana Tartaglia)
- Gerolamo Cardano (Jérôme Cardan)
- Scipione del Ferro
- Lodovico Ferrari (Ludovico Ferrari)
- Rafael Bombelli (Rafaël Bombelli)
- Cardanische Formeln (Cubic function/Cardan's method, Méthode de Cardan)
- Kubische Gleichung (Cubic function, Équation cubique)

9 John Napier – Meister des Rechnens

Es gibt in der mathematischen Praxis nichts, das so mühsam und lästig ist und beim Rechnen so zeitraubend wie das Multiplizieren, das Dividieren, das Quadrat- und das Kubikwurzelziehen von großen Zahlen.

Die Erfindung der Logarithmen durch John Napier, Laird of Merchiston, zu Beginn des 17. Jahrhunderts hatte große Auswirkungen auf die Entwicklung der Naturwissenschaften, insbesondere auf die der Astronomie.

Johannes Kepler (1571–1630) erkannte als Erster den gewaltigen Vorteil für seine umfangreichen Berechnungen zur Bestimmung der Marslaufbahn und sorgte für eine rasche Verbreitung der Methode.

Der französische Mathematiker, Physiker und Astronom Pierre-Simon Laplace (1749–1827) würdigte rückblickend die Erfindung mit den Worten:

> L'invention des logarithmes, en réduisant le temps passé aux calculs de quelques mois à quelques jours, double pour ainsi dire la vie des astronomes.

H. K. Strick, *Mathematik – einfach genial!*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-60449-6_9

> (Dadurch, dass die für Rechnungen benötigte Zeit von einigen Monaten auf einige Tage reduziert wurde, hat die Erfindung der Logarithmen sozusagen die Lebenszeit der Astronomen verdoppelt.)

Nach Einschätzung der Postverwaltung Nicaraguas gehört das *Gesetz von Napier* zu den zehn *mathematischen Formeln, die das Antlitz der Erde veränderten*.

Die auf der Briefmarke angegebene Definitionsgleichung $e^{\ln(N)} = N$ stammt allerdings nicht von John Napier – sie ist eher Leonhard Euler zuzuordnen.

Die im Folgenden beschriebenen Napier'schen Logarithmen haben wenig mit den Logarithmen zu tun, wie sie Leonhard Euler in seiner *Vollständige Anleitung zur Algebra* aus dem Jahr 1767 eingeführt hat; dort heißt es:

> Wir betrachten also die Gleichung $a^b = c$ … Wenn nun der Exponent b so angenommen wird, dass die Potenz a^b einer gegebenen Zahl c gleich wird, so wird der Exponent b der Logarithmus dieser Zahl c genannt …

9.1 Einfach genial: John Napier erfindet seine Logarithmen

Um das Jahr 1600 war die Zeit reif für die Entdeckung einer neuen Rechentechnik. Die Methode der *Prosthaphaeresis* (vgl. Abschn. 9.4.1) war gerade dabei, sich unter Astronomen zu verbreiten (erste Veröffentlichung in einem Buch im Jahr 1588), als gerade einmal 26 Jahre danach Napiers *Verhältniszahlen* bekannt wurden.

9.1.1 Vordenker Michael Stifel

Bereits Mathematiker des islamischen Kulturkreises hatten im Prinzip die Gesetzmäßigkeiten der logarithmischen Rechnung erkannt, und der deutsche Mathematiker Michael Stifel (1487–1567) schrieb 1544 in seiner Schrift *Arithmetica Integra:*

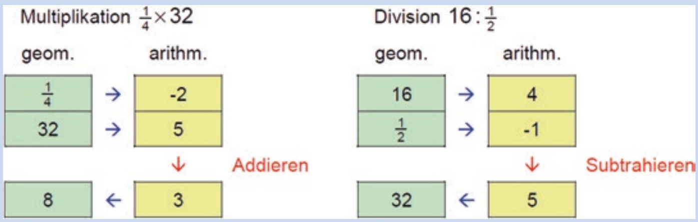
> Addition in der arithmetischen Reihe entspricht der Multiplikation in der geometrischen, ebenso Subtraktion in jener der Division in dieser. Die einfache Multiplikation bei der arithmetischen Reihe wird zur Multiplikation in sich (gemeint ist damit das Potenzieren) bei der geometrischen Reihe. Die Division in der arithmetischen Reihe ist dem Wurzelausziehen in der geometrischen Reihe zugeordnet, wie die Halbierung dem Quadratwurzelausziehen.

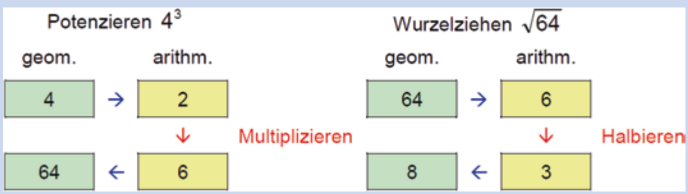
Beispiele

Bei den folgenden Beispielen beschränken wir uns auf Zahlen aus einer Tabelle mit ganzzahligen Potenzen von 2.

arithmetische Folge: $\log_2(x)$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
geometrische Folge: x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

Die arithmetische Folge wird durch $a_n = n$ definiert (für ganzzahlige n), die zugehörige geometrische Folge durch $g_n = 2^n$, d. h. $\log_2(g_n) = a_n$.





Die im Beispiel angegebene Stifel'sche Tabelle mit Potenzen von 2 ist allerdings für das praktische Rechnen noch kaum geeignet, da nur wenige Logarithmen angegeben werden können, vor allem aber auch deshalb nicht, da die Abstände zwischen den Folgegliedern der geometrischen Folge g_n sehr schnell sehr groß werden. Damit würde es schwierig, benötigte Zwischenwerte möglichst genau durch Interpolation zu bestimmen.

Beispiel

Bestimmen von $\log_2(3)$ durch arithmetische Mittelwertbildung zwischen $\log_2(2)$ und $\log_2(4)$ ist zu ungenau, denn das arithmetische Mittel $\frac{1}{2} \cdot (\log_2(2) + \log_2(4)) = \frac{1}{2} \cdot (1 + 2) = 1{,}5$
weicht zu sehr vom tatsächlichen Wert $\log_2(3) \approx 1{,}585$ ab.

Die Werte der zugrunde liegenden geometrischen Zahlenfolge sollten also möglichst dicht beieinanderliegen; dies ist der Fall, wenn der konstante Faktor q sich nur geringfügig von 1 unterscheidet.

9.1.2 Napiers Logarithmen

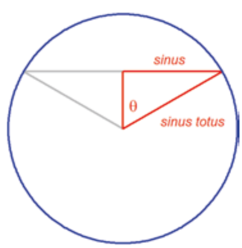
John Napier war sehr an astronomischen (und astrologischen) Fragen interessiert. Daher suchte er für die umfangreichen Rechnungen nach Methoden, durch die der Aufwand vermindert werden konnte.

Zwanzig Jahre lang suchte er nach geeigneten Verfahren. Im Jahr 1614 erschien dann sein Buch *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* („Beschreibung der wunderbaren Tafel der Logarithmen“), das im Wesentlichen aus einer Anleitung bestand, wie die Tabellen im Anhang des Buches zu benutzen sind.

Die Erläuterungen, wie er zu seinen Tabellen gekommen war, erfolgte im Jahr 1619 in der Schrift *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio* – das Buch erschien erst zwei Jahre nach Napiers Tod, herausgegeben von dessen Sohn Robert.

Napier verwendete für die von ihm berechneten Zahlen zunächst noch den Begriff „künstliche Zahlen“, gab ihnen dann den Namen **Logarithmus** im Sinne von *Verhältniszahl* – gebildet aus den griechischen Wörtern *logos* (hier: Verhältnis) und *arithmos* (Zahl); denn *seine* „Logarithmen“ (im Folgenden hier durch *NapLog* gekennzeichnet) sind keine Logarithmen in der heute geltenden Bedeutung – durch sie wird ein Zahlen*verhältnis* definiert, vgl. unten.

Da Napier für seine trigonometrischen Berechnungen an einer Logarithmentafel für Sinuswerte interessiert war, wählte er den Startwert von $r = 10^7$ (Radius des Kreises, sog. *sinus totus*) und eine streng monoton fallende *geometrische Folge* mit dem konstanten Quotienten $q = 1 - \frac{1}{10^7} = 0{,}9999999$. Napiers geometrische Folge ist also definiert durch $g_n = 10^7 \cdot \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^n$ für natürliche Zahlen n.



Hinweise zur Definition des Sinus und zur Dezimalschreibweise Zur Zeit Napiers war es noch üblich, die Länge der *halben Kreissehne* als *Sinus* zu bezeichnen, und nicht das *Verhältnis von Seitenlängen* im rechtwinkligen Dreieck.

Napier wählte als Startwert eine 7-stellige Zahl, sodass seine Logarithmen ebenfalls 7-stellig waren – die Werte in seinen Tabellen sollten *natürliche* Zahlen sein; denn das Rechnen mit Dezimalzahlen war um diese Zeit in Europa noch nicht sehr verbreitet.

Dies geschah erst nach 1585, als der niederländische Mathematiker **Simon Stevin** (1548–1620) sein Buch *De Thiende* („Das Zehntel“) veröffentlichte. Das Buch erschien im kurzen zeitlichen Abstand auch in anderen europäischen Sprachen. Die von Stevin vorgeschlagene Schreibweise

184⓪5①4②2③9④

für die Dezimalzahl 184,5429 bzw. 184.5429 war noch ziemlich kompliziert. Der für die gregorianische Kalenderreform verantwortliche Jesuitenpater **Christopher Clavius** (1538–1612) verwendete als Erster systematisch den Punkt als Dezimaltrennzeichen in den von ihm herausgegebenen Sinustabellen (1593). Nach dem Erscheinen von John Napiers *Rhabdologia* (s. u.) setzte sich dann der Dezimalpunkt (bzw. das Dezimalkomma) durch.

Auf den ersten Blick scheint die Berechnung der Werte sehr aufwendig zu sein, da die Potenzen von $q = 1 - \frac{1}{10^7} = 0{,}9999999$ berechnet werden müssen. Napier hatte diesen Wert von q aber gewählt, weil für dieses q eine einfache iterative Berechnung möglich ist:

$$g_0 = 10^7 \cdot \left(1 - \tfrac{1}{10^7}\right)^0 = 10^7, \text{ also } \mathit{NapLog}\,(10^7) = 0;$$

$$g_1 = 10^7 \cdot \left(1 - \tfrac{1}{10^7}\right)^1 = 10^7 - 1 = 9999999, \text{ also } \mathit{NapLog}\,(9999999) = 1;$$

$$\begin{aligned} g_2 &= 10^7 \cdot \left(1 - \tfrac{1}{10^7}\right)^2 = 10^7 \cdot \left(1 - \tfrac{1}{10^7}\right)^1 \cdot \left(1 - \tfrac{1}{10^7}\right) = g_1 \cdot \left(1 - \tfrac{1}{10^7}\right) \\ &= (10^7 - 1) - (10^7 - 1) \cdot \tfrac{1}{10^7} = 10^7 - 2 + \tfrac{1}{10^7} = 9999998.0000001, \end{aligned}$$

also $\mathit{NapLog}\,(9999998.0000001) = 2$;

$$\begin{aligned} g_3 &= g_2 \cdot \left(1 - \tfrac{1}{10^7}\right) = \left(10^7 - 2 + \tfrac{1}{10^7}\right) - \left(10^7 - 2 + \tfrac{1}{10^7}\right) \cdot \tfrac{1}{10^7} \\ &= 10^7 - 2 + \tfrac{1}{10^7} - 1 + 2 \cdot \tfrac{1}{10^7} - \tfrac{1}{10^{14}} \approx 10^7 - 3 + 3 \cdot \tfrac{1}{10^7} = 9999997.0000003; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_4 &= g_3 \cdot \left(1 - \tfrac{1}{10^7}\right) \approx \left(10^7 - 3 + 3 \cdot \tfrac{1}{10^7}\right) - \left(10^7 - 3 + 3 \cdot \tfrac{1}{10^7}\right) \cdot \tfrac{1}{10^7} \\ &= 10^7 - 3 + 3 \cdot \tfrac{1}{10^7} - 1 + 3 \cdot \tfrac{1}{10^7} - 3 \cdot \tfrac{1}{10^{14}} \approx 10^7 - 4 + 6 \cdot \tfrac{1}{10^7} = 9999996.0000006; \end{aligned}$$

usw.

Für das 100. Glied der Folge ergibt sich $g_{100} \approx 9999900.0004950$, d. h. $g_{100} \approx 10^7 \cdot \left(1 - \frac{1}{10^5}\right)$.

Hinweis Die letzten Ziffern der Dezimalzahl berechnen sich jeweils als Glieder der Folge der Dreieckszahlen (vgl. Kap. 1): $1 + 2 + 3 + \ldots + 99 = 4950$.

Es kann hier nicht im Einzelnen darauf eingegangen werden, wie Napier die weiteren Tabellenwerte bestimmt hat. Aus g_{100} leitete er beispielsweise den Wert von g_{200} ab:

$$g_{200} = 10^7 \cdot \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{200} = 10^7 \cdot \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{100} \cdot \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{100}$$
$$\approx g_{100} \cdot \left(1 - \frac{1}{10^5}\right) \approx 9999900 - 99.999 \approx 9999800,$$

und hieraus dann weiter

$g_{300} = 10^7 \cdot \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{300} \approx g_{200} \cdot (1 - \frac{1}{10^5})$ bis hin zu

$g_{5000} \approx 9995000 \approx 10^7 \cdot \left(1 - \frac{5}{10^4}\right)$

Dann folgt eine lange dritte Tabelle, die mit

$g_{10000} \approx g_{5000} \cdot \left(1 - \frac{5}{10^4}\right) \approx 9990000$ beginnt.

In seiner Tabelle für die Sinuswerte findet man beispielsweise:

- $NapLog\,(10^7) = NapLog\,(10^7 \cdot \sin(90°)) = 0$,
- $NapLog\,(10^7 \cdot \sin(60°)) = NapLog\,(8660254) = 1438410$,
- $NapLog\,(10^7 \cdot \sin(30°)) = NapLog\,(5000000) = 6931469$,

denn $10^7 \cdot \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{6931469} \approx 5000000$ und $10^7 \cdot \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{1438410} \approx 8660254$.

9.1.3 Rechnen mit Napiers Logarithmen

Dass die Napier'schen Logarithmen streng monoton fallend sind, mag irritieren. Das Rechnen mit ihnen erscheint aus heutiger Sicht vielleicht sogar umständlich, aber es hatte deutliche Vorteile gegenüber der Methode der *Prosthaphaeresis* (vgl. Abschn. 9.4.1).

Will man die *Division zweier Zahlen a* und *b* durchführen, dann muss man wie folgt überlegen:

Der Quotient $x = \frac{a}{b}$ muss zunächst als Verhältnisgleichung aufgefasst werden, also

$$a : b = x : 1$$

Die zugehörigen Glieder der Napier'schen geometrischen Folge sind dann

$$a = 10^7 \cdot \left(1 - \tfrac{1}{10^7}\right)^A,\ b = 10^7 \cdot \left(1 - \tfrac{1}{10^7}\right)^B,\ x = 10^7 \cdot \left(1 - \tfrac{1}{10^7}\right)^X,\ 1 = 10^7 \cdot \left(1 - \tfrac{1}{10^7}\right)^E,$$

und für diese gilt dann

$\frac{a}{b} = 10^7 \cdot \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{A-B}$ und $\frac{x}{1} = 10^7 \cdot \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{X-E}$ mit $A - B = X - E$,

also $X = A - B + E$, d. h., es gilt:

$$NapLog\ (\tfrac{a}{b}) = NapLog\ (a) - NapLog\ (b) + NapLog\ (1)$$

Entsprechend muss die Gleichung für ein *Produkt zweier Zahlen* $y = a \cdot b$ umgestellt werden:

Aus der Verhältnisgleichung $y : b = a : 1$ ergibt sich:

$$NapLog\ (a \cdot b) = NapLog\ (a) + NapLog\ (b) - NapLog\ (1)$$

Wendet man dieses Prinzip für eine Zahl a mehrfach an, dann ergibt sich:

$$NapLog\ (a^2) = 2 \cdot NapLog\ (a) - NapLog\ (1)$$

$$\begin{aligned} NapLog\ (a^3) = NapLog\ (a^2 \cdot a) &= NapLog\ (a^2) + NapLog\ (a) - NapLog\ (1) \\ &= (2 \cdot NapLog\ (a) - NapLog\ (1)) + NapLog\ (a) - NapLog\ (1) \\ &= 3 \cdot NapLog\ (a) - 2 \cdot NapLog\ (1) \end{aligned}$$

usw.,

allgemein also $NapLog\ (a^n) = n \cdot NapLog\ (a) - (n - 1) \cdot NapLog\ (1)$.

Hieraus lässt sich auch eine Regel für die Berechnung einer Quadratwurzel (und sogar einer beliebigen Wurzel) gewinnen:

$$NapLog\ (a) = NapLog\ \left(\left(\sqrt{a}\right)^2\right) = 2 \cdot NapLog\ \left(\sqrt{a}\right) - NapLog\ (1),\ \text{also}$$

$NapLog\ \left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2} \cdot [NapLog\ (a) + NapLog\ (1)]$, und weiter

$$NapLog\ (a) = NapLog\ \left(\left(\sqrt[3]{a}\right)^3\right) = 3 \cdot NapLog\ \left(\sqrt[3]{a}\right) - 2 \cdot NapLog\ (1),\ \text{also}$$

$$NapLog\ \left(\sqrt[3]{a}\right) = \tfrac{1}{3} \cdot NapLog\ \left(\left(\sqrt[3]{a}\right)^3\right) + \tfrac{2}{3} \cdot NapLog\ (1).$$

Logarithmengesetze

Regeln zum Rechnen mit den Napier'schen Verhältniszahlen

$$NapLog\ (a \cdot b) = NapLog\ (a) + NapLog\ (b) - NapLog\ (1)$$

$$NapLog\ (\tfrac{a}{b}) = NapLog\ (a) - NapLog\ (b) + NapLog\ (1)$$

$$NapLog\ (a^n) = n \cdot NapLog\ (a) - (n - 1) \cdot NapLog\ (1)$$

$$NapLog\ \left(\sqrt[n]{a}\right) = \tfrac{1}{n} \cdot NapLog\ (a) + \tfrac{n-1}{n} \cdot NapLog\ (1)$$

Mit der Erstellung der Tafeln und der Herleitung der Rechenregeln war ein erster genialer Schritt hin zur Logarithmenrechnung vollzogen. Dass man allerdings stets den Tabellenwert *NapLog* (1) berücksichtigen musste, war ein Schönheitsfehler …

9.1.4 Die dekadischen Logarithmen des Henry Briggs

Als der Londoner Mathematik-Professor **Henry Briggs** (1561–1630) die „wunderbaren Tafeln" Napiers in die Hände bekam, erkannte er sofort die gewaltigen Rechenvorteile, die hierdurch ermöglicht wurden.

1615 nahm er die mühevolle viertägige Reise mit Kutsche und Pferd nach Schottland auf sich, um Napier Vorschläge zur Verbesserung zu unterbreiten. Wie man in der posthum veröffentlichten Schrift *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio* nachlesen kann, hatte Napier bereits selbst überlegt, dass Rechnungen einfacher würden, wenn man $\log(1) = 0$ definiert.

Ein Monat lang berieten die beiden gemeinsam, wie eine veränderte Logarithmentafel aussehen könnte; beide stimmten sehr schnell darin überein, dass eine Logarithmentafel zur Basis 10 größere Vorteile bieten würde.

Briggs kehrte nach London zurück und führte erste umfangreiche Rechnungen durch, zu denen Napier aus gesundheitlichen Gründen nicht mehr in der Lage war. Im darauffolgenden Jahr reiste Briggs noch einmal nach Schottland; in der Zwischenzeit hatte er eine Tafel mit den Logarithmen der Zahlen von 1 bis 1000 berechnet *(Logarithmorum chilias prima)*. Ein dritter Besuch in Schottland war vereinbart, aber Napier starb, bevor es dazu kam.

Während der folgenden Jahre war Briggs damit beschäftigt, eine Tafel mit 14-stelligen Logarithmen natürlicher Zahlen zu erstellen. Auch wenn er die Arbeit an der Tafel selbst nicht mehr vollenden konnte (von geplanten 100.000 Logarithmen hatte er 30.000 berechnet), werden die dekadischen Logarithmen zu Recht auch heute noch als **Briggs'sche Logarithmen** bezeichnet.

Briggs hätte die Berechnung von so vielen Logarithmen in den vergleichsweise wenigen Jahren bis zu seinem Tod gar nicht durchführen können, wenn er hierfür nicht drei bemerkenswerte Entdeckungen gemacht hätte, auf die wir im Folgenden eingehen werden.

Zunächst einmal berechnete er handschriftlich auf 30 Stellen genau die Quadratwurzel aus 10, zog dann aus dieser Dezimalzahl wiederum die Quadratwurzel usw. und wiederholte dies sehr oft (über 50-mal):

$$10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} = 3{,}16227766016\ \ldots,\ \text{d. h. } \log_{10}\left(\sqrt{10}\right) = \tfrac{1}{2};$$
$$10^{\frac{1}{4}} = \sqrt{\sqrt{10}} = 1{,}7782794100\ \ldots,\ \text{d. h. } \log_{10}\left(\sqrt{\sqrt{10}}\right) = \tfrac{1}{4};$$
$$10^{\frac{1}{8}} = 1{,}3335214321\ \ldots;\ 10^{\frac{1}{16}} = 1{,}1547819846\ \ldots;\ 10^{\frac{1}{32}} = 1{,}0746078283\ \ldots;$$
usw.

Briggs' *erste Entdeckung* kann man der folgenden Tabelle entnehmen:

Je höher der Wurzelexponent (1. Spalte) ist, umso stärker nähert sich der Wurzelterm der Zahl 1 (3. Spalte). Außerdem stellte Briggs fest, dass sich die um 1 verminderte Dezimalzahl (4. Spalte) von Schritt zu Schritt (also bei jeweiliger Verdopplung des Wurzelexponenten) ungefähr halbiert, d. h., dass sich der Quotient $\frac{10^{1/n}-1}{1/n}$ immer mehr einer Konstanten nähert (vgl. 5. Spalte).

n	$1/n$	$10^{1/n}$	$10^{1/n}-1$	$\frac{10^{1/n}-1}{1/n}$	Briggs
1	1	10	9		
2	0,5	3,1622776602	2,1622776602	4,324555	0,231238
4	0,25	1,7782794100	0,7782794100	3,113118	0,321221
8	0,125	1,3335214322	0,3335214322	2,668171	0,374789
16	0,0625	1,1547819847	0,1547819847	2,476512	0,403794
32	0,03125	1,0746078283	0,0746078283	2,387451	0,418857
64	0,015625	1,0366329284	0,0366329284	2,344507	0,426529
128	0,0078125	1,0181517217	0,0181517217	2,323420	0,430400
256	0,00390625	1,0090350448	0,0090350448	2,312971	0,432344
512	0,00195313	1,0045073643	0,0045073643	2,307770	0,433319
1024	0,00097656	1,0022511483	0,0022511483	2,305176	0,433806
2048	0,00048828	1,0011249414	0,0011249414	2,303880	0,434050
4096	0,00024414	1,0005623126	0,0005623126	2,303232	0,434172

Hinweis Wir wissen heute, dass diese Konstante gerade gleich $\ln(10) = 2{,}302\ldots$ ist, denn bei dem Grenzwert des betrachteten Quotienten handelt sich um einen Differenzialquotienten der Funktion f mit $f(x) = 10^x$ an der Stelle $x = 0$. Briggs konnte dies einige Jahrzehnte vor „Erfindung" der Differenzialrechnung natürlich noch nicht ahnen. Wir haben dies aber hier so notiert, um den Zusammenhang mit der Ableitung zu verdeutlichen.

Briggs selbst betrachtete nicht den Differenzenquotienten, sondern den Kehrwert davon, und der Grenzwert dieser Folge der reziproken Differenzenquotienten ist die sog. **Briggs'sche Konstante** $K = 0{,}4342944819\ \ldots$ (vgl. 6. Spalte der Tabelle).

Um Briggs' *zweite Entdeckung* nachzuvollziehen, betrachten wir ein Beispiel.

Aus der Tabelle kann man ablesen:

$$\frac{1}{4096} = \log_{10}\left(10^{\frac{1}{4096}}\right) \approx K \cdot \left(10^{\frac{1}{4096}} - 1\right)$$

Bezeichnet man die sehr kleine Zahl $10^{\frac{1}{4096}} - 1$ mit x, dann ist $10^{\frac{1}{4096}} = 1 + x$ und $\log_{10}(1 + x) = \log_{10}(10^{\frac{1}{4096}}) = \frac{1}{4096}$, zusammengefasst also $\log_{10}(1 + x) \approx K \cdot x$.

Diese Beziehung kann man nun nutzen, um Logarithmen von beliebigen natürlichen Zahlen zu berechnen. Dazu muss man wiederholt die Wurzel aus der betreffenden Zahl ziehen, bis sich das Ergebnis des Wurzelziehens nur wenig von der Zahl 1 unterscheidet, und dann die Briggs'sche Gleichung anwenden.

Beispiel: Bestimmung von $\log_{10}(2)$, $\log_{10}(3)$, $\log_{10}(5)$

Aus der folgenden Tabelle kann man entnehmen, dass die 4096ste Wurzel aus 2 ungefähr gleich 1,000169240 ist, also $x = 2^{\frac{1}{4096}} - 1 \approx 0{,}000169240$. Dann folgt, dass

$$\log_{10}(2^{\frac{1}{4096}}) = \log_{10}(1+x) \approx K \cdot x \approx 0{,}434294 \cdot 0{,}000169240.$$

Wegen $\log_{10}(2^{\frac{1}{4096}}) = \frac{1}{4096} \cdot \log(2)$ folgt daher:

$$\log_{10}(2) \approx 0{,}434294 \cdot 0{,}000162409 \cdot 4096 \approx 0{,}3010$$

Analog ergibt sich:

$$\log_{10}(3^{\frac{1}{4096}}) = \log_{10}(1+x) \approx K \cdot x \approx 0{,}434294 \cdot 0{,}000268252, \text{ also}$$
$$\log_{10}(3) \approx 0{,}434294 \cdot 0{,}000268252 \cdot 4096 \approx 0{,}4772.$$

Analog ergibt sich:

$$\log_{10}(5^{\frac{1}{4096}}) = \log_{10}(1+x) \approx K \cdot x \approx 0{,}434294 \cdot 0{,}000393006, \text{ also}$$
$$\log_{10}(5) \approx 0{,}434294 \cdot 0{,}000393006 \cdot 4096 \approx 0{,}6991.$$

a	$a^{1/4096}$	$x = a^{1/4096} - 1$	$\log_{10}(a)$
2	1,000169240	0,000169240	0,3010
3	1,000268252	0,000268252	0,4772
5	1,000393006	0,000393006	0,6991
7	1,000475189	0,000475189	0,8453
11	1,000585595	0,000585595	1,0417
13	1,000626404	0,000626404	1,1143
17	1,000691942	0,000691942	1,2309
19	1,000719116	0,000719116	1,2792

Briggs'sche Gleichung

Bestimmung von Logarithmen zur Basis 10

Für sehr kleine Zahlen x gilt:

$$\log_{10}(1+x) \approx K \cdot x,$$

wobei $K = 0{,}4342944819\ \ldots$ die Briggs'sche Konstante ist.

Die Beispiele zeigen die Briggs'sche Vorgehensweise, wobei wir uns auf die 4096ste Wurzel beschränkt haben, also den Vorgang des Wurzelziehens nur zwölfmal durchführten, während Briggs den Vorgang erheblich öfter wiederholte, um die angestrebte 14-stellige Genauigkeit der Logarithmen zu erreichen. (Die in der letzten Tabelle angegebenen Logarithmen sind teilweise bereits in der vierten Dezimalstelle ungenau).

Seine *dritte Entdeckung* machte Henry Briggs in diesem Zusammenhang beim fortgesetzten Wurzelziehen aus den natürlichen Zahlen. Um eine mögliche Gesetzmäßigkeit herauszufinden, bildete er fortlaufend Differenzen zwischen den berechneten Wurzeln. Dabei ergaben sich Regelmäßigkeiten in der Abfolge der Ziffern, auf die hier nicht näher eingegangen werden kann. Konkret bedeutete dies, dass er die Ziffernfolge der mehrfach gebildeten Wurzeln iterativ bestimmen konnte (zu dieser Methode der Differenzenrechnung vgl. Sonar, S. 306 ff.).

Anmerkung Diese drei Entdeckungen Briggs' prägten die weitere Entwicklung der mathematischen Rechentechniken sehr; es hätte daher einen guten Grund gegeben, dieses Kapitel eher Henry Briggs als John Napier zu widmen. Ein (schwaches) Argument spricht allerdings dagegen: Als strenggläubiger Puritaner lehnte es Briggs zeitlebens ab, dass von ihm ein Porträt erstellt würde, sodass wir nicht wissen, wie er ausgesehen hat. Und dann hätte am Anfang des Kapitels ein Bild gefehlt …

9.1.5 Anwendung der Logarithmengesetze

Bei der Bestimmung der Logarithmen natürlicher Zahlen konnte sich Briggs auf die Primzahlen beschränken, denn die Logarithmen von zusammengesetzten natürlichen Zahlen ergeben sich mithilfe der Logarithmengesetze aus deren Primfaktorzerlegung.

Beispiele

$$\log_{10}(6) = \log_{10}(2 \cdot 3) = \log_{10}(2) + \log_{10}(3) \approx 0{,}3010 + 0{,}4771 = 0{,}7781$$

$$\log_{10}(12) = \log_{10}(3 \cdot 2^2) = \log_{10}(3) + 2 \cdot \log_{10}(2) \approx 0{,}4771 + 2 \cdot 0{,}3010 = 1{,}0791$$

In den Beispielen wurden zwei der folgenden Gesetzmäßigkeiten angewandt:

Logarithmengesetze

Regeln zum Rechnen mit den Briggs'schen Logarithmen

$\log_{10}(a \cdot b) = \log_{10}(a) + \log_{10}(b)$ und $\log_{10}(\frac{a}{b}) = \log_{10}(a) - \log_{10}(b)$

$\log_{10}(a^n) = n \cdot \log_{10}(a)$ und $\log_{10}\left(\sqrt[n]{a}\right) = \frac{1}{n} \cdot \log_{10}(a)$

Bis in die 1970er Jahre hinein wurde an den weiterführenden Schulen gelehrt, wie die Briggs'schen Logarithmen und die Logarithmengesetze genutzt werden können, um Rechnungen durchzuführen.

Für jene Leser/innen, die diese Zeiten nicht erlebt haben, soll durch einige Beispiele verdeutlicht werden, was die Schüler/innen lernen mussten.

Die folgende Tabelle zeigt einen Ausschnitt aus einer Logarithmentafel mit 4-stelligen Logarithmen; dabei handelt es sich – genauer gesagt – um eine Tabelle mit 4-stelligen **Mantissen**, das sind die rechts vom Dezimalkomma stehenden Ziffern des Logarithmus.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133

Denn Logarithmen von Dezimalzahlen mit der gleichen Ziffernfolge unterscheiden sich nur in den sog. **Kennziffern;** diese ergeben sich aus den Exponenten der jeweiligen nächstkleineren 10er-Potenz.

Beispiele

Mit 4-stelliger Genauigkeit gilt: $\log_{10}(2) = 0{,}3010$. Hieraus folgt:

$$\log_{10}(20) = \log_{10}(10 \cdot 2) = \log_{10}(10) + \log_{10}(2) = 1 + 0{,}3010 = 1{,}3010$$

$$\log_{10}(200) = \log_{10}(10^2 \cdot 2) = 2 \cdot \log_{10}(10) + \log_{10}(2) = 2 + 0{,}3010 = 2{,}3010$$

$$\log_{10}(2000) = \log_{10}(10^3 \cdot 2) = 3 \cdot \log_{10}(10) + \log_{10}(2) = 3 + 0{,}3010 = 3{,}3010$$

usw.

$$\log_{10}(0,2) = \log_{10}(\tfrac{1}{10} \cdot 2) = \log_{10}(\tfrac{1}{10}) + \log_{10}(2) = -1 + 0{,}3010 = 0{,}3010 - 1$$

$$\log_{10}(0{,}02) = \log_{10}(\tfrac{1}{100} \cdot 2) = \log_{10}(\tfrac{1}{100}) + \log_{10}(2) = -2 + 0{,}3010 = 0{,}3010 - 2$$

usw.

Logarithmen von nicht im Tafelwerk enthaltenen Dezimalzahlen werden durch lineare **Interpolation** bestimmt.

Beispiel

Aus $\log_{10}(21{,}4) = 1{,}3304$ und $\log_{10}(21{,}5) = 1{,}3324$ ergibt sich

$\log_{10}(21{,}43) \approx 1{,}3310$, denn $\frac{3}{10}$ der Mantissendifferenz $3324 - 3304 = 20$ ergibt 6, die zur Mantisse 3304 addiert werden muss.

Um konkrete Rechnungen durchzuführen, muss man nicht nur die Logarithmenregeln kennen, sondern auch wissen, wie zu gegebenen Zahlen jeweils Kennziffern und Mantissen (ggf. nach Interpolation) bestimmt werden und umgekehrt.

Beispiel

Um $\sqrt{\frac{2{,}34^3}{217}}$ zu berechnen, muss man

- die Mantissen von 2,34 und von 217 im Tafelwerk ablesen und jeweils die Kennziffer bestimmen,
- den Logarithmus von $2{,}34^3$ berechnen (Potenzieren von Zahlen: Multiplikation von $\log_{10}(2{,}34)$ mit 3),
- die Schreibweise der Kennziffer anpassen, damit die anschließende Subtraktion der Logarithmen möglich ist,
- den Logarithmus von $\frac{2{,}34^3}{217}$ berechnen (Division von Zahlen: Subtraktion $\log_{10}(2{,}34^3) - \log_{10}(217)$),
- den Logarithmus von $\sqrt{\frac{2{,}34^3}{217}}$ bestimmen (Wurzelziehen aus einer Zahl: Division des betreffenden Logarithmus durch 2),
- den zugehörigen Numerus ablesen oder durch Interpolation ermitteln: Im Tafelwerk findet man zur Zahl 242 die Mantisse 3838, zur Zahl 243 die Mantisse 3856; die Differenz der Mantissen beträgt 18. Die Mantisse 3855.5 ist $\frac{1}{36} \approx 0{,}03$ von der Zahl 243 entfernt; daher ergibt sich interpoliert die Ziffernfolge 24297, und aus der Kennziffer –1 entsprechend das Endergebnis 0,24297.

Numerus	Logarithmus	
2,34 ⇨	0,3692	· 3
$2{,}34^3$	1,1076	
	3,1076 –2	
217 ⇨	2,3365	–
$\frac{2{,}34^3}{217}$	0,7711 –2	: 2
0,24297 ⇦	0,38555 –1	

9.2 Wer war John Napier?

Der aus einer vermögenden und einflussreichen schottischen Adelsfamilie stammende Archibald Napier wurde von seinen Eltern im Alter von 15 Jahren mit Janet Bothwell, der Schwester des Bischofs von Orkney, verheiratet. Ein Jahr danach, im Jahr 1550, wurde ihr erster Sohn John geboren.

Die Schreibweise des Familiennamens, wie sie heute üblich ist, findet man übrigens nicht in den Dokumenten des 16. und 17. Jahrhundert; vielmehr wird sehr häufig die Schreibweise Neper verwendet, aber auch Napeir, Naipper u. a. m.

Mit 13 Jahren wurde John Napier an eine Schule geschickt, die der *St. Andrews University* angeschlossen war. Der Rektor kümmerte sich persönlich um den Jungen, insbesondere als dessen Mutter starb. Es ist nicht bekannt, wann John die Schule verließ, um seine Studien auf dem Kontinent fortzusetzen (Frankreich, Niederlande, evtl. auch Italien). Erst 1571 kehrte er wieder nach Schottland zurück und heiratete. Mit der ersten Ehefrau hatte er zwei, mit der zweiten zehn Kinder.

Er beschäftigte sich intensiv mit der Bewirtschaftung seiner Ländereien, entwickelte Methoden zur Verbesserung des Ertrags der Felder durch Salzdüngungen und vertiefte sich auch intensiv in Fragen theologischen Inhalts.

Fanatisch vertrat er die Seite des Protestantismus und verfasste im Jahr 1593 die Schrift *Plaine Discovery of the Whole Revelation of St. John* („Enthüllungen über die Offenbarung des Heiligen Johannes“), in der er nachzuweisen versuchte, dass der Papst in Rom der eigentliche Antichrist sei. Auch „berechnete“ er den Zeitpunkt des Jüngsten Tages („zwischen 1688 und 1700“). Das Buch fand übrigens große Verbreitung, auch in Übersetzungen für die Niederlande, Frankreich und Deutschland (insgesamt 21 Auflagen); Napier hielt es für seine bedeutendste Lebensleistung.

Um der drohenden Invasion durch die spanische Armada in Schottland vorzubeugen, entwarf er neuartige Waffensysteme wie z. B. gepanzerte Fahrzeuge und untersuchte, wie sich die Idee des Archimedes realisieren lässt, Segelschiffe mithilfe von Brennspiegeln in Brand zu setzen. Auch nach dem Untergang der Armada (1588) bestand die Gefahr einer Invasion, da schottische Adlige, darunter auch sein eigener Schwiegervater, weiterhin ein gegen England gerichtetes Bündnis mit Spanien suchten.

Die Astrologie spielte eine große Rolle im Leben Napiers. Sein Interesse, die hierfür notwendigen astronomischen Berechnungen durchführen zu können, führte letztlich dazu, dass er sich bis zu seinem Lebensende darüber Gedanken machte, wie diese mit möglichst geringem Aufwand erfolgen können.

Napier starb am 4. April 1617 in Edinburgh.

9.3 Mit welchen (mathematischen) Themen beschäftigte sich Napier außerdem?

Man kann davon ausgehen, dass Napier im Rahmen seiner Reisen auch die Gelosia-Rechenmethode kennenlernte, die im Mittelmeerraum und den Ländern des islamischen Kulturkreises verbreitet war (vergleiche hierzu auch Abschn. 7.3). Die Bezeichnung der Methode (aus dem Französischen *la multiplication par jalousies*) ist vermutlich entstanden, weil die schräge Anordnung daran erinnert, wie Sonnenstrahlen durch die Lamellen einer Jalousie einfallen. Die Methode wird auch als Gitter-Multiplikation bezeichnet (englisch: *lattice multiplication*).

Bei der Gelosia-Methode zeichnet man nämlich ein Quadratgitter, dessen einzelne Zellen durch eine Diagonale unterteilt sind. Die beiden zu multiplizierenden Zahlen werden *über* bzw. *rechts neben* der Tabelle eingetragen. Die Multiplikation erfolgt *ziffernweise,* vergleichbar dem heute in Asien üblichen Verfahren. Dabei werden die Ergebnisse der Multiplikation der einzelnen Ziffern in den zugehörigen Zellen notiert, und zwar links oben die Zehnerziffer und rechts unten die Einerziffer des Produkts.

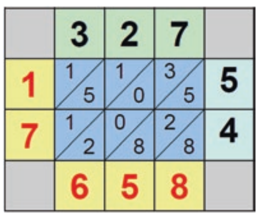
Anschließend werden dann von rechts unten nach links oben Summen längs der Diagonalen gebildet, ggf. unter Berücksichtigung eines Übertrags. Diese Summen werden in den Feldern unterhalb bzw. links der Tabelle eingetragen.

Beispiel für die Gelosia-Methode

Bei der Multiplikation der beiden natürlichen Zahlen 327 (obere Zeile des Gitters) und 54 (rechte Spalte des Gitters) werden also die Ergebnisse der $2 \cdot 3 = 6$ Einzelprodukte in die inneren Felder eingetragen.

Das Gesamtergebnis 17.658 ergibt sich aus den Summen der schrägen Spalten und wird in der unteren Zeile und der linken Spalte eingetragen (hier in Rot).

Ziffern von rechts unten nach links oben: $(8) = 8$; $(5 + 2 + 8) = 5$ mit Übertrag 1; $(3 + 0 + 0 + 2) +$ Übertrag $1 = 6$; $(1 + 5 + 1) = 7$; $(1) = 1$.



9.3.1 Die Napier'schen Rechenstäbe

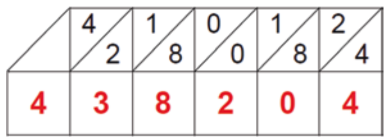
Die Gelosia-Methode brachte John Napier auf die Idee zu einem einfachen Rechenhilfsmittel: die Napier'schen Rechenstäbe.

Um diese Rechenstäbe bekannt zu machen, verfasste Napier die Schrift *Rabdologiae* (griech. *rhabdos* = Stäbchen), die aber erst nach seinem Tod erschien. Sie werden auch oft als *Napier's bones* bezeichnet, da es sich früher häufig um Elfenbeinstäbe handelte. Napiers Werk enthält außer der Erläuterung seiner Rechenstäbe noch weitere Anleitungen, wie man sich die Rechenarbeit erleichtern kann.

Die Napier'schen Stäbe enthalten in diagonal unterteilten quadratischen Feldern die Vielfachen der Zahlen von 0 bis 9, also das *kleine Einmaleins,* wobei – wie bei der Gelosia-Methode – die Einerziffer jeweils rechts unten und die Zehnerziffer links oben eingetragen ist, vgl. Abb. oben.

Beispiel: Multiplikation einer 5-stelligen Zahl mit einer 1-stelligen Zahl mithilfe der Napier'schen Rechenstäbe
Um die Multiplikation der Zahlen 73.034 und 6 auszuführen, legt man die Stäbe mit den Vielfachen von 7, 3, 0, 3 und 4 nebeneinander (den Stab mit den Vielfachen von 3 hier also doppelt), vgl. Abb. 9.1.

Dann kann man in der 6er-Zeile jeweils das 6-Fache der oben auf den Stäben stehenden Zahlen ablesen und damit dann die (Diagonal-)Summen bestimmen: Das Ergebnis 438.204 ergibt sich wieder ziffernweise von rechts nach links: $(4) = 4$; $(2 + 8) = 0$ mit Übertrag 1; $(1 + 0)+$ Übertrag $1 = 2$; $(0 + 8) = 8$; $(1 + 2) = 3$; $(4) = 4$, vgl. folgende Abbildung.



Für die Multiplikation mehrstelliger natürlicher Zahlen kann man die Ergebnisse der Multiplikation der einzelnen Ziffern des zweiten Faktors von den Napier-Stäben ablesen, diese in einem Gelosia-Schema notieren und dann die Summe bilden.

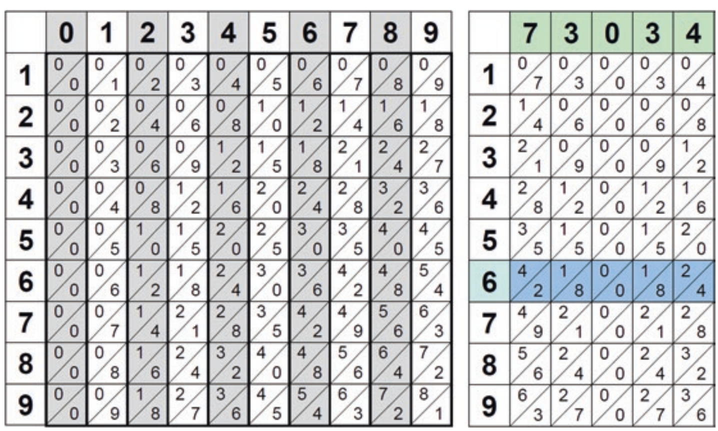
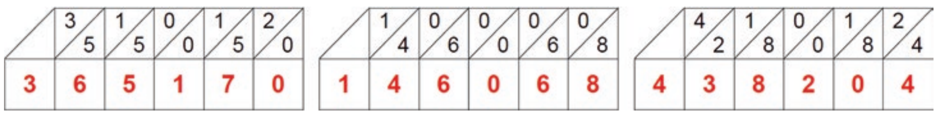
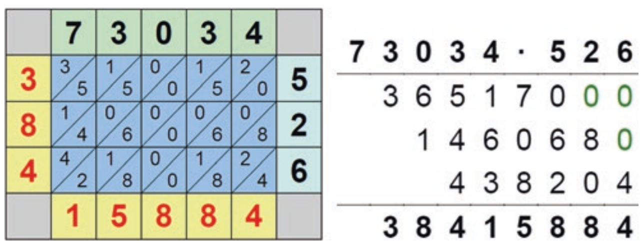


Abb. 9.1 Das kleine Einmaleins auf den Napier'schen Rechenstäben sowie ein Rechenbeispiel

Beispiel: Multiplikation zweier mehrstelligen Zahlen mithilfe der Napier'schen Rechenstäbe
Um das Produkt der Zahlen 73.034 und 526 zu bestimmen, betrachtet man einzeln die Produkte 73034·5, 73034·2 und 73034·6, liest die Ergebnisse an den Napier'schen Stäben ab und überträgt die drei Zwischenergebnisse *ohne Rechnung* in das Gelosia-Schema, vgl. untere Abb. links. Oder man rechnet die Zwischenergebnisse aus und trägt sie in das übliche Multiplikationsschema ein, vgl. untere Abb. rechts.





Napier empfand es wohl als umständlich, dass man zwar bei der Multiplikation mehrstelliger Zahlen einzelne Zwischenergebnisse schnell mithilfe seiner Rechenstäbe bestimmen kann, diese aber vor der endgültigen Ermittlung des Ergebnisses notieren muss. Daher entwickelte er seine Rechenstäbe auf äußerst raffinierte Weise weiter.

Sein **Promptuarium** (wörtliche Übersetzung: Speicher) besteht zum einen aus den erweiterten Rechenstäben (in Form von Rechenstreifen) und zum anderen aus den Rechenmasken, bei denen einzelne Felder ausgeschnitten sind (vergleichbar den Lochkarten). Einzelheiten zu Napiers Promptuarium findet man u. a. in *Mathematik ist wunderwunderschön,* Abschn. 2.8.

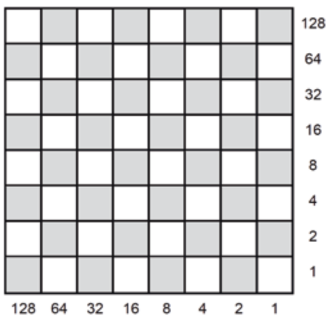
Hinweis **Wilhelm Schickard** (1592–1635) verwendete die Napier'schen Rechenstäbe in Form von zylinderförmigen Walzen und baute so im Jahr 1623 seine erste mechanische Rechenmaschine.

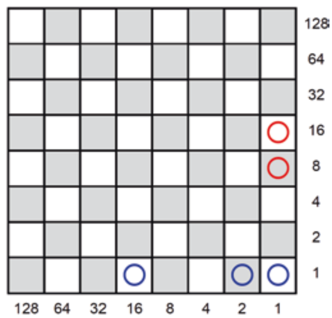
9.3.2 Der Napier'sche Schachbrett-Rechner

Einen völlig anderen Ansatz wählte Napier bei der Entwicklung seines Schachbrett-Rechners. Dieser geniale Ansatz nutzt die eindeutige Darstellbarkeit von Zahlen im Dualsystem. Als Hilfsmittel verwendet man ein einfaches Schachbrett, an dessen Rändern (rechts und unten) die Zweierpotenzen von $1 = 2^0$ bis $128 = 2^7$ vermerkt sind, vgl. folgende Abbildung links.

Für die Multiplikation größerer Zahlen wird ein Brett mit einer entsprechend größeren Anzahl von Feldern benötigt.

In der Abbildung rechts ist in der unteren Reihe des Schachbretts durch die blauen Chips die Zahl 19 dargestellt, in der rechten Spalte mit den roten Chips die Zahl 24.

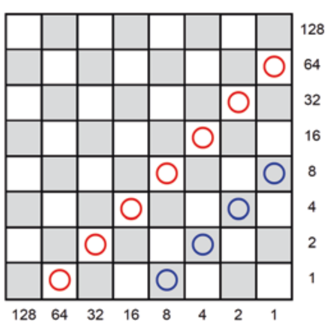


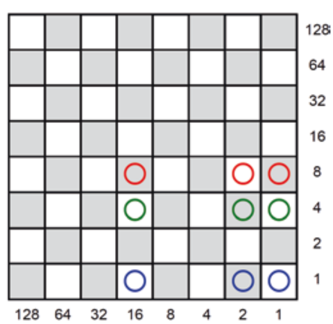


Die *blauen* Chips in der folgenden Abbildung links liegen in Feldern, die in einer diagonal verlaufenden Linie liegen. Sie stellen alle die Zahl 8 dar – die vier Chips repräsentieren die vier Multiplikationsaufgaben, deren Ergebnis 8 ist: $1 \cdot 8 = 2 \cdot 4 = 4 \cdot 2 = 8 \cdot 1$

Die sieben *roten* Chips repräsentieren analog die sieben Multiplikationsaufgaben, deren Ergebnis 64 ist: $1 \cdot 64 = 2 \cdot 32 = 4 \cdot 16 = 8 \cdot 8 = 16 \cdot 4 = 32 \cdot 2 = 64 \cdot 1$

In der rechts stehenden Abbildung ist die Multiplikationsaufgabe $13 \cdot 19$ dargestellt:
untere Reihe (blaue Chips): $1 \cdot 19 = 1 \cdot (1 + 2 + 16)$
mittlere Reihe (grüne Chips): $4 \cdot 19 = 4 \cdot (1 + 2 + 16)$
obere Reihe (rote Chips): $8 \cdot 19 = 8 \cdot (1 + 2 + 16)$



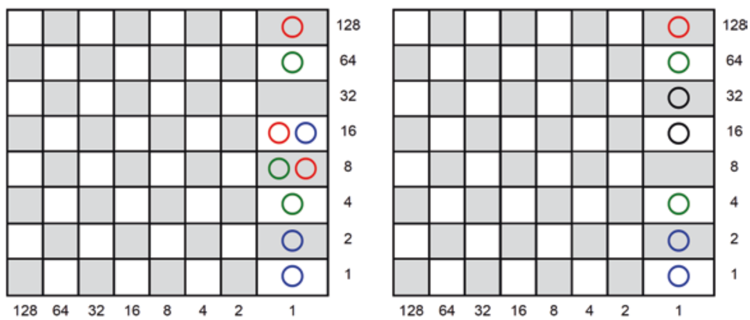


Da alle in einer diagonalen Linie liegenden Chips stets denselben Wert darstellen, wird die Multiplikationsaufgabe dadurch gelöst, dass alle Chips diagonal nach rechts oben verschoben werden, bis sie in den Feldern der rechten Spalte liegen. So ergibt sich das Bild in der folgenden Abbildung links.

Da es in der Dualdarstellung einer Zahl nur die Ziffern 0 und 1 gibt, müssen ggf. die doppelt vorhandenen Chips noch umgewandelt werden, vgl. Abb. rechts.

Hier lässt sich schließlich das Ergebnis der Multiplikation ablesen:

$$13 \cdot 19 = 1 + 2 + 4 + 16 + 32 + 64 + 128 = 247$$



9.3.3 Die Napier'schen Regeln

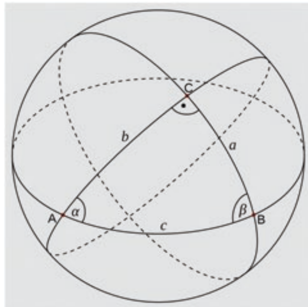
Schließlich sind noch Napiers Verdienste in der **Sphärischen Trigonometrie** zu erwähnen; er erkannte als Erster gemeinsame Bildungsprinzipien für Rechenregeln. Eine der Satzgruppen für rechtwinklige Kugeldreiecke wird daher heute noch als *Neper'sche Regeln* bezeichnet, bestimmte Sätze über die Summe bzw. Differenz von Seiten und Winkeln im *allgemeinen* Kugeldreieck als *Neper'sche Analogien.*

Regeln

Neper'sche Regeln für rechtwinklige Kugeldreiecke

Im rechtwinkligen Kugeldreieck ist der Kosinus jedes Stücks gleich dem Produkt der Kotangens der anliegenden Stücke und auch gleich dem Produkt der Sinus der nicht anliegenden Stücke (wobei mit den „Stücken" α, c, β, $90° - a$, $90° - b$ gemeint sind).

z. B. $\cos(c) = \cot(\alpha) \cdot \cot(\beta)$; $\cos(c) = \sin(90° - a) \cdot \sin(90° - b) = \cos(a) \cdot \cos(b)$



Wikipedia, en:Image:RechtwKugeldreieck.png, Traced by User:Stannered from a PNG by en:User:Rt66lt

9.4 Entwicklung besonderer Rechenmethoden um das Jahr 1600

Wie eingangs des Kapitels erwähnt, war um das Jahr 1600 die Zeit reif für neue Rechenmethoden. Die Methode der *Prosthaphaeresis* wurde sehr schnell durch das Rechnen mit Napiers Logarithmen abgelöst, die wiederum nach dem Erscheinen der dekadischen Logarithmen des Henry Briggs an Bedeutung verloren. Und Jost Bürgis *Progress Tabulen* wurden zu spät veröffentlicht und sind so eher nur von historischem Interesse.

9.4.1 Die Methode der Prosthaphaeresis

Der aus Nürnberg stammende Pfarrer, Mathematiker, Geograph und Astronom **Johannes Werner** (1468–1522) hatte um 1510 die Beziehung

$$2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

entdeckt. Noch heute werden diese und die analog gebildeten Gleichungen

$$2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta);$$

$$2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta);$$

$$2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta).$$

im englischsprachigen Bereich als *Werner formulas* bezeichnet.

Inwieweit Werner tatsächlich erkannt hat, dass man diese Gleichungen auch dazu verwenden kann, die Multiplikation zweier Zahlen durch eine Addition bzw. Subtraktion von Zahlen zu ersetzen, lässt sich nicht mehr klären. Gleichwohl wird Werner in den meisten Nachschlagewerken als Erfinder der Methode der *Prosthaphaeresis* (griech. *prosthesis* = Addition, *aphaeresis* = Subtraktion) genannt.

Die folgenden Fakten sind bekannt: Werner hatte zu Lebzeiten für sein vierbändiges Werk *Ioannis Verneri Norimbergensis de triangulis sphaericis,* in dem die o. a. Gleichungen enthalten waren, keinen Verleger mehr gefunden, aber verschiedene Abschriften des Manuskripts kamen in Umlauf. Teile wurden 1557 von Georg Joachim Rheticus, einem Schüler des Nikolaus Kopernikus, herausgegeben.

Um 1580 dann entwickelte der dänische Astronom **Tycho Brahe** zusammen mit seinem Mitarbeiter Paul Wittich das im Folgenden beschriebene Rechenverfahren der *Prosthaphaeresis.*

Das erste Buch, in dem das Verfahren erläutert wurde, erschien 1588 und stammte vom kaiserlichen Hofastronom Nicolaus Reimers. Dieser hatte Brahe 1584 in dessen Sternwarte in Dänemark besucht und vermutlich sofort die Bedeutung der Methode erkannt. Brahe war über die Veröffentlichung so erbost, dass er Reimers verklagte; die juristischen Auseinandersetzungen endeten erst mit Reimers' Tod.

Der Beweis der o. a. Gleichungen erfolgte schließlich durch Jost Bürgi (s. u.), mit dem Reimers zeitweise in der Sternwarte in Kassel zusammenarbeitete und für den er das Hauptwerk des Nikolaus Kopernikus ins Deutsche übersetzt hatte (da dieser das Lateinische nicht beherrschte).

Man kann es heute kaum noch nachempfinden, dass die Methode der *Prosthaphaeresis* eine Arbeitserleichterung für astronomische Berechnungen darstellte; der Zeitraum, in dem sie tatsächlich genutzt wurde, umfasste nur wenige Jahrzehnte. Auch Napier kannte das Verfahren, war aber nicht damit zufrieden, sodass er bemüht war, eine bessere Methode zu finden.

Um eine Multiplikationsaufgabe gemäß der Methode der *Prosthaphaeresis* zu lösen, dividiert man zunächst die beiden Faktoren durch geeignete Zehnerpotenzen, bestimmt dann mithilfe einer Sinustabelle jeweils den zugehörigen Winkel und schlägt den Kosinus des Differenz- bzw. Summenwinkels nach; schließlich wird die halbe Differenz der Kosinuswerte mit den oben gewählten Zehnerpotenzen multipliziert.

Die Genauigkeit des Ergebnisses hängt offensichtlich von der Qualität und von der Stellenzahl der trigonometrischen Tabellen ab. Im folgenden Beispiel ist das Ergebnis in allen Stellen genau.

Beispiel

Prosthaphaeresis-Multiplikation: $58 \cdot 237$ $\quad | :100 \quad | :1000$				
Ersatzaufgabe: $0{,}58 \cdot 0{,}237$	$\rightarrow$	$\sin(\alpha) = 0{,}58 \Leftrightarrow \alpha \approx 35°27'2''$ $\sin(\beta) = 0{,}237 \Leftrightarrow \beta \approx 13°42'34''$	$\rightarrow$	$\alpha - \beta \approx 21°44'28''$ $\alpha + \beta \approx 49°09'36''$ $\downarrow$
halbe Differenz: $0{,}13746$	$\leftarrow$	$\cos(21°44'28'') - \cos(49°09'36'')$ $= 0{,}27492$	$\leftarrow$	$\cos(21°44'28'') \approx 0{,}92887$ $\cos(49°09'36'') \approx 0{,}65395$
Lösung der Aufgabe: $0{,}13746 \cdot 100 \cdot 1000 = 13746$				

9.4.2 Jost Bürgis *Progress Tabulen*

Auch der geniale Schweizer Uhrmacher und Instrumentenbauer Jost Bürgi (1552–1632), der von 1579 an als Hofastronom des Landgrafen von Hessen in Kassel arbeitete, beschäftigte sich mit der Frage, wie man den Zeitaufwand für die in der Astronomie notwendigen umfangreichen Rechnungen reduzieren könnte.

Zeitlich gesehen gebührt eigentlich Bürgi und nicht Napier die Ehre, die Logarithmen erfunden zu haben, nämlich bereits im Jahr 1588.

Aber erst 1620, nachdem Napiers Schriften bereits starke Verbreitung gefunden hatten, ließ Bürgi auf Drängen Keplers seine *Arithmetischen und Geometrischen Progress Tabulen, sambt gründlichem unterricht, wie solche nützlich in allerley Rechnungen zu gebrauchen werden sol* in Prag drucken.

Einerseits scheute er sich wegen seiner fehlenden Lateinkenntnisse, seine Entdeckungen in Wissenschaftskreisen zu präsentieren, andererseits war er zögerlich wegen der negativen Erfahrungen damit, wie mit seinen mechanischen Erfindungen umgegangen wurde.

In seiner Schrift erläutert Bürgi zunächst die Zusammenhänge zwischen der arithmetischen Folge 0, 1, 2, 3, … (er erfindet keine eigene Bezeichnung hierfür, sondern nennt sie *rote Zahlen,* weil sie im Buch in Rot gedruckt sind) und der geometrischen Folge 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, … *(schwarze Zahlen).*

Da aber die Potenzen zur Basis $q = 2$ zu schnell wachsen, wählt er als Basis $q = 1{,}0001$, berechnet dann iterativ die Folgenglieder mit $a_{n+1} = 1{,}0001 \cdot a_n$. Als Startwert wählt er $a_0 = 10^8$, um – ähnlich wie Napier – Dezimalzahlen zu vermeiden.

Im Unterschied zu den später üblichen Tabellen ist Bürgis 58-seitiges Tafelwerk mit insgesamt 23.030 Einträgen eine *Antilogarithmen*-Tafel, d. h., am Rand stehen die Logarithmen und man muss im Innern die passenden *Numeri* suchen, die man für die Rechnung (Multiplizieren, Dividieren, Radizieren) verwenden möchte.

Von Bürgis Logarithmentafeln (mit ausführlichen Erläuterungen und 26 Beispielrechnungen) existiert heute nur noch ein einziges vollständiges Exemplar. Die Veröffentlichung kam zu spät (erst nachdem die Napier'schen Tafeln verbreitet waren), an einem ungünstigen Ort und zu einem unglücklichen Zeitpunkt: In Prag brach 1618 der Dreißigjährige Krieg aus, in dessen Wirren ein großer Teil der gerade erschienenen Auflage vernichtet wurde.

9.4.3 Verbreitung der Logarithmenrechnung

Der englische Mathematiker Edward Wright (1561–1615) sorgte für eine schnelle Verbreitung von Napiers *Descriptio* innerhalb Englands, da er diese Schrift unmittelbar nach dem Erscheinen aus dem Lateinischen ins Englische übersetzt hatte (*A description of the admirable table of logarithmes … Invented and published in Latin by … John Nepair …,* London 1616).

Johannes Kepler (1571–1630), der nach dem Tod Tycho Brahes im Jahr 1601 zum kaiserlichen Mathematiker ernannt worden war, plante die Herausgabe einer Schrift über Planetenrechnung *(Rudolphinische Tafeln),* in der auch Berechnungsmethoden enthalten sein sollten – und das war zu dieser Zeit die Methode der *Prosthaphaeresis.*

Nachdem er 1617 Napiers *Descriptio* kennengelernt hatte (1618 erschien eine deutsche Übersetzung), sah er sich gezwungen, diesen Teil seiner Schrift zu ändern, entwickelte dazu aber eine eigene Logarithmenrechnung, die Ähnlichkeiten mit der Napiers hatte.

Als Kepler dann 1624 ein Buch mit den Briggs'schen Logarithmen erreichte, versuchte er die zum Druck bereitliegenden *Rudolphinischen Tafeln* noch einmal zu ändern, aber es war zu spät. Erst die von seinem Schwiegersohn bearbeitete Fassung aus dem Jahr 1631 enthielt dann auch die dekadischen Logarithmen und verstärkte die Verbreitung dieser Rechenmethode.

Die ersten von Briggs berechneten Tabellen erschienen 1624 im holländischen Gouda unter dem Titel *Arithmetica logarithmica.* Die fehlenden Logarithmen berechnete der niederländische Rechenmeister Ezechiel de Decker (1603–1647); die vollständige Tafel mit 10-stelligen dekadischen Logarithmen wurde dann im Jahr 1627 durch den Verleger Adrian Vlacq (1600–1667) veröffentlicht, der auch weitere Kommentare ergänzte (denn de Decker beherrschte die Wissenschaftssprache Latein nur unzureichend). Weitere Tafelwerke, die auch die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen enthielten, folgten.

Aufgrund der rasanten Entwicklung der Differenzialrechnung veränderte sich aber bereits wenige Jahrzehnte danach die Berechnungsmethode für Logarithmen:

1668 veröffentlichte der aus Holstein stammende Mathematiker und Astronom Nikolaus Kauffman (latinisiert: **Nikolaus Mercator,** 1620–1687) eine Reihenentwicklung für natürliche Logarithmen (also zur Basis e):

$$\ln(1+x) = x - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3} - \tfrac{x^4}{4} + \ldots - \ldots$$

Beachtet man noch die entsprechende Beziehung

$\ln(1-x) = -x - \tfrac{x^2}{2} - \tfrac{x^3}{3} - \tfrac{x^4}{4} + \ldots - \ldots,$

dann ergibt sich eine schnell konvergierende Reihe:

$$\ln\left(\tfrac{1+x}{1-x}\right) = 2 \cdot \left(x + \tfrac{x^3}{3} + \tfrac{x^5}{5} + \ldots\right)$$

Um beispielsweise $\ln(2)$ zu berechnen, bestimmt man zunächst den zugehörigen Wert von x mit $\frac{1+x}{1-x} = 2$, d. h., es ist $x = \frac{1}{3}$ und rechnet dann

$\ln(2) = 2 \cdot \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3 \cdot 3^3} + \tfrac{1}{5 \cdot 3^5} + \tfrac{1}{7 \cdot 3^7} + \ldots\right).$

Mit den ersten zehn Summanden erhält man den Wert von $\ln(2)$ auf zehn Stellen genau. Um hieraus dann den 10er-Logarithmus von 2 zu erhalten, muss man nur durch $\ln(10)$ dividieren: $\log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

Bis in die 1970er Jahre war der Verkauf von Logarithmentafeln ein einträgliches Geschäft.

Der slowenische Mathematiker **Jurij Vega** (1754–1802) beispielsweise gab 1783 ein Tafelwerk mit 7-stelligen dekadischen Logarithmen heraus, das alle bis dahin vorliegenden Tafeln an Korrektheit übertraf. Aufgrund des großen Verkaufserfolgs folgte 1793 sein *Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch* – mit dem Untertitel *Anstatt der kleinen Vlackischen, Wolfischen und anderen dergleichen, meistens sehr fehlerhaften, logarithmisch-trigonometrischen Tafeln, für die Mathematikbeflissenen eingerichtet.*

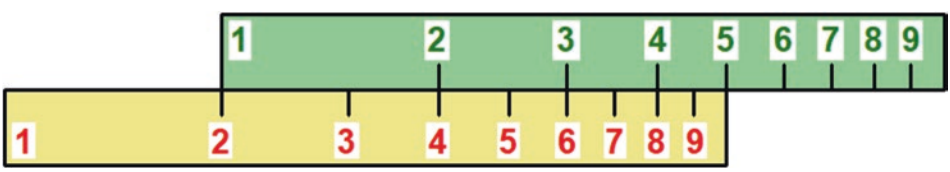
1794 folgte eine 10-stellige Tafel speziell für astronomische Rechnungen.

Vega wurde durch den Verkauf seiner Tafelwerke sehr reich, was ihn letztlich auch sein Leben kostete – er wurde Opfer eines Raubmords.

Die jugoslawisch-slowenischen Briefmarken erinnern an Jurij Vega; auf der Briefmarke rechts ist außer Vega selbst auch der Mondkrater zu sehen, der nach ihm benannt ist, darunter der Graph der natürlichen Logarithmusfunktion mit der Eintragung $\ln(2) \approx 0{,}6931472$.

Parallel zur Verbreitung der Rechenmethode mithilfe von Logarithmen gewann auch ein Hilfsmittel an Bedeutung, das auf den gleichen Prinzipien aufgebaut war: der Rechenschieber.

Der englische Pfarrer und Mathematiker William Oughtred (1574–1660), dem wir auch das Multiplikationszeichen „×“, das Divisionszeichen „/“, die Bezeichnung π für die Kreiszahl sowie die Kurzbezeichnungen *sin* und *cos* verdanken, entwickelte um 1622 einen ersten Rechenschieber *(slide rule),* der aus zwei logarithmischen Skalen bestand, die gegeneinander verschoben werden konnten. Er griff dabei eine Idee Edmund Gunters auf, einem Freund und Kollegen von Henry Briggs, der vorgeschlagen hatte, statt des Logarithmierens von Zahlen entsprechende Strecken auf einer logarithmischen Skala mithilfe eines Stechzirkels abzustecken und zu übertragen *(Gunter’s Scale).*



In der Abbildung ist das Prinzip eines Rechenschiebers dargestellt; dieser besteht aus zwei logarithmischen Skalen, d. h., der Abstand der Markierungen „1“ und „2“ entspricht der Größe $\log(2) - \log(1) = \log(2)$, der Abstand der Markierungen „2“ und „3“ entspricht $\log(3) - \log(2)$ usw.

Bei der Multiplikation zweier Zahlen setzt man den linken Eckpunkt der „beweglichen“ oberen Skala (grün) auf den ersten Faktor (hier: 2) der unteren „festen“ Skala. Dann kann man unterhalb der zum zweiten Faktor gehörenden Markierung der oberen Skala auf der unteren Skala (gelb) beispielsweise ablesen, dass $2 \cdot 2 = 4,\ 2 \cdot 3 = 6,\ 2 \cdot 4 = 8,\ 2 \cdot 5 = 10$.

Umgekehrt stellt man bei einer Division die Skalen so ein, dass die Markierungen des Divisors unten und die des Dividenden oben übereinanderstehen. Also bedeutet beispielsweise unten 6 und oben 3, dass man unterhalb der 1 auf der oberen Skala das Ergebnis der Division ablesen kann, hier also $6{:}3 = 2$.

Im Unterschied zum Rechnen mit den Logarithmen sind durch die Skalen eines Rechenschiebers nur die Mantissen der betrachteten Zahlen erfasst, d. h., Rechenaufgaben wie beispielsweise $3{,}14 \cdot 7{,}27$ oder $314 \cdot 727$ oder $0{,}314 \cdot 0{,}00727$ erfolgen mit derselben Einstellung auf dem Rechenschieber; in einem zweiten Schritt muss dann durch eine Überschlagsrechnung geklärt werden, wo ggf. ein Dezimalkomma gesetzt werden muss.

Auch das Arbeiten mit dem Rechenschieber wurde bis Ende der 1970er Jahre in den Schulen unterrichtet, bis diese Rechenhilfsmittel von den Taschenrechnern „verdrängt“ wurden.

9.5 Literaturhinweise

Eine wichtige Adresse zum Auffinden von Informationen über Mathematiker und deren wissenschaftliche Leistungen ist die Homepage der St. Andrews University.

Informationen über John Napier findet man unter:

- www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Napier.html
- Strick, Heinz Klaus (2010): *Kalenderblatt über John Napier,* www.spektrum.de/wissen/john-napier-1550-1617/1047087

sowie weitere Kalenderblätter zu Kepler (2009), Stevin (2010), Vega (2011), Stifel (2012), Clavius (2014), Bürgi (2017), Werner (2019).

- Strick, Heinz Klaus (2019): *Mathematik ist wunderwunderschön,* Springer, Heidelberg, Kap. 2 (Multiplikation natürlicher Zahlen)

Ausführliche Darstellungen zu Napiers Logarithmen findet man in:

- Sonar, Thomas (2011): *3000 Jahre Analysis,* Springer, Heidelberg
- Weiss, Stephan (2013): Anmerkungen zur Idee der historischen Logarithmen, als Download: www.mechrech.info/publikat/IdeeLoga.pdf

- Clark, Kathleen M., Montelle, Clemency (2011): *Logarithms: The Early History of a Familiar Function* (u. a. John Napier Introduces Logarithms) www.maa.org/press/periodicals/convergence/logarithms-the-early-history-of-a-familiar-function

Umfangreiche Materialien sind auch in der Digital Tables Library (DTL) zu finden:

- The LORIA COLLECTION of MATHEMATICAL TABLES (LOCOMAT) locomat.loria.fr/locomat/reconstructed.html

Wikipedia-Artikel in deutscher, englischer und französischer Sprache zu den Stichwörtern:

- John Napier
- Logarithmus (Logarithm*, Logarithme)

*) ausgezeichnet als lesenswerter Artikel

René Descartes – Begründer der Analytischen Geometrie

10

Von allen, die bis jetzt nach Wahrheit forschten, haben nur die Mathematiker einige Beweise finden können, woraus folgt, dass ihr Gegenstand der allerleichteste gewesen sein müsse.

Der französische Mathematiker und Philosoph René Descartes gilt als einer der bedeutendsten Wissenschaftler des 17. Jahrhunderts. Mit seinem Werk *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la verité dans les sciences* („Abhandlung über die Methode, seine Vernunft gut zu gebrauchen und die Wahrheit in den Wissenschaften zu suchen“) leitete er eine neue Epoche der Philosophie und der Naturwissenschaften ein. Die Abhandlung umfasst auch drei Anhänge, durch die Descartes die Wirksamkeit seiner Methode unter Beweis stellen wollte.

Der dritte dieser Anhänge *(La Géométrie)* enthält u. a. eine bemerkenswerte Regel über die Anzahl der Nullstellen von Polynomen.

H. K. Strick, *Mathematik – einfach genial!*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-60449-6_10

10.1 Einfach genial: René Descartes entdeckt eine Vorzeichenregel für Polynome

Eines der ersten Themen im Mathematikunterricht der gymnasialen Oberstufe ist die Untersuchung der Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, also von Funktionen, die durch ein Polynom der Form

$$p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \cdots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1 + a_0$$

definiert sind – mit ganzzahligen Koeffizienten $a_n,\ a_{n-1},\ \cdots,\ a_2,\ a_1,\ a_0$.

Bei der Untersuchung der **Anzahl der Nullstellen** wird dann oft auf den sog. **Fundamentalsatz der Algebra** verwiesen, dessen Aussage in der Geschichte der Mathematik zum ersten Mal im Jahr 1629 durch den in den Niederlanden lebenden französischen Mathematiker **Albert Girard** (1595–1632) formuliert wurde:

- *Jede Gleichung n-ten Grades besitzt n Wurzeln* (= Lösungen).

Der erste vollständige Beweis des Fundamentalsatzes gelang Carl Friedrich Gauß 1799 im Rahmen seiner Dissertation.

Acht Jahre nach der Veröffentlichung Girards präzisierte René Descartes in seiner Schrift *La Géométrie* die Aussage bzgl. der Anzahl der Lösungen von Gleichungen der Form $p(x) = 0$. Bei seinen Untersuchungen war ihm nämlich ein bemerkenswerter Zusammenhang zwischen der Anzahl der Nullstellen und den Koeffizienten des Polynoms aufgefallen.

Satz

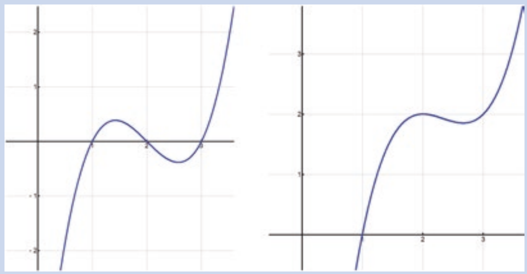
Die Vorzeichenregel von Descartes

- Die Anzahl der *positiven* Lösungen der Gleichung $p(x) = 0$ (mit nicht notwendig ganzzahligen Koeffizienten) eines Polynoms $p(x)$ ist genauso groß wie die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Folge der Koeffizienten oder um ein Vielfaches von 2 kleiner.
- Diese Regel kann auch zur Bestimmung der Maximalzahl der *negativen* Lösungen der Gleichung verwendet werden, indem man die positiven Lösungen der Gleichung $p(-x) = 0$ ermittelt.

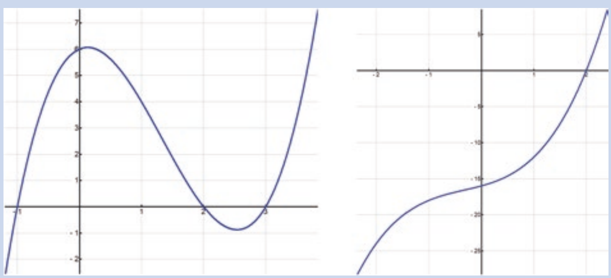
Beispiele

Die folgenden Abbildungen zeigen die Graphen von Funktionen mit unterschiedlichen Anzahlen von Nullstellen und Vorzeichen in der Folge der Koeffizienten:

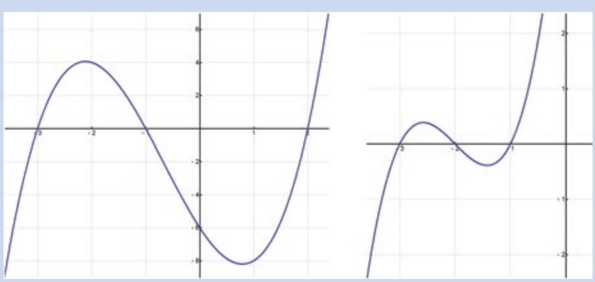
- $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ hat „+−+−" als Vorzeichenfolge der Koeffizienten und *drei* positive Nullstellen;
- $f(x) = x^3 - 7x^2 + 10x - 10$ hat die Koeffizientenfolge „+−+−" und *eine* positive Nullstelle;



- $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ hat die Koeffizientenfolge „+−++" und *zwei* positive Nullstellen sowie *eine* negative Nullstelle;
- $f(x) = x^3 + x^2 + 2x - 16$ hat die Koeffizientenfolge „+++−" und *eine* positive Nullstelle;



- $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ hat die Koeffizientenfolge „++−−" und *eine* positive Nullstelle sowie *zwei* negative Nullstellen;
- $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ hat die Koeffizientenfolge „++++" und *drei* negative Nullstellen.



Hinweis Der folgende Text gibt im Wesentlichen die Überlegungen von Descartes wieder; dabei verwenden wir jedoch die heute üblichen Schreib- und Sprechweisen. Beispielsweise war es bis ins 19. Jahrhundert üblich, das Quadrat einer Variablen x als xx zu notieren. Descartes verwendete statt des heute üblichen Gleichheitszeichens „=" die Schreibweise æ (für lat. *aequalis* = gleich) oder auch ein Symbol, das man erhält, wenn man das Zeichen $\propto$ umdreht.

In seinen Texten bezeichnete Descartes nur die *positiven* Nullstellen eines Polynoms $p(x)$ als *Lösungen* der Gleichung $p(x) = 0$; negative Nullstellen waren für ihn *falsche Lösungen.* Null als Lösung wurde von ihm nicht als solche akzeptiert.

Zum besseren Verständnis verwenden wir im Folgenden außerdem heute übliche Begriffe wie *Linearfaktor* und *gerade* bzw. *ungerade* Exponenten.

Descartes beginnt seine Erläuterungen mit einer einfachen Überlegung:

Die Gleichung $x - 2 = 0$ hat die Lösung 2, die Gleichung $x - 3 = 0$ entsprechend die Lösung 3.

Multipliziert man nun die beiden Polynome $x - 2$ und $x - 3$, dann erhält man hiermit die Gleichung $x^2 - 5x + 6 = 0$; diese Gleichung hat die Lösungen 2 und 3.

Nimmt man entsprechend noch die Gleichung $x - 4 = 0$ hinzu, dann ergibt sich nach Multiplikation die Gleichung $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ mit den Lösungen 2, 3 und 4.

Betrachtet man dann weiter eine (lineare) Gleichung, deren Lösung negativ ist, beispielsweise $x + 5 = 0$, dann ergibt sich nach Multiplikation der Polynome $x^3 - 9x^2 + 26x - 24$ und $x + 5$ die Gleichung $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$. Von dieser Gleichung wissen wir, dass sie *vier* Lösungen besitzt, wovon aber nur *drei* Lösungen positiv sind, nämlich 2, 3 und 4.

Zu Zeiten von Descartes war bekannt, dass man ein Polynom, das mehrere Nullstellen besitzt, ohne Rest durch die zugehörigen Linearfaktoren dividieren kann (also durch Terme der Form $x - a$, wobei a Lösung der Gleichung $x - a = 0$ ist), und dass man auf diese Weise den Grad einer Gleichung reduzieren kann. Wenn umgekehrt ein Polynom nicht durch den Linearfaktor $x - b$ teilbar ist, dann ist b auch nicht Nullstelle des Polynoms.

Das Polynom $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120$ lässt sich daher nur durch die Linearfaktoren $x - 2$, $x - 3$, $x - 4$ und $x + 5$ teilen und durch keinen anderen Linearfaktor, was bedeutet, dass die Gleichung $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$ nur die vier Lösungen 2, 3, 4 und –5 besitzt.

Diese Überlegungen und der aufmerksame Blick auf die jeweiligen Koeffizienten genügten Descartes, um festzustellen:

- Eine Gleichung kann nur so viele *positive* Lösungen besitzen, wie bei den Koeffizienten Vorzeichenwechsel von „+" nach „–" oder von „–" nach „+" auftreten, und so viele *negative* Lösungen, wie man zwei *positive* Vorzeichen oder zwei *negative* Vorzeichen hintereinander findet.

Diese Aussage bestätigt er an dem gewählten Beispiel wie folgt:

In der Gleichung $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$ findet man *drei* Vorzeichenwechsel:

$+x^4$	$-4x^3$	$-19x^2$	$+106x$	-120

Wendet man die von ihm entdeckte Vorzeichenregel an, dann liest man also ab, dass die Gleichung *drei* positive Lösungen hat; und aus dem Aufeinanderfolgen von $-4x^3$ und $-19x^2$ (beide mit negativem Vorzeichen) in der Gleichung $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$ erschließt man, dass es *eine* negative Lösung gibt.

Dann führt Descartes noch am gewählten Beispiel aus, wie man die betrachtete Gleichung so umformt, dass alle negativen Lösungen zu positiven Lösungen werden und alle positiven zu negativen:

Dazu muss man die Vorzeichen derjenigen Terme ändern, die zu einer Potenz mit *ungeradem* Exponenten gehören, und die übrigen lässt man unverändert. Man betrachtet also anstelle des Polynoms $p_1(x) = x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120$ dann das Polynom $p_2(x) = x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = p_1(-x)$,

also statt der Gleichung $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$

die Gleichung $x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$.

Bei dieser zweiten Gleichung tritt nur *ein* Vorzeichenwechsel in der Koeffizientenfolge auf – die Gleichung hat auch nur *eine* positive Lösung (nämlich +5); außerdem gibt es drei Paare von aufeinanderfolgenden Koeffizienten mit gleichem Vorzeichen, die mit den negativen Lösungen –2, –3 und –4 zusammenhängen.

$+x^4$	$+4x^3$	$-19x^2$	$-106x$	-120

Zur Erläuterung

Beispielsweise gilt:

$$\begin{aligned} 0 = p_1(-5) &= (-5)^4 - 4\cdot(-5)^3 - 19\cdot(-5)^2 + 106\cdot(-5) - 120 \\ &= 5^4 + 4\cdot 5^3 - 19\cdot 5^2 - 106\cdot 5 - 120 = p_2(+5) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 0 = p_1(+2) &= 2^4 - 4\cdot 2^3 - 19\cdot 2^2 + 106\cdot 2 - 120 \\ &= (-2)^4 + 4\cdot(-2)^3 - 19\cdot(-2)^2 - 106\cdot(-2) - 120 = p_2(-2). \end{aligned}$$

Descartes gibt in seiner Abhandlung keine weitere Begründung für die nach ihm benannte Vorzeichenregel an. Es ist allerdings zu vermuten, dass er nicht nur das angegebene Beispiel betrachtet hat, sondern aufgrund vieler durchgerechneter Beispiele zu der Aussage des o. a. Satzes gekommen ist.

In Abschn. 10.4 wird erläutert, wie man einen formalen Beweis der Descartes'schen Vorzeichenregel führen kann.

10.2 Wer war René Descartes?

René Descartes wurde am 31. März 1596 in La Haye en Touraine (im Loire-Tal) geboren. 1802 wurde der Ort in Erinnerung an den berühmten Sohn der Gemeinde in *La Haye Descartes* umbenannt; seit einer Gebietsreform in den 1960er Jahren heißt der Ort nur noch *Descartes.*

Sein Vater war Jurist am Obersten Gerichtshof der Bretagne. Die Mutter starb, als der Junge ein Jahr alt war. Bis zum Alter von acht Jahren lebte René bei seiner Großmutter, dann kam er in das Internat des Jesuitenkollegs Henri-IV de La Flèche.

Dort genoss er wegen seiner schlechten Gesundheit das Privileg, bis 11 Uhr morgens im Bett bleiben zu dürfen – eine Gewohnheit, die er zeit seines Lebens nicht änderte.

Einer seiner Mitschüler war **Marin Mersenne** (1588–1648), mit dem ihn eine lebenslange Freundschaft verband. Als dieser später (in den 1630er Jahren) einen regelmäßig tagenden Arbeitskreis von Wissenschaftlern *(Academia Parisiensis)* gründete, gehörte auch René Descartes zu den Teilnehmern. Mit Sicherheit profitierte auch Descartes von den internationalen Kontakten seines Freundes.

Nach einem Studium der Rechte in Poitiers trat er in den Militärdienst ein und nahm an den ersten Feldzügen des beginnenden Dreißigjährigen Kriegs teil. Ob er 1619 in Ulm persönlichen Kontakt zum deutschen Rechenmeister **Johann Faulhaber** hatte, der sich zu dieser Zeit mit dem Lösen von Gleichungen höheren Grades beschäftigte, lässt sich wohl nicht mehr klären. Man kann aber davon ausgehen, dass er dessen Schriften kannte.

Von 1620 an begann eine unruhige Reisezeit: Descartes reiste durch Böhmen, Ungarn, Deutschland, Holland und Italien und 1625 wieder nach Frankreich zurück und suchte dabei Kontakt zu den bedeutendsten Wissenschaftlern seiner Zeit.

Wegen der erhofften größeren Gedankenfreiheit ließ er sich 1628 im mittlerweile republikanischen Holland nieder und begann ein Werk, das den Titel *Traité du monde* („Abhandlung über die Welt") erhalten sollte. Als er erfuhr, welche Probleme Galileo Galilei mit der Inquisition hatte, brach er die Arbeit an dieser Schrift aber wieder ab. Schließlich überredeten ihn Freunde, seine philosophischen Gedanken zu veröffentlichen.

1637 erschien endlich – zunächst anonym – sein *Discours de la méthode* mit den drei Anhängen *La Dioptrique* („Über die Lichtbrechung"), *Les Météores* („Über die Meteore") und *La Géométrie* („Über die Geometrie") – verfasst in französischer Sprache und somit für eine größere Leserschaft zugänglich (erst 1656 erschien die lateinische Fassung unter dem Namen **Renatus Kartesius**).

Descartes' Methode des wissenschaftlichen Denkens enthält folgende Regeln:

- *Halte nichts für wahr, was in Zweifel gezogen werden kann.*
- *Zerlege schwierige Probleme in Teilprobleme.*
- *Beginne beim Einfachen und schreite zum Schwierigen fort.*
- *Prüfe, ob die Untersuchung vollständig ist.*

Descartes war der Überzeugung, dass alle Naturerscheinungen *rational* erfasst und erklärt werden können.

In den Anhängen zum *Discours de la méthode* gab er eine korrekte Erklärung für das Zustandekommen eines Regenbogens und formulierte als Erster den Impulserhaltungssatz. Die Entstehung des Sonnensystems erklärte er durch einen von Gott in Bewegung gesetzten Materiewirbel, aus dem dann die Sonne, die Planeten und die Kometen entstanden. Er verglich das Auge mit einer Camera obscura (Lochkamera) und entwickelte eine Theorie, wie dann das Bild in unserem Gehirn verarbeitet wird (vgl. auch die Darstellungen auf den Briefmarken aus Monaco (oben) und Sierra Leone (weiter unten)). Seine Theorien ließen jedoch keine Wechselwirkungen ohne materiellen Kontakt zu (wie z. B. Magnetismus, Gravitation); auch lehnte er die Existenz eines Vakuums ab.

Descartes' Auffassungen standen im Gegensatz zum bis dahin unangetasteten Weltbild des Aristoteles; seine allgemeinen physikalischen Theorien waren jedoch weitgehend spekulativ und wurden nur allmählich durch die Newton'sche Physik verdrängt, die auf der naturwissenschaftlichen Methode der *Beobachtung* und der *wissenschaftlichen Deduktion* beruhten.

Die französische Post plante für das Jahr 1937 die Herausgabe einer Sonderbriefmarke zum 300. Jahrestag der Veröffentlichung von *Discours de la méthode.* Hierbei kam es aber zu einer peinlichen Panne: Der Grafiker hatte den Titel des Werks falsch im Kopf *(Discours sur la méthode)* und es dauerte ein paar Tage, bis der Fehler bemerkt wurde. Da aber relativ viele Briefmarken mit dem falschen Buchtitel (links) bereits verkauft worden waren, waren diese Fehldrucke keine philatelistischen Raritäten und sind heute nicht mehr wert als die mit dem richtigen Text (rechts).

Nach den *Discours de la méthode* folgte 1641 – zunächst in lateinischer, später auch in französischer Sprache – die Schrift *Meditationes de prima philosophia, in qua Dei existentia et animae immortalitas demonstratur* („Meditationen über die Erste Philosophie, in welcher die Existenz Gottes und die Unsterblichkeit der Seele bewiesen werden") mit dem berühmten Satz *Cogito ergo sum* („Ich denke, also bin ich").

1649 nahm Descartes eine Einladung der schwedischen Königin Kristina nach Stockholm an, wo er mit seiner Gewohnheit brechen musste, lange im Bett zu bleiben, da die Königin ihn um 5 Uhr zum Frühstück erwartete, um über mathematische und philosophische Probleme zu diskutieren.

Descartes überlebte den ersten nordischen Winter nicht; er zog sich bei den frühen Spaziergängen zur Königin eine Lungenentzündung zu – so die offizielle Verlautbarung – und starb kurze Zeit später (am 11. Februar 1650).

In den letzten Jahren wurde diese Todesursache in Zweifel gezogen. Es ist nicht auszuschließen, dass der Freigeist Descartes durch den apostolischen Missionar am schwedischen Königshof vergiftet wurde (vgl. Sonar). Die philosophischen Schriften von Descartes wurden 1663 von der katholischen Kirche auf den *Index librorum prohibitorum* („Verzeichnis der verbotenen Schriften") gesetzt.

Die folgenden Briefmarken erinnern an den Besuch Descartes' am schwedischen Hof (Wiedergabe eines Gemäldes von Dumesnil, Tchad), würdigen anlässlich des Jahrtausendwechsels den philosophischen Grundsatz, der in dem Gedanken *Cogito ergo sum* enthalten ist (Sierra Leone), und erinnern an sein Todesjahr 1650 (Grenada).

10.3 Mit welchen (mathematischen) Themen beschäftigte sich Descartes außerdem?

Mit dem dritten Anhang zum *Discours de la méthode,* dem Werk *La Géométrie,* wurde ein neues Gebiet der Mathematik, die sog. *Analytische Geometrie,* geboren:

Descartes zeigte auf, dass sich algebraische Gleichungen durch geometrische Konstruktionen lösen und dass sich geometrische Objekte durch algebraische Gleichungen beschreiben lassen.

Die Bezeichnung *kartesisches Koordinatensystem* erinnert an die revolutionären Ansätze von Descartes (lat. Cartesius), Geometrie und Algebra miteinander zu verbinden. Allerdings verwendete Descartes selbst in keinem seiner Werke ein solches rechtwinkliges Koordinatensystem. Daher wäre es vielleicht angemessener gewesen, wenn man diesen besonderen Typ eines Koordinatensystems nach Apollonius von Perge (262–190 v. Chr.), nach Nikolaus Oresme (ca. 1330–1382) oder nach Johan de Witt (1625–1672) benannt hätte, die bereits zueinander senkrechte Achsen betrachtet hatten.

Als erster Mathematiker benutzte Descartes durchgehend die Rechenzeichen „+" und „–", die Potenzschreibweise sowie das Wurzelzeichen $\surd$ (allerdings noch nicht das Gleichheitszeichen, s. o.), und er benutzte konsequent die letzten Buchstaben des Alphabets als Variablen.

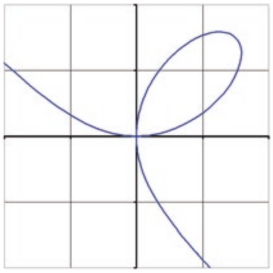
10.3.1 Das kartesische Blatt

Zu Ehren von Descartes wird eine von ihm untersuchte Kurve als **kartesisches Blatt** bezeichnet. Deren Gleichung lautet:

$x^3 + y^3 = 3ax$, in Parameterform lässt sich die Kurve durch

$x = \frac{3at}{1+t^3}$ und $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$ beschreiben.

Die Kurve setzt sich aus drei Teilen zusammen: Wenn der Parameter t von -1 bis 0 läuft, entsteht der linke Ast, für t von $-\infty$ bis -1 der rechte Ast und für t von 0 bis $+\infty$ entsteht die Schleife. Die Kurve hat bei $t = -1$ eine Definitionslücke.



Das kartesische Blatt findet man auch auf der abgebildeten albanischen Briefmarke aus dem Jahr 1996, auf der der lateinische Name von Descartes allerdings falsch abgeschrieben wurde.

10.3.2 Der Descartes'sche Vier-Kreise-Satz

Nach Descartes ist ein wunderschöner algebraisch-geometrischer Satz benannt, den er in einem Brief an Prinzessin Elisabeth von Böhmen erwähnte:

Satz

Descartes'scher Vier-Kreise-Satz

Gegeben sind drei einander gegenseitig berührende Kreise mit den Radien r_1, r_2, r_3.

Für einen vierten Kreis mit Radius r_4, der diese drei Kreise berührt, gilt dann die Beziehung

$$2 \cdot \left(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2\right) = (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2,$$

wobei mit k_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ die Krümmung des i-ten Kreises bezeichnet wird, also $k_i = \frac{1}{r_i}$.

Zum Beweis des Satzes (sehr trickreich) benötigt man den Kosinussatz und die Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen (vgl. Literaturhinweise).

Um $r_4 = \frac{1}{k_4}$ zu bestimmen, genügt es, eine quadratische Gleichung mit der Variablen k_4 zu lösen. Die negative Lösung bestimmt dabei einen Kreis, der die drei gegebenen Kreise *von außen* berührt.

Allgemeine Lösung der quadratischen Gleichung:

$$2 \cdot \left(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2\right) = (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2 \Leftrightarrow$$
$$2 \cdot \left(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2\right) + 2 \cdot k_4^2 = (k_1 + k_2 + k_3)^2 + 2 \cdot (k_1 + k_2 + k_3) \cdot k_4 + k_4^2 \Leftrightarrow$$
$$k_4^2 - 2 \cdot (k_1 + k_2 + k_3) \cdot k_4 = (k_1 + k_2 + k_3)^2 - 2 \cdot \left(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2\right)$$

Nach diesen allgemeinen Umformungen ergibt sich eine zum Vier-Kreise-Satz äquivalente Gleichung, mit deren Hilfe die Variable k_4 leicht zu bestimmen ist:

$$[k_4 - (k_1 + k_2 + k_3)]^2 = 2 \cdot \left[(k_1 + k_2 + k_3)^2 - \left(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2\right)\right]$$

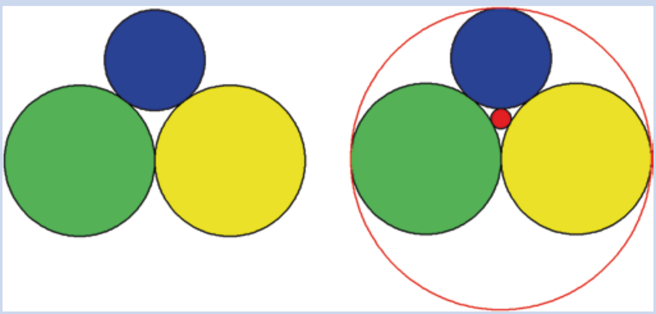
Beispiel

Gegeben sind drei einander berührende Kreise mit den Radien
$r_1 = 15$ *(grün)*; $r_2 = 15$ *(gelb)*; $r_3 = 10$ *(blau)*, vgl. die folgende Abb. links.

$$\left[x - \left(\tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{10}\right)\right]^2 = 2 \cdot \left[\left(\tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{10}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{225} + \tfrac{1}{225} + \tfrac{1}{100}\right)\right]$$

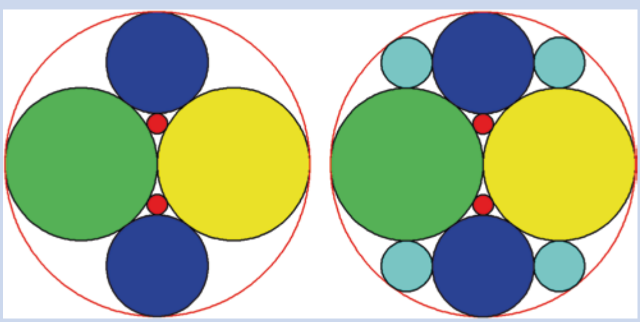
$$\Leftrightarrow \left[x - \tfrac{7}{30}\right]^2 = 2 \cdot \left[\left(\tfrac{7}{30}\right)^2 - \tfrac{17}{900}\right] \Leftrightarrow \left(x - \tfrac{7}{30}\right)^2 = \tfrac{64}{900} \Leftrightarrow x = \tfrac{1}{2} \vee x = -\tfrac{1}{30}$$

Dies bedeutet: $r_4 = 2$ (Kreis innen, rot gefüllt) oder $r_5 = 30$ (Kreis außen, rote Linie)



Da die grün und gelb gefüllten Kreise zueinander symmetrisch liegen, bietet es sich an, die Figur am gemeinsamen Durchmesser zu spiegeln, vgl. die folgende Abb. links.

Diese Kreisfigur kann man weiter mit einander berührenden Kreisen ausfüllen (im Englischen werden sie als *kissing circles* bezeichnet), vgl. Abb. rechts.



Hierzu muss man nicht notwendig nochmals eine quadratische Gleichung lösen, sondern kann die bisher erworbenen Kenntnisse nutzen.

Betrachten wir beispielsweise den hellblau gefüllten Kreis oben links: Der Radius dieses Kreises erfüllt dieselbe quadratische Gleichung wie der gelb gefüllte Kreis, denn beide Kreise berühren den blauen Kreis ($k_{\text{blau}} = \frac{1}{10}$) und den grünen Kreis ($k_{\text{grün}} = \frac{1}{15}$) und werden von außen von der roten Kreislinie berührt ($k_{\text{außen}} = -\frac{1}{30}$).

Man kennt also eine der beiden Lösungen der folgenden quadratischen Gleichung:

$$\left[x - \left(\tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{30}\right)\right]^2 = 2 \cdot \left[\left(\tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{30}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{225} + \tfrac{1}{100} + \tfrac{1}{900}\right)\right]$$

Jetzt könnte man diese Gleichung wie gewohnt lösen und fände dann neben $k_{\text{gelb}} = \frac{1}{15}$ den Wert $k_{\text{hellblau}} = \frac{1}{5}$, d. h., der Radius der Kreise ist 5.

Noch einfacher ist es aber, wenn man den folgenden Satz anwendet, den der französische Mathematiker **François Viète** (lateinisch Vieta, 1540–1603) entdeckte:

Satz

Vieta'scher Wurzelsatz

Hat eine quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ die Lösungen x_1 und x_2, dann gilt

$x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$.

Wendet man diesen Satz auf die Lösungen des Vier-Kreise-Satzes an, dann bedeutet dies hier:

$$x_1 + x_2 = 2 \cdot (k_1 + k_2 + k_3), \text{ also}$$
$$x_1 = 2 \cdot (k_1 + k_2 + k_3) - x_2.$$

Im Beispiel ergibt sich also aus den Krümmungen $k_{\text{grün}} = \frac{1}{15}$, $k_{\text{blau}} = \frac{1}{10}$, $k_{\text{außen}} = -\frac{1}{30}$ und $x_2 = k_{\text{gelb}} = \frac{1}{15}$ für die Krümmung der hellblau gefüllten Kreise

$x_1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{10} - \frac{1}{30}\right) - \frac{1}{15} = \frac{1}{5}$.

Für weitere Beispiele verweisen wir auf Kap. 15 von *Mathematik ist schön*.

10.3.3 Descartes' Lösung des Tangentenproblems

Um 1640 entwickelte Descartes eine besondere Methode, mit der man die Steigung einer Kurve in einem Punkt, also die Steigung einer Tangente an eine Kurve, bestimmen kann. Sein Ansatz stieß auf großes Interesse bei den Mathematikern seiner Zeit, weil die von ihm vorgeschlagene algebraische Methode ohne die sonst üblichen Grenzwertbetrachtungen auskommt, die von Descartes heftig kritisiert wurde.

Die Punkte eines Kreises mit Mittelpunkt $(a \mid b)$ und Radius r lassen sich in einem kartesischen Koordinatensystem durch die folgende algebraische Gleichung beschreiben:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Wenn ein Kreis eine Kurve schneidet, dann geschieht dies i. A. in zwei Punkten. Und wenn diese beiden Schnittpunkte zusammenfallen, berühren sich Kurve und Kreis; die Tangente an den Kreis im Berührpunkt ist dann auch Tangente an die Kurve.

Betrachten wir als Beispiel den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^2$ und Kreise, deren Mittelpunkt auf einer der beiden Koordinatenachsen liegt.

Beispiel 1: Tangente an den Graphen von *f(x)* = *x*^{2} im Punkt (1 | 1)

Die Punkte eines Kreises um den Mittelpunkt $(c \mid 0)$ auf der x-Achse mit Radius r erfüllen die Gleichung $(x-c)^2 + (y-0)^2 = r^2$, wobei $y = x^2$.

Für den Radius r gilt in dem rechtwinkligen Dreieck (vgl. Abb. unten) die Beziehung $(c-1)^2 + 1^2 = r^2$, sodass insgesamt die Gleichung $(x-c)^2 + x^4 = (c-1)^2 + 1^2$ erfüllt sein muss.

Die Bedingung, dass sich Kurve und Kreis im Punkt $(1 \mid 1)$ berühren, bedeutet, dass $x = 1$ eine *doppelte* Lösung der folgenden Gleichung 4. Grades ist:

$x^2 - 2cx + c^2 + x^4 = c^2 - 2c + 1 + 1$, also von

$x^4 + x^2 - 2cx + (2c-2) = 0$.

Der links stehende Term 4. Grades muss sich dann ohne Rest durch den quadratischen Term $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$ teilen lassen.

Zwei algebraische Methoden sind nun möglich:

- Bestimmung eines quadratischen Faktors durch Koeffizientenvergleich:

Ansatz: $x^4 + x^2 - 2cx + (2c-2) = (x^2 - 2x + 1) \cdot (x^2 + px + q)$

- Ausmultiplizieren der beiden quadratischen Terme:

$$\begin{aligned}
&(x^2 - 2x + 1) \cdot (x^2 + px + q) \\
&= x^4 - 2x^3 + x^2 + px^3 - 2px^2 + px + qx^2 - 2qx + q \\
&= x^4 + (-2+p) \cdot x^3 + (1 - 2p + q) \cdot x^2 + (p - 2q) \cdot x + q
\end{aligned}$$

Aus dem Koeffizientenvergleich ergibt sich, dass folgende Bedingungen erfüllt sein müssen:

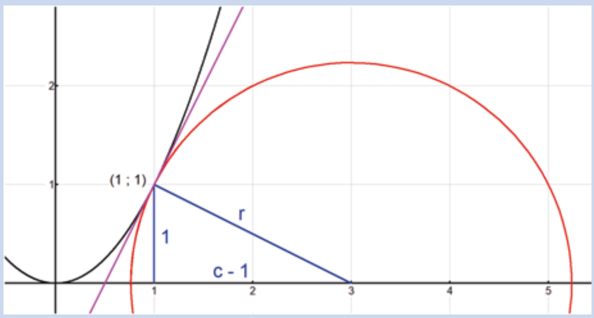
$-2 + p = 0$ und $1 - 2p + q = 1$ und $p - 2q = -2c$ und $q = 2c - 2$.

Hieraus folgt nacheinander $p = 2$ und $q = 4$ sowie aus den letzten beiden Bedingungen $c = 3$.

Alternativ kann der unbekannte quadratische Faktor durch Termdivision bestimmt werden; auch aus dieser Rechnung ergeben sich Bedingungen, die zu $c = 3$ führen.

Hieraus folgt dann weiter, dass für den Radius gilt:

$r = \sqrt{1^2 + (c-1)^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$



Die Tangente an einen Kreis im Berührpunkt steht senkrecht auf der Verbindungsstrecke zum Mittelpunkt. Die Steigung m der Tangente ist also gleich dem negativen Kehrwert der Steigung der Geraden durch die Punkte $(1 \mid 1)$ und $(3 \mid 0)$

$$m = -\frac{\Delta x}{\Delta y} = -\frac{3-1}{0-1} = 2.$$

Beispiel 2: Tangente an den Graphen von *f(x)* = *x*² im Punkt (2 | 4)

Die Punkte eines Kreises um den Mittelpunkt $(0|d)$ auf der x-Achse mit Radius r erfüllen die Gleichung $(x-0)^2 + (y-d)^2 = r^2$, wobei $y = x^2$.

Für den Radius r gilt in dem rechtwinkligen Dreieck (vgl. Abb. unten) die Beziehung $(d-4)^2 + 2^2 = r^2$, sodass insgesamt die Gleichung $x^2 + (x^2 - d)^2 = (d-4)^2 + 2^2$ erfüllt sein muss.

Die Bedingung, dass sich Kurve und Kreis im Punkt (2|4) berühren, bedeutet, dass $x = 2$ eine doppelte Lösung der folgenden Gleichung 4. Grades ist:

$x^2 + x^4 - 2dx^2 + d^2 = d^2 - 8d + 16 + 4$, also von

$x^4 + (1 - 2d)x^2 + (8d - 20) = 0.$

Der links stehende Term 4. Grades muss sich dann ohne Rest durch den quadratischen Term $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$ teilen lassen.

- Bestimmung eines quadratischen Faktors durch Koeffizientenvergleich:
  Ansatz: $x^4 + (1 - 2d)x^2 + (8d - 20) = (x^2 - 4x + 4) \cdot (x^2 + px + q)$
- Ausmultiplizieren der beiden quadratischen Terme

$$\begin{aligned}&(x^2 - 4x + 4) \cdot (x^2 + px + q)\\&= x^4 - 4x^3 + 4x^2 + px^3 - 4px^2 + 4px + qx^2 - 4qx + 4q\\&= x^4 + (-4 + p) \cdot x^3 + (4 - 4p + q) \cdot x^2 + (4p - 4q) \cdot x + 4q\end{aligned}$$

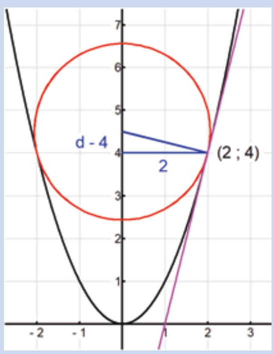
Aus dem Koeffizientenvergleich ergibt sich, dass folgende Bedingungen erfüllt sein müssen:

$-4 + p = 0$ und $4 - 4p + q = 1 - 2d$ und $4p - 4q = 0$ und $4q = 8d - 20.$

Hieraus folgt $p = 4$ und $q = 4$ sowie $d = 4,5.$

Alternativ kann der unbekannte quadratische Faktor auch durch Termdivision bestimmt werden.

Es folgt $r = \sqrt{2^2 + (d - 4)^2} = \sqrt{2^2 + 0{,}5^2} = \sqrt{4{,}25}.$



Die Steigung m der Tangente ist gleich dem negativen Kehrwert der Steigung der Geraden durch die Punkte (2 | 4) und (0 | 4,5), also

$$m = -\frac{\Delta x}{\Delta y} = -\frac{2 - 0}{4 - 4{,}5} = 4.$$

Das an zwei Beispielen vorgestellte Kreis-Tangenten-Verfahren von Descartes kann verallgemeinert werden. Durch allgemeine Rechnung ergibt sich als Steigung der Tangente im Punkt $(x_0 \mid x_0^2)$ der Term $m = 2x_0$.

Für Potenzfunktionen oder gar Polynome höheren Grades ist diese Vorgehensweise mit entsprechend größerem Aufwand verbunden.

Beispiel 3: Tangente an den Graphen von *f(x)* = *x*³ im Punkt (1 | 1)

Analog zu Beispiel 1 ergibt sich wegen $y = x^3$ die Gleichung

$$(x-c)^2 + x^6 = (c-1)^2 + 1^2, \text{ also}$$
$$x^6 + x^2 - 2cx + (2c-2) = 0.$$

Aus dem Ansatz

$$x^6 + x^2 - 2cx + (2c-2) = (x^2 - 2x + 1) \cdot (x^4 + px^3 + qx^2 + ux + v)$$

folgt nach dem Ausmultiplizieren der quadratischen Terme

$$x^6 + (p-2) \cdot x^5 + (q - 2p + 1) \cdot x^4 + (u - 2q + p) \cdot x^3$$
$$+ (v - 2u + q) \cdot x^2 + (-2v + u) \cdot x + v = 0.$$

Koeffizientenvergleich:

$$p-2 = 0;\; q-2p+1 = 0;\; u-2q+p = 0;\; v-2u+q = 1;\; -2v+u = -2c;\; 2c-2 = v$$

Hieraus folgt $p = 2$, $q = 3$, $u = 4$, $v = 6$ und schließlich $c = 4$.

Die Steigung m der Tangente ist gleich dem negativen Kehrwert der Steigung der Geraden durch die Punkte $(1 \mid 1)$ und $(4 \mid 0)$, also

$$m = -\frac{\Delta x}{\Delta y} = -\frac{4-1}{0-1} = 3.$$

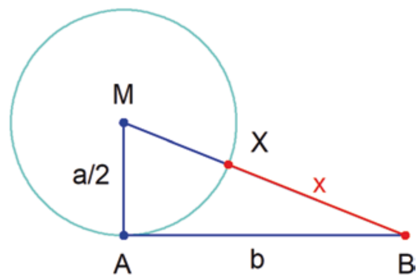
Descartes, der sehr stolz auf die von ihm entwickelte Methode war, gelang es allerdings mithilfe dieses Verfahrens nicht, für beliebige Punkte der in Abschn. 10.3.1 vorgestellten Kurve (kartesisches Blatt) die Tangentensteigung zu berechnen. Seine Hoffnung, dass dies dann auch nicht seinem „Konkurrenten“ Pierre de Fermat gelingen würde, erfüllte sich nicht. (Fermat hatte eine andere Methode gefunden, Tangenten an Kurven zu bestimmen, vgl. Hinweis in Kap. 11).

10.3.4 Descartes' geometrische Lösung einer quadratischen Gleichung vom Typ $x^2 + ax = b^2$

Descartes entdeckte eine einfache Möglichkeit, die Lösung spezieller quadratischer Gleichungen geometrisch zu bestimmen.

In der folgenden abgebildeten geometrischen Figur kann man die positive Lösung $x = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$ der quadratischen Gleichung $x^2 + ax = b^2$ mit positiven Koeffizienten a und b als Streckenlänge ablesen:

- Im rechtwinkligen Dreieck ABM haben die beiden Katheten die Längen $|\overline{AM}| = \frac{1}{2} \cdot a$ und $|\overline{AB}| = b$, also die Hypotenuse $\overline{BM}$ die Länge $|\overline{BM}| = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$, und somit die Strecke $\overline{XB}$ die Länge $|\overline{XB}| = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$.



10.4 Zum Beweis der Vorzeichenregel von Descartes

Um den Satz von Descartes zu beweisen und nicht nur aufgrund von Beispielen zu erschließen, muss der Zusammenhang zwischen den Vorzeichen der Koeffizienten und der Anzahl der Nullstellen näher untersucht werden.

Im Folgenden betrachten wir Polynome n-ten Grades mit $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \cdots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1 + a_0$.

Für diese stellen wir fest:

Regel

Anzahl der Vorzeichenwechsel in Abhängigkeit vom absoluten Glied eines Polynoms

Ist der führende Koeffizient a_n eines Polynoms n-ten Grades positiv, dann hängt die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Koeffizientenfolge des Polynoms wie folgt vom absoluten Glied a_0 ab:

- Ist $a_0 > 0$, dann ist die Anzahl der Vorzeichenwechsel *gerade.*
- Ist $a_0 < 0$, dann ist die Anzahl der Vorzeichenwechsel *ungerade.*

Beispiele
Bei einem Polynom 2. Grades $ax^2 + bx + c$ mit $a > 0$ gibt es bzgl. der Vorzeichen der Koeffizienten die folgenden vier Möglichkeiten:

a	*b*	*c*	Anzahl der Vorzeichenwechsel
+	+	+	0
+	+	–	1
+	–	+	2
+	–	–	1

Bei einem Polynom 3. Grades $ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $a > 0$ gibt es bzgl. der Vorzeichen der Koeffizienten die folgenden acht Möglichkeiten:

a	*b*	*c*	*d*	Anzahl der Vorzeichenwechsel
+	+	+	+	0
+	+	+	–	1
+	+	–	+	2
+	+	–	–	1

a	*b*	*c*	*d*	Anzahl der Vorzeichenwechsel
+	–	+	+	2
+	–	+	–	3
+	–	–	+	2
+	–	–	–	1

Diese Regel ist plausibel:

Beginnt eine Zeichenfolge aus „+“ und „–“ mit dem Vorzeichen „+“ und endet auch wieder mit dem Vorzeichen „+“, dann gibt es 0, 2, 4, … Vorzeichenwechsel. Beginnt eine Zeichenfolge aus „+“ und „–“ mit dem Vorzeichen „+“ und endet dagegen mit dem Vorzeichen „–“, dann gibt es 1, 3, 5, … Vorzeichenwechsel.

Für die Nullstellen des Polynoms gilt nun – überraschenderweise – eine ähnliche Regel:

- Ist $a_0 > 0$, dann ist die Anzahl der positiven Nullstellen *gerade*.
- Ist $a_0 < 0$, dann ist die Anzahl der positiven Nullstellen *ungerade*.

Anschauliche Begründung Das absolute Glied bestimmt den Funktionswert an der Stelle $x = 0$. Für größer werdende x wachsen die Funktionswerte der Funktion ins positiv Unendliche, da diese vor allem von der höchsten Potenz bestimmt werden. Wenn also der Funktionswert an der Stelle $x = 0$ positiv ist, dann muss der Graph die positive x-Achse eine gerade Anzahl mal schneiden (0-mal, 2-mal, 4-mal, …); im Fall $f(0) < 0$ muss es dagegen eine ungerade Anzahl von Nullstellen geben.

Fassen wir nun beide Eigenschaften zusammen:

- Ist $a_0 > 0$, dann ist sowohl die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Koeffizientenfolge als auch die Anzahl der positiven Nullstellen gerade.
- Ist $a_0 < 0$, dann ist sowohl die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Koeffizientenfolge als auch die Anzahl der positiven Nullstellen ungerade.

Und da die Differenz zweier *gerader* Zahlen ebenso wie die Differenz zweier *ungerader* Zahlen eine gerade Zahl ist, unterscheidet sich die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Koeffizientenfolge von der Anzahl der positiven Nullstellen um eine gerade Zahl, also um 0 (dann stimmen sie überein) oder um 2 oder um 4 oder …

Beispiele

Der Graph der ganzrationalen Funktion f mit

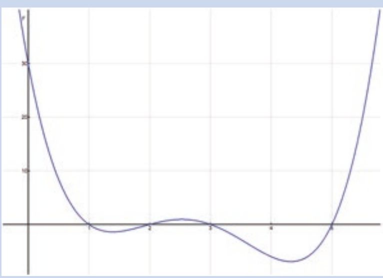
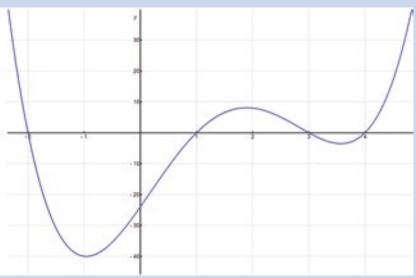
$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)\ (x-5) = x^4 - 11x^3 + 41x^2 - 61x + 30$

hat vier positive Nullstellen und vier Vorzeichenwechsel in der Folge der Koeffizienten, vgl. Abb. links.

Der Graph der ganzrationalen Funktion f mit

$f(x) = (x+2)(x-1)(x-3)(x-4) = x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 26x - 24$

hat drei positive Nullstellen und drei Vorzeichenwechsel in der Folge der Koeffizienten, vgl. Abb. rechts.

Man findet in verschiedenen Büchern (z. B. bei Fuchs & Tabachnikov) oder im Internet (z. B. bei Brodie) Ausführungen, in denen genauer untersucht wird, welche Aussagen über ein Polynom möglich sind, wenn man weiß, dass ein Polynom an der Stelle $x = p$ eine positive Nullstelle hat.

Dann kann man den Funktionsterm $f(x)$ durch den Linearfaktor $x - p$ dividieren und erhält eine Produktdarstellung der folgenden Art:

$$\begin{aligned}
f(x) = g(x)\cdot(x-p) &= (b_{n-1}\cdot x^{n-1} + b_{n-2}\cdot x^{n-2} + \ldots + b_2\cdot x^2 + b_1\cdot x^1 + b_0)\cdot(x-p)\\
&= b_{n-1}\cdot x^n + b_{n-2}\cdot x^{n-1} + b_{n-3}\cdot x^{n-2} + \ldots + b_2\cdot x^3 + b_1\cdot x^2 + b_0\cdot x\\
&\quad - p\cdot b_{n-1}\cdot x^{n-1} - p\cdot b_{n-2}\cdot x^{n-2} - \ldots - p\cdot b_2\cdot x^2 - p\cdot b_1\cdot x^1 - p\cdot b_0\\
&= b_{n-1}\cdot x^n + (b_{n-2} - p\cdot b_{n-1})\cdot x^{n-1} + (b_{n-3} - p\cdot b_{n-2})\cdot x^{n-2} + \ldots\\
&\quad + (b_1 - p\cdot b_2)\cdot x^2 + (b_0 - p\cdot b_1)\cdot x + (-p\cdot b_0)
\end{aligned}$$

Die Koeffizientenfolgen der Polynome $f(x)$ und $g(x)$ lauten wie folgt:

$$a_n = b_{n-1},\ a_{n-1} = b_{n-2} - p \cdot b_{n-1},\ a_{n-2} = b_{n-3} - p \cdot b_{n-2},\ \cdots,$$
$$a_2 = b_1 - p \cdot b_2,\ a_1 = b_0 - p \cdot b_1,\ a_0 = -p \cdot b_0$$

bzw. $b_{n-1},\ \ b_{n-2},\ \ b_{n-3},\ \ \cdots,\ b_2,\ \ b_1,\ \ b_0.$

Man stellt fest: Die beiden Koeffizientenfolgen …

a) … beginnen mit derselben Zahl (b_{n-1}), also auch mit demselben Vorzeichen.
b) … enden mit entgegengesetztem Vorzeichen ($-p \cdot b_0$ und b_0).

Wenn in der Koeffizientenfolge von g ein Vorzeichenwechsel auftritt, beispielsweise zwischen den Koeffizienten b_k und b_{k-1}, dann gilt im Fall des Wechsels

c) von „+“ nach „–“ also $b_k > 0$ und $b_{k-1} < 0$: $a_k = b_{k-1} - p \cdot b_k < 0$.
d) von „–“ nach „+“ also $b_k < 0$ und $b_{k-1} > 0$: $a_k = b_{k-1} - p \cdot b_k > 0$.

Die folgenden beiden Grafiken zeigen Beispiele für mögliche Koeffizientenfolgen, beginnend mit dem Vorzeichen „+“ für b_{n-1} und für a_n und endend mit den Vorzeichen von b_0 und von a_0.

Gemäß (c) und (d) bestimmt ein Vorzeichenwechsel bei den Koeffizienten von $g(x)$ das Vorzeichen *eines* der Koeffizienten von $f(x)$; dies ist jeweils in der unteren Zeile der Grafik eingetragen. Wie die Vorzeichen der übrigen Koeffizienten von $f(x)$ aussehen, spielt im Einzelnen keine Rolle. Aber: An irgendeiner Zwischenstelle muss *mindestens ein* Vorzeichenwechsel vorhanden sein.

Daher ist die Anzahl der Vorzeichenwechsel bei den Koeffizienten von $f(x)$ um mindestens 1 größer als die Anzahl der Vorzeichenwechsel bei den Koeffizienten von $g(x)$.

Beispiel 1: *g*(*x*) hat zwei Vorzeichenwechsel

<table>
<tr><td>g(x)</td><td>+</td><td>+</td><td>…</td><td>+</td><td>–</td><td>…</td><td>–</td><td>+</td><td>…</td><td>+</td><td></td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>+</td><td colspan="2">?</td><td>–</td><td colspan="2">?</td><td>+</td><td colspan="3">?</td><td>–</td></tr>
</table>

Beispiel 2: *g*(*x*) hat drei Vorzeichenwechsel

$g(x)$	+	+	…	+	–	…	–	+	…	+	–	…	–	
$f(x)$	+	?		–	?		+	?		–	?			+

Aus der Tatsache, dass die Anzahl der positiven Nullstellen des Polynoms $f(x)$ um 1 größer ist als die Anzahl der positiven Nullstellen des Polynoms $g(x)$, ergab sich, dass die Anzahl der Vorzeichenwechsel der Koeffizientenfolge von $f(x)$ *mindestens* um 1 größer ist als die Anzahl der Vorzeichenwechsel der Koeffizientenfolge von $g(x)$.

Bei fortgesetzter Anwendung dieser Überlegung für weitere positive Nullstellen von $f(x)$ folgt dann, dass mit jeder zusätzlich betrachteten positiven Nullstelle auch die Anzahl der Vorzeichenwechsel von $f(x)$ zunimmt. Dass sich diese beiden Anzahlen um ein Vielfaches von 2 unterscheiden können, hängt mit der Tatsache zusammen, dass ein Polynom komplexe Nullstellen besitzen kann, die jeweils paarweise auftreten.

10.5 Literaturhinweise

Eine wichtige Adresse zum Auffinden von Informationen über Mathematiker und deren wissenschaftliche Leistungen ist die Homepage der St. Andrews University.

Informationen über Descartes findet man unter:

- www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Descartes.html
- Strick, Heinz Klaus (2006), *Kalenderblatt über René Descartes,* www.spektrum.de/wissen/rene-descartes-1596-1650/862794
- www-history.mcs.st-and.ac.uk/Strick/Descartes.pdf
- Strick, Heinz Klaus (2017): *Mathematik ist schön,* Springer, Heidelberg, Kap. 15 (Kissing Circles)

Ausführliche Darstellungen über Descartes und die Vorzeichenregel findet man u. a. in:

- Brodie, Scott E. (1999): *Descartes' Rule of Signs,*
- www.cut-the-knot.org/fta/ROS2.shtml
- Fuchs, Dmitry, Tabachnikov, Serge (2011): *Ein Schaubild der Mathematik – 30 Vorlesungen über klassische Mathematik,* Springer, Heidelberg
- Sonar, Thomas (2011): *3000 Jahre Analysis,* Springer, Heidelberg

Ein Beweis des Vier-Kreise-Satzes findet man unter:

- Fehringer, Arno (2018): *Der Vier-Kreise-Satz von Descartes in elementarer Darstellung,* mathematikgarten.hpage.com/schriften.html

Wikipedia-Artikel in deutscher, englischer und französischer Sprache zu den Stichwörtern:

- René Descartes
- Vorzeichenregel von Descartes (Descartes' rule of signs, Règle de signes de Descartes)
- Vier-Kreise-Satz/Satz von Descartes (Descartes' theorem, Théorème de Descartes)
- Kartesisches Koordinatensystem (Cartesian coordinate system, Coordonnées cartésiennes)
- Kartesisches Blatt (Folium of Descartes, Folium de Descartes)

Pierre de Fermat – verkanntes Mathematikgenie aus der Provinz

11

Vielleicht wird die Nachwelt mir dafür dankbar sein, dass ich gezeigt habe, dass die Alten nicht alles gewusst haben.

Er war einer der bedeutendsten Mathematiker des 17. Jahrhunderts, aber er veröffentlichte nur wenige Beiträge. Von Beruf war er eigentlich Jurist (Anwalt und Richter), und Mathematik war nur sein Hobby.

Mit seinen Ideen und Fragen forderte er viele Gelehrte in ganz Europa heraus – eines seiner Probleme, *Fermat's Last Theorem* (FLT), hielt die Mathematiker bis Ende des 20. Jahrhundert in Atem!

H. K. Strick, *Mathematik – einfach genial!*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-60449-6_11

11.1 Einfach genial: Pierre de Fermats Methode der Flächenbestimmung bei Potenzfunktionen

Im Schulunterricht ist es bei der Einführung in die Integralrechnung üblich, die Fläche unter dem Graphen einer Funktion durch *gleich breite* Rechtecke auszuschöpfen bzw. zu überdecken. Bevor man dann zur Grenzwertbildung kommt, muss die Summe der Rechteckflächeninhalte („Untersumme" bzw. „Obersumme") mithilfe entsprechender Summenformeln berechnet werden (vgl. auch Kap. 4).

Auch Fermat hatte eine Methode entwickelt, um Potenzsummen zu bestimmen (s. u.), und war daher in der Lage zu berechnen, wie groß die Fläche zwischen dem Graphen einer Potenzfunktion f mit $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ und der x-Achse über einem Intervall ist. Und obwohl ihm dies gelungen war – 50 Jahre vor Newton und Leibniz –, gab er sich nicht mit dem gefundenen Lösungsweg zufrieden.

Denn er stellte fest, dass dieses Verfahren nur bei Potenzfunktionen mit *natürlichen* Exponenten anwendbar ist. Und so entwickelte er eine Methode der Flächenbestimmung, bei der die Summenformeln für Potenzen *nicht* benötigt werden – die Anwendung der Regeln über geometrische Reihen genügt.

Satz

Fläche zwischen dem Graphen einer Potenzfunktion und der x-Achse

Der Flächeninhalt des Flächenstücks zwischen dem Graphen von $f(x) = x^m$ $(m = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{N})$ und der x-Achse im Intervall $[0; a]$ beträgt $\frac{1}{m+1} \cdot a^{m+1}$.

Um die Fläche zwischen dem Graphen einer Potenzfunktion und der x-Achse zu bestimmen, wird eine Unterteilung des Ausgangsintervalls durch eine Folge von Teilintervallen betrachtet, deren Breite mit einem Faktor $k < 1$ abnimmt, also eine *geometrische Folge* durchläuft, vgl. Abb. 11.1.

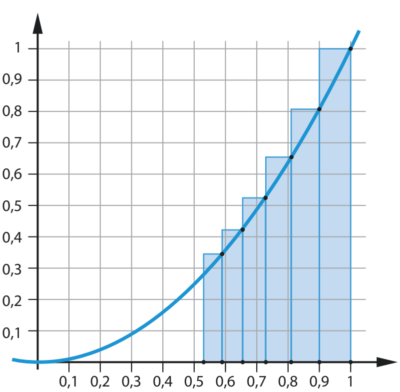


Abb. 11.1 Fermat'sche Zerlegung des Intervalls $[0; 1]$ für die Funktion $f(x) = x^2$ in unendlich viele Abschnitte

Beispiel-Rechnung für $f(x) = x^2$, $k = 0{,}9$ und $a = 1$

Das Intervall $[0;1]$ wird in eine unendliche Anzahl von Teilintervallen zerlegt. Die Fläche wird überdeckt durch eine Folge von Rechtecken der Breite $b_1 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$; $b_2 = 0{,}9 - 0{,}81 = 0{,}09$; $b_3 = 0{,}81 - 0{,}729 = 0{,}081$; usw.

Die Folge der Intervallbreiten durchläuft eine geometrische Folge mit Anfangsglied $b_1 = 0{,}1$ und $k = 0{,}9$. Die unendliche Summe dieser Intervallbreiten ergibt

$$\frac{b_1}{1-q} = \frac{0{,}1}{1-0{,}9} = 1.$$

Der Flächeninhalt der abgebildeten Treppenfigur ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
A_{k=0{,}9} &= (1-0{,}9)\cdot 1 + (0{,}9-0{,}9^2)\cdot 0{,}9^2 \\
&\quad + (0{,}9^2-0{,}9^3)\cdot 0{,}9^4 + (0{,}9^3-0{,}9^4)\cdot 0{,}9^6 + \ldots \\
&= (1-0{,}9)\cdot 1 + 0{,}9\cdot(1-0{,}9)\cdot 0{,}9^2 \\
&\quad + 0{,}9^2\cdot(1-0{,}9)\cdot 0{,}9^4 + 0{,}9^3\cdot(1-0{,}9)\cdot 0{,}9^6 + \ldots \\
&= (1-0{,}9)\cdot 0{,}9^0 + (1-0{,}9)\cdot 0{,}9^3 \\
&\quad + (1-0{,}9)\cdot 0{,}9^6 + (1-0{,}9)\cdot 0{,}9^9 + \ldots \\
&= \frac{1-0{,}9}{1-0{,}9^3} = \frac{0{,}1}{0{,}271} \approx 0{,}369
\end{aligned}$$

Beispiel-Rechnung für $f(x) = x^2$ auf dem Intervall $[0;a]$ mit beliebigem $k < 1$

Die Intervalle haben (von rechts nach links) die Breite

$$b_1 = a\cdot(1-k);\;\; b_2 = a\cdot(1-k)\cdot k;\;\; b_3 = a\cdot(1-k)\cdot k^2;\;\; \text{usw.}$$

Diese überdecken insgesamt ein Intervall der Breite

$$\frac{b_1}{1-k} = \frac{a\cdot(1-k)}{1-k} = a.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
A_k &= a\cdot(1-k)\cdot(1\cdot a)^2 + a\cdot(k-k^2)\cdot(k\cdot a)^2 \\
&\quad + a\cdot(k^2-k^3)\cdot(k^2\cdot a)^2 + a\cdot(k^3-k^4)\cdot(k^3\cdot a)^2 + \ldots \\
&= a\cdot(1-k)\cdot(1\cdot a)^2 + a\cdot k\cdot(1-k)\cdot(k\cdot a)^2 \\
&\quad + a\cdot k^2\cdot(1-k)\cdot(k^2\cdot a)^2 + a\cdot k^3\cdot(1-k)\cdot(k^3\cdot a)^2 + \ldots \\
&= a\cdot(1-k)\cdot\left[a^2 + k^3\cdot a^2 + k^6\cdot a^2 + k^9\cdot a^2 + \ldots\right] \\
&= a^3\cdot(1-k)\cdot\left[1 + k^3 + k^6 + k^9 + \ldots\right] \\
&= a^3\cdot\frac{1-k}{1-k^3} = a^3\cdot\frac{1}{1+k+k^2}
\end{aligned}$$

da $1-k^3 = (1-k)\cdot\left(1+k+k^2\right)$.

Für $k \to 1$ nähern sich die Intervallbreiten einer gleichmäßigen Breite an, wobei auch die Intervallbreite des breitesten Intervalls gegen null geht. Dann folgt

$$\lim_{k\to 1} A_k = a^3 \cdot \frac{1}{1+1+1} = \frac{a^3}{3}.$$

Verallgemeinerte Rechnung für $f(x) = x^n$ auf dem Intervall [0;a] mit bel. $k < 1$

Betrachtet man allgemein die Potenzfunktion $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, dann ändert sich die Herleitung der Flächenberechnung wie folgt:

$$\begin{aligned} A_k &= a \cdot (1-k) \cdot (1 \cdot a)^n + a \cdot (k-k^2) \cdot (k \cdot a)^n \\ &\quad + (k^2 \cdot a - k^3 \cdot a) \cdot (k^2 \cdot a)^n + (k^3 \cdot a - k^4 \cdot a) \cdot (k^3 \cdot a)^n + \ldots \\ &= a \cdot (1-k) \cdot (1 \cdot a)^n + a \cdot k \cdot (1-k) \cdot (k \cdot a)^n \\ &\quad + a \cdot k^2 \cdot (1-k) \cdot (k^2 \cdot a)^n + a \cdot k^3 \cdot (1-k) \cdot (k^3 \cdot a)^n + \ldots \\ &= a^{n+1} \cdot (1-k) \cdot \left[1 + k^{n+1} + k^{2n+2} + k^{3n+3} + \ldots\right] \\ &= a^{n+1} \cdot \frac{1-k}{1-k^{n+1}} = a^{n+1} \cdot \frac{1}{1+k+k^2+\ldots+k^n} \end{aligned}$$

Schließlich ergibt sich

$$\lim_{k\to 1} A_k = a^{n+1} \cdot \frac{1}{1+1+\ldots+1} = \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Analog lässt sich die Fermat'sche Methode für beliebige Potenzfunktionen f mit $f(x) = x^{\frac{p}{q}}$ ($p, q \in \mathbb{N}$) anwenden, beispielsweise:

Verallgemeinerte Rechnung für $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ (Quadratwurzelfunktion)

$$\begin{aligned} A_k &= a \cdot (1-k) \cdot (1 \cdot a)^{1/2} + a \cdot (k-k^2) \cdot (k \cdot a)^{1/2} \\ &\quad + (k^2 \cdot a - k^3 \cdot a) \cdot (k^2 \cdot a)^{1/2} + (k^3 \cdot a - k^4 \cdot a) \cdot (k^3 \cdot a)^{1/2} + \ldots \\ &= a \cdot (1-k) \cdot (1 \cdot a)^{1/2} + a \cdot k \cdot (1-k) \cdot (k \cdot a)^{1/2} \\ &\quad + a \cdot k^2 \cdot (1-k) \cdot (k^2 \cdot a)^{1/2} + a \cdot k^3 \cdot (1-k) \cdot (k^3 \cdot a)^{1/2} + \ldots \\ &= a^{1,5} \cdot (1-k) \cdot \left[1 + k^{1,5} + k^3 + k^{4,5} + \ldots\right] \\ &= a^{1,5} \cdot \frac{1-k}{1-k^{1,5}} = a^{1,5} \cdot \frac{(1-\sqrt{k})(1+\sqrt{k})}{1-\left(\sqrt{k}\right)^3} \\ &= a^{1,5} \cdot \frac{1+\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}+\left(\sqrt{k}\right)^2} = a^{1,5} \cdot \frac{1+\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}+k} \end{aligned}$$

Hier ergibt sich nach Grenzwertbildung

$$\lim_{k\to 1} A_k = a^{1,5} \cdot \frac{1+1}{1+1+1} = a^{1,5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{a^{1,5}}{1,5},$$

also gilt auch für $n = \frac{1}{2}$ die Regel $\lim\limits_{k\to 1} A_k = \dfrac{a^{n+1}}{n+1}$.

11.2 Wer war Pierre de Fermat?

Wann genau Pierre de Fermat geboren wurde, lässt sich wohl nicht mehr ermitteln: Zwar existiert eine Eintragung im Taufregister von Beaumont-de-Lomagne (nahe Toulouse) vom 20. August 1601 über die Taufe eines Pierre Fermat, aber die Inschrift seines Grabes in Toulouse besagt, dass Pierre de Fermat am 12. Januar 1665 im Alter von 57 Jahren starb (demnach also 1607 oder 1608 geboren sein muss).

Wie lassen sich diese voneinander abweichenden Informationen erklären?

Vermutlich kam es durch die folgenden Umstände zu den Unklarheiten über den wahren Geburtstermin Fermats: Der wohlhabende Lederhändler Dominique Fermat war in erster Ehe mit Françoise Cazeneuve verheiratet; 1601 wurde ihnen ein Kind namens Pierre geboren, das aber bald darauf starb. Nach dem Tod seiner ersten Ehefrau heiratete Dominique Fermat ein weiteres Mal; der Name seiner zweiten Frau war Claire de Long. Einer der in dieser zweiten Ehe geborenen Jungen erhielt dann den gleichen Vornamen Pierre wie sein verstorbener Halbbruder.

Nach dem Besuch einer Schule in der Region besuchte Pierre Fermat die Universitäten in Toulouse und Bordeaux – mit großem Interesse an mathematischen Themen. In Orléans schloss er ein Jura-Studium an; 1631 wurde er als Anwalt in Toulouse zugelassen. Zum *Conseiller au Parlement* (Appellationsgericht) ernannt, kümmerte er sich um Eingaben der Bürger an die Regierung in Paris.

Im Laufe der Jahre bekleidete er verschiedene Ämter am Obersten Gerichtshof in Toulouse; wegen der Bedeutung des Amtes durfte er sich „de Fermat" nennen.

Nach dem Tod seines Vaters im Jahr 1628 erbte Pierre de Fermat ein großes Vermögen und war auf die Einnahmen aus seinem Amt eigentlich nicht mehr angewiesen; aber vermutlich wegen der damit verbundenen gesellschaftlichen Stellung behielt er es bei. 1631 heiratete er eine Cousine vierten Grades; aus der Ehe gingen acht Kinder hervor, von denen fünf das Erwachsenenalter erreichten.

In einem internen Bericht wurde der Jurist Fermat als gelehrt, jedoch gelegentlich als gedankenverloren beschrieben. Dass er dennoch in höhere Ämter befördert wurde, lag an seinem Verhandlungsgeschick und seiner Unbestechlichkeit, aber auch an der Tatsache, dass viele seiner Kollegen Opfer einer Pestepidemie wurden, von der auch Fermat betroffen war, die er aber überlebte.

Warum Fermat sein Amt vielleicht tatsächlich nicht immer konzentriert wahrnahm, mag daran gelegen haben, dass ihn die Beschäftigung mit mathematischen Problemen von seinen dienstlichen Aufgaben ablenkte.

Als 21-Jähriger hatte Fermat in der Bibliothek eines Bekannten die Bücher von Euklid (ca. 325–265 v. Chr.) und Apollonius von Perge (262–190 v. Chr.) sowie die damals noch schwer zugänglichen Schriften von François Viète (Vieta, 1540–1603) studieren können und war von diesem Zeitpunkt an wohl mehr an mathematischen als an juristischen Fragen interessiert.

Er vertiefte sich in die Schriften so sehr, dass es ihm sogar gelang, aus Andeutungen und Zitaten in Schriften verschiedener Autoren eine verloren gegangene Schrift des Apollonius zu rekonstruieren.

Dies geschah mehr oder weniger im Verborgenen; nur wenige seiner Bekannten erfuhren etwas darüber, womit sich Fermat beschäftigte. Das änderte sich, als 1636 sein Studienfreund und Kollege am Appellationsgericht **Pierre de Carcavi** auf eine Stelle in Paris wechselte. Dort angekommen, machte Carcavi den Franziskaner Marin Mersenne (1588–1648) auf die mathematischen Interessen und Fähigkeiten des in der fernen Provinz lebenden Kollegen aufmerksam.

Marin Mersenne war der Organisator eines regelmäßig tagenden Arbeitskreises von Wissenschaftlern (*Academia Parisiensis,* auch *Académie de Mersenne* genannt), dem u. a. René Descartes, Girard Desargues, Gilles Personne de Roberval und Etienne Pascal sowie später auch dessen Sohn Blaise Pascal angehörten. Darüber hinaus stand Mersenne in brieflichem Kontakt mit zahlreichen Gelehrten in ganz Europa. Durch diese Verbindungen trug Mersenne dazu bei, dass sich neue wissenschaftliche Erkenntnisse schnell verbreiten konnten. 1666 wurde aus der *Academia Parisiensis* die *Académie des Sciences.*

Nach der Information durch Carcavi nahm Mersenne sogleich Briefkontakt zu Fermat auf und bat ihn um eine Rückmeldung, mit welchen Themen er sich beschäftige. Fermat sandte ihm zwei Probleme über Maxima und Minima zu – Probleme, die er mithilfe einer neuen, von ihm selbst entwickelten Methode hatte lösen können (s. u.); allerdings fügte er seine Lösung dem Antwortbrief nicht bei.

Diese „Gewohnheit“ behielt Fermat auch in den kommenden Jahren bei: Immer wieder teilte er Mersenne (bzw. später dessen Nachfolger) mit, dass er aufgrund neuer Einsichten ein bestimmtes Problem habe lösen können, gab aber selten einen Hinweis zum Lösungsweg. Mersenne gab diese Informationen dann an die anderen Korrespondenten weiter. Über den „Verteiler“ in Paris forderte Fermat auf diesem Wege seine Zeitgenossen in Europa heraus.

Schon bei ihrem ersten Kontakt mussten Mersenne und Roberval feststellen, dass sie mit den ihnen zur Verfügung stehenden Mitteln nicht in der Lage waren, die beiden Probleme zu lösen, und waren deshalb neugierig, die unbekannte Methode kennenzulernen. Daraufhin sandte Fermat an Mersenne seine (wohl schwer verständliche) Schrift *Methodus ad disquirendam maximam et minimam et de tangentibus linearum curvarum* („Methode zur Bestimmung von Maxima und Minima sowie von Tangenten an gekrümmte Kurven“), außerdem das rekonstruierte Buch *Plane loci* („Über ebene Örter“) des Apollonius.

Durch die intensive Beschäftigung mit der *Algebra* des François Viète hatte Fermat – unabhängig von Descartes – einen Weg gefunden, geometrische Probleme mithilfe algebraischer Methoden zu lösen. Er beschrieb Kurven in der Ebene durch Gleichungen mit zwei Variablen in einem Koordinatensystem, speziell die Kegelschnitte (Kreis, Ellipse, Parabel, Hyperbel) durch Gleichungen 2. Grades.

Isaac Newton (1643–1727), der noch nicht geboren war, als Fermat seinen Beitrag zur Extremwertbestimmung verfasste, bezeichnete die Abhandlung über Maxima, Minima und Tangenten als „eine inspirierende Quelle“; Pierre-Simon Laplace (1749–1827) sah in Fermat (in nationaler Begeisterung) den wahren Erfinder der Differenzialrechnung.

Beispiel für die Anwendung der Fermat'schen Methode zur Bestimmung eines Maximums

Gegeben ist ein Rechteck mit Umfang 100 LE. Gesucht sind die Seitenlängen des Rechtecks mit maximalem Flächeninhalt.

Mit a bezeichne man die Länge einer der Seiten des größtmöglichen Rechtecks; dann gilt für die andere Seitenlänge $b = 50 - a$ und für den Flächeninhalt $A(a) = a \cdot (50 - a) = 50a - a^2$.

Verändert man nun die Seitenlänge a auf $a + \varepsilon$ mit einem kleinen ε, dann gilt für den zugehörigen Flächeninhalt $A(a+\varepsilon) \approx A(a)$, also $A(a+\varepsilon) = 50(a+\varepsilon) - (a+\varepsilon)^2 = 50a + 50\varepsilon - a^2 - 2a\varepsilon - \varepsilon^2 \approx 50a - a^2$, d. h. $50\varepsilon - 2a\varepsilon - \varepsilon^2 \approx 0$, also $2a\varepsilon \approx 50\varepsilon - \varepsilon^2$.

Nach Division durch ε ergibt sich hieraus $2a \approx 50 - \varepsilon$. Vernachlässigt man die Größe ε und macht sie beliebig klein, dann ergibt sich hieraus eine Bedingung für a:

Das Rechteck mit maximalem Flächeninhalt hat die Seitenlänge $a = 25$,
d. h., das maximale Rechteck ist ein Quadrat.

Erläuterung der Fermat'schen Vorgehensweise

Im Prinzip hat Fermat einen Differenzenquotienten gebildet und untersucht, für welchen Wert von a dieser gegen null geht:

$$\frac{A(a+\varepsilon) - A(a)}{\varepsilon} \approx 0$$

– eine Vorwegnahme der Differenzialrechnung gemäß dem Ansatz von Leibniz.

Einen ähnlich raffinierten Ansatz fand Fermat, um Tangenten an einer Kurve zu bestimmen (vgl. z. B. die Ausführungen in Sonar).

Descartes, der stolz auf seine „Erfindung“ der *Analytischen Geometrie* war, fiel es ausgesprochen schwer, Fermats Leistungen anzuerkennen.

Nachdem Fermat ihm zeigen konnte, dass seine Methode selbst für komplizierte Kurven anwendbar ist, beispielsweise für $x^3 + y^3 - 3xy = 0$, also eine algebraische Kurve dritter Ordnung (heute als kartesisches Blatt bezeichnet, vgl. Kap. 10), blieb ihm nichts anderes übrig, als dies einzuräumen – allerdings tat er es nur in einem persönlichen Brief an Fermat.

Gleichzeitig aber versuchte er Fermats Arbeit in seinem Umfeld zu diskreditieren. Vor allem ärgerte es ihn, dass Fermat in der Lage war, auf jede seiner Einwendungen einen verbesserten Vorschlag zu präsentieren.

Einer von Fermats Korrespondenten war **Bernard Frénicle de Bessy** (1605–1675), ein Amateur-Mathematiker, in dessen Nachlass man u. a. eine Übersicht über alle 880 möglichen magischen Quadrate der Ordnung 4 fand (vgl. *Mathematik ist wunderwunderschön,* Kap. 10).

Frénicle de Bessy besaß ein beeindruckendes Talent dafür, Muster in Zahlenreihen zu erkennen. Beispielsweise war er der Erste, der auf eines der „Rundschreiben" Fermats reagierte und Lösungen zu den folgenden von Fermat gestellten Aufgaben präsentierte:

Fermat-Probleme

Besondere Kubik- bzw. Quadratzahlen

- Finde Kubikzahlen n, deren Summe aller Teiler eine Quadratzahl ist.
- Finde Quadratzahlen n, deren Summe aller Teiler eine Kubikzahl ist.

Beispiele für Teilersummen

Die Summe der Teiler der Zahl n wird üblicherweise mit $\sigma(n)$ bezeichnet. Diese Summe hängt von der Anzahl der Primfaktoren der Zahl n ab, vgl. z. B. *Mathematik ist wunderwunderschön,* Abschn. 4.3.

- Teilersummen von Kubikzahlen:

  $\sigma(1^3) = 1 = 1^2$, $\sigma(2^3) = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$, $\sigma(3^3) = 1 + 3 + 9 + 27 = 40$,

  $\sigma(4^3) = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 127$,

  $\sigma(5^3) = 1 + 5 + 25 + 125 = 156$,

  $\sigma(6^3) = (1 + 2 + 4 + 8) \cdot (1 + 3 + 9 + 27) = 600$,

  und (endlich) die erste Kubikzahl größer 1, welche die Bedingung erfüllt:

  $$\sigma(7^3) = 1 + 7 + 49 + 343 = 400 = 20^2$$

- Teilersummen von Quadratzahlen:

  $\sigma(1^2) = 1 = 1^3, \sigma(2^2) = 1 + 2 + 4 = 7, \sigma(3^2) = 1 + 3 + 9 = 13,$

  $\sigma(4^2) = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31, \sigma(5^2) = 1 + 5 + 25 = 31,$

  $\sigma(6^2) = (1 + 2 + 4) \cdot (1 + 3 + 9) = 91, \sigma(7^2) = 1 + 7 + 49 = 57,$

  $\sigma(8^2) = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 127,$

  $\sigma(9^2) = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 = 121,$

  $\sigma(10^2) = (1 + 2 + 4) \cdot (1 + 5 + 25) = 217, \sigma(11^2) = 1 + 11 + 121 = 133,$

  $\sigma(12^2) = (1 + 2 + 4 + 8 + 16) \cdot (1 + 3 + 9) = 403,$

  $\sigma(13^2) = 1 + 13 + 169 = 183, \sigma(14^2) = (1 + 2 + 4) \cdot (1 + 7 + 49) = 399,$

  $\sigma(15^2) = (1 + 3 + 9) \cdot (1 + 5 + 25) = 403, \ldots$

In den Jahren zwischen 1643 und 1654 hatte Fermat wegen eines Bürgerkriegs und einer Pestepidemie keine Kontakte zu den Mathematikern in Paris. Angeregt durch die *Arithmetica* des Diophant von Alexandria (um 250 n. Chr.) vertiefte er sich in ein neues Gebiet, für das die Mathematiker seiner Zeit wenig Interesse zeigten: die Zahlentheorie, die sich mit den Eigenschaften der natürlichen Zahlen (und allgemeiner: der rationalen Zahlen) beschäftigt.

Fünf Jahre nach Fermats Tod entdeckte sein Sohn Samuel auf dem Rand einer kommentierten Diophant-Übersetzung des **Bachet de Méziriac** (1581–1638) einen Eintrag, der bis heute unmittelbar mit dem Namen Fermats in Verbindung gebracht wird.

Fermat-Vermutung

Großer Fermat'scher Satz (*Fermat's last theorem,* FLT)

Die diophantische Gleichung $x^n + y^n = z^n$ mit $x,\ y,\ z \in \mathbb{N}$ hat für $n > 2$ keine Lösung für natürliche Exponenten n.

Statt einer Beweisidee hatte Fermat die berühmt gewordene Anmerkung notiert:

> Cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet (Ich habe einen wahrhaft wunderbaren Beweis gefunden, aber dieser Rand ist zu schmal, ihn zu fassen).

Man kann davon ausgehen, dass Fermat bald selbst erkannte, dass er sich bzgl. des angeblich gefundenen Beweises geirrt hatte; jedenfalls bemühten sich später viele Mathematiker um den Beweis, der dann erst 1995 dem britischen Mathematiker Andrew Wiles mit sehr großem Aufwand und mithilfe modernster Methoden gelang.

Fermat ging auf den Satz in der allgemeinen Fassung später nicht noch einmal ein; allerdings bewies er den Spezialfall für $n = 4$ nach der von ihm entwickelten *Methode des unendlichen Abstiegs*, vgl. unten.

1654 erhielt Fermat einen Brief von Blaise Pascal (1623–1662), der ihn um Bestätigung seiner eigenen Ideen zur Lösung der beiden Probleme des Chevalier de Méré bat (vgl. Kap. 12). Dieser Briefwechsel gilt als die Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Trotz wiederholter Aufforderung nahm sich Fermat nie die Zeit, die zahlreichen Ideen auszuarbeiten, die er hatte. Vergeblich versuchte Fermat seinen geschätzten Briefpartner Pascal für zahlentheoretische Probleme zu interessieren, auch in der Hoffnung, dass Pascal ihm bei der Ausarbeitung seiner Ideen behilflich sein könnte.

Hier die beiden zahlentheoretischen Sätze, mit denen er Pascals Interesse wecken wollte:

Fermat-Probleme

Herausforderungen an Pascal

- Alle Primzahlen der Form $3n + 1$ lassen sich als Kombination $x^2 + 3y^2$ zweier Quadratzahlen x, y darstellen.
- Alle Primzahlen der Form $8n + 1$ bzw. der Form $8n + 3$ lassen sich als Kombination $x^2 + 2y^2$ zweier Quadratzahlen x, y darstellen.

Beispiele

- Primzahlen der Form $3n + 1$:
  $7 = 2^2 + 3 \cdot 1^2; 13 = 1^2 + 3 \cdot 2^2; 19 = 1^2 + 3 \cdot 2^2; 31 = 2^2 + 3 \cdot 3^2;$
  $37 = 5^2 + 3 \cdot 2^2; 43 = 4^2 + 3 \cdot 3^2; 61 = 7^2 + 3 \cdot 2^2; 67 = 8^2 + 3 \cdot 1^2;$
  $73 = 5^2 + 3 \cdot 4^2; 79 = 2^2 + 3 \cdot 5^2; 97 = 7^2 + 3 \cdot 4^2;\ \ldots$
- Primzahlen der Form $8n + 1$:
  $17 = 3^2 + 2 \cdot 2^2; 41 = 3^2 + 2 \cdot 4^2; 73 = 1^2 + 2 \cdot 6^2; 89 = 9^2 + 2 \cdot 2^2;$
  $97 = 5^2 + 2 \cdot 6^2;\ \ldots$
- Primzahlen der Form $8n + 3$:
  $3 = 1^2 + 2 \cdot 1^2; 11 = 3^2 + 2 \cdot 1^2; 19 = 1^2 + 2 \cdot 3^2; 43 = 5^2 + 2 \cdot 3^2;$
  $59 = 3^2 + 2 \cdot 5^2; 67 = 7^2 + 2 \cdot 3^2; 83 = 9^2 + 2 \cdot 1^2;\ \ldots$

Immer wieder kündigte Fermat eine Veröffentlichung an, was er dann aber doch nicht in die Tat umsetzte. Beispielsweise schrieb er 1638, dass er einen wunderbaren Satz über Polygonalzahlen gefunden habe, aber keine Zeit finde, die Beweise aufzuschreiben.

Satz

Fermat'scher Polygonalzahlensatz

Jede natürliche Zahl ist entweder

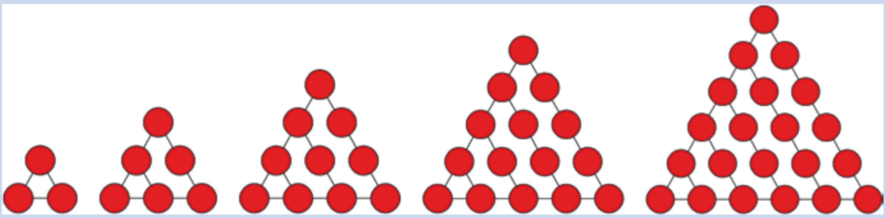
- eine Dreieckszahl oder die Summe von zwei oder drei Dreieckszahlen,
- eine Quadratzahl oder die Summe von zwei, drei oder vier Quadratzahlen,
- eine Fünfeckszahl oder die Summe von zwei, drei, vier oder fünf Fünfeckszahlen,

usw.

Der Beweis dieses Satzes erfolgte erst 1770 für Quadratzahlen durch Joseph-Louis Lagrange (1736–1813), für Dreieckszahlen 1796 durch Carl Friedrich Gauß (allerdings nicht veröffentlicht) und 1798 durch Adrien-Marie Legendre (1752–1833). Der allgemeine Beweis für beliebige Polygonalzahlen gelang schließlich Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) im Jahr 1815, wodurch dieser auf einen Schlag berühmt wurde.

Beispiele

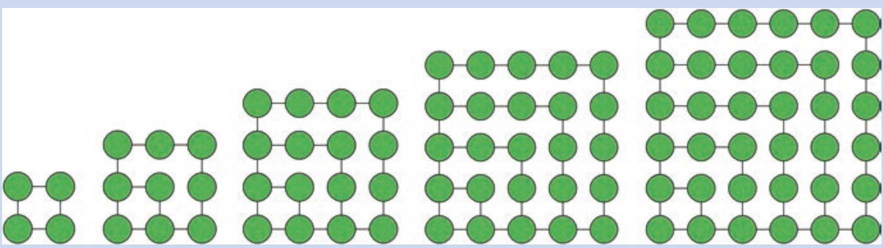
a) Folge der Dreieckszahlen: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, …



Die Folgenglieder berechnen sich gemäß der Vorschrift $a_n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_n	1	1+1	3	1+3	1+1+3	6	1+6	1+1+6	3+6	10	1+10	1+1+10

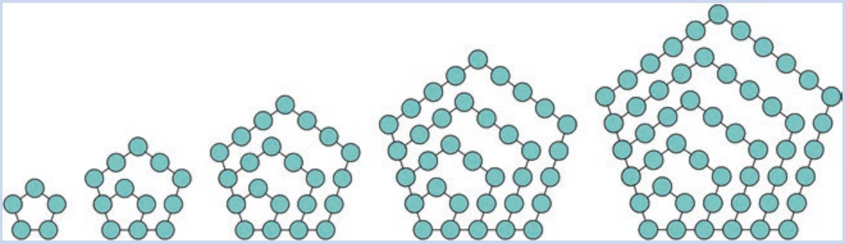
b) Folge der Quadratzahlen 1, 4, 9, 16, 25, 36, …



Die Folgenglieder berechnen sich gemäß der Vorschrift $b_n = n^2$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
b_n	1	1+1	1+1+1	4	1+4	1+1+4	1+1+1+4	4+4	9	1+9	1+1+9	1+1+1+9

c) Folge der Fünfeckszahlen 1, 5, 12, 22, 35, 51, …



Die Folgenglieder berechnen sich gemäß der Vorschrift $c_n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (3n - 1)$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
c_n	1	1+1	1+1+1	1+1+1+1	5	1+5	1+1+5	1+1+1+5	1+1+1+1+5	5+5	1+5+5	12

Da Fermat keine Abhandlungen verfasste, wurde erst viele Jahre nach dessen Tod erkannt, welch bedeutender Mathematiker er gewesen war. Sein Sohn Samuel bemühte sich in den 1670er Jahren, die Notizen des Vaters (u. a. dessen Eintragungen in der Diophant-Ausgabe) sowie dessen Ausführungen in den zahlreichen Briefen zusammenzutragen und zu veröffentlichen.

Die vielfältigen Untersuchungen und Erkenntnisse Fermats zur Zahlentheorie fanden aber über Jahrzehnte keine Beachtung; erst ab 1730 rückte dieses Teilgebiet der Mathematik durch die Arbeiten Leonhard Eulers (1707–1783) wieder in das Bewusstsein der Mathematiker. Euler hatte vor seinen eigenen Untersuchungen sorgfältig die gesammelten Schriften Fermats studiert.

Etliche Briefpartner Fermats waren der Bitte des Sohnes Samuel nicht nachgekommen, die Briefe seines Vaters zur Verfügung zu stellen, sodass viele Ideen Fermats erst im 20. Jahrhundert durch die Werkausgabe von Paul Tannery bekannt wurden.

Fermat, der kaum Reisen unternahm und sich – von wenigen Ausnahmen abgesehen – sein ganzes Leben lang in seiner heimatlichen Region zwischen Toulouse und Castres aufhielt, hatte nur wenig persönlichen Kontakt zu anderen Gelehrten. In seinen letzten Briefen an Blaise Pascal und an Christiaan Huygens klagte er über gesundheitliche Probleme, die ihn daran hinderten, diese beiden Personen einmal zu besuchen oder sich mit ihnen auf halbem Wege zu treffen.

Fermat nahm sein Amt als Richter bis wenige Tage vor seinem Tod wahr; er starb am 12. Januar 1665 in Castres.

11.3 Mit welchen (mathematischen) Themen beschäftigte sich Fermat außerdem?

Auf den folgenden Seiten kann nur angedeutet werden, mit welch vielfältigen Themen sich Fermat beschäftigte; die Aufzählung ist bei Weitem nicht vollständig.

11.3.1 Formeln für Potenzsummen

Eine der Fermat'schen Entdeckungen war die Tatsache, dass sich Dreiecks- und Tetraederzahlen als Bruchterme mit aufsteigenden Faktoren notieren lassen. (Dies ist deswegen erstaunlich, weil es sich bei diesen Zahlen um *Anzahlen* handelt, also um natürliche Zahlen. Bei den Bruchtermen handelt es sich tatsächlich nicht wirklich um Brüche, da sich alle Faktoren im Nenner kürzen lassen.)

In der folgenden Tabelle sind in Spalte 2 und 3 die von Fermat gefundenen Bruchterme notiert, mit denen man die Folge der Dreiecks- und der Tetraederzahlen berechnen kann. Die Tabelle enthält außerdem noch zwei weitere Spalten, in denen Produkte mit vier bzw. fünf aufsteigenden Faktoren (im Zähler beginnend mit n, im Nenner beginnend mit 1) stehen.

n	$\frac{n\cdot(n+1)}{1\cdot 2}$	$\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}$	$\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$	$\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot(n+4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$
1	1	1	1	1
2	3	4	5	6
3	6	10	15	21
4	10	20	35	56
5	15	35	70	126
6	21	56	126	252
7	28	84	210	462
8	36	120	330	792
9	45	165	495	1287
10	55	220	715	2002

Für alle Spalten dieser Tabelle (und nicht nur für die ersten beiden) gilt folgende bemerkenswerte Eigenschaft:

- Bestimmt man in einer Spalte die Summe der ersten n Zahlen, so erhält man die Zahl, die in der nächsten Spalte an der n-ten Stelle steht.

Beispielsweise steht die Summe der ersten fünf Zahlen der 2. Spalte, also $1+3+6+10+15=35$, an der fünften Stelle der 3. Spalte (gelb unterlegt), und die Summe der ersten vier Zahlen der 3. Spalte, also $1+5+15+35=56$, steht an der vierten Stelle der 4. Spalte (grün unterlegt).

Da man die Summanden der 2. Spalte allgemein in der Form $\frac{n\cdot(n+1)}{1\cdot 2}$ notieren kann, bedeutet dies: $\frac{1}{1\cdot 2}\cdot[\,1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n\cdot(n+1)\,]=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$

und entsprechend für die Zahlen der 3. Spalte

$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot[\ 1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\ldots+n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\ ] = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)$ usw.

Man kann nun diese Gleichungen mit dem auf der linken Seite stehenden Nenner multiplizieren und erhält dann interessante Formeln:

Formeln

Berechnung der Summe von Produkten benachbarter natürlicher Zahlen

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n\cdot(n+1)=\tfrac{1}{3}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$$

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\ldots+n\cdot(n+1)\cdot(n+2)=\tfrac{1}{4}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)$$

$$\begin{aligned}&1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+2\cdot 3\cdot 4\cdot 5+3\cdot 4\cdot 5\cdot 6+\ldots+n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\\&=\tfrac{1}{5}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot(n+4)\end{aligned}$$

usw.

Die linke Seite der ersten dieser beiden Gleichungen kann man auch wie folgt notieren:

$$\begin{aligned}&1\cdot(1+1)+2\cdot(2+1)+3\cdot(3+1)+\ldots+n\cdot(n+1)\\&=(1^2+1)+(2^2+2)+(3^2+3)+\ldots+(n^2+n)\\&=(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)+(1+2+3+\ldots+n)\\&=(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)+\tfrac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1),\end{aligned}$$

also

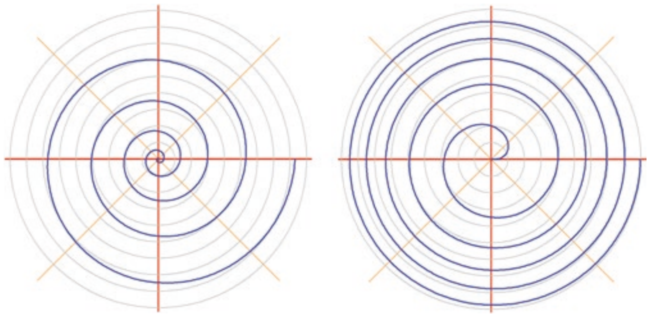
$$\begin{aligned}&1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\tfrac{1}{3}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)-\tfrac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1)\\&=\tfrac{1}{6}\cdot n\cdot(n+1)\cdot[2\cdot(n+2)-3]=\tfrac{1}{6}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)\end{aligned}$$

Nach dem gleichen Verfahren kann man ebenso schrittweise Summenformeln für höhere Potenzen von natürlichen Zahlen herleiten.

11.3.2 Fermat'sche Spirale

Fermat beschäftigte sich auch mit Variationen von archimedischen Spiralen, das sind Kurven, die durch eine Beziehung zwischen dem Abstand eines Kurvenpunkts zu einem festen Punkt (= Radius r) und dem Drehwinkel φ bestimmt sind (vgl. z. B. *Mathematik ist wunderwunderschön,* Kap. 12).

Die Beziehung $r = a \cdot \varphi$ bei den archimedischen Spiralen (vgl. folgende Abb. links) ersetzte er durch $r = a \cdot \sqrt{\varphi} = a \cdot \varphi^{\frac{1}{2}}$, wobei der Drehwinkel φ im Bogenmaß angegeben wird.



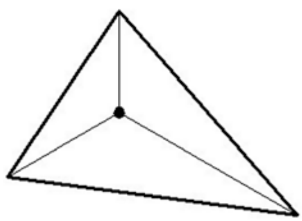
11.3.3 Fermat-Punkt

Fermat liebte es, seinen Briefpartnern Aufgaben zu stellen, die er selbst bereits hatte lösen können. So forderte er den italienischen Gelehrten **Evangelista Torricelli** (1608–1647) mit dem folgenden Problem heraus:

Fermat-Problem

Dreieckspunkt mit minimaler Entfernung zu den Eckpunkten

Im Innern eines Dreiecks, bei dem nur Winkel unter 120° auftreten, existiert ein Punkt, von dem aus die Summe der Entfernungen zu den drei Eckpunkten minimal ist.

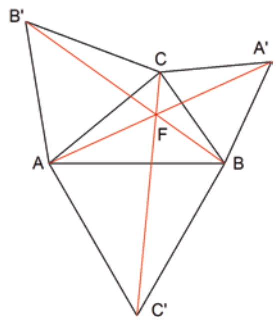


Torricelli konnte das Problem lösen, und dessen Schüler Vincenzo Viviani (1622–1703) veröffentlichte diese Lösung im Jahr 1659. In der Literatur findet man für den zu bestimmenden Punkt F daher sowohl die Bezeichnungen Punk **Fermat-Punkt** wie auch **Torricelli-Punkt.**

Konstruktion des Fermat-Punkts bei einem Dreieck
Da im Dreieck *ABC* kein Winkel größer als 120° ist, kann man über jeder der Seiten *a, b, c* des Dreiecks ein gleichseitiges Dreieck errichten und jeweils den nicht auf den Seiten *a, b, c* liegenden Eckpunkt dieser gleichseitigen Dreiecke mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt *A, B, C* des Ausgangsdreiecks verbinden. Diese Verbindungslinien verlaufen durch einen gemeinsamen Punkt *F,* den Fermat-Punkt des Dreiecks *ABC.*

Die am Punkt *F* auftretenden Winkel haben alle eine Winkelgröße von 60°, d. h., die Verbindungslinien von *F* zu den drei Eckpunkten haben jeweils einen Winkel von 120°.

Zur Begründung der Konstruktion vgl. z. B. *Mathematik ist wunderschön,* Abschn. 8.1.



11.3.4 Anwendung der Methode des unendlichen Abstiegs

Diese von Fermat entwickelte indirekte Beweismethode (auch die Bezeichnung „unendlicher Abstieg“ stammt von Fermat) nutzt eine wesentliche Eigenschaft der natürlichen Zahlen: Es gibt ein kleinstes Element in dieser Menge, d. h., $\mathbb{N}$ ist nach unten beschränkt.

Um zu beweisen, dass es für eine bestimmte Eigenschaft in der Menge der natürlichen Zahlen *keine* Lösung gibt, nimmt man das logische Gegenteil an, d. h., man geht davon aus, dass es eine Lösung des Problems gibt, und konstruiert dann mithilfe dieser Lösung eine noch kleinere Lösung. Wenn eine solche Konstruktion gelingt, kann man sie beliebig oft auf die jeweils zuletzt gefundene Lösung anwenden und erhält so eine unendliche Folge von immer kleiner werdenden positiven ganzzahligen Lösungen, was im Widerspruch zur Beschränktheit der Menge der natürlichen Zahlen nach unten steht.

In einem Brief an Huygens (über Carcavi, der nach Mersennes Tod dessen Nachfolge in der *Academia Parisiensis* angetreten hatte) deutete Fermat an, dass er die Methode des unendlichen Abstiegs verwendete, um den folgenden Satz zu beweisen:

Fermat-Problem

Flächeninhalt eines pythagoreischen Dreiecks

Der Flächeninhalt eines pythagoreischen Dreiecks kann weder eine Quadratzahl noch das Doppelte einer Quadratzahl sein.

Pythagoreische Dreiecke sind rechtwinklige Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen,

d. h., es existieren zwei natürliche Zahlen p und q, sodass $(2pq;\ p^2 - q^2;\ p^2 + q^2)$ ein pythagoreisches Zahlentripel bildet, vgl. auch Kap. 1.

p	q	$a = p^2 - q^2$	$b = 2pq$	$c = p^2 + q^2$	A
2	1	3	4	5	6
3	2	5	12	13	30
4	1	15	8	17	60
4	3	7	24	25	84
5	2	21	20	29	210
5	4	9	40	41	180
6	1	35	12	37	210
6	5	11	60	61	330
7	2	45	28	53	630
7	4	31	56	65	868
7	6	13	84	85	546
…	…	…	…	…	…

Man kann voraussetzen, dass p und q zueinander teilerfremd sind (denn Vielfache von p und q bestimmen stets ein rechtwinkliges Dreieck, das ähnlich zu diesem kleinstmöglichen Dreieck ist), außerdem, dass $p - q$ eine ungerade Zahl ist.

Dann gilt für den Flächeninhalt A des rechtwinkligen Dreiecks:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 2pq \cdot (p^2 - q^2) = pq \cdot (p - q) \cdot (p + q)$$

Durch scharfsinnige Überlegungen folgert Fermat aus der Annahme, dass A eine Quadratzahl ist, dass es dann ein kleineres pythagoreisches Dreieck geben muss, dessen Flächeninhalt ebenfalls eine Quadratzahl ist; und da man zu diesem wiederum ein noch kleineres Dreieck bestimmen könnte usw., würden die ganzzahligen Seitenlängen beliebig klein, was im Widerspruch zur Beschränktheit der Menge der natürlichen Zahlen nach unten steht.

Aus einem der Zwischenschritte des Fermat'schen Beweises ergab sich als „Nebenergebnis", dass es keine drei natürlichen Zahlen a, b, c geben kann, für die die Gleichung $a^4 + b^4 = c^4$ gilt.

11.3.5 Darstellung von Primzahlen als Summe von Quadratzahlen

Um 1640 beschäftigte sich Fermat mit der Frage, welche Primzahlen p sich als Summe von Quadratzahlen darstellen lassen. Dabei bemerkte er, dass es davon abhängt, welchen Rest die Primzahl p bei der Division durch 4 lässt.

Mit Ausnahme der Zahl 2 sind alle Primzahlen ungerade. Bezüglich der Division durch 4 gibt es also für die ungeraden Primzahlen nur die Möglichkeit, dass der Rest 1 oder 3 beträgt.

Aber nur im ersten Fall (also für den Rest 1) existiert eine Darstellung als Summe von Quadratzahlen.

Satz

Fermat'scher Zwei-Quadrate-Satz

- Keine Primzahl der Form $4n + 3$ lässt sich als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen.
- Alle Primzahlen der Form $4n + 1$ lassen sich *eindeutig* als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen.

Fermat drückte die zweite Aussage übrigens so aus: *Eine Primzahl, die ein Vielfaches von 4 um 1 übertrifft, kann nur einmal als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks auftreten.*

Beispiele

Primzahlen der Form $4n + 1$:

$5 = 1^2+2^2$, $13 = 2^2+3^2$, $17 = 1^2+4^2$, $29 = 2^2+5^2$, $37 = 1^2+6^2$, $41 = 4^2+5^2$, $53 = 2^2+7^2$.

Primzahlen der Form $4n + 3$:

$$7 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2;\ 11 = 1^2 + 1^2 + 3^2;\ 19 = 1^2 + 3^2 + 3^2;$$
$$23 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2;\ 31 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 5^2;$$
$$43 = 1^2 + 1^2 + 4^2 + 5^2;\ 47 = 1^2 + 1^2 + 5^2 + 6^2.$$

Die erste Aussage des Fermat'schen Zwei-Quadrate-Satzes ist einfach zu beweisen:

Das Quadrat einer *geraden* natürlichen Zahl ist stets durch 4 teilbar; das Quadrat einer *ungeraden* natürlichen Zahl lässt bei der Division durch 4 den Rest 1:

$$(2k)^2 = 4 \cdot k^2 + 0 \text{ und } (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4 \cdot (k^2 + k) + 1.$$

Daher kann die Summe von zwei Quadratzahlen bei der Division durch 4 nur die Reste 0, 1 oder 2 lassen – der Rest 3 kann also nicht auftreten.

Und: Wenn es überhaupt eine Darstellung einer ungeraden Primzahl als Summe zweier Quadratzahlen gibt, dann muss der eine Summand gerade, der andere ungerade sein.

Die besondere – erst von Leonhard Euler bewiesene – Aussage ist, dass für *alle* Primzahlen von der Form $4n + 1$ eine solche Summendarstellung *existiert* und dass diese (bis auf die Reihenfolge der Summanden) *eindeutig* ist (d. h., es gibt *genau eine* Summendarstellung dieser Primzahl mit Quadratzahlen).

Die Umkehrung des Satzes ist allerdings nicht richtig. Es gibt also auch natürliche Zahlen vom Typ $4n + 1$, für die es nur *eine* Darstellung als Summe von Quadratzahlen gibt, die aber *keine* Primzahlen sind.

Andererseits gilt: Wenn sich eine natürliche Zahl vom Typ $4n + 1$ *nicht* als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen lässt oder wenn es zwei oder mehr Möglichkeiten dafür gibt, dann kann es sich *nicht* um eine Primzahl handeln.

Beispiele

- Die Zahl $25 = 4 \cdot 6 + 1$ lässt sich nur auf *eine* Art als Summe von Quadratzahlen darstellen: $25 = 9 + 16 = 3^2 + 4^2$. Es handelt sich aber *nicht* um eine Primzahl.
- Die Zahl $45 = 4 \cdot 11 + 1$ lässt sich nur auf *eine* Art als Summe von Quadratzahlen darstellen: $45 = 9 + 36 = 3^2 + 6^2$. Es handelt sich aber *nicht* um eine Primzahl.
- Die Zahl $133 = 4 \cdot 33 + 1$ lässt sich *nicht* als Summe von Quadratzahlen darstellen, ist also auch keine Primzahl (es gilt nämlich $133 = 7 \cdot 19$).
- Die Zahl $221 = 4 \cdot 55 + 1$ lässt sich auf *zwei* Arten als Summe von Quadratzahlen darstellen (nämlich $221 = 10^2 + 11^2 = 5^2 + 14^2$, ist also auch keine Primzahl (es gilt nämlich $221 = 13 \cdot 17$).
- Die Zahl $2873 = 4 \cdot 718 + 1$ lässt sich sogar auf *drei* Arten als Summe von Quadratzahlen darstellen (nämlich $2873 = 8^2 + 53^2 = 13^2 + 52^2 = 32^2 + 43^2$, ist also auch keine Primzahl (es gilt nämlich $2873 = 13^2 \cdot 17$).

Übrigens
Aus der Tatsache, dass sich die Primzahlen der Form $4n + 1$ als Summe zweier Quadratzahlen darstellen lassen, kann man erschließen, dass auch das Produkt zweier solcher Primzahlen diese Eigenschaft hat; außerdem ergibt sich, dass für dieses Produkt dann zwei verschiedene Summendarstellungen mit Quadratzahlen existieren.

Beispiele

$$145 = 5 \cdot 29 = (1^2 + 2^2) \cdot (2^2 + 5^2) = (1 \cdot 2 + 2 \cdot 5)^2 + (1 \cdot 5 - 2 \cdot 2)^2 = 12^2 + 1^2 \text{ und}$$
$$= 9^2 + (-8)^2 = 9^2 + 8^2;$$
$$221 = 13 \cdot 17 = (2^2 + 3^2) \cdot (1^2 + 4^2) = (2 \cdot 1 + 3 \cdot 4)^2 + (2 \cdot 4 - 3 \cdot 1)^2 = 14^2 + 5^2 \text{ und}$$
$$= 11^2 + (-10)^2 = 11^2 + 10^2$$

Bei den Umformungen wird die folgende nützliche Formel über das Produkt von Quadratsummen verwendet, die (vermutlich) bereits Diophant bekannt war:

$$(a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) = (a \cdot c + b \cdot d)^2 + (a \cdot d - b \cdot c)^2$$

Der deutsche Mathematiker Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) konnte den Fermat'schen Satz verallgemeinern:

Satz

Jacobi'scher Zwei-Quadrate-Satz

Eine natürliche Zahl n ist genau dann als Summe von zwei Quadratzahlen darstellbar, wenn die Primfaktoren von n, die bei der Division durch 4 den Rest 3 lassen, geradzahlig oft vorkommen.

Beispiel

$$\begin{aligned}585 &= 3^2 \cdot 5 \cdot 13 = 3^2 \cdot (1^2 + 2^2) \cdot (2^2 + 3^2) = (3^2 + 6^2) \cdot (2^2 + 3^2)\\ &= (3 \cdot 2 + 6 \cdot 3)^2 + (3 \cdot 3 - 6 \cdot 2)^2 = 24^2 + (-3)^2 = 24^2 + 3^2\end{aligned}$$

11.3.6 Lösung der sog. Pell'schen Gleichung

Bereits Archimedes und später auch indische Mathematiker beschäftigten sich mit den ganzzahligen Lösungen von Gleichungen des Typs $x^2 - n \cdot y^2 = \pm 1$.

Fermat war von der Richtigkeit des folgenden Satzes überzeugt:

Satz

Lösungen der Pell'schen Gleichung

- Jede Gleichung der Form $x^2 - n \cdot y^2 = 1$ besitzt unendlich viele Lösungen, sofern n keine Quadratzahl ist.
- Der Bruch $\frac{x}{y}$ ist ein Näherungswert für $\sqrt{n}$.
- Hat man eine kleinste Lösung $(x_1; y_1)$ für die Gleichung $x^2 - n \cdot y^2 = 1$ gefunden, dann kann man alle weiteren Lösungspaare $(x_k; y_k)$ mithilfe der Beziehung $x_k - \sqrt{n} \cdot y_k = \left(x_1 - \sqrt{n} \cdot y_1\right)^k$ durch Koeffizientenvergleich bestimmen.

1657 gab Frénicle de Bessy in einem Brief an englische Mathematiker die Information weiter, dass Fermat alle kleinsten Lösungen für natürliche Zahlen n bis einschließlich 150 gefunden habe, und forderte die englischen Gelehrten auf, die jeweils kleinsten Lösungen auch für die Fälle bis $n = 313$ zu bestimmen, was nach einer Rückmeldung von John Wallis (1616–1703) seinem Kollegen William Brouncker (1620–1684) tatsächlich gelang.

Irrtümlich ordnete später Leonhard Euler diese Untersuchungen dem englischen Mathematiker John Pell (1611–1685) zu, der sich überhaupt nicht mit dem Problem beschäftigt hatte. Die Bezeichnung *Pell'sche Gleichung* blieb dennoch bestehen; in Frankreich spricht man üblicherweise von der *Équation de Pell-Fermat,* was mehr als berechtigt erscheint.

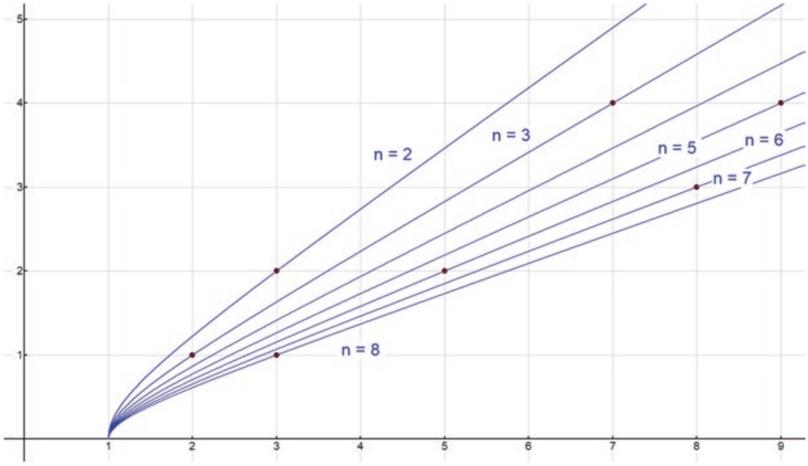


Abb. 11.2 Lösungen der Pell'schen Gleichung

Die folgende Tabelle enthält die kleinsten Lösungspaare der Pell'schen Gleichung; die Grafik in Abb. 11.2 zeigt die im ersten Quadranten liegenden Hyperbeläste der Gleichungen $x^2 - n \cdot y^2 = 1$ für $n = 2, 3, \ldots, 8$ mit den jeweils kleinsten Lösungspaaren (da diese ganzzahlig sind, liegen sie auf den Gitterpunkten des Koordinatensystems). Im Fall $n = 3$ ist auch das zweite Lösungspaar (7;4) eingezeichnet.

n	2	3	5	6	7	8	10	11	12	13	14	15	17	18	19	20
x_0	3	2	9	5	8	3	19	10	7	649	15	4	33	17	170	9
y_0	2	1	4	2	3	1	6	3	2	180	4	1	8	4	39	2

Beispiele

Näherungsweise Bestimmung von Quadratwurzeln mithilfe der Pell'schen Lösungspaare

(3;2) ist eine erste Lösung der Gleichung $x^2 - 2 \cdot y^2 = 1$, da $3^2 - 2 \cdot 2^2 = 1$. Daher ist $\frac{3}{2}$ ein erster Näherungswert für $\sqrt{2}$.

Wegen $x_2 - \sqrt{n} \cdot y_2 = (x_1 - \sqrt{n} \cdot y_1)^2$ folgt:

$x_2 - \sqrt{2} \cdot y_2 = (3 - 2 \cdot \sqrt{2})^2 = 9 - 12 \cdot \sqrt{2} + 8 = 17 - 12 \cdot \sqrt{2}$,

d. h., (17; 12) ist eine weitere Lösung der Gleichung $x^2 - 2 \cdot y^2 = 1$ und $\frac{17}{12}$ ist ein zweiter Näherungswert für $\sqrt{2}$.

Wegen $x_3 - \sqrt{n} \cdot y_3 = (x_1 - \sqrt{n} \cdot y_1)^3$ folgt

$x_3 - \sqrt{2} \cdot y_3 = (3 - 2 \cdot \sqrt{2})^3 = 27 - 54 \cdot \sqrt{2} + 72 - 16 \cdot \sqrt{2} = 99 - 70 \cdot \sqrt{2}$,

und $\frac{99}{70}$ ist ein dritter Näherungswert für $\sqrt{2}$ usw.

11.3.7 Mersenne- und Fermat-Primzahlen

Mersenne hatte großes Interesse an den Beziehungen zwischen besonderen natürlichen Zahlen, wie beispielsweise den *vollkommenen Zahlen* (vgl. Kap. 4) oder den *befreundeten Zahlen*, das sind natürliche Zahlen a, b, für die die Eigenschaft $\sigma(a)=b$ und $\sigma(b)=a$ erfüllt ist ($\sigma(n)=$ Summe der echten Teiler von n).

Im Zusammenhang mit den vollkommenen Zahlen beschäftigte sich Mersenne mit der Frage, welche Zahlen der Form $M_n = 2^n - 1$ Primzahlen sind; diese werden heute als *Mersenne-Primzahlen* bezeichnet.

Als Mersenne-Primzahlen kommen sowieso nur solche infrage, deren Exponenten n selbst Primzahlen sind, denn für einen zusammengesetzten Exponenten $n = a \cdot b$ gilt, dass $M_n = 2^{a \cdot b} - 1$ sowohl durch $2^a - 1$ als auch durch $2^b - 1$ teilbar ist, vgl. Beispiele in der folgenden Tabelle.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$M_n = 2^n - 1$	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047	4095
teilbar durch				M_2		M_2, M_3		M_2, M_4	M_3	M_2, M_5	23, 89	M_2, M_3, M_4

Weitere Beispiele für Mersenne-Primzahlen sind $M_{13} = 8191$, $M_{17} = 131.071$ und $M_{19} = 524.287$.

Fermat konnte zeigen, dass $M_{23} = 8.388.607 = 47 \cdot 178.481$ und $M_{37} = 137.438.953.471 = 223 \cdot 616.318.177$ keine Primzahlen sind, und Euler fand 1738 eine Zerlegung für $M_{29} = 536870911 = 233 \cdot 1103 \cdot 2089$.

Die Suche nach Mersenne-Primzahlen dauert bis heute an. Man weiß nicht, ob es endlich oder unendlich viele Mersenne-Primzahlen gibt. 2001 wurde die 39. Mersenne-Primzahl gefunden; das Fürstentum Liechtenstein veröffentlichte aus diesem Anlass eine Briefmarke (die außerdem eine logarithmische Spirale zeigt).

Fermat untersuchte andere Zweierpotenzen von natürlichen Zahlen, und zwar Zahlen der Form $F_n = 2^{2^n} + 1$, die heute als *Fermat-Zahlen* bezeichnet werden. Er vermutete, dass es sich dabei stets um Primzahlen handelt.

Bei den Zahlen $F_0 = 2^{2^0} + 1 = 3$, $F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5$; $F_2 = 2^{2^2} + 1 = 17$; $F_3 = 2^{2^3} + 1 = 257$ und $F_4 = 2^{2^4} + 1 = 65.537$ stimmt dies. Allerdings fand Euler 1732 heraus, dass $F_5 = 4.294.967.297$ nicht prim ist, denn die Zahl ist durch 641 teilbar. (Heute vermutet man, dass die Zahlen F_0 bis F_4 die einzigen Fermat-Primzahlen sind.)

11.3.8 Kleiner Fermat'scher Satz

Im Jahr 1640 berichtete Fermat in einem Brief an Frénicle de Bessy über eine Beobachtung, die er bei Potenzen von natürlichen Zahlen gemacht hatte.

Um den folgenden Satz zu unterscheiden vom Großen Fermat'schen Satz, also von der Fermat'schen Vermutung (FLT), wurde das Adjektiv „klein" hinzugefügt.

Satz

Kleiner Fermat'scher Satz

In jeder geometrischen Zahlenfolge a, a^2, a^3, … zu einer natürlichen Zahl a existiert für jede Primzahl p, die kein Teiler von a ist, ein kleinstes Folgenglied a^n derart, dass die Primzahl p die Zahl $a^n - 1$ teilt (dass also a^n bei der Division durch p den Rest 1 lässt; letzteres notiert man kurz in der Form $a^n \equiv 1 \pmod{p}$).

Diese kleinste natürliche Zahl n ist ein Teiler von $p - 1$. Die Teilbarkeitseigenschaft gilt auch für alle Vielfachen von n.

Beispiele

- $a = 2$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096
$a^n - 1$	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047	4095
$p = 3$ teilt $a^n - 1$	nein	ja	nein	ja	nein	ja	nein	ja	nein	ja	nein	ja
$p = 5$ teilt $a^n - 1$	nein	nein	nein	ja	nein	nein	nein	ja	nein	nein	nein	ja
$p = 7$ teilt $a^n - 1$	nein	nein	ja	nein	nein	ja	nein	nein	ja	nein	nein	ja

Die kleinste natürliche Zahl n, für die die Primzahl $p = 3$ die natürliche Zahl $a^n - 1$ teilt, ist $n = 2$. Diese ist ein Teiler von $p - 1$. Die weiteren Teiler von $a^n - 1$ sind Vielfache von $n = 2$.

Die kleinste natürliche Zahl n, für die die Primzahl $p = 5$ die natürliche Zahl $a^n - 1$ teilt, ist $n = 4$. Diese ist ein Teiler von $p - 1$. Die weiteren Teiler von $a^n - 1$ sind Vielfache von $n = 4$.

Die kleinste natürliche Zahl n, für die die Primzahl $p = 7$ die natürliche Zahl $a^n - 1$ teilt, ist $n = 3$. Diese ist ein Teiler von $p - 1$. Die weiteren Teiler von $a^n - 1$ sind Vielfache von $n = 3$.

usw.

- $a = 3$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a^n	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049	177147	531441
$a^n - 1$	2	8	26	80	242	728	2186	6560	19682	59048	177146	531440
$p = 5$ teilt $a^n - 1$	nein	nein	nein	ja	nein	nein	nein	ja	nein	nein	nein	ja
$p = 7$ teilt $a^n - 1$	nein	nein	nein	nein	nein	ja	nein	nein	nein	nein	nein	ja
$p = 11$ teilt $a^n - 1$	nein	nein	nein	nein	ja	nein	nein	nein	nein	ja	nein	nein

Die kleinste natürliche Zahl n, für die die Primzahl $p = 5$ die natürliche Zahl $a^n - 1$ teilt, ist $n = 4$. Diese ist ein Teiler von $p - 1$. Die weiteren Teiler von $a^n - 1$ sind Vielfache von $n = 4$.

Die kleinste natürliche Zahl n, für die die Primzahl $p = 7$ die natürliche Zahl $a^n - 1$ teilt, ist $n = 6$. Diese ist ein Teiler von $p - 1$. Die weiteren Teiler von $a^n - 1$ sind Vielfache von $n = 6$.

Die kleinste natürliche Zahl n, für die die Primzahl $p = 11$ die natürliche Zahl $a^n - 1$ teilt, ist $n = 5$. Diese ist ein Teiler von $p - 1$. Die weiteren Teiler von $a^n - 1$ sind Vielfache von $n = 5$.

usw.

Üblicherweise wird der Kleine Fermat'sche Satz in der folgenden Form zitiert:

- Für jede Primzahl n und für beliebige natürlichen Zahlen a gilt:
  Die Potenz a^n lässt bei der Division durch n den Rest a.

Äquivalente Formulierungen:

- Für jede Primzahl n und für beliebige natürlichen Zahlen a gilt:
  Die Zahl $a^n - a$ ist durch n teilbar.
- Für jede Primzahl n und für beliebige, zu n teilerfremde natürlichen Zahlen a gilt:
  Die Zahl $a^{n-1} - 1$ ist durch n teilbar.

Beispiele

- $a = 2$: Es gilt: $8 = 2^3 \equiv 2 \pmod 3$, d. h., die Potenz 2^3 lässt bei der Division durch 3 den Rest 2, und weiter
  $32 = 2^5 \equiv 2 \pmod 5$, $128 = 2^7 \equiv 2 \pmod 7$, $2048 = 2^{11} \equiv 2 \pmod{11}$, ...
  Die Beziehung gilt beispielsweise nicht in den folgenden Fällen:
  $64 = 2^6 \equiv 4 \pmod 6$, $256 = 2^8 \equiv 4 \pmod 8$, $512 = 2^9 \equiv 8 \pmod 9$, $1024 = 2^{10} \equiv 4 \pmod{10}$.
- $a = 3$: Es gilt: $243 = 3^5 \equiv 3 \pmod 5$, $2187 = 3^7 \equiv 3 \pmod 7$, ...
  Die Beziehung gilt auch für $n \leq a$: $9 = 3^2 \equiv 1 \pmod 2 \equiv 3 \pmod 2$, $27 = 3^3 \equiv 0 \pmod 3 \equiv 3 \pmod 3$, aber beispielsweise nicht in den Fällen $81 = 3^4 \equiv 1 \pmod 4$, $729 = 3^6 \equiv 3 \pmod 6$, $6561 = 3^8 \equiv 1 \pmod 8$.
- $a = 4$: Es gilt: $1024 = 4^5 \equiv 4 \pmod 5$, $16384 = 4^7 \equiv 4 \pmod 7$, ...
  Die Beziehung gilt auch für $n \leq a$: $16 = 4^2 \equiv 0 \pmod 2 \equiv 4 \pmod 2$, $64 = 4^3 \equiv 1 \pmod 3 \equiv 4 \pmod 3$, zwar auch für $n = 6$: $4096 = 4^6 \equiv 4 \pmod 6$, aber beispielsweise nicht für $n = 8$: $65536 = 4^8 \equiv 0 \pmod 8$.

Leonhard Euler konnte den von Fermat aufgestellten Satz beweisen; später verallgemeinerte er ihn zu der folgenden Aussage:

Satz

Satz von Euler

Sind die Zahlen n und a zueinander teilerfremd, dann gilt $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$, wobei $\varphi(n)$=Anzahl der zu n teilerfremden Zahlen aus der Menge $\{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$.

Im Fall, dass n eine Primzahl ist, gilt $\varphi(n) = n - 1$, also $a^{n-1} \equiv 1 \pmod n$, d. h. $a^n \equiv a \pmod n$.

Der Kleine Fermat'sche Satz ist also ein Spezialfall des Euler'schen Satzes.

Es existieren zahlreiche Beweise des *Kleinen Satzes von Fermat.*

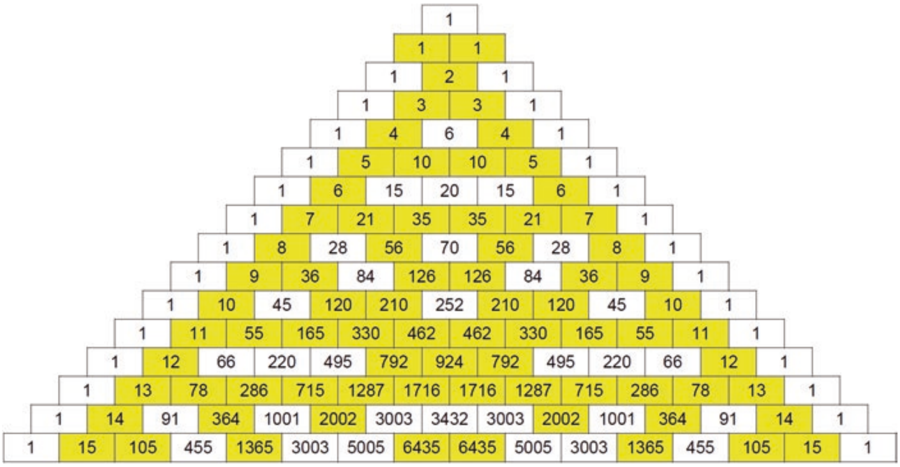


Abb. 11.3 Durch die Zeilennummer teilbare Binomialkoeffizienten

Fermat selbst wies in einem Brief an Mersenne auf folgende Eigenschaft hin:

Aus dem binomischen Lehrsatz ergibt sich

$$2^p = (1+1)^p = 1 + \left[\binom{p}{1} + \binom{p}{2} + \ldots + \binom{p}{p-1}\right] + 1,$$

und da alle Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ mit $0 < k < n$ durch n teilbar sind, wenn n eine Primzahl ist, folgt, dass $2^p - 2 \equiv 0 \pmod{p}$.

Vergleiche hierzu auch Abb. 11.3 (aus *Mathematik ist wunderwunderschön,* Kap. 6).

Euler ergänzte 1742: Für den Nachfolger $a+1$ einer natürlichen Zahl a gilt

$$(a+1)^p = a^p + \left[\binom{p}{1} \cdot a^{p-1} + \binom{p}{2} \cdot a^{p-2} + \ldots + \binom{p}{1} \cdot a^1\right] + 1 \equiv a^p + 1 \pmod{p},$$

denn alle in den eckigen Klammern stehenden Summanden sind durch p teilbar.

Wenn $a^n - a$ durch p teilbar ist, dann gilt dies daher auch für $(a+1)^p - (a+1)$.

Sicherlich ebenfalls *genial* ist der Beweis des Fermat'schen Satzes mithilfe von Überlegungen an bunten Perlenketten, vgl. *Mathematik ist wunderwunderschön,* Kap. 11.

11.3.9 Fermat'scher Primzahltest

Zwar gilt die Umkehrung des Kleinen Fermat'schen Satzes im Allgemeinen nicht; man kann aber die Kontraposition des Satzes nutzen, um die Primzahleigenschaft einer Zahl auszuschließen:

- **Kontraposition des Kleinen Fermat'schen Satzes:**
  Gilt für jede beliebige zu n teilerfremde natürliche Zahl a, dass die Zahl $a^{n-1} - 1$ *nicht* durch n teilbar ist, dann ist n *keine* Primzahl.

Findet man also eine natürliche Zahl a, für die $a^{n-1} - 1$ *nicht* durch n teilbar ist, dann ist die Zahl n auch keine Primzahl, sondern eine zusammengesetzte Zahl.

Beispiele

- Für $n = 341$ und $a = 2$ gilt: $2^{341-1} - 1$ ist teilbar durch 341. Daher ist 341 eine zusammengesetzte Zahl (es gilt übrigens $341 = 31 \cdot 11$).
- Für $n = 91$ und $a = 3$ gilt: $3^{91-1} - 1$ ist teilbar durch 91. Daher ist 91 eine zusammengesetzte Zahl (es gilt übrigens $91 = 13 \cdot 7$).
- Für $n = 451$ und $a = 4$ gilt: $4^{451-1} - 1$ ist teilbar durch 451. Daher ist 451 eine zusammengesetzte Zahl (es gilt übrigens $451 = 41 \cdot 11$).

Weitere Beispiele findet man beispielsweise unter: https://de.wikibooks.org/wiki/Pseudoprimzahlen:_Tabelle_Fermatsche_Pseudoprimzahlen

Erfüllt eine natürliche Zahl n die Bedingung, dass $a^{n-1} - 1$ durch n teilbar ist, dann bezeichnet man eine solche Zahl als *Pseudoprimzahl bzgl. der Basis a.*

Tatsächlich aber gibt es auch natürliche Zahlen n, bei denen die Eigenschaft der Teilbarkeit von $a^{n-1} - 1$ durch n für alle a mit $1 < a < n$ erfüllt ist und die trotzdem keine Primzahlen sind. Dies sind die sog. *Carmichael-Zahlen*, benannt nach dem amerikanischen Mathematiker Robert Carmichael, der als Erster solche Zahlen entdeckte. Die kleinste Carmichael-Zahl ist $561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$.

11.3.10 Faktorisierung großer Zahlen

1643 entwickelt Fermat ein geniales Verfahren zur Faktorisierung großer Zahlen.

Verfahren

Fermat'sche Methode zur Faktorisierung natürlicher Zahlen

Gegeben ist eine natürliche Zahl n, für die eine Zerlegung in Faktoren gesucht wird.

Mithilfe des Suchalgorithmus in Abb. 11.4 findet man nach endlich vielen Schritten eine Zerlegung von n, sofern sie existiert.

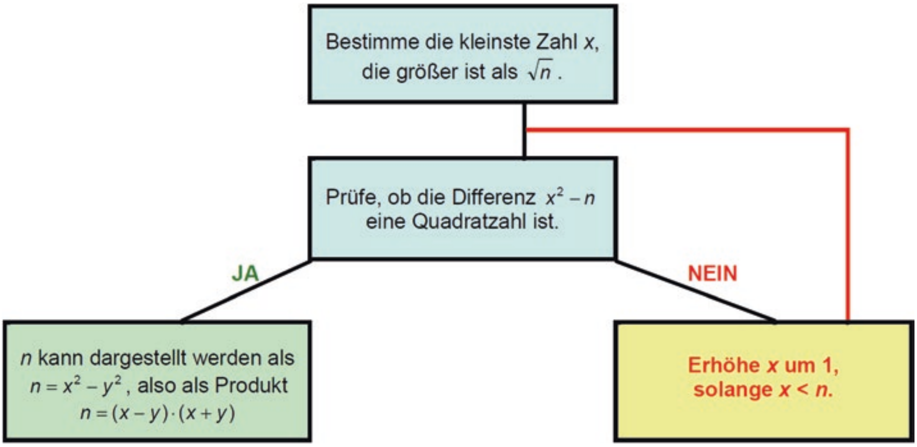


Abb. 11.4 Fermats Methode zur Faktorisierung natürlicher Zahlen

Beispiel

Ist 527 eine Primzahl oder kann man diese Zahl als Produkt zweier natürlicher Zahlen darstellen?

Die kleinste natürliche Zahl x mit $x > \sqrt{n}$ ist die Zahl $x = 23$, denn $x^2 = 529 > 527$ und $(x - 1)^2 = 484 < 527$.

Für die Differenz $x^2 - n = 529 - 527 = 2$ stellt man fest, dass es sich *nicht* um eine Quadratzahl handelt.

x wird um 1 erhöht; es gilt also $x = 24$ mit $x^2 = 576$.

Für die Differenz $x^2 - n = 576 - 527 = 49$ stellt man fest, dass es sich um eine Quadratzahl handelt, nämlich um das Quadrat der Zahl $y = 7$.

Aus $x = 24$ und $y = 7$ folgt:
$n = x^2 - y^2 = (x - y) \cdot (x + y) = (24 - 7) \cdot (24 + 7) = 17 \cdot 31$
Ergebnis: 527 ist also keine Primzahl.

Fermat hatte dieses Verfahren in einem Brief an Mersenne am Beispiel der Zahl $n = 2.027.651.281$ demonstriert. Der Suchalgorithmus beginnt hier mit der ganzen Zahl $x = 45.030$ mit $x^2 = 2.027.700.900$.

Für die Differenz $x^2 - n = 2.027.700.900 - 2.027.651.281 = 49.619$ stellt man fest, dass es sich *nicht* um eine Quadratzahl handelt ($222^2 = 49.284$, $223^2 = 49.729$).

Im nächsten Schritt berechnet man

$$\begin{aligned} x^2 - n &= 45031^2 - 2.027.651.281 = (45030^2 + 45.030 + 45.031) - 2.027.651.281 \\ &= 49.619 + 45.030 + 45.031 = 139.680 \end{aligned}$$

Dabei nutzt man die Tatsache, dass sich die Differenz zweier aufeinanderfolgender Quadratzahlen aus der Summe der beiden Zahlen ergibt, also $(a+1)^2 - a^2 = (a+1) + a = 2a + 1$.

Auch diese Zahl ist offensichtlich keine Quadratzahl, und weiter

$$x^2 - n = 45032^2 - 2.027.651.281 = 139.680 + 45.031 + 45.032 = 229.743 \text{ usw}$$

Die Quadratzahl-Überprüfung kann bei etlichen Zwischenschritten abgekürzt werden, wenn man darauf achtet, dass die Endziffer einer Quadratzahl entweder 0, 1, 4, 5, 6 oder 9 ist bzw. dass die letzten beiden Endziffern 00, 01, 04, 09, 16, 21, 24, 25, 29, 36, 41, 44, 49, 56, 61, 64, 69, 76, 81, 84, 89, 96 sein müssten (vgl. z. B. *Mathematik ist schön,* Abschn. 7.1).

Schließlich fand Fermat auf diese Weise (in diesem Beispiel allerdings erst nach *sehr* vielen Schritten) $n = 45.041^2 - 1020^2 = 46.601 \cdot 44.021$.

Im Prinzip könnte man die von Fermat entdeckte Methode dazu verwenden, um zu prüfen, ob eine zu untersuchende natürliche Zahl eine Primzahl ist, oder durch ggf. mehrfache Anwendung des Algorithmus, welche Primfaktorzerlegung eine gegebene Zahl hat.

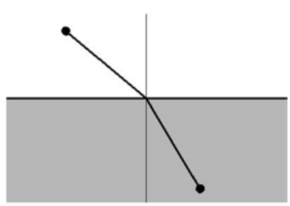
11.3.11 Ein Beitrag Fermats zur Physik

René Descartes hatte 1637 in seiner Abhandlung zur Optik u. a. ein Brechungsgesetz aufgestellt, durch das der Übergang eines Lichtstrahls vom „dichteren" zum „dünneren" Medium oder umgekehrt beschrieben wird. Dieses Gesetz war fast zeitgleich auch vom niederländischen Gelehrten Willebrord van Roijen Snell (1580–1626, latinisiert: Snellius) entdeckt worden, vorher aber auch um 1602 von Thomas Harriot und vom persischen Gelehrten Ibn Sahl um 984.

Physikalisches Gesetz

Descartes-Snell'sches Brechungsgesetz

Für zwei Medien 1 und 2 (z. B. Luft und Wasser) gibt es charakteristische Brechungsindizes n_1 und n_2, aus deren Verhältnis sich die Brechungswinkel (Winkel gegenüber dem Lot) ergeben: $\sin(\alpha) : \sin(\beta) = n_1 : n_2$



Descartes hatte in seiner Abhandlung die These vertreten, dass das Licht im „dichteren“ Medium weniger „Widerstand“ erfährt als im dünneren und dass sich hieraus das Gesetz ergibt. Dass ausgerechnet Fermat, sein unerwünschter Konkurrent in der Analytischen Geometrie, dieser These widersprach, rief bei Descartes eine wütende Reaktion hervor.

Fermat ging danach in seinen nächsten Briefen nicht mehr auf das Thema ein, bis er zwanzig Jahre später (also nach Descartes’ Tod) die richtige Begründung für dieses grundlegende Gesetz der Optik gefunden hatte:

Physikalische Modellvorstellung

Fermat’sches Prinzip

Beim Übergang von einem Medium zum anderen wählt das Licht den „schnellsten“ Weg zwischen zwei Punkten, also nicht den *geometrisch* kürzesten, sondern den *zeitlich* kürzesten Weg.

Beispiel

In Luft hat das Licht eine Geschwindigkeit von ca. 300.000 km/h, im dichteren Medium, z. B. in Glas, nur eine von ca. 200.000 km/h.

Der Lichtstrahl verläuft gemäß dem Descartes-Snell’schen Brechungsgesetz so, dass für die zugehörigen Brechungswinkel α und β gilt:

$$\sin(\alpha) : \sin(\beta) = 3:2$$

11.4 Literaturhinweise

Eine wichtige Adresse zum Auffinden von Informationen über Mathematiker und deren wissenschaftliche Leistungen ist die Homepage der St. Andrews University.

Informationen über Fermat findet man unter:

- www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Fermat.html
- Strick, Heinz Klaus (2008), *Kalenderblatt über Pierre de Fermat,* www.spektrum.de/wissen/pierre-fermat-1607–1608/962953
- www-history.mcs.st-and.ac.uk/Strick/Fermat.pdf
- Strick, Heinz Klaus (2017): *Mathematik ist schön,* Springer, Heidelberg, Kap. 7 (Rechnen mit Quadratzahlen), Kap. 16 (Summen von Potenzen aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen)
- Strick, Heinz Klaus (2018): *Mathematik ist wunderschön,* Springer, Heidelberg, Kap. 8 (Kürzeste Wege)

- Strick, Heinz Klaus (2019): *Mathematik ist wunderwunderschön,* Springer, Heidelberg, Kap. 4 (Teiler und Teilbarkeit), Kap. 10 (Magische Quadrate), Kap. 11 (Rencontre und mehr), Kap. 12 (Spiralen)

Umfangreiche Informationen über Fermat findet man u. a. in:

- Scharlau, Winfried, Opolka, Hans (1980): *Von Fermat bis Minkowski. Eine Vorlesung über Zahlentheorie und ihre Entwicklung,* Springer, Heidelberg
- Simmons, George F. (1992): *Calculus Gems – Brief Lives and Memorable Mathematics,* Mc Graw-Hill Inc., New York
- Sonar, Thomas (2011): *3000 Jahre Analysis,* Springer, Heidelberg
- Weil, André (1992): *Zahlentheorie. Ein Gang durch die Geschichte von Hammurapi bis Legendre.* Birkhäuser, Basel

Wikipedia-Artikel in deutscher, englischer und französischer Sprache zu den Stichwörtern:

- Pierre de Fermat
- Fermat-Punkt (Fermat point, Point de Fermat)
- Faktorisierungsmethode von Fermat (Fermat's factorization method; Méthode de factorisation de Fermat)
- Fermatscher Polygonalzahlensatz (Fermat polygonal number theorem; Théorème des nombres polygonaux de Fermat)
- Großer Fermatscher Satz (Fermat's Last Theorem, Dernier théorème de Fermat)
- Kleiner Fermatscher Satz (Fermat's little theorem; Petit théorème de Fermat)
- Fermatscher Primzahltest (Fermat primality test; Test de primalité de Fermat)
- Fermat-Zahl (Fermat number, Nombre de Fermat)
- Mersenne-Zahl (Mersenne prime, Nombre de Mersenne premier)
- Fermatsche Pseudoprimzahl (Fermat pseudoprime, –)
- Carmichael-Zahl (Carmichael number, nombre de Carmichael)
- Pellsche Gleichung (Pell's equation, Équation de Pell-Fermat)
- Fermat-Prinzip (Fermat's principle, …)
- – (Fermat's spiral, Spirale de Fermat)

Blaise Pascal – tiefsinniger Theologe und Mathematiker

12

Die Mathematiker, die nur Mathematiker sind, denken also richtig, aber nur unter der Voraussetzung, dass man ihnen alle Dinge durch Definitionen und Prinzipien erklärt; sonst sind sie beschränkt und unerträglich, denn sie denken nur dann richtig, wenn es um sehr klare Prinzipien geht.

Im Jahr 1654 wandte sich der französische Schriftsteller Antoine Gombaud, genannt Chevalier de Méré, an Blaise Pascal mit der Bitte um die Lösung zweier Probleme. In beiden Fällen ging es um Glücksspiele, und zwar handelte es sich um

- das *Problème des dés* (Würfelparadoxon) und
- das *Problème des partis* (Teilungsproblem).

Pascal, der zu dieser Zeit gerade mit Fermat korrespondierte, gab die beiden Probleme auch an Fermat weiter.

H. K. Strick, *Mathematik – einfach genial!*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-60449-6_12

Über das zweite Problem entwickelte sich ein Briefwechsel zwischen den beiden Mathematikern, die wechselseitig ihre Gedanken einbrachten, wie das Problem angemessen gelöst werden könnte. Auf das erste Problem kommen wir in Abschn. 12.3 zurück.

Wegen der grundsätzlichen Bedeutung der Überlegungen gilt dieser Briefwechsel als die „Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung".

Ob der Chevalier de Méré mit den Lösungsvorschlägen der beiden Mathematiker etwas anfangen konnte, ist nicht überliefert (Pascal an Fermat: „Ich habe nicht die Zeit, Ihnen den Beweis eines Problems zu schicken, dessen Schwierigkeit M. de Méré sehr verwunderte, denn er hat zwar sehr viel Verstand, aber er ist kein Mathematiker – das ist, wie Sie wissen, ein großer Mangel.").

12.1 Einfach genial: Pascals Lösung des *Problème des partis*

Das im Folgenden erläuterte Problem der gerechten Aufteilung eines ausgesetzten Preises (franz. *le parti* = der Anteil, die Aufteilung) wurde bereits im 14. Jahrhundert als Aufgabe formuliert.

Luca Pacioli (1447–1517) stellte die Aufgabe 1494 in seinem Werk *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita,* dem ersten Mathematikbuch in italienischer Sprache, vor. Paciolis „Lösung" wurde jedoch heftig kritisiert, u. a. von Niccolò Tartaglia (1500–1557) und von Girolamo Cardano (1501–1576).

Problem

***Problème des partis* (Teilungsproblem)**

Zwei Spieler A und B vereinbaren ein Glücksspiel über mehrere Runden. Derjenige, der als Erster fünf Runden gewonnen hat, gewinnt den gesamten Einsatz. Beim Stand von [3:2] für Spieler A muss das Spiel abgebrochen werden.

Da es nicht mehr fortgesetzt werden kann, soll der Einsatz gerecht aufgeteilt werden. Aber wie?

Da es sich um ein Glücksspiel handelt, hielten es beide, Fermat *und* Pascal, für angemessen, dass man die Chancen der beiden Spieler für jede der ausstehenden Runden als gleich ansieht – vergleichbar den Chancen bei einem Münzwurf oder beim Werfen eines Würfels, bei dem man nur darauf achtet, ob die Augenzahl *gerade* oder *ungerade* ist. Auch stimmten beide in der Ansicht überein, dass bzgl. der gerechten Aufteilung des Preises nur noch *ausstehende* Spielrunden eine Rolle spielen – im Unterschied übrigens zu den Vorgängern Pacioli, Tartaglia und Cardano (vgl. Abschn. 12.1.4).

12.1.1 Fermats kombinatorische Lösung

Fermat schlug vor, alle möglichen Kombinationen für die nächsten *vier* Spielrunden zu betrachten; denn nach spätestens vier weiteren Runden wäre das Spiel entschieden gewesen.

Pascal, der voller Respekt vor dem berühmtesten Mathematiker Frankreichs war, hatte zunächst Schwierigkeiten, das Argument Fermats nachzuvollziehen, dass man die möglichen Abläufe in den folgenden vier Spielrunden auch in denjenigen Fällen betrachten solle, die eigentlich bereits nach zwei oder drei weiteren Runden beendet werden könnten. Allerdings musste er einräumen, dass in keinem der Fälle die „gekünstelte“ Fortsetzung eines nach der Spielregel eigentlich bereits beendeten Spiels etwas am Sieg des betreffenden Spielers ändert.

Um den Gedankengang Fermats nachzuvollziehen, notierte Pascal alle $2^4 = 16$ möglichen Spielverläufe und vermerkte jeweils, welcher Spieler welche Spielkombination gewonnen hätte: Spieler A hätte demnach in 11 der 16 Fälle gewonnen, Spieler B in 5 Fällen. Der eingezahlte Einsatz sollte also gerechterweise im Verhältnis 11:5 aufgeteilt werden.

In der folgenden Tabelle sind die überflüssigen Spielfortsetzungen in Rot eingetragen, in der 2. Spalte ist der Endstand nach dem bereits möglichen vorzeitigen Spielende vermerkt, in Klammern der Endstand nach vier durchgeführten Spielrunden.

Heute würde man diese möglichen Abläufe mithilfe eines Baumdiagramms verdeutlichen.

Verlauf	Endstand	Vorteil
aaaa	5:2 (7:2)	A
aaab	5:2 (6:3)	A
aaba	5:2 (6:3)	A
aabb	5:2 (5:4)	A
abaa	5:3 (6:3)	A
abab	5:3 (5:4)	A

Verlauf	Endstand	Vorteil
abba	5:4	A
abbb	4:5	B
baaa	5:3 (6:3)	A
baab	5:3 (5:4)	A
baba	5:4	A
babb	4:5	B

Verlauf	Endstand	Vorteil
bbaa	5:4	A
bbab	4:5	B
bbba	3:5 (4:5)	B
bbbb	3:5 (3:6)	B

Pascal musste einräumen, dass die Vorgehensweise Fermats zur richtigen Aufteilung führt. Aber die Methode war nur deshalb anwendbar, weil es sich hier um ein Spiel mit *zwei* beteiligten Spielern handelt.

Als Gegenbeispiel beschrieb er eine Situation, bei der ein Spiel zwischen drei Spielern A, B und C beim Stand von 2:1:1 und drei vereinbarten Gewinnrunden abgebrochen werden muss. Ein solches Spiel wäre spätestens nach drei weiteren Runden zu Ende gewesen. Wenn man jedoch alle drei Spielrunden durchführt, dann kommt es in einzelnen Fällen vor, dass ein Sieger seinen Gewinn nach dieser „gekünstelten“ Fortsetzung des Spiels mit einem anderen teilen muss.

In der Abb. 12.1 sind die 27 möglichen Spielverläufe für drei Spielrunden notiert sowie der Endstand nach regulärem Spielende bzw. nach Spielende der „gekünstelten“ Fortsetzung:

In 17 der 27 Fälle hätte A gewonnen, wenn man die reguläre Spielregel beachtet hätte, in jeweils 5 der restlichen 10 Fälle B bzw. C; also hätte der Gesamteinsatz des Spiels im Verhältnis 17:5:5 aufgeteilt werden müssen.

Verlauf	Endstand	regulärer Sieger	Sieger nach Fortsetzung
aaa	3:1:1 (5:1:1)	A	A
aab	3:1:1 (4:2:1)	A	A
aac	3:1:1 (4:1:2)	A	A
aba	3:1:1 (4:2:1)	A	A
abb	3:1:1 (3:3:1)	A	A und B
abc	3:1:1 (3:2:2)	A	A
aca	3:1:1 (4:1:2)	A	A
acb	3:1:1 (3:2:2)	A	A
acc	3:1:1 (3:1:3)	A	A und C
baa	3:2:1 (4:2:1)	A	A
bab	3:2:1 (3:3:1)	A	A und B
bac	3:2:1 (3:2:2)	A	A
bba	2:3:1 (3:3:1)	B	B und A
bbb	2:3:1 (2:4:1)	B	B

Verlauf	Endstand	regulärer Sieger	Sieger nach Fortsetzung
bbc	2:3:1 (2:3:2)	B	B
bca	3:2:2 (3:2:2)	A	A
bcb	2:3:2 (2:3:2)	B	B
bcc	2:2:3 (2:2:3)	C	C
caa	3:1:2 (4:1:2)	A	A
cab	3:1:2 (3:2:2)	A	A
cac	3:1:2 (3:1:3)	A	A und C
cba	3:2:2 (3:2:2)	A	A
cbb	2:3:2 (2:3:2)	B	B
cbc	2:2:3 (2:2:3)	C	C
cca	2:1:3 (3:1:3)	C	C und A
ccb	2:1:3 (2:2:3)	C	C
ccc	2:1:3 (2:1:4)	C	C

Abb. 12.1 Mögliche Fälle beim Wettspiel mit drei Teilnehmern

Führt man dagegen gemäß der „gekünstelten“ Fassung der Spielregel auf jeden Fall drei weitere Spielrunden durch, dann ist A 13-mal der Sieger, B und C jeweils 4-mal. In je drei Fällen teilen sich A und B bzw. A und C den Sieg, d. h. dann entsprechend auch den Gesamteinsatz. Insgesamt müsste der Gesamteinsatz also im Verhältnis 16:5½:5½ aufgeteilt werden – was von dem obigen „regulären“ Resultat abweicht.

In seinem Antwortbrief bestätigte Fermat im Prinzip die Überlegungen Pascals, widersprach aber der Deutung, dass in den sechs *besonderen* Fällen der Gesamteinsatz je zur Hälfte aufgeteilt werden müsse, vielmehr müsse die reguläre Spielregel angewandt werden, die eben festlegt, wer Sieger ist.

Fermat sah in der „gekünstelten“ Erweiterung der Spielregel den Vorteil, dass auf diese Weise zunächst einmal *alle* möglichen Fälle systematisch erfasst werden; bei der anschließenden Auszählung müsste dann nur in wenigen Fällen geprüft werden, welcher der Spieler mit höchster Punktzahl tatsächlich *als Erster* auf diese Punktzahl gekommen ist.

12.1.2 Pascals rekursive Methode

Bei seinen eigenen Überlegungen kam Pascal zu der gleichen gerechten Aufteilung des Gesamteinsatzes. Pascal hielt die von ihm entwickelte Methode für weniger aufwendig als die von Fermat.

In einem Brief an Fermat erläuterte er seinen Lösungsansatz an einem Spiel mit nur *drei* Gewinnrunden, das beim Stand von [2 : 1] für Spieler A abgebrochen wurde:

Angenommen, jeder Spieler hat jeweils 32 *Pistoles* (Goldmünzen) eingesetzt (d. h., insgesamt wären 64 *Pistoles* aufzuteilen), dann kann Spieler A gegenüber Spieler B wie folgt argumentieren:

Wenn wir noch *eine* weitere Spielrunde durchführen, die ich gewinne, dann erhalte ich zu meinen 32 *Pistoles* noch deine 32 *Pistoles.* Wenn ich diese Spielrunde verliere, dann steht es [2:2] und jeder von uns nimmt seinen Einsatz von 32 *Pistoles* zurück; meine 32 *Pistoles* stehen mir also auf jeden Fall zu.

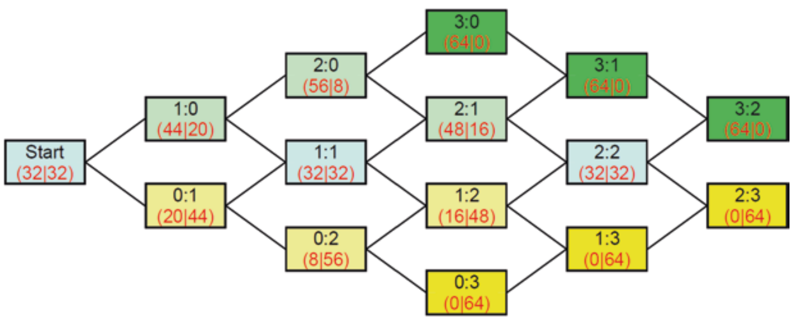
Und da die *Aussichten* für beide Fälle (also für die Spielstände [3:1] bzw. [2:2]) gleich sind, muss dein Einsatz von 32 *Pistoles* zwischen uns aufgeteilt werden, d. h., ich erhalte beim jetzigen Spielstand von [2:1] insgesamt $32 + 16 = 48$ *Pistoles* und du 16 *Pistoles.*

Entsprechend ergeben sich die anteiligen Beträge bei einem Spielabbruch

- zum Stand [2:0] als Mittelwerte der Beträge von [2:1] und [3:0],
- zum Stand [1:0] als Mittelwerte der Beträge von [2:0] und [1:1], vgl. die folgende Grafik.

Durch ein solches iteratives Verfahren ist es grundsätzlich möglich, von jedem Spielstand aus die gerechte Aufteilung des Spieleinsatzes zu berechnen.

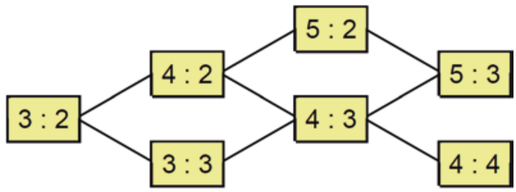
In der folgenden Abbildung sind jeweils die Spielstände und die zugehörigen Auszahlungen eingetragen – jeweils für den Fall, dass das Spiel bei diesem Spielstand abgebrochen würde.



Wendet man nun die Überlegungen Pascals auf die o. a. Aufgabenstellung (5 vereinbarte Gewinnrunden, Abbruch beim Spielstand [3:2]) an, dann ist Folgendes zu überlegen:

Ausgehend vom Spielstand [3:2] hätte es in der nächsten Runde nur zu den Spielständen [4:2] oder [3:3] kommen können.

- Bei einem Gleichstand von [3:3] hätten die Spieler A und Spieler B ihren Einsatz wieder zurückbekommen.
- Nach dem Zwischenergebnis von [4:2] wären nur die Spielstände [5:2] (Spielende) oder [4:3] möglich,
- nach dem Zwischenergebnis [4:3] nur die Spielstände [5:3] (Spielende) oder [4:4], vgl. die folgende Grafik.



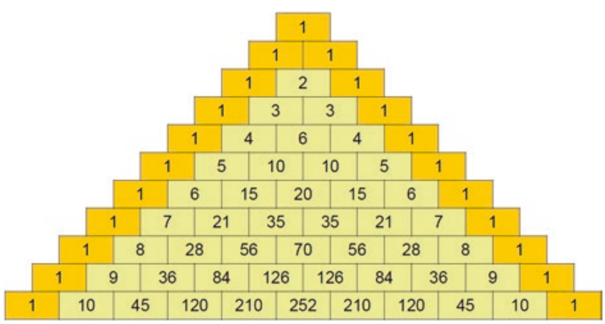
- Zwischenstand [4:3]: Hier ergibt sich nach der nächsten Runde ein [5:3] (A gewinnt alles) oder ein [4:4] (gleiche Chancen für beide), d. h., bei einem Zwischenergebnis von [4:3] stehen also die Chancen für Spieler A, das Spiel zu gewinnen, wie 3:1.
- Zwischenstand [4:2]: Hier ergibt sich nach der nächsten Runde ein [5:2] (A gewinnt alles) oder ein [4:3] (vgl. oben). Berücksichtigt man jetzt sowohl die 3:1-Siegchancen von Spieler A bei einem Spielstand von [4:3] und gleichgewichtig die Chancen des [5:2], dann folgt, dass beim Stand von [4:2] die Siegchancen von Spieler A wie $[(4+3){:}(0+1) = 7{:}1]$ stehen.
- Zwischenstand [3:2]: Hier ergibt sich nach der nächsten Runde ein [4:2] (vgl. oben) oder ein [3:3] (gleiche Chancen für beide). Beim Stand von [3:2] stehen also die Chancen wie $[(7+4){:}(1+4) = 11{:}5]$.

Bei dieser *rückwärts schreitenden* Methode kommt es auf die Zwischenstände [3:2], [4:2] und [4:3] an: Die Chancen beim Spielstand [3:2] werden aus den Chancen beim Spielstand [4:2] abgeleitet, die Chancen beim Spielstand [4:2] aus den Chancen beim Spielstand [4:3], und diese Chancen kann man unmittelbar angeben.

12.1.3 Pascals geniale Lösung mithilfe des *triangle arithmétique*

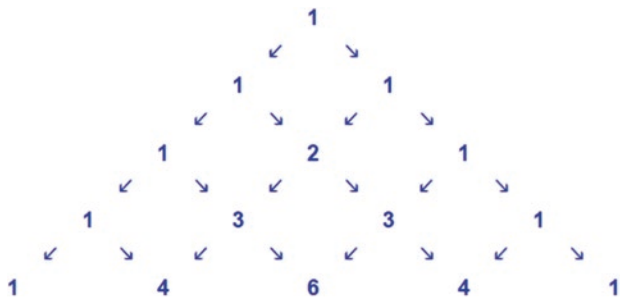
Pascal führte den Briefwechsel mit Fermat nicht weiter, weil er kein Interesse an den zahlentheoretischen Problemen Fermats hatte (vgl. Kap. 11).

Im gleichen Jahr aber schloss er noch die Arbeiten an einer 36-seitigen Schrift *Traité du triangle arithmétique* ab (die Schrift wurde allerdings erst im Jahr 1665 veröffentlicht).

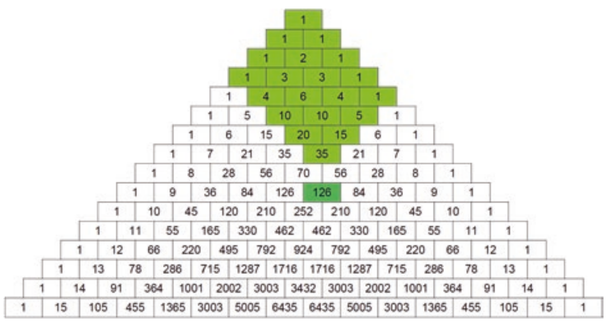


Dieses Buch besteht aus zwei Teilen. Zunächst erläutert Pascal den Aufbau des Dreiecks, dessen Koeffizienten nach zwei **Konstruktionsprinzipien** erfolgt:

- Am Anfang und am Ende jeder Zeile steht eine Eins.
- Addiert man zwei benachbarte Zahlen einer Zeile, dann erhält man die darunter stehende Zahl der nächsten Zeile.



Dann beschreibt er besondere Eigenschaften wie beispielsweise, dass die Summe der Zahlen in einem Rechteck, das in der Spitze beginnt, um 1 kleiner ist als die Zahl, die zwei Zeilen unter der gegenüberliegenden Ecke steht, vgl. folgende Abb.



Weiter geht Pascal auf mehrere Anwendungsmöglichkeiten des arithmetischen Dreiecks ein:

- in der Theorie der figurierten Zahlen,
- in der Kombinatorik und
- im Zusammenhang mit den binomischen Formeln.

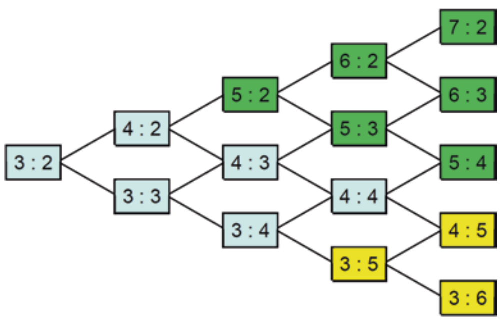
Für Einzelheiten sei auf Kap. 6 von *Mathematik ist wunderwunderschön* verwiesen.

Schließlich erläutert er auch den Zusammenhang mit dem Problem der gerechten Aufteilung eines Spieleinsatzes *(Usage du triangle pour determiner les partis qu'on doit faire entre deux joueurs qui jouent en plusieurs parties).*

Pascal hatte nämlich erkannt, dass die kombinatorischen Überlegungen Fermats zur Lösung des *Problème des partis* ersetzt werden können durch die Anwendung von Eigenschaften des heute so genannten Pascal'schen Dreiecks.

Das Spiel hätte bei einem Spielstand von 3:2 noch *maximal* vier Runden weitergehen können, die in der folgenden Grafik dargestellt sind. Das folgende Diagramm enthält – wie im Fermat'schen Vorschlag – auch die Spielrunden, die eigentlich nicht notwendig wären.

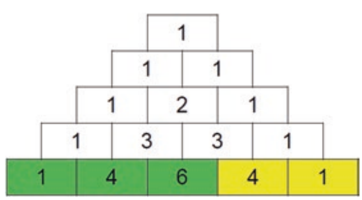
Pascal erkannte, dass die Gewinnchancen der beiden Spieler genau der Anzahl der möglichen Wege in diesem Diagramm entsprechen und daher der Spieleinsatz entsprechend zu der *Anzahl der möglichen Wege* aufgeteilt werden muss.



Vom Ergebnis [3:2] aus führen verschiedene Wege zu folgenden Zwischen- bzw. Endergebnissen:

- 6 Spielrunden: je *ein* Weg zu den Ergebnissen [4:2] und [3:3];
- 7 Spielrunden: je *ein* Weg zu den Ergebnissen [5:2] und [3:4], *zwei* Pfade zum Ergebnis [4:3];
- 8 Spielrunden: Zu den Ergebnissen [6:2], [5:3], [4:4], [3:5] führen 1, 3, 3, 1 Wege;
- 9 Spielrunden: Zu den Ergebnissen [7:2], [6:3], [5:4], [4:5], [3:6] existieren 1, 4, 6, 4, 1 Wege.

Von den 2^4 Wegen im o. a. Übergangsdiagramm sind 11 Wege günstig für Spieler A und 5 Wege günstig für Spieler B. Daher erscheint es gerecht, wenn der ausgesetzte Preis im Verhältnis 11:5 aufgeteilt wird.



Somit ist Pascal in der Lage, eine allgemeine Lösung für das Teilungsproblem anzugeben:

Problem

Allgemeine Lösung des Problème des partis (Teilungsproblem)

Zwei Spieler (A und B) vereinbaren ein Glücksspiel über eine gewisse Anzahl von Runden. Derjenige, der als Erster die vereinbarte Anzahl an Runden gewonnen hat, gewinnt den gesamten Einsatz.

Wird das Spiel abgebrochen, wenn dem Spieler A noch a Punkte zum Sieg fehlen und dem Spieler B noch b Punkte, dann ist zur Ermittlung des gerechten Aufteilungsverhältnisses diejenige Reihe des arithmetischen Zahlendreiecks zu betrachten, die zum binomischen Term $(1+x)^{a+b-1}$ gehört, d. h., es müssen (in der heutigen Schreibweise notiert) die Binomialkoeffizienten $\binom{a+b-1}{k}$ mit $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ (a+b-1)$ bestimmt werden.

Die Gewinnchancen von A im Vergleich zu B ergeben sich, indem man die ersten b Zahlen addiert und diese Summe ins Verhältnis setzt zu der Summe der letzten a Zahlen der Zahlenreihe:

$$\sum_{k=0}^{b-1} \binom{a+b-1}{k} \quad : \quad \sum_{k=b}^{a+b-1} \binom{a+b-1}{k}$$

Beispiele

- Spielabbruch beim Stand von [3:2] bei fünf vereinbarten Gewinnrunden:
  Hier ist also $a = 2$ und $b = 3$. Die zur Bestimmung der Gewinnchancen benötigten Anzahlen ergeben sich aus den Koeffizienten des binomischen Terms $(1+x)^{2+3-1} = (1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$,
  also $\binom{4}{0} = 1, \binom{4}{1} = 4, \binom{4}{2} = 6, \binom{4}{3} = 4, \binom{4}{4} = 1.$
  Das Verhältnis für die gerechte Aufteilung des Gesamteinsatzes ist dann $(1+4+6):(4+1) = 11 : 5.$

- Spielabbruch beim Stand von [3:0] bei fünf vereinbarten Gewinnrunden:
  Hier ist also $a = 2$ und $b = 5$. Die zur Bestimmung der Gewinnchancen benötigten Anzahlen ergeben sich aus den Koeffizienten des binomischen Terms $(1+x)^{2+5-1} = (1+x)^6$,
  also $\binom{6}{0} = 1,\ \binom{6}{1} = 6,\ \binom{6}{2} = 15,\ \binom{6}{3} = 20,\ \binom{6}{4} = 15,\ \binom{6}{5} = 6,$ $\binom{6}{6} = 1.$
  Das Verhältnis für die gerechte Aufteilung des Gesamteinsatzes ist dann $(1+6+15+20) : (15+6+1) = 42 : 22 = 21 : 11.$

Pascal geht in seiner Schrift auch auf einige Spezialfälle ein:

Angenommen, Spieler B fehlen b Punkte zum Gewinn des Gesamteinsatzes und …

- Spieler A fehlt noch $a = 1$ Punkt: Die Summe der Binomialkoeffizienten von $(1 + x)^b$ ist gleich 2^b. Die Gewinnchancen für A sind daher $(2^b - 1) : 1$.

Beispiel
Spielabbruch beim Stand von [4:2] bei fünf vereinbarten Gewinnrunden: Hier ist also $a = 1$ und $b = 3$. Das Verhältnis für die gerechte Aufteilung des Gesamteinsatzes ist dann $(2^3 - 1) : 1$, also $7 : 1$.

- Spieler A fehlen $a = b - 1$ Punkte: Betrachtet werden die Koeffizienten des binomischen Terms $(1 + x)^{2b-2}$. Die Summe der ersten b Binomialkoeffizienten unterscheidet sich von der Summe der letzten $b - 1$ Binomialkoeffizienten nur um das mittlere Glied $\binom{2b-2}{b-1}$. Wenn die beiden Spieler jeweils einen Einsatz von 2^{2b-3} GE (Geldeinheiten) bezahlt haben (zusammen also 2^{2b-2} GE), bedeutet dies, dass Spieler A seinen Einsatz zurückerhält und zusätzlich noch $\frac{1}{2} \cdot \binom{2b-2}{b-1}$ GE.

Beispiel
Spielabbruch beim Stande [3:2] bei sechs vereinbarten Gewinnrunden, also $b = 4$ und $a = b - 1 = 3$:

Wenn jeder Spieler einen Einsatz von $2^{2\cdot 4-3} = 2^5 = 32$ GE gezahlt hat, dann erhält A insgesamt $1 + 6 + 15 + 20 = 42$ GE ausbezahlt, also seinen Einsatz von 32 GE und zusätzlich $\frac{1}{2} \cdot \binom{6}{3} = 10$ GE des Einsatzes von B.

- Spieler A fehlen $a = b - 2$ Punkte: Betrachtet werden die Koeffizienten des binomischen Terms $(1 + x)^{2b-3}$. Die Summe der ersten b Koeffizienten unterscheidet sich von der Summe der letzten $b - 2$ Koeffizienten um die beiden gleich großen mittleren Glieder $\binom{2b-3}{b-2} = \binom{2b-3}{b-1}$. Wenn die beiden Spieler jeweils einen Einsatz von 2^{2b-4} GE bezahlt haben (zusammen also 2^{2b-3} GE), dann erhält Spieler A seinen Einsatz zurück und zusätzlich noch $\binom{2b-3}{b-2} = \binom{2b-3}{b-1}$ GE.

Beispiel

Spielabbruch beim Stande von [4:2] bei sechs vereinbarten Gewinnrunden, also $b = 4$ und $a = b - 2 = 2$. Wenn jeder Spieler einen Einsatz von $2^{2 \cdot 4 - 4} = 2^4 = 16$ Geldeinheiten gezahlt hat, dann erhält A insgesamt $1 + 5 + 10 + 10 = 26$ GE ausbezahlt, also seinen Einsatz und zusätzlich $\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$ GE.

Wenn die beiden Spieler in den beiden zuletzt betrachteten Fällen 2^{2b-3} Geldeinheiten als Einsatz zahlen, dann lassen sich die Auszahlungen in den beiden Fällen miteinander vergleichen.

Dann ergibt sich allgemein für den Betrag, den Spieler B an Spieler A zahlen muss:

$$\frac{2 \cdot \binom{2b-3}{b-1}}{\frac{1}{2} \cdot \binom{2b-2}{b-1}} = 4 \cdot \frac{\frac{(2b-3)!}{(b-1)!(b-2)!}}{\frac{(2b-2)!}{(b-1)!(b-1)!}} = 4 \cdot \frac{b-1}{2b-2} = 2$$

Das heißt, unabhängig vom konkreten Spielstand gilt:

- Beträgt der Punktevorsprung von Spieler A bei Spielabbruch *zwei* Punkte statt nur *einen* Punkt, dann muss Spieler B doppelt so viel von seinem Spieleinsatz an Spieler A auszahlen.

12.1.4 Die Lösungsversuche von Pacioli, Tartaglia und Cardano

In seinem Buch *Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalità* schlägt **Luca Pacioli** vor, den Spieleinsatz im Verhältnis der bisher gewonnenen Runden aufzuteilen, also bei einem Spielstand von [3:2] genau in diesem Verhältnis.

Girolamo Cardano bringt seine Kritik an Paciolis Vorschlag an folgendem Beispiel auf den Punkt: Wird ein Spiel mit 19 Gewinnrunden bei einem Spielstand von [18:9] abgebrochen, dann hätte dies eine Aufteilung im Verhältnis 2:1 zur Folge, obwohl dem ersten Spieler nur ein Siegpunkt fehlt.

Nach seiner Meinung ist der Abstand des aktuellen Punktestandes eines Spielers zu der Gewinnpunktzahl durch „Progression“ zu gewichten; damit meint er die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis zur fehlenden Punktzahl. Bei einem Spielstand von [3:2] und fünf vereinbarten Gewinnrunden fehlen dem 1. Spieler 2 Punkte, dem 2. Spieler 3 Punkte. Die Aufteilung müsste nach Cardano dann im Verhältnis $(3 + 2 + 1) : (2 + 1) = 6 : 3$ erfolgen, bei dem angesprochenen Spielstand von $[18 : 9]$ bei 19 vereinbarten Spielrunden im Verhältnis $(1 + 2 + 3 + \ldots + 9) : (1) = 45 : 1$.

Niccolò Tartaglia kritisierte Paciolis Modell, weil beispielsweise bei einem Spielstand von 1:0 der zweite Spieler nichts erhalten würde, obwohl das Spiel gerade erst begonnen hat und der 1-Punkt-Vorsprung eigentlich unbedeutend ist. Seiner Meinung nach muss bei der gerechten Aufteilung berücksichtigt werden, welchen *Vorsprung* der eine Spieler gegenüber dem anderen hat und wie viele Gewinnrunden vereinbart sind. Tartaglia sieht das Problem auch eher als juristisches Problem.

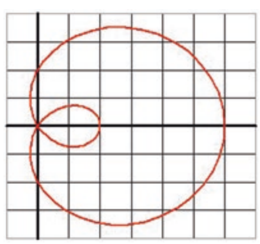
Zu dem hier angesprochenen Spielstand von [3:2] und $n = 5$ Gewinnrunden schlägt er entsprechend eine Aufteilung des gesamten Spieleinsatzes im Verhältnis $(5 + (3 - 2)) : (5 + (2 - 3)) = 6 : 4$ vor.

Die gleiche Aufteilung ergäbe sich übrigens auch bei einem Spielstand von 1:0, da hier ebenfalls die Differenz 1 Punkt beträgt: $(5 + (1 - 0)) : (5 + (0 - 1)) = 6 : 4$

12.2 Wer war Blaise Pascal?

Blaise Pascal wurde am 19. Juni 1623 als zweites Kind von Étienne Pascal, Richter am Steuergerichtshof in Clermont-Ferrand, geboren. Als die Mutter drei Jahre später starb, entschied sich der Vater, seine drei Kinder selbst zu erziehen. 1632 verkaufte er sein Richteramt und hoffte, mit dem so erlangten Vermögen ein Leben in der französischen Hauptstadt bestreiten zu können.

Der Vater Étienne Pascal war bereits sehr an mathematischen Problemen interessiert (nach ihm wird eine besondere algebraische Kurve als *Pascal'sche Schnecke* bezeichnet – vgl. die folgende Abbildung).



Regelmäßig nahm er an den berühmten wissenschaftlichen „Gesprächsrunden“ des Franziskanermönchs, Theologen, Musikwissenschaftlers und Mathematikers Marin Mersenne (1588–1648) teil.

Seinen kränklichen Sohn wollte er allerdings nicht mit Mathematik belasten; dieser sollte zuerst einmal Latein und Griechisch lernen. Eines Tages aber fing Blaise von sich aus damit an, Fragen zur Geometrie zu stellen, und so konnte der Vater ihn nicht länger von der Mathematik „fernhalten“.

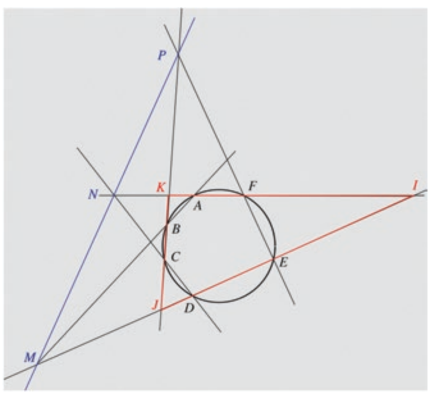
Angeregt durch Beiträge von Girard Desargues (1591–1661) legte Blaise Pascal im Alter von 16 Jahren der Mersenne’schen Runde ein Papier über Kegelschnitte vor *(Essai pour les coniques)*. Descartes bezweifelte, dass ein 16-Jähriger ein solch reifes Werk verfassen könne; er vermutete vielmehr, dass dies ein Beitrag des Vaters Étienne sei, der durch die Präsentation des Papiers durch seinen Sohn besondere Aufmerksamkeit erregen wolle.

Die komplette Schrift ist leider irgendwann verloren gegangen, lag aber Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) wohl noch vollständig vor, der sie besonders lobend erwähnte. Erhalten ist jedoch noch ein Satz, der als **Satz von Pascal** in die Fachliteratur eingegangen ist:

Satz

Satz von Pascal

In einem Sehnen-Sechseck, dessen Eckpunkte *A, B, C, D, E, F* Punkte eines Kegelschnitts sind, liegen die Schnittpunkte je zweier Paare von gegenüberliegenden Seiten (also *AB* und *DE, BC* und *EF, CD* und *AF*) auf einer Geraden.



https://commons.wikimedia.org/wiki/File:THPascal.svg, Rungaldier, CC BY-SA 3.0

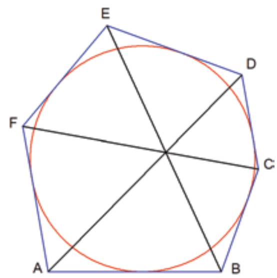
In der Abbildung ist ein Kreis als Beispiel eines Kegelschnitts gewählt. Pascal konnte übrigens außerdem zeigen, dass dieser Satz auch gilt, wenn die Punkte auf dem Kegelschnitt nicht in der alphabetischen Reihenfolge angeordnet sind.

Hinweis Zum *Satz von Pascal* existiert ein **dualer** Satz, der vom französischen Mathematiker Charles Julien Brianchon (1783–1864) entdeckt wurde: Ersetzt man im Satz von Pascal die *gegenüberliegenden Geraden* durch *Verbindungsgeraden von einander gegenüberliegenden Punkten* (=Diagonalen), das *Sehnen-Sechseck* durch *Tangenten-Sechseck* (also eine *Umkreis*-Figur durch eine *Inkreis*-Figur) sowie die Eigenschaft, dass die Punkte auf einer Geraden liegen (also *kollinear* sind), durch *schneiden sich in einem Punkt,* dann erhält man die Aussage des **Satzes von Brianchon** und umgekehrt.

Satz

Satz von Brianchon

Bilden die Seiten eines Sechsecks *ABCDEF* ein Tangenten-Sechseck eines Kegelschnitts, dann schneiden sich die Diagonalen von einander gegenüberliegenden Punkten $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ und $\overline{CF}$ in einem Punkt.



Bedingt durch die Verluste, die dem französischen Staat durch den Dreißigjährigen Krieg (1618–1648) entstanden waren, verringerte sich auch das Vermögen Étienne Pascals zusehends. Daher übernahm er 1639 das Amt des Steuereintreibers für die Normandie. Und sein Sohn Blaise, der sich immer deutlicher als Wunderkind entpuppt hatte, entwickelte für die aufwendigen Additionen und Subtraktionen bei der Steuerberechnung eine mechanische Rechenmaschine. Das Modell konnte Blaise mehrfach verbessern; schließlich bewältigte *„La Pascaline'"* sogar das Umrechnen zwischen den Einheiten der französischen Währung (1 *livre* = 20 *sols;* 1 *sol* = 12 *deniers*) – allerdings arbeitete die Maschine aufgrund mechanischer Probleme nicht immer zuverlässig.

Ein Ereignis des Jahres 1646 veränderte das Leben der Familie Pascal grundlegend: Nach einem schweren Unfall musste der Vater drei Monate lang von Ärzten betreut werden. Diese waren nicht nur medizinisch erfolgreich; sie gewannen die gesamte Familie für die katholische Reformbewegung des *Jansenismus.* Eine der beiden Schwestern Blaise Pascals entschloss sich später sogar, in das Kloster der Jansenisten, Port-Royal in Paris, einzutreten.

Pascal, der selbst unter ständigen Schmerzen litt, interpretierte seine Krankheit als ein Zeichen Gottes und war von dieser Zeit an ebenfalls tief religiös, beschäftigte sich jedoch zunächst noch weiter mit mathematischen und auch physikalischen Problemen (s. u.).

Nach einer „mystischen Erfahrung“ im November 1656 zog er sich ebenfalls ins Kloster Port-Royal zurück und widmete sich vor allem philosophischen und theologischen Fragen. Unter Pseudonym verfasste er dort Streitschriften gegen die Jesuiten *(Lettres provinciales),* die sich – trotz eines königlichen und eines kirchlichen Verbots – sehr schnell verbreiteten; Sprachwissenschaftler bezeichnen sie wegen der brillanten Formulierungen als den Beginn der modernen französischen Prosa.

Eine Abhandlung über den christlichen Glauben *(Pensées sur la religion)* konnte Pascal aufgrund seiner sich rapide verschlechternden Gesundheit nicht mehr vollenden.

Der geniale Mathematiker, Physiker und Philosoph starb am 19. August 1662 im Alter von gerade einmal 39 Jahren.

Einer der „Gedanken zur Religion“ ist die berühmte *Pascal'sche Wette:*

Der Glaube an Gott ist nicht nur richtig, sondern auch vernünftig: Wenn Gott nicht existiert, dann verliert man *nichts,* wenn man dennoch an ihn glaubt; aber wenn Gott existiert, verliert man *alles,* wenn man *nicht* glaubt.

12.3 Mit welchen (mathematischen) Themen beschäftigte sich Pascal außerdem?

Im Folgenden stellen wir einige der Themen vor, mit denen sich Pascal ebenfalls erfolgreich beschäftigt hat.

12.3.1 Weiterer Beitrag zur Wahrscheinlichkeitsrechnung

Kommen wir zunächst auf das zweite Problem des Chevalier de Méré zurück.

Problem

***Problème des dés* (Würfelparadoxon)**

Warum lohnt es sich darauf zu wetten, dass beim 4-fachen Würfeln mindestens eine Sechs fällt, aber nicht darauf, dass es beim 24-fachen Doppelwurf mit zwei Würfeln mindestens einen Sechserpasch (Doppelsechs) gibt?

Pascal konnte bestätigen, dass tatsächlich die Wahrscheinlichkeit für *mindestens eine Sechs* beim 4-fachen Würfeln größer ist als 50 % (d. h., eine Wette auf das Ereignis lohnt sich, wenn auch nur knapp):

P(*mindestens eine Sechs beim 4-fachen Würfeln)*
$= 1 - \mathrm{P}$(*keine Sechs beim 4-fachen Würfeln)*

$$= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296} \approx 51{,}77\ \%$$

Analog (also ebenfalls nach Anwendung der Komplementärregel) ergibt sich:

P(*mindestens ein Sechserpasch beim 24-fachen Würfeln)*
$= 1 - \mathrm{P}$(*kein Sechserpasch beim 24-fachen Würfeln)*

$$= 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 49{,}14\ \%$$

Es ist nicht vorstellbar, dass der Chevalier de Méré den geringfügigen Unterschied hinsichtlich der Wahrscheinlichkeiten experimentell herausgefunden hat. Der „Nicht-Mathematiker" de Méré war also wohl doch in der Lage, die Wettchancen durch kombinatorische Überlegungen zu ermitteln (im ersten Fall liegt das Verhältnis 671:625 vor).

Dass Pascal das Ergebnis als *unlogisch* empfand (*l'arithmétique se démentoit* – „die Arithmetik widerspricht sich"), hängt mit den Fehlvorstellungen über Wahrscheinlichkeiten bei mehrstufigen Versuchen zusammen, die fälschlicherweise als proportional angesehen werden.

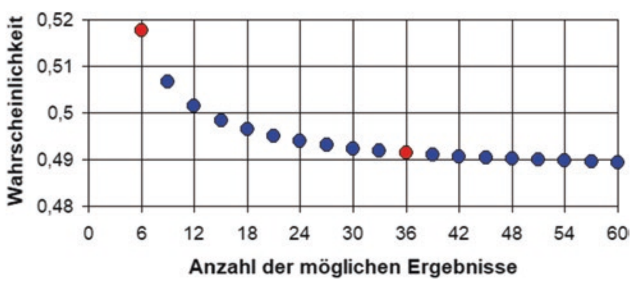
Was hier zu Beginn der Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung noch nicht verstanden wurde, war, dass man von gleichen Erwartungswerten nicht auf gleiche Wahrscheinlichkeiten schließen darf:

Beim 4-fachen Würfeln ist der Erwartungswert der Anzahl der Sechsen gleich $4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$, und entsprechend ist der Erwartungswert der Anzahl der Doppelsechsen beim 24-fachen Würfeln genauso groß $24 \cdot \frac{1}{36} = \frac{2}{3}$.

Hinweis Das Phänomen des De-Méré-Paradoxons kann man allgemein untersuchen: Bei einem Spiel wird ein Glücksrad mit n gleich großen nummerierten Feldern $k = \frac{2n}{3}$-mal gedreht (z. B. ein Glücksrad mit 6 Sektoren 4-mal, ein Glücksrad mit 36 Sektoren 24-mal).

Man interessiert sich nun für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass das Glücksrad auf einem bestimmten Feld *mindestens einmal* stehen bleibt (Alle Spiele haben die Eigenschaft gemeinsam, dass zu *erwarten* ist, dass dieses Ereignis bei $\frac{2n}{3} \cdot \frac{1}{n} = \frac{2}{3}$ der Versuchsdurchführungen eintritt).

An der folgenden Grafik kann man ablesen, dass die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis zwar stets in der Nähe von 50 % liegt, aber mit zunehmendem n monoton abnimmt.



12.3.2 Summenformel für Potenzen natürlicher Zahlen und Ansätze zur Integralrechnung

Im Zusammenhang mit seinen Überlegungen zum *Triangle arithmétique* fand Pascal eine Methode, um Formeln für die Summe von Potenzen natürlicher Zahlen zu bestimmen, vgl. auch *Mathematik ist schön,* Abschn. 16.6.

Beispielsweise leitete er mithilfe eines kleinen Rechentricks einen Term für die Summe der ersten n Quadratzahlen her:

Die Differenz zweier aufeinanderfolgender Kubikzahlen kann man wie folgt darstellen:

$$(k+1)^3 - k^3 = (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - k^3 = 3k^2 + 3k + 1,$$

d. h. im Einzelnen:

k	$(k+1)^3 - k^3$	$3k^2 + 3k + 1$
1	$2^3 - 1^3$	$3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$
2	$3^3 - 2^3$	$3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$
3	$3^3 - 2^3$	$3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1$
…	…	…
$n-1$	$n^3 - (n-1)^3$	$3 \cdot (n-1)^2 + 3 \cdot (n-1) + 1$
n	$(n+1)^3 - n^3$	$3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1$
Summe	$(n+1)^3 - 1^3$	$3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + 3 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n \cdot 1$

Bildet man in dieser Tabelle die Spaltensummen, dann fallen in der zweiten Spalte alle Summanden weg bis auf die beiden Summanden $(n+1)^3$ und 1^3, sodass sich aus der dritten Spalte für die Summe der ersten n Quadratzahlen Folgendes ergibt:

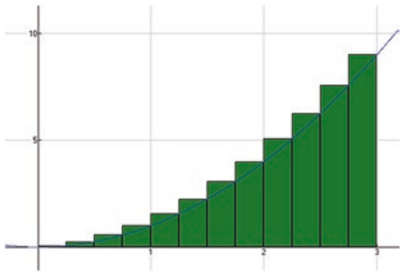
$$\begin{aligned}
&3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) \\
&= (n+1)^3 - 1^3 - 3 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + n) - n \cdot 1 \\
&= (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - 1 - 3 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1) - n \\
&= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1 - \tfrac{3}{2} \cdot n^2 - \tfrac{3}{2} \cdot n - n \\
&= n^3 + \tfrac{3}{2} \cdot n^2 + \tfrac{1}{2} \cdot n,
\end{aligned}$$

also

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \tfrac{1}{3} n^3 + \tfrac{1}{2} \cdot n^2 + \tfrac{1}{6} \cdot n.$$

Diese Formel nutzte Pascal, um die Fläche unter dem Graphen der Normalparabel mit $y = x^2$ im Intervall $[0; a]$ zu bestimmen.

Er betrachtete m Rechteckstreifen mit der Breite $\frac{a}{m}$ und der Höhe $k \cdot \left(\frac{a}{m}\right)^2$ mit $k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ m.$



Als Gesamtfläche ergibt sich für die Treppenfigur

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{a}{m} \cdot k \cdot \left(\frac{a}{m}\right)^2 = \left(\frac{a}{m}\right)^3 \cdot \sum_{k=1}^{m} k$$

$$= \left(\frac{a}{m}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}m^3 + \frac{1}{2} \cdot m^2 + \frac{1}{6} \cdot m\right) = \frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{2m} + \frac{a^3}{6m^2}.$$

Pascal notierte dies natürlich nicht so, wie wir es heute gewohnt sind, sondern er beschrieb alles mit Worten und argumentierte, dass die letzten beiden Summanden vernachlässigt werden können, wenn die Anzahl m der Rechteckstreifen groß ist (vgl. Sonar, S. 266 ff.).

Analog zur beschriebenen Vorgehensweise leitete Pascal entsprechende Summenformeln für höhere Potenzen natürlicher Zahlen her und bestimmte so die zugehörigen Flächeninhalte unter den Graphen von Potenzfunktionen mit höheren Exponenten.

Auch gelangen ihm erste Ansätze zur Bestimmung von Tangentensteigungen mithilfe geometrischer Überlegungen – diese wurden später von Leibniz in dessen Differenzialrechnung aufgegriffen.

12.3.3 Pascals Beiträge zur Physik

Nach Blaise Pascal sind physikalische Gesetze und eine physikalische Einheit benannt:

1 P (ein *Pascal*) ist der Druck, den eine Kraft von 1 N auf eine Fläche von einem Quadratmeter ausübt. Auf Meereshöhe beträgt der Normdruck (= Mittelwert) ca. 1013 hP.

Anregungen für seine umfangreichen physikalischen Versuche erhielt Pascal im Jahr 1648 über Marin Mersenne, der von den „unglaublichen“ Experimentalergebnissen des Evangelista Torricelli (1608–1647) berichtete. Durch eigene Experimente fand Pascal so verschiedene Gesetzmäßigkeiten heraus:

- In ruhenden Flüssigkeiten breitet sich der Druck allseitig gleichmäßig aus und wirkt stets senkrecht auf den Wänden **(Pascal’sches Prinzip).** Dieses Prinzip wird bei der hydraulischen Presse zur Verstärkung von Kräften genutzt, beispielsweise bei Bremssystemen.

- Der hydrostatische Druck nimmt mit der Tiefe linear zu **(Pascal'sches Gesetz).** Dieser Druck ist nur abhängig von der *Füllhöhe* der Flüssigkeit, *nicht* jedoch von der Form des Gefäßes. Dies bedeutet, dass in sog. kommunizierenden Röhren (also miteinander verbundenen Teilen eines Gefäßsystems) der Flüssigkeitsspiegel gleich hoch ist **(Pascal'sches Paradoxon).**

Werneuchen, Wikimedia, Hydrostatisches Paradoxon

Durch Messungen in Clermont-Ferrand (ca. 350 m über dem Meeresspiegel) und auf dem in der Nähe liegenden Berg Puy-de-Dôme (1465 m ü. M.) konnte er beweisen, dass der Luftdruck mit steigender Höhe geringer wird.

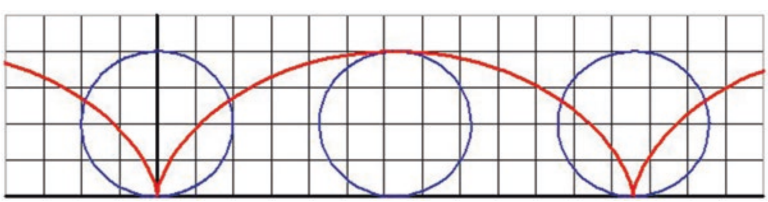
Schließlich bewies er auch die Existenz eines Vakuums, was seit Aristoteles beharrlich abgelehnt wurde („horror vacui"). Trotz der Eindeutigkeit der Ergebnisse ließen sich Zeitgenossen wie René Descartes (vgl. Kap. 10) nicht überzeugen; polemisch schrieb dieser in einem Brief an Christiaan Huygens, dass Pascal wohl „… zu viel Vakuum in seinem Gehirn habe …".

12.3.4 Pascals *Traité général de la Roulette*

Pascals letztes mathematisches Werk – entstanden in einer Nacht des Jahres 1658, in der er vor Schmerzen nicht schlafen konnte – befasste sich mit Zykloiden, das sind Ortskurven von Punkten auf einem rollenden Rad. Pascal bezeichnete diese Zykloiden als *roulettes.*

Diese lassen sich durch die folgende Parametergleichung beschreiben:
$x(t) = r \cdot t - a \cdot \sin(t)$ und $y(t) = r - a \cdot \cos(t)$

In der folgenden Grafik wurde $a = r = 1$ gewählt.



Es gelang ihm nicht nur, die Bogenlänge und die Fläche unter dem Graphen sowie deren Schwerpunkt zu berechnen, sondern auch das Volumen und die Oberfläche desjenigen Körpers zu bestimmen, der bei Rotation um die x-Achse entsteht.

12.4 Literaturhinweise

Eine wichtige Adresse zum Auffinden von Informationen über Mathematiker und deren wissenschaftliche Leistungen ist die Homepage der St. Andrews University.

Informationen über Pascal findet man unter:

- www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Pascal.html
- Strick, Heinz Klaus (2008), *Kalenderblatt über Blaise Pascal,* www.spektrum.de/wissen/blaise-pascal-1623-1662/940105
- www-history.mcs.st-and.ac.uk/Strick/Pascal.pdf
- Strick, Heinz Klaus (2015): *Geniale Ideen großer Mathematiker* (6): Pascals Lösungen zum *Problème des partis,* MNU Journal, 68 (1)
- Strick, Heinz Klaus (2017): *Mathematik ist schön,* Springer, Heidelberg, Kap. 16 (Summen von Potenzen aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen)

Informationen über Pascal und zum *Problème des partis* findet man u. a. bei:

- Devlin, Keith (2009): *Pascal, Fermat und die Berechnung des Glücks,* C. H. Beck, München
- Haller, Rudolf & Barth, Friedrich (2017): *Berühmte Aufgaben der Stochastik,* Walter de Gruyter, Berlin
- Schneider, Ivo (1988): *Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie von den Anfängen bis 1933,* Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft
- Sonar, Thomas (2011): *3000 Jahre Analysis,* Springer, Heidelberg
- Strick, Heinz Klaus (2003): *Das Paradoxon des Chevalier de Méré,* in: *Elemente der Mathematik – Leistungskurs Stochastik,* Schroedel, Hannover
- Todhunter, I. (1865, Reprint 1931): *A History of the Mathematical Theory of Probability,* Stechert, New York
- Wirths, H. (1999): *Die Geburt der Stochastik.* Stochastik in der Schule, Heft 3 (mit zahlreichen Literaturhinweisen)

Wikipedia-Artikel in deutscher, englischer und französischer Sprache zu den Stichwörtern:

- Blaise Pascal
- Pascaline (Pascal's calculator, Pascaline)
- Satz von Pascal (Pascal's theorem, Theorème de Pascal)
- Teilungsproblem (Problem of points, Problème des partis)
- de-Méré-Paradoxon (–, –)
- Pascal (Einheit) (Pascal unit, Pascal unité)
- – (Pascal's law, Principe de Pascal)
- Pascalsche Schnecke (Limaçon, Limaçon de Pascal)

13 Abraham de Moivre – ein genialer Franzose im englischen Exil

Es gibt Autoren, die zu verstehen geben, dass die Lehre von den Wahrscheinlichkeiten keinen Platz in einer seriösen Untersuchung haben darf; und dass vielmehr Überlegungen dieser Art, so einfach sie auch sein mögen, jemanden auch im Hinblick auf dessen Denkvermögen in allen anderen Bereichen disqualifizieren.
Der Leser möge entscheiden.

Die sechs trigonometrischen Funktionen, also Sinus, Kosinus, Tangens, Kotangens $\left(= \frac{1}{\tan}\right)$, Sekans $\left(= \frac{1}{\cos}\right)$ und Kosekans $(= \frac{1}{\sin})$, wie wir sie heute kennen, wurden im 10. Jahrhundert von **Abu al-Wafa** (940–998) eingeführt, einem der bedeutendsten Mathematiker des islamischen Kulturkreises.

Abu al-Wafa war es auch, der wohl als Erster einen Beweis für das Additionstheorem

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$$

H. K. Strick, *Mathematik – einfach genial!*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-60449-6_13

führte. Hieraus ergibt sich eine Regel für das Doppelte eines Winkels:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \text{ und } \cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$

Die Bezeichnung **Trigonometrie** für das Fachgebiet, das sich mit algebraischen Beziehungen zwischen geometrischen Größen beschäftigt, stammt von dem polnischen Theologen und Mathematiker **Bartholomeo Pitiscus** (1561–1613), der 1595 ein Buch mit diesem Titel veröffentlichte.

In seinem Buch verwies er darauf, dass der französische Mathematiker **François Viète** (lat. Franciscus Vieta, 1540–1603) sogar Regeln für das Dreifache eines Winkels hergeleitet (aber nicht veröffentlicht) hatte:

$$\sin(3\alpha) = 3\sin(\alpha)\cos^2(\alpha) - \sin^3(\alpha) \text{ sowie}$$

$$\cos(3\alpha) = \cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)\sin^2(\alpha).$$

Man kann davon ausgehen, dass Vieta die Formeln wie folgt entwickelt hat:

$$\begin{aligned}\sin(3\alpha) = \sin(\alpha + 2\alpha) &= \sin(\alpha)\cos(2\alpha) + \sin(2\alpha)\cos(\alpha)\\ &= \sin(\alpha)\cdot[\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)] + [2\sin(\alpha)\cos(\alpha)]\cdot\cos(\alpha)\\ &= 3\sin(\alpha)\cos^2(\alpha) - \sin^3(\alpha),\end{aligned}$$

die Formel für $\cos(3\alpha)$ entsprechend.

Allgemein stellte Vieta fest:

Satz

Formeln von Vieta

Für beliebige natürliche Zahlen n und beliebige Winkel φ gilt

$$\begin{aligned}\sin(n\varphi) = &\binom{n}{1}\cdot\cos^{n-1}(\varphi)\cdot\sin^1(\varphi) - \binom{n}{3}\cdot\cos^{n-3}(\varphi)\cdot\sin^3(\varphi)\\ &+ \binom{n}{5}\cdot\cos^{n-5}(\varphi)\cdot\sin^5(\varphi) - \cdots + \cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(n\varphi) = &\binom{n}{0}\cdot\cos^{n}(\varphi) - \binom{n}{2}\cdot\cos^{n-2}(\varphi)\cdot\sin^2(\varphi)\\ &+ \binom{n}{4}\cdot\cos^{n-4}(\varphi)\cdot\sin^4(\varphi) - \cdots + \cdots\end{aligned}$$

Beispiel

$$\begin{aligned}\sin(4\varphi) &= \binom{4}{1}\cdot\cos^3(\varphi)\cdot\sin^1(\varphi) - \binom{4}{3}\cdot\cos^1(\varphi)\cdot\sin^3(\varphi)\\ &= 4\cdot\cos^3(\varphi)\cdot\sin^1(\varphi) - 4\cdot\cos^1(\varphi)\cdot\sin^3(\varphi),\end{aligned}$$

$$\cos(4\varphi) = \binom{4}{0} \cdot \cos^4(\varphi) - \binom{4}{2} \cdot \cos^2(\varphi) \cdot \sin^2(\varphi) + \binom{4}{4} \cdot \cos^0(\varphi) \cdot \sin^4(\varphi)$$
$$= \cos^4(\varphi) - 6 \cdot \cos^2(\varphi) \cdot \sin^2(\varphi) + \sin^4(\varphi).$$

Offensichtlich war Vieta seiner Zeit voraus, denn erstaunlicherweise dauerte es noch einmal hundert Jahre, bis seine Erkenntnisse aufgegriffen und weiterentwickelt wurden.

13.1 Einfach genial: Abraham de Moivre entdeckt den Zusammenhang zwischen den Mehrfachwinkelsätzen und den komplexen Zahlen

Wann genau Abraham de Moivre (1667–1754) das allgemeine Bildungsgesetz entdeckte, mit dem wir uns im Folgenden beschäftigen werden, ist nicht bekannt. Seine Entdeckung setzte voraus, dass er mit den Mehrfachwinkelsätzen ebenso vertraut war wie mit dem binomischen Lehrsatz für beliebige natürliche Exponenten und mit dem Rechnen mit komplexen Zahlen.

13.1.1 Die Moivre'sche Formel

Die Formel – wie sie im Folgenden angegeben wird – veröffentlichte de Moivre in einer Schrift im Jahr 1722. Aber man findet bei ihm ähnliche Darstellungen bereits in einem Beitrag aus dem Jahr 1707; daher wird in der Literatur meistens diese Jahreszahl angegeben.

Satz

Formel von de Moivre

Für beliebige natürliche Zahlen n und beliebige Winkel φ gilt:

$$(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi)$$

Beispiel (Nachweis der Formel für $n = 4$)

$$(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)^4$$
$$= \cos^4\varphi + 4 \cdot \cos^3\varphi \cdot i \cdot \sin\varphi + 6 \cdot \cos^2(\varphi) \cdot i^2 \cdot \sin^2(\varphi) + 4 \cdot \cos^1(\varphi) \cdot i^3 \cdot \sin^3(\varphi) + i^4 \cdot \sin^4(\varphi)$$
$$= \cos^4\varphi + 4 \cdot \cos^3\varphi \cdot i \cdot \sin\varphi - 6 \cdot \cos^2(\varphi) \cdot \sin^2(\varphi) - 4 \cdot \cos^1(\varphi) \cdot i \cdot \sin^3(\varphi) + \sin^4(\varphi)$$
$$= \left[\cos^4(\varphi) - 6 \cdot \cos^2(\varphi) \cdot \sin^2(\varphi) + \sin^4(\varphi)\right] + i \cdot \left[4\cos^3(\varphi) \cdot \sin^1(\varphi) - 4\cos^1(\varphi) \cdot \sin^3(\varphi)\right]$$
$$= \cos(4\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$$

Der Beweis des Moivre'schen Satzes für alle natürlichen Zahlen n ist eine schöne Übung für die Anwendung der Beweistechnik der vollständigen Induktion.

Wie souverän de Moivre mit Formeln umzugehen verstand, kann man auch an folgendem Beispiel ablesen. In der oben erwähnten Schrift von 1707 gibt er die folgende Beziehung an:

$$\cos\varphi = \tfrac{1}{2}\cdot\sqrt[n]{\cos(n\varphi)+i\cdot\sin(n\varphi)} - \tfrac{1}{2}\cdot\sqrt[n]{\cos(n\varphi)-i\cdot\sin(n\varphi)}$$

Diese Gleichung sowie eine entsprechende für den Sinus ergibt sich aus der Beziehung $(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi)+i\cdot\sin(n\varphi)$ durch eine einfache Umformung, nämlich aus

$\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi = \sqrt[n]{\cos(n\varphi)+i\cdot\sin(n\varphi)}$ und $\cos\varphi - i\cdot\sin\varphi = \sqrt[n]{\cos(n\varphi)-i\cdot\sin(n\varphi)}$.

De Moivre fand seine Formel, indem er die gemeinsame Struktur der Mehrfachwinkelsätze erkannte. Umgekehrt gilt:

Kennt man die Moivre'sche Formel, dann braucht man nicht mehr in Formelsammlungen nach Mehrfachwinkelsätzen zu suchen, denn man kann sich die benötigten Formeln auf einfache Weise schnell selbst herleiten:

Folgerung

Herleitung der Mehrfachwinkelsätze aus der Moivre'schen Formel

Entwickelt man die linke Seite der Moivre'schen Formel gemäß dem *binomischen Lehrsatz* und trennt anschließend die Terme nach *Real-* und *Imaginärteil,* so ergeben sich hieraus die Mehrfachwinkelsätze.

Beispiele

$\cos(2\varphi)+i\cdot\sin(2\varphi) = \cos^2\varphi + i\cdot 2\cos\varphi\sin\varphi - \sin^2\varphi$, also

$\cos(2\varphi) = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$ und $\sin(2\varphi) = 2\cos\varphi\sin\varphi$.

$\cos(3\varphi)+i\cdot\sin(3\varphi) = \cos^3\varphi + i\cdot 3\cos^2\varphi\sin\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi - i\cdot\sin^3\varphi$, also

$\cos(3\varphi) = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi$ und $\sin(3\varphi) = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi$.

$$\begin{aligned}\cos(5\varphi)+i\cdot\sin(5\varphi) = {} & \cos^5\varphi + i\cdot 5\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi \\ & - i\cdot 10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + 5\cos^1\varphi\sin^4\varphi + i\cdot\sin^5\varphi,\end{aligned}$$

also

$\cos(5\varphi) = \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi$ und

$\sin(5\varphi) = 5\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + \sin^5\varphi$.

13.1.2 Anwendung der Moivre'schen Formel beim Ziehen einer *n*-ten Wurzel

Dass eine kubische Gleichung in der Menge der komplexen Zahlen drei Lösungen hat, war seit Cardano bekannt; dies gilt erst recht für einfache Gleichungen wie $x^3 = 1$.

Welche Zahlen außer der Zahl 1 erfüllen diese Gleichung?

Aus der Moivre'schen Formel ergeben sich aus dem Ansatz

$$(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i \cdot \sin 3\varphi = 1 + 0 \cdot i$$

durch Koeffizientenvergleich die folgenden Bedingungen:

$$\cos(3\varphi) = 1 \textit{ und } \sin(3\varphi) = 0.$$

Diese sind erfüllt, wenn $3\varphi = 0°, 360°, 720°, \cdots$ bzw. wenn $3\varphi = 0°, 180°, 360°, 540°, \ldots$

Gemeinsam gelten sie also für $\varphi = 0°, 120°, 240°, \cdots$

Wegen $\cos 0° = 1$ und $\sin 0° = 0$, $\cos 120° = -\frac{1}{2}$ und $\sin 120° = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$ sowie $\cos 240° = -\frac{1}{2}$ und $\sin 240° = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$ ergibt sich daher, dass die drei Zahlen

$$x_1 = 1, x_2 = -\tfrac{1}{2} + i \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{3}, \text{und } x_3 = -\tfrac{1}{2} - i \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$$

die o. a. Bedingungen erfüllen.

Weitere Winkel wie 360°, 480°, 600° brauchen nicht mehr betrachtet zu werden, da die Sinus- und die Kosinusfunktion 2π-periodisch sind.

Aus der Lösung ergibt sich beispielsweise auch, dass die drei Zahlen

$$z_1 = 2, z_2 = -1 + i \cdot \sqrt{3} \text{ und } z_3 = -1 - i \cdot \sqrt{3}$$

Lösungen der Gleichung $z^3 = 8$ sind – dies sieht man, wenn man $z = 2x$ setzt, also $z^3 = (2x)^3 = 8x^3 = 8$.

De Moivre war bewusst, dass man beim Ziehen der dritten Wurzel drei Lösungen erhält, beim Ziehen der vierten Wurzel vier Lösungen usw.

In Abschnitt Abschn. 13.1.5 werden wir hierauf zurückkommen.

13.1.3 Lösung einer kubischen Gleichung mithilfe eines Dreifachwinkelsatzes

Mithilfe von $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$, der trigonometrischen Version des Satzes von Pythagoras, lassen sich die o. a. Formeln weiter umformen, sodass in manchen Fällen Beziehungen zwischen dem Kosinus bzw. dem Sinus und den jeweiligen Potenzen derselben trigonometrischen Funktion hergestellt werden können, z. B.

- $\cos(2\varphi) = 2\cos^2\varphi - 1$,
- $\cos(3\varphi) = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$ und $\sin(3\varphi) = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$

usw.

Die Gleichung $\cos(3\varphi) = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$ kann beispielsweise genutzt werden, um eine kubische Gleichung vom Typ $x^3 + px + q = 0$ zu lösen, vgl. hierzu auch Kap. 8.

Zunächst formt man die o. a. Gleichung um zu

$$\cos^3\varphi - \tfrac{3}{4}\cdot\cos\varphi - \tfrac{1}{4}\cdot\cos(3\varphi) = 0.$$

Da der Kosinus nur Werte zwischen –1 und +1 annehmen kann, macht man den Ansatz $x = r\cdot\cos\varphi$, sodass die o. a. kubische Gleichung die folgende Form annimmt:

$$r^3\cdot\cos^3\varphi + p\cdot r\cdot\cos\varphi + q = 0$$

Nach Division durch r^3 ergibt sich hieraus

$$\cos^3\varphi + \tfrac{p}{r^2}\cdot\cos\varphi + \tfrac{q}{r^3} = 0.$$

Durch Koeffizientenvergleich mit $x^3 + px + q = 0$ ergeben sich dann die beiden Bedingungen

$$\tfrac{p}{r^2} = -\tfrac{3}{4} \text{ und } \tfrac{q}{r^3} = -\tfrac{1}{4}\cdot\cos(3\varphi).$$

Aus der ersten Bedingung folgt $r = \sqrt{\frac{-4p}{3}}$; dies kann in der zweiten Gleichung eingesetzt werden:

$$\cos(3\varphi) = -\tfrac{4q}{r^3} = -4q\cdot\sqrt{\tfrac{27}{-64p^3}} = -\tfrac{q}{2}\cdot\sqrt{\tfrac{27}{-p^3}}$$

Beispiel

Eine Lösung der Gleichung $x^3 - 5x + 2 = 0$, also mit $p = -5$, $q = 2$ und $r = \sqrt{\frac{-4p}{3}} = \sqrt{\frac{20}{3}} = 2{,}581988\ldots$, ergibt sich daher aus

$$\cos(3\varphi) = -\tfrac{q}{2}\cdot\sqrt{\tfrac{27}{-p^3}} = -\sqrt{\tfrac{27}{125}} = -0{,}464758\cdots$$

Nun gilt $\varphi = \frac{1}{3}\cdot\arccos(-\sqrt{\frac{27}{125}}) = 0{,}684719\ldots$ – berechnet im Bogenmaß, und hieraus erhält man dann die (ganzzahlige) Lösung

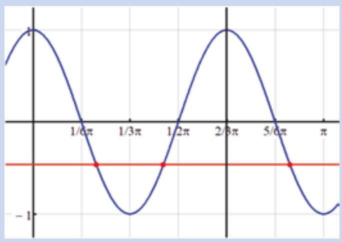
$$x_1 = r\cdot\cos\varphi = \sqrt{\tfrac{20}{3}}\cdot\cos\left(\tfrac{1}{3}\cdot\arccos\left(-\sqrt{\tfrac{27}{125}}\right)\right) = 2.$$

Den Wert $-\sqrt{\frac{27}{125}}$ nimmt die Kosinusfunktion noch an anderen Stellen an, vgl. die folgende Abbildung.

Hieraus ergeben sich die beiden anderen Lösungen

$$x_2 = r \cdot \cos\varphi = \sqrt{\tfrac{20}{3}} \cdot \cos\left(\tfrac{2}{3}\pi - \tfrac{1}{3} \cdot \arccos\left(-\sqrt{\tfrac{27}{125}}\right)\right) = 0{,}414213\cdots,$$

$$x_3 = r \cdot \cos\varphi = \sqrt{\tfrac{20}{3}} \cdot \cos\left(\tfrac{2}{3}\pi + \tfrac{1}{3} \cdot \arccos\left(-\sqrt{\tfrac{27}{125}}\right)\right) = -2{,}414213\ldots$$



Hinweis: Der Term $x^3 - 5x + 2$ kann als Produkt dargestellt werden: $x^3 - 5x + 2 = (x - 2) \cdot (x^2 + 2x - 1)$; der zweite Faktor hat die Nullstellen $x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{2}$.

Analog kann auch die Beziehung $\sin(3\varphi) = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$ zur Lösung von kubischen Gleichungen verwendet werden.

13.1.4 Die Euler'sche Gleichung

Im Jahr 1748 erschien in Lausanne der erste Band der *Introductio in Analysin Infinitorum* von **Leonhard Euler** (1707–1783). Wer zum ersten Mal das Buch in die Hand nimmt, ist, zurückhaltend formuliert, *beeindruckt* von der atemberaubenden Geschwindigkeit, mit der Euler seine Gedanken entwickelt – und das legt sich auch nicht bei der $(n+1)$-ten Lektüre (vgl. auch Kap. 14).

Im 7. Kapitel *(Von der Darstellung der Exponentialgrössen und der Logarithmen durch Reihen)* führt Euler in § 122 den Buchstaben e als Symbol für die Zahl $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = 2{,}7182818284590\ldots$ ein – wir bezeichnen diese Zahl heute als **Euler'sche Zahl;** in § 123 des Buches folgt die Reihenentwicklung $e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots$

In § 126, am Anfang des 8. Kapitel *(Von den transcendenten Zahlgrössen, welche aus dem Kreise entspringen),* führt Euler eine weitere Bezeichnung ein, die seither allgemein verwendet wird, nämlich den griechischen Buchstaben π für die Kreiszahl 3,1415926535…

Den Verweis auf die Moivre'sche Formel findet man in § 133 in der folgenden knappen Form:

$$(\cos z + \sqrt{-1} \cdot \sin z)^2 = \cos(2z) + \sqrt{-1} \cdot \sin(2z), \ \textit{und}$$

$$(\cos z + \sqrt{-1} \cdot \sin z)^3 = \cos(3z) + \sqrt{-1} \cdot \sin(3z), \ \textit{und somit allgemein}$$

$$(\cos z + \sqrt{-1} \cdot \sin z)^n = \cos(nz) + \sqrt{-1} \cdot \sin(nz).$$

Hinweis: Euler verwendete in der *Introductio* tatsächlich noch die Schreibweise $\sqrt{-1}$ für die imaginäre Einheit, den Buchstaben „i" als Bezeichnung für eine unendlich große Zahl (i = infinitum). Erst wenige Jahre vor seinem Tod schlug er der Petersburger Akademie die Verwendung des Buchstabens i für die imaginäre Einheit vor, die seitdem üblich ist.

In § 133 folgen ohne weitere Kommentare die beiden Gleichungen

$$\cos(nz) = \tfrac{1}{2} \cdot \left[\left(\cos z + \sqrt{-1} \cdot \sin z\right)^n + \left(\cos z - \sqrt{-1} \cdot \sin z\right)^n\right],$$

$$\sin(nz) = \tfrac{1}{2 \cdot \sqrt{-1}} \cdot \left[\left(\cos z + \sqrt{-1} \cdot \sin z\right)^n - \left(\cos z - \sqrt{-1} \cdot \sin z\right)^n\right]$$

sowie die o. a. Mehrfachwinkelsätze.

In § 138 führt Euler einen Koeffizientenvergleich mit $(1 + \frac{x}{n})^n = e^x$ durch, wobei n eine unendlich große Zahl sein soll, und gelangt so zu den berühmten Euler'schen Formeln (s. u.).

Eulers Vorgehensweise erscheint aus heutiger Sicht etwas umständlich; man hätte vielleicht eher einen Beweis mithilfe der Maclaurin'schen Reihen (Taylor-Reihen um $x = 0$) erwartet. **Colin Maclaurin** (1698–1746) war ein schottischer Mathematiker, der 1742 eine der ersten systematischen Darstellungen der Newton'schen Infinitesimalrechnung veröffentlichte.

Hier geht es um den Vergleich der unendlichen Potenzreihen für die Exponential-, die Kosinus- und die Sinusfunktion:

$$e^z = \tfrac{z^0}{0!} + \tfrac{z^1}{1!} + \tfrac{z^2}{2!} + \tfrac{z^3}{3!} + \tfrac{z^4}{4!} + \ldots, \ \text{also wegen } i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$$

$$e^{iz} = \tfrac{z^0}{0!} + \tfrac{iz^1}{1!} - \tfrac{z^2}{2!} - \tfrac{iz^3}{3!} + \tfrac{z^4}{4!} + \tfrac{iz^5}{5!} - \tfrac{z^6}{6!} - \tfrac{iz^7}{7!} + \tfrac{z^8}{8!} + \ldots - \ldots$$

$\cos(z) = \frac{z^0}{0!} - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots - \ldots$ und $\sin(z) = \frac{z^1}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots - \ldots$, also

$\cos(z) + i \cdot \sin(z) = \frac{z^0}{0!} + \frac{iz^1}{1!} - \frac{z^2}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{iz^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} - \frac{iz^7}{7!} + \frac{z^8}{8!} + \ldots - \ldots = e^{iz}.$

Satz

Euler'sche Formeln

Für beliebige reelle Zahlen x gilt
$e^{x\cdot\sqrt{-1}} = \cos(x) + \sqrt{-1}\cdot\sin(x)$ und $e^{-x\cdot\sqrt{-1}} = \cos(x) - \sqrt{-1}\cdot\sin(x)$,
d. h. unter Verwendung der Schreibweise $i = \sqrt{-1}$:

- $e^{ix} = \cos(x) + i\cdot\sin(x)$ und $e^{-ix} = \cos(x) - i\cdot\sin(x)$.

  Speziell gilt für $x = \pi$: $e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\cdot\sin(\pi) = -1 + 0 = -1$, also

- $e^{i\pi} + 1 = 0$ (**Euler'sche Identität).**

  Und für $x = \frac{\pi}{2}$ ergibt sich: $e^{i\cdot\pi/2} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + i = i$. Potenziert man beide Seiten der Gleichung mit der imaginären Einheit i, so folgt hieraus die Beziehung

  $$i^{\,i} = \left(e^{i\cdot\pi/2}\right)^{i} = e^{-\pi/2} = 0{,}207879576\ldots,$$

  d. h., eine komplexe Potenz einer komplexen Zahl kann eine reelle Zahl ergeben!

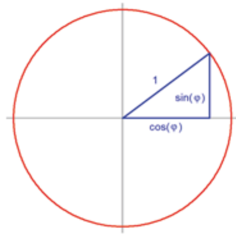
  Aus den o. a. Formeln ergeben sich umgekehrt Darstellungen der trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus mithilfe der Exponentialfunktion:

- $\cos(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$ und $\sin(x) = \frac{1}{2i}\cdot\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$

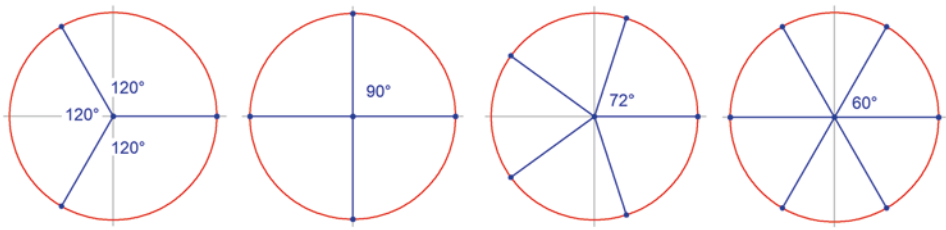
13.1.5 Darstellung von *n*-ten Wurzeln in der Gauß'schen Zahlenebene

Es ist schon erstaunlich, dass nicht bereits Euler die Idee hatte, die Moivre'sche Gleichung zu visualisieren.

Euler selbst fehlte wohl nur ein kleiner Schritt; denn das 8. Kapitel der *Introductio* beginnt mit der Definition der Sinus- und der Kosinusfunktion (im Bogenmaß) am Einheitskreis: Durch einen Punkt auf der Kreislinie wird ein rechtwinkliges Dreieck festgelegt, dessen Hypotenuse die Länge 1 hat und dessen Katheten die Längen $\cos(\varphi)$ und $\sin(\varphi)$ haben. Und auch war Euler bewusst, dass es einen Zusammenhang zwischen regelmäßigen n-Ecken und den n-ten Wurzeln der Zahl 1 (*Einheit*) geben muss.



Und so vergingen noch einmal einige Jahrzehnte, bis die folgenden Bilder entstehen konnten.



1799 reichte der dänisch-norwegische Landvermesser **Caspar Wessel** (1745–1818) bei der *Königlich Dänischen Akademie der Wissenschaften* einen Beitrag zur Veröffentlichung ein, in dem er erläuterte, dass komplexe Zahlen als Punkte in einer Ebene dargestellt werden können, und auch, welche geometrische Bedeutung die Rechenarten in der Menge der komplexen Zahlen haben. Da die Schrift in dänischer Sprache verfasst war, wurde sie in anderen Ländern nicht zur Kenntnis genommen.

Unabhängig von Wessel verfasste 1806 der aus Genf stammende Hobby-Mathematiker **Jean-Robert Argand** (1768–1822) einen ähnlichen Beitrag, der aber ebenfalls kaum Beachtung fand.

Spätestens 1811 hatte **Carl-Friedrich Gauß** (1777–1855) die in der Briefmarke dargestellte Form gefunden, die wir heute als **Gauß'sche Zahlenebene** bezeichnen.

Im Französischen und Englischen wird die komplexe Ebene dagegen auch oft als *plan d'Argand* bzw. als *Argand plane* bezeichnet; im Deutschen findet man gelegentlich die Bezeichnung Argand-Diagramm.

Komplexe Zahlen $z = a + i \cdot b$ werden als Punkte in einem zweidimensionalen kartesischen Koordinatensystem eingezeichnet – der **Realteil** $a = \mathrm{Re}(z)$ wird in Richtung der x-Achse abgetragen, der **Imaginärteil** $b = \mathrm{Im}(z)$ in Richtung der y-Achse.

Punkte $(x|y)$ auf einem Kreis mit Radius 1 um den Ursprung der Gauß'schen Zahlenebene, dem sog. **Einheitskreis,** erfüllen die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$.

Analog zum Beispiel aus Abschn. 13.1.2 findet man die Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ mithilfe der Moivre'schen Formel aus dem Ansatz

$$\left[\cos\left(k \cdot \tfrac{360°}{n}\right) + i \cdot \sin\left(k \cdot \tfrac{360°}{n}\right)\right]^n = \cos(k \cdot 360°) + i \cdot \sin(k \cdot 360°) = 1 + i \cdot 0 = 1.$$

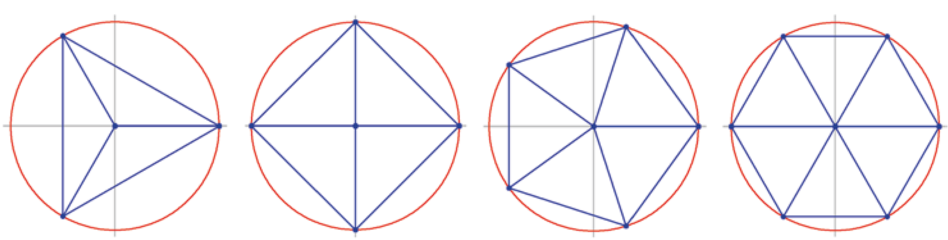
Zeichnerisch kann man die n Lösungen der Gleichung ermitteln, indem man vom Ursprung des Koordinatensystems aus n Strahlen unter dem Winkel φ mit $\varphi = k \cdot \frac{360°}{n}$ zeichnet – also beginnend mit einem Strahl in Richtung der positiven x-Achse – und deren Schnittpunkte mit dem Einheitskreis bestimmt. Kreisfläche und Kreislinie werden also durch diese Strahlen gleichmäßig geteilt; man spricht daher von der sog. **Kreisteilungsgleichung.**

Die n Schnittpunkte auf der Kreislinie bilden ein regelmäßiges n-Eck.

Formel

Lösungen der Kreisteilungsgleichung

Die n Lösungen der Kreisteilungsgleichung $z^n = 1$ haben die Form
$z_k = \cos\left(k \cdot \frac{360°}{n}\right) + i \cdot \sin\left(k \cdot \frac{360°}{n}\right)$, wobei $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.



In besonderen Fällen kann man die Koordinaten der Eckpunkte der regelmäßigen n-Ecke auch algebraisch bestimmen, d. h. ohne Verwendung der trigonometrischen Funktionen, vgl. beispielsweise *Mathematik ist schön,* Kap. 1.

13.2 Wer war Abraham de Moivre?

Im Jahr 1598 erließ König Henri IV. das *Edikt von Nantes* und gewährte damit den calvinistischen Protestanten (Hugenotten) seines Landes gewisse Rechte, ihre Religion auszuüben. In den nachfolgenden Jahrzehnten wurden diese Freiheiten jedoch schrittweise eingeschränkt, bis schließlich König Ludwig XIV. im Jahr 1685 das Edikt vollständig aufhob, was zu einer Massenflucht der Hugenotten aus Frankreich führte.

Abraham Moivre, 1667 als Sohn eines protestantischen Arztes in Vitry-le-François (Champagne) geboren, besuchte zunächst vor Ort die tolerante katholische Schule der *Christlichen Brüder,* mit 11 Jahren dann die protestantische Akademie in Sedan. Nach der Zwangsschließung dieser Schule im Jahr 1682 wechselte er zunächst nach Saumur (Loire) und schließlich an ein Collège in Paris.

Sein Interesse an mathematischen Fragen wurde in der Schule nicht gestillt. Daher las er selbstständig die Schriften von Christiaan Huygens, insbesondere dessen Untersuchungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, *De ratiociniis in ludo aleae,* und nahm Privatunterricht bei Jacques Ozanam, einem angesehenen Autor zahlreicher Mathematikbücher, darunter dem fünfbändigen *Cours des mathématiques,* das sogar in englischer Sprache erschien, sowie den *Récréations mathématiques et physiques.*

Nach Aufhebung des Edikts von Nantes wurde Abraham Moivre zusammen mit anderen Hugenotten über zwei Jahre lang in einem Kloster gefangen gehalten, um ihn zum katholischen Glauben zu bekehren. 1688 gelang ihm die Flucht nach England.

In London angekommen, fügte der 21-Jährige seinem Namen das *„de“* hinzu. Seinen Lebensunterhalt verdiente er sich als Privatlehrer, unterrichtete die Kinder aus reichen Familien in Mathematik und bot seine Dienste in Kaffeehäusern an. Mit einem Empfehlungsschreiben wandte er sich an den Earl of Devonshire, der ihm zwar keine Stelle gab, bei dem er aber eine für sein künftiges Leben wichtige Begegnung hatte: Der Earl zeigte ihm ein druckfrisches Exemplar von Isaac Newtons *Principia Mathematica.*

De Moivre erkannte sofort, dass dies ein Werk war, das alle Bücher, die er bisher in Händen gehalten hatte, an Bedeutung übertraf. Er erwarb ein Exemplar des Werks und zerschnitt es. So konnte er es Seite für Seite lesen, überall, zwischen und während seiner Unterrichtsstunden.

1692 lernte er Edmond Halley kennen, der zu dieser Zeit Sekretär der *Royal Society* war, und kurze Zeit darauf auch Isaac Newton selbst, mit dem er lange Gespräche über dessen Infinitesimalrechnung führte. 1695 reichte er einen ersten Beitrag zu der *Method of fluxions* bei der *Royal Society* ein, die ihn zwei Jahre später als Mitglied aufnahm.

Er freundete sich mit Newton an und es kam zu einer engen Zusammenarbeit zwischen beiden. Newton war von den Fähigkeiten de Moivres so angetan, dass er ihm die Herausgabe der lateinischen Fassung seiner *Optics* überließ.

Auf Fragen zur *Principia* pflegte Newton zu antworten: „Go to Mr. de Moivre; he knows these things better than I do."

Aber weder die Mitgliedschaft in der *Royal Society* noch die Freundschaft zu Newton und auch nicht die große Anzahl an Veröffentlichungen trug dazu bei, dass de Moivre eine angemessene Stelle an einer der englischen Universitäten fand – als Ausländer hatte er mit seinen Bewerbungen keine Chance. Eigentlich erstaunlich war es daher, dass der Ausländer de Moivre 1710 von der *Royal Society* in die Kommission berufen wurde, die den Prioritätsstreit zwischen Newton und Leibniz klären sollte. Oder ging es nur darum, nach außen der Eindruck einer neutralen, unabhängigen Untersuchung zu erwecken?

Ungeachtet der Berufung de Moivres in diese Kommission bemühten sich auch Johann Bernoulli und Gottfried Wilhelm Leibniz darum, de Moivre eine Stelle auf dem Kontinent zu vermitteln.

Und so verbrachte de Moivre genügsam seine Tage, wanderte zwischen den Häusern reicher Familien hin und her und wartete in Kaffeehäusern auf Menschen, die wissen wollten, welche Chancen sie bei gewissen Glücksspielen haben oder ob angebotene Rentenversicherungen empfehlenswert wären; abends traf er sich regelmäßig mit Newton zum philosophischen Gespräch.

Bis zu seinem Tod im November 1754 lebte er, alleinstehend, in bescheidenen Verhältnissen; selbst die Einkünfte aus den Veröffentlichungen trugen nicht zu einem angemessenen Auskommen bei. Genügsam fügte er sich in sein Schicksal und ertrug es mit unerschütterlicher Frömmigkeit.

Ein letzter Lichtblick: Einige Monate vor seinem Tod erreichte den 87-Jährigen die Nachricht, dass nach der preußischen nun auch die französische Akademie der Wissenschaften ihn zum Mitglied gewählt habe.

13.3 Mit welchen (mathematischen) Themen beschäftigte sich de Moivre außerdem?

Etwa zeitgleich zu den Untersuchungen, die zur Moivre'schen Formel führten, vertiefte sich de Moivre in die hinterlassenen Schriften von **Roger Cotes** (1682–1716).

Cotes, ehemaliger Student Isaac Newtons und seit 1707 Professor für Astronomie in Cambridge, hatte Newton dabei unterstützt, die zweite Auflage seiner *Principia* vorzubereiten.

Nach Cotes' frühem Tod übernahm zunächst ein Cousin von diesem die Aufgabe, dessen mathematischen Nachlass zu sichten und zu veröffentlichen, war jedoch fachlich nicht in der Lage, die Ansätze weiterzuführen. Dies übernahm dann de Moivre, der sich über die von Cotes entdeckten Beziehungen zwischen Geometrie (Trigonometrie) und Algebra begeistert zeigte.

Im Rahmen der rasanten Entwicklung der Integralrechnung stießen die Mathematiker am Ende des 17. Jahrhunderts u. a. auf das Problem, wie Stammfunktionen für gebrochenrationale Funktionen bestimmt werden können.

Gebrochenrationale Funktionen, deren Nennerpolynome höchstens den Grad 2 haben, lassen sich – ggf. nach geeigneter *Substitution* – auf folgende Grundintegrale zurückführen:

$$\int \tfrac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \tfrac{1}{x^2} dx = -\tfrac{1}{x} + C \text{ und}$$

$$\int \tfrac{1}{x^2+1} dx = \arctan(x) + C$$

Wenn sich das Nennerpolynom in zwei Linearfaktoren zerlegen lässt, dann kann man den Bruch als Summe von Brüchen darstellen (sog. *Partialbruchzerlegung*).

Beispiele

$\int \frac{1}{x-1} dx = \ln|x-1| + C;$ $\int \frac{1}{(x+3)^2} dx = -\frac{1}{x+3} + C;$

$\int \frac{1}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \cdot \arctan(\frac{x}{2}) + C;$ $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+1} dx = \ln|x^2+3x+1| + C;$

$\int \frac{1}{x^2-4} dx = \int \frac{1}{4} \cdot (\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2})\, dx = \frac{1}{4} \cdot \ln|\frac{x-2}{x+2}| + C$

Hinsichtlich der Zerlegbarkeit bereiteten die Nennerpolynome vom Typ $x^{2n}+1$ mit $n > 1$ besondere Probleme, die aber von Cotes gelöst werden konnten.

Cotes hatte u. a. die folgenden Zerlegungen herausgefunden:

$$x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2} \cdot x + 1) \cdot (x^2 + \sqrt{2} \cdot x + 1),$$

$$x^6 + 1 = (x^2 - \sqrt{3} \cdot x + 1) \cdot (x^2 + 1) \cdot (x^2 + \sqrt{3} \cdot x + 1),$$

$$\begin{aligned} x^8 + 1 = {} & (x^2 - \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot x + 1) \cdot (x^2 - \sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot x + 1) \\ & \cdot (x^2 + \sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot x + 1) \cdot (x + \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot x + 1) \end{aligned}$$

Dabei hatte er einen Zusammenhang mit den Werten der Kosinusfunktion erkannt:

- Wegen $\cos(45°) = \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und $\cos(135°) = \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ gilt:
$$x^4 + 1 = (x^2 - 2x \cdot \cos\left(\tfrac{1}{4}\pi\right) + 1) \cdot (x^2 - 2x \cdot \cos\left(\tfrac{3}{4}\pi\right) + 1).$$
- Wegen $\cos(30°) = \cos\left(\frac{1\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos(90°) = \cos\left(\frac{3\pi}{6}\right) = 0$ und $\cos(150°) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ gilt:

$$x^6 + 1 = (x^2 - 2x \cdot \cos\left(\tfrac{1}{6}\pi\right) + 1) \cdot (x^2 - 2x \cdot \cos\left(\tfrac{3}{6}\pi\right) + 1) \cdot (x^2 - 2x \cdot \cos\left(\tfrac{5}{6}\pi\right) + 1).$$

- Wegen $\cos(22{,}5°) = \cos\left(\frac{1}{8}\pi\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$; $\cos(67{,}5°) = \cos\left(\frac{3}{8}\pi\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $\cos(112{,}5°) = \cos\left(\frac{5}{8}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ und $\cos(157{,}5°) = \cos\left(\frac{7}{8}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ gilt:

$$x^8 + 1 = (x^2 - 2x \cdot \cos\left(\tfrac{1}{8}\pi\right) + 1) \cdot (x^2 - 2x \cdot \cos\left(\tfrac{3}{8}\pi\right) + 1)$$
$$\cdot (x^2 - 2x \cdot \cos\left(\tfrac{5}{8}\pi\right) + 1) \cdot (x^2 - 2x \cdot \cos\left(\tfrac{7}{8}\pi\right) + 1)$$

Satz

Satz von Cotes

Für beliebige natürliche Zahlen n gilt:

$$x^{2n} + 1 = \left[x^2 - 2x \cdot \cos\left(\tfrac{1}{2n} \cdot \pi\right) + 1\right]$$
$$\cdot \left[x^2 - 2x \cdot \cos\left(\tfrac{3}{2n} \cdot \pi\right) + 1\right] \cdot \ldots \cdot \left[x^2 - 2x \cdot \cos\left(\tfrac{2n-1}{2n} \cdot \pi\right) + 1\right]$$

Hinweis Für $n = 1$ steht auf der rechten Seite nur *ein* Faktor, für $n = 2$ sind es *zwei* Faktoren, vgl. oben.

De Moivres mathematische Aktivitäten beschränkten sich aber nicht nur auf die Infinitesimalrechnung. Er verallgemeinerte den von Newton hergeleiteten (allgemeinen) Binomischen Lehrsatz zum sog. **Polynomialsatz.**

Für drei Summanden a, b, c und $n = 3$ besagt dieser

$$(a + b + c)^n = \sum_{k_1+k_2+k_3=n} \binom{n}{k_1, k_2, k_3} \cdot a^{k_1} \cdot b^{k_2} \cdot c^{k_3},$$

wobei die hier auftretenden Polynomialkoeffizienten als Produkt von Binomialkoeffizienten berechnet werden können:

$$\binom{n}{k_1, k_2, k_3} = \binom{n}{k_1} \cdot \binom{n - k_1}{k_2} \cdot \binom{n - k_1 - k_2}{k_3} = \binom{n}{k_1} \cdot \binom{n - k_1}{k_2}$$

Beispiel

$$(a + b + c)^3 = (a^3 + b^3 + c^3) + 3 \cdot (a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) + 6abc$$

Edmond Halley (1656–1742) war der Erste, der Sterbetafeln dazu benutzte, um angemessene Raten für Lebensversicherungen zu berechnen (um 1693). De Moivre entwickelte aus diesem Datenmaterial Formeln, mit deren Hilfe man die jährlichen Raten berechnen kann. Sein Werk *Annuities on lives* aus dem Jahr 1724 wurde mehrfach neu aufgelegt.

1730 veröffentlichte de Moivre den Beitrag *Miscellanea Analytica* („Analytische Beiträge"); hierin gab er – 113 Jahre vor Jacques Philippe Marie Binet – die heute so genannte **Binet-Formel** zur Berechnung der Fibonacci-Zahlen an:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Beispiele

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right] = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1,$$

$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{4\sqrt{5}} \cdot [1+2\sqrt{5}+5-1+2\sqrt{5}-5] = \frac{4\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = 1$$

$$\begin{aligned} f_3 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3\right] \\ &= \frac{1}{8\sqrt{5}} \cdot \left[1 + 3\sqrt{5} + 15 + 5\sqrt{5} - 1 + 3\sqrt{5} - 15 + 5\sqrt{5}\right] \\ &= \frac{16\sqrt{5}}{8\sqrt{5}} = 2 \end{aligned}$$

Auch veröffentlichte de Moivre eine Reihe von wichtigen Beiträgen zur **Wahrscheinlichkeitsrechnung,** darunter im Jahr 1711 die Schrift

The Doctrine of Chance: A method of calculating the probabilities of events in play

mit einer Widmung für Newton, 1718 auch in lateinischer Sprache, 1738 und posthum 1756 in erweiterter Fassung. Die Ausgabe von 1738 enthält die heute als „klassisch" bezeichnete Definition der Wahrscheinlichkeit, die später – auch hinsichtlich der Argumentation – *wörtlich* von **Pierre-Simon de Laplace** übernommen wurde:

$$\text{Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses} = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}$$

Prioritätsstreitigkeiten zwischen ihm und **Pierre Rémonde de Montmort** (1678–1719), der 1708 eine Sammlung kombinatorischer Probleme unter dem Titel *Essay d' analyse sur les jeux de hazard* herausgebracht hatte, eskalierten nicht – ungewöhnlich für eine Zeit voller Prioritätsstreitigkeiten, da beide einräumten, dass der jeweils andere wichtige Anteile an der Lösung des sog. *Rencontre-Problems* beigetragen hatte.

Beim Rencontre-Problem werden die Wahrscheinlichkeiten untersucht, mit denen k Elemente aus einer Menge von n Objekten bei einer zufälligen Anordnung mit einer ursprünglichen Anordnung übereinstimmen. Beispielsweise gilt hier das 1/e-Gesetz:

Die Wahrscheinlichkeit $P(n;0)$ für das Ereignis „keine Übereinstimmung" *beim Abgeben eines Tipps für die Ziehungsreihenfolge von n Kugeln ist für $n \geq 6$ näherungsweise gleich dem Kehrwert der Euler'schen Zahl $e = 2{,}718281828459\ldots$* (vgl. auch Kap. 14 über Leonhard Euler und Abschn. 11.3 in *Mathematik ist wunderwunderschön*).

1733 entwickelte de Moivre eine Näherungsformel für Fakultäten:

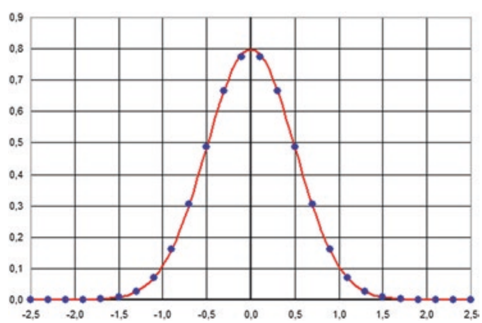
$n! \approx c \cdot \sqrt{n} \cdot n^{n+1} \cdot e^{-n}$, wobei er den Faktor c näherungsweise als $c \approx 2{,}5$ angeben konnte. Es ärgerte ihn, als kurze Zeit später der Schotte **James Stirling** (1692–1770) den Faktor c als $\sqrt{2\pi} \approx 2{,}50662\ldots$ identifizierte.

Er setzte sich auch mit dem **Bernoulli'schen Gesetz der großen Zahlen** auseinander (benannt nach Jakob Bernoulli, 1655–1705) und entdeckte die Approximation der Binomialverteilung durch eine Verteilung, die wir heute als **Normalverteilung** bezeichnen:

Ausgehend von der Wahrscheinlichkeit $p_k = \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{2^n}$ für k-mal Wappen beim n-fachen Münzwurf und der Symmetrie bzgl. $k = \frac{1}{2} \cdot n$ fiel ihm auf, dass die Verteilung mithilfe von $\sqrt{n}$ standardisiert werden kann (bis auf den Faktor $\frac{1}{2}$ ist dies gerade die Standardabweichung σ), d. h., dass es eine stetige Funktion f gibt mit

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot e^{-2x^2} \approx \frac{\sqrt{n}}{2^n} \cdot \binom{n}{k}, \text{ wobei } x = \frac{k - \frac{1}{2} \cdot n}{\sqrt{n}}.$$

Diese Approximation wurde später von Laplace verallgemeinert (sog. **Moivre-Laplace'sche Näherungsformeln**).



13.4 Literaturhinweise

Eine wichtige Adresse zum Auffinden von Informationen über Mathematiker und deren wissenschaftliche Leistungen ist die Homepage der St. Andrews University.

Informationen über de Moivre findet man unter:

- www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/De_Moivre.html
  Außerdem gibt es Überblicksbeiträge zu einzelnen Themen wie z. B.:
- www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Trigonometric_functions.html
- Strick, Heinz Klaus (2012): *Kalenderblatt über de Moivre,* www.spektrum.de/wissen/abraham-de-moivre-1667–1754/1148560
- Strick, Heinz Klaus (2017): *Mathematik ist schön,* Springer, Heidelberg, Kap. 1 (Regelmäßige Vielecke und Sterne)
- Strick, Heinz Klaus (2019): *Mathematik ist wunderwunderschön,* Springer, Heidelberg, Kap. 11 (Rencontre und mehr)

Der Beitrag von Ivo Schneider über Abraham de Moivre in der englischsprachigen Mathematik-Enzyklopädie steht als Download zur Verfügung:

- www.encyclopediaofmath.org/images/7/7f/AbrahamDEMOIVRE.pdf

Einen informativen Überblick über die Geschichte der komplexen Zahlen findet man in:

- www.math.uri.edu/~merino/spring06/mth562/ShortHistoryComplexNumbers2006.pdf

Wikipedia-Artikel in deutscher, englischer und französischer Sprache zu den Stichwörtern:

- Abraham de Moivre
- François Viète
- Roger Cotes
- Moivrescher Satz (de Moivre’s formula, Formule de Moivre)
- Eulersche Formel (Euler’s formula, Formule d’Euler)
- Komplexe Zahlen (Complex number, Nombre complexe)
- – (Complex plane, Plane complexe)
- Histoire des nombres complexes (nur in französischer Sprache)

14 Leonhard Euler – „unser aller Meister“

Die Mathematik ist es, die uns vor dem Trug der Sinne schützt und uns den Unterschied zwischen Schein und Wahrheit kennen lehrt.

Leonhard Euler (1707–1783) war zweifelsohne der produktivste Mathematiker aller Zeiten; er verfasste insgesamt 866 Abhandlungen und Bücher zu verschiedenen Teilbereichen der reinen und angewandten Mathematik, zur Physik und Astronomie, zur Geodäsie und Kartografie, aber auch zur Musik – in lateinischer, französischer und deutscher Sprache. Er schrieb nicht nur viel, sondern brachte auch bei allen Themen, mit denen er sich beschäftigte, neuartige Ideen ein und eröffnete durch seine Beiträge sogar neue Teilbereiche der Mathematik.

1727 wurde die Öffentlichkeit zum ersten Mal auf Euler aufmerksam: Der 19-jährige Absolvent der Universität Basel beteiligte sich an einem Wettbewerb der Pariser *Académie des Sciences* und gewann auf Anhieb einen zweiten Preis, und zwar mit einem Beitrag zu der Frage, wie Maste auf Segelschiffen optimal positioniert werden – man

H. K. Strick, *Mathematik – einfach genial!*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-60449-6_14

kann davon ausgehen, dass der in Basel aufgewachsene junge Mann bis dahin noch keine Schiffe gesehen hatte, mit denen man die Ozeane befahren kann.

Übrigens gewann Leonhard Euler diesen angesehenen, jährlich ausgeschriebenen wissenschaftlichen Wettbewerb der *Académie des Sciences* im Laufe seines Lebens insgesamt 12-mal.

Der Wettbewerbsbeitrag von 1727 war bereits etwas Besonderes, aber eine regelrechte Sensation – zumindest in Fachkreisen – war eine Veröffentlichung Eulers aus dem Jahr 1735, auf die wir im Folgenden näher eingehen werden.

14.1 Einfach genial: Leonhard Euler löst das Basler Problem

Der italienische Mathematiker **Pietro Mengoli** (1626–1686), ein Schüler Bonaventura Cavalieris, hatte sich in den 1640er Jahren intensiv mit dem Konvergenzverhalten von Summenfolgen beschäftigt. Unter anderem hatte er beweisen können, dass

- die harmonische Reihe mit $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$ divergiert, (vgl. z. B. *Mathematik ist wunderschön,* Abschn. 2.2).
- die Summenfolge mit $D_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \ldots + \frac{2}{n\cdot(n+1)}$ der Kehrwerte der Dreieckszahlen gegen den Grenzwert 2 konvergiert (vgl. z. B. *Mathematik ist wunderwunderschön,* Abschn. 6.9),
- die alternierende harmonische Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + - \ldots$ den Grenzwert $\ln(2)$ hat.

Allerdings scheiterte er bzgl. der Frage, ob die Summenfolge Q_n der reziproken Quadratzahlen, also $Q_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{n^2}$, ebenfalls über alle Schranken hinaus wächst oder ob sie gegen einen bestimmten Wert konvergiert.

Einige Jahrzehnte später konnte **Johann Bernoulli** (1667–1748) dann zwar beweisen, dass Q_n konvergiert, indem er für Q_n eine *konvergente Majorante* M_n angeben konnte, also eine Folge, deren Glieder mindestens so groß sind wie die von Q_n:

Es gilt nämlich für alle Summanden von M_n und Q_n mit $n \geq 2$:
$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)\cdot n}$, und daher gilt entsprechend für die Summen

$$Q_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} = M_n.$$

Die rechts stehende Summe lässt sich aber noch anders darstellen:

$$M_n = 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} = 2 - \frac{1}{n}$$

Da M_n offensichtlich gegen 2 konvergiert, bleiben also alle Glieder der Folge Q_n stets kleiner als 2, und durch Vergleich der ersten Folgenglieder kann man erschließen, dass der Grenzwert von Q_n mit Sicherheit kleiner ist als 1,65.

n	M_n	Q_n	$M_n - Q_n$
1	1	1	0
2	1,5	1,25	0,25
3	1,66667	1,36111	0,30556
4	1,75	1,42361	0,32639
5	1,8	1,46361	0,33639
6	1,83333	1,49139	0,34194
7	1,85714	1,51180	0,34535
8	1,875	1,52742	0,34758
9	1,88889	1,53977	0,34912
10	1,9	1,54977	0,35023

Im Hinblick auf die Bestimmung des Grenzwerts von Q_n konnten aber weder Jakob Bernoulli (1654–1705) noch sein jüngerer Bruder Johann (1667–1748) noch andere Mathematiker der Universität Basel Fortschritte erzielen – daher erhielt das Problem die Bezeichnung *Basler Problem.*

Jakob Bernoulli schrieb 1689 an die Mathematiker-Gemeinschaft in Europa: „Groß wird unsere Dankbarkeit sein, wenn jemand das findet und uns mitteilt, was sich bisher unseren Anstrengungen entzogen hat!"

Aber auch Mathematiker in anderen Ländern, die sich ebenfalls um eine Lösung bemühten, scheiterten, beispielsweise Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), James Stirling (1692–1770) oder Abraham de Moivre (1667–1754).

Man kann davon ausgehen, dass Leonhard Euler durch seinen Lehrer Johann Bernoulli auf das Problem aufmerksam gemacht wurde, das er dann im Alter von 27 Jahren lösen konnte. (Zu diesem Zeitpunkt war Euler bereits nicht mehr in Basel tätig, sondern als Professor für Physik in St. Petersburg, s. u.)

1735 veröffentlichte er in dem Beitrag *De Summis Serierum Reciprocarum* („Über die Summen von reziproken Folgen") u. a. das Ergebnis

$$\lim_{n\to\infty} Q_n = \tfrac{\pi^2}{6} = 1{,}644934\ldots$$

Besonders erstaunlich: Hier spielt die Kreiszahl π eine Rolle – und das bei einer Summenfolge, bei der jeder hinzukommende Summand Kehrwert einer Quadratzahl ist.

Wie in Kap. 13 bereits zu sehen war, ging Euler mit Potenzreihenentwicklungen von Funktionen äußerst virtuos um, so auch hier:

Aus der Potenzreihe für die Sinusfunktion, also

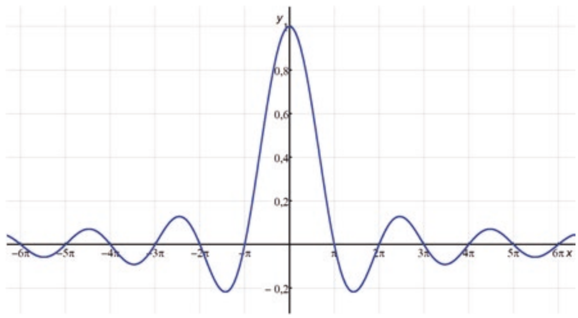
$$\sin(x) = \tfrac{x^1}{1!} - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} - \tfrac{x^7}{7!} + \ldots - \ldots,$$

leitete er eine Darstellung für die Funktion $f(x)$ mit

$$f(x) = \tfrac{\sin(x)}{x} = \tfrac{x^0}{1!} - \tfrac{x^2}{3!} + \tfrac{x^4}{5!} - \tfrac{x^6}{7!} + \ldots - \ldots$$

ab.

Über diese Funktion wissen wir: An der Stelle $x = 0$ kann die Funktion stetig ergänzt werden durch $f(0) = 1$; die Nullstellen liegen bei $\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \pm 4\pi, \ldots$.



Für ganzrationale Funktionen n-ten Grades gilt nun: Hat eine solche Funktion genau n Nullstellen, dann lässt sich der Funktionsterm als Produkt der zugehörigen n Linearfaktoren darstellen.

Beispiele

- $n = 2$: Die quadratische Funktion g mit $g(x) = x^2 - 2x - 3$ hat die beiden Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$; daher lässt sich der Funktionsterm notieren als $g(x) = (x+1) \cdot (x-3)$ und weiter umgeformt als $g(x) = (-3) \cdot (1+x) \cdot (1 - \frac{x}{3})$.
  Die zuletzt gewählte Darstellung hat den Vorteil, dass der Faktor -3 genau gleich dem Funktionswert an der Stelle $x = 0$ ist (wie man leicht sieht, wenn man $x = 0$ einsetzt).
- n = 3: Die kubische Funktion h mit $h(x) = x^3 - 7x + 6$ hat die drei Nullstellen $x_1 = -3$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 2$; daher lässt sich der Funktionsterm notieren als $h(x) = (x+3) \cdot (x-1) \cdot (x-2)$ und weiter umgeformt als $h(x) = 6 \cdot (1 + \frac{x}{3}) \cdot (1 - x) \cdot (1 - \frac{x}{2})$.
  Auch hier kann man an der letzten Darstellung ablesen, dass $h(0) = 6$.

Euler wandte nun diesen Satz über Polynome mit *endlich vielen* Summanden auf die Funktion $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ an, d. h., er fasste den Funktionsterm als ein *unendliches* Polynom auf, und da $f(0) = 1$ ist, erhielt er die Darstellung

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin(x)}{x} = 1 \cdot (1 - \tfrac{x}{\pi})(1 + \tfrac{x}{\pi})(1 - \tfrac{x}{2\pi})(1 + \tfrac{x}{2\pi})(1 - \tfrac{x}{3\pi})(1 + \tfrac{x}{3\pi}) \cdot \ldots \\ &= (1 - \tfrac{x^2}{\pi^2})(1 - \tfrac{x^2}{4\pi^2})(1 - \tfrac{x^2}{9\pi^2}) \cdot \ldots \end{aligned}$$

Euler war damit schon fast am Ziel:

Multipliziert man das unendliche Produkt von Linearfaktoren aus, dann erhält man

$$(1 - \tfrac{x^2}{\pi^2})(1 - \tfrac{x^2}{4\pi^2})(1 - \tfrac{x^2}{9\pi^2}) \cdot \ldots = 1 - (\tfrac{1}{\pi^2} + \tfrac{1}{4\pi^2} + \tfrac{1}{9\pi^2} + \ldots) \cdot x^2 + (\ldots) \cdot x^4 - \ldots$$

Vergleicht man dies jetzt mit der Potenzreihenentwicklung

$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} = \frac{x^0}{1!} - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots - \ldots$,

dann ergibt sich durch Vergleich der Koeffizienten von x^2 die Beziehung

$$\tfrac{1}{3!} = \tfrac{1}{\pi^2} \cdot (\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \ldots),$$

also

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots = \frac{\pi^2}{6} = 1{,}6449340668\ldots$$

Nach Bekanntwerden des Euler'schen Ergebnisses soll Johann Bernoulli ausgerufen haben: „Ach, wenn dies nur mein Bruder erlebt hätte!".

Natürlich gab es auch Bedenken hinsichtlich der unbekümmerten, nahezu hemmungslosen Vorgehensweise Eulers, beispielsweise seitens Daniel Bernoulli, einem der Söhne Johann Bernoullis, der ebenfalls in St. Petersburg lehrte. (Dieser hatte Euler eingeladen, nach Russland zu kommen, s. u.)

Auch Euler selbst sah die Problematik, dass er Eigenschaften von *endlichen* Produkten auf *unendliche* übertragen hatte; andererseits passte das Ergebnis numerisch zu allen bis dahin vorgenommenen Abschätzungen.

Hinweis Einige der im Literaturverzeichnis aufgeführten Quellen enthalten strenge Herleitungen der Euler'schen Entdeckungen; alle diese Methoden gehen weit über das hinaus, was man mit im Schulunterricht erworbenen Kenntnissen nachvollziehen könnte.

Euler begnügte sich nicht mit der Erkenntnis $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$, sondern führte seine Überlegungen weiter:

Betrachtet man nur die Summanden mit *geradem* Nenner, so ergibt sich

$$\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{36} + \tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{100} + \ldots = \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{25} + \ldots) = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{\pi^2}{6} = \tfrac{\pi^2}{24}.$$

Und hieraus folgt für die Summanden mit *ungeradem* Nenner:

$$1 + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{25} + \tfrac{1}{49} + \tfrac{1}{81} + \ldots = \tfrac{\pi^2}{6} - \tfrac{\pi^2}{24} = \tfrac{\pi^2}{8}$$

In seiner *Introductio* deutet Euler darüber hinaus an, welche Untersuchungen man hier noch anschließen könnte; beispielsweise ergibt sich aus den letzten Gleichungen

$$\tfrac{1}{9} \cdot (\tfrac{1}{1^2} + \tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{3^2} + \tfrac{1}{4^2} + \ldots) = \tfrac{1}{3^2} + \tfrac{1}{6^2} + \tfrac{1}{9^2} + \tfrac{1}{12^2} + \ldots = \tfrac{\pi^2}{54}.$$

Subtrahiert man diese Summe der Kehrwerte der durch 3 teilbaren Quadratzahlen von der o. a. Summe aller reziproken Quadratzahlen, dann erhält man für die Summe der Kehrwerte der *nicht* durch 3 teilbaren Quadratzahlen

$$1+\tfrac{1}{2^2}+\tfrac{1}{4^2}+\tfrac{1}{5^2}+\tfrac{1}{7^2}+\ldots=\tfrac{\pi^2}{6}-\tfrac{\pi^2}{54}=\tfrac{4}{27}\cdot\pi^2.$$

Analog ergibt sich aus der Gleichung

$$\tfrac{1}{9}\cdot\left(1+\tfrac{1}{3^2}+\tfrac{1}{5^2}+\tfrac{1}{7^2}+\tfrac{1}{9^2}+\ldots\right)=\tfrac{1}{3^2}+\tfrac{1}{9^2}+\tfrac{1}{15^2}+\tfrac{1}{21^2}+\tfrac{1}{27^2}+\ldots=\tfrac{\pi^2}{72}$$

für die Summe der Kehrwerte der *nicht* durch 3 teilbaren ungeraden Quadratzahlen

$$1+\tfrac{1}{5^2}+\tfrac{1}{7^2}+\tfrac{1}{11^2}+\tfrac{1}{13^2}+\ldots=\tfrac{\pi^2}{8}-\tfrac{\pi^2}{72}=\tfrac{\pi^2}{9}$$

Für den Funktionswert der Funktion f an der Stelle $x=\frac{\pi}{2}$ erhält man ein bemerkenswertes Ergebnis: Einerseits ist

$$f\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=\tfrac{\sin(\pi/2)}{\pi/2}=\tfrac{1}{\pi/2}=\tfrac{2}{\pi},$$

andererseits ergibt sich beim Einsetzen von $\frac{\pi}{2}$ in das unendliche Produkt von Linearfaktoren

$$\begin{aligned}&\left(1-\tfrac{\pi^2/4}{\pi^2}\right)\left(1-\tfrac{\pi^2/4}{4\pi^2}\right)\left(1-\tfrac{\pi^2/4}{9\pi^2}\right)\left(1-\tfrac{\pi^2/4}{16\pi^2}\right)\left(1-\tfrac{\pi^2/4}{25\pi^2}\right)\cdot\ldots\\&=\left(1-\tfrac{1}{4}\right)\left(1-\tfrac{1}{16}\right)\left(1-\tfrac{1}{36}\right)\left(1-\tfrac{1}{64}\right)\left(1-\tfrac{1}{100}\right)\cdot\ldots\\&=\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{15}{16}\cdot\tfrac{35}{36}\cdot\tfrac{63}{64}\cdot\tfrac{99}{100}\cdot\ldots=\tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\tfrac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdot\tfrac{5\cdot 7}{6\cdot 6}\cdot\tfrac{7\cdot 9}{8\cdot 8}\cdot\tfrac{9\cdot 11}{10\cdot 10}\cdot\ldots\quad,\end{aligned}$$

also

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdot\ldots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdot\ldots}$$

Dieses Ergebnis hatte der englische Mathematiker **John Wallis** (1616–1703) im Jahr 1655, also 80 Jahre zuvor, auf völlig andere Weise hergeleitet – diese Produktdarstellung von $\frac{\pi}{2}$ wird als **Wallis'sches Produkt** bezeichnet.

Wallis' Herleitung geschah übrigens ebenfalls mithilfe intuitiver Überlegungen über unendliche Folgen und deren Grenzwerte (s. u.) – die Notwendigkeit, exakte Konvergenzbeweise zu führen, wurde erst zu Beginn des 19. Jahrhunderts gesehen.

Durch die o. a. Resultate sah sich Euler in seiner Vorgehensweise bestätigt und nahm sich als Nächstes den Koeffizientenvergleich für die Summanden von x^4 vor – auch hier übertrug er eine Regel für *endliche* Polynome auf das *unendliche* Produkt.

Bevor wir uns konkret mit dem Koeffizienten von x^4 im Funktionsterm $f(x)=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdot\ldots$ beschäftigen, betrachten wir die folgenden Beispiele.

Es gilt:

$$(1-ax^2)\cdot(1-bx^2)=1-(a+b)\cdot x^2+ab\cdot x^4$$

$$(1-ax^2)\cdot(1-bx^2)\cdot(1-cx^2) = 1-(a+b+c)\cdot x^2 + (ab+ac+bc)\cdot x^4 - abc\cdot x^6$$

$$\begin{aligned}&(1-ax^2)\cdot(1-bx^2)\cdot(1-cx^2)\cdot(1-dx^2)\\ &= 1-(a+b+c+d)\cdot x^2 + (ab+ac+ad+bc+bd+cd)\cdot x^4\\ &\qquad - (abc+abd+acd+bcd)\cdot x^6 + abcd\cdot x^8\end{aligned}$$

Als Koeffizienten von x^4 treten also jeweils alle 2er-Kombinationen von Koeffizienten von x^2 auf. Hierfür hatte Isaac Newton in seiner Schrift *Arithmetica universalis* (1707) eine geschickte Darstellungsmöglichkeit gefunden:

$$\begin{aligned}ab &= \tfrac{1}{2}\cdot[(a+b)^2-(a^2+b^2)],\\ ab+ac+bc &= \tfrac{1}{2}\cdot[(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)],\\ ab+ac+ad+bc+bd+cd &= \tfrac{1}{2}\cdot[(a+b+c+d)^2-(a^2+b^2+c^2+d^2)]\end{aligned}$$

usw.

Das sieht zunächst komplizierter aus, als es tatsächlich ist, und es liefert für die Summanden von x^4 eine wunderbare Vereinfachung.

Setzt man hier $a=\frac{1}{\pi^2}$, $b=\frac{1}{4\pi^2}$, $c=\frac{1}{9\pi^2}$, $d=\frac{1}{16\pi^2}$ usw., dann ist

$$\begin{aligned}&ab+ac+ad+\ldots = \tfrac{1}{2}\cdot[(\tfrac{1}{\pi^2}+\tfrac{1}{4\pi^2}+\tfrac{1}{9\pi^2}+\tfrac{1}{16\pi^2}+\ldots)^2-(\tfrac{1}{\pi^4}+\tfrac{1}{16\pi^4}+\tfrac{1}{81\pi^4}+\tfrac{1}{256\pi^4}+\ldots)]\\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{\pi^4}\cdot[(\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{16}+\ldots)^2-(1+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{81}+\tfrac{1}{256}+\ldots)]\end{aligned}.$$

Verwendet man $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}$ und vergleicht den zuletzt erhaltenen Term mit dem Koeffizienten von x^4 in der Potenzreihenentwicklung, so ergibt sich

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{\pi^4}\cdot[\tfrac{\pi^4}{36}-(1+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{81}+\tfrac{1}{256}+\cdots)] = \tfrac{1}{5!} = \tfrac{1}{120},\ \text{also}$$

$\frac{1}{72}-\frac{1}{2\pi^4}\cdot(1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{1}{256}+\ldots)=\frac{1}{120}$ und weiter

$\frac{1}{72}-\frac{1}{120}=\frac{1}{2\pi^4}\cdot(1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{1}{256}+\ldots)$ und somit schließlich

$$1+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{81}+\tfrac{1}{256}+\ldots = \tfrac{1}{180}\cdot 2\pi^4 = \tfrac{\pi^4}{90},\text{also}$$

$$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\ldots = \frac{\pi^4}{90} = 1{,}0823232337\ldots$$

Auch hier kann man dann wieder *gerade* und *ungerade* Nenner getrennt betrachten, vgl. den folgenden Satz.

Euler war offensichtlich von dieser erfolgreichen Methode so angetan, dass er auch höhere gerade Potenzen untersucht hat – bis zum Exponenten 26 …

Satz von Euler

Lösung und Verallgemeinerung des Basler Problems

Für die unendliche Summe der Kehrwerte gerader Potenzen von natürlichen Zahlen gelten u. a. die folgenden Eigenschaften:

$$\tfrac{1}{1^2}+\tfrac{1}{2^2}+\tfrac{1}{3^2}+\tfrac{1}{4^2}+\ldots=\tfrac{\pi^2}{6},\ \tfrac{1}{1^2}+\tfrac{1}{3^2}+\tfrac{1}{5^2}+\tfrac{1}{7^2}+\ldots=\tfrac{\pi^2}{8},\ \tfrac{1}{2^2}+\tfrac{1}{4^2}+\tfrac{1}{6^2}+\tfrac{1}{8^2}+\ldots=\tfrac{\pi^2}{24},$$

$$\tfrac{1}{1^4}+\tfrac{1}{2^4}+\tfrac{1}{3^4}+\tfrac{1}{4^4}+\ldots=\tfrac{\pi^4}{90},\ \tfrac{1}{1^4}+\tfrac{1}{3^4}+\tfrac{1}{5^4}+\tfrac{1}{7^4}+\ldots=\tfrac{\pi^4}{96},\ \tfrac{1}{2^4}+\tfrac{1}{4^4}+\tfrac{1}{6^4}+\tfrac{1}{8^4}+\ldots=\tfrac{\pi^4}{1440},$$

$$\tfrac{1}{1^6}+\tfrac{1}{2^6}+\tfrac{1}{3^6}+\tfrac{1}{4^6}+\ldots=\tfrac{\pi^6}{945},\ \tfrac{1}{1^6}+\tfrac{1}{3^6}+\tfrac{1}{5^6}+\tfrac{1}{7^6}+\ldots=\tfrac{\pi^6}{960},\ \tfrac{1}{2^6}+\tfrac{1}{4^6}+\tfrac{1}{6^6}+\tfrac{1}{8^6}+\ldots=\tfrac{\pi^6}{60480}.$$

Euler suchte vergeblich nach einer Methode, entsprechende Formeln für die Grenzwerte von reziproken Potenzen mit *ungeraden* Exponenten zu finden. Bis heute hat man keinen Weg gefunden, diese Summen zu bestimmen; daher bleibt hier nur eine numerische Berechnung:

$$\tfrac{1}{1^3}+\tfrac{1}{2^3}+\tfrac{1}{3^3}+\tfrac{1}{4^3}+\ldots=1{,}2020569031\ldots$$

Der Beweis, dass es sich bei dieser Zahl um eine irrationale Zahl handelt, gelang erst 1979 dem französischen Mathematiker **Roger Apéry** (1916–1994).

Euler verallgemeinerte das Problem der unendlichen Summen von reziproken Potenzen, indem er für beliebige Exponenten s die sog. **Zeta-Funktion** definierte:

$$\zeta(s)=1+\tfrac{1}{2^s}+\tfrac{1}{3^s}+\tfrac{1}{4^s}+\ldots$$

Es gilt also $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}, \zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}, \zeta(6)=\frac{\pi^6}{945}, \ldots$

An anderer Stelle zeigte Euler, dass sich der Funktionsterm der Zeta-Funktion als unendliches Produkt darstellen lässt – dabei treten im Funktionsterm nur Potenzen von Primzahlen auf:

$$\zeta(s)=\frac{1}{1-\frac{1}{2^s}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3^s}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5^s}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{7^s}}\cdot\ldots=\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^s}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^s}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{1}{5}\right)^s}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{1}{7}\right)^s}\cdot\ldots$$

Zur Begründung betrachte man – zunächst für $s=1$ – die unendlichen geometrischen Reihen mit $q=\frac{1}{p}$ für Primzahlen p. Hierfür gilt: $\frac{1}{1-\frac{1}{p}}=1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\ldots$

Euler hatte auch hier keine Hemmungen, das folgende Produkt mit unendlich vielen Faktoren zu bilden, von denen jeder aus unendlich vielen Summanden besteht, und diese dann umzuordnen:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{7}} \cdot \ldots \\
&= \left(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2^2}+\tfrac{1}{2^3}+\ldots\right)\cdot\left(1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3^2}+\tfrac{1}{3^3}+\ldots\right)\cdot \\
&\quad \left(1+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{5^2}+\tfrac{1}{5^3}+\ldots\right)\cdot\left(1+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{7^2}+\tfrac{1}{7^3}+\ldots\right)\cdot\ldots \\
&= 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\ldots
\end{aligned}
$$

Man erhält nach dem Umordnen die Summe der reziproken natürlichen Zahlen, da jede natürliche Zahl als Produkt ihrer Primfaktoren eindeutig darstellbar ist. Entsprechende Überlegungen lassen sich auch für Potenzen mit beliebigem Exponenten s anstellen.

Den Zusammenhang zwischen der Zeta-Funktion und den Primzahlen erforschte hundert Jahre später der deutsche Mathematiker **Bernhard Riemann** (1826–1866), der insbesondere die Eigenschaften der Funktion für *komplexwertige* Argumente untersuchte – eine der von ihm vermuteten Eigenschaften konnte bis heute weder bestätigt noch widerlegt werden (sog. **Riemann'sche Vermutung).**

Übrigens Euklid hatte den genialen Beweis geführt, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Die Gleichung $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{7}} \cdot \ldots = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$ ist Eulers Beitrag zu diesem Thema: Wenn es nur endlich viele Primzahlen geben würde, dann würde links in der Gleichung ein endlicher Term stehen – im Widerspruch zur Tatsache, dass die harmonische Reihe (rechte Seite der Gleichung) divergiert.

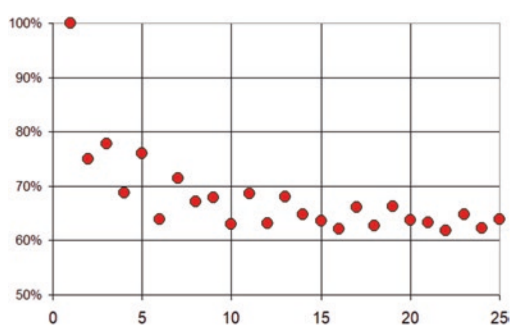
Mithilfe des Basler Problems konnte Euler auch ein zahlentheoretisches Problem der Wahrscheinlichkeitsrechnung lösen:

Satz

Wahrscheinlichkeit, dass zwei zufällig ausgewählte natürliche Zahlen zueinander teilerfremd sind

Die Wahrscheinlichkeit p_n, dass zwei zufällig ausgewählte Zahlen (a, b) aus der Zahlenmenge $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ zueinander teilerfremd sind, konvergiert mit wachsendem n gegen eine Zahl p mit $p = \lim_{n\to\infty}(p_n) = \frac{6}{\pi^2} \approx 60{,}8\ \%$.

Die folgende Abbildung zeigt, dass bereits für $n \geq 8$ die Wahrscheinlichkeiten p_n zwischen 60 % und 70 % liegen.



Zum Beweis: Von den natürlichen Zahlen ist

- die Hälfte durch 2 teilbar und die andere Hälfte *nicht* durch 2 teilbar,
- ein Drittel durch 3 teilbar und zwei Drittel *nicht* durch 3 teilbar,
- ein Fünftel durch 5 teilbar und vier Fünftel *nicht* durch 5 teilbar,
- …

Wählt man zwei natürliche Zahlen *a und b* zufällig und unabhängig voneinander aus, dann sind diese

- mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ *beide* durch 2 teilbar,
- mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$ *beide* durch 3 teilbar,
- mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}$ *beide* durch 5 teilbar,
- …,

d. h., die beiden Zahlen haben

- den Primfaktor 2 mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$ *nicht gemeinsam,*
- den Primfaktor 3 mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2$ *nicht gemeinsam,*
- den Primfaktor 5 mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2$ *nicht gemeinsam,*
- …

Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit p gilt daher:

$$p = (1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2) \cdot (1 - \left(\tfrac{1}{3}\right)^2) \cdot (1 - \left(\tfrac{1}{5}\right)^2) \cdot \ldots$$

Bestimmt man fortlaufend die Produkte der Klammerterme, so ergibt sich:
Die beiden natürlichen Zahlen lassen sich beide …

- weder durch 2 noch durch 3 teilen mit Wahrscheinlichkeit
$(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2) \cdot (1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} = \frac{2}{3} = 0{,}66666\ldots;$
- weder durch 2 noch durch 3 noch durch 5 teilen mit Wahrscheinlichkeit $(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2) \cdot (1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2) \cdot (1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{24}{25} = \frac{16}{25} = 0{,}64;$
- weder durch 2 noch durch 3 noch durch 5 noch durch 7 teilen mit Wahrscheinlichkeit $(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2) \cdot (1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2) \cdot (1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2) \cdot (1 - \left(\frac{1}{7}\right)^2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{48}{49} = \frac{768}{1225} = 0{,}62693\ldots;$

usw.

Um den Grenzwert p zu bestimmen, ist es günstig, den Kehrwert des Terms zu untersuchen, also

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{1-(\frac{1}{2})^2} \cdot \frac{1}{1-(\frac{1}{3})^2} \cdot \frac{1}{1-(\frac{1}{5})^2} \cdot \frac{1}{1-(\frac{1}{7})^2} \cdot \ldots,$$

daher gilt: $\frac{1}{p} = \zeta(2)$, vgl. auch *Mathematik ist wunderwunderschön,* Abschn. 4.1.

14.2 Wer war Leonhard Euler?

Leonhard Euler wurde 1707 in Basel als Sohn eines Pfarrers geboren; auch seine Mutter stammte aus einer Pfarrersfamilie. Da der Junge an der Schule, die er besuchte, nicht angemessen gefördert wurde, veranlasste der Vater, dass sein Sohn an Veranstaltungen der Universität Basel teilnehmen konnte. So kam es, dass Leonhard bereits im Alter von 14 Jahren philosophische Vorlesungen an der Universität hörte, zusätzlich erhielt er sonntags privaten Mathematikunterricht bei Johann Bernoulli, einem Jugendfreund des Vaters. Das Studium schloss Leonhard mit einer Arbeit ab, in der er die Ideen von Descartes und Newton miteinander verglich.

Dem Wunsch seines Vaters entsprechend, nahm der 16-jährige Leonhard anschließend ein Theologiestudium auf, wechselte aber bald zur Mathematik, nachdem Johann Bernoulli den Vater endlich hatte davon überzeugen können, dass sein Sohn eine außergewöhnliche mathematische Begabung besaß.

Um eine frei gewordene Physikprofessur in Basel bewarb sich Euler vergeblich. Daher nahm er ein Stellenangebot der (durch Peter den Großen) neu gegründeten *Russischen Akademie der Wissenschaften* in St. Petersburg an. Daniel Bernoulli, einer der Söhne Johann Bernoullis, war bereits drei Jahre zuvor dorthin gewechselt.

Zu Beginn seiner Tätigkeit hielt Leonhard Euler Vorlesungen über Anatomie und Physiologie – das hierfür benötigte Wissen eignete er sich auf der langen Reise nach Russland an. 1730 konnte er eine Professur für Physik übernehmen, 1733 den Lehrstuhl für Mathematik als Nachfolger von Daniel Bernoulli, der sich in St. Petersburg nicht mehr wohlfühlte.

1734 heiratete er Katharina Gsell, die Tochter eines aus der Schweiz stammenden Malers der Petersburger Akademie; in der glücklichen Ehe wurden 13 Kinder geboren, von denen allerdings nur fünf die Kindheit überlebten.

Kurze Zeit nach seiner Ankunft in St. Petersburg hatte sich Euler mit **Christian Goldbach** (1690–1764) angefreundet, einem aus Königsberg stammenden Gelehrten, der die Aufgaben eines Sekretärs der Akademie wahrnahm und von 1727 an Lehrer des jungen Zaren Peter II. wurde. Zwischen Euler und Goldbach entwickelte sich ein lebhafter Briefwechsel, als der Zarenhof für einige Jahre nach Moskau umzog, und er wurde wieder aufgenommen, als Euler seine Stelle in Berlin antrat.

Eulers Forschungsprogramm war äußerst vielseitig: Er beschäftigte sich nicht nur mit Fragen der Mathematik, sondern auch mit Schiffsbau, Kartografie, Magnetismus u. v. m.

Bald aber traten erste gesundheitliche Probleme auf; nach einer lebensbedrohlichen Erkrankung verlor er die Sehfähigkeit auf seinem rechten Auge.

Nachdem er 1738 und 1740 jeweils einen ersten Preis im Wettbewerb der Pariser Akademie erhalten hatte (zuletzt über das Entstehen von Ebbe und Flut), trafen auch Stellenangebote aus Berlin ein, die er jedoch noch ablehnte, da er keinen Grund sah, St. Petersburg zu verlassen. Erst die 1741 auftretenden innenpolitischen Probleme, die zu Einschränkungen für ausländische Bürger führten, trugen dann dazu bei, dass Euler seine Meinung änderte.

So wechselte Euler von St. Petersburg nach Berlin und übernahm dort den Posten als *Direktor der mathematischen Klasse der Preußischen Akademie der Wissenschaften.*

Erster Präsident der neu gegründeten preußischen Akademie war der Franzose **Pierre Louis Moreau de Maupertuis** (1698–1759), der von Friedrich II. („der Große") nach Berlin „abgeworben" worden war, um das Ansehen seiner Akademie zu vergrößern.

Hinweis Maupertuis war durch die Leitung einer Expedition nach Lappland berühmt geworden. Um die Abplattung der Erde nachweisen zu können, hatte er dort die Vermessung eines Längenkreises durchgeführt. Die beiden folgenden Briefmarken erinnern an diese Expedition und die zeitgleich von Charles Marie de La Condamine in Südamerika durchgeführte entsprechende Untersuchung.

In den 25 Jahren seiner Berliner Zeit verfasste Euler nicht nur 380 wissenschaftliche Arbeiten, sondern er kümmerte sich dort auch um das Observatorium, um die Botanischen Gärten und um die Wasserversorgung der Gärten des Schlosses Sanssouci, der Sommerresidenz von König Friedrich dem Großen in Potsdam. Er beriet die Regierung in Versicherungsfragen und hinsichtlich der Pensionen für die staatlichen Bediensteten.

Eulers *Lettres à une princesse d'Allemagne sur quelques sujets de Physique et Philosophie* („Briefe an eine deutsche Prinzessin über verschiedene Gegenstände aus der Physik und Philosophie") wurde ein Bestseller, da diese Texte auch für Leser mit geringen Kenntnissen verfasst waren (die drei Bände erschienen erst 1768 bis 1772).

Mit den Jahren verschlechterte sich das Verhältnis zum König, für den Mathematik lediglich als Hilfswissenschaft galt – nur die Philosophie war für Friedrich den Großen ein Fach von Bedeutung, der es genoss, an seinem Hof mit dem Franzosen Voltaire über philosophische Themen zu „parlieren". Euler nannte er gelegentlich – in Anspielung auf dessen nur noch einseitig vorhandene Sehkraft – spöttisch „meinen Zyklopen".

Als Maupertuis, mit dem Euler stets vertrauensvoll zusammenarbeitete, im Jahr 1759 starb, bemühte sich der König darum, den französischen Gelehrten **Jean d'Alembert** als dessen Nachfolger zu gewinnen – obwohl er eigentlich wusste, dass dieser eine wissenschaftliche Auseinandersetzung mit Euler hatte. D'Alembert lehnte ab, aber Eulers Entscheidung, Berlin zu verlassen, war gefallen.

1766 kehrte er wieder nach St. Petersburg zurück; in Berlin übernahm **Joseph-Louis Lagrange** (1736–1813) Eulers Stelle (vgl. Kap. 15).

Trotz der bald danach eintretenden vollständigen Erblindung verfasste Euler in St. Petersburg noch über 400 weitere Werke. Die Texte hierzu diktierte er vor allem seinem Sohn und dem Ehemann einer Enkelin.

Eines der ersten Werke, die Euler dann in St. Petersburg fertigstellte, war seine *Vollständige Anleitung zur Algebra* (1770) – als Lektüre für jedermann konzipiert. Angeblich hatte Euler die Texte einem Schneider zur Kontrolle der Verständlichkeit vorgelegt – es muss ein sehr gelehrter Schneider gewesen sein …

Das aus zwei Teilen und insgesamt fünf Abschnitten bestehende Buch beschäftigt sich …

- mit den Grundlagen des Rechnens (I,1: Von den Rechenzeichen + und − über die Potenzrechnung auch mit gebrochenen Exponenten bis hin zum logarithmischen Rechnen),
- mit dem Rechnen mit Termen (I,2: Von einfachen Termen über das schriftliche Quadrat- und Kubikwurzelziehen bis hin zum allgemeinen binomischen Lehrsatz auch mit gebrochenen und negativen Exponenten),
- mit Proportionen (I,3: Von einfachen Zahlenverhältnissen bis hin zu arithmetischen und geometrischen Reihen),
- mit der Gleichungslehre (II,1: Von linearen und quadratischen Gleichungen über Anwendung der Descartes'schen Vorzeichenregel, Lösen von Gleichungen höheren Grades durch Termdivision, Lösung allgemeiner Gleichungen 3. und 4. Grades – mit einem von Euler entwickelten trickreichen Ansatz – bis hin zu Näherungsverfahren),
- mit *unbestimmter Analytik* (II,2: Von linearen, quadratischen und kubischen Termen mit zwei und mehr Variablen, die eine vorgegebene natürliche Zahl ergeben, über die Lösung der Pell'schen Gleichung bis hin zu Termen, die als Wert eine Quadrat- oder eine Kubikzahl annehmen – als eines der letzten Probleme wird der Fall $n = 3$ der Fermat'schen Vermutung (FLT) behandelt, vgl. Kap. 11).

Bis zuletzt war er an Neuigkeiten aus der Wissenschaft interessiert. So diskutierte er noch am Tag seines Todes (18. September 1783) mit einem Freund über den kürzlich entdeckten Planeten Uranus, nachdem er zuvor – wie an allen Tagen – seinen Enkeln Unterricht in Mathematik gegeben hatte.

14.3 Mit welchen Themen beschäftigte sich Leonhard Euler außerdem?

Eulers Schriften sind heute einsehbar unter:

- math.dartmouth.edu/~euler/

Wer in diesen Schriften liest, wird nachvollziehen können, was der französischen Mathematiker **Pierre-Simon Laplace** (1749–1827) seinen Studenten geraten hat:

- *Lest Euler, lest Euler, er ist unser aller Meister.*

Mit seinen Lehrbüchern zur Analysis des Unendlichen (*Introductio in analysin infinitorum*, 1748), zur Differentialrechnung (*Institutiones calculi differentialis,* 1755) und zur Integralrechnung (*Institutiones calculi integralis,* 1768–1770) trug Euler wesentlich zur Systematisierung der Analysis bei – einschließlich der Lösungsverfahren für Differenzialgleichungen.

Der Mathematikhistoriker Carl B. Boyer kommentierte zur Bedeutung dieser drei Bücher, dass „alle nach 1748 erschienenen Bücher zur Analysis – egal ob für Anfänger oder für Fortgeschrittene – nur eine Kopie der Euler'schen Werke seien oder eine Kopie der Kopie".

Zahlreiche Begriffe und Schreibweisen der Mathematik wurden von ihm eingeführt, so z. B. der Begriff der Funktion, die heute übliche Bezeichnung der trigonometrischen Funktionen, die Schreibweise $f(x)$, das Summenzeichen Σ, „i" für die imaginäre Einheit. Von Euler stammt auch die Bezeichnung „e" für die Basis des natürlichen Logarithmus (vgl. auch Kap. 13).

Im Folgenden können nur **einige wenige** der von Euler erarbeiteten Themen etwas detaillierter erläutert werden.

14.3.1 Zusammenhang zwischen der harmonischen Reihe und der Logarithmusfunktion

Dass die harmonische Reihe mit $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$ über alle Schranken wächst, war bereits im 14. Jahrhundert durch **Nicole Oresme** (ca. 1330–1382) bewiesen worden. Euler fiel auf, dass dieses Wachstum vergleichbar ist mit dem der natürlichen Logarithmusfunktion.

An den beiden folgenden Abbildungen (Abb. 14.1a, b) kann man ablesen, dass für H_n und $\ln(n) = \int_1^n \frac{1}{x} dx$ die folgende Abschätzung gilt:

$$\ln(n) + \frac{1}{n} < H_n < \ln(n) + 1$$

H_n und $\ln(n)$ unterscheiden sich also höchstens um 1.

Die Differenz $H_n - \ln(n)$ ist in Abb. 14.1b durch die blau gefärbten Teilflächen von Rechtecken veranschaulicht.

Leonhard Euler konnte beweisen, dass die Summenfolge dieser Flächeninhalte konvergiert, und zwar gegen

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} (H_n - \ln(n)) = 0{,}57721\ldots$$

Diese **Euler-Konstante $\boldsymbol{\gamma}$** spielt in vielen Bereichen der höheren Mathematik eine wichtige Rolle. Euler gelang es 1735, die Zahl γ auf 15 Stellen genau zu bestimmen.

Der italienische Mathematiker **Lorenzo Mascheroni** (1750–1800) entwickelte die Theorien Eulers weiter. Wegen der Bedeutung seiner Untersuchungen wird die Konstante daher auch als **Euler-Mascheroni-Konstante** bezeichnet.

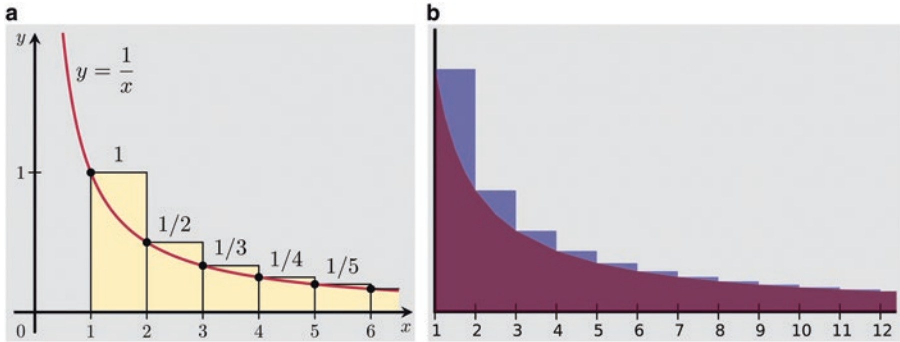


Abb. 14.1 **a**) Vergleich des Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ mit der Folge der Stammbrüche. **b**) Die oberhalb des Graphen von $f(x) = \frac{1}{x}$ liegenden, blau gefärbten Flächenstücke bestimmen die Euler-Mascheroni-Konstante

14.3.2 Die Euler'sche Gammafunktion

Aus einem Schriftwechsel mit Christian Goldbach und Daniel Bernoulli entwickelte Euler 1729/1730 die Darstellung einer Funktion, die für ganzzahlige Exponenten n die Zahlenfolge der Fakultäten lieferte:

$$0! = 1, 1! = 1, 2! = 2 \cdot 1 = 2, 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6, 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24, \ldots$$

Diese Funktion wird als **Euler'sche Gammafunktion** bezeichnet:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

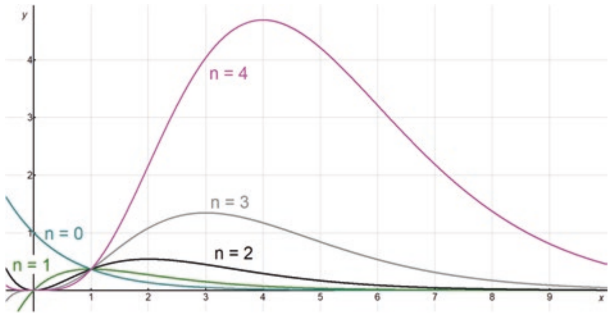
Hier gilt also

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty t^0 e^{-t} dt = 1 = 0!,\ \Gamma(2) = \int_0^\infty t^1 e^{-t} dt = 1 = 1!,$$
$$\Gamma(3) = \int_0^\infty t^2 e^{-t} dt = 2 = 2!,\ \Gamma(4) = \int_0^\infty t^3 e^{-t} dt = 6 = 3!, \ldots,$$

allgemein für natürliche Zahlen *n:*

$$\Gamma(n+1) = n!$$

In der folgenden Abbildung sind die Graphen der Funktionen für $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ abgebildet – das Maß der Fläche zwischen Graph und x-Achse ist dabei genau gleich n!.



Für die allgemeine Gammafunktion, deren Definitionsmenge auch auf komplexe Zahlen x mit positivem Realteil erweitert werden kann, gilt die Funktionalgleichung

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x).$$

14.3.3 Beiträge Eulers zur Zahlentheorie

Euler beschäftigte sich intensiv mit den Schriften Fermats. Da Fermat vieles behauptet, aber nur sehr wenig davon bewiesen hatte, fühlte sich Euler herausgefordert und klärte etliche der Fermat'schen Vermutungen wie beispielsweise

- Beweis und Verallgemeinerung des Kleinen Fermat'schen Satzes,
- eindeutige Darstellbarkeit natürlicher Zahlen vom Typ $4n + 1$ als Summe von zwei Quadratzahlen,
- Lösung der Pell'schen Gleichung,
- Untersuchung der Mersenne- und Fermat-Zahlen, vergleiche hierzu Kap. 11.

Die Goldbach'sche Vermutung
In den 25 Jahren seiner Tätigkeit in Berlin hielt Euler weiter Kontakt zu seinem Freund Christian Goldbach, dem er viele, aber nicht alle Fragen beantworten konnte.

Das bekannteste Problem ist die sog. **Goldbach'sche Vermutung** aus dem Jahr 1742:

- *Jede gerade Zahl größer als 2 lässt sich als Summe zweier Primzahlen darstellen.*

Der Beweis für diese Vermutung konnte bis heute nicht erbracht werden. In der Originalfassung heißt es noch: *Jede natürliche Zahl größer als 2 lässt sich als Summe von drei Primzahlen darstellen.* (Zur damaligen Zeit wurde die Zahl 1 noch als Primzahl angesehen.)

Eine weitere Vermutung Goldbachs
Goldbach vermutete auch, dass jede ungerade natürliche Zahl in der Form $2 \cdot n^2 + p$ dargestellt werden kann, wobei p eine Primzahl (einschl. 1) ist.

Beispiele

$3 = 2 \cdot 1^2 + 1$; $5 = 2 \cdot 1^2 + 3$; $7 = 2 \cdot 1^2 + 5$; $9 = 2 \cdot 1^2 + 7 = 2 \cdot 2^2 + 1$; $11 = 2 \cdot 2^2 + 3$;

$13 = 2 \cdot 2^2 + 5$; $15 = 2 \cdot 2^2 + 7$; $17 = 2 \cdot 4^2 + 1$; $19 = 2 \cdot 1^2 + 17 = 2 \cdot 2^2 + 11$;

$21 = 2 \cdot 1^2 + 19 = 2 \cdot 2^2 + 13 = 2 \cdot 3^2 + 3$; $23 = 2 \cdot 3^2 + 5 = 2 \cdot 4^2 + 7$;

$25 = 2 \cdot 1^2 + 23 = 2 \cdot 2^2 + 17 = 2 \cdot 3^2 + 7$; $27 = 2 \cdot 2^2 + 19$; $29 = 2 \cdot 3^2 + 11$; ...

Euler untersuchte die ungeraden Zahlen bis 999; Goldbach überprüfte die Vermutung sogar bis zur Zahl 2499 – in allen Fällen ist eine Darstellung möglich; allerdings gelang auch Euler kein allgemeiner Beweis. 1856 fand Moritz Abraham Stern zwei Gegenbeispiele (5777 und 5993); man weiß nicht, ob noch weitere Gegenbeispiele existieren.

Das Goldbach-Euler-Theorem

Auch interessierte sich Goldbach für eine besondere unendliche Reihe von reziproken Potenzen, nämlich diejenigen natürlichen Zahlen größer als 1, die sich als Potenzen schreiben lassen, also $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $9 = 3^2$, $16 = 2^4$ und $16 = 4^2$, $25 = 5^2$, $27 = 3^3$ usw. (vgl. OEIS A072103).

Goldbach vermutete, dass die unendliche Summe der Kehrwerte dieser um 1 verminderten Potenzen (ohne die Dopplungen wie 16) gleich 1 ist:

$$\sum_k \tfrac{1}{k-1} = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{24} + \tfrac{1}{26} + \ldots = 1$$

Euler gelang 1737 der Beweis dieses sog. **Goldbach-Euler-Theorems** ebenso wie der Beweis der Gleichung

$$\tfrac{\pi}{2} = 1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} - \tfrac{1}{13} - \tfrac{1}{15} + - \ldots;$$

hierbei ist das Vorzeichen „+“, wenn im Nenner eine Primzahl vom Typ $4n - 1$ steht, und „–“, wenn der Nenner eine Primzahl vom Typ $4n + 1$ ist; bei zusammengesetzten Zahlen richtet sich das Vorzeichen nach den jeweiligen Primfaktoren.

Primzahl erzeugende Polynome

Auch regte Goldbach Euler an, nach sog. **Primzahl erzeugenden Polynomen** zu suchen, also nach Polynomen, bei denen sich bei Einsetzung von natürlichen Zahlen lauter Primzahlen ergeben. Euler fand 1772 das Polynom $n^2 + n + 41$, das für die natürlichen Zahlen $n = 0, 1, 2, 3, \ldots, 39$ die gewünschte Bedingung erfüllt.

Die Euler'sche phi-Funktion

Besonders intensiv beschäftigte sich Euler auch mit Fragen, die mit den Teilern von natürlichen Zahlen zusammenhängen.

Um Sachverhalte einfacher formulieren zu können, führte er die Funktion φ (sprich: *phi*) ein, die jeder natürlichen Zahl die Anzahl φ(n) der zu n teilerfremden Zahlen zuordnet. Der Vollständigkeit halber definiert man $\varphi(1) = 1$, denn für den größten gemeinsamen Teiler gilt: $ggT(1, 1) = 1$

Für diese sog. **Euler'sche phi-Funktion** fand er u. a. den folgenden Satz:

Satz von Euler

Anzahl φ *(n)* der zu *n* teilerfremden natürlichen Zahlen

Wir betrachten eine beliebige natürliche Zahl n. Diese lässt sich (bis auf die Reihenfolge) eindeutig als Produkt von Primfaktoren darstellen,

z. B. $n = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot p_3^{m_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{m_k}$ mit den Primfaktoren $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$ und den zugehörigen Exponenten $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_k$.

Dann gilt für die **Anzahl** $\varphi(n)$ der zu n teilerfremden natürlichen Zahlen aus der Menge $\{1, 2, 3, \ldots, \text{n}\}$

$$\varphi(n) = n \cdot (1 - \tfrac{1}{p_1}) \cdot (1 - \tfrac{1}{p_2}) \cdot (1 - \tfrac{1}{p_3}) \cdot \ldots \cdot (1 - \tfrac{1}{p_k}),$$

und entsprechend gilt für den **Anteil** der zu n teilerfremden natürlichen Zahlen aus dieser Menge

$$\tfrac{\varphi(n)}{n} = (1 - \tfrac{1}{p_1}) \cdot (1 - \tfrac{1}{p_2}) \cdot (1 - \tfrac{1}{p_3}) \cdot \ldots \cdot (1 - \tfrac{1}{p_k}).$$

Beispiel

$n = 24$: Teilerfremd zu 24 sind die Zahlen 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19 und 23, also gilt $\varphi(24) = 8$. Nach dem o. a. Satz von Euler berechnet sich $\varphi(n)$ wegen $24 = 2^3 \cdot 3$ wie folgt: $\varphi(24) = 24 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 24 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 8$,

d. h., der Anteil der zu 24 teilerfremden Zahlen ist $\frac{1}{3}$.

An diesem Beispiel können wir verdeutlichen, wie der Term für $\varphi(n)$ im Euler'schen Satz zustande kommt:

Alle Zahlen k mit $1 \leq k \leq n$ entfallen, die mit n einen gemeinsamen Teiler haben. Im Fall $n = 24$ sind das die Vielfachen der Primzahlen 2 und 3, denn $24 = 2^3 \cdot 3$:

Die Hälfte der Zahlen k enthält 2 als Teiler, die andere Hälfte nicht, d. h., für $24 \cdot \frac{1}{2} = 12$ der 24 Zahlen gilt: 2 ist kein Teiler dieser Zahl.

Jede dritte natürliche Zahl ist durch 3 teilbar, auch jede dritte Zahl von diesen zwölf Zahlen, die *nicht* durch 2 teilbar sind (denn die Teilbarkeitseigenschaften durch 2 und durch 3 sind voneinander unabhängig). Folglich gilt für zwei Drittel der zwölf Zahlen, d. h., für $24 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 8$ der zwölf Zahlen, die 2 nicht als Teiler haben, dass auch 3 kein Teiler dieser Zahlen ist.

Somit gibt es insgesamt acht von den 24 Zahlen der Menge $\{1, 2, 3, \ldots, 24\}$, die teilerfremd zu 24 sind.

Die Euler’sche Phi-Funktion hat eine bemerkenswerte Eigenschaft:

- Sind $t_1, t_2, t_3, \ldots$ die Teiler einer natürlichen Zahl *n*, dann gilt: $\varphi(t_1) + \varphi(t_2) + \varphi(t_3) + \ldots = n$

Beispiel
Die natürliche Zahl 24 hat die Teiler 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Dann gilt:

$$\begin{aligned}&\varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(4) + \varphi(6) + \varphi(8) + \varphi(12) + \varphi(24)\\ &= 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 4 + 4 + 8 = 24\end{aligned}$$

Vollkommene Zahlen
Seit dem Altertum waren Mathematiker fasziniert von den sog. **vollkommenen Zahlen.** Diese natürlichen Zahlen haben die Eigenschaft, dass sie gleich der Summe ihrer *echten* Teiler sind.

Bezeichnet man die Summe *aller* Teiler einer natürlichen Zahl n mit $\sigma(n)$, dann gilt für vollkommene Zahlen $\sigma(n) = 2n$.

Bereits Euklid hatte gezeigt, dass jede natürliche Zahl der Form $2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$ eine vollkommene Zahl ist, falls $2^n - 1$ eine Primzahl ist.

Satz von Euklid

Über eine Eigenschaft der vollkommenen natürlichen Zahlen

Formulierung nach Euklid:

Ist die Summe der Zahlen, die sich, beginnend mit der Eins, durch fortgesetzte Verdopplung ergeben, eine Primzahl, dann ist das Produkt aus dieser Summe mit der letzten dieser Zahlen eine vollkommene Zahl.

Mit anderen Worten:

Falls die Summe von Zweierpotenzen $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{k-1} = 2^k - 1$ eine Primzahl ist, dann ist die Zahl $2^{k-1} \cdot (2^k - 1)$ eine vollkommene Zahl.

Beispiele vollkommener natürlicher Zahlen

- $k = 2:$ $2^k - 1 = 3$ ist eine Primzahl. $n = 2^{k-1} \cdot (2^k - 1) = 2 \cdot 3 = 6$ ist eine vollkommene Zahl. Die Summe aller Teiler der Zahl 6 ist $\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$.
- $k = 3:$ $2^k - 1 = 7$ ist eine Primzahl. $n = 2^{k-1} \cdot (2^k - 1) = 4 \cdot 7 = 28$ ist eine vollkommene Zahl. Die Summe aller Teiler der Zahl 28 ist $\sigma(28) = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56$.
- $k = 4:$ $2^k - 1 = 15$ ist *keine* Primzahl. Es ist *nicht* möglich, aufgrund des Satzes von Euklid etwas über die Eigenschaft der Zahl $n = 2^{k-1} \cdot (2^k - 1) = 8 \cdot 15 = 120$ zu sagen.

Die Summe aller Teiler der Zahl 120 ist

$$\sigma(120) = 1+2+3+4+5+6+8+10+12+15+20+24+30+40+60+120 = 360.$$

Hinweis Um die Summe $\sigma(n)$ aller Teiler einer natürlichen Zahl n zu bilden, muss man nicht notwendig alle Teiler bestimmen und diese dann addieren, vgl. z. B. *Mathematik ist wunderwunderschön,* Abschn. 4.3.2.

Der Satz von Euklid ist *nicht* anwendbar, wenn $2^k - 1$ *keine* Primzahl ist, vgl. das Beispiel mit $k = 4$. Lange blieb ungeklärt, ob *es* vollkommene Zahlen $n = 2^{k-1} \cdot (2^k - 1)$ gibt, wenn $2^k - 1$ *keine* Primzahl ist.

Leonhard Euler konnte die Aussage des Satzes von Euklid dahingehend ergänzen, als er beweisen konnte, dass zumindest alle *geraden vollkommenen* Zahlen vom Typ $n = 2^{k-1} \cdot (2^k - 1)$ sind, wenn $2^k - 1$ Primzahl ist. Aber bis heute konnte nicht geklärt werden, ob es *unendlich viele* vollkommene Zahlen gibt (weil man nicht weiß, ob es unendlich viele Mersenne-Primzahlen gibt, vgl. Kap. 11).

Und man weiß auch nicht, ob es überhaupt *ungerade vollkommene* Zahlen gibt; wenn es denn eine geben sollte, dann müsste sie jedenfalls größer als 10^{50} sein (wie man mit Computerhilfe überprüft hat).

Bemerkenswert ist, dass sich stets 2 ergibt, wenn man die Kehrwerte der Teiler einer vollkommenen natürlichen Zahl addiert.

Beispiele

$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6} = 2$; $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28} = 2$; $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{31}+\frac{1}{62}+\frac{1}{124}+\frac{1}{248}+\frac{1}{496} = 2$

Befreundete Zahlen

Griechische und insbesondere auch arabische Mathematiker waren fasziniert von den sog. befreundeten Zahlen 220 und 284; für diese gilt, dass die Summe der *echten* Teiler jeweils die Partnerzahl ergibt:

Die echten Teiler von 284 sind 1, 2, 4, 7, 71, 142 – und für die Summe gilt: $1 + 2 + 4 + 7 + 71 + 142 = 220$.

Die echten Teiler von 220 sind 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110 – und für die Summe gilt: $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$.

Der geniale Mathematiker **Thabit Ibn Qurra** (826–901), einer der großartigen Übersetzer im *Haus der Weisheit* in Bagdad, fand heraus:

- Sind die Zahlen $x = 3 \cdot 2^n - 1$, $y = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$ und $z = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$ Primzahlen, dann sind die Zahlen $a = 2^n \cdot x \cdot y$ und $b = 2^n \cdot z$ befreundete Zahlen.

Beispiele

- $n = 2$: Die Zahlen $x = 3 \cdot 2^2 - 1 = 11$, $y = 3 \cdot 2^1 - 1 = 5$ und $z = 9 \cdot 2^3 - 1 = 71$ sind Primzahlen; $a = 2^2 \cdot 11 \cdot 5 = 220$ und $b = 2^2 \cdot 71 = 284$ sind befreundete Zahlen.
- $n = 4$: Die Zahlen $x = 3 \cdot 2^4 - 1 = 47$, $y = 3 \cdot 2^3 - 1 = 23$ und $z = 9 \cdot 2^7 - 1 = 1151$ sind Primzahlen; $a = 2^4 \cdot 47 \cdot 23 = 17296$ und $b = 2^4 \cdot 1151 = 18416$ sind befreundete Zahlen.

Dieses Paar wurde vom marokkanischen Mathematiker **Ibn al Banna** (1256–1321) gefunden und von Pierre de Fermat wiederentdeckt.

- $n = 7$: Die Zahlen $x = 3 \cdot 2^7 - 1 = 383$, $y = 3 \cdot 2^6 - 1 = 192$ und $z = 9 \cdot 2^{13} - 1 = 73727$ sind Primzahlen; $a = 2^7 \cdot 383 \cdot 191 = 9363584$ und $b = 2^7 \cdot 73727 = 9437056$ sind befreundete Zahlen.

Dieses Paar wurde im 16. Jahrhundert vom iranischen Mathematiker **Muhammad Baqir Yazdi** gefunden, einem der letzten berühmten Mathematiker des islamischen Mittelalters, und von René Descartes 1638 wiederentdeckt.

1747 verallgemeinerte Leonhard Euler den Satz von Thabit Ibn Qurra. Mithilfe des Satzes berechnete er weitere 62 Paare befreundeter Zahlen.

Satz von Euler

Paare befreundeter natürlicher Zahlen

Sind die Zahlen $x = f \cdot 2^n - 1$, $y = f \cdot 2^{n-k} - 1$ und $z = f^2 \cdot 2^{2n-k} - 1$ Primzahlen, wobei $f = 2^k + 1$ und $n > k > 0$, dann sind die Zahlen $a = 2^n \cdot x \cdot y$ und $b = 2^n \cdot z$ befreundete Zahlen.

Nicht alle befreundeten Zahlen sind von dem von Euler beschriebenen Typ; so war es eine Überraschung, als 1866 ein 16-Jähriger das bis dahin unbekannte Paar $(1184 = 2^5 \cdot 37; 1210 = 2 \cdot 5 \cdot 11^2)$ fand.

Bis heute hat man über eine Milliarde Paare befreundeter Zahlen entdeckt.

14.3.4 Eulers Lösung des Rencontre-Problems

Im Jahr 1751 beschäftigte sich Euler – wie zuvor Montmort und de Moivre – mit dem **Rencontre-Problem** (frz. rencontre = Treffen, Begegnung); die Bezeichnung dieser Fragestellung stammt von Euler.

Da Euler bei sonstigen Abhandlungen stets angab, wer sich vor ihm mit welcher Fragestellung beschäftigt hatte und auf welche Erkenntnisse er seine Überlegungen aufbaute, kann man davon ausgehen, dass er die Schriften von Montmort und de Moivre (vgl. Kap. 13) nicht kannte.

Ein typisches Rencontre-Problem ist das folgende:

Beispiel
Zwei Spieler haben jeweils einen Stapel mit 52 gut gemischten Karten. Beide decken fortlaufend jeweils die oberste Karte ihres Kartenstapels auf. Falls irgendwann die beiden aufgedeckten Karten gleich sind, gewinnt der erste Spieler, sonst der zweite.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Spieler gewinnt?

Es geht also um zufällige Permutationen (Vertauschungen) von n Objekten sowie um Übereinstimmungen gegenüber einer bestimmten Ausgangssituation.

Insgesamt gibt es $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$ Möglichkeiten, n Objekte anzuordnen. Von diesen Möglichkeiten interessieren im o. a. Kartenspiel genau diejenigen, bei denen es *keine* Übereinstimmungen mit der Ausgangssituation (=Anordnung des zweiten Kartenstapels) gibt.

Die folgende Tabelle enthält Beispiele von Buchstabenfolgen (Ausgangsanordnung gemäß Alphabet sowie alle Anordnungen, bei denen alle Buchstaben nicht an der alphabetisch bestimmten Stelle stehen).

n	Ausgangsanordnung	Anordnungen *ohne* Übereinstimmung
1	*a*	
2	*ab*	*ba*
3	*abc*	*bca, cab*
4	*abcd*	*badc, bcda, bdac, cadb, cdab, cdba, dabc, dcab, dcba*

Euler führte für diese Anzahl der Anordnungsmöglichkeiten *ohne* Übereinstimmung die Bezeichnung $\Pi(n)$ ein. An den o. a. Beispielen liest man ab:

$$\Pi\,(1) = 0;\ \Pi\,(2) = 1;\ \Pi\,(3) = 2;\ \Pi\,(4) = 9.$$

Dann zeigte er allgemein, dass sich diese Anzahlen jeweils rekursiv aus den letzten beiden Gliedern der Folge bestimmen lassen, nämlich

$$\Pi\,(3) = 2 \cdot [\Pi\,(2) + \Pi\,(1)] = 2 \cdot [1 + 0] = 2,$$

$$\Pi\,(4) = 3 \cdot [\Pi\,(3) + \Pi\,(2)] = 3 \cdot [2 + 1] = 9,$$

$$\Pi\,(5) = 4 \cdot [\Pi\,(4) + \Pi\,(3)] = 4 \cdot [9 + 2] = 44,$$

usw., also allgemein

$$\Pi\,(n) = (n-1)\cdot[\Pi\,(n-1)+\Pi\,(n-2)].$$

Aber Euler entdeckte, dass es noch eine weitere *wundersame* Möglichkeit der Berechnung gibt:

Die Anzahl $\Pi\,(n)$ kann sogar allein aus dem jeweils vorangehenden Term $\Pi\,(n-1)$ berechnet werden:

$$\Pi\,(n) = n\cdot\Pi\,(n-1)+(-1)^n$$

Zum Nachweis betrachtete er zwei aufeinanderfolgende Glieder

$$\begin{aligned}&\Pi\,(n)+\Pi\,(n-1) = [n\cdot\Pi\,(n-1)+(-1)^n]-[(n-1)\cdot\Pi\,(n-2)+(-1)^{n-1}]\\ &= n\cdot\Pi\,(n-1)+(n-1)\cdot\Pi\,(n-2)\end{aligned},$$

also $\Pi(n) = (n-1)\cdot\Pi(n-1)+(n-1)\cdot\Pi(n-2)$, d. h., aus der zweiten Beziehung konnte man leicht die zuerst gefundene Rekursionsgleichung herleiten. Umgekehrt kann man auch aus der Differenz $\Pi\,(n)-n\cdot\Pi\,(n-1)$ schrittweise die zweite Beziehung aus der ersten herleiten.

Und schließlich fand er auch eine direkte Berechnungsmöglichkeit des Anzahlterms:

$$\Pi\,(n) = n!\cdot[1-\tfrac{1}{1!}+\tfrac{1}{2!}-\tfrac{1}{3!}+\tfrac{1}{4!}-+\ldots+(-1)^n\cdot\tfrac{1}{n!}]$$

Diese ergibt sich schrittweise aus der zweiten Beziehung (Beweis z. B. durch vollständige Induktion).

Berechnet man nun die Wahrscheinlichkeit, dass es bei Vertauschungen zufällig zu *mindestens* einem Rencontre hinsichtlich der Anordnung kommt, dann sind wir wieder bei der Naturkonstanten, der Euler'schen Zahl *e*, die eben nicht nur in der Analysis eine Rolle spielt.

Satz

1/*e*-Gesetz

Die Wahrscheinlichkeit p_n, dass bei der zufälligen Anordnung von n Objekten keines an seinem ursprünglichen Platz ist, beträgt

$$p_n = \tfrac{\Pi\,(\mathrm{n})}{\mathrm{n}!} = 1-\tfrac{1}{1!}+\tfrac{1}{2!}-\tfrac{1}{3!}+\tfrac{1}{4!}-+\ldots+(-1)^{\mathrm{n}}\cdot\tfrac{1}{\mathrm{n}!}.$$

Auf der rechten Seite der Gleichung stehen die ersten n + 1 Summanden der Reihenentwicklung der Zahl $e^{-1} = 0{,}36787944\ldots$, d. h., die Folge der Wahrscheinlichkeiten p_n konvergiert gegen diese Zahl.

14.3.5 Eulers Beiträge zur Kombinatorik

Im Jahr 1740 erhielt Leonhard Euler die Anfrage des Berliner Mathematikprofessors Philipp Naudé le Jeune (1684–1745), ob er eine Formel für die Bestimmung der Anzahl der möglichen Summendarstellungen einer natürlichen Zahl n kenne.

In der Fachliteratur wird die Zerlegung einer natürlichen Zahl in Summanden als **Partition** bezeichnet.

Euler hatte sich zwar noch nie mit einer solchen Frage beschäftigt, fand aber schnell eine Antwort. Die Lösung des Problems ergab sich wieder aus einem unendlichen Produkt von Polynomen. Euler notierte

$$\begin{aligned} Q(x) &= (1+x^1)\cdot(1+x^2)\cdot(1+x^3)\cdot(1+x^4)\cdot(1+x^5)\cdot(1+x^6)\cdot\ldots \\ &= 1+1x^1+1x^2+2x^3+2x^4+3x^5+4x^6+5x^7+\ldots \end{aligned}$$

Die Koeffizienten der Potenzen von x geben an, auf wie viele Arten man den Exponenten der jeweiligen Potenz als Summe von *voneinander verschiedenen* natürlichen Zahlen darstellen kann:

Auf der rechten Seite der Gleichung ergibt sich die Potenz

x^1 nur auf eine Art, nämlich aus dem Produkt $x\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots,$

x^2 aus dem Produkt $1\cdot x^2\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots,$

x^3 aus zwei Produkten, nämlich $1\cdot 1\cdot x^3\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots$ und $x\cdot x^2\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots,$

x^4 aus zwei Produkten, nämlich $1\cdot 1\cdot 1\cdot x^4\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots$ und $x\cdot 1\cdot x^3\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots,$

x^5 aus drei Produkten, nämlich $1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot x^5\cdot 1\cdot\ldots, x\cdot 1\cdot 1\cdot x^4\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots,$ $1\cdot x^2\cdot x^3\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots,$

x^6 aus vier Produkten, nämlich $1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot x^6\cdot\ldots, x\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot x^5\cdot 1\cdot\ldots,$ $1\cdot x^2\cdot 1\cdot x^4\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots$ sowie $x\cdot x^2\cdot x^3\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots,$ usw.

Weiter betrachtete Euler ein unendliches Produkt von Brüchen, die er jeweils als unendliche geometrische Reihe darstellte, also ein unendliches Produkt aus jeweils unendlich vielen Summanden:

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdot\ldots \\ &= (1+x^1+x^2+x^3+\ldots)\cdot(1+x^3+x^6+x^9+\ldots)\cdot(1+x^5+x^{10}+x^{15}+\ldots)\cdot\ldots \\ &= 1+1x^1+1x^2+2x^3+2x^4+3x^5+4x^6+5x^7+\ldots \end{aligned}$$

Es ergibt sich insgesamt *dasselbe* unendliche Polynom, aber die Exponenten kommen auf andere Weise zustande:

$$\begin{aligned} x^1 &= x\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots, \\ x^2 &= x^2\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots, \\ 2x^3 &= 1\cdot x^3\cdot 1\cdot\ldots + x^3\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots, \\ 2x^4 &= x\cdot x^3\cdot 1\cdot\ldots + x^4\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots, \\ 3x^5 &= x^5\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots + x^2\cdot x^3\cdot 1\cdot\ldots + 1\cdot 1\cdot x^5\cdot\ldots, \\ 4x^6 &= x^6\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots + x^3\cdot x^3\cdot 1\cdot\ldots + x\cdot 1\cdot x^5\cdot\ldots + 1\cdot x^6\cdot 1\cdot\ldots, \text{ usw.} \end{aligned}$$

Man könnte an dieser Stelle vermuten, dass nur zufällig die ersten Koeffizienten übereinstimmen, aber Euler kann die Bedenken schnell zerstreuen:

Er multipliziert den ersten Produktterm

$$Q(x) = (1 + x^1) \cdot (1 + x^2) \cdot (1 + x^3) \cdot (1 + x^4) \cdot (1 + x^5) \cdot (1 + x^6) \cdot \ldots$$

$$\text{mit } P(\mathrm{x}) = (1 - x^1) \cdot (1 - x^2) \cdot (1 - x^3) \cdot (1 - x^4) \cdot (1 - x^5) \cdot (1 - x^6) \cdot \ldots,$$

sodass nach Zusammenfassen von jeweils zwei Klammern (gemäß dem dritten binomischen Lehrsatz) hieraus

$$P(x) \cdot Q(x) = (1 - x^2) \cdot (1 - x^4) \cdot (1 - x^6) \cdot (1 - x^8) \cdot (1 - x^{10}) \cdot (1 - x^{12}) \cdot \ldots \text{ entsteht.}$$

Dann betrachtet er den Quotienten

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{P(x) \cdot Q(x)} &= \frac{(1 - x) \cdot (1 - x^2) \cdot (1 - x^3) \cdot (1 - x^4) \cdot (1 - x^5) \cdot (1 - x^6) \cdot \ldots}{(1 - x^2) \cdot (1 - x^4) \cdot (1 - x^6) \cdot (1 - x^8) \cdot (1 - x^{10}) \cdot (1 - x^{12}) \cdot \ldots} \\ &= (1 - x) \cdot (1 - x^3) \cdot (1 - x^5) \cdot (1 - x^7) \cdot \ldots = \frac{1}{R(x)} \end{aligned}$$

Wegen $\frac{P(x)}{P(x) \cdot Q(x)} = \frac{1}{Q(x)}$ ergibt sich hieraus $Q(x) = R(x)$.

Was hat Euler damit gezeigt?

Notiert man die Exponenten des Polynoms $R(x)$ wie folgt als Summe von ungeraden natürlichen Zahlen

$$\begin{aligned} &1 + 1x^1 + 1x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 5x^7 + \ldots \\ &= (1 + x^1 + x^2 + x^3 + \ldots) \cdot (1 + x^3 + x^6 + x^9 + \ldots) \cdot (1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \ldots) \cdot \ldots \\ &= (1 + x^1 + x^{1+1} + x^{1+1+1} + \ldots) \cdot (1 + x^3 + x^{3+3} + x^{3+3+3} + \ldots) \cdot \\ &\quad (1 + x^5 + x^{5+5} + x^{5+5+5} + \ldots) \cdot \ldots, \end{aligned}$$

dann bedeutet dies:

Die Koeffizienten der Potenzen von x geben an, auf wie viele Arten man den Exponenten der jeweiligen Potenz als Summe von *nicht notwendig voneinander verschiedenen ungeraden* natürlichen Zahlen darstellen kann. Dabei wird der Sonderfall einer Summe, die aus nur einem Summanden besteht, mitgezählt.

Satz

Anzahl der Partitionen von natürlichen Zahlen

Es gibt genauso viele Möglichkeiten, eine natürliche Zahl in Summanden von *lauter verschiedenen* natürlichen Zahlen zu zerlegen, wie diese Zahl als Summe von *nicht notwendig verschiedenen ungeraden* natürlichen Zahlen darzustellen.

Oder mit Eulers Worten (*Introductio,* S. 269):

> Jede Zahl lässt sich durch Addition aus lauter **ungeraden**, sei es gleichen, sei es ungleichen, Zahlen auf **ebenso viele** verschiedene Arten zusammensetzen, als sie durch Addition aus **allen** ganzen, aber von einander **verschiedenen** Zahlen gebildet werden kann.

Beispiele

n	lauter verschiedene Summanden	ungerade Summanden	Anzahl
7	1+2+4, 1+6, 2+5, 3+4, 7	1+1+1+1+1+1+1, 1+1+1+1+3, 1+3+3, 1+1+5, 7	5
8	1+2+5, 1+3+4, 1+7, 2+6, 3+5, 8	1+1+1+1+1+1+1+1, 1+1+1+1+1+3, 1+1+3+3, 1+1+1+5, 1+7, 3+5	6
9	1+2+6, 1+3+5, 2+3+4, 1+8, 2+7, 3+6, 4+5, 9	1+1+1+1+1+1+1+1+1, 1+1+1+1+1+1+3, 1+1+1+3+3, 3+3+3, 1+1+1+1+5, 1+3+5, 1+1+7, 9	8
10	1+2+3+4, 1+2+7, 1+3+6, 1+4+5, 2+3+5, 1+9, 2+8, 3+7, 4+6, 10	1+1+1+1+1+1+1+1+1+1, 1+1+1+1+1+1+1+3, 1+1+1+1+3+3, 1+3+3+3, 1+1+1+1+1+5, 1+1+3+5, 1+1+1+7, 1+9, 3+7, 5+5	10

Das war aber erst der Anfang der Euler'schen Entdeckungsreise … So findet man in § 16 der *Introductio (Von der Zerlegung der Zahlen in Teile)* u. a. die Sätze:

- *Eine Zahl n lässt sich auf ebenso viele Arten in m ungleiche Teile zerlegen, als die Zahl* $n - \frac{1}{2} \cdot m \cdot (m+1)$ *durch Addition aus den Zahlen 1, 2, 3, 4, …, m zusammengesetzt werden kann.*
- *Eine Zahl n lässt sich auf ebenso viele Arten in m Teile überhaupt, mögen diese gleich oder ungleich sein, zerlegen, als die Zahl n − m durch Addition aus den Zahlen 1, 2, 3, 4, …, m zusammengesetzt werden kann.*

Beispiele

- Die Zahl 10 lässt sich ebenso oft als Summe von drei verschiedenen Summanden darstellen wie die Zahl 4 ($= 10 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4$) als Summe aus den Zahlen 1, 2, 3:

Es gibt vier Zerlegungen der Zahl 10 in drei verschiedene Summanden: $1+2+7$; $1+3+6$; $1+4+5$; $2+3+5$

Die Zahl 4 lässt sich auf vier Arten mithilfe der Summanden 1, 2, 3 darstellen: $1+1+1+1$; $1+1+2$; $2+2$; $1+3$

- Die Zahl 10 lässt sich ebenso oft als Summe von drei beliebigen Summanden darstellen wie die Zahl 7 als Summe aus den Zahlen 1, 2, 3:

Es gibt acht Zerlegungen der Zahl 10 in drei beliebige Summanden: $1+1+8$; $1+2+7$; $1+3+6$; $1+4+5$; $2+2+6$; $2+3+5$; $2+4+4$; $3+3+4$

Die Zahl 7 lässt sich auf acht Arten mithilfe der Summanden 1, 2, 3 darstellen:
$1+1+1+1+1+1+1$; $1+1+1+1+1+2$; $1+1+1+2+2$;
$1+2+2+2$; $1+1+1+1+3$; $1+3+3$; $1+1+2+3$; $2+2+3$.

Die Idee, durch das Multiplizieren geeigneter Polynome kombinatorische Einsichten zu gewinnen, wird auch bei den sog. **erzeugenden Funktionen** genutzt (die Bezeichnung stammt vom Euler-Fan Laplace):

Zu der Beschriftung eines regelmäßigen Würfels gehört das Polynom

$$f(x) = \tfrac{1}{6} \cdot \left(1x^1 + 1x^2 + 1x^3 + 1x^4 + 1x^5 + 1x^6\right).$$

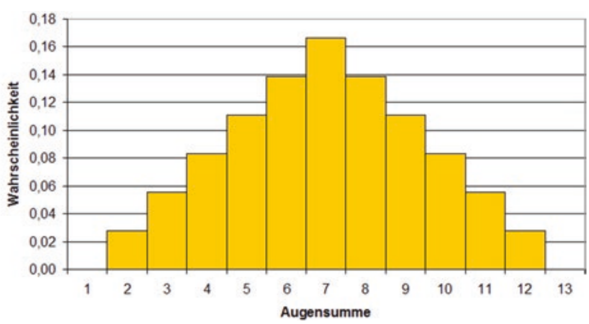
Dabei stehen die Exponenten für die auftretenden Augenzahlen, die Koeffizienten für die Häufigkeit, mit der die jeweiligen Augenzahlen bei der Beschriftung des Würfels vorkommen, der Faktor $\frac{1}{6}$ für die Wahrscheinlichkeit jeder einzelnen Augenzahl.

Betrachtet man nun das *Quadrat* der erzeugenden Funktion, dann ergibt sich als erzeugende Funktion für die *Augensumme:*

$$\begin{aligned} f^2(x) &= \tfrac{1}{36} \cdot \left[1x^1 + 1x^2 + 1x^3 + 1x^4 + 1x^5 + 1x^6\right]^2 \\ &= \tfrac{1}{36} \cdot \left(1x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + 6x^7 + 5x^8 + 4x^9 + 3x^{10} + 2x^{11} + 1x^{12}\right) \end{aligned}$$

Die Exponenten des quadrierten Terms stehen für die verschiedenen möglichen Augensummen und die Koeffizienten für die Häufigkeit, mit der die jeweiligen Augensummen in der Kombinationstabelle vorkommen (vgl. folgende Abb. links), der Faktor $\frac{1}{36}$ für die Wahrscheinlichkeit jeder einzelnen Kombination. Hieraus kann man dann die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Augensumme ablesen (vgl. Histogramm rechts).

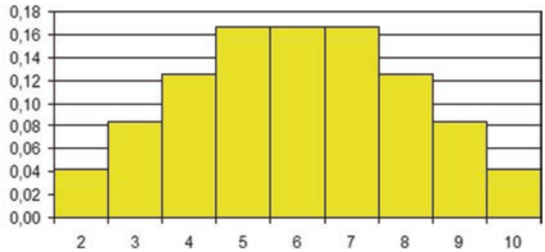
	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12



Analog erhält man beispielsweise die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Augensumme beim Wurf von regelmäßigem Tetraeder und Hexaeder:

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{4} \cdot \left(1x^1 + 1x^2 + 1x^3 + 1x^4\right) \cdot \tfrac{1}{6} \cdot \left(1x^1 + 1x^2 + 1x^3 + 1x^4 + 1x^5 + 1x^6\right) \\ &= \tfrac{1}{24} \cdot \left(1x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 4x^6 + 4x^7 + 3x^8 + 2x^9 + 1x^{10}\right) \end{aligned}$$

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10



Weitere Überlegungen hierzu findet man in *Mathematik ist schön,* Abschn. 12.7 ff.

Eulers Beiträge zur Geometrie

Euler beschäftigte sich vergleichsweise wenig mit geometrischen Problemen. Bemerkenswert ist, dass es erst seit Euler üblich ist, die drei Dreiecksseiten mit den Buchstaben *a, b, c* zu bezeichnen (1753), und er war es auch, der auf die wunderbare Gleichung

$$4 \cdot r \cdot R \cdot s = a \cdot b \cdot c$$

hinwies, in der die sechs wichtigen Längen eines Dreiecks vorkommen (r = Radius des Inkreises, R = Radius des Umkreises, s = Semiperimeter = halber Umfang).

Er entwickelte einen eleganten neuartigen Beweis für die **Heron'sche Formel** zur Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks (vgl. Dunham 1999, S. 130 ff.).

Satz

Heron'sche Formel

Für den Flächeninhalt A eines beliebigen Dreiecks mit den Seiten *a, b, c* und dem Semiperimeter $s = \frac{1}{2} \cdot u = \frac{1}{2} \cdot (a + b + c)$ gilt:

$$A = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-a) \cdot (s-c)}$$

Dass nach so vielen Jahrhunderten ein neuer Beweis für die Heron'sche Formel entwickelt wurde, ist eigentlich nichts Ungewöhnliches. Aber sensationell war, dass zweitausend Jahre nach Euklid noch ein „einfacher" Satz der Dreieckslehre entdeckt werden konnte, der offensichtlich von allen Vorgängern Eulers „übersehen" worden war – ein Satz über drei besondere Punkte im Dreieck:

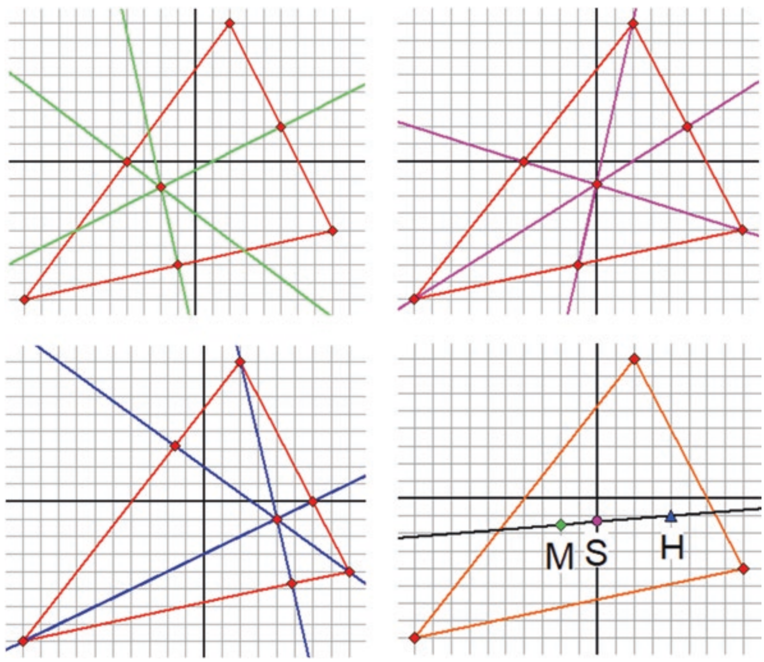
Satz

Die Euler-Gerade

In jedem beliebigen Dreieck liegen der Schnittpunkt M der Mittelsenkrechten (= Mittelpunkt des Umkreises), der Schnittpunkt S der Seitenhalbierenden (= Schwerpunkt des Dreiecks) und der Schnittpunkt H der Höhen auf einer Geraden. Die Strecke $\overline{MH}$ wird durch den Punkt S im Verhältnis 1 : 2 geteilt.

Euler bewies diesen Satz 1765 durch ausdauerndes Rechnen: Er bestimmte die Koordinaten der Punkte M, S und H in Abhängigkeit von den Seitenlängen des Dreiecks und fand dann für die Länge der Strecken heraus, dass gilt: $|MH| = 3 \cdot |MS|$ und $|SH| = 2 \cdot |MS|$, woraus sich die Kollinearität der drei Punkte ergibt.

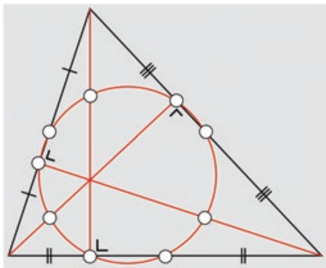
Die folgenden Abbildungen mit den Mittelsenkrechten, Seitenhalbierenden und Höhen eines Dreiecks wurden mithilfe von Excel erstellt, um zu verdeutlichen, dass die Koordinaten der o. a. Punkte tatsächlich durch Rechnung ermittelt werden können; in der vierten Abbildung sind nur die drei besonderen Punkte M, S, H eingetragen sowie die durch diese Punkte verlaufende Euler-Gerade.



Euler fand außerdem heraus, dass die Fußpunkte der Höhen sowie die Mittelpunkte der Seiten (= Fußpunkte der Mittelsenkrechten) auf einem Kreis liegen, dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt der Strecke $\overline{MH}$ ist; der Radius dieses Kreises ist halb so groß wie der Radius des Umkreises.

Die sensationelle Entdeckung Eulers regte viele neue Untersuchungen über besondere Punkte in Dreiecken an. Aber nicht alle waren von Eulers Vorgehensweise begeistert; beispielsweise lehnten Gaspard Monge (1746–1818), der Begründer der Darstellenden Geometrie, und Jakob Steiner (1796–1863) solche Beweise mithilfe von Rechnungen im Rahmen der Descartes'schen Analytischen Geometrie als „hässlich“ ab.

Der deutsche Mathematiker Karl Wilhelm Feuerbach (1800–1834) sowie die französischen Mathematiker Charles Julien Brianchon (1783–1864) und Jean Victor Poncelet (1788–1867) entdeckten 1821/1822 unabhängig voneinander, dass dieser Kreis auch durch die Mittelpunkte derjenigen Höhenabschnitte verläuft, die den Höhenschnittpunkt mit den Eckpunkten verbinden; der Kreis wird daher auch als **Feuerbach-Kreis** oder einfach nur als **Neun-Punkte-Kreis** bezeichnet.



Wikipedia: Triangle.NinePointCircle.svg

14.3.6 Der Euler'sche Polyedersatz

Leonhard Euler beschäftigte sich u. a. auch mit der Frage, welcher Zusammenhang zwischen der Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen von Polyedern besteht. In einem Brief an Christian Goldbach teilte er um das Jahr 1750 seine Vermutung mit, die er einige Jahre später auch beweisen konnte.

Da bereits René Descartes (1596–1650) Überlegungen zu diesem Thema notiert hatte (ohne diese zu veröffentlichen), wird der Satz im Französischen auch als *Théorème de Descartes-Euler* bezeichnet.

Es gibt zahlreiche Beweise des Satzes (vgl. u. a. die Wikipedia-Artikel); einen wunderbaren Weg, einen Beweis zu entdecken, enthält das Buch *Proofs and Refutations* von Imre Lakatos (Cambridge University Press 1976).

Satz

Der Euler'sche Polyedersatz

In einem konvexen Polyeder gilt die folgende Beziehung:

$$e - k + f = 2,$$

wobei e = Anzahl der Ecken, k = Anzahl der Kanten, f = Anzahl der Flächen.

Dabei wird ein Polyeder als *konvex* bezeichnet, wenn die Verbindungsstrecke zwischen beliebigen Punkten des Polyeders stets vollständig in dem Körper liegt.

Die beiden Briefmarken, die anlässlich des 200. Todestages bzw. 300. Geburtstages von Leonhard Euler erschienen, erinnern an diesen Satz.

Beispiele
Der Euler’sche Polyedersatz gilt natürlich auch für die fünf platonischen Körper, ebenso für die 13 archimedischen Körper, vgl. Kap. 2.

Polyeder	Anzahl *e* der Ecken	Anzahl *k* der Kanten	Anzahl *f* der Flächen
Tetraeder	4	6	4
Hexaeder	8	12	6
Oktaeder	6	12	8
Dodekaeder	20	30	12
Ikosaeder	12	30	20
Tetraederstumpf	12	18	8
Kuboktaeder	12	24	14
Hexaederstumpf	24	36	14
Oktaederstumpf	24	36	14

Polyeder	Anzahl *e* der Ecken	Anzahl *k* der Kanten	Anzahl *f* der Flächen
kleines Rhombenkuboktaeder	24	48	26
großes Rhombenkuboktaeder	48	72	26
abgeschrägtes Hexaeder	24	60	38
Ikosidodekaeder	30	60	32
Dodekaederstumpf	60	90	32
Ikosaederstumpf	60	90	32
kleines Rhombenikosidodekaeder	60	120	62
großes Rhombenikosidodekaeder	120	180	62
abgeschrägtes Dodekaeder	60	150	92

14.3.7 Euler begründet die Graphentheorie

Im Jahr 1736 richtete der Bürgermeister der Stadt Danzig die folgende Frage an Leonhard Euler:

- *Ist es möglich, einen Rundgang durch Königsberg so durchzuführen, dass man dabei jede der sieben Brücken genau einmal überquert?*

In seiner 13-seitigen Lösung legt Euler dar, warum dies nicht möglich ist, und formuliert ein allgemeingültiges Kriterium, wobei er eine wirklich mathematische Substanz seiner Untersuchung anzweifelt:

> Du siehst also …, dass diese Lösung ihrem Charakter gemäß kaum Beziehungen zur Mathematik hat, und ich verstehe nicht, warum sie vom Mathematiker eher erwartet werden solle als von irgend einem anderen Menschen, denn diese Lösung stützt sich allein auf die Vernunft und es ist nicht nötig, zu ihrer Auffindung irgendwelche der Mathematik eigenen Prinzipien heranzuziehen.

Mit dieser Lösung des sog. **Königsberger Brückenproblems** eröffnete Euler ein neues Gebiet der Mathematik, die Graphentheorie. Heute spricht man allgemein von einem **Euler'schen Graphen,** wenn es einen geschlossenen Streckenzug gibt, bei dem jede Kante genau einmal durchlaufen wird.

Euler gab hierzu ein einfaches Kriterium an:

Satz

Euler'sche Graphen

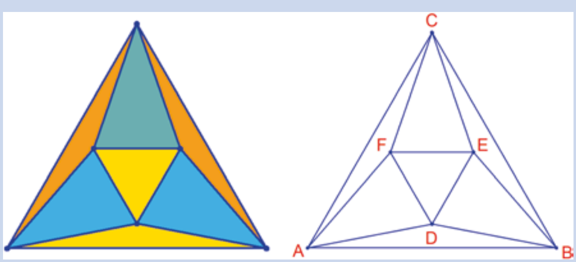
Ein Graph ist genau dann ein Euler'scher Graph, wenn an jedem Knoten die Anzahl der Kanten geradzahlig ist.

Treten keine Knoten mit einer ungeradzahligen Anzahl von Kanten auf, dann kann in jedem Knoten ein Rundweg begonnen werden. Genau dann, wenn genau zwei Knoten mit einer ungeradzahligen Anzahl von Kanten vorhanden sind, können diese beiden Knoten Anfang bzw. Ende eines **Euler'schen Weges** sein.

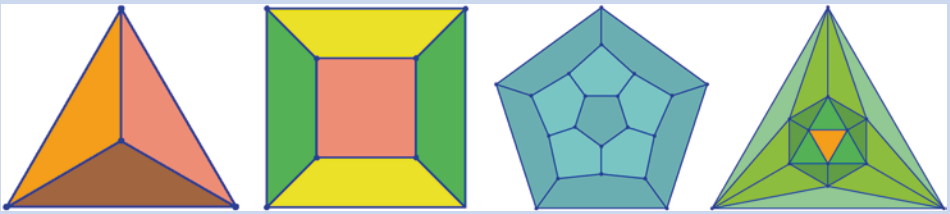
Beispiele

Die folgenden Abbildungen zeigen für die fünf platonischen Körper sog. Schlegel-Diagramme, das sind verzerrte projektionsartige Darstellungen, in denen alle Ecken und Kanten der Körper erkennbar sind (vgl. *Mathematik ist wunderschön,* Kap. 10).

Beim Oktaeder kommen an jeder Ecke vier Kanten zusammen; es handelt sich also um einen Euler'schen Graphen. Beispielsweise verläuft der folgende Rundweg über alle Kanten: *A–C–F–A–D–B–E–D–F–E–C–B–A*.



Da bei Tetraeder, Hexaeder, Dodekaeder und Ikosaeder an jeder Ecke eine ungerade Anzahl von Kanten zusammenkommt, gibt es für diese Körper weder einen Euler'schen Graphen noch einen Rundweg, bei dem jede Kante genau einmal durchlaufen wird.



14.4 Literaturhinweise

Eine wichtige Adresse zum Auffinden von Informationen über Mathematiker und deren wissenschaftliche Leistungen ist die Homepage der St. Andrews University.

Informationen über Leonhard Euler findet man unter:

- www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euler.html
- Strick, Heinz Klaus (2007): *Kalenderblatt über Euler,* https://www.spektrum.de/wissen/leonhard-euler-1707-1783/867235
- www-history.mcs.st-and.ac.uk/Strick/Euler.pdf
- Strick, Heinz Klaus (2018): *Mathematik ist wunderschön,* Springer, Heidelberg, Kap. 2 (Über alle Schranken hinaus), Kap. 10 (Platonische und andere regelmäßige Körper)
- Strick, Heinz Klaus (2019): *Mathematik ist wunderwunderschön,* Springer, Heidelberg, Kap. 4 (Teiler und Teilbarkeit), Kap. 6 (Das Pascal'sche Dreieck)

Weitere Informationen zu Euler und dem Basler Problem findet man u. a. in:

- Dunham, William (1999): *Euler – The Master of Us All,* The Mathematical Association of America, New York
- Dunham, William (1991): *Journey through Genius,* Penguin Books, New York
- Chapman, Robin (1999): *Evaluating* $\zeta(2)$ *– 14 Beweise, dass* $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, Download möglich unter http://empslocal.ex.ac.uk/people/staff/rjchapma/etc/zeta2.pdf

Das Basler Problem findet man im Euler-Archiv unter:

- eulerarchive.maa.org//pages/E041.html

Wikipedia-Artikel in deutscher, englischer und französischer Sprache zu den Stichwörtern:

- Leonhard Euler*
- Leonhard Euler als Namensgeber (List of things named after Leonhard Euler, Liste de sujets nommés d'après Leonhard Euler)
- Basler Problem (Basel Problem, Problème de Bâle)
- Riemann'sche Zetafunktion (Riemann zeta Function, Fonction zêta de Riemann)
- Euler-Mascheroni-Konstante (Euler-Mascheroni constant; Constante d'Euler-Mascheroni)
- Gammafunktion (Gamma function, Fonction gamma)
- Goldbachsche Vermutung (Goldbach's conjecture; Conjecture de Goldbach)
- Primzahlgenerator (Formula for primes; Formules pour les nombres premiers)
- Euler'sche Phi-Funktion (Euler's totient function, Indicatrice d'Euler)
- Vollkommene Zahlen (Perfect number, Nombre parfait)
- Befreundete Zahlen (Amicable numbers, Nombres amicaux)
- Fixpunktfreie Permutation/Rencontres-Zahl (Derangement; Problème des rencontres)
- Partitionsfunktion (Partition function; Partition d'un entier)
- Eulersche Gerade (Euler line; Droite d'Euler)
- Eulerscher Polyedersatz (Euler characteristic; Théorème de Descartes-Euler)
- Eulerkreisproblem (Eulerian path; Graphe eulérien)

*) Der englisch- und der französischsprachige Beitrag sind jeweils als lesenswerte Artikel ausgezeichnet worden.

15 Joseph-Louis Lagrange – vielseitiger Mathematiker und Physiker

Solange Algebra und Geometrie getrennte Wege gingen, gab es bei ihnen nur langsame Fortschritte und Anwendungen in begrenzter Zahl. Aber seit sich diese Wissenschaften zusammengeschlossen haben, saugten sie voneinander neue Lebenskräfte und marschierten von da an schnellen Schrittes hin zur Vollkommenheit.

Bevor wir auf die zu beschreibende *geniale Idee* von Joseph-Louis Lagrange eingehen, müssen wir einige Informationen über Kettenbrüche voranstellen, da dieses Thema üblicherweise nicht in der Schule behandelt wird.

Seit der Antike ist bekannt, dass man Quadratwurzeln aus natürlichen Zahlen näherungsweise durch Brüche darstellen kann. Der erste Europäer der Neuzeit, der sich damit beschäftigte, einen geeigneten Näherungsbruch zu finden, war der italienische Mathematiker und Ingenieur Rafael Bombelli (1526–1572). In seinem 1573 veröffentlichten Algebra-Band findet man die folgende *geniale* Anleitung für die Bestimmung eines Näherungsbruchs für $\sqrt{13}$.

H. K. Strick, *Mathematik – einfach genial!*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-60449-6_15

Bombellis Algorithmus zur Bestimmung eines Näherungsbruchs für $\sqrt{13}$

- *1. Schritt:* Die nächstkleinere Quadratzahl ist 9, die gesuchte Zahl ist also 3 plus eine unbekannte Größe (Bombelli bezeichnet sie als *tanto*): $3 + x = \sqrt{13}$
- *2. Schritt:* Für das Quadrat hiervon gilt $9 + 6x + x^2 = 13$, also $6x + x^2 = 4$.
- *3. Schritt:* Vernachlässigt man *(lasciato andare)* das Quadrat von *x*, dann folgt aus $6x = 4$, dass $x \approx \frac{2}{3}$, also $\sqrt{13} \approx 3\frac{2}{3} = \frac{11}{3}$.
- *4. Schritt:* Wenn $x \approx \frac{2}{3}$, dann ist $x^2 \approx \frac{2}{3}x$ (Multiplikation mit x auf beiden Seiten der Gleichung).
  Aus der Gleichung $6x + x^2 = 4$ wird dann $6x + \dfrac{2}{3}x \approx 4$, also $x \approx \dfrac{4}{6+\dfrac{2}{3}} = \dfrac{4}{\dfrac{20}{3}} = \dfrac{3}{5}$ und somit $\sqrt{13} \approx 3\frac{3}{5} = \frac{18}{5}$.

Der 4. Schritt kann nun mit dem zuletzt erhaltenen Näherungsbruch wiederholt werden:

Wenn $x \approx \frac{3}{5}$, dann ist $x^2 \approx \frac{3}{5}x$. Aus der Gleichung $6x + x^2 = 4$ wird dann $6x + \frac{3}{5}x \approx 4$ und weiter $x \approx \frac{4}{6+\frac{3}{5}} = \frac{4}{\frac{33}{5}} = \frac{20}{33}$ und somit $\sqrt{13} \approx 3\frac{20}{33} = \frac{119}{33}$.

Dieses Verfahren kann man bis zu einer beliebigen Genauigkeit fortsetzen *(e cosi procedendo si puo approssimare a una cosa insensibile).*

Die beiden im Beispiel angegebenen Näherungsbrüche lassen sich wie folgt als **Kettenbrüche** notieren:

$$3\frac{3}{5} = 3 + \frac{1}{\frac{5}{3}} = 3 + \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = 3 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{3}{2}}} = 3 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}},$$

hierfür verwendet man die *Kurzschreibweise* $[3;\ 1, 1, 2]$.

$$3\frac{20}{33} = 3 + \frac{1}{1+\frac{13}{20}} = 3 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{7}{13}}} = 3 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{6}{7}}}} = 3 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{6}}}}},$$

Kurzschreibweise: $[3;\ 1, 1, 1, 1, 6]$.

Definition

Einfache Kettenbrüche

Den geschachtelten Summenterm

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}$$

bezeichnet man als (einfachen) unendlichen Kettenbruch; dabei bilden die Koeffizienten $a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots$ eine unendliche Folge von natürlichen Zahlen. In den Zählern der Teilbrüche steht jeweils eine Eins. Bei endlichen Kettenbrüchen $[a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n]$ ist der letzte Teilnenner eine Summe, bestehend aus der natürlichen Zahl a_{n-1} und dem Stammbruch $\frac{1}{a_n}$.

15.1 Einfach genial: Joseph-Louis Lagrange charakterisiert periodische Kettenbrüche

Die erste größere Abhandlung über Kettenbrüche veröffentlichte **Leonhard Euler** (wer denn sonst) im Jahr 1737. Das Thema *Kettenbrüche* findet man danach auch in seinem 1748 erschienenen Buch *Introductio in Analysin Infinitorum* („Einleitung in die Analysis des Unendlichen"), aus dem wir im Folgenden einige Sätze und Regeln wiedergeben, bevor wir auf die genialen Ideen von **Joseph-Louis Lagrange** eingehen.

15.1.1 Endliche Kettenbrüche

Wir beginnen mit den Eigenschaften endlicher Kettenbrüche:

Satz

Endliche Kettenbrüche

- Alle positiven rationalen Zahlen $\frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ lassen sich als endliche Kettenbrüche darstellen.
- Umgekehrt gilt auch: Besteht ein Kettenbruch aus einer endlichen Anzahl von „Teilbrüchen", so kann man den Kettenbruch auch wieder als gewöhnlichen Bruch in der Form $\frac{p}{q}$ notieren.
- Die Darstellung einer rationalen Zahl als Kettenbruch ist eindeutig.
- Die endlichen Kettenbrüche $[a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n]$ und $[0; a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n]$ sind Kehrwerte zueinander (wobei $a_0 \neq 0$).

Man erhält einen Kettenbruch zu einer positiven rationalen Zahl $\frac{p}{q}$, indem man den euklidischen Algorithmus auf die natürlichen Zahlen p und q anwendet.

Beispiele

a) Kettenbruchentwicklung für $\frac{7}{4}$:
Euklidischer Algorithmus für die natürlichen Zahlen 7 und 4:

$$7 = \underline{\underline{1}} \cdot 4 + 3;\ 4 = \underline{\underline{1}} \cdot 3 + 1;\ 3 = \underline{\underline{3}} \cdot 1 + 0$$

Die jeweils unterstrichenen Faktoren treten dann auch im Kettenbruch auf:
$\frac{7}{4} = 1 + \frac{3}{4} = 1 + \frac{1}{\frac{4}{3}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{3}}$; Kurzschreibweise: $\frac{7}{4} = [1; 1, 3]$

Kettenbruch für $\frac{4}{7}$:
$\frac{4}{7} = 0 + \frac{1}{\frac{7}{4}} = 0 + \cfrac{1}{1 + \frac{3}{4}} = 0 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{\frac{4}{3}}} = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{3}}} = [0; 1, 1, 3]$

b) Kettenbruchentwicklung für $\frac{14}{11}$:

Euklidischer Algorithmus für die natürlichen Zahlen 14 und 11:

$$14 = \underline{\underline{1}} \cdot 11 + 3;\ 11 = \underline{\underline{3}} \cdot 3 + 2;\ 3 = \underline{\underline{2}} \cdot 1 + 1;\ 2 = \underline{\underline{2}} \cdot 1 + 0$$

Die jeweils unterstrichenen Faktoren treten dann auch im Kettenbruch auf:

$$\frac{14}{11} = 1 + \frac{3}{11} = 1 + \frac{1}{\frac{11}{3}} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{2}{3}} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{3}{2}}} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}};\text{ also } \frac{14}{11} = [1; 3, 1, 2].$$

c) Umwandlung eines Kettenbruchs in einen gewöhnlichen Bruch:

$$[1; 4, 2, 3] = 1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}} = 1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\frac{7}{3}}} = 1 + \frac{1}{4 + \frac{3}{7}} = 1 + \frac{1}{\frac{31}{7}} = 1 + \frac{7}{31} = \frac{38}{31}$$

Die Eindeutigkeit der Darstellung einer rationalen Zahl als Kettenbruch ergibt sich aus der Eindeutigkeit der Umformungen. Das folgende Beispiel ist keine Ausnahme; vielmehr erkennen wir daran, dass die letzte Ziffer eines Kettenbruchs in Kurzschreibweise keine 1 sein darf!

Es gilt also: $[a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, 1] = [a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n + 1]$

Beispiel

$$[1; 4, 2, 2, 1] = 1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}}} = 1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}} = [1; 4, 2, 3]$$

Satz

Näherungsbrüche

Lässt man in der Kurzschreibweise eines *endlichen* Kettenbruchs nacheinander jeweils die letzte Ziffer weg, dann ergibt sich eine Folge von Zahlen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die in der Nähe der ursprünglich gegebenen Zahl liegen, d. h., man kann diese Brüche als Näherungsbrüche für die ursprünglich gegebene Zahl verwenden.

Die Glieder der Folge sind abwechselnd kleiner bzw. größer als die durch den Kettenbruch bestimmte Zahl.

Beispiele

a)

$$x_3 = [1; 4, 2, 3] = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}} = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{3}{7}} = 1 + \frac{7}{31} = \frac{38}{31} = 1{,}225806\ldots$$

$$x_2 = [1; 4, 2] = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{9}{2}} = 1 + \frac{2}{9} = \frac{11}{9} = 1{,}222222\cdots$$

$$x_1 = [1; 4] = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} = 1,25 \quad \text{und} \quad x_0 = [1] = 1$$

Durch Nachrechnen findet man über die Differenzen aufeinanderfolgender Glieder heraus, dass

$$x_1 - x_2 = \left(1 + \frac{1}{4}\right) - (1) > 0,$$

$x_1 - x_2 = \left(1 + \frac{1}{4}\right) - \left(1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}\right) > 0$, da der Nenner des Bruchs von x_2 größer ist als der Nenner des Bruchs von x_1,

$x_3 - x_2 = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}} - \left(1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}\right) > 0$, da der Nenner des Bruchs von x_2 größer ist als der Nenner des Bruchs von x_3.

Die Näherungsbrüche x_0 und x_2 sind kleiner als x_3, und der Näherungsbruch x_1 ist größer als x_3, also gilt: $x_0 < x_2 < x_3 < x_1$

$$x_4 = [1; 2, 3, 4, 5] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5}}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{5}{21}}}.$$

$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{21}{68}} = 1 + \frac{68}{157} = \frac{225}{157} = 1{,}433121\cdots$$

b)

$$x_3 = [1; 2, 3, 4] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{4}{13}} = 1 + \frac{13}{30} = \frac{43}{30} = 1{,}433333\ldots$$

$$x_2 = [1; 2, 3] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}} = 1 + \frac{3}{7} = \frac{10}{7} = 1{,}428571\cdots$$

$$x_1 = [1; 2] = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5 \quad \text{und} \quad x_0 = [1] = 1$$

Es gilt: $x_0 < x_2 < x_4 < x_3 < x_1$, d. h., die Näherungsbrüche mit geradem Index sind kleiner als x_4 und die Näherungsbrüche mit ungeradem Index sind größer als x_4.

Um die o. a. Eigenschaften der Folge der Näherungsbrüche nachzuweisen, genügt eine allgemeine Rechnung für die ersten Glieder:

$$x_1 - x_0 = [a_0; a_1] - [a_0] = \left(a_0 + \frac{1}{a_1}\right) - a_0 = \frac{1}{a_1} > 0$$

$$x_2 - x_1 = [a_0; a_1] - [a_0; a_1, a_2] = \left(a_0 + \frac{1}{a_1}\right) - \left(a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}\right)$$

$$= \frac{a_1 + \frac{1}{a_2} - a_1}{a_1 \cdot (a_1 + \frac{1}{a_2})} = \frac{\frac{1}{a_2}}{a_1 \cdot (a_1 + \frac{1}{a_2})} > 0$$

da Zähler und Nenner größer als null sind.

$$x_3 - x_2 = [a_0; a_1, a_2, a_3] - [a_0; a_1, a_2] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}} - \left(a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}\right)$$

$$= \frac{\left(a_1 + \frac{1}{a_2}\right) - \left(a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}\right)}{\left(a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}\right) \cdot \left(a_1 + \frac{1}{a_2}\right)} = \frac{\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}}{\left(a_1 + \frac{1}{a_2}\right) \cdot \left(a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}\right)} = \frac{\frac{\left(a_2 + \frac{1}{a_3}\right) - a_2}{\left(a_2 + \frac{1}{a_3}\right) \cdot a_2}}{\left(a_1 + \frac{1}{a_2}\right) \cdot \left(a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}\right)} > 0$$

usw.

Die Berechnung der einzelnen Näherungs-Kettenbrüche ist – wie man auch an den letzten Rechnungen sieht – ziemlich mühsam. Erfreulicherweise gibt es aber eine einfachere Möglichkeit.

Regel

Rekursive Berechnung von Kettenbrüchen

Die Folge von Kettenbrüchen $x_0 = [a_0]$, $x_1 = [a_0; a_1]$, $x_2 = [a_0; a_1, a_2], \cdots$, $x_n = [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_n]$ ist eine Folge von rationalen Zahlen $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Die Glieder der Zählerfolge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und der Nennerfolge $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lassen sich wie folgt rekursiv berechnen: $\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1}$ und $\frac{p_1}{q_1} = \frac{a_1 \cdot p_0 + 1}{a_1}$ sowie $\frac{p_n}{q_n} = \frac{a_n \cdot p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n \cdot q_{n-1} + q_{n-2}}$ für $n \geq 2$.

Hinweis Definiert man $p_{-2} = 1$, $p_{-1} = 0$, $q_{-2} = 0$, $q_{-1} = 1$, dann gilt die angegebene Rekursionsformel sogar für $n \geq 0$.

Die Berechnung der Glieder der Zähler- und der Nennerfolge erfolgt am einfachsten in Tabellenform:

			n	
			a_n	
	p_{n-2}	p_{n-1}	$p_n = a_n \cdot p_{n-1} + p_{n-2}$	
	q_{n-2}	q_{n-1}	$q_n = a_n \cdot q_{n-1} + q_{n-2}$	

Die Rekursionsformeln lassen sich schrittweise entwickeln; ein allgemeiner Beweis kann z. B. durch vollständige Induktion erfolgen. Wir notieren hier die Terme für die ersten Folgenglieder:

$$x_1 = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 \cdot a_1 + 1}{a_1} = \frac{p_0 \cdot a_1 + 1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = a_0 + \frac{a_2}{a_1 \cdot a_2 + 1} = \frac{a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 + a_0 + a_2}{a_1 \cdot a_2 + 1} \\ &= \frac{a_2 \cdot (a_0 \cdot a_1 + 1) + a_0}{a_1 \cdot a_2 + 1} = \frac{a_2 \cdot p_1 + p_0}{a_2 \cdot q_1 + q_0} = \frac{p_2}{q_2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{a_3}{a_2 \cdot a_3 + 1}} = a_0 + \frac{a_2 \cdot a_3 + 1}{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 + a_1 + a_3} \\ &= \frac{a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 + a_0 \cdot a_1 + a_0 \cdot a_3 + a_2 \cdot a_3 + 1}{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 + a_1 + a_3} \\ &= \frac{a_3 \cdot (a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 + a_0 + a_2) + a_0 \cdot a_1 + 1}{a_3 \cdot (a_1 \cdot a_2 + 1) + a_1} = \frac{a_3 \cdot p_2 + p_1}{a_3 \cdot q_2 + q_1} = \frac{p_3}{q_3} \end{aligned}$$

Beispiel

Schrittweise Berechnung von $x_4 = [0; 2, 3, 4, 5]$:

$$x_0 = [0] = \tfrac{a_0}{1} = \tfrac{0}{1}, \text{ also } p_0 = 0,\ q_0 = 1$$

$$x_1 = [0; 2] = \tfrac{p_0 \cdot a_1 + 1}{a_1} = \tfrac{0 \cdot 2 + 1}{2} = \tfrac{1}{2}, \text{ also } p_1 = 1,\ q_1 = 2$$

$$x_2 = [0; 2, 3] = \tfrac{a_2 \cdot p_1 + p_0}{a_2 \cdot q_1 + q_0} = \tfrac{3 \cdot 1 + 0}{3 \cdot 2 + 1} = \tfrac{3}{7}, \text{ also } p_2 = 3,\ q_2 = 7$$

$$x_3 = [0; 2, 3, 4] = \tfrac{a_3 \cdot p_2 + p_1}{a_3 \cdot q_2 + q_1} = \tfrac{4 \cdot 3 + 1}{4 \cdot 7 + 2} = \tfrac{13}{30}, \text{ also } p_3 = 13,\ q_3 = 30$$

$$x_4 = [0; 2, 3, 4, 5] = \tfrac{a_4 \cdot p_3 + p_2}{a_4 \cdot q_3 + q_2} = \tfrac{5 \cdot 13 + 3}{5 \cdot 30 + 7} = \tfrac{68}{157}.$$

Berechnung der Zähler und Nenner mithilfe einer Tabelle:

n	0	1	2	3	4
a_n	0	2	3	4	5
p_n	0	1	3	13	68
q_n	1	2	7	30	157

Möglichkeit einer Kontrollrechnung

- Für die Zähler und Nenner von aufeinanderfolgenden Näherungsbrüchen einer Kettenbruchentwicklung gilt: $p_n \cdot q_{n-1} - p_{n-1} \cdot q_n = (-1)^{n-1}$

Beispiel (von oben)

$p_1 \cdot q_0 - p_0 \cdot q_1 = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 2 = +1;\; p_2 \cdot q_1 - p_1 \cdot q_2 = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 7 = -1;$
$p_3 \cdot q_2 - p_2 \cdot q_3 = 13 \cdot 7 - 3 \cdot 30 = +1;\; p_4 \cdot q_3 - p_3 \cdot q_4 = 68 \cdot 30 - 13 \cdot 157 = -1$

Diese Beziehung zwischen den Näherungsbrüchen kann man nutzen, um **lineare diophantische Gleichungen** mit zwei Variablen zu lösen – das sind lineare Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten und ganzzahligen Lösungspaaren (bezeichnet nach Diophant von Alexandria, um 250 n. Chr.).

Beispiel
Die Beziehung $p_4 \cdot q_3 - p_3 \cdot q_4 = 68 \cdot 30 - 13 \cdot 157 = -1$ im letzten Beispiel kann man auch so interpretieren:

Das Zahlenpaar (68; 157) ist eine Lösung der linearen Gleichung $30x - 13y = -1$, also der Gleichung $-30x + 13y = 1$.

Hieraus ergibt sich durch Multiplikation beispielsweise mit 2, dass (136; 314) Lösung der Gleichung $-30x + 13y = 2$ ist, usw.

Lösungsverfahren

Lagrange'sche Methode zur Lösung von linearen diophantischen Gleichungen

Man findet ein Lösungspaar $(x; y)$ der linearen diophantischen Gleichung $px - qy = \pm 1$ (mit zueinander teilerfremden ganzzahligen Koeffizienten p und q), indem man den Bruch $\frac{p}{q}$ in einen Kettenbruch entwickelt:

$$\frac{p}{q} = [a_0;\; a_1,\; a_2,\; \cdots,\; a_{n-1},\; a_n]$$

Dann ergibt sich aus dem bis zum vorletzten Glied entwickelten Kettenbruch $\frac{y}{x} = [a_0;\; a_1,\; a_2,\; \cdots,\; a_{n-1}]$ ein mögliches Lösungspaar.

Beispiele

Lösung der Gleichung 12x − 7y = 1

Die Kettenbruchentwicklung von $\frac{p}{q} = \frac{12}{7}$ kann der folgenden Tabelle entnommen werden:

n	0	1	2	3
a_n	1	1	2	2
p_n	1	2	5	12
q_n	1	1	3	7

Aus dem vorletzten Schritt der Kettenbruchentwicklung ergibt sich die Beziehung $12 \cdot 3 - 7 \cdot 5 = 1$.

Daher ist (3; 5) eine Lösung der o. a. Gleichung.

Weitere Lösungen findet man, indem man x um Vielfache von 7 erhöht und y um Vielfache von 12, also beispielsweise (10; 17), (17; 29), (24; 41) usw.

Lösung der Gleichung $19x - 11y = 3$
Die Kettenbruchentwicklung von $\frac{p}{q} = \frac{19}{11}$ kann der folgenden Tabelle entnommen werden:

n	0	1	2	3	4
a_n	1	1	2	1	2
p_n	1	2	5	7	19
q_n	1	1	3	4	11

Aus dem vorletzten Schritt der Kettenbruchentwicklung ergibt sich die Beziehung $19 \cdot 4 - 11 \cdot 7 = -1$.

Daher ist (4; 7) eine Lösung der Gleichung $19x - 11y = -1$.

Folglich ist $(-12; -21)$ eine Lösung der Gleichung $19x - 11y = 3$.

Weitere Lösungen findet man, indem man x um Vielfache von 11 erhöht und y um Vielfache von 19, also beispielsweise $(-1; -2)$, (10; 17), (21; 36) usw.

15.1.2 Unendliche Kettenbrüche

Die oben festgestellten Eigenschaften der Folgenglieder lassen sich auf unendliche Kettenbrüche übertragen. Da *rationale* Zahlen durch *endliche* Kettenbrüche dargestellt und umgekehrt endliche Kettenbrüche in rationale Zahlen umgeformt werden können, entsprechen die *unendlichen* Kettenbrüche den *irrationalen* Zahlen.

Satz

Intervallschachtelungen für reelle Zahlen
Die Folge von Kettenbrüchen $x_0 = [a_0]$, $x_1 = [a_0; a_1]$, $x_2 = [a_0; a_1, a_2]$, $x_3 = [a_0; a_1, a_2, a_3], \cdots$ bildet eine Intervallschachtelung, d. h., die Folgenglieder mit geradem Index bilden eine streng monoton steigende Folge $x_0 < x_2 < x_4 < \cdots$, und die Folgenglieder mit ungeradem Index bilden eine streng monoton fallende Folge $x_1 > x_3 > x_5 > \cdots$; und da der Unterschied zwischen zwei benachbarten Folgengliedern beliebig klein wird, wird durch einen unendlichen Kettenbruch eine irrationale Zahl definiert.

Welche Zahl durch einen unendlichen Kettenbruch festgelegt ist, kann man allgemein nicht sagen, wohl aber, so Euler, bei Kettenbrüchen, *„… in welchen die Nenner entweder sämtlich einander gleich sind, oder doch ebendieselben Nenner immer wiederkehren, … giebt es ein einfaches Mittel ihren Wert zu bestimmen“*.

Beispiel

Welche Zahl wird durch den unendlichen Kettenbruch $x = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}$ definiert?

Offensichtlich gilt für diese Zahl: $x = \frac{1}{2+x}$, also $x \cdot (2 + x) = 1$, d. h. $x^2 + 2x = 1$. Diese quadratische Gleichung hat *eine* positive Lösung, nämlich $x = -1 + \sqrt{2}$. Addiert man 1 zum o. a. Kettenbruch, so ergibt sich:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}} = [1; 2, 2, 2, \cdots] = [1; \overline{2}]$$

Folgerung:

Die Zahlenfolge $x_0 = \frac{a_0}{1} = \frac{1}{1} = 1$, $x_1 = \frac{p_0 \cdot a_1 + 1}{a_1} = \frac{1 \cdot 2 + 1}{2} = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{a_2 \cdot p_1 + p_0}{a_2 \cdot q_1 + q_0} = \frac{2 \cdot 3 + 1}{2 \cdot 2 + 1} = \frac{7}{5}$, $x_3 = \frac{a_3 \cdot p_2 + p_1}{a_3 \cdot q_2 + q_1} = \frac{2 \cdot 7 + 3}{2 \cdot 5 + 2} = \frac{17}{12}$ … bildet eine Intervallschachtelung für $x = \sqrt{2}$.

Verallgemeinerung:

Welche Zahl wird durch den unendlichen Kettenbruch $x = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cdots}}}$ definiert?

Für diese Zahl gilt: $x = \frac{1}{a+x}$, also $x^2 + ax = 1$. Quadratische Ergänzung führt auf $x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 = 1 + \frac{1}{4}a^2$ und somit auf die positive Lösung

$$x = -\tfrac{1}{2}a + \sqrt{1 + \tfrac{1}{4}a^2} = \tfrac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{a^2 + 4} - a\right).$$

Beispiele

- $a = 1 : x = -\frac{1}{2} + \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5} - 1) = [0; 1, 1, 1, \cdots] = [0; \overline{1}]$,

d. h., für die Zahl $\Phi = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5} + 1) = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5} - 1) + 1$ des goldenen Schnitts gilt:

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}} = [1; 1, 1, 1, \cdots] = [1; \overline{1}]$$

und die Folge $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{2}{1}$, $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_3 = \frac{5}{3}$, $x_4 = \frac{8}{5}$, $\cdots$

bildet eine Intervallschachtelung für die goldene Zahl.

- $a = 3 : x = -\frac{3}{2} + \sqrt{1 + \frac{9}{4}} = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{13} - 3) = [0; 3, 3, 3, \cdots] = [0; \overline{3}]$

Die Folge $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{p_0 \cdot a_1 + 1}{a_1} = \frac{0 \cdot 3 + 1}{3} = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{a_2 \cdot p_1 + p_0}{a_2 \cdot q_1 + q_0} = \frac{3 \cdot 1 + 0}{3 \cdot 3 + 1} = \frac{3}{10}$, $x_3 = \frac{a_3 \cdot p_2 + p_1}{a_3 \cdot q_2 + q_1} = \frac{3 \cdot 3 + 1}{3 \cdot 10 + 3} = \frac{10}{33}$, $x_4 = \frac{a_4 \cdot p_3 + p_2}{a_4 \cdot q_3 + q_2} = \frac{3 \cdot 10 + 3}{3 \cdot 33 + 10} = \frac{33}{109} \cdots$

bildet eine Intervallschachtelung für $\frac{1}{2} \cdot (\sqrt{13} - 3)$. Multipliziert man die Folgenglieder mit 2 und addiert jeweils 3, dann ergibt sich

$$y_0 = 0,\ y_1 = 3 + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{11}{3},\ y_2 = 3 + 2 \cdot \frac{3}{10} = \frac{18}{5},\ y_3 = 3 + 2 \cdot \frac{10}{33} = \frac{119}{33},$$
$$y_4 = 3 + 2 \cdot \frac{33}{109} = \frac{393}{109}, \cdots$$

Die Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Intervallschachtelung für $\sqrt{13}$.

Hinweis Wie gut die jeweiligen Approximationen sind, kann man überschlagsweise abschätzen:

Ist $\frac{p}{q}$ ein Näherungsbruch aus der Folge der Kettenbruchentwicklung für eine reelle Zahl x, dann weicht dieser um höchstens $\frac{1}{q^2}$ ab: $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$.

(Diese Abschätzung wurde von Joseph-Louis Lagrange bewiesen, später von **Peter Gustav Lejeune Dirichlet** verallgemeinert).

Beispiele

$$\left|\sqrt{13} - \frac{11}{3}\right| < \frac{1}{9},\ \left|\sqrt{13} - \frac{18}{5}\right| < \frac{1}{25},\ \left|\sqrt{13} - \frac{119}{33}\right| < \frac{1}{1089-} < \frac{1}{1000},\ \left|\sqrt{13} - \frac{393}{109}\right| < \frac{1}{11881} < \frac{1}{10000}$$

Euler untersuchte dann weiter Kettenbrüche mit 2-stelligen Perioden, also Terme vom Typ

$$x = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cdots}}}} = [0; a, b, a, b, a, b, \cdots],$$

und führte diese auf die Gleichung $x = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + x}} = \frac{b + x}{ab + ax + 1}$ zurück, d. h. auf die quadratische Gleichung $ax^2 + abx + x = b + x$, also auf die Gleichung $ax^2 + abx = b$, die man auch normiert in der Form $x^2 + bx = \frac{b}{a}$ notieren kann.

Diese Gleichung hat die positive Lösung

$$x = -\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{b}{a} + \frac{1}{4}b^2} = \frac{1}{2a} \cdot \left(-ab + \sqrt{a^2b^2 + 4ab}\right).$$

Da der zuletzt stehende Klammerterm symmetrisch ist in a und b, unterscheiden sich die Kettenbrüche $[0; a, b, a, b, a, b, \cdots]$ und $[0; b, a, b, a, b, a, \cdots]$ nur durch einen Faktor.

Beispiele

a) Der unendliche Kettenbruch $x = [0; 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots]$ ist gleich der positiven Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 + 2x = 2$, also gleich $x = \sqrt{3} - 1$, d. h. es gilt: $[1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots] = \sqrt{3}$, vgl. auch Kap. 2.
Die Folge der Näherungsbrüche definiert eine Intervallschachtelung für $\sqrt{3} = 1{,}7320508075\ldots$:

$$[1; 1, 2] = \tfrac{5}{3} = 1{,}66666\ldots$$
$$[1; 1, 2, 1, 2] = \tfrac{19}{11} = 1{,}727272\ldots$$
$$[1; 1, 2, 1, 2, 1, 2] = \tfrac{71}{41} = 1{,}7317073170\ldots$$
$$[1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2] = \tfrac{265}{153} = 1{,}7320261437\ldots$$
$$[1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2] = \tfrac{989}{571} = 1{,}7320490367\ldots$$

b) Der unendliche Kettenbruch $x = [0; 2, 3, 2, 3, 2, 3, \ldots]$ ist gleich der positiven Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 + 3x = \frac{3}{2}$, also gleich $x = -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{9}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{15} - 3\right)$;
der unendliche Kettenbruch $x = [0; 3, 2, 3, 2, 3, 2, \ldots]$ ist gleich der positiven Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 + 2x = \frac{2}{3}$, also gleich $x = -1 + \sqrt{\frac{2}{3} + 1} = \frac{1}{3} \cdot \left(\sqrt{15} - 3\right)$.

Analog führen auch Kettenbrüche mit drei- und mehrstelligen Perioden auf quadratische Gleichungen.

Beispielsweise führt

$$x = [0; a, b, c, a, b, c, \ldots] = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + x}}} = \cfrac{1}{a + \cfrac{c + x}{bc + bx + 1}} = \frac{bc + bx + 1}{abc + abx + a + c + x},$$

auf die quadratische Gleichung $(ab + 1) \cdot x^2 + (a - b + c + abc) \cdot x = bc + 1$

Daher konnte Euler schließlich den folgenden Satz formulieren:

Satz von Euler

Periodische Kettenbrüche

Zu jedem periodischen Kettenbruch x gehört eine quadratische Gleichung, deren positive Lösung gleich x ist.

Joseph-Louis Lagrange gelang es dann, 22 Jahre nach dem Erscheinen von Eulers Buch zu beweisen, dass auch die Umkehrung des Satzes gilt:

Satz von Lagrange

Periodische Kettenbrüche

Es gibt keine periodischen Kettenbrüche außer denjenigen, die als Lösung einer quadratischen Gleichung auftreten.

Der Lagrange'sche Beweis und auch vereinfachte Beweise dieses Satzes, die von anderen Mathematikern entwickelt wurden, gehen deutlich über das Anspruchsniveau dieses Buches hinaus; wir verweisen hier auf die Fachliteratur.

Eulers Reaktion auf Lagranges Beitrag ist bemerkenswert: Er lobt Lagrange in den höchsten Tönen und hat auch kein Problem damit einzuräumen, dass ihm selbst dieser Beweis nicht gelungen ist.

Lagrange interessierte sich insbesondere für die Kettenbrüche von Quadratwurzeln aus nichtquadratischen natürlichen Zahlen $r > 1$. Die Kettenbruchentwicklung dieser Zahlen findet man auf einfache Weise, indem man die 3. binomische Formel anwendet:

Beispiele

Für $\sqrt{2}$ gilt $1 < \sqrt{2} < 2$, also

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{(\sqrt{2} - 1) \cdot (\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{2} + 1} = 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \text{ und weiter:}$$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}\right)} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}\right)}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}}} = \cdots = [1; \overline{2}]$$

Für $\sqrt{3}$ gilt $1 < \sqrt{3} < 2$, also:

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{2}{1 + \sqrt{3}} = 1 + \frac{2}{1 + \left(1 + \frac{2}{1 + \sqrt{3}}\right)} = 1 + \frac{2}{2 + \frac{2}{1 + \sqrt{3}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \sqrt{3}}}$$

$$= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \sqrt{3}}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \sqrt{3}}}}}}} = \cdots = [1; \overline{1, 2}]$$

Für $\sqrt{5}$ gilt $2 < \sqrt{5} < 3$, also

$$\sqrt{5} = 2 + (\sqrt{5} - 2) = 2 + \frac{(\sqrt{5} - 2) \cdot (\sqrt{5} + 2)}{\sqrt{5} + 2} = 2 + \frac{1}{2 + \sqrt{5}} \text{ und weiter:}$$

$$\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{2 + \left(2 + \cfrac{1}{2 + \sqrt{5}}\right)} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \left(2 + \cfrac{1}{2 + \sqrt{5}}\right)}} = \cdots = [2; \overline{4}\,]$$

Bei den untersuchten Beispielen fielen ihm folgende Eigenschaften auf:

- Die letzte Ziffer der Periode ist jeweils doppelt so groß wie die 0te Ziffer (= ganzzahliger Anteil der Quadratwurzel).
- Die übrigen Ziffern der Periode sind zur Mitte hin symmetrisch (Palindrom-Eigenschaft).

Den allgemeinen Beweis dieser Lagrange'schen Vermutungen führte **Adrien-Marie Legendre** (1752–1833) im Jahr 1798.

Satz von Legendre

Palindrom-Eigenschaft der Kettenbrüche von Quadratwurzeln

Bestimmt man die Kettenbruchentwicklung der Quadratwurzel aus einer natürlichen Zahl $r > 1$, die selbst keine Quadratzahl ist, dann stellt man fest:

Die mittleren Ziffern der Periode bilden eine symmetrische Zahlenfolge. Die letzte Ziffer der Periode ist doppelt so groß wie die erste Ziffer:

$$\sqrt{r} = [a_0; \overline{a_1, a_2, \cdots, a_2, a_1, 2a_0}]$$

Beispiele zur Palindrom-Eigenschaft

Für die Anzahl k der Stellen einer Periode ist im Folgenden jeweils die kleinste natürliche Zahl angegeben:

3-stellig: $\sqrt{41} = [6; \overline{2, 2, 12}]$ 4-stellig : $\sqrt{7} = [2; \overline{1, 1, 1, 4}]$

5-stellig: $\sqrt{13} = [3; \overline{1, 1, 1, 1, 6}]$ 6-stellig : $\sqrt{19} = [4; \overline{2, 1, 3, 1, 2, 8}]$

7-stellig: $\sqrt{58} = [7; \overline{1, 1, 1, 1, 1, 1, 14}]$

8-stellig: $\sqrt{31} = [5; \overline{1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10}]$

9-stellig: $\sqrt{106} = [10; \overline{3, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 20}]$

10-stellig: $\sqrt{43} = [6; \overline{1, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 1, 12}]$

11-stellig: $\sqrt{61} = [7; \overline{1, 4, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 1, 14}]$

12-stellig: $\sqrt{46} = [6; \overline{1, 3, 1, 1, 2, 6, 2, 1, 1, 3, 1, 12}]$

Bemerkenswert sind auch die folgenden Regeln für Kettenbrüche mit 1-stelliger bzw. 2-stelliger Periode:

$$\sqrt{2} = [1; \overline{2}], \sqrt{5} = [2; \overline{4}], \sqrt{10} = [3; \overline{6}], \sqrt{17} = [4; \overline{8}], \sqrt{26} = [5; \overline{10}], \sqrt{37} = [6; \overline{12}]$$

allgemein: $\sqrt{n^2+1} = [n; \overline{2n}]$

$$\sqrt{3} = [1; \overline{1,2}], \sqrt{6} = [2; \overline{2,4}], \sqrt{8} = [2; \overline{1,4}], \sqrt{11} = [3; \overline{3,6}], \sqrt{12} = [3; \overline{2,6}],$$
$$\sqrt{15} = [3; \overline{1,6}], \sqrt{18} = [4; \overline{4,8}], \ \sqrt{20} = [4; \overline{2,8}], \sqrt{24} = [4; \overline{1,8}]$$

allgemein: $\sqrt{n^2+m} = [n; \overline{\frac{2n}{m}, 2n}]$ für alle m, die Teiler von $2n$ sind.

Lösung der Pell'schen Gleichung mithilfe einer Kettenbruchentwicklung

In Abschnitt Abschn. 11.3.6 wurde dargestellt, nach welcher Methode Pierre de Fermat Gleichungen vom Typ $x^2 - n \cdot y^2 = 1$ (Pell'sche Gleichungen) gelöst hatte.

Beispiel

$n = 7$: Gesucht sind zwei Zahlen x und y, für die das 7-Fache der Quadratzahl von y um 1 kleiner ist als das Quadrat von x. Das kleinste Zahlenpaar $(x; y)$, das diese Eigenschaft erfüllt, ist das Zahlenpaar $(8; 3)$, denn $8^2 - 7 \cdot 3^2 = 64 - 7 \cdot 9 = 1$. Der Bruch $\frac{8}{3}$ ist ein Näherungsbruch für $\sqrt{7}$, da $\frac{8}{3} = \sqrt{\frac{64}{9}} = \sqrt{\frac{7\cdot 9+1}{9}} = \sqrt{7+\frac{1}{9}} \approx \sqrt{7}$.

Auf den vorigen Seiten haben wir gesehen, dass durch die Kettenbruchentwicklungen der Quadratwurzeln jeweils Intervallschachtelungen definiert werden, deren Grenzwert diese Quadratwurzeln sind. Dabei bilden die Folgenglieder mit geradem Index eine streng monoton steigende Folge und die mit ungeradem Index eine streng monoton fallende Folge.

Die ersten Glieder der durch die Kettenbruchentwicklung $[2; \overline{1,1,1,4}]$ von $\sqrt{7}$ definierte Intervallschachtelung kann man der folgenden Tabelle entnehmen.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_n	2	1	1	1	4	1	1	1	4	1	1	1	4
p_n	2	3	5	8	37	45	82	127	590	717	1307	2024	9403
q_n	1	1	2	3	14	17	31	48	223	271	494	765	3554
$p_n^2 - 7 \cdot q_n^2$	-3	2	-3	1	-3	2	-3	1	-3	2	-3	1	-3

Man stellt fest: Jeweils die Zahlenpaare, die an der *vorletzten* Stelle der Periode (also bei $n = 3, 7, 11, \cdots$) auftreten, erfüllen die Gleichung $x^2 - 7 \cdot y^2 = 1$. In der Tabelle sind diese Paare durch die rote Farbe hervorgehoben.

Eine ähnliche Beobachtung kann man auch bei anderen Kettenbrüchen machen; wenn die Periodenlänge ungerade ist, findet man an den vorletzten Stellen der Periode abwechselnd die Lösungen der Gleichungen $x^2 - n \cdot y^2 = -1$ bzw. $x^2 - n \cdot y^2 = +1$, vgl. die folgenden Beispiele.

Beispiele

$\sqrt{2} = [1; \overline{2}]$ (1-stellige Periode) $\sqrt{3} = [1; \overline{1, 2}]$ (2-stellige Periode)

n	0	1	2	3	4	5
a_n	1	2	2	2	2	2
p_n	1	3	7	17	41	99
q_n	1	2	5	12	29	70
$p_n^2 - 2 \cdot q_n^2$	-1	1	-1	1	-1	1

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	1	1	2	1	2	1	2	1	2
p_n	1	2	5	7	19	26	71	97	265
q_n	1	1	3	4	11	15	41	56	153
$p_n^2 - 3 \cdot q_n^2$	-2	1	-2	1	-2	1	-2	1	-2

$\sqrt{41} = [6; \overline{2, 2, 12}]$ (3-stellige Periode)

n	0	1	2	3	4	5	6
a_n	6	2	2	12	2	2	12
p_n	6	13	32	397	826	2049	25414
q_n	1	2	5	62	129	320	3969
$p_n^2 - 41 \cdot q_n^2$	-5	5	-1	-5	5	1	-5

$\sqrt{13} = [3; \overline{1, 1, 1, 1, 6}]$ (5-stellige Periode)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	3	1	1	1	1	6	1	1	1	1	6
p_n	3	4	7	11	18	119	137	256	393	649	4287
q_n	1	1	2	3	5	33	38	71	109	180	1189
$p_n^2 - 13 \cdot q_n^2$	-4	3	-3	4	-1	4	-3	3	-4	1	-4

$\sqrt{19} = [4; \overline{2, 1, 3, 1, 2, 8}]$ (6-stellige Periode)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_n	4	2	1	3	1	2	8	2	1	3	1	2	8
p_n	4	9	13	48	61	170	1421	3012	4433	16311	20744	57799	483136
q_n	1	2	3	11	14	39	326	691	1017	3742	4759	13260	110839
$p_n^2 - 19 \cdot q_n^2$	-3	5	-2	5	-3	1	-3	5	-2	5	-3	1	-3

Lagrange bewies, dass die Pell'sche Gleichung für beliebige natürliche Zahlen n lösbar ist, wenn n keine Quadratzahl ist.

Satz von Lagrange

Lösbarkeit der Pell'schen Gleichung

- Für alle nichtquadratischen natürlichen Zahlen n ist die Gleichung $x^2 - n \cdot y^2 = 1$ lösbar.
- Wenn man das kleinste Lösungspaar gefunden hat, dann erhält man die nächsten Lösungspaare durch Anwendung binomischer Formeln:
  Ist $(x; y)$ das kleinste Lösungspaar der Pell'schen Gleichung $x^2 - n \cdot y^2 = (x - y \cdot \sqrt{n}) \cdot (x + y \cdot \sqrt{n}) = 1$, dann ergeben sich die nächsten Lösungspaare aus den Potenzen $(x + y \cdot \sqrt{n})^k$ für $k = 2, 3, 4, \cdots$

Beispiele

a) Das Zahlenpaar $(3; 2)$ ist die kleinste Lösung der Gleichung $x^2 - 2 \cdot y^2 = 1$, d. h., es gilt $3^2 - 2 \cdot 2^2 = (3 - 2 \cdot \sqrt{2}) \cdot (3 + 2 \cdot \sqrt{2}) = 1$.
Aus den Potenzen des rechts stehenden Faktors liest man die nächsten Paare ab:
$(3 + 2 \cdot \sqrt{2})^2 = 9 + 12 \cdot \sqrt{2} + 8 = 17 + 12 \cdot \sqrt{2}$ führt zum Paar $(17; 12)$,
$(3 + 2 \cdot \sqrt{2})^3 = 27 + 54 \cdot \sqrt{2} + 72 + 16 \cdot \sqrt{2} = 99 + 70 \cdot \sqrt{2}$ führt zum Paar $(99; 70)$ usw.

b) Das Zahlenpaar $(8; 3)$ ist die kleinste Lösung der Gleichung $x^2 - 7 \cdot y^2 = 1$, d. h., es gilt $8^2 - 7 \cdot 3^2 = (8 - 3 \cdot \sqrt{7}) \cdot (8 + 3 \cdot \sqrt{7}) = 1$.
Aus den Potenzen des rechts stehenden Faktors liest man die nächsten Paare ab:
$(8 + 3 \cdot \sqrt{7})^2 = 64 + 48 \cdot \sqrt{7} + 63 = 127 + 48 \cdot \sqrt{7}$ führt zum Paar $(127; 48)$,
$(8 + 3 \cdot \sqrt{7})^3 = 512 + 576 \cdot \sqrt{7} + 1512 + 189 \cdot \sqrt{7} = 2024 + 765 \cdot \sqrt{7}$ führt zum Paar $(2024; 765)$ usw.

15.2 Wer war Joseph-Louis Lagrange?

Der berühmte Mathematiker wurde am 25. Januar 1736 als ältestes von elf Kindern eines Kriegsschatzmeisters in Turin geboren. Zum Zeitpunkt der Geburt war Turin Hauptstadt des Königreichs Sardinien-Piemont, daher findet man im Taufbuch eine Eintragung in der italienischen Version des Namens: Giuseppe Lodovico Lagrangia.

Der Vater plante für seinen Sohn eine Laufbahn als Rechtsanwalt, und der Junge hatte sich wohl in sein Schicksal gefügt, bis der Vater nach eigenen finanziellen Fehlspekulationen keine Notwendigkeit mehr sah, in der Familie auf einen Juristen zurückgreifen zu können (Lagrange dazu rückblickend: „Wenn ich reich gewesen wäre, hätte ich mich vermutlich nicht der Mathematik widmen können.“).

Nach der Lektüre eines Buches des Astronomen und Mathematikers Edmond Halley (1656–1742) über algebraische Anwendungen in der Optik entschloss sich der 17-jährige Junge, sich zukünftig nur noch mit Mathematik und Physik zu beschäftigen.

Mit 18 Jahren schrieb er – in lateinischer Sprache – einen Brief an Leonhard Euler nach Berlin, um diesen auf Analogien zwischen dem binomischen Lehrsatz und den höheren Ableitungen eines Produkts von Funktionen hinzuweisen.

Für das Produkt zweier differenzierbarer Funktionen f und g gilt nämlich:

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)' &= 1 \cdot f' \cdot g + 1 \cdot f \cdot g',\\
(f \cdot g)'' &= 1 \cdot f'' \cdot g + 2 \cdot f' \cdot g' + 1 \cdot f \cdot g'',\\
(f \cdot g)''' &= 1 \cdot f''' \cdot g + 3 \cdot f'' \cdot g' + 3 \cdot f' \cdot g'' + 1 \cdot f \cdot g''',
\end{aligned}$$

allgemein:

$$(f \cdot g)^{(n)} = \binom{n}{0} \cdot f^{(n)} \cdot g^{(0)} + \binom{n}{1} \cdot f^{(n-1)} \cdot g^{(1)} + \binom{n}{2} \cdot f^{(n-2)} \cdot g^{(2)} + \cdots + \binom{n}{n} \cdot f^{(0)} \cdot g^{(n)},$$

wobei mit $f^{(n)}$ die n-te Ableitung bezeichnet wird, mit $f^{(0)}$ die Funktion f selbst.

Lagrange war sehr enttäuscht, als er die Rückmeldung erhielt, dass Gottfried Wilhelm Leibniz und Johann Bernoulli bereits lange Zeit zuvor diesen Sachverhalt entdeckt hatten.

Aber so schnell gab der junge Mann nicht auf; er wollte etwas tatsächlich Neues entdecken. Selbstständig entwickelte er eine Methode, um das Problem der Brachistochrone zu lösen (gesucht ist die Bahnkurve, auf der sich ein Körper unter Einfluss der Gravitation am schnellsten von einem Anfangs- zu einem Endpunkt bewegt) – ein Verfahren, das von Euler später als Variationsrechnung bezeichnet wurde. Auch diese Überlegungen sandte er nach Berlin, und diesmal erhielt er innerhalb von drei Wochen eine ausgesprochen positive Rückmeldung.

Euler war nämlich von dieser neuen Arbeit so beeindruckt, dass er den Präsidenten der Berliner Akademie der Wissenschaften, Pierre Louis Moreau de Maupertuis, bat, Lagrange eine Stelle in Berlin anzubieten, um das junge Talent an die Hochschule zu binden. Lagrange, der in der Zwischenzeit eine Stelle als Lehrer für Mathematik an der Artillerieschule in Turin angenommen hatte, lehnte das Angebot aus Bescheidenheit ab; er hatte aber auch die Befürchtung, dass er in Berlin nicht mehr die Freiheiten genießen könne wie in Turin.

Mit 21 Jahren gründete Lagrange die *Königliche Akademie der Wissenschaften* in Turin und wurde Mitherausgeber der Zeitschrift *Mélanges de Turin,* die Beiträge in französischer und lateinischer Sprache veröffentlichte. Anfangs waren dies vor allem

Beiträge von Lagrange selbst: Untersuchungen zur Theorie der Schwingungen von Saiten und zur Mechanik von Flüssigkeiten, über die Umlaufbahnen von Jupiter und Saturn sowie zur Wahrscheinlichkeitsrechnung.

1763 unternahm Lagrange seine erste Auslandsreise – das Ziel war London; wegen Erkrankung musste er seine Reise in Paris abbrechen. Dort lernte er Jean-Baptiste le Rond d'Alembert kennen, der ihm eine angemessenere Position als die Stelle in Turin vermitteln wollte. In Paris gewann Lagrange einen Preis der *Académie des Sciences* für eine Arbeit über die Mondbewegung. Später erhielt er weitere Preise für Abhandlungen über das Drei-Körper-Problem (Stabilität des Systems Sonne-Erde-Mond) und über den Einfluss der Planeten auf Kometenbahnen.

1766 wurde Lagrange durch d'Alembert ermuntert, nach Berlin zu wechseln; er nahm das Angebot des preußischen Königs Friedrichs II. aber erst an, als klar war, dass Euler tatsächlich wieder nach St. Petersburg zurückkehren würde. So wurde Lagrange dessen Nachfolger als Direktor der *Mathematischen Klasse der Preußischen Akademie der Wissenschaften.*

Kurze Zeit nach seinem Umzug nach Berlin heiratete er seine Cousine Vittoria Conti; die Ehe blieb kinderlos.

Während seiner 20-jährigen Tätigkeit in Berlin entwickelte Lagrange mathematische Theorien in verschiedenen Gebieten weiter, u. a. die Methoden zur Behandlung von Funktionen mehrerer Variabler und zur Lösung von Differenzialgleichungen.

Zwei Todesfälle veränderten dann seine Lebenssituation: Seine Ehefrau starb 1783 und der Herrscher Friedrich II. drei Jahre danach, sodass er ernsthaft über einen Ortswechsel nachdachte. Unter den zahlreichen Angeboten (insbesondere von verschiedenen italienischen Universitäten) entschied sich Lagrange für eine Stelle in Paris, da diese Berufung nicht mit einer Lehrverpflichtung verbunden war.

Mit Unterstützung von Adrien-Marie Legendre konnte er dort seine Arbeit an der *Mécanique analytique* („Analytische Mechanik“) abschließen. In diesem Jahrhundertwerk, das alle Probleme der Mechanik aufgreift, die seit Newton untersucht wurden, bedient er sich ausschließlich mathematischer Methoden.

Während der Französischen Revolution wurde Lagrange zum Mitglied im *Komitee für Erfindungen und das Münzwesen* sowie des *Bureau des Longitudes* ernannt, das die Einführung eines dezimalen Maßsystems vorbereiten sollte.

Als ein Gesetz in Kraft trat, nach dem alle Bürger ausländischer Herkunft verhaftet und enteignet werden sollten, verwendete sich Antoine Laurent de Lavoisier für ihn und erreichte beim Revolutionsausschuss, dass eine Ausnahme für Lagrange gemacht wurde. Wenige Monate später wurde Lavoisier selbst Opfer der Guillotine in der Phase der revolutionären Schreckensherrschaft.

1794 wurde die *École Polytechnique* gegründet und Lagrange – trotz seines weiterhin gültigen Vertrags, der keine Lehrtätigkeit vorsah – als Professor für Analysis eingesetzt. Auch musste er an der *École Normale* Kurse in Elementarmathematik für angehende Lehrer geben. Absolventen berichteten, dass er für diese Lehrtätigkeiten wenig geeignet war, vor allem weil er Schwierigkeiten hatte, sich auf das Niveau der Studenten einzustellen.

In seinen letzten Lebensjahren verfasste Lagrange weitere Werke, durch die entscheidende Impulse für die Weiterentwicklung der Differentialgeometrie (Behandlung von Kurven und Flächen im Raum) und der Funktionentheorie (Analysis komplexwertiger Funktionen) gegeben wurden.

Die ständige Ungewissheit, unter der Lagrange während der Revolutionszeit zu leiden hatte, wurde durch die Regentschaft Napoleons beendet; Lagrange wurde rehabilitiert und mit Titeln und Verdienstorden geehrt.

Lagrange starb am 10. April 1813 im Alter von 77 Jahren.

15.3 Mit welchen (mathematischen) Themen beschäftigte sich Lagrange außerdem?

Noch heute erinnern zahlreiche Sätze und Begriffe an die Leistungen von Lagrange.

Ein Blick auf die englischsprachige Wikipedia-Seite *List of things named after Joseph-Louis Lagrange* verdeutlicht die Vielseitigkeit und die immense Lebensleistung dieses Mathematikers. Dort werden genannt:

- Lagrangian analysis, coordinates, derivative, drifter, foliation, Grassmannian, intersection Floer homology, mechanics, field theory, system, mixing, point, relaxation, submanifold, subspace,

sowie

- Euler-Lagrange equation, Green-Lagrange strain, Lagrange bracket, Lagrange-d'Alembert principle,
- Lagrange error bound, form, interpolation, invariant, inversion theorem, multiplier, number, point colonization, polynomial, property, reversion theorem, resolvent, spectrum, stream function,

und

- Lagrange's approximation theorem, formula, identity, theorem (group theory), theorem (number theory), four-square theorem, trigonometric identities.

Von diesen Stichwörtern werden im Folgenden noch einige wenige – *eher elementare* – Sachverhalte kurz vorgestellt:

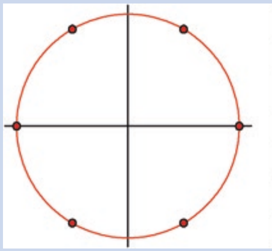
Im Rahmen seiner Untersuchungen zur Lösbarkeit von Gleichungen höheren Grades betrachtete Lagrange Strukturen, die später als *Gruppen* bezeichnet wurden:

- **Satz von Lagrange:** Die Anzahl der Elemente einer Untergruppe ist ein Teiler der Anzahl der Elemente der Gruppe.

Beispiel

Die Menge G der Drehungen um Vielfache von 60° bildet bzgl. der Hintereinanderausführung von Drehungen eine Gruppe der Ordnung 6, d. h. mit sechs Elementen.

$$G = \{D_0, D_{60}, D_{120}, D_{180}, D_{240}, D_{300}\}$$



	D_0	D_{60}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	D_{300}
D_0	D_0	D_{60}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	D_{300}
D_{60}	D_{60}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	D_{300}	D_0
D_{120}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	D_{300}	D_0	D_{60}
D_{180}	D_{180}	D_{240}	D_{300}	D_0	D_{60}	D_{120}
D_{240}	D_{240}	D_{300}	D_0	D_{60}	D_{120}	D_{180}
D_{300}	D_{300}	D_0	D_{60}	D_{120}	D_{180}	D_{240}

Aus der Verknüpfungstabelle kann man entnehmen, dass die Menge bzgl. dieser Operation abgeschlossen ist, dass sie ein neutrales Element enthält (D_0) und dass es in der Menge zu jedem Element ein inverses Element gibt.

Die Gruppe G besitzt drei Untergruppen: $G_1 = \{D_0\}$, $G_2 = \{D_0, D_{180}\}$, $G_3 = \{D_0, D_{120}, D_{240}\}$, deren Ordnung jeweils Teiler der Gruppenordnung ist.

In der Zahlentheorie bewies Lagrange den **Satz von Wilson**, der Folgendes besagt:

- Eine natürliche Zahl n ist genau dann eine Primzahl, wenn $(n-1)! + 1$ durch n teilbar ist. (Vgl. dazu auch Kap. 4.)

Außerdem bewies er den

- **Vier-Quadrate-Satz von Lagrange:** Jede natürliche Zahl lässt sich als Summe von höchstens vier Quadratzahlen darstellen. (Vgl. dazu auch Kap. 11.)

In der Differenzialrechnung gab Lagrange eine Schätzung für den Fehler an, wenn man die Taylor-Entwicklung einer Funktion nach n Schritten abbricht:

- **Satz von Taylor in der Fassung von Lagrange:**

Sei f eine Funktion, die $(n+1)$-mal differenzierbar ist in einer Umgebung von a. Dann gilt für $\vartheta \in]0,1[$:

$$f(x) = f(a) + (x-a) \cdot f'(a) + \frac{1}{2!} \cdot (x-a)^2 \cdot f''(a) + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot (x-a)^n \cdot f^{(n)}(a) + R_n$$

mit $R_n = \frac{1}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1} \cdot f^{(n+1)}(a + \vartheta(x-a))$ (sog. **Lagrange'sches Restglied**).

Außerdem gab Lagrange an, wie man den Term einer ganzrationalen Funktion bestimmen kann, deren Graph durch vorgegebene Punkte verläuft:

Satz

Lagrange'sche Interpolationsformel

- Durch drei gegebene Punkte $P_0(x_0|y_0)$, $P_1(x_1|y_1)$, $P_2(x_2|y_2)$ verläuft der Graph einer ganzrationalen Funktion 2. Grades L_2, deren Funktionsterm berechnet werden kann mithilfe von

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \cdot y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \cdot y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \cdot y_2$$

- Durch vier gegebene Punkte $P_0(x_0|y_0)$, $P_1(x_1|y_1)$, $P_2(x_2|y_2)$, $P_3(x_3|y_3)$ verläuft, der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades L_3, deren Funktionsterm berechnet werden kann mithilfe von

$$\begin{aligned} L_3(x) = &\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} \cdot y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \cdot y_1 \\ &+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \cdot y_2 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \cdot y_3 \end{aligned}$$

usw.

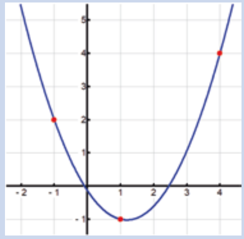
Hinweis Beim Ansatz wird vorausgesetzt, dass alle x-Koordinaten der gegebenen Punkte voneinander verschieden sind.

Beispiel

Gegeben sind die drei Punkte $P_0(-1|2)$, $P_1(1|-1)$, $P_2(4|4)$, durch die ein Graph 2. Grades, also eine quadratische Parabel, verlaufen soll (vgl. folgende Abbildung).

Das Interpolationspolynom lautet:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x-1)(x-4)}{(-1-1)(-1-4)} \cdot 2 + \frac{(x+1)(x-4)}{(1+1)(1-4)} \cdot (-1) + \frac{(x+1)(x-1)}{(4+1)(4-1)} \cdot 4 \\ &= \tfrac{1}{5} \cdot (x^2-5x+4) + \tfrac{1}{6} \cdot (x^2-3x-4) + \tfrac{4}{15} \cdot (x^2-1) \\ &= \tfrac{1}{30} \cdot (6x^2-30x+24+5x^2-15x-20+8x^2-8) \\ &= \tfrac{1}{30} \cdot (19x^2-45x-4) = \tfrac{19}{30}x^2 - \tfrac{3}{2}x - \tfrac{2}{15} \end{aligned}$$



Nach Lagrange ist auch eine Reihe von Formeln benannt:

- die sog. **Lagrange-Identitäten**
  für $n = 2$:

$$(a_1^2 + a_2^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2) = (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$$

  für $n = 3$:

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$
$$= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2$$

- die **Lagrange-Vektorgleichung** (in der heute üblichen Schreibweise mithilfe von Vektoren):

$$(\vec{a} \times \vec{b}) * (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} * \vec{c}) \cdot (\vec{b} * \vec{d}) - (\vec{b} * \vec{c}) \cdot (\vec{a} * \vec{d})$$

  (wobei mit $\times$ das Vektorprodukt und mit $*$ das Skalarprodukt zweier Vektoren bezeichnet wird).

- die **Lagrange'sche Volumenformel** für eine dreiseitige Pyramide mit den Eckpunkten $O(0|0|0)$, $A(a_1|a_2|a_3)$, $B(b_1|b_2|b_3)$, $C(c_1|c_2|c_3)$:

$$V = \frac{1}{6} \cdot [c_1 \cdot (a_2 b_3 - a_3 b_2) + c_2 \cdot (a_3 b_1 - a_1 b_3) + c_3 \cdot (a_1 b_2 - a_2 b_1)]$$

15.4 Ergänzung: Kettenbrüche bei Huygens, Brounker und Wallis

Nach Bombelli verwendeten noch andere Mathematiker eine Darstellungsform mit geschachtelten Brüchen, allerdings ging es dabei nicht um Quadratwurzeln:

- Im Jahr 1682 beschäftigte sich der niederländische Astronom, Mathematiker und Physiker **Christiaan Huygens** (1629–1695) mit der Aufgabe, ein mechanisches Modell des Sonnensystems zu konstruieren, an dem man frühere und zukünftige Planetenkonstellationen ablesen kann.

Für Saturn und Erde hatte er folgende Winkel gemessen: Während die Erde im Zeitraum eines Jahres – von der Sonne aus gesehen – einen Winkel von

$$359^\circ\, 45'\, 40''\, 31''' = (359 \cdot 60^3 + 45 \cdot 60^2 + 40 \cdot 60 + 31)''' = 77.708.431'''$$

überstreicht, ist dies beim Saturn nur ein Winkel von

$$12^\circ\, 13'\, 34''\, 18''' = (12 \cdot 60^3 + 13 \cdot 60^2 + 34 \cdot 60 + 18)''' = 2.640.858'''$$

Die Anzahl der Zähne der für den Modellantrieb benötigten Zahnräder sollte dem Verhältnis der Winkel möglichst nahekommen:

$$\tfrac{77.708.431}{2.640.858} = 29,425448\cdots$$

Huygens berechnete die ersten Ziffern des zugehörigen Kettenbruchs:

$$\begin{aligned}\frac{77.708.431}{2.640.858} &= 29 + \tfrac{1.123.549}{2.640.858} = 29 + \frac{1}{\frac{2.640.858}{1.123.549}}\\ &= 29 + \frac{1}{2 + \frac{393.760}{1.123.549}} = 29 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{336.029}{393.760}}}\\ &\approx 29 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2+1}} = 29 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}} = 29 + \tfrac{3}{7} = \tfrac{206}{7}\end{aligned}$$

Ein solches Übersetzungsverhältnis von 206 : 7 Zähnen hätte sich hervorragend als Näherung geeignet, denn $\frac{206}{7} = 29,428571\cdots$ weicht nur geringfügig vom o. a. Verhältnis ab.

- Der englisch-irische Mathematiker Lord **William Brouncker** (1620–1684) und der englische Mathematiker **John Wallis** (1616–1703) fanden heraus, wie man den Kehrwert von $\frac{\pi}{4}$ mithilfe eines *unendlichen* Kettenbruchs darstellen kann:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cdots}}}}$$

Bei diesen Kettenbrüchen handelt es sich nicht um *einfache* Kettenbrüche, denn in den Zählern der Teilbrüche stehen nicht nur Einsen.

15.5 Literaturhinweise

Eine wichtige Adresse zum Auffinden von Informationen über Mathematiker und deren wissenschaftliche Leistungen ist die Homepage der St. Andrews University.

Informationen über Lagrange findet man unter:

- www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lagrange.html
- Strick, Heinz Klaus (2006), *Kalenderblatt über Joseph-Louis Lagrange,*
  www.spektrum.de/wissen/joseph-louis-lagrange-1736–1813/862789
  www-history.mcs.st-and.ac.uk/Strick/Lagrange.pdf
- Strick, Heinz Klaus (2017): *Mathematik ist schön,* Springer, Heidelberg,
  Kap. 3 (Zerlegung von Rechtecken in möglichst große Quadrate), Kap. 16 (Summen von Potenzen aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen)
  Strick, Heinz Klaus (2019): *Mathematik ist wunderwunderschön,* Springer, Heidelberg, Kap. 7 (Wurzel aus 2)

Zum Thema *Kettenbrüche* sei auf das folgende Standardwerk verwiesen, das 1913 in einer ersten Auflage erschien:

- Perron, Oskar (1977): *Die Lehre von den Kettenbrüchen.* Band I: Elementare Kettenbrüche (3. Auflage), Vieweg+Teubner, Wiesbaden

Die Darstellungen Eulers in Kap. 18 seines Standardwerks:

- Euler, Leonhard (1983): *Einleitung in die Analysis des Unendlichen Teil 1* (Erster Teil der *Inductio in Analysin Infinitorum*), Reprint der Ausgabe von 1885, Springer, Berlin

Hilfreich für Rechnungen ist der folgende Kettenbruch-Rechner von Arndt Brünner:

- www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/bruchrechnung1.htm#kettenbruch

Wikipedia-Artikel in deutscher, englischer und französischer Sprache zu den Stichwörtern:

- Joseph-Louis Lagrange

sowie die Seite *List of things named after Joseph-Louis Lagrange* und die sich jeweils ergebenden Links:

- Kettenbruch* (Continued fraction, Fraction continue*)
- Pellsche Gleichung (Pell's equation, Équation de Pell-Fermat)

*) ausgezeichnet als lesenswerter Artikel

16 Jean Baptiste Joseph Fourier – von der Französischen Revolution zur Revolution der Wärmelehre

Das gründliche Studium der Natur ist die fruchtbarste Quelle für mathematische Entdeckungen.

James Gregory (1638–1675), Brook Taylor (1685–1731) und Colin Maclaurin (1698–1746) hatten die grundsätzliche Möglichkeit entdeckt, Funktionen mithilfe ihrer Ableitungen darzustellen. Der **Satz von Taylor** besagt, dass eine hinreichend oft differenzierbare Funktion f in der Umgebung einer Stelle a näherungsweise durch eine ganzrationale Funktion beschrieben werden kann:

$$f(x) \approx f(a) + (x-a) \cdot f'(a) + \tfrac{1}{2!} \cdot (x-a)^2 \cdot f''(a) + \ldots + \tfrac{1}{n!} \cdot (x-a)^n \cdot f^{(n)}(a)$$

Betrachtet man hier unendlich viele Ableitungen, dann spricht man von der **Potenzreihenentwicklung** einer Funktion an einer Stelle.

H. K. Strick, *Mathematik – einfach genial!*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-60449-6_16

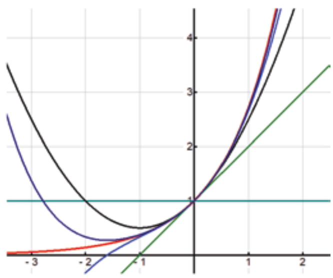
Beispielsweise lässt sich die Exponentialfunktion wie folgt als Potenzreihe an der Stelle $x = 0$ darstellen (vgl. auch Kap. 13):

$$e^x = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = 1 + 1 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{6} \cdot x^3 + \frac{1}{24} \cdot x^4 + \ldots,$$

die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion ist also eine unendliche Summe von Vielfachen von Potenzen von x.

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen der Exponentialfunktion (rot) sowie die Graphen der ersten Näherungsfunktionen

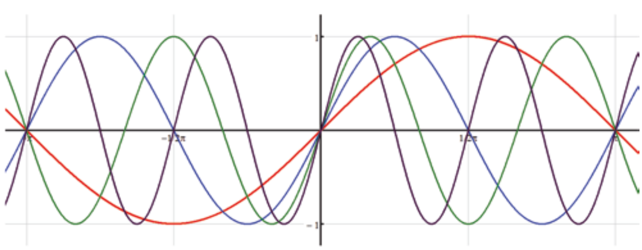
$p_0(x) = 1$, $p_1(x) = 1 + 1 \cdot x$, $p_2(x) = 1 + 1 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot x^2$,
$p_3(x) = 1 + 1 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{6} \cdot x^3$ und
$p_4(x) = 1 + 1 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{6} \cdot x^3 + \frac{1}{24} \cdot x^4$



Daniel Bernoulli (1700–1782), Jean le Rond d'Alembert (1717–1783), Leonhard Euler und Joseph-Louis Lagrange waren bei ihrer Analyse physikalischer Vorgänge auf Differenzialgleichungen gestoßen, bei deren Lösungen trigonometrische Funktionen eine wichtige Rolle spielten. Bereits 1744 äußerte Euler die Vermutung, dass sich beliebige Funktionen – zumindest abschnittsweise – als Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen darstellen lassen, konnte dies aber nicht allgemein beweisen.

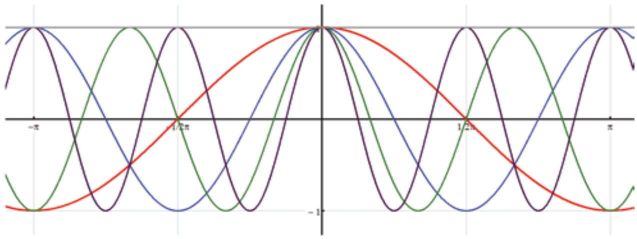
Statt der Potenzen von x, also $x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4,\ \ldots$, sollten

- die Sinusfunktionen $\sin(1x),\ \sin(2x),\ \sin(3x),\ \sin(4x),\ \ldots$



sowie

- die Kosinusfunktionen $\cos(1x),\ \cos(2x),\ \cos(3x),\ \cos(4x),\ \ldots$
  verwendet werden, außerdem ein Vielfaches der konstanten Funktion $\cos(0x) = 1$.



16.1 Einfach genial: Joseph Fourier approximiert periodische Funktionen mithilfe trigonometrischer Funktionen

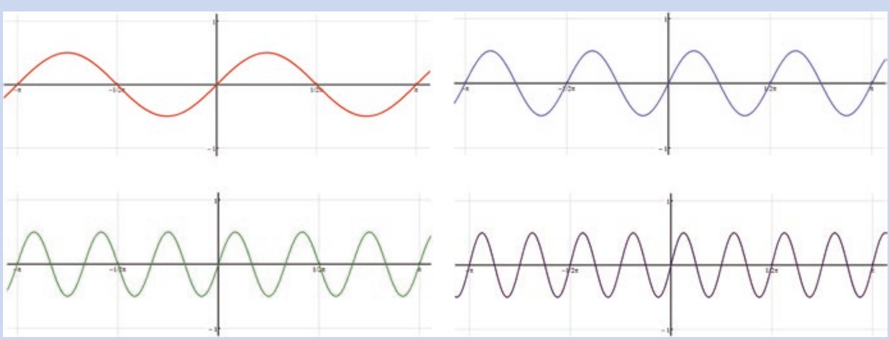
Der französische Mathematiker und Physiker Joseph Fourier hatte dann Anfang des 19. Jahrhunderts die entscheidende Idee, *wie* man diese trigonometrischen Funktionen kombinieren muss, um eine geeignete Summendarstellung für die Darstellung einer beliebigen Funktion zu erhalten.

16.1.1 Eigenschaften von Produkten trigonometrischer Funktionen

Untersuchen wir zunächst einmal die Eigenschaften verschiedener Produkte von Sinus- und Kosinusfunktionen.

- Die Graphen der Funktionen vom Typ $y = \cos(nx) \cdot \sin(nx) = \frac{1}{2} \cdot \sin(2nx)$ sind stets punktsymmetrisch zum Ursprung; daher sind die Flächenstücke oberhalb und unterhalb der x-Achse jeweils gleich groß.

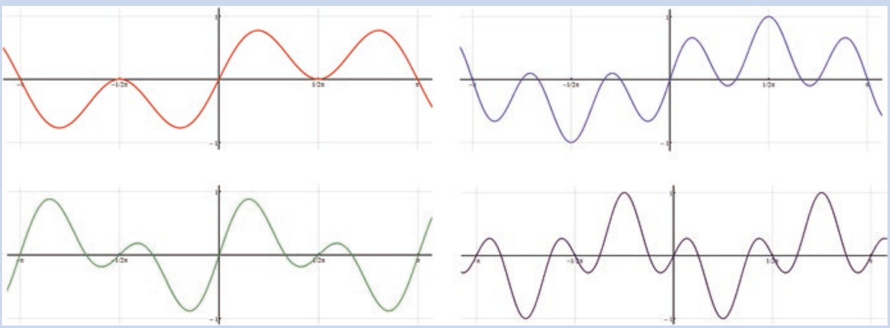
Die folgenden Graphen zeigen die Graphen für $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ und $n = 4$.



Während diese Graphen noch alle die typische Gestalt einer regelmäßigen Schwingung haben, ändert sich dies, wenn man stattdessen Produktfunktionen vom Typ $y = \cos(mx) \cdot \sin(nx)$ mit unterschiedlichen Parameterwerten m, n betrachtet.

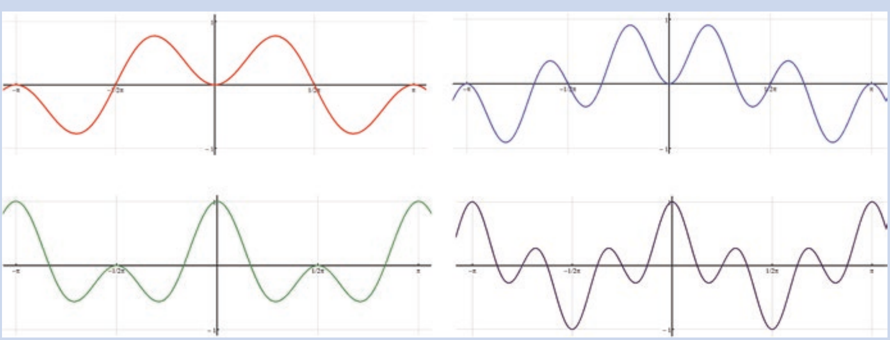
- Die Graphen der Funktionen vom Typ $y = \cos(mx) \cdot \sin(nx)$ haben unterschiedlich große Auslenkungen (Funktionswerte bei den Maxima und Minima), aber auch diese Graphen sind punktsymmetrisch zum Ursprung. Daher sind im Intervall $[-\pi; +\pi]$ die unterhalb der x-Achse liegenden Flächenstücke *zusammen* genauso groß wie die Flächenstücke, die oberhalb der x-Achse liegen.

Die folgenden Abbildungen zeigen als Beispiele die Graphen von $y = \cos(1x) \cdot \sin(2x)$, $y = \cos(2x) \cdot \sin(3x)$, $y = \cos(1x) \cdot \sin(3x)$ und $y = \cos(4x) \cdot \sin(2x)$.



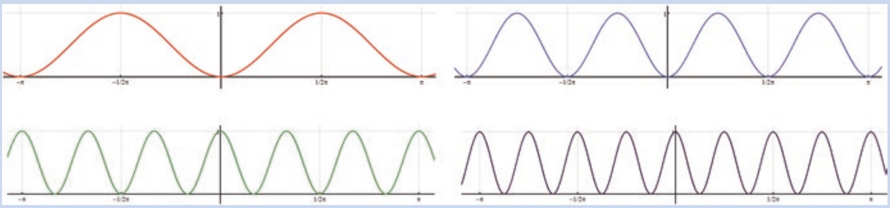
- Multipliziert man zwei Sinusfunktionen *oder* zwei Kosinusfunktionen mit unterschiedlichen Parametern m, n, dann ergeben sich Graphen, die achsensymmetrisch zur y-Achse sind. Aber auch diese haben die besondere Eigenschaft, dass im Intervall $[-\pi; +\pi]$ die Summe aller Flächenstücke oberhalb bzw. unterhalb der x-Achse jeweils gleich groß ist.

Die folgenden Abbildungen zeigen als Beispiele die Graphen von $y = \sin(1x) \cdot \sin(2x)$, $y = \sin(2x) \cdot \sin(3x)$, $y = \cos(1x) \cdot \cos(3x)$ und $y = \cos(2x) \cdot \cos(4x)$.

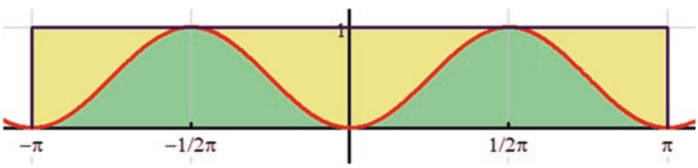


- Betrachtet man auf diese Weise jedoch zwei gleiche Faktoren (also das Quadrat einer Sinus- oder einer Kosinusfunktion), dann ergibt sich eine andere bemerkenswerte Eigenschaft: Zwischen dem Graphen und der x-Achse liegt im Intervall $[-\pi; +\pi]$ eine Gesamtfläche von π FE.

Die folgenden Abbildungen zeigen als Beispiele die Graphen von $y = \sin^2(1x)$, $y = \sin^2(2x)$, $y = \cos^2(3x)$ und $y = \cos^2(4x)$.



Die folgende Abbildung veranschaulicht die Aussage über den Flächeninhalt für das erste Beispiel: Durch die Kurve wird das Rechteck der Breite 2π und der Höhe 1 jeweils in zwei gleich große Teilflächen unterteilt; daher haben die Flächenstücke zwischen Graph und x-Achse insgesamt den Flächeninhalt π.



Diese bemerkenswerten Eigenschaften lassen sich mit der Schreibweise der Integralrechnung wie folgt notieren:

Satz

Besondere Eigenschaften von Produkten trigonometrischer Funktionen

- Für die Produkte von zwei Sinus- und Kosinusfunktionen mit $n, m \in \mathbb{N}$ und $n \neq m$ gilt:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(nx) \cdot \sin(nx)\, dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(mx) \cdot \sin(nx)\, dx$$

$$= \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(mx) \cdot \sin(nx)\, dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(mx) \cdot \cos(nx)\, dx = 0$$

d. h., die Flächenstücke, die im Intervall $[-\pi; +\pi]$ oberhalb bzw. unterhalb der x-Achse liegen, sind *insgesamt* jeweils gleich groß.

- Für das Quadrat der Sinus- und Kosinusfunktionen gilt für beliebige $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2(nx)\ dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2(nx)\ dx = \pi$$

  Das heißt, die Flächenstücke, die im Intervall $[-\pi; +\pi]$ oberhalb der x-Achse liegen, haben stets den Flächeninhalt π.

16.1.2 Der Fourier'sche Ansatz für eine Reihenentwicklung

Im Folgenden beschränken wir uns auf die Darstellung von Funktionen, die auf dem Intervall $[-\pi; +\pi]$ definiert sind. Durch Streckung und Verschiebung lassen sich hieraus Fourier-Reihen für beliebige Intervalle gewinnen.

Satz

Fourier-Reihe und Fourier'sche Näherungsfunktionen

Ist f eine Funktion, die auf dem Intervall $[-\pi; +\pi]$ (zumindest stückweise) stetig und beschränkt ist, dann existieren Näherungsfunktionen p_n der folgenden Form, die für $n \to \infty$ gegen f konvergieren: $p_n(x) = \frac{1}{2} \cdot a_0 + \sum_{k=1}^{n} [\ a_k \cdot \cos(kx) + b_k \cdot \sin(kx)\ ]$

Das heißt, die Funktion f ist darstellbar als sog. **Fourier-Reihe**

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [\ a_k \cdot \cos(kx) + b_k \cdot \sin(kx)\ ] \qquad (*).$$

Für die sog. **Fourier-Koeffizienten** a_m und b_m gilt: $a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx$ sowie $a_m = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cdot \cos(mx)\,dx$, $b_m = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cdot \sin(mx)\,dx$ für $m \geq 1$.

Nach der Vorbereitung durch die oben durchgeführten Untersuchungen der Sinus- und der Kosinusfunktionen können wir die im Satz angegebenen Fourier-Koeffizienten a_m und b_m herleiten.

Herleitung von a_0

Betrachtet man das Integral über die Funktion f im Intervall $[-\pi; +\pi]$, dann ergibt sich aus der Gleichung $(*)$:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \tfrac{1}{2}\cdot a_0\,dx + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(kx)\,dx + b_k \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(kx)\,dx]$$

$$= \tfrac{1}{2}\cdot a_0 \cdot 2\pi + \sum_{k=1}^{\infty}[\, a_k \cdot 0 + b_k \cdot 0 \,] = a_0 \cdot \pi$$

Hieraus folgt daher: $a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$

Herleitung von a_m für $m \geq 1$
Multipliziert man die Terme auf beiden Seiten der Gleichung (∗) mit $\cos(mx)$ für irgendeine natürliche Zahl m, dann erhält man

$$f(x)\cdot\cos(mx) = \tfrac{1}{2}\cdot a_0 \cdot \cos(mx) + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k \cdot \cos(kx)\cdot\cos(mx) + b_k \cdot \sin(kx)\cdot\cos(mx)].$$

Betrachtet man dann das Integral über die Terme der linken und der rechten Seite im Intervall $[-\pi; +\pi]$, dann sind alle rechts stehenden Integrale gleich null mit Ausnahme des Summanden mit $k = m$:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cdot\cos(mx)\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\cdot a_0 \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(mx)\,dx + \sum_{k=1}^{\infty}[\, a_k \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(kx)\cdot\cos(mx)\,dx + b_k \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(kx)\cdot\cos(mx)\,dx]$$

$$= \tfrac{1}{2}\cdot a_0 \cdot 0 + a_m \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2(mx)\,dx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot 0 = a_m \cdot \pi$$

Hieraus folgt dann: $a_m = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cdot\cos(mx)\,dx$

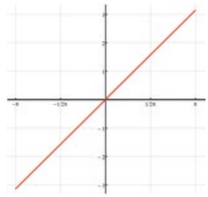
Herleitung von b_m
Analog erhält man die Fourier-Koeffizienten b_m, indem die Terme auf beiden Seiten der Gleichung (∗) mit $\sin(mx)$ multipliziert werden.

16.1.3 Beispiele von Fourier-Reihen

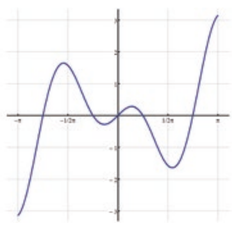
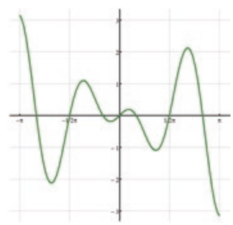
An den folgenden Beispielen wird deutlich, wie genial der Fourier'sche Ansatz zur Approximation von periodischen Funktionen ist.

Approximation der Sägezahnkurve

Zunächst betrachten wir die Funktion f mit $f(x) = x$, die nur auf dem Intervall $[-\pi; +\pi]$ definiert sein soll.

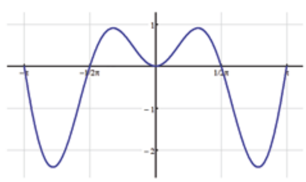
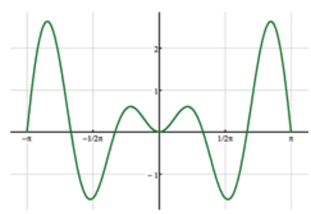


Für die Fourier-Koeffizienten ergibt sich hier $a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int\limits_{-\pi}^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi} \cdot 0 = 0$, dann weiter auch $a_m = \frac{1}{\pi} \cdot \int\limits_{-\pi}^{+\pi} x \cdot \cos(mx)\,dx = 0$, denn die Graphen der Funktionen mit $y = x \cdot \cos(mx)$ sind punktsymmetrisch zum Ursprung, vgl. die folgenden Graphen für $m = 1, 2, 3$.

Die Koeffizienten $b_m = \frac{1}{\pi} \cdot \int\limits_{-\pi}^{+\pi} x \cdot \sin(mx)\,dx$ können dann mithilfe eines Computeralgebrasystems (CAS) oder der Methode der partiellen Integration bestimmt werden.

Die folgenden Abbildungen zeigen die Graphen von $y = x \cdot \sin(mx)$ für $m = 1, 2, 3$.

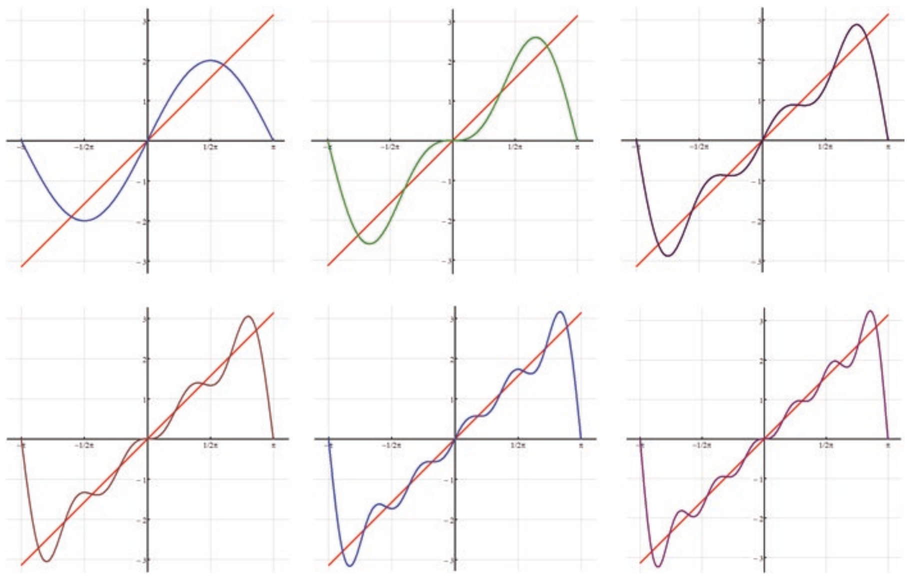




Hier ergibt sich $b_1 = 2$, $b_2 = -1$, $b_3 = \frac{2}{3}$, $b_4 = -\frac{1}{2}$, …, allgemein $b_m = (-1)^{m+1} \cdot \frac{2}{m}$.

So ergeben sich nacheinander die Fourier'schen Näherungsfunktionen

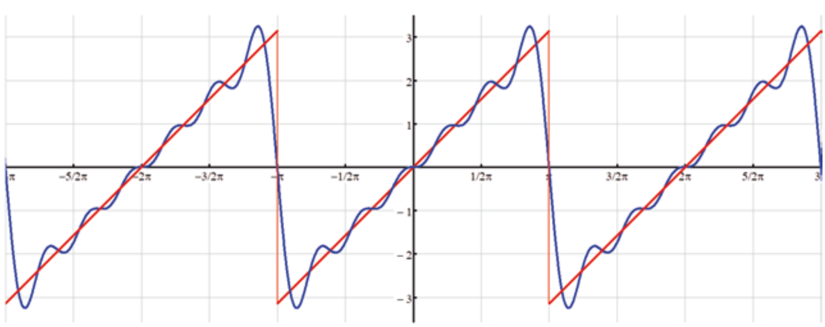
$p_1(x) = 2 \cdot \sin(x)$,
$p_2(x) = 2 \cdot \sin(x) - \sin(2x)$,
$p_3(x) = 2 \cdot \sin(x) - \sin(2x) + \frac{2}{3} \cdot \sin(3x)$,
$p_4(x) = 2 \cdot \sin(x) - \sin(2x) + \frac{2}{3} \cdot \sin(3x) - \frac{1}{2} \cdot \sin(4x)$ usw.

Die Graphen dieser Näherungsfunktionen liegen mit wachsendem m immer dichter am Graphen der betrachteten Funktion $f(x) = x$, vgl. die folgenden Abbildungen für $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$



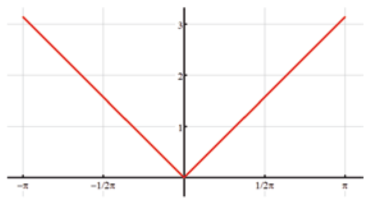
Die Bezeichnung *Sägezahnkurve* ergibt sich nun aus dem Zickzack-Graphen, den man erhält, wenn die auf dem Intervall $[-\pi; +\pi]$ definierte Funktion f mit $f(x) = x$ abschnittsweise auch nach links und rechts ergänzt wird. Dabei müssen jeweils offene Intervalle betrachtet werden, also $f(x) = x$ für $x \in]-\pi; +\pi[$ und $f(x) = x + 2\pi$ für $x \in]-3\pi; -\pi[$, $f(x) = x - 2\pi$ für $x \in]+\pi; +3\pi[$ usw.

An den Übergangsstellen zeichnet man senkrechte Verbindungen ein. Der Graph des Fourier-Polynoms verläuft dann durch den Mittelpunkt dieser senkrechten Strecke (das ist sozusagen das arithmetische Mittel der beiden „Funktionswerte", wenn man sich von links und von rechts den Sprungstellen nähert).



Approximation einer Dreieckskurve

Hier untersuchen wir die auf dem Intervall $[-\pi; +\pi]$ definierte Betragsfunktion $f(x) = |x|$.



Für die Fourier-Koeffizienten ergibt sich $a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int\limits_{-\pi}^{\pi} |x|\, dx = \frac{1}{\pi} \cdot \pi^2 = \pi$, dann weiter $a_1 = -\frac{4}{\pi}$, $a_2 = 0$, $a_3 = -\frac{4}{9\pi}$, $a_4 = 0$, $a_5 = -\frac{4}{25\pi}$ usw., allgemein $a_{2m+1} = -\frac{4}{(2m+1)^2 \cdot \pi}$ und $a_{2m} = 0$ für $m \geq 1$, außerdem $b_m = 0$ für alle m.

So ergeben sich nacheinander die Fourier'schen Näherungsfunktionen

$$p_1(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \cos(x),\ p_3(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \cos(x) - \frac{4}{9\pi} \cdot \cos(3x)$$

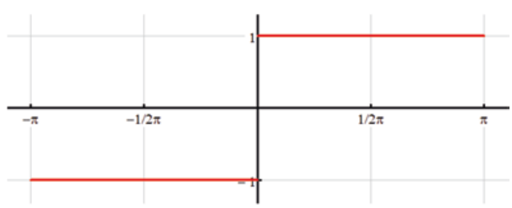
$$p_5(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \cos(x) - \frac{4}{9\pi} \cdot \cos(3x) - \frac{4}{25\pi} \cdot \cos(5x) \text{ usw.}$$

Die Näherung ist hier schon für $m = 3$ (vgl. mittlere Abb.) erstaunlich gut, für $m = 5$ erkennt man hier nur an den Knickstellen einen kleinen Unterschied.

Approximation einer Rechteckkurve

Hier untersuchen wir die abschnittsweise konstante Funktion f mit

$f(x) = -1$ für $x \in]-\pi; 0[$ und $f(x) = +1$ für $x \in]0; +\pi[$.



Für die Fourier-Koeffizienten ergibt sich $a_0 = 0$, dann weiter auch $a_m = 0$ für $m \geq 1$.

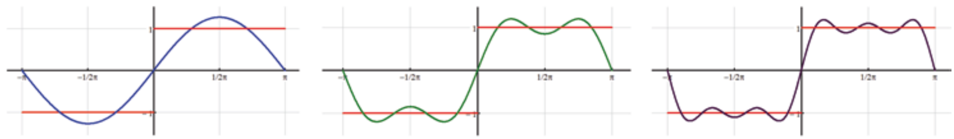
Für die anderen Koeffizienten erhält man nacheinander $b_1 = \frac{4}{\pi}$, $b_2 = 0$, $b_3 = \frac{4}{3\pi}$, $b_4 = 0$, $b_5 = \frac{4}{5\pi}$ usw., allgemein $b_{2m-1} = \frac{4}{(2m+1) \cdot \pi}$ und $b_{2m} = 0$ für alle m.

So ergeben sich nacheinander die Fourier'schen Näherungsfunktionen

$p_1(x) = \frac{4}{\pi} \cdot \sin(x)$, $p_3(x) = \frac{4}{\pi} \cdot \sin(x) + \frac{4}{3\pi} \cdot \sin(3x)$,

$p_5(x) = \frac{4}{\pi} \cdot \sin(x) + \frac{4}{3\pi} \cdot \sin(3x) + \frac{4}{5\pi} \cdot \sin(5x)$

usw.



16.2 Wer war Jean Baptiste Joseph Fourier?

Jean Baptiste Joseph Fourier wurde 1768 als neuntes von zwölf Kindern aus der zweiten Ehe eines Schneiders in Auxerre (Burgund) geboren. Der Junge war noch nicht einmal zehn Jahre alt, als seine Mutter starb, und kurze Zeit später starb auch der Vater. Vorübergehend nahm ihn die Familie eines Verwandten auf und er durfte die Lateinschule an der Kathedrale von Auxerre besuchen. Im Alter von zwölf Jahren wechselte Joseph an die örtliche Militärschule, wo er bald durch seine besondere Begabung für Mathematik und Physik auffiel. Selbstständig arbeitete der die sechs Bände von Étienne Bézouts *Cours de mathématique* durch, außerdem die *Mécanique en général* von Charles Bossut.

Mit 19 Jahren trat er dem Benediktinerorden bei – mit dem Gedanken, als Mathematiklehrer an der Klosterschule arbeiten zu können –, zweifelte jedoch bald an seinem Entschluss.

An seinem 21. Geburtstag haderte er mit seinem Schicksal; der Gedanke, dass Isaac Newton und Blaise Pascal in diesem Alter bereits Unsterbliches vollbracht hatten, ließ ihm keine Ruhe. Er verließ das Kloster, ging nach Paris, studierte Mathematik und kehrte danach als Lehrer für Mathematik an seine ehemalige Schule in Auxerre zurück.

Immer noch unentschlossen hinsichtlich seiner Zukunft, wurde ihm durch die dramatische Veränderung der politischen Verhältnisse die Entscheidung abgenommen: 1793 wurde er Mitglied im örtlichen Revolutionskomitee und – dank seines Talents als Redner – beeinflusste er die Entwicklung der Revolution in der Region. Sein politisches Engagement kostete ihn aber fast den Kopf: Er legte sich nämlich mit der Robespierre-Fraktion an, und diese betrieb seine Inhaftierung. Der Guillotine entging er nur deshalb, weil seine Gegner nach der Hinrichtung von Robespierre selbst an Einfluss verloren.

1794 wurde Fourier für ein Mathematik-Studium an der neu eingerichteten *École Normale* in Paris ausgewählt; seine Lehrer waren Joseph-Louis Lagrange, Pierre-Simon Laplace und Gaspard Monge. Gleichzeitig wurde der überragende Student als Lehrer am *Collège de France* tätig und er wechselte zur neu gegründeten *École Polytechnique.*

Erneut wurde Fourier wegen seiner Revolutionstätigkeit inhaftiert, konnte aber bald aufgrund der Fürsprache seiner berühmten Lehrer wieder freikommen. 1797 wurde er als Nachfolger von Lagrange auf dessen Lehrstuhl für Analysis und Mechanik berufen; sein Ruf als hervorragender Lehrer verbreitete sich.

Napoleon, ehrgeiziger General der Revolutionsarmee, hatte nach seinem erfolgreichen Oberitalien-Feldzug das regierende Direktorium überzeugt, dass ein Angriff auf Großbritannien notwendig sei. Da eine Invasion der Insel nicht durchführbar erschien, wollte er die Verbindungen Großbritanniens nach Indien stören und plante deshalb einen Feldzug nach Ägypten. Da er dort eine französische Kolonie errichten wollte, suchte er auch Wissenschaftler, die das Expeditionsheer begleiten sollten.

Fourier schloss sich dieser Gruppe an. Nach der Eroberung Ägyptens wurde er von Napoleon beauftragt, das Schulwesen des Landes zu reformieren und archäologische Expeditionen durchzuführen. Napoleon ernannte ihn zum Sekretär des *Institut d‘ Égypte,* für das er besonders kostbare archäologische Fundstücke sammeln sollte.

Das ägyptische Abenteuer Napoleons fand ein schnelles Ende, nachdem die französische Flotte in der Schlacht im Nil-Delta durch die Flotte Admiral Nelsons vernichtet worden war und die Pest zum Abbruch eines Feldzuges nach Palästina geführt hatte. Napoleon kehrte heimlich nach Frankreich zurück und riss dort Ende 1799 die Herrschaft an sich.

Fourier konnte erst zwei Jahre später nach Paris zurückkehren. Eigentlich wollte er dort seine Tätigkeit als Mathematikprofessor fortsetzen, aber Napoleon, der eine grundsätzlich hohe Meinung von den Fähigkeiten von Mathematikern hatte, ernannte ihn – gegen seinen Willen – zum Präfekten des Departements Isère.

Zu Fouriers neuen Aufgaben gehörte es, Sümpfe in der Region Lyon trockenzulegen und eine Straße von Grenoble nach Turin bauen zu lassen. Die Aufgaben erfüllte er zur großen Zufriedenheit seines Auftraggebers.

Trotz dieser Belastung nahm er sich die Zeit und verfasste zwei umfangreiche Schriften: *Über die Ausbreitung von Wärme in festen Körpern* und *Description de l‘ Égypte.*

Das Buch über Ägypten konnte aber erst veröffentlicht werden, nachdem Napoleon sich in allen Darstellungen angemessen gewürdigt sah – bei einem späteren Nachdruck des Werks nahm Fourier dann fast alle Passagen, die Napoleons Verdienste betrafen, wieder heraus.

Fouriers Begeisterung für die altägyptische Kultur war ansteckend: Als er 1802 dem 12-jährigen Jean-François Champollion einen Abdruck des Steins aus Rosette zeigte, war dieser von der Idee besessen, die auf dem Stein enthaltenen Zeichen zu entziffern. 1822 legte Champollion der *Académie des Inscriptions et Belles-Lettres* in Paris seine Forschungsarbeit vor: Die Hieroglyphen waren entschlüsselt!

Fouriers Werk über die Ausbreitung von Wärme in festen Körpern stieß nicht nur wegen der ungewohnten physikalischen Modellierung der Wärmeausbreitung auf Widerstand.

Auch die mathematische Behandlung des Problems wurde von Lagrange und Laplace zunächst abgelehnt, da sie sich mit der Idee nicht anfreunden konnten, Funktionen mithilfe von Reihenentwicklungen trigonometrischer Funktionen darzustellen. Gleichwohl erhielt Fourier für seine Arbeit im Jahr 1811 einen Preis der *Académie des Sciences;* das Komitee lehnte den Druck der Schrift allerdings ab.

1814 wurde Napoleon abgesetzt und nach Elba verbannt. Als er bei seiner Rückkehr mit seinen neu gesammelten Truppen geradewegs auf Grenoble zumarschierte, versuchte Fourier vergeblich, die Bürger Grenobles an ihren Treueeid zum König zu erinnern. Napoleon verzieh ihm großmütig diesen „Verrat" an seiner Person und ernannte ihn nunmehr zum Präfekten des Departements Rhône, verbunden mit einem hohen Gehalt, das allerdings nie ausgezahlt wurde.

Erst nach der endgültigen Niederlage Napoleons konnte Fourier wieder nach Paris zurückkehren, er durfte aber wegen seiner Kooperation mit Napoleon nicht wieder an seine alte Arbeitsstelle zurück. Auch verweigerte ihm der Bourbonen-König Louis XVIII. die Aufnahme in die *Académie des Sciences,* obwohl Fourier die meisten Stimmen unter allen Kandidaten erhielt.

Erst 1817 wurde er als Mitglied zugelassen. 1822 wählte die *Académie* ihn zum Ständigen Sekretär; vier Jahre später wurde Fourier sogar in die *Académie française* aufgenommen, die Gesellschaft der *40 immortels („40 Unsterbliche").*

In seinen letzten acht Lebensjahren veröffentlichte Fourier noch einige Abhandlungen zu mathematischen und physikalischen Problemen, darunter auch eine umfangreichere Fassung der *Théorie analytique de la chaleur,* in der er die Behauptung aufstellte, dass jede periodische Funktion sich als unendliche Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen darstellen lässt, vgl. Abschn. 16.1.

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) gelang es 1829, ein Jahr vor Fouriers Tod, diese Behauptung für beschränkte, stückweise stetige Funktionen zu beweisen.

16.3 Literaturhinweise

Eine wichtige Adresse zum Auffinden von Informationen über Mathematiker und deren wissenschaftliche Leistungen ist die Homepage der St. Andrews University.

Informationen über Fourier findet man unter:

- www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fourier.html
- Strick, Heinz Klaus (2012): *Kalenderblatt über Fourier,* www.spektrum.de/wissen/joseph-fourier-1768-1830/1156113 www-history.mcs.st-and.ac.uk/Strick/Fourier.pdf

Ausführliche Darstellungen zum Thema Fourier-Reihen findet man u. a. unter:

- www.mathe-online.at/mathint/fourier/i.html

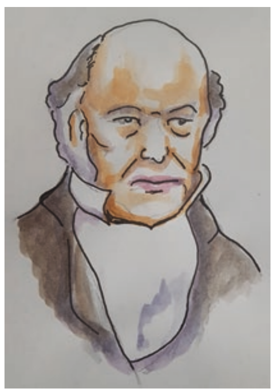
Wikipedia-Artikel in deutscher, englischer und französischer Sprache zu den Stichwörtern:

- Fourier
- Fourier-Reihe (Fourier Series, Série de Fourier)

William Rowan Hamilton – ein unglückliches Genie aus Irland

17

Die Zeit – so sagt man – hat eine Dimension und der Raum hat drei Dimensionen. Das mathematische Quaternion hat von beiden etwas; in der Sprache der Technik könnte man sagen: Es ist „Zeit plus Raum“ oder „Raum plus Zeit“, und in diesem Sinne hat es vier Dimensionen oder zumindest einen Bezug dazu.



In den Kapiteln über Tartaglia/Cardano (Kap. 8) und über de Moivre (Kap. 13) ist dargestellt, wie die komplexen Zahlen entdeckt wurden und wie Mathematiker mit diesen Größen umgingen:

- Girolamo Cardano (1501–1576) hatte für die quadratische Gleichung $x \cdot (10 - x) = 40$ die beiden Lösungen $x = 5 \pm \sqrt{-15}$ mit der Wurzel aus einer negativen Zahl noch als *ebenso raffiniert wie nutzlos* bezeichnet.

H. K. Strick, *Mathematik – einfach genial!*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-60449-6_17

Und als er $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ als Lösung der kubischen Gleichung $x^3 = 15x + 4$ erhielt und sich dann herausstellte, dass es sich dabei nur um eine andere Darstellung von $x = 4$ handelt, sprach er von *ausgeklügelten, gekünstelten* Größen.

- Rafael Bombelli (1526–1572) sah den Umgang mit den Wurzeln aus negativen Zahlen eher pragmatisch: Wenn solche in der Lösungsformel $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ einer quadratischen Gleichung auftreten, dann weiß man, dass die quadratische Gleichung *keine* Lösung hat. Und in der Lösungsformel der kubischen Gleichung sind diese Gebilde nur ein Zwischenstadium der Rechnung.
- René Descartes (1596–1650) war der Ansicht, dass es sich um tatsächlich nicht existierende Zahlen, also um *eingebildete* Zahlen handelt – er nannte sie daher *imaginär.*
- Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) konnte zwar ebenfalls gut mit diesen Zahlen rechnen, aber für ihn war dies nichts als *eine wunderbare Zuflucht des göttlichen Geistes, beinahe ein Zwitterwesen zwischen Sein und Nicht-Sein.*
- Leonhard Euler (1707–1783) schrieb in seiner *Vollständigen Anleitung zur Algebra* den folgenden Kommentar zu quadratischen Gleichungen: [Die Lösungen] … *mögen indessen möglich sein oder nicht, so können sie doch in dieser Art stets ausgedrückt werden.*

  Zur rein kubischen Gleichung $x^3 - 8 = 0$ gab Euler sowohl $x = 2$ als auch $x = -1 \pm \sqrt{-3}$ als Lösungen an – letztere mit dem Zusatz: *Diese beiden Werte sind zwar imaginär oder unmöglich, verdienen aber nichts desto weniger beachtet zu werden.*

Euler hatte den **Fundamentalsatz der Algebra** vor Augen, der besagt, dass ein Polynom n-ten Grades in der Menge der komplexen Zahlen in n Linearfaktoren zerlegt werden kann – und daher waren für ihn auch die *nichtreellen* Lösungen einer Gleichung ebenfalls von Bedeutung.

Und an Eulers atemberaubenden Umformungen im Zusammenhang mit der Formel $e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$, vgl. Kap. 13, kann man ablesen, dass er hervorragend mit den komplexen Zahlen umgehen konnte, auch wenn er wohl noch keine „Vorstellung" von ihnen hatte.

Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), der bedeutendste Mathematiker Frankreichs in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts, äußerte sich noch 1821 äußerst kritisch hinsichtlich des „Status" der komplexen Zahlen: Für ihn waren dies nur *symbolische Ausdrücke,* mit denen nach festen Regeln gearbeitet werden konnte, die aber eigentlich *ohne Sinn* waren.

Durch die Einführung der 2-dimensionalen Zahlenebene mit reeller und imaginärer Achse durch Carl Friedrich Gauß (1777–1855) wurde dann die bis dahin noch fehlende Veranschaulichung erreicht, vgl. auch Kap. 13.

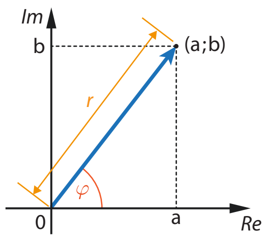
Definition und Regeln

Rechnen mit komplexen Zahlen –
Veranschaulichung in der Gauß'schen Zahlenebene

Eine komplexe Zahl $z = a + i \cdot b$ mit Realteil $a = \mathrm{Re}(z)$ und Imaginärteil $b = \mathrm{Im}(z)$ kann als Punkt $(a; b)$ der Ebene aufgefasst werden.

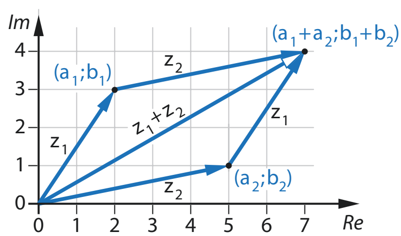
Für die imaginäre Einheit i gilt $i^2 = -1$.

Der Ortsvektor $\vec{z} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ hat die Länge $r = \sqrt{a^2 + b^2}$; diese wird als **Betrag** der komplexen Zahl z bezeichnet.



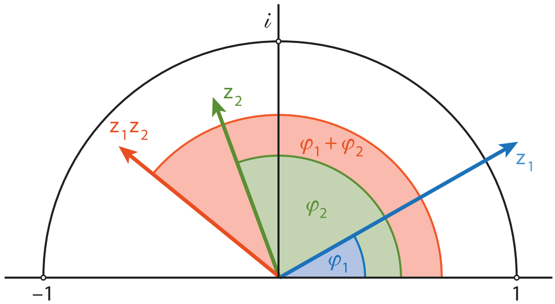
Gemäß der Euler'schen Formel kann die komplexe Zahl z in Polarkoordinatenform notiert werden: $z = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) = r \cdot e^{i\varphi}$; φ wird als **Argument** der komplexen Zahl z bezeichnet.

- Die Addition zweier komplexer Zahlen $z_1 = a_1 + i \cdot b_1$, $z_2 = a_2 + i \cdot b_2$ entspricht der Vektoraddition $\vec{z_1} + \vec{z_2} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix}$, also $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i \cdot (b_1 + b_2)$.

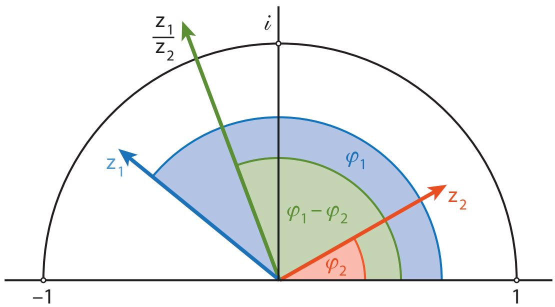


- Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen $z_1 = a_1 + i \cdot b_1 = r_1 \cdot e^{i \cdot \varphi_1}$ und $z_2 = a_2 + i \cdot b_2 = r_2 \cdot e^{i \cdot \varphi_2}$ entspricht der Vervielfachung des einen Vektors mit dem Betrag des anderen Vektors und der Drehung des einen Vektors um das Argument des anderen Vektors:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + i \cdot b_1) \cdot (a_2 + i \cdot b_2) = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + i \cdot (a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2) \\ &= r_1 \cdot e^{i \cdot \varphi_1} \cdot r_2 \cdot e^{i \cdot \varphi_2} = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i \cdot (\varphi_1 + \varphi_2)} \end{aligned}$$



Analog wird bei der Division zweier komplexer Zahlen der Quotient der Beträge und die Differenz des Arguments gebildet.



Hinweis Auf die Möglichkeit, die Addition komplexer Zahlen als Vektoraddition und deren Multiplikation als Drehstreckung zu interpretieren, hatte u. a. bereits der dänisch-norwegische Landvermesser Caspar Wessel (1745–1818) hingewiesen (statt des Begriffs der Vektoren sprach er von „gerichteten Strecken"). Wie in Kap. 13 beschrieben, wurden diese Überlegungen 1799 in den Mitteilungen der *Königlich Dänischen Akademie der Wissenschaften* veröffentlicht, allerdings von den Mathematikern außerhalb Skandinaviens nicht wahrgenommen, sodass alle diese Einsichten noch einmal entwickelt werden mussten. Ähnliches gilt für die Veröffentlichungen von Jean Robert Argand.

17.1 Einfach genial: William Rowan Hamilton entdeckt die Quaternionen

Der irische Mathematiker William Rowan Hamilton (1805–1865), eigentlich Astronom von Beruf (*Royal Astronomer of Ireland,* s. u.), empfand die Vermischung von arithmetisch-algebraischen Aspekten und geometrischer Veranschaulichung als höchst unbefriedigend. Er argumentierte:

> Wenn man die Schreibweise $z = a + b \cdot \sqrt{-1}$ oder auch $z = a + i \cdot b$ verwendet, dann wird so getan, als handele es sich dabei um eine gewöhnliche Addition von (reellen) Zahlen: Man kann aber die reelle Zahl a nicht zu dem Gebilde $b \cdot \sqrt{-1}$ addieren!

17.1.1 Hamilton findet eine angemessene algebraische Struktur für die komplexen Zahlen

In einer Abhandlung aus dem Jahr 1837 schlug Hamilton den folgenden Ausweg aus der Problematik vor:

- Komplexe Zahlen sind alle Paare $(a;b)$ von reellen Zahlen *a, b.*
- Jede reelle Zahl a kann man auch als eine spezielle komplexe Zahl $(a;0)$ auffassen (sog. Einbettung der reellen Zahlen in der Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen).
- In der Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen sind zwei Operationen $\oplus$, $\otimes$ definiert, die man als *Addition* bzw. als *Multiplikation* bezeichnen kann:

$$(a_1;b_1) \oplus (a_2;b_2) = (a_1 + a_2;b_1 + b_2) \text{ und}$$
$$(a_1;b_1) \otimes (a_2;b_2) = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2;a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2).$$

- Für die komplexe Zahl $(0;1)$ gilt: $(0;1) \otimes (0;1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (-1;0)$
- Die komplexe Zahl $(0;0)$ ist das neutrale Element *(Nullelement)* bzgl. der Addition, d. h., für alle komplexen Zahlen $(a;b)$ gilt: $(a;b) \oplus (0;0) = (0;0) \oplus (a;b) = (a;b)$
- Die komplexe Zahl $(1;0)$ ist das neutrale Element *(Einselement)* bzgl. der Multiplikation, d. h., für alle komplexen Zahlen $(a;b)$ gilt: $(a;b) \otimes (1;0) = (1;0) \otimes (a;b) = (a;b)$
- Zu jeder komplexen Zahl $(a;b)$ existiert (eindeutig) ein inverses Element bzgl. der Addition, nämlich $(-a;-b)$:

$$(a;b) \oplus (-a;-b) = (-a;-b) \oplus (a;b) = (0;0)$$

- Zu jeder komplexen Zahl $(a;b) \neq (0;0)$ existiert (eindeutig) ein inverses Element bzgl. der Multiplikation, nämlich $\left(\frac{a}{a^2+b^2};\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$:

$$(a;b) \otimes \left(\frac{a}{a^2+b^2};\frac{-b}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{a}{a^2+b^2};\frac{-b}{a^2+b^2}\right) \otimes (a;b) = (1;0),$$

denn $(a;b) \otimes \left(\frac{a}{a^2+b^2};\frac{-b}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2};\frac{-ab+ab}{a^2+b^2}\right) = (1;0).$

Für die so definierten Operationen gelten die üblichen Rechengesetze:

- Kommutativ- und Assoziativgesetze bzgl. Addition und Multiplikation sowie das Distributivgesetz.

Es gilt auch noch ein weitere, (algebraisch) wichtige Eigenschaft: Die so definierte Multiplikation von komplexen Zahlen ist **nullteilerfrei,** d. h., aus der Gleichung

$$(a;b) \otimes (c;d) = (0;0) \text{ für } (a;b) \neq (0;0) \text{ folgt: } (c;d) = (0;0),$$

in Worten: Das Produkt zweier komplexer Zahlen kann nur dann das Nullelement ergeben, wenn mindestens einer der Faktoren gleich dem Nullelement ist.

Dass diese Eigenschaft auch in der Menge der komplexen Zahlen – so, wie sie hier definiert ist – gilt, kann man durch Vergleich der Komponenten nachweisen.

Aus $(a;b) \otimes (c;d) = (a \cdot c - b \cdot d; a \cdot d + b \cdot c) = (0;0)$ folgt $a \cdot c - b \cdot d = 0$ und $a \cdot d + b \cdot c = 0$.

Multipliziert man die erste Gleichung mit $(-b)$ und die zweite Gleichung mit a, dann ergibt sich $-b \cdot a \cdot c + b^2 \cdot d = 0$ und $a^2 \cdot d + a \cdot b \cdot c = 0$. Addiert man dann beide Gleichungen, folgt $a^2 \cdot d + b^2 \cdot d = 0$ und hieraus $(a^2 + b^2) \cdot d = 0$, also $d = 0$ wegen $(a;b) \neq (0;0)$. Analog schließt man auf $c = 0$.

Dass Hamilton die Addition und die Multiplikation der Zahlenpaare reeller Zahlen so definierte wie oben angegeben, geschah natürlich vor dem Hintergrund des bereits von seinen Vorgängern entwickelten Kalküls mit „Gebilden" der Form $a + i \cdot b$.

Wenn man sich unabhängig hiervon die Definition einer *multiplikativen* Verknüpfung zweier Zahlenpaare anschaut, dann erscheint die o. a. Definition doch ziemlich kompliziert.

- Wäre nicht eine einfachere Verknüpfung für Zahlenpaare möglich?

Naheliegend wäre es beispielsweise, wenn man die Multiplikation komponentenweise definiert, also

$$(a_1;b_1) \otimes (a_2;b_2) = (a_1 \cdot a_2; b_1 \cdot b_2).$$

Eine so definierte Verknüpfung würde Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz erfüllen, und mit dem Zahlenpaar $(1;1)$ hätte man auch ein neutrales Element bzgl. dieser „Multiplikation", aber diese Verknüpfung wäre *nicht* nullteilerfrei:

Beispielsweise ergibt sich $(a;0) \otimes (0;d) = (0;0)$ für beliebige reelle Zahlen $a, d \neq 0$, d. h., aus dem Ergebnis der Multiplikation $(a;b) \otimes (c;d) = (0;0)$ kann man *nicht* darauf schließen, dass $(a;b) = (0;0)$ oder $(c;d) = (0;0)$.

Man kann davon ausgehen, dass Hamilton diese oder ähnliche Überlegungen angestellt hat; denn nachdem er die o. a. Verknüpfungen für 2-dimensionale „Zahlen" definiert hatte, setzte er alles daran, auch „vernünftige" Verknüpfungen eine Menge von 3-dimensionalen „Zahlen" zu finden.

Die Addition stellte kein Problem dar; eine komponentenweise Addition

$$(a_1;b_1;c_1) \oplus (a_2;b_2;c_2) = (a_1 + a_2; b_1 + b_2; c_1 + c_2)$$

erfüllt offensichtlich die Gesetze der Kommutativität und der Assoziativität.

$(0;0;0)$ ist neutrales Element bzgl. der Addition, und zu jedem 3-Tupel findet man das zugehörige inverse Element mithilfe der negativen Komponenten:

$$(a;b;c) \oplus (-a;-b;-c) = (0;0;0)$$

Aber so sehr sich Hamilton auch bemühte, er fand keine angemessene multiplikative Verknüpfung für 3-Tupel. (Wie man später herausfand, scheiterten auch andere Mathematiker wie Argand, Gauß und Möbius genau an diesem Problem.)

Bei seinen Überlegungen verwendete er Ausdrücke der Form $a + b \cdot i + c \cdot j$, mit denen man formale Rechnungen durchführen kann, also

$$\begin{aligned}&(a + b \cdot i + c \cdot j) \otimes (d + e \cdot i + f \cdot j)\\&= ad + (ae + bd) \cdot i + (af + cd) \cdot j + eb \cdot i^2 + cf \cdot j^2 + (bf + ce) \cdot ij\end{aligned}$$

mit $i^2 = -1$; aber für j^2 und insbesondere für ij fand er keine Bedeutung, die nicht zu einem Konflikt mit den üblichen Rechengesetzen geführt hätte.

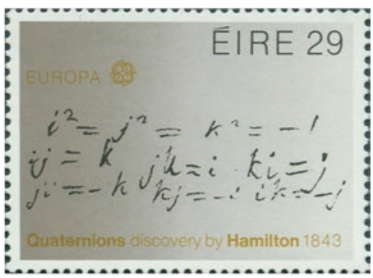
Irgendwann gab er die Suche auf und verfolgte danach die Idee, sinnvolle Verknüpfungen für 4-dimensionale Objekte zu finden, also für 4-Tupel reeller Zahlen.

17.1.2 Hamilton entdeckt die Quaternionen

Nach jahrelangen vergeblichen Versuchen hatte Hamilton im Jahr 1843 die entscheidende geniale Idee – gerade als er in Dublin auf dem Weg zur *Royal Irish Academy* die Broom Bridge überquerte. Angeblich ritzte er seinen Einfall in die Steine der Brücke ein.

An dieses Ereignis erinnert dort eine Gedenktafel mit der folgenden Inschrift:

> Here as he walked by on the 16th of October 1843 Sir William Rowan Hamilton in a flash of genius discovered the fundamental formula for quaternion multiplication $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ & cut it on a stone of this bridge.



Die 4-dimensionalen Objekte bezeichnete Hamilton als **Quaternionen** (lat. *quaternio* = Vierheit). Zu Ehren des Entdeckers wird die Menge der Quaternionen üblicherweise mit $\mathbb{H}$ bezeichnet.

Definition und Regeln

Rechnen mit Quaternionen

Quaternionen können als 4-Tupel reeller Zahlen aufgefasst werden.

Die Addition zweier Quaternionen erfolgt komponentenweise, also $(a_1;b_1;c_1;d_1) \oplus (a_2;b_2;c_2;d_2) = (a_1+a_2;b_1+b_2;c_1+c_2;d_1+d_2)$.

Definiert man für die Einheiten $e=(1;0;0;0)$, $i=(0;1;0;0)$, $j=(0;0;1;0)$, $k=(0;0;0;1)$ die folgenden Eigenschaften bzgl. der Multiplikation

- $i^2=j^2=k^2=ijk=-1$,
  also $(0;1;0;0) \otimes (0;1;0;0) = (-1;0;0;0)$ usw.
- $ij=k=-ji$, $jk=i=-kj$, $ki=j=-ik$,
  also $(0;1;0;0) \otimes (0;0;1;0) = (0;0;0;1)$ und $(0;0;1;0) \otimes (0;1;0;0) = (0;0;0;-1)$ usw. (vgl. auch die Verknüpfungstabelle unten),

dann kann man Quaternionen *symbolisch* in der Form $a+b\cdot i+c\cdot j+d\cdot k$ notieren und diese Terme gemäß den Rechenregeln addieren und multiplizieren, wie sie in der Menge der reellen Zahlen gelten.

⊗	e	i	j	k
e	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

Für die so definierten Verknüpfungen gilt beispielsweise:

$$(a_1+b_1\cdot i+c_1\cdot j+d_1\cdot k) \otimes (a_2+b_2\cdot i+c_2\cdot j+d_2\cdot k)$$
$$=(a_1\cdot a_2-b_1\cdot b_2-c_1\cdot c_2-d_1\cdot d_2)+(a_1\cdot b_2+b_1\cdot a_2+c_1\cdot d_2-d_1\cdot c_2)\cdot i$$
$$+(a_1\cdot c_2+c_1\cdot a_2+d_1\cdot b_2-b_1\cdot d_2)\cdot j+(a_1\cdot d_2+d_1\cdot a_2+b_1\cdot c_2-c_1\cdot b_2)\cdot k$$

- Für den Betrag eines Quaternions gilt: $\|(a;b;c;d)\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$.
- Das inverse Element bzgl. der Multiplikation eines Quaternions ist gegeben durch
  $$(a;b;c;d)^{-1} = \frac{a-b\cdot i-c\cdot j-d\cdot k}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}}.$$
- Bezüglich der Addition gelten Kommutativ- und Assoziativgesetz.
- Es gilt das Assoziativgesetz der Multiplikation, aber die Multiplikation ist nicht kommutativ.
- Es gilt das Distributivgesetz.

Hamilton beschäftigte sich bis zu seinem Lebensende mit den Eigenschaften der Quaternionen. Unter anderem entdeckte er, dass sich Drehungen im Raum mithilfe von Quaternionen beschreiben lassen.

John Thomas Graves (1806–1870), ein in London lebender Freund Hamiltons, wurde durch dessen Entdeckung der Quaternionen angeregt, nach einer Erweiterung der Quaternionen zu forschen, und bereits im Dezember 1843 war er erfolgreich. Allerdings vergaß Hamilton in der Begeisterung über seine eigene Entdeckung, andere Mitglieder der *Royal Academy* darüber zu informieren. So kam es, dass in der Literatur meistens **Arthur Cayley** (1821–1895) als Entdecker der **Oktonionen** (übliche Bezeichnung: $\mathbb{O}$) genannt wird, da dieser als Erster darüber eine Abhandlung veröffentlichte.

Cayley war nach einem äußerst erfolgreichen Mathematikstudium zunächst als Anwalt in England tätig, reiste aber 1844 extra nach Dublin, um Hamiltons Vorlesungen über Quaternionen zu besuchen. 1845 entdeckte dann auch er die Erweiterung der Quaternionen auf 8-Tupel aus reellen Zahlen. In dieser Zahlenmenge ist das Assoziativgesetz bzgl. der Multiplikation nicht erfüllt.

Außerdem erkannte Cayley, dass Quaternionen als Paare komplexer Zahlen aufgefasst werden können:

$$a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k = (a + b \cdot i) + (c + d \cdot i) \cdot j$$

und entsprechend die Oktonionen als Paare von Quaternionen.

Hinweis Die Verallgemeinerungen der komplexen Zahlen werden auch als **hyperkomplexe Zahlen** bezeichnet. Im Prinzip kann man die Erweiterung der Zahlenmengen auf die jeweils doppelte Dimension beliebig fortsetzen; jedoch geht bei jedem Schritt eine wichtige Eigenschaft dieser Zahlenmengen verloren:

Nach der Erweiterung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$ „fehlt“ die Eigenschaft, dass man Zahlen anordnen kann (in der Menge der komplexen Zahlen gibt es keine „kleiner“- oder „größer“-Relation).

Bei der Erweiterung von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{H}$ geht die Eigenschaft der Kommutativität bzgl. $\otimes$ verloren, bei der Erweiterung von $\mathbb{H}$ nach $\mathbb{O}$ die Assoziativität bzgl. $\otimes$. Deshalb schließt man diesen Prozess i. d. R. mit den Oktonionen ab.

17.2 Wer war William Rowan Hamilton?

William Rowan Hamilton, Sohn eines Anwalts in Dublin, galt als Wunderkind: Bereits im Alter von 5 Jahren lernte er Latein, Griechisch und Hebräisch; später kamen noch andere Sprachen hinzu, u. a. Deutsch, Sanskrit und Malaiisch.

Im Alter von 12 Jahren wurde sein Interesse für Mathematik geweckt – seine erste große Lektüre: die *Elemente* des Euklid in lateinischer Sprache. Dann folgten die *Elements d'Algèbre* von Alexis-Claude Clairaut (1713–1765) in französischer Sprache. Mit 15 vertiefte er sich in die Werke von Isaac Newton (1643–1727); mit 17 Jahren entdeckte er einen Fehler in der *Mécanique céleste* („Himmelsmechanik") von Pierre-Simon Laplace (1749–1827), was den irischen Astronomen John Brinkley zu folgendem Kommentar veranlasste: „This young man, I do not say will be, but is, the first mathematician of his age."

Mit 18 Jahren trat Hamilton in das *Trinity College* in Dublin ein; seine erste Veröffentlichung folgte im Jahr darauf bei der *Royal Irish Academy.* Im Alter von 21 Jahren erschienen seine bahnbrechenden Untersuchungen zur Optik.

Als er eine Zwischenprüfung an der Universität ablegte, forderte ihn einer seiner Prüfer auf, sich um eine frei gewordene Professur in Astronomie zu bewerben. Und obwohl er sich nicht sonderlich für dieses Gebiet interessierte, bewarb er sich um den Posten und setzte sich gegen alle Konkurrenten durch.

Als *Royal Astronomer of Irland* verfasste Hamilton allerdings bis zu seinem Lebensende nur eine einzige wissenschaftliche Arbeit zur Astronomie, und zwar zur Mondtheorie.

1832 machte Hamilton aufgrund theoretischer Überlegungen auf ein Phänomen bei der Lichtbrechung an zweiachsigen Kristallen aufmerksam, das kurze Zeit später auch tatsächlich experimentell bestätigt wurde. Hierdurch wie auch durch sein Werk *On a General Method in Dynamics* („Neue Grundlagen der theoretischen Mechanik", heute kurz als *Hamilton'sche Theorie* bezeichnet) erfuhr er große Anerkennung in der Wissenschaftswelt; manche Autoren halten sie sogar für gleichrangig mit den Beiträgen Newtons.

1835, Hamilton war erst 30 Jahre alt, wurde er in den Adelsstand erhoben und durfte sich von da an *Sir Hamilton* nennen. Er wurde als Mitglied in die *Royal Society* aufgenommen, zum Präsidenten der *Royal Irish Academy* gewählt und zum korrespondierenden Mitglied der Akademie von St. Petersburg ernannt.

Sein Privatleben verlief allerdings weniger „erfolgreich": Mit 19 Jahren hatte er sich unsterblich in Catherine verliebt, die er aber nicht heiraten konnte, weil er als Student über kein gesichertes Einkommen verfügte. Aus Liebeskummer suchte er Zuflucht in der Literatur, las Gedichte in persischer und arabischer Sprache, und er verfasste selbst Gedichte.

Als er diese einem Freund, dem Dichter William Wordsworth, vorlegte, hatte dieser Schwierigkeiten, Hamilton davon zu überzeugen, dass die Gedichte weniger gelungen sind als dessen mathematische und physikalische Abhandlungen.

Hamilton heiratete schließlich Helen Bayley, die in der Nachbarschaft des Observatoriums lebte. Seine Ehe, aus der drei Kinder hervorgingen, verlief jedoch nicht immer glücklich. Seine Frau war häufiger krank, er machte sich große Sorgen, und dies beeinträchtigte ihn in seiner Schaffenskraft. Ein ruhiges, zurückgezogenes Familienleben, das er ihr vor der Ehe versprochen hatte, stand im Gegensatz zu den gesellschaftlichen Verpflichtungen, die sich aus seinem wachsenden Ruhm und den Ämtern ergaben, die ihm angetragen wurden. Hinzu kamen die Phasen, in denen Hamilton rastlos an seinen Projekten arbeitete und er sich tagelang in sein Arbeitszimmer zurückzog.

Die mehrfache krankheitsbedingte Abwesenheit seiner Frau war ebenso Gesprächsthema in der Dubliner Gesellschaft wie ein vermeintlich übermäßiger Alkoholkonsum Hamiltons. Nach einem Zwischenfall bei einem Empfang der Geologischen Gesellschaft Irlands verzichtete Hamilton längere Zeit darauf, Alkohol zu sich zu nehmen.

Als er eines Tages seiner Jugendliebe Catherine wieder begegnete, bemerkte er, wie unglücklich diese in ihrer Ehe war, und seine Liebe zu ihr erwachte aufs neue. Daher war es für Hamilton eine Genugtuung, Catherines ältestem Sohn helfen zu können, als dieser sich 1848 auf sein Universitätsexamen vorbereitete.

Auf Catherines Dankesbrief folgte eine lebhafte Korrespondenz zwischen den beiden, bis ihr bewusst wurde, dass diese Briefe ein Verstoß gegen die strengen Sittenregeln ihrer Zeit darstellten. Sie fühlte sich schuldig und informierte ihren Ehemann über den brieflichen Kontakt zu Hamilton. Nach einem fehlgeschlagenen Selbstmordversuch ihrerseits trennte sie sich von ihrem Mann.

In den folgenden Jahren hatten Hamilton und Catherine immer wieder brieflichen Kontakt zueinander. Ende 1853 erreichte Hamilton ein Päckchen, das ein Federkästchen mit der Inschrift enthielt:

„From one who you must never forget, nor think unkindly of, and who would have died more contented if we had once more met.“

Bestürzt eilte Hamilton zu Catherine, seiner sterbenskranken Geliebten; beide gestanden sich, dass sie nie aufgehört hatten, einander zu lieben. Er überreichte ihr das erste druckfrische Exemplar seiner Vorlesungen über Quaternionen.

Nach ihrem Tod stürzte sich Hamilton erneut in die Arbeit; ihm war bewusst geworden, dass die Lesbarkeit seiner *Lectures* verbessert werden müsste. Sieben Jahre lang schrieb er an den *Elements of Quaternions,* die *Elemente* des Euklid als Maßstab vor Augen. Als er 1865 starb, umfasste das Werk 800 Seiten und war immer noch nicht fertig; einer seiner Söhne ergänzte die fehlenden Seiten für die Drucklegung.

Kurz vor seinem Tod erreichte ihn noch die Nachricht, dass die *National Academy of Sciences of the USA* ihn zum ersten ausländischen Mitglied ernannt hatte.

17.3 Mit welchen (mathematischen) Themen beschäftigte sich Hamilton außerdem?

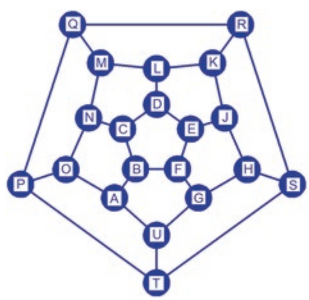
Mit dem Namen Hamilton verbindet man vor allem Fortschritte in der Vektoralgebra (s. o.) und in der theoretischen Physik.

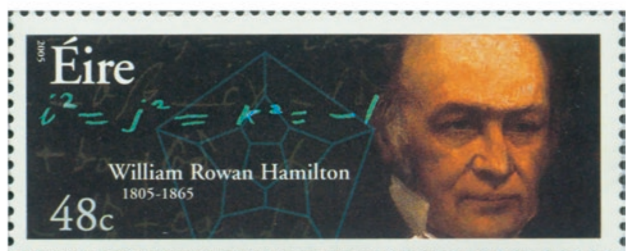
Wichtige Impulse durch ihn erhielt aber auch ein weiteres mathematisches Gebiet, die von Leonhard Euler begründete Graphentheorie (vgl. Kap. 14).

Nach Hamilton benannt ist das sog. **Hamilton-Kreis-Problem,** bei dem es darum geht, in einem gegebenen Graphen einen Rundweg zu finden, der durch *alle Knoten* verläuft, ohne dass eine Kante doppelt durchlaufen wird – im Unterschied zum Euler-Kreis, bei dem es darum geht, einen geschlossenen Weg zu finden, bei dem *alle Kanten* durchlaufen werden.

Der Hintergrund für die Namensgebung war zunächst eine spezielle Frage Hamiltons, nämlich ob es auf den platonischen Körpern einen solchen geschlossenen Weg gibt.

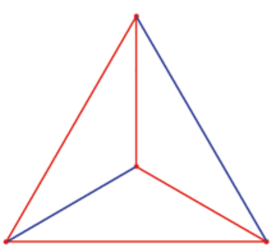
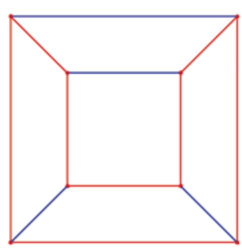
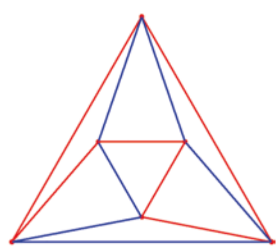
Hamilton verkaufte die Idee hierzu sogar als Spiel *(Icosian game)* – eine Rundreise durch 20 Städte dieser Welt. Die Anfangsbuchstaben der Städtenamen sind in den kreisförmigen Feldern eingetragen (vgl. folgende Abb.).

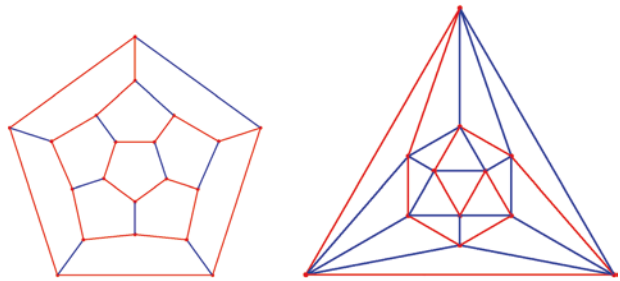




Um die Hamilton'sche Frage zu klären, betrachtet man am besten die Darstellung der platonischen Körper in der Form eines sog. Schlegel-Diagramms (vgl. Kap. 14).

In den folgenden Grafiken ist jeweils ein möglicher Hamilton-Weg in Rot eingezeichnet. Wie oben angegeben, führen diese Rundwege zwar durch alle Eckpunkte der Körper, aber nicht notwendig über alle Kanten.



Hamilton-Wege in beliebigen Graphen zu finden, ist i. A. mit großem Suchaufwand verbunden; das Problem gehört zu den 21 klassischen NP-vollständigen Problemen, d. h., vermutlich existiert kein effizienter Suchalgorithmus.

17.4 Literaturhinweise

Eine wichtige Adresse zum Auffinden von Informationen über Mathematiker und deren wissenschaftliche Leistungen ist die Homepage der St. Andrews University.

Informationen über Hamilton findet man unter:

- www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hamilton.html
- Strick, Heinz Klaus (2010): *Kalenderblatt über Hamilton,* www.spektrum.de/wissen/william-r-hamilton-1805-1865/1044340
- Strick, Heinz Klaus (2015): *Kalenderblatt über Cayley,* www.spektrum.de/wissen/arthur-cayley-der-anwalt-mit-dem-unstillbaren-hang-zur-mathematik/1324258

Einen informativen Überblick über die Geschichte der komplexen Zahlen findet man in:

- www.math.uri.edu/~merino/spring06/mth562/ShortHistoryComplexNumbers2006.pdf
- Pieper, Herbert (1999): *Die komplexen Zahlen,* Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main

Darüber hinaus sind umfangreiche Informationen zu diesem Thema enthalten in:

- Eschenburg, Jost-Hinrich (2017): *Sternstunden der Mathematik,* Springer, Heidelberg
- Peiffer, Jeanne, Dahan-Dalmedico, Amy (1994): *Wege und Irrwege – eine Geschichte der Mathematik,* Birkhäuser, Basel

Eine neue Untersuchung zur Person Hamiltons und zu den über ihn entstandenen Vorurteilen ist enthalten in:

- van Weerden, Anne, Wepster, Stephen (2017): *A most gossiped about genius: Sir William Rowan Hamilton,* Journal of the British Society for the History of Mathematics, Vol. 33, 1; download möglich unter www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/17498430.2017.1400821

Wikipedia-Artikel in deutscher, englischer und französischer Sprache zu den Stichwörtern:

- William Rowan Hamilton
- Artur Cayley
- John Thomas Graves
- Komplexe Zahlen (Complex number, Nombre complexe)
- Complex plane, Plane complexe (Sonderbeiträge nur in englischer bzw. französischer Sprache)
- Histoire des nombres complexes (nur in französischer Sprache)
- Quaternion (Quaternion, Quaternion)
- Oktonionen (Octonion, Octonion)
- Hyperkomplexe Zahlen (Hypercomplex number, nombre hypercomplexe)
- Hamiltonkreisproblem (Hamiltonian path, Graphe hamiltonien)

18 Georg Cantor – Erforscher des Unendlichen

In der Mathematik muss die Kunst, eine Frage zu stellen, höher bewertet werden als die Kunst, diese Frage zu lösen.

Es gibt wohl kaum einen anderen Mathematiker, über den die Meinungen der zeitgenössischen Fachkollegen so weit auseinandergingen wie über Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor:

Für die einen war Cantor *ein Verderber der Jugend* (Leopold Kronecker), für die anderen ein begnadeter Forscher: *Cantor gehört zu den größten und genialsten Mathematikern aller Länder und aller Zeiten* (Edmund Landau).

Die von Cantor geschaffene Mengenlehre (die er anfangs noch als *Mannigfaltigkeitslehre* bezeichnete) veränderte die Mathematik grundlegend. Seine Entdeckungen über die Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit von Mengen gehören zu den bemerkenswertesten Erkenntnissen des 19. Jahrhunderts.

H. K. Strick, *Mathematik – einfach genial!*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-60449-6_18

Was Cantor als „Menge“ bezeichnete, gilt nahezu unverändert noch heute:

Unter einer „Menge“ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente“ von M genannt werden) zu einem Ganzen.

(zitiert aus dem zusammenfassenden Artikel *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* (1895), *Mathematische Annalen*).

18.1 Einfach genial: Georg Cantor unterscheidet Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit von unendlichen Mengen

Betrachtet man zwei *endliche* Mengen A und B, dann kann man i. A. leicht entscheiden, welche von den beiden Mengen größer ist als die andere oder ob beide Mengen gleich groß sind:

Man zählt die Elemente der beiden Mengen und kann dann entscheiden, welche der drei Aussagen gilt: entweder $|A| > |B|$ oder $|A| < |B|$ oder $|A| = |B|$.

Im Prinzip nummeriert man beim Abzählen die Elemente durch. Für eine n-elementige Menge A und eine m-elementige Menge B, also $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ und $B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_m\}$, gilt dann: $n > m$ oder $n < m$ oder $n = m$.

Bei *unendlichen* Mengen jedoch ist dies so nicht möglich.

18.1.1 Gleichmächtige unendliche Zahlenmengen

Bereits Galileo Galilei stellte in seinen *Discorsi e dimostrazioni matematiche* („Unterredungen und mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige“) aus dem Jahr 1638 ein Problem dar, das im Zusammenhang mit natürlichen Zahlen und den Quadratzahlen auftritt:

- Ist es korrekt zu sagen, dass es *weniger* Quadratzahlen als natürliche Zahlen gibt, weil nicht alle natürlichen Zahlen Quadratzahlen sind?

Denn man kann zwar jeder natürlichen Zahl n ihre Quadratzahl zuordnen $n \to n^2$, aber umgekehrt ist nicht jede natürliche Zahl auch eine Quadratzahl.

Andererseits kann man die Quadratzahlen durchnummerieren, d. h., man kann ihnen natürliche Zahlen zuordnen, beispielsweise $1^2 = 1 \to 1$, $2^2 = 4 \to 2$, $3^2 = 9 \to 3, \ldots$ und erfasst so *alle* Quadratzahlen mithilfe der natürlichen Zahlen.

Da es wenig Sinn macht, von der *Anzahl* der Elemente einer Menge zu sprechen, wenn es sich um eine *unendliche* Menge handelt, führte Georg Cantor den Begriff der **Mächtigkeit von Mengen** ein (anfangs verwendete er statt des Begriffs „gleichmächtige Mengen" den Ausdruck „äquivalente Mengen").

Statt des Begriffs der Mächtigkeit verwendete Cantor auch den der **Kardinalität**.

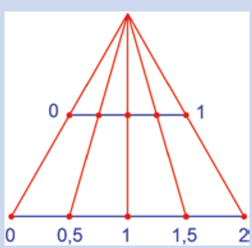
Definition

Gleichmächtige Mengen

Zwei Mengen M_1 und M_2 heißen *gleichmächtig* genau dann, wenn es zwischen den Elementen der beiden Mengen eine umkehrbar eindeutige Zuordnung gibt.

Beispiele gleichmächtiger Mengen

1. Endliche Mengen sind gleichmächtig, wenn sie gleich viele Elemente besitzen.
2. Die Menge der Quadratzahlen und die Menge $\mathbb{N}^*$ der natürlichen Zahlen sind gleichmächtig.
   Denn: Jeder natürlichen Zahl n kann eindeutig eine Quadratzahl zugeordnet werden $n \to n^2$ und jeder Quadratzahl n^2 eindeutig eine natürliche Zahl $n^2 \to n$; diese Zuordnung ist also *umkehrbar eindeutig.*
3. Die Menge der reellen Zahlen des Intervalls $[0; 1]$ und die Menge der reellen Zahlen des Intervalls $[0; 2]$ sind gleichmächtig, wie man der folgenden Skizze der Zuordnungen entnehmen kann.



Da man die natürlichen Zahlen (ab 1) üblicherweise zum *Abzählen* benutzt, führte Cantor für die zu $\mathbb{N}^*$ gleichmächtigen Mengen eine besondere Sprechweise ein:

Definition

Abzählbar unendliche Mengen

Ist eine Menge M gleichmächtig zu der Menge $\mathbb{N}^*$ der natürlichen Zahlen, dann bezeichnet man M als *abzählbar unendliche Menge.*

Die oben dargestellte Eigenschaft der Menge der Quadratzahlen kann also wie folgt zusammengefasst werden:

Satz

Mächtigkeit der Menge der Quadratzahlen

- Die Menge der Quadratzahlen und die Menge $\mathbb{N}^*$ der natürlichen Zahlen sind gleichmächtig.
- Die Menge der Quadratzahlen ist eine abzählbar unendliche Menge.

Hinweis Gemäß DIN gehört die Zahl 0 ebenfalls zur Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen; wenn man die Zahl 0 nicht berücksichtigen möchte, kann man dies mithilfe eines Sternchens kennzeichnen, also $\mathbb{N}^*$ notieren. Wenn man zählt, beginnt man aber üblicherweise mit der Zahl 1 – so auch bei den folgenden Aussagen über die Mächtigkeit von abzählbar unendlichen Mengen. Wenn man eine geeignete Zuordnungsvorschrift zur Menge $\mathbb{N}^*$ gefunden hat, dürfte die Verschiebung um 1 auch kein Problem sein.

Unendliche Mengen lassen sich durch die Eigenschaft charakterisieren, dass sie gleichmächtig sein können zu einer ihrer echten Teilmengen. Beispiele hierfür waren oben angegeben (Beispiele 2) und 3)); ein weiteres hierfür ist die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen.

Satz

Mächtigkeit der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen

- Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist gleichmächtig zur Menge $\mathbb{N}^*$ der natürlichen Zahlen.
- Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist eine abzählbar unendliche Menge.

Die Zuordnung der Elemente von $\mathbb{N}^*$ zu den Elementen von $\mathbb{Z}$ kann beispielsweise so erfolgen:

$n \rightarrow \frac{1}{2} \cdot n$, falls n eine *gerade* Zahl ist, und

$n \rightarrow \frac{1}{2} \cdot (1 - n)$, falls n eine *ungerade* Zahl ist.

Die Zuordnung ist auch umkehrbar und auch diese Umkehrung ist eindeutig, und zwar:

- Jeder positiven ganzen Zahl z wird das Doppelte zugeordnet, also $z \to 2 \cdot z$, und
- jeder nichtpositiven ganzen Zahl z wird das Doppelte des Betrags vermehrt um 1 zugeordnet, also $z \to 2 \cdot |z| + 1$, d. h. $z \to -2 \cdot z + 1$.

$\mathbb{N}^*$	1	2	3	4	5	6	7	…
$\mathbb{Z}$	0	+1	-1	+2	-2	+3	-3	…

Bereits Euklid hatte nachgewiesen, dass die Menge $\mathbb{P}$ der Primzahlen unendlich viele Elemente enthält. Als echte Teilmenge der natürlichen Zahlen ist sie daher sicherlich abzählbar – beim Abzählen lässt man die unendlich vielen, zwischen den Primzahlen liegenden zusammengesetzten Zahlen weg.

$\mathbb{N}^*$	1	2	3	4	5	6	7	…
$\mathbb{P}$	2	3	5	7	11	13	17	…

Bis heute wurde aber leider keine Berechnungsvorschrift für Primzahlen gefunden, sodass man „ausrechnen" könnte, welcher Nummer eine bestimmte Primzahl zugeordnet ist.

18.1.2 Mächtigkeit der Menge der rationalen Zahlen

Im Jahr 1873 entdeckte Cantor ein Verfahren, durch das die Elemente der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen, also die Menge aller Brüche der Form $\frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}^*$, numeriert werden können, d. h., man kann eine umkehrbar eindeutige Zuordnungsvorschrift zwischen den unendlich vielen Elementen von $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}^*$ angeben.

Wir beschränken uns hier auf den Nachweis für die Menge $\mathbb{Q}^+$ der positiven rationalen Zahlen, also auf die Brüche, deren Zähler und Nenner natürliche Zahlen sind.

Dazu notiert man in einem 2-dimensionalen Schema alle Brüche, und zwar in der ersten Zeile alle mit Nenner 1, in der zweiten Zeile alle mit Nenner 2 usw., vgl. Abb. 18.1.

Zwar werden durch dieses Schema unendlich viele Brüche mehrfach erfasst, da zu einem Bruch aus zueinander teilerfremden natürlichen Zahlen auch unendlich viele erweiterte Brüche gehören (beispielsweise die natürliche Zahl $1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \ldots$ oder der echte Bruch $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \ldots$), aber man kann beim Abzählen die Brüche weglassen, die bereits vorgekommen sind.

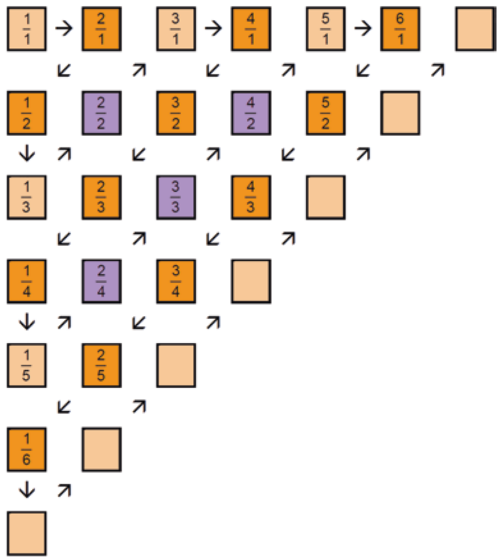


Abb. 18.1 Veranschaulichung des ersten Cantor'schen Diagonalverfahrens

Cantors entscheidende Idee ist in Abb. 18.1 dargestellt: Durch eine Zickzacklinie werden die (positiven) rationalen Zahlen in eine gewisse Reihenfolge gebracht, sodass sie abgezählt werden können, vgl. folgende Tabelle.

$\mathbb{N}^*$	1	2	3	4	5	6	7	...
$\mathbb{Q}^+$	$\frac{1}{1}=1$	$\frac{2}{1}=2$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{1}=3$	$\frac{4}{1}=4$	$\frac{3}{2}$	...

Berücksichtigt man abwechselnd die im Schema aufgeführten positiven Brüche und deren negative Gegenzahl und außerdem am Anfang noch die Zahl 0, dann werden auf diese Weise alle rationalen Zahlen erfasst.

Satz

Mächtigkeit der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen

- Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen und die Menge $\mathbb{N}^*$ der natürlichen Zahlen sind gleichmächtig.
- Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist eine abzählbar unendliche Menge.

Die in Abb. 18.1 veranschaulichte Abzählmethode wird als **erstes Cantor'sches Diagonalverfahren** bezeichnet.

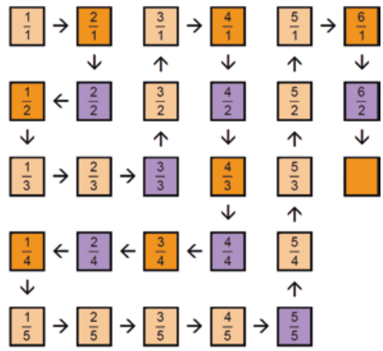


Abb. 18.2 Veranschaulichung einer alternativen Abzählmethode für $\mathbb{Q}^+$

Alternativ denkbar wäre auch ein Abzählverfahren, wie es in Abb. 18.2 angedeutet ist.

Das erste (von Cantor entwickelte) Verfahren (Abb. 18.1), die positiven rationalen Zahlen abzuzählen, ist einfacher zu beschreiben als das der alternativen Methode (Abb. 18.2), da für alle in einer Diagonale stehenden Brüche $\frac{p}{q}$ gilt, dass $p+q=k$, wobei $k=2, 3, 4, 5, \ldots$.

Die Cantor'sche Idee ist daher auch eher geeignet für ein Computerprogramm, mit dem man die Nummer der zugeordneten Brüche (also die zugeordneten natürlichen Zahlen) berechnet. Dabei könnte man zur Vereinfachung die diagonalen Linien jeweils in derselben Richtung durchlaufen (also anders als bei der Cantor'schen Zickzackmethode). Wenn $ggT(p;q) \neq 1$, entfällt jeweils die Zuordnung einer Nummer.

Ein weiteres geniales Verfahren, mit dem die Abzählbarkeit der Menge der positiven rationalen Zahlen gezeigt werden kann, wurde bereits 1858 vom deutschen Mathematiker Moritz Abraham Stern (1807–1894) entwickelt und 1861 vom französischen Uhrmacher Achille Brocot (1817–1878) in einem anderen Zusammenhang und unabhängig von Stern entdeckt. Einige Informationen über den sog. Stern-Brocot-Baum finden Sie in Abschn. 18.3.

Die Idee des ersten Cantor'schen Diagonalverfahrens lässt sich auf die Menge von Paaren von natürlichen Zahlen übertragen, vgl. Abb. 18.3a. Diese Paare natürlicher Zahlen sind die Gitterpunkte im ersten Quadranten eines Koordinatensystems, und diese können so nacheinander durchlaufen werden, vgl. Abb. 18.3b.

Satz

Mächtigkeit einer Menge von Paaren aus abzählbar unendlichen Mengen

- Sind M_1 und M_2 zwei Mengen von Objekten, die jeweils gleichmächtig zur Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen sind, dann ist auch die Menge $M_1 \times M_2 = \{(a\,;\,b)\,|a \in M_1 \;\wedge b \in M_2\}$ von Paaren $(a\,;\,b)$ gleichmächtig zur Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen.

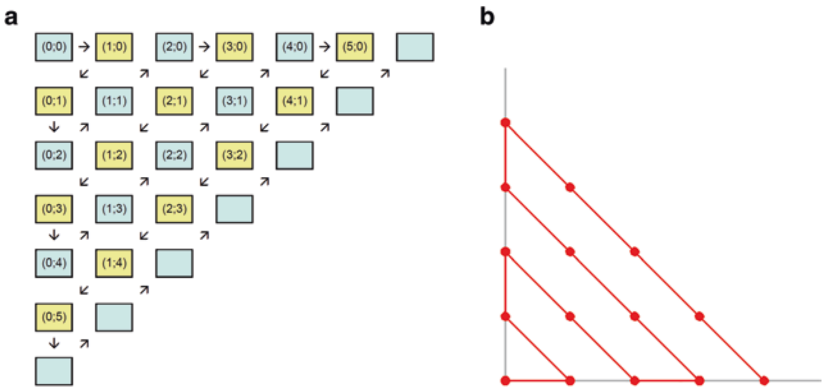


Abb. 18.3 Zur Abzählbarkeit von Mengen aus abzählbar unendlichen Paaren

- Die Menge von Paaren mit Elementen aus zwei abzählbar unendlichen Mengen ist wieder eine abzählbar unendliche Menge.

Das Verfahren, Paare natürlicher Zahlen abzuzählen, lässt sich verallgemeinern. Bei der Kombination von *drei* abzählbaren Mengen lassen sich die Elemente als 3-dimensionale Gitterpunkte veranschaulichen. Beim Abzählen dieser Punkte betrachtet man nacheinander jeweils diejenigen Punkte, deren Koordinatensumme s konstant ist, also beispielsweise

$s = 0 : (0; 0; 0)$

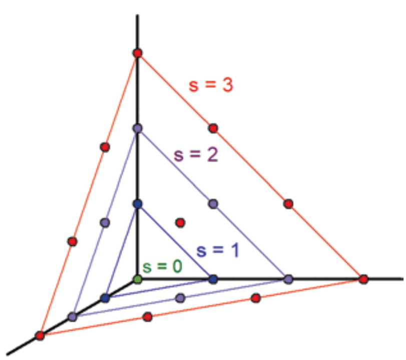
$s = 1 : (1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1)$

$s = 2 : (2; 0; 0), (0; 2; 0), (0; 0; 2), (1; 1; 0), (1; 0; 1), (0; 1; 1)$

$s = 3 : (3; 0; 0), (0; 3; 0), (0; 0; 3), (2; 1; 0), (2; 0; 1), (1; 2; 0), (0; 2; 1), (1; 0; 2), (0; 1; 2)$ und $(1; 1; 1)$

usw.

Die Gitterpunkte mit gleicher Koordinatensumme s liegen jeweils in einer Ebene mit der Koordinatengleichung $x_1 + x_2 + x_3 = s$, vgl. die folgende Abbildung.



Diese Idee lässt sich auch auf n-Tupel mit $n > 3$ übertragen; das ist allerdings nicht mehr so einfach zu veranschaulichen.

18.1.3 Mächtigkeit der Menge der algebraischen Zahlen

Nachdem Cantor die Abzählbarkeit der *rationalen* Zahlen bewiesen hatte, beschäftigte ihn die Frage, ob vielleicht auch die Menge der *irrationalen* Zahlen abzählbar ist, woraus man schließen könnte, dass die Menge der reellen Zahlen ebenfalls diese Eigenschaft hat.

Irrationale Zahlen wurden 2500 Jahre zuvor von griechischen Mathematikern als Streckenlängen in geometrischen Figuren entdeckt, z. B. $\sqrt{2}$ als Länge einer Diagonale im Einheitsquadrat oder $\sqrt{5}$ im Zusammenhang mit dem goldenen Schnitt.

Auch beim Lösen quadratischer Gleichungen können irrationale Lösungen (Terme mit Quadratwurzeln) auftreten; kubische Gleichungen können auf Kubikwurzeln führen.

Für Gleichungen höher als 4. Grades existieren zwar keine allgemeinen Lösungsformeln, wie Évariste Galois (1811–1832) und Niels Henrik Abel (1802–1829) beweisen konnten, aber auch solche Gleichungen können reelle Lösungen besitzen, die jedoch nicht immer als Wurzelterme dargestellt werden können.

Diejenigen *reellen* Zahlen, die als Lösungen von Polynomgleichungen auftreten können, d. h. als Nullstellen von ganzrationalen Funktionen, bezeichnet man als **algebraische Zahlen**. (Die Bezeichnungsweise ist hier nicht einheitlich: Manchmal wird der Begriff „algebraische Zahl“ auch für *komplexe* Lösungen von Polynomgleichungen verwendet.)

Alle übrigen reellen Zahlen sind sog. **transzendente Zahlen.** Dass solche Zahlen überhaupt existieren, wurde 1844 von Joseph Liouville nachgewiesen, indem er eine transzendente Zahl konkret angab und zeigen konnte, dass es keine Polynomgleichung geben kann, deren Lösung diese Zahl ist. Zu den transzendenten Zahlen gehören beispielsweise die Euler’sche Zahl $e = 2{,}71828\ldots$ (Beweis der Transzendenz durch Charles Hermite 1873) und die Kreiszahl $\pi = 3{,}14159\ldots$ (Beweis durch Ferdinand Lindemann 1882).

Beispiele von algebraischen Zahlen

1. Alle rationalen Zahlen $\frac{p}{q}$ sind algebraische Zahlen, denn sie sind Lösung der *linearen* Gleichung $qx - p = 0$.
2. Die Lösungen von *quadratischen* Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$ sind algebraische Zahlen, wenn für die sog. Diskriminante D gilt: $D = b^2 - 4ac \geq 0$

Bekanntlich liegen die unendlich vielen rationalen Zahlen auf dem Zahlenstrahl *dicht* beieinander, denn – egal wie klein der Abstand zweier beliebiger rationaler Zahlen voneinander ist – zu den zugehörigen Punkten des Zahlenstrahls findet man stets noch einen weiteren rationalen Punkt, der dazwischen liegt, z. B. das arithmetische Mittel der beiden betrachteten Zahlen. Wie oben gezeigt wurde, sind diese Zahlen dennoch abzählbar.

Über die rationalen Zahlen hinaus befinden sich aber noch unendlich viele weitere algebraische Zahlen auf dem Zahlenstrahl. Und über diese Zahlen fand Georg Cantor heraus, dass sogar diese abzählbar sind:

Satz

Mächtigkeit der Menge $\mathbb{A}$ der algebraischen Zahlen

- Die Menge $\mathbb{A}$ der algebraischen Zahlen und die Menge $\mathbb{N}^*$ der natürlichen Zahlen sind gleichmächtig.
- Die Menge $\mathbb{A}$ der algebraischen Zahlen ist eine abzählbar unendliche Menge.

Zum Beweis des Satzes betrachtete Cantor die Menge aller ganzrationalen Funktionen n-ten Grades, also von Funktionen vom Typ $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ mit ganzzahligen Koeffizienten $a_n,\ a_{n-1},\ \ldots, a_1,\ a_0$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$, deren reelle Nullstellen die Menge $\mathbb{A}$ der algebraischen Zahlen bilden.

Um die ganzrationalen Funktionen in eine für das Abzählen geeignete Reihenfolge zu bringen, führte Cantor eine Größe h ein, die er als *Höhe des Polynoms* bezeichnete. Diese ist definiert durch die Summe aus dem Grad n des Polynoms und der Summe der Beträge der $n + 1$ Koeffizienten $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$:

$$h = n + a_n + |a_{n-1}| + \ \ldots\ + |a_1| + |\ a_0|$$

(beim Koeffizienten a_n genügt es, nur den Fall $a_n > 0$ zu betrachten).

- Für $h = 2$ findet man nur das Polynom 1. Grades $f(x) = 1 \cdot x + 0$, dessen Nullstelle $x = 0$ ist; das ist also die *erste* algebraische Zahl des Abzählvorgangs.
- Für $h = 3$ findet man die folgenden Polynome bzw. Nullstellen:

  $n = 1 :\ f(x) = 1 \cdot x + 1$ mit der Nullstelle $x = -1$ (*zweite* algebraische Zahl),
  $n = 1 :\ f(x) = 1 \cdot x - 1$ mit der Nullstelle $x = +1$ (*dritte* algebraische Zahl),
  $n = 1 :\ f(x) = 2 \cdot x + 0$ mit der Nullstelle $x = 0$ (bereits erfasst),
  $n = 2 :\ f(x) = 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0$ mit der Nullstelle $x = 0$ (bereits erfasst).

- Für $h = 4$ findet man die folgenden Polynome bzw. Nullstellen:

  $n = 1 :\ f(x) = 1 \cdot x + 2$ mit der Nullstelle $x = -2$ (*vierte* algebraische Zahl),
  $n = 1 :\ f(x) = 1 \cdot x - 2$ mit der Nullstelle $x = +2$ (*fünfte* algebraische Zahl),
  $n = 1 :\ f(x) = 2 \cdot x + 1$: mit der Nullstelle $x = -\frac{1}{2}$ (*sechste* algebraische Zahl),
  $n = 1 :\ f(x) = 2 \cdot x - 1$: mit der Nullstelle $x = +\frac{1}{2}$ (*siebte* algebraische Zahl),
  $n = 1 :\ f(x) = 3 \cdot x + 0$: mit der Nullstelle $x = 0$ (bereits erfasst),
  $n = 2 :\ f(x) = 1 \cdot x^2 + 1 \cdot x + 0$: mit den Nullstellen $x = 0$ bzw. $x = -1$ (erfasst),
  $n = 2 :\ f(x) = 1 \cdot x^2 - 1 \cdot x + 0$: mit den Nullstellen $x = 0$ bzw. $x = +1$ (erfasst),
  $n = 2 :\ f(x) = 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x - 1$ mit den Nullstellen $x = 1$ bzw. $x = -1$ (erfasst),
  $n = 2 :\ f(x) = 2 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0$ mit der Nullstelle $x = 0$ (bereits erfasst),
  $n = 3 :\ f(x) = 1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0$: mit der Nullstelle $x = 0$ (bereits erfasst).

- Für $h = 5$ findet man entsprechend die bis dahin nicht erfassten algebraischen Zahlen

$$-3; +3; -\tfrac{1}{3}; +\tfrac{1}{3}; -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{5}; -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{5}; +\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{5}; +\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{5};$$
$$-\sqrt{2}; +\sqrt{2}; -\tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}; +\tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2} \text{ usw.}$$

Zu jeder Höhe h findet man jeweils eine *endliche* Anzahl von algebraischen Zahlen. Durch das Verfahren werden systematisch alle Zahlen erfasst, die zur Zahlenmenge $\mathbb{A}$ gehören, und damit hat man ein Verfahren gefunden, die algebraischen Zahlen abzuzählen.

18.1.4 Die Überabzählbarkeit der Menge der transzendenten Zahlen

Vergeblich bemühte sich Cantor dann, die Abzählbarkeit *aller* reellen Zahlen zu beweisen. Mehrfach glaubte er einen solchen Beweis gefunden zu haben, bis er dann doch wieder einen Fehler in seinen Überlegungen entdeckte.

Aber dann stellte er fest: Das Gegenteil seiner ursprünglichen Vermutung war richtig – die Menge der reellen Zahlen ist *nicht* abzählbar!

Wir erläutern hier den von Cantor in den 1890er Jahren gefundenen (leichter verständlichen) indirekten Beweis; hierbei beschränkte er sich auf die reellen Zahlen zwischen 0 und 1; diese lassen sich als Dezimalzahlen mit einer Null vor dem Komma notieren.

Es werde also angenommen, dass die Menge der reellen Zahlen im Intervall]0; 1[abzählbar ist.

Wegen der angenommenen Abzählbarkeit gibt es eine Zahlenfolge $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$, durch die *alle* reellen Zahlen des Intervalls erfasst werden können, wobei.

$$\begin{aligned} x_1 &= 0{,}a_{11}\,a_{12}\,a_{13}\,a_{14}\ldots \\ x_2 &= 0{,}a_{21}\,a_{22}\,a_{23}\,a_{24}\ldots \\ x_3 &= 0{,}a_{31}\,a_{32}\,a_{33}\,a_{34}\ldots \\ x_4 &= 0{,}a_{41}\,a_{42}\,a_{43}\,a_{44}\ldots \end{aligned}$$

Hinweis Auch *endliche* Dezimalzahlen lassen sich als *unendliche* Dezimalzahlen notieren, beispielsweise gilt $0,5 = 0,4999\ldots = 0,4\overline{9}$.

Durch eine solche Folge werden jedoch tatsächlich *nicht alle* reellen Zahlen erfasst: Um einen Widerspruch zur o. a. Annahme aufzuzeigen, genügt es, eine solche Zahl anzugeben.

Dazu wählen wir eine Zahl $u = 0, u_1\, u_2\, u_3\, u_4\, \ldots$ so, dass

- $u_1 \neq a_{11}$ (damit unterscheidet sie sich in der ersten Dezimalstelle von x_1) *und*
- $u_2 \neq a_{22}$ (damit unterscheidet sie sich in der zweiten Dezimalstelle von x_2) *und*
- $u_3 \neq a_{33}$ (damit unterscheidet sie sich in der dritten Dezimalstelle von x_3) usw.

Die Zahl u kommt also in der Zahlenfolge $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ nicht vor! Somit ist gezeigt, dass es keine Zahlenfolge zum Abzählen der reellen Zahlen im Intervall $]0; 1[$ geben kann, also erst recht nicht für die Menge der reellen Zahlen insgesamt.

Diese Vorgehensweise Cantors wird als **zweites Cantor'sches Diagonalverfahren** bezeichnet, da die Ziffern der für den Widerspruch konstruierten Zahl u sich aus der Diagonale der Zifferndarstellung von $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ ergeben (oder genauer gesagt: weil die Ziffern in der Diagonale gezielt vermieden werden), vgl. folgende Abbildung.

$$\begin{aligned} x_1 &= 0{,}a_{11}\, a_{12}\, a_{13}\, a_{14} \ldots \\ x_2 &= 0{,}a_{21}\, a_{22}\, a_{23}\, a_{24} \ldots \\ x_3 &= 0{,}a_{31}\, a_{32}\, a_{33}\, a_{34} \ldots \\ x_4 &= 0{,}a_{41}\, a_{42}\, a_{43}\, a_{44} \ldots \end{aligned}$$

Cantor erkannte, dass es also mindestens zwei verschiedene Arten von „unendlich" geben muss. Für die Mächtigkeit der beiden Mengentypen verwendete er den hebräischen Buchstaben „aleph".

Es gilt also: $\aleph_0 = |\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{A}| < \aleph_1 = |\mathbb{R}|$

Da sich die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen als *nicht abzählbar* herausgestellt hat (heute benutzt man die Ausdrucksweise *überabzählbar*), die Teilmenge $\mathbb{A}$ der algebraischen Zahlen jedoch abzählbar ist, folgt, dass die Menge $\mathbb{T} = \mathbb{R} \backslash \mathbb{A}$ der transzendenten Zahlen überabzählbar ist.

Salopp ausgedrückt: Fast alle reellen Zahlen sind transzendent.

Diese Tatsache hat eine bemerkenswerte Konsequenz in der sog. *Maßtheorie* (das ist so etwas wie eine verallgemeinerte Integralrechnung). Betrachtet man auf dem Intervall $[0; 1]$ die Funktion *f*, die jedem $x \in \mathbb{A}$ den Funktionswert 0 zuordnet und allen anderen x-Werten den Funktionswert 1, dann gilt $\int\limits_0^1 f(x)dx = 1$, d. h., die unendlich vielen Nullstellen der Funktion spielen für die Bestimmung des „Flächeninhalts" der Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse keine Rolle!

Man kann sich dazu auch den folgenden Zufallsversuch vorstellen: Man wirft einen „unendlich schmalen" Dartpfeil auf das Intervall $[0; 1]$. Die Wahrscheinlichkeit, dass man dabei eine algebraische Zahl trifft, beträgt 0.

Satz

Mächtigkeit der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen

Die Menge $\mathbb{T}$ der transzendenten Zahlen und die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen sind überabzählbar.

Nach der Entdeckung der Überabzählbarkeit war Cantor der Überzeugung, dass mehrdimensionale Gebilde eine Mächtigkeit besitzen, die zu einer weiteren „Stufe“ der Unendlichkeit gehört. Zu seiner eigenen Überraschung fand er jedoch 1877 ein Verfahren, durch das eine umkehrbar eindeutige Zuordnung der Punkte des *Einheitsquadrats* $[0; 1] \times [0; 1]$ auf die Punkte des *Einheitsintervalls* $[0; 1]$ selbst erfolgen kann:

Dazu ordnet man einem Punkt $(x|y)$ des Einheitsquadrats mit $x = 0, a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, \ldots$ und $y = 0, b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, \ldots$ eine Zahl z des Intervalls $[0; 1]$ zu, nämlich $z = 0, a_1\, b_1\, a_2\, b_2\, a_3\, b_3\, a_4\, b_4\, \ldots$

Cantors eigener Kommentar in seiner Mitteilung an Dedekind:

„Je le vois, mais je ne le crois pas!“ (Ich sehe es, aber ich glaube es nicht!).

Die Überlegung für das (2-dimensionale) Einheitsquadrat lässt sich auf beliebige mehrdimensionale Gebilde übertragen, sodass man feststellen kann:

Satz

Mächtigkeit der Menge $\mathbb{R}^n$

Die Menge aller Paare, Tripel, …, n-Tupel von reellen Zahlen ist von derselben Mächtigkeit wie die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen selbst.

18.1.5 Die Cantor-Menge

1884 veröffentlichte Cantor eine Abhandlung über eines der ersten Fraktale der Mathematikgeschichte, das heute als **Cantor-Menge** bezeichnet wird:

Aus einer Strecke wird fortlaufend das mittlere Drittel herausgeschnitten:

- Im ersten Schritt zeichnet man das (abgeschlossene) Einheitsintervall $[0; 1]$.
- Im zweiten Schritt „wischt“ man das mittlere (offene) Intervall $]\frac{1}{3}; \frac{2}{3}[$ aus, sodass die beiden abgeschlossenen Intervalle $[0; \frac{1}{3}]$ und $[\frac{2}{3}; 1]$ übrig bleiben.
- Im dritten Schritt verfährt man mit den verbliebenen Teilintervallen so wie im Schritt zuvor: Man nimmt jeweils das offene mittlere Intervall heraus. So bleiben jetzt vier abgeschlossene Intervalle jeweils der Länge $\frac{1}{9}$ übrig: $[0; \frac{1}{9}]$, $[\frac{2}{9}; \frac{1}{3}]$, $[\frac{2}{3}; \frac{7}{9}]$ und $[\frac{8}{9}; 1]$

usw.

Die Gesamtlänge der jeweils übrig bleibenden Intervalle kann mithilfe des Terms $c_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ beschrieben werden. Offensichtlich gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = 0$.

Alle Punktmengen dieser Folge enthalten überabzählbar viele Punkte; die Gesamtlänge der Teilintervalle konvergiert jedoch gegen null.

Hinweis Die sog. Hausdorff-Dimension (benannt nach Felix Hausdorff, 1868–1942) der Cantor-Menge ist $D = \frac{\log(2)}{\log(3)} \approx 0{,}63$, da bei jedem Schritt zwei „Kopien“ erstellt werden, die mit dem Faktor $\frac{1}{3}$ verkleinert sind.

Mit diesem kurzen Hinweis auf die Cantor-Menge beschließen wir die Beschäftigung mit den genialen Entdeckungen Cantors. Bezüglich seiner Untersuchungen zur Algebra der Kardinalzahlen und der transfiniten Zahlen, zur Mächtigkeit der Potenzmengen und zum philosophischen Problem der aktualen bzw. potentiellen Unendlichkeit verweisen wir auf die u. a. Literatur (insbes. die Übersichtsartikel von Moore und von Fritsche).

18.2 Wer war Georg Cantor?

Georg Cantor wurde am 3. März 1845 in St. Petersburg als ältester Sohn der Eheleute Georg Waldemar Cantor und Maria Anna Böhm geboren. Der Vater war ein erfolgreicher Kaufmann und Börsenmakler in der russischen Hauptstadt, litt aber zunehmend unter den strengen Wintern, sodass er sich entschied, den Wohnsitz der Familie in das mildere Klima Deutschlands zu verlegen.

In Russland hatte der Junge die Elementarschule in der deutschen Kolonie besucht, die ca. 40.000 Einwohner der Stadt an der Newa umfasste. Nach der Übersiedlung nach Deutschland – Georg war zu diesem Zeitpunkt elf Jahre alt – kam er zunächst an eine Privatschule in Wiesbaden.

Bereits früh drängte der Vater seinen Sohn in eine berufliche Richtung, die den größten wirtschaftlichen Erfolg versprach: Er hatte die Hoffnung, dass sein ältester Sohn einmal „ein leuchtendes Gestirn am Horizonte der Ingenieure“ sein möge. Daher wechselte Georg im Alter von 14 Jahren nach Darmstadt an eine Realschule mit angeschlossener Höherer Gewerbeschule. Nach dem Schulabschluss mit exzellenten Noten, insbesondere in Mathematik, nahm Georg ein Studium an der Eidgenössischen Polytechnischen Schule in Zürich (heute ETH) auf.

Georg Cantor hätte übrigens genauso gut auch eine Karriere als Violinist einschlagen können – und hätte so das Erbe der beiden Großeltern mütterlicherseits fortgesetzt, die als angesehene Berufsmusiker in St. Petersburg tätig waren.

Als der Vater 1863 überraschend starb, wechselte Cantor nach Berlin, und endlich konnte er sich der „reinen Mathematik“ zuwenden. Er hörte Vorlesungen bei einigen der angesehensten Mathematiker dieser Zeit, bei Karl Weierstraß, Ernst Eduard Kummer und Leopold Kronecker; zwischenzeitlich verbrachte er auch ein Gastsemester in Göttingen.

Nach der Promotion 1867 über ein Thema aus der Zahlentheorie fand Cantor zunächst keine feste Stelle; als Privatdozent konnte er aber einen Lehrauftrag an der Universität in Halle wahrnehmen. Um seinen Lebensunterhalt zu bestreiten, unterrichtete er an einer Mädchenschule und an einer Einrichtung, in der Lehrer ausgebildet wurden.

Angeregt durch seinen Hallenser Kollegen Eduard Heine widmete sich Cantor einem Beweis, an dem sich Heine selbst, aber auch berühmte Mathematiker wie Peter Gustav Lejeune Dirichlet, Rudolf Lipschitz oder Bernhard Riemann vergeblich versucht hatten: Sein Beweis der eindeutigen Darstellbarkeit von Funktionen durch trigonometrische Reihen (sog. Fourier-Reihen, vgl. Kap. 16) führte zu seiner Berufung als *Außerordentlicher Professor* an der Universität Halle.

1872 lernte Cantor während eines Urlaubs in der Schweiz den Braunschweiger Mathematiker Richard Dedekind kennen, der sich intensiv mit der Frage beschäftigt hatte, wie man reelle Zahlen exakt definieren kann (sog. Dedekind'sche Schnitte). Aus dieser Zufallsbegegnung entwickelte sich in den folgenden Jahren eine rege, fruchtbare Korrespondenz. Dedekind war stets der Erste, den Cantor über seine oft überraschenden Entdeckungen informierte und um dessen konstruktiv-kritische Stellungnahme bat.

1874 heiratete Cantor eine Freundin seiner Schwester; in der glücklichen Ehe wurden sechs Kinder geboren.

Als Cantor 1877 eine umfangreiche Abhandlung über seine bisherigen Überlegungen in der angesehenen Zeitschrift *Crelle's Journal* einreichte (darunter auch den Beweis, dass das Einheitsintervall gleichmächtig ist zum n-dimensionalen Einheitswürfel), wurde zum ersten Mal massiver Widerstand spürbar.

Einer der Kritiker schrieb in einer Rezension zu Cantors Veröffentlichung: „Es scheint dem gesunden Menschenverstand völlig zu widerstreben", und führte das Ergebnis auf die „idealistischen Erfindungen" der Cantor'schen Theorie zurück.

Sein ehemaliger Lehrer und Freund Leopold Kronecker machte all seinen Einfluss als Herausgeber geltend, die Veröffentlichung zu verhindern; erst nach der Intervention von Dedekind wurde der Beitrag abgedruckt. Cantor reichte danach keine weiteren Beiträge mehr in *Crelle's Journal* ein; die nächsten sechs Abhandlungen erschienen daher in den *Mathematischen Annalen.*

Kroneckers Einwände bezogen sich nicht nur auf das von Cantor angewandte indirekte Beweisverfahren, das er – wie manche anderen Mathematiker – grundsätzlich ablehnte; er bezweifelte die Tatsache, dass irrationale Zahlen in der Natur „überhaupt existieren“; charakteristisch für diese von ihm vertretene Ansicht ist sein Spruch: *Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.*

Hinweis Logische Voraussetzung für die Anwendung des indirekten Beweisverfahren ist das sog. *Prinzip des ausgeschlossenen Dritten*: Entweder ist eine Aussage *wahr* oder sie ist *falsch* – eine dritte Möglichkeit gibt es nicht. Dieses Prinzip des *tertium non datur* wird u. a. von den sog. *konstruktivistischen* Mathematikern nicht anerkannt.

1879 endlich erhielt Cantor eine ordentliche Professur in Halle, nachdem er lange vergeblich darauf gehofft hat, an die angesehenere Universität in Berlin berufen zu werden, was aber Kronecker zu verhindern wusste. Ende 1881 starb Eduard Heine, und Cantor wünschte sich Dedekind als Nachfolger auf dem frei gewordenen Lehrstuhl in Halle. Als dieser ablehnte, von Braunschweig nach Halle zu wechseln, endete die gegenseitig fruchtbare Korrespondenz zwischen den beiden.

Cantors Veröffentlichungen in den *Mathematischen Annalen,* darunter die *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre,* hatten nicht die von ihm erhoffte positive Resonanz; vielmehr nahm die Zahl der Kritiker zu.

1874 hatte Cantors Umgebung zum ersten Mal wahrnehmen können, dass er unter starken Depressionen litt. Diese wurden später dadurch verstärkt, dass es Cantor nach so vielen erfolgreichen Forschungsergebnissen nicht gelang, die von ihm vermutete *Kontinuumshypothese* zu beweisen, aber auch nicht das Gegenteil der Aussage:

- **Kontinuumshypothese:** *Es gibt keine Menge, deren Mächtigkeit zwischen der Mächtigkeit $\aleph_0$ der natürlichen Zahlen und der Mächtigkeit $\aleph_1$ der reellen Zahlen liegt.*

Hinweis Erst in den 1960er Jahren konnte der amerikanische Mathematiker Paul Cohen zeigen, dass eine solche Aussage nicht aus den Axiomen der Mengenlehre gefolgert werden kann. Damit lässt sie sich grundsätzlich so weder beweisen noch widerlegen.

Vorübergehend verlagerte Cantor seine Aktivitäten: Er kaufte ein angemessen großes Haus, in das er mit seiner Frau und seinen Kindern einzog. Auch kümmerte er sich um die Gründung der *Deutschen Mathematiker-Vereinigung,* die 1891 zu einer ersten Tagung in Halle zusammenkam. Als Geste der Versöhnung lud er seinen größten Widersacher Kronecker ein, die Begrüßungsansprache zu halten, aber wegen eines Unfalls seiner Frau musste dieser absagen. Cantor wurde für drei Jahre zum Vorsitzenden der DMV gewählt. An der Mitgliederversammlung 1893 in München konnte Cantor wegen Erkrankung nicht teilnehmen.

Auf einem internationalen Mathematikerkongress in Zürich im Jahr 1897 wurden Cantors Verdienste durch Vorträge von Adolf Hurwitz und Jacques Hadamard herausgestellt; auch kam es zu einer Versöhnung mit Dedekind.

Allerdings fand Cantor danach nicht mehr zu seiner früheren Schaffenskraft zurück. In der Zwischenzeit war er selbst auf Paradoxien gestoßen, die mit den von ihm verfassten Definitionen der Mengenlehre zusammenhingen, und er fand keinen Weg, wie diese Probleme aufgelöst werden könnten.

Für den französischen Mathematiker Henri Poincaré waren die Paradoxien der Nachweis, dass die Mengenlehre ein Irrweg ist: *Der größte Teil der Ideen der Cantor'schen Mengenlehre sollte ein für allemal aus der Mathematik verbannt werden.*

Cantor flüchtete in eine andere Welt: Mit großer Besessenheit versuchte er zu beweisen, dass es tatsächlich Francis Bacon war, der Shakespeares Werke verfasst hatte.

Sein Gesundheitszustand unterlag starken Schwankungen, seinen Universitätsverpflichtungen konnte er nur zeitweise nachkommen.

Auf dem internationalen Mathematikerkongress 1904 in Heidelberg behauptete ein Referent in Cantors Anwesenheit, dass die Grundlagen der Cantor'schen Mengenlehre erhebliche Fehler enthielten. Zwar konnte Ernst Zermelo die Vorwürfe unmittelbar entkräften, aber Cantor war erneut zutiefst verletzt.

Verschiedene Universitäten und wissenschaftliche Gesellschaften ehrten Cantor für sein Lebenswerk, beispielsweise verlieh ihm die *Royal Society* im Jahr 1904 ihre höchste Auszeichnung, die Sylvester-Medaille („For his brilliant researches in the theories of aggregates and of sets of points of the arithmetic continuum, of transfinite numbers, and Fouriers series", *zu Deutsch:* Für seine brillanten Forschungen zur Mannigfaltigkeitslehre und zur Theorie von Punktmengen im arithmetischen Kontinuum, von transfiniten Zahlen und Fourier-Reihen).

1911 wurde Cantor von der schottischen St. Andrews University aus Anlass des 500-jährigen Hochschulbestehens als Ehrengast eingeladen. Hier hoffte er Bertrand Russell zu treffen, der sich in den kürzlich erschienenen *Principia Mathematica* mit Cantors Mengenlehre und den Paradoxien auseinandergesetzt hatte. Als dieser wegen Krankheit nicht in der Lage war, an der Tagung teilzunehmen, nutzte Cantor die Veranstaltung nur für Gespräche über seine Bacon-Shakespeare-Theorie. Im folgenden Jahr konnte er wegen Krankheit die Ehrendoktorwürde der St. Andrews University nicht entgegennehmen.

Cantors Emeritierung erfolgte 1913. Eine geplante Feier anlässlich des 70. Geburtstages wurde wegen des Weltkriegs abgesagt. Sein gesundheitlicher Zustand verschlechterte sich zusehends, auch wegen kriegsbedingter Mangelernährung.

Sein letztes Lebensjahr verbrachte Cantor in der psychiatrischen Klinik in Halle; er starb dort am 6. Januar 1918.

Die Auseinandersetzungen über Cantors Entdeckungen gingen auch nach seinem Tod weiter. David Hilbert (1862–1943) allerdings ließ die Kritik nicht gelten:

Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen hat, soll uns niemand vertreiben können.

Zur Veranschaulichung der abzählbar unendlichen Zahlenmengen dachte er sich ein Gedankenexperiment aus, dass als **Hilberts Hotel** in die Literatur eingegangen ist:

Hilberts Hotel hat *unendlich* viele Zimmer (durchnummeriert mit den natürlichen Zahlen). Auch wenn alle Zimmer belegt sind,

- kann ein weiterer Gast aufgenommen werden (dieser bezieht Zimmer Nr. 1, die bisherigen Gäste ziehen von Zimmer Nr. n aus weiter in Zimmer Nr. $n+1$),
- können abzählbar unendlich viele weitere Gäste aufgenommen werden (diese beziehen die Zimmer mit ungerader Zimmernummer, die bisherigen Gäste ziehen in die Zimmer mit jeweils verdoppelter Zimmernummer um),
- können sogar die jeweils abzählbar unendlich vielen Gäste aus abzählbar unendlich vielen Bussen im Hotel untergebracht werden (gemäß dem Cantor'schen Diagonalverfahren).

Eine der Thesen, die Cantor anlässlich der Verteidigung seiner Dissertation formuliert hatte, lautete:

> In der Mathematik ist die Kunst, eine Frage zu stellen, höher zu bewerten als die Kunst, sie zu lösen.

Und David Hilbert schrieb:

> Das Unendliche hat wie keine andere Frage von jeher so tief das Gemüt des Menschen bewegt. Das Unendliche hat wie kaum eine andere Idee auf den Verstand so anregend und fruchtbar gewirkt; das Unendliche ist aber auch wie kein anderer Begriff so der Aufklärung bedürftig.

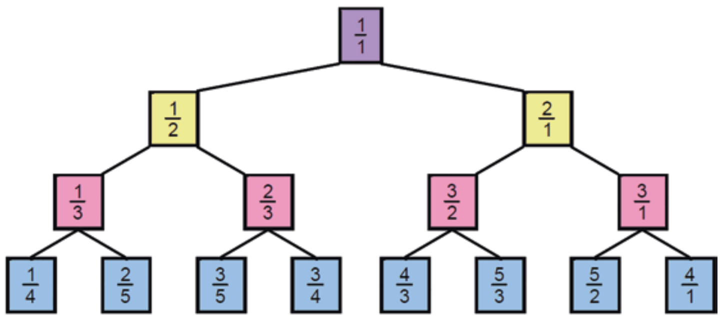
Cantor stellte viele Fragen, und er konnte auch viele Antworten geben.

18.3 Eine Alternative zum ersten Cantor'schen Diagonalverfahren: Der Stern-Brocot-Baum

Im Jahr 1858 veröffentlichte der Mathematiker **Moritz Abraham Stern** (1807–1894) im *Journal für reine und angewandte Mathematik* einen Beitrag mit dem Titel *Über eine zahlentheoretische Funktion* – diese Abhandlung ist die Grundlage für ein weiteres Verfahren, mit dem man die Menge der positiven rationalen Zahlen abzählen kann.

Übrigens Moritz Abraham Stern war der erste jüdische Gelehrte in Deutschland, der trotz der geltenden (antisemitischen) Beamtengesetze, welche die Aufnahme von Personen jüdischen Glaubens in den Staatsdienst untersagten, zum Ordinarius an einer deutschen Hochschule ernannt wurde. Allerdings vergingen 29 Jahre zwischen seiner Promotion (bei Carl Friedrich Gauß) und der Berufung auf den Lehrstuhl für Mathematik an der Universität Göttingen.

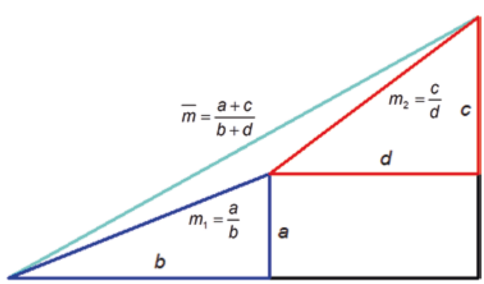
Die folgende Abbildung zeigt die ersten Stufen eines Baumdiagramms; die Stufen werden in der Literatur häufig als *Generationen* bezeichnet. Natürliche Zahlen werden in diesem Schema grundsätzlich als Brüche mit Nenner 1 notiert.



Ein Element der „Eltern"-Generation erhält man, indem man den **Medianten** der beiden zugehörigen „Kinder" bildet:

Der Mediant zweier Brüche $m_1 = \frac{a}{b}$, $m_2 = \frac{c}{d}$ ist definiert als ein Bruch, dessen Zähler sich aus der Summe $a + c$ der beiden Zähler a, c ergibt und dessen Nenner gleich der Summe $b + d$ der Nenner b, d der beiden Brüche ist: $\overline{m}\left(\frac{a}{b}\ ;\ \frac{c}{d}\right) = \frac{a+c}{b+d}$.

Der Mediant $\frac{a+c}{b+d}$ zweier Brüche $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ mit $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ liegt stets zwischen diesen beiden Brüchen: $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$, wie man aus Steigungsdreiecken in der folgenden Abbildung ablesen kann. (Statt des Begriffs *Mediant* findet man in der Literatur auch die Bezeichnung **Chuquet-Mittel,** da sich der französische Mathematiker Nicolas Chuquet (1445–1488) als Erster mit dieser besonderen Form eines Mittelwerts beschäftigt hatte).



Beim ersten Hinschauen scheint es aufwendig zu sein, wenn man das o. a. Baumdiagramm durch die nächste Generation ergänzen möchte.

Hier kann man sich aber eines einfachen Tricks bedienen: Am Anfang des Baums ergänzt man links und rechts noch die Brüche $\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{0}$, wobei letzterer für eine unendlich große Zahl steht. Außerdem führt man bei jedem Schritt auch alle Mitglieder der vorangehenden Generationen auf.

Dann ergeben sich die *Kinder* der *nächsten Generation* jeweils als Medianten zweier benachbarter Brüche:

$$\overline{m}\left(\tfrac{0}{1};\tfrac{1}{1}\right)=\tfrac{0+1}{1+1}=\tfrac{1}{2} \text{ und } \overline{m}\left(\tfrac{1}{1};\tfrac{1}{0}\right)=\tfrac{1+1}{1+0}=\tfrac{2}{1};$$
$$\overline{m}\left(\tfrac{0}{1};\tfrac{1}{2}\right)=\tfrac{0+1}{1+2}=\tfrac{1}{3},\overline{m}\left(\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{1}\right)=\tfrac{1+1}{2+1}=\tfrac{2}{3},\overline{m}\left(\tfrac{1}{1};\tfrac{2}{1}\right)=\tfrac{1+2}{1+1}=\tfrac{3}{2},\overline{m}\left(\tfrac{2}{1};\tfrac{1}{0}\right)=\tfrac{2+1}{1+0}=\tfrac{3}{1};$$
$$\overline{m}\left(\tfrac{0}{1};\tfrac{1}{3}\right)=\tfrac{0+1}{1+3}=\tfrac{1}{4},\overline{m}\left(\tfrac{1}{3};\tfrac{1}{2}\right)=\tfrac{1+1}{3+2}=\tfrac{2}{5},\overline{m}\left(\tfrac{1}{2};\tfrac{2}{3}\right)=\tfrac{1+2}{2+3}=\tfrac{3}{5},\overline{m}\left(\tfrac{2}{3};\tfrac{1}{1}\right)=\tfrac{2+1}{3+1}=\tfrac{3}{4} \text{ usw.}$$

0/1								1/1								1/0
0/1				1/2				1/1				2/1				1/0
0/1		1/3		1/2		2/3		1/1		3/2		2/1		3/1		1/0
0/1	1/4	1/3	2/5	1/2	3/5	2/3	3/4	1/1	4/3	3/2	5/3	2/1	5/2	3/1	4/1	1/0

Jeweils die Hälfte der Brüche einer neuen Generation ist kleiner als 1 bzw. größer als 1; spiegelt man Elemente des Schemas an der durch $\frac{1}{1}$ verlaufenden Achse, dann erhält man jeweils den Kehrwert des Elements. Die linke Hälfte der Tabelle hat die Eigenschaft, dass jeweils zwei Brüche zu $\frac{1}{2}$ gleich weit entfernt sind, z. B. $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$ und $\frac{3}{5}$.

Zu den $1+2+4+8$ Brüchen der ersten vier Generationen kommen dann weitere 16 Brüche in der nächsten Generation. Welche Brüche dies sind, ergibt sich unmittelbar aus der letzten Zeile des Schemas:

$$\tfrac{1}{5},\tfrac{2}{7},\tfrac{3}{8},\tfrac{3}{7},\tfrac{4}{7},\tfrac{5}{8},\tfrac{5}{7},\tfrac{4}{5},\tfrac{5}{4},\tfrac{7}{5},\tfrac{8}{5},\tfrac{7}{4},\tfrac{7}{3},\tfrac{8}{3},\tfrac{7}{2},\tfrac{5}{1}.$$

Die Anzahl der zusätzlich erfassten Brüche verdoppelt sich auf diese Weise von Generation zu Generation. Durch die Mediantenbildung erhält man stets Brüche, die jeweils *echt* zwischen den bis dahin erfassten Brüchen liegen. Im Unterschied zum ersten Diagonalverfahren von Cantor ist somit garantiert, dass kein Bruch doppelt auftritt.

Das Abzählen der positiven rationalen Zahlen geschieht dann *generationenweise* jeweils von links nach rechts, also

$$\left(\tfrac{1}{1}\right);\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{2}{1}\right);\left(\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3},\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{1}\right);\left(\tfrac{1}{4},\tfrac{2}{5},\tfrac{3}{5},\tfrac{3}{4},\tfrac{4}{3},\tfrac{5}{3},\tfrac{5}{2},\tfrac{4}{1}\right);\left(\tfrac{1}{5},\tfrac{2}{7},\tfrac{3}{8},\tfrac{3}{7},\tfrac{4}{7},\tfrac{5}{8},\tfrac{5}{7},\tfrac{4}{5},\tfrac{5}{4},\tfrac{7}{5},\tfrac{8}{5},\tfrac{7}{4},\tfrac{7}{3},\tfrac{8}{3},\tfrac{7}{2},\tfrac{5}{1}\right);$$
$$\left(\tfrac{1}{6},\tfrac{2}{9},\tfrac{3}{11},\tfrac{3}{10},\tfrac{4}{11},\tfrac{5}{13},\tfrac{5}{12},\tfrac{4}{9},\tfrac{5}{9},\tfrac{7}{12},\tfrac{8}{13},\tfrac{7}{11},\tfrac{7}{10},\tfrac{8}{11},\tfrac{7}{9},\tfrac{5}{6},\tfrac{6}{5},\tfrac{9}{7},\tfrac{11}{8},\tfrac{10}{7},\ldots,\tfrac{9}{2},\tfrac{6}{1}\right);\text{ usw.}$$

Was hat nun der berühmte französische Uhrmacher **Achille Brocot** hiermit zu tun?

Dieser beschäftigte sich mit der Frage, durch welche Kombination von Zahnrädern ein gewünschtes Übersetzungsverhältnis möglichst gut angenähert werden kann.

Welche Brüche besonders dicht beieinanderliegen, kann man mithilfe der Kettenbruchdarstellung dieser Brüche herausfinden (vgl. hierzu Kap. 15).

Die folgende Abbildung zeigt die Kettenbruchdarstellungen der Brüche, die in der linken Hälfte des o. a. Stern-Brocot-Baums stehen, also für die ersten vier Generationen:

							0;2							
			0;3								0;1,2			
	0;4				0;2,2				0;1,1,2				0;1,3	
0;5		0;3,2		0;2,1,2		0;2,3		0;1,1,3		0;1,1,1,2		0;1,2,2		0;1,4

Es fällt auf, dass es eine einfache Beziehung zwischen den Gliedern zweier aufeinanderfolgender Generationen gibt. Dieser Zusammenhang wird noch deutlicher, wenn man bedenkt, dass man jeden Kettenbruch auf zwei Arten darstellen kann:

Beispielsweise könnte man die Umwandlung $\frac{3}{5} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}} = [0;\, 1, 1, 2]$ auch noch einen Schritt künstlich weiterführen: $\frac{3}{5} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{1}}}} = [\,0;\ \ 1,\ 1,\ 1,\ 1\,]$.

Mit dieser „aufwendigeren" Schreibweise liest man aber im o. a. Baumdiagramm direkt ab: Die „Kinder" von

- $[0;\, 2] = [0;\, 1, 1]$ sind $[0;\, 3]$ und $[0;\, 1, 2]$,
- $[0;\, 3] = [0;\, 2, 1]$ sind $[0;\, 4]$ und $[0;\, 2, 2]$,
- $[0;\, 1, 2] = [0;\, 1, 1, 1]$ sind $[0;\, 1, 1, 2]$ und $[0;\, 1, 3]$,
- $[0;\, 4] = [0;\, 3, 1]$ sind $[0;\, 5]$ und $[0;\, 3, 2]$,
- $[0;\, 2, 2] = [0;\, 2, 1, 1]$ sind $[0;\, 2, 1, 2]$ und $[0;\, 2, 3]$,
- $[0;\, 1, 1, 2] = [0;\, 1, 1, 1, 1]$ sind $[0;\, 1, 1, 3]$ und $[0;\, 1, 1, 1, 2]$,

usw., d. h., geht man von den beiden möglichen Darstellungen eines Bruchs als Kettenbruch aus, dann ergeben sich die beiden „Kinder" dadurch, dass man die letzte Ziffer in beiden Darstellungen jeweils um 1 erhöht.

- Allgemein gilt: Die „Kinder" von $[a_0;\, a_1, a_2, \ldots, a_n] = [a_0;\, a_1, a_2, \ldots, a_n - 1, 1]$ sind $[a_0;\, a_1, a_2, \ldots, a_n + 1]$ und $[a_0;\, a_1, a_2, \ldots, a_n - 1, 2]$.

Das Abzählverfahren der Menge $\mathbb{Q}^+$ mithilfe des Stern-Brocot-Baums erfasst jede rationale Zahl. Möchte man wissen, zu welcher Generation eine bestimmte Bruchzahl gehört, dann kann man aus der Kettenbruchentwicklung des Bruchs auf den Vorgänger im Baum schließen und dieses Verfahren so lange fortsetzen, bis man an der Spitze des Baums angekommen ist.

Beispiel 1
Der Bruch $\frac{19}{30} = [0; 1, 1, 1, 2, 1, 2]$ stammt ab von $[0; 1, 1, 1, 2, 1, 1] = [0; 1, 1, 1, 2, 2] = \frac{12}{19}$. Dieser hat $[0; 1, 1, 1, 2, 1] = [0; 1, 1, 1, 3] = \frac{7}{11}$ als Vorgänger, dieser wiederum stammt ab von $[0; 1, 1, 1, 2] = \frac{5}{8}$ und dieser von $[0; 1, 1, 1, 1] = [0; 1, 1, 2] = \frac{3}{5}$. Da dieser Bruch im oben abgebildeten Stern-Brocot-Baum vorkommt, ergibt sich für $\frac{19}{30}$ die Generationenfolge
$\frac{1}{1} \to \frac{1}{2} \to \frac{2}{3} \to \frac{3}{5} \to \frac{5}{8} \to \frac{7}{11} \to \frac{12}{19} \to \frac{19}{30}$ und somit der Nachweis, dass $\frac{19}{30}$ im Stern-Brocot-Baum vorkommt.

Beispiel 2
Dem folgenden Schema kann man entnehmen, wie man den zum Bruch $\frac{17}{80}$ gehörenden Pfad im Stern-Brocot-Baum ermittelt.

Generation	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Bruch	17/80	10/47	7/33	4/19	3/14	2/9	1/5	1/4	1/3	1/2	1/1
Kettenbruch	0;4,1,2,2,2	0;4,1,2,2,1 = 0;4,1,2,3	0;4,1,2,2	0;4,1,2,1 = 0;4,1,3	0;4,1,2	0;4,1,1 = 0;4,2	0;4,1 = 0;5	0;4	0;3	0;2	0;1

Aus den beiden Beispielen wird deutlich, wie man die Anzahl der Stufen im Stern-Brocot-Baum bestimmt, um zu einer vorgegebenen positiven rationalen Zahl a zu gelangen:

- Nummer der Generation im Stern-Brocot-Baum, welche die Zahl a enthält = Summe der Ziffern der Kettenbruchdarstellung von a vermindert um 1.

Aufeinanderfolgende Brüche einer solchen Generationenfolge unterscheiden sich nur wenig voneinander und der Unterschied wird immer geringer, je weiter man von der Spitze des Baums entfernt ist.

Für das Übersetzungsverhältnis zweier Zahnräder bedeutet dies, dass man ggf. zwei Zahnräder mit einer geringeren Anzahl von Zähnen wählen kann, um das gewünschte Verhältnis mit sehr guter Näherung zu realisieren.

Ersetzt man im o. a. Beispiel $\frac{19}{30} = 0,6\overline{3}$ durch $\frac{7}{11} = 0,6\overline{36}$, dann ist der Fehler geringer als 0,3 %.

Das vom Mathematiker Moritz Abraham Stern entwickelte Abzählverfahren der positiven rationalen Zahlen mit dem Baumdiagramm ohne Dopplungen ist zweifelsohne eine geniale Entdeckung – wie genial war aber auch der Uhrmacher Achille Brocot, der aus einer völlig anderen Interessenslage zur gleichen Entdeckung kam.

18.4 Literaturhinweise

Eine wichtige Adresse zum Auffinden von Informationen über Mathematiker und deren wissenschaftliche Leistungen ist die Homepage der St. Andrews University.

Informationen über Georg Cantor findet man unter:

- www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cantor.html
- Strick, Heinz Klaus (2013), *Kalenderblatt über Georg Cantor,* www.spektrum.de/wissen/georg-cantor-1845-1918/1179303
- www-history.mcs.st-and.ac.uk/Strick/Cantor.pdf

Informationen über Cantor und die in diesem Kapitel angesprochenen Probleme findet man u. a. in:

- Courant, Richard, Robbins, Herbert (1992): *Was ist Mathematik?,* Springer, Heidelberg
- Kamke, Erich (1971), *Mengenlehre,* de Gruyter/Sammlung Göschen, Berlin
- Purkert, Walter & Ilgauds, Hans Joachim (1987): *Georg Cantor,* Birkhäuser, Basel
- Richter, Karin (2018), *Cantor fragt: Unendlich = Unendlich?*, www.mathematik-lehren.de/blog/zahlen-und-groessen/post/cantor-fragt-unendlich-unendlich/, bearbeitete Fassung eines Beitrags aus Heft 112 von *mathematik lehren,* Friedrich Verlag, Velber
- Wallace, David Foster (2009), *Die Entdeckung des Unendlichen – Georg Cantor und die Welt der Mathematik,* Piper, München

Empfohlen werden auch die folgenden Übersichtsartikel zum Problem der Unendlichkeit:

- Fritzsche, Klaus (2008), *Das Unendliche in der Mathematik,* www2.math.uni-wuppertal.de/~fritzsch/lectures/ref/unend08.pdf
- Moore, A. W. (1995): *Eine kurze Geschichte des Unendlichen,* Spektrum der Wissenschaften, Heidelberg www.spektrum.de/magazin/eine-kurze-geschichte-des-unendlichen/822347

Informationen zum Stern-Brocot-Baum findet man u. a. im Artikel von David Austin

- www.ams.org/publicoutreach/feature-column/fcarc-stern-brocot, den Originalartikel von Moritz Abraham Stern unter
- www.digizeitschriften.de/dms/img/?PID=GDZPPN002150301.

Wikipedia-Artikel in deutscher, englischer und französischer Sprache zu den Stichwörtern:

- Georg Cantor
- Mächtigkeit (Cardinality, Cardinalité)
- Galileis Paradoxon (Galileo's paradox; –)
- Abzählbare Menge (Countable set; Ensemble dénombrable)
- Cantors erstes/zweites Diagonalargument (Cantor's diagonal argument; –)
- Cantors erster Überabzählbarkeitsbeweis (Georg Cantor's first set theory article; –)
- Unendliche Menge (Infinite set; Ensemble infini)
- Aleph-Funktion (Aleph number; Aleph nombre)
- Potentielle und aktuale Unendlichkeit (Actual infinity/Infinity; Infini)
- Cantor-Menge (Cantor set; Ensemble de Cantor)
- Hilberts Hotel (Hilbert's paradox of the Grand hotel; Hôtel de Hilbert)
- Stern-Brocot-Baum (Stern-Brocot-Tree; Arbre de Stern-Brocot)
- Stern-Brocot-Folge (Stern's Diatomic Sequence; Suite diatomique de Stern)

Allgemeine Literaturhinweise

Alten, Heinz Wilhelm et al. (2003): *4000 Jahre Algebra*, Springer, Berlin

Ball, Rouse (1960): *A Short Account of the History of Mathematics*, Dover Publications, New York

Bell, Eric Temple (1986): *Men of Mathematics*, Simon & Schuster, New York

Berggren, Len (2011): *Mathematik im mittelalterlichen Islam*, Springer, Heidelberg

Brückler, Franka Miriam (2017/2018), *Geschichte der Mathematik kompakt* (2 Bände), Springer Spektrum, Berlin

Courant, Richard, Robbins, Herbert (1992): *Was ist Mathematik?*, Springer, Heidelberg

Dunham, William (1991): *Journey through Genius*, Penguin Books, New York

Eschenburg, Jost-Hinrich (2017): *Sternstunden der Mathematik*, Springer Spektrum, Wiesbaden

Fuchs, Dmitry, Tabachnikov, Serge (2011): *Ein Schaubild der Mathematik – 30 Vorlesungen über klassische Mathematik*, Springer, Heidelberg

Gericke, Helmuth (1992): *Mathematik in Antike und Orient*, Fourier, Wiesbaden

Herrmann, Dietmar (2014): *Die antike Mathematik*, Springer Spektrum, Berlin

Kordos, Marek (1999): *Streifzüge durch die Mathematikgeschichte*, Klett, Stuttgart

Merbach, Uta C., Boyer, Carl B. (2011): *A History of Mathematics*, 3rd Edition, John Wiley & Sons, Hoboken N.J.

Peiffer, Jeanne, Dahan-Dalmedico, Amy (1994): *Wege und Irrwege – eine Geschichte der Mathematik*, Birkhäuser, Basel

Scharlau, Winfried, Opolka, Hans (1980): *Von Fermat bis Minkowski. Eine Vorlesung über Zahlentheorie und ihre Entwicklung*, Springer, Heidelberg

Scriba, C.J., Schreiber, P.(2005): *5000 Jahre Geometrie*, Springer, Berlin

Simmons, George F. (1992): *Calculus Gems – Brief Lives and Memorable Mathematics*, Mc Graw-Hill, New York

Sonar, Thomas (2011): *3000 Jahre Analysis*, Springer, Heidelberg

van der Waerden, Bartel Leendert (1956): *Erwachende Wissenschaft – Ägyptische, babylonische und griechische Mathematik*, Birkhäuser, Basel

Weil, André (1992): *Zahlentheorie. Ein Gang durch die Geschichte von Hammurapi bis Legendre*, Birkhäuser, Basel

Winter, Heinrich (1991): *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht – Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik*, Vieweg, Braunschweig

Wußing, Hans (2008/2009): *6000 Jahre Mathematik* (2 Bände), Springer, Berlin

H. K. Strick, *Mathematik – einfach genial!*, https://doi.org/10.1007/978-3-662-60449-6

Stichwortverzeichnis

H. K. Strick, *Mathematik – einfach genial!*, https://doi.org/10.1007/978-3-662-60449-6