Kurt Fischer

Relativitätstheorie in einfachen Worten

Ein Einstieg ohne komplizierte Mathematik

Springer Spektrum

Relativitätstheorie in einfachen Worten

Kurt Fischer

Relativitätstheorie in einfachen Worten

Ein Einstieg ohne komplizierte Mathematik

Springer Spektrum

Kurt Fischer
Yamaguchi-Ken, Japan

ISBN 978-3-662-46965-1 ISBN 978-3-662-46966-8 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-46966-8

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum
Übersetzung der japanischen Ausgabe: Imeji dekiru soutaisei-riron von Kurt Fischer, erschienen bei Softbank Creative 2009,

Planung: Margit Maly

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Berlin Heidelberg ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
(www.springer.com)

Für Yukiko:
Durch dich wurde der Text erst verständlich.

Vorwort

Lieber Leser,

Sie halten soeben das Buch in Ihren Händen, das ich gerne gelesen hätte, als ich wissen wollte, was genau die Spezielle *und* die Allgemeine Relativitätstheorie aussagen. Ich lernte die Relativitätstheorie als Teenager in der Stadtbücherei kennen. Dort gab es zwei Arten von Büchern: die sogenannten allgemeinverständlichen mit bunten Bildern im Sciencefiction-Stil, die aber nichts wirklich erklärten. Und dann die ernsthaften Bücher, die wohl alles erklärten, die aber ein Studium der Theoretischen Physik stillschweigend voraussetzten. Trotzdem weckten sie mein Interesse an der Physik. Sie bestärkten mich auch darin, eines Tages diese Lücke zu füllen und dieses Buch zu schreiben, das sowohl die Spezielle als auch die Allgemeine Relativitätstheorie in einfachen Worten genau erklärt.

Dieses Buch handelt von Licht, Energie, Masse, Raum, Zeit und der **Schwerkraft**, also der **Gravitation**. Es erklärt die Spezielle und vor allem auch die Allgemeine Relativitätstheorie im Detail. Dabei benutzen wir viele **Gedankenexperimente**. Auf diese Weise ist auch Einstein selbst vorgegangen. Wir wollen so wie er die Theorie geometrisch und anschaulich verstehen.

Wir werden ab und zu auch auf etwas kompliziertere Sachverhalte stoßen, die wir aber anschaulich erklären. Wir brauchen keine höhere Mathematik, um das Wesentliche der Naturerscheinungen zu verstehen! Die Schönheit der Physik besteht aber auch darin, dass wir Naturerscheinungen im Detail *berechnen* können. Wir stellen daher für die wichtigsten Effekte auch die Gleichungen vor und lösen sie mit elementaren Rechenmethoden. Als Höhepunkt behandeln wir die berühmte Einstein-Gleichung der Gravitation und ihre exakte Lösung in einfachen Worten und Bildern. Wir werden sehen, warum die Allgemeine Relativitätstheorie die *einfachste* aller denkbaren Theorien der Gravitation ist.

Wir betonen dies, weil der Eindruck vorherrscht, dass man vor allem die Allgemeine Relativitätstheorie nur mit höherer Mathematik beschreiben kann, und dass sie deshalb nur einige wenige Experten verstehen können.

Aber schon in dem berühmten Lehrbuch „Gravitation“ aus dem Jahre 1973[1] wird beschrieben, wie man vorgehen sollte:

> Wir brauchen nur drei Grundsätze: Die Physik der Speziellen Relativitätstheorie, das Äquivalenzprinzip und dass die physikalischen Gesetze lokal gelten. Diese Grundsätze sind einfach und klar. Um sie anzuwenden, müssen wir darauf achten,
>
> A) die Raumzeit in lokal flache Stücke aufzuteilen, wo diese Grundsätze dann gelten, und
> B) diese Stücke zu einem sinnvollen Ganzen zusammenzusetzen.
>
> Die Allgemeine Relativitätstheorie besteht darin, dieses Aufteilen und wieder Zusammensetzen zu verfolgen; zu sehen, wie die gekrümmte Raumzeit sich formt; zu sehen, welche Konsequenzen es für die physikalischen Effekte gibt. [meine Übersetzung]

Das Buch, das Sie nun in Ihren Händen halten, setzt diesen Ansatz um.

Der Inhalt im Überblick

In den ersten vier Kapiteln stellen wir die **Spezielle Relativitätstheorie** vor. Wir erklären, wie Licht, Materie, Raum und Zeit sich gegenseitig beeinflussen.

1. Im ersten Kapitel führen wir die Grundlagen ein und erklären, warum Materie und Energie im Wesentlichen dasselbe sind.
2. In zweiten Kapitel werden wir sehen, warum Längen und Zeitabschnitte „relative“ Größen sind.
3. Im dritten Kapitel zeigt uns schon ein einfacher stromdurchflossener Draht, wie wir ihn aus dem täglichen Leben kennen, dass die Relativitätstheorie gilt.
4. Im vierten Kapitel werden wir die Erfahrung machen, dass schon auf einem sich drehenden Karussell die Geometrie, wie wir sie in der Schule gelernt haben, nicht mehr gilt.

In den Kapiteln fünf bis neun beschreiben wir die Gravitation, also die Allgemeine Relativitätstheorie.

5. Im fünften Kapitel erklären wir, warum die Gravitation uns überhaupt nicht an*zieht*, wie der Name „Schwer*kraft*“ uns ja einredet, und auch keine *Kraft* ist, sondern Raum und Zeit krümmt.

[1] C. Misner, K. Thorne, J. Wheeler, *Gravitation* (Freeman, 1973)

6. In Kapitel sechs werden wir genauer kennenlernen, welche Effekte die Krümmung des Raums und der Zeit hat.
7. In Kapitel sieben stellen wir die berühmte Einstein-Gleichung der Gravitation vor. Wir werden sehen, dass Einsteins Allgemeine Relativitätstheorie die *einfachste* aller denkbaren Theorien der Gravitation ist.
8. In Kapitel acht erklären wir im Detail die wichtigste *exakte* Lösung der Einstein-Gleichung der Gravitation, nämlich die Schwarzschild-Lösung, in einfachen Worten und Bildern.
9. In Kapitel neun wenden wir die exakten Lösungen der Einstein-Gleichung der Gravitation an und stellen die bekanntesten Voraussagen der Allgemeinen Relativitätstheorie vor, zum Beispiel, wie sehr sich ein Lichtstrahl krümmt, wenn er an der Sonne vorbeistreift, wie groß und schwer Schwarze Löcher sind, warum die Bahnen der Planeten um die Sonne sich als Ganzes langsam drehen, warum das Universum mit einem Urknall begann, aber warum die Zukunft unseres Universums für uns ungewiss ist.

Einheiten und Symbole

Alle Begriffe, die im Index vermerkt sind, wurden zur Hervorhebung im Text **fettgedruckt**.

Wir messen physikalische Größen in ihren **Einheiten**. Längen messen wir nur in Meter, die Zeit nur in Sekunden. „Minuten“, „Stunden“ oder „Tage“ verwenden wir *nicht*. Die Masse messen wir nur in Kilogramm. Andere im Buch vorkommende Einheiten sind einfach eine Kombination aus diesen Einheiten. Zum Beispiel messen wir die Geschwindigkeit in Meter pro Sekunde, *nicht* in Stundenkilometer. Das hat einen entscheidenden Vorteil: Während wir rechnen, können wir die Einheiten *weglassen*, weil wir von vornherein wissen, welche Einheit für das Ergebnis in Frage kommt.

Wir werden öfter auf sehr große oder sehr kleine Zahlen stoßen. Während wir zum Beispiel eine Zahl wie „tausend“ einfach als 1000 schreiben können, wird es bei der Zahl 1 Milliarde 250 Millionen Siebenhundertvierundachtzig als 1.250.000.784 schon schwieriger. Meist brauchen wir nur die ersten drei Ziffern, um die Zahl grob zu erfassen. Wir tun dies, indem wir die Anzahl der Ziffern hinter der ersten Ziffer zählen, das sind in diesem Falle 9. Wir schreiben die große Zahl dann als

$$1{,}25 \cdot 10^9$$

In ähnlicher Weise schreiben wir eine sehr kleine Zahl wie 0,000145 als $1{,}45 \cdot 10^{-4}$, indem wir die Nullen am Anfang zählen. Damit können wir solche Zahlen einfach multiplizieren: Wir nehmen $1{,}25 \cdot 10^9$ mit $1{,}45 \cdot 10^{-4}$ mal, indem wir zuerst 1,25 mit 1,45 malnehmen, was ungefähr 1,81 ergibt. Danach addieren wir die Exponenten $9 + (-4) = 5$, sodass das Ergebnis $\approx 1{,}81 \cdot 10^5$ ist. Hierbei bedeutet $\approx$ „**ungefähr gleich**".

Zum Beispiel benutzen wir für die Lichtgeschwindigkeit den groben Wert

$$\text{Lichtgeschwindigkeit} \approx 3{,}00 \cdot 10^8 \text{ Meter pro Sekunde} \tag{1}$$

Wir haben andere im Text vorkommende wichtige Zahlen in der Tab. 10.1 zusammengestellt.

Literaturverzeichnis

Bis auf ein Lehrbuch sind alle Verweise im Internet frei einsehbar.

Spezielle Formulierungen

Schließlich noch eine Bemerkung zu Redewendungen wie „ist weit genug entfernt" oder „schnell genug" und ähnlichen Aussagen. Wenn wir zum Beispiel schreiben

> ist der Astronaut weit genug von der Erde entfernt, kann er die Gravitation der Erde vernachlässigen

sind wir uns bewusst, dass die Gravitation der Erde *niemals* null wird, *gleichgültig* wie weit wir uns von der Erde entfernen. Darum geht es auch gar nicht, sondern darum, dass der Astronaut einen Effekt messen möchte, und dass die Gravitation diesen Effekt höchstens zu, sagen wir einmal, einem Prozent beeinflussen darf. Er ist „weit genug" von der Erde entfernt, wenn das der Fall ist. Natürlich ist es so, dass er sich noch weiter von der Erde entfernen muss, wenn die Gravitation das Experiment noch weniger beeinflussen soll. In diesem Sinne ist er dann „weit genug" von der Erde entfernt, wenn die Gravitation der Erde sein Experiment nur noch so wenig beeinflusst, wie *er es möchte*.

Tokuyama, Japan, April 2015 Kurt Fischer

Inhaltsverzeichnis

1
Licht, Materie und Energie

1.1 Lichtstrahlen

Ein Astronaut schwebt im Weltall und schaltet seine Taschenlampe oder seinen Laserpointer ein. Der austretende Lichtstrahl hat eine Geschwindigkeit von

$$\boxed{299.792.458 \text{ Meter pro Sekunde} \qquad (1.1)}$$

Das ist die **Geschwindigkeit des Lichts im Vakuum**, und zwar *exakt*.

Wie können wir das überprüfen? Zunächst einmal benötigen wir eine Apparatur, die die Geschwindigkeit des Lichts messen kann. In Abb. 1.1 haben wir diese als graue Box skizziert. Die andere Box auf der linken Seite ist nach rechts offen und stellt die Taschenlampe, den Laserpointer oder ganz allgemein den *Lichtsender* dar.

Der schwarze Pfeil stellt den Lichtstrahl dar, der die graue Box durchläuft, und das Messgerät zeigt die Lichtgeschwindigkeit in Meter pro Sekunde an. Wir wollen gar nicht wissen, wie eine solche Apparatur aussieht: Wir nehmen einfach an, dass es solche Messgeräte *gibt*.

Abb. 1.1 Ein Lichtstrahl bewegt sich von links nach rechts in Richtung des *schwarzen waagerechten Pfeils*. Die Box auf der *linken Seite* zeigt den Lichtsender, wie zum Beispiel eine Taschenlampe oder einen Laserpointer, und die *rechte, graue Box* ist der Geschwindigkeitsmesser für das Licht

K. Fischer, *Relativitätstheorie in einfachen Worten*, DOI 10.1007/978-3-662-46966-8_1,

1.2 Erstes Relativitätsprinzip: Geradlinige, gleichförmige Bewegungen sind relativ

Fangen wir einmal mit folgender Frage an: Ändert sich die Geschwindigkeit des Lichts aus der Taschenlampe, wenn sich die Taschenlampe bewegt? Gegenfrage: *Relativ* wozu soll sich die Taschenlampe denn bewegen?

Fahren wir in einem schnellen Zug, merken wir *nicht* die Geschwindigkeit, mit der er fährt, wir spüren vielmehr nur die *Unregelmäßigkeiten*, das Rütteln der Bewegung. Ein Beispiel zeigt Abb. 1.2. Ein schwarzer Ball liegt auf einem Glastisch in einem Zug. Fährt der Zug gleichförmig und geradlinig, wird der Ball *nicht* vom Tisch wegrollen. Bleiben wir bei diesem Beispiel: Wenn wir an einem Tisch sitzen, spüren wir dann nicht die ungeheure Geschwindigkeit, mit der wir uns bewegen? Welche Geschwindigkeit, werden Sie fragen. Nun, da ist zum Beispiel die große Geschwindigkeit, mit der wir uns am Tisch mit der Erde, für ein paar Minuten betrachtet, praktisch geradlinig und gleichförmig um die Sonne bewegen. Dazu kommt die große Geschwindigkeit, mit der sich das Sonnensystem in der Milchstraße bewegt. Und nicht zu vergessen, die Geschwindigkeit, mit der sich die Milchstraße bewegt – wohin eigentlich?

Seit dem ausgehenden Mittelalter wissen wir, das wir *grundsätzlich* eine gleichförmige, geradlinige Bewegung nicht absolut bestimmen können, auf *gar keine Weise*. Wir können immer den Standpunkt einnehmen, das *wir uns nicht bewegen*, wenn wir „am Tisch sitzen".

Auch wenn wir am Tisch in einem gleichförmig, geradlinig fahrenden Zug sitzen, können wir also von uns sagen, dass wir uns *nicht* bewegen. Mehr noch: Wir können sagen, dass sich der Bahnhof, durch den wir gerade fahren, mitsamt seiner Umgebung auf uns zubewegt. Zur gleichen Zeit steht ein Freund auf dem Bahnsteig dieses Bahnhofs und streitet das ab: Natürlich ist es der

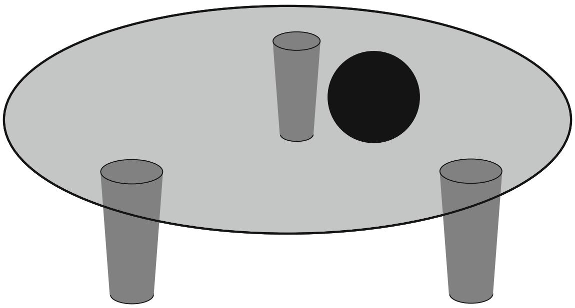

Abb. 1.2 Wenn sich der Zug ständig mit der gleichen Geschwindigkeit geradlinig bewegt, fängt der Ball auf dem Glastisch im Zug nicht an, sich zu bewegen

Zug, der sich auf den Bahnhof zubewegt, und der Bahnhof mit seiner Umgebung ruht!

Wer hat den nun Recht? Die Antwort ist: Beide haben Recht! Weder der Zug noch der Bahnhof bewegen sich an sich, sie bewegen sich nur *relativ* zueinander. Dies ist das **Erste Relativitätsprinzip**. Es stammt vom italienischen Physiker Galileo Galilei, der es schon vor ein paar hundert Jahren erkannt hat:

> Wir können die gleichförmige, geradlinige Geschwindigkeit eines Körpers nur *relativ* zu anderen Körpern messen. Die Naturgesetze für Körper hängen *nicht* von einer geradlinigen, gleichförmigen Geschwindigkeit ab, mit der sie sich gegenüber anderen Körpern bewegen.

1.3 Messung der Lichtgeschwindigkeit

Wir messen nun die Geschwindigkeit von Körpern *relativ* zum Boden wie es in Abb. 1.3 zu sehen ist. Die Taschenlampe bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 10.000 Meter pro Sekunde nach rechts und sendet einen Lichtstrahl aus, der durch das auf dem Boden stehende Messgerät geht. Damit nichts das Licht stört, haben wir alle Luft über dem Boden abgesaugt.

Trotzdem zeigt das Messgerät genau dieselbe Lichtgeschwindigkeit wie vorher an! Nun, eigentlich ist das gar nicht so verwunderlich. Eine ähnliche Situation zeigt Abb. 1.4: Der Lichtsender ist durch einen Lautsprecher ersetzt, und das Messgerät für die Lichtgeschwindigkeit durch eines, das die Schallgeschwindigkeit misst. Den Schall haben wir als weißen Pfeil dargestellt, die ruhende Luft als hellgrauen Hintergrund. Der Schall bewegt sich ungefähr mit einer Geschwindigkeit von 343 Meter pro Sekunde durch ruhende Luft.

Selbst wenn sich wie in Abb. 1.4 der Lautsprecher auf das Messgerät mit 40 Meter pro Sekunde zubewegt, messen wir exakt die gleiche Schallgeschwindigkeit, denn der Schall bewegt sich durch die ruhende Luft und bemerkt nicht,

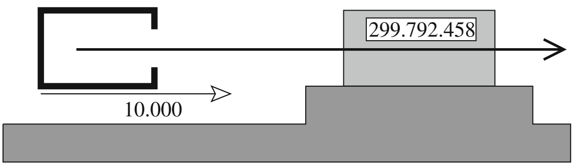

Abb. 1.3 Nun bewegt sich der Lichtsender mit 10.000 Meter pro Sekunde relativ zum Boden, der *dunkelgrau* dargestellt ist

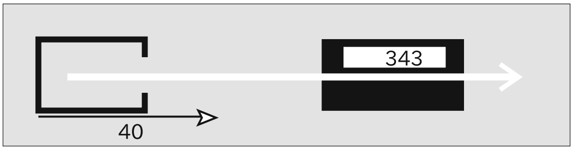

Abb. 1.4 Ein Lautsprecher bewegt sich mit der Geschwindigkeit von 40 Meter pro Sekunde nach rechts. Trotzdem messen wir die gleiche Schallgeschwindigkeit wie im Fall eines ruhenden Lautsprechers

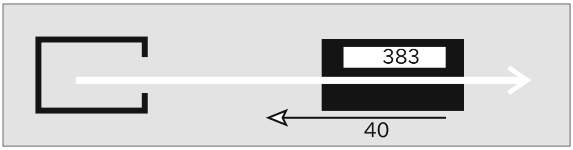

Abb. 1.5 Wenn sich das Messgerät auf den in der Luft ruhenden Lautsprecher zubewegt, messen wir eine höhere Schallgeschwindigkeit

dass sich der Lautsprecher bewegt. Ist das nicht dieselbe Situation wie beim Lichtstrahl?

Nein! Denn als Nächstes lassen wir den Lautsprecher in der Luft ruhen und bewegen uns mit dem Messgerät mit 40 Meter pro Sekunde auf den Lautsprecher zu.

Der Schall bewegt sich mit der Geschwindigkeit von 343 Meter pro Sekunde *relativ* zur ruhenden Luft nach rechts, und das Messgerät bewegt sich *relativ* zur ruhenden Luft mit 40 Meter pro Sekunde nach links. Also messen wir eine Schallgeschwindigkeit von

$$343 + 40 = 383 \text{ Meter pro Sekunde.}$$

Dies haben wir in Abb. 1.5 dargestellt.

1.4 Zweites Relativitätsprinzip: Die Lichtgeschwindigkeit ist absolut

Als Nächstes machen wir das gleiche Experiment mit Licht, wie in Abb. 1.6 dargestellt.

Das erstaunliche Resultat ist, dass sich die Lichtgeschwindigkeit überhaupt nicht ändert! Wir können folgern, dass Licht keine „Luft“, also kein Medium braucht, um sich fortzubewegen: Es bewegt sich *auch* durch das **Vakuum**. Die Lichtgeschwindigkeit ist eine Naturkonstante, die mit c bezeichnet wird.

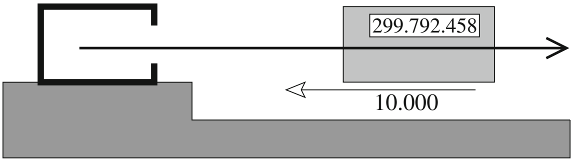

Abb. 1.6 Auch wenn sich das Messgerät auf den Lichtsender zubewegt, ändert sich die Lichtgeschwindigkeit nicht

Übrigens haben Physiker unlängst die Längeneinheit „Meter“ so definiert, dass die Lichtgeschwindigkeit genau den Wert von Gl. (1.1) hat.

> Licht bewegt sich durch das Vakuum stets mit derselben Geschwindigkeit c = 299.792.458 Meter pro Sekunde. Mit anderen Worten: **Die Lichtgeschwindigkeit ist eine absolute Geschwindigkeit**.

Dies ist das **Zweite Relativitätsprinzip**. Die Physiker haben dieses Gesetz seit über hundert Jahren in vielen Experimenten mit stets wachsender Genauigkeit getestet und bestätigt gefunden. Es ist der Ausgangspunkt der **Relativitätstheorie**.

Wir denken über erste Konsequenzen dieses Prinzips im nächsten Abschnitt nach und werden später noch genauer darauf eingehen.

1.5 Schneller als das Licht?

Offenbar gibt es Körper, die sich schneller als der Schall bewegen. Wenn wir das Knallen einer Peitsche im Zirkus hören, bewegt sich das Ende der Peitsche mit Überschallgeschwindigkeit. Ein anderes Beispiel ist ein Überschallflugzeug, mit dem wir dem Schall aus dem Sender in Abb. 1.7 entkommen können.

Weil sich aber das Licht für uns immer mit der gleichen Geschwindigkeit bewegt, können wir ihm mit einer geradlinigen, gleichförmigen Bewegung *nicht* entkommen: Nehmen wir einmal an, wir entfernen uns vom Lichtsender

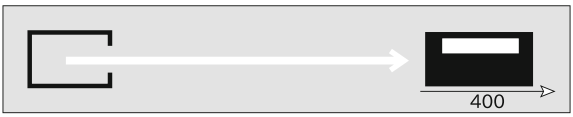

Abb. 1.7 Dem Schall entkommen

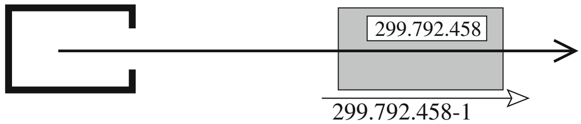

Abb. 1.8 Selbst wenn wir fast mit Lichtgeschwindigkeit einem Lichtstrahl entkommen wollen, fliegt der Lichtstrahl immer noch mit der Lichtgeschwindigkeit *c* an uns vorbei

mit der Geschwindigkeit 299.792.458 − 1 Meter pro Sekunde, wie in Abb. 1.8 dargestellt.

Trotzdem überholt uns der Lichtstrahl mit der gleichen Geschwindigkeit *c*! Mit anderen Worten, wir können dem Licht auf diese Weise nicht entkommen:

> Wir können uns nicht **schneller als das Licht** bewegen.

Nun denken Sie sicher, dass das Ganze etwas absonderlich klingt, oder? Ein anderes Beispiel soll das erläutern: Im Alltagsleben kommen alle sich bewegenden Dinge letztendlich zur Ruhe, wenn man ihnen keine Energie zuführt. Bälle hören auf zu springen oder zu rollen, Autos bleiben stehen, Flugzeuge sinken und erreichen den Boden und so weiter. Also könnte man meinen, das sei ein Naturgesetz. In Wirklichkeit ist es genau umgekehrt: Wenn man die Dinge nicht behindert, bewegen sie sich für immer mit der gleichen Geschwindigkeit geradlinig fort! Auf der Erde entzieht allerdings die Luftreibung oder die Rollreibung den Dingen andauernd Energie, heizt damit die Luft und Erde ein wenig auf und bringt auf diese Weise die Dinge zur Ruhe. Da wir uns an die Reibung gewöhnt haben, klingt das etwas sonderbar, aber wir wissen schon seit ein paar hundert Jahren, dass diese Sicht der Dinge richtig ist. Wir sollten also nicht vom Standpunkt unserer Alltagserfahrung urteilen, denn die reicht unter Umständen nicht aus.

1.6 Theorie gegen Praxis

Jeder anständige Ingenieur wird eine Aussage wie „ein Körper kann sich nicht schneller als das Licht bewegen“ natürlich nicht auf sich sitzen lassen. Also bauen wir eine sehr starke Rakete, mehr noch, eine fast ideale Rakete, die praktisch all ihren Treibstoff in Schub umwandelt. Als Nutzlast setzen wir auf die Raketenspitze nur ein kleines schwarzes Pfefferkorn, wie in Abb. 1.9 skizziert.

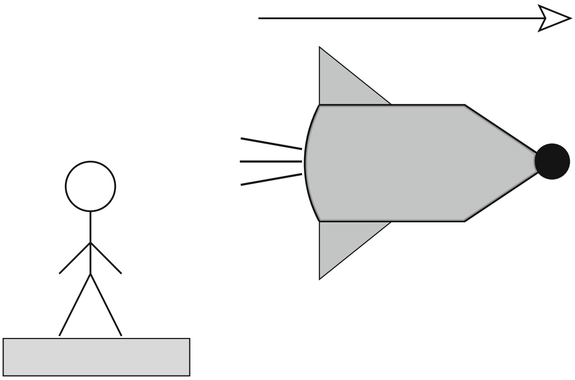

Abb. 1.9 Wir versuchen, mit einer Rakete ein Pfefferkorn zu beschleunigen

Wir stellen jedoch fest, dass es umso schwerer ist, das Pfefferkorn weiter zu **beschleunigen**, je schneller es fliegt. Entfernt es sich zum Beispiel von uns mit 99 Prozent der Lichtgeschwindigkeit, scheint es kaum noch auf den Schub der Rakete zu reagieren.

1.7 Masse und Trägheit

Es ist an der Zeit, uns zu fragen, was sich im Pfefferkorn verändert hat. Nun, die **träge Masse** des Pfefferkorns hat zugenommen! „Träge Masse" nennen wir meist kurz „**Masse**" oder „**Trägheit**". Diese „träge Masse" können wir folgendermaßen wahrnehmen: Wie in Abb. 1.10 skizziert, setzen wir einen gut polierten Stein auf eine Eisbahn, sodass wir die Reibung praktisch außer Acht lassen können. Trotzdem wird der Stein uns Widerstand leisten, wenn wir ihn anstoßen, um ihn zu beschleunigen. Ein doppelt so großer Stein wird uns

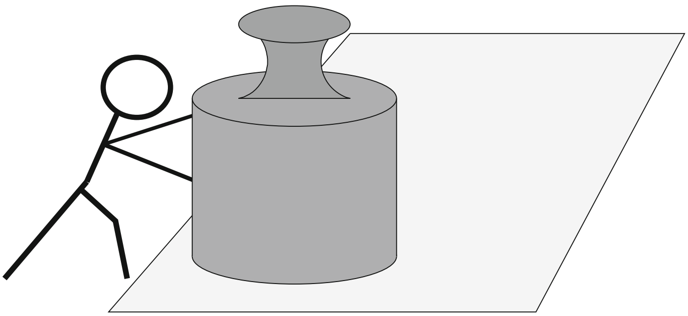

Abb. 1.10 Wir schieben ein Stück träger Masse auf einer Eisbahn an

doppelt so starken Widerstand leisten, denn ein doppelt so großer Stein hat die doppelte träge Masse. „Träge“ sein heißt ja gerade, im jetzigen Zustand verharren zu wollen. Anders gesagt: Materie will sich nicht von sich aus beschleunigen, weil sie Masse hat. Tatsächlich zeigt uns die Erfahrung, dass es *die* fundamentale Eigenschaft jeder Art von Materie ist, „Masse“ zu haben.

1.8 Masse und Gewicht: Eine erste Betrachtung

Normalerweise messen wir die Masse eines Steins, indem wir ihn *wiegen*. Aber warum in alles in der Welt sollte das *Gewicht* etwas damit zu tun haben, wie viel Masse etwas hat?

Denn je mehr Masse ein Stein hat, umso schwieriger wird es für uns, ihn in Bewegung zu setzen. Aber je *schwerer* der Stein ist, umso eher möchte er herunterfallen, sich also in Bewegung setzen!

Dazu kommt noch, dass der Stein zwar auf der Erde ein bestimmtes Gewicht hat, aber draußen im Weltraum, wo sich die meiste **Masse** befindet, hat er gar kein Gewicht. Gleichwohl setzt er uns selbst dort Widerstand entgegen, wenn wir ihn in Bewegung setzen wollen.

Allerdings gibt es einen tiefen Zusammenhang zwischen der trägen und der schweren Masse eines Körpers, auf den wir in Kap. 5 zurückkommen. Bis dahin verwenden wir nur die träge Masse.

Kommen wir zu unserem Beispiel des Pfefferkorns auf der Rakete zurück. Je größer die Geschwindigkeit ist, mit der sich das Pfefferkorn von uns entfernt, umso mehr setzt es einer Beschleunigung Widerstand entgegen. Mit anderen Worten: Die *Masse* des Pfefferkorns hat zugenommen. Allgemein gilt:

> Je schneller sich ein Körper relativ zu uns bewegt, umso mehr nimmt seine **Masse** zu.

Jedoch, von nichts kommt nichts, sodass wir uns nun fragen: Was haben wir denn dem Pfefferkorn hinzugefügt? Wodurch hat es an Masse gewonnen?

1.9 Energie

Indem wir den Treibstoff der Rakete verbrennen, haben wir dem Pfefferkorn **Bewegungsenergie** hinzugefügt. An dieser Stelle möchten wir einmal kurz verschiedene Formen der Energie vorstellen. Es gibt die Wärmeenergie, die elektrische Energie, die Bewegungsenergie und so weiter, aber wir wissen seit über hundert Jahren durch Experimente, dass wir *jede* Form der Energie in eine andere Form umwandeln können. Wenn wir Auto fahren, wandeln wir zum Beispiel die elektrische Energie, die in den chemischen Bindungen der Moleküle des Benzins sitzt, beim Verbrennen des Treibstoffs in die Bewegungsenergie der Moleküle um. Diese Bewegungsenergie wandelt sich dann über die Kolben in die Bewegungsenergie des Autos um, was wir ja auch wollen. Aber dadurch setzen wir auch die Luft um das Auto in Bewegung. Sie formt sich zu großen Wirbeln hinter dem Auto, die nacheinander abreißen und so den Großteil der Bewegungsenergie des Autos wieder fortführen. Diese Wirbel zerfallen nach und nach in immer kleinere Wirbel, bis sie durch die Reibung der Luftmoleküle in Wärme übergehen. Aber diese Wärme ist nichts anderes als die Bewegungsenergie von sich ungeordnet bewegenden Luftmolekülen und so weiter …

Es dauerte sehr lange, bis die Physiker durch Experimente zeigen konnten, dass man im Prinzip *jede* Form der Energie in *jede* andere umwandeln kann, und das *ohne* Verlust. Tatsächlich dauerte es ein paar hundert Jahre, bis man verstanden hatte, dass es so etwas wie die **Energie an sich** gibt. Denn warum sollten Wärme, Elektrizität oder ein fahrendes Auto denselben Stoff „Energie" enthalten? Aber bis jetzt fanden die Physiker in jedem Experiment bestätigt, dass die Energie, obwohl sie viele Erscheinungsformen kennt, doch immer Energie bleibt, und, was wichtig ist, dass sie niemals verschwindet oder erzeugt wird, sondern nur umgewandelt wird.

Energie messen wir in **Joule**. Ein Joule ist ziemlich genau die Bewegungsenergie, die ein Zwei-Kilogramm-Körper hat, wenn er sich mit 1 Meter pro Sekunde vorwärts bewegt.

Wir können also ein Joule Energie in verschiedene andere Formen der Energie umwandeln, aber es bleibt insgesamt ein Joule Energie. Wir betonen noch einmal, dass dies eine experimentell festgestellte Tatsache ist, die sich nicht beweisen lässt. Physiker sagen:

Die Energie bleibt erhalten: Wir können Energie nur in verschiedene Formen umwandeln, aber weder erzeugen noch vernichten.

Kommen wir wieder auf unsere Rakete zurück: Die Rakete hat das meiste der im Treibstoff steckenden Energie in die Bewegungsenergie des Pfefferkorns verwandelt. Mit anderen Worten: Die Rakete diente dazu, das Pfefferkorn mit Bewegungsenergie zu versorgen.

1.10 Masse und Bewegungsenergie

Wie können wir die Energie des Pfefferkorns messen? Wir stellen einfach eine dicke Wand in seinen Weg und lassen es gegen die Wand prallen. Je größer das Loch in der Wand ist, umso mehr Bewegungsenergie hatte das Pfefferkorn. Verwenden wir eine doppelt so starke Rakete, wird, grob gesprochen, das Loch in der Wand wohl doppelt so groß werden. Hatte aber die ursprüngliche Rakete das Pfefferkorn auf, sagen wir, 99 Prozent der Lichtgeschwindigkeit beschleunigt, dann hat es die doppelt so starke Rakete auf ungefähr 99,75 Prozent der Lichtgeschwindigkeit gebracht, was kein allzu großer Unterschied ist.

Wo aber steckt dann die doppelt so hohe Bewegungsenergie des Pfefferkorns, wenn es doch praktisch genauso schnell fliegt? Offenbar vergrößert sich die *Masse* des Pfefferkorns umso mehr, je mehr sich seine Geschwindigkeit der Lichtgeschwindigkeit annähert.

Mit anderen Worten: Je mehr Bewegungsenergie Materie enthält, umso mehr Masse enthält sie. Das legt nahe, dass Masse *an sich* eine Form der Energie ist. Ist vielleicht ein vor uns ruhender Stein eine Art von eingefrorener Bewegungsenergie?

1.11 Ruhemasse und Bewegungsenergie

Können wir die verschiedenen Formen der Energie ineinander umwandeln und ist die Masse *selbst* wirklich eine Form der Energie, sollten wir auch die **Ruhemasse** eines Steins in andere Energieformen umwandeln können. Bisher haben wir uns ruhende Masse wie einen Stein vorgestellt, also völlig unbewegt. Aber der „Stein“ ist aus Elektronen, Protonen und anderen Elementarteilchen aufgebaut, die sich andauernd umeinander bewegen. Diese Elementarteilchen ruhen *nicht*, selbst wenn der Stein als Ganzes ruht.

1.11.1 Innere Bewegungsenergie

Dazu kommt die im Stein vorhandene *Wärme*, die nichts anderes ist als die Bewegungsenergie der sich ungeordnet bewegenden Moleküle des Steins. Mit anderen Worten: Wenn wir den „Stein“ erwärmen, bewegen sich die Moleküle schneller, und ihre Bewegungsenergie nimmt zu. Das heißt, je heißer der Stein ist, umso mehr Masse hat er! Im folgenden Gedankenexperiment, dargestellt in Abb. 1.11, befassen wir uns mit einer solchen Bewegung der inneren Bestandteile der Materie.

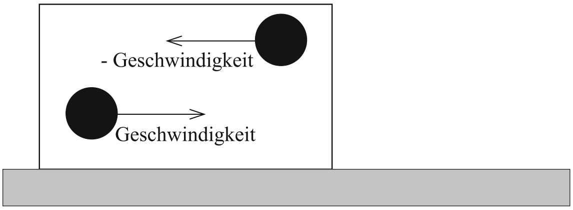

Abb. 1.11 Zwei Massen im Innern einer Box prallen gleichzeitig von der Innenwand ab und erhöhen so die **Ruhemasse** der Box. Die mit „Geschwindigkeit" bezeichneten Pfeile geben hier und in allen folgenden Abbildungen die Bewegungsrichtung und -größe an

Innerhalb einer Box bewegen sich zwei gleiche Bälle hin und her. Sie prallen jeweils zur gleichen Zeit von der linken und rechten Wand zurück, sodass sich die Box als Ganzes nicht bewegt. Je schneller sich die Bälle bewegen, umso mehr Bewegungsenergie und umso mehr Masse haben sie. Je schneller sich also die Bälle *innerhalb* der Box bewegen, umso größer wird die *Ruhemasse* der Box!

Wir berechnen im Abschn. 2.7, um wie viel die Masse eines sich bewegenden Körpers ansteigt.

Kommen wir nun wieder auf unseren ruhenden Stein zurück. Wie viel Prozent der Masse des Steins sind wohl Bewegungsenergie seiner Elementarteilchen? Das ist nicht so einfach zu beantworten. Je genauer wir hinsehen, umso mehr vermischen sich unsere Vorstellungen von „Masse" und „Energie": Sie scheinen zwei Seiten derselben Medaille zu sein!

1.11.2 Reine Energie

Wenn ruhende Masse Bewegungsenergie aufnehmen kann, wirft das die Frage auf, ob es nicht umgekehrt auch **reine Energie** geben kann, die keine **Ruhemasse** braucht. Wenn es eine solche Energie gibt, kann sie niemals ruhen, denn sie hat ja keine Ruhemasse und damit im Ruhen keine Energie. Aber genau so etwas haben wir ja gerade schon kennengelernt: *Licht* ist *reine* Energie! Mit welcher Geschwindigkeit wir uns auch bewegen, das Licht bewegt sich relativ zu uns immer mit der gleichen Geschwindigkeit c, und es kann niemals anhalten. Diese experimentell bestätigte Tatsache war der Ausgangspunkt für die Relativitätstheorie. Je mehr wir über diese Theorie nachdenken, umso mehr erstaunliche Tatsachen kommen ans Licht. Griffig formuliert:

Licht ist reine Energie, es hat keine Ruhemasse und bewegt sich *ruhelos* immer mit der Geschwindigkeit c.

Wenn also Masse und reine Energie nur zwei Seiten derselben Medaille sind, sollten wir die beiden mit einem Gedankenexperiment verknüpfen können. In der Tat hat sich Einstein selbst so ein Gedankenexperiment ausgedacht, das wir jetzt vorstellen wollen.

1.12 Trägheit von reiner Energie

Stellen wir uns eine Wand vor, die auf einer Eisbahn steht, wie in Abb. 1.12 skizziert. In der Wand sitzen Lichtquellen, die nach rechts Licht aussenden. Das bis jetzt ausgestrahlte Licht haben wir hellgrau gezeichnet.

Nachdem wir das Licht wieder ausgeschaltet haben, entfernt sich das Lichtpaket nach rechts, wie in Abb. 1.13 zu sehen.

Während sich das Lichtpaket im hellgrauen Volumen aufbaute, hat es gegen die Wand gedrückt: **Druck** *ist* Energie pro Volumen. Wie können wir das anschaulich verstehen? Denken wir an einen Schnellkochtopf. Wenn er unter Druck steht, enthält er Energie. Öffnen wir den Deckel, so entweicht diese Energie. Steht derselbe Schnellkochtopf unter doppelt so viel Druck, enthält er doppelt so viel Energie. Genauso enthält ein doppelt so großer Topf die doppelte Energie, wenn er unter dem ursprünglichen Druck steht. Mit ande-

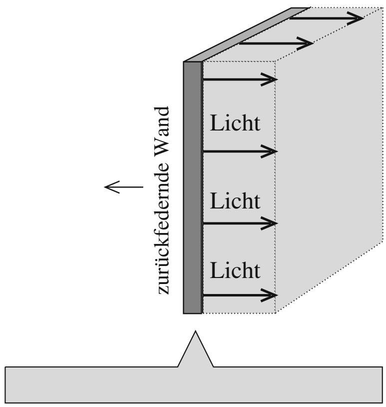

Abb. 1.12 Das Lichtpaket fängt jetzt gerade an, die Wand zu verlassen. Die Wand beginnt zurückzufedern. Der dreieckige Höcker im *grau* gezeichneten Boden zeigt den Massenmittelpunkt an

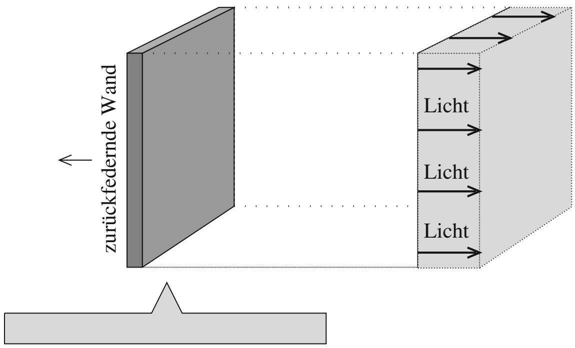

Abb. 1.13 Das Lichtpaket entfernt sich mit Lichtgeschwindigkeit von der Wand nach rechts. Die Wand federt langsam nach links

ren Worten: Die Energie des Schnellkochtopfes ergibt sich aus dem *Produkt* des Volumens und des darin herrschenden Drucks und der Druck, indem wir die im Volumen steckende Energie durch das Volumen teilen.

Daher drückt das aus der Wand entweichende Licht durch seine Energie gegen die Wand. Die Wand federt daher nach links zurück, das heißt, sie beginnt sich mit einer bestimmten Geschwindigkeit nach links zu bewegen. Aber das Ganze ist doch sonderbar: Die auf der Eisbahn stehende große Wand soll sich so einfach plötzlich nach links in Bewegung setzen, ohne das zum Ausgleich etwas Masse nach rechts wandert? Das kann nicht sein. Ohne Einfluss von außen muss der Mittelpunkt der Gesamtmasse immer am gleichen Ort verharren. Daher kann es nur eine Möglichkeit geben: Das Licht *selbst* trägt Masse!

Wir haben das Ganze in Abb. 1.14 schematisch zusammengefasst.

Wie viel Masse trägt das Licht? Das Licht, also reine Energie, drückte gegen die Wand. Wäre doppelt so viel Licht ausgetreten, hätte die Wand einen doppelt so großen Rückstoß erhalten. Wir folgern, dass ein Lichtpaket von **reiner Energie E** eine **Masse m** hat, die mit der Energie in einem konstanten Verhältnis steht. Für dieses allgemeine Gesetz muss die Verhältniszahl eine Naturkonstante sein. Im Abschn. 10.2 werden wir das genauer besprechen und

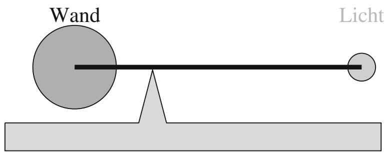

Abb. 1.14 Ohne äußeren Einfluss bewegt sich der Massenmittelpunkt nicht

herausfinden, dass diese Verhältniszahl der Kehrwert des Quadrats der Lichtgeschwindigkeit ist:

$$m = \frac{E}{c^2} \tag{1.2}$$

Einstein schrieb dazu 1905 [1]:

> Wenn die Theorie den Tatsachen entspricht, so überträgt die Strahlung Trägheit […].

Übrigens machte Einstein in seinem Gedankenexperiment einen Fehler, den wir im Abschn. 10.2 erläutern werden.

1.13 Masse ist Energie ist Masse

Fassen wir zusammen. Die Spezielle Relativitätstheorie legt Folgendes nahe:

> **Träge Masse ist eine Form der Energie**, und **Energie hat Masse**. Daher sollte es einen Weg geben, Ruhemasse in Energie zu verwandeln und umgekehrt.

Physiker nennen diesen Sachverhalt „Masse und Energie sind äquivalent". Wir können Gl. (1.2) auch in einer Form schreiben, die weltbekannt geworden ist,

$$\boxed{E = mc^2} \tag{1.3}$$

Diese Gleichung verknüpft also „Energie", „Masse" und „Lichtgeschwindigkeit" miteinander.

Wir können der Umwandlung von Energie in Masse zusehen, wenn Licht genügend großer Energie auf ein ruhendes Atom trifft, wie es in Abb. 1.15 skizziert ist. Das Atom federt vom Rückstoß nach rechts, aber darüber hinaus bilden sich aus der reinen Energie des Lichtstrahls noch je ein Elektron und ein Positron. Diese beiden Elementarteilchen fliegen dann vom Atom weg. In dieser Weise kann sich reine Energie in Materie umwandeln, und, sehr wichtig: Der Prozess kann auch umgekehrt ablaufen, sodass sich dann die Materie des Elektrons und Positrons in reine Energie verwandelt.

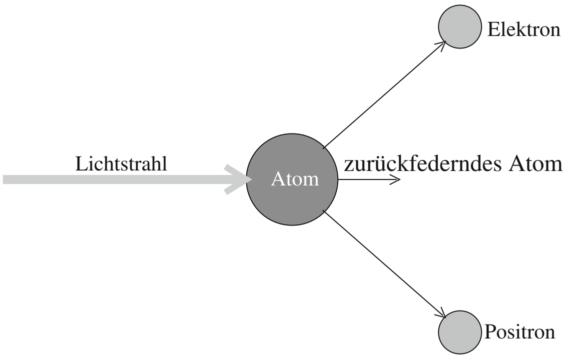

Abb. 1.15 Trifft genug reine Energie auf ein Atom, kann sie sich in Materie in Form eines Elektrons und Positrons umwandeln

1.14 Information braucht Energie zur Übertragung

Wir sahen, dass sich Körper nicht schneller als das Licht bewegen können. Aber was wäre, wenn wir nicht Energie oder Masse senden, sondern nur die **Information** über ihren Zustand („ein Elektron bitte!") per Telefon oder Ähnlichem einem weit entfernten Empfänger mitteilen, und der baut nach diesem Rezept den Körper bei sich zusammen? Können wir so nicht doch einen Körper schneller als das Licht bewegen?

Die Antwort ist ein klares Nein. Es ist nämlich so: Um Informationen übertragen oder speichern zu können, benötigen wir Masse oder Energie. Daher kann sich auch *reine Information* nicht schneller als das Licht fortbewegen.

Literatur

1. A. Einstein, Annalen der Physik **18**, 639 (1905). www.physik.uni-augsburg.de/annalen/history/einstein-papers/1905_18_639-641.pdf. Zugegriffen: 25. Januar 2015

2

Licht, Zeit, Masse und Länge

2.1 Licht und Zeit

Überlegen wir uns einmal etwas genauer, was passiert, wenn Lichtsender und Lichtgeschwindigkeitsmesser relativ zueinander ruhen wie in Abb. 2.1. Wir haben hier der Einfachheit halber das Messgerät für die Lichtgeschwindigkeit nicht gezeichnet. Die ganze Apparatur mit Sender und Messgerät soll nun in einem Aufzug mit durchsichtigen Wänden stehen, den wir als hellgraue Box angedeutet haben. Solche Aufzüge finden wir ja manchmal in Einkaufszentren. Wir stehen außerhalb des Aufzugs und sehen ihn nach oben schweben.

Der Mensch im Aufzug ruht relativ zum Lichtsender. Er sieht, wie sich der Lichtstrahl waagerecht bewegt und misst mit seiner Uhr, die neben ihm liegt, die Zeit, die der Lichtstrahl braucht, um den Aufzug zu durchqueren.

Wir stehen rechts außerhalb des Aufzugs und sehen auch, wie der Lichtstrahl vom Sender startet. Aber für uns bewegt sich der Aufzug nach oben, sodass der angekommene Lichtstrahl mitsamt dem Aufzug hochgefahren ist. Also hat sich für uns der Lichtstrahl *diagonal* nach oben bewegt. Denn wenn

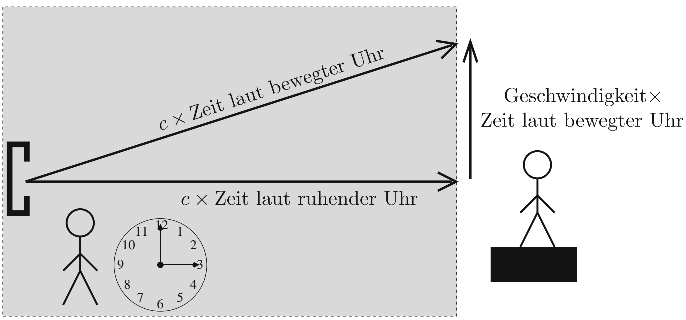

Abb. 2.1 Wir sehen, dass sich der Aufzug nach oben bewegt. Weil die Geschwindigkeit als die durchlaufene Länge dividiert durch die benötigte Zeit definiert ist, können wir alle Längen als Geschwindigkeit mal benötigte Zeit darstellen

K. Fischer, *Relativitätstheorie in einfachen Worten*, DOI 10.1007/978-3-662-46966-8_2,

er den Aufzug zur Hälfte durchquert hat, war er auf der Hälfte seiner Endhöhe und so weiter.

Diese Diagonale ist *länger* als die Breite des Aufzugs. Aber wir wissen ja, dass sich das Licht sowohl relativ zum Mensch im Aufzug *als auch* relativ zu uns immer mit derselben Lichtgeschwindigkeit *c* bewegt. Mit anderen Worten: Die **Richtung der Lichtgeschwindigkeit** ändert sich, aber ihr *Wert* ist für uns in beiden Fällen gleich. Daher sehen wir das Licht eine *längere* Zeitspanne fliegen als der Mensch im Aufzug:

$$\begin{pmatrix}\text{Zeitdauer laut relativ}\\ \text{zu uns bewegter Uhr}\end{pmatrix} > \begin{pmatrix}\text{Zeitdauer laut relativ}\\ \text{zu uns ruhenden Uhr}\end{pmatrix} \tag{2.1}$$

Dies bedeutet, dass es einen Zusammenhang zwischen Licht und Zeit gibt. Für uns außerhalb des Aufzugs vergeht die Zeit im Aufzug *langsamer* als für den Menschen im Aufzug. Wenn der Mensch im Aufzug sagt „1 Sekunde ist vergangen“, antworten wir: „Nein, *mehr* als 1 Sekunde ist vergangen“. Mit anderen Worten:

> Gerade *weil* der **Wert der Lichtgeschwindigkeit absolut** ist, vergeht je nach der *Relativ*geschwindigkeit zum Beobachter die Zeit eines Körpers anders.

Wir benutzen den griechischen Buchstaben **Gamma** „γ“, um diesen Sachverhalt zu beschreiben: Er bezeichnet eine Zahl zwischen null und eins und sagt aus, um wie viel langsamer die Zeit der sich bewegenden Uhr vergeht:

$$\begin{pmatrix}\text{Zeitdauer auf der relativ}\\ \text{zu uns bewegten Uhr}\end{pmatrix} \cdot \gamma = \begin{pmatrix}\text{Zeitdauer auf der relativ}\\ \text{zu uns ruhenden Uhr}\end{pmatrix}$$

Wir sehen: Wenn sich der Aufzug relativ zu uns nicht bewegt, also seine Geschwindigkeit null ist, ist der γ-Faktor eins. Je größer die Geschwindigkeit des Aufzugs ist, umso kleiner wird γ.

Wir sehen in Abb. 2.1 auch, dass während der von uns gemessenen Zeit, in der das Licht in der Diagonalen nach oben läuft, der Aufzug eine *kürzere senkrechte* Strecke hinauffährt. Also sehen wir es auch hier noch einmal:

> Ein Körper kann sich relativ zu uns nicht **schneller als das Licht** bewegen.

2.2 Der Gammafaktor

Wir können den γ-Faktor einfach berechnen. Wir brauchen dazu nur den **Satz des Pythagoras**. Schauen wir uns dazu Abb. 2.2 an, in der wir das Dreieck aus Abb. 2.1 übernommen haben. Der Satz des Pythagoras besagt:

$$\begin{aligned}&\left(c\cdot\begin{array}{c}\text{Zeitdauer laut}\\\text{bewegter Uhr}\end{array}\right)^2\\=&\left(c\cdot\begin{array}{c}\text{Zeitdauer laut}\\\text{ruhender Uhr}\end{array}\right)^2+\left(\text{Geschwindigkeit}\cdot\begin{array}{c}\text{Zeitdauer laut}\\\text{bewegter Uhr}\end{array}\right)^2\end{aligned}$$

Wir möchten wissen, wie schnell die Zeit der ruhenden Uhr im Aufzug vergeht. Es gilt:

$$\begin{aligned}&\left(c\cdot\begin{array}{c}\text{Zeitdauer laut}\\\text{bewegter Uhr}\end{array}\right)^2-\left(\text{Geschwindigkeit}\cdot\begin{array}{c}\text{Zeitdauer laut}\\\text{bewegter Uhr}\end{array}\right)^2\\=&\left(c\cdot\begin{array}{c}\text{Zeitdauer laut}\\\text{ruhender Uhr}\end{array}\right)^2\end{aligned}$$

Wir ziehen den gemeinsamen Faktor „Zeitdauer laut bewegter Uhr“ heraus

$$\begin{aligned}&(\text{Zeitdauer laut bewegter Uhr})^2\cdot\left(c^2-\text{Geschwindigkeit}^2\right)\\=&\,c^2\cdot(\text{Zeitdauer laut ruhender Uhr})^2\end{aligned}$$

und teilen beide Seiten der Gleichung durch c^2:

$$\begin{aligned}&(\text{Zeitdauer laut bewegter Uhr})^2\cdot\left(1-\frac{\text{Geschwindigkeit}^2}{c^2}\right)\\=&\,(\text{Zeitdauer laut ruhender Uhr})^2\end{aligned}$$

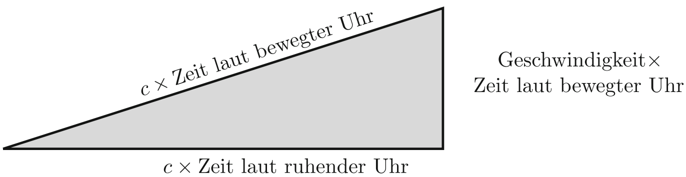

Abb. 2.2 Der Satz des Pythagoras sagt uns, wie der Zeitverlauf der ruhenden Uhr von dem der bewegten Uhr abhängt

Weil das Quadrat der „Zeitdauer laut ruhender Uhr“ sowie das Quadrat der „Zeitdauer laut bewegter Uhr“ nicht negativ sein können, muss auch der Faktor $\left(1 - \frac{\text{Geschwindigkeit}^2}{c^2}\right)$ mindestens null sein. Mit anderen Worten: Wir sehen hier wieder, dass die Geschwindigkeit nicht größer als die Lichtgeschwindigkeit werden kann. Wir können jetzt die Quadratwurzel ziehen und erhalten so für die „Zeitdauer laut ruhender Uhr“

$$\begin{aligned} &\text{Zeitdauer laut ruhender Uhr} \\ &= (\text{Zeitdauer laut bewegter Uhr}) \cdot \sqrt{1 - \frac{\text{Geschwindigkeit}^2}{c^2}} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Die Quadratwurzel des oben genannten Faktors ist der γ**-Faktor**,

$$\boxed{\gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{\text{Geschwindigkeit}}{c}\right)^2}} \tag{2.3}$$

Wir können den γ-Faktor auch graphisch ermitteln: Wir verwenden dazu das Dreieck aus Abb. 2.2 und drücken alle Seitenlängen als Vielfache der längsten Seite aus, das heißt, wir teilen die Längen der drei Seiten durch die Länge $c \cdot (\text{Zeitdauer laut bewegter Uhr})$. So hat diese längste Seite nun die Länge eins. Die untere Seite hat die Länge

$$\frac{\cancel{c} \cdot (\text{Zeitdauer laut ruhender Uhr})}{\cancel{c} \cdot (\text{Zeitdauer laut bewegter Uhr})} = \gamma$$

und die rechte Seite hat nun die Länge

$$\frac{\text{Geschwindigkeit} \cdot \cancel{(\text{Zeitdauer laut bewegter Uhr})}}{c \cdot \cancel{(\text{Zeitdauer laut bewegter Uhr})}} = \frac{\text{Geschwindigkeit}}{c}$$

Nach dem Satz des Pythagoras sind also der γ-Faktor und $\frac{\text{Geschwindigkeit}}{c}$ die waagerechte Distanz und die Höhe eines Punktes auf einem Kreisbogen mit Radius eins, wie in Abb. 2.3 zu sehen. Daher können wir die Größe des γ-Faktors auch aus der Abbildung ablesen. Wir sehen auch wieder, dass der γ-Faktor gegen null strebt, wenn die Geschwindigkeit sich der Lichtgeschwindigkeit nähert.

Der γ-Faktor taucht fast immer auf, wenn wir in der Relativitätstheorie etwas berechnen wollen. Es ist oft bequemer, den γ-Faktor anstelle der Geschwindigkeit zu verwenden.

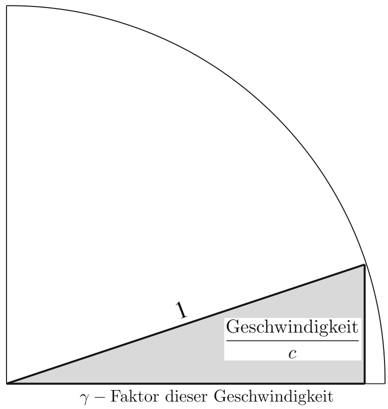

Abb. 2.3 Der Satz des Pythagoras hilft uns, den γ-Faktor für eine bestimmte Geschwindigkeit zu ermitteln

Um wie viel weicht der γ-Faktor von eins ab, wenn die Geschwindigkeit viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist? Ein Verkehrsflugzeug fliegt beispielsweise mit ungefähr 1000 Kilometer pro Stunde, das sind 1 Million Meter pro 3600 Sekunden oder grob 300 Meter pro Sekunde, also $3 \cdot 10^2$. Die Lichtgeschwindigkeit ist laut Tab. 10.1 ungefähr $3 \cdot 10^8$, sodass ein Verkehrsflugzeug mit einem Millionstel der Lichtgeschwindigkeit fliegt:

$$\frac{\text{Geschwindigkeit}}{c} \approx 10^{-6}$$

Nun quadrieren wir dies und erhalten 10^{-12}, also ein Billionstel. Daher ist für Geschwindigkeiten, wie sie im Alltagsleben vorkommen, der γ-Faktor praktisch eins. Aber Vorsicht! Heißt das wirklich, dass im Alltagsleben die Relativitätstheorie nicht beobachtbar ist? Nein! In Kap. 3 werden wir feststellen, dass wir selbst bei sehr langsamen Bewegungen mit einer Geschwindigkeit von nur 1 Millimeter pro Sekunde auf einfache Weise sehen können, wie verschieden schnell Uhren gehen.

Wie im Abschn. 10.3 genauer erklärt wird, können wir für Geschwindigkeiten, die gegenüber der Lichtgeschwindigkeit klein sind, die Quadratwurzel des γ-Faktor sehr gut wie folgt annähern:

$$\gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{\text{Geschwindigkeit}}{c}\right)^2} \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\text{Geschwindigkeit}}{c}\right)^2 \tag{2.4}$$

Wir listen noch einmal die **wichtigsten Eigenschaften des γ-Faktors** auf:

1. Für die Geschwindigkeit null ist der γ-Faktor eins.
2. Je größer die Geschwindigkeit, umso kleiner wird der γ-Faktor.
3. Für Geschwindigkeiten, die fast so groß wie die Lichtgeschwindigkeit sind, ist der γ-Faktor fast null.
4. Für gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sehr kleine Geschwindigkeiten ist γ um einen Betrag kleiner, der proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit ist.

2.3 Wessen Uhr geht langsamer?

Als Nächstes steht der Lichtsender links außerhalb des Aufzugs, und wir steigen selbst *in* den Aufzug, wie in Abb. 2.4 skizziert. Der Aufzug bewegt sich relativ zum rechts außerhalb stehenden Menschen nach oben. Er sieht den Lichtstrahl, wie er sich in der Waagerechten bewegt. Wir dagegen sehen, dass sich der Lichtstrahl in der längeren Diagonalen nach unten bewegt. Also schließen wir, dass die Zeit für den außerhalb stehenden Menschen *langsamer* vergeht!

Vergleichen wir das mit Abb. 2.1. Wessen Zeit vergeht denn nun *wirklich* langsamer?

Antwort: Die Frage ist falsch gestellt! Das ist eine Frage von der Art: „Wo ist es kälter, nachts oder draußen?“ Wir können solch eine Frage nicht beantworten, weil wir die beiden Fälle nicht vergleichen können. Das gilt auch für unser Beispiel: Wenn der Mensch im Aufzug und der Mensch draußen ihre

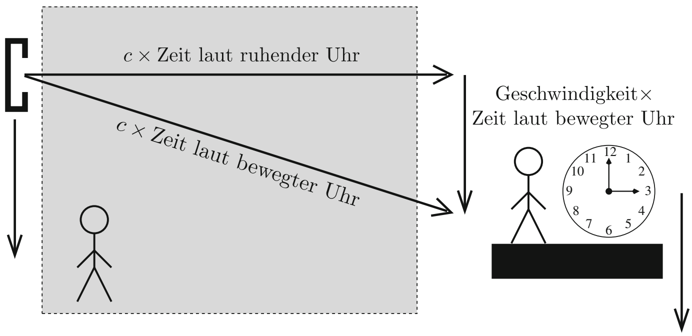

Abb. 2.4 Wir im Aufzug sehen, wie sich der außen stehende Mensch und der Lichtsender beide nach unten bewegen

Uhren vergleichen wollen, muss mindestens einer von ihnen seine Geschwindigkeit *ändern*, damit er beim anderen anhalten kann. *Dann erst* könnten sie ihre Uhren vergleichen. Aber dann ändert sich auch der Gang der Uhr! Wir werden in Kap. 4 sehen, was dann passiert. Wir betrachten hier zunächst nur den Fall, dass sich beide aneinander vorbeibewegen und das *weiterhin* mit der gleichen Geschwindigkeit tun. Daher haben *beide* Recht, wenn sie feststellen, dass die Uhr des anderen langsamer geht.

2.4 Licht, Zeit und Längen

2.4.1 Längen in Bewegungsrichtung

Wie misst man die Geschwindigkeit des Aufzugs in Abb. 2.1? Zunächst versuchen wir es von draußen: Wir legen vor uns einen Stab in die Richtung, in die sich der Aufzug bewegt. Wir haben den Stab in Abb. 2.5 als schwarzen, nach oben zeigenden Pfeil gezeichnet. Wir messen nun die Länge des Stabes.

Weil der Stab relativ zu uns ruht, nennen wir das Messergebnis die „Länge des ruhenden Stabes". Dann messen wir mit der *bewegten* Uhr die Zeitdauer, die der Aufzug braucht, um am Stab entlang hinaufzufahren. Die Geschwindigkeit ergibt sich als

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Länge des } \textit{ruhenden} \text{ Stabes}}{\text{Zeitdauer laut } \textit{bewegter} \text{ Uhr}}$$

Was misst der Mensch im Aufzug? Weil Geschwindigkeit relativ ist, darf er annehmen, dass *er* ruht und dass wir und der Stab uns draußen nach *unten*

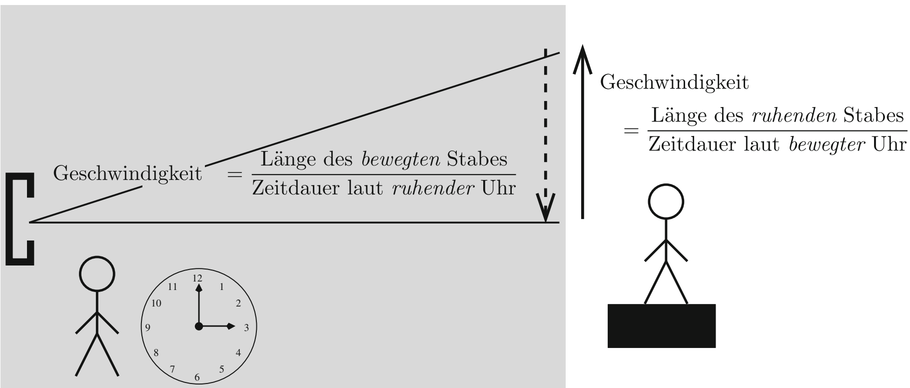

Abb. 2.5 Messung der Relativgeschwindigkeit durch die Messung von Länge und Zeitdauer

bewegen. Also ist für ihn

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Länge des } \textit{bewegten} \text{ Stabes}}{\text{Zeitdauer laut } \textit{ruhender} \text{ Uhr}}$$

Wenn für uns draußen auf der bewegten Uhr eine Sekunde vergeht, vergehen für den Menschen im Aufzug auf der für ihn *ruhenden* Uhr nur $\gamma < 1$ Sekunden. Daher muss der für ihn *sich bewegende* Stab um diesen γ-Faktor *kürzer* sein als für uns, denn er misst ja die *gleiche* Geschwindigkeit:

$$\begin{pmatrix} \textbf{Länge des Stabes} \\ \textbf{in Bewegungsrichtung} \end{pmatrix} = \gamma \cdot \begin{pmatrix} \text{Länge des} \\ \text{ruhenden Stabes} \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

2.4.2 Längen senkrecht zur Bewegungsrichtung

Wie ändern sich Längen senkrecht zur Bewegungsrichtung? In Abb. 2.6 haben wir die Schienen eingezeichnet, auf denen sich der Aufzug nach oben und unten bewegt. Wir haben eine Achse und zwei Räder skizziert. Für uns außen und den Menschen im Aufzug stimmt die Länge der Achse überein.

Denn für uns außerhalb des Aufzugs bewegen sich die Schienen nicht. Ihr Abstand bleibt gleich, ob sich nun der Aufzug bewegt oder nicht. Also haben die Schienen für uns immer den Abstand der *ruhenden* Achse. Für den Menschen im Aufzug bewegt sich die Achse nicht, hat also die Länge der ruhenden Achse. Wenn sich für uns der Aufzug nach oben bewegt, bewegt sich für uns

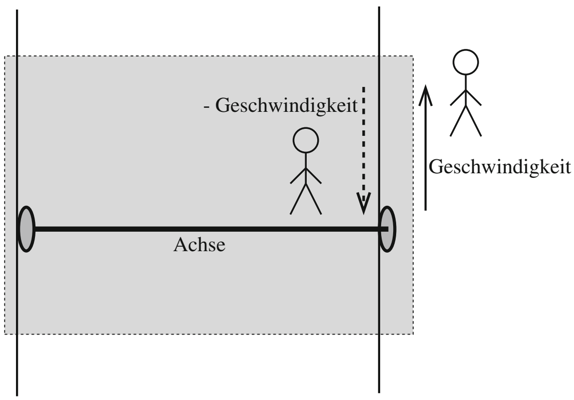

Abb. 2.6 Längen senkrecht zur Bewegungsrichtung ändern sich nicht

auch die Achse nach oben. Der Aufzug würde entgleisen, wenn sich die Länge ändert! Das kann nicht sein, daher gilt:

Längen senkrecht zur Bewegungsrichtung ändern sich nicht.

2.5 Was ist „gleichzeitig"?

Wir möchten nun das Zusammenspiel zwischen Zeit und Längen noch etwas genauer anhand des berühmten **Garagenparadoxons** erläutern. Ein Freund hat eine lange Leiter, die etwas zu lang für die Garage ist. Die Garage in Abb. 2.7 hat links die Vordertür und rechts die Hintertür. Beide Türen können wir elektrisch öffnen und schließen. Als Erstes legen wir die Leiter in die offene Garage und stellen fest, dass sie wirklich zu lang ist, wie in der Abbildung skizziert.

Danach nimmt der Freund die Leiter wieder aus der Garage und rennt dann mit ihr durch die geöffnete Garage hindurch. Wir stehen in der Mitte der Garage und sehen nach dem in Abschn. 2.4.1 Gelernten die Leiter *verkürzt*. Ist also die Leiter nur schnell genug, wird sie *kürzer* als die Garage. Also können wir dann die elektrischen Türen so einstellen, dass sie sich *zur gleichen Zeit* ganz kurz schließen und wieder öffnen. Für einen kurzen Moment wird sich dann die Leiter in der geschlossenen Garage befinden, wie in Abb. 2.8 gezeigt.

Was aber sieht unser Freund, der die Leiter trägt? Für ihn bewegt sich die *Garage* auf ihn zu, ist also für ihn kürzer geworden. Also passt für ihn die Leiter jetzt erst recht nicht in die Garage! Aber wie kann es dann sein, dass wir es geschafft haben, die Vorder- und Hintertür der Garage für einen Augenblick *gleichzeitig* zu schließen, gerade als die Leiter in ihr war?

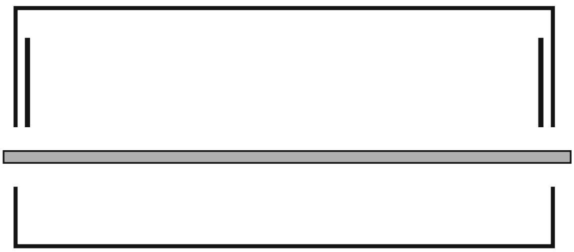

Abb. 2.7 Die in der Garage ruhende Leiter ist länger als die Garage

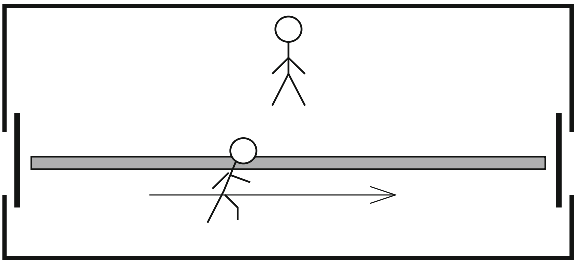

Abb. 2.8 Wir stehen in der Mitte der Garage. Von uns aus gesehen ist die schnell bewegte Leiter kürzer als die Garage

Der entscheidende Punkt ist hier, dass sich für unseren rennenden Freund *erst* die rechte Hintertür schließt und öffnet, und erst *danach* die linke Vordertür, wie in Abb. 2.9 skizziert.

Warum? Nun, stellen wir uns vor, dass in dem Moment, indem sich die Türen kurz schließen und wieder öffnen, ein Blitzlicht an den Türen aufleuchtet. Wir stehen in der Mitte der Garage und sehen demnach, wie uns die beiden Blitzlichter *zur gleichen Zeit* erreichen.

Was sieht aber unser rennender Freund? Auch auf ihn bewegen sich die beiden Blitzlichter mit Lichtgeschwindigkeit zu. Aber das Blitzlicht von der rechten Hintertür hat zu ihm nur eine *kürzere* Strecke zu durchlaufen, da er ja auf die Hintertür zurennt, sodass er schon *weiter* als bis zur Mitte der Garage vorangekommen ist. Daher sieht er *zuerst* das Blitzlicht der Hintertür und erst *danach* das Licht der Vordertür. Für ihn findet das Ereignis „die Hintertür schließt sich" also *vor* dem Ereignis „die Vordertür schließt sich" statt. Wir sehen, dass dies möglich ist, weil die Lichtgeschwindigkeit absolut ist, und weil die beiden Ereignisse an *verschiedenen* Orten stattfinden. Fassen wir zusammen:

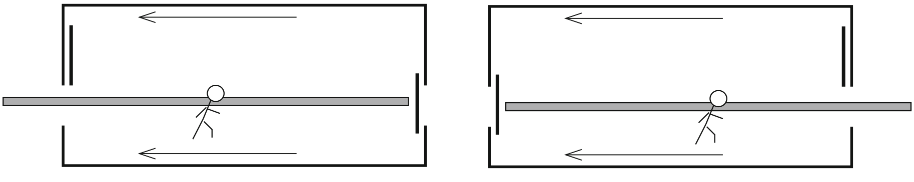

Abb. 2.9 Die sich auf unseren Freund zu bewegende Garage ist kürzer als die Leiter, aber für ihn schließt sich die rechte Hintertür, *bevor* sich die linke Vordertür schließt

Die Aussage „**zur gleichen Zeit**“ hat keine absolute Bedeutung für Ereignisse, die an verschiedenen Orten stattfinden: Es hängt von der Relativgeschwindigkeit von Uhr und Beobachter ab.

2.6 Gibt es Zeitmaschinen?

Bei dem gerade vorgestellten Garagenparadoxon scheint es so, als ob sich Zukunft und Vergangenheit mischen könnten, denn wir können es so einrichten, dass sich für uns die linke Tür kurz *vor* der rechten Tür schließt. Wenn das nur kurz genug hintereinander geschieht, haben wir eine seltsame Situation, in der eine Zeitmaschine möglich scheint:

Wir stehen in der Mitte der Garage. Für uns öffnet sich nun die *linke* Tür *vor* der rechten Tür. Rennt unser Freund nur schnell genug, erreicht ihn das Blitzlicht der *rechten* Tür aber *vor* dem Blitzlicht der linken Tür. Mit anderen Worten: Für ihn öffnet sich die *rechte* Tür *vor* der linken Tür!

Ist es also denkbar, dass sich Vergangenheit und Zukunft so vermischen und eine Zeitmaschine möglich ist?

Aber wir müssen bedenken, dass das Schließen der linken Tür nicht der *Grund* für das Schließen der rechten Tür ist. Nehmen wir einmal an, es wäre wirklich so, wie in Abb. 2.10 skizziert.

Wenn sich also die linke Tür zu schließen beginnt, sendet sie ein Lichtsignal entlang des gestrichelten Pfeils zu uns. Gleichzeitig sendet sie ein Signal zur rechten Tür entlang des durchgezogenen Pfeils. Dieses Signal *verursacht* das Schließen der rechten Tür. Wenn die rechte Tür sich zu schließen beginnt, sendet sie ihrerseits ein Signal entlang des gepunkteten Pfeils zu uns.

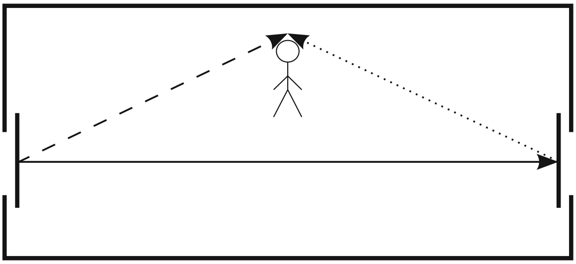

Abb. 2.10 *Verursacht* das Schließen der linken Tür das Schließen der rechten Tür, würde sich für uns die linke Tür *vor* der rechten Tür schließen, auch wenn wir uns relativ zu den Türen in eine bestimmte Richtung bewegten

Wir sehen, dass sich die linke Tür schließt, nachdem uns das Licht auf *direktem* Wege entlang des gestrichelten Pfeils erreicht hat. Das Signal, das die rechte Tür schließt, kann nicht schneller als Licht sein. Also sehen wir das Schließen der rechten Tür *frühestens* nach der Zeitspanne, die das Licht braucht, um entlang der durchgezogenen und gepunkteten Pfeile zu uns zu gelangen. Wie wir in der Abbildung sehen, ist der gestrichelte Pfeil kürzer als der durchgezogene plus der gepunktete Pfeil. Zusammengefasst: Wir sehen, dass sich die *Ursache vor* der *Wirkung* ereignet, dass sich also die linke vor der rechten Tür schließt.

Was sieht aber unser rennender Freund? Er sieht, dass sich das Licht mit derselben Geschwindigkeit ausbreitet wie wir es wahrnehmen. Und auch für ihn ist der kürzeste Weg von der linken Tür zu ihm der direkte Weg. Also sieht auch er die linke Tür sich *vor* der rechten Tür schließen, *wenn* das Schließen der linken Tür der *Grund* für das Schließen der rechten Tür ist!

Es gilt ganz allgemein: Physikalische Erscheinungen können keine Erscheinungen in der Vergangenheit beeinflussen. Mit anderen Worten: Es gibt keine **Zeitmaschinen**, die uns in die Vergangenheit „beamen“ oder die Vergangenheit beeinflussen könnten. Physiker nennen dies das Prinzip der **Kausalität**.

2.7 Zeit und Masse

Als wir in Abschn. 2.1 außerhalb des Aufzugs standen, sahen wir, dass die Zeit im Aufzug langsamer vergeht. Was für Konsequenzen hat dies für die Körper, die sich im Aufzug bewegen? Alle ihre Bewegungen verlangsamen sich in gleichem Maße. Also sollte sich von uns aus gesehen eine Eigenschaft der Körper geändert haben, und das muss ihre Masse sein: Denn weil sie alle im bewegten Aufzug mehr Masse haben, bewegen sie sich träger, wie in Zeitlupe. Das passt zu unserer Beobachtung, dass die Zeit im bewegten Aufzug langsamer vergeht. Griffig gesagt:

> Von uns aus gesehen vergeht die Zeit von Körpern, die sich relativ zu uns bewegen, langsamer. Daher wirken sie auf uns träger, und ihre **träge Masse nimmt in dem Maße zu, wie ihre Zeit langsamer vergeht**.

Wir können das wie folgt überprüfen: In Abb. 2.11 prallt ein langsamer Ball elastisch von einer Wand ab.

Prallt der Ball elastisch zurück, bleibt der Wert seiner Geschwindigkeit gleich, aber die Richtung kehrt sich um. Die Wand erhält einen Stoß. Hätte

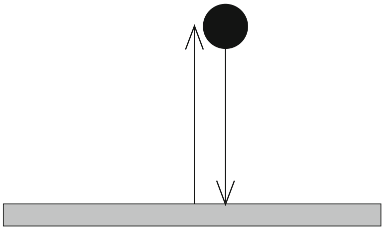

Abb. 2.11 Ein Ball prallt elastisch von einer Wand ab

der Ball dreimal so viel Masse oder würde er mit der dreifachen Geschwindigkeit fliegen, wäre der Stoß dreimal so stark. Mit anderen Worten: Die Stoßstärke auf die Wand hängt nur von folgendem *Produkt* ab:

$$\text{Stoßstärke} = \text{Masse} \cdot \text{Geschwindigkeit}$$

Die Wand erhält den *doppelt* so großen Stoß: Einmal, wenn sie den Stoß auffängt, und ein zweites Mal, wenn sie den Ball elastisch mit der gleichen Geschwindigkeit *zurück*stößt.

Übrigens nennen Physiker diese Stoßstärke **Impuls**.

Wir nehmen nun an, dass der Ball langsam genug fliegt, sodass seine Masse sich fast nicht vergrößert hat und praktisch seine Ruhemasse ist. Daher erhält die Wand das Doppelte der

$$\text{Stoßstärke} = \text{Ruhemasse} \cdot \text{Geschwindigkeit}$$

Als Nächstes stellen wir uns vor, dass wir schnell an der Wand entlang laufen, wie in Abb. 2.12 dargestellt. Relativ zu uns bewegt sich die Wand also von rechts nach links.

Trotzdem erhält die Wand den gleichen senkrechten Stoß wie vorher. Außerdem ist der Abstand zwischen Ball und Wand jeweils derselbe wir vorher, da sich ja Längen nicht ändern, die senkrecht zu unserer Geschwindigkeit stehen, wie wir in Abschn. 2.4.2 sahen. Der einzige Unterschied ist nun, dass die Zeit für den Ball von uns aus gesehen um den Faktor γ langsamer verläuft. Daher sehen wir eine um γ verringerte Geschwindigkeit des Balls. Da aber die Wand den gleichen Stoß aufnimmt, muss die Masse des Balls um genau den Faktor anwachsen, um den sich die Geschwindigkeit für uns verringert hat, weil die Zeit für den Ball von uns aus gesehen um diesen Faktor langsamer verläuft:

$$(\text{bewegte Gesamtmasse}) = \frac{\textbf{Ruhemasse}}{\gamma\text{-Faktor}} \tag{2.6}$$

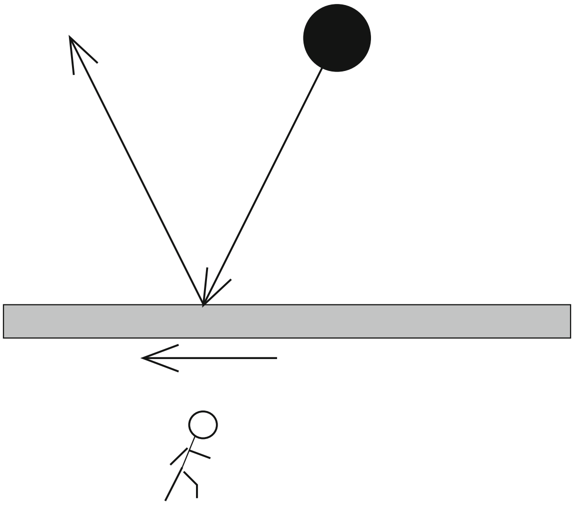

Abb. 2.12 So sehen wir Ball von Abb. 2.11 von der Wand zurückprallen, wenn wir uns entlang der Wand bewegen

Wir sahen in Abschn. 1.13, dass die Gesamtmasse mit der Geschwindigkeit wächst, weil der Körper Bewegungsenergie aufnimmt. Daher hat er die **Gesamtenergie**

$$\begin{pmatrix}\text{Gesamtenergie eines} \\ \text{bewegten Körpers}\end{pmatrix} = \text{Gesamtmasse} \cdot c^2 = \frac{\text{Ruhemasse}}{\gamma} \cdot c^2$$

2.8 Addition von Geschwindigkeiten

Wir wissen nun, dass wir uns nicht schneller als das Licht bewegen können. Wir haben das in Anschnitt 1.6 anhand eines „Pfefferkorns" gezeigt, dass wir versucht haben, mit einer Rakete zu beschleunigen. Aber vielleicht gibt es ja doch einen Weg, die Lichtgeschwindigkeit zu übertreffen, und zwar *ohne* Beschleunigung? Folgendes Gedankenexperiment soll das veranschaulichen: In Abb. 2.13 ist eine sehr leichte, aber feste Box skizziert, in der zwei *gleiche* Bälle unaufhörlich zwischen der linken und rechten Wand hin- und herspringen. Sie prallen an der linken und rechten Wand immer gleichzeitig ab, sodass sich die Box selbst dadurch nicht verschiebt. Da wir die Box als sehr leicht annehmen, können wir im Folgenden die Masse der Box selbst der Einfachheit halber vernachlässigen.

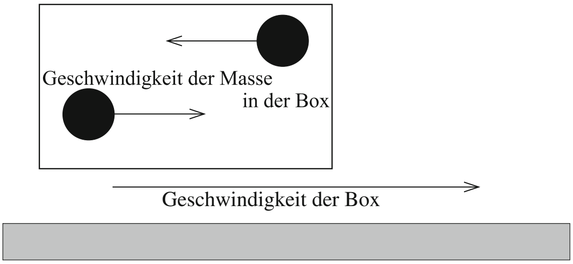

Abb. 2.13 Massen bewegen sich in einer sehr leichten Box, die sich ihrerseits gegenüber dem Erdboden bewegt

Die Box selbst bewege sich mit, sagen wir, 70 Prozent der Lichtgeschwindigkeit relativ zum dunkelgrau gezeichneten Boden nach rechts. Die beiden Bälle sollen sich mit derselben Geschwindigkeit innerhalb der Box bewegen. Aber dann scheint sich doch der linke Ball relativ zum Boden mit 140 Prozent der Lichtgeschwindigkeit, also schneller als das Licht nach rechts zu bewegen, oder?

Um das zu überprüfen, bestimmen wir die Massen: Stehen wir in der Box, sind die Massen der Bälle beide gleich, und zwar laut Gl. (2.6) um den $1/\gamma$-Faktor ihrer Geschwindigkeit von $0{,}7c$ größer als ihre Ruhemasse. Diese beiden Massen ergeben zusammen die **Ruhemasse** der Box, wenn wir die Box nur von außen ansehen, denn wir haben ja angenommen, dass wir die Masse der Box selbst vernachlässigen können.

Als Nächstes bestimmen wir die Massen vom Boden aus: Die Box bewegt sich mit derselben Geschwindigkeit $0{,}7c$, also ist die Gesamtmasse der Box wieder um diesen Faktor $1/\gamma$ größer, sie besteht aus den zwei Ruhemassen der Bälle, geteilt durch γ^2.

Nun bestimmen wir die Masse der Bälle, jede für sich. Der rechte Ball bewegt sich mit der gleichen Geschwindigkeit nach links, mit der sich die Box nach rechts bewegt. Also bewegt er sich überhaupt nicht, und seine Masse ist einfach seine Ruhemasse. Also muss der linke Ball umso *mehr* Masse haben, damit beide Massen zusammen wieder die Gesamtmasse der Box ergeben. Aber wir wissen, dass die Masse eines Körpers umso schneller wächst, je größer seine Geschwindigkeit ist. Daher muss die Geschwindigkeit des linken Balls *weniger* als das Doppelte seiner Geschwindigkeit in der Box betragen! Mit anderen Worten:

Relativistische Geschwindigkeitsaddition

Bewegt sich eine Box relativ zum Boden mit einer bestimmten Geschwindigkeit und bewegt sich in dieser Box eine Masse mit einer anderen Geschwindigkeit in dieselbe Richtung, dann bewegt sich diese Masse relativ zum Boden *um so viel* langsamer als die Summe dieser Geschwindigkeiten, dass sie nie schneller als das Licht ist.

Die eigentliche Rechnung führen wir in Abschn. 10.4 aus. Das Ergebnis ist, ausgedrückt in Anteilen der Lichtgeschwindigkeit:

$$\frac{\begin{pmatrix}\text{Gesamt-}\\\text{geschwindigkeit}\end{pmatrix}}{c} = \frac{\dfrac{\begin{pmatrix}\text{Geschwindigkeit}\\\text{der Box}\end{pmatrix}}{c} + \dfrac{\begin{pmatrix}\text{Geschwindigkeit}\\\text{der Masse in der Box}\end{pmatrix}}{c}}{1 + \dfrac{\begin{pmatrix}\text{Geschwindigkeit}\\\text{der Box}\end{pmatrix}}{c} \cdot \dfrac{\begin{pmatrix}\text{Geschwindigkeit}\\\text{der Masse in der Box}\end{pmatrix}}{c}}$$

Für unser Beispiel erhalten wir

$$\frac{\text{Gesamtgeschwindigkeit}}{c} = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}7}{1 + 0{,}7 \cdot 0{,}7} \approx 0{,}94$$

was natürlich weniger als die Lichtgeschwindigkeit ist, weil es *so sein muss*!

3 Licht, Elektrizität und Magnetismus

3.1 Elektrische Ladung und Geschwindigkeit

Wir haben in den ersten beiden Kapiteln gesehen, dass die Relativitätstheorie uns viele neue Einsichten darüber vermittelt, wie Licht, Zeit, Raum, Masse, Energie und andere Größen zusammenhängen. Einige dieser Größen sah man vorher als unveränderlich an. Zum Beispiel meinte man, dass die Gesamtmasse der an einem Experiment beteiligten Körper sich nicht ändern würde, dass also die **Masse erhalten** bliebe. Genauso dachte man, dass die Energie für sich allein erhalten bliebe. Da aber die Relativitätstheorie besagt, dass Masse nur eine Form der Energie ist, gilt nur die Erhaltung der Gesamtenergie in der Form, wie sie Einstein 1906 formuliert hat [1]:

> Nach der in dieser Arbeit entwickelten Auffassung ist der Satz von der Konstanz der Masse ein Spezialfall des Energieprinzips.

Die Leistung von Einstein bestand also darin, so fundamentale Begriffe wie „Raum“ und „Zeit“, „Länge“ oder „Gleichzeitigkeit“ von Grund auf neu zu überdenken, Begriffe, von denen der berühmte Philosoph Immanuel Kant noch meinte, ihre Bedeutung sei im menschlichen Gehirn von vornherein angelegt, damit wir die Welt überhaupt verstehen können. Aber Einsteins Theorie entstand nicht im luftleeren Raum: Der Bauplan für die Theorie war schon vorhanden! Er war und ist heute noch die Theorie der bewegten elektrischen Ladungen, nämlich die **Elektrodynamik**. Der Grund dafür ist ganz einfach:

> Während Masse, Zeit oder Länge alle von der Relativgeschwindigkeit zum Beobachter abhängen, hängt die **elektrische Ladung** nicht davon ab, ist also **absolut**!

K. Fischer, *Relativitätstheorie in einfachen Worten*, DOI 10.1007/978-3-662-46966-8_3,

Dazu kommt noch, was wir in Abschn. 2.2 schon angemerkt haben: Bisher haben wir den Eindruck, dass wir die Effekte der Relativitätstheorie nur bei sehr schnellen Körpern ohne große Mühe erkennen können. Dieser Eindruck ist falsch!

Wir werden in diesem Kapitel sehen, das wir mithilfe der Relativitätstheorie den *Magnetismus* erklären können: Magnetismus wird nämlich durch elektrische Ladungen erzeugt, die sich mit weniger als einem Millimeter pro Sekunde bewegen. Mit anderen Worten: Der Magnetismus ist ein Effekt der Relativitätstheorie, der schon bei sehr kleinen Geschwindigkeiten sichtbar ist.

3.2 Elektrische Ladung und Magnete

James Clerk Maxwell schuf im 19. Jahrhundert die Theorie des Elektromagnetismus. Davor glaubte man, Magnetismus und Elektrizität seien grundverschieden. Aber dann beobachtete man Erscheinungen wie die folgende:

> Ein **elektrischer Strom** in einem Draht setzt eine **magnetische** Kompassnadel in Bewegung.

Man begann dann mit genaueren Untersuchungen, die Folgendes ergaben:

> In einem **Elektromotor** setzt elektrischer Strom Magnete relativ zu den Drähten in Bewegung. Umgekehrt erzeugt ein **Stromgenerator** elektrischen Strom, indem sich Magnete relativ zu Drähten bewegen.

Wir haben in Abb. 3.1 das grundlegende Modell eines Elektromotors skizziert. Elektrische Ladungen, in diesem Falle Elektronen, bewegen sich durch den schwarzen Draht. Mit anderen Worten: Ein elektrischer Strom fließt durch den Draht. Das Magnetfeld übt eine Kraft auf diese bewegten Elektronen aus.

Diese Kraft ist die **Lorentzkraft**. Die Richtung der Kraft erhalten wir aus der **Linke-Hand-Regel**, die wir in Abb. 3.2 erläutern.

Sehen wir einmal, wie die Lorentzkraft in unserem Modell eines Elektromotors in Abb. 3.1 wirkt. Die Elektronen laufen ins Magnetfeld hinein und bewegen sich nach *hinten*. Das Magnetfeld zeigt nach rechts, vom Nordpol des linken Magneten zum Südpol des rechten Magneten. Die Linke-Hand-Regel besagt dann, dass eine Kraft die Elektronen nach *oben* drückt. Hier drückt sie den linken Teil der Drahtschlaufe nach oben.

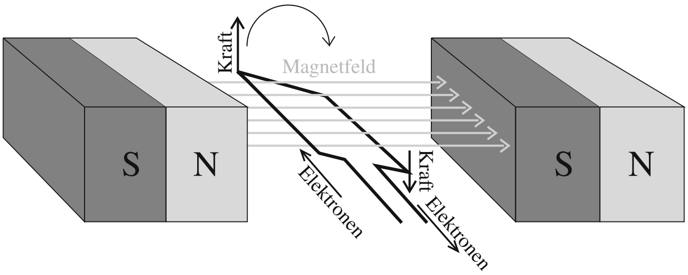

Abb. 3.1 Das unsichtbare Magnetfeld von Magneten übt eine Kraft auf die sich im Draht bewegenden Elektronen aus. Dies ist das grundlegende Modell eines Elektromotors

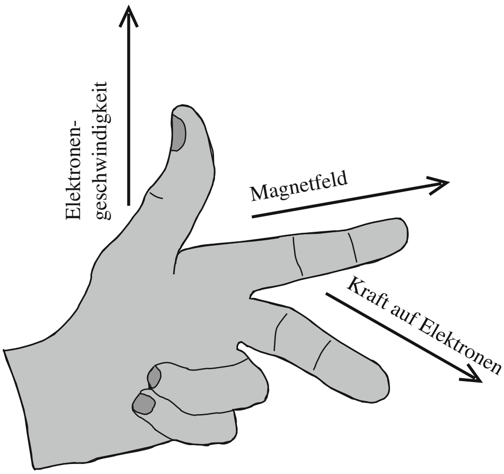

Abb. 3.2 Linke-Hand-Regel für negative elektrische Ladungen. Strecke Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der linken Hand senkrecht zueinander aus. Dann drehe die linke Hand so, dass sich die negativen elektrischen Ladungen, in unserm Fall die Elektronen, in Richtung des Daumens bewegen, und dass das Magnetfeld in Richtung des Zeigefingers zeigt. Dann zeigt die Kraft auf die Elektronen in Richtung des Mittelfingers. Überprüfen wir nun mit dieser Regel die Kräfte in Abb. 3.1! Viele Lehrbücher legen fest, dass der elektrische Strom in *umgekehrter* Richtung der Elektronen fließt. Dann wird aus der hier benutzten Linke-Hand-Regel eine Rechte-Hand-Regel, aber die Naturerscheinung selbst ändert sich natürlich nicht

Die Elektronen laufen aus dem Magnetfeld heraus, dann hintenherum wieder in das Magnetfeld hinein und nach *vorn*. Dann besagt die Linke-Hand-Regel, dass diesmal die Kraft die Elektronen und damit den rechten Teil der Drahtschlaufe nach *unten* drückt. Insgesamt sehen wir, dass sich so die Drahtschlaufe im Uhrzeigersinn zu drehen beginnt. Dieses Gedankenexperiment zeigt uns, wie ein **Elektromotor** funktioniert.

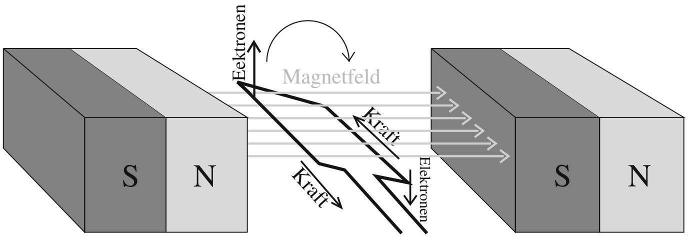

Abb. 3.3 Wieder übt ein Magnetfeld eine Kraft auf elektrische Ladungen aus, die sich in ihm bewegen. Diese Anordnung ist das grundlegende Modell eines Stromgenerators

In Abb. 3.3 sehen wir den umgekehrten Prozess: Zunächst fließt kein Strom durch die schwarze Drahtschlaufe. Drehen wir sie im Uhrzeigersinn, bewegen sich die Elektronen im linken Teil der Drahtschlaufe aufwärts. Nach der Linken-Hand-Regel drückt eine Kraft die Elektronen nach *vorn*. Die Elektronen im rechten Teil der Drahtschlaufe bewegen sich nach *unten*. Die Lorentzkraft drückt nach der Linke-Hand-Regel die Elektronen dort nach *hinten*. Daher beginnt ein Strom durch den Draht zu fließen. Dieses Gedankenexperiment zeigt uns, wie ein **Stromgenerator** funktioniert.

3.3 Elektrische und magnetische Felder

Maxwell schloss durch sorgfältige Analyse der Experimente, dass sich die Energie einer elektrischen Ladung oder eines Magneten im umliegenden Raum als **elektrisches Feld** oder als **Magnetfeld** verteilt. In der Tat: Die Drahtschlaufen in den Abb. 3.1 und 3.3 berühren den Magneten nicht, sondern reagieren auf sein unsichtbares Feld.

Ändert sich ein elektrisches Feld mit der Zeit, erzeugt es durch diese Änderung ein Magnetfeld. In gleicher Weise erzeugt ein sich mit der Zeit änderndes Magnetfeld ein elektrisches Feld. Maxwell fasste seine Beobachtungen in den nach ihm benannten **Maxwell-Gleichungen** zusammen.

Allerdings beschreiben die Maxwell-Gleichungen für sich noch nicht, wie ein elektrisch geladener Körper auf ein elektrisches oder magnetisches Feld *reagiert*. Diese Reaktion beschreibt die **Lorentzkraft**. Wir haben die Wirkung der Lorentzkraft in den Abb. 3.1, 3.2 und 3.3 gesehen.

Die Maxwell-Gleichungen bilden zusammen mit der Lorentzkraft die Theorie der **Elektrodynamik**.

Als sich Maxwell sicher war, dass seine Gleichungen die bisherigen Experimente richtig beschrieben, machte er auf der Grundlage dieser Gleichungen eine Voraussage: Selbst wenn *keine* elektrischen Ladungen oder Magnete in der Nähe sind, ja sogar im Vakuum, können sich elektrische und magnetische Felder gegenseitig aufrecht erhalten, wenn sie sich in geeigneter Weise mit der Zeit verändern. Aber Maxwell erkannte, dass solche Felder niemals an einem Ort ruhen können, sondern sich mit einer bestimmten Geschwindigkeit fortbewegen müssen. Maxwell konnte sogar mithilfe seiner Gleichungen diese Geschwindigkeit berechnen und fand, dass es genau die Lichtgeschwindigkeit ist! Mit anderen Worten: Licht ist nichts anderes als eine Welle aus elektrischen und magnetischen Feldern, die sich mit der Zeit ändern, eine sogenannte **elektromagnetische Welle**.

Es war also Maxwells großes Verdienst, nicht nur elektrische und magnetische Naturerscheinungen unter ein Dach zu bringen, sondern auch zeigen zu können, dass Licht selbst eine elektromagnetische Naturerscheinung ist. Daher vereinte Maxwell sogar drei Arten von Naturerscheinungen unter dem Dach einer Theorie: die elektrischen, die magnetischen und die optischen.

Genauso wichtig ist, dass die absolute Lichtgeschwindigkeit aus den Maxwell-Gleichungen *folgt*. Wir haben auch schon erwähnt, dass die elektrische Ladung nicht von der Geschwindigkeit der Ladung abhängt, also absolut ist. Kurz gesagt: Die Elektrodynamik stimmt *von vornherein* mit der Relativitätstheorie überein.

Daher können wir die Elektrodynamik als Bauplan verwenden, um die Relativitätstheorie zu erstellen. Wir werden das nun mit einem Gedankenexperiment zeigen, in dem ein elektrischer Strom einen Draht durchfließt und so ein magnetisches Feld erzeugt. In der Tat war gerade dieses Gedankenexperiment für Einstein der Ausgangspunkt für seine Spezielle Relativitätstheorie. Ihr Originaltitel ist „**Zur Elektrodynamik bewegter Körper**“, und nun verstehen wir schon, warum Einstein ihn gewählt hat!

3.4 Magnetische Kräfte durch elektrischen Strom

In Abb. 3.4 sehen wir einen Teil eines sehr langen, geraden Metalldrahts. Der Draht selbst ruht relativ zu uns. Durch den Draht fließt ein gleichbleibender elektrischer Strom, das heißt, Elektronen fließen im Draht von links nach rechts. Wir stellen uns vor, dass der elektrische Widerstand des Drahts sehr gering ist. Dies können wir zum Beispiel dadurch erreichen, dass wir den Draht auf sehr tiefe Temperaturen abkühlen. Wir können daher annehmen, dass wir praktisch keine elektrische Spannung im Draht benötigen, um die Bewegung der Elektronen aufrechtzuerhalten.

Übrigens sind die Elektronen im Metalldraht wirklich langsam: Sie bewegen sich mit weniger als einem Zehntelmillimeter pro Sekunde!

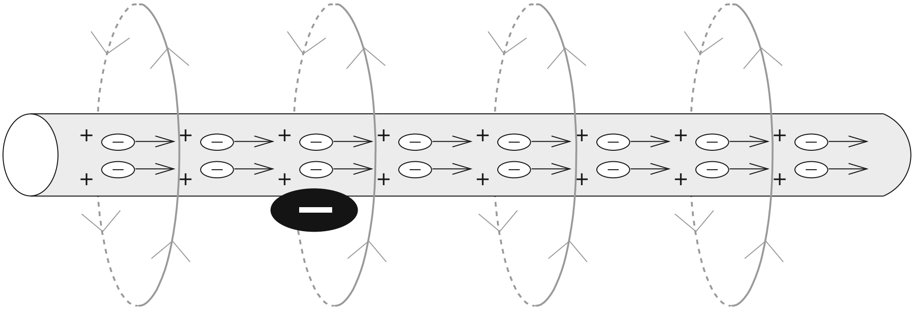

Abb. 3.4 Ein konstanter Strom von Elektronen bewegt sich in einem geraden, langen Draht von links nach rechts. Eine negative Ladung, die *schwarz mit weißem Minuszeichen* dargestellt ist, ruht vor dem Draht und bewegt sich nicht vom Fleck

In Abb. 3.4 haben wir die Elektronen des elektrischen Stroms als weiße Ovale mit schwarzem Minus-Zeichen skizziert. Einige Atome im Draht liefern diese beweglichen Elektronen und haben dann selbst eine positive Ladung, weil ihnen je ein Elektron fehlt. Wir haben diese Atome als schwarze Plus-Zeichen skizziert. Diese Atome ruhen im Draht. Der gesamte Draht ist elektrisch neutral, das heißt, seine Gesamtladung ist null.

Wir können das überprüfen, indem wir zum Beispiel eine negative Ladung neben den Draht legen, wie die, die wir als schwarzes Oval mit weißem Minus-Zeichen skizziert haben. Nichts passiert: Die schwarze Ladung bleibt an ihrem Platz liegen.

Aber der Strom im Draht erzeugt um den Draht herum ein Magnetfeld, dessen Richtung wir mit den Linien um den Draht angedeutet haben. Wenn wir nun die schwarze Ladung nach *rechts* bewegen, sagt uns die **Linke-Hand-Regel**, dass das Magnetfeld die schwarze Ladung zum Draht hin *anzieht*. Das Experiment zeigt, dass diese **Lorentzkraft** proportional zur Geschwindigkeit der schwarzen Ladung anwächst. Das Experiment zeigt auch, dass diese Kraft proportional zur Stromstärke anwächst. Also wächst die Kraft auch proportional zur Geschwindigkeit der Elektronen im Draht an. Wenn wir also die schwarze Ladung mit derselben Geschwindigkeit nach rechts bewegen wie die der Elektronen, so wächst die Lorentzkraft insgesamt proportional zum *Quadrat* der Geschwindigkeit der schwarzen Ladung an.

3.4.1 Das Faraday-Paradoxon

Als Nächstes bewegen wir uns mit derselben Geschwindigkeit wie die schwarze Ladung nach rechts. Also ruhen jetzt die Elektronen des Stroms im Draht relativ zu uns, und auch die schwarze Ladung ruht für uns. Dafür bewegen

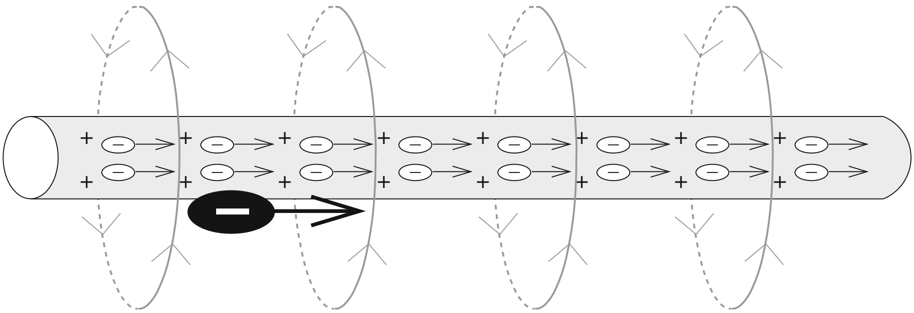

Abb. 3.5 Bewegt sich die negative *schwarze* Ladung nach rechts, wird sie vom Magnetfeld zum Draht gezogen

sich jetzt die positiv geladenen Atome mit derselben Geschwindigkeit nach *links*. Mit anderen Worten: Der Draht selbst bewegt sich nach links, wie wir in Abb. 3.6 dargestellt haben.

Wenden wir zunächst einmal nur das **Erste Relativitätsprinzip** an! Naturgesetze hängen nicht von einer geradlinigen, gleichförmigen Bewegung des Beobachters ab. Wir sehen also einen elektrischen Strom aus genauso vielen positiven Ladungen von rechts nach links fließen, wie vorher negative Ladungen von links nach rechts geflossen sind. Dieser Strom erzeugt das gleiche Magnetfeld wie vorher. Also haben wir die gleiche Situation wie in Abb. 3.5. Insbesondere *ruhen* wir wieder relativ zum Magnetfeld!

Mit anderen Worten: In Abb. 3.5 ruhen wir relativ zum Draht und relativ zum Magnetfeld. In Abb. 3.6 bewegen wir uns dagegen relativ zum Draht, aber ruhen immer noch relativ zum selben Magnetfeld wie vorher! Wir müssen uns fragen: Ist denn dieses „Magnetfeld" wirklich real? Im Grunde genommen ist es ja unsichtbar, und es scheint immer noch zu ruhen, selbst wenn

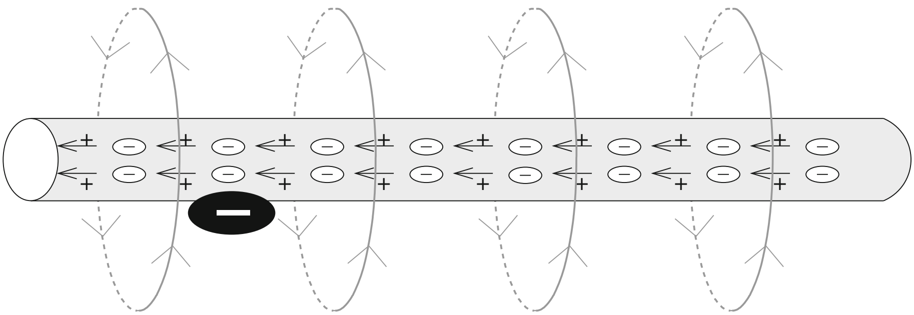

Abb. 3.6 Nun bewegen sich die positiven Ladungen des Drahts nach links. Wir und die *schwarze* Ladung ruhen wieder relativ zum Magnetfeld

wir uns relativ zum Draht bewegen! Diesen Effekt nennt man das **Faraday-Paradoxon**, das im Übrigen in vielen Lehrbüchern anhand eines sich drehenden Magneten erläutert wird.

Wir untersuchen nun, welche Kraft dieses Magnetfeld auf die schwarze negative Ladung ausübt.

3.4.2 Ohne Relativität keine Anziehung

Wir benutzen zunächst nur das Erste Relativitätsprinzip. In Abb. 3.5 zog das Magnetfeld die sich nach rechts bewegende schwarze Ladung an. Aber in Abb. 3.6 bewegt sich diese Ladung relativ zum Magnetfeld *nicht*, sodass das Magnetfeld die Ladung *nicht* anzieht! Das passt nicht zusammen, und genau *das* war der Ausgangspunkt für Einsteins Aufsatz „Zur Elektrodynamik bewegter Körper".

3.4.3 Mit Relativität Anziehung

Nun verwenden wir auch das **Zweite Relativitätsprinzip**, genauer gesagt, eine Schlussfolgerung daraus, nämlich dass sich Längen in Richtung der Relativgeschwindigkeit zum Beobachter verkürzen, wie wir in Abschn. 2.4.1 gesehen haben. Wir wissen, dass der ruhende Draht elektrisch neutral war. Also ist die Anzahl der positiven Ladungen der Atome pro Meter gleich der Anzahl der negativen Ladungen der Elektronen pro Meter. Wenn wir uns aber relativ zum Draht bewegen, sehen wir Folgendes:

1. Die Ladung *pro* Elektron oder Atom ändert sich *nicht*. Das ist eine experimentell festgestellte Tatsache, die schon darauf hinweist, dass Elektrodynamik und Relativitätstheorie zusammenpassen.
2. Nehmen wir an, dass ein Stab parallel zum Draht ruht. Wenn wir uns dann relativ zum Draht bewegen, sehen wir diesen Stab *verkürzt*, sodass also nun dieselbe Anzahl positiver, im Draht ruhender Ladungen auf eine kleinere Distanz zusammenrücken müssen. Also befinden sich für uns nun pro Meter *mehr* positive Ladungen im Draht als vorher.
3. Nehmen wir weiter an, der Stab bewege sich entlang des Drahts mit derselben Geschwindigkeit wie die Elektronen nach rechts. Wenn wir uns dann mit den Elektronen nach rechts bewegen, ruht dieser Stab relativ zu uns, sodass wir ihn als *länger* wahrnehmen. Also haben wir jetzt pro Meter *weniger* negative Ladungen als vorher.

Insgesamt hat für uns nun der Draht eine *positive* Gesamtladung. In Abb. 3.7 haben wir das der Deutlichkeit halber übertrieben dargestellt.

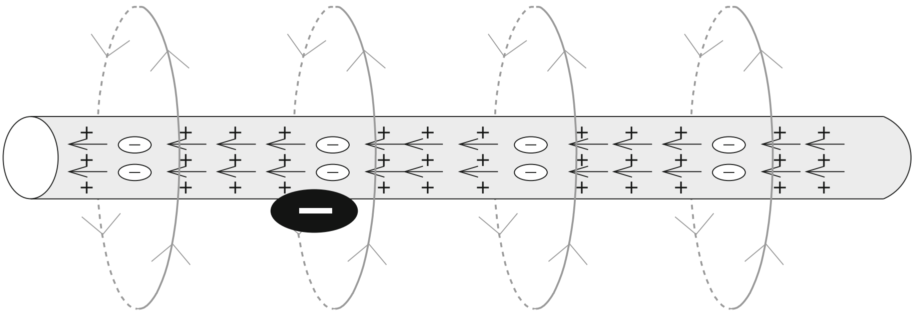

Abb. 3.7 Der Draht ist nun positiv geladen und zieht deshalb die vor ihm liegende negative Ladung an

Wir wissen von Gl. (2.4), dass sich der γ-Faktor bei einer langsamen Bewegung nur um einen Betrag von eins unterscheidet, der proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit ist. Dasselbe gilt daher auch für die positive Ladung des Drahts. Da die Ladung positiv ist, zieht sie nun die schwarze negative Ladung vor dem Draht an, denn das tun ja positive und negative Ladungen. Der Draht zieht deshalb die schwarze negative Ladung mit einer Kraft an, die proportional zu seiner positiven Ladung, also proportional zum Quadrat der Relativgeschwindigkeit zwischen Draht und schwarzer Ladung anwächst.

Vergleichen wir jetzt das Ergebnis mit Abb. 3.5: In beiden Fällen zieht eine Kraft an, und in beiden Fällen wächst die Kraft proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit! Wir können also auch ohne genaue Rechnung vermuten, dass in beiden Fällen die schwarze negative Ladung gleich reagiert.

Wir sehen auch, dass uns die Relativitätstheorie erlaubt, die Elektrodynamik zu verstehen: Wir haben soeben die Lorentzkraft und die Linke-Hand-Regel *erklärt*! Magnetfelder sind nichts anderes als elektrische Felder, erzeugt von bewegten Ladungen, die auf bewegte Ladungen wirken.

Ohne die Quantentheorie zu kennen, können wir daher schon vermuten, dass in einem Permanentmagneten kleine Ströme kreisen und sein Magnetfeld erzeugen!

Übrigens brauchen wir hier gar nicht anzunehmen, dass die Geschwindigkeit der Elektronen im Draht klein ist. Die genaue Rechnung zeigt, dass der Draht die schwarze Ladung in beiden Fällen in *genau demselben* Ausmaß anzieht.

Was wird nun aus dem Faraday-Paradoxon? Weil sich in Abb. 3.7 mehr positive Ladungen mit der gleichen Geschwindigkeit nach links bewegen, als sich in Abb. 3.5 negative Ladungen nach rechts bewegten, ist der elektrische Strom nun stärker. Also ist das Magnetfeld *nicht* gleich geblieben, sondern *stärker* geworden! Es sind wirklich die elektrischen und magnetischen Felder um den Draht, die auf die äußeren Ladungen wirken, es ist nicht der Draht selbst.

Wir haben in diesem Kapitel gesehen, dass die Relativitätstheorie nicht nur für schnell fliegende Körper oder Raumschiffe interessant ist: Wir können sie sogar bei sehr langsamen Elektronen am Werk sehen. Und das heißt eben, dass die Relativitätstheorie auch unser Alltagsleben beeinflusst, denn der Magnetismus *ist* eine Folge der Relativitätstheorie.

Literatur

1. A. Einstein, Annalen der Physik **20**, 627 (1906). www.physik.uni-augsburg.de/annalen/history/einstein-papers/1906_20_627-633.pdf. Zugegriffen: 25. Januar 2015

4 Beschleunigung und Trägheit

Wir kommen nun auf das Thema des ersten Kapitels zurück, das Senden von Licht bei verschiedenen Geschwindigkeiten. Bisher bewegten sich Sender und Empfänger des Lichts geradlinig und gleichförmig, sodass sich sowohl der Wert als auch die Richtung ihrer Geschwindigkeit nicht änderten. Dieser Teil der Relativitätstheorie ist die sogenannte **Spezielle Relativitätstheorie**. Um jedoch auf eine bestimmte Geschwindigkeit zu kommen oder um die Richtung der Geschwindigkeit zu ändern, müssen wir **beschleunigen**. Wir fragen uns: Welchen Einfluss hat die Beschleunigung eines Körpers auf Zeit, Länge, Masse oder Energie? Dies wird uns letzten Endes die Erklärung dafür liefern, wie die Gravitation funktioniert.

4.1 Drehbewegung: Zwillingsparadoxon 1

Wir beginnen mit dem einfachsten Fall, in dem der Wert der Geschwindigkeit gleich bleibt und sich nur die Richtung der Geschwindigkeit ändert, wie etwa auf dem Karussell in Abb. 4.1. Das Karussell hat die Form einer Scheibe mit einem Loch in der Mitte. Wir haben das Karussell auf einen so kleinen Planeten gestellt, dass wir die Gravitation außer Acht lassen können.

Nehmen wir an, wir stehen auf dem äußeren Rand des sich drehenden Karussells. Dann merken wir, wie das Karussell uns andauernd zur Mitte zieht, wodurch wir uns letztlich auf einer Kreisbahn bewegen. Die Richtung unserer Geschwindigkeit relativ zum Erdboden ändert sich also dauernd: Wir **beschleunigen durch Drehung**. Wir spüren das, weil Massen jeder Beschleunigung Widerstand entgegensetzen. Wenn wir losließen, würden wir *geradeaus* vom Karussell fliegen, denn unsere träge Masse möchte sich von Natur aus geradlinig und gleichförmig bewegen. Wir würden in einen **Trägheitszustand** geraten, der von den Physikern **Inertialsystem** genannt wird. In ihm bewegen wir uns geradlinig und gleichförmig.

Was ist nun, wenn wir uns in die Mitte des Karussells in dem Loch auf den Boden stellen? Dann drehen wir uns nicht. Nichts beschleunigt uns. Wir befinden uns in einem *Trägheitszustand*. Wir wissen dann aus *Erfahrung*, dass unsere Zeit gleichförmig vergeht. Wir schauen uns nun an, wie ein Freund von

K. Fischer, *Relativitätstheorie in einfachen Worten*, DOI 10.1007/978-3-662-46966-8_4,

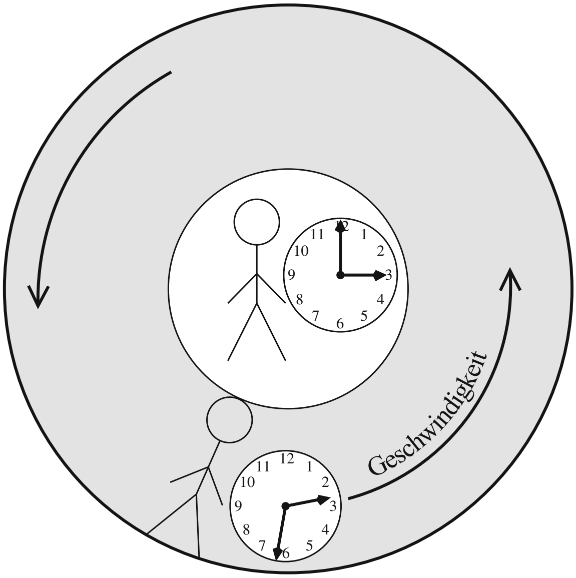

Abb. 4.1 Zeitmessung auf einem Karussell

uns auf dem Außenrand des Karussells fährt. Für einen sehr kurzen Zeitraum können wir annehmen, dass er sich praktisch geradlinig und gleichförmig bewegt. Wir wissen dann, dass seine Uhr *langsamer* geht als unsere, und zwar um den γ-Faktor aus Gl. (2.3).

Weil sich aber die Uhr auf dem Außenrand des Karussells nicht von uns entfernt, können wir so lange warten wie wir wollen und der Uhr zusehen, wie sie immer mehr gegenüber unserer Uhr nachgeht. Diese Beobachtung verleitet uns zu einem verrückten Gedankenexperiment: Nehmen wir an, beide Beobachter sind eineiige *Zwillinge*. Zuerst stehen beide im Loch in der Mitte des Karussells. Dann steigt einer der beiden auf das sich drehende Karussell und setzt sich an dessen Außenrand. Er bleibt dort eine Weile und kehrt dann ins Zentrum des Karussells zurück. Natürlich wird seine Uhr auf irgendeine Weise reagieren, während er auf das Karussell steigt und auch, wenn er wieder absteigt. Aber das hängt nicht davon ab, was mit der Uhr passiert, während er auf dem Außenrand des Karussells sitzt. Wenn er also lange genug auf dem Außenrand sitzen bleibt, ist er nach der Rückkehr *jünger* als sein Zwillingsbruder, der in der Mitte blieb!

Dies ist das berühmte **Zwillingsparadoxon**, auch **Uhrenparadoxon** genannt. Der Punkt ist nur, dass es gar kein Paradoxon ist, sondern Wirklichkeit, und dass es schon gemessen wurde!

Zum Beispiel hat man im Jahre 1977 am **CERN**, dem Europäischen Kernforschungszentrum in Genf, **Myonen** in einer kreisförmigen Röhre umherfliegen lassen. Ein Myon mit negativer Ladung ist eine Art schweres Elektron. Die Myonen zerfallen in Elektronen und andere Elementarteilchen. Ein Myon, das neben uns *ruht*, hat eine Lebensdauer von ungefähr $2 \cdot 10^{-6}$ Sekunden.

Aber „auf dem Karussell", das heißt innerhalb der kreisförmigen Röhre, bewegten sich die Myonen mit einer Geschwindigkeit von $0{,}99942 \cdot c$. Daher ist ihr γ-Faktor ungefähr $\frac{1}{29}$. Also erwarten wir, dass sie ungefähr 29 Mal *länger* leben als auf einem Ruheplatz neben uns. Und genau das hat man gemessen! Im Literaturverzeichnis ist unter [1] der Link zur Originalarbeit angegeben, wobei das γ dort unserem γ^{-1} entspricht.

4.2 Drehbewegung: Die Schulgeometrie gilt nicht

Als Nächstes möchte unser Freund auf dem Außenrand des Karussells auch wissen, wie sich Längen durch die Drehbewegung verändern. Wir in der Mitte stellen viele kleine Stäbe her und reichen sie unserem Freund.

Wir wissen aus Abschn. 2.4.2, dass sich Längen senkrecht zur Bewegungsrichtung nicht ändern. Daher stimmen wir mit unserem Freund dahin überein, dass sich der Durchmesser des Karussells nicht ändert, wenn es sich dreht.

Danach misst unser Freund den Umfang des Karussells wie in Abb. 4.2. Da ein hinreichend kleiner Teil des Umfangs praktisch gerade ist, kann unser Freund den Umfang hinreichend genau bestimmen, indem er gleiche, genügend kurze Stäbe aneinanderlegt und abzählt, wie viele er braucht, um den Außenrand auszufüllen.

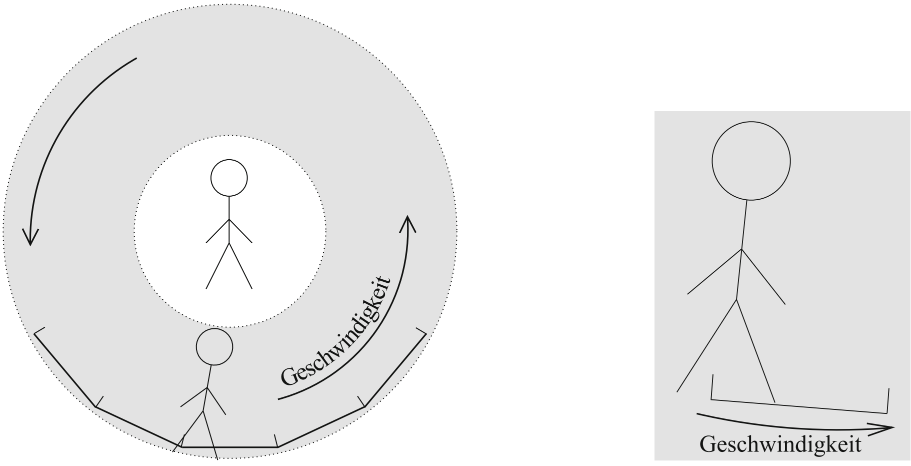

Abb. 4.2 Längenmessung auf einem Karussell. Sehr kurze Stücke des Umfangs sind praktisch gerade, wie wir *rechts* sehen können

Nehmen wir als Erstes an, dass sich das Karussell noch nicht dreht. Unser Freund sendet einen Lichtstrahl entlang eines der kurzen Stäbe, der vor ihm liegt. Das Licht streicht an dem Stab mit der Geschwindigkeit c vorbei. Diese Geschwindigkeit ist die Länge des Stabes, geteilt durch die „sehr kurze Zeitspanne“, die das Licht dafür braucht. Daher ist die Länge des Stabes gerade diese „sehr kurze Zeitspanne“ mal der Lichtgeschwindigkeit. Da er auch schon die Anzahl der Stäbe auf dem Außenrand gezählt hat, wird unser Freund zu dem Ergebnis kommen, dass der Außenrand π mal so lang ist wie der Durchmesser, so wie wir es von der **Schulgeometrie** her kennen.

Danach wiederholen wir das Ganze für das sich drehende Karussell. Wieder schickt unser Freund den Lichtstrahl entlang eines Stabes auf dem Außenrand. Da der Lichtstrahl und der Stab in Richtung der Drehbewegung zeigen, wird der Lichtstrahl wieder entlang des kurzen Stabes streichen, und das mit der gleichen Lichtgeschwindigkeit c, die ja absolut ist. Unser Freund wartet also dieselbe „sehr kurze Zeitspanne“ wie vorher, und findet aber, dass der Lichtstrahl nur entlang eines *Teils* des Stabes vorangekommen ist! Denn die Zeit vergeht ja für unseren Freund *langsamer* als vorher. Der Lichtstrahl legt also einen gerade um den γ-Faktor der Geschwindigkeit der Drehbewegung kleineren Weg zurück: Für den Freund schafft er es in der „sehr kurzen Zeitspanne“ auf *seiner* Uhr nicht, entlang des ganzen Stabes zu fliegen. Aber immer noch ist für unseren Freund die Länge des Stabes die Lichtgeschwindigkeit c mal die Zeit, die das Licht braucht, um am Stab entlang zu fliegen. Anders ausgedrückt: Für unseren Freund ist der Stab *länger* geworden!

Aber trotzdem füllt immer noch die gleiche Anzahl von Stäben den Außenrand. Daher muss das *Verhältnis* von Außenrand zu Durchmesser des sich drehenden Karussells jetzt *größer* als π geworden sein! Genauer gesagt, dieses Verhältnis ist um den Faktor $1/\gamma$ größer als π. Daher verkürzt unser Freund die Stäbe auf ihre ursprüngliche Länge, sodass er jetzt *mehr* davon braucht. In Abb. 4.3, haben wir das der Deutlichkeit halber übertrieben dargestellt.

Bisher hatten wir uns nur mit Körpern beschäftigt, die sich geradlinig und gleichförmig bewegten. Wir sahen, dass sich ihre Zeit und ihre Länge relativ zur Geschwindigkeit ihres Beobachters änderten. Aber wir konnten zumindest noch die **Schulgeometrie** benützen, die die Mathematiker auch **euklidische Geometrie** nennen. Wir haben nämlich zum Beispiel in Abschn. 2.2 den γ-Faktor mithilfe des Satzes von Pythagoras berechnet, der ein Satz der euklidischen Geometrie ist. Diese Geometrie ist ein festes System von Sätzen. Wenn einer der Sätze nicht mehr stimmt, können alle anderen auch nicht mehr ohne weiteres stimmen. Einer dieser Sätze lautet, dass das Verhältnis von Umfang zu Durchmesser eines Kreises stets π ist. Wir sahen aber, dass dies für ein sich drehendes Karussell nicht mehr stimmt: Das Verhältnis des Außenrands zum Durchmesser des sich drehenden Karussells ist *größer* als π!

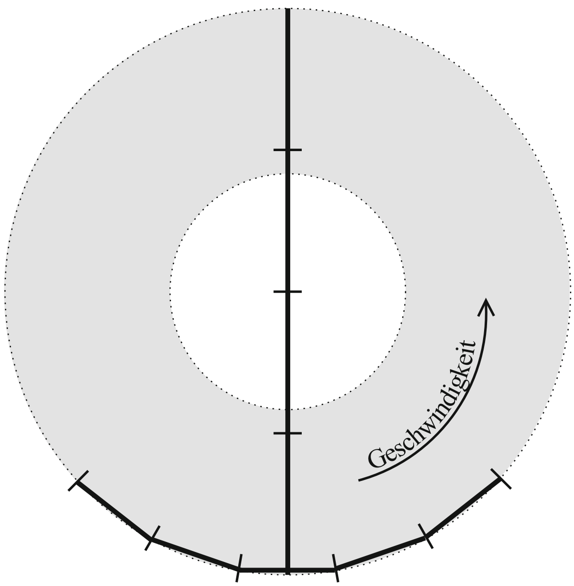

Abb. 4.3 Der Außenrand ist nun länger als π mal der Durchmesser, gemessen als Anzahl der Stäbe

Uns bleibt nur eine Schlussfolgerung: In einem **beschleunigten** Zustand **gilt die Schulgeometrie nicht mehr**!

4.3 Geradlinige Bewegung und Beschleunigung

Nicht nur bei einer Drehbewegung, sondern auch wenn wir uns **geradlinig beschleunigt** bewegen, können die seltsamsten Dinge geschehen. Betrachten wir zum Beispiel Abb. 4.4. Hier steht ein Lichtsender links von einem durchsichtigen Aufzug. Der nach oben gerichtete Pfeil zeigt an, dass der Aufzug nach oben beschleunigt. Wir stehen links neben dem Aufzug und senden einen Lichtstrahl durch den Aufzug.

Wir sehen, wie der Lichtstrahl durch die Glaswände des Aufzugs in einer waagerechten, geraden Linie von Punkt A nach Punkt B läuft, wie in Abb. 4.5. Weil nichts schneller als das Licht ist, ist dies die schnellste Art, von A nach B zu gelangen.

Was sieht unser Freund im Aufzug? Schauen wir uns Abb. 4.6 an. Sie zeigt den Moment, in dem der Lichtstrahl den Aufzug wieder verlässt. Nachdem das Licht den Punkt A passiert hatte, erhöhte sich die Aufwärtsgeschwindigkeit des Aufzugs immer mehr, sodass sich für unseren Freund der Lichtstrahl

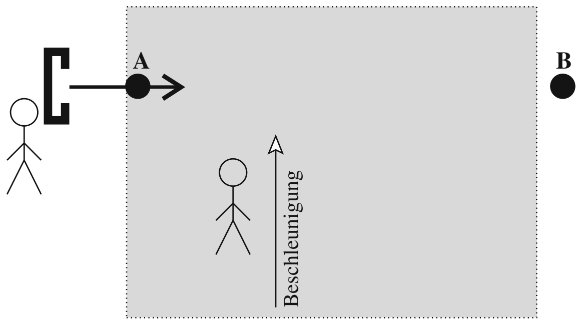

Abb. 4.4 Wir senden einen Lichtstrahl durch den durchsichtigen, sich beschleunigenden Aufzug

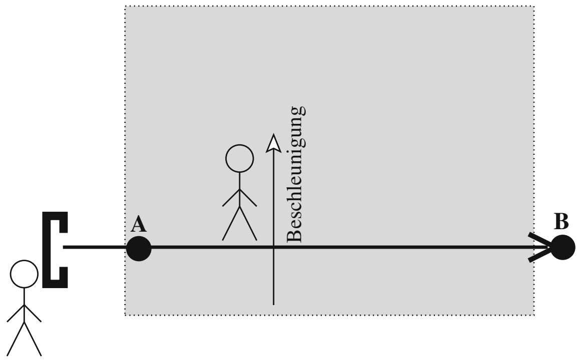

Abb. 4.5 Wir sind in einem Trägheitszustand, sodass sich für uns das Licht geradlinig ausbreitet

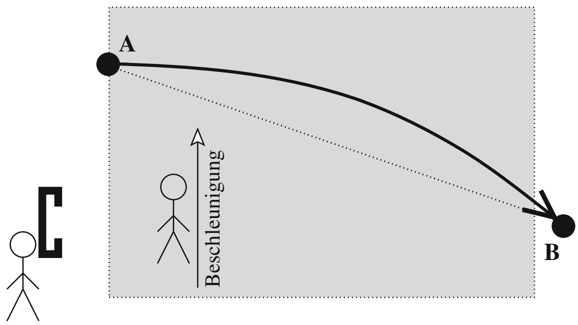

Abb. 4.6 Ein Lichtstrahl krümmt sich für den beschleunigten Beobachter

nach unten *biegt*. Er sieht also den Lichtstrahl durch den Punkt B gehen, der unterhalb von A liegt.

Wir haben auf die Rückwand des Aufzugs eine gepunktete, gerade Linie gezeichnet. Ist nicht diese gerade Linie *kürzer* als der Weg, den der Lichtstrahl gewählt hat? Wenn dem so ist, könnten wir dann nicht ein Signal entlang dieser geraden Linie *schneller als das Licht* senden?

Die Antwort ist: Die Frage ist falsch gestellt! Wir haben die gerade Linie an die Rückwand gemalt, *bevor* der Aufzug beschleunigte, als die Zeit also noch gleichmäßig voranschritt. Sobald der Aufzug beschleunigt, vergeht relativ zu uns draußen die Zeit im Aufzug immer langsamer. Längen in Richtung der Geschwindigkeit verkürzen sich mehr und mehr, während dazu senkrechte Längen gleich bleiben, sodass sich gerade, diagonale Linien krümmen. Mehr noch, der Freund im Aufzug kann gar nicht „die" Länge der gestrichelten Linie messen, denn während er misst, ändert sich der Anteil der Länge in Bewegungsrichtung, und der Gang der Zeit verlangsamt sich! Der Freund befindet sich eben *nicht nur im Raum*, sondern in der **Raumzeit**!

Wir sehen, dass es am einfachsten ist, Längen oder die Zeit zu messen, wenn wir im **Trägheitszustand** sind. Dann vergeht die Zeit für uns stets gleich schnell, und Längen bleiben gleich. Sobald wir in einem beschleunigten Zustand sind, stimmt die euklidische Geometrie nicht mehr, und die Sache wird kompliziert.

4.4 Eigenzeit und Trägheit: Zwillingsparadoxon 2

In Abschn. 4.1 vergeht die Zeit des Zwillings auf dem Außenrand des Karussells langsamer als die des Zwillings, der in der Mitte des Karussells blieb. Diese Zeit, die mit einer mitgenommenen Uhr gemessen wird, nennen wir die **Eigenzeit** eines Beobachters oder Körpers. Daher können wir wie folgt formulieren: Die Eigenzeit des in der Mitte verbliebenen Zwillings vergeht gleichmäßig, aber *schneller* als die Eigenzeit seines Bruders, der das Karussell bestieg.

Nun wollen wir dieses Gedankenexperiment in einer anderen Weise, und zwar wie in Abb. 4.7, durchführen. Zuerst ruhen die beiden Zwillinge nebeneinander ohne zu beschleunigen. Ihre Eigenzeit vergeht gleichmäßig.

Einer der Zwillinge verlässt dann den Ort. Dafür muss er nicht nur den Ort verlassen, sondern auch den bisherigen **Trägheitszustand**: Er muss ja dazu auf eine Relativgeschwindigkeit zum anderen Zwilling kommen. Er reist auf einer Route wie abgebildet, und nachdem er zurückgekehrt ist, stellt er fest, dass seine Uhr nachgeht. Wir können dieses Gedankenexperiment noch auf eine andere Weise ausführen, sodass das Paradoxon noch klarer wird.

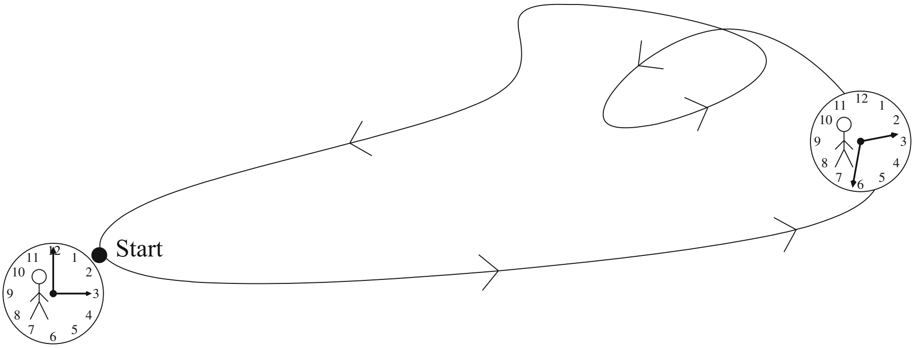

Abb. 4.7 Die Uhr des linken Zwillings läuft schneller, weil er stets im gleichen Trägheitszustand verharrt

In Abb. 4.8 sehen wir, wie der reisende Zwilling erst etwas beschleunigt, um dann aber eine lange Strecke geradlinig und gleichförmig in einem Trägheitszustand zu fliegen. Er dreht dann sanft um und fliegt wieder geradlinig und mit gleichförmiger Geschwindigkeit zurück, um schließlich bei seinem Bruder am Start anzukommen. Je weiter er auf der geraden Strecke fliegt, umso mehr geht seine Uhr bei der Rückkehr nach. Also können die Start- und die Zielbeschleunigung sowie die Umkehrbeschleunigung doch nicht die Ursache dafür sein!

Wir können somit den Einfluss dieser Beschleunigungen vernachlässigen: Die Uhr des verreisenden Zwillings wird gegenüber der Uhr des am Start wartenden Bruders um den γ-Faktor der konstanten Reisegeschwindigkeit nachgehen.

Der reisende Zwilling kann wie folgt argumentieren: „Ich sah, wie mein Zwillingsbruder sich von mir entfernte. Ich war während sehr langer Zeit in einem Trägheitszustand. In dieser Zeit habe ich mich geradlinig und mit gleichförmiger Geschwindigkeit von meinem Bruder entfernt. Da wir wäh-

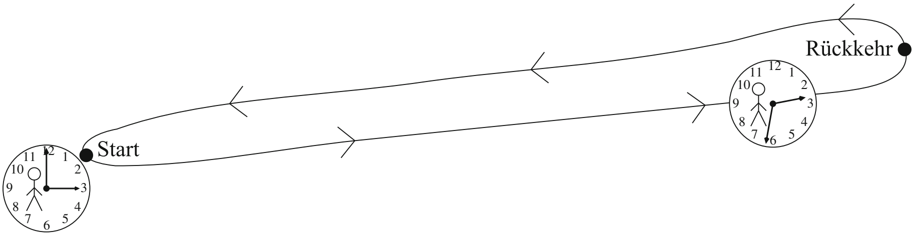

Abb. 4.8 Welchen Weg der Zwilling auch einschlägt: Wenn er wieder zu Hause ankommt, geht seine Uhr nach

rend dieser Zeit beide in einem Trägheitszustand waren, gehe ich davon aus, dass *seine* Uhr sehr viel nachgeht, nicht meine!"

Dies ist wieder das **Zwillingsparadoxon** oder **Uhrenparadoxon**.

Aber der reisende Zwilling irrt sich: Wir vergleichen beide Uhren, *nachdem* er zurückgekommen ist und wieder bei seinem Bruder ruht. Seine Gedanken darüber, was während der Reise passiert ist, sind *irrelevant*. Die einzige Frage ist, wie viel Zeit für ihn am Ende der Reise vergangen ist. Und der einzige, aber entscheidende Unterschied zu seinem zu Hause gebliebenen Zwillingsbruder ist, dass er seinen Trägheitszustand *geändert* hat.

Tatsächlich kann der reisende Zwilling *selbst* beobachten, wie seine Uhr um den γ-Faktor nachgeht! Wie das? Nun, denken wir einmal darüber nach, welche *Entfernung* der reisende Zwilling zwischen Start und Rückkehrpunkt in Abb. 4.8 zurücklegt. Der am Start zurückbleibende Zwilling misst diese Entfernung, indem er einen Lichtstrahl zum Rückkehrpunkt sendet, wo ihn ein Spiegel reflektiert. Aus der Zeitspanne, die das Licht braucht, berechnet er die Entfernung zwischen Start und Rückkehrpunkt.

Welche Entfernung misst nun der reisende Zwilling? Wir sahen in Abschn. 2.4.1, dass sich Längen in Richtung der Bewegung um den γ-Faktor verkürzen. Also verkürzt sich die Entfernung für den reisenden Zwilling um diesen Faktor γ.

Zusammengefasst: Für den am Start wartenden Zwilling vergeht die *Zeit* des reisenden Zwillings um den Faktor γ langsamer, während für den reisenden Zwilling die *Distanz* zwischen Start und Rückkehrpunkt um den Faktor γ kürzer ist als für den am Start wartenden Zwilling. So löst sich der Widerspruch auf!

4.5 Intertialzustand, Beschleunigung und Eigenzeit

Fassen wir zusammen. Der entscheidende Unterschied zwischen den beiden Zwillingen im Gedankenexperiment in Abschn. 4.4 ist, dass der reisende Zwilling seinen Trägheitszustand *geändert* hat. Genauso verändert sich die Geschwindigkeit des Zwilling in Abschn. 4.1 auf dem Karussell, weil sich die Richtung seiner Geschwindigkeit andauernd ändert. Wenn sich die Größe oder die Richtung der Geschwindigkeit ändert, *beschleunigt* man. Wir haben aber in beiden Fällen gesehen, dass es *nicht* die *Beschleunigung* ist, die bestimmt, um wie viel sich der Lauf der Uhren unterscheidet, sondern die *Geschwindigkeit*. Wenn zum Beispiel das Karussell nur den halben Durchmesser hat, sich aber mit derselben Geschwindigkeit dreht, spürt der Zwilling auf dem Außenrand des Karussells eine größere Beschleunigung, aber seine Zeit wird um denselben Betrag nachgehen.

Auf jeden Fall wird die Uhr des Zwillings, der seinen Trägheitszustand verändert hat, gegenüber der Uhr des Zwillings nachgehen, der im gleichen Trägheitszustand verblieben ist. Anders gesagt bedeutet dies, dass unsere Eigenzeit *am schnellsten* verläuft, solange wir frei im Raum im selben Trägheitszustand schweben. Kurz:

> Weil Materie sich nicht von sich aus bewegen will und **träge** ist, bewegt sie sich ohne äußere Kräfte so, dass sie für ihren Weg die längstmögliche **Eigenzeit** benötigt.

Literatur

1. H. Bailey, K. Borer, F. Combley, H. Drumm, F. Krienen, F. Lange, E. Picasso, W. von Ruden, F.J.M. Farley, J.H. Field, W. Flegel, P.M. Hattersley, Nature **268**, 301 (1977). http://cds.cern.ch/record/929453/files/ep63_001.pdf

5 Trägheit und Gravitation

Selbst **Materie, die im leeren Raum schwebt**, setzt jeder Beschleunigung Widerstand entgegen: Materie ist träge, hat also träge Masse. Wenn Materie allerdings einer großen Masse wie der Erde nahe kommt, scheint sie von selbst zu dieser großen Masse hin zu beschleunigen. Diese einfache Beobachtung wird uns helfen, die Beschleunigung besser zu verstehen, und letzten Endes wird eine einfache Theorie der Gravitation dabei herauskommen.

Wir fühlen die Gravitation jeden Tag: am Morgen, wenn wir aufstehen, wenn wir eine Treppe steigen oder etwas fallen lassen ... Gravitation ist so alltäglich, dass wir uns gar nicht darüber wundern, was für eine geheimnisvolle „Kraft“ das ist, die selbst die größten Körper im Universum beherrscht. Um die Gravitation genauer kennenzulernen, ist es zunächst notwendig, andere störende Einflüsse wie den Luftwiderstand auf der Erde auszuschalten. Das folgende Gedankenexperiment wird oft auch in der Schule gemacht: Wir stecken eine leichte Vogelfeder und eine schwere Metallkugel in einen Glaskolben, den wir an beiden Enden mit einem Stopfen verschließen. Durch einen der Stopfen treiben wir eine dünne Röhre, durch die wir die Luft aus dem Glaskolben abpumpen. Dann schließen wir das Loch im Stopfen, sodass nun

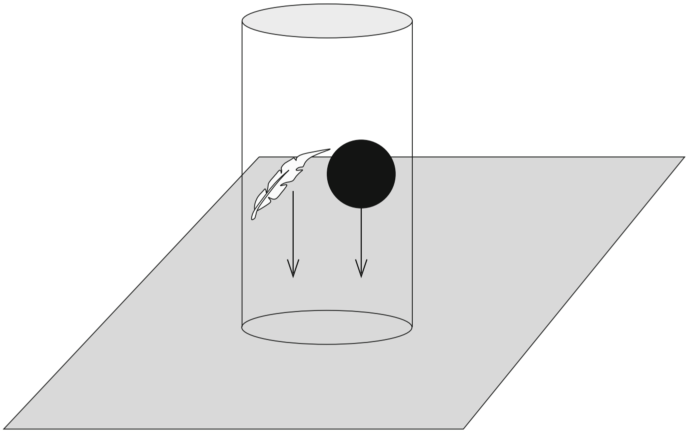

Abb. 5.1 Eine Vogelfeder fällt in einem luftleeren Kolben genauso schnell wie eine Metallkugel

K. Fischer, *Relativitätstheorie in einfachen Worten*, DOI 10.1007/978-3-662-46966-8_5,

der Kolben luftleer ist, halten den Glaskolben senkrecht und drehen in blitzschnell um. Das Resultat sehen wir in Abb. 5.1.

Die Vogelfeder und die Metallkugel fallen *gleich schnell*! Auf der Erde müssen wir erst die Luft beseitigen, um das so einfach sehen zu können, aber auf dem Mond hat es uns der Astronaut David Scott auf der Apollo-15-Expedition sehr schön gezeigt: Er ließ gleichzeitig einen Hammer von seiner rechten Hand und eine Vogelfeder von seiner linken Hand fallen, und tatsächlich erreichten beide die Mondoberfläche gleichzeitig. Wir können im Internet sogar ein Video der Fernsehübertragung des Experiments finden, wenn wir nach den Stichwörtern „Hammer Feder Apollo" suchen.

Physiker haben dieses Experiment mit wachsender Genauigkeit über die letzten hundert Jahre immer wieder verfeinert und sogar an Elementarteilchen getestet. Sie fanden immer das gleiche Resultat:

> Alle Materie *reagiert* in genau der gleichen Weise auf die Gravitation.

Das ist doch erstaunlich! Es zeigt, dass die Trägheit der Materie und die Gravitation irgendwie zusammenhängen. Überlegen wir es uns noch einmal in Ruhe: Die träge Masse eines Ein-Kilogramm-Steins können wir auf der Eisbahn testen, wie schon in Abb. 1.10 gezeigt. Das hat *nichts* mit der Gravitation zu tun: Auch im leeren Weltraum, weit entfernt von der Erde, wird sich der Stein immer noch einer Beschleunigung widersetzen.

Wir können den Stein aber auch *wiegen*. Wieder finden wir „1 Kilogramm", diesmal als das Gewicht des Steins, das man auch **schwere Masse** nennt. Bei der Messung ruht der Stein auf der Waage, sodass er sich nicht einer Beschleunigung widersetzt, sondern sich im Gegenteil nach unten zum Erdmittelpunkt hin bewegen will.

Der springende Punkt ist nun: Wenn wir ein Ein-Kilogramm-Stück eines Materials und ein Zwei-Kilogramm-Stück eines anderen Materials auf der Eisbahn auf ihre träge Masse getestet haben und die beiden Stücke danach wiegen, finden wir, dass ihre schwere Masse genau 1 Kilogramm und 2 Kilogramm beträgt. Mit anderen Worten: Ihre träge Masse und ihre schwere Masse sind *exakt* gleich. Wäre das anders, hätte zum Beispiel das Stück mit 2 Kilogramm träger Masse 3 Kilogramm schwere Masse, würde es im Glaskolben *schneller* herunterfallen als das Ein-Kilogramm-Stück. Niemand hat so etwas je beobachtet.

> **Träge Masse und schwere Masse** sind für alle Arten von Materie exakt gleich.

5.1 Die Gravitation ist keine Kraft

Was genau passiert eigentlich, wenn die Vogelfeder und die Metallkugel im Glaskolben herunterfallen? Die schwere Masse der Metallkugel versucht die Metallkugel nach unten zu beschleunigen. Gleichzeitig widersetzt sich die träge Masse der Metallkugel dieser Beschleunigung. Dasselbe gilt für die Feder. Und nun kommt der Punkt: Weil schwere und träge Masse exakt gleich sind, fallen Metallkugel und Feder frei, beide beschleunigen *überhaupt nicht!*

Aber Sie werden doch widersprechen: „Ich *sehe doch,* wie die Metallkugel nach unten beschleunigt!" Antwort: Nein! Sie selbst beschleunigen vom Erdboden weg! Sie selbst fühlen doch unter ihren Fußsohlen, wie sie aufgrund ihrer **Schwere** andauernd nach oben **beschleunigen**! Und weil wir auf der Erde in einem beschleunigten Zustand sind, ist unsere Wahrnehmung verzerrt, genauso wie die Wahrnehmung unserer Freunde im beschleunigten Zustand auf dem Karussell und im Aufzug in Kap. 4.

Um Schwere und Trägheit zu verstehen, ist es also besser, wenn wir von einem Trägheitszustand aus beobachten. Wir machen dazu einige Gedankenexperimente, ganz ähnlich denen, die Einstein selbst benutzte, um sich die Dinge klarer zu machen. Schauen wir auf Abb. 5.2.

Im linken Bild sehen wir einen Aufzug, der im leeren Raum schwebt, weit entfernt von Planeten, einem Stern oder einer anderen großen Masse. Im Aufzug ist auch keine Luft, und ein Astronaut schwebt dort in seinem Raumanzug. Neben ihm schwebt ein Ball. Dann zieht plötzlich jemand an dem Seil, und wie auf dem rechten Bild zu sehen, beschleunigt der Aufzug nach oben. Der Astronaut sieht, wie sich der Aufzugsboden zu ihm hin beschleunigt. Aber der Astronaut selbst und auch der Ball neben ihm beschleunigen *nicht*: Beide schweben immer noch frei im Raum! Keine Kraft zieht sie nach unten. Der Astronaut kann sich also denken, dass irgendjemand den Aufzug nach oben zieht.

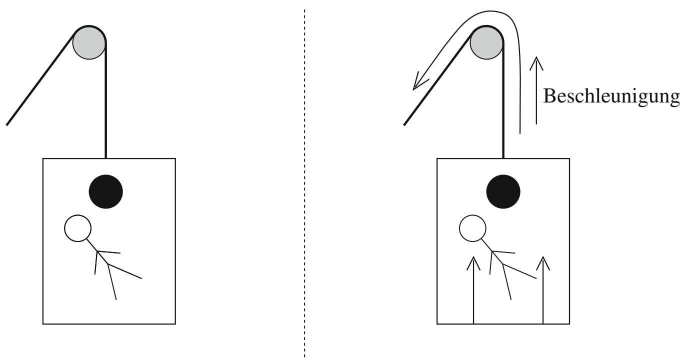

Abb. 5.2 Plötzlich zieht jemand den Aufzug am Seil nach oben

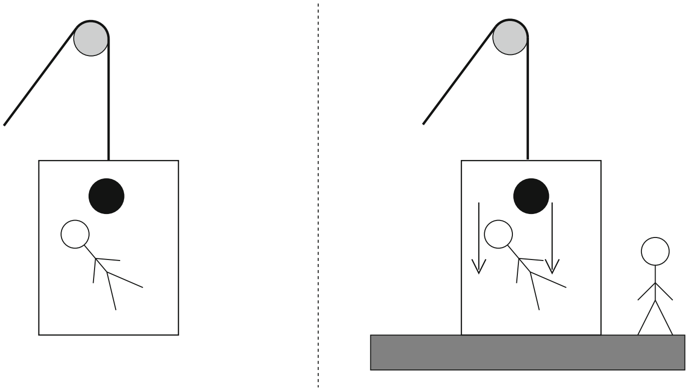

Abb. 5.3 Plötzlich hat sich ein Planet unter den Aufzug geschlichen

Wirklich? Oder passierte in Wirklichkeit etwas ganz anderes, wie in Abb. 5.3 zu sehen? Dieses Mal zieht niemand an dem Seil, vielmehr hat sich plötzlich ein Planet unter den Aufzugsboden geschlichen. Aber immer noch spürt der Astronaut *keine* Beschleunigung. Auch der Ball neben ihm ruht weiter und schwebt neben ihm. Das ist so, weil die schwere Masse und die träge Masse des Astronauten genau gleich sind, was auch für den Ball gilt. Der Astronaut und der Ball befinden sich in einem Trägheitszustand, im freien Fall! Der Astronaut sieht wieder, dass der Aufzugsboden zu ihm hin beschleunigt. Aber der Beobachter, der neben dem Aufzug auf dem Planeten steht, sieht den Astronauten und den Ball nach unten fallen.

Wir sehen also, dass der Astronaut *allein* aufgrund der Messung der Beschleunigung nicht entscheiden kann, welche der beiden Situationen nun wirklich zutrifft. Der Astronaut muss dazu *aus dem Aufzug hinaus* blicken.

Dies ist das berühmte *Äquivalenzprinzip* von Einstein:

Äquivalenzprinzip

Allein durch die Messung unserer Beschleunigung können wir nicht entscheiden, ob Gravitation auf uns wirkt. Mehr noch, **frei fallende** Massen sind in einem **Trägheitszustand**, so als ob sie frei im leeren Weltraum schwebten.

Das Äquivalenzprinzip wird unser Hauptwerkzeug sein, um die Gravitation zu verstehen. Weil frei fallende Massen in einem Trägheitszustand sind, vergeht ihre Eigenzeit gleichmäßig, und wir können unsere bisherigen Kenntnisse verwenden, um die Umgebung von großen Massen zu erforschen und dabei herauszufinden, wie die Gravitation genau funktioniert. Denn das Äquivalenzprinzip verknüpft die Trägheit mit der Schwere.

Starten wir, indem wir uns wieder das Karussell aus Abschn. 4.1 anschauen. Wir sahen, dass für den Beobachter auf dem Außenrand des sich drehenden Karussells die euklidische Geometrie nicht funktioniert und dass seine Uhr gegenüber der Uhr eines Beobachters nachgeht, der neben dem Karussell ruht.

Wir wissen, dass dies so war, weil der Beobachter auf dem Außenrand des sich drehenden Karussells andauernd zum Zentrum des Karussells hin beschleunigte. Vergleichen wir dies einmal mit unserem Zustand, wenn wir auf der Erdoberfläche ruhen: Wir fühlen, dass wir die ganze Zeit nach *oben* beschleunigen, weg vom Erdmittelpunkt. Daher wäre es nicht verwunderlich, wenn bei uns auch die Uhren gegenüber Uhren nachgingen, die weit von der Erde weg im Weltall schweben.

Wir haben aber in Abschn. 4.5 gesehen, dass die Stärke der Beschleunigung *nicht bestimmt*, um wie viel Uhren nachgehen. Das Äquivalenzprinzip sagt uns also auch, dass die Stärke der Erdbeschleunigung *nicht bestimmt*, um wie viel Uhren unter dem Einfluss der Gravitation nachgehen!

Daher müssen wir noch genauer untersuchen, wie die Gravitation Raum und Zeit beeinflusst.

5.2 Die Gravitation krümmt die Raumzeit

Stellen wir uns eine Rakete vor, die mit abgeschaltetem Antrieb die Erde umkreist. Die Rakete **fällt frei**. Sie fällt aber nicht auf die Erde zu, sondern um sie herum, wie in Abb. 5.4 skizziert. Wir selbst beobachten das Ganze von einem Ort aus, an dem wir freischwebend im Weltall *weit genug* von der Erde entfernt sind, sodass wir relativ zur Erde im Trägheitszustand praktisch ruhen. (Zur Bedeutung von „weit genug“ siehe den letzten Abschnitt des Vorworts.) Nach dem Äquivalenzprinzip ist die Rakete genau wie wir in einem Trägheitszustand. Aber was zwingt dann die Rakete auf die gekrümmte Bahn um die Erde herum?

5.2.1 Gekrümmte Oberflächen

Um die Frage zu beantworten, denken wir einmal an eine ähnliche Situation und suchen uns im leeren Raum zwei Punkte A und B aus, weit entfernt von einem Planeten oder Stern oder einer anderen großen Masse. Was ist dann die kürzeste Verbindung zwischen diesen zwei Punkten? Offenbar der gerade Weg zwischen A und B. Wie können wir diesem Weg folgen? Wir starten von A in Richtung von B und fliegen *immer geradeaus*.

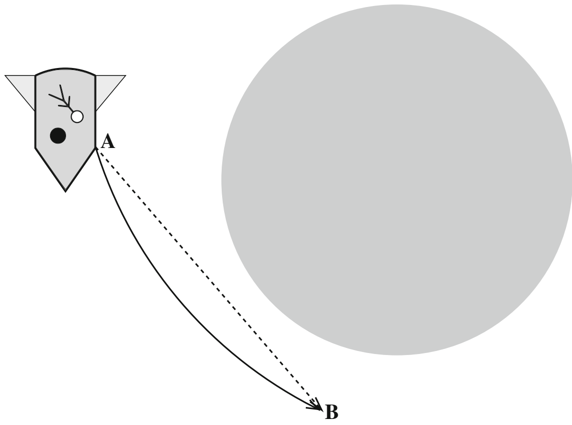

Abb. 5.4 Eine Rakete fällt frei um die Erde herum

Als Nächstes stellen wir uns vor, dass die beiden Punkte *A* und *B* auf dem Äquator im Pazifischen Ozean liegen, wobei *A* westlich von *B* liegt. Wieder suchen wir die kürzeste Verbindung zwischen den beiden Punkten. Nun, dafür müssten wir einen Tunnel graben, wie ihn Abb. 5.5 als gestrichelten geraden Weg zeigt.

Lassen wir nur Wege auf der Erdoberfläche zu, ist der Weg auf dem Äquator längs der durchgezogenen Linie am kürzesten: Dieser Weg ist *gekrümmt*. Wie können wir diesem Weg folgen? Wir starten am Punkt *A* und fahren *immer geradeaus* in Richtung Punkt *B*.

Für kleine Entfernungen dürfen wir annehmen, dass Erd- und Ozeanoberfläche flach sind. Wenn wir also eine hinreichend kurze Strecke „immer

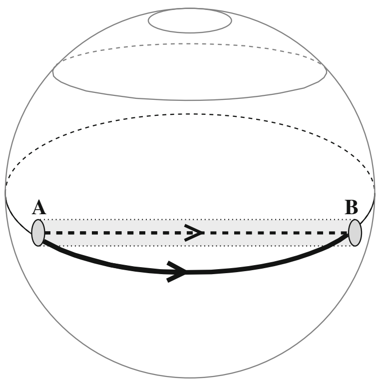

Abb. 5.5 Auf einer gekrümmten Oberfläche ist der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten in der Regel auch gekrümmt

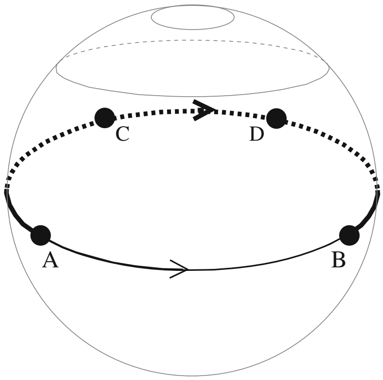

Abb. 5.6 Auf einer gekrümmten Oberfläche muss der geradeste Weg nicht der kürzeste sein

geradeaus“ fahren, so folgen wir einem geraden Weg. Daher ist der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten im Allgemeinen zwar nicht der gerade, aber der **geradeste Weg**.

Kürzeste Wege sind immer die geradesten, aber geradeste Wege sind nicht immer die kürzesten, wie wir in Abb. 5.6 sehen können: Dort wenden wir uns von A aus immer geradeaus nach Westen, entlang des Äquators, der fett gezeichneten Linie folgend. Dieser Weg ist für kleine Entfernungen praktisch eine gerade Linie, und für nicht zu weit entfernte Punkte wie zum Beispiel C ist es auch der kürzeste Weg zwischen A und C, verglichen zum Beispiel mit der grauen Linie zwischen A und C in Abb. 5.7. Genauso verhält es sich mit dem geradesten Weg zwischen C und D und zwischen D und dem Endpunkt B. Wir sehen, dass diese geradeste Verbindung zwischen A und B jedenfalls kürzer ist als alle anderen Verbindungen, die sie in genügend kurzen Entfernungen *kreuzen*, wie zum Beispiel die graue Linie in Abb. 5.7.

Daher ist die fett gezeichnete Linie entlang des Äquators der geradeste Weg zwischen A und B, *wenn* wir in Westrichtung starten. Wir werden einen solchen geradesten, aber nicht kürzesten Weg in der Raumzeit in Abschn. 6.2 kennenlernen. Aber natürlich ist der kürzeste Weg zwischen A und B die fette Linie in Abb. 5.5.

Ein derartiger „geradester“ Weg ist die natürliche Verallgemeinerung der „geraden“ Linie in einer Ebene. Er heißt **Geodäte**. Der Name spricht für sich, denn die Geodäsie ist die Wissenschaft von der Vermessung der Erde …

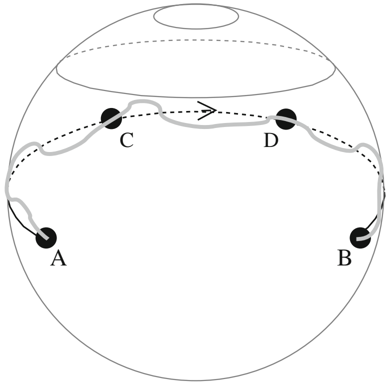

Abb. 5.7 Der geradeste Weg ist kürzer als alle nahe gelegenen Wege, die ihn immer wieder in ausreichend kurzen Intervallen kreuzen. Auf einer gekrümmten Oberfläche muss der geradeste Weg nicht der kürzeste sein

5.2.2 Gekrümmte Raumzeit

Betrachtet man kurze Abstände, bewegt sich eine frei fallende Rakete mit konstanter Geschwindigkeit entlang einer fast geraden Linie. Über längere Abstände gesehen kann sich der Weg krümmen, und wie wir gesehen haben, kann sich die Geschwindigkeit der Rakete ändern. Aber ein Unterschied fällt auf: Der Weg von A nach B ist normalerweise *nicht* der geradeste Weg im Raum, wie auch in Abb. 5.4 klar zu sehen ist. Was wird also von der Gravitation gekrümmt?

> Die Gravitation *krümmt* nicht nur den Raum, sondern auch die Zeit, also die **Raumzeit**, wie die Verbindung von Raum und Zeit genannt wird.

Schauen wir einmal, wie die Gravitation das anstellt.

Aus Abschn. 4.4 wissen wir, dass an einem Ort, wo wir nicht beschleunigen, unsere Eigenzeit *schneller* als die Zeit aller Uhren vergeht, die zunächst mit uns verweilen, sich dann wegbewegen und schließlich nach einiger Zeit wieder zu uns zurückkommen, um dann wieder bei uns ruhen. Nun kommt das Äquivalenzprinzip ins Spiel: Wenn wir in der Rakete in Abb. 5.4 fliegen, wird ein Beobachter, der weit entfernt von der Erde in einem Trägheitszustand zusieht, uns sagen, dass wir uns mit der Rakete von A nach B *bewegen*. Wir fühlen aber in der Rakete keine Kraft an uns zerren, sind also auch in einem Trägheitszustand und können darauf bestehen, dass wir *ruhen*. Wenn also eine Uhr zunächst bei uns ruht, sich dann ein wenig von uns wegbewegt, um schließlich wieder bei der Rakete zu landen und dort zu ruhen, wird diese Uhr gegenüber unserer Uhr *nachgehen*. Umgekehrt geht es ebenso: Wir *können* mit der Rakete entlang der geraden, gestrichelten Linie fliegen, dazu müssen wir aber den Raketenantrieb zünden und *beschleunigen*. Das heißt, wir müssen unseren jetzigen Trägheitszustand verlassen. Bevor wir abfliegen, setzen wir eine Uhr neben unserer Rakete aus, die also weiter frei von A nach B fällt. Nachdem wir in B mit der Rakete angekommen und wieder mit der frei fallenden Uhr zusammen fliegen, stellen wir fest, dass diesmal *unsere* Uhr gegenüber der andauernd frei fallenden Uhr nachgeht.

Als Nächstes müssen wir herausfinden, was ein „benachbarter" Weg wie in Abb. 5.7 in der Raumzeit ist. Es muss ein Weg sein, der den ursprünglichen Weg in hinreichend kurzen Abständen kreuzt. Wenn wir uns auf dem ursprünglichen Weg bewegen und sich unser Freund auf einem benachbarten Weg bewegt, kreuzt er dann und wann unseren Weg. Das heißt, er macht relativ zu uns *Zwischenstation*. So einen Weg nennen wir einen **benachbarten Weg in der Raumzeit**.

Daher können wir als „Länge" eines Wegs die *Eigenzeit* angeben, die man braucht, um ihn zu durchmessen. Der *geradeste Weg* zwischen A und B ist der Weg, der bei gleicher Start- und Zielgeschwindigkeit die *meiste* Eigenzeit unter allen benachbarten Wegen in der Raumzeit benötigt.

Kann es also in Analogie zu einem geradesten aber nicht kürzesten Weg in Abschn. 5.2.1 passieren, dass wir auf dem geradesten Weg fliegen und trotzdem unsere Eigenzeit *langsamer* vergeht als die unseres Freundes, der uns vor einiger Zeit verließ und gerade jetzt zurückkehrte? Ja, wie wir in Abschn. 6.2 sehen werden, ist das möglich, wenn unser Freund keinen benachbarten Weg in der Raumzeit einschlägt.

In dieser Weise sind Raum und Zeit zur Raumzeit verknüpft: Einfach eine Linie zwischen A und B zu ziehen, sagt noch gar nichts aus, wir müssen vielmehr noch die Startgeschwindigkeit festlegen und zumindest in einem Gedankenexperiment von A nach B *reisen*, um herauszufinden, was der *geradeste* Weg ist. Dies ist ein *Weg*, auf dem wir kräftefrei, das heißt **frei fallend** reisen können. Die Zeit hängt auch von der Startgeschwindigkeit in der gekrümmten Raumzeit ab, und wir benützen sie, um die „Länge" des Wegs in der Raumzeit anzugeben.

Alle Arten von Materie verhalten sich im freien Fall gleich, vorausgesetzt, sie sind klein und leicht genug, um selbst fast keine Gravitation zu erzeugen. Solche Körper nennen wir **Testmassen**. Wir lassen also Testmassen frei fallen, um die geradesten Wege in der Raumzeit zu finden. Unter der Wirkung der Gravitation werden sich an verschiedenen Orten ausgebrachte Testmassen relativ zueinander zu bewegen beginnen, und so können wir die Krümmung der Raumzeit ermitteln. Wie werden im nächsten Abschnitt sehen, wie das geht.

Die Gravitation krümmt die Raumzeit. Auf dem **geradesten Weg** zwischen zwei Punkten **fällt** eine Testmasse **frei**. Dann vergeht bei gegebener Startgeschwindigkeit die **Eigenzeit** der Testmasse schneller als auf allen anderen **benachbarten Wegen** in der Raumzeit. Dieser geradeste Weg ist eine **Geodäte der Raumzeit**.

5.3 Messung der Raumzeitkrümmung

Wir bemerkten in Abschn. 5.1, dass wir aus dem Aufzug hinausschauen müssen, um zu erkennen, ob Gravitation am Werk ist. Genauso gut können wir natürlich ein Raumschiff wählen, dass groß genug ist, frei zur Erde hin fällt und in dem keine Luft ist, wie in Abb. 5.8 auf dem linken Bild skizziert.

Zwei Bälle befinden sich links und rechts vom Astronauten im freien Fall. Da aber die Gravitation in Richtung des Erdmittelpunkts wirkt, beginnen sich die Bälle einander anzunähern. Im rechten Bild sieht der Astronaut, wie sich die Bälle näher kommen.

Wir können wieder eine ähnliche Situation auf der Erdoberfläche nachstellen: Wir lassen zwei Leute von verschiedenen Orten auf dem Äquator nach *Norden* laufen, wie in Abb. 5.9 skizziert. Beide laufen also *parallel* nach Norden und treffen sich daher am Nordpol. Während sie also auf der Erdoberfläche die ganze Zeit parallel laufen, nähern sie sich mehr und mehr an.

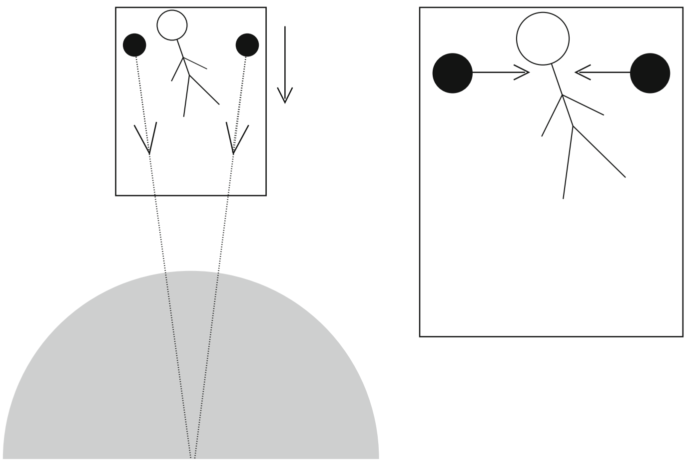

Abb. 5.8 Ist das Raumschiff groß genug, sehen wir, wie sich die zwei nebeneinander angeordneten, frei fallenden Bälle annähern

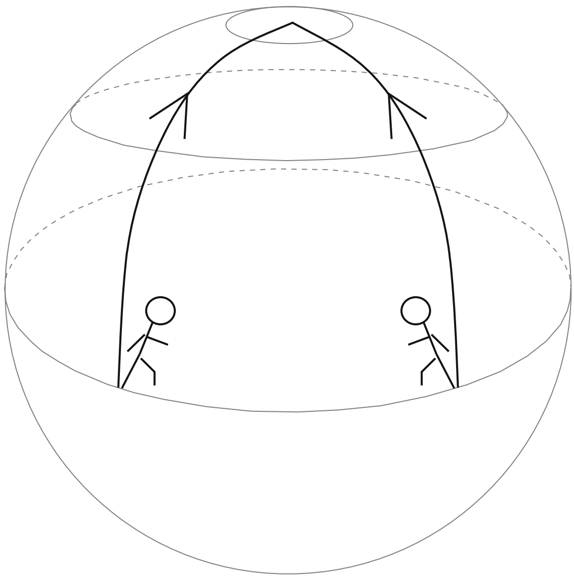

Abb. 5.9 Bewegen sich zwei Beobachter auf einer Kugeloberfläche parallel, können sie sich trotzdem annähern

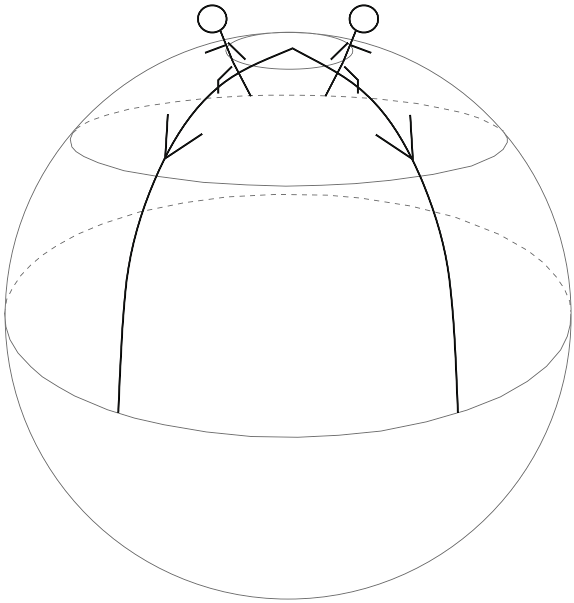

Abb. 5.10 Bewegen sich zwei Beobachter auf einer Kugeloberfläche parallel, können sie sich auch voneinander entfernen

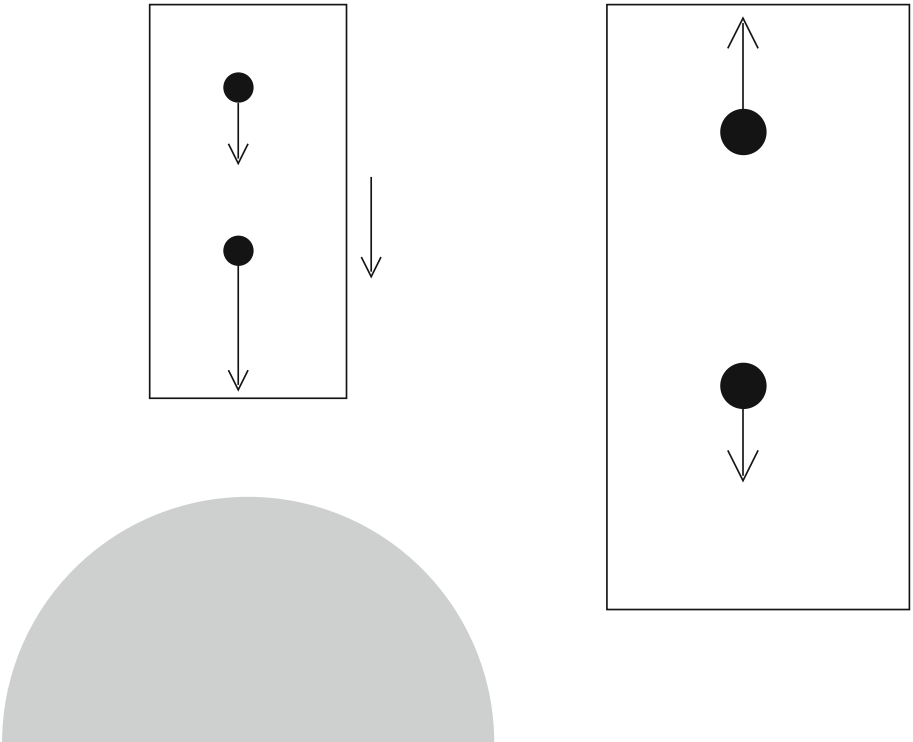

Abb. 5.11 Zwei übereinander angeordnete, frei fallende Bälle in einem Raumschiff beginnen sich voneinander wegzubewegen

Diese Analogie geht aber noch weiter: In Abb. 5.10 sehen wir, wie die beiden vom Nordpol aus nach Süden starten. Wieder laufen sie parallel, aber nun nach Süden, wobei sie sich voneinander entfernen.

Etwas Ähnliches passiert im linken Bild der Abb. 5.11: Hier haben wir die beiden Bälle übereinander angeordnet. Da der obere Ball etwas weiter vom Erdmittelpunkt entfernt ist also der untere Ball, wirkt auf den unteren Ball etwas mehr Gravitation.

Innerhalb des Raumschiffes sehen wir wie auf dem rechten Bild, dass sich die beiden Bälle langsam voneinander *entfernen*!

Wie fügt sich das alles zusammen? Dazu denken wir uns eine Box in Form einer Schuhschachtel und markieren jede der acht gedachten Ecken mit einem Ball. In Abb. 5.12 sehen wir die Vorderseite der *gedachten* Schachtel in grau. Auf dem linken Bild beginnen die Bälle frei zu fallen. Auf dem mittleren Bild sehen wir beide Effekte, von denen wir vorher sprachen: Der linke und rechte Ball bewegen sich jeweils aufeinander zu, während sich der obere und untere Ball jeweils voneinander fortbewegen. Mit anderen Worten: Die Höhe der

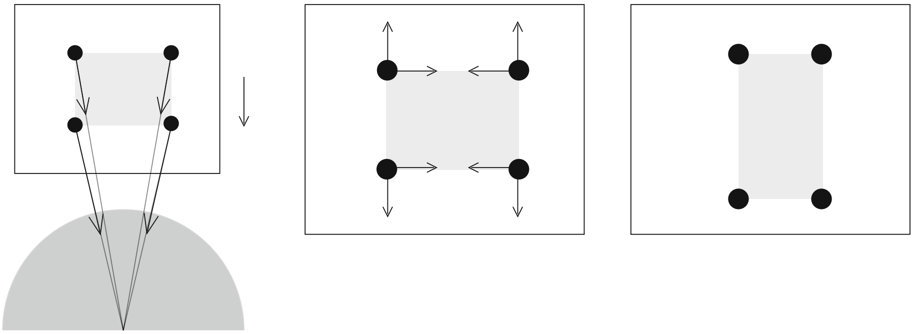

Abb. 5.12 Ein Bereich des Raums innerhalb eines frei fallenden Raumschiffes beginnt sich zu verformen, aber sein Volumen bleibt gleich

Schachtel nimmt zu, und die Breite und auch die Tiefe der Schachtel nehmen ab, wie wir auf dem rechten Bild erkennen.

Wenn wir das Ganze genau vermessen, stellen wir fest, dass das *Volumen* der Schachtel gleich bleibt! Können wir das anschaulich verstehen? Stellen wir uns einmal vor, dass die Schachtel Materie enthält. Dann lässt die Gravitation dieser Materie die Schachtel *schrumpfen*, denn Gravitation führt dazu, dass sich Materie aufeinander zubewegt. Aber unsere Schachtel enthält ja *keine* Masse, und die Bälle sind so leicht, dass wir *ihre* Masse vernachlässigen können. Also ist die Schachtel *leer*. Daher *verformt* die Gravitation der außen liegenden Massen wie die der Erde die Schachtel, sie lässt sie aber *nicht schrumpfen*.

So wirkt im Wesentlichen die Gravitation. Wie nun Materie Gravitation *erzeugt*, werden wir in Kap. 7 genauer sehen. Aber davor wollen wir uns erst einmal genau anschauen, wie Materie auf die Gravitation *reagiert*.

6

Das Äquivalenzprinzip in Aktion

6.1 Zeit und Gravitation

Wie beeinflusst die Gravitation die Zeit? Um diese Frage zu beantworten, vergleichen wir den Lauf zweier identischer Uhren, die *relativ zueinander ruhen*, wie in Abb. 6.1 dargestellt. Die rechte Uhr ruht auf dem grauen Planeten. Die linke Uhr ruht weit genug entfernt vom Planeten, sodass wir seine Gravitation *vernachlässigen* können. Daher ist die linke Uhr *fast* in einem Trägheitszustand. (Zur Bedeutung von „fast" oder „vernachlässigen" siehe den letzten Abschnitt des Vorworts.)

Wir stellen beide Uhren so ein, dass sie dieselbe Zeit „zwei Uhr" anzeigen und fragen uns: Geht die Uhr auf dem Planeten genauso schnell wie die weit vom Planeten entfernte Uhr?

Um den Lauf der beiden Uhren vergleichen zu können, bewegen wir die linke Uhr zur rechten Uhr hin, *ohne* ihren Trägheitszustand zu verändern. Das ist wegen des Äquivalenzprinzips möglich: Denn während die linke Uhr zur rechten Uhr hin frei fällt, *ist* sie weiterhin in ihrem jetzigen Trägheitszustand.

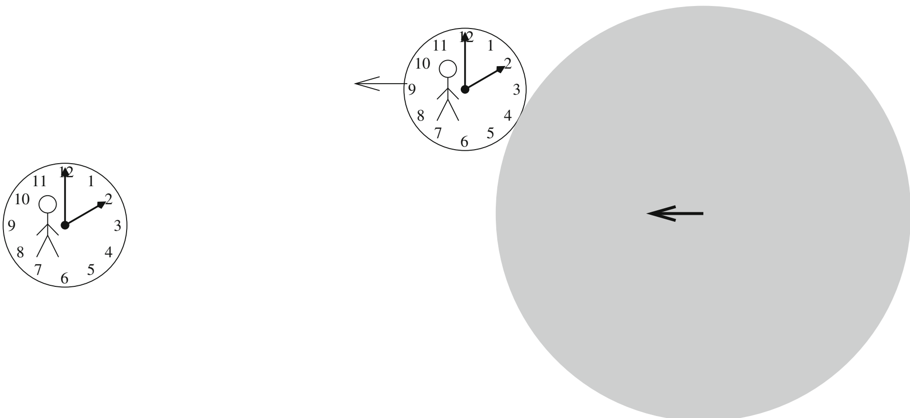

Abb. 6.1 Die *linke* Uhr beginnt zum Planeten hin frei zu fallen

K. Fischer, *Relativitätstheorie in einfachen Worten*, DOI 10.1007/978-3-662-46966-8_6,

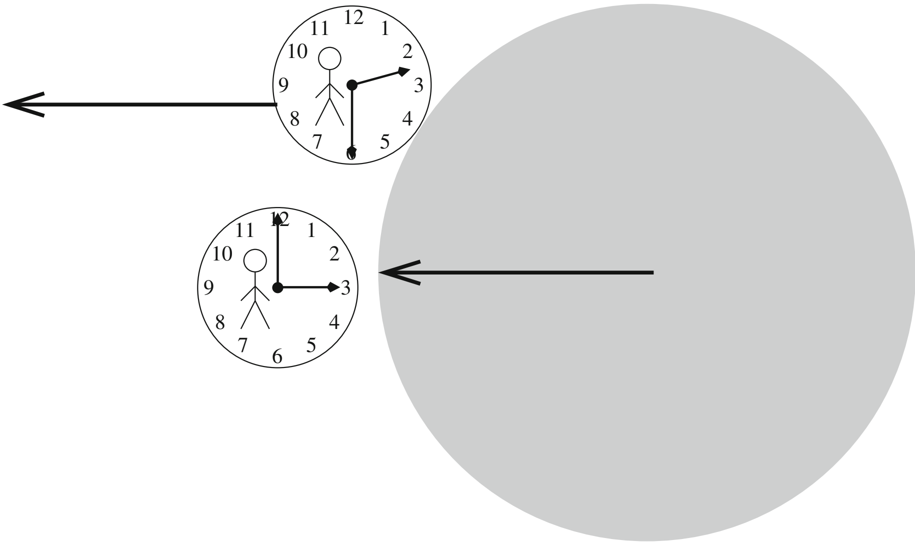

Abb. 6.2 Die *linke*, frei fallende Uhr trifft die *rechte* Uhr, die auf dem Planeten ruht

Daher fallen wir zusammen mit der linken Uhr ab „zwei Uhr" frei auf die rechte Uhr zu. Von uns aus gesehen, fällt damit die rechte Uhr zusammen mit dem Planeten auf *uns* zu. Die Pfeile zeigen die Geschwindigkeiten. In Abb. 6.1 haben die rechte Uhr und der Planet gerade erst angefangen, auf uns zu zufallen. In Abb. 6.2 hat uns die rechte Uhr fast erreicht, und wir vergleichen nun den Lauf der beiden Uhren. Unsere Uhr war immer im gleichen Trägheitszustand und ging daher immer gleich schnell. Aber wir sehen, dass sich die rechte Uhr gegenüber unserer Uhr mit einer bestimmten Geschwindigkeit bewegt, wenn wir sie treffen. Also geht die Uhr auf dem Planeten gegenüber unserer Uhr *nach*.

Um wie viel geht die rechte Uhr auf dem Planeten gegenüber der linken Uhr nach? Das bestimmt der γ-Faktor der *Geschwindigkeit*, mit der die linke Uhr auf die rechte Uhr trifft. Diese Geschwindigkeit hängt von der Masse des Planeten ab. Wir werden in Abschn. 8.5 dieses Gedankenexperiment benutzen, um die Geschwindigkeit zu *berechnen*, wenn wir die Einstein-Gleichung der Gravitation lösen.

Zusammengefasst:

Die Gravitation einer Masse verlangsamt den Gang einer nahen Uhr. Wenn wir eine Uhr an einem Ort frei fallen lassen, an dem sie weit entfernt von der großen Masse geruht hat, und diese Uhr dann eine Uhr trifft, die auf der großen Masse ruht, zeigt uns der γ-Faktor ihrer Geschwindigkeit, um wie viel die Uhr auf der großen Masse gegenüber unserer Uhr nachgeht.

Es wird öfter so dargestellt, dass die *Beschleunigung* die Uhren auf einem Planeten verlangsamt, indem man solche Uhren mit Uhren vergleicht, die sich in einer nach oben beschleunigenden Rakete befinden. Dieses Bild ist falsch. Schauen wir noch einmal, was auf dem Karussell passierte: Dort ging die Uhr des sich drehenden Beobachters nach, weil er sich mit einer bestimmten *Geschwindigkeit* drehte. Wir können *zwei* Karusselle bauen, eines mit einem kleinen und eines mit einem großen Durchmesser. Wenn sich die beiden äußeren Ränder mit der *gleichen* Geschwindigkeit drehen, ist die *Beschleunigung* auf dem äußeren Rand des kleinen Karussells *größer* als die Beschleunigung auf dem äußeren Rand des großen Karussells, aber die Uhren auf dem jeweiligen äußeren Rand laufen in *gleichem Ausmaß* langsamer als nicht rotierende Uhren.

Genauso können wir zwei Planeten finden, einer mit ungefähr doppelt so viel Masse und Durchmesser wie der andere, sodass man auf ihrer Oberfläche *verschiedene* Gravitations-Beschleunigungen spürt. Aber auch hier gehen die nahen Uhren im *gleichen* Ausmaß langsamer als die weit entfernten Uhren. Die genaue Bedingung dafür erfahren wir in Kap. 8.

Um den Effekt auf der Erde zu messen, brauchen wir nur zwei sehr genaue Uhren in einem Hochhaus. Wie in Abb. 6.3 gezeigt, fallen wir wieder frei von unserem weit entfernten Startpunkt auf die Erde zu. Im linken Bild fliegen wir gerade mit einer bestimmten Geschwindigkeit an der Uhr vorbei, die wir oben im Hochhaus aufgestellt haben. Im rechten Bild fliegen wir an der Uhr vorbei, die wir im Erdgeschoss aufgestellt haben, und zwar mit einer größeren Geschwindigkeit. Daher geht für uns die Uhr im Erdgeschoss gegenüber der Uhr im Obergeschoss nach. Aber da wir uns immer noch im gleichen Trägheitszustand befinden, heißt das, dass die untere Uhr auch *relativ* zur oberen Uhr nachgeht! Also können wir in einem Hochhaus *direkt* testen, dass Uhren im oberen Stockwerk gegenüber Uhren im Erdgeschoss nachgehen, wenn sie nur genau genug sind. Mit der neuesten Technik ist es gelungen, diesen Effekt schon für einen Höhenunterschied von nur 33 Zentimeter zu messen!

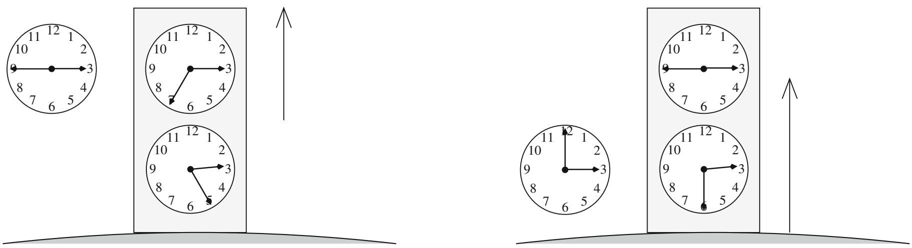

Abb. 6.3 In einem Hochhaus gehen die Uhren in den oberen Stockwerken schneller als die Uhren in den unteren Stockwerken

Das wurde zum Beispiel 2010 von C.W. Chou, D.B. Hume, T. Rosenband und D.J. Wineland vom National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, USA, bestätigt, [1].

6.2 Die Eigenzeit in einer gekrümmten Raumzeit: Zwillingsparadoxon 3

In Abschn. 5.2.2 sahen wir, dass die Eigenzeit einer frei fallenden Masse schneller vergeht als auf allen anderen *benachbarten* Wegen in der Raumzeit. Was kann aber passieren, wenn wir Zwillinge haben, von denen sich einer auf einem ganz anderen Weg in der Raumzeit bewegt? Schauen wir uns dazu Abb. 6.4 an. Auf dem linken Bild sehen wir, wie die Zwillinge noch gemeinsam um einen Planeten herum frei fallen. Im rechten Bild hat der Zwilling mit dem hellen Kopf beschleunigt und auf dem Turm angehalten.

Der Zwilling mit dem hellen Kopf sieht nun zu, wie sein Bruder mit dem dunklen Kopf immer wieder an ihm vorbeifliegt. Nach einiger Zeit kehrt der Zwilling mit dem hellen Kopf schließlich zu seinem Bruder mit dem dunklen Kopf zurück, wenn er gerade wieder einmal am Turm vorbeifliegt. Während der Zwilling mit dem dunklen Kopf die ganze Zeit frei gefallen ist, hat der Zwilling mit dem hellen Kopf die ganze Zeit beschleunigt, und zwar einmal, um auf dem Turm zu landen und ein weiteres Mal, um vom Turm zu starten. Darüber hinaus hat er auf dem Turm fortwährend die Beschleunigung der Gravitation des Planeten gespürt.

Vergleichen wir nun die Eigenzeiten der beiden Zwillinge. Dazu starten wir im freien Fall von einem Ort, der weit genug vom Planeten entfernt ist, sodass wir dort relativ zum Planeten fast in einem Trägheitszustand ruhten. Wie wir in Abb. 6.5 sehen, fallen wir gerade dann am Zwilling mit dem hellen Kopf auf

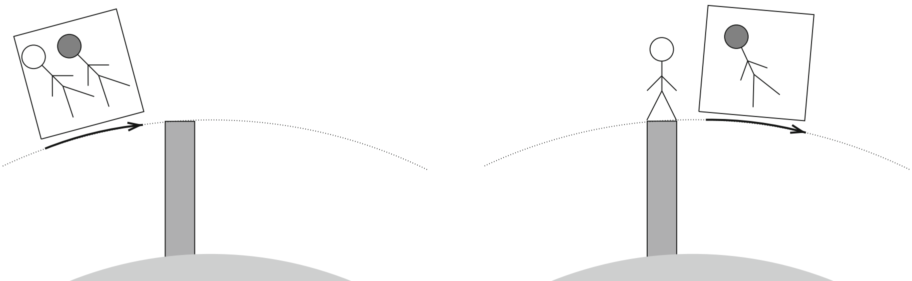

Abb. 6.4 Der Zwilling mit dem *dunklen* Kopf fällt weiter frei um den Planeten herum, während der Zwilling mit dem *hellen* Kopf auf dem Turm steht

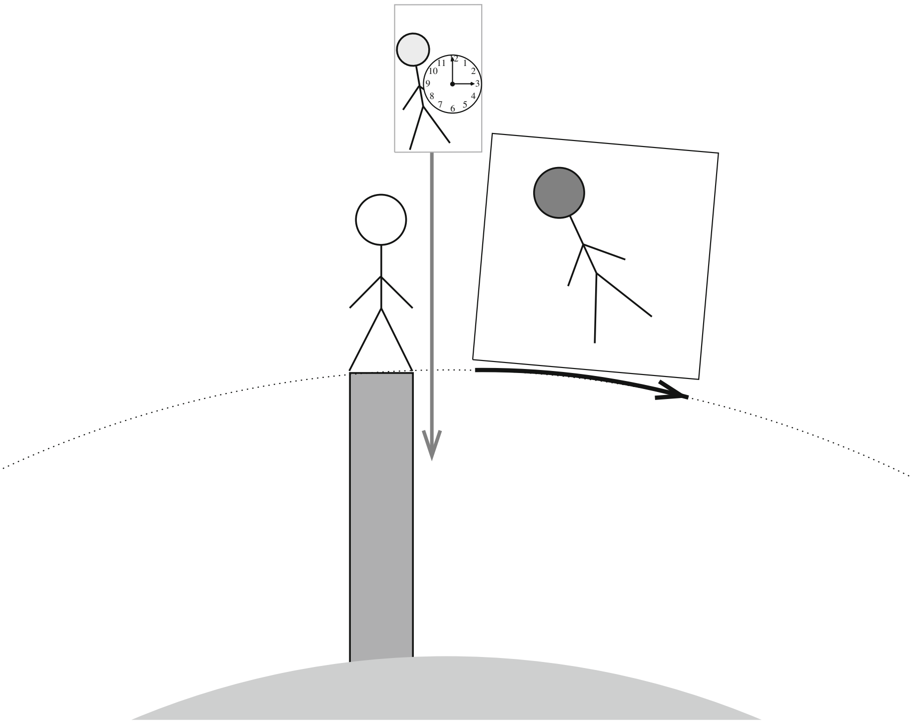

Abb. 6.5 In dem Moment, in dem wir am Zwilling mit dem *hellen* Kopf auf dem Turm vorbeifallen, fallen wir auch am gerade vorbeifliegenden Zwilling mit dem *dunklen* Kopf vorbei. Die Pfeile zeigen die Geschwindigkeiten an, wie sie der Zwilling mit dem *hellen* Kopf sieht

dem Turm vorbei, wenn auch der Zwilling mit dem dunklen Kopf vorbeifällt. Wir sehen dabei, wie der Zwilling mit dem hellen Kopf relativ zu uns mit einer bestimmten Geschwindigkeit nach oben fliegt. Der Zwilling mit dem dunklen Kopf fliegt zusätzlich noch mit einer bestimmten Geschwindigkeit *waagerecht* auf seiner Kreisbahn, sodass er relativ zu uns mit einer *größeren* Geschwindigkeit als der Zwilling mit dem hellen Kopf fliegt. Also muss die Eigenzeit des Zwillings mit dem dunklen Kopf *langsamer* als die des Zwillings mit dem hellen Kopf vergehen.

Während der Zwilling mit dem hellen Kopf auf dem Turm landet und von ihm startet, wird sich der Gang seiner Eigenzeit sicherlich etwas verändern. Aber er kann auf dem Turm solange warten wie er will, um dann, wenn er dort nur lange genug gewartet hat, bei der Rückkehr zu seinem Bruder mit dem dunklen Kopf festzustellen, dass er älter als dieser ist!

Das ist wieder ein Beispiel für das **Zwillingsparadoxon** oder **Uhrenparadoxon**. Aber in diesem Falle läuft, anders als in den Abschn. 4.1 und 4.4 die

Eigenzeit des Zwillings langsamer, der sich die ganze Zeit im selben Trägheitszustand aufgehalten hat.

Mit anderen Worten: Obwohl der Zwilling mit dem dunklen Kopf zwischen der Trennung und Wiedervereinigung mit seinem Bruder auf dem geradesten Weg in der Raumzeit fliegt, gibt es Wege, auf denen die Eigenzeit noch *schneller* vergeht. Es ist wie mit dem geradesten Weg in westlicher Richtung um den Äquator in Abb. 5.6: Der Zwilling mit dem dunklen Kopf bewegt sich in Bezug zum Zwilling mit dem hellen Kopf *nicht* auf einem **benachbarten Weg in der Raumzeit**, er bewegt sich quasi „nach Westen".

6.3 Geradlinige Bewegung in einer gekrümmten Raumzeit

In Abschn. 6.1 sahen wir, wie Uhren entlang einer geraden Linie frei fallen. Aber in einer *gekrümmten* Raumzeit sollte dies ein gekrümmter Weg sein, ähnlich wie in Abb. 5.4. Schauen wir, warum das so ist: Im linken Bild der Abb. 6.6 skizzieren wir einen sehr leichten Planeten als kleine graue Scheibe. Er ist so leicht, dass er praktisch keine Gravitation ausübt. Der besseren Darstellung halber haben wir ihn kleiner als die Uhr gezeichnet. Die beiden Achsen der Abbildung sind nicht Höhe und Breite, sondern der Abstand zum Planeten und die vergangene Zeit. Wir sehen, dass im linken Bild die Uhr mit konstanter Geschwindigkeit auf den sehr leichten Planeten geradlinig zufliegt: Ist ein Drittel der Zeit bis zur Ankunft vergangen, hat sich der ursprüngliche Abstand um ein Drittel verringert, nach zwei Dritteln der Zeit um zwei Drittel und so weiter.

Im rechten Bild sehen wir eine ähnliche Situation wie in Abb. 6.1: Nun ist es aber ein Planet mit einer großen Masse, den wir als schwarze Scheibe skizziert haben. Wir lassen die Uhr mit derselben Startgeschwindigkeit frei

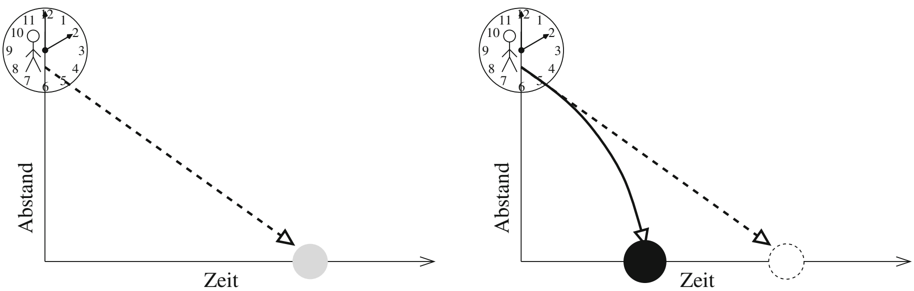

Abb. 6.6 Ein gekrümmter Weg in der Raumzeit

fallen wie im linken Bild. Die Uhr wird nun *relativ* zum Planeten **beschleunigen**, während sie sich ihm nähert. Also folgt die Uhr nun der gekrümmten durchgezogenen Linie statt der geraden gestrichelten Linie und erreicht den schweren Planeten *früher* als im linken Bild den sehr leichten Planeten.

Obwohl die Uhr im *Raum* entlang einer geraden Linie frei fällt, bewegt sie sich also in der *Raumzeit* auf einem gekrümmten Weg.

6.4 Längen und die Gravitation einer perfekten Kugel

Um zu verstehen, wie sich Längen unter dem Einfluss der Gravitation verändern, bauen wir uns ein **Modell eines Planeten oder Sterns**. Um Naturerscheinungen besser zu verstehen, versuchen wir in der Physik, das einfachste aller möglichen *Modelle* zu basteln, das aber noch das *Wesentliche* enthält. Wir wissen, dass Planeten oder Sterne eine fast perfekte Kugelform haben. Sie

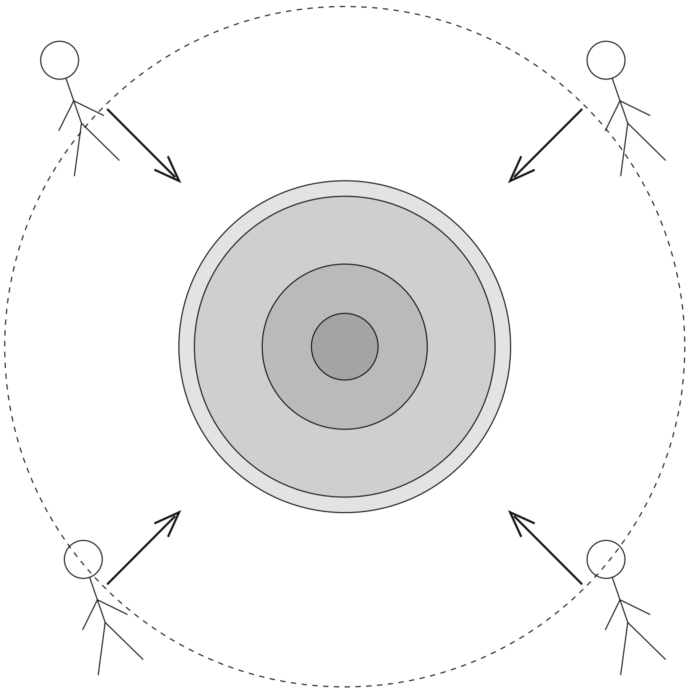

Abb. 6.7 In einer perfekten Kugel kann je nach *Tiefe* mehr oder weniger Masse pro Kubikmeter vorhanden sein, aber die perfekte Kugel hat in jeder *Richtung* gleich viel Masse. *Dunklere Farben* stellen eine höhere Massendichte dar

können je nach Abstand von der Oberfläche mehr oder weniger Masse pro Kubikmeter enthalten, aber ihre Masse ist in jede Richtung praktisch gleich verteilt. Das skizzieren wir in Abb. 6.7. Wir nennen einen solchen Körper eine **perfekte Kugel**. Sie ist ein gutes Modell für die Planeten und Sterne, mit denen wir es zu tun haben.

Wir stellen uns um die perfekte Kugel eine kugelförmige Hülle mit dem gleichen Mittelpunkt vor. Wir haben diese Hülle in der Abbildung als gestrichelten Kreis eingezeichnet. Außerdem lassen wir Beobachter weit genug entfernt von der perfekten Kugel ruhen, wo deren Gravitation praktisch nicht mehr wirkt. Sie ruhen dort alle im gleichen, sehr großen Abstand von der perfekten Kugel, befinden sich fast in einem Trägheitszustand, und ihre Uhren zeigen die gleiche Zeit an.

Dann lassen wir sie alle gleichzeitig frei zum Mittelpunkt der perfekten Kugel hin fallen. Da die Masse der perfekten Kugel in alle Richtungen gleich verteilt ist, fallen die Beobachter alle mit der gleichen Geschwindigkeit auf sie zu. Daher fliegen sie auch zur gleichen Zeit durch die gedachte gestrichelte kugelförmige Hülle. Wir begleiten einen der Beobachter beim freien Fall. *Relativ* zu uns bewegt sich die kugelförmige Hülle auf uns zu. Ein Freund, der auf ihr ruht, legt auf sie einen Stab. Wenn wir an diesem Stab vorbeifliegen, ändert sich seine Länge nicht, wie wir in Abschn. 2.4.2 sahen. Alle Beobachter sind sich darin einig: Längen auf *jeder* kugelförmigen Fläche, die dasselbe Zentrum wie die perfekte Kugel haben, ändern sich nicht. Insbesondere ist also auch der *Umfang* eines jeden Kreises mit dem gleichen Mittelpunkt wie die perfekte Kugel exakt so groß wie ohne deren Gravitation.

Danach legt unser Freund baugleiche Stäbe senkrecht zur Oberfläche der kugelförmigen Hülle aus. Wenn wir frei an einem solchen Stab vorbeifallen, liegt er in der Richtung unseres Falls zum Mittelpunkt der perfekten Kugel. Wir zeigen dies in Abb. 6.8. Nun verkürzt sich *relativ* zu uns der Stab um den γ-Faktor der Geschwindigkeit, mit der wir relativ zur perfekten Kugel an dieser Stelle frei fallen. Je mehr wir uns also der perfekten Kugel nähern, umso mehr verkürzen sich für uns die Stäbe in Fallrichtung.

Was sieht unser Freund, der relativ zur perfekten Kugel ruht? Für ihn haben die Stäbe die gleiche Länge, egal ob sie waagerecht auf der Oberfläche liegen oder senkrecht in ihr stecken. Aber er braucht *mehr* Stäbe für den Durchmesser der gestrichelten gedachten Kugel, als er ohne die Gravitation der perfekten Kugel brauchen würde. Wegen der Gravitation ist das Verhältnis aus Umfang und Radius hier *kleiner* als 2π. Mit anderen Worten: Der *Raum* selbst krümmt sich!

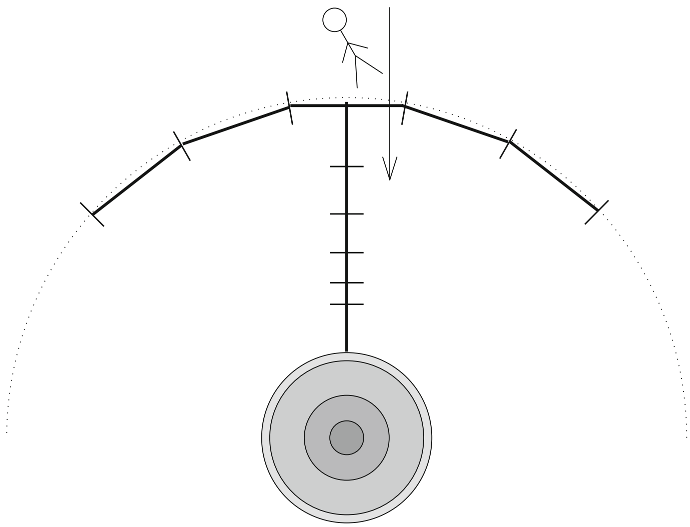

Abb. 6.8 Belegen wir eine perfekte Kugel mit gleichen Stäben, so verkürzen sich für einen frei auf die Kugel zu fallenden Beobachter die Stäbe in Fallrichtung, während die Stäbe senkrecht dazu gleich lang bleiben

Es gibt aber noch eine praktischere Möglichkeit, um die Raumkrümmung in der Nähe einer perfekten Kugel zu beobachten. In Abb. 6.9 ruht unser Freund in der Kugelschale zwischen zwei gedachten, fast gleich großen gestrichelten kugelförmigen Hüllen, die denselben Mittelpunkt wie die perfekte Kugel haben und in der Abbildung als Kreise dargestellt sind. Er zählt die Anzahl der baugleichen Stäbe, die den äußeren Kreis ausfüllen und zieht davon die Anzahl der Stäbe ab, die den kleineren Kreis ausfüllen. Wenn sich der Raum nicht krümmt, ist der Umfang des größeren Kreises gleich seinem Radius mal 2π, und auch der Umfang des kleineren Kreises ist gleich *seinem* Radius mal 2π. Also ist die Differenz der Anzahl der Stäbe des größeren und kleineren Umfangs gleich der Anzahl der Stäbe des Radiusstücks (die durchgezogene Linie unter dem Beobachter) *zwischen* den beiden Kreisen mal 2π. Unser Freund möchte, dass sich dieses Verhältnis nicht ändert, auch wenn die Gravitation einer perfekten Kugel mit gleichem Mittelpunkt den Raum krümmt.

Wir wissen, dass sich die Länge der Stäbe senkrecht zur Fallrichtung einer von weither frei einfallenden Uhr, die zuvor weit draußen fast in einem Trägheitszustand relativ zur perfekten Kugel ruhte, dann nicht ändert. Aber die Stäbe in Fallrichtung zwischen den beiden Kreisen verkürzen sich um den

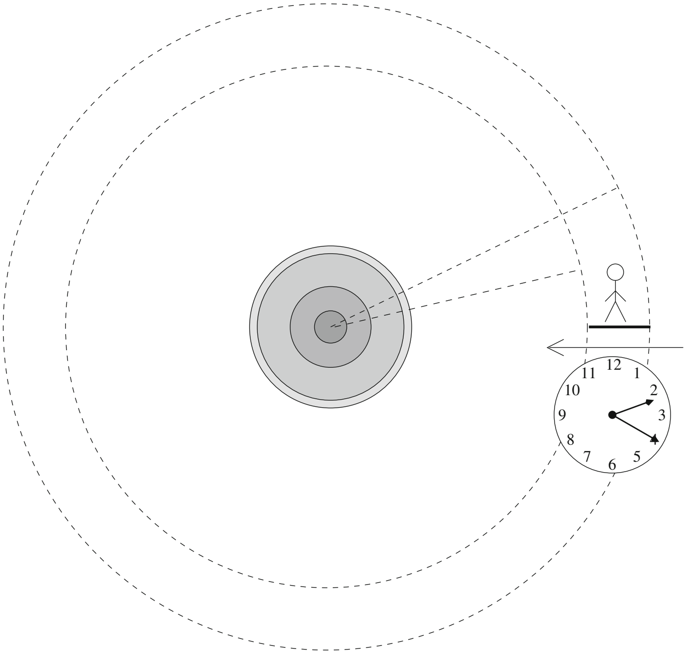

Abb. 6.9 Unser Freund steht zwischen den benachbarten Kugelschalen und stellt fest, dass er $1/\gamma$ *mehr* baugleiche Stäbe braucht, um den Abstand in Fallrichtung auszufüllen, als ohne die Gravitation einer perfekten Kugel mit gleichem Mittelpunkt. Dieser γ-Faktor entspricht der Geschwindigkeit einer Uhr, die ursprünglich weit entfernt von der perfekten Kugel ruhte und nun frei auf sie zufällt

γ-Faktor der Geschwindigkeit, sodass unser Freund *mehr* baugleiche Stäbe braucht, um den Abstand in Fallrichtung auszufüllen.

Also *verlängert* unser Freund die senkrechten Stäbe um $1/\gamma$, den Kehrwert des Faktors. Damit ist die Anzahl der Stäbe zwischen den beiden benachbarten Kreisen mal 2π wieder die Differenz der Anzahl der Stäbe auf dem Umfang der beiden Kreise. Die Raumkrümmung äussert sich nun darin, dass der **Abstand vom Zentrum** der perfekten Kugel *schneller* als die Anzahl der senkrechten Stäbe wächst. Mit anderen Worten: Der Abstand zum Mittelpunkt ist grösser als der so gemessene **Radius**.

Wenn wir nun in einem Trägheitszustand weit außerhalb der perfekten Kugel ruhen und dann frei auf die perfekte Kugel fallen, verkürzt sich ein Stab in Flugrichtung gerade um den γ-Faktor, sodass er für uns dann genauso lang ist, wie es die *ursprünglichen* Stäbe weit entfernt von der perfekten Kugel sind. Daher ist es praktisch, auf diese Art den Raum um eine perfekte Kugel zu vermessen.

6.5 Gravitation einer perfekten Kugel

Fassen wir zusammen, was wir nun über die **Gravitation einer perfekten Kugel** wissen:

1. Wenn eine Uhr nahe einer perfekten Kugel ruht, läuft ihre Zeit um einen Faktor γ langsamer als in weiter Entfernung zu ihr.
2. Dieser γ-Faktor gehört zu der Geschwindigkeit, die eine Uhr erreicht, wenn sie von einem weit entfernten Ruheort frei zur perfekten Kugel fällt.
3. Dieser γ-Faktor hängt nur vom Abstand vom Mittelpunkt der perfekten Kugel ab. Weit draußen ist er eins. Je kleiner der Abstand ist, umso kleiner wird γ.
4. Längen senkrecht zur Fallrichtung ändern sich nicht. Die Geometrie auf einer Kugeloberfläche mit demselben Mittelpunkt wie die perfekte Kugel ändert sich unter dem Einfluss der Gravitation nicht.
5. Das Verhältnis von Umfang und Radius eines Kreises mit gleichem Mittelpunkt wie die perfekte Kugel ist wie in der Schulgeometrie 2π, und das Verhältnis von Oberfläche und *Quadrat* des Radius einer Kugel mit gleichem Mittelpunkt wie die perfekte Kugel ist wie in der Schulgeometrie 4π.
6. Für einen neben der Kugel ruhenden Beobachter gilt: Der Abstand zwischen zwei benachbarten Punkten in Fallrichtung ist *größer* als es die Messlatte anzeigt, und zwar um den Faktor $1/\gamma$. Mit anderen Worten: Der **Abstand** vom Zentrum der perfekten Kugel ist *größer* als der in Anzahl der Stäbe gemessene **Radius**.
   Wenn aber ein Beobachter zunächst relativ zur perfekten Kugel weit entfernt ruht, frei fällt und dann an den Punkten vorbeifliegt, haben sie für ihn den gleichen Abstand wie im flachen Raum. Mit anderen Worten: Eine Messlatte in Fallrichtung zeigt für ihn den korrekten Abstand der Punkte.

Wie sich in dieser Weise die Länge von Stäben und der Gang von Uhren von Ort zu Ort ändert, wird in einer **Metrik** ausgedrückt. Sie erlaubt uns, die Krümmung der Raumzeit zu *messen*. Wir sehen, dass wir mithilfe des Äquivalenzprinzips schon fast exakt wissen, wie sich die Raumzeit um eine perfekte Kugel krümmt. Was uns noch fehlt ist, wie der γ-Faktor vom Abstand abhängt! Wir berechnen diesen Faktor in Kap. 8, wenn wir die **Einstein-Gleichung der Gravitation** lösen. Diese **exakte Lösung** ist die **Schwarzschild-Lösung**, die auch **Schwarzschild-Metrik** genannt wird. Sie ist nach **Karl Schwarzschild** benannt, einem deutschen Astronomen und Physiker. Es ist die wichtigste Lösung der Einstein-Gleichung der Gravitation, weil Planeten und Sterne fast perfekte Kugeln sind.

6.6 Masse unter Einfluss der Gravitation

Wie wir in Abschn. 2.7 sahen, bedeutet die Verlangsamung der Uhren, dass die träge Masse zunimmt. Daher vergrößert die *Gravitation* der Masse eines Körpers die **träge Masse** einer nahen Testmasse. Das ist bemerkenswert, denn es gibt so viel Masse im Weltall, deren Gravitation auf eine Testmasse wirkt, dass wir spekulieren können:

> Was wäre, wenn die *gesamte* träge Masse eines Körpers von der Gravitation anderer Körper stammte?

Dies ist kein Naturgesetz, sondern nur eine Idee, die man das **Mach-Prinzip** nennt. Ernst Mach hat über diese Möglichkeit schon spekuliert, bevor die Relativitätstheorie geschaffen wurde. Es ist eine interessante Idee, denn sie erlaubt zu *erklären*, warum Materie Masse hat. Aber man hat es bis heute nicht geschafft, diese Idee zu einer richtigen Theorie auszubauen. Das Äquivalenzprinzip zeigt uns aber, dass zumindest ein Teil der trägen Masse eines Körpers von der Gravitation der in der Nähe befindlichen anderen Massen stammt.

6.7 Licht unter Einfluss der Gravitation

Nehmen wir an, dass ein Lichtstrahl durch eine durchsichtige Box fliegt, wie auf dem linken Bild der Abb. 6.10 zu sehen. Die Box und der Beobachter in der Box sind in einem Trägheitszustand. Daher sieht der Beobachter den

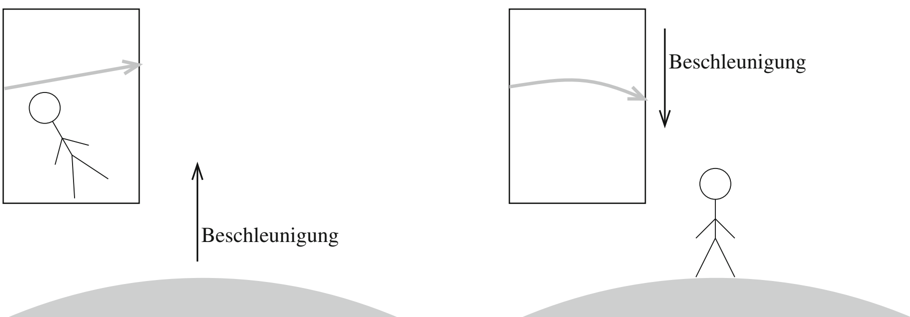

Abb. 6.10 Ein Lichtstrahl krümmt sich unter dem Einfluss der Gravitation

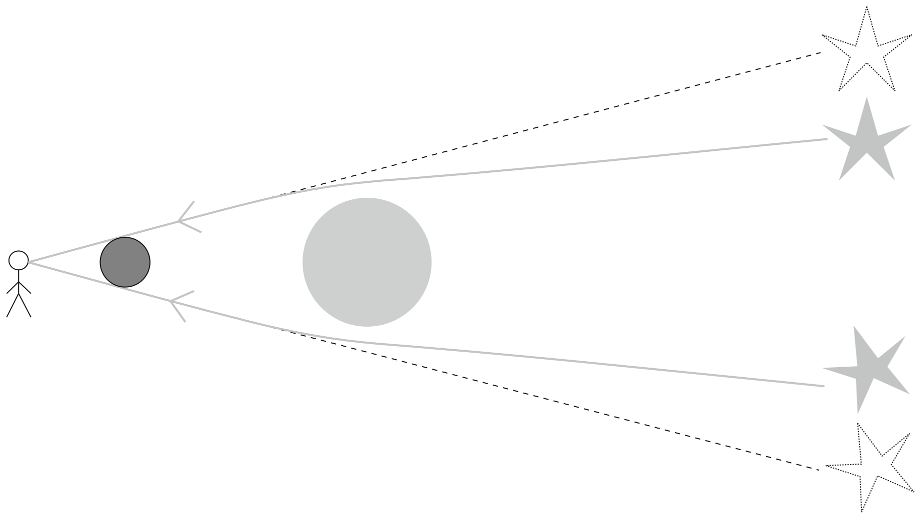

Abb. 6.11 Lichtstrahlen krümmen sich, wenn sie an der Sonne entlang laufen

Lichtstrahl als gerade Linie. Was sieht der Mensch im rechten Bild, der auf dem Planeten steht? Das Äquivalenzprinzip sagt uns, dass für ihn die Box mit dem Lichtstrahl nach unten beschleunigt. Daher krümmt sich der Lichtstrahl für ihn, das heißt, er **beschleunigt** zum Planeten hin, und das am stärksten, wenn der Lichtstrahl nahe an der Oberfläche des Planeten vorbeifliegt, denn dort ist die Gravitation am stärksten.

Die Sonne hat so viel Masse, dass wir diesen Effekt beobachten können: Wir machen ein Foto von fernen Sternen, die sich direkt hinter der Sonne befinden, sodass sich ihre Lichtstrahlen auf dem Weg zu uns nahe der Oberfläche der Sonne krümmen. Aber die Sonne ist viel heller als die fernen Sterne, sodass wir warten müssen, bis sie der Mond bei einer totalen Sonnenfinsternis verdeckt, wie in Abb. 6.11 skizziert. Hier steht der kleine, dunkle Mond zwischen uns und der Sonne. Die Sterne, deren wirkliche Lage hellgrau markiert ist, sehen wir in der Position der weißen Sterne und mit relativ großem Abstand.

Nun warten wir ein halbes Jahr. Dann steht die Sonne auf der anderen Seite der Erde, wie in Abb. 6.12 gezeigt. Wir nehmen wieder ein Foto derselben Sterne auf und sehen, dass die Sterne in Wirklichkeit etwas näher beieinander stehen, als es uns zuvor erschien, als die Sonne dazwischen stand:

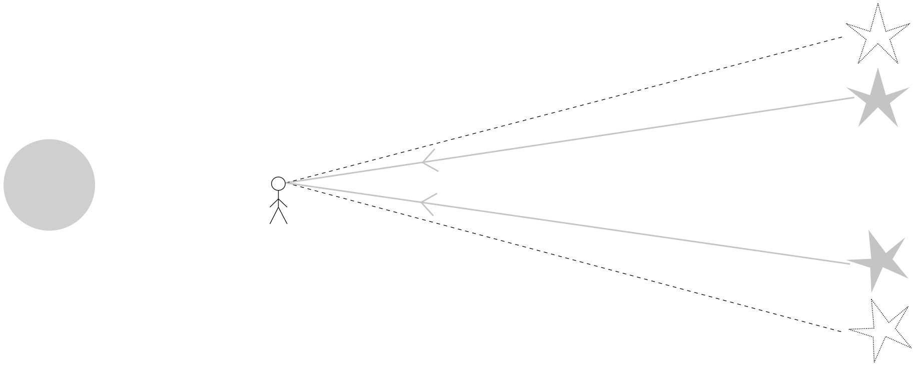

Abb. 6.12 Wir sehen die wirkliche Stellung der Sterne ein halbes Jahr später

Lichtstrahlen krümmen sich in der Nähe von Massen, da sich dort die Raumzeit krümmt.

Ein anderes Beispiel ist die Krümmung der Lichtstrahlen durch eine weit entfernte Galaxie. Wir nehmen einen Stern an, der hinter einer Galaxie liegt und etwa doppelt so weit entfernt ist wie sie. In Abb. 6.13 ist der Stern blau dargestellt. Die Galaxie wirkt wie eine **Gravitations-Linse**: Das Licht des Sterns erscheint als ein blauer *Ring*, der **Einstein-Ring** genannt wird. In Abb. 6.14 sehen wir ein Foto eines solchen Ringes.

In Abschn. 9.2 berechnen wir mithilfe der Schwarzschild-Lösung der Einstein-Gleichung der Gravitation, um wie viel Grad sich ein Lichtstrahl entlang eines Sterns krümmt.

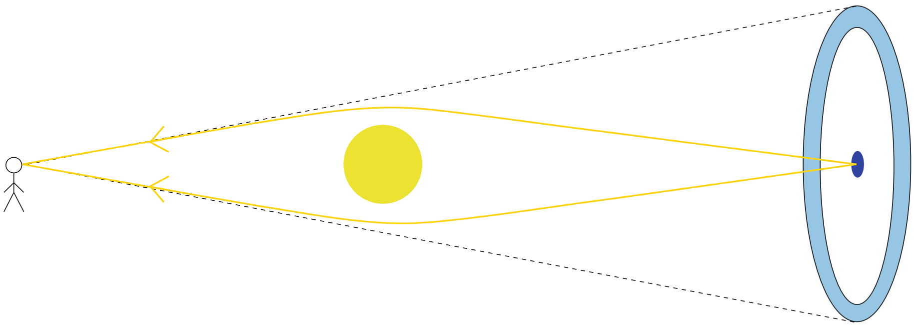

Abb. 6.13 Eine Galaxie wirkt wie eine Linse auf das Licht eines entfernten Sterns

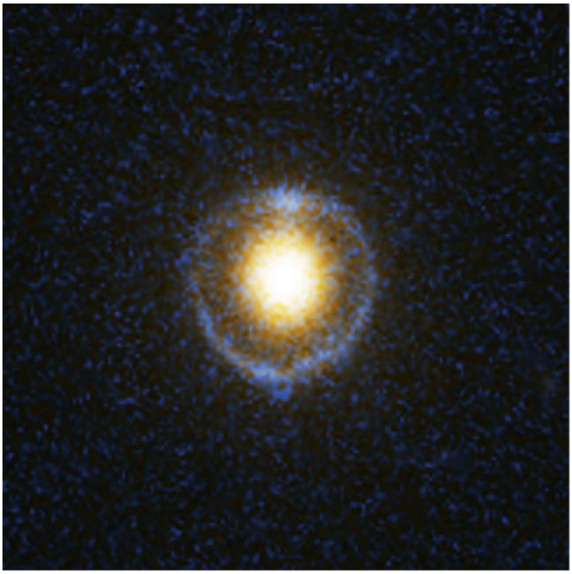

Abb. 6.14 Einstein-Ring mit der Nummer SDSS J162746.44-005357.5, fotografiert vom Hubble Weltraumteleskop. Die Auflösung der Fotos entspricht der Auflösung der Kamera.
© NASA, ESA, A. Bolton (Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics) and the Sloan Lens Advanced Camera for Surveys Team [2]

6.8 Schwarze Löcher: Einführung

Je mehr Masse ein Stern hat, umso mehr Gravitation übt er auf seine Umgebung aus: Lichtstrahlen krümmen sich stärker, die Zeit läuft langsamer, und Testmassen werden schwerer. Könnten sich nicht von einer bestimmten Masse an Lichtstrahlen so weit krümmen, dass selbst senkrecht nach oben gesendetes Licht wieder zurückfällt? Ein solcher Stern kann kein Licht aussenden: Er ist ein **Schwarzes Loch**. Um den Stern gibt es eine gedachte Grenzfläche, die **Ereignishorizont** genannt wird. Ein Körper kann von außen durch diesen Ereignishorizont in das Schwarze Loch *hineingelangen*, aber wie bei einer Falltür kann er nicht wieder *heraus*.

Nähert sich ein Raumschiff dem Ereignishorizont von außen, sehen wir von unserer weit entfernten Ruheposition aus, dass die Zeit im Raumschiff immer langsamer vergeht. Erreicht das Raumschiff den Ereignishorizont, bleibt die Zeit im Raumschiff *stehen*, wie in Abb. 6.15 skizziert. Daher werden wir *niemals* sehen, wie das Raumschiff im Schwarzen Loch verschwindet. Da sich das Raumschiff aber im freien Fall befindet, wird seine Besatzung nichts Besonderes bemerken: Die Astronauten fallen frei durch den Ereignishorizont

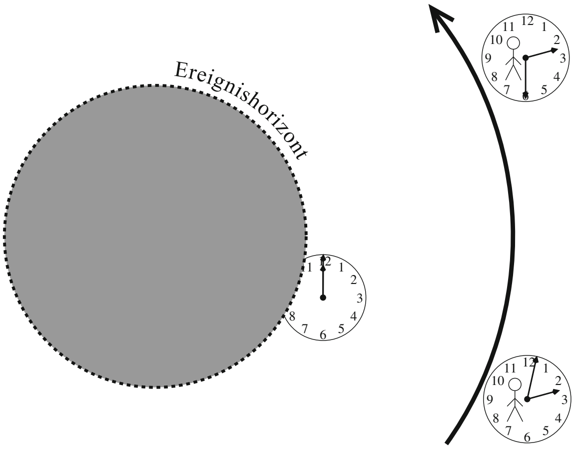

Abb. 6.15 Uhren gehen in der Nähe von großen Massen langsamer und bleiben relativ zu einem außen stehenden Beobachter am Ereignishorizont eines Schwarzen Lochs stehen

ins Schwarze Loch. Denn das Äquivalenzprinzip sagt uns, dass sich ein frei fallender Körper so verhält, als wenn er im leeren Raum schweben würde.

Dies ist kein Widerspruch: Denn der ins Schwarzen Loch gefallene Astronaut kann der äußeren Welt *nicht mitteilen*, dass er den Ereignishorizont passiert hat, da *noch nicht einmal Licht* von innen nach außen gelangen kann.

Wir berechnen in Abschn. 9.1 mithilfe der Schwarzschild-Lösung, wie viel Masse ein Stern haben muss, um zum Schwarzen Loch zu werden.

6.9 Äquivalenzprinzip: Zusammenfassung

Wenn wir die Gravitation als „Kraft" auffassen, die Massen zueinander „zieht", warum sollte dann die schwere Masse und die träge Masse jeder Art von Materie gleich sein? Die Frage ist, welchen *Grund* es dafür gibt! Einstein sah, dass es einen Grund geben muss, und dass dieser Grund uns die Gravitation besser verstehen lässt. Alle Arten von Materie reagieren auf die Gravitation *genau gleich*, wenn sie selbst nicht zu viel Masse haben, wenn also ihre eigene Gravitation schwach genug ist und wir sie als Testmasse verwenden können. Da sich die träge Masse eines Körpers einer Beschleunigung widersetzt, aber die genau gleich große schwere Masse den Körper beschleunigen will, passiert überhaupt nichts: Der Körper bleibt im selben Trägheitszustand, er bleibt kräftefrei und **frei fallend**.

Alle Arten von Materie fallen auf die gleiche Weise frei, sodass wir so *erklären* können, warum träge und schwere Masse immer genau gleich sind.

Aber wir wissen, dass sich Testmassen unter dem Einfluss der Gravitation mit veränderlicher Geschwindigkeit auf *gekrümmten* Wegen bewegen, sodass die Gravitation die Raumzeit *krümmt*. Die Gravitation krümmt nicht nur den Raum, denn frei fallende Testmassen bewegen sich nicht auf dem kürzesten Weg zwischen zwei Punkten, sondern auf dem Weg, der im Vergleich zu benachbarten Wegen in der Raumzeit für sie die *längste Eigenzeit* dauert. Solche Wege heißen **Geodäten der Raumzeit**. Wir können eine solche Geodäte finden, indem wir die Größe und Richtung der Startgeschwindigkeit einer Testmasse festlegen und sie dann frei fallen lassen. Verschiedene Startgeschwindigkeiten ergeben verschiedene Geodäten, sodass wir auch hier sehen, dass sich nicht nur der Raum krümmt.

Indem wir solche Testmassen **frei fallen** lassen, können wir mit dem, was wir über die Spezielle Relativitätstheorie gelernt haben, erkennen, wie Materie auf die **Gravitation reagiert**.

Dann stellt sich aber die Frage: Warum *erzeugt* Masse eigentlich Gravitation? Das weiß niemand! Aber wir wissen, *wie* eine Masse Gravitation erzeugt: Die Masse macht das auf die *einfachste denkbare* Art und Weise. Wir werden das im nächsten Kapitel sehen.

Literatur

1. C. Chou, D. Hume, T. Rosenband, D. Wineland, Science **329**, 1630 (201). http://www.sciencedaily.com/releases/2010/09/100923142436.htm
2. NASA, ESA, A. Bolton, SLACS Team. Einstein Ring Gravitational Lens (2005). http://hubblesite.org/newscenter/archive/releases/2005/32/image/g/. Zugegriffen: 25. Januar 2015

7 Wie Masse Gravitation erzeugt

Wir wissen aus Erfahrung, dass Masse Gravitation erzeugt und haben dieses Wissen im vorherigen Kapitel ausgiebig benutzt. Wir haben außerdem gesehen, dass die Gravitation die Raumzeit krümmt. Daher wissen wir, dass Masse selbst die Raumzeit krümmt. Was ist die *einfachste* Weise, in der Masse die Raumzeit krümmen kann?

7.1 Gravitation in einer einsamen Wolke

Wir vereinfachen die Situation soweit es geht: Wir fliegen mit unserem Raumschiff in eine leere Region des Weltalls, wo wir nicht durch die Gravitation anderer großer Massen gestört werden. Dann formen wir ganz vorsichtig außerhalb des Raumschiffes eine kleine Wolke aus Staubteilchen, die sich nicht gegeneinander bewegen. In Abb. 7.1 haben wir diese Staubteilchen als schwarze Kugeln skizziert. Dann entfernen wir uns vorsichtig und ruhen nahe der

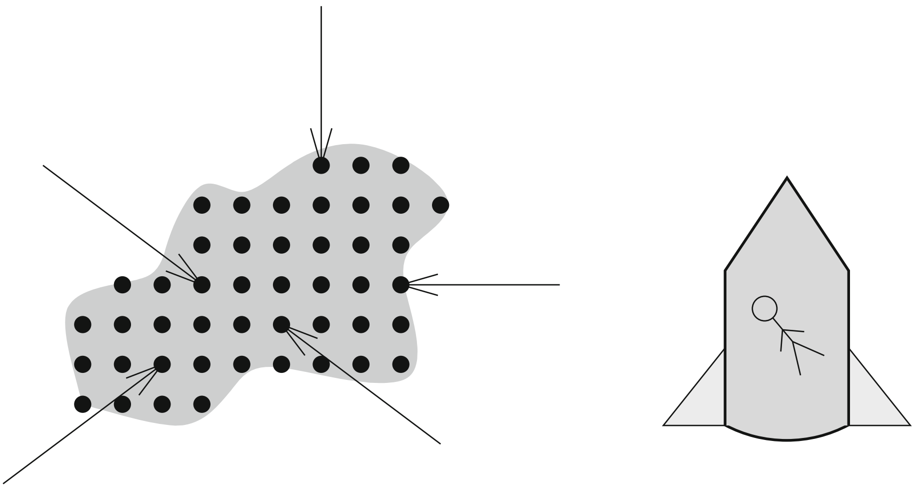

Abb. 7.1 Eine kleine Wolke beginnt unter ihrer eigenen Gravitation zu schrumpfen

K. Fischer, *Relativitätstheorie in einfachen Worten*, DOI 10.1007/978-3-662-46966-8_7,

kleinen Wolke. Nun sind wir, wie auch die Staubteilchen der kleinen Wolke, in einem Trägheitszustand.

Wir wissen aus Erfahrung, dass die Gravitation Körper dazu bringt, sich aufeinander zuzubewegen. Tatsächlich: Sobald wir die Staubteilchen der kleinen Wolke sich selbst überlassen, beginnt die Wolke zu **schrumpfen**. Was ist die einfachste Größe, um das Schrumpfen der Wolke zu messen? Es ist offenbar **die Schrumpf-Geschwindigkeit**, die besagt, wie stark das **Volumen** der Wolke *in einer bestimmten kurzen Zeitspanne* schrumpft. Was aber ist die einfachste Größe, die angibt, wie es mit dem Schrumpfen der Wolke *vorangeht*? Es ist das Anwachsen der Schrumpf-Geschwindigkeit im Verlauf des Schrumpfprozesses, also die *Beschleunigung* des Schrumpfens. Diese **Schrumpf-Beschleunigung** hängt davon ab, wie groß die Masse der Wolke ist. Im einfachsten Fall sollte die Schrumpf-Beschleunigung *proportional* zur Masse der Wolke wachsen. Das heißt: Hat die gleiche Wolke doppelt so viel Masse, ist ihre Schrumpf-Beschleunigung doppelt so groß.

In der Tat: Das hat sich die Natur als Gesetz der Gravitation ausgesucht!

Wir möchten nun an einem Beispiel verdeutlichen, wie ein Volumen zu schrumpfen beginnt. Nehmen wir an, dass wir eine Wolke von $10 \cdot 10 \cdot 10$ Meter haben, die also ein Volumen von 1000 Kubikmeter hat. Wir messen nun alle Sekunde, wie groß die Wolke noch ist. In Abb. 7.2 sehen wir links das Volumen der Wolke nach 1, 2, 3, 4 Sekunden. Die Schrumpf-Geschwindigkeit sagt aus, um wie viel das Volumen pro Sekunde kleiner wird und steht in der mittleren Spalte. Die Schrumpf-Beschleunigung schließlich sagt aus, um wie viel sich die Schrumpf-Geschwindigkeit pro Sekunde ändert, sie steht in der rechten Spalte. In unserem Beispiel ändert sich also *pro Sekunde* die Schrumpf-Geschwindigkeit um 2 Kubikmeter pro Sekunde, die Schrumpf-Beschleunigung ist also $2\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2$.

Allerdings wollen wir nicht nur wissen, wie Materie unter ihrer Gravitation näher zusammenrückt, sondern auch, wie sie die Raumzeit krümmt. Hier kommt wieder das Äquivalenzprinzip ins Spiel:

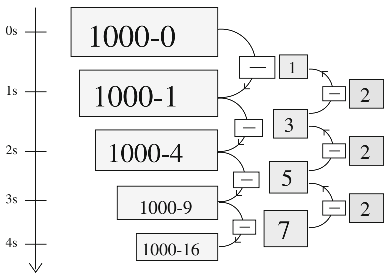

Abb. 7.2 Zahlenbeispiel eines schrumpfenden Volumens

Wir wissen, dass alle Testmassen, wie die Staubteilchen in der kleinen Wolke, auf die Gravitation in der *gleichen* Weise reagieren, egal, aus welchem Material sie auch sind oder wie viel Masse sie haben, wenn sie nur nicht zu viel Masse haben. Daher können wir annehmen, dass ein Staubteilchen nur einen Punkt im Raum *markiert*. Wenn dann die kleine Wolke zu schrumpfen anfängt, *beschleunigen* die Staubteilchen *relativ* zueinander. Aber nichts und niemand *zieht* die Staubteilchen aufeinander zu! Nur weil in der Wolke der *Raum selbst* zu schrumpfen anfängt, beschleunigen die Staubteilchen zueinander. Anders ausgedrückt: Wenn die Wolke zu schrumpfen beginnt, fängt im Verlauf der *Zeit* in ihr das Volumen des *Raums* zu schrumpfen an. So wirkt Masse auf einen kleinen Bereich der Raumzeit.

Wir haben damit das Einstein-Gesetz der Gravitation gefunden!

7.2 Einstein-Gleichung der Gravitation

Das **Einstein-Gesetz der Gravitation** oder die **Einstein-Gleichung der Gravitation**:

> Eine ruhende, hinreichend kleine Wolke aus Staubteilchen beginnt mit einer Beschleunigung zu schrumpfen, die proportional zur Masse in der Wolke ist. Die Verhältniszahl (oder der Proportionalitätsfaktor) ist 4π mal die **Gravitationskonstante**.

Warum aber 4π mal die Gravitationskonstante und nicht einfach „Gravitationskonstante“? Das hat ausschließlich historische Gründe. Die Gravitationskonstante hat den Wert $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ in den entsprechenden Einheiten, die in Tab. 10.1 angegeben sind.

Die **Massendichte** sagt aus, wie viel Masse pro Volumen vorhanden ist. Wenn wir ein hinreichend kleines Stück der Wolke als unsere „Wolke“ betrachten, können wir erreichen, dass die Massendichte dort praktisch konstant ist. Es ist dann praktischer, die **Schrumpf-Beschleunigung pro Volumen** anzugeben, also die relative Schrumpf-Beschleunigung. Die Einstein-Gleichung der Gravitation hinsichtlich der Massendichte lautet:

> Die relative Schrumpf-Beschleunigung, also die Schrumpf-Beschleunigung *pro Volumen* einer ruhenden Wolke von Staubteilchen ist proportional zur Massen*dichte* der Wolke. Die Verhältniszahl ist 4π mal die Gravitationskonstante.

Aber Masse ist ja Energie geteilt durch das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit! Daher lautet die Einstein-Gleichung der Gravitation hinsichtlich der Energiedichte:

> Die relative Schrumpf-Beschleunigung, also die Schrumpf-Beschleunigung *pro Volumen* einer ruhenden Wolke von Staubteilchen ist proportional zur Energie*dichte* der Wolke. Die Verhältniszahl ist 4π mal die Gravitationskonstante, geteilt durch das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit.

7.3 Der Einfluss des Drucks

Wir nahmen an, dass wir unsere Testmassen in der Wolke stets so platzieren können, dass sie relativ zueinander ruhen. Was aber, wenn unsere Wolke **reine Energie**, also Licht enthält? Reine Energie bewegt sich immer mit Lichtgeschwindigkeit, sodass wir sie nicht wie die Staubteilchen an einem Ort „platzieren“ können. Das Licht verhält sich dabei ähnlich wie ein Gas: Nehmen wir einmal an, unsere Wolke befindet sich in einem Gas. Wir betrachten hier den einfachsten Fall, in dem das Gas überall in der Wolke und um die Wolke herum gleich verteilt ist. Daher bewegen sich einige der Gasteilchen unentwegt aus der Wolke heraus, während andere Gasteilchen in die Wolke hineinfliegen.

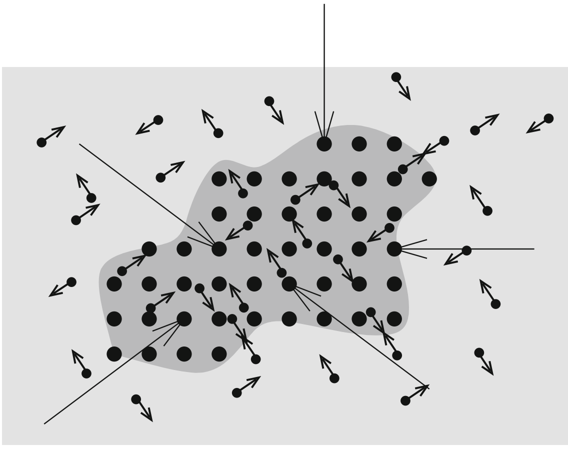

Abb. 7.3 Eine Wolke aus Staubteilchen in einem Gas. Wir haben die Gasteilchen als *kleine schwarze Kreisscheiben* mit einem *Pfeil* dargestellt, der ihre momentane Geschwindigkeit anzeigt. Die Staubwolke enthält auch die Energie der ungeordneten Bewegung der Gasteilchen. Auch diese Energie erzeugt Gravitation

Aber im Mittel fliegen pro Sekunde genauso viele Gasteilchen aus der Wolke, wie wieder hineinfliegen. Dazu kommt, dass die Gasteilchen andauernd gegeneinander stoßen, sodass sie *niemals* alle relativ zueinander oder zu unseren Staubteilchen in Ruhe sind. Wir haben diesen Zustand in Abb. 7.3 dargestellt. Weil nun im Mittel stets genauso viele Gasteilchen aus der Wolke herausfliegen wie andere wieder hineinfliegen, können wir uns auch vorstellen, dass für ein Gasteilchen, das die Wolke verlassen will, ein anderes Gasteilchen von außen mit der gleichen, entgegengesetzten Geschwindigkeit am Rand der Wolke gegen das herausfliegende Gasteilchen stößt und es so wieder in die Wolke stößt, um so das Gas in der Wolke konstant zu halten. Mit anderen Worten: Das äußere Gas übt **Druck** aus allen drei Raumrichtungen auf die Wolke aus. Aber wir haben in Abschn. 1.12 gelernt, dass der Druck einer Energiedichte entspricht. Also müssen wir zur Energiedichte der Staubteilchen noch die Summe des Drucks in allen drei Raumrichtungen addieren.

> Die relative Schrumpf-Beschleunigung, also die Schrumpf-Beschleunigung *pro Volumen* einer ruhenden Wolke von Staubteilchen ist proportional zur Energie*dichte plus dem Druck in den drei Raumrichtungen* der Wolke. Die Verhältniszahl ist 4π mal die Gravitationskonstante, geteilt durch das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit.

Aber innerhalb der Wolke stoßen die Gasteilchen nicht nur gegeneinander, sondern auch gegen die Staubteilchen. Wenn der Druck des Gases überall gleich ist, werden sich die Staubteilchen im Mittel nicht wegbewegen. Aber wenn wir sie unter einem Mikroskop betrachten, sehen wir, wie sie unter dem Beschuss der kleinen Gasteilchen hin und her zittern. Daher können in einem Gas unsere Staubteilchen relativ zueinander nicht *perfekt* ruhen. Die ganze Idee, dass Gas einen **Druck** ausübt, macht nur Sinn, wenn wir *nicht zu genau* hinschauen, das heißt, wenn die Staubteilchen in unserer Wolke *nicht zu* klein sind.

Einstein selbst war sich dessen sehr wohl bewusst [1]:

> Wir wissen heute, dass die Materie aus elektrischen Elementarteilchen aufgebaut ist, sind aber nicht im Besitz der Feldgesetze, auf welchen die Konstitution jener Elementarteilchen beruht. Wir sind daher genötigt, uns bei Behandlung der mechanischen Probleme einer ungenauen Beschreibung der Materie zu bedienen, welche der von der klassischen Mechanik verwendeten entspricht. Die Dichte [...] und die hydrodynamischen Druckkräfte [...] sind die Grundbegriffe, auf die eine derartige Beschreibung sich stützt.

Außer in Abschn. 9.9 ist der Druck so klein, dass wir mit den Einstein-Gleichung der Gravitation für die Wolke auskommen, wie wir sie in Abschn. 7.1 vorgestellt haben.

7.4 Der Einfluss der Geschwindigkeit

Das Gesetz der Gravitation muss sich mit der Speziellen Relativitätstheorie vertragen. Das bedeutet: Wenn wir in einem Trägheitszustand sind und die Wolke mit einer bestimmten konstanten Geschwindigkeit an uns vorbei frei fällt, dann sollte für uns die Einstein-Gleichung der Gravitation gleich bleiben. Aber wir wissen, dass sich alles Mögliche an der Wolke ändert: Als Erstes ist klar, dass die Masse der Wolke um den Faktor $1/\gamma$ der Geschwindigkeit der Wolke zunimmt.

Also erzeugt die Wolke nun *mehr* Gravitation, als wenn sie ruht! Aber auch das Volumen der Wolke ändert sich: Längen in Richtung der Bewegung verkürzen sich für uns um den Faktor γ, während sich Längen senkrecht zur Bewegungsrichtung nicht ändern, wie wir sehen können, wenn wir die Abb. 7.1 und 7.4 vergleichen. Daher verringert sich das Volumen der bewegten Wolke um den Faktor γ. Aber dazu kommt noch, dass das Volumen innerhalb einer *kürzeren Zeitspanne* schrumpft: Wir wissen aus Abschn. 2.1, dass unsere Zeit um den Faktor $1/\gamma$ schneller vergeht als die Eigenzeit der bewegten Wolke. Die Schrumpf-Geschwindigkeit ist also um den Faktor $1/\gamma$ größer, und die Wolke beginnt um ebendiesen Faktor *schneller* zu schrumpfen, sodass die Schrumpf-Beschleunigung um $(1/\gamma) \cdot (1/\gamma)$ größer wird. Fassen wir zusammen: Das Volumen der Wolke beginnt um den Gesamtfaktor

$$\underbrace{\gamma}_{\text{Volumen schrumpft}} \quad \cdot \quad \underbrace{(1/\gamma) \cdot (1/\gamma)}_{\text{Schrumpfung beginnt schneller}} \quad = 1/\gamma$$

schneller zu schrumpfen.

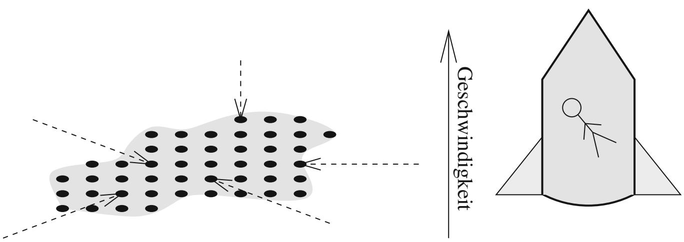

Abb. 7.4 Eine bewegte Wolke beginnt zu schrumpfen

Aber dies ist genau der Faktor, um den die Masse der Wolke zunimmt! Also stimmt die Einstein-Gleichung der Gravitation auch für frei fallende Wolken.

7.5 Der Einfluss äußerer Massen

Im Abschn. 7.2 nahmen wir an, dass unsere Wolke weit entfernt von anderen großen Massen ist. In Wirklichkeit befinden sich aber überall im Weltall Sterne, Planeten und dergleichen. Wir berücksichtigen sie jetzt. Weil unsere Wolke klein genug ist, bewegt sie sich wie eine Testmasse unter dem Einfluss der Gravitation der äußeren Massen. Mit anderen Worten: Unsere Wolke fällt frei, wie wir es in Abb. 7.5 skizziert haben. Wir wissen dann, dass die Wolke wegen des Äquivalenzprinzips so reagiert, *als wenn* die äußeren Massen nicht vorhanden wären: Die Schrumpf-Beschleunigung hängt nur von der Masse *innerhalb* der Wolke ab. Das Einstein-Gesetz der Gravitation ändert sich also nicht!

Die äußeren Massen können nur die *Form* der Wolke der relativ zueinander ruhenden Testmassen ändern, wie wir schon in Abb. 5.12 sahen.

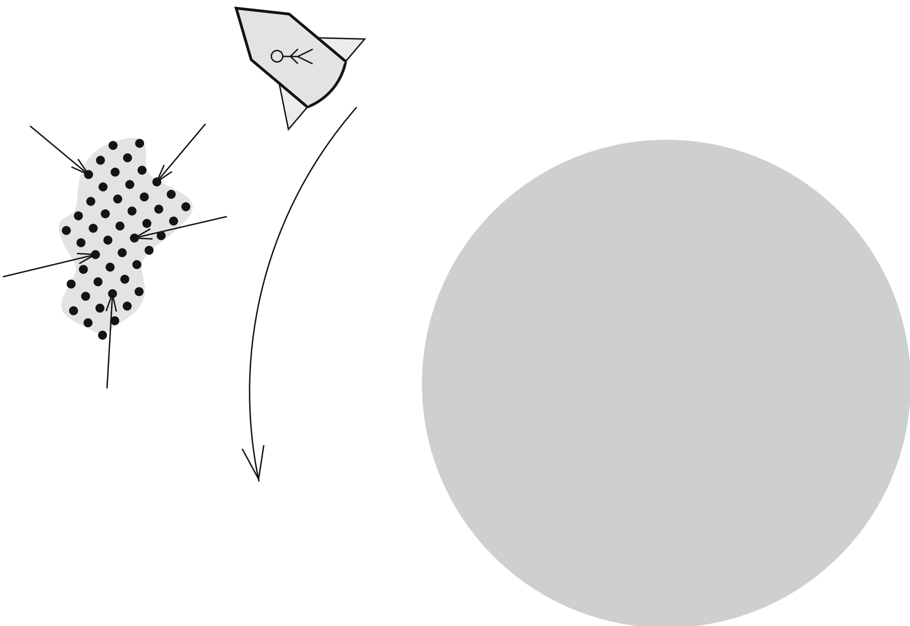

Abb. 7.5 Eine kleine schrumpfende Wolke reagiert wie eine Testmasse und fällt frei unter dem Einfluss der Gravitation einer nahen Masse

7.6 Lokale und globale Raumzeit

Das Einstein-Gesetz der Gravitation gilt zunächst *lokal*, also für einen kleinen Raumbereich („Wolke“) und für eine kleine Zeitspanne, in der die Wolke zu schrumpfen *beginnt*, also insgesamt für einen kleinen Bereich der Raumzeit. Wie können wir daraus folgern, in welcher Weise die Gravitation in großen Raumbereichen und über lange Zeiträume, also *global* wirkt? Nehmen wir zum Beispiel die Umgebung der Sonne. Wir wissen, dass die Masse der Sonne die Raumzeit krümmt, aber dass in genügend großer Entfernung von der Sonne die Raumzeit flach ist. Wir können hier und da kleine Wolken aus Testmassen platzieren, um die Raumzeit zu vermessen. Dann fügen wir diese lokalen Bilder zu einem globalen Bild der Raumzeit um die Sonne zusammen. Das funktioniert etwa so, als wenn wir einen Globus konstruieren: Wir fügen Karten von kleinen Gebieten der Erdoberfläche zusammen, sodass sie am Ende das *globale* Bild, also den *Globus* ergeben, und wir sehen, wie der Globus sich krümmt.

Aber die Krümmung der Raumzeit ist nicht so einfach zu beschreiben wie die der Oberfläche eines Globus: Beginnt eine Wolke in der Nähe einer Masse zu schrumpfen, muss sich die Raumzeit so krümmen, dass der Zusammenhang zur näheren Umgebung gewahrt wird, wo sich keine Masse befindet. Darüber hinaus hängt ja der Gang der Zeit selbst von den Geschwindigkeiten ab, mit denen sich die kleinen Wolken gegeneinander bewegen. Wir müssen also verfolgen, wie Raum *und* Zeit sich verändern, während die Zeit fortschreitet.

7.7 Gekrümmte Raumzeit und Tensoren

Bei einer Oberfläche eines Globus oder allgemeiner einer gekrümmten Fläche im dreidimensionalen Raum reicht es aus, für jeden Punkt der Oberfläche *eine* Zahl zu kennen, um zu wissen, wie die Fläche sich krümmt. Dies ist die **gaußsche Krümmung** der Fläche. Diese Krümmung misst, um wie viel das Verhältnis von Umfang und Durchmesser eines Kreises *auf der Oberfläche* vom Verhältnis π der Schulgeometrie abweicht, wie in Abb. 7.6. Aber in der Raumzeit ist die Sache verwickelter, da sich der Raum in verschiedene Richtungen krümmen kann und das auch noch von der Zeit abhängt, die von Ort zu Ort verschieden schnell ablaufen kann. Eine genaue Betrachtung zeigt, dass man für jeden Punkt des Raums zu jedem Zeitpunkt 20 Zahlen benötigt, um die Krümmung der Raumzeit zu beschreiben.

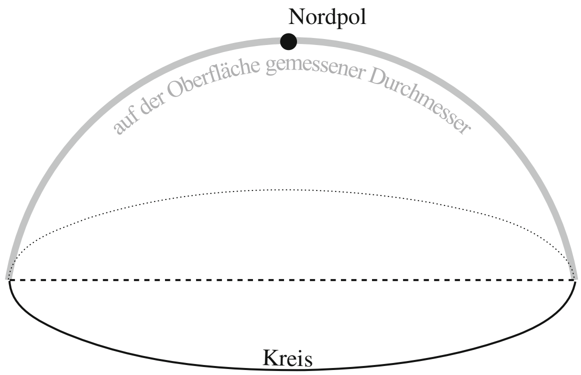

Abb. 7.6 Messung der Krümmung einer Kugeloberfläche: Wir zeichnen einen Kreis auf die Kugeloberfläche, zum Beispiel mit dem Nordpol als Mittelpunkt. Der Umfang dieses Kreises ist π mal die Länge des *schwarzen, gestrichelten* Durchmessers. Aber der Durchmesser des Kreises *auf der Oberfläche* ist der *graue* Kreisbogen, und der ist *länger* als die *gestrichelte schwarze Linie*. Also ist auf einer Kugeloberfläche das Verhältnis von Umfang und Durchmesser eines Kreises *kleiner* als π, ganz ähnlich wie in Abb. 6.8 für den Fall eines Kreises um eine **perfekte Kugel**

Es war Bernhard Riemann, der die Theorie der gekrümmten Flächen von Gauß auf den drei- oder mehrdimensionalen Raum verallgemeinerte. Die 20 Zahlen heißen nach ihm der **riemannsche Krümmungstensor**. Für unsere Wolke aus Staubteilchen aus Abschn. 7.1 beschreibt zum Beispiel der riemannsche Krümmungstensor, wie sich die *Form* und das *Volumen* der Wolke mit der Zeit ändern.

Die Einstein-Gleichung der Gravitation beschreibt nur, wie sich das *Volumen* der Wolke mit der Zeit zu verändern beginnt, aber nicht ihre Form. Um die Einstein-Gleichung der Gravitation mit Tensoren auszudrücken, benötigen wir daher eine vereinfachte Version des riemannschen Krümmungstensors, nämlich den **Ricci-Tensor**.

Der mathematische Werkzeugkasten dafür ist die **Tensor-Analysis**. Das Wort „Tensor" kommt aus dem Lateinischen und steht für „Spannung". Tatsächlich benutzen Ingenieure tagtäglich Tensoren, um zu beschreiben, wie sich Gebäude oder Autos oder Brücken unter Spannung verhalten. Materialien krümmen sich unter Spannung *innerhalb* des Raums und in Abhängigkeit von der Zeit, also *innerhalb* der Raumzeit. Das können wir ganz einfach wie in Abb. 7.7 veranschaulichen. Aber es ist sehr viel schwieriger zu veranschaulichen, wie sich die Raumzeit selbst krümmt. Außerdem gibt es einen fundamentalen Unterschied zwischen der Krümmung oder dem Verbiegen eines

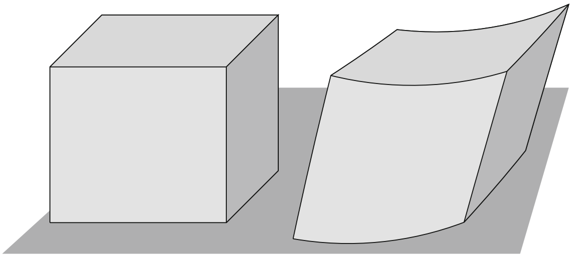

Abb. 7.7 Ein Material krümmt sich

Materials und der Krümmung der Raumzeit, den wir in Abschn. 9.7 kennenlernen werden.

Einstein verwendete und entwickelte diese Theorie, um die gekrümmte Raumzeit zu beschreiben. Wir haben den mathematischen Ausdruck für die Einstein-Gleichung der Gravitation, ausgedrückt durch den Ricci-Tensor, im Abschn. 10.5 aufgenommen und erläutert.

7.8 Wie man die Einstein-Gleichung der Gravitation löst

Es ist nicht nur schwierig, die globale Krümmung der Raumzeit zu finden. Denken wir einmal nur über unsere „kleine Wolke" nach: Was passiert, *nachdem* die Wolke begonnen hat zu schrumpfen? Die Testmassen haben dann begonnen, sich gegeneinander zu bewegen und fallen frei. Um ihrer Bewegung zu folgen, müssen wir uns ein noch kleineres Stück der Wolke aussuchen, in dem sich die Testmassen noch nicht so schnell gegeneinander bewegen, *unsere* Geschwindigkeit und Zeit einstellen, dann dort die Schrumpf-Beschleunigung messen und so weiter. Denn die Masse in der Wolke macht zwei Dinge zugleich: Die Masse *wirkt* auf die Raumzeit, indem sie sie krümmt, und sie *reagiert* auf die gekrümmte Raumzeit, indem sie frei fällt. Wir können also nicht so einfach zwischen der Wirkung und der Reaktion der Masse unterscheiden. Das macht die Gravitation einzigartig in der Natur. Das macht es aber auch so schwierig, die Einstein-Gleichung der Gravitation zu lösen.

In der Tat kennen wir nur einige wenige exakte Lösungen dieser Gleichung. Um sie exakt zu lösen, müssen wir die Massen so ausbalancieren, dass wir ihre Wirkung und ihre Reaktion im Griff haben.

1. In der **perfekten Kugel** aus Abschn. 6.5 findet sich in allen Richtungen gleich viel Masse. Daher balanciert sich die Masse von selbst aus: Die

Gravitation hängt nur noch vom *Abstand* zum Mittelpunkt der perfekten Kugel ab, *nicht* von der Richtung. Was noch zu tun bleibt, ist den γ-Faktor zu finden, der zu der Geschwindigkeit gehört, mit der eine Testmasse, die von einem weit genug entfernten Ort startet und dann frei fällt, einen bestimmten Abstand vom Mittelpunkt der perfekten Kugel passiert. Wir werden das in Kap. 8 machen und so die **Schwarzschild-Lösung** finden. Dies ist der wichtigste Fall, da Planeten und Sterne fast perfekte Kugeln sind. Das **newtonsche Gravitationsgesetz** folgt daraus, wenn die Gravitation schwach genug ist.
2. Die Beobachtung des Weltalls zeigt uns, dass im Großen und Ganzen überall im Weltall die Masse gleich dicht verteilt ist. Diese Masse ist also wieder ausbalanciert, denn die Krümmung der Raumzeit muss überall im *Raum* gleich sein und kann nur von der *Zeit* abhängen. Wir werden in Abschn. 9.8 sehen, warum es deshalb einen Urknall gegeben haben muss.

Und im Prinzip war es das denn auch! Es gibt zwar noch etwas allgemeinere Lösungen, wie zum Beispiel für eine sich drehende perfekte Kugel oder für eine elektrisch geladene perfekte Kugel oder sogar für eine sich drehende und elektrische geladene perfekte Kugel. Aber wenn wir wissen wollen, wie eine *beliebige* Ansammlung von Massen die Raumzeit krümmt und sich bewegt, müssen wir die Tensor-Analysis benutzen und versuchen, die Gleichung auf einem Computer näherungsweise zu lösen.

Wir sollten uns noch einmal vor Augen führen, dass wir die Richtigkeit der Einstein-Gleichung der Gravitation nicht *beweisen* können! Wir haben nur festgestellt, dass sie die *einfachste aller möglichen* Gleichungen ist. Andere Physiker haben andere Theorien der Gravitation entwickelt, nach denen die Masse die Raumzeit auf kompliziertere Art und Weise krümmt. Aber dann wird es immer schwieriger, das Gesetz der Gravitation mit dem Äquivalenzprinzip in Einklang zu bringen. Mit anderen Worten: Es ist schwierig, eine Theorie zu entwerfen, die korrekt beschreibt, wie Masse zugleich Gravitation *erzeugt* und darauf *reagiert*. Dazu kommt noch, dass bis zum heutigen Tage nur das Einstein-Gesetz der Gravitation und das Äquivalenzprinzip die Experimente und Beobachtungen richtig beschreiben.

Sehen wir uns noch einmal an, wie schön alles zueinander passt:

1. Wir platzieren Testmassen in einer kleinen Wolke, sodass sie relativ zueinander ruhen, und lassen sie dann los. Dann werden die Testmassen zueinander hin *frei fallen*. Die einfachste Größe, die den *Beginn* des *Schrumpfens* der Wolke dann beschreibt, ist die *Schrumpf-Beschleunigung*.
2. Die Schrumpf-Beschleunigung hängt nur von der Masse *innerhalb* der Wolke ab.

3. Sie hängt von der Masse in der Wolke in der *einfachsten* Weise ab, sie ist proportional zur Masse in der Wolke.
4. Dieses Gesetz der Gravitation steht im Einklang mit der Speziellen Relativitätstheorie, denn es bleibt auch gleich, wenn wir und die Wolke relativ zueinander frei fallen.
5. Eine *physikalische* Größe, nämlich die Masse in der Wolke, bestimmt, wie sich eine *geometrische* Größe, nämlich das Volumen der Wolke, mit der Zeit ändert. Mit anderen Worten: Das Einstein-Gesetz der Gravitation bestimmt *nicht*, wie sich die *Form* der Wolke mit der Zeit ändert!
6. Das besorgen die Massen, die sich außerhalb der Wolke befinden: Sie *verformen* die Wolke, damit sich so die globale Raumzeit als zusammenhängendes Ganzes kontinuierlich krümmt.

Diese Theorie, die das Äquivalenzprinzip und das Einstein-Gesetz der Gravitation ausmacht, ist die **Allgemeine Relativitätstheorie**.

Als Nächstes wollen wir sehen, wie das Gesetz der Gravitation im Einzelnen wirkt: Wie folgt aus ihm die Planetenbewegung um die Sonne? Wie folgt aus ihm das newtonsche Gesetz der Gravitation, wonach die Sonne die Erde „anzuziehen“ scheint? Und welche neuen Erscheinungen können wir finden?

Literatur

1. A. Einstein, *Grundzüge der Relativitätstheorie* (Vieweg, 1956)

8 Lösung der Einstein-Gleichung der Gravitation

Nachdem wir die Einstein-Gleichung der Gravitation kennengelernt haben, lösen wir sie nun!

8.1 Das Gravitationsgesetz bestimmt die Bewegung

Das Äquivalenzprinzip bestimmt, dass Testmassen unter dem Einfluss der Gravitation frei fallen: So *reagieren* sie auf die jeweilige Raumzeit. Das ist das **Bewegungsgesetz**. Das Einstein-Gesetz der Gravitation bestimmt, wie Masse die Raumzeit *krümmt*, wie sie also auf die Raumzeit *wirkt*. Überraschenderweise bestimmt das Gravitationsgesetz aber auch, wie die Testmassen *reagieren*! Ein Gedankenexperiment verdeutlicht dies: Nehmen wir an, dass wir innerhalb einer kleinen Wolke aus Testmassen in einem Trägheitszustand ruhen. Die Testmassen ruhen auch alle relativ zu uns, wie in Abb. 8.1 skizziert.

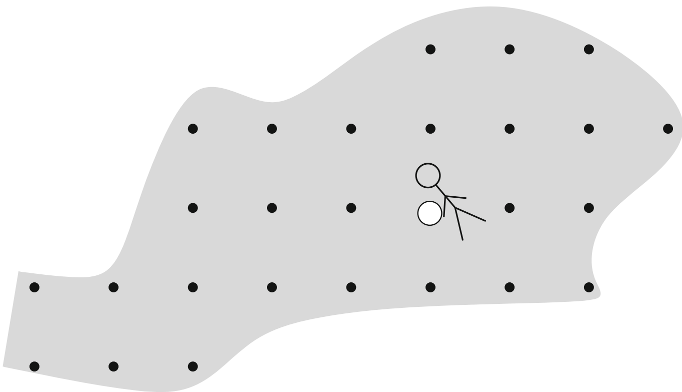

Abb. 8.1 Die *weiße* Testmasse direkt neben uns beginnt *nicht*, relativ zu uns zu beschleunigen

K. Fischer, *Relativitätstheorie in einfachen Worten*, DOI 10.1007/978-3-662-46966-8_8,

Nach dem Gravitationsgesetz beginnt sich die Wolke mit einer Beschleunigung zusammenzuziehen, die proportional zur Masse in der Wolke ist. Nun schauen wir uns einen kleinen Teil der Wolke an, der in der unmittelbaren Umgebung von uns liegt: Je kleiner diese Umgebung ist, umso weniger Masse hat das Wölkchen. Und je weniger Masse diese Umgebung hat, umso weniger wird das Volumen, das sie einnimmt, zu schrumpfen beginnen.

Eine Wolke kann auch ihre Form verändern, wenn äußere Massen auf sie Gravitation ausüben, wie wir schon in Abb. 5.12 sahen. Je kleiner der Teil der Wolke ist, den wir betrachten, umso weniger verformt er sich durch die äußeren Massen.

Daher beschränken wir uns nun auf ein sehr kleines Raumstück in der Wolke, das nur uns und die weiße Testmasse direkt neben uns enthält. Das Volumen dieses Raumstücks ist praktisch null, sodass es sich weder verformt noch zu schrumpfen beginnt. Das ist nur möglich, wenn die weiße Testmasse relativ zu uns *nicht* beschleunigt, also sich auch in einem Trägheitszustand befindet und sich entlang einer Geodäte in der Raumzeit bewegt.

Mit anderen Worten: Wir haben das Bewegungsgesetz für diese weiße Testmasse gefunden!

Vergleichen wir es nun mit dem newtonschen Gesetz der Gravitation an einem Beispiel: Die Schwer„kraft" der Erde „zieht" an einer Testmasse. Die Testmasse *reagiert* auf die Kraft, indem sie sich mit ihrer Trägheit der Beschleunigung durch die Kraft entgegenstellt. Diese Reaktion der Testmasse können wir nicht aus dem newtonschen Gesetz der Gravitation herleiten. Dazu kommt, dass es ein Rätsel bleibt, warum die Trägheit und die Schwere der Testmasse unabhängig von ihrem Material stets genau gleich sind. Tatsächlich ist das newtonsche Gesetz der Gravitation nur eine Näherung des wirklichen Naturgesetzes.

Oder vergleichen wir die Gravitation mit der Elektrodynamik: Elektrische Ladungen erzeugen ein elektromagnetisches Feld um sich herum, das den Maxwell-Gleichungen folgt. Aber diese Gleichungen beschreiben allein noch nicht, wie eine Ladung auf ein Feld *reagiert*. Wir wissen, dass die **Lorentzkraft** aus Kap. 3 diese Reaktion beschreibt und sowohl mit der Speziellen Relativitätstheorie als auch mit den Maxwell-Gleichungen in Einklang steht. Aber die Lorentzkraft ist nicht die *einzig mögliche* Kraft, die mit den Maxwell-Gleichungen im Einklang steht.

Nun enthält ein elektromagnetisches Feld Energie und krümmt so auch die Raumzeit. Wenn man dann die Einstein-Gleichung der Gravitation dieses Feldes benutzt, kann man die Lorentzkraft *herleiten*!

8.2 Gravitation in einer perfekten Kugel

Ein Stern oder ein Planet ist eine fast perfekte Kugel. Im folgenden Gedankenexperiment bohren wir viele senkrechte, schmale Schächte durch die Mitte der perfekten Kugel. Um es besser darstellen zu können, beschränken wir uns in Abb. 8.2 auf Schächte in vier Richtungen. Wir legen in jeden Schacht eine Testmasse, alle im gleichen Abstand zum Mittelpunkt. Zu einem bestimmten Zeitpunkt lassen wir die Testmassen los, sodass sie nun frei fallen.

Ist das schwarz gezeichnete Volumen klein genug, können wir die Einstein-Gleichung der Gravitation anwenden: Die Beschleunigung, mit der das schwarze Volumen zu schrumpfen *beginnt*, ist proportional zu seiner Masse. Da die Masse in alle Richtungen gleich verteilt ist, fallen die Testmassen alle mit der gleichen Geschwindigkeit, sie fallen stets senkrecht zur Kugeloberfläche und liegen zu allen Zeiten wie am Beginn auf einer Kugelfläche.

Damit wir uns nicht missverstehen: Die Masse der perfekten Kugel *selbst* beginnt *nicht* sich zu bewegen! Nur die *Testmassen* beginnen sich zu bewegen und reagieren auf die Gravitation der in der perfekten Kugel *ruhenden* Masse.

Wir vermessen nun mithilfe der Testmassen die Raumzeit innerhalb und außerhalb der perfekten Kugel. Aber schon die Zeit *selbst* vergeht je nach Abstand zum Mittelpunkt der perfekten Kugel anders, wie wir in Abschn. 6.1 sahen. Auch die Längen senkrecht zur Kugeloberfläche ändern sich unter dem

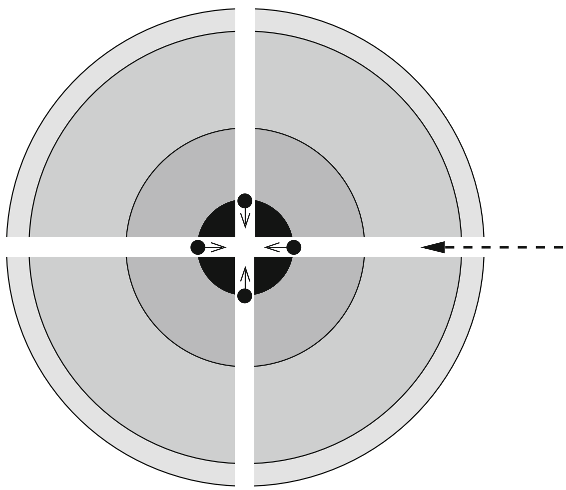

Abb. 8.2 Die *kleinen schwarzen Scheiben* an der Oberfläche der *zentralen schwarzen Masse* sind die Testmassen, die innerhalb der Schächte der perfekten Kugel senkrecht frei fallen. Der *gestrichelte Pfeil* deutet an, dass wir von einem von der perfekten Kugel weit genug entfernten Ruheplatz aus frei in einen der Schächte fallen

Einfluss der Gravitation, wie in Abschn. 6.4 erklärt. Sogar die Masse eines Teils der perfekten Kugel ändert sich unter dem Einfluss der Gravitation der restlichen Masse nach dem im Abschn. 6.6 Gesagten.

Daher wenden wir das Äquivalenzprinzip an: Wir ruhen zunächst so weit von der perfekten Kugel entfernt, dass wir uns wegen der dort schwacher Gravitation praktisch in einem Trägheitszustand befinden. Dann fallen wir frei auf den Mittelpunkt der perfekten Kugel zu und fallen durch den rechten Schacht in sie hinein, wie in Abb. 8.2 durch den gestrichelten Pfeil angedeutet. Wir haben es so eingerichtet, dass die Testmassen genau dann anfangen zu fallen, wenn wir den Mittelpunkt der perfekten Kugel passieren. Wegen des Äquivalenzprinzips sind wir dabei immer noch im *gleichen* Trägheitszustand wie weit draußen und stellen nun unsere Messungen in diesem Zustand an.

Wir wissen aus Abschn. 7.4, dass sich für uns die Einstein-Gleichung der Gravitation nicht ändert, wenn wir sie von unserem Standpunkt aus anwenden.

Danach wiederholen wir dieses Gedankenexperiment mit der Kugelschale in Abb. 8.3, die durch das schwarze Dreieck gekennzeichnet ist. Sie sitzt zwischen zwei fast gleich großen Kugeloberflächen, die den gleichen Mittelpunkt wie die perfekte Kugel haben. Das Volumen ist daher sehr klein. Wir haben es nur der besseren Darstellbarkeit halber ziemlich groß gezeichnet.

Wieder fallen wir vom selben Ausgangspunkt wie vorher frei in den Schacht. Wieder ist das von den Testmassen markierte Volumen klein. Wieder ruhen die Testmassen zunächst relativ zueinander und beginnen genau

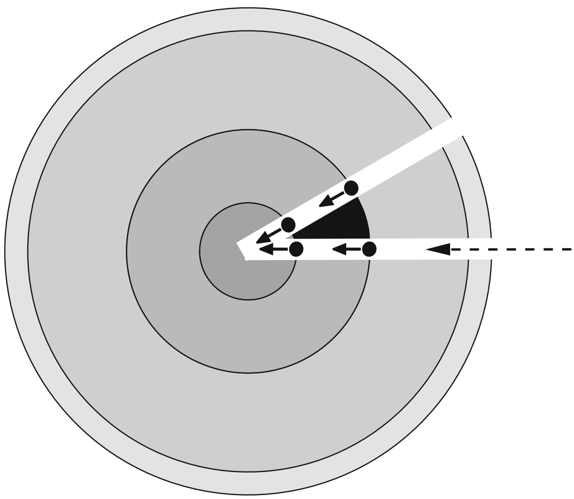

Abb. 8.3 Ein kleines, schmales, zwischen zwei fast gleich großen Kugeloberflächen eingeschlossenes Volumen beginnt zu schrumpfen

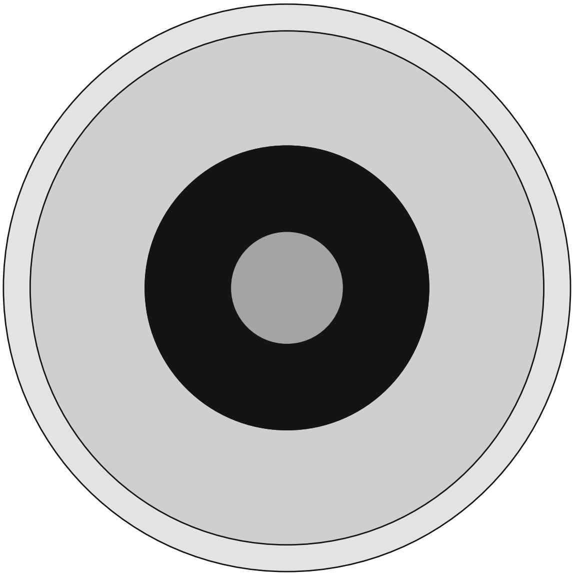

Abb. 8.4 Eine dünne Schale in der perfekten Kugel. Wir haben sie der besseren Sichtbarkeit halber dicker gezeichnet, als sie ist

dann frei zu fallen, wenn wir sie passieren. Wieder können wir die Einstein-Gleichung der Gravitation anwenden: Das Testvolumen beginnt sich mit einer Beschleunigung zusammenzuziehen, die proportional zur Masse der perfekten Kugel in diesem Volumen ist. Das Gleiche gilt für jedes andere zwischen den beiden fast gleich großen Kugeloberflächen eingeschlossene Volumen und damit auch für die gesamte dünne Kugelschale, die wir in Abb. 8.4 schwarz gezeichnet haben.

In den Abb. 8.2 und 8.3 fallen wir jeweils frei in den Schacht und sind im gleichen Trägheitszustand wie zum Zeitpunkt, an dem wir vom weit entfernten Ort starteten. Daher können wir das Ergebnis wie in Abb. 8.5 zusammenfassen: Die *gesamte* Kugel, die durch die zunächst ruhenden Testmassen markiert ist, beginnt mit einer Beschleunigung zu schrumpfen, die proportional zur in ihr enthaltenen Masse ist. Diese Masse messen wir von *unserem* Standpunkt aus!

In dieser Weise können wir fortfahren: Wie bei einer Zwiebel können wir Schale um Schale hinzufügen. Also beginnt das Volumen der gesamten perfekten Kugel mit einer Beschleunigung zu schrumpfen, die proportional zu ihrer Masse ist.

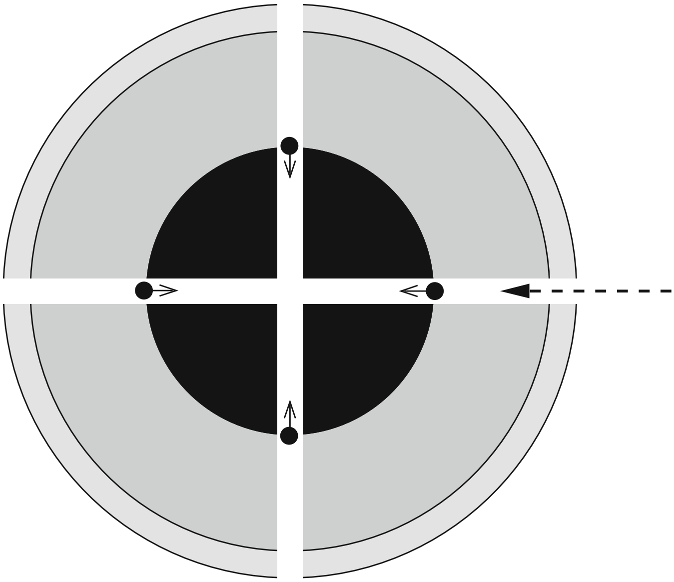

Abb. 8.5 Eine etwas größere gedachte, durch Testmassen gekennzeichnete Kugel beginnt zu schrumpfen

8.3 Flache Raumzeit in einer Hohlkugel

Nun wenden wir dieses Resultat sofort auf einen seltsamen Planeten an, der ein kugelförmiges Loch in der Mitte hat, wie in Abb. 8.6. Wir können wieder vorgehen wie im letzten Abschnitt: Wir legen die Testmassen an den Rand des kugelförmigen Lochs und lassen sie alle zur gleichen Zeit frei fallen. Dann beginnt die Kugel mit einer Beschleunigung zu schrumpfen, die proportional zur Masse im Loch ist, also null beträgt! Mit anderen Worten: Das Loch schrumpft überhaupt *nicht*. Die Testmassen beginnen also *nicht*, sich gegeneinander zu bewegen: Im Loch herrscht *keine* Gravitation!

Das ist schon unsere erste **exakte Lösung der Einstein-Gleichung der Gravitation**! Man nennt sie den **Satz von Birkhoff**:

Satz von Birkhoff

Wenn eine perfekte Kugel ein kugelförmiges Loch mit gleichem Mittelpunkt enthält, ist die **Raumzeit in diesem Loch flach**.

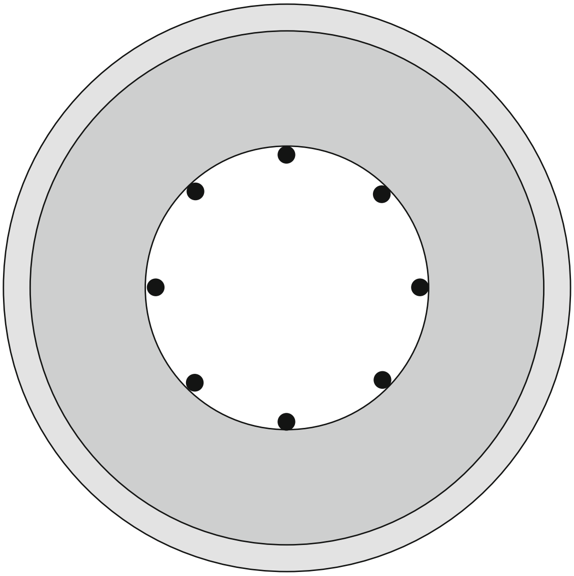

Abb. 8.6 Im Inneren einer **hohlen perfekten Kugel** herrscht keine Gravitation

8.4 Gravitation außerhalb einer perfekten Kugel

Wir fahren außerhalb der perfekten Kugel so fort wie in Abschn. 8.2, fügen also dünne Raumschalen zur perfekten Kugel hinzu. Aber **außerhalb der perfekten Kugel** befindet sich keine weitere Masse, sodass wir wissen:

> Das Volumen einer Kugel, die denselben Mittelpunkt wie die perfekte Kugel hat, aber größer ist, beginnt mit einer Beschleunigung zu schrumpfen, die 4π mal der Gravitationskonstante mal der Masse der perfekten Kugel entspricht. Dabei messen wir Zeit und Längen in einem Trägheitszustand, in dem wir weit genug von der perfekten Kugel entfernt ruhen, um dann frei zum Kugelmittelpunkt hin zu fallen.

Wir möchten nun herausfinden, wie sich der *Radius* der Kugel mit der Zeit ändert. Die Testmassen ruhen zunächst relativ zueinander und markieren die größere der beiden gestrichelt gezeichneten Kugeln in Abb. 8.7. Wir fallen wie immer von unserem weit entfernten Ruhepunkt frei zum Mittelpunkt der perfekten Kugel und passieren die rechte Testmasse gerade dann, wenn alle Testmassen beginnen, frei zu fallen. Während eines Augenblicks schrumpft die größere gestrichelte Kugel zur kleineren gestrichelten Kugel. Wir wissen

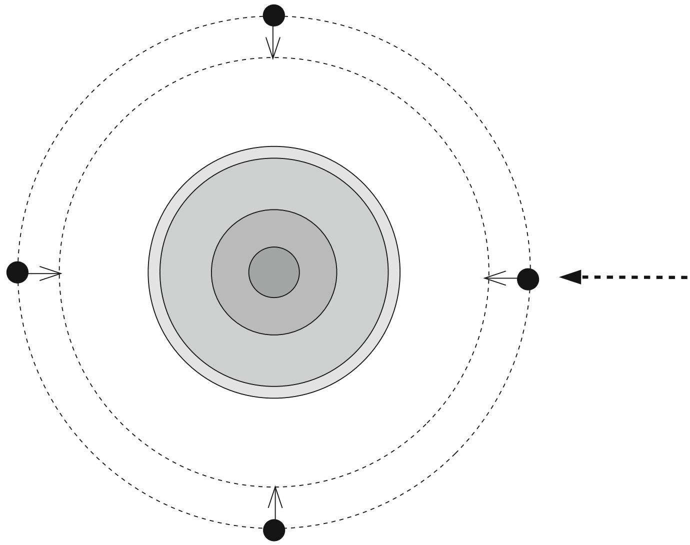

Abb. 8.7 Die von den Testmassen markierte Kugel beginnt genau dann zu schrumpfen, wenn wir sie passieren. In der Abbildung skizzierten wir dies durch den *gestrichelten Pfeil*

aus Abschn. 6.5, Punkt 6, dass für *uns* dann der Abstand der beiden Kugeln gerade der Betrag ist, um den der *Radius* der Kugel geschrumpft ist.

Wenn die größere gestrichelte Kugel zu schrumpfen beginnt, verliert sie das Volumen der Kugelschale zwischen den beiden gestrichelten Kugeloberflächen. Wie wir in Abb. 8.7 sehen, ist dieses Volumen fast genau die Oberfläche der größeren gestrichelten Kugel mal dem Abstand der beiden Kugeloberflächen. Aber für uns ist dieser Abstand gerade der Betrag, um den der Radius geschrumpft ist. Außerdem wissen wir aus Abschn. 6.5, Punkt 5, dass die Oberfläche der größeren gestrichelten Kugel gerade 4π mal dem Quadrat ihres Radius beträgt. Also ist die Beschleunigung, mit der die größere gestrichelte Kugel schrumpft, gerade die Beschleunigung, mit der ihr Radius schrumpft, multipliziert mit 4π mal dem Quadrat ihres Radius.

Mit anderen Worten: Nach der Einstein-Gleichung der Gravitation gilt

$$\begin{aligned} &4\pi \cdot (\text{Radius})^2 \cdot (\text{Schrumpf-Beschleunigung des Radius}) \\ &= -\,4\pi \cdot (\text{Gravitationskonstante}) \cdot (\text{Masse der perfekten Kugel}) \end{aligned}$$

Wir haben auf der rechten Seite der Gleichung ein Minuszeichen gesetzt, da der Radius schrumpft und deshalb die Beschleunigung negativ ist. Den Faktor 4π kürzen wir auf beiden Seiten heraus. Schließlich teilen wir beide Seiten durch das Quadrat des Radius, und erhalten die Schrumpf-Beschleunigung des Radius:

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\text{Schrumpf-Beschleunigung des Radius}\\ \text{gemessen in der Eigenzeit eines Beobachters,}\\ \text{der weit weg von der perfekten Kugel ruht}\\ \text{und dann frei auf sie zu fällt}\end{pmatrix}\\ &= -\frac{\begin{pmatrix}\text{Gravitations-}\\ \text{konstante}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{Masse der}\\ \text{perfekten Kugel}\end{pmatrix}}{(\text{Radius})^2}\end{aligned} \tag{8.1}$$

Fällt nun unser Freund von einem nicht so weit entfernten Punkt wie wir frei auf die perfekte Kugel zu, fällt er mit einer *geringeren* Geschwindigkeit als wir. Aber nach dem Äquivalenzprinzip ist er wie wir dann in einem Trägheitszustand, sodass er *nicht* relativ zu uns beschleunigt, wenn er ans uns vorbeifliegt. Daher gilt Gl. (8.1) für *jeden* Beobachter, der frei fällt.

Obwohl der Radius beschleunigt schrumpft, spürt also der frei fallende Beobachter *keine* Beschleunigung, da sich die Raumzeit *krümmt*: Auch der Astronaut im Raumschiff in Abb. 5.4 spürt keine Beschleunigung, obwohl er auf einer gekrümmten Bahn um die Erde fliegt. Wir **beschleunigen** nur **relativ** zur perfekten Kugel.

8.5 Schwarzschild-Lösung

Wir lassen eine Testmasse von einem weit entfernten Ruheplatz frei auf die perfekte Kugel zu fallen. Wir möchten nun die Fallgeschwindigkeit berechnen, die uns in Abschn. 6.5 noch fehlte. Die Testmasse startet relativ zur perfekten Kugel mit der Geschwindigkeit null. Die Rate, mit der ihre Geschwindigkeit zunimmt, ist ihre Beschleunigung. Diese Beschleunigung kennen wir aus Gl. (8.1). Daher können wir den γ-Faktor für jeden Radius Stück für Stück berechnen. Mit Hilfe dieses γ-Faktors wissen wir dann aus Abschn. 6.5, wie sich die Raumzeit um eine perfekte Kugel krümmt. Wir gehen aber umgekehrt vor und schreiben zunächst das Rechenergebnis der Geschwindigkeit für einem bestimmten Radius hin:

$$(\text{Geschwindigkeit})^2 = \frac{2\cdot\begin{pmatrix}\text{Gravitations-}\\ \text{konstante}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{Masse der}\\ \text{perfekten Kugel}\end{pmatrix}}{(\text{Radius})} \tag{8.2}$$

Gehen wir nun rückwärts und bestätigen wir, dass diese Geschwindigkeit von der **Beschleunigung des** Radius in Gl. (8.1) stammt. Als Erstes sehen wir in Gl. (8.2), dass die Geschwindigkeit für einen sehr großen Radius sehr klein wird, sodass wir wirklich fast mit Geschwindigkeit null starten, wenn wir nur weit genug entfernt von der perfekten Kugel ruhen. Als Nächstes untersuchen wir den freien Fall während einer kleinen Zeitspanne. Wir messen die Zeit als unsere Eigenzeit. Nach einer kurzen Zeitspanne hat die Geschwindigkeit zugenommen, und der Radius hat abgenommen. Für uns ist diese Abnahme gerade die kleine Wegstrecke, welche die Testmasse während dieser kurzen Zeitspanne frei gefallen ist. Dann hat sich die Gleichung für die Geschwindigkeit wie folgt geändert:

$$\begin{aligned}&\left(\text{Geschwindigkeit} + \begin{matrix}\text{kleine zusätzliche}\\ \text{Geschwindigkeit}\end{matrix}\right)^2\\ &= \frac{2 \cdot \begin{pmatrix}\text{Gravitations-}\\ \text{konstante}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\text{Masse der}\\ \text{perfekten Kugel}\end{pmatrix}}{\left(\text{Radius} - \begin{matrix}\text{kleiner}\\ \text{Abstand}\end{matrix}\right)}\end{aligned} \tag{8.3}$$

Die „kleine zusätzliche Geschwindigkeit“ ist pro kleiner Zeitspanne gerade die Beschleunigung, die wir suchen. Wir entwickeln das Quadrat auf der linken Seite,

$$\begin{aligned}&(\text{Geschwindigkeit})^2 + 2 \cdot (\text{Geschwindigkeit}) \cdot \begin{pmatrix}\text{kleine zusätzliche}\\ \text{Geschwindigkeit}\end{pmatrix}\\ &+ \begin{pmatrix}\text{kleine zusätzliche}\\ \text{Geschwindigkeit}\end{pmatrix}^2\\ &= \frac{2 \cdot \begin{pmatrix}\text{Gravitations-}\\ \text{konstante}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\text{Masse der}\\ \text{perfekten Kugel}\end{pmatrix}}{\left(\text{Radius} - \begin{matrix}\text{kleiner}\\ \text{Abstand}\end{matrix}\right)}\end{aligned}$$

Der mittlere Ausdruck auf der linken Seite, das Produkt der ursprünglichen und der kleinen zusätzlichen Geschwindigkeit, ist viel größer als der letzte Ausdruck, das Produkt der kleinen zusätzlichen Geschwindigkeit mit sich selbst. Daher können wir diesen letzten Ausdruck weglassen, wenn nur die Zeitspanne kurz genug ist. Es bleibt

$$\begin{aligned}&\left(\text{Geschwindigkeit}\right)^2 + 2\cdot\left(\text{Geschwindigkeit}\right)\cdot\begin{pmatrix}\text{kleine zusätzliche}\\\text{Geschwindigkeit}\end{pmatrix}\\ &= \frac{2\cdot\begin{pmatrix}\text{Gravitations-}\\\text{konstante}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{Masse der}\\\text{perfekten Kugel}\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}\text{Radius} - \begin{matrix}\text{kleiner}\\\text{Abstand}\end{matrix}\end{pmatrix}}\end{aligned}$$

Für das linke Quadrat der Geschwindigkeit setzen wir die rechte Seite von Gl. (8.2) ein:

$$\begin{aligned}&\frac{\cancel{2}\cdot\begin{pmatrix}\text{Gravitations-}\\\text{konstante}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{Masse der}\\\text{perfekten Kugel}\end{pmatrix}}{(\text{Radius})}\\ &+\cancel{2}\cdot(\text{Geschwindigkeit})\cdot\begin{pmatrix}\text{kleine zusätzliche}\\\text{Geschwindigkeit}\end{pmatrix}\\ &= \frac{\cancel{2}\cdot\begin{pmatrix}\text{Gravitations-}\\\text{konstante}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{Masse der}\\\text{perfekten Kugel}\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}\text{Radius} - \begin{matrix}\text{kleiner}\\\text{Abstand}\end{matrix}\end{pmatrix}}\end{aligned}$$

Den Faktor 2 streichen wir auf beiden Seiten der Gleichung. Um die kleine zusätzliche Geschwindigkeit zu erhalten, ziehen wir den ersten Ausdruck der linken Seite auf beiden Seiten der Gleichung ab:

$$\begin{aligned}&(\text{Geschwindigkeit})\cdot\begin{pmatrix}\text{kleine zusätzliche}\\\text{Geschwindigkeit}\end{pmatrix}\\ &= \frac{\begin{pmatrix}\text{Gravitations-}\\\text{konstante}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{Masse der}\\\text{perfekten Kugel}\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}\text{Radius} - \begin{matrix}\text{kleiner}\\\text{Abstand}\end{matrix}\end{pmatrix}}\\ &\quad - \frac{\begin{pmatrix}\text{Gravitations-}\\\text{konstante}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{Masse der}\\\text{perfekten Kugel}\end{pmatrix}}{(\text{Radius})}\end{aligned} \tag{8.4}$$

Wenn zum Beispiel der ursprüngliche Radius 100.000 Meter war und die Testmasse während der kurzen Zeitspanne 3 Meter frei auf die perfekte Kugel zu fiel, dann ist die Differenz der *Kehrwerte* der Radius

$$\begin{aligned}\frac{1}{99.997}-\frac{1}{100.000}&=\frac{100.000}{99.997\cdot 100.000}-\frac{99.997}{99.997\cdot 100.000}\\&=\frac{3}{99.997\cdot 100.000}\approx\frac{3}{100.000^2}\end{aligned}$$

Das ist praktisch der kleine Abstand, geteilt durch das *Quadrat* des Radius. Wenn wir das mit (Gravitationskonstante) · (Masse der perfekten Kugel) malnehmen, erhalten wir die rechte Seite der Gl. (8.4):

$$\begin{aligned}&\left(\text{Geschwindigkeit}\right)\cdot\begin{pmatrix}\text{kleine zusätzliche}\\\text{Geschwindigkeit}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\text{Gravitations-}\\\text{konstante}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{Masse der}\\\text{perfekten Kugel}\end{pmatrix}\cdot\frac{\begin{pmatrix}\text{kleiner}\\\text{Abstand}\end{pmatrix}}{(\text{Radius})^2}\end{aligned}$$

Nun ist die kleine zusätzliche Geschwindigkeit pro kurzer Zeitspanne die Beschleunigung, und der kleine Abstand pro kurzer Zeitspanne ist die *negative* Geschwindigkeit, denn der Radius nimmt ja *ab*. Also haben wir *pro* kurzer Zeitspanne

$$\begin{aligned}&\left(\text{Geschwindigkeit}\right)\cdot\left(\text{Beschleunigung}\right)\\&\approx-\begin{pmatrix}\text{Gravitations-}\\\text{konstante}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{Masse der}\\\text{perfekten Kugel}\end{pmatrix}\cdot\frac{\left(\text{Geschwindigkeit}\right)}{(\text{Radius})^2}\end{aligned}$$

Wir teilen beide Seiten der Gleichung durch die Geschwindigkeit, und erhalten Gl. (8.1). Dies zeigt uns, dass Gl. (8.2) wirklich die richtige Geschwindigkeit einer Testmasse ergibt, die von einem weit entfernten Ruheort aus frei auf die perfekte Kugel zu fällt. Daraus erhalten wir den γ-Faktor

$$\boxed{\begin{aligned}\gamma&=\sqrt{1-\frac{\text{Geschwindigkeit}^2}{c^2}}\\&=\sqrt{1-\frac{2\cdot\begin{pmatrix}\text{Gravitations-}\\\text{konstante}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{Masse der}\\\text{perfekten Kugel}\end{pmatrix}}{(\text{Radius})\cdot c^2}}\end{aligned}\qquad(8.5)}$$

Wir haben nun die **Einstein-Gleichung der Gravitation exakt** gelöst, das heißt, wir haben die **Schwarzschild-Lösung** gefunden. Wir können sie zusammen mit den in Abschn. 6.5 gefundenen Resultaten wie folgt zusammenfassen:

Schwarzschild-Lösung

1. Eine perfekte Kugel krümmt die Raumzeit so, dass die Zeit einer in einem bestimmten Abstand ruhenden Uhr gegenüber einer weit entfernt ruhenden Uhr um den Faktor γ aus Gl. (8.5) langsamer geht.
2. Abstände auf einer Kugeloberfläche mit gleichem Mittelpunkt wie die perfekte Kugel ändern sich nicht.
3. Der dazu senkrechte Abstand zwischen einem Radius und einem etwas größeren Radius in gleicher Richtung ist größer als die Differenz der beiden Radien, und zwar um den Faktor $1/\gamma$.
4. Das Verhältnis aus Umfang und Radius eines jeden Kreises mit gleichem Mittelpunkt wie die perfekte Kugel ist 2π, und die Oberfläche einer Kugel mit gleichem Mittelpunkt wie die perfekte Kugel ist 4π mal das *Quadrat* des Radius.

8.6 Das newtonsche Gravitationsgesetz

Das newtonsche Gesetz der Gravitation folgt aus dem Einstein-Gesetz der Gravitation, wenn die Masse, die die Gravitation erzeugt, nicht zu groß ist. Dann werden Testmassen, die von einem weit entfernten Ruheplatz auf die Gravitation erzeugende Masse zu frei fallen, keine sehr großen Geschwindigkeiten erreichen. Nehmen wir zum Beispiel die Sonne. Nach Tab. 10.1 ist ihr Radius ungefähr $7 \cdot 10^8$ und ihre Masse $2 \cdot 10^{30}$. Die Gravitationskonstante ist ungefähr $7 \cdot 10^{-11}$. Setzen wir diese Zahlen in Gl. (8.2) ein, finden wir, dass Testmassen, die von einem weit entfernten Ruheplatz frei auf die Sonne zu fallen, am Sonnenrand nur 0,2 Prozent der Lichtgeschwindigkeit erreichen. Es gilt:

$$\frac{\text{Geschwindigkeit}}{c} = \sqrt{\frac{2 \cdot (\text{Gravitationskonstante}) \cdot \text{Masse}}{(\text{Radius}) \cdot c^2}}$$

Setzen wir nun obige Zahlen ein, erhalten wir

$$\frac{\text{Geschwindigkeit}}{c} \approx \sqrt{\frac{2 \cdot (7 \cdot 10^{-11}) \cdot (2 \cdot 10^{30})}{(7 \cdot 10^{8}) \cdot (3 \cdot 10^{8})^2}} \approx \sqrt{\frac{2^2}{10^6} \cdot \frac{10}{9}} \approx \frac{2}{1000}$$

Der γ-Faktor ist fast eins:

$$\gamma \approx \sqrt{1 - \frac{\text{Geschwindigkeit}^2}{c^2}} \approx 0{,}999998$$

Daher vergeht die Zeit nahe der Sonne überall ungefähr gleich schnell, und ein Stab hat überall ungefähr die gleiche Länge. Der Radius in Gl. (8.1) zeigt nun wirklich auch für einen neben der Sonne ruhenden Beobachter fast den Abstand vom Mittelpunkt der Sonne an: Die Schulgeometrie stimmt fast. Daher sagt uns die Einstein-Gleichung der Gravitation, dass eine frei fallende Testmasse *relativ* zur perfekten Kugel mit folgender Rate in Fallrichtung **beschleunigt**:

$$\begin{pmatrix}\text{Beschleunigung}\\ \text{des Abstandes}\\ \text{zum Mittelpunkt}\end{pmatrix} = -\frac{\begin{pmatrix}\text{Gravitations-}\\ \text{konstante}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\text{Masse der}\\ \text{perfekten Kugel}\end{pmatrix}}{(\text{Abstand zum Mittelpunkt})^2} \tag{8.6}$$

Dies sieht schon sehr nach dem newtonschen Gesetz der Gravitation aus. Tatsächlich vereinigt dieses Gesetz *zwei* Gesetze der newtonschen Mechanik: Das erste Gesetz sagt, dass eine Kraft vom Mittelpunkt der perfekten Kugel ausgeht, die unendlich schnell eine Testmasse proportional zu ihrer Schwere zu diesem Mittelpunkt hin „anzieht“:

$$\begin{pmatrix}\text{Kraft auf}\\ \text{Testmasse}\end{pmatrix} = -\frac{\begin{pmatrix}\text{Gravitations-}\\ \text{konstante}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\text{Masse der}\\ \text{perfekten Kugel}\end{pmatrix}}{(\text{Abstand zum Mittelpunkt})^2} \cdot \begin{pmatrix}\text{Schwere der}\\ \text{Testmasse}\end{pmatrix}$$

Dies ist das **newtonsche Gravitationsgesetz**. Zugleich sträubt sich die Trägheit der Testmasse gegen die Kraft, sodass die Testmasse im umgekehrten

Verhältnis zu ihrer Trägheit auf die Kraft reagiert und zum Mittelpunkt der perfekten Kugel hin beschleunigt:

$$\text{Beschleunigung} = \frac{(\text{Kraft auf Testmasse})}{\left(\text{Trägheit der Testmasse}\right)} \tag{8.7}$$

Dies ist das **newtonsche Bewegungsgesetz**. Daher hängt die Beschleunigung vom Abstand zum Mittelpunkt der perfekten Kugel wie folgt ab:

$$\begin{aligned}\text{Beschleunigung} &= \frac{(\text{Kraft auf Testmasse})}{(\text{Trägheit der Testmasse})}\\ &= -\frac{\begin{pmatrix}\text{Gravitations-}\\ \text{konstante}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{Masse der}\\ \text{perfekten Kugel}\end{pmatrix}}{(\text{Abstand zum Mittelpunkt})^2}\\ &\quad\cdot\frac{\begin{pmatrix}\text{Schwere der}\\ \text{Testmasse}\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}\text{Trägheit der}\\ \text{Testmasse}\end{pmatrix}}\end{aligned}$$

In der newtonschen Theorie sind die Schwere und die Trägheit einer Testmasse *zufällig* genau gleich, sodass sie sich auf der rechten Seite der Gleichung wegheben, und wir wieder auf das Gesetz (8.6) kommen.

Aber es gibt keinen *Grund,* weshalb die Trägheit und die Schwere in der newtonschen Mechanik genau gleich sein sollten. Wir sahen, dass in der Allgemeinen Relativitätstheorie die Trägheit und die Schwere *gleich* sind, weil die Gravitation eben *keine* Kraft ist, sondern die Raumzeit krümmt, und dass alle Arten von Testmassen durch die gekrümmte Raumzeit in *gleicher* Weise frei fallen. Wir haben auch gesehen, dass sich das klassische newtonsche Gesetz der Gravitation *und auch* das newtonsche Bewegungsgesetz als gute Näherung des Einstein-Gesetzes der Gravitation ergeben, wenn die Massen, die die Gravitation erzeugen, nicht zu groß sind. Denn auch das Bewegungsgesetz einer Testmasse ergab sich ja in Abschn. 8.1 aus dem Einstein-Gesetz der Gravitation.

9 Anwendung der Allgemeinen Relativitätstheorie

9.1 Schwarze Löcher

Eine nahezu perfekte Kugel wie die Sonne hat eine Masse von $2 \cdot 10^{30}$ und einen Radius von $7 \cdot 10^{8}$. Diese beiden Zahlen bestimmen, wie stark ein Stern die Raumzeit krümmt. Es gilt:

$$\boxed{S = \frac{2 \cdot \left(\begin{matrix}\text{Gravitations-}\\ \text{konstante}\end{matrix}\right) \cdot \left(\begin{matrix}\text{Masse der}\\ \text{perfekten Kugel}\end{matrix}\right)}{c^2}} \tag{9.1}$$

Der Buchstabe **S** steht für den **Schwarzschild-Radius** der perfekten Kugel. Für die Sonne erhalten wir in Meter

$$\begin{aligned} S &= \frac{2 \cdot (6{,}67 \cdot 10^{-11}) \cdot (2 \cdot 10^{30})}{(3 \cdot 10^{8})^2} \\ &\approx 2{,}96 \cdot 10^{3} \approx 3000 \text{ Meter} \end{aligned} \tag{9.2}$$

was sehr viel kleiner als der Radius der Sonne ist. Die Geschwindigkeit aus Gl. (8.2), mit der eine von der perfekten Kugel weit genug entfernt ruhende Testmasse einen bestimmten Abstand vom Mittelpunkt (beziehungsweise Radius) erreicht, können wir so mithilfe des Schwarzschild-Radius berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{\text{Geschwindigkeit}^2}{c^2} &= \frac{\dfrac{2 \cdot \left(\begin{matrix}\text{Gravitations-}\\ \text{konstante}\end{matrix}\right) \cdot \left(\begin{matrix}\text{Masse der}\\ \text{perfekten Kugel}\end{matrix}\right)}{c^2}}{\text{Radius}} \\ &= \frac{S}{\text{Radius}} \end{aligned} \tag{9.3}$$

K. Fischer, *Relativitätstheorie in einfachen Worten*, DOI 10.1007/978-3-662-46966-8_9,

Der Schwarzschild-Radius geht so auch in den γ-Faktor der Schwarzschild-Lösung (8.5) ein:

$$\begin{aligned}\gamma &= \sqrt{1 - \frac{2\begin{pmatrix}\text{Gravitations-}\\ \text{konstante}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{Masse der}\\ \text{perfekten Kugel}\end{pmatrix}}{(\text{Radius})\cdot c^2}} \\ &= \sqrt{1 - \frac{S}{\text{Radius}}}\end{aligned} \tag{9.4}$$

Für die Sonne ergibt das ungefähr den folgenden Wert:

$$\gamma \approx 0{,}999998$$

Schauen wir uns nun Abb. 9.1 an. Die Schwarzschild-Lösung sagt uns, dass eine auf der Oberfläche der perfekten Kugel ruhende Uhr gegenüber einer weit entfernt relativ zur perfekten Kugel ruhenden Uhr um den γ-Faktor langsamer geht. Je größer also der Schwarzschild-Radius der perfekten Kugel bei gleichem Radius ist, umso langsamer geht die auf der Oberfläche ruhende Uhr.

Wenn die Massen der perfekten Kugel so dicht zusammengedrängt sind, dass ihr Radius *kleiner* als ihr Schwarzschild-Radius ist, passiert etwas sehr Seltsames: Eine Uhr, die am Schwarzschild-Radius ruht, liegt immer noch

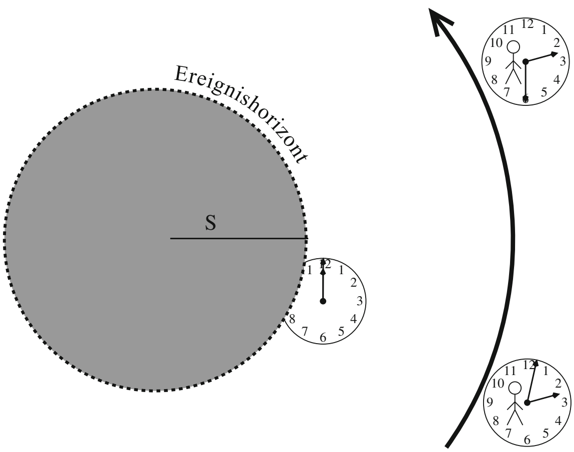

Abb. 9.1 Uhren gehen in der Nähe von großen Massen langsamer und bleiben, relativ zu einem außen stehenden Beobachter, am Ereignishorizont eines Schwarzen Lochs stehen

außerhalb der perfekten Kugel, wobei der γ-Faktor null ist:

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{S}{S}} = 0$$

Ein von der perfekten Kugel weit entfernter Beobachter sieht also, dass die Uhr *stillsteht*! Mit anderen Worten: Die Zeit am Schwarzschild-Radius steht für ihn *still*. Solch einen Stern nennen wir ein **Schwarzes Loch**. Wir haben die Schwarzen Löcher schon in Abschn. 6.8 vorgestellt. Hier sehen wir nun, wie die Schwarzschild-Lösung der Einstein-Gleichung der Gravitation voraussagt, dass solche Schwarzen Löcher wirklich existieren können. Der **Ereignishorizont**, den wir in Abschn. 6.8 eingeführt haben, ist daher die Oberfläche der Kugel mit dem gleichen Mittelpunkt wie die perfekte Kugel und dem Schwarzschild-Radius als Radius.

Außerhalb des Schwarzschild-Radius verhält sich ein Schwarzes Loch wie eine normale perfekte Kugel. Gleichung (9.2) sagt also aus, dass die Sonne zu einem Schwarzen Loch wird, wenn sie schrumpft und ihr Radius unter 3 Kilometer fällt. Aber selbst dann würden die Planeten auf den gleichen Bahnen um die Sonne laufen wie jetzt!

Die Theorie erlaubt es, dass im Prinzip *jeder* Körper zu einem Schwarzen Loch wird, wenn er nur stark genug schrumpft. Aber das hängt natürlich von der inneren Beschaffenheit des Körpers ab: Wir können nicht „einfach so" einen Stein zusammendrücken! Für kollabierende Sterne hängt das von der Festigkeit ihrer Elementarteilchen ab. Mit Hilfe der **Quantentheorie** kann man berechnen, dass ein Stern ungefähr die 1,5-fache Masse der Sonne haben muss, damit er zum **Schwarzen Loch** kollabieren kann.

Näheres findet man zum Beispiel in den Aufsätzen [1, 2].

Das bisher (2015) kleinste *beobachtete* Schwarze Loch hat eine Masse von ungefähr der dreifachen Sonnenmasse (siehe zum Beispiel [3] oder [4]). Große Schwarze Löcher können im Innern einer Galaxie lauern, sie „ernähren" sich von ihnen zu nahe kommenden Sternen. Es scheint, dass auch im Mittelpunkt unserer Milchstraße ein solches Monster von ungefähr vier Millionen Sonnenmassen sitzt (siehe zum Beispiel [5]).

9.2 Gekrümmte Lichtstrahlen: Schwache Gravitation 1

In Abb. 6.10 sahen wir schon, dass sich ein Lichtstrahl krümmt, wenn er an einer großen Masse vorbeifliegt. Die Frage ist nun, *wie sehr* er sich krümmt.

Abb. 9.2 Ein Lichtstrahl fliegt an einer sehr leichten perfekten Kugel auf einer geraden Bahn vorbei

In Abb. 9.2 sehen wir zunächst, wie ein Lichtstrahl an einer sehr leichten perfekten Kugel vorbeifliegt. Den Lichtstrahl haben wir als durchgezogenen schwarzen Pfeil skizziert. Alle anderen gestrichelten Linien dienen nur der besseren Verständlichkeit. Die graue Scheibe bezeichnete die sehr leichte perfekte Kugel. Der Lichtstrahl passiert sie im Abstand *b*. Da die perfekte Kugel sehr leicht ist, erzeugt sie praktisch keine Gravitation. Daher bewegt sich der Lichtstrahl auf einer geraden Bahn. Wir messen, wieweit der Lichtstrahl gekommen ist, indem wir den Winkel der Spitze des Lichtstrahls mit der von links nach rechts laufenden gestrichelten Linie bilden. Weit rechts außen ist dieser Winkel praktisch null. Der Winkel wächst, je mehr sich der Lichtstrahl der perfekten Kugel nähert. Wenn er ihr am nächsten ist, wie im rechten Bild der Abb. 9.2, ist der Winkel auf 90 Grad angewachsen. Während der Lichtstrahl sich dann immer weiter von der perfekten Kugel entfernt, wächst der Winkel wie in Abb. 9.3 bis auf 180 Grad.

In Abb. 9.4 sehen wir, wie weit das Licht innerhalb einer sehr kurzen Zeitspanne vorwärts kommt. In dieser Zeit wächst auch der Winkel, und zwar um so viel wie der gestrichelte Pfeil anzeigt.

Wie schnell wächst der Winkel? Das Verhältnis aus Winkelwachstum und Gesamtwinkel einer vollen Umdrehung von 360 Grad ist gleich dem Verhältnis aus der waagerechten Seite des grauen Dreiecks und dem Umfang des

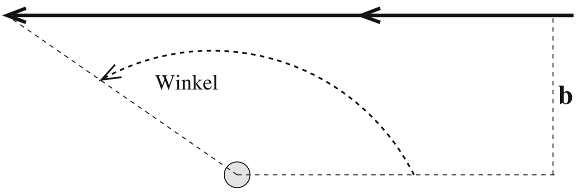

Abb. 9.3 Der Gesamtwinkel zwischen Einfallsrichtung und Ausfallsrichtung wächst schließlich auf 180 Grad

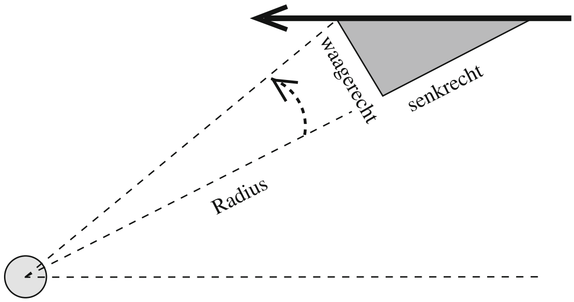

Abb. 9.4 Der *gestrichelte Pfeil* zeigt, um wie viel der Winkel während einer kurzen Zeitspanne von beispielsweise einer Millisekunde anwächst. Wir haben das *graue Dreieck* der besseren Darstellbarkeit halber viel größer gezeichnet, als es in Wirklichkeit ist

Kreises, denn so bestimmt man ja diesen Winkel:

$$\frac{\text{Winkelwachstum}}{360 \text{ Grad}} = \frac{\text{Waagerechte Seite}}{2\pi \cdot \text{Radius}} \tag{9.5}$$

Damit wir uns nicht missverstehen: „Waagerecht“ heißt hier *nicht* „in Richtung wie diese Textzeile“, sondern „senkrecht zum jeweiligen Radius“!

Nun ersetzen wir die sehr leichte durch eine schwere perfekte Kugel. Wenn dann der Lichtstrahl von rechts nach links vorbeifliegt, wächst sein Winkel auf *über* 180 Grad, wie in Abb. 9.5 zu sehen ist: Der Lichtstrahl *krümmt sich*. Wir wollen nun wissen, auf wie viel *mehr* als 180 Grad der Winkel anwächst: Dieser Zusatzwinkel ist der **Krümmungswinkel des Lichtstrahls**. Dazu verwenden wir die Schwarzschild-Lösung.

Punkt 2 der Schwarzschild-Lösung (8.5) sagt uns, dass sich das kleine graue Dreieck in Abb. 9.4 verformt, da sich der Raum krümmt: Die waagerechte Seite bleibt gleich lang, aber die senkrechte Seite in Richtung Planet wächst um dem Faktor $1/\gamma$, da wir ihre Länge in Einheiten des Radius messen. Wir *glätten* nun den Raum in der Nähe des grauen Dreiecks, indem wir den Radius

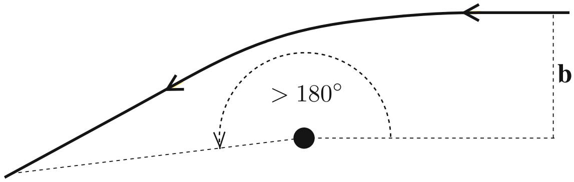

Abb. 9.5 Ein Lichtstrahl krümmt sich nahe einer schweren perfekten Kugel

um diesen Faktor verkleinern:

$$\text{Radius} \longrightarrow \gamma \cdot \text{Radius} \tag{9.6}$$

Aber auch die Zeit „krümmt" sich: Der Lichtstrahl fliegt an der längsten Seite des grauen Dreiecks mit der Lichtgeschwindigkeit c vorbei. Wir aber sehen uns das Ganze ja von einem von der perfekten Kugel weit genug entferntem Ort an, an dem wir relativ zur perfekten Kugel ruhen. Daher gehen für uns Uhren um den Faktor γ langsamer, die in der Nähe des grauen Dreiecks ruhen. Daher verkürzt sich für uns der Augenblick, in dem der Lichtstrahl die längste Seite des grauen Dreiecks passiert:

$$\text{Augenblick} \longrightarrow \gamma \cdot \text{Augenblick} \tag{9.7}$$

Das Verhältnis aus der Länge der waagerechten Seite des grauen Dreiecks und dem Radius zeigt uns wie in Gl. (9.5) an, um wie viel der Winkel in dem Augenblick wächst:

$$\begin{aligned} \frac{\text{Waagerechte}}{\big(\text{Augenblick}\big) \cdot \text{Radius}} \longrightarrow & \frac{\text{Waagerechte}}{\big(\gamma \cdot \text{Augenblick}\big) \cdot (\gamma \cdot \text{Radius})} \\ = & \frac{\text{Waagerechte}}{\big(\text{Augenblick}\big) \cdot (\gamma^2 \cdot \text{Radius})} \end{aligned} \tag{9.8}$$

Wir sehen: In der Nähe der schweren perfekten Kugel wächst der Winkel um den Faktor $1/\gamma^2$ *mehr* an als bei der sehr leichten perfekten Kugel. Mit anderen Worten: Der Lichtstrahl krümmt sich. Aber dann kann die Abb. 9.4 nicht richtig sein, denn dann folgt der Lichtstrahl ja eben *nicht* einer geraden Linie, wie dort dargestellt! Trotzdem können wir diese Abbildung solange benutzen, solange die perfekte Kugel nicht *zu* schwer ist, wie es zum Beispiel bei der Sonne der Fall ist. Dann krümmt sich ein Lichtstrahl nur ein wenig, wenn er an der perfekten Kugel vorbeifliegt. Daher macht es nicht viel aus, wenn wir annehmen, dass der Lichtstrahl von rechts entlang einer geraden Linie kam. Wir machen nur einen kleinen Fehler, wenn wir den Krümmungswinkel von Augenblick zu Augenblick aufaddieren. Physiker nennen ein solches Vorgehen eine **Störungstheorie**.

Die zweite Zeile der Gl. (9.8) sagt uns, dass wir statt die Waagerechte und den Zeitlauf zu verändern, den Radius um den Faktor γ^2 schrumpfen lassen und dafür alle anderen Abstände und Zeiten gleich lassen können. Auf diese Weise können wir die Raumzeit um die nicht zu schwere perfekte Kugel mit genügender Genauigkeit glätten. Wir wissen von der Schwarzschild-Lösung (9.4), dass das Quadrat des γ-Faktors gerade $\big(1 - \frac{S}{\text{Radius}}\big)$ ist. Daher

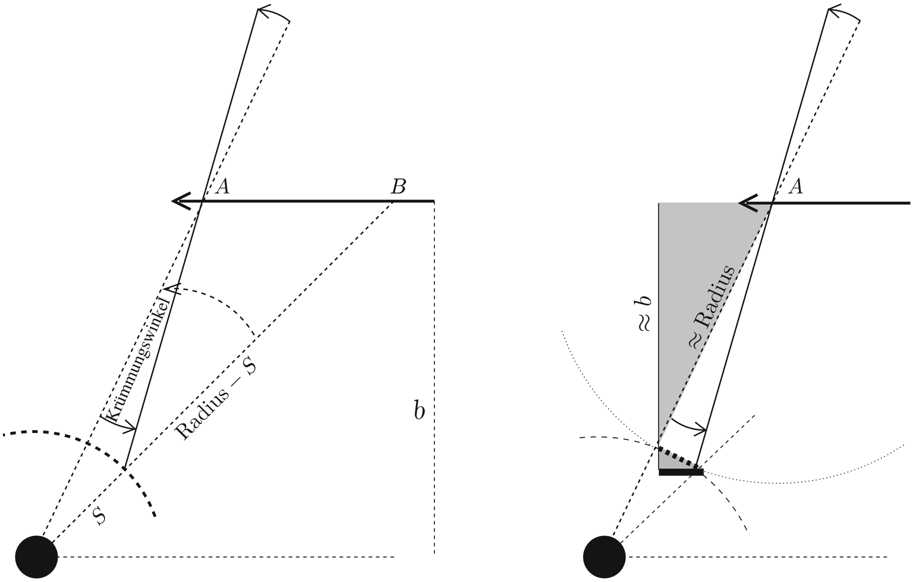

Abb. 9.6 Ein Lichtstrahl krümmt sich, weil er nur den um den Schwarzschild-Radius verringerten Radius „spürt". Zur besseren Sichtbarkeit haben wir den Schwarzschild-Radius grösser als den Radius der perfekten Kugel gezeichnet. Für eine nicht zu schwere perfekte Kugel ist der Schwarzschild-Radius sehr viel kleiner als *b* oder der Radius. Daher hat die linke Seite des *grauen Dreiecks* mit sehr großer Genauigkeit die Länge *b*, und seine längste Seite ist nahezu so lang wie der Radius

schrumpfen wir den Radius zu

$$\text{Radius} \longrightarrow \gamma^2 \cdot (\text{Radius}) = \left(1 - \frac{S}{\text{Radius}}\right) \cdot (\text{Radius}) = \text{Radius} - S \quad (9.9)$$

Mit anderen Worten: Um den *Krümmungs*winkel zu berechnen, schrumpfen wir den Radius um den Schwarzschild-Radius.

Schauen wir uns das in Abb. 9.6 an. Wäre die perfekte Kugel sehr leicht, liefe der Lichtstrahl während einer kurzen Zeitspanne von B nach A. Der Winkel wächst dann wie der gestrichelte Pfeil an.

Ist die perfekte Kugel schwerer, messen wir die Senkrechte mit dem um S verringerten Radius. Das heißt, wir messen den Winkel nicht vom Mittelpunkt der perfekten Kugel, sondern vom Schwarzschild-Radius aus. Wir erhalten anstatt der gestrichelten die dünne durchgezogene Linie durch A. Diese Linie ist zur gestrichelten Linie gerade um den Krümmungswinkel gedreht.

Wir zeigen nun, dass dieser Krümmungswinkel proportional zur **durchgezogenen dicken** Seite des kleineren der beiden grauen Dreiecke wächst.

Die **durchgezogene dicke** Seite des kleinen grauen Dreiecks steht senkrecht auf der durchgezogenen Linie b des größeren grauen Dreiecks. Die **dicke gestrichelte** Seite des kleinen grauen Dreiecks ist dessen längste Seite und praktisch ein Teil des gepunkteten Kreises um A. Sie steht daher senkrecht auf dem Radius, also der längsten Seite des größeren grauen Dreiecks. Die kleinste Seite des kleineren grauen Dreiecks schließlich steht senkrecht zu der kleinsten Seite des größeren grauen Dreiecks.

Da also alle entsprechenden Seiten des kleinen und großen Dreiecks senkrecht zueinander sind, können wir das kleinere in das größere Dreieck verwandeln, indem wir es erst um 90 Grad im Uhrzeigersinn drehen und dann entsprechend dehnen. Die Seitenlängen des kleineren und des größeren Dreiecks stehen dann in einem festen Verhältnis. Insbesondere ist

$$\frac{\textbf{durchgezogene dicke}\text{ Linie}}{b} = \frac{\textbf{dicke gestrichelte}\text{ Linie}}{\text{Radius}} \tag{9.10}$$

Die **dicke gestrichelte** Linie zeigt als Teil des gepunkteten Kreises mit Mittelpunkt A auch den Krümmungswinkel an. Daher ist das Verhältnis der **dicken gestrichelten** Linie und des Umfangs des gepunkteten Kreises gerade das Verhältnis aus dem Krümmungswinkel und den 360 Grad einer vollen Umdrehung:

$$\frac{\text{Krümmungswinkel}}{360\text{ Grad}} = \frac{\textbf{dicke gestrichelte}\text{ Linie}}{2\pi \cdot \text{Radius}}$$

Wir nehmen beide Seiten mit 2π mal und erhalten:

$$2\pi \cdot \frac{\text{Krümmungswinkel}}{360\text{ Grad}} = \frac{\textbf{dicke gestrichelte}\text{ Linie}}{\text{Radius}} \tag{9.11}$$

Weil die beiden rechten Seiten der Gln. (9.10) und (9.11) gleich sind, sind es auch ihre linken Seiten. Also wächst der Krümmungswinkel wirklich proportional zur **durchgezogenen dicken** Linie.

$$\frac{\textbf{durchgezogene dicke}\text{ Linie}}{b} = 2\pi \cdot \frac{\text{Krümmungswinkel}}{360\text{ Grad}}$$

Als Nächstes schauen wir uns Abb. 9.7 an. Während der Lichtstrahl von rechts nach links fliegt, wächst die **durchgezogene dicke** Linie von rechts nach links im gestrichelten Kreis, bis sie so groß ist wie der *Durchmesser* $2S$. Daher ist der gesamte Krümmungswinkel

$$\frac{2S}{b} = 2\pi \cdot \frac{\text{Krümmungswinkel}}{360\text{ Grad}}$$

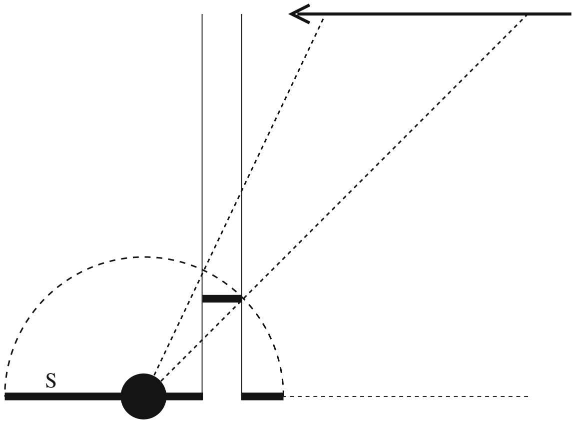

Abb. 9.7 Der **Krümmungswinkel** wächst proportional zur *durchgezogenen dicken* Linie

Den Faktor 2 streichen wir auf beiden Seiten. Dann nehmen wir beiden Seiten noch mit $\frac{360}{\pi}$ mal und erhalten, um wie viel Grad sich ein Lichtstrahl krümmt, der an einer nicht zu schwereren perfekten Kugel im Abstand b vorbeifliegt:

$$\boxed{\frac{360}{\pi} \cdot \frac{S}{b} \text{ Grad} = \text{Krümmungswinkel} \qquad (9.12)}$$

Diese Krümmung ist am größten, wenn der Lichtstrahl so nah wie möglich an der perfekten Kugel vorbeifliegt. Im Falle der Sonne sollten wir also Lichtstrahlen beobachten, die die Sonne gerade noch nicht berühren, sodass b dann der Radius der Sonne ist. Multiplizieren wir das Ergebnis mit 60, erhalten wir den Krümmungswinkel in **Bogenminuten**, multiplizieren wir es nochmal mit 60, in **Bogensekunden**: Wir setzen die Zahlen aus Tabelle 10.1 ein und erhalten:

$$\text{Krümmungswinkel} \approx \frac{360}{\pi} \cdot \frac{2{,}96 \cdot 10^3}{6{,}96 \cdot 10^8} \cdot 60 \cdot 60 \approx 1{,}75 \text{ Bogensekunden} \tag{9.13}$$

Genau das hat man gemessen! Siehe dazu zum Beispiel [6] oder das Original [7].

Um diesen beobachteten Krümmungswinkel zu erhalten, sind drei Punkte entscheidend:

1. In der Nähe der perfekten Kugel krümmt sich der Raum.
2. In der Nähe der perfekten Kugel verlangsamt sich der Lauf der Zeit.

3. Ein Lichtstrahl fliegt an einem Beobachter immer mit der Geschwindigkeit c vorbei.

Würde sich in der Nähe der perfekten Kugel nur der Raum krümmen, wie es viele Bücher darstellen, müssten wir Gl. (9.7) weglassen. Dann müssten wir den Radius in Gl. (9.8) nicht um γ^2, sondern nur um γ verringern. Da γ fast eins ist, könnten wir die Näherung aus Abschn. 10.3 verwenden, würden aber einen ungefähr *um die Hälfte zu kleinen* Krümmungswinkel erhalten! Daher brauchen wir hier wirklich die Krümmung der *Raumzeit* und die stets gleiche Lichtgeschwindigkeit c.

9.3 Keplersche Gesetze

Wir sahen in Abschn. 8.6, dass wir im Falle einer nicht zu starken Gravitation das newtonsche Gesetz der Gravitation verwenden können. Dieses Gesetz erklärt seinerseits die berühmten drei **Kepler-Gesetze**. Planeten, die sich um die Sonne bewegen, folgen diesen Gesetzen nicht exakt, aber doch *fast* exakt:

1. Ein Planet bewegt sich um die Sonne auf einer **Ellipse**, in deren *einem* Brennpunkt die Sonne steht.
2. Eine gedachte Linie von der Sonne zum Planeten überstreicht in gleichen Zeitspannen gleich große Flächen, wie in Abb. 9.8 dargestellt.
3. Das Quadrat der Dauer des Jahres eines Planeten ist proportional zur dritten Potenz des *größten* Radius seiner Bahnellipse. Dieser größte Radius, auch **große Halbachse** genannt, ist die Hälfte des waagerechten Durchmessers der Ellipse in der Abb. 9.8. Die Verhältniszahl ist $4\pi^2$, geteilt durch die Gravitationskonstante und die Masse der Sonne.

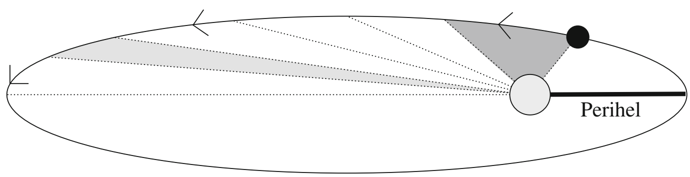

Abb. 9.8 Die Sonne ist die *hellgraue Kugel* im rechten Brennpunkt der Bahnellipse. Der Planet ist die *kleine schwarze Kugel*. Das **Perihel** ist der Ort, an dem der Planet der Sonne am nächsten kommt. Die *gestrichelten geraden Linien* zeigen, wo der Planet sich nach einer festgelegten Zeitspanne jeweils befindet. Das *hellgraue* und das *dunkelgraue Dreieck* haben die gleichen Fläche, sodass der Planet sich nahe der Sonne schneller bewegt als in größerer Entfernung

Wir behandeln hier nur den einfachsten Fall, in dem der Planet sich auf einer Ellipse bewegt, die *fast* ein Kreis ist. Dieser Fall zeigt uns schon die interessanten physikalischen Effekte. Dabei ist der „größte" Radius nun einfach *der* Radius. Das **dritte Kepler-Gesetz** lautet dann:

> Das Quadrat der Dauer des Jahres eines Planeten ist proportional zur dritten Potenz des Radius der Bahn. Die Verhältniszahl ist $4\pi^2$, geteilt durch die Gravitationskonstante und die Masse der Sonne.

Ein Beispiel: Die Erde hat einen Abstand von ungefähr $1{,}5 \cdot 10^{11}$ zur Sonne, die eine Masse von $2 \cdot 10^{30}$ hat. Die Gravitationskonstante ist $6{,}67 \cdot 10^{-11}$. Die Gravitation der Sonne ist nicht zu stark, sodass wir als Radius den Abstand der Erde von der Sonne verwenden dürfen. Daher sollte ein Jahr die folgende Anzahl von Sekunden haben:

$$\text{Jahr} = \sqrt{4\pi^2 \frac{(1{,}5 \cdot 10^{11})^3}{(6{,}67 \cdot 10^{-11}) \cdot (2 \cdot 10^{30})}} \approx 3{,}16 \cdot 10^7 \text{ Sekunden}$$

Stimmt das? Wenn wir die Schaltjahre mit einbeziehen, hat ein Jahr, ganz wie es sein muss, ungefähr 365,25 Tage, das sind $365{,}25 \cdot 24$ Stunden oder $365{,}25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \approx 3{,}16 \cdot 10^7$ Sekunden.

Wie folgen die Kepler-Gesetze aus dem Einstein-Gesetz der Gravitation? Zunächst einmal sind die Planeten viel kleiner als die Sonne. Das gilt zumindest für die Planeten, die der Sonne am nächsten sind. Also können wir die Planeten als Testmassen auffassen. Außerdem wissen wir aus Beobachtungen, dass die Sonne praktisch eine perfekte Kugel ist. Daher müssen wir nur untersuchen, wie eine Testmasse zu einer kreisförmigen Bahn um die Sonne kommt. Dazu schauen wir uns das linke Bild der Abb. 9.9 an. Die Box fällt frei senkrecht nach unten. In der Box bewegt sich eine Testmasse mit konstanter Geschwindigkeit in waagerechter Richtung, was wir mit einem waagerechten Pfeil angedeutet haben. Der senkrechte Pfeil deutet an, dass die Box **relativ** zur perfekten Kugel **beschleunigt**.

Auf dem rechten Bild der Abbildung stehen wir auf einem Turm, der bis zur Bahn reicht, auf der die Testmasse sich um die perfekte Kugel bewegt. Wir sehen, wie die Box immer schneller nach unten frei fällt. Daher fällt auch die Testmasse immer schneller nach unten, während sie sich nach rechts bewegt: Die Testmasse bewegt sich also auf einer *gekrümmten* Bahn, ganz ähnlich wie der Lichtstrahl in Abb. 6.10. So sorgt also die gekrümmte Raumzeit dafür, dass sich ein Planet um die Sonne bewegt, ganz ohne dass eine Kraft an ihm

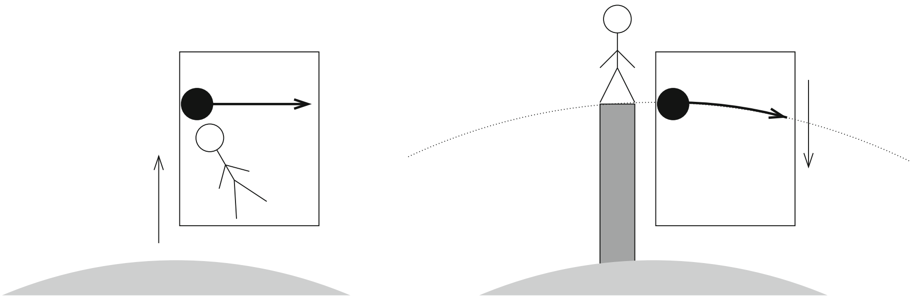

Abb. 9.9 Eine Testmasse bewegt sich frei fallend auf einer Kreisbahn um die perfekte Kugel, wenn wir ihre waagerechte Geschwindigkeit richtig einstellen: Wir brauchen also dazu keine „Kraft", sondern nur die Krümmung der Raumzeit

„zieht". Wir berechnen nun die dafür notwendige Geschwindigkeit *exakt*, wobei wir ausschließlich die Einstein-Gleichung der Gravitation benutzen. Wir brauchen dazu also das newtonschen Gesetz der Gravitation *nicht*!

Wir schauen uns das Ganze wie üblich von „oben" an, von einem von der perfekten Kugel weit genug entfernten Platz, an dem wir in nahezu flacher Raumzeit relativ zur perfekten Kugel ruhen, wie in Abb. 9.10 skizziert. Wir sehen im linken Bild, wie der Planet sich während einer „kurzen Zeitspanne" nach rechts bewegt. Geschwindigkeit ist Abstand pro Zeitspanne, also bewegt sich der Planet während der „kurzen Zeitspanne" um den Abstand „Geschwindigkeit · kurze Zeitspanne" nach rechts.

Während dieser „kurzen Zeitspanne" dreht sich der Ort des Planeten um einen kleinen Winkel, den wir als gebogenen Pfeil eingetragen haben. Wir haben in Abschn. 6.5 gesehen, dass der Umfang eines Kreises mit demselben Mittelpunkt wie die perfekte Kugel *auch* in der gekrümmten Raumzeit gerade 2π mal dem Radius des Kreises beträgt. Daher ist für einen kleinen Winkel der waagerechte Abstand proportional zum Produkt aus Winkel und Radius.

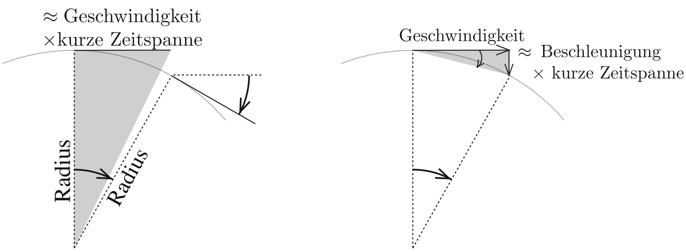

Abb. 9.10 Während einer kurzen Zeitspanne drehen sich der Ort und die Geschwindigkeit eines Planeten um praktisch den gleichen Winkel, sodass der Planet auf einer Kreisbahn um die Sonne zieht. Wir stellen die Winkel als *gebogene Pfeile* dar

Nun schauen wir uns an, wie sich die Geschwindigkeit des Planeten während der „kurzen Zeitspanne" verändert, wie im rechten Bild skizziert. Die zusätzliche Geschwindigkeit ist praktisch senkrecht. Denn Beschleunigung ist zusätzliche Geschwindigkeit pro „kurzer Zeitspanne", und diese Beschleunigung ist ja senkrecht, also in Richtung auf den Mittelpunkt der Sonne, wie wir aus der Schwarzschild-Lösung wissen. Also ist die zusätzliche Geschwindigkeit gerade die Beschleunigung mal der „kurzen Zeitspanne", wie im rechten Bild angegeben.

Nun kommt der springende Punkt: Damit der Planet auch weiterhin auf der Kreisbahn bleibt, muss sich innerhalb der „kurzen Zeitspanne" die Richtung der Geschwindigkeit um den *gleichen* Winkel drehen wie der Ort des Planeten. Also sind der kleine Winkel des linken und des rechten grauen Dreiecks gleich. Da beide Dreiecke aber für genügend kurze Zeitspannen rechtwinklig sind, ist das Verhältnis von ihrer kleinsten Seite und der darauf senkrecht stehenden Seite praktisch gleich,

$$\frac{\text{Geschwindigkeit} \cdot \begin{pmatrix}\text{kurze}\\ \text{Zeitspanne}\end{pmatrix}}{\text{Radius}} = \frac{\text{Beschleunigung} \cdot \begin{pmatrix}\text{kurze}\\ \text{Zeitspanne}\end{pmatrix}}{\text{Geschwindigkeit}}$$

Die „kurze Zeitspanne" können wir auf beiden Seiten streichen. Damit sehen wir, wie die Geschwindigkeit von der Beschleunigung und dem Radius abhängt:

$$(\text{Geschwindigkeit})^2 = \big(\text{Beschleunigung}\big) \cdot (\text{Radius})$$

Die Beschleunigung erhalten wir aus der Einstein-Gleichung der Gravitation (8.1), und zwar relativ zu uns, die wir an einem von der perfekten Kugel weit genug entfernten Platz in nahezu flacher Raumzeit ruhen. Das Minuszeichen in der Gleichung können wir auslassen, denn wir sehen hier die senkrechte Geschwindigkeit in Abb. 9.10 als positive Zahl an. Daher bewegt sich der Planet in einer Kreisbahn mit einem bestimmten Radius und einer Geschwindigkeit, für die gilt:

$$(\text{Geschwindigkeit})^2 = \frac{\begin{pmatrix}\text{Gravitations-}\\ \text{konstante}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\text{Masse der}\\ \text{perfekten Kugel}\end{pmatrix}}{(\text{Radius})^2} \cdot (\text{Radius})$$

Den Radius ganz rechts kürzen wir gegen einen Radius im Nenner:

$$(\text{Geschwindigkeit})^2 = \frac{\begin{pmatrix}\text{Gravitations-}\\ \text{konstante}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\text{Masse der}\\ \text{perfekten Kugel}\end{pmatrix}}{(\text{Radius})} \tag{9.14}$$

Wenn wir den Schwarzschild-Radius (9.1) verwenden, so wird daraus

$$\frac{(\text{Geschwindigkeit})^2}{c^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot \begin{pmatrix}\text{Gravitations-}\\ \text{konstante}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\text{Masse der}\\ \text{perfekten Kugel}\end{pmatrix}}{(\text{Radius}) \cdot c^2}$$

$$\frac{(\text{Geschwindigkeit})^2}{c^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{S}{\text{Radius}} \tag{9.15}$$

Dies ist wieder ein exaktes Ergebnis der Allgemeinen Relativitätstheorie!

Nun ist Geschwindigkeit Abstand pro Zeitdauer. Während eines Jahres durchläuft der Planet einmal seine Kreisbahn. Der Umfang dieses Kreises ist 2π mal sein Radius, wie wir aus Abschn. 6.5, Punkt 5, wissen. Daher können wir die Geschwindigkeit der linken Seite der Gl. (9.14) als Verhältnis von Kreisumfang und Jahreslänge schreiben:

$$\frac{4\pi^2 \cdot (\text{Radius})^2}{(\text{Jahr})^2} = \frac{\begin{pmatrix}\text{Gravitations-}\\ \text{konstante}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\text{Masse der}\\ \text{perfekten Kugel}\end{pmatrix}}{(\text{Radius})}$$

Wir lösen diese Gleichung nach dem Quadrat der Jahreslänge auf:

$$\boxed{\frac{4\pi^2 \cdot (\text{Radius})^3}{\begin{pmatrix}\text{Gravitations-}\\ \text{konstante}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\text{Masse der}\\ \text{perfekten Kugel}\end{pmatrix}} = (\text{Jahr})^2 \qquad (9.16)}$$

Das ist aber gerade das **dritte Kepler-Gesetz**. Wenn wir also den Radius wie in der Schwarzschild-Lösung verwenden und die Zeit von einem Punkt aus messen, an dem wir weit genug entfernt von der perfekten Kugel ruhen, gilt das dritte Kepler-Gesetz im Falle einer Kreisbahn auch im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie *exakt*.

9.4 Planetenbahnen drehen sich: Schwache Gravitation 2

Im vorherigen Abschnitt haben wir die Kepler-Gesetze untersucht. Das erste Kepler-Gesetz sagt ja aus, dass die Planeten auf einer Ellipse um die Sonne laufen. Tatsächlich tun sie das aber nicht ganz genau. Der Hauptgrund ist, dass sich die Planeten mit *ihrer eigenen* Gravitation gegenseitig beeinflussen. Daher verformen sich die Ellipsen ein wenig. Das kann man aber nur schwer beobachten. Aber es gibt noch eine andere Größe, die mit der Zeit *anwächst* und daher von den Astronomen leicht gemessen werden kann. Wartet man nur lange genug, *drehen* sich die Ellipsen der Planetenbahnen langsam, sehr langsam um die Sonne, wie wir es in Abb. 9.11 skizziert haben.

Astronomen verwenden den Punkt, an dem ein Planet der Sonne am nächsten kommt, als Bezugspunkt. Er wird **Perihel** genannt (siehe Abb. 9.8). Jedes Mal, wenn der Planet der Sonne am nächsten kommt, hat sich das Perihel um

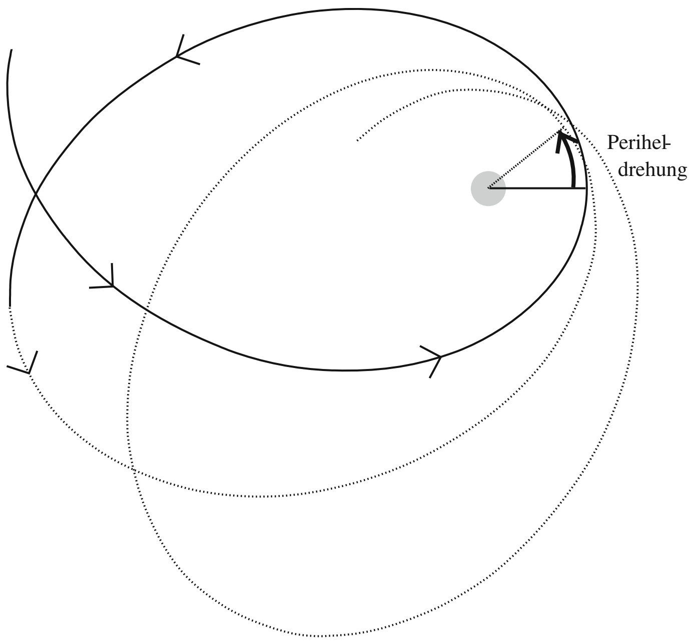

Abb. 9.11 Ein Planet bewegt sich entlang einer sich langsam drehenden Ellipse, sodass sich die Bahn nicht nach einem Jahr schließt. Der besseren Sichtbarkeit halber haben wir das für einen Planeten berechnet, der vom Stern ungefähr so weit entfernt ist wie die Erde von der Sonne, aber den Stern eine Million mal schwerer als die Sonne angenommen

einen kleinen Winkel weitergedreht. Mit diesem Winkel messen die Astronomen die **Periheldrehung**.

Mathematiker und Physiker haben die Differentialrechnung unter anderem deshalb entwickelt, um mit dem newtonsche Gesetz der Gravitation zu berechnen, wie sich die Planeten durch ihre Gravitation gegenseitig beeinflussen. Eine Methode besteht darin, die Einflüsse auf einen bestimmten Planeten *wegzurechnen*. Danach sollte dieser einsame Planet auf einer perfekten Ellipse um die Sonne ziehen, denn das sagt ja das newtonschen Gesetz der Gravitation für den Fall *eines* einsamen Planeten um die Sonne voraus.

Es stellte sich aber heraus, dass sich *auch* die Ellipse eines einsamen Planeten langsam um die Sonne dreht! Nun wissen wir, dass das newtonsche Gesetz der Gravitation nur eine Näherung für das eigentliche Einstein-Gesetz der Gravitation ist. Also fragte sich Einstein, ob er nicht diese *Periheldrehung* mit seiner Allgemeinen Relativitätstheorie erklären könnte.

Zunächst wollen wir die Einstein-Gleichung der Gravitation nur in der Näherung benutzen, die dem newtonschen Gesetz der Gravitation entspricht. In diesem Falle bewegt sich eine Testmasse um eine perfekte Kugel auf einer perfekten Ellipse. Um die Sache einfacher zu machen, nehmen wir an, dass sich die Ellipse nur ein *klein wenig* von einem Kreis unterscheidet, so wie die als durchgezogene Linie gezeichnete Ellipse in Abb. 9.12. Aber die perfekte Kugel sitzt *nicht* genau im Mittelpunkt dieser Ellipse, sondern etwas verschoben im Mittelpunkt des *gestrichelten* Kreises.

Die Testmasse startet an Punkt 1 parallel zum gestrichelten Kreis, entlang der durchgezogenen Ellipse. Danach *schlängelt* sich die Testmasse um den gestrichelten Kreis herum: An Punkt 2 hat sie sich ihm schon etwas genähert, an

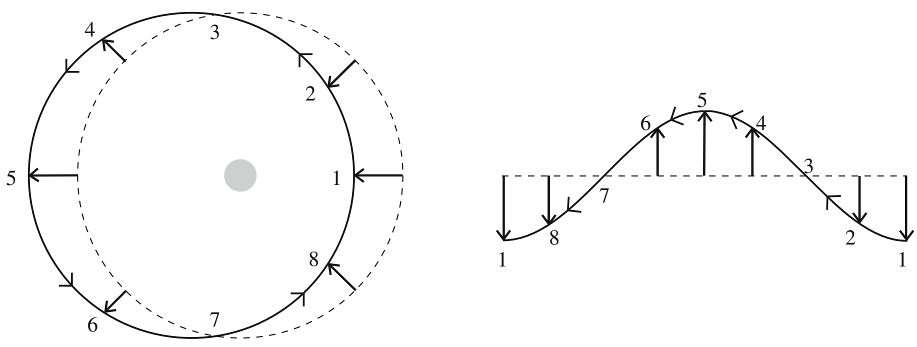

Abb. 9.12 *Linkes Bild:* Die perfekte Kugel sitzt im Mittelpunkt des *gestrichelten Kreises*. Die *durchgezogene Ellipse* ist mit sehr großer Genauigkeit ein Kreis. Die Pfeile zeigen, wie weit sich die Testmasse von der Kreisbahn entfernt. *Punkt 1* ist das Perihel. *Rechtes Bild:* Wir haben den *gestrichelten Kreis* zu einer *geraden Linie* auseinander gezogen, um besser zu sehen, wieweit sich die Testmasse von der Kreisbahn entfernt

Punkt 3 kreuzt sie ihn, um sich wieder von ihm zu entfernen und so weiter. Den Punkt 1 erreicht die Testmasse schließlich mit der gleichen Geschwindigkeit, mit der sie dort gestartet ist, dann fliegt sie wieder in die gleiche Richtung wie vorher parallel zum gestrichelten Kreis.

Wir sahen in Abschn. 9.3, dass das dritte Kepler-Gesetz die Zeit angibt, in der ein Planet einmal die perfekte Kugel entlang des *gestrichelten* Kreises umrundet. Mit anderen Worten: Wäre das newtonsche Gesetz der Gravitation zu 100 Prozent richtig, so würde es auch die Periode des *Schlängelns* um diesen Kreis bestimmen.

Wir berechnen nun, wie stark die Krümmung der Raumzeit um die perfekte Kugel das Schlängeln beeinflusst. Wir schauen uns das Ganze wie immer weit genug entfernt und relativ zur perfekten Kugel ruhend an. Wir nehmen außerdem an, dass die perfekte Kugel nicht *zu* schwer ist, sodass wir ähnlich wie in Abschn. 9.2 wieder die **Störungstheorie** anwenden können. Dafür glätten wir die Raumzeit um den gestrichelten Kreis herum.

Die Pfeile in Abb. 9.12 zeigen jeweils in Richtung des Radius. Die Länge eines Pfeils messen wir als Teil des Radius. Wir wissen von der Schwarzschild-Lösung 6.5, dass die Länge der Pfeile *größer* ist als die Messlatte anzeigt, und zwar um den Faktor $1/\gamma$, der zu dem Radius des gestrichelten Kreises gehört. Die Zeit läuft langsamer als bei uns, und zwar um den Faktor γ. Daher ist die Geschwindigkeit, mit der sich die Länge des Pfeils ändert, in der gekrümmten Raumzeit um den Faktor $(1/\gamma)/\gamma = \gamma^{-2}$ größer als in der newtonschen Theorie.

Wir können denselben Effekt erreichen, indem wir *alle* senkrechten Abstände um diesen Faktor γ^{-2} vergrößern, aber den Lauf der Zeit nicht ändern. Natürlich liefert diese Annahme weiter entfernt vom gestrichelten Kreis die falsche Raumzeit, aber in der Nähe des gestrichelten Kreises können wir so die Raumzeit glätten. Da nun die Zeit überall gleich schnell vergeht, und da die Gravitation nicht zu stark ist, können wir wieder das dritte Kepler-Gesetz (9.16) für die Periode des Schlängelns anwenden. Dabei müssen wir nun den Radius um den Faktor γ^{-2} vergrößern. Damit vergrößert sich die dritte Potenz des Radius um den Faktor $\left(\gamma^{-2}\right)^3$,

$$\frac{4\pi^2 \cdot \left(\text{Radius} \cdot \gamma^{-2}\right)^3}{\begin{pmatrix}\text{Gravitations-}\\ \text{konstante}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\text{Masse der}\\ \text{perfekten Kugel}\end{pmatrix}} = \left(\text{Periode} \cdot \gamma^{-3}\right)^2 \tag{9.17}$$

Also vergrößert sich das Quadrat der Periode um den Faktor $(\gamma^{-2})^3 = (\gamma^{-3})^2$, wie wir auf der rechten Seite der Gl. (9.17) erkennen. Folglich wächst die Periode um den Faktor γ^{-3}.

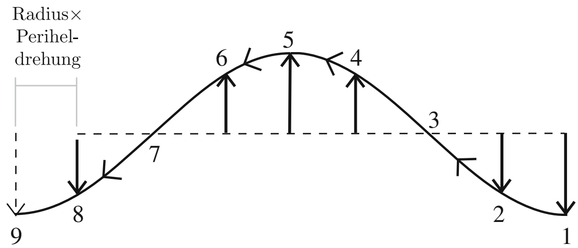

Abb. 9.13 Eine Testmasse schlängelt sich *langsamer* um den *gestrichelten Kreis* entlang der *durchgezogen gezeichneten Ellipse* als es das dritte Kepler-Gesetz voraussagt. Daher durchläuft die Testmasse mehr als 360 Grad, bis sie wieder im Perihel zur Sonne steht

Daher erreicht die Testmasse das Perihel nicht nach 360 Grad Umdrehung um die perfekte Kugel, sondern erst nach $360 \cdot \gamma^{-3}$ Grad, wie in Abb. 9.13 dargestellt. Wir wissen von der Schwarzschild-Lösung (9.4), dass das Quadrat des γ-Faktors kleiner als eins ist, und zwar gilt:

$$\gamma^2 = 1 - \frac{S}{\text{Radius}}$$

Wir wissen auch, dass für unser Sonnensystem der γ-Faktor fast eins ist. Daher können wir die Näherung aus Abschn. 10.3 verwenden und sehen, dass der γ-Faktor *selbst* ungefähr nur um die Hälfte kleiner als eins ist, also um $\frac{1}{2} \cdot \frac{S}{\text{Radius}}$, und dass der Kehrwert seiner dritten Potenz daher um das Dreieinhalbfache davon *größer* als eins ist. Daher **dreht** sich das **Perihel** jedes Jahr um den **Winkel**

$$\boxed{\text{Periheldrehung} = 360 \text{ Grad} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{S}{\text{Radius}}} \qquad (9.18)$$

Überprüfen wir das nun für die Erde! Die Erde bewegt sich fast auf einem Kreis um die Sonne, sodass wir unsere Gl. (9.18) anwenden können. Der Radius ist praktisch der Abstand der Erde zur Sonne, da die Gravitation der Sonne nicht zu stark ist. Daher dreht sich das Perihel der Erde jedes Jahr um

$$360 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2{,}96 \cdot 10^3}{1{,}5 \cdot 10^{11}} \approx 1{,}066 \cdot 10^{-5} \text{ Grad}$$

Auf hundert Jahre hoch gerechnet, häufen sich $1{,}066 \cdot 10^{-3}$ Grad an. Nehmen wir das mit 60 mal, erhalten wir das Ergebnis in **Bogenminuten**, nochmal mit

60 multipliziert ergibt sich die Periheldrehung in **Bogensekunden**. Demnach sollte sich das Perihel der Erde um

3,8 Bogensekunden pro Jahrhundert

drehen. Genau diesen Wert haben die Astronomen beobachtet! Siehe zum Beispiel [8].

9.5 Starke Gravitation in der Nähe Schwarzer Löcher

In den Abschn. 9.2 und 9.4 haben wir die Allgemeine Relativitätstheorie auf Körper angewendet, deren Gravitation schwach ist. In beiden Fällen nahmen wir als Beispiel die Sonne, deren Schwarzschild-Radius von ungefähr $S \approx 3000$ Meter viel kleiner ist als ihr Radius von ungefähr $6{,}96 \cdot 10^8$ Meter, und daher auch viel kleiner als der kleinste Radius der Bahn jedes Planeten oder Lichtstrahls um die Sonne. Wir können die Stärke der Gravitation auch mit der Geschwindigkeit angeben, mit der eine Testmasse auf einer Kreisbahn um Sonne frei fällt: Nach dem Kepler-Gesetz (9.15) ist das Quadrat der Geschwindigkeit in Bruchteilen der Lichtgeschwindigkeit gerade die Hälfte des Quotienten aus Schwarzschild-Radius und Radius der kreisförmigen Bahn der Testmasse:

$$\frac{(\text{Geschwindigkeit})^2}{c^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{S}{\text{Radius}} \tag{9.19}$$

Wenn wir zum Beispiel den mittleren Abstand der Erde zur Sonne von $1.50 \cdot 10^{11}$ Meter als den Radius der Erdbahn nehmen, erhalten wir für die Geschwindigkeit der Erde um die Sonne

$$\frac{\text{Geschwindigkeit}}{c} \approx \frac{1}{10.000}$$

was wirklich viel langsamer als die Lichtgeschwindigkeit ist.

Wir sehen aus Gl. (9.19), dass die Testmasse umso schneller um die perfekte Kugel kreist, je näher sie ihr ist. Ist die perfekte Kugel ein **Schwarzes Loch**, wäre dann die Frage, wie schnell eine Testmasse um das Schwarze Loch herum auf einer Kreisbahn frei fallen kann.

Die Geschwindigkeit der Testmasse, die in das Kepler-Gesetz eingeht, messen wir in unserer Zeit, weit genug entfernt von der perfekten Kugel ruhend. Wir wissen, dass an uns kein Körper schneller als mit Lichtgeschwindigkeit vorbeifliegen kann. Daher fallen wir jetzt von unserem Ruheplatz frei auf

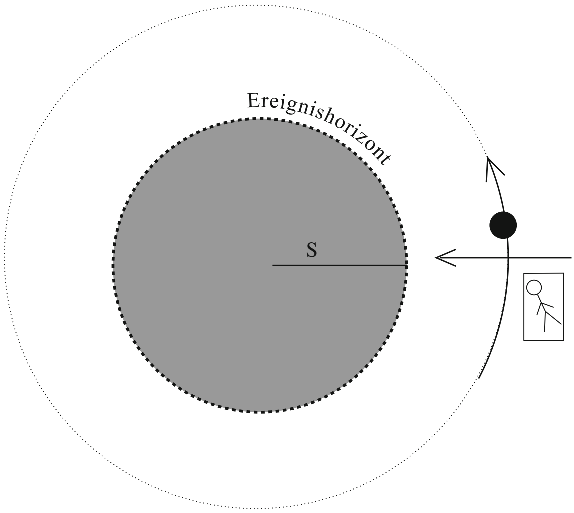

Abb. 9.14 Wir testen, was der kleinste Radius einer Testmasse vom Mittelpunkt des Schwarzen Lochs ist, mit dem sie frei um das Schwarze Loch fallen kann

die perfekte Kugel zu, sodass wir immer noch im gleichen Trägheitszustand sind. Wir richten es so ein, dass die Testmasse an uns vorbeifliegt, wie wir in Abb. 9.14 sehen können.

Der „waagerechte" Anteil der Geschwindigkeit (senkrecht zur Richtung auf die perfekte Kugel), mit der die Testmasse an uns vorbeifliegt, ist die Geschwindigkeit, mit der die Testmasse nach dem Kepler-Gesetz (9.19) um das Schwarze Loch kreist,

$$\frac{\begin{pmatrix}\text{waagerechter Anteil}\\\text{der Geschwindigkeit}\end{pmatrix}^2}{c^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{S}{\text{Radius}} \tag{9.20}$$

Der „senkrechte" Anteil der Geschwindigkeit (in Richtung auf die perfekte Kugel) ist unsere Fallgeschwindigkeit, welche aus Gl. (9.3) folgt,

$$\frac{\begin{pmatrix}\text{senkrechter Anteil}\\\text{der Geschwindigkeit}\end{pmatrix}^2}{c^2} = \frac{S}{\text{Radius}} \tag{9.21}$$

Unsere Zeit läuft in der gleichen Weise wie weit außerhalb der perfekten Kugel, als wir das Kepler-Gesetz für die Testmasse nachgemessen hatten, denn wir fielen ja frei und sind daher noch im gleichen Trägheitszustand. Daher erhalten wir die Gesamtgeschwindigkeit der Testmasse, indem wir einfach den

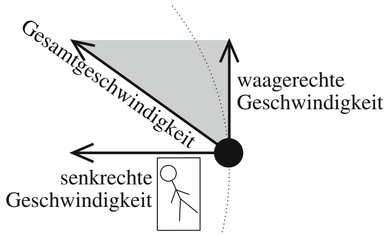

Abb. 9.15 Die Gesamtgeschwindigkeit relativ zum frei fallenden Beobachter erhalten wir mit dem Satz des Pythagoras

Satz des Pythagoras anwenden, wie in Abb. 9.15 gezeigt:

$$\frac{\left(\begin{matrix}\text{Gesamt-}\\ \text{geschwindigkeit}\end{matrix}\right)^2}{c^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{S}{\text{Radius}} + 1\cdot\frac{S}{\text{Radius}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{S}{\text{Radius}} \tag{9.22}$$

Die Testmasse kann aber an uns nicht schneller als mit Lichtgeschwindigkeit vorbeifliegen. Daher kann die linke Seite der Gl. (9.22) nicht größer als eins werden, und damit auch die rechte Seite der Gleichung. Mit anderen Worten: Eine auf einer Kreisbahn frei um das Schwarze Loch fallende Testmasse muss einen Bahnradius von mindestens dem 1,5-fachen des Schwarzschild-Radius haben. Für einen Radius der Kreisbahn von genau dem 1,5-fachen des Schwarzschild-Radius folgt, dass ein **Lichtstrahl** das Schwarze Loch auf einer *Kreisbahn* umrundet!

Wir können sogar noch mehr sagen: Jede Testmasse, die frei fallend dem Mittelpunkt des Schwarzen Lochs näher als bis zum 1,5-fachen des Schwarzschild-Radius kommt, wird in das Schwarze Loch fallen, wenn sie weiter frei fällt. Warum? Nun, wenn die Testmasse *nicht* in das Schwarze Loch fällt, hält sie einen bestimmten kleinsten Radius zum Mittelpunkt des Schwarzen Lochs. Nehmen wir also an, dass die schwarze Testmasse in Abb. 9.16 gerade diesen kleinsten Radius zum Mittelpunkt des Schwarzen Lochs passiert. Um diesen Radius zu halten, muss die Testmasse *zumindest* mit der waagerechten Geschwindigkeit fliegen, mit der sie auf einer Kreisbahn in diesem Abstand das Schwarze Loch umkreisen würde. Aber der jetzige Radius ist schon kleiner als das 1,5-fache des Schwarzschild-Radius, also ist das unmöglich. Daher kann die schwarze Testmasse nur entweichen, indem sie zum Beispiel einen Raketenantrieb zündet und zu einer Bahn hin beschleunigt, die

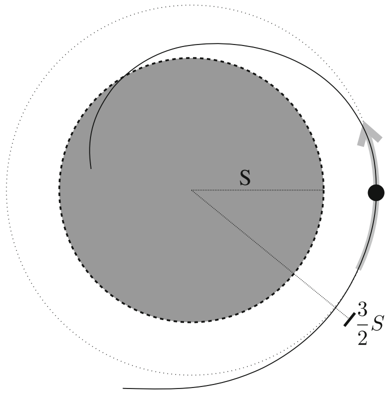

Abb. 9.16 Eine Testmasse, die frei fallend näher als das 1,5-fache des Schwarzschild-Radius an den Mittelpunkt des Schwarzen Lochs herankommt, wird, falls sie weiter frei fällt, durch den **Ereignishorizont** fliegen, das heißt, sie wird in das Schwarze Loch fallen

überall mindestens das 1,5-fache des Schwarzschild-Radius vom Mittelpunkt des Schwarzen Lochs entfernt ist.

9.6 Gravitationswellen

Kein Körper kann seine Umgebung schneller als mit Lichtgeschwindigkeit beeinflussen, auch nicht mithilfe der Gravitation. Im folgenden Gedankenexperiment sehen wir, was passiert, wenn sich die gekrümmte Raumzeit in der Umgebung zweier Körper mit der Zeit ändert. Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass zwei *identische* Massen unter dem Einfluss ihrer eigenen Gravitation aufeinander zu beschleunigen und dann wie Billardbälle *elastisch* zusammenstoßen, um wieder voneinander wegzufliegen. Die beiden Körper sind *keine* Testmassen, da sie sich gegenseitig mit ihrer Gravitation beeinflussen, wie in Abb. 9.17 dargestellt.

In der ersten Zeile der Abbildung fangen die beiden Bälle gerade an, aufeinander hin zu beschleunigen. Wir haben die Gravitation als Feder veranschaulicht, die an den Bällen zieht.

In der zweiten Zeile bewegen sich die beiden Bälle schon mit einer gewissen Geschwindigkeit aufeinander zu. Nun ist es aber so, dass sich *auch* die Gravitation selbst höchstens mit Lichtgeschwindigkeit fortbewegen kann. Die Gravitation muss den linken Ball schon etwas *früher* verlassen haben, um den rechten Ball an dem Ort zu erreichen, an dem er *in diesem Moment* ist. Das Ganze gilt natürlich auch für die Gravitation des rechten Balls, die auf den lin-

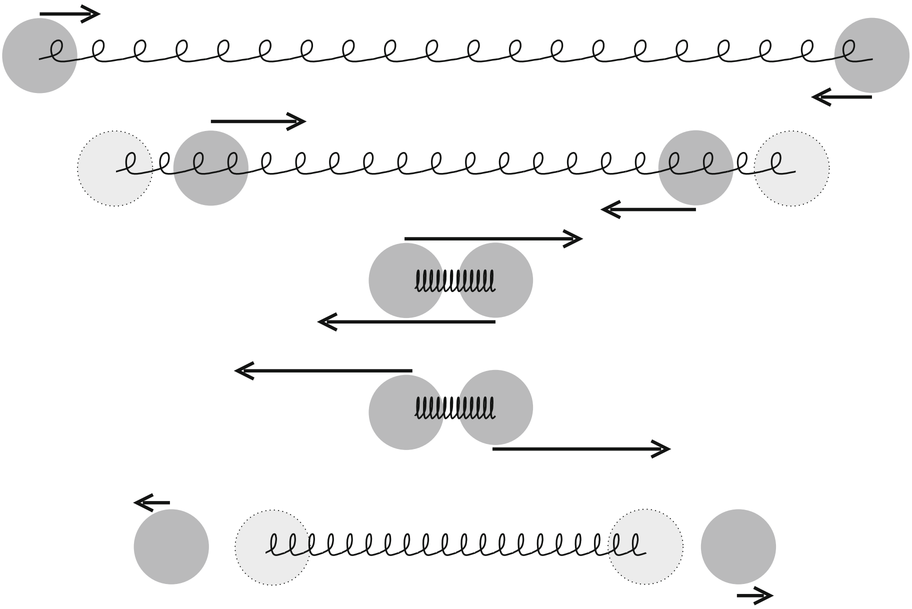

Abb. 9.17 Während die beiden Bälle aufeinander zufliegen, ist die Gravitation schwächer als später, wenn sie sich wieder voneinander entfernen

ken Ball wirkt. Wir haben den Ort der Bälle kurz vor dem jetzigen Augenblick gepunktet skizziert und haben die Feder dort beginnen und enden lassen. Weil also die beiden Bälle zuvor noch weiter voneinander entfernt waren als jetzt, ist ihre Gravitation *schwächer* als sie es an ihrem jetzigen Ort wäre.

In der dritten Zeile stoßen die beiden Bälle zusammen und prallen *elastisch* voneinander ab. Das heißt, sie fliegen mit *derselben* Geschwindigkeit wieder auseinander, mit der sie zusammengestoßen sind. Mit anderen Worten: Sie verlieren durch den Stoß *nichts* von ihrer Bewegungsenergie.

In der letzten Zeile sehen wir, dass die Gravitation wieder etwas früher wirkt als an ihrem momentanen Ort, denn diesen muss sie ja erst noch erreichen. Aber jetzt wirkt die Gravitation zu dem Zeitpunkt, in dem die beiden Bälle noch etwas *näher* zusammenwaren als jetzt, sodass die Gravitation dann *stärker* ist als sie es jetzt wäre.

Zusammengefasst: Während sich die beiden Bälle voneinander entfernen, verbrauchen sie mehr Bewegungsenergie, um die Gravitation zu überwinden, als sie durch die Gravitation an Bewegungsenergie erhalten, wenn sie sich aufeinander zubewegen. In dem Zeitpunkt, in dem sie wieder relativ zueinander ruhen, haben sie deswegen *weniger* Energie als beim vorherigen Mal: Mit jeder neuen Runde beginnen sie sich von etwas näher beieinander liegenden

Ausgangspunkten aufeinander zuzubewegen. Der Grund ist die sogenannte **verzögerte Gravitation**.

Wohin ist die Energie verschwunden? Die Gravitation hat die Raumzeit zwischen den beiden Bällen gekrümmt, hat aber nicht aufgehört, als sie den anderen Ball erreicht hat, sondern hat sich weiter ausgebreitet: Die Gravitation bewegt sich hier als **Gravitationswelle**, die die verzögerte Gravitation mitführt.

Wie können wir feststellen, dass uns eine Gravitationswelle passiert? Wir haben in Abschn. 5.3 gesehen, dass im Vakuum die Gravitation ein genügend kleines Volumen nicht schrumpft, sondern verformt, also in eine Richtung zusammenzieht und in die andere Richtung auseinanderzieht, wie wir es in Abb. 5.12 dargestellt haben. Wenn also eine Gravitationswelle Testmassen passiert, die ein kleines Volumen markieren, sollten diese so reagieren wie in Abb. 9.18 dargestellt. Nachdem sich das Volumen verformt hat, sitzt ein Teil der Energie der Gravitationswelle in den Federn zwischen den Testmassen. Das bedeutet, dass Gravitationswellen Energie mitführen.

Bis heute (2015) hat noch niemand Gravitationswellen *direkt* beobachtet. Aber Hulse und Taylor fanden 1974 zwei extrem dichte Sterne, genannt PSR-1913+16, die sehr nah umeinander kreisen. Beide haben eine Masse von ungefähr dem 1,4-fachen der Sonnenmasse. Sie müssen sich ja von irgendwoher einander angenähert haben und haben dabei Energie durch die verzögerte Gravitation verloren. In der Tat verlieren sie durch die verzögerte Gravitation noch immer Energie und bewegen sich auf einer Spiralbahn aufeinander zu. Einer der beiden Sterne ist ein **Pulsar**, das heißt, er dreht sich sehr schnell um

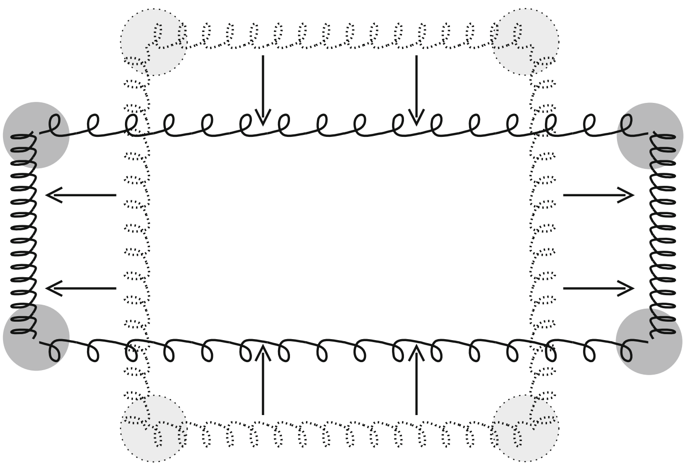

Abb. 9.18 Wenn die Gravitationswelle durchläuft, dehnt sich das Volumen in eine Richtung aus und schrumpft in den dazu senkrechten Richtungen

seine Achse und sendet dabei elektromagnetische Wellen aus, ein wenig wie der sich drehende Spiegel eines Leuchtturms. Er arbeitet somit als Taktgeber, den wir beobachten können. Physiker haben mithilfe der Einstein-Gleichung der Gravitation berechnet, wie viel Energie die beiden Sterne im Laufe der Zeit durch Gravitationswellen verlieren müssten. Nun, nach über 30 Jahren Beobachtung, wissen wir, dass die Allgemeine Relativitätstheorie diesen Effekt mit über 99 Prozent Genauigkeit beschreibt (siehe [9]).

9.7 Wo steckt die Energie der Gravitation?

Wie in Abb. 9.19 dargestellt, fallen wir noch einmal frei auf eine perfekte Kugel zu.

Wir selbst starten ganz links. Wenn wir den gedachten gestrichelten Kreis passieren, haben wir relativ zur perfekten Kugel schon eine bestimmte Geschwindigkeit erreicht. In diesem Moment startet unser Freund, der rechts am gestrichelten Kreis geruht hat, seinen freien Fall. Weil sich für uns die perfekte Kugel mit größerer Geschwindigkeit auf uns zubewegt als auf unseren Freund, hat für uns die perfekte Kugel *mehr* Masse als für ihn, wie wir aus Abschn. 2.7 wissen. Also muss die perfekte Kugel *mehr* Masse haben, wenn wir sie weit genug entfernt ruhend betrachten, als wenn wir von einem kleineren Abstand aus mit unserem freien Fall starten. Also scheint die Energie dieser Masse irgendwo zwischen uns und der perfekten Kugel zu sitzen, nur wo?

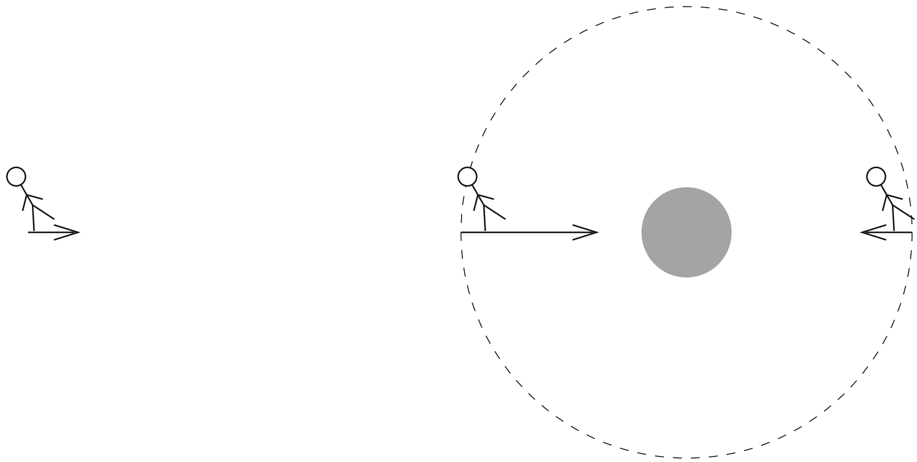

Abb. 9.19 Verschiedene Beobachter fallen von verschiedenen Abständen aus auf die perfekte Kugel zu. Die Pfeile zeigen die Richtung und die Größe der Geschwindigkeit *relativ* zur perfekten Kugel

Vergleichen wir das mit dem Fall der *elastischen Energie*. Wir haben in Abb. 9.17 skizziert, dass die Gravitation die Massen so anzieht wie es Metallfedern tun. Vielleicht krümmt sich also der Raum um die perfekte Kugel wie ein elastisches Material, etwa so wie der Körper in Abb. 7.7? Wir können uns vorstellen, dass die Atome in dem Material wie von kleinen Federn zusammengehalten werden. Wenn sich das Material dann verbiegt, beginnen sich die Federn auseinanderzuziehen oder zu schrumpfen und enthalten auf diese Weise die Energie der Verbiegung.

Daher überprüfen wir nun ein kleines Raumgebiet außerhalb der perfekten Kugel und suchen, wo die „Gravitationsenergie" in ihr sitzt. Wir markieren das kleine Raumgebiet mit Testmassen, die relativ zueinander ruhen. Dann lassen wir sie gleichzeitig los. Wir wissen von der Einstein-Gleichung der Gravitation aus Abschn. 7.2, dass das kleine Raumgebiet *nicht* zu schrumpfen beginnt, weil wir uns ja außerhalb der perfekten Kugel befinden. Daher kann auch keine Gravitationsenergie in dem kleinen Raumgebiet gesteckt haben, die Gravitation hätte erzeugen können.

Wir sahen aber in Abschn. 9.6, dass Testmassen wie in Abb. 9.18 Gravitationsenergie aufnehmen *können*, wenn sie wie dort von Gravitationswellen getragen wird. Wir wiederholen jetzt dieses Gedankenexperiment: Weit entfernt von jeder großen Masse verbinden wir Testmassen, die ein hinreichend kleines Raumgebiet markieren, in flacher Raumzeit durch Federn. Wir setzen uns in die Mitte des kleinen Raumgebiets. Dann lassen wir eine perfekte Kugel an uns vorbeifliegen, wie wir in Abb. 9.20 sehen können. Während die perfekte Kugel an uns vorbeifliegt, werden die Testmassen anfangen, sich mehr oder weniger gegeneinander zu bewegen, wie es in Abb. 5.12 gezeigt wird. Sobald die Federn etwas Energie aufgenommen haben, arretieren wir die Federn, bis sich die perfekte Kugel wieder von uns entfernt hat.

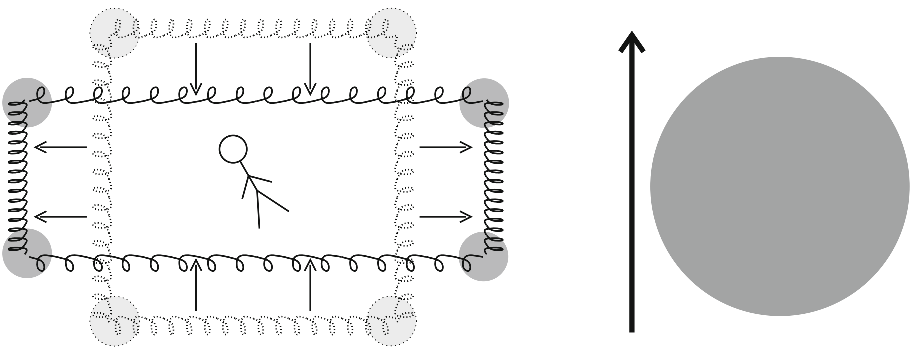

Abb. 9.20 Wenn die perfekte Kugel vorbei fliegt, dehnt sich das durch die Testmassen markierte Volumen in eine Richtung und schrumpft in den anderen Richtungen

Also haben jetzt die Testmassen *mehr* Energie als vorher! Welche Art von Energie haben die Testmassen aufgenommen? Nun, die perfekte Kugel bewegt sich jetzt ein wenig *langsamer* von uns weg, als sie sich uns genähert hat. Wir haben *nichts* von der Energie aus dem Raum aufgenommen, der sich um die perfekte Kugel krümmt, sondern einen Teil der *Bewegungsenergie* der perfekten Kugel.

Fassen wir zusammen: Die gekrümmte Raumzeit um eine perfekte Kugel *schrumpft* das kleine Raumgebiet *nicht.* Gerade deshalb können wir dort auch keine Energie der Gravitation finden, denn eine solche Energie hätte ja Masse, die ihrerseits Gravitation erzeugen und damit das Raumgebiet *schrumpfen* würde. Die Energie der Gravitation sitzt im Raum um eine Masse, von der sie erzeugt wird, aber wir können *nicht* sagen wo! Denn wo sollte die Energie der Gravitation denn sein? In *Raum* und *Zeit*. Das also ist der große Unterschied zur elastischen Verformung eines Materials: In Abb. 7.7 krümmt sich ein Material *innerhalb* der Raumzeit, während die Gravitation die *Raumzeit selbst* krümmt.

9.8 Der Urknall des Universums

Wenn wir mit dem bloßen Auge den Nachthimmel anschauen, sehen wir Planeten, Sterne und Galaxien. Zwischen ihnen scheint gähnende Leere zu sein. Aber in Wirklichkeit wissen wir, dass das Weltall *im Großen und Ganzen* in alle Richtungen ziemlich gleich aussieht, wenn wir Dimensionen betrachten, die viel größer sind als der typische Abstand zweier Galaxien. Über solch große Abstände betrachtet herrscht in jedem Raumgebiet ungefähr die gleiche Massendichte. Diese Beobachtung nennt man das **kosmologische Prinzip**. Dazu kommt noch, dass sich in solch großen Dimensionen die Materie nur über die Gravitation zu beeinflussen scheint.

Damit entwerfen wir nun das *einfachste Modell* des Weltalls:

1. Die Energie und damit auch die Masse des Weltalls sind überall und in alle Richtungen *gleich* verteilt.
2. Nur die Gravitation beeinflusst die Bewegung der Massen, auch *nicht* der **Druck**.
3. Die Anzahl der Sterne und der Galaxien ändert sich im Verlauf der Zeit nicht.

Wie kann dann die Energie im Weltall noch die Raumzeit krümmen? In diesem Modell muss die Zeit über große Abstände hin überall gleich schnell vergehen, denn die Masse ist ja überall gleich verteilt. Längen können sich

Abb. 9.21 Das Weltall kann sich ausdehnen oder schrumpfen, je nachdem, ob die Zeit von links nach rechts fortschreitet oder umgekehrt

ändern, aber wiederum nur *überall* im gleichen Maße, und darüber hinaus müssen sich dann die Längen in *jede* Richtung gleich ändern. Das kann nur sein, wenn sich die Längen *nur mit der Zeit* ändern. Dieses Bild des Universums nennt man das **Friedman-Modell**.

Wie illustrieren es in Abb. 9.21. Eine typische Länge ist hier der Abstand zweier nicht zu naher Galaxien, die wir als Sterne gezeichnet haben. *Alle* Körper bewegen sich voneinander weg, wenn die Zeit von links nach rechts fortschreitet, oder sie bewegen sich aufeinander zu, wenn die Zeit von rechts nach links fortschreitet.

Das Weltall muss dabei nicht unendlich groß sein: Stellen wir uns einmal vor, dass das Weltall wie die Oberfläche eines Luftballons nur zwei Dimensionen hat. Die Sterne und Galaxien stellen wir durch aufgeklebte Kirschkerne dar. Wenn wir dann den Luftballon aufblasen, entfernen sich *alle* Kirschkerne voneinander, aber es gibt keinen Mittelpunkt, von dem sie sich entfernen, ganz so, wie in Abb. 9.21 skizziert. Dazu kommt, dass sich die Kirschkerne selbst nicht aufblähen! In ganz ähnlicher Weise kann sich der dreidimensionale Raum um uns herum ausdehnen, sodass sich die anderen Galaxien von unserer Galaxie entfernen, zumindest von einem genügend großen Abstand an. Aber die Sterne und Galaxien selbst blähen sich *nicht* auf.

Dann möchten wir die folgenden Fragen beantworten:

1. Kann es ein unveränderliches Weltall geben? Oder muss sich das Weltall andauernd ausdehnen oder zusammenziehen?
2. Wenn dem so ist, können wir dann *berechnen*, wie schnell sich die Größe des Weltalls verändert?

Wir beginnen, indem wir die nähere Umgebung um uns herum anschauen. Später verallgemeinern wir dann diese Beobachtungen auf das Weltall als Ganzes.

9.8.1 Kleine Massenkugel im Weltall

Wir wählen zunächst eine kleine Raumkugel um uns herum, „klein" gegenüber der Größe des Weltalls, aber immer noch groß genug, sodass die Masse in alle Richtungen mehr oder weniger gleich verteilt ist. Wir haben die Kugel in Abb. 9.22 skizziert.

Dann beeinflusst der Rest des Weltalls diese Kugel *überhaupt nicht*! Warum? Nun, wir haben ja für das Friedman-Modell angenommen, dass nur die Gravitation zwischen den Galaxien wirkt. Außerdem sahen wir in Abschn. 7.5, dass außen liegende Massen nur die *Form* der von uns gewählten Kugel verändern können. Aber im Friedman-Modell gibt es ja in *jede* Richtung gleich viel Masse. Daher wirkt die Gravitation auch in *jede* Richtung gleich und kann somit auch nicht die Form der Raumkugel verändern. Der Fall liegt hier ähnlich wie beim **Satz von Birkhoff** aus Abschn. 8.3.

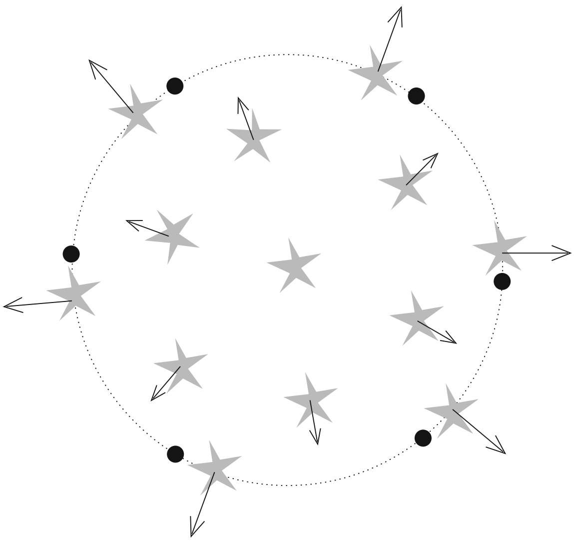

Abb. 9.22 Wir haben auf dem Rand der Kugel Testmassen platziert, die alle im Verhältnis zueinander ruhen. Wir haben sie gerade losgelassen, sodass sie nun frei fallen. Auch die nahen Sterne befinden sich im freien Fall. Daher beschleunigen diese Testmassen relativ zu den benachbarten Sternen *nicht*

Wie wirkt die Gravitation auf die Massen innerhalb der Kugel? Wie in Abschn. 8.2 legen wir schwarze Testmassen auf die Oberfläche der gedachten Kugel, die relativ zueinander ruhen, und lassen sie dann gleichzeitig frei fallen. Dann sagt uns die Einstein-Gleichung der Gravitation aus Abschn. 7.2:

> Die Schrumpf-Beschleunigung *pro Volumen* einer von Testmassen markierten Kugel ist proportional zur Massen*dichte* der Wolke. Die Verhältniszahl ist 4π mal die Gravitationskonstante.

Galaxien, Sterne und dergleichen an der Oberfläche der Raumkugel bewegen sich relativ zu den ruhenden Testmassen, aber sie **beschleunigen nicht relativ** zu benachbarten Testmassen, denn sowohl sie als auch die Testmassen fallen ja frei. Daher ist die Schrumpf-Beschleunigung, mit der sich das *Wachstum* der Kugel *verlangsamt* oder das *Schrumpfen* der Kugel *beschleunigt*, genauso groß wie für die Testmassen. Mit anderen Worten: Wir brauchen die Testmassen nicht! Die Einstein-Gleichung der Gravitation lautet nun:

> Die Schrumpf-Beschleunigung *pro Volumen* einer von Galaxien markierten Kugel ist proportional zur Massen*dichte* der Wolke. Die Verhältniszahl ist 4π mal die Gravitationskonstante.

Wir drücken dies nun durch den Radius der Kugel aus. Wir können die Kugel so klein machen, wie wir wollen, denn im Friedman-Modell ist ja die Materie *überall* gleich verteilt. Das heißt insbesondere, dass sich die Raumzeit innerhalb der Kugel umso weniger krümmt, je kleiner die Kugel ist, also je weniger Materie sie enthält. Also dürfen wir für eine genügend kleine Kugel ihr Volumen mithilfe der Schulgeometrie berechnen.

Nach ihr ist das Volumen einer Kugel proportional zur dritten Potenz ihres Radius. Wenn zum Beispiel der Radius der Kugel von 1 auf 0,999 schrumpft, also um ein Tausendstel, dann schrumpft ihr Volumen um $0{,}999^3 \approx 0{,}997$, das heißt, um drei Tausendstel, was *dreimal* so viel ist, wie bei der relativen Änderung des Radius.

Die Schrumpf-Beschleunigung des Volumens ist das Dreifache der relativen Schrumpf-Beschleunigung des Radius (das ist die Beschleunigung des Radius dividiert durch den Radius). Der Einstein-Gleichung der Gravitation aus

Abschn. 7.2 nach gilt:

$$
\begin{aligned}
&-3 \cdot \frac{\text{Beschleunigung des Radius}}{\text{Radius}} \\
&= 4\pi \cdot \begin{pmatrix}\text{Gravitations-}\\ \text{konstante}\end{pmatrix} \cdot (\text{Massendichte})
\end{aligned}
\tag{9.23}
$$

Diese Beschleunigung ist im Falle einer sich ausdehnenden Kugel die Rate, mit der die Ausdehnungsgeschwindigkeit langsamer wird.

9.8.2 Große Massenkugel im Weltall

Natürlich wollen wir eigentlich wissen, wie sich viel größere Regionen des Weltalls unter dem Einfluss der Gravitation verhalten. Im Friedman-Modell ist die Masse überall gleich verteilt, sodass auch für eine viel größere Kugel nur die Masse *innerhalb* der Kugel bestimmt, um wie viel die Kugel zu schrumpfen beginnt.

Wegen des kosmologischen Prinzips ist die Massendichte auf der rechten Seite der Gl. (9.23) überall gleich. Daher muss sich auch die Größe einer zehnmal so großen Kugel in der gleichen Weise ändern wie die einer kleinen Kugel. Wir können ja diese große Kugel mit kleinen Kugeln füllen. Deren Größe ändert sich *im Verhältnis* um den gleichen Betrag, wie wir in Abb. 9.23 sehen können. Daher gilt Gl. (9.23) für eine Kugel von *beliebiger* Größe!

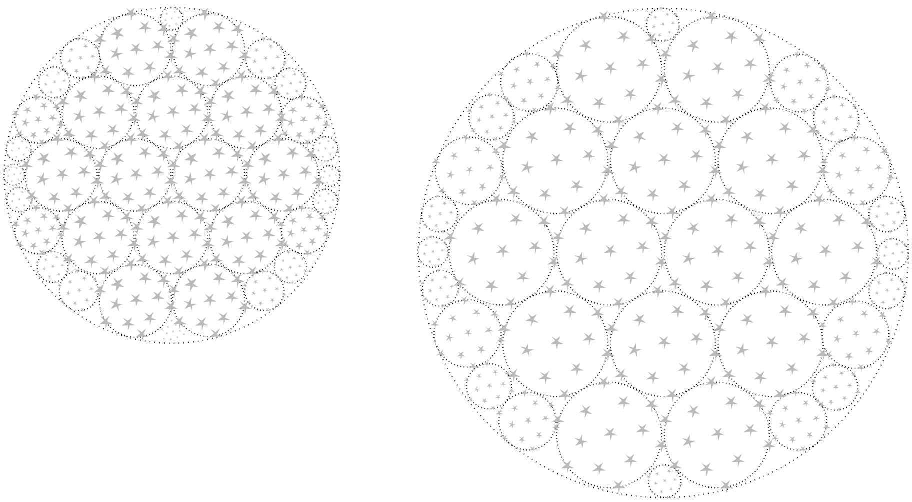

Abb. 9.23 Die große Kugel dehnt sich oder schrumpft *im Verhältnis* genau so viel wie die kleinen Kugeln

Wir möchten allerdings das Gesetz der Gravitation für das Weltall durch die *Masse* innerhalb der großen Kugel ausdrücken, denn in unserm Modell ändert sich ja die Anzahl der Sterne und Galaxien nicht, während sich die Größe der Kugel mit dem Abstand der Galaxien ändert und daher auch die *Massendichte* in der Kugel. Massendichte ist Masse pro Volumen, sodass wir das in der Einstein-Gleichung der Gravitation (9.23) verwenden dürfen. Innerhalb einer großen Kugel ist aber so viel Masse, dass sich die Raumzeit und insbesondere der Raum in der Kugel krümmen. Daher können wir für die große Kugel *nicht* die Schulgeometrie verwenden: Das Volumen der großen Kugel zu einem bestimmten Zeitpunkt ist *nicht* zur dritten Potenz ihres Radius proportional, der Zusammenhang ist viel komplizierter.

Aber es gibt einen Ausweg: Schauen wir uns Abb. 9.23 an. Wächst das Volumen der großen Kugel um beispielsweise 2 Prozent, wächst auch das Volumen der kleinen Kugeln in gleicher Weise. Daher wächst oder schrumpft das Volumen der großen Kugel im selben Verhältnis wie das der kleinen Kugeln. Wir haben außerdem im letzten Abschnitt gesehen, dass die Radien der großen und der kleinen Kugeln auch im selben Verhältnis wachsen oder schrumpfen.

Schließlich wissen wir, dass die Schulgeometrie für die kleinen Kugeln sehr gut stimmt, deren Volumen sich dreimal so schnell ändert wie ihr Radius. Also ändert sich auch das Volumen der großen Kugel *im Verhältnis* dreimal so schnell wie ihr Radius:

$$\text{Kugelvolumen} = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{(\text{Radius})^3}{\text{Konstante}}$$

Für sehr kleine Kugeln ist die Konstante eins, und wir erhalten wieder die Formel der Schulgeometrie für das Kugelvolumen.

Diese Konstante hängt also vom Radius der Kugel zu einer bestimmten Zeit ab, aber die Konstante ist zu allen *Zeiten* gleich. Daher können wir die Massendichte durch die Masse und den Radius der Kugel ausdrücken:

$$\begin{aligned}\text{Massendichte} &= \frac{\text{Masse in der Kugel}}{\text{Volumen der Kugel}}\\ &= \frac{\text{Masse in der Kugel}}{(\text{Radius})^3} \cdot \frac{\text{Konstante}}{\frac{4}{3}\pi}\end{aligned} \tag{9.24}$$

Wir verwenden nun die Einstein-Gleichung der Gravitation, die wir hier noch einmal angeben:

$$-3 \cdot \frac{\text{Beschleunigung des Radius}}{\text{Radius}} = 4\pi \cdot \begin{pmatrix}\text{Gravitions-}\\ \text{konstante}\end{pmatrix} \cdot (\text{Massendichte})$$

Mit Hilfe von Gl. (9.24) können wir die Massendichte durch die Masse und den Radius der großen Kugel ausdrücken:

$$
\begin{aligned}
&-\cancel{3}\cdot\frac{\text{Beschleunigung des Radius}}{\cancel{\text{Radius}}}\\
&=\frac{\cancel{4\pi}\begin{pmatrix}\text{Gravitations-}\\ \text{konstante}\end{pmatrix}\cdot(\text{Masse der Kugel})}{(\text{Radius})^{\cancel{3}2}}\cdot\frac{\text{Konstante}}{\cancel{\frac{4}{3}\pi}}
\end{aligned}
$$

Wir kürzen auf beiden Seiten einmal durch den Radius und die Faktoren 3 und 4π, und erhalten

$$
\begin{pmatrix}\text{Beschleunigung}\\ \text{des Radius}\end{pmatrix}=-\frac{\begin{pmatrix}\text{Gravitations-}\\ \text{konstante}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{Masse}\\ \text{der Kugel}\end{pmatrix}}{(\text{Radius})^2}\cdot\text{Konstante}
$$

Den Radius können wir durch den Abstand zum Mittelpunkt der Kugel ersetzen, denn im Friedman-Modell stehen beide in einem festen Verhältnis. Nur die Konstante kann so ihren Wert ändern, aber die Gleichung ändert nicht ihre Form:

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}\text{Beschleunigung des}\\ \text{Abstandes zum}\\ \text{Mittelpunkt der Kugel}\end{pmatrix}\\
&=-\frac{\begin{pmatrix}\text{Gravitations-}\\ \text{konstante}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{Masse}\\ \text{der Kugel}\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}\text{Abstand zum}\\ \text{Mittelpunkt der Kugel}\end{pmatrix}^2}\cdot\text{Konstante}
\end{aligned}
\tag{9.25}
$$

Das ist die **Friedman-Gleichung**. Wir haben diese Art von Gleichung schon einmal gesehen: Weil die Zeit im Weltall überall gleich schnell vergeht, sieht diese Gleichung bis auf die Konstante auf der rechten Seite so aus wie das *newtonsche Gesetz der Gravitation* für eine perfekte Kugel (8.6). Um es griffig zu formulieren:

> Für das Weltall als Ganzes gilt bis auf eine Konstante wieder das newtonsche Gesetz der Gravitation!

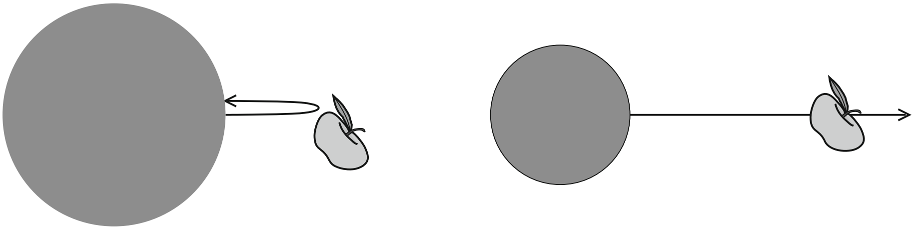

Abb. 9.24 Das Weltall dehnt sich in der gleichen Weise aus, wie sich ein hochgeworfener Apfel von einem Planeten entfernt

Wir können diese Gleichung in derselben Weise lösen wie Newton: Nicht, indem wir einem Apfel zuschauen, wie er vom Baum fällt, sondern indem wir einen Apfel *senkrecht nach oben* werfen. Um den Luftwiderstand nicht berücksichtigen zu müssen, gehen wir dazu auf einen kleinen Planeten, ganz so wie der kleine Prinz von Saint-Exupéry es tun würde. Wir werfen also den Apfel immer mit der gleichen Geschwindigkeit nach oben, probieren dies aber auf verschieden schweren Planeten aus. In Abb. 9.24 sehen wir, was passiert: Der Planet auf der linken Seite hat genug Masse, sodass der Apfel letztendlich wieder zurückfällt. Der Planet auf der rechten Seite ist zu leicht, sodass der Apfel den Planeten verlässt und sich für immer vom Planeten entfernt.

Wir haben damit wieder eine **exakte Lösung** der **Einstein-Gleichung der Gravitation** gefunden!

Nun können wir auch die erste Frage vor Abschn. 9.8.1 beantworten! Ein zeitlich unveränderliches Weltall ist nicht stabil: Es wird sofort zu schrumpfen beginnen, genau wie der Apfel, der oberhalb des Planeten ruht, zu fallen beginnt. Das Weltall hat nur zwei Möglichkeiten: Zu schrumpfen oder sich auszudehnen. Nun wissen die Astronomen seit über 80 Jahren, dass sich in der Tat die weit entfernten Galaxien voneinander entfernen. Also müssen sie in der Vergangenheit viel näher beisammen gewesen sein: Es muss einen **Urknall** gegeben haben, in dem sich plötzlich alle Energie angefangen hat, auszudehnen.

Genau wie für unser Bild des Apfels auf dem kleinen Planeten gilt, dass die durch den Urknall verursachte Ausdehnung sich eines Tages umkehren wird, sofern das Weltall genug Masse hat. Wenn nicht, wird sich das Weltall für immer ausdehnen. Aber in jedem Fall wird sich die jetzige Ausdehnung des Weltalls *verlangsamen*.

Das sollten wir beobachten können: Die weiter entfernten Galaxien sollten sich *schneller* von uns entfernen als die näher gelegenen, denn in der Vergangenheit sollte sich das Weltall schneller ausgedehnt haben als heute. Aber während der letzten zehn Jahre haben die Astronomen herausgefunden, dass das

Gegenteil der Fall ist: Das Weltall dehnt sich *immer schneller* aus! Diese Entdeckung wurde 2011 mit dem Nobelpreis für Physik gewürdigt siehe [10]).

Das ist für uns immer noch rätselhaft. Aber wir haben hier eine Möglichkeit außer Acht gelassen, und das ist die *Energie und der Druck des Vakuums*.

9.9 Energie des Vakuums und Gravitation

Wir haben eine feste Vorstellung davon, was das **Vakuum** ist: Wenn wir alles und jedes aus einem Raumgebiet entfernt haben und nichts mehr übrig ist, dann ist das ein Vakuum. Aber Experimente haben gezeigt, dass immer Energie übrig bleibt! Schauen wir uns einmal an, wie so etwas möglich ist. Wir nehmen zunächst einmal an, dass zwei Lichtwellen entlang des gleichen Wegs durch den leeren Raum fliegen, die in entgegengesetzter Richtung schwingen, wie in Abb. 9.25 skizziert. Die beiden Wellen löschen sich wie Wasserwellen gegenseitig aus. Aber beide tragen eine positive Energie. Daher bleibt keine Welle übrig, aber **Vakuumenergie**.

Wie aber können wir solche Wellen, die sich gegenseitig genau auslöschen, überhaupt beobachten? Dazu hängen wir zwei große Metallplatten nahe beieinander ins Vakuum. Das Metall ist undurchlässig für die Lichtwellen. Auch kann das Licht innerhalb der Metallplatten nicht schwingen. In Abb. 9.26 zeigen wir im linken Bild drei schwingende Lichtwellen in einem bestimmten Moment, und im rechten Bild die gleichen Wellen etwas später. Vergleichen wir die beiden Bilder: Die oberen beiden, durchgezogen gezeichneten Wellen passen zwischen die beiden Metallplatten, weil sie am Ort der Platten nicht schwingen. Die gestrichelt gezeichnete Welle aber schwingt am Ort der Platten, kann also gar nicht zwischen den Platten existieren. Das heißt, dass es *ohne* Metallplatten *mehr* mögliche Wellen und Vakuumenergie gibt als *mit* Metallplatten.

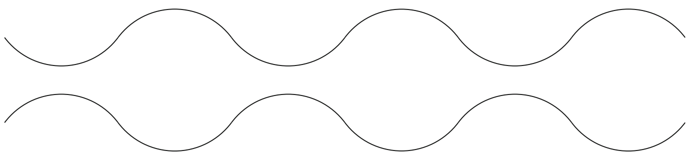

Abb. 9.25 Zwei sich gegenseitig auslöschende Lichtwellen. In Wirklichkeit liegen die beiden Wellen übereinander, aber wir haben sie hier nebeneinander gezeichnet, damit wir sie besser auseinanderhalten können

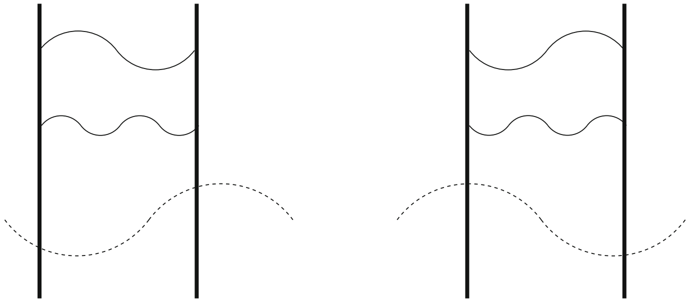

Abb. 9.26 Zwei parallele Metallplatten im Vakuum, zwischen denen Lichtwellen schwingen. Das *rechte* Bild zeigt einen etwas späteren Zustand als das *linke* Bild

Nun rücken wir die Metallplatten näher zusammen, beispielsweise auf ein Viertel ihres ursprünglichen Abstandes, wie in Abb. 9.27 dargestellt. Dann passt die obere Welle *nicht* mehr zwischen die beiden Platten. Nur die mittlere Welle passt noch. Es passt also umso *weniger* Energie zwischen die Platten, je näher sie beieinander sind. Daher beginnen die Platten *von selbst*, sich anzunähern, um ihre Energie zu verringern. Und genau diesen Effekt hat man beobachtet! Es ist der **Casimir-Effekt**.

Dieser Effekt wurde 2001 von G. Bressi, G. Carugno, R. Onofrio und G. Ruoso beobachtet [11].

Der Casimir-Effekt ist einer der wichtigsten Phänomene der atomaren Welt, aber wir benötigen die **Quantentheorie**, um ihn abzuschätzen. Das sprengt den Rahmen dieses Buches. Aber der holländische Physiker Hendrik Casimir hat die Rechnungen durchgeführt, und tatsächlich sagt die Quan-

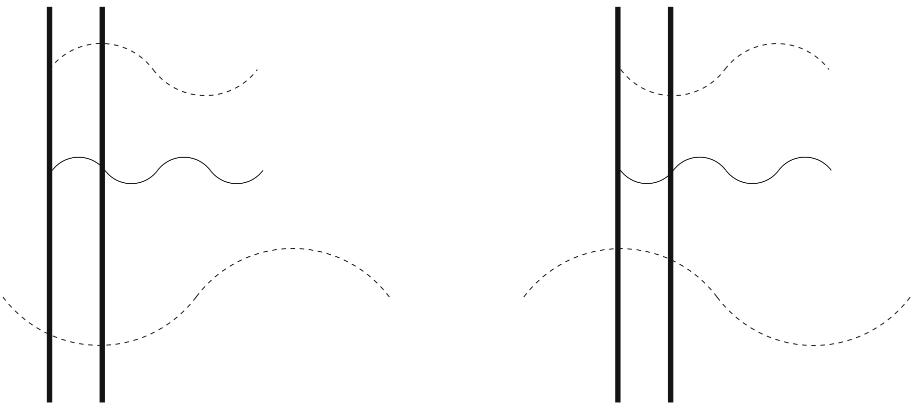

Abb. 9.27 Je näher sich die Metallplatten kommen, umso weniger Lichtwellen passen dazwischen

tentheorie die Stärke der Anziehung zwischen den beiden Platten richtig voraus.

Wir können also den Casimir-Effekt als experimentell erwiesen betrachten und daher annehmen, dass die sich gegenseitig auslöschenden, aber dennoch Energie tragenden „Geisterwellen“ real sind. Sie werden auch **Vakuum-Schwankungen** genannt. Wie viel Energie hat solch eine Welle? Ihre Energie ist proportional zum Kehrwert ihrer Wellenlänge. Die Verhältniszahl ist die **plancksche Konstante** mal der Lichtgeschwindigkeit.

Da ihre Energie mit dem Kehrwert ihrer Wellenlänge anwächst, passen umso mehr Vakuum-Schwankungen in ein Raumgebiet, je mehr Energie sie tragen. Aber *jede* Form von Energie erzeugt Gravitation!

Daher haben wir hier eine ähnliche Situation wie die schon kurz in Abschn. 7.3 diskutierte: Das Vakuum *selbst* verhält sich wie eine Art Gas, in dem sich Materie befindet. Da das **Vakuum** Energie trägt, übt es auch **Druck** aus. Aber wie genau geschieht das? Um das zu verstehen, machen wir nun ein Gedankenexperiment, das wir *niemals* real ausführen können: In Abb. 9.28 haben wir in hellgrau das Vakuum in einem Zylinder dargestellt. Um den Zylinder ist *nichts, noch nicht einmal* das Vakuum. Natürlich können wir gerade deswegen dieses Gedankenexperiment niemals verwirklichen, aber das soll uns hier nicht stören. Wir sahen, dass das Vakuum eine bestimmte positive Energie trägt. Wenn wir also mehr Vakuum erzeugen wollen, müssen wir Energie dazu bereitstellen. Das heißt, wir müssen Arbeit leisten, um den Kolben nach rechts zu ziehen.

Vergleichen wir dies mit dem positiven Druck eines Gases: Wir müssen Arbeit leisten, um zum Beispiel den aufgepumpten Schlauch eines Fahrradreifens *zusammenzudrücken*. Für das Vakuum ist es also umgekehrt: Das Vakuum hat **negativen Druck**. Im Gegensatz zur Energiedichte in einem Schnellkochtopf in Abschn. 1.12, ist hier der Druck des Vakuums gerade das *Negative* der Energiedichte des Vakuums. Der Druck ist in alle drei Richtungen gleich. Die vollständige Einstein-Gleichung der Gravitation (Abschn. 7.3) sagt uns dann, dass wir nicht nur die Energiedichte des Vakuums, sondern auch dessen Druck

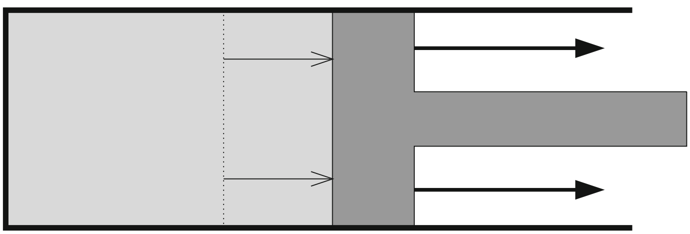

Abb. 9.28 Die positive Vakuum-Energie übt negativen Druck aus

in die Erzeugung der Gravitation mit einbeziehen müssen:

$$\begin{pmatrix}\text{Energiedichte}\\ \text{des Vakuums}\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}\text{Druck = Negative}\\ \text{Energiedichte}\\ \text{des Vakuums}\end{pmatrix} = (-2)\begin{pmatrix}\text{Energiedichte}\\ \text{des Vakuums}\end{pmatrix}$$

Dem entspricht wegen Gl. (1.2) eine konstante, negative Massendichte, wenn wir noch durch c^2 teilen. Daher erhält unsere Gleichung für die Ausdehnung des Weltalls (9.23) noch eine Zusatzbeschleunigung:

$$\begin{aligned}&-3\cdot\frac{\begin{pmatrix}\text{Zusatzbeschleunigung}\\ \text{des Radius}\end{pmatrix}}{\text{Radius}}\\ &= 4\pi\cdot\begin{pmatrix}\text{Gravitations-}\\ \text{konstante}\end{pmatrix}\cdot(-2)\,\frac{\begin{pmatrix}\text{Energiedichte}\\ \text{des Vakuums}\end{pmatrix}}{c^2}\end{aligned}$$

Weil ja der Abstand vom Mittelpunkt der Kugel im festen Verhältnis zum Radius steht, können wir ihn verwenden und wie vorher mit der Konstanten das Volumen einer großen Kugel anpassen:

$$\begin{aligned}&-3\cdot\frac{\begin{pmatrix}\text{Zusatzbeschleunigung des}\\ \text{Abstandes vom Mittelpunkt}\end{pmatrix}}{\text{Abstand vom Mittelpunkt}}\\ &= 4\pi\cdot\begin{pmatrix}\text{Gravitations-}\\ \text{konstante}\end{pmatrix}\cdot(-2)\,\frac{\begin{pmatrix}\text{Energiedichte}\\ \text{des Vakuums}\end{pmatrix}}{c^2}\cdot\text{Konstante}\end{aligned}$$

Mit anderen Worten: Die Zusatzbeschleunigung ist positiv und proportional zum Abstand vom Mittelpunkt der perfekten Raumkugel:

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\text{Zusatzbeschleunigung des}\\ \text{Abstandes vom Mittelpunkt}\end{pmatrix}\\ &= \frac{8\pi}{3c^2}\cdot\begin{pmatrix}\text{Gravitations-}\\ \text{konstante}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{Energiedichte}\\ \text{des Vakuums}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{Abstand vom}\\ \text{Mittelpunkt}\end{pmatrix}\cdot\text{Konstante}\end{aligned}$$

Das heißt: Je mehr sich das Weltall ausdehnt, umso *größer* ist diese Zusatzbeschleunigung, während die ursprüngliche negative Beschleunigung aus

Gl. (9.25), die die Ausdehnung verlangsamt, *schwächer* wird. Daher sollte schon heute die Vakuumenergie das Schicksal des Weltalls beherrschen!

Wir sagen „sollte“, denn die Sache hat einen Haken: Wir haben gesehen, dass in jedes noch so kleinen Raumgebiet viele, sehr viele Vakuum-Schwankungen mit sehr kurzer Wellenlänge hineinpassen, die eine sehr große Vakuumenergie tragen und daher einen sehr großen negativen Druck aufbauen sollten. Wenn das alles stimmt, müsste eigentlich gerade jetzt das Weltall explodieren! Da das nicht der Fall ist, muss es noch etwas anderes geben, etwas, was die Energie des Vakuums klein hält. Bisher hat aber noch niemand eine überzeugende Erklärung dafür, warum die Vakuumenergie so klein ist, dass sich das Weltall so *langsam* ausdehnt.

Mit anderen Worten: Wir verstehen noch nicht, wie die subatomare Welt der Vakuum-Schwankungen und Elementarteilchen in die gekrümmte Raumzeit passt, und auch nicht, wie die gekrümmte Raumzeit die Elementarteilchen beeinflusst.

Literatur

1. Wikipedia. Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Grenze (2014). http://de.wikipedia.org/wiki/Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Grenze. Zugegriffen: 25. Januar 2015
2. Wikipedia. Chandrasekhar-Grenze (2014). http://de.wikipedia.org/wiki/Chandrasekhar-Grenze. Zugegriffen: 25. Januar 2015
3. F. Reddy. NASA’s RXTE Detects ’Heartbeat’ of Smallest Black Hole Candidate (2011). http://www.nasa.gov/topics/universe/features/black-hole-heartbeat.html. Zugegriffen: 25. Januar 2015
4. Wikipedia. IGR J17091-3624 (2014). http://en.wikipedia.org/wiki/IGR_J17091-3624. Zugegriffen: 25. Januar 2015
5. Wikipedia. Schwarzes Loch (2015). http://de.wikipedia.org/wiki/Schwarzes_Loch. Zugegriffen: 25. Januar 2015
6. Wikipedia. Gravitationslinseneffekt (2014). http://de.wikipedia.org/wiki/Gravitationslinseneffekt. Zugegriffen: 25. Januar 2015
7. F.W. Dyson, A.S. Eddington, C. Davidson, Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences **220**, 291 (1920). 10.1098/rsta.1920.0009. http://rsta.royalsocietypublishing.org/content/220/571-581/291.full.pdf
8. Wikipedia. Apsidendrehung (2014). http://de.wikipedia.org/wiki/Apsidendrehung. Zugegriffen: 25. Januar 2015
9. Wikipedia. PSR 1913+16 (2015). http://de.wikipedia.org/wiki/PSR_1913+16. Zugegriffen: 25. Januar 2015

10. Wikipedia. Accelerating universe (2015). http://en.wikipedia.org/wiki/Accelerating_universe. Zugegriffen: 25. Januar 2015
11. G. Bressi, G. Carugno, R. Onofrio, G. Ruoso, Physical Review Letters **88**, 041804 (2002). 10.1103/PhysRevLett.88.041804. http://arxiv.org/abs/quant-ph/0203002

10 Anhang

10.1 Wichtige Zahlen

Die Werte der Größen sind weit genauer bekannt als in Tab. 10.1 angegeben, sie sind hier auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

Tab. 10.1 Wichtige Größen und ihre Werte und Einheiten

Größe	Numerischer Wert	Einheit
Lichtgeschwindigkeit c	$2{,}99792458 \cdot 10^8 \approx 3{,}00 \cdot 10^8$	m/s
Gravitationskonstante G	$6{,}67 \cdot 10^{-11}$	$\mathrm{m}^3/(\mathrm{kg\,s}^2)$
Sonnenmasse	$1{,}99 \cdot 10^{30}$	kg
Radius der Sonne	$6{,}96 \cdot 10^8$	m
Schwarzschildradius der Sonne	$2{,}96 \cdot 10^3$	m
Mittlerer Abstand Erde–Sonne	$1{,}50 \cdot 10^{11}$	m

10.2 Die Trägheit der reinen Energie im Detail

Schauen wir uns Abb. 10.1 an.

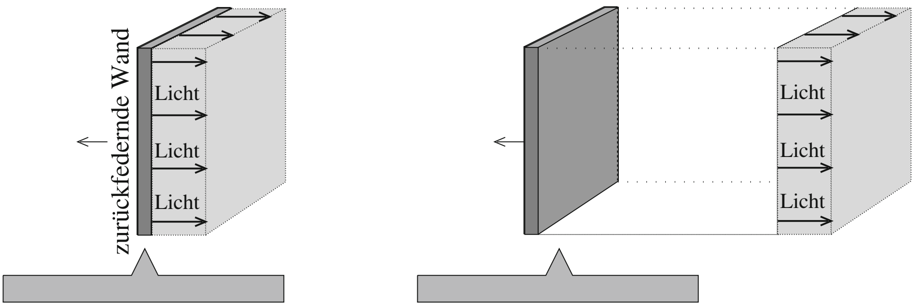

Abb. 10.1 Die Wand federt nach links zurück, da reine Energie aus der Wand nach rechts wegfliegt

K. Fischer, *Relativitätstheorie in einfachen Worten*, DOI 10.1007/978-3-662-46966-8_10,

Während sich die **reine Energie** als Lichtpaket aufbaut, **drückt** sie gegen die Wand. Druck ist Kraft pro Fläche, auf die sie wirkt. Nehmen wir an, dass die Wandfläche genau 1 Quadratmeter beträgt, haben Kraft und Druck auf die Fläche den gleichen Zahlenwert. Während das Licht auf die Wand drückt, erhält die Wand einen Rückstoß. Dieser **Impuls** ist gleich der Masse der Wand mal ihre Geschwindigkeit, wie wir schon in Abschn. 2.7 sahen. Tritt das Licht eine doppelt so lange Zeit aus der Wand aus oder übt es einen doppelt so starken Druck aus, erhält die Wand einen doppelt so großen Impuls. Der Impuls ist also der Druck des Lichts multipliziert mit der Zeit für den Aufbau des Lichtpakets:

$$\begin{pmatrix}\text{Masse}\\ \text{der Wand}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\text{Geschwindigkeit}\\ \text{der Wand}\end{pmatrix} = \text{Druck} \cdot \text{Zeit}$$

Übrigens können wir heutzutage den **Lichtdruck** im Labor messen [1]. Wir sahen in Abschn. 1.12, dass der Lichtdruck gerade die Energie des Lichts pro Raumvolumen ist. Dieses Volumen ist hier die Oberfläche der Wand, welche wir ja als 1 Quadratmeter festgelegt haben, also eins, mal der Breite des Lichtpakets. Daher ist der Druck multipliziert mit der Zeit, die der Druck wirkt, gerade die Energie des Lichtpakets, geteilt durch die Breite des Lichtpakets, multipliziert mit der Zeit, die das Lichtpaket auf die Wand drückt:

$$\text{Druck} \cdot \text{Zeit} = \frac{\text{Energie}}{\text{Breite}} \cdot \text{Zeit}$$

Das Lichtpaket baut sich natürlich mit der Lichtgeschwindigkeit c auf, sodass $\frac{\text{Breite}}{\text{Zeit}}$ gerade c ist,

$$\text{Druck} \cdot \text{Zeit} = \frac{\text{Energie}}{c}$$

Daher bewegt sich die Wand nach links, wobei gilt:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\text{Masse}\\ \text{der Wand}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\text{Geschwindigkeit}\\ \text{der Wand}\end{pmatrix} &= \text{Druck} \cdot \text{Zeit}\\ \begin{pmatrix}\text{Masse}\\ \text{der Wand}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\text{Geschwindigkeit}\\ \text{der Wand}\end{pmatrix} &= \frac{\text{Energie}}{c} = \frac{\text{Energie}}{c^2} \cdot c\end{aligned} \tag{10.1}$$

Nachdem „einige Zeit“ verstrichen ist, hat sich die Wand ein bestimmtes Stück nach links bewegt. Dieser Abstand ist gleich $\begin{pmatrix}\text{Geschwindigkeit}\\ \text{der Wand}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\text{einige}\\ \text{Zeit}\end{pmatrix}$.

Währenddessen ist das Lichtpaket um den Abstand $c \cdot \begin{pmatrix}\text{einige}\\ \text{Zeit}\end{pmatrix}$ nach rechts gelaufen. Daher nehmen wir beide Seiten der Gleichung für die Geschwindigkeit der Wand mit „einige Zeit" mal und wissen so, wie der Abstand der Wand und des Lichtpakets in Abb. 10.1 zusammenhängen:

$$\begin{pmatrix}\text{Masse}\\ \text{der Wand}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\text{Abstand}\\ \text{der Wand}\end{pmatrix} = \frac{\text{Energie}}{c^2} \cdot \begin{pmatrix}\text{Abstand des}\\ \text{Lichtpakets}\end{pmatrix}$$

Der Mittelpunkt der Gesamtmasse kann sich währenddessen nicht bewegt haben. Da aber die Wand ihre Masse gerade um den „Abstand der Wand" nach links bewegt hat, muss das Licht, das heißt die **reine Energie**, eine gewisse *Masse* um den „Abstand des Lichtpakets" nach rechts getragen haben. Wir sehen aus der vorherigen Gleichung, dass diese Masse des Lichtpakets wie folgt definiert ist:

$$\begin{pmatrix}\text{Masse des}\\ \text{Lichtpakets}\end{pmatrix} = \frac{\text{Energie}}{c^2} \tag{10.2}$$

Das ist gerade Gl. (1.2).

Wir machten bei der Herleitung einige kleine Fehler: Wenn das Licht Masse von der Wand wegträgt, muss die Wand etwas Masse verloren haben. Aber wir können diesen Fehler so klein machen, wie wir es wünschen, indem wir die Wand so massiv machen, wie wir wollen.

Auch dauert es gewiss einige Zeit, bis die Wand auf den Lichtdruck reagiert, sodass der linke Teil der Wand noch nicht sofort „weiß", dass das Licht auf die rechte Seitenwand drückt. Aber auch das können wir unterdrücken, indem wir die Wand so dünn und dicht machen, wie wir wollen.

Einstein formulierte es 1905 so [2]:

> Wenn die Theorie den Tatsachen entspricht, so überträgt die Strahlung Trägheit zwischen den emittierenden und absorbierenden Körpern.

Noch ein Wort zu Einsteins „absorbierenden Körpern": In Einsteins Gedankenexperiment [3] war unsere Wand die linke Wand einer Box, und die rechte Wand der Box nahm das Licht wieder auf, wie in Abb. 10.2 gezeigt. Einstein machte im Wesentlichen die gleiche Rechnung wie wir hier.

Aber Einstein machte dann einen Fehler: Er nahm an, dass die *ganze* Box *ohne Verzögerung* auf das nach rechts austretende Licht reagiert. Das aber widerspricht dem zweiten Relativitätsprinzip, denn dann müsste ja die rechte Wand reagieren, *bevor* sie das Lichtpaket erreicht hat, das heißt, die Kräfte des austretenden Lichtpakets müssten *schneller* als mit Lichtgeschwindigkeit zur rechten Wand gelangt sein! Wir sehen, dass manchmal auch Einstein selbst eine falsche Vorstellung von der Relativitätstheorie hatte.

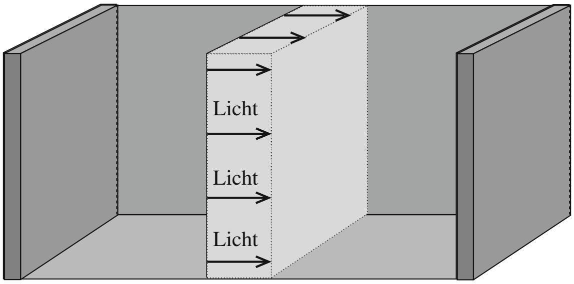

Abb. 10.2 Ein Lichtpaket bewegt sich von der linken zur rechten Wand einer Box

10.3 Relativität für kleine Geschwindigkeiten

Wir wissen, dass die Effekte der Relativitätstheorie fast immer vom γ-Faktor abhängen. Wir wissen auch, dass der γ-Faktor für kleine Geschwindigkeiten praktisch eins ist. Wir wollen nun noch wissen, *wie sehr* der γ-Faktor für kleine Geschwindigkeiten von eins abweicht. Dazu überprüfen wir entweder per Hand oder mit einem Taschenrechner, dass

$$\left(1 - \frac{1}{2} \cdot 0{,}01\right)^2 = 0{,}995^2 = 0{,}990025 \approx 0{,}99 = 1 - 0{,}01$$
$$\left(1 - \frac{1}{2} \cdot 0{,}001\right)^2 = 0{,}9995^2 = 0{,}99900025 \approx 0{,}999 = 1 - 0{,}001$$

gilt und haben dann nach dem Ziehen der Quadratwurzel die folgende Abschätzung:

$$1 - \frac{1}{2} \cdot 0{,}001 \approx \sqrt{1 - 0{,}001} = (1 - 0{,}001)^{\frac{1}{2}}$$

Diese Abschätzung ist umso genauer, je weniger der γ-Faktor von eins abweicht. Dann können wir den γ-Faktor für kleine Geschwindigkeiten wie folgt abschätzen:

$$1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\text{Geschwindigkeit}}{c}\right)^2 \approx \sqrt{1 - \left(\frac{\text{Geschwindigkeit}}{c}\right)^2} = \gamma \quad (10.3)$$

Für nicht zu große Potenzen gilt das gleiche Muster: Unterscheidet sich eine Zahl wie 0,999 von eins nur um $-0{,}001$, unterscheidet sich eine Potenz dieser

Zahl von eins um −0,001 mal der Potenz. Zum Beispiel erhalten wir für die minus-erste oder minus-dritte Potenz

$$\begin{aligned}(1-0{,}001)^{-1} &= \frac{1}{0{,}999} \approx 1{,}001001\cdots \approx 1{,}001\\ &= 1+(-1)\cdot(-0{,}001)\\ (1-0{,}001)^{-3} &= \frac{1}{0{,}999^3} \approx 1{,}0030006\cdots \approx 1{,}003\\ &= 1+(-3)\cdot(-0{,}001)\end{aligned}$$

und so weiter. Benutzen wir nun die vorherige Abschätzung (10.3), erhalten wir Abschätzungen für den Kehrwert des γ-Faktors bei kleinen Geschwindigkeiten,

$$\begin{aligned}\gamma^{-1} = \frac{1}{\gamma} &\approx \frac{1}{1-\frac{1}{2}\left(\frac{\text{Geschwindigkeit}}{c}\right)^2} \approx 1+\frac{1}{2}\left(\frac{\text{Geschwindigkeit}}{c}\right)^2\\ \gamma^{-3} = \frac{1}{\gamma^3} &\approx \frac{1}{1-\frac{3}{2}\left(\frac{\text{Geschwindigkeit}}{c}\right)^2} \approx 1+\frac{3}{2}\left(\frac{\text{Geschwindigkeit}}{c}\right)^2\end{aligned} \tag{10.4}$$

10.4 Geschwindigkeitszunahme und Massenzunahme

Aus Abb. 10.3 können wir entnehmen, dass die beiden Bälle mit der Ruhemasse m_0 *relativ* zur Box die folgende Gesamtmasse M_0

$$M_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

haben, da das Quadrat beider Geschwindigkeiten ja gleich ist: $u^2 = (-u)^2$. Die Masse M_0 ist die *Ruhemasse* der Box, denn wir nehmen an, dass die Box selbst so leicht ist, dass ihre gesamte Masse praktisch in den beiden Bällen steckt. Wenn sich die Box also gegenüber dem Erdboden mit der Geschwin-

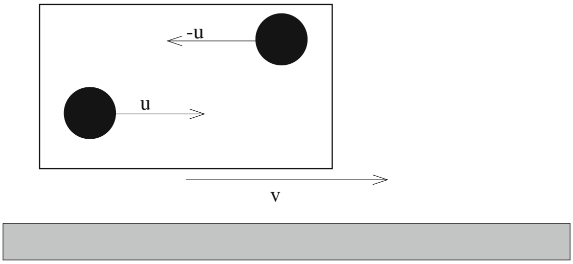

Abb. 10.3 *Relativ* zur Box bewegt sich der *linke* Ball mit der Geschwindigkeit u nach rechts und der *rechte* Ball mit der Geschwindigkeit $-u$ nach links. Die Box selbst bewegt sich *relativ* zum Erdboden mit der Geschwindigkeit v nach rechts

digkeit v bewegt, ist ihre Gesamtmasse:

$$\frac{M_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{10.5}$$

Wir überprüfen dies nun, indem wir die Bälle einzeln betrachten. Bewegt sich ein Ball mit dem Bruchteil $\frac{u}{c}$ der Lichtgeschwindigkeit *in* der Box und bewegt sich die Box selbst mit dem Bruchteil $\frac{v}{c}$ der Lichtgeschwindigkeit gegenüber dem Erdboden, behaupten wir, dass sich der Ball gegenüber dem Erdboden *nicht* mit dem Bruchteil $\frac{u}{c} + \frac{v}{c}$ der Lichtgeschwindigkeit bewegt, sondern mit dem *kleineren* Bruchteil, der sich aus der **relativistischen Geschwindigkeitsaddition** ergibt:

$$\frac{w}{c} = \frac{\frac{u}{c} + \frac{v}{c}}{1 + \frac{u}{c} \cdot \frac{v}{c}} \tag{10.6}$$

Um dies einzusehen, berechnen wir zuerst den γ-Faktor der Geschwindigkeit w:

$$1 - \left(\frac{w}{c}\right)^2 = 1 - \left(\frac{\frac{u}{c} + \frac{v}{c}}{1 + \frac{u}{c} \cdot \frac{v}{c}}\right)^2 = \frac{\left(1 + \frac{u}{c} \cdot \frac{v}{c}\right)^2}{\left(1 + \frac{u}{c} \cdot \frac{v}{c}\right)^2} - \frac{\left(\frac{u}{c} + \frac{v}{c}\right)^2}{\left(1 + \frac{u}{c} \cdot \frac{v}{c}\right)^2}$$

Wir formen den Zähler um, indem wir die sich aufhebenden Teile streichen. Wir finden, dass wir den Zähler als Produkt der γ-Faktoren von u und v schreiben können:

$$\begin{aligned}
&\left(1+\frac{u}{c}\cdot\frac{v}{c}\right)^2-\left(\frac{u}{c}+\frac{v}{c}\right)^2\\
&=1+\cancel{2\frac{u}{c}\cdot\frac{v}{c}}+\left(\frac{u}{c}\right)^2\left(\frac{v}{c}\right)^2-\left(\frac{u}{c}\right)^2-\cancel{2\frac{u}{c}\cdot\frac{v}{c}}-\left(\frac{v}{c}\right)^2\\
&=\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\cdot\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)
\end{aligned}$$

Wir ziehen dann die Quadratwurzel:

$$\sqrt{1-\left(\frac{w}{c}\right)^2}=\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{u}{c}\cdot\frac{v}{c}}$$

Damit hat der sich in der Box mit der Geschwindigkeit u bewegende Ball gegenüber dem Erdboden die Gesamtmasse

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{w^2}{c^2}}}=\frac{m_0\left(1+\frac{u}{c}\cdot\frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Ersetzen wir u durch $-u$, so erhalten wir auf gleiche Weise den γ-Faktor des sich in der Box nach links bewegenden Balls. Das ändert im Zähler nur $1+\frac{u}{c}\cdot\frac{v}{c}$ zu $1-\frac{u}{c}\cdot\frac{v}{c}$. Daher addierten sich die Gesamtmassen der beiden Bälle zu

$$\frac{m_0\left(1+\cancel{\frac{u}{c}\cdot\frac{v}{c}}\right)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+\frac{m_0\left(1-\cancel{\frac{u}{c}\cdot\frac{v}{c}}\right)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{2m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Das ist aber genau die Masse aus Gl. (10.5). Daher drückt Gl. (10.6) korrekt aus, wie zwei parallele Geschwindigkeiten zu addieren sind.

10.5 Einstein-Gleichung der Gravitation ausgedrückt durch Tensoren

Die vollständige Einstein-Gleichung der Gravitation aus Abschn. 7.3 war wie folgt:

Die relative Schrumpf-Beschleunigung, also die Schrumpf-Beschleunigung *pro Volumen* einer ruhenden Wolke von Staubteilchen ist proportional zur Energie*dichte plus dem Druck in den drei Raumrichtungen* der Wolke. Die Verhältniszahl ist 4π mal die Gravitationskonstante, geteilt durch das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit. Oder kürzer:

$$\begin{aligned}&\big(\text{relative Schrumpf-Beschleunigung}\big)\\&= \frac{4\pi G}{c^2}\cdot\left[\begin{pmatrix}\text{Energie-}\\\text{dichte}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{Summe des Drucks}\\\text{in jede Richtung}\end{pmatrix}\right]\end{aligned} \tag{10.7}$$

Wir schreiben nun diese Gleichung in Tensorform, um sie in die gleiche Gestalt wie in den Lehrbüchern zu bringen. Wir können hier keinen Schnellkurs in Tensoranalysis bieten, aber wir erklären wenigstens, was die Symbole bedeuten. Für Materie, die relativ zu sich selbst und zu uns ruht, ist die Energiedichte eine Komponente des **Energie-Tensors** T^m_n. Dieser Tensor hat sechzehn Komponenten, die mit m und n durchnummeriert sind, wobei m und n die Werte 0, 1, 2 oder 3 annehmen können. Die Energiedichte ist die Komponente T^0_0. Das *Negative* der Komponente T^1_1, also $-T^1_1$, ist der Druck in eine Raumrichtung, $-T^2_2$ und $-T^3_3$ der Druck in die anderen beiden Raumrichtungen. Für ruhende Materie ohne innere Spannung, wie zum Beispiel für ein Gas oder eine Flüssigkeit, sind die anderen Komponenten des Energie-Tensors null.

Die Schrumpf-Beschleunigung eines kleinen Raumgebiets pro Volumen des Raumgebiets ist gerade die Komponente R^0_0 des **Ricci-Tensors**, multipliziert mit dem Quadrat der Lichtgeschwindigkeit. Daher lautet die vollständige Einstein-Gleichung der Gravitation

$$R^0_0 = \frac{4\pi G}{c^4}\cdot\left(T^0_0 - T^1_1 - T^2_2 - T^3_3\right) \tag{10.8}$$

Wir benötigen aber noch einen Tensor U, dessen Komponente U^0_0 gerade die rechte Seite der Gleichung ergibt. Nun gibt es den Tensor δ^m_n, der eins ist, wenn $m = n$ gilt, ansonsten ist er null. Außerdem haben wir den Tensor

$$T = T^0_0 + T^1_1 + T^2_2 + T^3_3$$

der nur diese eine Komponente hat. Aus diesen beiden können wir den Tensor $T\delta_n^m$ formen, und daraus schließlich den Tensor

$$U_n^m = 2T_n^m - T\delta_n^m$$

Dessen $^0_0$-Komponente ist gerade

$$U_0^0 = 2T_0^0 - \left(T_0^0 + T_1^1 + T_2^2 + T_3^3\right) = T_0^0 - T_1^1 - T_2^2 - T_3^3$$

Das ist genau der Ausdruck, den wir für die rechte Seite von Gl. (10.8) benötigen. Daher lautet die Einstein-Gleichung der Gravitation, ausgedrückt durch den Energie-Tensor und den Ricci-Tensor,

$$R_0^0 = \frac{4\pi G}{c^4} \cdot \left(2T_0^0 - T\delta_0^0\right) \tag{10.9}$$

In den Abschn. 7.1 und 7.2 haben wir den einfachsten Fall einer kleinen Staubwolke ohne Druck behandelt. In diesem Fall sind alle Komponenten des Energie-Tensors null, ausgenommen die Energiedichte T_0^0. Wenn die Massen sich auch im Kleinen gegeneinander bewegen oder innere Spannung haben, brauchen wir die Gleichung für alle Komponenten des Energie-Tensors und des Ricci-Tensors. Wir haben dann die **Einstein-Gleichung der Gravitation ausgedrückt durch Tensoren**:

$$\boxed{R_n^m = \frac{4\pi G}{c^4} \cdot \left(2T_n^m - T\delta_n^m\right) \qquad (10.10)}$$

Literatur

1. Wikipedia. Strahlungsdruck (2015). http://de.wikipedia.org/wiki/Strahlungsdruck. Zugegriffen: 25. Januar 2015
2. A. Einstein, Annalen der Physik **18**, 639 (1905). www.physik.uni-augsburg.de/annalen/history/einstein-papers/1905_18_639-641.pdf. Zugegriffen: 25. Januar 2015
3. A. Einstein, Annalen der Physik **20**, 627 (1906). www.physik.uni-augsburg.de/annalen/history/einstein-papers/1906_20_627-633.pdf. Zugegriffen: 25. Januar 2015

Nachwort

Wir sahen, dass die Relativitätstheorie auf vier Prinzipien aufbaut:

1. Licht fliegt an einem Beobachter immer mit der gleichen Geschwindigkeit *c* vorbei.
2. Die Zeit, Längen und alle anderen konstanten Geschwindigkeiten haben nur *relativ* zu einem Beobachter eine Bedeutung.
3. Das Äquivalenzprinzip: Eine genügend kleine Masse bewegt sich unter dem Einfluss der Gravitation, das heißt in der gekrümmten Raumzeit, frei fallend, und ihre Eigenzeit verläuft gleichbleibend schnell.
4. Masse krümmt die Raumzeit in der *einfachsten* Weise, die möglich ist und mit den ersten drei Prinzipien im Einklang steht: Die Rate, mit der eine genügend kleine Wolke von gegenseitig zueinander ruhenden Staubteilchen zu schrumpfen beginnt, ist proportional zur Masse in dieser Wolke.

Die ersten beiden Prinzipien bilden die Grundlage der Speziellen Relativitätstheorie, und alle zusammen bilden die Allgemeine Relativitätstheorie.

Die Theorie hält sich nicht damit auf zu fragen, was *technisch gesehen* die Massen antreibt oder welche atomare Struktur die Materie hat, sondern untersucht, wie sich Masse, Impuls und Energie auf der einen Seite und Raum und Zeit auf der anderen Seite beeinflussen. Die Theorie schafft es sogar, eine der Naturkräfte, die Gravitation, in die gekrümmte Raumzeit einzugliedern, sodass am Ende die Schwer„kraft" gar keine Kraft mehr ist. Einstein schuf diese Theorie, indem er unvoreingenommen die physikalischen Effekte peinlich genau unter die Lupe nahm. Das alles macht diese Theorie so schön.

Wir sahen, dass insbesondere das *Äquivalenzprinzip* ein machtvolles Werkzeug ist, um zu erkennen, wie Masse auf die Krümmung der Raumzeit *reagiert*. Das ist eben nicht nur auf das berühmte Gedankenexperiment der Aufzüge aus Abschnitt 5.1 beschränkt, das wir in vielen allgemeinverständlichen Darstellungen finden: Weil Masse gleichzeitig auf die gekrümmte Raumzeit *reagiert* und die Raumzeit selbst *krümmt*, half uns das Äquivalenzprinzip auch, die Einstein-Gleichung der Gravitation zu lösen und das Friedman-Modell des Weltalls aufzustellen, um nur einige Beispiele zu nennen.

K. Fischer, *Relativitätstheorie in einfachen Worten*, DOI 10.1007/978-3-662-46966-8,

Die Relativitätstheorie hat man nun schon über hundert Jahre lang immer wieder mit wachsender Genauigkeit getestet. Heute sind wir so weit, dass die Relativitätstheorie als *Rahmen* dient: Andere Theorien, die sich mehr um die Einzelheiten des Aufbaus der Materie kümmern, müssen mit der Relativitätstheorie übereinstimmen, damit sie überhaupt Sinn machen. Zum Beispiel stimmt die Theorie der Elektrodynamik, die sich mit den elektrischen und magnetischen Naturerscheinungen befasst, mit der Relativitätstheorie *von Anfang an* überein.

Es kostete die Physiker viel Zeit und Mühe, die **Quantentheorie**, das ist die Theorie der kleinsten Teilchen, zumindest mit der **Speziellen Relativitätstheorie** in Einklang zu bringen. Dafür wurden wir aber reich belohnt, indem wir nun so seltsame, aber reale Naturerscheinungen wir Anti-Materie verstehen können oder wissen, warum das 2013 gefundene Higgs-Boson für die Beziehung von Quantentheorie und Spezieller Relativitätstheorie so wichtig ist. Aber es bräuchte wohl ein ganzes Buch, um das im Einzelnen zu erklären.

Es bleibt die Aufgabe der nachfolgenden Generation von Physikern, diese Theorie der kleinsten Teilchen mit der **Allgemeinen Relativitätstheorie** zu vereinigen, die die größten Strukturen im Weltall beschreibt.

Sachverzeichnis

T

U

V

W

Z