WAS IST WAS

BAND 12

Mathematik

WAS IST WAS

WASISTWAS.de
WISSEN UP TO DATE

Tessloff

WAS IST WAS

Mathematik steckt überall dahinter: CD-Spieler, Autos, Computer – kein technisches Gerät ist ohne sie denkbar. Dennoch erfreut sich das Fach keiner großen Beliebtheit. Im Gegenteil: Viele Menschen haben seit ihrer Schulzeit einen regelrechten Horror davor. Sie halten die Mathematik für staubtrocken, lebensfern und von Normalsterblichen nicht zu begreifen. Dass diese Vorurteile keineswegs zutreffen, zeigt der promovierte Mathematiker und Wissenschaftsjournalist **Wolfgang Blum** in diesem Buch. Sein Streifzug reicht von der Erfindung der Zahlen vor vielen tausend Jahren bis zu aktuellen Aufgaben der mathematischen Forschung. Bei den Ausflügen in die Welt der Zahlen, Räume, Wahrscheinlichkeiten und Geheimschriften wird eines immer wieder deutlich: Mathematik muss nicht langweilig sein, sondern kann einen so fesseln, dass man alles um sich herum vergisst.

Tessloff Verlag

ISBN 3-7886-0252-X 2/01

01680

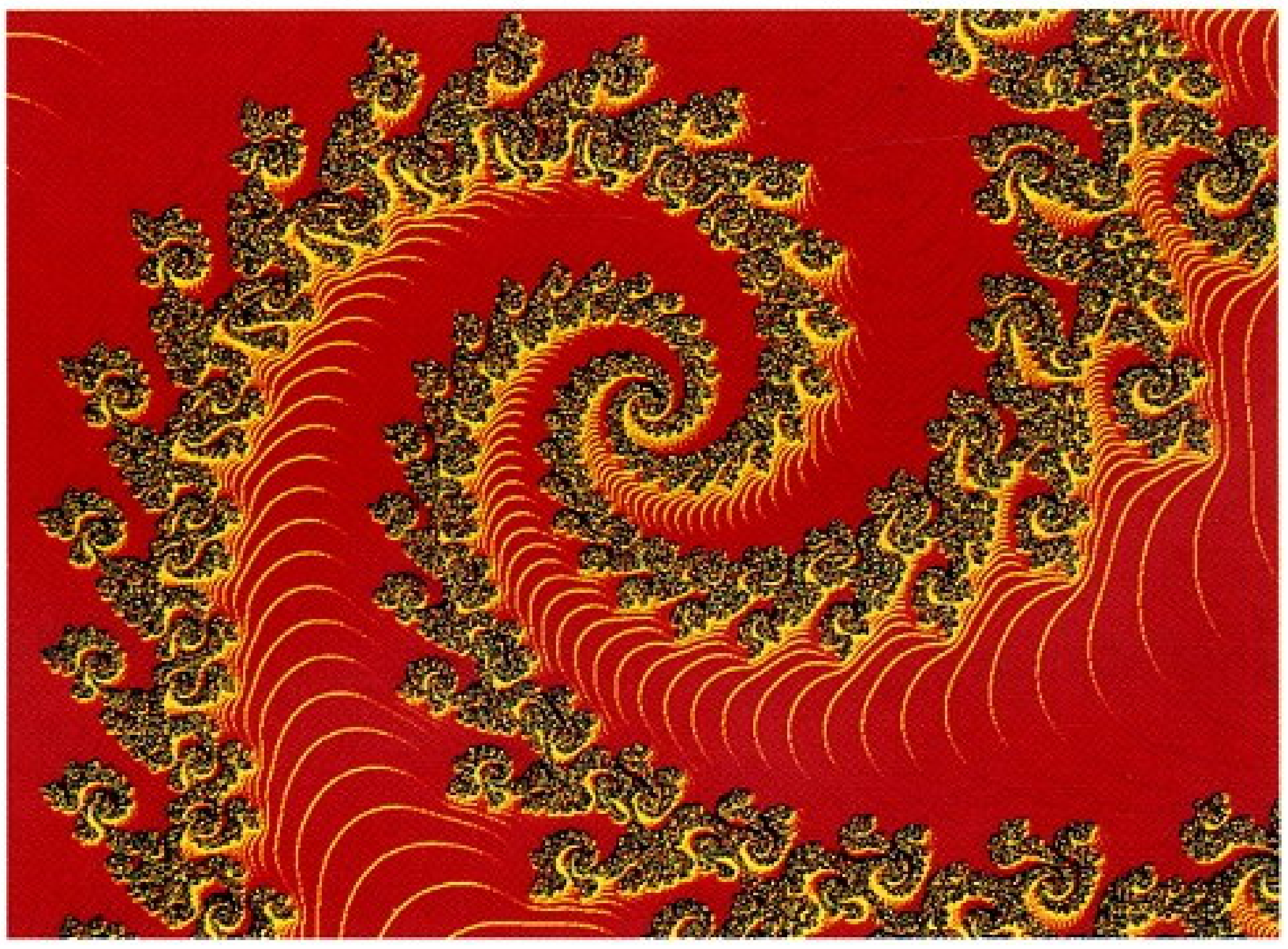
9 783788 602529

Ein WAS IST WAS Buch

Mathematik

Von Wolfgang Blum

Illustriert von Joachim Knappe



Tessloff Verlag

Vorwort

Mathematik ist eine der ältesten Wissenschaften. Was griechische Mathematiker wie Thales, Archimedes und Euklid vor mehr als 2000 Jahren bewiesen, gilt noch heute. Welches andere Fach kann das schon von sich behaupten?

Wir leben im Zeitalter der Mathematik. Denn immer mehr bestimmt die Technik unseren Alltag - und ohne Mathematik wäre sie nicht denkbar. Computer machen Mathematik nicht überflüssig, sondern verleihen ihr noch mehr Gewicht. Die Programme, die sie steuern, sind nichts anderes als angewandte Mathematik.

Neben den Zahlen stand von Anfang der Raum im Mittelpunkt des Interesses. Man wollte Felder vermessen und in der Seefahrt das Ziel finden. Und noch heute befassen sich die Wissenschaftler mit dem Raum. In jüngster Zeit entdeckten sie sogar gänzlich neue Methoden, ihn zu beschreiben. Die so genannte fraktale Geometrie bietet eine bis vor kurzem unbekannte Art, die Natur zu betrachten.

Auch den Zufall versuchen Mathematiker in den Griff zu bekommen. Vor 300 Jahren bezahlten Adelige Gelehrte für Berechnungen, die ihnen Vorteile im Glücksspiel verschaffen sollten. Heute sind viele Computerberechnungen ohne Wahrscheinlickeitstheorie undenkbar. Versicherungen wären längst pleite, hätten Mathematiker nicht die angemessene Höhe für die Beiträge ihrer Kunden ermittelt.

Geheimschriften nutzen Politiker und Militärs schon seit Menschengedenken. Inzwischen haben sie Einzug ins zivile Leben gehalten. Die Mathematik der Geheimschriften ermöglicht es, am Bankautomaten Geld abzuheben und Waren über das Internet zu bezahlen.

Dieses Buch kann nicht die gesamte Mathematik darstellen, die sich wie alle Wissenschaften in den vergangenen Jahrzehnten viel schneller entwickelte als jemals zuvor in ihrer langen Geschichte. Viele tausend Forschungsarbeiten erscheinen jährlich. Nicht einmal die Fachleute können da den Fortschritt in allen Teilgebieten verfolgen. Doch bietet dieser WAS IST WAS-Band erste Einblicke in eine faszinierende Welt, die dem reinen Denken verpflichtet ist.

BAND 12

■ Dieses Buch ist auf chlorfrei gebleichtem Papier gedruckt.

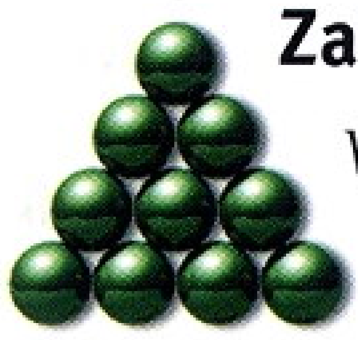
BILDQUELLENNACHWEIS:
FOTOS: Archiv des Autors: S. 32/33, 34; Archiv für Kunst und Geschichte/Berlin: S. 6, 11, 15, 17, 26, 29, 30, 36ur, 41, 47; DPA: S. 36ol, 43; Focus/Hamburg: S. 1, Mary Evans Picture Library/London: S. 21, 25; Ullstein Bilderdienst/Berlin: S. 12, 43ol; ZEFA Bildagentur/Düsseldorf: S. 45u.

ILLUSTRATIONEN: Joachim Knappe

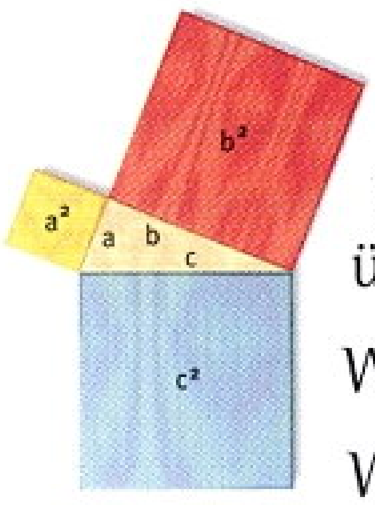
ISBN 3-7886-0252-X

Inhalt

Mehr als nur rechnen



Zahlen



Raum

Wahrscheinlichkeit

Geheimschriften

Mehr als nur rechnen

Worum geht es in der Mathematik?

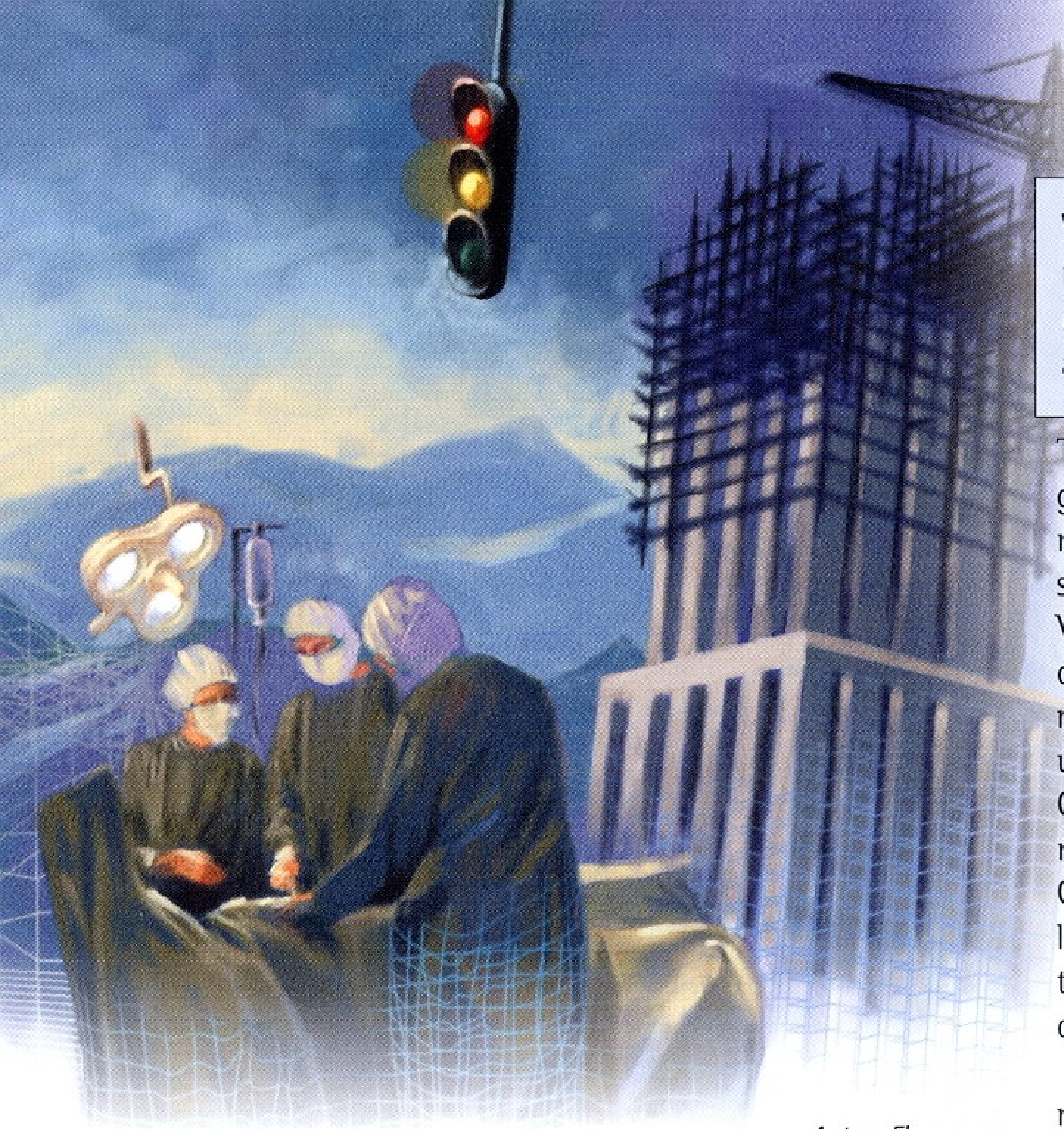
Um sich in einer fremden Stadt zurechtzufinden, nimmt man einen Stadtplan. Auf ihm sind alle Straßen dargestellt, die Einzelheiten fehlen aber. Ob der Fahrweg gepflastert ist oder geteert, ob an ihm Einfamilienhäuser stehen oder Bürohochhäuser, lässt sich nicht ausmachen. Verzeichnet ist nur das, worauf es ankommt: Welche Straßen man einschlagen muss, um von einem Ort zum anderen zu gelangen. In der Mathematik geht man ähnlich vor wie beim Lesen eines Stadtplans: Man lässt alles weg, was nicht zur Lösung einer Aufgabe nötig ist, und beschäftigt sich nur mit dem Wesentlichen. Mathematiker sprechen von Abstraktion. Ein Beispiel dafür sind die Zahlen. Die Zahl 3 bedeutet eben nicht „3 Äpfel" oder „3 Birnen", sondern „3 Stück von was auch immer". Genauso ist eine Kugel in der Mathematik nicht eine bestimmte Billiardkugel, sondern die Form an sich.

Wer einen Stadtplan liest, treibt Mathematik, auch wenn er sich dessen nicht bewusst ist. Er sieht ab von Häusern, Autos, Fußgängern und findet die gesuchte Straße, obwohl sie auf dem Plan nur als Strich auftaucht.

In der Mathematik, die oft als Königin der Wissenschaften bezeichnet wird, geht es nicht darum zu rechnen, sondern logische Zusammenhänge zu erkennen. (Rechnen zu können ist freilich eine Vor-

FÜR IMMER WAHR

Mathematik ist eine der ältesten Wissenschaften. Sämtliche antiken Kulturen, zum Beispiel die chinesische, die ägyptische, die babylonische und die griechische, kannten sie bereits. Anders als in jeder anderen Wissenschaft sind bei ihr einmal gefundene Tatsachen für immer wahr. 2 + 2 war bei den alten Griechen genauso gleich 4 wie es das heute ist oder im übernächsten Jahrhundert sein wird



Autos, Flugzeuge, Computer, moderne Medizin – überall steckt Mathematik dahinter

MATHEMATISCHE SCHÖNHEIT

Der britische Mathematiker Godfrey H. Hardy (1877-1947) schrieb: „Die Werke des Mathematikers müssen schön sein wie die des Malers oder Dichters. Die Ideen müssen harmonieren wie die Farben oder Worte." Was Mathematiker unter Schönheit verstehen, ist für Nicht-Fachleute nur schwer nachzuvollziehen. Als Prunkstücke gelten etwa Euklids Beweis der Unendlichkeit der Primzahlen (siehe Seite 15) und der Satz des Pythagoras (siehe Seite 27)

aussetzung, um Mathematik zu treiben). 876 mit 357 malzunehmen etwa gilt nicht als mathematische Leistung, wohl aber zu entdecken, dass es keine größte Zahl geben kann, da man aus jeder Zahl eine größere basteln kann, indem man 1 hinzuzählt.

In erster Linie befasst sich Mathematik mit Zahlen. Manche Teilgebiete haben indes zunächst nichts mit Zahlen zu tun. Die Geometrie etwa untersucht Figuren wie Dreiecke, Kreise oder Kugeln und deren Eigenschaften, die Wahrscheinlichkeitstheorie zufällige Ereignisse wie das Würfeln einer Sechs. Auch für diese Gebiete fanden Mathematiker Verbindungen zur Welt der Zahlen. Dadurch lassen sich zum Beispiel manche Eigenschaften geometrischer Figuren wie Geraden oder Kugeln einfach ausrechnen.

Was kann man mit Mathematik anfangen?

Ohne Mathematik gäbe es kein Fernsehen, keine Autos, keine Stromversorgung, keine Kühlschränke. Hinter jeglicher Technik steckt Mathematik. Im fertigen Produkt ist sie zwar häufig nicht mehr sichtbar. Doch hätte es ohne sie nicht hergestellt werden können. Viele Geräte funktionieren nur dank der Mathematik. Komplizierte Berechnungen etwa steuern Motor und Katalysator im Auto. Um einer CD Töne zu entlocken, sind mathematische Verfahren nötig. Und Computer gehen mit der gleichen logischen Strenge vor wie die Mathematik. Zu Recht nennt man sie daher mathematische Maschinen.

Die Stärke der Mathematik ist gerade, dass sie so abstrakt ist und jedes Problem auf seinen Kern zurückführt. So lassen sich Gemeinsamkeiten bei Aufgaben erkennen, die auf den ersten Blick völlig verschieden sind. Ob es um ein neues Wasserkraftwerk, leisere Flugzeuge,

Wer einen Stadtplan liest, treibt Mathematik

Babywindeln oder das Gießen von Metall geht, immer strömt etwas. Ob Wasser, Luft, Urin oder flüssiges Metall, kümmert nicht. Die anstehenden Rechnungen sind die selben. Einmal entwickelt, ist die Mathematik für alle vier Anwendungen einsatzbereit. Ebenso sind für den Mathematiker Busfahrpläne, Müllabfuhr und das Entwerfen von Computerchips ähnliche Aufgaben: Jedes Mal gilt es, Verbindungswege möglichst kurz zu halten.

Nicht nur Ingenieure und Techniker, auch Naturwissenschaften (und zunehmend auch die Geisteswissenschaften) brauchen Mathematik. Ob Physik, Chemie oder Biologie, alles beruht auf ihren Formeln.

Was treiben Mathematiker?

Viele Mathematiker sind damit beschäftigt, mathematische Theorien in die Wirklichkeit umzusetzen. Das geschieht heute meist mit Hilfe von Computern. Eine Minderheit unter den Mathematikern, die so genannten reinen Mathematiker, versucht, neue theoretische Erkenntnisse zu gewinnen. Dazu stellen sie so genannte Theoreme oder Sätze auf. Ein Beispiel für einen mathematischen Satz: „Eine Zahl ist genau dann ohne Rest durch 3 teilbar, wenn auch ihre Quersumme es ist." (Quersumme bezeichnet dabei das Ergebnis, wenn man die Stellen einer Zahl, also die Einer, Zehner, Hunderter usw. zusammenzählt. Die Quersumme von 84 etwa ist $8 + 4 = 12$).

Mit dem Aufstellen solcher Sätze geben sich Mathematiker nicht zufrieden. Sie versuchen, sie zu beweisen, das heißt, die Behauptung streng logisch aus der Voraussetzung und bereits bekannten Sätzen abzuleiten. Um unseren Beispielsatz als bewiesen anzusehen, genügt es dem Mathematiker nicht, wenn er eine Liste vorgesetzt bekommt:

$1 + 2 = 3$ durch 3 teilbar,
$12 = 3 \cdot 4$ durch 3 teilbar
$4 + 5 = 9$ durch 3 teilbar,
$45 = 3 \cdot 15$ durch 3 teilbar
$8 + 1 = 9$ durch 3 teilbar,
$81 = 3 \cdot 27$ durch 3 teilbar

Selbst wenn die Liste aus dem Computer stammt und viele hundert Zeilen hat, überzeugt ihn das nicht. Schließlich könnte die nächste Zeile die Behauptung zu Fall bringen.

Der Mathematiker gibt sich nicht damit zufrieden, Behauptungen mit ein paar Beispielen zu belegen oder sich darauf zu berufen, dass kein Kollege sie anzweifeln würde. Das einzige, was für ihn zählt, sind Beweise. Wie sich unser Beispielsatz mathematisch einwandfrei beweisen lässt, werden wir später sehen (siehe Seite 13).

Was unterscheidet Mathematik von den Naturwissenschaften?

In Physik, Chemie oder Biologie gilt eine Theorie als wahr, wenn genug Belege für sie vorhanden sind. Belege können zum Beispiel die Ergebnisse von Versuchen sein. Die Mathematik verlässt sich nicht auf Experimente, sondern auf unfehlbare Logik. Den Unterschied macht ein Beispiel klar: Ein Schachbrett hat $8 \cdot 8 = 64$ Felder. Nehmen wir zwei gegenüberliegende Eckfelder weg, bleiben 62 Felder übrig. Kann man 31 Dominosteine, die jeweils die Größe von zwei Feldern haben, so legen, dass sie das unvollständige Schachbrett ganz abdecken? (Siehe Abbildung auf der gegenüberliegenden Seite).

Galileo Galilei (1564-1642), der große italienische Gelehrte, schrieb einmal: „Die Philosophie steht in diesem großen Buch geschrieben, dem Universum, das unserem Blick ständig offenliegt. Aber das Buch ist nicht zu verstehen, wenn man nicht zuvor die Sprache erlernt hat, in der es geschrieben ist. Es ist in der Sprache der Mathematik geschrieben, und deren Buchstaben sind Kreise, Dreiecke und andere geometrische Figuren, ohne die es dem Menschen unmöglich ist, ein einziges Wort davon zu verstehen; ohne diese irrt man in einem dunklen Labyrinth umher."

Mehr als 60 000 FORSCHUNGSARBEITEN werden Jahr für Jahr in der Mathematik veröffentlicht. Jede einzelne davon enthält mindestens einen mathematischen Satz, der zuvor unbekannt war. Angesichts dieser Flut kann heute kein Mathematiker mehr den Überblick über das gesamte Fach behalten. Er muss seine Forschung auf wenige Spezialgebiete beschränken. Wie viele andere Wissenschaften zerfällt die Mathematik inzwischen in unzählige Teilgebiete.

Die strenge LOGIK der Mathematik schlägt sich in zahlreichen Witzen nieder, etwa in dem von der Bahnreise: Ein Ingenieur, ein Physiker und ein Mathematiker fahren mit dem Zug durch Schottland. Als sie an einem schwarzen Schaf vorbeikommen, sagt der Ingenieur: „Oh, in Schottland sind die Schafe schwarz." Der Physiker korrigiert ihn: „In Schottland gibt es mindestens ein schwarzes Schaf." Dem Mathematiker ist auch diese Behauptung noch zu gewagt: „In Schottland gibt es mindestens ein Schaf, das von mindestens einer Seite schwarz ist."

Kann man mit Dominosteinen das unvollständige Schachbrett lückenlos überdecken?

Der Naturwissenschaftler fängt nun an, herumzuprobieren und die Dominosteine in verschiedenen Anordnungen auszulegen. Nach ein paar Minuten stellt er fest, dass es nie aufgeht. Daraufhin beschließt er, die Aufgabe sei unlösbar. Da es aber Millionen verschiedene Möglichkeiten gibt, die Steine zu verteilen, kann der Naturwissenschaftler sich nie ganz sicher sein. Vielleicht findet ja doch irgendjemand einmal eine Lösung. Der Mathematiker hingegen setzt bei der Lösung der Aufgabe auf die Kraft der Logik. Er überlegt: Wir haben 30 weiße und 32 schwarze Felder. Jeder Dominostein bedeckt zwei benachbarte Felder. Diese sind immer verschiedenfarbig. Daher bedecken 30 Dominosteine 30 weiße und 30 schwarze Felder. Die restlichen zwei schwarzen Felder kann der letzte Dominostein nicht belegen, da sie wegen ihrer Gleichfarbigkeit nicht nebeneinander liegen können.

Zahlen

Was sind natürliche Zahlen?

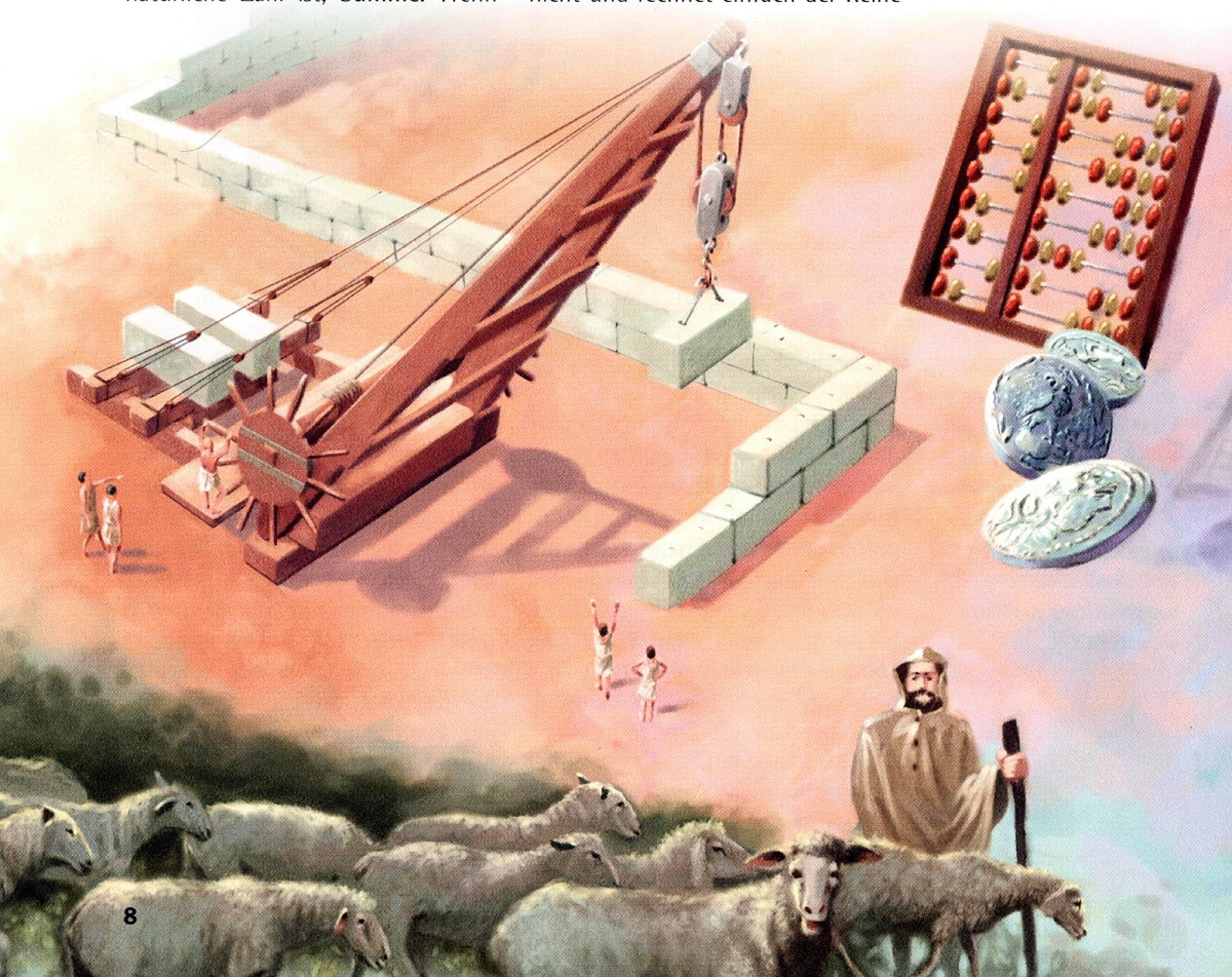
Ein großer Teil der Mathematik handelt von Zahlen. Die einfachsten sind die natürlichen Zahlen: 1, 2, 3, 4, und so weiter. Eine größte natürliche Zahl kann es nicht geben. Denn zu jeder denkbaren Zahl lässt sich ein Nachfolger finden. Man braucht zu ihr nur eine 1 dazuzuzählen. Es gibt also unendlich viele natürliche Zahlen. Die kleinste natürliche Zahl ist die 1.

Wenn wir zwei natürliche Zahlen zusammenzählen oder **addieren**, heißt das Ergebnis, das wieder eine natürliche Zahl ist, **Summe**. Wenn wir zwei natürliche Zahlen miteinander malnehmen oder **multiplizieren**, ist das Ergebnis, das **Produkt**, ebenfalls eine natürliche Zahl. Ein Beispiel: $6 \cdot 7 = 42$. Man sagt auch, 42 lässt sich ohne Rest durch 6 und durch 7 teilen. Weil $42 \cdot 1 = 42$, kann man 42 außerdem wie jede natürliche Zahl ohne Rest durch 1 und durch sich selbst teilen. Will man 42 zum Beispiel durch 5 teilen, bleibt hingegen ein Rest: $42 = 8 \cdot 5 + 2$.

Steht in einer Rechnung eine Klammer, ist diese zuerst auszurechnen. Es gilt also $5 \cdot (4 + 3) = 5 \cdot 7 = 35$. Berücksichtigt man die Klammer nicht und rechnet einfach der Reihe

Grosse Zahlen

Eine **Million** ist tausend mal tausend oder eine 1 mit sechs Nullen: 1 000 000. Eine **Milliarde** ist tausend Millionen oder eine 1 mit neun Nullen: 1 000 000 000. Eine **Billion** ist tausend Milliarden oder eine 1 mit zwölf Nullen. Eine **Billiarde** ist tausend Billionen oder eine 1 mit 15 Nullen.



Noch grössere Zahlen

Statt die vielen Nullen auszuschreiben, drücken Mathematiker die Zahlen als Potenzen der Zahl 10 aus. Eine Million ist 10^6, eine Milliarde 10^9, eine Billion 10^{12}, eine Billiarde 10^{15}. Weiter geht es mit der Trillion (10^{18}), Trilliarde (10^{21}), Quadrillion (10^{24}), Quadrilliarde (10^{27}).

nach von links nach rechts, kommt etwas anderes heraus: $5 \cdot 4 + 3 = 23$. Ein richtiges Ergebnis erhält man hingegen, wenn man die Zahlen in der Klammer beide mit 5 malnimmt und die Ergebnisse zusammenzählt: $5 \cdot (4 + 3) = 5 \cdot 4 + 5 \cdot 3 = 20 + 15 = 35$.

Eine Zahl heißt **gerade**, wenn sie sich ohne Rest durch 2 teilen lässt. Geht das nicht, nennen wir sie **ungerade**. Die geraden Zahlen sind also 2, 4, 6, 8, 10, 12, ..., die ungeraden 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...

Multipliziert man eine Zahl mit sich selbst, nennt man das **potenzieren**. In Zeichen: $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$, gesprochen: 3 hoch 2 oder die zweite Potenz von 3 oder 3 zum Quadrat, $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = 64$, gesprochen: 4 hoch 3 oder die dritte Potenz von 4, $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$, gesprochen: 2 hoch 4 oder die vierte Potenz von 2.

Der Vollständigkeit halber benutzen Mathematiker auch die erste Potenz. Eine Zahl hoch 1 ergibt immer die Zahl selbst, Beispiel: $5^1 = 5$. Sogar die nullte Potenz gibt es: Jede Zahl hoch 0 ist 1, also etwa $6^0 = 1$.

Im Laufe der Menschheitsgeschichte wurden Zahlen immer wichtiger, sei es, um Vieh zu zählen, Bauwerke zu errichten oder Handel zu treiben

Wer hat die Zahlen erfunden?

Wie vieles andere wurden die Zahlen in der Geschichte vermutlich mehrmals erfunden. Denn die Menschen brauchten die Zahlen. Sei es, weil ein Jäger den Säbelzahntiger, den er auf der Jagd erlegt hatte, bei seinem Nachbarn gegen drei Speere eintauschen wollte, oder weil ein Höhlenbewohner seiner Horde von den vier Mammuts erzählen wollte, die er in der Nähe gesehen hatte.

Einer der erstaunlichsten Belege für den Gebrauch von Zahlen stammt aus einer Fundstätte in Zaire, Zentralafrika, deren Bewohner heute Ishango heißen. Archäologen gruben dort einen Werkzeuggriff aus Knochen aus, der rund 11 000 Jahre alt ist (siehe Abbildung auf Seite 10). In ihm sind zahlreiche in Gruppen angeordnete Kerben angebracht. An einer Stelle finden sich etwa erst 11, dann 13, 17 und 19 Kerben. So schrieben die Ishango Zahlen. Was für uns einfach klingt, ist mitnichten selbstverständlich. Viele Stämme in entlegenen Gegenden der Welt kennen – genauso wie kleine Kinder übrigens – nur die ersten paar Zahlen. Für alles darüber haben sie nur das Wort „viele".

Die Zahlen wurden für die Menschen immer wichtiger. Je mehr Menschen an einem Ort lebten und je mehr sie Arbeiten unter sich auf-

Wer seine Schafe verkaufen will, muss die Zahlen beherrschen

Ein Rätsel ist bis heute, ob die Ishango zufällig oder bewusst in einen Knochen Gruppen von ausgerechnet 11, 13, 17 und 19 Kerben ritzten. 11, 13, 17 und 19 sind die einzigen Zahlen zwischen 10 und 20, die sich ohne Rest nur durch sich selbst und durch 1 teilen lassen. Zahlen mit dieser Eigenschaft nennt man Primzahlen (siehe Seite 14).

Der Ishango-Knochen mit Kerben, die Zahlen darstellen

teilten, desto mehr brauchten sie Zahlen. Der Hirte wollte wissen, wie viele Tiere seine Herde hatte und wie viele Kohlköpfe er gegen ein Schaf eintauschen konnte. Auf den Märkten mussten die Händler und Käufer Preise vergleichen und zusammenzählen. Wer über das Meer segeln wollte, musste wissen, welche Richtung er einschlagen sollte, um ans Ziel zu kommen. Mit Hilfe der Zahlen lernte der Mensch, Zeit, Entfernungen, Flächen und Inhalte zu berechnen. Um eine Pyramide zu bauen, mussten die alten Ägypter abschätzen, wie viele Steine sie dazu brauchten. Für solch komplizierte Aufgaben war es nötig, die Zahlen aufzuschreiben.

Was ist das Stellenwertsystem?

Unser heutiges Zahlensystem – die „arabischen Zahlen" – kam vor rund 900 Jahren über Arabien aus Indien. Der große Fortschritt bei ihm ist, dass eine Ziffer je nach Stellung einen anderen Wert bekommt. An der letzten Stelle bedeutet eine 1 etwa eins, an der drittletzten hundert (etwa in der Zahl 101). Dadurch lassen sich mit den zehn Zeichen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 alle denkbaren Zahlen ausdrücken, seien sie auch noch so groß. Wenn wir eine Zahl schreiben, zerlegen wir sie in Einer, Zehner, Hunderter, Tausender, Zehntausender..., kurz, in so genannte **Zehnerpotenzen:**

$10^0 = 1$, $10^1 = 10$, $10^2 = 10 \cdot 10 = 100$, $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$. $10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$...

263 ist nur eine abkürzende Schreibweise für $2 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$, 5007 für $5 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$.

Die alten Ägypter, Griechen und Römer kannten das Prinzip des Stellenwertes hingegen noch nicht. Bei den Römern beispielsweise stand I für 1, V für 5, X für 10, L für 50, C für 100, L für 500, M für 1000. Um Zahlen zwischen diesen Werten auszudrücken, wurden die Zeichen wiederholt: III bedeutete 3, XXXVII 37. Mit ihrem Zahlensystem brauch-

Zählen im Urwald

Bei den Bakairi, einem Volksstamm, der im brasilianischen Regenwald lebt, heißt eins „tokále", zwei „ahâge". Um weiterzuzählen, setzen sie die beiden Wörter hintereinander: „ahâge tokále" bedeutet drei. Das geht so weiter bis sechs. Darüber behelfen sich die Bakairi mit Fingern und Zehen. Bei Zahlen über zwanzig raufen sie sich die Haare und rufen „méra méra".

ZAHLZEICHEN

Das einfache Zahlensystem der Ishango – jede Zahl wird durch die entsprechende Anzahl an Strichen dargestellt – genügte bald den Anforderungen nicht mehr. Wer mochte schon 100 Kerben nebeneinander ritzen? Oder gar 1000? Und wer wollte das lesen? Viele alte Völker kannten daher spezielle Zeichen für große Zahlen.

Im altchinesischen Zahlensystem war das Zeichen für 100 , das für 1000 . Die Ägypter schrieben 100 wie und 1000 wie . Wollten die Mayas große Zahlen schreiben, setzten sie verschiedene Zeichen untereinander. Diese Anordnung bedeutete Multiplikation. Ihr Zeichen für 100 war , das heißt 5 — mal 20 .

Für das RECHNEN MIT DER NULL sind die Regeln einfach: Zählt man 0 zu irgendeiner Zahl dazu oder zieht 0 ab, bleibt die Zahl unverändert erhalten. Nimmt man sie mit 0 mal, kommt 0 heraus. Eines aber geht nicht: durch 0 zu teilen.

ten die Römer nicht nur immer neue Symbole, wenn sie größere Zahlen schreiben wollten. Auch das Multiplizieren oder Malnehmen ist ohne Stellenwertsystem viel schwieriger. 10 mal 12 lässt sich im Stellenwertsystem lösen, indem an die 12 einfach eine 0 angehängt wird: 120. X mal XII sieht man die Lösung (CXX) nicht so schnell an.

Wer erfand die Null?

Die alten Babylonier kannten bereits vor 4000 Jahren ein Stellenwertsystem. Sie drückten ihre Zeichen mit einem Keil in Tontafeln (daher der Name Keilschrift), die sie anschließend brannten. Als Zeichen für die 1 benutzten sie einen senkrechten Keil: ▼, für die 10 einen Winkel: ◀. Die Zeichengruppe, die am weitesten rechts stand, galt bei ihnen als Einer, daneben kamen nicht wie bei uns die Zehner, sondern Sechziger. Die Zahl

▼▼◀◀▼◀▼▼▼

ist zu lesen als $2 \cdot 60^2 + 21 \cdot 60 + 13 \cdot 60^0 = 7200 + 1260 + 13 = 8473$. Das Zahlensystem der Babylonier lebt heute noch fort, wenn wir die Stunde in 60 Minuten und die Minute in 60 Sekunden einteilen.

In Schwierigkeit kamen die Babylonier bei Zahlen wie 3601: ▼▼. Denn die Zahl 61 schreibt sich genauso. Was hier fehlt, ist ein Platzhalter für die zweite Stelle. Bei den arabischen Zahlen übernimmt diese Rolle die 0. Niemand wird 101 und 11 verwechseln. Aber die Babylonier kannten keine 0. Deshalb erfanden sie im fünften vorchristlichen Jahrhundert, gegen Ende ihrer Blütezeit, ein spezielles Zeichen, um eine fehlende Stelle zu kennzeichnen. Allein stehen durfte dieses Zeichen aber nicht.

Obwohl die alten Babylonier, Ägypter, Griechen und Chinesen viel von Mathematik wussten, hatten sie die 0 nicht entdeckt. Anscheinend scheuten sie unwillkürlich davor zurück, ein Zeichen dafür zu schreiben, dass nichts da ist.

Um 500 n. Chr. schrieb der Inder Aryabhata erstmals eine Null. Er nannte sie „Kha", was Loch und Höhle, aber auch Himmel bedeutete. Um das Jahr 700 übernahmen die Araber das Zeichen von dem indischen Mathematiker Brahma-Gupta. Dessen Mathematik-Buch wurde im 7. und 8. Jahrhundert mehrfach ins Arabische übersetzt. Aus dem Vorderen Orient kam die Null ab dem 11. Jahrhundert nach Europa.

Erst Adam Riese (1492-1559) setzte mit seinen Lehrbüchern, die den Schulunterricht lange Zeit bestimmten, die Null in Europa durch

Was sind Dualzahlen?

Das Zählen fängt beim Kleinkind wie auch bei den alten Völkern mit den Fingern an. Deswegen (und nur deswegen) haben wir heute zehn verschiedene Ziffern und rechnen im so genannten Zehner- oder Dezimalsystem (von lateinisch decimus = der zehnte).

Das Stellenwertsystem funktioniert auch mit jeder anderen Anzahl von Symbolen. Computer etwa kennen nur zwei Symbole: 0 bedeutet Strom aus, 1 Strom an. Alle anderen Zahlen werden mit diesen beiden Ziffern gebildet. 10 (zu lesen nicht als „zehn", sondern als „eins null") steht in diesem Zahlensystem, dem so genannten Dualsystem (nach lateinisch duo = zwei) , für 2, 11 für 3, 100 für 4, 101 für 5 und so weiter. Auch hier hat eine 1 unterschiedliche Werte, je nachdem wo sie steht. An der letzten Stelle bedeutet sie 1, an der vorletzten 2, an der vorvorletzten 4, an der vorvorvorletzten 8.

Schreibt man eine Zahl im Zweier- oder Dualsystem, zerlegt man sie in Zweierpotenzen:

$2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 2 \cdot 2 = 4$, $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $2^6 = 64$, $2^7 = 128$, $2^8 = 256$...

Die Dualzahl 11111 steht so für $1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31$, 100000111 bedeutet $1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 263$.

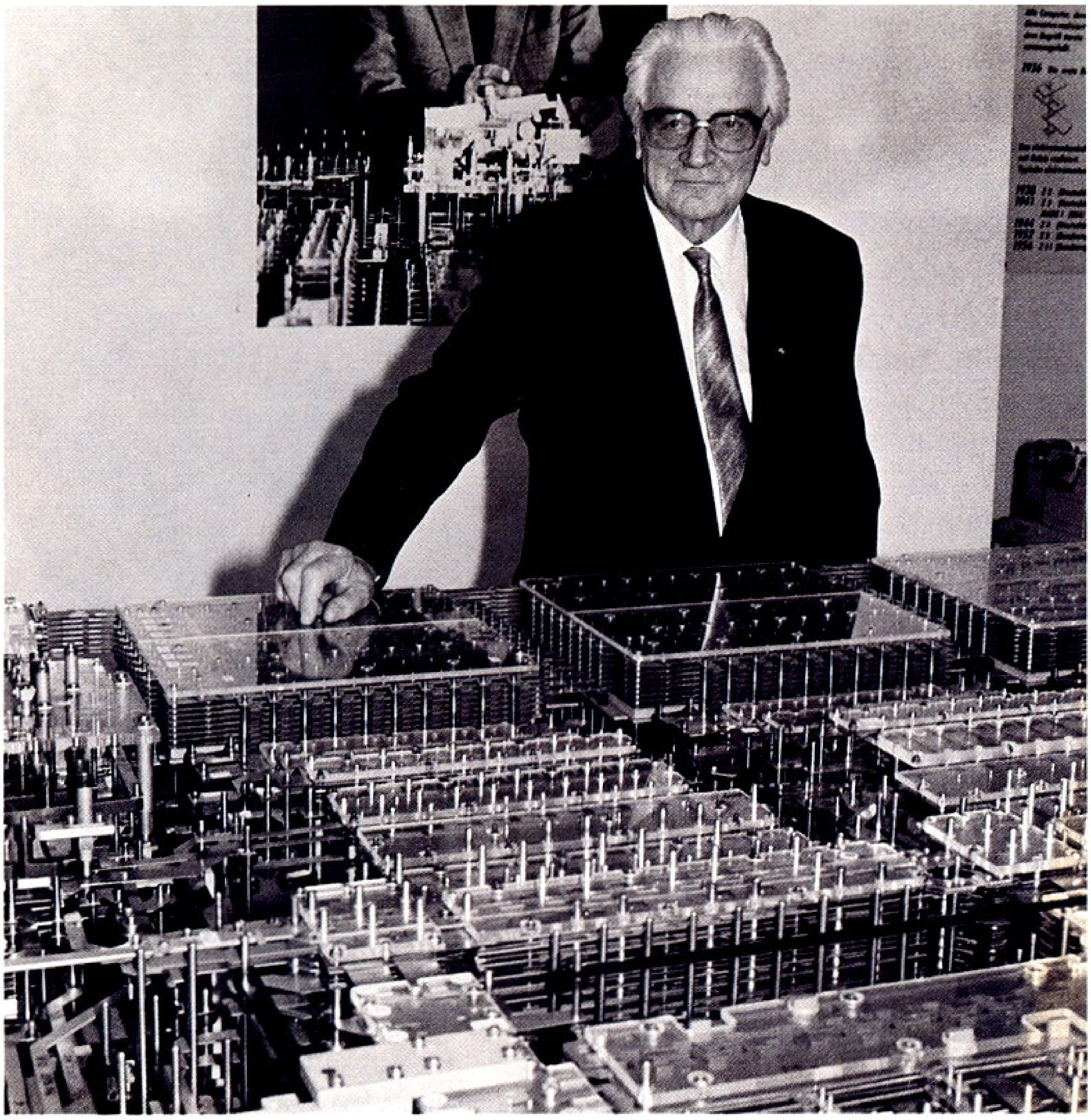
Dezimal-	Dualsystem				
0					0
1					1
2				1	0
3				1	1
4			1	0	0
5			1	0	1
6			1	1	0
7			1	1	1
8		1	0	0	0
9		1	0	0	1
10		1	0	1	0
11		1	0	1	1
12		1	1	0	0
13		1	1	0	1
14		1	1	1	0
15		1	1	1	1
16	1	0	0	0	0

Mit nur zwei Zeichen lassen sich alle Zahlen darstellen

Mit DUALZAHLEN kann man rechnen wie mit Dezimalzahlen. Bei einer Addition schreibt man zum Beispiel die beiden Zahlen untereinander und zählt die Stellen rechts beginnend zusammen. Einziger Unterschied: 1 + 1 ergibt eine 0 und einen Übertrag (ähnlich wie im Dezimalsystem bei 5 + 5). Ein Beispiel:

$$\begin{array}{r} 101 \\ +\ 101 \\ \hline 1010 \end{array}$$

1 + 1 = 0 und Übertrag 1



Mit Dualzahlen rechneten schon die ersten Computer. Hier steht der Erfinder des Computers, Konrad Zuse, vor dem Nachbau des von ihm 1938 entworfenen Modells Zuse 1.

Durch das **Rechnen mit Buchstaben** lassen sich viele Behauptungen einfach formulieren und beweisen. Wollen Mathematiker den Zahlenwert für einen Buchstaben berechnen, verwenden sie gerne x, y und z, andere Buchstaben wie a, b, c benutzen sie dagegen als Platzhalter.

Mathematische Zaubertricks

Bei manchen Zaubertricks braucht der Vorführende eine große Fingerfertigkeit und muss sie lange üben. Andere, wie zum Beispiel das „Zersägen lebender Menschen", erfordern eine ausgeklügelte Technik. Mathematische Zaubertricks hingegen sind ganz einfach, jeder kann sie vorführen. Sie funktionieren, weil die ihnen zugrunde liegenden Berechnungen – einmal ausgeführt – immer stimmen.

Wie rechnet man mit Buchstaben?

Mathematiker verwenden häufig Buchstaben zum Rechnen. Sie können für unbekannte Größen stehen oder als Platzhalter für irgendetwas. Wir können zum Beispiel sagen, a stehe für einen Sack Äpfel. Dann sind 5 Säcke mit Äpfeln = $5 \cdot a$ oder $7 \cdot a$ = 7 Säcke mit Äpfeln. Wollen wir nun wissen, wie viele Säcke es insgesamt sind, können wir rechnen $5 \cdot a + 7 \cdot a = (5 + 7) \cdot a = 12 \cdot a$. Das gilt natürlich auch, wenn a für einen Sack Birnen steht oder auch für eine beliebige natürliche Zahl. Denn welche Zahl wir auch für a einsetzen, die linke Seite ist immer genauso groß wie die rechte.

Das Rechnen mit Buchstaben, das auf den ersten Blick etwas seltsam wirkt, macht viele Aufgaben leichter. Ein Beispiel ist die Frage: „Wie heißt die Zahl, deren um 1 vermindertes Dreifaches zu ihrem Doppelten addiert 9 ergibt?" Die komplizierte Formulierung lässt sich einfach aufschreiben, wenn x für die gesuchte Zahl steht. Für sie soll gelten:

$$2 \cdot x + 3 \cdot x - 1 = 9$$

In dieser Gleichung ließe sich die Lösung schon erraten. Wir können sie aber auch ausrechnen. Dazu müssen wir die Regeln zum **Rechnen mit Gleichungen** kennen. Bei Gleichungen darf man etwas dazuzählen oder sie malnehmen, wenn man nur auf beiden Seiten dasselbe tut. Unsere Gleichung lässt sich so umformen:

$$2 \cdot x + 3 \cdot x - 1 = 5 \cdot x - 1 = 9$$

Auf beiden Seiten 1 dazuzählen ergibt:

$$5 \cdot x - 1 + 1 = 9 + 1$$

also

$$5 \cdot x = 10$$

Nun werden beide Seiten durch 5 geteilt:

$$x = 2$$

Mathematiker verwenden einen Buchstaben nicht nur wie in diesem Fall für eine Größe, die sie ausrechnen wollen, sondern auch als Platzhalter für eine nicht näher bestimmte Zahl. So können sie viele allgemeine Aussagen beweisen, zum Beispiel den Satz: „Eine Zahl ist genau dann ohne Rest durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme es ist".

Der Einfachheit halber beweisen wir das zunächst nur für zweistellige Zahlen. Jede zweistellige Zahl lässt sich schreiben als $10 \cdot b + c$, wobei b für eine der Zahlen 1, 2, 3 ... 9 steht und c für eine der Zahlen 0, 1, 2 ... 9. Die Behauptung ist nun, dass $10 \cdot b + c$ genau dann durch 3 teilbar ist, wenn $b + c$ es ist. Es gilt $10 \cdot b + c = 9 \cdot b + b + c$. Da 9 durch 3 teilbar ist, ist auch $9 \cdot b$ durch 3 teilbar. Daraus folgt, dass $9 \cdot b + b + c$ genau dann durch 3 teilbar ist, wenn $b + c$ es ist.

Für dreistellige Zahlen sieht der Beweis ähnlich aus: Jede dreistellige Zahl lässt sich schreiben als $100 \cdot a + 10 \cdot b + c$, wobei a für eine der Zahlen 1, 2, 3 ... 9 steht und b und c je für eine der Zahlen 0, 1, 2 ... 9. Es gilt $100 \cdot a + 10 \cdot b + c = 99 \cdot a + 9 \cdot b + a + b + c$. Da 99 und 9 durch 3 teilbar sind, sind es auch $99 \cdot a$ und $9 \cdot b$.

Kann man mit Mathematik zaubern?

Es gibt eine Reihe mathematischer Zaubertricks. Ein Beispiel: Der Zauberer gibt einem Freiwilligen aus dem Publikum ein paar Münzen und sagt: „Nimm einen Teil der Münzen in die linke Hand, den Rest in die rechte. Mit mathekadabrischen Kräften werde ich erspüren, wie viele Münzen du in welche Hand genommen hast." Dann fordert der Zauberer den Freiwilligen auf, die Anzahl der Münzen der linken Hand mit 5 malzunehmen, die der rechten mit 4, die Ergebnisse zusammenzuzählen und das Endergebnis laut zu sagen. Nun fuchtelt er geheimnisvoll mit seinem Zauberstab, murmelt „Simsalabim und dreimal schwarzer

Ziehen wir bei $a = x + 36$ auf beiden Seiten 36 ab, erhalten wir $x = a - 36$. Der Zauberer braucht also nur vom Rechenergebnis seines Freiwilligen 36 abzuziehen und weiß, wie viele Münzen dieser in der linken Hand hält. War das Ergebnis etwa 40, hat der Freiwillige $40 - 36 = 4$ Münzen in der linken Hand. Wir rechnen nach: $5 \cdot 4 + 4 \cdot 5 = 20 + 20 = 40$.

Nicht Magie, sondern Mathematik steckt hinter dem Zaubertrick mit den Münzen

Kater" und verkündet die richtige Anzahl Münzen.

Der Trick dabei ist ganz einfach: Der Zauberer tut zwar so, als ob er dem Freiwilligen irgendeine Anzahl Münzen überreicht. In Wirklichkeit gibt er ihm genau neun Stück. Der Rest ist eine leichte Rechenübung. Die Anzahl der Münzen in der linken Hand bezeichnen wir mit x. Dann liegen $9 - x$ Münzen in der rechten. Ist nun a das Endergebnis der Rechnung, die der Freiwillige anstellen sollte, dann gilt:

$$\begin{aligned} a &= 5 \cdot x + 4 \cdot (9 - x) \\ &= 5 \cdot x + 36 - 4 \cdot x \\ &= x + 36 \end{aligned}$$

Was sind Primzahlen?

Primzahlen sind die natürlichen Zahlen, die man ohne Rest nur durch sich selbst und 1 teilen kann. Beispiele sind 7 oder 11. Teilt man eine der beiden durch eine andere Zahl, bleibt ein Rest. Man sagt auch, 7 und 11 sind prim. 8 hingegen ist nicht prim. Denn $8 = 2 \cdot 4$.

Die 1 gilt nicht als Primzahl. Die ersten Primzahlen lauten daher: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37,...

Die Primzahlen sind die Baustei-

Der deutsche Mathematiker CHRISTIAN GOLDBACH (1690–1764) behauptete: Jede gerade Zahl größer als 2 lässt sich als Summe zweier Primzahlen darstellen. So gilt etwa $8 = 5 + 3$, $30 = 23 + 7$ und $166 = 83 + 83$. Computer haben die Goldbachsche Vermutung zwar für mehr als die ersten 400 Billionen Zahlen bestätigt. Ein allgemeiner Beweis steht aber noch aus.

Der Euklidsche Beweis der Unendlichkeit der Primzahlen gilt als ‚Schmuckstück' der Mathematik. Der amerikanische Mathematiker William Dunham sieht in ihm einen Test dafür, ob jemand mit dem Fach Mathematik etwas anfangen kann oder nicht: „Diejenigen mit einem natürlichen Hang zur Mathematik rührt er zu Tränen, diejenigen ohne einen solchen Hang finden ihn zum Heulen." Wie ging dir es?

ne der natürlichen Zahlen. Man kann jede natürliche Zahl als Produkt von Primzahlen darstellen. Der so genannte Hauptsatz der Zahlentheorie besagt, dass man das auf genau eine Weise tun kann. Ein Beispiel: $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Es lassen sich keine anderen Primzahlen als 2, 3, 11 und 13 finden, deren Produkt 2002 ergäbe.

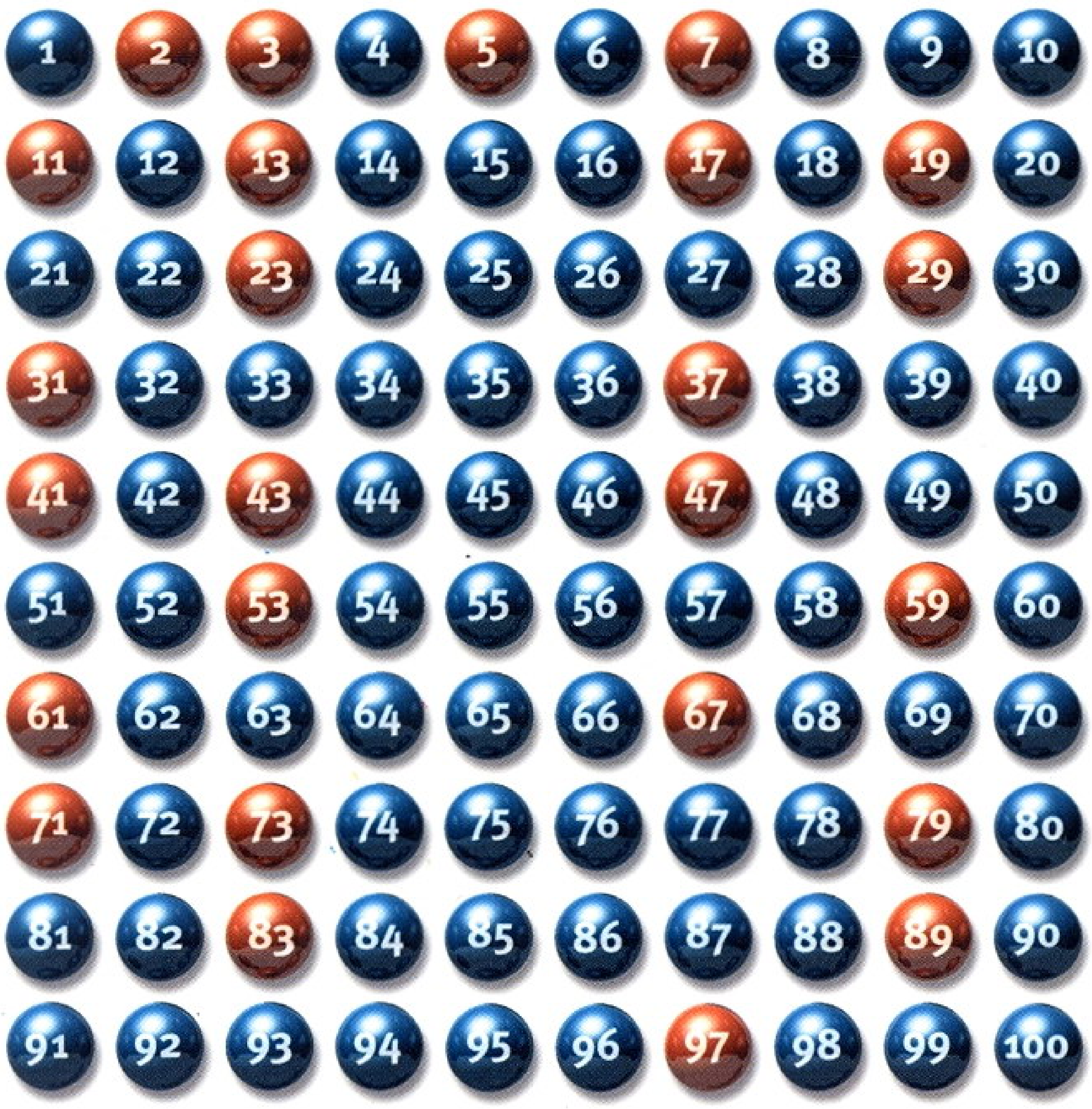
Von Primzahlen waren schon die alten Griechen fasziniert. Und noch heute forschen Mathematiker an ihren Geheimnissen. Noch längst haben sie nicht alle ihre Eigenschaften enträtselt.

Der griechische Mathematiker Euklid bewies, dass es unendlich viele Primzahlen gibt

Wie viele Primzahlen gibt es?

Diese Frage stellte sich schon der griechische Gelehrte Euklid im dritten vorchristlichen Jahrhundert. Mit einer genialen Überlegung bewies er, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Euklid wandte dabei eine in der Mathematik häufig benutzte Methode an: Er ging vom Gegenteil dessen aus, was er beweisen wollte, und rechnete damit, bis er auf einen Widerspruch stieß. Wenn er dabei immer streng logisch gefolgert hatte, musste die Annahme falsch sein.

Das Muster der Primzahlen (rot) unter den ersten hundert Zahlen



Euklid begann damit, anzunehmen, es gebe endlich viele Primzahlen. Die müsste man dann auflisten können als $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ (n steht dabei für eine natürliche Zahl, die Anzahl der Primzahlen, $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ für die nicht näher bestimmten Primzahlen). Dann bildete der Grieche eine neue Zahl $p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n + 1$. Diese Zahl p kann nun wegen der +1 hinten ohne Rest nicht durch p_1, nicht durch p_2, nicht durch p_3, ... und nicht durch p_n geteilt werden. Da aber jede Zahl als Produkt von Primzahlen dargestellt werden kann und $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ alle Primzahlen sind, die es gibt, führt das zu einem Widerspruch. Also muss die Annahme falsch sein, und es muss unendlich viele Primzahlen geben.

Die Wissenschaftler jagen nach immer neuen Rekorden. Die größten bekannten Primzahlen haben mehrere hunderttausend Stellen. Das ist unvorstellbar groß. Eine einzige von ihnen aufzuschreiben würde mehrere Was-ist-was-Bände füllen. Zum Vergleich: Die Anzahl der Elementarteilchen im Universum wird auf eine achtzigstellige Zahl geschätzt.

Was ist die größte bekannte Primzahl?

Berechnet werden die Primzahlmonster mit allerlei mathematischen Tricks und ausgeklügelter Computerprogrammierung. Nahezu alle bekannten riesig großen Primzahlen sind so genannte Mersennezahlen, die nach dem französischen Mathematiker Marin Mersenne (1588-1648) benannt sind. Für sie haben die Forscher besonders schnelle Verfahren ausgetüftelt, um zu prüfen, ob sie prim sind. Mersennezahlen sind von der Form $2^n - 1$, also 2 n-mal mit sich selbst malgenommen minus 1 (n steht dabei für irgendeine natürliche Zahl). Nicht alle Mersennezahlen sind Primzahlen: $2^2 - 1 = 3$ und $2^3 - 1 = 7$ sind zwar prim, $2^4 - 1 = 15 = 3 \cdot 5$ hingegen nicht.

Was sind Dreieckszahlen?

Ein Mathe-Lehrer im 18. Jahrhundert wollte einmal seine Ruhe haben und ließ seine Schüler während der Stunde die Zahlen von 1 bis 100 zusammenzählen. Doch seine Rechnung ging nicht auf. Nach wenigen Minuten war der zehnjährige Carl Friedrich fertig. Statt stur eine Zahl zur anderen zu addieren, fasste er sie geschickter zusammen: Er zählte die erste und die letzte Zahl zusammen, die zweite und die zweitletzte, die dritte und die drittletzte und so weiter bis zur 50. und 50.letzten. Das Ergebnis bei diesen Rechnungen war immer gleich: $101 = 1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = ... = 50 + 51$. Statt $1 + 2 + 3 + 4 + ... + 100$ rechnete er $1 + 100 + 2 + 99 + 3 + 98 + ... + 50 + 51$, also $50 \cdot 101 = 5050$. Aus dem kleinen Carl Friedrich Gauß wurde übrigens ein großer Mathematiker.

Auf die Formel zum Addieren der Zahlen von 1 bis 100 kam der Schüler Carl Friedrich zwar von selbst. Bekannt war sie jedoch bereits den alten Griechen, die aus aufeinander folgenden Zahlen Dreiecke bildeten. Die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 lassen sich etwa so darstellen:

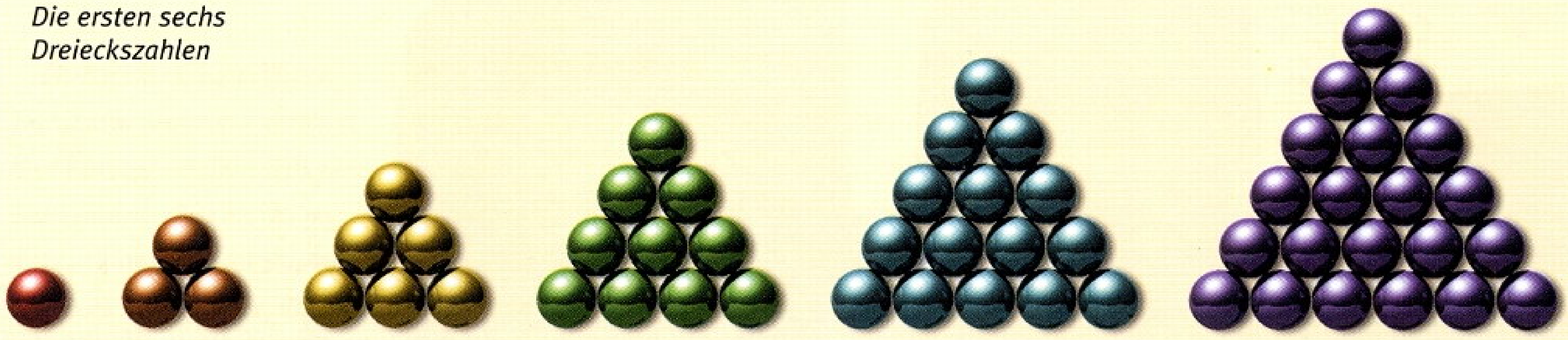
21 Kugeln lassen sich zu einem Dreieck anordnen. Die Zahl 21 ist deswegen eine Dreieckszahl

Wenn sich mit einer Anzahl von Punkten ein Dreieck legen ließ, nannten die Schüler des Mathematikers Pythagoras (um 570-480 v. Chr.) diese Zahl Dreieckszahl. Sie fanden eine allgemeine Formel für Dreieckszahlen: Eine Zahl ist Dreieckszahl, wenn sie sich darstellen lässt als $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$, wobei n für eine natürliche Zahl steht.

Setzen wir n = 100, erhalten wir Gauß' Rechnung: $\frac{100 \cdot 101}{2} = 50 \cdot 101 = 5050$. Für n = 6 ergibt sich die Anzahl der Punkte in der Zeichnung: $\frac{6 \cdot 7}{2} = 21$, die sechste Dreieckszahl ist daher 21.

Rätsel über Primzahlen sind noch längst nicht alle gelöst. Offen ist etwa die Frage, wie viele Primzahlzwillinge es gibt. Primzahlzwillinge sind zwei benachbarte ungerade Zahlen, die beide Primzahlen sind. Beispiele sind 5 und 7 oder 101 und 103. Bisher weiß niemand, ob die Reihe der Primzahlzwillinge abbricht oder sich – wie bei den Primzahlen – beliebig lang fortsetzt.

Primzahldrillinge nennt man drei aufeinander folgende ungerade Zahlen, die alle Primzahlen sind. Es gibt nur einen einzigen Primzahldrilling: 3, 5, 7. Bei allen anderen Dreierpacks ist immer eine Zahl durch 3 teilbar und deshalb keine Primzahl.

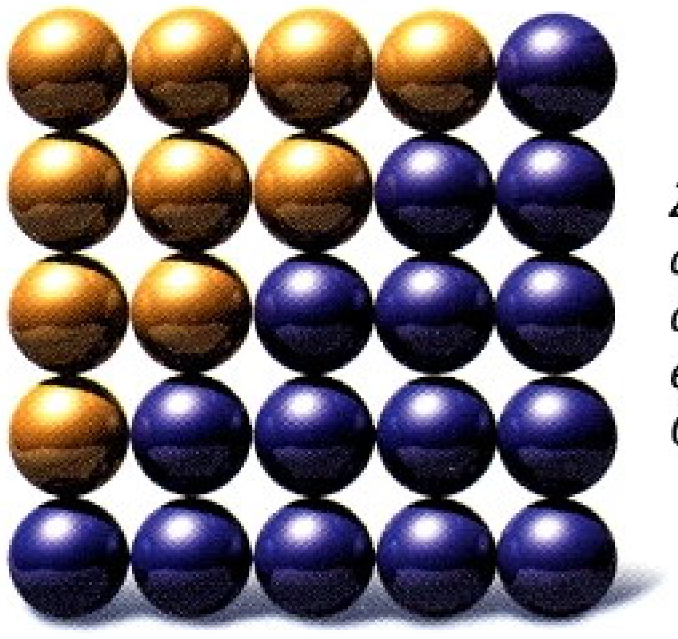


Die ersten sechs Dreieckszahlen

Carl Friedrich Gauss **(1777-1855) war einer der bedeutendsten Mathematiker der Geschichte. Er leistete nicht nur Bahnbrechendes in zahlreichen Gebieten der Mathematik, sondern befasste sich auch mit Astronomie, Magnetismus, Mechanik und Optik.**

Was sind Quadratzahlen?

Ähnlich wie Dreiecke lassen sich mit Kieselsteinen oder Murmeln auch Quadrate – Rechtecke, deren Seiten alle gleich lang sind – legen. Die Anzahlen der Steine, die ein Quadrat bilden, werden Quadratzahlen genannt. Vier Steine bilden z. B. ein Quadrat der Seitenlänge 2, 9 Steine eines der Seitenlänge 3 und 16 Steine eines der Seitenlänge 4.



Zwei aufeinander folgende Dreiecke ergeben ein Quadrat

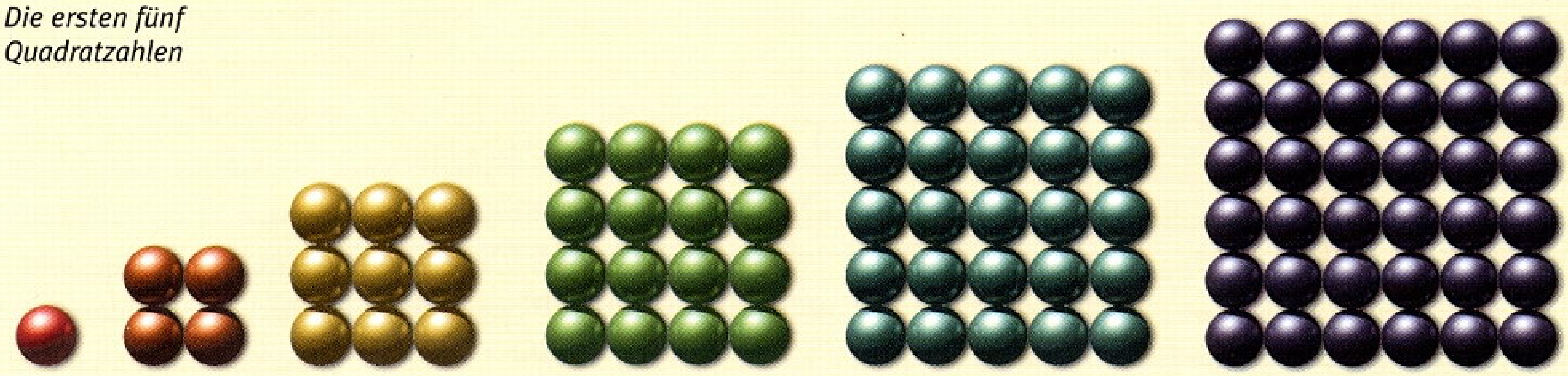
Während die Dreieckszahlen die Summen der ersten Zahlen sind, ergeben sich Quadratzahlen als Summen der ersten ungeraden Zahlen:

$$4 = 2^2 = 1 + 3$$
$$9 = 3^2 = 1 + 3 + 5$$
$$16 = 4^2 = 1 + 3 + 5 + 7$$
$$25 = 5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$$

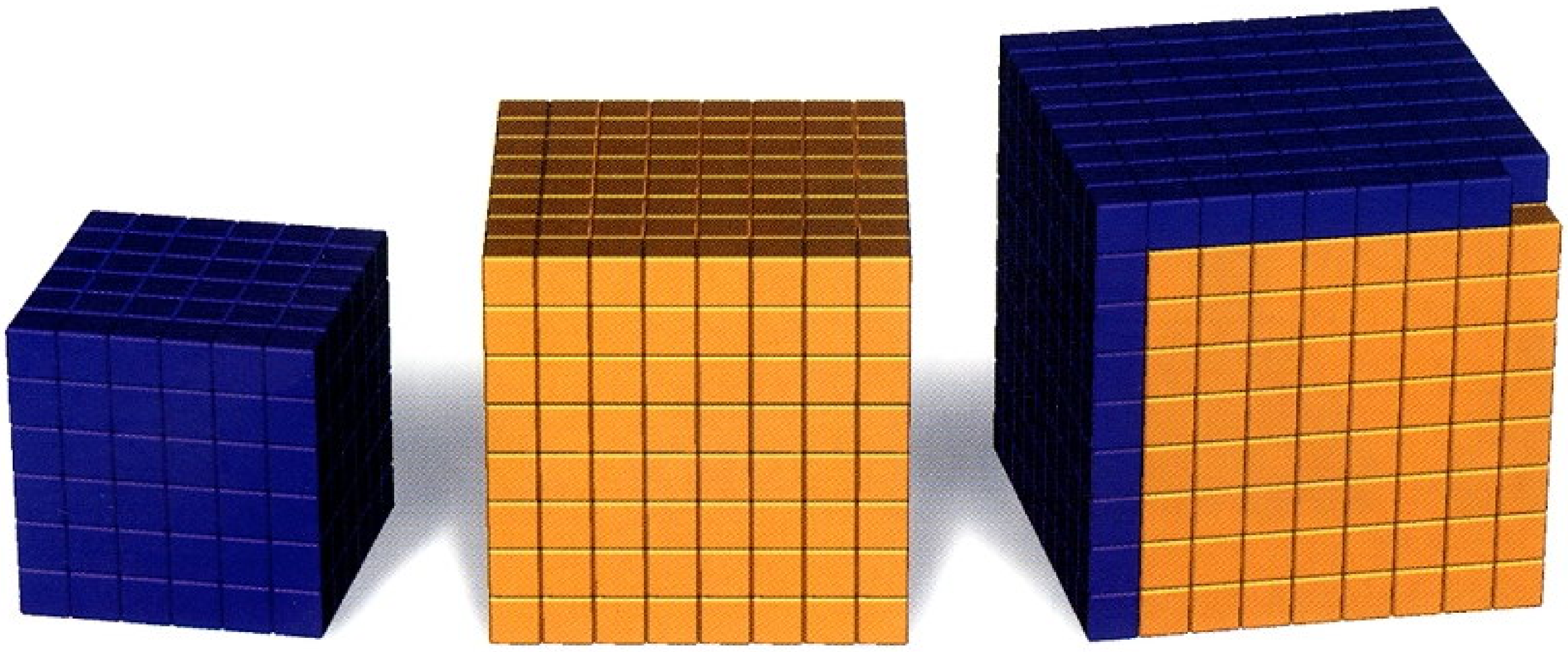
Die Anzahl der zu addierenden ungeraden Zahlen ist dabei genau die Zahl, die hoch zwei genommen – man sagt auch quadriert – wird.

Was sagt der Satz von Fermat?

Eine der berühmtesten mathematischen Behauptungen ist der Satz von Fermat. Der Jurist und Hobby-Mathematiker Pierre de Fermat (1601-1665) krakelte sie vor über 350 Jahren an den Rand einer Buchseite. Daneben schrieb er: „Für diese Behauptung habe ich einen wahrhaft wunderbaren Beweis gefunden, aber dieser Rand ist zu schmal, ihn zu fassen." Seinen wahrhaft wunderbaren Beweis nahm Fermat mit ins Grab. Fortan verzweifelten ganze Generationen von Mathematikern an der Aufgabe. Erst 1994 gelang es dem



Die ersten fünf Quadratzahlen



***Würfelzahlen** ergeben sich, wenn man kleine Würfel zu großen zusammenlegt. Die beiden Würfel links bestehen aus 63 = 216 bzw. 83 = 512 Würfelchen. Allgemein braucht man für einen Würfel der Seitenlänge m Würfelchen genau m3 Würfelchen. Aus den Würfelchen, die zwei Würfel bilden, lässt sich nie ein dritter (größerer) bauen, ohne dass Würfelchen übrig blieben oder fehlten. Das besagt der Satz von Fermat für n = 3. Beim rechten Würfel mit der Seitenlänge 9 fehlt genau ein Würfelchen. Denn 63 + 83 = 216 + 512 = 728 = 729 – 1 = 93 – 1.*

Briten Andrew Wiles, die Behauptung zu beweisen. Seine Arbeit füllt rund 160 Druckseiten und beruft sich auf neueste Entwicklungen in der Mathematik. Dass Fermat diesen Beweis gefunden hatte, scheint ausgeschlossen. Wahrscheinlich war er wie viele seiner Nachfolger einem Denkfehler aufgesessen.

Der Beweis ist zwar äußerst vertrackt, die Behauptung aber nicht schwer zu verstehen. Es geht um die Lösungen von Gleichungen. Die Gleichung

$$x + y = z$$

zum Beispiel besitzt viele Lösungen in den natürlichen Zahlen, etwa $x = 1$, $y = 1$, $z = 2$ oder $x = 12$, $y = 13$, $z = 25$. Ebenso gibt es Lösungen für

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

etwa $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$, denn $3^2 + 4^2 = 9+16 = 25 = 5^2$, oder $x = 5$, $y = 12$, $z = 13$, denn $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$. Fermat fragte sich nun, ob es auch bei höheren Potenzen Lösungen gebe, für die Gleichung

$$x^3 + y^3 = z^3$$

etwa oder allgemein für

$$x^n + y^n = z^n,$$

wobei n für eine beliebige natürliche Zahl steht, die größer als 2 ist. Wie Fermat behauptete und Wiles bewies, gibt es für diese Gleichungen keine ganzzahligen Lösungen.

Was sind rationale Zahlen?

Das Zusammenzählen zweier Zahlen rückgängig zu machen heißt die eine von der anderen abzuziehen (zu subtrahieren). Dabei kann ein Problem auftreten: Was passiert, wenn man 3 von 2 abziehen möchte? Dann reichen die natürlichen Zahlen nicht mehr, **negative Zahlen** (kenntlich an einem Minuszeichen) müssen her. Zusammen mit den natürlichen bilden sie die ganzen Zahlen. Zwar stellte sich wohl kaum je ein Händler ein negatives Kamel vor. Doch spätestens bei Schulden bekommen negative Zahlen praktische Bedeutung.

Doch auch die ganzen Zahlen genügen nicht. Will ein Bauer fünf Morgen Land an seine drei Söhne vererben, muss er 5 durch 3 teilen können. Da sich 5 nicht ohne Rest durch 3 teilen lässt, bildet man einen so genannten **Bruch**: $\frac{5}{3}$, in Worten fünf Drittel. Die oben stehende Zahl heißt **Zähler**, die unten

Als sich Paul Wolfskehl (1856-1906) von seiner Angebeteten einen Korb holte, nahm ihn das so mit, dass er beschloss, sich umzubringen. Punkt Mitternacht wollte sich der Darmstädter Industrielle, studierte Mathematiker und Arzt in den Kopf schießen. Nachdem er bereits vor diesem Zeitpunkt alles geregelt hatte, begann er zum Zeitvertreib in der Bibliothek Arbeiten über Fermats Satz zu studieren. Darüber vergaß er die Zeit, der Termin verstrich. Wolfskehl verwarf daraufhin seinen Plan, die Beschäftigung mit Mathematik hatte seine Lebensgeister wieder geweckt. Zum Dank schrieb er sein Testament um. 100 000 Mark – nach heutiger Kaufkraft rund 2,5 Millionen DM – von seinem Vermögen sollte derjenige erhalten, der das Rätsel löste, das ihm das Leben gerettet hatte.

1997 schließlich nahm Andrew Wiles den Preis in Göttingen entgegen. Wegen der zwischenzeitlichen Inflation war dessen Höhe allerdings auf 70 000 Mark geschrumpft.

Mathematiker-Witz

Der Matheprofessor verlässt den Hörsaal, in dem sich zwei Studenten befinden. Wenig später kommen drei Studenten aus dem Saal heraus. Ein paar Minuten später geht einer hinein. Darauf der Professor: „Gott sei Dank, jetzt ist der Raum wieder leer."

stehende **Nenner.** Ein Bruch ist umso größer, je größer sein Zähler und je kleiner sein Nenner ist.

Die Brüche nennt man auch **rationale Zahlen.** Zu ihnen gehören auch die ganzen Zahlen, da man sie als Brüche schreiben kann. 3 etwa ist $\frac{3}{1}$, in Worten drei Eintel. Rationale Zahlen können wir zusammenzählen, abziehen, malnehmen und teilen, das Ergebnis ist immer wieder eine rationale Zahl.

Viele Brüche lassen sich kürzen. Um das zu tun, zerlegen wir Zähler und Nenner in ihre Primfaktoren. Von diesen dürfen wir alle streichen, die oben und unten gleichermaßen vorkommen. Zwei Beispiele:

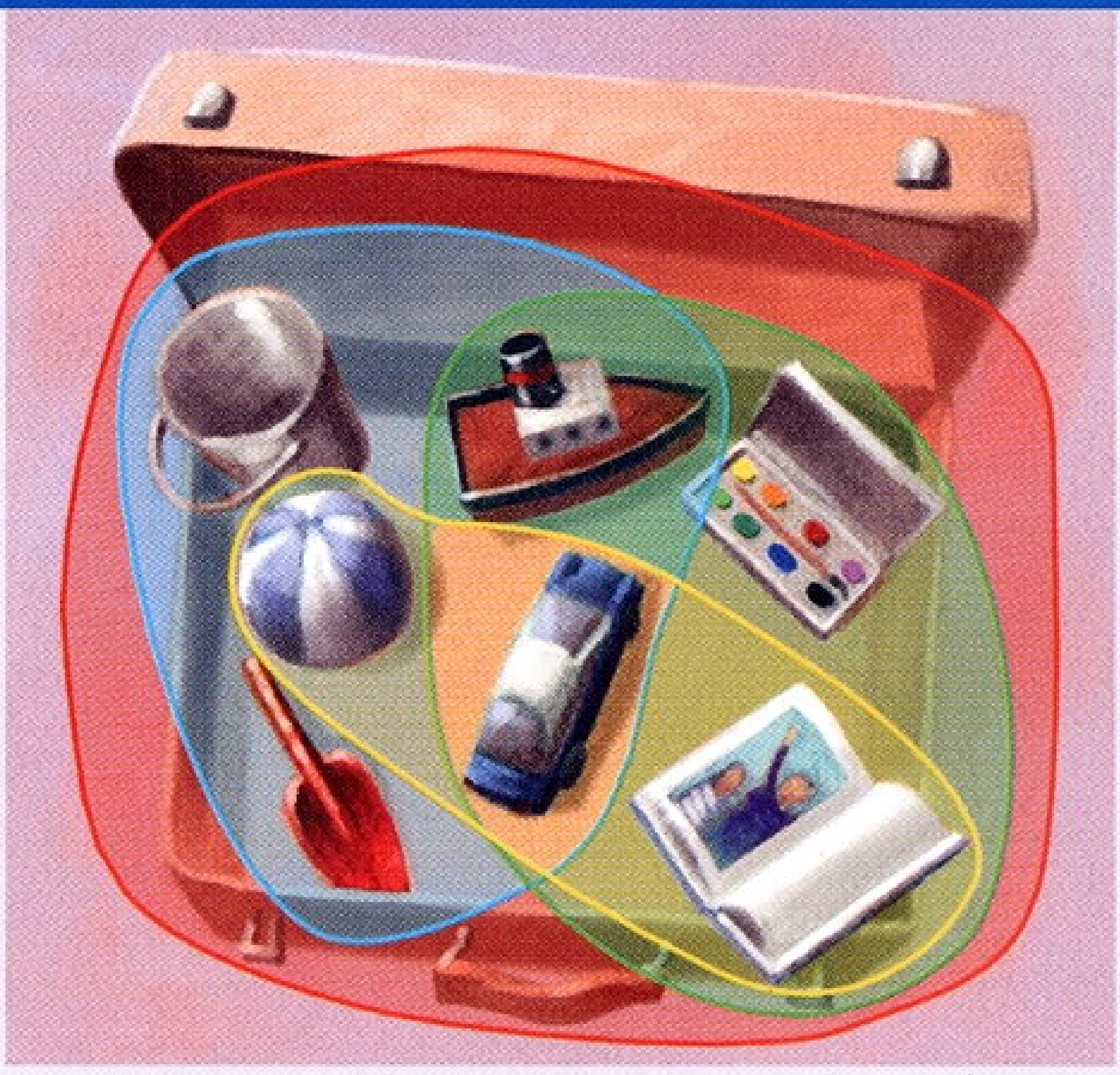
$$\frac{12}{16} = \frac{2\cdot 2\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2} = \frac{3}{2\cdot 2} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{84}{24} = \frac{2\cdot 2\cdot 3\cdot 7}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3} = \frac{7}{2}\ .$$

Brüche werden häufig auch als Kommazahlen, so genannte **Dezimalbrüche,** dargestellt. $\frac{1}{2}$ lässt sich schreiben als 0,5, $\frac{1}{3}$ als 0,333... Die erste Ziffer hinter dem Komma gibt dabei an, wieviel Zehntel in dem Bruch stecken, die zweite wieviel Hundertstel, die dritte wieviel Tausendstel und so weiter. 0,5 steht somit für $\frac{5}{10}$. Kürzt man diesen Bruch, erhält man $\frac{1}{2}$. 0,587 steht für die Zahl, die sich ergibt, wenn man $\frac{5}{10} + \frac{8}{100} + \frac{7}{1000}$ berechnet.

Mengen

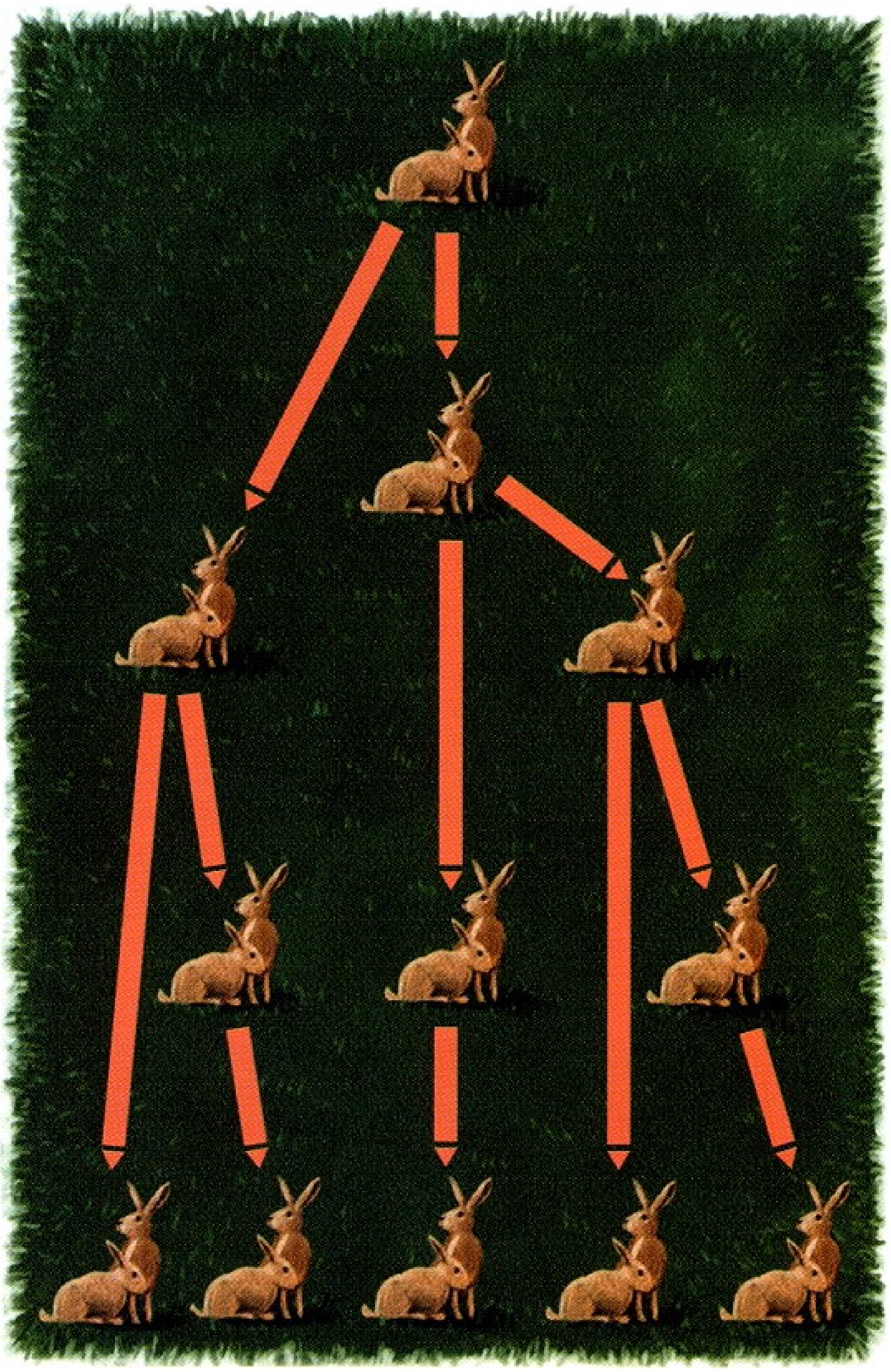
In der Umgangssprache sagt man, jemand habe „eine Menge Geld", und meint damit, dass er viel Geld hat. In der Mathematik bedeutet der Begriff Menge etwas anderes. Mengenlehre ist der Versuch, eine Theorie aufzustellen, ohne irgendetwas vorauszusetzen, worum es eigentlich geht. Von einer Menge wird nur gefordert, dass sie so genannte Elemente hat. Was diese sind, ist vollkommen offen. Eine Menge stellt so etwas wie einen Behälter dar, in dem alles Mögliche stecken kann. Am einfachsten ist das an Beispielen zu verstehen. So können wir etwa die Menge der Fußballvereine in der Bundesliga betrachten, die der Buchstaben auf dieser Seite oder die der Zahlen 1, 2 und 3. Die Vereine, Buchstaben und 1, 2 und 3 sind dann die Elemente der jeweiligen Mengen. Mengen können auch unendlich viele Elemente haben, wie etwa die Menge der Primzahlen.



Die Menge der Spielsachen, die Andreas mit in den Urlaub nimmt.

Enthält eine Menge nur Elemente, die auch in einer anderen Menge sind, so heißt sie Teilmenge. Ein Beispiel: Andreas fährt mit seinen Eltern ans Meer. Er legt alle Spielsachen in den Koffer, die er mitnehmen will: Eimer, Schaufel, Ball, Schiff und Auto. Dann fällt ihm ein, dass es regnen könnte, und er holt ein Buch und seinen Malkasten. Die Menge seines Urlaubspielzeugs, die wir kurz mit U bezeichnen, setzt sich aus zwei Teilmengen zusammen, der Menge A der Sachen für draußen (Eimer, Schaufel, Ball, Schiff, Auto) und der Menge B derjenigen für drinnen (Buch, Malkasten, Schiff und Auto). Schiff und Auto zählen zu beiden Teilmengen, da er damit drinnen und draußen spielen kann. Natürlich können wir auch andere Teilmengen von U bilden, etwa die Menge von Andreas' blauweißen Spielsachen: Ball, Auto und Buch.

Die Menge U besteht aus allen Elementen, die entweder in A oder in B (oder in beiden) enthalten sind. Man sagt auch, U ist die Vereinigung von A mit B. Die Menge der Spielsachen, mit denen Andreas drinnen und draußen spielen kann, ist die Schnittmenge von A und B. Sie besteht aus allen Elementen, die sowohl zu A als auch zu B gehören, also aus Schiff und Auto.



Aus der ‚Kaninchenaufgabe' entwickelte Fibonacci seine Reihenlehre, bei der jedes Glied sich aus der Addition der beiden vorhergehenden ergibt

Was sind die Fibonacci-Zahlen?

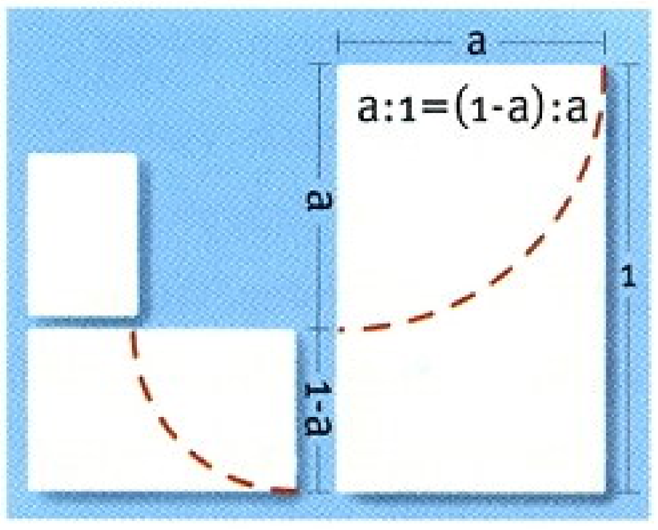
Leonardo von Pisa, genannt Fibonacci, fragte sich, wie schnell sich Kaninchen vermehren können. Dabei nahm er an, dass jedes Paar ein Kaninchenpaar der nächsten Generation und eines der übernächsten hervorbringt und dann stirbt. Beginnt man mit einem Kaninchenpaar, wird in der zweiten Generation ein Paar geboren, in der dritten zwei (eines vom ersten Kaninchenpaar, eines von dessen Nachwuchs), in der vierten sind es drei (eines von dem Paar aus der zweiten Generation und je eines von den beiden Paaren der dritten Generation). Dann nimmt die Kaninchenplage ihren Lauf: In der fünften Generation mit 5 Paaren, in der sechsten mit 8, in der siebten sind es schon 13, in der achten 21.

Die Zahlen 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,144 ... heißen heute Fibonacci-Zahlen. Bei ihnen ist jedes Glied gleich der Summe der beiden vorangehenden Glieder. Auch wenn das Kaninchenproblem nicht gerade sehr lebensnah wirkt, kommen sie in der Natur vor, zum Beispiel bei Blumen: Schneeglöckchen haben 3 Blütenblätter, Butterblumen 5, Rittersporne 8, Ringelblumen 13, Astern 21 und viele Gänseblümchen 34, 55 oder 89. Warum das so ist, haben Wissenschaftler erst 1993 herausgefunden. Es hat mit der Entwicklung der Blüten zu tun.

Fibonacci-Zahlen hängen eng mit dem Goldenen Schnitt zusammen, der seit dem Altertum als harmonisches Verhältnis von Strecken bekannt und in Kunst und Architektur weit verbreitet ist.

Gibt es noch andere Zahlen als die rationalen Zahlen?

Für die alten Griechen waren die rationalen Zahlen die einzigen zulässigen Zahlen. Insbesondere der Mathematiker Pythagoras – der im 6. Jahrhundert v. Chr. lebte – glaubte, die ganze Welt auf sie zurückführen zu können, nachdem er die schwingende Saiten einer Leier untersucht hatte. Pythagoras zupfte an einer Saite, die auf ganzer



Der Goldene Schnitt teilt eine Strecke so in zwei Abschnitte, dass sich das größere Teilstück zur Gesamtstrecke verhält wie das kleinere Stück zum größeren. Hat die Gesamtstrecke die Länge 1 und das größere Teilstück die Länge a, ist das kleinere 1-a lang. Beim Goldenen Schnitt gilt dann $a/1 = (1 - a)/a$. Das ist für $a = 0{,}618...$ erfüllt.

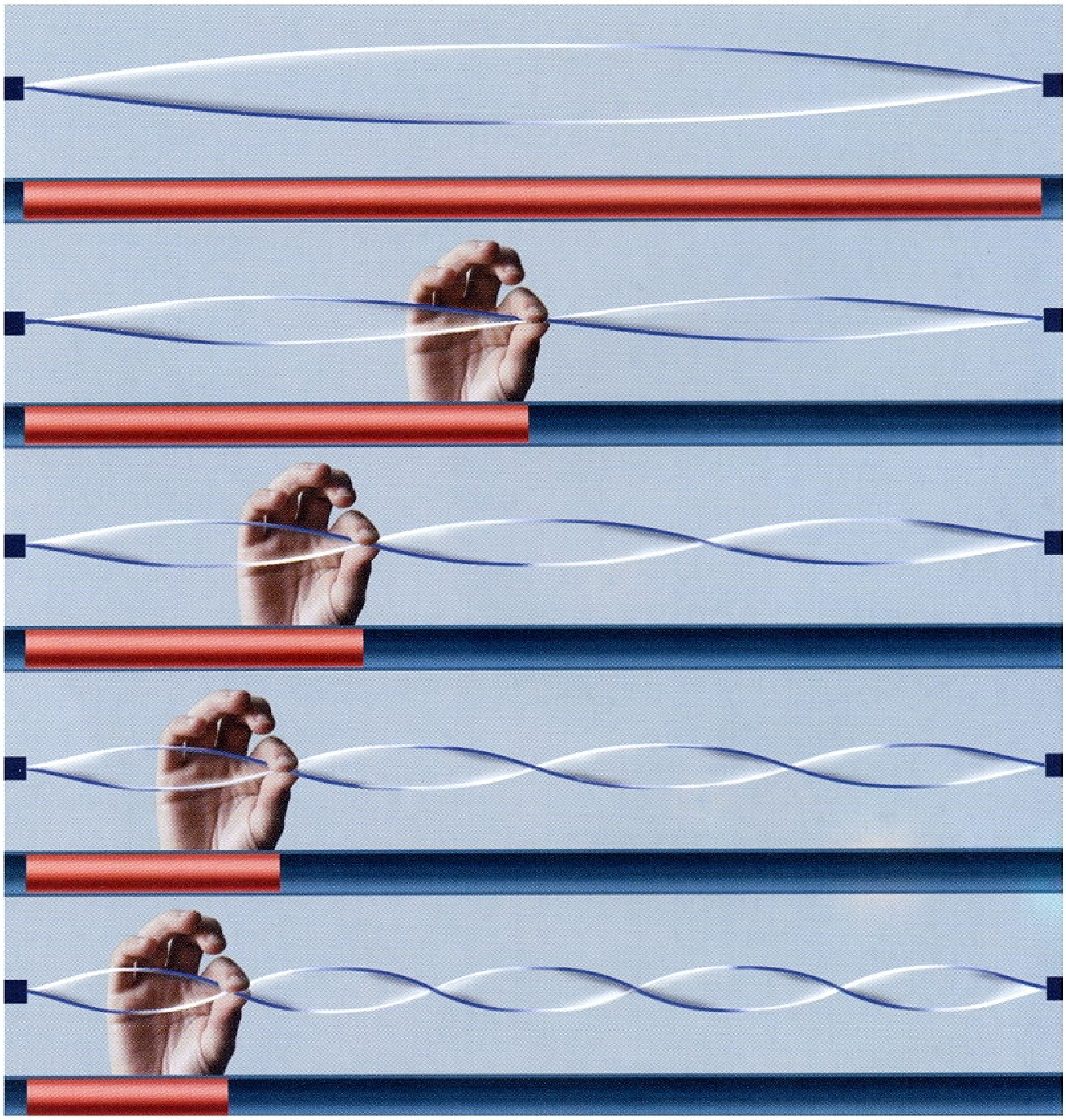
Mit Fibonacci (um 1200) erlebte die Mathematik im Mittelalter in Europa einen Aufschwung. Das Fach war bei den alten Griechen zwar bereits weit entwickelt, doch geriet das meiste davon in Vergessenheit und wurde erst mehr als tausend Jahre später wieder entdeckt. Schuld daran waren die Römer, die sich nur für Anwendungen interessierten. So bewunderten sie etwa die Wurfmaschinen und Hebelkräne des Archimedes (um 285-212 vor Christus). Die zugrunde liegenden Berechnungen vernachlässigten sie.

Pythagoras von Samos (um 570 bis um 480 v. Chr.) war überzeugt, die gesamte Welt sei mit ganzen Zahlen und deren Verhältnissen zueinander, den Brüchen also, zu erklären. Das machte für ihn die Schönheit der Mathematik aus. Doch sein Schüler Hippasus bewies ihm, dass die Wurzel aus 2 keine rationale Zahl sein kann. Pythagoras griff daraufhin angeblich lieber zu Gewalt, als seine Weltsicht zu ändern und ließ Hippasus kurzerhand umbringen.

Länge frei schwingen konnte. Dann hielt er sie an bestimmten Punkten fest, schlug sie an und notierte, ob der entstehende Ton mit dem Grundton der frei schwingenden Saite harmonisch klang. Dies war der Fall, wenn er die Saite in der Mitte fixierte oder an einem Punkt, der die Saite in zwei Stücke teilte, deren Längen zum Beispiel im Verhältnis 2 zu 3 oder 3 zu 4 standen. Missklänge ergaben sich, wenn Pythagoras die Saite so festhielt, dass die beiden Teilstücke nicht in einem ganzzahligen Verhältnis standen.

Nachdem Pythagoras ganze Zahlen auch bei den Umlaufbahnen der Planeten und anderen Naturereignissen entdeckt hatte, rief er aus: „Alles ist Zahl." Er meinte damit, die gesamte Welt mit ganzen Zahlen und deren Verhältnissen zueinander erklären zu können. Vermutlich widerlegte ihn da bereits sein Schüler Hippasus.

200 Jahre später schrieb der Grieche Euklid eine Abhandlung, in der er bewies, dass die Zahl, die mit sich selbst multipliziert 2 ergibt, keine rationale Zahl sein kann. Die Zahl, die 2 ergibt, wenn man sie mit sich selbst malnimmt, heißt Wurzel aus 2, in Zeichen $\sqrt{2}$. Es gilt also $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$. Auch das Streckenverhältnis beim Goldenen Schnitt ist keine rationale Zahl.



Der Ton klingt nur dann harmonisch, wenn die Saite so festgehalten wird, dass die Längen der beiden Teilstücke in einem ganzzahligen Verhältnis zueinander stehen

Raum

Kann Achilles die Schildkröte überholen?

Die Macht der Zahlen verdeutlicht eine Denkaufgabe, die auf den griechischen Philosophen Zenon von Elea (um 490-430 v. Chr.) zurückgeht: Achilles, der griechische Held, tritt zu einem Wettlauf gegen eine Schildkröte an. Das Tier bekommt hundert Meter Vorsprung. Kann Achilles es jemals überholen? Wenn er den Startpunkt der Schildkröte erreicht, ist die immer schon ein Stück weiter. Und bis er dieses Stück rennt, hat die Schildkröte bereits wieder etwas Boden gutgemacht. Diese Überlegung lässt sich beliebig oft wiederholen, also gewinnt die Schildkröte das Rennen. Klingt überzeugend, oder?

Die Beweisführung ist zwar in sich schlüssig. Doch hat die Sache mit der Schildkröte einen Haken. Das wird schnell klar, bringt man Zahlen ins Spiel. Ist Achilles etwa zehnmal so schnell wie sie, schafft sie zehn Meter, während der Held zu ihrem Start läuft; einen weiteren Meter, bis er diese zehn Meter aufgeholt hat; noch mal zehn Zentimeter, bis er diesen Meter wettgemacht hat... Das kann man zwar bis ins Unendliche fortführen,

Achilles im Wettlauf mit der Schildkröte

Den Raum mathematisch zu erfassen ist beim Bau von Pyramiden ebenso wichtig wie beim Flug von Raumschiffen

GEOMETRIE heißt das wichtigste mathematische Gebiet, das sich mit dem Raum beschäftigt. Das Wort kommt aus dem Griechischen und heißt wörtlich übersetzt „Landvermessung". In der Antike wie heute hat die Geometrie höchst praktische Bedeutung. Sie hilft zum Beispiel, Felder zu vermessen, Häuser mit geraden Wänden und ebenem Boden zu bauen, Schiffe zielsicher über das Meer zu lenken und Raumschiffe sicher zur Erde zurückzubringen.

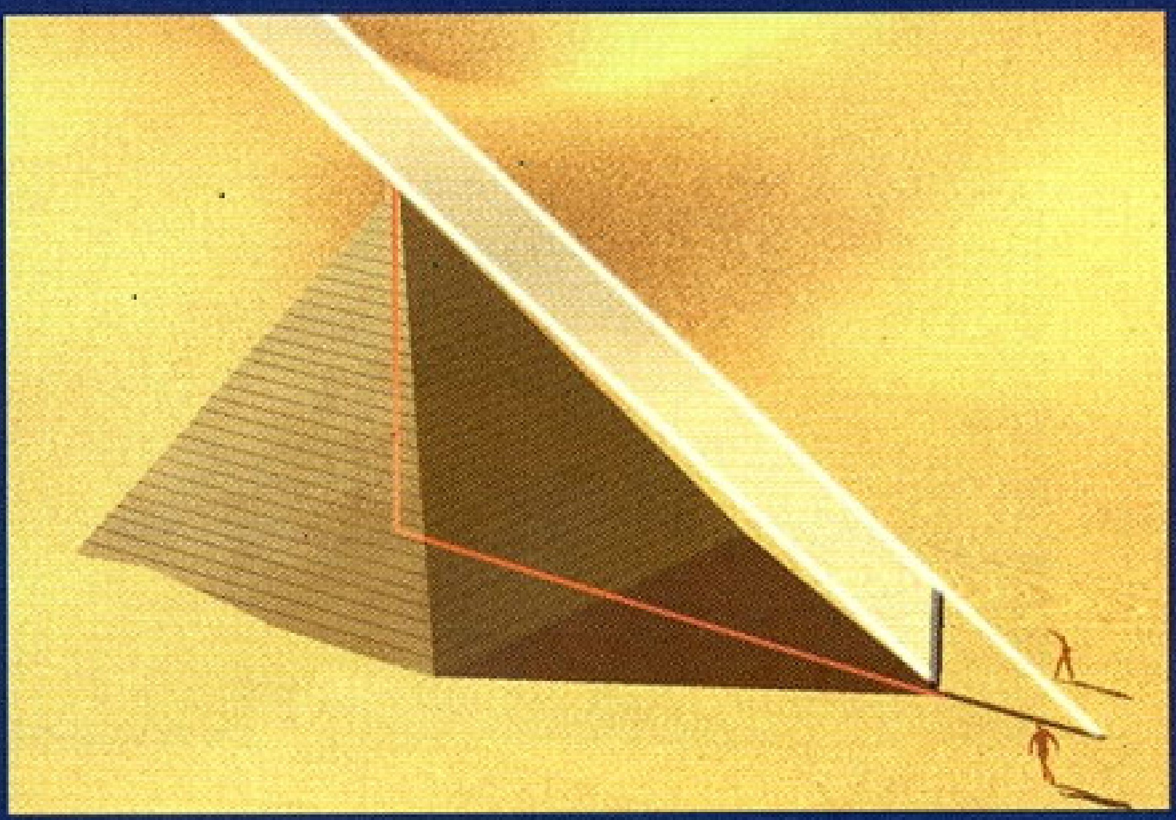
doch die Gesamtlänge der betrachteten Wegstücke bleibt mit 111,111... Meter beschränkt. Nach dieser Strecke überholt der strahlende Held die Schildkröte und zieht davon.

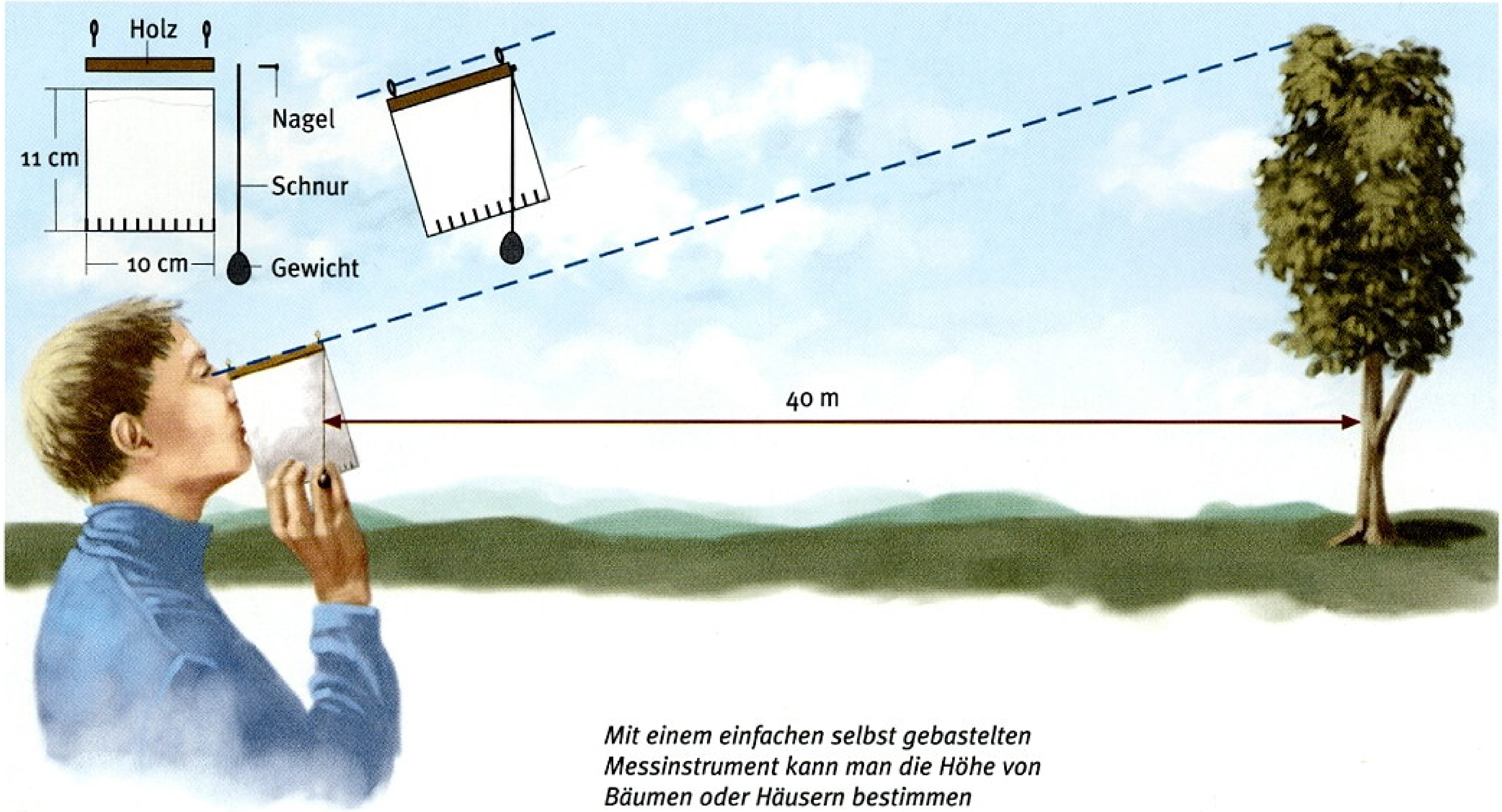
Wie kann man Höhen messen?

Schon die alten Ägypter wussten, wie sie die Höhen ihrer riesigen Pyramiden bestimmen konnten. Sie schlugen dazu einen Stab neben der Pyramide in den Boden. Dann maßen sie dessen Schatten und den Schatten der Pyramide. War der Stock drei Meter lang, sein Schatten 6 Meter und der der Pyramide 40 Meter, so musste das Bauwerk 20 Meter hoch sein. Denn das Längenverhältnis von Schatten zu Objekt musste bei Pyramide und Stock gleich sein. Für beide stand die Sonne schließlich gleich hoch.

Wer nicht immer einen Pflock in den Boden rammen will, kann sich ein einfaches Instrument aus Pappe und einem Stück Holz bauen: Auf der unteren Kante eines 10 Zentimeter breiten und 11 Zentimeter langen Stücks Pappe zeichnet man alle

So maßen die Ägypter die Höhe einer Pyramide.

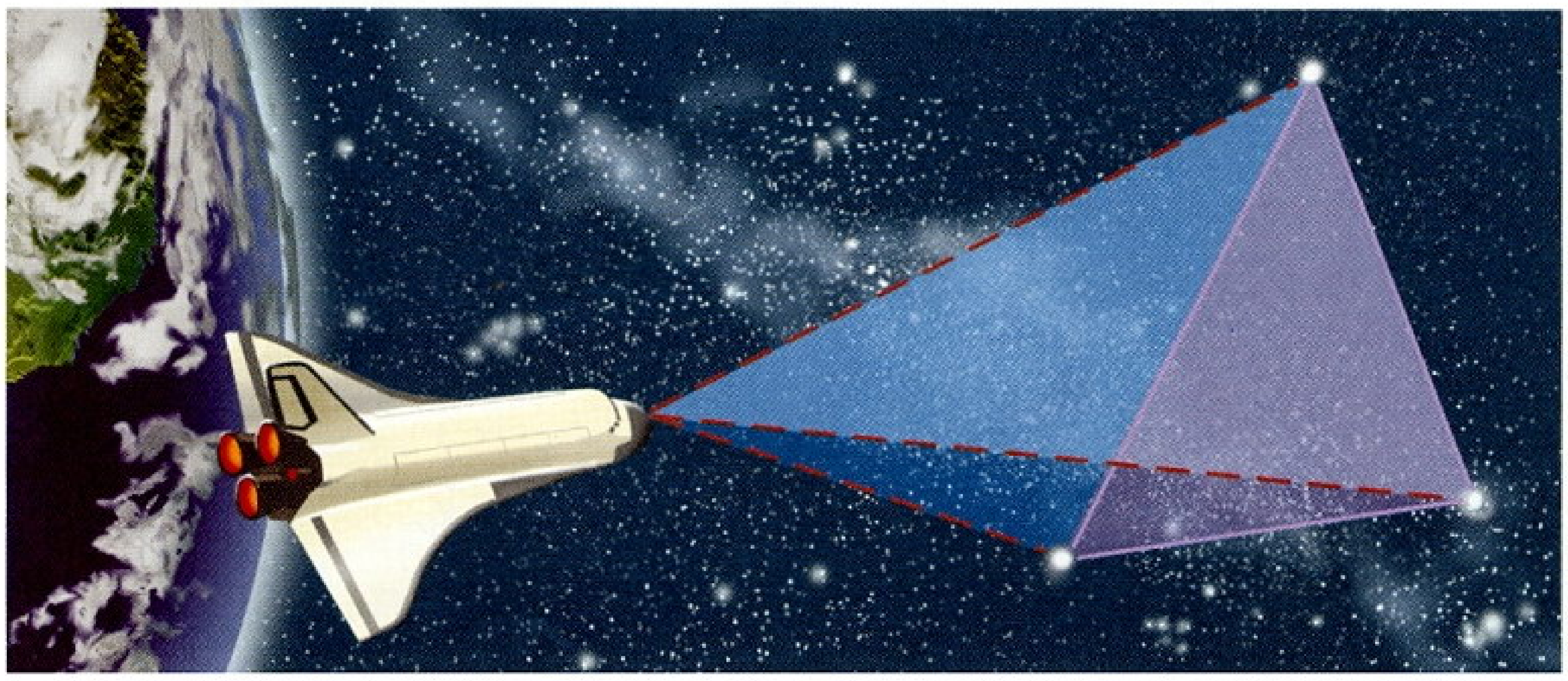




Mit einem einfachen selbst gebastelten Messinstrument kann man die Höhe von Bäumen oder Häusern bestimmen

Zentimeter einen Strich. Will man genauere Ergebnisse erzielen, teilt man die Zwischenräume zwischen den Zentimeterstrichen noch in Zehntel, also in Millimeter. Dann werden die Striche nummeriert und die Pappe an einer etwa 1 Zentimeter dicken und 10 Zentimeter langen Latte mit Leim oder Reißnägeln befestigt. In das Holz schlägt man oben zwei kleine Nägel ein und befestigt an dem Ende, an dem die Nummerierung beginnt, eine 15 Zentimeter lange Schnur. An die Schnur knotet man ein Gewicht, etwa das Senkblei einer Angel. Um mit diesem Instrument die Höhe eines Baumes, Strommasten oder Hauses zu messen, peilt man über die beiden Nagelköpfe deren Spitze an. Die Schnur kreuzt dann die aufgezeichnete Skala. Wir schreiben die Zahl auf, deren Strich sie am nähesten kommt. Dann messen wir die Entfernung zu Baum, Strommast oder Haus in Metern. Diese Entfernung wird mit der notierten Zahl malgenommen und das Ergebnis durch 10 geteilt. Nun müssen wir nur noch die Höhe des Messinstruments über dem Boden dazuzählen und erhalten die Höhe des Gegenstands.

Der griechische Philosoph PLATO (um 428-348 v. Chr.) schrieb: „Obwohl Geometer bei ihren Untersuchungen zur Unterstützung reale Figuren zeichnen, denken sie nicht an diese Figuren, sondern an die Dinge, die diese Figuren darstellen. So ist das ‚Quadrat an sich' oder der ‚Durchmesser an sich' der Gegenstand ihrer Argumente."



Drei feste Punkte genügen, um Ort und Flugrichtung des Space Shuttle zu bestimmen

Ein Beispiel: 40 Meter von einem Baum entfernt, dessen Spitze wir anpeilen, geht die Schnur auf der Pappe durch die 3. Dann rechnen wir $3 \cdot 40 = 120$. Halten wir den Höhenmesser ein Meter über dem Boden, ist der Baum $\frac{120}{10} + 1 = 13$ Meter hoch.

Was ist ebene Geometrie?

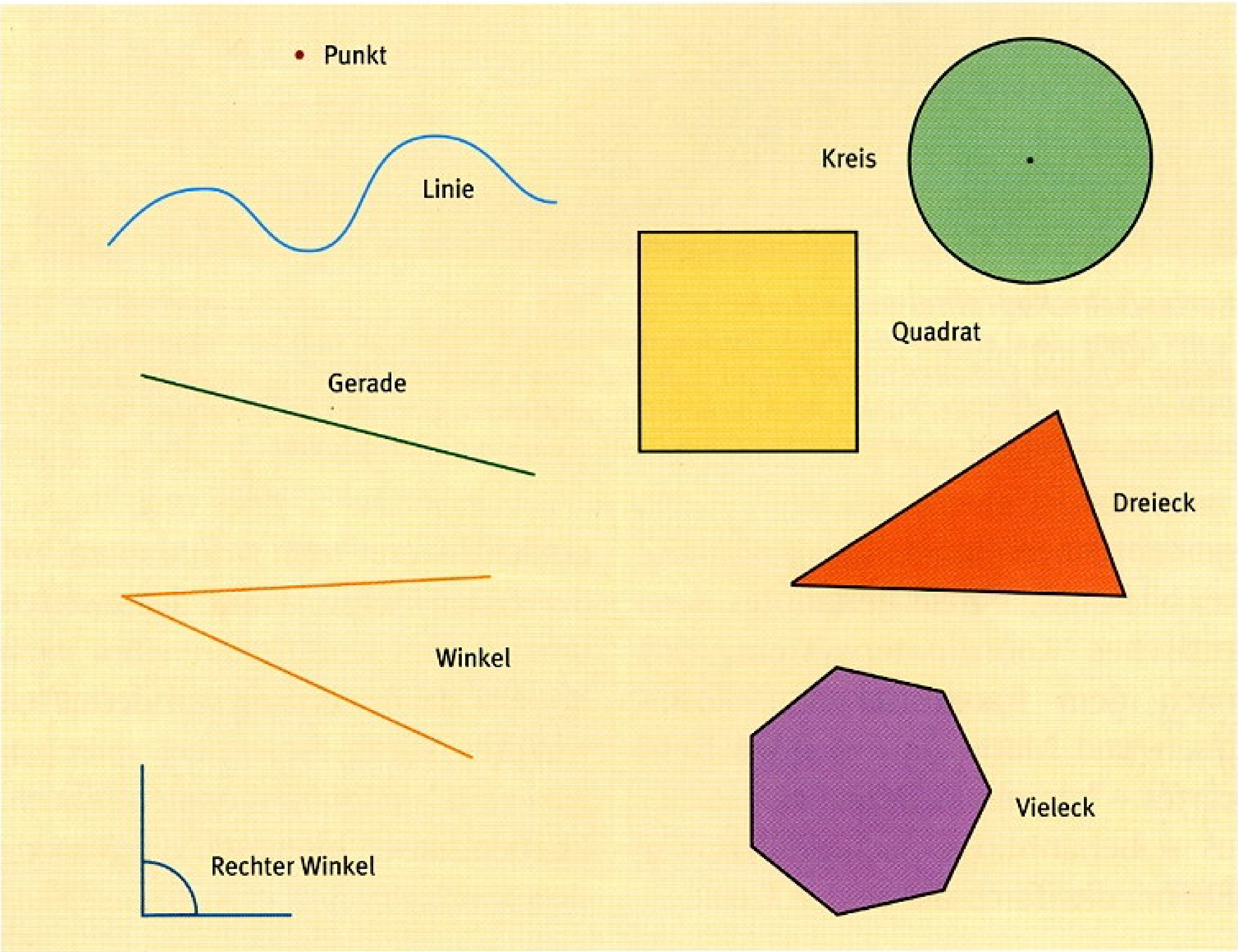
Ebene Geometrie beschäftigt sich mit den Eigenschaften der Figuren, die in einer Ebene liegen. Schon der griechische Mathematiker Euklid hat sie beschrieben. Um die Geometrie der alten Griechen kommt heute noch kein Schüler herum.

Die wichtigsten Begriffe der Geometrie sind Punkt, Linie, Gerade, Kreis, Winkel und Dreieck. Ein Punkt zeigt eine Stelle im Raum an. Er hat keine Länge, Breite, Höhe oder Tiefe. Einen mathematischen **Punkt** kann es nur in Gedanken geben. Denn kein noch so feiner Bleistift vermag einen Punkt zu malen, der keine Ausdehnung hat. Eine **Linie** ist ein Strich, der keine Breite hat, also unendlich dünn ist. Eine **Gerade** ist eine gerade Linie, die in beide Richtungen unendlich lang ist. Ein **Kreis** besteht aus allen Punkten, die zu einem vorgegebenen Punkt, dem Mittelpunkt, den gleichen Abstand haben. Dieser Abstand wird **Radius** genannt. Die doppelte Länge des Radius heißt **Durchmesser**.

Winkel werden von zwei geraden Linien gebildet, die von demselben Punkt ausgehen. Zeichnet man um den gemeinsamen Punkt der beiden Linien einen Kreis und liegt zwischen den beiden Linien genau ein Viertel des Kreises, bilden diese einen **rechten Winkel**.

Ein **Vieleck** ist eine Figur in der Ebene mit lauter geraden Seiten. Ein Vieleck mit drei Seiten heißt **Dreieck**, mit vier Seiten heißt es **Viereck**. Ein Vieleck mit lauter gleich langen Seiten und gleich großen Winkeln heißt **regelmäßiges Vieleck**. Ein regelmäßiges Viereck ist ein **Quadrat**.

THALES VON MILET **(um 625–547 v. Chr.) brachte die ägyptische Pyramidenvermessung auf eine Formel und wies nach, dass das Verfahren in allen denkbaren Fällen funktionierte. Er schuf so einen der ersten mathematischen Beweise. Während sich die Ägypter mit praktischen Anwendungen zufrieden gaben, fragten Jahrhunderte später die Griechen nach, welche allgemeinen Regeln zugrunde lagen. Damit machten sie den großen Schritt von der Praxis zur Theorie.**



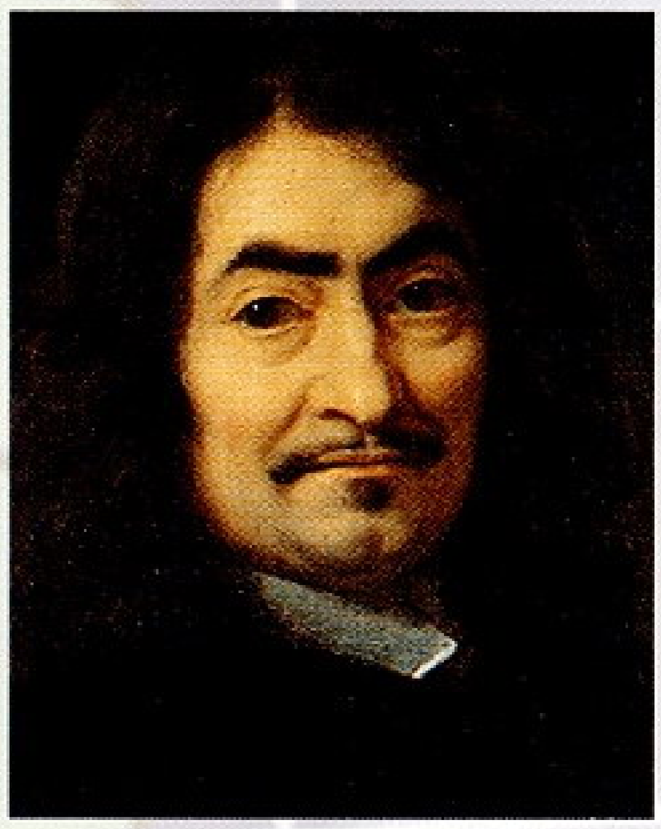
Die wichtigsten Figuren der ebenen Geometrie

Was sind kartesische Koordinatensysteme?

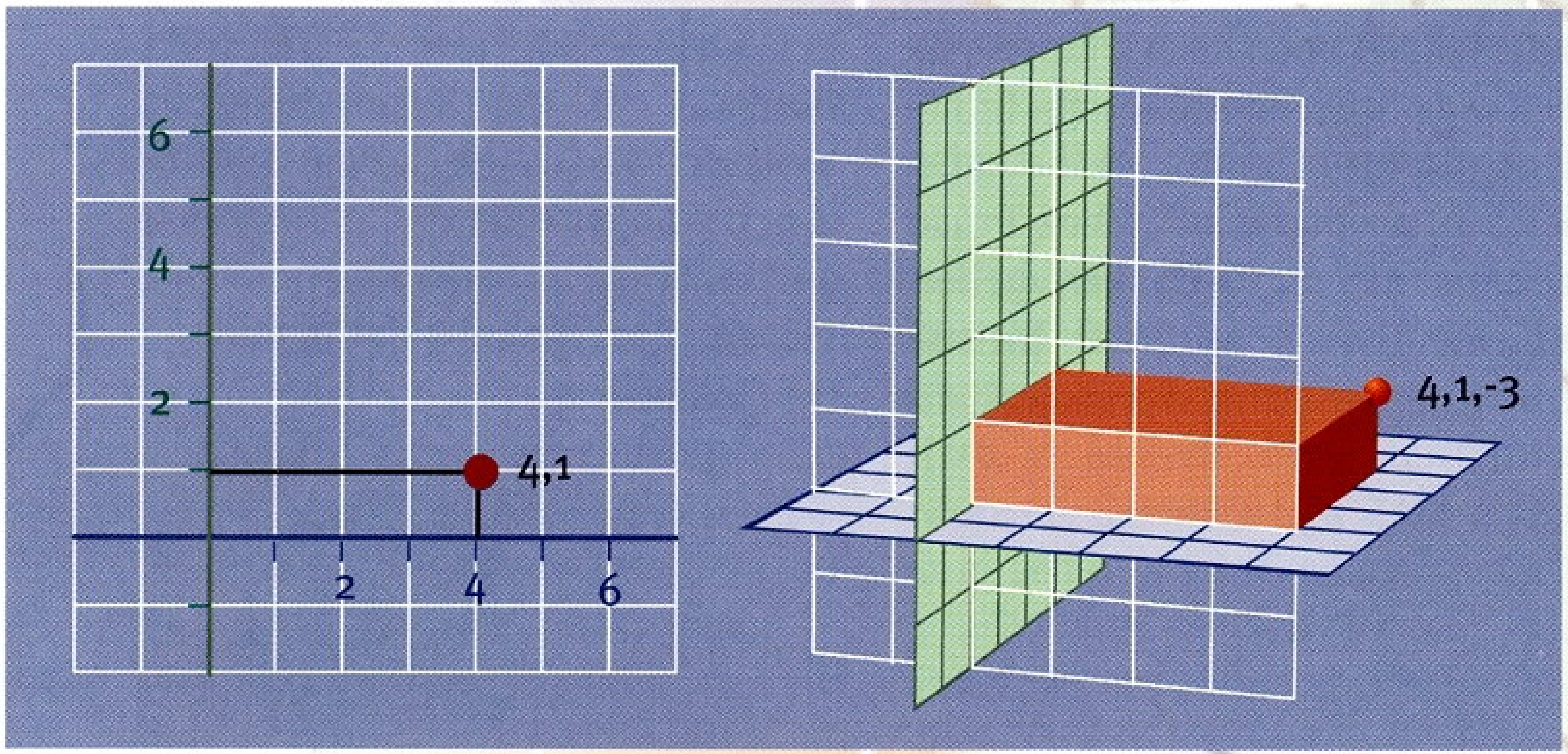
Um Figuren in der Ebene oder im Raum zu berechnen, haben Mathematiker eine Verbindung zwischen der Geometrie und der Welt der Zahlen geschaffen. Eine Zahlengerade ist eine Gerade, auf der ein Punkt als Nullpunkt festgelegt ist, und bei der alle anderen Punkte durch ihren Abstand von diesem Nullpunkt bestimmt werden. 4 entspricht so zum Beispiel dem Punkt, der 4 Einheiten (etwa Millimeter, Zentimeter oder Kilometer) von der Null nach rechts liegt. –2 befindet sich 2 Einheiten links vom Nullpunkt.

Bilden zwei Zahlengeraden einen rechten Winkel und haben sie als gemeinsamen Punkt ihre Nullpunkte, bilden sie ein so genanntes **kartesisches Koordinatensystem**, das nach dem französischen Philosophen und Mathematiker René Descartes – lateinisch: Renatius Cartesius – benannt ist. Jeder Punkt der Ebene, die durch die beiden Geraden ausgespannt wird, lässt sich durch ein Paar von Zahlen beschreiben. (4,1) etwa ist der Punkt, zu dem man gelangt, wenn man vom Schnittpunkt der Geraden 4 Einheiten auf der ersten läuft und dann 1 Einheit in Richtung der zweiten. (4,1) nennt man dann die **Kordinaten** des Punktes. Die beiden Zahlengeraden heißen auch die **Achsen** des Koordinatensystems.

Mit kartesischen Koordinatensystemen lassen sich nicht nur Ebenen erfassen, sondern auch der Raum. Dazu brauchen wir eine weitere Zahlengerade, die die beiden anderen im Nullpunkt schneidet und mit jeder von beiden einen rechten Winkel bildet. Dann lässt sich jeder Punkt mit drei Zahlen beschreiben. (4,1,–3) ist der Punkt, den man erreicht, wenn man 4 Einheiten auf der ersten Achse, 1 auf der zweiten und –3 (das heißt 3 Einheiten nach hinten) auf der dritten wandert. Weil wir drei Achsen brauchen, sprechen wir vom dreidimensionalen Raum. Ebenen haben hingegen die Dimension zwei.

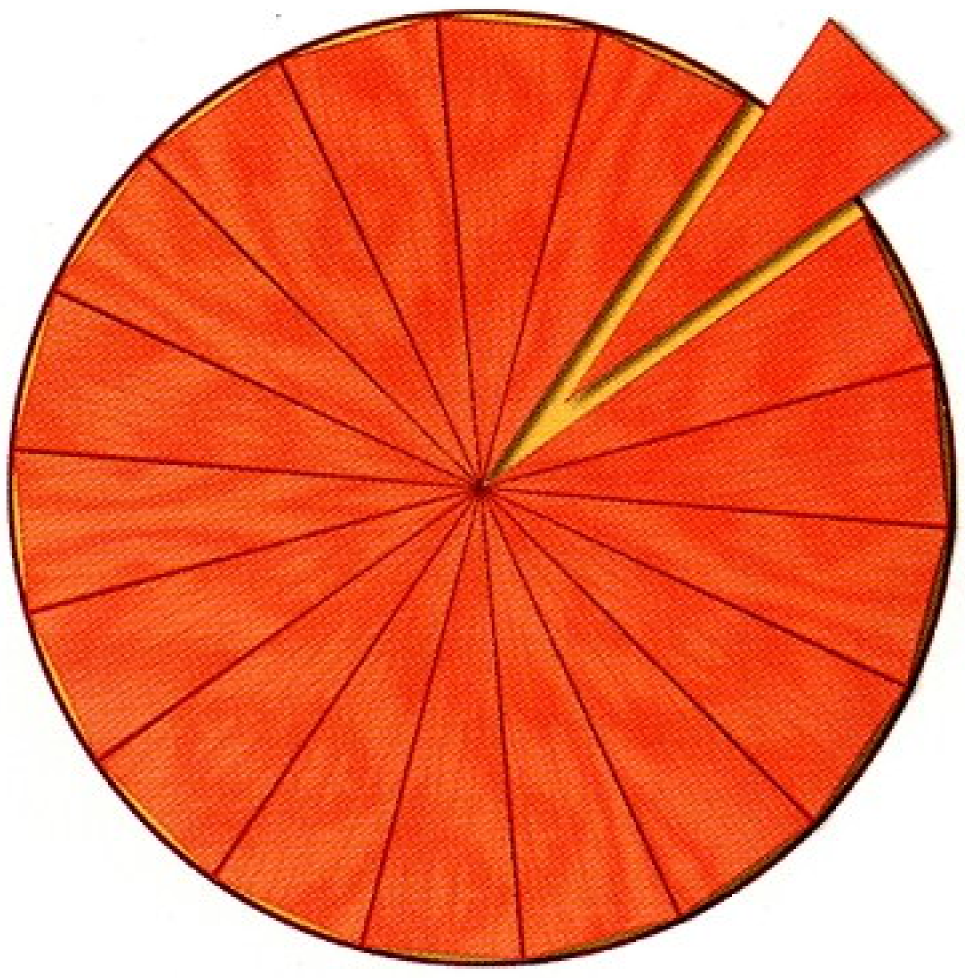


René Descartes (1596-1650) ist heute vor allem wegen seines berühmten Ausspruches „Cogito ergo sum" (lateinisch für: ich denke, also bin ich) bekannt. Der französische Philosoph, Naturwissenschaftler und Mathematiker stellte die Aussagen anderer, aber auch das, was er selbst sah, hörte und fühlte, in Zweifel. Stattdessen rückte er das Denken in den Mittelpunkt.



Kartesische Koordinatensysteme
In der Ebene: (4,1) etwa ist der Punkt, zu dem man gelangt, wenn man vom Schnittpunkt der beiden Achsen 4 Einheiten auf der ersten läuft und dann 1 Einheit in Richtung der zweiten.
Im Raum: (4,1,–3) ist der Punkt, den man erreicht, wenn man 4 Einheiten auf der ersten Achse, 1 auf der zweiten und –3 oder 3 Einheiten nach unten auf der dritten wandert

ARCHIMEDES (285–212 v. Chr.), griechischer Mathematiker und Physiker, berechnete die Fläche eines Kreises, indem er sie mit Vielecken annäherte (siehe Abbildung rechts) und dann deren Flächen ermittelte. Überdies konstruierte er Flaschenzüge, Schrauben, Hebekräne und Wurfmaschinen.



DOSENMATHEMATIK
Mit Hilfe einer Konservendose und eines Papierstreifens lässt sich die Kreiszahl π näherungsweise bestimmen. Wir wickeln das Papier um die Dose und markieren die Stelle, an der es sich zu überlappen beginnt. So bestimmen wir den Umfang der Büchse. Dann messen wir, wie dick sie ist. Unser Radius r ist die halbe Dosendicke. Bezeichnet U die Länge des Papierstreifens bis zur Markierung, gilt:
$U = 2 \cdot r \cdot \pi$,
also $\pi = \frac{U}{(2 \cdot r)}$

Was ist die Kreiszahl π?

Ein Quadrat der Seitenlänge a hat die Fläche a^2. Die Fläche eines Kreises lässt sich nicht so leicht berechnen. Doch schon die alten Griechen konnten sie zumindest näherungsweise bestimmen. Bezeichnet F die gesuchte Fläche und r den Radius des Kreises, gilt:

$$F = r^2 \cdot \pi,$$

wobei π die Kreiszahl ist und den Wert 3,14159... besitzt. π ist ein Buchstabe aus dem griechischen Alphabet und wird Pi gesprochen. Für den Umfang U eines Kreises, also die Länge der Kreislinie, gilt

$$U = 2 \cdot r \cdot \pi.$$

Archimedes berechnete den Wert von π, indem er in einen Kreis ein regelmäßiges Vieleck einbeschrieb (siehe Zeichnung). Für ein 96-Eck führte er die Rechnung durch und kam zu dem Wert 3,14084...

Der deutsche Mathematiker Ludolph van Ceulen (1540-1610) widmete einen Großteil seines Lebens der möglichst genauen Bestimmung von π. Er bestimmte die Fläche von Vielecken mit mehreren Billionen Ecken. So tüftelte er die ersten 35 Stellen nach dem Komma von π aus.

Mit Computern und anderen Rechenmethoden haben Wissenschaftler π inzwischen auf viele Milliarden Stellen hinter dem Komma ermittelt. Bis auf die letzte Stelle wird man die Kreiszahl aber nie berechnen können. Denn π ist keine rationale Zahl. Sie hat unendlich viele Stellen hinter dem Komma. Anders als bei rationalen Zahlen wie zum Beispiel $\frac{1}{3}$ = 0,333... wiederholen sich die Ziffern bei π auch nicht in einem regelmäßig wiederkehrenden Muster.

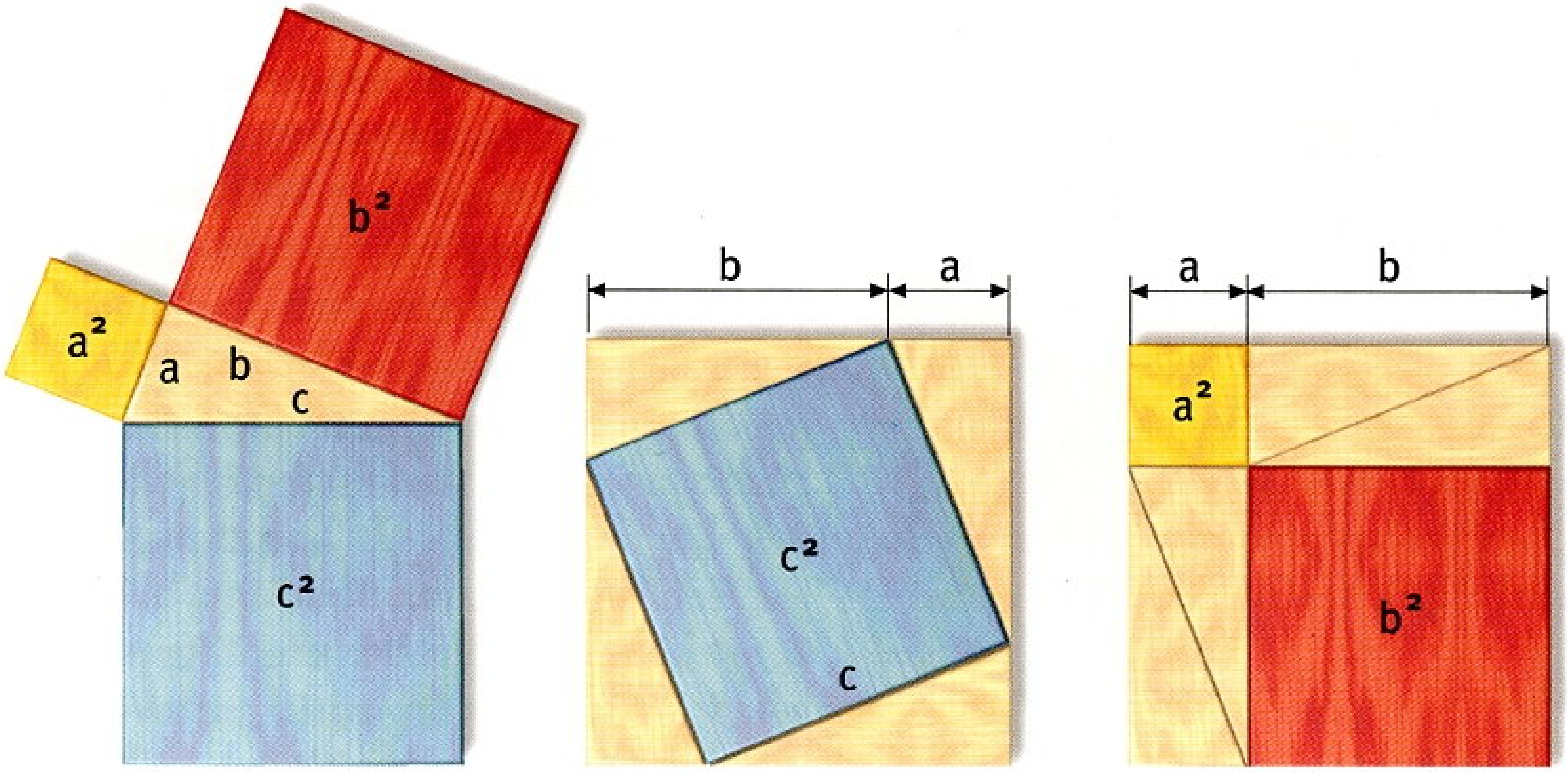
Was sagt der Satz von Pythagoras?

Eine der berühmtesten mathematischen Aussagen ist der Satz des Pythagoras, dem zufolge in jedem Dreieck, das einen rechten Winkel hat, das Quadrat über der längsten Seite der Summe der beiden Quadrate über den beiden kürzeren Seiten ist. Üblicherweise werden die Seitenlängen mit den Buchstaben a, b und c bezeichnet, wobei c für die längste Seite steht. In Kurzform lautet der Satz dann

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Vermutlich kannten die alten Chinesen den Satz schon lange vor Pythagoras. Bewiesen hatten sie ihn mit einer Art Puzzle (siehe Seite 28): Ein Quadrat der Seitenlänge a + b lässt sich einmal aus einem Quadrat der Seitenlänge c und vier Dreiecken mit den Seiten a, b und c zusammensetzen, einmal aus einem Quadrat der Seitenlänge a, einem der Seitenlänge b und ebenfalls vier Kopien des Dreiecks. Bezeichnet F die Fläche des Dreiecks, gilt also:
$4 \cdot F + c^2 = (a + b)^2 = 4 \cdot F + a^2 + b^2$.
Zieht man auf beiden Seiten $4 \cdot F$ ab ergibt sich $c^2 = a^2 + b^2$.

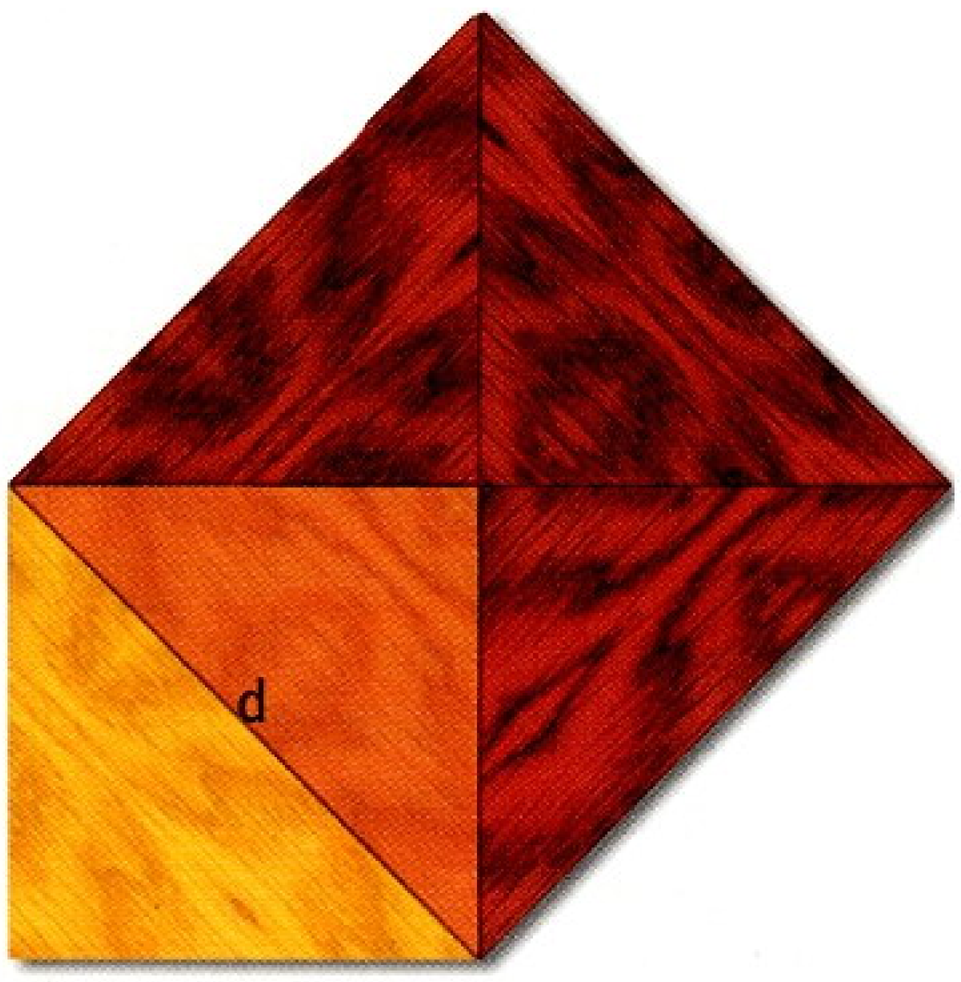
Kaum ein mathematischer Satz



Der Lehrsatz des Pythagoras

Links ein Dreieck der Seitenlängen a, b und c mit den Quadraten über den Seiten. Rechts ist ein Quadrat der Seitenlänge a + b auf zwei verschiedene Weisen zusammengesetzt. In beiden Fällen taucht das Dreieck viermal auf. Demnach müssen die Restflächen übereinstimmen: $a^2 + b^2 = c^2$

wurde auf so viele verschiedene Arten bewiesen wie der „Pythagoras". Bekannt sind mehrere hundert verschiedene Beweise des $a^2 + b^2 = c^2$. Auf der Liste der Autoren finden sich berühmte Männer wie Leonardo da Vinci (um 1693-1739), der frühere Präsident der USA James Abram Garfield (1831-1881) und Albert Einstein (1879-1955). Der Märchendichter Hans Christian Andersen (1805-1875) fasste einen Beweis in Reime. Anfang des 19. Jahrhunderts sollten große Getreidefelder angelegt werden, die den Satz darstellen. So wollte man Außerirdischen zeigen, dass auf der Erde vernunftbegabte Bewohner wandelten. Offensichtlich ging man davon aus, jedes intelligente Wesen müsse den Satz von Pythagoras kennen.

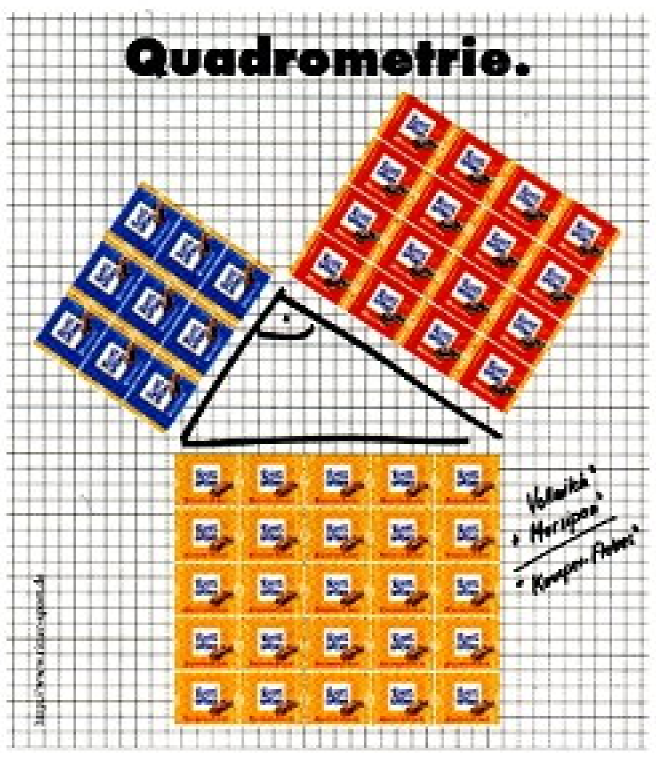


Wie lang ist die Diagonale in einem Quadrat der Seitenlänge 1?

Die Länge der Diagonalen, die wir mit d bezeichnen, lässt sich mit dem Satz von Pythagoras berechnen. Denn die Diagonale bildet zusammen mit zwei Seiten des Quadrats ein rechtwinkliges Dreieck. Es gilt daher: $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Daraus folgt $d = \sqrt{2}$.

Wir können das aber auch an nebenstehender Zeichnung ablesen. Das große auf der Spitze stehende Quadrat ist doppelt so groß wie das kleine, das die Fläche 1 hat. Denn es setzt sich aus vier gleich großen Dreiecken zusammen, von denen zwei genügen, um das kleinere Quadrat zu füllen. Also hat das große Quadrat die Fläche 2. Eine seiner Seiten ist die Diagonale des kleinen Quadrats. Das große Quadrat hat daher die Seitenlänge d. Somit gilt $d^2 = 2$, und das bedeutet $d = \sqrt{2}$.

ALBERT EINSTEIN (1879-1955), berühmter Physiker, bekam als 11-Jähriger Privatunterricht in Geometrie von einem Onkel. Grundlage des Unterrichts waren die Schriften des griechischen Mathematikers Euklid. Der kleine Albert fand die Beweise teilweise unnötig umständlich, vor allem den für den Satz des Pythagoras. Also setzte er sich kurzerhand hin und tüftelte einen neuen aus.



Der Satz des Pythagoras wurde sogar in der Schokoladenwerbung benutzt

Links: Die Länge der Diagonale eines Quadrats lässt sich bestimmen, indem man sie als Seite eines zweiten, doppelt so großen Quadrats ansieht

Die „**Elemente**" von Euklid markieren den Beginn der modernen Mathematik. Der Grieche formulierte in den 13 Bänden Grundannahmen, die er nicht weiter bewies, und folgerte aus ihnen mathematische Sätze. Die Bücher sind das am häufigsten gedruckte wissenschaftliche Werk. Seit dem Altertum werden sie immer wieder neu herausgegeben.

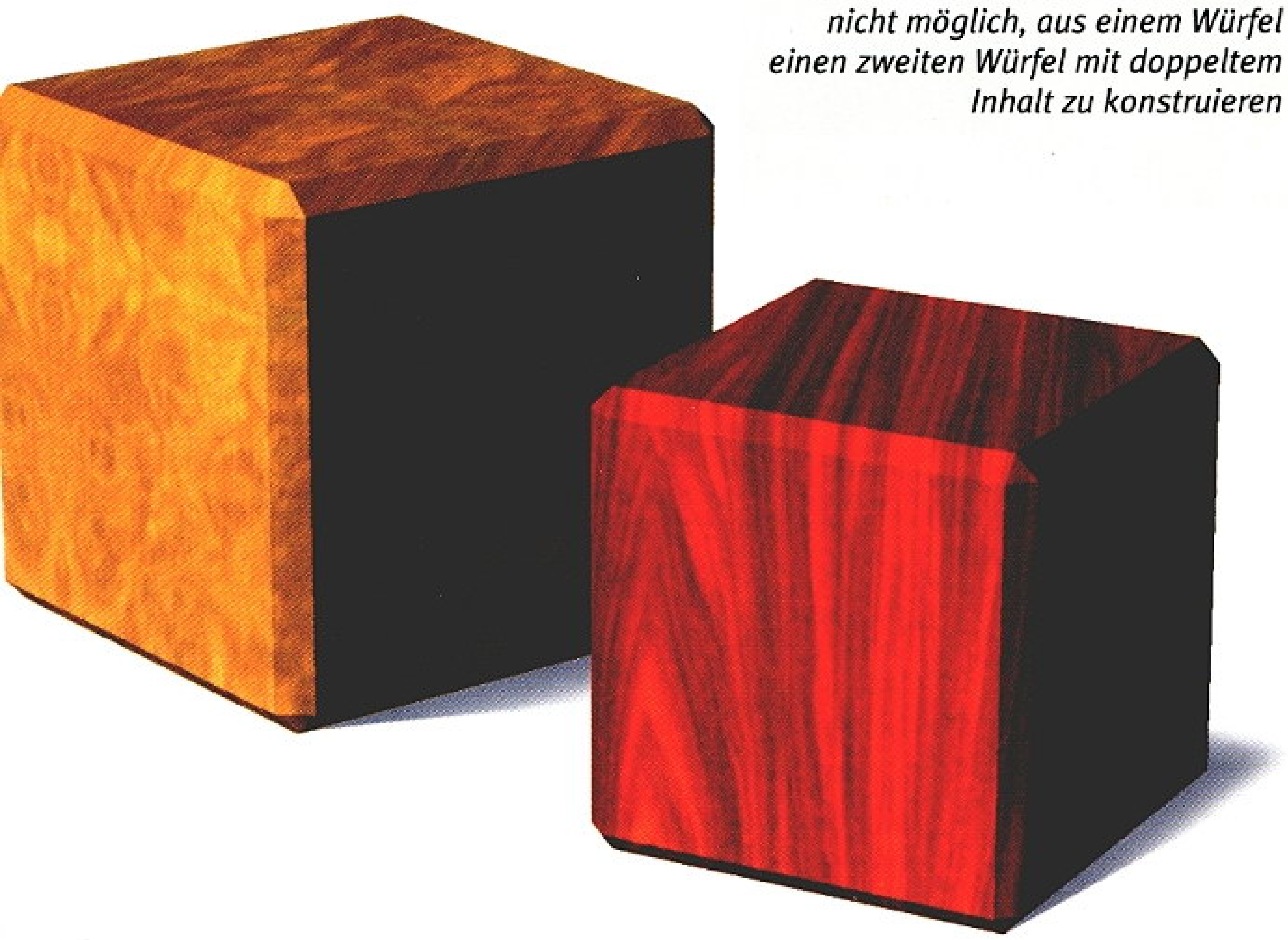
Kreis und Gerade waren für die Griechen die wichtigsten Figuren der Geometrie. Deswegen versuchten sie, alles mit Zirkel und Lineal zu konstruieren. Markierungen am Lineal durften dabei nicht verwendet werden.

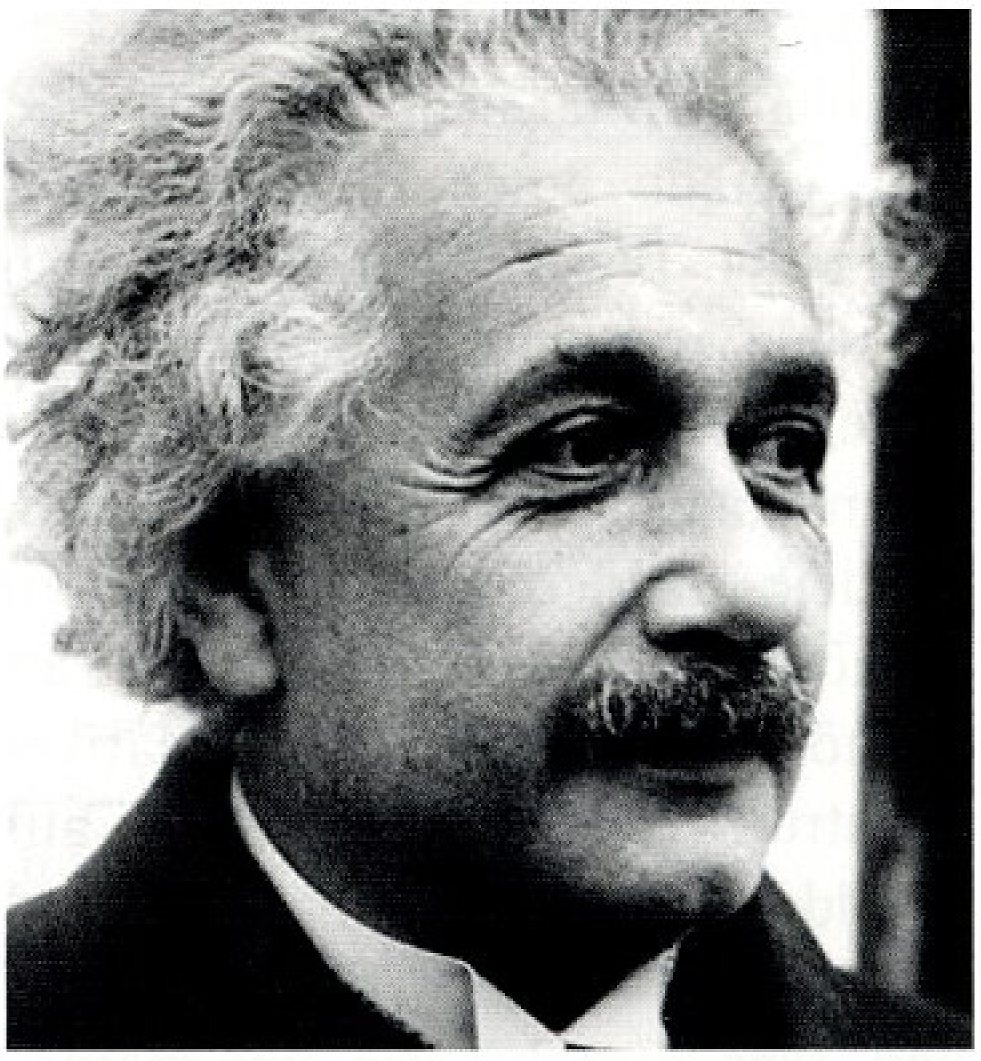
Lässt sich jede Figur mit Lineal und Zirkel konstruieren?

Den alten Griechen schienen nur Lineal und Zirkel als Werkzeuge in der Geometrie zulässig. Viel später erst stellte sich heraus, dass Gerade und Kreis nicht genügen. Jahrhundertelang plagten sich die Gelehrten etwa damit, einen beliebigen Winkel nur mit Lineal und Zirkel in drei gleiche Teile zu zerlegen. Erst im 19. Jahrhundert bewies der französische Mathematiker Pierre Laurent Wantzel (1814-1884), dass sich bestimmte Winkel nicht mit diesen beiden Werkzeugen teilen lassen.

Von den Aufgaben, welche die Griechen mit Zirkel und Lineal bewältigen wollten, stellten sich noch zwei andere als unlösbar heraus: Mit den beiden Hilfsmitteln allein lässt sich weder aus einem Kreis ein Quadrat gleicher Fläche konstruieren (man nennt das die "Quadratur des Kreises") noch aus einem gegebenen Würfel ein zweiter ableiten, der doppelten Inhalt hat. Auch das ist Mathematik: Zu beweisen, dass bestimmte Aufgaben nicht zu schaffen sind.

Allein mit Zirkel und Lineal ist es nicht möglich, aus einem Würfel einen zweiten Würfel mit doppeltem Inhalt zu konstruieren





Der deutsche Physiker Albert Einstein entwickelte mit mathematischen Methoden die Relativitätstheorie, die Anfang des 20. Jahrhunderts die Physik umstürzte

Was ist das Parallelenaxiom?

Für viele Mathematiker fing die moderne Mathematik mit dem Erscheinen von Euklids 13-bändigem Werk „Elemente" um das Jahr 300 v. Chr. an. Der griechische Gelehrte erklärte darin die Geometrie nicht wie seine Vorgänger mit zahllosen Zeichnungen, sondern rein logisch. Er beschrieb zunächst eine Reihe von Tatsachen, die er als gültig oder gottgegeben voraussetzte. Eine solche Tatsache nennt man Axiom („Ursatz"). Eine davon lautet zum Beispiel: Von jedem Punkt lässt sich eine Gerade zu jedem anderen beliebigen Punkt ziehen. Aus seiner Liste von Vorgaben folgerte er dann alles Weitere. Damit führte Euklid erstmals modernes mathematisches Denken vor: Ausgehend von bestimmten Grundannahmen, die man einmal macht und dann nicht mehr weiter hinterfragt, gilt es, möglichst viele Aussagen zu beweisen.

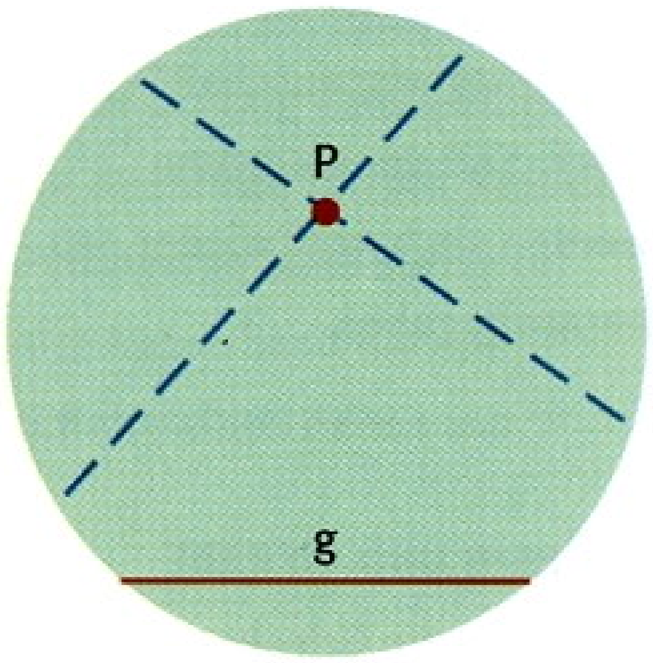
Jahrhundertelang war Euklids fünfte Annahme, das so genannte Parallelenaxiom, umstritten: Zu jeder Gerade g und jedem Punkt P, der nicht auf ihr liegt, gibt es genau eine Gerade durch P, die g nicht schneidet. Diese Gerade nennt man Parallele zu g durch den Punkt P. Viele Forscher hofften, diese Annahme nicht eigens treffen zu müssen, sondern aus den ersten vier ableiten zu können. Doch stellte sich das als unmöglich heraus. Mathematiker konstruierten Geometrien, die auf Euklids ersten vier Annahmen und der Verneinung der fünften beruhen. Was zunächst wie eine mathematische Spielerei aussah, fand Anfang des 20. Jahrhunderts seine Anwendung. Albert Einstein erkannte in einer dieser Geometrien die Mathematik für seine Allgemeine Relativitätstheorie.

Sind Fußbälle rund?

„Der Ball ist rund", weiß jeder Fußballfan. Genau betrachtet stimmt das jedoch gar nicht. Fußbälle sind vielmehr aus verschiedenen Flächen zusammengesetzt, genauer gesagt aus 12 Fünf- und 20 Sechsecken. Zudem sind die Fünfecke regelmäßig, das heißt ihre Seiten sind gleich lang und je zwei benachbarte Seiten bilden den selben Winkel, ebenso die Sechsecke. Die Fünfecke sind dabei von jeweils 5 Sechsecken umgeben, die Sechsecke von 3 Fünf- und 3 Sechsecken.

Eine Ecke ist nun jeder Punkt, an dem mehr als zwei Seiten zusam-

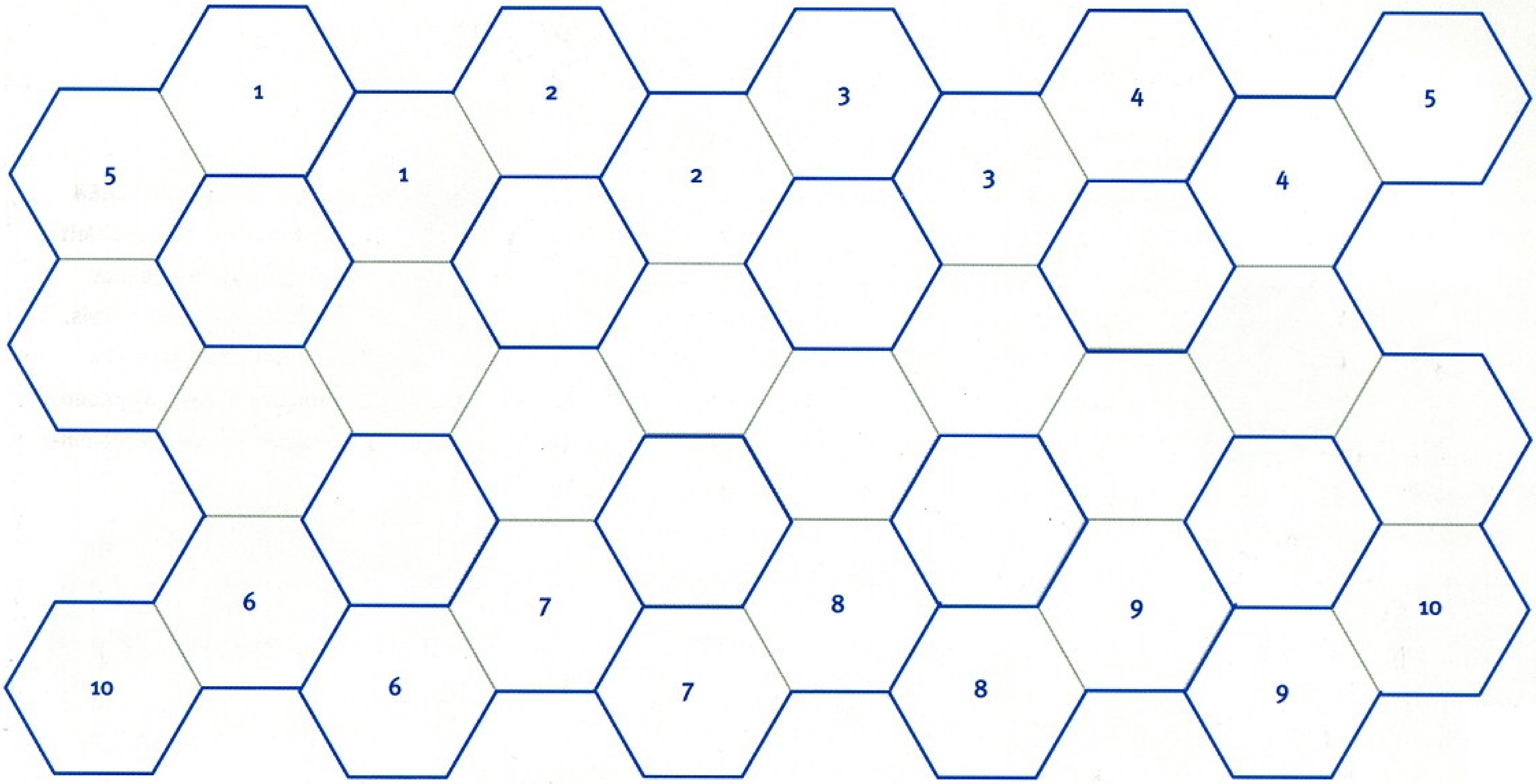
Bei der HYPERBOLISCHEN GEOMETRIE besteht die Welt – im Gegensatz zur ebenen Geometrie – aus einem Kreis. Punkte sind alle Punkte im Inneren des Kreises, Geraden sind die Stücke von herkömm-



lichen Geraden, die sich im Kreis befinden. Mit dieser Definition gibt es zu jeder Geraden viele Geraden, die sie nicht schneiden und durch den selben Punkt gehen. Die anderen vier Grundannahmen des Euklid sind hingegen erfüllt.

PLATONISCHE KÖRPER

Platonische Körper heißen Figuren im Raum, deren Seiten alle regelmäßige Vielecke mit gleicher Eckenzahl sind. Benannt sind sie nach dem griechischen Philosophen Plato. Es gibt genau fünf platonische Körper: Tetraeder haben 4 Flächen, Würfel 6, Oktaeder 8, Dodekaeder 12 und Ikosaeder 20.



Bastelbogen für einen Fussball

Kopiere die Seite, schneide entlang der dicken Linien und falte entlang der dünnen. Richtig gefaltet überdecken sich die Felder gleicher Nummer. Klebe sie zusammen, und du hast einen „Fußball", bei dem die Fünfeckseiten Löcher sind

Leonhard Euler (1707–1783) ist der Meister der Vermutungen. Kein anderer Mathematiker stellte wohl so viele Behauptungen auf wie der Schweizer. Die meisten davon erwiesen sich als richtig, manche waren aber falsch. Die Verdienste Eulers schmälert das jedoch nicht. Denn auch das Widerlegen von Vermutungen brachte die mathematische Forschung voran.

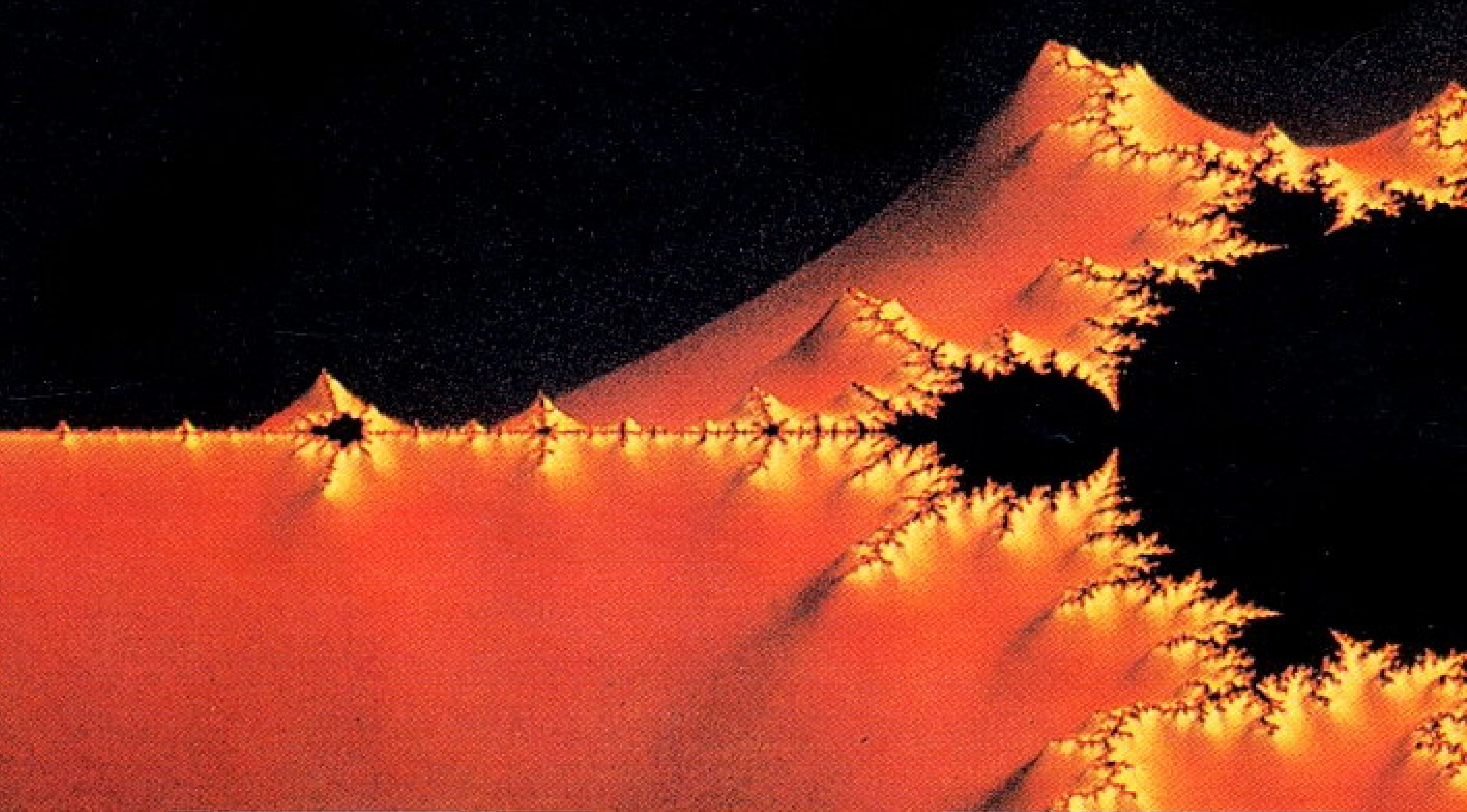
menstoßen. Beim Fußball sind es jeweils genau drei Seiten und nicht mehr. Bei anderen aus Vielecken zusammengesetzten Körpern können freilich auch mehr als 3 Seiten in einem Punkt aneinanderstoßen. Wie viele „Ecken" hat der Fußball? Dazu überlegen wir uns, dass jede Ecke an einem Fünfeck hängt, und keine zwei Fünfecke eine Ecke gemeinsam haben. Daher muss es fünfmal so viele Ecken wie Fünfecke geben: $5 \cdot 12 = 60$. Wie viele „Kanten" hat der Fußball? Jedes Fünfeck hat 5 Kanten, jedes Sechseck 6. Rechnen wir nun fünfmal die Anzahl der Fünfecke plus sechsmal die Anzahl der Sechsecke, also $5 \cdot 12 + 6 \cdot 20$, zählen wir jede Kante doppelt, da jede Kante genau zwei Flächen begrenzt. Die Anzahl der Kanten ist daher die Hälfte dieses Werts: $\frac{5 \cdot 12 + 6 \cdot 20}{2} = \frac{180}{2} = 90$. Für die Anzahl der Flächen müssen wir nur die Anzahl der Fünf- und Sechsecke zusammenzählen: $12 + 20 = 32$.

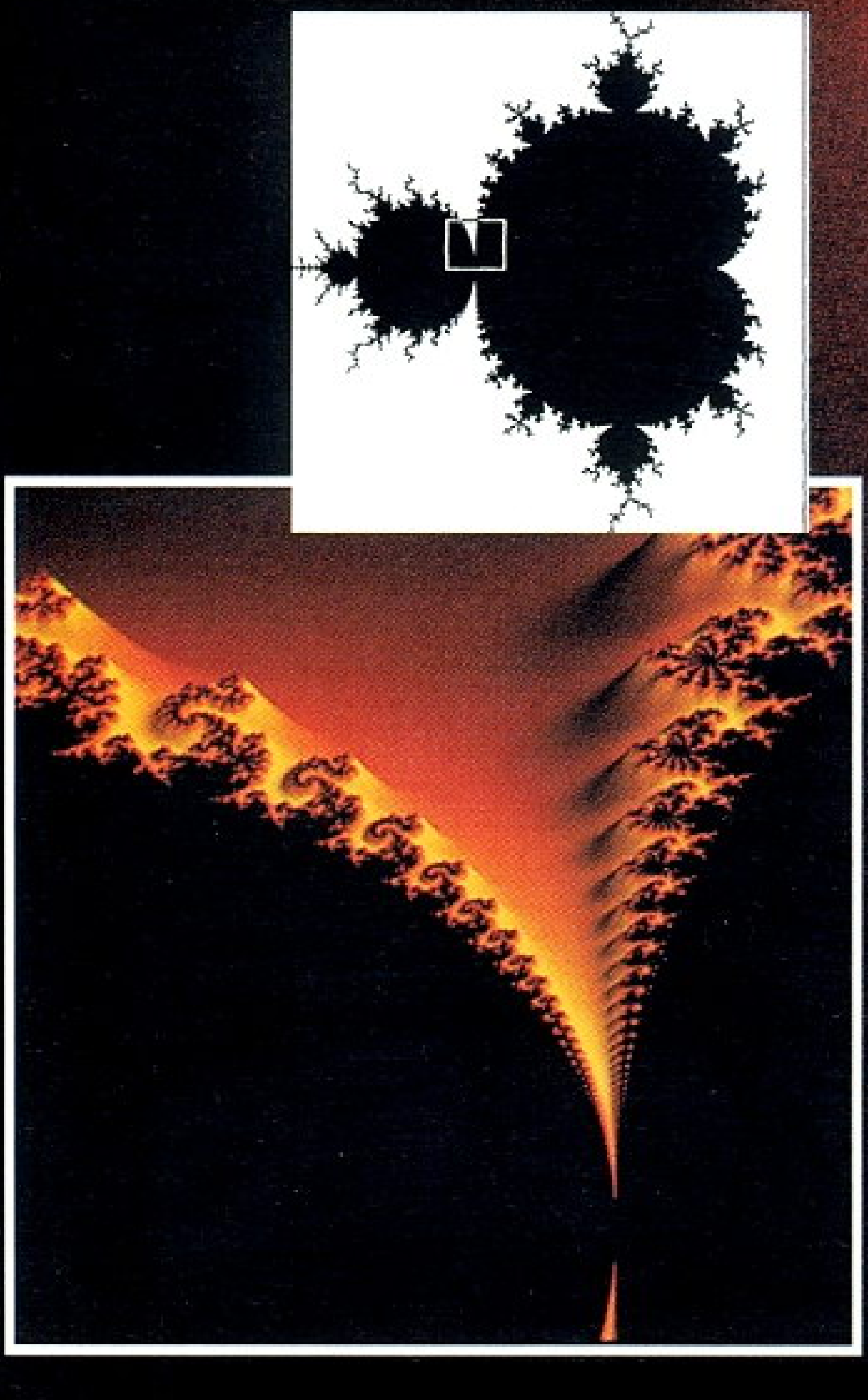
Nun berechnen wir Anzahl der Ecken minus Anzahl der Kanten plus Anzahl der Flächen: $60 - 90 + 32 = 2$. Das Ergebnis ist kein Zufall, sondern gilt für alle Figuren, deren Seiten Vielecke sind und die nirgendwo nach innen gewölbt sind, das heißt keine Delle haben. Das hat als Erster der Schweizer Mathematiker Leonhard Euler in 18. Jahrhundert bewiesen. Beispiele für Eulers Satz sind etwa der Würfel: Er hat 8 Ecken, 12 Kanten und 6 Flächen: $8 - 12 + 6 = 2$. Oder die Pyramide: Sie hat (den Boden mitgezählt) 5 Ecken, 8 Kanten und 5 Flächen: $5 - 8 + 5 = 2$.

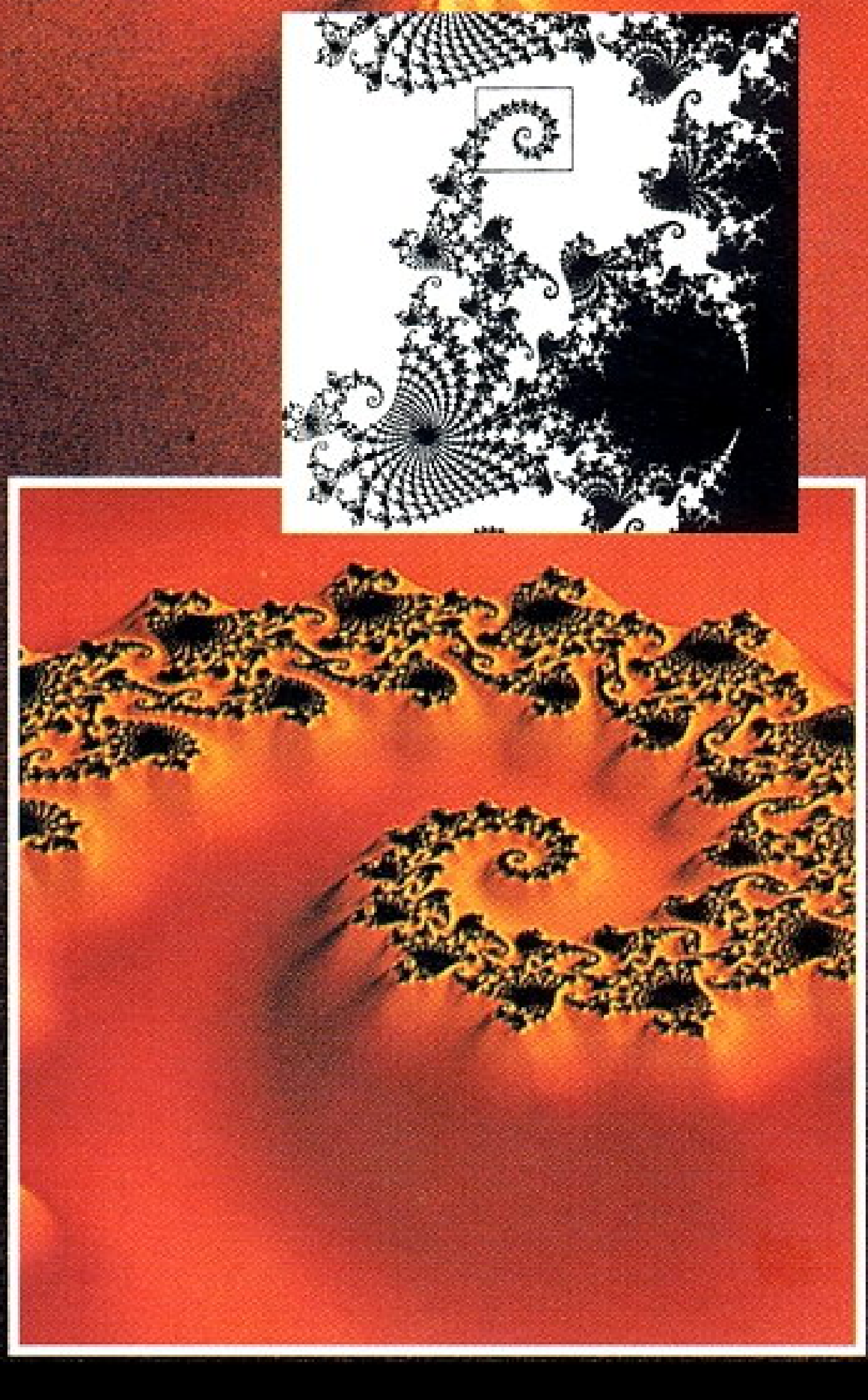
Was ist fraktale Geometrie?

Die klassische Geometrie des dreidimensionalen Raumes kennt nur glatte Figuren wie Kugeln oder Würfel. Die Wirklichkeit sieht aber anders aus. Wolken sind keine Kugeln, Berge keine Würfel, und Rinde ist nicht glatt. Diese einfache Erkenntnis brachte den in den USA lebenden Mathematiker Benoit Mandelbrot darauf, eine neue Geometrie zu suchen. Als wichtigste Eigenschaft sah er die Selbstähnlichkeit an, die er überall in der Natur beobachtete: Betrachtet man nur die Form und nicht die Größe, ähnelt der Ast dem ganzen Baum, der Zweig dem Ast, die Adern in einem Blatt dem Zweig. Berge haben Ähnlichkeit mit Felsen, Felsen mit Steinen, Steine mit Sandkörnern. Die Figuren von Mandelbrots fraktaler Geometrie zeichnen sich ebenfalls dadurch aus, dass sie sich selbst ähnlich sind. Anders als die Figuren der klassischen Geometrie, die fertig vorgegeben sind, entstehen die so genannten Fraktale durch Wachstum.

Um sie zu konstruieren, geht man schrittweise vor. Eine gerade Linie etwa wird nach einer bestimmten Vorschrift verändert. Auf das Ergebnis wird dieselbe Regel angewandt, das Resultat davon wird wiederum genauso behandelt. Bei der Schneeflockenkurve (siehe Abbildung Seite 34) zum Beispiel verwandelt sich im ersten Schritt das mittlere Drittel einer geraden Linie in einen Zacken. Im nächsten Schritt werden jeweils die mittleren Drittel aller geraden Linien durch einen



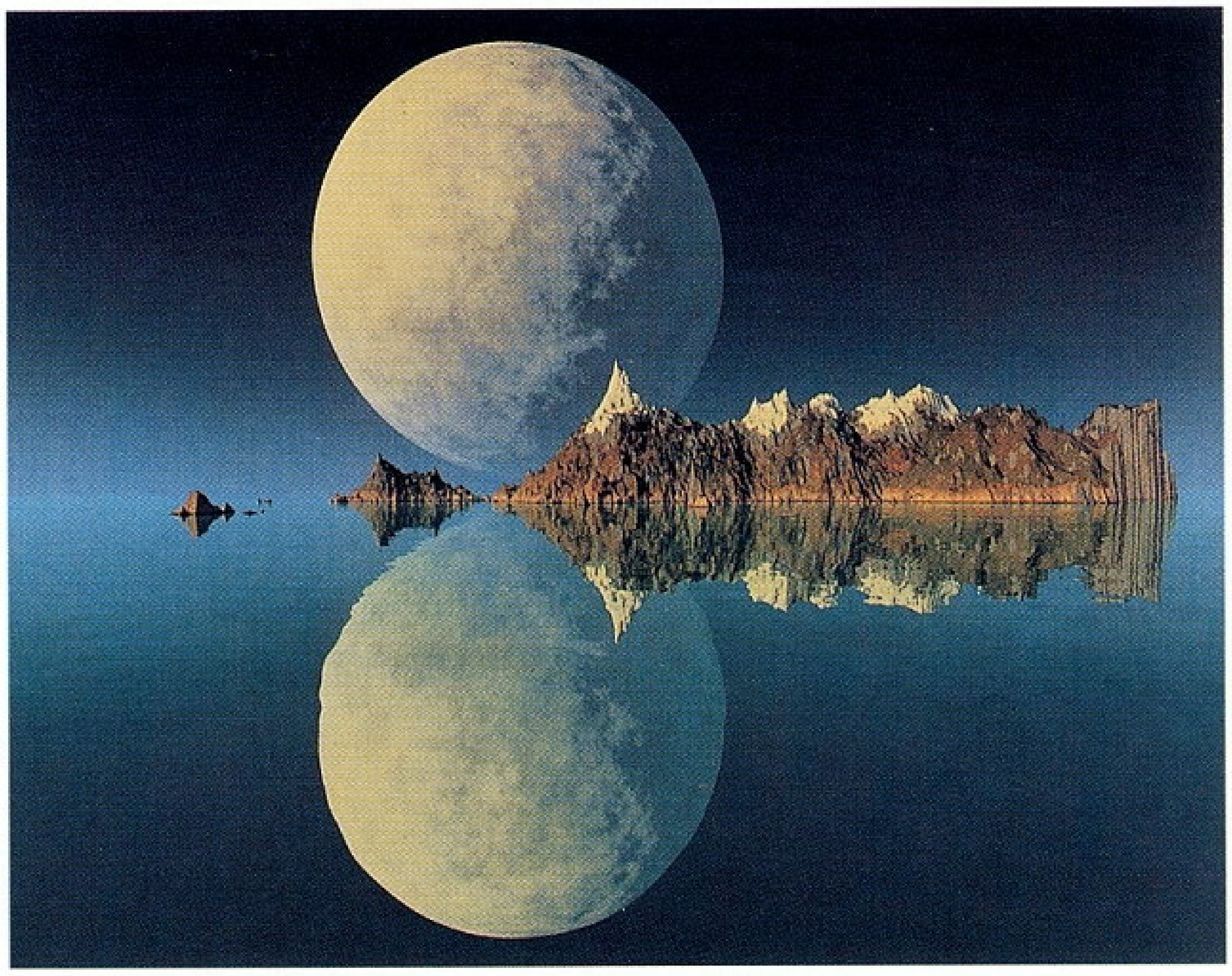




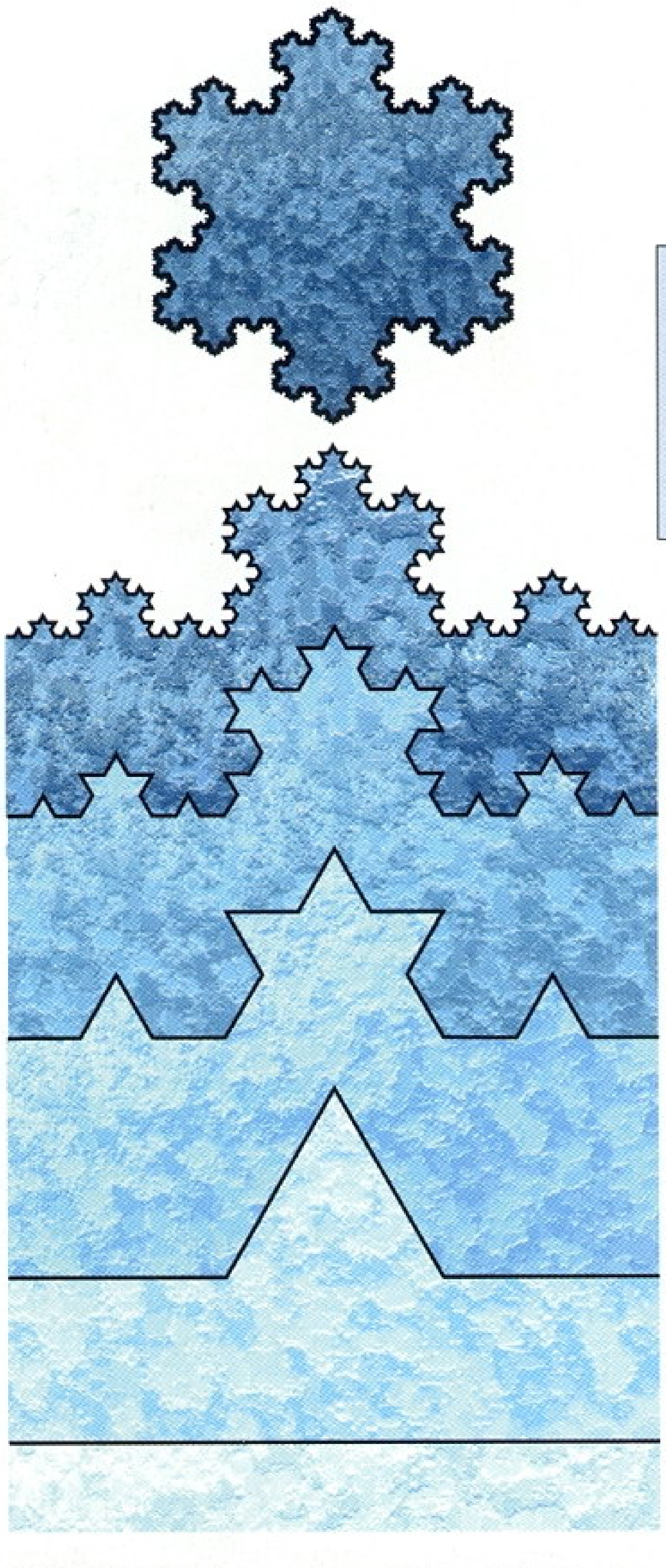
Die **Mandelbrot-Menge,** die auch Apfelmännchen genannt wird, ist die bekannteste Figur der fraktalen Geometrie. Vergrößert man Ausschnitte von ihr immer wieder, tauchen selbstähnliche Strukturen auf. So finden sich etwa an ihrem Rand unendlich oft kleine Kopien ihrer selbst. Dank der Forschung in den letzten Jahren haben Mathematiker die Gesetzmäßigkeiten ihrer Selbstähnlichkeiten an vielen Stellen verstanden. An anderen Stellen stehen selbst die Spezialisten noch vor Rätseln.

Zacken ersetzt. Nach unendlicher Wiederholung dieses Verfahrens ergibt sich eine Linie, die an den Rand einer Schneeflocke erinnert.

Früher war es mühselig und zeitaufwendig, dieselbe Regel Tausende von Malen anzuwenden. Die Stärke von Computern liegt hingegen gerade darin, dieselbe Anweisung in atemberaubendem Tempo immer wieder durchzuführen. Deswegen erlebte die fraktale Geometrie, deren Vorläufer hundert Jahre zurückreichen, erst mit der Entwicklung der Elektronenrechner ihren Durchbruch.



Mathematiker zaubern fraktale Landschaften und ganze Planeten auf ähnliche Weise, wie die Schneeflockenkurve gebildet wurde. In manchen Science-Fiction-Filmen und Video-Spielen sind derartige fraktale Gebilde zu bewundern



Schneeflockenkurve: Das mittlere Drittel jeder geraden Strecke wird jeweils durch einen Zacken ersetzt

Wie lang ist die Küste Großbritanniens?

So lautet der Titel eines Artikels, den Benoit Mandelbrot im US-amerikanischen Wissenschaftsmagazin Science veröffentlichte. Die Antwort des Begründers der fraktalen Mathematik: Das kommt auf den Maßstab an. Je genauer ein Vermesser die Küstenlinie betrachtet, desto mehr Buchten und Vorsprünge tauchen auf, deren Kanten er zur Länge dazuzählen muss. Bücher geben Werte zwischen 7200 und 8000 Kilometern an. „Natürliche Formen und Muster zeichnen sich dadurch aus, dass sie praktisch keine charakteristische Länge haben", sagt Mandelbrot.

Heinz-Otto Peitgen von der Universität Bremen und seine Mitarbeiter haben die Küste Großbritanniens auf Karten mit einem Zirkel gemessen. Bei einer Zirkeleinstellung von umgerechnet 500 Kilometern kamen sie auf 2600 Kilometer Umfang, bei 17 Kilometern Abstand zwischen

Chaostheorie

Fraktale Geometrie zählt zur fächerübergreifenden Chaosforschung, die sich mit großen Auswirkungen kleiner Veränderungen beschäftigt. Sprichwörtlich geworden ist der so genannte Schmetterlings-Effekt: Kleinste Luftbewegungen können sich zu ungeahnter Größe hochschaukeln. So kann – zumindest theoretisch – der Flügelschlag eines Schmetterlings in der Karibik einen Wirbelsturm über China auslösen.

den Zirkelbeinen dagegen auf 8640 Kilometer. Je feiner der Maßstab, desto größer wird die Länge. Darin unterscheiden sich Küstenlinien von Figuren wie Kreisen oder Dreiecken. Peitgen hat einen Kreis mit einem Durchmesser von 1000 Kilometern mit den gleichen Methoden wie Großbritanniens Küste vermessen. War der Zirkel auf 500 Kilometer eingestellt, berechnete er einen Umfang von 3000 Kilometern, fasste er 17 Kilometer, ergaben sich 3141 Kilometer. Selbst wenn die Zirkelbeine auch noch so nahe zusammenstehen, mehr als $1000 \cdot \pi$ (= 3141,592...) Kilometer kann nie herauskommen.

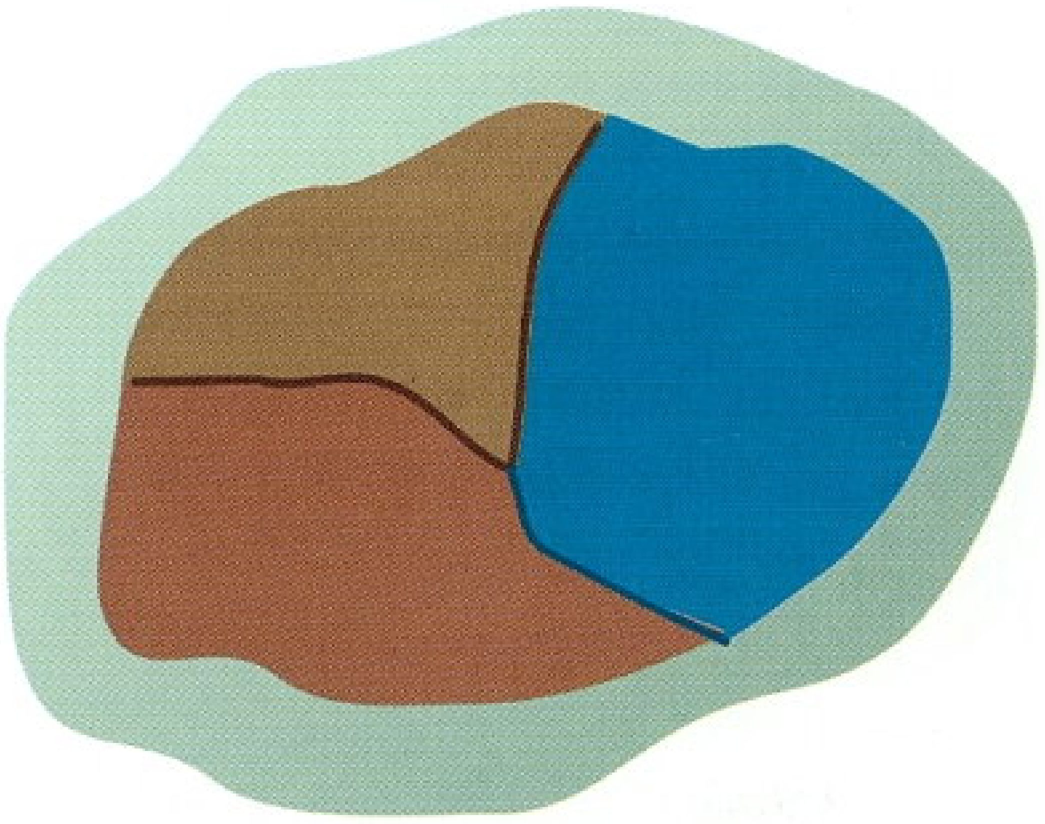
Fraktale Kurven haben wie Küstenlinien keine endliche Länge. Bei der Konstruktion der Schneeflockenkurve etwa wird die Zackenkurven in jedem Schritt ein Drittel länger als in der Vorstufe. Da das Verfahren unendlich oft ausgeführt wird, wächst die Länge unbeschränkt.

COMPUTER haben inzwischen auch bei anderen Beweisen als dem des Vierfarbensatzes eine Rolle gespielt. Die Forscher verringern das Fehlerrisiko, indem sie die Rechnungen auf mehreren Anlagen mit unterschiedlichen Programmen durchführen. Bis heute weiß indes niemand, ob sich der Vierfarbensatz – oder irgendeine andere mathematische Behauptung – nur mit Hilfe von Computern beweisen lässt.

Wie viele Farben braucht man für eine Landkarte?

Im Jahre 1852 zeichnete der englische Mathematiker Francis Guthrie eine Karte der Grafschaften des Königreichs. Dabei kam er auf die Frage, wie viele Farben mindestens nötig sind, um eine beliebige Landkarte zu malen. Benachbarte Länder sollten natürlich verschiedenfarbig sein. Guthrie vermutete, dass vier Farben genügen. Am Beweis scheiterte er jedoch genauso wie seine Kollegen im Lauf der nächsten 124 Jahre. Die Lösung fanden 1976 Kenneth Appel und Wolfgang Haken von der Universität Chicago nach vier Jahren harter Arbeit und 1200 Stunden Rechenzeit auf ihrem Computer.

Da kein Mensch, auch kein Mathematiker, nachvollziehen kann, was ein Computer in über tausend Stunden rechnet, blieb der Beweis des Vierfarbensatzes in der Fachwelt zunächst umstritten. Zumal da in den ersten Jahren nach seiner Veröffentlichung immer wieder Fehler darin entdeckt wurden. Appel und Haken konnten diese aber jedes Mal ausbessern. Inzwischen ist ihre Arbeit weitgehend anerkannt. Zudem haben Mathematiker andere, weniger komplizierte Beweise des Vierfarbensatzes ersonnen. Keiner von ihnen kommt aber ganz ohne Computerhilfe aus.



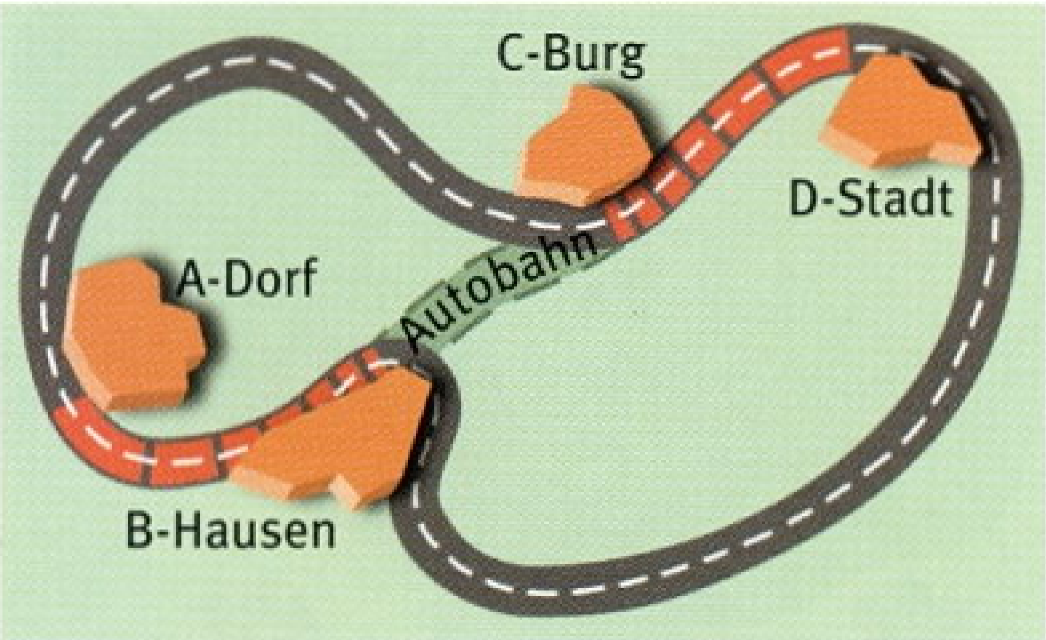
Für diese einfache Landkarte braucht man bereits vier verschiedene Farben

Können neue Straßen zu mehr Stau führen?

Mathematiker helfen Fahrpläne zu erstellen, neue Straßen zu planen und zu ergründen, wie Staus entstehen. Manchmal kommen sie dabei zu verblüffenden Ergebnissen. Der Bochumer Mathematiker Dietrich Braess etwa bewies, dass der Bau einer neuen Straße zu mehr Staus führen kann: Von A-Dorf nach D-Stadt führen zwei Verbindungen, eine über B-Hausen und eine über C-Burg. Sechstausend Autos fahren jeden Morgen von A-Dorf nach D-Stadt.

Die Autobahnen von A-Dorf nach C-Burg und von B-Hausen nach D-Stadt sind gut ausgebaut und in 50 Minuten hinter sich zu bringen, egal wie viele Autos auf ihnen fahren. Die Straßen von A-Dorf nach B-Hausen und von C-Burg nach D-Stadt sind zwar relativ kurz, aber

Mathematiker untersuchen, wann es zum Stau kommt



Der Bau der Autobahn führt zu Staus auf den Straßen von A-Dorf nach B-Hausen und von C-Burg nach D-Stadt

sehr eng. Rollen tausend Autos auf ihnen, brauchen sie 10 Minuten. Sind es zweitausend, benötigen sie 20 Minuten. Bei dreitausend ist die Reisezeit 30 Minuten, bei viertausend 40, bei fünftausend 50 und bei sechstausend 60 Minuten. Schlägt die eine Hälfte der Fahrer den Weg über B-Hausen ein, die andere den über C-Burg, braucht jeder 80 Minuten von A-Dorf nach D-Stadt. Und keiner erreicht schneller sein Ziel, wenn er den anderen Weg nimmt.

Nun lässt der Verkehrsminister eine neue Autobahn bauen, über die die Autos in zehn Minuten von B-Hausen nach C-Burg brettern können. Keine gute Idee: Die neue schnelle Straße lockt Fahrer an. Der Verkehr auf den Strecken von A-Dorf nach B-Hausen und von C-Burg nach D-Stadt wächst dadurch an – was die Reisezeit verlängert. Und zwar für alle Fahrer, selbst für diejenigen, die weiter über die alte Strecke brausen. Die Entlastung der Autobahnen bringt nichts, da für sie in jedem Fall 50 Minuten gebraucht werden. Sucht sich jetzt jeder Fahrer die für ihn günstigste Verbindung, sind alle 90 Minuten, also zehn Minuten länger, unterwegs. Auf den Straßen von A-Dorf nach B-Hausen und von C-Burg nach D-Stadt drängeln sich nun viertausend Autos, die für die Engpässe jeweils 40 Minuten brauchen. Und kein Fahrer kann seine Reisezeit verkürzen, indem er eine andere Strecke wählt.

Wie lassen sich Kugeln möglichst Platz sparend lagern?

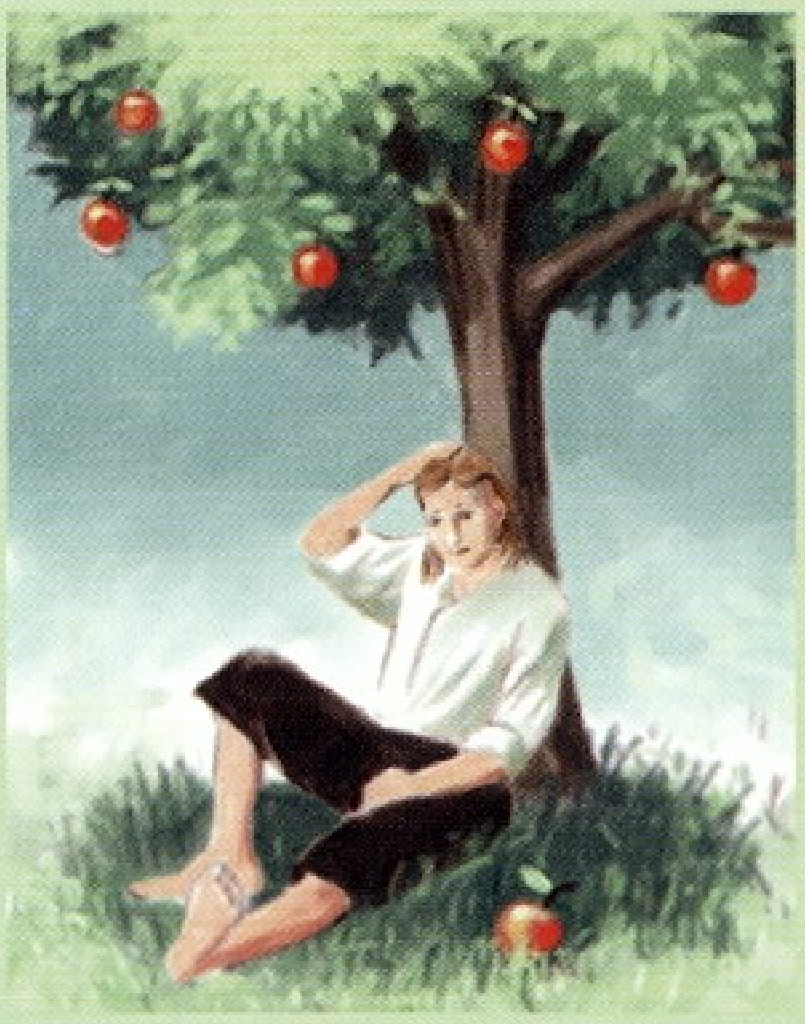
Eine endgültige Antwort auf diese Frage fand ein US-amerikanischer Mathematiker erst 1998. Tom Hales von der Universität Ann Arbor im US-Bundesstaat Michigan bewies, dass man Kugeln nicht enger stapeln kann, als Soldaten dies schon vor Jahrhunderten mit ihren Kanonenkugeln taten. Heute schichten Obsthändler ihre Orangen nach der gleichen Regel auf: An zwei nebeneinander liegende Apfelsinen legt man eine dritte so, dass sie die beiden anderen berührt. Jede weitere Frucht der untersten Schicht wird nun so hingelegt, dass sie jeweils an zwei schon hingelegte anstößt. Ist so die Tischfläche bedeckt, geht es an die zweite Schicht, die genauso aussieht wie die erste. Die Orangen

Ein Verkehrsstau auf der Autobahn entsteht an Baustellen oder nach Unfällen. Oft kommt es aber auch zu einem Stau aus dem Nichts. Wie sich ohne Verkehrshindernis ein Stau bilden kann, haben Mathematiker herausgefunden. Bremst ein Autofahrer ab, etwa weil ein Lastwagen vor ihm auf seine Spur ausgeschert ist, bemerkt das der Hintermann oft erst spät und muss deswegen etwas stärker bremsen. Steigt dessen Hintermann dann noch etwas heftiger aufs Bremspedal, kann die Bremserei bis zum Stillstand führen.

Johannes Kepler (1571-1630) ist vor allem wegen der Keplerschen Gesetze bekannt, die der deutsche Astronom und Mathematiker von Himmelsbeobachtungen der Planeten herleitete. Sie beschreiben den Lauf der Planeten um die Sonne. Daneben entwickelte Kepler die Theorie der Linsen und des Fernrohrs.

DIFFERENTIALRECHNUNG

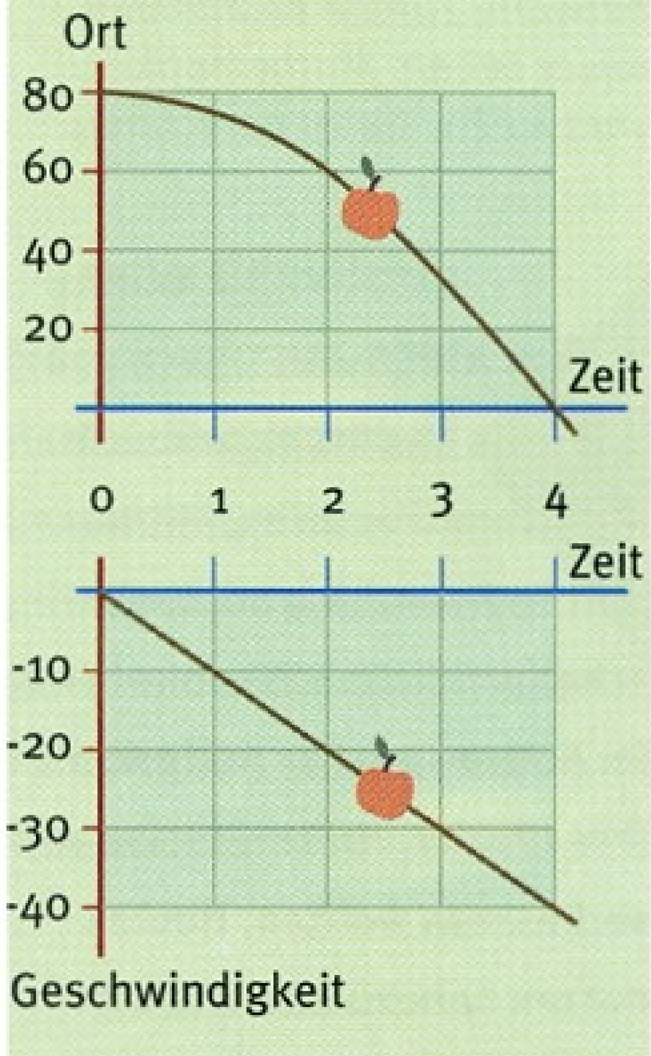
Als Student saß der berühmte Physiker Isaac Newton (1643-1727) einmal unter einem Apfelbaum. Als ein herunterfallender Apfel ihm beinahe auf den Kopf plumpste, begann er, die Kraft zu untersuchen, die den Apfel zu Boden zieht. Wir nennen diese Kraft Schwerkraft oder Gravitation. Um den Fall des Apfels zu verstehen, musste Newton erst ein neues mathematisches Teilgebiet entwickeln, das noch heute überaus wichtig ist: Die Differentialrechnung. Mit ihr lässt sich Bewegung erfassen.



Damit die Rechnung einfacher wird, stellen wir uns einen 80 Meter hohen Apfelbaum vor. Ein Apfel fällt in der ersten Sekunde 5 Meter herunter, in der zweiten – durch die Schwerkraft schon etwas schneller geworden – verliert er 15 Meter Höhe, in der dritten 25, in der vierten 35. Dann hat er 80 Meter zurückgelegt und knallt auf dem Boden auf. Seine Höhe beträgt daher in Sekundenschritten gemessen 80, 75, 60, 35, 0 Meter.

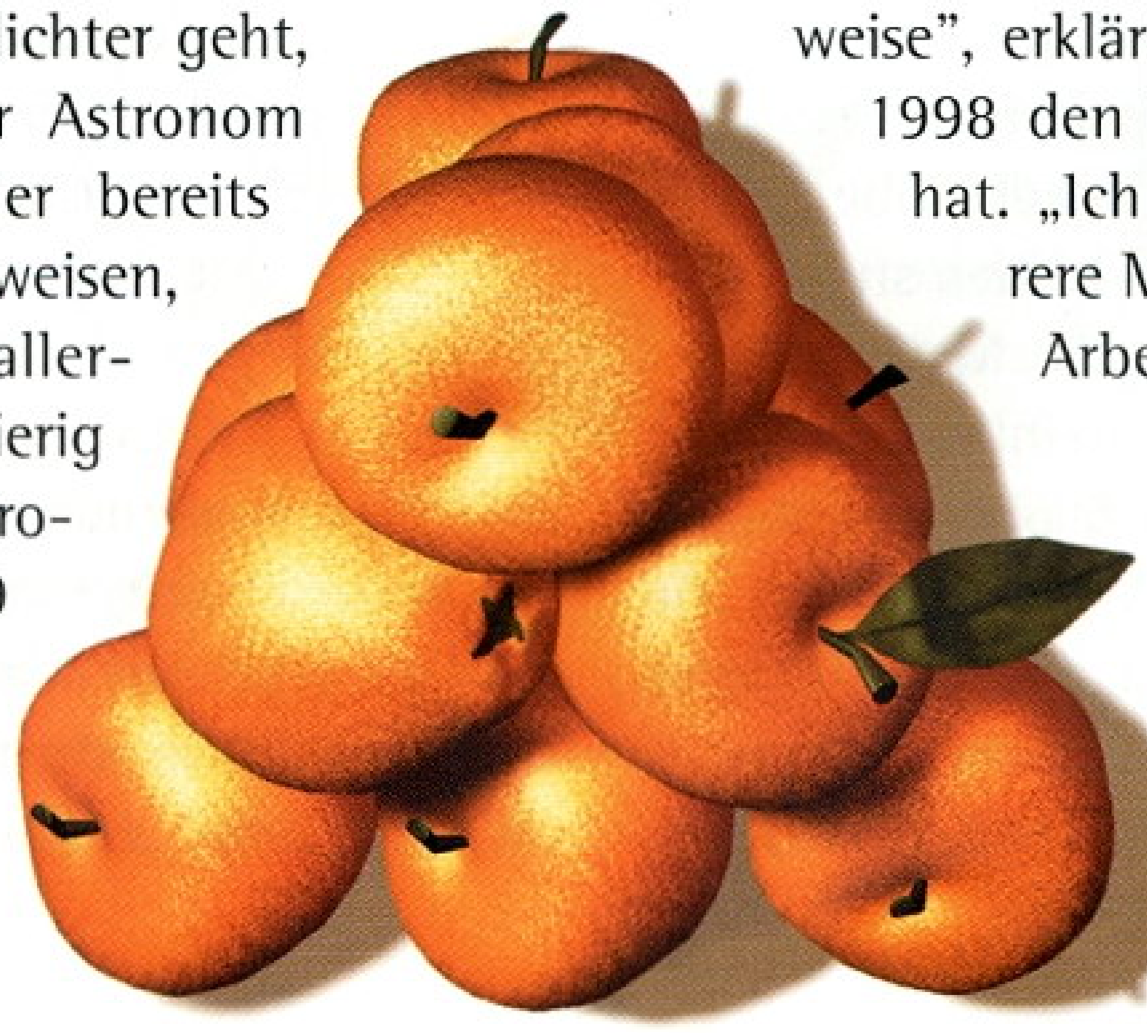
Was sagt uns nun die Höhenrechnung für den Apfel? Ein Muster ist in den Zahlen kaum zu erkennen. Versuchen wir es mit der Geschwindigkeit, mit der sich der Apfel bewegt. Am Anfang ruht er, nach einer Sekunde ist er rund 10 Meter pro Sekunde (das sind 36 Kilometer pro Stunde) schnell, nach zwei Sekunden 20 Meter pro Sekunde, nach drei 30. Nach vier Sekunden landet er mit 40 Meter pro Sekunde im Gras. Die Geschwindigkeiten ergeben also ein einfaches Bild: 0, 10, 20, 30, 40. Pro Sekunde legt der Apfel um 10 Meter pro Sekunde zu. Der Physiker sagt, der Apfel erfährt eine gleich bleibende Beschleunigung von 10 Meter pro Sekunde zum Quadrat.

Statt immer nur in Sekundenschritten könnte man auch nach Höhe und Geschwindigkeit des Apfels zu jedem beliebigen Zeitpunkt fragen. Dazu zeichnen wir ein kartesisches Koordinatensystem (siehe Seite 26). Eine seiner beiden Achsen steht dabei für die Zeit, die andere für die Höhe. Tragen wir nun die Höhe des Apfels zu jeder Zeit ein, ergibt sich eine gekrümmte Linie. In einem zweiten Koordinatensystem stellt die eine Achse wieder die Zeit dar, die andere die Geschwindigkeit. Da der Apfel nach unten fällt, nehmen wir für letztere negative Zahlen. Hier ergibt sich eine Gerade. Newton erkannte, dass das Muster für die Geschwindigkeit einfacher ist als das für die Höhe, und entwickelte ein Rechenverfahren, wie man von dem einen zum anderen kommt: die Differentialrechnung. Mit ihr lassen sich Änderungsraten bestimmen. In Zeichnungen entspricht die Änderungsrate dem Grad der Steigung oder des Abfallens einer Linie.



Der Fall des Apfels ergibt eine gebogene Linie, seine Geschwindigkeit eine Gerade

rutschen dabei von selbst an die richtige Stelle, nämlich in die Lücken der unteren Lage. So lässt sich Schicht auf Schicht fügen. Der Anteil Frucht am Raum, den der Stapel einnimmt, beträgt bei dieser Anordnung knapp drei Viertel. Dass es nicht dichter geht, behauptete der Astronom Johannes Kepler bereits 1609. Es zu beweisen, stellte sich allerdings als schwierig heraus. Das Problem blieb 389 Jahre offen – länger als die berühmte Fermatsche Vermutung (siehe Seite 17). Zwar behaupteten einige Mathematiker, sie hätten es bewältigt. Doch jedes Mal fanden ihre Kollegen Lücken in der Beweisführung. „Dieses Gebiet der Mathematik ist berüchtigt für seine falschen Beweise", erklärt Tom Hales, der 1998 den Beweis geschafft hat. „Ich verbrachte mehrere Monate damit, die Arbeit zu prüfen."



So lassen sich Orangen am dichtesten stapeln

Ob bei Glücksspiel oder Partnerwahl, Zufälle bestimmen unser Leben. Mathematiker versuchen, sie zu berechnen

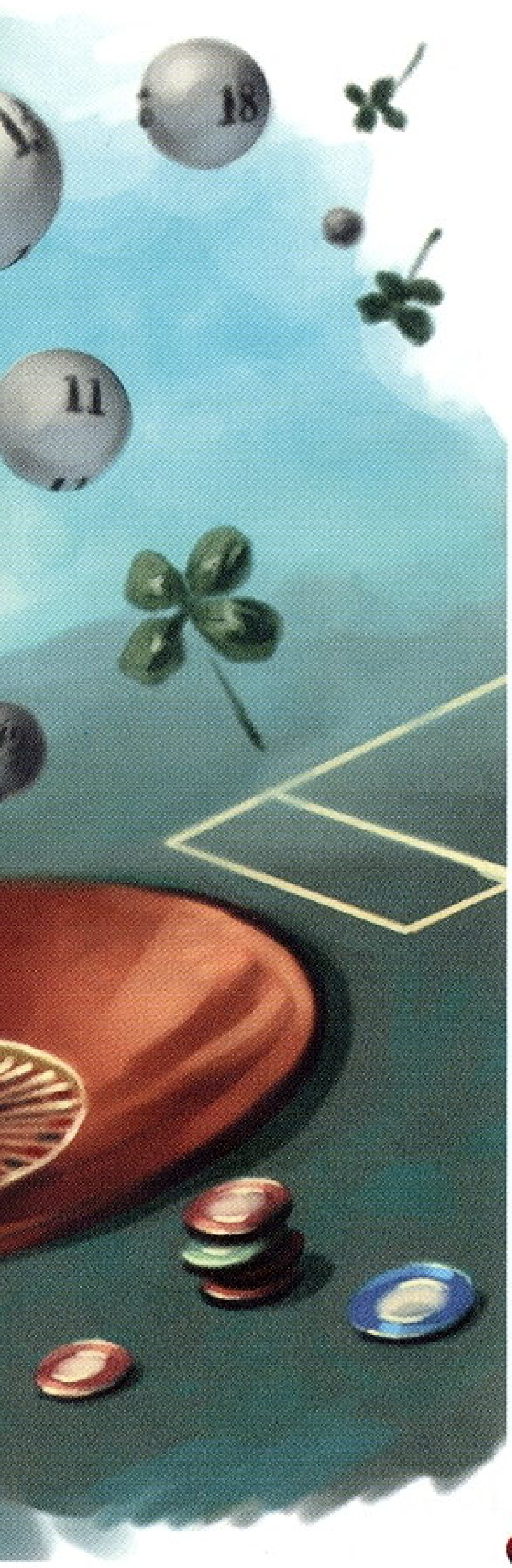
Wahrscheinlichkeit

Wie oft hat man Glück?

Wirft man eine Münze in die Luft, landet sie entweder mit der Zahl oder mit dem Wappen nach oben. Für beides stehen die Chancen gleich gut. Mathematiker sagen, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Kopf nach oben zeigt, beträgt $\frac{1}{2}$. In der Mathematik ist die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis immer eine Zahl zwischen 0 und 1. Beim Würfeln eine „6" zu würfeln etwa hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$. Denn der Würfel fällt auf eine seiner sechs Seiten, und die Chancen dafür, dass die „6" nach oben zeigt, sind so groß wie die für jede andere Würfelseite. Die Wahrscheinlichkeit, eine „4", „5" oder „6" zu würfeln, beträgt $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$. Die Wahrscheinlichkeit 0 haben Ereignisse, die nie auftreten, etwa eine „7" zu würfeln. Die Wahrscheinlichkeit 1 ist für Ereignisse reserviert, die mit Sicherheit eintreten, etwa eine „1", „2", „3", „4", „5" oder „6" zu würfeln. Ein-

Wie alles anfing

Erstmals beschäftigten sich Mathematiker im 17. Jahrhundert in Frankreich mit Wahrscheinlichkeiten. Sie forschten im Auftrag reicher Adliger, die ihre Chancen beim Glücksspiel verbessern wollten. Heute nutzen nahezu alle Wissenschaften die Wahrscheinlichkeitstheorie.



fach zu berechnen sind auch so genannte Komplementärereignisse: Die Wahrscheinlichkeit, keine „6“ zu würfeln, ist $1-\frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln mindestens eine „6” zu erzielen? $\frac{1}{3}$? Nein. Zählen wir aus. Mit zwei Würfeln gibt es 36 mögliche Ergebnisse, die alle gleich wahrscheinlich sind:

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Bei genau 11 von ihnen (die in der letzten Zeile und der letzten Spalte) kommt eine „6“ vor. Also beträgt die Wahrscheinlichkeit $\frac{11}{36}$, was etwas weniger als $\frac{1}{3}$ ist.

Wer auf $\frac{1}{3}$ – pro Würfel $\frac{1}{6}$ und dann addieren – getippt hat, hat den Fall unten rechts zweimal gezählt. Liegt bereits ein Würfel mit der „6“ nach oben da, erhöht es die Gewinnwahrscheinlichkeit nicht mehr, wenn auch der andere eine „6“ zeigt.

Jakob Bernoulli (1654-1705), schweizerischer Mathematiker und Physiker, gilt als einer der Begründer der Wahrscheinlichkeitstheorie. Er fand das Gesetz der großen Zahlen.

Man kann sich die Siegeschance auch über Komplementärereignisse herleiten: Für jeden Würfel ist die Wahrscheinlichkeit, keine „6“ zu zeigen, gleich $\frac{5}{6}$. Dass keiner von beiden die „6“ bringt, hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}$. Die des Komplementärereignisses (mindestens eine „6“) berechnet sich zu
$1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = 1 - \frac{25}{36} = \frac{36}{36} - \frac{25}{36} = \frac{11}{36} = 0{,}30555....$

Hat der Zufall ein Gedächtnis?

Nein. Wenn ein Würfel zehnmal nacheinander auf die „6” fiel, ist die Wahrscheinlichkeit für dasselbe Ergebnis beim elften Wurf wieder genau ein Sechstel. Es sei denn, der Würfel ist gefälscht und zum Beispiel auf einer Seite schwerer als auf den anderen. Eigentlich sollte es einleuchtend sein, dass Würfel, Karten und Roulettekugeln kein Gedächtnis haben. Dennoch wollen viele Glücksspieler es nicht wahrhaben und verspielen ihr gesamtes Vermögen, weil sie auf den Ausgleich des Schicksals warten.

Wer auf diesen Ausgleich setzt, hat das so genannte „Gesetz der großen Zahl” falsch verstanden, das Jakob Bernoulli als Erster formulierte und bewies. Die Aussage dieses mathematischen Satzes:

Würfeln wir viele Male nacheinander und schreiben die Ergebnisse auf, werden wir in ungefähr einem Sechstel der Fälle eine „6“ notieren. Oder anders ausgedrückt: Teilt man die Anzahl der 6er-Würfe durch die Anzahl aller Würfe, liegt das Ergebnis, würfelt man nur lange genug, beliebig nahe an $\frac{1}{6}$. Wann sich die Häufigkeiten der Würfelergebnisse angleichen, lässt sich aber nicht bestimmen. Immer wieder wird über längere Zeit die „6" häufiger – oder auch weniger oft – als in einem Sechstel der Würfe auftreten. Es gibt kein Spielsystem, das einem bei Würfeln, Münzwurf oder Roulette einen Vorteil verschafft.

Das „Gesetz der großen Zahl" wird heute noch laufend angewandt, etwa wenn Lebensversicherungen ermitteln, wie viel Beitrag ihre Kunden bezahlen müssen, oder wenn bei Umfragen von tausend Antworten auf die Meinung der gesamten Bevölkerung hochgerechnet wird.

Wie oft haben Klassenkameraden am gleichen Tag Geburtstag?

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei Kinder in einer Klasse am gleichen Tag Geburtstag feiern, ist erstaunlich hoch. Schon bei 23 Kindern in einer Klasse ist sie größer als $\frac{1}{2}$. Nehmen wir an, jedes hätte an einem anderen Tag Geburtstag. Dann kann das erste an einem beliebigen Tag geboren sein. Für das zweite bleiben alle Tage außer dem Geburtstag von Nummer eins. Die Wahrscheinlichkeit, dass es an einem anderen Tag feiert, ist somit $\frac{364}{365}$. Für den Jubeltag des dritten sind dann noch 365 – 2 = 363 Tage möglich, für den des vierten 365 – 3 = 362 Tage und so weiter. Die Wahrscheinlichkeit, dass von 23 Kindern keine zwei am selben Tag feiern, lässt sich nun mit dem Taschenrechner ermitteln:

$$\frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{343}{365} = 0{,}49\ldots0$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei am selben Tag Geburtstag haben, ist damit größer als $\frac{1}{2}$.

Sind 40 Kinder in der Klasse, ist die Wahrscheinlichkeit für lauter verschiedene Geburtstage:

$$\frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{326}{365} = 0{,}108\ldots$$

Das ist weniger als ein Neuntel.

Dass zwei Kinder in einer Klasse am selben Tag Geburtstag feiern, ist gar nicht so selten.

Überraschungen

Häufig widerspricht die Wahrscheinlichkeitsrechnung dem, was wir erwarten. Ein Beispiel: Nehmen wir an, ein Test auf eine Viruserkrankung erkennt jeden Infizierten, schlägt aber durchschnittlich auch bei einem von hundert Gesunden an. Nun gebe es in Deutschland 8000 Infizierte. Ist das Testergebnis bei einem positiv, rechnet wohl jeder damit zu erkranken. Dabei besteht höchstwahrscheinlich keine Gefahr. Denn ließen sich alle 80 Millionen Deutschen prüfen, schlüge der Test fälschlicherweise bei jedem Hundertsten an, also bei 800 000 Menschen. Dem stehen die 8000 Infizierten gegenüber. Die Wahrscheinlichkeit, Träger des Virus zu sein, wenn das Testergebnis positiv war, beträgt demnach 8000/800 000 = $\frac{1}{100}$ = 0,01.

Gottfried Wilhelm Leibniz, (1646-1716), deutscher Gelehrter, der oft als Universalgenie bezeichnet wird, hielt es für gleich wahrscheinlich, mit zwei Würfeln eine Augensumme von elf oder zwölf zu erzielen. Dabei ergibt nur der Sechserpasch (beide Würfel zeigen „6") in der Summe zwölf. Elf hingegen kommt auf zwei verschiedene Weisen zusammen: Entweder zeigt der erste Würfel „5" und der zweite „6" oder andersherum der erste „6" und der zweite „5". Daher tritt die Augensumme elf doppelt so häufig auf wie die zwölf, die Wahrscheinlichkeiten für die beiden Ereignisse betragen $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ beziehungsweise $\frac{1}{36}$.

Was sind bedingte Wahrscheinlichkeiten?

Wahrscheinlichkeiten miteinander malnehmen ist nur bei so genannten unabhängigen Ereignissen zulässig: Der Geburtstag eines Kindes etwa hat mit dem seines Klassenkameraden nichts zu tun (Ausnahme: Zwillinge).

Genauso wenig beeinflussen sich aufeinander folgende Würfe mit einem Würfel gegenseitig. In diesen Fällen dürfen wir die auftretenden Wahrscheinlichkeiten multiplizieren. Die Wahrscheinlichkeit, zwei Sechser nacheinander zu würfeln, beträgt zum Beispiel $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

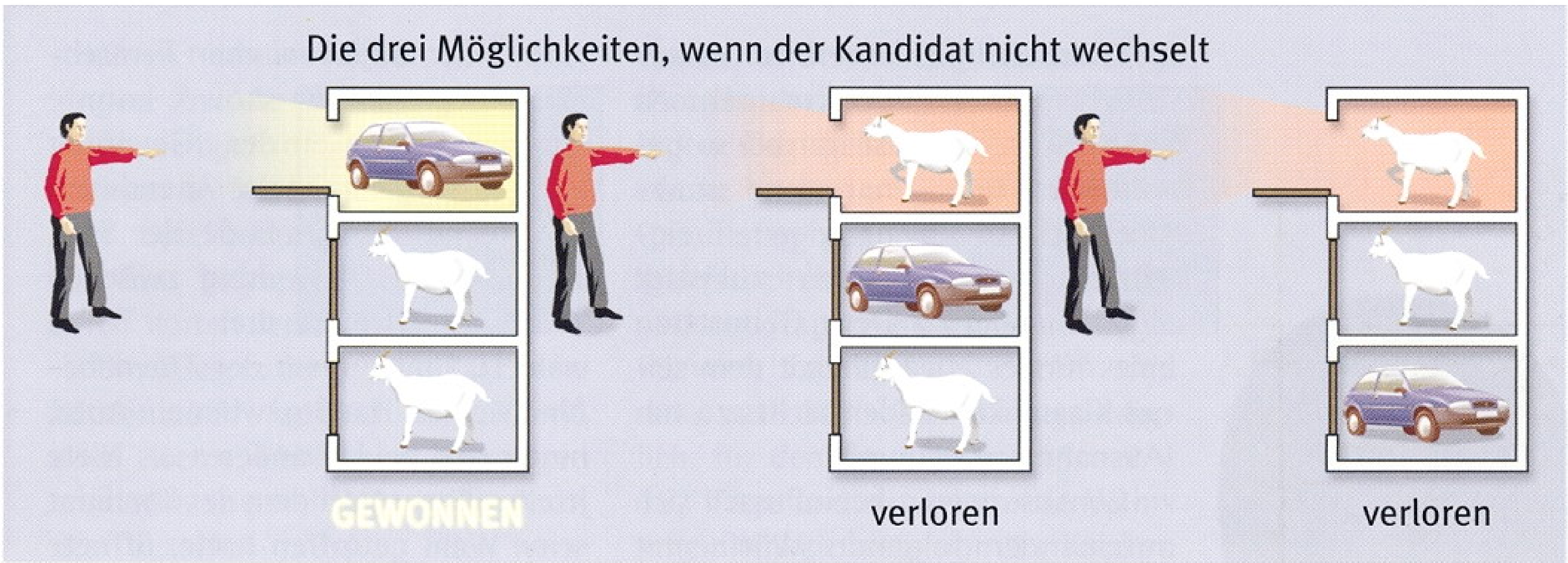
Anders verhält es sich bei abhängigen Ereignissen. Die versuchen Mathematiker mit so genannten bedingten Wahrscheinlichkeiten zu bändigen. Das sind Wahrscheinlichkeiten dafür, dass ein bestimmtes Ereignis eintritt, wenn vorher ein anderes eingetreten ist. Ein Beispiel: In einer Keksdose liegen zwei Schokoladenkekse und ein Vollkornkeks. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei blindem Herausfischen die beiden Schokoladenkekse zu erwischen? Jetzt könnte man rechnen: Einen Schokoladenkekse zu greifen ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ (zwei von drei Möglichkeiten), also ist die Wahrscheinlichkeit, beide Male Schokoladenkekse zu greifen $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9} = 0{,}444...$. Doch das ist verkehrt. Denn beim zweiten Griff in die Dose liegen nur noch zwei Kekse drin, ein Schoko und ein Vollkorn. Die bedingte Wahrscheinlichkeit, beim zweiten Mal Schoko zu erwischen, wenn man schon beim ersten Mal dieses Glück hatte, ist daher $\frac{1}{2}$; die Wahrscheinlichkeit, zweimal Schokoladenkekse herauszuziehen, $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} = 0{,}333...$.

Wie sind die Gewinnchancen?

In einer amerikanischen Fernsehshow konnte der Gewinner des Abends am Ende der Sendung zwischen drei Türen wählen. Hinter einer der Türen befand sich als Hauptgewinn ein Auto, hinter den beiden anderen als Niete je eine Ziege. Nachdem der Kandidat seine Wahl getroffen hatte, öffnete der Showmaster eine der beiden anderen Türen, hinter der eine Ziege meckerte. Der Kandidat hatte nun die Möglichkeit, seine Wahl zu ändern und sich eine andere Tür auszusuchen. Kann er seine Gewinnchance durch einen Wechsel erhöhen?

Die Antwort lautet: Ja, der Kandidat erhöht seine Gewinnchancen auf das Doppelte, wenn er auf eine andere Tür tippt. Denn der Showmaster öffnet nicht eine beliebige Tür. Er wählt dazu vielmehr eine, hinter der eine Ziege steht und auf die der Spieler nicht getippt hat. Bleibt der Kandidat bei der einmal gewählten Tür – nennen wir sie A –, gewinnt er in einem Drittel der Fälle das Auto, nämlich dann, wenn es bei A steht. Ändert er seinen Tipp, beträgt seine Gewinnwahrscheinlichkeit zwei Drittel. In zwei von drei möglichen Fällen gewinnt er – wenn sich das Auto hinter Tür B oder C befindet:

- Steht es in Ausgang B, zeigt ihm der Showmaster die Ziege bei C. Der Kandidat wechselt von A auf B und wird zum Autoeigentümer.
- Ist C die Tür zum Wagenbesitz, öffnet der Showmaster B. Der Kandidat revidiert A zugunsten von C und gewinnt.
- Nur wenn A die Tür zum Glück war, verliert er.



Das Beispiel zeigt, wie ein Kandidat seine Gewinnchancen bei einem Glücksspiel erhöhen kann

Wer sich von der Aufgabe verwirren lässt, befindet sich in bester Gesellschaft. Vor einigen Jahren diskutierten Zeitungen in den USA und in Deutschland das Ziegenproblem heftig. Selbst gestandene Mathematik-Professoren wollten die richtige Lösung zunächst nicht einsehen.

Was sind Zufallszahlen?

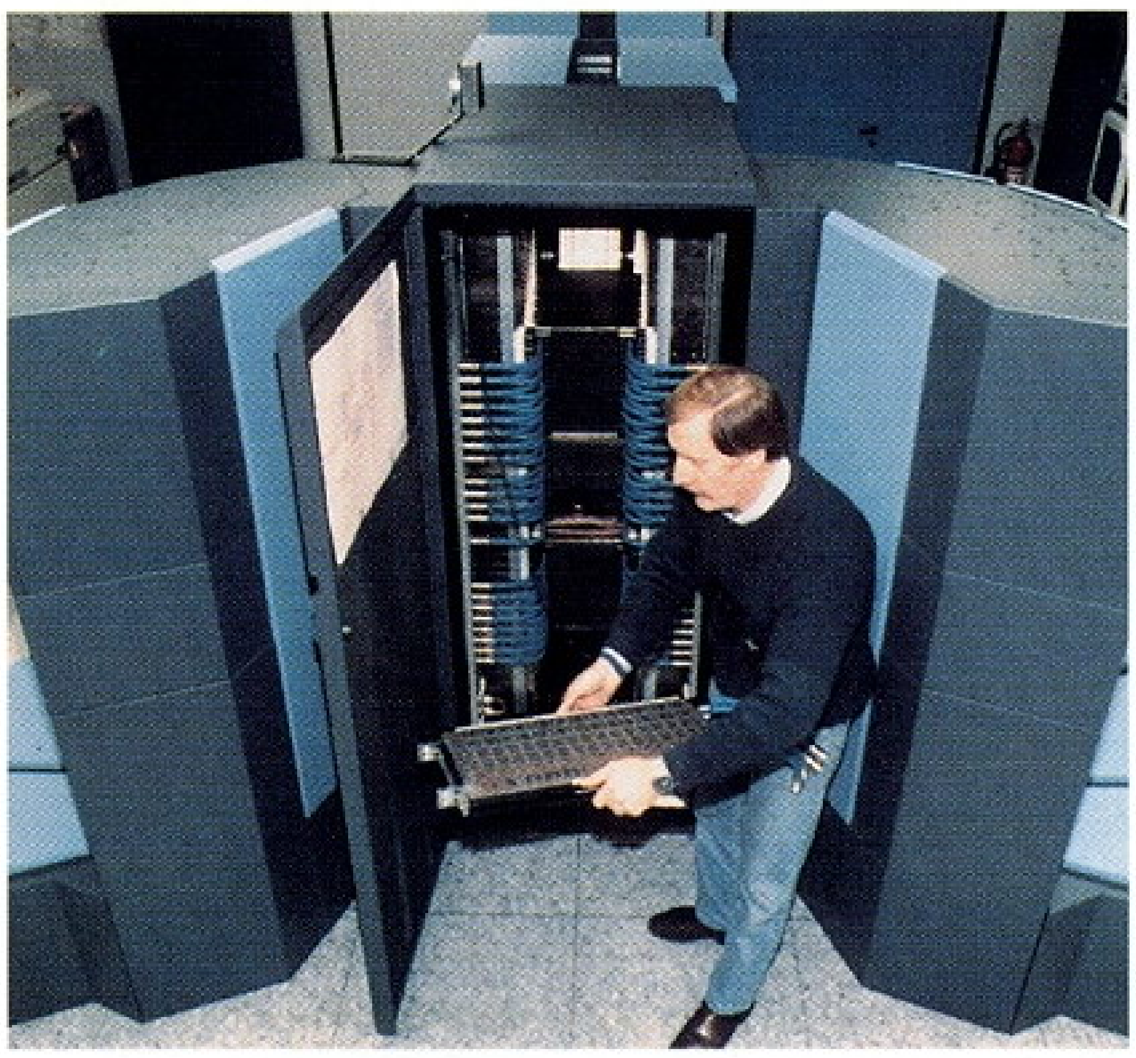
Mit so genannten Zufallszahlen, Listen zufällig gewählter Zahlen, versuchen Wissenschaftler ungewisse Ereignisse abzuschätzen, etwa ob es morgen regnet, nach welcher Betriebsdauer ein Gerät erstmals ausfällt oder wie oft es zu Staus auf der Autobahn kommt. Computer spielen mit Hilfe von Zufallszahlen in Sekunden nach, was in der Wirklichkeit Wochen oder Monate dauert. Und das nicht nur einmal: Gefüttert mit immer neuen Zufallszahlen führen sie die Rechnungen Tausende von Malen durch und zählen dabei, wie oft ein bestimmtes Ergebnis, zum Beispiel das Durchbrennen einer Glühbirne oder Regen am nächsten Tag, herauskommt. So lässt sich die Wahrscheinlichkeit dafür ermitteln. Zufallszahlen helfen auch bei Aufgaben, die gar nichts Zufälliges an sich haben. So spüren Geologen mit ihnen Ölvorkommen auf, Ingenieure steuern Roboterarme.

Um Zufallszahlen für Berechnungen zu ermitteln, bewährt es sich nicht, zu würfeln oder Roulette zu spielen. Zu groß ist der Bedarf an

Monte-Carlo-Methoden heißen Verfahren, die sich auf Zufallszahlen stützen. Benannt sind sie nach dem berühmten Spielkasino am Mittelmeer. Wissenschaftler im amerikanischen Manhattan-Projekt, das von von 1943–1945 zur Entwicklung der Atombombe durchgeführt wurde, setzten sie erstmals ein, um die komplizierten physikalischen Vorgänge berechnen zu können.

Richard von Mises, österreichischer Mathematiker (1883-1953), versuchte in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts, Zufallszahlen mit fehlender Vorhersehbarkeit zu erklären: Eine Folge von Nullen und Einsen galt von Mises als zufällig, wenn es keine Regel gibt, die an irgendeiner Stelle das nächste Glied aus den vorhergehenden mit einer Wahrscheinlichkeit größer als ein halb voraussagt. Übertragen auf Glücksspiele bedeutet das: Methoden, die einem Spieler einen Vorteil versprechen, existieren nicht. Doch die Beschreibung hat einen Haken: Von Mises konnte mathematisch nicht genau fassen, was er unter einer Regel verstand. Sein Ansatz blieb daher Stückwerk.

Zahlen. Lässt man Versuchspersonen Zahlenreihen aufschreiben, ist das Ergebnis in der Regel völlig unbrauchbar. Denn die meisten Menschen trauen sich nur selten, dieselbe Zahl zweimal oder noch öfter hintereinander zu setzen. Dabei fällt beim Würfeln zum Beispiel dieselbe Augenzahl im nächsten Wurf im Schnitt immerhin jedes sechste Mal. Bei einer Folge von 120 zufälligen Zahlen zwischen Eins und Sechs sind also immerhin rund 20 Paare gleicher Zahlen zu erwarten - und etwa dreimal drei gleiche Ziffern nacheinander. Wer Zufallszahlen aufschreiben soll, denkt hingegen unwillkürlich: „Wenn es zufällig aussehen soll, kann ich doch unmöglich die Zahl wieder nehmen, die ich gerade erst geschrieben habe."



Moderne Supercomputer verschlingen Millionen Zufallszahlen pro Sekunde

Moderne Supercomputer verschlingen in Sekundenschnelle Millionen Zufallszahlen. Sie mit Tabellen zu füttern ist aussichtslos. Deshalb ermitteln sich Computer selber mit einfachen Formeln Folgen von Zahlen, die so aussehen, als seien sie zufällig. So stehen jederzeit ausreichend lange Listen zur Verfügung. Allerdings sind die Zahlen nicht wirklich zufällig, sondern das Ergebnis von Rechnungen. Für die meisten Anwendungen genügt es aber, wenn die Zahlenfolgen bestimmte Eigenschaften haben, etwa dass jede Ziffer gleich häufig auftritt.

Was verstehen Mathematiker unter Zufall?

Mathematiker haben lange darüber gegrübelt, was unter einer idealen Zufallszahlenfolge zu verstehen sei. Wirft man eine Münze mehrmals nacheinander in die Luft und verzeichnet jeweils eine Eins für „Zahl" und eine Null für „Adler", sollte das Ergebnis als zufällig gelten können. Die Schwierigkeit: Jede mögliche Zahlenfolge taucht mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf. Die Wahrscheinlichkeit für 00000 ist mit $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{32}$ genauso groß wie die für 10011, auch wenn Letzteres erheblich zufälliger wirkt. Schließlich hat die Münze kein Gedächtnis, das Ergebnis jedes Wurfes ist unabhängig von den zuvor gemachten Würfen.

Erst in den sechziger Jahren des 20. Jahrhunderts fanden die Forscher eine Lösung. Seitdem gilt eine Zahlenfolge als zufällig, wenn sie sich nicht mit einer kürzeren Zei-

Ob eine Münze „Adler" oder „Zahl" zeigt, entscheidet der Zufall

chensequenz beschreiben lässt. Die Folge 11111... etwa kann man knapp ausdrücken mit „schreibe lauter Einser", 01010101... mit „wiederhole 01". Bei Zufallsfolgen darf es keine solche Umschreibung in Kurzform geben. Theoretiker mag diese Definition befriedigen, doch taugt sie nur dazu, Folgen als nicht zufällig zu erkennen. Woher soll man wissen, ob sich eine Zahlenfolge nicht auf irgendeine Art knapper darstellen lässt? In der Tat stellte sich das nicht nur als schwierig heraus, sondern sogar als unmöglich. Mathematiker bewiesen, dass es kein Verfahren gibt, mit dem sich die kürzeste Beschreibung einer Zahlenfolge ermitteln lässt.

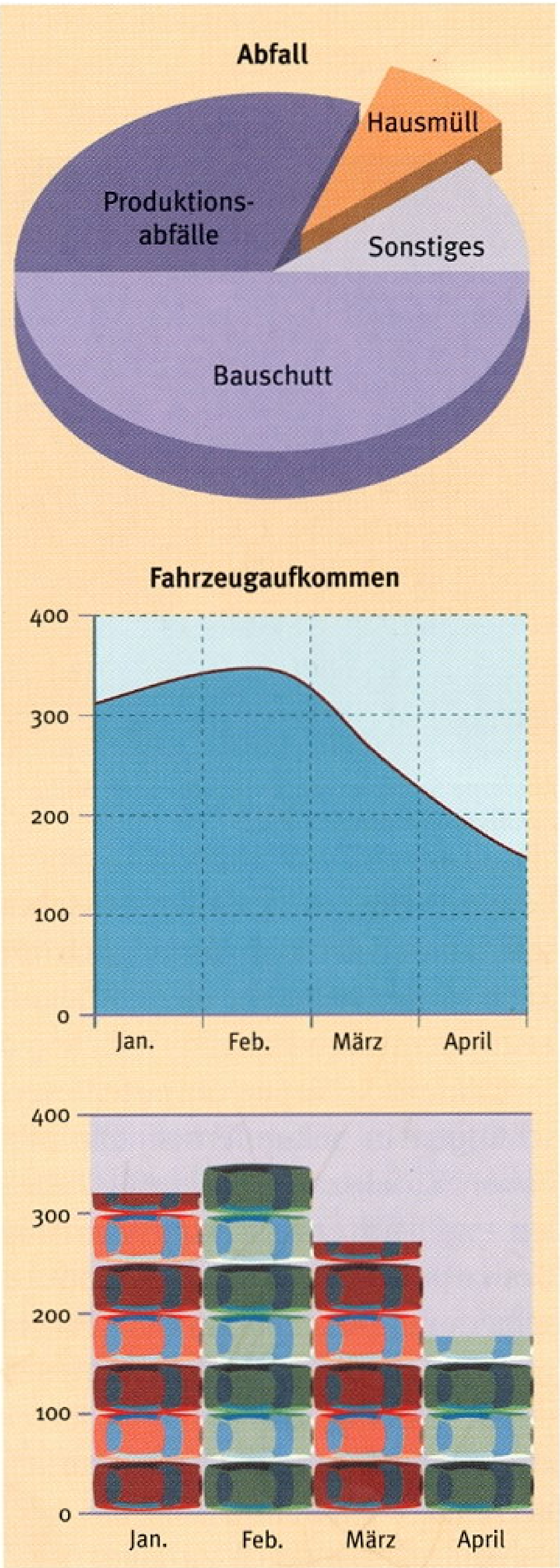
Was ist Statistik?

Das Wort Statistik wird für zweierlei benutzt: Zum einen nennt man so die Darstellung von Zahlen in Tabellen oder Zeichnungen. In der Mathematik bezeichnet Statistik hingegen das Teilgebiet, das hilft, Massenerscheinungen zu erfassen und auszuwerten. Wenn Naturschützer etwa wissen wollen, wie viele Elefanten in einem Nationalpark leben, ist es oft zu aufwendig, jedes einzelne Tier aufzustöbern. Sie zählen daher zum Beispiel nur in einem Teil des Parks und versuchen, mit Hilfe dieses Ergebnisses die Gesamtzahl abzuschätzen. Ein anderes Beispiel sind Wahlvorhersagen. Vor jeder Wahl befragen Forscher eine Anzahl (in der Regel 1000 oder 2000) zufällig ausgewählter Bürger, bei welcher Partei sie ihr Kreuz machen werden. Mit den Antworten wagen sie eine Vorhersage, wie die mehr als 60 Millionen Wahlberechtigten in Deutschland abstimmen werden.

In der Statistik ist Vorsicht angebracht. Oft legen einem die Zahlen einen Zusammenhang nahe, der gar nicht da ist. So berichteten Zeitungen zum Beispiel von einer Untersuchung, warum Piloten so früh sterben. Mehr als die Hälfte der Kapitäne in der zivilen Luftfahrt starben demnach vor dem 65. Lebensjahr. Was Besorgnis erregend klingt, ist bei genauerem Hinsehen völlig natürlich. Da die zivile Luftfahrt in den vergangenen Jahren

Durchschnitt

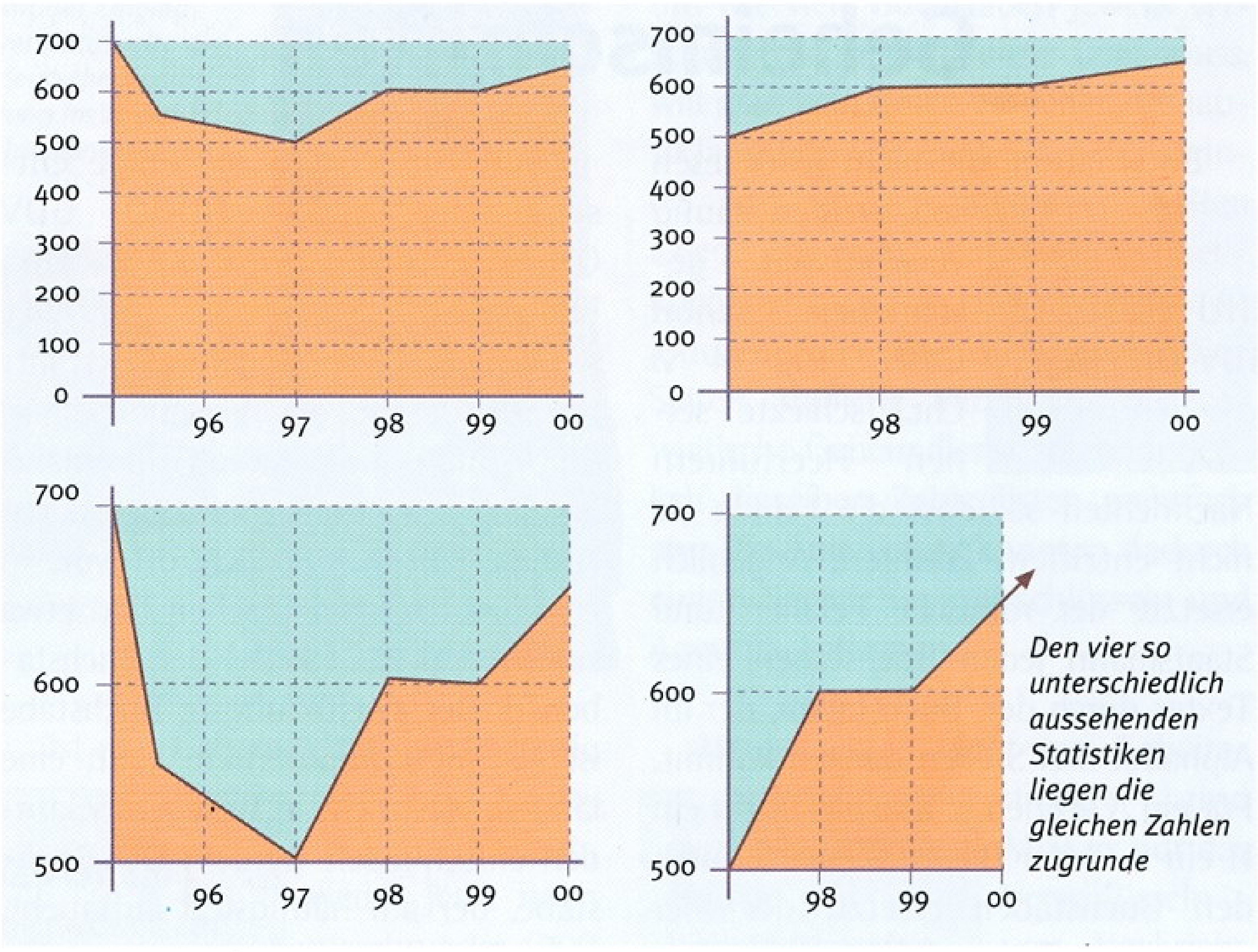
Wenn Anton 3 Gummibärchen hat und Berta 5, hat im Durchschnitt jeder 4. Um Durchschnitte zu berechnen, zählt man die Werte zusammen und teilt das Ergebnis durch ihre Anzahl (bei den Gummibärchen also 3+5 geteilt durch 2). So lassen sich unübersichtliche Zahlentabellen zu einem einzigen Wert zusammenfassen. Doch ist Vorsicht geboten. Hat etwa Anton als einziger in seiner Klasse Gummibärchen, und zwar eine Megatüte mit 100 Stück darin, kann sich bei einer Klassenstärke von 25 Kindern jeder Schüler im Durchschnitt über vier Gummibärchen freuen. Dennoch gehen fast alle leer aus. Dem Durchschnitt sieht man nicht an, wie weit sich die Werte um ihn streuen. Eine Scherzfrage macht das deutlich: Was sagt ein Statistiker, der einen Fuß in die Tiefkühltruhe steckt und eine Hand auf die Herdplatte legt? „Im Durchschnitt ist die Temperatur angenehm."



Verschiedene Arten, Zahlen darzustellen: So genannte Tortendiagramme (oben) führen einem Anteile vor Augen. Mit einem Blick lässt sich abschätzen, wie viel der Hausmüll vom Gesamtabfall ausmacht. Statt nüchterner Kurven (Mitte) sind häufig Bilder zu sehen. Unten etwa verdeutlichen die kleinen Autos, wie stark eine Straße in den angegebenen Monaten befahren ist

ELISABETH NOELLE-NEUMANN, Deutschlands bekannteste Meinungsforscherin, sagt über ihr eigenes Fach: „Es ist mir noch heute rätselhaft, dass man herausbringt, was 60 Millionen Menschen denken, wenn man 2000 Menschen befragt. Erklären kann ich das nicht. Es ist eben so."

STATISTIK ist das Teilgebiet der Mathematik mit dem schlechtesten Ruf. Fachleute scherzen: „Trau keiner Statistik, die du nicht selbst gefälscht hast." Der britische Politiker Benjamin Disraeli (1804-1881) sagte: „Es gibt drei Arten von Lügen: Lügen, grobe Lügen und Statistik."



Den vier so unterschiedlich aussehenden Statistiken liegen die gleichen Zahlen zugrunde

sehr stark zugenommen hat, sind die meisten Flugzeugführer – ob noch im Dienst oder bereits in Rente – jünger als 65 Jahre. Kein Wunder, dass auch mehr als die Hälfte der Verstorbenen dieses Alter noch nicht erreicht hat. Verlässt man sich rein auf Zahlen, kann man sogar beweisen, dass der Klapperstorch die Kinder bringt: Zwischen 1964 und 1978 gab es in Deutschland von Jahr zu Jahr weniger Geburten, gleichzeitig nahm die Anzahl der Störche ab.

Zeitungen und Fernsehen stellen Zahlen gerne mit Zeichnungen dar. So können Leser und Zuschauer mit einem Blick die Information erfassen. Doch geben Zeichnungen oft die Zahlen verfälscht wieder. In unserer Illustration gehen alle vier Linien auf dieselben Zahlen zurück, die zum Beispiel für Aktienwerte oder verkaufte Produkte in den Jahren 1995 bis 2000 stehen könnten. Dennoch erwecken sie beim Betrachter völlig verschiedene Eindrücke: Die erste zeigt die Zahlen unverfälscht. Bei der zweiten sind die ersten beiden Jahre weggelassen. Nur deshalb geht sie Jahr für Jahr nach oben. In der dritten Darstellung fehlt der untere Teil. Dadurch sieht die Entwicklung gleich viel beeindruckender aus. Die vierte schließlich führt völlig in die Irre. Aus den leicht schwankenden Zahlen wird eine steil steigende Linie. Der Pfeil rechts verspricht weiteren Anstieg in der Zukunft.

Mit Statistik kann man „beweisen", dass doch der Klapperstorch die Kinder bringt

Geheimschriften

ZHU NDQQ GDV OHVHQ?

Botschaften, die nicht jeder lesen soll, werden häufig verschlüsselt geschrieben. Schon Cäsar (100–44 v. Chr.) schickte seinen Heerführern Nachrichten so, dass die Feinde sie nicht entziffern konnten. Angeblich ersetzte der römische Feldherr und Staatsmann jeden Buchstaben eines Textes durch den Buchstaben, der im Alphabet drei Stellen danach kommt. Für ein A schrieb er also ein D, für ein H ein K. Jeder Buchstabe wird durch den Buchstaben ersetzt, der hier direkt unter ihm steht:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

Nun können wir die Frage entschlüsseln. „ZHU NDQQ GDV OHVHQ?" heißt „WER KANN DAS LESEN?"

Zumindest bei längeren Botschaften lässt sich die Verschlüsselung (auch Code, sprich „Kood") problemlos knacken, denn die Buchstaben kommen unterschiedlich oft vor. In einem normalen deutschen Text etwa sind knapp ein Fünftel der Buchstaben E. Der zweithäufigste Buchstabe ist N. Mit Computerhilfe kann eine längere Nachricht in wenigen Sekunden entschlüsselt werden: Der Buchstabe, der am häufigsten auftaucht, muss für das E stehen, der am zweithäufigsten für das N, und so weiter.

Maschine mit Buchstabenringen zum Verschlüsseln von Botschaften

Neben Spionen und Agenten benutzen auch Bankkunden und Internet-Surfer verschlüsselte Nachrichten

Erste Verschlüsselungsmaschinen

Natürlich muss man die Buchstaben nicht immer wie bei Cäsars Code um drei Stellen verschieben. Man könnte sie beispielsweise auch um fünf oder zehn Stellen verschieben. Um dazu nicht jedes Mal neue Listen schreiben zu müssen, gab es bereits im 16. Jahrhundert kleine Apparate, die aus zwei ineinander liegenden Ringen bestanden, die sich gegeneinander verdrehen ließen.

Enigma

Die Engländer konnten im Zweiten Weltkrieg (1939-1945) viele Nachrichten, die die deutsche Heeresleitung mit der Maschine Enigma verschlüsselt an ihre Einheiten versendet hatte, entziffern. Nach der Meinung einiger Historiker wurde dadurch der Ausgang des Zweiten Weltkrieges entscheidend mitbestimmt. Das britische Entschlüsselungszentrum hatte Erfolg, weil die Deutschen zu sorglos mit der Enigma umgingen. So wählten sie etwa als Schlüsselbuchstaben häufig AAA, ABC oder ähnlich einfallslose Kombinationen.

Mit der Enigma verschlüsselte die deutsche Heeresleitung im 2. Weltkrieg ihre Funksprüche

Was ist ein unknackbarer Code?

Ist eine Geheimschrift denkbar, die niemand entschlüsseln kann, weder jetzt noch in zehn oder 1000 Jahren, nicht mit heutigen Computern und nicht mit denen der Zukunft? Ja, das geht, und es ist nicht mal besonders schwierig.

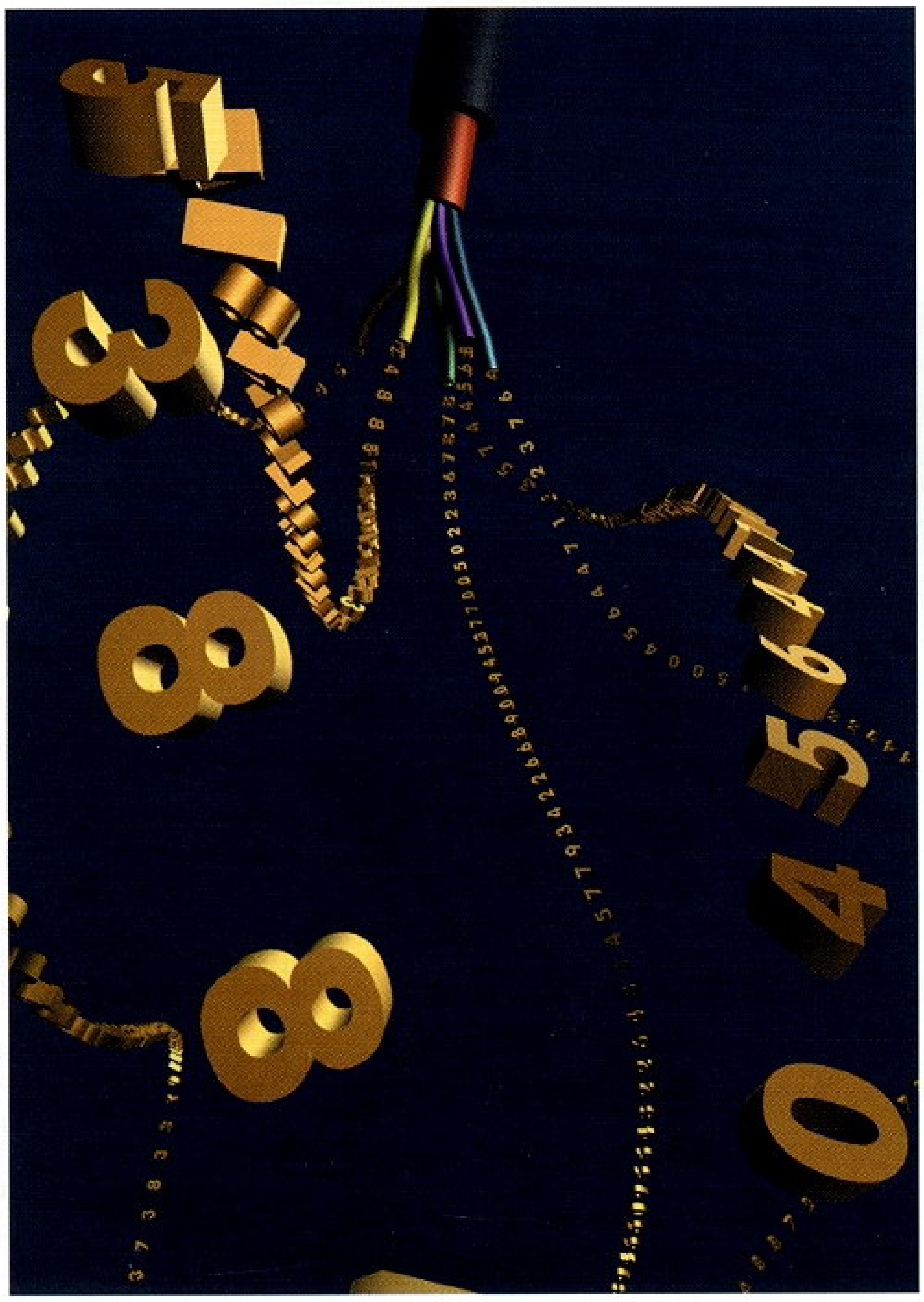
Verschiebt man die Buchstaben bei Cäsars Code nicht immer um dieselbe Anzahl Buchstaben, sondern jedesmal um eine andere, ist der Code nicht mehr zu knacken. Verschieben wir etwa den ersten Buchstaben um 3 Buchstaben, den zweiten um 5 und den dritten um 9, schreibt sich „WER" als „ZJA". Eine so verschlüsselte Nachricht kann nur in Klartext übersetzen, wer weiß, um wie viel jeder Buchstabe verschoben wird. Da ein Buchstabe, der mehrmals im Text auftaucht, immer wieder mit einem anderen verschlüsselt wird, helfen einem unerwünschten Mithörer die Häufigkeiten der Buchstaben nicht weiter, um die Botschaft zu entziffern.

Allerdings hat das Verfahren einen entscheidenden Nachteil: Sender und Empfänger benötigen dazu die gleiche Liste von Zahlen, die angeben, um wie viele Buchstaben jeweils verschoben wird. Und diese Liste muss, will man kein Risiko eingehen, genauso lang sein wie der zu verschlüsselnde Text. Im so genannten Kalten Krieg, der nach dem Zweiten Weltkrieg zwischen den USA und der Sowjetunion herrschte, benutzten beide Seiten ähnliche Verfahren. Der sowjetische Geheimdienst setzte angeblich dieselben Zahlenlisten mehrfach ein. Die Amerikaner konnten dadurch einige Nachrichten entschlüsseln und Agenten enttarnen.

Wer benutzt heute verschlüsselte Nachrichten?

Heute setzen nicht nur Geheimdienste und Militärs auf das Verschlüsseln von Nachrichten. Codes werden inzwischen auch im zivilen Leben gebraucht, sei es beim Geldabheben am Automaten oder beim Einkauf im Internet, wenn Informationen über die Kreditkarte des Käufers in verschlüsselter Form weitergegeben werden, damit sie niemand abhören kann. Mathematiker haben in den vergangenen Jahren eine ganze Reihe von Verfahren für solche Zwecke ersonnen. Häufig wird zur Zeit ein Verfahren namens DES (abkürzend für *data encryption standard*, englisch für Datenverschlüsselungsstandard) eingesetzt. DES verschlüsselt eine Nachricht mit Hilfe geheimer 56-stelliger Dualzahlen (siehe Seite 12). Diese Zahlen zu erraten gilt als aussichtslos, da es viele Billiarden Möglichkeiten gibt. Dennoch entwickelten Mathematiker inzwischen eine Abwandlung des Computerprogramms, das sich auf 112-stellige Dualzahlen stützt.

Wenn wir eine Scheck- oder Kreditkarte in den Geldautomaten stecken, liest das Gerät auf dem Magnetstreifen – oder künftig dem eingebauten Computerchip – Kontonummer, Bankleitzahl und Verfallsdatum der Karte ab. Dann verschlüsselt der Apparat diese Zahlen und ermittelt aus dem Ergebnis zum Beispiel mittels DES die persönliche Geheimzahl des Bankkunden. Tippt der Kunde eine andere Zahl ein, verweigert der Automat die Geldausgabe. Die Verschlüsselung soll hier also nicht eine Nachricht vor dem Abhören schützen, sondern gewährleisten, dass tatsächlich der Kontoinhaber vor dem Gerät steht und nicht jemand, der die Karte gestohlen hat.



Durch Datenleitungen strömen verschlüsselte Nachrichten

Was ist der RSA-Code?

Bei Cäsars Code oder der Enigma können Sender und Empfänger beide einen Text in Kauderwelsch verwandeln und den Zeichensalat wieder zurückübersetzen. Beim so genannten RSA-Verfahren, das vor allem beim Austausch von Daten im Internet benutzt wird, kann der Absender zwar eine Botschaft verschlüsseln, das Ergebnis wieder in Klartext verwandeln kann er aber nicht. Dazu müsste er geheime Zahlen kennen, über die nur der Empfänger verfügt. Mit dem RSA-Code kann zum Beispiel eine Bank öffentlich Computerprogramme verteilen, mit denen die Kunden Nachrichten so verschlüsseln können, dass nur die Bank sie entziffern kann. Der Absender verschlüsselt bei dem Verfahren seine Botschaften mit Hilfe einer großen Zahl. Um den Code lesen zu können, muss man die Zahl in ihre Faktoren zerlegen. Und das ist, wenn die Zahl groß genug ist, so gut wie unmöglich. Computer können zwar vierzigstellige Zahlen in Sekundenbruchteilen miteinander malnehmen. Andersherum das Ergebnis in seine Faktoren zu zerlegen überfordert aber die schnellsten Elektronenrechner.

Mit einem Risiko müssen die Anwender des RSA-Verfahrens allerdings leben: Sollten Mathematiker eines Tages eine Methode entwickeln, mit der sich große Zahlen mit viel weniger Rechenaufwand in Faktoren zerlegen lassen, als das heute möglich ist, könnten plötzlich alle so kodierten Nachrichten von Unbefugten entziffert werden. Da an dieser Aufgabe seit Jahrzehnten ohne Erfolg geforscht wird, rechnet damit aber niemand.

ELEKTRONISCHE UNTERSCHRIFT nennt man die Verschlüsselung eines Schriftsatzes, die dazu dient, ihn als echt nachweisen zu können. Dabei wird der Text mit einem geheimen Schlüssel so kodiert, dass der Empfänger an den Daten ablesen kann, ob sie von Unbefugten verändert wurden. So lassen sich elektronische Leitungen fälschungssicher machen und wichtige Briefe wie zum Beispiel Zahlungsanweisungen oder Gerichtsakten über sie verschicken.

Die GEHEIMZAHLEN von Euroscheckkarten sind vierstellig. Da die erste Stelle keine 0 sein darf, gibt es 9000 verschiedene Möglichkeiten für sie, nämlich die Zahlen von 1000 bis 9999. Bei rund 50 Millionen Scheckkarten in Deutschland benutzen mehrere tausend Bankkunden jeweils die gleiche Geheimzahl. Ein Betrug ist dennoch ausgeschlossen, da niemand weiß, wer dieselbe Geheimzahl wie er selbst hat.

Verfahren wie der RSA-CODE werden nicht nur von Banken genutzt. Sie helfen auch, E-mails vor ungebetenen Mitlesern zu schützen. Elektronische Zahlsysteme und der neue UMTS-Standard für Handys stützen sich ebenfalls auf sie.