

Duden Schülerhilfen

Brüche

Mit Bruchzahlen umgehen
und rechnen

von Hans Borucki

mit Illustrationen von Detlef Surrey

3., aktualisierte Auflage

Dudenverlag

Mannheim · Leipzig · Wien · Zürich

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese
Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie;
detaillierte bibliografische Daten sind im Internet
über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

Das Wort **Duden** ist für den Verlag
Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG
als Marke geschützt.

Alle Rechte vorbehalten.
Nachdruck, auch auszugsweise, verboten.
© Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG,
Mannheim 2005 D C B A

Redaktion: Simone Senk
Herstellung: Annette Scheerer
Satz: zeichenstrom Axel Schilling, Hirz-Maulsbach/Westerwald
Umschlagkonzept: Bender & Büwendt, Berlin
Umschlagabbildung: Detlef Surrey
Druck: Druckhaus Langenscheidt KG, Berlin
Bindearbeit: Schöneberger Buchbinderei, Berlin
Printed in Germany
ISBN 3-411-70693-7

1. Bruchteile und Brüche

1.1	Zähler und Nenner	9
1.2	Maßzahl und Maßeinheit	13
1.3	Zusammenfassung	25
1.4	Test zum 1. Kapitel	26

2. Erweitern und Kürzen von Brüchen

2.1	Regeln und Verfahren	29
2.2	Zusammenfassung	40
2.3	Test zum 2. Kapitel	40

3. Brüche auf dem Zahlenstrahl

3.1	Anordnung auf dem Zahlenstrahl	43
3.2	Unechte Brüche, gemischte und ganze Zahlen	46
3.3	Zusammenfassung	54
3.4	Test zum 3. Kapitel	55

4. Die vier Grundrechenarten mit Brüchen

4.1	Addition nennergleicher Brüche	57
4.2	Addition nicht nennergleicher Brüche	60
4.3	Subtraktion	67
4.4	Multiplikation	72
4.5	Potenzen	79
4.6	Division	80
4.7	Zusammenfassung	90
4.8	Test zum 4. Kapitel	91

5. Abschlusstest

93

6. Lösungen.....

97

Liebe Schülerinnen und Schüler,

selbst Johann Wolfgang von Goethe, der kluge und gebildete Geheimrat aus Weimar, hatte offensichtlich Probleme mit der Bruchrechnung.

Wie es sich für einen Dichter seines Ranges ziemt, hat er sie in Verse gegossen und diese einer seiner Figuren, dem teuflischen Mephisto, in den Mund gelegt:

Und merk dir ein für allemal
Den wichtigsten von allen Sprüchen:
Es liegt dir kein Geheimnis in der Zahl,
Allein ein großes in den Brüchen.

Hier irrt Goethe!

Brüche sind Zahlen und haben, wie diese, nichts Geheimnisvolles an sich.

Allerdings zeigt sich immer wieder, dass es vielen Schülern ähnlich geht wie dem großen Herrn von Goethe: Sie haben Probleme mit der Bruchrechnung.

Jeder Mathematiklehrer und auch viele Eltern wissen: Probleme im Fach Mathematik sind in den allermeisten Fällen auf fehlende Kenntnisse in der Bruchrechnung zurückzuführen. Teure Nachhilfestunden zum Auffüllen dieser Wissenslücken sind in der Regel aber gar nicht erforderlich.

Üben genügt! Und aufs Üben ist dieser Band angelegt.

Der Unterrichtsstoff wird in kleinen Portionen mithilfe anschaulicher Beispiele dargestellt und anhand zahlreicher vollständig durchgerechneter Aufgaben erläutert. Im umfangreichen Aufgabenteil hast du genügend Gelegenheit zum Üben des behandelten Stoffes.

Ein kurzer Test am Ende eines jeden Kapitels zeigt dir, wie fit du für die Klassenarbeit bist.

Die Lösungen der einzelnen Aufgaben befinden sich auf den Seiten 97 bis 110.

Um dir die Orientierung zu erleichtern, sind optische Hilfen eingebaut. Besonders gekennzeichnet sind auf diese Weise

Regeln, Festlegungen,



Beispiele,



Übungsaufgaben.



Goethe wird es sich gefallen lassen müssen, dass wir seinem Zitat heftig widersprechen. Eigentlich müsste die letzte Zeile lauten:

und kein Geheimnis in den Brüchen.

Viel Spaß und Erfolg.

Autor und Redaktion

Bruchteile und Brüche

1.1 Zähler und Nenner

Du sollst eine Tafel Schokolade mit deinen Freunden teilen.

Das, was geteilt wird, nennen wir das **Ganze**.

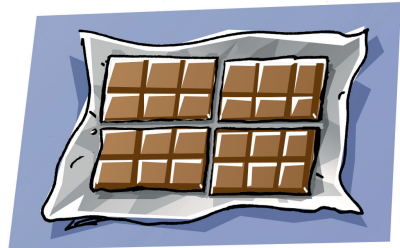
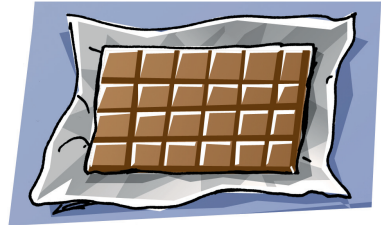
Ihr seid zu viert.

Du teilst also die Tafel (das Ganze) in vier gleiche Teile.

Jeden dieser Teile bezeichnen wir als

ein Viertel (geschrieben: $\frac{1}{4}$)

des Ganzen.



Jeder von euch bekommt einen dieser vier gleichen Teile. Du bekommst einen Teil, deine drei Freunde bekommen zusammen drei Teile.

Das sind:

$\frac{1}{4}$ für dich und $3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ für deine Freunde.

$\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$ sind Brüche.

Echte Freunde hätten mir
die ganze Tafel
gelassen !!!



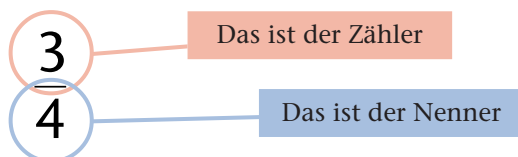
1 Bruchteile und Brüche

Mit Brüchen bezeichnet man Teile von Ganzen.

Ein Bruch besteht aus zwei Zahlen, die durch einen Bruchstrich voneinander getrennt sind.

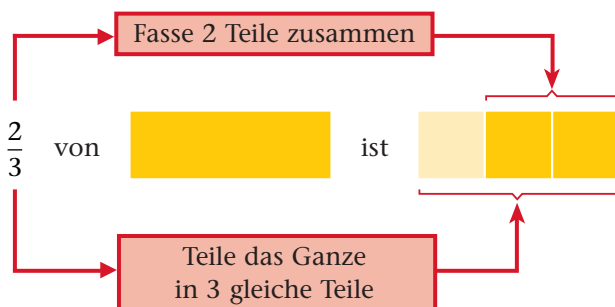
Die Zahl **über** dem Bruchstrich heißt **Zähler**.

Die Zahl **unter** dem Bruchstrich heißt **Nenner**.

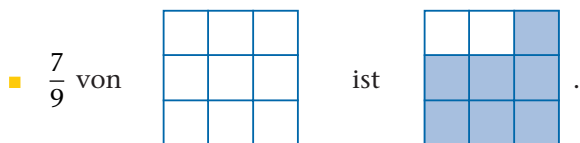


Der Nenner gibt an, in wie viele gleiche Teile das Ganze geteilt werden soll.

Der Zähler gibt an, wie viele von diesen gleichen Teilen genommen und zusammengefasst werden sollen.



Weitere Beispiele:






1 Konstruiere die zugehörige Figur:

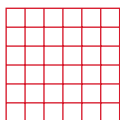
a) $\frac{3}{5}$ von  ;

b) $\frac{3}{4}$ von  ;

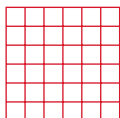
c) $\frac{5}{9}$ von  ;

d) $\frac{7}{8}$ von  ;

e) $\frac{5}{8}$ von  ;

f) $\frac{11}{18}$ von  ;

g) $\frac{1}{6}$ von  ;

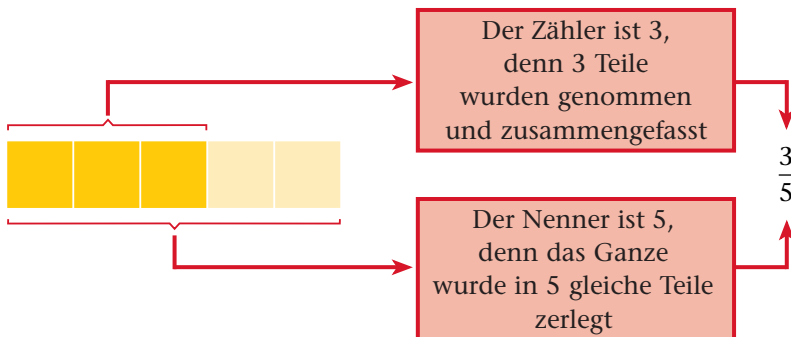
h) $\frac{7}{12}$ von  ;

i) $\frac{4}{15}$ von  ;

k) $\frac{5}{6}$ von  .

In der folgenden Aufgabe ist jeweils eine Teilungsfigur gegeben. Ermittelt werden soll der Bruch, der zu dieser Figur führt.

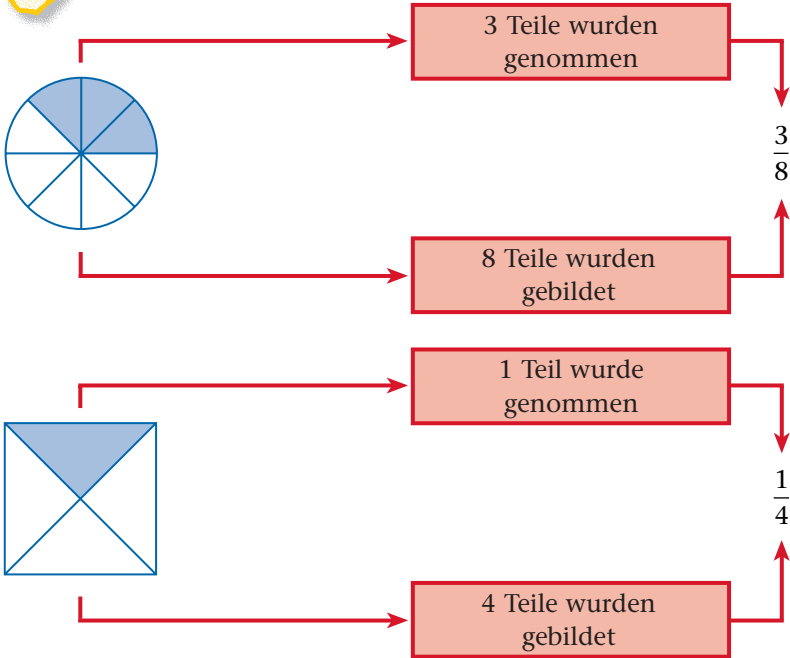
Überlege so:



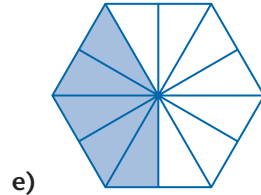
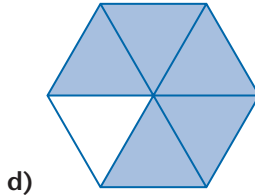
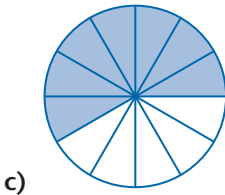
1 Bruchteile und Brüche

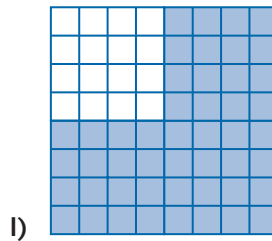
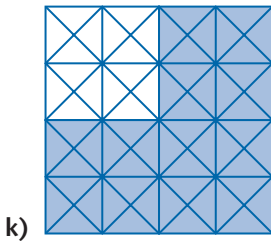
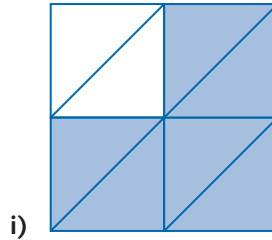
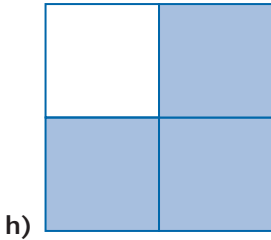
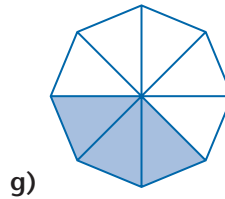
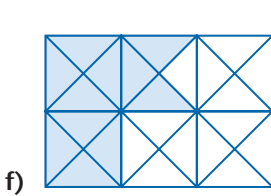


Weitere Beispiele:



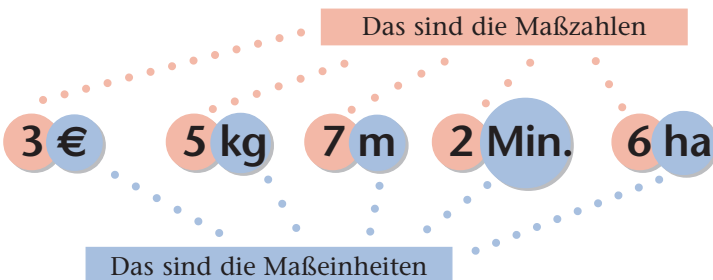
2 Bestimme den zugehörigen Bruch. Vergewissere dich in jedem Fall zuerst, ob das Ganze auch wirklich in **gleiche** Teile geteilt wurde.





1.2 Maßzahl und Maßeinheit

Bisher haben wir als das Ganze stets geometrische Figuren, wie z.B. Kreise, Rechtecke oder Quadrate gewählt. Das war so sehr anschaulich. Jetzt wollen wir als Ganze nicht mehr derartige geometrische Figuren, sondern **Größen** nehmen. Eine Größe besteht aus **Maßzahl** und **Maßeinheit**:



1 Bruchteile und Brüche



Susanne bekommt monatlich 20 € Taschengeld.

$\frac{2}{5}$ davon spart sie. Wie viel € sind das?

Also: $\frac{2}{5}$ sind für das Sparschwein,
 $\frac{2}{5}$ für Süßigkeiten, Kino kostet $\frac{1}{9}$...
wie viel € bleiben dann übrig?



Es sind jetzt also $\frac{2}{5}$ von 20 € zu berechnen.

Überlege so:

Das **Ganze** sind die 20 €.

Der **Nenner** des Bruches gibt an,
in wie viele gleiche Teile
das Ganze zu teilen ist.

Der Nenner ist 5.

Du musst also rechnen:

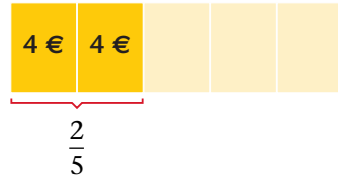
20 €				
4 €	4 €	4 €	4 €	4 €

$$20 € : 5 = 4 €.$$

Der **Zähler** gibt an, wie viele der so entstandenen Teile zusammengefasst werden sollen.

Der Zähler ist 2.

Du musst also rechnen:



$$4 \text{ €} \cdot 2 = 8 \text{ €}.$$

Damit hast du das gesuchte Ergebnis erhalten:

$$\frac{2}{5} \text{ von } 20 \text{ €} = 8 \text{ €}.$$

Susanne spart monatlich 8 €.

Und so hast du gerechnet:

$$\frac{2}{5} \text{ von } 20 \text{ €} = (20 \text{ €} : \frac{5}{1}) \cdot \frac{2}{1} = 4 \text{ €} \cdot 2 = 8 \text{ €}$$

Fasse 2 Teile zusammen

Teile das Ganze in 5 gleiche Teile



Weitere Beispiele:

$$\frac{3}{8} \text{ von } 56 \text{ m} = (56 \text{ m} : \frac{8}{1}) \cdot \frac{3}{1} = 7 \text{ m} \cdot 3 = 21 \text{ m}.$$

$$\frac{3}{7} \text{ von } 497 \text{ m} = (497 \text{ m} : \frac{7}{1}) \cdot \frac{3}{1} = 71 \text{ m} \cdot 3 = 213 \text{ m}.$$

1 Bruchteile und Brüche

■ $\frac{5}{9}$ von 1431 kg = $(1431 \text{ kg} : 9) \cdot 5 = 159 \text{ kg} \cdot 5 = 795 \text{ kg}$.

■ $\frac{11}{15}$ von 420 Min. = $(420 \text{ Min.} : 15) \cdot 11 = 28 \text{ Min.} \cdot 11 = 308 \text{ Min.}$



3 Berechne:

- a) $\frac{3}{5}$ von 135 €; b) $\frac{3}{11}$ von 737 kg; c) $\frac{2}{3}$ von 123 Min.;
 d) $\frac{4}{9}$ von 2313 m²; e) $\frac{5}{12}$ von 672 dm³; f) $\frac{7}{10}$ von 6370 m;
 g) $\frac{4}{25}$ von 3775 €; h) $\frac{323}{555}$ von 12 210 m; i) $\frac{4}{97}$ von 8051 kg;
 k) $\frac{36}{77}$ von 5929 m².



Berechne

$$\frac{2}{3} \text{ von 2 Stunden.}$$

Da du 2 Stunden nicht durch 3 teilen kannst, musst du die Stunden zunächst einmal in Minuten umwandeln. Rechne also so:

$$\frac{2}{3} \text{ von 2 Stunden} = \frac{2}{3} \text{ von 120 Min.} = (120 : 3) \cdot 2 = 80 \text{ Min.} \\ = 1 \text{ Std. } 20 \text{ Min.}$$



Weitere Beispiele:

$$\frac{5}{18} \text{ von } 9 \text{ m} = \frac{5}{18} \text{ von } 900 \text{ cm} = (900 \text{ cm} : 18) \cdot 5 = 250 \text{ cm} = 2 \text{ m } 50 \text{ cm}.$$

$$\frac{7}{12} \text{ von } 3 \text{ kg} = \frac{7}{12} \text{ von } 3000 \text{ g} = (3000 \text{ g} : 12) \cdot 7 = 1750 \text{ g} = 1 \text{ kg } 750 \text{ g}.$$

$$\frac{4}{15} \text{ von } 6 \text{ m}^2 = \frac{4}{15} \text{ von } 600 \text{ dm}^2 = (600 \text{ dm}^2 : 15) \cdot 4 = 160 \text{ dm}^2 = 1 \text{ m}^2 60 \text{ dm}^2.$$

Und so wird umgerechnet:

1 Tag = 24 Stunden;
 1 Stunde = 60 Minuten = 3600 Sekunden;
 1 m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm;
 1 m² = 100 dm² = 10 000 cm² = 1 000 000 mm²;
 1 m³ = 1000 dm³ = 1 000 000 cm³ = 1 000 000 000 mm³;
 1 kg = 1000 g = 1 000 000 mg.



4 Berechne:

- a) $\frac{3}{5}$ von 3 Std.; b) $\frac{5}{18}$ von 3 Tagen; c) $\frac{10}{21}$ von 14 Min.;
 d) $\frac{9}{25}$ von 30 Std.; e) $\frac{3}{8}$ von 5 kg; f) $\frac{7}{15}$ von 12 m;
 g) $\frac{23}{24}$ von 18 m²; h) $\frac{17}{96}$ von 3 m³; i) $\frac{17}{96}$ von 6 Std.

1 Bruchteile und Brüche

Statt $\frac{2}{3}$ von 1 Stunde schreibt man $\frac{2}{3}$ Stunden.

Statt $\frac{4}{5}$ von 1 m schreibt man $\frac{4}{5}$ m.

Statt $\frac{7}{8}$ von 1 kg schreibt man $\frac{7}{8}$ kg.



Wenn du also ausrechnen sollst, wie viel Gramm $\frac{7}{8}$ kg sind, dann musst du so vorgehen:

$$\frac{7}{8} \text{ kg} = \frac{7}{8} \text{ von } 1 \text{ kg} = \frac{7}{8} \text{ von } 1000 \text{ g} = (1000 \text{ g} : 8) \cdot 7 = 875 \text{ g}.$$



Weitere Beispiele:

$$\frac{4}{5} \text{ m} = \frac{4}{5} \text{ von } 1 \text{ m} = \frac{4}{5} \text{ von } 100 \text{ cm} = (100 \text{ cm} : 5) \cdot 4 = 80 \text{ cm}.$$

$$\frac{2}{3} \text{ Std.} = \frac{2}{3} \text{ von } 1 \text{ Std.} = \frac{2}{3} \text{ von } 60 \text{ Min.} = (60 \text{ Min.} : 3) \cdot 2 = 40 \text{ Min.}$$

$$\frac{9}{16} \text{ m}^2 = \frac{9}{16} \text{ von } 1 \text{ m}^2 = \frac{9}{16} \text{ von } 10\,000 \text{ cm}^2 = (10\,000 \text{ cm}^2 : 16) \cdot 9 = 5625 \text{ cm}^2.$$



5 Gib in der in Klammern stehenden Einheit an:

- a) $\frac{3}{4}$ Tage [Std.]; b) $\frac{7}{8}$ m [mm]; c) $\frac{24}{25}$ € [Cent];
 d) $\frac{3}{20}$ kg [g]; e) $\frac{4}{125}$ kg [g]; f) $\frac{13}{32}$ m³ [cm³];
 g) $\frac{13}{20}$ m [cm]; h) $\frac{17}{125}$ dm² [mm²]; i) $\frac{5}{12}$ Min. [Sek.];
 k) $\frac{4}{15}$ Std. [Sek.]; l) $\frac{3}{15}$ Tage [Min.]; m) $\frac{23}{125}$ m³ [dm³];
 n) $\frac{5}{64}$ m² [mm²].



Da sie eine größere Anschaffung plant, legt Andrea von ihrem Taschengeld jeden Monat 12 € auf die hohe Kante.

Diese 12 € machen gerade $\frac{2}{5}$ ihres monatlichen Taschengeldbetrages aus.

Wie hoch ist dieser?

$\frac{2}{5}$ von ? = 12 €

Überlege so:

Der monatliche Taschengeldbetrag ist das unbekannte Ganze.

Es wurde in 5 Teile zerlegt.

2 dieser Teile ergeben zusammen 12 €.

Einer dieser Teile ergibt 12 € : 2 = 6 €.

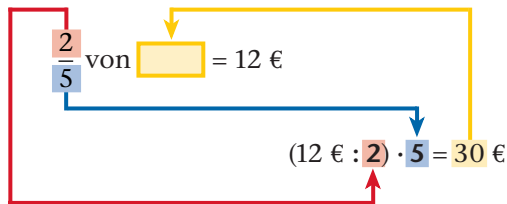
Das unbekannte Ganze besteht aus 5 dieser Teile.

Das Ganze ist 6 € · 5 = 30 €.

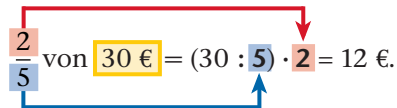
?				
			12 €	
				6 €
6 €	6 €	6 €	6 €	6 €
30 €				

1 Bruchteile und Brüche

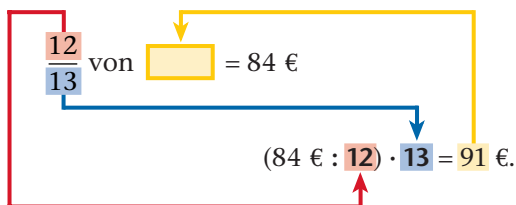
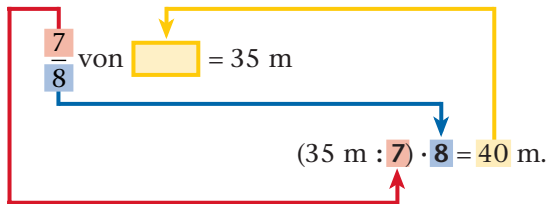
Und so hast du gerechnet:



Der monatliche Taschengeldbetrag ist 30 €.
Probe:



Weitere Beispiele:



6 Fülle die Leerstelle aus:

a) $\frac{3}{5}$ von = 27 m;

b) $\frac{6}{11}$ von = 42 €;

c) $\frac{5}{6}$ von = 35 kg;

d) $\frac{11}{32}$ von = 77 €;

e) $\frac{4}{9}$ von $\square = 72 \text{ kg}$;

f) $\frac{7}{12}$ von $\square = 105 \text{ km}$;

g) $\frac{25}{38}$ von $\square = 175 \text{ €}$;

h) $\frac{18}{50}$ von $\square = 126 \text{ m}^2$;

i) $\frac{8}{50}$ von $\square = 96 \text{ km}$;

k) $\frac{10}{33}$ von $\square = 250 \text{ kg}$;

l) $\frac{12}{125}$ von $\square = 144 \text{ m}$;

m) $\frac{7}{34}$ von $\square = 84 \text{ kg}$.



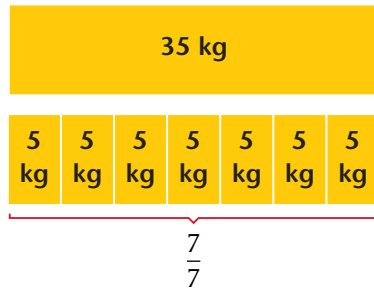
Du sollst in der Aussageform

\square von $35 \text{ kg} = 15 \text{ kg}$ den fehlenden Zähler ergänzen.

Überlege so:

Die 35 kg sind das Ganze.

Es wurde in 7 gleiche Teile zerlegt. Jeder dieser Teile beträgt $35 \text{ kg} : 7 = 5 \text{ kg}$.

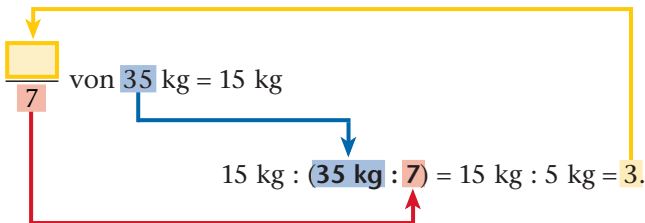


5 kg sind in 15 kg dreimal enthalten, denn $15 \text{ kg} : 5 \text{ kg} = 3$. Also wurden 3 Teile zusammengefasst.



Der gesuchte Zähler ist 3.

Und so hast du gerechnet:



1 Bruchteile und Brüche

Probe:

$$\frac{3}{7} \text{ von } 35 \text{ kg} = (35 \text{ kg} : 7) \cdot 3 = 5 \text{ kg} \cdot 3 = 15 \text{ kg.}$$



Weitere Beispiele:

$$\frac{5}{65} \text{ von } 39 \text{ €} = 39 \text{ €} : (65 \text{ €} : 5) = 39 \text{ €} : 13 \text{ €} = 3.$$

$$\frac{12}{108} \text{ von } 45 \text{ m} = 45 \text{ m} : (108 \text{ m} : 12) = 45 \text{ m} : 9 \text{ m} = 5.$$



7 Ergänze den fehlenden Zähler. (Mache stets auch die Probe!)

a) $\frac{\boxed{}}{4}$ von 36 kg = 27 kg;

b) $\frac{\boxed{}}{8}$ von 48 € = 30 €;

c) $\frac{\boxed{}}{7}$ von 63 m = 36 m;

d) $\frac{\boxed{}}{15}$ von 135 Min. = 36 Min.;

e) $\frac{\boxed{}}{5}$ von 85 € = 51 €;

f) $\frac{\boxed{}}{11}$ von 187 m² = 51 m²;

g) $\frac{\boxed{}}{3}$ von 336 kg = 224 kg;

h) $\frac{\boxed{}}{12}$ von 144 € = 108 €;

- i) $\frac{\square}{21}$ von 189 m = 81 m; k) $\frac{\square}{17}$ von 306 kg = 270 kg;
 l) $\frac{\square}{16}$ von 400 dm = 175 dm; m) $\frac{\square}{25}$ von 1000 € = 520 €;
 n) $\frac{\square}{19}$ von 684 m² = 432 m²; o) $\frac{\square}{45}$ von 1260 € = 924 €;
 p) $\frac{\square}{50}$ von 3500 kg = 1190 kg; q) $\frac{\square}{22}$ von 1386 km = 1071 km;
 r) $\frac{\square}{28}$ von 1568 m = 1400 m; s) $\frac{\square}{19}$ von 1691 € = 1335 €.



Du sollst in der Aussageform

$\frac{5}{\square}$ von 72 m = 45 m den fehlenden Nenner ergänzen.

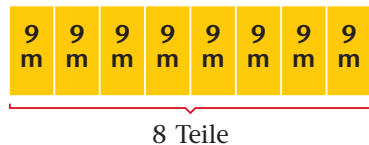
Überlege so:
 Bei den 45 m
 handelt es sich um 5 der gleichen
 Teile, in die das Ganze zerlegt
 wurde. Jeder Teil beträgt also
 $45 \text{ m} : 5 = 9 \text{ m}$



Das Ganze sind die 72 m.
 9 m sind in 72 m achtmal
 enthalten, weil $72 \text{ m} : 9 \text{ m} = 8$.

Das Ganze besteht also aus
 8 Teilen zu je 9 m.

Der gesuchte Nenner ist 8.



1 Bruchteile und Brüche

Und so hast du gerechnet:

$$\frac{5}{\boxed{}} \text{ von } 72 \text{ m} = 45 \text{ m}$$

$$72 \text{ m} : (45 \text{ m} : 5) = 72 \text{ m} : 9 \text{ m} = 8.$$

Probe:

$$\frac{5}{8} \text{ von } 72 \text{ m} = (72 \text{ m} : 8) \cdot 5 = 9 \text{ m} \cdot 5 = 45 \text{ m}.$$



Weitere Beispiele:

$$\frac{8}{\boxed{}} \text{ von } 99 \text{ kg} = 72 \text{ kg}$$

$$99 \text{ kg} : (72 \text{ kg} : 8) = 99 \text{ kg} : 9 \text{ kg} = 11.$$

$$\frac{12}{\boxed{}} \text{ von } 400 \text{ €} = 192 \text{ €}$$

$$400 \text{ €} : (192 \text{ €} : 12) = 400 \text{ €} : 16 \text{ €} = 25.$$



8 Ergänze den fehlenden Nenner. (Mache stets auch die Probe!)

a) $\frac{3}{\boxed{}}$ von 45 kg = 27 kg;

b) $\frac{7}{\boxed{}}$ von 56 m = 49 m;

c) $\frac{5}{\boxed{}}$ von 54 € = 30 €;

d) $\frac{4}{\boxed{}}$ von 161 km = 92 km;

- e) $\frac{12}{\square}$ von 425 Min. = 300 Min.; f) $\frac{10}{\square}$ von 672 kg = 320 kg;
 g) $\frac{8}{\square}$ von 240 m = 128 m; h) $\frac{6}{\square}$ von 132 t = 72 t;
 i) $\frac{7}{\square}$ von 484 m² = 154 m²; k) $\frac{13}{\square}$ von 676 Min. = 338 Min.;
 l) $\frac{11}{\square}$ von 2057 km = 1331 km; m) $\frac{15}{\square}$ von 1968 kg = 1845 kg;
 n) $\frac{25}{\square}$ von 5472 € = 3600 €; o) $\frac{14}{\square}$ von 5550 t = 3108 t;
 p) $\frac{22}{\square}$ von 575 Min. = 506 Min.; q) $\frac{25}{\square}$ von 4560 kg = 2000 kg.

1.3 Zusammenfassung

Das hast du im 1. Kapitel gelernt:

1. Ein Bruch besteht aus dem **über** dem Bruchstrich stehenden **Zähler** und dem **unter** dem Bruchstrich stehenden **Nenner**.

$$\frac{z}{n}; n \neq 0$$

2. Mit Brüchen kann man Teile von Ganzen bezeichnen. Der **Nenner** gibt an, in wie viele gleiche Teile das Ganze zerlegt wird, der **Zähler** gibt an, wie viele dieser Teile zusammengefasst werden.

$$\frac{z}{n} \text{ von } g = (g:n) \cdot z$$

Merke: Da man das Ganze nicht in null gleiche Teile zerlegen kann, ist ein Bruch mit dem Nenner Null ein sinnloses Gebilde.

Deshalb setzen wir fest:

1 Bruchteile und Brüche

1.4 Test zum 1. Kapitel

Mithilfe des folgenden Tests kannst du überprüfen, ob du den Stoff des 1. Kapitels verstanden hast und seine Anwendung beherrschst. Wenn du mehr als 7 Fehler machst, dann solltest du das 1. Kapitel noch einmal durcharbeiten.



1 Berechne:

- a) $\frac{2}{3}$ von 15m; b) $\frac{7}{8}$ von 96 kg;
c) $\frac{3}{5}$ von 135 Min.; d) $\frac{5}{16}$ von 144 m²;
e) $\frac{3}{19}$ von 228 €; f) $\frac{5}{9}$ von 12 Tagen; g) $\frac{9}{16}$ von 6 m;
h) $\frac{8}{15}$ von 3 kg; i) $\frac{15}{24}$ von 3 m²; k) $\frac{11}{20}$ von 4 m³.



2 Schreibe mit der in Klammern stehenden Einheit:

- a) $\frac{2}{3}$ Min. [Sek.]; b) $\frac{7}{8}$ kg [g]; c) $\frac{5}{12}$ Tage [Std.];
d) $\frac{7}{15}$ Std. [Min.]; e) $\frac{5}{8}$ m [mm].



3 Fülle die Leerstellen aus:

- a) $\frac{2}{5}$ von = 14 m; b) $\frac{\text{input}}{5}$ von 95 kg = 57 kg;
c) $\frac{7}{\text{input}}$ von 72 kg = 63 kg; d) $\frac{\text{input}}{5}$ m = 60 cm;

e) $\frac{3}{8}$ von = 36 kg;

f) $\frac{\text{}}{7}$ von 105 Min. = 90 Min.;

g) $\frac{4}{\text{}}$ von 279 m = 124 m;

h) $\frac{7}{\text{}}$ kg = 875 g;

i) $\frac{9}{14}$ von = 117 €;

k) $\frac{\text{}}{12}$ von 288 m = 168 m;

l) $\frac{2}{\text{}}$ von 136 Min. = 16 Min.;

m) $\frac{\text{}}{18}$ Std. = 1400 Sek.;

n) $\frac{7}{16}$ von = 126 m²;

o) $\frac{\text{}}{8}$ von 144 m² = 90 m²;

p) $\frac{8}{\text{}}$ von 225 € = 200 €;

q) $\frac{\text{}}{9}$ Tage = 800 Min.;

r) $\frac{11}{12}$ von = 154 Min.;

s) $\frac{\text{}}{17}$ von 187 € = 44 €;

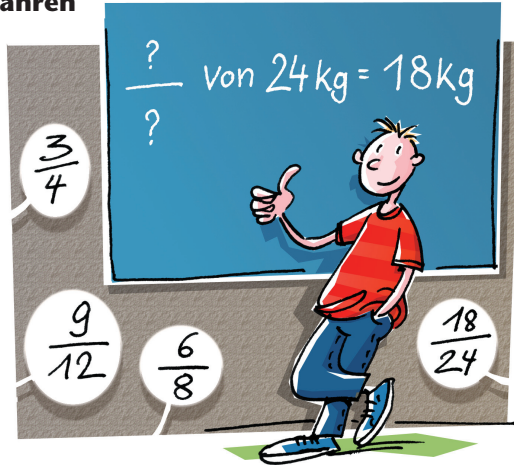
t) $\frac{5}{\text{}}$ von 165 € = 75 €;

u) $\frac{3}{\text{}}$ m = 375 mm.

Erweitern und Kürzen von Brüchen

2.1 Regeln und Verfahren

Wer hat Recht?
Alle haben Recht!
Denn:



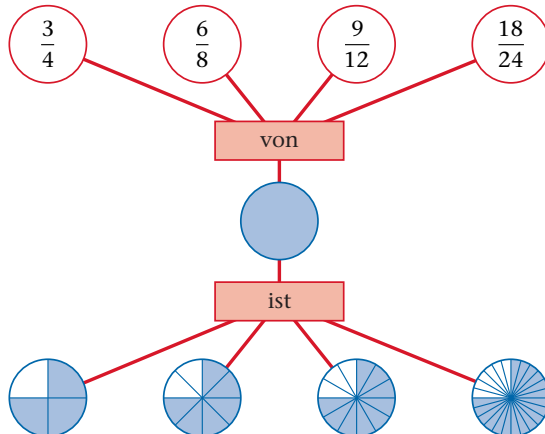
$$\frac{3}{4} \text{ von } 24 \text{ kg} = (24 \text{ kg} : 4) \cdot 3 = 6 \text{ kg} \cdot 3 = 18 \text{ kg};$$

$$\frac{6}{8} \text{ von } 24 \text{ kg} = (24 \text{ kg} : 8) \cdot 6 = 3 \text{ kg} \cdot 6 = 18 \text{ kg};$$

$$\frac{9}{12} \text{ von } 24 \text{ kg} = (24 \text{ kg} : 12) \cdot 9 = 2 \text{ kg} \cdot 9 = 18 \text{ kg};$$

$$\frac{18}{24} \text{ von } 24 \text{ kg} = (24 \text{ kg} : 24) \cdot 18 = 1 \text{ kg} \cdot 18 = 18 \text{ kg}.$$

Im Bild sieht
das so aus:

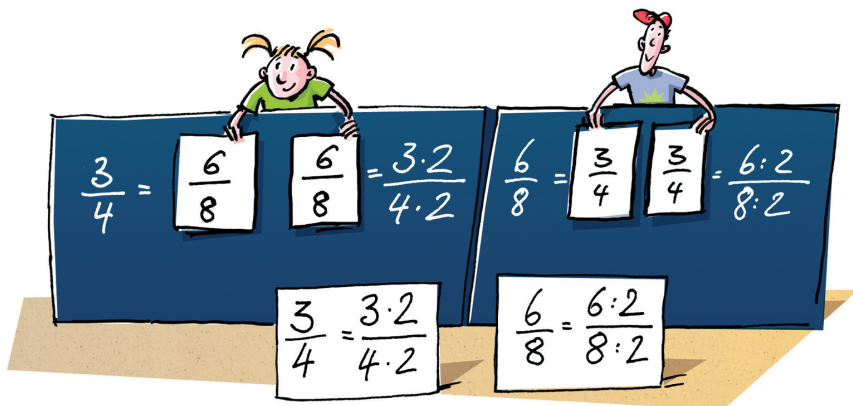


2 Erweitern und Kürzen von Brüchen

Die Brüche $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{9}{12}$ und $\frac{18}{24}$ bezeichnen jeweils den gleichen Teil des Ganzen.

Die Brüche $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{9}{12}$ und $\frac{18}{24}$ sind gleich: $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{18}{24}$.

Aus dem Beispiel entnehmen wir:



Ebenso gilt:

$$\frac{3}{4} = \frac{9}{12} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3}$$

und

$$\frac{3}{4} = \frac{18}{24} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 6}$$

Ebenso gilt:

$$\frac{9}{12} = \frac{3}{4} = \frac{9 \div 3}{12 \div 3}$$

und

$$\frac{18}{24} = \frac{3}{4} = \frac{18 \div 6}{24 \div 6}$$

Allgemein:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \quad (b \neq 0; n \neq 0)$$

Die Multiplikation von Zähler und Nenner eines Bruches mit derselben Zahl bezeichnet man als **Erweitern**.

Allgemein:

$$\frac{a}{b} = \frac{a : n}{b : n} \quad (b \neq 0; n \neq 0)$$

Die Division von Zähler und Nenner eines Bruches durch dieselbe Zahl bezeichnet man als **Kürzen**.



Brüche, die durch Erweitern oder Kürzen auseinander hervorgehen, sind gleich!



Um den Bruch $\frac{3}{4}$ mit 6 zu erweitern, rechne so:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 6} = \frac{18}{24}.$$



1 Erweitere die folgenden Brüche mit 7:

- a) $\frac{3}{8}$; b) $\frac{7}{12}$; c) $\frac{5}{9}$; d) $\frac{4}{21}$; e) $\frac{9}{11}$;
 f) $\frac{12}{17}$; g) $\frac{13}{18}$; h) $\frac{28}{37}$; i) $\frac{45}{92}$; k) $\frac{35}{39}$.



2 Erweitere:

- a) $\frac{5}{8}$ mit 6; b) $\frac{5}{9}$ mit 12; c) $\frac{7}{12}$ mit 5; d) $\frac{11}{12}$ mit 8;
 e) $\frac{4}{13}$ mit 11; f) $\frac{21}{25}$ mit 25; g) $\frac{17}{19}$ mit 9; h) $\frac{8}{15}$ mit 15;
 i) $\frac{13}{34}$ mit 4; k) $\frac{12}{49}$ mit 30.



Du sollst den Bruch $\frac{3}{5}$ durch Erweitern in einen Bruch mit dem Nenner 60 umwandeln.

Überlege so:

Der **ursprüngliche** Nenner ist 5.

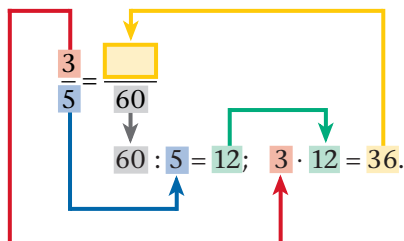
Der **neue** Nenner ist 60.

Du musst also mit $60 : 5 = 12$ erweitern.

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 12}{5 \cdot 12} = \frac{36}{60}.$$

2 Erweitern und Kürzen von Brüchen

Und so hast du gerechnet:



3 Schreibe die folgenden Brüche mit dem Nenner 60:

- a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{3}{4}$; c) $\frac{5}{6}$; d) $\frac{27}{30}$; e) $\frac{4}{15}$;
 f) $\frac{2}{3}$; g) $\frac{4}{5}$; h) $\frac{7}{20}$; i) $\frac{11}{30}$; k) $\frac{13}{15}$.



4 Schreibe die folgenden Brüche mit dem Nenner 144:

- a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{3}{4}$; c) $\frac{7}{8}$; d) $\frac{7}{9}$; e) $\frac{7}{12}$;
 f) $\frac{13}{16}$; g) $\frac{17}{18}$; h) $\frac{11}{48}$; i) $\frac{13}{24}$; k) $\frac{29}{48}$.



5 Schreibe die folgenden Brüche mit dem **Zähler** 72 (verfahre ähnlich wie beim Nenner):

- a) $\frac{3}{4}$; b) $\frac{8}{11}$; c) $\frac{18}{25}$; d) $\frac{9}{13}$; e) $\frac{12}{17}$;
 f) $\frac{36}{55}$; g) $\frac{4}{9}$; h) $\frac{2}{29}$; i) $\frac{6}{11}$; k) $\frac{1}{12}$.



6 Fülle die Leerstellen aus:

- a) $\frac{5}{8} = \frac{\boxed{}}{48}$; b) $\frac{5}{9} = \frac{45}{\boxed{}}$; c) $\frac{3}{10} = \frac{\boxed{}}{80}$; d) $\frac{5}{17} = \frac{\boxed{}}{136}$;
 e) $\frac{5}{17} = \frac{85}{\boxed{}}$; f) $\frac{7}{72} = \frac{56}{\boxed{}}$; g) $\frac{11}{18} = \frac{\boxed{}}{144}$;

$$h) \frac{3}{5} = \frac{\boxed{}}{25} = \frac{24}{\boxed{}} = \frac{\boxed{}}{55} = \frac{39}{\boxed{}} = \frac{\boxed{}}{195} = \frac{114}{\boxed{}};$$

$$i) \frac{2}{3} = \frac{8}{\boxed{}} = \frac{\boxed{}}{15} = \frac{34}{\boxed{}} = \frac{\boxed{}}{78} = \frac{122}{\boxed{}} = \frac{\boxed{}}{252};$$

$$k) \frac{4}{9} = \frac{\boxed{}}{54} = \frac{88}{\boxed{}} = \frac{224}{\boxed{}} = \frac{\boxed{}}{288} = \frac{484}{\boxed{}} = \frac{\boxed{}}{558};$$

$$l) \frac{11}{12} = \frac{33}{\boxed{}} = \frac{\boxed{}}{132} = \frac{132}{\boxed{}} = \frac{\boxed{}}{108} = \frac{176}{\boxed{}} = \frac{\boxed{}}{144}.$$

Der Bruch $\frac{24}{36}$ lässt sich mit 2 kürzen, denn 2 ist sowohl Teiler von 24 als auch Teiler von 36:

$$\frac{24}{36} = \frac{24:2}{36:2} = \frac{12}{18}.$$

Der so erhaltene Bruch $\frac{12}{18}$ lässt sich nochmals mit 2 kürzen, denn 2 ist gemeinsamer Teiler von 12 und 18:

$$\frac{12}{18} = \frac{12:2}{18:2} = \frac{6}{9}.$$

Der so erhaltene Bruch $\frac{6}{9}$ lässt sich mit 3 kürzen, denn 3 ist gemeinsamer Teiler von 6 und 9:

$$\frac{6}{9} = \frac{6:3}{9:3} = \frac{2}{3}.$$

Der zuletzt erhaltene Bruch $\frac{2}{3}$ lässt sich nicht mehr kürzen, denn Zähler und Nenner haben keinen gemeinsamen Teiler, sie sind teilerfremd.

2 Erweitern und Kürzen von Brüchen

Sind in einem Bruch Zähler und Nenner teilerfremd, so sagt man:

„Der Bruch hat seine Grundform“

oder:

„Der Bruch ist vollständig gekürzt“.

Und so haben wir den Bruch $\frac{24}{36}$ schrittweise in seine Grundform gebracht:

$\frac{24}{36} = \frac{12}{18}$	$= \frac{6}{9}$	$= \frac{2}{3}$
1. Schritt: Kürzen mit 2	2. Schritt: Kürzen mit 2	3. Schritt: Kürzen mit 3

Statt nacheinander mit 2, noch einmal mit 2 und dann mit 3 zu kürzen, wären wir auch durch einmaliges Kürzen mit

$$2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

zum Ziel gekommen:

$$\frac{24}{36} = \frac{24:12}{36:12} = \frac{2}{3}.$$

Der Bruch $\frac{144}{216}$ soll vollständig gekürzt werden.

Schrittweise geht es so:

$\frac{144}{216} = \frac{72}{108}$	$= \frac{36}{54}$	$= \frac{18}{27}$	$= \frac{6}{9}$	$= \frac{2}{3}$
1. Schritt: Kürzen mit 2	2. Schritt: Kürzen mit 2	3. Schritt: Kürzen mit 2	4. Schritt: Kürzen mit 3	5. Schritt: Kürzen mit 3

Schneller geht es aber so:

$$\frac{144}{216} = \frac{2}{3}$$

Kürzen mit $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72$

Um beim Kürzen schneller zum Ziel zu kommen, ist es nützlich, sich die folgenden Teilbarkeitsregeln einzuprägen:



Eine Zahl ist durch

- 2 teilbar, wenn sie auf 0, 2, 4, 6 oder 8 endet.
- 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.
- 4 teilbar, wenn ihre beiden letzten Ziffern 00 sind oder eine durch 4 teilbare Zahl bilden.
- 5 teilbar, wenn sie auf 0 oder 5 endet.
- 6 teilbar, wenn sie sowohl durch 2 als auch durch 3 teilbar ist.
- 8 teilbar, wenn ihre drei letzten Ziffern 000 sind oder eine durch 8 teilbare Zahl bilden.
- 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.
- 12 teilbar, wenn sie sowohl durch 3 als auch durch 4 teilbar ist.
- 15 teilbar, wenn sie sowohl durch 5 als auch durch 3 teilbar ist.
- 18 teilbar, wenn sie sowohl durch 2 als auch durch 9 teilbar ist.
- 25 teilbar, wenn ihre beiden letzten Ziffern 00, 25, 50 oder 75 sind.



7 Kürze vollständig. (Du kannst dabei auch in mehreren Schritten vorgehen.)

- | | | | | |
|----------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| a) $\frac{6}{8}$; | b) $\frac{15}{25}$; | c) $\frac{12}{32}$; | d) $\frac{27}{45}$; | e) $\frac{16}{64}$; |
| f) $\frac{49}{84}$; | g) $\frac{24}{60}$; | h) $\frac{75}{90}$; | i) $\frac{42}{98}$; | k) $\frac{51}{85}$; |
| l) $\frac{55}{88}$; | m) $\frac{48}{72}$; | n) $\frac{36}{144}$; | o) $\frac{60}{135}$; | p) $\frac{56}{126}$; |

2 Erweitern und Kürzen von Brüchen

q) $\frac{28}{84}$; r) $\frac{72}{192}$; s) $\frac{150}{225}$; t) $\frac{135}{180}$; u) $\frac{56}{128}$;
v) $\frac{65}{117}$; w) $\frac{112}{128}$; x) $\frac{448}{832}$; y) $\frac{324}{594}$; z) $\frac{560}{728}$.

Die Aufgabe:

„Dividiere das Produkt der Zahlen 28 und 32 durch die Zahl 4“

lässt sich mathematisch so formulieren:

$$(28 \cdot 32) : 4.$$

Normalerweise geht man so vor, dass man zuerst die Klammer ausrechnet und anschließend das so erhaltene Ergebnis durch 4 teilt:

$$(28 \cdot 32) : 4 = \\ 896 : 4 = \mathbf{224}$$

Einfacher geht es aber

so

oder

so

Man teilt zuerst den **1. Faktor** durch die Zahl 4 und multipliziert das so erhaltene Ergebnis mit dem 2. Faktor:

$$(28 \cdot 32) : 4 = \\ (28 : 4) \cdot 32 = \\ 7 \cdot 32 = \mathbf{224}.$$

Man teilt zuerst den **2. Faktor** durch die Zahl 4 und multipliziert das so erhaltene Ergebnis mit dem 1. Faktor:

$$(28 \cdot 32) : 4 = \\ 28 \cdot (32 : 4) = \\ 28 \cdot 8 = \mathbf{224}.$$

Vorsicht!

Keinesfalls beide Faktoren durch die Zahl 4 teilen!

Du hättest dann das Produkt nicht durch 4 geteilt, sondern durch $4 \cdot 4 = 16$!

Diese Überlegung führt zu der folgenden Regel:



Ein Produkt wird durch eine Zahl geteilt,
indem man **nur einen** der Faktoren
durch diese Zahl teilt.

Auch bei Produkten aus drei oder mehr Faktoren darf **nur einer** der Faktoren durch die betreffende Zahl geteilt werden:



$$(9 \cdot 12 \cdot 18) : 3$$

$(9 \cdot 12 \cdot 18) : 3 =$	$(9 : 3) \cdot 12 \cdot 18 =$	$9 \cdot (12 : 3) \cdot 18 =$	$9 \cdot 12 \cdot (18 : 3) =$
$1944 : 3 =$	$3 \cdot 12 \cdot 18 =$	$9 \cdot 4 \cdot 18 =$	$9 \cdot 12 \cdot 6 =$
648	648	648	648

Oft ergeben sich nicht so viele Möglichkeiten, weil nicht alle in der Klammer auftretenden Faktoren durch die betreffende Zahl teilbar sind:



$$(84 \cdot 15) : 7$$

$(84 \cdot 15) : 7 =$	$(84 : 7) \cdot 15 =$	$84 \cdot (15 : 7)$
$1260 : 7 = \mathbf{180}$	$12 \cdot 15 = \mathbf{180}$	geht nicht, weil 15 nicht durch 7 teilbar ist.



8 Berechne auf mindestens zwei verschiedene Arten:

- | | | |
|-----------------------------------|---------------------------------|----------------------------------|
| a) $(24 \cdot 18) : 6;$ | b) $(36 \cdot 24) : 12;$ | c) $(75 \cdot 90) : 15;$ |
| d) $(80 \cdot 96) : 16;$ | e) $(72 \cdot 120) : 24;$ | f) $(15 \cdot 25 \cdot 30) : 5;$ |
| g) $(27 \cdot 9 \cdot 6) : 3;$ | h) $(24 \cdot 5 \cdot 48) : 8;$ | i) $(39 \cdot 25) : 13;$ |
| k) $(36 \cdot 12 \cdot 90) : 18.$ | | |

2 Erweitern und Kürzen von Brüchen



Bei dem Bruch

$$\frac{8 \cdot 45}{105 \cdot 28}$$

sind Zähler und Nenner unausgerechnete Produkte.
Wenn du diesen Bruch durch Kürzen in die Grundform bringen willst, kannst du zuerst multiplizieren:

$$\frac{8 \cdot 45}{105 \cdot 28} = \frac{360}{2940}$$

und danach kürzen:

$$\frac{360}{2940} = \frac{360 : 60}{2940 : 60} = \frac{6}{49}$$

Einfacher geht es aber, wenn du erst kürzt und dann multiplizierst:

$$\begin{aligned} \frac{8 \cdot 45}{105 \cdot 28} &= \frac{(8 \cdot 45) : 15}{(105 \cdot 28) : 15} = \frac{8 \cdot (45 : 15)}{(105 : 15) \cdot 28} = \frac{8 \cdot 3}{7 \cdot 28} \\ &= \frac{(8 : 4) \cdot 3}{(7 \cdot 28) : 4} = \frac{(8 : 4) \cdot 3}{7 \cdot (28 : 4)} = \frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 7} = \frac{6}{49} \end{aligned}$$

Und so hast du gerechnet:

$$\frac{8 \cdot 45}{105 \cdot 28} = \frac{8 \cdot \overset{3}{\cancel{45}}}{\overset{3}{\cancel{105}} \cdot 28} = \frac{\overset{2}{\cancel{8}} \cdot \overset{3}{\cancel{45}}}{\overset{2}{\cancel{105}} \cdot \overset{3}{\cancel{28}}} = \frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 7} = \frac{6}{49}$$

1. Schritt:
Kürzen
mit 15

2. Schritt:
Kürzen
mit 4

Und noch kürzer kannst du es so schreiben:

$$\frac{\overset{2}{\cancel{8}} \cdot \overset{3}{\cancel{45}}}{\overset{2}{\cancel{105}} \cdot \overset{3}{\cancel{28}}} = \frac{6}{49}$$



Weitere Beispiele:

- **1. Schritt (/):**
Kürze 24 gegen 72 mit 24
- **2. Schritt (/):**
Kürze 49 gegen 35 mit 7

$$\frac{\overset{1}{\cancel{24}} \cdot \overset{7}{\cancel{49}}}{\underset{5}{\cancel{35}} \cdot \underset{3}{\cancel{72}}} = \frac{7}{15}$$

- **1. Schritt (/):**
Kürze 18 gegen 72 mit 18
- **2. Schritt (/):**
Kürze 5 gegen 25 mit 5
- **3. Schritt (/):**
Kürze 15 gegen 5 mit 5
- **4. Schritt (/):**
Kürze 3 gegen 24 mit 3

$$\frac{\overset{1}{\cancel{18}} \cdot \overset{1}{\cancel{5}} \cdot \overset{1}{\cancel{15}}}{\underset{5}{\cancel{25}} \cdot \underset{4}{\cancel{72}} \cdot \underset{8}{\cancel{24}}} = \frac{1}{32}$$



9 Kürze vor dem Multiplizieren vollständig:

- a) $\frac{2 \cdot 3}{9 \cdot 8}$; b) $\frac{4 \cdot 15}{5 \cdot 22}$; c) $\frac{15 \cdot 24}{16 \cdot 25}$; d) $\frac{36 \cdot 15}{45 \cdot 24}$;
- e) $\frac{17 \cdot 26}{39 \cdot 51}$; f) $\frac{8 \cdot 9}{15 \cdot 14}$; g) $\frac{45 \cdot 26}{180 \cdot 25}$; h) $\frac{14 \cdot 45}{35 \cdot 63}$;
- i) $\frac{81 \cdot 43}{86 \cdot 99}$; k) $\frac{15 \cdot 18}{54 \cdot 25}$; l) $\frac{6 \cdot 15 \cdot 49}{7 \cdot 16 \cdot 72}$; m) $\frac{8 \cdot 6 \cdot 25}{45 \cdot 7 \cdot 32}$;
- n) $\frac{8 \cdot 13 \cdot 7}{39 \cdot 14 \cdot 12}$; o) $\frac{25 \cdot 9 \cdot 8}{24 \cdot 40 \cdot 15}$; p) $\frac{72 \cdot 26 \cdot 9}{91 \cdot 27 \cdot 16}$; q) $\frac{9 \cdot 11 \cdot 10}{10 \cdot 12 \cdot 11}$;
- r) $\frac{20 \cdot 77 \cdot 117}{21 \cdot 90 \cdot 143}$; s) $\frac{44 \cdot 35 \cdot 51}{84 \cdot 66 \cdot 68}$; t) $\frac{51 \cdot 161 \cdot 65}{230 \cdot 170 \cdot 91}$;
- u) $\frac{16 \cdot 14 \cdot 28 \cdot 18 \cdot 63}{49 \cdot 36 \cdot 30 \cdot 21 \cdot 32}$.

2 Erweitern und Kürzen von Brüchen

2.2 Zusammenfassung

Das hast du im 2. Kapitel gelernt:

1. Ein Bruch wird erweitert, indem man Zähler und Nenner mit derselben, von Null verschiedenen Zahl multipliziert. Brüche, die durch Erweitern auseinander hervorgehen, sind gleich.

$$\frac{z}{n} = \frac{z \cdot e}{n \cdot e} \quad \begin{matrix} n \neq 0 \\ e \neq 0 \end{matrix}$$

2. Ein Bruch wird gekürzt, indem man Zähler und Nenner durch dieselbe, von Null verschiedene Zahl dividiert. Brüche, die durch Kürzen auseinander hervorgehen, sind gleich.

$$\frac{z}{n} = \frac{z : k}{n : k} \quad \begin{matrix} n \neq 0 \\ k \neq 0 \end{matrix}$$

3. Ein Bruch, bei dem Zähler und Nenner teilerfremd sind, lässt sich nicht kürzen. Man sagt dann:

„Der Bruch ist vollständig gekürzt“

oder:

„Der Bruch hat seine Grundform.“

2.3 Test zum 2. Kapitel

Überprüfe mit den nachfolgenden Aufgaben, ob du den Stoff des 2. Kapitels beherrschst. Mehr als 5 Fehler sollten dir dabei nicht unterlaufen!



1 Erweitere:

a) $\frac{3}{4}$ mit 7;

b) $\frac{5}{8}$ mit 11;

c) $\frac{6}{13}$ mit 15;

d) $\frac{11}{12}$ mit 25;

e) $\frac{17}{21}$ mit 13.



2 Schreibe die folgenden Brüche mit dem Nenner 120:

a) $\frac{4}{5}$;

b) $\frac{7}{8}$;

c) $\frac{13}{15}$;

d) $\frac{17}{24}$;

e) $\frac{2}{3}$.





3 Schreibe die folgenden Brüche mit dem Zähler 180:

- a) $\frac{4}{5}$; b) $\frac{6}{13}$; c) $\frac{9}{11}$; d) $\frac{45}{53}$; e) $\frac{36}{49}$.



4 Fülle die Leerstellen aus:

- a) $\frac{4}{7} = \frac{\boxed{}}{49}$; b) $\frac{7}{8} = \frac{91}{\boxed{}}$; c) $\frac{5}{13} = \frac{\boxed{}}{143}$; d) $\frac{11}{12} = \frac{121}{\boxed{}}$;
 e) $\frac{15}{21} = \frac{\boxed{}}{168}$; f) $\frac{\boxed{}}{8} = \frac{21}{56}$; g) $\frac{\boxed{}}{12} = \frac{121}{132}$; h) $\frac{15}{\boxed{}} = \frac{90}{96}$;
 i) $\frac{\boxed{}}{25} = \frac{336}{525}$; k) $\frac{13}{\boxed{}} = \frac{91}{105}$.



5 Kürze vollständig:

- a) $\frac{14}{21}$; b) $\frac{80}{128}$; c) $\frac{72}{120}$; d) $\frac{135}{225}$;
 e) $\frac{210}{693}$; f) $\frac{24 \cdot 25}{75 \cdot 36}$; g) $\frac{15 \cdot 27}{18 \cdot 45}$; h) $\frac{4 \cdot 18 \cdot 26}{45 \cdot 39 \cdot 36}$;
 i) $\frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{30 \cdot 18 \cdot 4}$; k) $\frac{189 \cdot 34 \cdot 28 \cdot 19}{450 \cdot 14 \cdot 38 \cdot 17}$.

Brüche auf dem Zahlenstrahl

3.1 Anordnung auf dem Zahlenstrahl

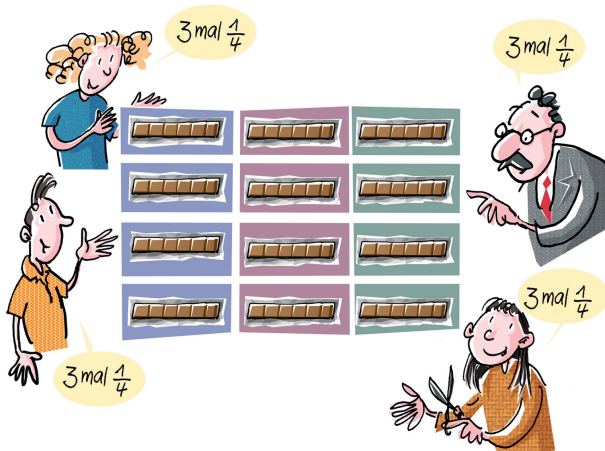
3 Tafeln Schokolade sollen gleichmäßig unter 4 Personen aufgeteilt werden. Mathematisch können wir dieses Problem nicht bewältigen. Es führt auf die Divisionsaufgabe

$$3 : 4$$

und für diese kennen wir bisher noch keine Lösung.



Praktisch lässt sich das Problem jedoch ohne Schwierigkeiten so lösen:
Teile jede der 3 Tafeln in 4 gleiche Teile.



3 Brüche auf dem Zahlenstrahl

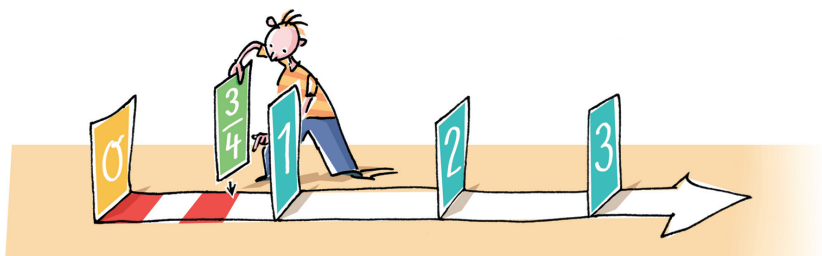
Gib jeder der 4 Personen von jeder Tafel einen Teil.

Jede Person erhält also $3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ Tafeln.

Diese praktische Überlegung legt es nahe, der Divisionsaufgabe $3 : 4$ als Lösung den Bruch $\frac{3}{4}$ zuzuordnen:

$$3 : 4 = \frac{3}{4}.$$

Wir nehmen den Bruch $\frac{3}{4}$ also in die Gemeinschaft der Zahlen auf und weisen ihm einen Platz auf dem Zahlenstrahl zu:



Nun lässt sich auch die Probe zur Divisionsaufgabe $3 : 4 = \frac{3}{4}$ durchführen:



$$\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 4 \cdot \frac{3}{4} = 3$$

So verfahren wir ab jetzt mit allen Divisionsaufgaben dieser Art, wie zum Beispiel:

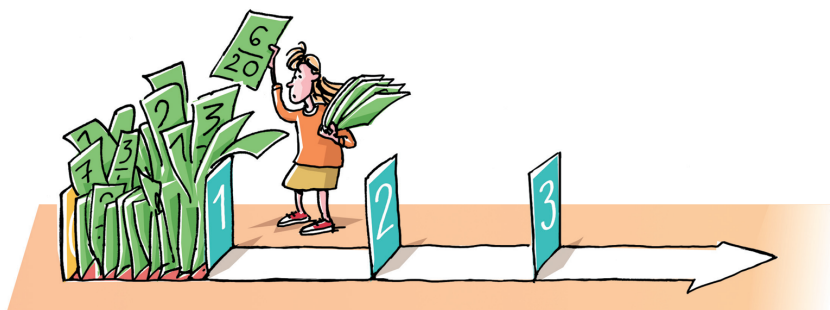


$$6:7 = \frac{6}{7}; \quad 5:10 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}; \quad 4:16 = \frac{4}{16} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4};$$

$$2:5 = \frac{2}{5}; \quad 5:8 = \frac{5}{8}; \quad 18:24 = \frac{18}{24} = \frac{9}{12} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

Damit geht es nun aber etwas eng zu auf dem Zahlenstrahl, wenn auch nicht jeder Bruch einen eigenen Platz beanspruchen kann. Alle Brüche nämlich, die durch Kürzen oder Erweitern auseinander hervorgehen (und das sind jeweils unendlich viele!) müssen sich mit demselben Platz begnügen.

Und trotzdem drängen sich immer noch unendlich viele verschiedene Brüche auf der ehemals völlig leeren Strecke zwischen 0 und 1.



1 Gib das Ergebnis der folgenden Divisionsaufgaben in vollständig gekürzter Form an:



$$24:60 = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}.$$

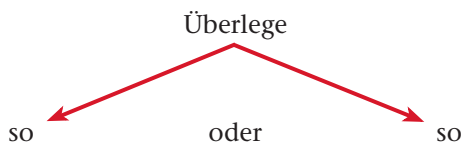
- | | | | |
|--------------|--------------|---------------|--------------|
| a) 18 : 45; | b) 12 : 15; | c) 14 : 24; | d) 15 : 40; |
| e) 50 : 75; | f) 33 : 132; | g) 28 : 63; | h) 65 : 182; |
| i) 26 : 65; | k) 48 : 60; | l) 64 : 136; | m) 32 : 56; |
| n) 78 : 143; | o) 75 : 225; | p) 108 : 198; | q) 56 : 126. |

3.2 Unechte Brüche, gemischte und ganze Zahlen

Nicht nur zwischen 0 und 1, sondern überall auf dem Zahlenstrahl beginnt nun das Gedränge.

Das Ergebnis der folgenden Aufgabe zeigt es:

5 Tafeln Schokolade sollen gleichmäßig an 3 Personen verteilt werden.



Jede Tafel wird in 3 gleiche Teile zerlegt; jede Person bekommt von **jeder** Tafel je einen dieser Teile:

Jede Person bekommt zunächst eine ganze Tafel; jede der übrigen beiden Tafeln wird in 3 gleiche Teile zerlegt; jede Person bekommt von jeder Tafel noch je einen dieser Teile:



Jede Person bekommt $5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$ Tafeln.

Jede Person bekommt $1 + \frac{2}{3}$ Tafeln.

Für $1 + \frac{2}{3}$ schreiben wir kürzer $1\frac{2}{3}$.

$$5 : 3 = \frac{5}{3}$$

$$5 : 3 = 1\frac{2}{3}$$

$$\frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$$

$\frac{5}{3}$ und $1\frac{2}{3}$ bezeichnen also dieselbe Zahl.

Auch diese Zahl erhält nun einen Platz auf dem Zahlenstrahl.



Mit $\frac{5}{3}$ taucht zum ersten Mal ein Bruch auf, bei dem der Zähler größer ist als der Nenner. Solche Brüche bezeichnet man häufig als **unechte Brüche**.

Im Gegensatz dazu nennt man Brüche, bei denen der Zähler kleiner ist als der Nenner, **echte Brüche**.



2 Welche der folgenden Brüche sind echte Brüche, welche sind unechte Brüche?

- | | | | | |
|----------------------|----------------------|----------------------|------------------------|------------------------|
| a) $\frac{13}{12}$; | b) $\frac{7}{8}$; | c) $\frac{25}{16}$; | d) $\frac{13}{10}$; | e) $\frac{7}{5}$; |
| f) $\frac{12}{18}$; | g) $\frac{25}{21}$; | h) $\frac{17}{28}$; | i) $\frac{213}{179}$; | k) $\frac{105}{150}$. |

Unechte Brüche bezeichnen Bruchteile, die größer sind als 1 Ganzes:

$$\frac{5}{3} \text{ von } 12 \text{ €} = (12 \text{ €} : 3) \cdot 5 = 4 \text{ €} \cdot 5 = 20 \text{ €};$$

$$\frac{9}{4} \text{ von } 240 \text{ m} = (240 \text{ m} : 4) \cdot 9 = 60 \text{ m} \cdot 9 = 540 \text{ m};$$

$$\frac{18}{5} \text{ von } 35 \text{ kg} = (35 \text{ kg} : 5) \cdot 18 = 7 \text{ kg} \cdot 18 = 126 \text{ kg}.$$



3 Berechne:

- | | | |
|----------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| a) $\frac{7}{3}$ von 15 €; | b) $\frac{5}{4}$ von 36 kg; | c) $\frac{15}{8}$ von 96 m; |
| d) $\frac{23}{16}$ von 128 Std.; | e) $\frac{36}{25}$ von 1100 m; | f) $\frac{48}{13}$ von 169 kg; |

3 Brüche auf dem Zahlenstrahl

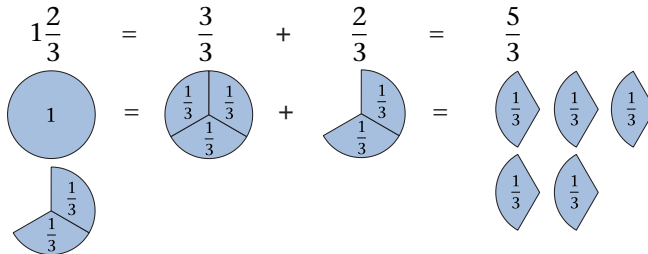
- g) $\frac{12}{5}$ von 155 m; h) $\frac{17}{10}$ von 1200 €; i) $\frac{18}{7}$ von 112 km.

Mit der Bezeichnung $1\frac{2}{3}$ taucht zum ersten Mal eine Verbindung aus einer ganzen Zahl und einem Bruch auf. Solche Verbindungen bezeichnet man häufig als **gemischte Zahlen**.

Jede gemischte Zahl lässt sich in einen unechten Bruch verwandeln.



Überlege so:

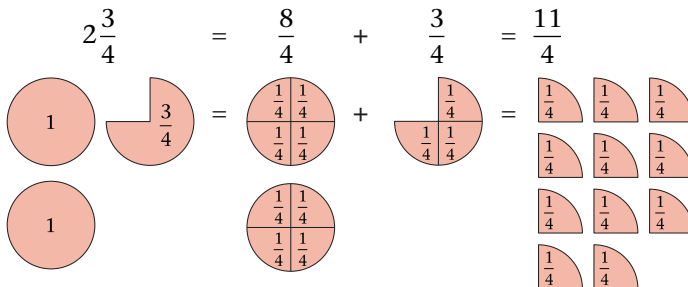


Rechne so:

$$1\frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 1 + 2}{3} = \frac{3 + 2}{3} = \frac{5}{3}$$



Überlege so:

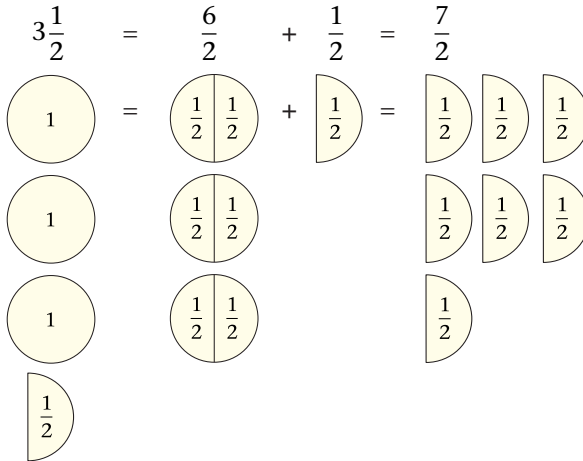


Rechne so:

$$2\frac{3}{4} = \frac{4 \cdot 2 + 3}{4} = \frac{8 + 3}{4} = \frac{11}{4}$$



Überlege so:



Rechne so:

$$3\frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 3 + 1}{2} = \frac{6 + 1}{2} = \frac{7}{2}$$



4 Verwandle die folgenden gemischten Zahlen in unechte Brüche:

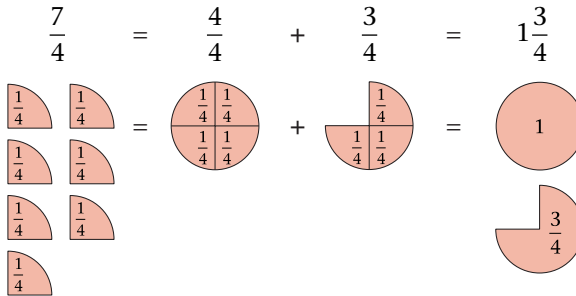
- a) $3\frac{1}{3}$; b) $4\frac{2}{3}$; c) $5\frac{3}{4}$; d) $7\frac{4}{5}$; e) $15\frac{1}{2}$;
 f) $3\frac{7}{8}$; g) $4\frac{4}{5}$; h) $9\frac{3}{16}$; i) $12\frac{2}{5}$; k) $14\frac{3}{5}$;
 l) $15\frac{4}{15}$; m) $28\frac{5}{8}$; n) $10\frac{11}{12}$; o) $21\frac{3}{7}$; p) $25\frac{5}{8}$;
 q) $5\frac{5}{19}$; r) $54\frac{11}{12}$.

Ebenso, wie sich jede gemischte Zahl in einen unechten Bruch verwandeln lässt, kann man umgekehrt jeden unechten Bruch in eine gemischte Zahl verwandeln.

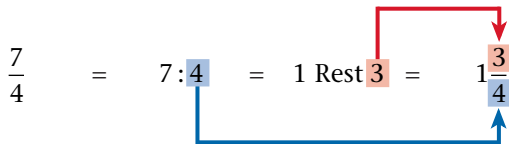
3 Brüche auf dem Zahlenstrahl



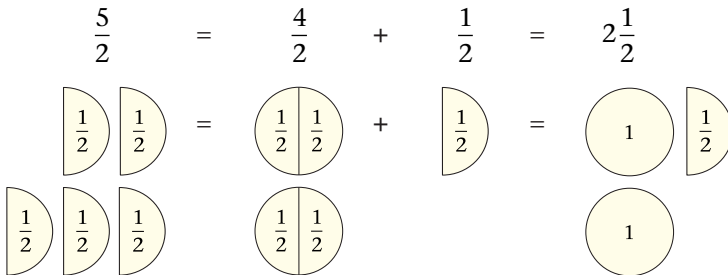
Überlege so:



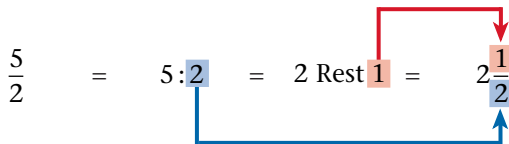
Rechne so:



Überlege so:



Rechne so:



Und zum Schluss noch ein Beispiel mit Nebenrechnung:

$$\frac{128}{5} = 128 : 5 = 25 \frac{3}{5}$$

$\begin{array}{r} -10 \\ 28 \\ -25 \\ \hline 3 \end{array}$



5 Verwandle die folgenden unechten Brüche in gemischte Zahlen:

- | | | | | |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------------------|------------------------|
| a) $\frac{7}{5}$; | b) $\frac{13}{9}$; | c) $\frac{15}{4}$; | d) $\frac{17}{3}$; | e) $\frac{28}{9}$; |
| f) $\frac{23}{5}$; | g) $\frac{77}{8}$; | h) $\frac{83}{2}$; | i) $\frac{97}{4}$; | k) $\frac{117}{12}$; |
| l) $\frac{777}{11}$; | m) $\frac{246}{17}$; | n) $\frac{731}{16}$; | o) $\frac{369}{4}$; | p) $\frac{1093}{23}$. |



6 Gib die Ergebnisse der folgenden Divisionsaufgaben als gemischte Zahlen an:



$$35 : 12 = \frac{35}{12} = 2 \frac{11}{12}.$$

- | | | | |
|--------------|--------------|--------------|---------------|
| a) 273 : 2; | b) 43 : 5; | c) 72 : 7; | d) 85 : 13; |
| e) 17 : 3; | f) 242 : 9; | g) 127 : 4; | h) 73 : 16; |
| i) 144 : 11; | k) 345 : 11; | l) 117 : 25; | m) 373 : 10; |
| n) 679 : 9; | o) 332 : 15; | p) 888 : 55; | q) 8932 : 45. |



7 Kürze die nachstehenden unechten Brüche zunächst vollständig und verwandle sie danach in gemischte Zahlen:



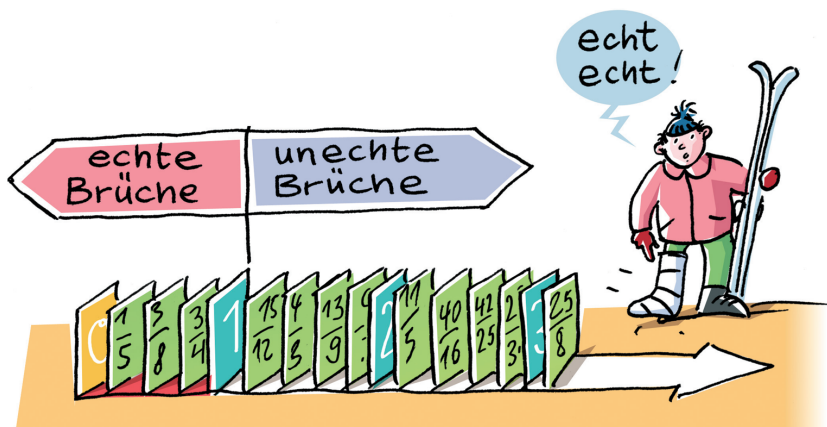
$$\frac{385}{25} = \frac{385 : 5}{25 : 5} = \frac{77}{5} = 15 \frac{2}{5}.$$

- | | | | | |
|---------------------|---------------------|----------------------|---------------------|----------------------|
| a) $\frac{12}{8}$; | b) $\frac{22}{6}$; | c) $\frac{44}{12}$; | d) $\frac{48}{9}$; | e) $\frac{16}{10}$; |
|---------------------|---------------------|----------------------|---------------------|----------------------|

3 Brüche auf dem Zahlenstrahl

- f) $\frac{35}{20}$; g) $\frac{27}{21}$; h) $\frac{64}{48}$; i) $\frac{55}{15}$; k) $\frac{144}{32}$;
 l) $\frac{1000}{375}$; m) $\frac{126}{56}$; n) $\frac{198}{108}$; o) $\frac{136}{64}$; p) $\frac{3125}{750}$.

Und so sieht nun mittlerweile unser Zahlenstrahl aus:



Zwischen 0 und 1 drängen sich die echten Brüche, also die Brüche, bei denen der Zähler kleiner ist als der Nenner. Rechts von der 1 haben sich die unechten Brüche bzw. die gemischten Zahlen breit gemacht. Auch dort herrscht ein Riesengedränge. Aus dem ganzen Bruchgewimmel schaut hier und da eine ganze Zahl hervor.

Doch gerade diese ganzen Zahlen erweisen sich als trügerisch, wie die folgende Überlegung zeigt:

Das Ergebnis der Divisionsaufgabe $12 : 4$ lässt sich auf zweierlei Weise darstellen:

$$12 : 4 = 3 \quad \text{oder} \quad 12 : 4 = \frac{12}{4}$$

daraus folgt:

$$3 = \frac{12}{4}$$

Ebenso ergibt sich

$$\begin{array}{ccc}
 15:5=3 & \text{oder} & 15:5=\frac{15}{5} \\
 \downarrow & \rightarrow & \downarrow \\
 3 & = & \frac{15}{5} \\
 \\
 3:1=3 & \text{oder} & 3:1=\frac{3}{1} \\
 \downarrow & \rightarrow & \downarrow \\
 3 & = & \frac{3}{1}
 \end{array}$$

Damit geht nun alles in die Brüche, denn auch die ganzen Zahlen sind nichts anderes als gut getarnte Brüche! Wir brauchen deshalb nicht mehr zwischen ganzen Zahlen und Brüchen zu unterscheiden.

Ganze Zahlen sind Brüche, die in ihrer Grundform den Nenner 1 haben:

$$3 = \frac{24}{8} = \frac{15}{5} = \frac{12}{4} = \frac{3}{1}.$$



8 Schreibe jeweils die in der 1. Spalte angegebene Zahl als Bruch mit dem in der 2. Spalte angegebenen Nenner.

	Zahl	Nenner
	5	7
a)	3	5
b)	2	8
c)	4	4
d)	7	12
e)	9	5
f)	12	3
g)	8	11

$$\text{Ergebnis: } 5 = \frac{5 \cdot 7}{7} = \frac{35}{7}$$

3.3 Zusammenfassung

Das hast du im 3. Kapitel gelernt:

1. Die Divisionsaufgabe $a : b$ ($b \neq 0$) hat als

Lösung den Bruch $\frac{a}{b}$.

Das heißt:

Anstelle des Quotienten $a : b$ kann man den

Bruch $\frac{a}{b}$ schreiben;

anstelle des Bruches $\frac{a}{b}$ kann man den Quotienten $a : b$ schreiben.

$$a : b = \frac{a}{b} \quad b \neq 0$$

$$\frac{a}{b} = a : b$$

2. Bei einem echten Bruch ist der Zähler kleiner als der Nenner.

Bei einem unechten Bruch ist der Zähler größer als der Nenner.

Eine gemischte Zahl ist eine Summe aus einer ganzen Zahl und einem echten Bruch.

$$\begin{array}{ccc} & \frac{a}{b} & \\ a < b & & a > b \\ \text{echter} & \text{Bruch} & \text{unechter} \end{array}$$

$$4\frac{3}{8} = 4 + \frac{3}{8}$$

3. Jeder unechte Bruch lässt sich in eine gemischte Zahl verwandeln.

$$\frac{23}{4} = 23 : 4 = 5\frac{3}{4}$$

4. Jede gemischte Zahl lässt sich in einen unechten Bruch verwandeln.

$$3\frac{4}{5} = \frac{5 \cdot 3 + 4}{5} = \frac{15 + 4}{5} = \frac{19}{5}$$

5. Ganze Zahlen sind Brüche, die in ihrer Grundform den Nenner 1 haben.

$$3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{123}{41} = \dots$$

3.4 Test zum 3. Kapitel

Überprüfe mit den folgenden Aufgaben, ob du den Stoff des 3. Kapitels beherrschst. Wenn du mehr als 2 Fehler pro Aufgabenblock machst, dann solltest du dieses Kapitel noch einmal gründlich durcharbeiten.



- 1** Verwandle die nachstehenden gemischten Zahlen in unechte Brüche:

- a) $3\frac{2}{7}$; b) $4\frac{3}{4}$; c) $9\frac{5}{12}$; d) $12\frac{5}{9}$; e) $15\frac{11}{25}$;
 f) $18\frac{31}{35}$; g) $22\frac{17}{19}$; h) $38\frac{12}{125}$; i) $123\frac{7}{12}$; k) $250\frac{13}{17}$.



- 2** Verwandle die folgenden unechten Brüche in gemischte Zahlen. Das Ergebnis soll stets vollständig gekürzt sein.

- a) $\frac{13}{5}$; b) $\frac{27}{4}$; c) $\frac{35}{14}$; d) $\frac{21}{6}$; e) $\frac{44}{16}$;
 f) $\frac{75}{45}$; g) $\frac{144}{14}$; h) $\frac{125}{15}$; i) $\frac{364}{56}$; k) $\frac{500}{175}$.



- 3** Gib das Ergebnis der folgenden Divisionsaufgaben in vollständig gekürzter Form, wenn möglich auch als gemischte Zahl an:

- a) $30 : 45$; b) $135 : 30$; c) $64 : 12$; d) $144 : 40$;
 e) $225 : 125$; f) $96 : 18$; g) $148 : 24$; h) $256 : 36$;
 i) $338 : 52$; k) $720 : 75$.

Die vier Grundrechenarten mit Brüchen

Jeder weiß: „Mit Zahlen kann man rechnen!“

Wenn also die Brüche Zahlen sind, wie wir das im vorhergehenden Kapitel aus gutem Grund behauptet haben, dann muss man mit ihnen auch rechnen können.

Was aber kommt heraus, wenn man zwei Brüche addiert:

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = ??$$

oder subtrahiert:

$$\frac{17}{8} - \frac{4}{5} = ??$$

oder multipliziert:

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{12}{5} = ??$$

oder dividiert:

$$\frac{9}{7} : \frac{3}{35} = ??$$

Am einfachsten lässt sich diese Frage für die Addition von zwei nennergleichen Brüchen beantworten.

4.1 Addition nennergleicher Brüche

Gesucht ist das Ergebnis der Additionsaufgabe

$$\frac{2}{9} + \frac{5}{9}.$$

Weil $\frac{2}{9}$ von 36 € = 8 €

und $\frac{5}{9}$ von 36 € = 20 €,

muss gelten $\left(\frac{2}{9} + \frac{5}{9}\right)$ von 36 € = 8 € + 20 € = 28 €.

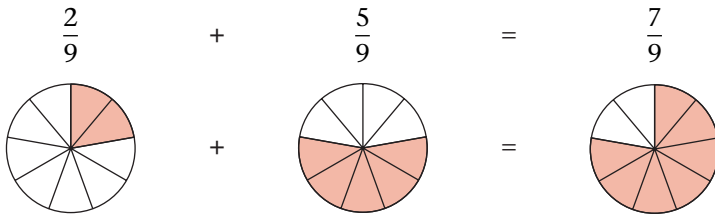
Nun gilt aber auch: $\frac{7}{9}$ von 36 € = 28 €.

Daher ist es sinnvoll zu schreiben:

$$\frac{2}{9} + \frac{5}{9} = \frac{7}{9}.$$

4 Die vier Grundrechenarten mit Brüchen

Wenn wir als das Ganze anstelle der 36 € einen Kreis wählen, dann wird die Sache noch anschaulicher:



Wir legen also fest:

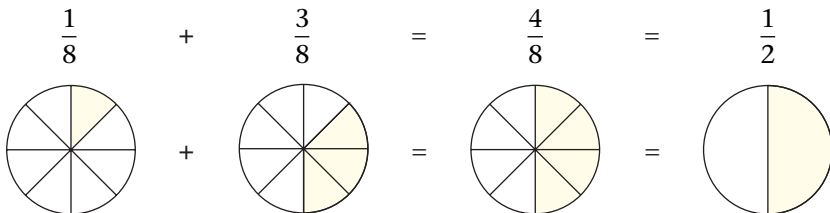


Nennergleiche Brüche werden addiert, indem man ihre Zähler addiert und den gemeinsamen Nenner beibehält.

In Formelschreibweise sieht diese Festlegung so aus:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}; \quad c \neq 0.$$

Das Ergebnis sollte stets in vollständig gekürzter Form angegeben werden:



Weitere Beispiele:

$$\frac{4}{13} + \frac{11}{13} = \frac{4+11}{13} = \frac{15}{13} = 1\frac{2}{13}.$$

$$\blacksquare \quad \frac{7}{15} + \frac{14}{15} = \frac{21}{15} = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}.$$

$$\blacksquare \quad \frac{3}{11} + \frac{5}{11} + \frac{14}{11} = \frac{22}{11} = 2.$$



1 Berechne. Gib das Ergebnis stets in vollständig gekürzter Form und, wenn möglich, auch als gemischte Zahl an.

a) $\frac{2}{8} + \frac{5}{8}$; b) $\frac{4}{9} + \frac{2}{9}$; c) $\frac{5}{12} + \frac{11}{12}$; d) $\frac{3}{8} + \frac{7}{8}$;

e) $\frac{3}{16} + \frac{7}{16}$; f) $\frac{5}{21} + \frac{19}{21}$; g) $\frac{11}{12} + \frac{17}{12}$; h) $\frac{4}{7} + \frac{8}{7}$;

i) $\frac{5}{24} + \frac{17}{24} + \frac{1}{24}$; k) $\frac{17}{25} + \frac{13}{25} + \frac{21}{25}$; l) $\frac{4}{5} + \frac{7}{5} + \frac{3}{5} + \frac{1}{5}$;

m) $\frac{17}{50} + \frac{29}{50} + \frac{3}{50} + \frac{11}{50}$; n) $\frac{5}{16} + \frac{13}{16} + \frac{15}{16} + \frac{7}{16}$; o) $\frac{4}{39} + \frac{17}{39} + \frac{37}{39} + \frac{19}{39}$.



Addiere die beiden gemischten Zahlen $2\frac{3}{5}$ und $3\frac{4}{5}$.

Rechne so:

$$\begin{aligned} 2\frac{3}{5} + 3\frac{4}{5} &= \left(2 + \frac{3}{5}\right) + \left(3 + \frac{4}{5}\right) = (2+3) + \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\right) \\ &= 5 + \frac{7}{5} = 5 + 1 + \frac{2}{5} = 6 + \frac{2}{5} = 6\frac{2}{5}. \end{aligned}$$

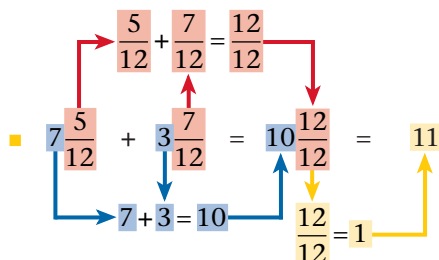


Weitere Beispiele:

$$\blacksquare \quad 8\frac{3}{8} + 7\frac{1}{8} = 15\frac{4}{8} = 15\frac{1}{2}$$

The diagram illustrates the addition of the mixed numbers $8\frac{3}{8}$ and $7\frac{1}{8}$. It shows the whole number parts being added ($8 + 7 = 15$) and the fractional parts being added ($\frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8}$). The final result is $15\frac{4}{8}$, which is then simplified to $15\frac{1}{2}$ by dividing both the numerator and denominator of the fraction by 4.

4 Die vier Grundrechenarten mit Brüchen



2 Berechne ebenso. Gib das Ergebnis stets in vollständig gekürzter Form an.

- a) $2\frac{1}{5} + 3\frac{3}{5}$; b) $7\frac{3}{8} + 1\frac{1}{8}$; c) $4\frac{2}{7} + 12\frac{3}{7}$; d) $15\frac{3}{11} + 23\frac{7}{11}$;
 e) $24\frac{5}{8} + 17\frac{7}{8}$; f) $13\frac{11}{12} + \frac{7}{12}$; g) $8\frac{11}{24} + 9\frac{17}{24}$; h) $17\frac{29}{36} + 11\frac{35}{36}$;
 i) $8\frac{24}{25} + 33\frac{21}{25}$; k) $5\frac{21}{41} + 3\frac{17}{41} + \frac{3}{41}$;
 l) $4\frac{17}{25} + 3\frac{11}{25} + 7\frac{8}{25} + \frac{21}{25}$; m) $3\frac{5}{16} + 7\frac{7}{16} + 11\frac{15}{16} + \frac{13}{16}$.

4.2 Addition nicht nennergleicher Brüche

Der Versuch, $\frac{1}{4}$ und $\frac{2}{3}$ zu addieren, gelingt zunächst nicht, da diese beiden Brüche nicht nennergleich sind.

Bisher können wir nur nennergleiche Brüche addieren.

Und dabei wird es auch in Zukunft bleiben:

Nur nennergleiche Brüche lassen sich addieren.

Wenn also die beiden Brüche $\frac{1}{4}$ und $\frac{2}{3}$ nicht nennergleich sind, dann müssen wir sie eben vor dem Addieren nennergleich **machen**. Das gelingt, wenn wir sie geeignet erweitern.

Wir wissen:

- Brüche werden erweitert, indem man Zähler **und** Nenner mit derselben Zahl multipliziert.
- Brüche, die durch Erweitern auseinander hervorgehen, sind gleich.

Also gilt:

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{3}{12} \quad \text{und} \quad \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$$

Wenn aber

$$+ \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} = \frac{3}{12} \\ \frac{2}{3} = \frac{8}{12} \end{array} \right\} +$$

und

dann gilt auch

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{3}{12} + \frac{8}{12}.$$

Die beiden Brüche $\frac{3}{12}$ und $\frac{8}{12}$ sind nennergleich.

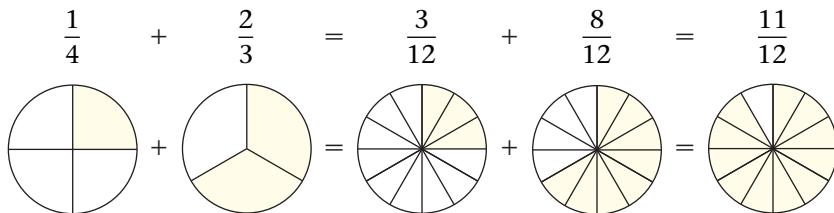
Wir können sie addieren, indem wir ihre Zähler addieren:

$$\frac{3}{12} + \frac{8}{12} = \frac{3+8}{12} = \frac{11}{12}.$$

Also ergibt sich:

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{11}{12}.$$

Und so haben wir gerechnet:



Wir haben also die beiden Brüche durch Erweitern auf den gemeinsamen Nenner 12 gebracht und dann addiert. Den gemeinsamen Nenner bezeichnet man häufig auch als **Hauptnenner**.

12 ist die kleinste Zahl, die sowohl durch 3 als auch durch 4 teilbar ist. Man sagt: 12 ist das **kleinste gemeinsame Vielfache** von 3 und 4 und

4 Die vier Grundrechenarten mit Brüchen

verwendet für diese Aussage die Kurzschreibweise $\text{kgV}(3; 4) = 12$.
Als gemeinsamen Nenner hätten wir aber auch jede andere Zahl nehmen können, die sowohl durch 3 als auch durch 4 teilbar ist, also auch jedes andere gemeinsame Vielfache von 3 und 4.

Wir hätten also auch so rechnen können:

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 6}{4 \cdot 6} + \frac{2 \cdot 8}{3 \cdot 8} = \frac{6}{24} + \frac{16}{24} = \frac{22}{24} = \frac{22:2}{24:2} = \frac{11}{12}.$$

Oder:

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 15}{4 \cdot 15} + \frac{2 \cdot 20}{3 \cdot 20} = \frac{15}{60} + \frac{40}{60} = \frac{55}{60} = \frac{55:5}{60:5} = \frac{11}{12}.$$

Das Ergebnis ist zwar dasselbe, die Rechnung aber ist am einfachsten, wenn wir als gemeinsamen Nenner das kleinste gemeinsame Vielfache von 3 und 4 wählen.

Nicht immer ist das kleinste gemeinsame Vielfache zweier Zahlen so leicht zu finden wie das der beiden Zahlen 3 und 4. In schwierigen Fällen ist der Weg über die **Zerlegung in Primfaktoren** zu empfehlen.



Das kleinste gemeinsame Vielfache von 504 und 750 soll bestimmt werden.

Wir gehen davon aus, dass das gesuchte kgV von 504 und 750 alle Primfaktoren enthalten muss, die bei der Primfaktorzerlegung von 504 und 750 auftreten. Die Lösung des Problems erfolgt dann in 2 Schritten.

1. Schritt:

Wir zerlegen die beiden Zahlen in Primfaktoren:

$$\begin{array}{rcl}
 504 & = & 2 \cdot 252 \\
 & \downarrow & \\
 252 & = & 2 \cdot 126 \\
 & \downarrow & \\
 126 & = & 2 \cdot 63 \\
 & \downarrow & \\
 63 & = & 3 \cdot 21 \\
 & \downarrow & \\
 21 & = & 3 \cdot 7 \\
 & \downarrow \downarrow & \\
 \hline
 504 & = & 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 750 = 2 \cdot 375 \\
 375 = 3 \cdot 125 \\
 125 = 5 \cdot 25 \\
 25 = 5 \cdot 5
 \end{array}$$

$$750 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 5^3$$

2. Schritt:

Wir bestimmen die kleinste Zahl, deren Primfaktorzerlegung alle Primfaktoren sowohl von 504 als auch von 750 enthält. Es ist dies die Zahl

$$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 = 63\,000.$$

Ergebnis:

$$\text{kgV}(504; 750) = 63\,000.$$

In Kurzform sieht unser Verfahren so aus:

$$\begin{array}{l}
 504 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^1 \\
 750 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^3 \\
 \hline
 \text{kgV}(504; 750) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^1 = 63\,000
 \end{array}$$

Und so lautet unser Rezept:

1. Zerlege die Zahlen in Primfaktoren.
2. Suche von jedem der auftretenden Primfaktoren die höchste vorkommende Potenz.
3. Multipliziere diese Potenzen miteinander.

Dieses Rezept lässt sich auch bei der Bestimmung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen von mehr als 2 Zahlen anwenden.



4 Die vier Grundrechenarten mit Brüchen



$$\text{kgV}(18; 24; 45) = ?$$

$$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2$$

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$$

$$45 = 3 \cdot 3 \cdot 5 = 3^2 \cdot 5$$

$$\text{kgV}(18; 24; 45) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$$



$$\text{kgV}(24; 30; 32; 36; 40) = ?$$

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$$

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$$

$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$$

$$40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^3 \cdot 5$$

$$\text{kgV}(24; 30; 32; 36; 40) = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 = 1440$$

Und nun verwenden wir dieses Rezept bei der Addition nicht nennergleicher Brüche.



$$\frac{5}{24} + \frac{7}{44} = ?$$

1. Schritt:

Bestimmung des Hauptnenners
(= $\text{kgV}(24; 44)$).

$$\begin{aligned} 24 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3 \\ 44 &= 2 \cdot 2 \cdot 11 = 2^2 \cdot 11 \\ \text{HN} &= 2^3 \cdot 3 \cdot 11 = 264. \end{aligned}$$

2. Schritt:

Erweitern der Brüche auf den Hauptnenner.

$$\begin{aligned} \frac{5}{24} &= \frac{5 \cdot 11}{24 \cdot 11} = \frac{55}{264}, \\ \frac{7}{44} &= \frac{7 \cdot 6}{44 \cdot 6} = \frac{42}{264}. \end{aligned}$$

3. Schritt:

Addition der so erhaltenen nennergleichen Brüche.

$$\frac{55}{264} + \frac{42}{264} = \frac{55 + 42}{264} = \frac{97}{264}.$$



Weitere Beispiele in Kurzform:

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \frac{17}{45} + \frac{20}{21} &= \frac{17 \cdot 7}{315} + \frac{20 \cdot 15}{315} \\ &= \frac{119}{315} + \frac{300}{315} \\ &= \frac{419}{315} = 1 \frac{104}{315} \end{aligned}$$

Nebenrechnung zur Bestimmung des Hauptnenners:

$$\begin{aligned} 45 &= 3 \cdot 3 \cdot 5 = 3^2 \cdot 5 \\ 21 &= 3 \cdot 7 \\ \text{HN} &= 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 315 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \frac{15}{32} + \frac{25}{48} + \frac{11}{36} &= \\ \frac{15 \cdot 9}{288} + \frac{25 \cdot 6}{288} + \frac{11 \cdot 8}{288} &= \\ \frac{135}{288} + \frac{150}{288} + \frac{88}{288} &= \\ \frac{373}{288} &= 1 \frac{85}{288} \end{aligned}$$

Nebenrechnung zur Bestimmung des Hauptnenners:

$$\begin{aligned} 32 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 \\ 48 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3 \\ 36 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2 \\ \text{HN} &= 2^5 \cdot 3^2 = 288 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad 5 \frac{11}{15} + 7 \frac{16}{21} &= \\ \left(5 + \frac{11}{15} \right) + \left(7 + \frac{16}{21} \right) &= \\ (5+7) + \left(\frac{11}{15} + \frac{16}{21} \right) &= \\ 12 + \frac{77+80}{105} &= \\ 12 + \frac{157}{105} &= \\ 12 + 1 \frac{52}{105} &= \\ 13 \frac{52}{105} \end{aligned}$$

Nebenrechnung zur Bestimmung des Hauptnenners:

$$\begin{aligned} 15 &= 3 \cdot 5 \\ 21 &= 3 \cdot 7 \\ \text{HN} &= 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105 \end{aligned}$$

4 Die vier Grundrechenarten mit Brüchen

$$\begin{aligned}
 & 7\frac{5}{8} + 3\frac{5}{72} + 12\frac{5}{124} = \\
 & (7+3+12) + \left(\frac{5}{8} + \frac{5}{72} + \frac{5}{124}\right) = \\
 & 22 + \frac{1395 + 155 + 90}{2232} = \\
 & 22 + \frac{1640}{2232} = \\
 & 22 + \frac{205}{279} = 22\frac{205}{279}
 \end{aligned}$$

Nebenrechnung zur Bestimmung des Hauptnenners:

Weil 72 Vielfaches von 8 ist, kann die 8 bei der Bestimmung des Hauptnenners weggelassen werden.

$$\begin{aligned}
 72 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2 \\
 124 &= 2 \cdot 2 \cdot 31 = 2^2 \cdot 31 \\
 \text{HN} &= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 31 = 2232
 \end{aligned}$$

Oft kann man die Nebenrechnung weglassen, weil sich der Hauptnenner leicht im Kopf berechnen lässt:

$$\frac{5}{6} + \frac{4}{15} + \frac{1}{2} = \frac{25+8+15}{30} = \frac{48}{30} = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}.$$



3 Berechne den Summenwert. Gib das Endergebnis stets in vollständig gekürzter Form und, wenn möglich, als gemischte Zahl an.

- | | | | |
|-----------------------------------|------------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------|
| a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4};$ | b) $\frac{3}{4} + \frac{2}{3};$ | c) $\frac{5}{6} + \frac{3}{4};$ | d) $\frac{11}{15} + \frac{5}{21};$ |
| e) $\frac{5}{8} + \frac{1}{4};$ | f) $\frac{5}{9} + \frac{6}{7};$ | g) $\frac{11}{12} + \frac{3}{5};$ | h) $\frac{7}{8} + \frac{3}{10};$ |
| i) $\frac{5}{12} + \frac{3}{4};$ | k) $\frac{11}{12} + \frac{4}{15};$ | l) $\frac{7}{8} + \frac{8}{9};$ | m) $\frac{9}{14} + \frac{5}{28};$ |
| n) $\frac{7}{8} + \frac{19}{20};$ | o) $\frac{13}{18} + \frac{2}{21};$ | p) $\frac{4}{9} + \frac{5}{12};$ | q) $\frac{13}{27} + \frac{11}{18}.$ |



4 Berechne ebenso:

- | | | | |
|--|--|---|---|
| a) $\frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{10};$ | b) $\frac{7}{8} + \frac{5}{12} + \frac{5}{6};$ | c) $\frac{4}{5} + \frac{5}{8} + \frac{9}{16};$ | d) $\frac{7}{9} + \frac{11}{15} + \frac{3}{4};$ |
| e) $\frac{3}{10} + \frac{14}{15} + \frac{17}{25};$ | f) $\frac{7}{12} + \frac{11}{18} + \frac{17}{30};$ | g) $\frac{4}{7} + \frac{13}{21} + \frac{14}{15} + \frac{19}{28};$ | |

$$\begin{array}{lll} \text{h)} \frac{5}{6} + \frac{4}{15} + \frac{3}{4} + \frac{17}{20}; & \text{i)} \frac{25}{28} + \frac{17}{35} + \frac{11}{15} + \frac{7}{10}; & \text{k)} \frac{7}{8} + \frac{25}{124} + \frac{5}{72} + \frac{13}{15}; \\ \text{l)} \frac{4}{5} + \frac{7}{9} + \frac{21}{25} + \frac{14}{15} + \frac{13}{75} + \frac{13}{45}; & \text{m)} \frac{19}{35} + \frac{1}{2} + \frac{26}{55} + \frac{9}{11} + \frac{53}{70} + \frac{5}{7}. \end{array}$$



5 Berechne ebenso:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} 7\frac{3}{4} + 5\frac{2}{3}; & \text{b)} 4\frac{11}{12} + 7\frac{5}{8}; & \text{c)} 3\frac{5}{9} + 4\frac{5}{12}; \\ \text{d)} 6\frac{4}{15} + 9\frac{5}{6}; & \text{e)} 11\frac{11}{14} + 3\frac{13}{21}; & \text{f)} 17\frac{12}{25} + 18\frac{9}{10}; \\ \text{g)} 3\frac{7}{12} + 4\frac{11}{15} + 7\frac{3}{5}; & \text{h)} 5\frac{11}{12} + 13\frac{41}{50} + 7\frac{11}{72}; & \text{i)} 23\frac{7}{12} + 4\frac{14}{15} + 17\frac{3}{4}; \\ \text{k)} 28\frac{5}{18} + 43\frac{17}{25} + 47\frac{13}{15}; & \text{l)} 7\frac{3}{4} + 14\frac{4}{5} + 68\frac{5}{6} + 73\frac{7}{8}; & \\ \text{m)} 29\frac{6}{7} + 25\frac{5}{12} + 79\frac{17}{21} + 46\frac{41}{42} + 55\frac{11}{14}; & & \\ \text{n)} 85\frac{11}{12} + 17\frac{2}{3} + 76\frac{17}{18} + 4\frac{1}{2} + \frac{8}{45} + \frac{7}{8} + \frac{5}{9}; & & \\ \text{o)} 8\frac{11}{36} + 12\frac{23}{30} + 14\frac{27}{40} + 23\frac{8}{15} + 71\frac{3}{50} + 5\frac{19}{45}. \end{array}$$

4.3 Subtraktion

Bei der Subtraktion von Brüchen verfährt man nach dem gleichen Rezept wie bei der Addition:

1. Nennergleiche Brüche werden subtrahiert, indem man ihre Zähler subtrahiert und den gemeinsamen Nenner beibehält.



$$\frac{7}{9} - \frac{2}{9} = \frac{7-2}{9} = \frac{5}{9}.$$

$$\frac{14}{15} - \frac{8}{15} = \frac{14-8}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}.$$

$$\frac{13}{24} - \frac{7}{24} = \frac{13-7}{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}.$$

4 Die vier Grundrechenarten mit Brüchen

Allgemein:

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c} \quad c \neq 0; a \geq b$$

2. Nicht nennergleiche Brüche werden vor dem Subtrahieren durch geeignetes Erweitern nennergleich gemacht.



$$\frac{5}{8} - \frac{7}{12} = \frac{15}{24} - \frac{14}{24} = \frac{15-14}{24} = \frac{1}{24}.$$

$$\frac{3}{7} - \frac{2}{21} = \frac{9}{21} - \frac{2}{21} = \frac{9-2}{21} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}.$$

$$\frac{16}{35} - \frac{4}{21} = \frac{48}{105} - \frac{20}{105} = \frac{48-20}{105} = \frac{28}{105} = \frac{4}{15}.$$



- 6 Berechne. Gib das Endergebnis stets in vollständig gekürzter Form an.

a) $\frac{15}{16} - \frac{7}{16};$

b) $\frac{19}{24} - \frac{13}{24};$

c) $\frac{17}{25} - \frac{12}{25};$

d) $\frac{3}{4} - \frac{2}{3};$

e) $\frac{11}{12} - \frac{3}{8};$

f) $\frac{14}{15} - \frac{5}{6};$

g) $\frac{17}{18} - \frac{2}{27};$

h) $\frac{7}{12} - \frac{3}{14};$

i) $\frac{7}{12} - \frac{2}{9};$

k) $\frac{28}{33} - \frac{1}{6};$

l) $\frac{28}{33} - \frac{5}{22};$

m) $\frac{29}{30} - \frac{29}{42};$

n) $\frac{53}{56} - \frac{31}{42};$

o) $\frac{13}{72} - \frac{11}{81};$

p) $\frac{15}{22} - \frac{5}{33}.$

Bei der Subtraktion gemischter Zahlen kannst du die Ganzen für sich und die Brüche für sich subtrahieren.



$$12\frac{5}{8} - 5\frac{3}{8} = (12-5) + \left(\frac{5}{8} - \frac{3}{8}\right) = 7 + \frac{2}{8} = 7\frac{1}{4}.$$

$$15\frac{3}{4} - 8\frac{2}{3} = 15\frac{9}{12} - 8\frac{8}{12} = (15-8) + \left(\frac{9}{12} - \frac{8}{12}\right) = 7\frac{1}{12}.$$

$$22\frac{7}{12} - 22\frac{5}{18} = 22\frac{21}{36} - 22\frac{10}{36} = (22-22) + \left(\frac{21}{36} - \frac{10}{36}\right) = \frac{11}{36}.$$

Gelegentlich ist es erforderlich, beim Minuenden, also bei der Zahl vor dem Minuszeichen, eines der vorhandenen Ganzen in einen Bruch umzuwandeln und dem dort schon stehenden Bruch zuzuschlagen.



$$\begin{aligned} \blacksquare \quad 13\frac{3}{10} - 5\frac{7}{10} &= 12\frac{13}{10} - 5\frac{7}{10} \\ &= (12 - 5) + \left(\frac{13}{10} - \frac{7}{10}\right) = 7 + \frac{6}{10} = 7\frac{3}{5}. \\ \blacksquare \quad 6\frac{1}{3} - 5\frac{3}{4} &= 6\frac{4}{12} - 5\frac{9}{12} = 5\frac{16}{12} - 5\frac{9}{12} \\ &= (5 - 5) + \left(\frac{16}{12} - \frac{9}{12}\right) = \frac{7}{12}. \end{aligned}$$



7 Berechne ebenso. Gib das Ergebnis stets in vollständig gekürzter Form an.

a) $2\frac{2}{3} - 1\frac{1}{4};$

b) $12\frac{7}{8} - 3\frac{1}{3};$

c) $5\frac{4}{5} - 2\frac{4}{15};$

d) $12\frac{8}{15} - 3\frac{2}{3};$

e) $15\frac{23}{50} - 13\frac{8}{15};$

f) $8\frac{11}{12} - 3\frac{2}{3};$

g) $11\frac{15}{16} - 8\frac{5}{12};$

h) $37\frac{7}{24} - 21\frac{11}{36};$

i) $19\frac{5}{6} - 5\frac{10}{33}.$

Bei der folgenden Aufgabe 8 sollen Leerstellen ausgefüllt werden. Gehe dabei so vor wie in den Beispielen.



$$\boxed{} + \frac{5}{8} = \frac{11}{12}.$$

Überlege so: Die Zahl im Kästchen muss um $\frac{5}{8}$ kleiner sein als $\frac{11}{12}$.

Rechne so: $\frac{11}{12} - \frac{5}{8} = \frac{22 - 15}{24} = \frac{7}{24}.$

Schreibe das Ergebnis so: $\boxed{\frac{7}{24}} + \frac{5}{8} = \frac{11}{12}.$

Mache die Probe so: $\frac{7}{24} + \frac{5}{8} = \frac{7 + 15}{24} = \frac{22}{24} = \frac{11}{12}.$

4 Die vier Grundrechenarten mit Brüchen



$$\boxed{} - 2\frac{3}{4} = 4\frac{1}{2}.$$

Überlege so: Die Zahl im Kästchen muss um $2\frac{3}{4}$ größer sein als $4\frac{1}{2}$.

Rechne so: $4\frac{1}{2} + 2\frac{3}{4} = 4\frac{2}{4} + 2\frac{3}{4} = 6\frac{5}{4} = 7\frac{1}{4}.$

Schreibe das Ergebnis so: $\boxed{7\frac{1}{4}} - 2\frac{3}{4} = 4\frac{1}{2}.$

Mache die Probe so: $7\frac{1}{4} - 2\frac{3}{4} = 6\frac{5}{4} - 2\frac{3}{4} = 4\frac{2}{4} = 4\frac{1}{2}.$



$$\frac{8}{9} - \boxed{} = \frac{4}{15}.$$

Überlege so: Die Zahl im Kästchen muss um $\frac{4}{15}$ kleiner sein als $\frac{8}{9}$.

Rechne so: $\frac{8}{9} - \frac{4}{15} = \frac{40 - 12}{45} = \frac{28}{45}.$

Schreibe das Ergebnis so: $\frac{8}{9} - \boxed{\frac{28}{45}} = \frac{4}{15}.$

Mache die Probe so: $\frac{8}{9} - \frac{28}{45} = \frac{40 - 28}{45} = \frac{12}{45} = \frac{4}{15}.$



8 Fülle ebenso die Leerstelle aus und mache die Probe.

a) $\boxed{} + \frac{3}{8} = \frac{5}{12};$ b) $\boxed{} - \frac{15}{14} = \frac{7}{8};$ c) $\frac{4}{9} - \boxed{} = \frac{4}{15};$

d) $\frac{12}{25} + \boxed{} = 4\frac{3}{10};$ e) $4\frac{1}{2} - \boxed{} = 3\frac{3}{4};$ f) $\frac{7}{22} + \boxed{} = \frac{16}{33};$

g) $1\frac{4}{25} - \boxed{} = \frac{14}{15};$ h) $\boxed{} + \frac{11}{16} = \frac{25}{24};$ i) $\frac{5}{18} + \boxed{} = \frac{11}{12};$

k) $4\frac{3}{16} - \boxed{} = 2\frac{5}{12};$ l) $\boxed{} - 2\frac{2}{3} = 4\frac{1}{2};$ m) $\boxed{} + \frac{18}{25} = \frac{14}{15};$

$$\text{n) } \frac{8}{15} + \boxed{} = \frac{5}{6}; \quad \text{o) } \frac{8}{15} - \boxed{} = \frac{3}{24}; \quad \text{p) } \boxed{} + 5\frac{8}{21} = 8\frac{13}{14}.$$

Als Zeichen für eine Leerstelle verwendet man in der Mathematik häufig den Buchstaben „x“.

$$\text{Statt } \boxed{} + \frac{5}{6} = 1\frac{3}{4} \quad \text{schreibt man} \quad x + \frac{5}{6} = 1\frac{3}{4},$$

$$\text{statt } \frac{11}{18} - \boxed{} = \frac{5}{12} \quad \text{schreibt man} \quad \frac{11}{18} - x = \frac{5}{12}$$

$$\text{und statt } \boxed{} - 3\frac{7}{8} = 4\frac{5}{6} \quad \text{schreibt man} \quad x - 3\frac{7}{8} = 4\frac{5}{6}.$$

Derartige Ausdrücke bezeichnet man als Bestimmungsgleichungen. In der folgenden Aufgabe sollst du die Zahl bestimmen, die an die Stelle von x gehört.

Gehe dabei so vor wie in den folgenden Beispielen.



$$x + \frac{5}{6} = 1\frac{3}{4}$$

$$x = 1\frac{3}{4} - \frac{5}{6}$$

$$x = \frac{7}{4} - \frac{5}{6}$$

$$x = \frac{21-10}{12}$$

$$x = \frac{11}{12}.$$

Überlege:

x muss um $\frac{5}{6}$ **kleiner** sein als $1\frac{3}{4}$.



$$\frac{11}{18} - x = \frac{5}{12}$$

$$x = \frac{11}{18} - \frac{5}{12}$$

$$x = \frac{22-15}{36}$$

$$x = \frac{7}{36}.$$

Überlege:

x muss um $\frac{5}{12}$ **kleiner** sein als $\frac{11}{18}$.

4 Die vier Grundrechenarten mit Brüchen



$$x - 3\frac{7}{8} = 4\frac{5}{6}$$

$$x = 4\frac{5}{6} + 3\frac{7}{8}$$

$$x = 4\frac{20}{24} + 3\frac{21}{24}$$

$$x = 7\frac{41}{24}$$

$$x = 8\frac{17}{24}$$

Überlege:

x muss um $3\frac{7}{8}$ **größer** sein als $4\frac{5}{6}$.

Achtung! Die Mathematiker, also auch dein Mathematiklehrer, legen Wert darauf, dass in jeder Zeile des Lösungsweges **nur ein Gleichheitszeichen** steht!



9 Bestimme x:

a) $x + \frac{3}{4} = \frac{5}{6}$; b) $\frac{17}{18} + x = 2\frac{5}{12}$; c) $x - \frac{25}{32} = \frac{11}{24}$; d) $\frac{20}{21} - x = \frac{8}{35}$;

e) $x + \frac{7}{8} = 2\frac{3}{20}$; f) $\frac{3}{4} - x = \frac{7}{18}$; g) $x - \frac{13}{27} = \frac{5}{18}$; h) $3\frac{5}{12} - x = 2\frac{3}{4}$;

i) $x + 2\frac{7}{9} = 5\frac{5}{12}$; k) $\frac{14}{15} - x = \frac{5}{6}$; l) $x - \frac{19}{56} = \frac{31}{42}$; m) $\frac{28}{33} - x = \frac{9}{22}$;

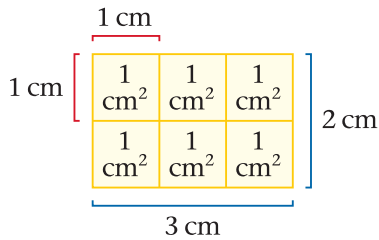
n) $x - 2\frac{4}{9} = 3\frac{5}{21}$.

4.4 Multiplikation

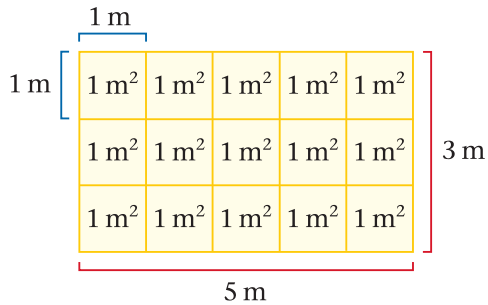
Für den Flächeninhalt A eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und b gilt:



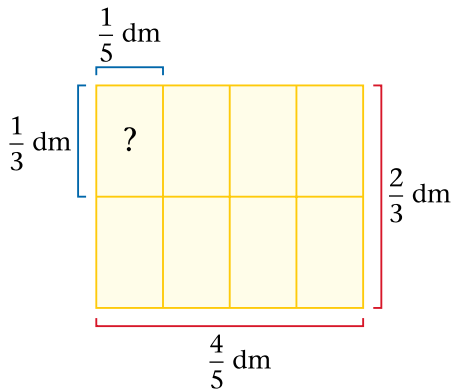
$$A = a \cdot b$$







Aber wie groß ist diese Fläche?

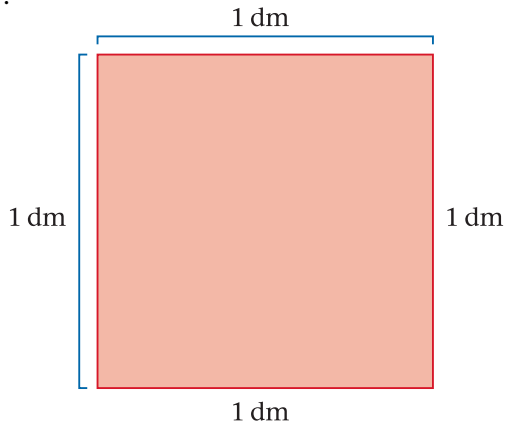


$$A = \frac{4}{5} \text{ dm} \cdot \frac{2}{3} \text{ dm} = \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \right) \text{ dm}^2 = ??? \text{ dm}^2$$

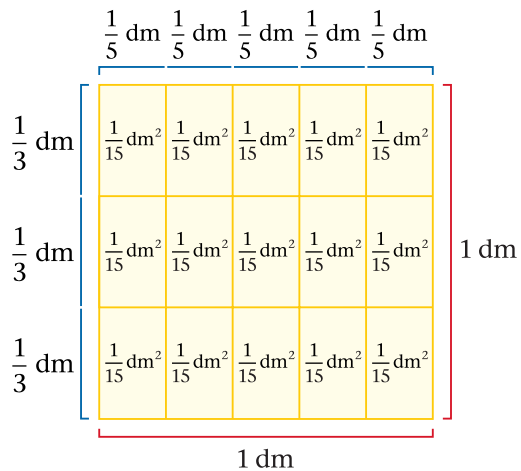
4 Die vier Grundrechenarten mit Brüchen

Überlege so:

Das Quadrat von 1 dm Länge und 1 dm Breite hat einen Flächeninhalt von $A = 1 \text{ dm} \cdot 1 \text{ dm} = 1 \text{ dm}^2$.



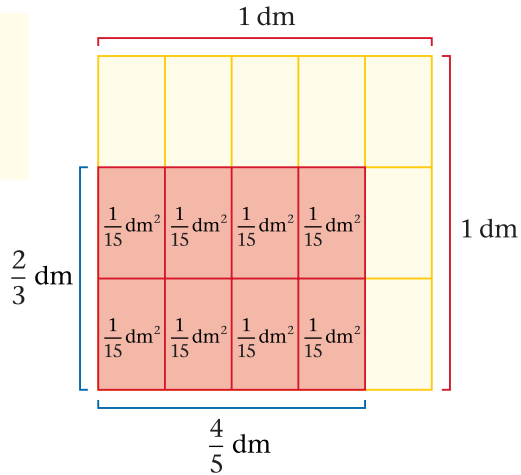
Seine Länge wird in 5 gleiche Teile zerlegt, seine Breite wird in 3 gleiche Teile zerlegt. Der Flächeninhalt des Quadrates wird dadurch in 15 gleiche Teile zerlegt. Jeder dieser Teile hat einen Flächeninhalt von $\frac{1}{15} \text{ dm}^2$.



Die Fläche des Rechtecks mit den Seitenlängen $\frac{4}{5} \text{ dm}$ und $\frac{2}{3} \text{ dm}$ be-

steht aus 8 dieser gleich großen Teilflächen. Der Flächeninhalt des Rechtecks beträgt also $\frac{8}{15} \text{ dm}^2$, und deshalb muss gelten:

$$\begin{aligned} \frac{4}{5} \text{ dm} \cdot \frac{2}{3} \text{ dm} &= \\ &= \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \right) \text{ dm}^2 = \frac{8}{15} \text{ dm}^2. \end{aligned}$$



Es erweist sich also als sinnvoll, dem Produkt aus den beiden Brüchen $\frac{4}{5}$ und $\frac{2}{3}$ den Wert $\frac{8}{15}$ zuzuordnen:

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}.$$

Diesen Produktwert erhält man, wenn man sowohl die Zähler als auch die Nenner der beiden Brüche miteinander multipliziert:

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{8}{15}.$$

Ähnliche Überlegungen kann man mit jedem beliebigen Paar von Brüchen anstellen.

Deshalb gilt allgemein:



Zwei Brüche werden multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}; \quad b \neq 0, d \neq 0.$$

4 Die vier Grundrechenarten mit Brüchen



$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{8} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 8} = \frac{15}{32}.$$

$$\frac{7}{12} \cdot \frac{11}{15} = \frac{7 \cdot 11}{12 \cdot 15} = \frac{77}{180}.$$

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{23}{24} = \frac{5 \cdot 23}{6 \cdot 24} = \frac{115}{144}.$$

$$5 \cdot \frac{7}{8} = \frac{5 \cdot 7}{1 \cdot 8} = \frac{5 \cdot 7}{1 \cdot 8} = \frac{35}{8} = 4 \frac{3}{8}.$$

$$\frac{9}{11} \cdot 6 = \frac{9 \cdot 6}{11 \cdot 1} = \frac{9 \cdot 6}{11 \cdot 1} = \frac{54}{11} = 4 \frac{10}{11}.$$

In vielen Fällen ist es möglich, vor dem Multiplizieren zu kürzen (siehe auch S. 38/39).



$$\frac{24}{35} \cdot \frac{49}{72} = \frac{\overset{1}{\cancel{24}} \cdot \overset{7}{\cancel{49}}}{\underset{5}{\cancel{35}} \cdot \underset{3}{\cancel{72}}} = \frac{1 \cdot 7}{5 \cdot 3} = \frac{7}{15}.$$

$$\frac{15}{32} \cdot \frac{32}{45} = \frac{\overset{1}{\cancel{15}} \cdot \overset{1}{\cancel{32}}}{\underset{1}{\cancel{32}} \cdot \underset{3}{\cancel{45}}} = \frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3}.$$

$$\frac{25}{52} \cdot \frac{39}{60} = \frac{\overset{5}{\cancel{25}} \cdot \overset{3}{\cancel{39}}}{\underset{4}{\cancel{52}} \cdot \underset{12}{\cancel{60}}} = \frac{5 \cdot 1}{4 \cdot 4} = \frac{5}{16}.$$

$$\frac{5}{8} \cdot 12 = \frac{5 \cdot 12}{8 \cdot 1} = \frac{\overset{3}{\cancel{5}} \cdot \overset{2}{\cancel{12}}}{\underset{2}{\cancel{8}} \cdot 1} = \frac{5 \cdot 3}{2 \cdot 1} = \frac{15}{2} = 7 \frac{1}{2}.$$



10 Berechne ebenso. Kürze stets vor dem Multiplizieren. Schreibe das Ergebnis, wenn möglich, auch als gemischte Zahl.

a) $\frac{4}{5} \cdot \frac{15}{16};$ b) $\frac{9}{11} \cdot \frac{33}{45};$ c) $\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9};$ d) $\frac{7}{22} \cdot \frac{11}{28};$ e) $\frac{6}{13} \cdot \frac{26}{33};$

f) $\frac{7}{8} \cdot \frac{4}{5};$ g) $\frac{11}{14} \cdot \frac{21}{44};$ h) $\frac{16}{25} \cdot \frac{15}{28};$ i) $\frac{11}{12} \cdot 18;$ k) $15 \cdot \frac{23}{25};$

l) $\frac{18}{55} \cdot \frac{5}{24}.$

Gemischte Zahlen müssen vor der Multiplikation in unechte Brüche umgewandelt werden.



$$\blacksquare \quad 7\frac{1}{2} \cdot 3\frac{3}{5} = \frac{15}{2} \cdot \frac{18}{5} = \frac{15 \cdot 18}{2 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 9}{1 \cdot 1} = \frac{27}{1} = 27.$$

$$\blacksquare \quad 5\frac{3}{4} \cdot 2\frac{2}{5} = \frac{23}{4} \cdot \frac{12}{5} = \frac{23 \cdot 12}{4 \cdot 5} = \frac{23 \cdot 3}{1 \cdot 5} = \frac{69}{5} = 13\frac{4}{5}.$$

$$\blacksquare \quad 12\frac{5}{6} \cdot 15\frac{6}{11} = \frac{77}{6} \cdot \frac{171}{11} = \frac{77 \cdot 171}{6 \cdot 11} = \frac{7 \cdot 57}{2 \cdot 1} = \frac{399}{2} = 199\frac{1}{2}.$$

$$\blacksquare \quad 4\frac{5}{12} \cdot 9 = \frac{53}{12} \cdot \frac{9}{1} = \frac{53 \cdot 9}{12 \cdot 1} = \frac{53 \cdot 3}{4 \cdot 1} = \frac{159}{4} = 39\frac{3}{4}.$$

$$\blacksquare \quad 12 \cdot 10\frac{3}{8} = \frac{12}{1} \cdot \frac{83}{8} = \frac{12 \cdot 83}{1 \cdot 8} = \frac{3 \cdot 83}{1 \cdot 2} = \frac{249}{2} = 124\frac{1}{2}.$$



11 Berechne ebenso. Gib das Ergebnis stets in vollständig gekürzter Form und, wenn möglich, als gemischte Zahl an.

a) $2\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{3};$

b) $5\frac{3}{5} \cdot 3\frac{3}{4};$

c) $4\frac{2}{5} \cdot 1\frac{1}{4};$

d) $15\frac{3}{8} \cdot 16\frac{2}{3};$

e) $5\frac{1}{3} \cdot 3\frac{3}{8};$

f) $8\frac{4}{7} \cdot 7\frac{7}{8};$

g) $11\frac{1}{3} \cdot 4\frac{5}{6};$

h) $3\frac{3}{4} \cdot 8\frac{2}{5};$

i) $4 \cdot 2\frac{5}{16};$

k) $25 \cdot 3\frac{8}{15};$

l) $72\frac{1}{4} \cdot 44\frac{3}{5};$

m) $41\frac{3}{35} \cdot 21;$

n) $13\frac{3}{4} \cdot 9\frac{3}{5};$

o) $23\frac{5}{6} \cdot 12\frac{3}{8};$

p) $85 \cdot 17\frac{3}{34}.$

Natürlich lassen sich auf diese Weise auch mehr als zwei Brüche miteinander multiplizieren.

4 Die vier Grundrechenarten mit Brüchen



$$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{20}{21} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}} \cdot \overset{1}{\cancel{3}} \cdot \overset{2}{\cancel{20}}}{\underset{1}{\cancel{5}} \cdot \underset{1}{\cancel{8}} \cdot \underset{1}{\cancel{21}}} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 2}{1 \cdot 1 \cdot 7} = \frac{2}{7}.$$

$$12 \frac{3}{4} \cdot 3 \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{51 \cdot \overset{5}{\cancel{10}} \cdot \overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{4}} \cdot \underset{1}{\cancel{3}} \cdot \underset{2}{\cancel{4}}} = \frac{51 \cdot 5 \cdot 1}{4 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{255}{8} = 31 \frac{7}{8}.$$

$$3 \frac{1}{7} \cdot 5 \frac{1}{4} \cdot 3 \frac{5}{8} \cdot 7 \frac{1}{2} = \frac{\overset{11}{\cancel{22}} \cdot \overset{3}{\cancel{21}} \cdot 29 \cdot 15}{\underset{1}{\cancel{7}} \cdot \underset{1}{\cancel{4}} \cdot \underset{1}{\cancel{8}} \cdot \underset{2}{\cancel{2}}} = \frac{11 \cdot 3 \cdot 29 \cdot 15}{1 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 1} = \frac{14335}{32} = 448 \frac{19}{32}.$$

$$2 \frac{3}{4} \cdot 14 \cdot \frac{7}{15} \cdot 3 \frac{2}{21} = \frac{\overset{7}{\cancel{11}} \cdot \overset{1}{\cancel{14}} \cdot \overset{13}{\cancel{7}} \cdot \overset{2}{\cancel{65}}}{\underset{2}{\cancel{4}} \cdot \underset{3}{\cancel{15}} \cdot \underset{3}{\cancel{21}}} = \frac{11 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 13}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1001}{18} = 55 \frac{11}{18}.$$

$$\frac{3}{7} \cdot 12 \cdot \frac{5}{6} \cdot 3 \frac{1}{3} \cdot 2 \frac{4}{5} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot \overset{2}{\cancel{12}} \cdot \overset{1}{\cancel{5}} \cdot \overset{2}{\cancel{10}} \cdot \overset{2}{\cancel{14}}}{\underset{1}{\cancel{7}} \cdot \underset{1}{\cancel{6}} \cdot \underset{1}{\cancel{3}} \cdot \underset{1}{\cancel{5}}} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 2}{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{40}{1} = 40.$$



12 Berechne ebenso. Gib das Ergebnis stets vollständig gekürzt und, wenn möglich, als gemischte Zahl an.

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5};$

b) $\frac{11}{12} \cdot \frac{14}{99} \cdot \frac{36}{77};$

c) $\frac{9}{16} \cdot \frac{4}{27} \cdot \frac{3}{8};$

d) $\frac{7}{8} \cdot \frac{44}{49} \cdot \frac{14}{33};$

e) $\frac{5}{12} \cdot \frac{14}{15} \cdot \frac{5}{7};$

f) $\frac{10}{27} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{18}{25};$

g) $\frac{11}{13} \cdot \frac{7}{24} \cdot 8 \cdot \frac{9}{22} \cdot \frac{1}{33};$

h) $\frac{6}{7} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{21}{88};$

i) $\frac{13}{24} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{32}{39} \cdot 26;$

k) $\frac{16}{21} \cdot \frac{16}{57} \cdot \frac{19}{28} \cdot \frac{45}{64};$

l) $2\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{5};$

m) $11\frac{3}{4} \cdot 7\frac{5}{8} \cdot 3\frac{1}{6};$

n) $\frac{3}{4} \cdot 3\frac{4}{9} \cdot \frac{5}{31} \cdot 6\frac{2}{3};$

o) $12\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{15} \cdot 7\frac{5}{6} \cdot 18.$

4.5 Potenzen

Jetzt können wir auch Potenzen von Brüchen berechnen. Eine Potenz besteht aus Basis (Grundzahl) und Exponent (Hochzahl):

Das ist die Basis



Das ist der Exponent
(gelesen: „3 hoch 5“)

Der Exponent gibt an, wievielmals die Basis als Faktor gesetzt werden soll.



$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 4} = \frac{9}{16}.$$

$$\left(\frac{3}{8}\right)^3 = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{8 \cdot 8 \cdot 8} = \frac{27}{512}.$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{16}{81}.$$

$$\left(2\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{125}{8} = 15\frac{5}{8}.$$

$$\left(1\frac{2}{5}\right)^5 = \left(\frac{7}{5}\right)^5 = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{16807}{3125} = 5\frac{1182}{3125}.$$

Bei der Multiplikation zweier Potenzen oder einer Potenz mit einem Bruch ist es ratsam, die Potenzen zunächst nur als unausgerechnete Produkte aufzuschreiben. Man kann dann möglicherweise erst einmal kürzen, wodurch die endgültige Berechnung oft vereinfacht wird.

4 Die vier Grundrechenarten mit Brüchen



$$\left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{4 \cdot 4 \cdot 4} \cdot \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}}{\cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}} = \frac{1}{12}.$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{16}\right)^3 = \frac{\cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5}}{\cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cancel{16} \cdot \cancel{16} \cdot \cancel{16}} = \frac{1}{100}.$$

$$\frac{8}{15} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{\cancel{8} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot 3}{\cancel{15} \cdot 4 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4}} = \frac{9}{40}.$$

$$\left(2\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(1\frac{7}{9}\right)^3 = \left(\frac{9}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{16}{9}\right)^3 = \frac{\cancel{9} \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{16} \cdot 16 \cdot 16}{\cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{9} \cdot 9} = \frac{256}{9} = 28\frac{4}{9}.$$



13 Berechne ebenso. Gib das Ergebnis stets in vollständig gekürzter Form und, wenn möglich, als gemischte Zahl an.

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^4$; b) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$; c) $\left(3\frac{1}{3}\right)^3$; d) $\left(1\frac{1}{2}\right)^4$;

e) $\left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5$; f) $\left(\frac{2}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^2$; g) $\left(\frac{4}{9}\right)^2 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^4$;

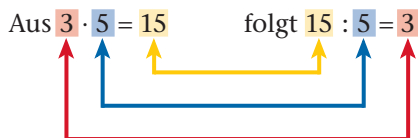
h) $\left(\frac{7}{8}\right)^2 \cdot 1\frac{3}{5}$; i) $\left(1\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^2$; k) $\left(4\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(2\frac{1}{7}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5$;

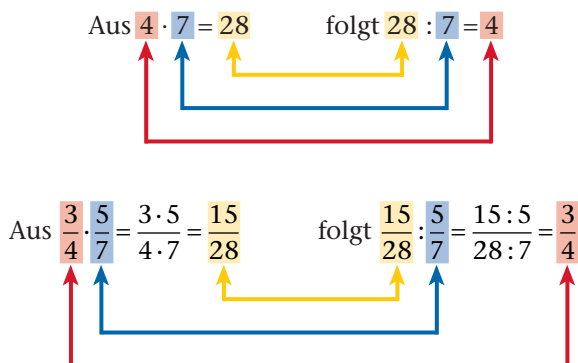
l) $\left(\frac{3}{8}\right)^4 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2$; m) $\left(7\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(5\frac{1}{3}\right)^3$; n) $\left(1\frac{1}{6}\right)^5 \cdot \left(1\frac{1}{7}\right)^3$;

o) $\left(2\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(1\frac{1}{5}\right)^2$; p) $\left(\frac{5}{9}\right)^5 \cdot \left(3\frac{3}{5}\right)^4$; q) $\left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \left(1\frac{1}{5}\right)^4$.

4.6 Division

Die Division ist die Umkehrung der Multiplikation.





Daraus ergibt sich die folgende Regel:



Brüche werden dividiert, indem man Zähler durch Zähler und Nenner durch Nenner dividiert:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a : c}{b : d}; \quad b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0.$$



$$\begin{aligned} \frac{10}{21} : \frac{2}{3} &= \frac{10 : 2}{21 : 3} = \frac{5}{7}, & \frac{12}{35} : \frac{4}{7} &= \frac{12 : 4}{35 : 7} = \frac{3}{5}. \\ \frac{28}{45} : \frac{4}{9} &= \frac{28 : 4}{45 : 9} = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Unser Verfahren zur Division von Brüchen ist zwar recht einfach und einsichtig, es lässt sich aber in dieser einfachen Form nur sehr beschränkt verwenden.

Beispielsweise versagt es bei der Aufgabe $\frac{3}{7} : \frac{4}{5}$. Es versagt, weil 3 kein

Vielfaches von 4 und 7 kein Vielfaches von 5 ist, weil also die Divisionen $3 : 4$ und $5 : 7$ nicht „aufgehen“.

Der Versuch, diese Aufgabe zu lösen, führt erst nach Umwegen zum Ziel:

1. Versuch:

$$\frac{3}{7} : \frac{4}{5} = \frac{3 : 4}{7 : 5} = \frac{??}{??}$$

4 Die vier Grundrechenarten mit Brüchen

Versuch gescheitert, weil weder die beiden Zähler noch die beiden Nenner durcheinander teilbar sind.



2. Versuch:

$$\frac{3}{7} : \frac{4}{5} = \frac{3 \cdot 4}{7 \cdot 5} = \frac{(3 \cdot 4) : 4}{(7 \cdot 5) : 4} = \frac{3}{28 \cdot 5} = \frac{3}{??}$$

Versuch gescheitert, weil jetzt zwar die beiden Zähler durcheinander teilbar sind, nicht aber die beiden Nenner.



3. Versuch:

$$\frac{3}{7} : \frac{4}{5} = \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 5} : \frac{4}{5} = \frac{(3 \cdot 5) : 4}{(7 \cdot 5) : 4} = \frac{15 : 4}{7} = \frac{??}{7}$$

Versuch gescheitert, weil jetzt zwar die beiden Nenner, nicht aber die beiden Zähler durcheinander teilbar sind.



4. Versuch:

$$\frac{3}{7} : \frac{4}{5} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{7 \cdot 4 \cdot 5} : \frac{4}{5} = \frac{(3 \cdot 4 \cdot 5) : 4}{(7 \cdot 4 \cdot 5) : 5} = \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 4} = \frac{15}{28}$$

Versuch gelungen, weil jetzt sowohl die beiden Zähler als auch die beiden Nenner durcheinander teilbar sind!

Und was hat uns zum Erfolg geführt?

Wir haben den ersten Bruch sowohl mit dem Zähler als auch mit dem Nenner des zweiten Bruches erweitert.

Um ganz sicher zu gehen, dass das so erhaltene Ergebnis sinnvoll ist, machen wir jetzt noch die Probe!

Wenn

$$\frac{3}{7} : \frac{4}{5} = \frac{15}{28},$$

dann muss das Produkt aus $\frac{15}{28}$ und $\frac{4}{5}$ gleich $\frac{3}{7}$ sein.

Das ist der Fall, denn es gilt:

$$\frac{15}{28} \cdot \frac{4}{5} = \frac{15 \cdot 4}{28 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 1}{7 \cdot 1} = \frac{3}{7}$$

Dazu noch ein Beispiel:



$$\frac{5}{8} : \frac{2}{3} = \frac{5 \cdot 2 \cdot 3}{8 \cdot 2 \cdot 3} : \frac{2}{3} = \frac{(5 \cdot 2 \cdot 3) : 2}{(8 \cdot 2 \cdot 3) : 3} = \frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 2} = \frac{15}{16} = \frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 2}$$

Betrachten wir nur
das Anfangs- und das Endglied
dieser Gleichungskette,
dann erkennen wir:

=

$$\frac{5}{8} : \frac{2}{3}$$

$$\frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 2}$$

Die **Division durch** $\frac{2}{3}$

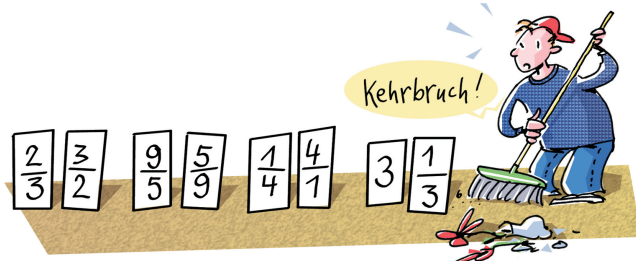
ist gleich-
bedeutend
mit der

Multiplikation mit $\frac{3}{2}$

4 Die vier Grundrechenarten mit Brüchen

Der Bruch $\frac{3}{2}$ geht aus dem Bruch $\frac{2}{3}$ hervor, wenn man Zähler und Nenner miteinander vertauscht.

Man sagt: $\frac{3}{2}$ ist der Kehrbruch (oder Kehrwert) von $\frac{2}{3}$.



Allgemein ergibt sich aus unseren Überlegungen die folgende Regel:



Durch einen Bruch wird dividiert, indem man mit dem Kehrbruch multipliziert.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}; \quad b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0.$$



$$\frac{4}{7} : \frac{5}{12} = \frac{4}{7} \cdot \frac{12}{5} = \frac{4 \cdot 12}{7 \cdot 5} = \frac{48}{35} = 1 \frac{13}{35}.$$

$$\frac{14}{23} : 8 = \frac{14}{23} \cdot \frac{1}{8} = \frac{14 \cdot 1}{23 \cdot 8} = \frac{7}{92}.$$

$$12 : \frac{8}{9} = \frac{12}{1} \cdot \frac{9}{8} = \frac{12 \cdot 9}{1 \cdot 8} = \frac{27}{2} = 13 \frac{1}{2}.$$

$$\frac{8}{9} : \frac{20}{27} = \frac{8}{9} \cdot \frac{27}{20} = \frac{8 \cdot 27}{9 \cdot 20} = \frac{6}{5} = 1 \frac{1}{5}.$$

$$8 : 5 = \frac{8}{1} : \frac{5}{1} = \frac{8}{1} \cdot \frac{1}{5} = \frac{8 \cdot 1}{1 \cdot 5} = \frac{8}{5} = 1 \frac{3}{5}.$$



14 Berechne. Gib das Ergebnis stets in vollständig gekürzter Form an und, wenn möglich, auch als gemischte Zahl.

- a) $\frac{1}{3} : \frac{4}{9}$; b) $\frac{1}{2} : \frac{2}{3}$; c) $\frac{4}{5} : \frac{8}{15}$; d) $\frac{2}{3} : \frac{8}{9}$; e) $\frac{9}{10} : \frac{6}{25}$;
 f) $\frac{4}{9} : \frac{16}{27}$; g) $\frac{3}{4} : \frac{2}{5}$; h) $7 : \frac{2}{5}$; i) $\frac{21}{25} : 8$; k) $\frac{7}{9} : \frac{7}{15}$;
 l) $\frac{13}{14} : \frac{6}{7}$; m) $\frac{38}{39} : \frac{19}{20}$; n) $\frac{3}{10} : \frac{4}{5}$; o) $\frac{6}{11} : \frac{18}{55}$; p) $\frac{15}{38} : \frac{18}{19}$;
 q) $\frac{26}{35} : \frac{39}{77}$; r) $\frac{15}{28} : \frac{25}{32}$; s) $\frac{27}{56} : \frac{33}{35}$; t) $\frac{121}{125} : \frac{66}{75}$; u) $35 : \frac{25}{29}$.

Gemischte Zahlen müssen vor dem Dividieren in unechte Brüche umgewandelt werden.



$$\begin{aligned} \blacksquare \quad 4\frac{2}{3} : 3\frac{1}{2} &= \frac{14}{3} : \frac{7}{2} = \frac{14}{3} \cdot \frac{2}{7} = \frac{\cancel{14} \cdot 2}{3 \cdot \cancel{7}} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}. \\ \blacksquare \quad 7\frac{7}{8} : 5\frac{1}{4} &= \frac{63}{8} : \frac{21}{4} = \frac{63}{8} \cdot \frac{4}{21} = \frac{\cancel{63} \cdot \cancel{4}}{\cancel{8} \cdot \cancel{21}} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}. \\ \blacksquare \quad 12\frac{4}{5} : 3\frac{3}{7} &= \frac{64}{5} : \frac{24}{7} = \frac{64}{5} \cdot \frac{7}{24} = \frac{\cancel{64} \cdot 7}{5 \cdot \cancel{24}} = \frac{56}{15} = 3\frac{11}{15}. \end{aligned}$$



15 Berechne. Gib das Ergebnis stets in vollständig gekürzter Form an und, wenn möglich, auch als gemischte Zahl.

- a) $7\frac{2}{3} : \frac{5}{6}$; b) $\frac{3}{4} : 2\frac{1}{2}$; c) $9\frac{3}{8} : 15$; d) $77 : 3\frac{1}{9}$; e) $\frac{30}{49} : 4\frac{2}{7}$;
 f) $\frac{15}{32} : 1\frac{1}{24}$; g) $8\frac{2}{21} : 21\frac{13}{14}$; h) $7\frac{7}{39} : 8\frac{4}{13}$; i) $5\frac{2}{5} : 1\frac{7}{20}$;
 k) $2\frac{1}{6} : 3\frac{9}{10}$; l) $1\frac{17}{25} : 3\frac{4}{15}$; m) $10\frac{11}{16} : 5\frac{13}{24}$; n) $2\frac{1}{10} : 1\frac{3}{25}$;
 o) $5\frac{30}{49} : 14\frac{2}{7}$; p) $2\frac{17}{30} : 7\frac{1}{25}$; q) $5\frac{13}{24} : 10\frac{11}{16}$; r) $142\frac{2}{9} : 148\frac{4}{9}$.

4 Die vier Grundrechenarten mit Brüchen

In der folgenden Aufgabe sollst du die Leerstellen ausfüllen.

Gehe dabei so vor wie in den Beispielen.

Bei jedem der drei Beispiele sind jeweils zwei Aufgaben der gleichen Art einander gegenübergestellt.



$$\boxed{} \cdot 16 = 116.$$

Überlege
so:

Das **16fache** der gesuchten Zahl ist 116. Die Zahl, die in das Kästchen gehört, ist also gleich dem **16. Teil** von 116.

Rechne
so:

$$116 : 16 = \frac{29}{\cancel{16}^4} = 7\frac{1}{4}.$$

Schreibe
das Ergebnis
so:

$$\boxed{7\frac{1}{4}} \cdot 16 = 116.$$

Mache
die Probe
so:

$$7\frac{1}{4} \cdot 16 = \frac{29 \cdot \cancel{16}^4}{\cancel{4}_1} = 116.$$

$$\boxed{} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{9}.$$

Das **$\frac{2}{3}$ fache** der gesuchten Zahl ist $\frac{7}{9}$. Die Zahl, die in das Kästchen gehört, ist also gleich dem **$\frac{2}{3}$. Teil** von $\frac{7}{9}$.

$$\frac{7}{9} : \frac{2}{3} = \frac{7 \cdot \cancel{3}^1}{\cancel{9}_3 \cdot 2} = \frac{7}{6}.$$

$$\boxed{\frac{7}{6}} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{9}.$$

$$\frac{7}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7 \cdot \cancel{2}^1}{\cancel{6}_3 \cdot 3} = \frac{7}{9}.$$



$$\boxed{} : 6 = \frac{7}{8}.$$

Überlege
so:

Der **6. Teil** der gesuchten Zahl ist $\frac{7}{8}$. Die Zahl, die in das Kästchen gehört, ist also gleich dem **6fachen** von $\frac{7}{8}$.

$$\boxed{} : \frac{3}{4} = \frac{10}{21}.$$

Der **$\frac{3}{4}$. Teil** der gesuchten Zahl ist $\frac{10}{21}$. Die Zahl, die in das Kästchen gehört, ist also gleich dem **$\frac{3}{4}$ fachen** von $\frac{10}{21}$.

Rechne

so:

$$\frac{7}{8} \cdot 6 = \frac{7 \cdot \cancel{6}^3}{\cancel{8}_4} = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}.$$

Schreibe
das Ergebnis
so:

$$\boxed{5\frac{1}{4}} : 6 = \frac{7}{8}.$$

Mache
die Probe
so:

$$5\frac{1}{4} : 6 = \frac{\cancel{21}^7 \cdot 1}{4 \cdot \cancel{6}_2} = \frac{7}{8}.$$

$$\frac{10}{21} \cdot \frac{3}{4} = \frac{\cancel{10}^5 \cdot \cancel{3}_1}{\cancel{21}_7 \cdot 4} = \frac{5}{14}.$$

$$\boxed{\frac{5}{14}} : \frac{3}{4} = \frac{10}{21}.$$

$$\frac{5}{14} : \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot \cancel{4}^2}{\cancel{14}_7 \cdot 3} = \frac{10}{21}.$$

Vorbemerkung zum dritten Beispiel:

Wenn 15 geteilt durch 3 gleich 5 ist, dann ist auch 15 geteilt durch 5 gleich 3.

Mit anderen Worten: Aus $15 : 3 = 5$ folgt $15 : 5 = 3$.

Ebenso gilt: Aus $24 : 6 = 4$ folgt $24 : 4 = 6$;

aus $40 : 5 = 8$ folgt $40 : 8 = 5$;

aus $\frac{8}{15} : \frac{4}{9} = \frac{6}{5}$ folgt $\frac{8}{15} : \frac{6}{5} = \frac{4}{9}$.

Allgemein gilt also: Bei einer Divisionsaufgabe kann man die Zahl unmittelbar vor dem Gleichheitszeichen (Divisor) mit der Zahl hinter dem Gleichheitszeichen (Ergebnis) vertauschen.



Überlege
so:

$$126 : \boxed{} = 3\frac{3}{5}.$$

$$\text{Aus } 126 : \boxed{} = 3\frac{3}{5}$$

$$\text{folgt } 126 : 3\frac{3}{5} = \boxed{}.$$

Rechne
so:

$$126 : 3\frac{3}{5} = \frac{\cancel{126}^7 \cdot 5}{\cancel{18}_1} = 35.$$

$$\frac{24}{25} : \boxed{} = \frac{4}{15}.$$

$$\text{Aus } \frac{24}{25} : \boxed{} = \frac{4}{15}$$

$$\text{folgt } \frac{24}{25} : \frac{4}{15} = \boxed{}.$$

$$\frac{24}{25} : \frac{4}{15} = \frac{\cancel{24}^6 \cdot \cancel{15}^3}{\cancel{25}_5 \cdot \cancel{4}_1} = \frac{18}{5}.$$

4 Die vier Grundrechenarten mit Brüchen

Schreibe
das Ergeb-
nis so:

$$126 : \boxed{35} = 3\frac{3}{5}.$$

Mache
die Probe
so:

$$126 : 35 = \frac{126 \cdot 1}{1 \cdot 35} = \frac{18}{5} = 3\frac{3}{5}.$$

$$\frac{24}{25} : \boxed{\frac{18}{5}} = \frac{4}{15}.$$

$$\frac{24}{25} : \frac{18}{5} = \frac{24 \cdot 1}{25 \cdot 18} = \frac{4}{15}.$$



16 Fülle ebenso die Leerstelle aus und mache jeweils auch die Probe.

a) $\boxed{} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{8};$

b) $\frac{5}{12} \cdot \boxed{} = \frac{7}{18};$

c) $\boxed{} : \frac{8}{9} = \frac{9}{8};$

d) $\frac{24}{25} : \boxed{} = \frac{14}{15};$

e) $\boxed{} : \frac{28}{33} = \frac{22}{21};$

f) $\frac{7}{18} : \boxed{} = \frac{5}{12};$

g) $\frac{6}{5} \cdot \boxed{} = \frac{8}{9};$

h) $\boxed{} \cdot 5\frac{1}{4} = 7\frac{7}{8};$

i) $\boxed{} : \frac{5}{12} = \frac{14}{15};$

k) $\frac{32}{33} \cdot \boxed{} = \frac{48}{77};$

l) $\boxed{} : \frac{39}{77} = \frac{21}{26};$

m) $4\frac{1}{8} : \boxed{} = 4\frac{7}{12};$

n) $\boxed{} \cdot 3\frac{1}{9} = 15\frac{3}{4};$

o) $\boxed{} : 3\frac{1}{9} = 15\frac{3}{4};$

p) $3\frac{1}{9} : \boxed{} = 15\frac{3}{4}.$

Oft liegen derartige Platzhalteraufgaben in Form von Bestimmungsgleichungen vor, bei denen an der Stelle des Platzhalters der Buchstabe x steht. Solche Bestimmungsgleichungen werden zeilenweise gelöst, und zwar so, wie es die folgenden Beispiele zeigen.

Achte besonders darauf, dass in jeder Zeile des Lösungsweges nur **ein einziges** Gleichheitszeichen steht. Anderenfalls wird dein Mathematik-lehrer seinen Rotstift in Aktion setzen.



$$x \cdot \frac{4}{9} = \frac{8}{21}.$$

$$x = \frac{8}{21} : \frac{4}{9}$$

$$x = \frac{8 \cdot 9}{21 \cdot 4}$$

$$x = \frac{6}{7}.$$

Überlege:

x muss gleich dem $\frac{4}{9}$. Teil von $\frac{8}{21}$ sein.



$$x : \frac{5}{8} = \frac{12}{25}$$

$$x = \frac{12}{25} \cdot \frac{5}{8}$$

$$x = \frac{\cancel{12} \cdot \cancel{5}}{\cancel{25} \cdot 8} = \frac{3 \cdot 1}{5 \cdot 2}$$

$$x = \frac{3}{10}$$

Überlege:

x muss gleich dem $\frac{5}{8}$ fachen von $\frac{12}{25}$ sein.



$$\frac{25}{28} : x = \frac{10}{21}$$

$$x = \frac{25}{28} : \frac{10}{21}$$

$$x = \frac{\cancel{25} \cdot \cancel{21}}{\cancel{28} \cdot \cancel{10}} = \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 2}$$

$$x = \frac{15}{8}$$

Überlege:

Aus $\frac{25}{28} : x = \frac{10}{21}$ folgt $\frac{25}{28} : \frac{10}{21} = x$.



17 Berechne x:

a) $x \cdot \frac{14}{33} = \frac{7}{18}$; b) $\frac{24}{35} \cdot x = \frac{15}{28}$; c) $x : \frac{34}{35} = \frac{28}{51}$; d) $\frac{34}{35} : x = \frac{8}{15}$;

e) $x : \frac{5}{12} = \frac{36}{85}$; f) $x \cdot \frac{12}{49} = \frac{16}{77}$; g) $3\frac{1}{3} : x = 2\frac{1}{2}$; h) $3\frac{1}{3} \cdot x = 2\frac{1}{2}$;

i) $x : 3\frac{3}{8} = 5\frac{1}{3}$; k) $x : 3\frac{3}{4} = 8\frac{2}{5}$.

Manchmal treten Brüche auf, bei denen Zähler oder Nenner ebenfalls Brüche sind.



$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} \quad \begin{array}{l} \blacktriangleleft \text{Das ist der Zähler} \\ \blacksquare \frac{2}{3} \blacktriangleleft \text{Das ist der Hauptbruchstrich} \\ \frac{4}{5} \blacktriangleleft \text{Das ist der Nenner} \end{array}$$

$$\frac{\frac{2}{3}}{5} \quad \begin{array}{l} \frac{2}{3} \blacktriangleleft \text{Zähler} \\ \blacksquare \frac{2}{3} \blacktriangleleft \text{Hauptbruchstrich} \\ 5 \blacktriangleleft \text{Nenner} \end{array}$$

4 Die vier Grundrechenarten mit Brüchen

Unser Rezept zur Beseitigung von Doppelbrüchen lautet:



Ein Doppelbruch wird in einen einfachen Bruch verwandelt, indem man seinen Zähler durch seinen Nenner teilt:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}; \quad b \neq 0; c \neq 0; d \neq 0.$$



$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{5}{6}.$$

$$\frac{\frac{12}{25}}{\frac{8}{15}} = \frac{12}{25} : \frac{8}{15} = \frac{12}{25} \cdot \frac{15}{8} = \frac{\cancel{12} \cdot \cancel{15}}{\cancel{25} \cdot 8} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{10}.$$



18 Verwandle die folgenden Doppelbrüche in einfache Brüche bzw. in gemischte Zahlen.

a) $\frac{\frac{3}{18}}{\frac{14}{54}};$

b) $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{9}{16}};$

c) $\frac{\frac{6}{11}}{\frac{9}{44}};$

d) $\frac{\frac{10}{21}}{\frac{15}{28}};$

e) $\frac{\frac{21}{22}}{\frac{56}{99}}.$

4.7 Zusammenfassung

Das hast du im 4. Kapitel gelernt:

1. Nennergleiche Brüche werden addiert bzw. subtrahiert, indem man ihre Zähler addiert bzw. subtrahiert und den gemeinsamen Nenner beibehält.

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}; \quad c \neq 0$$

2. Nicht nennergleiche Brüche müssen vor dem Addieren bzw. Subtrahieren durch Erweitern auf den Hauptnenner gebracht werden.

Der Hauptnenner ist das kleinste gemeinsame Vielfache der bei den einzelnen Brüchen auftretenden Nenner. Der Hauptnenner kann durch Primfaktorzerlegung ermittelt werden.

3. Zwei Brüche werden multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}; \quad b \neq 0, d \neq 0$$

4. Durch einen Bruch wird dividiert, indem man mit dem Kehrbuch multipliziert.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}; \quad b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$$

5. Doppelbrüche können vereinfacht werden, indem man den Hauptbruchstrich durch das Divisionszeichen ersetzt und die so erhaltene Divisionsaufgabe ausrechnet.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}; \quad b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$$

4.8 Test zum 4. Kapitel

Überprüfe mit den nachfolgenden Aufgaben, ob du den Stoff des 4. Kapitels beherrschst und das Gelernte auch anwenden kannst. Mehr als 3 Fehler pro Aufgabenblock sollten dir dabei nicht unterlaufen.

Gib die Ergebnisse stets in vollständig gekürzter Form an, wenn möglich auch als gemischte Zahl.


1

- a) $\frac{11}{15} + \frac{7}{15}$; b) $5\frac{3}{7} + 8\frac{6}{7}$; c) $\frac{3}{8} + \frac{7}{12}$; d) $\frac{5}{12} + \frac{3}{16}$;
 e) $\frac{7}{18} + \frac{5}{24}$; f) $3\frac{5}{9} + 2\frac{7}{12}$; g) $\frac{19}{44} + \frac{13}{28}$; h) $15\frac{15}{34} + 13\frac{35}{51}$;
 i) $\frac{13}{15} + \frac{7}{25} + \frac{5}{18} + \frac{11}{20} + \frac{49}{72}$; k) $5\frac{7}{9} + 6\frac{5}{21} + 11\frac{15}{49} + 25\frac{17}{28}$.


2

- a) $\frac{17}{18} - \frac{5}{18}$; b) $7\frac{7}{8} - 5\frac{5}{8}$; c) $3\frac{2}{5} - 1\frac{4}{5}$; d) $\frac{25}{48} - \frac{15}{32}$;
 e) $\frac{20}{21} - \frac{17}{45}$; f) $\frac{17}{30} - \frac{5}{18}$; g) $12\frac{7}{18} - 4\frac{3}{4}$; h) $7\frac{16}{21} - 5\frac{11}{14}$;
 i) $17\frac{3}{4} - 5\frac{2}{3}$; k) $4\frac{7}{15} - 3\frac{7}{12}$.

4 Die vier Grundrechenarten mit Brüchen



- a) $\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{9}$; b) $\frac{12}{25} \cdot \frac{15}{28}$; c) $\frac{5}{9} \cdot \frac{3}{5}$; d) $\frac{28}{45} \cdot \frac{25}{36}$;
e) $9\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{25}$; f) $\frac{25}{126} \cdot 7\frac{19}{50}$; g) $8\frac{7}{15} \cdot 6\frac{3}{10}$; h) $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{8}{9}$;
i) $4\frac{1}{2} \cdot 5\frac{2}{3} \cdot 6\frac{3}{4}$; k) $\left(\frac{4}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{25}{32}\right)^2$.



- a) $\frac{9}{14} : \frac{6}{35}$; b) $\frac{5}{18} : \frac{25}{54}$; c) $\frac{56}{95} : \frac{21}{38}$; d) $68 : \frac{51}{85}$;
e) $\frac{15}{23} : 25$; f) $2\frac{2}{9} : 4\frac{2}{3}$; g) $7\frac{1}{25} : 2\frac{17}{30}$; h) $2\frac{2}{15} : 1\frac{1}{35}$;
i) $12\frac{1}{7} : 3\frac{5}{21}$; k) $3\frac{5}{21} : 12\frac{1}{7}$.



5 Verwandle die Doppelbrüche in vollständig gekürzte einfache Brüche bzw. gemischte Zahlen:

- a) $\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{8}}$; b) $\frac{\frac{5}{7}}{\frac{20}{21}}$; c) $\frac{\frac{16}{27}}{\frac{12}{13}}$; d) $\frac{\frac{15}{25}}{\frac{48}{48}}$; e) $\frac{\frac{34}{49}}{\frac{51}{51}}$.

Abschlusstest

Mit dem Abschlusstest kannst du überprüfen, ob du den gesamten in diesem Band behandelten Stoff beherrschst. Wenn du bei jeder der ersten zehn Aufgaben höchstens einen Fehler und bei der elften Aufgabe höchstens drei Fehler machst, dann kannst du mit deinem Erfolg zufrieden sein und der nächsten Klassenarbeit gelassen entgegensehen. Anderenfalls hindert dich ja sicher keiner daran, noch einmal bei Seite 9 zu beginnen.



1 Berechne:

- a) $\frac{7}{9}$ von 144 €; b) $\frac{16}{7}$ von 63kg; c) $\frac{3}{8}$ von 2 Stunden;
d) $\frac{149}{125}$ von 4m; e) $\frac{19}{72}$ von 9m².



2 Gib in der in Klammern stehenden Einheit an:

- a) $\frac{7}{12}$ Stunden [Min.]; b) $\frac{51}{125}$ kg [g]; c) $\frac{5}{8}$ Tage [Stunden];
d) $\frac{13}{25}$ m [cm]; e) $\frac{123}{125}$ m³ [dm³].



3 Fülle die Leerstellen aus:

- a) $\frac{13}{25}$ von = 39 km; b) $\frac{\text{input}}{9}$ von 63 kg = 35 kg;
c) $\frac{7}{\text{input}}$ von 96 € = 56 €; d) $\frac{3}{\text{input}}$ Stunden = 12 Min.;
e) $\frac{\text{input}}{40}$ kg = 425 g.

5 Abschlusstest



4 Fülle die Leerstellen aus:

a) $\frac{4}{9} = \frac{36}{\square}$;

b) $\frac{\square}{16} = \frac{27}{144}$;

c) $\frac{19}{34} = \frac{\square}{408}$;

d) $\frac{325}{\square} = \frac{25}{26}$;

e) $\frac{3}{\square} = \frac{\square}{24} = \frac{36}{\square} = \frac{144}{192}$.



5 Kürze vollständig:

a) $\frac{39}{91}$;

b) $\frac{65}{117}$;

c) $\frac{4 \cdot 12 \cdot 13}{39 \cdot 18 \cdot 36}$;

d) $\frac{15 \cdot 16 \cdot 45}{18 \cdot 15 \cdot 12}$;

e) $\frac{125 \cdot 33 \cdot 51 \cdot 49}{34 \cdot 50 \cdot 77 \cdot 12}$.



6 Verwandle in gemischte Zahlen:

a) $\frac{77}{17}$;

b) $\frac{133}{12}$;

c) $\frac{215}{71}$;

d) $\frac{2078}{23}$;

e) $\frac{4325}{7}$.



7 Verwandle in unechte Brüche:

a) $2\frac{3}{13}$;

b) $4\frac{17}{18}$;

c) $25\frac{25}{26}$;

d) $17\frac{5}{18}$;

e) $103\frac{3}{5}$.



8 Schreibe das Ergebnis als gemischte Zahl:

a) $22 : 3$;

b) $17 : 5$;

c) $89 : 33$;

d) $223 : 15$;

e) $731 : 16$.



9 Zerlege in Primfaktoren:

a) 44;

b) 138;

c) 272;

d) 750;

e) 10 000.



10 Bestimme das kleinste gemeinsame Vielfache von

a) 24 und 80;

b) 75 und 120;

c) 12, 15 und 18;

d) 5, 15, 55 und 88;

e) 10, 12, 27, 48, 54, 72, 90, 120 und 144.



11 Berechne. Gib das Ergebnis stets in vollständig gekürzter Form an und, wenn möglich, auch als gemischte Zahl.

a) $\frac{13}{15} + \frac{5}{12};$

b) $\frac{9}{20} + \frac{11}{25} + \frac{19}{30} + \frac{11}{45};$

c) $12\frac{13}{15} + 11\frac{7}{20} + 12\frac{11}{12};$

d) $\frac{7}{8} - \frac{11}{28};$

e) $53\frac{16}{45} - 23\frac{19}{60};$

f) $9\frac{4}{15} - 8\frac{9}{10};$

g) $\frac{21}{25} \cdot \frac{15}{28};$

h) $7\frac{5}{6} \cdot 11\frac{2}{3};$

i) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(1\frac{1}{8}\right)^2;$

k) $\frac{16}{45} : \frac{44}{75};$

l) $2\frac{3}{5} : 26;$

m) $422 : 4\frac{7}{51};$

n) $2\frac{17}{30} : 7\frac{7}{25};$

o) $\frac{\frac{10}{21}}{\frac{25}{28}};$

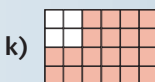
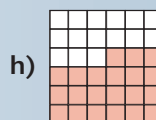
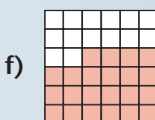
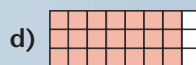
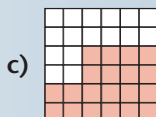
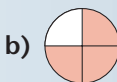
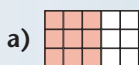
p) $\frac{11\frac{5}{6}}{17\frac{3}{4}}.$

Lösungen

Zu den Aufgaben des 1. Kapitels



1



2

- a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{7}{10}$; c) $\frac{7}{12}$; d) $\frac{5}{6}$; e) $\frac{5}{12}$; f) $\frac{11}{24}$;
g) $\frac{3}{8}$; h) $\frac{3}{4}$; i) $\frac{6}{8}$; k) $\frac{48}{64}$; l) $\frac{48}{64}$.

3

- a) 81 €; b) 201 kg; c) 82 Min.; d) 1028 m²; e) 280 dm³;
f) 4459 m g) 604 €; h) 7106 m; i) 332 kg; k) 2772 m².

4

- a) 108 Minuten = 1 Stunde 48 Minuten; b) 20 Stunden;
c) 400 Sekunden = 6 Minuten 40 Sekunden;
d) 648 Minuten = 10 Stunden 48 Minuten;
e) 1875 g = 1 kg 875 g; f) 560 cm = 5 m 6 dm;
g) 1725 dm² = 17 m² 25 dm²;
h) 531 250 cm³ = 531 dm³ 250 cm³;
i) 3825 Sekunden = 1 Stunde 3 Minuten 45 Sekunden.

5

- a) 18 Std.; b) 875 mm; c) 96 Cent; d) 150 g;
e) 406 250 cm³; f) 875 cm²; g) 65 cm;

6 Lösungen

5 h) 1360 mm^2 ; i) 25 Sek.; k) 960 Sek.; l) 288 Min.;
m) 184 dm^3 ; n) $78\,125 \text{ mm}^2$.

6 a) 45 m; b) 77 €; c) 42 kg; d) 224 €;
e) 162 kg; f) 180 km; g) 266 €; h) 350 m^2 ;
i) 600 km; k) 825 kg; l) 1500 m; m) 408 kg.

7 a) 3; b) 5; c) 4; d) 4; e) 3;
f) 3; g) 2; h) 9; i) 9; k) 15;
l) 7; m) 13; n) 12; o) 33; p) 17;
q) 17; r) 25; s) 15.

8 a) 5; b) 8; c) 9; d) 7; e) 17;
f) 21; g) 15; h) 11; i) 22; k) 26;
l) 17; m) 16; n) 38; o) 25; p) 25;
q) 57.

Test zum 1. Kapitel

1 a) 10 m; b) 84 kg; c) 81 Min.; d) 45 m^2 ; e) 36 €;
f) 160 Std. = 6 Tage 16 Std.;
g) $3375 \text{ mm} = 3 \text{ m } 37 \text{ cm } 5 \text{ mm}$;
h) $1600 \text{ g} = 1 \text{ kg } 600 \text{ g}$;
i) $18\,750 \text{ cm}^2 = 1 \text{ m}^2 87 \text{ dm}^2 50 \text{ cm}^2$;
k) $2200 \text{ dm}^3 = 2 \text{ m}^3 200 \text{ dm}^3$.

2 a) 40 Sek.; b) 875 g; c) 10 Std.; d) 28 Min.; e) 625 mm.

3 a) 35 m; b) 3; c) 8; d) 3; e) 96 kg;
f) 6; g) 9; h) 8; i) 182 €; k) 7;
l) 17; m) 7; n) 288 m^2 ; o) 5; p) 9;
q) 5; r) 168 Min.; s) 4; t) 11; u) 8.

Zu den Aufgaben des 2. Kapitels
1

- a) $\frac{21}{56}$; b) $\frac{49}{84}$; c) $\frac{35}{63}$; d) $\frac{28}{147}$; e) $\frac{63}{77}$;
 f) $\frac{84}{119}$; g) $\frac{91}{126}$; h) $\frac{196}{259}$; i) $\frac{315}{644}$; k) $\frac{345}{273}$.

2

- a) $\frac{30}{48}$; b) $\frac{60}{108}$; c) $\frac{35}{60}$; d) $\frac{88}{96}$; e) $\frac{44}{143}$;
 f) $\frac{525}{625}$; g) $\frac{153}{171}$; h) $\frac{120}{225}$; i) $\frac{52}{136}$; k) $\frac{360}{1470}$.

3

- a) $\frac{30}{60}$; b) $\frac{45}{60}$; c) $\frac{50}{60}$; d) $\frac{54}{60}$; e) $\frac{16}{60}$;
 f) $\frac{40}{60}$; g) $\frac{48}{60}$; h) $\frac{21}{60}$; i) $\frac{22}{60}$; k) $\frac{52}{60}$.

4

- a) $\frac{72}{144}$; b) $\frac{108}{144}$; c) $\frac{126}{144}$; d) $\frac{112}{144}$; e) $\frac{84}{144}$;
 f) $\frac{117}{144}$; g) $\frac{136}{144}$; h) $\frac{33}{144}$; i) $\frac{78}{144}$; k) $\frac{87}{144}$.

5

- a) $\frac{72}{96}$; b) $\frac{72}{99}$; c) $\frac{72}{100}$; d) $\frac{72}{104}$; e) $\frac{72}{102}$;
 f) $\frac{72}{110}$; g) $\frac{72}{162}$; h) $\frac{72}{1044}$; i) $\frac{72}{132}$; k) $\frac{72}{864}$.

6

- a) $\frac{30}{48}$; b) $\frac{45}{81}$; c) $\frac{24}{80}$; d) $\frac{40}{136}$; e) $\frac{85}{289}$;
 f) $\frac{56}{576}$; g) $\frac{88}{144}$;

6 Lösungen

6

$$\text{h)} \quad \frac{3}{5} = \frac{15}{25} = \frac{24}{40} = \frac{33}{55} = \frac{39}{65} = \frac{117}{195} = \frac{114}{190};$$

$$\text{i)} \quad \frac{2}{3} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15} = \frac{34}{51} = \frac{52}{78} = \frac{122}{183} = \frac{168}{252};$$

$$\text{k)} \quad \frac{4}{9} = \frac{24}{54} = \frac{88}{198} = \frac{224}{504} = \frac{128}{288} = \frac{484}{1089} = \frac{248}{558};$$

$$\text{l)} \quad \frac{11}{12} = \frac{33}{36} = \frac{121}{132} = \frac{132}{144} = \frac{99}{108} = \frac{176}{192} = \frac{132}{144}.$$

7

$$\text{a)} \quad \frac{3}{4};$$

$$\text{b)} \quad \frac{3}{5};$$

$$\text{c)} \quad \frac{3}{8};$$

$$\text{d)} \quad \frac{3}{5};$$

$$\text{e)} \quad \frac{1}{4};$$

$$\text{f)} \quad \frac{7}{12};$$

$$\text{g)} \quad \frac{2}{5};$$

$$\text{h)} \quad \frac{5}{6};$$

$$\text{i)} \quad \frac{3}{7};$$

$$\text{k)} \quad \frac{3}{5};$$

$$\text{l)} \quad \frac{5}{8};$$

$$\text{m)} \quad \frac{2}{3};$$

$$\text{n)} \quad \frac{1}{4};$$

$$\text{o)} \quad \frac{4}{9};$$

$$\text{p)} \quad \frac{4}{9};$$

$$\text{q)} \quad \frac{1}{3};$$

$$\text{r)} \quad \frac{3}{8};$$

$$\text{s)} \quad \frac{2}{3};$$

$$\text{t)} \quad \frac{3}{4};$$

$$\text{u)} \quad \frac{7}{16};$$

$$\text{v)} \quad \frac{5}{9};$$

$$\text{w)} \quad \frac{7}{8};$$

$$\text{x)} \quad \frac{7}{13};$$

$$\text{y)} \quad \frac{6}{11};$$

$$\text{z)} \quad \frac{10}{13}.$$

8

$$\text{a)} \quad 72;$$

$$\text{b)} \quad 72;$$

$$\text{c)} \quad 450;$$

$$\text{d)} \quad 480;$$

$$\text{e)} \quad 360;$$

$$\text{f)} \quad 2250;$$

$$\text{g)} \quad 486;$$

$$\text{h)} \quad 720;$$

$$\text{i)} \quad 75;$$

$$\text{k)} \quad 2160.$$

9

$$\text{a)} \quad \frac{1}{12};$$

$$\text{b)} \quad \frac{6}{11};$$

$$\text{c)} \quad \frac{9}{10};$$

$$\text{d)} \quad \frac{1}{2};$$

$$\text{e)} \quad \frac{2}{9};$$

$$\text{f)} \quad \frac{12}{35};$$

$$\text{g)} \quad \frac{13}{50};$$

$$\text{h)} \quad \frac{2}{7};$$

$$\text{i)} \quad \frac{9}{22};$$

$$\text{k)} \quad \frac{1}{5};$$

$$\text{l)} \quad \frac{35}{64};$$

$$\text{m)} \quad \frac{5}{42};$$

$$\text{n)} \quad \frac{1}{9};$$

$$\text{o)} \quad \frac{1}{8};$$

$$\text{p)} \quad \frac{3}{7};$$

$$\text{q)} \quad \frac{3}{4};$$

$$\text{r)} \quad \frac{2}{3};$$

$$\text{s)} \quad \frac{5}{24};$$

$$\text{t)} \quad \frac{3}{20};$$

$$\text{u)} \quad \frac{1}{5}.$$

Test zum 2. Kapitel
1

a) $\frac{21}{28}$; b) $\frac{55}{88}$; c) $\frac{90}{195}$; d) $\frac{275}{300}$; e) $\frac{221}{273}$.

2

a) $\frac{96}{120}$; b) $\frac{105}{120}$; c) $\frac{104}{120}$; d) $\frac{85}{120}$; e) $\frac{80}{120}$.

3

a) $\frac{180}{225}$; b) $\frac{180}{390}$; c) $\frac{180}{220}$; d) $\frac{180}{212}$; e) $\frac{180}{245}$.

4

a) $\frac{28}{49}$; b) $\frac{91}{104}$; c) $\frac{55}{143}$; d) $\frac{121}{132}$; e) $\frac{120}{168}$;
 f) $\frac{3}{8}$; g) $\frac{11}{12}$; h) $\frac{15}{16}$; i) $\frac{16}{25}$; k) $\frac{13}{15}$.

5

a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{5}{8}$; c) $\frac{3}{5}$; d) $\frac{3}{5}$; e) $\frac{10}{33}$;
 f) $\frac{2}{9}$; g) $\frac{1}{2}$; h) $\frac{4}{135}$; i) $\frac{1}{3}$; k) $\frac{21}{25}$.

Zu den Aufgaben des 3. Kapitels
1

a) $\frac{2}{5}$; b) $\frac{4}{5}$; c) $\frac{7}{12}$; d) $\frac{3}{8}$; e) $\frac{2}{3}$;
 f) $\frac{1}{4}$; g) $\frac{4}{9}$; h) $\frac{5}{14}$; i) $\frac{2}{5}$; k) $\frac{4}{5}$;
 l) $\frac{8}{17}$; m) $\frac{4}{7}$; n) $\frac{6}{11}$; o) $\frac{1}{3}$; p) $\frac{6}{11}$;
 q) $\frac{4}{9}$.

6 Lösungen

- 2** a) unecht; b) echt; c) unecht; d) unecht;
e) unecht; f) echt; g) unecht; h) echt;
i) unecht; k) echt.

- 3** a) 35 €; b) 45 kg; c) 180 m; d) 184 Std.;
e) 1584 m; f) 624 kg; g) 372 m; h) 2040 €;
i) 288 km.

- 4** a) $\frac{10}{3}$; b) $\frac{14}{3}$; c) $\frac{23}{4}$; d) $\frac{39}{5}$; e) $\frac{31}{2}$;
f) $\frac{31}{8}$; g) $\frac{24}{5}$; h) $\frac{147}{16}$; i) $\frac{62}{5}$; k) $\frac{73}{5}$;
l) $\frac{229}{15}$; m) $\frac{229}{8}$; n) $\frac{131}{12}$; o) $\frac{150}{7}$; p) $\frac{205}{8}$;
q) $\frac{100}{19}$; r) $\frac{659}{12}$.

- 5** a) $1\frac{2}{5}$; b) $1\frac{4}{9}$; c) $3\frac{3}{4}$; d) $5\frac{2}{3}$; e) $3\frac{1}{9}$;
f) $4\frac{3}{5}$; g) $9\frac{5}{8}$; h) $41\frac{1}{2}$; i) $24\frac{1}{4}$; k) $9\frac{3}{4}$;
l) $70\frac{7}{11}$; m) $14\frac{8}{17}$; n) $45\frac{11}{16}$; o) $92\frac{1}{4}$; p) $47\frac{12}{23}$.

- 6** a) $136\frac{1}{2}$; b) $8\frac{3}{5}$; c) $10\frac{2}{7}$; d) $6\frac{7}{13}$; e) $5\frac{2}{3}$;
f) $26\frac{8}{9}$; g) $31\frac{3}{4}$; h) $4\frac{9}{16}$; i) $13\frac{1}{11}$; k) $31\frac{4}{11}$;
l) $4\frac{17}{25}$; m) $37\frac{3}{10}$; n) $75\frac{4}{9}$; o) $22\frac{2}{15}$; p) $16\frac{8}{55}$;
q) $198\frac{22}{45}$.

7

- | | | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| a) $1\frac{1}{2}$; | b) $3\frac{2}{3}$; | c) $3\frac{2}{3}$; | d) $5\frac{1}{3}$; | e) $1\frac{3}{5}$; |
| f) $1\frac{3}{4}$; | g) $1\frac{2}{7}$; | h) $1\frac{1}{3}$; | i) $3\frac{2}{3}$; | k) $4\frac{1}{2}$; |
| l) $2\frac{2}{3}$; | m) $2\frac{1}{4}$; | n) $1\frac{5}{6}$; | o) $2\frac{1}{8}$; | p) $4\frac{1}{6}$. |

8

- | | | | | |
|---------------------|----------------------|---------------------|----------------------|---------------------|
| a) $\frac{15}{5}$; | b) $\frac{16}{8}$; | c) $\frac{16}{4}$; | d) $\frac{84}{12}$; | e) $\frac{45}{5}$; |
| f) $\frac{36}{3}$; | g) $\frac{88}{11}$. | | | |

Test zum 3. Kapitel

1

- | | | | | |
|-----------------------|-----------------------|-------------------------|------------------------|------------------------|
| a) $\frac{23}{7}$; | b) $\frac{19}{4}$; | c) $\frac{113}{12}$; | d) $\frac{113}{9}$; | e) $\frac{386}{25}$; |
| f) $\frac{661}{35}$; | g) $\frac{435}{19}$; | h) $\frac{4762}{125}$; | i) $\frac{1483}{12}$; | k) $\frac{4263}{17}$. |

2

- | | | | | |
|---------------------|----------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| a) $2\frac{3}{5}$; | b) $6\frac{3}{4}$; | c) $2\frac{1}{2}$; | d) $3\frac{1}{2}$; | e) $2\frac{3}{4}$; |
| f) $1\frac{2}{3}$; | g) $10\frac{2}{7}$; | h) $8\frac{1}{3}$; | i) $6\frac{1}{2}$; | k) $2\frac{6}{7}$. |

3

- | | | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| a) $\frac{2}{3}$; | b) $4\frac{1}{2}$; | c) $5\frac{1}{3}$; | d) $3\frac{3}{5}$; | e) $1\frac{4}{5}$; |
| f) $5\frac{1}{3}$; | g) $6\frac{1}{6}$; | h) $7\frac{1}{9}$; | i) $6\frac{1}{2}$; | k) $9\frac{3}{5}$. |

Zu den Aufgaben des 4. Kapitels
1

- | | | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|-----------------------|----------------------|
| a) $\frac{7}{8}$; | b) $\frac{2}{3}$; | c) $1\frac{1}{3}$; | d) $1\frac{1}{4}$; | e) $\frac{5}{8}$; |
| f) $1\frac{1}{7}$; | g) $2\frac{1}{3}$; | h) $1\frac{5}{7}$; | i) $\frac{23}{24}$; | k) $2\frac{1}{25}$; |
| l) 3; | m) $1\frac{1}{5}$; | n) $2\frac{1}{2}$; | o) $1\frac{38}{39}$. | |

2

- | | | | | |
|-----------------------|----------------------|----------------------|------------------------|----------------------|
| a) $5\frac{4}{5}$; | b) $8\frac{1}{2}$; | c) $16\frac{5}{7}$; | d) $38\frac{10}{11}$; | e) $42\frac{1}{2}$; |
| f) $14\frac{1}{2}$; | g) $18\frac{1}{6}$; | h) $29\frac{7}{9}$; | i) $42\frac{4}{5}$; | k) 9; |
| l) $16\frac{7}{25}$; | m) $23\frac{1}{2}$. | | | |

3

- | | | | | |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|
| a) $\frac{3}{4}$; | b) $1\frac{5}{12}$; | c) $1\frac{7}{12}$; | d) $\frac{34}{35}$; | e) $\frac{7}{8}$; |
| f) $1\frac{26}{63}$; | g) $1\frac{31}{60}$; | h) $1\frac{7}{40}$; | i) $1\frac{1}{6}$; | k) $1\frac{11}{60}$; |
| l) $1\frac{55}{72}$; | m) $\frac{23}{28}$; | n) $1\frac{33}{40}$; | o) $\frac{103}{126}$; | p) $\frac{31}{36}$; |
| q) $1\frac{5}{54}$. | | | | |

4

- | | | | | |
|-------------------------|-------------------------|-----------------------|-------------------------|-------------------------|
| a) $2\frac{17}{60}$; | b) $2\frac{1}{8}$; | c) $1\frac{79}{80}$; | d) $2\frac{47}{180}$; | e) $1\frac{137}{150}$; |
| f) $1\frac{137}{180}$; | g) $2\frac{337}{420}$; | h) $2\frac{7}{10}$; | i) $2\frac{341}{420}$; | k) $2\frac{71}{5580}$; |
| l) $3\frac{61}{75}$; | m) $3\frac{62}{77}$. | | | |

5

- a) $13\frac{5}{12}$; b) $12\frac{13}{24}$; c) $7\frac{35}{36}$; d) $16\frac{1}{10}$; e) $15\frac{17}{42}$;
 f) $36\frac{19}{50}$; g) $15\frac{11}{12}$; h) $26\frac{1601}{1800}$; i) $46\frac{4}{15}$; k) $119\frac{371}{450}$;
 l) $165\frac{31}{120}$; m) $237\frac{71}{84}$; n) $186\frac{229}{360}$; o) $135\frac{1373}{1800}$.

6

- a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{4}$; c) $\frac{1}{5}$; d) $\frac{1}{12}$; e) $\frac{13}{24}$;
 f) $\frac{1}{10}$; g) $\frac{47}{54}$; h) $\frac{31}{84}$; i) $\frac{13}{36}$; k) $\frac{15}{22}$;
 l) $\frac{41}{66}$; m) $\frac{29}{105}$; n) $\frac{5}{24}$; o) $\frac{29}{648}$; p) $\frac{35}{66}$.

7

- a) $1\frac{5}{12}$; b) $9\frac{13}{24}$; c) $3\frac{8}{15}$; d) $8\frac{13}{15}$; e) $1\frac{139}{150}$;
 f) $5\frac{1}{4}$; g) $3\frac{25}{48}$; h) $15\frac{71}{72}$; i) $14\frac{35}{66}$.

8

- a) $\frac{5}{12} - \frac{3}{8} = \frac{1}{24}$; b) $\frac{7}{8} + \frac{15}{14} = \frac{109}{56}$; c) $\frac{4}{9} - \frac{4}{15} = \frac{8}{45}$;
 d) $4\frac{3}{10} - \frac{12}{25} = 3\frac{41}{50}$; e) $4\frac{1}{2} - 3\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$; f) $\frac{16}{33} - \frac{7}{22} = \frac{1}{6}$;
 g) $1\frac{4}{25} - \frac{14}{15} = \frac{17}{75}$; h) $\frac{25}{24} - \frac{11}{16} = \frac{17}{48}$; i) $\frac{11}{12} - \frac{5}{18} = \frac{23}{36}$;
 k) $4\frac{3}{16} - 2\frac{5}{12} = \frac{85}{48}$; l) $4\frac{1}{2} + 2\frac{2}{3} = 7\frac{1}{6}$; m) $\frac{14}{15} - \frac{18}{25} = \frac{16}{75}$;
 n) $\frac{5}{6} - \frac{8}{15} = \frac{3}{10}$; o) $\frac{8}{15} - \frac{3}{24} = \frac{49}{120}$; p) $8\frac{13}{14} - 5\frac{8}{21} = 3\frac{23}{42}$.

9

a) $x = \frac{5}{6} - \frac{3}{4}; x = \frac{1}{12};$

b) $x = 2\frac{5}{12} - \frac{17}{18}; x = 1\frac{17}{36};$

c) $x = \frac{11}{24} + \frac{25}{32}; x = 1\frac{23}{96};$

d) $x = \frac{20}{21} - \frac{8}{35}; x = \frac{76}{105};$

e) $x = 2\frac{3}{20} - \frac{7}{8}; x = 1\frac{11}{40};$

f) $x = \frac{3}{4} - \frac{7}{18}; x = \frac{13}{36};$

g) $x = \frac{5}{18} + \frac{13}{27}; x = \frac{41}{54};$

h) $x = 3\frac{5}{12} - 2\frac{3}{4}; x = \frac{2}{3};$

i) $x = 5\frac{5}{12} - 2\frac{7}{9}; x = 2\frac{23}{36};$

k) $x = \frac{14}{15} - \frac{5}{6}; x = \frac{1}{10};$

l) $x = \frac{31}{42} + \frac{19}{56}; x = 1\frac{13}{168};$

m) $x = \frac{28}{33} - \frac{9}{22}; x = \frac{29}{66};$

n) $x = 3\frac{5}{21} + 2\frac{4}{9}; x = 5\frac{43}{63}.$

10

a) $\frac{3}{4};$

b) $\frac{3}{5};$

c) $\frac{2}{3};$

d) $\frac{1}{8};$

e) $\frac{4}{11};$

f) $\frac{7}{10};$

g) $\frac{3}{8};$

h) $\frac{12}{35};$

i) $16\frac{1}{2};$

k) $13\frac{4}{5};$

l) $\frac{3}{44}.$

11

a) $8\frac{1}{3};$

b) 21;

c) $5\frac{1}{2};$

d) $256\frac{1}{4};$

e) 18;

f) $67\frac{1}{2};$

g) $54\frac{7}{9};$

h) $31\frac{1}{2};$

i) $9\frac{1}{4};$

k) $88\frac{1}{3};$

l) $3222\frac{7}{20};$

m) $862\frac{4}{5};$

n) 132;

o) $294\frac{15}{16};$

p) $1452\frac{1}{2}.$

12

- a) $\frac{2}{15}$; b) $\frac{2}{33}$; c) $\frac{1}{32}$; d) $\frac{1}{3}$; e) $\frac{5}{18}$;
 f) $\frac{1}{4}$; g) $\frac{7}{286}$; h) $\frac{9}{64}$; i) $7\frac{17}{18}$; k) $\frac{5}{49}$;
 l) 10; m) $283\frac{137}{192}$; n) $2\frac{7}{9}$; o) 490.

13

- a) $\frac{16}{81}$; b) $\frac{1}{32}$; c) $37\frac{1}{27}$; d) $5\frac{1}{16}$; e) $\frac{1}{24}$;
 f) $\frac{1}{250}$; g) 1; h) $1\frac{9}{40}$; i) $1\frac{3}{5}$; k) $22\frac{6}{7}$;
 l) $\frac{1}{64}$; m) $8533\frac{1}{3}$; n) $3\frac{220}{972}$; o) $22\frac{1}{2}$; p) $8\frac{8}{9}$;
 q) $1\frac{1}{5}$.

14

- a) $\frac{3}{4}$; b) $\frac{3}{4}$; c) $1\frac{1}{2}$; d) $\frac{3}{4}$; e) $3\frac{3}{4}$;
 f) $\frac{3}{4}$; g) $1\frac{7}{8}$; h) $17\frac{1}{2}$; i) $\frac{21}{200}$; k) $1\frac{2}{3}$;
 l) $1\frac{1}{12}$; m) $1\frac{1}{39}$; n) $\frac{3}{8}$; o) $1\frac{2}{3}$; p) $\frac{5}{12}$;
 q) $1\frac{7}{15}$; r) $\frac{24}{35}$; s) $\frac{45}{88}$; t) $1\frac{1}{10}$; u) $40\frac{3}{5}$.

15

- a) $9\frac{1}{5}$; b) $\frac{3}{10}$; c) $\frac{5}{8}$; d) $24\frac{3}{4}$; e) $\frac{1}{7}$;
 f) $\frac{9}{20}$; g) $\frac{340}{921}$; h) $\frac{70}{81}$; i) 4; k) $\frac{5}{9}$;
 l) $\frac{18}{35}$; m) $1\frac{13}{14}$; n) $1\frac{7}{8}$; o) $\frac{11}{28}$; p) $\frac{35}{96}$;

6 Lösungen

15

q) $\frac{14}{27}$; r) $\frac{112}{117}$.

16

a) $\frac{9}{8} : \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$; b) $\frac{7}{18} : \frac{5}{12} = \frac{14}{15}$; c) $\frac{9}{8} \cdot \frac{8}{9} = 1$;
d) $\frac{24}{25} : \frac{14}{15} = 1\frac{1}{35}$; e) $\frac{22}{21} \cdot \frac{28}{33} = \frac{8}{9}$; f) $\frac{7}{18} : \frac{5}{12} = \frac{14}{15}$;
g) $\frac{6}{5} : \frac{8}{9} = \frac{27}{20}$; h) $7\frac{7}{8} : 5\frac{1}{4} = 1\frac{1}{2}$; i) $\frac{14}{15} \cdot \frac{5}{12} = \frac{7}{18}$;
k) $\frac{48}{77} : \frac{32}{33} = \frac{9}{14}$; l) $\frac{21}{26} \cdot \frac{39}{77} = \frac{9}{22}$; m) $4\frac{1}{8} : 4\frac{7}{12} = \frac{9}{10}$;
n) $15\frac{3}{4} : 3\frac{1}{9} = 5\frac{1}{16}$; o) $15\frac{3}{4} \cdot 3\frac{1}{9} = 49$; p) $3\frac{1}{9} : 15\frac{3}{4} = \frac{16}{81}$.

17

a) $x = \frac{7}{18} : \frac{14}{33}$; $x = \frac{11}{12}$; b) $x = \frac{15}{28} : \frac{24}{35}$; $x = \frac{25}{32}$;
c) $x = \frac{28}{51} \cdot \frac{34}{35}$; $x = \frac{8}{15}$; d) $x = \frac{34}{35} : \frac{8}{15}$; $x = \frac{51}{28}$;
e) $x = \frac{36}{85} \cdot \frac{5}{12}$; $x = \frac{3}{17}$; f) $x = \frac{16}{77} : \frac{12}{49}$; $x = \frac{28}{33}$;
g) $x = 3\frac{1}{3} : 2\frac{1}{2}$; $x = \frac{4}{3}$; h) $x = 2\frac{1}{2} : 3\frac{1}{3}$; $x = \frac{3}{4}$;
i) $x = 5\frac{1}{3} \cdot 3\frac{3}{8}$; $x = 18$; k) $x = 8\frac{2}{5} \cdot 3\frac{3}{4}$; $x = 31\frac{1}{2}$.

18

a) $\frac{9}{14}$; b) $1\frac{1}{3}$; c) $2\frac{2}{3}$; d) $\frac{8}{9}$; e) $1\frac{11}{16}$.

Test zum 4. Kapitel
1

- a) $1\frac{1}{5}$; b) $14\frac{2}{7}$; c) $\frac{23}{24}$; d) $\frac{29}{48}$; e) $\frac{43}{72}$;
 f) $6\frac{5}{36}$; g) $\frac{69}{77}$; h) $29\frac{13}{102}$; i) $2\frac{131}{200}$; k) $48\frac{1639}{1764}$.

2

- a) $\frac{2}{3}$; b) $2\frac{1}{4}$; c) $1\frac{3}{5}$; d) $\frac{5}{96}$; e) $\frac{181}{315}$;
 f) $\frac{13}{45}$; g) $7\frac{23}{36}$; h) $1\frac{41}{42}$; i) $12\frac{1}{12}$; k) $\frac{53}{60}$.

3

- a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{9}{35}$; c) $\frac{1}{3}$; d) $\frac{35}{81}$; e) $1\frac{1}{2}$;
 f) $1\frac{13}{28}$; g) $53\frac{17}{50}$; h) $\frac{5}{9}$; i) $172\frac{1}{8}$; k) $\frac{1}{5}$.

4

- a) $3\frac{3}{4}$; b) $\frac{3}{5}$; c) $1\frac{1}{15}$; d) $113\frac{1}{3}$; e) $\frac{3}{115}$;
 f) $\frac{10}{21}$; g) $2\frac{26}{35}$; h) $2\frac{2}{27}$; i) $3\frac{3}{4}$; k) $\frac{4}{15}$.

5

- a) $2\frac{2}{15}$; b) $\frac{3}{4}$; c) $\frac{52}{81}$; d) $28\frac{4}{5}$; e) $\frac{2}{147}$.

Abschlusstest
1

- a) 112 €; b) 144 kg; c) 45 Min.; d) 4768 mm;
 e) $23\,750\text{ cm}^2 = 2\text{ m}^2\,37\text{ dm}^2\,50\text{ cm}^2$.

2

- a) 35 Min.; b) 408 g; c) 15 Stunden;
 d) 52 cm; e) 984 dm^3 .

6 Lösungen

3 a) 75 km; b) 5; c) 12; d) 15; e) 17.

4 a) 81; b) 3; c) 228; d) 338;
e) $\frac{3}{4} = \frac{18}{24} = \frac{36}{48} = \frac{144}{192}$.

5 a) $\frac{3}{7}$; b) $\frac{5}{9}$; c) $\frac{2}{81}$; d) $\frac{10}{3}$; e) $\frac{105}{16}$.

6 a) $4\frac{9}{17}$; b) $11\frac{1}{12}$; c) $3\frac{2}{71}$; d) $90\frac{8}{23}$; e) $617\frac{6}{7}$.

7 a) $\frac{29}{13}$; b) $\frac{89}{18}$; c) $\frac{675}{26}$; d) $\frac{311}{18}$; e) $\frac{518}{5}$.

8 a) $7\frac{1}{3}$; b) $3\frac{2}{5}$; c) $2\frac{23}{33}$; d) $14\frac{13}{15}$; e) $45\frac{11}{16}$.

9 a) $2 \cdot 2 \cdot 11$; b) $2 \cdot 3 \cdot 23$; c) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 17$;
d) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$; e) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$.

10 a) 240; b) 600; c) 180; d) 1320; e) 2160.

11 a) $1\frac{17}{60}$; b) $1\frac{691}{900}$; c) $37\frac{2}{15}$; d) $\frac{27}{56}$; e) $30\frac{7}{180}$;
f) $\frac{11}{30}$; g) $\frac{9}{20}$; h) $91\frac{7}{18}$; i) $\frac{1}{6}$; k) $\frac{20}{33}$;
l) $\frac{1}{10}$; m) 102; n) $\frac{35}{96}$; o) $\frac{8}{15}$; p) $\frac{2}{3}$.