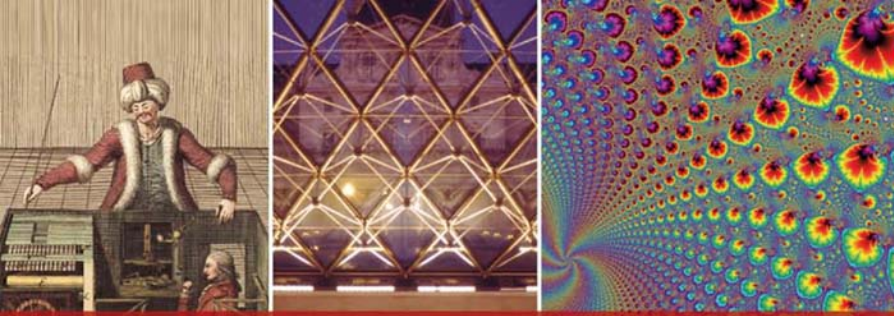


VON EULER BIS ZUR GEGENWART

H. Wußing

6000 Jahre Mathematik

Eine kulturgeschichtliche Zeitreise

Springer

Vom Zählstein zum Computer

Herausgegeben von
H.-W. Alten · A. Djafari Naini · H. Wesemüller-Kock
Institut für Mathematik und Angewandte Informatik
Zentrum für Fernstudium und Weiterbildung
Universität Hildesheim

In der Reihe „Vom Zählstein zum Computer"
sind bisher erschienen:

6000 Jahre Mathematik
Band 1: Von den Anfängen bis Leibniz und Newton
Wußing
ISBN 978-3-540-77189-0

4000 Jahre Algebra
Alten, Djafari Naini, Folkerts, Schlosser, Schlote, Wußing
ISBN 978-3-540-43554-9

5000 Jahre Geometrie
Scriba, Schreiber
ISBN 978-3-540-22471-6

Überblick und Biographien,
Hans Wußing et al. ISBN 978-3-88120-275-6
Vom Zählstein zum Computer – Altertum (Videofilm),
H. Wesemüller-Kock und A. Gottwald ISBN 978-3-88120-236-7
Vom Zählstein zum Computer – Mittelalter (Videofilm),
H. Wesemüller-Kock und A. Gottwald

Hans Wußing

6000 Jahre Mathematik

Eine kulturgeschichtliche Zeitreise – 2. Von Euler bis zur Gegenwart

Mit einem Ausblick von Eberhard Zeidler

Unter Mitwirkung von Heinz-Wilhelm Alten und Heiko Wesemüller-Kock

Mit 435 Abbildungen, davon 269 in Farbe

Springer

Professor Dr. Hans Wußing
Sächsische Akademie der Wissenschaften zu Leipzig
Karl-Tauchnitz-Str. 1
04107 Leipzig

ISBN 978-3-540-77313-9 e-ISBN 978-3-540-77314-6

DOI 10.1007/978-3-540-77314-6

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Mathematics Subject Classification (2000): 01-99, 01A05

© 2009 Springer-Verlag Berlin Heidelberg

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Einbandgestaltung: deblik, Berlin
Herstellung: le-tex publishing services oHG, Leipzig
Satz: Sylvia Voß, Hildesheim

Gedruckt auf säurefreiem Papier

9 8 7 6 5 4 3 2 1

springer.de

Vorwort des Herausgebers

Mit diesem Band 2 wird die kulturgeschichtliche Zeitreise durch 6000 Jahre Mathematik bis in die Gegenwart fortgesetzt. In spannungsreichem Bogen führt Hans Wußing in diesem Band die Leser durch die Mathematik der drei letzten Jahrhunderte, eingebettet in die politischen und kulturellen Ereignisse der jeweiligen Epoche und die lebendig beschriebenen Biographien und persönlichen Schicksale der Mathematiker als Forscher und Lehrer.

Ist Leonhard Euler mit seiner ungeheuren Schaffenskraft und Produktivität der herausragende Mathematiker im 18. Jahrhundert, Carl Friedrich Gauß der alle überragende Princeps Mathematicorum im 19. Jahrhundert, so ist David Hilbert der weltweit unumstrittene große Mathematiker im ausgehenden 19. und in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts. Ihnen widmet deshalb Hans Wußing besondere Abschnitte zwischen den Darstellungen der erstaunlichen Fortschritte und Ergebnisse vieler anderer Mathematiker in einzelnen Gebieten und Epochen.

Die durch Leibniz und Newton ausgelöste stürmische Entwicklung der Analysis und die Entstehung ihrer Teildisziplinen, die Anfänge wissenschaftlicher Wahrscheinlichkeitstheorie, enorme Fortschritte in Algebra und Zahlentheorie und die Entdeckung und Erschließung neuer Gebiete der Geometrie – darstellende, projektive, n-dimensionale und nichteuklidische Geometrie – kennzeichnen die Entwicklung im 18. und 19. Jahrhundert, Hilberts Axiomatisierung der Geometrie und Cantors Begründung der Mengenlehre den Aufbruch zu neuen Ufern an der Wende zum 20. Jahrhundert.

Das 20. Jahrhundert selbst wartet mit einer kaum beschreibbaren Fülle neuer Begriffe, Gebiete und Ergebnisse auf. Diskussion der Grundlagen, Axiomatisierung, moderne Algebra, Funktionalanalysis, algebraische Geometrie, mathematische Physik und Stochastik sind Stichworte für die erste Hälfte dieses Jahrhunderts. Strukturmathematik à la Bourbaki und Computer markieren und bestimmen die Entwicklung in der zweiten Hälfte.

All dies hat Hans Wußing auf dem Hintergrund der durch die beiden Weltkriege und die dunkle Zeit des Nationalsozialismus geprägten allgemeinen Entwicklung prägnant und lebendig beschrieben, abgeschlossen durch den Bericht über inzwischen gelöste und weiterhin ungelöste Probleme der Mathematik.

Gedanken zur Zukunft der Mathematik – so hat Prof. Dr. Eberhard Zeidler, ehem. Direktor des Max-Planck-Instituts für Mathematik in den Naturwissenschaften in Leipzig, seinen Ausblick ins 21. Jahrhundert benannt. Er beschreibt darin eindrucksvoll die derzeit behandelten Themen und Probleme und deren richtungweisende Anstöße für die Forschung zur weiteren Entwicklung der Mathematik.

Der zeitliche Schnitt zwischen den beiden Bänden erst an der Wende vom 17. zum 18. Jahrhundert ist ein deutlicher Hinweis auf die enorme Ausbreitung und Zunahme mathematischer Forschung und ihrer Ergebnisse in den letzten drei Jahrhunderten im Vergleich zu den Jahrtausenden davor.

Diese Zunahme – insbesondere der geradezu exponentielle Zuwachs im 20. Jahrhundert – war für Autor und Herausgeber eine große Herausforderung: Die Entstehung neuer mathematischer Disziplinen mit vielen Teildisziplinen und deren Verflechtung erschweren eine inhaltliche Gliederung, die zeitlich unterschiedlichen Entwicklungen desselben Gebietes eine chronologische Darstellung, und die weltweite Ausbreitung, die manchmal gleichzeitige, oft auch zeitlich versetzte mathematische Forschung in verschiedenen Ländern, Kulturkreisen oder Schulen hindern eine strenge Gliederung nach Regionen wie in den frühen Kulturen.

Das Gleiche gilt für die Einbettung der mathematischen in die allgemeine kulturelle (und politische) Entwicklung. Auch hier bietet sich ein Wechsel rein inhaltlicher, chronologischer oder nur an Regionen orientierter Darstellung an. So haben Autor und Herausgeber einen Kompromiss für die Struktur des vorliegenden Bandes gesucht.

Dem Autor Wußing ist es gelungen, die Fülle des Stoffes soweit wie möglich in den aufeinander folgenden Epochen jeweils nach Gebieten gegliedert darzustellen und parallel dazu die Entwicklung der Mathematik in einzelnen Ländern zu beschreiben, im Hinblick auf den Umfang des Bandes allerdings beschränkt auf ausgewählte Regionen. Als besonders problematisch erwies sich die Darstellung der Entwicklung im 20. Jahrhundert angesichts der kaum noch überschaubaren Fülle der Forschungsergebnisse, insbesondere in der zweiten Hälfte dieses Jahrhunderts, da sie bisher nur zum geringsten Teil mathematikhistorisch aufbereitet und bewertet wurden. So musste auch hier der Autor wieder den „Mut zur Lücke“ haben und dabei zwangsläufig eine subjektiv geprägte Auswahl treffen (siehe dazu die Ausführungen zur Historiegraphie des 20. Jahrhunderts in Kap. 11).

Mit entsprechenden Problemen sah sich der Herausgeber bei den Tabellen am Anfang und Ende der Kapitel konfrontiert. Zwar ließen sich die allgemeine politische Geschichte und die wichtigsten Ergebnisse in Technik und Naturwissenschaften chronologisch geordnet tabellarisch darstellen, jedoch nicht mehr die ungeheure Vielfalt der Ergebnisse in der Mathematik im 19. und 20. Jahrhundert in Tabellen am Kapitelende; für die zeitlich versetzten und regional verschiedenen Ausprägungen der vielen Stilrichtungen in Baukunst, Malerei, Musik und Literatur erschien eine textgebundene Darstellung angemessen.

Wie in Band 1 sind den Kapiteln chronologisch angeordnete Tabellen mit den wichtigsten politischen Ereignissen der jeweiligen Epoche vorangestellt, außerdem Tabellen zu Wissenschaft und Technik. Hingegen wird die kulturelle Entwicklung im laufenden Text beschrieben.

Auch hier illustrieren farbige Fotos den kulturellen und historischen Hintergrund, künden Briefmarken aus dem großen Schatz des Autors von der Wertschätzung der Gelehrten und ihrer Werke in aller Welt, zeigen schematische Darstellungen Zusammenhänge und zeitliche Abfolgen von Entwicklungen. Schwarz-weiß gezeichnete Figuren verdeutlichen mathematische Ergeb-

nisse, die Porträts namhafter Mathematiker vermitteln einen Eindruck von ihrer Persönlichkeit.

Auch für dieses Buch ist es uns nicht gelungen, für einige Abbildungen die Rechtsinhaber zu ermitteln bzw. unsere Anfragen blieben unbeantwortet. Betroffene und Personen, die zur Klärung beitragen können, werden gebeten, sich beim Verlag zu melden.

Der Medienwissenschaftler und Mitherausgeber Heiko Wesemüller-Kock hat die Bildseiten mit den Porträts herausragender Mathematiker der jeweiligen Epoche und das Layout des gesamten Bandes gestaltet, Fotos, Dias, Skizzen und Briefmarken aus der Sammlung des Autors mit Unterstützung von Frau Anne Gottwald zu druckfertigen Vorlagen verarbeitet und den Text durch eigene Beiträge bereichert. Dafür sage ich beiden sehr herzlichen Dank.

Den Mitarbeiterinnen im Institut für Mathematik und Angewandte Informatik Bettina David, Martina Rosemeyer und Tanja Seifert danke ich für die Übertragung der umfangreichen Manuskripte auf den Computer, dem wissenschaftlichen Mitarbeiter Mark Kaldewey und den Studentinnen Annelie Jasper, Daniela Baehr und Sylvia Voß für die mühevolle Bearbeitung der Verzeichnisse und vieler Änderungen. Mein besonderer Dank gilt Sylvia Voß und Heiko Wesemüller-Kock für die gründliche Überprüfung und den endgültigen Satz dieses Buches.

Herzlichen Dank sage ich Herrn Prof. Dr. H. Luttermann und Herrn Dr. K.-H. Schlote für ihre Beiträge in Kap. 11, Herrn Prof. Dr. E. Zeidler für die „Gedanken zur Zukunft“ in Kap. 12, den Kollegen Folkerts, Kahle, Purkert, Schlote, Sonar, Stiege und Ullrich für die kritische Durchsicht der Texte und Anregungen zu Modifikationen.

Vor allem danke ich dem Autor Hans Wußing für sein Eingehen auf meine Anregungen und die Akzeptanz meiner Vorschläge und Beiträge zur Ergänzung der Texte und Abbildungen.

Für die finanzielle Unterstützung des Projektes danke ich meinen Kollegen Prof. Dr. K.-J. Förster und Prof. Dr. E. Wagner, für die hervorragende Ausstattung dieses Bandes und das Eingehen auf meine Wünsche dem Springer-Verlag Heidelberg und seinem hierfür verantwortlichen Redakteur, Herrn C. Heine, für die Unterstützung bei der Umsetzung in die TEX-Version Frau Köhler.

Wieder war und ist es für Autor und Herausgeber ein Herzensanliegen, die weit verzweigte Entwicklung der Mathematik in ihrer engen Verflechtung mit anderen Wissenschaften vor dem jeweiligen kulturellen und gesellschaftlichen Hintergrund darzustellen. Möge auch dieser Band viele Leser erreichen, in ihnen Interesse und Begeisterung wecken und ihnen zeigen, dass Mathematik keine trockene Wissenschaft, sondern ein wertvoller Teil unserer Kultur ist und die Welt, in der wir leben, ungemein reicher macht.

Hildesheim, im Oktober 2008 Im Namen der Herausgeber
Heinz-Wilhelm Alten

Vorwort des Autors

Der Autor erinnert an die in der Einleitung des ersten Bandes beschriebene Darstellungsweise, die auf dem Gedanken der „Erkundung“ beruht. Dies ist im zweiten Band geradezu zwingend angesichts der Fülle der Einzeldaten, die aber noch keine zusammenhängende kritische Würdigung erfahren haben. Überdies zeigen mir zahlreiche wohlwollende Äußerungen zum ersten Band, dass mein methodologisches Anliegen verstanden und akzeptiert wird.

Auch diesmal sind mir Freunde und Kollegen hilfreich zur Seite gestanden, in erster Linie Herr Professor Alten (Hildesheim), Herr Wesemüller-Kock (Hildesheim) und in bibliothekarischer Sicht Frau B. Römer (Leipzig). Ihnen und vielen anderen sei für uneigennützige Hilfe herzlich gedankt.

Leipzig, im Oktober 2008 *Hans Wußing*

Hinweise für den Leser

Zur besseren Orientierung ist hier auch das Inhaltsverzeichnis von Band 1 aufgeführt.

Runde Klammern enthalten ergänzende Einschübe, Lebensdaten oder Hinweise auf Abbildungen; in Zitaten markieren sie Auslassungen.
Eckige Klammer enthalten

- im laufenden Text Hinweise auf Literatur
- unter Abbildungen Quellenangaben

Abbildungen sind nach Teilkapiteln nummeriert, z. B. bedeutet Abb. 10.1.4 die vierte Abbildung in Abschnitt 10.1 von Kapitel 10.

Die Namen russischer Gelehrter sind im Text der deutschen Aussprache entsprechend geschrieben. Im Personenverzeichnis ist außerdem die wissenschaftliche Transskription aufgeführt.

Die Originaltitel von Büchern und Zeitschriften sind kursiv wiedergegeben, wörtliche Zitate kursiv mit Anführungszeichen. Auf weiterführende Literatur bzw. auf Erläuterungen eines nur verknappt dargestellten Sachverhaltes wird durch Hinweise wie (vgl. ausführlich in. . .) verwiesen.

Im Literaturverzeichnis wird wortwörtlich oder inhaltlich zitierte sowie weiterführende Literatur aufgeführt.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung 1

9 Mathematik im Zeitalter des Absolutismus und der Aufklärung 5
9.0 Einführung 7
9.0.1 Vom Absolutismus zur Aufklärung 7
9.0.2 Baukunst, Malerei, Musik und Literatur im 18. Jahrhundert 11
9.1 Zur Theorie der unendlichen Reihen in Britannien 19
9.2 Entwicklung des Calculus auf dem Kontinent 25
9.3 Die Anfänge der Variationsrechnung 34
9.4 Zur Geschichte der Differentialgleichungen 39
9.5 Neue Möglichkeiten durch die Infinitesimalmathematik 41
9.6 Leonhard Euler 45
9.7 Entwicklungen in der Geometrie 70
9.8 Vor- und Frühgeschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung 75
9.9 Die große Zeit der Enzyklopädien 83

10 Mathematik während der Industriellen Revolution 87
10.0 Einführung 90
10.0.1 Baukunst, Malerei, Musik und Literatur im 19. Jahrhundert 90
10.0.2 Die Industrielle Revolution 98
10.0.3 Forderungen an Mathematik und Naturwissenschaften 101
10.0.4 Entwicklung wissenschaftlicher Institutionen 103
10.0.5 Technikwissenschaften und Mathematik im deutschsprachigen Raum 109
10.0.6 Charles Babbage: „Programmgesteuerte Rechner“ 116
10.1 Anwendungen der Mathematik in Natur- und Ingenieurwissenschaften 124
10.1.1 Mathematik in der Astronomie 124
10.1.2 Fortschritte in der Variationsrechnung 127
10.1.3 Mathematische Physik 128
10.2 Entwicklungen in der Geometrie 132
10.2.1 Gaspard Monge: Darstellende Geometrie 132
10.2.2 Jean Victor Poncelet: Projektive Geometrie 139
10.2.3 August Ferdinand Möbius: Geometrische Verwandtschaften 142
10.2.4 Gauß–Bolyai–Lobatschewski: Nichteuklidische Geometrie 146
10.2.5 Bernhard Riemann: Beitrag zur Grundlegung der Geometrie 159

10.2.6 Die Anerkennung der nicht-euklidischen Geometrie . . . 163
10.2.7 Felix Klein: Das sog. Erlanger Programm 167
10.2.8 David Hilbert: Axiomatisierung der Geometrie 172
10.2.9 Die allgemeine axiomatische Methode 176
10.3 Wandel in der Algebra 177
10.3.1 Carl Friedrich Gauß: Konstruierbarkeit regulärer Polygone 179
10.3.2 Carl Friedrich Gauß: Fundamentalsatz der Algebra . . 184
10.3.3 Carl Friedrich Gauß: Anerkennung der komplexen Zahlen 186
10.3.4 William Rowan Hamilton: Arithmetische Interpretation der komplexen Zahlen . . 187
10.3.5 Paolo Ruffini, Niels Henrik Abel: Unmöglichkeit der Auflösbarkeit der Gleichung fünften Grades in Radikalen 188
10.3.6 Evariste Galois: Gruppentheoretische Formulierung des Auflösungsproblems 195
10.3.7 Augustin Louis Cauchy: Theorie der Permutationen . . 199
10.3.8 Determinanten und Matrizen 199
10.3.9 William Rowan Hamilton: Quaternionenkalkül, Vektorrechnung 200
10.3.10 Arthur Cayley, George Boole: Die britische algebraische Schule 203
10.3.11 Erste algebraische Grundstrukturen: Gruppe, Körper . 206
10.4 Carl Friedrich Gauß: *Princeps Mathematicorum* 210
10.5 Entwicklungen in der Zahlentheorie 219
10.5.1 Carl Friedrich Gauß: *Disquisitiones arithmeticae* 219
10.5.2 Johann Peter Dirichlet: Analytische Methoden in der Zahlentheorie 221
10.5.3 Ernst Eduard Kummer: „Reguläre“ Primzahlen und „ideale“ Zahlen 223
10.5.4 Leopold Kronecker: „Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht“ 224
10.5.5 Richard Dedekind: „Was sind und was sollen die Zahlen?“ 226
10.5.6 Bernhard Riemann: Zetafunktion und Riemannsche Vermutung 228
10.5.7 Charles Hermite und Ferdinand Lindemann: Transzendenz von e und π 230
10.6 Analysis in neuem Gewande 232
10.6.1 Probleme in den Grundlagen der Analysis 233
10.6.2 Jean Baptiste Joseph de Fourier: Begründung der mathematischen Physik 242

10.6.3 Augustin-Louis Cauchy: Grundlagen der Analysis, Präzisierung der Begriffe ... 247
10.6.4 Bernard Bolzano: Präzise Begriffe und strenge Beweise ... 253
10.6.5 Niels Henrik Abel und Carl Gustav Jacob Jacobi: Elliptische Funktionen ... 256
10.6.6 Bernhard Riemann: Neue Auffassung von Analysis und Geometrie ... 259
10.6.7 Julius Wilhelm Richard Dedekind: Dedekindscher Schnitt ... 269
10.6.8 Karl Weierstraß: Theorie der analytischen Funktionen ... 270
10.6.9 Sofia (Sophie, Sonja) Kowalewskaja: Theorie partieller Differentialgleichungen ... 276
10.6.10 Rückblick auf die Entwicklung der Analysis während des 19. Jahrhunderts ... 278
10.7 Der Weg zur klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung ... 280
10.8 Entwicklung der Mathematik in einzelnen Regionen ... 290
10.8.1 Die Mathematik in Russland während des 19. Jahrhunderts ... 291
10.8.2 Anfänge der Mathematik in den USA ... 294
10.8.3 Mathematiker in Italien und die Einheit Italiens ... 303
10.8.4 Gründung nationaler Gesellschaften für Mathematik um die Jahrhundertwende ... 311

11 Globalisierung der Mathematik seit dem Ende des 19. Jahrhunderts ... 313
11.0 Einführung ... 318
11.0.1 Baukunst, Malerei, Musik und Literatur im 20. Jahrhundert ... 318
11.0.2 Entwicklung der Medien ... 338
11.0.3 Zur Historiographie der Mathematik des 20. Jahrhunderts ... 340
11.0.4 Mathematik und Mathematiker im 20. Jahrhundert ... 345
11.0.5 Ein Beispiel für die Internationalisierung der Mathematik: Die Rockefeller Foundation ... 348
11.0.6 Internationale Mathematikerkongresse – Auszeichnungen und Preise für Mathematik ... 355
11.0.7 Dreiundzwanzig Probleme ... 359
11.0.8 Die dunkle Zeit des Nationalsozialismus ... 363
11.0.9 Mathematik und Krieg ... 371
11.0.10 Entwicklung nach dem Zweiten Weltkrieg: Erweiterung der Anwendungsbereiche, Verschiebung inhaltlicher Schwerpunkte ... 373
11.1 Die Begründung der Mengenlehre ... 377

11.1.1 Rückblick auf die Vorgeschichte der Mengenlehre 377
11.1.2 Georg Cantor: Schöpfer der Mengenlehre 380
11.1.3 Felix Hausdorff: Grundzüge der Mengenlehre 393
11.2 Mathematisch-philosophische Strömungen 396
11.3 Eine neue Disziplin: Funktionalanalysis 407
11.3.1 Vorstufe: Integrations- und Maßtheorie 407
11.3.2 Entstehung der Funktionalanalysis 410
11.4 Algebra im 20. Jahrhundert 423
11.4.1 Herausbildung der sog. Modernen Algebra 423
11.4.2 Emmy Noether: Invariantentheorie, Idealtheorie und komplexe Systeme 428
11.4.3 Die Bourbaki-Gruppe: Algebraische Strukturen 434
11.4.4 Algebraische Geometrie (K.-H. Schlote) 435
11.5 Wahrscheinlichkeitsrechnung: Axiomatische Grundlegung 441
11.6 Mathematik in Göttingen 446
11.7 Entwicklung der Mathematik in ausgewählten Regionen 473
11.7.1 Einiges aus der Entwicklung in Frankreich 473
11.7.2 Hardy und Ramanujan – ein ungewöhnliches Beispiel internationaler Zusammenarbeit 487
11.7.3 Die polnische Schule der Topologie 490
11.7.4 Mathematik in Russland und in der Sowjetunion 492
11.8 Computer verändern die Welt 503
11.8.1 Frühe Rechentechnik, mechanische Rechenmaschinen: Ein Rückblick 506
11.8.2 Elektromechanische Rechenmaschinen: Hermann Hollerith 510
11.8.3 Programmgesteuerte elektromechanische Digitalrechner: Konrad Zuse 512
11.8.4 Entwicklungen in den USA und in England 514
11.8.5 Elektromechanische Computer 516
11.8.6 Computer mit Röhrentechnik 517
11.8.7 Pioniere moderner Rechentechnik: John von Neumann und Alan Turing 519
11.8.8 Computer mit Transistoren und Mikroprozessoren ... 522
11.8.9 Die jüngste Entwicklung der Rechenanlagen: Pipeline-Konzept, Vektorrechner und Parallelrechner (H. Luttermann) 525
11.8.10 Kybernetik: Eine Schöpfung von Norbert Wiener 529
11.9 Gelöste und ungelöste Probleme 538
11.9.1 Die Lösung des Vierfarbenproblems 538
11.9.2 Der Große Fermatsche Satz: Beweis nach 300 Jahren! 541
11.9.3 Offene Probleme der Zahlentheorie 546
11.9.4 Das „Millennium Meeting“ 550

12 Gedanken zur Zukunft der Mathematik – Ein Ausblick von Eberhard Zeidler 553
12.1 Mathematik als eine Querschnittswissenschaft 556
12.2 Strategien der Mathematik für die Zukunft 562
12.3 Zwei kürzlich gelöste berühmte Probleme der Mathematik ... 577
12.4 Berühmte offene Probleme der Mathematik 580
12.5 Die philosophische Dimension der Mathematik 583

Literatur 587

Abbildungsverzeichnis 623

Personenverzeichnis mit Lebensdaten 639

Sachverzeichnis 661

Inhaltsverzeichnis zu Band 1

Einleitung

1 Mathematik am Anfang und Ethnomathematik
- 1.1 Zählen, Zahlen, Figuren
  - 1.1.0 Einführung
  - 1.1.1 Zahlen und Zahlwörter
  - 1.1.2 Anfänge der Geometrie
- 1.2 Ethnomathematik
  - 1.2.1 Aspekte der Ethnomathematik
  - 1.2.2 Beispiel aus Afrika: Sona Geometrie
- 1.3 Kenntnisse und Leistungen der Azteken, Maya und Inka
  - 1.3.0 Zur Geschichte
  - 1.3.1 Die Azteken: Kalenderrechnung und ummantelte Pyramiden
  - 1.3.2 Die Maya: Tempel, Pyramiden und geheimnisvolle Glyphen
  - 1.3.3 Rätsel der Nazca-Kultur
  - 1.3.4 Die Inka: Polygonale Festungsmauern und Sonnenheiligtümer

2 Entwicklung der Mathematik in asiatischen Kulturen
- 2.1 Mathematik im alten China
  - 2.1.0 Das historische Umfeld
  - 2.1.1 Zahlendarstellung, Rechenbrett
  - 2.1.2 Einige Höhepunkte altchinesischer Mathematik
  - 2.1.3 Zusammenfassung
- 2.2 Entwicklung der Mathematik in Japan
  - 2.2.0 Historischer Hintergrund
  - 2.2.1 Mathematik im alten Japan
  - 2.2.2 Die Renaissance der japanischen Mathematik
- 2.3 Mathematik im alten Indien
  - 2.3.0 Vorbemerkung
  - 2.3.1 Historischer Überblick
  - 2.3.2 Wichtige Quellen altindischer Mathematik
  - 2.3.3 Geometrie in Indien
  - 2.3.4 Indische Trigonometrie
  - 2.3.5 Die Herausbildung des dezimalen Positionssystems
  - 2.3.6 Arithmetik und Algebra in der indischen Mathematik

3 Frühzeit der Mathematik im Vorderen Orient
3.1 Mathematik im alten Ägypten
3.1.0 Einführung: Geschichte und Schrift des alten Ägypten
3.1.1 Mathematische Papyri
3.1.2 Zahlensystem, Rechentechnik
3.1.3 „Hau"-Aufgaben, Pśw-Rechnungen
3.1.4 Algebraische Probleme
3.1.5 Geometrische Probleme
3.2 Mesopotamische (Babylonische) Mathematik
3.2.0 Einführung
3.2.1 Entwicklung der Keilschrift
3.2.2 Zahlenschreibweise, Zahlentafeln
3.2.3 Geometrie in Mesopotamien
3.2.4 Algebra in Mesopotamien
3.2.5 Zusammenfassung

4 Mathematik in griechisch-hellenistischer Zeit und Spätantike
4.0 Historische Einführung
4.1 Zählen, Zahlensysteme, Rechnen
4.2 Ionische Periode
4.3 Mathematik in der ionischen Periode
4.4 Mathematik in der athenischen Periode
4.5 Mathematik in der hellenistischen Periode
4.6 Mathematik bei den Römern
4.7 Die Mathematik am Ausgang der Antike
4.8 Nachwirkungen in byzantinischer Zeit

5 Mathematik in den Ländern des Islam
5.0 Historischer Überblick
5.1 Islamische Universalgelehrte des Mittelalters
5.2 Al-Ḫwārizmī (al-Choresmi) und seine „Algebra"
5.3 Spitzenleistungen in der Algebra der Muslime
5.4 Zum Zahlbegriff
5.5 Beiträge der Muslime zur Geometrie
5.6 Neue Quellen für mathematikhistorische Forschung

6 Mathematik im Europäischen Mittelalter
6.0 Vorbemerkung
6.1 Frühes Mittelalter
6.2 Hochmittelalter, Spätmittelalter
6.3 Scholastik, Gründung und Anerkennung von Universitäten
6.4 Schlussbetrachtung

7 Mathematik während der Renaissance
7.0 Historische Einführung
7.1 Neue Forderungen an die Mathematik
7.2 Rechenmeister und frühe Algebra
7.3 Fortschritte in Italien
7.4 Entwicklungen in Westeuropa
7.5 Frühe Algebra im deutschsprachigen Raum
7.6 Die sog. Deutsche Coß
7.7 Geometrie und Perspektive
7.8 Astronomie und Trigonometrie

8 Mathematik während der Wissenschaftlichen Revolution
8.0 Allgemeine Charakterisierung
8.1 Gründung von Akademien und wissenschaftlichen Gesellschaften
8.2 Algebra wird zur selbstständigen mathematischen Disziplin
8.3 Analytische Geometrie
8.4 Anfänge der projektiven Geometrie
8.5 Rechenmethoden, Rechenhilfsmittel, erste Rechenmaschinen
8.6 Zur Frühgeschichte der Infinitesimalmathematik
8.7 Durchbildung der infinitesimalen Methoden: Newton und Leibniz

Literatur

Abbildungsverzeichnis

Personenverzeichnis mit Lebensdaten

Sachverzeichnis

Einleitung

Unsere kulturgeschichtliche Zeitreise begann im ersten Band dieses Werkes mit den Leistungen früher Kulturen und führte bis zur Mathematik von Leibniz und Newton (also bis zur Wende vom 17. zum 18. Jahrhundert). Der vorliegende Band 2 lädt den Leser dazu ein, die kulturgeschichtliche Zeitreise durch 6000 Jahre Mathematik fortzusetzen. Mit Spannung lassen sich die facettenreichen Stationen der Entwicklung der letzten drei Jahrhunderte von Euler bis zur Gegenwart verfolgen. Am Beginn des 21. Jahrhunderts endet diese Reise mit Fragen an die Zukunft dieser Wissenschaft.

Vom Beginn des 18. Jahrhunderts bis in unsere Tage hat mit zunehmender Dynamik eine unglaubliche Fülle von Entwicklungen in fast allen Bereichen menschlichen Lebens auf unserer Erde stattgefunden: in der Politik, im gesellschaftlichen Leben, in der Wirtschaft, in der Medizin, in Kunst, Technik und Industrie, in der Wissenschaft – auch in der Mathematik. Diese bildet zwar nur einen kleinen Ausschnitt in der kaum noch überschaubaren Fülle wissenschaftlicher Erkenntnisse und Ergebnisse und diese wiederum nur einen kleinen Ausschnitt der gesellschaftlichen Entwicklung.

Dennoch: Mathematik durchdringt fast alle Bereiche unseres Lebens, steckt in unseren Häusern, in Geräten und Maschinen, in Autos und Automaten. Sie ist Wegbereiter und unentbehrliches Werkzeug für die Neuerungen im Transportwesen und Verkehr, in der Architektur, in Ökonomie, Industrie und Technologie, im Nachrichtenwesen und vielen anderen Bereichen, auch in Wissenschaft und Forschung selbst. Wer vermutet schon, dass er es beim Einkauf mit den schwarzen Strichen auf den Verpackungen mit Primzahlen zu tun bekommt (mit deren Hilfe die Codierung erfolgte)? Wer denkt beim digitalen Telefonieren daran, dass letztlich alle Mitteilungen nur als im Binärsystem verschlüsselte Zahlen durch die Leitungen oder per Funksignal an die Empfangsstation gesandt werden? Kurzum: Mathematik ist überall gegenwärtig, wenn auch für die meisten unsichtbar. Ohne die Anstrengungen und Ergebnisse vieler Generationen mathematischer Denker wäre unsere heutige Welt undenkbar.

Unter den jeweiligen politischen und ökonomischen Rahmenbedingungen entfaltete sich im 18. Jahrhundert ein reichhaltiges kulturelles Leben in Europa, zunächst dominant geprägt von den Höfen der zumeist absolut regierenden Herrscher. Ungeachtet aller kriegerischen Auseinandersetzungen von den Zeiten des Sonnenkönigs bis zur Französischen Revolution und zur Befreiung Europas von der Herrschaft Napoleons erlebten Kunst und Kultur einen ungeahnten Aufschwung. Neue philosophische Strömungen entstanden mit der Aufklärung, neue Theorien in Politik, Gesellschaft und Ökonomie (Merkantilismus) breiteten sich aus, die Wissenschaften konnten sich entfalten. Auch die Mathematik erfuhr neue Impulse.

Aus der von Newton mit seinen Fluxionen und von Leibniz mit dem Calculus begründeten Infinitesimalrechnung entwickelten sich als neue Gebiete

die Theorie der unendlichen Reihen, die Variationsrechnung, die analytische Mechanik und die Theorie der Differentialgleichungen. Das Ringen um das Parallelenproblem und die Wiedergabe räumlicher Objekte durch Perspektive und Mehrtafelverfahren beherrschten die Geometrie, die Wahrscheinlichkeitsrechnung wurde mit der *Ars conjectandi* von Jakob Bernoulli zur mathematischen Disziplin. Der alle überragende Mathematiker des 18. Jahrhunderts war Leonhard Euler, der in fast allen Gebieten der Mathematik Wegweisendes leistete und mit seiner *Vollständigen Anleitung zur Algebra* Generationen von Schülern und Studenten begleitete.

Der enorme Aufschwung von Kunst und Kultur im 18. Jahrhundert erlebte seine Fortsetzung im 19. Jahrhundert mit der Ausprägung alter und der Entstehung neuer Stilformen: Vom Klassizismus bis zum Jugendstil in der Baukunst, von der französischen Klassik über Romantik und Realismus zum Impressionismus in der Malerei, von der Wiener Klassik über Kompositionen der Romantik zur Großen Oper, zur Programmmusik und zum Impressionismus in der Musik, von der Weimarer Klassik über die Lyrik und Romane der Romantiker zum Realismus und Naturalismus in der Literatur.

In Wissenschaft und Technik wurde das 19. Jahrhundert geprägt von den weitreichenden Ergebnissen naturwissenschaftlicher Forschung und den zahlreichen technischen Erfindungen, die in industrieller Produktion ihren Niederschlag fanden und zur Industriellen Revolution führten. All dies konnte nur in ständiger Wechselwirkung mit der Mathematik und auf dem Hintergrund ihrer enormen Entwicklung gedeihen: Fourier begründete die „Mathematische Physik“ als neue Disziplin, die Analysis wurde durch präzise Begriffe und strenge Beweise auf eine solide Grundlage gestellt, darstellende Geometrie bildete die Grundlage für technisches Zeichnen.

Aber auch viele Gebiete rein theoretischer Forschung erlebten enormen Aufschwung, Gebiete, die um ihrer selbst willen aus wissenschaftlicher Neugier betrieben und von Vertretern der angewandten Mathematik als *„l'art pour l'art“* angesehen wurden, jedoch im 20. Jahrhundert ungeahnte Bedeutung erlangten. Dazu gehören die nichteuklidische Geometrie und die Axiomatisierung der Geometrie, die Entwicklung neuer Begriffe und Methoden in der Algebra und der Zahlentheorie und deren Verwendung zur Lösung grundlegender Probleme sowie die Begriffsbildungen der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Theorie der analytischen Funktionen. Die überragende Gestalt unter den Mathematikern des 19. Jahrhunderts ist der *Princeps Mathematicorum* Carl Friedrich Gauß, der mit seinen *Disquisitiones arithmeticae*, seinen Beweisen des Fundamentalsatzes der Algebra, der Methode der kleinsten Quadrate und vielen anderen Ergebnissen epochale Beiträge geleistet hat.

Im 20. Jahrhundert erfuhren Kunst und Kultur eine ungeheure Fülle und Vielfalt der Stilrichtungen und ihrer Ausprägung, die im Rahmen dieses Bandes nur in sehr großen Zügen und selektiv beschrieben werden kann.

Gleiches gilt für die Entwicklung von Wissenschaft und Technik: die atemberaubende Entwicklung vom Propellerflugzeug zur Raumfähre, von den elektromechanischen Rechenmaschinen des Hermann Hollerith zum Supercomputer Roadrunner der IBM, von der Entdeckung der Radioaktivität zum Atomkraftwerk und zur Kernfusion, vom Röntgenapparat zum Magnetresonanztomographen und vom Morseapparat zum weltumspannenden Internet sind Beispiele für die enorme Dynamik dieses Prozesses.

All diese Entwicklungen basieren wie die Quantentheorie Max Plancks und die Relativitätstheorie Einsteins neben den Entdeckungen der Naturwissenschaftler und den Leistungen der Ingenieure letzten Endes auch auf der Mathematik, ihren exponentiell angestiegenen Ergebnissen in der Forschung und ihrer globalen Ausbreitung. Am Beginn des 20. Jahrhunderts stehen die von Hilbert auf dem Pariser Internationalen Mathematikerkongress formulierten 23 Probleme, von denen viele inzwischen gelöst sind. Die von Georg Cantor begründete Mengenlehre und die Diskussion der von Bertrand Russell und anderen gefundenen Antinomien waren beherrschende Themen dieser Periode, ebenso die Axiomatisierung der Geometrie, die unterschiedlichen Denkweisen des Formalismus, Logizismus und Intuitionismus, die Idee der Riemannschen Fläche und die algebraische Theorie der Körper.

In manchen Gebieten wurde die mathematische Forschung im Ersten (und auch im Zweiten) Weltkrieg unterbrochen, in anderen sogar intensiviert. Zwischen den beiden Weltkriegen erfuhr die Mathematik große Fortschritte in vielen Bereichen, publiziert u. a. in den Standardwerken *Methoden der mathematischen Physik* von Courant/Hilbert, *Grundzüge der theoretischen Logik* von Hilbert/Ackermann, *Grundlagen der Mathematik* von Hilbert/Bernays, *Moderne Algebra* von van der Waerden, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik von v. Neumann, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* von Kolmogorow. Als fruchtbare neue Teildisziplinen der Analysis entstanden die Funktionalanalysis und die Topologie.

Nach dem Zweiten Weltkrieg erlebte die Algebra neuen Aufschwung in der algebraischen Geometrie und der Strukturtheorie der Bourbaki-Gruppe, deren *Éléments de mathematiques* jahrzehntelang Lehre und Studium der Mathematik prägten. Durch die Entwicklung der Computer gewann die sog. diskrete Mathematik enorm an Bedeutung. Die bis dahin mit Hilfe analytischer Methoden behandelten (und damit oft nur, schwer oder gar nicht lösbaren) Probleme werden nun durch Diskretisierung approximativ gelöst und zwar mit einer der stark gewachsenen Kapazität und Geschwindigkeit der Computer entsprechenden Genauigkeit. Die dazu entwickelten mathematischen Methoden und Algorithmen werden von Informatikern in die entsprechende Software für die Computer umgesetzt, ebenso die für die Steuerung wissenschaftlicher Prozesse entwickelten Verfahren der Optimierung, die mit Hilfe der Zahlentheorie gewonnenen Sicherungssysteme für Daten der Banken, Finanzämter und Geheimdienste, die Algorithmen für bildgebende Verfahren in der Medizin und vieles andere.

Offene und gelöste Probleme der Mathematik – so der in den 80er Jahren bewiesene Vierfarbensatz, der in den 90er Jahren bewiesene Große Satz von Fermat und die bislang weder bewiesene noch widerlegte Riemannsche Vermutung – stehen am Schluss dieser Betrachtungen.

Die auf dem *„Millennium Meeting“* am 24. Mai 2000 in Paris formulierten sieben Problemgruppen und die Gedanken zur Zukunft der Mathematik von Eberhard Zeidler in Kap. 12 weisen in die Mathematik im 21. Jahrhundert.

Heinz-Wilhelm Alten

9 Mathematik im Zeitalter des Absolutismus und der Aufklärung



1643–1715	Ludwig XIV. König von Frankreich, Höhepunkt des Absolutismus
1707	Großbritannien entsteht als Vereinigung von England und Schottland
1707–1783	Lebenszeit von Leonhard Euler
1709	E. W. v. Tschirnhaus und J. F. Böttger erfinden in Sachsen das europäische weiße Hartporzellan
1710	Erste europäische Porzellanmanufaktur in Meißen gegründet
1713	Frieden von Utrecht beendet den Spanischen Erbfolgekrieg
1714	Der Kurfürst von Hannover wird als Georg I. König von England
1715	Der „Sonnenkönig“ Ludwig XIV. stirbt in Versailles
1716	Universalgelehrter G.W. Leibniz gestorben
1725	Eröffnung der Petersburger Akademie der Wissenschaften
1725	Peter der Große gestorben
1727	Newton gestorben
1733–1743	Große russische Nordexpedition unter Vitus Bering
1735–1737	Gradmessungsexpeditionen der Pariser Akademie nach Südamerika und Lappland beweisen die Abplattung der Erde
1740–1748	Österreichischer Erbfolgekrieg
1740–1786	Friedrich II., der Große, König von Preußen
1740–1780	Maria Theresia regiert das österreichische Erbe
1741	Neugründung der Berliner Akademie
1756–1763	Siebenjähriger Krieg
1762–1796	Katharina II., die Große, regiert Russland als Zarin
1765–1790	Aufgeklärter Absolutismus in Österreich unter Kaiser Joseph II.
1768–1779	Entdeckungsreisen von James Cook
1769	James Watt erhält das Patent auf seine Dampfmaschine
1770	Australien wird britisch
ca. 1770	Beginn der Industriellen Revolution in England
1770–1785	Periode des „Sturm und Drang“ in der deutschen Literatur
1772	Erste Teilung Polens
1773	„Tea-Party“ in Boston
1774	Ludwig XVI. wird König von Frankreich
1775–1783	Unabhängigkeitskrieg in Nordamerika
1776	Unabhängigkeitserklärung von 13 Kolonien in Philadelphia
1777	Lavoisier leitet eine neue Entwicklungsetappe in der Chemie ein
1778	Carl v. Linné begründet das nach ihm benannte System der Pflanzen
1781	Immanuel Kant veröffentlicht sein Hauptwerk „Kritik der reinen Vernunft“
1783	Aufstieg eines Heißluftballons durch die Gebrüder Montgolfier
1783	Im Frieden von Paris und Versailles erreichen die USA die Unabhängigkeit
1789	George Washington wird erster Präsident der USA
1789	Sturm auf die Bastille, Französische Revolution, Verkündung der Menschenrechte
1794	Gründung der École Polytechnique in Paris

9.0 Einführung

9.0.1 Vom Absolutismus zur Aufklärung

Häufig wird die Zeit zwischen dem Ende des 30jährigen Krieges und der Französischen Revolution als Periode des Absolutismus verstanden, doch ist auch diese Periode nicht scharf eingrenzbar. Eher geht es um Charakteristika dieser politischen Staatsform, die mit einem Wandlungsprozess, mit dem Entstehen und dem Hervortreten von Nationalstaaten verbunden ist. Gemeint ist die absolute, uneingeschränkte Herrschaft einer Einzelperson – sei es Kaiser, Zar, König oder ein anderer Fürst – über eine Region bzw. Nation. Es handelt sich um die Zeit seit dem Ende des 17. Jahrhunderts, insbesondere um das 18. Jahrhundert. Aber noch zu Anfang des 19. Jahrhunderts gab es absolutistisch regierte Staaten.

Als Prototyp und als klassisches Beispiel für Absolutismus wird häufig der französische Staat unter dem „Sonnenkönig“ Ludwig XIV. (1638–1715) herausgehoben. Authentisch ist sein Ausspruch: *„Der Staat bin ich“*. Gemeint ist: In seiner Person repräsentiere sich Staat und Staatsmacht.

Auch Preußen, Österreich, Portugal, Spanien und Russland wurden absolutistisch regiert, ebenso Sachsen, Schweden und kleinere Staaten, innerhalb des Heiligen Römischen Reiches deutscher Nation. Man denke an Friedrich Schillers Konfrontation mit seinem Landesfürsten.

Preußen unter Friedrich II. („dem Großen“, 1712–1786) und Russland unter Peter I. („dem Großen“, 1672–1725) stiegen zu Großmächten im Range Frankreichs, Österreichs und Englands auf. Der Versuch Oliver Cromwells (1599–1658), in England und dem eroberten und unterdrückten Irland dauerhaft eine Republik zu errichten, schlug fehl und mündete schließlich in eine konstitutionelle Monarchie. In den Niederlanden dagegen konnte sich nach einem Befreiungskampf gegen die Spanier eine bürgerliche Republik behaupten. Die englischen Kolonien in Nordamerika konnten ihre Unabhängigkeit erringen; im Jahre 1783 wurden die USA gegründet.



Abb. 9.0.1 Ludwig XIV.; Richelieu (Frankreich 1970)

Andererseits schritt die Kolonialisierung weiter Gebiete Afrikas, Süd- und Mittelamerikas, Asiens und Australiens in großem Maßstab voran, unterstützt durch Missionierung und Handelskompanien verschiedener Kolonialmächte, die sich ihrerseits durch Piraterie und offizielle Kriegsführung zur See bekämpften.

Europa litt unter weiträumigen militärischen Verwicklungen. Spektakuläre Schlachten forderten manchmal an einem Tage bisher noch nicht gekannte Verluste an Toten und Verwundeten. Die Militärtechnik hatte in diesem zynischen Sinne „Fortschritte“ gemacht, nicht zuletzt durch Mitwirkung von Mathematik und Naturwissenschaften. Der Festungsbau wurde nach dem Vorbild des französischen Festungsbaumeisters Sébastian le Prestre de Vauban (1633–1707) zu ingenieurtechnischen Meisterleistungen fortgeführt.

Die Landkarte Europas veränderte sich als Folge der Kriege zwischen Großmächten und ihren Verbündeten, bei wechselnden Koalitionen: Türkenkriege, Raubzüge Ludwigs XIV., Pfälzischer Erbfolgekrieg, Spanischer Erbfolgekrieg, Nordischer Krieg, der Siebenjährige Krieg und schließlich die Napoleonischen Kriege.

In jüngerer Zeit haben Historiker das Adjektiv „absolutistisch“ (*ab leges absolutus* = von den Gesetzen gelöst) inhaltlich abgeschwächt und – zu Recht – auf die Zwänge verwiesen, denen auch der absolutistischste Herrscher unterworfen war: außenpolitische, innenpolitische (Stärkung der Zentralmacht gegen partikuläre Adelsinteressen), ökonomische und ideologische Widerstände und Theorien.

Stehende Heere und Kriege, Macht- und Prachtentfaltung und Repräsentationsbedürfnis erforderten Unsummen an Geld. Nach und nach bildete sich die Wirtschaftstheorie des sog. Merkantilismus heraus, die lange Zeit eine vorherrschende Rolle spielte, ehe sie von Physiokratie und kapitalistischer Wirtschaftstheorie abgelöst wurde.

Das Wort „Merkantilismus“ scheint erst 1763 vom Marquis de Mirabeau (1749–1791) geprägt worden zu sein und leitet sich ab vom lateinischen „mercari“, d. h. Handel treiben. Nach merkantilistischer Auffassung beruhen Reichtum und Stärke eines Staates auf der Menge an Gold und Edelmetallen, über die der Staat verfügt. Der führende Theoretiker des Merkantilismus, der Franzose Jean Baptiste Colbert (1619–1683), Finanzminister von Ludwig XIV., hatte es auf den Punkt gebracht:

> *„Ich glaube, man wird sich ohne weiteres in dem Grundsatz einig sein, daß es einzig und allein der Reichtum an Gold ist, der die Unterschiede an Größe und Macht zwischen den Staaten begründet.“*

Der Theorie zufolge muss bei der Förderung von Handel und Gewerbe mehr exportiert (Zufluss von Geld) als importiert (Abfluss von Geld) werden. Bei vorausgesetzter konstanter Geldsumme auf der Erde kommt es notwendigerweise zu Verschiebungen bei der Gewichtung von Staaten und damit zu Kriegen.



Abb. 9.0.2 Sébastian le Prestre de Vauban, der Baumeister der Festungen des Sonnenkönigs (Frankreich 1955); Jean Baptiste Colbert, Finanzminister Ludwigs des XIV. und Mitbegründer des Merkantilismus (Frankreich 1944)

Zur Verbesserung der Produktion und zur Erhöhung des Gewinnes verlagerte sich die Produktion zunehmend vom Handwerk zu den Manufakturen. Der Erfolg des Manufakturwesens beruhte darauf, dass der Produktionsprozess in einzelne Teile zergliedert wurde, die Arbeitsschritte immer wiederholt und zudem von nur angelernten, auf eben diesen Schritt festgelegten Arbeitskräften bewältigt werden konnten. Auch Mathematik und Naturwissenschaften hatten, wie sich zeigen sollte, einen beträchtlichen Anteil an der Produktivität der Manufakturen.

Die Ausweisung der Hugenotten aus Frankreich, wo sie starke Positionen in Wirtschaft und Politik innegehabt hatten, schwächte Frankreichs Ökonomie so erheblich, dass Vauban die Rückkehr der Hugenotten forderte.

Während der Wissenschaftlichen Revolution hatten Mathematik und Naturwissenschaften nach Inhalt und Methode eine durchgreifende Wandlung erfahren und hohe gesellschaftliche Anerkennung errungen. Auch im Institutionellen hatten die Wissenschaften feste Verankerungen finden können, vom Publikationswesen bis hin zur Gründung von Gesellschaften und Akademien [Grau 1988], (vgl. Bd. 1, Kap. 8).

Akademien boten auch und gerade den Wissenschaftlern verlässliche Heimstatt, sofern sie die Interessen der Herrscherhäuser und deren Repräsentationsbedürfnis befriedigen konnten. Es gab Spannungen unterschiedlicher Art. So hing das Gedeihen der Petersburger Akademie nicht unbeträchtlich davon ab, wer Favorit der Zarin Katharina II. (1729–1796) war. Bekannt ist die Zurücksetzung Leonhard Eulers gegenüber dem Franzosen Maupertuis an der Preußischen Akademie: Eulers leicht frömmelnde Art ließ kein gutes Verhältnis zu Friedrich II. aufkommen. Dazu trat das jämmerliche Versagen der Wasserspiele in Sanssouci, an dem Euler jedoch keine Schuld traf. Auch gab es antisemitische Strömungen, wiewohl der König erklärt hatte, es könne

jeder seiner Untertanen nach seiner eigenen Façon selig werden. Als nämlich der weithin anerkannte jüdische Aufklärungsphilosoph Moses Mendelssohn (1729–1786) von den Mitgliedern der Preußischen Akademie einstimmig hinzugewählt worden war, verweigerte der König die Zustimmung und verhinderte damit die Aufnahme in die Akademie.

Doch soll bekräftigt werden: Bei allen Misshelligkeiten und der letztlichen Unterordnung der Tätigkeit der Akademien unter die Ziele der Herrscherhäuser erlaubten es die Gegebenheiten an den Akademien den Wissenschaftlern auch, ihre eigenen Fragestellungen und Ziele – „rein“ oder „angewandt“ – zu verfolgen. Die Ergebnisse gaben den Wissenschaftlern Recht, zumal im Zusammenwirken mit der Aufklärung.

Aufklärung war durchaus unterschiedlich im gedanklichen und theoretischen Ansatz; sie bewegte sich, grob gesprochen, zwischen dem Empirismus und der Denkweise von Francis Bacon einerseits und dem Rationalismus von Descartes andererseits. Aufklärung umfasste – was Mathematik und Naturwissenschaften betraf – die Ergebnisse der Wissenschaftlichen Revolution.

Aufklärung und Wissenschaft waren natürliche Verbündete und stützten sich gegenseitig, auch bei anderen Zielstellungen. Auch die der Aufklärung weniger Nahestehenden profitierten von der allgemeinen Grundstimmung. Und schließlich trug die Aufklärung nicht unerheblich zur Überwindung von Feudalismus und Absolutismus bei.

Die Ziele der Aufklärung erfassten im 17. und 18. Jahrhundert ganz Europa und Nordamerika. Aufklärung markiert eine äußerst bedeutsame Periode der europäischen Geistesgeschichte. Es ging darum, sich von Vorurteilen zu lösen, die Berechtigung weltlicher und geistlicher Obrigkeiten kritisch zu hinterfragen, Platz für neu zugänglich gewordene mathematische und naturwissenschaftliche Einsichten zu eröffnen und den menschlichen Verstand als oberste Instanz für Rechtfertigung oder Abänderung gesellschaftlicher Zustände einzusetzen. Vernunft werde die Wahrheit ans Licht bringen. Auch herrschte die Vorstellung, Vernunft und Freiheit des Denkens würden Armut und Unterdrückung schließlich besiegen können.

Die Aufklärung hatte ihre Wurzeln in England und Frankreich, griff nach Deutschland und den Niederlanden über und erfasste Russland.

Auch erkannte man, dank außerordentlich verbesserter Reisemöglichkeiten, den hohen Stand fremder Kulturen, wie z. B. von Persien und China, herausgehoben etwa vom Baron von Montesquieu bzw. von Leibniz.

Die Liste der Aufklärer ist lang; sie umfasst unter anderem die folgenden Pioniere menschlichen Denkens, von denen jeder auf seinem Gebiet Bedeutendes geleistet hat:

John Locke und David Hume in England; Baruch Benedictus de Spinoza in den Niederlanden; Marquis de Pombal in Portugal; Denis Diderot, Jean d'Alembert, Voltaire, Charles de Montesquieu, Marquis de Condorcet, Claude Adrien Helvétius, Jean-Jacques Rousseau in Frankreich; Leibniz, Gotthold Ephraim Lessing, Christian Wolff, König Friedrich II., Johann Gottfried Her-



Abb. 9.0.3 Voltaire in verschiedenen Lebensaltern (Monaco 1994); I. Kant

der, Immanuel Kant in Deutschland; Kaiser Joseph II. in Österreich; Stanislaus II. (Stanislaw August Poniatowski) in Polen; Zar Peter I. in Russland. Kant hat 1784 die Frage beantwortet, was Aufklärung sei:

> *„Aufklärung ist der Ausgang des Menschen aus seiner selbstverschuldeten Unmündigkeit. Unmündigkeit ist das Unvermögen, sich seines Verstandes ohne Leitung eines anderen zu bedienen. Selbstverschuldet ist diese Unmündigkeit, wenn die Ursache derselben nicht am Mangel des Verstandes, sondern der Entschließung und des Mutes liegt, sich seiner ohne Leitung eines anderen zu bedienen. Sapere aude! Habe Mut, dich deines eigenen Verstandes zu bedienen! ist also der Wahlspruch der Aufklärung.“* [Kant 1999, S. 20]

9.0.2 Baukunst, Malerei, Musik und Literatur im 18. Jahrhundert

(H.-W. Alten)

Kunst und Kultur erlebten im 18. Jahrhundert in Europa ungeachtet aller Kriege einen ungeahnten Aufschwung, angeregt durch philosophische Strömungen, neue Theorien in Politik, Gesellschaft und Wirtschaft, zugleich fußend auf dem reichen Erbe vorangegangener Zeiten, belebt durch mehrfachen Wandel der Auffassungen und Ideen.

Baukunst

So bescherte die Baukunst zunächst reife Früchte im Stile des späten Barock, wandelte sich von dessen prunkvoller Schwere zu den ovalen (präzise: elliptischen) Zentralbauten mit den ins Leichte, Zierliche und Zarte aufgelösten Formen des Rokoko, das in den prachtvollen Schlössern und Kirchen Süddeutschlands (z. B. Würzburger Residenz, Amalienburg, Wieskirche, Kirchen

in Steinhausen, Schussenried und Zwiefalten) als „bayerisches Rokoko“ bzw. „schwäbisches Barock“, in Preußen als „friderizianisches Rokoko“ (Sanssouci), in Russland in den Prunkbauten Rastrellis (Winterpalais, Peterhof), im Louis-Quince-Stil des französischen Rokoko und andernorts seine eindrucksvollen Zeugen hervorbrachte. Als herausragende Beispiele und Baumeister des späten Barock seien hier genannt: Schloss und Grand Trianon in Versailles von Jules Hardouin Mansart (1646–1708), die geometrisch strengen Parkanlagen von Adrien Le Nôtre (1612–1700), die St.-Pauls-Kathedrale von Sir Christopher Wren (1632–1723) in London, die bizarren Fassaden in dem nach José Churriguera (1650–1723) benannten Stil in Salamanca und Madrid, die Kirchen und Schlösser der vier Brüder Dientzenhofer mit den von ihnen eingeführten Gewölbeformen in Böhmen und Franken, die zahlreichen Kirchenbauten von Kilian Ignaz Dientzenhofer (1689–1751) mit der Durchdringung von Lang- und Zentralbau im „böhmischen Spätbarock“, Zeughaus und Stadtschloss von Andreas Schlüter (ca. 1662–1732) in Berlin, Schloss Charlottenburg in Berlin und Sanssouci in Potsdam von Georg Wenzeslaus von Knobelsdorf (1699–1753), der Zwinger von Daniel Pöppelmann (1660–1714) und die Frauenkirche von Georg Bähr (1666–1738) in Dresden, die Kirchen und Schlösser der Baumeister Johann Bernhard Fischer von Erlach (1656–



Abb. 9.0.4 Bibliothek der Klosteranlage Schussenried. Der Bibliothekssaal im „schwäbischen Barock“ ist der berühmteste Teil der von Dominikus Zimmermann geplanten spätbarocken Anlage. Das Deckenfresko wurde 1757 von Franz Georg Hermann vollendet [Foto Alten]



Abb. 9.0.5 Katharinenpalais in Puschkin bei St. Petersburg, eine der Prunkbauten Rastrellis unter den russischen Zaren. Schon Peter d. Gr. hatten die barocken Schlösser und Herrensitze in Frankreich als Vorbild gedient. Westtor zum Zwinger in Dresden, dem berühmten spätbarocken Bau von Daniel Pöppelmann [Foto Alten]

1723), Lukas von Hildebrandt (1668–1745), Jakob Prandtauer (1660–1726), Balthasar Neumann (1687–1757) und der Brüder Asam in Österreich und Bayern, die vielfach dem auch als Spätbarock bezeichneten Rokoko zugerechnet werden.

Für die Bauten im Stil des „bayerischen“ und des “friderizianischen“ Rokoko sind Johann Michael Fischer (ca. 1692–1766), Dominikus Zimmermann (1685–1766), François Cuvilliés (1695–1768) und Georg Wenzeslaus von Knobelsdorff die bedeutendsten Vertreter, für den Stil Louis-Quinze Germain Boffrand (1667–1754).

Die Rückbesinnung auf die klaren Formen der klassischen Antike machte Johann Joachim Winckelmann (1717–1768) mit seinen Gedanken über die Nachahmung griechischer Werke (1755) zum Wegbereiter des Klassizismus. Die architektonisch strengen Bauten in diesem Stil – das Brandenburger Tor von Carl Gotthard Langhans (1732–1808) in Berlin, die Akademie der Wissenschaften, das Eremitage-Theater und die Dreifaltigkeitskathedrale in Petersburg, das Panthéon und Sainte-Geneviève in Paris, das Petit-Trianon in Versailles und die Bauten der Brüder Adam in England und Schottland seien



Abb. 9.0.6 Invalidendom und Pantheon in Paris. Deutlich zeigt sich in diesen Kuppelbauten der Wandel vom Spätbarock zum Klassizismus [Foto Alten]

als Beispiele genannt – lösten die beschwingten Formen des Rokoko in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts ab und bestimmten die Architektur bis weit ins 19. Jahrhundert.

Entsprechende Perioden prägten auch die Bildhauer im 18. Jahrhundert, fanden Ausdruck in den berühmten Reiterdenkmälern des Großen Kurfürsten von Andreas Schlüter in Berlin und Peters d. Gr. von Etienne-Maurice Falconet (1716–1791) in St. Petersburg, in den Skulpturen des Dresdner Zwingers von Balthasar Permoser (1651–1732) sowie in Prunksarkophagen, Marmorstandbildern und Gartenskulpturen (z. B. Veitshöchheim), aber auch in den Porzellanfiguren der Manufakturen in Sèvres, Meißen, Nymphenburg und andernorts.

Malerei

Die berühmtesten Werke der Malerei in der Zeit des Barock entstanden bereits im 17. Jahrhundert. Sie wurden geschaffen von den großen flämischen Meistern Peter Paul Rubens (1577–1640), Jakob Jordaens (1593–1678) und Anthonis van Dyck (1599–1641), von den berühmten holländischen Malern

Rembrandt van Rijn (1606–1669), Franz Hals (1580/84–1660), Jacob van Ruisdal (1628/29–1682) und Johannes Vermeer van Delft (1632–1675) sowie von den spanischen Malern Diego de Silva Velásquez (1599–1660), Francisco de Zurbaràn (1598–1664) und Bartolome Esteban Murillo (1618–1682).

Im 18. Jahrhundert erlebte die Malerei eine unerhörte Blüte in den Gewölbe-Fresken des späten Barock und des Rokoko in Kirchen und Schlössern – die Wieskirche, die Wallfahrtskirchen in Steinhausen und Zwiefalten und die Würzburger Residenz seien als herausragende Beispiele genannt – aber auch in den Altarbildern, in den anakreontischen Bildern galanter Feste und den Ansichten berühmter Städte, schließlich in den Deckengemälden, Porträts und Landschaftsbildern des Klassizismus der Goethezeit und der frühen Romantik.

Musik

Wahre Triumphe feierte die Musik im 18. Jahrhundert: die Barockmusik erreichte ihre Höhepunkte in den Concerti grossi und Oratorien von Arcangelo Corelli (1653–1713), Alessandro Scarlatti (1660–1725), Antonio Vivaldi (um 1680–1743), Georg Philipp Telemann (1681–1767) und Georg Friedrich Händel (1685–1759), in dem gigantischen Werk des alle überragenden Johann Sebastian Bach (1685–1750) – seine Passionen, die Brandenburgischen Konzerte, das Wohltemperierte Klavier und die Kunst der Fuge seien hier aufgeführt – aber auch in den Klavierkompositionen von Domenico Scarlatti (1685–1757) und den Violinkonzerten und -sonaten von Giuseppe Tartini (1692–1770). Die nach den Regeln des Kontrapunktes komponierten Werke des Barock – insbesondere die Fugen – haben aufgrund ihrer formalen Struktur das Interesse der Mathematiker geweckt und sind deshalb wiederholt von Algebraikern (und ihren Studenten) mit gruppentheoretischen und verwandten Methoden analysiert worden.

Die tänzerisch-beschwingte Musik des Rokoko fand ihren Ausdruck in den Suiten von François Couperin (1668–1733), während Jean Philippe Rameau (1712–1778) mit seinen Opern und Balladen als Begründer der modernen Harmonielehre gilt und auch Jean-Jacques Rousseau mit einem Singspiel und den *Lettres sur la musique française* einen Beitrag zur Entwicklung der Musik in Frankreich lieferte.

Die Form der Oper wurde von Domenico Pergolesi (1710–1736) aus dem Singspiel als Urform der komischen Oper, von Christoph Willibald Gluck (1714–1791) als dramatische und als komische Oper geschaffen und von Domenico Cimarosa (1749–1801) und Luigi Cherubini (1760–1842) weiter entwickelt.

In Deutschland vollzog die sog. Mannheimer Schule den Übergang vom polyphonen zum harmonischen Stil, der dann in der „Wiener Klassik“ seinen einsamen Gipfel erreichte, geprägt in der Zeit von 1781–1827 vom Dreigestirn der großen Meister: Joseph Haydn (1732–1809), Wolfgang Amadeus Mozart
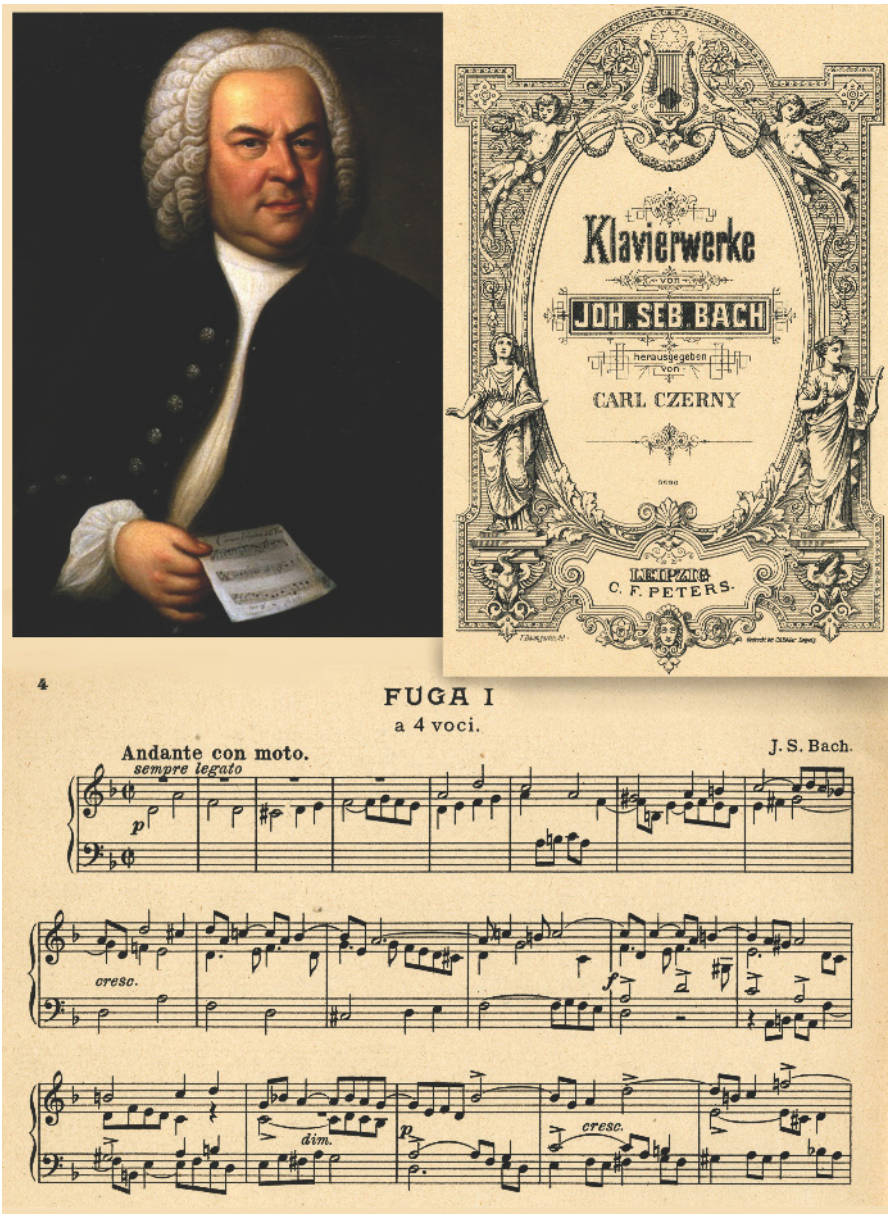


Abb. 9.0.7 Johann Sebastian Bach (Gemälde von E. G. Haußmann), der große Meister der Barockmusik hat den Höhepunkt seiner Werke in der nach den Regeln des Kontrapunktes komponierten Kunst der Fuge erreicht

(1756–1791) und Ludwig van Beethoven (1770–1827). Mit ihren Sinfonien, Instrumentalkonzerten, Opern und Messen, mit den Sonaten für Klavier, Violine, Cello und andere Instrumente, mit Liedern und dem weitgespannten Oeuvre der Kammermusik – vom Streichduo über Trios und Quartette bis zum Septett – schufen sie unvergängliche Werke, eine unerhörte Fülle unsterblicher Musik und wurden zum Vorbild für nachfolgende Generationen.

Literatur

Ähnliche Höhepunkte erlebte die Literatur im 18. Jahrhundert. Waren es zunächst Charles de Secondat, Baron de la Brède et Montesquieu (1689–1755) und François-Marie Arouet, genannt Voltaire (1694–1778), dann Jean-Jacques Rousseau (1712–1778) und Denis Diderot (1713–1784), die mit ihren Schriften zur Kulturphilosophie und Philosophie des Rationalismus die Grundlagen der Aufklärung legten, den „Sturm und Drang“ befruchteten und weithin sich auswirkende Beiträge zur Gesellschaftstheorie und Pädagogik (*Contrat social, Émile*) leisteten, so erwies sich in Deutschland Johann Christoph Gottsched (1700–1766) mit seinem Kampf für Klarheit in Sprache und Dichtung als Anhänger der Aufklärung, während Friedrich Gottlieb Klopstock (1724–1803) mit seiner Erlebnisdichtung in Oden und Epen der Durchbruch vom Rationalismus zum „Sturm und Drang“ gelang und Johann Gottfried Herder (1744–1803) mit seinen Schriften und Übersetzungen den Sturm und Drang anregte und zum Begründer der neuen deutschen Geschichtsphilosophie wurde.

Hatten noch Johann Wilhelm Ludwig Gleim (1709–1803), der junge Goethe und andere in schwärmerischer Poesie, scherzhaften Liedern und Balladen Wein, Liebe und anakreontische Schäferidylle besungen, Christoph Martin Wieland (1733–1813) in seinen eleganten Vers- und Prosaerzählungen die Gesellschaftskultur des Rokoko gespiegelt, Gotthold Ephraim Lessing (1729–1781) dem deutschen Drama neue Wege gewiesen und Pierre Augustin Caron de Beaumarchais (1732–1799) in seinen Komödien die gesellschaftlichen Zustände des Ancien Régime verspottet, so wurden der „Magier des Nordens“ Johann Georg Hamann (1730–1788), die Mitglieder des Göttinger Hainbundes (Gottfried August Bürger (1747–1794), Matthias Claudius (1740–1815), Ludwig Christoph Heinrich Hölty (1748–1776), die Grafen Stolberg (1748–1821 bzw. 1750–1819), Johann Heinrich Voß (1751–1826) u. a.) und Herder zu Wegbereitern einer neuen Bewegung der deutschen Literatur, die sich gegen die herrschenden Richtungen des Rokoko, des Klassizismus und der Aufklärung erhob. Als „Sturm und Drang“ oder auch als „Geniezeit“ vom Ende der 60er bis zum Anfang der 80er Jahre ist diese Periode in die Literaturgeschichte eingegangen. Ihre hervorragenden Werke stammen von Goethe (Götz von Berlichingen), Schiller (Kabale und Liebe, Don Carlos), von Friedrich Maximilian von Klinger (1752–1831) und Jakob Michael Reinhold Lenz (1751–1792).



Abb. 9.0.8 Goethe und Schiller, Denkmal der beiden großen deutschen Dichter vor dem Nationaltheater in Weimar [Foto Andreas Trepte]

Die Herzogin Anna Amalia von Sachsen-Weimar zog 1772 Wieland nach Weimar, förderte den jungen Goethe und bahnte mit ihrem literarischen Kreis die große Zeit Weimars im deutschen Geistesleben an. Ihr Sohn Karl-August prägte die Stadt durch die Bauten im klassizistischen Stil, berief Goethe, Herder und Schiller nach Weimar und leitete damit die Jahrzehnte währende Hochblüte der deutschen klassischen Literatur in der kleinen sächsischen Residenzstadt ein, die Weimarer Klassik. Über die Werke der „Dichterfürsten" Johann Wolfgang von Goethe (1749–1832 , geadelt 1782) und Friedrich von Schiller (1759–1805, geadelt 1802), über Inhalt und die Wirkung ihrer umfangreichen Poesie und Prosa hier im Detail zu berichten, hieße Eulen nach Athen tragen und würde auch Ziel und Umfang dieses Buches sprengen.

Am Ausgang des Jahrhunderts entstand die ursprünglich ästhetisch-literarisch ausgerichtete Bewegung der Romantik, breitete sich in den folgenden Jahrzehnten in nahezu alle Gebiete kulturellen und geistigen Lebens aus. In Jena und Berlin bildeten sich die Zentren der von ca. 1789 bis 1802 währenden Frühromantik. Wilhelm Heinrich Wackenroder (1773–1798), Ludwig Tieck (1773–1853), Jean Paul (eigentl. Richter, 1763–1825), August Wilhelm v. Schlegel (1767–1845), Friedrich v. Schlegel (1772–1829) und Friedrich von Hardenberg (Novalis) (1772–1801) gehören zu den herausragenden Vertretern in der Literatur dieser ersten Phase der Romantik, gefolgt von Adalbert von Chamisso, Friedrich de la Motte-Fouqué, Friedrich Wilhelm Joseph Schelling und vielen, vielen anderen im 19. Jahrhundert.

Zeitlich parallel zur Entwicklung der deutschen Literatur entstanden im 18. Jahrhundert in England die Abenteuerromane von Daniel Defoe (1600–1731), die grotesken Satiren von Jonathan Swift (1667–1745), die Komödien, Tragödien und Epen von Alexander Pope (1688–1744), die Sittenromane von Henry Fielding (1707–1754) und die Schauerliteratur von Horace Walpole, Earl of Oxford (1717–1797). In Italien schuf Carlo Goldoni (1707–1793) den Stil der italienischen Charakter-Komödie, Gaspare Gozzi (1713–1786) begründete den italienischen Journalismus, während sein Bruder Carlo Gozzi (1720–1806) die Commedia dell' arte mit seinen Märchenspielen verteidigte.

In Russland trat Michail Wasiljewitsch Lomonossow (1711–1765) neben seinem Einsatz für die wissenschaftliche Chemie mit seinen Epen, Oden und Dramen hervor, in Schweden zählen die Reisebeschreibungen des Naturforschers und Schöpfers der botanischen Fachsprache und binären Nomenklatur Carl von Linné (1707–1778) zur klassischen Literatur, und König Gustav III. (1746–1792) war mit seinen Dramen, als Gründer von Oper und Nationaltheater und als Stifter der Schwedischen Akademie ein begeisterter Förderer von Kunst und Wissenschaft.

Es ist ein weites, hochinteressantes aber hier nicht darstellbares Lehr- und Forschungsgebiet, den engen Verbindungen und wechselseitigen Beziehungen zwischen Mathematik, Architektur und Musik im einzelnen nachzugehen. Für die Beziehungen zur Literatur sei verwiesen z. B. auf die Studien von H. M. Pycior, P. Schreiber und K. Radbruch.

9.1 Zur Theorie der unendlichen Reihen in Britannien

Erst durch Newton wurde die Theorie unendlicher Reihen zu einem eigenständigen Forschungsgebiet in der Mathematik, das dann in Britannien besondere Beachtung und weitere Entwicklung durch Brook Taylor und Colin Maclaurin erfuhr.

Nur zur Erheiterung sei eine *„Reihensummation“* von dem in Pisa wirkenden Mönch und Professor Guido Grandi (1671–1742) angeführt.
Er betrachtete die Reihe

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots \ .$$

Da bei verschiedener Beklammerung

$$\begin{aligned} &\text{entweder } (1-1) + (1-1) + \dots \\ &\text{oder } 1 - (1-1) - (1-1) - \dots \end{aligned}$$

die Reihe entweder 0 oder 1 als Summe „*ergab*“, interpretierte Grandi dies in einer durchaus ernst gemeinten Abhandlung als Beweis für die Möglichkeit Gottes, die Welt aus dem Nichts zu schaffen. Andere Mathematiker wieder wiesen der Reihe unter diesem Dilemma die Summe $\frac{1}{2}$ zu – eine interessante

Festlegung, denn die im 19. Jahrhundert für divergente Reihen entwickelten Limitierungsverfahren liefern für diese Reihe die „*Summe*“ $\frac{1}{2}$! Und das am Ausgang des 17. Jahrhunderts, als die Reihenlehre schon eine weitgehend fundierte Basis erhalten hatte!

Die eigentliche Entwicklung verlief natürlich seriös, aber auch Euler hat in großer Zahl „Summationen“ divergenter Reihen angegeben, die sich im Sinne der später entwickelten Limitierungsverfahren rechtfertigen lassen und in diesem Sinne „seriös“ sind. Bekanntlich hatte Wallis die Integration der Potenzfunktionen angegeben. Wir schreiben

$$\int x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \quad \text{für } n \neq -1 \ .$$

Die Quadratur der Hyperbel führt auf den Ausnahmefall $n = -1$. An diesem Problem versuchten sich mit Erfolg der Engländer William Brouncker (ca. 1620–1684), der Schotte James Gregory (1638–1675) und der aus Norddeutschland stammende Nicolaus Mercator (1620–1687). Sie gaben Reihenentwicklungen für die Logarithmus-Funktion an.

Brouncker fand 1668 auf geometrischem Wege durch Quadratur eines Flächenstückes unterhalb der Hyperbel $yx = 1$ eine Reihe, die wir heute als

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \ln 2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \ldots$$

schreiben.

Im selben Jahre noch erschien eine Arbeit von Gregory, die sich mit der Quadratur des Kreises und der Hyperbel befasste: *Geometriae pars universalis* (Allgemeiner Teil der Geometrie). Dort treten die Worte „*divergent*“ und „*konvergent*“ (von lat. vergo, sich nähern) als Fachausdrücke auf.

Überhaupt war 1668 ein für die Reihenlehre bedeutendes Jahr: Mercator gab ein Buch unter dem Titel *Logarithmotechnica* heraus, das den Zusammenhang zwischen Logarithmusfunktion und Hyperbelquadratur deutlich herausstellte. Da die Integrationsformel für die Potenzen x^n für $n = -1$ versagt, ging Mercator vom Integranden $\frac{1}{1+x}$ aus, entwickelte diesen durch formale Division in eine Reihe

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - + \ldots$$

und erhielt durch gliedweise Integration (!)

$$\int_0^x \frac{1}{1+x} \mathrm{d}x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \ldots$$

die Potenzreihe für $\ln(1+x)$.

Leibniz ging einen ganz anderen Weg, über arithmetische Reihen. Wie er rückblickend (1716) schreibt, hatte er von der Entwicklung in England keine Ahnung:

> *„Es ist gut zu wissen, dass ich bei meiner ersten Reise nach England im Jahre 1673 nicht die mindeste Kenntnis von den unendlichen Reihen hatte, wie Herr Mercator sie soeben gegeben hatte, ebensowenig von den andern Materien der Geometrie nach ihrem Fortschreiten infolge der jüngsten Methoden. Ich war nicht einmal in der Analysis des Descartes hinlänglich bewandert. Ich behandelte die Mathematik bloss wie ein Parergon* (etwa: Beiwerk, Anhängsel, Wg.); *ich kannte nur die Geometrie des Unteilbaren von Cavallieri* (...) *Aber noch mehr fand ich meine Lust an den Eigenschaften der Zahlen* (...) *Und da ich seitdem den Nutzen der Differenzen für die Summen beobachtet hatte, so wandte ich sie auf die Reihen der Zahlen an.“*
> [Reiff 1889, S. 41f.]

Der junge Leibniz, damals im Vollgefühl seiner Ambitionen und seiner Erfindungsgabe, hatte – wie er schreibt – Summen von unendlichen Reihen gesucht und sogar hochtrabend verkündet, er könne die Summe jeder unendlichen Reihe angeben – er hatte die Schwierigkeiten bei weitem unterschätzt. Beim Aufenthalt in London stellte ihn John Pell (1611–1685) auf die Probe und gab ihm eine Aufgabe, an der er scheitern musste. Immerhin aber gelang Leibniz unter anderem die Summation der Reihe der reziproken Dreieckszahlen.
Gesucht ist die Summe der Reihe

$$A = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots , \quad \text{also} \quad \frac{1}{2}A = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots$$

Diese Reihe vergleicht Leibniz mit der Reihe

$$B = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots \quad \text{bzw. mit} \quad B - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

Durch Addition von $B - 1$ und $\frac{1}{2}A$ erhält er

$$B - 1 + \frac{1}{2}A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = B \ .$$

Daraus folgt: Die Reihe A hat die Summe 2. Das Ergebnis ist sogar richtig, aber die Schlussweisen von Leibniz sind unhaltbar: Die zum Vergleich herangezogene Reihe B ist divergent!

Barrow und sein Schüler Newton (1643–1727) beobachteten aufmerksam die Publikationstätigkeit auf dem Gebiet der unendlichen Reihen. Nach dem besonders ergebnisreichen Jahr 1668 wurde Newton von seinen Freunden bewogen, bereits vorhandene Ergebnisse zur Reihenlehre systematisch zusammenzufassen. Das Manuskript war im Sommer 1669 fertiggestellt und wurde unter dem Titel *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* (Über die Rechenkunst mittels der der Zahl ihrer Glieder nach unendlichen Gleichungen; man beachte die Terminologie) bei der Royal Society hinterlegt und registriert und galt damit als publiziert. Der Mathematiker John

Collins (1625–1683), eine Art britischer Mersenne, der organisierend im wissenschaftlichen Leben tätig war und die Royal Society in mathematischen Fragen beriet, machte die Existenz dieser Abhandlung bekannt; sie stand jedem zur Einsicht offen. Auch Leibniz hat sie übrigens später eingesehen. Doch gelangte die hochwichtige Arbeit erst 1711 zum Druck.

Man kann ohne Übertreibung sagen, dass durch „*De analysi ...*“ die Theorie der unendlichen Reihen zu einer selbständigen Teildisziplin innerhalb der Mathematik geworden ist. Doch bestand Newtons unmittelbares Ziel noch in der Quadratur komplizierter Kurven und in der Auflösung von Gleichungen; hierfür wird die Reihenlehre verwendet. Bei der Quadratur erfolgt zunächst die Reihenentwicklung des Integranden; dann wird gliedweise integriert.

Mit der Methode der unbestimmten Koeffizienten findet er beispielsweise für die Lösung der Gleichung $x^3 + a^2y - 2a^3 + axy - x^3 = 0$ in zwei Variablen die Reihenentwicklung

$$y = a - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64a} - + \dots \ .$$

Dabei wird unterstellt, dass x „*einigermaßen*“ klein ist. Allerdings hat Newton noch keine Konvergenztheorie, aber er besitzt mathematischen Instinkt genug, um gelegentlich die Reihenentwicklung zu unterscheiden „*für kleines x*“ und „*für sehr großes x*“. Dann erscheinen Reihenentwicklungen nach fallenden Potenzen.

Die Reichweite der Möglichkeiten durch die Newtonsche Methode ist sehr groß [Reiff 1889], [Guicciardini 1999]. Sie umfasst die Reihenumkehrung, das Wurzelziehen, Überlegungen über die „*Güte*“ der Konvergenz, spezielle Reihenentwicklungen für die Exponentialfunktion, die Logarithmusfunktion, für die trigonometrischen Funktionen.

Merkwürdigerweise findet sich in „*De analysi ...*“ nicht die Binomialentwicklung, obwohl sie ihm längst (vor 1666) vertraut war. Newton hielt sie für seine bedeutendste mathematische Entdeckung, mit der Folge, dass sie auf seinem Sarkophag angebracht wurde. In einem Brief vom 13. Juni 1676, der in Abschrift durch Oldenburg für Leibniz bestimmt war, hat Newton geschildert, wie er durch groß angelegtes induktives Vorgehen zur Binomialreihe gekommen ist; später direkt von Newton an Leibniz im Brief vom 24. Oktober 1676 dargelegt.

Die Binomialreihe tritt bei Newton in einer uns ungewohnten Form

$$(P + PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \dots$$

auf; dabei bedeuten m und n beliebige positive ganze Zahlen. (A bedeutet das erste Glied $P^{\frac{m}{n}}$, B das zweite Glied $\frac{m}{n}AQ$ mit $A = P^{\frac{m}{n}}$, C das dritte Glied der Reihe, also $\frac{m-n}{2n}BQ = \frac{m-n}{2n} \cdot \frac{m}{n}P^{\frac{m}{n}}Q^2$, usw. Durch Einsetzen erhält man die heutige Schreibweise der nach Potenzen von Q fortschreitenden Reihe mit den Binomialkoeffizienten $\binom{\frac{m}{n}}{k}$.

Insgesamt ist Newton imstande gewesen, eine große Funktionenklasse zu integrieren. Er konnte alle Integrale der Form

$$\int ax^{\lambda}(b+cx^{n})^{\nu}\mathrm{d}x \quad (\lambda, n, \nu \text{ ganzzahlig})$$

bestimmen, und zwar durch Reihenentwicklung mit nachfolgender gliedweiser Integration.

Zur Abrundung sei noch auf zwei britische Mathematiker eingegangen, deren Namen und Leistungen in der heutigen Mathematik ebenfalls eine Rolle spielen. Da ist zunächst der Engländer Brook Taylor (1685–1731). Er wurde 1712 Mitglied der Royal Society und für 4 Jahre deren Sekretär, gab aber diese Stelle krankheitshalber auf. Er war auch Mitglied der Untersuchungskommission im Prioritätsstreit Newton – Leibniz. Als begabter Künstler verfasste er 1715 ein Buch über die theoretischen Grundlagen der Perspektive, das in mehreren Auflagen erschien.

Bezüglich der Analysis trat Taylor 1715 mit der Abhandlung *„Methodus incrementorum directa et inversa“* (etwa: Direkte und inverse Methode der Zuwächse) hervor. Wir würden heute eher von Differenzenrechnung sprechen. Dort erscheint, zwar in anderer Form, die Taylorsche Reihe einer Funktion $f(x)$ als

$$x+\frac{n}{1}\dot{x}+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\ddot{x}+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\dddot{x} \quad \text{etc.},$$

wobei die x mit Unterpunkten die Inkremente (d. h. Zuwächse der Veränderlichen x) bezeichnen (Fluxionen werden gemäß Newton mit Oberpunkten bezeichnet).

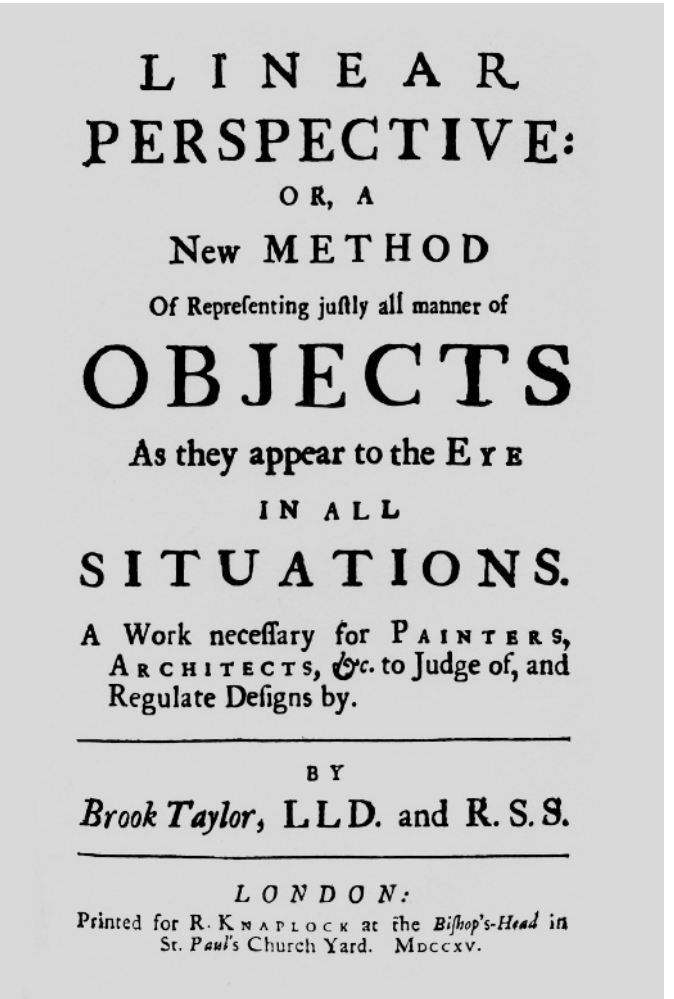
Eine Rechtfertigung des Rechnens mit Inkrementen gab Taylor nicht. Doch soll nicht unerwähnt bleiben, dass Johann Bernoulli 1694 eine Vorform des Taylorschen Satzes publiziert hatte, ein Anlass zum Streit zwischen Taylor und J. Bernoulli.

Erst 1742 wandelte der schottische Mathematiker Colin Maclaurin (1698–1746) die Taylorsche Reihe in die uns heute geläufige Form

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2}f''(0)+\ldots$$

Lagrange fügte das Restglied hinzu. Maclaurin hatte in Glasgow studiert, wurde in jungen Jahren Mitglied der Royal Society und auf Empfehlung Newtons Professor in Edinburgh.

Zusammen mit Euler und Daniel Bernoulli erhielt er einen Preis für eine Arbeit über die Gezeiten, nach der homogene rotierende Flüssigkeiten die Form von Rotationsellipsoiden annehmen. Im Jahre 1742 erschien Maclaurins *Treatise of Fluxions* (Abhandlung über die Fluxionen) mit der Erwiderung auf die Angriffe des Bischofs Berkeley gegen Newtons Fluxionsrechnung. Maclaurin gab eine Unterscheidung zwischen Maxima und Minima und fand die Bedeutung von Mehrfachpunkten bei Kurven.



LINEAR
PERSPECTIVE:
OR, A
New METHOD
Of Repreſenting juſtly all manner of
OBJECTS
As they appear to the EYE
IN ALL
SITUATIONS.
A Work neceſſary for PAINTERS, ARCHITECTS, &c. to Judge of, and Regulate Deſigns by.

BY
Brook Taylor, LL.D. and R. S. S.

LONDON:
Printed for R. KNAPLOCK at the *Biſhop's-Head* in St. *Paul's* Church Yard. MDCCXV.

Abb. 9.1.1 Titelblatt des Buches *Linear Perspective* von Brook Taylor

Die volle Bedeutung der Taylorschen Reihe wurde erst erkannt, als Euler davon ausführlich in seiner Differentialrechnung (1755) Gebrauch machte. Taylor hatte übrigens auch mit dem Studium schwingender Saiten begonnen; ein höchst folgenreiches mathematisches Forschungsgebiet.

Unglücklicherweise hielten die britischen Mathematiker unter dem Eindruck der Persönlichkeit Newtons (der zeitweise die Allüren eines Wissenschaftspapstes annahm) und auch aus nationalistischen Gründen während des 18. Jahrhunderts an der Infinitesimalmathematik vom Newtonschen Typ, also der Fluxionsrechnung, fest. Dies brachte die Analytiker Britanniens in

erheblichen Rückstand gegenüber dem Kontinent (die britische algebraische Schule dagegen gehörte zu den führenden algebraischen Schulen jener Zeit).

Dies ging so weit, dass sich 1812 eine Gruppe junger Mathematiker Britanniens in Cambridge – unter ihnen George Peacock (1791–1858), Charles Babbage (1791–1871) und John Herschel (1792–1871) – zusammenfand, um Front gegen die Fluxionsrechnung und für die Leibnizsche Infinitesimalrechnung zu machen, die sich längst auf dem Kontinent durchgesetzt und ihre Überlegenheit erwiesen hatte. Es gab ein geistreich-böses Wortspiel, um dies zu verfechten: *"the principles of pure d-ism as opposed to the dot age of the university"* (d-ism spielt auf Leibniz' Differential und auf Deismus, d.i. Aufklärung an, dot age auf die Punkte bei der Fluxionsrechnung. Aber man kann auch anders lesen und verstehen: *"dotage"* in einem Wort bedeutet Altersschwachsinn).

9.2 Entwicklung des Calculus auf dem Kontinent

Die Mathematikerfamilie Bernoulli

Höchst selten kann eine Familie über zwei oder sogar drei Generationen hinweg Spitzenleistungen in Kunst oder Wissenschaft hervorbringen. Für die Musik ist die Familie Bach ein herausragendes Beispiel; für die Mathematik ist es die Familie Bernoulli. Für die Naturwissenschaften sollten aber die Leistungen der Familien Cassini (Astronomie), Struve (Astronomie) und Gregory (Infinitesimalrechnung) nicht übersehen werden.

Die Brüder Jakob I (1654–1705) und Johann I (1667–1748) und der Sohn Daniel I (1700–1782) von Johann I sind unter den Gelehrten der Familie Bernoulli die besonders herausragenden; auf sie werden sich diese Ausführungen konzentrieren (vgl. ausführlich [DSB (Dictionary of Scientific Biography), Vol. II], [Fleckenstein 1949], [F. Nagel 2003]).

Die Geschichte der Familie Bernoulli lässt sich bis nach den Niederlanden, bis ins 16. Jahrhundert dokumentieren. Ein gewisser Jacob Bernoulli, ein Kaufmann, ein Drogist, entging als Protestant den Verfolgungen durch den spanischen katholischen Herzog von Alba, indem er mit seiner Familie von Antwerpen nach Frankfurt am Main auswanderte. Ein Enkel kam 1622 nach Basel. Sein Sohn Nikolaus (1623–1708) wurde u. a. 1668 Mitglied des Stadtparlamentes. Er ist der Stammvater der Mathematikerfamilie Bernoulli. Zwei der Söhne, Jakob I und Johann I, wurden herausragende Mathematiker in der ersten Generation.

Jakob wurde 1654 in Basel geboren und starb relativ jung 1705. Er studierte Theologie, hatte aber schon während dieses Studiums Geschmack an der Mathematik gefunden. Reisen nach Frankreich und in die Niederlande brachten ihn in Kontakt mit den Arbeiten von Descartes und Barrow und führten zu einigen Veröffentlichungen naturwissenschaftlichen Inhaltes (über

das Gewicht der Luft; über den Äther), sowie zu öffentlichen Experimentalvorlesungen über Hydrostatik. Sogar eine Veröffentlichung ging aus dieser Tätigkeit hervor, nämlich 1683 in den *Acta Eruditorum* eine Arbeit über eine *„Tauchmaschine“* des Naturforschers Giovanni Alfonso Borelli (1608–1679). Jakob nahm schließlich 1687 eine Berufung auf den Lehrstuhl für Mathematik an der Universität Basel an. Zusammen mit seinem jüngeren Bruder Johann suchte er sich in die neuere Mathematik einzuarbeiten.

Johann hatte mit 15 Jahren im Gewürzhandel begonnen, dann aber – wie er in seiner Autobiografie schrieb – *„ich ware (...) von Gott dem Herrn zu etwas anders destinirt* (bestimmt), *darzu* (also zur Mathematik) *ich ein sonderbahre lust bey mir verspüret“* [Sierksma 1992, S. 22].

Im Jahre 1684 war Leibniz' grundlegende Arbeit *„Nova Methodus ...“* erschienen, die schwierig zu verstehen war. Interessant ist nun der Umstand, dass sich Jakob 1687 brieflich an Leibniz mit der Bitte um Erläuterungen wandte. Doch Leibniz war auf Reisen und konnte nicht antworten. Inzwischen

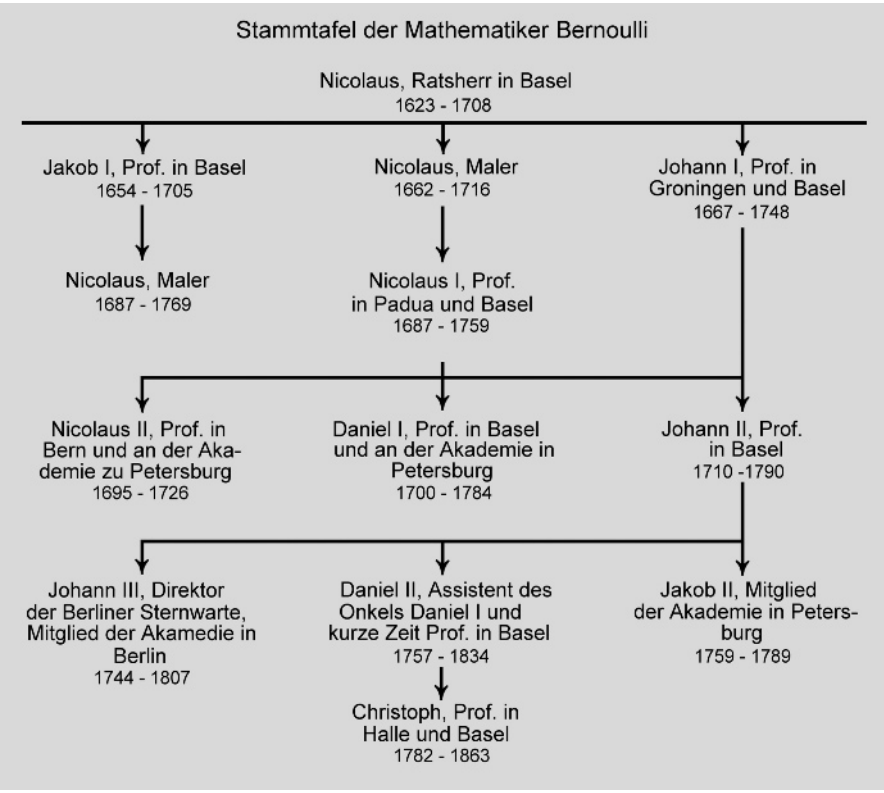


Abb. 9.2.1 Stammbaum der Familie Bernoulli (nach Fleckenstein 1949). Da einige Vornamen mehrfach auftreten, hat man eine Numerierung eingeführt: z. B. Johann I, Johann II, Johann III



Abb. 9.2.2 Jakob I Bernoulli, Johann I Bernoulli, Daniel I Bernoulli

hatten Jakob und Johann aus eigener Kraft den Zugang zum Leibnizschen Calculus gefunden. Leibniz konnte sich erst später äußern und begrüßte 1694 seine beiden Mitarbeiter für den „Calculus“: *„Diese Methode ist nicht weniger die eure als die meine.“* In der Tat haben Jakob und Johann Entscheidendes zur Anerkennung des Calculus beigetragen; dies wurde von Leibniz sehr wohl anerkannt [Leibniz 1989].

Die Studien von Jakob, teilweise zusammen mit Johann unternommen, führten zu fünf Arbeiten über die Divergenz der harmonischen Reihe, die Bernoullische Ungleichung $(1+x)^n \geq 1+nx$ (schon früher durch Barrow ausgesprochen), Quadraturen, Rektifikationen, Kaustiken, Schleppkurven u. a. m. Viele dieser Probleme konnte er geschickterweise durch Einführung von Polarkoordinaten lösen. Auf die Studie über die logarithmische Spirale (*„Spira mirabilis“*, bewundernswerte Spirale) war Jakob so stolz, dass er die Figur in seinen Grabstein mit der Inschrift EADEM MUTATA RESURGO (Als die Verwandelte stehe ich wieder auf) einmeißeln ließ (die Steinmetze haben jedoch statt der logarithmischen die archimedische Spirale dargestellt, vgl. Abb. 9.2.3).

Leibniz hatte 1686 das Problem der Isochrone (übersetzt: *„Zeitgenau ablaufend“*) gestellt: Wie sieht die Kurve aus, auf der sich im Schwerefeld ein Körper mit konstanter Geschwindigkeit von einem Punkt zu einem tiefer gelegenen bewegt? Anders formuliert: Wie sieht die Kurve aus, die ein fallender Körper durchläuft, damit er in gleichen Zeitabschnitten die gleiche Höhendifferenz passiert? Natürlich fand Leibniz die Lösung (Zykloide); Christiaan Huygens (1629–1695) fand sie mit traditionellen Mitteln, Jakob aber mit Hilfe des Calculus 1690. Hier tritt zum erstenmal das Wort *„Integral“* auf, das aber von Johann stammt. Praktische Bedeutung hat die Isochrone (auch Tautochrone genannt) bei der Konstruktion besonders exakter Uhren durch Verwendung von Zykloidenpendeln erhalten.



Abb. 9.2.3 Der Grabstein von Jakob Bernoulli mit der „logarithmischen“ Spirale im Münster von Basel [Foto Kahle]

Als Gegenstück sozusagen stellte Jakob am Ende seiner Arbeit die Frage nach der Form der Kettenlinie (Galilei hatte irrtümlich angenommen, es sei eine Parabel).

Eifersüchteleien zwischen den Brüdern begannen aufzutreten. Johann ging 1691/92 auf Reisen und wurde in Paris überaus ehrenvoll als Vertreter des Calculus empfangen. Der Marquis de L' Hospital (1661–1704) ließ sich von Johann gegen ein erhebliches Honorar in die Infinitesimalmathematik einführen; auf diese Weise entstand das erste Lehrbuch der Differentialrechnung, publiziert 1696 unter dem Namen des Marquis als *«Analyse des infiniments petits»* (Analyse der unendlich kleinen Größen). Dort ist auch die nach ihm benannte Regel zur Bestimmung des Wertes unbestimmter Ausdrücke wie „0/0“ enthalten.

Bernoulli hatte Stillschweigen gelobt und konnte sich erst nach dem Tode des Marquis über ihn beklagen, sogar bitter, obwohl dieser in der Vorrede seiner *„Analyse ...“* erklärt hatte: *„Übrigens erkenne ich an, viel den Aufklärungen der Herren Bernoulli zu schulden, besonders des jungen, der jetzt Professor in Groningen ist. Ich habe mich ohne weiteres ihrer Entdeckungen und derer des Herrn Leibniz bedient. Daher bin ich damit einverstanden, daß sie alles, was ihnen beliebt, für sich in Anspruch nehmen, indem ich mich damit begnüge, was sie mir gütigst lassen wollen.“*
(Zitiert bei [Bernoulli, Joh. 1924, S. 5])

In den zwanziger Jahren des 20. Jahrhunderts ist durch P. Schafheitlein in der Universitätsbibliothek Basel ein Manuskript von Johann Bernoulli zur Differentialrechnung aufgefunden worden [Bernoulli, Joh. 1924]; damit ist bewiesen, dass des Marquis *„Analyse . . . "* im Wesentlichen geistiges Eigentum von Johann Bernoulli ist.

Da der Lehrstuhl in Basel von Jakob besetzt war, nahm Johann 1695 eine Berufung nach Groningen in Holland an; Huygens hatte sich für ihn verwendet. Vorausgegangen war eine Beleidigung, indem Jakob seinen Bruder lediglich als seinen *„Schüler"* bezeichnete, der nicht mehr wissen könne als er, Jakob.

Jedenfalls stellte Johann (Juni 1696 in den *Acta Eruditorum*, Januar 1697 von Groningen aus) den *„scharfsinnigsten Mathematikern des ganzen Erdkreises"* (acutissimis qui toto orbe florent mathematicis) das *„Brachystochronenproblem"*: Zwischen zwei nicht in gleicher Höhe und nicht übereinander liegenden Punkten A und B soll die Kurve des schnellsten Falles unter dem Einfluss der Schwerkraft gefunden werden.

> *„Die scharfsinnigsten Mathematiker des ganzen Erdkreises grüsst Johann Bernoulli, öffentlicher Professor der Mathematik.*
> *Da die Erfahrung zeigt, dass edle Geister zur Arbeit an der Vermehrung des Wissens durch nichts mehr angetrieben werden, als wenn man ihnen schwierige und zugleich nützliche Aufgaben vorlegt, durch deren Lösung sie einen berühmten Namen erlangen und sich bei der Nachwelt ein ewiges Denkmal setzen, so hoffe ich den Dank der mathematischen Welt zu verdienen, wenn ich nach dem Beispiele von Männern wie Mersenne, Pascal, Fermat, Viviani und anderen, welche vor mir dasselbe thaten, den ausgezeichnetsten Analysten dieser Zeit eine Aufgabe vorlegte, damit sie daran, wie an einem Prüfsteine,*

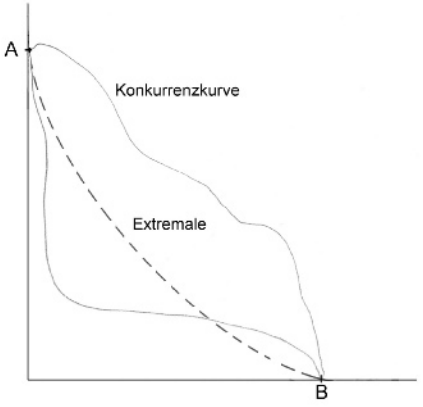


Abb. 9.2.4 Figur zum Brachystochronenproblem

> *die Güte ihrer Methoden beurtheilen, ihre Kräfte erproben und, wenn sie etwas fänden, mir mitteilen könnten; dann würde einem jeden öffentlich sein verdientes Lob von mir zu Theil geworden sein.“*
> [Bernoulli, Joh. 1914, S. 3f.]

Leibniz löste (angeblich) das *„wunderschöne Problem“* am selben Tage, an dem er den Brief von Johann erhalten hatte. Die gesuchte Kurve erwies sich wiederum als eine Zykloide und Johann schreibt dazu: *„Zu Recht bewundern wir Hugenius (...), wenn ich sage, daß genau diese Zykloide, die Tautochrona Hugenia, unsere gesuchte Brachystochrone ist.“* [Bernoulli, Joh. 1742, S. 189] Leibniz behielt auch recht mit seiner Annahme, dass nur Johann und Jakob Bernoulli, Newton und de L'Hospital (mit Johanns Hilfe freilich) das Problem würden lösen können, auch Huygens; aber dieser war schon verstorben.

Am Brachystochronenproblem bzw. an der Methode der Lösung tritt in aller Deutlichkeit der Unterschied der beiden Brüder zutage; auch hier mögen Gründe für den heftigen, immer stärker ausartenden Streit liegen.

Johann, der jüngere, hatte das Problem der Brachystochrone mit einem genialen Einfall gelöst, indem er die Analogie dieses Problems mit der Lichtbrechung (minimale Zeit) bemerkte und ausnutzte. Er war der schnellere, beweglichere, elegantere der beiden. Jakob dagegen hatte Mühe mit der Aufgabe gehabt, hatte aber dafür tiefer gedacht, seine Lösung war relativ schwerfällig. Er aber bemerkte, dass sich hinter diesem Problem eine grundsätzlich neue mathematische Fragestellung verbarg: Es ging nicht mehr um die Auffindung von Punkten auf einer Kurve, wo sie einen maximalen oder minimalen Wert annimmt. Hier galt es, unter unendlich vielen möglichen Kurven, die A und B verbinden, jene zu finden, die eine ausgezeichnete Eigenschaft hat. Dies ist – im Ansatz – die Geburtsstunde der Variationsrechnung. Abstrakt gesprochen geht es um die Aufgabe, differenzierbare Funktionen $y(x)$ zu bestimmen, für die das Integral $\int_a^b f(x, y(x), y'(x))\mathrm{d}x$ einen Extremwert annimmt. Dabei ist f die sog. Grundfunktion. Im Falle der Brachystochrone ist die Grundfunktion

$$f(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2}/\sqrt{y}.$$

Flugs, schon im Mai 1697, stellte Jakob seinem Bruder Johann in den *Acta Eruditorum* ein neues Problem, ein *„verallgemeinertes isoperimetrisches Problem“* (Bestimmung von Kurven, die bei vorgegebener Länge maximale Flächen umschließen). Wichtiger und wesentlicher als das Problem selbst ist die Einsicht von Jakob, dass ein ganz neuer Typ von Aufgaben aufgekommen war:

> *„Die Geometer haben die Methode der Maxima und Minima bis jetzt nur auf solche Aufgaben angewandt, bei welchen unter den unendlich vielen Functionen einer Curve die grösste oder kleinste gesucht wird, und sie dachten nicht daran jene Methode auf Probleme anzuwenden, bei welchen unter unendlich vielen nicht gegebenen Curven die ver-*

langt wird, der eine Eigenschaft des Maximums oder Minimums zukommt, während doch gerade diese Aufgaben den anderen an Schwierigkeit der Lösung und Vorzüglichkeit des Nutzens nicht nachstehen. Zu ihnen gehört die, welche mein Bruder im Juni vorlegte und für deren Lösung er die Frist bis zum Ende des verflossenen Jahres stellte, (...) Obwohl mir die Herausforderung meines Bruders gleichgültig war, konnte ich mich doch der Mühe der Lösung nicht entziehen, als mich der berühmte Leibniz in freundlichster Weise dazu einlud.“
[Bernoulli, Jacob 1894, S. 14]

Johann machte sich an die Arbeit und gab an, das Problem gelöst zu haben; Jakob aber wies die Fehlerhaftigkeit nach, doch Johann ließ sich nicht überzeugen und gestand erst spät seinen Irrtum ein. Die ohnedies bestehenden Spannungen zwischen den Brüdern arteten ins Groteske aus.

Jakob Bernoulli hat auch auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung Schrittmachendes geleistet; erinnert sei zunächst an das *„Gesetz der großen Zahlen“* und das erst postum erschienene Werk *Ars conjectandi* (Kunst des Vermutens). Darüber wird später berichtet werden.

Johann Bernoulli hielt noch in Groningen Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung und entwickelte die Theorie der Trajektorien (zu einer Kurvenschar eine zweite zu finden, die die erste unter einem festen Winkel schneidet). Hier liegt eine der historischen Wurzeln für die Theorie der partiellen Differentialgleichungen.

Es ist dabei zu bedenken, dass Johann während seines Pariser Aufenthaltes dem Marquis de L' Hospital neben der Differentialrechnung auch reichlich Material zu Integrationsproblemen überlassen hatte. So hat *Die erste Integralrechnung* (in Ostwalds Klassikern Nr. 194 von 1914, Hg. G. Kowalewski) den Untertitel *„Eine Auswahl aus Johann Bernoullis Mathematischen Vorlesungen über die Methode der Integrale und anderer aufgeschriebenen zum Gebrauch des Herrn Marquis de l' Hospital in den Jahren 1691 und 1692 als der Verfasser sich in Paris aufhielt.“* [Bernoulli, Joh. 1914]

Immerhin kommt Johann auf das Zentralproblem des Integrierens zu sprechen: Während das Differenzieren möglich ist, ist oft genug offen, ob sich das Integral überhaupt finden lässt bzw. existiert:

„So leicht es aber ist, von irgend einer vorgelegten Größe das Differential zu finden, so schwer ist es umgekehrt, das Integral irgend eines Differentials anzugeben, so daß wir mitunter nicht einmal sicher behaupten können, ob sich von der vorgelegten Größe das Integral bilden läßt oder nicht. Das wenigstens wage ich zu behaupten, daß von jeder ganzen und rationalen Größe, die mit $x^p\sqrt{a^2-x^2}, x^p\sqrt{ax-x^2}, x^p\sqrt{a^2+x^2}$ *multipliziert oder dividiert ist, das Integral entweder zu haben oder auf die Quadratur des Kreises oder der Hyperbel reduzierbar ist.“*
[Bernoulli, Joh. 1914, S. 8]

In die Groninger Zeit fallen auch schon, wie berichtet, seine Arbeiten zur frühen Variationsrechnung. Johann hatte 1694 in Groningen in eine einflussreiche Baseler Familie eingeheiratet. Die Schwiegereltern wünschten die Tochter (also Johanns Frau) wieder in ihre Umgebung und so kehrte Johann 1705 nach Basel zurück. Sein Bruder Jakob war todkrank und hatte schon geahnt, dass Johann nach seinem Tode seinen Lehrstuhl übernehmen werde. So geschah es. Bis zu seinem Tode am 1. Januar 1748 blieb Johann in Basel.

Deutlich wird Johanns immer stärkere Hinwendung zu Problemen der angewandten Mathematik: Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten (gegen Descartes gerichtet), Beiträge zur Hydrodynamik, Pendelbewegung mit Widerstand (Luftreibung). Er fand eine Lücke in Newtons *„Principia“* (wandte sich aber gegen Newtons Gravitationstheorie), unterstützte auch energisch Leibniz im Prioritätsstreit mit den Engländern.

Während Jakob zurückhaltend gewesen war, versammelte Johann einen großen Kreis von direkten und indirekten Schülern um sich, die sich den Calculus aneigneten. Neben seinen Söhnen Nicolaus II, Daniel und Johann II gehörten dazu Clairaut (1713–1765), Cramer (1704–1752) und Maupertuis (1698–1759), vor allem aber Leonhard Euler (1707–1783). Nicolaus II und Daniel sowie sein Enkel Johann III und Euler gingen nach St. Petersburg an die dortige Akademie, die neben Basel eine zweite Hochburg der Mathematik wurde.

Nach dem Tode von Jakob, Leibniz und Newton galt Johann mit Recht als bedeutendster Mathematiker Europas; er war Mitglied der Akademien in Paris, Berlin, London und St. Petersburg. Er erhielt den ehrenden Beinamen *„Der mathematische Präzeptor Europas“* (Der mathematische Lehrer Europas).

Und noch ein weiterer Bernoulli verdient eine ausdrückliche Würdigung, Daniel, zweiter Sohn von Johann (der hochbegabte erstgeborene Sohn, Nicolaus II, verstarb früh, 1726).

Daniel wurde noch vor seinem Medizinstudium vom Vater und Nicolaus I in Mathematik unterrichtet. Daniel ging 1723 nach Venedig, verfasste dort sein erstes Buch *Exercitationes mathematicae* (Mathematische Übungen) mit hydrodynamischen Problemen, die z. T. auf Differentialgleichungen zweiter Ordnung führen. Zusammen mit seinem Bruder Nicolaus II wurde Daniel 1725 an die Akademie in St. Petersburg berufen. Viele unterschiedliche Themen beschäftigten Daniel, zum Teil abgeleitet aus seinem Medizinstudium: Muskelkontraktion, blinder Fleck im Auge, Schwingungen. Es entstand eine erste Fassung einer Hydrodynamik. Daniel übernahm 1732 einen Lehrstuhl für Anatomie und Botanik in Basel; erst 1750 wurde er auf einen Lehrstuhl für Physik berufen.

Im Jahre 1738 (verfasst schon 1733) erschien Daniels Hauptwerk, die *Hydrodynamica*. Systematisch werden die Erscheinungen bewegter Flüssigkeiten untersucht. In Bereichen höherer Strömungsgeschwindigkeit in Flüssigkeiten oder Gasen herrscht ein geringerer Druck; ein Phänomen, das z. B. den Auf-

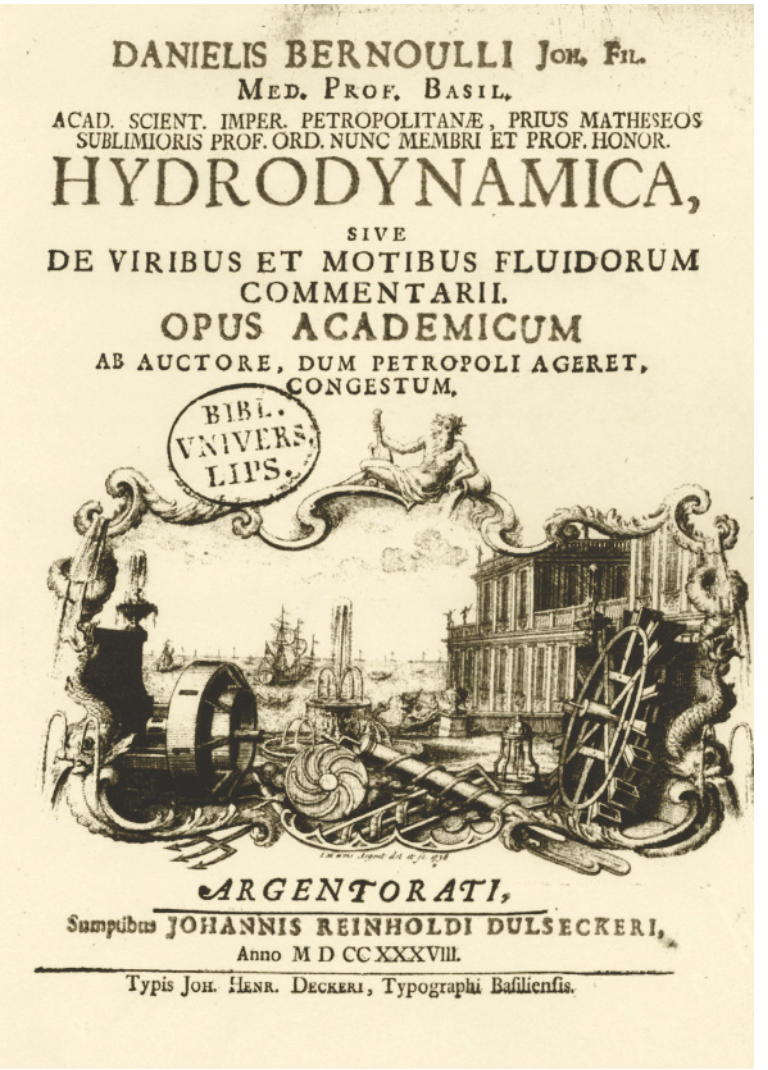


Abb. 9.2.5 Titelblatt des Hauptwerkes von Daniel Bernoulli: Hydrodynamica oder Erläuterungsschrift über die Kräfte und Bewegungen der Flüssigkeiten [Daniel Bernoulli, Basel 1738]

trieb an Tragflächen bewirkt. Auch weitreichende vorbereitende Überlegungen zur späteren kinetischen Gastheorie finden sich.

Und mehr noch verdankt man Daniel: Die Abschätzung der Leistung des menschlichen Herzens, Risikoabschätzungen bei Pockenimpfungen und eine Formulierung des Coulombschen Gesetzes der elektrischen Anziehung.

9.3 Die Anfänge der Variationsrechnung

Ehe wir uns Leben und Leistung von Leonhard Euler zuwenden, kommen wir zu den Anfängen der Variationsrechnung (vgl. ausführlich [Goldstine 1980], [Stäckel 1894a], [Stäckel 1894b]).

Wie Pappos berichtet, hatte Zenodoros (ca. 200 v. Chr.) ein isoperimetrisches Problem gelöst: Bei vorgegebenem Umfang hat die Kreisfläche den größten Inhalt. Auch Fermats Bestimmung des extremen (minimalen) Lichtweges gehört in die Frühgeschichte der Variationsrechnung; noch Johann Bernoulli ließ sich davon inspirieren.

Newtons *„Principia“* enthalten mit der Suche nach einem Körper geringsten Widerstandes in einem widerstrebenden Medium ebenfalls ein Problem der Variationsrechnung; es war von Newton bereits 1685 gestellt und gelöst worden. Der gesuchte Körper ist ovalförmig [Newton 1967–1981, Vol. VI, S. 456ff.].

Im Allgemeinen wird der Beginn der eigentlichen Variationsrechnung mit dem von Joh. Bernoulli 1696/97 gestellten Problem der Brachystochrone (Kurve, längs der im Schwerefeld der Erde eine Masse von einem Punkt zu einem tiefer gelegenen anderen Punkt in kürzester Zeit gelangt) in Verbindung gebracht. Sein Bruder Jakob hat den springenden Punkt – nicht spezielle Punkte werden gesucht, sondern eine spezielle Kurve bzw. Funktion – herausgearbeitet. Auf Jakob geht auch der methodologische Ansatz zurück, dass die Extremale die gesuchte Bedingung erfüllt, wenn sie ihr auch in jedem ihrer Teile zukommt. Der Bernoulli-Kenner P. Stäckel spricht in diesem Zusammenhang sogar vom „Bernoullischen Prinzip“ und beschreibt dies in seinem Kommentar zu Jakob Bernoulli mit den Worten: *„Er benützt ein Princip, welches bei einer gewissen Klasse von Aufgaben anwendbar ist, dass nämlich die Eigenschaft des Maximums oder Minimums nur dann einer gewissen Curve zukommen kann, wenn sie jedem ihrer Theile zukommt.“* [Stäckel 1894a, S. 133f.]. Jakobs Lösung erschien 1697, ebenfalls in den *Acta Eruditorum*.

Nach einigen Arbeiten von Euler, die der Verdichtung und Vereinheitlichung der Arbeiten der Brüder Bernoulli gewidmet waren, erschien 1744 in Lausanne und Genf Eulers große Arbeit zur Variationsrechnung *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti* (Die Methode, Kurven zu finden, denen eine Eigenschaft im höchsten oder geringsten Grade zukommt oder Lösung des isoperimetrischen Problems, wenn es im weitesten Sinne des Wortes aufgefasst wird). Euler bietet eine Reihe von interessanten Beispielen [Goldstine 1980, S. 67ff.], [Stäckel 1894a, S. 21ff.].

Wie stark die damalige Mathematik/Physik noch von teleologisch-theologischen Überlegungen durchsetzt oder sogar begründet war – nicht nur bei Euler! – möge man einer Passage in Eulers *„Methodus inveniendi...“* entnehmen; hier findet man die „Begründung“ für Variationsprobleme:

> *„Da der Plan des gesamten Universums der vollkommenste ist und vom weisesten Schöpfer festgelegt, so geschieht nichts auf der Welt, dem nicht irgendein Verhältnis des Maximums oder Minimums zu Grunde liegt. Man wird also danach streben müssen, in jeder Art naturwissenschaftlicher Probleme die Größe zu bestimmen, die einen größten oder kleinsten Wert annimmt. Damit ist ein doppelter Weg zur Lösung naturwissenschaftlicher Fragen gegeben: Aus den Endursachen mit Hilfe der Methode der Maxima oder Minima (a posteriori) oder aus den bewirkenden Ursachen (a priori). Man soll aber besonders darauf bedacht sein, die Lösung auf beiden Wegen herzuleiten. Dann wird nicht nur die eine zur Bestätigung der anderen dienen, sondern uns mit höchster Befriedigung erfüllen.“*
> (Zitiert nach [Szabo 1987, S. 123])

Eulers „*Methodus inveniendi*“ bringt weitere Fortschritte. Einmal wird zugelassen, dass der Integrand (Grundfunktion) auch Ableitungen höherer Ordnung enthält. Zum anderen gehört zur genauen, eindeutigen Formulierung die Angabe von Festpunkten, durch die die gesuchte Kurve hindurchgehen



Abb. 9.3.1 Leonhard Euler: Erinnerung und Würdigung in Briefmarken und Banknoten (DDR 1957, Schweiz 1957, Sowjetunion 1957, Schweiz 10 SFR)

soll. Dadurch wird das Integral von einem Punkt x_1 zu einem anderen Punkt x_2 (auf einer festen Achse) genommen:

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots)\mathrm{d}x$$

Unter bestimmten Voraussetzungen gelangt man zu der berühmten *„Eulerschen Differentialgleichung“*.

Lassen wir Euler selbst argumentieren. Er bezieht sich zunächst auf das Brachystochronenproblem, um sein Anliegen zu verdeutlichen.

> *„Man darf daher nicht kurzweg nach der Curve fragen, auf welcher ein schwerer Punkt am schnellsten oder in kürzester Zeit herabgleitet, sondern man muss gleichzeitig den Abschnitt der Axe bestimmen, zu welchem die gesuchte Curve gehören soll, sodass unter allen Curven, welche zu demselben Abschnitte einer der Lage nach gegebenen Axe gehören, die gesucht wird, auf welcher ein schwerer Körper am raschesten herabgleitet. Aber bei diesem Probleme genügte diese Bedingung noch nicht, um es zu einem bestimmten zu machen, sondern man musste noch die Bedingung hinzufügen, dass die gesuchte Curve durch zwei gegebene Punkte hindurchgehen soll. (...)*
> *Bei der Lösung des Problems gelangt man nämlich (...) zu einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren zweimalige Integration zwei willkürliche Constanten liefert. Zu ihrer Bestimmung braucht man zwei Punkte, durch welche die Curve hindurch gehen soll, oder andere ähnliche Eigenschaften. (...)*
> *Die Anzahl dieser willkürlichen Constanten hängt aber von der Ordnung der Differentiale ab, bis zu welcher die Gleichung der gesuchten Curve aufsteigt. Denn soviel die Ordnung der Differentialgleichung für die gesuchte Curve beträgt, soviel willkürliche Constanten sind in ihr potentiell enthalten, und eben so viele Bedingungen sind nöthig um die Curve zu bestimmen. (...)*
> *Erklärung III. 10. Die relative Methode der Maxima und Minima lehrt nicht unter der Gesammtheit aller Curven, welche zu demselben Axenabschnitte gehören, sondern nur unter denen, welche eine vorgeschriebene gemeinschaftliche Eigenschaft haben, diejenige zu bestimmen, welche eine Eigenschaft im höchsten oder geringsten Grade besitzt.“*
> [Stäckel 1894a, S. 22ff.]

Bei Euler wird also die Lösung eines Variationsproblems zurückgeführt auf die Lösung einer Differentialgleichung. Euler war sich bewusst, dass seiner geometrisch fundierten Methode der Variationsrechnung noch Mängel anhafteten. Er schreibt 1744:

> *„Man vermißt noch eine Methode, welche unabhängig ist von der geometrischen Lösung und welche erkennen läßt, daß bei einer solchen*

Ermittlung eines Maximums oder Minimums an Stelle von P dp geschrieben werden darf – p dP.“
(Deutsch zitiert nach [Stäckel 1894a, S. 66])

Den Unterschied zu Euler hebt Lagrange seinerseits 1762 hervor:

„Hier findet man eine Methode, welche nur einen sehr einfachen Gebrauch von den Prinzipien der Differential- und Integralrechnung verlangt; vor allem aber muss ich darauf aufmerksam machen, dass ich, da diese Methode verlangt, dass dieselben Grössen auf zwei verschiedene Arten varieren, um diese Variationen nicht zu verwechseln, in meinen Rechnungen ein neues Symbol δ eingeführt habe. So soll δZ ein Differential von Z ausdrücken, welches nicht dasselbe wie dZ ist, welches aber doch nach denselben Regeln gebildet wird, so daß man, wenn irgendeine Gleichung $\mathrm{d}Z = m\mathrm{d}x$ besteht, ebenso $\delta Z = m\delta x$ hat, und dasselbe gilt von anderen Gleichungen.“
(Deutsch zitiert nach [Stäckel 1894b, S. 4])

Wir gehen heute – inhaltlich aber damit äquivalent – einen anderen formalen Weg zur Auffindung der Eulerschen Differentialgleichung.

Im einfachsten Fall – die Grundfunktion enthält nur eine Ableitung erster Ordnung – hat man die Aufgabe

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\ \mathrm{d}x\ = \text{Extremwert!}$$

Ausführlich formuliert lautet diese Aufgabe (mit geeigneten Voraussetzungen über f):

Gegeben sei eine für $x \in [x_1, x_2]$ und reelle Funktionen $y(x)$ und $z(x)$ definierte Funktion $f(x, y, z)$ mit stetigen partiellen Ableitungen zweiter Ordnung nach allen Veränderlichen.

Gesucht ist eine zweimal stetig differenzierbare Funktion y mit $y(x_1) = a$, $y(x_2) = b$, für die das Integral

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x))\mathrm{d}x$$

einen Extremwert annimmt. Jede solche Funktion heißt Extremale des Variationsproblems (vgl. Abb. 9.2.4).

Zur Lösung dieser Aufgabe wird angenommen, dass es eine Extremale, z. B. eine Minimalfunktion y_0, gibt. Zu ihrer „Konkurrenz“ werden Funktionen der Gestalt

$$y = y_0 + \varepsilon\eta \quad \text{mit} \quad \eta \in C^2[x_1, x_2] \quad \text{und} \quad \eta(x_1) = \eta(x_2) = 0, \varepsilon \in \mathbb{R}$$

betrachtet und das Integral

$$\varphi(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y_0(x) + \varepsilon\eta(x), y_0'(x) + \varepsilon\eta'(x))\mathrm{d}x$$

untersucht. Dann ist $\varphi(0) = J(y_0) \leq \varphi(\varepsilon)$ für alle ε, d. h. φ hat ein Minimum für $\varepsilon = 0$, damit auch $J(y)$, nämlich für die Minimalfunktion y_0. Da φ differenzierbar ist, muss $\varphi'(\varepsilon) = 0$ sein. Aufgrund der starken Voraussetzungen darf unter dem Integralzeichen differenziert werden. Mit totaler Ableitung, anschließender Produktintegration und Anwendung des sog. Fundamentallemmas der Variationsrechnung erhält man schließlich die berühmte Euler-Lagrangesche Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$f_{y'y'}y'' + f_{yy'}y' + f_{xy'}y - f_y = 0.$$

Dieser muss die Minimalfunktion (Extremale) genügen. Man hat also eine notwendige Bedingung für die Existenz einer Extremalen gefunden. Die Herleitung dafür hinreichender Bedingungen ist erheblich komplizierter und würde den Rahmen dieses Buches sprengen.

Am 12. August 1755 wandte sich der 19jährige Ludovico de la Grange Tournier (der sich später unter dem Einfluss der Französischen Revolution Joseph-Louis Lagrange nannte), Professor an der Artillerieschule in Turin, brieflich an Euler. Lagrange hatte bemerkt, wie man Eulers umständliche Rechnung vereinfachen, auf den geometrischen Bezug verzichten und rein analytisch vorgehen und Eulers notwendige Bedingung vermeiden könne. Es entwickelte sich ein Briefwechsel, bis Lagrange 1760/61 seine Ergebnisse in den Turiner Abhandlungen veröffentlichte. Euler seinerseits machte diese und eigene Ergebnisse an der Petersburger Akademie bekannt. Eine neue Periode der Variationsrechnung hatte begonnen. Lagrange bemerkte 1760: Euler sei der erste gewesen, der eine allgemeine Formel gefunden habe um eine Kurve zu finden, entlang derer ein gegebener Integralausdruck einen größten oder kleinsten Wert hat: *„... aber die Formeln dieses Autors sind weniger allgemein als die meinigen, weil er 1. nur die Variation einer einzigen Variablen y im Integranden Z zulässt und weil er 2. annimmt, dass der erste und letzte Punkt der Kurve vorgegeben sind.“* [Goldstine 1980, S. 120]

Euler erkannte die Bedeutung der Arbeiten von Lagrange und übernahm die Bezeichnung *„Variationsrechnung“* für die neue Disziplin der Analysis.

In dieser Darstellung der Geschichte der Mathematik würde der Umfang überschritten, wenn wir die komplizierte und dabei spannende weitere Entwicklung der Variationsrechnung darstellen würden: Die Erweiterung, wenn die Grundfunktion mehrere unabhängige Funktionen $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... enthält; die Suche nach notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Eintreten eines Extremums; Variationsprobleme mit Nebenbedingungen; die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen der theoretischen Physik; die Arbeiten von Legendre, Jacobi, Weierstraß, Clebsch, Hilbert, A. Kneser und anderen. Dazu wird z. B. auf die Analyse der Geschichte der Variationsrechnung durch [Goldstine 1980] verwiesen.

Die Ausdehnung des theoretischen Apparates der Variationsrechnung zog schon in der Frühphase die Möglichkeit nach sich, praktische oder praxisverwandte Probleme anzugreifen. Neben Kettenlinie, Isochrone und Brachystochrone – den Ausgangspunkten – wurden nun der mathematischen Behandlung zugänglich: Elastizitätsprobleme, z. B. neutrale Faser und Knicken von Balken, das allgemeine isoperimetrische Problem (aufgeworfen durch Jakob Bernoulli), die Behandlung geodätischer Linien auf konvexen Oberflächen, die Theorie der Trajektorien, die Figur von Rotationskörpern bei Bewegung im widerstrebenden Mittel und vieles andere mehr. Darüber hinaus wurde, vom Fermatschen Prinzip des kürzesten Lichtweges ausgehend, das allgemeine mathematisch-physikalische Prinzip der kleinsten Wirkung aufgestellt und leidenschaftlich diskutiert, da es in enger Beziehung zu philosophisch relevanten Problemen der Aufklärung stand [Jahnke 1999, Kap. 5], [Handbook of Differential Equations, Vol. II, 2005].

9.4 Zur Geschichte der Differentialgleichungen

Die Reduktion von Problemen der Variationsrechnung und praktischen Fragen auf Differentialgleichungen – z. B. bei Schwingungsproblemen – lieferte starke Motivationen für eine sich entwickelnde Theorie der Differentialgleichungen, sowohl der gewöhnlichen als auch der partiellen Differentialgleichungen. Hier wäre eigentlich über eine Vielzahl von Aufgabenstellungen und ihre Lösungen zu berichten; doch dies übersteigt bei weitem den Rahmen dieses Buches. Verwiesen sei daher auf entsprechende mathematische Lehrbücher, insbesondere auf das noch immer verwendete klassische Buch von Kamke [Kamke 1945] und die ausführlichen Darstellungen zur Geschichte der Differentialgleichungen [Kline 1974, Kap. 21, 22], [Jahnke 1999], [Handbook of Differential Equations, Vol. II, 2005].

Besonderes Interesse fanden die

Bernoullische Dgl.	$y' + P(x)y + Q(x)y^m = 0; m \neq 1; 0$
Riccatische Dgl.	$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$
Clairautsche Dgl.	$y = x\,y' + \varphi(y')$
d'Alembertsche Dgl.	$y = x\varphi_1(y') + \varphi_2(y')$
Besselsche Dgl.	$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$.

Es ist erstaunlich, bis zu welchem Grade bereits im 18. Jahrhundert die Theorie der Differentialgleichungen vorangebracht werden konnte: Leibniz behandelte seit 1693 Differentialgleichungen erster Ordnung durch Separation der Variablen. Er und die Brüder Bernoulli bewältigten zum Ende des Jahrhunderts die nach Jakob Bernoulli benannte Bernoullische Differentialgleichung. Johann Bernoulli benutzte zu Anfang des 18. Jahrhunderts das Verfahren des integrierenden Faktors.

Insbesondere Euler beschäftigte sich mit einer zusammenhängenden Lösungstheorie der linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung; den für die homogene Gleichung mit konstanten Koeffizienten zum Ziel führenden Ansatz $y = e^{kx}$ machte er 1743 bekannt. Zwar fand Euler später noch Lösungsmethoden auch für die inhomogene Differentialgleichung; die heute gebräuchliche Methode der Variation der Konstanten publizierte Lagrange im Jahre 1777, obwohl sie auch von Euler gelegentlich verwendet wurde. Die später nach Bessel benannte Differentialgleichung behandelte bereits Euler. Die Riccatische Differentialgleichung und die Legendreschen Polynome erinnern an weitere bedeutende Mathematiker des 18. Jahrhuunderts. Euler und Clairaut studierten Integrabilitätsbedingungen und stießen auf die Methode der Integration vollständiger Differentiale. D'Alembert und andere gelangten weit bei der Behandlung von Systemen linearer Differentialgleichungen. Die Begriffe allgemeine, singuläre und partikuläre Lösung wurden bereits zur Mitte des 18. Jahrhunderts geprägt und dafür geometrische Interpretationen gegeben. Auf dem Gebiet der partiellen Differentialgleichungen wurden bereits im 18. Jahrhundert wichtige Grundtatsachen entdeckt; insbesondere wurden die wichtigsten Typen linearer partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung in ihrer physikalischen Bedeutung erkannt und studiert.

Mit Euler und Daniel Bernoulli tritt ein neuer „Funktionentyp“ auf. Euler hatte sich vorwiegend mit analytischen Funktionen und demzufolge mit Potenzreihen befasst. Er führte eine neue, besonders wichtige Klasse von trigonometrischen Reihen ein [Euler 1983, S. 44], eine folgenreiche Wendung für die spätere Formulierung eines abstrakten Funktionsbegriffes.

In einem Brief an Christian Goldbach (1690–1764) vom 4. Juli 1744 stellte er erstmals eine „algebraische“ Funktion durch eine unendliche Reihe trigonometrischer (also periodischer) Funktionen dar, nämlich

$$\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots (0 < x < \pi).$$

Dieses erstmals auftretende Beispiel einer „Fourierreihe“ veröffentlichte Euler 1755 in seiner „Differentialrechnung“.

Es bleibe dahingestellt, ob Euler bereits 1755 die Tragweite für eine spätere abstraktere Definition von „Funktion“ vor Augen hatte. Immerhin definierte er 1755 in seiner „Differentialrechnung“ (*Institutiones calculi differentialis*):

> *„Sind nun Größen auf die Art von einander abhängig, daß keine davon eine Veränderung erfahren kann, ohne zugleich eine Veränderung in der anderen zu bewirken: so nennt man diejenige, deren Veränderung man als die Wirkung von der Veränderung der andern betrachtet, eine Funktion von dieser; eine Benennung, die sich so weit erstreckt, daß sie alle Arten, wie eine Größe durch andere bestimmt werden kann, unter sich begreift.“*
>
> (Zitiert nach der deutschen Ausgabe von Eulers Differentialrechnung durch [Michelsen 1790, S. XLVIII])

Jedenfalls unterscheidet sich diese Formulierung von einer anderen, schon 1748 gegebenen Formulierung in der *Introductio in analysin infinitorum*:

> *„Eine Funktion einer veränderlichen Größe ist ein analytischer Ausdruck, der in beliebiger Weise aus dieser veränderlichen Größe und aus Zahlen oder konstanten Größen zusammengesetzt ist.“*
> (deutsch zitiert in [Wußing 2002, S. 132]

Diese Definition schließt sich an die Formulierung von Johann Bernoulli an; die neue Wendung „analytischer Ausdruck“ wird ihre begrifflichen Tücken zu Anfang des 19. Jahrhunderts offenbaren.

D'Alembert (1749) und Euler stießen bis zu der Erkenntnis vor, dass die Schwingung einer Saite durch Vorgabe der Anfangs- und Randbedingungen vollständig bestimmt ist. Um 1753 schlug Daniel Bernoulli [Jahnke 1999, S. 157ff.] vor, die Obertöne einer schwingenden Saite zu bedenken und die Schwingung der Saite durch Superposition entsprechender Schwingungen darzustellen – eine physikalische Interpretation und Rechtfertigung für Eulers Ansatz einer trigonometrischen Reihe. Nach D. Bernoulli lässt sich eine solche Schwingung durch eine trigonometrische Reihe der Gestalt

$$y = a \cdot \sin \frac{\pi}{\alpha} + b \cdot \sin \frac{2\pi x}{\beta} + c \cdot \frac{\sin 3\pi x}{\gamma} + \dots \ .$$

darstellen. Es kam zu einer heftigen Diskussion: Die Mehrzahl der Kollegen von Daniel Bernoulli bezweifelte die Allgemeingültigkeit dieses Ansatzes, zumal Daniel Bernoulli diesen sogar in den Rang eines allgemeinen Prinzips erhoben hatte. Er vertrat die These, dass man bei entsprechender Wahl der Parameter a, b, c, $\dots$, α, β, γ, $\dots$ jede beliebige Kurve bzw. Funktion durch eine Reihe dieses Types darstellen könne – im gewissen Sinne eine Vorwegnahme der Behauptung Fouriers vom Jahre 1807. Er hatte damit ebenfalls die Frage nach der Definition des Funktionsbegriffs – eines Grundbegriffs der Mathematik sowohl nach Inhalt als auch nach Umfang – aufgeworfen. Seine Theorie, so Daniel Bernoulli, eröffne die Möglichkeit, in der Natur existierende Bewegungen, die keinerlei Gesetzen unterworfen zu sein schienen, auf einfache isochrone Bewegungen zurückzuführen.

9.5 Neue Möglichkeiten durch die Infinitesimalmathematik

Mit der Durchbildung und dem Ausbau der Infinitesimalmathematik konnte ein großes Feld von Anwendungen der Mathematik neu erschlossen oder wenigstens der Weg in Richtung ihrer mathematischen Behandlung angebahnt werden. So zeigt sich ein breites Spektrum praktischer, insbesondere mechanischer und astronomischer Probleme, an denen die Mathematiker des 18. Jahrhunderts ihre eigene Kraft und die Leistungsfähigkeit des neuen Kalküls erproben konnten.



Abb. 9.5.1 Meridianmessung mit Maupertuis und Condamine (Frankreich 1986)

Newtons *„Principia“* und die allgemeine Gravitationslehre gaben zusammen mit der Infinitesimalrechnung den Weg frei zur Behandlung einer Fülle astronomischer Probleme: Bahn der Planeten und Kometen, Störungsrechnung, Dreikörperproblem, Bewegung des Erdmondes und der Monde des Jupiter, Sonnen- und Mondfinsternisse, Stabilität des Sonnensystems und vieles andere mehr.

Mit den französischen Meridianmessungen 1735 in Peru und 1736/37 in Lappland unter Maupertuis konnte bewiesen werden, dass – wie Newton behauptet hatte – die Erde an den Polen abgeplattet ist, aber nicht verlängert – wie nach der in Frankreich vorherrschenden Meinung. Damit war zugleich die zeitweise vorherrschende Naturphilosophie widerlegt, die Cartesische Wirbeltheorie. Im Jahre 1743 konnte Clairaut, der in Peru dabei gewesen war, die Monographie *Théorie de la figure de la terre* (Theorie über die Figur der Erde) der Öffentlichkeit übergeben. Zugleich entwickelte sich die kartographische Erschließung der riesigen Kolonialgebiete zu einem Gebiet starker mathematischer Aktivitäten. Dies alles lieferte bereits im 18. Jahrhunderte Ansatzpunkte für die rasche Entwicklung der Differentialgeometrie, z. B. durch Gaspard Monge (1746–1818), die im 19. Jahrhundert von Carl-Friedrich Gauß (1777–1855) durch wesentliche neue Ergebnisse abgerundet wurde und eine zusammenfassende Darstellung erhielt.

Im Jahre 1736 erschien Eulers Lehrbuch der Mechanik. Schon der ausführliche Titel enthält den Hinweis, dass eine neue Ära bei der mathematischen Behandlung der Bewegungsprobleme begonnen hat: *Mechanica, sive motus scientia analytica exposita* (Mechanik oder die Wissenschaft von der Bewegung auf analytische Weise dargestellt). Auf analytische Weise! Statt der synthetisch-geometrischen Methode, die bis dahin vorherrschend gewesen war und noch den *„Principia“* als mathematisches Instrumentarium gedient hatte, wird nun systematisch die Infinitesimalmathematik, die Analysis, zur Behandlung mechanischer Probleme herangezogen. In diesem Sinne hat Eulers „Mechanik“ von 1736 eine programmatische Wirkung auf Mathematiker

und Naturforscher seiner Zeit ausgeübt: Euler wurde zum Schrittmacher. Seine sog. zweite Mechanik, fast 30 Jahre später (1765) unter dem Titel *Theoria motus corporum* (Theorie der Bewegung der Körper) erschienen, stellte eine erweiterte, systematische Behandlung der Punktmechanik und der Mechanik starrer Körper mit analytischen Methoden dar, die u. a. auch zur Untersuchung von Kreiselbewegungen (Präzession der Äquinoktien) diente.

Es gab einige praktische Fortschritte bei der Anwendung der Infinitesimalrechnung, etwa im Artilleriewesen, beim Entwurf Energie nutzender Wasserräder oder von Turbinen hohen Wirkungsgrades, bei der Bestimmung günstiger Formen von Schiffsrümpfen und der Verteilung von Masten auf Segelschiffen. Im Jahre 1738 hatte Daniel Bernoulli seine *Hydrodynamica* publiziert. Euler lieferte Standardwerke des Artilleriewesens und der praktischen Schiffsbaukunst, die zu großer praktischer Bedeutung gelangten. Außerdem hatte er wesentlichen Anteil an der Vermessung des riesigen russischen Reiches.

Auf dem Gebiet der theoretischen Mechanik wurde noch ausgangs des 18. Jahrhunderts (1788) die entscheidende, die folgenreichste, ja die krönende Abhandlung durch Lagrange publiziert, die *Mécanique analytique*. Sie gipfelt in den Lagrangeschen Bewegungsgleichungen 2. Art: Wenn $T(t, q_i, \dot{q}_i)$ die kinetische Energie eines Systems ist, dann ist unter gewissen Voraussetzungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i\,; i = 1, \ldots, n.$$

Darin bedeuten t die Zeit, q_i die Koordinaten der Lage, $\dot{q}_i$ deren Ableitungen und Q_i die zur Koordinate q_i gehörende Komponente der Kraft. Diese Gleichungen beschreiben den Bewegungsablauf eines Systems von n Massenpunkten.

Voller Genugtuung und Stolz erklärt Lagrange in der Anzeige der ersten Ausgabe der *Mécanique analytique*:

> *„Es giebt bereits mehrere Werke über Mechanik, aber der Plan dieses Werkes ist gänzlich neu. Ich habe mir vorgenommen, die Theorie der Mechanik und die Kunst, die darauf sich beziehenden Probleme zu lösen, auf allgemeine Formeln zurückzuführen, deren einfache Entwicklung alle für die Lösung jedes Problems notwendigen Gleichungen ergiebt. Ich hoffe, dass die Art, wie ich dies zu erfüllen bestrebt gewesen bin, nichts zu wünschen übrig lassen wird. (. . .)*
> *Man wird in diesem Werke keine geometrischen Figuren finden. Die Methoden, welche ich auseinandersetze, erfordern weder Constructionen, noch geometrische oder mechanische Betrachtungen, sondern nur algebraische, einem regelmässigen und gleichförmigen Gange unterworfene Operationen. Alle, welche die Analyse lieben, werden mit Vergnügen sehen, dass die Mechanik ein neuer Zweig derselben wird und werden mir Dank wissen, dass ich die Herrschaft derselben in dieser Weise ausgedehnt habe.“* [Lagrange 1887, S. V]

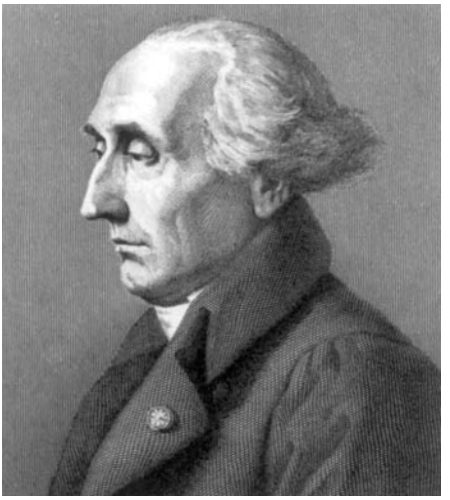


Abb. 9.5.2 Joseph Louis Lagrange

Lagrange hat der Mathematik so viel gegeben, dass es wohl angebracht ist, einige Anmerkungen zu seinem Leben zu machen. Über seinen Beitrag zur Algebra wird später berichtet (vgl. ausführlich [DSB, Vol. VII, S. 559–573]).

Joseph Louis Lagrange wurde am 25. Januar 1736 in Turin geboren, das damals zum Königreich Savoyen gehörte. Da der Vater das Familienvermögen durch Spekulation verloren hatte – Lagrange hat das später als „Glück" bezeichnet, weil er sonst wahrscheinlich nicht zur Mathematik gelangt wäre –, musste der junge Mann nach einem Erwerb suchen. Auf Grund seiner hohen Begabung für Mathematik und Physik und weit ausgedehnter Lektüre damals führender Schriften wurde er schon mit 19 Jahren Lehrer an der Turiner Artillerieschule; viele seiner Schüler – künftige Offiziere – waren älter als er. Lagrange begann trotz aller Lehrverpflichtungen mit einer weitgespannten Serie von Publikationen: zur Astronomie (insbesondere zur Präzession der Äquinoktien), zur schwingenden Saite, zur Variationsrechnung. Er beschäftigte sich mit Wahrscheinlichkeitsrechnung und war maßgebend beteiligt an der Gründung eines wissenschaftlichen Journals und einer Gelehrtengesellschaft, aus der später die Turiner Akademie hervorging. Eine Berufung an die Berliner Akademie 1756 lehnte er wegen Schüchternheit (vielleicht auch wegen der dominierenden Stellung Eulers) ab, wurde aber korrespondierendes Mitglied.

Reisen führten ihn nach London und Paris, wo er – schon immer von schwacher Konstitution und von Depressionen geplagt – erkrankte und nach Turin zurückkehrte. 1765 erhielt er einen Preis der Pariser Akademie.

Erst als Euler seine Rückkehr nach St. Petersburg ankündigte und auf Vermittlung von d'Alembert, der auf gutem Fuß mit Friedrich II. von Preu-

ßen stand, erwog Lagrange, die Berufung nach Berlin anzunehmen. Er traf dort am 27.10.1766 ein, mit der Verpflichtung, der Berliner Akademie jeden Monat eine neue Arbeit vorzulegen. Lagrange hat diese ungeheure Bedingung getreulich erfüllt. Die Themen kreisten um das Dreikörperproblem, um Flüssigkeitsbewegung, Gleichungstheorie (mit Ergänzungen zu Eulers *„Algebra“*), quadratische Formen (Anstoß für spätere Arbeiten von Legendre und Gauß) und betrafen Vorarbeiten zur späteren Theorie der elliptischen Funktionen.

Der Tod seiner Frau 1783 und der Tod Friedrichs II. 1786 trafen ihn schwer. So ging er 1788 nach Paris. Zum Erstaunen seiner Freunde beschäftigte er sich kaum noch mit Mathematik, sondern mit Metaphysik, Geschichte, Linguistik, Medizin und Botanik – möglicherweise aus Verstimmung über die ungenügende Würdigung seines Meisterwerkes *Mécanique analytique*. Als es endlich 1788 gedruckt vorlag, ließ es Lagrange ungeöffnet 2 Jahre (!) auf seinem Schreibtisch liegen. (Auf seinen Versuch, die Infinitesimalrechnung algebraisch zu begründen, wird im nächsten Kapitel eingegangen.)

Die Ereignisse der Großen Französischen Revolution konnte Lagrange nicht verstehen; der Lärm der Kämpfe erschreckte ihn. Er ließ die Fenster schließen. Dessen ungeachtet war er in der Kommission für Maße und Gewichte tätig und unterrichtete an der streng republikanisch orientierten École Polytechnique. Er wurde Mitglied der Ehrenlegion und 1808 von Napoleon zum Grafen ernannt. Seine zweite Frau hat ihn aufopfernd betreut, so dass er trotz Krankheiten noch produktiv bleiben konnte. Er starb am 10. April 1813 in Paris.

9.6 Leonhard Euler

Leonhard Euler ist ein Phänomen, sowohl nach Umfang und tiefer Weitsicht seiner wissenschaftlichen Leistung wie auch als Persönlichkeit.[1] Euler war wohl der produktivste Wissenschaftler, den die Welt hervorgebracht hat. Die Spannweite seiner Arbeiten überwältigt durch die Breite, von höchst diffizilen theoretischen Problemen bis hin zu praktischen Belangen. Eulers Abhandlungen umfassen bis heute mehr als 70 Bände. Viele seiner Bücher begründeten den modernen Typ des Lehrbuches. Dazu kommt seine ständig ausgewogene Gemütslage; nur bei Angriffen auf die Religion konnte er hart reagieren. Auch seine Konzentrationsfähigkeit war bewundernswert. Zeitzeugen berichten von angestrengter geistiger Arbeit, während ein Enkel auf seinem Schoß und eine Katze auf seiner Schulter saß.

[1] Ausführliche Darstellungen: [Euler, L. 1983: Beiträge zu Leben und Werk. Gedenkband des Kantons Basel – Stadt], [Euler, L. seit 1911: Opera omnia], [Fellmann, E. 1995: Leonhard Euler], [Engel, W. (Hg.) 1985: Festakt und Wissenschaftliche Konferenz aus Anlass des 200. Todestages von Leonhard Euler], ferner [Jahnke, N. (Hg.) 1999] mit ausführlichen Literaturangaben und [Fellmann 2007].



Abb. 9.6.1 Leonhard Euler, Gemälde von E. Handmann [Kunstmuseum Basel]

Der Vater Paul Euler (1670–1745) hatte protestantische Theologie, aber zwischendurch bei Jakob Bernoulli auch Mathematik studiert. Nach einer Tätigkeit in Basel – dort wurde Leonhard Euler geboren – wurde der Vater 1708 an eine Pfarrstelle in Riechen (heute Riehen), nahe Basel, versetzt.

Leonhard hat eine Autobiographie seinem Sohn Johann Albrecht in die Feder diktiert (1. Dezember 1767 in St. Petersburg). Über die Anfangsjahre berichtet er:

> *„Ich, Leonhard Euler, bin A. 1707 den 15^{ten} April/St. Nov. [neuer Stil] zu Basel gebohren. Mein Vater war Paulus / Euler, damals designirter Prediger nach dem / eine Stund von Basel gelegenen Dorf Riechen: und / meine Mutter hiess Margaretha Bruckerin. Bald / hierauf begaben sich meine Eltern nach Riechen, / vo ich bey Zeiten von meinem Vater den ersten / Unterricht erhielt; und weil derselbe einer von den / Discipeln des weltberühmten Jacobi Bernoulli ge/wesen, so trachtete er mir sogleich die erste / Gründe der Mathematic beizubringen, und / bediente sich zu diesem End des Christophs Rudolphs / Coss mit Michaels Stiefels Anmerckungen . . . “*
> (Zitiert nach [Fellmann 1995, S. 11])



Abb. 9.6.2 *„Der Eiserne Reiter“*, Reiterstandbild in St. Petersburg mit der zweisprachigen Widmung (kyrill./russ. u. lat.) *„Petro Primo Catharina Secunda MDCCLXXXII“* (Peter dem Ersten Katharina die Zweite 1782) [Foto Wußing]

Nach dem Besuch einer Lateinschule in Basel ging Leonhard mit dreizehn Jahren – damals ein normales Alter – an die Universität. Ursprünglich für die Theologie bestimmt, wurde Leonhard von Johann I Bernoulli unterrichtet, privatissime, zusammen mit dessen Söhnen Nicolaus II und Johann I. Johann erkannte das heranwachsende Genie. Trotz seiner Fürsprache und einer ausgezeichneten Dissertation Eulers über den Schall konnte Euler 1727 seiner Jugend wegen einen freigewordenen Lehrstuhl für Physik in Basel nicht erobern.

Inzwischen war unter unermesslichen Schwierigkeiten und Opfern von Menschen im Sumpfgelände der Mündung der Newa unter dem russischen Zaren Peter I. (dem Großen) die neue Hauptstadt St. Petersburg entstanden. Beraten von Leibniz und nach einem Besuch der Akademien in Paris und London beschloss Peter I. die Gründung einer Akademie. Sie wurde von seiner Witwe 1725 eröffnet. Um sofort hohes wissenschaftliches Niveau zu erreichen, das mit Einheimischen für den Anfang nicht zu erwarten war, wurden bedeutende ausländische Gelehrte an die Akademie berufen.

Bereits im Spätherbst 1725 nahmen Nikolaus II und Daniel Bernoulli (Söhne Johanns) und ihr Landsmann Jakob Hermann (1678–1733), der sich um die Verbreitung des Calculus in Italien verdient gemacht hatte, ihre Tätigkeit in St. Petersburg auf. Erst 1726 ging ein Berufungsschreiben an Euler ein. Die Berufung Eulers nach St. Petersburg wurde auch von Christian Goldbach unterstützt, dem ersten ständigen Sekretär der Petersburger Akademie. Übrigens wurde Eulers ältester Sohn Johann Albrecht (1734–1800) im Jahre 1769 ebenfalls ständiger Sekretär der Petersburger Akademie.

Eine stattliche Anzahl bedeutender Gelehrter aus Schwaben und anderen Teilen Deutschlands vervollständigte das *„Basler Quartett“*. Der aus Königsberg stammende und weitgereiste Diplomat und Mathematiker Christian Goldbach wurde für Euler zu einem wertvollen Mitstreiter und Korrespondenten. Und schließlich richtete der französische Astronom Delisle (1688–1768) ein hervorragendes Observatorium ein. Überhaupt waren die Arbeitsbedingungen in St. Petersburg hervorragend: Bibliothek, Sitzungszimmer, Kunstkammer, anatomisches Theater, Druckerei waren vorhanden.

Nach einigen Wirren um die Eroberung der Macht im Lande – die Akademie musste sogar für kurze Zeit nach Moskau umziehen – kehrte schließlich unter der Regentschaft von Anna Iwanowna (1730–1740) wieder Ruhe ein. Erst 1731 wurde Euler, bisher Adjunkt, zum Professor für Physik und zum Ordentlichen Mitglied der Akademie berufen. Jakob Hermann war schon 1730 nach Basel zurückgekehrt; 1733 folgte Daniel Bernoulli. Dadurch wurde Euler als sein Nachfolger Professor der Mathematik an der Akademie. Nach Heirat (1734), der Geburt des ersten Sohnes Johann Albrecht und der Arbeit an der Generalkarte Russlands verlor Euler 1738 rechts sein Augenlicht.

Das Jahr 1740 spielt in der europäischen politischen Geschichte eine wesentliche Rolle: Die Zarin Anna Iwanowna stirbt, in Preußen wird Friedrich II. König, und Maria Theresia wird Königin von Österreich und Ungarn. Noch im selben Jahr kommt es zum ersten Schlesischen Krieg.

Der erste Petersburger Aufenthalt Eulers dauerte bis 1741. Nach unruhigen politischen Zeiten folgte er einer Einladung Friedrichs II. nach Berlin. Wegen des zweiten Schlesischen Krieges verzögerte sich der Ausbau der Berliner Akademie. Der der französischen Kultur überaus zugeneigte König erwählte Maupertuis zum Präsidenten der Akademie, durchaus eine Zurücksetzung für Euler. Auch waren die Charaktere und Ansichten Friedrichs und Eulers zu sehr verschieden, so dass es nach anfangs glücklichem Beginn zu Verstimmungen zwischen Euler und dem König kam. Euler passte mit seiner strengen moralischen Haltung nicht in das geistreiche und freigeistige Parlieren bei Hofe. Friedrich ließ sich später sogar zu der Bezeichnung Eulers als *„einäugigen Meßkünstler“* hinreißen, der nun durch einen Zweiäugigen (Lagrange) ersetzt werde.

Auch Voltaire hatte einige Zeit am französisch geprägten Hofe Preußens gelebt, war aber dann frühzeitig wieder nach Frankreich zurückgekehrt. Voltaire musste unter anderem auch deswegen fliehen, nachdem er in der Satire

„Dr. Akakia“ Maupertuis lächerlich gemacht hatte. In jene Zeit fällt auch Voltaires Angriff auf Leibniz: Leibniz hatte in einer Schrift (1710 französisch erschienen) Gott verteidigt, der (nach Meinung Voltaires) eine bessere Welt hätte einrichten können und müssen, wenn er doch allmächtig sei. Leibniz hatte nun mit Nachdruck die Meinung vertreten, dass unsere Welt die beste aller möglichen sei. Der große Spötter Voltaire ließ 1759 unter dem Titel *„Candide ou l' optimisme“* (Candide bedeutet soviel wie der Arglose) eine kritisch-ironische Schrift erscheinen. Die „beste aller Welten“ erkenne man etwa daran, dass – wie der von Voltaire erfundene dümmliche Maitre Pangloß (d. h. Allesreder) behauptet – der Mensch eine Nase habe, um eine Brille tragen zu können; daher gibt es Brillen. Und ähnliche andere Grotesken. Die Steine sind dazu da, um behauen und zum Bau von Schlössern verwendet zu werden, und infolgedessen hat unser gnädiger Herr ein wunderschönes Schloß. Und die maßlosen Gräuel und Schrecken der Kriege gehören ebenfalls in die beste aller Welten.

Der Dichter Johann Wilhelm Ludwig Gleim (1719–1803) lebte nach Abschluss seiner Studien von 1743 bis 1747 in Berlin. Es ist durchaus wahrscheinlich, dass er in dieser Zeit Leonhard Euler persönlich kennen lernte; jedenfalls hat er ihm das folgende anakreontische Liedchen zugeeignet:

An Herrn Euler

O Freund, der du die Sterne
Des Himmels alle zählst!
Zählst Millionen Welten
Und keine Zahl verfehlst!

Ausrechnest alle Körner
Des Sandes an dem Meer!
Und aller Vögel Schaaren
Und aller Fische Heer!

Zählst alle Wassertropfen
Im großen Ocean
Und alle Sonnenstrahlen
Auf jeder Sonnenbahn!

Du Wunder unsrer Zeiten
Du kannst, du kannst allein!
Von allen meinen Mädchen
Der Rechnungsführer seyn! [Gleim 1969, S. 83ff.]

Inzwischen, 1762, hatte die aus Deutschland (Zerbst) stammende Katharina II. die Macht an sich gerissen und machte Euler glänzende Angebote für eine Rückkehr nach St. Petersburg. Von Friedrich nur widerstrebend freigegeben folgte er schließlich 1766 der Einladung. In Berlin hatte er u. a. mit Publikationen engen Kontakt zur Petersburger Akademie gehalten, wie er

auch später von dort aus reichlich Artikel in den Berliner Abhandlungen publizierte. Nachfolger von Euler in Berlin wurde Lagrange.

Auch in dieser zweiten Petersburger Periode blieb Euler, trotz fast vollständiger Erblindung, äußerst produktiv. Bei dem großen Brand von St. Petersburg verlor auch Euler sein Haus; nur mit Mühe konnte der fast Blinde aus dem brennenden Holzhaus herausgeführt und so gerettet werden. Die Zarin ersetzte den Verlust des Hauses. Euler starb an einem Schlaganfall plötzlich und schmerzlos am 18. September 1783.

Aus der Berliner Zeit stammt ein interessantes Dokument *Vom Nutzen der höheren Mathematik*, ursprünglich in lateinischer Sprache verfasst.

> *„Heute bezweifelt niemand den großen Nutzen der Mathematik, den vielen Wissenschaften und Künsten, deren wir uns täglich bedienen, ist sie unentbehrlich. Dies Lob wird nun aber gewöhnlich der niedern Mathematik, sozusagen ihren Elementen gezollt, während man jener Mathematik, die mit Recht die höhere genannt wird, jede praktische Bedeutung abspricht. Sie sei ein Spinngewebe, denkt man, das seiner außerordentlichen Zartheit wegen nicht gebraucht werden könne. Die gesamte Mathematik befaßt sich aber mit dem Aufsuchen unbekannter Größen. Zu diesem Zwecke zeigt sie uns die Methoden oder gleichsam die Wege, die zur Wahrheit führen; sie macht die verborgensten Wahrheiten ausfindig und setzt sie ins richtige Licht. So schärft sie einerseits unsere Denkkraft, bereichert aber auch andererseits unsere Kenntnisse. Beides sind Ziele, die gewiß der größten Mühe wert sind. Die Wahrheit ist an sich eine Kostbarkeit; da mehrere Wahrheiten, unter sich verknüpft, höhere Zusammenhänge ergeben, ist jede von Nutzen, selbst wenn dieser zuerst nicht ersichtlich ist. Man wendet auch etwa ein, die höhere Mathematik versenke sich zu tief in die Ergründung der Wahrheit. Dies ist eher ein Lob als eine Kritik.*
> *Doch verweilen wir nicht zu lange bei diesen abstrakten Vorzügen, können wir doch leicht beweisen, daß die höhere Analysis mit nicht weniger Recht als die elementare Mathematik die Bezeichnung einer nützlichen Wissenschaft verdient, ja, daß ihr sogar ein viel weiteres Feld der Anwendung offen steht. Selbst im Interesse derjenigen Wissenschaften, für welche die elementare Mathematik vorerst allgemein zu genügen schien, ist die Weiterentwicklung der höheren Mathematik bis zu einem Grade erforderlich, den sie noch lange nicht erreicht hat. Daher will ich in dieser Abhandlung zeigen, daß der Nutzen, den man der elementaren Mathematik zugesteht, bei der höheren Mathematik nicht etwa verschwindet, sondern im Gegenteil stets wächst, je höher man in dieser Wissenschaft steigt; ja, daß die Mathematik noch nicht einmal so weit entwickelt ist, als auch die gebräuchlichsten Anwendungen es eigentlich erfordern.“* (Zitiert nach [Fellmann 1995, S. 61f.])

Hauptwerke Eulers

ERSTE PETERSBURGER PERIODE

1736	*Mechanica* (2 Bände)
1738/1740	*Rechenkunst* (2 Bände)
1739	*Tentamen novae theoriae musicae* (Musiktheorie)

DIE BERLINER PERIODE

1744	*Methodus inveniendi ...* (Variationsrechnung)
1744	*Theoria motuum planetarum et cometarum* (Himmelsmechanik)
1745	*Neue Grundsätze der Artillerie*
1747	*Rettung der göttlichen Offenbarung gegen die Einwürfe der Freygeister*
1748	*Introductio in analysin infinitorum* (Einführung, 2 Bände)
1749	*Scientia navalis* (Schiffstheorie, 2 Bände)
1753	*Theoria motus lunae* (Erste Mondtheorie)
1755	*Institutiones calculi differentialis* (Differentialrechnung, 2 Bände)
1762	*Constructio lentium objectivarum* (Achromatische Linsen)
1765	*Theoria motus corporum...* (Zweite Mechanik)

ZWEITE PETERSBURGER PERIODE

1766	*Théorie générale de la dioptrique* (Linsentheorie)
1768	*Lettres à une Princesse d' Allemagne* (Philosophische Briefe, 2 Bände)
1768	*Institutiones calculi integralis* (Integralrechnung, 3 Bände bis 1770)
1769	*Dioptrica* (Optik, 3 Bände bis 1771)
1770	*Vollständige Anleitung zur Algebra* (Algebra, 2 Bände, 1768 Vorabdruck einer russischen Übersetzung)
1772	*Theoria motuum lunae* (Zweite Mondtheorie)
1773	*Théorie complette de la construction et de la manoeuvre des vaisseaux* (Zweite Schiffstheorie)

(Verkürzte Titel. Nach Sammelband Kanton Stadt Basel, geordnet nach Druckzeiten)

Man hat die Anteile der verschiedenen Gebiete am Gesamtwerk ausgerechnet: Algebra, Zahlentheorie, Analysis 40 %; Mechanik und übrige Physik 28 %; Geometrie/Trigonometrie 18 %; Astronomie 11 %; Schiffswesen, Architektur, Artillerie 2 %; Philosophie, Musiktheorie, Theologie und übriges 1 %.

Es ist hier unmöglich, nicht einmal nur für die Mathematik, die Entdeckungen und Ergebnisse und weiterführenden Ansätze Eulers im Detail wiederzugeben. Dazu sei verwiesen auf A. P. Juschkewitsch im [DSB] mit dort aufgeführten zahlreichen Arbeiten, darunter die in Russland und der Sowjetunion erschienenen vorzüglichen Detailstudien.

Wir müssen uns auf einige Aspekte beschränken (über Variationsrechnung und Algebra wurde bzw. wird in den einschlägigen Abschnitten berichtet).

Die *„Introductio“* ist eine wirkliche Einführung; sie wurde übrigens niedergeschrieben als Euler schon mit der Niederschrift der Differential- und Integralrechnung begonnen hatte. In einem Brief vom 4. Juli 1744 äußerte sich Euler über den gegenseitigen Zusammenhang der drei Teile:

> *„Nachdem ich mir einen Plan von einem vollständigen Traktat über die Analysis infinitorum formiert hatte, so habe ich bemerkt, daß sehr viele Sachen, welche dazu eigentlich nicht gehören und nirgend abgehandelt gefunden werden, vorhergehen müßten und aus denselben ist dieses Werk als Prodromus ad Analysin infinitorum entstanden.“*
> (Zitiert nach [Fellmann 1995, S. 69])

Wiewohl in beträchtlichem zeitlichen Abstand gedruckt (1748, 1755, 1768) bilden sie eine gedankliche Einheit (vgl. Juschkewitsch in [DSB, S. 476ff.]).

Es wird von Euler herausgestellt, dass die Analysis die Wissenschaft von den Funktionen ist. Er gibt eine Definition der Variablen und einen (schon oben mitgeteilten) Funktionsbegriff in Anlehnung an Johann I Bernoulli. Funktionen können (nach Euler) auch implizit und auch mit Hilfe von Parametern beschrieben werden. Und, ganz wichtig: Funktionen können auch für komplexe Werte der unabhängigen Variablen definiert sein. Doch um eben diese Zeit zeigte es sich am Problem der schwingenden Saite, dass dies nicht umfassend genug war: es war an Funktionen zu denken, die nicht „analytische Ausdrücke“ (im Sinne von Euler) sind. Das Problem forderte schon in Eulers Zeit langanhaltende Diskussionen heraus, die schließlich im 19. Jahrhundert zu einem erweiterten Funktionsbegriff führten.

Im Vorwort zur *„Introductio ...“* begründet Euler sein Anliegen:

> *„Der grösste Teil der Schwierigkeiten, mit denen gewöhnlich die Jünger der mathematischen Wissenschaft bei der Erlernung der Analysis des Unendlichen zu kämpfen haben, hat nach meiner Erfahrung darin seinen Grund, dass man sich bereits an jene höhere Kunst heranwagt, bevor man noch recht die niedere Algebra sich angeeignet hat. Dies hat zur Folge, nicht nur, dass man gewissermassen an der Schwelle stehen bleibt, sondern auch, dass sich von dem Begriffe des Unendlichen ganz verkehrte Ansichten herausbilden. (...) Was ich in dem vorliegenden Werke zusammengestellt habe, dürfte dem erwähnten Mangel, wie ich glaube, vollständig abzuhelfen im Stande sein.“*
> [Euler 1885, S. V]

Und er stellt fest, dass *„die gesamte Analysis des Unendlichen von den veränderlichen Zahlgrössen und deren Functionen handelt.“* [Euler 1885, S. VI].

Transzendent: *„Bedeutet z. B. c den Umfang des Kreises mit dem Halbmesser 1, so ist c eine transzendente Zahlgröße.“*

„§8: Die algebraischen Functionen teilt man wieder in rationale und irrationale; jene sind solche, in welche die Veränderliche unter keinem Wur-



Abb. 9.6.3 Zum Gedenken an Leonhard Euler (Ausstellung in der Humboldt-Universität Berlin) [Foto Alten]

zelzeichen vorkommt, dieses aber solche, in welchen die Wurzelzeichen sich auch über die veränderliche Zahlgröße erstrecken.“

„§9: Die rationalen Functionen zerfallen ihrerseits wieder in ganze und gebrochene.“ [Euler 1885, S. 6]

Auch unendliche Reihen werden behandelt, sogar divergente Reihen, deren Behandlung freilich nicht den im 19. Jahrhundert entwickelten Kriterien von Strenge entspricht [Burkhardt 1911]. Dies führte jedoch durch Erweiterungen bzw. Verallgemeinerungen des Konvergenzbegriffes in der Theorie der Limitierung und den nach Ernesto Cesàro (1859–1906), Nils Henrik Abel (1802–1829), Émile Borel (1871–1956), Friedrich Riesz (1880–1956) und anderen benannten Limitierungsverfahren zu einer Fülle neuer, interessanter Ergebnisse. Es geht also um die Behandlung der Theorie der sog. elementaren Funktionen.

Logarithmisches Rechnen war seit Neper, Briggs, Bürgi, Kepler und anderen im Gebrauch. Doch erst Euler fasste die Idee der logarithmischen Funktion (für positive Variable) und setzte *„log“* $1 = 0$ für jede Basis. Bald darauf (1751) folgte eine umfassende Theorie des Logarithmus sogar für komplexe Variable. Durch Entwicklung in eine unendliche Reihe erhielt er

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots = 2{,}718281822459045235602 8\ldots$$

Die Bezeichnung e als Basis des natürlichen Logarithmus war bereits 1728 verwendet worden.

Auch die trigonometrischen Funktionen, bisher nur als Verhältnisse am rechtwinkligen Dreieck behandelt, wurden durch Euler als wirkliche Funktionen mit ihren Additionstheoremen verstanden und beschrieben. Schließlich gab er die Formel an:

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x\,.$$

Diese Formel war bereits 1743 von Euler und sogar noch früher von R. Cotes 1716 angegeben worden. Aus ihr folgt für $x = \pi$ die berühmte Formel

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

die die drei Konstanten e, i und π miteinander verknüpft [Fellmann 1983, S. 45].

Natürlich muss man sich vor Augen halten, dass das Symbol i im Druck erstmals 1794 auftaucht, im postum herausgegebenen 4. Band der Integralrechnung. Die hier verwendeten Formeln sind also modernisierte Varianten [Reich 2005, S. 187].

Der zweite Teil der *„Introductio“* behandelt die Klassifikation der Kurven und eine Theorie der Oberflächen.

Die Wirkung der *„Introductio“* von 1748 (französisch 1797, teilweise 1786, deutsch 1788, englisch 1988) zeigt sich auch im Lehrstoff an der Pariser Polytechnischen Schule.

Schließlich untersuchten d'Alembert und Euler auch die Ableitungen einer analytischen Funktion $w = f(z)$ der komplexen Variablen $z = x + iy$ und fanden: Wenn

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

analytisch ist, dann genügen ihr Realteil $u(x, y)$ und ihr Imaginärteil $v(x, y)$ den später nach Cauchy und Riemann benannten Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Euler benutzte analytische Funktionen einer komplexen Variablen zum Studium von orthogonalen Trajektorien und 1778 in seinem Werk über Kartographie. Später wurden diese Ideen von Cauchy (1825) und Riemann (1854) weitergeführt.

Doch sollte festgehalten werden, dass Euler in den imaginären Zahlen nur eine bequeme Form der Bezeichnungen zu erblicken vermochte, ohne reale Bedeutung. Als ein Kollege 1753 eine geometrische Interpretation vorschlug, stieß er auf eine scharfe Ablehnung durch Euler. Die Anerkennung der komplexen Zahlen erfolgte erst im 19. Jahrhundert.

Differential- und Integralrechnung wurden von Euler durch viele Entdeckungen bereichert. Stichworte müssen genügen: Formeln der Differentialrechnung mit Substitution der Variablen und die Gültigkeit der bereits 1721 von Nikolaus I Bernoulli ausgesprochenen (und erst 1873 von H. A. Schwarz vollständig bewiesenen) Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen einer Funktion $f(x, y)$ zweier reeller Variabler in der Formel

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

werden behandelt.

Die zwei ersten Kapitel der *„Institutiones“* behandeln die endlichen Differenzen, wie Euler überhaupt den Calculus als Sonderfall (Grenzfall) der Differenzenrechnung verstand. Diese Auffassung, dass die Differentialrechnung eigentlich inkorrekte Grundlagen besitze, war im 18. Jahrhundert weit verbreitet: die Differentialrechnung beruhe auf der Vernachlässigung von unendlich klein werdenden Größen. Eulers eigener Vorschlag, die logischen Schwierigkeiten zu überwinden, hatte auch keinen Bestand, doch führte Eulers Rechnen mit unendlich kleinen und unendlich großen Größen stets zu richtigen Ergebnissen und wurde durch die moderne Nichtstandardanalysis nachträglich gerechtfertigt.

Euler lieferte in den *Institutiones calculi integralis* von 1768 praktisch alle in elementaren Funktionen ausdrückbaren Integrale. Auch legte er die Grundlagen zu den (später sogenannten) Beta- und Gamma-Funktionen. In der entstehenden Theorie der elliptischen Funktionen fand er das allgemeine Additionstheorem.

Die *„Institutiones ...“* enthalten zahlreiche Entdeckungen Eulers in der Theorie der gewöhnlichen und der partiellen Differentialgleichungen, dies in Verbindung mit spezifischen Gleichungen u. a. zu Hydrodynamik, Vibrationen von Membranen und zur Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schall (ausführlich in [DSB, Euler], [Euler 1983], [Demidov 1992, S. 157ff.]).

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass Euler mit seiner Schiffstheorie an Vorbilder anknüpfen konnte, beispielsweise an den – trotz gegenteiliger Ansichten freundschaftlichen – Briefwechsel zwischen Pierre Varignon (1654–1722) und Johann I Bernoulli über die Manövrierfähigkeit von Schiffen. Johann ließ 1714 sein (einziges) Buch erscheinen, den *Essay sur une nouvelle théorie de la manoevre des vaisseaux* (Abhandlung über eine neue Theorie des Manövrierens von Schiffen).

Auf Varignon geht auch das Gesetz vom Kräfteparallelogramm zurück: Ein Schiff bewegt sich in der durch die Komponenten von Segelstellungen, Windkraft und Strömung bestimmten Richtung. Varignon darf als einer der Mitbegründer der theoretischen Mechanik gelten (zum Briefwechsel vgl. [Peiffer 2008]).

Zur Vorgeschichte des Fundamentalsatzes der Algebra

Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, dass jede algebraische Gleichung n-ten Grades mit komplexen Koeffizienten (bei entsprechender Zählung mehrfacher Wurzeln) genau n Lösungen besitzt. Dieser Sachverhalt kann jedoch auch als Faktorisierungseigenschaft für das entsprechende Polynom formuliert werden: Jedes Polynom vom Grade $n \geq 1$ mit komplexen Koeffizienten kann als ein Produkt von n linearen Faktoren mit komplexen Koeffizienten dargestellt werden.

Ein gewisser Peter Roth (gest. 1617), Rechenmeister in Nürnberg, über den nur relativ wenig bekannt ist [Schneider 1999], [Tropfke 1980, Bd. 1, 4. Aufl.] tat vermutlich einen ersten Schritt zur Formulierung dieses Satzes. Im Jahre 1608 erschien sein ausführliches Buch *Arithmetica Philosophica – Oder schöne neue wolgegründete Überauß Künstliche Rechnung der Coß oder Algebrae.* Ganz in den Traditionen von Cardano stehend und beeinflusst von Faulhaber behandelte Roth ausführlich Gleichungen und gab – im Unterschied zu Faulhaber – nicht nur die Lösungen kubischer Gleichungen, sondern auch die Lösungswege an. Roth hatte 13 Typen kubischer Gleichungen unterschieden und war auch auf den *casus irreducibilis* gestoßen. Im Anschluss an die Aufzählung der Typen machte Roth (ohne Beweis natürlich) eine Bemerkung, wonach eine Gleichung n-ten Grades höchstens n Wurzeln haben könne:

> *„... seynd in allen nachfolgenden Cossen auffs meinste so vil geltungen radicis zu finden/mit wieviel die höchste Quantitet der fürgegebenen Cossischen equation/vermög der Cossischen Progression/verzeichnet wird. Aber allhie ist solches nicht zu verstehn/daß darumb ein jede Cubiccossische Vergleichung dreyerley Geltungen/ein ZZ. Cossische viererley geltungen ein Surdesolicossische fünfferley geltungen des radicis leidet/sondern alle die/so am meisten geltungen leiden/die haben ihr so viel, vnd auch gar nicht mehr.“*
> [Tropfke 1980, S. 489f.]

Roth hat sich mit seiner *Arithmetica philosophica*, die weit über die Bedürfnisse der Rechenschulen hinausging, hohes Ansehen erworben; Descartes hat später auf Roths Schrift zurückgegriffen.
Ivo Schneider hat 1999 in einer Studie die Verdienste von Roth so zusammengefasst:

> *„Immerhin hatte Roth mit der im ersten Teil seiner ‚Arithmetica philosophica‘ skizzierten Cardanischen Lösungstheorie und den im zweiten Teil ausführlich dargestellten Lösungswegen für die Probleme des Faulhaberschen ‚Lustgartens‘ den Bereich der kubischen Gleichungen nicht nur für die deutschen Rechenmeister, sondern auch allen interessierten Liebhabern der Mathematik für ein autodidaktisches Studium zugänglich gemacht.“*
> [Schneider 1999, S. 309]

Ersichtlich ging es noch nicht um einen Beweis für die Existenz von Wurzeln, sondern um die Anzahl der Wurzeln. Indessen gehören auch diese Fragestellungen in die Vorgeschichte des Fundamentalsatzes der Algebra. Hierher zu rechnen sind die Untersuchungen von Thomas Harriot (1560?–1621) über die Zerlegung von Polynomen in Linearfaktoren; auch näherte er sich der Cartesischen Zeichenregel [Tropfke 1980, S. 490ff.].

Im Jahre 1629 erfolgte ein deutlicher Schritt vorwärts in Richtung Fundamentalsatz. In diesem Jahr veröffentlichte der in den Niederlanden tätige Albert Girard (1595–1632) in Amsterdam das für die Geschichte der Algebra bedeutsame Werk *Invention nouvelle en algèbre* (Neue Erfindung zur Algebra). Dort stellte Girard fest, dass, wenn man die *„unmöglichen“* (imaginären bzw. komplexen) Lösungen mitzählt, jede Gleichung n-ten Grades n Wurzeln hat. Genauer: Jede Gleichung der Algebra enthält so viele Lösungen, wie die *„dénomination“* (Exponent) der höchsten Größe anzeigt:

> *«Toutes les equations d' algèbre reçoivent autant de solutions, que la dénomination de la plus haute quantité le demonstre (...).»*
> [Tropfke 1980, S. 492]

Girard hatte die Werke von Simon Stevin herausgegeben und stand daher unter dessen Einfluß. So übernahm Girard die Bezeichnungen Stevins bei der Potenzschreibweise. Im Unterschied aber zu Stevin erkannte Girard imaginäre/komplexe Zahlen als Lösungen an. Beispielsweise hat $x^4 = 4x - 3$ die Lösungen $1, 1, -1 + \sqrt{-2}$ und $-1 - \sqrt{-2}$. Er begründete auch, warum er komplexe Zahlen als Lösungen zählte:

> *„Man könnte nun fragen, wozu diese Lösungen dienen können, die doch unmöglich sind. Ich antworte: Aus drei Gründen: {1} um der Sicherheit der allgemeinen Regel willen, {2} weil man dann weiß, daß es keine anderen Lösungen geben kann, {3} wegen ihrer Nützlichkeit; diese ist leicht einzusehen, denn sie dienen zum Auffinden der Lösungen ähnlicher Gleichungen.“*
> [Tropfke 1980, S. 492]

Struik weist darauf hin, dass in der Originalpassage von Girard zum Fundamentalsatz der Algebra eine Einschränkung verborgen sein könnte. Dies hängt mit der von Girard getroffenen Einteilung der Gleichungen in *„einfache“*, *„vollständige“*, *„unvollständige“* und *„gemischte“* Gleichungen zusammen. Doch würde es hier zu weit führen, diesen Dingen im Einzelnen nachzugehen [Struik 1969, S. 85].

Die Beschäftigung mit dem Fundamentalsatz erhielt Anfang des 18. Jahrhunderts durch Arbeiten von Leibniz und Johann I Bernoulli im Zusammenhang mit der Infinitesimalmathematik neue Impulse. Beide Gelehrte entwickelten die Methoden der Partialbruchzerlegung zur Integration von gebrochen rationalen Funktionen $f(x) = P(x)/Q(x)$ mit Polynomen P und Q. Das Wesen dieses Verfahrens besteht darin, dass man das im Nenner stehende Polynom $Q(x)$ in Faktoren ersten und zweiten Grades zerlegt und



Abb. 9.6.4 Jean Baptiste le Rond d'Alembert (Gemälde von de la Tour)

schließlich eine Zerlegung des Bruches $P(x)/Q(x)$ in einfache Brüche erhält, die sich integrieren lassen. Die Methode ist aber nur dann allgemein gültig, wenn die geforderte Zerlegung des Nennerpolynoms stets möglich ist, wenn also der Fundamentalsatz gilt.

Girard hatte den Fundamentalsatz der Algebra ausgesprochen; er galt allgemein als gültig. Doch der Beweis erwies sich als schwierig; der erste vollständige Beweis stammt von C. F. Gauß aus dem Jahre 1799 und war Gegenstand seiner Dissertation (von Gauß stammen noch drei verschiedene weitere Beweise).

Ein ernst zu nehmender Beweisansatz stammt von Jean le Rond d'Alembert, seit 1759 ständiger Sekretär der Pariser Akademie. Er findet sich in seiner Abhandlung *Recherches sur le calcul intégrale* (Untersuchungen zum Integralkalkül) von 1746 (1748). Diese Abhandlung ermöglichte wesentliche Fortschritte bei der Integration von gebrochen rationalen Funktionen durch die Methode der Partialbruchzerlegung. Die Aussage von d'Alembert [Struik 1969, S. 99] läuft darauf hinaus, dass jedes Polynom von gerader Ordnung in Faktoren zweiten Grades mit reellen Koeffizienten zerlegt werden kann.

Der Beweis wurde geometrisch geführt. Genau genommen handelte es sich nicht um einen Beweis für die Existenz einer Wurzel, sondern um eine (falsche) Vermutung über die Form der Wurzeln von Gleichungen höheren Grades. Auf Lücken und Schwächen bei d'Alembert hat später Gauß hingewiesen.

D'Alembert hatte ohne Beweis angenommen, dass der Betrag des betrachteten Polynoms ein Minimum bei x_0 hat, und bewies, dass dieses Minimum den Wert Null haben muss. Mit anderen Worten: x_0 ist eine Nullstelle des Polynoms und der Faktor $(x - x_0)$ kann abgespalten werden. Durch sukzessive Anwendung dieser Schlussweise erhält man eine vollständige Zerlegung

des Polynoms. Am Rande vermerkte d'Alembert noch zwei wichtige Beobachtungen: Wenn die komplexe Zahl $a+b\sqrt{-1}$ Wurzel eines Polynoms P mit reellen Koeffizienten ist, so ist auch $a-b\sqrt{-1}$ Wurzel von P, und P kann in einen quadratischen Faktor der Art x^2+mx+n und ein Restpolynom zerlegt werden. Ersetzt man in einem reellen Polynom $P(x)$ die Veränderliche x durch eine komplexe Zahl $z=z_1+z_2\sqrt{-1}$ (z_1, z_2 reell), dann wird $P(z)=Q_1(z_1,z_2)+Q_2(z_1,z_2)\sqrt{-1}$ mit reellen Polynomen Q_1 und Q_2. $P(z)$ wird genau dann Null, wenn $Q_1=0$ und $Q_2=0$ sind. – Wenig später, 1749, veröffentlichte Euler einen Beweis des Satzes.

Leonhard Euler und die Algebra

Nur einige Aspekte von Eulers Beitrag zur Algebra können hier vorgestellt werden.

Auch Euler war von der Tatsache beeindruckt, dass sich keine Lösungsformeln für Gleichungen höheren als vierten Grades hatten finden lassen. Doch publizierte er 1738 über die vermutliche Gestalt der Lösungen. Die Abhandlung *De formis radicum aequationum cuiusque ordinis coniectatio* (Eine Vermutung über die Wurzelformen der Gleichungen aller Grade) war indessen schon 1732/33 niedergeschrieben worden. Dort heißt es:

> *„Der Verfasser bemerkt demnach an erster Stelle, daß offenbar ein Verfahren zur Auflösung irgendeiner Gleichung so beschaffen sein müsse, daß es die Verfahren für alle niedereren Gleichungen in sich enthalte, da ja auch eine Gleichung beliebigen Grades alle niedereren Gleichungen mit umfasse.“*
> [Euler seit 1911, Ser. 1, Vol. 6, S. 5]

So hat die Lösung einer kubischen Gleichung die Struktur einer Summe zweier dritter Wurzeln, die einer biquadratischen Gleichung erscheint als Summe dreier Wurzeln vierten Grades. Die Vermutung besteht nun darin, dass die Lösung einer Gleichung n-ten Grades aus einer Summe von $n-1$ n-ten Wurzeln besteht.
Euler sagt in der Einleitung zu dieser Arbeit:

> *„Nachdem schon während der ersten Anfänge der analytischen Forschung* (beachte die Begriffsverschiebung, Wg.) *die Wurzeln der kubischen und der biquadratischen Gleichungen gefunden worden waren, muß es außerordentliches Erstaunen erregen, daß bis heute, trotz der höchst bedeutsamen Fortschritte der Analysis in unserer Zeit, ein Verfahren zur Aufsuchung der Wurzeln höherer Gleichungen noch unbekannt ist, zumal doch dieses Problem unausgesetzt von den hervorragendsten Geistern mit höchstem Interesse erforscht worden ist. (...) Daher befürchte ich von keiner Seite einen Tadel für diese meine Abhandlung, in der ich zeige, welche Formen die Wurzeln der Gleichungen haben und auf welchem Wege sie etwa gefunden werden mögen,*

> *wenn ich auch sonst nichts weiter zutage fördere. Vielleicht wird sie anderen mehr nützen und sie schließlich zu dem erstrebten Ziele führen.“* [Euler seit 1911, Ser. 1, Vol. 6, S. 6]

Im Zusammenhang mit der Partialbruchzerlegung ging Euler in seiner *Introductio in analysin infinitorum* von 1748 auch auf die Zerlegung eines Polynoms in Linearfaktoren ein. Sie wird als gegeben, als selbstverständlich vorausgesetzt. Die Zerlegung besteht aus reellen oder imaginären Linearfaktoren bzw. aus reellen Faktoren ersten oder zweiten Grades; andere imaginäre Größen als imaginäre Größen der Form $a + b\sqrt{-1}$ könne es nicht geben.

> *„Wenn eine ganze Funktion von z* (Euler versteht unter *„ganze Funktion“* eine ganzrationale Funktion) *imaginäre Linearfaktoren hat, so ist deren Anzahl gerade und sie lassen sich zu je zweien so zusammenfassen, daß ihr Produkt reell ist (. . .) Also kann jede ganze Funktion von z in reelle Faktoren ersten oder zweiten Grades zerlegt werden. Obwohl das nicht in aller Strenge bewiesen ist, wird doch die Wahrheit dieses Satzes im folgenden immer mehr gestützt werden, (. . .)“* [Tropfke 1980, S. 496]

Den Versuch eines Beweises für die mögliche Zerlegung unternahm Euler in seiner Abhandlung *Recherches sur les racines imaginaires des équations* (Untersuchungen über die imaginären Wurzeln von Gleichungen) von 1749 (1751 gedruckt). Doch war auch dieser Beweis noch unvollständig.

Immerhin aber konnte Euler beweisen, dass zu jeder Wurzel der Form $x + y\sqrt{-1}$ auch die konjugiert komplexe Wurzel $x - y\sqrt{-1}$ existiert und damit ein Faktor $x^2 + ax + b$ des Polynoms.

Ferner bewies er, dass eine Gleichung geraden Grades mit negativem Absolutglied wenigstens eine positive und eine negative Wurzel hat. Zum Beweis führte er die Gleichung n-ten Grades sukzessive auf Gleichungen niedrigeren Grades zurück und zog dazu sehr stark geometrische Anschauungen heran. So weiß man von einem Polynom $P(x)$ ungeraden Grades $2n + 1$, dass sich der Wert des Polynoms für betragsmäßig große Werte von x so verhält wie sein Summand höchsten Grades, also gilt:

Für $x \to \infty$ folgt $x^{2n+1} \to \infty$ und $P(x) \to \infty$; für $x \to -\infty$ folgt $x^{2n+1} \to -\infty$ und $P(x) \to -\infty$.

Nach dem Kontinuitätsprinzip schlossen die Mathematiker des 18. Jahrhunderts, dass die durch das Polynom $P(x)$ definierte Kurve, die für große positive x-Werte oberhalb der x-Achse und für negative x-Werte unterhalb der x-Achse verläuft, notwendigerweise einmal die x-Achse schneiden muss. (Ein Beweis dieses scheinbar so naheliegenden Sachverhaltes beruht wesentlich auf der Vollständigkeit der reellen Zahlen und wird heute beispielsweise mit dem Zwischenwertsatz von Bolzano geführt.) Doch enthält die Abhandlung von Euler auch algebraisch geführte Beweise für einschlägige Sätze, z. B., dass jedes Polynom vom vierten Grade in zwei reelle Faktoren vom Grade zwei zerlegt werden kann.

Euler war überzeugt, einen korrekten Beweis des allgemeinen, in der Analysis vorausgesetzten Satzes geliefert zu haben, dass jedes Polynom in reelle Faktoren des ersten oder des zweiten Grades zerlegt werden kann. Der zweite Teil seiner Abhandlung ist dem Beweis gewidmet, dass alle nichtreellen Wurzeln von der Form $A + B\sqrt{-1}$ sind.

Die Eulersche Beweisskizze versuchten dann 1759 der als Offizier, später als Gouverneur tätige und mit Lagrange befreundete François Daviet de Foncenex sowie 1772 Lagrange selbst zu verbessern; doch beschränkten sie sich auf den algebraischen Teil des Beweises, so dass der grundlegende Mangel erhalten blieb. Gleiches gilt auch für Laplace, der 1795 einen neuen algebraischen Beweis zu geben versuchte; die Veröffentlichung erfolgte allerdings erst 1812. Gauß hatte inzwischen das Problem durch einen strengen Beweis gelöst.

Euler und sein Lehrbuch der Algebra

Eulers zweibändige *Vollständige Anleitung zur Algebra* von 1770 – schon 1768 war für den internen Gebrauch an russischen Gymnasien eine russische Übersetzung erschienen – hat erheblich zur Ausbreitung eines Standards an algebraischen Methoden und Kenntnissen beigetragen. Die Anfänge mindestens der Niederschrift dürften noch in Berlin erfolgt sein. Sie war in deutscher Sprache verfasst, wurde aber in St. Petersburg gedruckt.

Mit der *„Algebra“* ist eine immer wieder kolportierte Legende verbunden. Euler, vollständig erblindet, habe einem Bediensteten, einem Schneider, das Buch in die Feder diktiert und solange am Text gefeilt, bis dieser den Text vollständig verstanden habe. Das kann schon deswegen nicht stimmen, weil die Erblindung nach einer Staroperation 1771 erfolgte, als die *„Algebra“* schon in mehreren Fassungen vorlag [Fellmann 1995, S. 108]. Ob diese Legende so entstanden ist?

Eulers *„Algebra“* ist mit einem unsignierten *„Vorbericht“* versehen. Dort heißt es:

> *„Man überliefert hiermit denen Liebhabern der höhren Rechenkunst ein Werck, davon schon vor zwey Jahren eine russische Übersetzung zum Vorschein gekommen ist.*
> *Die Absicht des weltberühmten Verfassers bey demselben war, ein Lehrbuch zu verfertigen, aus welchem ein jeder ohne einige Beyhüllfe die Algebra leicht fassen und gründlich erlernen könne.*
> *Der Verlust seines Gesichts erweckte in ihm diesen Gedancken, und durch seinen stets geschäfftigen Geist angetrieben, säumete er nicht seinen Vorsatz ins Werck zu setzen. Zu diesem Ende erwählte er sich einen jungen Menschen, den er mit sich aus Berlin zur Aufwartung genommen hatte, und der ziemlich fertig rechnen, sonsten aber nicht den geringsten Begriff von der Mathematik hatte: er war seines Handwercks ein Schneider, und gehörte was seine Fähigkeit anlangt,*

unter die mittelmäßigen Köpfe. Dem ohngeachtet hat er nicht nur alles wohl begriffen, was ihm sein großer Lehrer vorsagte, und zu schreiben befahl, sondern er wurde dadurch in kurtzer Zeit in den Stand gesetzt die in der Folge vorkommende schwere Buchstaben-Rechnungen gantz allein auszuführen und alle ihm vorgelegte Algebraische Aufgaben mit vieler Fertigkeit aufzulösen.“
[Euler 1959, S. 39]

Die Legende wurde dadurch genährt, dass der Text von unübertrefflicher Klarheit war. Die *„Algebra (...) führt den absoluten Anfänger Schritt für Schritt von den natürlichen Zahlen über die arithmetischen und algebraischen Grundsätze und Praktiken über die elementare Gleichungslehre bis in die sublimsten Details der unbestimmten Analytik (Diophantische Gleichungen) ein; sie gilt – nach dem Urteil heutiger erstrangiger Mathematiker – noch immer als die beste Einführung in das Gebiet der Algebra für einen ‚mathematischen Säugling‘.“* [Fellmann 1995, S. 108]

Die *„Algebra“* fand mit Recht weite Verbreitung: 1774 in französischer Übersetzung durch Johann III Bernoulli, in englischer und in holländischer Übertragung in vielen Auflagen. Lagrange schrieb sogar längere wertvolle Zusätze.

Einige Punkte seien hervorgehoben. Da ist die relativ altmodische Erklärung der imaginären Zahlen, obgleich doch Euler in seinen Forschungsstudien imaginäre (komplexe) Zahlen sogar als Beweismittel verwendet hatte. In der *„Algebra“* heißt es lediglich:

„§ 143. Weil nun alle mögliche Zahlen, die man sich nur immer vorstellen mag, entweder größer oder kleiner als 0, oder 0 selbst sind; so ist klar, daß die Quadratwurzel von negativen Zahlen nicht einmal unter die möglichen Zahlen gerechnet werden kann. Folglich muß man behaupten, daß sie unmögliche Zahlen sind. Und dieser Umstand leitet auf den Begriff von solchen Zahlen, welche ihrer Natur nach unmöglich sind, und gewöhnlich imaginäre oder eingebildete Zahlen genannt werden, weil sie bloß in der Einbildung statt finden. (...)
„§ 145. Gleichwohl aber stellen sie sich unserem Verstande dar, und finden in unserer Einbildung statt; daher sie auch bloß eingebildete Zahlen genannt werden. Ungeachtet aber diese Zahlen, als z. B. $\sqrt{-4}$*, ihrer Natur nach ganz und gar unmöglich sind, so haben wir doch davon einen hinlänglichen Begriff, indem wir wissen, daß dadurch eine solche Zahl angedeutet werde, welche mit sich selbst multiplicirt, zum Product* -4 *hervorbringe; und dieser Begriff ist hinreichend, um diese Zahlen in der Rechnung gehörig zu behandeln. (...)*
„§ 151. Endlich muß noch der Zweifel gehoben werden, daß, da dergleichen Zahlen unmöglich sind, dieselben auch ganz und gar keinen Nutzen zu haben scheinen und diese Lehre als eine bloße Grille angesehen werden könnte. Allein sie ist in der That von der größten Wichtigkeit, indem oft Fragen vorkommen, von welchen man sogleich


Vollſtändige
Anleitung
zur
Algebra
von
Hrn. Leonhard Euler.
Erſter Theil.
Von den verſchiedenen Rechnungs-Arten,
Verhältnißen und Proportionen.
St. Petersburg.
gedruckt bey der Kayſ. Acad. der Wiſſenſchaften 1770.

Abb. 9.6.5 Titelblatt von Eulers Algebra 1770

nicht wissen kann, ob sie möglich sind oder nicht. Wenn nun ihre Auflösung auf solche unmögliche Zahlen führt, so ist es ein sicheres Zeichen, daß die Frage selbst unmöglich sey. Um dieses mit einem Beispiel zu erläutern, so wollen wir folgende Frage betrachten: man soll die Zahl 12 in zwey solche Theile zerlegen, deren Product 40 ausmache; wenn man nun diese Frage nach den Regeln auflöset, so findet man für die zwey gesuchten Theile $6+\sqrt{-4}$ und $6-\sqrt{-4}$, *welche folglich unmöglich sind, und hieraus eben erkennt man, daß diese Frage sich durchaus nicht auflösen läßt. Wollte man aber die Zahl 12 in zwey solche Theile zerfällen, deren Product 35 wäre, so ist offenbar, daß diese Theile 7 und 5 seyn würden.“*
[Euler/Grüson 1796, Teil I, S. 72ff.]

Im zweiten Teil der *„Algebra“* wird einleitend der Zweck der Algebra erläutert:

„Der Zweck der Algebra, so wie aller Theile der Mathematik ist, den Werth unbekannter Größen zu bestimmen, und dieses muß durch genaue Erwägung der Bedingungen, die dabey vorgeschrieben sind, und die durch bekannte Größen ausgedrückt werden, geschehen. Daher wird die Algebra auch so beschrieben, daß man darin zeige, wie aus bekannten Größen unbekannte zu finden sind.“
[Euler/Grüson 1796, Teil II, S. 3]

Der erste Abschnitt des zweiten Teiles bietet die Auflösung der algebraischen Gleichungen bis zum Grade vier. Dargestellt werden die Regeln des Cardano, des Scipio del Ferro und die Regel des Bombelli. (Der Herausgeber macht auf Seite 136 die Anmerkung, dass die Regel des Bombelli *„viel mehr dem Ludewig Ferrari gehört“* und dass man die Regel des Cardano dann fälschlicherweise ihm und nicht dem Scipio del Ferro zuschreibt.)

Es wird eine große Zahl von Aufgaben vorgerechnet, beispielsweise die Auflösung der kubischen Gleichung

$$x^3 + x^2 - 34x + 56 = 0$$

[Euler/Grüson 1796, S. 106].

Bezüglich der Möglichkeiten, Gleichungen höheren als vierten Grades aufzulösen, äußert sich Euler in § 219:

„So weit ist man bisher in Auflösung der algebraischen Gleichungen gekommen, nemlich bis auf den vierten Grad, und alle Bemühungen, die Gleichungen vom fünften und den höhern Graden auf gleiche Art aufzulösen, oder wenigstens auf die niedrigsten Grade zu bringen, sind fruchtlos gewesen, so daß es nicht möglich ist, allgemeine Regeln zu geben, wodurch die Wurzeln von höheren Gleichungen gefunden werden könnten.
Alles, was man darinen geleistet hat, geht nur auf ganz besondere Fälle (...)“ [Euler/Grüson 1796, Teil II, S. 146]

Etwas klarer drückte sich der Herausgeber Hofrat Kaußler über Eulers *„Algebra“* aus, und zwar in der Vorrede zum Teil III (1796), der die Zusätze von Lagrange enthält. Dort werden unbestimmte (diophantische) Gleichungen behandelt. Kaußler schrieb:

> *„Was aber die unbestimmten Gleichungen von höheren Graden, als der zweite, anbetrift, so hat man nur besondere Methoden für einige einzelne Fälle, und es ist zu vermuthen, daß die allgemeine Auflösung derselben eben so unmöglich ist, als die Auflösung derjenigen bestimmten Gleichungen, die über den vierten Grad steigen.“*
> [Euler/Kaußler/Lagrange 1796, Teil III, Vorrede IX]

Euler und die Zahlentheorie

Zahlentheorie gehört ebenfalls zu den Hauptarbeitsgebieten von Euler. Er konnte an Diophant aus der Antike, vor allem aber an Pierre de Fermat anknüpfen; so wurde Euler zu einem Wegbereiter einer neuen mathematischen Disziplin (vgl. z. B. Zahlentheorie in [Euler 1983, S. 35ff.]). Bei Euler handelt es sich sozusagen noch um eine Fülle punktueller, jedoch herausragender Ergebnisse, die Raum für anschließende Forschungen boten. Durch Gauß schließlich, in seinen *Disquisitiones arithmeticae* von 1801, wurde die Zahlentheorie in den Rang eines selbständigen und äußerst ergiebigen Arbeitsgebietes erhoben.

Fermat hatte ohne Beweis den Satz ausgesprochen, dass für irgendeine Primzahl p und eine natürliche Zahl n der Ausdruck $n^{p-1} - 1$ durch p teilbar ist. Dieser in der Literatur oft als „kleiner Fermatscher Satz“ bezeichnete Sachverhalt wurde durch Euler bewiesen und führte schließlich zum quadratischen Reziprozitätsgesetz, noch ohne vollständigen Beweis. Dies gab Anlass zu weiterführenden Forschungen, bei Adrien-Marie Legendre (1752–1833), bei Carl-Friedrich Gauß (1777–1855) und später bei Eduard Kummer (1810–1893), David Hilbert (1862–1943) und Emil Artin (1898–1962).

Was den sog. großen Fermatschen Satz betrifft – die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ ist für $n > 2$ nicht ganzzahlig lösbar – so konnte Euler die Unmöglichkeit für $n = 4$ und andere Exponenten beweisen. Zur weiteren Entwicklung beim Beweis des Großen Fermatschen Satzes siehe Kap. 11.9.2.

Eine andere Vermutung – ausgesprochen von Mersenne (1588–1648) und Fermat –, dass Zahlen von der Form $p = 2^{2^k} + 1$ Primzahlen sind, konnte Euler widerlegen: Die Vermutung ist zwar richtig für $k = 0, 1, 2, 3, 4$; dagegen ergibt sich für $k = 5$ die Zahl $p = 4\,294\,967\,297$ mit dem Teiler 641.

Dagegen konnte Euler den von Fermat ausgesprochenen Satz beweisen, dass alle Primzahlen von der Form $p = 4n + 1$ in die Summe von zwei Quadraten zerlegt werden können. Von hier aus führte der Weg schließlich zur Theorie der binären quadratischen Formen, die von Gauß in den *„Disquisitiones“* vollendet dargestellt wurde.

Euler hat ein Untersuchungsfeld sehr geliebt: das der schon in der Antike behandelten befreundeten Zahlen. Zwei Zahlen heißen befreundet, wenn die Summe der echten Teiler der einen Zahl gleich der Summe der echten Teiler der anderen Zahl ist. So sind 220 und 284 befreundet, wie schon in der Antike herausgefunden wurde. Zwei weitere Paare befreundeter Zahlen fanden islamische Mathematiker. Euler fand zunächst 18, dann weitere 12 und kam schließlich auf 59 (!) Paare befreundeter Zahlen.

Euler dürfte auch der Erste gewesen sein, der Methoden der Analysis in die Zahlentheorie eingebracht hat. Zwei Höhepunkte seien hervorgehoben: Er fand die Kettenbruchentwicklung für die Zetafunktion und ihre Produktdarstellung mit Hilfe der Primzahlen

$$\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \prod_{p} \left[1 : \left(1 - \frac{1}{p^k}\right)\right],$$

p durchläuft die Folge der Primzahlen. Herauszuheben ist ferner Eulers Grenzwertdarstellung von 1744 für die fundamentale Konstante

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828\ldots,$$

die Basis der natürlichen Logarithmen. Dies hat später eine bedeutende Rolle gespielt für den Beweis (1768) der Irrationalität von π durch Johann Heinrich Lambert (1728–1777). Lindemann (1852–1939) zeigte 1882 und benutzte für den Beweis die von Euler herrührende Beziehung $\log(-1) = \pi i$.

Euler und die Geometrie

Eulers ungeheure Produktivität schloß auch geometrische Probleme ein [Euler 1983, S. 52ff.]. Da ist zunächst festzuhalten, dass die heutige Form der ebenen und der sphärischen Trigonometrie als Lehrgebäude wesentlich auf Euler zurückgeht, einschließlich der Bezeichnungen. Ferner sind es Studien zur Flächentheorie, die später in die Differentialgeometrie bei Gaspard Monge und anderen einmünden sollten.

Andere Studien betreffen die Einführung allgemeinerer Koordinaten (natürliche Koordinaten, Bogenkoordinaten u. a.). Euler fand die günstige Form der Flanken von Zahnrädern. Bei der technischen Realisierung im 19. Jahrhundert zeigte sich, dass so konstruierte Zahnräder günstige Eigenschaften wie geringe Reibung, Geräuscharmut und verlustarme Kraftübertragung aufweisen.

Zahllose Entdeckungen bereicherten die *„elementare Geometrie“*, u. a. mit dem bemerkenswerten Satz, dass in einem beliebigen Dreieck Höhenschnittpunkt, Umkreismittelpunkt und Schwerpunkt auf einer Geraden liegen. Weitere, ausgedehnte Untersuchungen betrafen die Kreisbogenzweiecke, anknüpfend an die *„Möndchen“* des Hippokrates, die quadrierbar sind.



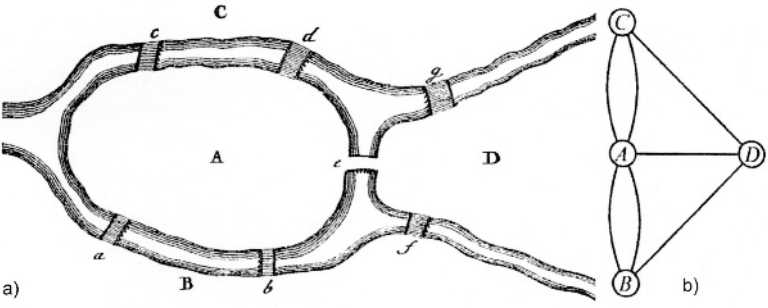
Abb. 9.6.6 Euler und der Polyedersatz (DDR 1983); (Schweiz 2007)

Sehr bekannt ist der sog. Eulersche Polyedersatz. Danach gilt für ein beliebiges Polyeder, das durch ebene Vielecke begrenzt ist, dass die Zahl f der Flächen, die Zahl der Kanten k und die Eckenzahl e in der Beziehung stehen

$$e - k + f = 2\,.$$

(Der Satz war wohl auch schon Descartes bekannt und wurde in der Folgezeit nach Euler noch verallgemeinert.)

Noch berühmter vielleicht ist das sog. Königsberger Brückenproblem. Der Bürgermeister von Danzig legte Euler 1735 das Brückenproblem vor; ein Jahr später gab Euler die Lösung: Bei der topologischen Situation von 7 Brücken über die Arme des Pregels erhob sich die Frage, ob man auf einem Wege über alle Brücken gehen könne, dabei aber jede Brücke nur einmal betreten darf. Euler zeigte, dass dies unmöglich ist.



Königsberger Brückenproblem

a) Zeichnung der tatsächlichen Situation in Eulers Arbeit

b) Übergang zum Graphen, der das Wesentliche dieser Situation wiedergibt.

[a) aus König, Dénes: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Teubner Archiv zur Mathematik, Bd. 6 ©1986 BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig]

Abb. 9.6.7 Topologische Struktur Königsbergs mit dem Pregel und 7 Brücken

Aus heutiger Sicht können wir diese Fragestellung der Frühgeschichte der Topologie zurechnen, der *„analysis situs“*, wie Leibniz sich in anderem Zusammenhang ausgedrückt hat.

Wie ungewohnt, wie (noch) nicht als mathematisches Problem empfunden diese Fragestellung war, erkennt man an einem Brief von Euler an den Danziger Bürgermeister:

> *„Du siehst also, Hochedler Herr, daß diese Lösung ihrem Charakter gemäß kaum Beziehungen zur Mathematik hat* [!!] *und ich verstehe nicht, warum sie vom Mathematiker eher erwartet werden solle als von irgend einem anderen Menschen, denn diese Lösung stützt sich allein auf die Vernunft, und es ist nicht nötig, zu ihrer Auffindung irgendwelche der Mathematik eigenen Prinzipien heranzuziehen.“*
> (Zitiert nach [Scriba/Schreiber 2005, S. 451])

Weitere Wirkungsfelder von Euler

Verwiesen sei auf die oben benannten Darstellungen und schließlich auf Eulers *„Opera omnia“*. Wir müssen uns hier auf Stichworte beschränken: Expertisen über Maßeinheiten und Zollwesen in Russland, Aufbau einer Feuerwehr, Anregung zur Aufstellung einer ersten Dampfmaschine, Geographie Russlands im Zusammenhang mit der Kamtschatka-Expedition. Fünfzig Abhandlungen und Bücher während der ersten Petersburger Periode, darunter zur Mechanik *„als Wissenschaft von der Bewegung, analytisch dargestellt“*, zur Luftelastizität, Positionsastronomie, Gezeitentheorie, Musiktheorie, Schiffstheorie mit Einschluß von Stabilitätsproblemen, Wasserturbine.

Während der Berliner Periode: Mitarbeit an der Modernisierung der Berliner Akademie, Einrichtung der *„Miscellanea Berolinensia“*, Bahnbestimmung von Kometen, Kreisquadratur, Kegelschnitte, Artillerie, Ballistik, Theorie von Licht und Farben (mit einer Wellentheorie; gegen Newton), Philosophie (u. a. *„Briefe an eine deutsche Prinzessin“*). Parteinahme gegen die Wolffianer *(„Rettung der göttlichen Offenbarung gegen die Einwürfe der Freygeister“)*. Schach (Rösselsprungproblem), Wasserspiele in Potsdam, Nivellierung des Finow-Kanals, Trockenlegung des Oderbruchs, Gewächshäuser für Maulbeerplantagen zur Steigerung der Seidenproduktion, Begutachtung von Lotterien, Fernrohrobjektive, achromatische Linsen, Geometrische Optik (analytisch behandelt), Beteiligung am Streit um das Prinzip der kleinsten Aktion.

Nach der Rückkehr nach St. Petersburg: Reorganisation der dortigen Akademie. Einrichtung von Witwenkassen. Mehr als 400 Abhandlungen u. a. zur Schiffstheorie, Integralrechnung, zu Bahnbestimmungen von Planeten und Kometen, zur Sonnenparallaxe, Strahlenbrechung in der Atmosphäre, Mondtheorie, zum Dreikörperproblem, zur Einschätzung des Projektes einer Hängebrücke über die Newa. Euler verbreitete die Nachricht über den Ballonflug der Brüder Montgolfier in Paris und befasste sich sogar noch am Tage seines Todes mit der Umlaufbahn des Planeten Uranus.

Auswirkungen von Eulers Algebra

Die Algebra des ausgehenden 18. Jahrhunderts wurde natürlicherweise dominiert von Eulers Beiträgen zur Algebra, insbesondere von seinem Lehrbuch der Algebra. Unter dem Eindruck der großen Erfolge der Symbolik, etwa im Calculus, wurde die Algebra als methodologisches Instrument, als *„Handwerkszeug“* hervorgehoben (vgl. ausführlich [Alten et al. 2008, S. 302ff.]).

Hier seien einige Autoren herausgestellt, beispielsweise Johann Joseph Ide (1775–1806), anfangs Privatgelehrter in Göttingen, dann 1803 Professor in Moskau, wo er allerdings in jungen Jahren verstarb. Im Jahre 1803 erschien sein Buch *Anfangsgründe der reinen Mathematik*. Es enthält allgemeine Betrachtungen über das Operieren mit Größen. Einige Gesetze wurden herausgehoben und als Grundlage weiterer Operationen vorangestellt: Kommutativgesetz von Addition und Multiplikation, das Distributivgesetz und das Assoziativgesetz der Multiplikation. Es war dies ein Vorgriff auf die Mitte des 19. Jahrhunderts – aber er hatte noch keine Wirkung.

In diese Gruppierung gehört auch Martin Ohm (1792–1872), Bruder des berühmt gewordenen Physikers Georg Simon Ohm (1789–1854). Martin Ohm rückte seinerseits die Operationen in den Mittelpunkt seiner Betrachtungen, in dem *Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik. Erster Theil: Arithmetik und Algebra enthaltend*. Er unterstellte sogar, dass



Abb. 9.6.8 Grabmal Eulers auf dem Lazarus-Friedhof am Alexander-Newski Kloster in St. Petersburg mit der Inschrift „Leonardo Eulero/Academia Petropolitana/MDCCCXXXVII“ [Foto Pausanias2]

die *„Gesetze“* der Operationen erhalten bleiben, wenn man über den Bereich der Zahlen hinausgeht, von dem er die Gesetze der Operationen abgeleitet hatte. Auch dies nimmt spätere Entwicklungen vorweg.

Aber es gab auch Gegenströmungen und Gegenargumente. Selbst noch im ausgehenden 18. Jahrhundert war umstritten, ob negative Zahlen volle Berechtigung hätten. Sogar I. Kant fand den *„Gedanken, (. . .) als wenn negative Größen weniger als Nichts wären, (. . .) nichtig und ungereimt“* (zitiert nach [Alten et al. 2008, S. 303]).

Doch selbst bei Anerkennung der negativen Zahlen fehlte eine strenge Begründung. Noch schlimmer, noch unsicherer verhielt es sich mit der Bewertung der imaginären (komplexen) Zahlen. Auch hier wird erst das 19. Jahrhundert die notwendige begriffliche Klärung herbeiführen.

Der Tod von Euler, des unwidersprochen führenden Mathematikers des 18. Jahrhunderts, hinterließ Gefühle der Depression, eines bevorstehenden Niederganges, etwa bei d'Alembert und Lagrange. Dies kann man aus deren Korrespondenz ersehen. Die nachfolgenden Generationen wussten sehr wohl um die Bedeutung von Euler. Laplace hat des öfteren geäußert: *„Lest Euler, lest Euler, er ist unser aller Meister“*. Und Gauß: *„Das Studium der Werke Eulers bleibt die beste Schule in den verschiedenen Gebieten der Mathematik und kann durch nichts anderes ersetzt werden.“* (Zitiert nach [Fellmann 1995, S. 122])

9.7 Entwicklungen in der Geometrie

Für die Geometrie in dieser Periode gibt Peter Schreiber im Buch [Scriba/Schreiber 2005, S. 352ff.] zwei Hauptentwicklungsrichtungen an, nämlich *„Von der Perspektive zu den Mehrtafelverfahren“* und *„Das Ringen um das Parallelenproblem“*.

Im Abschnitt über Perspektive und Mehrtafelverfahren geht Schreiber neben dem Verweis auf die illusionistische Malerei, die auf einer mehr oder weniger ebenen Fläche räumliche Tiefe vortäuschen soll, auf die Bearbeitung der Publikation (1715) von Brook Taylor zur Perspektive durch Joshua Kirby (18. Jh.) aus dem Jahre 1754 und vor allem auf den vielseitigen Johann Heinrich Lambert (1728–1777) ein.

Lambert, Sohn eines Schneiders, stammt aus einer in dem damals zur Schweiz gehörigen Mühlhausen im Elsaß ansässigen Hugenottenfamilie; sein Bildungsweg war schwer und verdient höchste Anerkennung. Zeitweise war er Schreiber in einem Eisenwerk, arbeitete als Sekretär und schließlich dann 1748 als Hauslehrer in Chur. Dort fand er Zugang zu einer sehr guten Bibliothek, Grundlage seiner autodidaktisch erworbenen Kenntnisse. Er war 1759–61 Mitglied der Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Schließlich ging er 1764 nach Berlin, erfreute sich des Wohlwollens von Friedrich II. von Preußen, wurde 1765 auf Empfehlung von Euler Mitglied der Berliner Akademie der Wissenschaften und 1774 Herausgeber des *Astronomischen Jahrbuches*.

Daneben nahm Lambert seit 1770 das Amt des preußischen Oberbaurates wahr. Nachfolger waren die berühmt gewordenen David Gilly (1748–1808) und Karl Friedrich Schinkel (1781–1841). Lambert war in Berlin eine auffällige Erscheinung, hinsichtlich seiner Kleidung und im Umgang mit Menschen, auch mit König Friedrich.

Lambert lieferte Beobachtungen von Kometen mit neuen Sätzen über die Kegelschnitte (1744) und eine Theorie zum Aufbau der Milchstraße. Auf ihn gehen Arbeiten zur Photometrie (Lichtstärke) zurück. In einer Sammlung zur Mathematik (1765–72, 2 Bände) bewies Lambert die Irrationalität von π. Seine 1786 postum erschienene *Theorie der Parallellinien* ist ein wichtiger Baustein in der Vorgeschichte der nicht-euklidischen Geometrie. Auch betonte er Flächen- bzw. Winkeltreue als Kennzeichen einer Kartenprojektion.

Lambert ist auch hervorgetreten als Autor philosophischer Schriften, insbesondere kosmologischen und erkenntnistheoretischen Inhaltes.

Zur Perspektive hat Lambert in langen Zeiträumen umfangreiche Arbeit geleistet [Lambert/Steck 1943]. In einer kleinen bereits 1752 verfaßten, aber erst 1943 gedruckten Schrift beschreibt er einen von ihm erfundenen *„Perspektograph“*, mit dem man einen Grundriß mechanisch in eine zentralperspektivische Ansicht verwandeln kann. Im Jahre 1759 erschien seine *Freye Perspective.*

> *„Der Titel zeigt an, daß es hier darum geht, ein zentralperspektivisches Bild ohne Benutzung von Grund- und/oder Aufriß direkt zu zeichnen. Bei Lambert wird der Gedanke deutlich, die Zeichenebene als ein – freilich im Fall der Zentralperspektive dem Raum nicht umkehrbar eindeutig entsprechendes – Modell des Raumes aufzufassen, indem man sich das Bild eines räumlich kartesischen Dreibeins vorgibt. Danach transformiert sich jede Konstruktion, die man in Gedanken im Raum ausführt, in eine zugeordnete Konstruktion in der Bildebene. (. . .) genau dieser Gedanke wird von Monge zur Vollendung gebracht, indem er ihn mit dem Mehrtafelverfahren kombiniert.“*
> (Zitiert nach [Scriba/Schreiber 2005, S. 352])

Wesentliche Anregungen zur Wiedergabe räumlicher Objekte in der Zeichenebene gingen vom Militärwesen aus, insbesondere vom Festungsbau. Statt der Zentralperspektive verwendete man häufig die sog. Kavalierperspektive – dabei hatte sich mit dem Wort *„Kavalier“* eine Begriffsverschiebung vollzogen: *„Kavaliere“* sind nach damaligem Sprachgebrauch die vorspringenden Teile (Bastionen) einer Festung.

Einerseits – nach den Fortschritten des Artilleriewesens – durfte die Festung vom Feinde nicht einsehbar sein und andererseits sollte der Feind von der Festung aus beobachtet und bekämpft werden können.

Unter der Regierung von Ludwig XIV. gewann der französische Festungsbaumeister Sébastian Le Prestre de Vauban eine überragende Stellung in Frankreich, ja in ganz Europa als Vorbild moderner Befestigungslehre. Insgesamt vermochte Vauban im Osten und Norden Frankreichs 300 bestehende

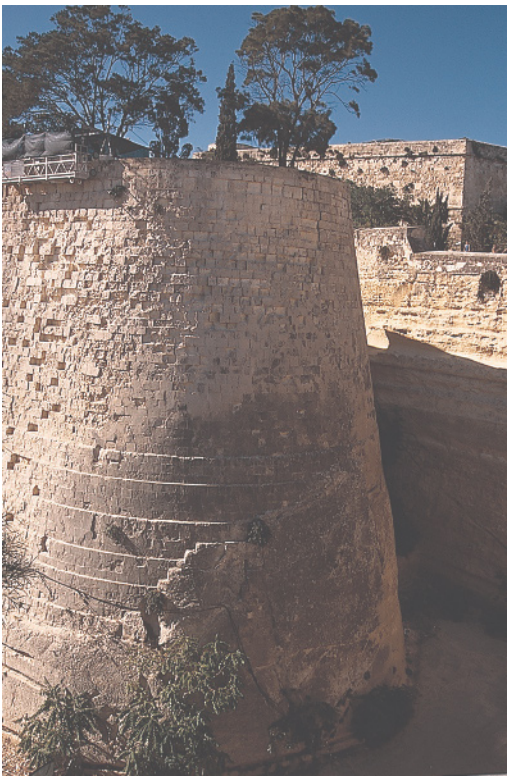


Abb. 9.7.1 Kavalier der Festungsmauer von Valletta, Malta [Foto Alten]

Festungen zu verstärken und 37 neue anzulegen, darunter Dunkerque (Dünkirchen), Belfort, Metz, Strassbourg.

Schon als junger Offizier hatte sich Vauban ausgezeichnet – übrigens auf verschiedenen Seiten kämpfend – bei Belagerungen und andererseits bei der Erstürmung von Städten. Im Jahre 1702 forderte Vauban – erfolgreich – vom König, zum Marschall befördert zu werden.

Seine 1705/1706 niedergeschriebene Schrift *De l'attaque et de la défense des places* (Über Belagerung und Verteidigung) wurde 1737 erstmals gedruckt und dann immer neu aufgelegt, bis in den Beginn des 19. Jahrhunderts. Er engagierte sich u. a. für Kanalbau, für das Forstwesen und die Navigation. Schließlich trat er – vergeblich – für eine alle Klassen umfassende Steuerpflicht ein, gestützt auf umfangreiche Statistiken; die Publikation dieser Schrift wurde jedoch unterdrückt. Vauban erwarb sich hohe Verdienste um die Ausbildung von Militäringenieuren. Aus diesen Traditionen gingen am Ende des 18. Jahrhunderts Lazare Carnot (1753–1823) und Gaspard Monge hervor.

Beim Ringen um das Parallelenproblem, also bei der Vor- und Frühgeschichte der nichteuklidischen Geometrie, geht es um das fünfte Euklidische Postulat. Schon in der Antike und bei einigen muslimischen Mathematikern war die Frage aufgetaucht, ob es mit Hilfe der anderen vier Postulate bewiesen werden könne, da es doch nicht jenen hohen Grad der Evidenz besaß wie die anderen vier. Vielleicht auch ließ es sich durch ein anderes ersetzen?

Dieses Problem wurde in Europa durch die Euklid-Ausgabe (1574) von Clavius wieder aktualisiert. Unter der Annahme, dass eine Linie, die zu einer vorgegebenen Geraden konstanten Abstand hat, wieder eine Gerade ist, bewies er das Parallelenpostulat. Dieser Vorstoß zeigte Wirkung, z. B. bei Euler und Wallis. Letzterer ersetzte 1663 das Parallelenaxiom durch die Forderung, dass zu jedem Dreieck ähnliche Dreiecke (d. h. in allen Winkeln übereinstimmend) existieren.

Ein weitergreifender Ansatz stammt von dem in Pavia arbeitenden Mathematikprofessor Girolamo Saccheri (1667–1733), der dem Jesuitenorden angehörte. Neben Arbeiten zur Elementargeometrie und (überholten) Ansichten zur Schwerkraft publizierte er 1733 eine umfangreiche Schrift *Euclides ab omnio naevo vindicatus* (Der von jedem Makel befreite Euklid). Der Makel ist eben die unklare Stellung des Parallelenaxioms. Das Werk läuft auf den Versuch hinaus zu zeigen, dass die euklidische Geometrie die einzig widerspruchsfreie Geometrie ist.

Dazu gebrauchte Saccheri eine Figur, die heute direkt nach ihm benannt ist: das Saccherische Viereck.

Die Strecken AB und CD sind gleich; die Winkel bei B und C sind rechte Winkel. Es gibt vom Standpunkt der Logik drei Möglichkeiten: Die Winkel α bei A bzw. D können spitz, stumpf oder rechte Winkel sein. Die Hypothese des stumpfen Winkels kann er widerlegen; beim Versuch, die Hypothese des spitzen Winkels zu widerlegen, macht er Fehler. Die Hypothese des stumpfen Winkels führte Saccheri zu dem Schluß, dass die Geraden eine endliche Länge haben müssen – völlig korrekt, aber von Saccheri als Widerspruch empfunden,

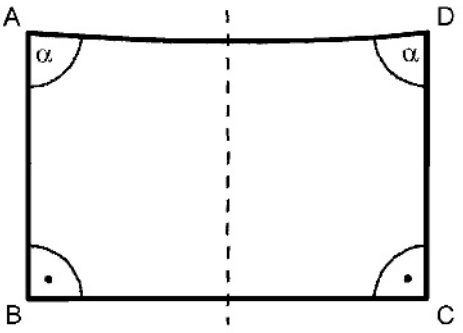


Abb. 9.7.2 Saccherisches Viereck

da er noch euklidisch denkt. So bleibt seiner Meinung nach nur die Möglichkeit, dass α rechte Winkel sind, was auf die Gültigkeit des Parallelenaxioms hinausläuft.

Die Vor- und Frühgeschichte der nichteuklidischen Geometrie, die dann im 19. Jahrhundert ihre Anerkennung finden sollte, ist in allen Einzelheiten dargestellt worden (vgl. [Stäckel 1895], [Stäckel/Engel 1913]).

Nachzutragen sind die Dissertation 1763 von Georg Simon Klügel (1739–1812) zur Geschichte des Parallelenproblems und der Beitrag von Lambert, *Theorie der Parallellinien*, 1766 verfasst, aber erst 1786 aus dem Nachlaß publiziert durch Johann III Bernoulli.

Lambert kam Grundeinsichten der späteren nichteuklidischen Geometrie ziemlich nahe oder übertraf sie sogar (vgl. [Scriba/Schreiber 2005, S. 365ff.]).

> *„Mit der Bemerkung über die Gültigkeit der Hypothese des spitzen Winkels auf der Oberfläche einer Kugel von imaginärem Radius war Lambert in der Tat der nichteuklidischen Geometrie näher gekommen als Bolyai und Lobatschewski, die heute als die Begründer der nichteuklidischen Geometrie gelten, aber im Gegensatz zu Lambert nichts anderes zu bieten hatten als mehr oder weniger weit ausgearbeitete Folgerungen aus der Negation des Parallelenpostulats und ihre innere Überzeugung, daß diese Theorie keine logischen Widersprüche aufweist sondern lediglich mit der alltäglichen Erfahrung oder eher mit den anerzogenen Vorurteilen kollidiert. Lambert hätte dagegen ein Modell für diese Theorie gehabt, wenn er nur seiner Sache sicher gewesen wäre.“*
> (Zitiert nach [Scriba/Schreiber 2005, S. 366])

Lambert äußerte sich sogar über die Unbequemlichkeiten dieser ungewöhnlichen Geometrie, dass nämlich die herkömmlichen trigonometrischen Tafeln ungültig würden, dass es dann zwischen Figuren keine Ähnlichkeit und Proportionalität mehr gebe und dass es dann um die Astronomie übel bestellt wäre.

Gegen Ende des 18. Jahrhunderts herrschte ein verbreitetes Interesse an den Grundlagenfragen der Geometrie, wenn auch die unbedingte Richtigkeit der Euklidischen Geometrie niemand ernstlich in Abrede stellen wollte. So ist bekannt, dass der Göttinger Mathematiker Abraham Gotthelf Kästner (1719–1800), einer der Lehrer von Gauß, systematisch Schriften gesammelt hat, die sich – wie man damals sagte – mit der Theorie der Parallelen beschäftigten. Die (indirekten) Beweisversuche für das Parallelenpostulat hielten noch weit bis ins 19. Jahrhundert an. Scharfsinnige, aber eben letztlich doch am Ziel vorbeigehende Beiträge lieferten u. a. Franz Adolph Taurinus (1794–1874) im Jahre 1825 und 1818 sein Onkel Ferdinand Karl Schweikart (1780–1859), zu einer Zeit also, als Gauß – als erster – längst zur Einsicht in das Wesen der nichteuklidischen Geometrie gelangt war, ohne sich freilich darüber öffentlich zu äußern.

Damit geriet Gauß – wie wir noch sehen werden – in Gegensatz zur vorherrschenden Philosophie von I. Kant. Dieser hatte – obwohl er in jüngeren Jahren noch mehrdimensionale Geometrie und eine Art Rückkopplung von Raum und Sinneswahrnehmung wenigstens erörtert hatte – in der großen Einfluß gewinnenden *Kritik der reinen Vernunft* (1781) den dreidimensionalen euklidischen Raum schlechthin als denknotwendig erklärt:

> *„Geometrie ist eine Wissenschaft, welche die Eigenschaften des Raumes synthetisch und doch a priori bestimmt. Was muß die Vorstellung des Raumes denn sein, damit eine solche Erkenntniß von ihm möglich sei? Er muß ursprünglich Anschauung sein; denn aus einem bloßen Begriffe lassen sich keine Sätze, die über den Begriff hinausgehen, ziehen, welches doch in der Geometrie geschieht (...) Aber diese Anschauung muß a priori, d. i. vor aller Wahrnehmung eines Gegenstandes, in uns angetroffen werden, mithin reine, nicht empirische Anschauung sein. Denn die geometrischen Sätze sind insgesammt apodiktisch, d.i. mit dem Bewußtsein ihrer Nothwendigkeit verbunden, z. B. der Raum hat nur drei Abmessungen; dergleichen Sätze aber können nicht empirische oder Erfahrungsurtheile sein, noch aus ihnen geschlossen werden.“*
> [Kant 1787, S. 53f.]

9.8 Vor- und Frühgeschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Natürlich kannte die Antike weder Wahrscheinlichkeit als mathematischen Begriff noch Stochastik als Wissensgebiet. Doch wird berichtet in einem Passus aus der *Geschichte des Peloponnesischen Krieges* des antiken Historikers Thukydides (455–396), wonach eine mehrfach durchgeführte Messung zu einem möglichst sicheren Wert führen sollte: Die Bewohner einer belagerten Stadt planten einen Ausfall. Dazu benötigten „... sie *Leitern von der Höhe der feindlichen Mauern, das Maß nahmen sie sich nach der Zahl der Backsteinschichten, jeder für sich und mochten sie sich irren, so mußte doch die Mehrzahl die rechte Summe treffen, zumal sie öfters zählten. So gewannen sie das Maß für die Leitern, indem sie aus der Ziegeldicke die Höhe errechneten.*“ (Deutsch zitiert bei [Ineichen 1997, S. 8]) Diese Stelle ist mehrfach als „eine umsichtige Anwendung des Gesetzes der großen Zahlen“ (über?)interpretiert worden.

Wieder andere Ansätze oder einschlägige Überlegungen im Vorfeld der Stochastik finden sich bei anderen Autoren. Bei dem Römer Lukrez (Titus Lucretius Carus, ca. 99–55 v. Chr.) findet sich in dem Gedicht *De rerum natura* (Über das Wesen der Dinge) der Gedanke, dass die Naturgesetze durch eine sehr große Zahl von „zufälligen“ Ereignissen zur Geltung kommen.

Nach Meinung der Vertreter des Atomismus – Epikur (341–270) und Lukrez – entstehen die Körper durch zufälliges Zusammentreffen der Atome. Dies musste schon in der Antike zu der Frage führen, ob es sich wirklich um reinen Zufall handelt oder doch nicht, weil die Welt zweckmäßig eingerichtet sei. *„Warum entstehen nicht ebenso zufällig Säulenhallen, Tempel, Häuser?“* – so fragt Cicero (106–43). Gediegene Überlegungen zum „Zufall“ stammen bereits von Aristoteles, vor allem in seinem Buch *Physik*. Er unterschied Ereignisse, die durch bestimmte Ursachen entstehen, von solchen, wo Zufall oder Schicksalsfügungen wirken. Eine Sentenz von Aristoteles klingt ganz modern: *„Ursachen, durch welche das Zufällige geschehen kann, sind unbestimmt, darum ist er* (der Zufall) *für menschliche Überlegung unerkennbar.“* (Deutsch zitiert bei [Ineichen 1977, S. 13])

Für die Stoa war die Welt vollständig determiniert. Was wirklich eintritt, ist genau bestimmt; wenn wir die Ursachen nicht erkennen, so ist dies nur die Folge unserer Unkenntnis.

Es ist gut bekannt, dass in der Antike das Würfelspiel weit verbreitet war; viele Autoren berichten darüber, unter ihnen schon Homer. Als Würfel diente der kleine Knöchel aus der hinteren Fußwurzel von Schaf oder Ziege (griech. astragalos, lat. talus). Ein Astragalos hat die Form eines länglichen Prismas, mit nur 4 Seitenflächen, die die Werte 1, 2, 3, 4 tragen. Abgesehen davon, dass „Würfeln“ auch dem Befragen von Orakeln diente, wurden Würfelspiele als Glücksspiele verstanden.

Häufig wurde mit vier Astragalen gespielt. Der beste Wurf war der sog. Venuswurf: Jeder der vier Würfel zeigt eine andere Seite. Doch findet man in der Antike keine Hinweise auf stochastische Regelmäßigkeiten.

Auch Spiele mit wirklichen Würfeln (mehr oder weniger genau gearbeitet), also mit sechs Seiten, sind mit zahlreichen Quellen belegt; es gab Würfel aus Ton, Stein, aus verschiedenen Metallen, sogar aus Gold. Die Verteilung der „Augen“ war unterschiedlich und stimmte daher nicht unbedingt mit der von uns verwendeten überein (es gibt 30 verschiedene Anordnungen). Es haben sich zwei Belegungen durchgesetzt, bei denen die Summe gegenüberliegender Augen 7 beträgt. Meist wurde mit drei Würfeln gespielt. Aber auch hier gibt es keine systematischen Aufzeichnungen über die Häufigkeit einer bestimmten Summe von Augen bei einem Wurf mit drei Würfeln.

Im *Corpus Hippocraticum*, benannt nach dem berühmten antiken Arzt Hippokrates (460–375), und bei dem berühmten Arzt Galenus (129–199) aus römischer Zeit finden sich zwar Aussagen, dass diese oder jene Krankheit mit einem höheren Risiko des Sterbens belastet ist; aber es gibt keine zahlenmäßigen Aussagen.

Der Begriff „wahrscheinlich“ leitet sich ab aus dem lateinischen „*verisimilis*“, das ist „der Wahrheit ähnlich“, „wahr-ähnlich“, „wahrscheinlich“.

Bezüglich der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Antike kommt Ineichen zu dem Urteil:

> *„Es sind, – so scheint mir – eine ganze Reihe von Überlegungen gemacht und Begriffe verwendet worden, die ins Umfeld von Begriffen und Überlegungen gehören, die auch für die heutige Statistik grundlegend sind. Und es gibt sehr viele Stellen in der Literatur der Antike, an denen solche Begriffe zu finden sind.“*
> [Ineichen 1997, S. 23]

In anderen Studien wurde vom selben Autor dargelegt, dass es im alten Indien und in der frühen jüdischen Literatur analoge Überlegungen gegeben hat.

In die Frühgeschichte der Stochastik gehört auch ein Kommentar zur „Göttlichen Komödie“ (zwischen 1307 und 1321) von Dante Alighieri (1265?–1321) zum Glücksspiel. Im Fegefeuer wird ein Glücksspiel (*giuoco della zara*) mit drei Würfeln gespielt. Es konnte bewiesen werden, dass diese Quelle nicht, wie bisher angenommen, 1477 entstanden ist, sondern schon 150 Jahre früher. Der Kommentator Jacopo di Giovanni della Lana hat einige Ansätze gemacht, die Anzahl der Würfe zu berechnen, die zu einer bestimmten Summe gehören.

Ferner gehören auch einige Stellen aus zwei Arbeiten von Nicole Oresme (ca. 1320–1382), vor allem aus *De proportionibus proportionum* (Über Verhältnisse von Verhältnissen) in die Vorgeschichte der Stochastik.

Während der Renaissance wurden Glücksspiele zu einer Art Mode, wohl ein Reflex auf den sich entfaltenden Frühkapitalismus. So erschien von Girolamo Cardano (1501–1576), einem herausragenden Mathematiker und Arzt, 1663 (postum) das Buch *Liber de ludo aleae* (Über das Würfelspiel) als eine Art Gebrauchsanleitung für Spieler. Er dürfte es während seines Aufenthaltes in Bologna nach 1562 niedergeschrieben haben.

Eine Problemlage insbesondere zog die Aufmerksamkeit bei Glücksspielen auf sich: Wie sind die Einsätze der Spieler aufzuteilen, wenn das Spiel – aus diesen oder jenen Gründen – abgebrochen werden muss? Ein Beispiel; es stammt aus der *„Summa“* von Luca Pacioli (um 1445–1517):

> *„Drei messen sich im Armbrustschießen; wer als erster 6mal am besten trifft, gewinnt; sie setzen insgesamt 10 Dukaten ein. Bei einem Stand von 4 Treffern für den ersten, 3 für den zweiten und 2 für den dritten wollen sie nicht mehr weiter machen und kommen überein, den Einsatz zu teilen. Ich frage, wie viel jedem zusteht.“*
> (Zitiert nach [Schneider 1989, S. 13])

Es ist charakteristisch für den damaligen Stand der Überlegungen zu Wahrscheinlichkeitsfragen, dass verschiedene Autoren verschiedene Lösungen für ein und dasselbe Problem vorschlagen; der Briefwechsel zwischen Pascal und Fermat zeigt die Schwierigkeit, „richtige“ Lösungen eines Problems zu finden. Auch die Publikationen von Cardano *Practica arithmetica et mensurandi singularis* (1533) und *De ludo aleae* und von Niccolò Tartaglia (1506–1559) *La Prima Parte del General Trattato di Numeri et Misure* (1556) sind nicht ein-

heitlich bezüglich der Lösungen eines Problems, auch nicht übereinstimmend hinsichtlich der Begründungsansätze und der Lösungsmethoden.

Auch Galileo Galilei (1564–1642) verdient es, dass seine Beiträge zur Wahrscheinlichkeitsrechnung gewürdigt werden. Einerseits sind es Überlegungen zum Würfelspiel, andererseits, noch bedeutsamer, Begründungen für eine (spätere) Fehlertheorie. In einer erst 1718 erschienenen Arbeit *Über Ergebnisse beim Würfelspiel* und in einer noch später publizierten Abhandlung erfasste er die Zahl der möglichen Würfe (bei drei Würfeln), die eine vorgegebene Summe erzielen. Die Augensumme 9 beispielsweise kann aus sechs Kombinationen entstehen.

Dem experimentierenden Galilei mussten sich Fragen nach Beobachtungsfehlern geradezu aufdrängen; er berichtet darüber in seinem grundlegenden Werk *Dialog über die beiden wichtigsten Weltsysteme* von 1632. So konstatiert er, dass in jeder Beobachtung ein unvermeidbarer Fehler stecken müsse, verursacht durch die Messmethode, durch die benutzten Instrumente und durch zufällige Begleiterscheinungen. Ein möglichst getreues Ergebnis werde man erhalten, wenn man eine möglichst große Anzahl von Messungen vornimmt.

Später, schon während der Wissenschaftlichen Revolution, schrieb Christiaan Huygens ebenfalls eine Abhandlung über das Glücksspiel, *De ratiociniis in ludo aleae* (Über die Überlegungen beim Würfelspiel), als Anhang (1637) zu einem fünfteiligen Werk von Frans van Schooten (1615–1660). Es war dies eine Reaktion auf einschlägige Arbeiten von Pascal und Fermat, die er während einer Reise nach Paris kennen gelernt hatte. Bei Huygens treten immerhin schon Abschätzungen über die Häufigkeit von bestimmten Würfen und damit von Gewinnchancen auf. Bei Fermat (1606–1665) spielte wiederum das Teilungsproblem bei vorzeitigem Abbruch des Spieles eine besondere Rolle: Descartes – immer in Konkurrenz zu Fermat – bemerkte boshaft: *„Alles, was lediglich wahrscheinlich ist, ist wahrscheinlich falsch."*

Huygens hat eine beachtliche Wirkung ausgeübt; noch Jakob Bernoulli wird sich auf ihn beziehen. Huygens hatte einen Lehrsatz formuliert, in dem er nicht den Begriff „Wahrscheinlichkeit" verwandte, sondern „Erwartung". Es heißt bei ihm: *„Wenn die Anzahl der Fälle, in welchem mir a zufällt, gleich p und die Anzahl der Fälle, in welchen mir b zufällt, gleich q ist, wird meine Erwartung unter der Annahme, daß alle Fälle gleich leicht eintreten, $pa + qb/p + q$ wert sein."* (Zitiert nach [Schneider 1989, S. 41])

Dem Briefwechsel zwischen Pascal und Fermat über die Wahrscheinlichkeitsrechnung wird gewöhnlich eine große, möglicherweise übertriebene Rolle für die Entstehung der Wahrscheinlichkeitsrechnung zugeschrieben. Man sollte aber bedenken, dass nur drei bzw. vier Briefe aus dem Jahre 1654 erhalten geblieben sind.

Bemerkenswerterweise standen bevölkerungsstatistische Fragestellungen schon sehr früh in Beziehungen zu „Wahrscheinlichkeiten". Ein sehr beeindruckendes Beispiel sind die sog. Totenregister vom Ende des 17. Jahrhunderts von John Graunt (1620–1674), einem in der Verwaltung von London

tätigen Tuchhändler. Aus, wie er wusste, ziemlich dürftigen Unterlagen leitete er eine geringfügig größere Häufigkeit von Knabengeburten, eine größere Lebenserwartung von Frauen (abgesehen von Epidemien) sowie eine höhere Sterblichkeit in den Städten im Vergleich zum Lande ab.

Große Aufmerksamkeit erregte eine „Absterbeordnung“, die 1702 auch ins Deutsche übersetzt wurde.

„Daraus folget, daß von den hundert gebohrnen noch am leben sind zu ende

des sechsten jahres	*64*
des sechzehenden jahres	*40*
des sechs und zwantzigsten	*25*
des sechs und dreyßigsten	*16*
des sechs und viertzigsten	*10*
des sechs und fünffzigsten	*6*
des sechs und sechszigsten	*3*
des sechs und siebentzigsten	*1*
des achtzigsten jahres	*0.“*

(Zitiert bei [Schneider 1989, S. 180])

Diese Tabelle gelangte in die Hände der Gebrüder Lodewijk (1631–1699) und Christiaan Huygens, die die Ergebnisse von Graunt sozusagen in die Sprache der Wahrscheinlichkeitsrechnung übertrugen. So warf Christiaan die Frage auf: Wann stirbt der Überlebende von 2 Personen vorgegebenen Alters (Verallgemeinerung für n Personen)? Die Lösung gab Nikolaus Bernoulli 1709. Auch Leibniz wurde durch diese Sterbetafeln für die Wahrscheinlichkeitsrechnung animiert, ebenso wie Jakob Bernoulli. Sogar E. Halley beschäftigte sich mit Geburts- und Sterbetafeln und zwar denen der Stadt Breslau, weil dort, im Unterschied zu englischen Städten, die Bevölkerung einigermaßen konstant geblieben war. Abraham de Moivre studierte sog. Leibrenten.

Der in Gent tätige Belgier Lambert-Jacques Quetelet (1796–1847) erwarb sich, obwohl auch als Direktor der Sternwarte in Brüssel tätig, große Verdienste um die wahrscheinlichkeitstheoretische Begründung einer wissenschaftlichen Bevölkerungsstatistik. Seine Abhandlung *Sur l'homme et le développement de ses facultés* (Über den Menschen und die Entwicklung seiner Fähigkeiten) von 1835 erregte große Aufmerksamkeit und führte schließlich auf diesem Gebiet zur internationalen Zusammenarbeit.

An herausragender Stelle bei der Begründung einer mathematischen Disziplin „Wahrscheinlichkeitsrechnung“ steht Jakob Bernoulli. Sein wegweisendes Werk *Ars conjectandi* (Kunst des Vermutens) erschien, nachdem es Jakob unvollendet hinterlassen hatte, erst 1713, mit einem Vorwort von Nikolaus I Bernoulli. Jakob hatte sich 1679 bis 1695 mit Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigt. Möglicherweise hat auch ein Briefwechsel (zwischen 1703 und 1705) zwischen ihm und Leibniz einen Einfluss auf die *Ars conjectandi* ausgeübt. Leibniz nämlich hatte in seinen *Nouveaux essais sur l'entendement humain* (Neue Abhandlungen über den menschlichen Verstand, 1704/1705


JACOBI BERNOULLI,
Profeſſ. Baſil. & utriuſque Societ. Reg. Scientiar.
Gall. & Pruſſ. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,

ARS CONJECTANDI,

OPUS POSTHUMUM.

Accedit

TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,

Et EPISTOLA Gallicè ſcripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.

BASILEÆ,
Impenſis THURNISIORUM, Fratrum.
cIↃ IↃcc xIII.

Abb. 9.8.1 Titelblatt der *Ars conjectandi* von 1713

niedergeschrieben), zudem bei Beweisen die Unterscheidung zwischen „Gewissheit“ und „Wahrscheinlichkeit“ getroffen.

Die *Ars conjectandi* besteht aus vier Teilen. Im ersten Teil wird die Schrift *De ratiociniis in ludo aleae* von Huygens wiedergegeben und von Jakob Bernoulli kommentiert, über Huygens hinausgehend. Im zweiten Teil wird eine ausführliche Kombinationslehre samt ihrer Bedeutung für die Wahrscheinlichkeitsrechnung dargestellt. Dort treten erstmals die sog. Bernoullischen Zahlen (Bezeichnung durch Euler) auf. Der dritte Teil enthält Anwendungen der Kombinatorik auf spezielle Fragestellungen.

Der vierte Teil ist der bedeutendste. Hier erhielt die Wahrscheinlichkeitsrechnung eine entscheidende Wende. Jakob Bernoulli wirft die Frage auf: Kann man bei scheinbar zufälligen Ereignissen eine Regel, ein Gesetz erkennen, wenn man die Zahl der Beobachtungen hinreichend groß macht? Die Antwort formuliert er in einem ersten Gesetz der großen Zahlen, wonach die relative Häufigkeit eines Ereignisses bei wachsender Zahl der Versuche stabil wird (vgl. Kap. 10.7).

Es folgten einige Jahrzehnte, in denen zahlreiche Autoren sich der Wahrscheinlichkeitsrechnung zuwandten. Als deren bedeutendster Vertreter gilt Abraham de Moivre (1667–1764), ein nach Aufhebung des Ediktes von Nantes (das Religionsfreiheit gewährt hatte) nach England emigrierter französischer Gelehrter. Er besaß weit gefächerte mathematische Interessen. De Moivre widmete sein Werk *Doctrine of Chances* zur Wahrscheinlichkeitsrechnung Isaac Newton und wurde 1697 Mitglied der Royal Society. Auch seine *Miscellanea analytica* beschäftigen sich mit Wahrscheinlichkeitsrechnung.

De Moivre stellte die Methoden zur Lösung von Glücksspielaufgaben im Zusammenhang dar, dehnte die Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Berechnung von Renten aus und entdeckte den lokalen und den globalen zentralen Grenzwertsatz für binomische Verteilungen. In der zweiten Auflage (1738) der *Doctrine of Chances* benannte er ausdrücklich das später nach Laplace benannte Maß für die Wahrscheinlichkeit als das Verhältnis der Anzahlen der günstigen und der möglichen Fälle.

Thomas Simpson (1710–1761), tätig u. a. an der Militärakademie in Woolwich bei London und Wiederentdecker der nach ihm benannten Regeln zur Volumenberechnung von eben oder krummlinig begrenzten Körpern, formulierte Überlegungen zur Bestimmung der Fehler bei Messungen mit wissenschaftlichen astronomischen Instrumenten.

Euler verband theoretische Probleme der Völkerkunde und des Versicherungswesens mit der Wahrscheinlichkeitstheorie. Thomas Bayes (1702–1761), von Beruf Geistlicher, gab u. a. eine Methode an, aus vorliegenden Beobachtungsergebnissen auf eine mögliche, dahinter liegende Wahrscheinlichkeit zu schließen.



Abb. 9.8.2 Jakob Bernoulli (Schweiz 1994)

Eine bedeutende Rolle bei der Entstehung der Disziplin Wahrscheinlichkeitstheorie haben auch sog. geometrische Wahrscheinlichkeiten gespielt. Besonders berühmt wurde das sog. Nadelproblem vom Comte de Buffon (1707–1788), wiewohl schon vorher und nach ihm vielfältige Experimente zu geometrischen Wahrscheinlichkeiten unternommen wurden. Neben Simpson und Laplace hat auch Viktor Jakowlewitsch Bunjakowski (1806–1889) geometrische Wahrscheinlichkeiten behandelt (vgl. [Gnedenko 1991, S. 409ff.]).

Der französische Naturforscher Buffon, auf Grund eines beträchtlichen Vermögens unabhängig und mit ausgedehnten wissenschaftlichen Interessen, wirkte auch als Direktor der Königlichen Gärten in Paris.

Bereits 1733 trug er eine erste Arbeit zum Nadelproblem an der Französischen Akademie vor. Vervollständigt ging diese Abhandlung in den vierten Band seiner groß angelegten *Histoire naturelle* ein; er wollte zeigen, dass die Analysis als Hilfsmittel auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung genutzt werden könne.

Beim Nadelproblem – der zweiten von Buffon gestellten und gelösten Aufgabe – handelt es sich um folgendes:

In einer Ebene liegen zwei Parallelen im Abstand $2a$. Auf die Ebene wird „auf gut Glück“ eine Nadel der Länge $2b$ ($b < a$) geworfen. Gefragt ist nach der Wahrscheinlichkeit W, dass die Nadel eine der parallelen Linien schneidet. Als Lösung ergibt sich

$$W = \frac{2b}{a\pi}\,.$$

Bemerkenswerterweise kommt die Zahl π ins Spiel, und man kann durch häufiges Werfen der Nadel und Benutzung des Gesetzes der großen Zahl Näherungswerte für π experimentell gewinnen.

Seit Buffon gehörten Probleme und Aufgaben zu geometrischen Wahrscheinlichkeiten zum festen Bestandteil der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

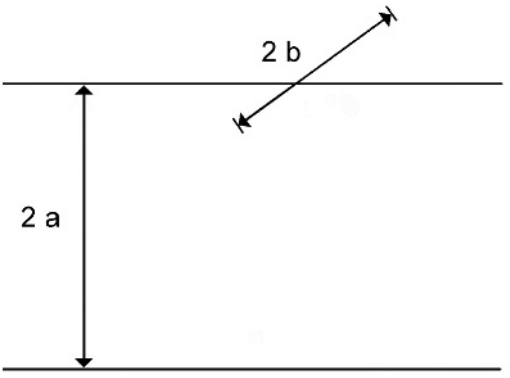


Abb. 9.8.3 Skizze zum Nadelproblem

9.9 Die große Zeit der Enzyklopädien

In der Antike und im Mittelalter waren technische Erfindungen als Überlistung der Natur verstanden worden, wenn zum Beispiel am Hebel ein kleines Gewicht eine weitaus größere Last zu heben imstande ist. Übrigens leiten sich sprachlich *„Mechanik“* vom griechischen Ausdruck für *„List ersinnen“* und *„Technik“* vom griechischen Wort für *„Kunst“* ab.

Erst zu Beginn des 18. Jahrhunderts fing man an, Erfindungen und technischen Fortschritt als Wissenschaft zu betrachten. Technologie, gewerblicher Fortschritt, Manufakturen, Erfindungen drangen ins gesellschaftliche Bewußtsein ein. Umfassende Lexika, die auch auf eine systematische Schilderung der *„Künste“*, d. h. der gewerblichen Produktion abzielten – etwa die seit 1728 in England von Ephraim Chambers (ca. 1680–1740) herausgegebene *Cyclopaedia or Universal Dictionary of arts and sciences* oder in Deutschland Zedlers *Großes vollständiges Universallexikon aller Wissenschaften und Künste*, seit 1732 in 68 Bänden – wurden unter diesen Bedingungen auch buchhändlerische Erfolge (das Wort *„Enzyklopädie“* bedeutet dem Wortsinne nach soviel wie *„Verknüpfung der Wissenschaften“*).

Ein französischer Verleger beauftragte daher 1746 den bereits berühmten französischen Philosophen und Schriftsteller Denis Diderot mit der Übersetzung einer englischen medizinischen Enzyklopädie ins Französische. Diderot löste die Aufgabe glänzend, doch ging er weit darüber hinaus. Er führte hervorragende Gelehrte und Männer der öffentlichen Lebens zusammen, die, gegen den Absolutismus französischer Prägung eingestellt, durch Propagierung der Produktionsmethoden, der Naturwissenschaften und durch Überwindung religiöser und gesellschaftlicher Vorurteile und Gewohnheiten der bürgerlichen Entwicklung voranhelfen wollten. Man beschloß die Herausgabe einer großangelegten *„Encyclopédie“*; sie erschien von 1751 bis 1772 in 28



Abb. 9.9.1 Buffon; Voltaire; Montesquieu (Frankreich 1949, 1978, 1949)

Bänden, trotz ständiger Eingriffe der Zensur, vorübergehender Inhaftierung Diderots und kurzzeitigen Verbotes, bis 1780 dann in insgesamt 35 Bänden. 1765 verkaufte Diderot seine Bibliothek an die Zarin Katharina II., die ihm eine hohe Rente aussetzte und ihn zum Kaiserlichen Bibliothekar ernannte.

Diderot, Sohn eines Messerschleifers und seit 1740 Mitglied der Französischen Akademie, war die Seele des Unternehmens mit klaren Vorstellungen über dessen Sinn, Zweck und Organisation. Ein paar Sentenzen von Diderot:

> *„Schwerlich hätte man sich eine umfangreichere Aufgabe stellen können als die, alles zu behandeln, was sich auf die Wißbegierde des Menschen, seine Pflichten, seine Bedürfnisse und seine Vergnügen bezieht.“* [Diderot 1984, S. 315]
>
> *„Aber wir haben (...) eingesehen, daß die allergrößte Schwierigkeit darin bestand, das Werk geschlossen herauszubringen, so unförmig es auch anfangs erschien, und daß uns niemand die Ehre der Überwindung dieses Hindernisses rauben würde. Wir haben eingesehen, daß die ‚Enzyklopädie‘ nur der Versuch eines philosophischen Jahrhunderts sein konnte, daß dieses Jahrhundert gekommen war, daß die Ruhmesgöttin, wenn sie die Namen derjenigen, die das Große vollbracht, der Unsterblichkeit entgegenführte, vielleicht nicht verschmähen würde, auch unsere Namen mitzunehmen.“* [Diderot 1984, S. 382]

Eine Zeitlang fungierte d'Alembert als zweiter Herausgeber, gab aber dann das Amt wegen der Unterdrückungsmaßnahmen in Frankreich auf. Trotz aller Widerstände wurde der Kreis der *„Enzyklopädisten“* zum Zentrum der französischen Aufklärung; die Artikel wurden von hervorragenden Fachleuten geschrieben, von Diderot selbst, von d'Alembert, von dem schweizerisch-französischen Philosophen Jean-Jacques Rousseau, von Voltaire, von dem französischen Nationalökonomen Baron de l'Aulne Turgot (1727–1781), von dem französischen Schriftsteller und Staatsphilosophen Baron de Montesquieu, von dem französischen Moralphilosophen Claude Adrien Helvétius (1715–1771) und anderen. D'Alembert z. B. schrieb einen Artikel über den mathematischen Grenzwert, der unserem heutigen strengen Begriff recht nahe kommt.

Die *„Encyclopédie“* gehört zu den unvergänglichen Kulturleistungen der Menschheit und zu den Marksteinen in der Entwicklung der Wissenschaften. Obwohl die Kritik an den gesellschaftlichen Zuständen nur in versteckter Form vorgebracht werden konnte, hat das Werk doch wesentlich zur ideologischen Vorbereitung der Revolution von 1789 beigetragen.

Bleibende Bedeutung errang die zuerst von 1768 bis 1771 in drei Bänden erschienene *Encyclopaedia Britannica*. Sie wurde 1976 in die sogenannte *Macropaedia* mit den Großartikeln in 19 Bänden und die sog. *Micropaedia* mit den kleineren Artikeln in 10 Bänden gegliedert.

ENCYCLOPÉDIE,

OU

DICTIONNAIRE RAISONNÉ DES SCIENCES,

DES ARTS ET DES MÉTIERS,

PAR UNE SOCIÉTÉ DE GENS DE LETTRES.

Mis en ordre & publié par M. *DIDEROT*, de l'Académie Royale des Sciences & des Belles-Lettres de Prusse; & quant à la PARTIE MATHÉMATIQUE, par M. *D'ALEMBERT*, de l'Académie Royale des Sciences de Paris, de celle de Prusse, & de la Société Royale de Londres.

Tantùm series juncturaque pollet,
Tantùm de medio sumptis accedit honoris! HORAT.

TOME PREMIER.



A PARIS,

Chez
BRIASSON, *rue Saint Jacques, à la Science.*
DAVID l'aîné, *rue Saint Jacques, à la Plume d'or.*
LE BRETON, Imprimeur ordinaire du Roy, *rue de la Harpe.*
DURAND, *rue Saint Jacques, à Saint Landry, & au Griffon.*

M. DCC. LI.

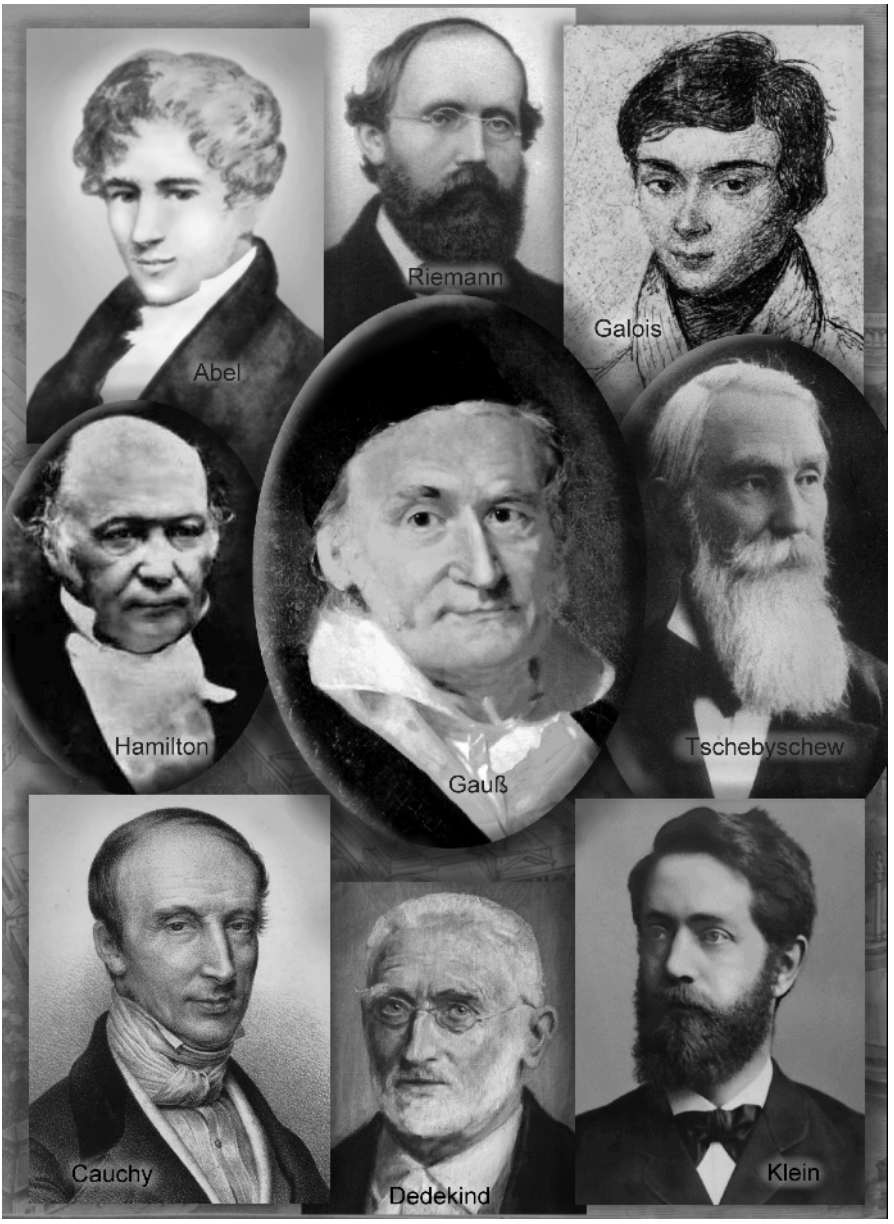
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

Abb. 9.9.2 Titelseite der *Encyclopédie* von d'Alembert und Diderot, Paris 1751

Inhalte und Ergebnisse der Mathematik im Zeitalter des Absolutismus und der Aufklärung

1696	Johann Bernoulli stellt den Mathematikern das Brachystochronenproblem
1707	Newton veröffentlicht die *Arithmetica universalis*
1711	Newton publiziert eine Theorie der unendlichen Reihen
1712	B. Taylor findet die nach ihm benannte Reihenentwicklung
1713	Die zweite, von Cotes bearbeitete Fassung der *Principia* erscheint
1713	Jakob Bernoullis *Ars conjectandi* wird postum herausgegeben
1715	B. Taylor publiziert *Methodus incrementarum directa et inversa* und *Linear Perspective*
1717	Newton publiziert die zweite Auflage der *Opticks*
1718	Johann Bernoulli gibt eine Definition von „Funktion“
1718	A. de Moivre publiziert *A doctrine of chance* – eine systematische Abhandlung zur Wahrscheinlichkeitsrechnung
1720	C. Maclaurin vermutet, dass zwei Kurven der Grade m und n im allgemeinen mn Schnittpunkte haben
1729	A. Clairaut studiert systematisch Raumkurven
1730	A. de Moivre veröffentlicht sein Hauptwerk *Miscellanea analytice* mit der nach ihm benannten Formel
1732	D. Bernoulli benutzt die Methode der Separation der Variablen zur Behandlung von Differentialgleichungen
1734	L. Euler verallgemeinert das Brachystochronenproblem
1735	Euler löst das Königsberger Brückenproblem
1736	Die *Hydrodynamica* von D. Bernoulli erscheinen im Druck
1739/40	A. Clairaut und L. Euler geben die Bedingung für die Exaktheit einer Differentialgleichung an
1742	Ch. Goldbach formuliert seine Vermutung, dass jede gerade Zahl > 2 Summe zweier Primzahlen ist
1742	C. Maclaurin veröffentlicht *The Treatise of Fluxions* mit der nach ihm benannten Reihenentwicklung
1743	L. Euler gibt die Methode zur Lösung homogener gewöhnlicher Differentialgleichungen an
1743	J. d'Alembert veröffentlicht den *Traité de dynamique*
1744	L. Euler veröffentlicht das erste Lehrbuch der Variationsrechnung *„Methodus inveniendi . . . “*
1744	L. Euler unterscheidet zwischen transzendenten und algebraischen Zahlen
1745	In Braunschweig wird das *„Collegium Carolinum“* gegründet. Dort studierte später C. F. Gauß
1746	J. d'Alembert leitet die Differentialgleichung der schwingenden Saite her und publiziert die *Recherches sur le calcule intégrale*
1748	L. Euler publiziert seine Lehrbücher zur Infinitesimalrechnung
1755	Euler verallgemeinert den Funktionsbegriff von Bernoulli in den *Institutiones calculi differentialis*
1759	J. H. Lambert publiziert seine *Freye Perspective*
1765	*Theoria motus, corporum . . .* Eulers zweites Buch zur Mechanik, erscheint
1768–1770	In drei Bänden erscheinen Eulers *Institutiones calculi integralis*
1770	*Vollständige Anleitung zur Algebra*, das epochale Werk Eulers erscheint in 2 Bänden
1786	Die bereits 1766 verfasste *Theorie der Parallellinien* von J.H. Lambert wird aus dem Nachlass publiziert
1788	J.L. Lagrange: *Mécanique analytique* erscheint endlich als Druck
1795	Die *Leçons de géométrie descriptive* von G. Monge werden erstmals schriftlich verbreitet

10 Mathematik während der Industriellen Revolution



Zeit der Industriellen Revolution: Politik

1789	Französische Revolution
1805–1815	Napoleonische Kriege
1814/15	Wiener Kongress
1822	Brasilien wird unabhängiges Kaiserreich
1825	Ende des spanischen Kolonialreiches in Südamerika
1829	Griechenland erringt die Unabhängigkeit von der Türkei
1830	Julirevolution in Frankreich
1837	Victoria wird Königin von Großbritannien und Irland
1837	König Ernst August von Hannover entlässt die „Göttinger Sieben“, Verfassungskämpfe bis 1857
1844	Weberaufstand in Schlesien
1848/49	Kette bürgerlicher Revolutionen in Europa
1852–1870	Zweites französisches Kaiserreich unter Napoleon III.
1854	USA-Commodore Perry „öffnet‘“ Japan
1856	Niederlage Russlands im Krimkrieg
1861	Italien einheitlicher Nationalstaat
1861–1865	Sezessionskrieg in den USA
1860–1900	Kolonialisierung Afrikas
1864	Deutsch-Dänischer Krieg
1866	Sieg Preußens über Österreich
1868/69	Meiji-Reformation, Kaiser wieder Herrscher in Japan
1870/71	Deutsch-Französischer Krieg. Dritte französische Republik
1871	Proklamation des Deutschen Kaiserreiches unter Wilhelm I.
1894/95	Japanisch-chinesischer Krieg, Korea wird unabhängig
1897–1901	Spanisch-Amerikanischer Krieg
1900	Der Boxer-Aufstand in China wird niedergeschlagen

Industrielle Revolution: Wissenschaft und Technik

1764	Hargreaves erfindet die Spinnmaschine
1765	J. Watt erfindet die Kondensationsdampfmaschine
1765	In Birmingham wird die „Lunar Society“ gegründet
1765	In Freiberg/Sachsen wird die Bergakademie gegründet
1767	Der Nullmeridian wird durch Greenwich gehend definiert
1772	J. Cook beginnt zweite Weltumseglung, entdeckt 1778 Hawaii
1779	Erste gusseiserne Brücke wird über den Severn gebaut
1781	F. W. Herschel entdeckt den Planeten Uranus
1784	Patent auf Puddelverfahren zur Stahlherstellung
1784	Ch. A. de Coulomb entdeckt das nach ihm benannte Gesetz über die Anziehung elektrischer Ladungen
1794	Gründung der École Polytechnique in Paris
1801	C. F. Gauß veröffentlicht die *Disquisitiones arithmeticae*
1802	Grotefend entziffert die Keilschrift
1803	R. Trevithick: erste Dampflokomotive
1805	J. M. Jacquard: Programmgesteuerter Webautomat

1810	Die *Annales de mathématiques* von Gergonne erscheinen als erste rein mathematische Zeitschrift
1819	Erstes Dampfschiff überquert den Atlantik
1822	J. N. Niepce: Erfindung der Photographie
1822	Ch. Babbage: Erster programmgesteuerter Rechner (Difference Engine)
1825	Erste öffentliche Eisenbahnlinie in England
1825	Erste deutsche technische Lehranstalt in Karlsruhe
1826	G. S. Ohm findet das nach ihm benannte Gesetz
1831/33	M. Faraday: Elektromagnetische Induktion, Elektrolyse
1832	Entzifferung der Hieroglyphen durch Champollion
1833	Elektromagnetischer Telegraph von Gauß und Weber
1835	Eisenbahn Nürnberg-Fürth
1851	Pendelversuch von J. B. L. Foucault
1851	Erste Weltausstellung in London
1854	H. Goebel: Elektrische Glühlampe
1855	H. Bessemer: Verfahren zur Herstellung von Gussstahl
1859	Ch. Darwin begründet seine Evolutionstheorie
1859	Erste Ölquelle erschlossen
1861	R. Kirchhoff / R. W. Bunsen: Spektralanalyse
1861	Ph. Reis: Telefon
1863	Erste Untergrundbahn in London
1866	J. G. Mendel publiziert seine Vererbungsgesetze
1867	W. v. Siemens: Dynamomaschine
1867	A. Nobel erfindet das Dynamit
1869	D. J. Mendelejew: Periodisches System der Elemente
1869	Eröffnung des Suezkanals
1870	J. D. Rockefeller gründet die Standard Oil Company
1875	Internationale Meterkonvention
1876	N. Otto: erster Viertaktmotor wird patentiert
1877	Th. A. Edison: Phonograph
1882	R. Koch entdeckt den Tuberkelbazillus
1886	H. Hertz erzeugt elektromagnetische Radiowellen
1886	Patentwagen von C. F. Benz
1887	Motorwagen von G. Daimler
1889	Weltausstellung in Paris; Eiffelturm von G. Eiffel
1890	Erste elektrische U-Bahn in London
1893	Erfindung des Dieselmotors durch R. Diesel
1893	Panamakanal im Bau
1895	W. C. Röntgen entdeckt die nach ihm benannten X-Strahlen
1896	A. H. Becquerel entdeckt die Radioaktivität
1897	Erster internationaler Mathematikerkongress in Zürich
1900	Graf Zeppelins erste Versuchsfahrt mit starrem Luftschiff

10.0 Einführung

10.0.1 Baukunst, Malerei, Musik und Literatur im 19. Jahrhundert (H.-W. Alten)

Der enorme Aufschwung von Kunst und Kultur im 18. Jahrhundert erlebte seine Fortsetzung im 19. Jahrhundert, zunächst in der weiteren Ausprägung der im 18. Jahrhundert entstandenen Stilformen, dann in der Entwicklung neuer Stilrichtungen in Musik und Literatur; in der Baukunst führte er zu Mischstilen und Eklektizismus.

Baukunst

In der Baukunst und Bildhauerei lebte zunächst der Klassizismus fort. Die namhaften Vertreter in Deutschland waren Karl Friedrich Schinkel mit seinen Werken klassizistischer Strenge (Neue Wache, Schauspielhaus und Altes Museum in Berlin, Nikolaikirche in Potsdam) und Leo von Klenze mit der Glyptothek, der älteren Pinakothek, dem Königsplatz und der Neuen Eremitage in St. Petersburg.

Johann Gottfried Schadow schuf die Quadriga auf dem Brandenburger Tor, berühmte Standbilder und Grabmäler und gilt als bedeutendster Bildhauer des deutschen Klassizismus neben Christian Daniel Rauch, dem Schöpfer des Reiterdenkmals von Friedrich II. und der Feldherrenstandbilder vor der Neuen Wache in Berlin.

Bekanntestes Bauwerk von Gottfried Semper ist das mit Elementen der Renaissance im Stil des Klassizismus erbaute Neue Hoftheater in Dresden, die später nach ihm benannte Semper-Oper.



Abb. 10.0.1 Die Quadriga auf dem Brandenburger Tor in Berlin [Foto Alten]



Abb. 10.0.2 In der steinernen Architektur des 19. Jhs. haben verschiedene Stilrichtungen ihren Ausdruck gefunden: Die Isaaks-Kathedrale in St. Petersburg (o. li.) und die Akademie der „Athener Trias“ (o. re.) sind klassizistisch. Das Parlamentsgebäude in Budapest (u. li.) ist neugotisch; die Sacre Coeur in Paris (u. re.) vereinigt mehrere Stilrichtungen [Foto Alten]

In Russland erlebte die klassizistische Baukunst ihre Höhepunkte in der Admiralität von Sacharow, der Isaaks-Kathedrale und der Alexandersäule des Franzosen Auguste Montferrand und den spätklassizistischen Werken (Senat und Synod, Generalstab am Schlossplatz, Michaels-Palast) von Rossi in St. Petersburg.

Während in Frankreich zu Beginn des 19. Jhs. Bauten im Empire-Stil als Sonderform des Klassizismus unter Napoleon I. entstanden, fand der Klassizismus im Ursprungsland klassischer Architektur erst Eingang, als Griechenland 1829 unabhängig und Athen seine Hauptstadt geworden war. In der bayerischen Ära unter König Otto v. Wittelsbach und der dänisch-englischen Regentschaft von König Georg I. entstand im Herzen von Athen die glanzvolle Trias der Universität, der Akademie und der Nationalbibliothek unter den dänischen Baumeistern Christian und Theophil Hansen und dem Dresdner Architekten Ernst Ziller.

Auch in Odessa am Schwarzen Meer fand der Klassizismus Eingang, am prächtigsten in dem von 1884–1887 erbauten neuen Opernhaus der Wiener Architekten Fellner und Helmer.

Im Eklektizismus der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts fand die Gotik Nachahmung in den Bauwerken der Neogotik (Beispiele dafür sind die Parlamentsgebäude in London und Budapest), der Barockstil im Neobarock des Zweiten Kaiserreiches (z. B. in der Großen Oper in Paris von Ch. Garnier, im Theater und im Casino in Monte Carlo). Daneben bildeten sich Mischstile aus (z. B. in der Kirche Sacre-Cœur auf dem Montmartre in Paris). Im Zuge der Industriellen Revolution machten Ingenieurbauten Furore wie der Kristallpalast in London, der Eiffelturm, die Brücke über den Douro in Porto und andere Konstruktionen aus Stahl und Eisen des G. Eiffel und seiner Schüler.

Im ausgehenden 19. Jahrhundert entwickelte sich der Jugendstil, fand seine Ausprägung in den Wohnhäusern der Bourgeoisie in aufstrebenden Städten wie Riga, Budapest, Wien und andernorts. Als bedeutende Bildhauer dieser Periode seien Auguste Rodin und Aristide Maillol erwähnt.

Malerei

In der Malerei treten im 19. Jahrhundert in Frankreich zunächst hervor David, der Hofmaler Napoleons I., und Ingres als Vertreter der französischen Klassik, dann Delacroix und Corot mit romantischen Landschaften, Porträts und Akten.

In der deutschen Malerei der Romantik treten uns vor allem entgegen Caspar David Friedrich mit seinen berühmten Landschaftsbildern, Philipp Otto Runge und seine symbolkräftigen Werke, Ludwig Richter und Moritz v. Schwind mit ihren Märchen- und Sagenbildern und Carl Spitzweg mit seinen Bildern von Kleinbürgern und Sonderlingen in der Biedermeierzeit.

Die folgende Periode des Realismus wurde in Deutschland insbesondere geprägt von Adolf v. Menzel durch seine Bilder vom Preußischen Königshof und dem damaligen Berlin, von Wilhelm Leibl und seiner altmeisterlichen Sachtreue, Anselm Feuerbach mit seinen Monumental-Gemälden und Arnold Böcklin mit seinen Götter- und Fabelwesen in leuchtkräftigen Farben.

In Frankreich trat Courbet als namhafter Vertreter des Realismus hervor, in England waren es Constable mit stimmungsvollen Landschaften und Turner mit aufregenden Seebildern und mythologischen Motiven, die in seinen Spätwerken schon die Nähe zum aufkeimenden Impressionismus verraten.

Geradezu revolutionär waren die Gemälde des in den Jahren 1860–1870 in Frankreich aufgekommenen Impressionismus, so bezeichnet (zunächst abschätzig!) nach dem Bild *„Impression, soleil levant“* von Claude Monet in der Pariser Ausstellung 1874. Erste Züge dieser im Gegensatz zur Ateliermalerei des 19. Jhs. entwickelten Freilichtmalerei mit ihren subjektiv-atmosphärischen Farbreizen sind schon ab 1832 bei Delacroix zu erkennen, dann bei Manet, der 1863 mit seinem *„Frühstück im Freien“* einen Sturm der Entrüstung hervorrief. Neben Monet sind Pissarro mit stimmungsvollen



Abb. 10.0.3 „Napoleon I. auf dem Kaiserthron“ (Ingres 1806), Klassik in der Hofmalerei. „Garten des Ariost“, (Feuerbach 1863, Ausschn.), das Monumentalgemälde des Realismus zeigt ein Motiv aus der Zeit der Renaissance [Schack-Galerie München]. „Kreidefelsen auf Rügen“ (Caspar David Friedrich, um 1818) typische Malerei der Romantik [Museum Oskar Reinhart, Winterthur]. „Impression, soleil levant“ (Monet 1872, Ausschn.), das Gemälde gab dem Impressionismus seinen Namen [Musée Marmottan, Paris]

Landschaften, Renoir mit den Akten in heiterer Sinnlichkeit und blühenden Farben, Degas mit den Tänzerinnen in zarten Farben und Cezanne führende Vertreter des Impressionismus. Mit den pointillistisch gemalten Bildern von Seurat und Signac entstand daraus der *Neo-Impressionismus*, während Gauguin in seinen Südseebildern, Toulouse-Lautrec mit Plakaten und Sittenbildern und van Gogh mit starken Farben und Strichen daraus völlig neue, eigene Ausdrucksformen entwickelten.

In Deutschland schufen Liebermann, Corinth, Slevogt und v. Uhde impressionistische Gemälde eigener Art.

Musik

In der Musik ging die Periode der Wiener Klassik mit den großen Werken Beethovens zu Ende. In der Form daran anknüpfend kam die Romantik auch in der Musik zum Durchbruch.

Schubert, Schumann, Mendelssohn-Bartholdy und Brahms sind mit Symphonien, Liedern, Klavier- und Kammermusik ihre herausragenden Repräsentanten in Deutschland, Carl-Maria von Weber prägte die romantische Volksoper, Albert Lortzing Spieloper und Singspiel. Anton Bruckner leitete mit seiner Kirchenmusik und seinen großräumig angelegten Symphonien zu neuen Ausdrucksformen über, die von Gustav Mahler fortgeführt und von Richard Strauss mit äußerster Raffinesse der Klangwirkung und Elementen der sog. Programmmusik entwickelt wurden. Ihre typische Ausprägung erhielt diese Programmmusik durch die Klavierwerke von Franz Liszt und die Opern von Richard Wagner.

In Italien gelangte in erster Linie die Oper zu neuen Formen und großer Blüte. Mit einer großen Fülle ihrer Spielopern begeisterten Gioacchino Rossini und Gaetano Donizetti, mit den Koloraturarien seiner „Norma“ Vincenzo Bellini. Sie alle überragte Giuseppe Verdi mit seinen großen dramatischen Opern im Wettkampf mit seinem großen Rivalen Richard Wagner. Neue Formen des Ausdrucks entwickelten Puccini, Mascagni und Leoncavallo in den impressionistisch gefärbten Opern im Stile des sozialkritischen und leidenschaftlichen Verismo.

In Frankreich traten als Opernkomponisten Meyerbeer, Gounod, Delibes und Bizet hervor, Berlioz als Vater der neuzeitlichen Programmmusik und Saint-Saens mit pathetisch-klassizistischen Werken. Claude Debussy und Maurice Ravel prägten mit ihren Klanggemälden den parallel zur Malerei entwickelten französischen Impressionismus in der Musik.

Herausragende Musiker in Russland waren Anton Rubinstein mit seinen Kompositionen unter dem Einfluss Mendelssohns, Peter Iljitsch Tschaikowski mit einem gewaltigen Oeuvre von Symphonien, Konzerten, Balletten, Opern und Kammermusik, Nikolai Andrejewitsch Rimski-Korsakow mit Volksliedern und russischer Kirchenmusik und Modest Petrowitsch Mussorgski mit seinen schon impressionistisch gefärbten Klangorgien.

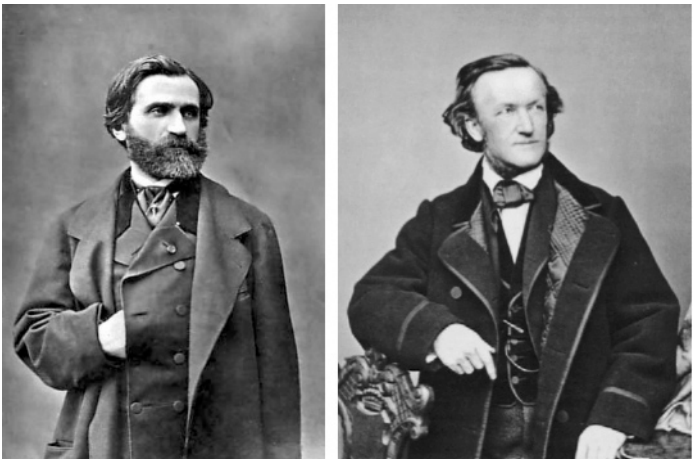


Abb. 10.0.4 Giuseppe Verdi und Richard Wagner

In Österreich erlebte die Musik neben der Vollendung der Wiener Klassik Höhepunkte in der Entwicklung des Kunstliedes von Schubert bis Hugo Wolf, der Geburt des Walzers und der Operette durch Johann Strauß Vater und Sohn.

Die häufig schwermütigen Klänge des Norwegers Edvard Grieg sind bis heute ebenso unverzichtbar in Konzerten, Liederabenden und Musiksendungen wie die spätromantischen Kompositionen seines Kollegen Christian Sinding und die Symphonien, Kammermusik und Lieder des Finnen Jean Sibelius. Gleiches gilt für die Werke des Schöpfers der tschechischen Nationalmusik Bedřich Smetana und seines Landsmannes Antonín Dvořák sowie für die Werke des französisch-polnischen Komponisten Frédéric Chopin, Schöpfer eines von Weber zu Liszt führenden Stils der Klaviermusik mit einem schier unerschöpflichen Reichtum von Figuren und Arabesken.

Literatur

Die ungeheure Vielfalt der Autoren, Werke und Strömungen in der Literatur des 19. Jahrhunderts kann hier nur stark selektiv und in groben Zügen beschrieben werden. Zeitlich parallel dem von Goethe geprägten Ausklang der Weimarer Klassik und den meisterhaften Novellen und Dramen des v. Kleist entwickelte sich die Literatur der deutschen Romantik, geprägt von den Frühromantikern Brentano und Hoffmann mit ihren Erzählungen und Märchen, dann von den Balladen und Sagen der „Schwäbischen Schule“ der Dichter Uhland und Schwab, der patriotischen Lyrik von Hoffmann v. Fallersleben und den spätromantischen Gedichten, Novellen und Romanen des Joseph Freiherrn von Eichendorff.

Die klassisch-romantische Lyrik klang aus in den Gedichten von Heinrich Heine und Eduard Mörike, ging über in die etwa von 1832–1885 währende Zeit des Realismus mit den auch durch die Beschaulichkeit des Biedermeiers geprägten Werken von Annette v. Droste-Hülshoff, Adalbert Stifter und anderer, während in Österreich die barocke Theatertradition mit den Dramen Grillparzers und im Volkstheater von Nestroy und Raimund eine neue Blüte erreichte.

Als namhafte Dichter des Realismus sind Freytag, Keller, Raabe, Storm und C. F. Meyer mit ihren Novellen, Romanen und Gedichten in die deutsche Literaturgeschichte eingegangen, Büchner, Grabbe und Hebbel mit ihren Dramen.

Wie eine literarische Revolution breitete sich der vom Wachstum der Fabrikstädte und Milieu des Proletariats durch die industrielle Revolution geprägte Naturalismus von etwa 1880–1900 in Europa aus. In Deutschland waren Vorkämpfer dieser Bewegung die Brüder H. und J. Hart, Begründer und Theoretiker A. Holz und J. Schlaf. Als erstes naturalistisches Drama kam 1889 *Vor Sonnenaufgang* von Gerhart Hauptmann auf die Bühne, gefolgt von *„Die Weber“* und den sozialkritischen Werken von Sudermann, Halbe und anderen.

Durch ihre mundartlichen Werke wurden Rosegger mit seiner Prosa und Reuter durch seine plattdeutschen Erzählungen und Gedichte berühmt.

In Frankreich entwickelte sich die Literatur von den Schriften der Mme. de Staël über die frühromantischen Essays und Romane von Chateaubriand und die hochromantischen Werke des alle überragenden Victor Hugo zu den kunsttheoretischen Schriften von Baudelaire, der als Begründer des Symbolismus gilt und entscheidenden Einfluss auf das Schaffen von Verlaine, Mallarmé und Rimbaud, später auch von Valery, George, Rilke und anderen ausübte. Der französische Roman wandelte sich von den zeitkritischen Formen Stendhals, den Sittenbildern Balzacs und den sozialkritischen Schriften der durch ihre Liaison mit Frédéric Chopin bekannten George Sand zu den vom Naturalismus geprägten Werken von Flaubert, Zola, Daudet und Maupassant.

Als größte Schöpfung der neueren italienischen Literatur wird der geschichtliche Roman *I promessi sposi* von A. Manzoni angesehen, als größter italienischer Lyriker nach Petrarca gilt Giacomo Leopardi, als Begründer des Verismus in der Literatur Giovanni Verga.

In England erlebte die Literatur einen Höhepunkt in der Lyrik und den Romanen der Romantiker Wordsworth, Coleridge, Southey, Lord Byron, Shelley, Keats und Sir W. Scott, dessen historische Romane zur Weltliteratur zählen. Nach 1830 begann die Periode des Realismus mit den Werken von Lord A. Tennyson – als *„poet laureat“* offizieller Dichter des viktorianischen Zeitalters – und Browning. Carlyle wehrte sich gegen den Materialismus seiner Zeit, Charles Dickens schuf den englischen sozialen Roman, Makepeace Thackeray schrieb historische und Bildungs-Romane. Eine Brücke von der Malerei der „Präraffaeliten“ schlug der Malerdichter Rossetti. Als großer Dichter dieser Generation gilt Swinburne. Als bedeutender Vertreter des Natu-



Abb. 10.0.5 „Der arme Poet“ von Carl Spitzweg in der Fassung von 1839. Dieses Bild charakterisiert und karikiert die Situation vieler Schriftsteller des 19. Jhs., die nicht zu den bekannten Dichtern zählten [Neue Pinakothek München, Foto Alten]

ralismus (1880–1900) in England seien Conrad mit seinen Novellen und den meist auf See spielenden Abenteuerromanen und Galsworthy mit seiner *Forsyte Saga* und den um soziale Fragen kreisenden Dramen und Essays genannt.

In Norwegen traten Henrik Ibsen mit naturalistischen Dramen und sein Rivale Björnson mit Gedichten, Erzählungen aus dem Bauernleben und Dramen hervor, in Schweden Selma Lagerlöf mit ihrem zu Weltruhm gelangten Erstlingswerk *Gösta Berlings Saga* und August Strindberg, der mit realistisch-satirischen Romanen, pazifistischen Novellen, naturalistischen Dramen und surrealistischen Bühnenwerken starke Wirkungen auf die Entwicklungen des Symbolismus, Expressionismus und Surrealismus ausübte.

Die russische Literatur verdankt dem Lyriker und Romancier Puschkin die endgültige Gestalt der Schriftsprache und Lermontow die neue russische Lyrik. Gogol gilt als Schöpfer der russischen Prosadichtung, Turgenjew fand mit lyrischen Erzählungen, Novellen und Bühnenwerken als erster russischer Dichter allgemein Anerkennung im westlichen Europa, Tolstoi und Dostojewski zählen mit ihren naturalistischen Romanen zur Weltliteratur. Tschechow ist mit seinen Novellen und Dramen Hauptvertreter der impressionistisch-symbolischen Strömung.

10.0.2 Die Industrielle Revolution

Die Industrielle Revolution nahm ihren Anfang nach der Mitte des 18. Jahrhunderts in England, griff dann auf Frankreich über, in den 30er Jahren des 19. Jahrhunderts nach Deutschland und Mitteleuropa, später nach Rußland und den USA.

In jenen anderthalb Jahrhunderten bis zum Ende des 19. Jahrhunderts vollzog sich eine tief greifende Umgestaltung der Produktionsweise, der Übergang nämlich von der handwerklichen Produktion in Manufakturen zur maschinellen Produktion in Fabriken.

Zwei technische Erfindungen schufen die Voraussetzung dafür: Die Vervollkommnung der Dampfmaschine (deren Anfänge bis ins 18. Jahrhundert zurückreichen) und, was oft weniger deutlich herausgehoben wird, das Aufkommen von Werkzeugmaschinen. Soziologisch gesehen war die Industrielle Revolution gestützt auf den Einsatz freier Lohnarbeiter, den Ruin der kleinen Handwerksproduktion und die Anhäufung bedeutender Kapitalien im Gefolge der ursprünglichen Akkumulation.

Maschinen hatte es auch in Manufakturen gegeben. Die revolutionierende Neuerung bestand nicht in der Aufteilung des Produktionsprozesses in eine Vielzahl von Handgriffen und der daraus sich ergebenden Arbeitsteilung, sondern in der Einführung von Werkzeug führenden Maschinen, die an die Stelle der Menschen treten konnten, die ihre Gliedmaßen und von Hand zu führende Werkzeuge gebrauchen mussten. *„Eine Maschine, um ohne Finger zu spinnen“* – so pries der englische Erfinder John Wyatt (1700–1766) die erste Spinnmaschine an. Eine Geschichte der Technik und der Technikwissenschaften [Brentjes/Richter/ Sonnemann 1987], [Troitzsch/Weber 1982], [Buchheim/Sonnemann 1990] lässt diesen Kernprozess der Industriellen Revolution im Einzelnen deutlich hervortreten, z. B. bei der Spinnmaschine, beim Webstuhl, bei der Supportdrehbank, bei der Fräsmaschine, bei landwirtschaftlichen Maschinen und schließlich bei den dampfbetriebenen Loko-



Abb. 10.0.6 Dampfbetriebenes Schöpfwerk (Niederlande 1987), Stephensons Lokomotive (GB 1975)

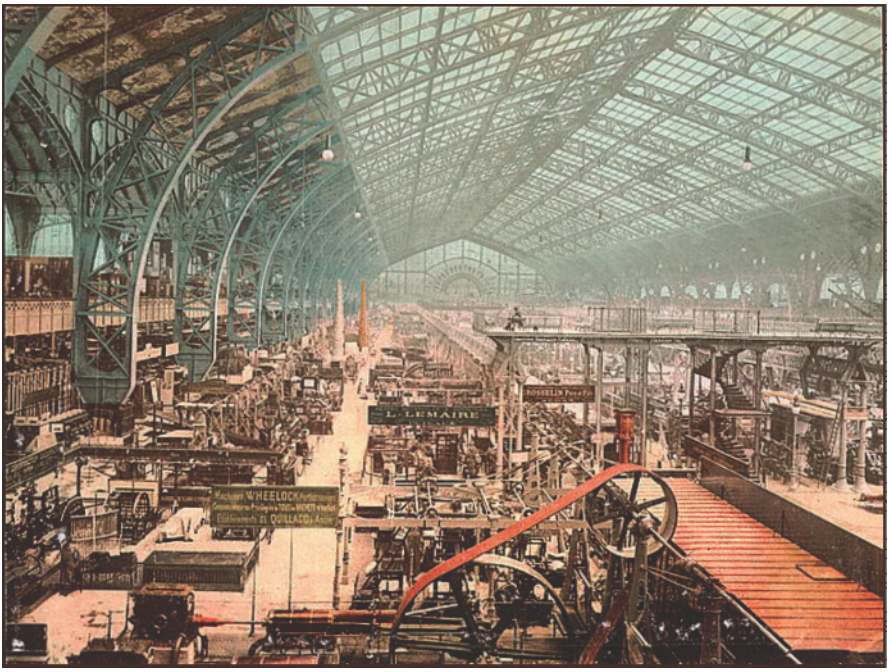


Abb. 10.0.7 Maschinenhalle bei der Weltausstellung in Paris 1889

motiven und der Eisenbahn, die sozusagen zum Symbol der Industriellen Revolution wurde.

1851 in London gab es die erste Weltausstellung mit dem Thema Industrie. Der Crystal Palace war ein enorm großes Ausstellungsgebäude mit viel Licht, gebaut aus Glas, Eisen und Stein, Symbol für den Aufbruch in eine Welt neuer Möglichkeiten aber auch neuer Anforderungen, z. B. an die angewandte Mathematik. Von da an gab es in Abständen von einigen Jahren Weltausstellungen auf allen Erdteilen, schwerpunktmäßig aber in Europa und den USA. Als Felix Klein (1849–1925) die Weltausstellung von Chicago im Jahr 1893 besuchte, war die überall auf dem Gelände vorhandene elektrische Beleuchtung Edisons eine der Attraktionen. Zu dem Zeitpunkt gab es bereits auch elektrische Lokomotiven, und elektrische Straßenbahnen lösten die vom Pferd gezogenen Schienenwagen ab. Die Eisen- und Stahlkonstruktionen der Weltausstellung in Paris vier Jahre zuvor machten deutlich, was die Welt im nächsten Jahrhundert sichtbar prägen würde: Eisen- und Stahlkonstruktionen beim Bau von Industrieanlagen, Bahnhöfen, Brücken und später bei Hochhäusern. Markantes Beispiel ist der Eiffelturm in Paris, der aus dieser Weltausstellung von 1889 stammt und sinnbildlich für die Anforderungen an die Mathematik allein bei statischen Berechnungen steht.

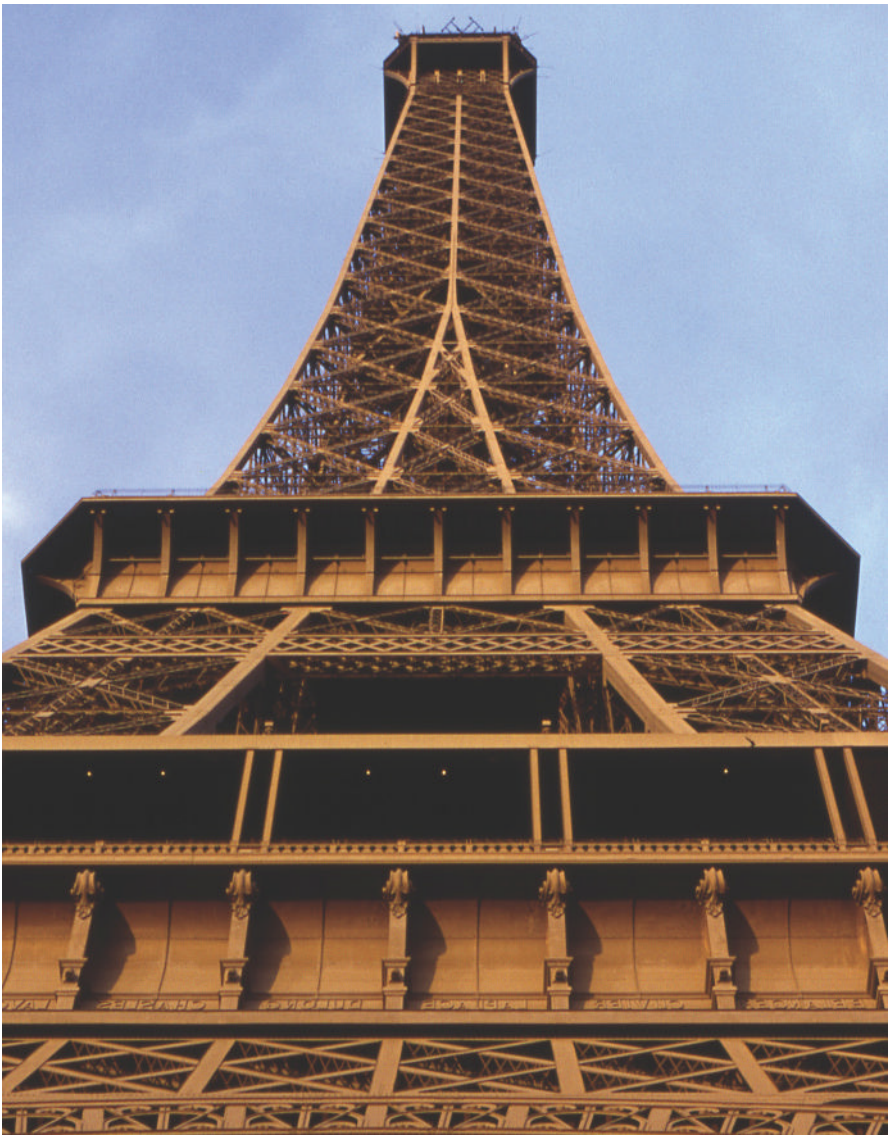


Abb. 10.0.8 Der Eiffelturm in Paris [Foto Alten]. Der nach seinem Erbauer Gustave Eiffel (1832–1923) benannte Turm ist zum Wahrzeichen von Paris geworden. Die 300 m hohe Konstruktion aus Eisen und Stahl sollte die Turmspitzen der Kathedralen überragen und die Vorherrschaft der Maschinen im Industriezeitalter symbolisieren. „Bedeutet das nicht einen Triumph der Mathematik wie menschlicher Intelligenz? Nicht eine Handbewegung war nötig, um hoch über Paris dieses Meisterwerk wissenschaftlichen Erfindungsgeistes entstehen zu lassen!“ – so beschrieb François Poncetton den Turmbau 1889, als er 100 Jahre nach der französischen Revolution im Rahmen der Pariser Weltausstellung eingeweiht wurde



Abb. 10.0.9 Industriedenkmäler in Großbritannien (GB 1990)

10.0.3 Forderungen an Mathematik und Naturwissenschaften

Die Industrielle Revolution begann, neue und zunehmend nachhaltigere Forderungen an Mathematik und Naturwissenschaften zu stellen: Maschinenbau, Brücken, Eisenbahnen, Waffen, Schiffe, Bergwerke erhöhten sprunghaft den Bedarf an Eisen, Stahl, Nichteisenmetallen, Kohle und anderen Grundmaterialien. Hüttenleute, Chemiker und Ingenieure waren auf den Plan gerufen. Die Gewinnung von Textilhilfsstoffen wie Schwefelsäure, Soda, Bleichmittel und Farben bildeten ein weiteres Hauptbetätigungsfeld der Chemiker.

Probleme der Konstruktion von Maschinenelementen, der Kraftübertragung, der Reibung, der Präzisionsmechanik und der Energiegewinnung brachten Physiker und einen Teil der Mathematiker in engere Beziehungen zur materiellen Produktion als je zuvor. Dazu kam das breite gesellschaftliche Interesse an schnell, zuverlässig und über weite Entfernungen arbeitenden Nachrichtenverbindungen. Nicht zuletzt schuf die Notwendigkeit, für eine rasch wachsende Bevölkerung genügend Lebensmittel bereitzustellen, eine Vielzahl von Berührungspunkten zwischen Naturwissenschaft und Landwirtschaft.

Die vom Maschinenbau und anderen konstruktiven Ingenieurwissenschaften ausgehenden Forderungen an die Mathematik richteten sich in erster Linie auf Darstellende Geometrie und Technisches Zeichnen, zum anderen auf die

mathematische Beschreibung der Bewegungsabläufe und anderer Prozesse. Die weitgehend auf naturwissenschaftlichen Kenntnissen beruhende industrielle Produktion forderte insbesondere zu Forschungen in der Physik, Chemie und Biologie heraus, und daraus entstanden wiederum enorme Impulse für die Entwicklung mathematischer Modelle und Methoden: Elektrische und magnetische Felder, die Ausbreitung von Licht und Wärme und viele andere Vorgänge und Erscheinungen in der belebten wie der unbelebten Natur mussten mathematisch erfasst und in ihren Abläufen modellhaft studiert werden, bevor sie in technischen Verfahren mit industriellen Prozeduren genutzt werden konnten. Dies alles gab der Entwicklung der Mathematik in verschiedenen Teilgebieten ungeheuren Antrieb, vor allem in der Analysis und Geometrie, aber auch in der Algebra, der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Statistik.

Auf der anderen Seite: Unter den Bedingungen der Industriellen Revolution erhielt der Naturwissenschaftler eine neue soziale Stellung. Die sich entwickelnden Produktionsverhältnisse boten die Möglichkeit, eine naturwissenschaftliche Entdeckung oder eine Erfindung in großem Stil profitbringend auszuwerten. Nicht wenige gingen den Weg vom Naturforscher zum Unternehmer, z. B. der Sodafabrikant Nicolas Leblanc (1742–1806) und der Elektroingenieur Werner von Siemens (1816–1892).

Wir finden also folgende Situation vor: Einerseits ergingen während der Industriellen Revolution direkt oder indirekt in erheblichem Maße Anforderungen an Naturwissenschaft und Mathematik. Andererseits ermöglichten und unterstützten die dort erzielten, teilweise spektakulären Erfolge und Ansatzpunkte im Wechselspiel eine grandiose Entfaltung von Mathematik und Naturwissenschaften gemäß ihren innerwissenschaftlichen Problemstellungen und Entwicklungstendenzen. So steht etwa Gaspard Monge (1746–1818) – von der Darstellenden Geometrie zum Technischen Zeichnen – für die erste Kategorie; die Entdeckung und der Ausbau der nicht-euklidischen Geometrie gehören wohl eher zur zweiten Kategorie, unbeschadet der Tatsache, dass die Physik zu Anfang des 20. Jahrhunderts auf die neue Geometrie zurückgreifen musste.

Einige Zeit, während der 60er, 70er und 80er Jahre des 20. Jahrhunderts, gab es eine ausgedehnte wissenschaftstheoretisch geführte Debatte um „äußere“ und „interne“ Triebkräfte der Entwicklung, wobei die jeweiligen Anhänger ihrer Richtung die Dominanz zuordneten. Eine Verabsolutierung übersieht jedoch, dass es sich aufs Ganze gesehen um Wechselwirkungen handelte. So haben problemgeschichtliche Studien ebenso ihren historischen Wert wie Studien zu soziologisch bedingten Fortschritten in der Wissenschaft.

Diese Überlegungen stehen nicht in Widerspruch zu der Tatsache, dass die Industrielle Revolution nicht von den Naturwissenschaften ausgelöst wurde und zwar in dem Sinne, dass sie nicht kausal an der Initialphase der Industriellen Revolution beteiligt waren. Die Schrittmacher der technischen Umwälzungen – Wyatt, Kay (1704–1764), Hargreaves (1740–1778), Arkwight (1732–1792), Maudsley (1771–1831), Whitney (1765–1825) und Crompton

(1753–1827) – standen als Erfinder, Ingenieure, Uhrmacher, Weber, Geistliche, Mediziner, Feinmechaniker usw. außerhalb der Traditionen bisheriger akademischer Naturwissenschaft [Wußing 1979].

10.0.4 Entwicklung wissenschaftlicher Institutionen

Einen sehr schönen Einblick in die Soziologie der beginnenden Industriellen Revolution in England gewährt uns die Geschichte der sog. „Lunar Society“ in Birmingham, gegründet 1765. Sie bestand bis 1813, nachdem fast alle Gründungsmitglieder verstorben waren. Der Name „Lunar Society“ (Mond-Gesellschaft) war dadurch entstanden, dass man sich an jenem Montag traf, der am nächsten zum Vollmond lag. Die Straßen waren unbeleuchtet und man wollte gefahrlos nach Hause kommen.

Die „Lunar Society“ war fast eine Art Gegenstück zur „Royal Society“, die den neuen Forderungen der Industriellen Revolution nicht gerecht wurde.

> *„Es muss zugegeben werden, daß die Royal Society ihre Aufgabe nicht mehr erfüllt, die Naturerkenntnis durch Bemühungen von der Art, wie wir sie jetzt wieder aufzunehmen beabsichtigen* (Umsetzung der naturwissenschaftlichen Ergebnisse in Anwendungen, Wg.), *voranzutreiben. Als Körperschaft wird sie kaum mit sich selber fertig und trifft keine Anstalten, die Arbeiten von anderen zu leiten.“*
> (Ausspruch des Chemikers Vernon Harcourts im Jahre 1831, zitiert nach [Mason 1961, S. 526])

Der „Lunar Society“ gehörten unter anderen an: Matthew Boulton (1728–1809) (Maschinenbauer, setzte Watts Erfindung der Dampfmaschine um), James Watt (1736–1819), Erasmus Darwin (1731–1802, Arzt) und Josiah Wedgwood (1730–1795) (beide Großväter des Biologen Charles Darwin), Richard

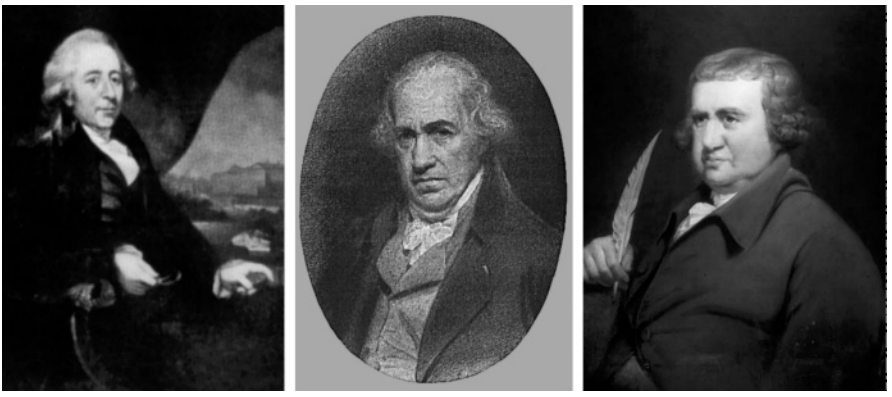


Abb. 10.0.10 Mathew Boulton, James Watt, Erasmus Darwin

Lovell Edgeworth (1744–1817, Elektrizität, Landwirtschaftsmaschinen), Samuel Galton (1753–1832, Gewehrfabrikant), James Keir (1735–1814, Glas, chemische Industrie), William Murdock (1754–1839, Gasbeleuchtung). Benjamin Franklin (1706–1790) war Korrespondierendes Mitglied, ebenso der Geistliche und Chemiker Joseph Priestley (1733–1804, Entdecker des Sauerstoffs), der als Anhänger der Französischen Revolution von deren Gegnern zur Flucht in die USA gezwungen wurde.

Das Ziel der Gesellschaft bestand darin, wissenschaftliche Entdeckungen zu demonstrieren und über die Überführung in neue Industrieprodukte nachzudenken. Ferner beschäftigten sich die Mitglieder mit dem Entwurf von Maßen und Gewichten, der Verbesserung des Transportwesens, dem Kanalbau und – vor allem – mit den sozialen Folgen der neuen Zeit.

Ähnliche, wenn auch nicht so erfolgreiche und so in die Breite wirkende Gesellschaften gab es in England auch in Manchester, Liverpool, in der Grafschaft Yorkshire. Gegen Ende der Jahrhunderts besaß jede Stadt, die etwas auf sich hielt, eine wissenschaftliche Vereinigung. Darüber hinaus gab es nationale Vereinigungen, z. B. Linnaean Society, Geological Society, Chemical Society – nicht gerade zum Vergnügen der Royal Society. Im Jahre 1831 wurde in York die „British Association for the Advancement of Science“ (Britische Vereinigung für den Fortschritt der Wissenschaft) gegründet.

Zu den essenziellen Begleiterscheinungen der Industriellen Revolution gehören auch zahlreiche Einrichtungen, die gezielt auf einen organisierten Fortschritt der angewandten Wissenschaften abzielten und fernerhin die Gründung wissenschaftlicher Gesellschaften mit regelmäßig stattfindenden Versammlungen und Kongressen. Über diesen Prozess unterrichtet die umfassende Studie [Ausejo 1994].

In Frankreich verlief die Entwicklung radikaler, nicht zuletzt im Zusammenhang mit der Französischen Revolution von 1789. Die altehrwürdige Pariser Akademie der Wissenschaften wurde 1793 wegen ihrer royalistischen Grundhaltung aufgelöst und erst unter Napoleon wieder eröffnet. Einige Anhänger des „ancien régime“ wurden hingerichtet, u. a. der Chemiker Lavoisier, der die Steuereinzugsbehörde des ancien régime geleitet hatte und der Astronom Bailly (1736–1793); der Sekretär der Akademie, Condorcet, beging – von Verhaftung bedroht – Selbstmord.

Man stellte jedoch bald fest, dass es an Gelehrten und an Hilfe für die Kriegsführung der Republik gegen die Koalition der Feudalmächte mangelte. Im Rückblick wurde folgende Einschätzung getroffen:

> *„Zur Verteidigung des Landes mangelte es an allem – an Schießpulver, Kanonen, Lebensmitteln. Die Zeughäuser waren leer, kein Stahl wurde mehr aus Übersee importiert, aus Indien kam kein Salpeter. Gerade die Leute, deren Arbeiten man geächtet hatte, waren es, die Frankreich das geben konnten, was es brauchte“.*
> (Zitiert nach [Mason 1961, S. 515])

Der Konvent rief Gelehrte zu Hilfe: „*Das Vaterland ist in Gefahr*“. Gaspard Monge organisierte die Produktion von Gewehren und Kanonen, war kurze Zeit sogar Marineminister. Der Mathematiker Lazare Carnot (1753–1823) wurde Kriegsminister und erhielt den Ehrennamen „Organisator des Sieges“. Der Chemiker Antoine de Fourcroy (1755–1809) organisierte die Gewinnung von Salpeter aus Dünger in Pferdeställen. Innerhalb weniger Monate stieg die Zahl der verfügbaren Geschütze von 900 auf 13 000. Paris allein erzeugte 140 000 Gewehre. In der für Frankreich siegreichen Schlacht von Fleurus (1794) wurde der Luftballon erstmals militärisch eingesetzt zur Beobachtung der feindlichen österreichischen Truppen.

Man hatte Linien optischer Telegraphen eingerichtet – auf Türmen waren bewegliche Balken angebracht. Deren Stellung übermittelte die Information. So wurde eine Nachricht von der Front in Lille bis Paris – eine Strecke von 270 km – in der damals sensationell kurzen Zeit von nur zwei Minuten übermittelt. Auch 1833 waren solche optischen Telegraphen noch in Preußen auf der Linie Berlin–Coblenz in Gebrauch (vgl. Abb. 10.0.11).

Noch unter der Jakobinerdiktatur wurde 1794 in Paris die „École Polytechnique“ (Polytechnische Schule) gegründet (bei ihrer Einrichtung hieß sie Zentralschule für öffentliche Arbeiten), die sich rasch zu einem führenden Zentrum für Naturwissenschaft und Mathematik entwickelte, nicht nur für Frankreich. Anfangs mit 400 Schülern gegründet – wobei im „revolutionären Unterricht“ die fortgeschrittenen Schüler die Anfänger unterrichteten – und mit herausragenden Gelehrten als Professoren wie Monge, Laplace und Lagrange für Mathematik, Berthollet für Chemie, wurde die Polytechnische Schule Vorbild für ganz Europa und zog in der nächsten Generation weitere Gelehrte ersten Ranges als Lehrer an: Malus, Arago, Poncelet, Poisson, Cauchy, Sadi Carnot, Gay-Lussac, Thenard, Vauquelin, Dulong, Petit.

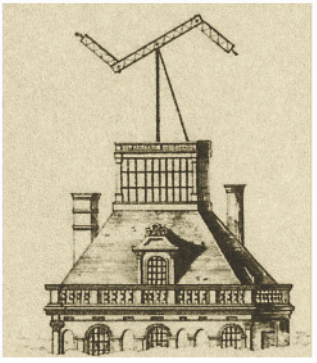




Abb. 10.0.11 Telegraph auf dem Louvre zu Paris (aus [Abhandlungen von der Telegraphie; Berlin, Carlsruhe, Frankfurt am Main und Leipzig 1794 und 1795, Reprint 1986]); Telegraphenlinie Berlin–Coblenz 1833 (DB Berlin 1983)

Die Pariser École Polytechnique machte Schule. Hand in Hand mit dem Voranschreiten der Industriellen Revolution wurden vielerorts polytechnische Schulen nach Pariser Vorbild gegründet, in Prag, Wien, Karlsruhe, München, Dresden, Hannover, Kassel, Zürich, Lissabon, Kopenhagen, Riga und andernorts. Ein neuer Typ von Hochschulen war geboren. Aus ihnen sind die späteren Technischen Hochschulen hervorgegangen. Daneben gab es lokale Bürgerinitiativen, z. B. die „Polytechnische Gesellschaft zu Leipzig“, gegründet 1825 (vgl. [Wußing 1999]).

Hingegen fiel mehr als die Hälfte der deutschen Universitäten der französischen Besetzung, der preußischen Niederlage und der Säkularisation kurz vor und zu Anfang des 19. Jahrhunderts zum Opfer. Zwischen 1792 und 1818 erloschen oder wurden aufgehoben die Universitäten Straßburg (1792), Stuttgart (1794), Köln (1796), Mainz und Bonn (1797), Trier (1798), Ingolstadt (1800, in Landshut neu eröffnet), Fulda (1802), Bamberg (1803), Dillingen (1804), Altdorf (1807), Paderborn, Helmstedt und Rinteln (1809), Salzburg und Innsbruck (1810), Frankfurt an der Oder (1811), Herborn und Erfurt (1816), Wittenberg (1817), Duisburg und Münster (1818).

Trotz der Erweiterung des Wissenschaftsbegriffes und seiner Ausprägung in der Philosophie des Idealismus durch Immanuel Hermann Fichte (1796–1879), Friedrich Wilhelm Joseph von Schelling (1775–1854, geadelt 1806), Georg Wilhelm Friedrich Hegel (1770–1831), Friedrich Ernst Daniel Schleiermacher (1768–1834) und Wilhelm von Humboldt (1767–1835) erfolgten nur wenige Neugründungen deutscher Universitäten im 19. Jahrhundert: Berlin (1809, die jetzige Humboldt-Universität), München (1826, anstelle von Landshut), Straßburg (1872 neu).

Nach wenigen Universitätsgründungen in der ersten Hälfte des 20. Jhs. (Münster 1902, Frankfurt am Main 1914, Hamburg und Köln 1919) erfolgte die Gründung vieler neuer Universitäten in Deutschland erst nach dem Zweiten Weltkrieg.

1794 hatte man in Paris das „Conservatoire des Arts et des Métiers“ (etwa: Lehranstalt der Künste und Gewerbe) gegründet, das sowohl als Museum diente, vor allem aber der Popularisierung neuer technischer Erfindungen. Als Gegenstück – angesichts der Erfolge in Paris – rief man 1800 in London die „Royal Institution of Great Britain“ ins Leben; Davy wurde eine der zentralen Figuren mit Faraday als Gehilfen. Lorenz Oken (1779–1857) begründete 1822 die „Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte“.

Mit anderen Worten: Die Industrielle Revolution bewirkte einen Umbruch der Produktionsweise und zog eine Fülle von institutionellen Änderungen und Neugründungen nach sich, die der Ausbildung der Träger der Umgestaltung dienten.

Karl Marx (1818–1883), ein äußerst aufmerksamer und scharfsinniger Zeitgenosse der Industriellen Revolution, hat im *Kommunistischen Manifest* von 1848, zusammen mit Friedrich Engels (1820–1895) die Wendung der Gesamtsituation folgendermaßen charakterisiert:

> *„Die Bourgeoisie hat in ihrer kaum hundertjährigen Klassenherrschaft massenhaftere und kolossalere Produktionskräfte geschaffen als alle vergangenen Generationen zusammen. Unterjochung der Naturkräfte, Maschinerie, Anwendung der Chemie auf Industrie und Ackerbau, Dampfschiffahrt, Eisenbahnen, elektrische Telegraphen, Urbarmachung ganzer Weltteile, Schiffbarmachung der Flüsse, ganze aus dem Boden hervorgestampfte Bevölkerungen – welch früheres Jahrhundert ahnte, dass solche Produktionskräfte im Schoß der gesellschaftlichen Arbeit schlummerten.“*
> [Marx/Engels 1959, S. 467]

Und an anderer Stelle:

> *„Ein auf Grundlage der großen Industrie naturwüchsig entwickeltes Moment dieses Umwälzungsprozesses* (der Industriellen Revolution, Wg) *sind polytechnische Schulen . . . “*
> [Marx/Engels 1959, S. 512]

Interessant ist ein Blick auf die Auseinandersetzungen innerhalb der Pariser polytechnischen Schule. Auf der einen Seite war es erklärtes Ziel, eine Lehranstalt mit höchstem Niveau zu begründen, andererseits gab es – abgeleitet aus den Forderungen nach Lehrbarkeit – Angriffe, dass das theoretische Niveau zu hoch sei. Cauchy beispielsweise sah sich ständigen Angriffen ausgesetzt, sein *Cours d'Analyse* sei zu schwierig. Cauchy verteidigte sich mit dem Argument, dass gerade durch größte begriffliche Strenge und Schärfe der Lehrstoff leichter erlernbar und beherrschbar sei.

Da alle Professoren der École Polytechnique verpflichtet waren, ihren Lehrstoff in Buchform niederzulegen, entstand eine stattliche Reihe vorzüglicher Lehrbücher. Die Bücher *Traité d'Analyse* bzw. *Cours d'Analyse* von Édouard Goursat, Augustin Louis Cauchy und anderen gehören zum „klassischen“ Bestand der Mathematikliteratur und wurden noch im 20. Jahrhundert gern benutzt.

Die von der gesellschaftlichen Entwicklung ausgehende Forderung nach gut ausgebildeten Ingenieuren, auf hohem theoretischem Niveau und gleichzeitig mit dem Blick auf die Anwendungen, bedeutete eine sozusagen von außen bewirkte Unterstützung innermathematischer Tendenzen. Sie zielte auf die Ausmerzung des intuitiven Gebrauchs solcher Begriffe wie Funktion, Stetigkeit, Differential und der schwankenden Behandlung von Reihenkonvergenz. Der allgemeine Lehrsatz, der aus der Aufdeckung des prinzipiellen Sachverhaltes hervorgeht, musste im Pädagogischen zur Regel werden, zum Rechenrezept, zum analytischen Kalkül, zum Formalismus, zum Verfahren, das stets zum Ziele führt. Im Ergebnis vergrößerte sich abermals – wie schon einmal mit der Erfindung des Calculus – spürbar die Anzahl der die höhere Mathematik Ausübenden. So entstand eine entscheidende neue Grundvoraussetzung für die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert.

Die Entwicklung der mathematisch orientierten Disziplinen während der Industriellen Revolution lässt sich folgendermaßen zusammenfassen:

Im Zusammenhang mit der zutage tretenden gesellschaftlichen Relevanz der darstellenden Geometrie kam eine sowohl in die Breite als auch in die Tiefe gehende Aus- und Durchbildung der Geometrie zustande: Die nichteuklidische Geometrie löste eine Revolution in den Grundlagen der Geometrie aus. Projektive Geometrie, analytische Geometrie und synthetische Geometrie traten als gesonderte mathematische Disziplinen mit spezifischen Arbeits- und Forschungsmethoden hervor. Die Methoden der Analysis, d. h. der Differential- und Integralrechnung, sowie die Theorie der unendlichen Reihen erfuhren eine kritische Überprüfung und eine logische Analyse ihrer Grundbegriffe. Noch nicht in expliziter Form, aber doch schon einen anderen, späteren Typ der Mathematik ankündigend, traten in der Algebra gewisse Formen strukturellen Denkens auf.

Noch immer lagen die Hauptzentren der Mathematik in den industriell fortgeschrittenen europäischen Ländern; für die eigenständige Entwicklung der Mathematik (und der Naturwissenschaften) in den USA wurden Voraussetzungen geschaffen.

In der Physik entwickelten sich – bei zunehmender Mathematisierung – neben der klassischen Mechanik weitere ihrer Gebiete – Elektromagnetismus, Optik und Thermodynamik – zu selbständigen, ausgedehnten Forschungsgebieten: Die Entdeckung und Formulierung des Energieerhaltungssatzes deckten einen Fundamentalzusammenhang allen Naturgeschehens auf. Zugleich wurde im Gefolge der Großen Französischen Revolution in zahlreichen Ländern der Erde nach und nach das metrische Maßsystem eingeführt. In Europa wurde das metrische System im 19. Jahrhundert von den Niederlanden, Belgien, Luxemburg, der Schweiz, Spanien, Italien, Deutschland und Österreich übernommen, 1907 folgte Dänemark.



Abb. 10.0.12 Einführung des metrischen Systems in Frankreich 1799: „Für alle Zeiten, für alle Völker“; Industrieausstellung 1806: „Ermutigung für die Industrie“ (Frankreich 1954, 1973)

10.0.5 Technikwissenschaften und Mathematik im deutschsprachigen Raum

Um das Gesagte konkret zu beschreiben, wollen wir nun einen Blick auf die Entwicklung in Deutschland und den deutschsprachigen Raum werfen, insbesondere auf die sich herausbildenden Technikwissenschaften [Biogr. bed. Techniker 1987], [Geschichte der Technikwissenschaften 1990], [Rühlmann 1885].

Für die Beschränkung auf den deutschsprachigen Raum spricht ein weiterer historiographischer, methodologischer Grund: Während im Ursprungsland der Industriellen Revolution, in England, die Umwälzungen in der Industrie, im Maschinenbau, im Verkehrswesen usw. ohne Mitwirkung der Naturwissenschaften und der Mathematik in Gang kamen, wurde in Frankreich, die Industrielle Revolution von den Wissenschaften begleitet, insbesondere durch die Pariser Polytechnische Schule, und in Deutschland bzw. in Mitteleuropa ging die in den 30er Jahren einsetzende Industrielle Revolution Hand in Hand mit der Entwicklung der Wissenschaften und – was uns hier besonders interessiert – in Wechselwirkung mit Teilen der Mathematik. Es lohnt sich also, die Lebensläufe einiger Männer näher zu betrachten (vgl. [Biogr. bed. Techniker 1987]).

Julius Ludwig Weisbach

Julius Ludwig Weisbach (1806–1871) wirkte als Professor an der traditionsreichen Bergakademie Freiberg. Aus einer erzgebirgischen Familie bescheidenen Einkommens stammend durchlief Weisbach zunächst das Studium an der Bergakademie. Um sich auf eine Hochschullehrerlaufbahn vorzubereiten hörte er u. a. Vorlesungen bei Gauß und Naturwissenschaften bei Johann Friedrich Blumenbach (1752–1840) in Göttingen. Schließlich wurde er 1833 Professor für angewandte Mathematik und Bergmaschinenlehre in Freiberg. Den Anwendungen der Mathematik in den Technikwissenschaften dienten sein Lehrbuch *Die ersten Grundlehren der höheren Analysis oder Differential- und Integralrechnung* von 1849 sowie seine Lehrmethoden der darstellenden Geometrie. In den Jahren 1835/36 schon war sein *Handbuch der Bergmaschinenmechanik* und 1845/1863 das *Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinenmechanik* erschienen. Beide zeichneten sich durch mathematische Durchdringung des Stoffes aus und fanden in ganz Europa weite Verbreitung.

Mit dem Blick auf die bescheidene Grundausbildung seiner Studenten versuchte Weisbach noch mit elementarer Mathematik auszukommen:

> *„Mein Hauptstreben (...) bestand in dem Erzielen der größten Einfachheit bei der Entwicklung und Beweisführung, und nächstens darin, alle in der Anwendung auf die Praxis wichtigen Sätze nur mit Hilfe der niederen Mathematik abzuhandeln.“*
> [Biogr. bed. Techniker 1987, S. 156]

Weisbach war auch wesentlich beteiligt am Bau eines etwa 14 km langen unterirdischen Entwässerungsstollens, der von mehreren Seiten vorangetrieben wurde. Dank neuer von Weisbach verwendeter Geräte verfehlten sich die Stollenabschnitte nur um wenige Dezimeter, eine Glanzleistung der Markscheidekunst!

Johann Andreas Schubert

Auch Johann Andreas Schubert (1808–1870) stammte aus den sog. unteren Schichten des Volkes; er wurde in einem „Armeleutehaus“ im Vogtland geboren. Ein Zufall öffnete ihm den Weg zu höherer Bildung, und zwar an der Bauschule der Akademie für bildende Künste in Dresden. Der dortige Mathematiklehrer Gotthelf August Fischer (1763–1832) lenkte Schuberts Interessen auf Mathematik und auch auf die Pariser Polytechnische Schule. So konnte er 1830 das Amt eines Lehrers an der 1828 gegründeten Technischen Bildungsanstalt in Dresden (der Vorläuferin der heutigen Technischen Universität) übernehmen. Im Selbststudium vervollständigte er seine Kenntnisse und hielt wöchentlich mindestens 20 Stunden Vorlesungen in Mathematik, Statik, Dynamik, Hydrostatik, Hydromechanik, Mechanik und Buchhaltung.

Bei Schubert paarte sich theoretischer Blick mit der Hinwendung zur Praxis: Er habe sich stets bemüht *„... die Mathematik-Wissenschaft nicht bloß als Wissenschaft an sich, wie dies leider selbst an Gewerbeschulen noch oft geschieht, sondern zugleich in mannigfachster Beziehung auf das Leben vorzutragen, was mir nur dadurch möglich wurde, daß ich die bequemere Methode, in der Stube zu studieren verließ und mich mit der Anwendung meiner Wissenschaft selbst* (...) *befreundete.“* [Biogr. bed. Techniker 1987, S. 162]

Schubert trat mit technischen Großtaten hervor: er konstruierte die erste deutsche Lokomotive, die „Saxonia“, die an der Eröffnung am 8. April 1839 der ersten deutschen Ferneisenbahnlinie Leipzig–Dresden teilnahm. Er brachte die Elbschifffahrt mit Dampfschiffen in Gang und konstruierte die noch heute Bewunderung erregende Göltzschtalbrücke, die in nur 5 Jahren Bauzeit 1851 fertiggestellt werden konnte.

Jacob Ferdinand Redtenbacher

Jacob Ferdinand Redtenbacher (1809–1863) stammt aus Steyr in Österreich. Während einer Tätigkeit an der Baudirektion in Linz nahm er privat Mathematikstunden, seit 1825 studierte er an der Polytechnischen Schule in Wien, zusätzlich Mathematik an der Wiener Universität. Im Jahre 1833 ging Redtenbacher an die Höhere Industrieschule in Zürich, erst als Lehrer, dann als Professor für Mathematik und Geometrisches Zeichnen. Zugleich unterhielt er enge Beziehungen zum sich entwickelnden Schweizer Maschinenbau. Es erschien eine Reihe von Publikationen zur wissenschaftlichen Begründung des Maschinenbaues, u. a. *Prinzipien der Mechanik und des Maschinenbaus* (1852).



Abb. 10.0.13 Göltzschtalbrücke im Vogtland [Foto Gottwald] (Brfm. DDR 1976)

Im Jahre 1841 nahm Redtenbacher eine Berufung als Professor für Maschinenbau am Polytechnikum in Karlsruhe an, wurde sogar 1857 dessen Direktor. Auch war er ratgebend am Aufbau des Polytechnikums in Zürich beteiligt. *„Redtenbacher kommt das Verdienst zu, gegen den englischen, erfahrungsbezogenen Stil des Konstruierens die Konzeption gesetzt zu haben: ‚Theorie mit Berücksichtigung der Erfahrung'."*
[Biogr. bed. Techniker, S. 170]

Redtenbacher hat einen bedeutenden Einfluß auf die Herausbildung des Standes des wissenschaftlich gebildeten Ingenieurs ausgeübt, nicht zuletzt über seine Schüler: Franz Reuleaux (1829–1905), der seit 1850 in Karlsruhe studierte; Eugen Langen (1833–1895) hörte Vorlesungen bei Redtenbacher; auch Carl Benz (1844–1929), der 1878 das erste Automobil mit Otto-Motor konstruierte, war ein Schüler von Redtenbacher.

Gustav Anton Zeuner

Auch Gustav Anton Zeuner (1828–1907), der wesentlichen Anteil an der Herausbildung der Technischen Thermodynamik hatte, empfand sich als Schüler von Redtenbacher. Als Student der Bergakademie in Freiberg bildete er sich in Mathematik und Naturwissenschaften eigenständig fort, vermochte schon im zweiten Studienjahr Nachhilfeunterricht in Mathematik zu erteilen. Der enge Kontakt zu Julius Weisbach hat sich sehr günstig auf Zeuner ausgewirkt.

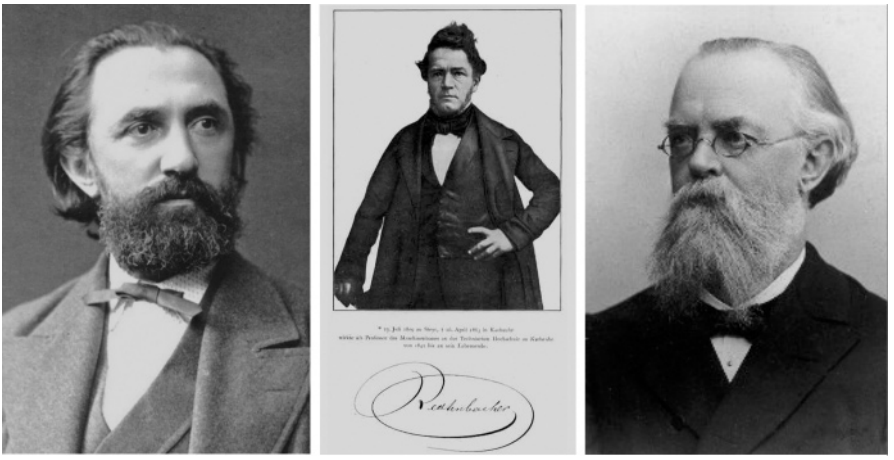


Abb. 10.0.14 Franz Reuleaux, Ferdinand Redtenbacher, Anton Zeuner

Übrigens hat Zeuner aktiv als Mitglied der Kommunalgarde an der bürgerlichen Revolution von 1848 teilgenommen.

Im Jahre 1851 machte er während einer Studienreise nach Paris die Bekanntschaft mit dem Mathematiker Jean-Victor Poncelet (1788–1867) und dem Physiker Victor Regnault (1810–1870).

Im Jahre 1855 nahm Zeuner eine Berufung als Professor für Mechanik und theoretische Maschinenlehre an das soeben gegründete Polytechnikum in Zürich an und widmete sich den Problemen der Wärmetheorie. Vorausgegangen waren die Entdeckung 1824 des reversiblen Kreisprozesses durch Sadi Carnot (1796–1832) in Frankreich, die Formulierung des Prinzips der Erhaltung der Energie durch Robert Julius Mayer (1814–1878) in Deutschland und die Entdeckung der Hauptsätze der Thermodynamik durch William Thomson (1824–1878) und Rudolf Julius Emmanuel Clausius (1822–1888).

Hier griff Zeuner ein, um diese theoretischen Erkenntnisse der Thermodynamik den Ingenieuren nahezubringen [Biogr. bed. Techniker 1987, S. 181]. In der von ihm gegründeten Zeitschrift *Civilingenieur* schrieb er 1859:

> *„Die Fragen, welche die Physiker beschäftigen, sind bis jetzt fast nur in mathematisch-physikalischen Zeitschriften behandelt worden. Es lag nun längst in meinem Plan, (...) diesen wichtigen Gegenstand im ‚Civilingenieur' ebenfalls zur Sprache zu bringen, dadurch zu Beobachtungen und Versuchen in der Praxis anzuregen (...)"*
> [Biogr. bed. Techniker 1987, S. 181].

Im Jahre 1860 erschien das Lehrbuch *Grundzüge der mechanischen Wärmelehre.*

In Zürich arbeitete Zeuner zusammen mit dem dort ebenfalls tätigen Clausius. Zu Zeuners Schülern darf man Carl von Linde (1841–1934, Kältetechnik) und Wilhelm Conrad Röntgen (1845–1923) rechnen.

Im Jahre 1871 kehrte Zeuner in seine sächsische Heimat zurück. Er übernahm sowohl das Direktorat der Bergakademie Freiberg als auch den Lehrstuhl seines verstorbenen Lehrers Weisbach. Bald darauf, 1873, erhielt er zusätzlich eine ehrenvolle Berufung als Professor für Mechanik und Theoretische Maschinenlehre an die inzwischen zum Polytechnikum aufgestiegene technische Lehranstalt in Dresden. Dort leistete er auch bedeutende Beiträge zur Versicherungsmathematik und zur mathematischen Statistik.

Unter Zeuners Leitung wurde 1878 in Dresden eine „Versammlung von Delegierten der Technischen Hochschulen des Deutschen Reiches“ durchgeführt. Sie mündete ein in die Aufnahme allgemeinbildender Fächer in den Lehrbetrieb.

Franz Reuleaux

Franz Reuleaux (1829–1905), der aus der Nähe von Aachen stammte, war Schüler von Redtenbacher; er studierte bei ihm in Karlsruhe Maschinenbaukunde, später an den Universitäten Bonn und Berlin Mathematik und Philosophie. Auf Anregung von Zeuner wurde Reuleaux 1856 an das Polytechnikum in Zürich berufen, 1867 dann an die spätere Technische Hochschule in Berlin; dort wurde er sogar 1890/91 deren Rektor. In den Jahren 1873 und 1876 (Philadelphia) war er als Preisrichter bei Weltausstellungen tätig. Als er die deutschen Produkte 1877 pauschal als *„billig und schlecht“* in seiner Eigenschaft als Reichskommissar bezeichnet hatte, löste dies zwar einen Sturm der Entrüstung in Deutschland aus, gab aber entscheidende Impulse für Qualitätssteigerungen.

Reuleaux gilt als Vater der Kinematik bei der Beschreibung von Bewegungsabläufen in Maschinen. Sein Hauptwerk *Der Constructeur* war ein Erfolg und galt einer Generation als Standardwerk der Ingenieurausbildung. Er setzte sich für die Entwicklung kleiner Kraftmaschinen als billige Betriebskraft für den Handwerker ein, da die gewaltige Dampfmaschine nur von Kapitalisten erworben werden könne. Den von Nicolaus Otto 1876 vorgestellten Viertaktmotor pries er als die größte Erfindung im Kraftmaschinenfach seit Watt. Der von Gottlieb Daimler und Wilhelm Maybach 1883 geschaffene Benzinmotor lieferte die Möglichkeit für die Entwicklung von Motorfahrzeugen, die mit den von Daimler und Carl Benz konstruierten Kraftwagen 1885 begann, durch den von Rudolf Diesel 1893 erfundenen Ölmotor dank seines hohen Wirkungsgrades weiteren Aufschwung erfuhr, bereits 1913 in Amerika zur Massenfabrikation führte und damit eine Revolution des Verkehrswesens auslöste.

Reuleaux aber erfuhr neben Bewunderung auch massive Anfeindungen und legte 1896 sein Lehramt nieder [Biogr. bed. Techniker 1987, S. 184ff.].



Abb. 10.0.15 Prospekt für den seit 1885 entwickelten dreirädrigen Motorwagen von Benz (1888)

Hier zeigt sich der im letzten Drittel des 19. Jahrhunderts scharfe Formen annehmende Streit über das Ausmaß der Mathematikausbildung an Technischen Hochschulen: Teilweise wurde sie dort als zu streng, zu theoretisch, zu wenig praxisverbunden abgelehnt, aber von den Mathematikern an Universitäten als minderwertig gescholten, sie sei nur auf Rezepte, unexakte Methoden, bloßes Handwerkzeug gerichtet.

Lassen wir als „Kronzeugen" Felix Klein in seinen *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert* zu Wort kommen:

> *„Das 19. Jahrhundert zeigt nun einen gänzlich anderen Charakter. Die angewandte Mathematik bleibt zwar nicht in ihrer Entwicklung stehen. Vielmehr erfaßt sie immer weitere, neue Gebiete, wofür nur die Erinnerung an die Erschaffung der gesamten ‚mathematischen Physik', d. h. unseres theoretischen Rüstzeuges in allen physikalischen Gebieten außer der Mechanik, zeugen möge. Daneben tritt nun aber die reine Mathematik mächtig hervor, und zwar gleich bedeutsam in*

zweifacher Weise: Ganz neue Gebiete werden geschaffen, so die Theorie der Funktionen komplexen Arguments und die projektive Geometrie; die überkommenen wissenschaftlichen Güter aber werden einer kritischen Durchsicht unterzogen, wie es dem wiedererwachten Gefühl für Strenge entsprach, das in dem an neuen Erfindungen überreichen 18. Jahrhundert etwas zurückgedrängt war.
Neben diesen neuen Gedankenrichtungen machen ferner die starken sozialen Verschiebungen, wie sie die französische Revolution und die anschließenden geschichtlichen Ereignisse mit sich brachten, ihren Einfluß auf das wissenschaftliche Leben geltend. Die Demokratisierung aller Anschauungen führt zu einer Verbreiterung der Kultur und innerhalb derselben zur strengen Spezialisierung der einzelnen Zweige der Wissenschaft. Der Forderung der Zeit entsprechend gewinnt die Lehrtätigkeit eine große Bedeutung. Das nicht mehr durch Standes- und Klassenunterschiede gehemmte Berufsleben schafft einen Andrang zu wissenschaftlichen Studien, wie er früher undenkbar gewesen wäre, nämlich unter dem gänzlich neuen Gesichtspunkte der Ausbildung zu dem nun so bedeutungsvoll gewordenen Lehrerberuf. Damit beginnt eine Verschiebung des Hauptgewichts wissenschaftlichen Lebens; seine Träger sind nun nicht mehr die Akademien, sondern die Hochschulen. In Frankreich nimmt diese Entwicklung nach ersten Anfängen in der École normale ihren Ausgang von Monge und der Begründung der École Polytechnique (1794), in Deutschland von Jacobi, der 1827 in Königsberg Ähnliches ins Leben rief.“
[Klein 1979, S. 3]



Abb. 10.0.16 Wilhelm v. Humboldt und Alexander v. Humboldt vor der Humboldt-Universität Berlin [Foto Alten]

Werfen wir noch einen weiteren Blick nach Preußen. Die verheerende Niederlage preußischer und verbündeter Truppen in der Doppelschlacht von Jena und Auerstedt (14. Oktober 1806) gegen Napoleon wies nachdrücklich auf notwendige Reformen im noch immer feudalen Preußen hin. Die vom Freiherrn von Stein (1757–1831) in den Jahren 1807/1808 eingeleiteten Reformen hoben noch im sog. Oktoberdekret 1807 die feudalen Bindungen der Bauern auf; Preußen öffnete langsam den Weg in die Zukunft. Stein wurde auf Befehl Napoleons aus preußischen Diensten entlassen und diente eine Zeit lang als Berater des russischen Zaren.

Auf dem Gebiet der höheren Bildung wurde an der 1809 gestifteten Berliner Universität im Jahre 1810 die Lehrtätigkeit unter der Devise der Einheit von Lehre und Forschung aufgenommen, einer nach Wilhelm von Humboldt (1767–1835) benannten Forderung, die sich als tragfähiges Konzept moderner akademischer Ausbildung erwies und den Professoren den Weg zur Verbindung mit der sich entfaltenden Industrie zeigte, u. a. durch die Entstehung spezieller Industrieforschung.

10.0.6 Charles Babbage: „Programmgesteuerte Rechner“

Mit Charles Babbage (1792–1871) begegnet uns einer der kühnsten Pioniere der „Computertechnik“. Zwar blieb es bei einer mechanischen Konstruktion, aber seine Maschinen zeigen schon die Struktur eines modernen Computers, einer programmgesteuerten Rechenmaschine: Ein- und Ausgabestellen, Arbeitsspeicher und Prozessor. Babbage stammt aus einem vermögenden Elternhaus, einer Bankiersfamilie. Er war ein vielseitig interessierter Mensch und hat sich ausgezeichnet als Kristallograph, als Ökonom und als Kryptologe. Als Mathematiker trug er, zusammen mit John F.W. Herschel (1792–1871) und George Peacock (1791–1858) in der „Analytical Society“ viel dazu bei, dass der Leibnizsche Infinitesimalkalkül den verstaubten Newtonschen Fluxionskalkül auch in England verdrängen konnte. Seine mathematisch-



Abb. 10.0.17 Gründung der Royal Astronomical Society (GB 1970)

naturwissenschaftliche Ausbildung hatte er am Trinity College in Cambridge erworben; eigene Beiträge zur Mathematik betreffen Probleme der Analysis.

Auch als Wissenschaftsorganisator in England hat Babbage eine herausragende Rolle gespielt. Er war aktiv beteiligt an der Gründung der „Royal Astronomical Society“ (1820), der „British Association for the Advancement of Science“ (1831) und der „Statistical Society of London“ (1834).

Er hatte bereits 1830 den Niedergang der Wissenschaften in England beklagt in *Reflections on the Decline of Science in England*. Seine ökonomische Studie *On the Economy of Machinery and Manufactures* (1832) galt eine Zeit lang als Standardwerk zur Beschreibung der Industriellen Revolution und wurde nachweislich auch von Karl Marx (1818–1883) bei der Arbeit am *„Kapital“* exzerpiert. Babbage wurde bereits 1816 Mitglied der Royal Society; 1827/28 erhielt er den Lucasischen Lehrstuhl an der Universität Cambridge, den einst Newton innegehabt hatte.

Den Niedergang der Wissenschaften brachte Babbage mit Mängeln im Ausbildungssystem Britanniens in Zusammenhang:

> *„Alle sähen, mit welchen Riesenschritten die Industrien in diesem Land sich vervollkommnet hätten, und er glaube, dass die Industrien in einem beständigen Fortschritt begriffen seien und dass es dem nationalen Charakter und Überlegenheitsgefühl entspreche, wenn das Land so seinen Vorsprung vor den anderen Nationen halte. Aufrechterhalten aber lasse sich dieser Zustand nur mit Hilfe einer weitreichenden und umfassenden Verbreitung von Wissen; und deshalb zähle er sich unter denen, die für die Bildung einträten, zu den energischsten Befürwortern.“*
> [Hyman 1987, S. 131]

Babbage fand Zugang zu Teilen des Adels, zu Regierungsmitgliedern, zu Vertretern der Industrie und zu Persönlichkeiten des kulturellen und wissenschaftlichen Lebens. Er war persönlich bekannt und teilweise befreundet mit F. W. Bessel, Th. Carlyle, Ch. Darwin, P.-S. Laplace, J. F. Herschel, J.-B. Biot, J. B. J. Fourier, A. v. Humboldt, M. Faraday, C. F. Gauß, H. Chr. Oerstedt und anderen. Als ein Teilstück seiner „Difference Engine“ schon funktionierte, wurde diese zum Mittelpunkt opulenter Abendgesellschaften.

Babbage war von einer ungeheuren Neugier nach allen Neuigkeiten technischer Art geradezu getrieben. Er besuchte in Schottland, England, Frankreich, Italien, Deutschland Produktionsstätten und wissenschaftliche Zentren, immer aktiv mit Vorschlägen und Anregungen. Erstaunlich sind die Vielfalt und Fülle seiner Aktivitäten, verbunden mit Reflexionen über die Folgen der Industriellen Revolution: der Bau komfortabler Reisekutschen, einer Magenpumpe, Bemerkungen über Gletscher und zum Postsystem, Taucherglocke, Unterwassernavigation, Lichtsignale der Leuchttürme, Teilnahme an der Diskussion über die günstigste Spurbreite der Eisenbahngleise, Lebensversicherung, Möglichkeit oder Unmöglichkeit von Wundern, Farbscheinwerfer, Gleisräumer für Lokomotiven, Erblichkeit der Adelstitel, „Sprache“ (Notation) für

technische Zeichnungen, Speicherung von Daten über Flora, Fauna und Bevölkerung, Gedanken zur Abstammungslehre, Untertunnelung der Themse, die Thermalquellen auf der Insel Ischia und anderes mehr.

Babbage unternahm mehrfach ausgedehnte Reisen auf dem europäischen Kontinent. In Frankreich sah er die Programmierung am Jacquard-Webstuhl und wurde mit der organisierten strapaziösen Tätigkeit von mehr als hundert Personen bekannt, die neue Logarithmentafeln im Dezimalsystem (!) von Hand berechneten. Diese Erfahrungen haben zweifellos zu seinem Bemühen um Rechenmaschinen beigetragen.

In Deutschland nahm Babbage an der Tagung der „Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte“ 1828 in Berlin teil und begegnete dort Alexander von Humboldt [Biermann 1972]. Der begeisterte Bericht von Babbage führte schließlich 1831 zur Gründung der „British Association . . . “. Babbage besuchte 1849 die Industrieausstellung in Paris, die erste Weltausstellung 1851 in London und die Weltausstellung 1862 in Paris. Über den Beginn seiner Arbeit an Rechenmaschinen berichtete Babbage 1834 in seiner Autobiographie:

> *„Die erste Idee der Möglichkeit, Tabellen maschinell auszurechnen, kam mir, soweit ich mich erinnere, im Jahre 1820 oder 1821. Sie verdankte ich folgender Situation: Die Astronomische Gesellschaft hatte für die Ausarbeitung bestimmter Tabellen eine Kommission ernannt, die aus Sir J. Herschel und mir bestand. Wir hatten uns auf die passenden Formeln geeinigt und sie zwei im Rechnen geübten Leuten übergeben, um die Berechnungen durchführen zu lassen. Wir trafen uns eines Abends, um die errechneten Tabellen zu vergleichen, und da wir viele Unstimmigkeiten fanden, äußerte ich gegenüber meinem Freund, daß ich wünschte, es gäbe ein dampfgetriebenes Rechnen, worauf er mit beipflichtete und meinte, so etwas liege durchaus im Bereich des Möglichen.“*
> [Hyman 1987, S. 80]

Babbage begann 1822 probeweise mit dem Bau einer kleinen Differenzenmaschine (Difference Engine). Bei einem Vortrag bei der Astronomischen Gesellschaft konnte er erste Ergebnisse vorweisen; in einer *„Notiz über die maschinelle Berechnung astronomischer und mathematischer Tafeln“* heißt es:

> *„Eben diese Differenzenmethode habe ich zum Grundprinzip meiner Maschinerie gemacht, wobei ich mich in der Maschine, die soeben fertiggestellt wurde, auf Differenzen zweiter Ordnung beschränkt habe. Mit dieser Maschine habe ich wiederholt Tafeln der Quadrat- und Dreieckszahlen erstellt, desgleichen eine Tabelle für die Formel $x^2 + x + 41$, deren Glieder so ungewöhnlich viele Primzahlen umfassen.“* [Dotzler 1996, S. 93]; über die Wirkungsweise der Differenzenmaschine vgl. [Wilkes 1977].

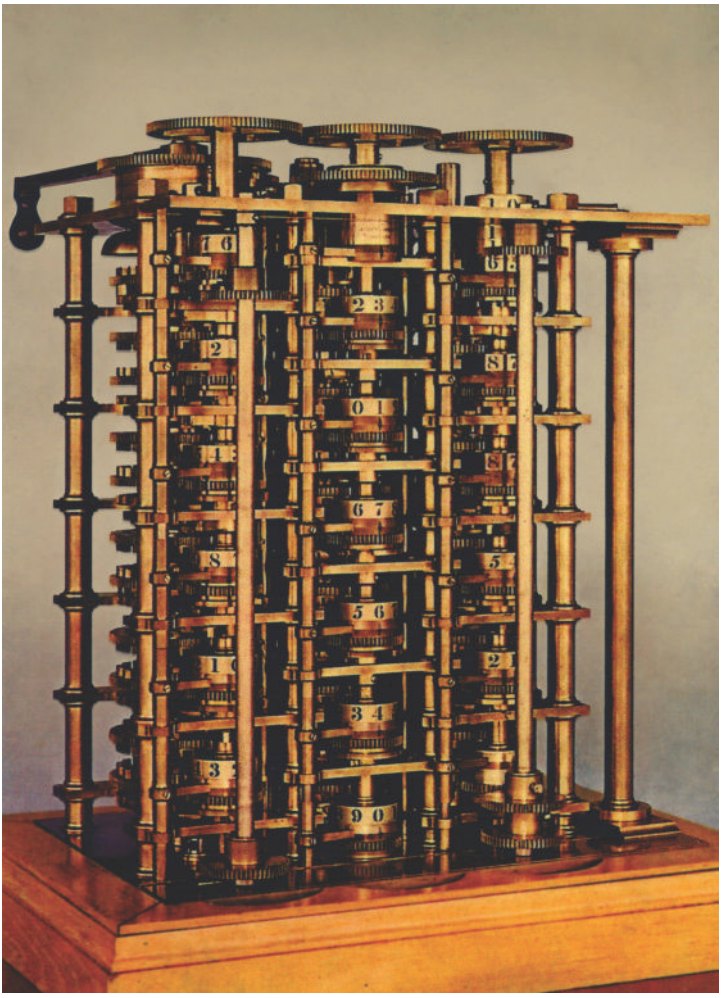


Abb. 10.0.18 Die Differenzmaschine von Babbage 1833
[Science Museum London / Science & Society Picture Library]

Als mathematischer Hintergrund dient der Sachverhalt, dass bei der Berechnung von Polynomen mittels der Differenzenmethode die letzte Differenz immer konstant bleibt.

Von seinem Sohn Benjamin Herschel Babbage stammt das folgende Beispiel, mit dem er 1872 die Wirkungsweise der „Difference Engine“ einer breiten Öffentlichkeit erläutern wollte, allerdings ohne spürbare positive Wirkung. Es handelt sich um die Berechnung von Kubikzahlen:

Tafel der Kubikzahlen

Natürliche Zahlen Ecke der Maschine oben links	Dritte Differenz unterstes Rad der mittleren Achse	Zweite Differenz untere Räder der linken Achse	Erste Differenz Räder der mittleren Achse	Tafelwerte Räder der rechten Achse
1	6	6	1	1
2	6	12	7	8
3	6	18	19	27
4	6	24	37	64
5	6	30	61	125
6	6	36	91	216
7	6	42	127	343
8	6	48	169	512
9	6	54	217	729
10			271	1000

Und er schreibt dazu:

> *„Nimmt man irgendeine Tafel, etwa die (...) Tafel der Kubikzahlen und subtrahiert nacheinander jeden der Tafelwerte vom folgenden, so erhält man eine neue Zahlenspalte, Differenzen erster Ordnung genannt.*
> *Wird die so gewonnene Spalte der Differenzen erster Ordnung erneut der gleichen Operation unterzogen, indem jede Zahl der Spalte jeweils von der Zahl unmittelbar darunter subtrahiert wird, kommt man zu Differenzen zweiter Ordnung, und indem man diesen Vorgang wiederholt, kann man Differenzen dritter Ordnung erhalten, und so fort.“*
> (Deutsch zitiert in [Dotzler 1996, S. 193])

Nach dem Erfolg von 1822 wandte sich Babbage im Brief vom 3. Juli 1822 an Sir Humphry Davy, zu diesem Zeitpunkt Präsident der Royal Society, mit der Bitte um finanzielle Unterstützung. Einige Auszüge:

> *„Die unerträgliche Mühe und ermüdende Monotonie bei fortgesetzter Wiederholung immer gleicher arithmetischer Rechnungen ließen zunächst den Wunsch in mir aufkeimen und in der Folge die Idee einer Maschine Gestalt annehmen, welche – mithilfe der Gravitation oder sonst einer Antriebskraft – ein Ersatz für eine der niedrigsten Operationen des menschlichen Geistes werden sollte. (...)*
> *Von einer Maschine zur Multiplikation einer beliebigen Zahl von Ziffern (m) mit einer anderen Zahl (n) besitze ich mehrere Skizzen, doch ist sie noch nicht bis zu dem Grad ausgereift, den ich gern erreichen würde, bevor sie ausgeführt werden soll.*

> *Des weiteren kenne ich bestimmte Prinzipien, nach denen, sofern dies wünschenswert erschiene, eine Tafel der Primzahlen mit einer Ausdehnung von 0 bis zehn Millionen erstellt werden könnte.“*
> [Dotzler 1996, S. 95f.]

Nach einiger Verzögerung – erst mussten die zuständigen Instanzen befragt werden – folgte am 1. Mai 1823 das positive Gutachten der Royal Society. Zu der günstigen Beurteilung hatte zweifellos beigetragen, dass die Maschine imstande sein sollte, die Ergebnisse auszudrucken. Der unmittelbare Zweck sollte darin bestehen, astronomische und Navigationstafeln zu berechnen. Allerdings hat Babbage die Schwierigkeiten bei weitem unterschätzt; sogar ein großer Teil der Instrumente für die feinmechanische Bearbeitung der Metallteile musste erst hergestellt werden. Babbage hatte 1823 mit der Konstruktion begonnen. Nach 10 Jahren waren bereits 17 000 Pfund Sterling von der Regierungsseite und 13 000 Pfund eigenes Vermögen (damals ungeheure Summen) ausgegeben, aber die Maschine war nur in Teilen vollendet. Die Regierung stellte 1842 weitere Zuwendungen ein.

Einige kleinere Differenzenmaschinen (für 4 Differenzen), die voll funktionierten, sind 1855 und später hergestellt worden. Eine von den Schweden Georg und Edward Scheutz gebaute Maschine funktionierte 1843 in Stockholm und erhielt sogar, verbessert, 1855 auf der Weltausstellung in Paris eine Goldmedaille. Babbage war auf dem richtigen Wege gewesen. Eine voll funktionsfähige Maschine steht jetzt im Science Museum in London.

Schon im Brief vom 3. Juli 1822 an Davy, den Präsidenten der Royal Society, war Babbage andeutungsweise über die „Difference Engine“ hinausgegangen – ein erster Hinweis auf die „Analytical Engine“. Dort heißt es:

> *„Eine andere Maschine, deren Pläne viel weiter fortgeschritten sind als einige der soeben erwähnten, dient zur Erstellung von Tafeln, die keine konstanten Differenzen aufweisen“.*
> [Dotzler 1996, S. 95]

Die angestrengten Arbeiten an der „Analytical Engine“ begannen schon 1834; die Arbeiten an der „Difference Engine“ hatte Babbage inzwischen aus eigenem Entschluss bereits eingestellt. Um die neue, weitaus kompliziertere Maschine zu bauen, erwarb Babbage ein Haus, ein großes Grundstück mit Werkstätten, eine Schmiede, eine Gießerei. Konstruktionszeichner und Mechaniker wurden eingestellt.

Es hat sich aus den Jahren hoch motivierter Arbeit an der „Analytical Engine“ eine stattliche Anzahl sorgfältig ausgeführter Konstruktionszeichnungen erhalten sowie insbesondere Zeichnungen, die das Zusammenwirken einer riesigen Anzahl von Einzelteilen verdeutlichen sollten. Die Maschine, die nie gebaut wurde, hätte das gewaltige Ausmaß von ungefähr 30 mal 10 Metern eingenommen und wäre mit Dampfkraft angetrieben worden. Babbage arbeitete mit Hingabe, obwohl ihn Zweifel an der Realisierung plagten. So schrieb er 1841 an A. v. Humboldt:

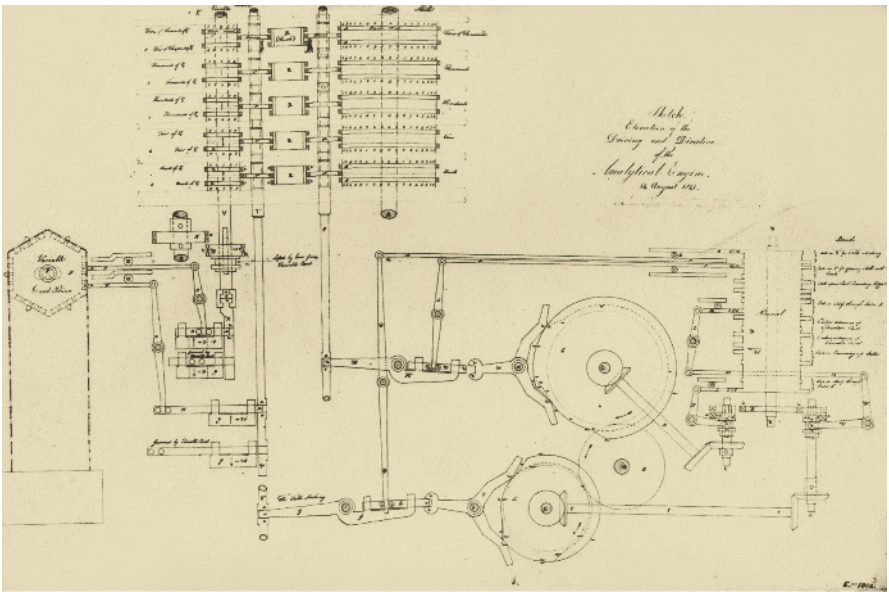


Abb. 10.0.19 Konstruktionszeichnung zur Analytical Engine von Babbage [The Origins of Digital Computers 1973, S. 10]

> *„Es besteht keine Aussicht, daß die Maschine zu meinen Lebzeiten jemals gebaut wird, und ich weiß nicht einmal, was mit den Konstruktionszeichnungen nach meinem Tod werden soll.“*
> [Hyman 1987, S. 282]

Um 1854, in einer schon 1852 niedergelegten Denkschrift konstatiert er:

> *„Auch denke ich, in einer Zeit, in der, Naturwissenschaft zu betreiben, von so erschöpfender und doch für ihren Fortschritt unverzichtbarer Kopf- und Handarbeit erschwert wird, die zu erleichtern gerade das Ziel der Analytical Engine ist, kann die Anwendung von Maschinen zur Hilfeleistung bei den kompliziertesten und abstrusesten Rechnungen nicht länger als der Aufmerksamkeit des Staates unwürdig erachtet werden. In der Tat gibt es keinen Grund, weshalb nicht geistige Arbeit ebenso wie körperliche mit Hilfe von Maschinen nicht rationalisiert werden sollte.“*
> [Dotzler 1996, S. 66]

Dabei hatte Babbage 1840 in Turin, einer Stadt mit langer mathematisch-naturwissenschaftlicher Tradition, auf einer Versammlung italienischer Naturforscher die Gelegenheit wahrgenommen, die „Analytical Engine“ vorzustellen und Anerkennung gefunden. Sie wurde in französischer Sprache von dem Mathematiker Luigi Federigo Menabrea (1809–1896) im *Grundriß der von Charles Babbage erfundenen Analytical Engine* beschrieben und daraus

von Ada Augusta Byron, späterer Countess of Lovelace (1815–1852), einer Tochter Lord Byrons, übersetzt und kommentiert. Sie erhielt, vielleicht ein wenig überschwänglich, den Ehrentitel „erste Programmiererin der Welt“.

Diese Maschine, die „Analytical Engine“, weist alle Merkmale eines programmgesteuerten Rechenautomaten auf: Sie ist – wie Babbage bereits 1837 in seiner Studie *Über die mathematische Leistungsfähigkeit meiner Maschine* erläutert hatte – gegliedert in ein Rechenwerk („the mill“) und einen Speicher („the store“), in dem auch von der Maschine erarbeitete Zwischenergebnisse gespeichert werden. Die Steuerung erfolgt durch Lochkarten, ähnlich denen, die beim Jacquard-Webstuhl verwendet werden. Angeschlossen ist ein Drucker. Die Maschine beruht auf dem Dezimalsystem; für binäre Zahlen gab es noch keine technische Realisierung.

Trotz vorzüglicher Skizzen und Konstruktionsunterlagen – Babbage hatte sogar eine eigene „Zeichnungssprache“ (notation) entwickelt – wurde die „Analytical Engine“ nicht gebaut. Ein ausführliches Gutachten der „British Assoziation for the Advancement of Science“ („Komiteebericht über die Ratsamkeit und die Kosten des Baus der Analytical Engine“) kommt 1879 abschließend zu einem negativen Urteil:

> *„Wir sind der Ansicht, daß die Mühen, die Herr Babbage erstens auf seine Difference Engine und zweitens auf seine Analytical Engine verwandte, ein Wunder an technischer Ingeniosität und technischem Vermögen sind. (. . .)*
> *Aber: Wir sind zu dem Schluß gekommen, daß es uns beim derzeitigen Konstruktionsstand der Maschine nicht möglich ist, irgendeine vernünftige Schätzung ihrer Kosten oder ihrer Festigkeit und Dauerhaftigkeit abzugeben. (. . .)*
> *In Abwägung aller dieser Überlegungen sind wir, nicht ohne Zögern, zu dem Schluß gekommen, daß wir der British Assoziation nicht raten können, irgendwelche Schritte – ob in Form einer Empfehlung oder sonst wie – zu unternehmen, um für den Bau der Analytical Engine von Herrn Babbage und den Druck von Tafelwerken mit ihrer Hilfe Sorge zu tragen.“*
> [Dotzler 1996, S. 394f.]

Im Jahre 1910 soll ein Sohn von Babbage einen Teil der Maschine nebst Drucker gebaut haben; das Ergebnis wird unterschiedlich beurteilt. Danach wurde es endgültig still um Babbage und seine Ideen und Leistungen. Erst 1946, als MARK I funktionierte, besann man sich auf Babbage, mit der Schlagzeile in *Nature*: „Babbages Dream comes True“.

> *„Babbage selbst hat sich als Pionier tituliert und – ceterum censeo des Grams, von den Zeitgenossen im eigenen Lande unverstanden geblieben zu sein – die rechte Bewertung an das Ausland und an die Zukunft delegiert.“*
> [Dotzler 1996, S. 19]

Bereits 1835 hatte sich Babbage, unter dem Eindruck seiner Schwierigkeiten mit der „Difference Engine“ gegenüber Nathaniel Bowditch (1773–1838), einem einflussreichen amerikanischen Mathematiker und Physiker an der Harvard Universität, bitter beklagt:

> *„Sie werden in der Lage sein, den Einfluß einer solchen Maschine auf den künftigen Fortgang der Wissenschaft zu ermessen. Ich dagegen lebe in einem Land, das unfähig ist, meine Maschine zu würdigen, und ich bin sehr unerquickt über die Behandlung, die ich erfuhr.“*
> (Deutsch zitiert nach [Dotzler 1996, S. 442])

Nach seinem Tode, am 18. Oktober 1871, folgte nur eine einzige Kutsche, die der alten Herzogin von Somerset, am 24. Oktober dem Trauerzug. Übrigens hatte ein Chirurg das Hirn von Babbage entnommen, aber dort keine Hinweise auf außergewöhnliche Begabungen und Leistungen entdecken können.

10.1 Anwendungen der Mathematik in den Natur- und Ingenieurwissenschaften

10.1.1 Mathematik in der Astronomie

Die Bewegungen der Planeten und des Mondes stellten seit altersher Herausforderungen an die Mathematik dar und hatten erheblichen Anteil an der Herausbildung der Methoden der Analysis, der Infinitesimalrechnung, von der Differentialrechnung bis zu den Differentialgleichungen. Und dort, in der Himmelsmechanik, feierte die Analysis zu Ende des 18. und Anfang des 19. Jahrhunderts Triumphe.

Der aus Minden/Westfalen stammende und ab 1810 als Professor in Königsberg tätige Astronom Friedrich Wilhelm Bessel bestimmte genaue Werte für die Präzession der Aequinoktien (Vorrücken der Tag- und Nacht-Gleichen), die Nutation (Schwankung) der Erdachse und die Schiefe der Ekliptik.

Pierre Simon Laplace publizierte 1796 seine *Exposition du système du monde* (Darstellung des Systems der Welt) und von 1799 bis 1827 in 5 Bänden mit Supplement seinen *Traité de mécanique céleste* (Mechanik des Himmels).

Carl Friedrich Gauß hatte 1801 durch die Berechnungen mit Hilfe seiner schon 1794 entwickelten „Methode der kleinsten Quadrate“ die Wiederauffindung des Planetoiden Ceres ermöglicht (siehe 10.4.1). Das theoretische Fundament der Bahnberechnungen erschien 1809 in Buchform unter dem Titel *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium* (Theorie der Bewegung der Himmelskörper, welche in Kegelschnitten die Sonne umlaufen). Zusammen mit der *Mécanique analytique* (1788) von Joseph Louis Lagrange bot die theoretische Mechanik nun ein geschlossenes Bild höchster Vollendung.

Pierre Simon Laplace und sein „Traité de mécanique céleste“

Laplace (1749–1827) stammt aus der Normandie. Bereits auf der Jesuitenschule, in die er mit 16 Jahren wechselte, trat seine mathematische Begabung zutage [Grattan-Guinness 2005], und er verzichtete auf die ursprünglich vorgesehene geistliche Laufbahn. Erste Publikationen folgten. Nach einigem Zögern vermittelte ihn d'Alembert an die Pariser Militärakademie; schließlich wurde er 1773 Mitglied der Pariser Akademie. Im Jahre 1794, nach der Revolution, wirkte er als Gründungsmitglied an der École Polytechnique und an herausragender Stelle im sog. „Längenbüro“ zur Vereinheitlichung der Maße und Gewichte. Während der Wirren der Revolution trat er nicht öffentlich in Erscheinung, wurde jedoch unter Napoleon Bonaparte (1769–1821) 1799 eine Zeit lang Innenminister mit bemerkenswertem Einfluss auf das französische Schulwesen. Laplace hat mehrfach seine politische Haltung – im Unterschied zu Monge – gewechselt: erst Republikaner, dann Anhänger des französischen Kaisers Napoleon und schließlich, nach der Rückkehr des Bourbonen-Königs Ludwig XVIII., Royalist. Ludwig ernannte ihn zum Marquis und Pair von Frankreich.

Neben Publikationen zur Physik hat Laplace Hervorragendes auch auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung geleistet (vgl. Kapitel 10.6).

Laplace hat seinem himmelsmechanischen Hauptwerk „*Traité...*“ eine Art naturphilosophische Einleitung, die „*Exposition...*“ vorausgeschickt, ganz ähnlich wie später in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Neben einer Beschreibung der Bewegungen der Himmelskörper, insbesondere der Planeten, enthält



Abb. 10.1.1 Pierre Simon Laplace

der „*Traité*...“ eine kosmologische Hypothese, die sog. „Nebularhypothese“ über die Entstehung des Planetensystems durch Verdichtung von Staubanhäufungen. Ähnliche Hypothesen hatte bereits Immanuel Kant im Jahre 1755 (Ausschleuderung von Massen aus einem rotierenden Zentralkörper) aufgestellt und sogar 1734 schon Emanuel Swedenborg (1688–1772).

Die *Mécanique céleste* krönte das Werk von Newton, Clairaut, d'Alembert, Euler, Lagrange und die Arbeit von Laplace über die Gestalt der Erde, das Dreikörperproblem, die Arbeiten über Störungstheorie, Ebbe und Flut, Saturnring, Eigenbewegung der Erde, Libration des Mondes, Jupitermonde, Kometentheorie und führte auf die Frage nach der Stabilität des Sonnensystems. Einen gedrängten Überblick über die *Mécanique céleste* findet man in [Grattan-Guinness 2005, S. 247ff.]. Die Bezeichnung „Laplacesche Gleichung“ für

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

erinnert daran, dass die Potentialtheorie einen Teil der *Mécanique céleste* bildet. Diese Gleichung war schon 1752 von Euler gefunden worden, als er einige der Hauptgleichungen der Hydrodynamik behandelte.

Über und rund um die fünfbändige *Mécanique céleste* gibt es eine Anzahl von Anekdoten und Legenden. So war Napoleon Bonaparte mit Laplace unzufrieden, weil in dessen „Himmelsmechanik“ Gott nicht erwähnt wurde. Daraufhin soll Laplace geantwortet haben: „Sire, je n'avois pas besoin de cette hypothèse.“ (Majestät, ich benötigte diese Hypothese nicht). Hingegen hatte Newton noch das Eingreifen Gottes zur Stabilität des Planetensystems für notwendig gehalten. Und Nathaniel Bowditch (1773–1838) in Boston (Neuengland), der Übersetzer der „Himmelsmechanik“ ins Englische, beklagte sich wie mancher andere Gelehrte auch über die bei Laplace häufig auftretende Wendung „wie man leicht sieht“. Gerade solche Passagen machen oft die größte Mühe, die von Laplace gegebenen Resultate zu verifizieren. William Rowan Hamilton (1805–1865) begann seine mathematische Laufbahn mit der Entdeckung eines Fehlers in der „Himmelsmechanik“. George Green (1793–1841) kam beim Studium von Laplace auf die Idee einer mathematischen Theorie der Elektrizität (vgl. [Struik 1972, S. 143]).

Himmelsmechanik war im 17., vor allem aber im 18. Jahrhundert das Hauptanwendungsgebiet der Analysis gewesen. Es gab Ausnahmen, beispielsweise die sog. Iatromathematik (von Iatros = Arzt) mit einem Hauptvertreter, dem Italiener Giovanni Alfonso Borelli (1608–1679), der über das traditionelle Anwendungsgebiet hinaus auch den Bewegungsapparat der Tiere und des Menschen mathematisch-physikalisch untersuchte, beispielsweise Unterarm/Oberarm als Hebelsystem beschrieb.

Mit dem Einsetzen der Industriellen Revolution ging die Analysis über das von Lagrange in seiner *Mécanique analytique* (1788) erreichte hohe theoretische Niveau hinaus.

10.1.2 Fortschritte in der Variationsrechnung

Die Variationsprinzipien hatten in der Periode der Aufklärung auch eine wichtige philosophische Funktion ausgeübt, indem sie einer teleologischen Naturerklärung einen mathematisch-rationalen „Beweis“ zu liefern schienen. Nun rückten sie im 19. Jahrhundert ebenfalls in den Vordergrund, da von dort aus der Weg zur deduktiven Behandlung der theoretischen Mechanik möglich wurde. In diesem Sinne gab es eine Fülle entsprechender Arbeiten, so bei Lagrange (Prinzip der kleinsten Wirkung), bei Gauß (Prinzip des kleinsten Zwanges), vor allem aber bei Hamilton und Jacobi, die die große Tragweite der Variationsprinzipien auch für andere Teile der Physik, z. B. Optik, herausstellten und ihnen zugleich eine elegante Form verliehen. Hamilton veröffentlichte 1834/35 seine *General Method in Dynamics* (Allgemeine Methode in der Dynamik); Optik und Dynamik erscheinen dort als Teile der Variationsrechnung. Carl Gustav Jacobi (1804–1851) hielt seine *Vorlesungen über Dynamik* in den Jahren 1842/43. Um diese Zeit wurde die kanonische Form der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichungen, die den Zusammenhang zwischen der Theorie der partiellen Differentialgleichungen, der Variationsrechnung und dem Fundament großer Teile der Physik vermittelte, allmählich zum Gemeingut der Mathematiker. Edward John Routh (1831–1907), William John Macquorn Rankine (1820–1872), Joseph John Thomson (1856–1940) und James Clerk Maxwell (1831–1879) in Großbritannien, Hermann von Helmholtz (1821–1894) und Heinrich Rudolf Hertz (1857–1894) in Deutschland, Michail Wassiljewitsch Ostrogradski (1801–1862) und Viktor Jakowlewitsch Bunjakowski (1804–1889) in Russland – um nur einige herausragende Vertreter zu nennen – dehnten den Anwendungsbereich der theoretischen Mechanik am Ende des 19. Jahrhunderts weiter aus, auch auf Elektrodynamik und Thermodynamik.

Allerdings bestand noch weit bis ins 20. Jahrhundert eine bedeutende Kluft zwischen dieser anspruchsvollen Mathematik, die nur relativ wenigen Spezialisten vertraut war, und dem mathematischen Niveau der Ingenieurausbildung. Nur in den seltensten Fällen wurde die mathematische Physik direkt produktionswirksam, und es bedurfte starker Anstrengungen, die Leistungsfähigkeit der höheren Analysis zu verdeutlichen und ihr einen festen Platz in der Ingenieurausbildung zu sichern – es kam zu einer Spaltung im Lager der Mathematikausübenden. Felix Klein, einer der Pioniere für die Anwendung der Mathematik in der Industrie und Begründer der Göttinger Aerodynamischen Versuchsanstalt, forderte noch 1919 für die Naturwissenschaften und die Mathematik:

> *„Nicht Natur erklären – was sie letzten Grundes nie kann – sondern Natur beherrschen ist ihre eigentliche Aufgabe. Es darf nie vergessen werden, daß es eine schaffende Technik gibt, welche die Ansätze der theoretischen Wissenschaft in die Tat umsetzt.“*
> [Klein 1979, S. 199]

10.1.3 Mathematische Physik

Im Berührungsfeld zwischen Mathematik und Physik entwickelte sich während des 19. Jahrhunderts die mathematische Physik als ein Gebiet relativer Selbständigkeit. Hier lagen – neben der rechnenden Astronomie – die Hauptanwendungsgebiete der Mathematik, indem die Kraft der höheren Mathematik in verschiedenen Gebieten der Physik erprobt werden konnte. Andererseits erhielt die Physik eine andere, nahezu deduktiv aufgebaute Struktur.

Einige einschlägige, herausragende Ereignisse werden diesen Aspekt der Mathematik des 19. Jahrhunderts verdeutlichen. A. L. Cauchy (1789–1857) war in hervorragender Weise (um 1835) am Ausbau einer mathematischen Theorie der Dispersion beteiligt, zu einer Zeit, als Thomas Young (1773–1829) und Augustin Jean Fresnel (1788–1827) die Wellentheorie des Lichtes zu neuem Leben erweckten. Claude Louis Marie Henry Navier (1785–1836) stellte die Differentialgleichungen der Elektrizitätslehre auf; hier und später bei Hamilton liegen praktische Ansatzpunkte der künftigen Vektor- und Tensorrechnung. In den Jahren 1877/1878 ließ John William Strutt, dritter Baron Rayleigh (1842–1919), eine moderne Theorie des Klanges erscheinen. 1892 erschien von Alexander Michailowitch Ljapunow (1857–1918) ein grundlegendes Werk zur Stabilitätstheorie *Das allgemeine Problem der Stabilität des Bewegungsproblems* (in Russisch). Ljapunows Leben endete tragisch. Als seine Frau an Tuberkulose starb, erschoss er sich drei Tage später.

Fouriers Studien zur Wärmeleitung waren vorangegangen. Mit der kleinen Schrift von Sadi Carnot „*i*. . .“ (Überlegungen zur treibenden Kraft des Feuers) von 1824 begann die mathematische Durchdringung der Wärmelehre und deren Wechselwirkung mit konstruktiven Verbesserungen an Dampfmaschinen, Lokomotiven, Hochseeschiffen und in Fabriken. Beispielweise schuf Benoit-Pierre-Émile Clapeyron (1799–1864), ein französischer Ingenieur, die

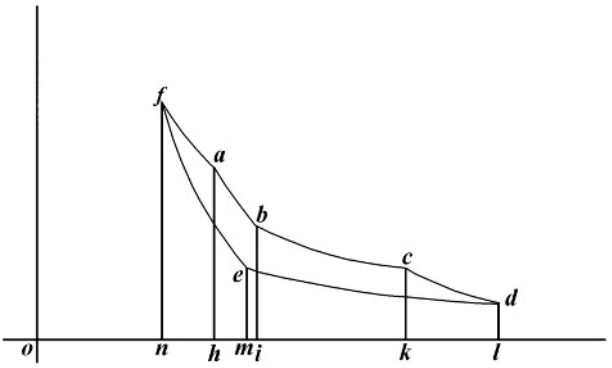


Abb. 10.1.2 Diagramm zum Carnotschen Kreisprozess von R. Clausius aus seiner Arbeit über eine veränderte Form des Zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie, gezeichnet nach [Poggendorffs Ann. Physik u. Chemie (93) 1854, S. 489]

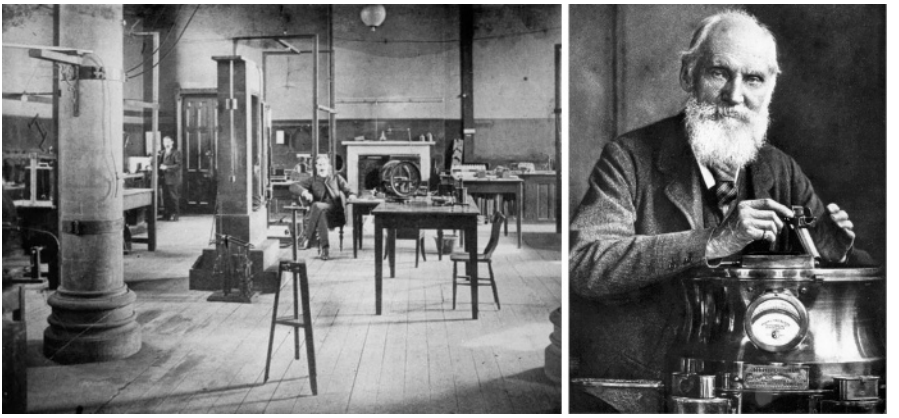


Abb. 10.1.3 Lord Kelvins Laboratorium um 1900; Kelvin am Kompass

heute fast selbstverständlich erscheinende Darstellung physikalischer Zusammenhänge in Form von Diagrammen. Die Arbeiten von Rudolf Julius Emanuel Clausius (1822–1888), Lord Kelvin (1824–1907) – er hatte bereits 1884 in Baltimore (USA) berühmt gewordene Vorlesungen über mathematische Physik gehalten –, Gustav Robert Kirchhoff (1824–1887), Max Planck (1858–1947) und anderen zur Mitte und zu Ende des 19. Jahrhunderts markieren wichtige Stationen auf dem Wege zur theoretischen Thermodynamik, die ihrerseits – indirekt – im 20. Jahrhundert noch zur Quantenphysik hinführen sollte.

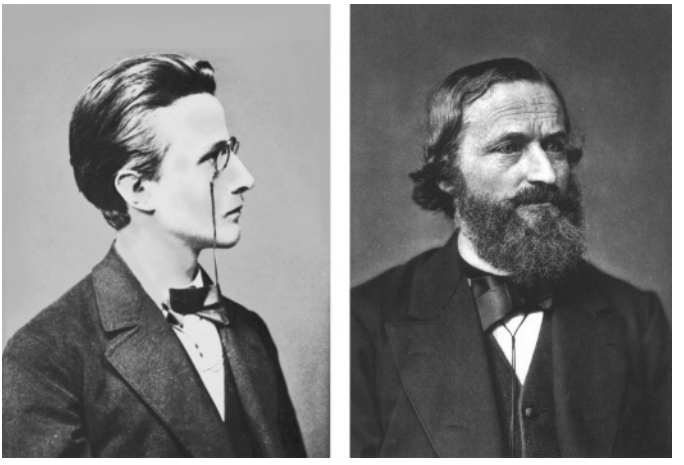


Abb. 10.1.4 Max Planck, Gustav Robert Kirchhoff

Überaus interessant verlief auch der Prozess der mathematischen Durchdringung von Elektrodynamik und Elektromagnetismus. Bei Charles Augustin Coulomb (1736–1806) und André Marie Ampère (1775–1836) finden sich infinitesimale Betrachtungen. Michael Faraday entwickelte seine Vorstellungen über die Wechselwirkung von fließenden Strömungen und Magneten längs Kraftlinien in einem „Feld“ noch ganz intuitiv und anschaulich, noch ohne den entsprechenden mathematischen Apparat. Siméon-Denis Poisson (1781–1840) hatte 1827 in den Abhandlungen der Pariser Akademie der Wissenschaften ein *Mémoire sur la théorie du magnétisme en mouvement* (Abhandlung über die Theorie des Magnetismus in Bewegung) veröffentlicht, 1855 ließ er eine *Théorie mathématique de la chaleur* (Mathematische Theorie der Wärme) folgen. Schon vorher, 1828, hatte George Green, der vom Müller den Weg zum Gelehrten hatte finden können, einen *Essay on the Mathematical Analysis of Electricity and Magnetism* (Abhandlung über die Mathematische Analysis von Elektrizität und Magnetismus) publiziert, der trotz seines bedeutenden Inhaltes, insbesondere zur Potentialtheorie, erst im Nachhinein volle Würdigung fand (vgl. [Grattan-Guinness 2005]). Der Weg zu einer einheitlichen Theorie des Elektromagnetismus, die auch die Lichttheorie einschloss, war schwierig. Hier ging Carl Gottfried Neumann (1832–1925), der lange in Leipzig gewirkt hat, voran (vgl. [Schlote 2004]); der endgültige Durchbruch gelang dem Schotten James Clerk Maxwell. Im Jahre 1873 erschien sein *A Treatise on Electricity and Magnetismus* (Eine Abhandlung über Elektrizität und Magnetismus), ein schwieriges, auf der Theorie partieller Differentialgleichungen beruhendes Werk zur Feldtheorie des Elektromagnetismus und des Lichtes als elektromagnetische Erscheinung. Ursprünglich hatte Maxwell mit einem mechanischen Modell experimentiert, ehe er elektromagnetische Schwingungen in Betracht zog (vgl. [Achard 2005]).

Nach den Experimenten von Heinrich Hertz im Jahre 1888/89 – auf Empfehlung von Helmholtz – war bewiesen, dass Licht eine elektromagnetische hochfrequente Schwingung ist und damit auch die Richtigkeit der Maxwellschen Gleichungen. Doch hielt Hertz eine technische Umsetzung (etwa Radiowellen) für kaum möglich (über die weitere Entwicklung bei Heaviside siehe [Yavetz 1995]). Hertz publizierte 1890 die Abhandlung *Über die Grundglei-*

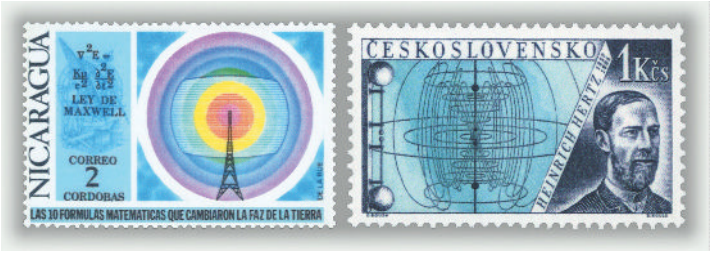


Abb. 10.1.5 James C. Maxwell (Nicaragua 1971), Heinrich Hertz (ČSSR 1959)



Abb. 10.1.6 Hermann v. Helmholtz, George Gabriel Stokes

chungen der Elektrodynamik für ruhende Körper. Das Problem der Elektrodynamik für bewegte Körper blieb zunächst noch offen, bis es Albert Einstein behandelte.

Bald danach begannen Jules Henri Poincaré (1854–1912) und Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928) die Grundlagen der klassischen Mechanik – noch unbeabsichtigt – zu erschüttern, als sie nach dem berühmten Experiment (1881) von Albert Abraham Michelson (1852–1931) über die Unabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit von der Erdbewegung die räumliche Gruppe der sog. Lorentztransformationen aufstellten. Mit der speziellen und der allgemeinen Relativitätstheorie Einsteins zu Anfang des 20. Jahrhunderts werden sich Mathematik und Physik auf einem wiederum höheren Niveau begegnen.

Ende des 18., Anfang des 19. Jahrhunderts dominierte die Mathematik in Frankreich, sowohl hinsichtlich der „abstrakten“ als auch der „angewandten Mathematik“ (vgl. [Grattan-Guinness 1990]). Im Wirkungsbereich der Pariser École Polytechnique waren französische Mathematiker während der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts auch führend an der Etablierung der technischen Mechanik als selbständiger technischer Wissenschaft beteiligt. Jean Victor Poncelet schrieb 1826 einen *Cours de mécanique appliquée aux machines* (Kurs der auf Maschinen angewandten Mechanik). Drei Jahre später erschien von Gaspard Gustav Coriolis (1792–1843) ebenfalls eine „Mechanik der Maschinen“. Diese und ähnliche Darstellungen zielten – ganz anders als noch die „Mechanik“ von Lagrange – auf die mathematische Beschreibung der Kraft- und Bewegungsverhältnisse an wirklichen Maschinen, also unter Berücksichtigung der Reibung. Pierre Charles François Dupin (1784–1873) in Belgien und vielfältig in Europa tätig, Hermann von Helmholtz in Deutschland mit der Wirbeltheorie, Green, Stokes und Lord Kelvin in Großbritannien, Ostrogradski, Bunjakowski und Pafnuti Lwowitsch Tschebyschew

(1821–1894) in Russland und noch viele andere führten diese Entwicklung auf mathematischer Seite weiter. Von Seiten der theoretisch orientierten Maschineningenieure seien aus Deutschland Jacob Ferdinand Redtenbacher, Franz Reuleaux, Johann Andreas Schubert und Julius Ludwig Weisbach hervorgehoben; teilweise in enger Partnerschaft mit den Mathematikern arbeiteten sie an Technischen Hochschulen (vgl. Abschnitt 10.0.4).

Der während des 19. Jahrhunderts erzielte Fortschritt, der allerdings vielfach erst im 20. Jahrhundert in der ingenieurwissenschaftlichen Praxis wirksam wurde, könnte für das Gebiet der technischen Mechanik so gekennzeichnet werden: Leonhard Euler (1707–1783) hatte schon bei der Behandlung von Schiffsbewegungen eine Grundidee formuliert, die zu dem führen sollte, was das 19. Jahrhundert als „Systemmechanik“ bezeichnen wird: Für jeden Körper, jede Maschine usw. sind Gleichungen für Schwerpunkte und Momente aufzustellen, dabei aber die Reaktionskräfte im Innern des Systems zu eliminieren. Auf dieser theoretischen Grundlage, ausgerüstet mit der analytischen Mechanik in der Form von Lagrange, Jacobi und Hamilton, wurden reale Systeme unter Einschluss der Reibung der mathematischen Behandlung unterworfen und so Konstruktionsunterlagen bereitgestellt und dem technischen Zeichnen unterworfen. Eine breite Palette praktischer Probleme wurde der Mathematik erschlossen: Kolbenmotoren, Pumpen, Regulatoren, Turbinen, Gebläse, elektrische Maschinen, Werkzeugmaschinen, Maschinengetriebe, Schwingräder, Kraftübertragung, Torsionsprobleme, Stabilität, Knickfestigkeit, Lagerreibung, Seil- und Kettenantrieb, Fahrzeugbau, Schienenführung, Bremsen, Lokomotivbau, Schiffsschwingungen, Schwingungsdämpfung, Förderanlagen und vieles, vieles andere mehr.

10.2 Entwicklungen in der Geometrie

10.2.1 Gaspard Monge: Darstellende Geometrie

Über die weit vorangeschrittene mathematische Durchdringung der Perspektive ist im vorangehenden Kapitel berichtet worden, (vgl. auch [Scriba/ Schreiber 2005, S. 275ff.]). Die endgültige Umformung in eine eigenständige mathematische Disziplin vollzog Gaspard Monge am Ausgang des 18. Jahrhunderts.

Monge war ein äußerst vielseitiger Mann, sowohl in seiner Tätigkeit im öffentlichen Leben als auch in den Wissenschaften, als Mathematiker, Physiker, Chemiker und beim Maschinenbau (vgl. [Taton 1951], [Sakarovitch 2005]).

Einige biographische Angaben zu Monge werden zugleich die innere Situation in Frankreich vor, während und nach der Revolution erhellen.

Monge wurde 1746 in Beaune in Frankreich als Kaufmannssohn geboren. Er erwies sich als hervorragender Schüler am Kolleg der Oratorianer (Katholische Weltpriestervereinigung) und später in Lyon. Dann, 1764 wieder in Beaune, kam ihm der Zufall zu Hilfe, als ein äußerst genauer Plan der Stadt



Abb. 10.2.1 Gaspard Monge

die Aufmerksamkeit eines Offiziers der Königlichen Pionierschule von Mézières erregte. Sie war bereits 1748 gegründet worden und besaß einen guten Ruf, sowohl hinsichtlich des theoretischen Niveaus als auch der praktischen Ausbildung.

Monge gelangte so 1765 nach Mézières, war aber, da nicht von adliger Herkunft, anfangs zu niederen Tätigkeiten verpflichtet: Anfertigung von Modellen in der sog. „Gipsschule“. Doch bald erwiesen sich seine Fähigkeiten beim Entwurf eines speziellen Fortifikationsproblems mit neuartigen mathematisch-graphischen Methoden. Er wurde dem dortigen Professor Charles Bossut (1730–1814) als Repetitor beigegeben und 1769 sein Nachfolger, ohne indes zum Professor ernannt zu werden; schließlich, ein Jahr später, wurde er Nachfolger von Abbé Nollet (1700–1770), zuständig für Physik-Experimente. 1784 verließ er Mézières, hoch angesehen als Mathematiker, Physiker und Handwerker, ausgezeichnet als akademischer Lehrer und übernahm das Training des Geniekorps (d. h. der Pioniere). Endlich war er zum Professor ernannt worden.

Parallel zu offiziellen Amtsfunktionen begann Monge mit wissenschaftlicher Forschung; hier entstanden auch die ersten Studien zur darstellenden Geometrie, abgeleitet aus Problemstellungen der Architektur und der Befestigung, aber auch Studien zur Variationsrechnung und zur Differentialgeometrie. Die ersten Veröffentlichungen erschienen 1770 und 1785, jedoch noch nicht zur darstellenden Geometrie.

Monge suchte den Kontakt zur Akademie, insbesondere zu d'Alembert und Condorcet. Inhaltlich folgten Studien zur Variationsrechnung und zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen, 1775 zur Differentialgeometrie. Andere Interessen kamen hinzu – Höhenmessungen in den Pyrenäen mit dem Barometer; er errichtete ein gut ausgerüstetes chemisch-physikalisches Laboratorium in Mézières.

Seine Ernennung als „adjoint géometrien" 1780 an der Pariser Akademie änderte seinen Lebensstil; er hatte seine Aufmerksamkeit sowohl Mézières als auch Paris zu widmen: Er hielt für Bossut dessen Vorlesung über Hydrodynamik, unterrichtete seine jungen talentierten Schüler S.F. Lacroix (1765–1843) und M.R. de Prony (1755–1839). Im Juni/Juli 1783 gelang ihm, kurz nach Lavoisier (1743–1794), die Synthese von Wasser aus Wasserstoff und Sauerstoff. Schließlich beteiligte er sich an der Wasserstoffgewinnung für Ballonflüge.

Im Dezember 1784 gab er seine Professur in Mézières auf, um sich ganz der Inspektion der Seekadetten widmen zu können; zugleich setzte er seine Publikationstätigkeit fort und beschäftigte sich 1786 u. a. mit Metallurgie. Vorher, 1785, hatte er gemeinsam mit Lavoisier experimentiert und bekannte sich als einer der ersten zu Lavoisiers neuer, moderner chemischer Theorie.

Nach der Französischen Revolution, insbesondere nach dem Sturz (1792) der Monarchie, trat Monge als überzeugter Republikaner in die Dienste der Revolution. Acht Monate wirkte er als Marineminister. Zusammen mit Vandermonde (1735–1796) und Berthollet (1748–1822) organisierte er die Her-



Abb. 10.2.2 „Die Bastille in den ersten Tagen ihrer Zerstörung" Ölgemälde von Hubert Robert [Musée Carnavalet, Paris]



Abb. 10.2.3 Verkündigung der Menschenrechte [Musée Carnavalet, Paris]

stellung von Stahl und Kanonen und die Gewinnung von Salpeter, nahm an der Kommission für Maße und Gewichte teil. Seine nachhaltigste Leistung vollbrachte Monge mit der Begründung und Organisation (1794) einer

zentralen Ausbildungsstätte für Zivil- und Militäringenieure, die 1795 den Namen „École Polytechnique“ erhielt. Dort wurden die ersten Vorlesungen zur darstellenden Geometrie gehalten.

Mit seinem Freund Berthollet war er 1796 in Italien, um im Gefolge der siegreichen französischen Armee kostbare Kunstgegenstände zu sammeln und nach Paris verbringen zu lassen. Nach kurzer Zeit als Direktor der École Polytechnique befolgte Monge 1798 einen Befehl Napoleons, sich der ägyptischen Expedition anzuschließen und leitete zusammen mit Fourier das „Ägyptische Institut“ in Kairo, das sich, trotz kolonialer Intentionen, große Verdienste um die wissenschaftliche Erschließung der ägyptischen Flora, Fauna und Kultur erwarb. Nach dem Desaster der Ägyptischen Expedition kehrte Monge zusammen mit Napoleon 1799 klammheimlich auf einem winzigen Schiff nach Frankreich zurück; die französische Flotte war ja bei Aboukir von den Engländern vernichtend dezimiert worden.

Monge arbeitete wiederum an Anwendungen der Analysis auf die Geometrie. Ohne sein Wissen wurde seine *Géométrie descriptive* auf Verlangen seiner Frau von seinem Freund und Schüler J. M. Hachette (1769–1834) im Jahre 1799 publiziert.

Auch der Staatsstreich Napoleons vermochte die engen Beziehungen von Monge zu Napoleon nicht endgültig zu zerstören, trotz unerschütterter republikanischer Gesinnung von Monge, während Napoleon eben diese Haltung bei den Schülern der École Polytechnique anprangerte, aber diese Kaderschmiede für Militäringenieure weiterhin förderte.

> Kaiser Napoleon zu Monge: *„Nun, Monge, Ihre Schüler machen fast sämtlich Rebellion gegen mich, sie erklären sich entschieden zu meinen Gegnern“.*
> Monge: *„Sire, es hat uns genug Mühe gekostet, sie zu Republikanern zu machen.“*
> [Arago 1854, S. 412]

Monge fuhr fort zu publizieren, unterstützt von Hachette, u. a. zur Anwendung der Algebra auf die Analysis (1805) und zur Anwendung der Analysis auf die Geometrie (1807/1809). Die „Darstellende Geometrie“ wurde ein großer Erfolg, sowohl im In- als auch im Ausland.

1809 musste Monge krankheitshalber seine Lehrtätigkeit an der École Polytechnique aufgeben. Nach Napoleons Niederlage 1812 in Russland erlitt Monge einen Schlaganfall, traf jedoch Napoleon mehrfach während der berühmten 100 Tage im Jahre 1815, sogar noch nach Waterloo. Nach der Wiedererrichtung der Monarchie wurde Monge 1816 aus der Akademie (Institute de France) ausgeschlossen. Nach bitteren zwei Jahren, auch mental ein gebrochener Mann, starb er am 28. Juli 1818 und wurde von einer großen Schar von Schülern und ehemaligen Schülern zu Grabe getragen.

Um 1766/70 hatte Monge noch in Mézierès durchgängig anwendbare konstruktive Verfahren zur Darstellung von Körpern in zwei Bildebenen gefunden (vgl. [Scriba/Schreiber 2005, S. 384ff.]).

Aus Gründen militärischer Geheimhaltung durfte Monge zu diesem Gegenstand nicht publizieren. Erst die französische Revolution befreite ihn von diesem Zwang. Öffentliche Vorlesungen über descriptive (darstellende) Geometrie fanden großen Zuspruch. 1799 erschien, wie gesagt, sein Lehrbuch *Géométrie descriptive*, mit dem – trotz einiger naturgemäßer Unzulänglichkeiten – die darstellende Geometrie den Rang einer selbständigen, zusammenhängenden mathematischen Disziplin erhalten konnte.

Als Ziel der darstellenden Geometrie bezeichnete Monge die Aufgabe, sowohl dreidimensionale Gebilde in einer Ebene darzustellen als auch die Eigenschaften und Maße der Figur aus deren Darstellung zu entnehmen. Als Methode wandte er im Wesentlichen die Orthogonalprojektion an; das Verfahren ist im Prinzip das heute noch verwendete.

Monge hatte 1795 eine programmartige Rede gehalten, als er mit Vorlesungen über darstellende Geometrie begann. Seine Lieblingsgedanken finden sich dann auch im Lehrbuch *Géométrie descriptive* bei passenden und unpassenden Gelegenheiten eingeschoben. Artikel 103 zum Beispiel handelt von der Nützlichkeit des Unterrichtes in darstellender Geometrie an den Mittelschulen. Dies zeigt u. a., wie stark Monge mit den Grundideen der Industriellen Revolution vertraut war.

> *„Dieser Unterricht würde (...) in sicherster Weise zu der fortschreitenden Hebung der nationalen Industrie beitragen.“*
> [Monge 1900, S. 143]

Die Rede von 1795 beweist deutlich, dass Monge das Wesen der aufkommenden maschinellen Produktion erkannt hatte. Allgemein seien die Ergebnisse der Naturforschung immer weiteren Kreisen bekannt zu machen, da gerade diese Kenntnisse für den Fortschritt von Wichtigkeit seien, insbesondere, um die nationale (französische) Industrie vom Ausland unabhängig zu machen. Kenntnis derjenigen Maschinen sei nötig, welche es gestatten, Naturkräfte zu benutzen und Handarbeit zu vermindern und die Arbeitsprodukte gleichförmiger und genauer zu machen. Zur Erreichung dieser Ziele sei aber die Kenntnis der darstellenden Geometrie, der *„für den Ingenieur unerläßlich notwendigen Sprache“*, von ganz besonderer Bedeutung:

> *„Die darstellende Geometrie muss einst einen der Hauptzweige der nationalen Erziehung bilden. (...)*
> *... wir halten es (...) für nützlich, an einigen Beispielen zu zeigen, wie die Analysis durch die darstellende Geometrie in der Lösung einer grossen Anzahl von Aufgaben (...) ersetzt werden kann.“*
> [Monge 1900, S. 122]

Monge hält, wie man liest, darstellende Geometrie für leichter lehrbar als Analysis und Algebra. *Géométrie descriptive* als Ei des Columbus für Bau- und Befestigungskunst, für den Bergwerksingenieur, für den Feldherrn, für die Geodäsie, für die Malerei! Darum sind in der *Géométrie descriptive* die

Anwendungsbeispiele der Theorie nicht künstlich aufgeprägt, sondern aus der Praxis herausgegriffen und als praktische Aufgaben formuliert, für Fortifikation, Verwendung eines Fesselballons, in der Technik bei der Konstruktion von Maschinenelementen, Gewölben, Farbton und Helligkeit von Bildern, usw.

Interessant ist auch ein Blick auf das Urteil von Gauß über Monge und die darstellende Geometrie:

> *„Dem vorliegenden Werke über diese Wissenschaft müssen wir insbesondere das Lob einer grossen Klarheit und Concision im Vortrage, eines wohlgeordneten Ueberganges vom Leichteren zum Schwereren und der Reichhaltigkeit an neuen Ansichten und gelungenen Ausführungen beilegen, und daher das Studium desselben als eine kräftige Geisteshaltung empfehlen, wodurch unstreitig zur Belebung und Erhaltung des echten, in der Mathematik der Neueren sonst manchmal vermissten geometrischen Geistes viel mit beigetragen werden kann.“*
> [Gauß 1873, S. 360])

Eine zusammenfassende Einschätzung gibt Sakarovitch:

> *“On the one hand, descriptive geometry is the culmination of a long and slow evolution of different graphical methods used for representing space. On the other hand, it is the fruit of the fertile imagination of a talented geometrician, heir to the age of enlightenment, committed revolutionary, and brilliant teacher. This ambiguous status between art and science undoubtedly confers to descriptive geometry both its charm and specifity. And if the first goal of Monge was a technical one, Michel Chasles was to consider that the ‘New geometry’ was born with the Monge lectures.”*
> [Sakarovitch 2005, S. 225]

Durch den Anstoß von Monge wurde darstellende Geometrie zum allgemein verwendbaren Mittel der Verständigung über Konstruktionen. Unter einer Art Transformation der darstellenden Geometrie in Technisches Zeichnen mittels gezielter und spezifischer Anwendungen durch Hachette, den Mitstreiter von Monge, setzte sich diese, weit verbreitet, an den entstehenden Polytechnischen Schulen als wesentlicher Unterrichtsgegenstand durch und ist bis auf die heutige Zeit ein wichtiger Bestandteil der Lehre an Technischen Hochschulen.

Hachette war ebenfalls engagierter Anhänger der französischen Revolution, war beteiligt an der Produktion von Waffen, unterrichtete darstellende Geometrie, auch in Mézière, war Herausgeber des *Journal de l’ École Polytechnique*, in dem die führenden französischen Gelehrten der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts publizierten: Poisson, Fresnel, Cauchy, Malus, Brianchon, Chasles und andere. Nach der Restauration der Monarchie wurde er aus der École Polytechnique und der Pariser Akademie hinausgeworfen. Erst unter der Regierung von Louis Philippe wurde das Unrecht 1831 wieder gutgemacht.

Nichtsdestoweniger fuhr Hachette fort, Lehrbücher für Studenten zu schreiben, teilweise aufbauend auf Monge und weiteren Ausgaben von dessen Werken, aber auch zu physikalischen Themen wie Optik, Elektrizität und Magnetismus. Auch als Übersetzer englischer Werke zur Naturphilosophie – z. B. von Thomas Young – trat Hachette hervor. Auch war er beteiligt an dem Komitee zur „Ermutigung der Industrie".

In dieser oder jener modifizierten und erweiterten Form trat die darstellende Geometrie ihren Siegeszug in den Polytechnischen Schulen und den Nachfolgeeinrichtungen, den Technischen Hochschulen an. Indessen erfüllte sich Monges Erwartung nicht, darstellende Geometrie werde ihre dominierende Rolle in der Geometrie behalten; andere geometrische Disziplinen traten neben der darstellenden Geometrie hervor (vgl. [Scriba/Schreiber 2005, S. 387f.]).

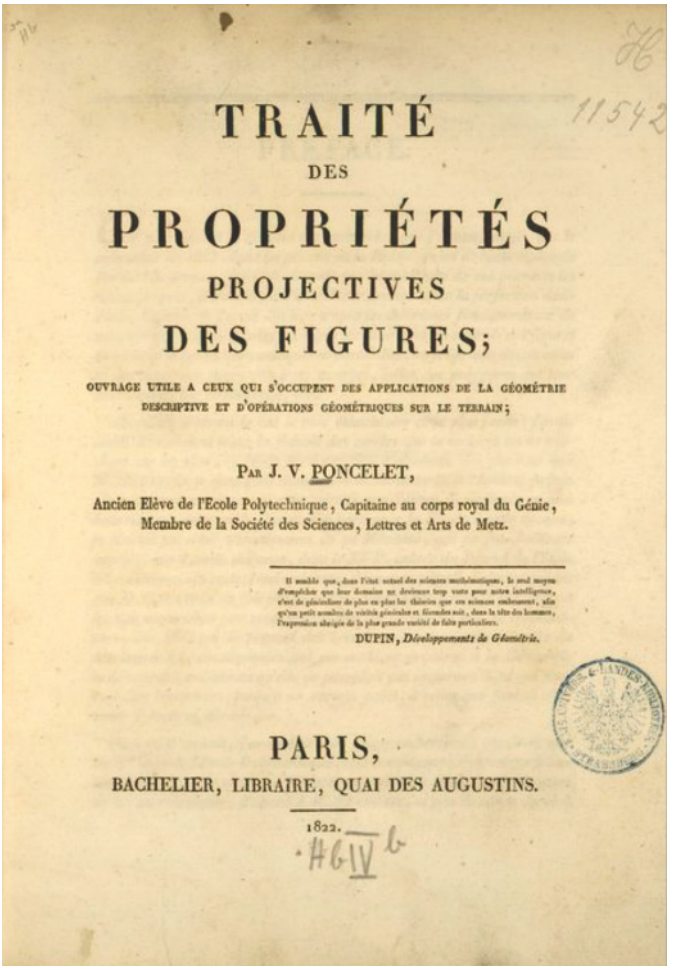
Interessant ist auch in diesem Zusammenhang eine Bemerkung von Chasles (1793–1880) aus dem Jahre 1837:

> *„In der alten Geometrie standen die Wahrheiten isoliert, neue waren schwierig zu erdenken oder zu erschaffen, und nicht jeder Geometer, der es wollte, konnte Erfinder werden. Gegenwärtig kann jeder irgendeine Wahrheit aufnehmen ... und sie den verschiedenen allgemeinen Principien unterwerfen, ... so daß man die Zahl der neuen Wahrheiten beinahe bis ins Unendliche vervielfältigen kann."*
> (Zitiert nach [Scriba/Schreiber 2005, S. 387])

10.2.2 Jean Victor Poncelet: Projektive Geometrie

Auch der 1788 in Metz geborene Jean Victor Poncelet (1788–1867) war von 1807 an drei Jahre Student an der Pariser Polytechnischen Schule und damit Schüler von Monge, Lacroix, Ampère, Poinsot und Hachette. Nach dem Eintritt 1810 in das militärische Ingenieurkorps und der Leitung von Befestigungsarbeiten geriet Poncelet 1812 während des Russland-Feldzuges Napoleons in russische Kriegsgefangenschaft. Zwei Jahre verbrachte er in Saratow. Obwohl – oder auch vielleicht gerade deswegen? – abgeschnitten von jeglicher wissenschaftlichen Literatur, entwarf er die Grundzüge der projektiven Geometrie, also einer Geometrie, die untersucht, welche Eigenschaften einer Figur bei Zentralprojektion erhalten bleiben, z. B. die Inzidenz [Gray 2005, S. 366ff.].

Die grundlegende Abhandlung erschien 1822 unter dem Titel *„Traité des propriétés projectives des figures:..."* (Abhandlung über die projektiven Eigenschaften der Figuren). Während seiner offiziellen Tätigkeiten nach 1814 im Ingenieurskorps in Metz, auch bei Fortifikationsaufgaben, arbeitete Poncelet weiter an seinen Ideen, trotz Kritik von Cauchy und anderen, die ihn schwer traf. Dennoch fuhr er fort mit Publikationen, die noch vor 1822 erschienen. Diese Kritikpunkte und die Auseinandersetzungen sind in [Scriba/Schreiber, 2005] analysiert.



TRAITÉ

DES

PROPRIÉTÉS

PROJECTIVES

DES FIGURES;

OUVRAGE UTILE A CEUX QUI S'OCCUPENT DES APPLICATIONS DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE ET D'OPÉRATIONS GÉOMÉTRIQUES SUR LE TERRAIN;

PAR J. V. PONCELET,

Ancien Elève de l'Ecole Polytechnique, Capitaine au corps royal du Génie, Membre de la Société des Sciences, Lettres et Arts de Metz.

Il semble que, dans l'état actuel des sciences mathématiques, le seul moyen d'empêcher que leur domaine ne devienne trop vaste pour notre intelligence, c'est de généraliser de plus en plus les théories que ces sciences embrassent, afin qu'un petit nombre de vérités générales et fécondes soit, dans la tête des hommes, l'expression abrégée de la plus grande variété de faits particuliers.

DUPIN, *Développements de Géométrie.*

PARIS,

BACHELIER, LIBRAIRE, QUAI DES AUGUSTINS.

1822.

Abb. 10.2.4 Titelblatt des *Traité des propriétés projectives des figures* (1822)

Natürlich hatte Poncelet an Monge und an den Monge-Schüler Lazare Carnot und dessen *De la corrélation des figures de géométrie* (Über die Beziehung zwischen geometrischen Figuren) von 1801 angeknüpft. Die Herausarbeitung der Unterschiede zwischen „metrischen“ und „projektiven“ Eigenschaften wurde zur Zentralaufgabe auch innerhalb der sich um Gergonnes Annalen gruppierenden französischen Schule. J.-D. Gergonne (1771–1859) selbst forderte 1826 in seiner Abhandlung *Considérations philosophiques sur les éléments de la science de l' étendue* (Philosophische Betrachtungen über die Elemente einer Wissenschaft vom Raume) den Aufbau einer „Geometrie der Lage“ (d. i. Geometrie ohne Metrik) ausschließlich mit lagegeometrischen Mitteln.

Die *Leçons de géométrie descriptive* von Monge beruhten auf der Verwendung von Orthogonalprojektionen. Poncelet dagegen stellte im *„Traité. . . “* den allgemeinen Begriff der Zentralprojektion an die Spitze und traf die grundsätzliche Unterscheidung zwischen „projektiven“ und „nichtprojektiven“ Eigenschaften von Figuren, d. h. solchen Eigenschaften, die bei Zentralprojektion stets erhalten bleiben bzw. im allgemeinen zerstört werden. Poncelet fügte der Geraden einen unendlich fernen Punkt hinzu, der Ebene eine unendlich ferne Gerade und konnte so den Satz von der Konstanz des Doppelverhältnisses von vier auf einer Geraden liegenden Punkten beweisen (vgl. ausführlich [Klein 1979, S. 77ff.]). Damit leitete Poncelet ein schon von Pappos in der Antike und 1817 von Ch.-L. Brianchon (1783–1864), ebenfalls Absolvent der École Polytechnique, gefundenes Ergebnis aus dem Dualitätsprinzip der projektiven Geometrie ab.

Anfang der 20er Jahre verlor Poncelet das Hauptinteresse an der Geometrie. Er wandte sich dem Maschinenwesen zu und wurde zu einem Hauptvertreter der Industriellen Revolution auf mathematisch-wissenschaftlicher Grundlage, sowohl in Publikationen als auch in Vorlesungen als Professor der angewandten Mechanik an der Artillerie/Ingenieurschule in Metz, aber auch in weiteren hohen staatlichen Funktionen. Zur Information besuchte Poncelet Fabriken in Frankreich, Belgien und Deutschland.

Seine Vorlesungen, lithographiert zunächst, wurden weit verbreitet. Schließlich erschienen mit Unterstützung von Freunden größere zusammenhängende Werke, u. a. *Traité de mécanique appliquée aux machines* (Abhandlung der angewandten Mechanik auf Maschinen, 2 Bände, Liège 1845).

Während der Weltausstellungen in London (1851) und Paris (1855) hat Poncelet verantwortliche Funktionen als Vorsitzender der Abteilung industrielle Maschinen ausgeübt.



Abb. 10.2.5 Jean-Victor Poncelet, August Ferdinand Möbius

10.2.3 August Ferdinand Möbius: Geometrische Verwandtschaften

Mit der Fragestellung nach invarianten Eigenschaften von Figuren unter der Zentralprojektion, welche Poncelet auch auf andere Projektionen anwandte, hatte er einen Leitgedanken der späteren Entwicklung vorausgenommen. Tritt nun noch die analytische Behandlung der geometrischen Projektionen hinzu, wird also aus der synthetischen die analytische Behandlung von Koordinatentransformationen bei der Suche nach Invarianten unter diesen Transformationen, so ist damit der gedankliche Ansatzpunkt für die Übernahme der in der Zahlentheorie wurzelnden Invariantentheorie zum Zwecke der Klassifizierung geometrischer Gebilde bestimmt.

In diesen problemgeschichtlichen Zusammenhang ist das in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts aufgenommene Studium „geometrischer Verwandtschaften“ einzuordnen sowie der Ausbau der Invariantentheorie. Hierhin gehören insbesondere August Ferdinand Möbius, Jakob Steiner, Julius Plücker, Michel Chasles, George Boole, Arthur Cayley, James Joseph Sylvester und Luigi Cremona.

Freilich hatten Poncelet und nach ihm Möbius, Steiner und andere zum Aufbau der projektiven Geometrie noch metrische Betrachtungen herangezogen; noch immer beruhte das für die Definition projektiver Koordinaten entscheidende Doppelverhältnis auf einer metrischen Begriffsbestimmung. Erst Christian von Staudt (1798–1867) schloss mit der *Geometrie der Lage* (1847) und den *Beiträgen zur Geometrie der Lage* (3 Hefte; 1856, 1857, 1860) diese Lücke, und schließlich beseitigte Felix Klein im Jahre 1871 die letzte Inkonsequenz, indem er die auf dem (metrikfreien) Doppelverhältnis beruhende Definition der projektiven Koordinaten metrikfrei angab. Damit war der aus puristischen, also methodischen Erwägungen entstandenen Forderung nach rein projektivem Aufbau der projektiven Geometrie Genüge getan.

Der wirkliche innere Zusammenhang zwischen metrischer und projektiver Geometrie wurde schließlich 1872 unter Verwendung gruppentheoretischer Denkweisen durch F. Klein im sog. Erlanger Programm aufgedeckt.

Der Ausbau der projektiven Geometrie in Breite und Tiefe hatte auch einen Ausbau des Koordinatenbegriffes über den der traditionellen kartesischen Koordinaten hinaus zur Folge (vgl. ausführlich [Wußing 1969, S. 18ff.]). Insgesamt wurde im Laufe des 19. Jahrhunderts der Koordinatenbegriff in dem Sinne allgemein gefasst, dass ein Koordinatensystem einer geometrischen Mannigfaltigkeit aus unabhängigen Parametern besteht, deren geometrische Bedeutung ganz unterschiedlich sein kann; „Raum“ wurde schließlich in einem weiteren Abstraktionsvorgang zur „Zahlenmannigfaltigkeit“, deren Dimension durch die Anzahl der unabhängigen Parameter bestimmt wird. Diese Auffassung wurde von dem Norweger Sophus Lie (1842–1899) gerade im Zusammenhang mit dem von ihm herausgearbeiteten Begriff der Transformationsgruppe in den 80er Jahren betont. Sogar schon seine Dissertation aus dem Jahre 1871 beginnt mit dem direkten Bezug auf die durch Julius Plücker

und seine *„Liniengeometrie“* ausgelöste Wandlung in der Denkhaltung über das Wesen der Geometrie.

> *„Die rasche Entwicklung der Geometrie in unserm Jahrhundert steht, wie bekannt, in einem intimen Abhängigkeitsverhältnisse zu philosophischen Betrachtungen über das Wesen der Cartesischen Geometrie – Betrachtungen, die in ihrer allgemeinsten Form von Plücker in seinen ältesten Arbeiten ausgesprochen worden sind.*
> *Für den, der in den Geist der Plückerschen Werke eingedrungen ist, liegt nichts wesentlich Neues in der Idee, daß man als Element für die Geometrie des Raumes eine beliebige Kurve benutzen kann, die von drei Parametern abhängt.“*
> [Lie 1934, S. 105]

Die neue Auffassung von „Koordinate“ zog notwendigerweise eine Fülle von Untersuchungen nach sich über die Bedingungen, die an eine Mannigfaltigkeit zu stellen sind, wenn sie den Charakter eines Raumes erhalten soll. Hier liegen wichtige Ansatzpunkte für die Entwicklung der Topologie gegen Ende des 19. Jahrhunderts.

Erkenntnistheoretisch gesehen war mit der neuen Auffassung von Raum als Mannigfaltigkeit das Studium des objektiv existierenden, des physikalischen Raumes abgetrennt vom Studium „mathematischer Räume“. In dieselbe Richtung führten die Entdeckung der nicht-euklidischen Geometrie und das Wirken von Bernhard Riemann (1826–1866).

Aus den mannigfachen, sich verselbständigenden Strömungen in der Geometrie des 19. Jahrhunderts sei die Theorie der geometrischen Verwandtschaften von A.F. Möbius herausgegriffen. Für Plücker und die Liniengeometrie, auch für von Staudt sei auf Spezialliteratur verwiesen. Es entstanden ferner die Theorien der Kreisverwandtschaft, der Kugelverwandtschaft, der Transformation mittels reziproker Radien (vgl. [Wußing 1969, S. 30ff.]).

Zunächst kann festgehalten werden: Aus dem Studium der Verwandtschaften geometrischer Figuren wird das Studium der Verwandtschaften (Gleichheit, Ähnlichkeit, Affinität, Kollineation) selbst. Am Anfang dieser zunächst noch tastenden und von den anderen Entwicklungen scheinbar kaum berührten Entwicklung stand August Ferdinand Möbius.

Möbius wurde in Schulpforta geboren, wo sein Vater an der dortigen Fürstenschule, einer Ausbildungsstätte der sächsischen Führungsschicht, Tanzlehrer war. Das Leben von Möbius verlief äußerlich unspektakulär: Studium in Leipzig, Studienreisen nach Göttingen und Halle. Auf Empfehlung von Gauß wurde Möbius im Jahre 1816 Professor der Astronomie an der Leipziger Universität, wo seine Möglichkeiten zur astronomischen Forschung wegen kümmerlicher Ausstattung mit astronomischen Geräten beschränkt waren, bis er endlich 1830 einen Refraktor des berühmten Instrumentenmachers Joseph von Fraunhofer (1787–1826) erhielt. Seine Wirkungsstätte war die Pleißenburg-Sternwarte.



Abb. 10.2.6 Auf dem Turm der Pleißenburg wurde 1787 die Sternwarte von Leipzig gegründet. Der Stich zeigt die Pleißenburg mit der davor erbauten Kaserne nach 1839

So hatte sich Möbius – neben populären Schriften zur Astronomie und Mechanik – der Mathematik zugewandt und sich große Verdienste um die Ausbildung der sächsischen Gymnasiallehrer erworben.

Berühmt wurde Möbius mit der Entdeckung einer einseitigen Fläche, des sog. Möbiusschen Bandes (die Legende will wissen, Möbius' Frau habe ein Strumpfband versehentlich falsch zusammengenäht).

Das Hauptwerk von Möbius erschien 1827: *Der barycentrische Calcul, ein Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie dargestellt und insbesondere auf die Bildung neuer Classen von Aufgaben und die Entwickelung mehrerer Eigenschaften der Kegelschnitte angewendet.*

Die Abhandlung beruht auf der Verwendung „barycentrischer Koordinaten". Sie beziehen sich auf den Schwerpunkt (Baryzentrum) ebener oder räumlicher Gebilde. Es handelt sich um einen Spezialfall homogener Koordinaten.

Im Nachhinein ist die von Möbius versuchte Klassifikation als eine gedankliche Vorwegnahme des Erlanger Programms der gruppentheoretischen Klassifikation erkannt und von Klein ausdrücklich gewürdigt worden.

Möbius klassifizierte die „geometrischen Verwandtschaften". Waren bisher nur Gleichheit (d. h. Kongruenz) und Ähnlichkeit untersucht worden, so nahm Möbius die von Euler entdeckte, aber nicht näher studierte Beziehung der Affinität und schließlich noch die der Kollineation in sein Programm auf

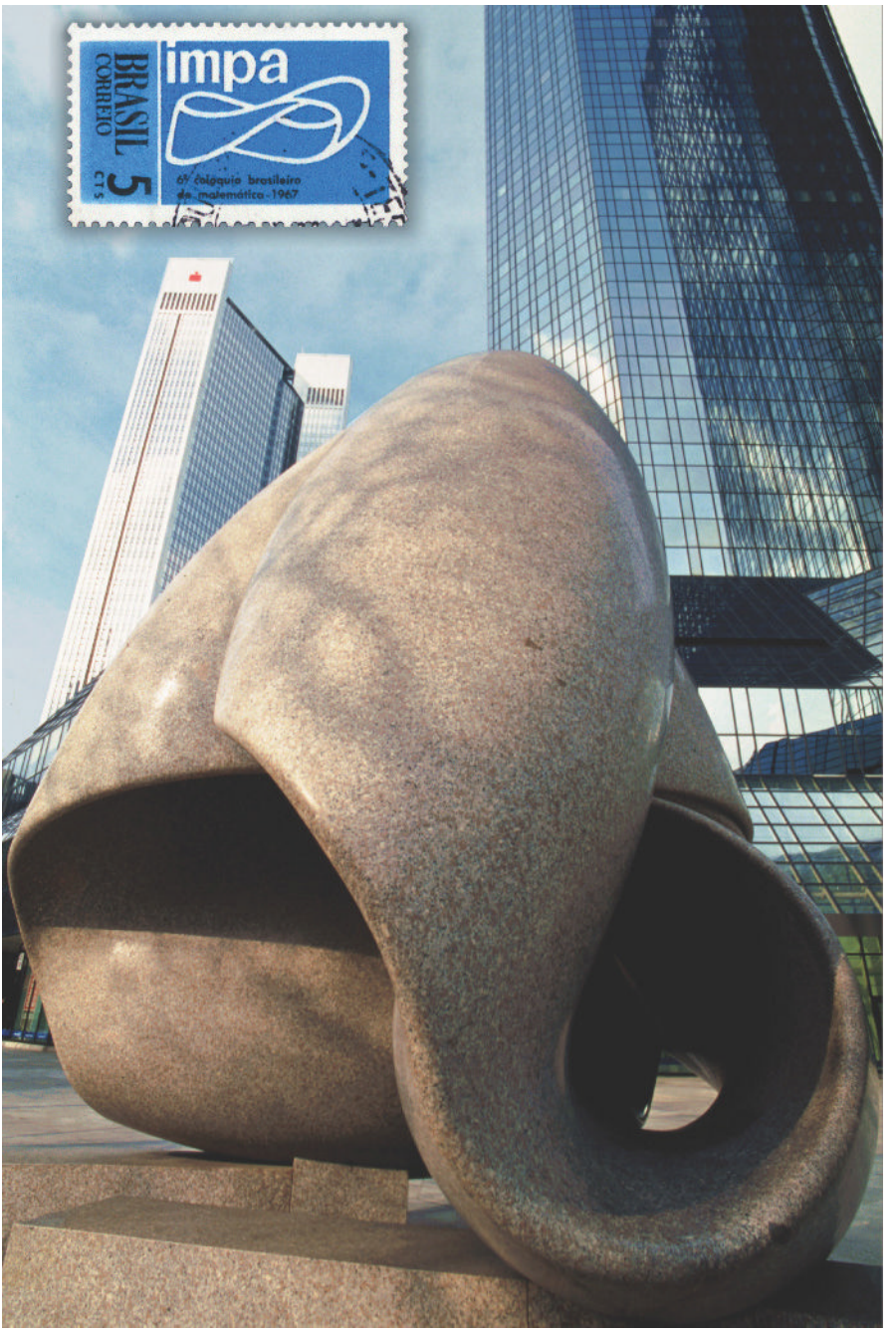


Abb. 10.2.7 Möbiusband als Skulptur vor der Deutschen Bank in Frankfurt [Foto Wesemüller-Kock], eingefügt Möbiusband auf Briefmarke (Brasilien 1973)

und stellte ihre gegenseitigen Verhältnisse dar: Gleichheit und Ähnlichkeit, so sagt er, unterscheiden sich nicht wesentlich – diese Feststellung entspricht den Eigenschaften der Hauptgruppe des Erlanger Programms. Allgemeiner sind die Affinitäten, die speziell die Gleichheiten und Ähnlichkeiten in sich enthalten – dies entspricht dem gegenseitigen Verhältnis von affiner Gruppe zur äquiformen (oder Haupt-) Gruppe. Noch allgemeiner schließlich sind die Verwandtschaften der Kollineation – auch hier wieder nimmt Möbius die Aussage vorweg, dass die affine Geometrie in der projektiven Geometrie enthalten ist. Möbius im Originaltext:

> *„Ich wurde (. . .) bewogen, noch mehrere dergleichen Beziehungen zwischen Figuren auszumitteln, und somit entstand der zweite Abschnitt meines Buchs, welcher von den geometrischen Verwandtschaften handelt, einer Lehre, welche in dem hier gebrauchten Sinne die Grundlage der ganzen Geometrie in sich fasst, die aber auch eine der schwierigsten sein möchte, wenn sie in völliger Allgemeinheit und erschöpfend vorgetragen werden soll.“* [Möbius 1885, S. 9]

Schon im fortgeschrittenen Alter stehend, ging Möbius 1858 zur Betrachtung sog. „Elementarverwandtschaften“ über, die noch allgemeiner als Kollineationen sind und welche wir heute zum Gegenstandsbereich etwa der Topologie rechnen würden.

> *„Zwei geometrische Figuren sollen einander elementar verwandt heissen, wenn jedem nach allen Dimensionen unendlich kleinen Elemente der einen Figur ein dergleichen Element in der anderen dergestalt entspricht, dass von je zwei an einander grenzenden Elementen der einen Figur die zwei ihnen entsprechenden Elemente der anderen ebenfalls zusammenstossen; oder, was dasselbe ausdrückt: wenn je einem Puncte der einen Figur ein Punct der anderen also entspricht, dass von je zwei einander unendlich nahen Puncten der einen auch die ihnen entsprechenden der anderen einander unendlich nahe sind. Einer Linie kann hiernach nur eine Linie, eine Fläche nur eine Fläche, und einem körperlichen Raume nur ein körperlicher Raum elementar verwandt sein.“*
> [Möbius 1886, S. 435]

10.2.4 Gauß–Bolyai–Lobatschewski: Nichteuklidische Geometrie

Im 18. Jahrhundert hatte es vielfältige Anstrengungen gegeben, den „Makel des Euklid“ zu beseitigen. An der Gültigkeit der Euklidischen Geometrie zweifelte wohl niemand ernsthaft – es war die Frage nach der Stellung des Parallelenaxioms: Ist es unabhängig von den übrigen Axiomen oder von ihnen abhängig und damit beweisbar? [Bonola 1908]. Dazu kam die Erkenntnistheorie Kants, nach der der dreidimensionale euklidische Raum schlechterdings denknotwendig sei (vgl. ausführlich [Wußing 1969, Anmerkung 6, S. 199f.]).

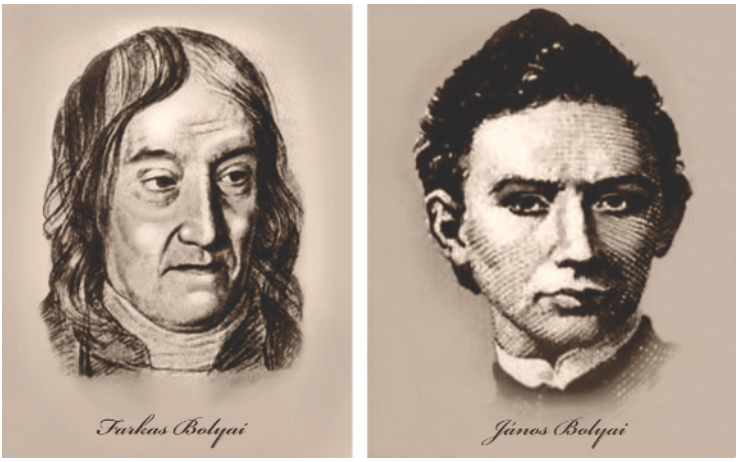


Abb. 10.2.8 Farkas (Wolfgang) Bolyai, János (Johann) Bolyai

Man weiß heute, dass Gauß – biographische Notizen folgen an anderer Stelle – bereits 1792, also schon während seiner Studienzeit in Braunschweig, ernsthaft über die Grundlagen der Geometrie nachgedacht hat. Die Existenz einer Parallelen schien sozusagen durch Erfahrung und Augenschein gesichert, da die Unterscheidung zwischen Geometrie und „Raumwissenschaft" vom physikalischen Raum noch nicht getroffen war.

Gauß dürfte diese fundamentale Unterscheidung als einer der ersten bereits 1792 erkannt haben. Gesteht man dies zu, dann kann man – wie Gauß – aus dem jahrtausendelangen Scheitern der Beweisversuche zu der Meinung gelangen, dass das Parallelenpostulat überhaupt nicht beweisbar ist. Und dann liegt der Schritt nahe, nach der Beschaffenheit von Geometrien zu fragen, die sich ergeben, wenn man das Parallelenpostulat auswechselt. Diese gedanklich kühnen Schritte tat Gauß zwischen 1795 und 1802. Man kann unterstellen, dass Gauß angeregt wurde von dem gestiegenen Allgemeininteresse an Geometrie, das sich unter anderem an der Pariser polytechnischen Schule manifestiert hatte. Sein Lehrer Kästner verfügte über eine ansehnliche Sammlung von Publikationen zu den Grundlagen der Geometrie.

Bereits 1799 äußerte sich Gauß gegenüber seinem ungarischen Studienfreund Farkas (Wolfgang) Bolyai (1775–1856) in folgendem Sinne (Bolyai hatte während des gemeinsamen Studiums in Göttingen ebenfalls mit dem Parallenlenpostulat gerungen):

> *„Zwar bin ich auf manches gekommen, was den meisten schon für einen Beweis gelten würde, aber was in meinen Augen so gut wie NICHTS beweist, z. B. wenn man beweisen könnte, dass ein geradliniges Dreieck möglich sei, dessen Inhalt grösser wäre als eine jede gegebene Fläche, so bin ich im Stande die ganze Geometrie völlig*

> *strenge zu beweisen. Die meisten würden nun wohl jenes als ein Axiom gelten lassen; ich nicht; es wäre ja wohl möglich, dass, so entfernt man auch die drei Eckpunkte des Dreiecks im Raume von einander annähme, doch der Inhalt immer unter (infra) einer gegebenen Grenze wäre. Dergleichen Sätze habe ich mehrere, aber in keinem finde ich etwas Befriedigendes.“*
> [Gauß 1900, S. 159]

Bolyai hat seinerseits einen erneuten Beweisversuch für das Parallelenpostulat unternommen und 1804 an Gauß gesandt. Gauß aber konnte nicht umhin festzustellen, dass auch hierin wieder „Klippen“ seien, an denen sein Freund gescheitert sei.

Es fiel selbst Gauß schwer, sich von einer Wahrheit zu überzeugen, die gegen feste Denkgewohnheiten und jahrtausendealte Traditionen verstieß. Sein Freund Schumacher, der sich im Winter 1808/09 in Göttingen aufhielt, berichtet:

> *„Gauss hat die Theorie der Parallellinien darauf zurückgebracht, dass wenn die angenommene Theorie nicht wahr wäre, es eine constante a priori der Länge nach gegebene Linie geben müsste, welches absurd ist. Doch hält er selbst diese Arbeit noch nicht für hinreichend.“*
> ([Schumacher 1808] in: [Gauß 1900, S. 165])

Noch 1813 urteilt Gauß weiterhin:

> *„In der Theorie der Parallellinien sind wir jetzt noch nicht weiter als Euklid war. Dieses ist die partie honteuse* (der beschämende Teil, Wg) *der Mathematik, die früh oder spät eine ganz andere Gestalt bekommen muss.“*
> [Gauß 1900, S. 166]

Nach langem gedanklichen Ringen gelangte Gauß 1815/16 zu der Einsicht, dass das Parallelenpostulat nicht beweisbar ist, dass auch nicht-euklidische Geometrien richtig sind, also Geometrien, die mit einem Postulat aufgebaut werden, das eine Negation des Parallelenpostulates impliziert. Über die wirkliche Struktur des Raumes müssen Erfahrung und Experimente und damit Physik und Astronomie entscheiden. Im Jahre 1817 klingt dies in einem Brief an den Astronomen Olbers so:

> *„Ich komme immer mehr zu der Überzeugung, dass die Nothwendigkeit unserer Geometrie nicht bewiesen werden kann, wenigstens nicht vom* ***menschlichen*** *Verstande noch für den menschlichen Verstand. Vielleicht kommen wir in einem andern Leben zu andern Einsichten in das Wesen des Raums, die uns jetzt unerreichbar sind. Bis dahin müsste man die Geometrie nicht mit der Arithmetik, die rein a priori steht, sondern etwa mit der Mechanik in gleichen Rang setzen. . . “*
> [Gauß 1900, S. 177]

Auch die Abgrenzung gegen Kant wird deutlich vorgenommen, allerdings lediglich brieflich:

> *„Gerade in der Unmöglichkeit zwischen Σ* (Euklidischer Geometrie, Wg) *und S* (nicht-euklidischer Geometrie, Wg) *a priori zu entscheiden, liegt der klarste Beweis, dass Kant Unrecht hatte zu behaupten, der Raum sei n u r F o r m unserer Anschauung.“*
> [Gauß 1900, S. 224]

Im Frühjahr 1816 wies Gauß in einer Rezension zwei angebliche Beweise des Parallelenpostulats mit ziemlich scharfen Worten zurück. Er sprach von *„dem eitlen Bemühen“,* die Lücke, die man nicht ausfüllen kann, durch ein unhaltbares Gewebe von Scheinbeweisen zu verbergen.

Gauß stieß mit seiner Ansicht, die trotz aller polemischen Worte doch nur in vorsichtiger Form auf die Möglichkeit der Unbeweisbarkeit des Parallelenpostulates hinwies, auf eine scharfe ablehnende Reaktion, zumal bei der damaligen Vorherrschaft der Philosophie Kants. Kein Wunder, dass Gauß empfindlich und vorsichtig blieb wie stets – *„Es ist mit Kot darnach geworfen worden“,* so beklagte er sich später, 1827, bei Schumacher. Er beschloss, über nicht-euklidische Geometrie nicht zu publizieren. So gibt es keine zusammenhängende Abhandlung von Gauß zu diesem Thema. Doch geht aus vielfältigen brieflichen Mitteilungen an vertraute Freunde – Friedrich Wilhelm Bessel, Heinrich Christian Schumacher (1780–1850), Christian Ludwig Gerling (1788–1864) – hervor, dass er tiefe Einsichten in die Sachverhalte bei der nicht-euklidischen Geometrie besessen hat. So schrieb er 1818 an Gerling:

> *„Ich freue mich, dass Sie den Muth haben, sich so auszudrücken, als wenn Sie die Möglichkeit, dass unsere Parallelentheorie, mithin unsere ganze Geometrie, falsch wäre, anerkennten. Aber die Wespen, deren Nest Sie aufstören, werden Ihnen um den Kopf fliegen.“*
> [Gauß 1900, S. 179]

Und 1829 an Bessel:

> *„Auch über ein anderes Thema, das bei mir schon fast 40 Jahr alt ist, habe ich zuweilen in einzelnen freien Stunden wieder nachgedacht, ich meine die ersten Gründe der Geometrie: (...) Inzwischen werde ich wohl noch lange nicht dazu kommen, meine s e h r a u s g e d e h n t e n Untersuchungen darüber zur öffentlichen Bekanntmachung auszuarbeiten, und vielleicht wird diess auch bei meinen Lebzeiten nie geschehen, da ich das Geschrei der Böotier scheue, wenn ich meine Ansicht g a n z aussprechen wollte.“*
> [Gauß 1900, S. 200]

(Die Bewohner Böotiens, einer Landschaft in Griechenland, galten im Altertum als denkfaul und unkultiviert.)
Darauf antwortete Bessel:

> *„Ich würde sehr beklagen, wenn Sie Sich »durch das Geschrei der Böotier« abhalten liessen, Ihre geometrischen Ansichten aus einander zu setzen. Durch das, was* Lambert *gesagt hat, und was* Schweikart *mündlich äusserte, ist mir klar geworden, dass unsere Geometrie unvollständig ist, und eine Correction erhalten sollte, welche hypothetisch ist und, wenn die Summe der Winkel des ebenen Dreiecks = 180° ist, verschwindet. Das wäre die w a h r e Geometrie, die Euklidische die p r a k t i s c h e, wenigstens für Figuren auf der Erde.“*
> [Gauß 1900, S. 201]

Aus dem Briefwechsel mit Schumacher kann man erschließen, dass Gauß über bedeutende Einsichten in Einzelheiten und Grundeigenschaften der nichteuklidischen Geometrie verfügte [Reichardt 1976]. In einem Brief von 1831 heißt es:

> *„In diesem Sinne enthält die Nicht-Euklidische Geometrie durchaus nichts widersprechendes, wenn gleich diejenigen[, die sie kennen lernen,] viele Ergebnisse derselben anfangs für paradox halten müssen, was aber für widersprechend zu halten nur eine Selbsttäuschung sein würde, hervorgebracht von der frühen Gewöhnung, die Euklidische Geometrie für s t r e n g wahr zu halten.*
> *In der Nicht-Euklidischen Geometrie gibt es gar keine ähnlichen Figuren ohne Gleichheit, z. B. die Winkel eines gleichseitigen Dreiecks sind nicht bloss von $\frac{2}{3}R$, sondern auch [bei verschiedenen Dreiecken] nach Massgabe der Grösse der Seiten unter sich verschieden und können, wenn die Seite über alle Grenzen wächst, so klein werden, wie man will. (. . .)*
> *In der Euklidischen Geometrie gibt es nichts absolut grosses, wohl aber in der Nicht-Euklidischen, diess ist gerade ihr wesentlicher Charakter, und diejenigen, die diess nicht zugeben, setzen eo ipso schon die ganze Euklidische Geometrie; aber, wie gesagt, nach meiner Überzeugung ist diess blosse Selbsttäuschung.“*
> [Gauß 1900, S. 216f.]

Trotz der Zurückhaltung bei Publikationen hat Gauß doch den Fortgang der Studien zum Parallelenproblem aufmerksam verfolgt, beispielsweise als ihm über Gerling eine von Schweikart stammende Abhandlung zuging, die an frühere, unbeachtet gebliebene Publikationen anknüpfte. Gauß äußerte sich anerkennend über die von Schweikart als „astralische Größenlehre“ bezeichnete Arbeit, aber eben nicht in der Öffentlichkeit. Auch bezüglich einer von Taurinus, einem Neffen von Schweikart verfassten Arbeit hielt sich Gauß zurück; dies beklagte Taurinus bitterlich, Ende 1829, bei Gauß:

> *„Der Erfolg bewies mir, daß Ihre Autorität dazu gehört, ihnen* (den Überlegungen über nicht-euklidische Geometrie, Wg.) *Anerkennung zu verschaffen, und dieser erste schriftstellerische Versuch ist, an-*

statt, wie ich gehofft hatte, mich zu empfehlen, für mich eine reiche Quelle von Unzufriedenheit geworden.“
(Zitiert bei [Wußing 1989a, S. 53]).

Noch unglücklicher wirkte sich Gauß' Zurückhaltung gegenüber János (Johann) Bolyai (1802–1860), dem Sohn seines Jugendfreundes Wolfgang Bolyai, aus. Die Angelegenheit nahm tragische Züge an. Johann wurde 1818 Student der militärischen Ingenieurschule in Wien und fand dort gute Möglichkeiten zur Fortbildung in Mathematik.

Der Sohn hatte natürlich Kenntnis von seines Vaters vergeblichen Bemühungen um das Parallelenproblem, aber er ließ sich, trotz mehrfacher Warnungen seines Vaters in beschwörendem Ton nicht von seinem Vorhaben abbringen. Anfangs versuchte Johann, das Parallelenpostulat indirekt zu beweisen; er wollte eine Geometrie finden, in der das Parallelenaxiom nicht richtig ist und dass dann ein Widerspruch entsteht. Der Vater, frustriert von seinen vergeblichen Versuchen, an den Sohn 1820:

„Du darfst die Parallelen auf jenem Wege nicht versuchen; ich kenne diesen Weg bis an sein Ende – auch ich habe diese bodenlose Nacht durchmessen, jedes Licht, jede Freude meines Lebens sind in ihr ausgelöscht worden – ich beschwöre Dich bei Gott! Laß die Lehre von den Parallelen in Frieden.
(...)
Es kommt mir vor, ich habe auch diese Gegenden betreten; ich bin bei allen Klippen dieses höllischen Toten Meeres vorbeigefahren und von überall kehrte ich mit zerschmettertem Mastbaum und zerfetzten Segeln zurück, und von da an datiere ich die Verderbnis meines Humors und meinen Fall. Unbesonnen setzte ich mein Leben und mein Glück hierauf – aut Caesar aut nihil.
(...)
Verliere keine Stunde damit. Keinen Lohn bringt es, und es vergiftet das ganze Leben. Selbst durch das Jahrhunderte dauernde Kopfzerbrechen von hundert großen Geometern ist es schlechterdings unmöglich, ohne ein neues Axiom [das elfte] zu erweisen. Ich glaube doch alle erdenklichen Ideen diesfalls erschöpft zu haben. Hätte GAUSS auch fernerhin seine Zeit mit Grübeleien über dem XI. Axiom zugebracht, so wären seine Lehren von den Vielecken, seine Theoria motus corporum coelestium und alle seine sonstigen Arbeiten nicht zum Vorschein gekommen, und er ganz zurückgeblieben. Ich kann es schriftlich nachweisen [durch den Brief vom 25. November 1804], daß er seinen Kopf über die Parallelen zerbrach. Er äußerte mündlich und schriftlich, daß er fruchtlos darüber nachgedacht habe.“
[Engel/Stäckel 1913, S. 76ff.]

Glücklicherweise – bei aller Tragik im späteren Leben des Johann Bolyai – ließ sich dieser nicht entmutigen und kündigte 1823 brieflich seinem Vater

an, dass er kurz vor Erreichung des Zieles stehe. Es besteht im Nachweis der Existenz nicht-euklidischer Geometrien.

Schließlich erschien 1832 die Abhandlung von Johann Bolyai zur nicht-euklidischen Geometrie als *„Appendix“* (Anhang) zu einem Lehrbuch seines Vaters. Wegen einer Cholera-Epidemie gelangte das Buch verspätet in die Hände von Gauß. In einer ersten Stellungnahme vom 14. 02. 1832 gegenüber Gerling äußerte sich Gauß lobend:

> *„Noch bemerke ich, dass ich dieser Tage eine kleine Schrift aus Ungarn über die Nicht-Euklidische Geometrie erhalten habe, worin ich alle meine eigenen Ideen und* ***Resultate*** *wiederfinde, mit grosser Eleganz entwickelt, obwohl in einer für jemand, dem die Sache fremd ist, wegen der Concentrirung etwas schwer zu folgenden Form. Der Verfasser ist ein sehr junger österreichischer Officier, Sohn eines Jugendfreundes von mir, mit dem ich 1798 mich oft über die Sache unterhalten hatte, wiewohl damals meine Ideen noch viel weiter von der Ausbildung und Reife entfernt waren, die sie durch das eigene Nachdenken dieses jungen Mannes erhalten haben. Ich halte diesen jungen Geometer v.* Bolyai *für ein Genie erster Grösse.“* [Gauß 1900, S. 220]

Man kann nur bedauern, dass sich Gauß nicht ähnlich positiv – *„Genie erster Grösse“* – gegenüber Vater Bolyai oder gar gegenüber dem Sohn ausgedrückt hat. Stattdessen schrieb er am 06. 03. 1832 an den Vater:

> *„Jetzt Einiges über die Arbeit Deines Sohnes.*
> *Wenn ich damit anfange, » dass ich solche nicht loben darf «: so wirst Du wohl einen Augenblick stutzen: aber ich kann nicht anders; sie loben hiesse mich selbst loben: denn der ganze Inhalt der Schrift, der Weg, den Dein Sohn eingeschlagen hat, und die Resultate, zu denen er geführt ist, kommen fast durchgehends mit meinen eigenen, zum Theile schon seit 30–35 Jahren angestellten Meditationen überein. In der That bin ich dadurch auf das Äusserste überrascht.“*
> [Gauß 1900, S. 220f.]

Es folgen Einzelheiten inhaltlicher Art (man vergleiche den [Schmidt/Stäckel 1899, S. 109ff.]). Der Brief von Gauß an den Vater musste auf den zu Überempfindlichkeit neigenden, labilen Sohn schrecklich wirken: *„alles schon gewusst und längst bekannt“*. Und zudem keine öffentliche Anerkennung! Es gibt Zeugnisse der Verbitterung und Enttäuschung. Beispielsweise:

> *„Und der Umstand, daß es leider selbst unter den Mathematikern, und noch dazu unter berühmten derlei, noch viele oberflächliche gibt, kann ja doch für keinen Vernünftigen einen Grund abgeben, demnach fortan nur Oberflächliches und Mittelmäßiges zu leisten und die Wissenschaft lethargisch in dem ererbten Zustande zu belassen. Ein derlei*

Ansinnen könnte nur geradewegs widernatürlich und reiner Unsinn genannt werden; und demnach kann es nur um so unangenehmer auffallen, wenn GAUSS auf den Appendix wie auch auf das ganze Tentamen statt seine gerade, biedere, freimütige Anerkennung des hohen Wertes und Äußerung seiner hohen Freude und Teilnahme darüber auszusprechen und statt nach der Kunst zu trachten, der guten Sache gebührenden Eingang zu verschaffen, dem vielmehr auszuweichen sich bemühet und sich beeilt, in fromme Wünsche und Leidwesens-Äußerungen über den Mangel an gehöriger Bildung sich zu ergiessen. Darin besteht das Leben und Wirken und Verdienst wahrlich nicht!“
[Engel/Stäckel 1913, S. 96]

Der Appendix war allerdings in der Tat knapp geschrieben und schwer verständlich. Durch Gauß' Zurückhaltung blieb er wirkungslos, bis zur Veröffentlichung der Briefe von Gauß an Vater Bolyai; zu diesem Zeitpunkt lebte Johann Bolyai nicht mehr (vgl. [Schmidt/Stäckel 1899]).

Johann Bolyai hat unter der Nichtbeachtung sehr gelitten. Er war von Natur aus unbeherrscht, lag auch mit seinem Vater oft im Streit, psychopathisch veranlagt – dies alles führte zum Verfall der ganzen Persönlichkeit.

Zeitlich noch vor Johann Bolyai hatte Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski (1792–1856) im fernen russischen Kasan den mutigen Schritt der ersten Veröffentlichungen zur nicht-euklidischen Geometrie getan, mutig auch deshalb, weil jede Kritik an Kants Philosophie als umstürzlerisch galt.

Lobatschewski ließ sich mit hervorragenden Gymnasialnoten 1807 an der 1804 in Kasan gegründeten Universität immatrikulieren. Der Zufall wollte es, dass er Mathematik bei Professor Christian Martin Bartels (1769–1836) studierte, jenem Bartels, der als Lehrergehilfe den jungen Gauß in Braunschweig unterrichtet hatte (alle Spekulationen, von Gauß sei über Bartels die Idee der



Abb. 10.2.9 Carl Friedrich Gauß, Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski

nicht-euklidischen Geometrie auf Lobatschewski übergesprungen, haben sich als haltlos erwiesen). Lobatschewski – das am Rande – seit 1822 Professor, erwies sich als hervorragender Organisator und wirkte von 1827 bis 1846 als Rektor der Universität Kasan.

Lobatschewski war gut vertraut mit der *Mécanique céleste* von Laplace und den *Disquisitiones* von Gauß. Die Mathematik in Kasan stand also auf der Höhe der Zeit.

Lobatschewski hatte 1823 ein Lehrbuch der Geometrie verfasst. Daraus geht hervor, dass er mit dem Problem des Parallelenaxioms wohlvertraut war. Er erkannte bald, dass sein angeblicher Beweis für das Axiom fehlerhaft war.

Im Februar 1826 reichte er der Fakultät eine Arbeit ein, unter dem Titel *Exposition succincte des principes de la géometrie avec une démonstration rigoureuse du théorèm des paralleles* (Gedrängte Darlegung der Prinzipien der Geometrie mit einem strengen Beweis des Parallelentheorems); diese wurde allerdings erst 1829/1830 im *„Kasaner Boten“* gedruckt. Da dieser kaum verbreitet war, blieb diese Abhandlung ohne erkennbare Wirkung, obwohl es sich um die erste Publikation zur nicht-euklidischen Geometrie handelte. Dazu kam die teilweise ungeschickte Darstellung des sowieso schwierigen Stoffes.

Doch Lobatschewski unternahm neue Anläufe: 1835 erschien eine weitere Abhandlung zur nicht-euklidischen Geometrie, diesmal unter dem Titel *Imaginäre Geometrie* in russischer Sprache, 1837 in Crelles Journal (17) in französischer Sprache. Und schließlich in ausführlicherer Darstellung 1840 in Berlin in deutscher Sprache *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien.* Zum fünfzigjährigen Jubiläum der Kasaner Universität 1856 erschien seine letzte diesbezügliche Arbeit, herausgegeben von Professoren der Kasaner Universität, sowohl in französischer als auch in russischer Sprache, unter dem Titel *Pangeometrie* [Lobatschewski 1902]. Diese Arbeit hat Gauß nicht mehr kennengelernt, da er schon verstorben war.

Im Jahre 1840 war eine einigermaßen korrekte wenn auch ablehnende Rezension zu Lobatschewski erschienen, mit dem Kernsatz:

> *„Nach des Vfs. Behauptung kann man, ohne auf Widersprüche zu gerathen, annehmen, dass sich durch einen gegebenen Punct zu einer gegebenen graden Linie zwei nicht zusammenfallende Parallelen ziehen lassen... und zwischen diesen beiden Parallelen sollen grade Linien durch denselben Punct gehen können, die die gegebene Grade nicht schneiden und doch nicht parallel zu ihr sind, obgleich sie in derselben Ebene liegen.“* [Gersdorf 1840, S. 147]

Gauß hat diese Rezension als *„höchst albern“* bezeichnet [Engel/Stäckel 1913, S. 389]. Diese „Urkunden“ (a. a. O., S. 398ff.) informieren auch ausführlich über die Reaktionen auf die verschiedenen Schriften von Lobatschewski.

Gauß dürfte erst in den dreißiger Jahren von Lobatschewski gehört bzw. gelesen haben. Jedenfalls schreibt er 1841 an den Astronomen Encke:

> *„Ich fange an, das Russische mit einiger Fertigkeit zu lesen, und finde dabei viel Vergnügen. Hr.* Knorre *hat mir eine kleine in russischer Sprache geschriebene Abhandlung von* Lobatschewsky *(in Kasan) geschickt und dadurch so wie durch eine kleine Schrift in deutscher Sprache über Parallellinien (wovon eine höchst alberne Anzeige in* Gersdorfs *Repertorium steht) bin ich recht begierig geworden, mehr von diesem scharfsinnigen Mathematiker zu lesen.“*
> [Gauß 1900, S. 232]

Es ist sehr zu bezweifeln, dass Gauß wegen Lobatschewski russisch gelernt hat, wie öfters unterstellt worden ist. Vielmehr berichtete er schon 1839 gegenüber Schumacher von seinen Russischstudien, des Trainings seiner geistigen Elastizität wegen. Sanskrit aber hatte er aufgegeben.

Gauß blieb leider auch diesmal seinem Vorsatz treu, sich in der Öffentlichkeit jeder Meinung zur nicht-euklidischen Geometrie und zu eventuellen Publikationen zu enthalten. Allerdings wurde Lobatschewski auf Veranlassung von Gauß 1842 korrespondierendes Mitglied der Göttinger Sozietät (Akademie) der Wissenschaften.

Im Februar 1844 kam Gauß im Brief an Gerling auf Lobatschewski zurück, aber dies in Form einer Literaturrecherche, ebenso am 8. Februar 1844. Er, Gauß, wolle erst wieder mehr Muße zur Lektüre haben (vgl. [Reichardt 1976, S. 75f.]). Ausführlich und auch urteilend äußerte sich Gauß brieflich am 28. 11. 1846 gegenüber Schumacher:

> *„Ich habe kürzlich Veranlassung gehabt, das Werkchen von* Lobatschewsky *(Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. Berlin 1840, bei G. Fincke. 4 Bogen stark) wieder durchzusehen. Es enthält die Grundzüge derjenigen Geometrie, die Statt finden müsste und strenge consequent Statt finden könnte, wenn die Euklidische nicht die wahre ist. Ein gewisser* Schweikart *nannte eine solche Geometrie Astralgeometrie,* Lobatschewsky *imaginäre Geometrie. Sie wissen, dass ich schon seit 54 Jahren (seit 1792) dieselbe Überzeugung habe (mit einer gewissen spätern Erweiterung, deren ich hier nicht erwähnen will); materiell für mich Neues habe ich also im* Lobatschewsky*schen Werke nicht gefunden, aber die Entwickelung ist auf anderm Wege gemacht, als ich selbst eingeschlagen habe, und zwar von* Lobatschewsky *auf eine meisterhafte Art in ächt geometrischem Geiste. Ich glaube, Sie auf das Buch aufmerksam machen zu müssen, welches Ihnen gewiss ganz exquisiten Genuss gewähren wird.“* [Gauß 1900, S. 238f.]

Die *Pangeometrie* (1856) von Lobatschewski hat Gauß, wie gesagt, nicht mehr lesen können.

Lassen wir nun noch Lobatschewski selbst zu Wort kommen. In der Schrift von 1840 heißt es zu Anfang:



Abb. 10.2.10 Denkmal von Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski in Kasan. Er studierte an der 1804 in Kasan gegründeten Universität und war von 1827 bis 1846 deren Rektor [Foto Schreiber]

„In der Geometrie fand ich einige Unvollkommenheiten, welche ich für den Grund halte, warum diese Wissenschaft, so lange sie nicht in die Analysis übergeht, bis jetzt keinen Schritt vorwärts thun konnte aus demjenigen Zustande, in welchem sie uns von Euclid überkommen ist. Zu den Unvollkommenheiten rechne ich die Dunkelheit in den ersten Begriffen von den geometrischen Größen, in der Art und Weise wie man sich die Ausmessung dieser Größen vorstellt, und endlich die wichtige Lücke in der Theorie der Parallelen, welche auszufüllen, alle Anstrengungen der Mathematiker bis jetzt vergeblich waren. Die Bemühungen Legendre's haben zu dieser Theorie nichts hinzugefügt, indem er genöthigt war, den einzigen strengen Gang zu verlassen, sich

auf einen Seitenweg zu wenden, und zu Hülfssätzen seine Zuflucht zu nehmen, welche er sich unbegründeter Weise bemühet als nothwendige Axiome darzustellen. (...)
Meinen ersten Versuch über die Anfangsgründe der Geometrie veröffentlichte ich im ‚Kasan'schen Boten'.“

Dann erwähnte Lobatschewski seine Arbeiten von 1836, 1837, 1838:

„Der Umfang dieser Arbeit hindert vielleicht meine Landsleute einem solchen Gegenstand zu folgen, welcher nach Legendre sein Interesse verloren hat. Ich bin jedoch der Ansicht, dass die Theorie der Parallelen nicht ihre Ansprüche auf die Aufmerksamkeit der Geometer verlieren durfte, ...“ [Lobatschewsky 1840, S. 3f.]

„Die erste Voraussetzung (in allen geradlinigen Dreiecken ist die Summe der Winkel gleich 180°, Wg) *dient als Grundlage der gewöhnlichen Geometrie und der ebenen Trigonometrie. Die zweite Voraussetzung* (Winkelsumme $< 180°$, Wg) *kann ebenfalls zugelassen werden, ohne auf irgend einen Widerspruch in den Resultaten zu führen, und begründet eine neue geometrische Lehre, welcher ich den Namen: ‚Imaginäre Geometrie' gegeben habe, und welche ich hier darzustellen beabsichtige bis zur Entwickelung der Gleichungen zwischen den Seiten und Winkeln der geradlinigen und sphärischen Dreiecke.“*
[Lobatschewsky 1840, S. 18f.]

Und schließlich geht Lobatschewski sogar noch auf die Frage ein, wie weit die gewöhnliche (d. h. Euklidische) Geometrie die Struktur des physikalischen Raumes beschreibt:

„Demnach giebt es kein anderes Mittel als die astronomischen Beobachtungen zu Hülfe zu nehmen, um über die Genauigkeit zu urtheilen, welche den Berechnungen der gewöhnlichen Geometrie zukommen. Diese Genauigkeit erstreckt sich, wie ich in einer meiner Abhandlungen gezeigt habe, sehr weit, so daß z. B. in Dreiecken, deren Seiten für unsere Ausmessungen zugänglich sind, die Summe der drei Winkel noch nicht um den hundertsten Theil einer Secunde von zwei Rechten verschieden ist.“ [Lobatschewsky 1840, S. 60]

Und noch einmal in der *Pangeometrie* von 1856:

„Die Pangeometrie, welche auf bestimmte Grundlagen begründet ist, und die in dem Vorausgehenden entwickelt worden ist, giebt, wie man gesehen hat, Methoden, welche geeignet sind, den Werth verschiedener geometrischer Grössen zu berechnen, und beweist zu gleicher Zeit, dass die Annahme, dass der Werth der Summe der drei Winkel jedes geradlinigen Dreiecks constant ist, eine Annahme, die ausdrücklich oder versteckt in der gewöhnlichen Geometrie gemacht wird, keine notwendige Folge unserer Begriffe vom Raume ist. Gilt in unserm

> *Raume die Pangeometrie? (. . .) Nur die Erfahrung kann die Wahrheit dieser Annahme bestätigen, z. B. die wirkliche Messung von den drei Winkeln eines geradlinigen Dreiecks, eine Messung, die auf sehr verschiedene Art vorgenommen werden kann.“*
> [Lobatschewski 1902, S. 76]

In seiner Gauß-Biographie aus dem Jahre 1856 behauptete Sartorius von Waltershausen, Gauß habe bei seinen ausgedehnten geodätischen Messungen durch Messungen im Dreieck Brocken–Hoher Hagen (bei Göttingen)–Inselsberg die Probe auf die Euklidische bzw. nicht-euklidische Geometrie gemacht und innerhalb der Fehlergrenzen die Richtigkeit der Euklidischen Geometrie herausgefunden.

> *„Die Geometrie betrachtete* Gauss *nur als ein consequentes Gebäude, nachdem die Parallelentheorie als Axiom an der Spitze gegeben sei; er sei indess zur Überzeugung gelangt, dass dieser Satz nicht bewiesen werden könne, doch wisse man aus der Erfahrung, z. B. aus den Winkeln des Dreiecks Brocken, Hohehagen, Inselsberg, dass er näherungsweise richtig sei.“*
> ([Sartorius 1856] in [Gauß 1900, S. 267])

Dies ist jedoch durch gründliche Recherchen von Reichardt widerlegt worden, wird aber neuerdings wieder als immerhin möglich diskutiert [Scholz 2004].

In einer Zusammenfassung kommt Hans Reichardt zu folgendem abschließenden Urteil über Gauß, J. Bolyai und Lobatschewski:

> *„Das, was allen diesen drei Mathematikern gemeinsam ist, ist die mühsame, von einer neuen Art der geometrischen Anschauung geleitete Denkweise, die von den geometrischen Axiomen zur analytischen Formulierung der Trigonometrie und zu deren Anwendung in der analytischen Geometrie führte. Bei jedem Schritt mußte man darauf achten, nicht irgendwie in versteckter Weise das Parallelenaxiom zu verwenden, und man mußte sich allmählich daran gewöhnen, daß der Plan eines indirekten Beweises für das Parallelenaxiom scheiterte und zur Entdeckung einer neuen in sich konsequenten, aber zunächst mit vielen Denkschwierigkeiten behafteten Geometrie führte. So sind die Unsicherheiten, die die drei Geometer noch zeigten, durchaus zu verstehen; denn keiner von ihnen hatte einen echten Beweis für die Widerspruchsfreiheit seiner Geometrie, wenn sie ihm auch alle. . . sehr nahe waren.“*
> [Reichardt 1976, S. 78f.]

Die weitere Entwicklung zur endgültigen Anerkennung der nicht-euklidischen Geometrie erforderte widerspruchsfreie nicht-euklidische Modelle. Doch zuvor führte der Habilitationsvortrag von Bernhard Riemann (1826–1866) vom Jahre 1854 noch zu einem außerordentlichen Impuls für die Grundlegung und Neubewertung dessen, was „Geometrie“ ist und bedeutet.

10.2.5 Bernhard Riemann: Beitrag zur Grundlegung der Geometrie

Riemann hat an die Differentialgeometrie von Gauß angeknüpft. Er kannte den (vergeblichen) Versuch von Legendre, das Parallelenpostulat zu beweisen. Ob er die Arbeiten von Lobatschewski gelesen hat, bleibt unklar; sie befanden sich in der Göttinger Bibliothek.

Wenn man die Geschichte der nicht-euklidischen Geometrie auf das Parallelenproblem reduziert, dann hätte Riemann in diesem zu engen Sinne keinen Beitrag zur nicht-euklidischen Geometrie geleistet. Jedoch gehört Riemann in die erste Reihe jener Pioniere, die die klassische Geometrie Euklids überwanden. Die nicht-euklidische Geometrie von Gauß, Bolyai und Lobatschewski ist eine Geometrie konstanter negativer Krümmung. Bei Riemann handelt es sich um eine nicht-euklidische Geometrie variabler Krümmung, die später Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie werden sollte.

Riemann, 1826 als Pastorensohn im Dorfe Breselenz geboren, begann 1846 dem väterlichen Wunsche folgend zunächst das Studium der Theologie und Philologie; zu dieser Zeit waren in Göttingen (außer bei Gauß) kaum anspruchsvolle mathematische Vorlesungen zu hören. So ging Riemann 1847



Abb. 10.2.11 Bernhard Riemann in jungen Jahren

nach Berlin, nun zum Mathematikstudium bei Jacobi, Dirichlet und Steiner (1796–1863). Im Jahre 1849 kehrte Riemann nach Göttingen zurück; der bedeutende Physiker Wilhelm Weber wirkte nun dort – hinberufen auf Gauß' Empfehlung. Im November 1851 promovierte Riemann mit der für die Funktionentheorie schrittmachenden Arbeit *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse.*

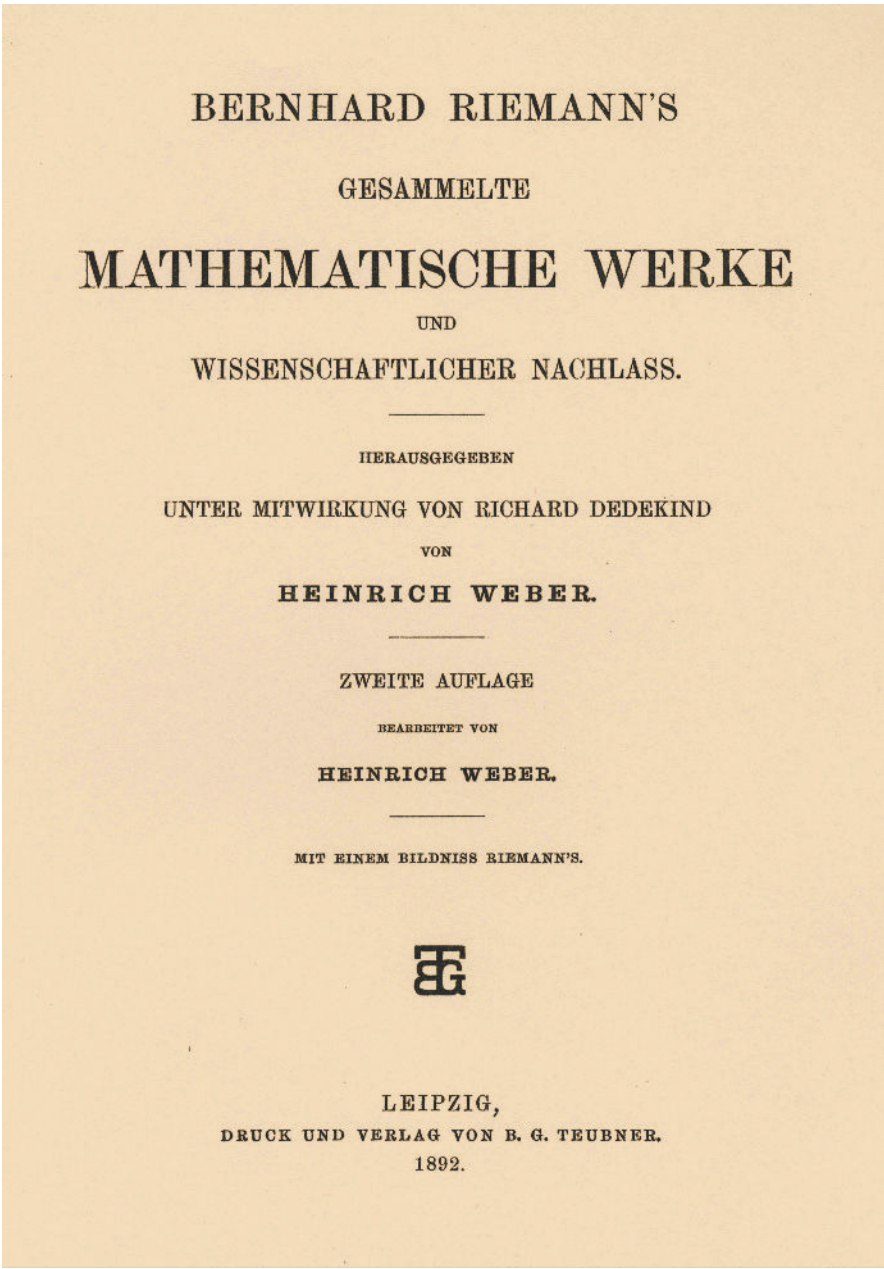
Dann begann Riemann 1852 mit Vorbereitungen auf die Habilitation. Im Brief an seinen Bruder heißt es 1853:

> *„Mit meinen Arbeiten steht es jetzt so ziemlich; ich habe Anfangs December meine Habilitationsschrift (Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe) abgeliefert und musste dabei drei Themata zur Probevorlesung vorschlagen, von denen dann die Facultät eines wählt. Die beiden ersten hatte ich fertig und hoffte, dass man eins davon nehmen würde; Gauss aber hatte das dritte (...) gewählt, und so bin ich nun wieder etwas in der Klemme, da ich dies noch ausarbeiten muss."* [Riemann 1876, S. 515]

Pfingsten 1854 hatte Riemann seinen Habilitationsvortrag *„Über die Hypothesen welche der Geometrie zugrunde liegen"* fertig vorbereitet, aber es herrschten Bedenken, ob Gauß, der schon erkennbar gesundheitlich geschwächt war, die Prüfung würde abnehmen können (zur Habilitationsschrift s. Abschn. 10.5.6). Auf Bitten von Riemann aber setzte Gauß die Vorlesung auf den Freitag nach Pfingsten 1854 fest, *„um die Sache vom Halse loszuwerden"* [Gauß].

Dedekind (1831–1916) berichtet in *„Bernhard Riemann's Gesammelte mathematische Werke ..."* (1876) über den Ablauf des Verfahrens der Habilitation,

> *„... dass Riemann die Ausarbeitung seiner Probevorlesung über die Hypothesen der Geometrie sich durch sein Streben, allen, auch den nicht mathematisch gebildeten Mitgliedern der Facultät möglichst verständlich zu bleiben, wesentlich erschwert hat; die Abhandlung ist aber hierdurch in der That zu einem bewunderungswürdigen Meisterstück auch in der Darstellung geworden, indem sie ohne Mittheilung der analytischen Untersuchung den Gang derselben so genau angiebt, dass sie nach diesen Vorschriften vollständig hergestellt werden kann. Gauss hatte gegen das übliche Herkommen von den drei vorgeschlagenen Thematen nicht das erste, sondern das dritte gewählt, weil er begierig war zu hören, wie ein so schwieriger Gegenstand von einem so jungen Manne behandelt werden würde; nun setzte ihn die Vorlesung, welche alle seine Erwartungen übertraf, in das grösste Erstaunen, und auf dem Rückwege aus der Facultäts-Sitzung sprach er sich gegen Wilhelm Weber mit höchster Anerkennung und mit einer bei ihm seltenen Erregung über die Tiefe der von Riemann vorgetragenen Gedanken aus."* [Riemann 1876, S. 517]



BERNHARD RIEMANN'S

GESAMMELTE

MATHEMATISCHE WERKE

UND

WISSENSCHAFTLICHER NACHLASS.

HERAUSGEGEBEN

UNTER MITWIRKUNG VON RICHARD DEDEKIND

VON

HEINRICH WEBER.

ZWEITE AUFLAGE

BEARBEITET VON

HEINRICH WEBER.

MIT EINEM BILDNISS RIEMANN'S.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1892.

Abb. 10.2.12 Titelblatt *Bernhard Riemann's Gesammelte Mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass* (1892)

Über die Differentialgeometrie von Gauß, selbst ein Wunderwerk klarer Darstellung neuester Ergebnisse, ging Riemann hinaus, indem er von den Dimensionen zwei und drei hinaus zu n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten überging. Er verzichtete auf Euklidizität, sondern setzte nur voraus, dass überall eine Metrik, und zwar in Gestalt einer positiv-definiten quadratischen Differentialform gegeben ist. An den Anfang seiner Vorlesung setzte Riemann den *„Plan der Untersuchung“*.

> *„Bekanntlich setzt die Geometrie sowohl den Begriff des Raumes, als die ersten Grundbegriffe für die Constructionen im Raume als etwas Gegebenes voraus. Sie giebt von ihnen nur Nominaldefinitionen, während die wesentlichen Bestimmungen in Form von Axiomen auftreten. Das Verhältnis dieser Voraussetzungen bleibt dabei im Dunkeln; man sieht weder ein, ob und in wie weit ihre Verbindung nothwendig, noch a priori, ob sie möglich ist.*
> *Diese Dunkelheit wurde auch von E u k l i d bis auf L e g e n d r e, um den berühmtesten neueren Bearbeiter der Geometrie zu nennen, weder von den Mathematikern, noch von den Philosophen, welche sich damit beschäftigten, gehoben. Es hatte dies seinen Grund wohl darin, dass der allgemeine Begriff mehrfach ausgedehnter Grössen, unter welchem die Raumgrössen enthalten sind, ganz unbearbeitet blieb. Ich habe mir daher zunächst die Aufgabe gestellt, den Begriff einer mehrfach ausgedehnten Grösse aus allgemeinen Grössenbegriffen zu construiren. Es wird daraus hervorgehen, dass eine mehrfach ausgedehnte Grösse verschiedener Massverhältnisse fähig ist und der Raum also nur einen besonderen Fall einer dreifach ausgedehnten Grösse bildet. Hiervon aber ist eine nothwendige Folge, dass die Sätze der Geometrie sich nicht aus allgemeinen Grössenbegriffen ableiten lassen, sondern dass diejenigen Eigenschaften, durch welche sich der Raum von anderen denkbaren dreifach ausgedehnten Grössen unterscheidet, nur aus der Erfahrung entnommen werden können. Hieraus entsteht die Aufgabe, die einfachsten Thatsachen aufzusuchen, aus denen sich die Massverhältnisse des Raumes bestimmen lassen – eine Aufgabe, die der Natur der Sache nach nicht völlig bestimmt ist; denn es lassen sich mehrere Systeme einfacher Thatsachen angeben, welche zur Bestimmung der Massverhältnisse des Raumes hinreichen; am wichtigsten ist für den gegenwärtigen Zweck das von E u k l i d zu Grunde gelegte. Diese Thatsachen sind wie alle Thatsachen nicht nothwendig, sondern nur von empirischer Gewissheit, sie sind Hypothesen; man kann also ihre Wahrscheinlichkeit, welche innerhalb der Grenzen der Beobachtung allerdings sehr gross ist, untersuchen und hienach über die Zulässigkeit ihrer Ausdehnung jenseits der Grenzen der Beobachtung, sowohl nach der Seite des Unmessbargrossen, als nach der Seite des Unmessbarkleinen urtheilen.“*
> [Riemann 1876, S. 254f.]

Es hat sich gezeigt, im Vortrag selbst, dass Riemann von dem deutschen Philosophen und Psychologen Johann Friedrich Herbart (1796–1841) beeinflusst war. Dies zeigt sich auch in anderen Schriften von Riemann.

Im Druck erschien der Habilitationsvortrag allerdings erst 1867, nicht zuletzt wegen der Kränklichkeit von Riemann, die schließlich nach Arbeitsurlaub und schwerer Krankheit (vermutlich Tuberkulose oder Brustfellentzündung) in Italien zum Tode führte. Er starb in Selasca am Lago Maggiore und wurde in Bigonzole beigesetzt (vgl. [Laugwitz 1996], [J. Gray 2005]).

10.2.6 Die Anerkennung der nicht-euklidischen Geometrie

Die Anerkennung der nicht-euklidischen Geometrie bzw. Geometrien erfolgte nur langsam und war erst möglich, nachdem Modelle für die Existenz solcher Geometrien gefunden worden waren. Noch Bunjakowski hatte 1866 Lobatschewskis Arbeiten zur nicht-euklidischen Geometrie als puren Unsinn bezeichnet. Andrerseits trugen die Veröffentlichungen des Briefwechsels von Gauß mit Schumacher in der Zeit von 1860–1865 nicht unwesentlich zum Abbau der Vorurteile gegen die nicht-euklidische Geometrie bei.

Bereits 1840 hatte Ferdinand Minding (1806–1885), damals in Berlin tätig, später in Dorpat, im Anschluss an Gauß' Flächentheorie herausgefunden, dass für geodätische Dreiecke bei negativem Krümmungsmaß Sätze der nicht-euklidischen Trigonometrie gelten [Minding 1840]. Allerdings war damit die Widerspruchsfreiheit der nicht-euklidischen Geometrie noch nicht bewiesen, da alle von Minding konstruierten Flächen konstanter negativer Krümmung Singularitäten besitzen, u. a. die von ihm studierte „Pseudosphäre"; sie entsteht bei der Rotation der Traktrix (Schleppkurve) um ihre Asymptote.

Bis auf eine Rede 1842 von P. I. Kotelnikow (1809–1879) in Kasan gab es keine Reaktionen auf Lobatschewski, ebenso wenig auf den *Appendix* von Bolyai. Erst 1860 begann sich die Situation zu ändern, als kurz nach dem Tod von Gauß dessen Korrespondenz mit dem Astronomen Schumacher publiziert und Gauß' positive Wertung der *„Geometrischen Untersuchungen"* von Lobatschewski bekannt wurde.

Im Jahre 1865 erschien eine Arbeit von Arthur Cayley mit dem Titel *Note on Lobatschewsky's imaginary geometry*, in der Cayley allerdings das Wesen der Ideen von Lobatschewski nicht erfasst hat.

Auf französischer Seite erschienen 1866 in Bordeaux und Paris Übersetzungen der *Geometrischen Untersuchungen* ins Französische, ergänzt um Anmerkungen zum Briefwechsel Gauß-Schumacher von Guillaume Jules Hoüel (1823–1866). Er ließ 1867 einen *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie* folgen.

In Deutschland flossen Grundideen von Lobatschewski in die zweite Auflage (1867) der *Elemente der Mathematik* von Richard Baltzer (1818–1887) ein. Im selben Jahr, 1867, publizierte Guiseppe Battaglini (1826–1894) einen Artikel über die imaginäre Geometrie von Lobatschewski und eine italienische Übersetzung der *Pangeometrie*, 1868 folgte eine italienische Übersetzung

des *Appendix*. Überhaupt zeigte sich das Jahr 1868 als überaus bedeutsam für die Assimilation und Adaption der nicht-euklidischen Geometrie, in Kasan durch Erast Petrowitsch Janischewski (1829–1906), Fedor Matwejewitsch Suworow (1845–1911), in St. Petersburg durch Alexander Wassilijewitsch Wassiljew (1853–1929), und schließlich durch Eugenio Beltrami (1835–1900). Ein Lobatschewski-Preis wurde gestiftet; der erste Preisträger war Sophus Lie 1897 für den dritten Band seiner Theorie der Transformationsgruppen.

Der Italiener Beltrami ging 1868 über Minding hinaus mit einer systematischen Untersuchung von Kurven konstanter negativer Krümmung und glaubte, ein Modell der nicht-euklidischen Geometrie gefunden zu haben, da keine Widersprüche auftraten (leider zeigte Hilbert 1901, dass auf jeder solchen Fläche Singularitäten existieren und dass daher Beltrami doch kein gültiges Modell für eine nicht-euklidische Geometrie angegeben hatte).

Erst Felix Klein schuf in seiner Arbeit *Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie* von 1871 ein (ebenes) Modell einer nicht-euklidischen Geometrie, das allen Einwänden standhielt.

Das Kleinsche Modell der hyperbolischen Geometrie sieht folgendermaßen aus: Für „Ebene“ steht das Innere einer Ellipse, für „Gerade“ jeder im Inneren der Ellipse liegende Sehnenabschnitt, für „Punkt“ jeder Punkt im Innern der Ellipse. Ist in der Ellipse eine Gerade g mit den „Endpunkten“ A und B (die selbst nicht zu den Punkten des Modells gehören) und ein Punkt P außerhalb von g gegeben, dann gibt es durch P zu g beliebig viele „Parallelen“, nämlich alle Geraden, die nicht in den Winkelraum APB hineinreichen.

Das Modell einer elliptischen Geometrie ist die Geometrie auf einer Kugel, wenn man „Ebene“ durch Kugeloberfläche, „Gerade“ durch Großkreis auf der Kugeloberfläche und „Punkt“ durch ein Paar diametral gegenüber liegender Punkte interpretiert.

Übrigens stammen die Bezeichnungen *nicht-euklidisch* von Gauß, *hyperbolische* und *elliptische nicht-euklidische Geometrie* von Klein.

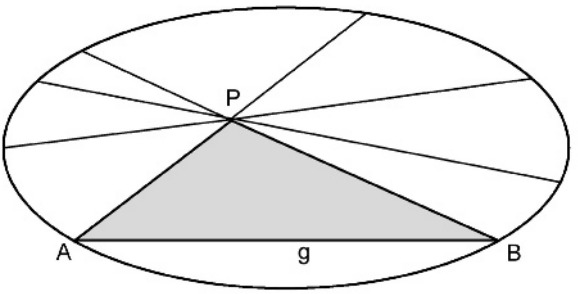


Abb. 10.2.13 Kleins Modell einer ebenen hyperbolischen Geometrie

Klein schloss an die Arbeiten von Cayley zur projektiven Geometrie an und ordnete die beiden Typen nicht-euklidischer Geometrie ins Gefüge der projektiven Geometrie ein. Bezüglich der Aussagen über die Existenz von Parallelen ergibt sich dann die folgende Unterscheidung:

Elliptische Geometrie: keine Parallele
Euklidische Geometrie: genau eine Parallele
Hyperbolische Geometrie: beliebig viele Parallelen.

In einer *„Vorläufigen Mitteilung“* führt Klein aus:

> *„Die nachstehenden Erörterungen beziehen sich auf die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie von G a u s s, L o b a t s c h e w s k y, B o l y a i und die verwandten Betrachtungen, welche von R i e m a n n und H e l m h o l t z über die Grundlage unserer geometrischen Vorstellungen angestellt worden sind. Sie sollen indes nicht etwa die philosophischen Spekulationen weiterverfolgen, welche zu den genannten Arbeiten hingeleitet haben; vielmehr ist ihr Zweck, die mathematischen Resultate dieser Arbeiten, so weit sie sich auf Parallelentheorie beziehen, in einer neuen, anschaulichen Weise darzulegen und einem allgemeinen deutlichen Verständnisse zugänglich zu machen. Der Weg hierzu führt durch die projektivische Geometrie, (. . .)*
> *Das Bedürfnis, die sehr abstrakten Spekulationen, welche zur Aufstellung der dreierlei Geometrien geführt haben, zu versinnlichen, hat dahingeführt, Beispiele von Maßbestimmungen aufzusuchen, die als Bilder der genannten Geometrien aufgefaßt werden könnten, und damit zugleich die innere Folgerichtigkeit jeder einzelnen in Evidenz setzten. (. . .)*
> *Die fraglichen Bilder betrachten als Objekt der Maßbestimmung die Ebene resp. den Raum selbst und benutzen nur eine andere Maßbestimmung als die gewöhnliche, welche, im Sinne der projektivischen Geometrie, als eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen Maßbestimmung erscheint.“* [Klein 1921, S. 244ff.]

Über den einschlägigen Beitrag von Henri Poincaré wird an anderer Stelle berichtet (siehe 11.7.1).

Als weiterer Beitrag sei der tiefgründige und einflussreiche Vortrag *„Über die Tatsachen, die der Geometrie zugrundeliegen“* von Hermann von Helmholtz aus dem Jahre 1868 genannt, der mit Betonung der Empirie und in seiner Formulierung quasi ein Gegenstück zu Riemann darstellt.

Erwähnt sei ferner ein scherzhafter Beitrag, nämlich ein Auszug aus einer Faustparodie von Kurd Laßwitz, von dem mehrere Schriften zur Mathematik und ihren Hintergründen stammen, u. a. die *Universalbibliothek*. Dieser Text stammt aus der Faustparodie in der *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht* 14 (1883), S. 312–318, hier entnommen aus [Reichardt 1985, S. 241] (ein *„Fuchs“* ist ein Student des ersten Semesters).

„Fuchs. Was soll ich nun aber denn studieren?

Meph. Ihr könnt es mit analytischer Geometrie probieren.
Da wird der Raum euch wohl dressiert,
in Koordinaten eingeschnürt,
daß ihr nicht etwa auf gut Glück
von der Figur gewinnt ein Stück.

Dann lehret man euch manchen Tag,
daß, was ihr sonst auf einen Schlag
konstruiertet im Raume frei,
eine Gleichung dazu nötig sei.

Zwar ward dem Menschen zu seiner Erbauung
die dreidimensionale Raumanschauung,
daß er sieht, was um ihn passiert,
und die Figuren sich konstruiert, –
der Analytiker tritt herein
und beweist, das könnte auch anders sein.

Gleichungen, die auf dem Papiere stehn,
die müßt' man auch können im Raume seh'n;
und könnte man's nicht konstruieren,
da müßte man's anders definieren.

Denn was man formt nach Zahlengesetzen
müßt' uns auch geometrisch ergetzen.

Drum in den unendlich fernen beiden
imaginären Punkten müssen sich schneiden
alle Kreise fein säuberlich,
auch Parallelen, die treffen sich,
und im Raume kann man daneben
allerlei Krümmungsmaße erleben.

Die Formeln sind alle wahr und schön,
warum sollten sie nicht zu deuten gehen?

Da preisen's die Schüler aller Orten,
daß das Gerade ist krumm geworden.

Nicht-Euklidisch nennt's die Geometrie,
spottet ihrer selbst, und weiß nicht wie.

Fuchs. Kann euch nicht eben ganz verstehn.

Meph. Das soll den Philosophen auch so gehen.“

10.2.7 Felix Klein: Das sog. Erlanger Programm

Felix Klein wurde 1849 in Düsseldorf geboren und ging bereits 1865 zum Studium an die Universität Bonn bei dem Physiker und Liniengeometer Julius Plücker (1801–1868). Nach dessen unerwartetem Tode gab Klein seine nachgelassenen Schriften heraus. Kleins Promotion erfolgte 1868 bei R. Lipschitz (1832–1903) in Bonn. Es folgten Studienaufenthalte bei A. Clebsch (1833–1872) in Göttingen und dann in Berlin bei K. Weierstraß (1815–1897) und O. Stolz (1842–1905), der Klein mit den Grundgedanken der nichteuklidischen Geometrie bekannt machte. Der gemeinsame Studienaufenthalt in Paris mit S. Lie (1870) brachte ihn in Kontakt u. a. mit C. Jordan (1838–1922) und durch ihn mit der Theorie der Permutationsgruppen in der Adaption von Evariste Galois (1811–1832).

Der Ausbruch des deutsch–französischen Krieges veranlasste Klein zur Rückkehr nach Deutschland, um dort in den Militärdienst einzutreten. Sein Kollege Lie wurde als Spion verhaftet.

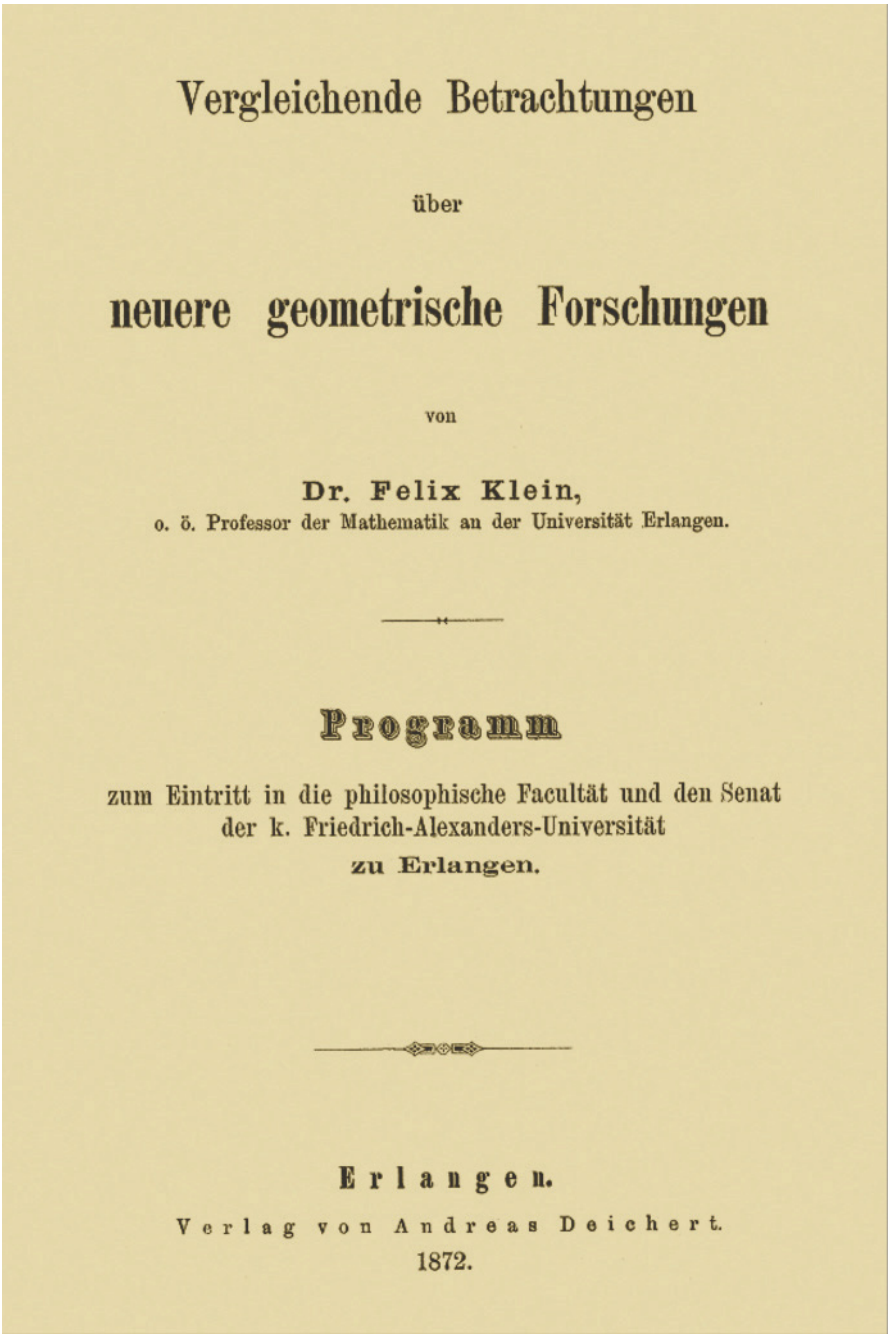
Lie seinerseits ging zum Studium der kontinuierlichen Transformationsgruppen über; später kam es zu ernsthaften Verstimmungen zwischen Lie und Klein. Klein habilitierte sich 1871 bei Clebsch in Göttingen und 1872 erfolgte die Berufung zum ordentlichen Professor in Erlangen. Sein Inaugural-Vortrag, zu dem er als neuberufener Professor verpflichtet war, bezog sich auf seine Vorhaben bezüglich der Lehre und auf den Zweck der Erziehung in der Mathematik. Die kleine Broschüre *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* erschien 1872, wird aber oft fälschlicherweise als *„Erlanger Programm“* bezeichnet. Einige Exemplare dürften bei der Inaugural-Veranstaltung an Teilnehmer verteilt worden sein (vgl. [Rowe 1983], [Rowe 1986], [Gray 2005, S. 544ff.]).

Nach weiteren Stationen in München (1875) und Leipzig (1880) erfolgte Kleins endgültige Berufung nach Göttingen.

Klein hat eine Reihe vorzüglicher Lehrbücher verfasst, u. a. *Vorlesungen über das Ikosaeder* und zahlreiche tiefliegende Studien u. a. zur Theorie der automorphen Funktionen und zur Riemanschen Funktionentheorie. Unglücklicherweise erlitt Klein in einem anstrengenden Wettbewerb mit Poincaré einen Zusammenbruch und konnte seine ursprüngliche kreative Höchstform in der mathematischen Forschung nicht wieder erreichen.

Dessen ungeachtet hat Klein einen weit reichenden Einfluss auf die Entwicklung der Mathematik ausgeübt. Seine zweibändige *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt* (1908/1909) hat erheblich zur Anhebung des Niveaus der Mathematikausbildung beigetragen.

Weitere Initiativen von Klein galten der betonten Anwendung der Mathematik; so war er wesentlich mitbeteiligt an der Gründung (1898) der *„Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Mathematik und Mechanik“*. Auch war er Mitbegründer der *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften* und spielte eine große Rolle in der Arbeit der *„Internationalen Kommission zur Förderung des mathematischen Unterrichtes“*. Weiterhin ge-



Vergleichende Betrachtungen

über

neuere geometrische Forschungen

von

Dr. Felix Klein,
o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Erlangen.

Programm

zum Eintritt in die philosophische Facultät und den Senat
der k. Friedrich-Alexanders-Universität
zu Erlangen.

Erlangen.
Verlag von Andreas Deichert.
1872.

Abb. 10.2.14 Titelblatt des Inaugural-Vortrages von Felix Klein

hören seine zweibändigen *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert* (1926/1927) noch immer zu den aussagekräftigsten Quellen zur Geschichte der Mathematik der neueren Zeit, stammen sie doch von einem Mann, der tiefe Einsichten in die zeitgenössische Mathematik besaß, an deren Entwicklung er vielfältig direkt oder indirekt beteiligt war.

Erinnert sei auch an die weitgehend von Klein getragenen Bemühungen um die Modernisierung des Mathematikunterrichts im Deutschen Kaiserreich durch das sog. Meraner Programm von 1905.

Alles in allem bot sich den Geometern bis zur Mitte des 19. Jahrhunderts das Bild einer sich stürmisch entwickelnden Geometrie, wobei die ehemals vorhandene innere Geschlossenheit mehr und mehr zerfiel. Um die Mitte des Jahrhunderts herrschte eine gewisse Ratlosigkeit über den inneren Zusammenhang der einzelnen „Geometrien“ und „geometrischen Methoden“.

Die Lösung der entstandenen Divergenzen brachte das sog. *„Erlanger Programm“*, die Klassifizierung der Geometrie mit gruppentheoretischen Methoden. Kleins Absichten zielten erklärtermaßen ab auf eine Wiederherstellung der Einheit der Geometrie (vgl. [Klein 1974]).

> *„Mein Interesse war schon von meiner Bonner Zeit* (1865–1868 bei Plücker, Wg.) *her darauf gerichtet, im Widerstreite der sich befehdenden mathematischen Schulen das gegenseitige Verhältnis der nebeneinander herlaufenden, äußerlich einander unähnlicher und doch ihrem Wesen nach verwandter Arbeitsrichtungen zu verstehen und ihre Gegensätze durch eine einheitliche Gesamtauffassung zu umspannen. Innerhalb der Geometrie gab es in dieser Hinsicht noch viel für mich zu tun.“*
> [Klein 1921, S. 52]

Klein ging im *„Erlanger Programm“* von der Definition der Gruppe als einem *„System in sich geschlossener Transformationen“* aus. Dann wird der Begriff *„Hauptgruppe“* erläutert:

> *„Die Geometrie kann sich (...) überhaupt nur mit solchen Eigenschaften der räumlichen Gebilde befassen, welche unabhängig sind von der Stelle im Raume, die von den Gebilden eingenommen wird, sowie von der absoluten Größe der Gebilde. Auch kann sie nicht (immer ohne Zuhilfenahme eines dritten Körpers) zwischen den Eigenschaften eines Körpers und denen seines Spiegelbildes unterscheiden. Durch diese Sätze ist eine Gruppe räumlicher Transformationen charakterisiert – sie mag die Hauptgruppe genannt werden –, deren Transformationen die Gesamtheit der geometrischen Eigenschaften eines Gebildes unberührt lassen.“*
> [Klein 1921, S. 318]

Der Gruppenbegriff erweist sich als eine Art Zauberstab, um Ordnung in der Geometrie zu schaffen. Jeder „Geometrie“ wird eine Gruppe “adjungiert“, wie sich Klein ausdrückt:

> *„Nur ist nicht mehr, (...) eine Gruppe vor den übrigen durch ihre Bedeutung ausgezeichnet; jede Gruppe ist mit jeder anderen gleichberechtigt. Als Verallgemeinerung der Geometrie entsteht so das folgende umfassende Problem:*
> *Es ist eine Mannigfaltigkeit und in derselben eine Transformationsgruppe gegeben; man soll die der Mannigfaltigkeit angehörigen Gebilde hinsichtlich solcher Eigenschaften untersuchen, die durch die Transformationen der Gruppe nicht geändert werden.*
> (...)
> *Ersetzt man die Hauptgruppe durch eine umfassendere Gruppe, so bleibt nur ein Teil der geometrischen Eigenschaften erhalten. (...)*
> *In diesem Satze beruht die Eigenart der hier zu besprechenden neueren geometrischen Richtungen und ihr Verhältnis zur elementaren Methode. Sie sind dadurch eben zu charakterisieren, daß sie an Stelle der Hauptgruppe eine erweiterte Gruppe räumlicher Umformungen der Betrachtung zugrunde legen. Ihr gegenseitiges Verhältnis ist, sofern sich ihre Gruppen einschließen, durch einen entsprechenden Satz bestimmt. Dasselbe gilt von den verschiedenen hier zu betrachtenden Behandlungsweisen mehrfach ausgedehnter Mannigfaltigkeiten.“*
> [Klein, 1921, S. 463ff.]

Damit ist die gruppentheoretische Untersuchungsmethode dargelegt: Dem Übergang zu einer umfassenderen Gruppe entspricht also der Übergang zu einer „ärmeren“ Geometrie. Durch Einschränkung der Transformationsgruppe gehen alle (klassischen) Geometrien aus der projektiven Geometrie hervor. Diese Zusammenhänge pflegen wir heute (für die klassischen euklidischen Geometrien) mit folgendem Schema zu verdeutlichen:

	Hauptgruppe	äquiforme Gruppe	affine Gruppe	projektive Gruppe
Lage	zerstört	zerstört	zerstört	zerstört
Größe	erhalten	zerstört	zerstört	zerstört
Orthogonalität	erhalten	erhalten	zerstört	zerstört
Parallelität	erhalten	erhalten	erhalten	zerstört
Inzidenz	erhalten	erhalten	erhalten	erhalten
	Kongruenz-geometrie	äquiforme Geometrie	affine Geometrie	projektive Geometrie

Die mit dem *„Erlanger Programm“* vollzogene gruppentheoretische Klassifizierung bedeutete – wenigstens aus historischer Sicht – eine echte Zäsur für die Entwicklung der Geometrie. Die dem Erlanger Programm nachfolgende Entwicklung hat gelehrt, dass es Geometrien gibt, die sich nicht in seinen Rahmen einordnen lassen. Man unterscheidet daher – nach Untersuchungen

von Cartan, Schouten und Veblen aus den zwanziger Jahren des 20. Jahrhunderts – vielfach Kleinsche Räume von anderen Räumen als solche, die aus einer Punktmenge mit einer gegebenen Transformationsgruppe bestehen; die Invariantentheorie solcher Räume heißt eine Kleinsche Geometrie.

Und da sich die fusionierende Kraft des Gruppenbegriffes offenbart hatte, ergaben sich von hier aus Impulse an die sich gegen Ende des 19. Jahrhunderts entwickelnden Ansätze strukturellen mathematischen Denkens.

Öfter als man auf Anhieb vermutet wurde Mathematisches zum Gegenstand bei Schriftstellern und Dichtern. Der in Kaiserslautern wirkende Mathematiker Knut Radbruch ist dieser kulturhistorischen Komponente der Mathematik sorgsam und mit unermüdlichem Eifer nachgegangen und hat eine Fülle von einschlägigen Funden gemacht.

Christian Morgenstern (1871–1914) hat ein köstliches Gedicht über Parallelen verfasst; mathematisch gesprochen ist es der Übergang von der affinen zur projektiven Geometrie:

Die zwei Parallelen

„Es gingen zwei Parallelen
ins Endlose hinaus,
zwei kerzengerade Seelen
und aus solidem Haus.

Sie wollten sich nicht schneiden
bis an ihr seliges Grab:
das war nun einmal der beiden
geheimer Stolz und Stab.

Doch als sie zehn Lichtjahre
gewandert neben sich hin,
da wards dem einsamen Paare
nicht irdisch mehr zu Sinn.

War'n sie noch Parallelen?
Sie wußten's selber nicht, –
sie flossen nur wie zwei Seelen
zusammen durch ewiges Licht.

Das ewige Licht durchdrang sie,
da wurden sie eins in ihm;
die Ewigkeit verschlang sie,
als wie zwei Seraphim.“

(Morgenstern zitiert nach [Radbruch 1997, S. 45])




Abb. 10.2.15 Felix Klein, David Hilbert

10.2.8 David Hilbert: Axiomatisierung der Geometrie

Selbstverständlich standen die Euklidischen *„Elemente“* während des 19. Jahrhunderts weiterhin in hohem Ansehen, sowohl hinsichtlich des Inhaltes, als auch bezüglich der axiomatischen Grundlegung.

Dessen ungeachtet finden sich bei Lambert und Lobatschewski Bemerkungen, dass die Grundlegung der Geometrie auch eine Neubestimmung ihrer Grundbegriffe nötig mache. Dies war parallel gegangen mit ähnlichen Strömungen in der Analysis und mit dem Hervortreten der mathematischen Logik am Ende des 19. Jahrhunderts.

Wie es scheint, hat der aus ärmlichen jüdischen Verhältnissen in Breslau stammende deutsche Mathematiker Moritz Pasch (1843–1930) als einer der ersten einen Versuch unternommen, den Forderungen nach einem in diesem Sinne neuen, modernen und strengen Aufbau der Geometrie nachzukommen. Für die projektive Geometrie wurde diese Absicht in dem Buch *Vorlesungen über neuere Geometrie der Ebene* [Pasch 1882] in Angriff genommen. Die folgende Passage verweist darauf, dass Pasch die Mathematik und speziell die Geometrie historisch-erkenntnistheoretisch einerseits als durch Abstraktion von der objektiven Realität entstanden aufgefasst hat und daher andererseits gerade im Interesse des wissenschaftlichen Fortschrittes betonte, dass Mathematik und speziell die Geometrie bei ihrem axiomatischen Aufbau nicht mehr auf Anschauung und Versinnlichung zurückgreifen dürfen.

> *„Die Mathematik stellt Relationen zwischen den mathematischen Begriffen auf, welche den Erfahrungsthatsachen entsprechen sollen, aber weitaus in ihrer Mehrzahl der Erfahrung nicht unmittelbar entlehnt, sondern ‚bewiesen‘ werden; die (ausser den Definitionen der abgeleiteten Begriffe) zur Beweisführung nothwendigen Erkenntnisse bilden*

selbst einen Theil der aufzustellenden Relationen. Nach Ausscheidung der auf Beweise gestützten Sätze, der Lehrsätze, bleibt eine Gruppe von Sätzen zurück, aus denen alle übrigen sich folgern lassen, die Grundsätze; diese sind unmittelbar auf Beobachtungen gegründet, freilich auf Beobachtungen, welche seit undenklichen Zeiten sich unaufhörlich wiederholt haben, welche klarer erfasst werden, als die irgendeiner anderen Art, und mit denen die Menschen deshalb längst so vertraut geworden sind, dass ihr Ursprung in Vergessenheit gerathen und Gegenstand des Streites werden konnte.
Die Grundsätze sollen das von der Mathematik zu verarbeitende empirische Material vollständig umfassen, so dass man nach ihrer Aufstellung auf die Sinneswahrnehmungen nicht mehr zurückzugehen braucht. . . .“ [Pasch 1882, S. 17]
„Es muss in der That, wenn anders die Geometrie wirklich deductiv sein soll, der Prozess des Folgerns überall unabhängig sein vom Sinn der geometrischen Begriffe, wie er unabhängig sein muss von den Figuren; nur die in den benutzten Sätzen, beziehungsweise Definitionen niedergelegten Beziehungen zwischen den geometrischen Begriffen dürfen in Betracht kommen.“ [Pasch 1882, S. 98]

Damit gehört Pasch zu den großen Wegbereitern der modernen Geometrie. Offensichtlich ist bei ihm ein Grundgedanke bereits klar ausgesprochen, den David Hilbert (1862–1943) bald darauf zur Maxime seiner Methode gemacht hat. M. Toepell hat kürzlich detailliert dargelegt, wie Hilbert in einem doch fast ein Jahrzehnt dauernden Prozess über die Grundlagen der Geometrie nachgedacht und einige Vorlesungen dazu gehalten hat, ehe er 1899 zur Publikation der *Grundlagen der Geometrie* schritt, übrigens aus Anlass der Enthüllung des Gauß-Weber-Denkmals in Göttingen (vgl. [Toepell 1999, S. 283ff.], Toepell in [Grattan-Guinness 2005, S. 710ff.]). Die *Grundlagen der Geometrie* waren überaus erfolgreich und sind häufig neu aufgelegt und in mehrere Sprachen übersetzt worden. Es war ein wegweisendes Werk, inhaltlich und methodologisch. Hilbert verzichtete bewusst auf eine Definition der Grundbegriffe der Geometrie wie Punkt, Gerade, Ebene. Stattdessen werden die Beziehungen zwischen nicht näher definierten Elementen angegeben. Diese Beziehungen werden axiomatisch festgelegt. So heißt es in den *Grundlagen der Geometrie* zu Anfang:

„Erklärung: Wir denken drei verschiedene Systeme von Dingen: die Dinge des ersten Systems nennen wir Punkte und bezeichnen sie mit A, B, C, . . . ; die Dinge des zweiten Systems nennen wir Geraden und bezeichnen sie mit a, b, c, . . . ; die Dinge des dritten Systems nennen wir Ebenen und bezeichnen sie mit α, β, γ, . . . ; die Punkte heißen auch die Elemente der linearen Geometrie, die Punkte und Geraden heißen die Elemente der ebenen Geometrie und die Punkte, Geraden und Ebenen heißen die Elemente der räumlichen Geometrie oder des Raumes.

> *Wir denken die Punkte, Geraden, Ebenen in gewissen gegenseitigen Beziehungen und bezeichnen diese Beziehungen durch Worte wie ‚liegen', ‚zwischen', ‚kongruent'; die genaue und vollständige Beschreibung erfolgt durch die Axiome der Geometrie."*
> [Hilbert 1999, S. 2]

In einer früheren, der dritten Auflage (1909) der *Grundlagen der Geometrie* heißt es jedoch:

> *„Wir denken die Punkte, Geraden, Ebenen in gewissen gegenseitigen Beziehungen und bezeichnen diese Beziehungen durch Worte wie ‚liegen', ‚zwischen', ‚parallel', ‚kongruent', ‚stetig'; die genaue und vollständige Beschreibung dieser Beziehungen erfolgt durch die Axiome der Geometrie."*
> [Hilbert 1909, S. 2]

In der Ausgabe von 1999 fehlen also ‚parallel' und ‚stetig'.

Hier tritt die formalistische Auffassung Hilberts (obwohl Hilbert selbst das Wort „Formalismus" nicht gebraucht hat) klar zutage. Die Verknüpfungen entscheiden. Die „Elemente" selbst bleiben undefiniert und werden nur mit Rücksicht auf Tradition und Gewohnheit mit Worten belegt, die dem Sprachgebrauch der Geometrie entstammen. Hilbert hat, im Scherz zwar, aber doch völlig im Ernst bezüglich seines Anliegens erklärt:

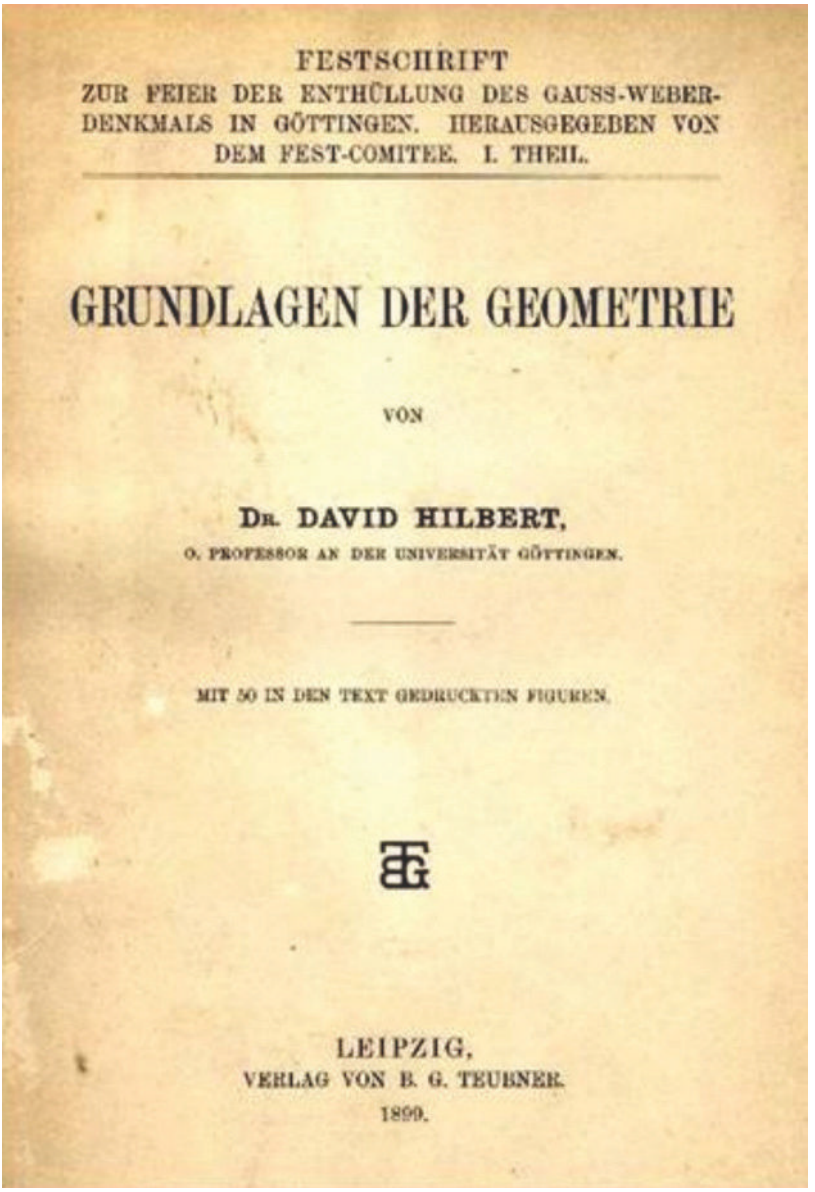
> *„Wenn ich unter meinen Punkten irgendwelche Systeme von Dingen, z. B. das System Liebe, Gesetz, Schornsteinfeger ... denke und dann nur meine sämtlichen Axiome als Beziehungen zwischen diesen Dingen annehme, so gelten meine Sätze, z. B. der Pythagoras, auch von diesen Dingen."* Oder noch drastischer: *„Man muß jederzeit an Stelle von ‚Punkten', ‚Geraden', ‚Ebenen', ‚Tische', ‚Stühle', ‚Bierseidel' sagen können."*
> [Blumenthal 1935, S. 403]

Von Hilbert stammt die Einteilung der Axiome in fünf Axiomgruppen:

1. Acht Axiome der Verknüpfung
2. Vier Axiome der Anordnung
3. Fünf Axiome der Kongruenz
4. Das Axiom der Parallelen
5. Zwei Axiome der Stetigkeit (1899 nur ein Axiom der Stetigkeit, in der zweiten Auflage 1903 erscheint ein zweites)

Der von Hilbert eingeschlagene Weg erwies sich als von großer Tragweite, nicht nur für die Geometrie, sondern allgemein für die Methologie in der Mathematik.

Wir schließen uns hier der Meinung von P. Schreiber an, dass



FESTSCHRIFT
ZUR FEIER DER ENTHÜLLUNG DES GAUSS-WEBER-DENKMALS IN GÖTTINGEN. HERAUSGEGEBEN VON DEM FEST-COMITEE. I. THEIL.

GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE

VON

DR. DAVID HILBERT,
O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT GÖTTINGEN.

MIT 50 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.

LEIPZIG,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1899.

Abb. 10.2.16 Titelblatt der *Grundlagen der Geometrie* von D. Hilbert

„... Hilberts Grundlagen keineswegs am Anfang einer neuen Entwicklung standen, sondern einen gewissen Höhepunkt markierten. Ihre im Vergleich zu allen Vorgängern viel größere Ausstrahlung und Wirkung beruhte sicher zu einem gewissen Teil auf dem Ruhm, den

> *Hilbert sich auf anderen mathematischen Gebieten bereits erworben hatte, andererseits aber darauf, daß er weit mehr als seine Vorgänger ein breites Spektrum von interessanten und fruchtbaren Fragen rund um die axiomatische Grundlegung der Elementargeometrie ausbreitete. Demgegenüber fällt wenig ins Gewicht, daß viele dieser Fragen von anderen, insbesondere von seinen eigenen Schülern, gelöst wurden bzw. seine eigenen Lösungsangebote nicht immer die besten und seine Einsicht in die Probleme manchmal beschränkt waren.“*
> [Scriba/Schreiber 2005, S. 501f.]

In der Folgezeit sind andere, modifizierte Axiomensysteme zum Aufbau der Geometrie vorgeschlagen und zur Grundlage von Darstellungen in Lehrbüchern gemacht worden. Damit wurde ein weites Feld geometrischer Grundlagenforschung eröffnet [Scriba/Schreiber 2005, S. 502ff.]. Einen besonderen Weg des axiomatischen Aufbaus der Geometrie schlug F. H. Schur (1856–1923) 1909 vor. Er ersetzte die Hilbertschen Kongruenzaxiome durch Axiome der Bewegung.

10.2.9 Die allgemeine axiomatische Methode

Hilbert hat auch herausgearbeitet, welche Forderungen an ein Axiomensystem ganz allgemein zu stellen sind – zum Aufbau jeder mathematischen Theorie.

Das Axiomensystem muss erstens widerspruchsfrei sein. Für die Geometrie erfüllte Hilbert diese Forderung, indem er das Prinzip der Angabe eines Modells betonte und die Axiome der Geometrie auf die der Arithmetik zurückführte, von denen er voraussetzte (was bis heute noch nicht vollständig bewiesen ist), dass diese widerspruchsfrei seien.

Das Axiomensystem soll zweitens vollständig sein. Es soll also in einem gewissen Sinne genügend umfangreich sein, so, dass der Inhalt der dadurch begründeten Theorie im Wesentlichen eindeutig festgelegt ist. Dies gilt z. B. für die Hilbertschen Axiome der Geometrie.

Die Axiome sollten ferner auch voneinander unabhängig sein. Ist das nicht der Fall, dann besitzt das Axiomensystem eine Art Schönheitsfehler; dieser ist allenfalls noch hinzunehmen, wenn man sich über die jeweiligen Abhängigkeitsbeziehungen im Klaren ist.

Die Hilbertschen Axiome ermöglichen den Aufbau der (ebenen) euklidischen Geometrie. Der Nachweis, dass nicht-euklidische Geometrien möglich sind, und dass Modelle dafür existieren, zeigt, dass das Parallelenaxiom von den anderen Axiomen der euklidischen Geometrie unabhängig ist.

Zu Beginn des 20. Jahrhunderts zeigte sich, dass man wesentliche Teile der euklidischen bzw. nicht-euklidischen Geometrie auch unabhängig von Stetigkeitsaussagen aufbauen kann; deren Unabhängigkeit war bereits von Hilbert erkannt worden.

Mit Hilbert erfuhr der von Euklid einst beschrittene Weg der Axiomatisierung seine Vollendung. Die geometrischen Grundbegriffe werden nur noch implizit, d. h. durch die zwischen ihnen geltenden Beziehungen definiert. Der Verzicht auf den Versuch einer expliziten Definition, die Untersuchung der Reichweite der einzelnen Axiome bzw. Axiomgruppen und die Zurückführung des Beweises der Widerspruchsfreiheit von Geometrien auf die Arithmetik verschob das Problem der Grundlegung der Geometrie in den Bereich der Grundlegung der Arithmetik und schloss damit die Geometrie an die allgemeinen erkenntnistheoretischen Fragen der Grundlagen der Mathematik an, wie sie zu Beginn des 20. Jahrhunderts diskutiert wurden. Zugleich erfuhren die erkenntnistheoretisch-mathematischen Forderungen an ein Axiomensystem erweiterte und verschärfende Präzisierungen.

Zur Entwicklung der Geometrie sei hier ein amüsantes Beispiel aus der Literatur genannt.

Adalbert von Chamisso (1781–1838) hat das angebliche Ochsenopfer des Pythagoras nach der Entdeckung seines Theorems zum Gegenstand eines Gedichtes gemacht, wonach nun alle Ochsen (d. h. die Dummen) bei Mathematik erzittern. So heißt es auszugsweise:

„Ein Opfer hat Pythagoras geweiht
Den Göttern, die den Lichtstrahl ihm gesandt;
Es taten kund geschlachtet und verbrannt
Ein Hundert Ochsen seine Dankbarkeit.

Die Ochsen, seit dem Tage wenn sie wittern,
Daß eine neue Wahrheit sich enthülle,
Erheben ein unmenschliches Gebrülle;
Pythagoras erfüllt sie mit Entsetzen.“

(Zitiert bei [Lietzmann 1917, S. 3])

10.3 Wandel in der Algebra

Mit dem ausgehenden 16. und dem beginnenden 17. Jahrhundert – Stichworte Vieta und Descartes – hatte die Algebra einen gewissen Abschluss erreicht. Schon im 15. und 16. Jahrhundert waren Verfahren zur rechnerischen Auflösung von algebraischen Gleichungen dritten und vierten Grades gefunden und veröffentlicht worden. Die Suche nach Auflösungsverfahren für die allgemeine algebraische Gleichung höheren als vierten Grades in Radikalen, d. h. durch Wurzelschachtelungen, stellte anderthalb Jahrhunderte lang, bis zum Ende des 18. Jahrhunderts, das beherrschende Thema der Algebra dar. Dies – und ganz allgemein die Suche nach Lösungen von Gleichungen – machte den Begriffsinhalt von „Algebra“ in einer ganzen historischen Periode aus.

Das allgemeine Auflösungsproblem für algebraische Gleichungen offenbarte allerdings im 18. Jahrhundert seine wirklichen Tücken. Der deutsche Naturforscher und Mathematiker Ehrenfried Walter von Tschirnhaus (1651–1708), langjähriger Korrespondent von Leibniz und Mitbeteiligter an der Erfindung des europäischen Porzellans, ein Privatmann, erwarb sich einigen Ruhm als geschickter Algebraiker, weil er durch die nach ihm benannte *„Tschirnhaus-Transformation“* das zweithöchste Glied einer algebraischen Gleichung beseitigen konnte. Hochgespannte Ideen für die Auflösung erwiesen sich als verfehlte Hoffnungen. Überhaupt war bei vielen Mathematikern die Überzeugung noch verbreitet, es käme nur auf die Erfindung eines besonderen Kunstgriffes an. Alle angeblichen Transformationen und Resolventen, d. h. lösende Ersatzgleichungen, versagten (sie mussten versagen, wie man später herausfand).

Nur langsam keimte die Einsicht in den wahren Sachverhalt. Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) wurde mit seinen umfangreichen Untersuchungen *Réflexions sur la théorie algébrique des équations* (Überlegungen zur algebraischen Theorie der Gleichungen) von 1770/71 zum Initiator eines weitreichenden Entwicklungsvorganges. Er untersuchte die von del Ferro, Tartaglia, Cardano, später von Hudde, Tschirnhaus, Euler und Bezout (1730–1783) gegebenen Lösungsverfahren daraufhin, warum sie zum Ziele führen. Er kam zu dem Schluss, dass diese Verfahren bei den (allgemeinen) Gleichungen höheren als vierten Grades jedenfalls versagen müssen. Einen wirklichen Zugang zum Problem werde man finden, wenn man rationale Funktionen der Wurzeln der Ausgangsgleichung auf die Anzahl der Werte untersucht, die sie bei allen möglichen Vertauschungen der Wurzeln annehmen. Dieser Vorstoß – *„eine Art Kombinationsrechnung“*, wie sich Lagrange ausdrückte – weist auf die kommende permutationen-gruppentheoretische Fassung des Auflösungsproblems hin. Ähnlich verfuhr A. Vandermonde (1735–1796), sogar zeitlich noch vor Lagrange [Wußing 1969, S. 49ff.]. Noch aber, auch bei Lagrange und Vandermonde, ging es um die Suche nach einer Methode zur Lösung der allgemeinen Gleichungen in Radikalen. Als erster dürfte Gauß 1799 in seiner Dissertation und nochmals ganz entschieden 1801 in den *Disquisitiones arithmeticae*, Art. 359, die Vermutung ausgesprochen haben, dass Gleichungen höheren als vierten Grades nicht in Radikalen lösbar sind.

> *„Bekanntlich sind alle Bemühungen der grössten Geometer, die allgemeine Auflösung der Gleichungen, welche den vierten Grad übersteigen, oder (um genauer zu definieren, was man will) die Reduction der gemischten Gleichungen auf reine Gleichungen zu finden, bisher stets vergeblich gewesen, und es bleibt kaum zweifelhaft, dass dieses Problem nicht sowohl die Kräfte der heutigen Analysis übersteigt, als vielmehr etwas Unmögliches erreichen will.“*
> [Gauß 1889, S. 433]

Der Beweis wurde erst einige Zeit später, nach Gauß' Dissertation, von Niels Henrik Abel erbracht.

10.3.1 Carl Friedrich Gauß: Konstruierbarkeit regulärer Polygone

„Mstr. Gebhard Diterich Gauß, Bürger und Gaßenschlächter hat mit seiner Ehefrau Dorothea, geb. Benzen, einen Sohn gezeuget den 30ten April . . . “

Dieser (ausschnittweise wiedergegebene) Eintrag vom 4. Mai 1777 dokumentiert die Geburt von Carl Friedrich Gauß. Das Geburtshaus in Braunschweig wurde im 2. Weltkrieg zerstört. Die Mutter wurde sehr alt und hat, fast völlig erblindet, bis 1839 im Haushalt ihres berühmt gewordenen Sohnes gelebt.

Die Begabung des Jungen wurde früh erkannt. Er habe bereits mit 3 Jahren seinen Vater bei einer Lohnabrechnung korrigiert. Und in der Grundschule, in der verschiedene Altersgruppen in einer Klasse vereint saßen, hat der siebenjährige Junge für die vom Lehrer Büttner gestellte Aufgabe, alle Zahlen von 1 bis 100 zu addieren, die richtige Lösung fast sofort gefunden. Während die anderen Mitschüler mühsam über der Addition schwitzten, erkannte Gauß, dass es 50mal die Zahl 101 ergibt: $1+100, 2+99$, usw. – damit ist die Lösung 5050.



Abb. 10.3.1 Geburtshaus von Carl Friedrich Gauß in Braunschweig, im Krieg zerstört [Historische Postkarte, Foto vor 1914]

Büttner und sein Gehilfe Bartels (der später Professor der Mathematik in Russland wurde) stellten Gauß bei Hofe vor, und der Herzog von Braunschweig gewährte finanzielle Unterstützung, zunächst ab 1792 für ein Studium am Collegium Carolinum in Braunschweig, aus dem später die Technische Hochschule hervorging, dann ab 1795 zum Studium an der Universität Göttingen. Eine geradezu sensationelle mathematische Entdeckung am 29. März 1796 veranlasste Gauß, sich für das Studium der Mathematik statt für die alten Sprachen zu entscheiden.

Gauß hatte ein seit der Antike offen gebliebenes Problem abschließend gelöst: Welche regelmäßigen Polygone sind mit Zirkel und Lineal konstruierbar? Die Antike kannte Kreisteilungen für $n = 3, 4, 5, 15$ und alle durch Verdoppelung der Eckenzahl n entstehenden Polygone, z. B. 6, 8, 10, usw. Das Problem der Konstruktion eines beliebigen n-Ecks entspricht der Lösung der Aufgabe, einem Kreis ein regelmäßiges Polygon von n Ecken einzubeschreiben. Benutzt man komplexe Zahlen, so liegen alle Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ auf einem Kreis um den Ursprung mit dem Radius 1. Da andererseits nur Quadratwurzeln mit Zirkel und Lineal konstruiert werden können, erhebt sich die Frage, für welche n sich die Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ durch Schachtelung von Quadratwurzeln darstellen lassen. Für diese n ist das regelmäßige n-Eck dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar. So war die allgemeine Problemsituation für die Lösung der Kreisteilungsgleichung. Über den Morgen des 29. März 1796 berichtet Gauß in einem Brief an Gerling im Jahre 1819:

> *„Durch angestrengtes Nachdenken über den Zusammenhang aller Wurzeln* (der Kreisteilungsgleichung, Wg.) *untereinander nach arithmetischen Gründen glückte es mir bei einem Ferienaufenthalt in Braunschweig am Morgen... (ehe ich aus dem Bette aufgestanden war), diesen Zusammenhang auf das Klarste anzuschauen, so daß ich die spezielle Anwendung auf das 17-Eck und die numerische Bestätigung auf der Stelle machen konnte.“* [Gauß 1957, S. 17]

Am darauffolgenden Tag, dem 30. März 1796, eröffnete Gauß sein *„Mathematisches Tagebuch 1796–1814“* mit der Eintragung *„Principia quibus innititur sectio circuli, ac divisibilitas eiusdem geometrica in septemdecim partes etc.“* (Grundlagen, auf die sich die Teilung des Kreises stützt, und zwar dessen geometrische Teilbarkeit in siebzehn Teile usw.) [Gauß 1981, S. 41].

Bei dieser Gelegenheit ein paar Worte über die bemerkenswerte Geschichte des Mathematischen Tagebuches von Gauß. Der Wissenschaftshistoriker und Mathematiker Paul Stäckel (1862–1919) entdeckte 1898 im Nachlass eines Enkels von Gauß das Tagebuch. Dies war äußerst bedeutsam, weil nun erkennbar und dokumentiert war, welche Entdeckungen (über Andeutungen hinaus) Gauß definitiv gemacht hatte. Da zeigte sich, dass Gauß noch in sehr jungen Jahren tiefliegende Einsichten erzielt hatte. Stäckel gab den Fund an Felix Klein, den Organisator der Herausgabe von Gauß' Werken, weiter; dieser publizierte erste Ergebnisse der Auswertung aus Anlass des 150. Bestehens der Göttinger Akademie (1901).



Abb. 10.3.2 Gauß und die Konstruktion des 17-Ecks mit Zirkel und Lineal (DDR 1977); 17-Eck am Gauß-Denkmal in Braunschweig [Foto Wesemüller-Kock]

Durch Vermittlung seines Gönners, Prof. Zimmermann in Braunschweig, konnte Gauß seine fundamentale Entdeckung schon am 01. Juni 1796 im *Intelligenzblatt der allgemeinen Literaturzeitung* bekannt machen; es war dies die erste Veröffentlichung von Gauß.

„NEUE ENTDECKUNGEN.

Es ist jedem Anfänger der Geometrie bekannt, dass verschiedene ordentliche Vielecke, namentlich das Dreyeck, Fünfeck, Fünfzehneck, und die, welche durch wiederholte Verdoppelung der Seitenzahl eines derselben entstehen, sich geometrisch construiren lassen. So weit war man schon zu EUKLIDS *Zeit, und es scheint, man habe sich seitdem allgemein überredet, dass das Gebiet der Elementargeometrie sich nicht weiter erstrecke: wenigstens kenne ich keinen geglückten Versuch, ihre Grenzen auf dieser Seite zu erweitern.*

Desto mehr, dünkt mich, verdient die Entdeckung Aufmerksamkeit, dass ausser jenen ordentlichen Vielecken noch eine Menge anderer, z. B. das Siebzehneck, einer geometrischen Construction fähig ist. Diese Entdeckung ist eigentlich nur ein Corollarium einer noch nicht ganz vollendeten Theorie von grösserem Umfange, und sie soll, sobald diese ihre Vollendung erhalten hat, dem Publicum vorgelegt werden.

C. F. GAUSS, *a. Braunschweig.*
Stud. der Mathematik zu Göttingen.

Es verdient, angemerkt zu werden, dass Hr. GAUSS *jetzt in seinem 18ten Jahre steht, und sich hier in Braunschweig mit eben so glücklichem Erfolge der Philosophie und der classischen Litteratur als der höheren Mathematik gewidmet hat.*

Den 18. April 96 E. A. W. Zimmermann, Prof.“

[Gauß 1917 b, S. 3]

Die von Gauß gebrauchte Wendung *„eigentlich nur ein Corollarium einer noch nicht ganz vollendeten Theorie von größerem Umfange“* kündigt ein wesentliches Kapitel des epochemachenden Werkes *Disquisitiones arithmeticae* von 1801 an, und zwar die Theorie der Kreisteilung im siebenten Abschnitt.

Gauß konnte sich – nach einiger Zeit der Ungewissheit – weiterhin der finanziellen Unterstützung durch den Herzog Carl Wilhelm Ferdinand von Braunschweig erfreuen. Sie endete freilich mit dem Herbst 1806: Der Herzog war Oberbefehlshaber der preußischen und der mit ihnen verbündeten braunschweigischen Truppen. Diese mussten in der Schlacht von Jena und Auerstedt im Oktober 1806 im Kampf gegen Napoleon eine vernichtende Niederlage hinnehmen; der Herzog erlitt tödliche Verwundungen. Daraufhin nahm Gauß 1807 eine Berufung als Professor für Astronomie an der Göttinger Sternwarte an; darüber war schon 1804 ernsthaft verhandelt worden. Von 1816 an arbeitete und wohnte er dort bis zu seinem Tode. Nach Auskunft seines Biographen W. Sartorius von Waltershausen habe Gauß einmal geäußert,

> *„dass ihm in seiner Jugend die Gedanken in solcher Fülle ununterbrochen zugeströmt seien, dass er ihrer kaum Herr hätte werden und nur einen Teil derselben aufzeichnen können.“*
> [Sartorius von Waltershausen 1856, S. 78]

Das Tagebuch zeugt von diesem Ideenfluss und den ihm schon *„zuströmenden“* Lösungen. Stichworte müssen genügen: Arithmetisch-geometrisches Mittel, Frequenz der Primzahlen, Grundlagen der Geometrie, Methode der kleinsten Quadrate, Konstruktion des 17-Ecks, Teilung der Lemniskate, Theorie der elliptischen Funktionen – soweit bis 1799.

Am 9. 1. 1799 schrieb Gauß an seinen Jugend- und Studienfreund F. Bolyai: Er berichtete, dass der Herzog weitere finanzielle Unterstützung zugesagt habe. Und:

> *„Er* (der Herzog, Wg.) *wünscht ferner, dass ich Dr. der Philosophie werde; ich werde es aber so lange aufschieben, bis mein Werk* (gemeint sind die *Disquisitiones arithmeticae*, Wg.) *fertig ist, wo ich es hoffentlich ohne Kosten und ohne die gewöhnliche Harlekinerie werde werden können.“*
> (Zitiert bei [Biermann 1990, S. 57])

Doch geriet sein Zeitplan durcheinander durch die Schwierigkeiten des Druckes der *Disquisitiones*: Das Manuskript war umfangreicher als vereinbart und Gauß bezeichnet den Drucker als *phlegmatisch*, bei dem Drängen auch nichts helfe. So erschienen die *Disquisitiones* erst 1801 in Leipzig. Inzwischen, am 16. Juli 1799, war Gauß in Helmstedt „*in absentia*“ promoviert worden, unter Verzicht auf eine mündliche Prüfung und die Diskussion von Thesen in lateinischer Sprache (*„Harlekinerie“)*. Der Herzog übernahm die Kosten für die Promotion und die Druckkosten für die Dissertation.

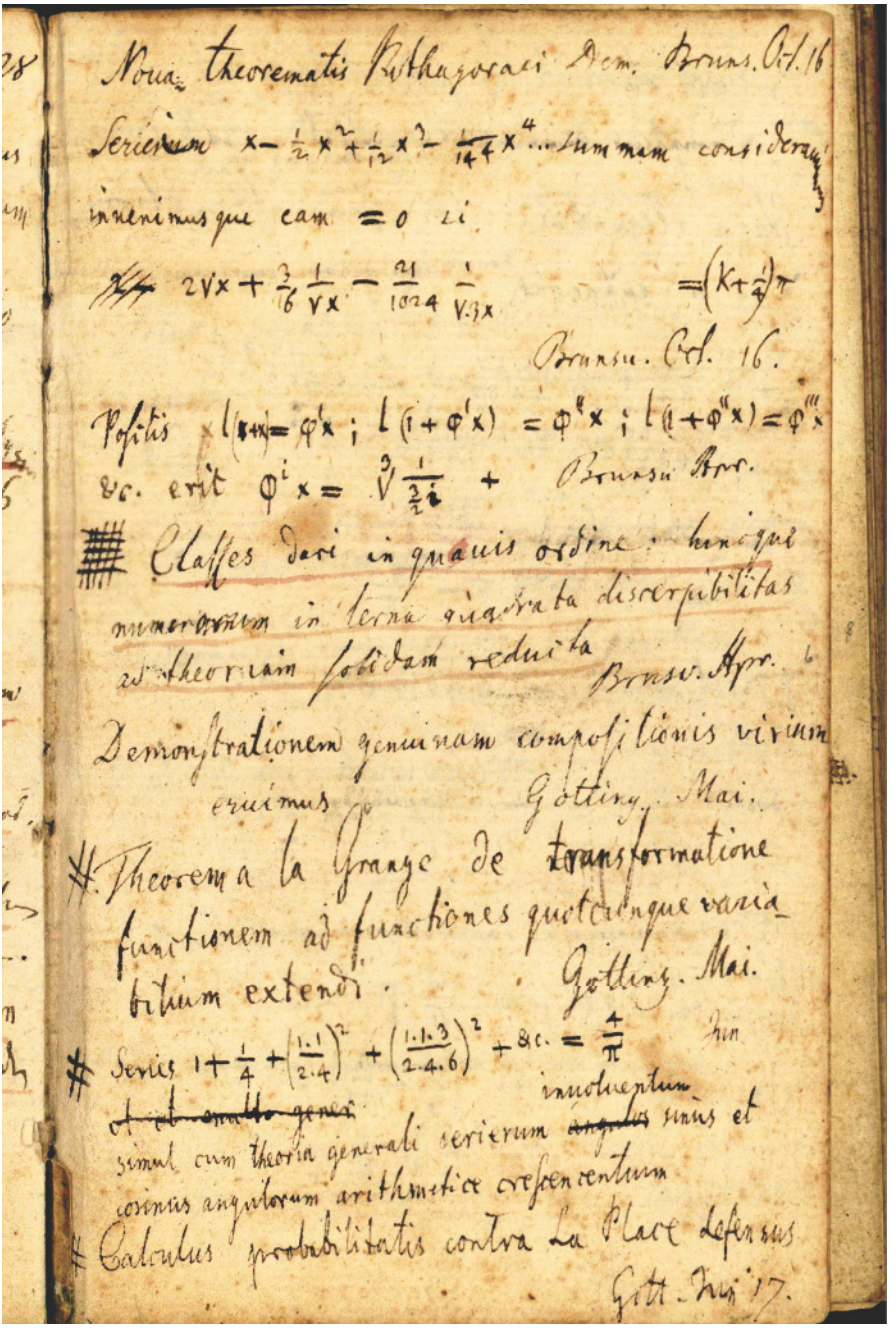


Abb. 10.3.3 Aufzeichnungen im Tagebuch von Gauß (von Doppelseite 6)
[SUB digital Göttingen]

10.3.2 Carl Friedrich Gauß: Fundamentalsatz der Algebra

Die Thematik der Dissertation bezog sich auf ein Zentralproblem der Mathematik, auf einen Beweis für die Existenz einer Wurzel einer algebraischen Gleichung: *„Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolve posse“* (Neuer Beweis des Satzes, daß jede algebraische rationale ganze Funktion einer Veränderlichen in reelle Faktoren des ersten und zweiten Grades zerlegt werden kann). Das Gutachten stammte von dem in Helmstedt wirkenden Johann Friedrich Pfaff (1765–1825), dem bedeutendsten deutschen Mathematiker jener Zeit:

> *„Ich kann von dieser Abhandlung nicht anders als sehr vorteilhaft urteilen, da sie von des Verfassers vorzüglichen Fähigkeiten und gründlichen Einsichten einen überzeugenden Beweis enthält, so daß nach deren demnächst zu erwartenden Abdruck der Kandidat unter diejenigen zu rechnen sein wird, deren Promotion unserer Fakultät zur Ehre gereicht.“* (Zitiert in [Reichardt 1957, S. 19])

In den ersten Kapiteln analysiert Gauß kritisch die Vorarbeiten von d'Alembert, von Euler, von de Foncenex, von Lagrange und macht auf Schwachstellen jener Beweise aufmerksam.

> *„Doch scheint es, als ob die Analytiker etwas zu übereilt und ohne vorangehenden gründlichen Beweis denjenigen Lehrsatz aufgenommen hätten, auf welchem sich fast die gesammte Lehre von den Gleichungen aufbaut, dass nämlich eine jede solche Function wie X* (ganze algebraische Gleichung vom Grade m, Wg.) *stets in m lineare Factoren zerlegt werden könne, oder, was hiermit völlig übereinstimmt, dass jede Gleichung m-ten Grades wirklich m Wurzeln besitze.“*
> [Gauß 1913, S. 4]



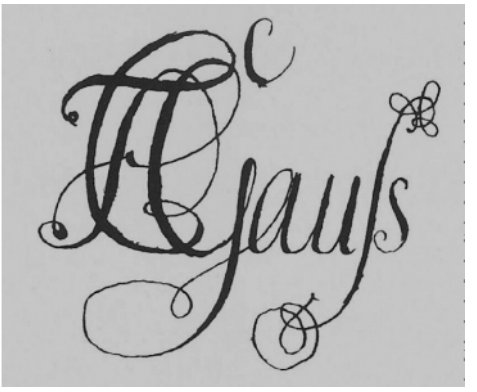


Abb. 10.3.4 Gauß in jungen Jahren; Unterschrift von Gauß

Der Beweis von Gauß wird im Kern geometrisch geführt (im Hintergrund, implizit, wird von der Vorstellung komplexer Zahlen Gebrauch gemacht):

> *„Meinen Beweis werde ich ohne jede Benutzung imaginärer Größen durchführen; obschon auch ich mir dieselbe Freiheit gestatten könnte, deren sich alle neueren Analytiker bedient haben."* [Gauß 1913, S. 5]

Der springende Punkt des Beweises ist der Nachweis der Existenz einer Wurzel, während bisher die Existenz der Wurzeln vorausgesetzt wurde und man nur bewies, dass sie von der Form $a + b\sqrt{-1}$ sind:

> *„... da nun aber durch diesen Beweis selbst unumstösslich dargethan werden soll, dass die Gleichung $X = 0$ wirklich Wurzeln habe, so scheint es nicht erlaubt, die Existenz derselben vorauszusetzen. Ohne Zweifel werden diejenigen, welche das Trügerische der Schlussweise noch nicht durchschaut haben, die Antwort geben: hier solle nicht bewiesen werden, dass der Gleichung $X = 0$ genügt werden könne, (denn der Ausdruck, sie habbe* (sic!) *Wurzeln, will nichts anderes sagen), sondern nur, dass ihr durch Werthe von x, die in der Form $a + b\sqrt{-1}$ auftreten, genügt werden könne; jenes werde als Grundsatz vorausgesetzt. Da man sich aber ausser reellen und imaginären Grössen $a + b\sqrt{-1}$ keine anderen Grössen-Formen vorstellen kann, so ist es nicht ganz klar, worin sich das, was bewiesen werden soll, von dem unterscheidet, was als Grundsatz angenommen wird; ja sogar, wenn es möglich wäre, noch andere Grössen-Formen auszudenken, etwa die Formen F, F', F'', ... so dürfte doch nicht ohne Beweis zugestanden werden, dass jener Gleichung entweder durch einen reellen Werth von x genügt werden könne, oder durch einen von der Form $a + b\sqrt{-1}$, oder von der Form F, oder F' u.s.w."* [Gauß 1913, S. 16f.]

Der Beweis läuft darauf hinaus, dass Gauß zwei Hilfsgleichungen benutzt, die dem Real- bzw. Imaginärteil der vorgelegten Gleichung entsprechen. Der Schnittpunkt der Kurven dieser Hilfsgleichungen definiert eine Wurzel der Gleichung (ausführlich in [Gauß 1913], [Alten et al. 2008, S. 331f.], [Neumann 1980]).

Bekanntlich hat Gauß noch drei weitere Beweise für den Fundamentalsatz der Algebra publiziert, 1815, 1816 und 1849; den letzten aus Anlass seines Goldenen Doktorjubiläums. Der Beweis von 1815 ist rein algebraischer Art (vgl. [Gauß 1913], [Alten et al. 2008, S. 331ff.], [Kochendörffer 1957]). Der vierte Beweis von 1849 benutzt ausdrücklich imaginäre Zahlen:

> *„Gegenwärtig, wo der Begriff der complexen Grössen jedermann geläufig ist, scheint es angemessener, jene Form fahren zu lassen und den Satz so auszusprechen, dass jene Function sich in n einfache Factoren zerlegen lasse, ..."* [Gauß 1913, S. 69]

Dieser vierte Beweis knüpft gedanklich an die Dissertation an.

10.3.3 Carl Friedrich Gauß: Anerkennung der komplexen Zahlen

Bezüglich des Gebrauchs imaginärer (d. h. komplexer) Zahlen fällt auf, wie vorsichtig Gauß in seinen Beweisen damit verfuhr. Zwar waren seit Bombelli und besonders seit Euler komplexe Zahlen benutzt worden, aber ihr volles Heimatrecht als echte Zahlen erhielten sie erst im 19. Jahrhundert, vorwiegend durch die Autorität von Gauß, der eine geometrische, und damit anschauliche Interpretation der komplexen Zahlen gab. Damit verschwand der letzte Rest von Mystizismus und Unklarheit bezüglich der komplexen Zahlen.

Denselben Grundgedanken hatten in anderer Form bereits 1792 der norwegische Geodät Caspar Wessel (1745–1818) und 1806 der Franzose Jean Robert Argand (1768–1822) gehabt.

Mit Recht konnte Gauß im vierten Beweis des Fundamentalsatzes davon sprechen, dass *„der Begriff der complexen Grössen jedermann geläufig“* sei. Er hatte in der Selbstanzeige 1831 zu seiner Veröffentlichung *Theorie der biquadratischen Reste* Gelegenheit genommen, ausführlich die geometrische Veranschaulichung der komplexen Zahlen, also das, was wir heute „Gaußsche Zahlenebene“ nennen, darzulegen.

> *„Der Verf. nennt jede Größe $a+bi$, wo a und b reelle Größen bedeuten und i der Kürze wegen anstatt $\sqrt{-1}$ geschrieben ist, eine complexe ganze Zahl, wenn zugleich a und b ganze Zahlen sind. Die complexen Größen stehen also nicht den reellen entgegen, sondern enthalten diese als einen speziellen Fall, wo $b = 0$, unter sich.“*
> [Gauß 1876, S. 171]

> *„Die Versetzung der Lehre von den biquadratischen Resten in das Gebiet der complexen Zahlen könnte vielleicht manchem, der mit der Natur der imaginären Grössen weniger vertraut und in falschen Vorstellungen davon befangen ist, anstössig und unnatürlich scheinen,*

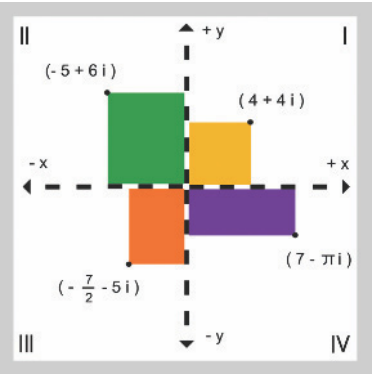


Abb. 10.3.5 Gaußsche Zahlenebene (Ausschnitt aus Briefmarke BRD 1977)

und die Meinung veranlassen, dass die Untersuchung dadurch gleichsam in die Luft gestellt sei, eine schwankende Haltung bekomme, und sich von der Anschaulichkeit ganz entferne. Nichts würde ungegründeter sein, als eine solche Meinung. Im Gegentheil ist die Arithmetik der complexen Zahlen der anschaulichsten Versinnlichung fähig, (...). So wie die absoluten ganzen Zahlen durch eine in einer geraden Linie unter gleichen Entfernungen geordneten Reihe von Punkten dargestellt werden, in der der Anfangspunkt die Zahl 0, der nächste die Zahl 1 u.s.w. vertritt; und so wie dann zur Darstellung der negativen Zahlen nur eine unbegrenzte Verlängerung dieser Reihe auf der entgegengesetzten Seite des Anfangspunktes erforderlich ist: so bedarf es zur Darstellung der complexen Zahlen nur des Zusatzes, dass jene Reihe als in einer bestimmten unbegrenzten Reihe befindlich angesehen, und parallel mit ihr auf beiden Seiten eine unbeschränkte Anzahl ähnlicher Reihen in gleichen Abständen von einander angenommen werde, so dass wir anstatt einer Reihe von Punkten ein System von Punkten vor uns haben, die sich auf eine zweifache Art in Reihen von Reihen ordnen lassen, und zur Bildung einer Eintheilung der ganzen Ebene in lauter gleiche Quadrate dienen.“
[Gauß 1876, S. 174].

Dann folgen weitere Ausführungen, die auf die heute übliche Anordnung der Achsen der komplexen Zahlenebene hinauslaufen. Zum Schluss heißt es bei Gauß:

„Wir haben geglaubt, den Freunden der Mathematik durch diese kurze Darstellung der Hauptmomente einer neuen Theorie der sogenannten imaginären Grössen einen Dienst zu erweisen. Hat man diesen Gegenstand bisher aus einem falschen Gesichtspunkt betrachtet und eine geheimnissvolle Dunkelheit dabei gefunden, so ist dies grossentheils den wenig schicklichen Benennungen zuzuschreiben. Hätte man $+1,\ -1,\ \sqrt{-1}$ *nicht positive, negative, imaginäre (oder gar unmögliche) Einheit, sondern directe, inverse, laterale Einheit genannt, so hätte von einer solchen Dunkelheit kaum die Rede sein können.“*
[Gauß 1876, S. 177f.]

10.3.4 William Rowan Hamilton: Arithmetische Interpretation der komplexen Zahlen

Noch ein anderer Ansatz zur Anerkennung der komplexen Zahlen als vollwertige Zahlen geht auf A. L. Cauchy zurück.

Bei Cauchy hatte die Idee angeklungen, die komplexen Zahlen als Paare reeller Zahlen aufzufassen. Doch erst der bedeutende irische Mathematiker und Astronom William Rowan Hamilton tat diesen Schritt explizit und schuf so eine Theorie der komplexen Zahlen mit Hilfe definitorisch festgelegter Rechenoperationen. Er deutete komplexe Zahlen als Paare $(a_1,\ a_2)$, $(b_1,\ b_2)$,

... reeller Zahlen und definierte Addition und Multiplikation durch die Relationen

$$\begin{aligned}(a_1, a_2) + (b_1, b_2) &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2)\ , \\ (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) &= (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)\ .\end{aligned}$$

Auf Grund dieses Ansatzes gelang Hamilton der Nachweis, dass, modern gesprochen, die Zahlenpaare hinsichtlich der so definierten Operationen einen Körper bilden, der zum Bereich der von Gauß geometrisch definierten Zahlen isomorph ist und den man den Körper der komplexen Zahlen nennt. Dieses Ergebnis fand Hamilton 1833; im Jahre 1837 wurde es unter dem Titel *„Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; ...“* publiziert.

Bekanntlich entsteht nur bei obiger Definition der Multiplikation ein kommutativer Körper. Es scheint sicher, dass schon Gauß diesen Sachverhalt erkannt hat. Erst später gelang jedoch der Beweis, dass der Körper der komplexen Zahlen der größte Erweiterungskörper der reellen Zahlen ist, denn eine abermalige Erweiterung ist nur unter dem Verzicht auf die Kommutativität der Multiplikation möglich und führt zu dem von Hamilton entdeckten Schiefkörper der Quaternionen (siehe Abschnitt 10.3.9). Einen vollständigen Beweis für diesen Sachverhalt gab allerdings erst Georg Frobenius (1849–1917) im Jahre 1878.

Hamiltons Untersuchungen mündeten zur Mitte des 19. Jahrhunderts in Studien über nicht kommutative Verknüpfungen. Die von ihm 1843 aufgebaute Theorie der Quaternionen (der hyperkomplexen Zahlen mit vier Einheiten) erreichte durch seine Bemühungen und unter den Händen dogmatischer Schüler eine weit über die unbestreitbare Bedeutung hinausgehende Stellung nach Art eines Glaubensbekenntnisses, einer *„orthodoxen Lehre des mathematischen Credo“* (F. Klein), indem versucht wurde, die Theorie der Quaternionen zur Basistheorie der gesamten Geometrie, womöglich der Mathematik überhaupt zu machen.

Die auf lange Sicht positive Wirkung von Hamiltons Vorstoß lag eher in der Richtung, dass die Verknüpfungen (zwischen abstrakt aufgefassten Elementen) selbst zum Gegenstand der Untersuchungen und so zu einer der Quellen der Struktur-Mathematik wurden (darüber wird im Zusammenhang in Kap. 11.4 und 11.7 berichtet).

10.3.5 Paolo Ruffini, Niels Henrik Abel: Unmöglichkeit der Auflösbarkeit der Gleichung fünften Grades in Radikalen

Die Überlegungen von Lagrange bezüglich eines möglichen Weges zur Auflösung algebraischer Gleichungen höheren als vierten Grades blieben weithin unbeachtet, ebenso wie die von Vandermonde, wiewohl der Ansatz – permutationentheoretischer Art – sich als richtig erweisen sollte.

So erfolgte der nächste wesentliche Schritt zum Auflösungsproblem durch den Italiener Paolo Ruffini (1765–1822). Er hatte an der Universität von Modena Medizin, Philosophie und Literatur studiert und hielt, noch als Student,

1787/88 Vorlesungen über Mathematik. Schon 1788 wurde er zum Professor für Grundlagen der Mathematik ernannt. Zugleich übte er einen medizinischen Beruf aus. Nach einigen politischen Turbulenzen und dem Einmarsch der französischen Truppen unter Napoleon setzte Ruffini seine medizinische Tätigkeit und seine Studien über die Nichtauflösbarkeit höherer Gleichungen fort.

Eine erste Publikation (ein Lehrbuch) erschien 1799 – zufällig im Jahr der Promotion von Gauß – unter dem Titel *Teoria generale delle equazioni* (Allgemeine Theorie der Gleichungen). Diese Arbeit wurde in Diskussionen mit Freunden und Kollegen schrittweise verbessert zu *Riflessioni interno alla soluzione delle equazioni algebriche generali* (Gründliche Reflexionen über die Auflösung der allgemeinen algebraischen Gleichungen, 1813). Trotzdem wurden seine Arbeiten mit Skepsis aufgenommen, nur Cauchy äußerte sich anerkennend. (Zu Einzelheiten siehe [Wußing 1969, S. 56f.] und [Burkhardt 1882].)

Mit Ruffini wird das nur keimhafte Stadium der Erkenntnis vom Zusammenhang zwischen Auflösungstheorie algebraischer Gleichungen und Permutationentheorie überschritten. Die Theorie der Permutationen ist bei Ruffini nicht mehr bloßes rechnerisches Hilfsmittel, sondern bereits tragender Bestandteil der Auflösungstheorie. Damit ging Ruffini weit über Lagrange hinaus, den er lobend erwähnt hat. Bereits in der *„Teoria. . . "* von 1799, in der eine Gesamtdarstellung der Gleichungslehre beabsichtigt ist, wird der Fortschritt erkennbar.

Das Resümee seiner Arbeiten: Ruffini behandelte die Gleichungen bis zum vierten Grade traditionell. Für die Gleichung fünften Grades bestimmte er (unsere Terminologie benutzend) fast alle Untergruppen der symmetrischen Gruppe $_5$. So gelangte er zu einem, allerdings stellenweise noch lückenhaften Beweis für die Nichtauflösbarkeit der Gleichung fünften Grades in Radikalen. Die entsprechenden Beweisversuche für die allgemeine Gleichung höheren als fünften Grades sind dagegen unvollkommen geblieben.

Es sollte nicht unerwähnt bleiben, dass Ruffini die Grundlagenschwierigkeiten der Infinitesimalkalküle bei Newton und Leibniz kritisch betrachtete, Beiträge zur Unsterblichkeit der Seele publizierte, kritische Anmerkungen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff von Laplace machte und die Symptome einer Typhus-Erkrankung genauestens beschrieb.

Ruffini und seine Ergebnisse zur Lösung von Gleichungen blieben verhältnismäßig lange unbekannt. So erfuhr Niels Henrik Abel (1802–1829) erst um 1826 von Ruffini, nachdem er selbst 1824 die Unmöglichkeit der Auflösung der Gleichung fünften Grades bewiesen hatte. Abel war stark inspiriert von Gauß' Theorie der Kreisteilungsgleichung in den *Disquisitiones,* und er war auch seit seiner Schulzeit gut vertraut mit den einschlägigen Abhandlungen von Lagrange.

Wenn es zutrifft, dass jung stirbt, wen die Götter lieben, so haben die Götter Abel und Galois geliebt. Der Norweger Abel stammt aus einer Pasto-

renfamilie und wuchs in finanziell beengten Verhältnissen auf; der Vater hatte in Copenhagen studiert. Niels Henrik war das zweite Kind. Der Vater war engagiert in einer nationalen Bewegung für die Unabhängigkeit Norwegens von Dänemark, scheiterte aber politisch auf der ganzen Linie.

Niels Henrik und seine Brüder erhielten ihre erste Unterweisung vom Vater; 1815 ging der Junge an die Kathedralschule in Christiania (dem späteren Oslo). 1817 kam ihm ein dubioser Zufall zu Hilfe: Sein Mathematiklehrer hatte einen Schüler so misshandelt, dass dieser an den Folgen starb. Der Nachfolger des Lehrers wurde Bernt Michael Holmboe (1795–1850), der die hohe mathematische Begabung Abels erkannte und ihm die Lektüre von Euler, Lagrange und Laplace ermöglichte. Noch während der Schulzeit war Abel dem Irrtum erlegen, er habe die Auflösung der Gleichung fünften Grades gefunden – bald erkannte er den Fehler. Aber auch auf das Forschungsgebiet der elliptischen Transzendenten wurde er hingewiesen, wo er es später zur Meisterschaft bringen sollte.

Der mittellose Abel bezog 1821 die neugegründete Universität Oslo; er erhielt eine Freistelle und fand gastliche Aufnahme in der Familie des Astronomen C. Hansteen (1784–1873). Ein Reisestipendium führte ihn 1825 nach Berlin (Begegnung mit A. L. Crelle), nicht nach Göttingen (Gauß galt als unnahbar) und 1826 nach Paris, wo er, obwohl hochproduktiv, dennoch nicht Zugang zu den führenden dortigen Mathematikern fand, insbesondere nicht zu Cauchy. Nach der Rückkehr konnte Abel in Norwegen keine befriedigende Anstellung finden, eine durch Crelle vermittelte Berufung nach Berlin erreichte ihn nicht mehr. Er war am 06. 04. 1829 in Froland (Norwegen) an Tuberkulose gestorben.

Am 1. Januar 2002 stiftete der norwegische Storting einen Niels Henrik Abel Preis, im Zusammenwirken mit der Norwegischen Akademie der Wissenschaften und Künste. Das Ziel der Stiftung besteht unter anderem darin, den Status der Mathematik in der Gesellschaft anzuheben und Kinder und junge Menschen für diesen Gegenstand zu interessieren.



Abb. 10.3.6 Niels Henrik Abel (Norwegen 2002)

Der erste Preisträger war der Franzose Jean-Pierre Serre (geb. 1926); in einer feierlichen Zeremonie in der Aula der Universität von Oslo überreichte ihm der norwegische König Harald V. den Preis.

Hier sollen zunächst Abels algebraische Leistungen gewürdigt werden. Ende 1823 gelangte Abel zu einer ersten wichtigen Einsicht, dass die Auflösung der Gleichung fünften Grades in Radikalen unmöglich ist (von Ruffini wusste Abel zu dieser Zeit nichts). Von Crelle (1780–1855) freundschaftlich aufgenommen, verbrachte Abel – nach seinem Selbstzeugnis – in Berlin seine glücklichste Zeit und veröffentlichte in dem von Crelle 1826 gegründeten *Journal für die reine und angewandte Mathematik* einige seiner bedeutenden Arbeiten. *„Crelles Journal“*, wie es alsbald genannt wurde, entwickelte sich bald zu einer führenden mathematischen Fachzeitschrift. Im Brief vom 16. Jan. 1826 an Holmboe heißt es:

> *„Seit meiner Ankunft in Berlin habe ich mich mit der Lösung des folgenden allgemeinen Problems beschäftigt: Alle Gleichungen zu finden, welche algebraisch auflösbar sind. Ich bin damit noch nicht ganz zu Ende gekommen, soweit ich aber darüber zu urteilen vermag, werde ich Erfolg haben. So lange der Grad der Gleichung eine Primzahl ist, ist die Schwierigkeit nicht so gross, wenn dagegen jener eine zusammengesetzte Zahl ist, hat der Teufel sein Spiel.“*
> [Abel/Galois 1889, S. 140]

Im ersten Band von Crelles Journal (1826) veröffentlichte Abel die bedeutende Abhandlung, dass die allgemeine Gleichung höheren als vierten Grades nicht in Radikalen lösbar ist: *Démonstration de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales qui passent le quatrième degré* (Beweis der Unmöglichkeit der algebraischen Auflösung der allgemeinen Gleichungen, welche den vierten Grad übersteigen). Der Beweis knüpft an frühere permutationentheoretische Vorarbeiten an. Der Kernsatz lautet:

> *„Wenn eine Gleichung algebraisch auflösbar ist, so kann man immer der Wurzel eine solche Form geben, dass sämtliche algebraischen Functionen, aus denen sie zusammengesetzt ist, sich ausdrücken lassen durch rationale Functionen der Wurzeln der gegebenen Gleichung.“*
> [Abel/Galois 1889, S. 140]

In Band 4 von Crelles Journal erschien eine weitere bedeutende Arbeit von Abel, der sich schon seit Spätherbst 1825 mit der Frage befasst hatte, die Klasse aller Gleichungen zu bestimmen, die durch Radikale lösbar sind. Dahin gehört, wie Gauß demonstriert hatte, die Kreisteilungsgleichung.

Die Abhandlung *Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement*(Abhandlung über eine besondere Klasse algebraisch auflösbarer Gleichungen) wurde 1828, 1829 gedruckt. Dort heißt es:



Abb. 10.3.7 Abel-Denkmal in Oslo [Foto Alten]

„Obgleich die algebraische Auflösung der Gleichungen im allgemeinen nicht möglich ist, so giebt es wenigstens besondere Gleichungen jeden Grades, welche eine derartige Auflösung zulassen. Dies sind zum Beispiel die Gleichungen der Form $x^n - 1 = 0$. Die Auflösung dieser Gleichungen beruht auf gewissen Relationen, die zwischen den Wurzeln bestehen. Ich versuchte diese Methode zu verallgemeinern (...) Allgemein gelang es mir, das folgende Theorem zu beweisen. Wenn die Wurzeln einer Gleichung irgend welchen Grades unter einander derartig verbunden sind, dass alle Wurzeln rational durch eine von ihnen ausgedrückt werden können, welche wir mit x bezeichnen, und wenn man ferner, falls man durch θx und $\theta_1 x$ irgend zwei beliebige Wurzeln bezeichnet, $\theta\theta_1 x = \theta_1\theta x$ hat, so ist die Gleichung, um die es sich handelt, immer algebraisch auflösbar.“ [Abel 1900, S. 3f.]

Abels Beweisgedanke verläuft in moderner Sprechweise kurz folgendermaßen: Es sei $\varphi(x) = 0$ eine irreduzible Gleichung vom Grade $n (n = \alpha_1^{\nu_1}\alpha_2^{\nu_2}\ldots\alpha_\omega^{\nu_\omega})$ mit den Wurzeln $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$. Nach Voraussetzung lassen sich sämtliche Wurzeln als rationale Funktionen einer von ihnen, etwa von x_1, darstellen. Dann hat man die n Wurzeln in der Form $x_1 = \theta_1(x_1),\ x_2 = \theta_2(x_1),\ \ldots,\ x_n = \theta_n(x_1)$, wo θ_1 die identische Abbildung bedeutet. Ersetzt man in diesen rationalen Funktionen $\theta_k,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, die Wurzel x_1 durch eine andere Wurzel x_i, so beweist Abel, dass auch die $\theta_k(x_i),\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, für alle $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ genau die n Wurzeln der Gleichung $\varphi(x) = 0$ darstellen, abgesehen von der Reihenfolge. Die Wurzeln $x_1 = \theta_1(x_i),\ \theta_2(x_i),\ \ldots,\ \theta_n(x_i)$ sind also eine Permutation der Wurzeln $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$. Abel beweist nun – und das ist das Kernstück –, dass es auf die Art der solcherart zu betrachtenden Vertauschungen ankommt. Wir sagen dafür heute: Wenn die so definierte Gruppe kommutativ ist – für die Kreisteilungsgleichung ist sie sogar zyklisch – dann lässt sich die Auflösung der Gleichung $\varphi(x) = 0$ im Sinne des oben zitierten Satzes auf die Auflösung von Hilfsgleichungen niederer Grade zurückführen; und jede dieser Hilfsgleichungen ist durch Radikale lösbar. Von hierher kommt die Bezeichnung „Abelsche Gruppe“ für eine kommutative Gruppe. Doch stellt Abel die zur Gleichung gehörende Gruppe nicht auf – das blieb Galois vorbehalten –, aber er verwendet das Wort *„le groupe“*, allerdings nicht als mathematischen Fachausdruck, sondern nur im Sinne des normalen Wortgebrauches als „Zusammenfassung“. So heißt es in einem Passus: *„... les racines de l'équation seront partagées en plusieurs groupes ...“*. Auch bei Galois nahm *„le groupe“* erst im Fortgang seiner Studien den Rang eines mathematischen Fachausdruckes an. Dazu Auszüge aus zwei Briefen von Abel an seinen Lehrer und späteren Freund und Förderer Bernt Michael Holmboe. Im Brief vom 24. Oktober 1826 (aus Paris) steht:

„... Ich arbeite gegenwärtig an der Theorie der Gleichungen, meinem Lieblingsthema, und es ist mir endlich gelungen, den Weg zur Auflösung des folgenden allgemeinen Problems zu finden: Die Form al-

ler algebraischen Gleichungen zu finden, welche algebraisch aufgelöst werden können“. [Abel/Galois 1889, S. 140]

Im Brief vom Dezember 1826 (aus Paris) heißt es:

„... Ebenso werde ich an Gergonne eine grosse Abhandlung über die elliptischen Functionen schicken, welche eine Menge merkwürdiger Sachen enthält, die, wie ich mir schmeichle, nicht verfehlen werden, auf manchen Leser durch das und jenes einen Eindruck zu machen. Unter anderem handelt sie von der Teilung des Bogens der Lemniskate. Du wirst sehen, wie hübsch das ist. Ich habe gefunden, dass man mit Lineal und Zirkel die Lemniskate in $2^n + 1$ *gleiche Teile teilen kann, wenn diese Zahl eine Primzahl ist“.*
[Abel/Galois 1889, S. 141]

Während seines Pariser Aufenthaltes 1826 hat Abel eine umfangreiche Abhandlung *Mémoire sur une propriété générale d'une classe très-étendue de fonctions transcendantes* (Abhandlung über eine sehr ausgedehnte Klasse von transzendenten Funktionen) im Zusammenhang mit den zu seinen algebraischen Arbeiten parallel laufenden Studien zu elliptischen Funktionen niedergeschrieben. Dieses *„Mémoire“* wurde der Pariser Akademie übergeben; Cauchy war Vorsitzender der Prüfungskommission. Doch es ging verloren, wurde erst 1830 nach intensiver Suche wiederentdeckt, erst 1841 gedruckt, ging abermals verloren bis es 1952 in Florenz wiedergefunden wurde. Es handelt sich um eine wesentliche Verallgemeinerung des Additionstheorems der elliptischen Integrale.



Abb. 10.3.8 Niels Henrik Abel: Gedenkstein und Grabmal, am Hüttenwerk bzw. auf dem Friedhof in Froland [Foto Schlote]

10.3.6 Evariste Galois: Gruppentheoretische Formulierung des Auflösungsproblems

Die Galoische Theorie gehört wegen ihrer Schönheit, ihrer Schwierigkeit und wegen ihrer Tiefe zu den besonders eindrucksvollen Kapiteln der Mathematik. Galois, der auf republikanischer Seite mit Elan gegen die Monarchie kämpfte, bahnte auch im Mathematischen eine Umorientierung an; hier erfuhr die Wendung zum strukturellen Denken nachhaltige Impulse trotz seines frühen Todes, unausgereifter Manuskripte und auch unübersehbarer anarchistischer Züge, selbst im Bereich der Wissenschaft (vgl. [Wußing 1969, S. 73ff.], R. Taton in [DSB 1970–1980, Bd. V]).

In seinen *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert* schreibt Felix Klein: Um 1830 leuchtete ein neuer Stern von ungeahntem Glanz am Himmel der reinen Mathematik auf, *„um freilich, einem Meteor gleich, sehr bald zu verlöschen: Évariste Galois."* [Klein 1979, S. 88]

Galois wurde 1811 in der kleinen Stadt Bourg-la-Reine geboren; der Vater war liberal und antiklerikal eingestellt. Als Bürgermeister beging er 1829 Selbstmord als Folge politischer Intrigen. Galois war ein sehr guter Schüler, verfehlte jedoch zweimal die Aufnahme in die École Polytechnique, unter anderem, weil der Prüfer das Talent von Galois nicht erkannte. So führte Galois seine Studien weiter am Collège Louis-le-Grand, wo er, gefördert durch einen verständnisvollen Lehrer, sich mit Legendre und Lagrange beschäftigte. Im März 1829 erschien eine erste Abhandlung. 1830 trat er in die sog. Vorbereitungsschule (École Normale) ein und nahm als Student an der Revolution auf Seiten der Republikaner teil; daraufhin wurde er aus der École Normale ausgeschlossen. Ein öffentlicher *„Trinkspruch"* am 9. Mai 1831 – mit Drohung gegen den sog. *„Bürgerkönig"* Louis Philippe – führte zur Verhaftung von Galois. Im Gefängnis schrieb er zwei mathematische Abhandlungen, wurde wegen Waffenbesitzes erneut, zu sechs Monaten Gefängnis, verurteilt. Er wurde im April 1832 entlassen, fiel aber am 31. Mai 1832 einem dubiosen, vermutlich inszenierten Duell zum Opfer.

Nach einigen Arbeiten, die noch nicht das heranwachsende Genie erkennen lassen, reichte Galois Anfang 1831 eine große, bedeutende Arbeit bei der Akademie ein, über die Bedingung zur Lösung von Gleichungen durch Wurzelgrößen. Er beschreibt den wissenschaftlichen Gewinn folgendermaßen:

> *„Man wird hier eine allgemeine Bedingung finden, welcher jede durch Wurzelgrößen auflösbare Gleichung genügt, und welche umgekehrt über ihre Auflösbarkeit Gewissheit giebt. Die Anwendung derselben wird nur auf die Gleichungen, deren Grad eine Primzahl ist, gemacht. Nachstehend gebe ich den Satz an, der durch meine Untersuchung geliefert wird.*
> *Damit eine Gleichung von einem Primzahlgrade, welche keine commensurablen Teiler hat, durch Wurzelgrößen lösbar sei, ist notwendig und hinreichend, dass sämtliche Wurzeln rationale Functionen irgend zweier von ihnen seien."* [Abel/Galois 1889, S. 116]



Abb. 10.3.9 Evariste Galois (Frankreich 1984); Porträt von Galois, gezeichnet von seinem Bruder

Ungeduldig wartete Galois auf Antwort und wandte sich mit einem von Bitternis geprägten Brief im März 1831 an den Präsidenten der Akademie:

> *„Da diese Aufgabe* (Kriterium für die Lösbarkeit algebraischer Gleichungen, Wg.) *bisher den Mathematikern wenn nicht unmöglich, so doch äußerst schwierig erschien, hat die Kommission a priori angenommen, daß ich diese Aufgabe nicht gelöst haben könne; in erster Linie deshalb, weil ich Galois heiße, und außerdem, weil ich Student war.“* (Deutsch zitiert nach [Infeld 1954, S. 238])

Im Oktober 1831 erhielt Galois doch Antwort, allerdings niederschmetternd, zudem war er im Gefängnis: die Arbeit von Galois sei

> *„weder genügend klar ausgearbeitet, um (...) ein Urteil über ihre Schlüssigkeit zu ermöglichen. (...) Man kann daher warten, bis der Autor eine vollständige Fassung seiner Arbeit veröffentlicht, ehe man sich eine endgültige Meinung bildet.“*
> (Deutsch zitiert nach [Infeld 1954, S. 241])

Die Folge: Wütende Reaktionen von Galois, unter anderem:

> *„... Ich schwöre, daß ich den Männern, die im Staat und in der Wissenschaft prominent sind, alles eher als Dank schulde.“*
> (Deutsch zitiert nach [Infeld 1954, S. 238])

Ende April 1832 wurde Galois aus dem Gefängnis entlassen. Das Duell – die Hintergründe sind noch nicht völlig aufgeklärt – fand am 30. Mai statt; er wurde schwer verwundet zurückgelassen und starb am 31. Mai.

Am Vorabend des Duells, am 29. Mai 1832, schrieb Galois an seinen Freund Auguste Chevalier eine Art wissenschaftliches Testament, in aller Hast; er konnte nur die Hauptgedanken zur Auflösungstheorie und zur Theorie der elliptischen Funktionen skizzieren. Der Brief endet mit den beschwörenden Worten:

„Es ist mir häufig in meinem Leben geglückt, Sätze im Voraus zu verkünden, von denen ich noch keine Gewissheit hatte, aber alles, was ich hier geschrieben habe, ist seit bald einem Jahr in meinem Kopfe, und es liegt zu sehr in meinem Interesse, mich nicht zu irren, damit man mich nicht verdächtigt, Sätze ausgesprochen zu haben, für welche ich nicht den vollständigen Beweis besessen hätte.
Bitte öffentlich Jacobi und Gauss, ihr Urtheil abzugeben – nicht über die Richtigkeit, sondern über die Wichtigkeit der Sätze. (...)
Am 29. Mai 1832 *E. Galois“*
[Abel/Galois 1889, S. 114]

Der entscheidende Grundgedanke von Galois bestand in einer genialen Idee: in der Einsicht in die Struktur der Lösungen einer algebraischen Gleichung. Dies gestattete es, eine vollständige Auflösungstheorie algebraischer Gleichungen zu konzipieren.

Galois ordnete jeder algebraischen Gleichung eine eindeutig bestimmte Permutationsgruppe zu. An ihr kann man wie in einem Spiegel die Haupteigenschaften der Gleichung ablesen, insbesondere die, ob eine Gleichung in Radikalen lösbar ist. Dazu muß man besondere, ausgezeichnete Untergruppen – heute im Allgemeinen als Normalteiler bezeichnet – der Gruppe der Gleichung kennen. Falls also die Struktur der Gruppe der Gleichung hinsichtlich ihrer Normalteiler bekannt ist, so ist auch die Struktur der Gleichungswurzeln bekannt.

So hat beispielsweise die allgemeine algebraische Gleichung des Grades n als Galoische Gruppe die symmetrische Gruppe $_n$ der Ordnung $n!$. Die Untersuchung ihrer Normalteiler zeigt dann, dass für $n > 4$ die Gleichung nicht mehr in Radikalen auflösbar ist.

Damit hatte Galois ein jahrhundertealtes Problem bewältigt, freilich mit Methoden und Überlegungen (zudem in fast aphoristischer Form), die der Mehrzahl der damaligen Mathematiker unerwartet, ja geradezu fremdartig vorkommen mussten. Abel hätte natürlich diese faszinierenden Vorstellungen sofort verstehen und würdigen können, war aber wenige Jahre zuvor unter ebenfalls tragischen Begleitumständen verstorben.

Der Bruder Alfred von Evariste Galois konnte noch den Brief an Chevalier zum Druck bringen; dies scheint jedoch keine Wirkung ausgelöst zu haben. Durch Familienbeschluß gelangte der Nachlaß von Galois schließlich in die Hände des hervorragenden Mathematikers Joseph Liouville (1809–1882), der 1846 die wichtigen verfügbaren Arbeiten von Galois herausgab. Dadurch wurde die Verbindung zwischen der Auflösungstheorie und der parallel dazu entwickelten Permutationstheorie (darüber wird im folgenden Abschnitt berichtet) hergestellt.

Alle Zeugnisse der Folgejahre stimmen darin überein, dass die Lücken bei Galois beträchtlich seien. Sie wurden nach und nach geschlossen, durch eine ganze Reihe von Mathematikern in Deutschland, Italien, England und

Frankreich: Th. Schönemann, L. Kronecker, G. Boole, A. Cayley, J. Sylvester, E. Betti, J. Bertrand, J.-A. Serret, (vgl. [Wußing 1969, S. 86ff.]).

Die entscheidende Wendung zur vollen Anerkennung der gruppentheoretisch begründeten Galoischen Auflösungstheorie verdankt man Camille Jordan. Er verfasste 1865 und 1869 zwei Kommentare zu Galois und schließlich 1870 den *Traité des substitutions et des équations* (Abhandlung über Permutationen und Gleichungen). Dort arbeitete Jordan die fundamentale Rolle der Normalteiler für die Auflösbarkeit der Gleichungen heraus und gab im ersten Teil, im Anschluß an Cauchy und Serret, eine systematische Theorie der Permutationen (Substitutionen).

Allerdings hat Jordan noch am konkreten Begriff der Gruppe von Substitutionen festgehalten und noch nicht den Schritt zum abstrakten Gruppenbegriff vollzogen, obwohl er die Isomorphie von Permutionsgruppen mit Transformationsgruppen sehr wohl bemerkt hat. Erst auf Grund der abstrakten Auffassung konnte Otto Hölder (1859–1937) 1889 den Satz über die Isomorphie der Faktorgruppen bei verschiedenen Kompositionsreihen beweisen und damit die allerletzte Lücke der Galoischen Auflösungstheorie beseitigen.

Im Vorwort zum *„Traité“* würdigt Jordan die Verdienste von Galois:

> *„Galois war dazu ausersehen, die Theorie der Gleichungen auf ein sicheres Fundament zu stellen (...). Das Problem der Auflösung, die früher der einzige Zweck der Theorie der Gleichungen zu sein schien, erscheint nun als das erste Glied einer langen Kette von Fragen, die sich auf die Transformation irrationaler Zahlen und auf ihre Einteilung beziehen. Indem Galois seine allgemeinen Methoden auf diese besondere Aufgabe anwandte, fand er ohne Schwierigkeiten die charakteristische Eigenschaft der Gruppen von Gleichungen, die durch Wurzelgrößen lösbar sind. Doch in der Hast der Formulierung ließ er mehrere grundlegende Lehrsätze ohne ausreichende Beweise.*
> *(...) Es gibt drei grundlegende Begriffe (...): den der Primitivität, auf den schon in den Werken von Gauß und Abel hingewiesen wurde; den der Transitivität, der bei Cauchy auftaucht; und schließlich die Unterscheidung zwischen einfachen und zusammengesetzten Gruppen. Der letztere Begriff, der wichtigste von den dreien, ist Galois zu verdanken.“* (Deutsch zitiert nach [Infeld 1954, S. 325f.])

Jordan hätte, wie wir es heute tun, den Beitrag von Galois für die Theorie der endlichen Körper und überhaupt zur heraufziehenden Strukturmathematik anfügen können.

Im Jahre 1895 feierte die École Normale ihr hundertjähriges Bestehen, jene Anstalt, deren Student Galois einst gewesen war und die ihn wegen seiner politischen Aktivitäten ausgestoßen hatte. Es hätte keine schönere Würdigung der wissenschaftlichen Leistung von Galois geben können als den Beitrag von Sophus Lie *Der Einfluß von Galois auf die Entwicklung der Mathematik.*

Lie hatte selbst im Anschluß an das Grundsätzliche bei Galois hervorragende Ergebnisse zur Theorie der Transformationsgruppen und der Theorie der Differentialgleichungen erzielen können. Die Aufzählung und die lebendige Schilderung aller jener Gebiete der Mathematik, die durch die Ideen von Galois so stark beeinflusst worden sind, sind wohl das schönste und würdigste Denkmal, das dem genialen Mathematiker und glühenden Patrioten Galois gesetzt worden ist.

10.3.7 Augustin Louis Cauchy: Theorie der Permutationen

Nachzuholen ist eine Schilderung der Entwicklung der Theorie der Permutationen, deren Einfluss schon mehrfach zutage getreten ist (vgl. [Wußing 1969, S. 60ff.], [Nový 1973]).

Noch das Mathematische Wörterbuch von G. S. Klügel aus dem Jahre 1803 enthält weder die Stichworte *„Permutation“* noch *„Substitution“*. Erste Ansätze einer Beschäftigung mit Permutationen finden sich bei dem Engländer E. Waring (1734–1798) und in der kombinatorischen Schule des Leipziger Mathematikers C. F. Hindenburg (1741–1808). Weitere permutationstheoretische Betrachtungen finden sich, wie berichtet, bei Lagrange, Vandermonde und Ruffini sowie bei Abel.

So kommt das Hauptverdienst der Begründung einer ausgebauten Theorie der Permutationen Augustin-Louis Cauchy zu; auf ihn wird noch mehrfach eingegangen. Cauchy hat eine reiche Fülle von Arbeiten zur Permutationen-(Substitutionen-) Theorie hinterlassen. Eine erste Phase begann 1812, eine zweite 1844, d. h. zwölf Jahre nach dem Tode von Galois und zwei Jahre vor der Veröffentlichung wesentlicher Schriften von Galois. Die erste Phase bewegt sich sozusagen noch im Traditionellen, z. B. werden die Werte einer Funktion bei Vertauschung der Variablen untersucht. Die zweite Phase dagegen hat schon echt gruppentheoretischen Charakter; die Elemente solcher Gruppen (Cauchy spricht von *„systèmes de substitutions“*) sind allerdings noch konkret, eben Permutationen. Dazu gibt es bei Cauchy eine entsprechende Terminologie; wir sprechen heute von Gruppe, Ordnung einer Gruppe, Grad einer Permutationsgruppe, Index einer Gruppe und Untergruppe.

10.3.8 Determinanten und Matrizen

Hier können nur einige weitere markante Erscheinungen und Strömungen der Algebra jenes Zeitraumes angedeutet werden. Ausführlichere Darstellungen findet man in [Alten et al. 2008], [Wußing 1989b]. Zunächst einige Bemerkungen zur Theorie der Determinanten und Matrizen.

Die Auflösung linearer Gleichungssysteme gehört zu den ältesten mathematischen Problemen und ist nachweisbar in der altchinesischen und japanischen Mathematik, in der frühen europäischen Mathematik und in der Renaissance. Es scheint, dass erst Leibniz eine allgemeine Lösungsmethode angestrebt hat und dabei zu Determinanten gelangt ist. Im Jahre 1693

gab er auch Beispiele von Gleichungssystemen mit allgemeinen Koeffizienten und verwendete die Indexschreibweise. Die Leibnizschen Ansätze fanden aber keine Verbreitung.

Im Jahre 1750 veröffentlichte der hochgebildete und vielseitig interessierte Schweizer Gabriel Cramer (1704–1752) seine *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (Einführung in die Analysis algebraischer Kurven). Dort wurde mit determinantenähnlichen Ausdrücken eine korrekte Methode zur Auflösung eines Systems von n linearen Gleichungen mit n Variablen gegeben. Führende Mathematiker des 18. und 19. Jahrhunderts – unter ihnen Etienne Bezout (1730–1783), Vandermonde, Laplace, Lagrange, Cauchy, Jacobi – führten diese Überlegungen weiter. Laplace beispielsweise lehrte die Entwicklung der Determinanten nach den Elementen einer Zeile. Lagrange wandte Determinanten in der analytischen Geometrie an. Cauchy fand den Multiplikationssatz und verwendete die quadratische Anordnung der Elemente. Insbesondere durch die Arbeiten von Carl Gustav Jacob Jacobi, die 1826 einsetzten, wurden Determinanten zum Gemeingut der Mathematiker und fanden neben dem historischen Ausgangsproblem – den linearen Gleichungssystemen – bald auch in Geometrie und Analysis ausgedehnte Verwendung. Jacobi hatte noch keine Lösung angeben können für n Gleichungen mit m Variablen; es fehlte ihm noch der Begriff *„Rang einer Matrix"*. Hier erzielte der englische Mathematiker James Joseph Sylvester – der übrigens eine wesentliche Rolle bei der Organisierung der mathematischen Gesellschaft in den USA gespielt hat – bedeutende Erfolge und trug erheblich zur Ausbildung einschlägiger Terminologie bei: Invariante, Kovariante, Diskriminante und andere Begriffe.

Am Ende des 19. Jahrhunderts bildeten schließlich die US-Amerikaner Benjamin Peirce (1809–1880) und Charles Sanders Peirce (1839–1914), der Deutsche Georg Frobenius (1849–1917), der Franzose Charles Hermite (1822–1901) und andere den Matrizenkalkül im Hinblick auf die verschiedenartigsten innermathematischen Anwendungen als weit reichende, in sich geschlossene mathematische Disziplin aus. Die Matrizenrechnung wurde in den Händen von Max Born (1882–1970) am Ende der 20er Jahre des 20. Jahrhunderts sogar zum entscheidenden mathematischen Hilfsmittel der Quantenmechanik.

10.3.9 William Rowan Hamilton: Quaternionenkalkül, Vektorrechnung

Neben der Erweiterung des Bereiches der reellen Zahlen (siehe 10.3.4) wurde auch die Geometrie ein Ausgangspunkt der Theorie der Quaternionen. Können Drehungen im dreidimensionalen Raum durch ähnliche „Zahlen" beschrieben werden wie Drehungen in der Ebene durch komplexe Zahlen? Nach angestrengtem Nachdenken „überfiel" den Iren William Rowan Hamilton während eines Spazierganges die Lösung mit der Erfindung der Quaternionen, d. h. viergliedriger „Zahlen" mit den Einheiten $1, i, j, k$. Die Quaternionen besitzen die Form $a + bi + cj + dk$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und für die Einheiten i, j, k

gilt $i^2 = j^2 = k^2 = -1$; $ij = -ji = k$, $ki = -ik = j$, $jk = -kj = i$; 1 ist auch bei den Quaternionen das neutrale Element.

Das Kommutativgesetz der Verknüpfung musste also aufgegeben werden. Zwei Monographien stellten die Theorie der Quaternionen vor, *Lectures on Quaternions* (1853) und *Elements of Quaternions* (postum 1866). Dort wurde die Leistungsfähigkeit in Geometrie und Mechanik demonstriert. Doch wurde die Quaternionentheorie auch zum Gegenstand eines völlig übersteigerten Kultes, fast zu einer Glaubensfrage. Hamilton hat sich rückblickend, 1858, über die „Entdeckung" der Quaternionen geäußert:

> "Tomorrow will be the fifteenth birthday of the Quaternions. They started into life, or light, full grown, on the 16th of October, 1843, as I was walking with Lady Hamilton to Dublin, and came up to Brougham Bridge. That is to say, I then and there felt the galvanic circuit of thought closed, and the sparks which fell from it were the fundamental equations between I, J, K; *exactly such* as I have used them ever since. I pulled out, on the spot, a pocketbook, which still exists, and made an entry, on which, *at the very moment*, I felt that it might be worth my while to expend the labour of at least ten (or it might be fifteen) years to come. But then it is fair to say that this was because I felt a *problem* to have been at that moment *solved*, an intellectual *want relieved*, which had *haunted* me for at least *fifteen years* before." [Kline 1972, S. 779]

Hamilton wurde 1805 in Dublin geboren. Er war ein Wunderkind. Mit drei Jahren sprach er englisch – seine Muttersprache war natürlich irisch –, mit fünf meisterte er die Arithmetik, konnte lateinische, griechische und hebräische Texte übersetzen und Homer und Milton rezitieren, mit 14 vermochte er ein Gedicht in persischer Sprache zu verfassen. Überhaupt stammen aus seiner Feder zahlreiche Gedichte.

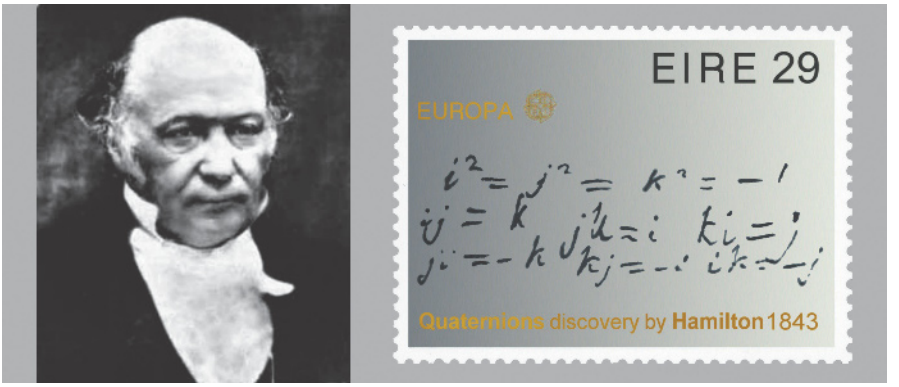


Abb. 10.3.10 William Rowan Hamilton (Porträt); Quaternionen (Irland 1983)

Um 1820 begann Hamilton sich für Mathematik zu interessieren. Er las Clairaut, die *„Principia“* von Newton, Laplace; in dessen Himmelsmechanik entdeckte er einen Fehler. Dies verhalf ihm zu einer steilen wissenschaftlichen Karriere. Mit 17 sandte er an den Präsidenten der Königlichen Irischen Akademie eine Abhandlung über geometrische Optik. 1823 bezog er das Trinity College in Dublin und erzielte hoch anerkannte Leistungen in klassischer Literatur und Mathematik. Bald darauf wurde er Professor der Astronomie und *„Königlicher Astronom“* von Irland; 1827 übersiedelte er zum Observatorium in Dunsink, ca. 8 km von Dublin entfernt. Hamilton erwies sich als schlecht beobachtender Astronom. Dafür glänzte er mit hervorragenden Arbeiten theoretischen Charakters: Zur Algebra, zum Strahlengang in Kristallen, zur theoretischen Dynamik.

Hamilton leistete auch Beiträge zur sich herausbildenden Vektorrechnung. Er führte den Operator und das Symbol *„Nabla“* ein und beteiligte sich am Ausbau des Formalismus der symbolisierten Feld- und Vektorrechnung, die durch die Begriffe Gradient, Divergenz, Δ-Operator, curl (= rot) usw. charakterisiert ist.

In ähnlichen Themenkreisen wie Hamilton bewegte sich Hermann Günther Graßmann (1809–1877). In seiner *Linearen Ausdehnungslehre* (1844) finden sich, in Anknüpfung an Leibnizsche Ideen von einer *characteristica universalis*, Elemente der Vektorrechnung, der Tensorrechnung und der n-dimensionalen Geometrie, mit nicht notwendig kommutativ verknüpften



Abb. 10.3.11 Trinity College in Dublin [Foto Alten]

Größen, angewandt auf algebraische Kurven und Flächen. Seine Arbeit, auch eine 1861/62 erweiterte zweite Auflage wurde erst am Ende des 19. Jahrhunderts in ihrer Bedeutung erkannt. Man darf aber nicht verkennen, dass die Neuartigkeit seiner Gedanken bei abstrakter und – leider – ungeschickter Darstellung das Werk schwer lesbar machte.

Graßmann war äußerst vielseitig. Wiewohl wesentlich im Schuldienst stehend verfasste er physikalische Arbeiten und beschäftigte sich erfolgreich mit philosophischen Fragen, z. B. einer physikalischen Theorie der Sprachlaute und einem *Wörterbuch zur Rigveda* (religiöse Literatursammlung der Inder, vor dem 1. Jahrtausend v. Chr.).

Den eigentlichen, den wissenschaftlich gerechtfertigten Platz erhielten die Quaternionen, als Georg Frobenius (1849–1917) zeigen konnte, dass sie die einzige nichtkommutative Divisionsalgebra endlichen Ranges über dem Körper der reellen Zahlen bilden. Als Henri Poincaré und Élie Joseph Cartan (1869–1951) Untersuchungen einleiteten, die zum Kalkül der äußeren Differentialformen führten, und dabei die Analogie zum Graßmann-Kalkül bemerkt wurde, wurde auch die Graßmannsche Lehre in die moderne Mathematik integriert. Um die exakte Begründung des Begriffes des Vektorraumes endlicher oder unendlicher Dimensionen über dem Körper der reellen Zahlen hat sich von 1888 an Giuseppe Peano (1858–1932) besondere Verdienste erworben.

10.3.10 Arthur Cayley, George Boole: Die britische algebraische Schule

Die britische Mathematik hatte zu Anfang des 19. Jahrhunderts insbesondere im Bereich der Analysis einen beträchtlichen Rückstand gegenüber dem Kontinent aufgewiesen. Um die Mitte des 19. Jahrhunderts aber übertraf die britische Mathematik auf einem anderen großen Teilgebiet, dem der Algebra, die Mathematik im kontinentalen Europa. Dabei handelt es sich um eine betont formale Algebra in dem Sinne, dass weniger die Art der Elemente als vielmehr die Art der Verknüpfungen zwischen nicht näher erklärten abstrakten Größen in den Vordergrund gerückt wurde [Nový 1973], [Wußing 1979].

Eine Dreiergruppe von Mathematikern kann man als Wegbereiter der britischen algebraischen Schule betrachten: George Peacock, Augustus de Morgan (1806–1871) und Duncan Farquharson Gregory (1813–1844) bemühten sich in den 30er Jahren um einen neuen Zugang zur Algebra. Ihre Ideen wurden recht deutlich von Peacock formuliert. In einem Report über Zustand und Fortschritt verschiedener Zweige der Analysis aus dem Jahre 1834 heißt es, dass die symbolische Algebra

> *„ihrem Wesen nach eine Wissenschaft von Symbolen und deren Kombination werden könnte, aufgebaut nach ihren eigenen Regeln, welche durch deren Interpretation auf Arithmetik und alle anderen Wissenschaften angewandt werden könnte.“*
> [Nový 1973, S. 192, englisch, dt. Übers. Wg.]

Aus der Gruppe der hervorragenden Vertreter der englischsprachigen Algebraiker der nächsten Generation sei Arthur Cayley herausgehoben. Er stieß, ausgehend von einer scharfsinnigen Theorie der Invarianten und Kovarianten von Formen – er nannte sie *„quantics“* – schon Mitte des 19. Jahrhunderts bis zu einem relativ abstrakten Gruppenbegriff vor, indem er die Gruppe als System definierender Relationen zwischen abstrakten Elementen einführte. Speziell können diese Elemente Permutationen sein; damit stellte er den Anschluss an die von Cauchy geschaffene Permutationentheorie her. Hinsichtlich der Wortbildung *„Gruppe“* (engl. group, franz. le groupe) nahm Cayley ausdrücklich Bezug auf Galois (vgl. [Wußing 1969]).

Bereits 1854 hatte Cayley die Gruppentafel eingeführt. So heißt es in einer Arbeit *On the Theory of Groups as Depending on the Symbolic Equation* $\theta^n = 1$ (Über die Gruppen, die von der Gleichung $\theta^n = 1$ abhängen) unter anderem:

> *“A set of symbols* $1,\ \alpha,\ \beta,\ \ldots$ *all of them different, and such that the product of any two of them (no matter in what order), or the product of any one of them into itself, belongs to the set, is said to be a group: It follows that if the entire group is multiplied by any one of the symbols, either as further or nearer* (von links oder von rechts, Wg.) *factor, the effect is simply to reproduce the group; or what is the same thing, that if the symbols of the group are multiplied together so as to form a table, thus:*

		Further factors			
		1	α	β	$\ldots$
Nearer factors	1	1	α	β	$\ldots$
	α	α	α^2	$\beta\alpha$	
	β	β	$\alpha\beta$	β^2	
	$\vdots$	$\vdots$			

> *that as well each line as each column of the square will contain all the symbols* $1, \alpha, \beta, \ldots$ *It also follows that the product of any number of the symbols, with or without repetitions, and in any order whatever, is a symbol of the group.”* [Cayley 1889, S. 124]

Um 1878 war die umfassende Bedeutung des Gruppenbegriffes deutlich hervorgetreten, sowohl in der Auflösungstheorie algebraischer Gleichungen als auch in Geometrie und Zahlentheorie. So wandte sich Cayley erneut der Gruppentheorie zu. Es heißt bei ihm:

> *“A set of symbols* α, β, γ, *..., such that the product* $\alpha\beta$ *of each two of them (in each order,* $\alpha\beta$ *or* $\beta\alpha$*), is a symbol of the set, is a group. (...) A group is defined by means of the laws of combination of its symbols.”* [Cayley 1896, S. 402]

Für die Systematik der Geometrie ist hervorzuheben, dass die Cayleysche Maßbestimmung ganz wesentlich zu den historischen Voraussetzungen des Erlanger Programms gehört; Felix Klein hat darüber selbst ausführlich berichtet [Klein 1921, S. 247f.].

Von weiteren Mathematikern der algebraisch-geometrisch orientierten englischsprachigen Schule seien noch der Ire George Salmon (1819–1904) und der Engländer William Kingdom Clifford (1845–1879) genannt. Aus der Feder von Salmon stammen hervorragende Monographien und Lehrbücher, in denen die analytische Geometrie methodisch durch breite Verwendung algebraischer Mittel neu fundiert wurde.

Von Clifford wurden die nach ihm benannten Zahlen eingeführt, mit denen sich jede Drehung im n-dimensionalen Raum beschreiben lässt. Auch die sog. Clifford-Algebren mit 2^n Basiselementen sind nach ihm benannt.

Jener Ideensphäre abstrakter Auffassungen entsprang überdies auch ein berühmtes Büchlein von nur 84 Seiten, das 1854 erschien: *An Investigation into the Laws of Thoughts on Which Are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probability* (Eine Untersuchung der Gesetze des Denkens, auf denen die mathematischen Theorien der Logik und der Wahrscheinlichkeit beruhen). Der Autor George Boole verwies darin auf die Analogien zwischen algebraischen Symbolen und jenen, die logische Schlüsse und Syllogismen repräsentieren. Vorausgegangen waren – angespornt durch den englischen Logiker und Mathematiker Augustus de Morgan – Studien und Publikationen zur Methodik der Logik (und auch Studien zu Differentialgleichungen). So steht Boole (Boolesche Algebra!) am Beginn der formalen Logik, aber auch – langfristig gesehen – am Beginn der Geschichte der Computer.

Boole hatte seine Anfangserziehung durch den Vater erhalten, bildete sich selbst weiter und wurde 1849 ohne akademischen Grad Professor der Ma-

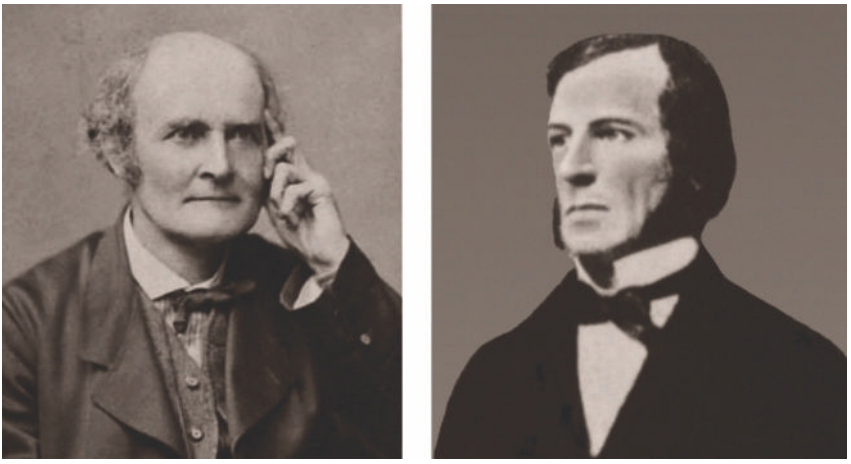


Abb. 10.3.12 Arthur Cayley, George Boole

thematik am Queens College, County Cork, Irland. Er heiratete 1855 Mary Everest, eine Nichte von Sir George Everest, nach dem der höchste Berg der Erde benannt ist.

In Deutschland wurde Hermann Hankel (1839–1873) zu einem Hauptvertreter einer abstrakten Auffassung von Algebra, indem er – anknüpfend an Peacock, Möbius, H. Graßmann und Hamilton – die Verknüpfung von abstrakten Elementen zum Hauptgegenstand seiner Untersuchung *Theorie der complexen Zahlensysteme* (1867) machte. Nach ihm spricht man vom „Permanenzprinzip", wenn beim Übergang zu einem erweiterten Zahlensystem die Gesetze der Verknüpfung erhalten bleiben. Er konnte beweisen, dass bei der Erweiterung des Zahlensystems über das der komplexen Zahlen hinaus nicht alle Gesetze der gewöhnlichen Arithmetik erhalten bleiben.

Außerdem hat Hankel ausgezeichnete Studien zur Theorie der unstetigen und oszillierenden Funktionen und zum Begriff „Grenze" veröffentlicht. Zudem hat Hankel zwei noch heute lesbare Bücher (trotz einiger Fehleinschätzungen) zur Geschichte der Mathematik zum Druck gebracht, darunter 1875 *Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter*. Leider starb der vielversprechende Gelehrte sehr jung [Beckert/Schumann 1981, S. 34ff.].

In den USA entwickelte B. Peirce im Anschluss an Beiträge seines Sohnes C. S. Peirce zur mathematischen Logik weitgreifende Ansätze zur allgemeinen linearen assoziativen Algebra.

Diese und andere ähnliche Studien und Publikationen begünstigten die Herausbildung strukturellen Denkens und der mathematischen Logik als selbständige Disziplin.

10.3.11 Erste algebraische Grundstrukturen: Gruppe, Körper

Bereits im Laufe des 19. Jahrhunderts wurden in abstrakter Form einige algebraische Grundstrukturen wie Gruppe, Körper, Ideal herausgearbeitet. Somit reicht die moderne Strukturmathematik in ihrer algebraischen Komponente bis ins 19. Jahrhundert zurück. Dies geschah, zumindest am Anfang des Jahrhunderts, teilweise noch in impliziter Form, so bei der Theorie der Komposition der quadratischen Formen und bei der Lösung der Kreisteilungsgleichung durch Gauß in seinen *Disquisitiones arithmeticae* von 1801, ebenso bei einigen Sätzen von Abel; letztere sind analog zur Theorie endlicher abelscher Gruppen. Bei Galois finden sich ferner Sätze, die wir heute der Theorie der endlichen Körper zurechnen. Die weit ausgebaute Theorie der Permutationsgruppen bei Cauchy kam einer abstrakten Gruppentheorie schon ziemlich nahe, wenn auch am konkreten Material der Permutationen. Weitere Beispiele ließen sich hinzufügen [Wußing 1969].

Zur Mitte des 19. Jahrhunderts und dann verstärkt in den 60er und 70er Jahren konstatiert man eine Phase, bei der es um den abstrakten begrifflichen Inhalt algebraischer Grundstrukturen ging. Richard Dedekind schritt auf diesem Wege schon sehr früh sehr weit fort. Er hat sich – wie er 1856 an Ernst Eduard Kummer (1810–1893) berichtete – *„ganz in Galois und Abel*



Abb. 10.3.13 Hermann Graßmann, Heinrich Weber

vertieft". Dedekind dürfte 1856 in einer Vorlesung als erster die Galoische Gleichungstheorie in moderner Auffassung vorgetragen haben, indem er die Galois-Gruppe als Automorphismengruppe des entsprechenden Normalkörpers betrachtete, vgl. [Purkert 1976], [Scharlau 1981], [Schlote 1988].

Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes beispielsweise besitzt drei historische Wurzeln: Geometrie mit dem Begriff der Transformationsgruppe, die Auflösungstheorie algebraischer Gleichungen und die Zahlentheorie von Gauß bis Leopold Kronecker. In der Arbeit *Auseinandersetzung einiger Eigenschaften der Klassenanzahl idealer complexer Zahlen* von 1870 bemüht sich Kronecker *„um Einfachheit"* und um das *„deutliche Hervortreten des allein Wesentlichen"* in Gauß' impliziter Gruppentheorie in den *Disquisitiones arithmeticae*.

Ausführlich lautet der interessante Passus bei Kronecker folgendermaßen:

> *„In den Artikeln 305 und 306 der ‚Disquisitiones arithmeticae' hat Gauss eine Anordnung der verschiedenen Klassen quadratischer Formen auf die Theorie der Composition gegründet und Hr. Schering hat neuerdings der weiteren Ausführung dieses Gegenstandes eine Arbeit gewidmet, welche (...) eine sachgemässe Aufstellung von ‚Fundamentalklassen' zum Zweck hat. Die überaus einfachen Prinzipien, auf denen die Gauss'sche Methode beruht, finden nicht blos an der bezeichneten Stelle, sondern auch sonst vielfach und zwar schon in den elementarsten Theilen der Zahlentheorie Anwendung. Dieser Umstand deutet darauf hin, und es ist leicht, sich davon zu überzeugen, dass die erwähnten Prinzipien einer allgemeineren, abstrakteren Ideensphäre angehören. Deshalb erscheint es angemessen die Entwicklung derselben von allen unwesentlichen Beschränkungen zu be-*

freien, sodass man alsdann einer Wiederholung derselben Schlussweise in den verschiedenen Fällen des Gebrauchs überhoben wird. Dieser Vortheil kommt sogar schon bei der Entwickelung selbst zur Geltung und die Darstellung gewinnt dadurch, wenn sie in der zulässig allgemeinsten Weise gegeben wird, zugleich an Einfachheit und durch das deutliche Hervortreten des allein Wesentlichen auch an Übersichtlichkeit.“ [Kronecker 1870, S. 882]

Kronecker gab eine (noch) implizit axiomatisch fixierte Definition einer endlichen abelschen Gruppe. Dabei wird eine abstrakte Verknüpfung zwischen nicht näher bezeichneten Elementen zugrundegelegt.

„Es seien θ', θ'', θ''', ... Elemente in endlicher Anzahl und so beschaffen, dass sich aus je zweien derselben mittels eines bestimmten Verfahrens ein drittes ableiten lässt. Demnach soll, wenn das Resultat durch $\mathfrak{f}$ angedeutet wird, für zwei beliebige θ' und θ'', welche auch miteinander identisch sein können, ein θ''' existieren, welches gleich $\mathfrak{f}(\theta', \theta'')$ ist. Überdies soll:

$$\mathfrak{f}(\theta', \theta'') = \mathfrak{f}(\theta'', \theta')$$

$$\mathfrak{f}(\theta', \mathfrak{f}(\theta'', \theta''')) = \mathfrak{f}(\mathfrak{f}(\theta', \theta''), \theta''')$$

und aber, sobald θ'' und θ''' von einander verschieden sind, auch $\mathfrak{f}(\theta', \theta'')$ nicht identisch mit $\mathfrak{f}(\theta', \theta''')$ sein. Dies vorausgesetzt, kann die mit $\mathfrak{f}(\theta', \theta'')$ angedeutete Operation durch die Multiplikation der Elemente θ', θ'' ersetzt werden, wenn man dabei an Stelle der vollkommenen Gleichheit eine blosse Aequivalenz einführt.“
[Kronecker 1870, S. 882f.]

Mit anderen Worten: In abstrakter Form werden fixiert die Abgeschlossenheit des endlichen Systems gegenüber einer Verknüpfung, das Kommutativgesetz, das Assoziativgesetz und das Gesetz über die Eindeutigkeit der Umkehrbarkeit der Verknüpfung(bei einem Studium der Transformationsgruppen, ganz allgemein bei unendlichen Gruppen, hat sich gezeigt, dass die Existenz eines reziproken Elementes axiomatisch gefordert werden muss). Den letzten Schritt bei der Herausbildung des abstrakten Gruppenbegriffes – unter Einbeziehung aller drei historischen Wurzeln – vollzog schließlich der in München wirkende Walter von Dyck (1856–1934) in den zwei 1882/1883 erschienenen Arbeiten *Gruppentheoretische Studien*. Es heißt da:

„Es ist die Absicht (...), die bisher studirten Eigenschaften einer Gruppe in ihrer abstracten Formulirung zu verfolgen. Dabei wird insbesondere die Frage zur Geltung kommen, in wie weit diese Eigenschaften durch alle verschiedenen Erscheinungsformen der Gruppe einen invarianten Charakter tragen, was zur exacten Fixirung ihres eigentlichen gruppentheoretischen Inhaltes führt.“
[Dyck 1883, S. 70]

Und an anderer Stelle:

> *„Damit werden alle holoedrisch isomorphen Gruppen in eine einzige Gruppe begriffen und das Wesen einer Gruppe drückt sich nicht mehr an einer speciellen Darstellungsform ihrer Operationen aus, sondern lediglich in der gegenseitigen Beziehung derselben zu einander.“* [Dyck 1882, S. 1]

Hier zeigt sich die moderne Auffassung von der Herausarbeitung algebraischer Grundstrukturen. Sie ist schon wenige Jahre später, 1895/96, in das *Lehrbuch der Algebra* von Heinrich Weber (1842–1913) eingegangen und bildet dort die Grundlage der Betrachtungsweise. So erklärt sich auch der große Erfolg des Buches, das von einer ganzen Generation von Mathematikern benutzt wurde und sozusagen den Inhalt einer ganzen Periode der Algebra geprägt hat, vgl. [Corry 2005], [Grattan-Guinness 2005b, S. 690ff.]. Erst das Buch *Moderne Algebra* (1930/31) von Bartel Leendert van der Waerden (1903–1996) wird die nächste Entwicklungsetappe der Algebra in ähnlicher Weise markieren.

Der von Weber erreichte Standpunkt tritt in den folgenden Textstellen deutlich zutage:

> *„Es war meine Absicht, ein Lehrbuch zu geben, das, ohne viele Vorkenntnisse vorauszusetzen, den Leser in die moderne Algebra einführen und auch zu den höheren und schwierigeren Partien hinführen sollte, in denen das Interesse an dem Gegenstande erst recht lebendig wird.“* [Weber 1898, S. V]

> *„Es sind hauptsächlich zwei große allgemeine Begriffe, von denen die moderne Algebra beherrscht wird. Die Existenz und Bedeutung dieser Begriffe konnte allerdings erst erkannt werden, nachdem die Algebra bis zu einem gewissen Grad fertig und zum Eigentum der Mathematiker geworden war. Erst dann konnte in ihnen das verbindende und führende Prinzip erkannt werden.*
> *Es sind die Begriffe der Gruppe und des Körpers, zu deren Erklärung wir jetzt fortschreiten. Der allgemeinere Begriff ist der der Gruppe, mit dem wir also beginnen.“* [Weber 1912, S. 180]

> *„Eine Gruppe wird zum Körper, wenn in ihr zwei Arten der Composition möglich sind, von denen die erste Addition, die zweite Multiplikation genannt wird.“* [Weber 1893, S. 526]

Historisch gesehen lag mit dem abstrakten Gruppenbegriff der früheste Fall der Emanzipation einer algebraischen Struktur vor. Und es entstanden die ersten Monographien auf abstrakter Grundlage. Es sind die noch auf endliche Gruppen beschränkten *Eléments de la théorie des groupes abstraits* (1904) des französischen Privatgelehrten Jean Armand Marie de Séguier (1862–1935) und die *Abstraktnaya teorija grupp* (1916) von Otto Juljewitsch Schmidt (1891–1956), dem Stammvater der berühmten russisch-sowjetischen gruppentheoretischen Schule, der zugleich ein erfolgreicher Polarforscher war.

10.4 Carl Friedrich Gauß: *Princeps Mathematicorum*

Das 19. Jahrhundert hat viele bedeutende Mathematiker hervorgebracht. Einer überstrahlte sie alle: Carl Friedrich Gauß. Sein Einfallsreichtum, die Vielseitigkeit seiner Untersuchungen, die Fülle und Tiefe der dabei erzielten Ergebnisse und die Reichweite seines Wirkens überragen die Leistungen seiner Zeitgenossen und haben ihm den Ehrennamen *Princeps Mathematicorum* eingetragen.

Über die Jugend von Gauß, seine Überlegungen zum Parallelenpostulat und zu den nichteuklidischen Geometrien sowie über seine epochalen Beiträge zur Algebra ist schon in vorangegangenen Abschnitten berichtet worden. Sein weiterer Lebenslauf, seine Leistungen als Naturforscher – insbesondere in der Astronomie – und seine Anstöße in anderen Gebieten sollen hier beschrieben werden, seine großartigen Ergebnisse in der Zahlentheorie dann im folgenden Abschnitt.

Felix Klein unternimmt im ersten Band seiner *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert* (1926) auf den Seiten 60 bis 62 einen Vergleich zwischen Gauß und dem 25 Jahre älteren Adrien-Marie Legendre (1752–1833), der *„wie durch einen sonderbaren Zwang geleitet, auf fast allen Gebieten über dieselben Gegenstände wie Gauß gearbeitet hat. Aber so anerkennenswert auch seine Leistungen sein mögen, so ist er doch nirgends so in die Tiefe gedrungen, wie Gauß bei jedem Problem, das er angriff.“* [Klein 1979, S. 60] Hier der Vergleich in Kurzform:

Zahlentheorie: 1798 Legendres Lehrbuch *Essai d'une Théorie des nombres* – 1801 Gauß: *Disquisitiones arithmeticae.*

Analysis: Legendre von 1786 an: Beschäftigung mit elliptischen Integralen – Gauß ebenfalls: Theorie der hypergeometrischen Reihe 1812.

Geometrie: Legendre: Lehrbuch der Elementargeometrie 1794; vergeblicher Versuch, das Parallelenaxiom zu beweisen – Gauß: nicht-euklidische Geometrie.

Geodäsie: Legendre: 1792 Gradmessung Dünkirchen/Barcelona, erste zuverlässige Gradmessung auf Grundlage des Längenmaßes Meter, wichtige Sätze zur sphärischen Trigonometrie – Gauß: Vermessung des Königreiches Hannover, Flächentheorie.

Astronomie: Legendre 1805: Anziehungskraft der Ellipsoide. Methode der kleinsten Quadrate – Gauß: großartige Leistungen in Astronomie (Bahnbestimmung). Gauß seit 1794 im Besitz der Methode der kleinsten Quadrate.

In diesem Zusammenhang formuliert Klein eine allgemeine Aussage zur Entwicklung der Mathematik. Es zeigte sich nämlich an dieser Gegenüberstellung, *„daß die Mathematik nicht in dem Maße die subjektive Wissenschaft ist, die ihre Entwicklung der zufälligen, willkürlichen Einwirkung der in ihr schöpferischen Männer verdankt, wie es von mancher Seite behauptet wird. Die Gegenstände der Forschung scheinen vielmehr weitgehendst durch den Charakter der Epoche nach irgend einer inneren Folgerichtigkeit gegeben zu sein.“* [Klein 1979, S. 62]

Gauß hatte die *Disquisitiones* in seiner Geburtsstadt Braunschweig niedergeschrieben, finanziell unterstützt vom Herzog. Nach dessen Tode nahm



Abb. 10.4.1 Gauß-Denkmal in Braunschweig [Foto Wesemüller-Kock]

Gauß 1807 die schon einige Zeit ausgesprochene Berufung als Professor der Astronomie und Direktor der Sternwarte nach Göttingen an. Am 09. Oktober 1805 hatte Gauß die liebenswerte Johanna Osthoff geheiratet; die Familie – 1806 war der erste Sohn Joseph geboren worden – zog im Spätherbst 1807 nach Göttingen. Die später völlig erblindete Mutter von Gauß starb in der Obhut ihres Sohnes hochbetagt 1839.

Die Ehe mit Johanna war sehr glücklich, leider aber nur kurz. Im Februar 1808 wurde das zweite Kind, Tochter Wilhelmine, geboren. Von der Geburt des dritten Kindes, Ludwig, vermochte sich Johanna nicht zu erholen; sie starb im Oktober 1809; auch Ludwig starb nach einem halben Jahr. Der Sohn Joseph trat in die Armee ein und zeichnete sich aus bei der Bekämpfung des großen Brandes von Hamburg und später als hervorragender Ingenieur beim Bau der Eisenbahnlinien in Hannover. Wilhelmine wuchs zu einem sehr schönen Mädchen heran, heiratete Heinrich Ewald (1803–1875), einen Göttinger Professor für Orientalistik (von einer außergewöhnlichen Zerstreutheit), steckte sich bei der Pflege der an Schwindsucht leidenden Stiefmutter an und starb schon 1840.

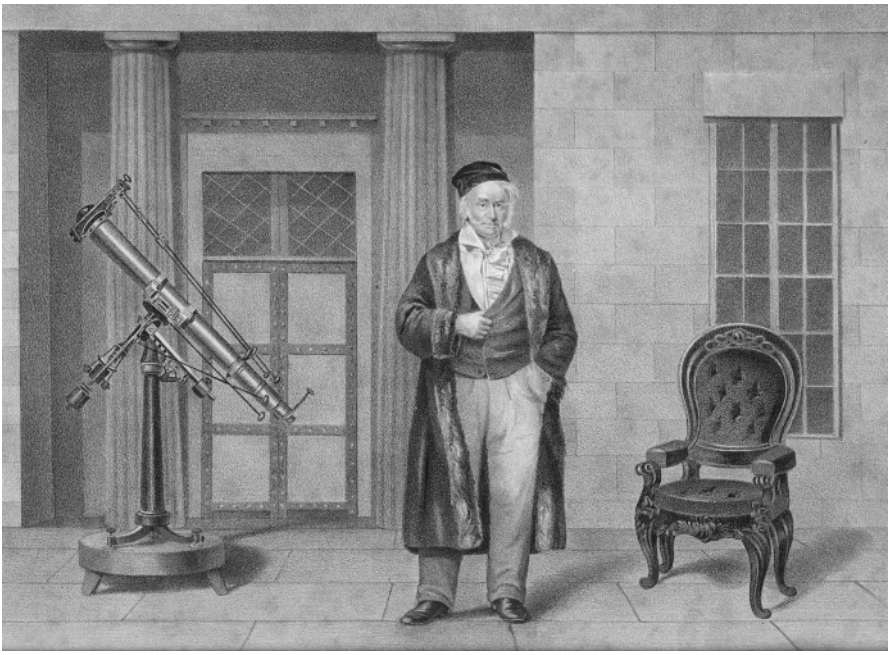


Abb. 10.4.2 Gauß auf der Terrasse der Göttinger Sternwarte

Gauß ging im Januar 1810 eine zweite Ehe ein, mit Minna Waldeck, Tochter eines Göttinger Professors. Sie besaß nicht die natürliche Fröhlichkeit wie Johanna, war reizbar, kränkelte ständig. Sie starb nach langer Leidenszeit am 12. September 1831. Aus dieser Ehe gingen drei Kinder hervor, 1811 Sohn Eugen, 1813 Sohn Wilhelm, 1816 Tochter Therese.

Der hochbegabte Sohn Eugen studierte in Göttingen am liebsten die Gasthäuser, wanderte gegen den Willen des Vaters nach den USA aus, trat in die Armee ein, verließ sie wieder, erlernte die Sprache der Sioux-Indianer und übersetzte die Bibel, wurde Getreidegroßhändler und später erster Direktor der von ihm organisierten Nationalbank.

Wilhelm erlernte Landwirtschaft, wanderte ebenfalls nach den USA aus, wurde als Farmer wohlhabend und starb als Schuhgroßhändler. Therese führte den väterlichen Haushalt bis zum Tode von Gauß; erst 1856 heiratete sie. Die Ehe blieb kinderlos; Therese starb 1864.

Bei alledem gingen die wissenschaftlichen Studien von Gauß in aller Breite und Tiefe weiter. Durch ein denkwürdiges Ereignis wurde Gauß zur Astronomie hingelenkt. Das Ergebnis war eines Gauß würdig. Zum Jahreswechsel 1800/1801, am 1. Januar 1801, hatte der in Palermo tätige italienische Astronom Giuseppe Piazzi (1746–1826) ein sich bewegendes Himmelsobjekt 8. Größe entdeckt. Er nannte es Ceres (röm. Göttin des Ackerbaus). Es konnte sich um einen schweiflosen Kometen oder um einen kleinen Planeten handeln.

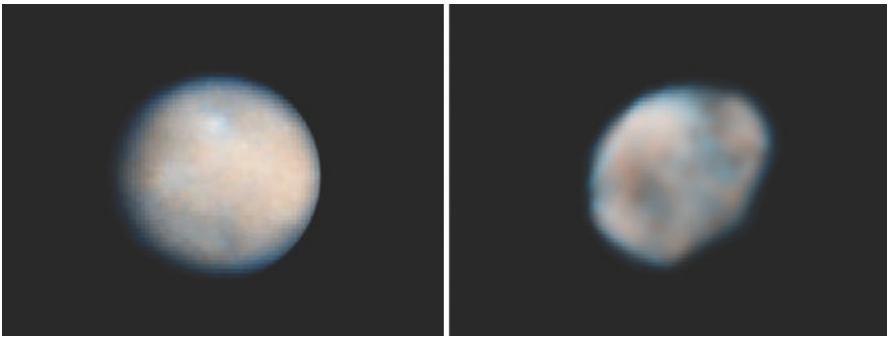


Abb. 10.4.3 Satellitenaufnahmen von den Planetoiden Ceres und Vesta [Hubble-Weltraumteleskop 23. 01. 2004, 14. 05. 2007, NASA, ESA]

Piazzi konnte das Objekt bis zum 11. Februar 1801 beobachten; dann ging es wegen der Ungunst der Lichtverhältnisse in der Abenddämmerung verloren und konnte auch nicht im Spätherbst am Morgenhimmel wieder aufgefunden werden. Erst im Frühsommer 1801 gelangte die Nachricht von der Entdeckung der Ceres nach Deutschland. Neben anderen Astronomen machte sich Gauß – er in aller Stille – im Herbst 1801 endgültig an die Arbeit, um aus den wenigen verfügbaren Daten die Bahn der Ceres zu berechnen, wobei er keinerlei Voraussetzung über die Lage des Perihels einer angenommenen elliptischen Bahn machen durfte. Dabei kamen Gauß die bereits 1794 ausgearbeiteten Methoden des Fehlerausgleichs mittels der Methode der kleinsten Quadrate sehr zugute.

Bereits im Spätherbst 1801 hatte Gauß seine Arbeit vollendet. Am 7. 12. 1801 konnte die Ceres durch Franz Xaver von Zach (1754–1832) nahe dem von Gauß berechneten Ort aufgefunden werden. Am 1. Jan. 1802 gelang dies auch Heinrich Wilhelm Olbers (1758–1840), einem Arzt und Besitzer einer Privatsternwarte in Bremen. Olbers schrieb am 22. 01. 1802 an Gauß:

> *„Nur Ihnen, mein verehrungswürdiger Freund, verdanken wir (...) die Wiederauffindung dieses neuen Planeten. Ich wenigstens (...) würde die Ceres schwerlich so weit ostwärts gesucht haben, wenn nicht ihre elliptischen Elemente berechnet worden wären ...“*
> [Olbers 1900, S. 3])

Überhaupt war es eine Zeit zahlreicher Entdeckungen von Planetoiden: Pallas durch Olbers, Juno durch Karl Ludwig Harding (1765–1834), ein vierter, die Vesta, wiederum durch Olbers. Die Gaußsche Methode bewährte sich hervorragend; zu einer ersten Bahnbestimmung der Vesta benötigte Gauß nur 10 Stunden. Das war ein großer Erfolg für die rechnende Astronomie und für Gauß selbst, der umgehend einen Ruf nach St. Petersburg erhielt, aber ablehnte. Der Herzog erhöhte die finanziellen Zuwendungen und äußerte

„Was will der Gauß sich unterm 60. Grad der Breite die Augen verderben, da ich ihm alles, was er dort haben könnte, Muße und eine bequeme Lage, hier auch geben kann.“

Bis 1804 war Gauß vorwiegend beschäftigt mit der Berechnung der Bahnstörungen; die Rechnungen weiteten sich aus. Für die Pallas kam Gauß gegen 1815 zum Ziel; die Berechnungen für die Ceres kamen nicht zum Ende.

Das wahre Maß der heroischen Arbeit von Gauß – ohne Rechenmaschinen, an Computer war noch gar nicht zu denken – wird erst deutlich, wenn man bedenkt, dass Gauß bei numerischen Rechnungen über Monate hinweg Tag für Tag rund 4000 Ziffern niedergeschrieben hat. Überhaupt: Vom Umfang her nimmt der Anteil an Astronomie in den Gaußschen Werken weit mehr als die Hälfte ein.

Bei Gauß paarten sich in ungewöhnlicher Weise ungeheure Rechenfertigkeit und unglaubliches Abstraktionsvermögen. Hand in Hand mit seinen Rechenbemühungen hatte er schon 1806 eine zusammenfassende Arbeit zur theoretischen Astronomie vollendet: *Theorie der Bewegung der Himmelskörper nach den Keplerschen Gesetzen.* Doch bestand der Verleger auf einer lateinischen Fassung; sie erschien erweitert 1809 unter dem Titel: *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conibus solem ambientium* (Theorie der Bewegung der in Kegelschnitten sich um die Sonne bewegenden Himmelskörper). Man hat dieses Buch nicht zu Unrecht das Gesetzbuch der rechnenden Astronomie genannt.

Gauß kam in persönlichen Kontakt mit den führenden Astronomen seiner Zeit, und es entstand eine Art astronomische Schule um Gauß.

Im Zusammenhang mit Astronomie wandte sich Gauß auch Reihenentwicklungen zu – mit einem strengen Konvergenzbegriff. Im Jahre 1813 erschien eine grundlegende Arbeit zur hypergeometrischen Reihe. Hier bahnt sich eine gedanklich neuartige Auffassung an, dass nämlich die Reihe selbst Ursprung einer transzendenten Funktion ist. Damit ist eine ungeheure Ausdehnung des Feldes der Analysis vorbereitet: Die systematische Untersuchung der analytischen, d. h. durch konvergente Potenzreihen dargestellten Funktionen durch Karl Weierstraß (1815–1897) führte gegen Ende des 19. Jahrhunderts zu weit reichenden Resultaten (siehe 10.6.8).

Die meisten europäischen Länder begannen um die Jahrhundertwende mit der Vermessung ihrer Territorien. Zur Vermessung des riesigen russischen Reiches legte Georg Wilhelm Struve (1793–1864), Direktor der Sternwarte in Pulkowo bei St. Petersburg, Kollege und Korrespondent von Gauß, die Grundlagen.

Der dänische König Friedrich IV. erteilte 1816 „seinem“ Kopenhagener Professor Schumacher den Auftrag zur Gradmessung zwischen Skagen und Lauenburg. Es lag nahe, die Vermessung noch weiter nach Süden hin fortzusetzen, bis an das angrenzende Königreich Hannover. So kam es, dass Georg IV., König von England und Hannover, 1820 die Gradmessung für Hannover befahl und Gauß damit beauftragte.

Gauß stürzte sich mit Feuereifer in die mühselige Arbeit; lange Zeit war er im Gelände tätig und wäre auf dem Brocken während eines Schneesturmes beinahe umgekommen. Auch dem Befehl des Königs vom Jahre 1828 zur Triangulation des Königreiches hat sich Gauß nicht entzogen. Die Arbeit im Gelände übernahmen Offiziere; Gauß leitete die Vermessung vom Schreibtisch aus. Erst Ende 1848 war die Arbeit beendet; die Koordinaten von 2578 trigonometrischen Punkten waren vermessen worden.

Das Ergebnis war doppelter Art: Es war, wie sich Gauß vorgenommen hatte, die bisher bei weitem genaueste Vermessung. Und als Frucht der praktischen Tätigkeit entstand eine weiteres hoch theoretisches Werk, das – nach vorausgeschickten und nachfolgenden Detailstudien – für die Differentialgeometrie neue Maßstäbe setzte: Es erschienen 1828 die *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (Allgemeine Untersuchungen über gekrümmte Flächen). Auch dieses Werk ist aus der innigen Verbindung von Praxis und Theorie hervorgegangen. Gauß hatte noch vorgehabt, eine zusammenfassende Darstellung der höheren Geodäsie zum Druck zu bringen, ist jedoch nicht mehr dazu gekommen.

Gauß war nicht nur einer der bedeutendsten Mathematiker, den die Welt hervorgebracht hat, sondern zugleich ein herausragender Naturforscher, insbesondere im Bereich der Physik. Er nahm 1828 an der Berliner Versammlung deutscher und skandinavischer Naturforscher auf dringliche Einladung Alexander von Humboldts teil. Dort lernte Gauß führende Naturforscher der



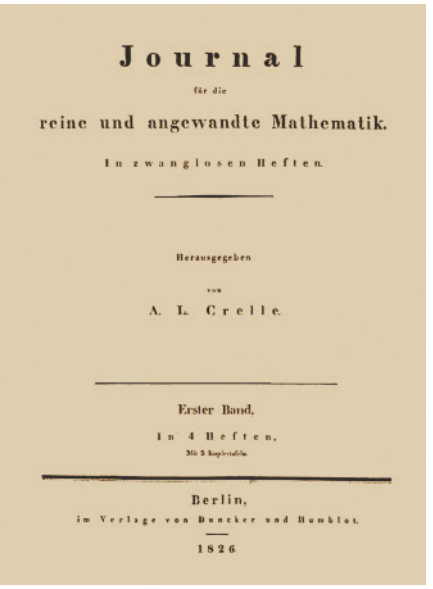


Abb. 10.4.4 August Leopold Crelle; Titelblatt von Crelles *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Bd. 1, 1826

Zeit kennen, unter anderem den Baurat August Leopold Crelle, der 1826 das *Journal für die reine und angewandte Mathematik* gegründet hatte, den Chemiker Jöns Jacob Berzelius (1779–1848), den Kopenhagener Professor Hans Christian Oerstedt, der die grundlegende Entdeckung des Elektromagnetismus gemacht hatte und den jüngeren Hallenser Privatdozenten für Physik, Wilhelm Weber (1804–1891).

Auf Betreiben von Gauß wurde Weber 1831 nach Göttingen berufen; es kam zu einer äußerst fruchtbaren Zusammenarbeit. Beide arbeiteten das sog. absolute physikalische Maßsystem (Länge, Zeit, Masse) aus. Gemeinsam studierten sie den Erdmagnetismus; 1833 ließen sie ein *„magnetisches Observatorium“* errichten, in dem alle sonst aus Eisen bestehenden Teile aus Kupfer gefertigt waren, damit sie ungestört beobachten konnten. Vom Jahre 1836/37 an wurden Hefte mit *„Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins“* herausgegeben. Sie enthalten zwei wichtige Abhandlungen: 1838/39 die Gaußsche *„Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus“* und 1839/40 *„Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstoßungskräfte“*.

Die erste enthält eine Fülle von Messdaten; die Änderung des magnetischen Erdfeldes war alle 5 Minuten festgehalten worden. Das Potential des Erdmagnetismus wurde nach höheren analytischen Funktionen, sog. Kugelfunktionen, entwickelt. So gelang es Gauß, die Lage der magnetischen Pole ziemlich genau zu ermitteln; sie wurden durch Schiffsexpeditionen alsbald bestätigt. Die zweite Arbeit ist quasi die Geburtsurkunde einer neuen mathematisch-physikalischen Disziplin, der Potentialtheorie – zuständig für Mechanik, Elektrostatik, Magnetostatik. Ähnliche Ansätze einer allgemeinen Potentialtheorie waren indes bereits 1828 von dem Engländer George Green



Abb. 10.4.5 Gedenkplatte für George Green in der Westminster Abbey London, enthüllt zum 200. Geburtstag von Green [Foto Wußing]

entwickelt worden. Sie blieben allerdings damals weitgehend unbekannt, heute jedoch ist George Green jedem Mathematiker durch die Greensche Formel ein Begriff.

Unterdessen gingen physikalische Experimente und Konstruktionen physikalischer Instrumente weiter. Schließlich, vor allem vorangetrieben durch Weber, konstruierten Gauß und Weber 1833 die erste funktionierende elektromagnetische Telegraphenlinie von beinahe zwei Kilometern Länge. Erst ein Blitzschlag 1845 zerstörte die Leitung. Gauß erkannte die ungeheuren Möglichkeiten der Telegraphie, musste aber in einem Brief an Schumacher vom 6. Aug. 1835 den Mangel an finanziellen Möglichkeiten bedauern:

> *„In anderen äußeren Verhältnissen als die meinigen sind, ließen sich wahrscheinlich auch für die Societät wichtige und in den Augen des großen Haufens glänzende praktische Anwendungen daran knüpfen. Bei einem Budget von 150 Thalern jährlich für Sternwarte und magnetisches Observatorium zusammen (...) lassen sich freilich wahrhaft großartige Versuche nicht anstellen. Könnte man darauf aber Tausende von Thalern wenden, so glaube ich, daß z.Bsp. die Electromagnetische Telegraphie zu einer Vollkommenheit und zu einem Maaßstabe gebracht werden könnte, vor der die Phantasie fast erschrickt. Der Kaiser von Russland könnte seine Befehle ohne Zwischenstation nach Odessa, ja vielleicht nach Kiachta geben . . . "* [Gauß 1957, S. 32]



Abb. 10.4.6 Elektromagnetischer Telegraph von Gauß und Weber (Gauß-Stube in Dransfeld/Nds.) [Foto Dierks]

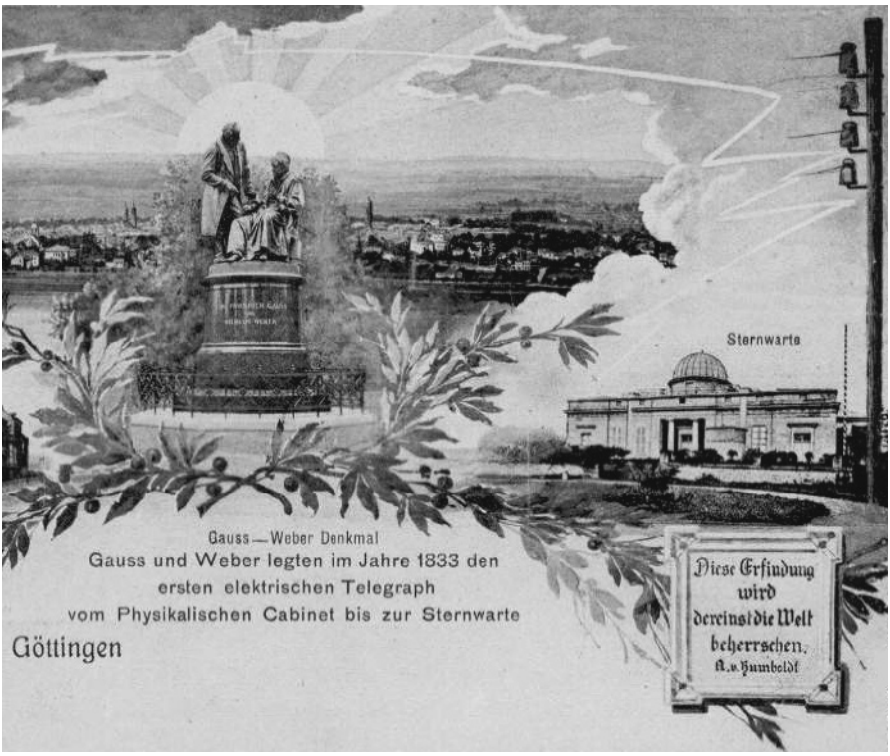


Abb. 10.4.7 Historische Postkarte zur Erfindung des Telegraphen (Ausschn.)

Carl August Steinheil (1801–1870) hatte bei Gauß studiert und bemühte sich um das Signal- und Sicherungssystem des sich entwickelnden Eisenbahnwesens. Der alternde Gauß besuchte noch 1854 die Baustrecke der Eisenbahnlinie zwischen Kassel und Göttingen.

In seinen letzten Lebensjahren erhielt Gauß noch zwei Schüler, die entscheidend zum Fortschritt der Mathematik beitragen sollten, Richard Dedekind und Bernhard Riemann.

Gauß hatte sich selbst als Diener an der Naturwissenschaft empfunden; auch von dorther rührt wohl seine außergewöhnliche Leidenschaft des Arbeitens. Den Gewohnheiten seiner Zeit entsprechend hat er sich mit den Lebensvorstellungen und besonders tiefsinnigen Aussprüchen von Denkern und Dichtern befasst. Zur Bezeichnung eigenen Handelns und seiner Motive pflegte der sehr belesene Gauß mit Vorliebe nach Shakespeare, King Lear, leicht verändert die folgenden Verse zu zitieren:

"Thou, nature, art my goddess;
to thy laws my services are bound.
Du, Natur, bist meine Gottheit;
Deinen Gesetzen diene ich."

10.5 Entwicklungen in der Zahlentheorie

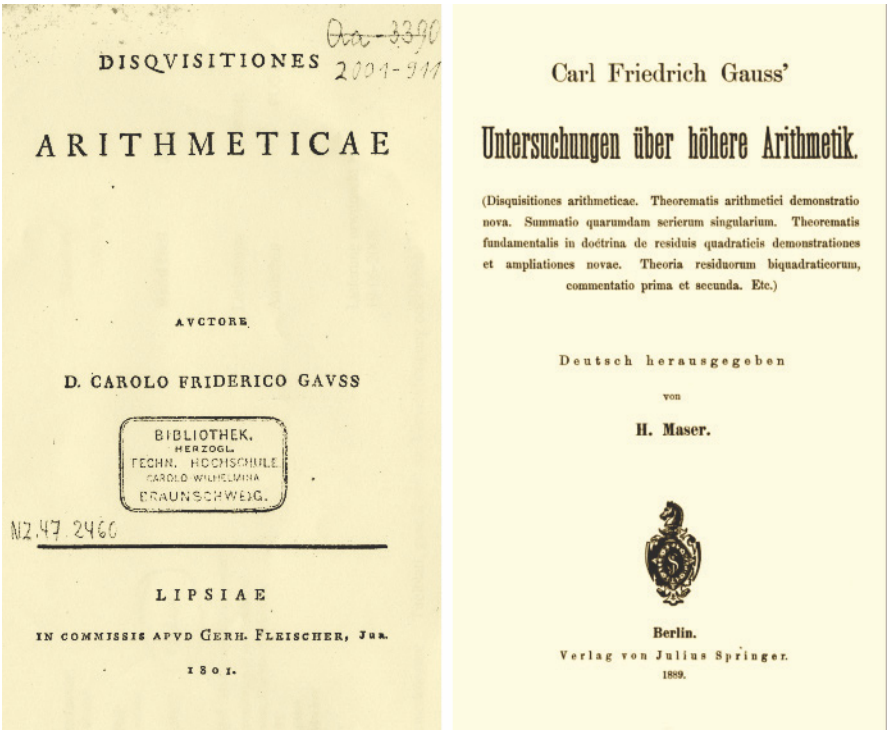
10.5.1 Carl Friedrich Gauß: *Disquisitiones arithmeticae*

Die hervorragenden Leistungen von Fermat, Euler, Lagrange und anderen auf dem Gebiet der Zahlentheorie erregen noch heute unsere Bewunderung. Doch sie blieben Einzelleistungen; erst im 19. Jahrhundert wuchs die Zahlentheorie zu einer in sich geschlossenen Disziplin heran, nicht zuletzt durch Gauß und dessen *Disquisitiones arithmeticae* vom Jahre 1801 [Neumann 2005].

Bekanntlich erschienen die *Disquisitiones arithmeticae* von Gauß nach einigen Widrigkeiten im Sommer 1801, gegen seinen Willen erst nach seiner am 16. Juli 1799 in Helmstedt „*in absentia*“ vollzogenen Promotion.

Das Werk ist in lateinischer Sprache geschrieben. Hier wird zitiert nach der deutschsprachigen Ausgabe [Gauß 1889]. In der „*Vorrede*“ heißt es:

> „*Die in diesem Werke enthaltenen Untersuchungen beziehen sich auf denjenigen Teil der Mathematik, der es mit den ganzen Zahlen zu thun hat, während die gebrochenen Zahlen meistenteils, die imaginären immer ausgeschlossen bleiben.*“ [Gauß 1889, S. V]


DISQVISITIONES

ARITHMETICAE

AVCTORE

D. CAROLO FRIDERICO GAVSS

BIBLIOTHEK. HERZOGL. TECHN. HOCHSCHULE CAROLO WILHELMINA BRAUNSCHWEIG.

LIPSIAE

IN COMMISSIS APVD GERH. FLEISCHER, Jun.

1801.

Carl Friedrich Gauss'

Untersuchungen über höhere Arithmetik.

(Disquisitiones arithmeticae. Theorematis arithmetici demonstratio nova. Summatio quarumdam serierum singularium. Theorematis fundamentalis in doctrina de residuis quadraticis demonstrationes et ampliationes novae. Theoria residuorum biquadraticorum, commentatio prima et secunda. Etc.)

Deutsch herausgegeben

von

H. Maser.

Berlin.

Verlag von Julius Springer.

1889.

Abb. 10.5.1 Titelblatt der *Disquisitiones arithmeticae* von Gauß; Titelblatt einer deutschen Übersetzung mehrerer Werke von Gauß

Die *Disquisitiones* bestehen aus sieben Abschnitten: Von der Kongruenz. Kongruenzen ersten Grades. Von den Potenzresten. Von den Kongruenzen zweiten Grades. Von den Formen und unbestimmten Gleichungen zweiten Grades. Verschiedene Anwendungen der vorhergehenden Untersuchungen. Über diejenigen Gleichungen, von denen die Teilung des Kreises abhängt.

Das ursprüngliche Manuskript ist nicht mehr vorhanden. Ein erster Entwurf über Kongruenzen ist aus zwei Teilstücken zusammengesetzt worden; diese sind 1981 von U. Merzbach wiederentdeckt worden [Merzbach 1981].

Gauß beginnt mit der Einführung einer neuen Äquivalenzrelation, der Kongruenz, geschrieben $\equiv$. Dadurch werden viele Aussagen erheblich leichter formulierbar.

> *„Wenn die Zahl a in der Differenz der Zahlen b, c aufgeht, so werden b und c nach a congruent, im andern Falle incongruent genannt. Die Zahl a nennen wir den Modul. Jede der beiden Zahlen b, c heisst im ersteren Falle Rest, im letzteren aber Nichtrest der andern.“*
> [Gauß 1889, S. 1]

Über jede Einzelheit informiert [Neumann 2005], insbesondere über den Weg von Gauß zum Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes im Abschnitt IV. Der Abschnitt VII verallgemeinert die schon früher publizierten Ergebnisse zur Kreisteilung: Die Gleichung

$$\Phi_n(x) = \frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1 = 0, \ n \text{ ungerade Primzahl}$$

hat folgende Eigenschaften: Es existiert eine sog. primitive Wurzel ξ, deren Potenzen alle Wurzeln erfassen. Und die primitiven Wurzeln können geordnet werden in der Form

$$\xi^{e(i)} (0 \leq i \leq n-2) \text{ mit } e(i) = g^i \text{ , wo } g \text{ eine primitive Wurzel } mod\ n \text{ ist.}$$

Im Abschnitt V wird ein weiteres hochinteressantes und in die Zukunft weisendes Thema behandelt, die *Komposition der quadratischen Formen.* Wenn man diese streng aufgebaute Theorie, die an Lagrange anknüpft, in heutiger Sicht analysiert, so handelt es sich um implizite gruppentheoretische Denkformen. Es werden bewiesen: Existenz einer Verknüpfung, die kommutativ und assoziativ ist, Existenz des Inversen [Wußing 1995].

Die Lektüre des fast 700 Seiten umfassenden Werkes ist schwierig, trotz glänzender Sprachführung. Die *Disquisitiones* enthalten eine Fülle neuer Ideen, sowohl nach Inhalt als auch nach Methode. Gauß stieg mit einem Schlage in die Gruppe der bedeutenden Mathematiker auf und erfuhr weithin Anerkennung. Die Petersburger Akademie wählte Gauß zum korrespondierenden Mitglied. Der schon alternde Lagrange äußerte sich aus Paris am 31. Mai 1804 begeistert: *„Ihre Disquisitiones haben Sie sogleich eingereiht unter die ersten Mathematiker, und ich ersehe, daß der letzte Abschnitt* (über die Theorie

der Kreisteilung, Wg.) *die allerschönste analytische Entdeckung enthält, die seit langer Zeit gemacht worden ist.“* Das Längenbüro in Paris bestellte 50 Exemplare der *Disquisitiones*. Laplace, der berühmte Verfasser der „Himmelsmechanik“ und in großer Gunst bei Napoleon stehend, soll ausgerufen haben: *„Der Herzog von Braunschweig hat in seinem Lande mehr entdeckt als einen Planeten: einen überirdischen Geist in einem menschlichen Körper.“* Sogar der Philosoph Hegel besaß ein Exemplar der *Disquisitiones* und äußerte sich in seiner *Wissenschaft der Logik* von 1814 zum Inhalt der Kreisteilungstheorie von Gauß. Über den nachhaltigen Einfluss der *Disquisitiones* unterichtet in vielen Details [Goldstein et al. 2007].

Die *Disquisitiones arithmeticae* von Gauß verliehen der Zahlentheorie den Status einer hoch angesehenen und ausgedehnten Forschungsrichtung. Nach einer Anfangsphase, in der es zunächst einmal um die Adaption und um das Verstehen der *Disquisitiones* ging, formierte sich eine nachfolgende Generation von Zahlentheoretikern (die durchaus auch andere Gebiete bearbeiteten): Jacobi, Dirichlet (1805–1859), Hermite, Kummer, Kronecker, Dedekind; sie standen ganz natürlich unter dem Einfluß der *Disquisitiones* und vermochten deren Ergebnisse zu vertiefen und auszuweiten. In seiner Gedenkrede auf Dirichlet berichtete Kummer, dass dieser die *Disquisitiones* ständig auf seinem Arbeitsplatz liegen hatte.

10.5.2 Johann Peter Dirichlet: Analytische Methoden in der Zahlentheorie

Johann Peter Gustav Dirichlet (eigentlich: Lejeune Dirichlet, 1805–1859) stammt aus Düren (bei Aachen), studierte in Paris bei Lacroix, Fourier und Poisson. Nachdem sich die preußische Polizei in Paris erkundigt hatte, ob Dirichlet staatsfeindlich-revolutionäre Ansichten hege und beruhigt worden war, konnte er in preußische Dienste eintreten, wirkte kurzzeitig an der Universität Breslau und seit 1828 in Berlin. Er heiratete Rebecca Mendelssohn-Bartholdi, die Schwester des Komponisten, und fand Zugang zu Alexander v. Humboldt und in das liberale Berliner jüdische Bildungsbürgertum. Mit 27 Jahren wurde er jüngstes Mitglied der Berliner Akademie. Während der 48er Revolution war er Mitglied der Bürgerwehr. Schließlich wurde er 1855 als Nachfolger von Gauß nach Göttingen berufen; dort waren ihm leider nur vier Jahre schöpferischer Tätigkeit beschieden [Koch 1989].

Neben Arbeiten zur Zahlentheorie trat Dirichlet auch mit Publikationen zur Reihentheorie und zur mathematischen Physik hervor.

Dirichlets erste Veröffentlichung von 1825 hatte den Titel *Sur l'impossibilité de quelques équations indéterminées du cinquième degré* (Über die Unmöglichkeit gewisser unbestimmter Gleichungen vom fünften Grade). Der Gutachter A.M. Legendre knüpfte hier an und es gelang ihm, die Fermatsche Vermutung für den Exponenten 5 zu beweisen. Freilich nannte er in seiner Abhandlung nicht den Namen von Dirichlet.

Dirichlets Arbeit *Sur la convergence des séries trigonometriques qui servent à representer une fonction arbitraire entre des limites données* (Über die Konvergenz der trigonometrischen Reihen, die dazu dienen, eine beliebige Funktion innerhalb gegebener Grenzen darzustellen) bewies einen von Fourier in der Wärmetheorie benutzten, aber unbewiesenen Satz – ein Aufsehen erregender Erfolg.

Im Jahre 1837 veröffentlichte Dirichlet den *Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinsamen Factor sind, unendlich viele Primzahlen enthält.* In Dirichlets *Vorlesung über Zahlentheorie* beginnt der Beweis folgendermaßen:

> *„Der allgemeine Beweis dieses Satzes (Abhandlung der Berliner Akademie aus dem Jahre 1837) stützt sich auf die Betrachtung einer Classe von unendlichen Reihen von der Form* $L = \Sigma\psi(n)$, *wo der Buchstabe* n *alle ganzen positiven Zahlen durchlaufen muss, und die reelle oder complexe Function* $\psi(n)$ *der Bedingung* $\psi(n)\psi(n') = \psi(nn')$ *genügt.“* [Dirichlet 1863, S. 375]

Eine typische Eigenschaft von Dirichlet tritt hier schon deutlich zutage: die Anwendung der Analysis auf zahlentheoretische Probleme. Dies zeichnet auch seine Studien über algebraische Zahlen aus, die an Gauß anknüpfen. Der Beweis zu einem dieser Sphäre angehörenden Satz ist Dirichlet nachweislich während der Ostermesse in der Sixtinischen Kapelle des Vatikans eingefallen.

Weitere Arbeiten von Dirichlet betrafen Potentialtheorie, Kugelfunktionen und Hydrodynamik. Überhaupt liebte Dirichlet das Reisen mit dem neuen Verkehrsmittel, der Eisenbahn. H. Koch hat herausgestellt, dass Dirichlet schon den neuen Typ des Hochschullehrers verkörperte: Vorlesungen über eben gefundene eigene Forschungsresultate, ausführliche Gespräche mit seinen Schülern, zu denen Kummer, Eisenstein, Kronecker, Riemann und Dedekind gehörten [Koch 1989].

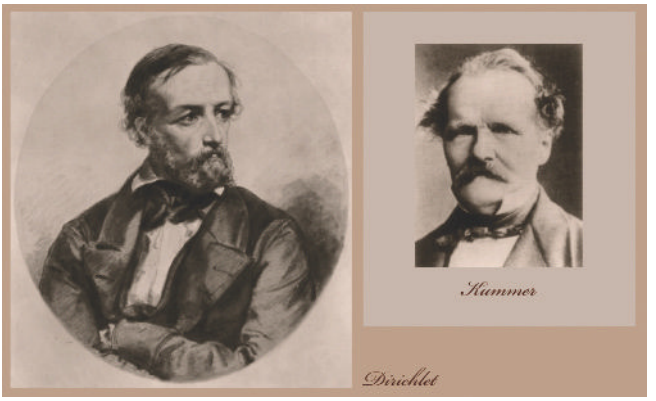


Abb. 10.5.2 Johann Peter Gustav Dirichlet, Ernst Eduard Kummer

10.5.3 Ernst Eduard Kummer: „Reguläre“ Primzahlen und „ideale“ Zahlen

Ernst Eduard Kummer (1810–1893) wurde in Sorau (heute Zary, Polen) geboren. Er studierte seit 1828 in Halle Theologie/Philosophie und Mathematik. Nach höchst erfolgreicher Lehrtätigkeit am Gymnasium, wobei hier schon seine Publikationstätigkeit begann, wurde er durch Fürsprache von Dirichlet und Jacobi 1839 Mitglied der Berliner Akademie und 1842 Professor in Breslau (heute Wrocław, Polen) und schließlich 1855 Professor in Berlin, wo seit 1853 auch Weierstraß als Professor und ab 1855 auch Kronecker, zunächst als Privatmann, wirkten. Berlin entwickelte sich unter diesem Dreigestirn zu einem Zentrum mathematischer Forschung. Sie gründeten ein mathematisches Seminar für reine Mathematik; es setzte ein großer Zulauf von Studenten ein. Wiederum zeigte sich Kummer als glänzender akademischer Lehrer; er führte zahlreiche Promotionen in Mathematik zum Erfolg.

Kummer hatte die Cousine der Frau von Dirichlet geheiratet, verhielt sich während der 48er Revolution königstreu und ging auf eigenen Wunsch, gegen den Willen der Fakultät, in Pension.

Kummers mathematische Forschungstätigkeit ist ziemlich deutlich in drei Perioden geschieden. Zunächst widmete er sich der Funktionentheorie; dorthin gehört seine Studie zur arithmetisch-zahlentheoretischen hypergeometrischen Reihe (1836).

In einer zweiten Schaffensperiode beschäftigte er sich mit dem großen Fermatschen Satz. Durch Euler war für den Exponenten 3 und durch Vorarbeiten von Dirichlet und schließlich durch Legendre für den Exponenten 5 und später für den Exponenten 7 die Richtigkeit bewiesen worden. Kummer fand nun sogar eine ganze Klasse von Primzahlen, für die der Fermatsche Satz gültig ist. Solche „regulären“ Primzahlen sind bis 100 alle Primzahlen, bis auf 37, 59 und 67. Kummer publizierte 1847 die Arbeit *Beweis des Fermatschen Satzes der Unmöglichkeit von* $x^\lambda + y^\lambda = z^\lambda$ *für eine unendliche Anzahl Primzahlen* λ. Weiteres Thema seiner Arbeit war die Theorie der höheren Potenzreste. Innerhalb der ganzen Zahlen gilt der Satz von der eindeutigen Zerlegung in Primfaktoren. Dieser Satz ließ sich – zur Überraschung mancher Mathematiker – nicht so glatt auf Zahlenringe mit ganzen algebraischen Zahlen übertragen (vgl. [Alten et al. 2008, S. 397ff.]). Kummer schuf „Abhilfe“ mit der Einführung der „idealen komplexen Zahlen“, mit denen sich eine Analogie zum Primzahlsatz herstellen ließ. Die entsprechende Arbeit erschien 1847 unter dem Titel *Über die Zerlegung der aus Wurzeln der Einheit gebildeten komplexen Zahlen in ihre Primfaktoren.* In der Nachfolge schufen Dedekind, Kronecker und Solotarjow (1847–1878) eine Theorie der ganzen algebraischen Zahlen, d. h. eine Arithmetik der algebraischen Zahlkörper. Die dritte Periode zeigt Kummer im Anschluß an die Differentialgeometrie von Gauß als Geometer, mit Bedeutung auch für die Strahlenoptik. Unter anderem entdeckte er 1864 die nach ihm benannte *„Kummersche Fläche“* (4. Ordnung, 4. Klasse).

10.5.4 Leopold Kronecker: „Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht“

Zusammen mit Kummer und Weierstraß begründete Leopold Kronecker (1823–1891) ein äußerst attraktives Zentrum für Mathematik in Berlin, obwohl er, im Besitz eines beträchtlichen Vermögens, lange Jahre in Berlin als Privatmann lebte und forschte. Erst 1883 übernahm er eine Professur. Er war allerdings schon seit 1861 Mitglied der Akademie in Berlin und damit berechtigt, Vorlesungen zu halten [Purkert 1989].

Kronecker stammt aus Liegnitz (heute Legnica, Polen). Am dortigen Gymnasium unterrichtete Kummer, sein späterer Kollege in Berlin, der Kronecker einfühlsam förderte. Im Frühjahr 1841 nahm er das Studium in Berlin auf; Dirichlet und der Geometer J. Steiner (1796–1863) waren seine hauptsächlichen akademischen Lehrer in Mathematik. Zugleich widmete er sich der Philosophie, nahm Vorlesungen bei F. J. W. Schelling wahr und studierte bei G. W. F. Hegel. Das Sommersemester 1843 verbrachte Kronecker an der Bonner Universität. Er blieb seinen philosophischen Neigungen treu und vertrat Meinungen, welche die späteren philosophisch-mathematischen Ansichten der Intuitionisten in gewissem Sinne vorwegnahmen. Nach seiner Meinung könne echte Mathematik nur solche sein, deren Sätze und Konstruktionsverfahren sich in endlich vielen Schritten bewältigen und auf die ganzen Zahlen zurückführen ließen. Zugespitzt soll Kronecker 1886 auf der Berliner Naturforscherversammlung den Ausspruch getan haben: *„Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht; alles andere ist Menschenwerk“.*

Das sozusagen intuitionistische Programm hat Kronecker in seinem Aufsatz *Über den Zahlbegriff* so formuliert:

> *„Und ich glaube auch, daß es dereinst gelingen wird, den gesamten Inhalt aller dieser mathematischen Disciplinen* (Algebra, Analysis, Zahlentheorie, Wg.) *zu „arithmetisiren“, das heißt einzig und allein auf den im engsten Sinne genommenen Zahlbegriff zu gründen, also die Modificationen und Erweiterungen dieses Begriffes wieder abzustreifen, welche zumeist durch die Anwendungen auf die Geometrie und Mechanik veranlaßt worden sind. Ich meine hier namentlich die Hinzunahme der irrationalen sowie der continuirlichen Größen.“*
> [Kronecker, 1887, S. 264f.]

Diese teilweise vehement vorgetragenen Meinungen sollten Kronecker gegen Ende seiner Berliner Zeit in schwere Gegensätze zur Weierstraß und Cantor bringen; beide fühlten sich persönlich angegriffen und litten unter diesen Misshelligkeiten.

Nach diesem Vorgriff auf spätere Entwicklungen kehren wir zur Darstellung des Lebenslaufes von Kronecker zurück: Kronecker promovierte 1845 mit einer Arbeit, die schon einem seiner späteren Arbeitsgebiete angehörte, der Theorie der algebraischen Zahlkörper.

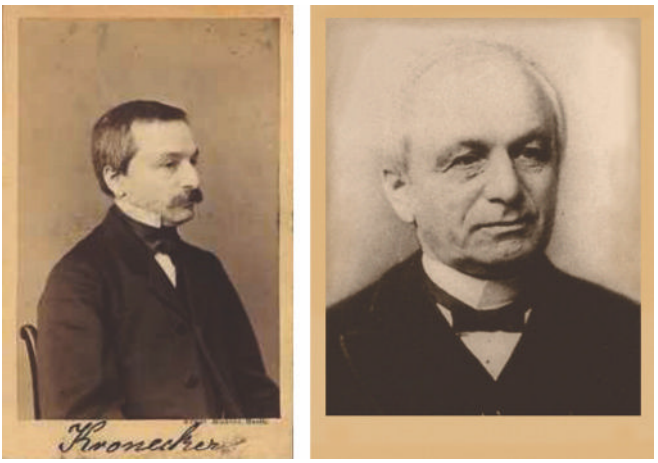


Abb. 10.5.3 Leopold Kronecker

Von 1845 an widmete sich Kronecker auf Wunsch des Vaters der Verwaltung eines landwirtschaftlichen Großbetriebes in Schlesien; er hatte 1848 geheiratet. Erst 1855 konnte er nach Berlin zurückkehren. Sein Haus wurde einer der Mittelpunkte des geselligen Lebens in Berlin. Ein Jahr vor seinem Tode trat Kronecker zum Christentum über.

Kronecker publizierte 1853 die Arbeit *Über die algebraisch auflösbaren Gleichungen*, die ihn weithin bekannt machte. 1856 begann er, den Körperbegriff herauszuarbeiten (er nannte Körper *„Rationalitätsbereich“*). Zusammen mit Dedekind, Kummer und Solotarjow schuf er eine abschließende Theorie der algebraischen Körper; sein Beitrag ist in der Festschrift für Kummer 1881 (im Druck erst 1882) erschienen. Eine weitere ausgedehnte Forschungsarbeit bezog sich auf die Theorie der elliptischen Funktionen, erstaunlich deshalb, weil er in den dazu veröffentlichten Arbeiten seinen eigenen (philosophischen) Forderungen nicht genügen konnte.

Kronecker hat seine Absichten, die auf eine sich gegenseitig befruchtende Verbindung verschiedener mathematischer Disziplinen abzielten, 1861 in der Antrittsrede vor der Berliner Akademie so fixiert:

> *„Die Verknüpfung dieser drei Zweige der Mathematik* (Algebra, Zahlentheorie, elliptische Funktionen, Wg.) *erhöhte den Reiz und die Fruchtbarkeit der Untersuchung; denn ähnlich wie bei den Beziehungen verschiedener Wissenschaften zu einander wird da, wo verschiedene Disziplinen einer Wissenschaft in einander greifen, die eine durch die andere gefördert und die Forschung in naturgemäße Wege geleitet.“*
> (Zitiert bei [Purkert 1989, S. 426])

10.5.5 Richard Dedekind: „Was sind und was sollen die Zahlen?“

Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831–1916) hat die Entwicklung der Mathematik wesentlich beeinflusst, sowohl durch seine Persönlichkeit als auch durch seine Denkweise über Mathematik (vgl. z. B. [Purkert 1989, S. 443ff.]).

Seine 1872 erschienene Arbeit *Stetigkeit und irrationale Zahlen* sowie seine Unterstützung und aktive Teilnahme bei der Entwicklung der Mengenlehre sind im Wesentlichen der Analysis zuzurechnen.

Für die Zahlentheorie sind vor allem seine Idealtheorie und deren Anwendung in der algebraischen Zahlentheorie von Bedeutung. Berühmt geworden ist seine 1888 erschienene und immer wieder aufgelegte Arbeit *Was sind und was sollen die Zahlen.*

Im Jahre 1871 ließ Dedekind das Supplement X (in späteren Auflagen XI) zu Dirichlets *Vorlesungen über Zahlentheorie* erscheinen. Der Grundgedanke bestand darin, die Bedeutung des Körperbegriffes für die Gleichungstheorie und die algebraische Zahlentheorie herauszustellen. Auch die Wortbildung *„Körper“* als mathematischer Fachbegriff geht auf Dedekind zurück [Purkert 1973].

In Kürze: Sei Ω ein aus algebraischen Zahlen bestehender Körper über dem Körper der rationalen Zahlen, in dem es n linear unabhängige Zahlen gibt. Eine Zahl von Ω heißt ganzalgebraisch, wenn sie einer algebraischen Gleichung mit ganzrationalen Koeffizienten genügt. Die Menge der ganzalgebraischen Zahlen bildet einen Ring $\mathfrak{o}$. Eine Teilmenge $\mathfrak{a}$ eines kommutativen Ringes $\mathfrak{o}$ heißt ein Ideal, wenn bei Addition und Differenzbildung zweier Elemente von $\mathfrak{o}$ und bei Multiplikation eines Elementes aus $\mathfrak{o}$ und eines Elementes aus $\mathfrak{a}$ jeweils wieder Elemente aus $\mathfrak{a}$ erhalten werden. Die Ideale lassen sich multiplizieren. Das Hauptergebnis besteht aus dem Satz: Jedes von (0) verschiedene Ideal ist eindeutig als Potenzprodukt von Primidealen (d. h. aus unzerlegbaren Idealen) darstellbar – die Analogie zur Zerlegung von ganzen Zahlen in Primzahlen war für alle Zahlkörper gefunden.



Abb. 10.5.4 Richard Dedekind (DDR 1981); Dedekind-Gedenktafel an der Technischen Universität Braunschweig [Foto Löwen]

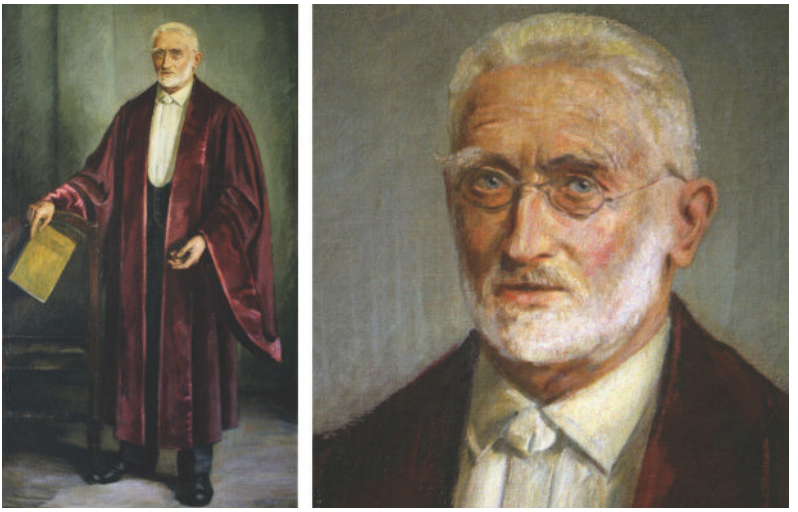


Abb. 10.5.5 Richard Dedekind (Ölgemälde im Forum-Gebäude der TU Braunschweig) [Foto Wesemüller-Kock]

Dedekind stammt aus einer hoch angesehenen norddeutschen Familie, die herausragende Persönlichkeiten hervorgebracht hat. Er besuchte das Gymnasium und das Collegium Carolinum in seiner Heimatstadt Braunschweig, ging dann mit erheblichen Vorkenntnissen 1850 zum Studium nach Göttingen, freundete sich mit B. Riemann an und hörte einige Vorlesungen bei Gauß. Über den alten Gauß berichtete er:

> *„Gauß trug ein leichtes schwarzes Käppchen, einen ziemlich langen braunen Gehrock, graue Beinkleider; er saß meist in bequemer Haltung, etwas gebeugt vor sich niedersehend, mit über dem Leib gefalteten Händen. Er sprach ganz frei, sehr deutlich, einfach und schlicht; wenn er aber einen neuen Gesichtspunkt hervorheben wollte, wobei er ein besonders charakteristisches Wort gebrauchte, so erhob er wohl plötzlich den Kopf, wandte sich zu einem seiner Nachbarn und blickte ihn während der nachdrücklichen Rede ernst mit seinen schönen, durchdringenden blauen Augen an. Das war unvergeßlich (...). Ging er von einer prinzipiellen Erörterung zur Entwicklung mathematischer Formeln über, so erhob er sich, und in stattlicher, ganz aufrechter Haltung schrieb er an einer neben ihm stehenden Tafel mit der ihm eigenen schönen Handschrift, wobei es ihm immer durch Sparsamkeit und zweckmäßige Anordnung gelang, mit dem ziemlich kleinen Raume auszukommen. Für die Zahlenbeispiele, auf deren sorgfältige Durchführung er besonderen Wert legte, brachte er die erforderlichen Data auf kleinen Zetteln mit.“* [Dedekind 1931, S. 294f.]

Im Jahre 1852 promovierte Dedekind bei Gauß, wurde 1854 nach der Habilitation Privatdozent in Göttingen, 1858 Professor am Polytechnikum in Zürich und 1862 in Braunschweig. Unter seiner Leitung wurde das Collegium Carolinum umgebaut und Technische Hochschule. Mehrere ehrenvolle Berufungen hat Dedekind abgelehnt, auch wegen der Nähe zur Verwandtschaft. Dedekind war hochmusikalisch; er spielte ausgezeichnet Cello und Klavier und war infolgedessen gern gesehener Gast bei Gesellschaften, besonders bei Dirichlet und seiner Frau Rebecca, geb. Mendelssohn-Bartholdi. Dedekind blieb unverheiratet. Da er das die deutschen Kriegsziele unterstützende chauvinistische *„Manifest an die Kulturwelt“* nicht unterschrieben hatte, widmete ihm die Pariser Akademie sogar mitten im Krieg einen Nachruf.

10.5.6 Bernhard Riemann: Zetafunktion und Riemannsche Vermutung

Im Jahre 1859 legte Bernhard Riemann (1826–1866) der Berliner Akademie als Dank für seine Zuwahl die Abhandlung *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe* vor. In dieser Arbeit werden Probleme der Zahlentheorie mit Mitteln der Analysis behandelt.

Im Anschluss an Studien von Euler und Gauß über die Verteilung der Primzahlen benutzte Riemann die Funktion der komplexen Veränderlichen s

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \text{ mit } s = \sigma + it,\ \sigma > 1 \ ,$$

die später *Riemannsche Zetafunktion* genannt wurde.

D. Laugwitz stellte fest, dass wir über den von Riemann selbst eingeschlagenen Weg nur wenig wissen [Laugwitz 1996, S. 165] und sieht im nachfolgenden Text einen von Riemann gewählten „denkbaren Zugang“. Riemann schrieb im November 1859:

> *„Bei dieser Untersuchung diente mir als Ausgangspunkt die von Euler gemachte Bemerkung, dass das Product*
>
> $$\prod \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \sum \frac{1}{n^s} \ ,$$
>
> *wenn für p alle Primzahlen, für n alle ganzen Zahlen gesetzt werden. Die Function der complexen Veränderlichen s, welche durch diese beiden Ausdrücke, so lange sie convergiere n, dargestellt wird, bezeichne ich durch $\zeta(s)$.“* [Riemann 1990, S. 145]

Das Produkt und die Reihe konvergieren nur für $\operatorname{Re} s > 1$. Die dort als holomorphe Funktion definierte Zetafunktion lässt sich jedoch als meromorphe (d. h. bis auf Pole holomorphe) Funktion in die ganze komplexe Zahlenebene analytisch fortsetzen. Bei $s = 1$ hat $\zeta(s)$ einen einfachen Pol mit dem Residuum 1.

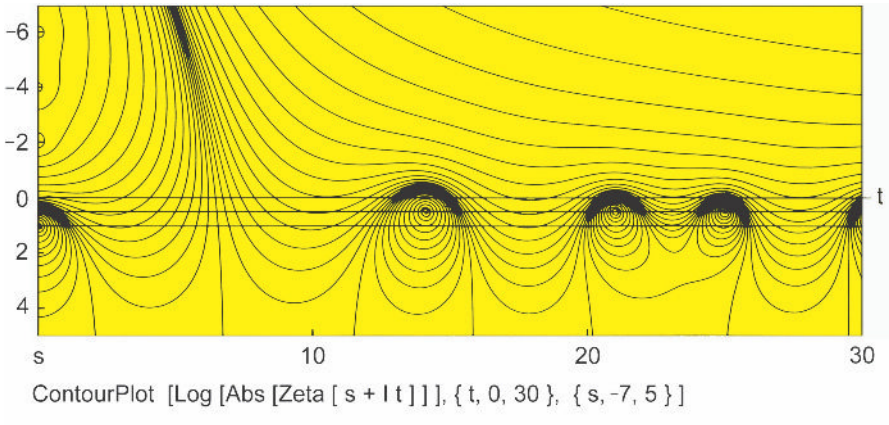


Abb. 10.5.6 Die ersten Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion auf der „kritischen Graden“, nach [Wolfram Research Inc. 1990]

Für $\operatorname{Re} s < 0$ hat die Zetafunktion nur die „trivialen“ Nullstellen $s = -2, -4, -6, \ldots$. Für $\operatorname{Re} s > 1$ hat sie keine Nullstellen. Die „nichttrivialen“ Nullstellen – es gibt unendlich viele – müssen demnach im Streifen $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$ liegen (Hadamard bewies, dass auf dem Rande dieses Streifens, also auf den Geraden $\operatorname{Re} s = 0$ und $\operatorname{Re} s = 1$, keine Nullstellen liegen.)

Riemann leitete nun aus dem Zusammenhang der Zetafunktion mit der Gammafunktion gemäß

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} \mathrm{d}t, \ \operatorname{Re} s > 1$$

und der Fortsetzung dieser Funktion als meromorphe Funktion in die ganze s-Ebene die berühmte Funktionalgleichung

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s)$$

her. Deren linke Seite ist aber invariant gegenüber der Substitution $s \to 1 - s$. Das bedeutet geometrisch eine Spiegelung an der „kritischen Geraden“ $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$. Daraus leitete Riemann die Vermutung ab, dass alle (unendlich vielen) nichttrivialen Nullstellen auf dieser Geraden liegen und sagte dazu wörtlich:

> *„Hiervon wäre allerdings ein strenger Beweis zu wünschen; ich habe indess die Aufsuchung desselben nach einigen flüchtigen vergeblichen Versuchen vorläufig bei Seite gelassen, da er für den nächsten Zweck meiner Untersuchung entbehrlich schien.“*
> [Riemann 1990, S. 148]

Hilbert nahm die Vermutung von Riemann als Nummer 10 in seine 1900 beim Vortrag in Paris vorgelegte Liste von 23 fundamentalen Problemen der Mathematik auf. Riemann hatte noch keine der Nullstellen auf der vermuteten Geraden angegeben. Erst 1903 fand man die ersten 15 dieser Nullstellen, Anfang der achtziger Jahre kannte man mehr als 100 Millionen. Mit Großrechnern wurden im Jahre 2001 mehr als 10 Milliarden der Nullstellen berechnet, 2004 die ersten 10 Billionen. Dennoch ist die Riemannsche Vermutung bislang weder bewiesen noch widerlegt worden.

Die Riemannsche Vermutung hängt unmittelbar mit tiefliegenden Problemen der Zahlentheorie zusammen (siehe dazu Kap. 12). Als man Hilbert fragte, was er 100 Jahre nach seinem Tode als Erstes wissen wolle, soll er geantwortet haben: *„Ist die Riemannsche Vermutung bewiesen?“*

10.5.7 Charles Hermite und Ferdinand Lindemann: Transzendenz von e und π

Die Zahl π, die u. a. bei der Kreisberechnung eine Schlüsselrolle spielt und deshalb als Kreiszahl bekannt ist, hat von alters her große Aufmerksamkeit auf sich gezogen, insbesondere mit der Angabe von Näherungswerten.

Schon vor rund 4000 Jahren haben Menschen in Mesopotamien Kreisfläche und Kreisumfang mit der groben Näherung 3 für π berechnet und Ägypter dafür den Näherungswert $25/81 \approx 3{,}16$ benutzt (siehe Abschnitte 3.1 und 3.2 in Band 1).

Die Griechen der klassischen Antike verwendeten die Werte $223/71 \approx 3{,}141$ und $22/7 \approx 3{,}143$ als Schranken für π (Archimedes), entwickelten die Exhaustionsmethode und benutzten sie zur „Kreisquadratur“ mittels einbe-



Abb. 10.5.7 Ferdinand Lindemann, Charles Hermite

schriebener regelmäßiger Vielecke. Sie vermuteten auch die Irrationalität von π, deren Beweis jedoch noch 2000 Jahre auf sich warten ließ.

Die Bezeichnung π (gesprochen pi) leitet sich ab von griechisch *perifereia* (Randbereich) bzw. *perimeter* (Umfang) und wurde erstmals 1706 von dem aus Wales stammenden Gelehrten William Jones (1675–1749) benutzt.

Gelegentlich wird π auch als Ludolphsche Zahl bezeichnet, benannt nach dem deutsch-niederländischen Renaissance-Mathematiker Ludolph van Ceulen (1540–1610). Er hat – mühsam, mit den damaligen mathematischen Hilfsmitteln (einbeschriebenes 2^{62}-Eck) – π auf 35 Stellen genau berechnet. Er stammt aus Hildesheim, wirkte in Leiden und erhielt dort einen Gedenkstein.

Inzwischen soll π mit Hilfe von Großrechnern auf 1,241 Billionen Stellen genau berechnet worden sein. Natürlich hat dies kaum praktische Bedeutung, allenfalls zum Testen von Software.

Kurios genug: Beinahe wäre π per Gesetz 1897 im US-Staat Indiana zum Wert 3,2 festgesetzt worden; Mathematiker erfuhren von der Gesetzesvorlage aus der Presse und schritten ein.

Versuche, π als Lösung einer algebraischen Gleichung durch eine Schachtelung von Wurzelausdrücken exakt darzustellen, führten zur Bildung des Begriffs transzendente Zahl.

Den Unterschied zwischen algebraischen und transzendenten Zahlen scheint Descartes bereits 1637 erkannt zu haben. Die Definition von „transzendent“ geht auf Leibniz, 1686, zurück:

> *„Transzendente sind solche Größen, die durch keinerlei Gleichungen bestimmten Grades erklärt werden, vielmehr über jede algebraische Gleichung hinausgehen.“*
> [Tropfke 1933, S. 93f.]

Johann Heinrich Lambert (1728–1777) hatte 1767 die Irrationalität von π bewiesen. Joseph Liouville konnte 1844 Zahlen angeben, die nicht Wurzeln algebraischer Gleichungen mit rationalen Koeffizienten, d. h. transzendent sind.

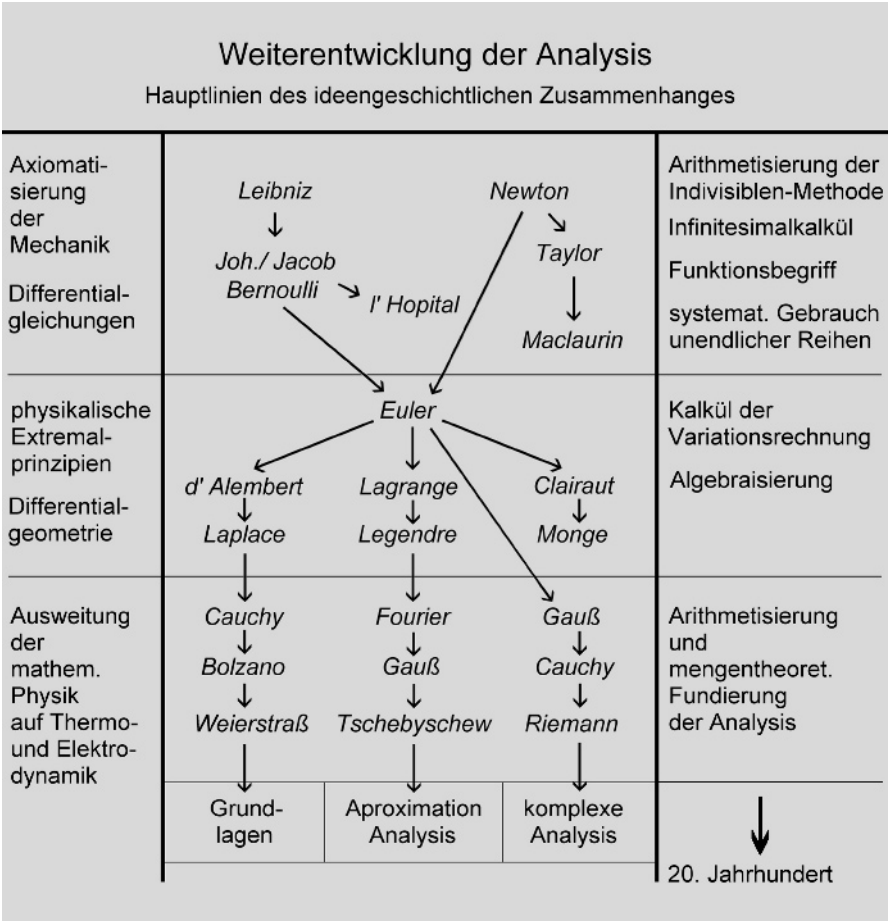
Charles Hermite führte 1873 den ersten Beweis für die Transzendenz der Basis e der natürlichen Logarithmen, indem er von einer Reihe für e^x ausging [Kolmogorow 2001, S. 205ff.]. Die Bezeichnung e war von Euler 1736 in seiner „Mechanica“ erstmals benutzt worden, hat aber nichts mit dem Anfangsbuchstaben seines Namens zu tun. Die Zahl e hängt eng mit Wachstumsprozessen zusammen, sowohl in der Natur, als auch im kaufmännischen Bereich. Wenn man beispielsweise ein Kapital ein Jahr lang momentan mit Zins und Zinseszins verzinst, so erhält man das e-fache des ursprünglichen Kapitals.

Im Jahre 1882 bewies Ferdinand Lindemann (1852–1939) die Transzendenz von π. Damit war gezeigt, dass π nicht algebraisch ist, also auch keine Strecke der Länge π mit Hilfe algebraischer Kurven konstruiert werden kann, also erst recht nicht mit Zirkel und Lineal allein. Das antike Problem der Quadratur des Kreises war nun endgültig als unlösbar erkannt. Lindemann hat an verschiedenen deutschen Universitäten gewirkt, hauptsächlich in Königsberg und München.

Das Problem der Transzendenz zog auch weiterhin Aufmerksamkeit auf sich. Weierstraß gab 1885 einen einfacheren Beweis für die Transzendenz von π. In Russland wurden die Ergebnisse von Hermite und Lindemann durch Andrej Andrejewitsch Markow (1856–1922) in St. Petersburg 1883 bekannt gemacht.

Georg Cantor (1845–1918) hatte bereits 1873 mit den Mitteln der Mengenlehre einen Beweis für die Existenz transzendenter Zahlen geführt, indem er zeigte, dass die Menge aller Zahlen im Intervall [0, 1] nicht abzählbar ist, während die Menge der algebraischen Zahlen dort abzählbar ist. Mit Cantors Beweismethode kann man jedoch keine transzendente Zahl effektiv angeben.

10.6 Analysis in neuem Gewande



10.6.1 Probleme in den Grundlagen der Analysis

Trotz aller großartigen Erfolge während des 18. Jahrhunderts war die Analysis, die nach Eulers Worten *„ruhmvolle Erfindung“*, mit dem unbehaglichen Gefühl von der Fragwürdigkeit ihrer logischen Grundlagen belastet geblieben.

Bis zum Ende des 18. Jhs. wurde die Diskussion noch unter vorwiegend philosophischer Flagge geführt. Auf der eigentlichen Ebene, der mathematischen, ging es um die begriffliche Bewältigung des mathematischen Unendlich, wie es in der Verwendung der Sprechweise „unendlich kleine Größe“, „unendlich groß“, „Summe einer unendlichen Reihe“ die Regel war. Die Lage wurde schließlich dramatisch, als sogar echte innermathematische Schwierigkeiten auftraten, z. B. bei der kritiklosen Verwendung divergenter Reihen [Burkhardt 1911]. Es war nur folgerichtig und der Lage angemessen, dass z. B. 1782 die Göttinger Akademie und 1784 die Berliner Akademie Preisfragen bezüglich der Ursachen der Mängel bei den infinitesimalen Methoden und hinsichtlich ihrer Behebung stellten. Dazu kam die Forderung, dass die strenge Begründung nicht zu einer unerträglichen Langatmigkeit der Darstellung führen dürfe, sei es in Lehrbüchern oder sei es im mündlichen Vortrag.

Das Berliner Preisausschreiben forderte eine *„lichtvolle und strenge Theorie dessen, was man Unendlich in der Mathematik nennt“*:

„Die höhere Geometrie (d. h. Mathematik; im damaligen Sprachgebrauch sind Mathematik und Geometrie synonym, Wg) *benutzt häufig unendlich große und unendlich kleine Größen; jedoch haben die alten Gelehrten das Unendliche sorgfältig vermieden, und einige berühmte Analysten unserer Zeit bekennen, daß die Wörter unendliche Größe widerspruchsvoll sind. Die Akademie verlangt also, daß man erkläre, wie aus einer widersprechenden Annahme so viele richtige Sätze entstanden sind, und daß man einen sicheren und klaren Grundbegriff angebe, welcher das Unendliche ersetzen dürfe, ohne die Rechnungen zu schwierig oder zu lang zu machen.“* [Cantor 1924, S. 645]

Der Preis ging 1786 an den Genfer Professor S. J. L'Huillier (1750–1840). Gerade aber die wichtige begleitende Forderung nach kalkülmäßiger Handhabbarkeit der Grenzübergänge hatten – trotz gedanklicher Tiefe – die Ansätze von Colin Maclaurin (1698–1746) im *Treatise of Fluxions* (Abhandlung über die Fluxionen) und der Artikel von d'Alembert über „Grenzwert“ in der *Encyclopedie* nicht erfüllt. Eine andere Variante der Erklärung – dass die gemachten Fehler beim Rechnen sich gegenseitig aufhöben – stammt neben Euler auch vom Mathematiker und Revolutionär Lazare Carnot; diese Tendenz war jedoch eher auf die Bewahrung des Bestehenden, statt auf Erneuerung gerichtet.

Übrigens hatte Lagrange die Berliner Preisaufgabe angeregt. Er selbst hatte, wie schon berichtet, einen Vorschlag gemacht: In seinem Lehrbuch von 1797 *Théorie des fonctions analytiques* werden die ersten bis n-ten Ableitungen als Koeffizienten der Taylorentwicklung der Funktion definiert. Allerdings beruhte diese „Lösung“ auf der irrigen Annahme, dass sich jede (unendlich oft differenzierbare) Funktion in eine konvergente Potenzreihe entwickeln lässt.

Erweiterung des Funktionsbegriffs

Die Forderung nach Klärung der Grundlagen der Analysis verband sich notwendigerweise mit einer Klärung des Begriffes „Funktion“. Dies hatte sich bei Lagrange deutlich gezeigt, vor allem aber beim Problem der Wärmeausbreitung und dem breit und kontrovers diskutierten Problem der Saitenschwingung. Widerspruch erweckte vor allem die Behauptung von Joseph Baptiste Fourier, alle Funktionen ließen sich in eine trigonometrische Reihe entwickeln. Die Grenzen des analytischen Funktionsbegriffs wurden bereits damals deutlich (ausführlich in [Jahnke 1999, S. 157ff.]). Die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

erfasst Saitenschwingungen (t bedeutet die Zeit, x die Auslenkung der Saite zur Zeit t). Gesucht ist die Funktion $y(x,t)$. Die Differentialgleichung geht in Ansätzen auf Taylor und schließlich auf d'Alembert und Euler zurück.

D'Alembert postulierte – unter gewissen Nebenbedingungen –, dass als Lösung nur eine periodische, analytische und gerade Funktion in Frage käme, also eine Funktion der Form $a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \ldots$.

Euler konnte sich dieser Beschränkung von d'Alembert nicht anschließen, aus physikalischen Gründen. Die Lösungsfunktion müsse für alle in der Physik denkbaren Funktionen gelten, seien sie stetig oder unstetig. Dazu gehörten auch die mit freier Hand gezeichneten Kurven. Dabei verwandte Euler einen anderen, heute nicht mehr gültigen Stetigkeitsbegriff: Stetig sind nach Euler alle Funktionen, die durch einen einzigen analytischen Ausdruck wiedergegeben werden können; alle anderen sind unstetig. So ist die Funktion




Abb. 10.6.1 Jean le Rond d'Alembert; Leonhard Euler

$y = x$ für $x \geq 0$ und $y = -x$ für $x < 0$ für Euler unstetig; denn hier wird eine Funktion durch zwei analytische Ausdrücke beschrieben.

Als Lösung der obigen Differentialgleichung gab Euler die unendliche Reihe an:

$$y(x,t) = \alpha \sin \pi \frac{x}{l} \cdot \cos \frac{ct}{l} + \beta \sin 2\pi \frac{x}{l} \cdot \cos 2\pi \frac{ct}{l} + \ldots$$

Der Streit zwischen Euler und d'Alembert konnte nicht beigelegt werden, auch als Daniel Bernoulli die Superposition der Schwingungen klar herausstellte und ebenfalls trigonometrische Reihen verwendete.

Immerhin hatte Euler eine erweiterte Fassung des Funktionsbegriffes in den *Institutiones calculi differentialis* von 1755 fixiert, vermutlich als Reaktion auf die stattfindende Diskussion:

> *„Sind nun Größen auf die Art voneinander abhängig, daß keine davon eine Veränderung erfahren kann, ohne zugleich eine Veränderung in der anderen zu bewirken, so nennt man diejenige, deren Veränderung man als Wirkung von der Veränderung der anderen betrachtet, eine Funktion von dieser; eine Benennung, die sich so weit erstreckt, daß sie alle Arten, wie eine Größe durch eine andere bestimmt werden kann, unter sich begreift."* (Zitiert bei [Jahnke 1999, S. 162])

Schließlich behauptete Fourier, dass jede Funktion durch eine konvergierende trigonometrische Reihe wiederzugeben sei. Hier ergaben sich schwierige Probleme und, wie sich zeigen sollte, historische Wurzeln der späteren Mengenlehre.

Ein weiterer Diskussionsgegenstand war, was unter Stetigkeit einer Funktion zu verstehen sei, woraus eine Unterteilung der Funktionen in stetige, nicht stetige und gemischte folgte oder folgen sollte. Kann beispielsweise eine „gemischte" Kurve wie die sog. „Sägeblattkurve" durch eine Funktion wiedergegeben werden, etwa durch eine trigonometrische Reihe?

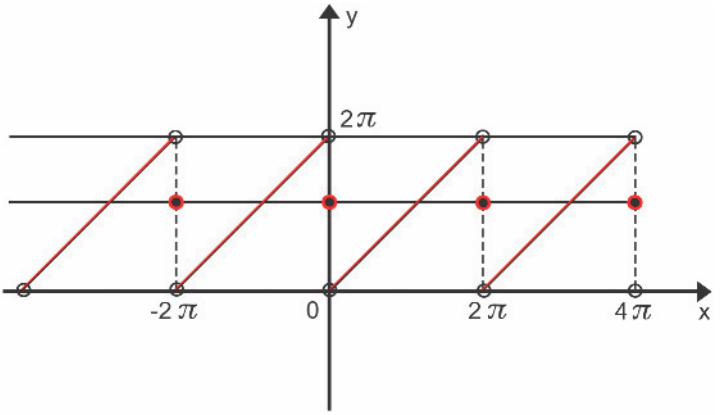


Abb. 10.6.2 „Sägeblattkurve"

J. Lützen hat deutlich gemacht, dass nicht nur die sozusagen rückwärtsgewandte Diskussion nach Sicherung der Grundlagen bestehender mathematischer Praxis auslösend für das Bedürfnis nach Strenge gewesen ist, sondern gerade auch *„die Entwicklung neuer Sätze in der Analysis“*, also eine starke Erweiterung und Ausdehnung der mathematischen Praxis.

> *„Die Fourier-Reihen waren in dieser Hinsicht besonders bedeutsam, da sie die alten Ideen hinsichtlich der Begriffe Funktion, Integral, Konvergenz und Stetigkeit in Frage stellten. Auch die Differentialgleichungen, die Potentialtheorie, elliptische Funktionen und andere Gebiete führten zu einem wachsenden Bedürfnis nach Strenge.“* [Lützen 1999, S. 191]

Erneute Diskussion der Grundlagen der Analysis

Zu Beginn des 19. Jahrhunderts trat die Diskussion der Grundlagen der Analysis in eine zweite Etappe ein, von der Konstatierung der Mängel zur Bewältigung der Schwierigkeiten. Das Gebot der Stunde lautete nun: Einzeluntersuchungen! Begriffsanalyse! Befreiung von unkontrollierbaren logischen und psychologischen Voraussetzungen! Das Ergebnis bestand in der Erkenntnis, dass Angabe des Definitionsbereiches, Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Existenz der höheren Ableitungen, Entwickelbarkeit in eine konvergente Potenzreihe usw. nicht einander implizierende Eigenschaften einer Funktion einer (reellen) Variablen, sondern vielmehr aufeinanderfolgende Stufen von Eigenschaften sind, die die Möglichkeit der Klasseneinteilung der Funktionen nach inneren Gründen liefern.

Dieses Um- und Neudenken verlief langsam und auch keineswegs im allgemeinen Konsens. Noch Ampère hatte die Meinung vertreten, jede stetige Funktion sei differenzierbar (vgl. [Hankel 1905, S. 51]).

Das Bewusstsein war verbreitet, die Mathematik stehe vor einer neuen Periode, in der sichere Grundlagen zu erarbeiten seien. Beispielsweise schrieb Abel 1826 in einer scharfsinnigen Betrachtung:

> *„Alle meine Kräfte möchte ich darauf verwenden, etwas mehr Licht in das ungeheure Dunkel zu bringen, das sich unbezweifelbar jetzt in der Analysis findet. Es fehlt so völlig jeder Plan und jedes System, daß es wirklich höchst verwunderlich ist, daß sie von so vielen studiert werden kann, und – das ist das Schlimmste – daß sie nirgends streng behandelt wird. Es gibt äußerst wenige Sätze in der höheren Analysis, die mit überzeugender Strenge bewiesen sind. Überall findet man die unglückliche Weise, vom Speziellen aufs Allgemeine zu schließen, und es ist äußerst merkwürdig, daß nach einer solchen Vorgehensweise doch nur wenige der so genannten Paradoxe gefunden werden.“*
>
> (Deutsch zitiert bei [Lützen 1999, S. 222])

Gauß seinerseits schrieb 1850 an seinen Freund Schumacher (allerdings liegen die entsprechenden Vorüberlegungen schon in seiner Jugendzeit):

„Es ist der Charakter der Mathematik der neueren Zeit (im Gegensatz gegen das Alterthum), dass durch unsere Zeichensprache und Namengebungen wir einen Hebel besitzen, wodurch die verwickeltsten Argumentationen auf einen gewissen Mechanismus reducirt werden. An Reichthum hat dadurch die Wissenschaft unendlich gewonnen, an Schönheit und Solidität aber, wie das Geschäft gewöhnlich betrieben wird, eben so sehr verloren. Wie oft wird jener Hebel eben nur mechanisch angewandt, obgleich die Befugniss dazu in den meisten Fällen gewisse stillschweigende Voraussetzungen implicirt. Ich fordere, man soll bei allem Gebrauch des Calculs, bei allen Begriffsverwendungen sich immer der ursprünglichen Bedingungen bewußt bleiben, und alle Producte des Mechanismus niemals über die klare Befugnis hinaus als Eigenthum betrachten. Der gewöhnliche Gang ist aber der, dass man für die Analysis einen Character der Allgemeinheit in Anspruch nimmt, und dem Andern, der so herausgebrachte Resultate noch nicht für bewiesen anerkennt, zumuthet, er solle das Gegentheil nachweisen. Diese Zumuthung darf man aber nur an den stellen, der seinerseits b e h a u p t e t ein Resultat sei falsch, nicht aber dem, der ein Resultat nicht für bewiesen anerkennt, welches auf einem Mechanismus beruhet, dessen ursprüngliche, wesentliche Bedingungen in dem vorliegenden Fall gar nicht zutreffen. So ist es sehr oft mit divergirenden Reihen. Reihen haben eine klare Bedeutung, wenn sie convergiren; diese Klarheit der Bedeutung fällt weg mit dieser Bedingung, und es ändert im Wesentlichen Nichts, ob man sich des Wortes Summe oder Werth bedient. Der Raum eines Briefes ist aber viel zu klein, um alles weiter auszuführen. – Nehmen Sie meinetwegen statt obigen Gleichnisses einer Maschine das von Papiergeld. Es kann dies zu großen Arbeiten vorteilhaftest benutzt werden, aber solide ist der Gebrauch nur, wenn ich gewiss bin, es jeden Augenblick in klingende Münze umsetzen zu können.“ [Gauß 1917b, S. 434f.]

Gauß hat nichts Systematisches zur Strenge in der Analysis publiziert. In der Dissertation hat er sich über unendliche Reihen geäußert, und in der Abhandlung über die hypergeometrische Reihe (1813) hat er das Quotientenkriterium zum Beweis der Konvergenz dieser Reihe benutzt.

Zurück zur Geschichte des Begriffes „Funktion“. Die schon von Euler verfolgte neue Tendenz bestand darin, dass die Bindung an eine „Formel“ (analytische Funktion) aufgehoben und statt dessen die gegenseitige Abhängigkeit von Größen zum Prinzip der Definition des Funktionsbegriffes herausgehoben wird. So heißt es bei Cauchy im *Cours d'Analyse*:

„Wenn veränderliche Zahlgrössen in solcher Weise untereinander zusammenhängen, dass man aus dem gegebenen Werte von einer Veränderlichen die Werte aller übrigen herleiten kann, so denkt man sich gewöhnlich diese verschiedenen Zahlgrössen vermittelst jener einen ausgedrückt. Jene eine nimmt dann den Namen: unabhängige Veränderliche an, während die übrigen, die mittelst der unabhängigen Veränderlichen ausgedrückten Zahlgrößen, sogenannte Funktionen jener einen Veränderlichen sind.“
[Cauchy 1885, S. 13])

Allerdings fällt Cauchy – worauf Lützen [Lützen 1999, S. 194] hinweist – sozusagen wieder zurück, indem er bei der Einteilung der Funktionen und beim Übergang zu Funktionen komplexer Variabler unterstellt, dass Funktionen doch durch eine Gleichung bzw. durch einen Ausdruck gegeben sind.

Die Einschätzung von Cauchys Beitrag zu den Grundfragen der Analysis ist noch immer nicht einvernehmlich bestimmt. Das liegt zum Teil daran, dass beim Gebrauch gleicher Terminologie, bei der Verwendung gleicher Worte wie Funktion und Stetigkeit sich hinter den Worten verschiedene Inhalte verbergen. Daher sei wegen des engen Zusammenhanges mit Cauchys Definition der Funktion noch dessen Erklärung von Stetigkeit beigefügt: Auf die Sonderstellung von Cauchy hatte bereits der Übersetzer und Herausgeber des *Cours d'analyse*, C. Itzigsohn, hingewiesen. Dort heißt es im Vorwort:

> *„Cauchy's algebraische Analysis ist demnach nicht nur ein bedeutendes Buch eines grossen Mathematikers, sondern auch ein charakteristischer Repräsentant einer eigenartigen Richtung."*
> [Cauchy 1885, S. III]

Bezüglich der Stetigkeit heißt es in §2 im *Cours d'analyse*:

> *„Zu den Anwendungen, welche sich an die Betrachtung der unendlich kleinen Zahlgrössen knüpfen, gehört die Entwicklung der Begriffe: Stetigkeit und Unstetigkeit der Funktionen.*
> *Unter diesem Gesichtspunkte werden wir zunächst die Funktionen einer einzigen Veränderlichen einer Prüfung unterziehen.*
> *Wir wollen voraussetzen, dass $f(x)$ eine Funktion einer Veränderlichen x sei, und dass jedem zwischen zwei gegebenen Grenzen eingeschlossen Werte der Veränderlichen x stets ein einziger endlicher Wert der Funktion entspricht.*
> *Wenn wir, von einem zwischen diesen Grenzen liegenden Werte der Veränderlichen ausgehend, die Veränderliche x um eine unendlich kleine Zahlgrösse α vermehren, so wird die Funktion selbst einen Zuwachs erhalten, nämlich die Differenz $f(x+\alpha) - f(x)$, welche Differenz sowohl von der neuen Veränderlichen α, als von dem Werte von x abhängig ist. Unter dieser Voraussetzung ist die Funktion $f(x)$ zwischen den festgesetzten beiden Grenzen der Veränderlichen x eine stetige Funktion dieser Veränderlichen, wenn für jeden zwischen diesen Grenzen gelegenen Wert von x der numerische Wert der Differenz $f(x+\alpha) - f(x)$ mit α zugleich so abnimmt, dass er kleiner wird als jede endliche Zahl.*
> *Mit anderen Worten:*
> *Die Funktion $f(x)$ wird zwischen den gegebenen Grenzen stetig in Beziehung auf x sein, wenn zwischen diesen Grenzen ein unendlich kleiner Zuwachs der Veränderlichen stets einen unendlich kleinen Zuwachs der Funktion bewirkt."*
> [Cauchy 1885, S. 23]

Dagegen folgte Fourier in der *Théorie analytique de la chaleur* einer anderen Tendenz, indem er sich von der Vorstellung einer analytischen Funktion trennte. Er schreibt dort 1822:

> *„Hinsichtlich der darzustellenden Function $f(x)$ (...) gilt also folgendes: Die Function fasst eine Folge von Ordinaten zusammen, die einzeln ganz beliebig gewählt werden können. Da die Abscissen x zwischen $-\infty$ und $+\infty$ alle möglichen Beträge annehmen dürfen, so giebt es auch unendlich viel Ordinaten y. Alle haben bestimmte numerische Werte, die beliebig positiv, negativ oder Null sein können; sie brauchen sich nicht nach einem bestimmten, gemeinsamen Gesetze anordnen zu lassen, vielmehr können sie auf einander in der Grösse ganz beliebig folgen; jede Ordinate ist eben so gegeben, wie wenn sie allein existirte.*
> *Im allgemeinen wird die Function, um deren Darstellung es sich handelt, continuirlich verlaufen, benachbarte Ordinaten sich voneinander also nur um unendlich wenig unterscheiden, allein zum Bestand der Formel (...) für sich ist die Stetigkeit der auszudrückenden Function nicht notwendige Bedingung, die Formel ist ebenso richtig, wenn die betreffende Function hin und wieder discontinuirlich wird.“*
> [Fourier 1884, S. 422f.]

In seinem Artikel *Über die Konvergenz von trigonometrischen Reihen* (1834) schrieb Lobatschewski:

> *“General conception demands that a function of x be called a number which is given for each x and which changes gradually together with x. The value of the function could be given either by an analytical expression, or by a condition which offers a means for testing all numbers and selecting one of them; or, lastly, the dependence may exist but remain unknown.”*
> (Zitiert nach [Youschkevitch 1976, S. 43])

Die Verwendung des Wortes “gradually“ (oder allmählich, postepenno im russischen Original) deutet an, dass Lobatschewski noch immer stetige Funktionen vor Augen hat. Einer der entscheidenden Schritte zum modernen Funktionsbegriff wird aber vollzogen: der Verzicht auf die formelmäßige Zuordnung der Ordinaten zu den Abszissen.

Die Definition von Dirichlet 1837 in der Arbeit *Über die Darstellung ganz willkürlicher Funktionen durch Sinus- und Cosinusreihen* stimmt mit der von Lobatschewski inhaltlich weitgehend überein. Auch definiert Dirichlet eine stetige Funktion einer sich stetig verändernden Variablen; dabei wird die Bindung an ein einheitliches Bildungsgesetz fallengelassen:

> *„Man denke sich unter a und b zwei feste Werthe und unter x eine veränderliche Größe, welche nach und nach alle zwischen a und b liegenden Werthe annehmen soll. Entspricht nun jedem x ein einziges,*

endliches y, und zwar so, daß, während x das Intervall von a bis b durchläuft, $y = f(x)$ sich ebenfalls allmählich verändert, so heißt y eine stetige oder continuirliche Funktion von x für dieses Intervall. Es ist dabei gar nicht nöthig, dass y in diesem ganzen Intervalle nach demselben Gesetze von x abhängig sei, ja man braucht nicht einmal an eine durch mathematische Operationen ausdrückbare Abhängigkeit zu denken.“
[Dirichlet 1900, S. 3f.]

Den letzten, diese Tendenz erfüllenden Schritt hat schließlich der deutsche Mathematiker Hermann Hankel getan, der – neben der Forderung nach einem die Funktion definierenden Formelausdruck – schließlich auch auf die Bindung des Funktionsbegriffes an die Stetigkeit verzichtete (wie dies Dirichlet schon mit seinem berühmten Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ wenn } x \text{ rational} \\ 0, \text{ wenn } x \text{ irrational} \end{cases}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

getan hatte):

„Eine Funktion heißt y von x, wenn jedem Werte der veränderlichen Größe x innerhalb eines gewissen Intervalls ein bestimmter Wert von y entspricht; gleich viel, ob y in dem ganzen Intervalle nach demselben Gesetze von x abhängt oder nicht; ob die Abhängigkeit durch mathematische Operationen ausgedrückt werden kann oder nicht.“
[Hankel 1905, S. 49]

Diese Definition war bis weit ins 20. Jahrhundert allgemeine Grundlage der Analysis. Sie findet sich in Hankels von tiefem historischem Verständnis geprägten Einleitung über die Entwicklung des Funktionsbegriffes zu der Abhandlung *Untersuchung über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen* vom Jahre 1870.

Um eben diese Zeit gelangte Georg Cantor – ausgehend von ganz benachbarten Fragestellungen – zur Mengenlehre. Auf mengentheoretischer Grundlage wird im 20. Jahrhundert ein neuer, noch allgemeinerer Funktionsbegriff entwickelt werden, der ihn als Teilmenge des cartesischen Produkts zweier (oder mehrerer) Mengen mit bestimmten Eigenschaften festlegt. Es wäre jedoch falsch, diese weitere Verallgemeinerung des Funktionsbegriffs ausschließlich dem Einfluss der Mengenlehre zuzuschreiben; dazu war der Einfluss anderer mathematischer Disziplinen, insbesondere der sich entwickelnden mathematischen Logik, zu groß. So kam Dedekind 1887 auf der Grundlage seiner algebraischen, zahlentheoretischen und mengentheoretischen Studien zu einem allgemeinen Begriff der Abbildung einer Menge (nicht notwendig Zahlenmenge) in eine andere, wobei er die Vorstellungen dazu bereits in den Jahren 1872 bis 1878 entwickelte. Er beachtete jedoch kaum den Zusammenhang dieses Begriffs mit der damals üblichen Definition der Funktion und wandte sich dann den eineindeutigen Zuordnungen von Mengen zu, die Cantor bereits in seiner Arbeit von 1874 betrachtet hatte. In seinen 1895 bis





Abb. 10.6.3 Augustin Louis Cauchy; Hermann Hankel

1897 publizierten Arbeiten zur Mengenlehre gab Cantor eine Definition der Funktion, die in ihrer Allgemeinheit und in ihrem Wesen den Dedekindschen Vorstellungen entspricht.

In dieser Zeit kamen auch Vertreter der mathematischen Logik zu einem allgemeinen Funktionsbegriff. So beschäftigte sich Augustus de Morgan im Jahre 1850 mit Relationen. Benjamin Peirce stellte sie bereits als Elementpaare dar und begann 1880/1890 mit ihrer Klassifizierung. Ernst Schröder (1841–1902) gab im Rahmen seiner Betrachtungen zur Theorie der Abbildungen im Jahre 1895 jene Eigenschaften an, die unter den Relationen die Funktionen charakterisieren.

Die Definition der Funktion als Teilmenge des cartesischen Produkts von Mengen mit gewissen Eigenschaften formulierte sinngemäß Giuseppe Peano im Jahre 1911, wobei er sowohl an die Forschungen zur Theorie der Funktionen als auch zur mathematischen Logik anknüpfte; Peano hatte bereits 1887 vektorwertige Mengenfunktionen untersucht.

Der Funktionsbegriff, ein zentraler Begriff der Analysis, ist hier im Zusammenhang mit seiner historischen Entwicklung herausgegriffen worden, im biographischen Kontext sollen dagegen weitere Fortschritte bei der Verschärfung der Grundlagen der Analysis erörtert werden (vgl. [DSB 1970–1980], [Jahnke 1999], [Grattan-Guinness 2005, S. 334ff.], [Grattan-Guinness 1990], [v. Renteln 1989], [Grattan-Guinness 1997, S. 436ff.]).

10.6.2 Jean Baptiste Joseph de Fourier: Begründung der mathematischen Physik

Fouriers Leben (1768–1830) war eine Abfolge von unglücklichen Jahren mit Jahren hoher Anerkennung und herausragender wissenschaftlicher Erfolge.

Als Vollwaise wurde Jean Baptiste mit 9 Jahren in der Militärschule seiner Heimatstadt Auxerre aufgenommen; dort fand er frühzeitig Interesse an Mathematik.

Trotz der Fürsprache von Legendre wurde Fourier nicht in die Armee aufgenommen; er war nicht von Adel, sondern Sohn eines Schneiders. Die Ablehnung war eindeutig: Fourier könne nicht Offizier werden, *„und sei er auch ein zweiter Newton."* Vorübergehend erwog er, dem Benediktinerorden beizutreten.

Die Französische Revolution schuf ihm Spielraum. Einige Zeit war er in Auxerre als Lehrer tätig, las 1789 vor der Pariser Akademie eine Abhandlung, wurde 1794 vorübergehend verhaftet, war als Lehrer an der nur kurze Zeit bestehenden École Normale tätig, die der Lehrerausbildung hatte dienen sollen, fand schließlich 1795 eine Anstellung an der École Polytechnique, wo Lagrange und Monge seine Lehrer waren. Nach dem Scheitern der Revolution war er wiederum vorübergehend inhaftiert, diesmal auf Betreiben von konservativen Kreisen.

Auf Empfehlung von Monge und auf Befehl von Napoleon nahm Fourier an der sog. Ägyptischen Expedition von 1798 teil und amtierte als Sekretär des in Kairo gegründeten wissenschaftlichen „Institut d'Egypte", einer nach französischem Vorbild eingerichteten Akademie zum Studium Ägyptens. Fourier beteiligte sich engagiert, schrieb aber auch mathematische Studien über die Auflösung von Gleichungen und über Mechanik.

Nach dem Desaster des ägyptischen Feldzuges kehrte Fourier 1801 nach Frankreich zurück, um seine Tätigkeit an der École Polytechnique weiterzuführen. Doch Napoleon ernannte ihn 1802 zum Präfekten des Departements d'Isère mit starken administrativen Belastungen. 1815 kehrte Napoleon aus der Verbannung zurück und Fourier geriet wieder in politische Abhängigkeit von Napoleon, der ihn zum Grafen und zum Präfekt des Departements du Rhône ernannte. Nach der endgültigen Niederlage von Napoleon bei Waterloo war Fourier ohne Amt und Einkünfte. Mit Mühe konnte er in einer Stelle an einem statistischen Büro untergebracht werden.

Seine Wahl zum Mitglied der Akademie 1816 scheiterte zunächst wegen seiner Nähe zu Napoleon; erst 1817 konnte sie erfolgen. Schließlich wurde Fourier 1822 zum ständigen Sekretär der Pariser Akademie auf Lebenszeit berufen. Von 1822 bis 1826 hielt sich Dirichlet in Paris auf und erhielt von Fourier offensichtlich einige Anregungen, wie sich in seinen späteren einschlägigen Arbeiten zeigen sollte.

Bereits 1807 hatte Fourier bei der Akademie (die damals noch „Institute" hieß) eine Arbeit eingereicht: *Sur la propagation de la chaleur* (Über die Ausbreitung der Wärme). Die Annahme wurde aber wegen des Einspruches





Abb. 10.6.4 Jean Baptiste Joseph Fourier; Portal der ehemaligen École Polytechnique im Quartier Latin in Paris [Foto Jastrow]

von Lagrange verweigert. So wurde diese Arbeit (damals) nicht gedruckt, sondern erst im 20. Jahrhundert [Grattan-Guinness/Ravetz, 1972]. Dagegen gewann eine erweiterte Fassung von 1811 einen 1810 ausgesetzten Preis.

Fouriers Hauptwerk ist seine *Théorie analytique de la chaleur* (Analytische Theorie der Wärme) von 1822, in die Fourier seine früher gefundenen mathematischen Errungenschaften hatte einfließen lassen.

Zum ersten Mal wurde die Infinitesimalrechnung nicht nur, wie bisher, nur auf Astronomie und Mechanik angewandt, sondern auch auf andere physikalische Phänomene. *„Allein wenn auch die Theorien der Mechanik ein weit ausgedehntes Bereich beherrschen, so lassen sie doch auf die Wirkungen der Wärme keine Anwendungen zu. Diese bilden eine ganz besondere Klasse von Erscheinungen, die man nicht aus den Principien des Gleichgewichts und der Bewegung ableiten kann.“* [Fourier 1884, S. VIII] So kann Fourier mit gewisser Berechtigung als Stammvater der mathematischen Physik betrachtet werden. Einer seiner Aphorismen lautete, dass das gründliche Studium der Natur die fruchtbarste Quelle für mathematische Entdeckungen darstellt.

Die „Theorie der Wärme“ unterstellt die Existenz von Molekülen. Fouriers Arbeit beruht auf der Verwendung trigonometrischer Reihen. Wann kann eine Funktion $f(x)$ durch eine unendliche trigonometrische Reihe

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\,(nx)$$

dargestellt werden? Fourier bestimmte die Koeffizienten zu

$$a_n = \int_0^{\pi} f(x) \sin\,(nx) \mathrm{d}x.$$

Der Aufbau seiner *Theorie der Wärme* ist beeindruckend und so angelegt, dass mit zunehmender Kompliziertheit der Fälle von Wärmeausbreitung der Bereich der durch trigonometrische Reihen darstellbaren Funktionen schrittweise erweitert wird. Fourier gelangt zu dem Hauptergebnis, dass jede beliebige Funktion (mit gewissen Einschränkungen) als trigonometrische Reihe darstellbar ist.

Anfangs schreibt er:

> *„§219: Die Coefficienten der Entwicklung als bestimmte Integrale. Von den bisherigen Entwicklungen für ungerade Functionen können wir leicht zu der beliebiger continuirlicher oder discontinuirlicher, ja sogar arbiträr veränderlicher übergehen. Wir haben dazu nur sorgfältig die Coefficienten der einzelnen Sinusse zu untersuchen.“*
> [Fourier 1884, S. 146]

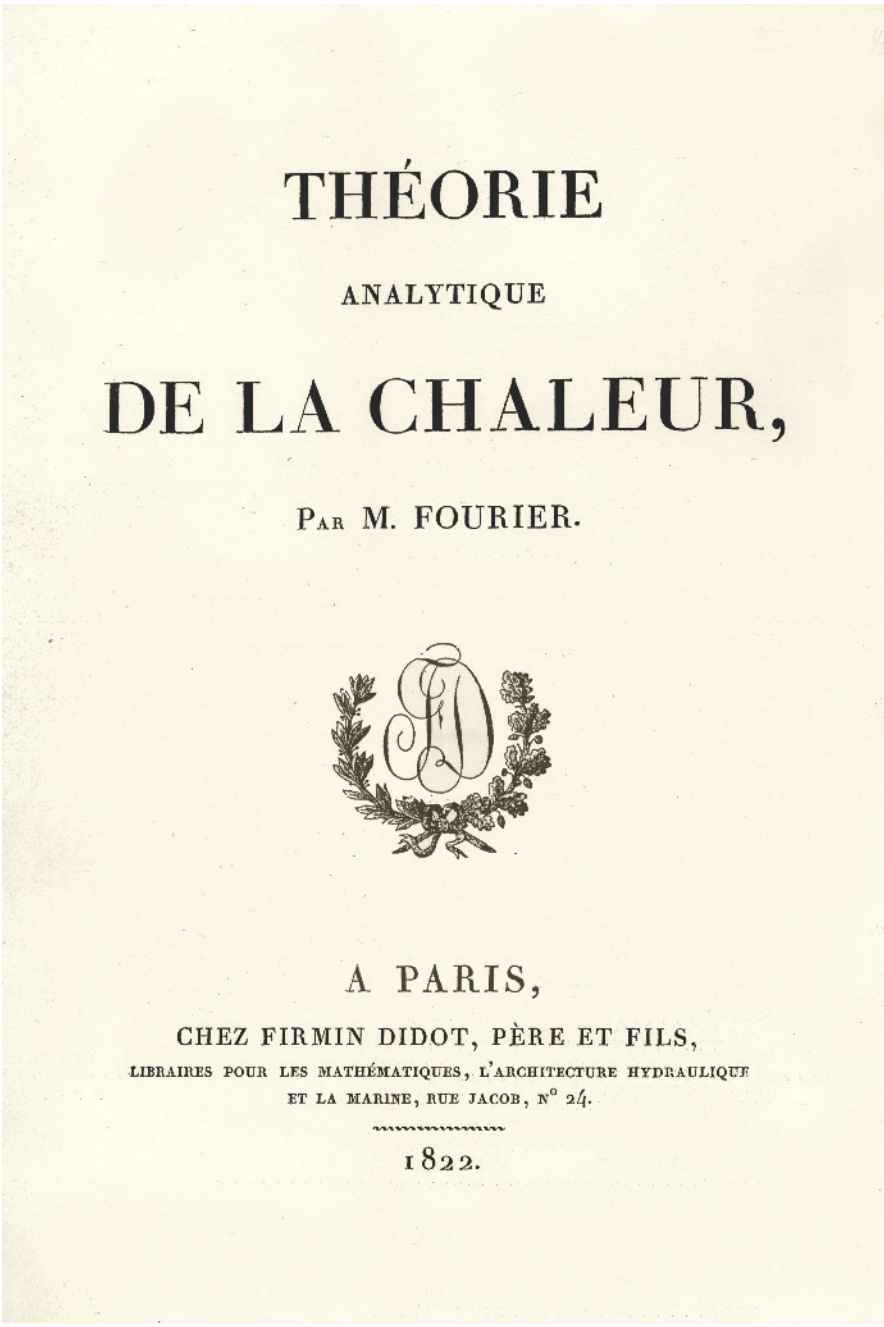
Dann heißt es:

> *„§226: Functionen, die auf verschiedenen Strecken verschiedenen Gesetzen folgen.*
> *Durch die vorstehend entwickelte Analyse haben wir die Mittel bekommen, irgend eine Function in eine nach Sinussen oder Cosinussen der Vielfachen ihres Arguments fortschreitende Reihe zu entwickeln. Angewandt aber haben wir sie bis jetzt nur auf die Fälle, wo die betreffenden Functionen in einem Intervall und in diesem in ganz bestimmter Weise variirten. Wir dehnen sie jetzt auf Fälle aus, wo die Functionen in mehreren Intervallen betrachtet werden und wo sie in einem Intervall anders als in andern beschaffen ist.“*
> [Fourier 1884, S. 155]

> *„§235: Daraus folgt hinsichtlich der Entwicklung von Functionen in trigonometrische Reihen, dass, wenn man den Verlauf einer Function $f(x)$, deren Werte in einem bestimmten Intervall $x = 0$ bis $x = X$ alle gegeben sind, durch eine Curve darstellt, man stets diese Function (...) in eine Reihe entwickeln kann, die entweder nur Sinusse oder nur Cosinusse oder Sinusse und Cosinusse enthält.“*
> [Fourier 1884, S. 166]

Und schließlich:

> *„Man kann (...) schon den Schluss ziehen, dass keine einzige Function existirt, die nicht wenigstens in einem Teil ihres Verlaufs durch eine bestimmte trigonometrische Reihe ihre Darstellung findet, in den verschiedenen Teilen des Verlaufs derselben kann ihre Entwickelung eine verschiedene sein, hat sie aber nicht gerade auf einer endlichen Strecke unendlich viele Unstetigkeitsstellen, so gilt jede Entwickelung in einem endlichen Stück ihres Verlaufs.“*
> [Fourier 1884, S. 429]



THÉORIE

ANALYTIQUE

DE LA CHALEUR,

PAR M. FOURIER.

A PARIS,

CHEZ FIRMIN DIDOT, PÈRE ET FILS,

LIBRAIRES POUR LES MATHÉMATIQUES, L'ARCHITECTURE HYDRAULIQUE ET LA MARINE, RUE JACOB, N° 24.

1822.

Abb. 10.6.5 Titelblatt der *Théorie analytique de la chaleur* von Fourier

Zur Niederschrift einer *Théorie physique de la chaleur* (Physikalische Theorie der Wärme) ist Fourier nicht mehr gekommen, wohl aber 1822 zur Veröffentlichung seiner *Théorie analytique de la chaleur* und zur Herleitung und Behandlung der Wärmeleitungsgleichung als Rand- und Anfangswertproblem für eine lineare partielle Differentialgleichung. Die von ihm betrachteten trigonometrischen Reihen werden deshalb Fourierreihen genannt.

Cauchy glaubte 1826 bewiesen zu haben, dass die Fourierreihe einer jeden Funktion konvergiert, doch Dirichlet gab ein Gegenbeispiel und hinreichende Bedingungen für die Darstellbarkeit einer Funktion durch ihre Fourierreihe an. Es erhoben sich schwierige Fragen; einige Resultate sind erst während des 19. Jahrhunderts gefunden worden.
Ist eine Funktion $f(x)$ integrierbar, so kann man die Fourierreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos\ nx + b_n \sin\ nx)$$

mit den Fourierkoeffizienten

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos\ nx\mathrm{d}x,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin\ nx\mathrm{d}x$$

aufstellen. Dabei kann es durchaus passieren, dass die Fourierreihe nicht konvergiert, aber auch, dass sie zwar konvergiert, aber nicht gegen $f(x)$. Wenn die durch $f(x)$ erzeugte Fourierreihe gleichmäßig konvergiert, konvergiert sie gegen $f(x)$.

Im Jahre 1829 konnte Dirichlet immerhin beweisen, dass die Fourier-Reihe von $f(x)$ gegen $f(x)$ konvergiert, wenn $f(x)$ eine beschränkte periodische Funktion mit nur endlich vielen Sprungstellen und einer endlichen Anzahl von Maxima und Minima (also stückweise stetig und stückweise monoton) ist und der Funktionswert an den Sprungstellen gleich dem arithmetischen Mittel des linksseitigen und des rechtsseitigen Grenzwerts der Funktion an diesen Stellen ist.

Damit hatte der Grundgedanke von Fourier, periodische Funktionen durch unendliche Reihen von „einfachen“ periodischen Funktionen darzustellen, eine halbwegs sichere Basis erhalten. Doch blieben Fragen offen.

Die Habilitationsschrift von Bernhard Riemann (1826–1866) vom Jahre 1854 beschäftigte sich mit der Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe. Riemann erkannte, dass dazu ein über Cauchy hinausgehender Integralbegriff notwendig ist (vgl. Abschnitt 10.6.6).

Es sei hervorgehoben, dass die Einführung der unteren und oberen Grenze am Integralzeichen auf Fourier zurückgeht. Fourier hat auch nicht unbedeutende Beiträge zur Algebra geleistet: Im Jahre 1831 erschien sein von H. Navier vollendetes Manuskript *Analyse des équations déterminées* (Analyse bestimmter Gleichungen), das unter anderem einen Beweis für die Cartesische Zeichenregel und eine Methode zur Lösung von Systemen linearer Ungleichungen enthält – eine Vorstufe zur linearen Optimierung.

10.6.3 Augustin-Louis Cauchy: Grundlagen der Analysis, Präzisierung der Begriffe

Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) gehört in die Reihe der äußerst produktiven Mathematiker. Er hat sieben Bücher und mehr als 800 wissenschaftliche Abhandlungen publiziert. Seinetwegen, wegen seiner Flut an Abhandlungen, musste der Umfang der zur Publikation bei der Akademie vorgelegten Abhandlungen eingeschränkt werden [Nový 1989].

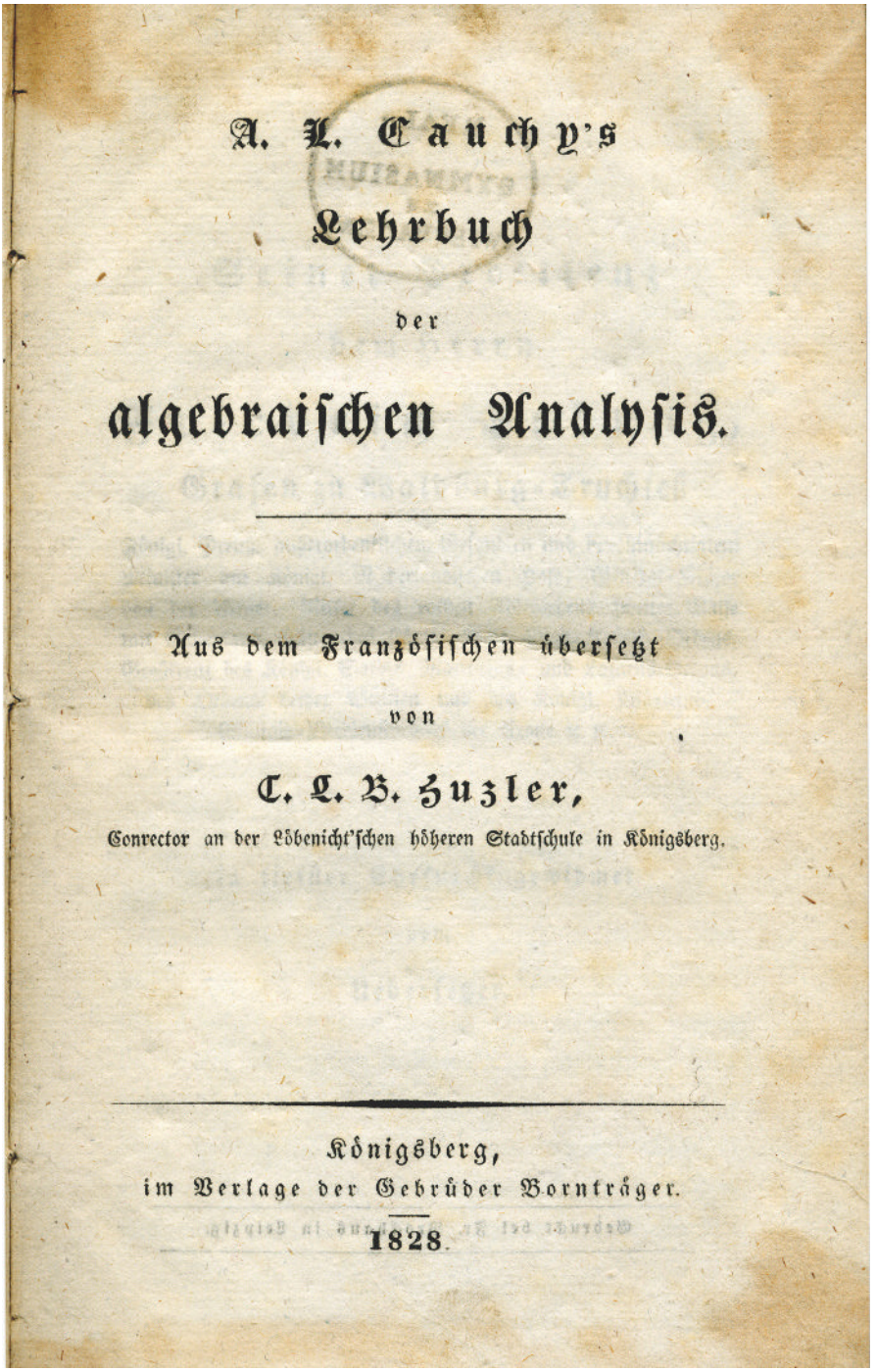
Cauchy war zugleich ein äußerst vielseitiger Gelehrter. Zu seinen Arbeitsgebieten gehörten Algebra, Lichtausbreitung, Elastizitätstheorie, Himmelsmechanik, Zahlentheorie, Analysis und dabei besonders die Grundlagen der Analysis und die Begründung einer Funktionentheorie komplexer Variabler. Viele mathematische Begriffe und Sätze sind nach ihm benannt:

Cauchysche Abschätzungsformel,
Cauchysches Anfangswertproblem,
Cauchysche Determinante,
Cauchysche Grenzwertsätze,
Cauchysche Integralformeln,
Cauchyscher Residuensatz,
Existenzsatz von Cauchy,
Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen,
Cauchysches Quotientenkriterium,
Cauchysches Wurzelkriterium.

Cauchy darf mit Recht als einer der Hauptakteure bei der Verschärfung der Grundlagen der Analysis gelten; hier ist inbesondere sein *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* (Lehrgang der Analysis an der polytechnischen Schule) hervorzuheben. Dabei ist die Interpretation schwierig und wird nicht einheitlich von verschiedenen Autoren vorgenommen, gelegentlich sogar konträr. Dazu kommt, dass Cauchys Infinitesimalrechnung auch in die Nähe der Non-Standard-Analysis der Gegenwart gerückt worden ist (Abraham Robinson (1918–1974), Detlef Laugwitz (1932–2000), Curt Schmieden (1905–1992)) und von dorther interpretiert wurde (vgl. z. B. [Laugwitz 1987]).

Schon 1828 erschien in Königsberg unter dem Titel *A. L. Cauchy's Lehrbuch der algebraischen Analysis* eine deutsche Übersetzung vom ersten Teil des erst 1821 publizierten *Cours d'Analyse „... von dem Wunsche beseelt, daß dieses ausgezeichnete Werk des französischen Mathematikers, welches seiner Trefflichkeit wegen in fast allen höheren Schulanstalten Frankreichs eingeführt worden ist, auch in Deutschland allgemein bekannt und von Lehrenden und Lernenden benutzt werden möge"*, wie es im Vorwort des Übersetzers C. L. B. Huzler heißt.

Selbst ein unbefangener Betrachter muss bei der Analyse der Werke von Cauchy feststellen, dass der Begriffsinhalt trotz gleicher Worte wie Stetigkeit, Konvergenz usw. sich vom heutigen Inhalt unterscheidet (ausführlich analysiert in [Lützen 1999, S. 195ff.]). Ein Beispiel: Eine besonders entscheidende Stelle beim Gesamtaufbau des *Cours d'Analyse* ist der Stetigkeitsbegriff.



A. L. Cauchy's

Lehrbuch

der

algebraischen Analysis.

Aus dem Französischen übersetzt

von

C. L. B. Huzler,

Conrector an der Löbenicht'schen höheren Stadtschule in Königsberg.

Königsberg,

im Verlage der Gebrüder Borntträger.

1828.

Abb. 10.6.6 Titelblatt von *A. L. Cauchy's Lehrbuch der algebraischen Analysis*, Königsberg 1828

> *„Der neuartigste und vielleicht wichtigste Begriff ist der Begriff der Stetigkeit (...), der sich verblüffend von dem weithin anerkannten Eulerschen Begriff unterschied. Eulers Begriff war seiner Natur nach algebraisch und global, Cauchys Begriff dagegen war, was wir anachronistisch als topologisch und lokal bezeichnen könnten. Dieser Schritt vom Globalem zum Lokalen stand durchaus im Einklang damit, daß Cauchy die ‚Allgemeinheit der Algebra' verwarf. Eulers Begriff mußte für jeden verdächtig aussehen, der Fouriers Ideen übernommen hatte."* [Lützen 1999, S. 205]

Als einigermaßen gesicherte historische Aussage kann man festhalten: Cauchys Begriffssystem gestattete es nachzuweisen, dass die Stetigkeit einer Funktion nicht deren Differenzierbarkeit impliziert.

Cauchy führte die Sprechweise ein: die Glieder einer Folge werden unendlich bzw. beliebig klein. Er definierte den limes superior und den limes inferior einer Folge und stellte den Zusammenhang mit dem eventuell existierenden Grenzwert der Folge her. Das von Gauß schon 1812 benutzte Majorantenkriterium wurde von Cauchy ausdrücklich als allgemeines und weit reichendes Konvergenzkriterium herausgehoben und hieraus das Wurzelkriterium abgeleitet. Cauchy stellte 1833 in den *Résumés analytiques* (in Turin erschienen) klar, dass das Kommutativgesetz nur für absolut konvergierende Reihen uneingeschränkt gilt. Will man jedoch die funktionalen Eigenschaften der Summe einer Reihe (wie Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Integrierbarkeit) aus dem Konvergenzverhalten der Reihe und den funktionalen Eigenschaften ihrer Glieder erschließen, dann ist bekanntlich die gleichmäßige Konvergenz der Reihe entscheidend. Bei Cauchy und seiner direkten Fortsetzung war diese Lücke noch geblieben; die Unklarheiten konnten erst in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts behoben werden. Aus dieser Unsicherheit resultieren bei Cauchy auch gelegentlich falsche Sätze.

Cauchy hat noch einen grundlegenden Gedanken in die Analysis hineingebracht, nämlich die Forderung nach Existenzbeweisen, eine äußerst wichtige Forderung für die Theorie der Differentialgleichungen.

Ferner definiert er – wiederum wegweisend – das bestimmte Integral stetiger Funktionen und wandelt damit die Integralrechnung, bisher vorwiegend als Umkehrung der Differentialrechnung aufgefasst und dargestellt, zu einer selbständigen Untersuchung derjenigen Funktionenklassen die ein Integral (im Cauchyschen, später im Riemannschen oder Lebesgueschen usw. Sinne) besitzen. Auch hierzu setzen Dirichlet und Jacobi, Riemann und Weierstraß die strenge französische Tradition fort, in Frankreich selbst P. A. Laurent (1813–1854), V. A. Puiseux (1820–1883), C. A. Briot (1817–1882).

Unbestritten und klar erkennbar ist Cauchys Beitrag zum systematischen Aufbau einer Theorie der Funktionen einer komplexen Variablen, die natürlich eine Vorgeschichte hat.

Zum systematischen Aufbau einer solchen Theorie konnte man erst im 19. Jahrhundert kommen, nachdem über den Begriff der komplexen Zahl

einigermaßen Klarheit gewonnen worden war. In einem Brief vom Jahre 1811 hat Gauß an Bessel über die Tragweite der ausstehenden Probleme für eine Theorie komplexer Variabler reflektiert:

> *„Zuvörderst würde ich jemand, der eine neue Function in die Analyse einführen will, um eine Erklärung bitten, ob er sie schlechterdings bloss auf reelle Grössen (reelle Werthe des Arguments der Function) angewandt wissen will, und die imaginären Werthe des Arguments gleichsam nur als ein Überbein ansieht, oder ob er meinem Grundsatze beitrete, dass man in dem Reiche der Grössen die imaginären* $a + b\surd -1 = a + bi$ *als gleiche Rechte mit den reellen geniessend ansehen müsse. Es ist hier nicht von praktischem Nutzen die Rede, sondern die Analyse ist mir eine selbständige Wissenschaft, die durch Zurücksetzung jener fingirten Grössen ausserordentlich an Schönheit und Ründung verlieren und alle Augenblick Wahrheiten, die sonst allgemein gelten, höchst lästige Beschränkungen beizufügen genöthigt seyn würde.“* [Gauß 1917, S. 366]

Dann wirft Gauß die Frage auf, was unter einem Integral $\int \varphi(x).\mathrm{d}x$ zu verstehen sei, wenn x als komplexe Größe aufgefasst wird. Da man in der komplexen Zahlenebene auf unendlich vielen Wegen von der unteren Grenze des Integrals zur oberen gelangen kann, erhebt sich die von Gauß in ihrer tiefen Bedeutung erkannte Frage, wieweit der Wert des Integrals vom gewählten Integrationsweg unabhängig ist:

> *„Ich behaupte nun, dass das Integral* $\int \varphi x.\mathrm{d}x$ *nach zweien verschiednen Übergängen immer einerlei Werth erhalte, wenn innerhalb des zwischen beiden die Übergänge repräsentirenden Linien eingeschlossenen Flächenraumes nirgends* $\varphi x = \infty$ *wird. Dies ist ein schöner Lehrsatz*), dessen eben nicht schweren Beweis ich bei einer schicklichen Gelegenheit geben werde.“* [Gauß 1917, S. 367]

Zur systematischen Darstellung einer Theorie der Funktionen komplexen Arguments ist Gauß nicht gekommen, obwohl er, wie das obige Zitat zeigt, bereits 1811 im Besitz des Hauptsatzes der Funktionentheorie, des Cauchyschen Integralsatzes gewesen ist und er, wie weiter aus dem Brief hervorgeht, die Mehrdeutigkeit der durch Integrale darstellbaren Funktionen als durch die von einem geschlossenen Integrationsweg eingeschlossenen Pole verursacht begriff:

> *„Übrigens ist zugleich (...) klar, wie eine durch* $\int \varphi x.\mathrm{d}x$ *erzeugte Function für einerlei Werthe von* x *mehrere Werthe haben kann, indem man nemlich beim Übergange dahin um einen solchen Punct, wo* $\varphi x = \infty$ [In der Handschrift steht $x = \infty$.] *entweder gar nicht, oder einmal, oder mehreremale herumgehen kann.“* [Gauß 1917, S. 367]

Auch Siméon Denis Poisson hat sich 1815 mit Integrationsproblemen bei Funktionen komplexer Variabler befasst, ähnlich wie Gauß, auch beim konkreten Fall des „logarithmischen Integrals“ $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

So beginnt der systematische Aufbau einer zusammenhängenden Funktionentheorie erst mit Cauchy. Anfangs suchte er, anknüpfend an Euler, nach Lösungen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und hielt zunächst noch an der Auffassung fest, dass eine Gleichung zwischen komplexen Größen nichts anderes darstelle als eine symbolische Schreibweise für zwei Gleichungen zwischen reellen Größen. Die Wendung trat 1825 ein, mit der Arbeit *Mémoire sur les intégrales définies priser entre des limites imaginaires* (Abhandlung über bestimmte Integrale zwischen imaginären Grenzen) [Cauchy 1900].

Cauchy würdigte dort die von seinen französischen Kollegen Laplace und Barnabé Brisson (1777–1828) und die von dem jungen russischen Mathematiker Michael Wassilewitsch Ostrogradski bei bestimmten Integralen mit komplexen Grenzen erzielten Ergebnisse. Aber Cauchy stellte fest, keine der *„bis jetzt veröffentlichten Abhandlungen über die verschiedenen Zweige der Integralrechnung hat den Grad der Allgemeinheit festgestellt, den ein bestimmtes Integral zwischen imaginären Grenzen zulässt, und die Zahl der Werthe, die es annehmen kann. Das ist gerade die Frage, die den Gegenstand unserer Untersuchungen bilden wird. Man wird sehen, dass ihre Lösung von der Variationsrechnung abhängt und dass sie unmittelbar eine grosse Anzahl von Formeln liefert, die zur Auswerthung oder doch zur Umformung bestimmter Integrale geeignet sind.“* [Cauchy 1900, S. 4]

Das methodische Vorbild fand Cauchy 1825 noch in der Variationsrechnung, wo auch verschiedene Kurven zur Konkurrenz zugelassen sind. Es dauerte noch bis 1840, ehe Cauchy alle gedanklichen und rechnerischen Schwierigkeiten beim Umgang mit Kurvenintegralen im Komplexen bewältigt hatte und seine Untersuchungen mit dem fundamentalen Satz krönen konnte, dass das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\oint f(z)dz$$

gleich der Summe aller Residuen der Funktion $f(z)$ im Innern des Weges ist (falls dieser nullhomolog ist).

Hierin ist speziell das Ergebnis enthalten, dass der Wert des Integrals vom Integrationsweg unabhängig ist, sofern kein Pol (oder andere Singularitäten) umschlossen werden.

Einen anderen Zugang zur Theorie der Funktionen komplexer Variabler eröffnete Cauchy mit einigen Untersuchungen zur Potenzreihenentwicklung von Funktionen. Sie führten u. a. 1831 zur Entdeckung, dass die Reihenentwicklung in einem Kreis konvergiert; daher bestimmt die „nächstgelegene“ Singularität den Konvergenzradius. Irgendwie schimmert die spätere Idee der Weierstraßschen analytischen Funktionen hindurch.

Schließlich sei noch eine aus dem Jahre 1846 stammende Arbeit von Cauchy erwähnt. Durch sie wurden von einem höheren Gesichtspunkt aus grundlegende Eigenschaften von Integralen algebraischer Funktionen durchschaubar, z. B. die mehrfache Periodizität der elliptischen Funktionen (auf die

Geschichte der elliptischen Funktionen wird noch an anderer Stelle eingegangen). Überhaupt erwies sich die Einbeziehung des Komplexen als entscheidendes innermathematisches Moment für ein tieferes Verständnis der im Reellen geltenden Beziehungen – eine Analogie zur Geschichte der Auflösbarkeit der Gleichung dritten Grades durch die Betrachtung des *casus irreducibilis*.

Cauchys Untersuchungen wurden zunächst im Wesentlichen von zweien seiner Landsleute weitergeführt, von Matthieu Paul Hermann Laurent (1841–1908) und Victor Alexandre Puiseux (1820–1883). Unter anderem wurden Reihenentwicklungen nach positiven und negativen Potenzen in einem durch Singularitäten begrenzten Kreisring in die Funktionentheorie einbezogen.

Das Leben von Cauchy war in mannigfacher Weise mit der politischen Geschichte verflochten (vgl. [Nový 1989, S. 327ff.]).

Er wurde am 21. August 1789 geboren, kurze Zeit nach dem Sturm auf die Bastille, dem ersten Höhepunkt der Französischen Revolution. Wegen enger Bindung des Vaters an den absolutistischen Staat als hoher Polizeibeamter und hofgläubig zog man sich in das Dorf Arcueil zurück. Die erste Unterweisung übernahm der Vater; er soll von Lagrange ermahnt worden sein:

> *„Wenn Sie Augustin nicht bald eine solide Allgemeinbildung geben, wird ihn seine Neigung fortreißen. Er wird ein großer Mathematiker sein, aber unfähig seine eigene Sprache zu schreiben.“*
> [v. Renteln 1989, S. 23]

Auch Laplace hat das sich zeigende mathematische Genie erkannt.

Von 1805 bis 1807 studierte Cauchy an der *École Polytechnique* und von 1807 bis 1809 an der nachgeordneten *École des Ponts et Chaussées*. Als Ingenieur nahm er 1809–1813 am Ausbau des Hafens von Cherbourg teil; dies diente der Vorbereitung einer Invasion Englands durch Napoleon, die freilich nicht ausgeführt wurde.

Von 1815 bis 1830 wirkte Cauchy als Professor an der *École Polytechnique* und zeichnete sich mit einer unglaublichen Fülle von Publikationen aus,

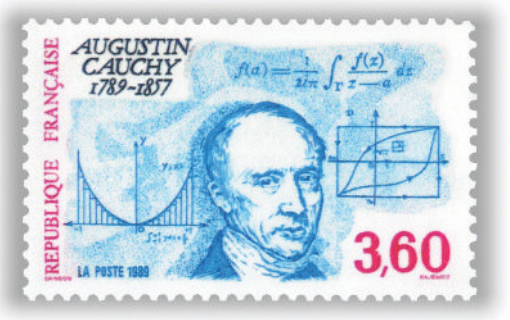


Abb. 10.6.7 Cauchy mit dem Residuensatz (Frankreich 1989)

freilich weniger als akademischer Lehrer. In dieser Zeit entstand der hochbedeutsame *Cours d'Analyse* als Lehrbuch für die Zöglinge der polytechnischen Schule; Cauchy wurde öfters kritisiert, dass seine Darlegungen – die auf Strenge abzielten – zu schwierig seien.

Nach dem Sturz des letzten Bourbonenkönigs Karl X. ging Cauchy ins Exil, zunächst nach Turin, dann nach Prag, wo Karl X. Hof hielt; er hatte den Treueeid auf den „Bürgerkönig" Louis-Philippe verweigert. Wegen seiner hohen Anerkennung als Wissenschaftler konnte Cauchy 1838 nach Paris zurückkehren. Da er aber den Treueeid auf die neue Regierung auch verweigerte, konnte er kein Lehramt an einer Hochschule oder Universität erhalten, sondern erhielt 1839 ein Amt im „Längenbüro". Während der Revolution von 1848 wurde die Forderung nach dem Treueeid fallengelassen, auch nach der Machtergreifung durch Kaiser Napoleon III. So konnte Cauchy eine Professur an der Sorbonne übernehmen.

Es soll nicht verschwiegen werden, dass Cauchy in extremer Weise für den politischen Katholizismus tätig war. So kennt man die Bemerkung von Abel während seines Pariser Aufenthalts, dass Cauchy zwar am besten wisse, wie man Mathematik betreibt, aber extrem katholisch und bigott sei. Dies alles schmälert seine bleibenden Verdienste um die Wissenschaft jedoch nicht.

10.6.4 Bernard Bolzano: Präzise Begriffe und strenge Beweise

Wegen des erdrückenden Gewichts, das Cauchy bei der Festigung der Grundlagen der Analysis spielt, wird der Beitrag von Bernard Bolzano (1781–1848) oft nicht angemessen gewürdigt. Abseits der Hauptzentren der Wissenschaft lebend und durch unglückliche Lebensumstände war er daran gehindert, zu seinen Lebzeiten die angemessene Würdigung zu erhalten.

Der in Prag als Sohn eines aus Italien stammenden Kaufmanns geborene Bolzano studierte von 1796 bis 1800 an der philosophischen Fakultät der Prager Universität, dann von 1801 bis 1805 an der theologischen Fakultät und wurde 1805 sowohl Priester als auch „Professor der Religionslehre". Mit seinen Vorlesungen stellte er sich auf die Seite der Aufklärung. Dies führte bald zur Konfrontation mit der orthodoxen Richtung des Katholizismus, zur Anzeige, 1819 zur Amtsenthebung, 1820 zur Ausstoßung aus der Universität und zum Publikationsverbot.

Nach erneuten Drohungen von Seiten des Klerus flüchtete sich Bolzano 1823 auf das Landgut seines Freundes J. Hoffmann in Těchobuz in Südböhmen, mußte aber nach dem Tode seiner Gönnerin Anna Hoffmann 1842 nach Prag, zu seinem Bruder zurückkehren. Er erkrankte 1848 und starb am 18. Dezember 1848 [Nový 1989].

Große Hoffnungen hatten bestanden. Bolzano hatte an der Prager Universität in Joseph Gerstner (1756–1832) einen vorzüglichen Lehrer in Mathematik finden können. Seit 1804 begann er mit Publikationen zur Mathematik. Es erschienen:

1804: *Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie*; 1810: *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik*; 1816: *Der binomische Lehrsatz und als Folgerung aus ihm der polynomische und die Reihen, die zur Berechnung der Logarithmen und Exponentialgrößen dienen, genauer als bisher erwiesen*; 1817: *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*; 1817: *Die drey Probleme der Rectification, der Complanation und der Cubirung, ohne Betrachtung des unendlich kleinen, ohne die Annahmen des Archimedes und ohne irgend eine nicht streng erweisliche Voraussetzung gelöst*; zugleich als Probe einer gänzlichen Umgestaltung der Raumwissenschaft, allen Mathematikern zur Probe vorgelegt. Postum erschienen 1851: *Paradoxien des Unendlichen*; 1930: *Functionenlehre*; 1931: *Zahlentheorie*. Weitere Studien zu Arbeiten aus dem Nachlass (schwer entzifferbar) stammen von [Rychlik 1962], [Wußing o.J.], [Nový 1989], [Folta 1966], [Jarnik 1981].
Greifen wir einige Aspekte heraus: Im *„Binomischen Lehrsatz . . . "* schrieb er:

> *„. . . wie ich denn auch statt der sogenannten unendlich kleinen Größen mich durchgängig mit demselben Erfolge des Begriffes solcher Größen bediene, die kleiner als jede gegebene werden können, oder (wie ich sie zur Vermeidung der Eintönigkeit zuweilen gleichfalls nenne, obwohl schon minder eigentlich) der Größen, welche so klein werden können, als man nur immer will."* [Bolzano 1816, S. IVf.]

In der Vorrede vom *„Rein analytischen Beweis . . . "* polemisiert Bolzano gegen Beweise des Zwischenwertsatzes, die auf geometrischer Anschauung oder mechanischer Deutung der Stetigkeit beruhen. Er gibt mit Recht zu bedenken, *„daß die Beweise in der Wissenschaft keineswegs bloße Gewißmachungen, sondern vielmehr Begründungen, d. h. Darstellungen jenes objektiven Grundes, den die zu beweisende Wahrheit hat, seyn sollen."* [Bolzano 1905, S. 5]



Abb. 10.6.8 Bernard Bolzano (ČSSR 1981)

Zum Beweis benutzt Bolzano den auch heute von uns benutzten Stetigkeitsbegriff, *„daß eine Function $f(x)$ für alle Werthe von x, die inner- oder außerhalb gewisser Grenzen liegen, nach dem Gesetze der Stetigkeit sich ändre, nur so viel daß, wenn x irgend ein solcher Werth ist, der Unterschied $f(x+\omega)-f(x)$ kleiner als jede gegebene Größe gemacht werden könne, wenn man ω so klein, als man nur immer will, annehmen kann.“* [Bolzano 1905, S. 7f.]

Diese Definition stimmt fast wörtlich mit der von Cauchy im *Cours d'Analyse* überein, ist aber natürlich früher als die von Cauchy. Bolzano macht auch – wie Cauchy – von dem nach Cauchy benannten Konvergenzprinzip Gebrauch, einem notwendigen und hinreichenden Kriterium für die Konvergenz von Funktionenfolgen.

Es war eine mathematikhistorische Sensation, als bei der Herausgabe der *Functionenlehre* (1930) aus dem Nachlass bemerkt wurde, dass Bolzano als erster (vor Weierstraß!) eine in einem ganzen Bereich stetige, aber nirgends differenzierbare Funktion angegeben hat. Der Beweis für die Stetigkeit ist bei Bolzano noch nicht vollständig, wurde aber später erbracht; der Beweis von Bolzano für die Nichtdifferenzierbarkeit ist korrekt für eine in einem Intervall dichte Punktmenge; der vollständige Beweis – nicht differenzierbar in jedem Punkte des Intervalls – erfolgte durch den Herausgeber der *Functionenlehre*, K. Rychlik. Die Funktion von Bolzano läßt sich in Kürze so beschreiben:

„Eine Verbindungsstrecke AB, die zu keiner der Achsen des Koordinatensystems parallel ist, wird in C halbiert. Ferner werden die Punkte D und E mit den Koordinaten $\left(a+\frac{3}{8}(b-a)|\ \alpha+\frac{5}{8}(\beta-\alpha)\right)$ bzw. $\left(a+\frac{7}{8}(b-a)|\ \beta+\frac{1}{8}(\beta-\alpha)\right)$ konstruirt. So soll der Streckenzug

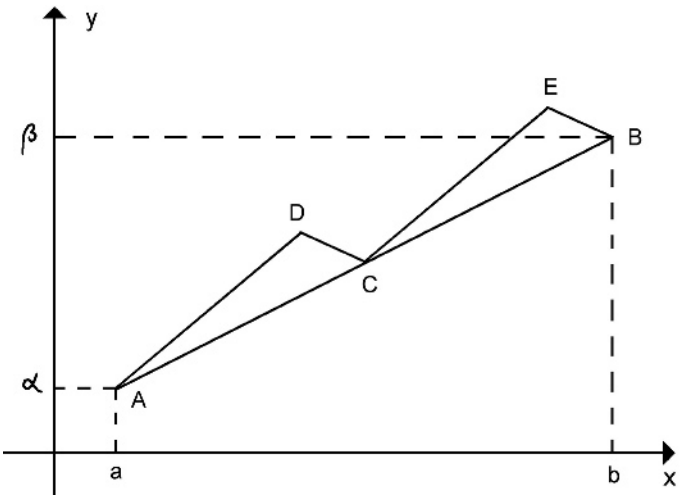


Abb. 10.6.9 Figur zur Funktion von Bolzano

ADCEB der Funktion y_2 sein. Auf eine ähnliche Weise, wie wir die Function y_2 soeben aus y_1 hergeleitet, können wir aus der y_2 abermahls eine dritte Function y_3 herleiten, indem wir mit jedem der vier Stücke, in welche der Abstand $b-a$ nach dem vorigen Verfahren zerlegt worden ist, das vornehmen, was wir vorhin mit dem ganzen Abstande thaten, d. h. auch jedes dieser Stücke in vier andere zerlegen...“ [Bolzano 1930, S. 67]

Der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ stellt die Funktion von Bolzano dar.
In den *Paradoxien des Unendlichen* interessiert besonders jene Stelle, in der er zeigt, dass – wie wir uns in der Sprechweise von Georg Cantor ausdrücken – ein echter Teil einer unendlichen Menge mit der ganzen Menge gleichmächtig sein kann. Diese 1851 erschienenen *„Paradoxien“* sind unter anderem auch von Cantor gewürdigt worden.

Bei aller Hochachtung darf aber nicht verschwiegen werden, dass Bolzano einen wesentlichen Aspekt der Mathematik während der Industriellen Revolution unberücksichtigt gelassen hat, den der Lehrbarkeit und der Anwendungen. Er *„schätzte“* – wie er sich ausdrückte – *„von seinen Lieblingsstudien* (zur Mathematik, Wg) *doch vornehmlich nur nach ihrem spekulativen Teile, als Zweig der Philosophie und als Übungsmittel in richtigem Denken.“* So ging die Wirkung auf die Grundlegung der Mathematik nicht von Bolzano aus, da er außerhalb der Zentren der Wissenschaft zu leben gezwungen war – zum Unterschied von Cauchy, dessen *Cours d'Analyse* dem Zweck der Ausbildung von Zöglingen der École Polytechnique diente.

10.6.5 Niels Henrik Abel und Carl Gustav Jacob Jacobi: Elliptische Funktionen

Über Niels Henrik Abel (1802–1829), seinen kurzen Lebensweg und seine Leistungen in der Algebra ist schon in Abschnitt 10.3.5 berichtet worden. Abel war aber auch noch auf einem anderen Felde der theoretischen Mathematik ein Pionier, auf dem der elliptischen Funktionen, und das in einem einzigartigen Wettbewerb mit Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851). Für viele interessante Einzelheiten, die auch die Psychen der beiden genialen Forscher betreffen, sei verwiesen auf F. Klein *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, insbesondere S. 100 bis 115. Beispielsweise:

„Das nun folgende Jahr 1828 ist eine Epoche angestrengtester Konkurrenz von Abel und Jacobi um den Ausbau der Theorie der elliptischen Funktionen. Gerade durch die Gleichheit der zu bearbeitenden Probleme tritt in diesem Wettkampf der grundverschiedene Charakter der beiden Beteiligten scharf hervor. Abel bewältigt mit größter Genialität die allgemeinsten Probleme; die mathematische Idee ist das bei ihm wirksame Element; und zwar rein abstrakt ohne das Mittel geometrischer Anschauung. Jacobi hingegen läßt sich in seinen einzelnen Schritten zwar von der divinatorischen Kraft seiner Begabung



Abb. 10.6.10 Carl Gustav Jacob Jacobi; Niels Henrik Abel

> *leiten, gibt aber dem Eroberten sofort ein festes Gefüge durch eine virtuos gehandhabte, glänzende Rechenkunst. Während so Jacobi mit unermüdlicher Energie den Weg verfolgt, den ihm sein Scharfsinn diktiert und der ihn über alle Hindernisse hinweg zum Ziele führt, hat Abels Geist die Kraft, sich in die Lüfte zu erheben und in scheinbar mühelosem Flug, alles überschauend, noch allgemeineren Zielen zuzuschweben."* [Klein 1979, S. 106]

Jacobi stammt aus einer vermögenden jüdischen Bankiersfamilie in Potsdam. Ähnlich wie Gauß schwankte er beim Studium anfangs zwischen Altphilologie und Mathematik, ehe er sich der Mathematik zuwandte. Im Dezember 1822 wurde in Preußen die den Juden zugesicherte Berechtigung akademischer Lehrämter wieder aufgehoben; Jacobi konvertierte zum christlichen Glauben. In Berlin studierte er von 1821 an Mathematik, legte wie damals üblich das Staatsexamen für Lehrer ab, promovierte mit gleichzeitiger Habilitation 1825.

Nach einer Vorlesung über Differentialgeometrie im Wintersemester 1825/26 erhielt Jacobi 1826 in Königsberg eine besoldete Dozentenstelle, wurde 1827 außerordentlicher und 1829 ordentlicher Professor. Seine spöttischen und teilweise fast beleidigenden Bemerkungen machten ihn zwar im Kollegenkreis unbeliebt, doch seine Lehrtätigkeit führte zur Gründung der Königsberger mathematischen Schule, aus der unter anderem Friedrich Richelot (1808–1875), Eduard Heine (1821–1881), Otto Hesse (1811–1874), Carl Neumann und Alfred Clebsch (1833–1872) hervorgingen.

Von einem wahren Schaffensrausch befallen, zeigten sich schon seit 1829 Symptome einer Krankheit, Mattigkeit und Schwäche. Erst 1843 gab es eine verlässliche Diagnose: Diabetes mellitus (Zuckerkrankheit); damals gab es keine Behandlungsmöglichkeit. Ruhepausen, Reisen zu Kollegen nach England, Paris und Italien, verbunden mit Erholungsaufenthalten wechselten sich ab.

Auf Empfehlung Alexander von Humboldts nahm Jacobi 1844 seinen Wohnsitz in Berlin, mit dem Recht, aber nicht der Pflicht, Vorlesungen zu halten.

Jacobi hat ausgiebig historische Forschungen zur Geschichte der Mathematik bei Archivstudien unternommen. Auch hob er die Vorzüge der Pariser Polytechnischen Schule hervor. Während der bürgerlichen Revolution 1848 zeigte sich Jacobi öffentlich als Sympathisant der Republikaner, mit der Folge, dass er Gehaltskürzungen hinnehmen musste. Die Familie zog nach Gotha, da dort die Lebenshaltungskosten wesentlich niedriger als in Berlin waren. Jacobi konnte nur gelegentlich seine Familie besuchen. Am 18. Februar 1851 verstarb Jacobi an den Blattern.

Jacobi war auf fast allen Gebieten der Mathematik forschend tätig: Variationsrechnung, totale und partielle Differentialgleichungen, analytische Mechanik, Himmelsmechanik, Determinantentheorie, Zahlentheorie, insbesondere algebraische Zahlentheorie. Die Hauptbedeutung seiner Forschung aber dürfte in der Theorie der elliptischen Funktionen liegen.

Leibniz war – moderne Schreibweise angewandt – auf das Integral $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x-x^2}}$ gestoßen. Euler und der italienische Liebhabermathematiker Graf Fagnano (1682–1766) hatten sich an Hand konkreter physikalischer Probleme mit elliptischen Integralen befasst, also Integralen der allgemeinen Form

$$\alpha(x) = \int R\left(x,\ \sqrt{f(x)}\right) \mathrm{d}x \ ,$$

wo R eine rationale Funktion und $f(x)$ ein Polynom dritten oder vierten Grades ohne Nullstellen im Integrationsbereich bedeutet. (Der Name elliptisches Integral rührt her vom Auftreten solcher Integrale bei der Berechnung des Umfanges von Ellipsen.) Als sich Abel in Paris aufhielt, lernte er die Bemühungen von Adrien Marie Legendre um die elliptischen Integrale kennen; seit 1811 bis 1819 waren entsprechende Publikationen erschienen, unter anderem *Exercices de calcul intégral* (Übungen zum Integralkalkül). Dort klassifizierte Legendre die elliptischen Integrale. (Wenn $f(x)$ den vierten Grad übersteigt, spricht man heute von Abelschen Integralen.)

Bereits in Paris begann Abel über die Umkehrung des elliptischen Integrals 1. Gattung $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{f_4(x)}}$ (mit $f_4(x)$ als Polynom 4. Grades) nachzudenken. Im Jahre 1827/28 erschienen in Crelles Journal in zwei Teilen die *Recherches sur les fonctions elliptiques* (Forschungen über elliptische Funktionen). Der springende Punkt, die geniale Idee bestand darin, die Umkehrfunktion zu bestimmen, also x als Funktion der Integralfunktion.

Abel suchte also eine Funktion $x = \varphi(\alpha)$. Als Umkehrfunktion eines elliptischen Integrals erhielt sie den Namen „elliptische Funktion“. (Übrigens bewegte sich Abel damit auf dem Wege, den auch Gauß eingeschlagen hatte; dessen Ideen aber waren damals unveröffentlicht geblieben.)

Angespornt von Abels Studien, die Eigenschaften der elliptischen Funktionen zu beschreiben (Multiplikationssätze, Grenzübergang führt zur Darstellung von $\varphi(\alpha)$ als Quotient zweier doppelt periodischer Funktionen) wandte

sich Jacobi 1827 seinerseits den elliptischen Funktionen mit Hilfe von rationalen Transformationen elliptischer Integrale zu. Im Mai 1828 ließ Abel eine Arbeit über eine allgemeine Fassung der Transformationstheorie folgen und 1829 (ein erster Teil) eines umfangreichen *Précis d'une théorie des fonctions elliptiques* (Abriss einer Theorie der elliptischen Funktionen).

Dem ließ Jacobi schließlich 1829 das fundamentale Werk *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum* (Neue Grundlage einer Theorie der elliptischen Funktionen) nachfolgen. Für Einzelheiten und die weitere Entwicklung sei verwiesen auf [Bottazini 1999], [Klein 1979], [Cooke 2005].

Jacobis Hochachtung für Abel drückt sich darin aus, dass er die Begriffe „Abelsche Transcendente" und „Abelsches Theorem" prägte.

Jacobis Bruder, Moritz Hermann Jacobi (1801–1874), wirkte anfangs als Professor der Ingenieurkunst an der Universität von Dorpat, ging dann 1837 nach St. Petersburg. Sein Hauptinteresse galt den Anwendungen der Elektrizität. Mit einem selbstkonstruierten Elektromotor studierte er an einem Schiffchen auf der Newa die Leistungsfähigkeit elektrischen Antriebes. Im Jahre 1838 erfand er die Galvanoplastik. Auch hatte er Anteil an der Erprobung des vom deutsch-russischen Physiker und früh in St. Petersberg verstorbenen Paul Schilling (1786–1837) erfundenen elektrochemischen Telegraphen, doch setzte sich in Russland erst der von Siemens und Halske betriebene Telegraphendienst durch.

10.6.6 Bernhard Riemann: Neue Auffassung von Analysis und Geometrie

Nur knapp 40 Jahre waren Riemann an Lebenszeit vergönnt. Und trotzdem hat er in seltener Weise die Mathematik seiner Zeit und deren zukünftige Entwicklung geprägt. Bernhard Riemann wurde am 17. Sept. 1826 in Breselenz bei Dannenberg geboren. Über seine Biographie und seinen Beitrag zu den Grundlagen der Geometrie ist schon in 10.2.5 berichtet worden. Die bekanntesten und in ihren Auswirkungen bedeutendsten Ergebnisse erzielte Riemann in der Analysis und ihrem Zusammenhang mit der Geometrie.

Merkwürdigerweise sind zwei seiner hochbedeutenden Abhandlungen, die Habilitationsschrift und der Habilitationsvortrag, erst nach seinem Tode im Druck veröffentlicht worden: [Riemann 1892], [Riemann 1902]; zur Biographie von Riemann vgl. den den Werken von Riemann beigegebenen „Lebenslauf" von seinem besten Freund Dedekind [Riemann 1892, S. 539ff.], vgl. auch [Klein, 1979], [Riemann, 1990], [Laugwitz 1996], [von Renteln 1989].

Laugwitz, ein genauer Kenner des Riemannschen Werkes, hat die historische Stellung von Riemann in der Entwicklung der Mathematik folgendermaßen eingeschätzt:

> *„Die heutige Analysis ist, im Reellen wie im Komplexen, so stark von RIEMANN beeinflusst, dass es dem Leser nicht leichtfallen mag, die Leistungen RIEMANNs in den Grundlagen der Analysis zu beurteilen (...). RIEMANNs Werk ist durch und durch der Analysis*

zuzurechnen, und zwar in unserem heutigen Verständnis des Begriffes. Algebraische Geometrie erscheint bei ihm als Teil der komplexen Analysis; Zahlentheorie behandelt er mit den Methoden der komplexen Funktionentheorie; physikalische Anwendungen werden, wie es zu seiner Zeit üblich ist, mit partiellen Differentialgleichungen erfasst; die seit EUKLID übliche axiomatische Auffassung der Geometrie ersetzt er in ganz neuartiger Weise durch seine (RIEMANNsche) Geometrie als Teil der reellen Analysis mehrerer Veränderlicher; die Topologie der Mannigfaltigkeiten entwickelt er als eine neue Disziplin aus der Analysis heraus.“ [Laugwitz 1996, S. 55]

Wenden wir uns einigen Problemgruppen der Analysis im engeren Sinn zu. Beginnen wir mit dem Funktionsbegriff. Am Anfang seiner Dissertation *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Größe* definiert Riemann die Funktion $w = u+iv$ einer komplexen Veränderlichen $z = x + iy$:

„Eine veränderliche complexe Größe w heißt eine Function einer andern veränderlichen complexen Größe z, wenn sie mit ihr sich so ändert, dass der Werth des Differentialquotienten $\frac{dw}{dz}$ unabhängig von dem Werte des Differentials dz ist (...). Sowohl die Grösse z, als auch die Grösse w werden als veränderliche Grössen betrachtet, die jeden complexen Werth annehmen können. Die Auffassung einer solchen Veränderlichkeit, welche sich auf ein zusammenhängendes Gebiet von zwei Dimensionen erstreckt, wird wesentlich erleichtert durch eine Anknüpfung an räumliche Anschauungen.“ [Riemann 1990, S. 5]

Riemann zeigt, dass w als Funktion von z bestimmt ist, wenn die sog. Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gelten

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \ , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \ .$$

„Diese Bedingungen sind also hinreichend und nothwendig, damit $w = u + vi$ eine Function von $z = x + yi$ sei. Für die einzelnen Glieder dieser Function fliessen aus ihnen die folgenden:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ , \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \ .“$$

[Riemann 1890, S. 6f.]

In unserer Sprechweise sagen wir heute: Eine in einem Gebiet reell differenzierbare komplexe Funktion ist genau dann komplex differenzierbar, wenn dort die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gelten. In diesem Falle sind Realteil u und Imaginärteil v harmonische Funktionen, genügen also der Laplaceschen Differentialgleichung.

Auch Riemann stand unter dem Eindruck der damaligen Diskussion über die Abelschen Integrale; er hatte in Berlin Vorlesungen unter anderem bei



Abb. 10.6.11 Bernhard Riemann [Bildarchiv UB Leipzig]

Jacobi gehört. Dort tauchten „mehrdeutige“ Funktionen auf; die Problematik war beträchtlich. Riemann entwickelte hier die geniale Idee der nach ihm benannten Riemannschen Fläche [Riemann 1892, S. 8ff.].

Hat eine „Funktion“ f zu gewissen Punkten z der komplexen Ebene C mehrere (endlich oder auch unendlich viele) Werte, etwa $w_1 = f_1(z), \ldots, w_n = f_n(z)$, so „erweitere“ man ihren Definitionsbereich, indem man diese Werte den entsprechend oft repräsentierten z-Werten in n (bzw. unendlich vielen) Exemplaren der komplexen Ebene (oder Teilen davon) zuordnet, die man sich als übereinander liegende Blätter vorstellt, welche an Stellen mit nur einem Wert von f miteinander verheftet und längs geeigneter Schnitte verbunden sind. Das so entstehende flächenartige Gebilde wird als die der

z-Ebene überlagerte Riemannsche Fläche der Funktion f bezeichnet. Auf ihr ist f als „eindeutige" Funktion mit den Funktionselementen $f_1, \ldots, f_n$ (bzw. $f_1, \ldots$) definiert. Beispiele für „mehrdeutige" Funktionen mit endlich vielen Blättern ihrer Riemannschen Fläche sind die algebraischen Funktionen, d. h. Funktionen $w = f(z)$, die einer algebraischen Gleichung $p(w, z) = 0$ mit einem Polynom p in zwei Variablen genügen. Das einfachste nichttriviale Beispiel dieser Art liefert das Polynom $w^2 - z = 0$, nämlich $w = \sqrt{z}$. Für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt es zwei verschiedene Werte von w, die dieser Gleichung genügen. Beispielsweise hat man für $z = 1$ die Lösungen $w = 1$ und $w = -1$. Die Abbildung 10.6.12 soll verdeutlichen, wie die beiden Blätter übereinander liegen; längs der positiv-reellen Achse sind sie „über Kreuz" miteinander verbunden. Auf dieser Riemannschen Fläche ist $w = \sqrt{z}$ als „eindeutige" Funktion (d. h. als Funktion im modernen Sinne) definiert. Für weitere Einzelheiten und Beispiele siehe z. B. [Behnke/Sommer 1962].

Der deutsche Mathematiker Carl Neumann, der lange Jahre in Leipzig wirkte, hat in seinem Werk *Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale* (1865) Riemanns Arbeit über Funktionen komplexen Argumentes mit treffenden Worten gewürdigt:

> *„In der vor vierzehn Jahren von Riemann veröffentlichten Schrift ‚Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse' finden sich zwei Gedanken ausgesprochen, die von fundamentaler Bedeutung sind.*
> *Während man bis dahin bei Behandlung solcher Functionen ausging von einem Ausdruck der Function, durch welchen ihr Werth für jeden Werth des Arguments definirt wird, erkannte Riemann, dass es für viele Untersuchungen zweckmässiger und natürlicher ist, die Functionen zu definiren durch gewisse Merkmale ihrer Stetigkeit oder Unste-*

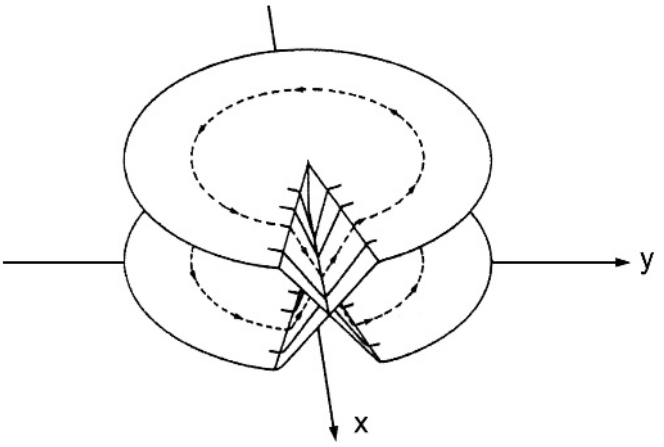


Abb. 10.6.12 Riemannsche Fläche zur Funktion $w = \sqrt{z}$

tigkeit. Wenn dieser Gedanke auch nicht vollständig neu ist, sondern in seinen ersten Anfängen weiter zurückreicht, so hat doch Riemann zuerst sein volles Gewicht erkannt, und zuerst denselben, entkleidet von aller fremdartiger Beimischung, in allgemeiner und zugleich bestimmter Weise ausgesprochen.
Vollständig neu ist der zweite Gedanke. Die von Gauss angegebene Methode, die Werthe einer von einem complexen Argument abhängigen Function auf einer Fläche auszubreiten, war nur anwendbar auf einwerthige Functionen. Riemann zeigte, dass die mehrwerthigen Functionen einer ganz ähnlichen Behandlung fähig sind, sobald man Flächen in Anwendung bringt, die aus mehreren über einander liegenden, an einzelnen Stellen mit einander verwachsenen Blättern bestehen, und die, was ihre nähere Beschaffenheit anbelangt, abhängig sind von der individuellen Natur der gerade betrachteten Function.“
[Neumann 1865, S. III/IV]

Lange Zeit, bis ins 19. Jahrhundert, war das Integral als Umkehrung eines differenzierten Ausdrucks, Integration als inverse Operation zum Differenzieren verstanden worden. Als Erste erkannten wohl Cauchy und Dirichlet den selbständigen Charakter der Integration. Bei Dirichlet trat dies in seinen Untersuchungen über trigonometrische Reihen zutage, indem er die Koeffizienten der Fourierentwicklung als Integrale angab.

Dies war offensichtlich Anlass für Riemann, sich mit dieser Problematik in seiner 1853 verfassten, aber erst 1868 veröffentlichten Habilitationsschrift *Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe* zu befassen. Damit wurde er bahnbrechend für die Entstehung eines eigenständigen Integralbegriffs.

Im Unterschied zu Fourier und Dirichlet stellte sich Riemann die Frage, für welche Funktionen $f(x)$ Ausdrücke wie $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \mathrm{d}x$ überhaupt sinnvoll sind, weil er zunächst nichts über $f(x)$ voraussetzte. Dies geht aus dem zweiten Teil seiner Habilitationsschrift hervor, der die Geschichte und Ansichten über die „willkürlichen“ (graphisch gegebenen) Funktionen und ihre Darstellbarkeit durch trigonometrische Reihen enthält. Dort heißt es am Beginn von Absatz vier:

„Die Unbestimmtheit, welche noch in einigen Fundamentalpunkten der Lehre von den bestimmten Integralen herrscht, nöthigt uns, Einiges vorauszuschicken über den Begriff eines bestimmten Integrals und den Umfang seiner Gültigkeit.“ [Riemann 1990, S. 239]

Interessant ist in diesem Zusammenhang folgende Bemerkung von Laugwitz:

„Mathematikhistorisch ist es interessant, dass RIEMANN seinen Integralbegriff sozusagen ad hoc, für den Zweck der Koeffizientenformeln FOURIERs eingeführt hat. Es war dieses eben die historisch früheste Fragestellung, welche über CAUCHYs Integralbegriff für die stückweise stetigen Funktionen hinausführten. Und an diesem geschichtlichen

Zufall liegt es, dass wir heute noch (fast überall) in den Vorlesungen mit RIEMANNs Integral beginnen. Die Geschichte wäre wohl anders verlaufen, wenn man sich zunächst einmal die Frage gestellt hätte: Wie muss der Integralbegriff beschaffen sein, damit für punktweise konvergente monoton wachsende Folgen von integrierbaren Funktionen f_n gilt $\lim \int_a^b f_n = \int_a^b f$? Man hätte auch verlangen können, dass der Satz von der Integration als Umkehrung der Differentiation Gültigkeit behalten soll. Das RIEMANN-Integral leistet das nicht, wie 1881 von VOLTERRA gezeigt wurde: Es gibt Funktionen, deren Ableitungen auf einem abgeschlossenen Intervall existieren und beschränkt sind, aber nicht RIEMANN-integrierbar sind.“
[Laugwitz 1996, S. 207]

Riemann hat den später nach ihm benannten Integralbegriff so beschrieben:

„Was hat man unter $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ zu verstehen?
Um dieses festzusetzen, nehmen wir zwischen a und b der Grösse nach aufeinander folgend, eine Reihe von Werthen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ an und bezeichnen der Kürze wegen $x_1 - a$ durch δ_1, $x_2 - x_1$ durch δ_2, $b - x_{n-1}$ durch δ_n und durch ε einen positiven ächten Bruch. Es wird alsdann der Werth der Summe

$$\delta = \delta_1 f(a + \varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2\delta_2) + \delta_3 f(x_2 + \varepsilon_3\delta_3) + \ldots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n\delta_n)$$

von der Wahl der Intervalle δ und der Größen ε abhängen. Hat sie nun die Eigenschaft, wie auch δ und ε gewählt werden mögen, sich einer festen Größe A unendlich zu nähern, sobald sämmtliche δ unendlich klein werden, so heisst dieser Werth $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.
Hat sie diese Eigenschaft nicht, so hat $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ keine Bedeutung.“
[Riemann 1990, S. 239]

Im Schulunterricht wird das Riemannsche Integral i. a. zur Bestimmung von „Flächeninhalt unter einer Kurve“ eingeführt, indem zunächst durch $y = f(x)$ beschriebene Kurven mit einer im Intervall $[a, b]$ nichtnegativen, stetigen Funktion f betrachtet werden, deren Graph durch obere und untere Treppenfunktionen, der Flächeninhalt durch die Summen der Inhalte der zu den Treppenstufen gehörenden Rechtecke approximiert wird. Dabei erfolgt die Bildung dieser sog. Ober- und Untersummen zumeist mit Stufen bzw. Rechtecken gleicher Breite, also mit Zerlegung des Integrationsintervalls in gleichlange Teilintervalle, d. h. mit Funktionswerten an äquidistanten Abzissen. Der bei unbegrenzter Verfeinerung der Zerlegung in diesem Falle vorhandene gemeinsame Grenzwert der Folgen von Obersummen und Untersummen wird dann als bestimmtes Riemann-Integral definiert und als Flächeninhalt unter der Kurve interpretiert.

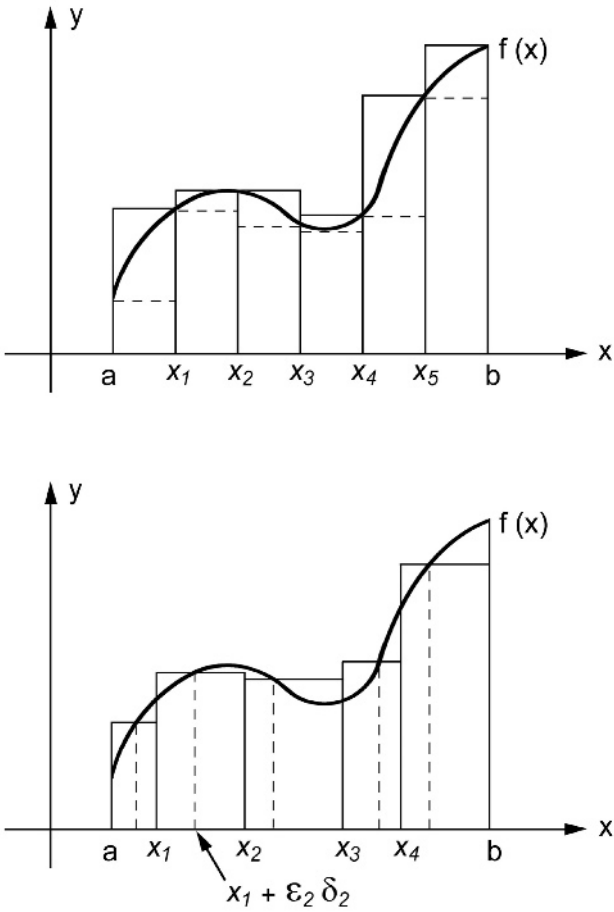


Abb. 10.6.13 Figuren zum Riemannschen Integral: oben „schulmäßig“,d.h. mit äquidistanter Einteilung des Intervalls $[a, b]$ und Obersummen und Untersummen, unten gemäß der Originaldefinition mit „Riemannschen Zwischensummen“

Die o. g. Originaldefinition von Riemann enthält jedoch keine Voraussetzungen über die Funktion f. Sie beschränkt sich nicht auf gleichmäßige Einteilungen des Integrationsintervalls und gestattet darüber hinaus, die Funktionswerte $f(x)$ an Abzissen im jeweiligen Teilintervall zu bilden, die der jeweiligen Funktion angepasst sind.

Darüber hinaus erfasst die Riemannsche Originaldefinition auch Klassen von Funktionen als integrierbar, die größer als die Klasse der stetigen Funktionen sind, z. B. die Klasse der beschränkten monotonen Funktion und die der bis auf Sprungstellen beschränkten stetigen Funktionen. So ist es kein Wunder, dass Riemanns Integraldefinition einige Unruhe und Verwirrung bei

den Versuchen ausgelöst hat, maximale Mengen von Abzissen des Intervalls $[a, b]$ zu bestimmen, an denen die Funktion „singulär“ (d. h. unstetig oder gar nicht beschränkt), aber dennoch im Riemannschen Sinne integrierbar ist.

Ergebnisse in dieser Richtung stammen von Hermann Hankel. Er hatte u. a. 1860 bei Riemann in Göttingen studiert und wirkte schließlich bis zu seinem frühen Tode in Tübingen. Im Gratulationsprogramm der Tübinger Universität erschienen 1870 seine *Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen.* Da diese Ergebnisse aufregend neu waren, wurden sie 1882 in den *Mathematischen Annalen* nachgedruckt, um sie weithin bekannt zu machen. Dort verwendet Hankel das Prinzip der *„Condensation der Singularitäten“* und definiert *„linear unstetige“* Funktionen, *„welche in unendlich vielen Punkten einer endlichen Strecke unstetig sind.“* (Vgl. ausführlich [Hochkirchen 1999, S. 338f.])

Zu Hankel sei hier auch das von ihm formulierte sog. Permanenzprinzip erwähnt, mit dem die Beibehaltung der Rechnungen beim schrittweisen Aufbau der Zahlensysteme oft begründet wird. Auch Hankels Schriften zur Geschichte der Mathematik im Altertum und im Mittelalter sind heute noch mit Gewinn lesbar.

Der Verzicht auf die Beschränktheit der Funktion oder/und auf die Beschränktheit des Integrationsintervalls führt auf sog. „uneigentliche Integrale“. Deren Beschreibung und Existenz werden hier nicht weiter erörtert.

Andere Überlegungen und Anstöße zu Fortschritten in der Integrationstheorie sind dem französischen Mathematiker Jean Gaston Darboux (1842–1917) zu verdanken. Wegen seiner breitgefächerten Interessen war er auf vielen Gebieten der Mathematik – u. a. Analysis, Mechanik, Variationsrechnung, partielle Differentialgleichungen, Theorie der Minimalflächen – schöpferisch tätig. Er war auch Mitbegründer des *Bulletin des Sciences Mathématiques.*

Darboux lieferte Beispiele für falsche Ergebnisse bei Integrationen, wenn man sich auf die Anschauung verlässt. Damit wollte er seine Kollegen in Frankreich zur Beachtung strenger Voraussetzungen und Definitionen anhalten.

Von Darboux stammt die Erweiterung des Riemannschen Integralbegriffs zu den nach ihm (gelegentlich auch nach Riemann) benannten Begriffen „unteres Integral“ (als Supremum aller Untersummen) und „oberes Integral“ (als Infimum aller Obersummen). Diese beiden Darbouxschen Integrale existieren für jede auf einem beschränkten Intervall definierte beschränkte Funktion. Zum Beispiel erhält man für

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \text{ mit} f(x) = \begin{cases} 1, \text{ wenn } x \text{ irrational ist} \\ 2, \text{ wenn } x \text{ rational ist} \end{cases}$$

$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1$ als unteres, $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2$ als oberes Darboux-Integral. Genau dann, wenn das untere und das obere Darboux-Integral zusammenfallen, ist der gemeinsame Wert das Riemann-Integral, das deswegen auch gelegentlich auf diese Weise definiert wird. Von Darboux stammt auch der Satz:

> *„Hat eine Funktion F auf einem Intervall $[a, b]$ eine beschränkte und integrierbare Ableitung $f = F'$, so ist $F(x) - F(a) = \int_a^x f(y)\mathrm{d}y$ für alle $x \in (a, b)$."* (Zitiert bei [Hochkirchen 1999, S. 343])

Da es differenzierbare Funktionen gibt, deren Ableitung nicht Riemann-integrierbar ist, zeigt dieser Satz, dass Differentiation und Integration (im Sinne von Riemann) keine zu einander inverse Operationen sind.

Eine andere Erweiterung des Integralbegriffs ist das von Thomas Jan Stieltjes (1856–1894) eingeführte Riemann-Stieltjes Integral $\int_a^b f(x)\mathrm{d}\alpha(x)$ bezüglich eines Integrators α (auch Belegungsfunktion genannt), das immer dann existiert, wenn $f\colon [a, b] \to R$ stetig und $\alpha\colon [a, b] \to R$ von beschränkter Variation (Schwankung) ist.

Darüber hinaus gehende Verallgemeinerungen des Integralbegriffs ergaben sich unter dem Einfluss der von C. Jordan und E. Borel (1871–1956) und anderen entwickelten Theorie vom Inhalt bzw. Maß einer Punktmenge. Sie führten insbesondere zu dem von H. Lebesgue definierten Integral (siehe Kap. 11.3). Mit Hilfe des von Lebesgue benutzten Maßbegriffs lässt sich endlich der Gültigkeitsbereich der Riemann-integrierbaren Funktionen genau beschreiben: *„Eine Funktion f ist auf $[a, b]$ genau dann Riemann-integrierbar, wenn sie dort beschränkt ist und die Menge ihrer Unstetigkeitsstellen das Maß Null hat."*

Bei der Integration unendlicher Reihen stieß man auf ein anderes Phänomen: Gliedweise Integration kann zu falschen Ergebnissen führen, weil hierbei zwei Grenzprozesse vertauscht werden: Integration und Summation. Erst mit dem Begriff der *gleichmäßigen Konvergenz* klärte K. Weierstraß 1861 die Zulässigkeit dieser Vertauschung:

> *Ist eine Funktionenreihe mit auf $[a, b]$ Riemann-integrierbaren Gliedern gleichmäßig konvergent, so ist auch ihre Summe Riemann-integrierbar und das Integral ihrer Summe ist gleich der Summe der Integrale ihrer Glieder.*

Noch 1870 musste dies verdeutlicht werden, wie eine Äußerung des Hallenser Mathematikers Heinrich Eduard Heine, des Lehrers von Georg Cantor, bezeugt:

> *„Bis in die neueste Zeit glaubte man, es sei das Integral einer convergenten Reihe, deren Glieder zwischen endlichen Integrationsgrenzen endlich bleiben, gleich der Summe aus den Integralen der einzelnen Glieder, und erst Herr Weierstraß hat bemerkt, der Beweis dieses Satzes erfordere, dass die Reihe in den Integrationsgrenzen nicht nur convergiere, sondern dass sie auch in gleichem Grade convergiere."*
> (Zitiert nach [Hochkirchen 1999, S. 345])

Bis zum Ende des 19. Jahrhunderts war der Integralbegriff im allgemeinen auf die Riemannsche Definition festgelegt. Das umfangreiche Werk Riemanns (vgl. [Riemann 1990]) wurde erst nach und nach in seiner Bedeutung erkannt. Hier konnte nur ein Ausschnitt davon behandelt werden. Die größte

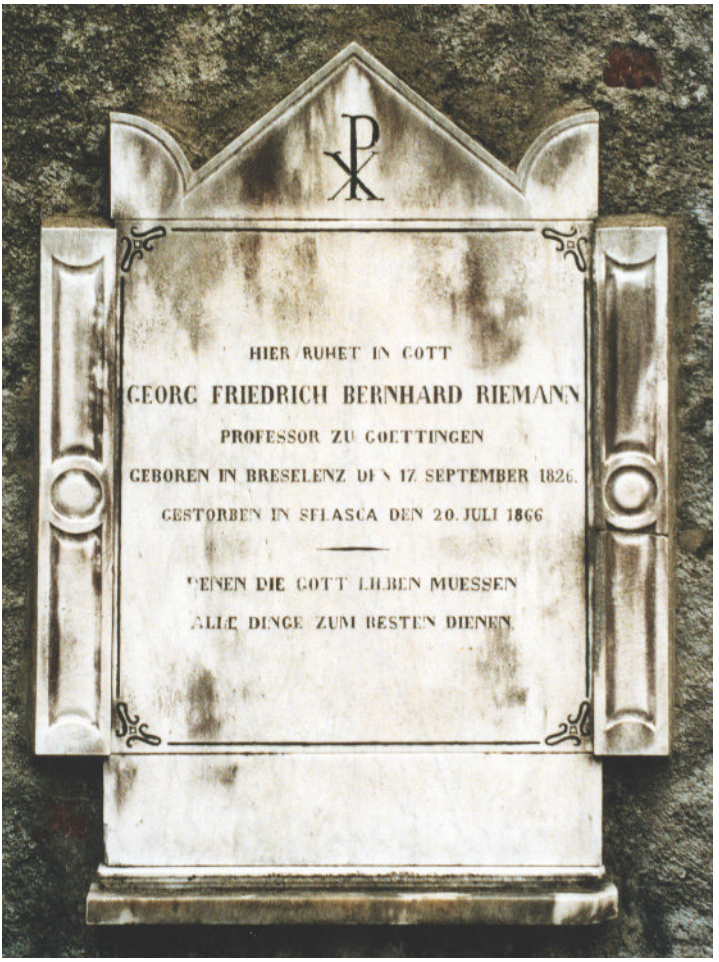


Abb. 10.6.14 Riemanns Grabtafel auf dem Friedhof von Selasca [Foto Reich]

Bedeutung dieses Werkes besteht wohl darin, dass der innere Zusammenhang zwischen der Theorie der Funktionen komplexer Veränderlicher, der Potentialtheorie und der Theorie partieller Differentialgleichungen aufgedeckt wurde – eine Erkenntnis mit weitreichenden Folgen für die Anwendungen in der mathematischen Physik. Riemann hat auch trigonometrische Reihen der Form

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos\ nx + b_n \sin\ nx)$$

betrachtet, bei denen die Koeffizienten nicht mehr die Fourierkoeffizienten einer Funktion sind. Doch würde dies hier zu weit führen; verwiesen sei u. a. auf [Laugwitz 1996, S. 207f.].

10.6.7 Julius Wilhelm Richard Dedekind: Dedekindscher Schnitt

Über Dedekind ist schon mit dem Blick auf seine Vielseitigkeit zu Recht oft gesprochen worden. Hier soll sein Beitrag zu den Grundlagen der Analysis gewürdigt werden, besonders die immer wieder aufgelegten Schriften *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (1872) und *Was sind und was sollen die Zahlen?* (1888).

Während der Züricher Zeit am Polytechnikum hatte Dedekind die Grundvorlesung über Differential- und Integralrechnung zu halten und stellte fest, dass seit der Antike keine arithmetische Definition der reellen, insbesondere der irrationalen Zahlen vorlag, sondern alle „Definitionen" sich auf geometrische Anschauung stützten. So entstanden 1858 die Grundideen des heute nach ihm benannten „Schnittes" (vgl. Eudoxos, Theorie der Irrationalitäten).

Dedekind ging davon aus, dass die Menge Ω der rationalen Zahlen gegeben ist. Eine disjunkte Zerlegung (A_1/A_2) von Ω in zwei Teilmengen A_1, A_2 wird als Schnitt bezeichnet, wenn für jedes Element a_1 in A_1 und a_2 in A_2 die Beziehung gilt $a_1 < a_2$. Nach Einführung einer Größer-als-Beziehung und der Definition von Addition und Multiplikation dieser Schnitte wird durch jeden Schnitt ein Punkt auf der Zahlengeraden festgelegt, also für jede reelle Zahl, also auch für die irrationalen Zahlen. Ein Beispiel: $\sqrt{2}$ ist definiert als Schnitt (A_1/A_2) mit $A_1 = \{r \in Q,\ r^2 < 2\}$, $A_2 = \{r \in Q,\ r^2 > 2\}$ [Dedekind 1872], [Neumann 1989, S. 448]. Dedekind schreibt:

> *„Jedesmal nun, wenn ein Schnitt (A_1/A_2) vorliegt, welcher durch keine rationale Zahl hervorgebracht wird, so erschaffen wir eine neue, eine irrationale Zahl α, welche wir als durch diesen Schnitt (A_1/A_2) vollständig definirt ansehen; wir werden sagen, daß die Zahl α diesem Schnitt entspricht, oder daß sie diesen Schnitt hervorbringt. Es entspricht also von jetzt ab jedem bestimmten Schnitt eine und nur eine bestimmte rationale oder irrationale Zahl, und wir sehen zwei Zahlen stets und nur dann als verschieden oder ungleich an, wenn sie wesentlich verschiedenen Schnitten entsprechen."* [Dedekind 1872, S. 21f.]

Wie bereits erwähnt, hatte sich auch Bolzano um eine Theorie der reellen Zahlen bemüht. Weitere Begründungen stammen von Weierstraß (1860, aber nicht publiziert), Charles Méray (1835–1911) (1872) und G. Cantor (1872; auf ihn wird in Kap 11.1 eingegangen). Cantors Begründung beruht auf dem Begriff der Fundamentalfolge.

Die zweite Schrift Dedekinds, *Was sind und was sollen die Zahlen?*, entstand 1872 bis 1878 im Zusammenhang mit dem Briefwechsel mit Cantor. So beruht Dedekinds Arbeit auf einem mengentheoretischen Aufbau einer Theorie der natürlichen Zahlen, auf einer Zurückführung auf grundlegende Begriffe wie Menge und Abbildung, gestützt auf die Existenz unendlicher Mengen.

Dedekinds Arbeit sowie eine Abhandlung von Gottlob Frege (1848–1925), *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl* (1884), erfuhren erst später die gebührende Würdigung durch den Logiker und Mathematiker Ernst Schröder. Und schließlich



Abb. 10.6.15 Richard Dedekind, Karl Weierstraß

wurde der Aufbau des Zahlensystems im Sinne einer immer tieferen Begründung zunächst abgeschlossen, indem die rationalen Zahlen auf die natürlichen Zahlen und diese wieder durch Giuseppe Peano auf die fünf nach ihm benannten Axiome zurückgeführt wurden.

Es ist dies ein interessantes dialektisches historisches Wechselspiel: Nach den zunächst ausschließlich verwendeten natürlichen Zahlen und positiven Brüchen, nach der Einbeziehung der negativen Zahlen im europäischen Raum während der Renaissance und der vorsichtigen Annäherung an den schon in der griechischen Antike durch die Entdeckung inkommensurabler Strecken vorbereiteten Begriff der irrationalen Zahl folgte die Erweiterung des reellen Zahlbereiches hin zu den komplexen Zahlen und dann, in der weiteren zeitlichen Folge, sozusagen umgekehrt, die Rückführung auf die natürlichen Zahlen.

10.6.8 Karl Weierstraß: Theorie der analytischen Funktionen

Karl Weierstraß (1815–1897) gehört zu jenen Mathematikern, die sich herausragende Verdienste um die Analysis, insbesondere auch um die Grundlagen der Analysis erworben haben.

Weierstraß wurde in Ostenfelde (Westfalen) als Sohn eines Steuerbeamten geboren. 1834 begann er mit dem Studium, anfangs der Verwaltungswissenschaften in Bonn, dann seit 1839 als Lehramtskandidat in Münster, das er 1840 mit dem Staatsexamen abschloß. Es folgten Tätigkeiten als Gymnasiallehrer in Münster, in Deutsch-Krone, in Braunsberg. In aller Stille, gelegentlich sogar seinen Unterricht vernachlässigend und während der Nacht durcharbeitend, fand Weierstraß bedeutende mathematische Ergebnisse zur Theorie der Abelschen Funktionen [Weierstraß 1854], zum Erstaunen der Fachgelehrten. So wurde Weierstraß nach einer Ehrenpromotion 1854 in Kö-

nigsberg nach Berlin berufen, zunächst an die dortige Gewerbeschule, 1856 wurde er Mitglied der Berliner Akademie. Erst 1864 wurde er an der Berliner Universität zum ordentlichen Professor befördert [Biermann 1966].

Im Alter war Weierstraß melancholisch, nicht zuletzt durch Angriffe von Kronecker, trotz mancherlei Ehrungen durch in- und ausländische Akademien. Er litt unter Schwindelanfällen und konnte nach einem körperlichen Zusammenbruch 1862 seine Vorlesungen nur im Sitzen halten, unterstützt von einem Schreiber an der Tafel.

Dessen ungeachtet wurde Weierstraß zu einem Anziehungspunkt für heranwachsende Mathematiker, zumal er in seinen Vorlesungen seine neuesten Forschungsergebnisse vortrug. Ch. Hermite nannte ihn einen „großen Gesetzgeber der Analysis“. Nur einige Facetten von Weierstraß' weitgespanntem Werk seien herausgegriffen (vgl. auch [Markuschewitsch 1955]).

Weierstraß leistete grundlegende Beiträge – teils in Publikationen, teils in Vorlesungen – zur Variationsrechnung, zur Differentialgeometrie, aber auch in der linearen Algebra, z. B. mit der Einführung des Begriffes Elementarteiler.

Er vertrat, beinahe gefürchtet, mit Nachdruck die Forderung nach Strenge. Weierstraß wurde einer der Hauptvertreter der sog. Epsilontik, der „δ–ε-Sprache“. W. K. J. Killing (1847–1923), ein Schüler von Weierstraß, berichtet:

> *„Die Strenge in der Beweisführung und die Systematik der Anwendungen, wie er sie verlangte, ließ ihn weniger geeignet erscheinen, um dem Anfänger das Eindringen in die höhere Mathematik zu erleichtern. Er verlangte Zuhörer, die bereits tüchtige Kenntnisse besaßen, die wußten, daß es ohne saure Arbeit auch dem Begabtesten nicht möglich ist, in die Tiefe der Wissenschaft einzudringen (...). Bei jedem, der Weierstraß hörte, mußte sich steter häußlicher Fleiß mit regelmäßigem Besuche der Vorlesungen vereinigen.“*
> [Killing 1897, S. 719]

Berühmt ist der Approximationssatz von Weierstraß (1885): Jede stetige reelle Funktion auf einem kompakten Intervall kann dort gleichmäßig durch Polynome approximiert werden.

Weierstraß stellte (nochmals) klar, dass jede differenzierbare Funktion stetig, aber keineswegs jede stetige Funktion differenzierbar ist. Er gab 1872 das Beispiel einer auf ganz $\mathbb{R}$ stetigen, aber dort nirgends differenzierbaren Funktion an, damals eine Sensation (von Bolzanos Funktion, der ersten dieser Art, wusste man damals noch nichts). Auch sollte festgehalten werden, dass Riemann um 1860 die trigonometrische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$ angegeben hatte, die er für stetig, aber nirgends differenzierbar hielt (vgl. [Jahnke 1999, S. 238]). Das konnte seinerzeit weder bewiesen, noch widerlegt werden.

Nach einer Reihe von Teillösungen wurde erst 1971 von einem Studenten der Columbia-Universität in New York eine endgültige Lösung angegeben: diese Funktion ist differenzierbar für

$$\pi \cdot \frac{2m+1}{2n+1} \text{ mit } m, n \in \mathbb{Z} \; .$$

Weierstraß schlug einen anderen Weg ein als Riemann, um den Begriff analytische Funktion einer komplexen Veränderlichen zu definieren: Statt über die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen ging Weierstraß den Weg über die Potenzreihenentwicklung einer Funktion. Brieflich drückte sich Weierstraß 1875 bei der Suche nach der Bewältigung einer Theorie der komplexen Funktionen so aus:

> *„Je mehr ich über die Principien der Functionentheorie nachdenke – und ich thue dies unablässig –, um so fester wird meine Überzeugung, dass diese auf dem Fundamente algebraischer Wahrheiten aufgebaut werden muss, und dass es deshalb nicht der richtige Weg ist, wenn umgekehrt zur Begründung einfacher und fundamentaler algebraischer Sätze das ‚Transcendente', um mich kurz auszudrücken, in Anspruch genommen wird – so bestechend auch auf den ersten Anblick z. B. die Betrachtungen sein mögen, durch welche Riemann so viele der wichtigsten Eigenschaften algebraischer Functionen entdeckt hat. (Dass dem Forscher, so lange er sucht, jeder Weg gestattet sein muss, versteht sich von selbst; es handelt sich nur um die systematische Begründung.)"* [Weierstraß 1895, S. 235]

Es gab alsbald zwei „Lager" – Riemannsche Auffassung gegen den Weierstraßschen Zugang. Gegen Ende des 19. Jahrhunderts dominierte, nicht zuletzt wegen der Vorbildwirkung der Weierstraßschen „Strenge", dessen Zugang. Doch konnte Edouard Jean-Baptiste Goursat (1858–1936) im Jahre 1900 nachweisen, dass die Klasse der nach Riemann definierten Funktionen und die Klasse der nach Weierstraß definierten holomorphen Funktionen äquivalent sind.

Wir können uns hier nur auf den Kern des Zuganges von Weierstraß zu den komplexen Funktionen beschränken; viele diffizile Aussagen und Zwischenergebnisse müssen aus Platzgründen übergangen werden. Für Einzelheiten sei verwiesen auf [Bottazini 1999].

Im Jahre 1876 veröffentlichte Weierstraß die grundlegende Arbeit *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen*. Es ging um die Darstellung von eindeutigen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Eine solche Funktion f heißt regulär (auch analytisch oder regulär-analytisch, heutzutage holomorph) in einem Gebiet G (d. h. einer offenen, zusammenhängenden Punktmenge) der komplexen Ebene $\mathbb{C}$, wenn sie in jedem Punkt von G komplex differenzierbar ist, regulär (holomorph) in einem Punkt $a \in \mathbb{C}$, wenn es eine Umgebung von a gibt, in der die Funktion regulär (holomorph) ist. (Äquivalent zur komplexen Differenzierbarkeit in $\mathbb{C}$ ist die Gültigkeit der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in $\mathbb{C}$, vgl. 10.6.6).

In jedem Punkt a eines Regularitätsgebietes G lässt sich die Funktion f in eine konvergente Potenzreihe $P(z-a)$ entwickeln. Das ist der Ausgangspunkt für Weierstraß' Theorie. Man entwickelt f an einer Stelle $z_1 \in \mathbb{C}$ in die Potenzreihe $P_1(z - z_1)$. Zwei Fälle können eintreten:

1. Die Potenzreihe $P_1(z-z_1)$ konvergiert in der ganzen komplexen Ebene $\mathbb{C}$. Sie stellt dann dort eine „eindeutige analytische Funktion" dar.

2. $P(z-z_1)$ hat einen Konvergenzkreis K_1 mit dem Radius r_1. Die Potenzreihe konvergiert dann mindestens im Innern von K_1 und stellt dort ein „Funktionselement“ f_1 dar.
   Um dessen Definitionsgebiet – wenn möglich – zu erweitern, benutzt Weierstraß das Verfahren der „analytischen Fortsetzung“: Man entwickelt f_1 an einer Stelle z_2 im Innern von K_1 in eine Potenzreihe $P_2(z-z_2)$. Erneut sind zwei Fälle möglich:
   a) Der Konvergenzkreis K_2 berührt dem Kreis K_1 von innen im Punkt ζ. Dann ist ζ eine „singuläre“ Stelle, d. h. eine Stelle, in die nicht fortgesetzt werden kann (Abb. 10.6.16a). Sind alle Randpunkte von K_1 in diesem Sinne singulär, so ist der Rand von K_1 die „natürliche Grenze“ des Funktionselementes f_1.

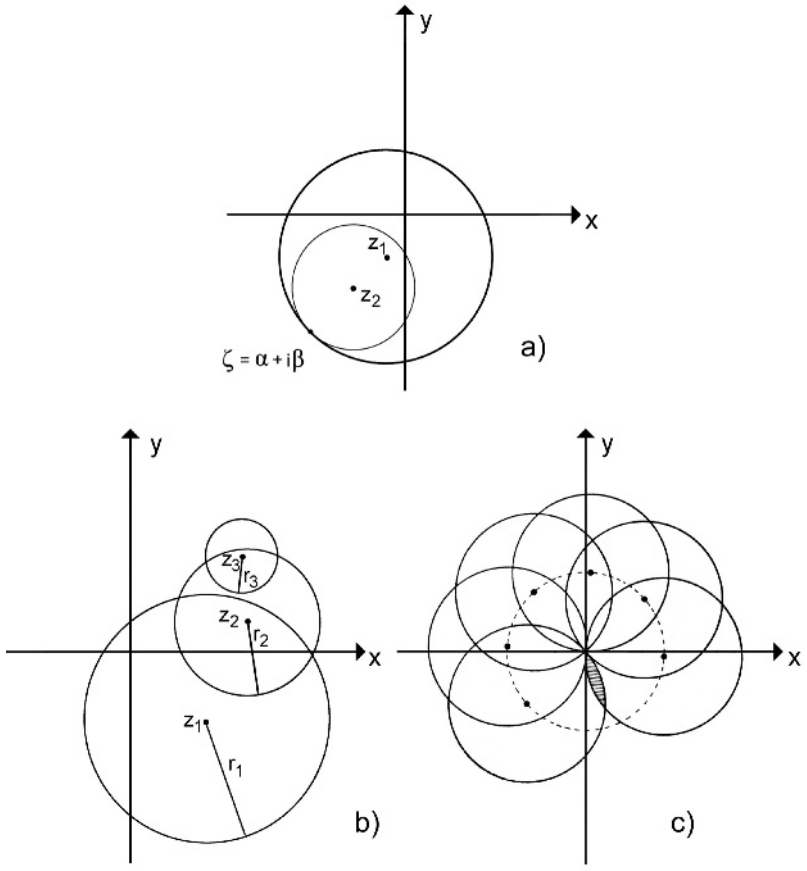


Abb. 10.6.16 Figuren zur analytischen Fortsetzung mit dem Kreiskettenverfahren

b) Der Konvergenzkreis K_2 ragt über den Kreis K_1 hinaus. Dann stellt $P_2(z-z_2)$ ein neues Funktionselement f_2 dar, dessen Werte im Innern des Durchschnittes beider Kreise mit denen von f_1 übereinstimmen; f_2 heißt dann eine analytische Fortsetzung von f_1. Die Fortführung dieser Methode nennt man das Kreiskettenverfahren (Abb. 10.6.16b). Verbindet man die Punkte $z_1, \ldots, z_n$ durch eine ganz im Vereinigungsgebiet der Kreise $K_1, \ldots, K_n$ gelegene Kurve, so sagt man, f_1 sei längs dieser Kurve nach f_n analytisch fortgesetzt.
Kommt man bei einer solchen Fortsetzung zu einem Kreis, der sich mit dem Ausgangskreis „überlappt“ (Abb. 10.6.16c), so sind wiederum zwei Fälle möglich:
   α) Bei analytischer Fortsetzung längs aller zulässigen Wege von z_1 nach z_n erhält man dasselbe Funktionselement f_n, d. h. die Werte von f_1 und f_n stimmen im Durchschnitt $K_1 \cap K_n$ überein. Dann ist im Innern der Vereinigung all dieser Kreise eine „eindeutige“ Funktion f definiert.
   β) Bei Fortsetzung auf zwei verschiedenen Wegen von z_1 nach z_n stößt man auf ein Funktionselement f_n mit von f_1 verschiedenen Werten in $K_1 \cap K_n$. Dann gibt es dort (mindestens) zwei Zweige einer „mehrdeutigen“ analytischen Funktion f: Man ist in ein anderes Blatt der Riemannschen Fläche von f gelangt.

Wann der Fall α) eintritt, lehrt der sog. Monodromiesatz.
Ein schönes und einfaches Beispiel für Fall β) ist die bereits auf S. 262 behandelte algebraische Funktion $f(z) = \sqrt{z}$. Setzt man das Funktionselement

$$f_1(z) = \sqrt{1+(z-1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{\nu} (z-1)^\nu \text{ für } |z-1| < 1$$

längs des Einheitskreises (also um den singulären Punkt $z = 0$ herum) mit dem Kreiskettenverfahren analytisch fort, so gelangt man nach einigen Schritten wieder in den Kreis $|z-1| < 1$ (vgl. Abb. 10.6.16c) und schließlich mit dem Funktionselement $f_n(z) = -f_1(z)$ wieder ganz in den Ausgangskreis mit dem Wert $f_n(1) = -1 \neq 1 = f_1(1)$: Man ist in das andere Blatt der Riemannschen Fläche der „zweideutigen Funktion“ $f(z) = \sqrt{z}$ gelangt (siehe Abb. 10.6.12).

Durch wiederholte Anwendung des Kreiskettenverfahrens in allen möglichen Richtungen und auf die dabei neu gewonnenen Funktionselemente gewinnt man so (in älterer Terminologie) aus dem Ausgangselement f_1 durch analytische Fortsetzung „die vollständige analytische Funktion f “, entweder als „eindeutige“ Funktion in einem Gebiet der komplexen Ebene oder als „mehrdeutige“ Funktion mit einer Riemannschen Fläche als Regularitätsgebiet. Die genaue Beschreibung der zum Teil sehr diffizilen Fälle erfordert eine Fülle weiterer Begriffsbildungen (z. B. der verschiedenen Arten von Singularitäten und topologischer Begriffe) und kann und soll deshalb hier nicht erfol-

gen. Verwiesen sei dazu auf [Klein 1926, S. 285ff.], [Weierstraß 1895, S. 77ff.] und Lehrbücher der Funktionentheorie, z. B. [Behnke/Sommer 1962].

Als weitere bedeutende Beiträge von Weierstraß zur Funktionentheorie seien genannt: Der nach ihm benannte Produktsatz und dessen Anwendung zur Darstellung „ganzer“ Funktionen und die von ihm als grundlegende elliptische Funktion eingeführte und ebenfalls nach ihm benannte $\wp$-Funktion mittels unendlicher Produkte.

Bereits F. Klein hatte darauf aufmerksam gemacht, dass der wegen seiner „Strenge“ berühmt-berüchtigte Weierstraß durchaus ein tiefes Verständnis für die Anwendungen der Mathematik hatte, besonders hinsichtlich der Physik. Das kommt sehr deutlich in seiner Antrittsrede (1857) aus Anlass seiner Zuwahl in die Berliner Akademie zum Ausdruck.

> *„Ich meine aber, es muss das Verhältnis zwischen Mathematik und Naturforschung etwas tiefer aufgefasst werden, als es geschehen würde, wenn etwa der Physiker in der Mathematik nur eine, wenn auch unentbehrliche, Hülfsdisziplin achten, oder der Mathematiker die Fragen, die jener ihm stellt, nur als eine reiche Beispiel-Sammlung für seine Methoden ansehen wollte. Ich darf jedoch heute diesen Gegenstand, der mir allerdings sehr am Herzen liegt, nicht weiter verfolgen. Auf die Frage aber, die ich schon vernommen, ob es denn wirklich möglich sei, aus den abstracten Theorien, welchen sich die heutige Mathematik mit Vorliebe zuzuwenden scheine, auch etwas unmittelbar Brauchbares zu gewinnen, möchte ich entgegnen, dass doch auch nur auf rein speculativem Wege griechische Mathematiker die Eigenschaften der Kegelschnitte ergründet hatten, lange bevor irgendwer ahnte, dass sie die Bahnen seien, in welchen die Planeten wandeln, und dass ich allerdings der Hoffnung lebe, es werde noch mehr Functionen geben mit Eigenschaften, wie sie Jacobi an seiner θ-Function rühmt, die lehrt, in wieviel Quadrate sich jede Zahl zerlegen lässt, wie man den Bogen einer Ellipse rectifiziert und dennoch, setze ich hinzu, im Stande ist, und zwar sie allein, das wahre Gesetz darzustellen, nach welchem das Pendel schwingt.“*
> [Weierstraß 1894, S. 225f.]

Weierstraß war lange Jahre an der Berliner Universität tätig. So ist es – vor allem auch wegen der Neuartigkeit seiner Forschungsergebnisse – verständlich, dass er eine stattliche Reihe von Promovenden und Habilitanden hatte bzw. (meist im Zusammenwirken mit Kummer) Gutachten lieferte. Genannt seien der Österreicher Otto Stolz (1842–1905), Hermann Amandus Schwarz (1843–1927), der Schwede Gösta Mittag-Leffler (1846–1927), Georg Ferdinand Frobenius (1849–1917), Immanuel Lazarus Fuchs (1833–1902), Carl Runge (1856–1927), aber auch Georg Cantor, der spätere Begründer der Mengenlehre. Von besonderem Interesse ist das Verhältnis zwischen Weierstraß und Sophie (Sonja) Wassiljewna Kowalewskaja (1850–1891), sowohl in mathematikhistorischer als auch in persönlicher Hinsicht.

10.6.9 Sofia (Sophie, Sonja) Kowalewskaja: Theorie partieller Differentialgleichungen

Sofia Wassiljewna Kowalewskaja (1850–1891) wurde am 15. Januar (gregorianischen Kalenders) 1850 in Moskau als Tochter eines vermögenden russischen Generals geboren, der nach seinem Aussscheiden aus der Armee im Jahre 1858 auf seinen Landsitz in Palimbino in der Provinz Witebsk übergesiedelt war, wo die Familie Korwin-Krukowskij jenes Leben führte, das Dostojewski und Turgenjew in ihren Romanen unsterblich gemacht haben.

Nach der Familiensaga reichte die väterliche Linie zurück bis auf den römischen Feldherrn Marcus Valerius Messalius (um 340 n. Chr.), auf den berühmten ungarischen König Matthias Corvinus, einen Freund der Wissenschaften und Künste, und auf eine Zigeunerin, während die mütterliche Linie auf Sofias Urgroßvater, den Braunschweiger Theologen Johann Ernst Schubert zurückgeht, der ab 1764 eine Professur in Greifswald innehatte.
Sofia hat ihre Abstammung selbst stolz so beschrieben:

> *„Meine Leidenschaft für die Wissenschaft habe ich von meinem Vorfahren Matthias Corvinus, dem ungarischen König, geerbt; meine Liebe zur Mathematik, Musik und Dichtkunst vom Großvater meiner Mutter, dem Astronomen Schubert; meine Liebe zur Freiheit von Polen; meine Liebe zum Umherschweifen und meine Unfähigkeit, der anerkannten Tradition zu gehorchen, von meiner Zigeuner-Urgroßmutter; und alles übrige verdanke ich Rußland.“*
> [Tuschmann/Hawig 1993, S. 17]

Sofia war 6 Jahre jünger als ihre Schwester Aniuta. Beide Mädchen waren hochbegabt. Abgesehen von der Förderung der Interessen der jungen Mädchen durch gebildete Onkel hatte Sofia ihr Grunderlebnis mit der Mathematik in einer merkwürdigen Weise: Ein Zimmer sollte tapeziert werden; nach damaliger Weise wurden die Wände zunächst mit Makulaturpapier beklebt, erst darauf die Tapete. Und die Makulatur war ausgerechnet die Nachschrift einer mathematischen Vorlesung, die der eine Onkel gehört hatte!

Während eines Aufenthaltes in St. Petersburg konnte Sofia tiefer in die Mathematik eindringen. Beide Schwestern wollten studieren und das sogar noch im Ausland. Sie gingen daher Scheinehen ein, und überwanden dazu noch die Widerstände der Eltern. Sofia heiratete den Biologen Wladimir Onufrijewitsch Kowalewsky (1842–1883), der sich als Paläontologe große Verdienste erwarb. Die Kowalewskys lebten anfangs in Heidelberg. Die Ehe hatte kaum Bestand; Sophie ging nach Berlin, ihr Mann setzte seine Studien in Jena und München fort. Die Enttäuschung Sophies in Berlin war groß, da Frauen vom Universitätsstudium, ja sogar vom Betreten der Räume ausgeschlossen waren. Allerdings fand sie Unterstützung bei Weierstraß, der ihre Begabung erkannte, Privatunterweisung erteilte und Problemstellungen vermittelte. So entstanden drei Arbeiten, über lineare partielle Differentialgleichungen, über

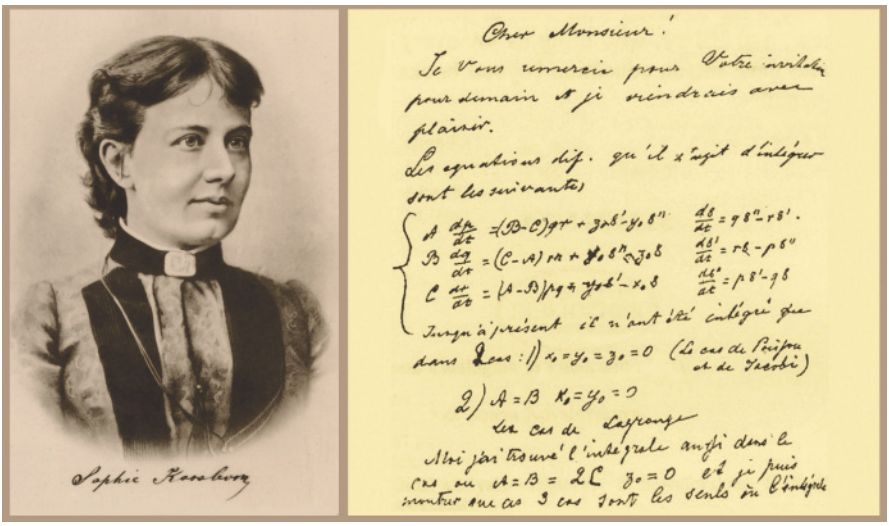


Abb. 10.6.17 Sofia Kowalewskaja; Anfang eines Briefes von S. Kowalewskaja zur Rotation starrer Körper, vermutlich an Mittag-Leffler gerichtet, obwohl sie ihn weniger förmlich anzureden pflegte [Mittag-Leffler-Institut]

die Gestalt des Saturnringes und über algebraische Funktionen. In einem Brief an einen „Göttinger Fachkollegen“ (offenbar – nach A. Gutzmer – an L. Fuchs) schrieb Weierstraß über diese Studien, er habe keine Bedenken, jede der drei Arbeiten als Dissertation anzunehmen:

> *„Da es aber das erstemal ist, daß eine Frau auf Grund mathematischer Arbeiten promovirt zu werden wünscht, so hat nicht nur die Facultät alle Veranlassung, strenge Forderungen zu stellen, sondern es liegt auch im Interesse der Adspirantin sowohl als in meinem (...) Was den Stand der mathematischen Bildung der Fr. v. K. überhaupt angeht, so kann ich versichern, daß ich nur sehr wenige Schüler gehabt habe, die sich, was Auffassungsgabe, Urtheil, Eifer und Begeisterung für die Wissenschaft angeht, mit ihr vergleichen ließen.“*
> [Wentscher 1909, S. 92].

Als Dissertation wurde die Arbeit *Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen* (1875 publiziert) ausgesucht und eingereicht. Sophie konnte beweisen, dass eine lineare partielle Differentialgleichung mit algebraischen Koeffizienten stets eine Lösung hat. In Abwesenheit wurde Sophie 1874 promoviert [Weierstraß/Kowalewskaja 1993].

Zum Verhältnis zwischen Sophie und Weierstraß wurden übrigens öfter Spekulationen, auch unschöner Art angestellt. Nach der Promotion hatte Sophie schwere und anstrengende Jahre: Tod des Vaters, Geburt ihrer Tochter, Selbstmord ihres Mannes.

Im Jahr 1884 endlich besserten sich ihre Lebensverhältnisse. Sie wurde als Dozentin an die Universität Stockholm berufen. Am 24. Dezember 1888 erhielt sie den Prix Bordin, eine der höchsten Auszeichnungen durch die Pariser Akademie der Wissenschaften. Und schließlich wurde sie Professorin für Analysis in Stockholm.

Unglücklicherweise erkältete sie sich auf einer Eisenbahnreise und verstarb am 29. Januar 1891. Zahlreiche Nachrufe würdigten ihre Leistung, die sie in einer Männerwelt erzielt hatte, und zugleich ihr soziales Engagement.

10.6.10 Rückblick auf die Entwicklung der Analysis während des 19. Jahrhunderts

Die Fülle der im 19. Jahrhundert erzielten Ergebnisse in der Analysis und die vielfältigen Aspekte und Ansatzpunkte künftiger Entwicklungen – von Cauchy bis Weierstraß, von Bolzano bis Cantor – reizen dazu, nach einer übergreifenden Einschätzung zu fragen, wenigstens zu einem Versuch. Dies ist mehrfach unternommen worden; mich hat am stärksten die von Jesper Lützen vorgenommene Betrachtung überzeugt [Lützen 1999]. Einige seiner Ausführungen seien hier wiedergegeben.

Das 19. Jahrhundert wird als das Zeitalter der Strenge beschrieben, mit einigem Recht, wenn man sich die gewonnenen scharfen Definitionen grundlegender Begriffe wie Funktion, Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Integral, Konvergenz von Reihen, gleichmäßige Konvergenz vor Augen führt. Dabei hat die Analyse der Verhältnisse bei den trigonometrischen Reihen mannigfache, tief liegende direkte oder indirekte Entwicklungen ausgelöst; bis hin zur Mengenlehre, zu erweiterten Integralbegriffen, zur Verschärfung von „Maß“ und „Inhalt“.

> *„Jedoch* – so Lützen – *ist die Annahme falsch, daß das Problem der Strenge als die dringendste Frage der Analysis betrachtet wurde. Die große Mehrheit der Mathematiker (...) arbeitete(n)* hauptsächlich *an der Ausweitung und Anwendung der analytischen Theorien, die sie von ihren Vorläufern ererbt hatten. Tatsächlich ergab sich aus der Entwicklung neuer Sätze in der Analysis ein wichtiger Anstoß für das wachsende Interesse an ihren Grundlagen.“* [Lützen 1999, S. 191]

Dieses dialektische Wechselspiel wird deutlich an den Entwicklungen der Theorie der Differentialgleichungen, der Potentialtheorie und der elliptischen Funktionen. Auch die Lehrtätigkeit wirkte als starkes Mittel bei der Suche nach strengen Begriffen.

> *„Die Neubegründung der Analysis läßt sich in zwei Epochen unterteilen: eine von Cauchy dominierte französische und eine von Weierstraß beherrschte deutsche. Dies spiegelt die allgemein anerkannte Auffassung wider, nach der Frankreich bis um die Mitte des Jahrhunderts die dominierende mathematische Nation war, während danach Deutschland die führende Rolle übernahm.“* [Lützen 1999, S. 193]

Die parallel verlaufende Entdeckung und das Studium der sog. pathologischen Funktionen entsprangen, wenn man so will, einer inneren Folgerichtigkeit, nämlich der Suche nach der Belastbarkeit solcher Begriffe wie analytische Funktion unter extremen Voraussetzungen. Weierstraß' Konstruktion stetiger, aber nirgends differenzierbarer Funktionen darf als Symptom dieser Arbeitsrichtung gelten. Dirichlet stellte eine nicht integrierbare Funktion vor.

Du Bois-Reymond (1831–1889) zeigte Funktionen, die nicht in eine Fourierreihe entwickelt werden können; Hankel und Darboux gaben weitere pathologische Funktionen an.

> *„Wo früher neue Typen von Funktionen durch Anwendungen nahegelegt wurden, suchten die Mathematiker jetzt aktiv nach unangenehmen Funktionen im Rahmen der reinen Mathematik, um die Grenzen von Begriffen wie Funktion, Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Integrierbarkeit usw. zu untersuchen."* [Lützen 1999, S. 239]

Dieser Trend der Suche nach „Ausnahmen" wurde jedoch keineswegs allgemein gebilligt oder unterstützt. Poincaré beispielsweise sprach sich 1899 explizit gegen diese Forschungsrichtung aus:

> *„Jetzt erleben wir, wie eine ganze Masse grotesker Funktionen auftaucht, die sich alle Mühe zu geben scheinen, den anständigen Funktionen, die zu etwas nütze sind, so wenig wie möglich zu ähneln. (...) Wenn früher eine neue Funktion erfunden wurde, geschah dies im Hinblick auf einen praktischen Zweck; heute erfindet man sie absichtlich nur dazu, die Argumentation unserer Väter zu widerlegen, und zu etwas anderem werden sie nie taugen."*
> (Zitiert nach [Lützen 1999, S. 239])

Auf die von Weierstraß und anderen proklamierte Strenge in der Mathematik wurde als Reaktion eine „Befreiung von den Fesseln der Strenge" gefordert. Mit der Forderung nach Strenge war man zu weit gegangen und hatte z. B. mit der Ablehnung divergenter Reihen viele erfolgreiche Argumentationen in der Physik und der Astronomie verworfen, die durch die später entwickelten „Limitierungsverfahren" für divergente Reihen rehabilitiert wurden. Von Oskar Heaviside (1850–1925) stammt die Vision:

> *„Es wird eine Theorie divergenter Reihen oder, sagen wir mal, eine umfassendere Funktionentheorie als die gegenwärtige geben müssen, die konvergente und divergente Reihen in einem harmonischen Ganzen zusammenfaßt."* (Zitiert bei [Lützen 1999, S. 243])

Die Analyse von Lützen mündet in die folgenden Sentenzen:

> *„Die Entdeckung der Non-Standard-Analysis hat die Geschichtsschreibung über die Grundlagen der Differential- und Integralrechnung beeinflußt. Solange es nur eine akzeptierte Auffassung der Analysis, nämlich die von Weierstraß, gab, war die Entwicklung häufig als ein*

natürliches Streben zu diesem natürlichen Ziel betrachtet worden. Die Non-Standard-Analysis machte klar, daß es nicht nur ein Ziel gibt. Anstatt also die historische Entwicklung als nahezu unvermeidlich anzusehen, müssen wir sie jetzt als eines von mehreren möglichen Szenarien betrachten, die in ihrem Kontext erklärt werden muß.
Die heutigen Theorien über divergente Reihen, verallgemeinerte Differentiation und Infinitesimale mögen dazu verleiten, die Strenge des neunzehnten Jahrhunderts als ein unnötig einengendes oder sogar entartetes Stadium zu betrachten, das wir jetzt überwunden haben. Hierauf muß jedoch entgegnet werden, daß die allgemeineren Ideen des zwanzigsten Jahrhunderts alle auf der strengen Grundlage beruhen, die im neunzehnten Jahrhundert entwickelt wurde. So sind zum Beispiel Schwartz' verallgemeinerte Funktionen (Distributionen) als Funktionale auf einem Raum von unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger, versehen mit einer geeigneten Topologie, definiert. Daher war die Entwicklung der Grundlagen (der) Analysis des neunzehnten Jahrhunderts zwar nicht notwendig oder gar selbstverständlich. Unsere moderne Analysis aber ist fest darin verwurzelt." [Lützen 1999, S. 243f.] (Vgl. auch [Epple 1999])

10.7 Der Weg zur klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung

Für dieses Gebiet seien zunächst einige Bemerkungen zur Situation der Literatur bezüglich zusammenfassender Darstellungen eingefügt.

Für den deutschsprachigen Leser ist zunächst der von E. Czuber 1899 erstattete Bericht an die DMV über die Entwicklung der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie [Czuber 1899] von Interesse und dann die von I. Schneider herausgegebene Textsammlung mit kurzen einführenden Abschnitten [Schneider 1989]. Eine sehr ausführliche, auch im Mathematischen detailreiche Darlegung gibt A. Hald [Hald 1998]. Ferner sei verwiesen auf den Anhang zur Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung [Gnedenko 1957].

Über die Vor- und Frühgeschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung wurde schon in Kapitel 9 berichtet. Es versteht sich, dass hier nur einige Stellen aus der Entwicklungsgeschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie gestreift werden können. Jakob Bernoulli (1654–1705) hatte in seiner *Ars conjectandi (Kunst des Vermutens)* von 1713 (postum) eine noch nicht ganz scharfe Formulierung des später „Gesetz der großen Zahlen" genannten Satzes gegeben. Es scheint sich die *„... bemerkenswerte Folgerung zu ergeben, daß, wenn die Beobachtungen aller Ereignisse in alle Ewigkeit fortgesetzt würden, wobei schließlich die Wahrscheinlichkeit in vollkommene Sicherheit übergehen würde, alles in der Welt als sich in bestimmten Verhältnissen und nach einer festen Gesetzmäßigkeit des Wandels ereignend erkannt würde, so daß wir sogar gehalten*



Abb. 10.7.1 Karikatur eines Roulettespiels um 1800. Glücksspiele wie dieses haben seit der Antike immer wieder Anstoß zu Überlegungen und Theorien über die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen gegeben

wären, selbst bei den zufälligen Dingen gleichsam eine gewisse Notwendigkeit und sozusagen eine Bestimmung anzuerkennen“ (Zitiert nach [Schneider 1989, S. 124]).

Eine andere, inhaltlich etwas abweichende Fassung dieses Gesetzes findet sich in seinen früher (vor Mai 1690) entstandenen *Meditationes* (Überlegungen), vgl. dazu ausführlich [Schneider 1989, S. 122f.].

Schließlich formulierte 1837 Siméon-Denis Poisson das „Gesetz der großen Zahlen“ so, wie wir es häufig zu tun pflegen, in seinem Lehrbuch *Recherches sur la probabilité des jugements* (Untersuchungen über die Wahrscheinlichkeit von Urteilen). Wiederum, unter Abschwächung der Voraussetzungen, heißt es, unter Anknüpfung an Bernoulli:

> *„Die Erscheinungen jeglicher Art sind einem allgemeinen Gesetze unterworfen, welches man das ‚Gesetz der großen Zahlen‘ nennen kann. Es besteht darin, dass, wenn man sehr große Anzahlen von Erscheinungen derselben Art beobachtet, welche von constanten und von unregelmäßig veränderlichen Ursachen abhängen, die aber nicht progressiv veränderlich sind, sondern bald in dem einen bald in dem anderen Sinne; man zwischen diesen Zahlen Verhältnisse findet, welche fast unveränderlich sind.“* [Schnuse 1841, S. V]

Zeitlich davor und parallel dazu ging die Suche nach einem tragfähigen philosophischen Hintergrund für das Phänomen bzw. den Begriff „Wahrscheinlichkeit“. Gibt es wirklich „Zufall“ oder beruht unser Empfinden von Zufall nur auf einem Mangel an unseren Einsichten in einen komplizierten Sachverhalt? Diese zutiefst philosophische Frage wurde im 17. Jahrhundert von



Abb. 10.7.2 Pierre Simon de Laplace; Siméon Denis Poisson

herausragenden Gelehrten erörtert, etwa von Antoine Arnault (1612–1693), einem Hauptvertreter des Jansenismus, von Leibniz und anderen.

Die klassische Mechanik der Laplace-Zeit beschreibt alle Bewegungen durch Differentialgleichungen 2. Ordnung. Die Bewegungen sind eindeutig festgelegt, wenn die Anfangsorte und Anfangsgeschwindigkeiten bekannt sind, und das in alle Ewigkeit. Für Zufall ist kein Platz. Besonders beeindruckend ist dies für die Bewegungen der Himmelskörper; man kann deren Positionen auf das Genaueste zurück- und vorausberechnen.

So war es also kein Zufall, dass Laplace, Verfasser der „Himmelsmechanik", explizit die Existenz von „Zufall" verneinte. Bereits 1783, bei Reflexionen über das Gesetz der großen Zahlen in *Suite du Mémoire sur les approximations qui sont fonctions de très grand nombres* tritt der Determinismus zutage:

> *„Alle Ereignisse, selbst die, die wegen ihrer Kleinheit und ihrer Unregelmäßigkeit nicht in das allgemeine System des Kosmos zu passen scheinen, sind davon eine ebenso notwendige Folge wie die Umläufe der Sonne. Wir schreiben sie dem Zufall zu, weil wir die Ursachen nicht kennen, die sie hervorbringen, und die Gesetze, die sie mit den großen Erscheinungen des Universums verketten; so wurden das Auftauchen und die Bewegung der Kometen, die wir heute als abhängig von demselben Gesetz verstehen, das die Wiederholung der Jahreszeiten sichert, einst von denjenigen, die diese Sterne zu den Meteoren rechneten, als Wirkung des Zufalls angesehen. Das Wort Zufall drückt also nichts anderes als unser Unwissen über die Ursachen der*

Erscheinungen aus, die wir ohne irgendeine sichtbare Ordnung eintreten und einander folgen sehen". (Zitiert nach [Schneider 1989, S. 71)

Und noch einmal, besonders deutlich im deterministischen Sinne, tritt dies in der von Laplace erdachten übermächtigen „Intelligenz", dem berühmten „Dämon", in dem gemeinverständlich angelegten *Essai philosophique sur les probabilités* (Philosophische Abhandlung über die Wahrscheinlichkeit) zutage, der 1814 als Einführung in seine *Théorie analytique des probabilités* (Analytische Theorie der Wahrscheinlichkeiten) von 1812 erschien. Der *„Essai. . . "* war entstanden auf der Grundlage einer 1795 gehaltenen Vorlesung. Dort heißt es:

„Wir müssen also den gegenwärtigen Zustand des Weltalls als die Wirkung seines früheren und als die Ursache des folgenden Zustands betrachten. Eine Intelligenz, welche für einen gegebenen Augenblick alle in der Natur wirkenden Kräfte sowie die gegenseitige Lage der sie zusammensetzenden Elemente kennte, und überdies umfassend genug wäre, um diese gegebenen Größen der Analysis zu unterwerfen, würde in derselben Formel die Bewegungen der größten Weltkörper wie des leichtesten Atoms umschließen; nichts würde ihr ungewiß sein und Zukunft wie Vergangenheit würden ihr offen vor Augen liegen. Der menschliche Geist bietet in der Vollendung, die er der Astronomie zu geben verstand, ein schwaches Abbild dieser Intelligenz dar. Seine Entdeckungen auf dem Gebiete der Mechanik und der Geometrie, verbunden mit der Entdeckung der allgemeinen Gravitation, haben ihn in Stand gesetzt, in demselben analytischen Ausdruck die vergangenen und zukünftigen Zustände des Weltsystems zu fassen."
[Laplace 1932, S. 1f.]

Dort findet sich auch die Definition eines Maßes der Wahrscheinlichkeit; eigentlich ist dies eine Rechenvorschrift, wie man in gewissen einfachen Fällen (wenn „gleichmögliche Ereignisse" vorliegen) die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ermittelt:

„Die Theorie des Zufalls ermittelt die gesuchte Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses durch Zurückführung aller Ereignisse derselben Art auf eine gewisse Anzahl gleichmöglicher Fälle, (. . .) und durch Bestimmung der dem Ereignis günstigen Fälle. Das Verhältnis dieser Zahl zu der aller möglichen Fälle ist das Maß dieser Wahrscheinlichkeit, die also nichts anderes als ein Bruch ist, dessen Zähler die Zahl der günstigen Fälle und dessen Nenner die Zahl aller möglichen Fälle ist." [Laplace 1932, S. 4]

Laplace lehnte theologische und teleologische Erklärungen für Naturerscheinungen ab. Viele frühere und spätere Entdeckungen und solche seiner Zeitgenossen finden sich bei Laplace: Er diskutierte Glücksspiele, geometrische Wahrscheinlichkeiten, den Satz von Bernoulli und dessen Beziehungen zur

Normalverteilung, in Verbindung mit der Fehlerrechnung die Methode der kleinsten Quadrate, die unabhängig von ihm von Legendre und Gauß gefunden wurde. Sehr oft wandte Laplace erzeugende Funktionen an (Einführung der Laplace-Transformation). Er bewahrte Ergebnisse des weitgehend unbekannt gebliebenen Thomas Bayes (1702–1761) vor dem Vergessen, indem er ihnen eine klare Formulierung gab. Eine Hauptleistung war die systematische Darstellung der Hauptsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung; er bewies Sätze, die wir heute als Sätze von Moivre-Laplace bezeichnen und er nutzte seine Resultate bei praktischen Problemen, zum Beispiel bei statistischen Untersuchungen und in der Astronomie.

Wahrscheinlichkeitstheorie gehörte auch zu den weit gespannten Interessen von Siméon-Denis Poisson. Er beteiligte sich an der damals heftig diskutierten Frage, ob Wahrscheinlichkeitsrechnung anwendbar sei, um im Gerichtswesen zu einem gerechten Urteil zu gelangen. Im Jahre 1837 erschienen seine *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile;* dort distanziert er sich von der Absicht, von Wahrscheinlichkeiten getragene Urteile zu fällen. Wahrscheinlichkeitsrechnung kann nicht auf moralische Fragen angewandt werden, sondern nur auf Massenerscheinungen, die sich reproduzieren lassen.

Und – nicht zu vergessen: Poisson prägte die Bezeichnung „Gesetz der großen Zahlen“. Poisson betrachtete sowohl das Bernoullische Gesetz der großen Zahlen als auch die Sätze von Moivre-Laplace für den Fall, dass die Wahrscheinlichkeit des Eintretens des Ereignisses sich von Versuch zu Versuch ändern kann, während seine Vorgänger für alle Versuche die gleiche Wahrscheinlichkeit des Eintretens annahmen. Dann hängt die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses ab von der Nummer des Versuches, von der Reihenfolge. Abhängige Versuche betrachtete erst Markow.

Bei alledem soll festgehalten werden, dass die Hauptverdienste von Poisson auf dem Gebiet der mathematischen Physik und deren Anwendungen liegen, wenn er auch manchmal von seinen Kollegen angegriffen wurde, er habe gelegentlich nicht auf die von ihm benutzten Arbeiten Anderer hingewiesen.

Das Spektrum seiner Arbeiten umfasst partikuläre Lösungen von Differentialgleichungen, Wärmeleitung (*Théorie mathématique de la chaleur,* 1853), Variationsrechnung, Physik der Erde, Libration des Mondes, vor allem Anwendungen der Potentialtheorie. Sein Lehrbuch *Traité de mécanique* (1811) erreichte weite Verbreitung. Ausgebildet an der École Polytechnique durchlief er dort eine erfolgreiche Karriere als Lehrender; zugleich war er im sog. Längenbüro in hohen Funktionen tätig. Überhaupt übte Poisson einen nachhaltigen Einfluss auf das französische Bildungssystem aus.

Bemerkenswerterweise setzte in den westeuropäischen Ländern zur Mitte des 19. Jahrhunderts eine Stagnation in der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung ein und zwar hauptsächlich wegen der vergeblichen und missglückten „Anwendungen“ auf moralische Wissenschaften. Dabei wurde

meistens das Wesen gesellschaftlicher Erscheinungen und Hintergründe missachtet oder blieb unbeachtet. Die Begeisterung für Wahrscheinlichkeitsrechnung machte einer Enttäuschung Platz. Unter diesen Umständen fanden die Beiträge von Poisson zur Wahrscheinlichkeitsrechnung in Frankreich nur verhältnismäßig geringe Beachtung.

Die wesentliche Weiterentwicklung erfuhr die Wahrscheinlichkeitsrechnung im letzten Drittel des 19. Jahrhunderts durch russische Gelehrte. Das betrifft insbesondere die Herausbildung des Begriffes einer Zufallsgröße, die allgemeine Formulierung des Gesetzes des großen Zahlen und des zentralen Grenzwertsatzes, die Entwicklung allgemeiner Methoden, um zentrale Theoreme zu beweisen. Es sei erinnert an Pafnuti Lwowitsch Tschebyschew und Alexander Michailowitsch Ljapunow.

Im Jahre 1887 veröffentlichte Tschebyschew in den Schriften der Petersburger Akademie (Bd. 55) eine wichtige Arbeit, die bald darauf, 1890/91 in den *Acta mathematica* (14), in französischer Sprache unter dem Titel *Sur deux théorèmes relatifs aux probabilités* (Über zwei auf Wahrscheinlichkeiten bezügliche Sätze) erschien und den zentralen Grenzwertsatz aussprach. Die dort enthaltenen Voraussetzungen konnte Ljapunow in zwei Arbeiten Schritt für Schritt abschwächen: *Sur une proposition de la théorie des probabilités* (1900) und *Nouvelle forme du théorème sur la limite de probabilité* (1991); beide Arbeiten erschienen in den Bulletins der Petersburger Akademie (vgl. ausführlich [Purkert 2006]).

Es soll an dieser Stelle erwähnt werden, dass die Leipziger Schule der Stochastik unabhängig von den russischen Mathematikern den allgemeinen Begriff der Verteilung herausgearbeitet hat: Gustav Theodor Fechner (1801–1887), Heinrich Bruns (1848–1919). Hier hat später Richard von Mises (1883–1953) angeknüpft.



Abb. 10.7.3 Pafnuti Lwowitsch Tschebyschew (UdSSR 1946); Alexander Michailowitsch Ljapunow (UdSSR 1957)

Fehlerrechnung

Seit dem 17. Jahrhundert gehörten wissenschaftliche Instrumente – Mikroskop, Fernrohr, nautische Instrumente, Vermessungsinstrumente – zum unabdingbaren Werkzeug der naturwissenschaftlichen Forschung und das in zunehmendem Maße und mit wachsender Messgenauigkeit. Dies warf zwingend das Problem der Bestimmung der Messfehler auf und führte zur Fehlerrechnung. An diesem Problemfeld hat eine große Anzahl von Gelehrten mitgewirkt, vor allem mathematisch orientierte Autoren: Roger Cotes (1682–1716), Thomas Simpson (1710–1761), Rudjer Josip Bošković (1711–1787), Leonhard Euler, Daniel Bernoulli (1700–1782), Pierre Simon Laplace und andere.

Die Ergebnisse von Messungen sind schon wegen der generellen Beschränkung der Messgenauigkeit der verwendeten Geräte grundsätzlich mit Fehlern behaftet, auch weil die Angabe der Ergebnisse durch Zahlen nur mit gewöhnlichen Brüchen oder endlichen Systembrüchen möglich ist. Deshalb führt man i. a. mehrere Messungen derselben Größe durch und bezeichnet das arithmetische Mittel der Abweichungen der n Messergebnisse x_i von dem als „wahrer Wert“ der Größe unterstellten Wert x als den durchschnittlichen Fehler dieser Messungen, also

$$\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x-x_i| \ .$$

Da man den „wahren Wert“ x jedoch nicht kennt, nimmt man an dessen Stelle den

$$\text{Mittelwert} \quad \bar{x}=\tfrac{1}{n}\sum x_i$$

der Meßwerte, wenn diese mit gleicher Wahrscheinlichkeit erzielt wurden, jedoch den

$$\text{Erwartungswert} \quad \mu=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i \ ,$$

wenn die Meßwerte x_i mit den Wahrscheinlichkeiten $p_i (0\le p_i\le 1,\ \sum p_i=1)$ gewonnen wurden. Bei der Untersuchung von „Zufallsgrößen“ werden zur Angabe ihrer Werte in aller Regel viele Beobachtungen bzw. Messungen desselben Objekts vorgenommen oder viele Objekte gleicher Art beobachtet bzw. gemessen. Dabei ergeben sich Werte in unterschiedlicher Streuung, sei es durch Veränderung der beobachteten Objekte oder der Messgeräte während der Messungen (z. B. durch Temperaturunterschiede) oder wegen unterschiedlicher Größe der zwar gleichartigen aber nicht identischen Objekte der Stichprobe (z. B. Länge der Nägel einer Packung). Man spricht deshalb von einer „Verteilung der Zufallsgröße“ und benutzt als Maß für die Streuung oder Variabilität dieser Verteilung die mit dem Erwartungswert μ gebildete

$$\text{Varianz} \quad \sigma^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 p_i \ .$$

(Auf die entsprechenden Begriffe bei „diskreten“ und bei „stetigen“ Verteilungen wird hier nicht eingegangen.)



Abb. 10.7.4 Alter 10-DM Schein mit Gauß und der Glockenkurve der Normalverteilung

Zur Darstellung der Verteilung von Fehlern bei hinreichend vielen Einzelmessungen ergibt sich unter bestimmten Voraussetzungen die Gaußsche Fehlerkurve (Glockenkurve). Sie beschreibt die sog. Normalverteilung.

Um möglichst genaue Ergebnisse zu erzielen machte Gauß einerseits viele Messungen der zu bestimmenden Größen und erhöhte andererseits die Messgenauigkeit. Dazu erfand und entwickelte er den sog. Heliotropen (Sonnenwender) zur Nutzung des Sonnenlichtes für Vermessungssignale über große Entfernungen und erreichte damit eine noch heute als vorbildlich angesehene Messgenauigkeit.

Zum Ausgleich der dennoch unvermeidlichen Fehler entwickelte er die „Methode der kleinsten Quadrate“.

Hat man n mit statistischen Fehlern behaftete Beobachtungen x_i, wobei die Messungen voneinander unabhängig sind, so ist der beste Näherungswert $\bar{x}$ für x dadurch gegeben, dass die Summe

$$\sum_{i=1}^{n}(x - x_i)^2 \text{ zum Minimum wird.}$$

Die von Gauß bereits 1794 ausgearbeitete Methode der kleinsten Quadrate wurde von Adrien-Marie Legendre unabhängig von Gauß gefunden und 1806 erstmals publiziert, von Gauß jedoch erst 1809 in seiner *Theoria motus corporum coelestium* veröffentlicht. Sie wurde entwickelt, um den „wahrscheinlichsten“ Wert einer Beobachtungsgröße bzw. die beste Näherung zu ermitteln. Gauß war auf die Methode der kleinsten Quadrate bei der Beobachtung des Planetoiden Pallas gestoßen. Auch der vorwiegend im damaligen

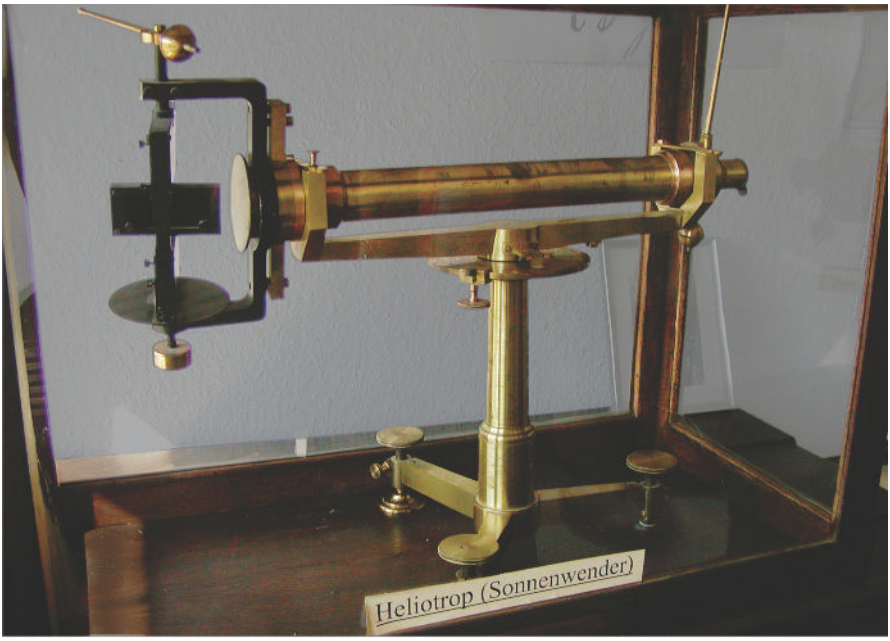


Abb. 10.7.5 Heliotrop (Sonnenwender) von Gauß (Gauß-Stube in Dransfeld) [Foto Dierks]

Königsberg wirkende Astronom und Mathematiker Friedrich Wilhelm Bessel beschäftigte sich 1838 mit *Untersuchungen über die Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler*. Die Habilitationsschrift von Ernst Abbe (1840–1905) aus dem Jahr 1863 bezog sich auf *Gesetzmäßigkeit bei der Vertheilung der Fehler bei Beobachtungsreihen*.

Ein weites Feld von Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung eröffnete sich in der Physik, insbesondere in der Theoretischen Physik, sodass David Hilbert (1862–1943) in seinem berühmten Vortrag von 1900 auf dem 2. Internationalen Mathematikerkongress in Paris die Wahrscheinlichkeitsrechnung als physikalische (!) Disziplin bewertete. Darum forderte er:

> *„Durch die Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie wird uns die Aufgabe nahegelegt, nach diesem Vorbilde diejenigen physikalischen Disziplinen axiomatisch zu behandeln, in denen schon heute die Mathematik eine hervorragende Rolle spielt; dies sind in erster Linie die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Mechanik.*
> *Was die Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung angeht, so scheint es mir wünschenswert, daß mit der logischen Untersuchung derselben zugleich eine strenge und befriedigende Entwicklung der Methode der mittleren Werte in der mathematischen Physik, speziell in der kinetischen Gastheorie Hand in Hand gehe.“* [Hilbert 1971, S. 47]

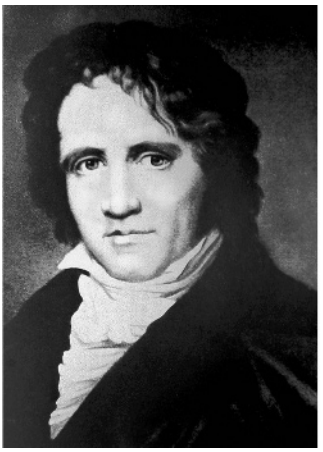



Abb. 10.7.6 Friedrich Wilhelm Bessel, Adrien-Marie Legendre

Diese Einschätzung und diese Forderung Hilberts resultieren natürlich aus einem Blick auf das 19. Jahrhundert. Etwas später, 1918, hat der polnische Gelehrte Marian von Smoluchowski (1872–1917) in einem Artikel *Über den Begriff des Zufalls und den Ursprung der Wahrscheinlichkeitsgesetze in der Physik* [Smoluchowski 1918] den engen historischen Zusammenhang rückblickend ebenfalls dargestellt.

> *„Die Wahrscheinlichkeitsrechnung, welche seit Beginn ihrer Entwicklung mit größtem Erfolg hauptsächlich in dem sonst der mathematischen Behandlung wenig zugänglichen Bereich sozialer und biologischer Vorgänge angewendet wurde, hat sich in den letzten Zeiten ein überaus wichtiges Anwendungsgebiet erobert: die Physik. Und zwar ist damit nicht etwa die seit Gauß' Zeiten als eigene Hilfsdisziplin ausgebildete Theorie der Fehlerausgleichung bei physikalischen Messungen gemeint, sondern gerade das eigentliche Gerüst dieser Wissenschaft, das System der theoretischen Physik.*
> *Zum ersten Male in den Jahren 1857–1860 von Clausius und Maxwell als eigenartiges mathematisches Hilfsmittel in die kinetische Gastheorie eingeführt, hat die Wahrscheinlichkeitsrechnung, nach einer vorübergehenden Periode der Stagnation, infolge des schließlichen Sieges der atomistischen Anschauungsweise eine für die Physik ganz grundlegende Bedeutung gewonnen und bildet heute das wichtigste Werkzeug bei Forschungen auf dem Gebiete der modernen Theorien der Materie, der Elektronik, Radioaktivität und Strahlungstheorie. Entspricht doch ihr Wesen durchaus der heute zur Herrschaft gelangten Tendenz, sämtliche Gesetze der Physik – nach dem Vorbild der kinetischen Gastheorie – auf Statistik verborgener Elementarereignisse*

zurückzuführen, wobei die ‚Einfachheit' derselben als sekundäre Folge des Wahrscheinlichkeitsgesetzes ‚der großen Zahlen' aufgefaßt wird. Trotz dieser enormen Ausdehnung des Anwendungsbereiches der Wahrscheinlichkeitsrechnung hat die exakte Analyse der ihr zugrunde liegenden Begriffe nur geringe Fortschritte gemacht; es gilt wohl noch heute der Satz, daß keine zweite mathematische Disziplin auf so unklaren und schwankenden Grundlagen aufgebaut ist.
So werden die Grundfragen nach der Subjektivität oder Objektivität des Wahrscheinlichkeitsbegriffes, nach der Definition der Zufälligkeit usw. von verschiedenen Autoren in diametral entgegengesetzter Weise beantwortet. Insbesondere ist auch eine allgemeine und mathematisch exakte Präzisierung der für die Anwendbarkeit dieser Rechnungsmethode charakteristischen Bedingungen noch immer ausständig, und man pflegt sich in dieser Hinsicht meist auf intuitives Wahrscheinlichkeitsgefühl zu verlassen." [Smoluchowski 1918, S. 253]

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung war am Ende des 19. Jahrhunderts eine gut entwickelte (betrachtet als mathematische bzw. physikalische) Disziplin mit zahlreichen Anwendungen – allerdings mit der besonderen Situation, dass ihr Grundbegriff „Wahrscheinlichkeit" eine außermathematische Begründung benötigte. Jeder innermathematische Versuch, „gleichmögliche Fälle" zu definieren, führte zum Zirkelschluss. Darum hatte Hilbert die Wahrscheinlichkeitsrechnung als eine physikalische Disziplin betrachtet, weil die Definition ihres Grundbegriffes die physische Welt benötigte. Daraus entsprang 1900 die Forderung nach axiomatischer Grundlegung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Darüber wird in Kapitel 11.5 berichtet.

10.8 Entwicklung der Mathematik in einzelnen Regionen

Die *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences* (1994) enthält analoge Übersichten über nationale bzw. regionale Entwicklungen, u. a. in Frankreich, Deutschland, Österreich, Ungarn, den Niederlanden, Skandinavien, Rußland/Sowjetunion, Großbritannien, in den Islamischen Staaten, Spanien, Portugal, Ibero-Amerika, USA, Kanada – alles sehr instruktive Beiträge.

Auch finden sich dort Berichte über die Gründung von Zeitschriften, Frauenstudium, Mathematik und Literatur, Mathematik und Architektur, sowie eine ausführliche Bibliographie.

Unter diesen Bedingungen wäre es für den Autor, gestützt auf diese von ausgewiesenen Verfassern verfassten Beiträge, verhältnismäßig leicht möglich, den Bericht über die Entwicklung der Mathematik im 19. und im 20. Jahrhundert nach Regionen zu gliedern. Als Beispiele mögen die nachstehenden Abschnitte über Rußland, die USA und Italien dienen.

Dennoch: Ich halte dafür, dass eine Darstellung der Entwicklung einzelner mathematischer Disziplinen oder zentraler Teilprobleme einen wesentlichen, unverzichtbaren Einblick in die Geschichte der Mathematik einer Periode ebenso gewährt wie der andere Weg, zumal in einer international fortschreitenden Forschungs- und Lehrtätigkeit und der Ausweitung der Anwendungen.

10.8.1 Die Mathematik in Russland während des 19. Jahrhunderts

Sophie Kowalewskaja (siehe Abschnitt 10.6.9) hätte als Frau keine Möglichkeit gehabt, in Russland zu studieren und gar noch Mathematik. Dabei gab es gute Mathematik und leistungsfähige Mathematiker in Rußland. Schon Anfang des 19. Jahrhunderts besaß die Universität in Kasan hohe internationale Anerkennung, nicht zuletzt durch das wissenschaftliche und organisatorische Wirken von Lobatschewski.

Demgegenüber vermochte sich das mathematische Leben an der ältesten Universität Russlands, in Moskau, erst in den 30er Jahren zu entfalten; dort wirkte unter anderem Nikolaus D. Braschman (1796–1866) der in Wien, dann in Kasan studiert hatte. Er verfasste, ebenso wie N. E. Zernov (1804–1862), wertvolle Lehrbücher zur Unterstützung der Vorlesungstätigkeit, u. a. über Analytische Geometrie und Stabilitätstheorie.

Schon 1810 und dann wieder 1864 waren Versuche unternommen worden, in Moskau eine Mathematische Gesellschaft zu gründen; aber erst 1864 gelang die Gründung mit nur wenigen Mitgliedern. Sie wuchs indessen zu einer starken Gruppe heran; am Vorabend des ersten Weltkrieges gehörten ihr 112 Mitglieder an [Demidov u. a. 2004]. Auch war eine Zeitschrift *Mathematische Sammlung* angeschlossen.

Unter den Studenten in Moskau hatte sich auch Pafnuti Lwowitsch Tschebyschew befunden. Dort wirkte bereits Michail Wassiljewitsch Ostrogradski, der einige Zeit bei französischen Mathematikern studiert hatte. Tschebyschew und er wurden zu Begründern der Petersburger mathematischen Schule, die Moskau bald übertrumpfte und seit der Mitte des 19. Jahrhunderts ein Weltzentrum der Mathematik wurde.

Tschebyschew wurde in einer Adelsfamilie im Gouvernement Kaluga 1821 geboren; die erste Unterrichtung erfolgte durch die Mutter und eine Cousine, Mathematik erlernte er bei einem Lehrer in Moskau. Die Familie zog 1832 nach Moskau, um ihn auf das Studium vorzubereiten, das er mit 16 Jahren 1837 an der physikalisch-mathematischen Fakultät der Moskauer Universität aufnahm. Er wurde dort 1843 Magister, ging dann nach St. Petersburg, wo er Dozent, a. o. Professor und schließlich von 1857 bis 1882 ordentlicher Professor an der Universität war. Zu seinen wissenschaftlichen Leistungen gesellte sich ein außerordentliches Lehrtalent.

Russland war im Umbruch. Die Industrielle Revolution griff auch nach Russland über. Der Krimkrieg hatte Russlands Schwäche erwiesen; Reformen wurden notwendig. 1861 wurde die Leibeigenschaft abgeschafft.



Abb. 10.8.1 Tschebyschew [Bildarchiv UB Leipzig], Ostrogradski

Tschebyschew unternahm zahlreiche Reisen ins Ausland, insbesondere nach Paris. Beispielsweise besuchte er 1852 dort das „Conservatoire des Arts et Metiers“ (ein Industriedokumentationszentrum), in Frankreich Berg- und Hüttenwerke, Waffenfabriken, Papierfabriken. Wissenschaftliche und persönliche Kontakte verbanden ihn mit Hermite und Kronecker.

Tschebyschew war als Forscher sehr vielseitig. Man hat ihn darum des öfteren mit Leonhard Euler verglichen. Aus seiner Jugendliebe für die Konstruktion von Modellen und dem Studium der Wattschen Dampfmaschine erwuchs seine Approximationstheorie, welche die Annäherung an komplizierte Funktionen (wie sie z. B. bei Gelenkmechanismen auftreten) durch einfachere analytische Ausdrücke, insbesondere durch algebraische und trigonometrische Polynome behandelt.

Im Anschluss an Euler, Lagrange, Legendre und Gauß standen bei Tschebyschew am Anfang seiner Publikationstätigkeit zahlentheoretische Probleme, im Vordergrund die Primzahlverteilung. Für die Anzahl $\pi(x)$ der Primzahlen, die x nicht übertreffen, fand er die Abschätzung:

Es gibt positive Zahlen $c_1 < 1$ und $c_2 > 1$ mit $c_1 + c_2 = 2$, sodass

$$c_1 \frac{x}{\ln x} \leq \pi(x) \leq c_2 \frac{x}{\ln x}$$

für hinreichend große x ist.

1896 bewiesen dann Hadamard und de la Vallée-Poussin die schon von Gauß ausgesprochene Vermutung, den berühmten Primzahlsatz.

$$\lim_{x \to \infty} \pi(x) \frac{\ln x}{x} = 1 \ .$$

Im Jahr 1850 bestätigte Tschebyschew die schon 1845 von Louis François Bertrand (1827–1900) ausgesprochene Vermutung: Für $n \geq 2$ findet sich zwischen n und $2n$ stets eine Primzahl.

Zu den bevorzugten Arbeitsgebieten von Tschebyschew gehörte die Wahrscheinlichkeitstheorie. Laplace hatte zu Anfang des 19. Jahrhunderts die *Théorie analytique des probabilités* (Analytische Theorie der Wahrscheinlichkeiten) veröffentlicht.

Als erster in Russland hatte Viktor Jakowlewitsch Bunjakowski (1804–1889) dieses Thema aufgegriffen und 1846 ein Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung veröffentlicht.

Tschebyschews Ziel bestand u. a. darin, statistische Untersuchungen wahrscheinlichkeitstheoretisch zu begründen. Er erreichte eine Verallgemeinerung des Gesetzes der großen Zahlen und konnte die Tragweite der Begriffe „Zufallsgröße“ und „mathematische Erwartung“ zeigen. Hieran schlossen sich weitere Forscher auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung an, A. A. Markow und schließlich Kolmogorow.

Weiterhin beschäftigte sich Tschebyschew u. a. mit der Berechnung elliptischer Integrale.

Tschebyschew befasste sich auch mit praktischen Problemen. Im Jahre 1878 gelang ihm die Konstruktion einer Rechenmaschine. Sie ist erhalten geblieben und befindet sich in Paris. Er war Mitarbeiter der Hauptverwaltung der Artillerie und beteiligt an der kartographischen Erschließung Russlands.

Die enge Beziehung zwischen Mathematik und Praxis kommt in verschiedenen Äußerungen zum Ausdruck, z. B.:

> *„Ungeachtet des hohen Grades der Entwicklung, bis zu dem die mathematischen Wissenschaften durch die Arbeiten der großen Geometer der letzten drei Jahrhunderte vorangetrieben wurden, spürt die Praxis klar ihre Unvollständigkeit in vielen Beziehungen auf; sie wirft Fragen auf, die für die Wissenschaft ganz neu sind und zum Aufsuchen völlig neuer Methoden herausfordern. Wenn die Theorie schon einen Gewinn hat von neuen Anwendungen einer alten Methode oder von Weiterentwicklungen einer solchen, um wieviel mehr gewinnt sie durch die Entdeckung neuer Methoden, und somit finden die Wissenschaften ihren wahren Führer in der Praxis.“*
> (Zitiert nach [Bertsch 1989, S. 193])

Tschebyschew erfuhr reichlich Anerkennung. Er wurde u. a. Mitglied der Akademien in Petersburg, in Berlin, in Bologna, in Paris, der Royal Society und der schwedischen Akademie der Wissenschaften.

Über die weitere Entwicklung der Petersburger mathematischen Schule unter seinem Schüler und Nachfolger Ljapunow und dessen Schüler Steklow wird in Kap. 11.7.5 berichtet.

10.8.2 Anfänge der Mathematik in den USA

Wegen der kolonialen Vorgeschichte der USA und der bewegten Jahrzehnte nach ihrer Gründung konnten sich eigenständige mathematische Zentren und Schulen erst im 19. Jahrhundert entwickeln. Deshalb erfolgt hier zunächst ein Rückblick auf die Frühgeschichte der Mathematik in Nordamerika nach seiner (Wieder-) Entdeckung.

Interessanterweise ist die Frühgeschichte der Kolonisierung der „Neuen Welt“ (Amerika) durch die Engländer mit einem Mathematiker verbunden.

Sir Walter Raleigh (1554?–1618), Günstling der „jungfräulichen Königin“ Elizabeth I., geadelt 1585, Abenteurer, Pirat, Schriftsteller, beteiligt an dem Sieg über die spanische Armada, Kämpfer gegen die Iren, auf der Seite der Hugenotten gegen die französische Krone, Gouverneur der Kanalinsel Jersey, unternahm 1584 bis 1589 den Versuch, eine englische Kolonie in Nordamerika zu etablieren, im heutigen Nordkarolina, die er nach der Königin „Virginia“ (engl. virgin, Jungfrau) benannte. Er berief zur Hilfe bei der Erschließung des Landes den Mathematiker und Astronomen Thomas Harriot (1560?–1621). Der sollte das Land und die Sitten der Eingeborenen beschreiben, über Flora und Fauna berichten. Aus dem Aufenthalt 1585/1586 in Virginia ging der Bericht *A Brief and True Report of the New Found Land of Virginia* (1588) (Kurzer und wahrer Bericht über das neu gefundene Land Virginia) hervor.

Beim Nachfolger von Elizabeth I., bei James I., fiel Walter Raleigh in Ungnade, wurde des Verrates angeklagt und schließlich, nach einigem Hin und Her, hingerichtet. Harriot war Zeuge. Im Zusammenhang mit der sog. Pulververschwörung von 1605 wurde auch Harriot in Haft genommen, aber bald wieder freigelassen.

Harriot hatte in Oxford studiert. Er war eine Art Universalgenie. In die Mathematik führte er einige geschickte Abkürzungen ein, beispielsweise für die Potenzschreibweise $xxx = x^3$, für die Binominalkoeffizienten, die Zeichen



Abb. 10.8.2 Sir Walter Raleigh (Brfm. UK 1976); Benjamin Banneker (USA 1980)

kleiner $<$ und größer $>$ und den Punkt $\cdot$ für Multiplikation. Seine *Artis analyticae praxis ad Aequationes Algebraicas Resolvendas* (Postum 1631) (Praxis der analytischen Kunst) enthält einen bemerkenswerten Ansatz zur Suche nach einem einheitlichen Verfahren für die der Lösungen von Gleichungen bis zum Grade fünf, wo auch imaginäre Wurzeln in Betracht gezogen wurden. Aber Harriot erwarb sich auch Verdienste um Kartographie und Navigation, korrespondierte mit Kepler über Lichtbrechung (nahe am Brechungsgesetz von Snellius), erkannte die parabolische Flugbahn eines Geschosses. Er unterhielt eine Art chemisches Laboratorium und eine Sternwarte. Im Jahre 1618 beobachtete Harriot einen Kometen, jenen, der später nach Halley benannt werden sollte. Eine Zeit lang galt er als Kopf einer atheistischen Gruppierung und wurde deswegen angeklagt. Erst seit der Mitte des 20. Jahrhunderts wurde der umfangreiche Nachlass teilweise erschlossen.

Stand und Entwicklung der Wissenschaften – auch die von Mathematik, Naturwissenschaften und Medizin – in der Kolonialzeit Nordamerikas sind ausführlich untersucht worden (vgl. [Jaffe 1944]), [Struik 1991], jeweils mit ausführlichen Literaturangaben).

Der Tenor der Gesamteinschätzungen läuft darauf hinaus, dass die Aneignung der europäischen Wissenschaft erstaunlich weit fortgeschritten war, dass aber – außer bei der von Frankreich und beim Rückgriff auf die französische Wissenschaft erfolgten Erschließung der heimischen, neuartigen Flora und Fauna – keine Spitzenleistungen erzielt werden konnten. Das ist verständlich, denn das Interesse, zudem unter den Bedingungen der gewaltsamen Eroberung eines Kontinentes durch die Europäer, mußte zunächst dem Lebensnotwendigen gelten. Einigen der frühesten Kolonien drohte der Untergang durch Nahrungsmangel, dem – groteskerweise – durch Indianer abgeholfen wurde.

Nach einigen Beispielen über frühe Kristallisationspunkte in den englischen Kolonien drückt sich der bedeutende Mathematiker und Wissenschaftshistoriker Dirk Struik (1894–2000) in seinem Werk *Yankee Science in the Making. Science and Engineering in New England from Colonial Times to the Civil War* (1991) folgendermaßen aus:

> *"All this notwithstanding, New England had its own scientific merits, though in a restricted field. Almost all scientific activity in colonial New England centered in Boston and some other coastal towns, and was the privilege of the merchant class and its allies in the liberal professions. The impetus came not primarly from scientific curiosity, nor did it come from a general thirst for knowledge. The approach to science of these colonial Americans was more direct and practical, more Baconian. The pursuit of science needs stimulation from technology, manufacture, agriculture, navigation or some other vital social activity. It is the result of the search for a better understanding of nature to promote the Welfare of a group, a class, or of mankind in general. Under colonial conditions it could only grow when a certain reservoir of wealth and leisure had been established, either by*

> *direct accumulation of private fortunes or through endowment by a public or semiprivate body of citizens. The struggle for mastery of a new continent and mastery of the seas would naturally lead to scientific interest in the problems of agriculture and of navigation, with occasional study in the scientific approach to manufactures. (. . .) Interest in science came naturally to a people who had brought with them from their English homeland a general respect for learning (. . .). Almost every-body could read and write and carry on the home political tasks."*
> [Struik 1991, S. 44f.]

Und ein anderer Autor, B. Jaffe, urteilt über die Frühzeit folgendermaßen:

> *„Es waren fast 150 Jahre vergangen, seit Harriot mit dem Studium der Naturgeschichte in Amerika begonnen hatte, ohne dass nennenswerte Forscher in den Naturwissenschaften aufgetaucht wären. Ihre wichtigsten Verbindungen mit der übrigen Welt waren die Royal Society of London und einige wenige eminente Gelehrte auf dem europäischen Kontinent, wie Linné und Gronovius. Allerdings standen einige unserer frühen Naturkenner und Forscher mit geistesverwandten Männern in anderen Kolonien in oberflächlicher Korrespondenz. Einige von ihnen trafen einander auch gelegentlich, um Aufzeichnungen und Erfahrungen auszutauschen oder wissenschaftliche Probleme gemeinsam zu studieren. Ein Faktor jedoch trug dazu bei, dass das Wissensgut auf naturwissenschaftlichem Gebiet systematisch bereichert wurde; das war die Begründung von Hochschulen: Harvard (1636), William and Mary (1693) und Yale (1701). Trotzdem bestand ein dringender Bedarf nach häufigen und bequemen Zusammenkünften unserer Naturforscher."*
> [Jaffe 1944, S. 23]

Natürlich dienten diese frühen wissenschaftlichen Einrichtungen, ganz ähnlich denen in Europa, in erster Linie der Ausbildung von Geistlichen.

Die *Philadelphia American Philosophical Society* wurde 1743 gegründet, mit der Zentralfigur Benjamin Franklin (1706–1790), der als junger Mann in England vergeblich Isaac Newton seine Aufwartung machen wollte, das Druckverfahren in New England organisierte und als Diplomat in Frankreich hohes Ansehen erlangte, weil er den Frieden der aufständischen Kolonien gegen England vorbereitete und damit einer der Gründungsväter der USA wurde. Er studierte die Elektrizität, bewies, dass der Blitz eine elektrische Erscheinung ist und fertigte eine Karte des Golfstroms an. Hier seien einige bemerkenswerte Ereignisse und Personen aus der Kolonialzeit Neu-Englands angefügt [Elliot 1979], [Parshall/Rowe 1994].

In Europa war die heliozentrische Lehre des Copernicus bekanntlich umstritten oder verworfen. Am Harvard College in Boston dagegen wurde Copernicus ganz offiziell gelehrt, von Cotton Mather (1662/63–1727/28), der



Abb. 10.8.3 Die von Jefferson ausgearbeitete „Declaration of Independence“ wird dem Kontinentalkongress vorgelegt (Gemälde von Trumbull 1816)

auch eine herausragende Rolle bei der Einführung der Pockenschutzimpfung gegen wütenden Protest des Pöbels gespielt hat. Es war derselbe Mann, der zumindest moralisch an den Hexenverbrennungen beteiligt war, in einer für die Zeit typischen Vermischung von Aberglauben, Enthusiasmus für wissenschaftliche Studien und religiöser Engstirnigkeit.

John Winthrop, Jr. (1606–1676) stammte aus England, hatte am Trinity College in Dublin studiert, unternahm Reisen durch Europa, folgte seinem Vater nach Massachusetts, errichtete in verschiedenen Teilen der englischen Kolonien Eisenwerke und chemische Fabriken. Er stellte mit einem damals leistungsfähigen Teleskop Beobachtungen an und brachte eine Reihe wissenschaftlicher Instrumente nach Neu-England. Als Professor in Harvard hielt er 1756 Vorlesungen über Newtons Fluxionentheorie. Er war der erste nordamerikanische Kolonist, der Mitglied der Royal Society wurde.

James Logan (1674–1751) stammt aus Irland; sein Vater war einige Zeit Lehrer in England; James hatte Newton persönlich kennen gelernt. Schon 1708 hatte er ein Exemplar von Newtons *Principia* in seinen Besitz gebracht, das erste Exemplar in Neu-England. Er baute in Philadelphia eine beachtliche Bibliothek auf, assistierte u. a. B. Franklin und veröffentlichte einige Arbeiten in den *Philosophical Transactions*. Im Jahre 1747 erschien in London als Übersetzung aus dem Lateinischen das Werk *Experiments and Considerations on the Generation of Plants* (Experimente und Betrachtungen über die Erzeugung von Pflanzen), das u. a. Studien zur Befruchtung von Pflanzen enthält.

Thomas Jefferson (1743–1826), der eine wesentliche Rolle bei der Gründung der USA spielte, u. a. die Unabhängigkeitserklärung der USA von 1776 entwarf und von 1801 bis 1809 Präsident der USA wurde, war an Naturwissenschaften aktiv interessiert, insbesondere an der Erschließung Virginias (vgl. [Martin 1952], [Green 1984]).

David Rittenhouse (1732–1796) zeichnete sich als Astronom, in Naturphilosophie und als Verfertiger wissenschaftlicher Instrumente aus, beobachtete den Venusdurchgang 1769 und war in Philadelphia auch politisch tätig, u. a. als Mitglied der konstituierenden Versammlung der USA.

Benjamin Banneker (1731–1806), der Sohn einer weißen Frau und eines ehemaligen schwarzen Sklaven, zeigte früh außerordentliche mathematische Fähigkeiten. Er stand in Verbindung mit George Washington und mit dem ihn fördernden Thomas Jefferson, auch um nachzuweisen, dass Schwarze bildungsfähig sind. Seine wissenschaftlichen Leistungen erstreckten sich auf Vermessung (von Washington), auf die Erstellung eines Almanachs und die Verfertigung von Uhren.

Die politischen und ökonomischen Spannungen zwischen England und den nordamerikanischen Kolonien nahmen zu; insbesondere wurde das Recht des Mutterlandes bestritten, Steuern in den Kolonien ohne deren Zustimmung zu erheben. Am 16. 12. 1773 kam es in Boston zu einer Revolte, der sog. „Bostoner Teaparty“. Man warf die Teekisten der britischen Ostindienkompanie ins Wasser und verschärfte den Boykott gegen die Kompanie. Die Krise spitzte sich zu, führte 1775 zum Unabhängigkeitskrieg zwischen den britischen Truppen und dem amerikanischen Freiwilligenheer.

Am 4. 7. 1776 wurde die von Jefferson entworfene Unabhängigkeitserklärung vom Kontinentalkongreß angenommen. Nach der Niederlage der Briten 1777 bei Saratoga und dem Sieg der Amerikaner im Bündnis mit Frank-



Abb. 10.8.4 Bostoner Teaparty (USA 1973)

reich in Yorktown endete der Krieg 1783 mit dem Frieden von Versailles. Die 13 angloamerikanischen Kolonien wurden unabhängig. Kanada blieb britisch und Florida wurde wieder spanisch. Die endgültige Verfassung wandelte den Staatenbund der ehemaligen Kolonien zum Bundesstaat der USA. George Washington wurde sein erster Präsident (1789–1797).

Mit harter Politik gegen die Indianer und gegen Spanien und Frankreich sowie durch Kaufverträge vermochten die USA ihr Territorium zwischen 1790 und 1860 auf das Dreifache auszudehnen. Erst im Sezessionskrieg (1861–1865) besiegte der industriell entwickelte Norden den reichen Süden, und die Sklaverei konnte endgültig abgeschafft werden. Nach dem 1. Weltkrieg standen die USA erkennbar als Weltmacht da, mit hochentwickelter Wissenschaft, einschließlich der Mathematik.

Die systematische staatliche Förderung des Militäringenieurwesens begann endgültig 1802 mit der Gründung der *United States Military Academy* (genannt: West Point) durch den Kongress. Sie wurde 1817 nach dem Vorbild des Pariser École Polytechnique reorganisiert. Unter diesen Umständen war dort und in Harvard in der Jefferson-Periode einige Zeit die französische Mathematik und mathematische Physik Vorbild, z. B. die *Algebra* von Lacroix, die *Géométrie* von Legendre, E. Bézouts *Einführung in die Differentialrechnung* und in die *Darstellende Geometrie*.

Schon 1808 war eine allerdings nur kurzlebige Zeitschrift, *The Analyst, or Mathematical Companion*, gegründet worden, mit Beiträgen von einheimischen, bereits kreativen Mathematikern: Robert Adrian (1775–1843), Nathaniel Bowditch, Robert Patterson (1743–1824), und anderen. Bowditch gab eine Übersetzung der *Mécanique céleste* von Laplace heraus, versehen mit Kommentaren. Viele weitere interessante Einzelheiten sind zu finden in [Greene 1984], [Elliot 1979], [Struik 1991], [Parshall/Rowe 1994].

Etwas gerafft und pauschal könnte man so formulieren: Während der Kolonialzeit herrschte eine Atmosphäre der teilweise vorhandenen Bereitschaft zur Aneignung und Übernahme der europäischen Mathematik (so wie der Erforschung der neuen Umwelt). Nun aber, in den Vereinigten Staaten, entstand eine zunehmend eigenständig und produktiv sich entwickelnde Fülle mathematischer Tätigkeiten, die sich in die internationale Mathematik einfügten. Eine ausführliche Darstellung der verschiedensten Aspekte dieser Entwicklung durch Mathematiker, von denen viele in Europa studierten, findet man in [Duren/Askey/Marzbach (Eds.) 1889], teilweise mit persönlichen Erinnerungen. Nur einige dieser Aspekte können hier skizziert werden. In diesem Sammelband wird die Geschichte der reinen Mathematik bis 1904 in folgender Weise periodisiert: Von der Kolonialzeit bis zur Gründung der Johns Hopkins Universität 1876 mit der Gastprofessur von J. J. Sylvester, von da bis 1891, als die New Yorker Mathematische Gesellschaft einen nationalen Charakter annahm und ihre Bulletins herausgab, und von da bis 1904.

So sollte Benjamin Peirce nicht unerwähnt bleiben mit seiner klassischen Abhandlung über *Lineare Assoziative Algebra* (neue Ausgabe 1882). Er hatte

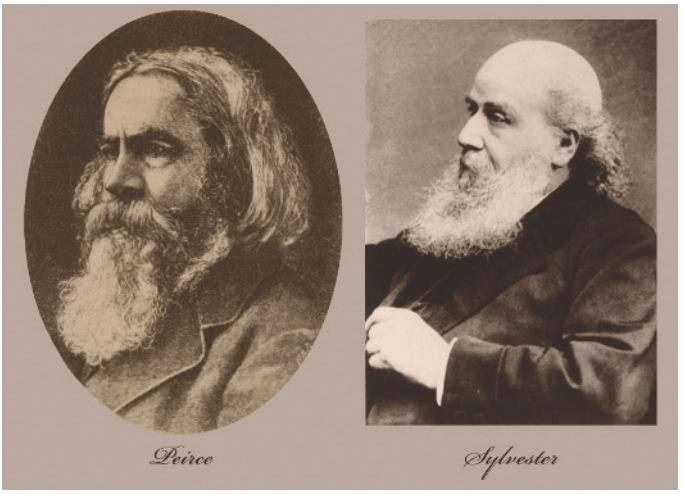


Abb. 10.8.5 Benjamin Peirce; James Joseph Sylvester

in Harvard studiert, wurde dort 1833 Professor und gehörte u. a. dem Komitee zur Errichtung des berühmt werdenden Smithonian Instituts in Washington an.

Im November 1888 gründeten sechs Mitglieder des Department of Mathematics an der Columbia-Universität in New York eine Mathematische Gesellschaft; die Zahl der Teilnehmer wuchs nur langsam. Aus ihr ging, seit 1892 mit rasch zunehmender Mitgliederzahl, schließlich 1894 die nationale „American Mathematical Society“ hervor.

Felix Klein besuchte 1893 die Weltausstellung in Chicago, hielt bei dieser Gelegenheit eine Begrüßungsansprache an die dortige Mathematische Gesellschaft und im Anschluß daran an der Universität Evanston mehrere Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik in Europa. Wegen des großen Erfolges kam Klein 1895 zu einem zweiten USA-Aufenthalt zur 150-Jahr-Feier der Universität Princeton und abermals 1896 nach Yale. Doch lehnte er verschiedene Berufungen in die USA ab [Siegmund-Schultze 1997].

Der Auftritt von Klein beim Mathematikerkongress aus Anlass der Weltausstellung 1893 in Chicago trug neben wissenschaftlichen Absichten auch einige nationalistische Züge:

> *“... Felix Klein came to Chicago as the Congress’s invited keynote speaker and as an official representative of the Prussian Ministry of Culture. He regarded the Congress as a venue for underscoring the dominance of German mathematics at the close of the nineteenth century and for cementing his own reputation ...”*
> [Parshall/Rowe 1993, S. 42]

Eine weitere Unterstützung erfuhr die Entwicklung der Mathematik in den USA durch James Joseph Sylvester. Er stammte aus einer jüdischen Familie, besuchte verschiedene Schulen und Colleges in England und wurde, da er sich der Kirche von England nicht anschließen wollte oder konnte, anfangs an seiner Karriere behindert. Nach einem Aufenthalt am Trinity College in Dublin ging er nach London zurück.

1841 übernahm er einen Posten an der Universität von Virginia (USA), wo es aber zu Misshelligkeiten kam; 1843 ging er wieder nach England und wandte sich zunächst von der wissenschaftlichen Welt ab. Er gab jedoch Privatunterricht in Mathematik, unter anderem der sich im Krimkrieg auszeichnenden Krankenschwester Florence Nightingale. 1850 erwarb er die Zulassung als Anwalt. Um diese Zeit schloß er Freundschaft mit dem Mathematiker Arthur Cayley, die trotz höchst gegensätzlicher Temperamente bestehen blieb und später zu gemeinsamen Publikationen zur Invariantentheorie führte. Auch Cayley hatte 14 Jahre als Advokat gearbeitet, vertane Zeit im Blick auf seine mathematischen Fähigkeiten.

Etwas überraschend ging Sylvester auf dringliche Einladung durch den berühmten Physiker Joseph Henry (1797–1878) an die 1876 neugegründete Johns Hopkins Universität in Baltimore; sie war als Stiftung des Kaufmanns Johns Hopkins (1795–1873) nach deutschem Vorbild ins Leben gerufen worden.

Sylvester erhielt die Freiheit, über Themen seiner Wahl vorzutragen; so wurden die mit Begeisterung gehaltenen Vorlesungen Sylvesters ein großer Erfolg. Zudem war er, anknüpfend an seine Forschungen zur Invariantentheorie (teilweise zusammen mit A. Cayley), kreativ mathematisch forschend tätig. Darüberhinaus begründete er das *American Journal of Mathematics*, in dem er zahlreiche Arbeiten veröffentlichte. Zum Inhalt seiner Arbeiten, mit einer schwierigen Terminologie, auf die Sylvester besonders stolz war, vgl. [DSB] und [Andrews 1989].

Sylvester verließ Johns Hopkins 1883 und übernahm in Oxford den hochgeschätzten Savilian Lehrstuhl; er starb an den Folgen eines Schlaganfalls.

Es sollte nicht unerwähnt bleiben, dass sich Sylvester auch als Poet hervorgetan hat, so erschien eine theoretisch gehaltene Abhandlung (1869): *The Laws of Verse, or Principles of Versification Examplified in Metrical Translations.*

Unter dem Einfluß von Sylvester hat die Johns Hopkins Universität einige bedeutende Mathematiker hervorgebracht, beispielsweise Thomas Craig (1855–1900), der dort Professor der Mathematik wurde und sich weniger durch seine Publikationen als durch sein Lehrtalent auszeichnete.

Nach dem Weggang von Sylvester verlor die Johns Hopkins Universität nach und nach ihre führende Stellung, wenn auch der von dort ausgehende Impuls in Harvard und Yale und den neu gegründeten Universitäten von Michigan, Wisconsin, der Clark Universität (gegründet 1889) und in Chicago (1892) weitergeführt wurde. In den achtziger und neunziger Jahren studier-

ten zahlreiche Amerikaner Mathematik in Paris bei Jordan, in Berlin bei Weierstraß, Kronecker und Fuchs und in Leipzig bei Sophus Lie. Am stärksten ging wohl die Anziehungskraft von Klein aus, zunächst in Leipzig, dann in Göttingen. Unter ihnen befand sich William Fogg Osgood (1864–1943), der Professor in Harvard wurde und Grundlegendes zur Funktionentheorie beitrug.

Durch die Tatkraft von Eliakim Hastings Moore (1862–1932) – sowohl im Wissenschaftlichen als auch im Organisatorischen – erreichte die Mathematik an der University von Chicago eine führende Rolle. Er hatte in Yale studiert, dann in Berlin und Göttingen weiter studiert und wurde schließlich nach Zwischenstationen 1892 an die neu gegründete Universität Chicago berufen. Er blieb dort bis 1932. Seine Schüler – unter ihnen Leonard Eugene Dickson (1874–1954), Oswald Veblen (1880–1960) und George David Birkhoff (1884–1944) – brachten endgültig die US-amerikanische Mathematik in die Spitzengruppe der internationalen Mathematik. Die Gruppe in Chicago wurde schließlich noch verstärkt durch den von Yale kommenden Klein-Schüler Oskar Bolza (1857–1942).

Moore hat auf verschiedenen Gebieten Bleibendes geleistet, so bei der Analyse der von Pasch, Hilbert und Peano gegebenen Axiomensysteme für die Geometrie, in der projektiven Geometrie, in der abstrakten Gruppentheorie, wo ihm der Nachweis gelang, dass jeder endliche Körper ein Galois-Körper ist. Er lieferte einen neuartigen Beweis des Cauchyschen Integralsatzes und ergänzte mit seinen Beiträgen die Integrationstheorie von Émile Borel und Henri Lebesgue.

Auch an der Neu- und Umorganisation der US-amerikanischen Mathematik war Moore direkt und indirekt beteiligt: Durch Umbenennung entstand die *American Mathematical Society* und man begann 1899 mit der Publikation eines Forschungsorganes, der *Transactions of the American Mathematical Society*. Weitere Publikationsorgane entstanden oder waren schon entstanden: *American Journal*, die *Annals of Mathematics* und das *Bulletin of the American Mathematical Society*. Nach der Jahrhundertwende setzten auch in den USA neue Entwicklungsgänge ein (siehe [Parshall/Rowe 1994]).



Abb. 10.8.6 Eliakim Hastings Moore; Oswald Veblen; Oskar Bolza; George David Birkhoff

10.8.3 Mathematiker in Italien und die Einheit Italiens

In zähen, wechselvollen und blutigen Kämpfen seit 1789 konnte sich Italien von französischer und österreichischer Fremdherrschaft befreien. Im Jahre 1861 war das „Risorgimento“ (Wiederauferstehung) Italiens als Nationalstaat mit der Einsetzung von Viktor Emanuel II. als König von Italien vollendet. Herausragende Persönlichkeiten dieses Kampfes waren Camillo Cavour (1810–1861) und Giuseppe Garibaldi (1807–1882).

Wie kaum in einem anderen Lande waren führende Mathematiker Italiens an dieser völligen Umgestaltung beteiligt und beim Aufbau eines Nationalstaates engagiert: Enrico Betti nahm 1848 aktiv kämpfend am Befreiungskampf teil; seit 1862 war er Parlamentsabgeordneter und ab 1884 Senator. Francesco Brioschi (1824–1897) war 1861 für einige Zeit Generalsekretär im Unterrichtsministerium und Mitbegründer der Technischen Hochschule in Mailand. Luigi Cremona (1830–1903) nahm 1848 ebenfalls am bewaffneten Kampf gegen die österreichische Besatzungsmacht teil. Im Jahre 1879 wurde er Erziehungsminister und später Vizepräsident des italienischen Parlamentes. Ulisse Dini (1845–1918), der bei Betti studiert hatte, wurde 1892 Senator. Luigi Bianchi (1856–1928) war beteiligt am Aufbau des höheren italienischen Schulwesens und war ab 1924 Senator des Königreiches Italien.

Es gibt also gute Gründe, auf diese vorzüglichen Mathematiker und auf weitere italienische Gelehrte ein wenig einzugehen. Jedenfalls konnte die Mathematik in Italien während der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts durchaus mit der in Frankreich und Deutschland konkurrieren.

Enrico Bettis mathematisches Werk ist umfangreich. Was die Algebra betrifft, so machte er die Ideen von Galois in Italien bekannt, zu einem Zeitpunkt, als Galois' Ergebnisse nur unvollständig, noch dazu knapp und ohne Beweise vorlagen. Der Abschiedsbrief von Galois vom Vorabend des unglücklichen Duells 1832 war erst 1846 durch Joseph Liouville veröffentlicht worden. Betti bemühte sich um den Beweis des Hauptergebnisses, konnte beweisen, dass die Permutationen aller Wurzeln einer algebraischen Gleichung eine Gruppe bilden und kam der späteren Herausbildung der klassischen Algebra ein gutes Stück näher. Er publizierte 1852 *Sulla risoluzione delle equazioni algebriche* (Über die Lösung von algebraischen Gleichungen) und 1855 *Sopra la teoria delle sostituzioni* (Über die Theorie der Substitutionen, vgl. dazu ausführlicher [Wußing 1969, S. 90ff.]).

Eine weitere Themengruppe Bettis betraf die Funktionentheorie, unter anderem einen neuartigen Zugang zur Theorie der elliptischen Funktionen, an den später Weierstraß anknüpfte. Ein zweiter Zugang wurde von Betti durch den Einfluss von Bernhard Riemann eröffnet. Hier zeigte sich eine für Betti typische Verquickung von algebraischen mit physikalisch-mathematischen Denkweisen.

Im Jahre 1858 besuchte Betti zusammen mit Brioschi und Casorati einige Zentren der Mathematik, unter anderem Göttingen, Berlin und Paris. Insbesondere mit Riemann schloss Betti Freundschaft; Riemann traf sich 1863

mit Betti in Pisa, wo dieser inzwischen seit 1859 einen Lehrstuhl für Analysis und höhere Geometrie innehatte. Als Ergebnis der persönlichen Begegnungen wandte sich Betti der theoretischen Physik zu, der Potentialtheorie und der Elastizitätstheorie. Er publizierte 1874 *Sopra le equazioni di equilibrio dei corpi solidi elastici* (Über Gleichungen für das Gleichgewicht elastischer fester Körper) und 1879 *Teoria delle forze newtoniane* (Theorie der Newtonschen Kräfte).

Betti wirkte einige Zeit als Rektor der Universität Pisa und lange Zeit, bis zu seinem Tode, als Direktor der „Scuola Normale Superiore“ (eine Lehrerbildungsanstalt), von der aus er starken Einfluss auf die mathematische Schulbildung nahm und wo sich unter Bettis Führung ein führendes italienisches Forschungszentrum entfaltete.

Francesco Brioschis erklärtes Ziel war es, die neuesten Ergebnisse der Mathematik aus England, Deutschland und Frankreich in Italien bekannt zu machen, u. a. die Flächentheorie von Gauß, die Theorie der Formen und ihrer Invarianten von Hermite, die Ergebnisse von Cayley, Sylvester und anderen. An eigenen Ergebnissen sind hervorzuheben die Lösungen der Gleichungen fünften Grades mittels elliptischer Modulfunktionen, etwa gleichzeitig mit Kronecker die Lösungen der Gleichungen sechsten Grades mittels hyperelliptischer Funktionen. Zu seinen Schülern zählen Eugenio Beltrami, Felice Casorati und Luigi Cremona.

Luigi Cremona (1830–1903) promovierte in Zivilingenieurwesen und Architektur, wirkte an der Technischen Hochschule in Bologna und in Mailand und wurde 1873 Direktor der in Rom neugegründeten Ingenieurschule. Nach seiner Berufung zum Erziehungsminister im Jahre 1879 widmete er sich hauptsächlich der Politik. Seiner Ausbildung entsprechend wandte er sich algebraischer und angewandter Geometrie zu, insbesondere den Flächen dritter Ordnung. Er publizierte ein graphisches Verfahren, um die Stabilität von Fachwerken zu bestimmen. Im Jahre 1867 veröffentlichte er den *Corso di statica grafica* (Kurs der graphischen Statik).

Felice Casorati (1835–1890) gehörte ebenfalls zum Kreis der italienischen Geometer. Seine Publikationen betreffen Differentialgeometrie und algebraische Kurven und ein anderes Krümmungsmaß für Flächen, die nicht das Gaußsche Krümmungsmaß besitzen. Dazu kamen Untersuchungen über Funktionen in der Umgebung wesentlich singulärer Stellen und über mehrfach periodische Funktionen. Casorati hatte bei Brioschi studiert, lehrte an der Universität Pavia und auch an der Technischen Hochschule Mailand.

Eugenio Beltrami (1835–1900) stammt aus einer Künstlerfamilie. Er studierte von 1853 bis 1856 bei Brioschi, musste aber aus finanziellen Gründen zunächst als Eisenbahningenieur arbeiten. In Mailand konnte er weiterstudieren und veröffentlichte 1862 seine erste wissenschaftliche Arbeit. Nach der Errichtung des italienischen Königreiches, 1861, war er nacheinander Inhaber eines Lehrstuhles für Algebra und analytische Geometrie in Bologna, dann 1864 bis 1866 Professor für Geodäsie in Pisa, wo er sich mit Betti anfreundete, dann 1866 bis 1873 wieder in Bologna, von 1873 bis 1876 in Rom, das

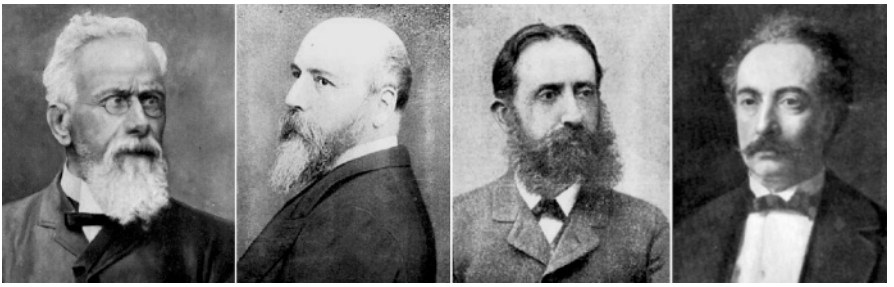


Abb. 10.8.7 Enrico Betti; Luigi Cremona; Felice Casorati; Eugenio Beltrami

1870 nach langen Wirren Hauptstadt Italiens geworden war, dann wieder in Pavia und schließlich 1891 wieder bis zu seinem Tode in Rom. Er wurde 1898 Präsident der altehrwürdigen Accademia dei Lincei. Als Musikliebhaber war er hochinteressiert an den Beziehungen zwischen Mathematik und Musik.

Beltrami hat sich auf zwei Arbeitsgebieten als Forscher ausgezeichnet, in der Differentialgeometrie und bei den Anwendungen der Mathematik. Er war vertraut mit brieflichen Bemerkungen von Gauß zur nicht-euklidischen Geometrie und einigen Übersetzungen von einschlägigen Arbeiten Lobatschewskis, ferner mit Arbeiten von Gabriel Lamé (1795–1870) und Bernhard Riemann. So gelang es Beltrami, eine Geometrie zu entwickeln, die identisch ist mit der nicht-euklidischen Geometrie Lobatschewskis, nämlich die Geometrie der Pseudosphären (Flächen konstanter negativer Krümmung). Im Jahre 1868 erschien *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea* (Essay zur Interpretation der nicht-euklidischen Geometrie), der viel zur Anerkennung der nicht-euklidischen Geometrie beitrug. Auch verhalf er der kaum beachteten Arbeit *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Euklid von jedem Makel befreit) seines Landsmannes Giovanni Saccheri (1667–1733) zu der verdienten Anerkennung als einer bedeutenden Vorstufe zur nicht-euklidischen Geometrie. Bei seinen Arbeiten zur angewandten Mathematik wählte Beltrami ebenfalls den Zugang über die Geometrie. Das Spektrum war weitgefächert: Potentialtheorie, Wellentheorie, Dynamik, Optik, Wärmeleitung, Maxwellsche Theorie und deren mechanische Interpretation, Elastizitätstheorie.

Ulisse Dini (1845–1918) aus Pisa stammte aus sehr bescheidenen familiären Verhältnissen, gewann mit 19 Jahren einen Wettbewerb zum Auslandsstudium, verließ die von Betti begründete und geleitete Lehrerbildungsanstalt und studierte in Paris bei Joseph Bertrand (1822–1900) und Charles Hermite, lehrte seit 1866 Algebra und theoretische Geodäsie an der Universität Pisa, folgte 1871 Betti auf dessen Lehrstuhl für Analysis und höhere Geometrie (Betti hatte sich der mathematischen Physik zugewandt) und ab 1877 als Professor für Infinitesimalmathematik. Auch war Dini einer der Mitbegründer und zeitweise Direktor der Schule für angewandte Ingenieurwissenschaften in Pisa.

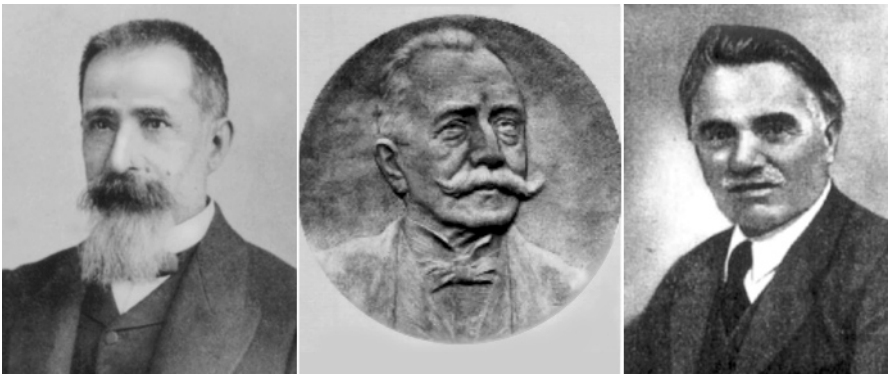


Abb. 10.8.8 Ulisse Dini; Cesare Arzelà, Luigi Bianchi

Seit seiner Jugend engagierte sich Dini für das öffentliche Wohl, war Mitglied des Stadtrates von Pisa mit Unterbrechungen zwischen 1871 und 1895 und wurde 1892 zum Senator des Königreiches Italien ernannt.

Seine Forschungsarbeit kreiste um zwei Hauptarbeitsgebiete. Einmal waren es Differentialgeometrie und die Theorie der Funktionen reeller Variabler; 1878 erschienen die *Fundamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali*, 1892 dann in deutscher Übersetzung unter dem Titel *Grundlagen für eine Theorie der Funktionen einer veränderlichen reellen Größe*. Zum anderen studierte er Eigenschaften spezieller Oberflächen und konforme Abbildungen einer Oberfläche auf eine andere unter gewissen Nebenbedingungen.

Beeinflusst von Weierstraß, Mittag-Leffler und Dirichlet gab Dini Bedingungen an, unter denen stetige Funktionen differenzierbar sind, ferner Verallgemeinerungen des Begriffs der gleichmäßigen Konvergenz. Der nach ihm benannte Satz von Dini besagt, dass eine Reihe mit nichtnegativen, stetigen Gliedern und stetiger Summe gleichmäßig konvergiert. So folgte eine zweite Monographie in zwei Bänden, *Lezioni di analisi infinitesimale* (Vorlesungen zur Infinitesimalmathematik), 1907/1915.

Schon beeinflusst von der sich entfaltenden Mengenlehre wurde Dini Begründer einer modernen, mengentheoretisch angelegten Schule der Funktionentheorie, zusammen mit seinen Schülern Cesare Arzelà und Giuseppe Vitali (1875–1932).

Cesare Arzelà (1847–1912) stammte aus finanziell eingeschränkten familiären Verhältnissen. Er konnte erst 1871 sein Studium bei Betti und Dini in Pisa aufnehmen. Nach Tätigkeiten in Florenz und Palermo erhielt er 1880 eine Professur für Analysis in Bologna.

Bis zu einem gewissen Grade kann Arzelà als eine Art Wegbereiter der Funktionalanalysis betrachtet werden. Er hatte 1884 den Begriff der streckenweise gleichmäßigen Konvergenz eingeführt (Borel wählte dafür die Bezeichnung quasigleichmäßige Konvergenz). Er fand, dass dies die notwendige und

hinreichende Bedingung ist für die Stetigkeit der Grenzfunktion einer Folge stetiger Funktionen. Ein Jahr später,

1885, bewies er den nach ihm benannten Grenzwertsatz, wonach Integration und Grenzwertbildung für gleichmäßig beschränkte Folgen Riemann-integrierbarer Funktionen vertauschbar sind, falls diese gegen Riemann-integrierbare Grenzfunktionen konvergieren. Dieser Satz wurde später durch Lebesgue wesentlich verschärft. Auch Fréchet knüpfte 1906 an Ergebnisse von Arzelà an.

Luigi Bianchi (1856–1928) war Sohn eines Senators; er selbst erreichte diese ehrenvolle Position seinerseits 1924. Er studierte in Pisa bei Betti und Dini, promovierte 1877 und ging zu Studienaufenthalten in München und Göttingen bei Felix Klein. Im Jahre 1881 wurde er Professor und ab 1918 Direktor der einflussreichen und erfolgreichen *Scuola Normale Superiore* in Pisa. Daneben wurde er 1886 Professor für projektive Geometrie und noch im selben Jahr Professor für analytische Geometrie.

Seine Forschungen betrafen metrische Differentialgeometrie. Zu seinen Hauptresultaten gehört die Entdeckung aller Riemannschen Geometrien, die eine kontinuierliche Gruppe von Bewegungen gestatten, d. h. solche, die eine gleichförmige Bewegung einer Figur ohne Deformation erlauben. Diese Ergebnisse fanden später Verwendung in der Einsteinschen Relativitätstheorie.

Bianchi hat zahlreiche Monographien verfasst. Genannt seien die *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni* (1918) (Vorlesungen über die Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen von Transformationen).

An dieser Stelle einige Bemerkungen zu Giuseppe Peano (1858–1939), über dessen Beitrag zur Grundlegung des Zahlensystems (Peanosche Axiome) an anderer Stelle berichtet worden ist. Auch er beschäftigte sich mit den Grundlagen der Funktionentheorie, benutzte das Auswahlaxiom, hatte schon 1886 beweisen können, dass die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ stets Lösungen hat, wenn f stetig ist. Auf ihn geht die Einsicht in die grundlegende Bedeutung des Begriffes des geordneten Paares für den mengentheoretischen Aufbau der Mathematik zurück [Kennedy 1974].

Seine Verpflichtungen für sein Land sah er in seinem Bemühen, den Mathematikunterricht zu reformieren. Er agierte an führender Stelle bei der Gründung (1895) eines Vereins italienischer Mathematiklehrer. Ferner war er aktiv an der Vorbereitung des ersten Internationalen Mathematiker-Kongresses 1897 in Zürich beteiligt.

Bekanntlich war Italien vor und nach der Jahrhundertwende führend auf dem Gebiet der algebraischen Geometrie. Einer ihrer herausragenden Vertreter war Guido Castelnuovo (1865–1952). Dorthin gehören auch Giuseppe Veronese (1854–1917), der u. a. bei Klein studiert hatte und der seinerseits Lehrer von Castelnuovo wurde, Francesco Buonaccorso Gherardo Severi (1879–1961), ferner Corrado Segre (1863–1924), der eng mit Castelnuovo zusammen arbeitete, und nicht zuletzt Federigo Enriques (1871–1946), der



Abb. 10.8.9 Guido Castelnuovo; Vito Volterra

zahlreiche Lehrbücher verfasst hat, die teilweise auch ins Deutsche übersetzt wurden. Auf ihn geht ein heute vielfach benutztes Axiomensystem der projektiven Geometrie zurück.

Guido CASTELNUOVO (1865–1952) stammte aus einer Intellektuellenfamilie. Der Vater war ein berühmter Romanautor; die Mutter hat die Einigung Italiens leidenschaftlich unterstützt.

Castelnuovo studierte in Padua bei Veronese und promovierte 1886. Nach einem Aufenthalt in Rom folgte eine Assistenzzeit in Turin, wo er in enge wissenschaftliche Beziehungen zu Segre treten konnte. Im Jahre 1891 wurde er auf den Lehrstuhl für analytische und projektive Geometrie an der Universität Rom berufen und war damit Kollege von Cremona. Nach dessen Tode (1903) lehrte er über höhere Geometrie. In diesem Jahre erschien sein bedeutendstes Buch über algebraische Geometrie *Geometria analitica e proiettiva*. Er behandelte insbesondere die Geometrie algebraischer Kurven sowie lineare Systeme von ebenen Kurven unter dem Gesichtspunkt birationaler Invarianten.

Castelnuovo beschäftigte sich auch intensiv mit Wahrscheinlichkeitsrechnung; 1919 erschien sein *Calcolo della probabilità*. Zudem war er sehr an der Geschichte der Mathematik interessiert: Er schrieb eine Monographie über den Ursprung des Infinitesimalkalküls in moderner Zeit (1938) und ließ gewöhnlich historische Bemerkungen in seine Vorlesungen einfließen.

Castelnuovo zog sich 1935 vom offiziellen Lehrbetrieb in Rom zurück. Bald darauf, 1938, als die Mussolini-Regierung in immer stärkere Nähe zur Hitlerregierung in Deutschland geriet, verurteilte die faschistische Regierung Italiens alle Juden als unpatriotisch und schloss sie aus staatlichen Funktionen und Universitäten aus. Das betraf auch Castelnuovo, der sich verbergen musste, trotzdem aber im Untergrund jüdische Studenten weiterhin betreute.

Nach der Befreiung Italiens wurde er mit der Wiederbelebung der wissenschaftlichen Einrichtungen betraut, die unter Mussolini stark gelitten hatten. Er wurde Präsident der weltberühmten Accademia dei Lincei, 1949 Senator

der italienischen Republik und Mitglied der Pariser Akademie der Wissenschaften.

Auch das Wirken von Giuseppe VITALI (1875–1932) gehört in die Gruppe der Gestalter der modernen, mengentheoretisch begründeten Funktionenlehre. Er war kurzfristig Assistent bei Dini, wirkte nach einer aus finanziellen Gründen notwendig gewordenen Tätigkeit 1904 bis 1923 als Gymnasiallehrer in Genua, dann in Padua und Bologna.

Als Folge seiner langen, nicht akademischen Lehrtätigkeit war er in eine gewisse wissenschaftliche Isolierung geraten; desto höher sind seine Ergebnisse einzuschätzen.

Vitali führte beispielsweise 1905 den Begriff der absolut stetigen Funktion ein – ein zentraler Begriff für die Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, wie H. Lebesgue nachweisen konnte. Vitali dehnte seine maß- und mengentheoretischen Methoden auch auf die Theorie der Funktionen komplexer Funktionen aus.

Mit Vito VOLTERRA (1860–1940) begegnet uns eine hochinteressante Persönlichkeit, sowohl in wissenschaftlicher Hinsicht als auch als Person des öffentlichen Lebens (vgl. dazu [DSB 1970–1980]).

Nach dem frühen Tode des Vaters sorgte der Onkel für eine vorzügliche Schulbildung von Volterra, der sich als frühreif erwies und mit 11 Jahren schon mathematische Werke von Joseph Bertrand (1822–1900) und Adrien-Marie Legendre las. Die Lektüre von Jules Vernes Roman *Von der Erde zum Mond* führte ihn zur Frage nach der Flugbahn eines Geschosses zwischen der Gravitation von Erde und Mond – ein Spezialfall des Dreikörperproblems. Knapp vierzig Jahre später kam er in einem Vortrag an der Sorbonne auf dieses Thema zurück und verwandte dabei jene Methode, die ihn bei vielen Problemen zum Erfolg geführt hatte: Zerlegung der gesuchten Kurve in kleine, beherrschbare Teilabschnitte.

Die Familie drängte ihn aus finanziellen Gründen zu einem kaufmännischen Beruf; ein entfernter Verwandter, selbst promoviert, eröffnete ihm den Weg zur Wissenschaft. 1878 begann er seine Laufbahn an der naturwissenschaftlichen Fakultät in Florenz, dann als Student an der *Scuola Normale Superiora* in Pisa und schließlich an der Universität Pisa bei Betti, der ihn sehr beeindruckte, und bei Dini. Volterra gab 1881 ein erstes Beispiel einer nicht Riemann-integrierbaren beschränkten Ableitung; dies wurde zu einer wichtigen Anregung für Henri Lebesgue.

Im Jahre 1882 promovierte Volterra mit einer physikalischen Arbeit und wurde unmittelbar darauf Assistent bei Betti. Im folgenden Jahr gewann Volterra einen Wettbewerb um eine Professur für Mathematik in Pisa; nach Bettis Tod (1892) übernahm er dessen Lehrstuhl, noch 1892 wurde er Professor der Mechanik in Turin und folgte schließlich 1900 Beltrami auf dem Lehrstuhl für mathematische Physik an der Universität Rom. In Anerkennung seiner wissenschaftlichen Verdienste wurde Volterra 1905 Senator des Königreiches Italien.

Nach Ausbruch des Ersten Weltkrieges setzte sich Volterra dafür ein, sich den Alliierten (gegen Deutschland) anzuschließen. Nach dem Kriegseintritt Italiens stellte er sich dem militärischen Ingenieurkorps zur Verfügung; unter anderem experimentierte er mit der Bewaffnung von Luftschiffen. Er unternahm beträchtliche Anstrengungen zur gemeinsamen militärischen Aufrüstung mit England und Frankreich.

Volterra erkannte früh die vom italienischen Faschismus ausgehende Gefahr und war als Präsident der berühmten Accademia dei Lincei 1922 einer der prominentesten Unterzeichner einer antifaschistischen Erklärung. Im Jahre 1931 verweigerte er den Treueeid auf die Mussolini-Regierung, wurde von der Universität entlassen und 1932 sogar aus allen italienischen wissenschaftlichen Akademien ausgeschlossen. Allerdings wurde er 1936 auf Vorschlag von Papst Pius XI. in die päpstliche Akademie der Wissenschaften gewählt.

Nach 1931 hielt Volterra auf Einladung Vorträge an der Sorbonne in Paris, in Rumänien, Spanien, Belgien, in der Tschechoslowakei und in der Schweiz. Trotz erheblicher gesundheitlicher Schwierigkeiten blieb er wissenschaftlich bis zu seinem Tode tätig.

Zunächst galt Volterras Aufmerksamkeit der Analysis, insbesondere deren Grundlagen. Die von ihm 1887 eingeführte Linienfunktion (siehe [Scriba/Schreiber 2005, S. 510]) ist zu verstehen als ein spezielles Funktional; hieran anknüpfend entnahmen J. Hadamard und M. Fréchet Anregungen für den Ausbau der Funktionalanalysis. Die Methode des Grenzüberganges vom Endlichen zum Unendlichen ermöglichte Volterra die Behandlung jenes nach ihm benannten Typs der Integralgleichungen (besonders in den Jahren 1896/97), auf die sich Ivar Fredholm (1866–1927) und David Hilbert stützen konnten. Von hier aus führte auch der Weg zum Studium von Integrodifferentialgleichungen, wie sie bei der Untersuchung einer Reihe praktischer Anwendungen auftreten: in der Mechanik, bei elastischen Nachwirkungen (sog. erbliche Phänomene; „Fenomeni ereditari“) und in der Biologie in der demographischen Dynamik. In die Zukunft weisend waren seine Beiträge zur mathematischen Modellierung biologischer Systeme mit Hilfe der Lotka-Volterra-Differentialgleichung.

Volterras Interessen gingen weit über Wissenschaft und Politik hinaus. Er war befreundet mit zahlreichen herausragenden Persönlichkeiten der Wissenschaft, der Kunst und Literatur. Zahlreiche Ehrungen wurden ihm zuteil; er war Mitglied fast aller wissenschaftlichen Akademien und mehrfacher Ehrendoktor. 1921 wurde er vom englischen König Georg V. geadelt.

10.8.4 Gründung nationaler Gesellschaften für Mathematik um die Jahrhundertwende

Wie 1894 in den USA wurden auch in vielen anderen Ländern um die Wende vom 19. zum 20. Jahrhundert „Mathematische Gesellschaften“ gegründet – Vorboten der im 20. Jahrhundert fortgeführten „Globalisierung der Mathematik“. Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht dieser Gründungen.

1864/67	Moskauer Mathematische Gesellschaft
1865	London Mathematical Society
1872	Société Mathématique de France
1884	Physikalisch-mathematische Gesellschaft Japans
1888	New York Mathematical Society
1890	Deutsche Mathematikervereinigung
1904	Mathematische Gesellschaft in Wien
1908	Società Italiana di Matematica
1909	Calcutta Mathematical Society
1910	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
1911	Spanische Mathematische Gesellschaft
1918	Griechische Mathematische Gesellschaft
1918	Norwegische Mathematiker-Vereinigung
1919	Polnische Mathematische Gesellschaft

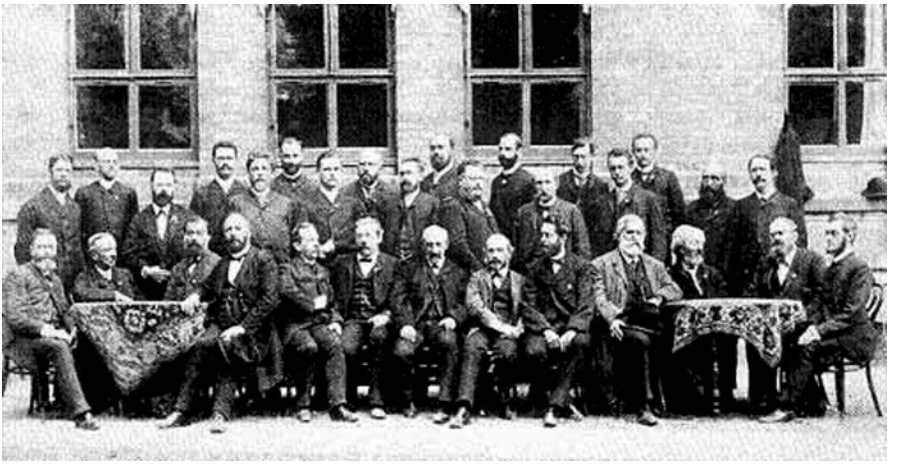
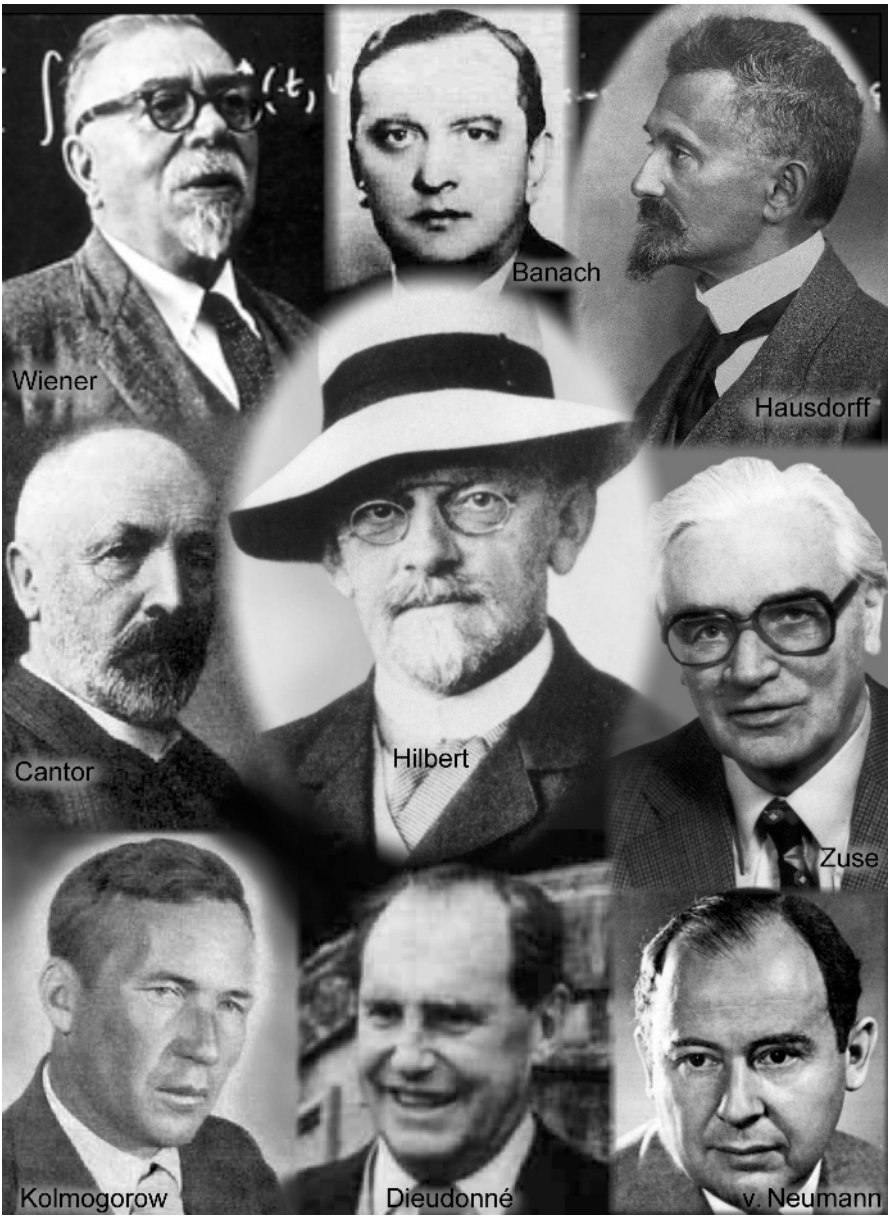


Abb. 10.8.10 Die Gründungsmitglieder der DMV am 18. September 1890. Zu ihnen gehören auch: Cantor, Hilbert, Klein, Minkowski und Wiener

11 Globalisierung der Mathematik seit dem Ende des 19. Jahrhunderts



Allgemeine Geschichte ab 20. Jahrhundert

1905	Russisch-Japanischer Krieg
1905/07	Bürgerliche Revolution in Russland
1914/18	Erster Weltkrieg
1917	Oktoberrevolution in Russland
1918	Ende des Deutschen Kaiserreiches und der Habsburger Monarchie
1919	Friedensverträge von Versailles und Saint-Germain
1920	Vertrag von Sèvres: Auflösung des Osmanischen Reiches
1918–1933	Weimarer Republik
1933	Hitler wird Reichskanzler in Deutschland
1936	Spanischer Bürgerkrieg
1939–1945	Zweiter Weltkrieg
1945	Aufteilung Europas (u a. Weltregionen) in westlichen und östlichen Machtbereich, Beginn des „Kalten Krieges“, Gründung der UNO
1946	Die UNESCO nimmt ihre Arbeit auf
1947	Indien und Pakistan werden selbständig
1948	Israel wird als unabhängiger Staat ausgerufen
1949	Mao Tse-tung ruft die Volksrepublik China aus
1949	Proklamation der Bundesrepublik Deutschland und der Deutschen Demokratischen Republik
1949	Gründung der NATO (North Atlantic Treaty Organization)
1950–1953	Koreakrieg
1951	Gründung der Europäischen Gemeinschaft für Kohle und Stahl (Montanunion EGKS)
1953	Am 17. Juni Volksaufstand in der DDR
1954	Frankreich verliert Indochina
1955	Warschauer Pakt wird zwischen Staaten des Ostblocks geschlossen
1956	Volksaufstand in Ungarn
1956	Absage an den Stalinismus in der Sowjetunion
1956/67/73	Kriege zwischen Israel und arabischen Staaten
1957	Römische Verträge zur Gründung der Europäischen Wirtschaftsgemeinschaft (EWG)
1960–1970	Die Kolonien Italiens, Englands, Frankreichs, Portugals, Belgiens und der Niederlande werden unabhängige Staaten
1961	Mauerbau in Berlin
1962	USA verhängen eine Blockade über Kuba und verhindern die weitere Stationierung sowjetischer Atomraketen; die Welt befindet sich am Rande des dritten Weltkriegs.
1965–1973	Vietnamkrieg
1965–1975	„Große Proletarische Kulturrevolution“ in China
1973	Erste Ölkrise
1979	Der „Gottesstaat“ des Ayatollah Khomeini löst die Herrschaft des Schah im Iran ab
1979–1989	Besetzung Afghanistans durch die Sowjetunion
1980–1988	Erster Golfkrieg zwischen Iran und Irak
1989/90	Zusammenbruch der kommunistischen Systeme Osteuropas, Wiedervereinigung Deutschlands

1990–1991	Zweiter Golfkrieg: Besetzung Kuwaits durch den Irak, Intervention der UN unter Führung der USA
1991	Zerfall der Sowjetunion in die Russische Föderation und 14 unabhängige Republiken, Bildung der Gemeinschaft unabhängiger Staaten (GUS)
1991	Zerfall Jugoslawiens: Bosnien-Herzegowina, Kroatien, Mazedonien und Slowenien werden unabhängig
1991	Der Warschauer Pakt wird aufgelöst
1991	Radjiv Gandhi wird bei einem Bombenattentat ermordet
1991	Der Bundestag votiert für Berlin als deutsche Hauptstadt
1992	Der Demokrat Clinton wird Präsident der USA
1992	Das endgültige Ende der Apartheid in Südafrika
1992–1995	Bürgerkrieg in Bosnien-Herzegowina, Aufspaltung in die Bosniakisch-kroatische Föderation (BKF) und die Serbische Republik (RS)
1993	Vertrag über die Europäische Union (EU)
1993	Die ČSSR teilt sich in Tschechien und Slowakei
1994	Nelson Mandela wird Präsident von Südafrika
1996	Abkommen über Rechtschreibreform der deutschen Sprache wird in Wien unterzeichnet
1997	Hong Kong wird volksrepublikanisch-chinesisch
1999	UN-Vertrag über Verbot von Landminen tritt in Kraft
1999	Macao fällt an China zurück
1999	Krieg im Kosovo
2000	„Expo 2000“ in Hannover: erste Weltausstellung in Deutschland
2002	Der Euro wird in vielen Staaten der Europäischen Union offizielles Zahlungsmittel
2001	World Trade Center in New York bei Terroranschlag zerstört
2003	Dritter Golfkrieg: USA und Verbündete besetzen den Irak
2004	Durch einen Tsunami sterben an den Küstenregionen des Indischen Ozeans über 200 000 Menschen

Technik und Naturwissenschaften im 20. Jahrhundert

1900	Planck begründet die Quantentheorie
1900	Hilbert formuliert auf dem Pariser Internationalen Mathematikerkongress 23 Probleme
1901	Marconi überbrückt mit elektromagnetischen Wellen den Atlantik Erste Nobelpreise verliehen: Für Physik (Röntgen), Chemie (van't Hoff), Medizin (v. Behring)
1902	Carnegie-Institution und Rockefeller-Foundation gegründet
1904	Amundsen bestimmt die genaue Lage des magnetischen Nordpols
1905	Einstein: spezielle Relativitätstheorie, erklärt die Brownsche Molekularbewegung, Beziehung $e = m * c^2$, Photon entdeckt
1906	Bateson prägt den Begriff Genetik, Ehrlich den der Chemotherapie
1911	„Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft“ gegründet
1912	Hess entdeckt die kosmische Strahlung

1913	N. Bohr entwickelt das Atommodell
1913	Millikan bestimmt die Größe der elektrischen Elementarladung
1913	Rutherford sagt die Existenz von Protonen voraus
1913	Bergius: Verfahren der Kohlehydrierung
1914	Eröffnung des Panamakanals
1915	Einstein: Allgemeine Relativitätstheorie
1919	Eddington: Expeditionen bestätigen die Lichtablenkung durch Sonne und damit die Relativitätstheorie
1919	Rutherford: Kernumwandlung Stickstoff in Wasserstoff
1919	Sommerfeld veröffentlicht „Atombau und Spektrallinien“
1920	Öffentlicher Rundfunk in den USA
1922	Banting/Best entdecken die Wirkung von Insulin
1925	Fischer-Tropsch-Verfahren zur Kohlenwasserstoffsynthese
1926	Benzinerzeugung nach dem Bergiusverfahren in Leuna
1927	Heisenberg: Unschärferelation
1929	Hubble entdeckt Expansion des Weltalls und erklärt Rotverschiebung
1929	N. Bohr vertritt den Dualismus von Welle und Korpuskel
1929	Einstein entwirft eine neue Feldtheorie
1929	Fleming schlägt Penicillin als Antiseptikum vor
1931	Dirac: Hypothese von Antiteilchen
1931	Arktisflug mit dem Luftschiff „Graf Zeppelin“
1932	Chadwick: Entdeckung des Neutrons
1932	Heisenberg: Theorie des Atomkernes
1932	G. Hertz: Isotopentrennung durch Gasdiffusion
1933	Lewis: Gewinnung von schwerem Wasser
1933	Haworth: Synthese von Vitamin C
1934	Irène Joliot-Curie und Frédéric Joliot-Curie lösen künstliche Radioaktivität aus
1935	Heisenbergs philosophisch orientierte „Wandlungen in den Grundlagen der Naturwissenschaften“ erscheinen
1936	Dreischichtenfarbfilm von Agfa im Handel
1936	Öffentliches Fernsehen überträgt die Olympiade in Berlin
1938	Hahn/Strassmann: Kernspaltung des Urans
1939	L. Meitner/Frisch/Bohr: Energetische Betrachtung der Kernspaltung.
1939	Eine Gruppe französischer Mathematiker schließt sich unter dem Namen Bourbaki zusammen
1940	Landsteiner/A. S. Wiener entdecken den Rhesusfaktor
1941	Zuse konstruiert erste programmgesteuerte elektromechanische Rechenanlage
1942	Fermi löst in Chicago die erste Kettenreaktion aus
1944/45	In den USA Beginn der Konstruktion von Großrechnern mit „Elektronengehirn“: ENIAC, EDVAC
1945	Erste Versuchsexplosion in der Wüste von Nevada (New Mexico)
1945	Abwurf von Atombomben auf japanische Städte
1951	In USA und GB beginnen Versuche zur kontrollierten Kernfusion
1953	Watson/Crick: Vererbungstheorie. Doppelhelixstruktur der DNS
1953	Ersteigung des Mt. Everest
1954	Erste Kernfusionsanlage (Tokomak) in UdSSR gebaut

1954	Erste Solarzelle zur Gewinnung elektrischer Energie aus Strahlungsenergie
1957	UdSSR: Erster künstlicher Erdsatellit „Sputnik“
1959	Lunik III fotografiert die Mondrückseite
1960	Baubeginn des Nil-Staudammes bei Assuan
1961	Erster bemannter Raumflug (UdSSR)
1961	Erste amerikanische Erdumrundung
1967	Barnard: Erste Herztransplantation in Kapstadt
1969	Erste Menschen auf dem Mond (USA)
1974	Die Gefahr der Zerstörung der Ozonschicht wird erkannt
1976	Computergestützter Beweis des Vier-Farben-Satzes
1979	Erste Weltklimakonferenz
1983	Raumfähre Columbia (USA) mit Weltraumlabor Spacelab gestartet
1985	Ozonloch über der Antarktis nachgewiesen
1985	Personalcomputer halten Einzug in die Arbeitswelt
1986	Sowjetische Raumstation „Mir“
1986	Reaktorexplosion in Tschernobyl (Ukraine)
1986	Raumfähre Challenger (USA) explodiert 73 Sekunden nach dem Start
1988	Ergänzung der Theorie vom Urknall
1990	Das Hubble-Weltraum-Teleskop in einer Erdumlaufbahn
1991	Ötzi: mumifizierte Leiche eines vor etwa 5300 Jahren verstorbenen Mannes aus der Bronzezeit entdeckt
1991	Die 6800 Jahre alte Kreisgrabenanlage bei Goseck entdeckt, sie gilt als das weltweit älteste „Sonnenobservatorium“
1992	Einweihung des letzten Teilstückes des Rhein-Main-Donau-Kanals
1993	Das World Wide Web (WWW) wird weltweit zur allgemeinen Benutzung freigegeben
1994	Jahrtausendereignis: Einschlag des Kometen „Schumaker-Levy9“ auf dem Jupiter zu beobachten
1994	In der Tropfsteinhöhle Chauvet bei Vallon Pont d’Arc werden etwa 300 über 30 000 Jahre alte Felsmalereien gefunden (Lascaux ca. 17 000 J.)
1994	Eisenbahntunnel unter dem Ärmelkanal eröffnet
1995	Endgültiger Beweis des Großen Satzes von Fermat durch A. Wiles
1995	Raumsonde „Galileo“ (gestartet 1989) erreicht den Jupiter
1995	Microsoft bringt „Windows 95“ auf den Markt
1996	22,6 Mill. HIV-Infizierte
1997	Klon-Schaf „Dolly“ wird präsentiert
1997	Schachweltmeister Kasparow tritt gegen ein auf dem IBM-Supercomputer „Deep Blue“ installiertes Schachprogramm an und verliert.
1999	Weltbevölkerung übersteigt die 6-Miliardengrenze
1999	Erste Ballonfahrt rund um die Erde unter Führung von B. Piccard
1999	Entdeckung der „Himmelsscheibe von Nebra“ aus der Bronzezeit
2000	Neue Raumstation ISS wird bezogen
2000	Absturz einer Concorde in Paris
2003	Raumfähre Columbia (USA) bricht beim Wiedereintritt in die Erdatmosphäre auseinander
2004	Raumsonde „Mars Express“ beginnt mit der Kartierung der Marsoberfläche (3D-Fotos)

11.0 Einführung

11.0.1 Baukunst, Malerei, Musik und Literatur im 20. Jahrhundert (H.-W. Alten)

In der Baukunst, Malerei, Musik und Literatur hat die Entwicklung im 20. Jh. eine derartige Fülle und Vielfalt der Ausprägungen hervorgebracht, dass sie hier nur selektiv und in sehr großen Zügen beschrieben werden kann. Auch aus der kaum noch überschaubaren Zahl hervorragender Künstler und Literaten kann hier nur eine kleine Auswahl erwähnt werden. Insbesondere können auch die vielfältigen Entwicklungen in Afrika, Amerika, Asien und Australien kaum berücksichtigt werden. In all diesen Entwicklungen steht die Mathematik naturgemäß in erster Linie in der Architektur im Hintergrund, in gewissem Maße aber auch in der Malerei und in der Musik, kaum jedoch in der Literatur. Es gibt jedoch eine große Zahl literarischer Darstellung von Problemen in der Mathematik, z. B. *Poincarés Vermutung* von Donal O'Shea, *Das Bourbaki Gambit* und *Cantors Dilemma* von Carl Djerassi.

Baukunst

Die Baukunst war zu Beginn des 20. Jahrhunderts in Europa durch den Jugendstil geprägt, der in neuer Art der Linienführung und Ornamentik die Stilverwilderung des ausgehenden 19. Jh. zu überwinden suchte.

Namhafte Vertreter dieser Richtung waren in Deutschland Karl Bonatz (1882–1951), Heinrich Tessenow (1876–1950) und der Belgier Henry van de Velde (1863–1957).

In großer Zahl finden sich eindrucksvolle Zeugen des auch in Plastik und Malerei ausgeprägten Jugendstils in der lettischen Hauptstadt Riga und im norwegischen Ålesund, wo der 1904 durch eine Feuersbrunst zerstörte Stadtkern mit deutscher Hilfe im Jugendstil wieder aufgebaut wurde, aber auch in Prag, Wien, Budapest, Barcelona und vielen anderen Städten Europas.

Eine eigenwillige Variante des Jugendstils schuf der spanische Architekt Antoni Gaudi (1852–1926) im sog. neukatalanischen Baustil, bekannt vor allem durch die noch nicht vollendete Kirche Sagrada Familia in Barcelona.

Gänzlich andere Bauformen wurden in dem 1919 von Walter Gropius (1883–1969) in Weimar gegründeten, 1925 nach Dessau verlegten und 1933 aufgelösten Bauhaus entwickelt, in dem auch die Maler Kandinsky, Feininger, Klee, Schlemmer und der Bildhauer Marcks lebten.

Strenge geometrische Flächenordnung kennzeichnet die aus Stahl/Glas und Beton in Skelettbauweise errichteten Werke im Bauhaus-Stil, der von Ludwig Mies van der Rohe vom Industriebau auf den Wohnbau übertragen, von ihm und Gropius nach der Emigration in die USA getragen und dort wie in der modernen Architektur nach dem Zweiten Weltkrieg wieder in Europa in vielen großen Bauten lebendigen Ausdruck fand, z. B. in der Nationalgalerie 1967 in Berlin.




Abb. 11.0.1 Türme der *Sagrada Familia* in Barcelona; Jugendstilfassade eines Wohnhauses in der Albertstr. in Riga [Foto Alten]

In Frankreich, nach dem Zweiten Weltkrieg auch in Berlin und sogar in Tschandigarh, der neuen Hauptstadt des Pandschab (Punjab), prägte Le Corbusier (1887–1965) in neuen Formen des Stahlbetonbaus und kubischer Klarheit die Architektur. Bekannt sind insbesondere seine vielstöckigen Wohneinheiten in Marseille, Nantes, Berlin und der Gartenstadt Meaux, deren Abmessungen der von ihm entwickelte *Modulor* zugrunde liegt, eine von den Maßen des menschlichen Körpers ausgehende Reihe von Maßeinheiten.

Neue Konstruktionen wurden für die unter Präsident Mitterand in Paris errichteten „Grands Travaux“ entwickelt, insbesondere für die futuristischen Gebäude von Les Halles, die Opéra de la Bastille, die Grande Arche de la Defense, die Bibliothéque National de France und die gläserne Pyramide des Louvre.

In Italien löste sich die Architektur vom Eklektizismus des 19. Jh. erst 1927 mit dem Auftreten der Gruppe 7 (G. Terragni u. a.), dann mit den Hallen- und Kuppelräumen in Stahlbetontechnik von Pier Luigi Nervi (1891–1979), orientierte sich nach dem Zweiten Weltkrieg an den klaren Formen Mies van der Rohes und kehrte in der sog. Neo-liberty zu Formen des Jugendstils zurück.



Abb. 11.0.2 „Meisterhäuser“ der Bauhaus-Architektur in Dessau [Foto Alten]

In England erreichte die Architektur nach *Arts-and-Craft-Bewegung*, Jugendstil und Eklektizismus Anschluss an die internationale Entwicklung mit der 1931 gegründeten *Mars-Gruppe*, wurde führend in städtebaulicher Planung, erregte Aufsehen mit den „brutalistischen“ Wohngebäuden in London und dem nach 1945 entstandenen Kranz seiner Trabantenstädte, vor allem aber mit der spektakulären Umgestaltung der hässlichen Dock- und Industrieanlagen des 19. Jhs. und extravaganten Bauten der Postmoderne wie die einem Zirkuszelt ähnelnde Millenniumshalle und das „Ei“ an der Themse.

In Schweden schuf Ragnar Östberg (1866–1945) das Stockholmer Rathaus, Eric Gunnar Asplund (1885–1940) moderne Bauten als luftige Gebilde aus Stahl und Glas.

Den Monumentalbauten des „1000-jährigen Reiches“ folgten nach dem Kriege in Westdeutschland im Zuge des Wiederaufbaus zunächst schlichte Wohn- und Verwaltungshäuser wie das Hansaviertel in Berlin, dann „Tempel“ für Kunst und Kultur wie die Philharmonie mit geschwungenem Dach und die Staatsbibliothek von Hans Scharoun (1893–1972) sowie die Neue Nationalgalerie (nach Plänen von Mies van der Rohe) in Berlin, das Nationaltheater in Mannheim u. a. In der Deutschen Demokratischen Republik (wie in der Sowjetunion und andernorts) entstanden die Prachtbauten im „Zuckerbäckerstil“ der Stalinzeit, später riesige monotone Wohnsiedlungen in Plattenbauweise und Zweckbauten im Stil moderner Sachlichkeit.



Abb. 11.0.3 Sonnenuntergang über dem Tetraeder von Bottrop. Es wurde vom Architekten Wolfgang Christ (Bauhaus-Universität Weimar) entworfen und 1995 mit einer Aussichtsplattform errichtet [Foto Wesemüller-Kock]

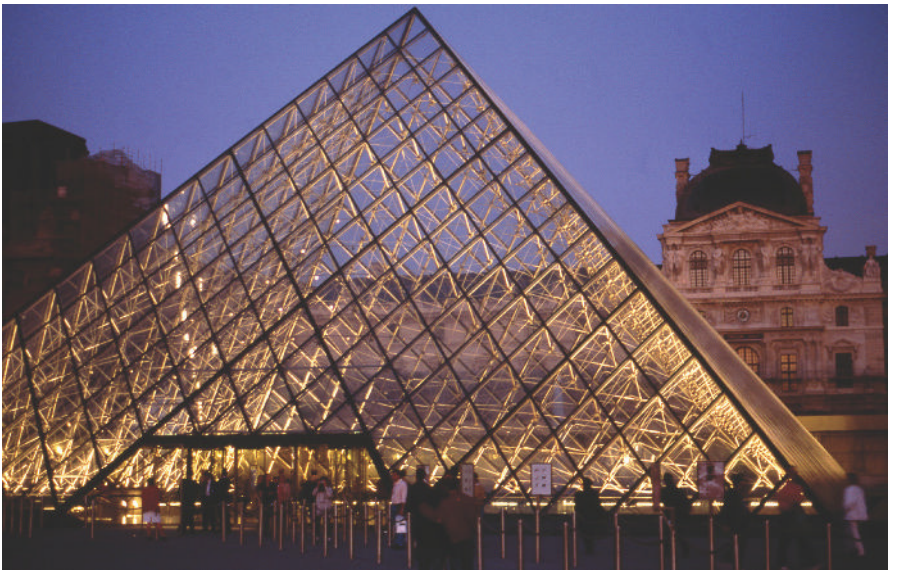


Abb. 11.0.4 Gläserne Pyramide über dem Eingang zum Louvre, Paris [Foto Alten]



Abb. 11.0.5 „Millennium Dome“ an der Themse – spektakulärer Bau zum Beginn des 3. Jahrtausends [Foto Alten]



Abb. 11.0.6 Das extravagante Hotel Burj Al Arab in Dubai [Foto Alten]; die 2001 zerstörten Twin Towers des World-Trade-Centers in der „alten“ Skyline von New York [Foto Wesemüller-Kock]



Abb. 11.0.7 The Thames Barrier – ein Wunderwerk moderner Technik, das London vor Hochwasser bewahren soll [Foto Alten]

In der Architektur der Zweckbauten setzten sich nach dem Zweiten Weltkrieg vermehrt Stahlskelett- und Stahlbetonkonstruktionen durch. Bekannte und berühmte Beispiele sind:

- Die 1973 fertiggestellten und 2001 durch einen Anschlag zerstörten Twin-Towers des World-Trade Centers in New York, die mit 110 Stockwerken und 417 Metern Höhe kurzzeitig zu den höchsten Gebäuden der Erde zählten
- der Moskauer Fernsehturm, mit 540 m Höhe von 1967 bis 1975 das höchste Bauwerk der Welt
- die extravaganten Bauten in den Vereinigten Arabischen Emiraten, darunter der als Hotel der Superlative gebaute Burj al Arab in Dubai und der noch im Bau befindliche Burj Dubai, der mit 750 m den erst 2009 fertig werdenden Freedom Tower in New York übertreffen soll.

Das 1983 erstmals in Betrieb genommene Themsesperrwerk, Brücken enormer Länge, die den Golf von Korinth, den Öresund und vermutlich bald auch den Fehmarn-Belt und die Straße von Messina überspannen, der Eurotunnel unter dem Ärmelkanal und der Drei-Schluchten-Staudamm im Jangtsekiang sind Beispiele für Konstruktionen, die ohne Mathematik und Computer nicht hätten geplant oder gebaut werden können.

Als Beispiele für die jüngste Entwicklung der Baukunst seien die Oper in Sidney, die Kuppel des Reichstages in Berlin von Norman Foster (*1935) und die spektakuläre Architektur des Guggenheim-Museums in Bilbao von Frank



Abb. 11.0.8 Das Guggenheim-Museum in Bilbao – fantastisch schwungvolle Architektur von Frank Gehry [Foto Alten]

Gehry (*1929) erwähnt, dessen schwungvoll gekrümmte und mit Elementen aus Titan verkleidete Außenflächen mit Hilfe des von der französischen Firma Dassault entwickelten Computer-Programms CATIA berechnet wurden.

Plastik

Den Expressionismus in der Plastik haben in Deutschland in erster Linie Wilhelm Lehmbruck (1881–1919) mit Skulpturen weiblicher Akte und Ernst Barlach (1870–1938) mit den wuchtigen Formen seiner Holzbildwerke geprägt.

In Norwegen schuf Gustav Vigeland (1869–1943) unter dem Einfluss Rodins die naturalistischen, symbolhaften Plastiken der monumentalen Skulpturen-Anlage im Frogner-Park in Oslo, während sich Aristide Maillol (1861–1944) mit seinen Frauengestalten in Klarheit und Form bewusst von Rodin abwandte und Henry Moore (1898–1986) archaische Skulpturen von urtümlicher Ausdruckskraft in abstrahierenden Formen gestaltete.

Neues Material fand zunehmend Verwendung: Der amerikanische Bildhauer und Maler Alexander Calder (1898–1976) – ursprünglich Ingenieur – wurde durch die aus Drähten und Blechblättern gebildeten Mobiles bekannt, in Spanien wurden Pablo Gargallo (1881–1934) und Julio Gonzáles (1876–1942) mit ihren Konstruktionen aus Kupfer und Eisen Pioniere der modernen Plastik, die Französin Niki de Saint Phalle (1930–2002) erregte Aufsehen mit ihren aus Kunststoff gefertigten „Nanas“.



Abb. 11.0.9 Naturalistische Plastiken von G. Vigeland bevölkern die nach ihm benannte Anlage im Frogner-Park Oslo. Die Nanas von Niki de Saint Phalle am Hohen Ufer in Hannover wurden anfänglich von vielen als skandalös empfunden [Foto Alten]

Malerei

In der Malerei folgte auf den in Deutschland vor allem von Max Liebermann, Max Slevogt und Lovis Corinth vertretenen Impressionismus der Expressionismus, ein Sammelbegriff für die durch flächige Farbformen, starke Kontraste, komplementäre Farben (z. B. blaue Pferde) und flächenhafte Darstellung von Körpern geprägten Stilrichtungen der ersten beiden Jahrzehnte des 20. Jahrhunderts.

Paul Cézanne, Vincent van Gogh, Ferdinand Hodler und Edward Munch (*Der Schrei*, 1895) gehören zu den Wegbereitern und Begründern des Expressionismus.

Im Kubismus, Fauvismus, Dadaismus, Futurismus, Surrealismus und Konstruktivismus versuchten Maler eine Steigerung des Ausdrucks mit unrealistischen Mitteln: Ernst Ludwig Kirchner, Erich Hecker, Karl Schmidt-Rottluff und Emil Nolde in der 1905 in Dresden gegründeten „Brücke“, Wassily Kandinsky, Franz Marc, August Macke und Paul Klee im 1911 in München ge-



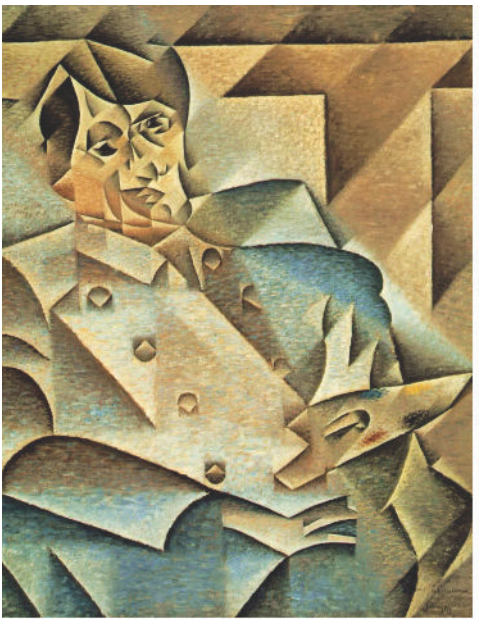
Abb. 11.0.10 Der Schrei – das weltberühmte Bild des Expressionismus von Edward Munch und eine sozialkritische Karikatur dieses Bildes an einer Hauswand in Oslo (Munch-Museum Oslo) [Foto Alten]

gründeten „Blauen Reiter“, Kandinsky und Klee dann ab 1919 im Bauhaus, Max Beckmann, Oskar Kokoschka und Christian Rohlfs als individuell geprägte Künstler.

Henri Matisse und Raoul Dufy sind die markanten Mitglieder der „Fauves“, der „Wilden“, der 1905 in Paris aufgetretenen Gruppe von Malern, die den Ausdruck durch starke Farben und Betonung der Umrisse zu steigern suchten. Pablo Picasso schuf 1908 gleichzeitig mit Georges Braque die ersten Werke des Kubismus, in denen das Gegenständliche auf stereometrische Grundformen (Zylinder, Kugel, Kegel) zurückgeführt wird und mehrere Ansichten zugleich durch facettenartige Berechnungen in die Fläche übersetzt werden. So entstanden z. B. die durch Verzerrung der natürlichen Anordnung frappierenden Bildkompositionen Picassos.

Als Vertreter des Dadaismus sei Kurt Schwitters mit seinen aus Papierresten und anderen Abfällen nach geometrischen Gesetzen komponierten *Collagen* genannt.

Mit der *Pittura metafisica* von Giorgio de Chirico und den Bildern von Max Ernst fand um 1925 der Surrealismus Eingang in die Malerei, fortgeführt von Salvador Dali, in dessen Gemälden naturalistisch wiedergegebene



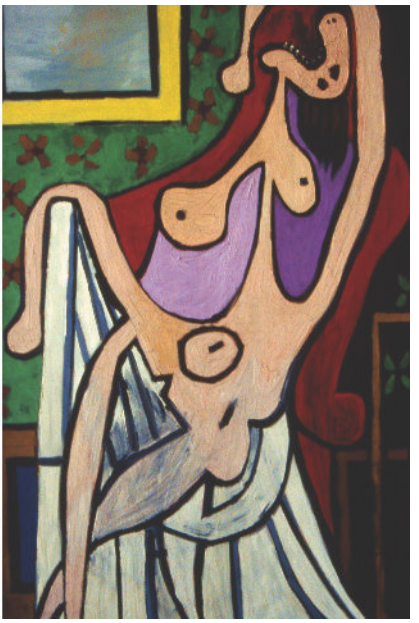


Abb. 11.0.11 *Picasso* – ein Portrait von Juan Gris (1887–1922) aus dem Jahre 1912; *Grand Nu au Fauteuil Rouge* von Pablo Picasso (Picasso–Museum, Paris) [Foto Alten]

Einzelheiten perspektivisch zu traumhaft absurden Gebilden verbunden werden, während Joan Miró den Surrealismus in stark abstrahierenden und oft an Kinderzeichnungen erinnernden Bildern ausprägte und Marc Chagall russische Märchen zu verwunschenen Darstellungen verdichtete.

Von den Nationalsozialisten wurden expressionistische Werke vielfach als „entartete Kunst“ geschmäht und aus deutschen Museen entfernt, die Schöpfer, insbesondere wenn sie jüdischer Abstammung waren, mussten Deutschland verlassen wie viele jüdische Künstler, Schriftsteller und Wissenschaftler oder wurden schweren Restriktionen unterworfen.

In Italien erlebten geometrische Abstraktion und der Klassizismus unter Mussolini eine Renaissance.

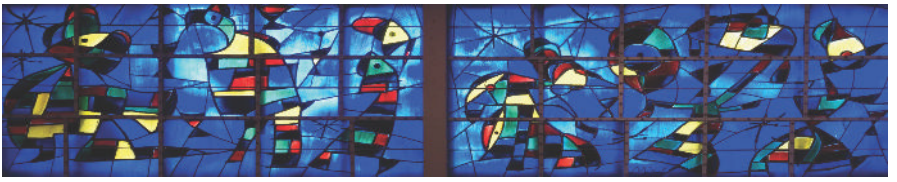


Abb. 11.0.12 Joan Miró: Kirchenfenster in St-Paul-de-Vence [Foto Pom^2]



Abb. 11.0.13 *Suprematism (Supremus No. 58)* von Kasimir Malewitsch 1916 (Museum of Art, Krasnodar); *Red Oval* – Ausschnitt aus einem Bild von Wassily Kandinsky (Guggenheim-Museum New York)

Die nach 1945 entstandenen Kunstrichtungen seien hier nur in Stichwörtern erwähnt. Als Wegbereiter sind Kandinsky und der Italiener Magnelli anzusehen.

Als „Nachexpressionist“ gilt HAP Grieshaber mit seinen Farbholzschnitten. *Tachismus* (frz. tache = Fleck) und *Art Informel* (frz. formlose Kunst) sind in Paris und den USA nach dem 2. Weltkrieg entstandene Richtungen, vertreten von den nach Frankreich emigrierten Hans Hartung und Wolfgang Wols und durch die Maler der sog. Frankfurter Quadriga (K. O. Götz, O. Greis, H. Kreutz, B. Schultze). *Action Painting* will das Erlebnis entfesselter Aktion im Malvorgang unmittelbar sichtbar werden lassen. Skripturale Malerei arbeitet mit Phantasieschriften und komponiert Bilder aus Druckbuchstaben. Der Surrealismus findet eine gewisse Fortsetzung in den Werken von Friedensreich Hundertwasser (eigentl. Fritz Stowasser) dem *phantastischen Realismus* der Wiener Schule (E. Brauer, E. Fuchs, R. Hausner, A. Lehmden) und den Bildern vieler deutscher Künstler (M. Zimmermann, P. Wunderlich, J. Janssen, W. Blecher, H. Antes, F. Schröder-Sonnenstern u. a.).

In der dem Dadaismus verwandten neorealistischen *Pop Art* werden Objekte des Massenkonsums als Montage dargestellt. Einer ihrer bekanntesten Vertreter ist der Amerikaner Andy Warhol (eigentlich Andrew Warhola). Teil der *Pop-Art* ist der *Fotorealismus*, der sich seit der Documenta 1972 in Kassel auch in Europa etablierte.

Op Art (Optic Art) ist eine Stilrichtung von Malerei und Grafik, die durch geometrische Formen und zum Teil intensive Farben den Eindruck von Be-

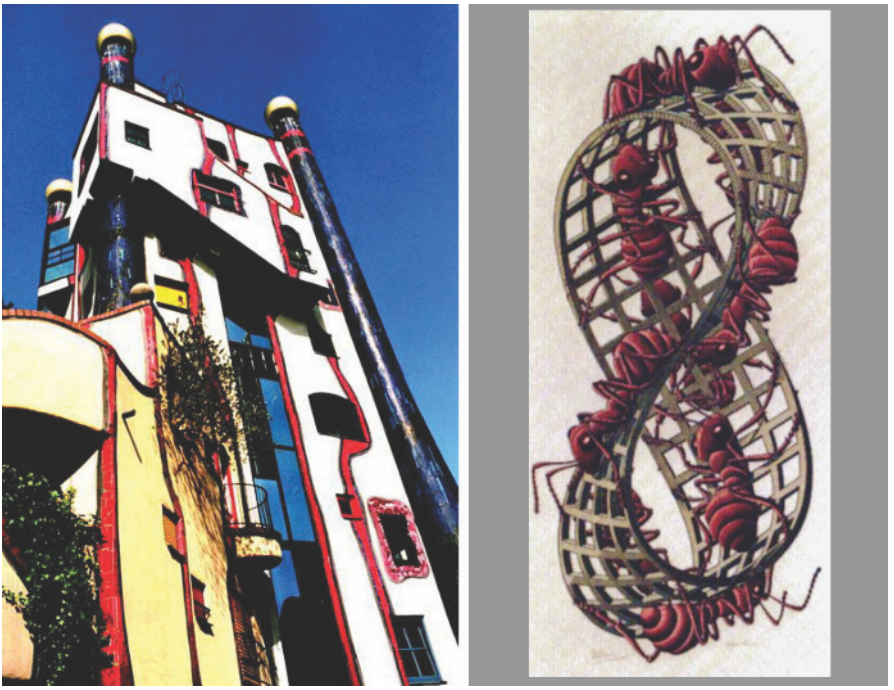


Abb. 11.0.14 *Wohnen unterm Regenturm* – „Hundertwasserhaus“ in Plochingen von F. Hundertwasser (1991–94); Ameisen auf der einseitigen Fläche des Möbiusbandes – M. C. Escher's „Möbius Strip II“ [© 2008 The M. C. Escher Company-Holland. All rights reserved. www.mcescher.com]

wegung, Flimmereffekten und mitunter unmöglicher Räumlichkeit auslösen will. Wichtige Vertreter sind Victor Vasarély, Bridget Riley und viele andere. Ein für Mathematiker interessanter früher Mitgestalter war nach dem 2. Weltkrieg der Maler und Grafiker Mauritius Cornelius Escher. Er hat der Geometrie mit der Erfindung „unmöglicher Figuren“ einen neuen Aspekt hinzugefügt.

Von Escher stammen viele weitere unmögliche Figuren, so z. B. ein Schloss mit einer Treppe, die gar nicht als Zugang zum Gebäude dienen könnte. Berühmt wurde sein Wasserfall, der anfangs ganz normal aussieht, aber unmöglich ist, weil das Wasser nach oben fließen müsste. Escher fand seinerzeit bei seinen Kollegen von der malenden Zunft kaum Anerkennung, wohl aber bei den Mathematikern. Für sie ist besonders interessant eine Darstellung des Möbiusschen Bandes mit krabbelnden Ameisen auf dieser *einseitigen* Fläche.

Die Neugier der Mathematiker wecken auch seine Holzschnitte und Lithographien mit parkettähnlich angeordneten Motiven, bei denen eine Form stufenweise allmählich in eine andere übergeht, z. B. in den *Metamorphosen* und in *Luft und Wasser*, wo sich Fische fast unmerklich in Vögel verwandeln (vgl. [Scriba/Schreiber 2005, S. 545ff.]).



Abb. 11.0.15 Unmögliche Figuren auf Briefmarken von M.C. Escher und Oscar Reutersvärd (Österreich 1991, Schweden 1982)

Die zum Teil spielerische oder auch strenge Verwendung geometrischer Formen der *Op-Art* ging der Computerkunst des ausgehenden 20. Jhs. voraus. Seit in den sechziger Jahren die Ehe zwischen Computer und Bildschirm geschlossen wurde und rund 10 Jahre später Personalcomputer auf den Markt kamen, ist *Computergeometrie* zu einer Massenerscheinung geworden. Computergrafiken entstanden in großer Zahl, in London wurde 1969 die Computer

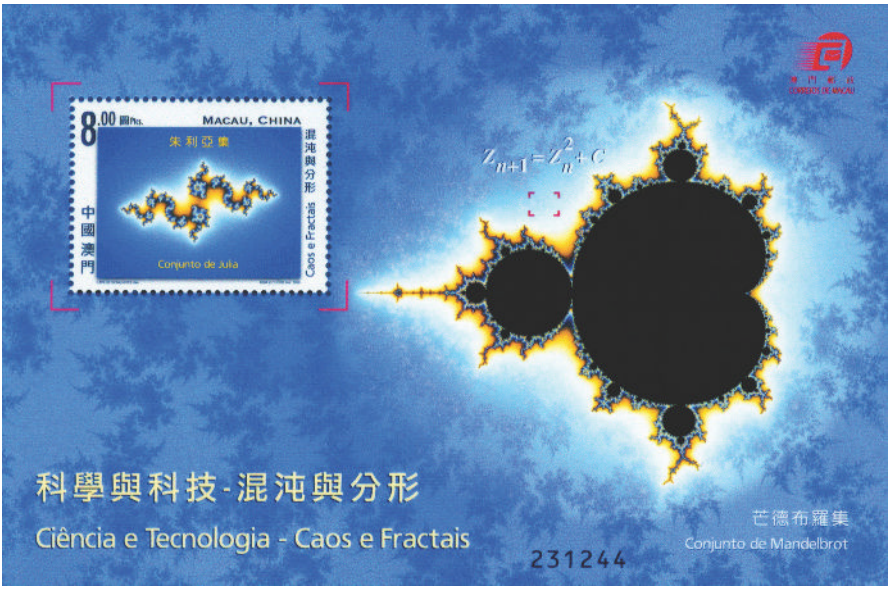


Abb. 11.0.16 Die Mandelbrot-Menge („Apfelmännchen“) und die Julia-Menge sind berühmte Beispiele der Fraktalgeometrie. Viele Kurven und Phänomene der Mathematik lassen sich mit ihr angenähert darstellen (Macao, China 2005)

Art Society gegründet, 1967 wurde erstmals die „Mandelbrotmenge“ sichtbar gemacht [Scriba/Schreiber 2005, S. 541ff.].

Der von Benoît Mandelbrot (*1924) geprägte Begriff Fraktal (lat. fractus – gebrochen) bezeichnet geometrische Muster, die einen hohen Grad von Selbstähnlichkeit aufweisen, z. B. aus vielen verkleinerten Kopien eines Objektes bestehen. *Fraktalkunst* hat einen enormen Formenreichtum in ästhetisch reizvollen Bildern hervorgebracht. Fraktale werden oft durch rekursive Operationen gewonnen, haben meist eine nicht-ganzzahlige Dimension und spielen eine bedeutende Rolle in vielen Gebieten der Mathematik, z. B. in der Funktionentheorie, der Theorie der Berechenbarkeit und in dynamischen Systemen.

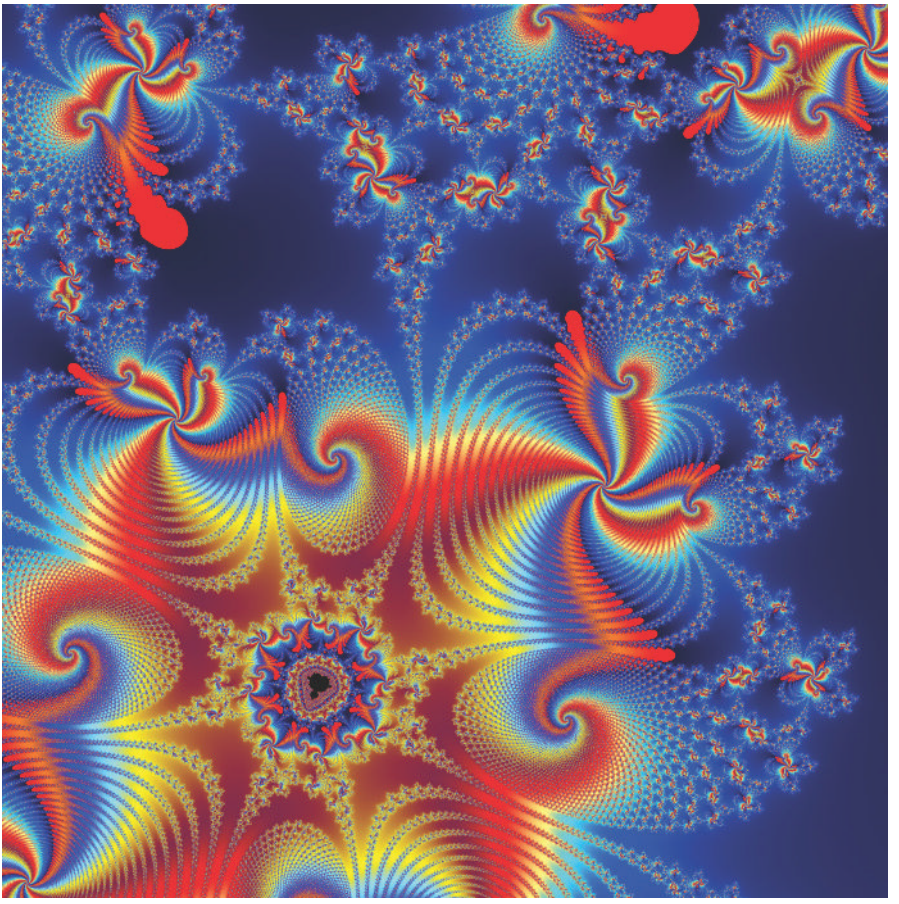


Abb. 11.0.17 Ein Beispiel für Formenreichtum bei Fraktalen der Mandelbrotmenge (erstellt mit „Fractalizer“, Wesemüller-Kock; mehr zu Fraktalen u. a. bei [Peitgen 1986], mehr zu Geometrie und Kunst z. B. bei [Scriba/Schreiber 2005])



Abb. 11.0.18 Claude Debussy [Foto Nadar], Maurice Ravel

Musik

Zu Beginn des 20. Jahrhunderts wurde die Musik in Deutschland noch beherrscht von der Klangwelt der Klassik und der Romantik, in kühnen Klangfarben und raffinierter Orchestrierung, fortgeführt in den Musikdramen von Richard Strauss (1864–1949), in der „Bekenntnismusik“ von Hans Pfitzner (1869–1949) und den Kompositionen Max Regers (1873–1916), der die kontrapunktische Polyphonie Bachs mit der chromatisch erweiterten Harmonik der Spätromantik verband und als Wegbereiter zeitgenössischer Musik seinen Einfluss bis hin zu Paul Hindemith (1895–1963) ausübte.

Der Österreicher Arnold Schönberg (1874–1951) gilt als Begründer der „Zwölftonmusik“ (Dodekaphonie). Der schon bei Liszt, Wagner und Mahler, stärker noch bei R. Strauss, Pfitzner und Reger als Bi- und Polytonalität aufgetretene „Tonalitätsschwund“ führte Schönberg dazu, jeden der zwölf Töne der chromatischen Tonleiter als gleichwertig anzusehen, sie als geradezu mathematisch strukturierte Grundlage der Komposition zu benutzen. Der von Dreiklängen begleitete Melodiebogen, durch Dissonanzen zur Spannung aufgebaut und durch die Konsonanz zum Wohlklang aufgelöst, wird nicht mehr geduldet. An seine Stelle tritt die Zwölftonreihe, die in ständiger rhythmischer Veränderung wiederholt, in ihrer Umkehrung, rückläufig als Krebsgang und in dessen Umkehrung oder auch in ihren Teilen verwendet werden kann. Die Zwölftonmusik erlebte unter Schönberg und seinen Schülern Alban Berg (1885–1935) und Anton von Webern (1883–1945) in den 20er Jahren ihre erste Blüte, erfuhr aber nach Schönbergs Emigration (1933) über Frankreich in die USA erst nach dem 2. Weltkrieg weltweite Verbreitung.



Abb. 11.0.19 Igor Strawinski, Arnold Schönberg [Foto Homolka]

Als Pendant zum Impressionismus in der Malerei schufen Claude Debussy (1862–1918) und Maurice Ravel (1875–1937) impressionistische Bilder mit verschwimmenden Linien und schillernden Klangfarben in der Musik.

Die Ganztonleiter, verschleierte Akkordbildungen, Quartenfolgen und spannungslose Dissonanzen sind Elemente dieses Impressionismus, der seine Ausprägung in unterschiedlichen Variationen in Spanien durch Manuel de Falla und Isaac Albéniz, in Italien durch Ottorino Respighi, in England durch Cyril Scott fand.

Andere Wege beschritt der ab 1910 in Frankreich, nach 1939 in den USA lebende Russe Igor Strawinski (1882–1971). Er verband in seinen Balletten impressionistische Klangfarben mit kraftvollen Rhythmen, polytonaler Harmonik und neuartiger Melodie und Instrumentierung, wandte sich später auch der zuvor von ihm abgelehnten Zwölftontechnik zu. Unter seinem Einfluss entstanden in Frankreich die Werke von Arthur Honegger, Darius Milhaud und Francis Poulenc, in Russland die Ballettmusiken, Opern, Symphonien und Konzerte von Serge Prokofieff, Dimitrij Schostakowitsch und des Armeniers Aram Khatchaturian.

In England eroberten vor allem Edward Elgar, Ralph Vaughan Williams und Benjamin Britten die Opernhäuser und Konzertsäle mit ihren Kompositionen von stark nationaler Eigenart. In Ungarn wurde Bela Bartok zum Vorkämpfer der Neuen Musik, während die Werke von Zoltán Kodály noch in der ungarischen Volksmusik wurzeln und László Moholy-Nagy um 1925 die „Farblichtmusik“ schuf, in der auf einem „Farblichtklavier“ Farbfolgen zur Musik gespielt werden.

Slawische Volksmusik fand ihren Niederschlag im persönlichen Stil von Leoš Janáček (1854–1928) mit Zügen aus Verismo, Impressionismus und Na-

turalismus, hingegen wurde Bohuslav Martinu (1890–1959) zum bedeutenden Vertreter der „Gegenwartsmusik“ in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts.

In Deutschland knüpften Hugo Distler und Ernst Pepping an alte Vokalpolyhponie an, Carl Orff erlangte mit seinem durch Rhythmus und Wort berauschenden szenischen Oratorium *Carmina Burana* Weltruf, Werner Egk verband volkstümliche Melodik mit der Harmonik Strawinskis, Gottfried von Einem trat mit Opern nach modernen Schriftstellern (Büchner, Kafka) hervor. Der neuklassischen Richtung Hindemiths folgten Hermann Reutter und Harald Grenzmer. Boris Blacher schuf Werke der absoluten Musik mit variablen Metren. Volkstümliche Film- und Theatermusik komponierten Kurt Weill (1900–1950), der 1928 mit der „Dreigroschenoper“, nach Texten von Bertolt Brecht Welterfolg errang, und die Schönberg-Schüler Hanns Eisler, Komponist der DDR-Nationalhymne, und Winfried Zilly. Sie führten die Tradition der Wiener Schule Schönbergs mit der Zwölftonmusik ebenso fort wie Ernst Křenek, Hanns Jelinek und Hans-Erich Apostel, später Wolfgang Fortner und sein Schüler Hans-Werner Henze.

Angeregt durch die Werke des Schönberg-Schülers Anton von Webern entstand um 1950 die *Serielle Musik*. Deren Kompositionstechnik ist durch mathematisch angeordnete Strukturelemente bestimmt: in „Reihen“ werden alle Eigenschaften der einzelnen Töne (Höhe, Dauer, Lautstärke, Klangfarbe usw.) oder des Tonsatzes festgelegt. So entstehen z. B. Lautstärke und Klangfarbenreihen, Tonhöhereihen zur Fixierung von Intervallen. Besondere Bedeutung kommt dabei der Festlegung der Tondauern und ihrer reihenmäßigen Anordnung zu. Die Werte in diesen Reihen werden einerseits durch Multiplikation eines kleinsten Zweitwertes mit Faktoren von 2 bis 12, andererseits durch eine logarithmische Zwölferskala innerhalb einer Oktave ermittelt, um eine „chromatisch temperierte Skala der Tondauern“ zu gewinnen. Karl-Heinz Stockhausen (1928–2007), namhafter Theoretiker und Komponist der seriellen Musik, entwickelte zunächst die sog. „punktuelle Musik“ durch serielle Regelung der Eigenschaften der einzelnen Töne, ab 1953 durch Konfiguration der „Tonpunkte“ in „Gruppen“ und Vorbestimmung der Eigenschaften des Tonsatzes (Umfang, Tondichte usw.) die sog. „statistische Musik“. Durch diese planvolle und exakte Systematik der Klangkomposition sollen bisher unbekannte musikalische Prozesse hörbar gemacht werden.

Zusätzlichen Aufschwung und neue Möglichkeiten erhielt die serielle Musik durch die von Computern gesteuerte *elektronische Musik*. In ihr wird das Kontinuum von Tonhöhe, Tondauer und Lautstärke, z. T. auch der Klangfarbe, verfügbar. Mit „akustischen Diagrammen“ werden die musikalischen Strukturen in Partituren kompositorisch festgelegt und aus den Bausteinen reine Töne, Tongemische, Farbengeräusche und Impulse elektronisch realisiert. Neben Stockhausen sind die bekanntesten Vertreter serieller und elektronischer Musik Pierre Boulez und Henri Pousseur in Frankreich, Bruno Maderna und Luigi Nono mit seiner „Musica su due dimensioni“ in Italien, György Ligeti in Ungarn, Bengt Hambraeus und Bo Nilsson in Schweden.

In den USA notierte Henry Cowell bereits 1912 „tone dusters“ (bei denen Klaviertasten mit Faust oder Unterarm gedrückt werden!), um 1935 dann Werke, in denen die Wahl der Tempi sowie Auswahl und Anordnung der Texte freigestellt werden. John Cage präparierte ab 1940 Klaviere mit Nägeln, Klammern usw. zur Verfremdung des Tons und begründete um 1950 mit M. Feldmann, Chr. Wolff und E. Brown die seit 1953 auch in Europa beachtete *experimentelle Musik*, in der nur die Aktion der Spieler fixiert ist und so jede Aufführung als neues Werk erscheint.

Literatur

Die Entwicklung der Literatur im 20. Jahrhundert muss hier angesichts der ungeheuren Fülle und Vielfalt der entstandenen Werke und ihrer Autoren auf die Angaben der wichtigsten Stilformen und Tendenzen und ihrer namhaftesten Vertreter im deutschen Sprachraum beschränkt werden, zumal die Beziehungen zur Mathematik relativ gering sind.

In der deutschen Literatur folgten auf den *Naturalismus* eines Gerhart Hauptmann und den *Symbolismus* eines Rainer Maria Rilke die *Neuklassik* und *Neuromantik* (Hans Carossa, Rudolf Borchardt, Josef Weinheber, Hermann Hesse), Lyrik und literarischer Jugendstil (Stefan George, Richard Dehmel), eine Wiederbelebung der Balladendichtung (Agnes Miegel, Börries Freiherr von Münchhausen, Lulu von Strauß und Torney, Christian Morgenstern) und die Heimatkunstbewegung (Hermann Löns).

Der *Impressionismus* wurde abgelöst durch den *Expressionismus* mit einer zunächst ästhetisch und philosophisch orientierten, später politisch betonten Ausrichtung. Auf die Lyrik der Frühexpressionisten (Georg Trakl u. a.) folgten die protestierende Song - Ballade (Klabund (Deckname von Alfred Henschke), Joachim Ringelnatz (Pseudonym für Hans Bötticher)), expressionistische Dramen (Ernst Barlach, Franz Werfel), Romane (Heinrich Mann) und Erzählungen (Gottfried Benn, Franz Kafka).

Bedeutung für die weitere Entwicklung von Kunst und Literatur erlangte der 1916 entstandene Dadaismus, gegründet von der Züricher Gruppe (Hans Arp, Hugo Ball, Richard Huelsenbeck, Tristan Tzara (Pseudonym von Samuel Rosenstock)) und als Bewegung „Merz“ 1918 von Kurt Schwitters.

In den 20er Jahren entwickelte sich einerseits im Anschluss an die Psychoanalyse Sigmund Freuds der *Surrealismus*, dem sich in Deutschland Arp, Trakl, Tzara und andere zuwandten, andererseits die von der Neuen Sachlichkeit geprägte Literatur (Thomas Mann, Alfred Döblin, Erich-Maria Remarque, Franz Werfel, Robert Musil, u. a.), der *magische Realismus* (Hans Henny Jahnn) und als Antwort auf die Ausbeutung und auf den Krieg eine *proletarisch-revolutionäre Literatur* (Bertolt Brecht, Johannes Robert Becher, Lion Feuchtwanger, Anna Seghers (Pseudonym von Netty Radványi), Kurt Tucholski u. a.).



Abb. 11.0.20 Szene aus dem „Leben des Galilei“ von Bertolt Brecht. Galilei am Fernrohr (DDR 1988); Kurt Tucholski

Die Ideologie der Nationalsozialisten und ihre Maßnahmen zwangen viele deutschsprachige Autoren, vornehmlich solche jüdischer Abstammung, zur Emigration, darunter Brecht, Döblin, von Horvath, Heinrich Mann, Thomas Mann, Seghers, Werfel, Arnold Zweig (1887–1968), Stefan Zweig (1881–1942). Die von ihnen im Ausland und von anderen Autoren (Hermann Hesse, E. Jünger u. a.) publizierten Werke sind der Darstellung eines neuen Wirklichkeits- und Weltbildes, politischen und wissenschaftlichen Utopien, auch dem Rückgriff auf Mythisch-Archaisches (Th. Mann) gewidmet. In der kurzlebigen von den Nazis und ihrer Rassentheorie genährten „volkshaften Dichtung“ wurden „Germanentum“, „Ahnenwerte“, „Bodenständiges“ und heroisch-soldatische Leistungen als Opposition zu „dekadenter“ und „artfremder“ Literatur verherrlicht (Hans Friedrich Blunck (1888–1961), Hans Grimm (1875–1959) u. a.).

Die deutschsprachige Literatur nach 1945 ist durch die Einflüsse ausländischer Werke und eine Vielfalt der Richtungen gekennzeichnet. Nur wenige Autoren erfuhren in beiden 1949 gegründeten Staaten BRD und DDR Anerkennung und Verbreitung, z. B. Bertolt Brecht und Heinrich Böll (1917–1985).

Die Literatur in der DDR wurde vorwiegend von heimgekehrten Emigranten (Becher, Brecht, Bredel, Renn, Seghers, Uhse, A. Zweig) getragen und setzte die proletarisch-revolutionäre Tradition mit Schriften zum sozialistischen Realismus fort.

In Österreich bildeten Ilse Aichinger, Ingeborg Bachmann, Hans Weigel u. a. eine neue Autorengeneration, aus der Schweiz erlangten die Dramen und Romane von Friedrich Dürrenmatt und Max Frisch internationale Geltung.

Expressionismus und Surrealismus, Psychoanalyse, Existenzphilosophie und Marxismus gaben starke Impulse für neue Stilrichtungen, Nonkonfor-



Abb. 11.0.21 Eingang zum Thomas-Mann-Museum. In dem zur Künstlerkolonie (Lovis Corinth, Max Pechstein, Heinz Rühmann) gewordenen Fischerdorf Nidden auf der Kurischen Nehrung baute Thomas Mann1930 sein Sommerhaus, verbrachte hier die drei Sommer von 1930 bis 1932 und schrieb an *Joseph und seine Brüder*. Das Haus dient jetzt als Museum und Kulturzentrum [Foto Alten]

mismus führte zu radikaler Zeit- und Sozialkritik und satirischem Moralismus – Böll, Frisch, Dürrenmatt, Günter Grass, Thure Johnson, Martin Walser, Peter Weiss, Christa Wolf, Ingeborg Bachmann, Peter Handke, Gerhard Zwerenz seien hier als Repräsentanten genannt.

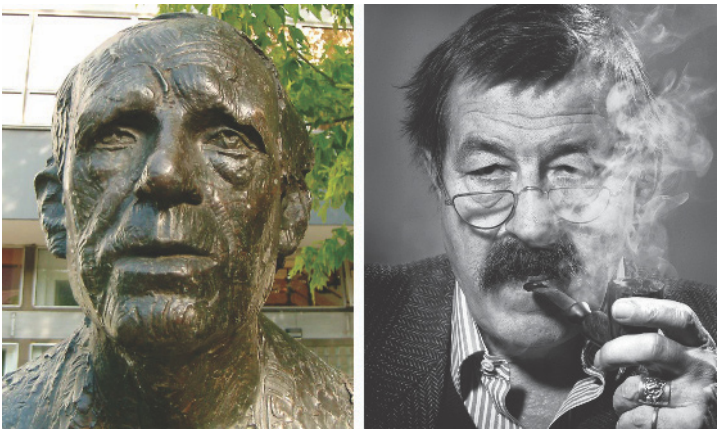


Abb. 11.0.22 Heinrich Böll, Denkmal in Berlin von Wieland Förster; Günter Grass [Foto Udo Hesse]

Die Lyrik fand als „konkrete Poesie“ (Helmut Heißenbüttel, *1924) als „linguistische Poesie“ (Max Bense, 1910–1990) und in Gestalt von Lautgedichten, Textmontagen, Dialekttexten und Chansons der „Wiener Gruppe“ neue Formen, die zum Teil von „Verbaltechnikern“ auf der Grundlage mathematisch-informationstheoretischer Strukturen kombiniert wurden.

Daneben entstand Lyrik als „politische Lyrik“ (Erich Kästner, Wolf Biermann, Hans Magnus Enzensberger, Günter Grass, u. a.), als Natur- und Landschaftslyrik (Karl Krolow) u. a., als religiöse oder philosophische Aussage (Ingeborg Bachmann, Marie Luise Kaschnitz) und als Sprachspiel und Sprachkombination. Das schon 1926 erfundene Hörspiel erfuhr nach 1950 starken Aufschwung – Böll, Dürrenmatt, Frisch, Siegfried Lenz und viele andere traten damit hervor.

Im deutschen Drama wurden Krieg und Gefangenschaft, Bekämpfung des Faschismus, Wiederaufbau und Atomtod aktualisiert, später Stoffe von grundsätzlichem historischem und politischem Interesse. Als Gegenstück zu der vom Dadaismus vorgeprägten „Unsinns-Dichtung“ (Nonsense Poetry) reihen Handkes „Sprechstücke“ realistische Aussagen, Schabloneneinsätze, Zitate und grammatische Strukturen nebeneinander, um Sprache nicht nur als Ordnung sondern auch als Dilemma zu zeigen.

Das „absurde Theater“ ist in Deutschland mehr durch die Werke des Iren Samuel Beckett und des aus Rumänien stammenden französischen Dramatikers Eugéne Ionesco als durch eigene Stücke (G. Grass und Wolfgang Hildesheimer) bekannt geworden.

11.0.2 Entwicklung der Medien (H. Wesemüller-Kock)

Die industrialisierte Welt des 20. Jahrhunderts wird an der Schwelle zum 21. Jh. als Informationsgesellschaft bezeichnet. Gravierende Umwälzungen haben diese Entwicklung in einem Jahrhundert hervorgebracht.

Waren zu Beginn des 20. Jahrhunderts Bücher, Zeitschriften und Zeitungen, Malerei und Musik als Medien dominant – der Film begann erst, sich sein Publikum zu erobern – so veränderte sich das zunächst mit dem Radio. Dieses Medium wurde zur Information über Ereignisse und für Musikverbreitung genutzt, aber auch – und besonders während kriegerischer Auseinandersetzungen – für propagandistische Zwecke. Ebenso erging es dem Fernsehen, das seit 1936 technisch funktionierte, aber erst nach dem zweiten Weltkrieg weite Verbreitung erfuhr. Stehende und bewegte Bilder, Theater und Musik wurden im Film vereint. Mit der für jüngere Menschen offensichtlich attraktiver erscheinenden alternativen Musik zu den traditionellen Musikabenden – seit den fünfziger Jahren Rockmusik, seit 1963 Beatmusik als Teil der bis heute währenden Popmusik, Techno zum Ende des Jahrhunderts (um nur einige zu nennen) – gingen parallel gesellschaftliche Veränderungen in den Industrienationen einher.

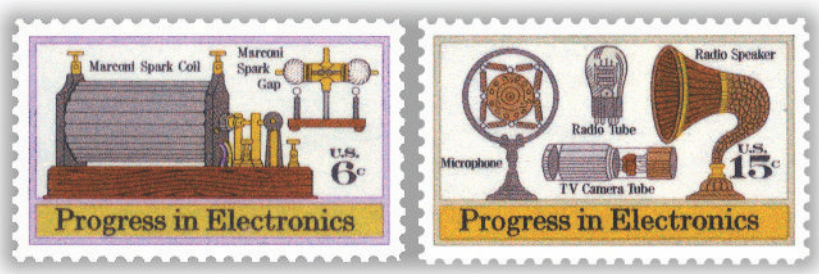


Abb. 11.0.23 F. Braun und G. Marconi erhielten 1909 den Nobelpreis für Physik für ihre Verdienste bei der Entwicklung der drahtlosen Telegraphie. Aus der drahtlosen Telegraphie entwickelten sich später Radio und Fernsehen; z. B. der Name des früheren Konzerns „Telefunken“ stammt aus der Zeit und weist auf diesen Ursprung hin (USA 1973)

Im Bildungsbereich entstanden neben neuen Hochschulen in einigen Ländern parallel zu den traditionellen Universitäten auch Fernuniversitäten, die zunächst auf Printmedien setzten, sich gegen Ende des 20. Jahrhunderts aber zunehmend des Internets bedienten.

Große Umwälzungen bestanden und bestehen noch heute z. B. im Bereich des Handels. Als der Heimcomputer (Personal-Computer) Anfang der achtziger Jahre seinen Siegeszug in den Haushalten antrat, ist sicher nicht jedem klar geworden, dass mit den Computern auch Mathematik in Form von Software in die Haushalte kam. Und für die Volkswirtschaften waren gravierende Umwälzungen mit der Ausbreitung des World Wide Web (www) und digitalen Medien verbunden.

Die Anwendung des Internet ist für viele Menschen inzwischen selbstverständlich geworden. Es ersetzt in weiten Bereichen den schriftlichen Postverkehr und hat einen neuen Marktplatz für Informations- und Warenaustausch geschaffen. Bis heute gibt es tiefgreifende Auswirkungen auf traditionelle Formen des Handels und der Dienstleistungen. Die Medienwelt selbst ist davon auch betroffen. Da dank mathematischer Algorithmen inzwischen auch Musik und dreidimensionale Bilder im Rechner erstellt und versandt werden können, Musik, Filme, Bilder, Texte und Computerspiele über das Netz abgerufen werden können, Nachrichten und andere Informationen zu jeder Zeit an fast jedem Ort verfügbar sind, hat sich am Übergang zum 21. Jahrhundert eine globale Medienkultur herausgebildet. Die bis in die zweite Häfte des 20. Jahrhunderts dominanten Printmedien haben ihre Vorrangstellung zunehmend verloren.

Man darf gespannt sein, welche Entwicklung unsere Kultur – und damit auch die der durch sie geförderten und sie ermöglichenden Wissenschaften – im 21. Jahrhundert nehmen wird.

11.0.3 Zur Historiographie der Mathematik des 20. Jahrhunderts

In der Überschrift zu diesem Kapitel soll das Wort „Globalisierung“ betonen, dass die „globale Mathematik“ in einem historischen Prozess nach und nach entstanden ist,

- angeregt von Impulsen, die von Persönlichkeiten oder mathematischen Schulen ausgingen,
- durch das sich gegenseitig befruchtende Wirken nationaler Strömungen,
- durch übergreifende Problemstellungen zwischen „reiner“ und „angewandter“ Mathematik,
- durch Anforderungen im militärischen und ökonomischen Bereich,
- begünstigt durch ungeheuer erleichterte Möglichkeiten der Kommunikation in der Nachrichtenübermittlung und im Publikationswesen,
- durch gezielten Austausch von Wissenschaftlern.

Der Prozess der Globalisierung hat naturgemäß kein „greifbares“ Anfangsdatum, ist aber schon im 19. Jahrhundert da und dort ausgelöst worden. Ein Ende ist nicht abzusehen, wohl auch kaum zu erwarten.

Jedenfalls aber ist die Globalisierung am Beginn des 21. Jahrhunderts so weit fortgeschritten, dass Symbolik, Formelschreibweise, Begriffsbildung (im Rahmen der Spracheigentümlichkeiten) auf dem ganzen Erdball im wesentlichen einheitlich gehandhabt werden. Auch die Ziele dieser Entwicklung sind weitgehend ähnlich. Mit anderen Worten: Mathematische Schulen, die Geschichte einzelner Disziplinen, der aus und zwischen ihnen entstandenen neuen Disziplinen und deren Verflechtungen, nationale Besonderheiten, institutionelle Errungenschaften, Wechselwirkungen mit Politik und Ökonomie und andere Elemente bilden fallweise Facetten im Prozess der Globalisierung. Deshalb ist eine nach nur einem Prinzip strukturierte Darstellung – etwa chronologisch oder nach Disziplinen geordnet – in diesem Kapitel nicht sinnvoll.

Die Geschichte der Mathematik des 20. Jahrhunderts, zumal die der letzten Jahrzehnte, ist noch nicht voll erschlossen. Viele Tatsachen und Ergebnisse, sie mögen sogar bekannt sein, sind aber noch nicht in ihren Kontext eingeordnet oder noch nicht in ihrer Bedeutung erkannt worden oder werden überschätzt. Manches bleibt auch zunächst verborgen, u. a. wegen der Verflechtungen mit Ökonomie und Militärwesen.

Es kann in diesem Buch nicht Sinn und Zweck sein, gegen die beiden umfangreichen, von Jean-Paul Pier herausgegebenen Darstellungen der Entwicklung der Mathematik in den Zeiträumen 1900 bis 1950 und 1950 bis 2000 in Konkurrenz treten zu wollen, zumal dort andere Ziele verfolgt werden, ganz abgesehen vom Umfang [Pier 1994], [Pier 2000].

Die Beiträge in diesen Bänden sind von zeitgenössischen Mathematikern, von Spezialisten ihrer Disziplin, für Mathematiker geschrieben worden, unter voller Ausnutzung der mathematischen Formelsprache. Es ist äußerst verdienstvoll und liegt wohl zugleich in der Natur der Sache, dass sich rezente

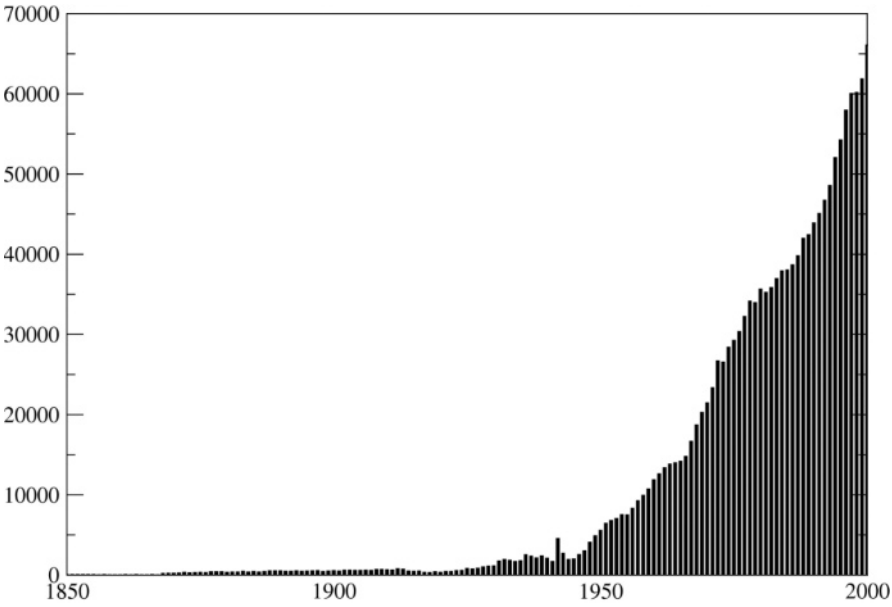


Abb. 11.0.24 Diagramm zum rasanten Anstieg der mathematischen Publikationen nach dem Zweiten Weltkrieg. Aufgrund der im Zentralblatt für Mathematik aufgeführten Artikel erstellt von [Kaldewey]

Mathematiker der Historiographie ihrer jeweiligen Disziplin angenommen haben. Dabei unterscheiden sich die beiden Bände darin – auch das dürfte in der Natur der Sache liegen –, dass im ersten Band in relativ wenigen, dafür aber ausführlichen Beiträgen die Geschichte ganzer, großer Teilgebiete der Mathematik dargestellt wird, während im zweiten Band eine Fülle spezieller Problemkreise aus der Forschung in den letzten Jahrzehnten behandelt wird.

Das Werk von 1994 gibt einen Überblick über einige mathematische Forschungsgebiete, die – aus der Sicht vom Ende des 20. Jahrhunderts – in seiner ersten Hälfte im Vordergrund standen. Es handelt sich um einen Sammelband von (erweiterten) Referaten, die auf einem von der Luxemburgischen Mathematischen Gesellschaft im Jahre 1992 veranstalteten Symposion gehalten bzw. vorbereitet worden sind:

Jean Dieudonné:	Une brève histoire de la topologie
Joseph L. Doob:	The Development of Rigor in Mathematical Probability, (1900–1950)
Gaetano Fichera:	Vito Volterra and the birth of functional analysis
Marcel Guillaume:	Le Logique Mathématique en sa jeunesse
Walter K. Hayman:	Function Theory 1900–1950
Christian Houzel:	La préhistoire des conjectures de Weil
Jean-Pierre Kahane:	Des séries de Taylor au mouvement brownien, avec un aperçu sur le retour

André Lichnerowicz:	Géométrie et relativité
Jean Mawhin:	Boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations: from successive approximations to topology
Louis Nirenberg:	Partial Differential Equations in the First Half of the Century
Jean-Paul Pier:	Intégration et mesure 1900–1950
Wolfgang Schwarz:	Some Remarks on the History of the Prime Number Theory from 1896 to 1960

Vorausgeschickt ist eine ausführliche Auflistung von Ergebnissen („Guidelines“ 1900–1950) die Jahr für Jahr, 1900, 1901, ..., 1950 erzielt worden sind, sehr speziell, aber sehr präzise.

Der zweite von Pier herausgegebene, umfangreiche Band (1372 Seiten) enthält eine äußerst inhaltsreiche Sammlung von 35 Artikeln zur Entwicklung der Mathematik in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts im Zusammenhang mit dem für 2000 ausgerufenen Internationalen Jahr der Mathematik. Die große Zahl der Artikel verbietet ihre Auflistung in diesem Buch. Sie zeigt einerseits die rasante, geradezu exponentielle Ausweitung der Mathematik in den letzten Jahrzehnten: 1948 wurden in den Mathematical Reviews 4472 Artikel und Bücher rezensiert, 1988 waren es bereits 45 954! Inzwischen werden jährlich mehr als 100 000 Artikel produziert, d. h. die Zahl der Artikel hat sich durchschnittlich alle 12 Jahre verdoppelt. Entsprechend ist auch die Zahl der Mathematiker und der Mathematiklehrer gewachsen.

Andererseits offenbart sich in der in 35 Artikeln beschriebenen Entwicklung seit 1950 die Entstehung vieler neuer Teilgebiete der Mathematik, ihre Aufspaltung und Zersplitterung in Gebiete, die nur noch Spezialisten zugänglich sind, zugleich aber auch die Verschränkung und Verflechtung von Disziplinen, die früher mehr oder weniger isoliert betrieben wurden. War 1959 „Struktur“ ein Schlüsselwort, so war es 1990 der Begriff „Interaktion“. Charakterisierten in der ersten Hälfte des 20. Jhs. die Vorsilben fast, quasi, pseudo (z. B. fast überall, fastperiodisch, quasikompakt, pseudokonvex) die Anknüpfung an bekannte Begriffe oder Gebiete, so kennzeichnet die Vorsilbe „nicht“ die Abwendung vom Herkömmlichen bzw. seine völlig neue Sicht: Nichtstandardanalysis, nichttopologisch, nichtkommutativ, nichtorientierbar, nichtstetig sind Beispiele dafür. Affektive Begriffe und Zusätze wie z. B. Katastrophentheorie, exotische Sphären, sporadische Gruppen, fraktale Geometrie, deterministisches Chaos, Theorie der Garben, der Bündel, der Zöpfe oder der Knoten erfuhren auch außerhalb der Mathematik Resonanz, führten aber auch zu Mißverständnissen. Schließlich brachte die bei uns Informatik genannte Computer Science eine rasante Entwicklung der sog. diskreten Mathematik, wandelte die Disziplin Mathematische Logik in Theoretische Informatik und verwendete Wörter wie Sprache, Automat, Programm, Komplexität in neuer Bedeutung.



Abb. 11.0.25 Chaos und Fraktale: Erste Schritte zur Enstehung der Hilbert-Kurve, eines Baumfraktals, des Sierpiński-Dreiecks, eines Chaos-Spiels, der von Koch'schen Kurve, des Cantorschen Diskontinuums (Cantorsche „Wischmenge") (Macao, China 2005)

Vieles davon wird im zweiten Band von Pier beschrieben, anderes bleibt unerwähnt, manches wird bewertet, anderes nicht. Dort wird dem Leser die rasante Entwicklung der abstrakten Mathematik buchstäblich vor Augen geführt, und es wird auch deutlich, dass nur Spezialisten auf wenigen Teilgebieten imstande sind, den Inhalt dieser Artikel begleitend zu vertiefen. All dies zeigt, dass die Geschichte der Mathematik seit 1950 derzeit nur subjektiv und selektiv, also lückenhaft und ohne Bewertung im einzelnen dargestellt werden kann.

In einem Interview äußert sich Fr. Hirzebruch (S. 1232) über die Aufgaben der Historiographie der Mathematik. Die ebenfalls angefügten „Elements of a Bibliography on Contemporary History of Mathematics“ enthalten weit über 100 Titel, in denen spezielle Aspekte und Ergebnisse aus diesem Zeitraum beschrieben und namhafte Mathematiker gewürdigt werden.

Auch die *Encyclopædia Britannica* enthält Artikel zur Geschichte der Mathematik. Der Beitrag „Mathematics in the 19th and 20th centuries“ stammt von dem bekannten Mathematikhistoriker Jeremy J. Gray.

Bezüglich der Entwicklung der reinen Mathematik werden darin als Merkmale jener Zeit hervorgehoben: die Axiomatisierung der algebraischen Strukturen (Steinitz: Körpertheorie), die Zahlentheorie, die algebraische Geometrie (Oscar Zariski (1899–1986)), die verantwortlich war für die topologischen Methoden von Poincaré und Lefschetz. André Weil (1906–1998) veröffentlichte 1946 seine *Grundlagen der algebraischen Geometrie*. Die Riemannsche Hypothese rückte ins Zentrum des internationalen Interesses.

Die in den 30er Jahren gegründete Bourbaki-Gruppe wurde zur Schlüsselfigur für die sog. Strukturmathematik. Die algebraische Geometrie wurde axiomatisiert durch das Bourbaki-Mitglied Samuel Eilenberg; die Formierung der Kategorien-Theorie erfolgte durch Norman Steenrod und Saunders MacLane. Alexander Grothendieck, ebenfalls ein Mitglied der Bourbaki-Gruppe, schuf eine neue Auffassung der algebraischen Geometrie. Die Leistungen von Gerd Faltings und Gerhard Frey mit deren Folgerungen werden gewürdigt, auch die von Andrew Wiles, die mit dem Beweis der Shimura-Taniyama-Weil-Vermutungen schließlich in den Beweis des Großen Fermatschen Satzes mündeten.

Durch Élie-Joseph Cartan entstanden in den 10er Jahren die sog. klassischen komplexen Lie-Algebren und die Lie-Gruppen. Die Leistungen von Hermann Weyl sind hervorzuheben, insbesondere in der Differentialgeometrie. Sein Versuch, Gravitationstheorie und Feldtheorie zu vereinen, wurde von Einstein zwar kritisiert, zeigte aber, wie die Theorie der Lieschen Gruppen wesentlich in die Physik eingreift.

Die Theorie der Beobachtungen, die erfolgreiche Behandlung der sog. starken Wechselwirkung durch die amerikanischen Gelehrten Chen Ning Yang und Robert L. Mills, die Kohomologietheorie von Michael Atiyah und deren Anwendung auf Differentialgleichungen erschlossen weitere Gebiete der Mathematischen Physik. Soviel zum Beitrag von Gray in der [Enzyklopædia Britannica 1994–2002].

Empfehlenswert ist auch die eher erzählende Darstellung der Entwicklung von Mathematik und Naturwissenschaften von 1900 bis 1970 in [Marcorini 1988]. Die Darlegungen betreffen jeweils die einzelnen Dekaden.

Die „Gedanken zur Zukunft der Mathematik“ von E. Zeidler richten im abschließenden Kapitel 12 dieses Buches den Blick eindringlich auf die Mathematik unserer Zeit und ihre weitere Entwicklung.

Wie man sieht, stößt jeder Historiker der Mathematik, der sich dem 20. Jahrhundert und insbesondere der 2. Hälfte des Jahrhunderts zuwendet, naturgemäß auf erhebliche Schwierigkeiten. Sowenig ein Einzelner der rezenten Mathematiker imstande ist, alle Gebiete der in stürmischer Entwicklung befindlichen Mathematik im Detail zu beherrschen und sich in seiner Forschungsarbeit spezialisieren muss, so wenig kann die noch nicht in Gänze aufgearbeitete Geschichte der Mathematik des 20. Jahrhunderts von einer Einzelperson mit sicheren historischen Bewertungen dargestellt werden. Für diese Aufgabe der Zukunft wäre eine Gruppe von Historikern vonnöten, die sich ihrerseits aktiv schon der Mathematik selbst gewidmet hatten.

Der Autor dieser Darstellung verweist für sein Vorgehen auf die von ihm gewählte Darstellungsweise mittels der „Erkundungen“, beschrieben in der Einleitung von Band 1 von *6000 Jahre Mathematik* [Wußing 2008, S. 2f.]. Das bedeutet: Verfolgen der Grundideen bei Definitionen und Methoden unter weitgehendem Verzicht auf Formeln und den technischen Apparat, Bruch mit der strengen Chronologie zugunsten übergreifender regionaler und sachlicher Zusammenhänge, gelegentlich subjektive Auswahl von Personen und mathematischer Thematik, Beachtung und Betonung des kulturgeschichtlichen und politischen Hintergrundes.

11.0.4 Mathematik und Mathematiker im 20. Jahrhundert

Am Ende des 19. und zu Beginn der ersten Jahrzehnte des 20. Jahrhunderts bestimmten noch die europäischen Mathematiker weitgehend die Entwicklung der Mathematik und der ihr nahe stehenden Gebiete, an herausragender Stelle Frankreich und Deutschland. Aber auch Italien, England, Norwegen, Schweden, Ungarn, Russland und Polen brachten hervorragende Mathematiker hervor. Die USA waren im Begriff, zur Spitze vorzustoßen, anfangs angelehnt an die europäische Entwicklung.

Die beigegebene Namensliste herausragender Mathematiker (natürlich eine subjektive Auswahl) soll eine Vorstellung von der Phalanx einer Armee von Mathematikern aus aller Welt vermitteln, die einen Umschwung der Mathematik nach Inhalt, Umfang und Methode herbeiführte und deren Globalisierung einleitete.

Alexandrow, P. S. (1896–1982)
Artin, E. (1898–1962)
Banach, St. (1892–1945)
Betti, E. (1823–1892)
Bianchi, L. (1856–1928)
Birkhoff, G. (1911–1996)
Brill, A. von (1842–1935)
Brioschi, F. (1824–1897)
Burkhardt, H. (1861–1914)
Burnside, W. (1852–1927)
Cantor, G. (1845–1918)
Cartan, É. J. (1869–1951)
Casorati, F. (1835–1890)
Castelnuovo, G. (1865–1952)
Cayley, A. (1821–1895)
Chevalley, C. (1909–1984)
Christoffel, E. B. (1829–1900)
Courant, R. (1888–1972)

Cremona, L. (1830 –1903)
Darboux, G. (1842–1917)
Dedekind, R. (1831–1916)
Dickson, L. E. (1874–1954)
Dieudonné, J.-A. (1906–1992)
Dini, U. (1845–1918)
Du Bois Reymond, P. (1831–1889)
Dyck, W. von (1856–1934)
Elliott, E. B. (1851–1937)
Engel, F. (1861–1941)
Enriques, F. (1871–1946)
Fraenkel, A. (1891–1965)
Fricke, R. (1861–1930)
Frobenius, G. F. (1849–1917)
Fuchs, L. (1833–1902)
Gödel, K. (1906–1978)
Gordan, P. (1837–1912)
Halphen, G. (1844–1889)
Harnack, A. (1851–1888)
Heine, E. (1821–1881)
Hensel, K. (1861–1941)
Hermite, Ch. (1822–1901)
Hilbert, D. (1862–1943)
Hölder, O. (1859–1937)
Huntington, E. V. (1874–1952)
Hurwitz, A. (1859–1919)
Jordan, C. (1838–1922)
Killing, W. (1847–1923)
Klein, F. (1849–1925)
Kowalewskaja, S. W. (1850–1891)
Landau, E. (1877–1938)
Lasker, E. (1868–1941)
Lie, S. (1842–1899)
Lindemann, C. L. von (1852–1939)
Lipschitz, R. (1832–1903)
Markow, A. A. (1856–1922)
Meyer, F. W. F. (1856–1934)
Miller, G. A. (1863–1951)
Minkowski, H. (1864–1909)
Mittag-Leffler, G. (1846–1927)
Molien, T. (1861–1941)
Moore, E. H. (1862–1932)
Netto, E. (1846–1919)
Noether, E. (1882–1935)
Noether, M. (1844–1921)
Painlevé, P. (1863–1933)
Pasch, M. (1843–1930)
Peano, G. (1858–1932)
Perron, O. (1880–1975)
Picard, É. (1856–1941)
Poincaré, J.-H. (1854–1912)
Pringsheim, A. (1850–1941)
Riesz, F. (1880–1956)
Russell, B. (1872–1970)
Schlesinger, L. (1864–1933)
Schönflies, A. (1853–1928)
Schottky, F. (1851–1935)
Schur, F. (1856–1932)
Schur, I. (1875–1941)
Schwarz, H. A. (1843–1921)
Segre, C. (1863–1924)
Severi, F. (1879–1961)
Speiser, A. (1885–1970)
Steinitz, E. (1871–1928)
Stickelberger, L. (1850–1936)
Stolz, O. (1842–1905)
Study, E. (1862–1930)
Turnbull, H. W. (1885–1961)
Veblen, O. (1880–1960)
Venn, J. (1834–1923)
Weber, H. (1842–1913)
Wedderburn, J. H. M. (1882–1948)
Weierstraß, K. (1815–1897)
Weyl. H. (1885–1955)
Whitehead, A. N. (1861–1947)

Auf eine entsprechende Liste der später im 20. Jh. wirkenden Mathematiker wird hier verzichtet: sie wäre zu umfangreich.

Um die Wende vom 19. zum 20. Jahrhundert bot sich die Mathematik als eine in allen fortgeschrittenen Staaten der Erde hochentwickelte und hochgeschätzte wissenschaftliche Disziplin dar.

Rasch war die Zahl der Mathematiker und der die Mathematik benutzenden Wissenschaftler gestiegen; sie verdoppelte sich etwa alle 10 bis 15 Jahre. Im Jahre 1962 haben mehr als 4000 verschiedene Autoren Einschlägiges publiziert; Mitte der 60er Jahre wurden auf der Erde ungefähr 5000 mathematische Forschungsarbeiten pro Jahr referiert. Noch mehr Arbeiten wurden gedruckt oder anders verbreitet. Dazu muß man jene Ergebnisse rechnen, die aus Gründen militärischer oder ökonomischer Geheimhaltung unveröffentlicht bleiben müssen. Hinzu kommen ferner die Darstellungen des bekannten Stoffes in Lehrbüchern, Lehrbriefen, Schulbüchern, Fachzeitschriften für Lehrer, Ingenieure, Naturwissenschaftler aller Fachrichtungen und Ökonomen.

Seit dem Ende des 19. Jahrhunderts gab es nationale, internationale und fachspezifische Gesellschaften und Vereine. Seit 1897 werden internationale Kongresse durchgeführt. Noch vor der Jahrhundertwende begann die Herausgabe der großangelegten vielbändigen *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*. Eine Gruppe internationaler Autoren stellte dort nicht nur die reine Mathematik dar, sondern auch deren Anwendungen auf Mechanik, Physik, Astronomie, Geodäsie und verschiedene Zweige der Chemie.

Die tiefgreifenden gesellschaftlichen Umwälzungen des 20. Jahrhunderts bewirkten eine deutliche Verschiebung der Zentren mathematischer Wissenschaften (vgl. z. B. [Chayut 2006]).

Während der ersten anderthalb Jahrzehnte des 20. Jahrhunderts bestanden nach Zahl und Leistungsstärke die bedeutendsten Stätten der Mathematik in Europa und da wieder in Frankreich und Deutschland. Die Forscher in den USA orientierten sich anfangs noch weitgehend an ihren europäischen Lehrern. Die meisten Länder Asiens, Afrikas und Lateinamerikas standen in kolonialer oder ökonomischer Abhängigkeit und konnten damals kaum aktiv Anteil an der Entwicklung der Weltwissenschaft nehmen.

Der erste Weltkrieg brachte chauvinistische Züge hervor, auch in Deutschland. Das berüchtigte Dokument *An die Kulturwelt* deutscher Intellektueller aus dem Jahre 1914 sollte die deutsche Kriegsführung auch gegen Zivilisten rechtfertigen; auch Felix Klein unterzeichnete. Einige verweigerten sich jedoch, darunter Hilbert. Als Folge des Ersten Weltkrieges zerbrach die internationale Organisation der Mathematik. Deutsche Mathematiker wurden zu den ersten Mathematikerkongressen der Nachkriegszeit nicht eingeladen. Die Vorrangstellung der Mathematik in Frankreich und Deutschland ging verloren.

Während der Zeit des Faschismus in Deutschland, Italien, Ungarn und anderen Ländern erlebte auch die Mathematik neben anderen wissenschaftlichen Disziplinen einen erheblichen Aderlass an herausragenden Gelehrten, teils aus rassistischen, teils aus politischen Gründen. Man denke an Albert Einstein, Emmy Noether, Hermann Weyl, John von Neumann, Richard von

Mises, Richard Courant, Enrico Fermi, Otto Neugebauer, Alfred Tarski, Kurt Gödel, Paul Bernays, Max Born, Niels Bohr und viele andere. Diese verstärkten als Immigranten nicht unerheblich das ohnedies im Aufschwung befindliche wissenschaftliche Potential der USA. Auch der Bau der Atombombe hängt eng mit der Zuwanderung europäischer Gelehrter zusammen.

Indem man an erfolgreiche russische Schulen anknüpfte, entstand mit der Sowjetunion neben den USA zwischen den beiden Weltkriegen ein zweites Hauptzentrum für Mathematik, trotz äußerst schwieriger Lebensverhältnisse nach Krieg und Bürgerkrieg, trotz teilweise großer ideologischer Unterschiede, bei allerdings großzügiger Förderung einiger Mathematiker. So vermochten sowjetische Mathematiker, nicht nur russischer Nationalität, an der Spitze der internationalen Mathematik mitzuwirken (Näheres in [Sinai 2003]).

11.0.5 Ein Beispiel für die Internationalisierung der Mathematik: Die Rockefeller Foundation

Die Internationalisierung der Mathematik zwischen den beiden Weltkriegen kann und soll hier nur exemplarisch dargestellt werden, aber mit vielfältigen Aspekten an Hand der Geschichte der Rockefeller Foundation, zumal hierfür intensive Quellenstudien vorliegen (vgl. [Siegmund-Schultze 2001] mit ausführlichen Literaturangaben und Originalquellen).

In der Einführung beschreibt der Autor das von ihm behandelte Grundanliegen, das auch schon im Untertitel *Documents and Studies for the Social History of Mathematics in the 20th Century* seines Werkes *Rockefeller and the Internationalization of Mathematics Between the Two World Wars* zum Ausdruck kommt:

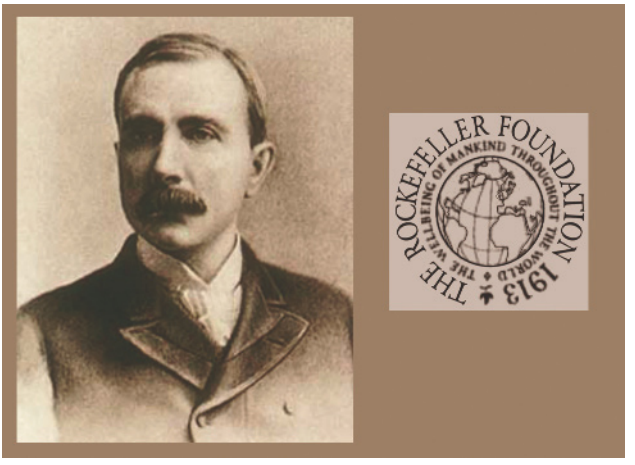


Abb. 11.0.26 John D. Rockefeller, Signet der Rockefeller Foundation

"The two levels – the interest of science, as represented by mathematics, and the interest of philanthropic foundations, as represented by Rockefeller – will be dealt with ... as extensively as needed for the purposes of this investigation and as separately from each other as possible. The final section of the introduction will try to find the points of contact between the international strategies of the scientists on the one hand and of the philanthropists on the other ...". Der historischen Redlichkeit wegen fügt der Autor eine Fußnote an: *"Indeed this separation sometimes may look somewhat artificial, given that many scientists had political motives, and likewise many philanthropists genuine scientific interests."* [Siegmund-Schultze 2001, S. 1]

Auf einige Aspekte dieses Themenkreises sei hingewiesen: Da ist zunächst die Anfangsphase, die geprägt ist durch schrittweise, vorsichtige Annäherung der amerikanischen Seite an die europäischen Mathematiker; dabei stand zunächst die französische Mathematik in höherem Ansehen als die deutsche.

Nach einigen administrativen Tätigkeiten, u. a. in der Rockefeller Sanitary Commission übernahm Wickliffe Rose (1862–1931) 1923 die Präsidentschaft des „General Education Board". Zu dieser auf die Tätigkeit innerhalb der USA beschränkten Organisation trat ein von Rockefeller initiiertes „International Education Board" (IEB). Im April 1923 wurde ein *Scheme for the Promotion of Science on an International Scale* verfasst, das Physik, Chemie und Biologie betonte. Schon 1925/1926 wurde Hilfe bei Migration erwogen, wenn auch noch vage. Parallel dazu wurde seit 1919, also unmittelbar nach Kriegsende, ein reichhaltiger Fond für nationale Forschung gestiftet. Und schließlich, innerhalb der IEB, wurde ein nationales fellowship program „National Research Council" (NRC) aufgelegt. Dies wurde später 1935 als von größtem Einfluß auf die Herausbildung einer amerikanischen mathematischen Schule gewürdigt. Ursprünglich war NRC gedacht als Unterstützung für Aufenthalte von USA-Bürgern im Ausland, später gab es fellowships auch für Ausländer.

Rose reiste 1923/24 nach Europa und besuchte 19 Staaten, einerseits um über das fellowship-programm zu informieren und andererseits um zu erkunden, welches führende europäische Gelehrten seien. Dies sollte sich in den bitteren Jahren nach 1933 als äußerst nützlich erweisen; aber schon vorher gelang es, europäische Gelehrte für Amerika zu gewinnen.

Rose traf Godefrey Harold Hardy (1877–1947), der junge deutsche Mathematiker empfahl, und Hermann Weyl (1885–1955) in Zürich, der den ungarisch-schweizerischen Mathematiker György Pólya (1887–1985) vorschlug. Beide, Hardy und Weyl, haben sich nach 1933, zusammen mit den Brüdern Harald und Niels Bohr, für die vor dem Faschismus geflohenen Gelehrten eingesetzt.

Interessanterweise unternahm parallel dazu Harry Guggenheim 1926 eine Europareise; dies führte 1929 zur Berufung des Aerodynamikers Theodor von Kármán (1881–1963) nach Kalifornien; er war wesentlich beteiligt an der Aufrüstung der amerikanischen Luftwaffe. Bei alledem war Rose äußerst vorsichtig im Umgang mit Deutschland und der Sowjetunion unter den




Abb. 11.0.27 George David Birkhoff, Salomon Lefschetz

politischen Bedingungen der Zeit. Rose war ursprünglich hauptsächlich von den *„atemberaubenden“* (Siegmund-Schultze) Fortschritten der Physik beeindruckt; Begegnungen mit George David Birkhoff (1884–1944) in Harvard und Oswald Veblen (1880–1960) in Princeton rückten schon 1923 auch die Mathematik in den Blickpunkt von Rose. Birkhoff empfahl Mathematiker, die Rose aufsuchen sollte [Siegmund-Schultze 2001, S. 37].

Birkhoff, dessen Ansehen national und international unumstritten war und der als einer der ersten seine Ausbildung ausschließlich in den USA erhalten hatte, reiste seinerseits, zusammen mit seiner Familie, 1925/26 nach Europa und erkannte nach und nach die Möglichkeiten, die in einem engeren Kontakt mit europäischen Mathematikern lagen. Paris, Göttingen und Rom wurden von Birkhoff als die führenden europäischen Zentren der Mathematik eingeordnet. Er benannte die Zahl international bedeutender Mathematiker, geordnet nach Staaten: Deutschland 37, USA 26, Frankreich 22, Italien 22, England 14. Selbstkritisch bemerkte er dabei, anfangs Europa unterschätzt zu haben. Die Denkweise von Birkhoff demonstrieren einige Äußerungen von ihm aus den Jahren 1926/27:

> *“I realize that in doing so I have been less critical than in the case of European mathematicians. It is obvious that Germany, France, England and Italy have more men of the front rank than we have. However I felt myself too near the American situation to do otherwise.”*
> (Zitiert nach [Siegmund-Schultze 2001, S. 50])

Aus den USA benannte Birkhoff folgende Personen, allerdings nur aus den drei amerikanischen Zentren:

Cambridge: G. D. Birkhoff, M. Moore, W. F. Osgood, N. Wiener, A. N. Whitehead
Chicago: G. A. Bliss, L. E. Dickson, E. H. Moore, F. R. Moulton
Princeton: J. Alexander, L. Ph. Eisenhart, S. Lefschetz, O. Veblen

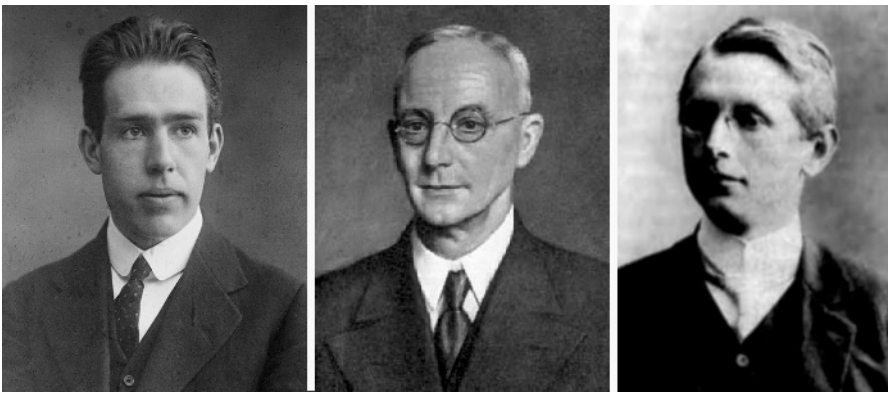


Abb. 11.0.28 Niels Bohr, Hermann Weyl, Edmund T. Whittaker

Bezüglich der europäischen Mathematiker urteilt Birkhoff:

> *"Perhaps it will serve a useful purpose if I mention my impression as to who are the active leaders of European mathematics today. The greatest mathematician of Europe is Hilbert at Göttingen, but he is nearly at the end of his career. Since the War, Hardy of Oxford has perhaps done the most spectacular work. In range and power Hadamard of Paris seems nearest to Hilbert. The principal leaders of European mathematics are: Volterra and Levi-Civita in Italy; Picard, Hadamard, Lebesgue and Borel in France; Hilbert, Landau, Hecke, Carathéodory in Germany; Brouwer in Holland; Weyl in Switzerland; H. Bohr in Denmark, and Hardy and Whittaker in Great Britain. There are other men of almost the same rank."*
> (Zitiert nach [Siegmund-Schultze 2001, S. 51])

In jener ersten Phase erscheint die Kontaktaufnahme – bei unruhigen politischen Verhältnissen als Folge des Ersten Weltkrieges – von doppeltem Nutzen: Die amerikanische Seite erkannte das hohe wissenschaftliche Potential der europäischen Mathematik mit der Möglichkeit von Studienaufenthalten, während andererseits Stipendien (fellowships) für Europäer angebahnt wurden, die sich insbesondere nach 1933 als hilfreich erweisen sollten. Deutschland war (noch) benachteiligt durch die Boykott-Politik der Alliierten.

Augustus Trowbridge (1870–1934) war von 1925 bis 1926 Leiter des Pariser Büros von IEB; es wurde 1928 von der Rockefeller Foundation übernommen. Ihm verdankt man wesentliche Impulse bei der Ausgestaltung des mathematischen Instituts (Neubau des Gebäudes, Literatur) in Göttingen und – was bisher wenig dargestellt wurde – die Gründung und Eröffnung (1928) des „Institut Henri Poincaré" in Paris. Wenngleich auch Aktivitäten in Südamerika erwogen wurden, so stand doch Europa im Vordergrund bis hin zur Klärung grundlegender Fragen der Finanzierung, Art der Zusammenar-



Abb. 11.0.29 Ausschnitt von der Homepage des Institut Henri Poincaré, Paris

beit und organisatorischer Unterschiede zwischen Amerika und europäischen Staaten. Auch antisemitische Strömungen traten in Europa zutage, die von Trowbridge sorgenvoll registriert wurden.

Das Austauschprogramm USA-Europa mit fellowships geschah in drei Kategorien:

(1) Für junge Amerikaner (seit 1919, für Mathematik erst seit 1923), finanziert von Rockefeller, Auslandsaufenthalte
(2) Einjährige Aufenthalte von Europäern in den USA, ca. 500 kamen in den Genuss, unter ihnen Enrico Fermi und Werner Heisenberg. Diese Stipendien wurden bis 1928 vom IEB gewährt.
(3) Danach, also ab 1928, übernahm die Rockefeller Foundation die Vergabe von Stipendien, vorrangig bezüglich der Naturwissenschaften, insbesondere der Molekularbiologie, aber auch Sozialwissenschaften. Diese Tätigkeit überschnitt sich nach 1933 mit der Unterstützung von Gelehrten, die aus Deutschland und aus den von Deutschland besetzten Gebieten stammten.

Die Analyse dient, wie der Autor [Siegmund-Schultze 2001, S. 78] schreibt, zur Untersuchung der Frage, in wie weit das IEB Programm und das Rockefeller Foundation Programm (RF) Entwicklung und Kommunikation im Felde der Mathematik beeinflusst haben. Details über Auswahl der Kandidaten, Registrierung, Ergebnisse, Rückwirkungen auf die Heimatländer, Sponsoren, Sprachkenntnisse und andere Zusammenhänge werden angegeben. Interessant ist die Selbstisolierung der Sowjetunion während der 30er Jahre (mit Ausnahme von P. S. Alexandrow und N. Lusin). Auch die nationalen Interessen sowohl der USA als auch der „entsendenden“ Staaten werden dargestellt. Die Aufstellung [Siegmund-Schultze 2001, S. 104f.] enthält die „Dauer-Emigranten“, die zwischen 1924 und 1945 Fellows der Rockefeller Foundation waren: „Ahlfors, Besicowitsch, Bochner, Coxeter, Fenchel, Féraud, Grandjot, Hlavaty, E. Hopf, H. Hopf, Hurewicz, John, Krbek, Lewy, Magnus, Menger, Nagell, von Neumann, Neyman, Ore, Pólya, Radó, Schoenberg, Struik, Tarski, van der Waerden, Vasilesco, André Weil, Weinstein, Wintner, Zariski, Zygmund.“

Eine Aufstellung aller 130 IEB/RF Fellows in Mathematik bis 1945 findet man als Anhang 15 in [Siegmund-Schultze 2001, S. 288ff.] einschließlich Lebensdaten, Ursprungswirkstätte, Aufenthaltsort in den USA und Dauer. Hier folgt eine Auswahl mit Angabe der jeweiligen Arbeitsgebiete bzw. Leistungen:

B. L. van der Waerden:	*Moderne Algebra*, die „Bibel“ der neueren Algebra
A. Weil:	Einer der Gründer der Bourbaki-Gruppe
L. V. Ahlfors:	Komplexe Funktionentheorie
J. Douglas:	Lösung des Plateauschen Problems
P. S. Alexandrow:	Homologietheorie für kompakte metrische und topologische Räume
H. Hopf/W. Hurewicz:	Pioniere der modernen Topologie
St. Banach:	Mitbegründer der Funktionalanalysis
A. Besicowitsch:	Grundlagen der Theorie der Fraktale
A. Church:	Beiträge zu den logischen Grundlagen der Computer-Wissenschaften
S. Goldstein:	Führender Aerodynamiker
A. S. Householder:	Variationsrechnung, Philosophie
N. Lusin:	Gründer einer Schule der deskriptiven Mengenlehre und der Theorie der reellen Funktionen
John von Neumann:	Universeller Mathematiker
R. Nevanlinna:	Lehre von der Werteverteilung in der Theorie der Funktionen komplexer Variabler
J. Neyman:	Statistik
J. Schauder:	Einer der Begründer der nichtlinearen Funktionalanalysis
C. L. Siegel:	Weitreichende Arbeiten von der Zahlentheorie bis zur Himmelsmechanik
D. J. Struik:	Differentialgeometrie und Historiographie
A. Tarski:	Mathematische Logik
L. Vietoris:	Theorie der homologen Gruppen
W. Youden:	Statistische Auswertung von Experimenten
O. Zariski:	Algebraische Geometrie

Ahlfors und Douglas erhielten 1936 als Erste die von John Charles Fields gestiftete *Internationale Medaille für herausragende Entdeckungen in der Mathematik*, die als „Nobelpreis für Mathematik“ angesehen wird.

Diese Liste und die in 11.0.6 aufgeführte Liste der Preisträger der Fields-Medaille zeigen die enge transatlantische Verflechtung der Mathematik in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts. Einerseits fanden viele Gelehrte eine neue, sichere wissenschaftliche Heimat oder weitreichende wissenschaftliche und persönliche Beziehungen, andererseits wurde das wissenschaftliche Potenzial der USA erheblich gestärkt. Insgesamt ergab sich ein bedeutender Impuls für die Mathematik hinsichtlich ihres Ansehens, ihrer internationalen Struktur und ihrer Nutzung in naturwissenschaftlicher und soziologischer Forschung.

Richard Courant, der ebenfalls in die USA emigriert war und in New York nach Göttinger Vorbild ein noch heute bestehendes „Institut for Mathematics and Mechanics“ gründete, schrieb am 12. Mai 1944 an das „Office of War Information on the Rockefeller Contribution to Science and Mathematics“. Dort heißt es:

> *“Never has private wealth been used for the promotion of science with so much vision and competence of judgement and with so little showmanship as by the Rockefeller Foundation. During the last decades the Foundation has stimulated research in mathematics, physics, biology and medicine to an unbelievable degree. This success was achieved largely because many of the officers of the Foundation are scientists with independent judgement and wide scientific contacts of their own, and also because the Foundation has often acted as a catalyst rather than as a steady supporter.*
>
> *One of the outstanding services was the granting of scholarships to promising young scientists throughout the world, thus making it possible for them to study under the best leadership available in the world. The beneficial effect of this cross-fertilization cannot be praised too highly. Many of the Rockefeller Fellows now have moved up into the ranks of the foremost representatives of their fields.*
>
> *Europe, in particular pre-Nazi Germany, has greatly benefited from the Rockefeller Foundation. For example, the University of Göttingen, always a center of scientific research, received in 1927 a gift of a few hundred thousand dollars, which initiates and stabilized a thorough reorganization of the whole science faculty with the cooperation of government and industry, and established equipment and personnel of this faculty on an unprecedented level. The faculty of the University of Göttingen became the first victim of Nazi persecution.*
>
> *In a similar way, the Rockefeller Foundation made a big Research Institute in physics at Berlin possible, an institute which now has been taken over by the Nazis for war research.*
>
> *During the years of Nazi domination of Europe, the Foundation has cooperated in bringing scientific talent driven from Germany or German-dominated territory to other countries, in particular England, Sweden and the United States, and it can be said that quite a few of those scientists have in the meantime made valuable contributions to peaceful progress and to the war effort on the Allied Side.”*
> [Siegmund-Schultze 2001, S. 286f.]

Ein anderes Charakteristikum der internationalen und nationalen Verflechtungen und des Austausches mathematischer Ergebnisse wird an der Entwicklung mathematischer und mathematisch orientierter Zeitschriften deutlich. Hier kann nur auf vorhandene Literatur verwiesen werden, z. B. [Neuenschwander 1992], [Dauben 1998].

11.0.6 Internationale Mathematikerkongresse – Auszeichnungen und Preise für Mathematik

Ein deutliches Zeichen für die globale Ausbreitung der Mathematik ist die Einführung regelmäßiger internationaler Kongresse für Mathematik.

Einige Mathematikhistoriker rechnen die 400-Jahrfeiern 1892 zur Entdeckung Amerikas durch Columbus in Chicago in die Vorgeschichte der Internationalen Mathematikerkongresse. Nur wenige waren aus Europa gekommen, unter ihnen Felix Klein (1849–1925). Er hielt den Eröffnungsvortrag und schlug die Organisation internationaler Mathematikerkongresse vor. Schließlich, nach regem Gedankenaustausch, wurde der Beschluss gefasst, den Ersten in Zürich durchzuführen.

> *„Es wurde [...] allgemein als zweckmässig bezeichnet, dass der erste Versuch von einem Land ausgehen sollte, das durch seine Lage, seine Verhältnisse und durch seine Tradition zur Anbahnung internationaler Beziehungen besonders gut geeignet sei. So richteten sich denn bald die Blicke nach der Schweiz und insbesondere nach Zürich.“*
> (Zitiert in [Frei/Stammbach 1994, S. 1])

Der erste internationale Mathematikerkongress fand also in Zürich statt, vom 9.–11. August 1897. Es nahmen 242 Personen teil, aus 16 verschiedenen Ländern, auch aus den USA. Die Eröffnungsadresse von Henri Poincaré *„Sur les rapports de l'analyse pure et de la physique mathématique“* musste verlesen werden, da Poincaré wegen eines Todesfalles nicht anreisen konnte. Es gab reichlich Geselligkeit – Schifffahrt auf dem Züricher See, Feuerwerk, Galadiners. Minkowski (1864–1909) – damals in Zürich tätig – beklagte sich in einem Brief an Hilbert, dass die Wissenschaft an letzter Stelle gestanden habe.

Es folgten die Kongresse:

1900 in Paris,
1904 Heidelberg
1908 Rom
1912 Cambridge (UK)
1920 Strasbourg
1924 Toronto
1928 Bologna
1932 Zürich
1936 Oslo
1950 Cambridge (Mass.)
1954 Amsterdam
1958 Edinborough
1962 Stockholm
1966 Moskau
1970 Nizza
1974 Vancouver
1978 Helsinki
1983 (für 1982) Warschau
1986 Berkeley
1990 Kyoto
1994 Zürich
1998 Berlin
2002 Peking
2006 Madrid

Zu den Kongressen 1920 und 1924 wurden die Deutschen (bis auf Hilbert) nicht eingeladen, da die Kriegsschuld einseitig Deutschland angerechnet wurde. Auch das chauvinistische Dokument *An die Kulturwelt* war noch in unguter Erinnerung. Aber auch Mathematiker aus Österreich, Ungarn und Bulgarien nahmen nicht teil.

Die Fields-Medaille

Jahr	Verleihungsort	Preisträger
2006	Madrid (Spanien)	Andrej Okounkow (Russland/USA) Grigori Perelman (Russland – Auszeichnung nicht angenommen) Terence Tao (Australien) Wendelin Werner (Frankreich)
2002	Peking (China)	Laurent Lafforgue (Frankreich) Vladimir Voevodski (Russland)
1998	Berlin (Deutschland)	Richard E. Borcherds (Großbritannien) W. Timothy Gowers (Großbritannien) Maxim Kontsevich (Russland) Curtis T. McMullen (USA) Sonderauszeichnung: Andrew Wiles (Großbritannien)
1994	Zürich (Schweiz)	Jean Bourgain (Belgien) Pierre-Louis Lions (Frankreich) Jean-Christophe Yoccoz (Frankreich) Efim Zelmanov (Russland)
1990	Kyoto (Japan)	Wladimir Gerschonowitsch Drinfeld (UdSSR) Vaughan F.R. Jones (USA) Shigefumi Mori (Japan) Edward Witten (USA)
1986	Berkeley (USA)	Simon K. Donaldson (Großbritannien) Gerd Faltings (Deutschland) Michael H. Freedman (USA)
1982	Warschau (Polen)	Alain Connes (Frankreich) William P. Thurston (USA) Shing-Tung Yau (China)
1978	Helsinki (Finnland)	Pierre René Deligne (Belgien) Charles Louis Fefferman (USA) Gregori Alexandrovitch Margulis (UdSSR) Daniel G. Quillen (USA)
1974	Vancouver (Kanada)	Enrico Bombieri (Italien) David Bryant Mumford (Großbritannien)
1970	Nizza (Frankreich)	Alan Baker (Großbritannien) Heisuke Hironaka (Japan) Sergei Nodikov (UdSSR) John Griggs Thompson (USA)
1966	Moskau (Sowjetunion)	Michael Francis Atiyah (Großbritannien) Paul Josef Cohen (USA) Alexander Grothendieck (Frankreich) Stephen Smale (USA)
1962	Stockholm (Schweden)	Lars Hörmander (Schweden) John Willard Milnor (USA)
1958	Edinburgh (Großbritannien)	Klaus Friedrich Roth (Großbritannien) René Thom (Frankreich)
1954	Amsterdam (Niederlande)	Kunihiko Kodaira (Japan) Jean-Pierre Serre (Frankreich)
1950	Cambridge (USA)	Laurent Schwartz (Frankreich) Atle Selberg (Norwegen)
1936	Oslo (Norwegen)	Lars Valerian Ahlfors (Finnland) Jesse Douglas (USA)

[http://de.wikipedia.org/wiki/Fields-Medaille]

Bekanntlich gibt es keinen Nobelpreis für Mathematik. Als eine Art Ausgleich wird seit 1936 auf Grund einer Stiftung des kanadischen Mathematikers John Charles Fields (1863–1932) die sog. Fields-Medaille verliehen.

Die Fields-Medaille, offizieller Name *International Medal for Outstanding Discoveries in Mathematics* (deutsch: *Internationale Medaille für herausragende Entdeckungen in der Mathematik*) gilt als höchste Auszeichnung, die an einen Mathematiker verliehen verliehen werden kann. Sie wird alle vier Jahre von der International Mathematical Union (IMU) anlässlich des International Congress of Mathematics (ICM) an zwei bis vier Mathematiker verliehen, die sich in besonderer Weise auf dem Gebiet der mathematischen Forschung und Entdeckung hervorgetan haben.

Die Fields-Medaille wird – neben dem Abelpreis – oftmals als Entsprechung eines nicht existierenden Nobelpreises für Mathematik angesehen. Die Empfänger der Medaille dürfen zum Zeitpunkt der Arbeit, für die sie ausgezeichnet werden, nicht älter als 40 Jahre gewesen sein. Aus diesem Grund erhielt z. B. Andrew Wiles (*1953) keine Fields-Medaille, da er zum Zeitpunkt des endgültigen Beweises von Fermats letztem Theorem die Altersgrenze bereits überschritten hatte. Wiles erhielt stattdessen auf dem ICM 1998 in Berlin eine Sonderauszeichnung der IMU.

Die ersten zwei Fields-Medaillen wurden 1936 verliehen. Eine anonyme Stiftung ermöglicht es seit 1966, die Fields-Medaille an vier Mathematiker zu vergeben.

Der Mathematiker und Experte auf dem Gebiet des Ricci-Flusses, Grigori Perelman, sollte im Jahr 2006 den Preis für die Lösung der Poincaré-Vermutung erhalten. Er lehnte die Auszeichnung jedoch als bisher einziger Mathematiker ab.

Weitere Auszeichnungen und Preise

Seit 1978 wird auch der von dem in Deutschland geborenen Erfinder Ricardo Wolf gestiftete *Wolf-Preis* jährlich in sechs Disziplinen vergeben und mit je 100 000 $ dotiert. Der *Wolf-Preis in Mathematik* zählt nach der Fields-Medaille zu den weltweit angesehensten Preisen in der Mathematik und wurde bislang an 48 bedeutende Mathematiker vergeben, zuerst 1978 an Israel Gelfand und Carl Ludwig Siegel.

In der Internationalen Mathematischen Union (IMU) wird seit 1982 der *Nevanlinna-Preis* für herausragende Leistungen auf dem Gebiet der theoretischen Informatik verliehen. Der nach dem finnischen Mathematiker Rolf Hermann Nevanlinna (1895–1980) benannte Preis wird als Goldmedaille und mit einem Preisgeld zusammen mit den Fields-Medaillen und dem Carl-Friedrich-Gauß-Preis auf dem alle vier Jahre stattfindenden Internationalen Mathematikerkongress überreicht.

Die bisherigen Preisträger sind Robert Tarjan (1982), Leslie Valiant (1986), Alexander Razborov (1990), Avi Wigderson (1994), Peter Shor (1998), Madhu Sudan (2002), Jon Kleinberg (2006).

Seit 1989 wird von der International Commission of History of Mathematics (JCHM) der *Kenneth O. May Prize* für Geschichte der Mathematik verliehen. Ihn erhielten:

1989 Dirk J. Struik (USA)
1989 Adolf P. Juschkewitsch (Sowjetunion)
1993 Christoph J. Scriba (Deutschland)
1993 Hans Wußing (Deutschland)
1997 René Taton (Frankreich)
2001 Ubiratan D'Ambrosio (Brasilien)
2001 Lam Lay Yong (Singapur)
2005 Henk Bos (Niederlande).

Die Brüder Erwin E. und Frederic E. Nemmers stifteten den *Frederic-Esser-Nemmers-Preis* für Mathematik, der alle zwei Jahren vergeben wird und 2006 der mit 150 000 $ der höchstdotierte Mathematikerpreis in den USA war. Seit 1994 haben ihn 8 bedeutende Mathematiker erhalten.

Seit 2003 vergibt die Norwegische Akademie der Wissenschaften jährlich den mit 6 Millionen Kronen (ca. 800 000 $) Preisgeld ausgestalteten *Abel-Preis*, der wie die Fields-Medaille als Pendant zum Nobelpreis angesehen wird. Ihn erhielten:

2003 Jean-Pierre Serre, Collège de France
2004 Michael F. Atiyah, Universität Edinburgh;
2004 Isadorc M. Singer, MIT
2005 Peter D. Sax, New York University
2006 Lennart Carleson, Königlich Technische Hochschule Stockholm
2007 Srinivasen S.R. Varadhan, New York University
2008 John Griggs Thompson, University of Florida
2008 Jacques Tits, Collège de France.

Für herausragende Leistungen in der Angewandten Mathematik wurde erstmals der *Carl-Friedrich-Gauß-Preis* auf dem Internationalen Mathematikerkongress 2006 in Madrid (neben den Fields-Medaillen und dem Nevanlinna-Preis) vergeben. Die Medaille und das Preisgeld von 10 000 Euro erhielt der Japaner Itō Kiyoshi.

Der von Paul Friedrich Wolfskehl für den Beweis des Großen Fermatschen Satzes gestiftete *Wolfskehl-Preis* war ursprünglich mit 100 000 Goldmark dotiert und wurde 1908 von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen ausgeschrieben. Der Satz wurde erst 1995 endgültig bewiesen (siehe Abschnitt 11.9). 1997 konnte Andrew Wiles den Wolfskehl-Preis entgegennehmen. Nach Inflation und Währungsreform betrug die Preissumme immerhin noch 70 000 DM.

11.0.7 Dreiundzwanzig Probleme

Wir sollten unsere Betrachtung des 20. Jahrhunderts beginnen mit jenem berühmten Vortrag „Mathematische Probleme“ von David Hilbert auf dem Mathematikerkongress im Jahre 1900 in Paris. Im Vollgefühl des Erreichten und im Vertrauen auf die Zukunft – die schrecklichen Ereignisse während des 20. Jahrhunderts mit Kriegen und Faschismus konnte er wie die meisten seiner Zeitgenossen nicht vorausahnen – und am Vorabend ausgedehnter Diskussionen über die Grundlagen der Mathematik formulierte er 23 ungelöste Probleme, die sich in der Tat fast alle als Kernprobleme der kommenden Entwicklung der Mathematik erweisen sollten, eine in der Geschichte der Mathematik oder sogar in der Geschichte der Wissenschaften einzigartige Leistung. Im vollen Glauben an die humanistischen Werte der Menschheit brachte Hilbert seine Meinung zum Ausdruck:

> *„Die Geschichte lehrt die Stetigkeit der Entwicklung der Wissenschaft. Wir wissen, daß jedes Zeitalter eigene Probleme hat, die das kommende Zeitalter löst oder als unfruchtbar zur Seite schiebt und durch neue Probleme ersetzt. Wollen wir eine Vorstellung gewinnen von der mutmaßlichen Entwicklung mathematischen Wissens in der nächsten Zukunft, so müssen wir die offenen Fragen vor unserem Geiste passieren lassen und die Probleme überschauen, welche die gegenwärtige Wissenschaft stellt und deren Lösung wir von der Zukunft erwarten. Zu einer solchen Musterung der Probleme scheint mir der heutige Tag, der an der Jahrhundertwende liegt, wohl geeignet; denn die großen Zeitabschnitte fordern uns nicht bloß auf zu Rückblicken in die Vergangenheit, sondern sie lenken unsere Gedanken auch auf das unbekannte Bevorstehende.*



Abb. 11.0.30 David Hilbert, Hermann Minkowski

> *Die hohe Bedeutung bestimmter Probleme für den Fortschritt der mathematischen Wissenschaft im allgemeinen und die wichtige Rolle, die sie bei der Arbeit des einzelnen Forschers spielen, ist unleugbar. Solange ein Wissenszweig Überfluß an Problemen bietet, ist er lebenskräftig; Mangel an Problemen bedeutet Absterben oder Aufhören der selbständigen Entwicklung.“*
> [Hilbert 1971, S. 22f.]

Schließlich mündete Hilberts Vortrag in sein wissenschaftspolitisches Credo:

> *„Diese Überzeugung von der Lösbarkeit eines jeden mathematischen Problems ist uns ein kräftiger Ansporn während der Arbeit; wir hören in uns den steten Zuruf: Da ist das Problem, suche die Lösung. Du kannst sie durch reines Denken finden; denn in der Mathematik gibt es kein Ignorabimus!“*
> [Hilbert 1971, S. 34]

Und an anderer Stelle:

> *„Inzwischen, während die Schaffenskraft des reinen Denkens wirkt, kommt auch wieder von neuem die Außenwelt zur Geltung, zwingt uns durch die wirklichen Erscheinungen neue Fragen auf, erschließt neue mathematische Wissensgebiete und, indem wir diese neuen Wissensgebiete für das Reich des reinen Denkens zu erwerben suchen, finden wir häufig die Antworten auf alte ungelöste Probleme und fördern so zugleich am besten die alten Theorien. Auf diesem stets sich wiederholenden und wechselnden Spiel zwischen Denken und Erfahrung beruhen, wie mir scheint, die zahlreichen und überraschenden Analogien und jene scheinbar praestabilisierte Harmonie, welche der Mathematiker so oft in den Fragestellungen, Methoden und Begriffen verschiedener Wissensgebiete wahrnimmt.“*
> [Hilbert 1971, S. 27]

(Dazu eine Bemerkung: Unter dem Stichwort „Hilberts Liste von 23 mathematischen Problemen“ findet sich im Internet die Bemerkung, Hilbert habe auf dem Kongress in Paris am 8. August in seinem Vortrag nur 10 Probleme wirklich vorgestellt, die vollständige Liste der 23 Probleme aber erst in den Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen von 1900 [S. 253ff.] dargestellt. Das klingt vernünftig, da der gesamte Text (mehr als 40 Druckseiten) viel zu umfangreich für einen Vortrag gewesen wäre. Indessen habe ich keine Bestätigung für diese Behauptung finden können, weder in den Göttinger Nachrichten noch im Kongress-Bericht [Compte rendu, Paris 1902, S. 58ff.], dort mit einer Übersetzung des Göttinger Textes ins Französische, überdies mit einigen inhaltlichen Modifikationen.)

In dem informationsreichen Buch *The Hilbert Challenge* gibt J. Gray [Gray 2004, S. 287ff.] neben der Kurzformulierung der Hilbertschen Probleme auch den Stand des Jahres 1999 über die Lösung dieser Probleme wieder (hier in Klammern beigefügt).

1. Cantors Problem von der Mächtigkeit des Kontinuums (vereinbar mit den üblichen Axiomen der Mengenlehre: Gödel 1939/40; unabhängig von ihnen: Cohen 1966)
2. Die Widerspruchsfreiheit der arithmetischen Axiome (die Arithmetik ist, wenn üblich formuliert, unvollständig und nicht entscheidbar: Gödel 1931)
3. Die Volumengleichheit zweier Tetraeder von gleicher Grundfläche und Höhe (gelöst von Dehn 1902, nach einer Teillösung von Bricard 1896)
4. Problem von der Geraden als kürzeste Verbindung zweier Punkte (noch offen, weil es „zu vage formuliert ist“. Die Fragestellung ist heutzutage präzisiert zu: „Wie lassen sich die Metriken charakterisieren, in denen alle Geraden Geodäten sind?“ Inzwischen gibt es dazu einschlägige Arbeiten. Bereits 1901 konnte G. Hamel (1877–1954), ein Schüler Hilberts, in seiner Dissertation zur Klärung der Fragestellung beitragen.)
5. Lies Begriff der kontinuierlichen Transformationsgruppe ohne die Annahme der Differenzierbarkeit der die Gruppe definierenden Funktionen (gelöst von Gleason (1952) und Montgomery und Zippin (1952))
6. Mathematische Behandlung der Axiome der Physik (Axiome der klassischen Mechanik durch Hamel (1903), Thermodynamik durch Caratheodory (1909), spezielle Relativitätstheorie unabhängig durch Robb (1914) und Caratheodory (1924), Wahrscheinlichkeitstheorie durch Kolmogorow (1930), Quantentheorie durch Wightman (in den späten 50er Jahren))
7. Irrationalität und Transzendenz bestimmter Zahlen (gelöst durch Gelfond (1934) und unabhängig durch Th. Schneider (1934))
8. Primzahlenprobleme (noch ungelöst, darunter die Goldbachsche Vermutung)
9. Beweis des allgemeinsten Reziprozitätsgesetzes im beliebigen Zahlkörper (Gefunden von E. Artin (1923))
10. Entscheidung der Lösbarkeit einer diophantischen Gleichung (es gibt keinen Algorithmus für diese Gleichungen, Matijassewitch (1979))
11. Quadratische Formen mit beliebigen algebraischen Zahlenkoeffizienten (mit rationalen Zahlen durch Hasse (1923/24, mit ganzen Zahlen durch Siegel (in den 30er Jahren))
12. Ausdehnung des Kroneckerschen Satzes über Abelsche Körper auf einen beliebigen algebraischen Rationalitätsbereich (Abelsche Klassenkörpertheorie, geschaffen durch Tagaki (1920))
13. Unmöglichkeit der Lösung der allgemeinen Gleichung 7. Grades mittels Funktionen von nur 2 Argumenten (negativ entschieden durch Kolmogorow und Arnold (1957))
14. Nachweis der Endlichkeit gewisser voller Funktionensysteme (negativ entschieden durch Nagata (1962))

15. Strenge Begründung von Schuberts Abzählungskalkül (eine strenge Theorie verdankt man van der Waerden in den späten 30er Jahren und in einschlägigen Texten einer Vielzahl anderer Gelehrter)
16. Problem der Topologie algebraischer Kurven und Flächen (über Topologie der Kurven wurden die besten Resultate erzielt von Itenberg und Viro (1996) – vgl. dazu die ausführlichen Erläuterungen von O.A. Olejnik in [Wußing 1983, S. 232ff.]. Spezielle Lösungen durch Iljaschenko und Écalle in den neunziger Jahren)
17. Darstellung definiter Formen durch Quadrate (gelöst für reell-abgeschlossene Körper durch Artin (1927). Weitere spezielle Lösungen durch Pfister (1967). Negative Lösung im allgemeinen durch DuBois (1967))
18. Aufbau des Raumes aus kongruenten Polyedern (nur eine endliche Anzahl von Gruppen setzt einen Raum der Dimension n zusammen, Bieberbach (1910). Das fundamentale Problem für Bereiche wurde gelöst für die Dimension 3 durch Reinhardt, durch Heesch für die Dimension 2. Das Problem der Kugelpackung bleibt ungelöst.)
19. Sind die Lösungen regulärer Variationsprobleme stets notwendig analytisch? (Zuerst gelöst durch Bernstein (1904), weitere Verallgemeinerungen folgten.)
20. Allgemeines Randwertproblem: Existenz von Lösungen partieller Differentialgleichungen mit vorgeschriebenen Randwerten (in Spezialfällen gelöst durch Bernstein; vgl. dazu [DSB Vol XV (Supplement) S. 23], [Gray 2004, S. 234], [Sigalov 1971, S. 259ff.])
21. Beweis der Existenz linearer Differentialgleichungen mit vorgeschriebener Monodromiegruppe (vgl. die Erläuterungen von A.G. Sigalov zum 20. und 21. Problem in [Wußing 1983, S. 259ff.]. Das Riemann-Hilbertsche Problem wurde negativ entschieden durch Anosov und Bolibruch (1994))
22. Uniformisierung analytischer Beziehungen mittels automorpher Funktionen (gelöst durch Koebe (1907) und unabhängig durch Poincaré (1907))
23. Weiterführung der Methoden der Variationsrechnung (vgl. die Erläuterungen von L. E. El'sgol'c in [Wußing 1983, S. 286ff.])

Über die Wirkung von Hilberts Vortrag von 1900 auf die nachfolgenden dreißig Jahre hat L. Bieberbach 1930 berichtet ([Bieberbach 1930], vgl. ferner ausführlich [Gray 2004]).

Wie sich zeigen sollte, konnte Hilberts Programm der Formalisierung der Mathematik nicht in allen Teilen erfüllt werden; insbesondere die Arbeiten von Kurt Gödel in den 30er Jahren zeigten, dass die von Hilbert vertretene Möglichkeit der vollständigen Formalisierung der Mathematik sich nicht erfüllen ließ.

Über die verschiedenen philosophisch-mathematischen Schulen wird an anderer Stelle berichtet.

11.0.8 Die dunkle Zeit des Nationalsozialismus

Die Intelligenz Deutschlands hatte die politische Lage zu Anfang der dreißiger Jahre weitgehend falsch eingeschätzt; man hielt den Aufstieg Hitlers für ein temporäres, vorübergehendes Phänomen. So schrieb Thomas Mann in einem Brief am 12. Jan. 1933:

> *„Das soziale und demokratische Deutschland, ich bin tief überzeugt davon, darf vertrauen, daß die gegenwärtige Konstellation vorübergehend ist und daß die Zukunft, trotz allem, ihm gehört. Das Rasen der nationalistischen Leidenschaften ist nichts weiter als ein spätes und letztes Aufflackern eines schon niedergeschlagenen Feuers, . . . "*
> (Zitiert bei [Bigalke 1988, S. 101])

Man hatte sich geirrt. Am 30. Januar 1933 wurde Adolf Hitler zum Reichkanzler ernannt. Alsbald setzte die Verfolgung der Juden und Andersdenkender ein: Am 24. März 1933 folgte das sog. „Ermächtigungsgesetz" (was die Ausschaltung des Parlaments bedeutete), am 7. April 1933 wurde das sog. „Gesetz zur Wiederherstellung des Berufsbeamtentums" erlassen, das sich insbesondere gegen Juden richtete.

Was die Naturwissenschaftler betrifft, so schlossen sich u. a. die Physiker Johannes Stark (1874–1957) und Philipp Lenard (1862–1947) sowie der Mathematiker Ludwig Bieberbach (1886–1982) den Nationalsozialisten an. Einstein war zu diesem Zeitpunkt gerade in den USA, kehrte nicht nach Deutschland zurück und trat aus der Berliner Akademie aus. Seine Relativitätstheorie sowie die Quantentheorie von Bohr (1885–1962), Sommerfeld (1868–1951), Pauli (1900–1958) und Schrödinger (1887–1961) wurden missliebig; Heisenberg und Sommerfeld wurden als „weiße Juden" beschimpft.

Doch es gab auch Gegenwehr: Der Göttinger Physiker James Franck (1882–1964) wandte sich ganz offiziell gegen die Verfolgung der Juden, freilich ohne Erfolg; Franck emigrierte 1933. Felix Hausdorff (1868–1942) verübte kurz vor der Deportation zusammen mit seiner Frau und seiner Schwägerin Selbstmord. Leon Lichtenstein (1878–1933) – übrigens ein Vetter von N. Wiener – wurde durch von Nazianhängern organisierte Tumulte aus Leipzig vertrieben. Hilberts enger Freund und sein Biograph Otto Blumenthal (1876–1944) war zunächst in die Niederlande emigriert, wurde dann nach Theresienstadt (Terezin) deportiert und kam dort um. Seine Frau war schon im Sammellager für die Deportation verstorben. Seine Schwester, Schwiegertochter des Dichters Theodor Storm, kam ebenfalls in Theresienstadt ums Leben.

Insgesamt wurden aus Deutschland mehr als 1600 Wissenschaftler mit Hilfe des sog. „Gesetzes zur Wiederherstellung des Berufsbeamtentums" verdrängt. Aus politischen Gründen schieden bis 1938 etwa ein Drittel aller deutschen Hochschullehrer aus. Mehr als 2000, darunter etwa 750 Ordinarien, emigrierten, vgl. [Bigalke 1988, S. 109], [Pinl 1969].



Abb. 11.0.31 Das Haus von Albert Einstein in Caputh bei Berlin [Foto Alten]

Göttingen durfte Anfang des 20 Jahrhunderts, bis 1933/34, durchaus als Weltzentrum von Mathematik und Physik gelten. Felix Klein hatte David Hilbert 1895 nach Göttingen geholt. Hermann Minkowski (1864–1909) folgte 1902, starb aber unerwartet früh an Blinddarmentzündung.

Als Folge der Gesetzgebung und anderer Unterdrückungsmaßnahmen der Nationalsozialisten gingen allein aus Göttingen in die Emigration: Felix Bernstein, Max Born, Richard Courant, Emmy Noether. Edmund Landau trat zurück, da seine Vorlesungen boykottiert wurden. Hermann Weyl, vielleicht Hilberts begabtester Schüler, emigrierte 1933: *„Ich ertrug es nicht, unter der Herrschaft dieses Dämonen und Schänders des deutschen Namens zu leben.“*

In der Folge emigrierten noch u. a. Otto Neugebauer, Hans Lewy, Paul Bernays, Paul Hertz, Werner Fischl, Stefan Cohn-Vossen und andere ([Bers 1989], [Siegmund-Schultze 1998], [Vogt 1991]). Olga Taussky kehrte aus dem Urlaub nicht nach Göttingen zurück, da sie die politische Entwicklung richtig beurteilt hatte. Nicht nur Personen waren nationalsozialistischen Verfolgungen ausgesetzt. Die Pläne griffen weiter – bis hin zu einer „Neuordnung“ wissenschaftlichen Lebens in Europa [Siegmund-Schultze 1986].

Hilbert war bereits 1930 emeritiert worden, hielt aber noch einige Vorlesungen. Als der nationalsozialistische Unterrichtsminister bei einem Besuch in Göttingen fragte, wie die Mathematik in Göttingen gedeihe, nun, nachdem sie vom jüdischen Einfluß befreit sei, soll Hilbert mutig geantwortet haben: *„Die Mathematik in Göttingen? Die gibt es nicht mehr.“* (Zitiert bei [Reid 1970, S. 205])

Die Ironie der Geschichte wollte es, dass gerade ein großer Teil der Hinausgeworfenen entscheidend an der militärischen Aufrüstung der USA beteiligt war, auch an der Entwicklung der Atombombe und damit am Sieg im Zweiten Weltkrieg über Deutschland und Japan.

Der aus Dux (Böhmen) stammende Maximilian Pinl (1887–1978) hat sich nach dem Zweiten Weltkrieg der verdienstvollen Aufgabe gestellt, eine (damals notwendigerweise noch unvollständige) Liste der in Deutschland aus dem Dienst entlassenen, emigrierten oder zu Tode gekommenen Mathematikerinnen und Mathematiker und einiger theoretischer Physiker zu erarbeiten [Pinl 1969, 1971, 1972, 1973, 1974; Teil IV (1974) unter Mitarbeit von Auguste Dick], [Pinl/Furtmüller 1973]. Pinl stellt seine Untersuchungen *„Kollegen in einer dunklen Zeit“* unter das Motto von Heinrich Heine

„Denk ich an Deutschland in der Nacht,
Dann bin ich um den Schlaf gebracht.“

Pinl begründet sein Vorhaben so:

„Die Nacht, von der hier die Rede sein wird, begann im Jahre 1933. Wir Überlebende sind dann noch einmal davongekommen im Jahre 1945. (. . .) Es ist nun eine Generation her, daß die apokalyptischen Reiter über große Teile der Welt hinwegbrausten, und es scheint endlich an der Zeit, im Folgenden einen Rückblick auf die Cäsur der Jahre 1933–1945 in der Entwicklung der deutschen mathematischen Wissenschaft zu geben und der Kollegen dieser dunklen Jahre zu gedenken, deren unschuldige Opfer sie wurden. Dabei empfiehlt es sich, einer Ordnung des Berichtes zu folgen, wie sie durch die örtliche Verteilung unserer mathematischen Wissenschaftler auf die einzelnen Universitäten und technischen Hochschulen gegeben ist.
Darüber hinaus möchten wir der anrüchigen Terminologie, die sich in Besprechungen der Ereignisse des berüchtigten Zeitintervalls findet, aus dem Wege gehen. Wir sprechen daher lediglich von verfolgten Kollegen. Gründe für diese Verfolgung anzugeben erübrigt sich, da keine vorliegen.“ [Pinl 71 (1969), S. 167f.]

Die Liste ist erschreckend. Sie umfasst 26 Universitäten und Technische Hochschulen und 128 Mathematikerinnen und Mathematiker sowie einige theoretische Physiker. „Spitzenreiter“ sind Berlin mit 23 Betroffenen, Wien mit 20, Göttingen mit 19 und Prag mit 15. Es würde zu weit führen, hier die Namen aller Betroffenen aufzuführen.

Pinl war selbst betroffen. Nach Militär- und Kriegsdienst 1915 bis 1918 studierte er an der Bergakademie in Leoben in der Steiermark, wo ihm ein Exemplar des Werkes *„Raum-Zeit-Materie“* von Hermann Weyl in die Hände fiel. Davon stark beeindruckt wandte er sich von der Technik ab und ging an die Universität Wien zum Studium der Mathematik und der theoretischen Physik. Er promovierte 1926 und habilitierte 1936 an der Deutschen Universität Prag. Er berichtet:

„Da ich inzwischen von der Relativitätstheorie genügend verstanden hatte, war es mir, als 1939 die geistige Nacht über Prag hereinbrach, unmöglich, der neuen Physik abzuschwören und erst recht unmöglich, die bedrohten Kollegen auf diesen wissenschaftlichen Gebieten zu verleugnen. Daher wurde ich für ein halbes Jahr in Haft genommen. Nach der Entlassung wurde mir jede akademische Tätigkeit an einer deutschen Universität verboten.“
[Pinl 75 (1974), S. 181].

Es folgten Arbeiten in einem Flugzeugwerk, weiter bibliographische Arbeiten. Nach Kriegsende wurde Pinl Dozent und außerplanmäßiger Professor in Köln, dann folgten Tätigkeiten in Pakistan, wieder in Köln, nach der Emeritierung in Atlanta, Moskau, Münster.

Mit welchen infamen Methoden sich die Nationalsozialisten unliebsamer Gelehrter entledigten, zeigt das Beispiel Emil Artin. Der aus Wien stammende Artin hatte in Wien und Leipzig studiert, promovierte in Leipzig, ging nach Göttingen und Hamburg, wo er sich 1923 habilitierte und 1926 ordentlicher Professor wurde. In einschlägigen Lexika findet man, dass er 1937 nach den USA emigrierte. Warum? Auf meine Bitte hin hat mir das Universitätsarchiv Hamburg die amtlichen Unterlagen zugeschickt. Verkürzt ergibt sich der folgende, kaum glaubhafte Sachverhalt: Da Artin eine jüdische Frau hatte, durfte er bei Staatsfeiertagen nicht die Hakenkreuzfahne an seiner Wohnung zeigen. Wer das aber nicht tat, wie Artin, der durfte keine Vorlesungen halten, sondern war als der „jüdisch versippte“ Beamte in den Ruhestand zu versetzen. Das gleiche Schicksal erlitten auch andere Gelehrte wegen jüdischer Angehöriger.

Diese Beispiele zeigen: Die von Pinl und anderen skizzierten Schicksale bergen im Detail schweres Leid, gezielte Demütigungen, dramatische Verbrechen. Mögen sich solche Zeiten nie mehr wiederholen!

Nach einer anderen Zählung, die durch Zusammenfügen verschiedener Statistiken entstand, ergibt sich folgendes Bild:

„Im Jahr 1931 lehrten an deutschen Hochschulen 227 Dozenten Mathematik. Bis 1938 wurde davon mehr als ein Viertel vertrieben. Von 95 Ordinarien waren es 26, von 45 Extraordinarien 13 und von 55 Privatdozenten 29. Hinzu kamen viele Assistenten und fortgeschrittene Studenten.
Die Verluste waren kaum aufzufüllen. Unausweichlich folgte ein eklatanter Nachwuchsmangel, verschärft noch durch den drastischen Rückgang der Studentenzahlen, in Physik und Mathematik weit stärker als im Durchschnitt. 1932 studierten noch 7139 Studenten Mathematik, Versicherungsmathematik oder Physik. 1939, noch vor Kriegsbeginn, waren es nurmehr 1270. In Göttingen ging die Zahl der Mathematikstudenten im gleichen Zeitraum von 432 auf 37 zurück.“
[Mehrtens 1985, S. 85]

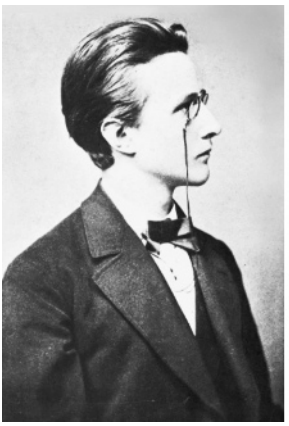



Abb. 11.0.32 Max Planck; Emil Artin [Foto Jacobs]

Der in aller Welt hochgeschätzte Max Planck, Nobelpreisträger für Physik, hat in einem Gespräch mit Hitler – vergeblich – versucht, auf die für Deutschland verheerenden Folgen der Vertreibung der jüdischen Gelehrten hinzuweisen.

Der Stoß der nationalsozialistischen Regierung richtete sich nicht nur gegen Personen, sondern auch gegen die Gesellschaften, auch die der Mathematik [Mehrtens 1985]. Dabei begegneten sich eine weit verbreitete konservative Grundhaltung unter den Gelehrten, die Hoffnung, dass die neue Regierung nur eine temporäre Erscheinung sei, der Glaube an Rechtsstaat und deutsche Kultur und andererseits deutliche Anpassung bei einer allerdings einflussreichen Minderheit. Insofern ist der damals gebrauchte Begriff der „Gleichschaltung“ nicht voll zutreffend; es waren auch Elemente der Selbstgleichschaltung dabei.

Die Angriffe richteten sich, was die Mathematik betrifft, gegen die „Deutsche Mathematiker-Vereinigung“ (DMV), gegen die „Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik“ (GAMM) und den „Mathematischen Reichsverband“ (MR).

In der GAMM wurden 1933 von Mises und Reißner, beide jüdischer Abstammung, durch Trefftz und Constantin Weber ersetzt [Mehrtens 1985, S. 96ff.]. Im MR dagegen wurde das „Führerprinzip“ beschlossen und Georg Hamel (1877–1954), ein ausgezeichneter Fachmann, erklärte am 20. September 1933:

> *„Wir wollen also im Sinne des totalen Staates aufrichtig und getreu mitarbeiten. Wir stellen uns, was für jeden Deutschen selbstverständlich ist, unbedingt und freudig in den Dienst der nationalsozialistischen Bewegung, hinter ihren Führer, unseren Reichskanzler Adolf Hitler.“* (Zitiert nach [Mehrtens 1985, S. 83])

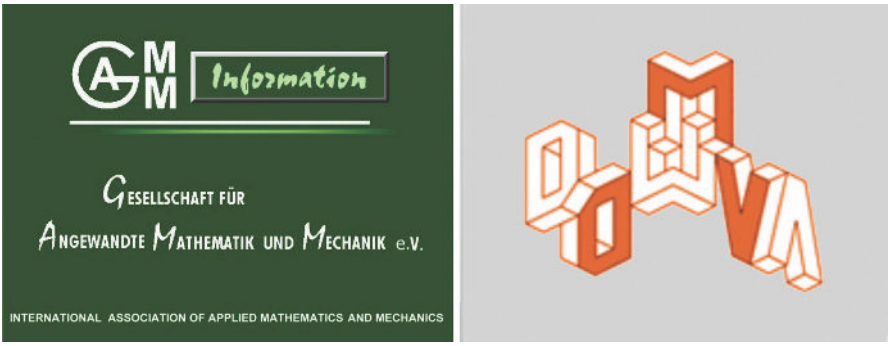


Abb. 11.0.33 Heutige Logos von den Internetseiten der GAMM (Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik) und der DMV (Deutsche Mathematiker-Vereinigung)

In einem Artikel *Die Mathematik im Dritten Reich* von 1933 verstieg sich Hamel zu folgenden völlig verqueren Sentenzen:

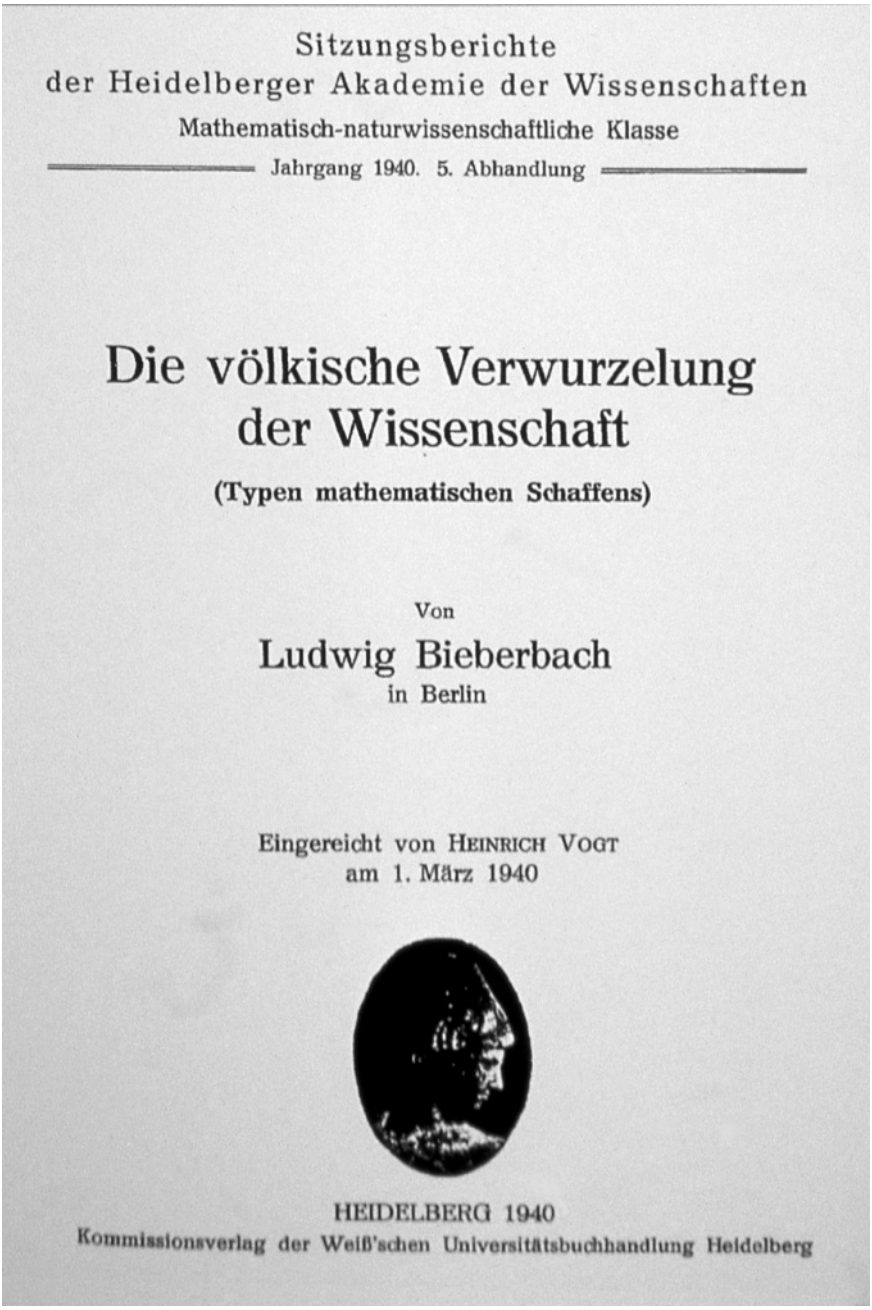
> *„Neben die Lehre vom Blut und vom Boden gehört deshalb als allgemein verbindlich bis ans Ende der Erziehung, die Mathematik als Lehre vom Geiste, vom Geiste als Tat. Einheit des Menschen als Körper, Gemüt und Geist fordert als Parallele Einheit der Erziehung durch Körperpflege, Muttersprache und Lehre vom Blut, Boden und tätigem schöpferischem Geiste. Dessen Kernstück aber ist die Mathematik.“*
> (Zitiert nach [Mehrtens 1985, S. 94])

Anders lagen die Dinge in der DMV. Dort fand ein Wechselspiel zwischen nationalsozialistischen Vorstößen (Bieberbach, Vahlen) und Taktik und Abwehr statt, nicht zuletzt durch Rücksicht auf ausländische Mitglieder der DMV (vgl. ausführlich [Mehrtens 1985]). Bieberbach hat eine höchst unrühmliche Rolle gespielt, mit der von ihm gegründeten Zeitschrift *Deutsche Mathematik*, mit einer Attacke gegen den dänischen Mathematiker Harald Bohr und mit anderen Aktionen und Intrigen.

Als Bieberbach 1934 die gegen Landau revoltierenden Studenten belobigte, reagierte Harald Bohr (1887–1951) in Kopenhagen entrüstet:

> *„Wir alle, die wir uns der deutschen mathematischen Wissenschaft in tiefer Dankbarkeit verpflichtet fühlen, waren daran gewöhnt, als deren Repräsentanten andere* (als Bieberbach, Wg)*, größere und saubere Gestalten vor Augen zu haben.“*
> (Zitiert nach [Schappacher 1990, S. 58f.])

Ohne Rücksprache mit Kollegen ließ Bieberbach einen *Offenen Brief an Harald Bohr* folgen. Er endet mit dem fatalen Ausfall:



Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
Jahrgang 1940. 5. Abhandlung

Die völkische Verwurzelung der Wissenschaft

(Typen mathematischen Schaffens)

Von
Ludwig Bieberbach
in Berlin

Eingereicht von Heinrich Vogt
am 1. März 1940

HEIDELBERG 1940
Kommissionsverlag der Weiß'schen Universitätsbuchhandlung Heidelberg

Abb. 11.0.34 Titelblatt des Buches *Die völkische Verwurzelung der Wissenschaft* von L. Bieberbach

> *„Sie sind ein Schädling aller internationalen Zusammenarbeit. Diese kann nur auf dem Boden der inneren Stärke und des Selbstbewußtseins der Völker gedeihen, getragen von der gegenseitigen Achtung aller. Die verdorrt auf dem Boden der Schwäche, der Selbsterniedrigung und der Verächtlichmachung des anderen. Diese betreiben Sie auf Kosten der Wahrheit.“*
> (Zitiert nach [Schappacher 1990, S. 59]).

Letztlich aber ist Bieberbach mit seinen politischen Zielen bei der DMV gescheitert.

Die GAMM leistete hinhaltenden Widerstand, konnte aber die Streichung ihrer jüdischen Mitglieder nicht verhindern. Im Jahre 1940 war die GAMM „judenfrei“. Bis 1938 waren 37 Namen aus der Mitgliederliste gestrichen wurden; von Mises war schon 1933 nach Istanbul emigriert.

Aus Anlass des hundertjährigen Bestehens der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1990 lieferten N. Schappacher und M. Kneser einen informationsreichen Beitrag, der sich insbesondere mit der Lage der DMV während der Zeit des Nationalsozialismus auseinandersetzt [Schappacher 1990]. Dort erfährt man Hintergründe und Beweggründe der handelnden Personen, man kann sich informieren über die *„Folgen des Nationalsozialismus für die Mathematik an den Universitäten“* (Vertreibungen, Folgen des Gesetzes zur Wiederherstellung des Berufsbeamtentums) sowie die skandalösen Geschehnisse in Göttingen, Berlin, über die erste Entlassungsphase, die zweite Entlassungsphase, Frankfurt, Heidelberg, die dritte Entlassungsphase, über das Kapitel *„Nationalismus versus Internationalismus“* (Das Jahr 1933 in der DMV, Rückblende auf die Weimarer Republik, Bieberbachs Vorstöße in der DMV 1934, die Mitgliederversammlung in Bad Pyrmont am 13. 9. 1934, die Satzungskrise, u. a. m.) sowie *„Ausblicke“*. Angeschlossen ist ein ausführliches Quellen- und Literaturverzeichnis.

Anlässlich der gemeinsamen Jahrestagung der DMV und der GDM (Gesellschaft für Didaktik der Mathematik) an der Humboldt-Universität in Berlin wurde dort im März 2007 die (erstmals 2006 in Bonn erfolgte) Ausstellung „Jüdische Mathematiker in der deutschsprachigen Kultur“ von Brigitte Bergmann und Annette Vogt gezeigt. Anhand eindrucksvoller Fotos, Textauszüge, Reproduktionen von Dokumenten und Listen wurden dort Leben, Wirken und Schicksal jüdischer Mathematiker und Mathematikerinnen in Deutschland von der Mitte des 19. Jahrhunderts über die Kaiserzeit und die Weimarer Republik bis hin zu den Verfolgungen und Vertreibungen in der NS-Zeit dargestellt. Auch das Engagement jüdischer Mathematiker bei der Gründung und Herausgabe von Zeitschriften und Jahrbüchern und bei der Zusammenarbeit mit Berufsverbänden wie DMV und GAMM sowie Antisemitismus und Klischees des „Jüdischen“ in der Mathematik werden dort behandelt (vgl. dazu den Artikel „Jüdische Mathematik in der deutschsprachigen Kultur“ von B. Bergmann und A. Vogt in [Mitteilungen der DMV 2007 Heft 3, S. 151ff.]).

11.0.9 Mathematik und Krieg

Der Zweite Weltkrieg ist mit bis dahin unbekannter Härte geführt worden, hat viele Millionen Tote gefordert und unerhörte Verwüstungen hinterlassen. Der Krieg war begleitet von der planmäßigen Vernichtung des europäischen Judentums durch das nationalsozialistische Regime. Doch noch ein anderes Merkmal trat zutage: Hatte bereits der Erste Weltkrieg einen bis dahin nie gesehenen Einsatz von Kriegsmaterial gezeigt, so war die Kriegsführung des Zweiten Weltkrieges geprägt von einer äußerst engen Verbindung zu den Wissenschaften; wissenschaftliche Ergebnisse wurden in großem Stil als Mittel der Kriegführung eingesetzt: Man denke beispielsweise an Aerodynamik für den Flugzeugbau, an den Einsatz erster großer Rechenanlagen bei der Zusammenstellung von Geleitzügen über den Atlantik, an die Radartechnik in Luft- und Seekrieg und schließlich an den Abwurf der beiden ersten Atombomben auf Japan im August 1945. Von hier resultierte schließlich der Rüstungswettlauf der beiden damaligen Weltmächte, USA und Sowjetunion: die Gefahr für die gesamte Menschheit war akut geworden.

Zu der Problematik Mathematik – Krieg sind in jüngster Zeit interessante Studien veröffentlicht worden, die manche unbekannten Hintergründe aufdecken, nun, da militärische Geheimhaltung in gehörigem Zeitabstand nicht mehr nötig war. Verwiesen sei etwa auf den 2003 erschienenen Sammelband *„Mathematics and War“* [Booß-Bavnberk/Høyrup 2003]. Interessante

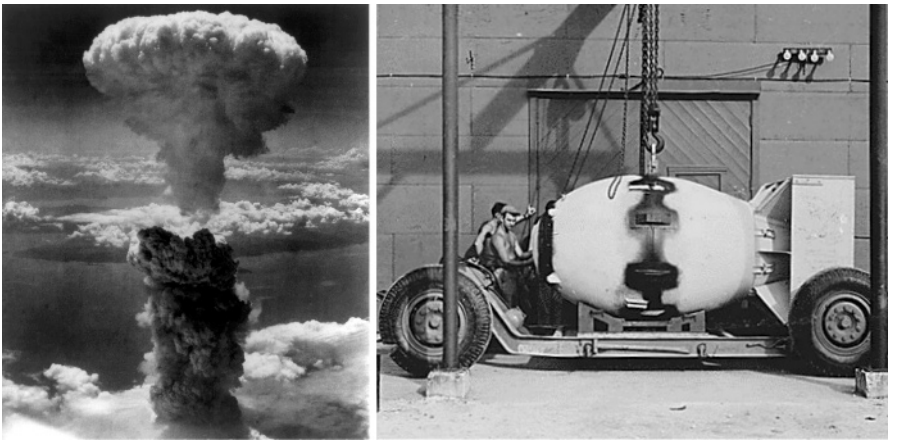


Abb. 11.0.35 Atombombe „fat man“ und deren Explosion über Nagasaki. Die pilzförmige Wolke nach der Explosion am 9. August 1945 reichte bis in 18 km Höhe. Japan kapitulierte, der 2. Weltkrieg war beendet. Zuvor hatte eine Atombombe Hiroshima zerstört und viele Tausende von Zivilisten das Leben gekostet. Die militärische Aufrüstung der USA wurde von Emigranten entscheidend mitgeprägt. Mathematik und Moral sind seitdem verstärkt in der Diskussion der Ethik der Wissenschaft [U.S. military, Department of Defense, 9. August 1945]

und gründlich recherchierte Beiträge betreffen u. a. Mathematik im Militärwesen 1914–1945, die Entschlüsselung des Enigma Codes, A. N. Kolmogorows Beitrag zur Verteidigung, Entstehen neuer mathematischer Disziplinen und Forschungsrichtungen als Folge des Zweiten Weltkrieges, Mathematik und Krieg in Japan, Überlegungen zu möglichen künftigen Formen der Kriegsführung, ethische Probleme (u. a. bei Niels Bohr und A. Turing), Mathematik und internationales Recht.

Auch die von den Herausgebern B. Booß-Bavnbek und J. Høyrup (beide in Dänemark tätig) vorangestellte Einleitung ist lesenswert. Einerseits wird auf die Vorgeschichte und auf Aktivitäten verwiesen, in deren Gefolge im August 2002 im schwedischen Karlskrona eine internationale Konferenz „International Meeting on Mathematics and War“ stattfand; so entstand der erwähnte Sammelband. Andererseits betonen die Herausgeber, dass es bereits in der Antike für Mesopotamien nachweisbar Rückwirkungen militärischer Auseinandersetzungen auf die Mathematik gegeben hat und dass dies ein durchgängiger Zug in der Weltgeschichte war. Zugleich aber betonen sie mit Recht, dass militärische Erfordernisse und von dort an die Mathematik ergehende Anregungen keineswegs die einzige Triebkraft des Fortschrittes in der Mathematik darstellen; die Mathematik entwickelt sich nicht zuletzt auf Grund innerer Problematiken und Zielstellungen.

In Anbetracht stärker gewordener Bedeutung der Mathematik für Industrie, Raumfahrt, Computerwissenschaften, Militär halten manche Mathematiker den Unterschied zwischen reiner und angewandter Mathematik für bedeutungslos. Scheinbar „nutzlose“ Mathematik findet plötzlich und unerwartet Anwendungsfelder und umgekehrt: angewandte Mathematik entkoppelt sich von ihrem Anwendungsbereich und wird zur selbständigen mathematischen Teildisziplin. Weithin bekannt wurde die zwar ehrenhafte, aber irrige Meinung des britischen Zahlentheoretikers G. H. Hardy, der noch 1940 stolz darauf war, dass die Zahlentheorie keinerlei Anwendungen, insbesondere im militärischen Bereich, fähig sei und damit für immer ehrlich und sauber bleiben werde [Hardy 1940, S. 121, englisch]. Heutzutage, seit 1970 etwa, werden jedoch angesichts der Speicherung ungeheurer Datenmengen in Computern und ihrer vielfältigen, oft auch missbräuchlichen Verwendung schwierige Teile der Primzahltheorie im Kommerziellen, im Internet und andernorts bei der Verschlüsselung von Daten verwendet.

Im Unterschied zu der Zeit nach dem Ersten Weltkrieg sind nach dem Zweiten Weltkrieg die internationalen Beziehungen zwischen den Mathematikern relativ rasch wiederhergestellt worden, freilich auf militärisch interessanten Gebieten unter den Bedingungen des Kalten Krieges nur mit Einschränkungen. Immerhin nahmen am Internationalen Mathematikerkongreß 1966 in Moskau mehr als 4000 aktive Mathematiker teil. Zu den damaligen Hauptzentren der Mathematik – den USA und der UdSSR – sind in den 50er und 60er Jahren neue leistungsfähige Schulen hinzugekommen, in Kanada, Australien, Indien, China, Japan und anderswo. Die französische Mathematik konnte ihre herausragende Stellung zurückgewinnen.

In der Zeit nach dem Zweiten Weltkrieg hat sich neben dem an Universitäten und Akademien wirkenden Mathematiker ein neuer Typ herausgebildet. Es gibt zahlreiche mathematische Gruppierungen an staatlichen und an industriellen Einrichtungen. Die Arbeitsrichtungen sind weitgehend spezialisiert und auf Großforschungseinrichtungen des Militärs, der Physik, Chemie und Biologie, der Medizin, der Raumfahrt, der Technik und der Ökonomie zugeschnitten.

11.0.10 Entwicklung nach dem Zweiten Weltkrieg: Erweiterung der Anwendungsbereiche, Verschiebung inhaltlicher Schwerpunkte

Seit dem Zweiten Weltkrieg hat sich der Anwendungsbereich der Mathematik ganz bedeutend erweitert, nicht zuletzt durch die stürmische Fortentwicklung der maschinellen Rechentechnik.

In einer zusammenfassenden Darstellung über die Ausweitung der Anwendungen der Mathematik hieß es bereits 1967:

> *„Vor unseren Augen verläuft der Prozeß einer qualitativen Veränderung der Mathematik; es werden enge Beziehungen zwischen Zweigen der Mathematik entdeckt, die früher weit voneinander entfernt zu sein schienen; neue mathematische Disziplinen entstehen. Die Schaffung der elektronischen Rechentechnik hat die Auffassungen von Grund auf verändert, die man von der Effektivität verschiedener mathematischer Verfahren hatte. Sie hat ferner den Anwendungsbereich der Mathematik in einem bisher nie gekannten Ausmaß erweitert. Die Beziehungen zwischen der Mathematik und den anderen Wissenschaften entwickeln sich ständig. Waren sie früher im wesentlichen auf Mechanik, Astronomie und Physik beschränkt, so dringen jetzt mathematische Methoden immer tiefer in die Chemie, Geologie, Biologie, Medizin, Ökonomie und Sprachwissenschaft ein. Allgemein bekannt ist die Rolle der Mathematik bei der Entwicklung neuer technischer Richtungen, wie Radioelektronik, Kernenergetik, Weltraumflug. Die alte Behauptung, daß die Mathematik die Königin der Wissenschaften sei, gewinnt somit einen um vieles tieferen Inhalt.“*
> [Pogrebysski 1972, S. 241]

Heute halten viele Mathematiker die Unterscheidung zwischen sogenannter „reiner“ und „angewandter“ Mathematik, höchstens noch in historischem Rückblick für berechtigt, da viele Gebiete ehemals „reiner“ Mathematik plötzlich, ganz unerwartet sogar, für Praxis und Anwendungen wichtig geworden sind. Man denke etwa an die nichteuklidische Geometrie und ihre Bedeutung für die Relativitätstheorie. Jedenfalls steht das Wechselspiel zwischen Mathematik und Praxis in einem sich zeitlich und inhaltlich rasch ändernden Verhältnis; geblieben aber ist der Wechsel gegenseitigen Nehmens und Gebens.

Die Idee, dass Maschinen die Rechenarbeit übernehmen sollen, geht ja bekanntlich bis ins 17. Jahrhundert zurück. Aber erst das 20. Jahrhundert stellte genügend sichere und hinreichend billige Bauelemente bereit. Der erste betriebsfähige, programmgesteuerte Rechenautomat wurde 1941 durch Konrad Zuse (1910–1995) in Jena fertiggestellt. Er hatte dazu elektrische Relais mit mechanischem Speicher verwendet, aber schon 1937 die Verwendung von Elektronenröhren ins Auge gefasst. Schon während des Krieges und verstärkt danach, wurden, insbesondere in den USA, gewaltig dimensionierte Rechenanlagen in Betrieb genommen. Vom Ende der 50er Jahre rückten Rechenanlagen mit Halbleiterelementen in den Vordergrund. Darüber und über die weitere Entwicklung wird in Abschnitt 11.8 berichtet.

Interessant ist dazu ein Blick auf die Verschiebung der inhaltlichen Schwerpunkte der Mathematik während des 20. Jahrhunderts.

Einerseits gibt es eine Anzahl von Hauptarbeitsrichtungen, die zwar im 18./19. Jahrhundert entstanden sind, aber ihre weitere Ausprägung und Fortentwicklung erst im 20. Jahrhundert erfuhren. Zu einer anderen Gruppe gehören jene mathematischen Disziplinen und Teilgebiete, die erst in jüngerer oder jüngster Zeit entstanden sind und überraschende Anwendungsmöglichkeiten offenbarten oder von dorther ihren Ursprung nahmen. Eine ähnliche Umorientierung kann man auch hinsichtlich der Auffassungen über die der Mathematik zugrunde liegenden Methoden wahrnehmen.

Zu jener ersten Gruppe solcher an sich traditioneller, aber heute in den Vordergrund rückender Aspekte der Mathematik kann man die folgenden zählen: Das Entstehen der Strukturmathematik und die mengentheoretische Durchdringung der gesamten Mathematik als generelle Aspekte, dazu speziell den Aufbau der Funktionalanalysis, den axiomatischen Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die Entfaltung der mathematischen Logik, die Verselbständigung der Topologie, die Umgestaltung und den Ausbau der numerischen Methoden sowie die außerordentlich enge Verbindung zwischen Mathematik und Physik durch die Entwicklung solcher Gebiete der theoretischen Physik wie Relativitätstheorie und Quantenmechanik.

Zur zweiten Gruppe heute schon ausgedehnter Wissensgebiete, die aber erst nach dem Zweiten Weltkrieg ihre Ausprägung erfuhren, gehören Spieltheorie, Operationsforschung und Informatik. Diese neuen Zweige werden oft auch der Kybernetik als einer übergreifenden Disziplin zugeordnet und haben zum Teil eine enge Verwandtschaft mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Aus der Vielfalt von Äußerungen zum Verhältnis von Mathematik zu ihren Anwendungen seien ein paar Gedanken aus einem am 5. Oktober 1984 im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach (Schwarzwald) gehaltenen Vortrag des aus Ungarn stammenden US-amerikanischen Mathematikers Peter D. Lax (*1926) wiedergegeben, der sich seinerseits auf einen 1984 in den USA erarbeiteten Bericht (sog. David-Report) zur Erneuerung der Mathematik in den USA bezieht.



Abb. 11.0.36 Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach (Schwarzwald) [Foto Kastenholz]

„Die Mathematik gewinnt zunehmend an Bedeutung für Naturwissenschaften, Technik und Gesellschaft.

Paradoxerweise nahm die Bereitschaft, Forschungsarbeiten zu unterstützen ab, obwohl sich die Anwendungsmöglichkeiten der Mathematik in den vergangenen Jahrzehnten entwickelt haben.

Derzeit sind die Möglichkeiten, in der mathematischen Forschung Fortschritte zu erzielen, so groß wie nie zuvor. Um diese Chance zu nutzen, sind neue Programme notwendig, um graduierten Studenten, angehenden Wissenschaftlern und Professoren zusätzlich Zeit zum Forschen zur Verfügung zu stellen.

Obwohl sich die letzten beiden Punkte besonders auf die Situation in den Vereinigten Staaten beziehen, vermute ich, daß die Verhältnisse in anderen Ländern ähnlich sind.

Viele – wenn auch nicht alle – Anwendungen und Möglichkeiten der Mathematik, von denen der David-Report spricht, wurden durch sehr schnelle Computer mit großen Speichern ermöglicht. Dies führte zu zwei bemerkenswerten Entwicklungen in Naturwissenschaften und Technik:

Experimente wurden systematisch durch mathematische Modelle ersetzt. Gleichzeitig bot sich die Möglichkeit, riesige Datenmengen zu speichern, zu verarbeiten und mit subtilen mathematischen Methoden bislang unzugängliche Informationen herauszuarbeiten.

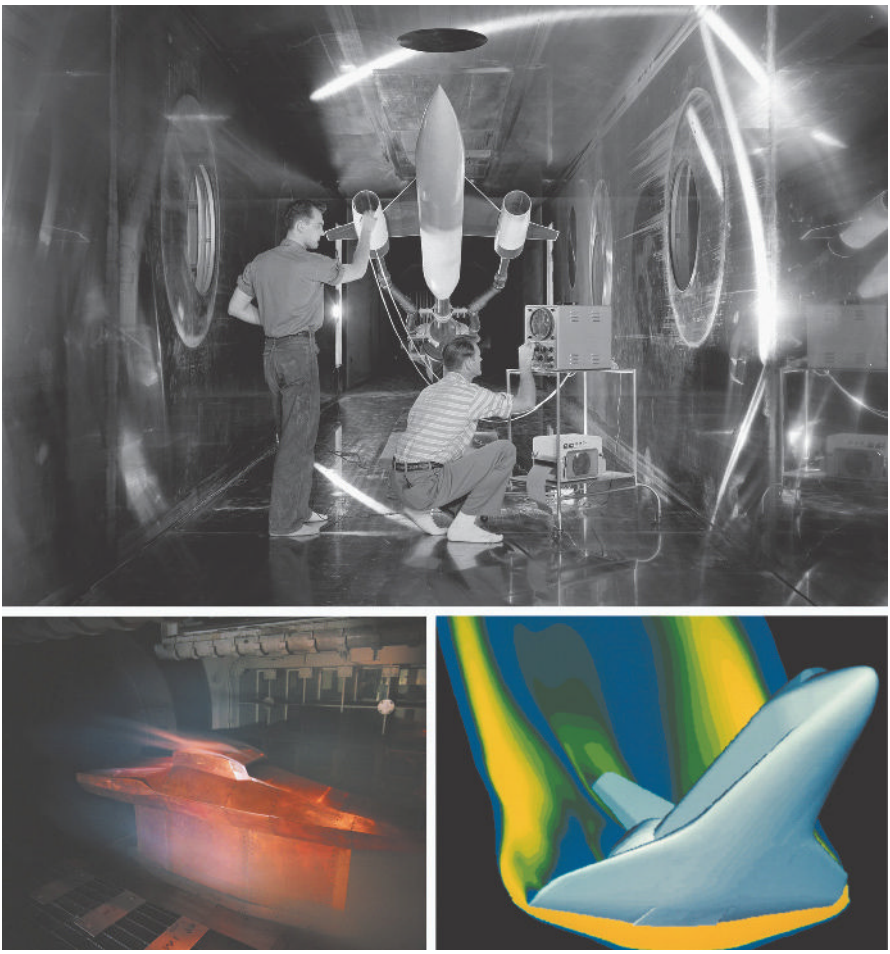


Abb. 11.0.37 Windkanal der NASA 1957 (oben); Windkanal, NASA 2002 (u. li.); Computer-Simulation eines Experimentes im Windkanal (u. re.) [NASA]

Es ist nicht weiter verwunderlich, daß mathematische Modelle viele Experimente ersetzt haben. In den meisten Fällen sind sie billiger, vielseitiger und sicherer. Konstruiert man zum Beispiel Flugzeugteile mit Hilfe eines Windkanals, so muß in der Werkstatt ein neues Modell gebaut werden, um Veränderungen zu testen. Ein mathematisches Modell hingegen kann mit einem Tastendruck und der Eingabe neuer Parameter verändert werden. Jedes moderne Flugzeug, das heute in der Luft ist, ist ein Produkt von Computer-Aided-Design. (...)

Es gibt viele andere Vorhaben, die ohne Computer nicht denkbar wären. So etwa die Entwicklung moderner Kernspaltungs-, Fusions-, oder chemischer Reaktoren. Ein besonders beeindruckendes Beispiel ist, wie Charles Peskin die Wirksamkeit einer Anzahl künstlicher Herzklappen testet, indem er den

Durchfluß des Blutes durch die linke Kammer des schlagenden Herzens auf einem Computer simuliert.

Ähnlich viele Beispiele können auch für die zweite bemerkenswerte Entwicklung, die der Computer mit sich brachte, gegeben werden. So etwa die Speicherung und Verarbeitung von Daten in meteorologischen, ozeanographischen und astronomischen Beobachtungsprogrammen. Ein hervorragendes Beispiel ist die Computertomographie. Hierbei wird eine große Zahl von Röntgenbildern von Teilen des menschlichen Körpers aufgenommen und gespeichert. Ein subtiler Algorithmus ermöglicht die Rekonstruktion der wirklichen Gestalt der inneren Organe. (...)

Die Computertomographie und ihre jüngeren Verwandten wie die kernmagnetische Resonanz- und Emissionstomographie wurden in den Medien beschrieben und auf ihre Bedeutung wurde ausführlich hingewiesen. Es ist schade, daß die Medien nicht auch erwähnten, wieviel Mathematik nötig ist, damit die Tomographie funktioniert. (...)

Angewandte und reine Mathematik sind heute enger untereinander verbunden als zu jeder anderen Zeit in den vergangenen siebzig Jahren.

Die Teilung in reine und angewandte Mathematik ist ein neues und vorübergehendes Phänomen. Für Poincaré, Hamilton, Maxwell, Stokes, Kelvin, Rayleigh, Boole, Gauß, Riemann, Klein, Hilbert und Gibbs gab es keine solche Teilung. Gauß, der Princeps Mathematicorum, war auch der Princeps Calculatorum.“ (Zitiert nach [Mathematisches Forschungsinstitut 1984, S. 28f.])

11.1 Die Begründung der Mengenlehre

11.1.1 Rückblick auf die Vorgeschichte der Mengenlehre

Dem eigentlichen Wortsinne nach wurde die Mengenlehre begründet von dem Hallenser Mathematiker Georg Cantor (1854–1918) und zwar mit der 1874 erschienenen Abhandlung *Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen.* Dort bewies Cantor, dass die Menge der reellen Zahlen nicht abzählbar ist.

Es folgten von 1879 bis 1884 in den *Mathematischen Annalen* sechs Abhandlungen mit dem übergreifenden Titel *Über unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten.* (Die fünfte Abhandlung erschien 1883 eigenständig unter der Überschrift *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre. Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen.* Später ersetzte Cantor das Wort „Mannichfaltigkeit“ durch „Inbegriff“ und „Menge“)

Bei den Arbeiten von 1879 bis 1884 handelte es sich um eine Abfolge von Studien, in der die Grundideen der Mengenlehre Schritt für Schritt vertieft werden. Wie Cantors Biografen hervorheben, war es eine „kühne Tat“ der Redaktion der *Mathematischen Annalen*, insbesondere auch von F. Klein, jene Ideen zu publizieren, die völlig neuartig, geradezu als provozierend empfunden wurden, wie spätere Reaktionen zeigen sollten. Paradox: Es gibt in

unserer objektiv existierenden Umwelt keinen Gegenstand, der unendlich oft vorhanden ist, nicht im Kleinen und nicht im Großen. Selbst die Zahl der Sandkörner an allen Küsten der Erde ist zwar riesengroß, aber doch endlich. Auch die „Universalbibliothek“ des Kurd Laßwitz (1848–1910) enthält eine endliche Anzahl von Büchern, auch wenn zum Beispiel die Werke von Goethe natürlich unter seinem Namen, aber auch unter der Autorschaft von Hilbert, Alten oder Wußing und überhaupt unter dem Namen jedes toten oder lebenden Menschen erschienen. Im Unterschied dazu kann die Mathematik, insbesondere in der Mengenlehre, konkrete, vernünftige und verlässliche Aussagen über „Unendlich“ machen; und es hat sich sogar herausgestellt, dass es verschiedene Größenordnungen des Unendlichen gibt.

Nachdenken über das Unendliche gibt es seit altersher. So bedeutet die von Euklid bewiesene Aussage, dass es zu jeder Primzahl noch eine weitere gibt, nichts anderes, als dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Und die von Archimedes eingeführte Möglichkeit, immer größere Zahlen zu benennen, läuft daraus hinaus, dass die Menge der natürlichen Zahlen unendlich ist, weil in dieser Menge jede Zahl einen Namen bekommen kann, dass also die Zahlenreihe unendlich fortsetzbar ist. Die von ihm korrekt durchgeführte Parabelquadratur (vgl. Band 1, Kap. 4.4) beruht auf der Konvergenz einer unendlichen geometrischen Reihe. Erinnert sei ferner an die Aporien (d. h. Ausweglosigkeiten) des Zenon von Elea (ca. 490–430 v. Chr.) vom fliegenden bzw. nicht fliegenden Pfeil und an den Wettlauf zwischen einer Schildkröte und Achilles, der sie nie einholen kann.

Auch die Diskussionen über die unendliche Teilbarkeit – möglich oder nicht – während der Periode der Scholastik gehören in den Themenkreis rund um das Unendliche, etwa auch die vergeblichen Versuche der Kreisquadratur und das Problem des Kontingenzwinkels.

Die Vorgeschichte der Mengenlehre war auch eng verbunden mit theologischen und philosophischen Denkweisen. Da war etwa das höchst brisante Problem, ob Gott, der Allmächtige, imstande sei, einen Stein zu schaffen, den er nicht heben könne; jede Antwort widerlegt die Allmacht Gottes. Nicolaus Cusanus (1401–1464) stellte sich explizit dem Unendlichen: Dem Unendlichen könne man sich auf dem Wege über die Mathematik nähern. Erinnert sei an das tragische Geschick von Giordano Bruno (1548–1600), der u. a. mit seiner Behauptung von der Unendlichkeit der Welt mit der von der totalen Unendlichkeit Gottes in Konflikt zu der Kirche geraten musste und auf dem Scheiterhaufen endete: Das Universum ist unendlich, aber weniger unendlich als Gott. Wieder andere Zweifel bewegten Blaise Pascal (1623–1662):

> *„Wir wissen, daß es ein Unendliches gibt, und wir sind unwissend über sein Wesen; da wir wissen, es ist falsch, daß die Zahlen endlich sind, ist es also wahr, daß es eine Unendlichkeit der Zahl gibt; aber wir wissen nicht, was sie ist: es ist falsch, daß sie gerade ist, es ist falsch, daß sie ungerade ist, da sie ihr Wesen nicht ändert, wenn wir die Eins hinzufügen; indessen ist sie eine Zahl, und jede Zahl ist*

gerade oder ungerade (was natürlich nur für endliche Zahlen gilt). Man kann demnach wohl wissen, daß es einen Gott gibt, ohne daß man weiß, was er ist.“ (Zitiert nach [Béguin 1959, S. 141])

Galileo Galilei (1564–1642) hatte in den *Discorsi* (1638) dargelegt, dass – wenn wir uns modern ausdrücken – die Menge der Quadratzahlen gleichmächtig mit der Menge der natürlichen Zahlen ist. Wenn dies auch eine eher zufällige und doch höchst scharfsinnige Feststellung war, so ging Bernard Bolzano (1781–1848) in seinen *Paradoxien des Unendlichen* in voller Ausführlichkeit darauf ein; hier erblickte er auch den Unterschied zwischen endlichen und unendlichen Mengen:

„Uebergehen wir nun zur Betrachtung einer höchst merkwürdigen Eigenheit, die in dem Verhältnisse zweier Mengen, wenn beide unendlich sind, vorkommen kann, ja eigentlich immer vorkommt, die man aber bisher zum Nachtheil für die Erkenntniss mancher wichtigen Wahrheiten der Metaphysik sowohl als Physik und Mathematik übersehen hat, und die man wohl auch jetzt, indem ich sie aussprechen werde, in einem solchen Grade paradox finden wird, dass es sehr nöthig sein dürfte, bei ihrer Betrachtung und etwas länger zu verweilen. Ich behaupte nämlich: Zwei Mengen, die beide unendlich sind, können in einem solchen Verhältnisse zueinander stehen, dass es einerseits möglich ist, jedes der einen Menge gehörige Ding mit einem der anderen zu einem Paare zu verbinden mit dem Erfolge, dass kein einziges Ding in beiden Mengen ohne Verbindung zu einem Paare bleibt, und auch kein einziges in zwei oder mehreren Paaren vorkommt; und dabei ist es doch andrerseits möglich, dass die eine dieser Mengen die andere als einen blossen Theil in sich fasst, so dass die Vielheiten, welche sie vorstellen, wenn wir die Dinge derselben alle als gleich, d. h. als Einheiten betrachten, die mannigfaltigsten Verhältnisse zueinander haben.“ [Bolzano 1851, S. 28f.]

Cantor seinerseits hat Bolzano später lobend erwähnt.

Die Mathematik hat sich seit der Erfindung der Infinitesimalrechnung systematisch mit der Betrachtung des Unendlichen im Prozess von Grenzwertbildungen befassen müssen; oft genug blieben diese Bemühungen unbefriedigend, wie die Äußerungen z. B. von Newton und Leibniz zeigen, wenn auch solche Formulierungen (bei Newton und Wallis) wie „man kommt einer festen Größe bei unendlich oft wiederholten Schritten einer Rechnung so nahe als man nur will“ fast mit dem heutigen strengen Konvergenzbegriff identisch zu sein scheinen. Bekannt ist auch die Attacke von Bischof George Berkeley (1685–1753) auf das unendlich Kleine in der Infinitesimalrechnung (vgl. Band 1). So gesehen ist es auch kein Wunder, dass Cantor nicht nur von Seiten einiger Mathematiker, sondern auch von theologischer Seite Widerspruch erntete und sich beim Kardinal Franzelin im Vatikan brieflich zu rechtfertigen gezwungen sah (vgl. [Odifreddi 2004], [Beckert 2001]).

Bekanntlich hat sich noch Gauß dem Gebrauch des aktual Unendlichen widersetzt. Die entschiedene Äußerung bezieht sich nach neueren Studien auf spezielle Fälle (Schumachers unendlich lange Strecken) und ist damals und heute in ihrer Bedeutung wohl überschätzt worden, vgl. [Purkert/Ilgauds 1987, S. 47].

Gauß: *„... so protestiere ich (...) gegen den Gebrauch einer unendlichen Grösse als einer Vollendeten, welcher in der Mathematik niemals erlaubt ist. Das Unendliche ist nur eine façon de parler, indem man von Grenzen spricht, denen gewisse Verhältnisse so nahe kommen als man will, während andern ohne Einschränkung zu wachsen verstattet ist.“* [Gauß 1900, S. 216]

Ersichtlich liegt jedoch dem Unendlichkeitsbegriff, zeitlich vor der Mengenlehre, die Vorstellung des nur potentiell Unendlichen zugrunde. Die Mengenlehre behandelt das aktual Unendliche. Eben darin liegt die Bedeutung von Bolzano, in der Neuzeit diese enge Auffassung durchbrochen zu haben.

Die scharfe begriffliche Definition von „potentiell Unendlich“ geht letzten Endes auf Aristoteles (384–322 v. Chr.) zurück: *Infinitum actu non datur.* Aristoteles stellt fest, dass aus Punkten niemals ein Kontinuum werden kann und dass das Unendliche nur der Möglichkeit nach, nie als ein Fertiges existiert (vgl. dazu etwa [Gericke 1980, insbes. S. 213]).

Für die Merkwürdigkeiten, die unendliche Mengen (in eingekleideter Form) darbieten – z. B. „Hilberts Hotel“ – sei verwiesen auf [Spektrum der Wissenschaft, Spezial, 2/2005]. Dort wird auch das Problem aufgeworfen: Soll der Katalog aller Buchkataloge, die nicht auf sich selbst verweisen, auf sich selber verweisen? Man liest dort auch über die Himmelsleiter von Peano und über die Problematik von Raum und Zeit und manches andere mehr.

11.1.2 Georg Cantor: Schöpfer der Mengenlehre

Cantor wurde 1845 in St. Petersburg geboren, als Sohn eines aus Dänemark zugewanderten Kaufmanns und seiner Frau, die aus einer hoch angesehenen Musikerfamilie stammte. Im Jahre 1856 siedelte die Familie nach Deutschland über. Cantor besuchte das Gymnasium in Wiesbaden und die Höhere Gewerbeschule in Darmstadt, studierte – anfangs gegen den Wunsch des Vaters – 1862 bis 1867 Mathematik in Zürich und Berlin, promovierte 1867 in Berlin und habilitierte sich 1869 in Halle, jeweils mit einer zahlentheoretischen Arbeit.

An der Universität Halle, einer damals relativ bescheidenen preußischen Provinzuniversität, wurde er durch den dortigen Professor Heinrich Eduard Heine auf das Forschungsgebiet der trigonometrischen Reihen hingewiesen; von hier aus gelangte er, wie noch zu zeigen sein wird, zur Mengenlehre. Cantor wurde 1872 Extraordinarius und schließlich 1879 Ordinarius; 1874 hatte er geheiratet und eine erste Publikation zur späteren Mengenlehre veröffentlicht. In den Jahren 1879 bis 1884 erschien in sechs Teilen das Hauptwerk von Cantor: *Über unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten.*



Abb. 11.1.1 Georg Cantor

Im Jahre 1884 begann eine Serie von gesundheitlichen Krisen, nicht ausgelöst (wie oft behauptet worden ist) durch Überarbeitung, sondern bedingt durch eine manisch-depressive Erkrankung. Übrigens schloss sich Cantor mit Nachdruck einer damals vielfältig diskutierten These an, dass der Philosoph Francis Bacon (1561–1626) der wahre Verfasser der unter der Autorschaft von Shakespeare bekannt gewordenen Theaterstücke gewesen sei.

An der Gründung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung hat Cantor aktiv mitgewirkt; sie erfolgte 1890 und Cantor wurde ihr erster Vorsitzender (vgl. [Tobies 1986]).

In den Jahren 1895 bis 1897 erschienen die *Beiträge zur transfiniten Mengenlehre.* Auf dem ersten internationalen Mathematikerkongress 1897 in Zürich wurde erstmals die Bedeutung der Mengenlehre durch Adolf Hurwitz (1859–1919) herausgestellt. In der Folgezeit wurden Cantor zahlreiche nationale und internationale Ehrungen zuteil. Im Jahre 1913 musste er aus gesundheitlichen Gründen vom Lehramt zurücktreten. Er starb 1918 in Halle (vgl. [Purkert/Ilgauds 1987]).

Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre.

Von

Georg Cantor in Halle a./S.

(Erster Artikel.)

„Hypotheses non fingo."

„Neque enim leges intellectui aut rebus damus ad arbitrium nostrum, sed tanquam scribae fideles ab ipsius naturae voce latas et prolatas excipimus et describimus."

„Veniet tempus, quo ista quae nunc latent, in lucem dies extrahat et longioris aevi diligentia."

§ 1.

Der Mächtigkeitsbegriff oder die Cardinalzahl.

Unter einer ‚Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objecten m unsrer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente' von M genannt werden) zu einem Ganzen.

In Zeichen drücken wir dies so aus:

$$M = \{m\}. \tag{1}$$

Die Vereinigung mehrerer Mengen $M, N, P, \ldots$, die keine gemeinsamen Elemente haben, zu einer einzigen bezeichnen wir mit

$$(M, N, P, \ldots). \tag{2}$$

Die Elemente dieser Menge sind also die Elemente von M, von N, von P etc. zusammengenommen.

‚Theil' oder ‚Theilmenge' einer Menge M nennen wir jede *andere* Menge M_1, deren Elemente zugleich Elemente von M sind.

Ist M_2 ein Theil von M_1, M_1 ein Theil von M, so ist auch M_2 ein Theil von M.

Jeder Menge M kommt eine bestimmte ‚Mächtigkeit' zu, welche wir auch ihre ‚Cardinalzahl' nennen.

‚Mächtigkeit' oder ‚Cardinalzahl' von M nennen wir den Allgemeinbegriff, welcher mit Hülfe unseres activen Denkvermögens dadurch aus der Menge M hervorgeht, dass von der Beschaffenheit ihrer verschiedenen Elemente m und von der Ordnung ihres Gegebenseins abstrahirt wird.

Abb. 11.1.2 Erste Seite der *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* von Georg Cantor [Math. Ann. XLVI, 1895, S. 481ff.]

Seit den Zeiten von Euler, Daniel Bernoulli und Fourier hatten trigonometrische Reihen immer wieder das Interesse der Mathematiker erregt. Im 19. Jahrhundert hatten Dirichlet und Riemann wesentliche Beiträge zur Theorie der trigonometrischen Reihen geleistet. Cantor, wie gesagt von Eduard Heine auf dieses Problemfeld hingewiesen – Heine selbst hatte sich mit gleichmäßiger Konvergenz und mit der Eindeutigkeit der Fourierentwicklung befasst – konnte 1870 die Eindeutigkeit einer konvergenten trigonometrischen Entwicklung beweisen:

> „*Wenn eine Funktion f(x) einer reellen Veränderlichen x durch eine für jeden Wert von x konvergente trigonometrische Reihe gegeben ist, so gibt es keine andere Reihe von derselben Form, welche ebenfalls für jeden Wert von x konvergiert und die nämliche Funktion f(x) darstellt.*“ [Cantor, G. 1966, S. 83]

An dieser Stelle setzte Cantors Hinwendung zum Studium von Punktmannigfaltigkeiten ein. Er ging der Frage nach, ob der Eindeutigkeitssatz erhalten bleibt, wenn in einer Menge von endlich vielen Punkten die Konvergenz nicht mehr gilt und – schließlich – was geschieht, wenn diese Ausnahmemenge unendlich ist und wie muss in diesem Falle diese unendliche Menge beschaffen sein. Die sich ergebenden Resultate veröffentlichte Cantor unter dem Titel *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen.*

Um Punktmengen auf der Geraden, d. h. Mengen reeller Zahlen, zu untersuchen, musste der Begriff der reellen Zahl exakt definiert sein. Cantor sah sich mit der Tatsache konfrontiert, dass dieses seit der Antike offene Problem immer noch nicht gelöst war, dass es also noch immer keine arithmetische Theorie der reellen Zahlen gab, welche nicht auf geometrische Vorstellungen zurückgriff. So schickte er seinen Untersuchungen über unendliche Punktmengen den als Theorie der Fundamentalfolgen (Wortbildung später von Cantor) bezeichneten Aufbau einer Theorie der reellen Zahlen voraus. Er betrachtete Folgen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ rationaler Zahlen, für die zu beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon)$ existiert mit $|a_{m+n} - a_n| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$ und alle m, sog. Fundamentalfolgen. Entweder „trifft“ die Folge (d. h. konvergiert sie gegen) eine rationale Zahl oder nicht; im letzteren Fall repräsentiert sie eine irrationale Zahl. Die Menge der reellen Zahlen besteht also aus der Gesamtheit aller Fundamentalfolgen rationaler Zahlen (präziser: aus der Menge der Äquivalenzklassen solcher Fundamentalfolgen modulo Limesgleichheit).

Die Theorie der Fundamentalfolgen war in ähnlicher Weise bereits 1869 durch den französischen Mathematiker Robert Méray (1835–1911) entwickelt worden, aber weitgehend unbekannt geblieben. Beide Ansätze, die von Méray und Cantor, sind im mathematischen Sinne äquivalent zur Theorie der Schnitte von Richard Dedekind (1831–1916), die 1872 unter dem Titel *Stetigkeit und irrationale Zahlen* erschien.

Cantor bildete schon in seiner oben genannten frühen Abhandlung einen für die Mengenlehre wesentlichen Begriff, den der „Ableitung einer Punktmenge“: Wenn P eine Teilmenge der reellen Zahlen ist, so soll die Menge aller ihrer Häufungspunkte die Ableitung von P heißen, bezeichnet mit P'. Man kann höhere Ableitungen bilden gemäß $P^{(n)} = P^{(n-1)'}$. Eine Punktmenge $P^{(n)}$ heißt von der n-ten Art, wenn $P^{(n+1)}$ überhaupt keine Punkte mehr enthält. Mit diesen Begriffsbildungen lautet dann das Resultat von Cantor: Der Eindeutigkeitssatz bleibt bestehen, wenn man als Ausnahmemenge eine Punktmenge $P^{(n)}$ n-ter Art annimmt, n eine beliebige ganze positive Zahl. (Später, 1908 bzw. 1927, konnte der Satz verallgemeinert werden auf beliebige abzählbare Ausnahmemengen (F. Bernstein) und sogar auf gewisse nicht abzählbare Ausnahmemengen (N. Bary)).

Von beträchtlicher Hilfe war Cantor beim Beginn seiner mengentheoretischen Studien der freundschaftliche und anregende Briefwechsel mit Richard Dedekind, den er zufällig 1872 in der Schweiz kennen gelernt hatte [Noether / Cavaillès 1937].

Cantor wusste 1873, dass man eine eineindeutige Zuordnung zwischen den natürlichen und den rationalen Zahlen herstellen kann. Beide Mengen sind gleichmächtig, nämlich abzählbar. Auch die Menge der algebraischen Zahlen ist abzählbar wie Cantor bereits 1873 wusste. Dies geht aus einem Brief an Dedekind hervor.

Naturgemäß musste sich Cantor nun der Frage stellen, ob alle Mengen abzählbar sind, insbesondere die Menge der reellen Zahlen. Im Brief vom 29. 11. 1873 wandte sich Cantor mit diesem Problem an Dedekind:

> *„Gestatten Sie mir, Ihnen eine Frage vorzulegen, die für mich ein gewisses theoretisches Interesse hat, die ich mir aber nicht beantworten kann; vielleicht können Sie es, und sind so gut mir darüber zu schreiben, es handelt sich um folgendes.*
> *Man nehme den Inbegriff aller positiven ganzzahligen Individuen n und bezeichne ihn mit (n) ; ferner denke man sich etwa den Inbegriff aller positiven reellen Zahlengrössen x und bezeichne ihn mit (x) ; so ist die Frage einfach die, ob sich (n) dem (x) so zuordnen lasse, dass zu jedem Individuum des einen Inbegriffes ein und nur eines des anderen gehört? Auf den ersten Anblick sagt man sich, nein es ist nicht möglich, denn (n) besteht aus discreten Theilen, (x) aber bildet ein Continuum; nur ist mit diesem Einwande nichts gewonnen und so sehr ich mich auch zu der Ansicht neige, dass (n) und (x) keine eindeutige Zuordnung gestatten, kann ich doch den Grund nicht finden und um den ist es mir zu thun, vielleicht ist er ein sehr einfacher.“*
> [Cavaillès/Noether 1937, S. 12]

Im weiteren Text dieses Briefwechsels findet sich auf S. 13 die interessante Querverbindung: *„... vorausgesetzt dass sie mit nein beantwortet würde, wäre damit ein neuer Beweis des Liouvilleschen Satzes geliefert, dass es transzendente Zahlen gibt.“*



Abb. 11.1.3 „Cantor-Würfel" in Halle. Der Würfel zeigt den Beginn des Diagonalverfahrens zum Beweis des Satzes: Die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen ist abzählbar [Foto Richter]

Anfangs zeigte sich Dedekind wenig interessiert. Am 7. Dez. 1873 konnte Cantor das Ergebnis angestrengter Arbeit an Dedekind übermitteln: Die Menge der positiven reellen Zahlen < 1 lässt sich nicht eindeutig auf die Menge der natürlichen Zahlen abbilden. Dedekind hat den Beweis intensiv geprüft und dann das Ergebnis anerkannt. Auf Empfehlung von Weierstraß publizierte Cantor nun das Ergebnis: *Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen* (1874). Er beweist dort die Abzählbarkeit der Menge aller algebraischen Zahlen und den Satz, dass das Kontinuum aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1, d. h. dass das Intervall (0,1) nicht abzählbar ist. Aus diesen beiden Resultaten folgt die Existenz transzendenter Zahlen.

Nur Dedekind dürfte die Tragweite dieser Arbeit erkannt haben, dass es also sozusagen verschiedene Größenordnungen des Unendlichen gibt. Oder, mit dem von Cantor 1878 eingeführten Begriff „Mächtigkeit": Die Menge der rationalen Zahlen und die der algebraischen Zahlen haben dieselbe Mächtigkeit; das Kontinuum (0,1) besitzt eine höhere Mächtigkeit. Cantor hatte in *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre* (1878) definiert:

> *„Wenn zwei wohldefinierte Mannigfaltigkeiten M und N sich eindeutig und vollständig, Element für Element, einander zuordnen lassen (was, wenn es auf eine Art möglich ist, immer auch noch auf viele andere Weisen geschehen kann), so möge (. . .)die Ausdrucksweise gestattet sein, daß diese Mannigfaltigkeiten gleiche Mächtigkeit haben, oder auch, daß sie äquivalent sind."* [Cantor, G. 1966, S. 119]

Ein Hauptergebnis dieser Arbeit ist der scheinbar paradoxe Satz, dass Kontinua verschiedener Dimension gleiche Mächtigkeit haben.

Am Ende dieser Arbeit von 1878 deutet Cantor das an, was später als „Kontinuumhypothese“ Gegenstand angestrengter Forschung wurde, nicht nur bei Cantor.

> *„Darnach würden die linearen Mannigfaltigkeiten aus zwei Klassen bestehen, von denen die erste alle Mannigfaltigkeiten in sich faßt, welche sich auf die Form: functio ips.ν (wo ν alle positiven ganzen Zahlen durchläuft) bringen lassen; während die zweite Klasse alle diejenigen Mannigfaltigkeiten in sich aufnimmt, welche auf die Form: functio ips.x (wo x alle reellen Werte ≥ 0 und ≤ 1 annehmen kann) zurückführbar sind. Entsprechend diesen beiden Klassen würden daher bei den unendlichen linearen Mannigfaltigkeiten nur zweierlei Mächtigkeiten vorkommen; die genaue Untersuchung dieser Frage verschieben wir auf eine spätere Gelegenheit.“*
> [Cantor, G. 1966, S. 132f.]

Anders gesagt: Cantor vermutete, dass es zwischen der Mächtigkeit des Abzählbaren und der des Kontinuums keine weiteren Mächtigkeiten gibt. Die Frage, ob es zwischen diesen beiden Mächtigkeiten weitere davon verschiedene Mächtigkeiten gibt oder nicht, bezeichnet man als das Kontinuumproblem. Es ist dies das erste der von Hilbert 1900 gestellten Probleme.

Das Kontinuumproblem wurde erst 1963 durch Paul Cohen (1934–2007) gelöst. Das Ergebnis war tiefgreifend, auch im Hinblick auf die Sicherheit der mathematischen Theorienbildung: Cohen konnte zeigen, dass das Kontinuumproblem im ZFC (Zermelo-Fraenkel-Axiomensystem, vermehrt um das Auswahlaxiom) nicht entscheidbar ist.

In einem gewissen Sinne „gabelt“ sich hier die Mathematik, in einen Teil, in dem diese Hypothese gilt und in einen anderen Teil, in dem sie nicht gilt.

Schon 1938 hatte Kurt Gödel gezeigt, dass ausgehend von den üblichen mengentheoretischen Axiomen Kontinuumhypothese und Auswahlaxiom nicht widerlegbar sind.

In eben dieser Arbeit von 1878 stieß Cantor auf frappierende Ergebnisse, beispielsweise: Die Punkte eines Quadrates kann man eineindeutig denen einer Strecke zuordnen. In einem Brief an Dedekind vom 29. Juni 1877 heißt es: *„je le vois, mais je ne le crois pas“* (*Ich sehe es, aber ich glaube es nicht*). [Cavaillès/Noether 1937, S. 55]

Dieses Ergebnis berührt natürlich den Begriff „Dimension“. Cantor hatte seit 1874 dieses Problem vor Augen gehabt und ursprünglich an dieser Möglichkeit gezweifelt. Erst in der Diskussion mit Dedekind wurde die Aussage präzisiert: Die Abbildung ist allerdings nicht stetig, vgl. [Purkert/Ilgauds 1987, S. 50].

Die Folge der sechsteiligen Abhandlung *Über unendliche Punktmannichfaltigkeiten* – 1879 bis 1884 – stellt den Höhepunkt von Cantors Vorstößen ins Unbekannte dar; sie zeigt das Ringen von Cantor um Begriffsbildungen,

wohl auch im Bewusstsein, dass er sich in einen Widerspruch zu gängigen Auffassungen in Mathematik und Philosophie begeben hatte. Die Abhandlungen enthalten Grundlagen der Mengenlehre und der mengentheoretischen Topologie.

Im ersten Teil werden die linearen Punktmannigfaltigkeiten klassifiziert, sowohl nach ihrem Verhalten bei sukzessivem Ableiten als auch nach ihren Mächtigkeiten. Auch wird „dichte Menge in einem Intervall“ definiert. Weiterhin werden Grundbegriffe der Mengenlehre definiert, u. a. Gleichheit von Mengen, Ober- und Untermenge, Vereinigung, Mächtigkeit , Ordinalzahl, wohlgeordnete Menge. Durch Iteration der Bildung der Ableitung, erst endlich, dann unendlich, gelangte Cantor zu den transfiniten Ordnungszahlen.

Der sechste Teil mündet nach Vorarbeiten in den heute nach Cantor-Bendixson benannten Satz: Sei P eine abgeschlossene, unendliche, nicht abzählbare Menge reeller Zahlen. Dann gilt $P = R + S$, wo R höchstens abzählbar und S eine perfekte Menge (d. h. eine in sich dichte und abgeschlossene Menge, also gleich der Menge ihrer Häufungspunkte) ist. Perfekte Mengen haben die Mächtigkeit des Kontinuums, so dass für abgeschlossene Mengen das Kontinuumproblem gelöst ist: Sie sind entweder höchstens abzählbar oder sie haben die Mächtigkeit des Kontinuums.

Cantor „sah“ eine Strategie, zum allgemeinen Beweis seiner Hypothese zu gelangen, darin, den Satz von Cantor-Bendixson auf beliebige Punktmengen auszudehnen. Die späteren Resultate von Gödel und Cohen sollten indes zeigen, dass diese Strategie nicht zum Ziele hätte führen können.

Noch einmal – nach kraft- und zeitraubendem Engagement in der Bacon-Shakespeare-These – kehrte Cantor zur Mengenlehre zurück. In den Jahren 1895/1897 erschienen in zwei Teilen die *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*. Dort findet sich jene Definition von „Menge“, die in der Folgezeit ihre Tücken offenbaren sollte.

> *„Unter einer ‚Menge‘ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente‘ von M genannt werden) zu einem Ganzen. (. . .) ‚Mächtigkeit‘ oder ‚Kardinalzahl‘ von M nennen wir den Allgemeinbegriff, welcher mit Hilfe unseres aktiven Denkvermögens dadurch aus der Menge M hervorgeht, daß von der Beschaffenheit ihrer verschiedenen Elemente m und von der Ordnung ihres Gegebenseins abstrahiert wird.“*
> [Cantor, G. 1966, S. 282]

Einige Zeit, besonders anfangs, war die Mengenlehre umstritten. Neben Anhängern und vertrauten Freunden wie Dedekind, Hurwitz und dem schwedischen Mathematiker Magnus Gustav Mittag-Leffler (1846–1927), dem es geglückt war, Sonja Kowalewskaja (1850–1891) zu einer Professur in Schweden zu verhelfen, erwuchs Cantor auch eine Gruppe von Gegnern, insbesondere in Leopold Kronecker (1823–1891). Sogar Hermann Weyl wandte sich 1921 gegen die Mengenlehre:

„Man muß sich vor der Vorstellung hüten, daß, wenn eine unendliche Menge definiert ist, man nicht bloß die für ihre Elemente charakteristische Eigenschaft kenne, sondern diese Elemente selber sozusagen ausgebreitet vor sich liegen habe und man sie nur der Reihe nach durchzugehen brauche, wie ein Beamter auf dem Polizeibüro seine Register, um ausfindig zu machen, ob in der Menge ein Element von dieser oder jener Art existiert. Das ist einer unendlichen Menge gegenüber sinnlos."
(Zitiert nach [Fraenkel 1967, S. 160f.])

In den Jahresberichten der deutschen Mathematikervereinigung Bd. 31 (1922) berichtet A. Schoenflies im Artikel *„Zur Erinnerung an Georg Cantor"*, S. 97ff. vom Heidelberger Kongreß 1904:

„Den Höhepunkt des Interesses, das die mathematische Welt den mengentheoretischen Problemen entgegenbrachte, bildete der Heidelberger Kongreß vom Jahre 1904. Es war die Frage nach der Mächtigkeit des Kontinuums und der Wohlordnungssatz, also kurz gesprochen, die Aussage, daß jede Menge einer Wohlordnung fähig sei, die damals die mathematische Welt bewegte. Für Cantor war es eine Art Dogma seines mengentheoretischen Wissens und Glaubens, für jede Menge die Wohlordnungsfähigkeit und insbesondere für das Kontinuum die zweite Mächtigkeit zu fordern. Der Königsche Vortrag, der in dem Satze gipfelte, daß das Kontinuum kein Alef sein könnte (also auch der Wohlordnung nicht fähig), wirkte deshalb verblüffend, zumal er sich auf eine außerordentlich durchgearbeitete und präzise Ausführung stützte. (...) *Bezeichnend für Cantor ist aber, daß er von vornherein das Königsche Resultat trotz seiner exakten Beweisführung nicht für richtig hielt* (Er pflegte scherzweise zu sagen, er hege kein Mißtrauen gegen den König, nur gegen seinen Minister). *Es steigert die Zeichnung des Cantorschen Lebensbildes, wenn ich hier eine persönliche Erinnerung anknüpfe. An die Heidelberger Tagung schloß sich eine Art Nachkongreß in Wengen. Hilbert, Hensel, Hausdorff und ich selbst fanden sich dort zufällig zusammen. Cantor, der ursprünglich in der Nähe weilte, kam alsbald, da ihn ständig das Bedürfnis nach Aussprache erfüllte, zu uns herüber. Im Mittelpunkt unserer Gespräche stand immer wieder der Königsche Satz. Es war geradezu ein dramatischer Augenblick, als Cantor eines Morgens in aller Frühe in dem Hotel erschien, in dem Hilbert und ich wohnten, im Frühstückssaal geraume Zeit auf uns wartete, um überreif zur Aussprache, wie er war, uns und der Umwelt sofort eine neue Widerlegung des Königschen Theorems vorzuführen."*
[Jahresber. DMV, Bd. 31, S. 100f.]

Die spektakulären Ereignisse auf dem Heidelberger Mathematiker-Kongress 1904 sind auch beschrieben in [Purkert 2004].

David Hilbert stellte sich hinter Cantor, niemand solle uns aus dem von Cantor geschaffenen Paradies vertreiben. Aber er forderte 1926 zugleich:

> *„Das Unendliche hat wie keine andere Frage von jeher so tief das Gemüt der Menschen bewegt; das Unendliche hat wie kaum eine andere Idee auf den Verstand so anregend und fruchtbar gewirkt; das Unendliche ist aber auch wie kein anderer Begriff so der Aufklärung bedürftig.“* [Hilbert 1926, S. 163]

Kronecker vertrat die Auffassung – und damit war er gewissermaßen ein Vorläufer der späteren philosophisch-mathematischen Schule der Intuitionisten – nur das habe Heimatrecht in der Mathematik (sei es Beweis oder Definition), das sich in endlich vielen Schritten konstruktiv gewinnen lasse. Bekannt ist ja auch Kroneckers Haltung zu den natürlichen Zahlen, die für ihn die eigentliche Basis der Mathematik darstellen:

> „*Und ich glaube auch, dass es dereinst gelingen wird, den gesammten Inhalt dieser Theorien* (Algebra, Analysis, Zahlentheorie, Wg.) *zu ‚arithmetisiren‘, einzig und allein auf den im engsten Sinne genommenen Zahlbegriff zu gründen, also die Modificationen und Erweiterungen dieses Begriffes wieder abzustreifen, welche zumeist durch die Anwendungen auf Geometrie und Mechanik veranlasst worden sind.“*
> In einer Fußnote präzisiert er *„Ich meine hier namentlich die Hinzunahme der irrationalen und continuirlichen Größen.“*
> [Kronecker 1899, S. 253]

Da musste Cantors Begriffswelt, insbesondere die Strukturierung des Unendlichen und gar die transfinite Mengenlehre unzulässig, geradezu provokativ wirken. Kronecker verstieg sich in einer Vorlesung sogar zu der Äußerung, Cantor sei ein „Verderber der Jugend“. Man darf annehmen, dass die Anfälle von Cantors Krankheit durch Kronecker zwar nicht ausgelöst, möglicherweise aber erheblich verschlimmert worden sind. Durch einen „Versöhnungsbrief“ Cantors konnte wenigstens äußerlich der Streit beigelegt werden; in der Sache aber blieben die Meinungsverschiedenheiten bestehen.

Aber auch sozusagen „von innen“ geriet die Mengenlehre mit der Entdeckung von Antinomien, von logischen Widersprüchen, in Schwierigkeiten. Cantor hatte dies vorausgesehen; er hatte bereits 1895 die Widersprüchlichkeit bei der Begriffsbildung der Menge aller Ordinalzahlen erkannt und dies brieflich 1896 Hilbert, 1899 auch Dedekind mitgeteilt. Cantor dürfte ein Gefühl dafür besessen haben, dass ungezügelte, uferlose Begriffsbildungen zu Schwierigkeiten führen könnten. Die Einsicht in vorhandene bzw. kommende Schwierigkeiten zeigt sich auch im Briefwechsel Cantors mit Hilbert (vgl. dazu [Purkert/Ilgauds 1987, S. 150 ff.], [Ferreirós 2007]).

Tatsächlich erfolgte die Publikation einer Antinomie, eben die von der Gesamtheit aller Ordnungszahlen 1897 durch Cesare Burali-Forti (1861–1931): Wäre diese Gesamtheit ebenfalls eine Menge, so wäre ihre Ordnungszahl größer als alle Ordnungszahlen, sie würde also in dieser Menge einerseits per

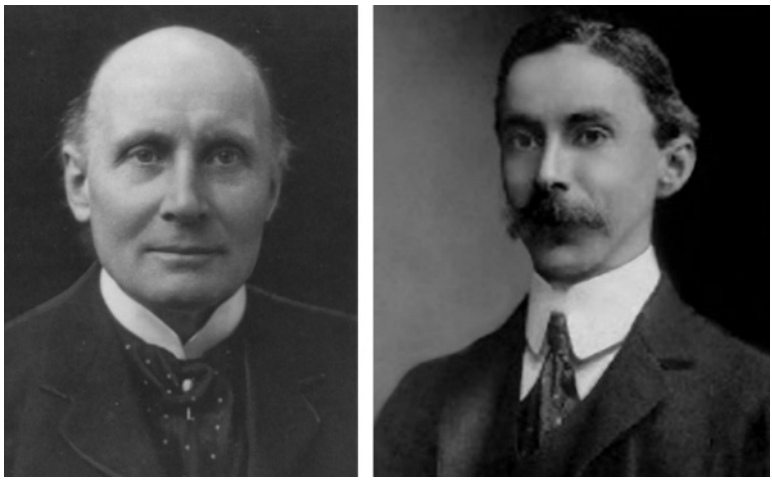


Abb. 11.1.4 Sir Bertrand Russell, Alfred North Whitehead

definitionem enthalten sein, andererseits aber nicht: ein Widerspruch. Wenig später, 1903, veröffentlichte der britische Philosoph, Politiker und Mathematiker Bertrand Arthur William Russell (1872–1970) die Antinomie von der Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten.

Selbst bei endlichen Mengen muss man vorsichtig sein. In Mathematikerkreisen erzählt man sich eine ins Scherzhafte eingekleidete Unterteilung einer Menge, die zu einer logischen Antinomie führt: Man teile alle Männer eines Dorfes ein in eine erste Menge aller Männer, die sich selbst rasieren und in eine zweite aller Männer, die vom Dorfbarbier rasiert werden. Wohin gehört dann der Barbier? Er gehört sowohl zur ersten als auch zur zweiten Teilmenge. Diese Unterteilung ist also fehlerhaft.

Eine ähnliche logische Antinomie wurde vom französischen Gymnasiallehrer Jules Richard formuliert, von Henri Poincaré 1906 in *Les mathématiques et la logique* als zirkuläre Definition kritisiert, da sie nicht „prädikativ“ (im Sinne von zulässig oder gültig) sei, während Giuseppe Peano dem widersprach und meinte, sowohl Richard wie Poincaré seien im Irrtum. Verwandte Antinomien traten als Paradox von Berry und Paradox von Grelling auf (vgl. [Spektrum der Wissenschaft, Spezial 2/05, S. 42]. Die wohl älteste bekannte logische Antinomie dieser Art „Alle Kreter lügen“ stammt von Epimenides, einem griechischen Priester und Seher aus Kreta, und wird noch 600 Jahre später in Kap. 1, Vers 12 des Briefes von Paulus an Titus erwähnt. Bertrand Russell hat behauptet, alle diese Paradoxa hätten dieselbe Wurzel: Verletzung der Zirkelfreiheit.

Cantor nahm die Existenz von Antinomien relativ gelassen auf. Er glaubte, durch Spezifizierung des Begriffes Menge, also durch eine Art Einengung des naiven Mengenbegriffes von 1887 Abhilfe schaffen zu können. In einem

Brief an Dedekind vom 28.7.1899 begegnete er den Misslichkeiten mit dem Vorschlag zur Unterscheidung zwischen „Mengen“ und „inkonsistenten Vielheiten“ (vgl. dazu [Purkert/Ilgauds 1987, S. 152ff.]).

Russell hatte die von ihm entdeckte Antinomie bereits 1902 dem Mathematiker und führenden Philosophen auf dem Gebiet der Logik, Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848–1925) in Jena, mitgeteilt. Frege stand auch im Briefwechsel mit Dedekind; beide zeigten sich betroffen. Dedekind hielt 1903 eine weitere Auflage seines Büchleins *Was sind und was sollen die Zahlen* zurück, „*weil inzwischen sich Zweifel an der Sicherheit wichtiger Grundlagen meiner Auffassung geltend gemacht hatten.*“ (Zitiert nach [Purkert/Ilgauds 1987, S. 150]) Und Frege fügte dem zweiten Band seines Hauptwerkes *Grundgesetze der Arithmetik* (1902) ein Nachwort hinzu:

> *„Einem wissenschaftlichen Schriftsteller kann kaum etwas Unerwünschteres begegnen, als dass ihm nach Vollendung einer Arbeit eine der Grundlagen seines Baues erschüttert wird.*
> *In diese Lage wurde ich durch einen Brief des Herrn Bertrand Russell versetzt, als der Druck (...) sich seinem Ende näherte. Es handelt sich um mein Grundgesetz (V).“*
> (Zitiert bei [Purkert/Ilgauds 1987, S. 149])

Dennoch kann festgestellt werden, dass die Entdeckung der Antinomien die Anerkennung der Mengenlehre kaum behindert hat; sie begann sich zu Anfang des 20. Jahrhunderts im Blick auf die Vorteile ihres Gebrauchs durchzusetzen. Zu Beginn glaubte man den Antinomien zu entgehen, indem man „unvernünftige“ Mengenbildungen ausschloss, aber am „naiven“ Mengenbegriff festhielt.

Darüber hinaus haben diese Unstimmigkeiten einen erheblichen Anstoß zu weit verbreiteten Studien über die Grundlagen der Mathematik ausgelöst. Entscheidende Schritte wurden von Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871–1953), der auch Cantors *Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts* (1932) herausgegeben hat, vollzogen.

Cantor hatte es als „Denkgesetz“ bezeichnet, dass jede Menge als eine wohlgeordnete Menge gedacht werden könne. Dabei heißt eine Menge wohlgeordnet, wenn sie selbst und jede ihrer nichtleeren Teilmengen ein kleinstes Element enthält (wie z. B. die Menge der natürlichen Zahlen). Zermelo bewies 1904 die Möglichkeit der Wohlordnung einer jeden Menge, den sog. Wohlordnungssatz. Dabei formulierte er als Grundlage des Beweises das sog. Auswahlaxiom. Dieses Axiom löste, ebenso wie die Antinomien der Mengenlehre, heftige Debatten über die Grundlagen der Mathematik aus.

Im Jahre 1908 publizierte Zermelo einen zweiten Beweis des Wohlordnungssatzes. Ferner legte er eine auf sieben Axiome gestützte Axiomatisierung der Mengenlehre vor; damit wurden die zulässigen Mengenbildungen gesichert.

Abraham Fraenkel publizierte seinerseits 1919 eine *Einleitung in die Mengenlehre* und ging dort auf Zermelo ein. Die dritte Auflage erschien 1928. In seiner Autobiographie schreibt er dazu:

> *„Mir fiel nun beiläufig ein, daß Zermelos Axiome nicht hinreichen, um gewisse Mengen zu bilden – eine Entdeckung, die auch Zermelo überraschte. Daher führte ich ein neues Axiom der ‚Ersetzung' ein und sandte einen kurzen Aufsatz, der noch andere Verbesserungen von Zermelos System enthielt, an die ‚Mathematischen Annalen', wo er sogleich von Hilbert angenommen wurde."* [Fraenkel 1967, S. 150]

Abraham (eigentlich Adolf) Fraenkel (1891–1965) hatte u. a. bei Kurt Hensel studiert, war Soldat im Ersten Weltkrieg und Professor in Marburg und Kiel.

Am 1. April 1925 war nach längeren Diskussionen (seit 1913) in Jerusalem die Hebräische Universität gegründet worden. Fraenkel emigrierte 1933 und wurde 1938 Rektor der Hebräischen Universität.

Das Auswahlaxiom oder Aussonderungsaxiom hat bei Zermelo die Form: *Jede durch eine Eigenschaft festgelegte Teilgesamtheit einer Menge ist eine Menge* und bei Fraenkel: *Jedes volle Bild einer Menge bezüglich einer eindeutigen Zuordnung ist eine Menge.* In der Sprechweise von Fraenkel wird das Auswahlaxiom folgendermaßen erläutert:

> *„Allgemein behauptet es: sind unendlich viele Mengen gegeben, von denen keine ‚leer' ist, und die keine gemeinsamen Elemente enthalten, so existiert – mindestens – eine Menge, die aus jeder der gegebenen Mengen je ein einziges Element enthält. Das Axiom ist ein prägnantes Beispiel einer rein existentialen, jedes konstruktiven Gehaltes entbehrenden Behauptung."* [Fraenkel 1967, S. 151]

Unter Rückgriff auf die Fraenkel-Zermelosche Mengentheorie bewies Paul Joseph Cohen im Jahre 1963 endgültig die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms von der Kontinuumhypothese. Zermelo war damit einer allgemeinen Tendenz zur Axiomatisierung gefolgt, wie sie schon am Beispiel der Geometrie (1870) durch Pasch und später durch Hilbert demonstriert worden war. Das Axiomensystem für die Mengenlehre ist später 1922 von Fraenkel und Albert Tho-



Abb. 11.1.5 Abraham Fraenkel, Ernst Zermelo

ralf Skolem (1887–1963) präzisiert worden. Weitere Axiomensysteme stammen von John von Neumann (1903–1957), Paul Isaac Bernays (1888–1977) und Kurt Gödel.

Zur weiteren Entwicklung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen hat neben Zermelo und Gerhard Hessenberg (1874–1925) vor allem Felix Hausdorff (1868–1942) beigetragen. Hatte Cantor im Wesentlichen lineare Punktmannigfaltigkeiten studiert und auch die Erweiterung auf n-dimensionale euklidische Räume angedeutet, so nahm Hausdorff diese Erweiterung vor und dehnte sie auf allgemeinere Räume aus.

11.1.3 Felix Hausdorff: Grundzüge der Mengenlehre

Felix Hausdorff stammt aus einer jüdischen Kaufmannsfamilie in Breslau (heute Wrocław). Die Familie war 1870 nach Leipzig übersiedelt, wo Hausdorff das traditionsreiche Nikolai-Gymnasium besuchte, an dem seinerzeit Leibniz Unterricht genossen hatte.

Nach Promotion (1891) in Leipzig mit einer astronomischen Arbeit und der Habilitation, ebenfalls in Leipzig und wiederum mit einer astronomischen Arbeit und Tätigkeiten als außerordentlicher Professor ab 1901 in Leipzig, in Bonn und als Ordinarius in Greifswald wurde Hausdorff 1921 Ordinarius in Bonn. Neben anderen bedeutenden Arbeiten, z. B. zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, begann Hausdorff 1901 mit Publikationen zur Mengenlehre. Nach der Machtergreifung der Nationalsozialisten in Deutschland gerieten Hausdorff und seine jüdische Frau in Bedrängnis. Seine Vorlesung wurde 1934 gestört; er musste sie abbrechen. Ein Versuch zur Emigration scheiterte. Einen Tag vor der berüchtigten „Reichskristallnacht“ 1938 konnte er im kleinen Kreis noch den 70. Geburtstag begehen. Angesichts bevorstehender Deportation begingen Hausdorff, seine Frau und seine Schwägerin Selbstmord am 26. Januar 1942.

Es folgen einige Passagen aus dem Abschiedsbrief Hausdorffs vom 25. Januar 1942, gerichtet an den jüdischen Rechtsanwalt Dr. Wollstein, der am 27. Juli 1942 über Theresienstadt nach Auschwitz deportiert wurde und dort 1944/45 umkam.

> *„Lieber Freund Wollstein!*
> *Wenn Sie diese Zeilen erhalten, haben wir Drei das Problem auf andere Weise gelöst – auf die Weise, von der Sie uns beständig abzubringen versucht haben. (...)*
> *Was in den letzten Monaten gegen die Juden geschehen ist, erweckt begründete Angst, dass man uns einen für uns erträglichen Zustand nicht mehr erleben lassen wird. (...)*
> *Verzeihen Sie, dass wir Ihnen über den Tod hinaus noch Mühe verursachen; ich bin überzeugt, dass Sie tun, was Sie tun können (und was vielleicht nicht sehr viel ist). Verzeihen Sie uns auch unsere Desertion. Wir wünschen Ihnen und allen unseren Freunden, noch bessere Zeiten zu erleben.“* [Brieskorn 1996, S. 263f.]




Abb. 11.1.6 Unter dem Pseudonym Paul Mongré war Hausdorff auch Literat und Philosoph (Holzschnitt von H. A. Müller 1910); Felix Hausdorff (aus der Zeit zwischen 1913 und 1921), [GNU-FDL]

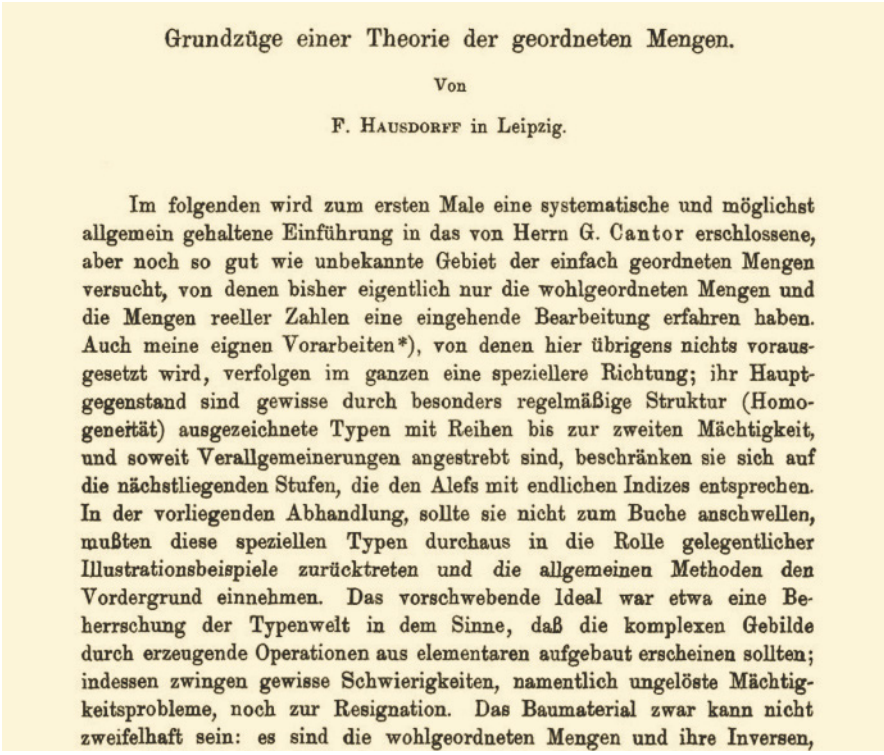
Unter dem Pseudonym Paul Mongré publizierte Hausdorff einen Band mit Aphorismen und einen Gedichtband, schrieb Essays u. a. über Nietzsche, über die Beethoven-Plastik von Max Klinger und war sogar Autor eines erfolgreichen Theaterstückes, das es auf über 300 Aufführungen in mehr als 30 Städten Europas gebracht hat.

In den Jahren 1906 bis 1909 erschienen Hausdorffs Untersuchungen über geordnete Mengen. Er führte den grundlegenden Begriff der Konfinalität ein und unterschied erstmalig reguläre und singuläre Kardinalzahlen. Seine Frage, ob es reguläre Kardinalzahlen mit Limesindex gibt, war der Ausgangspunkt eines umfangreichen Teilgebietes der modernen Mengenlehre, der Theorie der unerreichbaren Zahlen. Die nach ihm benannte Rekursionsformel wurde zur Grundlage aller späteren Untersuchungen zur Alephexponentiation.

Die von Hausdorff eingeführten Element- und Lückencharaktere liefern ein feines Instrumentarium zum Studium geordneter Mengen. Er formulierte erstmals die verallgemeinerte Kontinuumhypothese und schuf spezielle Ordnungsstrukturen, die Jahrzehnte später zur Grundlage der Theorie der saturierten Modelle wurden.

Es folgten nach eingehenden Vorstudien 1914 die *Grundzüge der Mengenlehre*. Im damaligen Verständnis zählten zur Mengenlehre neben der allgemeinen Mengenlehre auch die Theorie der Punktmengen und die Inhalts- und Maßtheorie.

Hausdorffs Werk war das erste Lehrbuch, welches die gesamte Mengenlehre in diesem umfassenden Sinne darstellte und darüber hinaus zahlreiche originale Beiträge seines Verfassers enthielt.



Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen.

Von

F. Hausdorff in Leipzig.

Im folgenden wird zum ersten Male eine systematische und möglichst allgemein gehaltene Einführung in das von Herrn G. Cantor erschlossene, aber noch so gut wie unbekannte Gebiet der einfach geordneten Mengen versucht, von denen bisher eigentlich nur die wohlgeordneten Mengen und die Mengen reeller Zahlen eine eingehende Bearbeitung erfahren haben. Auch meine eignen Vorarbeiten*), von denen hier übrigens nichts vorausgesetzt wird, verfolgen im ganzen eine speziellere Richtung; ihr Hauptgegenstand sind gewisse durch besonders regelmäßige Struktur (Homogeneität) ausgezeichnete Typen mit Reihen bis zur zweiten Mächtigkeit, und soweit Verallgemeinerungen angestrebt sind, beschränken sie sich auf die nächstliegenden Stufen, die den Alefs mit endlichen Indizes entsprechen. In der vorliegenden Abhandlung, sollte sie nicht zum Buche anschwellen, mußten diese speziellen Typen durchaus in die Rolle gelegentlicher Illustrationsbeispiele zurücktreten und die allgemeinen Methoden den Vordergrund einnehmen. Das vorschwebende Ideal war etwa eine Beherrschung der Typenwelt in dem Sinne, daß die komplexen Gebilde durch erzeugende Operationen aus elementaren aufgebaut erscheinen sollten; indessen zwingen gewisse Schwierigkeiten, namentlich ungelöste Mächtigkeitsprobleme, noch zur Resignation. Das Baumaterial zwar kann nicht zweifelhaft sein: es sind die wohlgeordneten Mengen und ihre Inversen,

Abb. 11.1.7 Auszug aus der ersten Seite des Werkes *Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen* von F. Hausdorff [Math. Annalen (65) 1908]

An die Spitze stellte Hausdorff eine ausführliche Mengenalgebra mit neuen zukunftsweisenden Konzepten (Mengenringe und Mengenalgebren). Hier findet man auch erstmals den modernen Funktions- und Abbildungsbegriff; die Anfangskapitel der *Grundzüge* stellen sozusagen die künftige mathematische Sprache bereit. Die Punktmengentheorie erscheint hier als allgemeine Topologie mit dem Begriff des topologischen Raumes an der Spitze; die klassische Punktmengenlehre Cantors ist hiervon ein sehr spezieller Fall. In den *Grundzügen der Mengenlehre* heißt es:

> „*Die Mengenlehre ist das Fundament der gesamten Mathematik; Differential- und Integralrechnung, Analysis und Geometrie arbeiten in Wirklichkeit, wenn auch vielleicht in verschleiernder Ausdrucksweise, beständig mit unendlichen Mengen. Über das Fundament dieses Fundamentes, also über eine einwandfreie Grundlegung der Mengenlehre selbst ist eine vollkommene Einigung noch nicht erzielt worden. Die nächstliegenden Schwierigkeiten und Vorurteile dürfen zwar als erledigt gelten: viele anscheinende ‚Paradoxien des Unendlichen‘*

> *sind nur so lange paradox, wie man an der unberechtigten Forderung festhält, daß für endliche und für unendliche Mengen unterschiedslos dieselben Gesetze gelten sollen. Die naturgemäßen Abweichungen zwischen beiden Gebieten bedingen keinen Widerspruch innerhalb des Unendlichen.“* [Hausdorff 1914, S. 1]

Die *Grundzüge der Mengenlehre* sind „*Dem Schöpfer der Mengenlehre Herrn Georg Cantor in dankbarer Verehrung gewidmet*“.

Mit den *Grundzügen* beginnt die allgemeine Topologie als eigenständige mathematische Disziplin: Auch die Theorie der metrischen Räume wird hier erstmals systematisch entwickelt. Der axiomatisch-mengentheoretische Aufbau war musterhaft für die Entwicklung der modernen Strukturmathematik des 20. Jahrhunderts; insofern stellt das Buch auch methodisch eine Pionierleistung dar.

Im Jahre 1923 bot Hausdorff in einer Vorlesung einen axiomatisch-maßtheoretischen Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung, rund ein Jahrzehnt vor Andrej Nikolajewitsch Kolmogorow (1903–1987).

Als 2. Auflage der *Grundzüge* firmiert erschien 1927 das Buch *Mengenlehre*. Hausdorff musste wegen Umfangsbeschränkungen vieles aus den *Grundzügen* weglassen. Sozusagen als Ausgleich bot er die erste monographische Darstellung des damaligen Standes der deskriptiven Mengenlehre. Auch dies sicherte ihm einen großen Einfluss auf die weitere Entwicklung; das Buch wurde ins Englische und Russische übersetzt. Zur weiteren Entwicklung der Mengenlehre vgl. [Asser 1974], [Purkert/Ilgauds 1987], [Hausdorff 2002], [Ferreirós 2007].

11.2 Mathematisch-philosophische Strömungen

Im Rückblick ist es nicht überraschend, dass Entwicklungen in der Mathematik – Axiomatisierung, Antinomien, Mengenlehre – zur Besinnung auf die philosophischen Grundlagen der Mathematik führten. Einige dieser Strömungen traten um die und nach der Wende zum 20. Jahrhundert mit eigenen mathematisch-philosophischen Schulen hervor, obgleich schon zeitlich früher angelegt. Insbesondere wollen wir hier eingehen auf den sog. Logizismus, auf den Formalismus und auf den Intuitionismus. Zudem folgen Bemerkungen zur nichtklassischen Logik, da auch sie die Grundlagen der Mathematik berührt.

Logizismus

Für eine ausführliche Darstellung der Geschichte des Logizismus sei verwiesen auf [Wörterbuch der Logik 1978], [Companion Encyclopedia 1994, S. 595ff.].

Seit der Antike, seit Platon, Aristoteles und der Stoa gab es enge Beziehungen zwischen Mathematik und Philosophie. Der mittelalterliche spanische Philosoph und Theologe Ramón Llull (lat. Raimundus Lullus, ca. 1235–1315)

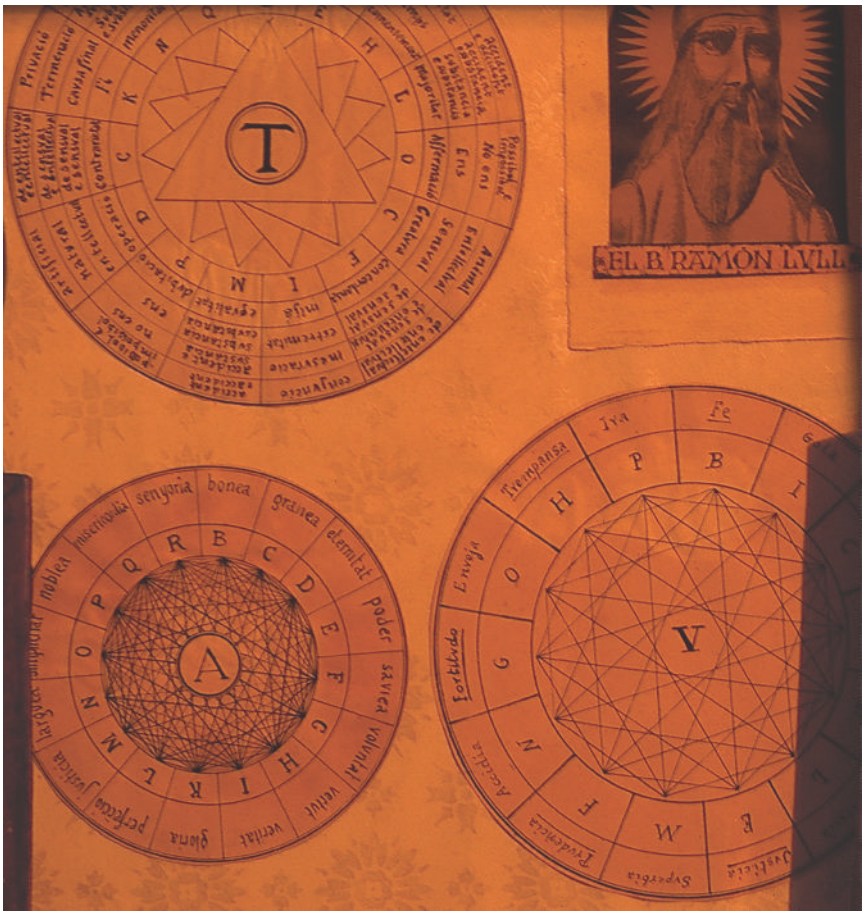
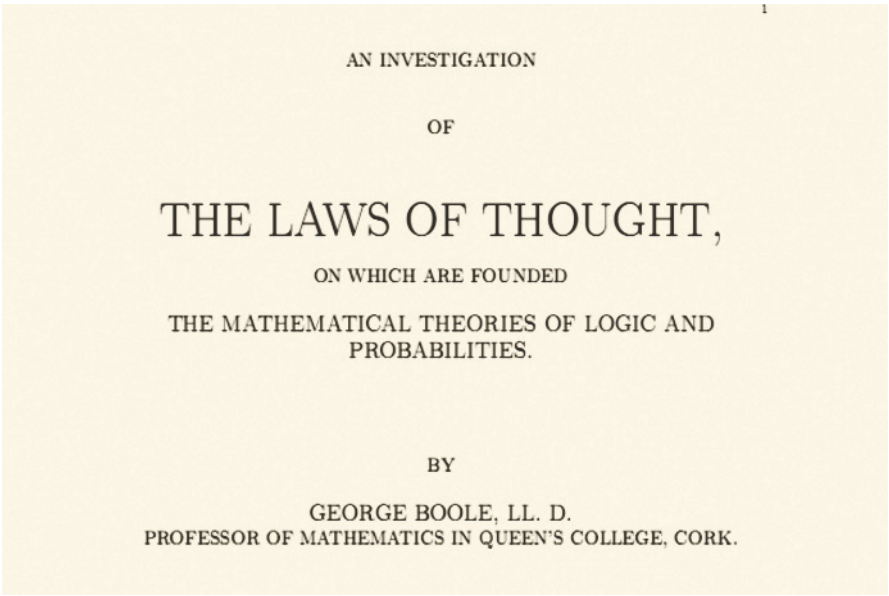


Abb. 11.2.1 Die drei Scheiben der Wahrheitsmaschine von Ramón Llull (Klosterbibliothek des Santuari de Nostra Senyora de Cura, Mallorca) [Foto Alten]

versuchte mittels logischer Schlüsse Wahrheiten von Irrtümern bzw. Lügen zu trennen. Seine *Ars magna* (Die große Kunst) erschien postum 1480. Seit einigen Jahren wird dieser mittelalterliche Universalgelehrte auch als ein „Urahn" der Informatik angesehen. Mit den drei gegeneinander drehbaren Rechenscheiben seiner „Wahrheitsmaschine" versuchte er für die Ungläubigen einen konstruktiven Gottesbeweis zu führen – ein Vorläufer der heute von Informatikern benutzten Struktogramme und Algorithmen.

Die „Lullische Kunst" hat großen Einfluss auf Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) ausgeübt; dessen *characteristica universalis* (etwa: allgemeine Begriffsschrift), seine Andeutungen über eine *mathesis universalis* sowie die von ihm dargestellten Zusammenhänge zwischen Mathematik und Logik weisen Leibniz als einen Begründer der mathematischen Logik aus.



AN INVESTIGATION

OF

THE LAWS OF THOUGHT,

ON WHICH ARE FOUNDED

THE MATHEMATICAL THEORIES OF LOGIC AND PROBABILITIES.

BY

GEORGE BOOLE, LL. D.
PROFESSOR OF MATHEMATICS IN QUEEN'S COLLEGE, CORK.

Abb. 11.2.2 Titelblatt des Hauptwerkes von G. Boole: *An Investigation of the Laws of Thought* (Ausschnitt)

Seit der Mitte des 19. Jahrhunderts wurden weitere, entschiedene Schritte zur kalkulmäßigen Durchbildung der mathematischen Logik getan; in erster Linie sind hier zu nennen George Boole (1815–1864), Giuseppe Peano, Charles Sanders Peirce (1839–1914), Augustus de Morgan (1806–1871), Ernst Schröder (1841–1902), Friedrich Ludwig Gottlob Frege, Bertrand Arthur William Russell, Alfred North Whitehead.

Boole ließ 1847 seine *Mathematical Analysis of Logic* erscheinen, im folgenden Jahr 1848 in einer kalkülmäßigen durchgearbeiteten Form *The Calculus of Logic*. Aus seinem Hauptwerk *An Investigation of the Laws of Thought, on which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities* von 1854, das auch die Wahrscheinlichkeitsrechnung einbezog, entstand in Analogie zu den Gesetzen der Arithmetik eine Algebra der Logik, heute – nach Zwischenetappen – als Boolesche Algebra bezeichnet. Mit der Interpretation von 1 bzw. 0 als richtig bzw. falsch, der Verwendung der aussagenlogischen Verknüpfungen „und“, „oder“ (im einschließenden Sinne von vel) und der Negation sowie des Binärsystems war der Weg zur Schaltalgebra und damit zum digitalen Rechner geöffnet. Boole wirkte, obgleich in England geboren, seit 1848 als Professor für Mathematik am Queens College in Cork (Irland).

Peano war hauptsächlich an der Universität in Turin tätig. Er entwickelte eine Maßtheorie für beschränkte Teilmengen der reellen Geraden, der Ebene und des Raumes und damit eine Präzisierung des Begriffes Inhalt von Punkt-

mengen (1887) und deckte die Bedeutung der Lipschitz-Bedingung für die Eindeutigkeit von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen auf (1890) (vgl. [Kennedy 1980]).

Zum festen Bestand der Mathematik, auch im Lehrbetrieb, gehört das 1889 formulierte Axiomensystem für natürliche Zahlen. Seit 1895 veröffentlichte Peano Ergebnisse in einer formalisierten Sprache. Da sich der Druck mit seinen Symbolen als schwierig erwies, richtete er in seinem Haus eine eigene Druckerei ein.

Beim ersten Internationalen Mathematikerkongress in Zürich, 1897, war Peano neben Poincaré, Hurwitz und Klein als Hauptredner gebeten worden. Peano hielt nicht eigentlich einen Vortrag, sondern erläuterte und verteilte den ersten Teil des zweiten Bandes seines *„Formulario“*. In seinem von 1895 bis 1908 entstandenem fünfbändigem Werk *Formulaire de mathématiques* stellte Peano einen rein formalen Aufbau grundlegender Teile der Mathematik mit eigens erfundenen neuartigen Symbolen ohne jede natürliche Sprache dar. Dies schien ihm als Erfüllung eines Leibnizschen Traums von einer *„characteristica universalis“* [Dittus 1989, S. 203].

Seit dem Ende des 19. Jahrhunderts widmete sich Peano der Verbesserung des mathematischen Unterrichtes, gründete einen Verein italienischer Mathematiklehrer, bereitete an führender Stelle den 1. Internationalen Mathematikerkongress 1897 vor und schlug internationale Kunstsprachen vor, insbesondere seine eigene.

Neben dem 2. Internationalen Mathematikerkongress 1900 in Paris fand der erste Internationale Philosophenkongress statt; er wurde von Peano und seinen Anhängern dominiert. Auch Bertrand Russell nahm teil, war sehr beeindruckt und erhielt hier wohl Anregungen zu seiner Beschäftigung mit mathematischer Logik. In seiner Autobiographie schreibt er rückblickend:



Abb. 11.2.3 Giuseppe Peano, Bertrand Russell (Indien 1972)

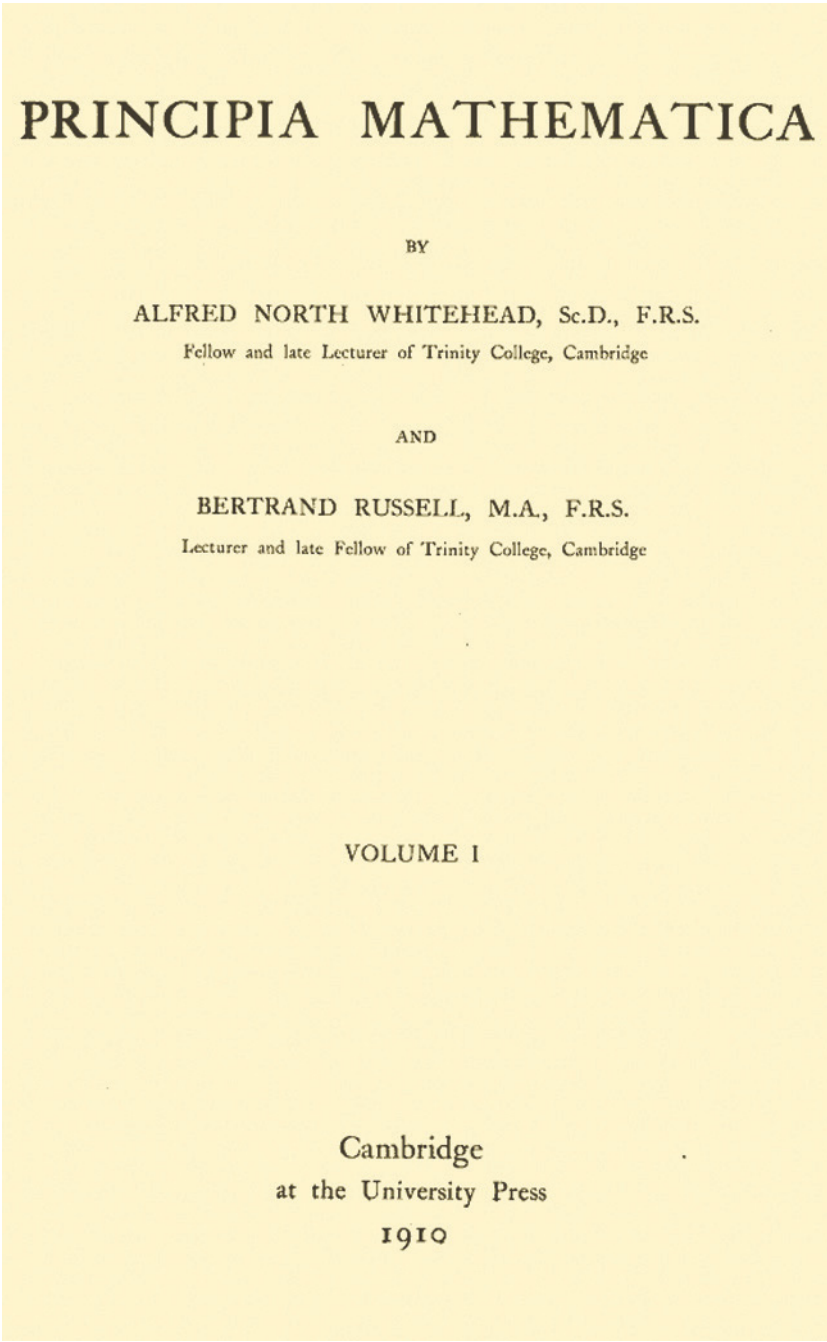
> *"The Congress was a turning point in my intellectual life, because I there met Peano. I already knew him by name and had seen some of his work, but had not taken the trouble to master his notation. In discussions at the Congress I observed that he was always more precise than anyone else, and that he invariably got the better of any argument upon which he embarked. As the days went by, I decided that this must be owing to his mathematical logic. I therefore got him to give me all his works, and as soon as the Congress was over I retired to Fernhurst to study quietly every word written by him and his disciples. It became clear to me that his notation afforded an instrument of logical analysis such as I had been seeking for years, and that by studying him I was acquiring a new and powerful technique for the work that I had long wanted to do. By the end of August I had become completely familiar with all the work of his school. I spent September in extending his methods to the logic of relations. It seems to me in retrospect that, throughout that month, every day was warm and sunny."* [Russell 1967, S. 217f.]

Der amerikanische Gelehrte Ch. S. Peirce, Sohn von Benjamin Peirce (1809–1880), einem der Stammväter der autonomen US-amerikanischen Mathematik, war äußerst vielseitig. Er war tätig im Küsten- und Vermessungsdienst der USA, war Vertreter der USA auf internationalen geodätischen Kongressen, publizierte zu astronomischen Problemen, aber auch zu Algebra, Geometrie, Topologie und Infinitesimalrechnung.

Er gründete 1871 in Cambridge (Mass.) den „Metaphysical Club". Hier wurden Fragen einer allgemeinen Methodologie diskutiert. Er wurde Begründer der modernen Semiotik. Nach ihm ist die zweiteilige Wahrheitsfunktion benannt; 1880 erschien sein Werk *On the Algebra of Logic.*



Abb. 11.2.4 Augustus de Morgan, Charles Sanders Peirce



PRINCIPIA MATHEMATICA

BY

ALFRED NORTH WHITEHEAD, Sc.D., F.R.S.
Fellow and late Lecturer of Trinity College, Cambridge

AND

BERTRAND RUSSELL, M.A., F.R.S.
Lecturer and late Fellow of Trinity College, Cambridge

VOLUME I

Cambridge
at the University Press
1910

Abb. 11.2.5 Titelblatt der *Principia Mathematica* von Whitehead/Russell

Die Algebra der Logik von Boole wurde durch A. de Morgan, Ch. S. Peirce und vor allem durch E. Schröder und den russischen Mathematiker Porezki (1846–1907) weitergeführt. Schröders Hauptwerk, eine systematische Darlegung der bis dahin ausgearbeiteten mathematischen Logik erschien in drei Bänden *Vorlesungen über die Algebra der Logik* in den Jahren 1890/91/95.

Eine klassischen Darlegung der zweiwertigen Aussagen- und Prädikatenlogik, vorgetragen in einer formalisierten Sprache, gab Frege 1879 in seiner *Begriffsschrift, einer der arithmetischen nachgebildeten Formalsprache des reinen Denkens*; es war der Versuch, Beweise in der Mathematik ohne Rückgriff etwa auf die Anschauung zu führen. Von seinem Hauptwerk *Grundgesetze der Arithmetik* erschien 1893 der erste Band; dort gab er ein endliches logisches Axiomensystem an, in dem er die grundlegenden arithmetischen Theoreme in der Sprache seines Prädikatenkalküls ableitete [Lexikon bedeutender Mathematiker 1990, S. 156]. Der zweite Band erschien 1903. Dort lehnte er, im Gegensatz zu Hilbert, implizite Definitionen ab. Die Wirkung von Frege blieb indes gering, auch wegen seiner Verwendung zahlreicher und ungewöhnlicher Symbole.

Russell und Whitehead bemühten sich 1903 in den *Principles of Mathematics* um ein System der symbolischen Logik; 1903 erschienen in drei Bänden die *Principia Mathematica*; darauf sollte die gesamte Mathematik begründet werden. Dies war in gewisser Hinsicht der Höhepunkt des Logizismus. Als mit diesem Programm ernste Zweifel an seiner Durchführbarkeit auftraten – nach der Entdeckung der Antinomien in der Mengenlehre – entwickelten sie die „Typentheorie“, die jedoch trotz allen Scharfsinns umstritten blieb. Whitehead und Russell hatten zirkuläre Definitionen für das Auftreten von Antinomien verantwortlich gemacht: *„Eine Analyse der zu vermeidenden Paradoxien zeigt, daß sie alle aus einem gewissen fehlerhaften Zirkel entspringen. Dieser fehlerhafte Zirkel entsteht aus der Annahme, eine Menge von Gegenständen könne Elemente enthalten, die nur vermittels der Menge als ganzer definiert werden können.“* (Zitiert nach [Ketelsen 1994, S. 36])

Zur Vermeidung dieses „Zirkelfehlerprinzips“ schlugen sie vor, „illegitime Gesamtheiten“ durch folgende Maßnahme zu vermeiden: *„Was immer alle Elemente einer Menge voraussetzt, darf nicht ein Element der Menge sein.“* (Zitiert nach [Ketelsen 1994, S. 36])

Formalismus

Von einer anderen philosophischen Grundhaltung, dem Formalismus ausgehend, schufen Hilbert und Wilhelm Ackermann (1896–1962) – ein Mathematiker und ein Logiker – das berühmt gewordene Buch *Grundzüge der theoretischen Logik*, das zugleich einen Höhepunkt der mathematischen bzw. theoretischen Logik darstellte. Die erste Auflage erschien 1928. Die vierte Auflage (1959, Hilbert war schon verstorben) enthält in der Einleitung eine Definition von „mathematischer Logik“, von Antinomien sowie einige historische Anmerkungen:

„Die ‚theoretische Logik', auch ‚mathematische' oder ‚symbolische Logik' genannt, ist eine Ausdehnung der formalen Methode der Mathematik auf das Gebiet der Logik. Sie wendet für die Logik eine ähnliche Formelsprache an, wie sie zum Ausdruck mathematischer Beziehungen schon seit langem gebräuchlich ist. In der Mathematik würde es heute als eine Utopie gelten, wollte man beim Aufbau einer mathematischen Disziplin sich nur der gewöhnlichen Sprache bedienen. Die großen Fortschritte, die in der Mathematik seit der Antike gemacht worden sind, sind zum wesentlichen Teil mit dadurch bedingt, daß es gelang, einen brauchbaren und leistungsfähigen Formalismus zu finden. – Was durch die Formalsprache in der Mathematik erreicht wird, das soll auch in der theoretischen Logik durch diese erzielt werden, nämlich eine exakte, wissenschaftliche Behandlung ihres Gegenstandes. Die logischen Sachverhalte, die zwischen Urteilen, Begriffen usw. bestehen, finden ihre Darstellung durch Formeln, deren Interpretation frei ist von den Unklarheiten, die beim sprachlichen Ausdruck leicht auftreten können. Der Übergang zu logischen Folgerungen, wie er durch das Schließen geschieht, wird in seine letzten Elemente zerlegt und erscheint als formale Umgestaltung der Ausgangsformeln nach gewissen Regeln, die den Rechenregeln in der Algebra analog sind; das logische Denken findet sein Abbild in einem Logikkalkül. Dieser Kalkül macht die erfolgreiche Inangriffnahme von Problemen möglich, bei denen das rein inhaltliche Denken prinzipiell versagt.

Die Idee einer mathematischen Logik wurde zunächst von LEIBNIZ in klarer Form gefaßt. Die ersten Ergebnisse erzielten A. DE MORGAN (1806 bis 1876) und G. BOOLE (1815–1864). Auf BOOLE geht die gesamte spätere Entwicklung zurück. Unter seinen Nachfolgern bereicherten W.S. JEVONS (1835–1892) und vor allem C.S. PEIRCE (1839–1914) die junge Wissenschaft. Die verschiedenen Resultate seiner Vorgänger wurden systematisch ausgebaut und vervollständigt von E. SCHRÖDER in seinen Vorlesungen über die ‚Algebra der Logik' (1890–1895), die einen gewissen Abschluß der von BOOLE ausgehenden Entwicklungsreihe darstellen.

Teilweise unabhängig von der Entwicklung der Boole-Schröderschen Algebra erfuhr die logische Symbolik neue Anregung durch die Bedürfnisse der Mathematik nach exakter Grundlegung und strenger axiomatischer Behandlung. G. FREGE veröffentlichte seine ‚Begriffsschrift' (1879) und seine ‚Grundgesetze der Arithmetik' (1893–1903). G. PEANO und seine Mitarbeiter begannen 1894 mit der Herausgabe des ‚Formulaire de Mathématiques', in dem alle mathematischen Disziplinen im Logikkalkül dargestellt werden sollten. Das Erscheinen der ‚Principia Mathematica' (1910–1913) von A. N. WHITEHEAD und B. RUSSELL bildet einen Höhepunkt dieser Entwicklung. – Seit den zwanziger Jahren hat D. HILBERT in einer Reihe von Abhand-

lungen und Vorlesungen den Logikkalkül dazu verwendet, um auf einem neuen Wege zu einem Aufbau der Mathematik zu gelangen, der die Widerspruchsfreiheit der zugrunde gelegten Annahme erkennen läßt. Einen zusammenfassenden Bericht über diese Untersuchungen bei dem damaligen Stande gibt das Buch: D. HILBERT und P. BERNAYS, Grundlagen der Mathematik, I. Bd. (1934), II. Bd. (1939). Seitdem sind eine Reihe von weiteren, z.T. sehr bedeutsamen Ergebnissen auf dem Gebiete der mathematischen Logik erzielt worden, die an verschiedene Namen geknüpft sind.“
[Hilbert/Ackermann 1959, S. 1f.]

Über Hilberts Zugang zum Formalismus, verbunden mit seinem schrittmachenden Werk *Grundlagen der Geometrie* und der Betonung der axiomatischen Grundlegung, wird an anderer Stelle berichtet (siehe Kap. 10.2.8). Dabei wird von einer mit der Anschauung verbundenen Bedeutung der Begriffe abgesehen; die axiomatischen Definitionen der Begriffe werden durch axiomatisch formulierte Regeln fixiert. Aufgrund der Ergebnisse von Gödel in den dreißiger Jahren hat sich das von Hilbert vertretene Programm als Ganzes als undurchführbar erwiesen.

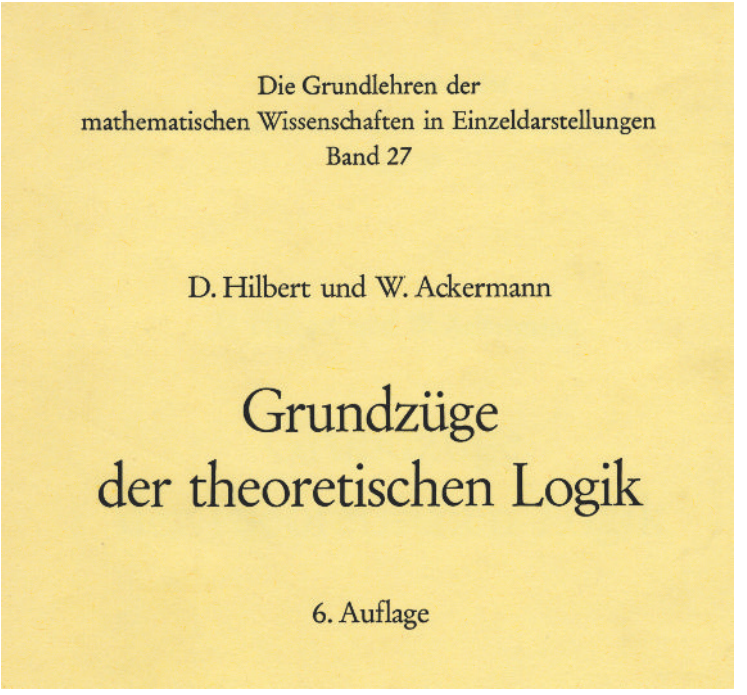


Abb. 11.2.6 Titelblatt der 6. Auflage des „Hilbert/Ackermann“: *Grundzüge der theoretischen Logik* (Ausschnitt)

Intuitionismus

Mit der Aufdeckung der Antinomien verstärkten sich die konstruktivistischen Tendenzen in der Mathematik; sie waren unter anderem bei Leopold Kronecker (1823–1981) schon deutlich zu Tage getreten. Nur die Begriffe und Sätze, die in endlich vielen Schritten gewonnen werden können, sollen Gegenstand der Mathematik sein. Dies konsequent angewandt, führt dazu, dass große Teile der Mathematik „verloren“ gehen würden. Immerhin aber ließen sich einige Teile noch retten, indem man konstruktive Beweise fand. Hilbert schreibt:

> *„Damals haben wir jungen Mathematiker, Privatdozenten und Studierende, den Sport getrieben, auf transfinitem Wege geführte Beweise mathematischer Sätze nach Kroneckers Muster ins Finite zu übertragen. Kronecker machte nur den Fehler, die transfinite Schlußweise für unzulässig zu erklären.“* [Hilbert 1931, S. 487]

Konstruktivismus und Intuitionismus stehen in enger Beziehung. Auch der Intuitionismus beschränkt sich auf jene mathematischen Objekte, die konstruiert werden können. Für Konstruktionsmittel wird nur zugelassen, dass diese intuitiv einsichtig (daher der Name) sind. Folgen und Mengen können dann nicht als fertig, nicht aktuell unendlich sondern, nur in der Zeit werdend, also potentiell unendlich verstanden werden. Daher kann das Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten für unendliche Mengen nicht gestattet werden.

Als Hauptvertreter des Intuitionismus trat der Niederländer Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881–1966) hervor. Bereits in seiner Dissertation von 1907 tritt seine intuitionistische Grundhaltung zutage. Eine Folge von Arbeiten zwischen 1918 und 1928 diente der Darlegung und Popularisierung der intuitionistischen Mathematik. Der weitere Ausbau erwies sich als äu-

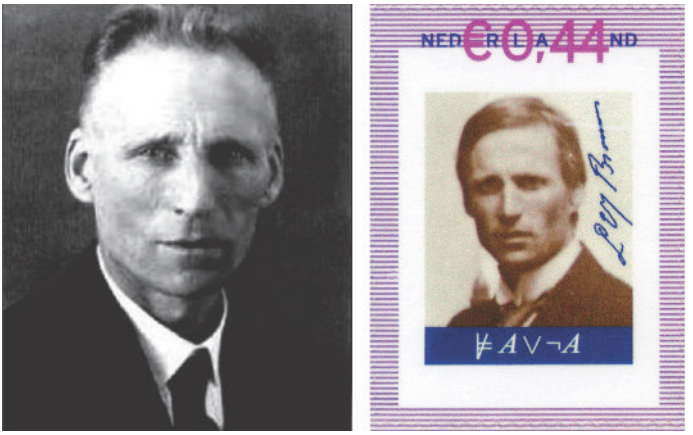


Abb. 11.2.7 Jan Brouwer, in den Niederlanden durch eine Briefmarke geehrt (Niederlande 2007)

ßerst kompliziert; seine einseitige und mit Vehemenz vorgetragene Denkweise musste teilweise auf Ablehnung stoßen.

Es sollte jedoch angemerkt werden, dass Brouwer im Bereich der klassischen Mathematik bemerkenswerte Erfolge erzielt hat, insbesondere im Bereich der Topologie. Er erbrachte den ersten exakten Beweis für die Invarianz der Dimension bei topologischen (oder homöomorphen, d. h. bijektiven und samt ihrer Umkehrabbildung stetigen) Abbildungen: $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ sind genau dann homöomorph wenn $n = m$ ist.

Über die interessante Geschichte der Rezeption von Brouwers Intuitionismus während der 20er Jahre informieren [Hesseling 2003], [Dalen 1999], auch über die Beziehungen zu damaligen philosophischen Strömungen und die Abgrenzungen und Gemeinsamkeiten zu und mit dem Formalismus.

Zur allgemeinen Überraschung veranlasste Hilbert wegen des mit dem Intuitionismus verbundenen Grundlagenstreites, dass Brouwer aus dem Redaktionskollegium der Mathematischen Annalen ausgeschlossen wurde. Es kam zum Bruch zwischen den ursprünglich freundschaftlich verbundenen Gelehrten. Der Streit ging weiter; angeblich sollen mehr als 250 Arbeiten diesem Thema gewidmet worden sein [Hesseling 2003]. Wie scharf die Töne der Auseinandersetzung waren, zeigt die folgende Äußerung von Hilbert:

> *„Was WEYL und BROUWER tun, kommt im Prinzip darauf hinaus, daß sie die einstigen Pfade von KRONECKER wandeln: Sie suchen die Mathematik dadurch zu begründen, daß sie alles ihnen unbequem Erscheinende über Bord werfen und eine Verbotsdiktatur à la KRONECKER errichten. Dies heißt aber, unsere Wissenschaft zerstückeln und verstümmeln, und wir laufen Gefahr, einen großen Teil unserer wertvollsten Schätze zu verlieren, wenn wir solchen Reformatoren folgen. WEYL und BROUWER verfehmen die allgemeinen Begriffe der Irrationalzahl, der Funktion, die Cantorschen Zahlen höherer Zahlklassen usw.; der Satz, daß es unter unendlichvielen ganzen Zahlen stets eine kleinste gibt, und sogar das logische ‚Tertium non datur' z. B. in der Behauptung: entweder gibt es nur eine endliche Anzahl von Primzahlen oder unendlichviele, sind Beispiele verbotener Sätze und Schlußweisen. Ich glaube, daß, so wenig es KRONECKER damals gelang, die Irrationalzahlen abzuschaffen – WEYL und BROUWER gestatten übrigens noch die Konservierung eines Torso –, ebenso wenig werden WEYL und BROUWER heute durchdringen; nein: BROUWER ist nicht, wie WEYL meint, die Revolution, sondern nur die Wiederholung eines Putschversuches mit alten Mitteln, der seinerzeit, viel schneidiger unternommen, doch gänzlich misslang und jetzt zumal, wo die Staatsmacht durch FREGE, DEDEKIND und CANTOR so wohlgerüstet und befestigt ist, von vornherein zur Erfolglosigkeit verurteilt ist."*
>
> [Hilbert 1935, S. 159f.]

Nichtklassische Logik

Logik ist seit altersher eine Disziplin der Philosophie. Sie wurde jedoch von der Mathematik als „Mathematische Logik“ in Teilen usurpiert und in den letzten Jahrzehnten unter der Bezeichnung „Theoretische Informatik“ von der neuen Disziplin Informatik erneut eingegliedert. Die verschiedenen Formen (Ausprägungen) nichtklassischer Logik haben inzwischen auch praktische Bedeutung erlangt.

Parallel zur Entwicklung und Vertiefung der klassischen Logik begannen sich seit den ersten Jahrzehnten des 20. Jahrhunderts verschiedene Formen nichtklassischer Logik herauszubilden. Sie unterscheiden sich von der klassischen Logik im Kern dadurch, dass die zweiwertige Logik aufgegeben wird.

Zu den neuen Formen der Logik rechnet man Systeme der mehrwertigen Logik, die verschiedenen Systeme der modalen Logik, die intuitionistische Logik, Wahrscheinlichkeitslogik, und sogar verschiedene Systeme der zweiwertigen Logik [Wörterbuch der Logik 1978, S. 294], [Berka/Kreiser 1972].

Zu den herausragenden Vertretern dieser Richtungen gehören der amerikanische Logiker Clarence Irving Lewis (1883–1964), Vertreter der polnischen Schule wie Jan Lukasiewicz (1878–1956), der 1920 ein System der dreiwertigen Logik veröffentlichte, sowie George David Birkhoff und der aus Ungarn stammende, in Princeton (USA) wirkende John von Neumann, die zu Anwendungsmöglichkeiten der nichtklassischen Logik in der Quantenmechanik vordrangen.

11.3 Eine neue Disziplin: Funktionalanalysis

11.3.1 Vorstufe: Integrations- und Maßtheorie

Bis weit hinein ins 19. Jh. hatte sich Integration als Umkehrung der Differentiation auf den Begriff des „unbestimmten Integrals“ gestützt, wurden für die Berechnung „bestimmter Integrale“ umfangreiche Integraltafeln entwickelt, mit deren Hilfe man durch Einsetzen der Grenzen den Wert des Integrals bestimmte.

Hatten schon Cauchy und Dirichlet den eigenständigen Charakter der Integration erkannt, so war es doch Bernhard Riemann vorbehalten, das später nach ihm benannte und noch heute im Gymnasium behandelte Integral zu definieren (vgl. Abschnitt 10.5). Im Anschluss daran erfolgten viele Verallgemeinerungen, und Theorien vom „Maß“ bzw. „Inhalt“ linearer, ebener, allgemein n-dimensionaler Punktmengen wurden entwickelt. Am bekanntesten und für die im 20. Jh. entstandene Funktionalanalysis wohl am wichtigsten ist der von Henri Lebesgue eingeführte Integralbegriff.

Henri Lebesgue: Erweiterung des Integralbegriffs

Von Henri Lebesgue (1875–1941) wurde die Integraldefinition abermals erweitert. Mit Hilfe des nach ihm benannten Integrals konnte er eine über die Riemann-integrierbaren Funktionen hinausgehende Klasse von Funktionen angeben, die im Sinne seines Integralbegriffes, also Lebesgue-integrierbar sind. Die entsprechende Definition greift auf die von Felix Edouard Justin Émile Borel (1871–1956) entwickelte Vorstellung vom „Maß“ einer Punktmenge (für lineare und ebene Gebilde) zurück und erfasst auch sehr „komplizierte“ Punktmengen. Mit seinem Maßbegriff konnte Lebesgue die Klasse der Riemann-integrierbaren Funktionen wie folgt charakterisieren: *Eine in einem Intervall* $[a, b]$ *beschränkte Funktion ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn die Menge ihrer Unstetigkeitsstellen das Maß Null hat.*

Seine Theorie des Maßes und einen verallgemeinerten Integralbegriff entwickelte Lebesgue 1901 in seiner Arbeit *Sur une généralisation de l'intégrale definie* (Über eine Verallgemeinerung des bestimmten Integrals). Es folgten *Intégrale, longueur, aire* (1902) (Integral, Länge, Fläche) und *Sur l'intégration des fonctions discontinues* (1910) (Zur Integration unstetiger Funktionen). Im Jahre 1904 war ihm der Beweis des folgenden Satzes gelungen: *„Ist eine Funktion f differenzierbar in einem abgeschlossenen Intervall* $[a, b]$ *und ist die Ableitung* f' *beschränkt, dann ist* f' *Lebesgue-integrierbar und es gilt* $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$ *.“*

Weitere Einzelheiten und Ergebnisse sollen und können hier nicht dargestellt werden (vgl. dazu [Hawkins 1980], [Knobloch 1983], [Hammer 1987], [Hochkirchen 1999]). Nur so viel: Lebesgue bezog sich auf den „Inhalts“begriff von Camille Jordan (1838–1922), und den Maßbegriff von Borel. Das Lebesgue-Integral bezieht sich auf spezielle Ordinatenmengen. Lebesgue fand keine Funktion, die nicht in seinem Sinne integrierbar war. Doch es gibt solche Funktionen. Beispiele dafür wurden in der Folgezeit u. a. 1905 von Giuseppe Vitali (1875–1932) angegeben.



Abb. 11.3.1 Henri Lebesgue, Émile Borel

> *„Lebesgues Integral war ein neuer Begriff, dessen Einführung keinesfalls ‚l'art pour l'art' war; ganz im Gegenteil wurden mit ihm wichtige Schwachstellen des Riemann-Integrales beseitigt. Dennoch dauerte es einige Zeit, bis Lebesgue sich durchsetzen konnte; insbesondere in Frankreich stieß er zunächst auf den Widerstand gerade der älteren Mathematiker (...), so daß es nicht verwundert, daß seine Dissertation zuerst in Italien gedruckt wurde und daß er erst 1919 eine (längst verdiente) Professur erhielt."* [Hochkirchen 1999, S. 369]

Obgleich das Lebesgue-Maß sehr komplizierte Mengen erfasst, gibt es doch Mengen, die weder Inhalt noch Maß besitzen. Das zeigt das „Banach-Tarski-Paradoxon" (1924). Es lautet in seiner starken Version: *Zu je zwei beschränkten Teilmengen A und B des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$ mit $n \geq 3$ gibt es jeweils disjunkte Zerlegungen $A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$, $B = B_1 \cup \ldots \cup B_n$, sodass jedes A_k zu jedem $B_k (k = 1, \ldots, n)$ kongruent ist.*

Dieses Theorem wird als Paradoxon bezeichnet, weil es elementarer geometrischer Auffassung widerspricht. Beispielsweise kann nach diesem Theorem eine Kugel des dreidimensionalen euklidischen Raumes in endlich viele Teilmengen zerlegt werden, aus denen mit Kongruenzabbildungen *zwei* identische Kopien des Originals zusammengesetzt werden können („Doubling the ball"). Dies scheint unmöglich zu sein, weil Kongruenzabbildungen das Volumen erhalten, aber das Volumen in diesem Fall verdoppelt wird! Das liegt daran, dass bei der Zerlegung *nichtmessbare* Mengen verwendet werden (für deren Volumen kein Lebesgue-Maß definiert ist). Deren Konstruktion ist aber nur unter Verwendung des Auswahlaxioms (oder einer schwächeren Version) möglich. Deshalb wird das Banach-Tarski-Paradoxon oft als Argument gegen die Zulässigkeit des Auswahlaxioms bei Beweisen benutzt.

Borel und der nur wenige Jahre jüngere Lebesgue gehören zweifellos zu den bedeutendsten französischen Mathematikern um die Jahrhundertwende, deren Einfluß sich im Wissenschaftlichen wie im Organisatorischen weit ins 20. Jahrhundert erstreckte (siehe Abschnitt 11.7). Im Jahre 1928 war er erster Präsident des von ihm ins Leben gerufenen Forschungsinstitutes Henri Poincaré. Auf dem Mond ist ein Krater nach Borel benannt.

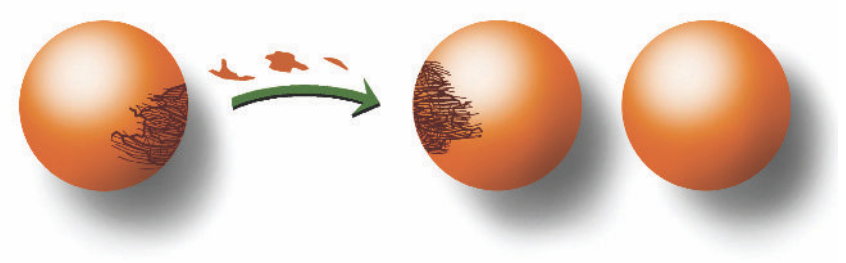


Abb. 11.3.2 „Doubling the ball" – eine Veranschaulichung des Banach-Tarski-Paradoxons

Der Vater von Lebesgue war Buchdrucker; er und ein Bruder starben früh an Tuberkulose. Lebesgue selbst beschreibt seine Kindheit als kränklich und äußerst arm, aber voller Begeisterung für mathematische Zeichen und Figuren. Mühsam war sein Bildungsweg: Von 1894 bis 1897 besuchte er die École Normale Supérieure in Paris, 1897 bestand er das Lehrerexamen und bezog 1902 die Pariser Universität. Nach Lehrtätigkeiten in Nancy, Rennes und Poitiers wirkte er von 1910 bis 1920 an der Sorbonne, 1921 bis 1941 als Professor am Collège de France. Im Jahre 1922 wurde er Mitglied der Pariser Akademie der Wissenschaften.

11.3.2 Entstehung der Funktionalanalysis

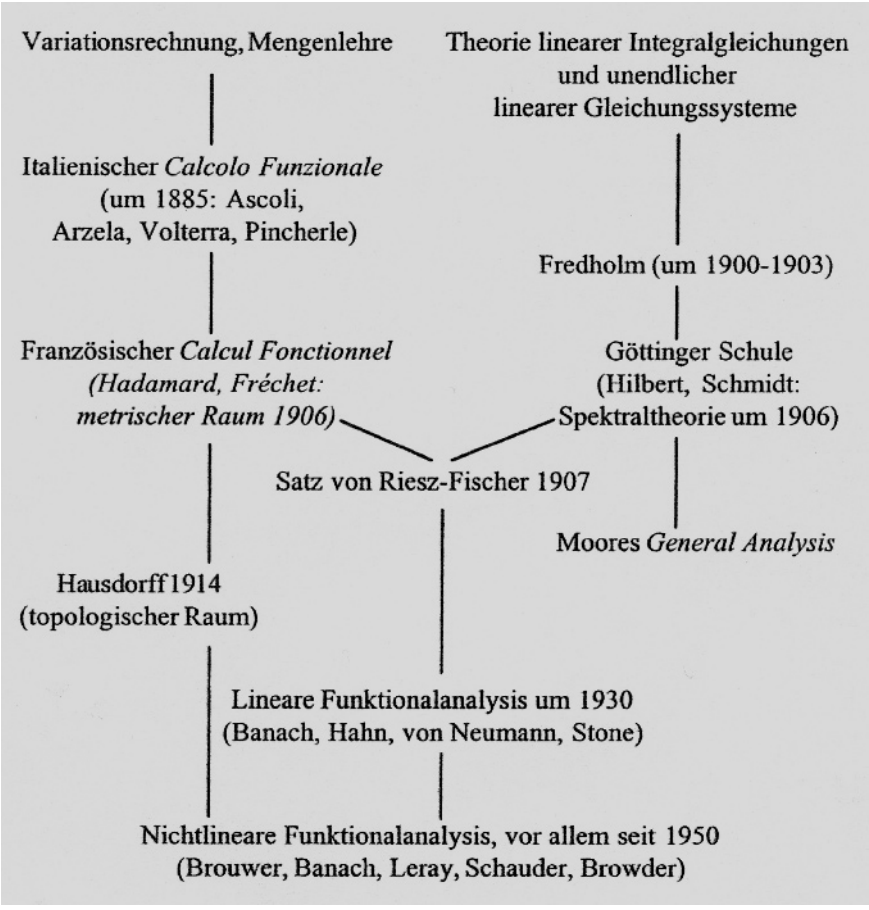


Abb. 11.3.3 Schema zur Entstehung der Funktionalanalysis nach [Siegmund-Schultze 1999, S. 488]

Neben der Ausdehnung der klassischen Analysis nach Umfang und Tiefe bildete sich mit der Funktionalanalysis ein neuer Zweig der Analysis heraus; zu Anfang der 30er Jahre erreichte sie den Rang einer selbständigen mathematischen Disziplin. Die Bezeichnung „Funktionalanalysis“ dürfte auf eine Arbeit des französischen Mathematikers Paul Lévy (1886–1971) *Leçons d'analyse fonctionale* (1922) zurückgehen. Doch hat sich der Begriffsinhalt der Funktionalanalysis seitdem wesentlich verändert. Eine aus jüngerer Zeit (1989) stammende Beschreibung lautet folgendermaßen:

> *„Unter Funktionalanalysis versteht man heute eine ‚allgemeine‘ Analysis, die die Verallgemeinerungen aller Grundbegriffe der klassischen Analysis wie Grenzwert, Konvergenz, Stetigkeit, Differenzierbarkeit usw. auf den Fall der Abbildung einer Menge in die andere bei immer allgemeineren Annahmen bezüglich dieser Mengen behandelt. Damit gelingt es der Funktionalanalysis, die verschiedensten mathematischen Probleme unter einem einheitlichen Gesichtspunkt zu betrachten, von den für die Aufgabe unwesentlichen speziellen Bedingungen zu abstrahieren und durchgängige Lösungsverfahren zu verwenden. Die Funktionalanalysis durchdringt sich in vielen Fällen mit anderen mathematischen Disziplinen wie Topologie, Algebra und Geometrie und benutzt teilweise deren Methoden.“*
> [Siegmund-Schultze 1989, S. 288]

Auf die Geschichte eingehend liest man an anderer Stelle:

> *„Dem Wesen nach war die Entstehung der Funktionalanalysis eine Übertragung einzelner oder mehrerer Begriffe wie Kompaktheit, Beschränktheit, Konvergenz, Abstand, Stetigkeit, Vollständigkeit, Dimension, Skalarprodukt, Linearität usw. vom n-dimensionalen euklidischen Raum R^n und den auf ihm erklärten Funktionen auf unendlichdimensionale ‚Funktionenräume‘ verschiedenen Typs und ihre ‚Operatoren‘.*
> *Hierzu war ein ‚Übergang vom Endlichen zum Unendlichen‘ erforderlich, dessen konkrete Gestalt Gegenstand der Bemühungen und auch des Streits der frühen ‚Funktionalanalytiker‘ war. Vielfach wurden erst durch die Verallgemeinerung, durch die in der Tendenz axiomatische Definition der neuen Räume, in die sich der R^n als Spezialfall einordnete, das Verhältnis der ursprünglichen Begriffe, ihre partielle logische Abhängigkeit oder ihre Unabhängigkeit erkennbar. Begriffe wie der der Konvergenz diversifizierten sich, ehemals äquivalente Eigenschaften wie Beschränktheit und Kompaktheit fielen auseinander. Hinzu traten neue Grundprinzipien und Begriffe, die im Endlichen keinen Sinn besaßen (...) und nur mit Hilfe der Cantorschen Mengenlehre eingeführt werden konnten.“*
> [Siegmund-Schultze 1999, S. 487]

Die Funktionalanalysis hat verschiedenartige historische Wurzeln, die einerseits dem Streben nach Vereinheitlichung und andererseits konkreten Problemen bei Anwendungen entsprangen (vgl. [v. Renteln 2007]).

Das war – zunächst bei Jean Baptiste Joseph de Fourier (1768–1830) im Jahre 1822 – ein bei der Wärmetheorie auftretendes System von unendlich vielen linearen Gleichungen. Eine schrittmachende Idee führte zur Lösung: Fourier bestimmte zunächst die Lösung für n Gleichungen und gewann die Lösung des unendlichen Systems, indem er n nach Unendlich gehen ließ, da die Koeffizienten günstig waren. Auch andere Gelehrte, unter ihnen Jules Henri Poincaré (1854–1912), bedienten sich ähnlicher Kunstgriffe, z. B. bei der Behandlung unendlicher Determinanten. Auch bei der Behandlung linearer Integralgleichungen erwies sich ein ähnlicher Gedanke als hilfreich; die Idee wurde bereits 1896 vom Italiener Vito Volterra (1860–1940) geäußert. Im Wintersemester 1900/1901 hatte ein Student aus dem schwedischen Uppsala in Göttingen einen Vortrag gehalten über eine Theorie der Behandlung von Integralgleichungen vom Typ $f(s) = \varphi(s) + \int_a^b k(s,t)\varphi(t)dt$ (darin sind $f(s)$ und der „Kern“ $k(s,t)$ vorgegeben, $\varphi(t)$ ist gesucht), die der schwedische Mathematiker Ivar Fredholm (1866–1927) entwickelt hatte. Fredholm baute seinen Ansatz zwischen 1901 und 1903 aus: Durch Unterteilung des Integrationsintervalls von a bis b in n Intervalle entsteht ein endliches System linearer Gleichungen; dann wird der Grenzübergang für $n \to \infty$ vollzogen und Fredholm konnte zeigen, dass die so entstehenden Funktionen die Integralgleichung befriedigen.

Hilbert führte diese Fredholmschen Ergebnisse zielbewusst weiter. Mit sechs Abhandlungen über Integralgleichungen (zwischen 1904 und 1910) begründete er eine deutsche Schule der Funktionalanalysis. Er hatte die Reichweite des Ansatzes von Fredholm erkannt, als dieser zu analytischen Schlüssen mit einer unendlich großen Anzahl von Variablen übergegangen war. Unter Würdigung der entsprechenden Verdienste von Fredholm, Carl Gottfried Neumann (1832–1925), Volterra, Poincaré führte Hilbert diese Überlegungen weiter. Einmal wurden die Lösungsansätze für lineare Integralgleichungen deutlich verbessert, zum anderen schuf er eine allgemeine Theorie der linearen Funktionale im Hilbertschen Folgenraum, die auch die Theorie der Integralgleichungen in sich enthalten müsse:

> *„Die Methode, die ich (...) anwende, besteht darin, daß ich von einem algebraischen Problem, nämlich dem Problem der orthogonalen Transformation einer quadratischen Form von n Variablen in eine Quadratsumme ausgehe, und dann durch strenge Ausführung des Grenzüberganges für $n = \infty$ zur Lösung des zu behandelnden transzendenten Problems gelange. Dieselben Theoreme über Integralgleichungen mit symmetrischem Kern werde ich (...) auf einem anderen Wege mittels der Methode der unendlich vielen Variablen entwickeln.“*
> [Hilbert 1912, S. 3]

Hilbert hat einen großen Einfluss ausgeübt, gerade durch das erkennbar werdende Ziel, die Mathematik als einheitlich zu führenden Prozess zu verstehen. Seine Schüler auf diesem Gebiet, insbesondere der Ungar Frédéric Riesz (1880–1956) und Erhard Schmidt (1876–1959), dehnten die Gültigkeit der Sätze und Methoden auf noch allgemeinere Funktionenklassen aus. E. Schmidt wählte allerdings einen anderen Weg als Hilbert [Siegmund-Schultze 1999, S. 494f.]. Riesz bewies 1907 mit Hilfe des sog. Satzes von Fischer-Riesz, dass der Hilbertsche Folgenraum isomorph ist zum Raum der nach Lebesgue quadratisch integrierbaren Funktionen. Auch die längst Gemeingut der Mathematiker gewordene Variationsrechnung bot Anlass zur Entwicklung der Funktionalanalysis; insbesondere in den Händen von Volterra, wobei er sich der sog. *„funzione di linee“* (Linienfunktionen) bediente. Jedoch war die Wirkung relativ gering, da die topologische Grundlegung fehlte. Auch die frühen Arbeiten von Giuseppe Peano, der sich auf Hermann Graßmanns *„Ausdehnungslehre“* (1844) bezog, und von Salvatore Pincherle (1853–1936), die die unendlichdimensionalen Vektorräume axiomatisierten, konnten kaum Wirkung entfalten.

Dagegen war der Einfluß der Mengenlehre geradezu entscheidend. Das wurde schon Ausgang des 19. Jahrhunderts in Italien erkannt, etwa von Giulio Ascoli (1843–1896) und Volterras Schüler Cesare Arzelà (1847–1912). Im Anschluß an eine Bemerkung von Bernhard Riemann (1826–1866), dass es *„indess auch Mannigfaltigkeiten giebt, in welchen die Ortsbestimmung nicht eine endliche Zahl, sondern entweder eine unendliche Reihe oder eine stetige Mannigfaltigkeit von Größenbestimmungen erfordert“* [Riemann 1990, S. 276], und in der Nachfolge des berühmten Satzes von Karl Weierstraß (1815–1897) von 1885, dass jede stetige Funktion durch eine gleichmäßig konvergente Folge von Polynomen als deren Grenzfunktion dargestellt werden kann, wurde die mengentheoretische Grundlegung als notwendig erkannt und zwar als „analyse générale“ für das Studium unendlichdimensionaler Funktionenmengen. Hierhin gehört auch der Integralbegriff von Lebesgue.

Der französische Mathematiker Maurice René Fréchet (1878–1973), der in vielfältiger Weise auf Anregung von Hadamard zur mengentheoretischen Grundlegung der Funktionalanalysis beitrug, führte in seiner herausragenden Dissertation aus dem Jahre 1906 den Begriff des abstrakten metrischen Raumes ein. Die Bezeichnung jedoch stammt von Hausdorff, der mit seinem Werk von 1914 die mengentheoretische Topologie begründete.

Die Anfänge der Funktionalanalysis waren zunächst wenig erfolgreich und konnten keine Breitenwirkung entfalten. Dazu waren die Begriffsbildungen zu abstrakt. So war der Weg zur Anerkennung der Funktionalanalysis mühsam.

Die Sachlage änderte sich erst, als die Funktionalanalysis ergebnisreiche Anwendungen erfuhr. In der Quantenmechanik konnten 1923 die beobachtbaren Größen eines atomaren Systems mit Hilfe linearer Operatoren im Hilbert-Raum beschrieben werden. Eine weitere Hinwendung zur allgemeinen Akzeptanz der Funktionalanalysis ergab sich aus der Definition des topologi-

schen Raumes durch Hausdorff in dessen *Grundzüge der Mengenlehre*. Diese Hinwendung wird in der Historiographie [Siegmund-Schultze 1989] als Beginn der modernen mengentheoretischen Funktionalanalysis eingeschätzt. Die 1922 publizierte Arbeit *Sur les opérations dans les ensembles abstraits* des polnischen Mathematikers Stefan Banach (1892–1945) gab eine einheitliche Methode für die (lineare) Funktionalanalysis. Dies und weitere Arbeiten von 1927 und 1929 sowie seine Monographie von 1932 begründeten die Theorie der linearen Operatoren in den nach ihm benannten vollständigen normierten Räumen.

Auch Wacław Sierpiński (1882–1969), tätig vorwiegend in Warschau, wurde in die Wirren der beiden Weltkriege verwickelt. Während des ersten Krieges kam er nach vorübergehender Internierung in engen Kontakt mit Nikolai Nikolajewitsch Lusin (1883–1950) in Moskau. Während des zweiten Krieges setzte er seine Lehrtätigkeit im besetzten Polen illegal fort. Sierpiński hatte schon 1906 in Lemberg (heute Lwiw) Vorlesungen zur Mengenlehre gehalten. Im Zentrum seiner Forschungen standen Auswahlaxiom und Kontinuumhypothese sowie die Theorie der Kardinalzahlen und Ordnungstypen. Sierpiński war einer der Begründer der Zeitschrift *Fundamenta Mathematicae* die lange Jahre als Sprachrohr der polnischen Mathematikerschule lebte, hohe internationale Anerkennung erfuhr und auch heute noch erscheint.

Den endgültigen Durchbruch der Funktionalanalysis verdankt man John von Neumann. Er konnte, beginnend mit 1928, die Anwendbarkeit der Hilbertschen Spektraltheorie in der Quantenmechanik zeigen.

> *„Mit den Büchern John von Neumanns ‚Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik' und Banachs ‚Theorie des opérations linéaires', die beide 1932 erschienen, war die Funktionalanalysis, eine der wichtigsten Strömungen der modernen Analysis, als selbständige mathematische Disziplin begründet."* [Siegmund-Schultze 1999, S. 503]



Abb. 11.3.4 Stefan Banach, Wacław Sierpiński (Polen 1982)

Stefan Banach: Théorie des opérations linéaires

Dem polnischen Mathematiker Stefan Banach ist es im Wesentlichen zu verdanken, dass die Funktionalanalysis zu einer eigenständigen mathematischen Disziplin aufstieg. Dabei spielten eine Reihe origineller Arbeiten, die intensiven Diskussionen innerhalb der polnischen Schule, die von Banach mitbestimmt wurde und schließlich sein Hauptwerk von 1932 *Théorie des Opérations linéares* (1932) (Theorie der linearen Operatoren) eine wesentliche Rolle. Dort ging Banach über Friedrich Riesz (1880–1956) hinaus, indem er topologische Gesichtspunkte stärker betonte und die Theorie axiomatisch fixierte. Nach Banach sind benannt: der Banach-Raum (1920 von Fréchet), der Banachsche Fixpunktsatz, der Satz von Banach-Steinhaus, die Banachsche Indikatrix und anderes mehr (vgl. dazu u. a. [Ulam 1946], [Steinhaus 1963], [Rudolph 1987]). Auch das internationale mathematische Zentrum der polnischen Akademie der Wissenschaften ist nach Banach benannt.

Banach stammt aus einer wenig begüterten Familie; der Vater war Eisenbahner. Der Sohn konnte in seiner Geburtsstadt Krakau das Lyzeum besuchen, studierte seit 1910 im damals österreich-ungarischen Lemberg (polnisch Lwów, heute Lwiw, Ukraine). Nach einer Periode autodidaktischer Weiterbildung promovierte er 1920 bei Hugo Steinhaus (1887–1972) in Lwów, damals



Abb. 11.3.5 Die Polytechnische Hochschule in Lemberg, erbaut in den Jahren 1873 bis 1877 im italienischen Renaissancestil nach Plänen des Lemberger Architekten und Rektors dieser Hochschule Julian Zacharewicz [Foto Hofmann/Just]

zum selbständig gewordenen Polen gehörig. Steinhaus, der schon arrivierte Gelehrte, hatte den privatisierenden Banach „entdeckt“ und so wieder der Wissenschaft zugeführt. Steinhaus berichtete:

> *„Eines Sommerabends 1916, während ich im Park spazieren ging (. . .) belauschte ich eine Unterhaltung, oder besser gesagt ein paar Worte; die Worte ‚Lebesgue-Integral‘ waren so unerwartet, daß ich zu der Parkbank rüberging und Bekanntschaft mit den Gesprächspartnern schloß: Es waren Stefan Banach und Otton Nikodym, die sich über Mathematik unterhielten.“* (Zitiert nach [Rudolph 1987, S. 150])

Auch die Habilitation von Banach erfolgte in Lwów, und er wirkte dort erst als Dozent, dann ab 1924 als Professor bis 1941, wenngleich Lwów 1939 als Folge des sog. Hitler-Stalin-Paktes von sowjetischen Truppen besetzt worden war. Da Banach gute Beziehungen zu russisch-sowjetischen Mathematikern unterhalten hatte, konnte er weiterarbeiten und wurde sogar Mitglied der Ukrainischen Akademie der Wissenschaften. Es erging ihm schlimm, als Deutschland 1941 die Sowjetunion überfiel und Lwów von deutschen Truppen besetzt wurde. Banach kam wenigstens mit dem Leben davon, musste aber Läuse füttern (!), damit Impfstoff gegen Typhus hergestellt werden konnte. Steinhaus ging in den Untergrund und unterrichtete weiter. Nach der Eroberung Lwóws durch sowjetische Truppen konnte Banach wieder zur Mathematik zurückkehren, war aber so geschwächt, dass er schon am 31. August 1945 verstarb.

Es war bei den Mathematikern in Lwów üblich, sich in Kaffeehäusern zu treffen, dort neueste Ergebnisse auszutauschen und Probleme zu diskutieren. Die Wohlhabenderen wie Kuratowski und Steinhaus hielten sich in vornehmeren Kaffees auf, Banach und andere dagegen im „Roma“. Als dort kein Kredit mehr gewährt wurde, zogen sie ins „Schottische Café“ (Kawiarnia Szkocka) um. Erst wurden Probleme auf Zettelchen, Servietten und den Marmortischen festgehalten; schließlich brachte Banach ein großes, leeres Buch mit, das sich bald mit Problemen anreicherte.

Diese Sammlung – das *„Schottische Buch“* – konnte über den Krieg gerettet werden. Der Sohn von Banach übergab sie an Steinhaus. Eine Teilsammlung zog auf dem Internationalen Mathematikerkongress 1958 in Edinburgh (Schottland) große Aufmerksamkeit auf sich, aber es war doch nur ein bloßer Zufall mit der Namensgleichheit: die Sammlung hat nichts mit Schottland zu tun.

Zu der bedeutsamen polnischen Schule von Funktionalanalytikern, Mengentheoretikern und Logikern gehören auch Kazimierz Kuratowski (1896–1980) und Wacław Sierpiński (1882–1969) sowie Alfred Tarski (1901–1983). Tarski emigrierte 1939 in die USA.

Wenn auch der direkte Einfluss von Banach relativ gering einzuschätzen ist, so ist doch die Arbeitsrichtung „Funktionalanalysis“ (oder: abstrakte Analysis) im Sinne Banachs weitergeführt worden. Es sei verwiesen auf den Banachschüler Juliusz Pawel Schauder (1899–1943), auf den Franzosen Jean

Léray (1906–1998); ihnen verdankt man die Ausdehnung seiner Ergebnisse auf unendlichdimensionale Räume. Auf diese Weise wurde der Zugang zur nichtlinearen Funktionalanalysis eröffnet. Eine Axiomatisierung von Teilen der Funktionalanalysis geht auf John von Neumann zurück.

Auch Schauder, der aus einer Rechtsanwaltsfamilie stammte, bei Steinhaus 1923 promoviert hatte, und ihn 1932 zum Ergänzungsstudium u. a. nach Leipzig zu Leon Lichtenstein geführt hatte, fiel der Ausrottungspolitik gegen die polnische Intelligenz durch die Nationalsozialisten 1943 zum Opfer, zusammen mit seiner Frau.

Friedrich Riesz: Leçons d'analyse fonctionelle

Auch der Ungar Frigyes (Friedrich) Riesz (1880–1956) gehört zu den wesentlichen Analytikern zu Beginn des 20. Jahrhunderts, insbesondere auf dem Gebiet der Funktionalanalysis. Er stammt aus Györ, studierte anfangs Ingenieurwissenschaften in Zürich, wandte sich dann der Mathematik in Budapest zu; 1901/1902 studierte er bei Hilbert und Minkowski in Göttingen. Er promovierte 1902 in Budapest, wirkte zwei Jahre an verschiedenen Gymnasien, 1912 bis 1918 im damals noch ungarischen Kolozsvár (einst Klausenburg in Siebenbürgen, heute Cluj) als Professor an der dortigen Universität. Nach dem Frieden von Trianon nach dem Ersten Weltkrieg fiel diese Gegend an Rumänien.

Riesz wirkte dann an den Universitäten in Budapest, in Szeged (1920 bis 1946) und wieder in Budapest. Übrigens war auch sein Bruder Marcel Riesz (1886–1969) ein bedeutender Mathematiker, der vorwiegend in Schweden gearbeitet hat.

Die Hauptleistung von F. Riesz besteht wohl darin, dass er die Ergebnisse zur Theorie der linearen Integralgleichungen, wie sie von Ivar Fredholm (1866–1927) und David Hilbert gefunden worden waren, auf allgemeinere Räume erweiterte. So kann man ihn, zeitlich vor und neben Stefan Banach zu den Begründern der Funktionalanalysis rechnen. Im Jahre 1907 bewies er den fundamentalen Satz über die Vollständigkeit des Raumes L^2. Dieser Satz wird heute als Satz von Riesz-Fischer bezeichnet, da Ernst Fischer (1875–1954) in Brünn (heute: Brno) denselben Satz gleichzeitig und unabhängig bewiesen und veröffentlicht hatte. In vielen einzelnen Untersuchungen ging Fischer über Ergebnisse von Maurice Fréchet (1878–1973), Jaques Hadamard (1865–1963) und anderen hinaus. Als sein Hauptwerk werden im allgemeinen die gemeinsam mit seinem Studenten Bela Szökefalvi-Nagy (*1913) verfassten *Leçons d'analyse fonctionelle* (Vorlesungen über Funktionalanalysis, 1952) bezeichnet. Zu erheblichem Einfluss auf die Entwicklung der Mathematik gelangten die gemeinsam mit Alfred Haar (1885–1933) in Szeged 1920 gegründeten *Acta Scientiarum Mathematicorum.*

Wie schon aus dem Text hier hervorgeht, hat das verhältnismäßig kleine ungarische Volk eine große Anzahl bedeutender Mathematiker hervorgebracht (vgl. dazu ausführlich [Horváth 2005]).



Abb. 11.3.6 Friedrich Riesz, John von Neumann

John von Neumann: Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik

Das Jahr 1932 nimmt in der Geschichte der Funktionalanalysis eine Schlüsselstellung ein. In diesem Jahr erschienen von Stefan Banach sowohl die *Théorie des opérations linéaires* (Theorie der linearen Operatoren) als auch *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* von John von Neumann (1903–1957). Damit wurde die Funktionalanalysis endgültig zur weitverbreiteten selbständigen mathematischen Disziplin mit anfangs unerwarteten, dann sogar weitreichenden Anwendungen in der theoretischen Physik.

Der aus Ungarn stammende von Neumann darf mit einigem Recht als der bedeutendste Mathematiker der Mitte des 20. Jahrhunderts gelten, mit dem Blick auf die Breite seiner Forschungsarbeit und die Neuartigkeit seiner Ergebnisse (vgl. ausführlich [Ulam 1958], [Wolf 1987, S. 162ff.]).

Von Neumann entstammte einer sehr wohlhabenden Budapester Bankiersfamilie. (1903 gehörte Budapest zum Kaiserreich Österreich-Ungarn). Sein eigentlicher Name war Margittai Neumann Janos Lajos; daraus wurde während der späteren Emigration schließlich John von Neumann.

Seine Begabung trat früh zutage. Als Sechsjähriger konnte er zwei achtstellige Zahlen im Kopf dividieren, mit acht Jahren war er mit Differential- und Integralrechnung vertraut, mit 12 Jahren hatte er sich Borels *Théorie des Fonctions* angeeignet. Zum Privatunterricht kam der Besuch des evangelischen Gymnasiums hinzu. Nach dem Abitur im Jahre 1921 studierte von Neumann auf dringenden Wunsch des Vaters zunächst Chemieingenieurwissenschaften (und zugleich nebenbei Mathematik) in Budapest, Berlin und Zürich, erwarb 1925 den Titel eines Diplomingenieurs für Chemie an der ETH Zürich. Dann erfolgte schon 1926 in Budapest die Promotion in Mathematik mit einer Schrift zur Axiomatisierung der Mengenlehre, die schon vor 1925 entstanden war. Diese Arbeit war Abraham Fraenkel zur Beurteilung vorgelegt worden. Er schrieb später in seinen *Erinnerungen* [Fraenkel 1967]:

„Im Jahre 1923 erhielt ich in Marburg von Erhard Schmidt (...) ein umfangreiches Manuskript, betitelt ‚Die Axiomatisierung der Mengenlehre', von einem mir unbekannten Verfasser namens Johann von Neumann. Schmidt (...) schrieb mir gleichzeitig, in Berlin habe sich niemand gefunden, der diese Arbeit kompetent beurteilen könne, und daher bitte er mich um eine Stellungnahme, ob eine Veröffentlichung in der ‚Mathematischen Zeitschrift' vielleicht in Frage komme. (...) Mit großer Anstrengung gelang es mir, die Abhandlung durchzuarbeiten, die nicht nur von allem abwich, was bis dahin über die Axiomatisierung der Mengenlehre erschienen war, sondern auch den bisherigen Auffassungen insofern gewissermaßen widersprach, als sie nicht von Mengen, sondern von Funktionen handelte und die von allen Vorgängern streng verpönten ‚übergroßen' Bereiche ausdrücklich zuließ. Weit davon entfernt, alles zu verstehen, erkannte ich doch ex ungue leonem (an der Kralle des Löwen, Wg.)*, daß der Verfasser eine ganz außergewöhnliche Begabung haben müsse. Zur Ergänzung unserer Korrespondenz lud ich ihn daher ein, mich in Marburg zu besuchen. Seine Erscheinung machte einen gewaltigen Eindruck nicht nur auf mich, sondern auch auf meine Frau; der schlanke, noch nicht zwanzigjährige Jüngling sah genauso aus, wie man sich ein junges Genie vorstellt."* [Fraenkel 1967, S. 168f.]

Im zweiten Anlauf erst gelang es Hilbert und Courant 1926, für von Neumann in Göttingen ein Stipendium der Rockefeller Stiftung zu erwirken. In diese Zeit fällt seine Studie *Zur Hilbertschen Beweistheorie*. Ferner studierte er zusammen mit Hilbert Grundlagen der Quantenmechanik.

Im Jahre 1927 habilitierte sich von Neumann in Berlin mit der Arbeit *Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren*. Als Privatdozent wirkte er von 1927 bis 1929 in Berlin und von 1929 bis 1930 in Hamburg. Wie Fraenkel berichtete, hatte von Neumann schon damals beschlossen, nach den USA auszuwandern; es gab zu wenige Professorenstellen in Deutschland für eine Überzahl an Bewerbern. Dazu kamen antisemitische Strömungen.

So ging von Neumann 1930 nach Princeton (New Jersey) in den USA, zunächst auf eine Gastdozentenstelle, dann Gastprofessur und erhielt bald darauf eine ordentliche Professur. Inzwischen war Albert Einstein seit 1933 in Princeton tätig und zwar am neugegründeten „Institute for Advanced Study". Auch von Neumann erfuhr diese ehrenvolle Berufung. In der berühmten „School of Mathematics" wirkten nun die sechs Professoren Albert Einstein (1879–1955), James Waddell Alexander (1888–1971), Harold Calvin Marston Morse (1892–1955), Oswald Veblen, Hermann Weyl und John von Neumann. Wenig später kam Kurt Gödel hinzu.

In den Jahren vor dem Zweiten Weltkrieg galt von Neumanns Augenmerk vorwiegend der reinen Mathematik und der mathematischen Physik. Er leistete Beiträge, anknüpfend an seine früheren Arbeiten zur Topologie, Funktionalanalysis, Maßtheorie und Quantenmechanik. Dann aber stellte er



Abb. 11.3.7 John von Neumann (USA 2005), Albert Einstein (Israel 1956)

sich in den Dienst der angewandten Mathematik zugunsten seiner neuen Heimat, anfangs mit Statistik, Meteorologie, Aerodynamik. Es gelang ihm, eine Theorie der strategischen Spiele zu entwickeln, als eine Art Modell für wirtschaftliche Entscheidungen in Kriegszeiten. Zusammen mit O. Morgenstern (1902–1977) publizierte er *Theory of games and economic behavior* (Theorie der Spiele und ökonomischen Verhaltens).

Bezüglich der Informatik und Automatentheorie leistete von Neumann Pionierarbeit, auch hinsichtlich der Umsetzung in programmgestützte Rechner. Übrigens gehörte seine zweite Frau, Klari Dan, die ebenfalls aus Budapest stammte, zu den ersten Chiffrierern für mathematische Probleme in Automatensprache.

Die Hinwendung zu elektronischen Rechenanlagen wurde beschleunigt durch das Atombombenprojekt der US-Regierung. Seit 1943 wirkte von Neumann als Berater für die unter Robert Oppenheimer (1904–1967) in Los Alamos an der Herstellung einer Atombombe arbeitende Gruppe. Es handelte sich um die Lösung nichtlinearer partieller Differentialgleichungen, die bei der Beschreibung kugelförmiger Stoßwellen nach Explosionen auftreten. Es zeigte sich bald, dass bei der Berechnung elektronische Rechenmaschinen unbedingt benötigt wurden. Von Neumann war ab Mitte 1944 beteiligt bei der Konstruktion des ENIAC (Electronic Numerical Integrator and Calculator), aber noch vor dessen Vollendung an der noch leistungsfähigeren Maschine, der MANIAC (Mathematical Analyser Numerical Integrator and Computer), die – so Fraenkel – erst die Herstellung der Wasserstoffbombe ermöglicht hat.

Von Neumann war Befürworter der Wasserstoffbombe und wurde 1954 vom damaligen USA-Präsidenten Eisenhower zum Mitglied der U.S. Atomic Energy Commission ernannt. Doch bald erkrankte von Neumann und starb nach langem, qualvollen Leiden in einem Krankenhaus in Washington an Krebs.

Es gibt eine Legende – freilich unwahrscheinlich – über von Neumann, wonach dieser dem Präsidenten vorgeschlagen habe, über unbewohntem Gebiet der Sowjetunion eine Wasserstoffbombe abzuwerfen, um so militärische

Überlegenheit zu demonstrieren. Dagegen scheint erwiesen zu sein, dass von Neumann eine gewisse Rolle bei der ersten Konferenz über die friedliche Nutzung der Atomenergie in Genf gespielt hat [Macrae 1992].

Seine wissenschaftlichen Ergebnisse und Publikationen sind von einer erstaunlichen Vielfalt. Darüber kann man sich informieren in einem im Mai 1958 von der American Mathematical Society herausgegebenen und John von Neumann gewidmeten Büchlein *John von Neumann, 1903–1957* (Ed. J. C. Oxtoby, B. J. Pettis, G. B. Price). Dort heißt es in der Widmung:

> *"We do not erect statues of great scientists. Instead, the American Mathematical Society publishes this volume as a memorial to John von Neumann. Some of his friends describe his brilliant mind, his warm personality, his work which will live on in mathematics and in the other sciences to which he has contributed so much."*

Das Büchlein enthält eine Biographie (S. Ulam) und eine Reihe von Würdigungen der Hauptarbeitsgebiete von von Neumann:

Von Neumann and Lattice Theory (Garrett Birkhoff);
Theory of Operators, Part I. Single Operators (F. J. Murray);
Theory of Operators. Part II. Operator Algebras (R. V. Kadison);
Von Neumann on Measure and Ergodic Theory (P. R. Halmos);
Von Neumann's Contributions to Quantum Theory (L. V. Hove);
John von Neumann's Work in the Theory of Games and Mathematical Economics (H. W. Kuhn and A. W. Tucker);
Von Neumann's Contributions to Automata Theory (Claude E. Shannon).

Dennoch seien einige herausragende Einzelresultate herausgehoben, vgl. [Siegmund-Schultze 1990, S. 342f.].

Große Berühmtheit erreichte die 1929 publizierte Arbeit *Zur allgemeinen Theorie des Maßes*. Es folgte eine Reihe von Studien zu mathematischen Begründung der Quantenmechanik, die übrigens von Niels Bohr (1885–1962) nicht so recht gewürdigt wurden, weil er eher auf physikalisch Greifbares und Experiment setzte.

Von Neumanns Arbeiten auf diesem Gebiet wurden gekrönt mit der Monographie *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (1932) deren Bedeutung sowohl für die Funktionalanalysis als auch für die mathematische Physik herausragend war.

Das nächste Betätigungsfeld war die Funktionalanalysis im engeren Sinne. Er führte 1935 den Begriff des lokalkonvexen Raumes ein, der umfassender war als der des Banachraumes und darum breitere Anwendungen fand.

Als eine Art Zwischenergebnis erschien die gemeinsam mit F.J. Murray verfasste Arbeit *On Rings of Operators* (1936). Die darin behandelten Ringe fanden viele Anwendungen in statistischer Physik und Quantenfeldtheorie.

Von Einzelleistungen von Neumanns seien noch einige Ergebnisse hervorgehoben: Im Jahre 1933 bewältigte er das 5. Hilbertsche Problem für spezielle Fälle. Mit der eleganten Einführung der fastperiodischen Funktionen (1934)

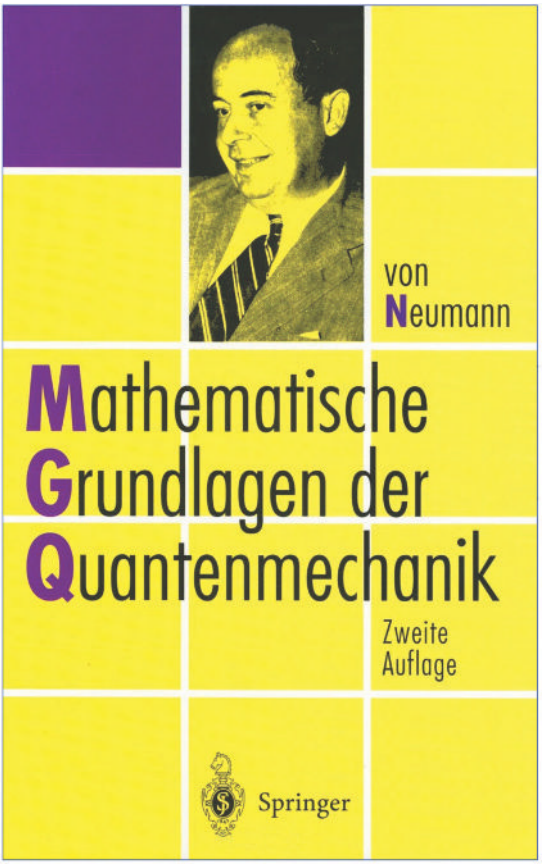


Abb. 11.3.8 Titelblatt *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* von John v. Neumann (in der Ausgabe des Springer Verlages. Berlin, Heidelberg, New York 1996)

ging von Neumann über die ein Jahrzehnt vorher von Harald August Bohr (1887–1951) gegebene Behandlung hinaus. Und schließlich soll sein Beitrag (1932) zur Ergodentheorie erwähnt werden, an den wenig später George David Birkhoff anknüpfte.

John von Neumann verfügte über einen blitzartig zufassenden Intellekt, vor allem in Diskussionen wissenschaftlicher Probleme. Er liebte Geselligkeit. Im Haushalt hat er, wie seine Frau berichtete, niemals auch nur einen Hammer oder Schraubenzieher angefasst.

Eine Reihe von Anekdoten (wahr oder erfunden) spielt auf seine Zerstreutheit an. So soll er einmal von Princeton nach Washington unterwegs gewesen sein. Auf der Strecke sei er ausgestiegen und habe zu Hause angerufen, weshalb er nach Washington wolle.

11.4 Algebra im 20. Jahrhundert

Die klassische Algebra hatte mit den Arbeiten von Heinrich Weber (1842–1913) und seinen Lehrbüchern einen gewissen Abschluss erreicht. Andererseits sind um die Jahrhundertwende im Nachhinein bereits viele Ansätze und Ideen künftiger Entwicklungen erkennbar. Die Hauptmerkmale des folgenden Prozesses beim Aufbau der sog. „Modernen Algebra“ bestehen in einer verstärkten Hinwendung zum Abstrakten, der durchgehenden Axiomatisierung und in der sich wie in der gesamten Mathematik auch in der Algebra vollziehenden mengentheoretischen Durchdringung (vgl. dazu die detailreiche Darlegung von K.-H. Schlote in [Alten et al. 2008, S. 475ff.]).

11.4.1 Herausbildung der sog. Modernen Algebra

Die Wendung der Dinge in der klassischen Algebra, hin zu der „Modernen Algebra“ beschreibt Schlote am Beispiel Hilberts so:

> *„Hilbert benutzte alle Mittel zu einer strukturellen Darstellung der Algebra und hat an deren Entwicklung aktiv mitgewirkt, aber er betrieb keine Strukturmathematik und führte keine Untersuchung algebraischer Strukturen durch. Die Begriffsbildungen wie Körper, Gruppe, Modul etc., die sich als zentrale algebraische Strukturen erweisen sollten, waren für ihn wichtige Mittel, um konkrete Forschungen etwa der algebraischen Zahlentheorie vorzunehmen, aber sie bildeten nicht selbst den Gegenstand abstrakter Analysen. Diese Einschätzung wird dadurch bestätigt, daß Hilbert z. B. den Ringbegriff konkret als Zahlring oder Integritätsbereich einführte und kaum Beziehungen zwischen den bei verschiedenen Studien verwendeten algebraischen Begriffen, etwa zwischen Modul und Gruppe, herstellte.“*
> [Alten et al. 2008, S. 520]

Darin eben liegt der Unterschied zu der Situation bei der sog. „Modernen Algebra“, mit den Leistungen von Emmy Noether, Emil Artin, Helmut Hasse, van der Waerden und anderen.

Ein erster bedeutender Schritt wurde um 1904 von den US-amerikanischen Mathematikern um Edward Vermilye Huntington, Eliakim Hastings Moore und Leonard Eugene Dickson getan. In ihren Arbeiten werden einzelne algebraische Strukturen wie Gruppe, Körper, Algebra abstrakt betrachtet und axiomatisch definiert. Diese Studien waren Teil umfangreicher Untersuchungen zur axiomatischen Methode. Es dominierten Fragen wie Widerspruchsfreiheit bzw. Unabhängigkeit der Axiome. Sehr bald rückte auf dieser Basis der algebraische Gesichtspunkt in den Vordergrund. In den Jahren 1907/08 begründeten Dickson und vor allem Joseph Henry Maclagan Wedderburn, der aus Schottland stammte, mit seinen zentralen Strukturätzen die moderne abstrakte Algebrentheorie (vgl. [Schlote 1988]). Wenig später schrieb Ernst Steinitz in seiner programmatischen *Algebraischen Theorie der Körper*:

> *„Eine Übersicht über alle möglichen Körpertypen zu gewinnen, und ihre Beziehungen untereinander in ihren Grundzügen festzustellen, kann als Programm dieser Arbeit gelten.“* [Steinitz 1910, S. 167]

Für Steinitz stand im Gegensatz zu Weber der Körperbegriff selbst im Vordergrund. Indem er die mit den Körperaxiomen erfasste Vielfalt an Körpern systematisierte, konnte er sein Ziel in vollem Umfang erreichen. In diesem Zusammenhang definierte Steinitz viele wichtige Begriffe der Körpertheorie, z. B. Erweiterungskörper, Adjunktion einer Menge, Primkörper, äquivalente Erweiterung, einfache Erweiterung u. a. Charakteristisch ist auch die Verbindung von Algebra und Mengenlehre.

Insgesamt sind die Arbeiten von Wedderburn (1908) und Steinitz (1910) die ersten Veröffentlichungen, die weitgehend dem Stil der „Modernen Algebra“ gerecht werden. Der allgemeine Ringbegriff wurde erst 1914 von (Adolf) Abraham Fraenkel eingeführt, also lange nachdem sich der Körperbegriff durchgesetzt hatte und man schon zahlreiche Beispiele für Ringe kannte. Aber auch Fraenkels Veröffentlichung ist nur einem sehr speziellen Ringtyp gewidmet.

So wurde es das unbestrittene Verdienst von Amalie (Emmy) Noether, Emil Artin und den Algebraikern dieser Schule wie Helmut Hasse (1898–1979), Wolfgang Adolf Ludwig Helmuth Krull (1899–1971), Otto Schreier (1901–1929), Bartel Leendert van der Waerden (1903–1996) und anderen, in den 20er Jahren die Auffassungen von einer modernen Algebra als Theorie algebraischer Strukturen voll durchgesetzt zu haben. Es ging ihnen dabei wesentlich um die Aufdeckung der abstrakten Begriffe, die den einzelnen algebraischen Theorien gemeinsam waren. Die Ansichten dieser Algebraiker drückten sich beispielsweise in den Worten van der Waerdens aus, mit denen er die Maxime Emmy Noethers charakterisierte:

> *„Alle Beziehungen zwischen Zahlen, Funktionen und Operationen werden erst dann durchsichtig, verallgemeinerungsfähig und wirklich fruchtbar, wenn sie von ihren besonderen Objekten losgelöst und auf allgemeine begriffliche Zusammenhänge zurückgeführt sind.“*
> [Waerden 1935, S. 469]

In ihren Forschungen knüpften van der Waerden und Emmy Noether vor allem an die Arbeiten von Richard Dedekind und Ernst Steinitz an. Diese beiden Gelehrten hatten in der Körpertheorie eine Tendenz der „Linearisierung“ begründet; diese Tendenz wurde zu einem charakteristischen Merkmal der von Noether, Artin und ihren Schülern geschaffenen Algebra. So war bei Emmy Noether die Idealtheorie eine Anwendung der Modultheorie. Die Wahl des abstrakten Modulbegriffes als Ausgangspunkt idealtheoretischer Forschungen führte in natürlicher Weise dazu, dass Konstruktionen der linearen Algebra wie Quotienten- und Produktbildung angewandt wurden. In diesem Zusammenhang wurden durch die Arbeiten von Noether und Krull die 1903 von Jules Henri Poincaré und 1907 Joseph Wedderburn definierten Rechts- und

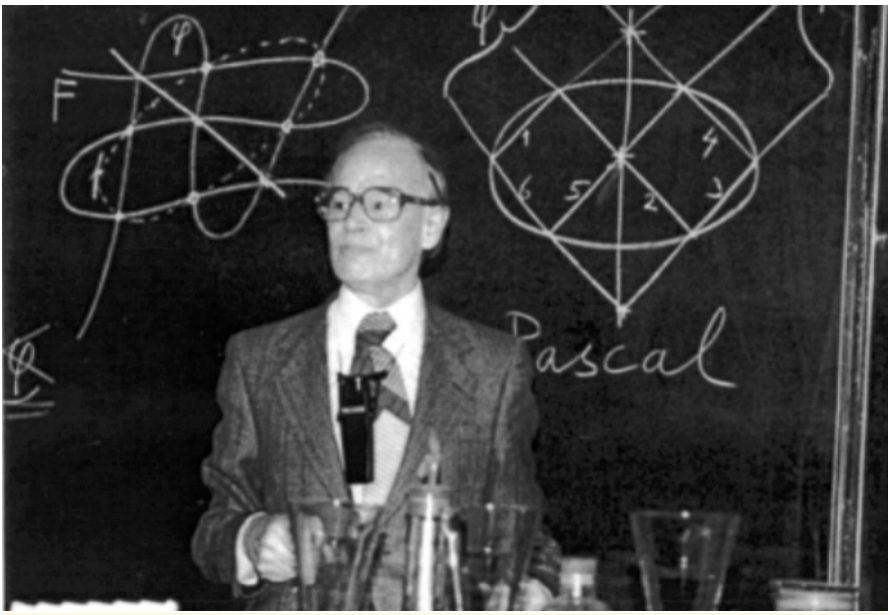


Abb. 11.4.1 Helmut Hasse, Ernst Steinitz, Eliakim H. Moore, Edward V. Huntington, Leonard E. Dickson, Joseph H. M. Wedderburn (v. li. n. re.)

Linksideale einer Algebra zu neuem Leben erweckt und fest im Begriffssystem der Algebra verankert. Mit der Unterscheidung zwischen einseitigen und zweiseitigen Moduloperationen traten nun nichtkommutative Strukturen als Untersuchungsobjekte auf, die die kommutativen als Spezialfall enthalten. Die Homologiealgebra verstärkte die Tendenz der Linearisierung weiter, wobei Henri Paul Cartan mehrere grundlegende Begriffe dieser Theorie bei der Untersuchung spezieller Moduln formulierte.

Der von Giuseppe Peano gewiesene Weg der Axiomatisierung des Systems der natürlichen Zahlen wurde für die reellen und die komplexen Zahlen durch Hilbert (1900) und Huntington (1905) fortgesetzt. *„Die Verwendung der Axiomatik hatte also im ersten Jahrzehnt des 20. Jahrhunderts an Kontur gewonnen.“* [Alten et al. 2008, S. 524]

Es sei hervorgehoben, dass sich Steinitz auf den damals keineswegs allgemein anerkannten Wohlordnungssatz bzw. das zu ihm äquivalente Auswahlaxiom stützte: *„Noch stehen viele Mathematiker dem Auswahlprinzip ablehnend gegenüber. Mit der zunehmenden Erkenntnis, daß es Fragen in der Mathematik gibt, die ohne dieses Prinzip nicht entschieden werden können, dürfte der Widerstand gegen dasselbe mehr und mehr schwinden.“* [Steinitz 1910, S. 170]



van der Waerden, Bartel Leendert
Jahresbericht d. DMV
Bd. 68 (1966) S. 155 (69) – 165 (79)

Die Algebra seit Galois.

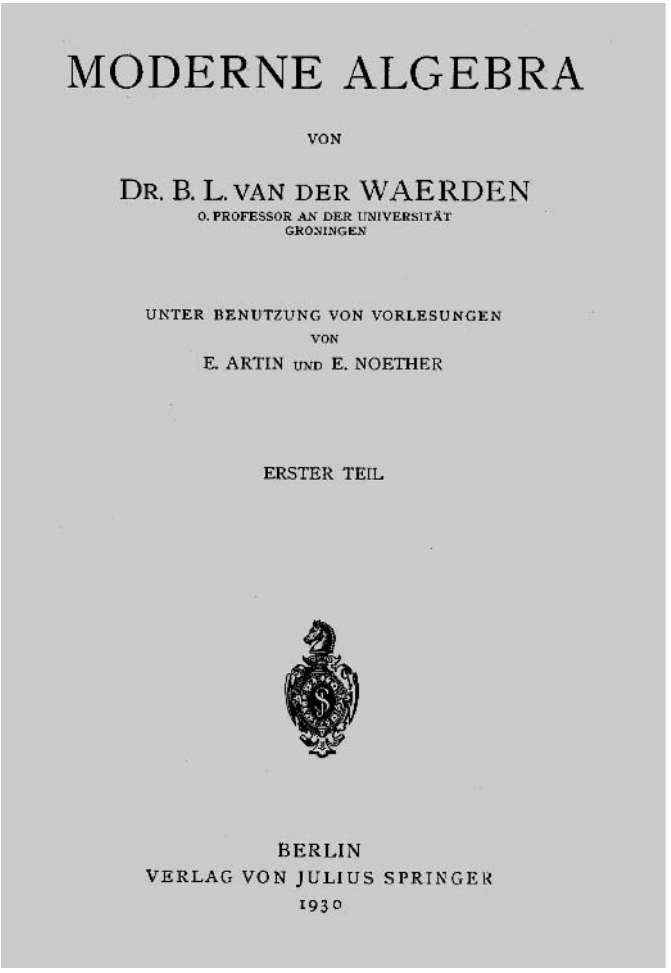
Von Bartel Leendert van der Waerden in Zürich*).

Ich will Ihnen, meine Damen und Herren, hier keine gelehrte Abhandlung vorlegen, sondern eine Festrede persönlichen Charakters halten. Wir feiern ja den 75. Geburtstag der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, und ich habe die große Zeit der Jubilarin miterlebt, die Zeit von 1920 bis 1934, die auch eine große Zeit der Algebra war, die Zeit nämlich, in der Emmy Noether, Emil Artin und Alexander Ostrowski der Algebra eine neue Wendung gegeben haben.

Die moderne oder abstrakte Algebra, die damals aus der Taufe gehoben wurde, ruht auf drei Säulen, nämlich auf der *Gruppentheorie*, der *Körpertheorie* und der *Idealtheorie*.

Die *Idealtheorie* wurde 1871 von Dedekind begründet, die *Gruppen-* und *Körpertheorie* von Evariste Galois im Jahre 1830. Mit Galois müssen wir also anfangen, wenn wir die Entwicklung einigermaßen verstehen wollen.

Abb. 11.4.2 Bartel L. van der Waerden bei einem Vortrag im Januar 1979 in der Universität Heidelberg [Foto Wohlfahrt]; Textauschnitt seines Vortrages zum 75-jährigen Bestehen der DMV am 13.IX.1965 in Freiburg i. Br. [Jahresber. DMV 68 (1966)]


MODERNE ALGEBRA

VON

DR. B. L. VAN DER WAERDEN

O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT GRONINGEN

UNTER BENUTZUNG VON VORLESUNGEN VON E. ARTIN UND E. NOETHER

ERSTER TEIL

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1930

Abb. 11.4.3 Titelblatt *Moderne Algebra* von van der Waerden

Ende der zwanziger Jahre waren somit drei Säulen der modernen Algebra – Gruppentheorie, Körpertheorie, Algebrentheorie (Theorie hyperkomplexer Systeme) – in ihrer abstrakten und axiomatisierten Form entwickelt. Durch diese Theorien ihrer Grundstrukturen war die Algebra zu einem klar gegliederten Zweig der Mathematik geworden. Aber häufig betrachtete man die algebraischen Begriffe und Methoden noch als zweitrangig gegenüber denen der Analysis. Diese Situation wurde durch van der Waerden und sein Buch *Moderne Algebra* (1930/31) entscheidend geändert. Das Ziel dieses Buches, das den damaligen Entwicklungsstand repräsentierte und auch die neuesten Forschungsergebnisse von E. Noether, Artin und ihrer algebraischen Schule zusammenfasste, charakterisierte der Autor so:

> *„Die ‚abstrakte', ‚formale' oder ‚axiomatische' Richtung, der die Algebra ihren erneuten Aufschwung verdankt, hat vor allem in der Gruppentheorie, der Körpertheorie, der Bewertungstheorie, der Idealtheorie und der Theorie der hyperkomplexen Zahlen zu einer Reihe von neuartigen Begriffsbildungen, zur Einsicht in neue Zusammenhänge und zu weitreichenden Resultaten geführt. In diese ganze Begriffswelt den Leser einzuführen, soll das Hauptziel dieses Buches sein."*
> [Waerden 1950, S. 1]

Dieses hervorragend geschriebene Buch, dessen Nachauflagen heute noch zu den besten Algebralehrbüchern zählen, hinterließ bei den Mathematikern einen sehr starken Eindruck. Algebraische Probleme nahmen plötzlich einen zentralen Platz unter den mathematischen Forschungen ein.

11.4.2 Emmy Noether: Invariantentheorie, Idealtheorie und komplexe Systeme

Wenden wir uns nun Emmy Noether zu, der vielleicht bedeutendsten Mathematikerin der Moderne (vgl. [Dick 1970], [Noether 1983], [Wußing 1989c], [Silverberg 2001], [Harittai 2002], [Koreuber 2002], [Tobies 2004], [Alten et al. 2008, S. 558ff.]).

Allen, die noch das Glück persönlicher Begegnung mit ihr hatten, ist sie in unvergesslicher Erinnerung geblieben als Mensch voller Herzensgüte, Selbstlosigkeit, Lebensfreude und ursprünglicher Vitalität. Als sie mitten aus voller mathematischer Produktivität am 14. April 1935 ganz unerwartet an den Folgen einer Tumoroperation verstarb, herrschte unter ihren Schülern, Freunden und Kollegen aus aller Welt tiefe Bestürzung und Trauer.

Van der Waerden schrieb einen Nachruf, damals nicht ganz ungefährlich für einen in Deutschland wirkenden Professor für eine aus Deutschland vertriebene Jüdin. Der Nachruf beginnt mit den Worten:

> *„Ein tragisches Geschick hat unserer Wissenschaft eine höchst bedeutungsvolle, völlig einzigartige Persönlichkeit entrissen (...) Ihre absolute, sich jedem Vergleich entziehende Einzigartigkeit ist nicht in der Art ihres Auftretens nach außen hin zu erfassen, so charakteristisch dieses zweifellos war. Ihre Eigenart erschöpft sich auch keineswegs darin, daß es sich hier um eine Frau handelt, die zugleich eine hochbegabte Mathematikerin war, sondern liegt in der ganzen Struktur dieser schöpferischen Persönlichkeit, in dem Stil ihres Denkens und dem Ziel ihres Wollens."* [Waerden 1935, S. 469]

Auch Alexandrow, der mehrfach einige Zeit bei E. Noether in Göttingen studiert und im herzlich gehaltenen Briefwechsel mit ihr gestanden hatte, schrieb 1935 in Moskau einen außerordentlich rühmenden Nachruf. Hasse sprach von E. Noether als von *„seiner Lehrmeisterin"*. Ein wunderbarer Nachruf stammt von Hermann Weyl.



Abb. 11.4.4 Emmy Noether als junge Frau und im mittleren Alter

Emmy Noether war Tochter des in Erlangen wirkenden Professors der Mathematik Max Noether. Felix Klein und Paul Gordan hatten erreichen können, dass der aus einer jüdischen Familie stammende Max Noether 1875 wenigstens außerordentlicher Professor hatte werden können; erst 1888 erhielt er eine Berufung zum ordentlichen Professor. Er hatte in eine vermögende jüdische Familie eingeheiratet; alle Kinder konnten höhere Bildung erwerben.

Der eine Bruder, Fritz Noether (1884–1941), wurde Professor für angewandte Mathematik, musste vor den Nationalsozialisten flüchten, ging in die Sowjetunion und wurde dort – als angeblicher Spion verdächtigt – 1941 umgebracht [Tobies 2004].

Gemäß damaliger Sitte besuchte Emmy zunächst die höhere Töchterschule in Erlangen, wurde schließlich in Stuttgart Lehrerin für englische und französische Sprache. Durch einen selten ausgesprochenen Beschluss der bayrischen Staatsregierung konnte sie die Reifeprüfung ablegen. Emmy wandte sich dann nach Göttingen, das schon einen hohen Ruf als Zentrum der Wissenschaften besaß. Dort wirkte Felix Klein, ein Freund des Vaters, der zusammen mit David Hilbert das Frauenstudium gefördert hatte. Schließlich konnte sie bei Gordan (1907 mündliche Prüfung), 1908 mit einer invariantentheoretischen Arbeit promovieren, die sie später nebst weiteren ersten Arbeiten, als „Mist“ bezeichnete. Sie hatte um 1913 die Hinwendung zur damaligen Hilbertschen Arbeitsrichtung, zu Studien *Über rationale Funktionenkörper*, vollzogen. Seit 1915 war sie wieder in Göttingen, Hilbert empfahl diese Arbeit als Habilitationsschrift. Jedoch scheiterte ihr Habilitationsversuch, und zwar an der Habilitationsordnung in Deutschland, die diese Qualifizierung ausdrücklich nur für Männer vorsah. Wie eine fast sicher verbürgte Anekdote berichtet, soll sich Hilbert in der Fakultätssitzung für Emmy Noether mit dem Bemer-

ken eingesetzt haben, dass doch das Geschlecht keine Rolle spielen dürfe; man sei an einer Universität und nicht in einer Badeanstalt.

Die erste Schaffensperiode Emmy Noethers hatte also der Invariantentheorie gegolten, die damals hoch im Kurse stand. Ihr gelang jedoch – unter dem Eindruck der großen Entdeckungen in der Physik, insbesondere der Relativitätstheorie Einsteins – eine fundamentale Einsicht, die Mathematik mit Grundlagen der Physik verknüpfte. Im Anschluß an Klein und Hilbert formulierte sie das sog. „Noether-Theorem", nach dem – kurz gesagt – bewiesen wurde, dass jede Symmetrie in Differentialinvarianten äquivalent ist einem Erhaltungssatz in der Physik. Dieses Ergebnis wurde in ihrer Habilitationsschrift unter dem Titel *Invariante Variationsprobleme* veröffentlicht. In einem Brief vom 24. Mai 1918 hat Einstein Emmy Noether gegenüber Hilbert sehr gelobt.

Bei dieser Gelegenheit sei betont, dass Symmetrie sowohl in der Natur als auch in der Mathematik und natürlich in Kunst und Architektur eine herausragende Rolle spielt. So ist der Beitrag von E. Noether ein der Verbindung von Mathematik und Naturwissenschaften zu hohem Maße verpflichteter Teil der allgemeinen Suche nach Symmetrien im Universum.

Neben dem Buch *5000 Jahre Geometrie* [Scriba/Schreiber 2005] sei als Orientierung bezüglich der ebenen Geometrie auf [Quaisser 1995] und für prinzipielle Betrachtungen auf [Weyl 1955] und [Stewart 2007] verwiesen.

Erst nach dem Untergang des Deutschen Kaiserreiches konnte E. Noether 1919 habilitieren. Doch wirkten reaktionäre und antisemitische Auffassungen fort. Zwar erhielt sie am 6. April 1922 die Berechtigung zur Führung des Titels „Außerordentlicher Professor", jedoch ausdrücklich ohne Besoldung. Erst 1923, nach nochmaliger Intervention, wurde ihr ein Lehrauftrag für Algebra erteilt, mit einem minimalen Einkommen. Jedenfalls hat sie an keiner deutschen Universität die Berufung auf eine ordentliche Professur erhalten, auch nicht die Mitgliedschaft an einer deutschen Akademie [Tollmien 1991].

Anfang der 20er Jahre begann sie mit grundlegenden Publikationen, die das Gesicht der Algebra neu formen sollten. Einige dieser Arbeiten seien wenigstens genannt: *Idealtheorie in Ringbereichen* (1921), *Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern* (1925), *Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie in arithmetischer Auffassung* (vorgetragen 1928 auf dem Internationalen Mathematikerkongress in Bologna, 1929 publiziert), der große Bericht *Hyperkomplexe Systeme in ihren Beziehungen zur kommutativen Algebra und zur Zahlentheorie* (vorgetragen auf dem Internationalen Mathematikerkongress 1932 in Zürich). Es handelte sich um Eliminationstheorie, Idealtheorie im Sinne von R. Dedekind, um Darstellungstheorie und schließlich um Klassenkörpertheorie mit abstrakter begrifflicher Durchdringung. Es scharte sich eine Gruppe junger Schüler um sie, sie kochte riesige Mengen Pudding, man ging gemeinsam zum Schwimmen. Man bezeichnete ihre Schüler als „Noether-Knaben", sie stammten u. a. aus Frankreich, den USA, aus China, aus der Sowjetunion.



Abb. 11.4.5 Emmy Noether (aufgenommen im September 1930 von Helmut Hasse auf der gemeinsamen Fahrt über die Ostsee zur Tagung der DMV in Königsberg/Pr.)

Zu Anfang der 30er Jahre war ihr Ruf als eine bedeutende Neugestalterin der Mathematik, insbesondere der Algebra unumstritten, auch wenn sich nicht alle Mathematiker ihrer streng begrifflichen, abstrakten Betrachtungsweise anschließen wollten. Die produktive Arbeit in Göttingen wurde nur durch zwei Gastprofessuren in Moskau (1928/29) und Frankfurt/M. (1930) unterbrochen. Über die Moskauer Zeit, die sie im Kreise ihres ehemaligen Göttinger Schülers P. S. Alexandrow und seiner Freunde verbrachte, hat sich Emmy Noether immer sehr lobend geäußert, trotz der schwierigen Lebensbedingungen dort nach Krieg, Revolution und Konterrevolution. Im engsten wissenschaftlichen Kontakt stand sie seitdem mit Otto Juljewitsch Schmidt (1891–1956) den sie schon seit Göttingen kannte, dem bedeutenden Mathematiker, Polarforscher und Stammvater der sowjetischen algebraischen Schule, mit dem hochbegabten Algebraiker Nikolai Grigorjewitsch Tschebotarjow (1894–1947) und mit Lew Semjonowitsch Pontrjagin (1908–1988).

Die Vorlesungen von E. Noether müssen für Anfänger keine reine Freude gewesen sein; der Stoff war schwierig. Umso höher aber war der Gewinn für Fortgeschrittene, da sie fast ausschließlich von der Front der Forschung vortrug. Entsprechend gering war die Zahl ihrer Stammhörer. Einmal schrieb sie halbironisch: *„Ich lese diesen Winter hyperkomplex, was mir und den Zuhörern viel Vergnügen macht.“* [Dick 1970, S. 17].

Mit dem Machtantritt der Nationalsozialisten änderte sich ihre Lage ganz schnell zum Schlechten. Als ehemaliges Mitglied der Unabhängigen Sozialdemokratischen Partei, als überzeugte Pazifistin, vor allem aber ihrer jüdischen Herkunft wegen wurde ihr die Lehrbefugnis entzogen. Auch ein Gutachten für sie konnte keine Abhilfe schaffen; das Lehrverbot blieb bestehen. Inzwischen hatte H. Weyl für sie in den USA die Fühler ausgestreckt. Ende Oktober 1933 fuhr E. Noether in die USA und übernahm eine Gastprofessur an einer Frauenhochschule, am Bryn Mawr College (Pennsylvanien), in relativer Nähe zu Princeton (New Jersey), wo inzwischen A. Einstein und H. Weyl als Professoren tätig waren und sich ihrerseits nach Kräften für andere vertriebene Kollegen aus Europa bemühten.

Interessant ist ein Brief vom 15.10.1933, ein Zeitdokument von Hermann Weyl aus der Emigration, aus Princeton, an seinen Hallenser Kollegen Heinrich Karl Theodor Brandt (1886–1954). Dort heißt es bezüglich E. Noether:

> *„So wenig mir persönlich die ‚abstrakte' Algebra liegt, so schätze ich doch ihre Leistungen und ihre Bedeutung offenbar wesentlich höher ein, als Sie das tun. Es imponiert mir gerade an Emmy Noether, daß ihre Probleme immer konkreter und tiefer geworden sind. Warum soll ihr, der Hebräerin, nicht zustehen, was in den Händen des 'Ariers' Dedekind zu großen Ergebnissen geführt hat? Ich überlasse es gern Herrn Spengler und Bieberbach, die mathematische Denkweise nach Rassen und Völkern zu zerteilen.*
> *Daß Göttingen den Anspruch verloren hat, mathematischer Vorort zu sein, gebe ich Ihnen gerne zu – was ist denn überhaupt von Göttingen übrig geblieben? Ich hoffe und wünsche, daß es eine seiner alten Tradition würdige Fortsetzung durch neue Männer finden möge; aber ich bin froh, daß ich es nicht mehr gegen einen Strom von Unsinn und Fanatismus zu stützen brauche."*
> (Zitiert nach [Jentsch 1986, S. 9])

Gegenüber Göttingen, wo Emmy Noether sich im Kreise anspruchsvollster und hochbegabter Schüler in ihrem Element hatte bewegen können, bedeutete die Tätigkeit im Bryn Mawr College eine gewaltige Umstellung. Mit dem ihr eigenen frohgemuten Naturell hat sie diese Veränderung gemeistert. Bald fand sie sogar echte Schülerinnen im College; auch trug sie die nicht unberechtigte Hoffnung, nach Princeton berufen zu werden.

Ihr plötzlicher Tod, ohne Vorankündigung oder Warnung, machte alle Pläne zunichte. Eine Welle der Trauer ging durch die mathematische Welt. Im Gedenken an Emmy Noether schrieb Albert Einstein einen Brief an die New York Times. Dort heißt es:

> *„Die Anstrengungen der meisten Menschen werden für den Kampf um das tägliche Brot aufgewendet. Und die meisten, die das Schicksal durch ein besonderes Talent von diesem Kampf befreit hat, sind wiederum weitgehend damit beschäftigt, ihr irdisches Dasein zu ver-*

bessern. Hinter diesem Bemühen, das auf Ansammlung materieller Güter gerichtet ist, steckt allzu häufig die Illusion, daß dies das wichtigste und erstrebenswerteste Ziel sei. Doch gibt es zum Glück eine Minderheit von Menschen, die schon früh in ihrem Leben erkannt haben, daß die schönsten und befriedigendsten Erfahrungen, die uns und ihnen zugänglich sind, nicht von außen kommen, sondern an die innere Entwicklung des eigenen Fühlens, Denkens und Handelns gebunden sind. Die wirklichen Künstler, Forscher und Denker sind immer Menschen dieses Schlags gewesen. Wie unauffällig das Leben dieser Einzelnen auch gewesen sein mag, die Früchte ihrer Bemühungen sind die wertvollsten Beiträge, die eine Generation ihren Nachfolgern übergeben kann.“
(Zitiert nach [E. P. Fischer 2000, S. 147])

In Bryn Mawr war Emmy Noether auf Olga Taussky-Todd (geb. Taussky; 1906–1995) getroffen. Sie stammte aus Olmütz, hatte ab 1925 Mathematik, insbesondere Zahlentheorie studiert, hatte 1932 mit einer Arbeit *Über eine Verschärfung des Hauptidealsatzes* promoviert und Freundschaft mit Kurt Gödel geschlossen. Außerdem war sie beteiligt gewesen an der Edition von Hilberts *Gesammelten Werken* und an der Überarbeitung des sog. *„Zahlberichtes“* (über Olga Taussky-Todds Beitrag zur Klassenkörpertheorie (Class field theory) vgl. [Binder 2005]).

Die politischen Verhältnisse – sie war Jüdin – zwangen sie in die Emigration (vgl. [Stadler 1988]). Trotz unruhiger Wanderjahre mit verschiedenen Stationen, zwischen Lehrverpflichtungen und Forschung stehend, reifte sie zu einer hochgeachteten Wissenschaftlerin, insbesondere in der Zahlentheorie. Sie starb am 7. Oktober 1995, inzwischen auch in ihrer österreichischen Wahlheimat hochgeehrt [Hlawka 1997].

Olga Taussky-Todd liebte es, Gedichte zu verfassen, so unter anderem über Emmy Noether, zu der sie wegen unterschiedlicher Auffassung über Mathematik ein nicht unbedingt herzliches Verhältnis hatte. Es lautet, teilweise auch selbstironisch:

„Es steht die Olga vor der Klasse,
sie zittert sehr und denkt an Hasse;
die Emmy kommt von fern herzu
mit lauter Stimm', die Augen gluh.
Die Trepp hinauf und immer höher
kommt sie dem armen Mädchen näher.
Die Olga denkt: weil das so ist
und weil mich doch die Emmy frißt,
so werd' ich keine Zeit verlieren,
werd' keine Algebra studieren,
und lustig rechnen wie zuvor.
Die Olga, dünkt mir, hat Humor.“
[Dick 1970, S. 34]

11.4.3 Die Bourbaki-Gruppe: Algebraische Strukturen

Die Ausbildung strukturellen Denkens hatte einen organisatorischen Widerhall mit der „Erschaffung“ des Mathematikers Nicolas Bourbaki. Das Wort ist ein Pseudonym für eine Gruppe vorwiegend französischer Mathematiker, die sich nach dem französischen General Charles-Denis Bourbaki (1816–1897) nannte und sich in der Mitte der dreißiger Jahre, anfangs in einem Pariser Café zusammenschloss (zu weiteren Details siehe Abschnitt 11.7.1). Zwar war verabredet worden, nach Vollendung des 50. Geburtstages aus der Gruppe auszuscheiden, doch hielten sich nicht alle an dieses Übereinkommen.

Anfangs ging es um die Diskussion, wie ein modernes Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung auszusehen hätte. Dann aber rückte strukturelles Denken in den Vordergrund; Chevalley z. B. hatte bei E. Noether, E. Artin und H. Hasse studiert, vgl. ausführlich [Beaulieu 1989], [Beaulieu 1994]. Es gelang, den Strukturbegriff als grundlegendes Darstellungsmodell für die gesamte Mathematik herauszuarbeiten und eine Hierarchie („Architektur“) der Strukturen aufzubauen; an der Spitze standen sog. „Mutterstrukturen“.

Hauptsächlich für die Algebra – weniger jedoch für das Gesamtgebiet der Mathematik – hat der Impuls der Bourbaki-Gruppe reiche Früchte getragen. Im Jahre 1942 veröffentlichte Bourbaki eine „Algebra“; schon ein Jahr zuvor 1941 war eine englisch-sprachige Strukturalgebra unter dem Titel *Survey of modern algebra* von den Autoren Garrett Birkhoff und Saunders MacLane (1909–2005) erschienen.

Neben der Kategorientheorie, die von Bourbaki ihren Ausgang nahm, ist – im Anschluss an die italienische Schule – die Ausweitung der algebraischen

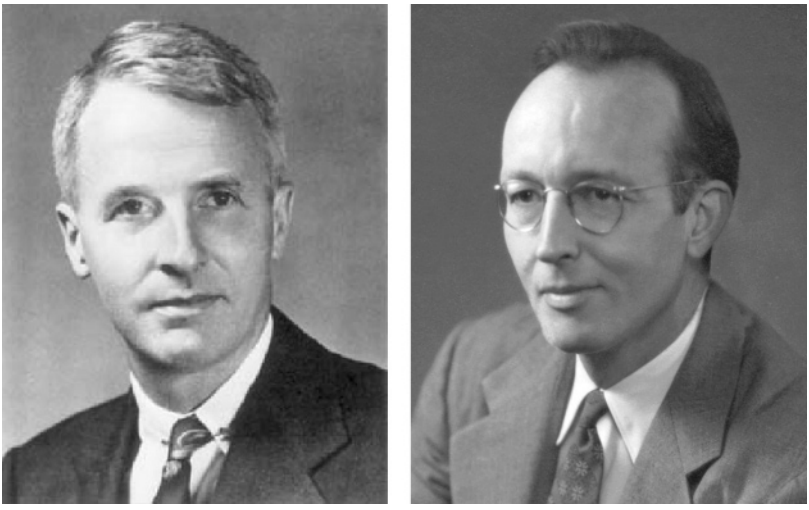


Abb. 11.4.6 Garrett Birkhoff, Saunders MacLane

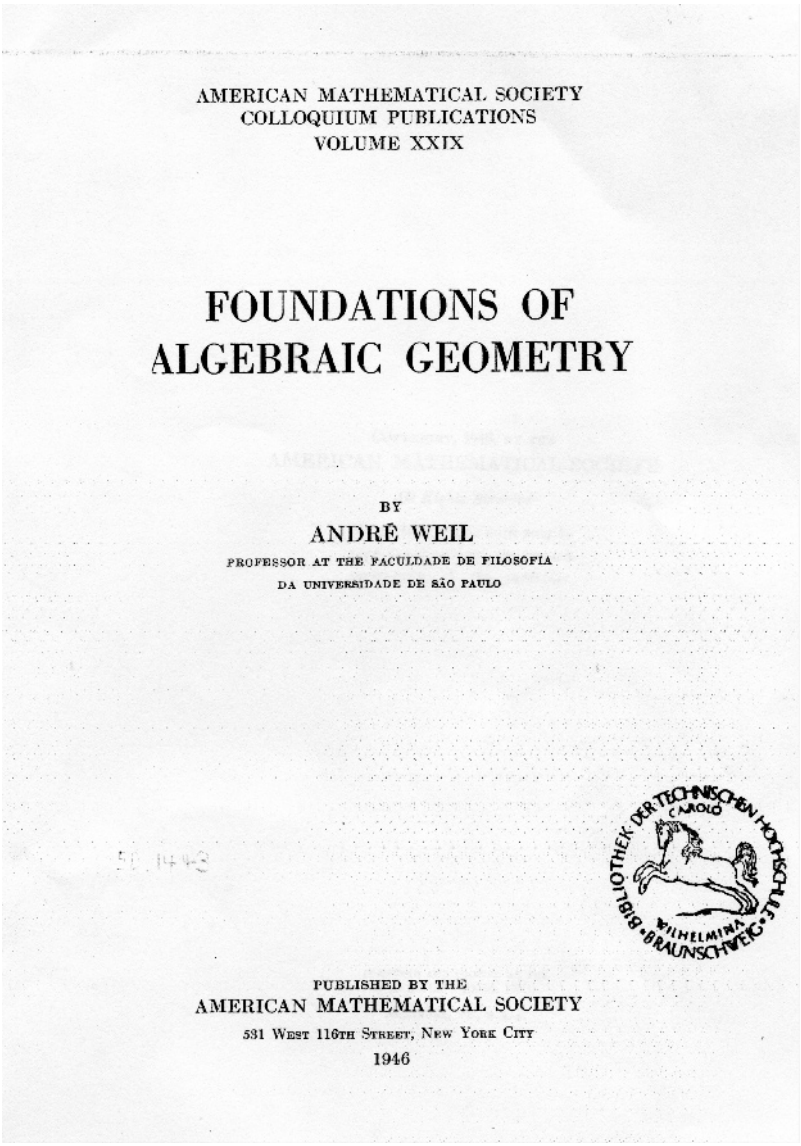
Geometrie eine direkte Folge. André Weil ist hier hervorzuheben; 1946 erschien sein Buch *Foundations of Algebraic Geometry.* André Weil war ein sehr einflussreicher Mathematiker, zumal er in vielen Teilen der Welt, in Frankreich, Indien, Brasilien, USA (in Chicago und Princeton) Vorlesungen gehalten hat [Weil 1992].

11.4.4 Algebraische Geometrie (K.-H. Schlote)

Auf die Entwicklung der algebraischen Geometrie sei etwas näher eingegangen. Die algebraische Geometrie kann auf eine lange Vorgeschichte zurückblicken, bevor sie sich in ersten Ansätzen im 19. Jahrhundert herausbildete. Einige ihrer Probleme reichen bis in die Antike zurück. Für eine ausführlichere Darstellung der Geschichte dieses Teilgebietes der Mathematik, vor allem in den beiden letzten Jahrhunderten, sei der Leser auf die Arbeiten von J. Gray, [Gray 1997], [Gray 1994], [Gray 1989], J. Dieudonné [Dieudonné 1972] und C. Ciliberto [Ciliberto 2000] verwiesen.

Grundsätzlich können zwei Zugänge unterschieden werden, ein algebraisch synthetischer und ein analytisch topologischer. Dem entsprechend bildeten speziell die Ergebnisse der projektiven Geometrie und der Theorie der abelschen Integrale wichtige Ausgangspunkte bei der Genese dieses mathematischen Teilgebietes. Eine zentrale Fragestellung war dabei die Aufdeckung von Eigenschaften geometrischer Figuren, insbesondere der Kurven und Flächen, die unter gewissen Transformationen unverändert blieben. Neben den linearen spielten die birationalen Transformationen eine besondere Rolle. In letzten Drittel des 19. und zu Beginn des 20. Jahrhunderts gab es mehrere Bestrebungen, um die vielfältigen Ideen und Methoden, die bei der Behandlung der obigen Frage entstanden waren, zusammenzuführen. Zunächst schuf die Schule um Alfred Clebsch (1833–1872), Paul Gordan, Alexander Wilhelm v. Brill und Max Noether mit ihren Studien der sogenannten linearen Systeme sowie der abelschen Integrale auf irreduziblen algebraischen Flächen eine algebraisch-geometrische Theorie der kompakten Riemannschen Flächen und führte einige Grundbegriffe zur Klassifikation höher-dimensionaler Varietäten ein. Die italienische Schule um Luigi Cremona, Corrado Segre, Guido Castelnuovo, Federigo Enriques und Francesco Severi griff diese Ideen auf und verallgemeinerte sie, um auf dieser Basis ein Programm zur Untersuchung algebraischer Flächen in Angriff zu nehmen. Schließlich ist noch der von Kronecker sowie Dedekind und Weber geschaffene algebraische Zugang zu nennen, der in der Tradition von Gauß und Kummer stand und von Hensel und E. Noether fortgesetzt wurde. Letztere Betrachtungsweise stand der späteren Entwicklung am nächsten und stellte erstmals eine tiefliegende Verbindung zwischen Algebra, algebraischer Geometrie und algebraischer Zahlentheorie her.

Zunächst erzielte jedoch die italienische Schule eine beträchtliche Wirkung, deren Blüte etwa auf die Zeit von 1885 bis 1935 datiert wird. Zahlreiche junge Mathematiker, unter ihnen Max Deuring (1907–1984), Paul Dubreil,


AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
COLLOQUIUM PUBLICATIONS
VOLUME XXIX

FOUNDATIONS OF
ALGEBRAIC GEOMETRY

BY
ANDRÉ WEIL
PROFESSOR AT THE FACULDADE DE FILOSOFÍA
DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PUBLISHED BY THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
531 West 116th Street, New York City
1946

Abb. 11.4.7 Titelblatt *Foundations of Algebraic Geometry* von André Weil

Erich Kähler (1906–2000) und Salomon Lefschetz (1884–1972) weilten in Italien, um in diesem Kreis die algebraische Geometrie zu lernen. Typisch für die Herangehensweise dieser Schule war die Betonung geometrischer Mittel und der weitgehende Verzicht auf die Verwendung von Elementen der Analysis, der Topologie oder der abstrakten Algebra. Damit nahmen die Grundbegriffe

und die Methoden noch sehr stark auf die geometrische Intuition Bezug. Oft lagen den Betrachtungen der Körper der reellen bzw. komplexen Zahlen zugrunde und bei dem Übergang von Studium der Kurven zur Untersuchung der Flächen blieben einige wichtige Bedingungen nicht erhalten, so dass mehrere Methoden nicht mehr anwendbar waren und einer Modifikation bedurften. Dies führte zu teilweise komplizierten Konstruktionen virtueller Begriffe, die zu Missverständnissen Anlass geben konnten, das Verständnis der einzelnen Arbeiten erschwerte und die Bedeutung wichtiger Resultate nicht klar hervortreten ließ. Ungeachtet dessen erzielte die italienische Schule viele neue und tiefliegende Einsichten.

Mit dem Aufkommen der abstrakten Algebra entstand auch in der algebraischen Geometrie das Bedürfnis nach einem Neuaufbau und einer logisch exakten Fundierung. Dies wurde ab Mitte der 20er Jahre durch Emmy Noether, Wolfgang Krull, B. L. van der Waerden und Friedrich Karl Schmidt (1901–1977) in Angriff genommen. Die Arbeiten von Noether und Krull über Ringe und Ideale wurden in ihrer Bedeutung für die algebraische Geometrie aber erst retrospektiv ab den 40er Jahren erkannt. Sie schufen eine allgemeine Ring- und Idealtheorie und klärten dabei u. a. in Noether'schen Ringen die Zerlegung eines Ideals in Primärideale sowie wichtige Eigenschaften der ganz abgeschlossenen bzw. der lokalen Ringe auf. Krull bezog zugleich wichtige Elemente der Bewertungstheorie in seine Betrachtungen ein.

Auf dieser abstrakten algebraischen Basis begann dann van der Waerden eine systematische Neubegründung der algebraischen Geometrie, indem er den allgemeinen Punkt einer algebraischen Mannigfaltigkeit rein algebraisch definierte und ebenso den Begriff der Schnittvielfachheit geeignet verallgemeinerte und definierte. Bei letzterem spielte insbesondere die Idee der relationstreuen Spezialisierung eine wichtige Rolle, d. h. anschaulich gesprochen, dass die algebraischen Relationen zwischen den Punkten beim Übergang von einer irreduziblen Mannigfaltigkeit zu einer Untermannigfaltigkeit niedrigerer Dimension erhalten bleiben. Ab 1933 legte van der Waerden seine Ergebnisse in einer Serie von Arbeiten unter dem Titel *Zur algebraischen Geometrie* dar, wobei er auch die vielen Resultate anderer Mathematiker verarbeitete. Bis 1958 erschienen in dieser Serie 18 Beiträge.

Wichtige Impulse erhielten die Forschungen zur algebraischen Geometrie auch von der Zahlentheorie. So standen die Untersuchungen von André Weil im engen Zusammenhang mit seinen Studien zur Zeta-Funktion, in denen er diese im Anschluss an Arbeiten von Hasse u. a. verallgemeinerte und die Riemannsche Vermutung für gewisse Funktionenkörper bewies.

Parallel dazu hatte die Bedeutung der toplogischen bzw. analytischen Methoden in der algebraischen Geometrie deutlich zugenommen, so dass deren Integration in den algebraisch-arithmetischen Rahmen der algebraischen Geometrie eine weitere zentrale Aufgabe darstellte. Typische Begriffe der Analysis, wie Ableitung und Differential, erhielten eine algebraische Definition. Ausgehend von den Arbeiten Élie Cartans und Henri Poincarés wurde der

Kalkül der äußeren Differentialformen aufgebaut, und mehrere Begriffe der Theorie der Differentialmannigfaltigkeiten wurden präziser gefasst. Eine Idee von Marshall Harrey Stone (1903–1989) aufgreifend gelang es Oskar Zariski beim Studium von Singularitäten auf projektiven algebraischen Mannigfaltigkeiten, mit algebraischen Mitteln eine Topologie auf einer Mannigfaltigkeit zu definieren. Die Bedeutung dieses zunächst wenig beachteten Resultats wurde erst erkannt, nachdem Weil 1952 gezeigt hatte, dass eine solche Topologie auf jeder algebraischen Mannigfaltigkeit in natürlicher Weise eingeführt werden kann. Damit ergab sich nun die Möglichkeit, Begriffe und Methoden aus der Theorie der Differentialmannigfaltigkeiten in die algebraische Geometrie zu übertragen.

Noch ehe die von van der Waerden, Weil, Zariski und anderen begonnene Neubegründung der algebraischen Geometrie zu einem gewissen Abschluss gekommen war, setzte eine nochmalige grundlegende Umgestaltung ein. In seinen Studien zur Homologietheorie hatte Jean Leray (1906–1998) die Begriffe der Garbe, der Kohomologie einer Garbe und der Spektralfolge eingeführt. Die in den folgenden Jahren von ihm, Henri Paul Cartan (1904–2008) und anderen Mathematikern geschaffenen diesbezüglichen Methoden erwiesen sich in vielen Gebieten der Mathematik als sehr nützlich. 1955 gab Jean-Pierre Serre (*1926) eine systematische Anwendung der Garbentheorie in der algebraischen Geometrie. Seine Definition der algebraischen Varietät orientierte sich an der der differenzierbaren Mannigfaltigkeit, wobei die mit der Zariski-Topologie versehenen affinen Varitäten als Grundbausteine dienten. Mit Hilfe der Kohomologietheorie für die sog. Strukturgarbe einer Varietät konnte er die meisten der klassischen Invarianten, wie die Eulersche Charakteristik und das arithmetische bzw. das topologische Geschlecht in den neuen Rahmen integrieren.

Serres Herangehensweise wurde dann von Alexander Grothendieck (*1928) in seiner Theorie der Schemata nochmals verallgemeinert. Der Begriff des Schemas stellte dabei eine unmittelbare Erweiterung von dem der Varietät dar, beide werden, grob gesprochen, von geeignet zusammengefügten offenen affinen Bestandteilen überdeckt. In umfangreichen Darstellungen in den Reihen *Éléments de Géométrie Algébrique* und *Séminaire de Géométrie Algébrique* hat Grothendieck zusammen mit anderen Mathematikern ab 1960 seine Theorie der Schemata entwickelt und an vielen bedeutenden Beispielen gezeigt, dass dies die passende Sprache für die Behandlung dieser Probleme ist. Sie illustrierten dies an der allgemeinen Fassung, in der sie die Auflösung von Singularitäten von Varietäten bzw. von rationalen Abbildungen, die Grundlagen der Schnitttheorie und der abzählenden Geometrie, die Lösung des Riemann-Rochschen Problems, den Beweis der Weil'schen Vermutung u. a. formulierten. In dieser abstrakten Form fanden die klassischen Ideen der verschiedenen Schulen der algebraischen Geometrie ihren festen Platz im Gebäude dieser Disziplin.

Einfluss der abstrakten Algebra

Die Denkweise in Strukturen hat – trotz oder wegen ihrer Abstraktheit – erheblichen Einfluß auf Teilgebiete der Mathematik und auf die Physik ausgeübt.

Hinsichtlich der Mathematik wird von Schlote in [Alten et al. 2008] neben algebraischer Geometrie auf algebraische Topologie, auf Differentialgeometrie und die Theorie der komplexen Mannigfaltigkeiten verwiesen. Im oben genannten Buch findet sich auch ein Kapitel von H. Schlosser zur Entwicklung der Computeralgebra.

Bezüglich der Physik wird die Quantenmechanik im Kapitel *Anwendungen der Algebra in der Physik* als Hauptfeld der abstrakten Algebra herausgestellt. John von Neumann hatte bereits 1927 in seinem Artikel *Mathematische Begründung der Quantenmechanik* eine abstrakte Definition des Hilbert-Raumes gegeben und die Theorie der Operatoren in diesem Raum systematisch entwickelt.

Ein anderer Ansatz zur mathematischen Behandlung der Quantenmechanik rührte von Garrett Birkhoff und von v. Neumann her, indem sie auf die Verbandstheorie zurückgriffen. Wiederum einen anderen Weg hatte Hermann Weyl eingeschlagen: 1928 erschien sein Werk *Gruppentheorie und Quantenmechanik*.

Die sich explosionsartig ausbreitende „abstrakte Algebra“ kann hier nicht im Detail beschrieben werden. Einen groben Überblick vermittelt der nachfolgende Auszug aus einer umfassenden Tabelle von Schlote in [Alten et al. 2008, S. 610ff.]:



Abb. 11.4.8 André Weil, Hermann Weyl

1926 Emmy Noether begründet die abstrakte Theorie der Dedekind-Ringe
1926 H. Brandt führt den Begriff Gruppoid ein
1928 W. Krull entwickelt eine Galoistheorie für unendliche Körpererweiterungen
1928 O. Schreier verallgemeinert den Satz von Jordan-Hölder auf unendliche Gruppen
1930 B. L. van der Waerden veröffentlicht das Lehrbuch *„Moderne Algebra“*
1933 B. L. van der Waerden entwickelt bis 1958 eine Neubegründung der algebraischen Geometrie
1934 G. Birkhoff stellt allgemeine Überlegungen zu Strukturuntersuchungen vor
1934 Mehrere junge französische Mathematiker begründen die „Bourbaki“-Gruppe
1934 H. Seifert und W. Threlfall wenden im *„Lehrbuch der Topologie“* erstmals Elemente der abstrakten Algebra in der Topologie an
1935 O. Ore stellt Untersuchungen zu einem zum Verband äquivalenten Begriff vor
1935 Mit den Ergebnisberichten *„Idealtheorie“* bzw. *„Algebren“* geben W. Krull bzw. M. Deuring einen Überblick über die kommutative Idealtheorie bzw. die Algebrentheorie; vier Jahr später folgt die allgemeine Ring- und Idealtheorie
1938 E. Artin gibt eine Neubegründung der Galois-Theorie, ohne den Satz vom primitiven Element zu benutzen
1939 Veröffentlichung des ersten Buches der „Bourbaki“-Gruppe; Beginn des Programms zur systematischen Darstellung der Mathematik auf der Basis des Strukturkonzepts
1939 I. M. Gelfand begründet die Theorie der Banach-Algebren
1940 G. Birkhoff publiziert die erste Monographie zur Verbandstheorie
1942 S. Eilenberg und S. MacLane führen die Begriffe Kategorie und Funktor ein und entwickeln in den folgenden Jahren erste Grundlagen der Kategorientheorie
1943 S. Eilenberg und S. MacLane gelingt eine abstrakte Beschreibung der Homologie- und Kohomologietheorie
1946 A. Weil publiziert einen systematischen Aufbau der abstrakten algebraischen Geometrie
1954 R. Brauer stellt neue Einsichten zur Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen vor
1957 A. Grothendieck legt in mehreren Vorträgen und Publikationen bis 1961 eine weitgehende Verallgemeinerung der algebraischen Geometrie vor
1963 W. Feit und J. G. Thompson beweisen unter Rückgriff auf vielfältige gruppentheoretische Methoden, dass jede endliche Gruppe ungerader Ordnung auflösbar ist
1981 Unter Verwendung zahlreicher Ergebnisse anderer Mathematiker gibt D. Gorenstein eine vollständige Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen

11.5 Wahrscheinlichkeitsrechnung: Axiomatische Grundlegung

Trotz eines breiten Spektrums von Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung in den Naturwissenschaften, insbesondere in der Physik, aber auch in soziologischen und juristischen Problemfeldern, galt der Zustand der Wahrscheinlichkeitsrechnung Ende des 19. Jahrhunderts als unbefriedigend. Es ist insbesondere der scharfsinnigen Analyse David Hilberts auf dem Mathematiker-Kongress 1900 in Paris zu danken, darauf mit Nachdruck hingewiesen zu haben, verbunden mit der Forderung nach einer axiomatisierten Grundlegung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Zu diesem Thema hat sich Hilbert 1918 auch prinzipiell geäußert [Hochkirchen 1999].

Derartige Versuche wurden vielfach unternommen; eine allgemein befriedigende und akzeptierte Lösung verdankt man erst Andrej Nikolajewitsch Kolmogorow mit der Monographie *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* [Kolmogoroff 1933].

Aber der Reihe nach: Zu den frühen Wegbereitern kann man George Boole (1815–1864) rechnen; im Jahre 1854 erschien seine Abhandlung *On the conditions by which the solutions of questions in the theory of probabilities are limited.*

Da Boole die Wahrscheinlichkeitsrechnung zu den „reinen“ bzw. exakten Wissenschaften zählte, unterstellte er, dass sich die Ergebnisse dieser Wissenschaft mit Mitteln der Logik erfassen lassen müssten, also ein deduktiver Aufbau möglich sein müsse.

Ansätze zur Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitsrechnung – freilich noch mit dem Ziel der Absicherung bekannter Auffassungen und Ergebnisse – stammen von Georg Bohlmann (1896–1928) aus der Zeit kurz nach der Jahrhundertwende, im Zusammenhang mit seiner „Lebensversicherungsmathematik“.

Zur Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung vgl. man den Artikel von Emanuel Czuber (1851–1925) *Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung* in der *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Bd. I. Teil 2. S. 733ff.

Eine durchgreifende Wendung trat erst ein mit der Einbeziehung mengentheoretischer und maßtheoretischer Denkweisen, vorsichtig zunächst 1904 bei Rudolf Laemmel (1879–1972), entschiedener schon als Aufgabe bei Émile Borel mit seiner Arbeit *Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques* von 1909. Schon vorher, 1907, hatte Hilbert eine Arbeit von Ugo Broggi (1880–1965) betreut, die sich auf den Maßbegriff von H. Lebesgue stützte (ausführlich in [Schneider 1989, S. 367ff.]).

An dieser Stelle sei ein Verweis auf Norbert Wiener (1894–1964) angebracht, auf eine seiner vielfältigen Interessen und außerordentlichen Leistungen. Nach dem Ende des Ersten Weltkrieges und nach seiner Rückkehr in die USA wandte er sich 1921/23 Fragen der Wahrscheinlichkeit zu, insbesondere der Brownschen Molekularbewegung.

Hatte Einstein im Jahre 1905 die durch Wärme bewirkte Bewegung mikroskopischer Teilchen berechnet, so konnte Wiener mit Hilfe maßtheoretischer Ansätze beweisen, dass die Partikel fast immer einen Weg (Kurve) zurücklegen, der nicht differenzierbar ist. Es scheint, dass Kolmogorow (indirekt) darauf Bezug genommen hat.

Auch das Lehrbuch *Grundzüge der Mengenlehre* von Felix Hausdorff aus dem Jahre 1914 zeigt den inzwischen erkannten Zusammenhang zwischen Maßtheorie und Wahrscheinlichkeitsrechnung, wenn er schreibt: *„Wir bemerken noch, daß manche Theoreme über das Maß von Punktmengen vielleicht ein vertrauteres Gesicht zeigen, wenn man sie in der Sprache der Wahrscheinlichkeitsrechnung ausdrückt.“* [Hausdorff 2002, S. 416]

Weitere Versuche zur Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitsrechnung unternahm 1923 der polnische Mathematiker Anton Marjan Lomnicki (1881–1941) und bereits 1917 der russische Mathematiker Sergej Natanowitsch Bernstein, der neben dem Bezug auf die französische Schule zugleich an die Traditionen der Petersburger Schule anknüpfte, an Tschebyschew, Markow und Ljapunow. Bernstein entwickelte vom rein mathematischen Standpunkt (also nicht vom Standpunkt einer mathematisch gefassten Naturwissenschaft) einen axiomatischen Ansatz: Auf der Grundlage der Booleschen Algebra wird die Wahrscheinlichkeit eingeführt als nichtnegative, monoton wachsende Mengenfunktion, als Maß für die Erwartung des Eintretens eines Ereignisses unter gewissen konkreten Bedingungen. Die Wirkung des Ansatzes von Bernstein war gering. Dagegen fand die von Richard von Mises (1883–1953) im Jahre 1918 vorgetragene Theorie weithin Beachtung. Er verstand die Wahrscheinlichkeitsrechnung als Naturwissenschaft; der Zentralbegriff war der des Kollektivs.

Bemerkenswert ist auch eine leider damals nie publizierte Vorlesung über Wahrscheinlichkeitsrechnung von Felix Hausdorff aus dem Sommersemester 1923 (diese Handschrift ist neuerdings publiziert in [Hausdorff 2006, S. 595ff.]). Dort wird die Wahrscheinlichkeit als spezielles Gebiet der Maßtheorie axiomatisch begründet – und das 10 Jahre vor Kolmogorow. Doch fehlen bei Hausdorff der auf Kolmogorow zurückgehende zentrale Existenzsatz für Maße in Funktionenräumen und der allgemeine Begriff der bedingten Erwartung.

Beim Studium der Markoffschen Prozesse fand Kolmogorow mit einigen Studien zur Wahrscheinlichkeitsrechnung in den 20er Jahren unter Rückgriff auf Grundideen von Borel einen definitiven Zugang zum axiomatischen Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Kolmogorow publizierte 1931 die Arbeit *Analytische Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung.*

Im Jahre 1933 erschien in deutscher Sprache seine Monografie *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Damit erfüllte er die seinerzeit 1900 von Hilbert gestellte Forderung. Er konstruierte u. a. Wahrscheinlichkeitsmaße in Funktionenräumen und konnte damit die Theorie der stochastischen Prozesse in sein axiomatisches Gebäude einordnen.

Von hier aus erfolgte die weitere stürmische Entwicklung der Theorie der

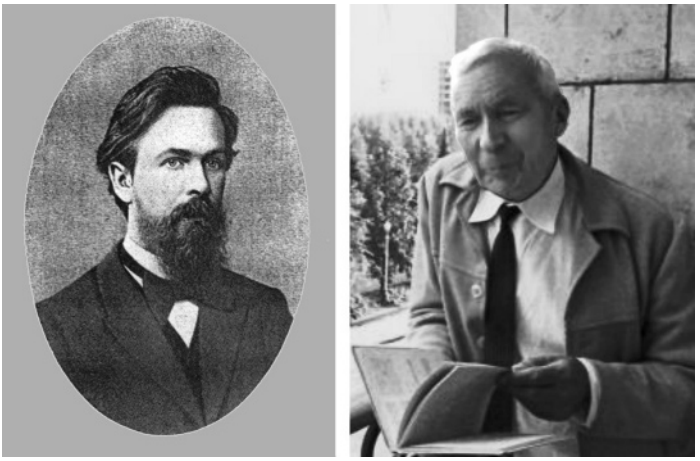


Abb. 11.5.1 Andrej Markow, Andrej Kolmogorow

stochastischen Prozesse auf maßtheoretischer Grundlage und außerdem die der Maßtheorie in topologischen Vektorräumen. Für die mathematische Fassung muss im Rahmen dieser Darstellung auf den Autor selbst verwiesen werden [Kolmogoroff 1933]. Nur so viel sei gesagt: Seine Theorie sagt im erkenntnistheoretischen Sinne nicht aus, was Zufall, Wahrscheinlichkeit und Notwendigkeit bedeuten. Daher schickte Kolmogorow eine Klarstellung voraus:

> *„Die Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitsrechnung kann auf verschiedene Weisen geschehen, und zwar beziehen sich diese verschiedenen Möglichkeiten sowohl auf die Wahl der Axiome als auch auf die der Grundbegriffe und Grundrelationen. Wenn man allerdings das Ziel der möglichen Einfachheit des Axiomensystems und des weiteren Aufbaus der darauf folgenden Theorie im Auge hat , so scheint es am zweckmäßigsten, die Begriffe eines zufälligen Ereignisses und seiner Wahrscheinlichkeit zu axiomatisieren. Es gibt auch andere Begründungssysteme der Wahrscheinlichkeitsrechnung, nämlich solche, bei denen der Wahrscheinlichkeitsbegriff nicht zu den Grundbegriffen zählt, sondern durch andere Begriffe ausgedrückt wird. Dabei wird jedoch ein anderes Ziel angestrebt, nämlich der größtmögliche Anschluß der mathematischen Theorie an die empirische Entstehung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes.“* [Kolmogoroff 1933, S. 2].

Im Vorwort (von Ostern 1933) drückt sich Kolmogorow folgendermaßen aus:

> *„Zweck des vorliegenden Heftes ist eine axiomatische Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Der leitende Gedanke des Verfassers war dabei, die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, welche noch unlängst für ganz eigenartig galten, natürlicherweise in die*

Reihe der allgemeinen Begriffsbildungen der modernen Mathematik einzuordnen. Vor der Entstehung der LEBESGUEschen Maß- und Integrationstheorie war diese Aufgabe ziemlich hoffnungslos. Nach den LEBESGUEschen Untersuchungen lag die Analogie zwischen dem Maße einer Menge und der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses sowie zwischen dem Integral einer Funktion und der mathematischen Erwartung einer zufälligen Größe auf der Hand. Diese Analogie ließ sich auch weiter fortführen: so sind z. B. mehrere Eigenschaften der unabhängigen zufälligen Größen den entsprechenden Eigenschaften der orthogonalen Funktionen völlig analog. Um, ausgehend von dieser Analogie, die Wahrscheinlichkeitsrechnung zu begründen, hätte man noch die Maß- und Integrationstheorie von den geometrischen Elementen, welche bei LEBESGUE noch hervortreten, zu befreien. Diese Befreiung wurde von FRÉCHET vollzogen.“
[Kolmogoroff 1933, S. III]

Und er erklärte mit Nachdruck:

„Die Wahrscheinlichkeitsrechnung als mathematische Disziplin soll und kann genau in demselben Sinne axiomatisiert werden wie die Geometrie oder die Algebra. Das bedeutet, daß, nachdem die Namen der zu untersuchenden Gegenstände und ihrer Grundbeziehungen sowie die Axiome, denen diese Grundbeziehungen zu gehorchen haben, angegeben sind, die ganze weitere Darstellung sich ausschließlich auf diese Axiome gründen soll und keine Rücksicht auf die jeweilige konkrete Bedeutung dieser Gegenstände und Beziehungen nehmen darf. Dementsprechend wird (. . .) der Begriff eines Wahrscheinlichkeitsfeldes als eines gewissen Bedingungen genügenden Mengensystems definiert. Was die Elemente dieser Mengen sind, ist dabei für die rein mathematische Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung völlig gleichgültig (man vgl. die Einführung der geometrischen Grundbegriffe in HILBERTS ‚Grundlagen der Geometrie‘ oder die Definitionen von Gruppen, Ringen und Körpern in der abstrakten Algebra).“
[Kolmogoroff 1933, S. 1]

Kolmogorow hat eine Autobiografie (1963) hinterlassen; sie war natürlich in russischer Sprache geschrieben und wurde von K.-R. Biermann ins Deutsche übersetzt [Kolmogorov 1989]. Dort heißt es:

„Die Freude an einer mathematischen ‚Entdeckung‘ lernte ich früh kennen, als ich im Alter von fünf oder sechs Jahren die Gesetzmäßigkeit beobachtete:
$1 = 1^2$
$1 + 3 = 2^2$
$1 + 3 + 5 = 3^2$
$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$
und so weiter.“ [Kolmogorov 1989, S. 83]

„Mein ganzes Schaffen seit 1920 ist untrennbar mit der Moskauer Universität verbunden. Ich habe mich mit einigem Erfolg, hin und wieder auch mit Nutzen, mit einem ziemlich ausgedehnten Kreis praktischer Anwendungen der Mathematik befaßt, bin aber im Grunde reiner Mathematiker geblieben. Ich bin begeistert von den Mathematikern, die zu hervorragenden Repräsentanten unserer Technik geworden sind, und schätze vollauf die Bedeutung, die Rechenmaschinen und Kybernetik für die künftige Menschheit besitzen; aber trotzdem glaube ich, daß die reine Mathematik in ihrem traditionellen Aspekt noch nicht ihren rechtmäßigen und ehrenvollen Platz unter den anderen Wissenschaften verloren hat. Verderblich könnte für sie nur eine übermäßig krasse Aufspaltung der Mathematiker in zwei Richtungen werden: In der einen kultiviert man die abstrakten, neuesten Teile der Mathematik, ohne sich genau in ihren Zusammenhängen mit der sie erzeugenden realen Welt zu orientieren, in der anderen beschäftigt man sich mit ‚Anwendungen', ohne zu einer erschöpfenden Analyse ihrer theoretischen Grundlagen vorzudringen. Daher möchte ich schließen mit der Betonung von Rechtmäßigkeit und Würde der Position des reinen Mathematikers, der den Platz und die Rolle seiner Wissenschaft bei der Entwicklung der Naturwissenschaften, der Technik, ja der gesamten menschlichen Kultur begreift und fähig ist, die eigene Wissenschaft in Übereinstimmung mit jenen allgemeinen Erfordernissen zu entwickeln.
Ein junger Mensch, der sich dafür bestimmt hält, diesen Weg zu gehen, braucht nicht zu fürchten, daß er in unserem Lande weniger gebraucht würde, daß er eine überflüssige, eine weniger zeitgemäße Arbeit zu leisten hätte als ein Agronom, ein Ingenieur, ein Physiker oder Kybernetiker." [Kolmogorov 1989, S. 86f.]

Die Beiträge zur Wahrscheinlichkeitsrechnung haben Kolmogorow größte Popularität verliehen; er erfuhr zahlreiche nationale und internationale Ehrungen. Er hat sich über seine wissenschaftlichen Verdienste hinaus auch energisch um die Verbesserung des mathematischen Unterrichts in seinem Lande bemüht und die Einbeziehung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in den Schulunterricht gefordert. So schrieb er 1967:

„Wären breiten Kreisen der sowjetischen Öffentlichkeit in den 30er und 40er Jahren die Anfänge der Wahrscheinlichkeitsrechnung bekannt gewesen, so wäre das Elend, das unsere biologische Wissenschaft durchgemacht hat, vielleicht ausgeblieben."
(Zitiert nach [Tews 1985, S. 62])

Seit den 20er und 30er Jahren fand die Wahrscheinlichkeitsrechnung zahlreiche Anwendungen. Sie ist heute unverzichtbarer Bestandteil der Wissenschaften und bietet auch weiterhin viele Möglichkeiten für Forschung und Anwendungen, sowohl innermathematisch als auch in der mathematischen

Statistik, insbesondere in der Physik (z. B. kinetische Gastheorie, Ergodentheorie), in der Biologie (Genetik, Bevölkerungsdynamik), in der Astronomie (Stellarastronomie), in der Produktion bei der Qualitätskontrolle, bei der medizinischen Diagnostik, in den Sozial- und Wirtschaftswissenschaften.

Bei der Fortentwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie haben die *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (1933) eine Schlüsselrolle gespielt (vgl. im Einzelnen [Plato 2005]).

Das letzte Kapitel der „*Grundbegriffe ...*“ behandelt das Gesetz der großen Zahlen und fasst die von Kolmogorow dazu teilweise in Gemeinschaft mit Alexander Jakowlewitsch Chintchin (1894–1959) im Jahre 1925 erzielten Ergebnisse zusammen. Die angeschlossene Bibliografie enthält reichlich Informationen über die Vorgeschichte.

Zur Weiterentwicklung und Rezeption der Ideen von Kolmogorow haben E. Hopf (1902–1983) mit *On causality, statistics and probability* (1934), J. L. Doob (1910–2004) und H. Cramér (1893–1985) wohl am nachhaltigsten beigetragen. Der mengentheoretische Ansatz für die Wahrscheinlichkeitstheorie war anfangs für viele befremdlich und wurde nicht allgemein akzeptiert. Von den nachfolgenden Arbeiten Cramérs seien erwähnt *Entwicklungslinien der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (1939), *Mathematical methods of statistics* (1946) und *Fifty Years of Theory; some personal Recollections* (1976) sowie von Doob *Stochastic processes* (1953) und *Kolmogorov's early work on convergence theory and foundations* (1989). Die Monografie *Creating modern probability* (1994) von Jan von Plato (*1951) analysiert im Detail die Entstehung der axiomatischen Wahrscheinlichkeitstheorie [Plato 2005].

11.6 Mathematik in Göttingen

Unter David Hilbert entwickelte sich Göttingen in den ersten Jahrzehnten des 20. Jahrhunderts zu einem Weltzentrum der Mathematik. Über die Axiomatisierung der Geometrie durch Hilbert ist bereits in Kapitel 10.2.8 berichtet worden, über die Leistungen Noethers in der Algebra in 11.4.2. Hier werden das Lebenswerk David Hilberts und das Wirken von H. Minkowski, E. Landau und R. Courant in Göttingen gewürdigt.

David Hilbert

David Hilbert gehört unstreitig zu den bedeutendsten Mathematikern Ende des 19. und Anfang des 20. Jahrhunderts [Reid 1970], [Wußing 1989].

Hilbert wurde am 23. Jan. 1862 in Wehlau nahe Königsberg/Pr. (heute Kaliningrad) geboren und entstammte einer preußischen Beamtenfamilie. Die Mutter war eine für die damalige Zeit ungewöhnlich gebildete Frau, interessiert an Philosophie, Astronomie und Mathematik.

Während der Gymnasialzeit in Königsberg hat Hilbert unter dem vorherrschenden Zwang bloßen Auswendiglernens sehr gelitten. Als man ihn –



Abb. 11.6.1 Rondell Göttinger Nobelpreisträger, angeordnet im „Gaußschen 17-Eck“ auf dem Stadtfriedhof Göttingen. Nicht nur die Mathematik in Göttingen genoss Weltruhm. Die Universität Göttingen hat viele Nobelpreisträger hervorgebracht, darunter Max von Laue und Otto Hahn. [Foto Wesemüller-Kock]

viel später – einmal gefragt hat, ob er sich schon auf der Schule mit Mathematik befasst habe, gab er zur Antwort: *„Ich habe mich auf der Schule nicht besonders mit Mathematik beschäftigt, denn ich wußte ja, daß ich das später tun würde.“* (Zitiert bei [Blumenthal 1935, S 388])

Hilbert erwies sich also schon damals als eigenwillige, starke und entschlossene Persönlichkeit.

Dem Abitur 1880 folgte das Mathematikstudium, fast ausschließlich in Königsberg. Hilbert hatte dort hervorragende akademische Lehrer, unter anderem Heinrich Weber, Carl Louis Ferdinand von Lindemann und den nur wenig älteren Adolf Hurwitz. Weber, ein vorzüglicher Algebraiker, machte Hilbert mit der Invariantentheorie bekannt. Lindemann stand auf der Höhe seines Ruhmes, er hatte ein Jahrtausende altes Problem bewältigt: Er hatte 1882 die Transzendenz von π und damit die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises bewiesen, sogar noch in dem umfassenderen Sinne, dass die Quadratur nicht nur mit Zirkel und Lineal unmöglich ist, sondern auch bei Hinzuziehung höherer algebraischer Kurven. Hurwitz, an den sich Hilbert auch persönlich anschloss, besaß einen außergewöhnlichen Überblick über die Mathematik als Ganzes und führte ihn in die Funktionentheorie ein.

Auf den Anfang der 80er Jahre geht auch Hilberts erste freundschaftliche Bindung an den hochbegabten Hermann Minkowski zurück, der als 19-



Abb. 11.6.2 David Hilbert

jähriger einen großen Preis der Pariser Akademie für die Lösung der Aufgabe errungen hatte, eine beliebige Zahl in fünf Quadrate zu zerlegen. Minkowski stammt aus Aleksotas bei Kowno (dem heutigen Kaunas); seine Familie war wegen der antijüdischen Stimmung in Russland ebenfalls in Königsberg ansässig geworden. Minkowski hatte in Berlin studiert. Durch ihn und Hurwitz wurde Hilbert mit den hervorragenden algebraischen und analytischen Ergebnissen von Kummer, Kronecker und Weierstraß bekannt.

Hilberts Promotion erfolgte Anfang 1885 in Königsberg. Im Winter 1885/1886 hielt er sich zu einem Studienaufenthalt in Leipzig auf und machte dabei die für seine spätere Entwicklung äußerst positive Bekanntschaft mit Felix Klein. Es schloß sich eine Studienreise nach Paris an, die ihn besonders mit dem höchst einflussreichen und äußerst produktiven Charles Hermite in Berührung brachte.

Schon im Jahre 1886 habilitierte sich Hilbert, wiederum in Königsberg, und wurde damit Privatdozent. Die dortige Situation schilderte Hilbert selbstironisch in einem Brief an Minkowski, in dem er von *„11 Dozenten, die auf etwa ebenso viele Studenten angewiesen sind“* berichtet [Blumenthal 1935, S. 393]. Unter Hilberts Schülern befand sich damals auch Arnold Johannes Wilhelm Sommerfeld.

Als Hurwitz 1892 nach Zürich berufen wurde, erhielt Hilbert als dessen Nachfolger ein Extraordinariat. Damit besserte sich seine finanzielle Lage so, dass er an die Gründung einer Familie denken konnte. Noch im Jahre 1892 heiratete er Käthe Jerosch (1864–1945), die Tochter einer Königsberger Kaufmannsfamilie, eine junge Dame von beträchtlicher geistiger Selbständigkeit, Bildung und Reife. Übrigens rührte aus der Königsberger Zeit auch eine sehr enge Freundschaft mit Käthe Kollwitz (1867–1945) her. Hilbert hat zeitlebens die fortschrittliche, demokratisch gesinnte Künstlerin verehrt und gegen Angriffe verteidigt.

Von der wissenschaftlichen Seite her gehört Hilberts erste Schaffenszeit, die Königsberger Periode, der Invariantentheorie, einer damals sehr im Vordergrund stehenden mathematischen Disziplin, die weltweit betrieben wurde. Ohne hier auf Einzelheiten eingehen zu können, sei doch kurz gesagt, dass Hilbert 1890 den fundamentalen Satz bewies, wonach jedes System algebraischer Formen ein endliches Basissystem besitzt. Der von Hilbert gegebene Beweis war ein reiner Existenzbeweis und nicht konstruktiv. Damit stellte sich Hilbert in Gegensatz zu der Auffassung von Kronecker, dass jeder Existenzbeweis konstruktiv sein, also in endlich vielen Schritten zur Angabe des gesuchten Objektes führen müsse. Der führende Invariantentheoretiker in der Zeit vor Hilbert, der deutsche Mathematiker Paul Albert Gordan, der „König der Invarianten“, äußerte sich zunächst missbilligend zu dem Hilbertschen Beweis: *„Das ist keine Mathematik. Das ist Theologie.“* [Blumenthal 1935, S. 394]. Später jedoch hob gerade Gordan das Verdienstvolle der sich bei Hilbert zeigenden neuen mathematischen Methode hervor.

Eine entscheidende Wende in Hilberts Leben trat 1895 ein: seine Berufung nach Göttingen auf Grund einer Initiative von Felix Klein. Als man Klein vorwarf, er habe es sich recht leicht gemacht, einen so jungen Mann nach Göttingen zu ziehen, hat er dies bestritten und entgegnet: *„Ich berufe mir den aller unbequemsten.“* [Blumenthal 1935, S. 399]

Jedenfalls rechtfertigte sich die Berufung Hilberts nach Göttingen auf das Glänzendste. Göttingen erhielt einen überaus tiefgründigen und produktiven Forscher und einen hervorragenden, humanistisch gesinnten akademischen Lehrer, der wesentlich zur Entwicklung von Göttingen zu einer führenden naturwissenschaftlich-mathematischen Forschungs- und Lehrstätte beitrug und dessen Schüler eine große Tradition in alle Welt weitergetragen haben. Trotz vieler ehrenvoller Angebote anderer Hochschulen blieb Hilbert Göttingen treu. Seine Emeritierung erfolgte 1930, Vorlesungen hielt er sogar noch bis 1934.



Abb. 11.6.3 Mathematisches Institut in der Bunsenstraße in Göttingen [Foto Wesemüller-Kock]

Mitte der zwanziger Jahre erkrankte Hilbert schwer an perniziöser Anämie, einer damals unheilbaren Krankheit. Hilbert war sich seines Zustandes sehr genau bewusst, setzte aber seine Arbeit unbeirrt fort, soweit es die zum Krankheitsbild gehörende Müdigkeit zuließ. Zur rechten Zeit wurde 1927 durch die medizinische Wissenschaft ein Leberpräparat entwickelt. Hilbert erhielt es als einer der ersten Patienten und konnte gerettet werden.

Den äußeren Lebensumständen nach gibt es bei Hilbert kaum tiefgreifende Zäsuren. Desto deutlicher aber ist sein wissenschaftliches Lebenswerk in ziemlich deutlich getrennte Abschnitte geschieden.

Einer ersten, der Invariantentheorie gewidmeten Periode, folgte zwischen 1893 und 1898 die vorzugsweise Hinwendung zur Theorie der algebraischen Zahlkörper. Bis etwa 1902 schloss sich eine Untersuchung der Grundlagen der Geometrie an. Zwischen 1902 und 1912 widmete sich Hilbert hauptsächlich den Integralgleichungen; 1912 erschien das grundlegende Werk *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.* Bis etwa 1922 wandte sich Hilbert der mathematischen Physik zu. Zusammen mit Richard Courant veröffentlichte er 1924 den ersten Band der *Methoden der mathematischen Physik*; der zweite Band erschien 1937. Eine letzte aktive Forschungsperiode war bis ungefähr 1930 den logischen Grundlagen der Mathematik gewidmet. Das Werk *Grundzüge der theoretischen Logik*, zusammen



Abb. 11.6.4 Wilhelm Ackermann; Paul Bernays [ETH-Bibliothek Zürich]

mit Wilhelm Ackermann, wurde 1928 publiziert. Im Jahre 1934 erschien, verfaßt zusammen mit Paul Isaac Bernays, der erste Band der *Grundlagen der Mathematik*; der zweite Band folgte 1939.

Das 1893 von Hilbert in Angriff genommene Forschungsgebiet der Theorie der algebraischen Zahlkörper führte ihn zu enger Zusammenarbeit mit Minkowski, der auf Initiative von Hilbert 1902 ebenfalls nach Göttingen berufen wurde. Den Höhepunkt dieser zweiten Tätigkeitsperiode Hilberts stellte der 1897 erschienene sog. *Zahlbericht* (genauer Titel: *Die Theorie der algebraischen Zahlkörper*) dar – ein Bericht an die Deutsche Mathematiker-Vereinigung über den Stand der Theorie der algebraischen Zahlkörper (zur Entwicklung der Klassenkörpertheorie (vgl. z. B. [Dieudonné 1985, S. 962ff.]). Übrigens war Hilbert neben Georg Cantor ebenfalls führend an der Gründung (1890) der Deutschen Mathematiker-Vereinigung beteiligt gewesen.

Der *Zahlbericht* übertraf die höchsten Erwartungen und hatte eine ungewöhnlich anregende Wirkung auf eine ganze Mathematikergeneration. Der *Zahlbericht* war allerdings mehr als ein bloßer Bericht über den damaligen Stand der Körpertheorie; er führte auf neuer, verallgemeinerter Grundlage unter anderem zur Klassenkörpertheorie. Von Hilberts Begeisterung für die Zahlentheorie, die ihn um diese Zeit ähnlich wie den jungen Gauß völlig gefangennahm, zeugt das Vorwort zum *Zahlbericht*. Dort heißt es beispielsweise:

> *„An der Zahlentheorie werden von jeher die Einfachheit ihrer Grundlagen, die Genauigkeit ihrer Begriffe und die Reinheit ihrer Wahrheiten gerühmt; ihr kommen diese Eigenschaften von Hause aus zu, während andere mathematische Wissenszweige erst eine mehr oder minder lange Entwicklung haben durchmachen müssen, bis die Forderungen der Sicherheit in den Begriffen und der Strenge in den Beweisen überall erfüllt worden sind.*

Es nimmt uns daher die hohe Begeisterung nicht Wunder, von der zu allen Zeiten die Jünger dieser Wissenschaft beseelt gewesen sind. ‚Fast alle Mathematiker, die sich mit der Zahlentheorie beschäftigen', so sagt Legrendre, indem er Euler's Liebe zur Zahlentheorie schildert, ‚geben sich ihr mit einer gewissen Leidenschaft hin'. Weiter erinnern wir uns, welche Verehrung unser Meister Gauss für die arithmetische Wissenschaft empfand, wie, als ihm zuerst der Beweis einer ausgezeichneten arithmetischen Wahrheit nach Wunsch gelungen war, ‚ihn die Reize dieser Untersuchungen so umstrickten, dass er sie nicht mehr lassen konnte', und wie er Fermat, Euler, Lagrange und Legrendre als ‚Männer von unvergleichlichem Ruhme' preist, weil sie ‚den Zugang zu dem Heiligtume dieser göttlichen Wissenschaft erschlossen und gezeigt haben, von wie grossen Reichtümern es erfüllt ist'. (...)

In Anbetracht der Schlichtheit ihrer Voraussetzungen ist sicher die Zahlentheorie d e r Wissenszweig der Mathematik, dessen Wahrheiten am leichtesten zu begreifen sind. Aber die arithmetischen Begriffe und Beweismethoden erfordern zu ihrer Auffassung und völligen Beherrschung einen hohen Grad von Abstractionsfähigkeit des Verstandes, und dieser Umstand wird bisweilen als ein Vorwurf gegen die Arithmetik geltend gemacht. (...)

Die Theorie der Zahlkörper ist wie ein Bauwerk von wunderbarer Schönheit und Harmonie, (...). Die tiefen Einblicke (...) zeigen uns zugleich, dass in diesem Wissensgebiete eine Fülle der kostbarsten Schätze noch verborgen liegt, winkend als reicher Lohn dem Forscher, der den Wert solcher Schätze kennt und die Kunst, sie zu gewinnen, mit Liebe betreibt." [Hilbert 1897, S. Iff.]

(Zur Wirkung des „Zahlberichtes" vgl. z. B. [Dieudonné 1985, S. 225ff.])
Hilbert ist nach 1902 nicht wieder auf die algebraischen Zahlkörper zurückgekommen. Doch hat er sich noch mit einem berühmten Problem der additiven Zahlentheorie befasst, das der englische Mathematiker Edward Waring (1734–1798) bereits im 18. Jahrhundert gestellt hatte. Hilbert hat dieses Problem über die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl von n-ten Potenzen positiv entschieden: zu jeder natürliche Zahl N gibt es eine nur von n abhängige natürliche Zahl $Z(n)$, so, dass sich N als Summe von höchstens $Z(n)$ n-ten Potenzen darstellen lässt. Diese 1909 publizierte Abhandlung hat Hilbert seinem so sehr früh verstorbenen Freund Minkowski gewidmet. Ein elementarer, aber keineswegs einfacher Beweis dieses tiefliegenden Satzes ist erst 1942 durch den sowjetischen Mathematiker Juri Wladimirowitsch Linnik (1915–1972) erbracht worden, der während des 2. Weltkrieges an der Verteidigung Leningrads gegen die deutschen Truppen teilnahm.

Hilbert überließ die Weiterführung seiner körpertheoretischen Pionierarbeit seinen Kollegen; er hatte sich mittlerweile den Grundlagen der Geometrie zugewandt. Hier sah er die reale Möglichkeit, auf einem weiteren mathema-

tischen Gebiet – nicht nur dem der Lehre von den ganzen Zahlen – einen lückenlosen, exakten Aufbau einer Theorie durchzuführen. Giuseppe Peano hatte bekanntlich 1889 das nach ihm benannte Axiomensystem für die natürlichen Zahlen publiziert.

Im Wintersemester 1898/99 hielt Hilbert eine neuartige Vorlesung zu den Grundlagen der Euklidischen Geometrie. Im Vorwort zum Vorlesungsmanuskript heißt es:

> *„Wir werden auf eine Reihe scheinbar sehr einfacher und doch sehr tiefliegender und schwieriger Probleme geführt werden. Wir werden zu ganz neuen und wie ich glaube fruchtbaren Fragestellungen Anregung erhalten und werden nahe und bemerkenswerte Zusammenhänge erkennen zwischen den Elementen der Arithmetik und der Geometrie und damit wieder einen Grund gewahr werden für die Einheit der mathematischen Wissenschaft.“*
> [Hilbert 1999, S. V]

Noch im Jahre 1899 erschienen die berühmt gewordenen *Grundlagen der Geometrie*; dieses Buch ist seitdem – im wesentlichen ungeändert – in vielen Sprachen und Neuauflagen immer wieder publiziert worden [Toepell 2005]. Die 1. Auflage von 1899 war aus Anlass der Einweihung des Gauß-Weber-Denkmals in Göttingen erschienen (siehe Kap. 10.2.8).

Man übertrug Hilbert ein Hauptreferat auf dem Internationalen Mathematikerkongress in Paris, 1900. Interessant sind Bemerkungen bezüglich dieses anstehenden Internationalen Kongresses im Briefwechsel zwischen Minkowski und Hilbert. Die erste zeigt, dass damals auch in Mathematikerkreisen chauvinistische Tendenzen existierten. Brief aus Bonn, vom 19. Juni 1889:

> *„Der Mathematikerkongreß in Paris soll nach Christoffel's Ansicht nur zu dem Zwecke dienen, die Führung in der Mathematik den Deutschen, welchen sie nach dem Gutachten von Casorati und einem anderen Italiener zukäme, zu entreißen.“*
> [Rüdenberg/Zassenhaus 1973, S. 35]

Zum Vortrag von Hilbert 1900 in Paris zwei Briefe von Minkowski an Hilbert: Brief aus Zürich, vom 17. Juli 1900:

> *„Lieber Freund,*
>
> *Von Deinem Vortrag habe ich die 3 ersten Fahnen erhalten. Da ich nicht weiss, was noch kommen wird, kann ich meine definitive Meinung noch nicht äussern. Höchst originell ist es jedenfalls, das als Probleme für die Zukunft hinzustellen, was die Mathematiker am längsten schon völlig zu besitzen glauben, wie die arithmetischen Axiome. Was mögen die im Auditorium jedenfalls auch zahlreich vertretenen Laien dazu sagen? Wird ihr Respect vor uns steigen? Auch mit den Philosophen wirst Du manchen harten Strauss auszukämpfen haben.*

Jedenfalls musst Du aber, das ist meine und auch Hurwitz' Meinung, für den mündlichen Vortrag sehr grosse Kürzungen und Zurechtstutzungen vornehmen. Besser ist es, wenn Du Deine Zeit gar nicht ganz ausnutzen brauchst; und manches muss ja auch langsamer gesprochen werden. (...)

Mit herzlichem Gruss von Haus zu Haus
Dein H. Minkowski"

Brief aus Zürich, den 28. Juli 1900:

„Deinen Vortrag habe ich nun mit grossem Genusse zu Ende gelesen. Da ich das Ende abwarte, um mir ein richtiges Bild zu machen, hat sich die Lektüre etwas verzögert. Ich kann Dir nur zu der Rede Glück wünschen, sie wird sicher das Ereignis des Congresses bilden und der Erfolg wird ein sehr nachhaltiger sein. Namentlich glaube ich, dass Deine Anziehungskraft auf junge Mathematiker, durch diese Rede, die wohl jeder Mathematiker ohne Ausnahme lesen wird, wenn überhaupt möglich noch wachsen wird." [Rüdenberg/Zassenhaus 1973, S. 129f.]

Am Ende seines Pariser Vortrages betonte Hilbert die organische Einheit der Mathematik:

„... die mathematische Wissenschaft ist meiner Ansicht nach ein unteilbares Ganzes, ein Organismus, dessen Lebensfähigkeit durch den Zusammenhang seiner Teile bedingt wird. Denn bei aller Verschiedenheit des mathematischen Wissensstoffes im einzelnen gewahren wir doch sehr deutlich die Gleichheit der logischen Hilfsmittel, die Verwandtschaft der Ideenbildungen in der ganzen Mathematik und die zahlreichen Analogien in ihren verschiedenen Wissensgebieten. (...) Der einheitliche Charakter der Mathematik liegt im inneren Wesen dieser Wissenschaft begründet; denn die Mathematik ist die Grundlage alles exakten naturwissenschaftlichen Erkennens. Damit sie diese hohe Bestimmung vollkommen erfülle, mögen ihr im neuen Jahrhundert geniale Meister entstehen und zahlreiche in edlem Eifer erglühende Jünger." [Hilbert 1935, S. 329]

Diese Schlüsselsätze klingen wie ein Hinweis auf seine Hinwendung zur Analysis und zur mathematischen Physik in den kommenden Forschungsperioden. Die Gründe liegen zweifellos in der stürmischen, geradezu aufregenden Entwicklung der Naturwissenschaften, insbesondere der Physik, zu Anfang des 20. Jahrhunderts. Man denke nur an Max Planck und die Quantentheorie, an Albert Einstein und die Relativitätstheorie, an Wilhelm Konrad Röntgen (1845–1923), an Walther Hermann Nernst (1864–1941), Ernst Rutherford (1871–1937), Pierre (1855–1906) und Marie (1867–1934) Curie, Max von Laue (1879–1960) und viele andere.

Zunächst konnte Hilbert einen strengen Beweis des sog. Dirichletschen Prinzipes erbringen, das während des 19. Jahrhunderts der Behandlung der

Randwertaufgaben in der Potentialtheorie zugrunde gelegt, aber durch berechtigte Einwände von Karl Weierstraß erschüttert worden war. Der Hilbertsche Beweis sowie die sich anschließenden Untersuchungen beseitigten eine bedeutende innere Unsicherheit der höheren Analysis, trugen unmittelbar zum Ausbau der Methoden der Variationsrechnung bei und lieferten zugleich wertvolle Impulse zur Entstehung einer ganz modernen, neuen mathematischen Disziplin, der Funktionalanalysis.

In dieselbe Richtung haben auch Hilberts fundamentale Untersuchungen zur Theorie der Integralgleichungen gewirkt, die ihrerseits aufs engste mit Problemen der mathematischen Physik verbunden waren und durch den schwedischen Mathematiker Eric Ivar Fredholm (1866–1927) um 1900 eine schon recht systematische Behandlung erfahren hatte. Hilbert fasste 1912 seine weitreichenden und in die Zukunft weisenden Ergebnisse in der auch heute noch lehrreichen Monographie *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* zusammen. Schließlich erschien – wie schon erwähnt – im Jahre 1924 die erste Auflage des ersten Bandes der von Courant und Hilbert gemeinsam verfassten *Methoden der mathematischen Physik*, in denen die durchgebildeten Methoden und Ergebnisse sowie diejenigen ihrer Schüler und Mitarbeiter systematisch dargelegt wurden. Aus diesem zweibändigen Werk, das auch heute noch ein vorzügliches Lehrbuch darstellt, haben in den 20er und 30er Jahren und den folgenden Jahrzehnten viele theoretische Physiker ihr mathematisches Rüstzeug erworben.

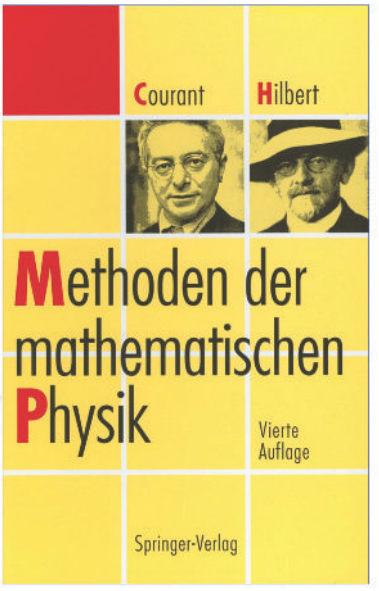


Abb. 11.6.5 Titelblatt der *Methoden der Mathematischen Physik* von R. Courant und D. Hilbert (Springer Verlag. Berlin, Heidelberg, New York, 3. Aufl. 1993)

Im einzelnen wandte sich Hilbert, auch auf Verdeutlichung seiner allgemeinen Theorie bedacht, speziellen Randwertproblemen von gewöhnlichen Differentialgleichungen und Eigenwertproblemen zu. Er vermochte das schwierige, schon von Bernhard Riemann formulierte Problem der Existenz einer linearen Differentialgleichung mit vorgeschriebener Monodromiegruppe vollständig zu lösen (Problem Nr. 21 seines Pariser Vortrages, vgl. S. 454).

Auch in der theoretischen Physik suchte Hilbert direkte Anwendungen seiner Methoden. So beschäftigte er sich ausführlich mit kinetischer Gastheorie. Weitere Untersuchungen galten dem Kirchhoffschen Gesetz der Proportionalität zwischen Emission und Absorption der Strahlung sowie schließlich dem Hamiltonschen Prinzip in der allgemeinen Relativitätstheorie. An diese Arbeiten haben später Atomphysiker angeknüpft, unter ihnen Peter Joseph Wilhelm Debye (1884–1966) und Max Born (1882–1970).

Norbert Wiener, noch ein junger, nach Vorbildern suchender Mann, besuchte kurz vor Beginn des Weltkrieges Göttingen. In seiner Autobiographie *Mathematik – Mein Leben* berichtet er unter anderem:

> *„Landau war der verhinderte Schachspieler im Bereich der Mathematik. Er besaß Intelligenz, aber weder Geschmack noch Urteilsvermögen oder philosophisches Denken. Er glaubte nicht an mathematischen Stil, und darum lesen sich seine Bücher auch wie ein Versandhauskatalog.*
> *Hilbert war ein ganz anderer Mensch, ein ruhiger, bäuerlicher Ostpreuße, seiner Stärke bewußt und dabei von echter Bescheidenheit. Er hatte sich nacheinander mit den schwierigsten Problemen auf jedem Gebiete der modernen Mathematik befaßt und auf jedem Gebiet einen großen Erfolg erzielt. In ihm verkörperte sich die große Tradition der Mathematik zu Anfang unseres Jahrhunderts. Für mich als jungen Menschen wurde Hilbert der Mathematiker jener Art, wie sie mir selber vorschwebte, ein Mann in dem sich ungeheure abstrakte Denkkraft mit einem nüchternen Sinn für physikalische Wirklichkeit paarte.“* [Wiener 1965, S. 26]

Anfang der 20er Jahre nahm Hilbert verstärkt seine früheren Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik wieder auf, allerdings in einem viel allgemeineren Sinne und mit weitreichenderen Absichten als etwa 20 Jahre vorher. Das Kernproblem bestand in einer präziseren Bestimmung der axiomatischen Methode und ihrer Reichweite. Genau genommen ging es ihm um den Aufbau einer Beweistheorie: Das mathematische Beweisen selbst sollte zum Gegenstand der Untersuchungen gemacht werden.

An ein Axiomensystem zum Aufbau einer Theorie ist neben den Forderungen der Unabhängigkeit und Vollständigkeit insbesondere die Forderung nach Widerspruchsfreiheit der Axiome zu stellen. Hilbert hatte erkannt, dass im Hinblick auf eine umfassende Axiomatik der Nachweis der inhaltlichen Widerspruchsfreiheit nur relativ sein kann, also nur durch die Konstruktion eines Modells entschieden werden kann. Da aber die Elemente dieses Modells

ihrerseits mathematischer Art sind, reduziert sich die Widerspruchsfreiheit einer Theorie auf die einer anderen. Um diesem *circulus vitiosus* zu entgehen ersetzte Hilbert die inhaltliche Widerspruchsfreiheit durch eine formale Widerspruchsfreiheit: Ein Axiomensystem ist nach Hilbert genau dann widerspruchfrei, wenn es unmöglich ist, aus diesem Axiomensystem durch logische Schlüsse eine Aussage und auch deren Negation abzuleiten.

In Anbetracht der eminenten Bedeutung, die die Axiomatik nach Inhalt und Methode für die Entwicklung der Mathematik während des 20. Jahrhunderts besessen hat, seien einige, auch längere Zitate von Hilbert beigefügt.

> *„Wie im Leben der Völker das einzelne Volk nur dann gedeihen kann wenn es auch allen Nachbarvölkern gut geht, und wie das Interesse der Staaten es erheischt, daß nicht nur innerhalb jedes einzelnen Staates Ordnung herrsche, sondern auch die Beziehungen der Staaten unter sich gut geordnet werden müssen, so ist es auch im Leben der Wissenschaften. In richtiger Erkenntnis dessen haben die bedeutendsten Träger des mathematischen Gedankens stets großes Interesse an den Gesetzen und der Ordnung in den Nachbarwissenschaften bewiesen und vor allem zu Gunsten der Mathematik selbst von jeher die Beziehungen zu den Nachbarwissenschaften, insbesondere zu den großen Reichen der Physik und der Erkenntnistheorie gepflegt. Das Wesen dieser Beziehungen und der Grund ihrer Fruchtbarkeit, glaube ich, wird am besten deutlich, wenn ich Ihnen diejenige allgemeine Forschungsmethode schildere, die in der neueren Mathematik mehr und mehr zur Geltung zu kommen scheint: ich meine die axiomatische Methode.“* [Hilbert 1918, S. 405]

Man beachte, dass der erste Satz von Hilbert gegen Ende des schrecklichen Ersten Weltkrieges formuliert worden ist. Der Text von 1918 stammt aus einem Vortrag 1917 in Zürich.

> *„Anders* (als in der modernen Quantentheorie, Wg.) *verhält es sich, wenn in rein theoretischen Wissensgebieten Widersprüche auftreten. Das klassische Beispiel für ein solches Vorkommnis bietet die Mengentheorie und zwar insbesondere das schon auf Cantor zurückgehende Paradoxon der Menge aller Mengen. Dieses Paradoxon ist so schwerwiegend, daß sehr angesehene Mathematiker, z. B. Kronecker und Poincaré, sich durch dasselbe veranlaßt fühlten, der gesamten Mengentheorie – einem der fruchtreichsten und kräftigsten Wissenszweige der Mathematik überhaupt – die Existenzberechtigung abzusprechen.*
>
> *Auch bei dieser prekären Sachlage brachte die axiomatische Methode Abhilfe. Es gelang Zermelo, indem er durch Aufstellung geeigneter Axiome einerseits die Willkür der Definitionen von Mengen und andererseits die Zulässigkeit von Aussagen über ihre Elemente in bestimmter Weise beschränkte, die Mengentheorie derart zu entwickeln,*

daß die in Rede stehenden Widersprüche wegfallen, daß aber trotz der auferlegten Beschränkungen die Tragweite und Anwendungsfähigkeit der Mengentheorie die gleiche bleibt.

In allen bisherigen Fällen handelte es sich um Widersprüche, die sich im Verlauf der Entwicklung einer Theorie herausgestellt hatten und zu deren Beseitigung durch Umgestaltung des Axiomensystems die Not drängte. Aber es genügt nicht, vorhandene Widersprüche zu vermeiden, wenn der durch sie gefährdete Ruf der Mathematik als Muster strengster Wissenschaft wiederhergestellt werden soll: die prinzipielle Forderung der Axiomenlehre muß vielmehr weitergehen, nämlich dahin, zu erkennen, daß jedesmal innerhalb eines Wissensgebietes auf Grund des aufgestellten Axiomensystems Widersprüche überhaupt unmöglich sind.

Dieser Forderung entsprechend habe ich in den Grundlagen der Geometrie die Widerspruchslosigkeit der aufgestellten Axiome nachgewiesen, indem ich zeigte, daß jeder Widerspruch in den Folgerungen aus den geometrischen Axiomen notwendig auch in der Arithmetik des Systems der reellen Zahlen erkennbar sein müßte.“

[Hilbert 1918, S. 411]

Wie stark sogar noch „Axiom“ bzw. „Axiomatik“ und überhaupt die Grundlagen erkenntnistheoretisch in der Diskussion standen, verdeutlicht eine Anekdote, die sogar auf Tatsachen beruht und von St. Hildebrandt wiedergegeben wurde.

Im Jahre 1918 wetteten Hermann Weyl und George Pólya, angesehene und hochgeschätzte Gelehrte und Mathematiker an der ETH Zürich, öffentlich während eines mathematischen Kolloquiums, ob einige der dazumal als unumstößlich geltenden Sätze der Mathematik auch noch in zwanzig Jahren gültig oder wieder verworfen worden seien. Es ging um die Sätze:

1) Jede beschränkte Zahlmenge hat eine präzise obere Grenze.
2) Jede unendliche Zahlmenge enthält eine abzählbare Teilmenge.

Weyl prophezeite, dass nach 20 Jahren diese Sätze „völlig vage“ seien und nach deren Wahrheit oder Falschheit nicht mehr gefragt werden könne. Pólya stellte 1972 nach Weyls Tode fest, Weyl habe zu 49% und er wohl zu 51% recht behalten [Hildebrandt 1995, S. 25ff.].

Hilberts Meinung zum Wesen und zur Bedeutung der Axiomatik zeigt das Zitat:

„Zum Schlusse möchte ich in einigen Sätzen meine allgemeine Auffassung vom Wesen der axiomatischen Methode zusammenfassen.

Ich glaube: Alles, was Gegenstand des wissenschaftlichen Denkens überhaupt sein kann, verfällt, sobald es zur Bildung einer Theorie reif ist, der axiomatischen Methode und damit mittelbar der Mathematik. Durch Vordringen zu immer tieferliegender Schichten von Axiomen im vorhin dargelegten Sinne gewinnen wir auch in das Wesen des

> *wissenschaftlichen Denkens selbst immer tiefere Einblicke und werden uns der Einheit unseres Wissens immer mehr bewußt. In dem Zeichen der axiomatischen Methode erscheint die Mathematik berufen zu einer führenden Rolle in der Wissenschaft überhaupt.“*
> [Hilbert 1918, S. 415]

Hilbert hielt 1922 vor der Deutschen Naturforscher-Gesellschaft einen Vortrag zur Bedeutung der Axiomatik, auch hier wieder mit der Absicht, den guten Ruf der Mathematik als strengste aller Wissenschaften zu befestigen.

> *„Alles, was im bisherigen Sinne die Mathematik ausmacht, wird streng formalisiert, so daß die eigentliche Mathematik oder die Mathematik im engeren Sinne zu einem Bestande an Formeln wird. [...] Zu der eigentlichen, so formalisierten Mathematik kommt eine gewissermaßen neue Mathematik, eine Metamathematik, die zur Sicherung jener notwendig ist, in der – im Gegensatz zu den rein formalen Schlußweisen der eigentlichen Mathematik – das inhaltliche Schließen zur Anwendung kommt, aber lediglich zum Nachweis der Widerspruchsfreiheit der Axiome. In dieser Metamathematik wird mit den Beweisen der eigentlichen Mathematik operiert und diese letzteren bilden selbst den Gegenstand der inhaltlichen Untersuchung.“* (Zitiert bei [Ketelsen 1994, S. 37])

Als notwendige, sinngemäße Ergänzung der Untersuchungen über die Axiomatik entwickelte Hilbert den Logikkalkül weiter im Anschluss an Giuseppe Peano, Gottlob Frege, Ernst Schröder, Bertrand Russell und andere. Inhaltliches Schließen wurde bei Hilbert durch eine Kette rein formaler Handlungen, das heißt durch Rechnen mit Zeichen nach festen Regeln ersetzt. Für Hilbert ist damit die Mathematik zur allgemeinen Lehre von den Formalismen geworden. Zusammen mit seinem Schüler Wilhelm Ackermann hat Hilbert 1928 das Lehrbuch *Grundzüge der theoretischen Logik* veröffentlicht; es stellt auch heute noch eine sehr wertvolle Einführung in die mathematische Logik dar (s. Abb. 11.2.6).

Über den Zusammenhang seiner formalen Methode mit der Axiomatik hat sich Hilbert des Öfteren – auch gegen andere philosophische Strömungen innerhalb der Mathematik argumentierend – geäußert; so heißt es zum Beispiel 1928 in einer Arbeit *Die Grundlagen der Mathematik*:

> *„Denn in meiner Theorie wird das inhaltliche Schließen durch ein äußeres Handeln nach Regeln ersetzt; damit erreicht die axiomatische Methode diejenige Sicherheit und Vollendung, deren sie fähig ist und deren sie auch bedarf, wenn sie zum Grundmittel aller theoretischen Forschung werden soll.“* [Hilbert 1928, S. 68]

Bekanntlich hat die weitere Entwicklung auf dem Gebiet der Grundlagen der Mathematik Hilbert nicht in allen Punkten Recht gegeben. So wissen wir heute seit den Ergebnissen des polnischen Mathematikers Alfred Tarski



Abb. 11.6.6 Kurt Gödel, Alfred Tarski

(1901–1983) aus den Jahren 1935/36, dass die formale Widerspruchsfreiheit einer Theorie nicht garantiert, dass diese Theorie auch ein Modell besitzt. Anders ausgedrückt: Aus der formalen Widerspruchsfreiheit folgt im allgemeinen nicht die inhaltliche Widerspruchfreiheit.

Überhaupt hatten sich in den 20er Jahren bedeutende Schulen der mathematischen Logik vor allem an österreichischen und polnischen Universitäten gebildet, zu deren hervorragenden Vertretern Tarski und Kurt Gödel neben vielen anderen bedeutenden Logikern und Mathematikern zählen. Tarski erreichte mit seinem Werk *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen* (1935) einen gewissen Abschluss der einst von Bernard Bolzano (1781–1948) Anfang des 19. Jahrhunderts eingeschlagenen Richtung und seiner Auffassung der Logik als Methodologie aller deduktiven Wissenschaften. In Weiterführung dieser „semantischen“ Linie der Logik entwickelte sich in den letzten Jahrzehnten vor allem die Modelltheorie als selbständiges Grenzgebiet zwischen mathematischer Logik und allgemeiner Algebra.

Die Möglichkeiten, aber auch die Grenzen der formalisierten axiomatischen Methode zeigte vor allem Kurt Gödel. In seiner Dissertation bewies Gödel 1930 in dem nach ihm benannten Vollständigkeitssatz die Vollständigkeit des Prädikatenkalküls der ersten Stufe. In seiner Habilitationsschrift von 1931 bewies er, dass aus einem widerspruchsfreien rekursiven Axiomensystem der Arithmetik niemals alle im Bereich der natürlichen Zahlen geltenden Aussagen abgeleitet werden können (1. Gödelscher Unvollständigkeitssatz) und folgerte daraus, dass die Widerspruchsfreiheit einer für die Arithmetik kodierten axiomatischen Theorie nicht mit den Mitteln dieser Theorie allein beweisbar ist, den sog. 2. Gödelschen Unvollständigkeitssatz.

Mit diesen Unvollständigkeitssätzen zeigte Gödel wesentliche Grenzen für das von Hilbert verfolgte Programm eines mit finiten Mitteln zu führenden

Nachweises der formalen Widerspruchsfreiheit der zentralen mathematischen Theorien bzw. sogar der gesamten Mathematik auf.

Ausgehend von den üblichen mengentheoretischen Axiomen bewies Gödel 1938, dass weder das Auswahlaxiom noch die Kontinuumhypothese widerlegt werden können. Dazu konstruierte er mit der Gesamtheit der „konstruktiblen" Mengen ein Modell der Mengentheorie, in dem sowohl Auswahlaxiom als auch Kontinuumhypothese erfüllt sind, vgl. [Gottwald 1990, S. 173], [Wang Hao 1978], [Franzén, 2005].

Selbst die schwierigen Probleme, die mit den Sätzen von Gödel zusammenhängen, haben eine literarische Würdigung erfahren und zwar durch Hans Magnus Enzensberger. Im Jahre 1997 war das für Kinder bestimmte und hübsch illustrierte Buch *Der Zahlenteufel* erschienen.



Abb. 11.6.7 *Der Zahlenteufel* von Hans Magnus Enzensberger

Bezüglich der Würdigung von Gödel durch Enzensberger schreibt K. Radbruch [Radbruch 1997, S. 43f.]:

„Aus den fünfziger Jahren unseres Jahrhunderts stammt Enzensbergers ***Hommage à Gödel****. Hier wird die im Gödelschen Unvollständigkeitssatz enthaltene Selbstbezüglichkeit gewisser formaler Systeme thematisiert, welche nicht nur das Hilbertsche Programm als undurchführbar aufzeigte, sondern zugleich eine neue qualitative Grenze intellektueller Bemühung überhaupt sichtbar werden lies. Nicht unerheblich ist der Unterschied in der Form zwischen den Gedichten Chamissos und Enzensbergers. Chamisso fühlt sich noch Reim und Versmaß verpflichtet. In Enzensbergers Gödelgedicht spielen Raum und Metrik überhaupt keine Rolle mehr. Die damit gewonnene sprachliche Freiheit wird unter anderem in der Weise genutzt, daß Passagen mit Lehrbuchcharakter in das Gedicht integriert sind.“*

„Hommage à Gödel

Münchhausens Theorem, Pferd, Sumpf und Schopf,
ist bezaubernd, aber vergiß nicht:
Münchhausen war ein Lügner.

Gödels Theorem wirkt auf den ersten Blick
etwas unscheinbar, doch bedenk:
Gödel hat recht.

‚In jedem genügend reichhaltigen System
lassen sich Sätze formulieren,
die innerhalb des Systems
weder beweis- noch widerlegbar sind,
es sei denn das System
wäre selber inkonsistent.‘

Du kannst deine eigene Sprache
in deiner eigenen Sprache beschreiben:
aber nicht ganz.
Und kannst dein eignes Gehirn
mit deinem eignen Gehirn erforschen:
aber nicht ganz.
Usw.

Um sich zu rechtfertigen
muß jedes denkbare System
sich transzendieren,
d. h. zerstören.

‚Genügend reichhaltig‘ oder nicht:

Widerspruchsfreiheit
ist eine Mangelerscheinung
oder ein Widerspruch.

(Gewißheit = Inkonsistenz.)

Jeder denkbare Reiter,
also auch Münchhausen,
also auch du bist ein Subsystem
eines genügend reichhaltigen Sumpfes.

Und ein Subsystem dieses Subsystems
Ist der eigene Schopf,
dieses Hebezeug
für Reformisten und Lügner.

In jedem genügend reichhaltigen System,
also auch in diesem Sumpf hier,
lassen sich Sätze formulieren,
die innerhalb des Systems
weder beweis- noch widerlegbar sind.

Diese Sätze nimm in die Hand
und zieh.“

(Zitiert nach [Radbruch 1997, S. 43f.])

Die Gewaltherrschaft und die Expansionspolitik der Nationalsozialisten unterbrachen die Entwicklung der genannten mathematischen Schulen durch eine systematische Politik der Ausrottung der polnischen Intelligenz. Viele der an der Grundlagenforschung führend beteiligten Mathematiker und Logiker wurden auf Grund ihrer jüdischen Abstammung oder ihrer Zugehörigkeit zur polnischen Nation ermordet. Wer Latein konnte, war gefährdet. Selbst die Teleskope wurden nach Deutschland verschleppt.

Tarski und Gödel konnten noch rechtzeitig durch Emigration nach den USA entkommen. Gödel, in der Nähe von Brünn (jetzt: Brno) geboren, hatte in Wien studiert, promoviert und habilitiert; nach der Annexion Österreichs durch Deutschland emigrierte er ebenfalls in die USA.

Zurück zu Hilbert: Ungebrochen blieb Hilberts Vertrauen in die Kraft menschlichen Denkens und menschlicher Erkenntnisfähigkeit. Jenem von Emil du Bois-Reymond, einem einflussreichen deutschen Philosophen, am Ende des 19. Jahrhunderts formulierten erkenntnistheoretischen Pessimismus, den dieser in die Formel *„Ignoramus. Ignorabimus“* (Wir wissen nicht. Wir werden nicht wissen) gekleidet hatte, setzte Hilbert im Jahre 1900 auf dem Pariser Kongress seine Überzeugung entgegen: *„Da ist das Problem, suche die Lösung. Du kannst sie durch reines Denken finden; denn in der Mathematik gibt es kein Ignorabimus.“* [Hilbert 1971, S. 34]

Und als nach der Entdeckung der Antinomien in der Mengenlehre einige Anhänger des Intuitionismus die Mengenlehre verwarfen und logische Schwierigkeiten innerhalb der Mengenlehre übermäßig hochspielten, trat ihnen Hilbert mit dem Hinweis auf die Nützlichkeit der mengentheoretischen Denkweise und der auf ihr beruhenden modernen Mathematik entgegen:

> *„Fruchtbaren Begriffsbildungen und Schlußweisen wollen wir, wo immer nur die geringste Aussicht sich bietet, sorgfältig nachspüren und sie pflegen, stützen und gebrauchsfähig machen. Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können.“*
> [Hilbert 1926, S. 170]

Noch einmal, schon gegen Ende seines aktiven Forscherlebens, hat Hilbert sein erkenntnistheoretisches Credo in eindrucksvoller Weise zum Ausdruck gebracht. Man geht wohl nicht fehl in der Annahme, dass diese seine Demonstration sogar als eine Art Vermächtnis an die nachfolgenden Generationen von Wissenschaftlern gedacht war: Aus Anlass seiner Emeritierung hielt Hilbert im Jahre 1930 einen Vortrag zu dem anspruchsvollen Thema „Naturerkennen und Logik“. Sein Vortrag begann mit den Worten

> *„Die Erkenntnis von Natur und Leben ist unsere vornehmste Aufgabe. Alles menschliche Streben und Wollen mündet dahin, und immer steigender Erfolg ist uns dabei zuteil geworden. Wir haben in den letzten Jahrzehnten über die Natur reichere und tiefere Erkenntnis gewonnen als früher in den so vielen Jahrhunderten.“*
> [Hilbert 1935, S. 378]

Am Ende seiner auch über Rundfunk verbreiteten Rede ging Hilbert noch einmal auf das „törichte Ignorabimus“ ein. Die Schlussworte dieser Rede wurden später auf seinem Grabstein in Göttingen angebracht. Sie lauten:

„Wir müssen wissen.
Wir werden wissen.“

Am 14. Februar 1943 starb Hilbert in Göttingen. In seinem letzten Lebensjahrzehnt war es still um ihn geworden, seit die Göttinger Schule zerschlagen worden war. Ein großes Leben war still zu Ende gegangen.

Nur ein knappes Dutzend Personen geleitete David Hilbert zur letzten Ruhe, darunter seine fast erblindete Frau Käthe. Von allen seinen Freunden aus glücklichen Tagen hatte nur der Physiker Arnold Sommerfeld aus München kommen können. Am Sarge stehend resümierte er Hilberts Lebenswerk, das ihn unstreitig als bedeutendsten Mathematiker zu Beginn des 20. Jahrhunderts auswies.

In einem Nachruf von Hermann Weyl in den USA auf Hilbert heißt es 1944, mitten im Kriege:



Abb. 11.6.8 Hilberts Grab in Göttingen mit den berühmten Schlussworten seines Vortrages anlässlich seiner Emeritierung 1930 [Foto Wesemüller-Kock]

"A great master of mathematics passed away when David Hilbert died in Göttingen on February the 14th, 1943, at the age of eightyone. In retrospect it seems to us that the era of mathematics upon which he impressed the seal of his spirit and which is now sinking below the horizon achieved a more perfect balance than prevailed before and after, between the mastering of single concrete problems and the formation of general abstract concepts. Hilbert's own work contributed not a little to bringing about this happy equilibrium, and the direction in which we have since proceeded can in many instances be traced back to his impulses. No mathematician of equal stature has risen from our generation. America owes him much.
(...)
Hilbert was singularly free from national and racial prejudices; in all public questions, be they political, social or spiritual, he stood forever on the side of freedom, frequently in isolated opposition against the compact majority of his environment."
[Weyl 1944, S. 612]

Hermann Minkowski

Von Hermann Minkowski und von der engen Freundschaft zwischen ihm und Hilbert war schon die Rede. Unglücklicherweise starb Minkowski schon 1909 sehr jung im Alter von 44 Jahren an einem Blinddarmdurchbruch, der damals noch nicht behandelbar war. Im Nachruf heißt es bei Hilbert:

> *„Seit meiner Studienzeit war mir Minkowski der beste und zuverlässigste Freund, der an mir hing mit der ganzen ihm eigenen Tiefe und Treue. Unsere Wissenschaft, die uns das liebste war, hatte uns zusammengeführt; sie erschien uns wie ein blühender Garten... Gern suchten wir dort auch verborgene Pfade auf und entdeckten manche neue, uns schön dünkende Aussicht, und wenn der eine dem andern sie zeigte und wir sie gemeinsam bewunderten, war unsere Freude vollkommen... Er war mir ein Geschenk des Himmels, wie es nur selten jemand zuteil wird, und ich muss dankbar sein, dass ich es so lange besaß... Jäh hat ihn der Tod von unserer Seite gerissen. Was uns aber der Tod nicht nehmen kann, das ist sein edles Bild in unserem Herzen und das Bewusstsein, dass sein Geist in uns fortwirkt.“*
> (Zitiert bei [Roquette 2002, S. 5f.])

Minkowski hatte in Berlin studiert und promovierte 1885 in Königsberg. Er lehrte in Bonn, Königsberg und in Zürich, wo er Lehrer u. a. von Einstein war. Im Jahre 1902 übernahm er einen Lehrstuhl in Göttingen und bildete sich bei Hilbert weiter. Dort war Max Born einer der Mitarbeiter von Minkowski.

Minkowski hat Bahnbrechendes in Zahlentheorie und Geometrie geleistet. In den Jahren 1896/1910 erschien seine *Geometrie der Zahlen*, in einem ge-

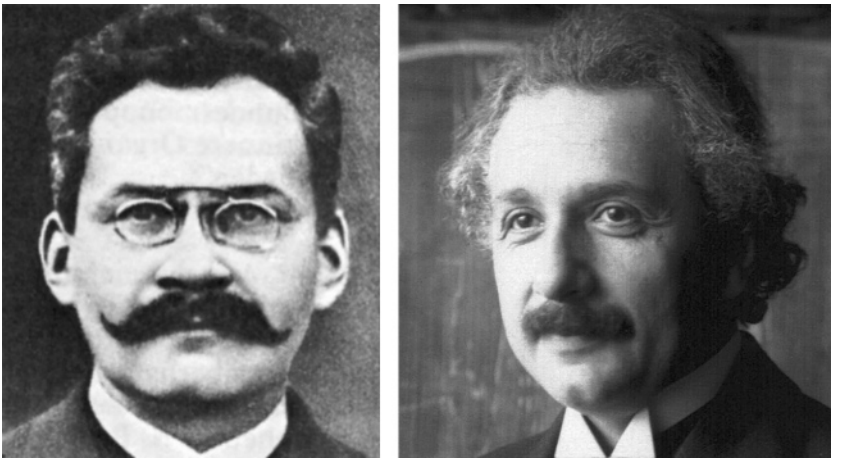


Abb. 11.6.9 Hermann Minkowski, Albert Einstein

wissen Sinne ein Gegenstück zum *„Zahlbericht“* von Hilbert. Weitere Arbeiten von Minkowsi betreffen die Hydrodynamik und die Theorie der Kapillaren.

In der Anzeige zur *Geometrie der Zahlen* heißt es programmatisch: *„Geometrie der Zahlen habe ich diese Schrift betitelt, weil ich zu den Methoden, die in ihr arithmetische Sätze liefern, durch räumliche Anschauung geführt bin.“* [Minkowski 1910, S. V]

Minkowskis letzte wissenschaftliche Großtat, kurz vor seinem unerwarteten Tode (12.1.1909), war sein Vortrag am 21. September 1908 auf der 80. Naturforscher-Versammlung in Heidelberg zum Thema „Raum und Zeit“. Wenige Jahre zuvor, 1905, hatte Einstein seine Spezielle Relativitätstheorie veröffentlicht. Nun gelang es Minkowski, die aufregenden Ergebnisse der Relativitätstheorie wie Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, Zeitdilatation, Längenkontraktion, Lichtgeschwindigkeit, Grenzgeschwindigkeit des Lichtes in einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit – der Minkowski-Welt – geometrisch zu veranschaulichen, also die Mathematik der von H. A. Lorentz und A. Einstein entwickelten Elektrodynamik bewegter Körper darzulegen. Von hier führte ein Weg zu Einsteins allgemeiner Relativitätstheorie.

Edmund Landau

Auch Edmund Landau (1877–1938) gehört zu den herausragenden Mathematikern in Göttingen; dort wirkte er von 1909 bis 1933. Nach der Machtergreifung der Nationalsozialisten wurde er wegen seiner jüdischen Herkunft durch Boykott der Studenten vertrieben; 1934 wurde er vorzeitig in den Ruhestand versetzt. Er starb 1938 in Berlin.

Landau stammte aus einer sehr wohlhabenden Familie; der Vater war ein hochgeschätzter Gynäkologe. Man wohnte in einer der vornehmsten Gegenden Berlins, am Pariser Platz – bis zur Wohnung des großartigen Malers Max Liebermann waren es nur wenige Schritte.

Landau studierte in Berlin und München; promovierte 1899 in Berlin bei Georg Ferdinand Frobenius und habilitierte sich ebenfalls in Berlin. Er ging 1909 als Nachfolger des frühzeitig verstorbenen Hermann Minkowski nach Göttingen. Landau hatte Marianne Ehrlich geheiratet, die Tochter des berühmten Nobelpreisträgers Paul Ehrlich (1854–1915), Begründer der Chemotherapie zur Behandlung von Infektionskrankheiten mit chemischen Mitteln (z. B. Salvarsan). Sie ließen sich das „prachtvollste“ (so Landau) Haus in Göttingen bauen.

Die wissenschaftlichen Verdienste von Landau liegen vor allem auf dem Gebiet der Zahlentheorie, insbesondere darin, dass er die analytische Zahlentheorie als selbständige Disziplin herausstellen konnte. Seine Beiträge betrafen speziell die Primzahlverteilung. So gab er 1903 einen neuen Beweis für einen sogar schon von Leonhard Euler und auch von Gauß vermuteten Satz, der 1896 von Hadamard und de la Vallée-Poussin (1866–1962) bewiesen worden war. Auch Norbert Wiener gelang auf anderen Wegen ein Beweis des zentralen Primzahlsatzes.

Landau beteiligte sich an dem in aller Welt bearbeiteten Thema, an den Versuchen zum Beweis der Goldbachschen Vermutung, wonach sich jede gerade Zahl größer als 2 als Summe zweier Primzahlen darstellen läßt. Weitere Beiträge betrafen das Waringsche Problem, Gitterpunktprobleme und Approximationstheorie.

Mit Godefrey Harold Hardy in Cambridge und Harald August Bohr in Kopenhagen verbanden ihn enge persönliche Freundschaft und ähnliche wissenschaftliche Interessen.

Von großer Wirkung waren seine Buchpublikationen, die teilweise mehrere Auflagen erreichten. Zunächst erschien 1909 in zwei Bänden das *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, dann 1916 *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie*, 1918 *Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und Ideale*, 1927 in drei Bänden *Vorlesungen über Zahlentheorie*, 1937 *Über einige Fortschritte der additiven Zahlentheorie*. Letztere wurde in Cambridge publiziert.

Seine Publikationen seit 1918 zeichnen sich durch präzise, sehr klare Darstellungen aus, freilich in dem berühmt-berüchtigten „Landau-Stil“: Voraussetzung, Satz, Beweis. Voraussetzung, Satz, Beweis, usw. Norbert Wiener, der in Göttingen bei Landau Vorlesungen gehört hatte, sagte von seinen Lehrbüchern etwas respektlos, dass sie Versandhauskatalogen ähnelten (vgl. [Wiener 1965, S. 26]).

Landau besaß einen etwas hintergründigen Humor, der sogar in seinen Publikationen zutage trat. Sein Lehrbuch *Grundlagen der Analysis* von 1929 besitzt zwei Vorworte, eines für den Lernenden, ein zweites für den Kenner. Im ersten heißt es: *„Bitte vergiß alles, was Du auf der Schule gelernt hast; denn Du hast es nicht gelernt.“* [Landau 2004, S. V]

Im zweiten Vorwort heißt es mit einem Schuss Selbstironie: *„Mein Buch ist unter Verzicht auf Nebenbemerkungen in dem unbarmherzigen Telegrammstil (‚Axiom‘, ‚Definition‘, ‚Satz‘, ‚Beweis‘, nur gelegentlich ‚Vorbemerkung‘; selten Worte, die zu keiner dieser fünf Rubriken gehören) geschrieben, der bei einer so leichten Materie am Platz ist.“* [Landau 2004, S. XI]

Der Bericht seines Zeitgenossen Abraham Fraenkel gibt nähere Auskünfte über die Vertreibung Landaus auf Initiative von Ludwig Bieberbach, eines bekannten Mathematikers, der aber als Anhänger des Nationalsozialismus mit seiner sog. „Deutschen Mathematik“ einen unheilvollen Einfluss ausgeübt hat. Fraenkel berichtet unter anderem:

> *„Meine letzte Begegnung mit Landau fand in der Schweiz kurz nach der nationalsozialistischen Machtergreifung statt. Er war damals, im Gegensatz zu Courant, nicht verängstigt, sondern von einem unbegreiflichen Optimismus beseelt. Doch der Schlag fiel bald, bei ihm sogar noch rascher als bei anderen jüdischen Professoren. Die Göttinger Studenten demonstrierten – offenbar von höherer Stelle aufgehetzt – gegen ihn und forderten seine Entlassung. Der Hintergrund dieser*

‚mannhaften Ablehnung' Landaus wird u. a. durch einen Vortrag erhellt, den der Berliner Ordinarius Ludwig Bieberbach im Frühjahr 1934 auf der Jahrestagung des ‚Vereins zur Förderung des Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Unterrichts' in Berlin hielt und über den in der Presse, zum Beispiel in der ‚Deutschen Zukunft' vom 8. April 1934 und in ‚Forschungen und Fortschritte' vom 20. Juni 1934 ausführlich berichtet wurde. Hier einige Zitate aus diesem Vortrag: ‚Die Haltung der Göttinger Studentenschaft gegenüber Edmund Landau ist wohlbegründet und berechtigt, denn der Fall Landau zeigt deutlich, daß es eine deutsche und eine jüdische Mathematik gibt, zwei Welten, durch eine nicht zu überbrückende Kluft getrennt. Die Auswahl der Probleme wie der Stil der Behandlung ist charakteristisch für den Denker und deshalb Ausfluß seiner Rassenzugehörigkeit (...) Ein Volk, das zu sich gekommen ist, kann solchen Lehrer nicht ertragen, muß fremdes Denken ablehnen. (...)
Ein typisches Beispiel ist dies dafür, wie rassefremder Einfluß, wie rassefremde Verführung dem Deutschen die Quelle seiner eigenen Kraft versperrt (...) Es gibt kein selbständiges mathematisches Reich unabhängig von Anschauung und Leben; der Streit um die Grundlagen, der jetzt tobt, ist in Wirklichkeit ein Rassenstreit.'
Die ‚Deutsche Zukunft' zieht die Konsequenz: Für die praktische Kulturpolitik ergibt sich, daß die Mathematik vom Fluch des sterilen Intellektualismus befreit ist; seine Last fällt auf jene volks- und rassenfremden Denker, die es in Zukunft nicht mehr geben wird und deren der Vergangenheit angehörige Vertreter man nicht mehr als deutsche Forscher betrachten darf. Die deutsche Mathematik wurzelt in Blut und Boden (...)" [Fraenkel 1967, S. 165f.]



Abb. 11.6.10 Edmund Landau, Richard Courant

In diesem Zusammenhang sei verwiesen auf [Schappacher 1991]. Dort wird die Situation in Göttingen zu Landaus Zeit analysiert, eine, wie der Autor schreibt, Verquickung von persönlicher Abneigung, durchgehend antisemitischen Strömungen und der nationalsozialistischen Rassengesetzgebung. Dies betraf neben Landau auch Felix Bernstein, Otto Blumenthal, Emmy Noether und sogar Richard Courant; sie galten als „liberal", Noether sogar als Kommunistin, weil sie 1928/29 Vorlesungen in Moskau gehalten hatte.

Erst nach dem Kriege konnte Landau auch öffentlich die verdiente Würdigung erfahren. Der Nachruf von Konrad Knopp (1882–1957), der einige Zeit Vorlesungen bei Landau gehört hatte, schließt mit den Worten:

> *„Eine mathematische ‚Entelechie mächtiger Art' ist mit Landau dahingegangen. Aber sie lebt fort in dem Gedächtnis seiner zahlreichen Schüler im weiteren und engeren Sinne. Eine große Zahl von ihnen hat bei ihm den Doktorgrad erworben und ein großer Teil von diesen hat später akademische Lehrstühle eingenommen. Sie lebt weiter in dem Gedächtnis der zahlreichen Akademien und Gesellschaften, die ihn zu ihrem Mitglied erwählt haben. Doch das dauernste und größte Denkmal bleiben seine Werke."*
> [Knopp 1951, S. 62]

Richard Courant: Göttingen und New York

Richard Courant stammt aus einer bescheiden lebenden jüdischen Kaufmannsfamilie in Lublinitz (heute: Lubliniec) im damaligen Oberschlesien. Als die Familie nach Breslau und später nach Berlin zog, weil sich der Vater bessere Geschäfte erhoffte, bezog Richard das Gymnasium in Breslau und blieb auch dort. Seinen Lebensunterhalt verdiente sich Richard, wie auch noch lange Jahre, mit Nachhilfestunden. Nach einem Zusatzexamen nahm er das Studium zunächst der Physik und dann das der Mathematik an der Breslauer Universität auf. Otto Toeplitz (1881–1940) war einer seiner Kommilitonen. Courant ging nach Zürich und führte sein Studium seit dem 1. November 1907 in Göttingen weiter.

Courant kam schon früh in Berührung mit Hilbert. Bereits 1910 lieferte er mit Paul Koebe (1882–1945) einen Beweis für die zuerst von Hilbert 1909 nachgewiesene Existenz einer konformen Abbildung jedes n-fach zusammenhängenden Gebietes auf ein Schlitzgebiet. Die Forschungstätigkeit des jungen Courant wurde durch den ersten Weltkrieg unterbrochen.

Courant war als Frontsoldat auf deutscher Seite verwundet worden und konnte danach ein Forschungsprojekt weiterführen, und zwar eine weit reichende Telegraphenverbindung mit der Erde als Leiter.

Während der November-Revolution 1918 sympathisierte Courant – freilich in politisch vager Form – mit der sozialdemokratischen Partei und hielt öffentliche Reden in Göttingen. Der Brief an Hilbert vom 12. Oktober 1918



Abb. 11.6.11 Courant als Frontsoldat, 1915. [Reid, C. 1976]

schließt mit den Worten: In jedem Fall haben wir zum ersten Mal (bis hierhin im Zitat englisch) *„wirklich eine freie Bahn. Dass diese Bahn beschritten wird und dass die Hoffnungen, die jetzt überall aufkeimen, nicht zerrinnen, das ist die Aufgabe von uns allen, die bisher nur kritisiert haben und nun in erster Reihe stehen müssen, wenn es den Neubau Deutschlands gilt. Ich freue mich schon auf den Augenblick, wo ich des „Königs Rock“ ausziehen kann, um nicht in das Deutschland von Morsbach und Schröder zurückzukehren, sondern in dem von Hilbert und Einstein mitzuarbeiten. Einstweilen viele sehr herzliche Grüsse auch an Ihre Frau Von Ihrem R. Courant“*
(Zitiert aus [McLarty 2001, S. 62])

Im gleichen Brief trug Courant Hilbert einen Plan vor, gemeinsam mit ihm ein Buch beim Springer-Verlag über Differential- und Integralgleichungen zu schreiben. So entstanden die „Grundlehren“ und die berühmten *Methoden der mathematischen Physik*, der „Hilbert-Courant“.

Nach Kriegsende, Dezember 1918, kehrte Courant nach Göttingen zurück, begann 1919 als Privatdozent mit Vorlesungstätigkeit und wurde schließlich 1920 Professor als Nachfolger von Erich Hecke (1887–1947). Inzwischen war Courant eine zweite Ehe eingegangen mit Nina Runge, der Tochter des hoch angesehenen Mathematikers Carl Runge (1856–1927), der sich, insbesondere mit Felix Klein, für die Förderung der angewandten Mathematik einsetzte.

Kurz nach Beendigung des Krieges publizierte Courant Aussagen und Sätze zur Theorie der Eigenwerte linearer Operatoren, darunter das sog. Minimax-Prinzip zur Charakterisierung des n-ten Eigenwertes.

1924 erschien der erste Band des berühmten *„Courant/Hilbert“: Methoden der Mathematischen Physik*. Courant war zu dieser Zeit Assistent von Hilbert; die Textfassung stammt im Wesentlichen von Courant. Im Jahr 1927 brachte er seine *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung* heraus, ein zweibändiges Werk, das weite Verbreitung fand. Im Jahre 1928 folgte seine Theorie der Differenzenverfahren und deren Anwendung auf hyperbolische und parabolische Differentialgleichungen.

Courant verfügte über ein außerordentliches Organisationstalent. Er entwarf ein modernes Mathematisches Institut für Göttingen; das Gebäude war allerdings erst 1927 fertig gestellt.

Als Kriegsteilnehmer hatte Courant und mancher seiner Kollegen – Weyl war Direktor in Göttingen – gehofft, die Nationalsozialisten würden ihn nach deren Machtübernahme verschonen. Jedoch wurde er am 5. Mai 1933 entlassen, emigrierte zunächst nach England (Cambridge), dann nach den USA und musste dort einige schwierige Anfangsjahre überstehen. Seit 1936 konnte er seine organisatorischen und wissenschaftlichen Fähigkeiten auf breiter Basis entfalten, auch in engem Kontakt mit Studenten.

Sozusagen aus dem Nichts schuf der 1936 zum Professor an die New Yorker Universität Berufene in New York nach Göttinger Vorbild eine herausragende Forschungs- und Lehrstätte, das seitdem (1964 nach ihm benannt) als *„Courant Institute for Mathematical Sciences“* eines der angesehendsten Institute für Mathematik ist.



Abb. 11.6.12 Courant Institute of Mathematics in New York (Auschnitt aus der Homepage)

11.7 Entwicklung der Mathematik in ausgewählten Regionen

11.7.1 Einiges aus der Entwicklung in Frankreich

Jules Henri Poincaré

Schon zu Lebzeiten galt Poincaré (1854–1912) als einer der herausragenden Gelehrten des ausgehenden 19. und des beginnenden 20. Jahrhunderts. Er war äußerst vielseitig und produktiv als Mathematiker, Naturforscher und Philosoph. Von ihm stammen 30 Bücher und ungefähr 500 Einzelbeiträge [Dieudonné 1975, S. 51ff.].

Jean Dieudonné, ein Mitglied der Gruppe „Bourbaki“, setzt Poincaré in Beziehung zu Gauß mit den Worten:

> *“The development of mathematics in the nineteenth century began under the shadow of a giant, Carl Friedrich Gauss; it ended with the domination by a genius of similar magnitude, Henri Poincaré. Both were universal mathematicians in the supreme sence, and both made important contributions to astronomy and mathematical physics.”* [Dieudonné 1975, S. 51]

Poincaré stammte aus Nancy (Lothringen), aus einer bürgerlichen Familie; der Vater war Arzt und Professor der Medizin an der Universität Nancy. Ein Vetter von Henri Poincaré, Raymond Poincaré (1860–1934), war 9. Präsident der französischen Republik und ein erbitterter Gegner Deutschlands nach dem Ersten Weltkrieg.

Poincarés mathematische Begabung war frühzeitig zutage getreten. Sein Lehrer auf dem Lyzeum in Nancy soll ihn als *„monstre de mathématiques“* bezeichnet haben.

Als Jugendlicher war Poincaré Zeuge und Betroffener des deutsch-französischen Krieges 1870/71, der mit der Annexion Elsaß-Lothringens durch Deutschland endete. Diese Ereignisse sind vermutlich der Grund für seine humanistische Haltung. Vor dem Ausbruch des Ersten Weltkrieges trat er einer „Liga für moralische Erziehung“ bei und hat kurz vor seinem Tode, 1912, in einem Vortrag geäußert: *„... der Haß von Volk zu Volk ist ein Frevel, (...) Kommen wir also einander näher, lernen wir uns kennen und damit achten, und arbeiten wir an der Verwirklichung des gemeinsamen Ideals!“* (Zitiert in [Holzapfel 1989, S. 498])

Poincaré verfehlte die Aufnahmeprüfung in die École Normale (eine Lehrerbildungsanstalt), weil er ungehörig kurz antwortete. Aber er bestand die Prüfung für die Aufnahme in die École Polytechnique mit Glanz. Dort erhielt er starke Anregungen von Charles Hermite. Nach Absolvierung der École Polytechnique (1875), wiederum mit glänzenden Ergebnissen außer in Experimentalphysik, studierte er an der École des Mines (Bergbauschule), an der die besten Absolventen der polytechnischen Schule weiterstudierten. 1879 war er



Abb. 11.7.1 Poincaré in verschiedenen Lebensaltern (Frankreich 1952)

kurzzeitig als Bergbauingenieur tätig, promovierte aber schon 1879 bei Jean Gaston Darboux in Paris. Nach Lehrtätigkeit in Caen und ab 1881 als a.o. Professor an der Sorbonne in Paris erhielt er dort 1885 einen Lehrstuhl für mathematische Physik und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Es folgte 1896 ein Lehrstuhl für mathematische Astronomie und Himmelsmechanik an der Fakultät der Wissenschaften der Pariser Universität. Schon vorher, 1887, war er Mitglied der Pariser Akademie der Wissenschaften geworden und wurde 1908 sogar Mitglied und 1912 Direktor der Academie française – die höchste französische Ehrung für Gelehrte. Im Jahre 1900 amtierte Poincaré als Präsident des 2. Internationalen Mathematikerkongresses in Paris, nahm auch am 4. Kongress in Rom teil. Von den zahlreichen Ehrungen, die ihm zuteil wurden, sei herausgehoben, dass er 1910 Ehrendoktor der Berliner Universität wurde. Schon 1909 hatte er Gastvorlesungen in Göttingen gehalten und war dort mit Felix Klein und David Hilbert zusammengetroffen. Poincaré starb viel zu früh, unerwartet, an den Folgen einer Operation (Embolie) am 17. Juli 1912 in Paris. Um Poincaré zu ehren, wurde in Paris 1928 das „Institute Henri Poincaré“ aus den Mitteln der Rockefeller Foundation errichtet. Erster Direktor wurde Émile Borel.

Ähnlich wie später Hilbert ging Poincaré in ziemlich dichter Folge nacheinander von einem Forschungsgebiet zum andern über. Da ist zunächst eine Folge von Abhandlungen zur Funktionentheorie, insbesondere zu den sog. automorphen Funktionen. Das sind Funktionen, die bei linearen Transformationen wieder in sich selbst übergehen, eine sehr umfangreiche Funktionengruppe, die auch in enger Beziehung zur nichteuklidischen Geometrie steht, vgl. [Dieudonné 1975, S. 52ff.]. Felix Klein beschrieb den seit 1881 stattfindenden „Wettkampf“ mit Poincaré beim Studium einiger Typen automorpher Funktionen, den er im Oktober 1882 mit einem körperlichen und psychischen Zusammenbruch bezahlen musste, von dem er sich nach eigener Aussage nicht

wieder vollständig erholen konnte. Poincaré veröffentlichte seine zusammenfassenden Ergebnisse in der Abhandlung *Sur les fonctions uniformes* (Über die uniformen Funktionen) und gilt auch als Begründer einer Theorie komplexer Funktionen mehrerer Variabler. Poincarés Dissertation von 1879 über die Integration von partiellen Differentialgleichungen stand am Anfang langanhaltender Beschäftigung mit den Lösungen von Differentialgleichungen bzw. Systemen solcher Gleichungen und ihren Eigenschaften. In vier großen Arbeiten entwickelte er von 1891–1896 eine qualitative globale Theorie, derzufolge es möglich ist, ohne die Differentialgleichung zu lösen, doch Aussagen über Eigenschaften der den Lösungen der Differentialgleichung entsprechenden Kurvenscharen zu gewinnen. Unabhängig von Poincaré hat Alexander Michailowitsch Ljapunow (1857–1918) in St. Petersburg ähnliche Ansätze entwickelt.

Nach dem Experiment von Albert Abraham Michelson (1852–1931) aus dem Jahre 1881, das die Unabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit von der Erdbewegung bewiesen hatte, untersuchte Poincaré in den Jahren 1904 bis 1908 – und etwa zur gleichen Zeit Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928) – die Invarianz bzw. Relativität der Naturgesetze. Poincaré forderte, dass die Gesetze gegenüber den von ihm so bezeichneten Lorentz-Transformationen unabhängig sein müssen, prägte auch den Begriff Lorentz-Gruppe, deren Elemente er als Drehungen in einem vierdimensionalen Raum darstellte. Er wurde mit diesen Arbeiten zu einem der Wegbereiter der speziellen Relativitätstheorie von Albert Einstein, die in der nach Minkowski benannten vierdimensionalen Raum-Zeit-Welt im Jahre 1908 ihre endgültige mathematische Gestalt erhielt.

Der italienische Mathematiker Eugenio Beltrami (1835–1900) hatte 1868 erkannt, dass sich die nichteuklidische hyperbolische Geometrie auf der Pseudosphäre realisieren lässt. Felix Klein gab 1870 ein ebenes Modell einer nichteuklidischen Geometrie an. Und Poincaré lieferte seinerseits 1881 bzw. 1904 ein Modell der nichteuklidischen hyperbolischen Geometrie.

Poincaré bereicherte auch die Wahrscheinlichkeitsrechnung, insbesondere mit dem Versuch einer Axiomatisierung.

Charakteristisch für Poincaré waren seine eng mit Untersuchungen zur Analysis zusammenhängenden Studien zur mathematischen Physik. Von 1890 an erschienen seine Bände *Cours de physique mathématique* [Laitko 1992]. Einige Beispiele: Aus seinen Bemerkungen über einen eventuellen Zusammenhang zwischen Röntgenstrahlen und Phosphoreszenz entnahm Antoine-Henry Becquerel (1852–1908) Anregungen zu den Experimenten zur Radioaktivität.

Es folgten Untersuchungen zu den elektromagnetischen Schwingungen nach den Ergebnissen von Heinrich Hertz (1857–1894), bis hin zu technischen Anwendungen. Im Jahre 1899 erschien *La théorie de Maxwell et les oscillations hertziennes* (Die Theorie von Maxwell und die Hertzschen Schwingungen). Da die Maxwellsche Theorie des magnetischen Feldes sich nicht mechanisch interpretieren lässt, wurde Poincaré auf die Frage geführt, welche Geometrie im Sinne der physikalischen Realität die „richtige“ ist. Im Jahre

1889 wurde Poincaré eine außerordentliche Ehrung zuteil; es gab damals noch keine Nobelpreise. Der schwedische König Oskar II. hatte 1885 einen Wettbewerb zur Lösung bzw. Behandlung des Dreikörperproblems ausgeschrieben; Poincaré gewann ihn. Dieses Problem war seit Newton gestellt. Es wurde klar, dass es keine geschlossene Lösung geben kann, sondern nur Näherungslösungen. Poincaré erweiterte das mathematische Instrumentarium und schuf eine allgemeine Theorie periodischer Lösungen. Aus diesen Studien gingen zwei herausragende Werke hervor, die dreibändige *Les méthodes nouvelles de la méchanique céleste* (Neue Methoden der Himmelmechanik) (1892–1899) und die *Leçons de la méchanique céleste* (Vorlesungen über Himmelsmechanik) (1905–1910).

Im engen Zusammenhang mit seinen vielseitigen mathematisch-naturwissenschaftlichen Forschungen hat Poincaré über deren philosophische und methodologische Grundlagen reflektiert und trat mit entsprechenden Büchern hervor, die eine beachtliche Wirkung ausgelöst haben. Im Jahre 1902 erschien *La Science et l'Hypothèse* (Wissenschaft und Hypothese), 1905 *La Valeur de la Science* (Der Wert der Wissenschaft) und 1908 schließlich *Science et Méthode* (Wissenschaft und Methode). Diese interessanten und noch heute lesenswerten Bücher, insbesondere Wissenschaft und Hypothese, geben einen Einblick in Poincarés Denkweise. Er betont u. a., dass Definitionen auf Konventionen beruhen, nur die Rückkopplung mit Experimenten kann entscheiden. Für sich gesehen, mathematisch, sind z. B. weder die euklidische noch die nichteuklidische Geometrie „richtig". Auch konnte er Cantors Mengenlehre nicht folgen. Andererseits sind Anklänge an den Formalismus nach Art von Hilberts Ansatz erkennbar. Es folgen Beispiele aus Wissenschaft und Hypothese in der Zusammenfassung von F. Lindemann:

> *„Die geometrischen Axiome sind weder syntetische* (sic!) *Urteile a priori noch experimentelle Tatsachen; es sind auf Übereinkommen beruhende Festsetzungen bez. verkleidete Definitionen. Die Geometrie ist keine Erfahrungswissenschaft; aber die Erfahrung leitet uns bei Aufstellung der Axiome; sie läßt uns nicht erkennen, welche Geometrie die richtige ist, wohl aber, welche die bequemste ist. Es ist ebenso unvernünftig zu untersuchen, ob die fundamentalen Sätze der Geometrie richtig oder falsch sind, wie es unvernünftig wäre zu fragen, ob das metrische System richtig oder falsch ist.* (. . .)
> *Die mathematische Wissenschaft hat nicht den Zweck, uns über die wahre Natur der Dinge aufzuklären. Ihr einziges Ziel ist, die physikalischen Gesetze miteinander zu verbinden, welche die Erfahrung uns zwar erkennen ließ, die wir aber ohne mathematische Hilfe nicht aussprechen können.* (. . .)
> *Was die Wissenschaft erreichen kann, sind nicht die Dinge selbst, sondern es sind einzig die Beziehungen zwischen den Dingen; außerhalb dieser Beziehungen gibt es keine erkennbare Wirklichkeit."*
> [Poincaré 1914, S. IVf.]

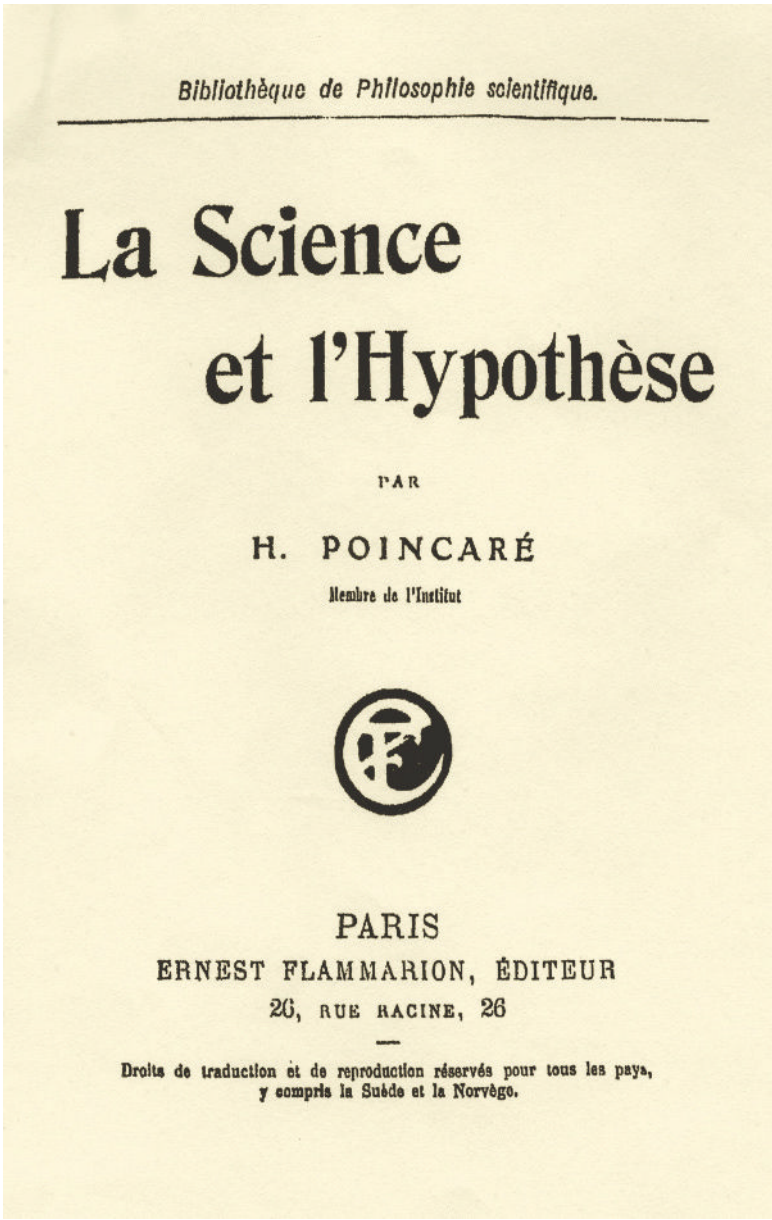


Abb. 11.7.2 Titelblatt von *La Science et l'Hypothèse* von H. Poincaré

Jacques Salomon Hadamard

Auch Jaques Salomon Hadamard (1865–1963) gehört in die Spitzengruppe der französischen Mathematiker vom Ende des 19. bis zur Mitte des 20. Jahrhunderts. Nur ein Jahr jünger als Poincaré hat er diesen um reichlich ein halbes Jahrhundert überlebt: Hadamard wurde fast 100 Jahre alt. Doch erklärt sich sein großer Einfluss auf die Entwicklung der Mathematik nicht nur aus seinem erfüllten, langen Leben, sondern vorwiegend durch seine weitausgreifenden Untersuchungen zur Analysis und zur Primzahltheorie. Dazu kam seine Lehrtätigkeit an dem von ihm geleiteten, berühmt gewordenen Seminar am Collège de France.

Als Sohn eines Gymnasiallehrers in Versailles durchlief Hadamard das dortige Lycée Louis-le-Grand und von 1884 bis 1888 die École Normale Superieure in Paris. Merkwürdigerweise war Hadamard in seinen ersten Schuljahren ziemlich schwach in Arithmetik, dagegen exzellent in Griechisch und Latein. Erst in der fünften Klasse fand er einen guten Mathematiklehrer, der seine mathematischen Fähigkeiten weckte und förderte.

1892 promovierte er an der Pariser Universität, war dann Lehrer am Lyzeum Buffon, Professor an der Universität Bordeaux, von 1897 bis 1909 Professor an der Sorbonne, bis 1937 Professor am Collège de France und zugleich von 1912 bis 1937 Professor der Analysis an der traditionsreichen École Polytechnique.

Während der berüchtigten Dreyfus-Affäre, bei der Émile Zola mit seinem berühmten Aufruf von 1898 *„Ich klage an“* auf das Schicksal des zu Unrecht angeklagten jüdischen Offiziers aufmerksam machte, setzte sich Hadamard trotz antisemitischer Grundstimmung im Lande an führender Stelle für die schließliche Rehabilitation von Dreyfus ein.

Neben umfangreichen Auszeichnungen – Mitgliedschaften in vielen wissenschaftlichen Akademien z. B. in der Pariser Akademie als Nachfolger von Poincaré – wurden ihm zahlreiche Ehrendoktorate zuteil, u. a. in Göttingen. Er war Ehrenpräsident des Internationalen Mathematikerkongresses 1950 in Cambridge (Mass.) [Vincon 1987].

Hadamard promovierte 1892 mit dem *Essai sur l'étude des fonctions dominées par leur développement de Taylor* (Abhandlung zum Studium von Funktionen, die durch Taylor-Reihen gegeben sind); dies führte zu wertvollen Anwendungen auf die Riemannsche Zetafunktion. Im Jahre 1896 gelang ihm der Beweis einer schon von Adrien-Marie Legendre (1752–1833) und Carl Friedrich Gauß ausgesprochenen Vermutung über die Primzahlverteilung, wonach die Anzahl $\pi(x)$ der Primzahlen $\leq x$ asymptotisch gleich ist dem Quotienten $x/\log x$. Im Jahre 1901 erschien sein Buch *La série de Taylor et son prolongement analytique* (Die Taylorreihe und ihre analytische Fortsetzung), das für lange Zeit als Standard-Werk auf diesem Gebiet galt.

Später wandte er sich, im Anschluss an Poincaré, der Theorie der Differentialgleichungen zu, unter anderem Anfangs-Randwert-Problemen. Seine *Lectures on Cauchy's Problem in linear Differential Equations* (1922) erziel-



Abb. 11.7.3 Jacques Salomon Hadamard

ten ebenfalls eine lang andauernde Wirkung. Zu Hadamards Studien gehörten auch Themen aus der mathematischen Physik, wie z. B. Wärmeleitungsprobleme sowie Fragestellungen zu den Grundlagen der Mathematik, etwa zum Auswahlaxiom. Ferner machte sich Hadamard verdient um die Schulmathematik und um Darstellungen der Elementarmathematik.

Die politischen Ereignisse griffen brutal in Hadamards Leben und das seiner Familie ein. Als Junge erlebte er in Paris die Belagerung durch deutsche Truppen während des preußisch-französischen Krieges. Im Ersten Weltkrieg fielen zwei seiner drei Söhne, der letzte, der dritte, im Zweiten Weltkrieg. Um der deutschen Besatzung im Zweiten Weltkrieg zu entgehen, flüchtete Hadamard mit seiner Familie zunächst nach Toulon in die anfangs unbesetzte Zone, schließlich nach den USA und England, wo er Forschungen für die Royal Air Force übernahm.

Bereits im September 1929 hatten Hadamard und Einstein brieflich Ansichten ausgetauscht, wie man der schon erkennbaren allgemeinen Kriegsvorbereitung entgegenwirken könne. Einstein bedankte sich für Hadamards Brief vom 16. Sept. 1929 und schrieb an den mit ihm befreundeten Hadamard am 21. Sept. 1929:

> *„... weil ich aus demselben den hohen Ernst sehe, mit dem Sie sich mit diesem für unser Europa so ernsten Problem auseinandersetzen.*(...)
> *Meine erste These ist die: In einem systematisch für den Krieg moralisch und materiell vorbereiteten Europa wird der gewaltlose Völkerbund in der Stunde der nationalen Psychose auch moralisch machtlos sein. Jeder Bürger wird sein Land für das angegriffene erklären, und zwar bona fide.* (...)

Siebentens: Krieg führen heisst Unschuldige töten und sich selbst schuldlos töten lassen. (...)
Für mich geht Menschlichkeit eben über Vaterland, ja über alles. (...)
Herzliche Grüße Ihr A. Einstein.“
[Beiträge aus der Staatsbibliothek Berlin 2005, S. 119ff.]

Nach Kriegsende – wieder in Frankreich – konnte Hadamard sich seinen musikalischen Neigungen zuwenden. In einem von ihm geleiteten Orchester wirkte vorübergehend Albert Einstein mit. Daneben war Hadamard begeisterter Sammler von Farnen und Pilzen. Im biblischen Alter von fast 100 Jahren starb Hadamard 1963.

Félix Édouard Justin Émile Borel

Zu den bedeutendsten französischen Mathematikern vom Ende des 19. bis zur Mitte des 20. Jahrhunderts zählt zweifellos auch Émile Borel (1871–1956). Wie Hadamard besuchte der im südfranzösischen Saint-Affrique geborene Borel das Lycée Louis-le-Grand und studierte an der École Normale Supérieure in Paris. Schon mit 23 Jahren wurde er auf einen Lehrstuhl für Mathematik an der Universität Lille berufen, kehrte 1896 als Professor an die ihm vertraute École Normale Supérieure zurück und erhielt 1909 zusätzlich einen eigens für ihn eingerichteten Lehrstuhl für Funktionentheorie an der Sorbonne. Von 1910–1920 war er Direktor der École Normale Supérieure, wurde 1921 in die Académie der Sciences aufgenommen und 1934 zu ihrem Präsidenten gewählt. Wie Hadamard prägte Borel maßgeblich die Entwicklung der Mathematik in Frankreich bis in die 20er Jahre des vorigen Jahrhunderts.

Danach wurde er zu einem aktiven Politiker: Von 1924 bis 1936 war er Mitglied der Französischen Nationalversammlung, 1925 kurzfristig Marineminister. Nach der Besetzung Frankreichs im Jahre 1940 und einer kurzen Haftzeit unter dem Vichy Regime des Marschalls Petain arbeitete er für die Résistance.

Gemeinsam mit Henri Lebesgue (vgl. Abschnitt 11.3.1) und René-Louis Baire (1874–1932) gilt Borel als Begründer der modernen Maß- und Integrationstheorie und ist bekannt als ein Pionier für die Anwendung der Maßtheorie auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung Davon zeugen die nach ihm benannten Borelschen Mengen, das Borel-Maß, die Borel-Algebraund der Borel-Raum. 1895 wurde von ihm der berühmte Überdeckungssatz von Heine-Borel (Auswahl einer endlichen Überdeckung aus einer abzählbaren Überdeckung eines abgeschlossenen und beschränkten Intervalls des euklidischen Raumes) erstmals als eigenständiges Theorem formuliert und für die Punkte auf einer Geraden bewiesen. Ein Jahr später entwickelte er das ebenfalls nach ihm benannte Limitierungsverfahren für divergente Reihen, das für die analytische Fortsetzung von Potenzreihen über ihren Konvergenzkreis hinaus wichtig ist, 1898 dann eine völlig neue Theorie meßbarer Mengen, nach der insbesondere



Abb. 11.7.4 École Normale Supérieure in Paris [Foto Alten]



Abb. 11.7.5 Jean Cavaillès, Émile Borel (Frankreich 1958)

die Differenz und die abzählbare Vereinigung meßbarer Mengen wieder meßbare Mengen sind. 1909 entdeckte er das starke Gesetz der großen Zahlen für das Bernoulli-Schema und definierte die Wahrscheinlichkeit für abzählbar unendliche Mengen. Mit seinen Arbeiten in den 20er Jahren wandte sich Borel der Spieltheorie zu und formulierte erstmalig Grundbegriffe strategischer Spiele.

Danach widmete er sich in erster Linie der Politik und starb 1956 hochbetagt in Paris.

Wie Borel leisteten erhebliche Teile der französischen Intelligenz in der Résistance Widerstand gegen die deutsche Besatzung, unter ihnen der Philosoph und Mathematiker Jean Cavaillès (1903–1944). Er stand in persönlichem Kontakt mit General de Gaulle in London, kehrte dann nach Frankreich zurück und leitete in Nordfrankreich und Belgien eine Widerstandsgruppe. Er wurde verhaftet und im Februar 1944 in der Zitadelle von Arras hingerichtet. Seine sterblichen Überreste wurden nach Kriegsende in die Krypten der Sorbonne überführt.

An dieser berühmten und mit der gleich Bologna ältesten Universität des Abendlandes hatte Cavaillès als Professor der Mathematik gewirkt, mit Emmy Noether 1937 den Briefwechsel Cantor-Dedekind herausgebracht und u. a. über die abstrakte Theorie der Mengen publiziert. 1938 erschienen seine *Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles* und die *Méthode axiomatique et formalisme*, 1947 wurde sein Werk *Transfini et continue* postum publiziert. Seine gesammelten Werke wurden 1994 herausgegeben.

Nicolas Bourbaki

Im Jahre 1939 veröffentlichte ein gewisser Nicolas Bourbaki in französischer Sprache ein Werk mit dem Titel *Théorie des ensembles* als Auftakt einer Serie unter dem Titel *Élements de mathématique*. Es erschienen ca. 40 Bände, die zunächst in sechs Büchern zusammengefasst wurden:

I. *Théorie des ensembles* (Mengenlehre)
II. *Algèbre* (Algebra)
III. *Topologie générale* (Topologie)
IV. *Functions d'une variable réelle* (Funktionen einer reelen Variablen)
V. *Espaces vectoriels topologiques* (Topologische Vektorräume)
VI. *Intégration* (Integration)

Nach einer längeren Pause erschienen noch

VII. *Algèbre commutative* (Kommutative Algebra)
VIII. *Groupes et algèbres de Lie* (Lie-Gruppen)
und schließlich 1983
IX. *Théories spectrales* (Spektraltheorie).

Daneben wurde noch ein Buch *Variétes différentielles et analytiques*, ein *„fascicule de résultats“*, also ein Ergebnisbericht über Mannigfaltigkeiten veröffentlicht.

Nach und nach stellte sich heraus, dass „Bourbaki“ ein Deckname für eine Gruppe junger, vorwiegend französischer Mathematiker war. Es hat bis in die fünfziger Jahre gedauert, bis die sich hinter dem Pseudonym verber-



Abb. 11.7.6 Bourbaki Panorama in Luzern [Foto Alten]



Abb. 11.7.7 Bourbaki-Kongress 1939 (v. l. n. r.): Simone Weil, Charles Pisot, André Weil, Jean Dieudonné, Claude Chabauty, Charles Ehresmann und Jean Delsarte; Bourbaki-Kongress 1951 [PlanetMath.org]

genden Personen zu erkennen gaben. Der Name „Bourbaki“ geht nach der einen Überlieferung zurück auf einen studentischen Scherz. Nach einer anderen Version wählte André Weil diesen Namen nach einem Standbild des Generals Bourbaki in Nancy. Charles-Denis Bourbaki war ein französischer General im deutsch-französischen Krieg 1870/71, der eine ganze Armee der Gefangennahme entzog, indem er sie in das von der neutralen Schweiz gewährte Asyl führte. Der Ablauf dieses Geschehens ist in einem riesigen Panorama in Luzern dargestellt.

Die fünf Gründungsmitglieder waren Henri Paul Cartan, Claude Chevalley, Jean Delsarte (1903–1968), Jean Alexandre Eugène Dieudonné und André Weil, einer der treibenden Kräfte. Später schlossen sich weitere bedeutende Mathematiker der Gruppe an, unter ihnen Szolem Mandelbrojt (1899–1983), Samuel Eilenberg (1913–1998), Charles Ehresmann (1905–1979), Pierre Samuel (*1921), Jean Leray, Jean-Pierre Serre und Alexander Grothendieck, der aber die Gruppe im Streite wieder verließ.

Der Anfang von „Bourbaki“ geht auf Zusammenkünfte in einem Pariser Café in den dreißiger Jahren zurück. Mit dem Blick auf die Erfolge der axiomatischen Methode, im Anschluss an Poincaré und unter dem Eindruck von Methode und inhaltlicher Bedeutung der sog. Modernen Algebra mit van der Waerden, Emmy Noether und Emil Artin, erkannte man, dass die Vorlesungen an einigen Provinzuniversitäten und die ihnen zugrunde liegenden Lehrbücher vollständig veraltet waren. Chevalley z. B. hatte bei Noether, Artin und Hasse studiert (vgl. ausführlich [Beaulieu 1989], [Beaulieu 1994]).

Zunächst stellte man sich das Ziel, moderne Lehrbücher der Analysis zu schaffen. Bald aber steckte man sich höhere Ziele: Umfassende Grundlagen für die gesamte Mathematik sollten erarbeitet und dargestellt werden. Hatte man ursprünglich drei bis vier Jahre für das Vorhaben veranschlagt, so konnte erst 1939 ein erster Band erscheinen, der zur Mengenlehre. Die Entwürfe der Teilmanuskripte wurden hart diskutiert; man schonte sich nicht.



Abb. 11.7.8 Jean Dieudonné; Henri Cartan

Außerdem ging man die Verpflichtung ein, spätestens nach Erreichen des 50. Lebensjahres auszuscheiden – eine rigorose Verpflichtung, die aber nicht immer eingehalten wurde.

Auch die Absicht, Lehrbücher zu schaffen, trat in den Hintergrund. Das Hauptziel bestand darin, Ordnung ins Gesamtgebiet der Mathematik zu bringen. Es ging weniger um die Gewinnung neuer Sätze und Erkenntnisse. Dabei spielte der Begriff einer „Struktur“ die zentrale Rolle. Die Darlegungen waren äußerst abstrakt, ohne Zugeständnisse an die Lehrbarkeit.

Noch unter dem Namen Bourbaki wurde 1974 in dem weit verbreiteten Buch *Mathematiker über Mathematik* in dem Beitrag *„Die Architektur der Mathematik“* [Bourbaki 1974] der Begriff der „Struktur“ am Beispiel der Gruppenstruktur erläutert, also am Begriff der abstrakten Gruppe, wobei eben von der Realisierung der Elemente abgesehen wird. (Nur zur Verdeutlichung von „Gruppe“ erwähnt Bourbaki die Addition der reellen Zahlen, die Multiplikation der ganzen Zahlen modulo einer Primzahl und die Zusammensetzung von Translationen im dreidimensionalen Raum, vgl. [Bourbaki 1974, S. 145].)

Mit nur einer einzigen Komposition der Elemente entsteht eine Gruppenstruktur. Hat man zwei Verknüpfungen, so entsteht bei geeigneten Axiomen die Struktur eines Körpers. Bourbaki erblickte im Verhältnis von Gruppenstruktur und Körperstruktur einen hierarchischen Aufbau: Gruppe als „Mutterstruktur“, Körper als abgeleitete Struktur.

Im ähnlichen Sinne führte Bourbaki drei Mutterstrukturen ein: die oben exemplifizierten algebraischen Strukturen, die Ordnungsstrukturen und die topologischen Strukturen.

> *„Wir wollen noch ein paar Worte sagen über einen dritten großen Strukturtypus, nämlich die topologischen Strukturen (oder Topologien); sie geben eine abstrakte mathematische Formulierung unserer intuitiven räumlichen Vorstellung der Begriffe Umgebung, Grenzwert*

> *und Stetigkeit. Der Grad der Abstraktion, der für die Formulierung der Axiome dieser topologischen Struktur erforderlich ist, ist entschieden größer als in den vorhergehenden Beispielen; ...“*
> [Bourbaki 1974, S. 150]

Wir haben also – nach Bourbaki – folgende Situation vor uns: Fügt man den drei Mutterstrukturen – algebraische, topologische, Ordnungsstrukturen – weitere Axiome oder Eigenschaften der Elemente hinzu, so erhält man Strukturen, deren Inhalt dann inhaltsreicher ist als der der Mutterstruktur.

Es steht wohl jetzt fest, dass die endgültigen, die publizierten Texte wesentlich auf Dieudonné zurückgehen. Er hat übrigens die den Büchern beigegebenen jeweiligen historischen Teilabschnitte im Zusammenhang unter dem Namen Nicolas Bourbaki: *Éléments d'histoire des mathématiques* herausgegeben, eine Geschichte der Mathematik aus Bourbaki-Sicht. Weitaus jüngeren Datums (1982) ist seine Einschätzung der gesamten reinen Mathematik unter dem Titel *Panorama of pure mathematics seen by Bourbaki.* (Vgl. auch [Dieudonné 1970])

Der Einfluss der Bourbaki-Gruppe war einige Zeit ziemlich beträchtlich, bis hinein in die Wissenschaftstheorie des Schweizers Jean Piaget (1896–1980) und auch bei den wohl überzogenen Versuchen, den allgemeinbildenden Schulunterricht der Mathematik mengentheoretisch aufzubauen.

Geblieben ist der strenge axiomatische Aufbau der Darstellungen von Teilgebieten der Mathematik, insbesondere in Arithmetik, Algebra und Mengenlehre, weniger in der Geometrie. Die Behandlung von Anwendungen war ohnedies nicht ernstlich in Angriff genommen worden. Einige abstrakte Begriffsbildungen erwiesen sich als nicht verwendbar in neu entstehenden Theorien. Logik wurde nur am Rande betrachtet. Es zeigte sich als undurchführbar, die gesamte Mathematik in einem geschlossenen System darzustellen, zumal bei deren stürmischer Entwicklung mit neuen Gebieten.

Das äußere Bild der Mathematik wird wesentlich dadurch geprägt, dass einige Symbole Allgemeingut geworden sind, z. B. $\emptyset$ als Zeichen für die leere Menge, die Symbole $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ für die Mengen der natürlichen, ganzen, rationalen, reellen und komplexen Zahlen und das Zeichen $\Rightarrow$ für Implikation.

Es gibt eine Unzahl von Schriften rund um Bourbaki. Bedenkenswert ist – bei aller Anerkennung der Leistung von Bourbaki – ein Artikel von L. Corry [Corry 1992], in dem eine Schwäche der Bourbaki-Gruppe herausgestellt wird, dass nämlich der Begriff „Struktur“ nur an Beispielen, nicht aber aus sich selbst definiert wird.

Merkwürdigerweise haben die Ergebnisse von Gödel, die das Hilbertsche Programm teilweise als undurchführbar erwiesen hatten, kaum eine Rolle gespielt; man hielt am formalistischen Vorgehen fest, an der axiomatischen Definition der Begriffe. Hauptsächlich für die Algebra hat der Impuls der Bourbaki-Gruppe reiche Früchte getragen. Bourbaki hatte seine „Algebra“ 1942 veröffentlicht; schon ein Jahr vorher war eine englischsprachige Strukturalgebra unter dem Titel *Survey of modern algebra* von den Autoren Garrett

Birkhoff und Saunders MacLane erschienen. Im Anschluss an die italienische Schule war die Ausweitung der Algebraischen Geometrie eine direkte Folge. Hier ist André Weil besonders hervorzuheben; 1946 erschienen seine *Foundations of Algebraic Geometry*. Überhaupt war Weil ein sehr einflussreicher Mathematiker, nicht nur als Mitglied der Bourbaki-Gruppe, sondern auch deswegen, weil er in vielen Teilen der Erde Vorlesungen gehalten hat, in Frankreich, Indien, Brasilien, USA (Chicago und Princeton) und andernorts [Weil 1992].

11.7.2 Hardy und Ramanujan – ein ungewöhnliches Beispiel internationaler Zusammenarbeit

Am Beispiel des englischen Mathematikers Godefrey Harold Hardy (1877–1947) zeigt sich deutlich, dass es die unterschiedlichen Auffassungen in verschiedenen Völkern oder Gesellschaftsformen der jeweiligen Zeit sind, die über „Wert“ oder „Unwert“ der Mathematik entscheiden, ob zum Nutzen der Menschheit verwendet oder ausgestattet mit der Potenz, missbräuchlich verwendet zu werden, ein Lehrstück sozusagen. Es verband ihn eine enge Freundschaft mit Sir Bertrand Russell, der wie Hardy, ein herausragender Gelehrter und zugleich ein leidenschaftlicher Pazifist war. Russell war eine Zeitlang inhaftiert, erhielt 1950 den Nobelpreis für Literatur und engagierte sich nach 1960 in der Weltfriedensbewegung.

Hardy widmete sich – missbräuchliche Nutzung der Mathematik befürchtend und sogar vor Augen – hauptsächlich der Zahlentheorie in der Annahme, dass diese nie Anwendungen (weder im Guten noch im Bösen) finden werde. Im Jahre 1940 veröffentlichte Hardy seine bald große Popularität erreichende *A Mathematician's Apology* (Rechtfertigung eines Mathematikers), wo neben vielen damals akuten Themen seine pazifistische Haltung zum Thema „Mathematik im gesellschaftlichen Umfeld“ dargelegt wird.

Jedoch: Ausgerechnet seine Zahlentheorie fand weithin Anwendung zur Ver- und Entschlüsselung von Nachrichten, auch im militärischen Bereich. St. Hildebrandt hat 1992 herausragende Passagen aus Hardys „Rechtfertigung“ bei einem Vortrag in die deutsche Sprache übertragen. Dabei verweist Hildebrandt auf den Hardyschen Sprachgebrauch, dass dieser statt „guter“ bzw. „schlechter“ Mathematik zwischen „echter“ und „trivialer“ Mathematik unterscheidet; dies folgt aus der von Hardy vertretenen Konzeption zu Mathematik überhaupt.

> *“There are then two mathematics. There is the real mathematics of the real mathematicians, and there is what I will call the 'trivial' mathematics, for want of a better word. The trivial mathematics may be justified by arguments which would appeal to Hogben, or other writers of his school, but there is no such defence for the real mathematics, which must be justified as art if it can be justified at all. There is nothing in the least paradoxical or unusual in this view, which is that held commonly by mathematicians.*

We have still one more question to consider. We have concluded that the trivial mathematics is, on the whole, useful, and that the real mathematics, on the whole, is not; that the trivial mathematics does, and the real mathematics does not, 'do good' in a certain sense; but we have still to ask whether either sort of mathematics does harm. It would be paradoxical to suggest that mathematics of any sort does much harm in time of peace, so that we are driven to the consideration of the effects of mathematics on war. It is very difficult to argue such questions at all dispassionately now, and I should have preferred to avoid them; but some sort of discussion seems inevitable. Fortunately, it need not be a long one.

There is one comforting conclusion which is easy for a real mathematician. Real mathematics has no effects on war. No one has yet discovered any warlike purpose to be served by the theory of numbers or relativity, and it seems very unlikely that anyone will do so for many years. It is true that there are branches of applied mathematics, such as ballistics and aerodynamics, which have been developed deliberately for war and demand a quite elaborate technique: it is perhaps hard to call them 'trivial', but none of them has any claim to rank as 'real'. They are indeed repulsively ugly and intolerably dull; even Littlewood could not make ballistics respectable, and if he could not who can? So a real mathematician has his conscience clear; there is nothing to be set against any value his work may have; mathematics is, as I said at Oxford, a 'harmless and innocent' occupation.

The trivial mathematics on the other hand, has many applications in the war. The gunnery experts and aeroplane designers, for example, could not do their work without it. And the general effect of these applications is plain: mathematics facilitates (if not so obviously as physics or chemistry) modern, scientific, 'total' war."

[Hardy 1993, S. 139ff.]).

Mit der Persönlichkeit von Hardy ist eine einzigartige Episode in der Mathematikgeschichte verbunden: die Zusammenarbeit mit dem indischen Mathematiker Srinivasa Ramanujan (1887–1920). Dieser stammte aus relativ bescheidenen familiären Verhältnissen in Südindien, konnte nicht an eine Hochschule gelangen und war auf autodidaktische Studien angewiesen. Während einer untergeordneten Tätigkeit als Angestellter fand er eine Fülle von mathematischen Sätzen, insbesondere aus der Zahlentheorie, wandte sich 1913 an Hardy, erreichte mit dessen Hilfe ein Stipendium an der Universität Madras. Schließlich gelangte Ramanujan 1914 ans Trinity College in Cambridge, musste aber wegen der Schwierigkeiten mit Klima und Nahrung 1919 nach Indien zurückkehren und starb schon bald, am 26. 4. 1920, in Madras.

Ramanujan stammte aus einem europafremden Kulturkreis und hatte nie Gelegenheit gehabt, systematisch nach „westlichem“ Standard zu lernen. Er fand komplizierte zahlentheoretische Gesetze, ohne einen Beweis geben zu

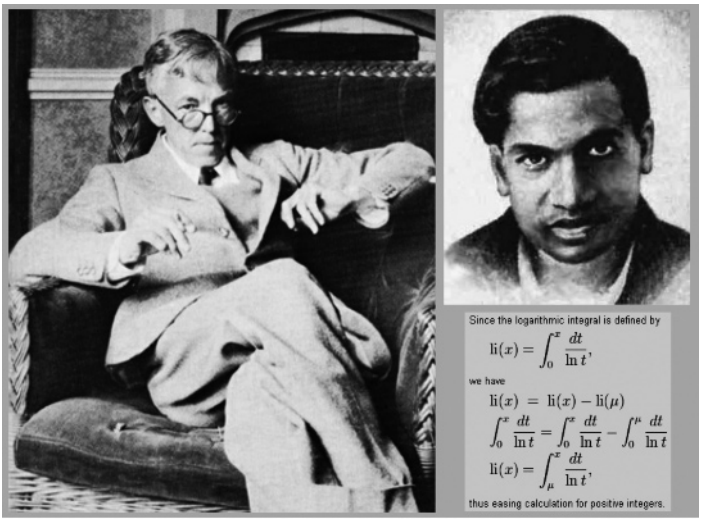


Abb. 11.7.9 Godfrey H. Hardy, Srinivasa Ramanujan

können; die meisten seiner Ergebnisse erwiesen sich als richtig. Seine intuitive Begabung wurde sogar mit mystischen Kräften in Verbindung gebracht.

Hardy hatte 1911 von Ramanujan ein Paket mit einer Anzahl von mathematischen Ergebnissen erhalten. Hardy beschreibt seine Reaktion:

> *„... Es war mir bald klar, dass Ramanujan noch weit allgemeinere SÄTZE in seinem Besitz gehabt haben musste und dass er manches zurückhielt... [Einige Formeln] erschlugen mich regelrecht; ich hatte zuvor nichts auch nur im Entferntesten Ähnliches zu Gesicht bekommen. Ein einziger Blick darauf genügte, um zu erkennen, dass nur ein Mathematiker allerhöchsten Ranges sie niedergeschrieben haben konnte."* (Zitiert nach [Gierhardt 2008])

Ramanujan hat 38 Abhandlungen publiziert; 7 davon entstanden aus der Zusammenarbeit mit Hardy. Es handelt sich um asymptotische Formeln in der Zahlentheorie, um Ergebnisse zur Theorie der elliptischen Funktionen, über Kettenbrüche. Auch fand er eigenständig den bereits von Gauß formulierten Primzahlsatz.

Ramanujan machte großen Eindruck in seiner englischen Wissenschaftsumgebung, auch bei Hardys Kollegen John Edensor Littlewood (1885–1977). Zahlreiche Anekdoten erzählen von Ramanujans „Freundschaft mit ganzen Zahlen" (Littlewood). Hardy berichtete:

> *„Ich erinnere mich, das* (sic!) *ich ihn eines Tages besuchen ging, als er in Putney krank im Bett lag. Ich war im Taxi Nr. 1729 gekommen und erwähnte, dass mir diese Zahl ziemlich langweilig vorkäme und*

ich hoffte, das sei kein ungünstiges Vorzeichen. ‚Nein', antwortete er, ‚es ist eine sehr interessante Zahl, nämlich die kleinste Zahl, die sich auf zwei verschiedene Arten als Summe zweier Dreierpotenzen darstellen lässt.' Ich fragte ihn natürlich, ob er die Antwort auf das entsprechende Problem für Viererpotenzen wisse, und nach kurzem Nachdenken sagte er, ohne weiteres falle ihm kein Beispiel ein, aber er glaube, die erste derartige Zahl müsste sehr groß sein."
(Zitiert nach [Gierhardt 2008])

In der Tat ist $1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3 = 1729$, $133^4 + 134^4 = 59^4 + 158^4 = 635\,318\,657$. Und die Persönlichkeit und Leistungen Ramanujans beschrieb Hardy mit den Worten:

„Mit seinem Gedächtnis, seiner Geduld und seiner rechnerischen Begabung kombinierte er ein Verallgemeinerungsvermögen, ein Gefühl für Form und eine Fähigkeit, seine Hypothesen rasch zu modifizieren, die oft wirklich verblüffend waren, so dass er in seiner Zeit auf seinem Gebiet ohne Rivalen war."
„[Sein Werk] hat nicht die Einfachheit und die Zwangsläufigkeit von mathematischer Arbeit höchsten Ranges; es wäre größer, wäre es weniger exotisch. Er hat eine Gabe, die niemand ihm absprechen kann: tiefe und unbesiegbare Originalität. Er wäre vermutlich ein größerer Mathematiker geworden, wäre er in seiner Jugend an die Hand genommen und etwas gezähmt worden: Er hätte mehr Neues entdeckt und ohne Zweifel Wichtiges."
(Zitiert nach [Gierhardt 2008])

11.7.3 Die polnische Schule der Topologie

Zwischen den beiden Weltkriegen erreichte die Mathematik ziemlich plötzlich in dem nun unabhängig gewordenen Polen hohe internationale Anerkennung und Bedeutung, insbesondere auf dem Gebiet der Grundlagen der Mathematik und der Topologie [Ciesielski/Pogoda 1996]. Einer der Gründe mag darin bestanden haben, dass es sich um eine relativ junge mathematische Disziplin handelte, die jungen Gelehrten einen raschen Zugang ermöglichte. Vor dem Ersten Weltkrieg hatten die polnischen Mathematiker sich vorwiegend an Frankreich orientiert; die bedeutendsten Zentren waren Lemberg (polnisch Lwów, jetzt ukrainisch Lwiw), wo Banach wirkte, und Warschau. Auf dem IV. Kongress der polnischen Naturforscher und Ärzte in Krakau 1911, fasste man – insbesondere auf Betreiben von Wacław Sierpiński (1882–1969) – den Entschluss, die Kräfte der Mathematiker zu konzentrieren und die Forschungsprogramme aufeinander abzustimmen. Es fügte sich glücklich, dass sich zwei junge begabte Mathematiker anschließen konnten: Zygmunt Janiszewski (1888–1920) und Stefan Mazurkiewicz (1888–1945).

Ersterer hatte in Zürich, München, Göttingen und Paris studiert und 1911 bei Henri Lebesgue promoviert, lehrte seit 1911 in Warschau und seit





Abb. 11.7.10 S. Mazurkiewicz, K. Kuratowski, B. Knaster

1913 in Lemberg. Er nahm 1914/15 am polnischen Unabhängigkeitskampf teil, musste in die Illegalität gehen und konnte seine Lehrtätigkeit erst 1918 in Warschau aufnehmen. Seine Hauptergebnisse betreffen die mengentheoretische Beschreibung bzw. Definition geometrischer Gebilde: Bogen, Kurve, Fläche. Er war ein höchst anregender akademischer Lehrer und Mitbegründer der Zeitschrift *Fundamenta Mathematicae*, deren erstes Exemplar 1920 erschien, noch vor seinem plötzlichen Tod. Er darf als einer der Gründerväter der polnischen mengentheoretisch-topologischen Schule gelten.

Mazurkiewicz hatte in Krakau, Lemberg, München und Göttingen studiert, promovierte 1913 in Lemberg und wirkte als Professor seit 1915 in Warschau. Auch sein Hauptforschungsgegenstand war die mengentheoretische Topologie: verschiedene Arten der Kontinua, topologische Struktur von Kurven und Flächen, Dimensionsbegriff. Er bewies bereits 1922 unabhängig von Cantelli eine allgemeine Version des starken Gesetzes der großen Zahl, bemühte sich etwa gleichzeitig mit Kolmogorow um eine axiomatische Fundierung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und war Autor einer bedeutenden Monographie über dieses Gebiet.

Im Jahre 1917 riefen Januszewski und Mazurkiewicz ein Seminar zur Topologie ins Leben, das nach Rückkehr von Sierpiński rasch an Bedeutung gewann und häufig von Ausländern besucht wurde. Es gilt als das erste regelmäßig stattfindende Seminar dieser Art in der Welt. Aus ihm gingen u. a. Kazimierz Kuratowski (1896–1980) und Bronisław Knaster (1893–1980) hervor.

Knaster lehrte von 1926 bis 1939 an der Warschauer Universität; nach dem Krieg (mit Unterbrechungen) war er in Lemberg, in Breslau (jetzt Wrocław) und an der polnischen Akademie der Wissenschaften tätig. Auch er schrieb einige Studien zur mengentheoretischen Topologie. Kuratowski hatte in Glasgow und seit 1915 in Warschau studiert, promovierte 1921 bei Sierpiński und habilitierte sich mit einer Arbeit zur Mengenlehre. Nach vorübergehender

Lehrtätigkeit in Lemberg war er seit 1934 als Professor in Warschau tätig. Während der Besetzung Polens durch Deutschland hielt Kuratowski im Untergrund Vorlesungen, eine höchst riskante Tätigkeit. Nach dem Krieg organisierte er 1945 die Gründung eines Mathematischen Forschungszentrums bei der Polnischen Akademie der Wissenschaften; er selbst war dessen Direktor bis 1968. Auch war er beteiligt an der Etablierung des Internationalen Forschungszentrums für Mathematik „Stefan Banach".

Kuratowski hat eine Vielzahl von Arbeiten zur Topologie geschrieben, über Borelsche Mengen und viele spezielle Themen. Zusammen mit Mazurkiewicz und Knaster gelang ihm 1929 ein einfacher Beweis des Fixpunktsatzes von Brouwer. Weitere Publikationen betreffen Maßtheorie, Verbandstheorie und Dimensionentheorie. Aus seiner Feder stammt eine Reihe von Monographien; die zweibändige *Topologie* hat breite internationale Resonanz gefunden.

11.7.4 Mathematik in Russland und in der Sowjetunion

Über die Mathematik in Russland während des 19. Jahrhunderts, insbesondere über das Wirken und die Leistungen vom Tschebyschew, ist bereits in Kap. 10.7 ausführlich berichtet worden, über Lobatschewski und seine Arbeiten in Kap. 10.2. Auch der von Wien über Moskau ausgegangene Impuls nach St. Petersburg durch Nikolaus Braschman, einen akademischen Lehrer von Tschebyschew ist in Kap. 10.7 beschrieben. In Moskau hatte Michail Wassiljewitsch Ostrogradski (1801–1862), angeregt durch sein Studium in Paris, großen Wert auf die Anwendungen der Mathematik in Hydrodynamik, Wärmeleitung, Elastizitätstheorie und Ballistik gelegt und dazu Beiträge zur Integration partieller Differentialgleichungen geleistet. Ostrogradski war wegen progressiver Auffassungen noch vor Abschluss seines Studiums aus der Universität Charkow hinausgeworfen worden und fand erst später in St. Petersburg die Möglichkeit zu breiter wissenschaftlicher und wissenschaftsorganisatorischer Tätigkeit. Ohne die breite Basis der Mathematik und die Kontinuität ihrer Entwicklung im 19. und an der Wende zum 20. Jahrhundert wären die Erfolge der Mathematik in der Sowjetunion nicht möglich gewesen (vgl. die Einfluss-Skizze nach Demidov).

Die Mathematik im vorrevolutionären Russland und in der Sowjetunion stand auf einem beachtlichen, international hoch anerkannten Niveau, trotz einschneidender Restriktionen gegen einige Personen während der Stalinzeit [Sinai 2003].

Nach dem Zusammenbruch der Sowjetunion gingen viele Gelehrte, auch viele Mathematiker in den Westen, zumeist aus ökonomischen Gründen. Dieser erhebliche Verlust für Russland und die Nachfolgestaaten der Sowjetrepubliken ist noch nicht historisch aufgearbeitet worden.

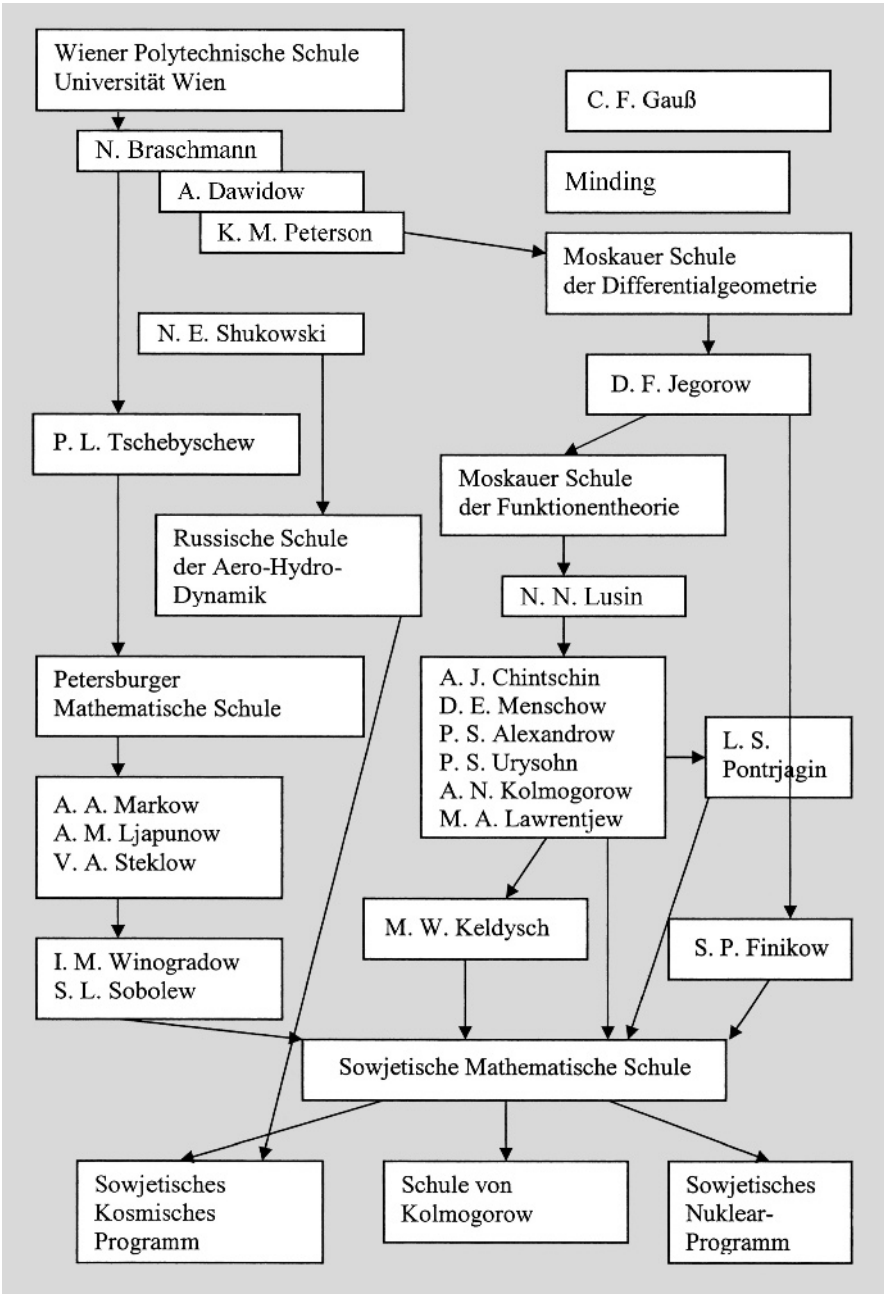


Abb. 11.7.11 Einfluss-Skizze nach Demidow [Demidow 2004]



Abb. 11.7.12 Alexander Ljapunow, Sergej L. Sobolew, Iwan M. Winogradow

Der von Ostrogradski und Tschebyschew begründeten Petersburger Schule gehörten u. a. Andrej Andrejewitsch Markow, Alexander Michailowitsch Ljapunow und Wladimir Andrejewitsch Steklow (1864–1926) an.

In einer späteren Phase folgten Iwan Matwejewitsch Winogradow (1891–1983), von 1934 bis 1983 Direktor des nach Steklow benannten mathematischen Forschungsinstitutes in Leningrad, sowie Jagor Iwanowitsch Solotarjow (1847–1878) und Sergej Lwowitsch Sobolew (1908–1989), der bedeutende mathematische Arbeiten schrieb und daneben hohe wissenschaftsorganisatorische Aufgaben am Moskauer Akademie-Institut für Kernenergie und als Direktor des Mathematischen Institutes der Sibirischen Abteilung der Akademie in Nowosibirsk übernahm.

Alexander Michailowitsch Ljapunow war der vielleicht wissenschaftlich stärkste Schüler von Tschebyschew. Übrigens waren Ljapunow und Andrej Andrejewitsch Markow Klassenkameraden.

Der Vater von Ljapunow war Astronom, der in Kasan und später als Direktor eines Lyzeums in Jaroslawl wirkte. Dort wurde Ljapunow geboren. Der Vater starb 1868; die Witwe zog mit ihren drei Söhnen nach Gorki (Nischni-Nowgorod). Im Jahre 1876 nahm Alexander Michailowitsch das Studium bei Tschebyschew in St. Petersburg auf. An der Fakultät für Mechanik erwarb Ljapunow 1884 den Magistergrad mit einer Arbeit über die Stabilität von elliptischen Gleichgewichtsformen rotierender Flüssigkeiten. Im Jahre 1885 ging er an die Universität Charkow, erst als Dozent, seit 1882 als Professor und war sehr aktiv in der dortigen Mathematischen Gesellschaft.

Als er wegen seiner Leistungen in der angewandten Mathematik 1891 zuerst zum korrespondierenden, 1892 zum Vollmitglied der Petersburger Akademie berufen wurde, siedelte er dorthin über und wurde schließlich Nachfolger von Tschebyschew auf dessen Lehrstuhl. Im Sommer 1917 begab sich Ljapunow nach Odessa. Seine Frau war schwer an Tuberkulose erkrankt; sie starb 1918. Ljapunow, selbst erkrankt, erschoss sich drei Tage später. Seinem Wunsch entsprechend wurden beide zusammen beerdigt.

Ljapunows Hauptarbeitsgebiet waren Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten; daneben publizierte er zu Potentialtheorie und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Seine Doktordissertation (entspricht etwa der Habilitation) von 1892 über das allgemeine Problem der Stabilität bei Bewegung wurde in Moskau verteidigt, einer der sog. „Opponenten“ war Nikolai Jegorowitsch Shukowski (1847–1921), der zum Begründer der russisch-sowjetischen Schule der Aero-Hydrodynamik wurde. In St. Petersburg erzielte Ljapunow ein für die Astronomie bedeutsames Resultat. Er konnte – gegen eine Auffassung, die u. a. vom Enkel Charles Galton Darwin (1887–1962) des berühmten Naturforschers Charles Darwin (1809–1882) vertreten worden war – beweisen, dass birnenförmige Rotationskörper nicht stabil sind.

Wladimir Andrejewitsch Steklow hatte zunächst in Moskau und dann seit 1883 an der Universität Charkow bei Ljapunow studiert; wie dieser war auch er aktiv in der dortigen Mathematischen Gesellschaft. Im Jahre 1906 übernahm er den Lehrstuhl für Mathematik in St. Petersburg.

Seine wissenschaftliche Forschungstätigkeit war insbesondere den Anwendungen der Mathematik gewidmet: Wärmeleitung, Elektrostatik, Elastizitätstheorie, Hydromechanik und dementsprechend Theorie der Differentialgleichungen und Reihendarstellung von Funktionen. Er wurde so zum Begründer der Petersburger Schule für mathematische Physik.

Mit seiner umfangreichen wissenschaftsorganisatorischen Tätigkeit nahm Steklow großen Einfluss auf die Entwicklung der Wissenschaften in der jungen Sowjetunion, teilweise sogar im persönlichen Kontakt mit Lenin. Steklow war von 1919 bis 1926 Vizepräsident der sowjetischen Akademie der Wissenschaften. Er organisierte den Aufbau seismologischer Stationen und brachte den wissenschaftlichen Austausch von Informationen, Büchern und Gelehrten mit dem Ausland wieder in Gang. Er war Mitbegründer des Physikalisch-Mathematischen Institutes der Akademie; aus ihm gingen drei Institute hervor, darunter das nach ihm benannte Institut, das zu einem Konzentrationspunkt der Mathematik und ihrer Anwendungen in der Sowjetunion wurde und in Moskau arbeitete.



Abb. 11.7.13 Nikolai J. Shukowski, Wladimir A. Steklow (UdSSR 1963, 1973)

Iwan Matwejewitsch Winogradow war von 1934 bis 1983 Direktor des Steklow-Institutes. Neben umfangreicher wissenschaftsorganisatorischer Tätigkeit – er war auch Leiter der sowjetischen Delegation beim Internationalen Mathematikerkongress in Edinburgh 1958 – wurde er Begründer der russisch-sowjetischen zahlentheoretischen Schule, die im Ausland hoch respektiert wurde.

Winogradow studierte u. a. die Verteilung der quadratischen Reste und Nichtreste und Primzahlprobleme. Im Jahre 1937 konnte er beweisen, dass jede hinreichend große natürliche Zahl Summe von drei Primzahlen ist. Diese Aussage steht im Zusammenhang mit der Suche nach einem Beweis für die sog. schwache oder ternäre Vermutung von Goldbach (1690–1764), vgl. Kapitel 11.9.3.

Hingegen geriet Dimitri Fjedorowitsch Jegorow (1869–1931) als Strenggläubiger ins Visier stalinistischer Kräfte. Seit 1893 hatte er als Professor an der Moskauer Universität gewirkt, wurde 1917 Sekretär und 1922 Präsident der Moskauer Mathematischen Gesellschaft und 1923 sogar Direktor des Institutes für Mechanik und Mathematik der Moskauer Universität. Seine bedeutsamen Ergebnisse zur Differentialgeometrie wurden hoch anerkannt und von Jean Gaston Darboux dem französischen Wissenschaftlerkreis zugänglich gemacht. Jegorow hatte eine größere Anzahl von Schülern, unter ihnen Nikolai Nikolajewitsch Lusin und wurde damit zum Stammvater der Moskauer funktionentheoretischen Schule.

Gegen die Unterdrückung der Religion, insbesondere in den Jahren 1922/1923, hat sich Jegorow zur Wehr gesetzt, hat versucht, bedrängten Kollegen zu helfen. Trotz Unterstützung durch andere Kollegen wurde Jegorow 1929 als Direktor entlassen. Auch Alexander Gennadijewitsch Kurosch (1902–1971) war betroffen. Jegorow wurde inhaftiert, trat in Hungerstreik und starb schließlich erschöpft vermutlich in der Wohnung von Nikolai Grigorjewitsch Tschebotarjow (1894–1947) in Kasan.

Sergej Natanowitsch Bernstein (1880–1968) gehört noch in die Zeit der engen wissenschaftlichen und persönlichen Beziehungen zwischen Mathematikern Russlands und westeuropäischen Mathematikern. Er stammt aus Odessa und war Sohn eines Mediziners. Er studierte im Anschluss an die höhere Schule seit 1898 in Paris und 1902/1903 in Göttingen. Seine Dissertation verteidigte er an der Sorbonne; er löste das von Hilbert 1900 gestellte 19. Problem, die Frage, ob die Lösungen regulärer Variationsprobleme analytisch sind.

Als Bernstein 1905 nach Odessa zurückkehrte, musste er erfahren, dass die Pariser Dissertation als „auswärtig“ nicht akzeptiert wurde; in Charkow löste er das 20. Hilbertsche Problem in Spezialfällen. Er erhielt den Doktortitel 1913 und lehrte seit 1907 an der Universität Charkow fünfundzwanzig Jahre lang. Es folgten Lehrtätigkeiten in Leningrad und Moskau. Dort gab er die Werke von Tschebyschew heraus.

Weitere Tätigkeiten von Bernstein betrafen die konstruktive Funktionentheorie und die Approximationstheorie, zu der er mit den nach ihm benannten Bernstein-Polynomen einen wertvollen Beitrag leistete. Sein Hauptverdienst,



Abb. 11.7.14 Nikolai Lusin, Andrej A. Markow, Sergej Bernstein

das weit in die Zukunft weisen sollte, war sein Versuch einer Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Er knüpfte an Tschebyschew, Markow und Ljapunow an, begründete seinen Ansatz mengentheoretisch und bereitete so den Weg für Andrej Nikolajewitsch Kolmogorow.

Der Weg von Nikolaj Nikolajewitsch Lusin zur Mathematik verlief kompliziert. Da er das Auswendiglernen hasste, wie es am Gymnasium in Tomsk üblich war, erhielt er immer schlechtere Noten in Mathematik. Erst ein Privatlehrer entdeckte Lusins Begabung für Mathematik. Seit 1901 studierte Lusin in Moskau. Als Student gelangte er 1905/06 zu Émile Borel und 1910 für 3 Jahre nach Göttingen zu Landau und wiederum nach Paris. Dies – die Beziehungen nach Frankreich und die Hinwendung zur abstrakten Mengenlehre – führten in den schwierigen 30er Jahren zu Attacken gegen ihn.

An der Moskauer Universität hatte er an einem Studienzirkel bei Nikolai Jegorowitsch Shukowski teilgenommen, für die Doktorarbeit studierte er bei Jegorow. Er erhielt 1910 den ersten akademischen Rang, promovierte 1915 und wurde 1917 Professor und arbeitete am Steklow-Institut. Er war Vizepräsident des Internationalen Mathematikerkongresses 1928 in Bologna und wurde 1929 Mitglied der sowjetischen Akademie der Wissenschaften.

Lusins wissenschaftliches Hauptinteresse galt der Theorie der Funktionen reeller Variabler, daneben auch in den dreißiger Jahren der Differentialgeometrie. Im Jahre 1912 hatte er, beeinflusst von Jegorow, die sog. C-Eigenschaft für messbare Funktionen gefunden. Im Jahre 1915 publizierte er die Monographie über Integrale und trigonometrische Reihen; hier zeigte sich schon die Hinwendung zur sogenannten „deskriptiven Funktionentheorie“. Untersuchungsgegenstand waren u. a. Funktionentypen, die ohne das Zermelosche Auswahlaxiom „auskommen“. Große Verdienste erwarb er sich auch durch seine Kontakte zu polnischen Mathematikern, insbesondere zu Wacław Sierpiński beim Aufbau einer mengentheoretisch-funktionentheoretischen Schule. Lusin war begeisterter und talentierter akademischer Lehrer. Zusammen mit

Jegorow vermochte er eine große Schar von Schülern um sich zu scharen; sie gaben sich den Namen „Lusitania“ (vermutlich in Anknüpfung an Lusin). Zu seinen Schülern gehörten u. a. Pawel Sergejewitsch Alexandrow, Alexander Jakowlewitsch Chintschin (1894–1959), Michail Jakowlewitsch Suslin (1894–1919), Pawel Samuilowitsch Urysohn (1898–1924) und Andrej Nikolajewitsch Kolmogorow, der seinerseits selbst schulbildend wirkte, ebenso wie Alexandrow.

Alexandrows Vater war Landarzt, der sich der Wohltätigkeit und der Hilfe für arme Leute verpflichtet gefühlt hatte; 1897 zog die Familie nach Smolensk. Schon 1913, anfangs seines Studiums an der Moskauer Universität, nahm Alexandrow am Seminar von Jegorow teil, und schon im Jahr darauf kam er in Kontakt mit Lusin. Bereits 1915, als Student, beschäftigte sich Alexandrow mit Mengenlehre; z. B. bestimmte er 1916 die Mächtigkeit der Borelschen Mengen. Merkwürdigerweise folgte ein Intermezzo als Theaterproduzent und Lehrtätigkeit in Russisch und fremden Sprachen in einer Art Bohème-Welt. Während der Revolutionszeit war er 1919 kurze Zeit im Gefängnis.

1920 kehrte er nach Moskau zurück, wo er sich der Gruppe „Lusitania“ anschloss, aber neben Moskau auch in Smolensk unterrichtete. Von dorther rührte Alexandrows enge Freundschaft mit Urysohn, die seit 1922 in gemeinsame Studien zur mengentheoretischen Topologie einmündete. Sie definierten die Begriffe kompakter und abzählbar kompakter Raum und trugen zur Dimensionentheorie bei.

Während der Sommer 1923 und 1924 weilten Alexandrow und Urysohn in Göttingen, wo sie Emmy Noether, Courant und Hilbert mit ihren Ergebnissen stark beeindrucken konnten. Auch Felix Hausdorff, den sie 1924 in Bonn besuchten, war sehr angetan von ihren Ergebnissen.

Am 28.6.1924 hatten Alexandrow und Urysohn auf einer Postkarte an Hausdorff geschrieben: *„Seit zwei Wochen sind wir schon in Göttingen und beabsichtigen hier bis zu den* (sic!) *9. Juli zu bleiben, alsdann fahren wir nach Bonn. Wir hoffen also daß wir Sie am 10. Juli persönlich begrüßen dürfen werden.“* Am 3.8.24 bedankten sich beide bei Hausdorff für die Gastfreundschaft [Hausdorff: Briefwechsel im Nachlass, UB Bonn].

Weitere Reisen führten zu Luitzen Egbertus Jan Brouwer in den Niederlanden, nach Paris und zum Urlaub in die Bretagne. Unglücklicherweise ertrank Urysohn beim Baden im Atlantik am 17. August 1924.

Die Kontakte nach Göttingen erwiesen sich für beide Seiten als fruchtbar. Zwischen 1925 und 1932 – damals begannen allgemeine Verdächtigungen in der Sowjetunion gegen zu enge Kontakte sowjetischer Gelehrter ins „westliche“ Ausland – besuchte Alexandrow jeden Sommer Göttingen und veranstaltete mit Heinrich Hopf zusammen ein Seminar zur Topologie. Auch am Seminar von Emmy Noether nahm Alexandrow aktiv teil. Andererseits erhielt E. Noether 1928/29 eine Gastprofessur in Moskau und war voll des Lobes über den dortigen Aufenthalt und die Betreuung durch Alexandrow.

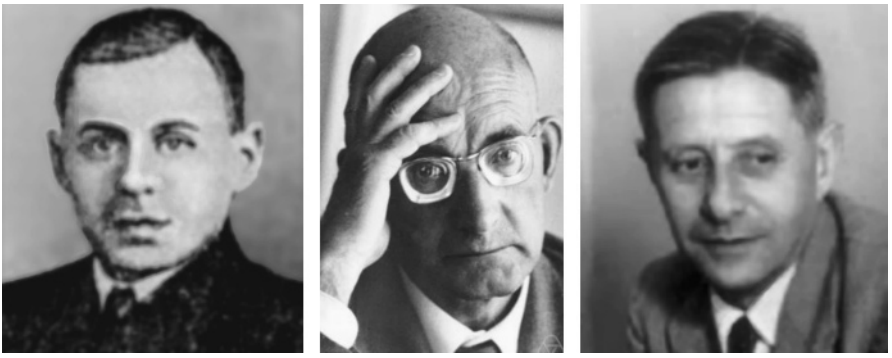


Abb. 11.7.15 Pavel S. Urysohn, Pavel S. Alexandrow, Heinrich Hopf

Alexandrow stürzte sich, öfters in Zusammenarbeit mit Hopf, in die Homologietheorie topologischer Räume und bewies eine Reihe grundlegender Dualitätssätze, die topologische Eigenschaften von Figuren und Punktmengen mit Eigenschaften eines Einbettungsraumes verbinden. Im Jahre 1935 publizierte Alexandrow zusammen mit Hopf die Monographie *Topologie I*, bei Studenten und in Fachkreisen als der „Alexandroff/Hopf“ geschätzt.

In den 40er und 50er Jahren interessierte er sich für Probleme der Einbettung topologischer Räume in andere sowie u. a. für die Homologietheorie nichtabgeschlossener Mengen in euklidischen Räumen. Er hat ungefähr 300 wissenschaftliche Arbeiten publiziert.

Alexandrow erhielt hohe Auszeichnungen, staatliche durch die Sowjetunion und internationale als Mitglied zahlreicher gelehrter Gesellschaften und Akademien. Zu seinen Schülern gehören u. a. Lew Semjonowitsch Pontrjagin (1908–1988), der, nach Unfall erblindet, Bedeutendes in algebraischer Geometrie geleistet hat, und Alexander Gennadijewitsch Kurosch.

Über die vielfältigen gegenseitigen Beziehungen zwischen deutschen und sowjetischen Mathematikern während der Weimarer Zeit unterrichtet [Tobies 1985].

Auch Andrej Nikolajewitsch Kolmogorow entfaltete eine breite Wirksamkeit an der Moskauer Universität, seit 1931 dort als Professor. Er hatte anfangs am Bau der Eisenbahnlinie Kasan – Jekaterinburg mitgewirkt. 1920 begann er unter dem Einfluss von Lusin und Urysohn das Studium der Mathematik in Moskau, nachdem er auch das Studium der Geschichtswissenschaften erwogen hatte. Seine Liebe zur Geschichte äußerte sich später noch einmal deutlich, als er für die *Große Sowjetenzyklopädie* 1938 einen umfangreichen Artikel zur Geschichte der Mathematik beisteuerte, der – den Zeitumständen entsprechend – vom historischen Materialismus konzeptionell bestimmt war.

Kolmogorow wird wohl in erster Linie mit seinem Beitrag zur Wahrscheinlichkeitsrechnung in Verbindung gebracht – darüber ist im Abschnitt Wahrscheinlichkeitsrechnung berichtet worden.

Die Spannweite seiner Forschungsergebnisse ist überaus groß; er kann durchaus als einer der bedeutendsten Mathematiker der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts bezeichnet werden. Neben der Wahrscheinlichkeitsrechnung leistete er Grundlegendes zur deskriptiven Mengenlehre, Topologie, Funktionalanalysis, mathematischen Logik, Theorie der dynamischen Systeme, Informations- und Algorithmentheorie und anderes mehr. Einige Details:

Das Verdienst, die „analytischen Mengen“ entdeckt zu haben, gebührt Michail Suslin. Unmittelbar mit dieser Entdeckung hängt die Erkenntnis zusammen, dass nicht alle analytischen Mengen borelsch sind. Von großer Bedeutung für die Funktionalanalysis und die Topologie war die Einführung der topologischen Vektorräume – unabhängig von John von Neumann. Kolmogorow formulierte eine notwendige und hinreichende Bedingung, dass ein topologischer Vektorraum normierbar ist. Ihm verdankt man die Einführung der Kohomologieringe, fundamental für die algebraische Topologie.

Hilbert hatte im 13. Problem die Frage aufgeworfen, ob sich Funktionen von n Variablen durch Superposition von Funktionen mit $k < n$ Variablen darstellen lassen. Zusammen mit seinem Schüler Wladimir Igorjewitsch Arnold (*1937) konnte Kolmogorow zeigen, dass jede stetige reelle Funktion durch Superposition stetiger Funktionen mit nur drei Variablen erhalten werden kann. Damit war Hilberts Vermutung widerlegt. Wenig später, 1957, bewies Arnold, dass bereits Funktionen von zwei Veränderlichen ausreichen.

Seine Studien zur Theorie dynamischer Systeme galten vor allem Stabilitätsuntersuchungen. In diesen Zusammenhängen hat Norbert Wiener, der als Begründer der Kybernetik gilt, die entsprechenden Beiträge von Kolmogorow gelobt, die sich teilweise mit seinen eigenen berührten.

Viele sowjetische Mathematiker, allen voran Kolmogorow, haben sich der Verbesserung des Mathematikunterrichtes an den allgemeinbildenden Schulen gewidmet. Er wurde Vorsitzender der Kommission für Mathematische Erziehung beim Präsidium der Sowjetischen Akademie der Wissenschaften. Er verfasste eine ganze Reihe von Lehrbüchern und hat entsprechende Lehrpläne ausgearbeitet.

Anlässlich des 70. Geburtstages von Kolmogorow richtete die Sowjetische Akademie der Wissenschaften ein Grußschreiben an ihn. Darin heißt es:

> *„... Sie begannen ihre mathematischen Arbeiten auf dem Gebiet der reellen Funktionen; und zwar mit vortrefflichen Beiträgen über trigonometrische Reihen, zur Maßtheorie, zur Mengenlehre, zur Theorie des Integrals und über Approximation von Funktionen. Im weiteren beeinflußten Sie wesentlich durch wichtige Arbeiten Probleme der konstruktiven Logik, die Topologie, die Mechanik (Theorie der Turbulenz), die Theorie der Differentialgleichungen, die Funktionalanalysis. Von grundlegender Bedeutung sind Ihre Arbeiten zur Wahrscheinlichkeitstheorie. Weithin bekannt sind Ihre axiomatische Grundlegung*

der Wahrscheinlichkeitstheorie und die Begründung der Markowschen Prozesse mit stetiger Zeit. Sie lösten eine große Anzahl von Problemen aus der Theorie der stationären Prozesse, der Theorie der Verzweigungsprozesse und der Informationstheorie. Im Bereich der Anwendungen haben Sie Untersuchungen durchgeführt zur Theorie des Schießens, über statistische Methoden für die Kontrolle von Massenproduktionen, zu Anwendungen mathematischer Methoden in der Biologie und in der mathematischen Linguistik. ...“ (Zitiert nach [Terpe, F. 1985, S. 44f.])

Man geht wohl nicht fehl in der Einschätzung, dass die Hinwendung der sowjetischen Mathematiker zur Praxis – freiwillig oder genötigt – einen herausragenden Beitrag zur Entwicklung des Nuklearprogrammes und der Raumfahrt geleistet hat, ähnlich wie in den USA, aber soziologisch gesehen ganz anders, nämlich staatlich organisiert. Aus diesem Grunde spricht der russische Mathematikhistoriker Sergej Demidow (*1942) von einer *„Sowjetischen Mathematischen Schule“*.

Ein hervorragender Repräsentant dieser zielgerichteten Orientierung mit bedeutendem positiven Einfluß auf Raumfahrt und Nuklearprogramm der Sowjetunion war Mstislaw Wsewolodowitsch Keldysch (1911–1978). Der vom Staat Hochgeehrte war Direktor verschiedener Forschungsinstitute der Sowjetischen Akademie der Wissenschaften, u. a. im Zentralen Aerodynamischen Institut, war seit 1951 Mitglied des Präsidiums, 1960 Vizepräsident und 1961 bis 1975 Präsident der Sowjetischen Akademie der Wissenschaften.

Nach dem Ende des 2. Weltkrieges arbeitete Keldysch zusammen mit Sergej Pawlowitsch Koroljow (1907–1966) und Iwan Kurtschatow (1903–1960) daran, den US-amerikanischen Vorsprung bei der Entwicklung von raketengestützten Atomwaffen aufzuholen. Zwischen 1953 und 1956 fanden erste Tests sowjetischer Wasserstoffbomben statt; es folgten geglückte Starts von Interkontinentalraketen. Am 4. Oktober 1957 gelang es, den ersten künstlichen Erdsatelliten, den Sputnik, auf eine Erdumlaufbahn zu bringen. Am 12. April 1961 flog der erste Mensch, Juri Gagarin (1934–1968), ins Weltall.

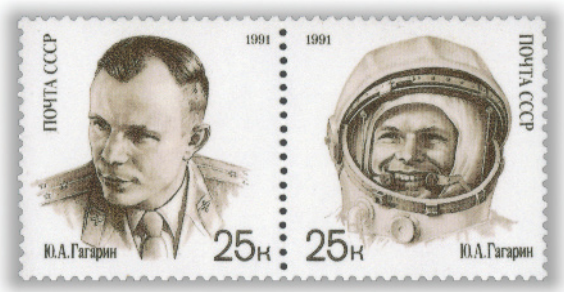


Abb. 11.7.16 Juri Gagarin (UdSSR 1991)



Abb. 11.7.17 Mstislaw Wsewolodowitsch Keldysch, Sergej Pawlowitsch Koroljow, Sergej Wladimirowitsch Iljuschin (UdSSR 1981, 1982, 1984)

Keldysch war auch wesentlich beteiligt an der Entwicklung von Rechentechnik und Großrechnern in der Sowjetunion. Er unterschrieb zwar eine Erklärung gegen den Dissidenten Andrej Sacharow, verhinderte jedoch dessen Ausschluss aus der Akademie. Keldysch war Mitglied zahlreicher internationaler Akademien und gelehrter Gesellschaften. Er wurde – eine der größten Ehrungen in der Sowjetunion – an der Kremlmauer beigesetzt.

Bei alledem war Keldysch auch und nicht zuletzt ein bedeutender Mathematiker. Im Anschluss an Shukowski und seinen Nachfolger Sergej Alexejewitsch Tschaplygin (1869–1942), aus dessen Schule auch bedeutende sowjetische Flugzeugkonstrukteure wie A. N. Tupolew (1888–1972) und S. W. Iljuschin (1894–1977) hervorgingen, widmete sich Keldysch der Theorie der Schwingungen bei Flugzeugen (Flattern der Tragflügel, Vibrationen), der Wellentheorie von Oberflächen von Flüssigkeiten. Dies führte ihn auf näherungsweise Integration von Differentialgleichungen und die Theorie konformer und quasikonformer Abbildungen.

Keldysch stammte aus einer baltischen Wissenschaftlerfamilie. Auch seine Schwester Ljudmila Wsewolodowna Keldysch (1904–1976) war eine ausgezeichnete Mathematikerin und arbeitete wie ihr Bruder hauptsächlich auf dem Gebiet der Aerodynamik. Sie hatte bei Lusin studiert und leistete weithin beachtete Beiträge zur mengentheoretischen Topologie.

Noch ein paar Worte zu Sergej Pawlowitsch Koroljow und seinem höchst erfolgreichen und dabei tragischen Leben. Er stammte aus Shitomir (Ukraine), arbeitete nach Studienende seit 1927 in der Luftfahrtindustrie und war Gründungsmitglied einer Gruppe in Moskau zum Studium der Rückstoßbewegung. In der Zeit der stalinistischen „Säuberungen“ 1938 wurde er wegen (angeblicher) Budgetverletzung verhaftet, kam in ein Arbeitslager und arbeitete dort in einem Konstruktionsbüro an Zusatztriebwerken für Jagdflugzeuge. Im Jahre 1944 freigelassen widmete sich Koroljow dem Raketenbau; die erste Langstreckenrakete wurde 1956 getestet. Als Erfolg seiner Bemü-

hungen erlebte er den ersten künstlichen Satelliten (Sputnik) und den ersten bemannten Weltraumflug. Seine Erkrankung und sein Tod (Krebs?, Tod während einer Herzoperation?) war für die sowjetische Raumfahrt ein nicht ausgleichbarer Verlust und brachte der US-amerikanischen Raumfahrt den entscheidenden Vorsprung im Wettlauf zum Mond. Die amerikanische Seite, unter Leitung von Wernher von Braun (1912–1977), ursprünglich während des Krieges im Raketenbau von Peenemünde und als Hauptverantwortlicher für die berüchtigte V2 tätig, konnte ihren Gegenspieler Koroljow nicht als Person identifizieren; erst einige Zeit nach dessen Tode wurde das Geheimnis gelüftet und Koroljow die verdiente Ehrung offiziell in Russland zuteil.

Trotz aller Verwerfungen und Unterdrückung bleibt doch die Aussage, dass es eine zielgerichtete Förderung der Naturwissenschaften mit Einschluss der Mathematik gegeben hat. Nach dem 2. Weltkrieg war die Sowjetunion – neben den USA – noch einige Zeit ein zweites Weltzentrum der Mathematik, vgl. [Kolchinsky 2006].

11.8 Computer verändern die Welt

Wohl kaum eine andere Erfindung oder Entdeckung in Wissenschaft und Technik hat die Welt so verändert wie die Konstruktion des Computers und seine Entwicklung in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts: Wirtschaft, Handel und Verkehr, Bankwesen und Verwaltung, Nachrichtenübermittlung, Luft- und Raumfahrt, Wissenschaft und Technik, Unterricht und Instruktion sind heute ohne den Einsatz von Computern undenkbar geworden. Sie durchdringen fast alle Bereiche unseres Lebens bis hin zur Steuerung der Heizung in unserer Wohnung. Deshalb – und auch im Hinblick auf den Titel der diesen Band enthaltenden Buchreihe *Vom Zählstein zum Computer* – wird hier die Entwicklung der auf Mathematik und Physik beruhenden Rechner von den Anfängen bis zu den Hochleistungsrechnern unserer Tage dargestellt und ihr Zusammenhang mit der Mathematik und der Kybernetik in den nachfolgenden Abschnitten beschrieben.

Vorbemerkungen

Es kann nicht Aufgabe sein, hier die höchst komplizierte Geschichte der Computertechnik im Detail nachzuzeichnen, kompliziert in mannigfacher Hinsicht: technische Erfindungen und Realisierungen, zu Grunde liegende mathematische Prinzipien, Anwendungsbereiche, herausragende Persönlichkeiten, führende Firmen bzw. Forschungseinrichtungen, Rolle der Staaten, militärische und ökonomische Geheimhaltung, Konkurrenz, explosionsartige Verbreitung von Personalcomputern, Wechselwirkungen mit anderen Wissenschaftsdisziplinen wie mathematischer Logik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Elektronik, Mikroprozessorentechnik, Psychologie, Medizin. Dazu tritt noch folgender historischer Sachverhalt, auf den K. O. May (1915–1977) deutlich hingewiesen

hat: Es sei schwer festzustellen, wer die eine oder andere technische Erfindung gemacht habe. So ginge es nicht um die Erfindung des Computers, sondern um die Entwicklung des Computers in seiner Wirkung und Ausbreitung.

Um sich im „Dschungel der Informationen“ zurecht zu finden wird hier als Leitfaden der Darstellung die Entwicklung der technischen Realisierungen gewählt, von den frühen Rechenhilfsmitteln zu den mechanischen Rechenmaschinen, vom „programmgesteuerten“ Rechner über elektromechanische Rechenmaschinen zu programmgesteuerten elektromagnetischen Digitalrechnern bis hin zu den Computern mit Transistoren und Mikroprozessoren und zu den Höchstleistungsrechnern unserer Tage in Gestalt der Vektorrechner und Parallelrechner.

Um den Entwicklungsprozess in seiner historischen Dynamik darzustellen, wird weit zurückgegriffen. Auch muss es genügen, einige Schlüsselereignisse herauszugreifen. Im Übrigen sei auf weiterführende Literatur hingewiesen, die teilweise autobiographischen Charakter hat, beispielsweise:

[Beauclair 1989 : Rechnen mit Maschinen] (stark illustriert)
[Ceruzzi 1999: A History of Modern Computing] (Entwicklung von Computern in mehreren europäischen Staaten, Überblicksartikel)
[Goldstine, H. H., 1973: The Computer from Pascal to von Neumann] (teilweise autobiographisch, viele Details. Entwicklung in den USA betont, aber auch Angaben über Entwicklungen in anderen Staaten)
[Howlett u. a. 1980: A History of Computing in the Twentieth Century] (Originalbeiträge führender Forscher, ausführliche Literaturangaben)
[Naumann, 2001: Vom Abakus zum Internet] (Berücksichtigung auch neuerer Ergebnisse)
[Randell (Ed.) 1973: The Origins of Digital Computers] (Originaltexte, Quellensammlung)
[Zuse 1993: Der Computer – Mein Lebenswerk] (autobiographisch)

Mit der technischen Realisierung bis zu den Super-Computern unserer Tage, also mit den Fortschritten in der sog. Hardware, ging zwangsläufig die Entwicklung der zum Betrieb und zur Nutzung dieser Anlagen notwendigen Software einher, d. h. die Bereitstellung von Betriebssystemen für die verschiedenen Computer und von Programmen für deren Nutzung zur Lösung unterschiedlicher Probleme – von der Behandlung komplizierter mathematischer Probleme bis hin zur Verwendung des Computers als Schreibmaschine und zur Ausfüllung von Steuererklärungen.

Der rasante Prozess der Software-Entwicklung kann im Rahmen dieses Buches ebenso wenig dargestellt werden wie der damit verbundene Wandel in der Behandlung mathematischer Aufgaben. Die Fähigkeit der Computer zur Speicherung und Verarbeitung ungeheuer großer Datenmengen ermöglichte die praktische Lösung vieler Probleme durch hinreichend genaue Approximation der exakten Lösungen, aber auch den lange ausstehenden Beweis des berühmten Vierfarbensatzes (vgl. Abschnitt 11.9.1).

Die enormen Möglichkeiten numerischer Berechnung durch Computer bewirkten neben einem starken Auftrieb der angewandten Mathematik auch eine Hinwendung von den früher bevorzugten Methoden der „kontinuierlichen“ Mathematik in der Analysis zu Verfahren der „diskreten“ Mathematik.

Schon früher waren iterative Verfahren zur numerischen Approximation der Wurzeln algebraischer Gleichungen an die Stelle der (aufgrund des Beweises von Abel) zum Scheitern verurteilten Versuche getreten, Lösungsformeln für allgemeine algebraische Gleichungen höheren Grades zu finden, Methoden, die nun mit Hilfe der Computer besonders wirkungsvoll eingesetzt werden konnten.

Auch die Bemühungen, Lösungen von Integralgleichungen oder von Randwertaufgaben bei gewöhnlichen oder partiellen Differentialgleichungen in „geschlossener Form“ anzugeben, waren schon lange durch numerische Methoden ersetzt worden, indem man den kontinuierlichen Verlauf der als Lösungen auftretenden Kurven, Flächen oder räumlichen Felder durch Berechnung ihrer Werte in einem Netz diskreter Abszissen bzw. Gitterpunkte approximierte. Diese „Diskretisierung“ des Problems führte auf die Lösung von Gleichungssystemen, insbesondere auf Systeme linearer Gleichungen, und angesichts ständig wachsender Genauigkeitsforderungen auf immer dichtere Gitterpunktnetze, also auf große Systeme, deren Lösung „von Hand“ unmöglich ist. Moderne Computer lösen Systeme mit Zigtausenden linearer Gleichungen in kurzer Zeit – eine Leistung, die noch vor wenigen Jahrzehnten undenkbar schien. Dazu wurden anstelle des theoretisch so sicheren und i. a. auch praktischen Gaußschen Algorithmus spezielle Verfahren für die in den Anwendungen oft auftretenden speziellen Formen der Koeffizientenmatrix entwickelt, z. B. für Bandmatrizen und „spärlich besetzte“ Matrizen (d. h. Matrizen mit sehr vielen Nullen).

Diese Beispiele ließen sich leicht vermehren. So haben etwa die Probleme der Optimierung in den Wirtschaftswissenschaften zur Entwicklung von Algorithmen und entsprechender Software für die lineare, die dynamische und die kombinatorische Optimierung geführt, die Möglichkeiten moderner medizinischer Technik zur Entwicklung mathematischer Methoden, geeigneter Algorithmen und Software für bildgebende Verfahren der Computer- und Magnetresonanztomographie herausgefordert und die Ergebnisse der Zahlentheorie Eingang in die Sicherungssysteme für die Daten von Banken und den Schutz vor Missbrauch von Automaten gefunden.

All dies ist seit dem Zweiten Weltkrieg im Rahmen der aus Mathematik und Elektrotechnik hervorgegangenen neuen Disziplin entstanden, die im Englischen Computer Science, bei uns Informatik heißt.

Das Fachwort „Informatik“ als Bezeichnung einer wissenschaftlichen Disziplin dürfte vermutlich erstmals 1968 geprägt worden sein. Ein Teilnehmer (K. Nickel) an der Jahresversammlung der Akademie der Naturforscher Leopoldina vom 14.–17. Oktober 1971 in Halle/Saale erinnert sich:

> *„Wenn ich mich recht erinnere, war es während des von Prof. Lehmann (Dresden) einberufenen III. Internationalen Kolloquiums über aktuelle Probleme der Rechentechnik in Dresden von 18. 2.–25. 2. 1968, daß dieser Name ‚erfunden' wurde. Während und außerhalb der Tagung wurden die verschiedensten Namen als Äquivalent für das englische computer science vorgeschlagen, wie etwa ‚Computer-Theorie' und ‚Komputor-Theorie', ‚Theorie der Informationsverarbeitung' (‚Informationstheorie' war schon für ein Spezialgebiet verbraucht) usf. Weil all die vorgeschlagenen Namen nicht zweckmäßig erschienen (zu lang, nicht eindeutig genug) einigte man sich schließlich (wenn ich mich recht erinnere beim Frühstück am letzten Morgen der Tagung) auf ‚Informatik'."* (Zitiert bei [Naumann 2001, S. 12f.])

Was ist Informatik? Diese Frage wird bis heute von den Informatikern und anderen nicht einheitlich beantwortet. Das geht so weit, daß behauptet wurde, es gäbe gar keine Informatik, sondern eine Reihe unterschiedlicher Informatiken. Immerhin hat man sich, bedingt durch die Notwendigkeit, strukturierte Curricula anzubieten, im wesentlichen darauf einigen können, daß *Informatik Technische*, *Praktische Informatik* und *Theoretische Informatik* die Kernbestandteile der Informatik sind. Man spricht auch von *Kerninformatik* und stellt ihr die *Bindestrich-Informatiken* wie Wirtschafts-Informatik, Rechts-Informatik, Medizin-Informatik gegenüber.

Die Theoretische Informatik ist als Teil der Mathematik anzusehen. Allerdings interessieren sich die „klassischen" Mathematiker kaum dafür. Zum anderen gibt es sowohl in der Technischen Informatik als auch in der Praktischen Informatik große Teile, in denen mit formalen Begriffen und Vorgehensweisen gearbeitet wird. Auch diese Teile sind als Mathematik anzusehen.

11.8.1 Frühe Rechentechnik, mechanische Rechenmaschinen: Ein Rückblick

Gewöhnlich wird die Geschichte der Rechentechnik eingeteilt nach den technischen Realisierungen, also nach dem Gebrauch mechanischer Rechenhilfsmittel, nach mechanischen Rechenmaschinen, elektrodynamischen Rechenmaschinen und elektronischen Rechenmaschinen. Allerdings überschneiden sich diese Etappen zeitlich; noch heute sind die russischen Stchjoty (eine Modifikation des Abacus) gelegentlich im Gebrauch, trotz der Existenz hoch leistungsfähiger Rechner.

So gesehen beginnt die Geschichte der Rechentechnik mit den Kerbhölzern der Germanen und den Knotenschnüren der Inka, mit dem chinesischen suanpan und dem davon abstammenden japanischen soroban, mit dem antiken abacus, mit den „Gunterschen Skalen", mit den Neperschen Rechenstäbchen. Mit einigem Recht kann man astronomische Tafeln und Logarithmentafeln ebenso hinzurechnen wie die Astrolabien.

An anderer Stelle ist schon von der frühen Rechenmaschine des Tübinger Universitätsprofessors Wilhelm Schickard (1592–1635) berichtet worden, der bedeutende Erfahrungen beim Bau wissenschaftlicher Instrumente besaß. Es ist nicht ganz sicher, dass die Maschine wirklich konstruiert wurde, obwohl Schickard darüber begeistert an seinen Freund Johannes Kepler (1571–1630) in Prag am 20. September 1623 geschrieben hat – unter Anspielung auf Keplers Logarithmentafeln (siehe Bd. I, 8.5).

Trotz der nur vagen Beschreibung ist die Maschine (nach)gebaut worden; dahinter liegt die Idee der Neperschen Rechenstäbchen (vgl. ausführlich [Naumann 2001, S. 45f.]).

Bis in die jüngere Vergangenheit hat man geglaubt, der junge Blaise Pascal habe als erster eine Rechenmaschine gebaut, um seinem Vater, einem Steuerpächter, die Rechenarbeit zu erleichtern. Pascal, versehen mit einem königlichen Privileg, hat an die fünfzig derartige Maschinen hergestellt; acht davon blieben erhalten, eine davon befindet sich im Mathematisch-Physikalischen Salon in Dresden.

Pascal widmete 1652 ein Exemplar seiner Maschine der hochgebildeten Königin Christine von Schweden (1626–1689); sie hatte Descartes an ihren Hof gezogen, der dort aber nach kurzer Zeit verstarb.

Ähnliche Konstruktionen – mehr oder weniger angelehnt an Pascal – kamen zur Verwendung in der Addiermaschine des Engländers Samuel Morland (ca. 1625–1695) und bei dem französischen Uhrmacher René Grillet de Roven (16. Jh.) [Naumann 2001]. Doch scheinen sie keine ernsthafte Bedeutung erlangt zu haben.

Die spannende Geschichte um die Rechenmaschine von Leibniz – sie lässt sich bis in das Jahr 1670 zurückverfolgen – wurde schon in Bd. I, Kap. 8.5 beschrieben. Die hauptsächliche Erfindung, die der Staffelwalze, läßt sich nicht genau datieren. In den Modellen der Rechenmaschinen aus den Jahren 1674 und 1695 ist das Prinzip der Staffelwalze durchgebildet; die Maschinen sind jedoch nicht erhalten geblieben [Mackensen 1973].

Bis gegen Lebensende hat Leibniz die Pläne zu einer Rechenmaschine weiter verfolgt und Modelle bauen lassen. Die jüngste Maschine wurde nach dem Tode von Leibniz in Zeitz von dem Mathematiker Gottfried Teubert (Anfang 18. Jahrhundert) betreut, gelangte schließlich auf Umwegen – u. a. über den Göttinger Mathematiker Abraham Gotthelf Kästner (1719–1800) – nach Hannover und befindet sich jetzt in der Niedersächsischen Landesbibliothek in Hannover.

Leibniz hat viel Mühe auf vollständig funktionsfähige Maschinen verwenden lassen und erhebliche Gelder dafür aufgewandt. Die letzte Maschine wies noch immer Fehler auf, und zwar bei der Zehnerübertragung. Dem in Dresden wirkenden Mathematiker und Computerfachmann Nikolaus Lehmann (1921–1998) gelang es 1990, an einem Nachbau zu zeigen, dass eigentlich nur eine Kleinigkeit den Fehler verursacht hatte. Auf dem Internationalen Leibniz-



Abb. 11.8.1 Rechenmaschine von Leibniz [Nds. Landesbibliothek Hannover]

Symposium 1996 in Leipzig hat Lehmann den verbesserten, nun voll funktionsfähigen Nachbau zur Freude aller Zuschauer präsentiert.

Leibniz hat – auch darin ein Pionier der „Computer"-Technik und der Informatik – das Dualsystem propagiert und sogar die Skizze einer auf dem binären System beruhenden (mechanischen) Rechenmaschine hinterlassen [Wußing 1999].

Ein Modell dieser „Machina Arithmeticae Dyadicae" wurde nach der Übersetzung des lateinischen Textes und dem Entwurf von L. v. Mackensen 1971 vom Deutschen Museum München gebaut. Im Jahre 2004 bauten E. Stein und G. Weber in Hannover ein verbessertes Modell dieser binären Rechenmaschine, das im gesamten verfügbaren Zahlenraum richtig addiert und multipliziert, vgl. [Stein/Kopp 2006, S. 60ff.]. Die von Leibniz beschriebene Binär-Maschine kann als Vorläufer der jetzigen binär rechnenden Computer angesehen werden, deren erste mechanische Ausführung 1936 von K. Zuse gebaut und als Z1 patentiert wurde.

Allerdings kam es erst im 18. Jahrhundert zur wirklichen, zur praktischen Verwendung von mechanischen Rechenmaschinen und zwar mit Konstruktionen, die von dem Italiener Giovanni Poleni (1683–1761), dem Wiener Antoni Braun (um 1726), dem deutschen Mechaniker Jacob Leupold (1674–1727) und dem deutschen Pfarrer Philipp Matthäus Hahn (1739–1790) stammten, der am Ende des 18. Jahrhunderts nach langen Mühen Vier-Spezies-Maschinen hergestellt hat. Hahn war übrigens an Naturwissenschaften interessiert, hat Experimente verschiedener Art durchgeführt und suchte mit einer „Weltmaschine" Gottes Schöpfungsplan zu enthüllen.

Erst mit Beginn der Industriellen Revolution und der nachfolgenden Massenproduktion kam es zur durchgehenden Verwendung von Rechenmaschinen in Verwaltung, Versicherungswesen und Produktion.

Beispielsweise konstruierte der Franzose Charles-Xavier Thoma (1785–1870) um 1820 eine Maschine, die er „Arithmomètre“ nannte. Anfangs konnten 15, später 100 Maschinen pro Jahr hergestellt werden; unter seinem Sohn waren im Jahre 1871 schon ungefähr 1000 Maschinen vorhanden. Auf der Weltausstellung 1855 in Paris erzielte die „Arithmomètre“ einen großen Erfolg, und der deutsche Techniker und Professor der Kinematik Franz Reuleaux (1829–1905) bemühte sich erfolgreich um die Popularisierung und breite Anwendung, insbesondere auch in Deutschland:

> *„Denn unter die drückendsten Arbeiten, kaum besser als die Handlangerei beim Baumeister des Aristoteles, gehört die geistige Handlangerei grosser Zahlenrechnungen, wie sie der Maschinen-, Bau-, Berg- und Militäringenieur, der Physiker, der Astronom und der Zahlenmathematiker in Versicherungsgesellschaften, Rentenanstalten, der Steuer- und Finanzbeamte, der Statistiker viele Stunden, Tage, Wochen, Monate lang auszuführen haben, wenn ihnen nicht die Maschine hilft. Fast keine geistige Erschlaffung ist so groß wie diejenige nach tagelang fortgesetzter Beschäftigung mit dem Abstraktum der Zahlen, namentlich in höheren Rechnungsarten, und bekannt ist es, dass es bis jetzt nicht menschenmöglich gewesen ist, Logarithmentafeln fehlerfrei zu rechnen, indem der menschliche Geist sich entschieden zu sträuben scheint, in die unbeugsame Maschinenmässigkeit einzutreten, welche dafür gefordert wird.“* [Reuleaux 1892, S. 2f.]

Von der Vielzahl deutscher Fabrikationsstätten für Rechenmaschinen sei nur die 1845 gegründete Firma Ferdinand Alfred Lange in Glashütte im Osterzgebirge benannt (vgl. ausführlich [Naumann 2001, S. 53ff.]). Schon anfangs zeichnete sie sich durch höchste Präzision bei der Herstellung von Einzelteilen (Räder, Schrauben, Zeiger usw.) aus. 1877 begann man unter der Direktion des Carl Dietzschold (1852–1922), Absolvent des Polytechnikums in Karlsruhe, mit der Herstellung von Rechenmaschinen; 1960 wurde deren Produktion eingestellt. Man hatte in verschiedenen Typen ca. 85 000 Maschinen hergestellt, die in 27 Staaten exportiert worden waren. Die Firma Lange in Glashütte existiert noch und fertigt in jüngster Zeit höchst anspruchsvolle und sehr teure mechanische Uhren.

Dem Franzosen Leon Bollée (1870–1913) gelang die Konstruktion der ersten direkt multiplizierenden Rechenmaschine.

Die weltweit umfangreichste Sammlung historischer Rechenmaschinen befindet sich im „Arithmeum“ in Bonn, einem dem Institut für diskrete Mathematik angeschlossenen Museum. Über Charles Babbage, seine „Difference Engine“ und die zu seinen Lebzeiten nicht mehr gebaute, programmgesteuerte „Analytical Engine“ ist schon im Abschnitt 10.0.5 ausführlich berichtet worden.

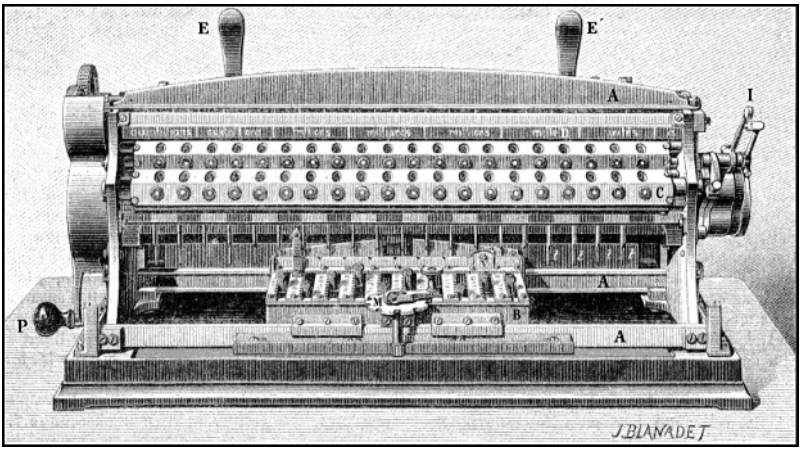


Abb. 11.8.2 Multipliziermaschine von Leon Bollée. Auf der Pariser Weltausstellung 1889 wurde er dafür mit einer Goldmedaille ausgezeichnet.

11.8.2 Elektromechanische Rechenmaschinen: Hermann Hollerith

Erfolgreich dagegen war unter den Bedingungen der Industriellen Revolution das mit elektrischem Strom betriebene Lochkartensystem, das nach seinem Erfinder Hermann Hollerith (1860–1924) benannt wurde.

Hollerith stammte aus einer in die USA eingewanderten deutschen Familie, absolvierte in New York die Columbia College School of Mines. Seine Tätigkeit an einer US-Behörde, die für Volkszählungen zuständig war, führte ihn zu der Aufgabe, riesige Mengen von Fragebögen auszuwerten. Auch die Fahrkartenkontrolle forderte sichere Aussagen bei einer Vielzahl von Passagieren. Dies und andere Begegnungen mit praktischen Aufgaben bei der Auswertung von großen Datenmengen führte ihn zur Erfindung der Lochkarten: mit einer speziellen Zange wurden Löcher gestanzt, deren Platz auf der Lochkarte den Eigenschaften der Personen zugeordnet waren. Zur Auswertung der Karten wurden spezifische Sortiermaschinen entwickelt.

Nach einigen Probeversuchen wurde die 11. Amerikanische Volkszählung von 1890 mit den Hollerithmaschinen ausgewertet. Es wurden 62 622 250 Lochkarten ausgewertet, die je etwa 18 bis 20 Lochungen aufwiesen. Bereits nach 2 Jahren war die Auswertung abgeschlossen und das bei einer gewaltigen Kostenersparnis. Hollerith erhielt vom Columbia College die Ehrendoktorwürde. Holleriths Erfindung wurde von zahlreichen Staaten übernommen, auch von Deutschland. Im Reichspatent vom 8. Januar 1889, Nr. 49593, wird das Verfahren folgendermaßen beschrieben:

> *„Ein Verfahren zur Ermittlung statistischer Ergebnisse, darin bestehend, daß Zählkarten oder Streifen zur Anwendung kommen, welche entweder in sichtbarer Weise in Felder getheilt sind, deren jedes je*

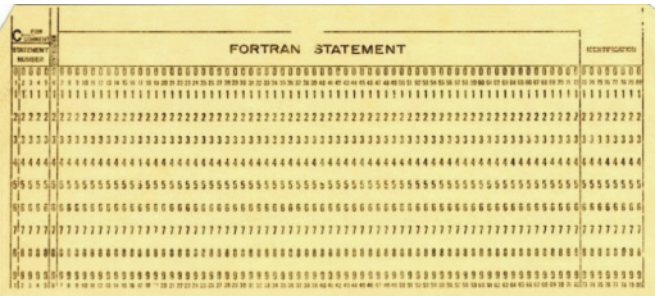


Abb. 11.8.3 Lochkarte für die Hollerith-Rechenmaschine

einer statistischen Angabe entspricht, oder welche auf Grund einer mit einer sichtbaren Feldereintheilung versehenen Urkarte in solche Felder getheilt zu denken sind, daß die auf die Einzelperson, bezüglich sonstiger Einheit, bezüglichen statistischen Angaben in geeigneter Weise (z. B. mittels Löchern, Vorsprüngen, Vertiefungen oder dergl.) auf den Zählkarten oder Streifen zum Ausdruck gebracht werden, und daß die Karten oder Streifen schließlich der Einwirkung einer elektrischen Kontaktvorrichtung unterworfen werden, derart, daß mit letzterer verbundene Zähl- oder Registrierwerke durch die Karten oder Streifen entsprechend den auf denselben zum Ausdrucke gebrachten statistischen Angaben, welche zusammengestellt werden sollen, beeinflußt werden und demnach durchaus genaue Ergebnisse anzeigen.“ (Zitiert nach [Naumann 2001, S. 78]) Fürwahr, eine Absicherung des Patentes nach allen Seiten!

Die Volkszählungen wurden nach verbesserten Verfahren in Norwegen und Frankreich (1895), in Rußland (1896) und wiederum in den USA (1900) durchgeführt; in anderen Staaten traten Verzögerungen ein. Parallel dazu erfolgten Gründungen von Firmen zur Herstellung entsprechender technischer Ausrüstungen, mit Erweiterungen und Verbesserungen.

Hollerith-Verfahren und deren vielseitige Anwendungen sind noch lange in Gebrauch geblieben, selbst in der Zeit nach dem Zweiten Weltkrieg, als elektronische Computer schon auf dem Vormarsch waren.

In seiner Darstellung *Vom Abakus zum Internet – Die Geschichte der Informatik* (2001) kommt F. Naumann zu folgender Einschätzung: *„1958 existierten allein in der Bundesrepublik noch insgesamt 3000 Lochkartenstationen, deren Aufgaben erst mit der Installation von Rechnern der zweiten Generation sukzessive übernommen wurden. Trotz Vervielfachung der Verarbeitungsgeschwindigkeit erreichte man den erhofften Rationalisierungseffekt der ‚neuen Elektronengehirne‘ jedoch nur langsam, was sich hauptsächlich daraus erklärt, dass die alte Betriebsorganisation im Wesentlichen beibehalten wurde.“* [Naumann 2001, S. 84]

11.8.3 Programmgesteuerte elektromechanische Digitalrechner: Konrad Zuse

Die Leistung von Konrad Zuse (1910–1995), der nachweislich 1941 die erste vollautomatische programmgesteuerte und funktionierende (!) Rechenanlage (elektromechanischer Digitalrechner) konstruiert hat, ist durch Krieg und Nachkriegszeit in der Öffentlichkeit zunächst im Hintergrund geblieben. Noch 1947, bei einem Besuch der Harvard Universität, hatte Zuse beträchtliche Mühe, Howard Aiken (1900–1973), den Schöpfer des „Mark I", von seiner Priorität zu überzeugen. Zuse in seiner Autobiographie:

> *„Ein (. . .) Besuch führte uns an die Harvard University in Cambridge bei Boston. Professor Aiken persönlich zeigte uns seine Geräte. Sein Interesse an unseren Arbeiten war allerdings nicht sehr groß. Man war in Harvard noch ganz davon überzeugt, daß der Computer eine amerikanische Erfindung sei. Es bedurfte einiger Mühe, unsere amerikanischen Gesprächspartner davon zu überzeugen, daß auch wir unser Licht nicht unter den Scheffel zu stellen brauchten. Aiken hat dies später eingesehen und sich entsprechend geäußert."*
> [Zuse 1993, S. 104]

Zuse stammt aus einer preußischen Postbeamtenfamilie. Er studierte an der Technischen Hochschule Berlin-Charlottenburg zunächst Maschinenbau, trotz seiner Begabung für Architektur und Malerei, wechselte dann zum konstruktiven Ingenieurbau. Nach der Diplomprüfung (1935) war er eine Zeitlang selbständig, war im Flugzeugbau tätig, arbeitete sich seit 1935 an die Idee einer Rechenmaschine theoretisch und praktisch heran: es entstanden

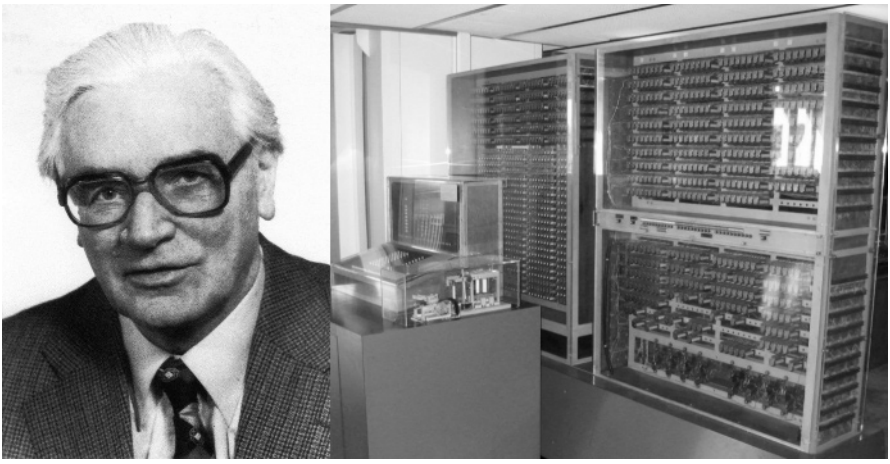


Abb. 11.8.4 Konrad Zuse [Zuse 1993] und seine Rechenmachine Z3 [Deutsches Museum München, GNU-FDL]



Abb. 11.8.5 Aikens MARK I. [Zuse 1993, S. 68]

die mechanisch arbeitenden Apparate Z1 bis Z3. Sein Mitarbeiter Helmut Schreyer (1912–1984) schlug Elektronenröhren vor, eine Idee, die Zuse zunächst nicht weiter verfolgte, die sich aber in der Zukunft als Schlüsselidee erweisen sollte. Die Z2 arbeitete 1937 mit elektromagnetischen Relais, aber mit der mathematischen Logik nach Hilbert/Ackermann als theoretischem Hintergrund und war 1939 kurz vor der Einberufung Zuses zur Wehrmacht vollendet. Er bot dem Heereswaffenamt die Konstruktion einer Chiffriermaschine an – ergebnislos (das Gerät Enigma war im Gebrauch und wurde für völlig sicher gehalten. Bei der Entschlüsselung hat bekanntlich auch Alan Mathison Turing (1912–1954) in England eine Rolle gespielt). Wieder im Militärdienst arbeitete er in den Henschel-Flugzeugwerken, wo auch militärisch interessante Fragen behandelt wurden.

Eine Vorführung der Z2, die einigermaßen funktionierte, verschaffte Zuse eine Teilfinanzierung durch die Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt für die größere Maschine Z3, die 1941 fertiggestellt war und völlig korrekt arbeitete: Elektromagnetische Relaistechnik, binäres Zahlensystem, gleitendes Komma, Steuerung über 8-Kanal-Lochstreifen, Geschwindigkeit: ca. drei Sekunden für Multiplikation, Division, bzw. Quadratwurzelziehen. Doch galt die Z3 eher noch als Spielzeug, wurde nie konkret eingesetzt und schließlich im Bombenkrieg zerstört, wie auch Z1 und Z2. Nach Kriegsende, 1960, wurde Z3 nachgebaut und steht nun im Deutschen Museum in München.

Wieder als Statiker bei den Henschel-Werken fand Zuse Wege, eine kleine Firma „Zuse Ingenieurbüro und Apparatebau, Berlin“ zu gründen. Mit einigen wenigen Mitarbeitern und Verwertung von Abfall-Teilen wurde in einer leer stehenden Halle seit 1942 die Z4 gebaut, die Produktion musste

aber wegen der Bombardierungen öfter umquartiert werden. Ende 1944 war Z4 im Prinzip funktionsfähig. Übrigens erfuhr Zuse auf dem Wege über den deutschen Geheimdienst von der Arbeit von Professor Aiken an MARK I an der Harvard Universität; aus dem Foto konnte man allerdings nicht viel entnehmen.

Die Z4 wurde vor den heranrückenden sowjetischen Truppen in Sicherheit gebracht; Zuse samt Familie und Z4 erreichten nach abenteuerlicher Flucht den Ort Oberjoch im Allgäu; dort traf man übrigens Wernher von Braun, den Raketenspezialisten, der sich den Amerikanern zur Verfügung stellte.

In der unmittelbaren Nachkriegszeit und danach war wohl in Deutschland kein Platz für große Entwicklungen im Computerbau. Die Geschäftsgründungen von Zuse blieben ohne wesentlichen Erfolg, Z4 wurde nach Zürich ausgeliehen. Immerhin gelang Zuse, der im wesentlichen auf theoretische Arbeiten angewiesen war, schon bald nach dem Kriege die Erfindung von Programmiersprachen für Rechenautomaten, fast ein Jahrzehnt vor der Veröffentlichung von problembezogenen Programmiersprachen wie etwa FORTRAN. Zuse wurden mannigfache Ehrungen zuteil (vgl. die Autobiographie [Zuse 1993] und [Zuse 1980]).

Nach dem Krieg stellte sich heraus, dass auch in anderen europäischen Ländern und in Japan an Rechnern gearbeitet worden war, z. B. durch H. Zemanek in Österreich [Ceruzzi 1999]. Bei Ceruzzi finden sich spezielle Artikel über die Entwicklung des Computers in den USA und der Sowjetunion, in Zentraleuropa, in London, in der Tschechoslowakei und eine Fülle von Überblicksartikeln. So übernahmen die USA und England nach dem Kriege mit erheblichen finanziellen Mitteln und einer Reihe bedeutender Erfinder und Mathematiker die führende Rolle im Computerbau; diese Entwicklung hatte sich schon Ende des Krieges abgezeichnet.

11.8.4 Entwicklungen in den USA und in England

Die mathematische Behandlung ballistischer Kurven geht bis auf die Renaissance zurück: Tartaglia, Galileo, später u. a. Newton. Im 19. Jahrhundert wurde die Abhängigkeit der Flugbahn vom Luftwiderstand besonders in England und Frankreich studiert; dies hatte noch Auswirkungen während des Ersten Weltkrieges. Der deutschen Artillerie gelang sogar die Konstruktion eines Geschützes, mit dem man von der Westfront Paris erreichen konnte. In den USA wurden 1918 von der United States Army zwei Gruppen zum Studium ballistischer Probleme mit hervorragenden Mathematikern eingesetzt, unter ihnen Oswald Veblen. Der Fortschritt bestand in der Folgezeit darin, praktische Experimente mit einer mathematischen Behandlung (Differenzenmethode, totale Differentialgleichungen, Wahrscheinlichkeitsrechnung) zu verbinden. Führende Mathematiker wurden einbezogen. Diese Tradition wurde in den zwanziger und dreißiger Jahren weiter gepflegt und verstärkt, als die von Deutschland ausgehenden Gefahren erkannt wurden. Die ohnehin schon starke wissenschaftliche Basis in den USA wurde noch verstärkt durch

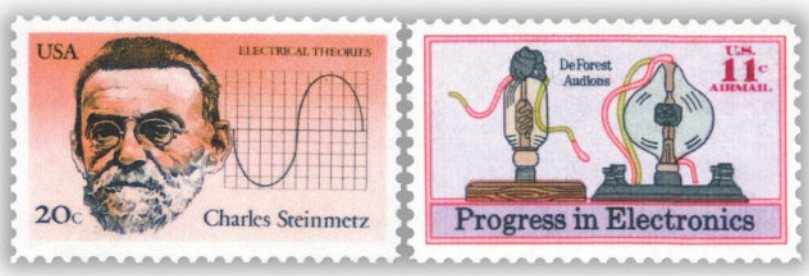


Abb. 11.8.6 Charles P. Steinmetz (USA 1973), Lee de Forest: Erfindung der Triode (USA 1973)

die aus Deutschland und anderen europäischen Diktaturen vertriebenen Gelehrten, u. a. John von Neumann.

Unter Anknüpfung an die Ideen von Babbage und nach vielen testenden Versuchen – Einzelheiten würden hier zu weit führen; vgl. [Goldstine 1973] – wurden verschiedene Versuche zur Konstruktion von Rechenmaschinen unternommen, zwischen den Kriegen und während des Zweiten Weltkrieges. Wiederum spielten ballistische Probleme anfangs eine Hauptrolle. Es galt, die Rechenarbeit zu vereinfachen für Probleme des Bombenabwurfes, der Flugabwehr, der gewöhnlichen Artillerie. Rechnerunterstützung wurde auch dringend nötig in den Forschungsbereichen von Bell Telephone Laboratories, General Electric Co., Massachusetts Institute of Technology (MIT) und in militärischen und universitären Forschungseinrichtungen.

Aus einer Fülle erstklassiger Forscher seien Vannevar Bush (1890–1974) vom MIT und Charles Proteus Steinmetz (1865–1923) von General Electric Co. herausgehoben. Durch sie wurden auch komplizierte Stromkreise einer mathematischen Behandlung fähig.

Lee de Forest (1873–1961) erfand 1906 die Elektronenröhre Audion (heute Triode genannt) zur Verstärkung schwacher elektrischer Signale. Er gilt als einer der Väter des Elektronikzeitalters.

Den späteren technologischen Fortschritt ermöglichten – will man auf die Basisentdeckungen eingehen – die Fortschritte der theoretischen Physik (Joseph J. Thomson, M. Planck, A. Einstein, N. Bohr, A. Sommerfeld, P. Dirac, E. Schrödinger, M. Born, W. Heisenberg) wie auch die Vervollkommnung der Methoden der mathematischen Physik nach dem gleichnamigen Standardwerk von Courant/Hilbert.

Im Jahre 1893 schlug der Spanier Torres Quevedo (1852–1936) eine elektromagnetische Version der Maschine von Babbage in Form einer Versuchsanordnung vor. Die Publikation 1914 in einem französischen Journal dürfte jedoch kaum eine Wirkung ausgelöst haben.

Nach 1928 fanden die Hollerith-Maschinen in England breite Anwendung bei der Erarbeitung von astronomischen Tafeln; die Schlüsselfigur war Leslie John Comrie (1893–1950).

11.8.5 Elektromechanische Computer

Ende der dreißiger Jahre begann man sich für digitale elektromechanische Computer zu interessieren, vor allem Howard H. Aiken, Physikabsolvent der Harvard Universität und George Robert Stibitz (1903–1995), Mathematiker in den Bell Telephone Laboratories.

In einer Denkschrift vom 4. Nov. 1937 erläuterte Aiken die Vorzüge gegenüber dem Lochkartensystem; dies führte zu einer Abmachung zwischen Aiken und einer Arbeitsgruppe bei IBM (International Business Machines Corporation). Man begann 1939 und 1944 war die Maschine vollendet: „MARK I". Aus dem von Aiken begründeten Computation Laboratory in Harvard gingen weitere Maschinen für die US-Streitkräfte der Marine und Luftwaffe hervor, MARK II bis MARK IV, vollendet 1952.

Es muss hinzugefügt werden, dass Claude Edwood Shannon (1916–2001) bereits 1938 in einer Publikation darlegte, wie Maschinen mit komplizierten Stromkreisen von der Anwendung der sog. Booleschen Algebra profitieren können – eine höchst folgenreiche Entdeckung. In diesem Zusammenhang gilt Shannon als einer der Begründer der Informatik.

Einige Sätze aus der Denkschrift *Proposed automatic calculating machine* von Aiken, 1937:

> *"The increased accuracy of physical measurement has made necessary more accurate computation in physical theory, and experience has shown that small differences between computed theoretical and experimental results may lead to the discovery of a new physical effect, sometimes of the greatest scientific and industrial importance. (...) The present development of theoretical physics through wave mechanics is based entirely on mathematical concepts and clearly indicates that the future of the physical sciences rests in mathematical reasoning directed by experiment. At present there exist problems beyond our ability to solve, not because of theoretical difficulties, but because of insufficient means of mechanical computation. (...)*
>
> *Points of difference between punched card accounting machinery and calculating machinery as required in the sciences.*
>
> *The features to be incorporated in calculating machinery specially designed for rapid work on scientific problems, and not to be found in calculating machines as manufactured for accounting purposes, are the following:*
>
> 1. *Ordinary accounting machines are concerned almost entirely with problems of positive numbers, while mechanics designed for mathematical purposes must be able to handle both positive and negative quantities.*
> 2. *For mathematical purposes, calculating machinery should be able to supply and utilize a wide variety of transcendental functions, as the trigonometric functions; elliptic, Bessel, and probability*

functions; and many others. Fortunately, not all these functions occur in a single computation; therefore a means of changing from one function to another may be designed and the proper flexibility provided.

3. *... calculating machinery designed for application to the mathematical sciences should be fully automatic in its operation once a process is established.*
4. *(...)"* [Randell 1973, S. 192f.]

Jedenfalls wurde durch Aiken und Mitarbeiter die Harvard Universität zur Schlüsselinstitution für die Computer-Industrie bzw. Informatik, sowohl in der Forschung als auch in der Lehre bei der Ausbildung des Nachwuchses.

Stibitz und seine Mitarbeiter begannen 1937 und vollendeten einen ersten Entwurf 1940. Aiken hatte abgeschätzt, dass MARK I etwa hundertmal schneller sei als der beste mechanische Rechner. Und doch waren seine elektromechanischen Maschinen und die von Stibitz zum Zeitpunkt ihrer Vollendung, 1944 bzw. 1940, dem Prinzip nach schon veraltet: Das Zeitalter der elektronischen Rechenmaschinen hatte schon begonnen. Die Maschine ENIAC (1946) war rund 500 mal schneller als elektromechanische Maschinen.

11.8.6 Computer mit Röhrentechnik

Der Fortschritt bei der Rechengeschwindigkeit war zu diesem Zeitpunkt (der Transistor war noch nicht erfunden) nur durch Röhrentechnik zu erzielen; dafür lagen in der Radiotechnik reichlich Erfahrungen vor.

Wie es scheint begann John Vincent Atanasoff (1903–1971) – er stammt aus einer bulgarischen Einwandererfamilie – seit 1937 über die Idee einer (digitalen) Rechenmaschine mit Vakuumröhren im Rechenwerk und auf Aussagenlogik beruhenden Schaltungen nachzudenken. Zusammen mit einem Mitarbeiter war ein Prototyp im Herbst 1939 fertiggestellt, hat aber zunächst keine Schule gemacht. Die Maschine fand allerdings spezielle Anwendungen auf militärischem Gebiet bei linearen Differentialgleichungen und Integralgleichungen [Goldstine 1973, S. 123ff.]. Nur eine wirkliche Maschine war 1942 fertiggestellt und erhielt die Bezeichnung „ABC" (Atanasoff Berry Computer), „Berry" nach dem Mitarbeiter Clifford Edward Berry (1918–1963).

Die berühmte Maschine ENIAC wurde 1943 von John Persper Eckert jr. (1919–1995), John W. Mauchly (1907–1980), Herman Heine Goldstine (1913–2004) – dem Verfasser der historischen Darstellung *The Computer from Pascal to von Neumann* (1973) – seiner Frau Adele Katz-Goldstine und anderen an der „Moore School for Electrical Enineering" an der Universität Philadelphia in Angriff genommen. ENIAC steht für „Electrical Numerical Integrator and Computer".

Goldstine berichtete von den Risiken, die einzugehen waren: 17 000 Radioröhren von 16 verschiedenen Typen wurden benötigt, zum Schluss wurden

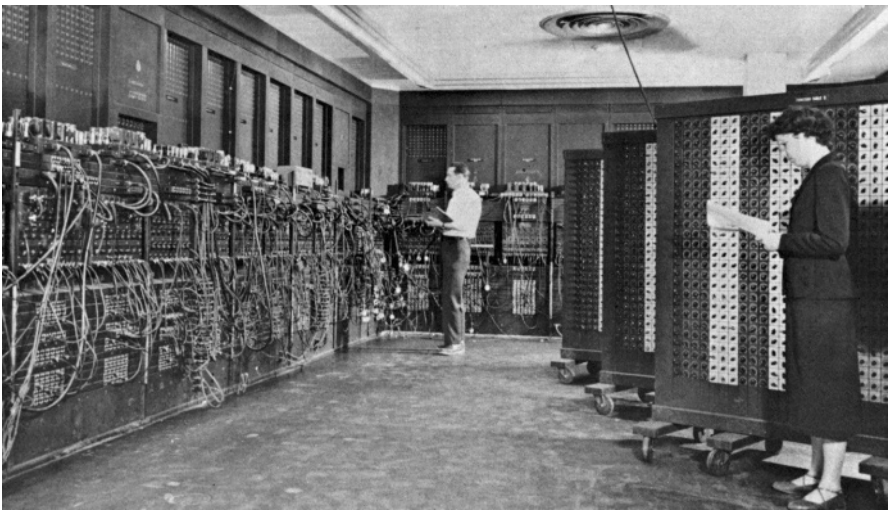


Abb. 11.8.7 Die „ENIAC“ von 1943

es 18 000. Auch die Anfälligkeit bei Störungen wurde abgeschätzt. Das Gerät war ca. 30 m lang, 3,3 m hoch und 1 m tief. ENIAC verbrauchte 140 Kilowatt, mit entsprechendem Zwang zur Kühlung. Die Maschine war erst im Herbst 1945 vollendet; aber alle damit zusammenhängenden Probleme und Ergebnisse waren natürlich strengster militärischer Geheimhaltung unterworfen. Gegen Ende des Krieges und danach standen nicht mehr ballistische Probleme im Vordergrund der Anwendungen, sondern Aufgaben im Zusammenhang mit dem Bau von Atomwaffen. Die Programmsteuerung war äußerst kompliziert; für Einzelheiten sei auf die oben aufgeführte Literatur verwiesen.

Die Probleme komplizierter Programmsteuerung riefen unter anderem John von Neumann auf den Plan. Er beendete eine weit ausgedehnte Diskussion um dieses Problemfeld im Frühsommer 1945 mit der Denkschrift *First Draft of a Report on the EDV AC* (EDV AC bedeutet Electronic Discrete Variable Automatic Calculator). Der Kern der Denkschrift besteht darin, dass zwischen Daten und Programmen während eines Informationsprozesses kein prinzipieller Unterschied besteht. Der *„First Draft ...“* von von Neumann beruhte auf einem Vertrag *“Contract No. W – 670 – ORD – 4926. Between the United States Army Ordnance Department and the University of Pennsylvania. Moore School of Electrical Engineering, University of Pennsylvania. June 30, 1945”* und beginnt mit dem folgenden Satz:

> *“The considerations which follow deal with the structure of a very high speed automatic digital computing system, and in particular with its logical control. (...) The logical control of the device, that is the proper sequencing of its operations can be most efficiently carried out by a central control organ.”* [Randell 1973, S. 355f.]

Nach Goldstine war von Neumann der erste, der erkannt hatte, dass ein Computer im wesentlichen logische Operationen auszuführen hat und dass die elektrischen / elektronischen Aspekte dem untergeordnet sind [Goldstine 1973, S. 191f.]. Dort und auf den folgenden Seiten finden sich weitere interessante Einzelheiten über von Neumann, seine Beiträge und die seiner Mitarbeiter sowie über technische Details.

Auch über das frühe Interesse von Los Alamos (Kernwaffenproduktion) (Fermi/Teller) 1945/46 an ENIAC, vom Briefwechsel Goldstines mit Edward Teller (1908–2003) im November 1945 wird berichtet. Von Neumann hatte wohl als erster die Bedeutung von ENIAC für Los Alamos erkannt.

Am 15. Februar 1946 gab es eine „dedication ceremony" mit Demonstration des Leistungsvermögens von ENIAC; sie führte 5 000 Additionen und 500 Multiplikationen in der Sekunde aus. Dabei trat die führende Rolle von Mrs. und Mr. Goldstine hervor, die genau wussten, wie die Maschine zu programmmieren war. ENIAC wurde durch die Regierung formell akzeptiert am 30. Juni 1946.

Da sich die Moore School (aus welchen Gründen auch immer) vom Projekt zurückzog, wurde das Computer-Programm auf Betreiben von Oswald Veblen im März 1946 vom „Institute for Advanced Study" in Princeton weitergeführt.

Als Schwachpunkt des ENIAC erwiesen sich die Vakuumröhren; hier half später der Einsatz von Transistoren.

Dessen ungeachtet löste ENIAC eine Revolution im Computerwesen aus, nicht nur in den USA, sondern auch in vielen europäischen Staaten (vgl. dazu etwa [Goldstine 1973]).

Der *„First Draft"* wurde – teilweise – als wichtiger Schritt vorwärts akzeptiert, insbesondere von Goldstine. Zusammen mit seiner Frau Adele veröffentlichte er 1946 die zusammenfassende Studie *The Electronic Numeric Integrator and Computer*. Zusammen mit von Neumann war er bis 1957 am Institute for Advanced Study in Princeton tätig [Naumann 2001, S. 207f.].

11.8.7 Pioniere moderner Rechentechnik: John von Neumann und Alan Turing

Von Neumanns Beiträge zur Rechentechnik entsprangen auch seinem bereits in Göttingen entstandenen tiefem Interesse an mathematischer Logik und speziell, schon in den USA, an Gödels revolutionären Ergebnissen. Sein phänomenales Gedächtnis und seine unglaublich rasche Fähigkeit, auch in neu auftretenden Problemen das Wesentliche zu erkennen, kamen ihm zu Hilfe.

So ist es kein Wunder, dass von Neumann, der als junger Mensch die abstoßenden Seiten der ungarischen Rätepublik erlebt hatte, sich mit seinen Fähigkeiten an den strategisch-wissenschaftlichen Brennpunkten in den USA zur Verfügung stellte. Eine Auflistung einiger seiner Funktionen ist aufschlussreich:

1933–57	Professor of Mathematics, Institute for Advanced Study, Princeton, N.J.
1940–57	Scientific Advisory Committee, Ballistic Research Laboraties, Aberdeen Proving Ground, Maryland
1941–55	Navy Bureau of Ordnance, Washington D.C.
1943–55	Los Alamos Scientific Laboratory (AEC), Los Alamos, N.M.
1945–57	Director of Electronic Computer Project, Institute for Advanced Study, Princeton, N.J.
1947–55	Naval Ordnance Laboratory, Silver Spring, Maryland
1949–53	Research and Development Board, Washington D.C.
1949–54	Oak Ridge National Laboratory, Oak Ridge, Tennessee
1950–55	Armed Forces Special Weapons Project, Washington D.C.; Weapons System Evaluation Group, Washington D.C.
1951–53	President American Mathematical Society
1951–57	Scientific Advisory Board, U.S. Air Force, Washington, D.C.
1952–54	Member, General Advisory Committee, U.S. Atomic Energy Commission, Washington, D.C. (Presidential appointment)
1953–57	Technical Advisory Panel on Atomic Energy, Washington, D.C.
1955–57	U.S. Atomic Energy Commissioner (Presidential appointment)
1956	Medal of Freedom (Presidential Award)

(Nach [Goldstine 1973, S. 178f.])

Interessant ist ein Blick auf die Entwicklung in Großbritannien. Viele Einzelheiten wurden erst nach Kriegsende bekannt; während des Krieges arbeitete man unter strengsten Sicherheitsbedingungen.

Unter Leitung von Maxwell Herman Alexander Newman (1897–1984) wurde 1943 in England die erste elektronische Rechenmaschine „Colossus 1“ gebaut [Ceruzzi 1999]. Mit deren Hilfe gelang es Alan Mathison Turing, unterstützt von emigrierten polnischen Spezialisten, den deutschen Geheimcode zu brechen: die von der deutschen Chiffriermaschine „Enigma“ verschlüsselten Funksignale konnten automatisch entschlüsselt werden. So wurde der U-Boot-Krieg zugunsten der Alliierten entschieden.

Turing entwickelte ebenfalls die Idee einer speicherprogrammierten Maschine; er war zu dieser Zeit am „National Physical Laboratory“ in Teddington (GB) beschäftigt. Doch wurden seine *Proposals for the Development in the Mathematics Division of an Automatic Computing Engine* (A.C.E.) nicht realisiert; dabei waren sie sogar ausführlicher und besser durchgearbeitet als die Konzeption von EDVAC.

Turing stammt aus Wilmslow (bei Manchester), studierte Mathematik ab 1931 am King's College in Cambridge, war von 1936 bis 1938 in den USA am Princeton Institute for Advanced Study und promovierte dort 1938 mit einer Arbeit *Systems of logic based on ordinals*, lehrte wieder am King's College, war während des Krieges im Auftrag der britischen Streitkräfte tätig und dann mit dem Bau von Rechenmaschinen und in Manchester beschäftigt. Er war zudem ein herausragender Langstreckenläufer.

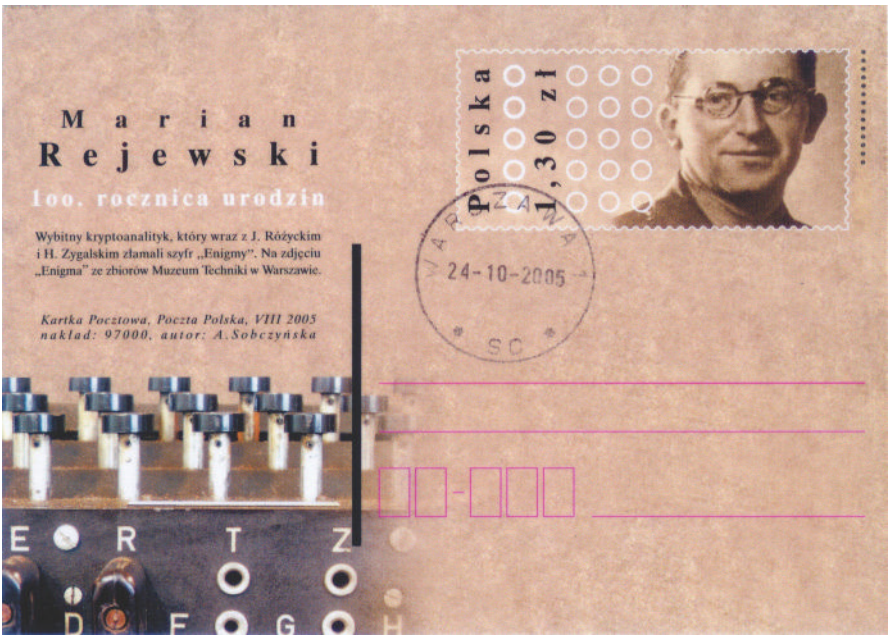


Abb. 11.8.8 Gedenkpostkarte für Marian Rejewski, der an der Entschlüsselung des Enigma-Codes mitwirkte

Eine fast legendäre Berühmtheit erlangte die von Turing erfundene „Turing-Maschine" (die allerdings nicht gebaut wurde; das war auch nicht beabsichtigt).

Die entscheidende Arbeit aus dem Jahre 1937 trägt den Titel *On computable numbers with an application to the Entscheidungsproblem.* Grob gesprochen konnte Turing zeigen, dass es gelingen könnte, Maschinen zu bauen, die fast alle von Menschen vollzogenen Denkoperationen auch ausführen können, dass es aber mathematische Probleme gibt, die nicht algorithmisch durch Turing-Maschinen lösbar, wohl aber dem menschlichen Denken zugänglich sind, z. B. die Lösung beliebiger diophantischer Gleichungen.

In späterer Zeit entstanden Arbeiten, die wir heute dem Problem zurechnen, ob und gegebenenfalls wie Maschinen „lernen" können, Fragen, die sich mit den Fragen der „künstlichen Intelligenz" beschäftigen und neuerdings aktuell sind.

Die Rechner mit elektromagnetischen Bauteilen werden zur ersten Generation gerechnet, die mit Röhrentechnologie zur zweiten Generation und diejenigen, die ab Ende der fünfziger Jahren mit Transistoren arbeiteten, zur dritten Generation.

11.8.8 Computer mit Transistoren und Mikroprozessoren

Das Patent auf Transistoren wurde 1948 an die Erfinder Walter Houser Brattain (1902–1987), William Bradford Shockley (1910–1989) und John Bardeen (1908–1991) erteilt. Sie arbeiteten in den Bell Telephone Laboratories, New Jersey. Brattain erhielt 1956 den Nobelpreis für Physik. Allerdings erwies sich die industrielle Herstellung von Transistoren als schwierig und konnte erst in den 50er Jahren realisiert werden, freilich zunächst nur für militärische Zwecke. Der erste Transistor-Rechner scheint 1953 in Großbritannien hergestellt worden zu sein; ein zweiter folgte 1955, im selben Jahr wie in den Bell-Laboratorien.

Nach dem Sputnik-Schock im Jahre 1957, mit dem die USA der sowjetischen Raumfahrt unterlegen waren, wurden alle Anstrengungen unternommen, um diesen Rückstand wieder aufzuholen. Mit ehrgeizigen Raumfahrtprojekten sollte neben den Satelliten die bemannte Raumfahrt aufgebaut werden. Als der russische Kosmonaut Juri Gagarin 1961 als erster Mensch die Erde umrundete, war der Vorsprung der Sowjetunion beim beginnenden Wettlauf im All noch vorhanden. Der Wettlauf zur Zeit des „kalten Krieges“ war klar politisch motiviert, zog aber technische Innovationen zwangsläufig nach sich.

Die Mathematik spielte hierbei wesentlich als Anwendung in der Physik eine Rolle, viel entscheidender wirkte sich aber die zunehmende Miniaturisierung und Elektronisierung aus. In der Raumfahrt musste man mit so wenig Gewicht wie möglich auskommen, um alles Erforderliche in den Weltraum zu

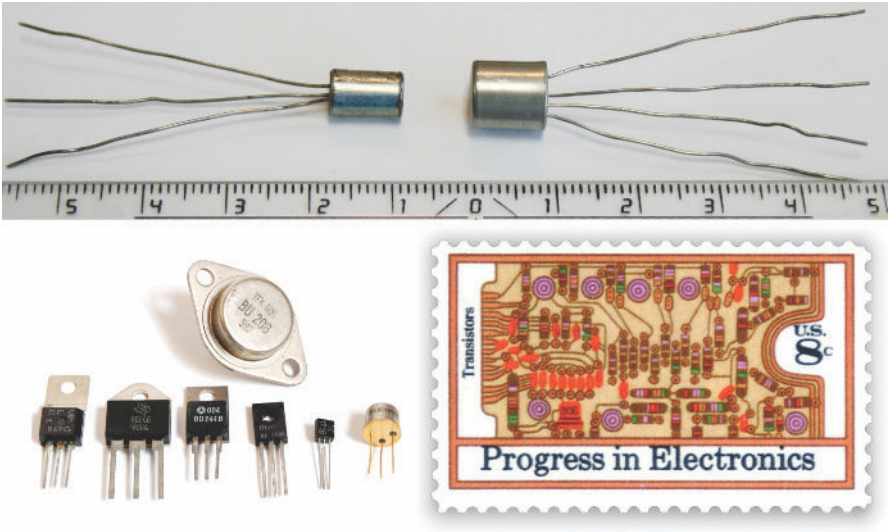


Abb. 11.8.9 Transistoren AC126 und AF116 von Philips 1965 [Foto Wesenmüller-Kock], Transistoren um 2000 [Foto Seidel], verdichtete Schaltung (USA 1973)

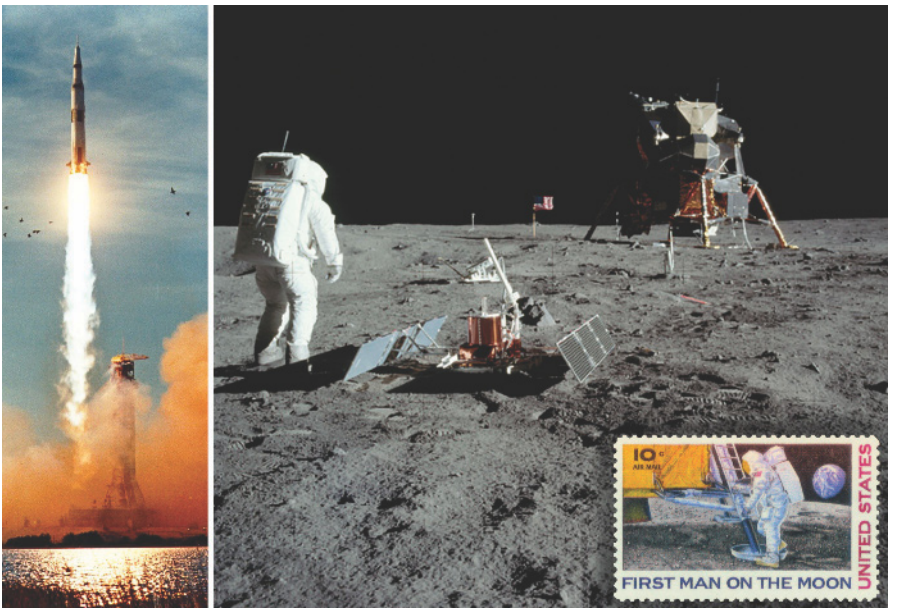


Abb. 11.8.10 Start von Aplollo 8 an der Spitze der 110 Meter hohen Saturn-V-Rakete (NASA); Apollo 11 auf dem Mond (NASA [Foto Armstrong]); „Erster Mann auf dem Mond“ (USA 1969)

transportieren. In der bemannten Raumfahrt holten die Amerikaner zunehmend den Vorsprung auf (Mercury-, Gemini-, Apollo-Programm). Als Apollo am 20. im Juli 1969 auf dem Mond landete, hatten Spezialkunststoffe, leichte Metalle und Mikroelektronik Einzug in die Raumkapsel gehalten. Zu diesem Zeitpunkt hatte die Datenverarbeitung an Bord eine Rechenleistung, die mit der eines Commodore C 64 Homecomputers des Jahres 1982 verglichen werden kann. Die für die Raumfahrt entwickelte Technologie hielt Einzug in die industrielle Fertigung. Sie sicherte den USA eine technologische Vormachtstellung für viele Jahre.

Die Computerisierung veränderte mit zunehmender Dynamik nachhaltig die Forschungs- und Arbeitswelt in den Industrienationen, später hielt sie auch Einzug in den privaten Bereich.

Die Firma Intel stellte 1971 den ersten Mikroprozessor her – ein Silizium-Plättchen von 6 mm Kantenlänge leistete dasselbe wie 2250 Transistoren.

Weitere Verbesserungen führten schließlich zu rein elektronischen Rechnern, die mechanisch-elektronischen Lochkarten- und Buchungsautomaten der 50er, 60er und 70er Jahre hatten ausgedient. Teilautomatisierung von Arbeitsabläufen folgte, weil die Technologie in alle Bereiche der Arbeitswelt vordrang und in Gestalt von Personalcomputern massenhaft Verwendung im täglichen Leben fand.

Aber nicht nur die Hardware entwickelte sich fortan rasant. Software-Entwicklung wurde zu einem neuen Zweig mit größter ökonomischer Bedeutung. Bill Gates (*1955) ist der bekannteste Vertreter dieses neuen Wirtschaftszweiges. Mit dem MS-DOS Computer-Betriebssystem und den folgenden Windows-Versionen wurde er zeitweilig zum reichsten Mann der Welt.

Softwareentwicklung war einer der Motoren der starken Wirtschaftsentwicklung, die als New Economy letztlich zu einer rasanten Aufwärtsentwicklung am Ende des 20. Jhs. führte.

Das Buch von Goldstine, der selbst nicht unmaßgeblich an der Entwicklung von Rechenanlagen beteiligt war, enthält als Anhang ein Kapitel *„World-Wide Developments“* [Goldstine 1973, S. 349ff.]. Es ermöglicht einen Rückvergleich mit den USA bis ca. zwei Jahrzehnte nach Ende des Zweiten Weltkrieges in verschiedenen Staaten: Großbritannien, Schweden, Dänemark, Norwegen, Niederlande, Frankreich, Schweiz, (West-) Deutschland, (Ost-) Deutschland, Österreich (mit der herausragenden Rolle von H. Zemanek), Italien, Belgien, Russland, Tschechoslowakei, Jugoslawien, Polen, Japan, Israel, Rumänien, Indien. Die dem Buch [Naumann 2001, S. 135] entnommene Tabelle beschreibt in gedrängter Form die in rascher Folge entstandenen Rechnergenerationen und ihre wesentlichen Merkmale.

Gen.	Zeitraum	Kennzeichen
0.	bis 1946	Mechanische und elektromechanische Schaltelemente; Schaltersätze und Relaisketten als Speicher; keine interne Programmspeicherung; Daten- bzw. Programmeingabe über Schalter, Lochband, Lochkarte oder durch Einsatz von Stecktafeln (untergeordnet), maschinenorientierte Programmierung
1.	1946-1958	Schaltelemente: Relais, Elektronenröhren, Flip-Flops; hoher Leistungsbedarf; Daten- bzw. Programmeingabe über Schalter, Lochband, Lochkarte oder durch Einsatz von Stecktafeln, (interne) Speicherung durch Röhren, Quecksilber-Verzögerungsleitungen, Kathodenstrahlenröhren, Magnettrommeln und -bänder, maschinenorientierte Programmierung
2.	1958-1965	Schaltelemente: Transistoren und Dioden; interne Daten- und Programmspeicherung durch Ferritkernspeicher; Magnetband- und Massenspeicher zur sekundären Datenspeicherung, vereinzelt Bildschirmeinsatz, maschinen-/problemorientierte Programmierung
3.	1965-1975	Hybrid-/ Dünnschichtschaltungen, MSI-Schaltungen; System- bzw. Familienkonzepte, Mikroprogramm- und Steuerspeicher, flexible Peripherie, Systeme zur Zeichenerkennung, Bildschirm- und Sprachausgabe, Betriebssysteme DOS und OS, Echtzeitverarbeitung, Datenfernverarbeitung, problemorientierte Programmierung
4.	ab 1975	LSI und VLSI-Technologie; Modularstruktur, Parallelbetrieb, Busse, komplexe Speicherhierarchien, Vielfachprozessoren; Spezialperipherie zur optimalen Kommunikation, Betriebssysteme DOS und OS, CPM (SCP), MS-DOS (DCP), UNIX (MUTOS), VMS, Dominanz problemorientierter Programmiersprachen für prozedurale (algorithmische) Programme

11.8.9 Die jüngste Entwicklung der Rechenanlagen: Pipeline-Konzept, Vektorrechner und Parallelrechner

(H. Luttermann)

Die Triebfeder für die Weiterentwicklung der Rechenanlagen kam aus den verschiedenen Fachgebieten in der seit Jahrzehnten immer wieder erhobenen Forderung, die Rechengeschwindigkeit zu erhöhen.

Dafür gibt es im Wesentlichen zunächst zwei Bereiche, in denen Ideen umgesetzt werden: (1) im Bereich der Hardware und Hardwarekomponenten und (2) im Bereich der Rechnerarchitektur, d. h. in der Anzahl der Komponenten des Rechners, ihrer unterschiedlichen Kombination und Organisation. In beiden Bereichen wurde und wird die Entwicklung (fast) unabhängig voneinander gleichzeitig intensiv vorangetrieben [Tanenbaum/Goodman 1999].

Die Hardwareentwicklung der vielen unterschiedlichen Teilkomponenten wird dabei i. w. bearbeitet in der Elektrotechnik, in der Physik und Chemie (z. B. Chip-Entwicklung, usw.), und im Maschinenbau (Verbesserung der vielen Ein- und Ausgabegeräte am Rechner). Hierauf soll hier wegen des großen Umfanges nicht tiefer eingegangen werden, zumal die Mathematik daran relativ wenig beteiligt ist.

Exemplarisch betrachtet sei nur ein Beispiel, das bei Rechenanlagen aber sehr wichtig ist: die Entwicklung der Taktraten (oder Zykluszeiten) bei den Schaltwerken. Sie lag 1946 bei etwa 500 Kilohertz (Röhrentechnik) und nähert sich heute (2008) dem Wert von fast 5 Gigahertz (für Chips in Serienproduktion). Die Rechenanlagen sind während ihrer Entwicklungszeit allein aus diesem Grunde fast um den Faktor 10 000 schneller geworden. Es ist auch nicht auszuschließen, dass man unter Zugrundelegung der heutigen Technik auch vor einer physikalischen Grenze steht, die nicht mehr überschreitbar ist.

Hier soll auf den Bereich der Rechnerarchitektur eingegangen werden, d. h. auf die Komposition und Organisation der Komponenten im Innern des Zentralprozessors (CPU) (oder der Zentralprozessoren) des Rechners. Dabei können auch hier aus der Vielfalt der aktuellen Ideen und Realisierungen nur einige exemplarisch aufgezeigt werden.

Im Prinzip kann man die notwendigen Komponenten für eine Rechenanlage (z. B. Addition von ganzen Zahlen, Multiplikation von reellen Zahlen, usw.) eigentlich nur mehrfach in den Zentralprozessor einbauen und bzgl. der Arbeitsweise unterschiedlich organisieren. Dabei treten nur 3 verschiedene Arbeitsweisen auf, wenn man an die Bearbeitung mehrerer (gleicher) Operationen denkt:

(1) serielle Verarbeitung, alle Operationen laufen aufeinander folgend ab.
(2) quasi-parallele, überlappende Verarbeitung (Pipeline-Konzept): Die Bearbeitung einer folgenden gleichen Operation kann schon begonnen werden, wenn die vorherige noch nicht beendet ist, aber genügend viele Zeittakte weit fortgeschritten ist. Das Pipelinekonzept ist heute bei allen Rechenanlagen in mehreren Komponenten realisiert. Rechner, in denen dieses

Pipelinekonzept umfassend realisiert und auf bestimmte Weise in der CPU zu sog. Vektorbefehlen zusammengefasst wird, heißen „Vektorrechner“.

(3) parallele Verarbeitung: Die Bearbeitung von mehreren gleichen Operationen kann zum gleichen Zeitpunkt gestartet werden, sie sind dann auch alle zum gleichen Zeitpunkt beendet. Hierbei muss eine gewisse Datenunabhängigkeit vorausgesetzt werden und man benötigt genügend Komponenten, für jede Operation eine freie, verfügbare und nicht belegte Komponente. Derzeitig baut man in Rechenanlagen mehrere vollständige CPUs parallel (mit jeweils auch mehreren parallelen Rechenkomponenten) ein. Solche Rechner heißen dann „Parallelrechner“.

Wenn ein realer Rechner Aufgaben bearbeitet, treten in der CPU immer wieder Engpässe (Wartezeiten) auf, weil z. B. die Komponenten in der CPU, die man für die Bearbeitung der Aufgabe benötigt, alle in Arbeit sind, oder weil gewisse Operanden, die man zu einem Zeitpunkt benötigt, noch nicht im Rechenwerk der CPU errechnet worden sind.

Die Anzahl dieser Engpässe und die Dauer der Wartezeiten hängen also von den zu bearbeitenden Aufgaben ab und damit von der Anzahl der in die CPU hinein konstruierten Komponenten. D.h. einen schnellen oder gar den schnellsten Rechner kann es nur geben in Bezug auf eine bestimmte Aufgabe mit ihren bestimmten Eigenschaften und Rechneranforderungen. Wenn man mit einem Rechner mehrere Aufgaben mit jeweils unterschiedlichen Eigenschaften bearbeitet, kann derselbe Rechner mal schnell und mal langsam erscheinen.

Die Geschwindigkeit eines Rechners hängt also von den Aufgaben ab, die darauf berechnet werden. In einem sehr extremen, aber leicht einsehbaren Beispiel veranschaulicht: Wenn jemand für die Bearbeitung seiner Aufgaben (fast) ausschließlich arithmetische Operationen mit ganzen Zahlen benötigt (z. B. bei Datenbankaufgaben), nutzen ihm die vielleicht im Rechner vorhandenen schnellen und vielen Komponenten für die arithmetischen Operationen mit reellen Zahlen wenig. Sie werden bei dieser Aufgabe fast nicht benötigt und nicht genutzt, sie kosten aber Geld.

Aus diesem Grunde sind für die Geschwindigkeit von Rechnern schon in sehr früher Zeit viele unterschiedliche Bewertungssysteme, d. h. Maßzahlen, eingeführt worden, die die Leistungsfähigkeit eines Rechners mit Zahlenwerten beschreiben, so z. B. Instruktionen pro Sekunde, arithmetische Operationen mit ganzen Zahlen pro Sekunde (spec int), arithmetische Operationen mit reellen Zahlen pro Sekunde (Flop/s: floating point operations per second), Transaktionen pro Sekunde (tps). Die Vielfalt dieser Bewertungssysteme hat sich in der Informatik fast zu einer eigenen Disziplin (Benchmarking) entwickelt.

Im Rahmen des Höchstleistungsrechnens (high performance computing) oder des Wissenschaftlichen Rechnens (scientific computing) gilt der Einsatz der Rechenanlagen in der Simulation von (technischen oder natürlichen) Prozessen derzeitig weltweit als Schlüsseltechnologie, z. B. in der Strömungsfor-

schung (wie Karosserieoptimierung, Meeresforschung oder Wettervorhersage, usw.), bei Umformungsprozessen (wie Crash-Tests, Versagensvorhersage, usw.), bei Berechnung von Teilchensystemen (wie Molekülstrukturen in der Chemie, in der Pharmazie, usw.). Eingesetzt werden hier Rechner mit großer Rechengeschwindigkeit, sog. Höchstleistungsrechner (high performance computer).

Da bei der Behandlung solcher Aufgaben hauptsächlich Differentialgleichungssysteme näherungsweise gelöst werden, spielt hier die Verarbeitungsgeschwindigkeit bei der Arithmetik mit reellen Zahlen die wesentliche Rolle. Seit einigen Jahrzehnten werden deshalb die Rechenanlagen dieser Bewertungsskala systematisch unterworfen. Die Leistung wird in Flop/s angegeben.

Unter der irrealen Annahme, alle in eine Rechenanlage hineinkonstruierten Komponenten können gleichzeitig und zu jeder Zeit dauernd (ohne Wartezeiten) arbeiten, erhält man für die Bearbeitung eines realen Programms eine theoretische maximale Grenzleistung, die sog. „peak performance“.

Wenn man die Anzahl der relevanten Rechenoperationen für eine konkrete Aufgabe kennt und die Bearbeitungsdauer misst, kann man die dabei real erreichte Leistung berechnen. Sie wird „sustained performance“ genannt. Diese ist immer kleiner als die „peak performance“, da für diese Aufgaben die Wartezeiten in den CPUs mit berücksichtigt werden.

Um unterschiedliche Rechenanlagen besser vergleichen zu können, wird seit langer Zeit als Aufgabe die Lösung eines linearen Gleichungssystems zugrunde gelegt. Zurzeit werden Gleichungssysteme mit mehr als 1 000 000 Unbekannten für diesen Test herangezogen.

Die folgende Tabelle zeigt die unglaublich rasante Entwicklung der Leistungsfähigkeit der Rechner (‘sustained performance’):

Jahr	Name des Rechners	Rechen-Leistung	CPUs	Abk.	Anz.	Einheiten
1946	ENIAC	100 Flop/s	1			
1969	CDC Cyber 76	7,2 M Flop/s	1	Mega	10^6	Millionen
1985	CRAY 2	1,952 G Flop/s	4	Giga	10^9	Milliarden
1996	ASCI Red	1,068 T Flop/s	7 284	Tera	10^{12}	Billionen
2008	IBM Roadrunner	1,026 P Flop/s	122400	Peta	10^{15}	Billiarden
20??	??? ??????	?,? E Flop/s	???	Exa	10^{18}	Trillionen

Wenn zwei Rechner bzgl. der Leistung miteinander verglichen werden, ist der Leistungsfaktor immer das Produkt des Leistungsfaktors aus der technischen Weiterentwicklung, z. B. dem Leistungsgewinn aus der Taktratenentwicklung, und dem Leistungsfaktor aus der Verbesserung der Rechnerarchitektur.

Bei der Entwicklung der Rechenanlagen hat man sich für lange Zeit (als die Rechner (fast) alle noch mit einer einzigen CPU ausgestattet waren) darauf konzentriert, die CPU mit immer mehr (auch gleichen) Rechenkomponenten auszustatten und diese im Rechner besser zu verwalten, d. h. besser zu organisieren, so dass weniger Wartezeiten entstehen.

Dann hat man die Leistung der Rechner dadurch erhöhen wollen, dass man mehrere (gleiche) CPUs eingebaut hat, die alle an einer Aufgabe, d. h. an einem Programm, gleichzeitig arbeiten können, durch 'Shared-Memory-Systeme' bzw. 'Distributed-Memory-Systeme', jetzt durch sog. 'Clustersysteme' organisiert werden und durch ein Verbindungsnetzwerk mit einander kommunizieren können.

Die ersten Rechenanlagen mit mehreren CPUs wurden bereits in den 60er Jahren des vorigen Jahrhunderts auf dem Markt angeboten. Inzwischen hat man Rechenanlagen mit mehr als 200 000 CPUs gebaut.

Das z.Zt. leistungsfähigste Verfahren zur Erzeugung von vielen Rechenergebnissen pro Zeiteinheit in einer CPU ist die Vektorverarbeitung. Trotzdem nimmt die Anzahl der eingesetzten Rechenanlagen vom Typ 'Vektorrechner' wegen hoher Kosten zur Realisierung von Vektorbefehlen immer mehr ab. Derzeitig versucht man eher die Leistungsfähigkeit der gesamten Rechenanlage dadurch zu erhöhen, dass man eine größere Anzahl von einfacheren, preiswerteren und auf dem Markt vorhandenen CPUs in die Rechenanlagen einbaut [Meurer 2008].

In letzter Zeit wird in die Betrachtung und Bewertung der Rechenanlagen auch der Energiebedarf, insbesondere auch der zusätzliche Energiebedarf für die Rückkühlung der beim Betrieb erzeugten Wärme, einbezogen.

Der Einsatz mehrerer CPUs gleichzeitig am gleichen Programm, führte notwendig auch zu neuen Programmiertechniken und neuen Programmiersprachen oder Programmierumgebungen, zum Bereich der sog. Parallelprogrammierung.

Beim Einsatz der Rechenanlagen zur Lösung von Aufgaben aus einer Problemklasse kann einer vorgegebenen Aufgabe immer eine natürliche Zahl n zugeordnet werden, die die Größe des Problems beschreibt, z. B. bei der Lösung linearer Gleichungssysteme die Anzahl n der Unbekannten.

Häufiger liegt auch die Situation vor, dass zur Lösung einer Aufgabe mehrere verschiedene Verfahren oder Algorithmen zur Verfügung stehen, die rechentechnisch betrachtet unterschiedlich großen Rechenaufwand erfordern. Es ist üblich, die Komplexität der Algorithmen und damit den Rechenaufwand zu beschreiben, indem man den Algorithmen Komplexitätsklassen zuordnet. Mit den folgenden wenigen, in Bezug auf den Rechenaufwand aufsteigend geordneten, Komplexitätsklassen: $O(\log(n)$, $O(n)$, $O(n*log(n))$, $O(n^2)$, $O(n^3)$, $O(n^4)$, $O(2^n)$, $O(3^n)$, $O(n!)$ und $O(n^n)$ kann man fast die Gesamtheit der real existierenden Algorithmen beschreiben.

Eine (wesentlich) kürzere Bearbeitungszeit mit einem Rechner oder einen großen, vielleicht den größten Leistungsgewinn erhält man, wenn man zur Lösung einer Aufgabe einen neuen Algorithmus entwickeln kann, der einer weniger aufwändigen Komplexitätsklasse angehört. Dieser Aufgabe widmen sich weltweit viele Mathematiker mit großer Intensität.

11.8.10 Kybernetik: Eine Schöpfung von Norbert Wiener

Auch die junge Disziplin Kybernetik ist in wesentlichen Bereichen aus der Mathematik hervorgegangen. Ihr Schöpfer ist Norbert Wiener, als Sohn eines aus Russland zugewanderten Juden in den USA geboren.

Von Wiener stammt auch die Wortbildung „Kybernetik". In seiner Autobiografie vom Jahre 1956 hat er berichtet: *„Ich machte mich eifrig an die Arbeit* (zusammen mit Arturo Rosenblueth (1900–1979) in Mexiko; gemeint ist die Niederschrift des Buches *„Cybernetics. . . "* (von 1948, Wg)*, aber das erste, was mir Kopfzerbrechen bereitete, war der Titel, den ich für das Buch, und der Name, den ich für den Gegenstand wählen sollte. Ich suchte zuerst nach einem griechischen Wort, das ‚Bote' bedeutete, kannte aber nur angelos. Das hat aber im Englischen die spezifische Bedeutung von ‚Engel', Gottesbote, und war damit vergeben. Dann suchte ich ein passendes Wort aus dem Gebiet der Steuerung und Regelung. Das einzige Wort, das mir einfiel, war das griechische Wort für Steuermann, kyberetes. Ich bildete daraus das Wort ‚Kybernetik'. Später stellte ich fest, daß ein entsprechendes Wort seit Anfang des neunzehnten Jahrhunderts in Frankreich von dem Physiker Ampère im soziologischen Sinne verwendet worden war; das wußte ich damals aber nicht."* [Wiener 1962, S. 263]

Die Schlüsselworte „Steuerung" und „Regelung" finden sich in vielen Beschreibungen der Wissenschaft Kybernetik; auch in höchst unterschiedlichen Definitionen. So liest man bei [Ossimitz 2006]:

> *„Die Wissenschaft Kybernetik befasst sich mit Steuerungen, Regelungen und Informationsübertragungen in natürlichen und künstlichen dynamischen Systemen. System und Information sind zentrale Begriffe der Kybernetik.*
>
> *Die Kybernetik unterscheidet organische, technische, gesellschaftliche und gemischte Systeme. Darüber hinaus wird zwischen offenen (offener Wirkungsweg eines Regelkreises oder selbstregulierender Rückkopplung) Systemen sowie zwischen informationellen (Aufnahme, Verarbeitung und Abgabe von Informationen) und nicht informationellen (Stoff- oder Energieproduktion) Systemen unterschieden.*
>
> *Disziplinen der Kybernetik*
> - *Steuerungstheorie und Regelungstheorie*
> - *Automatentheorie*
> - *Theorie der Nervensysteme*
> - *Zuverlässigkeitstheorie*
> - *Informations- bzw. Nachrichten- und Signaltheorie*
> - *Algorithmentheorie*
> - *Spieltheorie*
> - *Artificial Intelligence*"

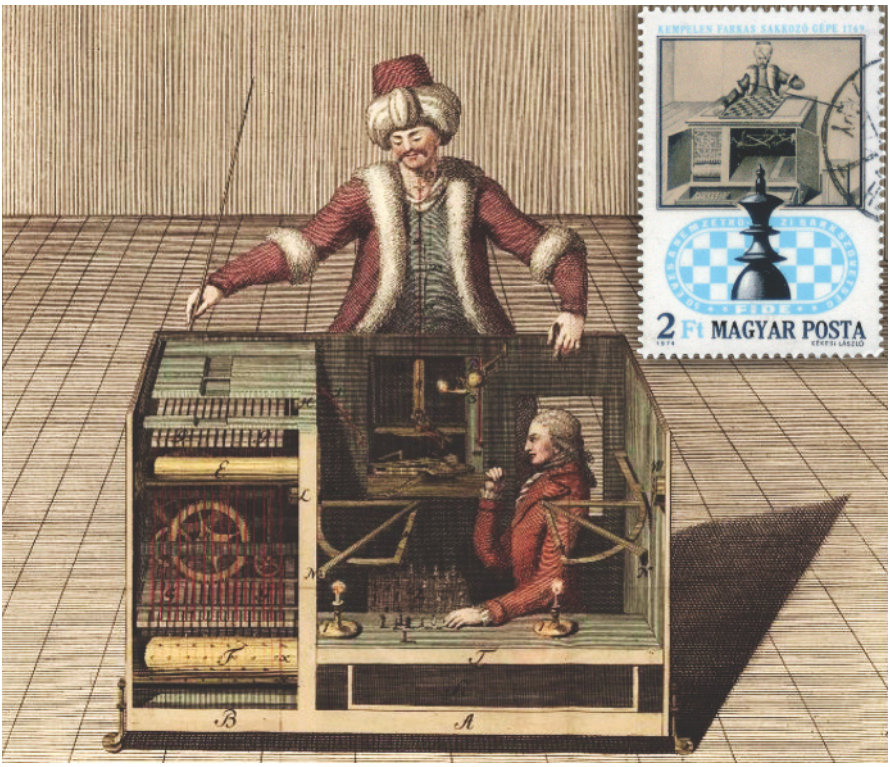


Abb. 11.8.11 Der Schach spielende Türke des Ungarn Wolfgang von Kempelen (1734–1804) (Ungarn 1974). Der Automat mit dem Schach spielenden Türken erregte europaweit Aufsehen und wurde in Wien, am preußischen und am französischen Hofe, in London und anderswo vorgeführt. Erst nach dem Tode von Kempelens sah man den Betrug: es war doch ein Mensch darin verborgen. Auch Babbage hat den „Automaten“ gesehen.

In diesem weitgefassten Sinne hat die Kybernetik – denkt man an Automaten – eine lang zurückreichende Vorgeschichte. Beispielsweise könnte man die antiken, von Heron im 1. Jh. n. Chr. entworfenen „Automaten“ hinzurechnen, etwa die sich „automatisch“ öffnenden Tempeltüren (Prinzip: Luftausdehnung durch Feuer). Die muslimische Welt benutzte sich selbst regulierende Wasseruhren. Das europäische Barockzeitalter liebte Automaten. Der Franzose Jaques de Vaucanson (1709–1782), der die Seidenweberei mechanisiert hatte, erreichte große Berühmtheit mit seinen faszinierenden mechanischen Nachbildungen, z. B. einem Flötenspieler und der mechanischen Ente, die schnatterte, sich bewegte, Nahrungsaufnahme und Verdauung nachahmte. In die Gruppe sich selbst regelnder und nachfolgende Prozesse steuernder Geräte gehört der Wattsche Fliehkraftregler zur Regelung der Arbeit einer

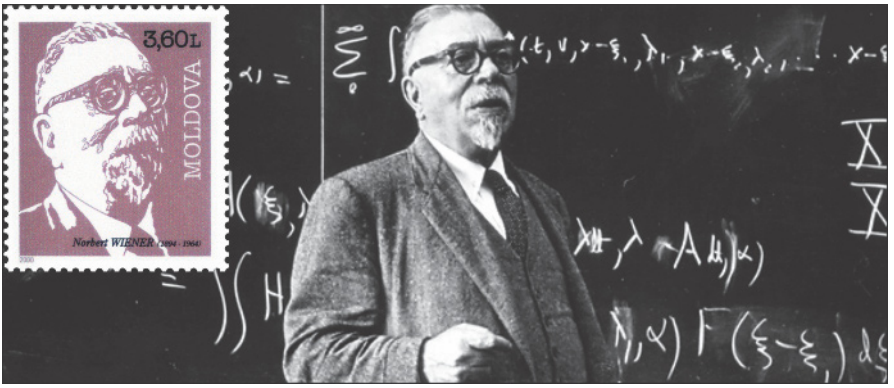


Abb. 11.8.12 Norbert Wiener (Moldavien 1994)

Dampfmaschine. Die moderne Industrie unserer Zeit ist übervoll an sich selbst regelnden Produktionsprozessen.

Bereits in Harvard, etwa 1934, erhielt Wiener erste Impulse zur künftigen Kybernetik. Er kam in Kontakt mit einem mexikanischen Physiologen ungarischer Abstammung, mit Arturo Rosenblueth (1900–1970), einem führenden Mitarbeiter des berühmten Harvard-Physiologen Walter Cannon (1871–1945). Bis 1944, als Rosenblueth nach Mexiko ging, kam es zu ausführlichen Gesprächen und Diskussionen rund um ein von Rosenblueth inauguriertes Seminar an der Medical School. Wiener schreibt dazu in seiner Autobiographie:

> *„Arturo und ich verstanden uns von der ersten Stunde an prächtig, obwohl sich mit Arturo prächtig zu verstehen nicht besagt, daß man keine Meinungsverschiedenheiten mit ihm hätte, sondern vielmehr daß man diese Meinungsverschiedenheiten genießt. Eins hatten wir beide gemeinsam, nämlich ein starkes Interesse an wissenschaftlicher Methodologie. Ferner waren wir beide der Auffassung, daß die Grenzen zwischen den einzelnen Wissenschaften verwaltungsmäßige Trennungslinien sind, die für die gerechte Verteilung von Mitteln und Arbeit zweckdienlich sein mögen, daß aber jeder ausübende Wissenschaftler gewillt sein sollte, diese Grenzen jederzeit zu überschreiten, wenn seine Untersuchungen das zu verlangen scheinen. Wissenschaft sollte, nach unserer beider Ansicht, Gemeinschaftsleistung sein. (. . .) Am Ende war das Thema der vielen Diskussionen, die Rosenblueth und ich privat und in unserem Seminar geführt hatten, die Anwendung der Mathematik und besonders der Informationstheorie auf physiologische Methoden. Wir entwarfen einen Plan zu gemeinsamen Bemühungen auf diesen Gebieten in künftigen Zeiten einer möglichen engeren Zusammenarbeit“* [Wiener 1965, S. 139f.].

Es kam freilich erst 1942 definitiv zu der vereinbarten Zusammenarbeit mit Rosenblueth – in der Zwischenzeit war Wiener anderen Problemkreisen nachgegangen, auch militärisch bedeutsamen (vgl. dazu u. a. [Masani 1990] und [Ilgauds 1980]).

1942 fand in New York eine Tagung zum Problem der Wirkungsweise des Nervensystems, insbesondere dessen zentraler Hemmungen statt. Als Ergebnis wurde eine gemeinsame zentrale Arbeit von Wiener, Rosenblueth und Julian Bigelow vorbereitet; sie erschien 1943 unter dem Titel *Behaviour, Purpose, and Teleology* (Verhalten, Zweck und Telelogie). Der Hintergrund der Arbeit betrifft die alte Frage nach den Analogien von Lebewesen und Maschinen. Es heißt dort:

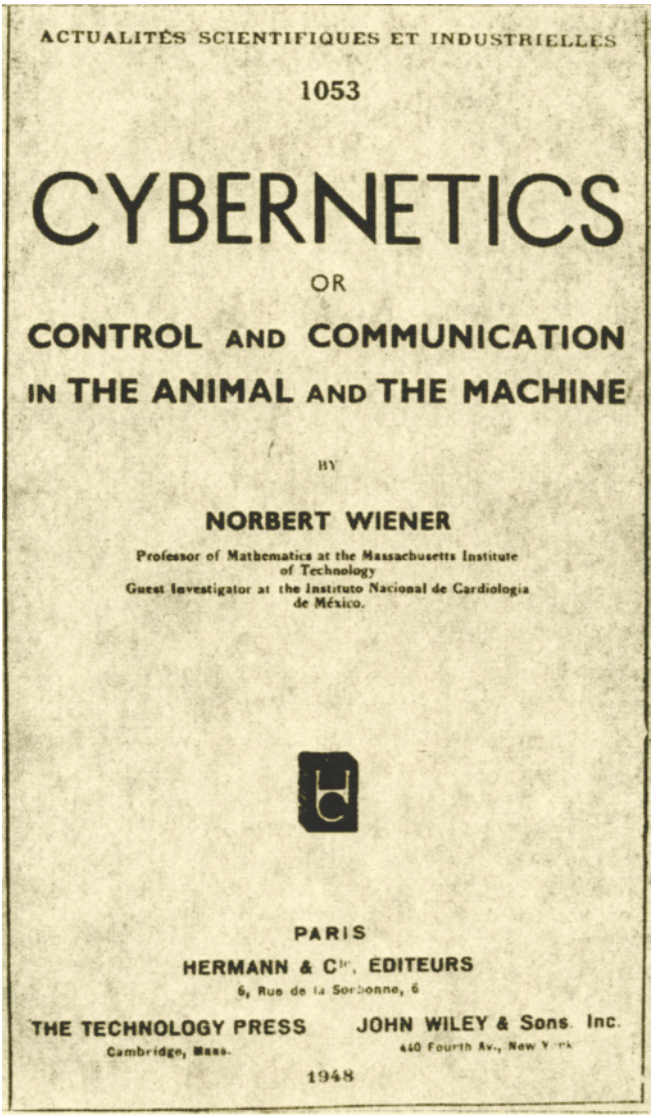
> *„Schließlich zeigt sie* (die Klassifikation der Verhaltenweisen, Wg.), *daß eine einheitliche behavioristische Analyse sowohl auf Maschinen als auch auf lebende Organismen anwendbar ist. (. . .) Grob gesehen sind die Verhaltensklassen bei Maschinen und lebenden Organismen gleich.“* (Zitiert bei [Ilgauds 1980, S. 67])

Es zeigte sich, dass enormer Diskussionsstoff vorlag, zumal auch mit Medizinern und Mathematikern. Das nächste Treffen einer gegenüber 1942 um Fachleute für Rechenmaschinen erweiterten Gruppe wurde im Spätwinter 1943/44 von Wiener und John von Neumann nach Princeton einberufen. Das Ergebnis beschreibt Wiener im Nachhinein (1948). In der deutschen Übersetzung von 1963 heißt es:

> *„Am Ende des Treffens war es allen klar, daß es eine beträchtliche gemeinsame Denkbasis aller Bearbeiter der verschiedenen Gebiete gab, daß man in jeder Gruppe schon Begriffe gebrauchen konnte, die durch andere schon besser entwickelt waren, und daß ein Versuch gemacht werden sollte, ein allgemeines Vokabular zustande zu bringen.“*
> [Wiener 1963, S. 44]

Bald darauf, 1945, arbeitete Wiener bei Rosenblueth in Mexiko-City. Einige Ergebnisse publizierten beide im gleichen Jahr in der Mexikanischen Mathematischen Gesellschaft. Nach Kriegsende, im Frühjahr 1946, fand eine weitere Begegnung der „Princetongruppe“ statt, stark erweitert um Psychologen, Soziologen, Anthropologen, Philosophen, Wirtschaftsexperten, Techniker, Meinungsforscher und Neurophysiologen.

Wiener ging 1946 noch einmal nach Mexiko-City; sein Arbeitsthema galt der Rückkopplung in biologischen Systemen. Er pflegte den Kontakt zu ausländischen Kollegen und unternahm häufig Reisen. Im Sommer 1947 hielt er sich in Europa auf, nahm an einer von Szolem Mandelbrojt , dem Onkel von Benoit Mandelbrot, organisierten Konferenz über harmonische Analyse teil (mit dem er schon zusammen gearbeitet hatte). Wiener traf J. B. S. Haldane (1892–1964) in London, Alan Mathison Turing an den National Physical Laboratories in Teddington und erneuerte seine Freundschaft mit dem Mathematiker Harald August Bohr (1887–1951) [Masani 1990, S. 251]. Wiener


ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

1053

CYBERNETICS

OR

CONTROL AND COMMUNICATION

IN THE ANIMAL AND THE MACHINE

BY

NORBERT WIENER

Professor of Mathematics at the Massachusetts Institute of Technology

Guest Investigator at the Instituto Nacional de Cardiologia de México.

PARIS

HERMANN & Cie, ÉDITEURS

6, Rue de la Sorbonne, 6

THE TECHNOLOGY PRESS

Cambridge, Mass.

JOHN WILEY & Sons, Inc.

440 Fourth Av., New York

1948

Abb. 11.8.13 Titelblatt von Wieners *Cybernetics*

nahm an einem Kongress in Nancy teil und wurde von M. Freyman, einem Vertreter eines einflussreichen Verlages, dringlich aufgefordert eine zusammenhängende Darstellung über Kommunikation und Kontrolle zu schreiben, also über jenes übergreifende Wissensgebiet (übrigens war Freyman einer der Hauptbegründer der Bourbaki-Gruppe). Bei einer Tasse Kakao in einem benachbarten Café – so Wiener – wurde der Vertrag geschlossen.

Im Spätsommer 1947 schrieb Wiener das Buch nieder. Er widmete es Rosenblueth, und es erschien 1948 in Paris unter dem Titel *Cybernetics: Or the Control and Communication in the Animal and the Machine* (Kybernetik oder Kontrolle und Kommunikation bei Tier und Maschine). Der Inhalt ist weit gefächert, der Buchtitel ist ein Programm. Einige Kapitalüberschriften aus der deutschen Übersetzung von 1963: *Newtonscher und Bergsonscher Zeitbegriff*, *Gruppen und statistische Mechanik*, *Zufallsprozesse, Information und Kommunikation*, *Rückkopplung und Schwingung*, *Rechenmaschinen und das Nervensystem*, *Gestalt und Universalbegriffe*, *Kybernetik und Psychopathologie*, *Information, Sprache und Gesellschaft*, *Über lernende und sich selbst reproduzierende Maschinen*, *Gehirnwellen und selbstorganisierende Systeme.*

Das Buch *Cybernetics* gehört zu den Sternstunden in der Geschichte der Wissenschaft, zumal Wiener auch auf die zu ziehenden gesellschaftlichen Folgerungen einging und schrieb:

> *„Wir haben zu der Einführung einer neuen Wissenschaft beigesteuert, die (. . .) technische Entwicklungen mit großen Möglichkeiten für Gut und Böse umschließt. Wir können sie nur in die Welt weitergeben, die um uns existiert, und dies ist die Welt von Belsen und Hiroshima. Wir gehören zu diesem Zeitalter und das Höchste, was irgendjemand von uns tun kann, ist, zu verhindern, daß die Entwicklung des Gebietes in die Hände der verantwortungslosesten und käuflichsten unserer Techniker gelegt wird.“* [Wiener 1963, S. 61f.]

Cybernetics ist schon vom Inhalt her ein schwieriges Buch, zumal Wiener, wie ganz allgemein, in einem schwer lesbaren Stil schrieb; gelegentlich wurden seine Texte sogar als „chaotisch“ bezeichnet. Trotz allem wurde *Cybernetics* ein großer Erfolg, beinahe wurde „kybernetisch“ schreiben zur Mode.

Folgerichtig wurde Wiener aufgefordert, ein leicht verständliches Buch über Kybernetik zur Verdeutlichung seiner Meinungen zu schreiben:

> *„Nach der Veröffentlichung dieses ziemlich fachmathematischen Buches* (der *Kybernetik*, Wg.) *drängten mich einige meiner Freunde, ein ähnliches Buch für den Laien zu schreiben, in dem ich mathematische Symbolik und Ideen soweit wie möglich vermeiden und die nicht unbeträchtlichen sozialen Folgerungen meines Standpunktes betonen sollte. Das habe ich getan. . . “* [Wiener 1966, S. 12]

So entstand 1949 *The Human Use of Human Beings*, in deutscher Übersetzung 1958 als *Mensch und Menschmaschine* [Wiener 1958]. Dort heißt es:

> *„Das Ziel dieses Buches ist vielmehr, die Möglichkeiten der Maschine auf Gebieten aufzuzeigen, die bis jetzt als Domäne des Menschen galten, und zu warnen vor den Gefahren einer ausgesprochen egoistischen Ausbeutung dieser Möglichkeiten in einer Welt, in der für uns Menschen die menschlichen Dinge wesentlich sind. (. . .) Die These dieses Buches wird in seinem ursprünglichen Titel ausgedrückt: 'Die menschenwürdige Verwendung des Menschen'.“* [Wiener 1958, S. 7f.]

Auch an weiteren Stellen, hier und in anderen Schriften Wieners, tritt eine skeptische Haltung gegenüber künftiger gesellschaftlicher Entwicklung zutage.

Die Abwürfe der Atombomben auf Japan riefen bei Wiener große moralische Zweifel hervor. So heißt es in seiner Autobiographie:

> *„Die ganzen Aufregungen* (Auseinandersetzungen mit Aiken, Wg.) *waren nichts im Vergleich zu denen, die ich zur Zeit des Bombenabwurfs auf Hiroshima durchmachte. Zuerst war ich natürlich bestürzt, wenn auch nicht überrascht, da ich mit der Möglichkeit des Kampfeinsatzes der neuen Manhattan-Projekt-Waffen durchaus gerechnet hatte. Offen gestanden hatte ich mich jedoch an die Hoffnung geklammert, daß in letzter Minute irgend etwas mit der Atombombe nicht funktionieren würde, denn ich hatte schon viel über die Bedeutung der Bombe nachgedacht und darüber, was es für die menschliche Gesellschaft hieß, von nun an im Schatten der Bedrohung mit grenzenloser Zerstörung leben zu müssen. (...)*
> *Es ist eine ganz offenkundige geschichtliche Tatsache, daß unsere Arbeit an der Atombombe zutiefst international war und durch eine Gruppe von Leuten ermöglicht worden ist, die man nicht hätte zusammenbekommen können, wenn die Bedrohung durch Nazi-Deutschland nicht in der ganzen Welt so stark empfunden worden wäre und besonders eben bei jener Gelehrtengruppe, die am meisten zur Kerntheorie beigetragen hat. Ich spreche hier von Männern wie Einstein, Szilard, Fermi und Niels Bohr. (...) Deshalb war es doppelt unglücklich, die Bombe bei einer Gelegenheit einzusetzen, bei der der Gedanke auftauchen konnte, daß wir sie gegen Weiße nicht eingesetzt haben würden. (...)*
> *Auf jeden Fall war mir von Anfang an klar, daß wir Naturwissenschaftler künftig mit einer zwiespältigen Einstellung rechnen müßten, denn die Öffentlichkeit, die uns als Medizinmänner und Zauberer betrachtete, würde uns wahrscheinlich als geeignetes Opfer für die Götter ansehen, wie das andere, primitivere Völker tun. Am Tage der Atombombe wurde das ganze Schema der Hexenjagd der letzten acht Jahre klar, und was wir jetzt erleben, ist nur die Verwirklichung dessen, was damals in den Sternen geschrieben stand.*
> *Ich war zwar an der Atombombe selbst nicht beteiligt, geriet aber dennoch in sehr tiefe Gewissensnöte. Ich habe bereits erläutert, wie meine Arbeit über Vorhersage und über Rechenmaschinen mich zur Grundlage der Kybernetik, wie ich es später nannte, und zu einem Verständnis der Möglichkeiten der automatischen Fabrik geführt hatte. Vom streng wissenschaftlichen Standpunkt aus war das nicht so revolutionär wie die Atombombe, aber seine sozialen Möglichkeiten im Guten wie im Bösen waren ungeheuerlich.“*
> [Wiener 1965, S. 252]

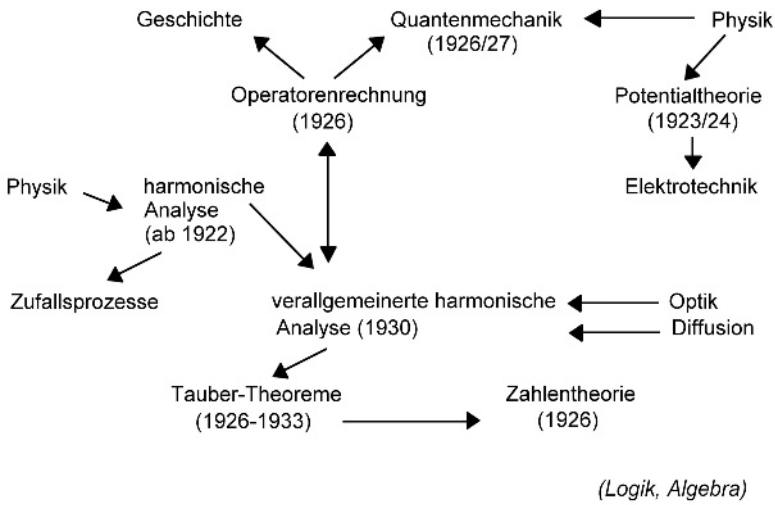


Abb. 11.8.14 Wieners Arbeiten bis 1930 (nach [Ilgauds 1980])

Das Buch *Cybernetics* erregte weltweit Aufsehen, nicht immer Zustimmung. Ablehnung kam insbesondere aus der Sowjetunion während der Stalinzeit. Vor allem die Ausdehnung kybernetischen Denkens auf Ökonomie und Philosophie rief heftigen Widerstand hervor. In einem Beitrag aus dem Jahre 1969 wurden diese Teile ausdrücklich ausgenommen, und in den 50er Jahren wurde in einem philosophischen Wörterbuch die Kybernetik als reaktionäre Pseudo-Wissenschaft eingeordnet. Dagegen erkannten J. D. Bernal (1901–1971) und J. B. S. Haldane (1892–1964) – britische Marxisten – die Kybernetik als Bereich mit wichtigen Aufgaben für Wissenschaft und wissenschaftliche Philosophie an; so berichtete es Wiener [Masani 1990, S. 244ff.].

Wiener erntete weltweiten Ruhm mit seiner *Cybernetics*; man sollte jedoch nicht seine außerordentlichen Verdienste in vielen mathematischen Disziplinen übersehen.

In der Biographie von H.-J. Ilgauds [Ilgauds 1980] werden die verschiedenen Arbeitsgebiete von Wiener analysiert und in zwei Schemata übersichtlich dargestellt.

Norbert Wiener wurde am 26. November 1894 in Columbia (Missouri, USA) geboren, als Sohn des aus Russland zugewanderten Juden Leo Wiener. Der Vater wurde Schullehrer in Kansas City, schließlich Professor für moderne Sprachen, später für deutsche Sprache, an der Universität von Missouri. Auch die Mutter kam aus einer jüdischen Familie, die aus Deutschland stammte.

Merkwürdigerweise hatte Norbert in der Schule Schwierigkeiten ausgerechnet in Arithmetik. In der Folgezeit, an verschiedenen Schulen, litt er unter dem Nimbus „Wunderkind“. In Harvard studierte er zunächst Zoologie, dann Philosophie, teilweise an der Cornell-Universität, ging dann wieder

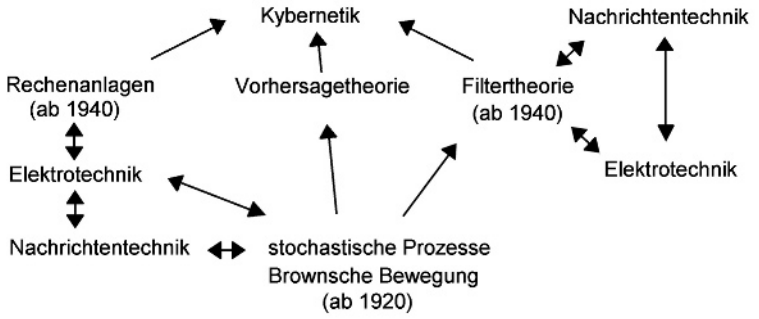


Abb. 11.8.15 Wieners Arbeiten bis zum Ende des zweiten Weltkrieges (nach [Ilgauds 1980])

nach Harvard, promovierte mit 18 Jahren mit einer Arbeit über mathematische Logik. Anschließend ging Wiener nach Cambridge (England); Russell wies ihn darauf hin, dass er mehr Mathematik studieren müsse, wenn er Philosophie der Mathematik betreiben wolle. So hörte er Vorlesungen bei Hardy und Littlewood.

Kurz vor Ausbruch des Ersten Weltkrieges begab sich Wiener nach Göttingen und studierte bei David Hilbert, Edmund Husserl (1859–1938) und Edmund Landau. Nach der Rückkehr in die USA arbeitete er einige Zeit an der Columbia Universität und wurde 1915 Lecturer (für Philosophie und Logik der Geometrie) in Harvard. Im Jahre 1916 arbeitete Wiener in einem Trainingslager für Offiziere – seine Augenprobleme, die ihm sein ganzes Leben erschwerten, hinderten ihn am aktiven Wehrdienst. Von 1916 bis 1917 wirkte er als Instrukteur für Mathematik an der Universität Maine. 1918 arbeitete er unter Oswald Veblen an Berechnungen für Schusstafeln. Bald darauf, nach Kriegsende, wurde er 1919 Instrukteur für Mathematik am MIT, 1924 assistant professor am MIT, konnte mit Hilfe eines Stipendiums 1926 bis 1927 abermals nach Göttingen und dann nach Kopenhagen gehen. 1929 war er associate professor im MIT, schließlich Professor der Mathematik im MIT. Dazwischen lag eine Reihe von Gastvorträgen. Er nahm 1945 an einer Studiengruppe unter John von Neumann über Kommunikationstheorie teil; im selben Jahr noch begann seine Zusammenarbeit mit Arturo Rosenblueth, die er 1949 bis 1950 fortsetzte, Im Jahre 1960 wurde Wiener emeritiert. Kurz vor seinem Tode erhielt er die National Medal of Science vom amerikanischen Präsidenten. Er starb am 18. März 1964 in Stockholm an einem Herzschlag.

Das hohe internationale Ansehen Wieners beruht nicht zuletzt auch auf einer inhaltlich und geographisch weit ausgreifenden Vortragstätigkeit und Gastprofessuren. Die Reisen führten ihn nach London, Göttingen, New York, an die Universität von Maine, zu den Internationalen Mathematikerkongressen in Strasbourg und Grenoble, dann wiederum nach Göttingen. Weitere Stationen seiner intensiven Tätigkeit sind: Kopenhagen, Brown Universität,

Cambridge (Trinity College), Internationaler Mathematikerkongress Zürich, Williamston (Mass.), Stanford Universität, Japan, Peking, Internationaler Mathematikerkongress Oslo, Johns Hopkins Universität, Princeton, Guadalajara (Mexiko), Nancy (Frankreich), Internationaler Mathematikerkongress Harvard, Paris, Madrid, Universität von Miami, Los Angeles, Bombay, Kalkutta, Neapel, Sowjetunion, Yale Universität, Amsterdam, Stockholm ([Masani 1990, S. 371ff.] mit ausführlicher Bibliographie der Schriften von Wiener). Alle, die Wiener kannten, waren sich einig: Wiener war einzigartig. Und sein Kollege und Freund Dirk J. Struik fügte hinzu: *„he lived the unity of science“* (er lebte die Einheit der Wissenschaft) [Struik 1966, S. 214].

11.9 Gelöste und ungelöste Probleme

11.9.1 Die Lösung des Vierfarbenproblems

Zu den berühmtesten und auch in der Öffentlichkeit weithin diskutierten Problemen gehört das so genannte Vierfarbenproblem: Kommt man mit höchstens vier Farben aus, um eine beliebig komplizierte, „wilde“ Landkarte zu kolorieren, und zwar so, dass aneinander grenzende Regionen nicht dieselbe Farbe haben? Die Übereinstimmung zweier Regionen in einem einzigen Punkt wird nicht als gemeinsame Grenze verstanden (vgl. dazu [Appel/Haken 1977], [Devlin 1993, S. 173ff.], [Fritsch/Fritsch 1994]).

Möglicherweise, nach einer von F. Klein aufgebrachten Legende, hat bereits A. F. Möbius dieses Problem vor Augen gehabt. Verbürgt ist jedoch, dass der noch junge englische Mathematiker Francis Guthrie (1831–1899) im Oktober 1852 das Problem formuliert hat, als er eine Landkarte der englischen Grafschaften kolorieren sollte. Übrigens war Guthrie auch als Jurist und später an der Universität Kapstadt als Mathematiker tätig: dort veröffentlichte er überaus wertvolle Ergebnisse zur Botanik jener Gegend und war beteiligt an der Planung einer Eisenbahnlinie.

Durch seinen Bruder gelangte das von Guthrie gestellte Problem umgehend an Augustus de Morgan, bei dem der Bruder Mathematik studierte, und von dort an Sir William Rowan Hamilton, den Erfinder der Quaternionen und wahrscheinlich bedeutendsten Naturforscher Irlands. De Morgan schrieb an Hamilton: *“A Student of mine asked me today to give him a reason for a fact which I did not know was a fact, and do not yet. He says that if a figure be anyhow divided and the compartments differently coloured so that figures with any portion of common boundary line are differently coloured – four colours may be wanted but not more. The following is his care in which four are wanted.”* (Zitiert in [Fritsch/Fritsch 1994, S. 13]) Mit anderen Worten: Man kannte eine Konstellation, die vier Farben erfordert.

De Morgan hat die Problemstellung des Vierfarbenproblems weiter vermittelt, 1853 und 1854 an William Whewell (1794–1866), seinen Lehrer, der als Philosoph der „induktiven Wissenschaften“ bekannt geworden ist, und an

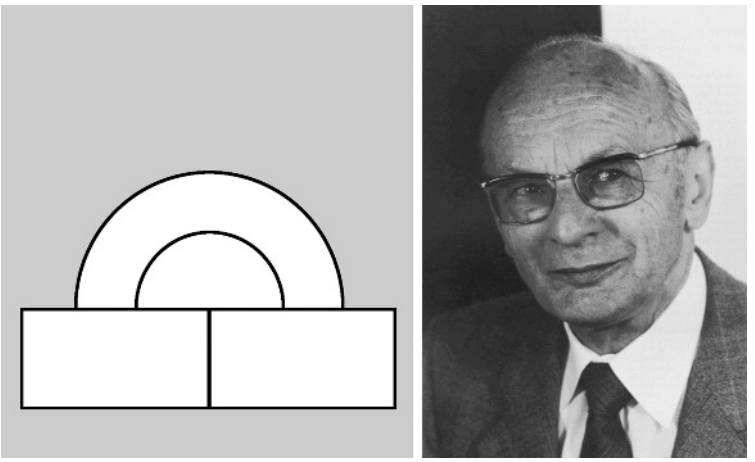


Abb. 11.9.1 Vierfarbenkonstellation (nach einer Skizze im Brief von de Morgan an Hamilton); Heinrich Heesch

Robert Leslie Ellis (1817–1859), der am Trinity Collge in Cambridge tätig war. Aber erst durch Arthur Cayley wurde 1878 das Problem wieder aktualisiert. Auch Cayley war Jurist, hielt aber die beruflichen Verpflichtungen in Grenzen, um sich in Cambridge intensiv der Mathematik widmen zu können, und war überaus produktiv. Schon ein Jahr später, 1879, veröffentlichte ein gewisser Alfred Bray Kempe (1845–1922), ebenfalls ein Jurist, eine Lösung des Problems und zwar in dem von J. J. Sylvester gegründeten *American Journal of Mathematics Pure and Applied*; Sylvester wirkte zu dieser Zeit in Baltimore an der Johns Hopkins Universtität. Weitere Mathematiker in Baltimore, William Edward Story (1850–1930) und Charles Sanders Peirce lieferten Erweiterungen bzw. Vereinfachungen des Ergebnisses von Kempe. (Nebenbei: Der Urgroßvater von Story war einer jener Männer, die als Indianer verkleidet am 16. 12. 1773 an der sog. „Tea Party“ in Boston beteiligt waren.) Und schließlich lieferte der aus Schottland stammende Physiker Peter Guthrie Tait (1831–1901) 1880 einen weiteren, angeblich andersartigen „Beweis“ des Satzes. Um 1879/1880 galt das Vierfarbenproblem als gelöst, bis 1890 Percy John Heawood (1861–1955), Mathematiker und Liebhaber von Sprachen, zeigte, dass der Beweis von Kempe falsch ist!

In der Folgezeit wurden trotz einiger Versuche kaum Fortschritte erzielt; doch sollen Oswald Veblen und vor allem George Birkhoff wenigstens erwähnt werden, die das Problem als topologisches Problem verstanden.

Die entscheidende Wendung trat erst ein, als die verschiedenen topologischen Konfigurationen – Einzelheiten würden zu weit führen (vgl. dazu [Bigalke 1988, S. 173ff.]) – Schritt für Schritt den sich entwickelnden maschinellen Rechenmethoden unterworfen wurden. Der Anstoß ging von dem deutschen Mathematiker Heinrich Heesch (1906–1995) aus. Während seiner

Göttinger Zeit, als Assistent bei Hermann Weyl, hatte Heesch vorzügliche Arbeiten zur Parkettierung veröffentlicht. Da er nicht der NSDAP beitreten wollte, konnte er in Göttingen keine Anstellung finden und lebte seit 1936 in Kiel, später in Hannover.

Seit 1936 war er mit dem Vierfarbenproblem beschäftigt, verstärkt in den Jahren 1964 bis 1967. Er entwickelte die Methode der sog. Ladungsverschiebung, musste sich aber noch immer einer mühseligen Handarbeit unterziehen. Hauptsächlich in technischer Hinsicht wurde Heesch unterstützt durch Karl P. Dürre (*1937). Im Frühjahr 1967 wurde Heesch von Wolfgang Haken (*1928) an die Universität von Illinois eingeladen. Haken hatte Mathematik, Physik und Philosophie in Deutschland studiert und von 1954–1962 als Enwicklungsingenieur bei Siemens und Halske in München gearbeitet. Er hatte 1948 in Kiel einen Vortrag von Heesch zum Vierfarbenproblem gehört und dessen weitere Arbeiten verfolgt. Auch ein Japaner, Yoshio Shimamoto (*1927), schon mit dem Vierfarbenproblem befasst, arbeitete sich in die Vorarbeiten von Heesch ein.

Schon zu Beginn des Briefwechsels Haken-Heesch war über die Rechengeschwindigkeit der Rechner diskutiert worden, die in Illinois ungleich größer war. So nahm Heesch, zusammen mit Dürre schließlich 1968 die Einladung an und fand ideale Arbeitsbedingungen vor; Heesch rechnete ca. 30 Stunden pro Woche! Im November 1968 kehrte Heesch nach Deutschland zurück. Es folgte ein weiterer Forschungaufenthalt von Heesch in den USA, von Februar bis Oktober 1969.

Anknüpfend an die Grundideen von Heesch gelangte Haken 1970 zu einigen Verbesserungen, aber immer noch im Bewusstsein, dass eine gewaltige Rechenarbeit vor ihm lag. Gemeinsam mit Kenneth Appel (*1932) machte er sich 1972 an die Arbeit. Appel schrieb ein entscheidendes Programm, Haken hatte die mathematische Grundidee. Im Jahre 1976 – nach einem gewaltigen Rechenaufwand: 1200 Stunden Rechenzeit an hochgezüchteten Computern (IBM 360) – war der Beweis für die Richtigkeit des Vierfarbensatzes erbracht. Die Publikation erfolgte 1977 [Appel/Haken 1977]. Beide Forscher gingen später auf einige Einwände in einem Artikel aus dem Jahre 1986 ein.

Man muss sich vor Augen halten, dass dieser Beweis, verglichen mit den bisher üblichen Beweisen in der Mathematik einen gänzlich neuen Beweistyp darstellt: ein Computerbeweis! Die Mathematik hatte sich abermals grundlegend verändert; die Diskussionen über Computerbeweise sind keineswegs erloschen.

> *„Die zeichenweise Spielerei des Francis Guthrie war der Auslöser für ein Jahrhundert Mathematikgeschichte, in dem der Baum der Mathematik viele neue Äste und Zweige, wie die Graphentheorie, getrieben hat. Durch den von Appel, Haken und Koch vorgelegten Beweis des Vierfarbensatzes hat sich das Vierfarbenproblem trotzdem nicht endgültig erledigt. Viele Mathematiker bemühen sich weiterhin um einen computerfreien Beweis und weitere Fragestellungen schließen sich in großer Zahl an.“* [Fritsch/Fritsch 1994, S. 44]

11.9.2 Der Große Fermatsche Satz: Beweis nach 300 Jahren!

Fermat hat den Mathematikern – und überhaupt der Menschheit – ein Problem hinterlassen, das seit der Mitte des 17. Jahrhunderts bis in unsere Zeit den Anstrengungen auch der berühmtesten und scharfsinnigsten Mathematiker getrotzt hat. Erst nach mehr als dreihundert Jahren ist es von dem englischen Mathematiker Andrew Wiles im Jahre 1993 gelöst worden.

Der „Ruhm“ des Großen Fermatschen Satzes beruht nicht zuletzt darauf, dass das Problem leicht zu formulieren und scheinbar leicht zu lösen ist.

In einem gewissen Sinne reicht es zurück bis in die Antike, bis zu dem zentralen Satz der Geometrie, dass das Quadrat über der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes flächengleich ist der Summe der Quadrate über den beiden Katheten: $c^2 = a^2 + b^2$.

Für gewisse ganzzahlige Seitenlängen a, b und c, z. B. $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, ist diese Gleichung erfüllt. Es gibt noch eine Vielzahl anderer solcher Tripel mit ganzen Zahlen $x,\ y,\ z$, sodass $x^2 + y^2 = z^2$ ist, die sog. pythagoreischen Zahlentripel.

Nun erhebt sich die Frage, ob eine solche Gleichung für ganzzahlige $x,\ y,\ z$ auch gelten kann, wenn nicht die Quadrate summiert werden, sondern etwa die dritten, oder vierten oder n-ten Potenzen? Gibt es also ganzzahlige $x,\ y,\ z$, sodass $x^3+y^3 = z^3$ oder $x^4+y^4 = z^4$ oder ganz allgemein $x^n+y^n = z^n$ für $n > 2$ ist?

Fermat meinte nun, dass für alle $n > 2$ diese Gleichung nicht ganzzahlig erfüllbar ist, und er glaubte sogar, einen Beweis gefunden zu haben! In seinen bei der Lektüre (1637) der *Arithmetica* von Diophant gemachten „Bemerkungen zu Diophant“, die erst 1670 postum von seinem Sohn herausgegeben wurden, hat sich Fermat folgendermaßen ausgedrückt:

> „*Es ist jedoch nicht möglich, einen Kubus in 2 Kuben, oder ein Biquadrat in 2 Biquadrate und allgemein eine Potenz, höher als die zweite, in 2 Potenzen mit ebendemselben Exponenten zu zerlegen: Ich habe hierfür einen wahrhaft wunderbaren Beweis entdeckt, doch ist dieser Rand hier zu schmal, um ihn zu fassen.*“ [Fermat 1932, S. 3]

In der Diophant-Ausgabe *Arithmetica* von 1670 heißt es in der Originalsprache *Observatio Domini Petri de Fermat* (Beobachtung/Bemerkung des Herrn Petrus von Fermat):

> *„Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos ejusdem nominis fas est dividere, cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.“* [Diophant 1670, S. 61]

Die postum durch den Sohn veröffentlichten achtundvierzig Bemerkungen seines Vaters waren notizenartig und enthielten keinen Beweis. Die obige Behauptung heißt “der Große Fermatsche Satz“ oder auch “Fermats letzter Satz“. Da sich der Beweis als außerordentlich schwierig erwies, nimmt man



Abb. 11.9.2 Pierre de Fermat. Die Marmorskupltur auf hohem Sockel vor dem Dach der großen offenen Markthalle auf dem Marktplatz von Beaumont-de-Lomagne wurde vom Steinmetz Valette aus Toulouse geschaffen. Als Vorbild diente ein im Hôtel d' Assézat in Toulouse aufbewahrtes verkleinertes Modell der 1943 von der deutschen Besatzungsmacht eingeschmolzenen Bronzeplastik des Bildhauers Jean Alexandre Joseoh Falguière (1831–1900). Das von dem in Beaumont geborenen Mathematiker, Physiker und Astronomen Theodore Despeyrous gestiftete bronzene Original war am 20. August 1882 feierlich enthüllt worden. Seit 1955 steht die Skulptur aus Marmor am ursprünglichen Platz [Foto Barner]

heute an, dass sich Fermat geirrt hat. Allenfalls könnte er einen Beweis für $n = 4$ gehabt haben, den er für verallgemeinerungsfähig hielt.

In der Folgezeit konnten trotz aller Bemühungen nur Teilergebnisse erzielt werden: Leonhard Euler gelang der Beweis für den Fall $n = 4$, also für Biquadrate, und schließlich auch (mit Hilfe imaginärer Zahlen) für $n = 3$, für Kuben. Daraus folgt die Richtigkeit der Fermatschen Vermutung für alle Vielfachen von 3 und 4, also für 6, 9, 12, ... und für 8, 12, 16, ... Doch konnte Euler seine Methode nicht verallgemeinern.

Wenig später bemerkte man, dass es ausreichen würde, den Satz für den Exponenten $n = 4$ und für alle Primzahlexponenten zu beweisen. Dann ließe sich der Satz für alle ganzen Zahlen > 3 beweisen. Da es aber unendlich viele Primzahlen gibt, blieb der allgemeine Satz auch dann weiterhin unbewiesen.

Das 19. Jahrhundert brachte immerhin einige Fortschritte, für Spezialfälle des Exponenten.

Im Jahre 1825 konnten Peter Gustav Lejeune Dirichlet und Adrien-Marie Legendre den Satz für $n = 5$ beweisen, also die Unmöglichkeit der Zerlegung einer fünften Potenz in die Summe zweier fünfter Potenzen von ganzen Zahlen. Sie hatten sich dabei auf Vorüberlegungen der französischen Mathematikerin Sophie Germain (1776–1831) gestützt. Der französische Mathematiker Gabriel Lamé (1795–1870) konnte 1839 den Satz für $n = 7$ beweisen, war aber – ebenso wie Augustin Louis Cauchy – sogar noch 1849 überzeugt, demnächst einen vollständigen Beweis finden zu können.

Ernst Eduard Kummer bemerkte deren grundlegenden Denkfehler. Kummer konnte lediglich die Richtigkeit des Satzes für eine spezielle Art von Primzahlen (sog. reguläre Primzahlen) erweisen.

Bei diesem abschreckenden, ernüchternden Sachverhalt ließ man den Großen Fermatschen Satz zunächst auf sich beruhen, bis zum Beginn des 20. Jahrhunderts. Die Wiederbelebung des Problems ist in denkwürdiger Weise mit dem persönlichen Schicksal des Darmstädter Mathematikers Paul Friedrich Wolfskehl (1856–1906) verknüpft. Nach einer späteren Legende hatte sich Wolfskehl stark verliebt, und als seine Liebe unerwidert blieb, beschloss er, sich umzubringen, genau zu Mitternacht. Um sich die Zeit bis dahin zu vertreiben, stieß er auf eine Abhandlung zum Großen Fermatschen Satz und war davon so beeindruckt, dass er den Zeitpunkt verpasste. Er gab die Idee des Freitodes auf und setzte im Testament eine Summe von 100 000 Mark (damals eine ungeheure Summe) für denjenigen aus, der das Problem bezwungen hätte. Wolfskehl starb 1906 und die Göttinger Akademie der Wissenschaften schrieb 1908 den Wolfskehl-Preis aus. Als Folge der Bekanntgabe wurden zahlreiche „Beweise“ geliefert, und ganze Scharen von Assistenten an Mathematischen Instituten waren beschäftigt, die Fehler zu finden und die „Beweise“ „abzutöten“, ähnlich wie bei den ewigen Winkeldreiteilern und Kreisquadrierern.

Erst 1993 (bzw. 1995 s.u.) gelang dem britischen Mathematiker Andrew Wiles der Beweis. Er hatte in Princeton, jahrelang in aller Stille, verbissen

an seinem Werk gearbeitet und galt bei seinen Kollegen schon als unproduktiv geworden. Nachdem er in seiner Beweiskette noch eine Lücke entdeckt und diese beseitigt hatte, wagte er sich erst am 23. Juni 1993 zur öffentlichen Demonstration seines Beweises im ehrwürdigen Isaac-Newton-Hörsaal in Cambridge (England). In einem glänzenden Vortrag demonstrierte er den Beweis der sog. Shimura-Taniyama-Weil-Vermutungen, des entscheidenden Zwischengliedes, und damit die Richtigkeit der Fermatschen Vermutung (siehe dazu auch Kap. 12). Ein Hörer dieser historischen Vorlesung schilderte die spannungsgeladene Stimmung:

> *„Die Atmosphäre war sehr geladen, die Leute waren aufgeregt. Natürlich hatten wir das Gefühl, an einem historischen Moment teilzuhaben. Vor und während des Vortrages hatten die Leute ein verschmitztes Lächeln auf ihren Gesichtern. Die Spannung hatte sich über mehrere Tage hin aufgebaut. Dann kam dieser herrliche Augenblick, als wir uns dem Beweis von Fermats letztem Satz näherten.“* (Zitiert nach [Singh 2001, S. 281]. Im englischen Sprachbereich wird „Fermats Satz“ meist als Last Theorem, d. h. letzter Satz bezeichnet.)

Der krönende Abschluss am 23. Juni 1993 erfolgte nach zwei vorangegangenen Vorträgen; daher die Bemerkung „Spannung aufgebaut“.

Der Beweis vereinigte sehr spezielle, neueste Forschungsergebnisse, die inhaltlich teilweise sehr weit auseinander lagen. Die ungeheure Beharrlichkeit von Wiles bei der Verknüpfung dieser Gebiete brachte den Erfolg. Wiles sagte am Ende seines Vortrages:

> *„Natürlich war es ein großes Ereignis, aber ich hatte gemischte Gefühle. Sieben Jahre lang war dies ein Teil von mir gewesen: mein ganzes Arbeitsleben hatte darin bestanden. Ich hatte mich so tief in das Problem versenkt, daß ich wirklich das Gefühl hatte, es gehörte mir allein. Doch jetzt ließ ich es los. Ich hatte den Eindruck, einen Teil meines Selbst aufzugeben.“* (Zitiert nach [Singh 2001, S. 282])

Indessen: Nach den ungeschriebenen Gesetzen der Wissenschaft werden die Ergebnisse von einer Anzahl unabhängiger Gutachter überprüft, zumal, wenn es sich um ein so bedeutendes Resultat handelt. Tatsächlich – man kann sich die Verfassung von Wiles und seiner Frau vorstellen – fand man eine Lücke im Beweis, die aber geschlossen werden konnte. So erfolgte die gründlich überprüfte Publikation erst im Mai 1995; sie umfasst mehr als 100 Seiten [Wiles 1995], [Taylor/Wiles 1995], [Porten 1996], [Singh 2001]. Zur Vorgeschichte siehe [Edwards 1977].

Die Mathematikergemeinde und die Weltpresse feierten Wiles enthusiastisch. Man verglich die Leistung von Wiles sogar mit der revolutionären Entdeckung der Kernspaltung und der Entschlüsselung der DNS. Die Sensation im öffentlichen Leben klang wie gewöhnlich bei wissenschaftlichen Ereignissen schnell ab. In Analogie zu Fermats Bemerkung „der Rand ist zu knapp“ dichtete man:

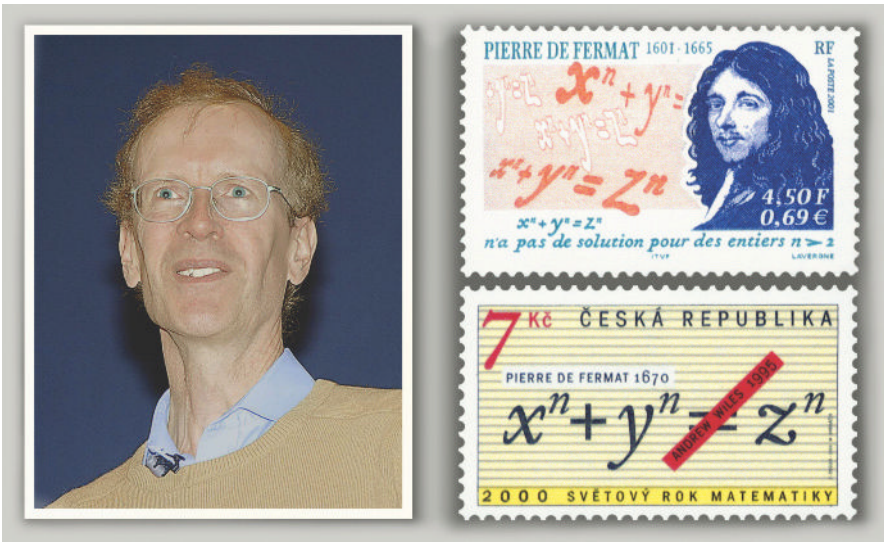


Abb. 11.9.3 Andrew Wiles (copyright C.J. Mozzochi, Princeton N.J.); Brfm. zum Großen Fermatschen Satz (Frankreich 2001, Tschechien 2000). Das Geburtsjahr von Fermat ist falsch angegeben. Fermat wurde nach neueren Forschungen [Barner 2001] 1607/08, vermutlich 1607 geboren und erhielt traditionsgemäß denselben Vornamen wie sein 1600 geborener, aber als Kleinkind verstorbener Bruder Pierre.

»My butter, garçon, is writ large in!«
A diner was heard to be chargin',
»I had to write there«,
Exclaimed waiter Pierre,
»I coudn't find room in the margarine.«
Zu deutsch:
»Meine Butter, garçon, ist vollgeschrieben !«
hörte man einen Gast klagen,
»Ich mußte darauf schreiben«,
Rief Kellner Pierre,
»Ich fand keinen Platz auf der Margarine.«
(Zitiert nach [Singh 2001, S. 314])

Das Wolfskehl-Komitee trat am 27. Juni 1997 zusammen und verlieh Andrew Wiles den Preis – nach der Entwertung durch die Inflation der 20er Jahre und die Währungsreform 1948 nur 70 000 DM – im Festsaal der Göttinger Akademie der Wissenschaften. Das Fermat-Problem wurde offiziell als gelöst erklärt. Auf dem internationalen Kongress der Mathematik in Berlin 1998 erhielt Wiles eine Sonderauszeichnung der Internationalen Mathematischen Union, aber nicht die Fields-Medaille, weil er beim endgültigen Beweis dafür schon die Altergrenze überschritten hatte.

11.9.3 Offene Probleme der Zahlentheorie

Nach der Lösung des Fermatproblems trat eine gewisse „Niedergeschlagenheit“ in Mathematikerkreisen ein, hatte man doch kein so schönes, allgemein interessierendes, spannendes, weitgreifendes Problem vor sich, das ganze Gruppen von Mathematikern „herausforderte“, insbesondere Zahlentheoretiker. Sogar Wiles zeigte sich im gewissen Sinne ernüchtert und bedauerte sogar:

> *„Manche Leute meinen, ich hätte ihnen ihr Problem weggenommen, und fragten, ob ich ihnen nicht etwas anderes dafür geben könnte. Es herrscht eine gewisse Niedergeschlagenheit. Wir haben etwas verloren, das uns so lange begleitet hat und das viele von uns in die Mathematik gezogen hat. Vielleicht ist das einfach so mit Matheproblemen. Wir müssen eben neue finden, die unsere Aufmerksamkeit fesseln.“* (Zitiert nach [Singh 2001, S. 314])

Doch es gibt noch weitere spannende Probleme, gerade auch in der Zahlentheorie, die weit zurückliegen und noch immer ungelöst sind.

Da ist die bereits in der Antike gestellte Frage nach vollkommenen Zahlen, also solchen, bei denen die Summe ihrer echten Teiler gleich der Zahl selbst ist. Beispielsweise sind 6 und 28 vollkommene Zahlen: 6 hat die Teiler 1, 2 und 3, deren Summe ist 6. 28 ist teilbar durch 1, 2, 4, 7 und 14; die Addition dieser Zahlen ergibt 28.

Vollkommene Zahlen sind selten. Im Juni 1998 wurde die 38. vollkommene Zahl gefunden:

$$2^{6\,972\,592}\,(2^{6\,972\,593}-1).$$

Alle bisher bekannten vollkommenen Zahlen sind gerade Es erhebt sich die Frage: Sind alle vollkommenen Zahlen gerade? Gäbe es ungerade vollkommene Zahlen, so müssten sie größer als 10^{100} sein und mindestens 11 verschiedene Primfaktoren enthalten. Und: Gibt es unendlich viele vollkommene Zahlen? Alle Lösungsversuche sind bisher gescheitert.

Das Feld der Primzahlen bietet ein weites Feld interessanter Fragen und Probleme. Zwar hatte schon Euklid beweisen können, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Immerhin ist dies eine Aussage, die das Unendliche in mathematische Gedankenführungen einbezieht – eine revolutionäre Denkleistung während der Antike.

Merkwürdigerweise aber hat man bisher keine Erkenntnisse gewinnen können, wie sich die Primzahlen in der Menge der natürlichen Zahlen verteilen, ob sie regelmäßig wiederkehren. Stellenweise häufen sie sich; in anderen Bereichen sind fast keine Primzahlen vorhanden. Möglicherweise ist die Angelegenheit ganz kompliziert: Nicht nur, dass man eine Regularität noch nicht entdeckt hat, vielleicht existiert gar keine reguläre Verteilung?

Ferner ist da das Problem der Primzahlzwillinge. Primzahlzwillinge sind Primzahlen, die sich nur um 2 unterscheiden wie etwa 5 und 7, 17 und 19, auch 22 271 und 22 273, auch 1 000 000 000 061 und 1 000 000 000 063. Da man

immer neue Zwillinge findet, vermutet man, dass es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt. Ein Fortschritt bei der Suche nach einer Lösung dieses Problems gelang 1966 dem chinesischen Mathematiker Chen Jingrun unter Benutzung des Begriffs „Fast-Primzahlen“.

Das Goldbachsche Problem

Berühmt ist auch das sog. Goldbachsche Problem [Juškevič/Kopelevič 1994]. Es geht zurück auf den Mathematiker Christian Goldbach , der den jugendlichen Zar Peter II. (1715–1730) unterrichtet hat. Der hoch gebildete Goldbach stammt aus dem damaligen Königsberg und ist weit in der wissenschaftlichen Welt seiner Zeit herumgekommen. Er traf Leibniz und Christian Wolff (1679–1754), diente unter dem preußischen König Friedrich Wilhelm I. (1688–1740) und trat schließlich in russische Dienste, anfangs an der neu eingerichteten Petersburger Akademie, dann am Hofe in Moskau. Er stand im Briefwechsel mit Daniel Bernoulli (1700–1782) und dem ebenfalls zeitweise in Russland wirkenden Jakob Hermann (1678–1733) und Leonhard Euler. Er hat originelle Beiträge zur Analysis und zur Reihenlehre geleistet.

Goldbach hat mit Primzahlen und mit der Zerlegung von natürlichen Zahlen in Primzahlen sozusagen experimentiert.

$4 = 2 + 2$
$6 = 3 + 3$
$8 = 3 + 5$
$100 = 53 + 47$
$21000 = 17 + 20983$ usw.

In einem Brief an Euler vom 7. Juni 1742 hielt er es für möglich, dass sich jede natürliche Zahl > 2 in die Summe von drei Primzahlen zerlegen lässt: Er wolle die Vermutung wagen, dass eine „*jede Zahl, die größer ist als zwei, ein aggregatum trium numerorum primorum*“ sei (unter Hinzunahme der 1). Wir sprechen heute von der sog. schwachen (oder ternären) Goldbachschen Vermutung. Unter Goldbachscher Vermutung schlechthin versteht man die starke (oder binäre) Goldbachsche Vermutung, dass sich jede gerade Zahl größer als 2 als Summe zweier Primzahlen darstellen lässt (über frühe Lösungsversuche vgl. [Juškevič/Kopelevič 1994, S. 109]).

Allgemein hält man die Goldbachsche Vermutung für richtig, aber ein vollständiger Beweis steht aus. Man weiß, dass jede gerade Zahl größer als 2 als Summe von höchstens 6 Primzahlen ausgedrückt werden kann. Die Gültigkeit der Goldbachschen Vermutung wurde 1940 bis 10 000, 1992 bis 4 mal 10^{11} bewiesen.

Heute, mit Hilfe von Computern, wurden Schritt für Schritt Fortschritte erzielt. In mühsamen Arbeiten konnte dieses Ergebnis erheblich verschärft werden. Endlich, 1998, bewies J. Richstein, dass die Goldbachsche Vermutung richtig ist für alle geraden n bis 4 mal 10^{14} [Richstein 2001]. Im Jahre 2005

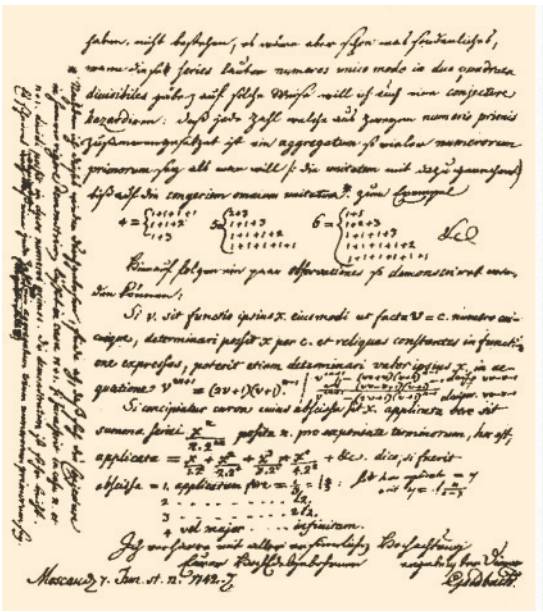




Abb. 11.9.4 Christian Goldbachs Brief vom Juni 1742 an Euler, in dem er die nach ihm benannte Vermutung äußert: Jede gerade Zahl größer als 4 ist als Summe zweier Primzahlen darstellbar [wikimedia commons]; Eugène Charles Catalan (Gemälde von Emile Delperée 1884)

wurde die Gültigkeit bis 2 mal 10^{17} bewiesen. Im Jahre 1966 (noch ergänzt 1973) konnte der chinesische Mathematiker Chen Jingrun beweisen, dass jede hinreichend große ganze Zahl die Summe einer Primzahl und einer anderen Zahl ist, die selbst prim oder das Produkt zweier Primzahlen ist.

Was die schwache Goldbachsche Vermutung betrifft, so ist sie „fast“ bewiesen. Der sowjetische Mathematiker Iwan Matwejewitsch Winogradow, der führende analytische Zahlentheoretiker, bewies 1937, dass jede hinreichend große natürliche Zahl Summe von drei Primzahlen ist [Winogradow 1937]. Dafür erhielt er 1941 den Stalinpreis in Höhe von 100 000 Rubeln.

Der britische Verlag Faber & Faber hat im Jahre 2000 einen Preis von 1 000 000 Dollar für die endgültige Lösung der Goldbachschen Vermutung und anderer ungelöster Probleme ausgesetzt.

Die Catalansche Vermutung

Der belgische Mathematiker Eugène Charles Catalan (1814–1894), der vorwiegend an der Pariser Polytechnischen Schule tätig war, hatte bemerkt, dass er keine weiteren Potenzen als $2^3 = 8$ und $3^2 = 9$ finden könne, die sich nur um 1 unterscheiden und er hatte dies 1844 in einem Leserbrief als Vermutung

geäußert, dass eben dies unmöglich sei. Streng formuliert: Die einzige ganzzahlige Lösung der Gleichung $x^p - y^q = 1$ mit x, p, y, $q > 1$ lautet $x = 3$, $p = 2$, $y = 2$, $q = 3$.

Interessanterweise hatte der mittelalterliche Gelehrte Levi ben Gerson (1288–1344) einen Spezialfall entdeckt, dass nämlich, wenn Potenzen von 2 und 3 sich um 1 unterscheiden, nur 8 und 9 in Frage kommen.

Nach einigen Teilergebnissen konnte der aus Bukarest stammende rumänische Mathematiker Preda Mihailescu (*1955) im April 2002 die Catalansche Vermutung beweisen.

Sophie-Germain-Primzahlen

Bei Studien zum Großen Fermatschen Satz stieß die französische Mathematikerin Sophie Germain (1776–1831), von Lagrange ermutigt, auf einen Typ von Primzahlen, der heute nach ihr benannt wird: Eine Primzahl p heißt Sophie-Germain-Primzahl, wenn auch $2p+1$ prim ist. So sind 2, 3, 5, 11 Sophie-Germain-Primzahlen, nicht aber die 7. Sophie-Germain-Primzahlen sind selten; zwischen 1 und 10 000 gibt es 190 derartige Primzahlen. G. H. Hardy und J. E. Littlewood gaben 1923 als Vermutung eine Näherungsformel für die Häufigkeit der Sophie-Germain-Primzahlen an. Doch ist noch immer unbekannt, ob es unendlich viele derartige Primzahlen gibt.

Sophie Germain konnte beweisen, dass kein Tripel (x, y, z) von Sophie-Germain-Primzahlen die Gleichung $x^5 + y^5 = z^5$ erfüllt, dass also der Große Fermatsche Satz für $n = 5$ für Sophie-Germain-Primzahlen richtig ist.

Sie hat einige Zeit mit C. F. Gauß korrespondiert, allerdings anfangs unter dem Pseudonym M. Leblanc, musste aber eingestehen, eine Frau zu sein. Gauß hat sie öffentlich sehr gelobt, ist aber mit dem Versuch gescheitert, für sie die Ehrendoktorwürde der Universität Göttingen zu erreichen.

Das Keplersche Problem

Ein anderes, weit zurückliegendes Problem stammt von Johannes Kepler (1571–1630) aus dem Jahre 1611. In seinem auch für die Anfangsgründe der Kristallographie bedeutsamen Schriftchen *Über den hexagonalen Schnee,* in dem der scharfe Naturbeobachter festhält, dass zwar jede Schneeflocke anders aussieht, aber stets eine hexagonale Struktur besitzt. Ihm kam dabei die Frage auf, wie man Teilchen so schichtet, stapelt, dass sie den kleinstmöglichen Raum einnehmen, bzw. wie man sie so schichtet, dass möglichst viele in ein vorgegebenes Volumen hineinpassen.

Interessant ist dies für Kugeln. Obsthändler schichten Apfelsinen in einer Pyramide; es gibt aber noch andere Möglichkeiten. Gesucht ist – bei den verschiedensten Körpern wie Quadern (Milchtüten), Zylindern (Getränkebüchsen), usw. – aus ökonomischen Gründen die beste Raumausnutzung, die sog. Packungsdichte. Für Kugeln (z. B. Apfelsinen) gibt es bei flächenzentrierter

kubischer Anordnung eine theoretische „Bestgröße“ von 77,9 % Ausnutzung des Raumes; es ist unmöglich, eine bessere zu erreichen. Weitere Versuche zielen darauf ab, diese theoretische Obergrenze mit anderen Packungsarten zu drücken; 1988 erzielte man 77,84 %.

Das Packungsproblem wurde sogar Gegenstand eines internationalen wissenschaftlichen Streites und sogar eines Skandals, weil ein Gelehrter hartnäckig darauf bestand, die Behauptung von Kepler – das sog. flächenkonzentrierte kubische Gitter sei die beste Packung – bewiesen zu haben, trotz zahlreicher Gegenbeispiele und nachgewiesener Beweislücken (vgl. dazu [Singh 2001, S. 317ff.]).

Dies waren einige Beispiele lange ungelöster bzw. erst jüngst gelöster schwieriger und teilweise sogar zentraler Probleme der Mathematik; auf die bisher ungelöste und überaus wesentliche Riemannsche Vermutung wurde an anderer Stelle eingegangen. Die hier vorgestellten Probleme und Vermutungen haben die Merkwürdigkeit an sich, dass sie sich trotz aller Schwierigkeiten auch dem Nichtmathematiker erläutern lassen, vgl. [Basieux 2004].

11.9.4 Das „Millennium Meeting“

Bei [Basieux 2004], erfährt man auch, dass am 24. Mai 2000 in Paris am Collège de France das sog. „Millennium Meeting“ stattfand, auf dem herausragende Mathematiker sieben Problemgruppen formulierten, die, obwohl lange bekannt und im Zentrum der Mathematik stehend, bisher ungelöst geblieben sind. Sie betreffen Zahlentheorie, Topologie, Mathematische Physik, Theoretische Informatik, schon in jüngster Zeit bewiesene und weitere ungelöste Probleme. Diese Veranstaltung knüpfte bewusst an den 100 Jahre zuvor von David Hilbert gehaltenen Vortrag an, auf dem er 23 ungelöste Probleme formuliert hatte, die quasi die Richtung kommender Entwicklungen bestimmen sollten und dies auch weitgehend taten. Damals konnte noch ein einzelner Gelehrter, eben Hilbert, eine solche in die Zukunft weisende Richtung vorgeben, nun aber, im Jahre 2000, einhundert Jahre später, am Beginn eines neuen Jahrtausends, bedurfte es für eine ähnliche Wegweisung einer Gruppe von Mathematikern, die Spezialgebiete der Forschung vertraten.

In der Erklärung vom 24. Mai 2000 heißt es (in deutscher Übersetzung) unter anderem:

> *„Die Mathematik nimmt einen privilegierten Platz unter den Wissenschaften ein, der die Quintessenz des menschlichen Wissens verkörpert und in jedes Feld menschlicher Anstrengungen hineinreicht. Die Grenzen des mathematischen Verstehens entwickeln sich heute in tiefen und unermesslichen Bahnen. Grundlegende Fortschritte gehen Hand in Hand mit Entdeckungen in allen wissenschaftlichen Bereichen. Technologische Anwendungen der Mathematik unterstützen unseren Alltag, inklusive unsere Fähigkeit, mit Hilfe kryptologischer*



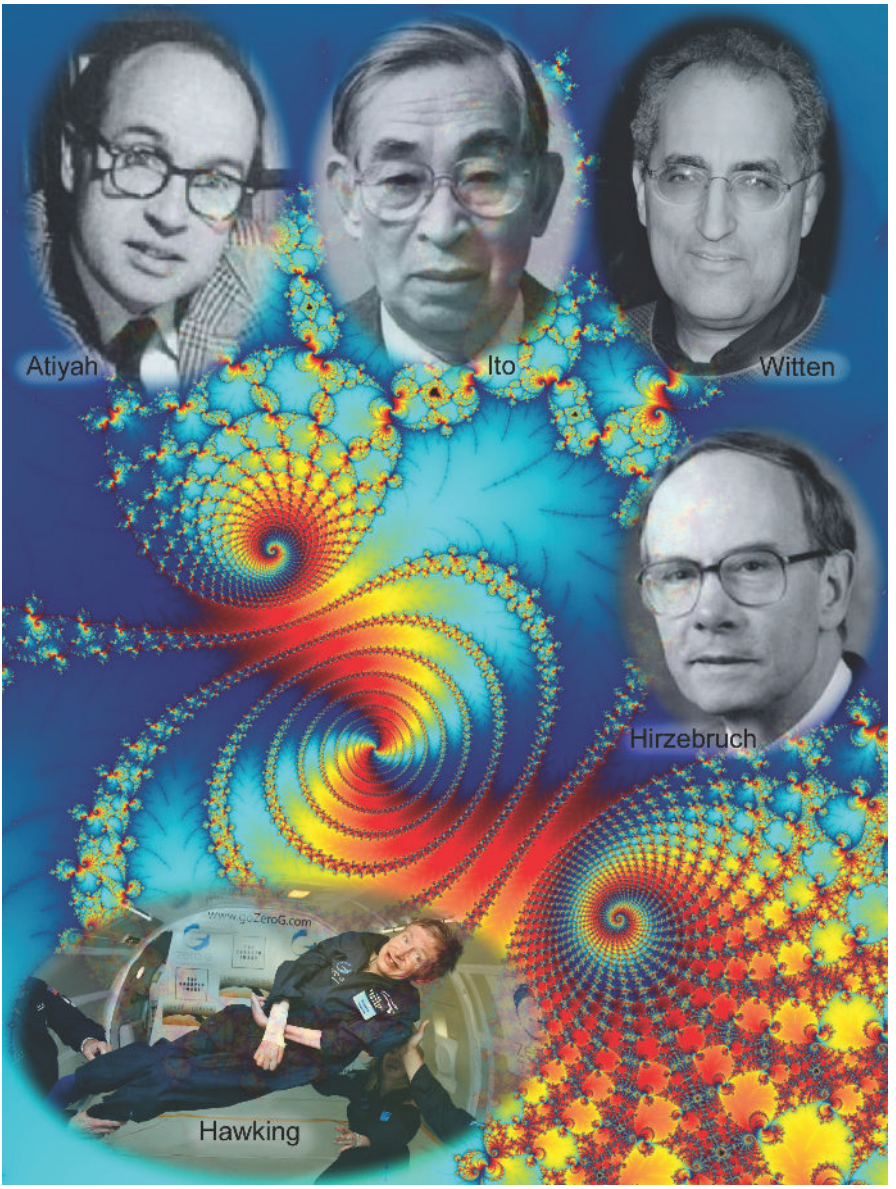
Abb. 11.9.5 Postwertzeichen zum internationalen Jahr der Mathematik 2000

> *Methoden zu kommunizieren, unsere Fähigkeit, zu reisen und zu navigieren, unsere Gesundheit und unser Wohlbefinden, unsere Sicherheit, und sie spielen auch eine zentrale Rolle in der Wirtschaft. Die Evolution der Mathematik wird von zentraler Bedeutung sein für die Weiterentwicklung der Zivilisation.“* [Basieux 2004, S. 8]
> (Zu weiteren Einzelheiten siehe Kap. 12)

Die Mathematik ist überaus reich an schönen, aber auch äußerst schwierigen Fragestellungen, die aus der Mathematik selbst, aus Physik, Astronomie, Ökonomie, Erkenntnistheorie, Kybernetik, Philosophie und Sprachtheorie entspringen. Darüber gibt dem Leser der äußerst informative Beitrag von E. Zeidler einen Ausblick.

Schon Pascal hatte das Bild geprägt: Die Wissenschaft gleicht einer Kugel. Je mehr sie sich ausdehnt durch Zunahme des Wissens, desto größer ist die Berührungsfläche mit dem Unbekannten und dem Unendlichen.

12 Gedanken zur Zukunft der Mathematik – Ein Ausblick von Eberhard Zeidler



Prognosen sind schwierig, besonders wenn sie die Zukunft betreffen.[1]

Im Jahre 1798 zog der neunundzwanzigjährige Napoléon Bonaparte mit einem Expeditionskorps von achtunddreißigtausend Mann nach Ägypten. Angesichts der schweigenden Ewigkeit der Pyramiden von Gizeh soll er gesagt haben: „*Soldaten! Vierzig Jahrhunderte blicken auf Euch herab!*“

Von den in Frankreich und Spanien gefundenen Höhlenmalereien, die bereits von einem erstaunlichen Formensinn zeugen, bis zum allgegenwärtigen Computer unserer Tage sind es etwa 150 Jahrhunderte! Über diesen langen Zeitraum ist die Mathematik eng mit der Entwicklung unserer menschlichen Kultur verbunden. Die Mathematik hat ihren Ursprung in Zahlen und einfachen geometrischen Figuren. Seit der Blütezeit der antiken griechischen Mathematik, verbunden mit Namen wie Platon, Euklid, Archimedes und Diophantos, war die Mathematik einer Sphinx gleichend stets beides: eine sehr esoterische und eine höchst praktische Wissenschaft.

Mathematik ist heutzutage eine Herausforderung des menschlichen Geistes und zugleich eine Schlüsseltechnologie.

Mit anderen Worten: Mathematik ist abstrakt und praktisch. Der Einsatz der Mathematik reicht von der Lösung außerordentlich anspruchsvoller ingenieurtechnischer Probleme, wie dem Entwurf eines Airbus 380 am Computer, bis zur Logik und Erkenntnistheorie in der Philosophie. In unserer hochtechnisierten Welt ist Mathematik überall. Zugleich geht von der Lösung mathematischer Probleme ein ästhetischer Reiz aus. Die ungarische Mathematikerin Rósza Péter (1905–1977) hat einmal gesagt: „*Ich liebe die Mathematik nicht nur, weil man sie auf viele Bereiche unseres Lebens anwenden kann, sondern auch weil sie schön ist*“. Oft wird darüber geklagt, dass die Mathematik von unverständlichen Formeln beherrscht wird und deshalb sehr trocken ist. Blickt man auf eine der Partituren von Johann Sebastian Bach (1685–1750), dann sieht der Laie nichts weiter als ein Heer von Noten, die ihm unverständliche Symbole sind. Der Musikwissenschaftler kann die dahinter verborgenen Strukturen einer Fuge erkennen. Setzen jedoch Chor und Orchester bei Bachs Matthäus-Passion die Noten in Töne um, dann werden die Strukturen zu einem Klanggewebe, das die Seele zum Schwingen bringt. So ergeht es dem Mathematiker mit seiner Wissenschaft. Die Mathematik begeistert ihn und bringt seine Seele zum Schwingen.

Worin besteht die Bedeutung der Mathematik? Die wohl tiefste Antwort auf diese Frage lautet:

Die Mathematik ist ein wundervolles zusätzliches Erkenntnisorgan des Menschen, ein geistiges Auge, das ihn etwa in der modernen

[1] Dieser Ausspruch wird unter anderem dem Schriftsteller Mark Twain (1835–1910), dem Nobelpreisträger für Literatur und Politiker Sir Winston Churchill (1874–1965) und dem Nobelpreisträger für Physik Niels Bohr (1885–1962) zugeschrieben.



Abb. 12.0.1 „Krebsnebel“, Überreste einer Supernovaexplosion (NGC 1952 SST). Sie fand im Jahre 1054 im Sternbild Taurus (Stier) statt und wurde von chinesischen Astronomen beschrieben [NASA]

> *Elementarteilchenphysik, der Kosmologie und der Hochtechnologie in Bereiche vorstoßen lässt, die ohne Mathematik nicht zu verstehen sind, weil sie von unserer täglichen Erfahrungswelt extrem weit entfernt sind.*

Sowohl in der Quantenwelt der atomaren und subatomaren Prozesse des Mikrokosmos als auch im Makrokosmos – in den Weiten des Universums mit seinen riesigen Energieanhäufungen etwa bei Supernovaexplosionen – gelten völlig andere Gesetzmäßigkeiten als in der uns vertrauten Welt. Diese Gesetzmäßigkeiten kann man mathematisch erfassen, allerdings bedarf es dabei in der Regel sehr abstrakter Mathematik, die jedoch bei Wahl einer geeigneten Sprache auf einer höheren Ebene wieder einfach und durchsichtig wird. Die Kunst des Lehrenden an Schulen und Universitäten ist es, die zu behandelnden Fragestellungen gut zu motivieren und den Lernenden für die Beschäftigung mit der Mathematik zu begeistern. Dabei muss sich der Lehrende ständig darum bemühen, komplizierte Sachverhalte möglichst einfach darzustellen. Albert Einstein hat es auf den Punkt gebracht, als er sagte: *„Alles sollte so einfach wie möglich gemacht werden, aber nicht einfacher.“*

Für die Mathematik besteht eine Gefahr darin, dass man beim Lernenden den Eindruck erweckt, Mathematik bestehe nur aus logischer Strenge, ohne Motivation, Intuition und Phantasie und somit ohne menschliche Dimension

– vergleichbar mit einer vollendeten antiken Statue, der jedoch kein Leben eingehaucht ist. Tatsächlich ist die historische Entwicklung der Mathematik sehr verschlungene Pfade gegangen – voller Irrtümer, wie alle menschlichen Erkenntnisprozesse. Wäre die Mathematik nichts weiter als eine Sammlung von Axiomen und logischen Formalismen, ein brilliantes, aber elitäres, betont nutzloses intellektuelles Feuerwerk ohne Lebensnähe und ohne tiefe Bezüge zum menschlichen Erkenntnisprozess, sie wäre schon längst verkümmert. Wie Literatur, Malerei, bildende Kunst und Musik, so ist auch die Mathematik ein wertvoller Bestandteil der menschlichen Kultur. Die Charakterisierung der Mathematik als eines geistigen Auges des Menschen geht auf Erich Kähler (1906–2000) zurück. Im Jahre 1941 verfasste er im Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung einen Artikel zum Thema: „Über die Beziehungen der Mathematik zu Astronomie und Physik“. Eine erweiterte Fassung dieses Artikels wurde in den Gedenkband zum 100. Todestag von Carl Friedrich Gauß im Jahre 1955 aufgenommen. Dort heißt es:

> *„Die Mathematik ist ein Organ der Erkenntnis und eine unendliche Verfeinerung der Sprache. Sie erhebt sich aus der gewöhnlichen Sprache und Vorstellungswelt wie eine Pflanze aus dem Erdreich, und ihre Wurzeln sind Zahlen und einfache räumliche Vorstellungen... Wir wissen nicht, welcher Inhalt die Mathematik als die ihm allein angemessene Sprache verlangt, wir können nicht ahnen, in welche Ferne und Tiefe dieses geistige Auge den Menschen noch blicken lässt.“*

12.1 Mathematik als eine Querschnittswissenschaft

Ein wichtiger Charakterzug der Mathematik besteht darin, dass die gleiche mathematische Methode auf völlig unterschiedliche Fragestellungen angewandt werden kann. Die Mathematik ist universell anwendbar – sie ist eine Querschnittswissenschaft. Henri Poincaré (1854–1912) umschrieb das mit den Worten:

> *„Die Mathematik ist die Kunst, völlig unterschiedlichen Dingen den gleichen Namen zu geben.“*

Aus der Fülle von möglichen Beispielen möchten wir einige wenige herausgreifen:

- harmonische Analyse,
- zufällige Prozesse,
- Spieltheorie – optimaler Ausgleich von unterschiedlichen Interessen,
- der Casimir-Effekt – eine Brücke zwischen Zahlentheorie und Quantenfeldtheorie,
- Zahlentheorie und die Verschlüsselung von Informationen.

Harmonische Analyse

In der Antike wurden Kegelschnitte als geometrische Objekte untersucht. Dazu gehören Kreise, Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln. Kepler (1571–1630) erkannte, dass sich die Planeten auf Ellipsenbahnen bewegen und berechnete diese unter großem Zeitaufwand. Kegelschnitte werden durch quadratische Formen beschrieben.

> *In der Folgezeit stellte sich heraus, dass quadratische Formen auf Normalformen transformiert werden können, bei denen Eigenwertprobleme eine zentrale Rolle spielen.*

Die Untersuchung von Eigenwertproblemen ist der Gegenstand einer umfangreichen mathematischen Disziplin, die man heute harmonische Analyse nennt und die außerordentlich vielseitige Anwendungen auf scheinbar völlig unterschiedliche Fragestellungen erlaubt. Auf einige dieser Anwendungen möchten wir jetzt eingehen. Eigenwerte von quadratischen Formen werden mit Hilfe der sogenannten Säkulargleichung von Lagrange (1736–1813) bestimmt. Lagrange benutzte diese Gleichung, um die Störung von Planetenbahnen im Laufe der Jahrhunderte zu berechnen. Die Methoden der Störungsrechnung wurden von Gauß (1777–1855) verfeinert und im Jahre 1808 in seinem astronomischen Hauptwerk *„Theoria motus corporum coelestium ...“* (Über die Bewegung der Himmelskörper) veröffentlicht, das über viele Jahrzehnte die Bibel der Astronomen war. In den vierziger Jahren des 19. Jahrhunderts benutzten zwei junge Astronomen, John Adams in Cambridge und Jean Leverrier in Paris, die Methoden der Störungsrechnung zur Untersuchung der Uranusbahn und sagten die Bahn eines neuen Planeten voraus. Im Jahre 1846 entdeckte Gottfried Galle an der Berliner Sternwarte nach den Angaben von Leverrier den Planeten Neptun. Das war ein Triumph des Rechenstifts im Weltall.

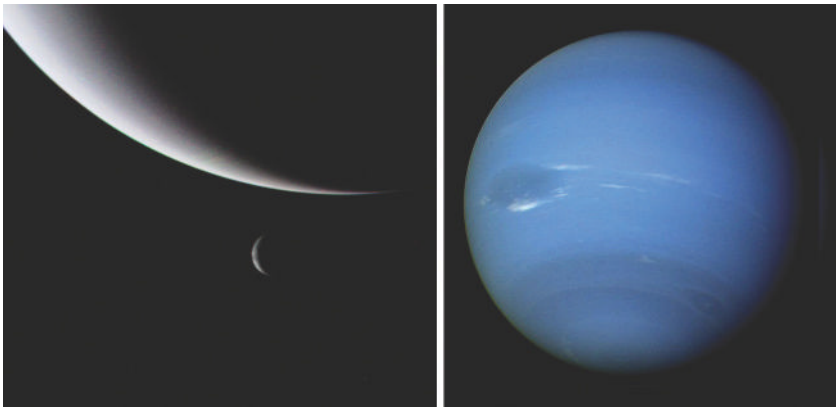


Abb. 12.1.1 Neptun mit dem Mond Triton; Neptun, der äußerste Planet unseres Sonnensystems (Voyager 2 [NASA])

Sorgfältige Berechnungen ergaben eine Drehung der großen Halbachse des Planeten Merkur von 43 Bogensekunden im Jahrhundert, die nicht durch den Einfluss der anderen Planeten im Rahmen der Newtonschen Mechanik erklärt werden konnte. Genau dieser Wert ergab sich jedoch im Jahre 1916 aus der Einsteinschen allgemeinen Relativitätstheorie, die damit einen triumphalen Erfolg feierte.

Fourier (1768–1830) benutzte in seinem Werk *„Théorie analytique de la chaleur“* (analytische Wärmetheorie) aus dem Jahre 1822 unendliche Reihen, die man heute Fourierreihen nennt und deren kontinuierliche Varianten als Fouriersche Integraltransformationen bezeichnet werden. Ursprünglich traten unendliche Reihen vom Typ der späteren Fourierreihen bei der Untersuchung der schwingenden Saite durch Daniel Bernoulli (1700–1782) auf. Die Saitenschwingungen werden dabei als Überlagerung einer Grundschwingung mit Oberschwingungen dargestellt. Rein mathematisch gesehen sind die Frequenzen der Oberschwingungen Eigenwerte von Differentialgleichungen. In der Musik wird die Tonhöhe der menschlichen Stimme oder eines Instruments durch die Grundschwingungen bestimmt, während sich die Klangfarbe aus den unterschiedlichen Amplituden der Oberschwingungen ergibt.

Hierbei handelt es sich um das Phänomen der Beschreibung komplizierter Prozesse durch die Überlagerung einfacherer Prozesse.

Eine allgemeine mathematische Theorie für dieses Phänomen wurde durch Hilbert (1862–1943) Anfang des 20. Jahrhunderts geschaffen. Er entwickelte eine Theorie der Eigenwerte für unendlichdimensionale quadratische Formen, die man als unendlichdimensionale Kegelschnitte auffassen kann. Das war die Geburtsstunde einer neuen mathematischen Disziplin – der Funktionalanalysis. Im Jahre 1925 schuf Heisenberg (1901–1976) die Quantenmechanik. János (John) von Neumann (1903–1957) zeigte einige Jahre später als Schüler von Hilbert in Göttingen, dass es sich dabei um eine Verallgemeinerung der Hilbertschen Eigenwerttheorie für unendlichdimensionale quadratische Formen handelte. Im Jahre 1926 benutzte Schrödinger (1887–1961) Fouriers Ideen, um seine Wellenmechanik zu begründen. Die Energieniveaus der Elektronen in einem Atom sind dabei die Eigenwerte der Schrödingergleichung. Schrödinger benutzte die von Rayleigh (1842–1919) in seinem 1896 veröffentlichten Werk *The Theory of Sound* (Theorie des Schalls) entwickelten Methoden der Störungsrechnung, um Atomspektren zu berechnen. Bei der Schaffung der Quantenelektrodynamik und des Standardmodells der Elementarteilchen in den Jahren von 1946 bis 1973 spielte die Fouriertransformation Greenscher Funktionen eine entscheidende Rolle, um Streuprozesse in Teilchenbeschleunigern mit Hilfe von sogenannten Feynmandiagrammen im Rahmen der Störungstheorie zu berechnen. Greensche Funktionen wurden von George Green (1793–1841) im Jahre 1828 ersonnen, um aus einer einzigen Funktion durch eine kontinuierliche Überlagerung (d. h. Integration) das Verhalten eines physikalischen Systems unter dem Einfluss beliebiger äußerer Kräfte berechnen zu können.

Eigenwerte spielen auch eine zentrale Rolle bei der Untersuchung der Stabilität von Zuständen in biologischen, chemischen, ökonomischen, physikalischen und technischen Systemen. Beispielsweise ist die Golden-Gate-Brücke in San Francisco deshalb stabil, weil die Schwingungsfrequenzen des Verkehrsstroms und der häufigen Stürme nicht in Resonanz mit den Frequenzen der Eigenschschwingungen der Brücke stehen.[2] Auf dem gleichen Prinzip beruht der Bau von erdbebensicheren Wolkenkratzern. Der Verlust an Stabilität kann zu ökologischen Katastrophen führen (z. B. dem Aussterben einer Art). In Natur und Technik spielen Phasenübergänge eine wichtige Rolle, bei denen Systeme ihr qualitatives Verhalten entscheidend verändern (z. B. der Übergang von Wasser zu Eis oder die Herausbildung neuer Muster in chemischen Substanzen). Mathematisch handelt es sich dabei um die Verzweigung von Lösungen, die durch einen Stabilitätsverlust des Systems erzeugt wird und sehr oft mit nichtlinearen Eigenwertproblemen zusammenhängt. Die mathematische Analyse der Schrödingergleichung der Quantenmechanik erlaubte es Dyson und Lenard im Jahre 1967 zu erklären, warum Atome und Moleküle stabil sind. Damit zeigten sie, dass die Stabilität der uns umgebenden Materie ein Quantenphänomen ist. Resonanzeffekte können komplizierte chaotische Bewegungen erzeugen, die zum Beispiel bei gewissen Asteroiden beobachtet werden. Dieses Phänomen wird mathematisch durch die Kolmogorow-Arnold-Moser-Theorie (KAM) beschrieben, die Mitte des 20. Jahrhunderts geschaffen wurde.

In Computern lassen sich nur solche Algorithmen erfolgreich realisieren, die stabil gegenüber Störungen (z. B. Rundungsfehlern) sind. Die Explosion der Leistungsfähigkeit der Computertechnik vor etwa 30 Jahren wurde ermöglicht durch die Entwicklung neuartiger, mathematischer Methoden zur Berechnung riesiger Schaltkreise, die auf Differentialgleichungssysteme mit der unangenehmen mathematischen Eigenschaft der Steifheit führen. Dies bedeutet, dass die Differenz zwischen dem kleinsten und dem größten Eigenwert der Systemmatrizen sehr groß ist. Die Einzelheiten des außerordentlich leistungsfähigen Suchprogramms von „Google“ im Internet sind rechtlich geschützt. Bekannt ist jedoch, dass dabei die Eigenwerte einer riesigen Matrix berechnet werden, die die Intensität der Kommunikation zwischen den einzelnen Computerbenutzern auf der Welt beschreibt und ständig auf den neuesten Stand gebracht wird. Die Eigenwertberechnung wurde durch wesentliche Fortschritte in der numerischen Mathematik ermöglicht (siehe [Langville/Meyer 2006]).

Die klassische Fouriermethode beruht auf der Superposition von Sinus- und Kosinusschwingungen. In den achtziger Jahren des 20. Jahrhunderts wurde eine Revolution in der numerischen Mathematik durch die Verwendung von „wavelets“ eingeleitet. Das sind Wellenelemente, die nur in einem

[2] Die riesige Tacoma Narrow Bridge stürzte im Jahre 1940 in den USA ein. Die Ursache waren spezielle Schwingungen der Brücke, die durch Wind erzeugt wurden und sich allmählich bis zur Zerstörung der Brücke aufschaukelten.

gewissen Intervall konzentriert sind und günstige Skalierungseigenschaften besitzen. Im Jahre 1997 wurden „wavelets“ erstmalig zur Datenkompression im Internet benutzt. Die Idee ist es, die ungeheuren Datenmengen, die bei der Bildübertragung anfallen, so zu verdichten, dass die wesentlichen Informationen erhalten bleiben und eine Bildrekonstruktion von hoher Qualität möglich wird. Eine analoge Methode wird bei CDs (compact discs) benutzt.

Ein wichtiges Anwendungsfeld der „wavelets“ bietet die Medizin, zum Beispiel in der Computertomographie. Im Jahre 1918 löste Johann Radon (1887–1956) ein zunächst innermathematisches Problem: Es ist die geometrische Gestalt eines Körpers zu rekonstruieren, falls seine Schnitte mit allen möglichen Ebenen bekannt sind. Diese sogenannte Radontransformation, die mit der Fouriertransformation verwandt ist, wird heute wesentlich in der Computertomographie eingesetzt, für deren Entwicklung Alan Cormack und Godfrey Hounsfield 1975 den Nobelpreis für Medizin erhielten. Im Unterschied zur schmerzhaften Einführung von Kontrastmitteln bei der Darstellung des Gehirns in früheren Tagen arbeitet die Computertomographie völlig schmerzfrei.

Damit wird die Mathematik zum Segen für den Menschen und erhält eine humane Dimension.

Zufällige Prozesse

Der junge Einstein (1879–1955) schuf im Jahre 1905 eine Theorie der zufälligen Brownschen Zitterbewegungen von Partikeln in Flüssigkeiten; dieses Phänomen war erstmalig im Jahre 1827 von dem englischen Botaniker Robert Brown unter dem Mikroskop beobachtet worden. Daraus entwickelte sich eine Theorie der zufälligen Prozesse, die heutzutage in vielen Bereichen eingesetzt wird, unter anderem zur Gewinnung optimaler Strategien für den Umgang mit Derivaten auf Finanzmärkten. Dafür erhielten Robert Merton und Myron Scholes im Jahre 1997 den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften. In seiner Dissertation im Jahre 1942 benutzte der Physiker Richard Feynman (1918–1988) die Brownsche Bewegung (bezogen auf eine rein imgainäre Zeit), um mit Hilfe von Pfadintegralen einen völlig neuen Zugang zur Quantenmechanik zu erhalten, der sich in der Folgezeit als ein sehr wirkungsvolles, heuristisches Instrument der Physik zur Untersuchung von Quantenphänomenen erwies.

Spieltheorie – optimaler Ausgleich von unterschiedlichen Interessen

Für die Naturbeschreibung von zeitabhängigen Prozessen spielen die stabilen Gleichgewichtszustände dynamischer Systeme eine besondere Rolle. Diese mathematische Idee lässt sich auch auf Wirtschaftsprozesse übertragen. Im

Jahre 1928 begründete János (John) von Neumann die mathematische Spieltheorie, indem er für geeignete Spielsituationen die Existenz eines Gleichgewichtszustandes bewies, der die Interessen beider Spieler optimal berücksichtigt und es erlaubt, exakt zu berechnen, wie günstig das Spiel für jeden der Spieler ist. Sechzehn Jahre später schrieb John von Neumann zusammen mit Oscar Morgenstern die Monographie *Theory of Games and Economic Behavior*, die die Geburtsstunde der modernen mathematischen Ökonomie markierte. Im Jahre 1969 wurde erstmalig der Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften vergeben. Unter den Preisträgern waren bisher unter anderem Wassili Leontieff und Leonid Kantorowitsch (lineare optimale Modelle), Kenneth Arrow und Gérard Debreu (ökonomische Gleichgewichte), John Harsanyi, John Nash und Reinhard Selten (nichtkooperative Spiele).

Der Casimir-Effekt als eine Brücke zwischen Zahlentheorie und Quantenfeldtheorie

Je weiter wir uns in der Hochtechnologie von unserer täglichen Erfahrungswelt entfernen, desto bedeutungsvoller wird der Einsatz mathematischer Methoden. Beispielsweise hat die Miniaturisierung der Schaltkreise in Computern einen solchen Grad erreicht, dass bereits zehn Prozent der Wärmeentwicklung durch den Casimir-Effekt verursacht werden, der auf den komplizierten Eigenschaften des Grundzustands des Elektron-Photon-Quantenfeldes der Quantenelektrodynamik beruht. Zur streng mathematischen Behandlung des Casimir-Effekts benötigt man feinsinnige asymptotische Methoden der Zahlentheorie, die für Riemann–Epsteinsche Zetafunktionen entwickelt wurden (siehe den Beitrag von Don Zagier in [Zeidler 2006]).

Zahlentheorie und die Verschlüsselung von Informationen

Mehr als dreihundert Jahre lang galt der Satz von Fermat–Euler über die Lösung der Fermatschen Gleichung, die Aussagen über Teilbarkeitseigenschaften natürlicher Zahlen liefert, als ein reines Vergnügen des menschlichen Geistes. Im Jahre 1977 veröffentlichten Rivest, Shamir und Adelman eine verblüffend einfache und doch erstaunlich sichere Methode zur Verschlüsselung von Information, die heute weitgehend verwendet wird (siehe [Zeidler 2003]). Diese Methode basiert auf dem Satz von Fermat–Euler. Ferner wird die Tatsache ausgenutzt, dass es unmöglich ist, von einer hinreichend großen, natürlichen Zahl in einem vernünftigen Zeitraum zu entscheiden, in welche Faktoren diese Zahl zerfällt. Andere moderne Verschlüsselungsmethoden, die noch viel schwieriger zu knacken sind, beruhen auf Eigenschaften von algebraischen Kurven, die in der algebraischen Geometrie untersucht werden.

Wir erwarten, dass die Bedeutung der Mathematik als einer Querschnittswissenschaft in der Zukunft noch wesentlich zunehmen wird.

12.2 Strategien der Mathematik für die Zukunft

Auf dem 2. Internationalen Mathematikerkongress im Jahre 1900 in Paris hielt David Hilbert eine programmatische Rede, in der er dreiundzwanzig offene Probleme der Mathematik formulierte und zu deren Lösung aufrief. Hilbert begann seinen Vortrag mit den folgenden Worten:

> *„Wer von uns würde nicht gern den Schleier lüften, unter dem die Zukunft verborgen liegt, um einen Blick zu werfen auf die bevorstehenden Fortschritte unserer Wissenschaft und in die Geheimnisse ihrer Entwicklung während der künftigen Jahrhunderte.“*

Nach einer ausführlichen Diskussion der von ihm gestellten Probleme beendete Hilbert seinen Vortrag mit einem Blick auf das Wesen mathematischer Forschung:

> *„Aber – so fragen wir – wird es bei der Ausdehnung des mathematischen Wissens für den einzelnen Forscher nicht schließlich unmöglich, alle Teile dieses Wissens zu umfassen. Ich möchte als Antwort darauf hinweisen, wie sehr es im Wesen der mathematischen Wissenschaft liegt, dass jeder wirkliche Fortschritt stets Hand in Hand geht mit der Auffindung schärferer Hilfsmittel und einfacherer Methoden, die zugleich das Verständnis früherer Theorien erleichtern und umständliche ältere Entwicklungen beseitigen, und dass es daher dem einzelnen Forscher, indem er sich diese schärferen Hilfsmittel und einfacheren Methoden zu eigen macht, leichter gelingt, sich in den verschiedenen Wissenszweigen der Mathematik zu orientieren, als dies für irgendeine andere Wissenschaft der Fall ist.*
> *Der einheitliche Charakter der Mathematik liegt im inneren Wesen dieser Wissenschaft begründet; denn die Mathematik ist die Grundlage alles exakten naturwissenschaftlichen Erkennens. Damit sie diese hohe Bestimmung vollkommen erfülle, mögen ihr im neuen Jahrhundert geniale Meister erstehen und zahlreiche in edlem Eifer erglühende Jünger.“*

Die meisten der Hilbertschen Probleme konnten gelöst werden und haben die Entwicklung der Mathematik im 20. Jahrhundert wesentlich geprägt. Das wird in dem Buch von [Yandell 2001] beschrieben. Für die zukünftige Entwicklung der Mathematik erwarten wir, dass die folgenden Fragen eine wichtige Rolle spielen werden:

- Optimalität,
- effektive Simulation von Prozessen der realen Welt und wissenschaftliches Rechnen,
- effektive Gewinnung von Information aus großen Datenmengen,
- Verständnis der Komplexität von mathematischen Algorithmen und biologischen Prozessen,

- Arbeitsweise des menschlichen Gehirns,
- Vielteilchensysteme und mathematische Materialwissenschaft,
- einheitliche mathematische Theorie für die fundamentalen Kräfte der Natur (Einsteins Traum),
- Mathematik des Zufalls (Stochastik),
- Mathematik des qualitativen Verhaltens (Topologie),
- Klassifikation von mathematischen Strukturen (z. B. Symmetrien oder Singularitäten),
- der Zusammenhang zwischen diskreten und kontinuierlichen mathematischen Strukturen,
- physikalische Mathematik und Quantenmathematik – eine neue Dimension der Mathematik.

Im Jahre 1984 veröffentlichte die American Mathematical Society (AMS) einen Bericht über die zukünftige Entwicklung der Mathematik. Der damalige Präsident der AMS, der mathematische Physiker Arthur Jaffe (*1937) von der Harvard-Universität, schrieb am Ende dieses Artikels:

> *„Mathematische Forschung sollte so breit und originell wie möglich sein und sehr langfristige Zielstellungen verfolgen. Wir erwarten, dass sich die Geschichte wiederholt und die tiefsten und wirkungsvollsten Anwendungen auf einer Mathematik beruhen, die wir heute noch nicht kennen und nicht vorhersagen können. Diese Mathematik muss erst noch entdeckt werden.“*

Bei den folgenden Ideenskizzen sollte dieser Aspekt nicht aus dem Auge verloren werden.

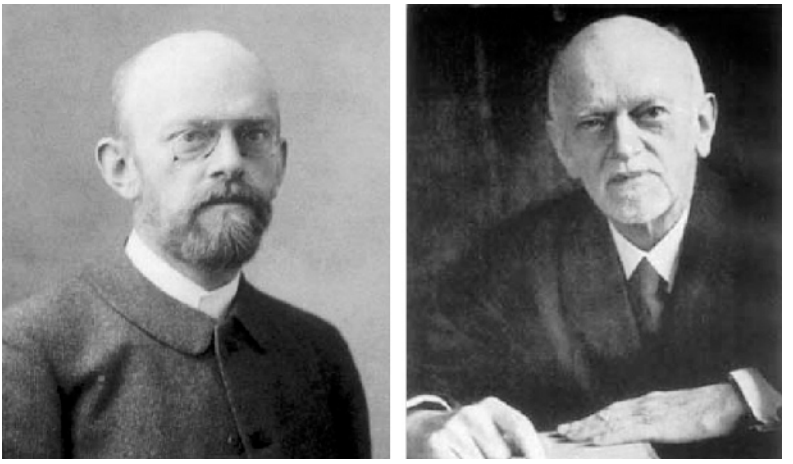


Abb. 12.2.1 David Hilbert 1910 und 1937

Mathematik des Optimalen

Die Mathematik hat über die Jahrhunderte hinweg immer mächtigere Hilfsmittel in der Variationsrechnung und der Optimierungstheorie bereitgestellt, um optimale Lösungen zu berechnen. Das reicht von der Bestimmung von Planetenbahnen oder Elementarteilchenprozessen mit Hilfe des Prinzips der kleinsten Wirkung, der Rückkehr eines Raumschiffs zur Erde bei minimaler Erwärmung des Hitzeschildes, der Auffindung von technologischen Materialien mit optimalen Eigenschaften, der Bewegung von Industrierobotern mit minimalem Energieverbrauch bis hin zur optimalen Gestaltung von Transport- und Produktionsprozessen sowie von Operationen in der Medizin. Um die optimale Form eines Prozesses zu bestimmen, muss man eine Fülle an Kenntnissen über den möglichen Ablauf der Prozesse unter unterschiedlichen Nebenbedingungen besitzen. Je komplizierter die Prozesse sind, um so schwieriger wird ihre Optimierung. Hier eröffnet sich ein riesiges Betätigungsfeld für die Mathematik der Zukunft.

Effektive Simulation von Prozessen der realen Welt und wissenschaftliches Rechnen

Die modernen leistungsfähigen Computer erlauben es, anstelle von zeit- und kostenaufwendigen Experimenten Simulationen auf dem Computer vorzunehmen. Die Entwicklung effektiver Verfahren ist Gegenstand des wissenschaftlichen Rechnens. Eine der Möglichkeiten besteht darin, Computeralgorithmen mit der Erfahrung von Experten zu kombinieren, um zum Beispiel die sehr aufwendigen Kosten für die Entwicklung neuer Medikamente wesentlich zu senken. Generell ergibt sich die folgende Frage:

Wird die Mathematik durch den Computer überflüssig?

Die eindeutige Antwort lautet: Nein! Um das an einem einfachen Beispiel zu erläutern, betrachten wir die häufig auftretende Aufgabe der Lösung von linearen Gleichungssystemen mit n Unbekannten. Hierzu gibt es den Gaußschen Lösungsalgorithmus mit einem Aufwand von $2n^3/3$ Rechenschritten im allgemeinen Fall. Bei der Diskretisierung von Aufgaben der Technik durch hinreichend feine dreidimensionale Gitter gelangt man rasch zu Werten von

$$n = 1 \text{ Milliarde}.$$

Solche Dimensionen übersteigen die Speicherkapazität und die Rechengeschwindigkeit der vorhandenen Rechner. Die Situation bessert sich nur unwesentlich durch die Tatsache, dass die Rechengeschwindigkeit und die Speicherkapazität der Rechner alle zehn Jahre um den Faktor 100 steigen. Ein Ausweg aus dem Dilemma besteht darin, intelligente mathematische Verfahren zu entwickeln, die die spezifische Struktur der vorgelegten Probleme

optimal ausnutzen. Ein Beispiel hierfür ist die erst vor einigen Jahren von Wolfgang Hackbusch entwickelte Methode der hierarchischen Matrizen, die den Aufwand für die Lösung von n linearen Gleichungssystemen mit spezieller Struktur in der Größenordnung von n hält. Man spricht hier von linearer Komplexität. Durch dieses Verfahren können Aufgaben mit einer herkömmlichen Rechenzeit von vielen Tagen in Minuten erledigt werden (vgl. [Hackbusch 2008]).

Es ist bekannt, dass es mathematische Probleme gibt, für die kein allgemeiner Algorithmus existiert, der alle möglichen Konfigurationen in endlich vielen Schritten bewältigt. Das betrifft zum Beispiel die Lösung diophantischer Gleichungen in der Zahlentheorie. Diese Gleichungen sehen auf den ersten Blick harmlos aus, tatsächlich sind sie von ungeheurer Komplexität. Eine der Hauptaufgaben für die Zukunft wird es sein, die Komplexität großer Problemklassen zu untersuchen und die Kraft der Mathematik einzusetzen, um Algorithmen zu entwickeln, die die Spezifik der Problemstellung in geschickter Weise ausnutzen, um trotz außerordentlich großer Komplexität im interesssierenden Spezialfall Lösungen zu erhalten.



Abb. 12.2.2 Gruppenbild mit „Computerpionieren“ des deutschen Sprachraums. Anlass war der 70. Geburtstag von Konrad Zuse im Jahr 1980 (Konrad Zuse sitzt in der Mitte der vorderen Reihe) [Zuse 1993]

Effektive Gewinnung von Information aus großen Datenmengen

In allen Bereichen der Wissenschaft werden immer mehr Daten produziert. Eine wichtige Aufgabe für die Zukunft wird es sein, mit raffinierten mathematischen Methoden die wesentlichen Informationen aus dieser Datenflut herauszufiltern, um tiefere Einblicke in das Wesen der gemessenen Phänomene zu bekommen. Hier sind einige Beispiele:

- Nach der Entschlüsselung des menschlichen Genoms besteht eine wichtige Aufgabe für die Zukunft darin, Krankheiten im Genom zu lokalisieren, um Verfahren zur Heilung der Krankheiten aufzuspüren.
- In der Astronomie haben Satelliten eine Fülle von Daten über die Anisotropie der sehr energiearmen, kosmischen Hintergrundstrahlung gesammelt, die ein Relikt des Urknalls ist. Dieses WMAP-Projekt der NASA (Wilson Anisotropic Microwave Probe) vermittelt nach mathematischer Auswertung mit Hilfe der harmonischen Analyse – basierend auf Einsteins allgemeiner Relativitätstheorie – ein Bild vom Zustand unseres Universums 380 000 Jahre nach dem Urknall. Zugleich erhalten wir die Information, dass sich der Urknall vor 13,7 Milliarden Jahren ereignete.

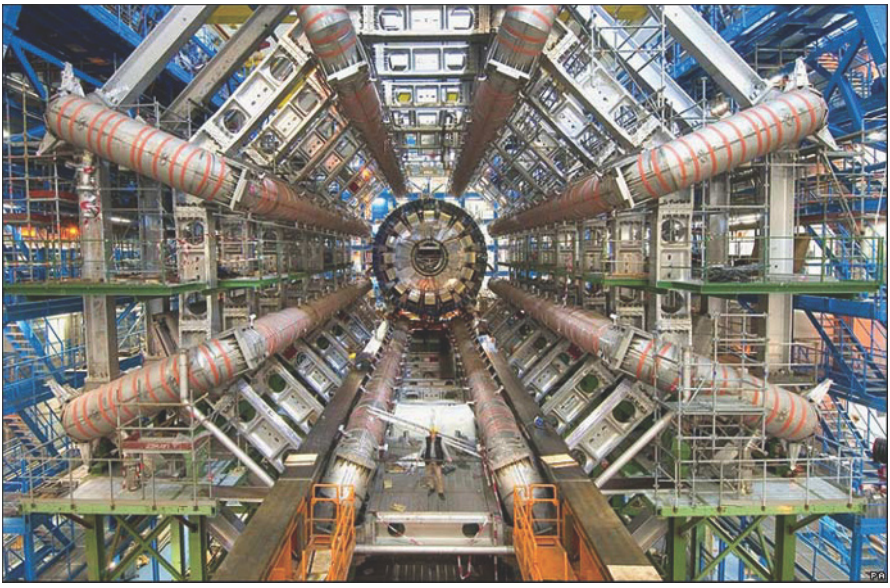


Abb. 12.2.3 Ausschnitt des ATLAS-LHC Teilchenbeschleunigers im CERN Forschungszentrum, Genf. In einem Ringtunnel von 27 km Länge werden Teilchen gegenläufig bis fast auf Lichtgeschwindigkeit beschleunigt und zur Kollision gebracht. Von den Ergebnissen dieser Experimente erhofft man sich weitere Erkenntnisse über den Urknall vor 13,7 Milliarden Jahren und seine Nachwirkungen (Aussagen über das Standardmodell der Elementarteilchen) [Foto Brice/CERN]

- Zur Zeit sind in Europa und in den USA Laserdetektoren installiert worden, um Gravitationswellen nachzuweisen, die durch den Kollaps von pulsierenden Doppelsternen oder durch den Zusammenstoß schwarzer Löcher entstehen. Die große mathematische Herausforderung besteht darin, durch theoretische Überlegungen gepaart mit schwierigen Computersimulationen für hochgradig singuläre Gleichungen die Muster vorherzusagen, die etwa beim Zusammenstoß schwarzer Löcher in unseren Detektoren auftreten werden.
- Aktuelle astronomische Messungen zeigen, dass nur etwa vier Prozent der Gesamtenergie des Universums aus klassischer Materie bestehen. Der Rest wird von kalter dunkler Materie und dunkler Energie gebildet, deren Strukturen völlig unbekannt sind (vgl. [Börner 2003]). Um dieses große Rätsel zu lösen, bedarf es mathematischer Modellvorschläge und der Überprüfung durch die Auswertung von Meßdaten.

Die Komplexität von biologischen Prozessen und ihre Gesetzmäßigkeiten

Im 19. Jahrhundert erkannten die Physiker, dass das Verhalten von Vielteilchensystemen wesentlich durch zwei physikalische Größen bestimmt wird: Energie und Entropie. Ausgangspunkt für die Einführung der Entropie bildete die Berechnung des optimalen Wirkungsgrades von Dampfmaschinen durch den französischen Ingenieur Sadi Carnot (1796–1832) im Jahre 1824. Um den optimalen Fluss von Informationen durch Nachrichtenkanäle und seine Störungen mathematisch zu erfassen, führte der Begründer der Informationstheorie – Claude Shannon (1916–2001) – den Begriff der Information ein, der gleich der negativen Entropie der Physiker ist. Beispielweise hat die Erde durch die Erbinformation der Lebewesen ständig an Information zugenommen. Dieser Informationsgewinn entspricht einem Entropieverlust der Erde, der dadurch entsteht, dass von der Sonne ausgestrahlte energiereiche Lichtteilchen (Photonen) die Erde erreichen und zum großen Teil bei tiefen Temperaturen in das Weltall wieder abgestrahlt werden.

Die Information eines Computerprogramms von 2^N bit ist gleich N. Vor mehr als 20 Jahren wurde durch Computersimulationen entdeckt, dass sehr einfache Iterationsprozesse in der Lage sind, außerordentlich komplizierte Muster zu erzeugen, wie man sie in der belebten Natur beobachtet (siehe [Peitgen et al. 2004]). Das kann modellhaft erklären, warum komplizierte biologische Phänomene in stabiler Weise immer wieder reproduziert werden. Vom Standpunkt biologischer Systeme stellt die Entropie oder Information nur eine sehr grobe Kenngröße dar. Sie gibt uns keine Auskunft über die Kompliziertheit biologischer Prozesse. Für die Mathematik der Zukunft ergibt sich die Herausforderung, nach einer Verfeinerung des Informationsbegriffs und nach möglichen allgemeinen Gesetzmäßigkeiten in biologischen Systemen zu suchen. Hier stehen wir erst am Anfang. Eine besondere Faszination geht vom menschlichen Gehirn aus. Es verfügt über globale Fähigkeiten,

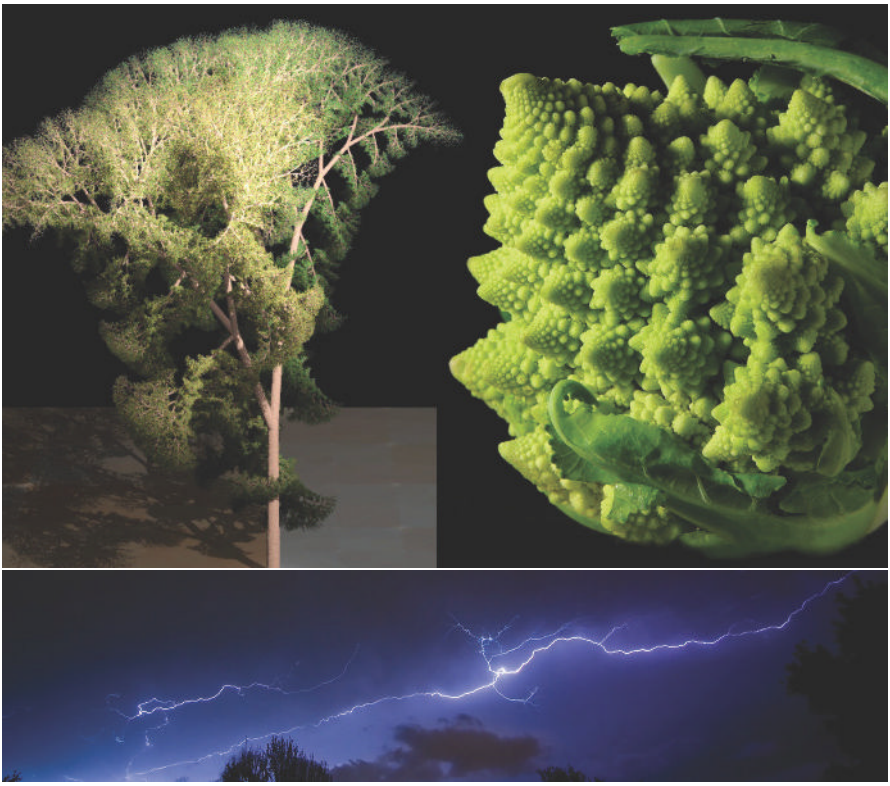


Abb. 12.2.4 Fraktale in der Natur, künstliche (Baumfraktale [Solkoll]) und natürliche (Romanesco, Brokoli [Foto John Sullivan]); Blitze weisen ähnliche Strukturen auf [Foto Craig Jewell]

die unsere heutigen Computer nicht besitzen. Ein verbessertes Verständnis der Arbeitsweise unseres Gehirns könnte Hinweise zum Bau wesentlich leistungsfähigerer Computer geben.

Mathematische Materialwissenschaft

Fortschritte in der Technologie gehen oft einher mit der Entwicklung neuer Materialien. Eine Aufgabe für die Zukunft ist der Aufbau einer leistungsfähigen mathematischen Materialwissenschaft. Das Fernziel ist es, Methoden zu entwickeln, die es erlauben, Materialien mit vorgeschriebenen günstigen Eigenschaften am Computer zu entwickeln. Unter dem Mikroskop erkennt man, dass Materialien häufig eine sehr komplizierte Mikrostruktur besitzen. Zu deren mathematischer Beschreibung benötigt man neue mathematische Hilfsmittel in Kombination mit der Physik der Kontinua und der statistischen Physik der Vielteilchensysteme (siehe [Müller 1999]).

Einheitliche mathematische Theorie für die in der Natur auftretenden fundamentalen Kräfte (Einsteins Traum)

Von Galileo Galilei (1564–1642) stammt der Satz:

„Il libro della natura è scritto in lingua mathematica.“
(Das Buch der Natur ist in der Sprache der Mathematik geschrieben.)

Der Alchemist Georg Faust (1480–1540) ist der Protagonist von Goethes Drama „Faust“ aus dem Jahre 1808. Goethe lässt Faust die Worte sagen:

„Daß ich erkenne, was die Welt im Innersten zusammenhält.“

Prägnanter kann man das Streben des Menschen nach Erkenntnis nicht ausdrücken. Ein tiefer Zusammenhang zwischen Mathematik und Physik kann kurz durch das Stichwort

Kraft gleich Krümmung

umschrieben werden. Das möchten wir jetzt erläutern. Zwischen 1821 und 1825 führte Gauß körperlich sehr anstrengende Landvermessungsarbeiten im Königreich Hannover durch. Dabei ergab sich die Frage: Kann man die Krümmung einer Fläche (z. B. der Erdoberfläche) bestimmen, ohne den sie umgebenden Raum zu benutzen? Nach anstrengender geistiger Arbeit konnte Gauß im Jahre 1827 in seinem Hauptwerk über Differentialgeometrie mit



Abb. 12.2.5 Albert Einstein (Israel 2006)



Abb. 12.2.6 Élie Cartan, Sophus Lie

seinem theorema egregium (dem vortrefflichen Theorem) eine positive Antwort geben. Riemann (1826–1866) verallgemeinerte die Gaußschen Ideen auf höhere Dimensionen. Diese Riemannsche Geometrie wurde von Einstein in seiner allgemeinen Relativitätstheorie aus dem Jahre 1916 benutzt, um die Newtonsche Gravitationskraft durch die Krümmung der vierdimensionalen Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit zu ersetzen. Wir kennen heute vier fundamentale Kräfte in der Natur: die Gravitationskraft, die elektromagnetische Kraft, die starke Kraft, die die Atomkerne zusammenhält und die schwache Kraft, die für den radioaktiven Zerfall verantwortlich ist. Es war Einsteins vergeblicher Traum, eine einheitliche Theorie für alle fundamentalen Kräfte zu schaffen. Einige Jahre nach Einsteins Tod begannen die Physiker, das Standardmodell der Elementarteilchen zu formulieren, das bisher sehr erfolgreich war und die fundamentalen Kräfte außer der Gravitation umfasst. An der Verschmelzung zwischen Quantenphysik und Gravitationsphysik im Rahmen einer Quantengravitation wird intensiv gearbeitet, aber eine endgültige Lösung ist noch nicht in Sicht (siehe [Fauser/Tolksdorf/Zeidler 2006]).

Das Standardmodell der Elementarteilchen basiert auf Differentialgleichungen, deren Prototyp von den Physikern Yang und Mills im Jahre 1954 als Verallgemeinerungen der Maxwellschen Differentialgleichungen der Elektrodynamik formuliert wurden. Die dabei verwendete Mathematik ist ein Spezialfall der modernen Krümmungstheorie für Hauptfaserbündel und deren assoziierte Vektorbündel, die auf Ideen von Sophus Lie (1842–1899) (Theorie der kontinuierlichen Symmetriegruppen) und Élie Cartan (1859–1951) zurückgeht und von Charles Ehresmann (1905–1979) um 1950 vollendet wurde. Diese mathematische Theorie lernte der Physiker Yang jedoch erst um 1970 kennen. Über die Jahrhunderte verfolgten Physiker und Mathematiker scheinbar zwei sehr unterschiedliche Zielstellungen. Die Physiker wollten die

in der Natur wirkenden Kräfte verstehen, während die Mathematiker sich beispielweise für die Krümmung geometrischer Figuren interessierten. Am Ende entdeckten Physiker und Mathematiker, dass sie unabhängig voneinander tatsächlich das gleiche Ziel verfolgten, ohne es über einen langen Zeitraum zu bemerken.

In der Quantenfeldtheorie besteht die merkwürdige Situation, dass die von den Physikern in genialer Weise entwickelten heuristischen mathematischen Methoden mit erstaunlicher Präzision die experimentell gemessenen Werte liefern. Das betrifft zum Beispiel das anomale magnetische Moment des Elektrons oder des Myons. Tatsächlich gibt es bisher keine mathematisch fundierte Quantenfeldtheorie. Die Schaffung einer solchen Theorie stellt eines der großen ungelösten Probleme der Mathematik dar (ausführlich in [Zeidler 2006]).

Mathematik des Zufalls (Stochastik)

Viele Phänomene in der Natur und in der menschlichen Gesellschaft werden vom Zufall beherrscht. Mit Fragen des Zufalls beschäftigt man sich seit dem 17. Jahrhundert im Zusammenhang mit dem Aufsuchen von günstigen Strategien in Spielkasinos. Im 19. Jahrhundert entwickelten die Physiker die statistische Physik zur Untersuchung von Vielteilchensystemen (z. B. Gasen). Der Physiker Max Born (1882–1970) erkannte im Jahre 1926, dass die neugeschaffene Quantenmechanik intrinsisch mit dem Zufall verknüpft ist. Dafür erhielt er 1954 den Nobelpreis für Physik. Im Jahre 1927 entdeckte Heisenberg seine berühmte Unschärferelation, die als Folge der Bunjakowski–Cauchy–Schwarzschen Ungleichung in Hilberträumen besagt, dass Ort und



Abb. 12.2.7 Kiyoshi Ito, Max Born

Geschwindigkeit eines Elementarteilchens (z. B. eines Elektrons) nicht gleichzeitig genau gemessen werden können. Als moderne mathematische Disziplin wurde die „Stochastik“ von dem russischen Mathematiker Andrei Kolmogorow (1903–1987) im Jahre 1933 axiomatisch begründet und rasant entwickelt. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Ereignisses ist dabei ein Grundbegriff, der nicht auf andere Begriffe (wie z. B. die Ergebnisse von Meßreihen) zurückgeführt wird. Im Jahre 2006 erhielt der japanische Mathematiker Kiyoshi Itô (*1916) den neu geschaffenen Gauß-Preis der Internationalen Mathematikerunion und der Deutschen Mathematikervereinigung für seine bahnbrechenden Leistungen auf dem Gebiet der stochastischen Differentialgleichungen, die wichtige Klassen stochastischer Prozesse beschreiben. Die Weiterentwicklung der Stochastik (z. B. in der Bildverarbeitung) ist eine wichtige Aufgabe der Mathematik für die Zukunft im Sinne einer Querschnittswissenschaft (siehe [Mumford 1999]).

Mathematik des qualitativen Verhaltens (Topologie)

Durch seine bahnbrechenden Untersuchungen über die Planetenbewegungen wurde Poincaré Ende des 19. Jahrhunderts auf die Schaffung einer Mathematik geführt, die nicht Lösungen explizit berechnet, sondern das qualitative Verhalten von geometrischen Gebilden und von Systemen untersucht, die in der Natur auftreten. Dieses Gebiet der Mathematik wird Topologie genannt. Ein zentrales Resultat, das die Mathematik des 20. Jahrhunderts wesentlich beinflußte, ist das Theorem von Riemann–Roch–Hirzebruch, das

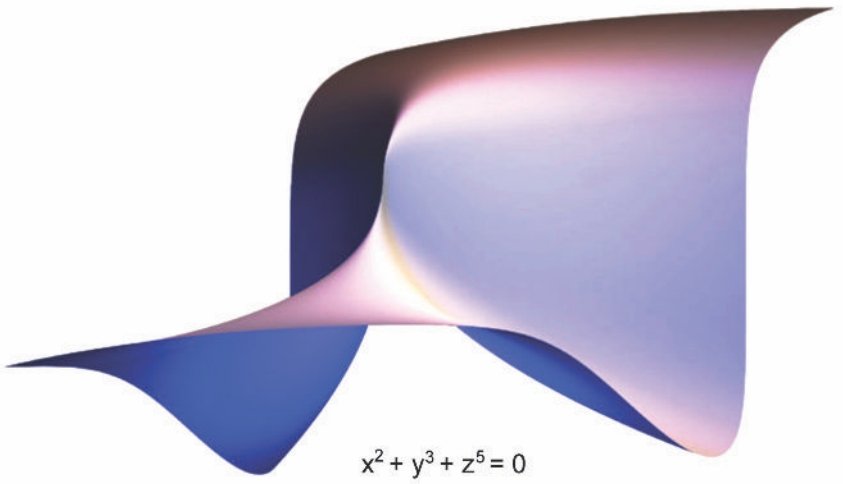


Abb. 12.2.8 Algebraische Fläche „Sofa“ [Hauser, Wien]

Friedrich Hirzebruch (*1927) im Jahre 1953 bewies. Riemann entdeckte, dass ein sehr präziser Zusammenhang zwischen der Topologie Riemannscher Flächen und den darauf vorhandenen analytischen Objekten existiert. Übersetzt man das in die Sprache der Physik, dann geht man von einer Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit M aus, deren Punkte Ereignisse sind. Physikalische Felder entsprechen zusätzlichen Objekten auf M. Es sind nun nicht alle Typen von physikalischen Feldern möglich. Die Topologie erlaubt es, die zulässigen Felder zu klassifizieren. Das erklärt, warum das Theorem von Riemann–Roch–Hirzebruch und verwandte Theoreme – wie das Atiyah–Singer–Indextheorem – bei der Untersuchung physikalischer Feldmodelle eine zentrale Rolle spielen. Hier handelt es sich um mathematische Resultate, die sich aus innermathematischen Fragen ergaben – dann aber ihre Kraft auch für physikalische Anwendungen entfalteten. Trotz bewundernswerter Ergebnisse, die im 20. Jahrundert in der Topologie erzielt wurden, gibt es noch außerordentlich viel zu tun, wobei die Probleme immer schwieriger werden (vgl. [Chern/Hirzebruch 2001]).

Der Zusammenhang zwischen diskreten und kontinuierlichen mathematischen Strukturen

In der Mathematik lassen sich häufig kontinuierliche Probleme leichter als diskrete Probleme lösen, weil man im kontinuierlichen Fall die Methoden der Analysis mit dem Apparat der Differentiation und Integration zur Verfügung hat. Die diskrete Mathematik hat es oft mit schwierigen kombinatorischen und graphentheoretischen Problemen zu tun. Ein Meister der diskreten Mathematik war im 20. Jahrhundert der ungarische Mathematiker Paul Erdös (1913–1996). In seiner Geschichte der Mathematik des 19. Jahrhunderts weist Felix Klein darauf hin, dass Hilbert Ende des 19. Jahrhunderts ein Programm formulierte, welches zum Ziel hatte, diskrete Probleme der Mathematik (z. B. der Zahlentheorie) mit Methoden zu lösen, die sich durch Abstraktion und Reformulierung analytischer Methoden ergeben. Im 20. Jahrhundert wurde das Hilbertsche Programm sehr erfolgreich durch André Weil und Alexander (Alexandre) Grothendieck weiterentwickelt und führte zum Beispiel zum Beweis der diskreten Riemannschen Vermutung durch Pierre Deligne (*1944), zum Beweis der Mordellschen Vermutung über die Endlichkeit der Lösungsmenge für eine große Klasse von diophantischen Gleichungen durch Gerd Faltings (*1954) und zum Beweis der Fermatschen Vermutung durch Andrew Wiles (*1953). Das sind überzeugende Beispiele für die unglaubliche Kraft hoher mathematischer Abstraktion. Diskrete mathematische Strukturen sind wichtig für viele in der Praxis auftretenden Optimierungsaufgaben. Neuerdings sind diskrete mathematische Strukturen auch im Visier der Physiker. Diese erwarten, dass unterhalb der Plancklänge von 10^{-35} Metern Raum und Zeit im Rahmen der Quantengravitation ihre übliche Struktur verlieren und möglicherweise diskret werden.

Das Klassifizierungsproblem in der Mathematik

Aufgrund von konkreten Beispielen führen die Mathematiker häufig Strukturen ein, die sich durch sehr natürliche Eigenschaften charakterisieren lassen. Dann ergibt sich sofort die Aufgabe, alle möglichen Realisierungen der ins Auge gefassten Struktur zu klassifizieren. Das erweist sich jedoch in der Regel als sehr schwierig. Der Prototyp ist das Phänomen der Symmetrie, das mathematisch durch den Gruppenbegriff erfasst wird. Es dauerte etwa 150 Jahre, bis 1985 alle endlichen einfachen Gruppen klassifiziert waren. Der vollständige Beweis umfasst 15 000 Seiten – es ist der längste mathematische Beweis, der jemals geführt wurde (siehe [Gorenstein 1986]). Daran arbeiteten etwa hundert Mathematiker. Eine der Schwierigkeiten bestand darin, dass es einen Ausreißer gab – das sogenannte Monster – mit genau

$$2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$$

Elementen. Auf die Symmetrieeigenschaften, die dieses Monster beschreibt, wurden die Mathematiker erst durch Überlegungen geführt, die ihren Ursprung in der konformen Quantenfeldtheorie der Physiker hatten. Die Klassifizierung aller kontinuierlichen Gruppen (d. h. aller kontinuierlichen Symmetrien) oder aller topologischen Räume (d. h. aller geometrischen Strukturen) scheint heute hoffnungslos. Wer weiß jedoch, was die Zukunft bringen wird.

Physikalische Mathematik – eine neue Dimension der Mathematik

In den letzten 30 Jahren hat es einen unglaublich intensiven Fluss an neuen Ideen aus der Physik in die Mathematik gegeben, der mit unverminderter Stärke anhält. Ausgangspunkt sind die Bemühungen der Physiker, Einsteins Traum von einer einheitlichen Theorie aller Kräfte zu realisieren. Einer der Versuche wird durch das Stichwort „Stringtheorie“ umschrieben. Die Grundidee besteht in der Annahme, dass die Welt nicht aus Teilchen, sondern aus eindimensionalen winzig kleinen Fäden besteht, die man im Englischen „strings“ nennt. Ein bewegter „string“ stellt eine zweidimensionale Fläche dar. Die Mathematik derartiger Flächen ist besonders reich an Strukturen, was zum Beispiel in der Theorie der Riemannschen Flächen zum Ausdruck kommt (siehe [Maurin 1997]). Der entscheidende intellektuelle Motor ist die Kreativität des Physikers Edward Witten (*1951), der am Institute for Advanced Study in Princeton arbeitet – der früheren Wirkungsstätte von Einstein. Witten war der erste Physiker, der die Fields-Medaille in der Mathematik erhielt. Das geschah im Jahre 1990 (siehe [Atiyah/Iagolnitzer 2003]). Witten kann man als den Begründer der physikalischen Mathematik ansehen.

– Die mathematische Physik ist ein Teilgebiet der Mathematik. Sie bezieht ihre Probleme aus allen Teilen der Physik und versucht, diese mit den Methoden der Mathematik zu lösen. Am Ende stehen strenge Beweise.

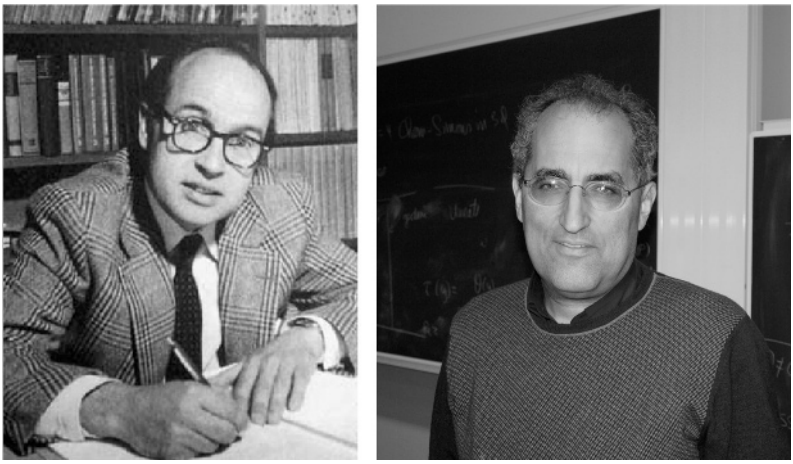


Abb. 12.2.9 Sir Michael Atiyah, Edward Witten

– Die physikalische Mathematik moderner Prägung bezieht ihre Fragen aus dem Streben, eine einheitliche Theorie für alle vier fundamentalen Kräfte in der Natur aufzustellen. Dabei werden physikalische Intuition und mathematische Kenntnisse eingesetzt, um die Existenz tiefliegender und völlig neuer und unerwarteter mathematischer Resultate vorherzusagen. Das ist ein reicher Born an neuen Ideen für die Mathematik. Die strenge Beweisführung für die vorhergesagten mathematischen Aussagen erweist sich in der Regel als sehr schwierig und muss völlig andere Hilfsmittel einsetzen, als sie die Intuition der Physiker bereitstellt.

Sir Michael Atiyah (*1929), einer der großen Mathematiker unserer Zeit, sagte im Jahre 1984 in einem Interview:

> *„Je mehr ich über Physik lerne, um so überzeugter bin ich, dass die Physik in einem gewissen Sinne mit den tiefsten Anwendungen der Mathematik verbunden ist. Die mathematischen Probleme, die sich aus der Physik ergeben haben und gelöst wurden, stellen die Lebensader der Mathematik dar. Die wirklich tiefen mathematischen Fragen ergeben sich aus der Physik. Für die Fruchtbarkeit mathematischer Forschung ist es wichtig, die Verbindung zur Physik so intensiv wie möglich aufrechtzuerhalten.“*

Als ein Beispiel wollen wir die Theorie vierdimensionaler Mannigfaltigkeiten kurz diskutieren. Das Standardmodell der Elementarteilchen basiert auf partiellen Differentialgleichungen, die vom Typ der Yang–Mills Gleichungen sind. Diese Gleichungen wurden von Simon Donaldson (*1957) benutzt, um neue topologische Invarianten zum Studium des qualitativen Verhaltens von vierdimensionalen Mannigfaltigkeiten zu konstruieren. Beispielweise ergibt sich,

dass der flache vierdimensionale Raum, der in Einsteins spezieller Relativitätstheorie die Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit beschreibt, neben der bekannten topologischen Struktur noch unendlich viele exotische glatte Strukturen besitzt, und diese Situation tritt nur in vier Dimensionen auf. Für den Physiker ergibt sich daraus sofort die Frage, ob es physikalische Phänomene gibt, die auf einer der exotischen Eigenschaften der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit basieren.

Protonen sind keine Elementarteilchen, sondern jedes Proton besteht aus drei „quarks“. Die Physiker gehen davon aus, dass diese „quarks“ niemals als freie Teilchen außerhalb eines Protons beobachtet werden können. Das ist die Hypothese des „quark confinement“ (Quark-Gefangenschaft). Um dieses Phänomen theoretisch behandeln zu können, stellten Seiberg und Witten im Jahre 1994 Gleichungen auf, die man die Seiberg–Witten Gleichungen nennt. Aufgrund von genialer physikalischer Intuition vermutete Witten, dass diese Gleichungen alle Ergebnisse der Donaldson-Theorie liefern. Dabei handelt es sich um sehr präzise Vorhersagen. Mittlerweile haben Mathematiker zu ihrer großen Überraschung festgestellt, dass die Seiberg–Witten Gleichungen gegenüber den Yang–Mills Gleichungen viel günstigere Eigenschaften besitzen und sich dadurch ein einfacherer Zugang zur Donaldson-Theorie ergibt.

Quantenmathematik

In den letzten zwanzig Jahren ist ein neuer Zweig der Mathematik entstanden, den man nach einem Vorschlag des russischen Mathematikers Juri Manin (*1937) Quantenmathematik nennt. Hierbei handelt es sich um eine Querschnittswissenschaft innerhalb der Mathematik.

Der Gegenstand der Quantenmathematik sind Methoden, die es erlauben, klassische mathematische Theorien zu „quantisieren“. Das Vorbild ist dabei die Heisenbergsche Quantenmechanik, bei der die Poisson-Struktur von Funktionen der klassischen Mechanik durch die Lie-Struktur von Operatoren im Hilbertraum ersetzt wird. Die Quantenmathematik kann unter anderem durch folgende Stichworte beschrieben werden: Supersymmetrie und Supergeometrie, nichtkommutative Geometrie, motivische Renormierungsgruppe, Hopfalgebren und Renormierungstheorie, Floer-Homologie und Quantenkohomologie, geometrische Quantisierung, Solitonen, Instantonen, Twistoren, pseudoholomorphe Kurven, Gromow–Witten-Invarianten und symplektische Topologie, Deformationsquantisierung, unendlichdimensionale Lie-Algebren (Kac-Moody-Algebren) und konforme Quantenfeldtheorie, Vertexoperatoren, Frobeniusmannigfaltigkeiten, Stringtheorie und Spiegelsymmetrie von Hodgezahlen, Stringtheorie und abzählende algebraische Geometrie, topologische Quantenfeldtheorie und Knotentheorie, Quantenlogik und Theorie der Quantencomputer (siehe [Manin 1999] und [Zeidler 2006]).

Bei den Bemühungen um eine einheitliche Theorie der fundamentalen Kräfte in der Natur konkurrieren zur Zeit die nichtkommutative Geometrie des Mathematikers Alain Connes, die Stringtheorie des Physikers Edward

Witten und die Schleifengravitation des Physikers Abhay Ashtekar miteinander.

Die Theorie der Quantencomputer ist bereits gut entwickelt. Die Grundidee besteht darin, die jetzt üblichen zweielementigen „0-1"-Zustände durch Quantenzustände zu ersetzen, die Elemente eines 2^n-dimensionalen Hilbertraumes sind mit $n = 2, 3, \ldots$ Dadurch ergibt sich eine viel leistungsfähigere Informationsverarbeitung, deren praktische Realisierung eine Revolution in der Computertechnik auslösen würde. An der experimentellen Realisierung, die sehr kompliziert ist, wird zur Zeit intensiv gearbeitet (siehe [Nielsen/Chuang 2001]).

12.3 Zwei kürzlich gelöste berühmte Probleme der Mathematik

In der Mathematik gibt es zwei unterschiedliche Typen von Aufgabenstellungen:

(i) die Lösung von Gleichungen (z. B. $x^2 = 2$)
(ii) und die Beschreibung von Eigenschaften geometrischer Figuren (z. B. von Kugeln).

Das Fermatsche Problem bzw. die Poincaré-Vermutung gehören zum Typ (i) bzw. zum Typ (ii). Tatsächlich ist bereits seit Descartes (1596–1650) bekannt, dass zwischen beiden Aufgaben ein enger Zusammenhang besteht. Die berühmten Probleme der Mathematik zeichnen sich dadurch aus, dass die Lösung schwieriger Einzelprobleme zur Entdeckung mächtiger neuer Hilfsmittel führt und die globale Weiterentwicklung der Mathematik fördert. Zum Typ (i) gehören zum Beispiel alle in der Physik auftretenden Variationsprobleme und Differentialgleichungen mit einer schier unerschöpflichen Vielfalt an Lösungen, die den in der Natur beobachteten Formenreichtum widerspiegelt.

Das Fermatsche Problem

In der Sprache der Geometrie besagt die Fermatsche Vermutung, die etwa aus dem Jahre 1637 stammt, dass für jede natürliche Zahl $n = 3, 4, \ldots$ die Kurve n-ter Ordnung $x^n + y^n = 1$ keine Punkte (x, y) enthält, bei denen die Koordinaten x und y rationale Zahlen sind (verschieden von 0 und 1). Das ist der Spezialfall einer sogenannten diophantischen Gleichung in der algebraischen Geometrie.[3] Andrew Wiles bewies im Jahre 1995, dass die Fermatsche

[3] Für $n = 2$ gibt es nichttriviale Lösungen. Zum Beispiel folgt aus $3^2 + 4^2 = 5^2$, dass der Punkt $x = \frac{3}{5}, y = \frac{4}{5}$ auf dem Kreis $x^2 + y^2 = 1$ liegt. Triviale Lösungen im Kreisfall sind $x = 1$, $y = 0$ und $x = 0$, $y = 1$.

Vermutung richtig ist. Die dramatische Geschichte dieser gewaltigen intellektuellen Leistung findet man in [Singh 1998]. Der Beweis ist außerordentlich kompliziert. Seine Grundidee kann jedoch in wenigen Zeilen beschrieben werden. Angenommen, es existiert eine Lösung, dann kann man eine elliptische Kurve konstruieren, die nicht modular ist. Das liefert den gesuchten Widerspruch, denn man weiß heute, dass jede elliptische Kurve modular ist, d. h. sie kann nicht nur durch elliptische Funktionen, sondern auch durch sogenannte modulare Funktionen global parametrisiert werden. Das zuletzt erwähnte geometrische Resultat über elliptische Kurven (d. h. die Gültigkeit der Shimura-Taniyama-Weil-Vermutung) ist viel wichtiger als die Gültigkeit der Fermatschen Vermutung und stellt den eigentlichen Fortschritt dieser langfristigen Entwicklung in der Mathematik dar. Die Parametrisierung elliptischer Kurven durch modulare Formen findet man in [Diamond/Shurman 2007].

Die Poincaré-Vermutung

Unter einer 2-dimensionalen Sphäre verstehen wir die Oberfläche einer Kugel im 3-dimensionalen euklidischen Raum (z. B. die Oberfläche eines Globus der Erde). Die Erdoberfläche stellt wegen ihrer Abplattung die Deformation einer Sphäre dar. Man sagt, dass die Erdoberfläche vom topologischen Typ einer Sphäre ist. Definitionsgemäß heißen zwei geometrische Gebilde M und N homöomorph (oder vom gleichen topologischen Typ), wenn es eine stetige Abbildung von M auf N gibt, die sich stetig umkehren läß. Stellt man sich anschaulich vor, daß M und N aus Gummi bestehen, dann sind M und N vom gleichen topologischen Typ, wenn man sie durch Verbiegen des Gummis ineinander überführen kann, ohne daß dabei Risse entstehen. Beispielsweise besitzen eine 2-dimensionale Sphäre und ein Torus (man denke an die Oberfläche eines Schwimmrings) nicht den gleichen topologischen Typ. Im 19. Jahrhundert wurden alle 2-dimensionalen geschlossenen Flächen klassifiziert. Dabei ergab sich speziell die folgende einfache Charakterisierung der 2-dimensionalen Sphäre:

> *Eine 2-dimensionale, kompakte, einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit (ohne Rand) ist vom topologischen Typ einer 2-dimensionalen Sphäre.*

Dabei heißt eine Mannigfaltigkeit M zusammenhängend, wenn sich zwei Punkte stets durch eine stetige Kurve in M verbinden lassen. Der einfache Zusammenhang bedeutet zusätzlich, dass sich jede geschlossene stetige Kurve in M in stetiger Weise auf einen Punkt zusammenziehen läßt.

Allgemeiner ist eine n-dimensionale Sphäre definiert als der Rand einer $(n+1)$-dimensionalen Kugel im $(n+1)$-dimensionalen euklidischen Raum. Zu Beginn des 20. Jahrhunderts stellte sich Poincaré die schwierige Aufgabe, die

3-dimensionalen Flächen zu klassifizieren. Er beschäftigte sich zunächst mit den einfachsten Bausteinen - den 3-dimensionalen Sphären - und formulierte im Jahre 1904 die folgende Vermutung:

Eine 3-dimensionale, kompakte, einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit (ohne Rand) ist vom topologischen Typ einer 3*-dimensionalen Sphäre.*

Der Beweis dieser berühmten Vermutung gelang im Jahre 2003 dem russischen Mathematiker Grigori Perelman (*1966).

Die verallgemeinerte Poincaré-Vermutung

Wie Gegenbeispiele zeigen, hat man für die höheren Dimensionen $n = 4, 5, \ldots$ die Poincaré-Vermutung in der folgenden Weise zu modifizieren:

Eine n-dimensionale, kompakte, einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit, die den gleichen Homotopietyp wie eine n-dimensionale Sphäre besitzt, ist vom topologischen Typ einer n-dimensionalen Sphäre.

Diese Aussage wurde bereits in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts von Smale ($n \geq 5$) und Freedman ($n = 4$) bewiesen. Im Unterschied zum einfachen Zusammenhang erlaubt die Einbeziehung des Homotopietyps eine verfeinerte Beschreibung der Zusammenhangsverhältnisse einer Mannigfaltigkeit. Aus dem Beweis der Poincaré-Vermutung ergibt sich, dass in allen Dimensionen das qualitative Verhalten der Sphären sehr einfach charakterisiert werden kann – im Unterschied zu komplizierteren geometrischen Figuren.

Die Poincaré-Vermutung ordnet sich in das allgemeine Programm der Mathematik ein, das qualitative Verhalten geometrischer Figuren zu klassifizieren.

Die Resultate von Perelman beweisen nicht nur die Poincaré-Vermutung im dreidimensionalen Fall, sondern zeigen auch, aus welchen Normalformen alle 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten aufgebaut werden können. Diese Normalformen wurden von Thurston (*1946) um 1980 eingeführt. Es ist außerordentlich bemerkenswert, dass die geniale Beweistechnik von Perelman nicht die Ideen der algebraischen Topologie verwendet, sondern die aus der Physik kommende Idee der Ricci-Strömung. Dabei wird grob gesprochen eine Flüssigkeitsströmung konstruiert, welche die Ausgangsmannigfaltigkeit M in die Sphäre S deformiert. Die entscheidende Schwierigkeit besteht darin, die entstehenden Singularitäten zu kontrollieren und einen Kollaps der Flüssigkeit auszuschließen. Wir verweisen auf [Cao/Zhu 2006] und [Morgan/Tian 2007].

12.4 Berühmte offene Probleme der Mathematik

Die Riemannsche Vermutung

Eine wichtige Methode der Mathematik besteht darin, die Eigenschaften von Vielteilchensystemen in einer einzigen Funktion – der sogenannten erzeugenden Funktion – zu kodieren.

Im 19. Jahrhundert lernten die Physiker in der statistischen Physik, dass man die Eigenschaften eines Gases in einer sogenannten Zustandssumme kodieren kann. Kennt man diese Zustandssumme, dann kann man alle Eigenschaften des Gases nach wohlbekannten Formeln berechnen.

Im 20. Jahrhundert verdankt man dem Physiker Richard Feynman die Erkenntnis, dass man die Eigenschaften eines quantenmechanischen Systems oder eines Quantenfeldes in einer kontinuierlichen Zustandsumme kodieren kann, die man das Feynmanintegral (oder Pfadintegral) nennt.

Im letzten Viertel des 20. Jahrhunderts zeigte der Physiker Edward Witten in virtuoser Weise, dass man Feynmanintegrale benutzen kann, um neue und sehr tiefliegende topologische Invarianten (z. B. in der Knotentheorie und in der Theorie der Mannigfaltigkeiten) im Rahmen der physikalischen Mathematik zu konstruieren, obwohl diese Feynmanintegrale im strengen mathematischen Sinn gar nicht existieren. Damit hat Witten der Mathematik eine neue kraftvolle, heuristische Methode geschenkt, die auf einer Statistik mathematischer Strukturen beruht.

Euler gelang es bereits im Jahre 1737, das System aller Primzahlen in der Funktion

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s)$$

zu kodieren. Das Produkt wird über alle Primzahlen p genommen. Die Formel gilt für alle reellen Zahlen $s > 1$. Riemann untersuchte im Jahre 1859 die Eigenschaften dieser Funktion für alle komplexen Werte s durch analytische Fortsetzung. Deshalb heißt ζ heute die Riemannsche Zetafunktion.

Der Punkt ist, dass die Verschlüsselung der Vielteilchensysteme durch eine erzeugende Funktion nicht sonderlich schwierig ist; als extrem schwierig stellt es sich jedoch in allen oben erwähnten Fällen heraus, aus den erzeugenden Funktionen tieferliegende Eigenschaften des betreffenden Vielteilchensystems zu entschlüsseln. Das ist ein Programm für die Mathematik der Zukunft. Im Jahre 1859 stellte Riemann die Vermutung auf, dass alle nichttrivialen Nullstellen der Funktion ζ auf der Geraden „Realteil von $s = \frac{1}{2}$“ in der komplexen Ebene liegen.

> *Ist die Riemannsche Vermutung richtig, dann kann man sehr scharfe Aussagen über die Häufigkeitsverteilung großer Primzahlen machen.*

Das ist das Ziel dieses berühmtesten offenen Problems der Mathematik. Computersimulationen zeigen, dass die riesige Menge an Nullstellen auf der kritischen Geraden ein sehr chaotisches Verhalten zeigt. Es scheint das kompli-

zierteste, bisher bekannte chaotische System zu sein. Ausserdem sind Zusammenhänge mit Zufallsmatrizen bekannt, die der Physiker Eugene Wigner (1902–1995) einführte, um die Energiespektren großer Atome stochastisch zu simulieren. Im Jahre 1976 bewies der britische Mathematiker Roger Penrose (*1931) die Existenz einer bis dahin unbekannten zweidimensionalen Symmetrie. Im Jahre 1984 wurden dreidimensionale Quasikristalle in der Natur entdeckt, deren Symmetrie mit der Penrose-Symmetrie eng zusammenhängt. Der britisch-amerikanische Mathematiker und Physiker Freeman Dyson (*1923), einer der führenden Intellektuellen unserer Zeit, der am Institute for Advanced Study in Princeton wirkt, weist im Vorwort zu dem Buch von Odifreddi (2004) darauf hin, dass man die Riemannsche Vermutung beweisen könnte, wenn es gelänge, alle eindimensionalen Quasikristalle zu klassifizieren. Die Riemannsche Vermutung ist mit erstaunlich vielen, völlig unterschiedlichen mathematischen Gebieten verbunden und stellt deshalb eine Herausforderung von besonderem Interesse dar (siehe [Conrey 2003]).

Die sieben Millenniumsprobleme des Clay-Instituts

Zur Erinnerung an Hilberts berühmte Pariser Rede im Jahre 1900 fand 100 Jahre später im Amphitheater des Collège de France in Paris ein Festakt statt, auf dem das neugegründete Clay Institute in Cambridge, Massachusetts (USA), unter seinem Gründungsdirektor Arthur Jaffe zur Lösung von sieben Millenniumsproblemen aufrief und für die Lösung eines jeden Problems einen Preis von einer Million Dollar stiftete. Dem wissenschaftlichen Ausschuss für diesen Preis gehörten an: Arthur Jaffe (Cambridge, USA), Alain Connes (Paris), Andrew Wiles und Edward Witten (Princeton, USA). Die sieben Probleme lauten:

(i) Beweis der Riemannschen Vermutung. Dieses Problem stand bereits im Jahre 1900 auf Hilberts Liste.

(ii) Beweis der Poincaré-Vermutung. Dieses Problem wurde inzwischen durch Perelman gelöst.

(iii) Beweis der Birch–Swinnerton Vermutung über den Zusammenhang zwischen der Anzahl rationaler Punkte auf einer elliptischen Kurve und dem Verhalten einer verallgemeinerten Riemannschen Zetafunktion in der Umgebung des kritischen Wertes $s = 1$.

(iv) Der Beweis der Hodgevermutung über die konkrete Struktur projektiver algebraischer Varietäten (Flächen).

(v) Die Komplexität von Computeralgorithmen: Für eine gewisse Klasse von Problemen, die von einem Parameter $n = 1, 2, \ldots$ abhängen, wird nach einem allgemeinen Lösungsalgorithmus gesucht, der die Aufgabe in $s(n)$ Schritten löst. Zu entscheiden ist dabei, ob $s(n)$ ein Polynom in n ist oder stärker wächst (z. B. $s(n) = n^3$ oder $s(n) = 2^n$).

(vi) Die Lösung des Turbulenzproblems für viskose Flüssigkeiten.

(vii) Die Schaffung einer mathematischen Quantenfeldtheorie für die Elementarteilchen.

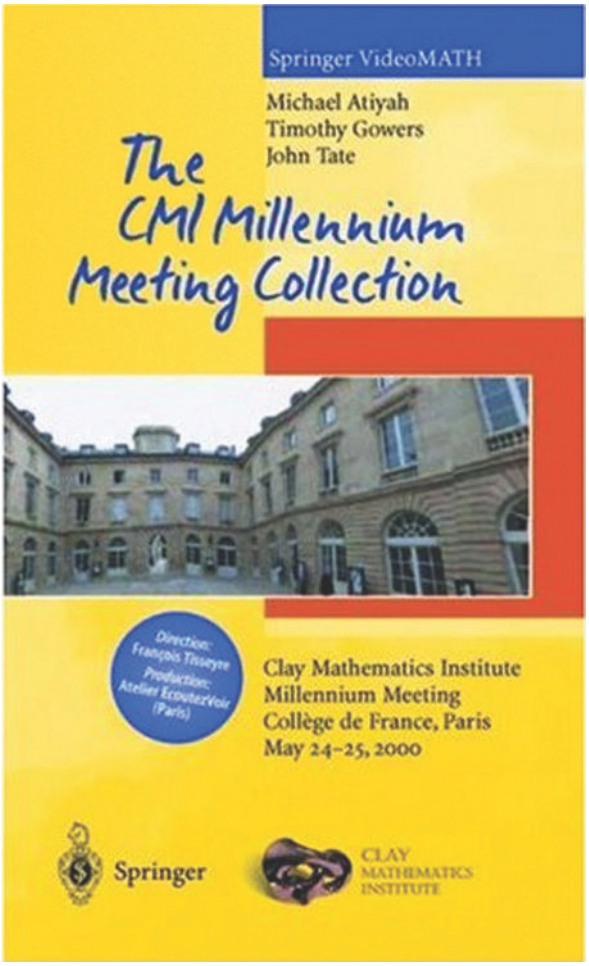


Abb. 12.4.1 Videocassette mit Beiträgen zum *Clay Mathematics Institute Millennium Meeting* des Jahres 2000, Paris (Springer Verlag)

Tatsächlich sind diese Probleme viel präziser und spezieller verfasst worden. Unsere gröberen Formulierungen sollen die Programme für die Zukunft der Mathematik verdeutlichen, die sich hinter diesen Problemen verbergen. Zum Beispiel steht hinter (iii) die Erwartung, tiefe Zusammenhänge zwischen Problemen vom Typ der Fermatschen Vermutung und der Riemannschen Vermutung aufzudecken (Kodierung von Lösungseigenschaften in erzeugenden Funktionen). Hinter (iv) verbirgt sich die Hoffnung der Mathematiker, dass sehr abstrakt eingeführte Begriffe letztendlich mit bekannten Begriffen übereinstimmen. Zum Beispiel bewies John Nash (*1928) im Jahre 1956 mit Hilfe einer ausgeklügelten analytischen Technik, dass die abstrakt definierten Rie-

mannschen Mannigfaltigkeiten einschließlich ihrer metrischen Eigenschaften als Flächen in geeigneten hochdimensionalen euklidischen Räumen realisiert werden können. Die Beweistechnik von Nash wird heute bei vielen anderen harten Problemstellungen eingesetzt. Hinter (v) steht die allgemeine Zielstellung, die Leistungsfähigkeit und die Grenzen von Computeralgorithmen mit mathematischen Methoden auf breiter Front zu untersuchen. Die Probleme in (v) haben die zusätzliche Eigenschaft, dass sie sich bei Vorliegen von geeigneten Zusatzinformationen leicht lösen lassen. Hinter dem Millenniumsproblem (v) verbirgt sich deshalb eine strategische Frage: Ist es möglich, dass bei fehlender Zusatzinformation die Komplexität der Probleme explodieren kann? Mehr Informationen über den historischen Hintergrund der Millenniumsprobleme findet man in [Devlin 2002] und [Jaffe 2006].

12.5 Die philosophische Dimension der Mathematik

In seinem Hauptwerk „Kritik der reinen Vernunft“ aus dem Jahre 1781, in dem er die Grundlagen der menschlichen Erkenntnis untersuchte, schrieb der Philosoph Immanuel Kant (1724–1804):

> *„So fängt denn alle menschliche Erkenntnis mit Anschauung an, geht von da zu Begriffen und endigt mit Ideen.“*

Hilbert wählte diesen Ausspruch Kants als Motto für sein Buch „Grundlagen der Geometrie“, das 1899 im Teubner-Verlag in Leipzig erschien und 1987 seine 13. Auflage erlebte.

Theorie und Praxis

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), einer der größten Philosophen aller Zeiten, stellte das lateinische Motto

> *theoria cum praxi*

über sein wissenschaftliches Werk. Der russische Mathematiker Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski (1792–1856), der unabhängig von Gauß und dem ungarischen Mathematiker János Bolyai (1802–1860) die nichteuklidische Geometrie entdeckte, äußerte prophetisch:

> *„Es gibt keinen Zweig der Mathematik, sei er auch noch so abstrakt, der nicht eines Tages auf Probleme der uns umgebenden realen Welt angewandt werden kann.“*

Von Felix Klein stammt der Ausspruch:

> *„Die größten Mathematiker wie Archimedes (um 287–212 v.Chr.), Newton (1646–1727) und Gauß (1777–1855) haben stets Theorie und Praxis in gleicher Weise miteinander vereint.“*

Unter dem imposanten Bilde von Carl Friedrich Gauß im Deutschen Museum von Meisterwerken der Naturwissenschaften und Technik in München findet man die Zeilen:

> *„Sein Geist drang in die tiefsten Geheimnisse der Zahl, des Raumes und der Natur; er maß den Lauf der Gestirne und die Kräfte der Erde; die Entwicklung der mathematischen Wissenschaft eines kommenden Jahrhunderts trug er in sich.“*

Je länger man sich mit Mathematik beschäftigt, um so mehr beindruckt ist man von dem tiefliegenden Einfluss der Ideen von Gauß und Riemann auf das moderne mathematische Denken. Gauß verkörperte in seinem Werk die Einheit innerhalb der einzelnen Disziplinen der Mathematik und deren fruchtbare Wechselwirkung mit Fragestellungen der realen Welt. Für Gauß gab es keine Trennung zwischen reiner und angewandter Mathematik, sondern nur das Streben nach der Beantwortung tiefliegender Fragen, die die Natur von außen und die Mathematik von innen an den Mathematiker stellen. Zur Beantwortung dieser Fragen hat man jeweils die stärksten mathematischen Hilfsmittel einzusetzen. Es ist für einen Mathematiker nicht weise, durch philosophische Vorbehalte – zum Beispiel durch die einseitige Betonung von Strukturalismus oder Empirismus – die Wahl der Mittel und der Denkstrukturen von vornherein einzuschränken. Das erschwert die Arbeit.

Das Wesen der Mathematik

Die Mathematik ist weder eine reine Naturwissenschaft, noch eine reine Geisteswissenschaft. Die Antwort auf die Frage nach dem Wesen der Mathematik kann man nicht besser formulieren, als es der ungarische Mathematiker János (John) von Neumann getan hat, der mit seiner unglaublichen Kreativität zu den führenden Mathematikern des 20. Jahrhunderts gehörte. In seinem Artikel *The mathematician* aus dem Jahre 1947, den wir hier frei übersetzen, schrieb er:

> *„Die Wahrheit ist viel zu kompliziert, als dass man sich ihr anders als schrittweise nähern kann. Ich denke, dass die folgende Annahme eine vernünftige Approximation darstellt: mathematische Ideen haben ihren Ursprung in empirischen Tatsachen, obwohl die Genealogie häufig langwierig und verworren ist. Sobald jedoch eine mathematische Idee das Licht der Welt erblickt hat, beginnt sie ihr eigenständiges Leben, das durch Kreativität geprägt ist und viel stärker von ästhetischen Motivationen beherrscht wird, als von empirischen Tatsachen. Es besteht jedoch die ernste Gefahr, dass sich ein mathematisches Gebiet nach dem Prinzip vom kleinsten Widerstand entwickelt, dass der Strom weit entfernt von seiner Quelle sich in unzählige Nebenarme aufspaltet und die mathematische Disziplin an der Fülle der technischen Einzelheiten zu ersticken droht. Es besteht die Gefahr der*

geistigen Inzucht – der Entartung. Am Anfang ist der Stil klassisch. Die Warnlampe leuchtet auf, wenn der Stil barock wird. Die einzige Rettung besteht dann darin, zu den Quellen zurückzukehren und mehr oder weniger direkt neue empirische Ideen einzuspeisen."

Die Einheit von Abstraktion und Konkretisierung

In der Geschichte des menschlichen Geistes taucht die Frage nach dem Verhältnis zwischen empirischem und abstraktem Denken immer wieder auf. Platon (um 428 bis ca. 347 v.Chr.) beschreibt in seinem Höhlengleichnis Gefangene, die Schatten an der Höhlenwand sehen. Einem der Gefangenen gelingt die Flucht ins Sonnenlicht. Er kehrt zurück und berichtet seinen Mitgefangenen, dass sie nur Abbilder der wirklichen Dinge (des Reichs der Ideen) sehen. In der europäischen Geistesgeschichte gab es zwei unterschiedliche Denkrichtungen, die auf Francis Bacon (1561–1626) und René Descartes (1596–1650) zurückgehen. Bacon betonte die Rolle des Empirischen und der Erfahrung, während Descartes die Dominanz des Denkens und der Ideen unterstrich (cogito ergo sum – ich denke, also bin ich). Richard Courant, der von 1888 bis 1972 lebte und nach der Machtergreifung des Faschismus in Deutschland emigrierte, um nach dem Vorbild seines Göttinger Instituts in New York das weltberühmte Courant-Institut zu gründen, schrieb im Jahre 1964:

„Das Wechselspiel zwischen Allgemeinheit und Individualität – Deduktion und Konstruktion – Logik und Phantasie – das ist die entscheidende Triebkraft einer lebensvollen Mathematik. Im Zusammenhang mit der Gewinnung eines tiefliegenden Results können eine oder mehrere dieser Seiten bedeutungsvoll sein. Eine weitreichende mathematische Entwicklung startet in der Regel von konkreten Fragestellungen, ebenso wie ein Ballon vom festen Boden startet. Dann wirft der Ballon Ballast ab, um in die höheren Schichten der Abstraktion zu gelangen. Dort kann er sich leicht bewegen und Fahrt aufnehmen. Der entscheidende Test ist jedoch die Landung des Ballons auf festem Boden, der einen neuen Landstrich erschließt. Kurz gesagt, der Flug in Neuland muss vom Konkreten starten und beim Konkreten enden."

Die Grenzen der Mathematik

Der britische Mathematiker, Sozialwissenschaftler und Philosoph Bertrand Russell (1872–1970), der 1950 den Nobelpreis für Literatur erhielt, hat sich intensiv mit der philosophischen Dimension der Mathematik auseinandergesetzt. In den Jahren 1910 bis 1913 verfasste er mit Alfred Whitehead das monumentale dreibändige Werk *Principia Mathematica*, in dem versucht wurde, die Mathematik vollständig auf eine formal-logische Grundlage zu stellen. Russells Credo lautete:

> *„Die Mathematik führt uns über das rein Menschliche hinaus in das Reich der absoluten Notwendigkeit, mit dem nicht nur unsere Welt, sondern jede mögliche Welt übereinstimmen muss.“*

Das ist ein sehr hoher Anspruch. Die Entwicklung der Mathematik im 20. Jahrhundert hat uns gelehrt, bescheidener zu werden. Einen wichtigen Beitrag dazu leistete der Logiker Kurt Gödel (1906–1978), der die Grenzen des mathematischen Denkens aufzeigte und nach seiner Emigration lange Zeit zusammen mit Einstein am Institute for Advanced Study in Princeton arbeitete. Grob gesprochen bewies Gödel in seiner Wiener Habilitationsschrift aus dem Jahre 1931, dass es nicht möglich ist, aus einem widerspruchsfreien rekursiven Axiomensystem der Arithmetik alle im Bereich der natürlichen Zahlen geltenden mathematischen Aussagen abzuleiten. Insbesondere ist es nicht möglich, einen Computer mit Axiomen zu füttern, so dass er jede richtige mathematische Aussage nach möglicherweise sehr vielen, aber auf jeden Fall endlich vielen Schritten erhält. Die Vielfalt der Mathematik ist viel reicher. Die Beschäftigung mit ihr erfordert Phantasie und Schöpferkraft. In dem viel gelesenen Buch von Douglas Hofstadter *Gödel, Escher, Bach* wird anhand von zahlreichen Beispielen erläutert, dass sowohl in der Logik Gödels als auch in der Musik Bachs und in der Malerei Eschers ähnliche Strukturen auftreten, die durch ein endloses geflochtenes Band symbolisiert werden können. Einstein schrieb im Jahre 1951:

> *„Eines habe ich in einem langen Leben gelernt, nämlich, dass unsere ganze Wissenschaft, an den Dingen gemessen, von kindlicher Primitivität ist – und doch ist es das Köstlichste, was wir haben.“*
> [Calaprice/Ehlers 1997, S. 152]

In seiner Gauß-Biographie aus dem Jahre 1955 zitiert Erich Worbs einen Bericht des Zeitzeugen Sartorius von Waltershausen:

> *„Gauß hat einmal erklärt, es gebe Fragen, auf deren Beantwortung er einen unendlich viel höheren Wert legen würde als auf die mathematischen. Es seien dies die Fragen über unser Verhältnis zu Gott, über unsere Bestimmung und unsere Zukunft. Allein, so habe er geendet, ihre Lösung liege ganz unerreichbar über uns und ganz ausserhalb des Gebietes der Wissenschaft.“*

In seinen „Maximen und Reflexionen“ sagte Goethe:

> *„Das schönste Glück des denkenden Menschen ist, das Erforschliche erforscht zu haben und das Unerforschliche ruhig zu verehren.“*

Literatur

Werke zur allgemeinen Information

A History of Computing in the Twentieth Century. A Collection of Essays. (1980): Ed. N. Metropolis/J. Howlett/G.-C. Rota. New York/London

A Source-Book 1996: From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics. Selected and edited by William Ewald. 2 Vol. Oxford

Beiträge aus der Staatsbibliothek zu Berlin-Preußischer Kulturbesitz 2005, Bd. 19. Staatsbibliothek zu Berlin

Biographien bedeutender Mathematiker 1989: Hg. H. Wußing/W. Arnold. 4. Auflage. Berlin

Biographien bedeutender Physiker 1984: Hg. W. Schreier. Berlin

Biographien bedeutender Techniker 1987: Hg. G. Banse/S. Wollgast. 2. Aufl. 1983. Berlin

Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences 1994: 2 Bände. Ed. I. Grattan-Guinness. London/New York

Development of Mathematics 1900–1950, (1994): Ed. J.-P. Pier. Basel/Boston/Berlin

Development of Mathematics 1950–2000, (2000): Ed. J.-P. Pier. Basel/Boston/Berlin

Dictionary of the History of Science 1981: Ed. W. F. Bynum/E. J. Browne/R. Potter. Princeton. Reprint 1984

DSB: Dictionary of Scientific Biography 1970–1980: Ed. Ch. C. Gillispie. New York

Encyclopedia of Mathematical Sciences (1989 ff.), Vols. S. 1–142: Editor-in-Chief R. Gamkrelidze (Moscow). Springer. Berlin

Handbook of Differential Equations. Stationary Partial Equations. Vol. II 2005: Ed. M. Chipot/P. Quittner. Amsterdam...

Handbook of Differental Equations Vol. II 2005: Ed. C. H. Dafermos/E. Fereisl. Amsterdam...

Handbook of Differential Equations. Ordinary Differential Equations. Vol. II 2005: Ed. A. Canada/P. Drábek/A. Fonda. Amsterdam...

Kleine Enzyklopädie Weltgeschichte 1979: 2 Bände. Leipzig

Lexikon bedeutender Mathematiker 1990: Hg. S. Gottwald/H.-J. Ilgauds/K.-H. Schlote. Leipzig

Lexikon der Renaissance 1989: Hg. G. Gurst/S. Hoyer/E. Ullmann/Chr. Zimermann. Leipzig

Wörterbuch der Logik 1978: Hg. E. Albrecht/G. Asser. Leipzig. (Aus dem Russischen)

Werke nach Autoren bwz. Herausgebern (Ed.) geordnet

Abel, N. H. 1881: Oeuvres complètes. Publiée aux frais de l'état norvégien par M. M. L. Sylow et S. Lie. Bd.1. Christiana

Abel, N. H./Galois, E. 1889: Abhandlungen über die Algebraische Auflösung von Gleichungen. Deutsch ed. H. Maser. Berlin

Abel, N. H. 1900: Abhandlung über eine besondere Klasse algebraisch auflösbarer Gleichungen. Hg. A. Loewy. Leipzig

Achard, F. 2005: James Clerk Maxwell, a Treatise on Electricity and Magnetism. In: Landmarks Writings. S. 564–587
Alten, H.-W. et al. 2008: 4000 Jahre Algebra. 2. korr. Nachdruck. Berlin/Heidelberg
Andersen, K. 1992: Brook Taylor's Work on Linear Perspective. Heidelberg
Andersen, K. 1992: Perspective and the Plan and Elevation Technique, in particular in the Work by Piero della Francesca. In: Amphora. Festschrift für H. Wußing. Basel/Boston. S. 1–23
Andersen, K. 1992: The History of Linear Perspective from 1435 to the End of the 18^{th} Century. In: Transact. Of the XVth Congress of the Intern. Assoc. of Bibliophiles. Copenhagen
Andrews, G. E. 1989: J. J. Sylvester,John Hopkins and Partitions. In: A Century of Mathematics in America. Part I. Providence/Rhode Islands. S. 21–40
Appel, K./Haken, W. 1977: The Solution of the four-map Problem. In: Scientific American. Vol. 237 1977. S. 108–121
Arago, F. 1854: Sämtliche Werke. Bd. II. Berlin
Arkmiadis, N. R. 2004: History of Mathematics. American Mathematical Society. (Aus dem Griechischen)
Arnold, V./Atiyah, M./Lax, P./Mazur, B. (Eds.) 1999: Mathematics: Frontiers and Perspectives. International Mathematical Union and American Mathematical Society
Artin, E. 1950: The Influence of J. H. M. Wedderburn on the Development of Modern Algebra.In: Bull. Amer. Math. Soc. 1950, S. 65–72
Asser, G. 1974: 100 Jahre Mengenlehre. In: Mitt. Math. Ges. DDR 1974. Heft 3. S. 17–42
Atiyah, M. 1984: An interview. Mathematical Intelligencer 6, S. 9–19
Atiyah, M. 2002: Mathematics in the 20th century. Bull. London Math. Soc. 34, S. 1–15
Atiyah, M./Iagolnitzer, D. (Eds.) 2003: Fields Medaillists' Lectures. 2. ed. World Scientific Series in 20thCentury Mathematics. Vol. 9
Ausejo, E. 1994: The Window Case of Sciences: the Associations for the Advancement of Science and of Scientific Congresses in Western Europe. In: Arch. intern. hist. Sciences. 44 1994, S. 338–371
Ausejo, E./Hormigon, M. 1999: Mathematics for Independence: From Spanish Exile to the Young American Republics. In: Historia mathematica 1999 (4), S. 314–326
Baltus, Chr. 2004: D'Alemberts proof of the fundamental theorem of Algebra. In: Hist. Math. 31 (4) 2004, S. 414–428
Barner, K.2001: How old did Fermat become?. In: NTM. N. S. 9(2001). S. 208–228
Barrow, I. 1670: Lectiones opticae et geometriae. London
Barrow, I. 1973: The Mathematical Works. Ed.: W. Whewell. Reprint Hildesheim/New York 1973
Basieux, P. 2004: Die Top Seven der mathematischen Vermutungen. 2. Aufl. Reinbek bei Hamburg
Bäuerle, F. 1987: F. Riesz In: Aspekte zur Geschichte der Analysis im 20. Jahrhunert. Hg.: M. von Renteln. Karlsruhe. S. 119–130
Beauclair, W. de 1989: Rechnen mit Maschinen. Braunschweig

Beaulieu, I. 1989: Bourbaki. Une histoire du groupe de mathématiciens français et ses travaux. 1934–1944. 2 Vols. Dissertation Universität Montreal
Beaulieu, I. 1994: Dispelling the myth: Questions and Answers about Bourbaki's Early Work. In: Sasaki Ch. et al. (Editors). The Intersection of History and Mathematics. Basel. S. 241–252
Beaulieu, L. 1993: A Parisian Café and Ten Proto-Bourbaki Meetings (1924–1934). In: The Mathematical Intelligencer. Vol. 15(1), S. 27–35
Becker, O. (Hg.) 1965: Zur Geschichte der griechischen Mathematik. Darmstadt
Beckert, H. 1985: Axiomatik – Mathematik und Erfahrung. Sitzungsber. Sächs. Akad. Wiss. Math.-Nat.- Klasse. Bd. 118, Heft 2, S. 3–18. Berlin
Beckert, H. 2001: Zur Erkenntnis des Unendlichen. Abhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Bd. 59, Heft 3. Stuttgart/Leipzig
Beckert, H./Schumann, H. (Hg.): Einhundert (100) Jahre Mathematisches Seminar der Karl-Marx-Universität (1981). Berlin
Begehr, H. G. W./Koch, H./Kramer, J./Schappacher, N./Thiele, E.-J. (Eds.) 1998: Mathematics in Berlin. Berlin/Basel/Boston
Béguin, A. 1959: Pascal. Hamburg
Berka, K./Kreiser, L. 1983: Logik-Texte. Kommentierte Auswahl zur Geschichte der modernen Logik. 3. Aufl. Berlin
Berkeley, G. 1969: Schriften über die Grundlage der Mathematik und Physik. Einleitung von Wolfgang Breidert. Frankfurt/M
Bernhardt, H. 1989: Pafnuti Lwowitsch Tschebyschew (1821 bis 1894). In: Biographien bedeutender Mathematiker. 4. Aufl. Berlin. S. 411–420
Bernkopf, M. 1966/67: The Development of Functional Spaces with Particular Reference to Their Origins in Integral Equation Theory. In: Arch. Hist. Exact Sciencs 3(1966/67). S. 1–96
Bernoulli Jak. 1899: Ars conjectandi. Übersetzt und ed. R. Haussner. Leipzig
Bernoulli, Jacob 1894: Abhandlungen über Variationsrechnung. Hg.: P. Stäckel. Leipzig
Bernoulli, Jak. 1909: Über unendliche Reihen. Übersetzt und ed. G. Kowalewski. Leipzig
Bernoulli, Joh. 1742: Opera omnia Lausanne/Genf
Bernoulli, Joh. 1924: Die Differentialrechnung von Johann Bernoulli aus dem Jahre 1691/92. Hg.: P. Schafheitlein. Leipzig
Bernoulli, Joh./Bernoulli, Jac./Euler, L. 1914: Abhandlungen über Variationsrechnung. 1. Teil. Leipzig
Bernoulli, Joh: 1914: Die erste Integralrechnung. Eine Auswahl aus J. Bernoullis mathematischen Vorlesungen über die Methode der Integrale und anderes, aufgeschrieben zum Gebrauch des Herrn Marquis de l'Hospital in den Jahren 1691 und 1662, als der Verfasser sich in Paris aufhielt.Übersetzt und ed. G. Kowalewski. Leipzig
Bers, I. 1989: The Migration of European Mathematicians to America. In: A Century of Mathematics in America. Part I: Eds. P. Duren/R. A. Askey/U. Merzbach. Providence Rhode Island Reprinted 1989. S. 231–243
Bertsch, J. 1989: Tschebyschew. In: Geschichte der Analysis im 19. Jahrhundert. Hg. M. von Renteln. Karlsruhe. S. 187–200

Bialas, V. 1978: Wissenschaftliche und technische Revolutionen in Vergangenheit und Gegenwart. Köln

Bieberbach, L. 1930: Über den Einfluss von Hilberts Pariser Vortrag über „Mathematische Probleme“ auf die Entwicklung der Mathematik in den letzten dreissig Jahren. In: Die Naturwissenschaften 18 (1930), S. 1101–1111

Biermann, K.-R. 1959: J. P. G. Lejeune Dirichlet. In: Abh. Dtsch. Akad. Wiss. Berlin 1959. Nr. 2

Biermann, K.-R. 1972: Alexander von Humboldt über den Vorläufer des programmierten Rechenautomaten. In: NTM. Jg.9 (1972), Heft 1, S. 21–24

Biermann, K.-R. 1973: Die Mathematik und ihre Dozenten an der Berliner Universität. 1810 bis 1920. Berlin

Biermann, K.-R. 1989: Carl Gustav Jacob Jacobi (1804 bis 1851). In: Biographien bedeutender Mathematiker. 4. Aufl. Berlin. S. 366–377

Biermann, K.-R. 1966: Die Berufung von Weierstraß nach Berlin. Berlin

Biermann, K.-R. 1982: Briefwechsel zwischen Alexander von Humboldt und Peter Gustav Lejeune Dirichlet. Berlin

Biermann, K.-R. (Hg.) 1990: Carl Friedrich Gauß. Der 'Fürst der Mathematiker' in Briefen und Gesprächen. Leipzig/Jena/Berlin

Bigalke, H.-G. 1988: Heinrich Heesch. Kristallographie. Parkettierung Vierfarbenforschung. Basel/Boston/Berlin

Binder, Chr. 2005: Olga Taussky and Class Field Theory. In: Women in Mathematics. Ed.: Bettye Anne Case/Anne M. Leggett. Princeton University Press. S. 281–292

Blumenthal, O. 1935: Lebensgeschichte (über D. Hilbert). In: David Hilbert. Gesammelte Abhandlungen. Bd. 3. Berlin. S. 388–429

Blumenthal, O./Toeplitz, O./Dahn, M./Courant, R./Born, M./Bernays, P. /Siegel, K. 1922: David Hilbert zur Feier seines 60. Geburtstages. In: Die Naturwissenschaften 11. Jahrgang (1922), Heft 4

Böhlandt, M. 2002: Wege ins Unendliche. Die Quadratur des Kreises bei Nikolaus von Kues. München

Bolibruch, A./Osipov, Y./Sinai, Y. (Eds.) 2006: Mathematical Events of the Twentieth Century. Moskow/Princeton

Bölling, R. 1963: Briefwechsel zwischen Karl Weierstraß und Sofja Kowalewskaja. Eingeleitet und kommentiert von R. Bölling

Bolzano, B. 1816: Der binomische Lehrsatz und als Folgerung aus ihm der polynomische und die Reihen, die zur Berechnung der Logarithmen und Exponentialgrößen dienen, genauer als bisher erwiesen. Prag

Bolzano, B. 1836: Lebensbeschreibung des Dr. Bernard Bolzano mit einigen seiner ungedruckten Aufsätze und dem Bildnis des Verfassers. Sulzbach

Bolzano, B. 1851: Paradoxien des Unendlichen. Herausgegeben aus dem schriftlichen Nachlasse von Dr. Fr. Prihonský. Leipzig

Bolzano, B. 1905: Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwei Werten, die ein entgegengestztes Resutat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege. Leipzig

Bolzano, B. 1930: Funktionenlehre. Aus dem Nachlaß hrsg. Von Dr. Karel Rychlik. In: Bernard Bolzanos Schriften. Hrsg. von der Königl. Böhm. Ges. d. Wiss. Prag

Bolzano, B. 1931: Zahlentheorie. Herausgegeben und mit Anmerkungen versehen von K. Rychlik. In: Bernard Bolzanos Schriften. Herausgegeben von der Königl. Böhm. Ges. d. Wiss. Bd. 2. Prag

Bolzano, B. 1974: Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik. Mit einer Einleitung zum Neudruck von H. Wußing. Darmstadt

Bolzano, B. 1976: Ausgewählte Schriften. Herausgegeben und eingeleitet von Eduard Winter. Berlin

Bonola, R. 1908: Die Nichteuklidische Geometrie. Historisch-kritische Darstellung ihrer Entwicklung. Übersetzt von L. Liebmann. Leipzig

Boole, G. 2001: The Mathematical Analysis of Logic. Being an Essay Towards a Calculus of Deduction Reasoning. English 1847 original and translation to German with comments and epilogue by Tilmann Bergt. Halle an der Saale.

Booß-Bavnbek, B./Høyrup, J. (Eds.) 2003: Mathematics and War. Basel/Boston/Berlin

Borger, R. u.a. 1982: (Hg.) Texte aus der Umwelt des Alten Testamentes. Bd. 1. Rechtsbücher. Gütersloh

Börner, G. 2003: The Early Universe. Facts and Fiction. Berlin

Bos, H. J. M. 1978: The Influence of Huygens on the Formation of Leibniz' Ideas. In: Studia leibnitiana. Supplement 17, S. 59–68

Bos, H. J. M. 1993: Lectures in the History of Mathematics. American Mathematical Society

Bottazini, U. 1986: The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass. New York/Berlin/Heidelberg/London/Paris/Tokyo. (Aus dem Italienischen)

Bottazini, U. 1999: Theorie der komplexen Funktonen. 1780–1900. In: Geschichte der Analysis. Hg.: H. Jahnke. Heidelberg/Berlin. S. 267–327

Bourbaki, N. 1950: The Architecture of Mathematics. In: Amer. Math. Monthly. Bd. 67 (1950), S. 221–232

Bourbaki, N. 1960: Éléments d'histoire des mathémathiques. Paris

Bourbaki, N. 1971: Elemente der Mathematikgeschichte. Göttingen/Zürich. (Aus dem Französischen)

Bourbaki, N. 1974: Die Architektur der Mathematik. In: Mathematiker über Mathematik. Hg.: M. Otte/H. N. Jahnke/Th. Mies/G. Schubring. Berlin/Heidelberg/New York

Bourgue, R./Azra, J.-P. 1992: Écrits et mémoires máthematiques d'Evariste Galois. Paris

Braunmühl, A. von 1900/1903: Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. 2 Bände. Leipzig

Breger, H. 2004: Ebenen der Abstraktion. Bernoulli, Leibniz und Barrows Theorem. In: Form, Zahl, Ordnung. Festschrift für Ivo Schneider zum 65. Geburtstag. Wiesbaden. S. 193–202

Breger, H./Grosholz, E. 2000: The Growth of Mathematical Knowledge. Dordrecht/Boston/London

Breidert, W. 1989: George Berkeley 1685–1753. Basel/Boston/Berlin

Brentjes, B./Richter, S./Sonnemann, R. 1987: Geschichte der Technik. 2. Aufl. Köln

Brieskorn, E. (Hg.) 1996: Felix Hausdorff zum Gedächtnis. Band I. Aspekte seines Werkes. Braunschweig/Wiesbaden

Browder, F. 2002: Reflections on the future of mathematics. Notices Amer. Math. Soc. 49(6), S. 658–662
Brüning, J./Knobloch, E. (Hg.) 2005: Die mathematischen Wurzeln der Kultur. Mathematische Innovationen und ihre kulturellen Folgen. München
Buchheim, G./Sonnemann, R. (Hg.) 1990: Geschichte der Technikwissenschaften. Leipzig
Burkhardt, H. 1892: Die Anfänge der Gruppentheorie und Paoli Ruffini. In: Zeitschrift für Mathematik und Physik. 37(1892), S. 119–159
Burkhardt, H. 1911: Über den Gebrauch divergenter Reihen in der Zeit von 1750 bis 1860. In: Math. Ann. 70 (1911), S. 169–206
Burnside, W. 1897: Theory of Groups of Finite Order. Cambridge
Burton, D. M. 1985: The History of Mathematics. An Introduction. Boston/London/Sydney/Toronto
Cajori, F. 1928: The Early Mathematical Sciences in North and South America. Badger/Boston
Cajori, F. 1928/29: History of Mathematical Notations. 2 Bände. Chicago
Calaprice, A., Ehlers, A. 1997: Einstein sagt. München (Übersetzung aus dem Englischen)
Calculi 1999: Festschrift für L. Nový. Hg.: J. Folta. Prague 1999
Cantor, M. 1900: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Bd. III. 2. Aufl. Leipzig
Cantor, M.: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Leipzig. Bd. 1, 3. Aufl. 1907. Bd. 2, 2. Aufl. 1899/1900. Bd. 3, 2. Aufl. 1900/1901. Bd. 4 1908. Reprint 1924
Cantor, G. 1966: Gesammelte Abhandlungen. Hg.: E. Zermelo. Berlin 1932. Reprographischer Nachdruck Hildesheim
Cao, H./Chow, B./Chu, S./Yau, S. (Eds.) 2006: Collected Papers on Ricci Flow, Vols. 1, 2. International Press. Boston
Cao, H./Zhu, X. 2006: A complete proof of the Poincaré and geometrization conjectures-Application of the Hamilton-Perelman Theory of Ricci flow. Asian J. Math. 10(2)
Caratheodory, C. 1945: Basel und der Beginn der Variationsrechnung. In: Festschrift zum 60. Geburtstag von Prof. Dr. Andreas Speiser. Zürich. S. 1–18
Carroll, L. 1992: Alice in Wonderland. Wordworth Editions Limited
Cartier, P. 2000: Mathemagics: a tribute to L. Euler and R. Feynman. Séminaire Lotharingien 44, S. 1–71
Cartier, P. 2001: A mad day's work: from Grothendieck to Connes and Kontsevich. The evolution of concepts of space and symmetry. Bull. Amer. Math. Soc. 38(4), S. 389–408
Cauchy, A. L. 1828: Lehrbuch der algebraischen Analysis. Königsberg. (Aus dem Französischen übersetzt von C. L. B. Huzler)
Cauchy, A. L. 1885: Algebraische Analysis. Deutsch herausgegeben von C. Itzigsohn. Berlin. (Aus dem Französischen)
Cauchy, A.-L. 1900: Abhandlung über bestimmte Integrale zwischen imaginären Grenzen. Übersetzung durch P. Stäckel. Leipzig
Cavaillès, J./Noether, E. (Hg.) 1937: Briefwechsel Cantor-Dedekind. Paris
Cayley, A. 1889: The Collected Mathematical Papers. Vol. 2. Cambridge
Cayley, A. 1896: The Collected Mathematical Papers. Vol. 10. Cambridge

Cederbaum, C./von Homeyer, P. (Hg.) 2007: Ein Moment für Mensch und Mathematik: eine Sammlung von Vorträgen und Interviews. Freiburg im Breisgau
Ceruzzi, P. E. 1999: A History of Modern Computing. Cambridge (Mass.)
Chabert et al. (Eds.) 1999: A History of Algorithms. From the Pebble to the Microship. Berlin/Heidelberg/New York
Chasles, M. 1837: Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géometrie. Bruxelles
Chayut, M. 2006: From the Periphery to Scientific Revolutions. In: Historia scientarum. Vol. 15 (2006), Nr. 1, S. 1–22
Chern, S., Hirzebruch, F. (Eds.) 2001: Wolf Prize in Mathematics, Vols. 1, 2. World Scientific. Singapore
Chikara, S./Dauben, J. W./Mitsuo, S. (Eds.) 1994: The Intersection of History and Mathematics. Basel/Boston/Berlin
Ciesielski, Kr./Pogoda, Z. 1996: In: The Mathematical Intelligencer. Vol. 18 (3). (1996), S. 32–39
Ciliberto, C. 2000: The geometry of algebraic varieties. In: Pier, J.-P. (Ed.): Development of mathematics 1950–2000, S. 269–312. Basel
Conrey, J. 2003: The Riemann hypothesis. Notices Amer. Math. Soc. 50(3), S. 341–353
Cooke, R. 1984: The Mathematics of Sonya Kovalevskaja. New York/Berlin/Heidelberg/Tokyo
Cooke, R. 2005: C. G. J. Jacobi, Book on Elliptic Functions (1829). In: Landmark Writings, S. 412–430
Cooke, R. 2005: The History of Mathematics. A Brief Course. 2. ed. New Jersey
Corry, L. 1992: Nicolas Boubaki and the Concept of Mathematical Structure. In: Synthese 92 (3), S. 315–348
Corry, L. 1996: Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures. Basel
Corry, L. 2005: Heinrich Weber, Lehrbuch der Algebra (1895–1896). In.: Landmark Writings, S. 690–699
Courant, R. 1964: Mathematics in the modern world. Scientific American 211(3), S. 41–49
Crowe, M. J. 1994: A History of Vector Analysis. New York/London
Dalen, D. van 1999: Vol. 1. Mystik, geometer and intuitionist: The Life of L. E. J. Brouwer. Oxford
Dauben, J. 1971: The trigonometric background to Georg Cantor's theory of sets. In: Arch. Hist.Exact Sci. 7 (1971), S. 181–216
Dauben, J. 1979: Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of the Infinite. Cambridge (Mass.)/London
Dauben, J. W. 1985: The History of Mathematics from Antiquity to the Present. A Selective Bibliography. New York/London
Dauben, J. W./Folkerts, M./Knobloch, E./Wußing, H. (Eds.) 1996: History of Mathematics: States of the Art. Flores quadrivii-Studies in Honor of Christoph J. Scriba. Academic Press San Diego
Dauben, J. W. 1998: Historia mathematicae: The History of Journals for the History of Mathematics. In: Journals and History of Science. Tudi e testi XXXII. S. 1–30 Firenze.
Dauben, J. W. 2002: Internationalizing Mathematics East and West: Individuals and Institutions in the Emergence of a Modern Mathematical Community

in China. In: Mathematical Unbound: The Evolution of an International Mathematical Research Community, 1800–1945. Ed.: K. H. Parchall/A. C. Rice. Providence/London. S. 253–285
Dedekind, R. 1930/31/32: Gesammelte wissenschaftliche Werke. 3 Bände. Hg.: R. Fricke/E. Noether/O. Ore. Braunschweig
Dedekind, R. 1872: Stetigkeit und irrationale Zahlen. Braunschweig
Dedekind, R. 1888: Was sind und was sollen die Zahlen? Braunschweig
Dedekind, R. 1895: Über die Begründung der Idealtheorie. In: Nachr. Königl. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Klasse. S. 106–113
Dedekind, R. 1900: Die Darstellung ganz willkürlicher Funktionen durch Sinus-und Kosinusreihen. Leipzig
Dedekind, R. 1964: Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen. Berlin/ Braunschweig
Dedekind, R. 1967: Was sind und was sollen die Zahlen? Stetigkeit und irrationale Zahlen. Mit einem Vorwort von G. Asser. Berlin 1967. 10. Aufl. Braunschweig
Delone, B. N. 2005: The St. Petersburg School of Number Theory. In: Amer. Math. Society 2005. (Aus dem Russischen)
Demidov, S. S. 1992: La théorie des équations differéntielles à la limite des XVIII–XIX siècles. In: Amphora. Basel/Boston. S. 157–169
Demidov, S. S./Folkerts, M./Rowe, D. E./Scriba, Chr. J. (Hg.) 1992: Amphora. Festschrift für Hans Wußing zu seinem 65. Geburtstag. Basel/Boston/Berlin
Demidov, S. S. 2002: A. P. Youschkewitsch et l'histoire des mathématiques en Russe. In: Studies in the History of Mathematics. Dedicated to A. P. Youschkewitsch. Brepols. S. 33–42
Demidov, S. S. 2004: The Moskow Mathematical Society: one of the oldest mathematical societies in Europe. In: VII. Österreichisches Symposion zur Geschichte der Mathematik. S. 28–34
Desargues, G. 1922: Erster Entwurf eines Versuches über Ergebnisse des Zusammentreffens eines Kegels mit einer Ebene. Leipzig
Devlin, K. 1990: Sternstunden der Mathematik. Berühmte Probleme und neue Lösungen. Basel (Übersetzung aus dem Englischen)
Devlin, K. 1993: Sternstunden der modernen Mathematik. 2. Aufl. München. (Aus dem Englischen)
Devlin, K. 2002: The Millennium Problems: The Seven Greatest Unsolved Mathematical Puzzles of Our Time. Basic Books. New York
Dhombres, J./Sakarovitsch, J. (Eds.) 1994: Desargues en son temps. Paris
Dhombres, J./Robert, J.-B. 1998: Joseph Fourier, 1768–1830, createur de la physique-mathématique. Paris/Berlin
Di Hus, U. 1989: Peano. In: Geschichte der Analysis. Hg.: M. von Renteln. Karlsruhe. S. 201–217
Diamond, F, Shurman, F. 2007: A First Course in Modular Forms. Berlin
Dick, A. 1970: Emmy Noether (1882–1935). Beiheft Nr. 13 zur Zeitschrift Elemente der Mathematik. Basel/Stuttgart
Diderot, D. 1984: Artikel aus der von Diderot und d'Alembert herausgegebenen Enzyklopädie. Leipzig
Dieudonné, J. 1970: The work of Nicolas Bourbaki. In.: Amer. Math. Monthly, Bd. 77(1970), S. 134 ff.

Dieudonné, J. 1972: The historical development of algebraic geometry. In: American Mathematical Monthly 79, S. 827–866
Dieudonné, J. 1975: Jules Henri Poincaré. In: DSB. Vol. XI, S. 51–61
Dieudonné, J. 1985: Geschichte der Mathematik 1700–1900. Berlin. (Aus dem Französischen)
Dieudonné, J. 1989: A History of Algebraic and Differential Topology 1900–1960. Boston/Basel
Dieudonné, J. 1996: Abrégé d'Histoire des Mathématics 1700–1900. Paris
Dijksterhuis, E. J. 1956: Die Mechanisierung des Weltbildes. Berlin/Göttingen/Heidelberg
Diophant 1670: Diophanti Alexandrini arithmeticorum libri sex, et de numeris multangulis liber unus. Cum commentariis C.G. Bacheti ... et observationibus D.P. de Fermat ... Accessit doctrinae analyticae inventum novum, collectum [by J. de Billy] ex variis eiusdem D. de Fermat epistolis. Tolosae: Excudebat Bernardus Bosc.
Dirichlet, P. G. L. 1863: Vorlesungen über Zahlentheorie. Hg.: R. Dedekind. Braunschweig. S. 375
Dittus, U. 1989: Peano. In: Geschichte der Analysis, von Cauchy bis Cantor. Hg.: M. von Renteln. Karlsruhe. S. 201–217
Dold-Samplonius, Y. 1992: The XVth Century Timurid Mathematician Ghiyath al-Din Jamshid al-Kashi and his Computing of the Quabba. In: Amphora. Festschrift für H. Wussing. Basel/Boston/Berlin. S. 171–181
Donaldson, S. 1996: The Seiberg-Witten Equations and 4-Manifold Topology. Bull. Amer. Math. Soc. 33 (1996), S. 45–70
Dotzler, B. (Ed.) 1996: Babbages Rechenautomate. New York
Ducheyne, St. 2007: Huygens's Understanding of Trajectory: Via media between Galileo and Newton. In: Historia Scientarum. 2007. Vol. 17. No. 1, S. 1–19
Duren, P./Askey, R. A./Merzbach, U. C. (Eds.) 1989: A Century of Mathematics in America. Rhode Island. Reprinted
Dyck, W. von 1882: Gruppentheoretische Studien. In.: Mathem. Ann. 20 (1882), S. 1–44
Dyck, W. von 1883: Gruppentheoretische Studien II. In: Mathem. Ann. 22 (1883), S. 70–108
Dyson, F. 2000: Die Sonne, das Genom und das Internet: wissenschaftliche Innovation und die Technologien der Zukunft. Frankfurt/Main (Übersetzung aus dem Englischen)
Ebert, J. J. (Hg.) 1789: Auszug aus Herrn Leonhard Eulers vollständiger Anleitung zur Algebra mit einigen Erläuterungen und Vermehrungen. Frankfurt/M
Edwards, A. W. F. 1987: Pascal's Arithmetical Triangle. Oxford University Press
Edwards, H./Neumann, O./Purkert, W. 1982: Dedekinds ‚Bunte Bemerkungen' zu Kroneckers ‚Grundzüge'. In.: Arch. Hist. Exact Sciences. 27 (1982), 1, S. 49–85
Edwards, H. M. 1977: Fermat's Last Theorem. A Genetic Introduction to Algebraic Number Theory. Wien/New York
Edwards, H. M. 1980: The Genesis of Ideal Theory. In: Arch.Hist.Exact Sciences 23 (1980), S. 321–378
Edwards, H. M. 1984: Galois Theory. New York/Berlin/Heidelberg/Tokyo

Edwards,C. H. 1994: The Historical Development of the Calculus. 3. Aufl. University of Georgia/Athens
Elliot, Cl. A. 1979: Biographical Dictionary of American Science. The Seventeenth Through the Nineteenth Centuries. Westpoint/London
Emmer, M. 2004: Mathematics and Culture I. Berlin/Heidelberg/New York. (Aus dem Italienischen)
Engel, F./Stäckel, P. 1895: Die Theorie der Parallelllinien von Euklid bis auf Gauss. Leipzig
Engel, F./Stäckel, P. (Hg.) 1913: Urkunden zur Geschichte der Nichteuklidischen Geometrie. Wolfgang und Johann Bolyai. Geometrische Untersuchungen, mit Unterstützung der ungarischen Akademie der Wissenschaften, herausgegeben von Paul Stäckel. Erster Teil. Leben und Schriften der beiden Bolyai. Zweiter Teil. Stücke aus den Schriften der beiden Bolyai. Leipzig/Berlin
Engel, W. (Hg.) 1985: Festakt und Wissenschaftliche Konferenz aus Anlass des 200. Todestages von Leonhard Euler. Berlin
Engquist, B., Schmid, W. (Eds.) 2001: Mathematics Unlimited- 2001 and Beyond. New York
Enzensberger, H. M. 1997: Der Zahlenteufel. München/Wien
Epple, M. 1999: Das Ende der Größenlehre: 1860–1910. In: Geschichte der Analysis. Hg.: H. N. Jahnke. Heidelberg/Berlin. S. 371–410
Euler, L. 1744: Methodus inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Proprietate Gaudentes sive Solutio Problematis Isoperimetrici Latissimo Sensu Accepti. Lausanne/Geneva
Euler, L. 1755: Institutiones calculi differentialis cum eius vsu in Analysi finitorum ac doctrina serierum. Academia Imperialis Scientiarum Petropolitanae
Euler, L. 1755/1790: Institutiones calculi differentialis, 2 Bde. Deutsch ed. von J. A. C. Michelsen. Berlin/Libau
Euler, L. 1885: Einleitung in die Analysis des Unendlichen. Erster Teil. Ins Deutsche übertragen von H. Maser. Berlin
Euler, L. 1894: Abhandlung über Variationsrechnung (1744). Deutsch ediert P. Stäckel. Ostwalds Klassiker Nr. 46. Leipzig
Euler, L. 1922: Leonardi Euleri Opera omnia. Ser. I. Vol. VIII. Ed. A. Krazer/F. Rudio. Lipsiae/Berolini
Euler, L. 1959: Algebra. Ed. J. E. Hofmann. Stuttgart
Euler, L. 1983: Leonhard Euler 1707–1783: Beiträge zu Leben und Werk. Gedenkband des Kantons Basel-Stadt. Basel
Euler, L. seit 1911: Opera omnia
Euler/Grüson 1796: Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niederen und höheren Algebra nach der französischen Ausgabe des Herrn de la Grange mit Anmerkungen und Zusätzen herausgegeben von Johann Philipp Grüson. Berlin
Euler, L./Kaußler, C. F./Lagrange, J. L. de 1796: Leonhard Eulers Vollständige Anleitung zur Algebra. Teil III
Fauser, B./Tolksdorf, J./Zeidler, E. (Eds.) 2006: Quantum Gravitation: Mathematical Models and Experimental Bounds. Basel
Fauvel, J./Flood, R./Wilson, R. (Eds.) 2003: Music and Mathematics. Oxford
Fauvel, J./Gray, J. 1990: The History of Mathematics. Ed. J. Fauvel/J. Gray at the Open University 1987. Reprint

Fauvel, J./Gray, J. (Eds.) 1997: The History of Mathematics. – A Reader. The Open University.
Fauvel, J./Maanen, J. van (Eds.) 2003: History in Mathematics Education. Dordrecht
Feigenbaum, L. 1985: Brook Taylor and the Method of Increments. In: Arch.Hist. Exact Sciences. 34 (1885), S. 1–140
Feingold, M. (Ed.) 1990: Before Newton. The Life and Times of Isaac Barrow. Cambridge University Press
Feldmann, W. M. 1931: Rabbinical Mathematics in Astronomy. New York
Fellmann, E. 1995: Leonhard Euler. Reinbek bei Hamburg
Fellmann, E. 2007: Leonhard Euler. Basel/Boston/Berlin. (Aus dem Deutschen)
Fellmann, E. A. 1983: Leonhard Euler – Ein Essay über Leben und Werk. In: Leonhard Euler 1707–1783. Gedenkband des Kantons Basel–Stadt. S. 13–98
Fermat, P. de 1923: Einführung in die ebenen und körperlichen Örter. Leipzig
Fermat, P. de 1932: Bemerkungen zu Diophant. Leipzig
Fermat, P. de. 1934: Abhandlungen über Maxima und Minima (1929). Hg. H. Miller. Leipzig
Ferreirós, J. 2007: Labyrinth of Thought. A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics. Second revised edition. Basel/Boston/Berlin
Feynman, R. P. 2006: Sie belieben wohl zu scherzen, Mr. Feynman. Zürich
Field, J. V/Gray, J. J. 1987: The Geometrical Work of Girard Desargues. New York/Berlin/Heidelberg/London/Paris/Tokyo
Field; J. V. 1997: The Invention of Infinity. Mathematics and Art in the Renaissance. Oxford University Press
Fierz, M. 1983: Girolamo Cardano. 1501–1576. Boston/Basel/Stuttgart
Finster, R./Heuvel, G. van den (1990): Gottfried Wilhelm Leibniz. Reinbek bei Hamburg
Fischer, J. 1987: Edmund Landau. In: Aspekte zur Geschichte der Analysis. Hg.: M. von Renteln.Karlsruhe. S. 73–96
Fischer, W. I. 2002: Leibniz und China – Li, Qi und Shu. In: Medium Mathematik. Hildesheim/Berlin. S. 231–236
Fischer,E. P. 2000: Leonardo, Heisenberg und Co. München/Zürich
Fleckenstein, O. 1949: Johann und Jakob Bernoulli. Basel
Flegg, G. (Ed.) 1988: Numbers through the Ages. London
Folkerts, M. 2004: Eine Algebravorlesung von Abraham de Moivre. In: Form, Zahl, Ordnung. Festschrift für Ivo Schneider zum 65. Geburtstag. Wiesbaden. S. 269–275.
Folkerts, M. 2007: Die ‚Rechenmaschine' von J. F. Schiereck. In: Festschrift für K. Reich. Hg.: G. Wolfschmidt. Augsburg. S. 111–132
Folta, J. 1966: Bernard Bolzano and the Foundations of Geometry. In: Acta historiae rerum naturalium necnon technicarum. Special Issue. Praha
Fourier, M. 1884: Analytische Theorie der Wärme. Deutsche Ausgabe von Dr. B. Weinstein. Berlin. (Aus dem Französischen)
Fraenkel, A. A. 1967: Lebenskreise. Aus den Erinnerungen eines jüdischen Mathematikers. Stuttgart
Franci, R. 1992: On the Axiomatization of Group Theory by American Mathematicians: 1902–1905. In: Amphora, S. 261–277

Franzén, T. 2005: Gödel's Theorem. An Incomplete Guide to its Use and Abuse. Wellesley
Fraser, C. 1997: Calculus and Analytical Mechanics in the Age of Enlightment. Vermont
Frei, G./Stammbach, U. 1994: Die Mathematiker an den Zürcher Hochschulen. Basel/Boston/Berlin
Freud, R. (Hg.) 1990: Grosse Augenblicke aus der Geschichte der Mathematik. Mannheim/Wien/Zürich.
Fritsch, R./Fritsch, G. 1994: Der Vierfarbensatz. Geschichte, topologische Grundlagen und Beweisidee. Mannheim/Leipzig/Wien/Zürich
Garding, L. 1998: Mathematics in Sweden 1950. Am. Math. Society, Providence, Rhode Island. (Aus dem Schwedischen)
Gauß, C. F. 1863 bis 1933: Werke in12 Bänden. Göttingen
Gauß, C. F. 1865: Theorie der Bewegung der Himmelskörper, welche in Kegelschnitten die Sonne umlaufen. Übersetzt von C. Haase. Hannover
Gauß, C. F. 1873: Werke Bd. IV. Göttingen
Gauß, C. F. 1876: Gesammelte Werke Bd. 2; Vorlesung in Göttingische gelehrte Anzeigen 1831
Gauß, C. F. 1889: Untersuchungen über höhere Arithmetik. Deutsch herausgegeben von H. Maser. Berlin
Gauß, C. F. 1900: Werke. Bd. VIII. Leipzig
Gauß, C. F. 1913: Die vier Gauss'schen Beweise für die Zerlegung ganzer algebraischer Funktionen in reelle Factoren ersten oder zweiten Grades. Dritte Auflage. Leipzig/Berlin
Gauß, C. F. 1917 a: Werke. Bd. II. Göttingen
Gauß, C. F. 1917 b: Werke Bd. X, Abt. 1. Briefwechsel Gauß an Schumacher. Göttingen 1850
Gauß, C. F. 1957: Gedenkband anlässlich des 100. Todestages am 23. Februar 1955. Hg.: Hans Reichardt. Leipzig
Gauß, C. F. 1981: Mathematisches Tagebuch 1796–1814. Mit einer historischen Einführung von Kurt-R. Biermann. Ins Dt. übers. von Elisabeth Schuhmann. Durchgesehen und mit Anmerkungen von Hans Wußing. 3. Aufl. durchgesehen und ergänzt von Olaf Neumann. Leipzig
Georgiadou, M. 2004: Constantin Carathéodory. Mathematics and Politics in Turbulent Times. Berlin/Heidelberg/New York. (Russisch)
Gergonne, J.-D. 1825/26: Considérations philosophiques sur les éléments de l' étendue. In.: Ann. Math. Gergonne 16 (1825/26), S. 209–232
Gerhardt, C. J. 1855: Die Entdeckung der höheren Analysis. Halle
Gericke, H. 1970: Geschichte des Zahlbegriffes. Mannheim/Wien/Zürich
Gericke, H. 1980: Wie dachten und denken die Mathematiker über das Unendliche? Veröffentlichungen des Forschungsinstituts des Deutschen Museums für die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik, Nr. 229. München
Gericke, H. 1996: Zur Geschichte der negativen Zahlen. In: History of Mathematics. States of the Art. Academic Press. S. 279–306
Gersdorf (Hg.) 1840: Repertitorium der gesamten deutschen Literatur Bd. 25. Leipzig

Gierhardt, Horst 2008: Srinivasa Ramanujan (1887–1920) http://www.gierhardt.de/mathematik/ramanujantxt.html (Rev. 09.10.2008)
Gleim, J. W. 1969: Ausgewählte Gedichte. Stuttgart
Gnedenko, B. W. 1957: Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung. 6. Aufl. Berlin. (Aus dem Russischen)
Gödel, K. 2002: Wahrheit und Beweiskraft. Verlagsgemeinschaft Wien.
Goldstein, C./Gray J./Ritter, J. (Eds.) 1996: L'Europe mathématique. Mathematical Europe. Paris
Goldstein, C./Schappacher, N./Schwermer, J. (Eds.) 2007: The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones. Berlin/Heidelberg/New York
Goldstein, R. 2005: Jahrhundertmathematiker und große Entdecker. München/Zürich. (Aus dem Amerikanischen)
Goldstine; H. H. 1973: The Computer from Pascal to von Neumann. 2. Aufl. Princeton/New Jersey
Goldstine, H. H. 1980: A History of the Calculus of Variations. From the 17th through the 19th Century. New York/Heidelberg/Berlin
Gorenstein, D. 1986: Classifying the finite simple groups. Bull. Amer. Math. Soc. 14, S. 1–98
Gottwald, S. 1990: Gödel. In: Lexikon bedeutender Mathematiker. Leipzig. S. 173–174
Grattan-Guinness, I. 1970: The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann. The Massachusetts Institute of Technology
Grattan-Guinness, I. 1971: Towards a Biography of Cantor. In: Annals of Science 27(1971), 4, S. 345–391
Grattan-Guinness, I. 1980: From the Calculus to Set Theory 1630–1910. London
Grattan-Guinness, I. 1990: Convolutions in French Mathematics 1800–1840. Basel/Berlin
Grattan-Guinness, I. 1994: Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences, Vol 1. London/New York
Grattan-Guinness, I. 1997: The Norton History of the Mathematical Sciences. The Rainbow of Mathematics. New York/London
Grattan-Guinness, I. 2001: The Contributions of J. J. Sylvester, F. R. S., to Mechanics and Mathematical Physics. In: Notes Rec. Soc. Lond. 55 (2), S. 253–265
Grattan-Guinness, I. 2002: The Search for Mathematical Roots 1870–1940. Princeton University Press.
Grattan-Guinness, I., Cooke, R. 2005 (Ed.): Landmark writings in Western mathematics 1640–1940. Elsevier.
Grattan-Guinness, I. 2006: The Reception of Gödel's 1931 incompletability theorems by mathematicians. In: VIII. Österreichisches Symposion zur Geschichte der Mathematik. Miesenbach. S. 129–139
Grattan-Guinness, I./Ravetz, J. R. 1972: Joseph Fourier (1768–1830). Cambridge/Mass.
Grau, C. 1988: Berühmte Wissenschaftsakademien. Leipzig
Gray, J. 1989: Algebraic geometry in the late Nineteenth Century. In: Rowe, D./MacCleary, J. (Eds.): The History of Modern Mathematics. Boston (Mass.) u. a.

Gray, J. 1997: Algebraic geometry between Noether and Noether – A forgotten chapter in history of algebraic geometry. In: Revue d'histoires des mathématiques 1997, S. 1–48
Gray, J. 1994: German and Italian algebraic geometry. In: Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, Ser. II, Suppl. N 36, S. 151–184
Gray, J. 2004: The Hilbert Challenge. Oxford University Press. Reprint
Gray, J. 2005: Bernhard Riemann, posthumous thesis 'On the hypotheses which lie at the foundation of geometry' 1867.In: Landmark Writings. S. 506–520
Gray, J. 2005: Felix Klein's Erlangen Programm. 'Comparative Considerations of Recent Geometrical Researches' 1872. In: Landmark Writings. S. 544–552
Greene, J. C. 1984: American Science in the Age of Jefferson. The Iowa State University Press.
Guerraggio, A./Nastasi, P. 2005: Italian Mathematics Between the Two World Wars. Basel/Boston/Berlin
Guicciardini, N. 1999: Die binomische Reihe. In: Geschichte der Analysis. Hg. H.-J. Jahnke. Heidelberg/Berlin. S. 92–94
Guntau, M. (Hg.) 1992: Geschichte der Wissenschaften in Lateinamerika. Rostocker Wissenschaftshistorische Manuskripte. Heft 21. Rostock
Gutzmer, A. 1904: Geschichte der deutschen Mathematiker-Vereinigung. Leipzig
Hackbusch, W. 1997: Numerische Mathematik und ihre Wechselwirkung mit der gegenwärtigen Rechnerentwicklung. Vortrag in der gemeinsamen Sitzung der Biowissenschaftlich-medizinischen Klasse und der Mathematisch-naturwisssenschaftlichen Klasse am 14. Februar 1997. Berlin- Brandenburgische Akademie der Wissenschaften. Berichte und Abhandlungen, Akademie-Verlag. Berlin
Hackbusch, W. 2008: Hierarchische Matrizen Algorithmen und Analysis. Berlin
Hahn, R. 1971: The Anatomy of a Scientific Institution. The Paris Academy of Sciences, 1666-1803. Berkeley/Los Angeles/London
Hairer, E./Wanner, G. 1979: Analysis by its History. 2. ed. Heidelberg
Hald, A. 1998: History of Mathematical Statistics. From 1750 to 1930. New York/. . . /Toronto
Hall, A. R. 1969: The Cambridge Philosophical Society. A History 1819–1969. Cambridge
Hall, A. R. 1980: Philosophers at War. The Quarrel between Newton and Leibniz. Cambridge University Press
Hallett, M./Majer, U. 2004: David Hilberts Lectures on the foundations of geometry. Heidelberg
Hamilton: 2000: The Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton. Ed.: K. P. Brendan. Cambridge
Hammer, C. 1987: Lebesgue. In: Aspekte zur Geschichte der Analysis im 20. Jahrhundert. Ed. M. von Renteln. Karlsruhe. S. 46–60
Hankel, H. 1905: Untersuchungen über die unendlichen oft oszillierenden und unstetigen Funktionen. Ed. Ph. E. B Jourdain. Leipzig
Hardy, G. H. 1993: A Mathematician's Apology. Cambridge University Press 1940. Reprinted 1993
Hargittai, I./Hargittai, M. 2002: Homage to Emmy Noether. In: The Mathematical Intelligencer. 24 (2002), 1, S. 48/49
Harig, G. 1958: Über die Entstehung der klassischen Naturwissenschaften in Europa. In: Dtsche Z. Philosophie 6 (1958), S. 419–450

Harig, G. 1962: Die Tat des Kopernikus. Leipzig/Jena/Berlin
Hausdorff, F. 1949: Grundzüge der Mengenlehre. New York. Nachdruck der Ausgabe von 1914
Hausdorff, F. 2002: Gesammelte Werke. Bd. II (Grundzüge der Mengenlehre) Heidelberg...
Hausdorff, F. 2004: Gesammelte Werke. Bd. VII. Heidelberg...
Hausdorff, F. 2006: Gesammelte Werke. Bd. V. Heidelberg...
Hausdorff, F.: Briefwechsel im Nachlass. UB Bonn
Hauser, W. 1997: Die Wurzeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die Verbindung von Glücksspieltheorie und statistischer Praxis. Stuttgart
Hawkins, T. 1980: The Origins of Modern Theories of Integration. In: I. Grattan-Guinness: From the Calculus to Set Theory, 1630–1910. London. S. 149–180
Hecht, H. 1992: Gottfried Wilhelm Leibniz: Mathematik und Naturwissenschaften im Paradigma der Metaphysik. Stuttgart/Leipzig
Heine, E. 1870: Über trigonometrische Reihen. In: Journ.reine u. angew. Math. 70(1870), S.353–365
Hemleben, J. 1971: Kepler. Reinbek bei Hamburg
Heß, H.-J. 1984: Zur Vorgeschichte der „Nova Methodus“ (1676–1684). In studia leibnitiana. Sonderheft14: 300 Jahre Nova Methodus von G. W. Leibniz. Wiesbaden./Stuttgart. S. 64–102
Heß, H.-J. 1990: Erfindung der Infinitesimalrechnung. In: Katalog der Leibniz-Ausstellung Hannover 1990. S. 24–31
Hesseling, D. 2003: Gnomes in the Fog. Basel
Hilbert, D. 1932/1933/1935: Gesammelte Abhandlungen. 3 Bände. Berlin
Hilbert, D. 1897: Die Theorie der algebraischen Zahlkörper. Bericht, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung von David Hilbert. In: Jahresber. Deutsch. Math.-Verein, Vierter Band (1894–95), S. 175–546, Berlin
Hilbert, D. 1909: Grundlagen der Geometrie. 3. Aufl. Leipzig/Berlin
Hilbert, D. 1912: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Leipzig/Berlin
Hilbert, D. 1918: Axiomatisches Denken. In: Math. Ann. Band 78(1918), S. 405–415. Nach einem Vortrag 1917 in Zürich
Hilbert, D. 1926: Über das Unendliche. In: Math. Ann. Band 95 (1926), S. 161–190
Hilbert, D. 1928: Die Grundlagen der Mathematik. Abh. Math. Seminar Hamburg 6(1928)
Hilbert, D. 1931: Die Grundlagen der elementaren Zahlentheorie. In: Math. Ann. 104(1931), S. 485–494
Hilbert, D. 1935: Gesammelte Abhandlungen. 3. Band. Nebst einer Lebensbeschreibung. Berlin
Hilbert, D. 1971: Die Hilbertschen Probleme. Vortrag „Mathematische Probleme“ gehalten 1900 in Paris. Erläutert von einem Autorenkollektiv unter Leitung von P. S. Alexandrov. Deutsch ed. H. Wußing. Leipzig
Hilbert, D. 1972: Grundlagen der Geometrie. 11. Aufl. Leipzig
Hilbert, D. 1992: Natur und mathematisches Erkennen. Edition und Einleitung D. E. Rowe. Basel/Boston/Berlin
Hilbert, D. 1999: Grundlagen der Geometrie. Mit Supplementen von Paul Bernays. 14. Aufl. Herausgegeben und mit Anhängen versehen von Michael Toepell. Stuttgart/Leipzig

Hilbert, D./Ackermann, W. 1959: Grundzüge der theoretischen Logik. Vierte Auflage. Berlin/Göttingen/Heidelberg
Hildebrandt, St. 1995: Wahrheit und Wert mathematischer Erkenntnis. München
Hlawka, E. 1996: Olga Taussky-Todd. Ein Nachruf. In: Almanach der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, 146 Jg.(1996), S. 421–433
Hlawka, E. 1997: Olga Taussky-Todd, 1906–1995. In: Monatshefte für Math. 123(1997), S. 189–201
Hochkirchen, Th. 1999: Maß-und Integrationstheorie von Riemann bis Lebesgue. In: Geschichte der Analysis. Hg. H. N. Jahnke. Heidelberg/Berlin
Hoffman, J./Johnson, Cl./Logg, A. 2004: Dreams of Calculus. Perspectives on Mathematical Education. Heidelberg
Hoffmann, K., Jäger, W., Lohmann, T., Schunck, H. (Hg.) 1997: Mathematik. Schlüsseltechnologie für die Zukunft: Verbundprojekte zwischen Universität und Industrie. Berlin
Hoffmann, P. 1958: Zur Verbindung Eulers mit der Petersburger Akademie während seiner Berliner Zeit. In: Die deutsch-russische Begegnung und Leonhard Euler. Ed. E. Winter u. a. Berlin
Hoffmann, P. 2001: Der Mann, der die Zahlen liebte. München 2. Aufl.
Hofmann, J. E. 1963: Geschichte der Mathematik. Bd. 1. 2. Aufl. Berlin
Hofmann, J. E. 1949: Die Entwicklungsgeschichte der Leibnizschen Mathematik während des Aufenthaltes in Paris (1672–1676). München
Hofmann, J. E. 1956: Über Jakob Bernoullis Beiträge zur Infinitesimalmathematik. Genf
Hofstadter, D. R. 1979: Gödel Escher Bach. Berlin/Darmstadt/Wien
Hofstadter, D. R. 1991: Gödel, Escher, Bach. Ein endloses geflochtenes Band. Klett-Cotta. Stuttgart (Übersetzung aus dem Englischen)
Holzapfel, R.-P. 1989: Poincaré (1854–1912). In: Biographien bedeutender Mathematiker, 4. Aufl., S. 490–499, Berlin
HORNG, Wan-Sheng 1991: Li Shalan, the Impact of Western Mathematics in China during the late 19th Century. Ph. D. Thesis. City University of New York
Howson, A. G. 1982: A History of Mathematics Education in England. Cambridge University Press
Høyrup, J. 2007: Jacopo da Firenze's Tractatus Algorismi and Early Italian Abbacus Culture. Basel/Boston/Berlin
Hyman, A. 1987: Charles Babbage, 1791–1871. Philosoph, Mathematiker, Computerpionier. Stuttgart
Ilgauds, H.-J. 1980: Norbert Wiener. Leipzig
Ineichen, R. 1988: Dante-Kommentare und die Vorgeschichte der Stochastik. In: Historia mathematica. 15 (1988), S. 264–269
Ineichen, R. 1997: Astragale, Würfel und Wahrscheinlichkeit in der Antike. In: Antike Naturwissenschaft und ihre Rezeption. Hg.: K. Döring/B. Herzhoff/G. Wöhrle. Trier. S. 7–23
Ineichen, R. 2002: Würfel, Zufall und Wahrscheinlichkeit. Ein Blick auf die Vorgeschichte der Stochastik. In: Magdeburger Wissenschaftsjournal 2 (2002), S. 39–46
Infeld, L. 1954: Wen die Götter lieben: Die Geschichte des Evariste Galois. Wien. (Aus d. Engl. übertr. von Doris Brehm)

Jaffe, A. 1984: Ordering the universe: the role of mathematics. Notices Amer. Math. Soc. 236, S. 589–608
Jaffe, A. 2006: The millennium grand challange in mathematics. Notices Amer. Math. soc. bf. 53, S. 652–660
Jaffe, B. 1944: Männer der Forschung in Amerika. New York
Jahnke, H. N. (Hg.) 1999: Geschichte der Analysis. Heidelberg/Berlin
Jarnik, V. 1981: Bolzano and the Foundations of Mathematical Analysis. Prague
Jentsch, W. 1986: Auszüge aus einer unveröffentlichten Korrespondenz von Emmy Noether mit Heinrich Brandt. In: Historia mathematica 13 (1986), S. 5–12
Jordan, C. 1870: Traité des substitutions et des équations algébriques. Paris
Joseph, G. Ch. 1992: The Crest of the Peacock. Non-European Roots of Mathematics. London
Jost, J. 2005: Dynamical Systems: Examples of Complex Behavior. Berlin
Jost, J. 2008: Geometry and Physics. Berlin
Juškevič, A. P. 1968: History of mathematics in Russia until 1917. Moskow. (Russisch)
Juškevič, A. P./Kopelevič, J. Kh. 1994: Christian Goldbach 1690–1764. Basel/Boston/Berlin. (Aus dem Russischen)
Kähler, E. 1955: Über die Beziehungen der Mathematik zu Astronomie und Physik. Carl Friedrich Gauß Gedenkband anläßlich des 100. Todestages am 23. Februar 1955. Herausgegeben von H. Reichhardt. S. 1–13. Erneut gedruckt in E. Kähler: Mathematische Werke (herausgegeben von R. Berndt und O. Riemenschneider). Berlin. 2003
Kaluza, R. 1996: Through a Reporter's Eyes. The Life of Stefan Banach. Boston
Kamke, E. 1945: Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen I. Gewöhnliche Differentialgleichungen. 2. Aufl. Leipzig
Kant, I. 1787: Kritik der reinen Vernunft. Hg. A. Messer. Berlin.
Kant, I. 1999: Was ist Aufklärung? In: Ausgewählte Kleine Schriften. Hamburg
Katz, V. J. 1993: History of Mathematics. An Introduction. New York
Katz, V. (Ed.) 2007: The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam. A Sourcebook. Princeton/Oxford
Keller, A. 2006: Expounding the Mathematical Seed. Vol. I. The Translation. Vol. II. The Supplements. Basel/Boston/Berlin
Kennedy, H. C. 1974: Giuseppe Peano. Übersetzt von R. Amsler. Dordrecht/Boston/London
Kennedy, H. C. 1980: Peano. Life and Works of Giuseppe Peano. Dordrecht/Boston/London
Kenshaft, P. C. 2005: Change is possible. American Mathem. Society
Ketelsen, Chr. 1994: Die Gödelschen Unvollständigkeitssätze. Stuttgart
Killing, W. K. J. 1897: Karl Weierstraß. In: Natur und Offenbarung 43 (1897), S. 705–725
Klein, F. 1921: Gesammelte mathematische Abhandlungen. Bd. 1. Hg. R. Fricke und A. Ostrowski. Berlin
Klein, F. 1974: Das Erlanger Programm. Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Eingeleitet und mit Anmerkungen von Hans Wußing. Leipzig
Klein, F. 1979: Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. Ausgabe in einem Bande. Berlin/Heidelberg/New York

Kleinert, E. 2005: Mathematik für Philosophen. Leipzig
Kline, M. 1972: Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. Oxford University Press. Dritte Aufl. 1974
Kline, M. 1980: Mathematics, the Loss of Certainty. Oxford University Press
Knobloch, E. 1980: Der Beginn der Determinantentheorie. Hildesheim
Knobloch, E. 1983: Von Riemann zu Lebesgue – zur Entwicklung der Integrationstheorie. In: Hist. Math. 10 (1983), S. 318–343
Knobloch, E. 1992: Eulers früheste Studie zum Dreikörperproblem. In: Amphora, S. 389–405
Knobloch, E. 2007: Mettre au jour de nouveaux corpus: Les oevres inconnues de Leibniz. In: Arch. Intern. d'histoire des sciences. Vol. 57, No. 158, S. 89–104
Knopp, K. 1951:Edmund Landau. In: Jahresber.Deutsch.Math.Verein. 54(1). 1951, S. 55–62
Koch, H. 1989: Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859). In: Biographien bedeutender Mathematiker. 4. Aufl. Berlin, S. 378–386
Kochendörffer, R. 1957: Gauß' algebraische Arbeiten. In: Gauß-Gedenkband. Leipzig. S. 79–91
Kolchinsky, E. I. 2006: Science Mobilization in the Soviet Union. In: Historia scientarum. Second Series Vol. 16 (1), S. 15–28
Kollros, L. 1949: Evariste Galois. Basel
Kolmogoroff, A. 1933: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin
Kolmogorov A. N. 1989: Wie ich Mathematiker geworden bin. In: Mitt. Math. Ges. DDR. Heft1–2 (1989), S. 83–87. (Aus dem Russischen)
Kolmogorov, A. N./Youshkevich, A. P. 1992: Mathematics of the 19^{th} Century. Vol. 1. Mathematical Logic, Algebra, Number Theory, Probability Theory. Basel
Kolmogorow, A. N./Youshkevich, A. P. 1996: Mathematics of the 19^{th} Century. Vol. 2. In: Geometry/Analytic Function Theory. Basel/Boston/Berlin. (Aus dem Russischen)
Koreuber, M./Tobies, R. 2002: Emmy Noether. Begründerin einer mathematischen Schule. In: DMV-Mitteilungen 2002, Nr. 3, S. 24–37
Kowalewskaja, S. 1960: Erinnerungen an meine Kindheit. Deutsche Ausgabe. Weimar
Kröber, G. 1997: Palindrome, Perioden und Chaoten. Thun/Frankfurt/Main
Kröber, G. 2000: Das Märchen vom Apfelmännchen. Bd. 2. Reise durch das malumitische Universum. Reinbek bei Hamburg
Kronecker, L. 1870: Auseinandersetzung einiger Eigenschaften der Klassenanzahl idealer complexer Zahlen. MB. Akad. Berlin 1870, S. 271–322
Kronecker, L. 1887: Über den Zahlbegriff. In: Philosophische Aufsätze. Berlin. (Auch in Werke 3/1)
Kronecker, L. 1895 bis 1930: Werke 1 bis 5. Leipzig/Berlin
Kuhn, Th. S. 1967: Die Struktur wissenschaftlicher Revolutionen. Frankfurt/Main. (Aus dem Amerikanischen)
Kühnrich, M. 1974: Das Kontinuumproblem. In: Mitt. Math. Ges. DDR 1974, Heft 4, S. 5–39
Kühnrich, M. 1974: Von Cantor bis zu Cohen. Aus der 100-jährigen Entwicklung der Mengenlehre. In: Mitt. Math. Ges. DDR 1974, Heft 3, S. 68–80

Kupčik, I. 1980: Alte Landkarten. Von der Antike bis zum Ende des 19. Jahrhunderts. Praha
L'Hospital, G. F. A. de 1696: Analyse des infiniments petits. Paris
Lagrange, J. L. 1887: Analytische Mechanik. Deutsch ed. von H. Servus. Berlin
Laitko, H. 1978: Zum Verhältnis von Wissenschaft und Ideologie in der Periode der industriellen Revolution in England. In: NTM 15 (1978), Heft 2, S. 30–38
Laitko, H. 1992: Poincaré. In: fachlexikon forscher und erfinder. S. 464–465. Frankfurt/Main
LAM Lay Yong/ANG Tian Se 2004: Fleeting Footsteps, Tracing the Conception of Arithmetic and Algebra in Ancient China. Singapore
Lambert, J. H. 1943 (Hg. M. Steck): Schriften zur Perspektive. Berlin
Landau, E. 2004: Grundlagen der Analysis. Nachdruck der Erstpublikation von 1929
Langville, A., Meyer, C. 2006: Google's Page Rank and Beyond: The Science of Search Engine Rankings.
Laplace, P. 1932: Philosophischer Versuch über die Wahrscheinlichkeit. Hg.: R. von Mises. Leipzig
Laplace, P. S. 1800: Mechanik des Himmels. Deutsch von J. V. Burckhardt. 2 Bände. Berlin. (Aus dem Französischen)
Latour, B. 1987: Science in Action: How to Follow Engineers and Scientists through Society. Harvard University Press.
Laugwitz, D. 1987: Infinitely Small Quantities in Cauchy's Textbooks. In: Historia mathematica 14 (1987), S. 258–274
Laugwitz, D. 1996: Bernhard Riemann (1826–1866) Basel/Boston/Berlin
Laugwitz, D. 1999: Bernhard Riemann, 1826 – 1866. Turning Points in the Conception of Mathematics. Transl. Abe Shenitzer. Boston
Lehmann, N. J. 1999: Leibniz als Erfinder und Konstrukteur von Rechenmaschinen. In: Wissenschaft und Weltgestaltung. Hg.: K. Nowak/H. Poser. Hildesheim/Zürich/New York
Lehto, O. 1998: Mathematics without Borders. A History of the Mathematical Union. Heidelberg
Leibniz G. W. 1989: Der Ausbau des Calculus durch Leibniz und die Brüder Bernoulli. Symposion der Leibniz–Gesellschaft und der Bernoulli–Edition der Naturforschenden Gesellschaft in Basel. Studia Leibnitiana, Sonderheft 17. Hg. H.-J. Hesse/F. Nagel: Stuttgart
Leibniz, G. W. 1849 – 1863: Mathematische Schriften. Hg.: C. I. Gerhardt. 7 Bände. Berlin/Halle
Leibniz, G. W. 1920: Leibniz über die Analysis des Unendlichen. Eine Auswahl Leibnizscher Abhandlungen aus dem Lateinischen übersetzt und herausgegeben von Gerhardt Kowalewski. Leipzig
Leibniz, G. W. 1962: Briefwechsel mit Mathematikern. Bd. 1. Hg.: C. I. Gerhardt. Berlin 1899. Neudruck 1962
Leibniz, G.W. 1926: Sämtliche Schriften. 2. Reihe. 1. Band. Darmstadt
Lemmermeyer, F./Roquette, P. (Hg.) 2006: Helmut Hasse und Emmy Noether. Die Korrespondenz 1925–1935. Göttingen
Lévy, P. 1922: Leçons d'analyse fonctionelle. Paris
Lie, S. 1934: Gesammelte Abhandlungen. Bd. 1. Leipzig/Oslo
Lietzmann, W. 1917: Der pythagoreische Lehrsatz. Leipzig

Lindemann, F. 1882: Über die Zahl π. In: Math. Ann. 25(1882), S. 213–225
Liouville, J. 1851: Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni méme reductible à des irrationelles algébriques. In: Journ. Math. pures et appl. 1851(16), S. 133–142
Lobatschefskij, N. J. 1902: Pangeometrie. Übersetzt und herausgegeben von H. Liebmann. Leipzig
Lobatschewski, N. J. 1840: Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. Berlin. In: H. Reichardt, Gauß und die Anfänge der nicht-euklidischen Geometrie mit Originalarbeiten von J. Bolyai, N. I. Lobatschewski und F. Klein (1985). S. 159–221. Leipzig
Lobatschewsky, N. 1840: Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. Berlin
Loeffel, H. 1987: Blaise Pascal 1623–1662. Basel/Boston
Löffladt, G./Toepell, M. (Hg.) 2002: Medium Mathematik. Anregungen zu einem interdisziplinären Gedankenaustausch. Hildesheim/Berlin
Luderer, B. (Ed.) 2004: Adam Ries and his 'Coss'. Leipzig
Lützen, J. 1990: Joseph Liouville 1809 – 1882. Master of Pure and Applied Mathematics. New York/Berlin/Heidelberg/..../Hong Kong
Lützen, J. 1999: Grundlagen der Analysis im 19. Jahrhundert. In: Geschichte der Analysis. Hg.: H. N. Jahnke. Heidelberg/Berlin. S. 191–244
Maanen, J. A. van 1984: Die Mathematik in den Niederlanden im 17. Jahrhundert und ihre Rolle in der Entwicklungsgeschichte der Infinisesimalrechnung. In: Studia leibnitiana. Wiesbaden. S. 1–13
Maanen, J. A. van 1999: Barrow ahnt den Hauptsatz. In: H. N. Jahnke (Hg.).: Geschichte der Analysis. Heidelberg/Berlin. S. 86–88
MacDonnell, J. 1989: Jesuit Geometers. St. Louis/Missouri
Mackensen, L. von 1968: dyadica. Die Vorgeschichte und die Entstehung des 4-Spezies-Rechenmaschine von Gottfried Wilhelm Leibniz nach bisher unerschlossenen Manuskripten und Zeichnungen. München
Mackensen, L. von 1973: Von Pascal zu Hahn. Die Entwicklung der Rechenmaschinen im 17. und 18. Jahrhundert. In: Veröffentlichungen des Forschungsinstitutes des Deutschen Museums für die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik. Reihe A. Kleine Mitteilungen. Nr. 145
Mackensen, L. von 1974: Leibniz als Ahnherr der Kybernetik -ein bisher unbekannter Vorschlag einer ‚Machina arithmetica dyadicae'. In: Akten des II. Internationalen Leibniz-Kongresses. Bd. II, Wissenschaftstheorie und Wissenschaftsgeschichte. Wiesbaden. S. 255–268
Macrae, N. 1994: John von Neumann: Mathematik und Computerforschung-Facetten eines Genies. Basel/Boston/Berlin
Malet, A. 1969: From Indivisibles to Infinitesimals. Bellaterra
Mandelbrot, B. B. 2004: Fractals and Chaos. The Mandelbrot Set and Beyond. Selecta Volume C. New York
Manheim J. H. 1964: The Genesis of Point Set Topology. Oxford/Paris/Frankfurt/ New York
Mania, H. 2008: Gauß. Eine Biographie. Reinbek bei Hamburg
Manin, Yu. 1999: Mathematics as profession and vocation. In: V. Arnold et al. (Eds.) 1999, S. 153–160

Marathe, K. 2001: A chapter in physical mathematics: theory of knots in the sciences. In: B. Engquist and W. Schmid (Eds.) 2001, S. 873–888
Marcorini, E. (Ed.) 1988: The History of Science and Technology. New York/ Oxford
Markuschewitsch, A. I. 1955: Skizzen zur Geschichte der analytischen Funktionen. Berlin. (Aus dem Russischen)
Martin, E. T. 1952: Thomas Jefferson, Scientist. New York
Marx, K./Engels, F. 1959: Werke. Bd. 4. Berlin
Masani, P. R. 1990: Norbert Wiener 1894–1964. Basel/Boston/Berlin
Mason, S. F. 1961: Geschichte der Naturwissenschaften. Stuttgart. (Aus dem Englischen)
Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach 1984: Festveranstaltung 5. Oktober 1984
Mauldin, D. (Ed.) 1981: The Scottish Book-Mathematics from the Scottish Café. Boston
Maurin, K. 1997: Riemann's Legacy. Riemannian Ideas in Mathematics and Physics of the 20th Century. Dordrecht
May, K. O. 1972: Gauß. In: DSB. Vol. 5
May, K. O. 1973: Bibliography and Research Manual of the History of Mathematics. Toronto/Buffalo
May, K. O. 1980: Historiography: A Perspective for Computer Scientists. In: A History of Computing in the Twentieth Century. Academic Press. S. 11–18
McLarty, C. 2001: Richard Courant in the German Revolution. In: The Mathematical Intelligencer. Vol. 23 (3), 2001, S. 61–67
Mehrtens, H. 1979: Die Entstehung der Verbandstheorie. Hildesheim
Mehrtens, H. 1985: Die „Gleichschaltung" der mathematischen Gesellschaften im nationalsozialistischen Deutschland. In: Jahrbuch Überblicke Mathematik. S. 83–103
Meinel, Chr./Voswinkel, P. (Hg.) 1999: Medizin, Naturwissenschaft,Technik und Nationalsozialismus. Kontinuität und Diskontinuität. Stuttgart
Meli, D. B. 1993: Equivalence and Priority. Newton versus Leibniz. Oxford
Merzbach, U. 1981: An early version of Gauss' Disquisitiones Aritmeticae. In: J. W. Dauben (Ed.): Mathematical Perspectives. Essays on mathematics in its historical development.New York. S.167–178
Merzbach, U. 1984: Carl Friedrich Gauß. A Bibliography. Wilmington
Meschkowski, H. 1967: Probleme des Unendlichen. Werk und Leben Cantors. Braunschweig
Metropolis, N./Howlett, J./Rota, J.-C. (Eds.) 1980: A History of Computing in the Twentieth Century. New York
Meuer, H. W. 2008: The TOP 500 Project: Looking Back Over 15 Years of Supercomputer Experience. In: Informatik-Spektrum, Bd. 31 Heft 3, Juni 2008
Meyenn, K. von (Hg.) 1997: Die großen Physiker. Von Aristoteles bis Kelvin. München
Michelsen, J. A. Chr. 1790: Vollständige Anleitung zur Differential-Rechnung. Übersetzung der Institutiones calculi differentialis von L. Euler. Berlin/Libau. (Aus dem Lateinischen)
Minding, F. 1840: Beiträge zur Theorie der kürzesten Linie auf krummen Flächen. In: Crelles Journal 20, S. 325ff.

Minkowski, H. 1910: Geometrie der Zahlen. Leipzig/Berlin
Minkowski, H. 1973: Briefe an D. Hilbert (Mit Beiträgen und hrsg. Von L. Rüdenberg und H. Zassenhaus). Berlin/Heidelberg/New York
Miscellanae Kepleriana 2005: Festschrift für V. Bialas. Hg.: F. Bookmannn/D. A. Di Liscia/K. Kothmann. Augsburg
Mitscherling, A. 1913: Das Problem der Kreisteilung. Leipzig/Berlin
Möbius, A. F. 1885 bis 1887: Gesammelte Werke. Hg.: R. Baltzer. Leipzig
Monastirsky, M. 1997: Modern Mathematics in the Light of the Fields Medals. Peters. Wellersley/Massachusetts
Monge, G. 1900: Darstellende Geometrie. Übersetzt und herausgegeben von Robert Haussner. Leipzig
More, L. Tr. 1962: Isaac Newton. A Biography. New York
Morgan, J./Tian, G. 2007: Ricci Flow and the Poincaré Conjecture. Am. Math. Soc./Clay Math. Inst. Boston
Müller, S. 1999: Variational Models for Microstructure and Phase Transitions. In: F. Bethuel, S. Hildebrandt, and M. Struwe (Eds.): Calculus of Variations and Geometric Evolution Problems, S. 85–210. Berlin
Mumford, D. 1999: The dawning age of stochasticity. In: V. Arnold et al. (Eds.) 1999, S. 197–218
Murray, M. A. 2000: Women Becoming a Professional Identity in Post-World II America. Cambridge (Mass.)/London
Nagel, F. 2005: Die Bernoulli-Edition. In: Gelehrte aus Basel... Aachen. S. 173–175
Nagel, F. 2005: Jacob Hermann-Skizze einer Biographie. In: Gelehrte aus Basel... Aachen. S. 55–75
Nagel, F./Verdun, A. (Hg.) 2005: Gelehrte aus Basel an der St. Petersburger Akademie der Wissenschaften des 18. Jahrhunderts. Aachen
Naumann, F. 2001: Vom Abakus zum Internet. Die Geschichte der Informatik. Darmstadt
Needham, J. 1959: Science and Civilisations in China. Vol. 3. Mathematics and the Sciences of the Heavens and the Earth. Cambridge
Nesselmann, G. H. F 1969: Die Algebra der Griechen. Nachdruck Frankfurt 1969
Netto, E. (Hg.) 1913: Die vier Gauss'schen Beweise für die Zerlegung ganzer algebraischer Funktionen in reelle Faktoren ersten oder zweiten Grades. Dritte Aufl. Leipzig/Berlin
Netz, R./Noel, W. 2007: Der Kodex des Archimedes. Das berühmteste Palimpsest der Welt wird entschlüsselt. München. (Aus dem Englischen)
Neuenschwander, E. 1987: Riemanns Vorlesungen zur Funktionentheorie. Darmstadt
Neuenschwander, E. 1992: Mathematical Journals. In: Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences. London/New York
Neumann, C. 1865: Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale. Leipzig
Neumann, J. von 1945: First Draft of a Report on the EDVAC. Philadelphia.
Neumann, O. 1980: Zur Genesis der algebraischen Zahlentheorie. In: NTM 17(1980), Heft 1, S. 32–48; Heft 2, S. 38–58
Neumann, O. 1989: Richard Dedekind (1831 bis 1916). In: Biographien bedeutender Mathematiker. 4. Aufl. Berlin. S. 443–457

Neumann, O. 1997: Die Entwicklung der Galoistheorie zwischen Arithmetik und Toplogie. In: Arch.Hist. Exact Sciences. 50 (1997), S. 291–329
Neumann, O. 2005: Carl Friedrich Gauss, Disquisitiones arithmeticae (1801). In: Landmark Writings. S. 305–315
Neunzer, H./Tobies, R. 2004: Traumjob Mathematik ! Basel
Newton, I. 1872: Sir Isaac Newton's Mathematische Prinzipien der Naturlehre. Mit Bemerkungen und Erläuterungen. Herausgegeben von J. Ph.Wolfers. Berlin
Newton, I. 1908: Abhandlungen über die Quadratur der Kurven. Hg.: G. Kowalewski. Leipzig
Newton, I. 1967–1981: The Mathematical Papers of Isaac Newton. Ed.: T. Whiteside. Cambridge
Newton, I. 1969: The Mathematical Papers of Isaac Newton. Vol. III. 1670–1673. Ed.: D. T. Whiteside. Cambridge
Newton, I. 1999: Die mathematischen Prinzipien der Physik. Übersetzt und herausgegeben von V. Schüller. Berlin/New York
Newton, R. G. 2004: Galileo's Pendulum. Harvard University Press
Nielsen, M., Chuang, I. 2001: Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge University Press
Nobre, S. 2002: Christian Wolff (1678–1754) and his Contribution for the Mathematics Education. In: Studies in the History of Mathematics. Dedicated to A. P. Youschkewitsch. Brepols 2002. S. 89–94
Noether, E. 1983: Gesammelte Abhandlungen -Collected Papers. Hg.: N. Jacobson. Berlin/Heidelberg/New York/Tokyo
Notz, R./Noel. W., 2007: Der Kodex des Archimedes. München (Aus dem Englischen)
Nový, L. 1961: Geschichte der exakten Wissenschaften in Böhmen bis zum Ende des 19. Jahrhunderts. (Tschechisch). Prag
Nový, L. 1989: Augustin Louis Cauchy (1789–1857). In: Biographien bedeutender Mathematiker. 4. Aufl. S. 327–335. Berlin
Nový, L. 1989: Bernard Bolzano (1781–1848): In: Biographen bedeutender Mathematiker. 4. Aufl. S. 313–326. Berlin
Nový. L. 1973: Origins of Modern Algebra. Prague
Oddifreddi, P. 2004: From Galilee to Galileo. Mathematics and Culture. Ed. M. Emmer. Berlin. S. 207–214
Odifreddi, P. 2004: The Mathematical Century: The 30 Greatest Problems of the Last 100 Years. Princeton University Press. (Übersetzung aus dem Italienischen)
Olbers, W. 1900: Wilhelm Olbers: Sein Leben und seine Werke. Berlin
Ore, O. 1935: On the Foundation of Abstract Algebra. In: Annals of Math. 36(1935), S. 406–437
Ore, O. 1957: Niels Henrik Abel. Minneapolis
Ore, O. 1979: Bemerkungen aus heutiger Sicht über Gauss' Beiträge zu Zahlentheorie, Algebra und Funktionentheorie. In: NTM 16 (1979), Heft2. S. 22–39
Ossimitz, G. 2006: Vorlesung zur System- und Modelltheorie: Norbert Wiener (1894–1964) – Begründer der Kybernetik. Technische Universität Wien. http://www.uni-klu.ac.at/g̃ossimit/lv/02/s/smt/web/adnan/kybernetik.htm; 21.05.06

Ostwalds Klassiker Nr. 46, 1894: Abhandlungen über Variationsrechnung. Erster Teil: Abhandlungen von Joh. Bernoulli/Jac. Bernoulli/Leonhard Euler. Leipzig
Ostwalds Klassiker Nr. 47, 1894: Abhandlungen über Variationsrechnung. Zweiter Teil: Abhandlungen von J. L. Lagrange/A. M. Legendre/C. G. J. Jacobi. Leipzig
Otte, M. unter Mitwirkung von H. N. Jahnke, Th. Mies und G. Schubring (Hg.) 1974: Mathematiker über Mathematik. Berlin/Heidelberg/New York
Papay, G.: Zur Raumauffassung der Renaissance in Wissenschaft und Kunst. In: K. Sachs-Hombach/K. Rehkämpen (Hg.). Bildgrammatik. Interdisziplinäre Forschungen zur Syntax bildlicher Darstellungsformen. Magdeburg. S. 169–185
Parshall, K. H./Rowe, D. 1994: The Emergence of the American Mathematical Research Community. In: History of Mathematics. Vol. 8. Providence, RI.
Parshall, K. H./Rowe, D. 1993: Embedded in the Culture: Mathematics at the World's Columbian Exposition of 1983. In: The Math. Intelligencer. Vol. 15(40–45)
Parshall, K. H./Rowe, D. E. 1994: The United States of America, and Canada. In: Companion Encyclopedia. Vol. 2. London/New York. S. 1512–1525
Pasch, M. 1882: Vorlesungen über neuere Geometrie. Leipzig
Patras, F. 2001: La pensée mathématique contemporaine. Presses Universitaire de France. Paris
Peiffer, J./Dahan-Dalmedico, A. 1994: Wege und Irrwege – eine Geschichte der Mathematik. Basel/Boston/Berlin. (Aus dem Französischen)
Peiffer, J. 2008: Der Briefwechsel von Johann I Bernoulli Band 3: Der Briefwechsel mit Pierre Varignon, Teil II. Schriftenreihe: Die gesammelten Werke der Mathematiker und Physiker der Familie Bernoulli
Peitgen, H./Jürgens, H./Saupe, D. 2004: Chaos and Fractals. New York
Penrose, R. 2004: The Road to Reality. A Complete Guide to the Laws of the Universe. London
Peters, C. A. F. (Hg.) 1860–1865: Briefwechsel zwischen C. F. Gauß und H. C. Schumacher. 6 Bände. Altona
Peterschmitt, L. 2003: Berkeley et les Hypothèses Mathèmatiques. In: Arch. Intern. Vol.53 (2003), S. 184–197
Petrović, A. 2004: Development of the first Hydraulic Analog Computer. In: Arch. Intern. Vol. 54. Nr. 153 (2004), S. 97–110
Petschl, H.-J. 2005: Hermann Günther Graßmann. Basel
Pieper, H. (Ed.) 1987: Briefwechsel zwischen Alexander von Humboldt und C. G. J. Jacobi. Berlin
Pieper, H. 2005: Alexander von Humboldt und die Berufung Jacob Jacobis an die Wiener Universität. In: NTM, N.S. Vol. 13, Nr.3 (2005), S. 137–155
Pier, J.-P. (Ed.) 1994: Development of Mathematics 1900 – 1950. Basel/Boston/Berlin
Pier, J.-P. (Ed.) 2000: Development of Mathematics 1950 – 2000. Basel/Boston/Berlin
Pinl, M. 1969/1971/1972/1973/1974: Kollegen in einer dunklen Zeit. In: Jahresber.Deutsch.Math. Ver. I. Teil: 1969, S. 167–228. II.Teil. 1971, S. 165–189. III. Teil 1971/72, S. 153–208. IV. Teil. 1973/74, S. 166–208. Unter Mitarbeit von A. Dick

Pinl, M./Furtmüller, L. 1973: Mathematics under Hitler. Year Book, Leo Baeck Institut 18 (1973). S. 129–182
Plato, J. von 2005: Kolmogorov, A. N. Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie (1933). In: Landmark Writings, S. 960–969
Pogliano, Cl. 2004: Science at war and the cybernetic dream. In: Nuncius XIX (2004), Fasc. 1, S. 171–203
Pogrebyssky, I. B. 1972: Die Mathematik im 20. Jahrhundert. In: D. J. Struik: Abriß der Geschichte der Mathematik. 5.erweiterte Aufl. Berlin. S. 199–241. (Aus dem Amerikanischen bzw. dem Russischen)
Poincaré, H. 1896: Calcul des probabilités. Paris
Poincaré, H. 1913: Letzte Gedanken. Leipzig. (Aus dem Französischen)
Poincaré, H. 1914: Wissenschaft und Hypothese. 3. Aufl. Leipzig. (Aus dem Französischen)
Porten, A. van der 1996: Notes on Fermat's Last Theorem. New York
Purkert, W. 1972: Zur Genesis des abstrakten Körperbegriffs. (Dissertation A). Leipzig
Purkert, W. 1973: Zur Genesis des abstrakten Körperbegriffes. In: NTM 10 (1973). Heft 1, S. 23–37, Heft 2, S. 8–20
Purkert, W. 1976: Ein Manuskript Dedekinds über Galoistheorie. In: NTM 13 (1976). Heft 2, S. 1–16
Purkert, W. 1983: Die Bedeutung von A. Einsteins Arbeit über die Brownsche Bewegung für die Entwicklung der modernen Wahrscheinlichkeitstheorie. In: Mitt. Math. Ges. DDR. 1983, Heft 3, S. 41–49
Purkert, W. 1987: Cantor und die Antinomien der Mengenlehre. In:Bull.Soc. Math. Belgique 1987, S. 208–223
Purkert, W. 1989: Leopold Kronecker (1823 bis 1891). In: Biographien bedeutender Mathematiker. 4. Aufl. Berlin, S. 421–431
Purkert, W. 1989: Richard Dedekind (1831 bis 1916). In: Biographien bedeutender Mathematiker. 4.Aufl. Berlin, S. 443–457
Purkert, W. 2004: Kontinuumproblem und Wohlordnung – die spektakulären Ereignisse auf dem Internationalen Mathematikerkongreß 1904 in Heidelberg. In: Form, Zahl, Ordnung. Festschrift für Ivo Schneider zum 65. Geburtstag. S. 223–241. Wiesbaden
Purkert, W./Ilgauds, H.-J. 1985: Georg Cantor. Leipzig
Purkert, W./Ilgauds, H.-J. 1987: Georg Cantor (1854–1918). Basel/Boston/Stuttgart
Pycior, H. M. 1994: The Philosophy of Algebra. In: Companion Encyclopedia. Vol. I, S. 714–804
Quaisser, E. 1995: Die Symmetriestruktur von Figuren. In: Überblicke Mathematik. Jahrbuch 1995, S. 147–161
Radbruch, K. 1989: Mathematik in den Geisteswissenschaften. Göttingen
Radbruch, K. 1996/97: Mathematik in der Lyrik. In: Überblicke Mathematik 1996/97. Hg.: A. Beutelspacher/N.Henze/U. Kulisch/H. Wußing. Braunschweig/ Wiesbaden. S. 38–51
Radbruch, K. 1997: Mathematische Spuren in der Literatur. Darmstadt
Randell, Br. (Ed.) 1973: The Origins of Digital Computers. Berlin/Heidelberg/New York
Rashed, Roshdi 1996: Les Mathématiques infinitésimals du IXe au XIe siècle. Vol. I: Fondateurs et commentateurs. London

Rassins, G. M. (Ed.) 1991: C. F. Gauss 1991: The Mathematical Heritage of C. F. Gauss. A Collection of Papers in Memory of C. F. Gauss. In: World Scientific
Reich, K. 1992: Miszellen zu Leben und Werk des Mathematikers Johann Friedrich Pfaff. In: Amphora, S. 551–595
Reich, K. 2002: Gauß' Werke in Kurzfassung. Augsburg
Reich, K. 2005: Leonhard Euler, Introductio to Analysis. In: Landmark Writings, S. 181–190
Reichardt, H. (Hg.) 1957: Gauss Gedenkband anlässlich des 100. Todestages am 23. Februar 1955. Leipzig
Reichardt, H. 1976: Gauß und die nichteuklidische Geometrie. Leipzig
Reichardt, H. 1985: Gauß und die Anfänge der nichteuklidischen Geometrie. Mit Originalarbeiten von. J. Bolyai, N. I. Lobatschewski und F. Klein. Leipzig
Reid, C. 1970: Hilbert. With an appreciation of Hilbert's work by Hermann Weyl. Berlin/Heidelberg/New York
Reid, C. 1976: Courant in Göttingen and New York. The Story of an Improbable Mathematician. New York/Heidelberg/Berlin. (Aus dem Amerikanischen (1941))
Reiff, R. 1889: Geschichte der unendlichen Reihen. Tübingen
Renn, J. 2002: Wissenschaft als Lebensorientierung. Eine Erfolgsgeschichte?
Renn, J. 2007: The globalization of knowledge and the place of traditional knowledge in the global community. In: Festschrift für Ubiratan d'Ambrosio. 2007. Rio Claro. S. 43–54
Renteln, M. von (Hg.) 1987: Aspekte zur Geschichte der Analysis im 20. Jahrhundert. Karlsruhe
Renteln, M. von 1989: Geschichte der Analysis im 19. Jahrhundert, von Cauchy bis Cantor. Karlsruhe
Renteln, M. von (Hg.) 1991: Geschichte der Analysis im 18. Jahrhundert. Von Euler bis Laplace. Karlsruhe
Renteln, M. von 2000: Die Mathematiker an der TH Karlsruhe (1825–1945). Karlsruhe
Renteln, M. von 2007: Zur Entstehungsgeschichte der Funktionalanalysis. In: Festschrift für K. Reich
Resnikoff, H. L./Wells, R. O. Jr. 1983: Mathematik im Wandel der Kulturen. Braunschweig/Wiesbaden. (Aus dem Amerikanischen)
Reuleaux, F. 1892: Die sogenannte Thomas'sche Rechenmaschine. 2. Aufl. Leipzig
Richstein, J. 2001: Verifying the Goldbach Conjecture up to $4 * 10^{14}$. In: Mathematics of Computation 70 (2001), S. 1745–1749
Richter, K. 1976: Zur Herausbildung, Entstehung und Entwicklung des Begriffs der gleichmäßigen Konvergenz – ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik im 19. Jahrhundert. (Dissertation A). Leipzig
Richter, K./Purkert, W. 1989: Georg Cantor (1845–1918). In: Biographien bedeutender Mathematiker. 4. Aufl. Berlin. S. 458–469
Rider, R. E. 1982; A Bibliography of Early Modern Algebra. Berkeley
Riemann, B. 1876: Bernhard Riemann's Gesammelte Mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass. Hg. unter Mitwirkung von R. Dedekind von H. Weber. Leipzig
Riemann, B. 1902: Gesammelte mathematische Werke. Nachträge. Hg.: M. Noether/ W. Wirtinger. Leipzig

Riemann, B. 1990: Gesammelte Mathematische Werke, Wissenschaftlicher Nachlass und Nachträge. Collected Papers. Nach der Ausgabe 1892 von Heinrich Weber und Richard Dedekind neu herausgegeben von Raghavan Narasimhan. Berlin/Heidelberg/Leipzig

Ries, Adam, 1581: Rechenbuch auff Linien und Ziphern, in allerlei Hantierung, Geschäfften und Kauffmannschaft... Frankfurt

Ries, Abraham 1999: Die Coß. Hg.: H. Wußing. München

Ries, Adam 1991: Das zweite Rechenbuch von Adam Ries. Nachdruck der Erstausgabe Erfurt 1522. Mit einer Kurzbiographie, bibliographischen Angaben und einer Übersicht über die Fachsprache. Herausgegeben von Stefan Deschauer. Algorismus Heft 5. München

Ries, Adam 1991: Rechnung auff der linihen. Erfurt 1525. Nachdruck und Rekonstruktion. Offizin Paul Hartung in Hamburg

Ries, Adam 1992: Coß. Hg.: W. Kaunzner/H. Wußing. Stuttgart/Leipzig

Ries, Isaac 1562: Coß. Landesbibliothek Dresden. (Auf Pergament geschrieben)

Risi, V. De 2007: Geometry and Monadology. Leibniz's Analysis Situs and Philosophy of Space. Basel/Boston/Berlin

Rittaud, B. 2005: Wie viel wiegen die rationalen Zahlen? In: Spektrum der Wissenschaft. 2/2005, S. 64–68

Roquette, Peter 2002: David Hilbert in Königsberg. Vortrag am 30.9.2002 an der Mathematischen Fakultät in Kaliningrad

Rosenfeld, B. A. 1988: A History of Non-Euclidean Geometry. Evolution of the Concept of a Geometric Space. New York/Berlin/Heidelberg/London/Paris/Tokyo (Aus dem Russischen)

Rowe, D. 1986: "Jewish Mathematics" at Göttingen in the Era of Felix Klein. In: Isis 77 (1986), S. 422–449

Rowe, D. 1994: Dirk Jan Struik and his Contribution to the History of Mathematics. In: Historia mathematica 21(1994), S. 245–273

Rowe, D.1983: A Forgotten Chapter in the History of Klein's Erlanger Programm. In: Historia mathematica 10(1983), S. 448–454

Rudolph, E. 1987: Banach. In: Aspekte zur Geschichte der Analysis im 20. Jahrhundert. Hg.: M. von Renteln. Karlsruhe, S. 149–161

Rüdenberg, L./Zassenhaus H. (Hg.) 1973: Minkowskis Briefe an D. Hilbert

Rühlmann, M. 1885: Vorträge über Geschichte der Technischen Mechanik. Leipzig

Russell, B. 1967: The Autobiography of Bertrand Russell 1872–1914. Boston

Russo, L. 2004: The Forgotten Revolution. How Science Was Born in 300 BC and Why It Had to be Reborn. Berlin/Heidelberg/New York. (Aus dem Italienischen)

Rychlik, K. 1962: Theorie der reellen Zahlen in Bolzanos handschriftlichem Nachlasse. Prag

Sakarovitch, J. 1998: Épures d'architecture. De la coupe des pierres à la géométrie descriptive XVIe–XIX siècles. Basel/Boston/Berlin

Sakarovitch, J. 2005: Gaspard Monge, Géometrie descriptive, first edition. In: Landmark Writings. S. 225–241

Sampson, J. H. 1990: Sophie Germain and the Theory of Numbers. In: Arch.Hist. Exact Sciences. 41 (1990), S.157–161

Sartorius von Waltershausen, W. 1856: Gauss zum Gedächtniss. Leipzig

Sasaki, C. 2003: Descartes' Mathematical Thought. University of Tokyo Press

Sato Ken-ichi 2003: History of Mathematics in Early Modern Japan: Searching for the True Portrait of Seki Takakazu. Rezension durch A. Horiuchi. In: NTM 11(2003), S. 279–283

Sautoy, M. du 2004: Die Musik der Primzahlen. Auf den Spuren des größten Rätsels der Mathematik. München. (Aus dem Englischen)

Scarpello, G. M./Scimone, A. 2005: The Work of Tschirnhaus, La Hire und Leibniz on Catacaustics and the Birth of the Envelopes of Lines in the 17^{th} Century. In: Arch.Hist.Exact Sciences 59 (2005), S. 223–250

Schappacher, N. 1991: Edmund Landau's Göttingen: From the Life and Death of a Great Mathematical Center. In: The Mathematical Intelligencer. Vol. 13(4), 1991, S. 12–18

Schappacher, N./Kneser, M. 1990: Fachverband-Institut-Staat. Streiflichter auf das Verhältnis von Mathematik zu Gesellschaft und Politik in Deutschland seit 1890 unter besonderer Berücksichtigung der Zeit des Nationalsozialismus. In: Ein Jahrhundert Mathematik 1890 – 1990. Festschrift zum Jubiläum der DMV. Hg.: G Fischer/F. Hirzebruch/W. Scharlau/W. Törnig. Braunschweig/Wiesbaden

Scharlau, W. 1978: Die Entwicklung der Zahlentheorie von Fermat bis Dirichlet. Münster

Scharlau, W. 1981: Richard Dedekind 1831–1981. Eine Würdigung zu seinem 150. Geburtstag. Braunschweig/Wiesbaden

Scharlau, W./Opolka H. 1985: From Fermat to Minkowski. Lectures on the Theory of Numbers. Heidelberg

Schlosser, H. 2003: Computeralgebra. In: Alten et al.: 4000 Jahre Algebra, 2. korr. Nachdruck 2008, S. 593–609. Berlin/Heidelberg

Schlote, K.-H. 1980: Einige Aspekte der verstärkten Hinwendung der Mathematik zur Praxis. In: NTM 1980, S. 15–22

Schlote, K.-H. 1988: Die Entwicklung der Algebrentheorie bis zu ihrer Formierung als abstrakte algebraische Theorie. (Dissertation B). Universität Leipzig

Schlote, K.-H. 1990: Poincaré. In: Lexikon bedeutender Mathematiker. S. 373–375

Schlote, K.-H. 2004: Zu den Wechselbeziehungen zwischen Mathematik und Physik an der Universität Leipzig in der Zeit von 1830 bis 1904/05. Abhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. Math.-Nat. Klasse. Bd. 63 (2004). Heft 1

Schlote, K.-H. 2005: Carl Neumann's Contributions to Potential Theory and Electrodynamics. In: European Mathematics in the Last Centuries. Wrocław. S. 123–140

Schlote, K.-H. 2003: Algebra an der Wende zum 20. Jahrhundert. In: Algebra im 20. Jahrhundert. In: 4000 Jahre Algebra. 2. korr. Nachdruck 2008, S. 475–550 Berlin/Heidelberg.

Schlote, K.-H. 2003: Die Algebra im 20. Jahrhundert. In: 4000 Jahre Algebra. 2. korr. Nachdruck 2008, S. 551–593. Berlin/Heidelberg.

Schmidt, F./Stäckel, P. 1899: Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauß und Wolfgang Bolyai. Leipzig

Schneider, I. 1988: Isaac Newton. München

Schneider, I. 1989: Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung von den Anfängen bis 1933. Einführungen und Texte. Berlin

Schneider, I. 1992: The History of Mathematics: Aims, Results, and Future Prospects. In: Amphora, S. 619–629
Schneider, I. 1999: Peter Roth (gest. April 1617). In: Rechenbücher und mathematische Texte der frühen Neuzeit. Annaberg-Buchholz. S. 303–312
Schneider, R. 1954: Pascal. Frankfurt. Main/Hamburg
Schnuse, C. H. 1841: Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Braunschweig
Schoenflies, A. 1922: Zur Erinnerung an Georg Cantor. In: Jahresber. Dtsch. Math. Ver. 31 (1922), S. 97–106
Scholz E. 1989: Symmetrie – Gruppe – Dualität. Zur Beziehung zwischen theoretischer Mathematik und Anwendungen in Kristallographie und Baustatik des 19. Jahrhunderts. Boston/Basel
Scholz, E. 1990: Geschichte der Algebra. Mannheim
Scholz, E. 1992: Gauß und die Begründung der „höheren“ Geodäsie. In: Amphora, S. 631–647
Scholz, E. (Ed.) 2001: Hermann Weyl's Raum-Zeit-Materie and a General Introduction to his Scientific Work. Basel/Boston/Berlin
Scholz, E. 2004: C. F. Gauß' Präzisionsmessungen terrestrischer Dreiecke und seine Überlegungen zur empirischen Fundierung der Geometrie in den 1820er Jahren. In: Form, Zahl, Ordnung. Festschrift für I. Schneider zum 65. Geburtstag. Wiesbaden. S. 355–380
Schönflies, A. M. 1900: Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. In: Jahresber. Dtsch. Math. Ver. 8(1900), Teil 2, S. 251f.
Schreier W. (Hg.) 1988: Geschichte der Physik. Ein Abriß. Berlin
Schröder, E. 1980: Dürer – Kunst und Geometrie. Berlin
Schubring, G. 1992: Zur Modernisierung des Studiums der Mathematik in Berlin. In: Amphora. S. 649–675. Basel
Schubring, G. (Ed.) 1996: Hermann Günther Graßmann (1809–1877): Visionary Mathematician, Scientist and Neohumanist Scholar. Dordrecht/Boston/London
Schubring, G. 2005: Conflicts between Generalization, Rigor and Intuition. Heidelberg
Schumacher, H. Chr. 1808: Schumachers Tagebuch. In: Gauß 1900
Scriba, Chr. 1963: The Inverse Method of Tangents, a Dialogue between Leibniz and Newton (1675–1677). In: Arch.Hist. Exact Sciences 2 (1963), S. 113–173
Scriba, Chr. 1966: Studien zur Mathematik des John Wallis (1616–1703). Wiesbaden
Scriba, C.-J. 1968: The Concept of Number. Mannheim
Scriba, Chr: J. 1988: Welche Kreismonde sind elementar quadrierbar? Die 2400jährige Geschichte eines Problems bis zur endgültigen Lösung in den Jahren 1933/47. In: Mitt. D. Math. Ges. in Hamburg 11 (1988), S. 517–539
Scriba, Chr./Schreiber, P. 2001. 5000 Jahre Geometrie. Berlin/Heidelberg/New York
Scriba, Chr./Schreiber. P. 2005: 5000 Jahre Geometrie. 2. Aufl. Berlin/Heidelberg
Seck, Friedrich (1978): Wilhelm Schickard. 1592-1635. Tübingen
Shea, W. R. 1988: Revolutions in Science. Their Meaning and Relevance. Watson Publishing International
Sheynin, O. 1977: Early History of the Theory of Probability. In: Studies in the History of Statistics and Probability. London. S. 101–104

SHOJI, K. 2006: The Contact of Differential Geometry and Continuous Groups of Transformations: W. Killing's „Ueber die Grundlagen der Geometrie". In: Historia Scientarum 2006. Vol. 16, No. 2, S. 166–178

Siegmund-Schultze, R. 1981: Der Strukturwandel in der Mathematik um die Wende vom 19. zum 20.Jahrhundert, untersucht am Beispiel der ersten Begriffsbildungen der Funktionalanalysis. In: NTM 18, Heft 1, S. 4–20

Siegmund-Schultze, R.1986: Faschistische Pläne zur „Neuordnung" der europäischen Wissenschaft. Das Beispiel Mathematik. In: NTM 23 (2), (1986), S. 1–17

Siegmund-Schultze, R. 1989: Zur Entstehung und Entwicklung der Funktionalanalysis. In: H. Wußing: Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik. 2. Aufl. Berlin

Siegmund-Schultze, R. 1990: Neumann, John von. In: Lexikon bedeutender Mathematiker, S. 342–343. Leipzig

Siegmund-Schultze, R. 1993: Mathematische Berichterstattung in Hitlerdeutschland. Der Niedergang des Jahrbuches über die Fortschritte der Mathematik. Göttingen

Siegmund-Schultze, R. 1997: Felix Kleins Beziehungen zu den Vereinigten Staaten, die Anfänge deutscher Wissenschaftspolitik und die Reform um 1900. In: Sudhoffs Archiv 18 (1979), S. 21–38

Siegmund-Schultze, R. 1998: Mathematiker auf der Flucht vor Hitler. Quellen und Studien zur Emigration einer Wissenschaft. Braunschweig/Wiesbaden

Siegmund-Schultze, R. 1999: Die Entstehung der Funktionalanalysis. In: Geschichte der Analysis. Hg.: H. N. Jahnke, S. 487–503

Siegmund-Schultze, R. 2001: Rockefeller and the Internationalisation of Mathematics Between the two World Wars. Documents and Studies for the Social History of Mathematics in the 20^{th} Century. Basel

Sierksma, G. 1992: Johann Bernoulli (1667–1748): His Ten Turbulent Years in Groningen. In: The Mathematical Inteligencer Vol. 14 (4), S. 22–31

Sigalov, A. G. 1971: Zum neunzehnten und zwanzigsten Hilbertschen Problem. In: Die Hilbertschen Probleme. S. 259–278, Leipzig

Silverberg, A. 2001: Emmy Noether in Erlangen. In: The Mathematical Intelligencer Vol. 23(3), S. 44–49

Sinai, Y. (Ed.) 2003: Russian Mathematicians in the 20th Century. World Scientific Publishing

Singh, S. 2001: Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels. 6. Auflage. München. (Aus dem Englischen)

Smoluchowski, M. von 1918: Über den Begriff und den Ursprung der Wahrscheinlichkeitsgesetze in der Physik. In: Die Naturwissenschaften 6 (1918), Heft 17, S. 253–263

Sobel, D. 1998: Longitude. London

Sonar, Th. 2007: Tod und Grablege von Gottfried Wilhelm Leibniz – Was wissen wir sicher?. In: Festschrift für K. Reich, S. 101–110

Sonnemann, R. (Hg.) 1987: Geschichte der Technik 1978. 2. Aufl. Köln

Spektrum der Wissenschaft 2005: „Das Unendliche". SPEZIAL 3 2005

Spektrum der Wissenschaft 2005: „Unendlich (plus eins)". SPEZIAL 2 2005

Stadler, Fr. (Hg.) 1988: Vertriebene Vernunft II. Emigration und Exil Österreichischer Wissenschaft. Wien

Stäckel, P. (Hg.) 1894a: Abhandlungen über Variationsrechnung. Erster Teil: Abhandlungen von Joh. Bernoulli/Jac. Bernoulli/Leonhard Euler. In: Ostwalds Klassiker Nr. 46. Leipzig
Stäckel, P. (Hg.) 1894b: Abhandlungen über Variationsrechnung. Zweiter Teil: Abhandlungen von J. L. Lagrange/A. M. Legendre/C. G. J. Jacobi. In: Ostwalds Klassiker Nr. 47. Leipzig
Stäckel, P. 1895: Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie, in Gemeinschaft mit Friedrich Engel herausgegeben von P. Stäckel. Leipzig
Stäckel, P./Engel, F. (Hg.) 1913: Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie, 2 Teile. Leipzig/Berlin
Steck, M./Folkerts, M. 1981: Bibliographia Euclideana. Hildesheim
Stedall, J. 2003: The Great Invention of Algebra. Thomas Harriot's Treatise on Equations. Oxford University Press
Stein, E./Kopp, F. O. 2006: Es funktioniert doch – mit zwei Korrekturen: Zehnerüberträge der Leibniz-Maschine. Calculemus! Zwei Beiträge in: Unimagazin Hannover 3/4 (2006), S. 56 ff. Leibniz Universität Hannover
Steinhaus, H. 1963: Stefan Banach. In: Studia mathematica 1 (1963), S. 7–15
Steiner, F. (Hg.) 2005: Albert Einstein. Genie, Visionär und Legende. Berlin
Steinitz, E. 1910: Algebraische Theorie der Körper. In: Journ. reine u. angew. Math. 137 (1910), S. 167–309
Steinitz, E. 1950: Algebraische Theorie der Körper. In: Journ. reine u. angew. Math. 137 (1910), S. 167–309. Neu herausgegeb. H. Hasse und R. Baer. Berlin 1930. Nachdruck
Steinschneider, M. 2001: Mathematik bei den Juden. Nachdruck Hildesheim
Stewart, I. 2007: A History of Symmetry. New York
Stigler, St. M. 1986: The History of Statistics. Harvard University Press.
Stillwell, J. 1989: Mathematics and its History. Berlin/Heidelberg
Stolz, O. 1981: Bolzanos Bedeutung für die Geschichte der Infinitesimalrechnung. In: Math. Ann. Bd.XVIII (1881), S. 255–279
Struik, D. 1992: Marx and Engels on the History of Science and Technology. In: Amphora, S. 737–749
Struik, D. J. 1966: Wiener: Colleague and Friend. In:American Dialogue, März/April 1966
Struik, D. J. (Ed.) 1969: A Source Book in Mathematics, 1200 – 1800. Harvard University Press
Struik, D. J. 1972: Abriß der Geschichte der Mathematik. Fünfte, erweiterte Aufl. Berlin. (Aus dem Amerikanischen)
Struik, D. J. 1991: Yankee Science in the Making. Science and Engineering in New England from Colonial Times to the Civil War. (Revised edition) New York
Stubhaug, A. 2000: Niels Henrik Abel and his Times. Berlin. (Aus dem Norwegischen)
Stubhaug, A. 2002: The Mathematician Sophus Lie. It was the Audacity of My Thinking. Heidelberg. (Aus dem Norwegischen)
Stubhaug, A. 2003: Ein aufleuchtender Blitz. Niels Henrik Abel und seine Zeit. Berlin/Heidelberg/New York. (Aus dem Norwegischen)
Studia leibnitiana 1968: Sonderheft 300 Jahre Nova methodus... Wiesbaden/Stuttgart

Suzuki, J. 2002: A History of Mathematics. Prentice-Hall (New Jersey)
Swade, D. 1998: Charles Babbage and his Calculating Engines. Science Museum London. Reprinted
Sylvester, J. J. 1904 bis 1912: The Collected Mathematical Papers. 4 Bände. Cambridge
Szabó, I. 1987: Geschichte der mechanischen Prinzipien. 3. Aufl. Basel/Boston/Stuttgart
Taton, R. 1951: L 'oeuvre de Gaspard Monge. Paris
Taussky-Todd, O. 1985: An Autobiographical Essay. In: Mathematical People. Boston
Taylor, R./Wiles, A. 1995: Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras. In: Ann.of Math. 141 (1995), S. 553–572
Terpe, F. 1985: Andrej Nikolajewitsch Kolmogorow. In: Mitt. Math. Ges. DDR 1985 (1), S. 43–56
Teske, A. 1977: Marian Smoluchowski. Leben und Werk. Warszawa/Krakow/Gdansk. (Aus dem Polnischen)
Tews, R. 1985: Zu Fragen der Entwicklung des Mathematikunterrichtes in der sowjetischen Schule. In: Mitt. Math. Ges. DDR 1985 (1), S. 57–65
The Golden Years of Moscow Mathematics. 1993: Amer. Math. Soc. London Math. Soc. Vol. 6
Thiele, R. 1982: Leonhard Euler. Leipzig
Thiele, R. 1994: Mathematics in Göttingen (1737–1866). In: The Mathematical Intelligencer 16 (1994), S.50–60
Thiele, R. 2002: 300 Jahre Brachistochronenproblem. In: Medium Mathematik. Hildesheim/Berlin, S. 76–99
Tobies, R. 1985: Zu den Beziehungen deutscher und sowjetischer Mathematiker während der Zeit der Weimarer Republik. In: Mitt. Math. Ges. DDR 1985 (1), S. 66–79
Tobies, R. 1986: Zur Geschichte deutscher mathematischer Gesellschaften. In: Mitt. Math. Ges. DDR. 2–3 (1986)), S. 112–134
Tobies, R. 2003: Briefe Emmy Noethers an P. S. Alexandroff. In: NTM. N. S. 11 (2), S. 100–115
Tobies, R. 2004: Emmy Noether. In: Spektrum der Wissenschaft. August 2004, S. 70–77
Tobies, R. 2006: Biographisches Lexikon in Mathematik promovierter Personen an deutschen Universitäten und Technischen Hochschulen WS 1907/08 bis WS 1944/45. Augsburg
Tobies, R./König, F. 1981: Felix Klein. Leipzig
Toepell, M. 1999: Zur Entstehung und Weiterentwicklung von David Hilberts ‚Grundlagen der Geometrie'. In: Hilbert: Grundlagen der Geometrie. 14. Aufl., S. 283–324. Leipzig
Toepell, M. 2005: David Hilbert, Grundlagen der Geometrie, First Edition 1899. In: Landmark Writings 2005, S. 710–723
Tollmien, C. 1991: Die Habilitation von Emmy Noether an der Universität Göttingen. In: NTM. N.S. 1991 (1), S. 1–11
Toti Rigatelli, L. 1996: Evariste Galois. 1811–1832. Basel/Boston/Berlin. (Aus dem Italienischen)

Troitzsch, U./Weber, W. (Hg.) 1982: Die Technik. Von den Anfängen bis zur Gegenwart. Braunschweig
Tropfke, J. 1923: Geschichte der Elementarmathematik. Bd. IV. Ebene Geometrie. 2. Aufl Berlin/Leipzig
Tropfke, J. 1933: Arithmetik, Band II. 3. Aufl. Berlin/Leipzig
Tropfke, J. 1980: Geschichte der Elementarmathematik. Bd. 1. Arithmetik und Algebra. 4. Aufl. Vollständig neu bearbeitet von Kurt Vogel/Karin Reich/Helmuth Gericke. Berlin/New York
Trudeau, R. 1987: The Non-Euclidean Revolution. Basel
Tuschmann, W./Hawig, P. 1993: Sofia Kowalewskaja. Basel/Boston/Berlin
Ulam, S. 1946: Stefan Banach (1882–1945). In: Bull.Math. Society 52 (1946), S. 600–603
Ulam, S. 1958: John von Neumann (1903–1957). In: Bull. Math. Society 64 (1968), S. 1–49
Ullrich, P. 2007: Karl Weierstraß und die erste Promotion in Mathematik an der Akademie zu Münster. In.: Festschrift für K. Reich, S. 145–162
Ungerer, Th. 1996/97: Mikroprozessoren – heute, morgen und übermorgen. In: Überblicke Mathematik. 1996/97. Braunschweig/Wiesbaden
Verdun, A. 2005: Die Euler-Edition. In: Gelehrte aus Basel. Aachen. S. 177–179
Verdun, A./Nagel, F./Michailow, G. K. 2005: Die Akademie der Wissenschaften von St. Petersburg in ihrer Gründungszeit. In: Gelehrte aus Basel. Aachen. S. 17–38
Verriest, G. 1934: Evariste Galois et la Théorie des équations algébriques. Louvain-Paris
Vincon, U. 1987: Hadamard. In: Aspekte zur Geschichte der Analysis im 20. Jahrhundert. Hg.: M. von Renteln. Karlsruhe. S. 36–45
Vinogradov, I. M. 1937: Eine neue Methode in der analytischen Zahlentheorie. In: Trudy mat. Instituta AN SSSR. 1937, 10, S.1–122. (Russisch)
Vogt, A. 1987: Charles Babbage (1792 bis 1871). In: Biographien bedeutender Techniker, Ingenieure und Technikwissenschaftler. S. 129–136
Vogt, A. 1991: Emil Julius Gumbel. Auf der Suche nach der Wahrheit. Berlin
von Meyenn, K. (Hg.) 1997: Die großen Physiker. Von Aristoteles bis Kelvin. München
von Renteln, M. (Hg.) 1987: Aspekte zur Geschichte der Analysis im 20. Jahrhundert. Karlsruhe
von Renteln, M. 1989: Geschichte der Analysis im 19. Jahrhundert: von Cauchy bis Cantor. Karlsruhe
Waerden, B. L. van der 1930/31: Moderne Algebra. Berlin
Waerden, B. L. van der 1935: Nachruf auf Emmy Noether. In: Math. Ann. 111 (1935), S. 469–474
Waerden, B. L. van 1950: Moderne Algebra. Dritte, verbesserte Aufl. Erster Teil. Berlin/Göttingen/Heidelberg
Waerden, B. L. van der 1966: Die Algebra seit Galois. In: Jahresb. Dtsch. Math. Verein. 68 (1966), S.155–165
Waerden, B. L. van der 1966: Erwachende Wissenschaft. 2. Aufl. Basel/Stuttgart
Waerden, B. L. van der 1972: Die Galoistheorie von Heinrich Weber bis Emil Artin. In: Arch. Hist. Exact Sciences. 9 (1972), S. 240–248

Waerden, B. L. van der 1975: On the Sources of My Book Moderne Algebra. In: Historia mathematica 2 (1975), S. 31–40
Waerden, B. L. van der 1985: A History of Algebra. From al-Khwarizmi to Emmy Noether. Basel/Heidelberg
Wang Hao 1978: Kurt Gödel's intellectual development. In: The Mathematical Intelligencer. (1978), 3, S. 182–185
Wawilow, S. I. 1951: Isaac Newton. Berlin. (Aus dem Russischen)
Weber, H. 1859: Lehrbuch der Algebra. Bd. 1. Braunschweig
Weber, H. 1893: Die allgemeinen Grundlagen der Galoisschen Gleichungstheorie. In: Math. Ann. 43 (1893), S. 521–549
Weber, H. 1893: Leopold Kronecker. In: Math. Ann. 43 (1893), S. 1 –25
Weber, H. 1912: Lehrbuch der Algebra. Kleine Ausgabe in einem Bande. Braunschweig
Weber, H. 1998: Lehrbuch der Algebra. Bd. 1. 2. Aufl. Braunschweig 1898. Reprint
Weierstraß, K. 1854: Zur Theorie der abelschen Funktionen. In: Journ. reine u. angew. Math. 47 (1854), S. 289–306
Weierstraß, K. 1894: Mathematische Werke. Bd. 1. Berlin
Weierstraß, K. 1895: Mathematische Werke. Bd. 2. Abhandlungen II. Berlin
Weierstraß, K./Kowalewskaja, S. 1993: Briefwechsel zwischen Karl Weierstraß und Sofja Kowalewskaja. Herausgegeben und kommentiert von R. Bölling. Berlin
Weil, A. 1984: Number Theory. An Approach through History from Hammurapi to Legendre. Basel
Weil, A. 1992: The Apprenticeship of a Mathematician. Basel/Boston/Berlin. (Aus dem Französischen)
Weil, A. 1992: Zahlentheorie. Ein Gang durch die Geschichte von Hammurapi bis Legendre. Basel/Boston/Berlin
Wentscher, M. 1909: Weierstraß und Sonja Kowalewsky. In: Jahresber. Dtsche. Math. Verein. 18 (1909), S.89–93
Westfall, R. 1996: Isaac Newton. Heidelberg/Berlin/Oxford. 1996. (Aus dem Englischen)
Weyl, H 1918: Raum, Zeit, Materie. Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie. Berlin
Weyl, H. 1922: Das Raumproblem. In: Jahresber. Dtsche. Math. Verein. 31 (1922), S. 92–93
Weyl, H. 1935: Emmy Noether. (Ein Nachruf). In: Scripta mathematica. III, 3, S. 201–220
Weyl, H. 1944: David Hilbert and his mathematical Work. In: Bull. Amer. Math. Soc. Jg. 50. (1944), S. 612–654
Weyl, H. 1952: Symmetry. Princeton.Deutsche Ausgabe 1955. Basel/Stuttgart
Weyl, H. 1997: Die Idee der Riemannschen Fläche. Hg.: R. Remmert. Stuttgart/Leipzig
Whiteside, D. T. 1970: The Mathematical Principles Underlying Newton's Principia Mathematica. Glasgow
Wickert, J. 1995: Isaac Newton. Reinbek bei Hamburg
Wiener, N. 1958: Mensch und Menschmaschine. Frankfurt/M./Berlin. (Aus dem Amerikanischen)
Wiener, N. 1962: Mathematik – Mein Leben. Düsseldorf. (Aus dem Amerikanischen)

Wiener, N. 1963: Kybernetik. Düsseldorf/Wien. (Aus dem Amerikanischen)
Wiener, N. 1965: Mathematik – Mein Leben. Düsseldorf/Wien. (Aus dem Amerikanischen)
Wiener, N. 1966: Mensch und Menschmaschine. Kybernetik und Gesellschaft. Frankfurt/M./Bonn
Wigner, E. 1959: The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences, Richard Courant Lecture in Mathematical Sciences delivered at New York University, 1959. In: E. Wigner: Philosophical Reflections and Syntheses. Annotated by G. Emch. New York. 1995, S. 534–549
Wiles, A. 1995: Modular elliptic curves and Fermat's Theorem. In: Ann. of Math. 141 (1995), S. 443–551
Wilkes, M. V. 1977: Babbage as a Computer Pioneer. In: Hist. mathem. 4 (1977), S. 415–440
Wilson, C. 2005: Carl Friedrich Gauss, Book on Celestical Mechanics (1809): In: Landmark Writings, S. 316–328
Witten, E. 2003: Physical law and the quest for mathematical understanding. Bull. Amer. Math. Soc. 40, S. 21–30
Wolf, A. 1987: John von Neumann. In.: Aspekte zur Geschichte der Analysis im 20. Jahrhundert. Hg.: M. von Renteln. Karlsruhe, S. 162–177
Wolfschmidt, G. (Hg.) 2007: Festschrift für Karin Reich 2007. Augsburg
Worbs, E. 1955: Carl Friedrich Gauß. Ein Lebensbild. Leipzig
Wußing, H. 1974: Carl Friedrich Gauß. Leipzig
Wußing, H. 1969: Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes. Berlin
Wußing, H. 1979: Zur gesellschaftlichen Stellung der Mathematik und der Naturwissenschaften in der Industriellen Revolution. In: Studien zur Geschichte der Produktivkräfte. Deutschland zur Zeit der Industriellen Revolution. Berlin, S. 55–68
Wußing, H. (Hg.) 1983: Geschichte der Naturwissenschaften. Leipzig
Wußing, H. (Hg.) 1983: Mathematische Probleme. Vortrag 1900 von D. Hilbert, gehalten auf dem 2. Internationalen Mathematikerkongress. Erläutert von einem Autorenkollektiv unter P. S. Alexandrow. 3. Auflage. Leipzig. (Aus dem Russischen)
Wußing, H. 1989a: Carl Friedrich Gauß. 5. Aufl. Leipzig
Wußing, H. 1989b: Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik. 2. Aufl. Berlin. Nachdruck Frankfurt/M. 2008
Wußing, H. 1989c: Emmy Noether (1882 bis 1935): In: Biographien bedeutender Mathematiker. 4. Aufl., S. 514–522
Wußing, H. 1989d: David Hilbert (1862 bis 1943). In: Biographien bedeutender Mathematiker. 4. Aufl. Berlin. 1989, S. 500–513
Wußing, H. 1990: Isaac Newton. 4. Aufl. Leipzig
Wußing, H. 1995: Implizite gruppentheoretische Denkformen in den Disquisitiones Arithmeticae von Carl Friedrich Gauß. In: Symposia Gaussiana, Conf. A. Berlin/New York
Wußing, H. 1999: Ars inveniendi – Leibniz zwischen Entdeckung, Erfindung und technischer Umsetzung. In: Wissenschaft und Weltgestaltung. Internationales Symposion zum 350. Geburtstag von Gottfried Wilhelm Leibniz vom 9. bis 11. April 1996 in Leipzig. Hg.: K. Nowak/H. Poser. S. 231–253 Hildesheim/Zürich/New York

Wußing, H. 1999: Zur Geschichte der Polytechnischen Gesellschaft zu Leipzig (1825–1844). Eine Bürgerinitiative zu Beginn der Industrialisierung Sachsens. In: Sitzungsber. Sächs. Akad. Wiss. Math.- Nat. Klasse.Bd. 127. Heft 3 (1999), S. 3–21

Wußing, H. 2002: Die Große Erneuerung. Basel/Boston/Berlin

Wußing, H. (o.J.): Bernard Bolzano und die Grundlegung der Analysis. In: NTM. 1. Jahrgang, Heft 3. S. 57–73

XU Yibao 2003: Bertrand Russell and the Introduction of Mathematical Logic in China. In: History and Philosophy of Logic. 24 (3). S. 181–196

Yaglom, I. M. 1988: Felix Klein und Sophus Lie. Evolution of the Idea of Symmetry in the Nineteenth Century. Boston

Yandell, B. 2001: The Honors Class. Hilbert's Problems and Their Solvers. Peters. Natick (Massachusetts)

Yavetz, I. 1995: From Obscurity to Enigma: The Work of Oliver Heaviside, 1872–1889. Basel

Youschkevitch, A. P. 1976: The Concept of Function up to the Middle of the 19^{th} Century. In: Arch. Hist. Exact Sciences, 16 (1976), S. 37–85

Yushkevich, A. P. 1983: L. Euler's unpublished manuscript ‚Calculus differentialis', In: Euler-Festschrift, S. 161–170

Zeidler, E. (Hg.) 2003: Teubner-Taschenbuch der Mathematik. 2. Aufl.. Teubner. Wiesbaden.

Zeidler, E. 2006: Quantum Field Theory I: Basics in Mathematics and Physics. A Bridge between Mathematicians and Physicists. Heidelberg. Geplant ist eine sechsbändige Gesamtdarstellung zu folgenden Themen: Vol. II: Quantum Electrodynamics, Vol. III: Gauge Theory, Vol. IV: Quantum Mathematics, Vol. V: The Physics of the Standard Model, Vol. VI: Quantum Gravitation and String Theory

Zeidler, E. 2007: Die Faszination der Wechselwirkungen zwischen Mathematik und Naturwissenschaften. Jahresber. Dtsche. Math. Verein., 109. Band, Sonderheft 2007, S. 19–40

Zilsel, E. 1976: Die sozialen Ursprünge der neuzeitlichen Wissenschaft. Frankfurt am Main. (Aus dem Amerikanischen)

Zuse, K. 1980: Some Remarks on the History of Computing in Germany. In: A History of Computing in the Twentieth Century. New York

Zuse, K. 1986: Der Computer – mein Lebenswerk. 2. Aufl. Berlin/Heidelberg/New York/Tokyo

Zuse, K. 1993: Der Computer – Mein Lebenswerk. Dritte, unver. Aufl. Berlin/Heidelberg

Abbildungsverzeichnis

Für einige Abbildungen in diesem Buch ist es uns nicht gelungen, die Rechtsinhaber zu ermitteln, bzw. unsere Anfragen blieben unbeantwortet. Betroffene und Personen, die zur Klärung in einzelnen Fällen beitragen können, werden gebeten, sich beim Verlag zu melden.

9.0.1 Ludwig XIV.; Richelieu (Brfm. Frankreich 1970) 7
9.0.2 Sébastian le Prestre de Vauban (Brfm. Frankreich 1955); Jean Baptiste Colbert (Brfm. Frankreich 1944) 9
9.0.3 Voltaire in verschiedenen Lebensaltern (Brfm. Monaco 1994); Immanuel Kant [Wikimedia Commons] 11
9.0.4 Bibliothek der Klosteranlage Schussenried [Foto Alten] 12
9.0.5 Katharinenpalais in Puschkin bei St. Petersburg [Foto Alten] 13
9.0.6 Invalidendom und Pantheon in Paris [Foto Alten] 14
9.0.7 Johann Sebastian Bach (Gemälde von Elias Gottlob Haußmann), [Wikimedia Commons]; Noten und Titel aus Privatbesitz [Alten] 16
9.0.8 Goethe und Schiller, Denkmal [Foto Andreas Trepte, Marburg], (Lizenziert unter Creative Commons CC-BY-SA 2.5) 18
9.1.1 Titelblatt des Buches *Linear Perspective* von Brook Taylor 24
9.2.1 Stammbaum der Familie Bernoulli (nach Fleckenstein 1949) . 26
9.2.2 Jakob I Bernoulli, Johann I Bernoulli, Daniel I Bernoulli (mit freundlicher Genehmigung der Universitätsbibliothek Basel) . . . 27
9.2.3 Der Grabstein von Jakob Bernoulli mit der „logarithmischen“ Spirale im Münster von Basel [Foto Kahle] 28
9.2.4 Figur zum Brachystochronenproblem 29
9.2.5 Titelblatt des Hauptwerkes von Daniel Bernoulli: Hydrodynamica oder Erläuterungsschrift über die Kräfte und Bewegungen der Flüssigkeiten [Daniel Bernoulli, Basel 1738] 33
9.3.1 Leonhard Euler: Erinnerung und Würdigung in Briefmarken und Banknoten (DDR 1957, Schweiz 1957, Sowjetunion 1957, Schweiz 10 SFR) 35
9.5.1 Meridianmessung mit Maupertuis und Condamine (Brfm. Frankreich 1986) 42
9.5.2 Joseph Louis Lagrange, Kupferstich [Wikimedia Commons] . . 44
9.6.1 Leonhard Euler, Gemälde von Emanuel Handmann, 1753 (Kunstmuseum Basel), [Wikimedia Commons] 46
9.6.2 *„Der Eiserne Reiter“*, Reiterstandbild in St.Petersburg [Foto Wußing] 47

9.6.3 Euler-Ausstellung in der Humboldt-Universität Berlin [Foto Alten] 53
9.6.4 Jean Baptiste le Rond d'Alembert (Gemälde von Maurice Quentin de la Tour, [Wikimedia Commons]) 58
9.6.5 Titelblatt von Eulers Algebra 1770 63
9.6.6 Euler und der Polyedersatz (Brfm. DDR 1983); (Brfm. Schweiz 2007) 67
9.6.7 Topologische Struktur Königsbergs mit dem Pregel und 7 Brücken (Graphik aus: König, Dénes: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Teubner Archiv zur Mathematik, Bd. 6 c 1986 BSB, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig) 67
9.6.8 Grabmal Eulers in St. Petersburg ([Wikimedia Commons, Pausanias2], lizenziert unter: Creative Commons cc-by-sa 2.0) 69
9.7.1 Kavalier der Festungsmauer von Valletta, Malta [Foto Alten] 72
9.7.2 Saccherisches Viereck 73
9.8.1 Titelblatt der *Ars conjectandi* von 1713 [Wikimedia Commons] 80
9.8.2 Jakob Bernoulli (Brfm. Schweiz 1994) 81
9.8.3 Skizze zum Nadelproblem 82
9.9.1 Buffon; Voltaire; Montesquieu (Brfm. Frankreich 1949, 1978, 1949) 83
9.9.2 Titelseite der *Encyclopédie* von d'Alembert und Diderot, Paris 1751 85

10.0.1 Die Quadriga auf dem Brandenburger Tor in Berlin [Foto Alten] 90
10.0.2 Die Isaaks-Kathedrale in St. Petersburg (o. li.), die Akademie der „Athener Trias" (o. re.), das Parlamentsgebäude in Budapest (u. li.), die Sacre Coeur in Paris (u. re.) [Foto Alten] 91
10.0.3 „Napoleon I. auf dem Kaiserthron" (o. li.), (J. Auguste-Dominique Ingres, 1806) [Wikimedia Commons]; „Garten des Ariost" (Ausschnitt, o. re.), (Anselm Feuerbach 1863) [Schack-Galerie München / Wikimedia Commons, GNU-FDL]; „Kreidefelsen auf Rügen" (u. li.), (Caspar David Friedrich, um 1818) [Museum Oskar Reinhart, Winterthur / Wikimedia Commons, GNU FDL]; „Impression, soleil levant" (Ausschnitt, u. re), (Monet 1872) [Musée Marmottan, Paris / Wikimedia Commons] 93
10.0.4 Giuseppe Verdi und Richard Wagner [Wikimedia Commons] . 95
10.0.5 „Der arme Poet" von Carl Spitzweg [Neue Pinakothek München, Foto Alten] 97

10.0.6 Dampfbetriebenes Schöpfwerk (Brfm. Niederlande 1987), Stephensons Lokomotive (Brfm. GB 1975) 98
10.0.7 Maschinenhalle bei der Weltausstellung in Paris 1889 [Wikimedia Commons] 99
10.0.8 Der Eiffelturm in Paris [Foto Alten] 100
10.0.9 Industriedenkmäler in Großbritannien (Brfm. GB 1990) 101
10.0.10 Mathew Boulton, James Watt, Erasmus Darwin [Wikimedia Commons] 103
10.0.11 Telegraph auf dem Louvre zu Paris (aus [Abhandlungen von der Telegraphie; Berlin, Carlsruhe, Frankfurt am Main und Leipzig 1794 und 1795, Reprint 1986]); Telegraphenlinie Berlin–Coblenz 1833 (Brfm. DB Berlin 1983) 105
10.0.12 Einführung des metrischen Systems in Frankreich 1799; Industrieausstellung 1806 (Brfm. Frankreich 1954, 1973) 108
10.0.13 Göltzschtalbrücke [Foto Gottwald] (Brfm. DDR 1976) 111
10.0.14 Franz Reuleaux, Ferdinand Redtenbacher, Anton Zeuner [Wikimedia Commons] 112
10.0.15 Prospekt für den seit 1885 entwickelten dreirädrigen Motorwagen von Benz (1888) 114
10.0.16 Wilhelm v. Humboldt und Alexander v. Humboldt [Foto Alten] 115
10.0.17 Gründung der Royal Astronomical Society (Brfm. GB 1970) . 116
10.0.18 Die Differenzmaschine von Babbage 1833 [Science Museum London / Science & Society Picture Library] 119
10.0.19 Konstruktionszeichnung zur Analytical Engine von Babbage Aus [The Origins of Digital Computers 1973, S. 10] 122
10.1.1 Pierre Simon Laplace [Wikimedia Commons] 125
10.1.2 Diagramm zum Carnotschen Kreisprozess von R. Clausius, gezeichnet nach [Poggendorffs Ann. Physik u. Chemie (93) 1854, S. 489] 128
10.1.3 Lord Kelvins Laboratorium um 1900; Kelvin am Kompass [University of Glasgow; http://www.physics.gla.ac.uk/∼macvicar/KelvinWWW/] 129
10.1.4 Max Planck, Gustav Robert Kirchhoff [Wikimedia Commons] 129
10.1.5 James C. Maxwell (Brfm. Nicaragua 1971), Heinrich Hertz (Brfm. ČSSR 1959) 130
10.1.6 Hermann v. Helmholtz, George Gabriel Stokes [Wikimedia Commons] 131
10.2.1 Gaspard Monge [Wikimedia Commons] 133
10.2.2 „Die Bastille in den ersten Tagen ihrer Zerstörung“ Ölgemälde von Hubert Robert [Musée Carnavalet, Paris; Wikimedia Commons] 134

10.2.3 Verkündigung der Menschenrechte [Musée Carnavalet, Paris; Wikimedia Commons] 135
10.2.4 Titelblatt des *Traité des propriétés projectives des figures* (1822) (mit freundlicher Genehmigung: [Universitäts- und Landesbibliothek Straßburg]) 140
10.2.5 Jean-Victor Poncelet, August Ferdinand Möbius [Wikimedia Commons] 141
10.2.6 Turm der Pleißenburg (Historischer Stich, Privatbesitz Wußing) . 144
10.2.7 Möbiusband als Skulptur vor der Deutschen Bank in Frankfurt [Foto Wesemüller-Kock], eingefügt Möbiusband auf Briefmarke (Brfm. Brasilien 1973) 145
10.2.8 Farkas (Wolfgang) Bolyai, János (Johann) Bolyai [Wikimedia Commons] 147
10.2.9 Carl Friedrich Gauß, Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski [Wikimedia Commons] 153
10.2.10 Denkmal von Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski in Kasan [Foto Schreiber] 156
10.2.11 Bernhard Riemann in jungen Jahren [Wikimedia Commons] . 159
10.2.12 Titelblatt *Bernhard Riemann's Gesammelte Mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass* (1892) 161
10.2.13 Kleins Modell einer ebenen hyperbolischen Geometrie 164
10.2.14 Titelblatt des Inaugural-Vortrages von Felix Klein 168
10.2.15 Felix Klein, David Hilbert [Wikimedia Commons] 172
10.2.16 Titelblatt der *Grundlagen der Geometrie* von D. Hilbert . . 175
10.3.1 Geburtshaus von Carl Friedrich Gauß in Braunschweig [Historische Postkarte, Foto vor 1914; Wikimedia Commons] 179
10.3.2 Gauß und die Konstruktion des 17-Ecks mit Zirkel und Lineal (Brfm. DDR 1977); 17-Eck am Gauß-Denkmal in Braunschweig [Foto Wesemüller-Kock] 181
10.3.3 Aufzeichnungen im Tagebuch von Gauß (von Doppelseite 6) [SUB digital, Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek, Göttingen 2005] 183
10.3.4 Gauß in jungen Jahren; Unterschrift von Gauß [Wikimedia Commons] 184
10.3.5 Gaußsche Zahlenebene (Ausschnitt aus Briefmarke BRD 1977) . 186
10.3.6 Niels Henrik Abel (Brfm. Norwegen 2002) 190
10.3.7 Abel-Denkmal in Oslo [Foto Alten] 192
10.3.8 Niels Henrik Abel: Gedenkstein und Grabmal [Foto Schlote] 194
10.3.9 Evariste Galois (Brfm. Frankreich 1984); Porträt von Galois [Wikimedia Commons] 196
10.3.10 William Rowan Hamilton (Porträt) [Wikimedia Commons]; Quaternionen (Irland 1983) 201
10.3.11 Trinity College in Dublin [Foto Alten] 202

10.3.12 Arthur Cayley, George Boole [Wikimedia Commons] 205
10.3.13 Hermann Graßmann, Heinrich Weber [Wikimedia Commons] . 207
10.4.1 Gauß-Denkmal in Braunschweig [Foto Wesemüller-Kock] 211
10.4.2 Gauß auf der Terrasse der Göttinger Sternwarte [http://www.math.uni-hamburg.de/spag/ign/bild/gauss-stw.jpg] . . . 212
10.4.3 Satellitenaufnahmen von den Planetoiden Ceres und Vesta [Hubble-Weltraumteleskop 23.01.2004, 14.05.2007, NASA, ESA; Wikimedia Commons] 213
10.4.4 August Leopold Crelle [Wikimedia Commons]; Titelblatt von Crelles *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Bd. 1, 1826 215
10.4.5 Gedenkplatte für George Green in der Westminster Abbey London [Foto Wußing] 216
10.4.6 Elektromagnetischer Telegraph von Gauß und Weber (Gauß-Stube in Dransfeld/Nds.) [Foto Dierks] 217
10.4.7 Abbildung zur Erfindung des Telegraphen (Ausschn. aus historischer Postkarte) [http://www.math.uni-goettingen.de/skraemer/gauss/denkmal.html] 218
10.5.1 Titelblatt der *Disquisitiones arithmeticae* von Gauß (mit freundlicher Genehmigung der [Universitätsbibliothek Braunschweig]); Titelblatt einer deutschen Übersetzung mehrerer Werke von Gauß 219
10.5.2 Johann Peter Gustav Dirichlet, Ernst Eduard Kummer (Portraits übernommen aus: [Wikimedia Commons]) 222
10.5.3 Leopold Kronecker [Wikimedia Commons]; [http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/PictDisplay/Kronecker.html] 225
10.5.4 Richard Dedekind (Brfm. DDR 1981); Dedekind-Gedenktafel an der Technischen Universität Braunschweig [Foto Löwen] . 226
10.5.5 Richard Dedekind (Ölgemälde im Forum-Gebäude der TU Braunschweig) [Foto Wesemüller-Kock] 227
10.5.6 Die ersten Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion auf der „kritischen Graden“, nach [Wolfram Research Inc. 1990] 229
10.5.7 Ferdinand Lindemann, Charles Hermite [Wikimedia Commons]230
10.6.1 Jean le Rond d'Alembert (Ausschn. historischer Stich von Nicolas-René Jollain), Leonhard Euler [Wikimedia Commons] . . . 234
10.6.2 „Sägeblattkurve“ 235
10.6.3 Augustin Louis Cauchy, Hermann Hankel [Wikimedia Commons] 241
10.6.4 Jean Baptiste Joseph Fourier [Wikimedia Commons]; Portal der ehemaligen École Polytechnique im Quartier Latin in Paris [Foto Jastrow, Wikimedia Commons] 243
10.6.5 Titelblatt der *Théorie analytique de la chaleur* von Fourier, Paris 1822 245

10.6.6 Titelblatt von *A. L. Cauchy's Lehrbuch der algebraischen Analysis*, Königsberg 1828 (Privatbesitz Alten) 248
10.6.7 Cauchy mit dem Residuensatz (Brfm. Frankreich 1989) 252
10.6.8 Bernard Bolzano [Wikimedia Commons]; (Brfm. ČSSR 1981) . . . 254
10.6.9 Figur zur Funktion von Bolzano 255
10.6.10 Carl Gustav Jacob Jacobi, Niels Henrik Abel [Wikimedia Commons] 257
10.6.11 Bernhard Riemann [Bildarchiv UB Leipzig] 261
10.6.12 Riemannsche Fläche zur Funktion $w = \sqrt{z}$ 262
10.6.13 Figuren zum Riemannschen Integral: oben „schulmäßig", unten gemäß der Originaldefinition 265
10.6.14 Riemanns Grabtafel auf dem Friedhof von Selasca [Foto Reich] 268
10.6.15 Richard Dedekind, Karl Weierstraß [Wikimedia Commons] . . 270
10.6.16 Figuren zur analytischen Fortsetzung mit dem Kreiskettenverfahren 273
10.6.17 Sofia Kowalewskaja [Wikimedia Commons]; Anfang eines Briefes von S. Kowalewskaja zur Rotation starrer Körper (Brief aus dem Archiv Mittag-Leffler-Institut) 277
10.7.1 Karikatur eines Roulettespiels um 1800 [Wikimedia Commons] 281
10.7.2 Pierre Simon de Laplace, Siméon Denis Poisson [Wikimedia Commons] 282
10.7.3 Pafnuti Lwowitsch Tschebyschew (Brfm. UdSSR 1946); Alexander Michailowitsch Ljapunow (Brfm. UdSSR 1957) . . . 285
10.7.4 Alter 10-DM Schein mit Gauß 287
10.7.5 Heliotrop (Sonnenwender) von Gauß (Gauß-Stube in Dransfeld) [Foto Dierks] 288
10.7.6 Friedrich Wilhelm Bessel, Adrien-Marie Legendre [Wikimedia Commons] 289
10.8.1 Tschebyschew [Bildarchiv Universitätsbibliothek Leipzig]; Ostrogradski [Wikimedia Commons] 292
10.8.2 Sir Walter Raleigh (Brfm. UK 1976); Benjamin Banneker (USA 1980) 294
10.8.3 Die von Jefferson ausgearbeitete „Declaration of Independence" wird dem Kontinentalkongress vorgelegt (Gemälde von Trumbull 1816) [Wikimedia Commons] 297
10.8.4 Bostoner Teaparty (Brfm. USA 1973) 298
10.8.5 Benjamin Peirce, James Joseph Sylvester [Wikimedia Commons] 300
10.8.6 Eliakim Hastings Moore, Oswald Veblen, Oskar Bolza [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk]; George David Birkhoff [Wikimedia Commons] 302

10.8.7 Enrico Betti, Luigi Cremona, Eugenio Beltrami [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk]; Felice Casorati [Wikimedia Commons] 305
10.8.8 Ulisse Dini, Cesare Arzelà, Luigi Bianchi [Wikimedia Commons] 306
10.8.9 Guido Castelnuovo [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/PictDisplay/Castelnuovo.html]; Vito Volterra [Wikimedia Commons] 308
10.8.10 Gründungsmitglieder der DMV [http://www.dmv-abiturpreis.de/images/stories/Bilder/gruender.jpg] 311

11.0.1 Türme der *Sagrada Familia* in Barcelona; Jugendstilfassade eines Wohnhauses in der Albertstr. in Riga [Foto Alten] 319
11.0.2 „Meisterhäuser“ der Bauhaus-Architektur in Dessau [Foto Alten] 320
11.0.3 Sonnenuntergang über dem Tetraeder von Bottrop [Foto Wesemüller-Kock] 321
11.0.4 Gläserne Pyramide über dem Eingang zum Louvre, Paris [Foto Alten] 321
11.0.5 „Millennium Dome“ an der Themse [Foto Alten] 322
11.0.6 Das extravagante Hotel Burj Al Arab in Dubai [Foto Alten]; die 2001 zerstörten Twin Towers des World-Trade-Centers in der „alten“ Skyline von New York [Foto Wesemüller-Kock] . 322
11.0.7 The Thames Barrier [Foto Alten] 323
11.0.8 Das Guggenheim-Museum in Bilbao [Foto Alten] 324
11.0.9 Naturalistische Plastiken von G. Vigeland im Frogner-Park Oslo; die Nanas von Niki de Saint Phalle am Hohen Ufer in Hannover [Foto Alten] 325
11.0.10 Der Schrei von Edward Munch und eine sozialkritische Karikatur dieses Bildes an einer Hauswand in Oslo(Munch–Museum) [Foto Alten] 326
11.0.11 *Picasso* – ein Portrait von Juan Gris (1887–1922) aus dem Jahre 1912 [Art Institute of Chicago, Wikimedia Commons]; *Grand Nu au Fauteuil Rouge* von Pablo Picasso (Picasso–Museum, Paris) [Foto Alten] 327
11.0.12 Joan Miró: Kirchenfenster in St-Paul-de-Vence [Foto Pom^2; Creative Commons Attribution ShareAlike 3.0 Unported License] . . 327
11.0.13 *Suprematism (Supremus No. 58)* von Kasimir Malewitsch 1916 (Museum of Art, Krasnodar); *Red Oval* – Ausschnitt aus einem Bild von Wassily Kandinsky (Guggenheim-Museum New York) [Wikimedia Commons] 328

11.0.14 *Wohnen unterm Regenturm* – „Hundertwasserhaus“ in Plochingen von F. Hundertwasser (1991–94) [Wikimedia Commons]; Ameisen auf der einseitigen Fläche des Möbiusbandes – M. C. Escher's „Möbius Strip II“ [© 2008 The M. C. Escher Company-Holland. All rights reserved. www.mcescher.com] 329
11.0.15 Unmögliche Figuren auf Briefmarken von M.C. Escher und Oscar Reutersvärd (Brfm. Österreich 1991, Schweden 1982) 330
11.0.16 Die Mandelbrot-Menge („Apfelmännchen“) und die Julia-Menge sind berühmte Beispiele der Fraktalgeometrie. (Brfm. Macao, China 2005) 330
11.0.17 Ein Beispiel für Formenreichtum bei Fraktalen der Mandelbrotmenge (erstellt mit „Fractalizer“) [Wesemüller-Kock] . 331
11.0.18 Claude Debussy [Foto Felix Nadar, Wikimedia Commons], Maurice Ravel [Wikimedia Commons] 332
11.0.19 Igor Strawinski [Wikimedia Commons], Arnold Schönberg [Foto Florence Homolka, Wikimedia Commons] 333
11.0.20 Szene aus dem „Leben des Galilei“ von Bertolt Brecht. Galilei am Fernrohr (Brfm. DDR 1988); Kurt Tucholski [Sonja Thomassen, Wikimedia Commons, GNU-FDL] 336
11.0.21 Eingang zum Thomas-Mann-Museum im Fischerdorf Nidden auf der Kurischen Nehrung [Foto Alten] 337
11.0.22 Heinrich Böll, Denkmal in Berlin von Wieland Förster [Foto Apper, Wikimedia Commons]; Günter Grass [Foto Udo Hesse] 337
11.0.23 F. Braun und G. Marconi erhielten 1909 den Nobelpreis für Physik (Brfm. USA 1973) 339
11.0.24 Diagramm zum rasanten Anstieg der mathematischen Publikationen nach dem Zweiten Weltkrieg. Aufgrund der im Zentralblatt für Mathematik aufgeführten Artikel erstellt von [Kaldewey] 341
11.0.25 Chaos und Fraktale: Erste Schritte zur Enstehung der Hilbert-Kurve, eines Baumfraktals, des Sierpiński-Dreiecks, eines Chaos-Spiels, der von Koch'schen Kurve, des Cantorschen Diskontinuums (Cantorsche „Wischmenge“) (Brfm. Macao, China 2005) 343
11.0.26 John D. Rockefeller [Wikimedia Commons] , Signet der Rockefeller Foundation 348
11.0.27 George David Birkhoff, Salomon Lefschetz [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk] 350
11.0.28 Niels Bohr [Wikimedia Commons]; Hermann Weyl, Edmund T. Whittaker [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk] 351
11.0.29 Ausschnitt von der Homepage des Institut Henri Poincaré, Paris [http://www.ihp.jussieu.fr] 352

11.0.30 David Hilbert [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk]; Hermann Minkowski [Wikimedia Commons] 359
11.0.31 Das Haus von Albert Einstein in Caputh bei Berlin [Foto Alten] 364
11.0.32 Max Planck [Wikimedia Commons]; Emil Artin [MFO, Foto Konrad Jacobs] 367
11.0.33 Heutige Logos von den Internetseiten der GAMM (Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik) [http://www.gamm-ev.de] und der DMV (Deutsche Mathematiker-Vereinigung) [http://www.dmv-abiturpreis.de] 368
11.0.34 Titelblatt des Buches *Die völkische Verwurzelung der Wissenschaft* von L. Bieberbach 369
11.0.35 Atombombe „fat man“ und deren Explosion über Nagasaki [U.S. military, Department of Defense, 9. August 1945] . . 371
11.0.36 Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach (Schwarzwald) [Foto Helmut Kastenholz] 375
11.0.37 Windkanal der NASA 1957 (oben) [Source: NASA Center: Glenn Research Center; Image:C1957-45670; Date : 07/31/1957]; Windkanal, NASA 2002 (u. li.) (Langley's 8-Foot High Temperature Tunnel [NASA Photo by: Jeff Caplan/NASA Langley, Photo Number: ED04-0082-2]); Computer-Simulation eines Experimentes im Windkanal (u. re.) [NASA, Wikimedia Commons] 376
11.1.1 Georg Cantor (Das Bild wurde freundlicherweise von dem Universitätsarchiv Halle zur Verfügung gestellt. Signatur UA Halle:Rep. 40) 381
11.1.2 Erste Seite der *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* von Georg Cantor [Math. Ann. XLVI, 1895, S. 481ff.] 382
11.1.3 „Cantor-Würfel“ in Halle [Foto Richter] 385
11.1.4 Sir Bertrand Russell, Alfred North Whitehead [Wikimedia Commons] 390
11.1.5 Abraham Fraenkel, Ernst Zermelo [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk] 392
11.1.6 Unter dem Pseudonym Paul Mongré war Hausdorff auch Literat und Philosoph (Holzschnitt von H. A. Müller 1910); Felix Hausdorff (aus der Zeit zwischen 1913 und 1921), [Wikimedia Commons, GNU-FDL] 394
11.1.7 Auszug aus der ersten Seite des Werkes *Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen* von F. Hausdorff [Math. Annalen (65) 1908] 395

11.2.1 Die drei Scheiben der Wahrheitsmaschine von Ramón Llull (Klosterbibliothek des Santuari de Nostra Senyora de Cura, Mallorca) [Foto Alten] 397
11.2.2 Titelblatt des Hauptwerkes von G. Boole: *An Investigation of the Laws of Thought* (1854, Ausschnitt) 398
11.2.3 Giuseppe Peano [Wikimedia Commons], Bertrand Russell (Brfm. Indien 1972) 399
11.2.4 Augustus de Morgan, Charles Sanders Peirce [Wikimedia Commons] 400
11.2.5 Titelblatt der *Principia Mathematica* von Whitehead/Russell (1910) 401
11.2.6 Titelblatt der 6. Auflage des „Hilbert/Ackermann“: *Grundzüge der theoretischen Logik* (Ausschnitt) 404
11.2.7 Jan Brouwer [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk], (Brfm. Niederlande 2007) 405
11.3.1 Henri Lebesgue [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk], Émile Borel [Wikimedia Commons] 408
11.3.2 „Doubling the ball“ – eine Veranschaulichung des Banach-Tarski-Paradoxons (Eigenzeichnung nach: [Wikimedia Commons, GNU-FDL]) 409
11.3.3 Schema zur Entstehung der Funktionalanalysis nach [Siegmund-Schultze 1999, S. 488] 410
11.3.4 Stefan Banach, Wacław Sierpiński (Brfm. Polen 1982) 414
11.3.5 Polytechnische Hochschule in Lemberg [Foto Hofmann/Just] . 415
11.3.6 Friedrich Riesz [Wikimedia Commons], John von Neumann [U.S. Federal Government, Wikimedia Commons] 418
11.3.7 John von Neumann (Brfm. USA 2005), Albert Einstein (Brfm. Israel 1956) 420
11.3.8 Titelblatt *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* von John v. Neumann (in der Ausgabe des Springer Verlages. Berlin, Heidelberg, New York 1996) . 422
11.4.1 Helmut Hasse, Ernst Steinitz, Eliakim H. Moore, Edward V. Huntington, Leonard E. Dickson [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk]; Joseph H. M. Wedderburn [Wikimedia Commons] 425
11.4.2 Bartel L. van der Waerden bei einem Vortrag im Januar 1979 in der Universität Heidelberg [Foto Wohlfahrt]; Textauschnitt seines Vortrages zum 75-jährigen Bestehen der DMV am 13.IX.1965 in Freiburg i. Br. [Jahresber. DMV 68 (1966)] 426
11.4.3 Titelblatt *Moderne Algebra* von van der Waerden 427
11.4.4 Emmy Noether als junge Frau und im mittleren Alter [Wikimedia Commons], (mit freundlicher Genehmigung der Georg-August-Universität Göttingen) 429

11.4.5 Emmy Noether (aufgenommen im September 1930 von Helmut Hasse auf der gemeinsamen Fahrt über die Ostsee zur Tagung der DMV in Königsberg/Pr.) 431
11.4.6 Garrett Birkhoff [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk]; Saunders MacLane (mit freundlicher Genehmigung der University of Chicago) 434
11.4.7 Titelblatt *Foundations of Algebraic Geometry* von André Weil (mit freundlicher Genehmigung der Universitätsbibliothek Braunschweig) 436
11.4.8 André Weil, Hermann Weyl [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk] 439
11.5.1 Andrej Markow [Wikimedia Commons], Andrej Kolmogorow (MFO, Foto ID: 7493, Konrad Jacobs, Erlangen) 443
11.6.1 Rondell Göttinger Nobelpreisträger, angeordnet im „Gaußschen 17-Eck“ auf dem Stadtfriedhof Göttingen [Foto Wesemüller-Kock] 447
11.6.2 David Hilbert [Wikimedia Commons] 448
11.6.3 Mathematisches Institut in der Bunsenstraße in Göttingen [Foto Wesemüller-Kock] 450
11.6.4 Wilhelm Ackermann [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk]; Paul Bernays [ETH-Bibliothek Zürich, Bildarchiv] 451
11.6.5 Titelblatt der *Methoden der Mathematischen Physik* von R. Courant und D. Hilbert (Springer Verlag. Berlin, Heidelberg, New York, 3. Aufl. 1993) 455
11.6.6 Kurt Gödel (MFO, Foto ID: 1381, Konrad Jacobs, Erlangen); Alfred Tarski [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk] 460
11.6.7 Hans Magnus Enzensberger, *Der Zahlenteufel*, ein Kopfkissenbuch für alle, die Angst vor Mathematik haben, durchgehend farbig illustriert von Rotraut Susanne Berner, ©1997 Carl Hanser Verlag München 461
11.6.8 Hilberts Grab in Göttingen mit den berühmten Schlussworten seines Vortrages anlässlich seiner Emeritierung 1930 [Foto Wesemüller-Kock] 465
11.6.9 Hermann Minkowski [Wikimedia Commons]; Albert Einstein [Foto Albert-Einstein-Archiv, Jerusalem, Ferdinand Schmutzer, Wikimedia Commons] 466
11.6.10 Edmund Landau [Wikimedia Commons], Richard Courant [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk] 469
11.6.11 Courant als Frontsoldat, 1915. [Reid, C. 1976] 471
11.6.12 Courant Institute of Mathematics in New York (Auschnitt aus der Homepage) 472
11.7.1 Poincaré in verschiedenen Lebensaltern [Wikimedia Commons], (Brfm. Frankreich 1952) 474

11.7.2 Titelblatt von *La Science et l'Hypothèse* von H. Poincaré (frz. Erstaufl. 1902) 477
11.7.3 Jacques Salomon Hadamard [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk], [Wikimedia Commons] 479
11.7.4 École Normale Supérieure in Paris [Foto Alten] 481
11.7.5 Jean Cavaillès [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk]; Émile Borel (Brfm. Frankreich 1958) 482
11.7.6 Bourbaki Panorama in Luzern [Foto Alten] 483
11.7.7 Bourbaki-Kongress 1939 (v. l. n. r.): Simone Weil, Charles Pisot, André Weil, Jean Dieudonné, Claude Chabauty, Charles Ehresmann und Jean Delsarte; Bourbaki-Kongress 1951 [PlanetMath.org] 484
11.7.8 Jean Dieudonné, Henri Cartan [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk] 485
11.7.9 Godfrey H. Hardy, Srinivasa Ramanujan [Wikimedia Commons] 489
11.7.10 S. Mazurkiewicz, K. Kuratowski [Wikimedia Commons]; B. Knaster [http://www.matematycy.interklasa.pl/biografie/matematyk.php?str=knaster] 491
11.7.11 Einfluss-Skizze nach Demidow [Demidow 2004] 493
11.7.12 Alexander Ljapunow [Wikimedia Commons], Sergej L. Sobolew [http://www.ras.ru/win/db/show_per.asp?P=.id-52167.ln-en], Iwan M. Winogradow [http://www.ras.ru/win/db/show_ per.asp?P=.id-49897.ln-ru] 494
11.7.13 Nikolai J. Shukowski, Wladimir A. Steklow (Brfm. UdSSR 1963, 1973) 495
11.7.14 Nikolai Lusin [http://www.ras.ru/win/db/show_per.asp?P=.id-50921.ln-ru], Andrej A. Markow [http://www.ras.ru/win/db/show_ per.asp?P=.id-53175.ln-en.dl-.pr-inf.uk-0], Sergej Bernstein [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/PictDisplay/Bernstein_ Sergi.html] 497
11.7.15 Pavel S. Urysohn, Heinrich Hopf [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk]; Pavel S. Alexandrow (MFO, Foto ID: 46, Konrad Jacobs, Erlangen) 499
11.7.16 Juri Gagarin (Brfm. UdSSR 1991) 501
11.7.17 Mstislaw Wsewolodowitsch Keldysch, Sergej Pawlowitsch Koroljow, Sergej Wladimirowitsch Iljuschin (Brfm. UdSSR 1981, 1982, 1984) 502
11.8.1 Rechenmaschine von Leibniz [Nds. Landesbibliothek Hannover] 508
11.8.2 Multipliziermaschine von Leon Bollée (Stich aus der Zeit um 1890) [Wikimedia Commons] 510
11.8.3 Lochkarte für die Hollerith-Rechenmaschine [Wikimedia Commons] 511

11.8.4 Konrad Zuse [Zuse 1993] und seine Rechenmachine Z3 [Deutsches Museum München, GNU-FDL] 512
11.8.5 Aikens MARK I. [Zuse 1993, S. 68] 513
11.8.6 Charles P. Steinmetz, Lee de Forest: Erfindung der Triode (Brfm. USA 1973) 515
11.8.7 Die ENIAC von 1943 (U.S. Army Photo, US Federal government) 518
11.8.8 Gedenkpostkarte für Marian Rejewski (Polen 2005) 521
11.8.9 Transistoren AC126 und AF116 von Philips 1965 [Foto Wesenmüller-Kock], Transistoren um 2000 [Foto Seidel], verdichtete Schaltung (Brfm. USA 1973) 522
11.8.10 Start von Aplollo 8 (NASA); Apollo 11 auf dem Mond (NASA [Foto Armstrong]); „Erster Mann auf dem Mond“ (Brfm. USA 1969) 523
11.8.11 Der Schach spielende Türke des Ungarn Wolfgang von Kempelen (1734–1804) (Kupferstich aus dem Buch: Freiherr Joseph Friedrich zu Racknitz, Über den Schachspieler des Herrn von Kempelen, Leipzig u.Dresden 1789), (Brfm. Ungarn 1974) 530
11.8.12 Norbert Wiener (Brfm. Moldavien 1994) [Wikimedia Commons] . 531
11.8.13 Titelblatt von Wieners *Cybernetics* 533
11.8.14 Wieners Arbeiten bis 1930 (nach [Ilgauds 1980]) 536
11.8.15 Wieners Arbeiten bis zum Ende des zweiten Weltkrieges (nach [Ilgauds 1980]) 537
11.9.1 Vierfarbenkonstellation (nach einer Skizze im Brief von de Morgan an Hamilton); Heinrich Heesch [http://www.math-inf.uni-greifswald.de/mathematik+kunst/parkette.html] 539
11.9.2 Pierre de Fermat [Foto Martin Barner] 542
11.9.3 Andrew Wiles (copyright C.J. Mozzochi, Princeton N.J.), Briefmarken zum Großen Fermatschen Satz (Frankreich 2001, Tschechien 2000) 545
11.9.4 Christan Goldbachs Brief vom Juli 1742 an Euler [http://www.zahlenjagd.at/goldbach.html]; Eugene Charles Catalan (Gemälde von Emile Delperée 1884) [Wikimedia Commons] 548
11.9.5 Postwertzeichen zum internationalen Jahr der Mathematik 2000 551

12.0.1 „Krebsnebel“, Überreste einer Supernovaexplosion (NGC 1952 SST) [NASA, Wikimedia Commons] 555
12.1.1 Neptun mit dem Mond Triton; Neptun, der äußerste Planet unseres Sonnensystems (Voyager 2 [NASA, Wikimedia Commons]) 557
12.2.1 David Hilbert 1910 und 1937 [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk] 563

12.2.2 Gruppenbild mit „Computerpionieren“ des deutschen Sprachraums, (Konrad Zuse sitzt in der Mitte der vorderen Reihe) [Zuse 1993] 565
12.2.3 Ausschnitt des ATLAS-LHC Teilchenbeschleunigers im CERN Forschungszentrum, Genf [Foto Maximilien Brice/CERN] 566
12.2.4 Fraktale in der Natur, künstliche (Baumfraktale [Solkoll, Wikimedia Commons]) und natürliche (Romanesco, Brokoli [Foto John Sullivan, Wikimedia Commons]); Blitze weisen ähnliche Strukturen auf ([Foto Craig Jewell] Brisbane, Australien) 568
12.2.5 Albert Einstein (Brfm. Israel 2006) 569
12.2.6 Élie Cartan [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk], Sophus Lie [Wikimedia Commons] 570
12.2.7 Kiyoshi Ito [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk]; Max Born [Wikimedia Commons] 571
12.2.8 Algebraische Fläche „Sofa“ [Prof. Herwig Hauser, Wien] 572
12.2.9 Sir Michael Atiyah [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk], Edward Witten [Foto Ojan, Wikimedia Commons] 575
12.4.1 Videocassette mit Beiträgen zum *Clay Mathematics Institute Millennium Meeting* des Jahres 2000, Paris (Springer Verlag) 582

GNU Free Documentation License Version 1.2, November 2002 Copyright © 2000,2001,2002 Free Software Foundation, Inc. 51 Franklin St, Fifth Floor, Boston, MA 02110-1301 USA Everyone is permitted to copy and distribute verbatim copies of this license document, but changing it is not allowed.

Preamble

The purpose of this License is to make a manual, textbook, or other functional and useful document "free" in the sense of freedom: to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifying it, either commercially or noncommercially. Secondarily, this License preserves for the author and publisher a way to get credit for their work, while not being considered responsible for modifications made by others. This License is a kind of "copyleft", which means that derivative works of the document must themselves be free in the same sense. It complements the GNU General Public License, which is a copyleft license designed for free software. We have designed this License in order to use it for manuals for free software, because free software needs free documentation: a free program should come with manuals providing the same freedoms that the software does. But this License is not limited to software manuals; it can be used for any textual work, regardless of subject matter or whether it is published as a printed book. We recommend this License principally for works whose purpose is instruction or reference.

1. APPLICABILITY AND DEFINITIONS

This License applies to any manual or other work, in any medium, that contains a notice placed by the copyright holder saying it can be distributed under the terms of this License. Such a notice grants a world-wide, royalty-free license, unlimited in duration, to use that work under the conditions stated herein. The "Document", below, refers to any such manual or work. Any member of the public is a licensee, and is addressed as "you". You accept the license if you copy, modify or distribute the work in a way requiring permission under copyright law. A "Modified Version" of the Document means any work containing the Document or a portion of it, either copied verbatim, or with modifications and/or translated into another language. A "Secondary Section" is a named appendix or a front-matter section of the Document that deals exclusively with the relationship of the publishers or authors of the Document to the Document's overall subject (or to related matters) and contains nothing that could fall directly within that overall subject. (Thus, if the Document is in part a textbook of mathematics, a Secondary Section may not explain any mathematics.) The relationship could be a matter of historical connection with the subject or with related matters, or of legal, commercial, philosophical, ethical or political position regarding them. The "Invariant Sections" are certain Secondary Sections whose titles are designated, as being those of Invariant Sections, in the notice that says that the Document is released under this License. If a section does not fit the above definition of Secondary then it is not allowed to be designated as Invariant. The Document may contain zero Invariant Sections. If the Document does not identify any Invariant Sections then there are none. The "Cover Texts" are certain short passages of text that are listed, as Front-Cover Texts or Back-Cover Texts, in the notice that says that the Document is released under this License. A Front-Cover Text may be at most 5 words, and a Back-Cover Text may be at most 25 words. A "Transparent" copy of the Document means a machine-readable copy, represented in a format whose specification is available to the general public, that is suitable for revising the document straightforwardly with generic text editors or (for images composed of pixels) generic paint programs or (for drawings) some widely available drawing editor, and that is suitable for input to text formatters or for automatic translation to a variety of formats suitable for input to text formatters. A copy made in an otherwise Transparent file format whose markup, or absence of markup, has been arranged to thwart or discourage subsequent modification by readers is not Transparent. An image format is not Transparent if used for any substantial amount of text. A copy that is not "Transparent" is called "Opaque". Examples of suitable formats for Transparent copies include plain ASCII without markup, Texinfo input format, LaTeX input format, SGML or XML using a publicly available DTD, and standard-conforming simple HTML, PostScript or PDF designed for human modification. Examples of transparent image formats include PNG, XCF and JPG. Opaque formats include proprietary formats that can be read and edited only by proprietary word processors, SGML or XML for which the DTD and/or processing tools are not generally available, and the machine-generated HTML, PostScript or PDF produced by some word processors for output purposes only. The "Title

Page'' means, for a printed book, the title page itself, plus such following pages as are needed to hold, legibly, the material this License requires to appear in the title page. For works in formats which do not have any title page as such, ''Title Page'' means the text near the most prominent appearance of the work's title, preceding the beginning of the body of the text. A section ''Entitled XYZ'' means a named subunit of the Document whose title either is precisely XYZ or contains XYZ in parentheses following text that translates XYZ in another language. (Here XYZ stands for a specific section name mentioned below, such as ''Acknowledgements'', ''Dedications'', ''Endorsements'', or ''History''.) To ''Preserve the Title'' of such a section when you modify the Document means that it remains a section ''Entitled XYZ'' according to this definition. The Document may include Warranty Disclaimers next to the notice which states that this License applies to the Document. These Warranty Disclaimers are considered to be included by reference in this License, but only as regards disclaiming warranties: any other implication that these Warranty Disclaimers may have is void and has no effect on the meaning of this License.

2. VERBATIM COPYING

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or noncommercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept compensation in exchange for copies. If you distribute a large enough number of copies you must also follow the conditions in section 3. You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you may publicly display copies.

3. COPYING IN QUANTITY

If you publish printed copies (or copies in media that commonly have printed covers) of the Document, numbering more than 100, and the Document's license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts: Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers in addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects. If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages. If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a computer-network location from which the general network-using public has access to download using public-standard network protocols a complete Transparent copy of the Document, free of added material. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public. It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document.

4. MODIFICATIONS

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing distribution and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In addition, you must do these things in the Modified Version: [A.] Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission. [B.] List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has fewer than five), unless they release you from this requirement. [C.] State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher. [D.] Preserve all the copyright notices of the Document. [E.] Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices. [F.] Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below. [G.] Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document's license notice. [H.] Include an unaltered copy of this License. [I.] Preserve the section Entitled ''History'', Preserve its Title, and add to it an item stating at least the title, year, new authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section Entitled ''History'' in the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence. [J.] Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions it was based on. These may be placed in the ''History'' section. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission. [K.] For any section Entitled ''Acknowledgements'' or ''Dedications'', Preserve the Title of the section, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein. [L.] Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles. [M.] Delete any section Entitled ''Endorsements''. Such a section may not be included in the Modified Version. [N.] Do not retitle any existing section to be Entitled ''Endorsements'' or to conflict in title with any Invariant Section. [O.] Preserve any Warranty Disclaimers. If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version's license notice. These titles must be distinct from any other section titles. You may add a section Entitled ''Endorsements'', provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties–for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard. You may add a passage of up to five words as a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one. The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version.

5. COMBINING DOCUMENTS

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice, and that you preserve all their Warranty Disclaimers. The combined work need only contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number. Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work. In the combination, you must combine any sections Entitled ''History'' in the various original documents, forming one section Entitled ''History''; likewise combine any sections Entitled ''Acknowledgements'', and any sections Entitled ''Dedications''. You must delete all

sections Entitled "Endorsements".

6. COLLECTIONS OF DOCUMENTS

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects. You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document.

7. AGGREGATION WITH INDEPENDENT WORKS

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, is called an "aggregate" if the copyright resulting from the compilation is not used to limit the legal rights of the compilation's users beyond what the individual works permit. When the Document is included in an aggregate, this License does not apply to the other works in the aggregate which are not themselves derivative works of the Document. If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one half of the entire aggregate, the Document's Cover Texts may be placed on covers that bracket the Document within the aggregate, or the electronic equivalent of covers if the Document is in electronic form. Otherwise they must appear on printed covers that bracket the whole aggregate.

8. TRANSLATION

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4. Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License, and all the license notices in the Document, and any Warranty Disclaimers, provided that you also include the original English version of this License and the original versions of those notices and disclaimers. In case of a disagreement between the translation and the original version of this License or a notice or disclaimer, the original version will prevail. If a section in the Document is Entitled "Acknowledgements", "Dedications", or "History", the requirement (section 4) to Preserve its Title (section 1) will typically require changing the actual title.

9. TERMINATION

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided for under this License. Any other attempt to copy, modify, sublicense or distribute the Document is void, and will automatically terminate your rights under this License. However, parties who have received copies, or rights, from you under this License will not have their licenses terminated so long as such parties remain in full compliance.

10. FUTURE REVISIONS OF THIS LICENSE

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See http://www.gnu.org/copyleft/. Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License "or any later version" applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation.

Personenverzeichnis mit Lebensdaten

Bei den Lebensdaten bedeutet „ca.“ grob geschätzt, „um 370“ +(−) kleine Fehler, „370?“ wahrscheinlich 370, aber es ist nicht ganz sicher.

Abbe, Ernst (1840–1905) 288
Abel, Niels Henrik (1802–1829) 53, 178, 188–191, 193, 194, 197–199, 206, 236, 253, 256–259
Ackermann, Wilhelm (1896–1962) 451, 459, 513
Adams, John (1735–1826) 557
Adelman, Uri (1958–2004) 561
Adrian, Robert (1775–1843) 299
Ahlfors, Lars Valerian (1907–1996) 352, 353, 356
Aichinger, Ilse (*1921) 336
Aiken, Howard Hathaway (1900–1973) 512, 514, 516, 517
Albéniz, Isaac Manuel Francisco (1860–1909) 333
Aleksandrov, Pavel Sergeevič *siehe* Alexandrow(auch Alexandroff), Pawel Sergejewitsch
Alembert, Jean-Baptiste le Rond d' (1717–1783) 10, 40, 41, 44, 54, 58, 59, 70, 84, 125, 126, 134, 184, 233–235
Alexander, James Waddell (1888–1971) 350, 419
Alexandrow (auch Alexandroff), Pawel Sergejewitsch (1896–1982) 345, 352, 353, 428, 431, 498, 499
Alighieri, Dante (1265?–1321) 77
Ambrosio, Ubiratan D' (*1932) 358
Ampère, André Marie (1775–1836) 130, 139, 236
Anosow, Dmitri Victorowitsch (*1936) 362
Apostel, Hans-Erich (1901–1972) 334
Appel, Kenneth (*1932) 540
Arago, François (1786–1853) 105
Archimedes von Syrakus, (287–212 v.Chr.) 230, 254, 378, 554, 583
Aristoteles (384–322 v. Chr.) 76, 380, 396, 509
Arkwight, Sir Richard (1732–1792) 102
Arnault, Antoine (1612–1693) 282
Arnold, Vladimir Igorevič *siehe* Arnold, Wladimir Igorjewitsch
Arnold, Wladimir Igorjewitsch (*1937) 361, 500
Arp, Hans (1887–1966) 335
Arrow, Kenneth (*1921) 561
Artin, Emil (1898–1962) 65, 345, 361, 362, 366, 423, 424, 427, 434, 484
Arzelà, Cesare (1847–1912) 306, 307
Ashtekar, Abhay Vasant (*1949) 577
Asplund, Eric Gunnar (1885–1940) 320
Atiyah, Sir Michael Francis (*1929) 344, 356, 358, 575

Babbage, Charles (1791–1871) 25, 116–124, 509, 515, 530
Bach, Johann Sebastian (1685–1750) 15, 332, 554, 586
Bachmann, Ingeborg (1926–1973) 336–338
Bacon, Francis (1561–1626) 10, 381, 585
Bailly, Jean-Sylvain (1736–1793) 104
Baire, René-Louis (1874–1932) 480
Baker, Alan (*1939) 356
Ball, Hugo (1886–1927) 335
Baltzer, Richard (1818–1887) 163
Balzac, Honoré de (1799–1850) 96
Banach, Stefan (1892–1945) 345, 353, 414–418, 490
Banneker, Benjamin (1731–1806) 294, 298
Bardeen, John (1908–1991) 522
Barlach, Ernst (1870–1938) 324, 335
Barrow, Isaac (1630–1677) 21, 25, 27
Bartels, Christian Martin (1769–1836) 153
Bartok, Bela (1881–1945) 333
Baudelaire, Charles (1821–1867) 96

Bayes, Thomas (1702–1761) 81, 284
Becher, Johannes Robert (1891–1951) 335, 336
Beckett, Samuel Barclay (1906–1989) 338
Beckmann, Max (1884–1950) 326
Becquerel, Antoine-Henry (1852–1908) 475
Bellini, Vincenzo (1797–1835) 94
Beltrami, Eugenio (1835–1900) 164, 304, 305, 309, 475
Benn, Gottfried (1886–1956) 335
Bense, Max (1910–1990) 338
Benz, Carl (1844–1929) 111, 113, 114
Berg, Alban (1885–1935) 332
Berkeley, George (1685–1753) 23
Berlioz, Hector (1803–1869) 94
Bernays, Paul Isaac (1888–1977) 348, 364, 393, 451
Bernoulli, Daniel I (1700–1782) 23, 25, 32, 33, 40, 41, 43, 48, 235, 286, 383, 547, 558
Bernoulli, Jacob I (1654–1705) 25–32, 34, 39, 46, 78–81, 280, 283
Bernoulli, Johann I (1667–1748) 23, 25–32, 34, 39, 41, 47, 52, 55, 57
Bernoulli, Johann II (1710–1790) 30, 32, 47
Bernoulli, Johann III (1744–1807) 32, 62, 74
Bernoulli, Nicolaus I (1687–1759) 32, 55, 79
Bernoulli, Nicolaus II (1695–1726) 32, 47, 48
Bernoulli, Nikolaus (1623–1708) 25
Bernstein, Felix (1878–1956) 362, 364, 384, 442, 470
Bernstein, Sergej Natanowitsch (1880–1968) 442, 496
Bernštejn, Sergej Natanovič *siehe* Bernstein, Sergej Natanowitsch
Berthollet, Claude Louis (1748–1822) 134, 136
Bertrand, Joseph Louis François (1822–1900) 198, 293, 305, 309
Berzelius, Jöns Jacob (1779–1848) 216
Besicovič, Abram Samoilovič *siehe* Besikowitsch, Abram Samoilowitsch
Besikowitsch, Abram Samoilowitsch (1891–1970) 352, 353
Bessel, Friedrich Wilhelm (1784–1846) 40, 117, 124, 149, 250, 288
Betti, Enrico (1823–1892) 198, 303–307, 309, 345
Bézout, Etienne (1730–1783) 178, 200, 299
Bianchi, Luigi (1856–1928) 303, 306, 307, 345
Bieberbach, Ludwig Georg Elias Moses (1886–1982) 362, 363, 368–370, 432, 468, 469
Biermann, Karl Wolf (*1936) 338
Biot, Jean-Baptiste (1774–1862) 117
Birkhoff, Garrett (1911–1996) 345, 421, 434, 439, 487
Birkhoff, George David (1884–1944) 302, 350, 351, 407, 422, 539
Bizet, Georges (1838–1875) 94
Björnson, Björnstjerne (1832–1910) 97
Blacher, Boris (1903–1975) 334
Bliss, Gilbert Ames (1876–1951) 350
Blumenthal, Otto (1876–1944) 363, 470
Blunck, Hans Friedrich (1888–1961) 336
Bošković, Rudjer Josip (1711–1787) 286
Bochner, Salomon (1899–1982) 352
Böcklin, Arnold (1827–1901) 92
Bohr, Harald August (1887–1951) 349, 351, 368, 422, 468, 532
Bohr, Niels Henrik David (1885–1962) 348, 349, 363, 372, 421, 515, 535, 554
Bois-Reymond, Emil Heinrich Du (1818–1896) 463
Bois-Reymond, Paul Du (1831–1889) 279, 346
Bolibruch, Andrej Andrejewitsch (1950–2003) 362
Böll, Heinrich Theodor (1917–1985) 336–338

Bollée, Leon (1870–1913) 509
Bolyai, Farkas (Wolfgang) (1775–1856) 147, 148, 151–153, 182
Bolyai, János (Johann) (1802–1860) 151–153, 158, 159, 583
Bolza, Oskar (1857–1942) 302
Bolzano, Bernard (1781–1848) 60, 253–256, 269, 271, 278, 379, 380, 460
Bombelli, Rafael (1526–1572) 64
Bombieri, Enrico (*1940) 356
Bonaparte, Napoleon (1769–1821) 104, 116, 125, 126, 136, 139, 182, 189, 221, 242, 252, 554
Bonatz, Karl Nikolaus (1882–1951) 318
Boole, George (1815–1864) 142, 198, 203, 205, 377, 398, 402, 441, 442
Booß-Bavnbek, Bernhelm 372
Borchardt, Rudolf (1877–1945) 335
Borcherds, Richard E. (*1959) 356
Borel, Felix Edouard Justin Émile (1871–1956) 53, 267, 302, 306, 474, 480, 482, 497
Borelli, Giovanni Alfonso (1608–1679) 26, 126
Born, Max (1882–1970) 200, 348, 364, 456, 466, 515, 571
Bos, Henk (1901–1979) 358
Bossut, Charles (1730–1814) 133, 134
Bötticher, Hans (Pseudonym: Joachim Ringelnatz) (1883–1934) 335
Boulez, Pierre (1925–1986) 334
Boulton, Matthew (1728–1809) 103
Bourbaki, Charles-Denis (1816–1897) 434, 484
Bourbaki, Nicolas 483–487, 533
Bourgain, Jean (*1954) 356
Bowditch, Nathaniel (1773–1838) 124, 126, 299
Brahms, Johannes (1833–1897) 94
Braque, Georges (1882–1963) 326
Braschman, Nikolaus D. (1796–1866) 291, 492
Brašman, Nikolaus D. *siehe* Braschman, Nikolaus D.
Brattain, Walter Houser (1902–1987) 522
Braun, Wernher von (1912–1977) 503, 514
Braunschweig, Herzog Carl Wilhelm Ferdinand von (1735–1806) 182
Brecht, Bertolt (1898–1956) 334–336
Bredel, Willi (1901–1964) 336
Brentano, Clemens (1778–1842) 95
Brianchon, Charles-Julien (1783–1864) 138, 141
Bricard, Raoul 361
Briggs, Henry (1561–1630) 53
Brill, Alexander Wilhelm von (1842–1935) 345
Brioschi, Francesco (1824–1897) 303, 304, 345
Brisson, Barnabé (1777–1828) 251
Britten, Edward Benjamin (1913–1976) 333
Brouncker, William (ca. 1620–1684) 20
Brouwer, Luitzen Egbertus Jan (1881–1966) 405, 406, 492, 498
Brown, Earle (1926–2002) 335
Browning, Robert (1812–1889) 96
Bruckner, Anton (1824–1896) 94
Bruno, Giordano (1548–1600) 378
Bruns, Heinrich (1848–1919) 285
Büchner, Georg (1813–1837) 96
Buffon, Comte de (1707–1788) 82
Bunjakovskij, Viktor Jakovlevič *siehe* Bunjakowski, Viktor Jakowlewitsch
Bunjakowski, Viktor Jakowlewitsch (1804–1889) 82, 127, 131, 163, 293
Burali-Forti, Cesare (1861–1931) 389
Burkhardt, Heinrich (1861–1914) 345
Burnside, William Snow (1852–1927) 345
Bush, Vannevar (1890–1974) 515
Byron(Countess of Lovelace), Ada Augusta (1815 - 1852) 123
Byron, Lord George (1788–1824) 96
Bürgi, Jost (1552–1632) 53

Cage, John Milton (1912–1992) 335
Calder, Alexander (1898–1976) 324
Cannon, Walter (1871–1945) 531

Cantor, Georg Ferdinand Ludwig Philipp (1845–1918) 224, 232, 240, 241, 256, 267, 269, 275, 278, 345, 361, 377, 379–381, 383–391, 393, 395, 396, 451, 457, 464, 476
Čaplygin, Sergej Alekseevič *siehe* Tschaplygin, Sergej Alexejewitsch
Carathéodory, Constantin (1873–1950) 361
Cardano, Girolamo (1501–1576) 56, 64, 77, 178
Carleson, Lennart (*1928) 358
Carlyle, Thomas (1795–1881) 96, 117
Carnot, Lazare Nicolas Marguerite (1753–1823) 72, 105, 140, 233
Carnot, Sadi (1796–1832) 105, 112, 128, 567
Carossa, Hans (1878–1956) 335
Cartan, Élie Joseph (1869–1951) 171, 203, 344, 345, 425, 437, 570
Cartan, Henri Paul (1904–2008) 484
Casorati, Felice (1835–1890) 303–305, 345, 453
Cassini, Giovanni Domenico (1625–1712) 25
Castelnuovo, Guido (1865–1952) 307, 308, 345, 435
Catalan, Eugène Charles (1814–1894) 548
Cauchy, Augustin Louis (1789–1857) 54, 105, 107, 128, 138, 139, 187, 189, 190, 194, 198–200, 204, 206, 237, 238, 246, 247, 249, 251–253, 255, 256, 263, 278, 407, 543
Cavaillès, Jean (1903–1944) 482
Cavour, Camillo (1810–1861) 303
Cayley, Arthur (1821–1895) 142, 163, 165, 198, 203–205, 301, 304, 345, 539
Čëbotarev, Nikolaj Grigor'evič *siehe* Tschebotarjow, Nikolai Grigorjewitsch
Čebyšëv, Pafnutij L'vovič *siehe* Tschebyschew, Pafnuti Lwowitsch
Cesàro, Ernesto (1859–1906) 53
Ceulen, Ludolph van (1540–1610) 231
Cézanne, Paul (1839–1906) 94, 325
Chagall, Marc (1887–1985) 327
Chambers, Ephraim (ca. 1680–1740) 83
Chamisso, Adalbert von (1781–1838) 18, 177
Chasles, Michel (1793–1880) 138, 139, 142
Chateaubriand, François René Vicomte de (1768–1848) 96
Chen Jingrun (1933–1996) 547, 548
Chevalley, Claude (1909–1984) 345, 434, 484
Chinčin, Aleksandr Jakovlevič *siehe* Chintschin, Alexander Jakowlewitsch
Chintschin, Alexander Jakowlewitsch (1894–1959) 498
Chirico, Giorgio de (1888–1978) 326
Chopin, Frédéric (1810–1849) 95
Christoffel, Elwin Bruno (1829–1900) 345, 453
Church, Alonzo (1903–1995) 353
Churchill, Sir Winston (1874–1965) 554
Cicero, Marcus Tullius (106–43 v. Chr.) 76
Clairaut, Alexis Claude (1713–1765) 32, 40, 42, 126, 202
Clapeyron, Benoît Pierre Émile (1799–1864) 128
Clausius, Rudolf Julius Emmanuel (1822–1888) 112, 113, 129
Clavius, Christopher (1538–1612) 73
Clebsch, Rudolf Friedrich Alfred (1833–1872) 38, 167, 257
Clifford, William Kingdom (1845–1879) 205
Cohen, Paul Josef (1934–2007) 356, 361, 386, 387, 392
Cohn-Vossen, Stefan (1902–1936) 364
Colbert, Jean Baptiste (1619–1683) 8
Coleridge, Samuel Taylor (1772–1834) 96
Collins, John (1625–1683) 21
Condorcet, Marie Jean Antoine Nicolas Caritat, Marquis de (1743–1794) 10, 104, 134
Connes, Alain (*1947) 356, 576, 581
Conrad, Joseph (1857–1924) 97

Constable, John (1776–1837) 92
Copernicus, Nicolaus (1473–1543) 296
Corinth, Lovis (1858–1925) 94, 325
Coriolis, Gaspard Gustav (1792–1843) 131
Cormack, Alan (1924–1998) 560
Corot, Camille (1796–1875) 92
Corry, Leo 486
Cotes, Roger (1682–1716) 54, 286
Coulomb, Charles Augustin (1736–1806) 130
Courant, Richard (1888–1972) 345, 348, 354, 364, 419, 446, 450, 455, 468, 470, 472, 498, 515, 585
Courbet, Gustave (1819–1877) 92
Cowell, Henry Dixon (1897–1965) 335
Coxeter, Harold Scott MacDonald „Donald“ (1907–2003) 352
Cramér, Harald (1893–1985) 446
Cramer, Gabriel (1704–1752) 32, 200
Crelle, August Leopold (1780–1855) 154, 190, 191, 215, 216, 258
Cremona, Luigi (1830–1903) 142, 303–305, 308, 346, 435
Crompton, Samuel (1753–1827) 102
Cromwell, Oliver (1599–1658) 7
Curie, Marie (1867–1934) 454
Curie, Pierre (1855–1906) 454
Cusanus *siehe* Nikolaus von Kues

Daimler, Gottlieb (1834–1900) 113
Dali, Salvador (1904–1989) 326
Darboux, Jean Gaston (1842–1917) 266, 279, 346, 474, 496
Darwin, Charles (1809–1882) 103, 117
Darwin, Erasmus (1731–1802) 103, 495
Daudet, Alphonse (1840–1907) 96
David, Jacques-Louis (1748–1825) 92
Debreu, Gérard (1921–2004) 561
Debussy, Achille-Claude (1862–1918) 94, 333
Debye, Peter Joseph Wilhelm (1884–1966) 456
Dedekind, Julius Wilhelm Richard (1831–1916) 160, 206, 207, 218, 221–223, 225–228, 240, 241, 259, 269, 270, 346, 383–387, 389, 391, 424, 430, 432, 435
Degas, Edgar (1834–1917) 94
Dehmel, Richard Fedor Leopold (1863–1920) 335
Dehn, Max Wilhelm (1878–1952) 361
Delacroix, Eugène (1798–1862) 92
Delft, Johannes Vermeer van (1632–1675) 15
Delibes, Leo (1836–1891) 94
Deligne, Pierre René (*1944) 356, 573
Delisle, Joseph Nicolas (1688–1768) 48
Delsarte, Jean (1903–1968) 484
Demidov, Sergej Sergeevič *siehe* Demidow, Sergej Sergejewitsch
Demidow, Sergej Sergejewitsch (*1942) 501
Descartes, René (1596–1650) 10, 21, 25, 32, 56, 67, 78, 177, 231, 507, 577, 585
Dickens, Charles (1812–1870) 96
Dickson, Leonard Eugene (1874–1954) 302, 346, 350, 423, 425
Diderot, Denis (1713–1784) 10, 83, 84
Diesel, Rudolf (1858–1913) 113
Dietzschold, Carl (1852–1922) 509
Dieudonné, Jean Alexandre Eugène (1906–1992) 341, 346, 435, 473, 484, 486
Dini, Ulisse (1845–1918) 303, 305–307, 309, 346
Diophantos von Alexandrien 554
Dirac, Paul (1902–1984) 515
Dirichlet, Johann Peter Gustav Lejeune (1805–1859) 160, 221–224, 226, 228, 239, 240, 242, 246, 249, 263, 279, 306, 383, 407, 543
Distler, Hugo (1908–1942) 334
Döblin, Alfred Bruno (1878–1957) 335, 336
Donaldson, Simon Kirwan (*1957) 356, 575
Donizetti, Gaetano (1797–1848) 94
Doob, Joseph Leo (1910–2004) 341, 446
Dostojewski, Fjodor Michailowitsch (1821–1881) 97, 276
Douglas, Jesse (1897–1965) 353, 356

Drinfeld, Wladimir Gerschonowitsch (*1954) 356
Droste-Hülshoff, Annette von (1797–1848) 96
Dufy, Raoul (1879–1953) 326
Dulong, Pierre-Louis (1785–1838) 105
Dupin, Pierre Charles François (1784–1873) 131
Dürre, Karl P. (*1937) 540
Dürrenmatt, Friedrich Josef (1921–1990) 336–338
Dvořák, Antonín (1841–1904) 95
Dyck, Anthonis van (1599–1641) 14
Dyck, Walter von (1856–1934) 208, 346
Dyson, Freeman (*1923) 581

Edgeworth, Richard Lovell (1744–1817) 104
Egk, Werner (1901–1983) 334
Egorov, Dimitrij Fedorovič *siehe* Jegorow, Dimitri Fjodorowitsch
Ehresmann, Charles (1905–1979) 484
Ehrlich, Paul (1854–1915) 467
Eichendorff, Joseph Freiherr von(1788–1857) 95
Eiffel, Gustave (1832–1923) 92
Eilenberg, Samuel (1913–1998) 344, 440, 484
Einem, Gottfried von (1918–1996) 334
Einstein, Albert (1879–1955) 131, 307, 344, 347, 363, 364, 419, 430, 432, 442, 454, 466, 467, 471, 475, 479, 480, 515, 535, 555, 558, 560, 563, 566, 569, 570, 574, 576, 586
Eisenhart, Luther Pfahler (1876–1965) 350
Eisenstein, Ferdinand Gotthold Max (1823–1852) 222
Eisler, Hanns (1898–1962) 334
Elgar, Edward William (1857–1934) 333
Elliott, Edwin Balley (1851–1937) 346
Ellis, Robert Leslie (1817–1859) 539
El'sgol'c, Lev Ernestovic 362
Engel, Friedrich (1861–1941) 346
Engels, Friedrich (1820–1895) 106
Enriques, Federigo (1871–1946) 307, 346, 435
Enzensberger, Hans Magnus (*1929) 338, 461, 462
Epikur von Samos (341–270 v. Chr.) 76
Epimenides 390
Erdös, Paul (1913–1996) 573
Ernst, Max (1891–1976) 326
Escher, Mauritius Cornelius (1898–1972) 329, 330, 586
Euklid von Alexandria (ca. 325–265 v. Chr.) 73, 148, 159, 162, 177, 181, 305, 378, 453, 546, 554
Euler, Leonhard (1707–1783) 9, 20, 23, 24, 32, 34–38, 40–55, 59–62, 64–70, 73, 81, 126, 132, 144, 178, 184, 186, 190, 219, 223, 228, 231, 233–235, 237, 249, 251, 258, 286, 292, 383, 452, 467, 543, 547, 580
Euler, Paul (1670–1745) 46

Fagnano, Graf (1682–1766) 258
Falla, Manuel De (1876–1946) 333
Fallersleben, August Heinrich Hoffmann von(1798–1874) 95
Faltings, Gerd (*1954) 344, 356, 573
Faraday, Michael (1791–1867) 106, 117, 130
Faulhaber, Johann (1580–1635) 56
Faust, Georg (1480–1540) 569
Fechner, Gustav Theodor (1801–1887) 285
Fefferman, Charles Louis (*1949) 356
Feininger, Lyonel Charles Adrian (1871–1956) 318
Feldmann, Morton (1926–1987) 335
Fenchel, Moritz Werner (1905–1988) 352
Fermat, Pierre de (1607/08–1665) 65, 77, 78, 219, 357, 452, 541, 543–545
Fermi, Enrico (1901–1954) 348, 352, 535
Ferro, Scipione del (1465–1526) 64, 178
Feuchtwanger, Lion (1884–1958) 335
Feuerbach, Anselm (1829–1880) 92
Feynman, Richard (1918–1988) 560, 580

Fichera, Gaetano (1922–1996) 341
Fichte, Immanuel Hermann (1796–1879) 106
Fields, John Charles (1863–1932) 353
Fischer, Gotthelf August (1763–1832) 110
Fischl, Werner 364
Flaubert, Gustave (1821–1880) 96
Foncenex, François Daviet de (1734–1799) 61
Forest, Lee de (1873–1961) 515
Fortner, Wolfgang (1907–1987) 334
Foster, Norman Robert (*1935) 323
Fourcroy, Antoine de (1755–1809) 105
Fourier, Jean Baptiste Joseph de (1768–1830) 2, 41, 117, 128, 136, 221, 222, 234, 235, 239, 242–244, 246, 249, 263, 383, 412, 558
Fraenkel, (Adolf) Abraham (1891–1965) 346, 391, 392, 418–420, 424, 468
Franck, James (1882–1964) 363
Franklin, Benjamin (1706–1790) 104, 296, 297
Fraunhofer, Joseph von (1787–1826) 143
Fréchet, Maurice René (1878–1973) 307, 310, 413, 417
Fredholm, Eric Ivar (1866–1927) 310, 455
Freedman, Michael Hartley (*1951) 356
Frege, Friedrich Ludwig Gottlob (1848–1925) 269, 391, 398, 402, 459
Fresnel, Augustin Jean (1788–1827) 128, 138
Freud, Sigmund (1856–1939) 335
Frey, Gerhard (*1944) 344
Freytag, Gustav (1816–1895) 96
Fricke, Robert (1861–1930) 346
Friedrich, Caspar David (1774–1840) 92
Friedrich II. (1712–1786) 7, 9, 10, 44, 45, 48, 70, 71
Frisch, Max (1911–1991) 336–338
Frobenius, Georg Ferdinand (1849–1917) 188, 200, 203, 275, 346, 467
Fuchs, Immanuel Lazarus (1833–1902) 275, 277, 302, 346

Gagarin, Juri Alexejewitsch (1934–1968) 501, 522
Gagarin, Jurij Alekseevič *siehe* Gagarin, Juri Alexejewitsch
Galenus, Claudius (129–199) 76
Galilei, Galileo (1564–1642) 28, 78, 379, 514, 569
Galois, Evariste (1811–1832) 167, 189, 193, 195–199, 204, 206, 303
Galsworthy, John (1867–1933) 97
Galton, Samuel (1753–1832) 104
Gargallo, Pablo (1881–1934) 324
Garibaldi, Giuseppe (1807–1882) 303
Garnier, Charles (1825–1898) 92
Gates, Bill (*1955) 524
Gaudi, Antoni (1852–1926) 318
Gauguin, Paul (1848–1903) 94
Gauß, Carl Friedrich (1777–1855) 42, 45, 58, 61, 65, 70, 74, 75, 109, 117, 124, 127, 138, 143, 147–155, 158–160, 162–164, 173, 178–191, 198, 206, 207, 210–223, 227, 228, 236, 237, 249, 250, 257, 258, 284, 287–289, 292, 304, 305, 380, 435, 451, 467, 556, 557, 569, 583, 584, 586
Gay-Lussac, Joseph-Louis (1778–1850) 105
Gehry, Frank Owen (*1929) 324
Gelfand, Israil Moissejewitsch (*1913) 357, 440
Gelfand, Izrail Moiseevič *siehe* Gelfand, Israil Moissejewitsch
Georg I.(1863–1913) 91
George, Stefan Anton (1868–1933) 96, 335
Gergonne, Joseph Diaz (1771–1859) 140
Gerling, Christian Ludwig (1788–1864) 149, 150, 152, 155
Germain, Sophie (1776–1831) 543, 549
Gerstner, Franz Joseph (1756–1832) 253
Gilly, David (1748–1808) 71
Girard, Albert (1595–1632) 57, 58

Gleason, Andrew Mattei (*1921) 361
Gödel, Kurt (1906–1978) 346, 348, 361, 362, 386, 387, 393, 404, 419, 433, 460–463, 486, 519, 586
Goethe, Johann Wolfgang von (1749–1832) 17, 18, 378, 569, 586
Gogh, Vincent van (1853–1890) 94, 325
Gogol, Nikolai Wassiljewitsch (1809–1852) 97
Goldbach, Christian (1690–1764) 40, 48, 496, 547
Goldstein, S. 353
Goldstine, Herman Heine (1913–2004) 517, 519, 524
Gonzáles, Julio (1876–1942) 324
Gordan, Paul (1837–1912) 346, 429, 435, 449
Götz, Karl Otto (*1914) 328
Gounod, Charles (1818–1893) 94
Goursat, Édouard Jean-Baptiste (1858–1936) 107, 272
Gowers, William Timothy (*1963) 356
Grabbe, Christian Dietrich (1813–1836) 96
Grandi, Guido (1671–1742) 19
Grandjot, K. 352
Grass, Günter (*1927) 337, 338
Graßmann, Hermann Günther (1809–1877) 202, 203, 206
Graunt, John (1620–1674) 78
Gray, Jeremy J. 344, 360, 435
Green, George (1793–1841) 126, 130, 131, 216, 217, 558
Gregory, Duncan Farquharson (1813–1844) 203
Gregory, James (1638–1675) 20, 25
Greis, Otto (1913–2001) 328
Grelling, Kurt (1886–1942) 390
Grenzmer, Harald (1909–2007) 334
Grieg, Edvard (1843–1907) 95
Grieshaber, HAP (eigtl. Helmut Andreas Paul) (1909–1981) 328
Grillparzer, Franz (1791–1872) 96
Grimm, Hans (1875–1959) 336
Gropius, Walter (1883–1969) 318
Grothendieck, Alexander (Alexandre) (*1928) 344, 356, 438, 484, 573
Guggenheim, Harry 349
Guillaume, Marcel 341
Guthrie, Francis (1831–1899) 538

Hachette, Jean Nicolas Pierre (1769–1834) 136, 138, 139
Hadamard, Jacques Salomon (1865–1963) 229, 292, 310, 467, 478–480
Hahn, Philipp Matthäus (1739–1790) 508
Haken, Wolfgang (*1928) 540
Halbe, Max (1865–1944) 96
Haldane, John Burdon Sanderson (1892–1964) 532, 536
Halley, Edmond (1656–1742) 79
Halphen, George Henri (1844–1889) 346
Hals, Franz (1580/84–1660) 15
Hambraeus, Bengt (1928–2000) 334
Hamel, Georg Karl Wilhelm (1877–1954) 361, 367, 368
Hamilton, William Rowan (1805–1865) 126–128, 132, 187, 188, 200–202, 206, 538
Handke, Peter (*1942) 337, 338
Hankel, Hermann (1839–1873) 206, 240, 241, 266, 279
Hansen, Theophil (1813–1891) 91
Hansteen, Christopher (1784–1873) 190
Harding, Karl Ludwig (1765–1834) 213
Hardy, Godefrey Harold (1877–1947) 349, 351, 372, 468, 487–490, 537, 549
Hargreaves, James (ca. 1720–1778) 102
Harnack, Carl Gustav Axel (1851–1888) 346
Harriot, Thomas (1560?–1621) 57, 294–296
Harsanyi, John (1920-2000) 561
Hart, Heinrich (1855–1906) 96
Hart, Julius (1859–1930) 96
Hartung, Hans Heinrich Ernst (1904–1989) 328

Hasse, Helmut (1898–1979) 361, 423–425, 428, 433, 434, 437, 484
Hauptmann, Gerhart Johann Robert (1862–1946) 96, 335
Hausdorff, Felix (1868–1942) 363, 388, 393–396, 413, 414, 442, 498
Hayman, Walter Kurt (*1926?) 341
Heaviside, Oskar (1850–1925) 130, 279
Heawood, Percy John (1861–1955) 539
Hebbel, Friedrich (1813–1863) 96
Hecke, Erich (1887–1947) 472
Hecker, Erich (1883–1970) 325
Heesch, Heinrich (1906–1995) 362, 539, 540
Hegel, Georg Wilhelm Friedrich (1770–1831) 106, 221, 224
Heine, Christian Johann Heinrich (1797–1856) 96, 365
Heine, Heinrich Eduard (1821–1881) 257, 267, 346, 380, 383
Heisenberg, Werner Karl (1901–1976) 352, 363, 515, 558, 571, 576
Heißenbüttel, Helmut (1924–1996) 338
Helmholtz, Hermann von (1821–1894) 127, 130, 131, 165
Helvétius, Claude Adrien (1715–1771) 10, 84
Henry, Joseph (1797–1878) 301
Henschke, Alfred(Deckname Klabund) (1890–1928) 335
Hensel, Kurt (1861–1941) 346, 388, 392, 435
Henze, Hans-Werner (1926–1973) 334
Herbart, Johann Friedrich (1796–1841) 163
Herder, Johann Gottfried (1744–1803) 10
Hermann, Jakob (1678–1733) 48, 547
Hermite, Charles (1822–1901) 200, 221, 230–232, 271, 292, 304, 305, 346, 448, 473
Herschel, John Frederick William (1792–1871) 25, 116–118
Hertz, Heinrich Rudolf (1857–1894) 127, 130, 475
Hertz, Paul (1881–1940) 364
Herzog von Alba 25
Hesse, Hermann (1877–1962) 335, 336
Hesse, Otto (1811–1874) 257
Hessenberg, Gerhard (1874–1925) 393
Hilbert, David (1862–1943) 38, 65, 164, 173–177, 230, 288–290, 302, 310, 346, 347, 351, 355, 359–364, 377, 378, 386, 388, 389, 392, 402, 404–406, 412, 413, 417, 419, 423, 425, 429, 430, 433, 441, 442, 446–460, 463–467, 470–472, 474, 476, 496, 498, 500, 513, 515, 537, 550, 558, 562, 573, 581, 583
Hildesheimer, Wolfgang (1916–1991) 338
Hindemith, Paul (1895–1963) 332, 334
Hindenburg, Carl Friedrich (1741–1808) 199
Hippokrates von Kos (460–375 v. Chr.) 76
Hironaka, Heisuke (*1931) 356
Hirzebruch, Friedrich Ernst Peter (*1927) 344, 573
Hitler, Adolf (1889–1945) 363, 367
Hlavaty, Václav (1894–1969) 352
Hodler, Ferdinand (1853–1918) 325
Hoffmann, Ernst Theodor Amadeus (1776–1822) 95
Hölder, Otto (1859–1937) 198, 346
Hollerith, Hermann (1860–1924) 510
Holmboe, Bernt Michael (1795–1850) 190, 191, 193
Holz, Arno (1863–1929) 96
Homer 76
Honegger, Arthur (1892–1955) 333
Hopf, Eberhard Frederich Ferdinand (1902–1983) 352, 446
Hopf, Heinz (eigentl. Heinrich), (1894–1971) 352, 353, 498, 499
Hopkins, Johns (1795–1873) 301
Hörmander, Lars Valter (*1931) 356
Hospital, Marquis de L'(1661–1704) 28, 30, 31
Hounsfield, Godfrey (1919–2004) 560
Householder, Alston Scott (1904–1993) 353

Houzel, Christian (*1937) 341
Hoüel, Guillaume Jules (1823–1866) 163
Hudde, Johann van Waveren (1628–1704) 178
Huelsenbeck, Carl Wilhelm Richard (1892–1974) 335
Hugo, Victor Marie (1802–1885) 96
Huillier, Simon Jean L' (1750–1840) 233
Humboldt, Alexander von (1769–1859) 117, 118, 121, 215, 221, 258
Humboldt, Wilhelm von (1767–1835) 106
Hume, David (1711–1776) 10
Hundertwasser, Friedensreich (eigtl. Fritz Stowasser), (1928–2000) 328
Huntington, Edward Vermilye (1874–1952) 346, 423, 425
Hurewicz, Witold (1904–1956) 352, 353
Hurwitz, Adolf (1859–1919) 346, 381, 387, 399, 447–449, 454
Husserl, Edmund (1859–1938) 537
Huygens, Christiaan (1629–1695) 27, 30, 78–80
Huygens, Lodewijk (1631–1699) 79
Høyrup, Jens (*1943) 372

Ibsen, Henrik (1828–1904) 97
Ide, Johann Joseph (1775–1806) 69
Il'jušin, Sergej Vladimirovič *siehe* Iljuschin, Sergej Wladimirowitsch
Iljuschin, Sergej Wladimirowitsch (1894–1977) 502
Ingres, Jean-Auguste-Dominique (1780–1867) 92
Ionesco, Eugéne (1912–1994) 338
Itô, Kiyoshi (*1916) 572
Itenberg, Ilia V. 362
Ivanovna, Anna *siehe* Iwanowna, Anna
Iwanowna, Anna (reg. 1730–1740), (1693–1740) 48

Jacobi, Carl Gustav Jacob (1804–1851) 38, 127, 132, 160, 197, 200, 221, 223, 249, 256–259, 261, 275
Jacobi, Moritz Hermann (1801–1874) 259
Jaffe, Arthur (*1937) 563, 581
Jahnn, Hans Henny (1894–1959) 335
Janáček, Leoš (1854–1928) 333
Janischewski, Erast Petrowitsch (1829–1906) 164
Janiševskij, Erast Petrovič *siehe* Janischewski, Erast Petrowitsch
Janiszewski, Zygmunt (1888–1920) 490–492
Jefferson, Thomas (1743–1826) 297, 298
Jegorow, Dimitri Fjodorowitsch (1869–1931) 496–498
Jelinek, Hanns (1901–1969) 334
John, Fritz (1910–1994) 352
Johnson, Thure (*1934) 337
Jones, Vaughan Frederick Randal (*1952) 356
Jones, William (1675–1749) 231
Jordaens, Jakob (1593–1678) 14
Jordan, Camille (1838–1922) 167, 198, 267, 302, 346, 408
Joseph II. (1741–1790) 11
Jünger, Ernst (1895–1998) 336
Juschkewitsch (auch Youschkevitch oder Yushkevich), Adolf Pawlowitsch (1906–1993) 51, 358
Juškevič, Adolf Pavlovič *siehe* Juschkewitsch (auch Youschkevitsch), Adolf Pawlowitsch

Kafka, Franz (1883–1924) 334, 335
Kahane, Jean-Pierre (*1926) 341
Kähler, Erich (1906–2000) 436, 556
Kamke, Erich (1890–1961) 39
Kandinsky, Wassily (Wassiljewitsch) (1866–1944) 318, 325, 326, 328
Kant, Immanuel (1724–1804) 11, 70, 75, 126, 146, 149, 153
Kantorovič, Leonid Vitalevič *siehe* Kantorowitsch, Leonid Witaljewitsch
Kantorowitsch, Leonid Witaljewitsch (1912–1986) 561
Kármán, Theodor von (1881–1963) 349

Kaschnitz, Marie Luise (1901–1974) 338
Kästner, Abraham Gotthelf (1719–1800) 74, 147, 507
Kästner, Emil Erich (1899–1974) 338
Katharina II. (1729–1796) 9, 49, 84
Kay, John (1704–1764) 102
Keats, John (1795–1821) 96
Keir, James (1735–1814) 104
Keldyš, Ljudmila Vsevolodovna *siehe* Keldysch, Ljudmila Wsewolodowna
Keldyš, Mstislav Vsevolodovič *siehe* Keldysch, Mstislaw Wsewolodowitsch
Keldysch, Ljudmila Wsewolodowna (1904–1976) 502
Keldysch, Mstislaw Wsewolodowitsch (1911–1978) 501, 502
Keller, Gottfried (1819–1890) 96
Kempe, Alfred Bray (1845–1922) 539
Kepler, Johannes (1571–1630) 53, 507, 549, 550, 557
Khatchaturian, Aram (1903–1978) 333
Killing, Wilhelm (1847–1923) 271, 346
Kirchhoff, Gustav Robert (1824–1887) 129
Kirchner, Ernst Ludwig (1880–1938) 325
Klabund (Deckname von Alfred Henschke) (1890–1928) 335
Klee, Paul (1879–1940) 318, 325, 326
Klein, Felix (1849–1925) 99, 114, 127, 142, 144, 164, 165, 167, 169, 180, 188, 195, 205, 210, 275, 300, 302, 307, 346, 347, 355, 364, 377, 399, 429, 430, 448, 449, 472, 474, 475, 538, 573, 583
Kleinberg, Jon Michael (*1971) 357
Kleist, Heinrich von (1777–1811) 95
Klenze, Leo von (1784–1864) 90
Klügel, Georg Simon (1739–1812) 74
Knaster, Bronisław (1893–1980) 491, 492
Kneser, Adolf (1862–1930) 38
Kneser, Martin (1928–2004) 370
Knopp, Konrad (1882–1957) 470
Kodály, Zoltán (1882–1967) 333
Kodaira, Kunihiko (1915–1997) 356
Koebe, Paul (1882–1945) 470
Kokoschka, Oskar (1886–1980) 326
Kollwitz, Käthe (1867–1945) 449
Kolmogorov, Andrej Nikolaevič *siehe* Kolmogorow (auch Kolmogoroff), Andrej Nikolajewitsch
Kolmogorow, Andrej Nikolajewitsch (1903–1987) 361, 372, 396, 441–446, 491, 497–500, 572
Kontsewitsch, Maxim Lwowitsch (*1964) 356
Korolëv, Sergej Pavlovič *siehe* Koroljow, Sergej Pawlowitsch
Koroljow, Sergej Pawlowitsch (1907–1966) 501–503
Kotelnikow, Peter Ivanowitch (1809–1879) 163
Kovalevskaja, Sofja Vasilevna *siehe* Kowalewskaja, Sonja (Sophie) Wassiljewna
Kovalevskij, Vladimir Onufrievič *siehe* Kowalewski, Wladimir Onufrijewitsch
Kowalewskaja, Sonja (Sophie) Wassiljewna (1850–1891) 275–277, 291, 346, 387
Kowalewski, Wladimir Onufrijewitsch (1842–1883) 276
Krbek, Ivo 352
Křenek, Ernst (1900–1991) 334
Kreutz, Heinz (*1923) 328
Krolow, Karl (1915–1999) 338
Kronecker, Leopold (1823–1891) 198, 207, 208, 221–225, 271, 292, 302, 304, 448
Kummer, Ernst Eduard Richard (1810–1893) 65, 206, 221–225, 275, 435, 448, 543
Kuratowski, Kazimierz (1896–1980) 491, 492
Kurčatov, Ivan *siehe* Kurtschatow, Iwan
Kuroš, Aleksandr Gennadievič *siehe* Kurosch, Alexander Gennadijewitsch

Kurosch, Alexander Gennadijewitsch (1902–1971) 496, 499
Kurtschatow, Iwan (1903–1960) 501

La Vallée-Poussin, Charles-Jean Gustave Nicolas de (1866–1962) 292
Lacroix, Sylvestre François de (1765–1843) 134, 139, 221, 299
Lafforgue, Laurent (*1966) 356
Lagerlöf, Selma (1858–1940) 97
Lagrange, Joseph-Louis (1736–1813) 23, 37, 38, 40, 43–45, 48, 50, 61, 62, 65, 70, 124, 126, 127, 131, 132, 178, 184, 188–190, 195, 199, 200, 219, 220, 233, 234, 242, 243, 252, 292, 549, 557
Lam Lay Yong (*1936) 358
Lambert, Johann Heinrich (1728–1777) 66, 70, 71, 74, 172, 231
Lamé, Gabriel (1795–1870) 305, 543
Landau, Edmund Georg Hermann (1877–1938) 346, 351, 364, 368, 446, 456, 467–470, 497, 537
Langen, Eugen (1833–1895) 111
Laplace, Pierre-Simon (1749–1827) 61, 70, 81, 82, 105, 117, 124–126, 154, 189, 190, 200, 202, 221, 251, 252, 282–284, 286, 293, 299
Lasker, Emanuel (1868–1941) 346
Laue, Max von (1879–1960) 454
Laugwitz, Detlef (1932–2000) 228, 247, 259, 263
Laurent, Matthieu Paul Hermann (1841–1908) 252
Lavoisier, Antoine-Laurent (1743–1794) 104, 134
Lax, Peter David (*1926) 374
Laßwitz, Kurd (1848–1910) 165, 378
Le Corbusier (1887–1965) 319
Lebesgue, Henri Leon (1875–1941) 267, 302, 307, 309, 351, 407–410, 413, 441, 480, 490
Leblanc, Nicolas (1742–1806) 102
Lefschetz, Solomon (1884–19572) 344, 350, 436
Legendre, Adrien-Marie (1752–1833) 38, 65, 156, 157, 159, 162, 195, 210, 221, 223, 242, 258, 284, 287, 289, 292, 299, 309, 478, 543
Lehmann, Nikolaus (1921–1998) 506–508
Lehmbruck, Wilhelm (1881–1919) 324
Leibl, Wilhelm (1844–1900) 92
Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646–1716) 10, 20–23, 25–27, 30, 32, 39, 47, 49, 57, 68, 79, 178, 189, 199, 200, 202, 231, 258, 282, 379, 393, 397, 399, 507, 508, 547, 583
Lejeune Dirichlet, Johann Peter Gustav *siehe* Dirichlet, Johann Peter Gustav Lejeune
Lenard, Philipp Eduard Anton (1862–1947) 363, 559
Lenz, Siegfried (*1926) 338
Leoncavallo, Ruggiero (1858–1919) 94
Leontieff, Wassili (1905–1999) 561
Leopardi, Giacomo (1798–1837) 96
Leopold Kronecker (1823–1891) 449, 457
Leray, Jean (1906–1998) 484
Lermontow, Michail Jurjewitsch (1814–1841) 97
Lessing, Gotthold Ephraim (1729–1781) 10
Leupold, Jacob (1674–1727) 508
Leverrier, Jean 557
Lewis, Clarence Irving (1883–1964) 407
Lewy, Hans (1904–1988) 352, 364
Lichnerowicz, André (1915–1998) 342
Lichtenstein, Leon (1878–1933) 363, 417
Lie, Sophus (1842–1899) 142, 164, 167, 198, 199, 302, 346, 361, 570
Liebermann, Max (1847–1935) 94, 325
Ligeti, György Sándor (1923–2006) 334
Linde, Carl von (1841–1934) 113
Lindemann, Carl Louis Ferdinand (1852–1939) 66, 230–232, 346, 447, 476
Linnik, Juri Wladimirowitsch (1915–1972) 452

Linnik, Jurij Vladimirovič *siehe* Linnik, Juri Wladimirowitsch
Lions, Pierre-Louis (*1956) 356
Liouville, Joseph (1809–1882) 197, 231, 303
Lipschitz, Rudolf Otto Sigismund (1832–1903) 167, 346
Liszt, Franz von (1811–1886, geadelt 1859) 94, 332
Littlewood, John Edensor (1885–1977) 489, 537, 549
Ljapunov, Aleksandr Michajlovič *siehe* Ljapunow, Alexander Michailowitsch
Ljapunow, Alexander Michailowitsch (1857–1918) 128, 285, 293, 475, 494, 495, 497
Llull, Ramon (1235–1315) 396
Lobačevskij, Nikolaj Ivanovič *siehe* Lobatschewski, Nikolai Iwanowitsch
Lobatschewski, Nikolai Iwanowitsch (1792–1856) 74, 153–155, 157–159, 163, 172, 239, 291, 305, 492, 583
Locke, John (1632–1704) 10
Logan, James (1674–1751) 297
Löns, Hermann (1866–1914) 335
Lord Kelvin (1824–1907) 129, 131
Lorentz, Hendrik Antoon (1853–1928) 131, 467, 475
Lortzing, Albert (1801–1851) 94
Ludovico de la Grange Tournier *siehe* Lagrange
Ludwig XIV. (1638–1715) 7, 8, 71
Lukasiewicz, Jan (1878–1956) 407
Lukrez (Titus Lucretius Carus, ca. 99–55 v. Chr.) 75, 76
Lusin, Nikolai Nikolajewitsch (1883–1950) 352, 353, 414, 496–499, 502
Luzin, Nikolaj Nikolaevič *siehe* Lusin, Nikolai Nikolajewitsch

Macke, August (1887–1914) 325
Mackensen, Ludolf von (*1938) 508
MacLane, Saunders (1909–2005) 344, 434, 440, 487
Maclaurin, Colin (1698–1746) 23, 233
Maderna, Bruno (1920–1973) 334
Magnelli, Alberto (1888–1971) 328
Magnus, Hans Heinrich Wilhelm (1907–1990) 352
Mahler, Gustav (1860–1911) 94, 332
Maillol, Aristide (1861–1944) 92, 324
Mallarmé, Stéphane (1842–1898) 96
Malus, Étienne-Louis (1775–1812) 105, 138
Mandelbrojt, Szolem (1899–1983) 484, 532
Mandelbrot, Benoît (*1924) 331, 532
Manet, Edouard (1832–1883) 92
Manin, Juri (*1937) 576
Mann, Luiz Heinrich (1871–1950) 335, 336
Mann, Paul Thomas (1875–1955) 335, 336, 363
Manzoni, Alessandro (1785–1873) 96
Marc, Franz (1880–1916) 325
Marcks, Gerhard (1889–1981) 318
Margulis, Grigori Alexandrowitsch (*1946) 356
Maria Theresia von Österreich (1717–1780) 48
Markov, Andrej Andreevič *siehe* Markow, Andrej Andrejewitsch
Markow, Andrej Andrejewitsch (1856–1922) 232, 284, 293, 346, 442, 443, 494, 497
Martinu, Bohuslav (1890–1959) 334
Marx, Karl (1818–1883) 106, 117
Mascagni, Pietro (1863–1945) 94
Mather, Cotton (1662/63–1727/28) 296
Matijasevič, Jurij Vladimirovič *siehe* Matijassewitsch, Juri Wladimirowitsch
Matijassewitsch, Juri Wladimirowitsch (*1947) 361
Matisse, Henri (1869–1954) 326
Mauchly, John W. (1907–1980) 517
Maudslay, Henry (1771–1831) 102
Maupassant, Guy de (1850–1893) 96
Maupertuis (1698–1759) 9, 32, 42, 48, 49
Mawhin, Jean 342

Maxwell, James Clerk (1831–1879) 127, 130, 289
May, Kenneth O. (1915–1977) 503
Mayer, Robert Julius (1814–1878) 112
McMullen, Curtis T. (*1958) 356
Menabrea, Luigi Federigo (1809–1896) 122
Mendelssohn-Bartholdy, Felix (1809–1847) 94
Menger, Karl (1902–1985) 352
Menzel, Adolf von (1815–1905, geadelt 1898) 92
Méray, Charles Robert (1835–1911) 269, 383
Mercator, Nicolaus (1620–1687) 20, 21
Mersenne, Marin (1588–1648) 22, 29, 65
Meyer, Conrad Ferdinand (1825–1898) 96
Meyer, Friedrich Wilhelm Franz (1856–1934) 346
Meyerbeer, Giacomo (eigentl. Jakob Liebmann Beer, 1791–1864) 94
Michelson, Albert Abraham (1852–1931) 131, 475
Miegel, Agnes (1879–1964) 335
Mies van der Rohe, Ludwig (1886–1969) 318–320
Mihailescu, Preda (*1955) 549
Milhaud, Darius (1892–1974) 333
Miller, G. A. (1863–1951) 346
Mills, Robert L. (1927–1999) 344, 570
Milnor, John Willard (*1931) 356
Minding, Ferdinand (1806–1885) 163, 164
Minkowski, Hermann (1864–1909) 346, 355, 359, 364, 417, 446–449, 451–453, 466, 467, 475
Miró, Joan (1893–1983) 327
Mises, Richard von (1883–1953) 285, 348, 367, 370, 442
Mittag-Leffler, Gösta (1846–1927) 275, 306, 346
Möbius, August Ferdinand (1790–1868) 141–144, 146, 206, 538
Moholy-Nagy, László (1895–1946) 333
Moivre, Abraham de (1667–1764) 79, 81
Molien, Theodor (1861–1941) 346
Monet, Claude (1840–1926) 92
Monge, Gaspard (1746–1818) 42, 66, 71, 72, 102, 105, 115, 125, 132–141, 242
Montesquieu; eigentl. Charles-Louis de Montesquieu (1689–1755) 10, 84
Montgomery, Deane (1909–1992) 361
Moore, Eliakim Hastings (1862–1932) 302, 346, 350, 423, 425
Moore, Henry (1898–1986) 324
Morgan, Augustus de (1806–1871) 203, 205, 241, 398, 402, 538
Morgenstern, Christian Otto Josef Wolfgang (1874–1914) 171, 335
Mori, Shigefumi (*1951) 356
Mörike, Eduard (1804–1875) 96
Moulton, Forest Ray (1872–1952) 350
Mumford, David Bryant (*1937) 356
Munch, Edward (1863–1944) 325
Münchhausen, Börries Freiherr von (1874–1945) 335
Murdock, William (1754–1839) 104
Murillo, Bartolomè Esteban (1618–1682) 15
Musil, Robert (1880–1942) 335
Mussorgski, Modest Petrowitsch (1839–1881) 94

Nagata, Masayoshi (*1927) 361
Nagell, Trygve (1895–1988) 352
Napoleon I *siehe* Bonaparte, Napoléon
Nash, John (*1928) 561, 582, 583
Navier, Claude Louis Marie Henry (1785–1836) 128, 246
Neper, John (1550–1617) 53
Nernst, Walther Hermann (1864–1941) 454
Nervi, Pier Luigi (1891–1979) 319
Nestroy, Johann (1801–1862) 96
Netto, Eugen (1846–1919) 346
Neugebauer, Otto E. (1899–1990) 348, 364
Neumann, Carl Gottfried (1832–1925) 130, 257, 262

Neumann, János (John) von (1903–1957) 347, 352, 353, 393, 407, 414, 417–422, 439, 500, 515, 518, 519, 532, 537, 558, 561, 584
Nevanlinna, Rolf Herman (1895–1980) 353, 357
Newman, Herman Alexander (1897–1984) 520
Newton, Isaac (1643–1727) 19, 21–24, 30, 32, 34, 41, 42, 81, 117, 126, 189, 202, 242, 296, 297, 379, 476, 514, 583
Neyman, Jerzy (1894–1981) 352, 353
Nikolaus von Kues (1401–1464) 378
Nilsson, Bo (*1937) 334
Nirenberg, Louis (*1925) 342
Nodikov, Sergei Petrowitsch (*1938) 356
Noether, Emmy (1882–1935) 346, 347, 364, 423, 424, 427–435, 437, 446, 470, 482, 484, 498
Noether, Max (1844–1921) 346
Nolde, Emil (1867–1956) 325
Nollet, Abbé (1700–1770) 133
Nono, Luigi (1924–1990) 334

Oerstedt, Hans Christian (1777–1851) 117, 216
Ohm, Georg Simon (1789–1854) 69
Ohm, Martin (1792–1872) 69
Oken, Lorenz (1779–1857) 106
Okounkow, Andrej Jurjewitsch (*1969) 356
Olbers, Heinrich Wilhelm Matthäus (1758–1840) 148, 213
Ore, Øystein (1899–1968) 352, 440
Oresme, Nicole (ca. 1320–1382) 77
Orff, Carl (1895–1982) 334
Osgood, William Fogg (1864–1943) 302, 350
Oskar II. (1829–1907) 476
Östberg, Ragnar (1866–1945) 320
Ostrogradski, Michail Wassiljewitsch (1801–1862) 127, 131, 251, 291, 492, 494
Ostrogradskij, Michail Vasil'evič *siehe* Ostrogradski, Michail Wassiljewitsch
Otto, Nicolaus August (1832–1913) 113

Pacioli, Luca (ca. 1445–1517) 77
Painlevé, Paul (1863–1933) 346
Pascal, Blaise (1623–1662) 29, 77, 78, 378, 507, 552
Pasch, Moritz (1843–1930) 172, 173, 302, 346, 392
Patterson, Robert (1743–1824) 299
Pauli, Wolfgang Ernst (1900–1958) 363
Peacock, George (1791–1858) 25, 116, 203, 206
Peano, Giuseppe (1858–1932) 203, 241, 270, 302, 307, 346, 380, 390, 398–400, 403, 413, 425, 453, 459
Peirce, Benjamin (1809–1880) 200, 206, 241, 299, 300, 400
Peirce, Charles Sanders (1839–1914) 200, 206, 398, 400, 402, 539
Pell, John (1611–1685) 21
Penrose, Roger (*1931) 581
Pepping, Ernst (1901–1981) 334
Perel'man, Grigorij Jakovlevič *siehe* Perelman, Grigori Jakowlewitsch
Perelman, Grigori Jakowlewitsch (*1966) 356, 357, 579, 581
Perron, Oskar (1880–1975) 346
Persper jun., Eckert(1919–1995) 517
Péter, Rósza (1905–1977) 554
Peter I. (1672–1725) 7, 11, 47
Petit, Alexis-Thérèse (1791–1820) 105
Pfaff, Johann Friedrich (1765–1825) 184
Pfitzner, Hans Erich (1869–1949) 332
Piaget, Jean (1896–1980) 486
Piazzi, Giuseppe (1746–1826) 212, 213
Picard, Charles Émile (1856–1941) 346, 351
Picasso, Pablo Ruiz (1881–1973) 326, 327
Pier, Jean-Paul 340, 342, 343
Pinl, Maximilian (1887–1978) 365, 366
Pissarro, Camille (1830–1903) 92
Planck, Max Karl Ernst Ludwig (1858–1947) 129, 367, 454, 515

Plato, Jan von (*1951) 446
Platon (427/28–347/348 v. Chr.) 396, 554, 585
Plücker, Julius (1801–1868) 142, 143, 167
Poincaré, Jules Henri (1854–1912) 131, 165, 167, 203, 279, 344, 346, 351, 355, 362, 377, 390, 399, 409, 412, 424, 437, 457, 473–478, 484, 556, 572, 578
Poinsot, Louis (1777–1859) 139
Poisson, Siméon-Denis (1781–1840) 105, 130, 221, 250, 281, 284, 285
Poleni, Giovanni (1683–1761) 508
Pólya, György (George) (1887–1985) 349, 352, 458
Pombal, Marquis de (1699–1782) 10
Poncelet, Jean-Victor (1788–1867) 105, 112, 131, 139–142
Poniatowski, Stanislaw August *siehe* Stanislaus II.
Poreckij, Platon Sergeevič *siehe* Porezki, Platon Sergejewitsch
Porezki, Platon Sergejewitsch (1846–1907) 402
Poulenc, Francis Jean Marcel (1899–1963) 333
Pousseur, Henri (*1929) 334
Priestley, Joseph (1733–1804) 104
Pringsheim, Alfred (1850–1941) 346
Prokofieff, Serge (1891–1953) 333
Prony, Gaspard de (1755–1839) 134
Puccini, Giacomo (1858–1924) 94
Puiseux, Victor Alexandre (1820–1883) 249, 252
Puschkin, Alexander Sergejewitsch (1799–1837) 97

Quetelet, Lambert-Jacques (1796–1847) 79
Quillen, Daniel Gray (*1940) 356

Röntgen, Wilhelm Konrad (1845–1923) 454
Raabe, Wilhelm (1831–1910) 96
Radbruch, Knut 171
Radó, Tibor (1895–1965) 352
Radon, Johann (1887–1956) 560
Radványi, Netty (Pseudonym: Anna Seghers) (1900–1983) 335
Raimund, Ferdinand (1790–1836) 96
Raleigh, Sir Walter (1554?–1618) 294
Ramanujan, Srinivasa (1887–1920) 487–490
Rankine, William John Macquorn (1820–1872) 127
Rauch, Christian Daniel (1777–1857) 90
Ravel, Joseph-Maurice (1875–1937) 94, 333
Razborov, Aleksandr Aleksandrovič *siehe* Razborow, Alexander Alexandrowitsch
Razborow, Alexander Alexandrowitsch (*1963) 357
Redtenbacher, Jacob Ferdinand (1809–1863) 110, 111, 113, 132
Reger, Max (1873–1916) 332
Regnault, Victor (1810–1870) 112
Reinhardt, Max (1873–1943) 362
Reißner, Hans Jacob (1874–1967) 367
Remarque, Erich-Maria (1898–1970) 335
Renn, Ludwig (1889–1979) 336
Renoir, Auguste (1841–1919) 94
Respighi, Ottorino (1879–1936) 333
Reuleaux, Franz (1829–1905) 111, 113, 132
Reuter, Fritz (1810–1874) 96
Reutter, Hermann (1900–1985) 334
Richelot, Friedrich (1808–1875) 257
Richstein, Jörg 547
Richter, Ludwig (1803–1884) 92
Riemann, Bernhard (1826–1866) 246, 303
Riemann, Georg Friedrich Bernhard (1826–1866) 54, 143, 158–160, 162, 163, 165, 218, 222, 227–230, 246, 259–268, 271, 272, 303, 305, 407, 456, 570, 580, 581
Riesz, Frigyes (Frédéric/Friedrich) (1880–1956) 53, 346, 413, 415, 417
Rijn, Rembrandt van (1606–1669) 15
Riley, Bridget Louise (*1931) 329

Rilke, Rainer Maria (1875–1926) 96, 335
Rimbaud, Jean Arthur (1854–1891) 96
Rimski-Korsakow, Nikolai Andrejewitsch (1844–1908) 94
Ringelnatz, Joachim (Pseudonym für Hans Bötticher) (1883–1934) 335
Rittenhouse, David (1732–1796) 298
Rivest, Ronald Linn (*1947) 561
Robinson, Abraham (1918–1974) 247
Rodin, François Auguste René (1840–1917) 92, 324
Rohlfs, Christian (1849–1938) 326
Röntgen, Wilhelm Conrad (1845–1923) 113
Rose, Wickliffe (1862–1931) 349, 350
Rosegger, Peter (1843–1918) 96
Rosenblueth, Arturo (1900–1979) 529, 531, 532, 534, 537
Rosenstock, Samuel (Pseudonym: Tristan Tzara) (1896–1963) 335
Rossetti, Dante Gabriel (1828–1882) 96
Rossi, Carlo (1775–1849) 91
Rossini, Gioacchino (1792–1868) 94
Roth, Klaus Friedrich (*1925) 356
Roth, Peter (gest. 1617) 56
Rousseau, Jean-Jacques (1712–1778) 10, 84
Routh, Edward John (1831–1907) 127
Rubens, Peter Paul (1577–1640) 14
Rubinstein, Anton (1829–1894) 94
Ruffini, Paolo (1765–1822) 188, 189, 191, 199
Ruisdael, Jacob van (1628/29–1682) 15
Runge, Carl (1856–1927) 275, 472
Runge, Philipp Otto (1777–1810) 92
Russell, Sir Bertrand Arthur William (1872–1970) 346, 390, 391, 398, 399, 401, 402, 459, 487, 537, 585
Rutherford, Ernst (1871–1937) 454

Saccheri, Giovanni Girolamo (1667–1733) 73, 305
Sacharov, Andrej Dmitrievič *siehe* Sacharow, Andrej Dimitrijewitsch
Sacharow, Andrej Dimitrijewitsch (1921–1989) 91
Saint Phalle, Niki de (1930–2002) 324
Saint-Saens, Camille (1835–1921) 94
Salmon, George (1819–1904) 205
Samuel, Pierre (*1921) 484
Sand, George (1804–1876) 96
Schadow, Johann Gottfried (1764–1850) 90
Schappacher, Norbert (*1950) 370
Scharoun, Bernhard Hans Henry (1893–1972) 320
Schauder, Juliusz Pawel (1899–1943) 353, 416, 417
Schelling Friedrich Wilhelm Joseph von (1775–1854, geadelt 1806) 18, 106, 224
Schickard, Wilhelm (1592–1635) 507
Schilling, Paul (1786–1837) 259
Schinkel, Karl Friedrich (1781–1841) 71, 90
Schlaf, Johannes (1862–1941) 96
Schleiermacher, Friedrich Ernst Daniel (1768–1834) 106
Schlemmer, Oskar (1888–1943) 318
Schlesinger, Ludwig (1864–1933) 346
Schmidt, Otto Juljewitsch (1891–1956) 209
Schmidt-Rottluff, Karl (1884–1974) 325
Schmieden, Curt (1905–1992) 247
Schneider, Theodor (1911–1988) 361
Schoenberg, Isaac Jacob (1903–1990) 352
Schönberg, Arnold (1874–1951) 332, 334
Schönemann, Th. (1812–1886) 198
Schönflies, Arthur Moritz (1853–1928) 346
Schooten, Frans van (1615–1660) 78
Schostakowitsch, Dimitrij (Dimitrjewitsch) (1906–1975) 333
Schottky, Friedrich (1851–1935) 346
Schouten 171
Schröder, Ernst (1841–1902) 398
Schreyer, Helmut (1912–1984) 513
Schröder, Ernst (1841–1902) 241, 269, 459

Schrödinger, Erwin Rudolf Josef Alexander (1887–1961) 363, 515, 558
Schubert, Franz (1797–1828) 94
Schubert, Johann Andreas (1808–1870) 110, 132
Schultze, Bernard (1915–2005) 328
Schumacher, Heinrich Christian (1780–1850) 148–150, 155, 163, 214, 217, 236
Schumann, Robert (1810–1856) 94
Schur, Friedrich Heinrich (1856–1932) 346
Schur, Issai (1875–1941) 346
Schwab, Gustav (1792–1850) 95
Schwartz, Laurent (1915–2002) 356
Schwarz, Hermann Amandus (1843–1921) 55, 275, 346
Schwarz, Wolfgang 342
Schweikart, Ferdinand Karl (1780–1859?) 74, 150
Schwind, Moritz von (1804–1871) 92
Schwitters, Kurt (1887–1948) 326, 335
Scott, Cyril Meir (1879–1971) 333
Scott, Sir Walter (1771–1822) 96
Scriba, Christoph J. (*1929) 358
Seghers, Anna (Pseudonym von Netty Radványi) (1900–1983) 335, 336
Segre, Corrado (1863–1924) 307, 308, 346
Séguier, Jean Armand Marie de (1862–1935) 209
Seiberg, Nathan (*1956) 576
Selberg, Atle (1917–2007) 356
Selten, Reinhard (*1930) 561
Semper, Gottfried (1803–1879) 90
Sernov, N. E. (1804–1862) 291
Serre, Jean-Pierre (*1926) 191, 356, 358, 438, 484
Serret, Joseph Alfred (1819–1885) 198
Seurat, Georges (1859–1891) 94
Severi, Francesco (1879–1961) 307, 346, 435
Shannon, Claude Edwood (*1916) 516, 567
Shelley, Percy (1792–1822) 96
Shimamoto, Yoshio (*1927) 540
Shor, Peter (*1959) 357
Shukowski (auch Schukowski), Nikolai Jegorowitsch (1847–1921) 495, 497, 502
Sibelius, Jean (1865–1957) 95
Siegel, Carl Ludwig (1896–1981) 353, 357, 361
Siemens, Werner von (1816–1892) 102, 259
Sierpiński, Wacław (1882–1969) 414, 490, 491, 497
Signac, Paul (1863–1935) 94
Simpson, Thomas (1710–1761) 81, 82, 286
Sinding, Christian (1856–1941) 95
Singer, Isadore Manual (*1924) 358
Skolem, Albert Thoralf (1887–1963) 393
Slevogt, Max (1868–1932) 94, 325
Smale, Stephen (*1932) 356, 579
Smetana, Bedřich (1824–1884) 95
Šmidt, Otto Jul'evič *siehe* Schmidt, Otto Juljewitsch
Smoluchowski, Marian von (1872–1917) 289
Sobolev, Sergej L'vovič *siehe* Sobolew, Sergej Lwowitsch
Sobolew, Sergej Lwowitsch (1908–1989) 494
Solotarjow (auch Solotarew), Jegor Iwanowitsch (1847–1878) 223, 225, 494
Sommerfeld, Arnold Johannes Wilhelm (1868–1951) 363, 449, 464, 515
Southey, Robert (1774–1843) 96
Speiser, Andreas (1885–1970) 346
Spinoza, Baruch Benedictus de (1632–1677) 10
Spitzweg, Carl (1808–1885) 92
Stäckel, Paul (1862–1919) 180
Staël, Mme. de (1766–1817) 96
Stanislaus II. (1732–1798) 11
Stark, Johannes (1874–1957) 363
Staudt, Christian von (1798–1867) 142, 143
Steenrod, Norman Earl (1910–1971) 344
Stein, Erwin (*1931) 508

Stein, Freiherr von (1757–1831) 116
Steiner, Jakob (1796–1863) 142, 160, 224
Steinheil, Carl August (1801–1870) 218
Steinitz, Ernst (1871–1928) 344, 346, 423–425
Steinmetz, Charles Proteus (1865–1923) 515
Steklov, Vladimir Andreevič *siehe* Steklow, Wladimir Andrejewitsch
Steklow, Wladimir Andrejewitsch (1864–1926) 293, 494, 495
Stendhal, Henri (1783–1842) 96
Stevin, Simon (1548–1620) 57
Stibitz, George Robert (1903–1995) 516, 517
Stickelberger, Ludwig (1850–1936) 346
Stieltjes, Thomas Jan (1856–1894) 267
Stifter, Adalbert (1805–1868) 96
Stockhausen, Karlheinz (1928–2007) 334
Stokes, George Gabriel (1819–1903) 131
Stolz, Otto (1842–1905) 167, 275, 346
Storm, Theodor (1817–1888) 96
Story, William Edward (1850–1930) 539
Stowasser, Fritz *siehe* Hundertwasser, Friedensreich
Strauss, Richard Georg (1864–1949) 94, 332
Strauß und Torney, Lulu von (1873–1956) 335
Strauß, Johann (1804–1849) 95
Strauß, Johann (1825–1899) 95
Strawinski, Igor Fjodorowitsch (1882–1971) 333, 334
Strindberg, August (1949–1912) 97
Struik, Dirk Jan (1894–2000) 57, 295, 352, 353, 358, 538
Strutt, John William, 3. Baron Rayleigh (1842–1919) 128, 377, 558
Struve, Friedrich Georg Wilhelm (1793–1864) 214
Study, Christian Hugo Eduard (1862–1930) 346
Sudan, Madhu (*1966) 357
Sudermann, Hermann (1857–1928) 96
Suslin, Michail Jakovlevič *siehe* Suslin, Michail Jakowlewitsch
Suslin, Michail Jakowlewitsch (1894–1919) 498, 500
Suvorov, Fëdor Matveevič *siehe* Suworow, Fjodor Matwejewitsch
Suworow, Fjodor Matwejewitsch (1845–1911) 164
Swedenborg, Emanuel (1688–1772) 126
Swinburne, Algernon Charles (1837–1909) 96
Sylvester, James Joseph (1814–1897) 142, 198, 200, 299–301, 304, 539

Tagaki, Teiji (1875–1960) 361
Tait, Peter Guthrie (1831–1901) 539
Tao, Terence (*1975) 356
Tarjan, Robert Endre (*1947) 357
Tarski, Alfred (1901–1983) 348, 352, 353, 416, 459, 460, 463
Tartaglia, Niccolò (1506–1559) 77, 178, 514
Taurinus, Franz Adolph (1794–1874) 74
Taussky-Todd (geb. Taussky), Olga (1906–1995) 364, 433
Taylor, Brook (1685–1731) 23, 24, 70
Teller, Edward (1908–2003) 519
Tennyson, Lord Alfred (1809–1892) 96
Tessenow, Heinrich (1876–1950) 318
Teubert, Gottfried 507
Thackeray, William Makepeace (1811–1863) 96
Thenard, Louis-Jacques (1777–1857) 105
Thom, René (1923–2002) 356
Thomas, Charles-Xavier (1785–1870) 509
Thompson, John Griggs (*1932) 356, 358, 440
Thomson, Joseph John (1856–1940) 127
Thomson, William (1824–1878) 112

Thukydides (455–396) 75
Thurston, William Paul (*1946) 356, 579
Tits, Jacques (*1930) 358
Toeplitz, Otto (1881–1940) 470
Tolstoi, Leo Nikolajewitsch (1828–1910) 97
Toulouse-Lautrec, Henri de (1864–1901) 94
Trakl, Georg (1887–1914) 335
Trefftz, Erich (1888–1937) 367
Trowbridge, Augustus (1870–1934) 351, 352
Tschaikowski, Peter Iljitsch (1840–1893) 94
Tschaplygin, Sergej Alexejewitsch (1869–1942) 502
Tschebotarjow, Nikolai Grigorjewitsch (1894–1947) 496
Tschebyschew, Pafnuti Lwowitsch (1821–1894) 131, 285, 291–293, 492, 494, 496, 497
Tschechow, Anton Pawlowitsch (1860–1904) 97
Tschirnhaus, Ehrenfried Walter von (1651–1708) 178
Tucholski, Kurt (1890–1935) 335
Tupolev, Andrej Nikolaevič *siehe* Tupolew, Andrej Nikolajewitsch
Tupolew, Andrej Nikolajewitsch (1888–1972) 502
Turgenjew, Iwan Sergejewitsch (1818–1883) 97
Turgot, Baron de l'Aulne (1727–1781) 84
Turing, Alan Mathison (1912–1954) 372, 513, 519–521, 532
Turnbull, Herbert Westren (1885–1961) 346
Turner, William (1775–1837) 92
Twain, Mark (1835–1910) 554
Tzara, Tristan (Pseudonym von Samuel Rosenstock) (1896–1963) 335

Uhde, Fritz von (1848–1911) 94
Uhland, Ludwig (1787–1862) 95
Uhse, Bodo (1904–1963) 336
Urysohn, Pawel Samuilowitsch (1898–1924) 498, 499
Uryson, Pavel Samuilovič *siehe* Urysohn, Pawel Samuilowitsch

Vahlen, Karl Theodor (1869–1945) 368
Valery, Paul (1871–1945) 96
Valiant, Leslie Gabriel (*1949) 357
Vallée-Poussin, Charles-Jean Gustave Nicolas de la (1866–1962) 467
Vandermonde, Alexandre-Théophile (1735–1796) 134, 178, 188, 199, 200
Varadhan, Sathamangalam Ranga Iyengar Srinivasa (*1940) 358
Varignon, Pierre (1654–1722) 55
Vasarély, Victor (1906–1997) 329
Vasil'ev, Aleksandr Vasil'evič *siehe* Wassiljew, Alexander Wassilijewitsch
Vasilesco, Florin 352
Vauban, Sébastian le Prestre de (1633–1707) 8, 9, 71, 72
Vaucanson, Jaques de (1709–1782) 530
Vaughan Williams, Ralph (1872–1958) 333
Vauquelin, Nicolas-Louis (1763–1829) 105
Veblen, Oswald (1880–1960) 171, 302, 346, 350, 419, 514, 519, 537, 539
Velásquez, Diego de Silva (1599–1660) 15
Velde, Henry van de (1863–1957) 318
Venn, John (1834–1923) 346
Verdi, Giuseppe (1813–1901) 94
Verga, Giovanni (1840–1922) 96
Verlaine, Paul (1844–1896) 96
Veronese, Giuseppe (1854–1917) 307, 308
Vieta, Franciscus (1540–1603) 177
Vietoris, Leopold (1891–2002) 353
Vigeland, Gustav (1869–1943) 324
Vinogradov, Ivan Matveevič *siehe* Winogradow, Iwan Matwejewitsch
Viro, O. Y. 362
Vitali, Giuseppe (1875–1932) 306, 309
Voevodski, Vladimir (*1966) 356
Voltaire; eigentl. François-Marie Arouet (1694–1778) 10, 48, 49, 84

Volterra, Vito (1860–1940) 309, 310

Waerden, Bartel Leendert van der (1903–1996) 209, 352, 353, 362, 423, 424, 427, 428, 437, 438, 440, 484
Wagner, Wilhelm Richard (1813–1883) 94, 332
Wallis, John (1616–1703) 20, 73
Walser, Martin Johannes (*1927) 337
Waltershausen, Wolfgang Sartorius von (1809–1876) 158, 586
Warhol, Andy (eigtl. Andrew Warhola) (1928–1987) 328
Waring, Edward (1734–1798) 199, 452, 468
Wassiljew, Alexander Wassilijewitsch (1853–1929) 164
Watt, James (1736–1819) 103, 113
Weber, Carl Maria von (1786–1826) 94
Weber, Constantin 367
Weber, Gerhard 508
Weber, Heinrich (1842–1913) 173, 209, 346, 423, 424, 435, 447
Weber, Wilhelm (1804–1891) 160, 216, 217
Webern, Anton Friedrich Wilhelm von (1883–1945) 332, 334
Wedderburn, Joseph Henry Maclagan (1882–1948) 346, 423–425
Wedgwood, Josiah (1730–1795) 103
Weierstraß, Karl Theodor Wilhelm (1815–1897) 38, 167, 214, 223, 224, 232, 249, 255, 267, 269–273, 275–279, 302, 303, 306, 346, 385, 413, 448, 455
Weigel, Julius Hans (1908–1991) 336
Weil, André (1906–1998) 344, 352, 353, 435–440, 484, 487, 573
Weinheber, Josef (1892–1945) 335
Weinstein, Alan (*1943) 352
Weisbach, Julius Ludwig (1806–1871) 109–111, 113, 132
Weiss, Peter Ulrich (1916–1982) 337
Werfel, Franz Viktor (1890–1945) 335, 336
Werner, Wendelin (*1968) 356
Weyl, Hermann Klaus Hugo (1885–1955) 344, 346, 347, 349, 351, 364, 365, 387, 419, 428, 432, 439, 458, 464, 472, 540
Whewell, William (1794–1866) 538
Whitehead, Alfred North (1861–1947) 346, 350, 390, 398, 401, 402, 585
Whitney, Eli (1765–1825) 102
Wiener, Norbert (1894–1964) 350, 363, 441, 442, 456, 467, 468, 500, 529, 531–538
Wigderson, Avi (*1956) 357
Wightman, Arthur Strong (*1922) 361
Wigner, Eugene (1902–1995) 581
Wiles, Andrew John (*1953) 344, 356–358, 541, 543–546, 573, 577, 581
Winogradow, Iwan Matwejewitsch (1891–1983) 494, 496, 548
Winthrop Jr., John (1606–1676) 297
Wintner, Aurel Friedrich (1903–1958) 352
Wittelsbach, Otto von (1833–1862) 91
Witten, Edward (*1951) 356, 574, 576, 577, 580, 581
Wladimir Wladislawowitsch Wojewodski *siehe* Vladimir Voevodski
Wolf, Christa (*1929) 337
Wolf, Hugo (1860–1903) 95
Wolff, Christian (1679–1754) 10, 335, 547
Wolfskehl, Paul Friedrich (1856–1906) 358, 543
Wols, Wolfgang (1913–1951) 328
Worbs, Erich (1893–1975) 586
Wordsworth, William (1770–1850) 96
Wußing, Hans (*1927) 358, 378
Wyatt, John (1700–1766) 98, 102

Yang, Chen Ning (*1922) 344, 570
Yau, Shing-Tung (*1949) 356
Yoccoz, Jean-Christophe (*1957) 356
Youden, William (1900–1971) 353
Young, Thomas (1773–1829) 128, 139

Zach, Franz Xaver von (1754–1832) 213

Zariski, Oscar (1899–1986) 344, 352, 353, 438
Zeidler, Eberhard (*1940) 344, 552
Zelmanov, Efim (*1955) 356
Zenodoros (ca. 200 v. Chr.) 34
Zenon von Elea (etwa 490–430 v. Chr.) 378
Zermelo, Friedrich Ferdinand (1871–1953) 391–393, 457, 497
Zernov *siehe* Sernow, N. E.
Zeuner, Gustav Anton (1828–1907) 111–113
Zilly, Winfried (1905–1963) 334
Zippin, Leo (1905–1995) 361
Zola, Émile (1840–1902) 96
Zolotarëv, Jegor Ivanovič *siehe* Solotarjow, Jegor Iwanowitsch
Žukovskij, Nikolaj Egorovič *siehe* Shukowski, Nikolai Jegorowitsch
Zurbaràn, Francisco de (1598–1664) 15
Zuse, Konrad Ernst Otto (1910–1995) 374, 508, 512–514
Zweig, Arnold (1887–1968) 336
Zweig, Stefan (1881–1942) 336
Zwerenz, Gerhard (*1925) 337
Zygmund, Antoni (1900–1992) 352

Sachverzeichnis

Abbildung(en) 240
  bijektive 406
  homöomorphe 406
  konforme 470, 502
  quasikonforme 502
  stetige 406
  topologische 406
Abel-Preis 358
Ableitung einer Punktmenge 384
Absolutismus 7
absolutistisch 8
Absterbeordnung 79
abzählbar 384, 387
Abzählungskalkül 362
Additionstheoreme 54
Adjunktion einer Menge 424
Affinität 143, 144
Ähnlichkeit 143, 146
Akademie(n) 9, 10
Alef 388
Algebra 423
  abstrakte 432, 436, 437, 439, 440
  Boole-Schrödersche 403
  Boolesche 205, 398, 442, 516
  der Logik 398
  kommutative 430, 483
  moderne 423, 427, 440
Algebrentheorie 423, 427, 440
Algorithmentheorie 500
Algorithmus 361, 559, 562, 565
Amplitude(n) 558
Analyse
  harmonische 556, 566
Analysis 124
analysis situs 68
Anfangswertproblem 246
Antinomie(n) 389–391, 396, 402
Approximationssatz 271
Approximationstheorie 468, 496
Äquivalenz 208
Äquivalenzklasse(n) 383
Äquivalenzrelation 220
Art Informel 328
Assoziativgesetz 69, 208
Astragalos 76
Astralgeometrie 155
astralische Größenlehre 150
Atiyah–Singer–Indextheorem 573
Aufklärung 10, 39
Auflösungstheorie 196
Ausdehnungslehre 413
Ausdruck
  analytischer 41
Auswahlaxiom 386, 391, 392, 409, 414, 425, 461
Automatentheorie 420
Automorphismengruppe 207
Axiom(e) 174, 391, 556
  der Physik 361
  der klassischen Mechanik 361
  der Quantentheorie 361
  der Thermodynamik 361
  der Wahrscheinlichkeitstheorie 361
  geometrisches 158
  mengentheoretisches 461
  Parallelen- 158
Axiomatik 458
axiomatische Methode 456
Axiomatisierung(en) 177, 391, 392, 396, 417, 441
Axiomensystem(e) 176, 308, 392, 399, 453, 456

Bahnbestimmung der Vesta 213
Banach-Algebren 440
Banach-Raum 415
Bandmatrizen 505
Basis e 231
Bauhaus-Stil 318
Beatmusik 338
Belegungsfunktion 267
beliebig klein 249
Berechenbarkeit 331
Bernoullische Zahlen 80
Betriebssystem(e) 504
Beweisen 456
Beweistheorie 419
Bewertungstheorie 437
Binärsystem 398
Binomial
  -entwicklung 22
  -koeffizienten 294

-reihe 22
binomische Verteilungen 81
Birch–Swinnerton Vermutung 581
Blatt der Riemannschen Fläche 274
Bogenkoordinaten 66
Borel-
Algebra 480
Baum 480
Maß 480
Menge(n) 480
Bourbaki 473, 486
Brachystochrone 29, 30, 39
Brachystochronenproblem 36
Brownsche Bewegung 560
Brownsche Zitterbewegung 560
Bunjakowski–Cauchy–Schwarzsche Ungleichung 571

Calculus 27, 28, 32
Carl-Friedrich-Gauß-Preis 357, 358
Cartesische Wirbeltheorie 42
cartesisches Produkt 240, 241
Casimir-Effekt 556, 561
casus irreducibilis 56, 252
Catalansche Vermutung 549
Clifford-Algebren 205
Computer
-algebra 439
-algorithmen 564, 583
-beweis 540
digitaler 516
elektromechanischer 516
-geometrie 330
-kunst 330
Personal- 523
-simulation(en) 567, 580
-tomographie 560

Dadaismus 325, 326, 328, 335, 338
Darboux-Integral 266
Darstellbarkeit
einer Funktion 246
trigonometrische Reihen 263
darstellende Geometrie 136–139
Darstellungstheorie 430
Datenkompression 560
Dedekindscher Schnitt 269, 383
Deformationsquantisierung 576
Δ-Operator 202

Determinanten 199
-theorie 258
deterministisches Chaos 342
Diagramm 129
Differential 31, 107
Differentialform
äußere 438
positiv-definite 162
quadratische 162
Differentialgeometrie 42, 66, 159, 162, 215, 223, 257, 304, 306, 439, 497, 569
Differentialgleichung(en) 32, 39, 399, 558, 577
Bernoullische 39
Besselsche 39
Cauchy-Riemannsche 247, 251, 260, 272
Clairautsche 39
d'Alembertsche 39
der Elektrizitätslehre 128
Euler-Lagrangesche 38
Eulersche 36, 37
gewöhnliche 456
Hamilton-Jacobische 127
hyperbolische 472
lineare 40, 362, 456, 517
lineare partielle 277
nichtlineare partielle 420
parabolische 472
partielle 40, 127, 234, 246, 258, 276, 475, 492
Riccatische 39
stochastische 572
totale 258, 514
Differentialinvariante(n) 430
Differentialrechnung 24, 28, 29, 31, 52
Differentiation 407, 573
Differenz 238
Differenzen
-maschine 118, 121
-methode 514
-rechnung 23, 55
-verfahren 472
differenzierbar 236
komplex 260
reell 260
Differenzierbarkeit 236, 249, 278

komplexe 272
Digitalrechner 504
elektromechanischer 512
Dimension 386
Dimensionentheorie 492, 498
Diskretisierung 505, 564
Diskriminante 200
Distributionen 280
Distributivgesetz 69
divergent 20
Divergenz 202
Divisionsalgebra 203
Donaldson-Theorie 576
Doppelsterne 567
Doppelverhältnis 141
Dreiecke
geodätische 163
ähnliche 73
Dreieckszahlen 21
Dreikörperproblem 45, 126, 309, 476
Drucker 123
Dualitätsprinzip der projektiven Geometrie 141
durchschnittlicher Fehler 286
dynamische Systeme 331

École Polytechnique 45
effektive Verfahren 564
Eigenschaften
invariante 142
metrische 140
projektive 140
Eigenwert(e) 557–559
-problem 456, 557, 559
-theorie 419, 558
Elektrodynamik 130, 131
elektromagnetische Schwingung 130
Elektromagnetismus 130
Element(e)
abstrakte 204
Elementarmathematik 167
Ellipse(n) 557
elliptische
Funktionen 303
Integrale 293
endliche Körper 302
Engine
Analytical 121
analytical 121, 123
difference 121
ENIAC 420, 517–519
Entropie 567
Entropieverlust 567
Entwickelbarkeit 236
Epsilontik 271
erbliche Phänomene 310
Erdachse 124
Ereignisse
gleichmögliche 283
Erkenntnistheorie 554
Erlanger Programm 167, 169, 170, 205
Erwartung 78
Erwartungswert 286
Erweiterung
äquivalente 424
einfache 424
Erweiterungskörper 424
Eulerscher Polyedersatz 67
Exhaustionsmethode 230
Existenzbeweis 449
Expressionismus 324–326, 335, 336
Extremale 34, 37

Faktor(en)
ersten Grades 61
integrierender 39
Linear- 60
lineare 56
quadratischer 59
reelle 60
zweiten Grades 60, 61
Farblichtmusik 333
fastperiodisch 342
Fauvismus 325
Fehlerrechnung 284
Fehlertheorie 78
Fermatsche Vermutung 573, 577, 582
Fermatscher Satz 223
großer 65, 541
kleiner 65
Fermatsches Problem 577
Feynmandiagramm 558
Feynmanintegral 580
Fields-Medaille 353, 357, 358, 545, 574
Figuren 74
unmögliche 329
Fläche(n)
algebraische 362, 435

3-dimensionale 579
konstanter negativer Krümmung 305
Riemannsche 573
-theorie 66, 163, 304
-treue 71
Flächeninhalt unter einer Kurve 264
Floer-Homologie 576
Fluxionen 23
Folge(n)
gleichmäßig konvergente 413
Formalismus 396
Formen
binäre quadratische 65
definite 362
quadratische 361, 557, 558
unendlichdimensionale 558
Fortsetzung
analytische 273, 274
Fotorealismus 328
Fourier
-koeffizienten 268
-reihe 40, 246, 558
-transformation 558, 560
Fraktal 331
Fraktalkunst 331
Französische Revolution 45
Frederic-Esser-Nemmers-Preis 358
Frobeniusmannigfaltigkeiten 576
Fundamentalfolge(n) 269, 383
Fundamentallemma 38
Fundamentalsatz 57
der Algebra 56, 58
Funktion(en) 107, 234, 239, 260, 278
absolut stetige 309
algebraische 251, 262, 274
analytische 54, 216, 237, 239, 272, 274, 279
automorphe 474
beschränkte 265
Beta- 55
Darstellbarkeit 246
differenzierbare 267, 271
eindeutige 272
elementare 53, 55
elliptische 45, 194, 196, 225, 252, 256, 258, 278, 489, 578
fastperiodische 421
Gamma- 55
ganze 275
gebrochen rationale 57
Greensche 558
harmonische 260
holomorphe 228, 272
integrierbare 265
komplexe 475
komplexer Variabler 238, 249, 250
-körper 437
Kugel- 216
“mehrdeutige“ 261
mehrfach periodische 304
meromorphe 228, 229
modulare 578
monotone 265
nicht integrierbare 279
nirgends differenzierbare 255, 279
oszillierende 240
pathologische 279
periodische 246
quadratisch integrierbare 413
rationale 178, 193
reeller Variabler 306, 497
stetige 265, 413
-theorie 223, 251, 331
deskriptive 497
konstruktive 496
transzendente 194
trigonometrische 54
ungerade 244
unstetige 240
verallgemeinerte 280
von n Variablen 500
willkürliche 239
Funktionalanalysis 374, 407, 410–415, 417–419, 421, 455, 500, 558
Funktions
-begriff 52, 260
-element 273, 274
Funktor 440
Futurismus 325

Galois
-Gruppe 197, 207
-Körper 302
-Theorie 195
Ganztonleiter 333
Garbe(n) 438

-theorie 438
Gaußscher Algorithmus 505, 564
Gauß-Preis 572
General Education Board 349
Geometrie
affine 146
algebraische 344, 435–440, 487, 561, 576, 577
analytische 108, 158, 205, 307, 308
elliptische 164, 165
euklidische 73, 74, 146, 158, 165, 176, 453, 476
fraktale 342
Grundlagen 147, 452, 453
hyperbolische 164, 165, 475
imaginäre 154
klassische 159
mehrdimensionale 75
metrische 142
nicht-euklidische 71, 73, 74, 108, 143, 148–150, 152, 154, 155, 158, 159, 163, 164, 176, 210, 474–476, 583
nichtkommutative 576
projektive 108, 142, 146, 165, 172, 302, 307, 308, 435
Riemannsche 307, 570
synthetische 108
geometrische
Quantisierung 576
Verwandtschaften 142, 143
Wahrscheinlichkeiten 82
geordnetes Paar 307
Geschlecht
arithmetisches 438
topologisches 438
Geschwindigkeit von Rechnern 526
Gesetz der großen Zahlen 31, 75, 282, 284, 285, 446, 482
Gleichheit 143
gleichmächtig 384
gleichmäßig(e)
beschränkte Folgen 307
konvergent 267
Konvergenz 306, 383
gleichmögliche Fälle 290
Gleichung(en)
algebraische 177, 184, 188, 197, 226, 231, 303
biquadratische 59
diophantische 361, 521, 565, 573, 577
dritten Grades 177
einfache 57
fünften Grades 189–191
gemischte 57
höheren als vierten Grades 64
kubische 56, 59
lineare 200
n-ten Grades 56, 59
singuläre 567
unbestimmte 65, 220, 221
unendlich viele lineare 412
unvollständige 57
vierten Grades 177, 178, 188
vollständige 57
von Primzahlgrad 195
Wurzeln von 58
Gleichungssystem
lineares 527, 564, 565
Glücksspiel 77, 283
Goldbachsche Vermutung 468, 547, 548
Goldbachsches Problem 547
Gradient 202
Gradmessung 210, 214
Graph 264
Gravitationsphysik 570
Graßmann-Kalkül 203
Grenze
des Integrals 250
obere 458
Grenzwert 233, 485
linksseitiger 246
rechtsseitiger 246
Grenzwertsatz, globaler zentraler 81
Gromow–Witten-Invarianten 576
Größe(n) 162
unendlich kleine 28
Grundfunktion 38
Grundlagen der Geometrie 173
Grundschwingung 558
Grundstrukturen
algebraische 209
Gruppe(n) 170, 199, 204, 208, 209, 423

abelsche 193
affine 146
äquiforme 146
-begriff 169
abstrakter 209
der Gleichung 197
endlich einfache 440, 574
endliche abelsche 208
Haupt- 146
kontinuierliche 574
Lie- 483
-struktur 485
symmetrische 189
-theorie 204, 427, 439
abstrakte 302
Transformations- 171, 208
unendliche 208, 440
von Substitutionen 198
Gruppoid 440

Hardware 504, 524, 525
Harmonische Analyse 557
Häufigkeit 76, 79
Häufungspunkt(e) 384
Hauptfaserbündel 570
Hauptgruppe 169, 170
Hauptsatz der Funktionentheorie 250
Heimcomputer 339
heliozentrische Lehre 296
Hilberträume 571
Hilbertsche Probleme 562
Hilbertscher Folgenraum 412
Hilfsgleichungen 193
Himmelsmechanik 124, 126
Höchstleistungsrechnen 526
Höchstleistungsrechner 504
Hodgevermutung 581
Hollerith-Maschine(n) 510, 515
holomorph 272
Homologietheorie 438, 499
Homotopietyp 579
homöomorph 578
Hopfalgebren 576
Hydrodynamik 134
Hyperbel(n) 557
Hyperbelquadratur 20
hyperelliptische Funktionen 304
Hyperkomplexe Systeme 430
höhere Ableitungen 236

Iatromathematik 126
Ideal 226, 437
Idealtheorie 424, 430, 437, 440
kommutative 440
IEB Programm 352
Ignoramus. Ignorabimus 463
Impressionismus 325, 333, 335
Index einer Gruppe 199
Industrieroboter 564
Infinitesimal
-mathematik 24, 28, 42
-rechnung 25, 243, 400
Informatik 374, 420
Praktische 506
Technische 506
Theoretische 407
Information 534, 567
Informationstheorie 500, 567
Inhalt 267, 278
inkommensurable Strecken 270
Inkremente 23
Instantonen 576
Institut Henri Poincaré 351
Integral 31, 278
abelsches 435
-begriff 278, 407, 408, 413
bestimmtes 249, 263, 407
-definition 408
elliptisches 194, 210, 258, 259
-formel 247
-gleichung(en) 412, 450, 517
lineare 412, 417
logarithmisches 250
-rechnung 31, 52
-satz 302
unbestimmtes 407
Integration(s) 407, 483, 573
gliedweise 23
-intervall 265
näherungsweise 502
-weg 251
Integrierbarkeit 249
Integrodifferentialgleichung 310
Interaktion 342
Intuitionismus 396, 405, 464
Invariante 142, 200, 204, 304
topologische 575

Invariantentheorie 142, 171, 301, 430, 447, 449, 450
Invarianz der Dimension 406
inverse Operation 263
Irrationalität 231, 361
  von π 66, 71
Isochrone 27, 39
isomorph 413
isoperimetrisches Problem 30
Iterationsprozess(e) 567

Jugendstil 318, 319, 335

Kardinalzahl(en) 394
  reguläre 394
  singuläre 394
Kartenprojektion 71
Katastrophentheorie 342
Kategorie(n) 440
  -theorie 344, 434
Kavalierperspektive 71
Kegelschnitt(e) 71, 124, 557
  unendlichdimensionale 558
Kenneth O. May Prize 358
Kettenbruch 489
Kettenbruchentwicklung 66
Kettenlinie 28, 39
Klassenkörpertheorie 361, 430, 433, 451
klassische Mechanik 131
Knotentheorie 576, 580
Koeffizienten
  komplexe 56
  reelle 58
Körper 188
  kommutativer 188
Kohomologie 438
  -ringe 500
  -theorie 344, 440
Kollineation 143, 144
Kolmogorow-Arnold-Moser-Theorie 559
Kolonialisierung 8
Kometentheorie 126
Komma
  gleitendes 513
Kommunikation 534
Kommunikationstheorie 537
Kommutativgesetz 69, 201, 208
komplexe Veränderliche 260
Komplexität 562, 565, 583
  lineare 565
  von Computeralgorithmen 581
Konfinalität 394
konforme Abbildung 306
Kongruenz 144, 220
Königsberger Brückenproblem 67
Konstruktivismus 325, 405
kontinuierliche
  Symmetriegruppe 570
  Transformationsgruppen 361
Kontinuum 385–388
  -hypothese 386, 392, 394, 414, 461
konvergent 20
Konvergenz 239, 278
  -begriff 53, 379
  gleichmäßige 278
  -kreis 273
  -kriterium 249
  -prinzip 255
  -radius 251
Koordinaten
  barycentrische 144
  projektive 142
  -system 142
Körper 423
  abelsche 361
  algebraischer 225
  -begriff 225
  der reellen Zahlen 203
  endliche 198, 206
  -erweiterung(en) 440
  -struktur 485
  -theorie 344, 424, 427
Kovariante 200, 204
Kräfteparallelogramm 55
Kreis(e) 557
Kreiskettenverfahren 274
Kreisteilungsgleichung 180, 189, 193, 206
Kreisverwandtschaft 143
Krümmung 569, 570
  geometrischer Figuren 571
  konstante negative 159, 164
  negative 163
  variable 159
Krümmungs

-maß 304
-theorie 570
Kubikzahlen 119
Kubismus 325, 326
Kugelfunktion 222
Kugelverwandtschaft 143
künstliche Intelligenz 521
Kurve(n)
-integrale 251
algebraische 200, 231, 308, 362, 561
elliptische 578
pseudoholomorphe 576
Kybernetik 500, 529, 536

Laplace-Transformation 284
Lebenserwartung 79
Lebesgue
-Integral 408
-integrierbar 408
-Maß 409
Leistungsfaktor 527
Libration des Mondes 126
Lichttheorie 130
Lie
-Algebren 344
unendlichdimensionale 576
-Gruppen 344
-Struktur 576
limes inferior 249
limes superior 249
Limitierung(s) 53
-verfahren 20, 53, 279, 480
lineare
assoziative Algebra 299
optimale Modelle 561
Linearisierung 424, 425
Linien
geodätische 39
Liniengeometrie 143
Linksideal(e) 425
Lochkartensystem 510, 516
Logarithmen 254
natürliche 54, 231
-tafel(n) 507
logarithmische(s)
Funktion 53
Rechnen 53
Logarithmusfunktion 20
Logik 554
dreiwertige 407
intuitionistische 407
klassische 407
mathematische 399, 402, 403, 407, 500
mehrwertige 407
modale 407
nichtklassische 407
theoretische 402
zweiwertige 407
logische Formalismen 556
Lorentz
-Gruppe 475
-Transformation(en) 131, 475
Lösung
allgemeine 40
partikuläre 40
singuläre 40
Ludolphsche Zahl 231

Mächtigkeit 385–387
des Kontinuums 361
Mandelbrotmenge 331
MANIAC 420
Mannigfaltigkeit(en) 143, 377, 385, 578
algebraische 437, 438
differenzierbare 438
geometrische 142
irreduzible 437
komplexe 439
n-dimensionale 162
projektiv algebraische 438
Punkt- 383
Raum-Zeit- 573, 576
Riemannsche 583
Theorie der 580
vierdimensionale Raum-Zeit- 570
vierdimensionale 467, 575
Zahlen- 142
Manufakturen 9
MARK I 517
Mathematik
abstrakte 131, 555
angewandte 109, 131, 372, 373, 494, 584
diskrete 505, 509, 573
elementare 109
gute 487

kontinuierliche 505
numerische 559
physikalische 563, 574, 575, 580
Quanten- 563
reine 372, 373, 584
schlechte 487
Mathematikerkongress 347, 355, 357–359, 381, 399, 416, 430, 453, 474, 478, 497, 537, 538
internationaler 496
mathematische
Logik 374
Physik 127, 128, 243, 268, 284, 344
Spieltheorie 561
Ökonomie 561
Matrix 559
Matrize(n) 199
hierarchische 565
-kalkül 200
Maxima und Minima 30, 246
Maxwellsche Differentialgleichung 570
Maß 267, 278, 408
-begriff von H. Lebesgue 441
der Wahrscheinlichkeit 283
-system
absolut physikalisches 216
-theorie 419, 442, 443, 492
Mechanik
analytische 132, 258
starrer Körper 43
System- 132
technische 131
theoretische 55
Mehrtafelverfahren 70
Menge(n)
abgeschlossene 387
abzählbar unendliche 482
analytische 500
dichte 387
geordnete 394
konstruktible 461
Menge aller 390, 457
meßbare 482
nichtmessbare 409
Ober- 387
perfekte 387
unendliche 383, 395
Unter- 387
wohlgeordnete 387, 391
Mengenalgebra 395
Mengenfunktion(en)
monoton wachsende 442
nichtnegative 442
Mengenlehre 378
deskriptive 396, 500
transfinite 381, 387, 389
Mengenringe 395
Meridianmessungen 42
Merkantilismus 8
Methode(n)
asymptotische 561
axiomatische 423
der kleinsten Quadrate 124, 210, 213, 284, 287
formale 459
mathematische 556
Metrik 162
Mikroprozessor 523
Militärtechnik 8
Millenniumsproblem 583
Miniaturisierung 522, 561
Minimalfunktion 37, 38
Minimax-Prinzip 472
Minkowski-Welt 467
Mittel
arithmetisches 182
geometrisches 182
Mittelwert 286
Modell(e) 456, 460, 475
statuierte(s) 394
Modul
-funktion 304
-theorie 424
modular 578
Möndchen des Hippokrates 66
Monodromiegruppe 362, 456
Mordellsche Vermutung 573
Multipliziermaschine 510
Musik
elektronische 334
serielle 334
Mutterstruktur 485, 486
Möbiussches Band 144

Nadelproblem 82
National Research Council 349
Naturalismus 334, 335

natürliche Koordinaten 66
Nebularhypothese 126
Nepersche Rechenstäbchen 506, 507
neue Musik 333
Neuromantik 335
Nevanlinna-Preis 357, 358
Newtonsche Gravitationskraft 570
Newtonsche Mechanik 558
nicht-euklidische Geometrie 305
nichtkommutativ 342
nichtkooperative Spiele 561
nichtorientierbar 342
Nichtstandardanalysis 342
nichttopologisch 342
Non-Standard-Analysis 279
Normalformen 579
Normalteiler 197
Normalverteilung 284
Nullstelle(n) 58, 230
  nichttriviale 229
numerische Methoden 374
Nutation 124
Näherungswert 230

oberes Integral 266
Oberschwingungen 558
Obersummen 264
ökonomische Gleichgewichte 561
Op-Art 330
Operationsforschung 374
Operator(en)
  im Hilbertraum 576
  lineare 413, 414, 472
Optimalität 562
Optimierung 564
  lineare 246
Optimierungstheorie 564
Ordnung einer Gruppe 199
Ordnungs
  -struktur 485
  -typ(en) 414
Orthogonalprojektion 137

Packungs
  -dichte 549
  -problem 550
Pangeometrie 154, 157, 163
Parabel(n) 557
  -quadratur 378
Paradox(on) 390, 395, 409, 457
Paradoxien des Unendlichen 379
Parallel(en) 165
  -axiom 73, 146, 151, 154, 210
  -linien 148
  -postulat 73, 74, 148, 149, 151
  -problem 151
  -Rechner 504, 526
  -theorie 158
Parameter 142
Parametrisierung 578
Parkettierung 540
Partialbruchzerlegung 58
partielle Differentialgleichung(en) 130, 505
Periodizität 251
Permanenzprinzip 266
Permutation 189, 199, 204
  aller Wurzeln 303
Permutationsgruppe(n) 197, 206
Permutationstheorie 197
Perspektive 70, 132
Pfadintegral(e) 560
Physik
  mathematische 574
  statistische 580
Pipeline-Konzept 525
Planetensystem 126
Poincaré-Vermutung 577, 579, 581
Poisson-Struktur 576
Pol 228, 251
Polarkoordinaten 27
Polyeder 67, 362
Polygone 180
  regelmäßige 180
Polyphobie 332
Pop Art 328
positive Brüche 270
Postulat, fünftes Euklidisches 73
Potentialtheorie 126, 130, 216, 222, 236, 268, 278, 284, 304, 305, 455, 495
Potenzreihe(n) 272
  -entwicklung 251
  konvergente 233
Potenzrest 220
Prädikatenkalkül(e) 402
Präzession der Äquinoktien 124

Prim
-körper 424
-faktoren 223
-ideale 226
Primärideal 437
Primzahl(en) 65, 121, 226, 378, 406, 546, 580
Anzahl der 228
„reguläre“ 223
-satz 223, 489
Sophie-Germain- 549
-theorie 372, 478
-verteilung 292, 467, 468, 478
-zwillinge 546
Prinzip
der kleinsten Wirkung 39, 127, 564
des kleinsten Zwanges 127
des kürzesten Lichtweges 39
Prioritätsstreit 23
Problem(e)
graphentheoretische 573
isoperimetrisches 39
kominatorische 573
Programmiersprache(n) 514
problembezogene 514
Progression
arithmetische 222
projektive Geometrie 139
Proton(en) 576
Prozess(e)
Markowsche 442, 501
stochastische 442
zufällige 556, 560
pseudokonvex 342
Pseudosphäre 163, 305
Punktmechanik 43
Punktmenge(n)
Inhalt von 399
Pyramide(n) 554

Quadratur
der Hyperbel 20, 31
des Kreises 31, 447
komplizierter Kurven 22
Quadratzahl(en) 379
Quanten
-computer 577
-elektrodynamik 558
-feld 580
-feldtheorie 556, 571, 574, 581
konforme 576
-gravitation 570, 573
-kohomologie 576
-logik 576
-mathematik 576
Heisenbergsche 576
-mechanik 374, 413, 414, 418, 419, 439, 558–560, 571
-physik 129, 570
-theorie 363
quark confinement 576
quarks 576
quasikompakt 342
Quaternionen 188, 200, 201
Querschnittswissenschaft 556
Quotientenkriterium 237, 247

Rückkopplung 534
Radikale 177, 178, 189, 191, 193, 197
Radontransformation 560
Randwertproblem 246, 362, 456
Rang einer Matrix 200
Rationalitätsbereich 225, 361
Raum
abzählbar kompakter 498
euklidischer 75, 393
kompakter 498
mathematischer 143
metrischer 413
physikalischer 143
topologischer 395, 414, 499, 574
unendlichdimensionaler 417
vierdimensionaler 475, 576
Raum-Zeit-Welt 475
Realismus
magischer 335
phantastischer 328
sozialistischer 336
Rechenanlage(n)
elektronische 420
Rechenautomat(en) 514
Rechengeschwindigkeit 564
Rechenmaschine 118
Rechenwerk 123
Rechnen
wissenschaftliches 526, 562, 564
Rechner
binärer 508

digitaler 398
elektrodynamische 506
elektromechanische 504
elektronischer 506
mechanischer 504, 506, 508
programmgesteuerte(r) 116, 374, 504
Rechnerarchitektur 525
Rechtsideal(e) 424
reelle algebraische Zahlen 385
Regeln
des Bombelli 64
des Cardano 64
des Scipio del Ferro 64
Regelung 529
regulär 272
Reihe(n)
arithmetische 20
divergente 20, 53, 279, 480
-entwicklung 22
hypergeometrische 214, 223, 237
Konvergenz der 237
trigonometrische 40, 41, 160, 222, 234, 235, 239, 243, 244, 246, 263, 268, 271, 278, 383
unendliche 21, 22
Rekursionsformel(n) 394
Relationen 172, 173, 241
Relativitätstheorie 307, 363, 373, 374, 430, 454, 467, 475, 558, 570, 576
allgemeine 131, 456, 467, 566
spezielle 131, 467
Renormierungs
-gruppe 576
-theorie 576
Residuensatz 247
Residuum 251
Resonanz 559
-effekt 559
Reste
biquadratische 186
Reziprozitätsgesetz 361
quadratisches 220
Ricci-Strömung 579
Riemann–Epsteinsche Zetafunktionen 561
Riemann-Integral 266
Riemann-Stieltjes Integral 267
Riemannsche
Fläche(n) 261, 262, 274, 574
Vermutung 230, 573, 580–582
Zetafunktion 478, 580
Ring(e) 437
Dedekind- 440
kommutativer 226
Noether'sche 437
Ringtheorie 437
Rockefeller Foundation 348, 351
Programm 352
Rockmusik 338
Romantik 332
Rundungsfehler 559

Saccherisches Viereck 73
Satz von Fermat–Euler 561
Schaltkreis(e) 559, 561
Schiefe der Ekliptik 124
Schiefkörper der Quaternionen 188
Schleifengravitation 577
Schranke 230
Schrödingergleichung 559
schwarze Löcher 567
schwingende Saite 558
Schwingungsfrequenzen 559
Seiberg–Witten Gleichungen 576
Separation der Variablen 39
Shimura-Taniyama-Weil-Vermutung 344, 544, 578
Siebzehneck 181
Simulation(en) 564
effektive 562
Singularität(en) 163, 164, 251, 438, 563
Skelettbauweise 318
Software 504, 524
Solitonen 576
Spätromantik 332
Speicher 123
-kapazität 564
Spektralfolge 438
Spektraltheorie 414, 483
Sphäre 578
2-dimensionale 578
3-dimensionale 579
n-dimensionale 578, 579
Spiegelsymmetrie 576
Spieltheorie 374, 482, 556

Spirale
  archimedische 27
  logarithmische 27
sporadische Gruppen 342
Sprungstellen 246
stabile Gleichgewichtszustände 560
Stabilität 495, 559
Stabilitätstheorie 128
Staffelwalze 507
Stahlbeton 323
Stahlbetonbau 319
Standardmodell 570
Statistik
  mathematische 113
Steifheit 559
Sterblichkeit 79
Stetigkeit 107, 234–236, 238, 240, 249, 278, 486
Stetigkeitsbegriff 247, 255
Steuerung 529
Stoa 76
Stochastik 75, 563, 572
Störungstheorie 126
Strategie(n) 571
  optimale 560
string 574
Stringtheorie 574, 576
Struktur(en) 342, 485, 486, 574
  algebraische 423, 424, 485
  diskrete 563, 573
  einer Fuge 554
  geometrische 574
  hexagonale 549
  kontinuierliche 563
  mathematische 563, 573, 580
  nichtkommutative 425
  topologische 485, 486, 576
Strukturmathematik 188, 206, 374, 396
Störungs
  -rechnung 557, 558
  -theorie 558
Substitution 199
Super
  -geometrie 576
  -Computer 504
  -position 41, 235, 500, 559
  -symmetrie 576
Surrealismus 325–328, 335, 336
Symbolismus 335
Symmetrie(n) 563, 574
  kontinuierliche 574
  Penrose- 581
  zweidimensionale 581
Symmetrieeigenschaften 574
System(e)
  chaotische 581
  dynamische 500, 560
  große 505
  linearer Gleichungen 505
  quantenmechanisches 580
Systemmatrizen 559
Sägeblattkurve 235
Säkulargleichung 557

Tachismus 328
Tafeln
  astronomische 121
  Navigations- 121
  trigonometrische 74
Taniyama-Shimura-Vermutung
  siehe Shimura-Taniyama-Weil-Vermutung
Taylorentwicklung 233
Taylorreihe 23, 478
Technisches Zeichnen 138
Teilbarkeit 378
Teilbarkeitseigenschaften 561
Tensorrechnung 202
Theorem von Riemann–Roch–Hirzebruch 572, 573
Theorie
  der Bündel 342
  der Garben 342
  der Knoten 342
  der Quantencomputer 576
  der Schwingungen 502
  der Zöpfe 342
  des Klanges 128
  des Maßes 421
Thermodynamik 129
Topologie 143, 374, 400, 563, 572
  algebraische 439, 500, 579
  allgemeine 396
  mengentheoretische 413, 491, 498
  symplektische 576
topologische(r)

Invarianten 580
Quantenfeldtheorie 576
Typ 578, 579
Vektorräume 483
Torus 578
Totenregister 78
Trajektorien 31, 39
orthogonale 54
Traktrix 163
Transformation mittels reziproker Radien 143
Transformationsgruppe(n) 142, 167, 198, 207
Transistor(en) 522
transzendent 231
Transzendenz 361
von π 66, 447
Tschirnhaus-Transformation 178
Turbulenzproblem 581
Turing-Maschine 521
Twistoren 576
Typentheorie 402

Überdeckungssatz 480
Umgebung 485
Unendlich(e) 378, 389
aktual 380
große Größen 55
klein 249, 379
kleine Größen 55
Mengen 380
potential 380
Uniformisierung 362
Unschärferelation 571
unstetig 234, 235
Unstetigkeit 238
unteres Integral 266
Untergruppe 199
Untersummen 264
Unvollständigkeitssatz
1. Gödelscher 460
Urknall 566

Variable 52
Variation(s)
der Konstanten 40
-prinzipien 127
-problem(e) 37, 362, 577
-rechnung 30, 32, 34, 36, 38, 134, 251, 258, 362, 413, 455, 564
Vektorbündel 570
Vektorraum
topologischer 443, 500
Vektorrechner 504, 526, 528
Vektorrechnung 202
Verarbeitung
parallele 526
quasi-parallele 525
serielle 525
Verbandstheorie 440, 492
Vereinigung 387
Verknüpfung(en) 188, 220
Umkehrbarkeit 208
Verschlüsselung(s)
-methode(n) 561
von Informationen 556
Vertauschbarkeit
partieller Ableitungen 55
Verteilung einer Zufallsgröße 286
Vertexoperatoren 576
Verwandtschaften
geometrische 144
Verzweigung von Lösungen 559
Vielteilchensystem(e) 563, 567, 568, 571, 580
Vier-Spezies-Maschine(n) 508
Vierfarbenproblem 538–540
Vokalpolyphonie 334
Volksmusik 333
Vollständigkeit 417
Vollständigkeitssatz 460
Volumengleichheit 361

Wahrheitsfunktion 400
wahrscheinlich 78
Wahrscheinlichkeit 75, 78, 281, 290, 572
Wahrscheinlichkeitsrechnung 125, 374, 445, 495
Waringsches Problem 468
wavelets 559, 560
Weierstraßsche Strenge 272, 279
Weil-Vermutung *siehe* Shimura-Taniyama-Weil-Vermutung
Wellenmechanik 558
Wellentheorie 502
Widerspruchsfreiheit 177, 361, 456

formale 457, 460, 461
inhaltliche 456
Winkeltreue 71
Wirbeltheorie 131
Wohlordnung 391
Wohlordnungssatz 425
Wolf-Preis 357
Wolfskehl-Preis 358, 543
World Wide Web 339
Wurzel(n) 193
Anzahl der 57
Existenz von 57, 184
imaginäre 60
konjugiert komplexe 60
-kriterium 247, 249
nichtreelle 61
primitive 220
reelle 254
-schachtelung 177
Würfelspiel 76, 78

Yang–Mills Gleichungen 575, 576

Zahl(en)
algebraische 223, 226, 231, 377, 384
befreundete 66
ganze 223, 226, 485
Hodge- 576
hyperkomplexe 188
imaginäre 57, 62, 70, 186
irrationale 226, 270, 383, 406
Kardinal- 387, 414
komplexe 54, 57, 62, 70, 180, 185–187, 206, 249, 270
natürliche 270, 378, 379, 385, 389, 399
negative 70, 270
Ordinal- 387, 389
Ordnungs- 389
transfinite 387
rationale 226, 383
reelle 377, 383–385, 387, 485
-ringe 223
transzendente 231
unerreichbare 394
vollkommene 546
Zahlbericht 433, 451, 452, 467
Zahlenebene
komplexe 187
Zahlensystem 206
binäres 513
Zahlentheorie 344, 372
additive 452, 468
algebraische 258
analytische 467
Zahlkörper 226
algebraischer 450–452
Zehnerübertragung 507
zentraler Grenzwertsatz 285
Zentralprojektion 139, 141
Zerlegung in Primfaktoren 223
Zetafunktion 66, 437
Zufall(s) 76, 281, 443, 571
-größe 285, 286, 293
-matrizen 581
-prozesse 534
zufällige Ereignisse 81
Zuordnung
eindeutige 392
eineindeutige 240
Zusammenhang
einfacher 578, 579
zusammenhängend 578
Zwölftonmusik 332, 334
Zwischenwertsatz von Bolzano 60, 254
Zykloide 27
Zykloidenpendel 27