

Uwe Schöning

# Theoretische Informatik - kurzgefaßt

Happy Hackers

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>9</b>
<b>1 Automatentheorie und Formale Sprachen</b>	<b>11</b>
1.1 Allgemeines . . . . .	11
1.1.1 Grammatiken . . . . .	13
1.1.2 Chomsky-Hierarchie . . . . .	17
1.1.3 Wortproblem . . . . .	21
1.1.4 Syntaxbäume . . . . .	23
1.1.5 Backus-Naur-Form . . . . .	25
1.2 Reguläre Sprachen . . . . .	27
1.2.1 Endliche Automaten . . . . .	27
1.2.2 Nichtdeterministische Automaten . . . . .	30
1.2.3 Reguläre Ausdrücke . . . . .	36
1.2.4 Das Pumping Lemma . . . . .	39
1.2.5 Äquivalenzrelationen und Minimalautomaten .	41
1.2.6 Abschlußeigenschaften . . . . .	47
1.2.7 Entscheidbarkeit . . . . .	48
1.3 Kontextfreie Sprachen . . . . .	50
1.3.1 Normalformen . . . . .	51
1.3.2 Das Pumping Lemma . . . . .	54
1.3.3 Abschlußeigenschaften . . . . .	59
1.3.4 Der CYK-Algorithmus . . . . .	61

1.3.5	Kellerautomaten . . . . .	64
1.3.6	Deterministisch kontextfreie Sprachen . . . . .	72
1.4	Kontextsensitive und Typ 0-Sprachen . . . . .	74
1.5	Tabellarischer Überblick . . . . .	81
<b>2</b>	<b>Berechenbarkeitstheorie</b>	<b>85</b>
2.1	Intuitiver Berechenbarkeitsbegriff und Churchsche These	85
2.2	Turing-Berechenbarkeit . . . . .	89
2.3	LOOP-, WHILE- und GOTO-Berechenbarkeit . . . . .	95
2.4	Primitiv rekursive und $\mu$ -rekursive Funktionen . . . . .	105
2.5	Die Ackermannfunktion . . . . .	108
2.6	Halteproblem, Unentscheidbarkeit, Reduzierbarkeit . . . . .	113
2.7	Das Postsche Korrespondenzproblem . . . . .	124
2.8	Der Gödelsche Satz . . . . .	132
<b>3</b>	<b>Komplexitätstheorie</b>	<b>141</b>
3.1	Komplexitätsklassen und P-NP-Problem . . . . .	142
3.2	NP-Vollständigkeit . . . . .	146
3.3	Weitere NP-vollständige Probleme . . . . .	153
<b>Anhang: Mathematische Grundlagen</b>		<b>173</b>



# Kapitel 1

## Automatentheorie und Formale Sprachen

### 1.1 Allgemeines

Sei  $\Sigma$  ein Alphabet. Eine (formale) Sprache (über  $\Sigma$ ) ist die beliebige Teilmenge von  $\Sigma^*$ . (Im Anhang sind die mathematischen Notationen zusammengefaßt).

Sei z.B.  $\Sigma = \{(, +, -, *, /, a\}$ , so könnten wir die Sprache der korrekt geklammerten arithmetischen Ausdrücke  $EXPR \subseteq \Sigma^*$  definieren, wobei  $a$  als Platzhalter für beliebige Konstanten oder Variablen dienen soll:

$$\begin{aligned}(a - a) * a + a / (a + a) - a &\in EXPR \\ (((a))) &\in EXPR \\ ((a+) - a( &\notin EXPR\end{aligned}$$

Um mit solchen Sprachen, die im allgemeinen unendliche Objekte sind, algorithmisch umgehen zu können, benötigen wir jedoch endliche Beschreibungsmöglichkeiten für Sprachen. Dazu dienen sowohl die *Grammatiken* als auch die *Automaten*.

*Beispiel für eine Grammatik<sup>1</sup>:*

---

<sup>1</sup>Linguisten mögen mir verzeihen

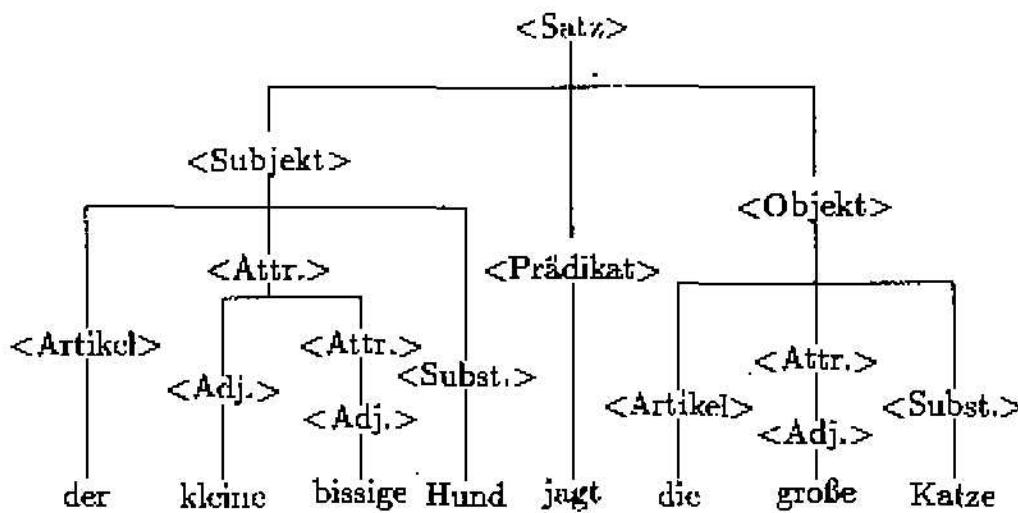
<Satz>	→ <Subjekt> <Prädikat> <Objekt>
<Subjekt>	→ <Artikel> <Attribut> <Substantiv>
<Artikel>	→ ε
<Artikel>	→ der
<Artikel>	→ die
<Artikel>	→ das
<Attribut>	→ ε
<Attribut>	→ <Adjektiv>
<Adjektiv>	→ kleine
<Adjektiv>	→ bissige
<Adjektiv>	→ große
<Substantiv>	→ Hund
<Substantiv>	→ Katze
<Prädikat>	→ jagt
<Objekt>	→ <Artikel> <Attribut> <Substantiv>

Hierbei sind die sog. *Variablen*, die Platzhalter für syntaktische Einheiten sind, durch spitze Klammern kenntlich gemacht.

Durch die obigen Grammatik-Regeln kann z.B. der Satz

der kleine bissige Hund jagt die große Katze

abgeleitet werden. Besonders anschaulich kann dies durch einen *Syntaxbaum* dargestellt werden. Hierbei ist der Vaterknoten jeweils mit der linken Seite einer Regel beschriftet und seine Söhne sind die Objekte, die auf der rechten Seite der Regel stehen.



Man beachte, daß durch diese endliche Grammatik bereits eine unendliche Sprache darstellbar ist, denn es sind z.B. alle Sätze der Form

der Hund jagt die kleine kleine kleine ... Katze  
erzeugbar.

### 1.1.1 Grammatiken

Wie sieht nun im Hinblick auf eine allgemeine Definition eine Grammatik aus? Zunächst muß angegeben werden, welches Variablen und welches "eigentliche" Symbole sind (sog. *Terminalsymbole*). Sodann müssen die Regeln angegeben werden, die allgemein die Form

*linke Seite* → *rechte Seite*

haben. Das obige Beispiel ist insofern ein Spezialfall, da die linken Seiten immer nur aus einer einzelnen Variablen bestehen. (Es handelt sich um eine sog. *kontextfreie Grammatik*). Allgemeiner könnte man zulassen, daß die linken Seiten aus Wörtern bestehen, die sowohl (evtl. mehrere) Variablen, als auch Terminalsymbole enthalten. Die Anwendung einer Regel bedeutet dann, daß in dem insoweit erzeugten Wort ein Teilwort, das einer linken Regelseite entspricht, durch die rechte Seite ersetzt wird. Solche Ableitungsschritte werden solange durchgeführt, bis das entstandene Wort nur noch aus Terminalsymbolen besteht. Jedes solcherart erzeugbare Wort gehört dann zu der von der Grammatik erzeugten (oder definierten) Sprache. Eine solche Ableitung, die mit einem Terminalwort endet, beginnt mit einer ausgewählten Variablen, der *Startvariablen* (im obigen Beispiel ist es <Satz>).

**Definition.** Eine Grammatik ist ein 4-Tupel  $G = (V, \Sigma, P, S)$ , das folgende Bedingungen erfüllt.  $V$  ist eine endliche Menge, die Menge der *Variablen*.  $\Sigma$  ist eine endliche Menge, das *Terminalalphabet*. Es muß gelten:  $V \cap \Sigma = \emptyset$ .  $P$  ist die endliche Menge der *Regeln* oder *Produktionen*. Formal ist  $P$  eine endliche Teilmenge von  $(V \cup \Sigma)^+ \times (V \cup \Sigma)^*$ .  $S \in V$  ist die *Startvariable*.

Seien  $u, v \in (V \cup \Sigma)^*$ . Wir definieren die Relation  $u \Rightarrow_G v$  (in Worten:  $u$  geht unter  $G$  unmittelbar über in  $v$ ), falls  $u$

und  $v$  die Form haben .

$$\begin{aligned} u &= xyz \\ v &= xy'z \quad \text{mit } x, z \in (V \cup \Sigma)^* \end{aligned}$$

und  $y \rightarrow y'$  eine Regel in  $P$  ist. Falls klar ist, welche Grammatik  $G$  gemeint ist, so schreiben wir einfach  $u \rightarrow v$  anstatt  $u \Rightarrow_G v$ .

Die von  $G$  dargestellte (erzeugte, definierte) Sprache ist

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow_G^* w\}$$

Hierbei ist  $\Rightarrow_G^*$  die reflexive und transitive Hülle von  $\Rightarrow_G$  (vgl. den mathematischen Anhang).

Eine Folge von Wörtern  $(w_0, w_1, \dots, w_n)$  mit  $w_0 = S$ ,  $w_n \in \Sigma^*$  und  $w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow w_n$  heißt Ableitung von  $w_n$ . Ein Wort  $w \in (V \cup \Sigma)^*$ , das also noch Variablen enthält – wie es typischerweise im Verlauf einer Ableitung auftritt – heißt auch Satzform.

*Beispiel:*  $G = (\{E, T, F\}, \{(., ), a, +, *\}, P, E)$  wobei

$$\begin{aligned} P = \{ &E \rightarrow T, \\ &E \rightarrow E + T, \\ &T \rightarrow F, \\ &T \rightarrow T * F, \\ &F \rightarrow a, \\ &F \rightarrow (E) \} \end{aligned}$$

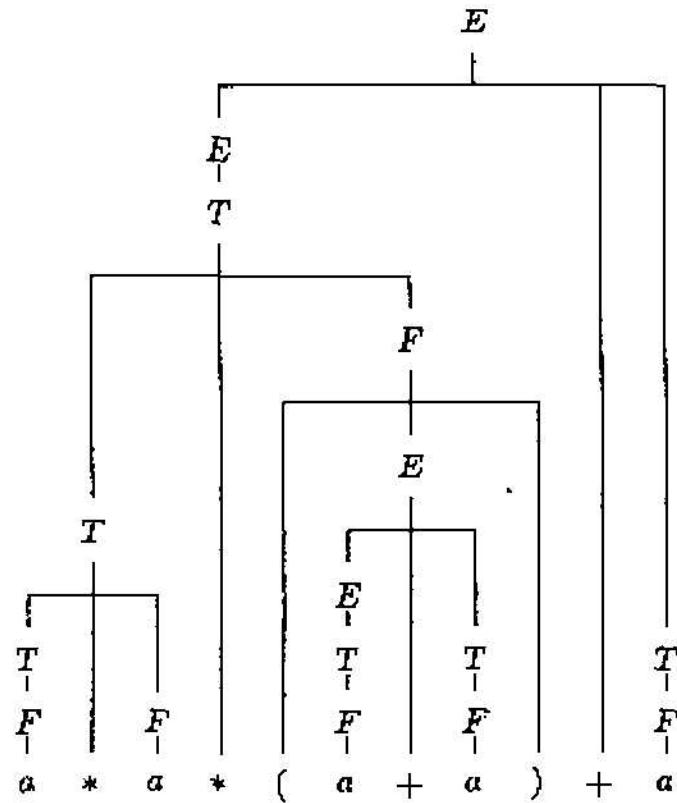
Mit dieser Grammatik lassen sich die korrekt geklammerten arithmetischen Ausdrücke darstellen. Es gilt z.B.

$$a * a * (a + a) + a \in L(G)$$

denn:

$$\begin{aligned} E \Rightarrow E + T \Rightarrow T + T \Rightarrow T * F + T \Rightarrow T * F * F + T \Rightarrow \\ F * F * F + T \Rightarrow a * F * F + T \Rightarrow a * a * F + T \Rightarrow \\ a * a * (E) + T \Rightarrow a * a * (E + T) + T \Rightarrow a * a * (T + T) + T \Rightarrow \\ a * a * (F + T) + T \Rightarrow a * a * (a + T) + T \Rightarrow a * a * (a + F) + T \Rightarrow \\ a * a * (a + a) + T \Rightarrow a * a * (a + a) + F \Rightarrow a * a * (a + a) + a \end{aligned}$$

Hierbei wurde in jedem Ableitungsschritt immer die am weitesten links stehende Variable ersetzt (*Linksableitung*). Ein entsprechender Syntaxbaum sieht folgendermaßen aus:



### Ein weiteres Beispiel:

$$\begin{aligned}
 G &= (V, \Sigma, P, S), \text{ wobei:} \\
 V &= \{S, B, C\} \\
 \Sigma &= \{a, b, c\} \\
 P &= \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, \\
 &\quad aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}
 \end{aligned}$$

Es gilt zum Beispiel:

$$\begin{aligned}
 S \Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow aaaBCBCBC \Rightarrow \\
 aaaBBCBC \Rightarrow aaaBBCBCC \Rightarrow aaaBBBCCC \Rightarrow \\
 aaabBBCCC \Rightarrow aaabbBCCC \Rightarrow aaabbbCCC \Rightarrow \\
 aaabbbbcCC \Rightarrow aaabbbccC \Rightarrow aaabbbccc = a^3b^3c^3
 \end{aligned}$$

Wir vermuten, daß allgemein gilt:

$$L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$$

Tatsächlich läßt sich dies beweisen:

( $\supseteq$ ) Der oben angegebene Fall  $n = 3$  läßt sich leicht für beliebige  $n \geq 1$  verallgemeinern.

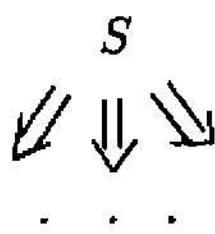
( $\subseteq$ ) Wir beobachten zunächst, daß alle Regeln die "Balance" erhalten, in dem Sinne, daß in jedem Ableitungsschritt die Anzahl der a's (bzw. A's) gleich der Anzahl der b's (bzw. B's) gleich der Anzahl der c's (bzw. C's) ist. Deshalb muß für jedes Wort  $w \in L(G)$  gelten: Anzahl der a's = Anzahl der b's = Anzahl der c's.

Als nächstes inspizieren wir die Regeln im einzelnen, und zwar im Hinblick darauf, in welcher Reihenfolge diese Terminalsymbole erzeugt werden können. Wir wollen zeigen, daß für jedes  $x$  in  $L(G)$  gilt: die a's in  $x$  kommen vor den b's, und diese vor den c's. Die a's können nur durch die ersten beiden Regeln erzeugt werden und stehen dann, wie gewünscht, ganz links. Betrachten wir nun die b's und c's: Ein nur aus den Terminalzeichen b und c bestehendes Teilwort von  $x$  kann nur durch die Regeln  $aB \rightarrow ab$ ,  $bB \rightarrow bb$ ,  $bC \rightarrow bc$ ,  $cC \rightarrow cc$  erzeugt werden. Diese Regeln sind so aufgebaut, daß die b's sich an die a's anschließen müssen, und dann die c's an die b's.

Beide Beobachtungen zusammengenommen ergeben, daß jedes Wort in  $L(G)$  nur die Form  $a^n b^n c^n$ ,  $n \geq 1$ , haben kann. ■

*Bemerkung:* Man beachte, daß das Ableiten kein eindeutiger, *deterministischer* Prozeß ist, sondern ein *nichtdeterministischer*. Mit anderen Worten: Die Relation  $\Rightarrow_G$  ist i.a. keine Funktion. Für ein gegebenes Wort  $x$  aus  $(V \cup \Sigma)^*$  kann es mehrere Wörter  $x'$  (aber nur endlich viele) geben mit:  $x \Rightarrow_G x'$ . Zum einen kann es in  $x$  mehrere Teilwörter geben, die linke Seite einer Regel sind. Zum anderen kann es für dasselbe Teilwort von  $x$  mehrere Regeln mit dieser linken Seite geben.

Graphisch dargestellt kann man sich diese Situation wie einen (endlich verzweigten, aber i.a. unendlich großen) Baum vorstellen mit  $S$  an der Wurzel (nicht zu verwechseln mit einem Syntaxbaum):



Den Blättern dieses Baumes sind dann die Wörter der erzeugten Sprache zugeordnet, es kann jedoch auch unendlich lange Pfade geben.

**Notation:** Wir werden im folgenden Grammatiken i.a. nicht so ausführlich angeben, wie es die Definition eigentlich erfordert, sondern uns oft auf die Angabe der Regeln  $P$  beschränken. Hierbei gehen wir von folgenden Konventionen aus. Großbuchstaben (oder Wörter in spitzen Klammern) bezeichnen Variablen; Terminalzeichen sind im allgemeinen in der Kleinschreibung zu erkennen.

### 1.1.2 Chomsky-Hierarchie

Von Noam Chomsky, einem Pionier der Sprach-Theorie, stammt folgende Einteilung von Grammatiken in *Typen*, nämlich Typ 0 – 3 (manchmal auch Chomsky 0 – 3 genannt).

**Definition.** Jede Grammatik ist zunächst automatisch vom *Typ 0*. Das heißt, bei Typ 0 sind den Regeln keinerlei Einschränkungen auferlegt. (Man spricht auch von allgemeinen *Phrasenstrukturgrammatiken*).

Eine Grammatik ist vom *Typ 1* oder *kontextsensitiv*, falls für alle Regeln  $w_1 \rightarrow w_2$  in  $P$  gilt:  $|w_1| \leq |w_2|$ .

Eine Typ 1-Grammatik ist vom *Typ 2* oder *kontextfrei*, falls für alle Regeln  $w_1 \rightarrow w_2$  in  $P$  gilt, daß  $w_1$  eine einzelne Variable ist, d.h.  $w_1 \in V$ .

Eine Typ 2-Grammatik ist vom *Typ 3* oder *regulär*, falls zusätzlich gilt:  $w_2 \in \Sigma \cup \Sigma V$ , d.h. die rechten Seiten von Regeln sind entweder einzelne Terminalzeichen oder ein Terminalzeichen gefolgt von einer Variablen.

Eine Sprache  $L \subseteq \Sigma^*$  heißt vom Typ 0 (Typ 1, Typ 2, Typ 3), falls es eine Typ 0 (Typ 1, Typ 2, Typ 3)-Grammatik  $G$  gibt mit  $L(G) = L$ .

Die obige Beispielgrammatik für  $a^n b^n c^n$  ist kontextsensitiv (Typ 1), die Grammatik für die arithmetischen Ausdrücke ist kontextfrei (Typ 2).

Die Bezeichnungen "kontextfrei" und "kontextsensitiv" haben folgende Begründung: Bei Vorliegen einer kontextfreien Regel  $A \rightarrow x$  kann die Variable  $A$  – unabhängig vom Kontext, in dem  $A$  steht – bedingungslos durch  $x$  ersetzt werden. Bei einer kontextsensitiven Grammatik dagegen ist es möglich, Regeln der Form  $uAv \rightarrow uxv$  anzugeben. Das bedeutet, daß  $A$  nur dann durch  $x$  ersetzt werden kann, wenn die Variable  $A$  im "Kontext" zwischen  $u$  und  $v$  steht.

$\epsilon$ -Sonderregelung: Wegen der Forderung  $|w_1| \leq |w_2|$  kann das leere Wort  $\epsilon$  bei Typ 1,2,3 Grammatiken nicht abgeleitet werden, d.h. es gilt immer  $\epsilon \notin L(G)$ . Das ist eigentlich nicht wünschenswert. Deshalb soll über die obige Definition hinaus folgende Sonderregelung gelten: Ist  $\epsilon \in L(G)$  erwünscht, so sei die Regel  $S \rightarrow \epsilon$  zugelassen ( $S$  ist die Startvariable). In diesem Fall ist es dann aber unzulässig, daß  $S$  auf der rechten Seite einer Produktion vorkommt. Dies ist keine Beschränkung der Allgemeinheit: Kommt  $S$  auf einer rechten Seite vor, so ersetzen wir die alten Regeln durch folgende (hierbei ist  $S'$  eine neue Variable):

1.  $S \rightarrow$  die rechten Seiten der  $S$ -Regeln, mit  $S$  ersetzt durch  $S'$
2. alle Regeln mit  $S$  ersetzt durch  $S'$
3.  $S \rightarrow \epsilon$

Man beachte, daß hierdurch der Typ der Grammatik nicht verändert wird (abgesehen von der nun neu zugelassenen Regel  $S \rightarrow \epsilon$ ).

Bei kontextfreien Grammatiken ist es oftmals wünschenswert und bequem, auch Regeln der Form  $A \rightarrow \epsilon$  zuzulassen, wobei  $A$  nicht unbedingt die Startvariable ist (vgl. das allererste, einführende Beispiel). Für den Typ der kontextfreien Grammatik (und nur für diesen!) ist nichts dagegen einzuwenden, denn man kann jeder kontextfreien Grammatik  $G$  mit  $\epsilon \notin L(G)$  eine kontextfreie Grammatik  $G'$  ohne  $\epsilon$ -Regeln zuordnen, die dieselbe Sprache erzeugt. (Falls  $\epsilon \in L(G)$ , so kommt noch die obige Sonderregelung hinzu).

Hierzu zerlegen wir die Menge der Variablen  $V$  zunächst so in  $V_1$  und  $V_2$ , daß für alle  $A \in V_1$  (und nur für diese) gilt  $A \Rightarrow^* \epsilon$ . Die Variablenmenge  $V_1$  findet man wie folgt: Sofern  $A \rightarrow \epsilon$  eine Regel in  $P$  ist, so ist  $A \in V_1$ . Weitere Variablen  $A$  in  $V_1$  findet man sukzessive dadurch, daß es in  $P$

eine Regel  $A \rightarrow A_1 A_2 \dots A_k$ ,  $k \geq 1$ , gibt mit  $A_i \in V_1$ . Nach endlich vielen Schritten hat man alle Variablen in  $V_1$  gefunden.

Als nächstes entfernen wir alle  $\varepsilon$ -Regeln aus  $P$  und fügen für jede Regel der Form  $B \rightarrow xAy$  mit  $B \in V$ ,  $A \in V_1$ ,  $xy \in (V \cup \Sigma)^+$  eine weitere Regel der Form  $B \rightarrow xy$  zu  $P$  hinzu. (Hierdurch wird sozusagen die Möglichkeit, daß  $A$  auf das leere Wort abgeleitet werden kann, vorweggenommen). Die resultierende Grammatik ist dann  $G'$ .

Die Typ 3-Sprachen sind echt in der Menge der Typ 2-Sprachen enthalten. Ebenso sind die Typ 2-Sprachen echt in den Typ 1-Sprachen enthalten, und die Typ 1-Sprachen sind echt in den Typ 0-Sprachen enthalten. Beispiele für Sprachen in der jeweiligen Differenzmenge sind:

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$$

Ist vom Typ 2, aber nicht vom Typ 3 (vgl. Seite 40).

$$L' = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$$

Ist vom Typ 1, aber nicht vom Typ 2 (vgl. Seite 58).

$$L'' = H$$

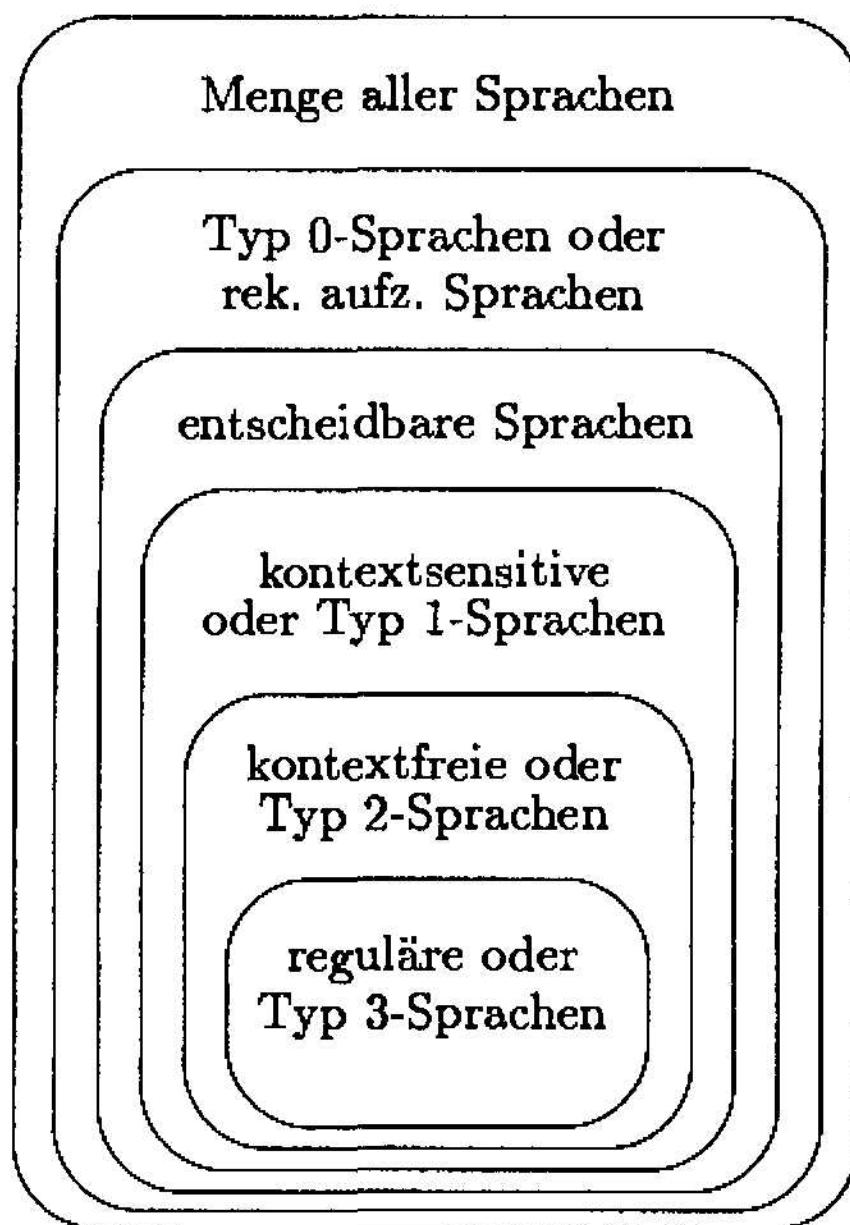
Ist vom Typ 0, aber nicht vom Typ 1. (Hierbei ist  $H$  das "Halteproblem", vgl. Seite 121). Ferner gibt es entscheidbare Sprachen, die nicht Typ 1 sind. Wir nennen diese aus 4 Sprachklassen bestehende Hierarchie ( $\text{Typ 3} \subset \text{Typ 2} \subset \text{Typ 1} \subset \text{Typ 0}$ ) die *Chomsky-Hierarchie*.

Ferner gilt, daß alle Sprachen vom Typ 1,2,3 entscheidbar sind, d.h. es gibt einen Algorithmus, der bei Eingabe von  $G$  und  $w$  in endlicher Zeit feststellt, ob  $w \in L(G)$  oder nicht (der Beweis findet sich weiter unten). Die Typ 0-Sprachen sind identisch mit den *semi-entscheidbaren* oder *rekursiv aufzählbaren Sprachen* (vgl. Kapitel über Berechenbarkeit, S. 117). Daher gibt es Typ 0-Sprachen, die nicht entscheidbar sind. (Obige Sprache  $L''$  ist ein solches Beispiel).

Da Typ 0-Grammatiken per Definition endliche Objekte sind, ist die Menge aller Typ 0-Grammatiken eine abzählbare Menge, hat also dieselbe Kardinalität wie  $\mathbb{N}$ , die Menge der natürlichen Zahlen. Da jeder Typ 0-Sprache mindestens eine Typ 0-Grammatik zugeordnet ist, ist die Menge der Typ 0-Sprachen gleichfalls abzählbar. Die Menge aller Sprachen aber, sogar schon die Menge aller Teilmengen von  $\{0,1\}^*$  ist überabzählbar, sie hat dieselbe Kardinalität wie  $\mathbb{R}$ , die Menge der

reellen Zahlen. Daher muß es Sprachen geben, die nicht durch Grammatiken beschreibbar sind. Mehr noch: maßtheoretisch gesehen hat die Menge der Typ 0-Sprachen das Maß 0. Daß diese Nullmenge trotzdem viel interessante Theorie hergibt, werden wir noch sehen.

Das folgende Bild gibt einen Überblick.



Für die praktische Umsetzung in der Informatik (Syntaxanalyse, Compilerbau) sind vor allem die regulären (Typ 3) und kontextfreien (Typ 2) Sprachen von Interesse. Deshalb sind diese Sprach-Typen auch besonders intensiv untersucht worden, und es wurden zwischen Typ 3 und Typ 2 noch weitere Sprachklassen eingebettet (linear kontextfreie Sprachen, deterministisch kontextfreie Sprachen,  $LL(k)$ - und  $LR(k)$ -Sprachen, etc.).

Allerdings sind die konkreten Fragestellungen, mit denen man es in der Praxis zu tun hat, im allgemeinen eher kontextsensitiv (Typ 1) oder sogar Typ 0. Wegen der schwierigeren algorithmischen Handhabung von Typ 0,1-Sprachen, wird trotzdem oft versucht, mit kontextfreien Grammatiken zu arbeiten, und die unterschiedlichen "Kontextbedingungen"

und "Sonderfälle" dann durch nicht-grammatikalische Zusatzalgorithmen zu behandeln.

Zum Beispiel ist die Menge aller korrekten MODULA-Programme eigentlich nicht kontextfrei (denn Bedingungen wie Typverträglichkeiten, korrekte Anzahl von Parametern in Prozeduraufrufen, ausschließliches Verwenden von vorher deklarierten Objekten, etc. lassen sich nicht durch kontextfreie Grammatiken ausdrücken – wie schon fast der Name "kontextfrei" suggeriert). Trotzdem werden zur Beschreibung der Syntax von MODULA kontextfreie Grammatiken (bzw. Syntaxdiagramme, BNF) verwendet – mit dem Verständnis, daß über die durch die Syntaxdiagramme festgelegte Syntax hinaus noch Typüberprüfungen etc. zu erfolgen haben.

### 1.1.3 Wortproblem

Sei  $S \Rightarrow x_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow x_k = x$  eine Herleitung des Wortes  $x$  der Länge  $n$  in einer kontext-sensitiven Grammatik. Durch die Bedingung  $|w_1| \leq |w_2|$  bei kontext-sensitiven Grammatiken ergibt sich, daß alle "Zwischenergebnisse", die im Verlauf dieser Herleitung entstehen, höchstens die Länge  $n$  haben. Da es nur endlich viele Wörter über  $(V \cup \Sigma)^*$  der Länge  $\leq n$  gibt, ist es einsichtig, daß man durch systematisches Durchprobieren in der Lage ist, in endlicher Zeit zu entscheiden, ob ein gegebenes  $x$  in  $L(G)$  liegt oder nicht.

Der folgende Satz führt dies präzise aus:

#### Satz.

**DAS Wortproblem FÜR TYP 1-SPRACHEN (UND DAMIT AUCH FÜR TYP 2, TYP 3-SPRACHEN) IST ENTSCHEIDBAR.**

#### GENAUER:

**ES GIBT EINEN ALGORITHMUS, DER BEI EINGABE EINER KONTEXT-SENSITIVEN GRAMMATIK  $G = (V, \Sigma, P, S)$  UND EINES WORTES  $x \in \Sigma^*$  IN ENDLICHER ZEIT ENTSCHEIDET, OB  $x \in L(G)$  ODER  $x \notin L(G)$ .**

**Beweis:** Für  $m, n \in \mathbb{N}$  definiere Mengen  $T_m^n$  wie folgt:

$$T_m^n = \{w \in (V \cup \Sigma)^* \mid |w| \leq n \text{ und } w \text{ läßt sich aus } S \text{ in höchstens } m \text{ Schritten ableiten}\}$$

Die Mengen  $T_m^n$ ,  $n \geq 1$ , lassen sich induktiv über  $m$  definieren:

$$\begin{aligned} T_0^n &= \{S\} \\ T_{m+1}^n &= Abl_n(T_m^n), \text{ wobei} \\ Abl_n(X) &= X \cup \{w \in (V \cup \Sigma)^* \mid |w| \leq n \text{ und} \\ &\quad w' \Rightarrow w \text{ für ein } w' \in X\} \end{aligned}$$

Diese Darstellung ist nur für Typ 1-Grammatiken korrekt. (Bei einer Typ 0-Grammatik könnte es ja sein, daß aus einem Wort der Länge  $> n$  ein Wort der Länge  $\leq n$  ableitbar ist).

Da es nur endlich (nämlich exponentiell in  $n$ ) viele Wörter der Länge  $\leq n$  in  $(V \cup \Sigma)^*$  gibt, ist

$$\bigcup_{m \geq 0} T_m^n$$

für jedes  $n$  eine endliche Menge (der Mächtigkeit  $2^{O(n)}$ ). Daraus ergibt sich, daß es ein  $m$  gibt mit

$$T_m^n = T_{m+1}^n = T_{m+2}^n = \dots$$

Falls nun  $x$ ,  $|x| = n$ , in  $L(G)$  liegt, so muß  $x$  in  $\bigcup_{m \geq 0} T_m^n$  und damit in  $T_m^n$  für ein  $m$  liegen. Damit ergibt sich der folgende Algorithmus:

```

INPUT (G, x); (* |x| = n *)
T := {S};
REPEAT
  T1 := T;
  T := Abln(T1)
UNTIL (x ∈ T) OR (T = T1);
IF x ∈ T
  THEN WriteString ('x liegt in L(G)')
  ELSE WriteString ('x liegt nicht in L(G)')
END

```

*Bemerkung:* Der Algorithmus hat exponentielle Laufzeit. Dieses ist durch andere Programmierung auch kaum zu vermeiden, denn das Wortproblem für kontext-sensitive Sprachen ist *NP-hart* (vgl. Kapitel über Komplexitätstheorie, S. 168). ■

**Beispiel:** Betrachten wir die obige Beispielgrammatik für  $a^n b^n c^n$  mit den Regeln:

$$S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc$$

Sein = 4. Dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} T_0^4 &= \{S\} \\ T_1^4 &= \{S, aSBC, aBC\} \\ T_2^4 &= \{S, aSBC, aBC, abC\} \\ T_3^4 &= \{S, aSBC, aBC, abC, abc\} \\ T_4^4 &= \{S, aSBC, aBC, abC, abc\} = T_3^4 \end{aligned}$$

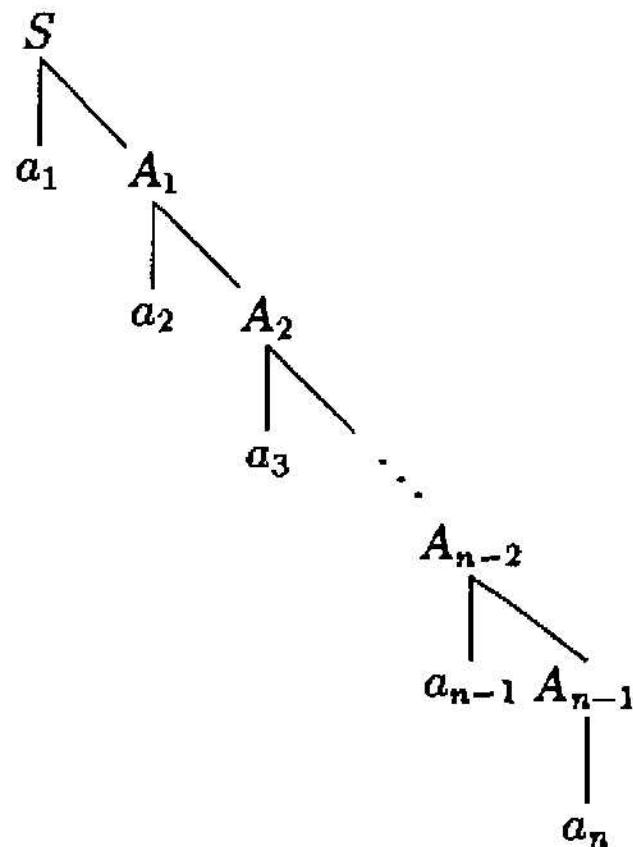
Das heißt, das einzige Wort der Sprache  $L(G)$  der Länge  $\leq 4$  ist  $abc$  (wie wir bereits wissen).

### 1.1.4 Syntaxbäume

Wir haben die Syntaxbäume informell an den Beispielen schon eingeführt. Wir wollen dies nun etwas formaler machen.

Einer Ableitung eines Wortes  $x$  in einer Typ 2 (oder 3) Grammatik ( $i$  kann man einen Syntaxbaum oder Ableitungsbaum zuordnen. Sei  $S \in L(G)$  und sei  $S = x_0 \Rightarrow x_1 \Rightarrow x_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow x_n = x$  eine Ableitung des Wortes  $x$ . Dann wird der Wurzel des Syntaxbaumes die Startvariable  $S$  zugeordnet. Für  $i = 1, 2, \dots, n$  gehe man nun wie folgt vor: Falls im  $i$ -ten Ableitungsschritt (also beim Übergang von  $x_{i-1}$  nach  $x_i$ ) gerade die Variable  $A$  durch ein Wort  $z$  ersetzt wird (wegen  $A \rightarrow z \in P$ ), dann sehe im Syntaxbaum  $|z|$  viele Söhne von  $A$  vor und beschrifte diese mit den einzelnen Zeichen von  $z$ . Auf diese Weise entsteht ein Baum, dessen Blätter gerade mit den Symbolen in  $x$  beschriftet sind.

Man beachte, daß Ableitungsbäume bei regulären Grammatiken immer die "entartete" Form einer nach rechts geneigten linearen Kette haben:



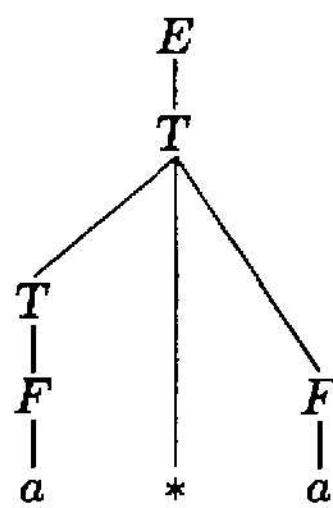
Verschiedenen Ableitungen kann derselbe Syntaxbaum zugeordnet sein:  
Die folgenden beiden Ableitungen von  $a * a$  (vgl. obige Beispielgrammatik)

$$E \Rightarrow T \Rightarrow T * F \Rightarrow F * F \Rightarrow a * F \Rightarrow a * a$$

und

$$E \Rightarrow T \Rightarrow T * F \Rightarrow T * a \Rightarrow F * a \Rightarrow a * a$$

besitzen denselben Syntaxbaum:



Die erste der beiden Ableitungen zeichnet sich dadurch aus, daß in jedem Schritt immer die erste vorkommende – also am weitesten links stehende – Variable durch eine Regelanwendung ersetzt wird. Dies ist eine sog. *Linksableitung*. Man kann umgekehrt offensichtlich jedem gegebenen Syntaxbaum eindeutig eine Linksableitung zuordnen. Daher erhalten wir:

$$x \in L(G) \Leftrightarrow \text{es gibt (irgend)eine Ableitung von } x$$

- $\Leftrightarrow$  es gibt einen Syntaxbaum mit  $x$  an den Blättern
- $\Leftrightarrow$  es gibt eine Linksableitung von  $x$

Entsprechendes gilt natürlich auch für die *Rechtsableitung*.

Trotzdem kann es vorkommen, daß es für dasselbe Wort  $x$  verschiedenartig strukturierte Syntaxbäume gibt. Man sagt dann, daß die Grammatik *mehrdeutig* ist. In der Grammatik

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aB \\ S &\rightarrow Ac \\ A &\rightarrow ab \\ B &\rightarrow bc \end{aligned}$$

gibt es zwei unterschiedliche Syntaxbäume für das Wort  $abc$ :



In diesem Fall kann natürlich die Mehrdeutigkeit beseitigt werden: man kann eine andere, eindeutige Grammatik angeben, die dieselbe Sprache definiert (z.B.:  $S \rightarrow abc$ ). Es gibt aber Fälle, wo die Mehrdeutigkeit unvermeidbar ist. Eine Sprache  $A$  heißt *inhärent mehrdeutig*, wenn jede Grammatik  $G$  mit  $L(G) = A$  mehrdeutig ist. Wir zeigen später, daß es im allgemeinen algorithmisch unmöglich ist festzustellen, ob eine Grammatik mehrdeutig (bzw. eine Sprache inhärent mehrdeutig) ist oder nicht (vgl. Seite 131).

Ein Beispiel für eine inhärent mehrdeutige, kontextfreie Sprache ist

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i = j \text{ oder } j = k\}$$

### 1.1.5 Backus-Naur-Form

Von Backus und Naur stammt ein Formalismus zum kompakten Niederschreiben von kontextfreien, also Typ 2, Grammatiken, kurz BNF genannt. (Diese Notation wurde im Zusammenhang mit der Konstruktion der Programmiersprache ALGOL 60 eingeführt).

Und zwar schreiben wir bei mehreren Regeln, die alle dieselbe linke Seite haben

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \beta_1 \\ A &\rightarrow \beta_2 \\ &\vdots \\ A &\rightarrow \beta_n \end{aligned}$$

kürzer nur eine einzige "Metaregel" (unter Verwenden des "Metasymbols" |):

$$A \rightarrow \beta_1 | \beta_2 | \dots | \beta_n$$

(Backus und Naur verwenden statt  $\rightarrow$  allerdings  $::=$ ).

Wir werden im folgenden auch diese abkürzende Notation verwenden.

Der von Backus und Naur verwendete Formalismus geht allerdings noch weiter (man spricht dann von *erweiterter BNF*, kurz: EBNF).

So steht z.B.

$$A \rightarrow \alpha[\beta]\gamma$$

für die Regeln

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \alpha\gamma \\ A &\rightarrow \alpha\beta\gamma \end{aligned}$$

*Bedeutung:* Das Wort  $\beta$  kann – muß aber nicht – zwischen  $\alpha$  und  $\gamma$  eingefügt werden.

Ferner steht

$$A \rightarrow \alpha\{\beta\}\gamma$$

für die Regeln

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \alpha\gamma \\ A &\rightarrow \alpha B\gamma \\ B &\rightarrow \beta \\ B &\rightarrow \beta B \end{aligned}$$

*Bedeutung:* Das Wort  $\beta$  kann zwischen  $\alpha$  und  $\gamma$  beliebig oft (auch nullmal) wiederholt werden.

Da (E)BNF und kontextfreie Grammatiken gleichwertig sind, heißt das also, daß durch (E)BNF exakt die kontextfreien, also Typ 2 Sprachen dargestellt werden.

## 1.2 Reguläre Sprachen

In diesem Abschnitt wollen wir die regulären (also Typ 3) Sprachen näher untersuchen. Wir werden verschiedene äquivalente Charakterisierungen beweisen (z.B. mittels (nicht)deterministischer endlicher Automaten, mittels regulärer Ausdrücke und mittels gewisser Äquivalenzrelationen) und Eigenschaften der regulären Sprachen angeben (Pumping Lemma, Abschlußeigenschaften).

### 1.2.1 Endliche Automaten

Ein (deterministischer, endlicher) Automat wird – bildhaft gesprochen – auf ein Eingabewort angesetzt und dieser “erkennt” (oder “akzeptiert”) dieses Wort schließlich – oder auch nicht. Die Menge der akzeptierten Wörter bildet dann die durch den Automaten dargestellte oder definierte Sprache. Bei den Grammatiken war der Mechanismus in gewisser Weise umgekehrt: Die Grammatik “erzeugt” durch entsprechende Regelanwendungen ein Wort. Das Wort der Sprache entsteht also erst am Ende des Erzeugungsprozesses.

Wir beginnen mit der Definition der *endlichen Automaten* (englisch: *deterministic finite automaton*, kurz: **DFA**).

**Definition.** Ein (*deterministischer*) *endlicher Automat*  $M$  wird spezifiziert durch ein 5-Tupel

$$M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E).$$

Hierbei bezeichnet  $Z$  die Menge der *Zustände* und  $\Sigma$  ist das *Eingabealphabet*,  $Z \cap \Sigma = \emptyset$ .  $Z$  und  $\Sigma$  müssen – wie schon der Name sagt – endliche Mengen sein.  $z_0 \in Z$  ist der *Startzustand*,  $E \subseteq Z$  ist die Menge der *Endzustände* und  $\delta : Z \times \Sigma \rightarrow Z$  heißt die *Überführungsfunktion*.

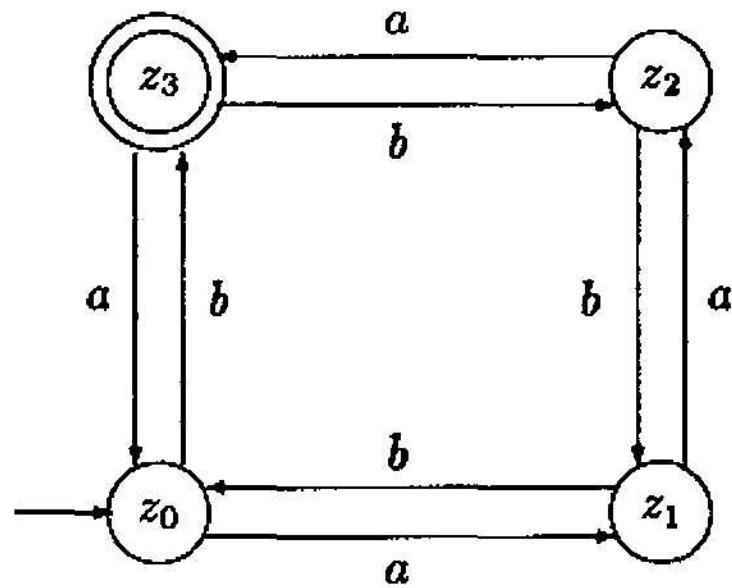
Wir veranschaulichen uns endliche Automaten durch ihren *Zustandsgraphen*, der ein gerichteter, beschrifteter Graph ist, wobei die Zustände die Knoten sind. Der Knoten, der dem Startzustand entspricht, wird durch einen hineingehenden Pfeil besonders markiert und alle Endzustände werden durch doppelte Kreise gekennzeichnet. Die Kanten in

dem Graphen sind folgendermaßen definiert: Von  $z_1$  nach  $z_2$  geht eine mit  $a \in \Sigma$  beschriftete Kante, falls  $\delta(z_1, a) = z_2$ .

*Beispiel:* Sei  $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ , wobei

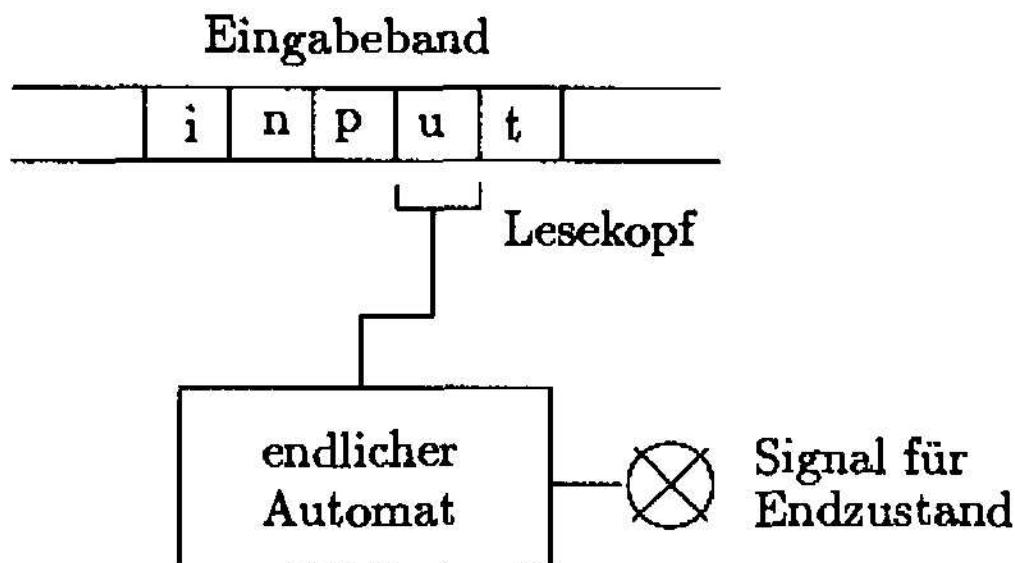
$$\begin{aligned} Z &= \{z_0, z_1, z_2, z_3\} \\ \Sigma &= \{a, b\} \\ E &= \{z_3\} \\ \delta(z_0, a) &= z_1 \\ \delta(z_0, b) &= z_3 \\ \delta(z_1, a) &= z_2 \\ \delta(z_1, b) &= z_0 \\ \delta(z_2, a) &= z_3 \\ \delta(z_2, b) &= z_1 \\ \delta(z_3, a) &= z_0 \\ \delta(z_3, b) &= z_2 \end{aligned}$$

Der zuständige Graph sieht folgendermaßen aus:



Ein endlicher Automat beschreibt (erkennt, akzeptiert) eine Sprache  $L \subseteq \Sigma^*$  wie folgt. Ein einzelnes Wort  $a_1a_2\dots a_n$  wird von dem Automaten dadurch "erkannt", daß der Automat beim "Lesen" dieses Eingabeworts eine Folge von Zuständen  $z_0, z_1, \dots, z_n$  durchläuft. Hierbei ist  $z_0$  der Startzustand und es gilt  $\delta(z_{i-1}, a_i) = z_i$  für  $i = 1, \dots, n$ . Und schließlich muß  $z_n$  in  $E$  liegen, also ein Endzustand sein.

**Bildhafte Deutung:**



**Der obige Beispielautomat erkennt somit die Sprache**

$$L = \{x \in \Sigma^* \mid ((\text{Anzahl } a's \text{ in } x) - (\text{Anzahl } b's \text{ in } x)) \equiv 3 \pmod{4}\}$$

**Die folgende Definition führt diese informale Erklärung formal aus.**

**Definition.** Zu einem gegebenen DFA  $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$  definieren wir eine Funktion  $\hat{\delta} : Z \times \Sigma^* \rightarrow Z$  durch eine induktive Definition wie folgt:

$$\begin{aligned}\hat{\delta}(z, \varepsilon) &= z \\ \hat{\delta}(z, ax) &= \hat{\delta}(\delta(z, a), x)\end{aligned}$$

Hierbei ist  $z \in Z$ ,  $x \in \Sigma^*$  und  $a \in \Sigma$ .

Die von  $M$  akzeptierte Sprache ist

$$T(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(z_0, x) \in E\}$$

Die Definition von  $\hat{\delta}$  erweitert offensichtlich die Definition von  $\delta$  von Einzelzeichen zu Wörtern. Für ein einzelnes Zeichen  $a$  gilt:  $\hat{\delta}(z, a) = \delta(z, a)$ . Es gilt ferner:

$$\hat{\delta}(z, a_1 a_2 \dots a_n) = \delta(\dots \delta(\delta(z, a_1), a_2) \dots, a_n)$$

**Satz.**

**JEDE DURCH ENDLICHE AUTOMATEN ERKENNbare SPRACHE IST REGULÄR (ALSO TYP 3).**

**Beweis:** Sei  $A \subseteq \Sigma^*$  eine Sprache und  $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$  ein DFA mit  $T(M) = A$ .

Wir definieren nun eine Typ 3 Grammatik  $G$  mit  $L(G) = A$ . Es ist  $G = (V, \Sigma, P, S)$ , wobei  $V = Z$  und  $S = z_0$ . Sofern  $\epsilon \in T(M)$  (d.h. falls  $z_0 \in E$ ), so enthält  $P$  die Regel  $z_0 \rightarrow \epsilon$  (was evtl. weitere Umstrukturierungen nach sich zieht, vgl. S. 18). Ferner besteht  $P$  aus den folgenden Regeln: Jeder  $\delta$ -“Anweisung”

$$\delta(z_1, a) = z_2$$

ordnen wir folgende Regel(n) in  $P$  zu:

$$z_1 \rightarrow az_2 \in P$$

und zusätzlich, falls  $z_2 \in E$ ,

$$z_1 \rightarrow a \in P.$$

Nun gilt für alle  $x = a_1a_2 \dots a_n \in \Sigma^*$ :

$$x \in T(M)$$

**genau dann wenn** es gibt eine Folge von Zuständen  $z_0, z_1, \dots, z_n$  mit:  
 .  $z_0$  ist Startzustand,  $z_n \in E$  und für  $i = 1, \dots, n$ :  $\delta(z_{i-1}, a_i) = z_i$

**genau dann wenn** es gibt eine Folge von Variablen  $z_0, z_1, \dots, z_n$  mit:  
 .  $z_0$  ist Startvariable und es gilt:  $z_0 \Rightarrow a_1z_1 \Rightarrow a_1a_2z_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow a_1a_2 \dots a_{n-1}z_{n-1} \Rightarrow a_1a_2 \dots a_{n-1}a_n$

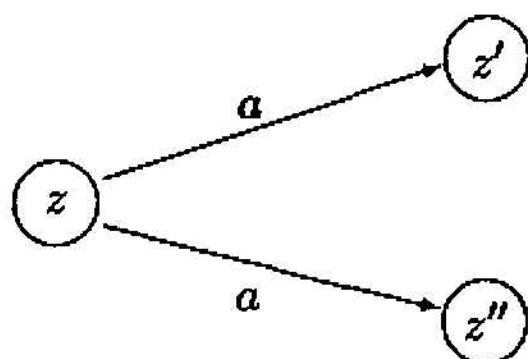
**genau dann wenn**  $x \in L(G)$

■

## 1.2.2 Nichtdeterministische Automaten

Tatsächlich gilt auch die Umkehrung des Satzes, so daß also eine Sprache regulär ist *genau dann, wenn* sie von einem endlichen Automaten erkannt wird. Um diese Richtung (reguläre Grammatik  $\rightarrow$  DFA) zu beweisen, benötigen wir ein beweistechnisches Hilfsmittel, sozusagen als Zwischenschritt, den *nichtdeterministischen Automaten* (engl.: non-deterministic finite automaton, kurz: NFA).

Wir erläutern den NFA zunächst informell. Bei einem NFA ist es zugelassen, daß vom selben Zustand  $z \in Z$  aus mehrere (oder auch gar keine) Pfeile ausgehen, die mit  $a \in \Sigma$  beschriftet sind.



Wie soll nun ein derartiger Automat "funktionieren"? Wenn im Zustand  $z$  das Zeichen  $a$  gelesen wird, so kann der Automat sowohl in  $z'$  als auch in  $z''$  übergehen. Beide Möglichkeiten werden gleichwertig behandelt. Ein Wort  $x \in \Sigma^*$  gilt dann schon vom Automaten akzeptiert, wenn er bei Lesen von  $x$  eine Zustandsfolge durchlaufen kann, die auf einen Endzustand führt. Andere mögliche Zustandsfolgen können durchaus auf Nicht-Endzustände führen. Wichtig ist, daß es mindestens eine akzeptierende Zustandsfolge gibt. Konsequenterweise lassen wir nun auch eine Menge von Startzuständen, anstatt eines einzigen, zu.

Die folgende Definition formalisiert dies.

**Definition:** Ein nichtdeterministischer, endlicher Automat (kurz: NFA) wird spezifiziert durch ein 5-Tupel

$$M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$$

Hierbei sind:

- $Z$  eine endliche Menge, die *Zustände*
- $\Sigma$  eine endliche Menge, das *Eingabealphabet*,  $Z \cap \Sigma = \emptyset$
- $\delta$  eine Funktion von  $Z \times \Sigma$  nach  $\mathcal{P}(Z)$ , die *Überführungsfunktion*
- $S \subseteq Z$  die Menge der *Startzustände*
- $E \subseteq Z$  die Menge der *Endzustände*

Die Funktion  $\delta$  kann wieder verallgemeinert werden zu  $\hat{\delta}$ :  $\mathcal{P}(Z) \times \Sigma^* \rightarrow \mathcal{P}(Z)$  wie folgt:

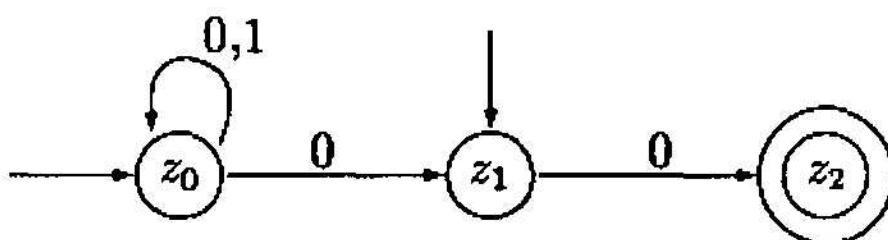
$$\hat{\delta}(Z', \epsilon) = Z' \text{ für alle } Z' \subseteq Z$$

$$\hat{\delta}(Z', ax) = \bigcup_{z \in Z'} \hat{\delta}(\delta(z, a), x)$$

Die von einem NFA akzeptierte Sprache ist

$$T(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(S, x) \cap E \neq \emptyset\}$$

*Beispiel:* Der folgende NFA akzeptiert genau die Wörter  $x$  über  $\{0, 1\}$ , die mit 00 enden, oder falls  $x = 0$  ist.



**Satz. (RABIN, SCOTT)**

JEDE VON EINEM NFA AKZEPTIERBARE SPRACHE IST AUCH DURCH EINEN DFA AKZEPTIERBAR.

**Beweis:** Sei  $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$  ein gegebener NFA. Wir konstruieren einen DFA  $M'$ , der ebenfalls  $T(M)$  akzeptiert, dadurch daß wir in  $M'$  jede mögliche Teilmenge der Zustände von  $M$  (also die Elemente der Potenzmenge von  $Z$ ) als Einzelzustand von  $M'$  vorsehen. Die restlichen Teile der Definition von  $M'$  ergeben sich dann mehr oder weniger zwangsläufig.

Wir setzen also

$$M' = (Z, \Sigma, \delta', z'_0, E')$$

wobei

$$\begin{aligned} Z &= \mathcal{P}(Z) \\ \delta'(Z', a) &= \bigcup_{z \in Z'} \delta(z, a) = \hat{\delta}(Z', a), Z' \subseteq Z \\ z'_0 &= S \\ E' &= \{Z' \subseteq Z \mid Z' \cap E \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

Es ist klar, daß nun für alle  $x = a_1 \dots a_n \in \Sigma^*$  gilt:

$$x \in T(M)$$

**genau dann wenn**  $\hat{\delta}(S, x) \cap E \neq \emptyset$

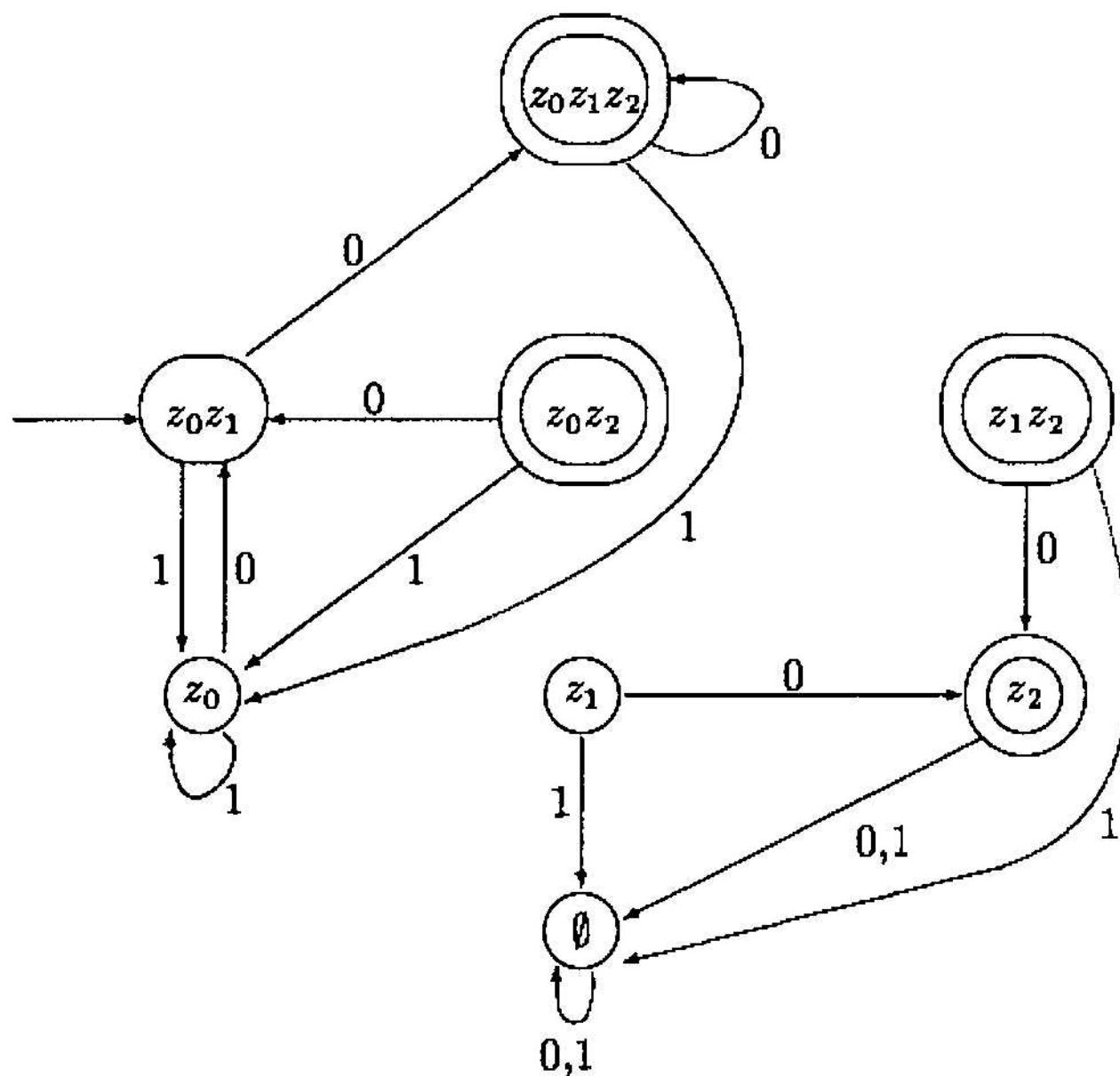
**genau dann wenn** es gibt eine Folge von Teilmengen  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  von  $Z$  mit  $\delta'(S, a_1) = Z_1, \delta'(Z_1, a_2) = Z_2, \dots, \delta'(Z_{n-1}, a_n) = Z_n$  und  $Z_n \cap E \neq \emptyset$ .

**genau dann wenn**  $\hat{\delta}'(S, x) \in E'$

**genau dann wenn**  $x \in T(M')$ .

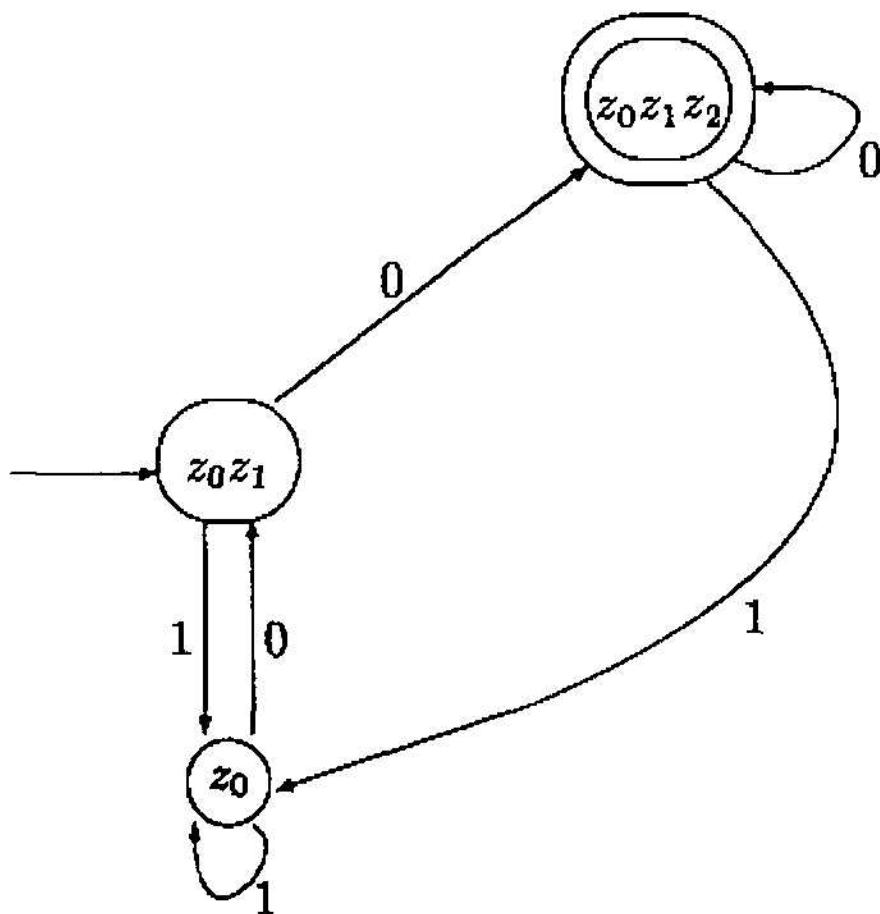
■

**Beispiel:** Für obigen nichtdeterministischen Automaten ergibt sich **nur** dem Beweis der folgende deterministische Automat mit den 8 Zuständen  $\emptyset, \{z_0\}, \{z_1\}, \{z_2\}, \{z_0, z_1\}, \{z_0, z_2\}, \{z_1, z_2\}, \{z_0, z_1, z_2\}$ . Der Startzustand ist  $\{z_0, z_1\}$  (da  $z_0$  und  $z_1$  die Startzustände des NFAs sind). Die Endzustände des neuen Automaten sind alle Zustände, die **mindestens** einen ursprünglichen Endzustand enthalten.



In allgemeinen enthält der so entstandene deterministische Automat

viele überflüssige Zustände. Wenn wir alle Zustände entfernen, die vom Startzustand (hier:  $z_0 z_1$ ) nicht erreichbar sind, erhalten wir:



Auch dieser Automat muß noch nicht minimal sein. (In diesem Fall ist er es allerdings).

*Bemerkung:* Man kann Beispiele angeben, wo der entstandene DFA bei der Konstruktion NFA  $\rightarrow$  DFA nicht weiter minimiert werden kann. Da die Potenzmenge einer  $n$ -elementigen Menge  $2^n$  Elemente hat, kann im schlimmsten Fall also aus einem NFA mit  $n$  Zuständen ein DFA mit  $2^n$  Zuständen entstehen. Dies bedeutet, daß der Umformungsschritt NFA  $\rightarrow$  DFA (im schlechtesten Fall) exponentielle Laufzeit hat.

Mit dem nächsten Satz zeigen wir schließlich, daß die durch (deterministische oder nichtdeterministische) endliche Automaten erkennbaren Sprachen genau die regulären Sprachen sind. Der Satz schließt noch die letzte Lücke in folgendem Ringschluß:

**Satz.**

FÜR JEDE REGULÄRE GRAMMATIK  $G$  GIBT ES EINEN NFA  $M$  MIT  $L(G) = T(M)$ .

**Beweis:** Sei die reguläre Grammatik  $G = (V, \Sigma, P, S)$  gegeben. Wir geben einen geforderten NFA wie folgt an:  $M = (Z, \Sigma, \delta, S', E)$  wobei

$$\begin{aligned} Z &= V \cup \{X\} \\ S' &= \{S\} \\ E &= \begin{cases} \{S, X\}, & S \rightarrow \epsilon \in P \\ \{X\}, & S \rightarrow \epsilon \notin P \end{cases} \\ \delta(A, a) &\ni B \text{ falls } A \rightarrow aB \in P \\ \delta(A, a) &\ni X \text{ falls } A \rightarrow a \in P \end{aligned}$$

Nun gilt (für  $n \geq 1$ ):

$$a_1 a_2 \dots a_n \in L(G)$$

genau dann wenn es gibt eine Folge von Variablen  $A_1, \dots, A_{n-1}$  mit:  
 $S \Rightarrow a_1 A_1 \Rightarrow a_1 a_2 A_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow a_1 a_2 \dots a_{n-1} A_{n-1} \Rightarrow a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n$

genau dann wenn es gibt eine Folge von Zuständen  $A_1, \dots, A_{n-1}$  mit:  $\delta(S, a_1) \ni A_1, \delta(A_1, a_2) \ni A_2, \dots, \delta(A_{n-1}, a_n) \ni X$

genau dann wenn  $a_1 a_2 \dots a_n \in T(M)$ . ■

### 1.2.3 Reguläre Ausdrücke

Reguläre Ausdrücke sind spezielle Formeln, mit denen Sprachen definiert werden können. (Wie wir später sehen werden, sind dies wieder genau die regulären Sprachen). Diese Ausdrücke werden wie folgt induktiv definiert:

- $\emptyset$  ist ein regulärer Ausdruck.
- $\varepsilon$  ist ein regulärer Ausdruck.
- Für jedes  $a \in \Sigma$  ist  $a$  ein regulärer Ausdruck.
- Wenn  $\alpha$  und  $\beta$  reguläre Ausdrücke sind, dann auch  $\alpha\beta$ ,  $(\alpha|\beta)$ , sowie  $(\alpha)^*$ .

Einem regulären Ausdruck  $\gamma$  wird in eindeutiger Weise induktiv über den Aufbau von  $\gamma$  – eine Sprache zugeordnet, die wir mit  $L(\gamma)$  bezeichnen.

Es gilt:

- Falls  $\gamma = \emptyset$ , so ist  $L(\gamma) = \emptyset$ .
- Falls  $\gamma = \varepsilon$ , so ist  $L(\gamma) = \{\varepsilon\}$ .
- Falls  $\gamma = a$ , so ist  $L(\gamma) = \{a\}$ .
- Falls  $\gamma = \alpha\beta$ , so ist  $L(\gamma) = L(\alpha)L(\beta)$  (das Produkt von  $L(\alpha)$  und  $L(\beta)$ ).
- Falls  $\gamma = (\alpha|\beta)$ , so ist  $L(\gamma) = L(\alpha) \cup L(\beta)$ .
- Falls  $\gamma = (\alpha)^*$ , so ist  $L(\gamma) = L(\alpha)^*$ .

*Beispiel:* Durch den regulären Ausdruck

$$(0|(0|1)^*00)$$

wird die weiter oben diskutierte Beispielsprache beschrieben. (Entweder  $x = 0$  oder  $x$  endet mit 00).

*Bemerkung:* Alle *endlichen* Sprachen sind durch reguläre Ausdrücke beschreibbar, denn sei  $A = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  gegeben, so ist  $\alpha = (\dots((x_1|x_2)|x_3)\dots|x_k)$  ein regulärer Ausdruck für  $A$ , also  $L(\alpha) = A$ .

**Satz. (KLEENE)**

DIE MENGE DER DURCH REGULÄRE AUSDRÜCKE BESCHREIBBAREN SPRACHEN IST GENAU DIE MENGE DER REGULÄREN SPRACHEN.

**Beweis:** ( $\Rightarrow$ ) Wir zeigen zunächst: Wenn  $L$  durch einen regulären Ausdruck beschreibbar ist, dann gibt es auch einen NFA für  $L$ . Sei also  $L = L(\gamma)$ , wobei  $\gamma$  ein regulärer Ausdruck ist. In den Fällen  $\gamma = \emptyset$ ,  $\gamma = \epsilon$  und  $\gamma = a$  ist es klar, daß  $L$  durch einen DFA oder NFA beschreibbar ist.

Habe nun  $\gamma$  die Form  $\gamma = \alpha\beta$  und seien  $M_1$ ,  $M_2$  die nach Induktionsvoraussetzung existierenden NFAs für  $L(\alpha)$  und  $L(\beta)$ . Wir schalten nun die beiden Automaten "in Serie" wie folgt und erhalten einen NFA  $M$  für  $L$ . Dieser Automat  $M$  hat dieselben Startzustände wie  $M_1$  und genau die Endzustände von  $M_2$ . (Falls  $\epsilon \in L(\alpha) = T(M_1)$ , so sind auch die Startzustände von  $M_2$  Startzustände von  $M$ ). Alle Zustände in  $M_1$ , die einen Pfeil zu einem Endzustand von  $M_1$  haben, erhalten zusätzlich genauso beschriftete Pfeile zu den Startzuständen von  $M_2$ . Es ist klar, daß  $T(M) = T(M_1)T(M_2) = L(\alpha\beta)$ .

Wenn  $\gamma$  die Form hat  $\gamma = (\alpha|\beta)$  und  $M_1 = (Z_1, \Sigma, \delta_1, S_1, E_1)$ ,  $M_2 = (Z_2, \Sigma, \delta_2, S_2, E_2)$ ,  $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$ , entsprechende NFAs für  $L(\alpha)$  und  $L(\beta)$  sind, so bilden wir einfach den "Vereinigungsautomaten"

$$M = (Z_1 \cup Z_2, \Sigma, \delta_1 \cup \delta_2, S_1 \cup S_2, E_1 \cup E_2)$$

der offensichtlich die Sprache  $L$  akzeptiert.

Falls  $\gamma = (\alpha)^*$ , so bilden wir aus dem NFA  $M$  für  $\alpha$  einen Automaten  $M'$  für  $\gamma$  wie folgt.

Falls  $\epsilon \notin T(M)$ , so sehe zunächst einen zusätzlichen Zustand vor, der zugleich Start- und Endzustand ist, der keine weitere Verbindung mit dem Rest des Automaten hat. Dieser modifizierte Automat erkennt nun  $\{\epsilon\} \cup L(\alpha)$ .

$M'$  entsteht aus (dem evtl. modifizierten)  $M$  wie folgt:  $M'$  hat dieselben Startzustände, sowie dieselben Endzustände. Ferner erhält jeder Zustandsknoten, der eine (mit  $a$  beschriftete) Verbindung zu einem der ursprünglichen Endzustände hat, zusätzlich einen mit  $a$  beschrifteten Pfeil zu jedem Startzustand.

Durch diese "Rückkopplung" und das Hinzufügen von  $\epsilon$  ist klar, daß gilt:  $T(M') = T(M)^* = L((\alpha)^*)$ .

( $\Leftarrow$ ) Wir gehen nun von einem DFA  $M$  aus und geben einen regulären Ausdruck  $\gamma$  an mit  $L(\gamma) = T(M)$ . Wir nehmen hierzu an, die Zustände von  $M$  sind von 1 an durchnumeriert:  $Z = \{z_1, \dots, z_n\}$ , so daß  $z_1$  der Startzustand ist. Für  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  und  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$  definieren wir nun Sprachen  $R_{i,j}^k$  und zeigen, daß diese durch reguläre Ausdrücke beschreibbar sind.

Es ist

$R_{i,j}^k = \{x \in \Sigma^* \mid \text{die Eingabe } x \text{ überführt den Automaten, gestartet im Zustand } z_i \text{ in den Zustand } z_j \text{ (also } \hat{\delta}(z_i, x) = z_j \text{), so daß keiner der "Zwischenzustände" – außer } z_i \text{ und } z_j \text{ selbst – einen Index größer als } k \text{ hat}\}$

Für  $k = 0$  und  $i \neq j$  gilt:

$$R_{i,j}^0 = \{a \in \Sigma \mid \delta(z_i, a) = z_j\}$$

Für  $k = 0$  und  $i = j$  gilt:

$$R_{i,i}^0 = \{\epsilon\} \cup \{a \in \Sigma \mid \delta(z_i, a) = z_i\}$$

In diesen Fällen ist  $R_{i,j}^k$  endlich und läßt sich daher durch einen regulären Ausdruck beschreiben. Wir fahren nun mit einer Induktion über  $k$  fort. Wir beobachten zunächst, daß gilt:

$$R_{i,j}^{k+1} = R_{i,j}^k \cup R_{i,k+1}^k (R_{k+1,k+1}^k)^* R_{k+1,j}^k$$

(Erklärung: Um vom Zustand  $z_i$  aus den Zustand  $z_j$  zu erreichen, wird entweder der Zwischenzustand  $z_{k+1}$  nicht benötigt, dann reicht  $R_{i,j}^k$  zur Beschreibung aus; oder der Zustand  $z_{k+1}$  wird ein oder mehrfach (in Schleifen) durchlaufen. Dies kann beschrieben werden durch den Ausdruck  $R_{i,k+1}^k (R_{k+1,k+1}^k)^* R_{k+1,j}^k$ .)

Falls  $\alpha_{i,j}^k$  ein regulärer Ausdruck für  $R_{i,j}^k$  ist, so läßt sich die obige induktive Formel wie folgt schreiben:

$$\alpha_{i,j}^{k+1} = (\alpha_{i,j}^k | \alpha_{i,k+1}^k (R_{k+1,k+1}^k)^* R_{k+1,j}^k)$$

Mittels dieser regulären Ausdrücke läßt sich die von  $M$  akzeptierte Sprache leicht beschreiben, denn es gilt:

$$T(M) = \bigcup_{z_i \in E} R_{1,i}^n$$

Seien also  $i_1, i_2, \dots, i_m$  die Indizes der Endzustände, so ist ein regulärer Ausdruck für  $T(M)$  gegeben durch:

$$(\alpha_{1,i_1}^n | \alpha_{1,i_2}^n | \dots | \alpha_{1,i_m}^n)$$



### 1.2.4 Das Pumping Lemma

Wir zeigen nun einen wichtigen Satz, der das Haupthilfsmittel darstellt, um von einer Sprache nachzuweisen, daß sie *nicht* regulär ist.

**Satz.** (PUMPING LEMMA, SCHLEIFENLEMMA, ITERATIONS-LEMMA, LEMMA VON BAR-HILLEL,  $uvw$ -THEOREM)

SEI  $L$  EINE REGULÄRE SPRACHE. DANN GIBT ES EINE ZAHL  $n$ , SO DASS SICH ALLE WÖRTER  $x \in L$  MIT  $|x| \geq n$  ZERLEGEN LASSEN IN  $x = uvw$ , SO DASS FOLGENDE EIGENSCHAFTEN ERFÜLLT SIND:

1.  $|v| \geq 1$ ,
2.  $|uv| \leq n$ ,
3. FÜR ALLE  $i = 0, 1, 2, \dots$  GILT:  $uv^i w \in L$ .

**Beweis:** Da  $L$  regulär ist, gibt es einen DFA  $M$ , der  $L$  akzeptiert.

Wir wählen für  $n$  die Zahl der Zustände von  $M$ :  $n = |Z|$ . Sei nun  $x$  ein beliebiges Wort der Länge  $\geq n$ , das der Automat akzeptiert. Beim Abarbeiten von  $x$  durchläuft der Automat  $|x|+1$  Zustände (den Startzustand mitgezählt). Da  $|x| \geq n$  können diese Zustände nicht alle verschieden sein (Schubfachsatz). Mit anderen Worten, der DFA muß beim Abarbeiten von  $x$  eine Schleife durchlaufen haben. Wir wählen die Zerlegung  $x = uvw$  so, daß der Zustand nach Lesen von  $u$  und von  $uv$  derselbe ist. Es ist klar, daß die Zerlegung so gewählt werden kann, daß die Bedingungen 1 und 2 erfüllt sind. Da die Zustände gleich sind, erreicht der Automat bei Eingabe von  $uw$  denselben Endzustand wie bei Lesen von  $x = uvw$ . Das heißt  $uw = uv^0 w \in L$ . Dasselbe gilt für  $uvvw = uv^1 w$ ,  $uvvvw = uv^3 w$ , usw. Daher ist auch die Bedingung 3 erfüllt. ■

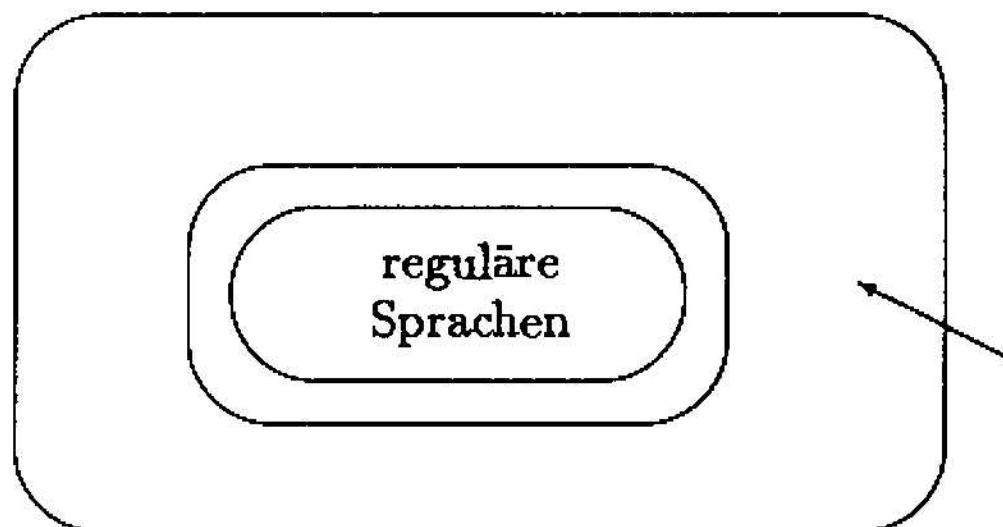
Man beachte, daß durch das Pumping Lemma nicht eine äquivalente Charakterisierung der regulären Sprachen erreicht wird. Es stellt lediglich eine einseitige Implikation dar. Die logische Struktur ist

$$(L \text{ regulär}) \Rightarrow (\exists n)(\forall z \in L, |z| \geq n)(\exists u, v, w)[(z = uvw) \wedge 1 \wedge 2 \wedge 3]$$

Daher ist die typische Anwendung des Pumping Lemmas der Nachweis, daß gewisse Sprachen *nicht* regulär sind. Dies muß allerdings nicht bei jeder nicht-regulären Sprache gelingen!

### Graphische Darstellung:

Menge aller Sprachen



Sprachen, die nicht regulär sind aufgrund des Pumping Lemmas

### Beispiel 1: Die Sprache

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$$

ist **nicht** regulär (aber kontextfrei). Dies beweist man mit dem Pumping Lemma so: Angenommen  $L$  sei regulär. Dann gibt es eine Zahl  $n$ , so daß sich alle Wörter  $x \in L$  der Länge  $\geq n$  wie im Pumping Lemma beschrieben zerlegen lassen. Betrachten wir speziell das Wort  $a^n b^n$  der Länge  $2n$ . Die entsprechende Zerlegung  $uvw$  dieses Wortes ist aufgrund Bedingung 1 so, daß  $v$  nicht leer ist, und aufgrund Bedingung 2 kann  $v$  nur aus  $a$ 's bestehen. Aufgrund von Bedingung 3 wäre dann auch das Wort  $uw = a^{n-|v|} b^n$  in der Sprache, was im Widerspruch zur Definition von  $L$  steht. Daher ist  $L$  nicht regulär.

### Beispiel 2: Die Sprache

$$L = \{0^m \mid m \text{ ist Quadratzahl}\}$$

ist nicht regulär: Angenommen doch, dann gibt es gemäß Pumping Lemma eine entsprechende Zahl  $n$ , so daß sich jedes Wort der Form  $0^m$ ,  $m \geq n$ ,  $m$  Quadratzahl, zerlegen läßt in  $uvw$  mit den Eigenschaften 1,2,3. Wähle speziell  $x = 0^{n^2}$ . Betrachte eine beliebige Zerlegung  $x = uvw$ , die die Bedingungen 1,2,3 erfüllt. Wegen Bedingung 1 und 2 gilt:

$$1 \leq |v| \leq |uv| \leq n$$

Mit Bedingung 3,  $i = 2$ , gilt dann:

$$uv^2w \in L$$

Andererseits gilt die Abschätzung:

$$n^2 = |x| = |uvw| < |uv^2w| \leq n^2 + n < n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

Somit kann die Zahl  $|uv^2w|$  keine Quadratzahl sein, da sie echt zwischen zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen liegt. Widerspruch! Also ist gezeigt, daß  $L$  nicht regulär ist.

*Beispiel 3:* Die Sprache

$$L = \{0^p \mid p \text{ ist Primzahl}\}$$

ist nicht regulär. Sei wieder angenommen,  $L$  ist regulär und sei  $n$  die entsprechende Pumping-Lemma-Zahl. Da es unendlich viele Primzahlen gibt, gibt es auch solche  $\geq n + 2$ . Sei also  $p \geq n + 2$  eine Primzahl, also  $0^p \in L$ .  $0^p$  müßte sich nun in  $uvw$  zerlegen lassen mit den Bedingungen 1, 2 und 3. Aufgrund Bedingung 3 müßten alle Wörter der Form  $uv^iw = 0^{|uw|+i\cdot|v|}$  in  $L$  liegen. Das heißt, alle Zahlen der Form  $|uw| + i \cdot |v|$  müßten Primzahlen sein. (Man beachte, daß wegen der Bedingung 1  $|v| \geq 1$  gilt). Wähle nun speziell  $i = |uw|$ . Dann erhalten wir:  $|uw| + |uw| \cdot |v| = |uw| \cdot (1 + |v|)$ . Diese Zahl läßt sich also in zwei nicht-triviale Faktoren zerlegen, kann also keine Primzahl sein. (Man beachte, daß wegen der Länge von  $x$  und wegen Bedingung 2 gilt  $|uw| \geq |w| = |x| - |uv| \geq 2$ .) Widerspruch! Also kann  $L$  nicht regulär sein.

### 1.2.5 Äquivalenzrelationen und Minimalautomaten

Man kann jeder Sprache  $L$  eine Äquivalenzrelation  $R_L$  auf  $\Sigma^*$  zuordnen. (Zu Äquivalenzrelationen siehe den mathematischen Anhang).

**Definition.** Es gilt  $xR_Ly$  genau dann, wenn für alle Wörter  $z \in \Sigma^*$  gilt:

$$xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$$

Man verifiziert sofort, daß  $R_L$  die Axiome einer Äquivalenzrelation erfüllt. Intuitiv sind zwei Wörter  $x$  und  $y$  dann äquivalent, wenn sich bei Anfügen von beliebigen  $z$  die Wörter  $xz$  und  $yz$  bzgl. Mitgliedschaft in  $L$  gleich verhalten. Da der Fall  $z = \epsilon$  mit eingeschlossen ist, muß also insbesondere auch  $x \in L \Leftrightarrow y \in L$  gelten. Entscheidend ist für das

Folgende, ob der Index (die Anzahl der erzeugten Äquivalenzklassen) von  $R_L$  endlich oder unendlich ist.

**Satz. (MYHILL, NERODE)**

EINE SPRACHE  $L$  IST GENAU DANN REGULÄR, WENN DER INDEX VON  $R_L$  ENDLICH IST.

**Beweis:** ( $\Rightarrow$ ) Sei  $L$  regulär und sei  $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$  ein DFA mit  $L = T(M)$ . Dann kann man  $M$  eine Äquivalenzrelation  $R_M$  wie folgt zuordnen: Es gilt  $xR_My$ , falls  $\hat{\delta}(z_0, x) = \hat{\delta}(z_0, y)$ , d.h. falls die Eingaben  $x$  und  $y$  den Automaten in denselben Zustand überführen. Wir zeigen  $R_M \subseteq R_L$ , d.h.  $R_M$  ist eine Verfeinerung von  $R_L$ . Es gelte  $xR_My$ , also  $\hat{\delta}(z_0, x) = \hat{\delta}(z_0, y)$ . Sei nun  $z \in \Sigma^*$  beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} xz \in L &\Leftrightarrow \hat{\delta}(z_0, xz) \in E \\ &\Leftrightarrow \hat{\delta}(\hat{\delta}(z_0, x), z) \in E \\ &\Leftrightarrow \hat{\delta}(\hat{\delta}(z_0, y), z) \in E \\ &\Leftrightarrow \hat{\delta}(z_0, yz) \in E \\ &\Leftrightarrow yz \in L \end{aligned}$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} \text{Index}(R_L) &\leq \text{Index}(R_M) \\ &= \text{Anzahl der Zustände, die von } z_0 \text{ aus erreichbar sind} \\ &\leq |Z| \\ &< \infty \end{aligned}$$

( $\Leftarrow$ ) Wenn der Index von  $R_L$  endlich ist, so gibt es endlich viele Wörter  $x_1, x_2, \dots, x_k$  mit  $\Sigma^* = [x_1] \cup [x_2] \cup \dots \cup [x_k]$ . Definiere nun einen DFA, dessen Zustände gerade durch diese Äquivalenzklassen identifiziert werden:

$$M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$$

wobei

**Beispiel:** Betrachten wir noch einmal die nicht-reguläre Sprache

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$$

und sehen wir uns einige der Äquivalenzklassen von  $R_L$  an:

$$\begin{aligned}[ab] &= L \\ [a^2b] &= \{a^2b, a^3b^2, a^4b^3, \dots\} \\ [a^3b] &= \{a^3b, a^4b^2, a^5b^3, \dots\} \\ &\vdots \\ [a^kb] &= \{a^{k+i-1}b^i \mid i \geq 1\} \\ &\vdots\end{aligned}$$

Man erkennt, daß für  $i \neq j$  die Wörter  $a^i b$  und  $a^j b$  nicht äquivalent sind, denn mit  $z = b^{i-1}$  gilt:  $a^i b z \in L$  und  $a^j b z \notin L$ . Somit sind  $[ab], [a^2b], [a^3b], \dots$  paarweise verschiedene (damit disjunkte) Äquivalenzklassen. Somit ist  $\text{Index}(R_L) = \infty$  und  $L$  ist nicht regulär.

Man beachte, daß es für einen Beweis der Nicht-Regularität nicht unbedingt notwendig ist, die Äquivalenzklassenstruktur von  $R_L$  vollständig aufzuklären. Es genügt, unendlich viele nicht-äquivalente Wörter aus  $\Sigma^*$  zu identifizieren, um auf  $\text{Index}(R_L) = \infty$  zu schließen.

**Beispiel:** Betrachte die Sprache

$$L = \{x \in \{0, 1\}^* \mid x \text{ endet mit } 00\}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}[\epsilon] &= \{x \mid x \text{ endet nicht mit } 0\} \\ [0] &= \{x \mid x \text{ endet mit } 0, \text{ aber nicht mit } 00\} \\ [00] &= \{x \mid x \text{ endet mit } 00\}\end{aligned}$$

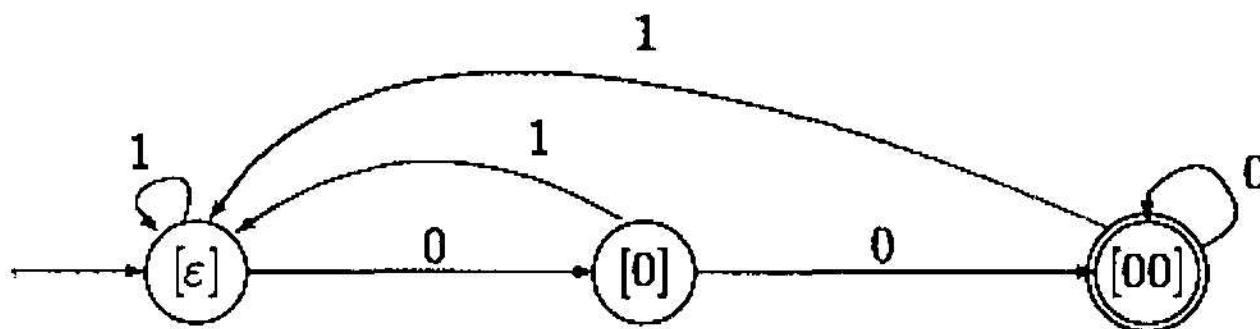
Dies sind alle Äquivalenzklassen von  $R_L$ , also

$$\Sigma^* = [\epsilon] \cup [0] \cup [00]$$

Der "Äquivalenzklassenautomat", der im obigen Beweis konstruiert wird, hat die drei Zustände  $[\epsilon], [0], [00]$ . Es gilt:

$$\begin{aligned}\delta([\epsilon], 0) &= [0] \\ \delta([\epsilon], 1) &= [1] = [\epsilon] \\ \delta([0], 0) &= [00] \\ \delta([0], 1) &= [01] = [\epsilon] \\ \delta([00], 0) &= [000] = [00] \\ \delta([00], 1) &= [001] = [\epsilon] \\ z_0 &= [\epsilon] \\ E &= \{[00]\}\end{aligned}$$

Bildlich dargestellt ist dies der folgende Automat:



*Bemerkung:* Der Äquivalenzklassenautomat ist der Automat mit der kleinsten Anzahl von Zuständen, der sog. *Minimalautomat*, denn aus obigem Beweis ergibt sich, daß für jeden beliebigen Automaten  $M$  für die gegebene Sprache  $L$  gilt:  $R_M \subseteq R_L = R_{M_0}$ , wobei  $M_0$  der Äquivalenzklassenautomat ist. Das bedeutet, daß die Zahl der Zustände von  $M$  größer oder gleich der von  $M_0$  ist. Außerdem erkennt man, daß es keine zwei strukturell unterschiedlichen Automaten für  $L$  mit minimaler Zustandszahl geben kann. Der Minimalautomat ist also bis auf Isomorphie (d.h. Umbenennen der Zustände) eindeutig bestimmt.

Wie kann man von einem gegebenen DFA feststellen, ob er bereits minimal ist? Aufgrund des obigen Beweises ist ein Automat  $M$  mit  $T(M) = L$  offensichtlich dann nicht minimal, wenn es zwei verschiedene Zustände  $z, z'$  gibt, so daß für alle  $x$  gilt:

$$\hat{\delta}(z, x) \in E \Leftrightarrow \hat{\delta}(z', x) \in E.$$

In diesem Fall können die Zustände  $z$  und  $z'$  zu einem einzigen Zustand "verschmolzen" werden. Ferner überlegt man sich, daß es bei diesen Tests genügt, Wörter  $x$  zu betrachten, deren Länge durch die Anzahl der Zustände von  $M$  beschränkt ist.

Der folgende Algorithmus macht von diesen Überlegungen in effizienter Weise Gebrauch. Wir verzichten auf seine Analyse, die sich aber im wesentlichen leicht aus dem obigen Beweis ergibt.

### Algorithmus Minimalautomat

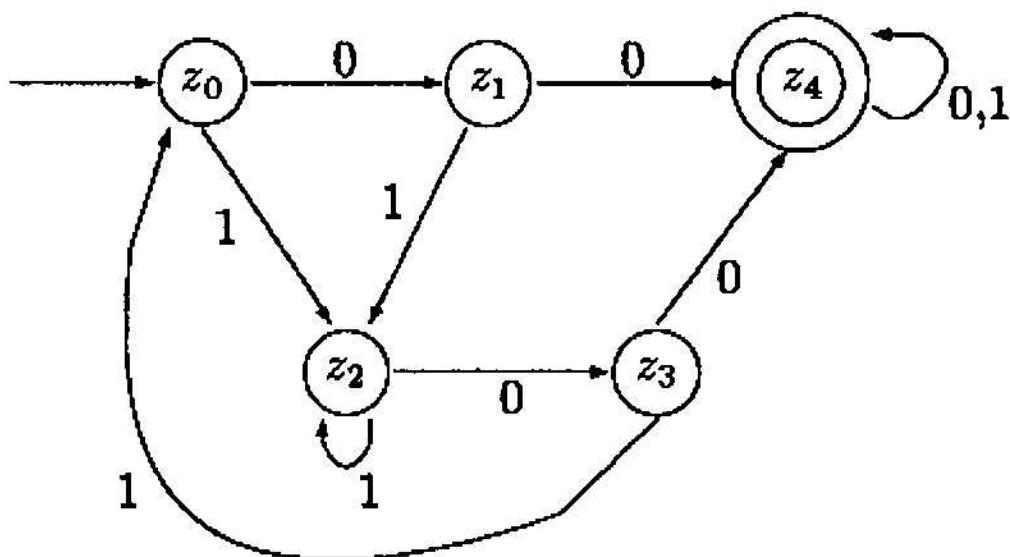
*Eingabe:* ein DFA  $M$  (Zustände, die vom Startzustand aus nicht erreichbar sind, sind bereits entfernt).

*Ausgabe:* Angabe, welche Zustände von  $M$  noch zu verschmelzen sind, um den Minimalautomaten zu erhalten.

1. Stelle eine Tabelle aller Zustandspaare  $\{z, z'\}$  mit  $z \neq z'$  von  $M$  auf.
2. Markiere alle Paare  $\{z, z'\}$  mit  $z \in E$  und  $z' \notin E$  (oder umgekehrt).
3. Für jedes noch unmarkierte Paar  $\{z, z'\}$  und jedes  $a \in \Sigma$  teste, ob
 
$$\{\delta(z, a), \delta(z', a)\}$$
 bereits markiert ist. Wenn ja: markiere auch  $\{z, z'\}$ .
4. Wiederhole den letzten Schritt, bis sich keine Änderung in der Tabelle mehr ergibt.
5. Alle jetzt noch unmarkierten Paare können zu einem Zustand verschmolzen werden.

*Bemerkung:* Der oben beschriebene Algorithmus hat – geeignet implementiert (siehe Hopcroft/Ullman) – die Zeitkomplexität  $O(n^2)$ .

*Beispiel:* Gegeben sei folgender DFA:



Wir führen nun die Schritte durch: Zunächst eine Tabelle der Zustandspaare anfertigen:

$z_1$				
$z_2$				
$z_3$				
$z_4$				

$z_0 \ z_1 \ z_2 \ z_3$

Nächster Schritt: Paare von Endzuständen und Nicht-Endzuständen markieren.

$z_1$				
$z_2$				
$z_3$				
$z_4$	★	★	★	★

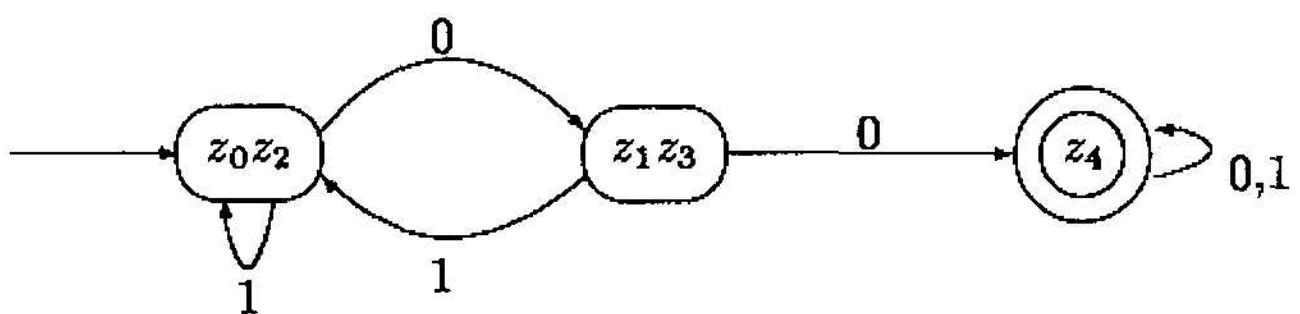
$z_0 \ z_1 \ z_2 \ z_3$

Weiter markieren ...

$z_1$	★			
$z_2$		★		
$z_3$	★		★	
$z_4$	★	★	★	★

$z_0 \ z_1 \ z_2 \ z_3$

Es können also die Zustände  $z_0, z_2$  und  $z_1, z_3$  in jeweils einen Zustand verschmolzen werden. Der resultierende Minimalautomat:



Dieser Automat beschreibt offensichtlich die Sprache

$$L = \{x \in \{0,1\}^* \mid \text{in } x \text{ kommt } 00 \text{ vor}\}$$

Die drei Zustände  $z_0z_2$ ,  $z_1z_3$  und  $z_4$  entsprechen den Äquivalenzklassen  $[\epsilon]$ ,  $[0]$  und  $[00]$ .

### 1.2.6 Abschlußeigenschaften

Wir wollen nun untersuchen, unter welchen Operationen die regulären Sprachen abgeschlossen sind (vgl. hierzu den mathematischen Anhang). Einige der folgenden Abschlußeigenschaften sind eine triviale Konsequenz dessen, daß die regulären Ausdrücke gerade die regulären Sprachen beschreiben.

#### Satz.

**DIE REGULÄREN SPRACHEN SIND ABGESCHLOSSEN UNTER:**

- VEREINIGUNG
- SCHNITT
- KOMPLEMENT
- PRODUKT
- STERN

**Beweis:** Der Abschluß unter Vereinigung, Produkt und Stern-Operation folgt unmittelbar daraus, daß mit zwei durch die regulären Ausdrücke  $\alpha$  und  $\beta$  gegebenen regulären Sprachen auch die durch  $(\alpha|\beta)$ ,  $\alpha\beta$  und  $(\alpha)^*$  bezeichneten Sprachen regulär sind (vgl. Satz von Kleene, S. 37).

Als nächstes betrachten wir den Abschluß unter Komplementbildung. Sei eine reguläre Sprache  $A$  durch ihren DFA  $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$  gegeben. Indem wir Endzustände mit Nicht-Endzuständen vertauschen, erhalten wir  $M' = (Z, \Sigma, \delta, z_0, Z - E)$ . Es ist klar, daß  $T(M') = \overline{A}$ , und damit die regulären Sprachen unter Komplement abgeschlossen sind.

Mit dem Abschluß unter Vereinigung und unter Komplement sind die regulären Sprachen auch "automatisch" unter Schnitt abgeschlossen (vgl. den mathematischen Anhang). Wir geben jedoch trotzdem eine direkte – weil interessante – Konstruktion an: Seien  $M_1 = (Z_1, \Sigma, \delta_1, z_{01}, E_1)$  und  $M_2 = (Z_2, \Sigma, \delta_2, z_{02}, E_2)$  DFAs. Wir konstruieren den "Kreuzproduktautomaten"  $M$  aus  $M_1$  und  $M_2$ . Dieser akzeptiert gerade die Sprache  $T(M_1) \cap T(M_2)$ .

$$M = (Z_1 \times Z_2, \Sigma, \delta, (z_{01}, z_{02}), E_1 \times E_2)$$

wobei

$$\delta((z, z'), a) = (\delta_1(z, a), \delta_2(z', a))$$

■

*Bemerkung:* Da die regulären Ausdrücke gerade die regulären Sprachen beschreiben, muß es zu jedem regulären Ausdruck  $\alpha$  einen Ausdruck  $\beta$  geben, der die Komplementsprache darstellt:  $L(\beta) = \overline{L(\alpha)}$ . Das heißt, die Komplementbildung ist mittels Vereinigung, Produkt und Sternoperation darstellbar. Die entsprechende Konstruktion ist jedoch sehr aufwendig, da sie die Stufen *regulärer Ausdruck*  $\rightarrow$  *NFA*  $\rightarrow$  *DFA*  $\rightarrow$  *komplementärer DFA*  $\rightarrow$  *regulärer Ausdruck* durchlaufen müßte.

## 1.2.7 Entscheidbarkeit

Wir wollen einige Fragen bzgl. Entscheidbarkeit bei regulären Sprachen diskutieren.

Das *Wortproblem* (gegeben:  $x$ ; gefragt: liegt  $x$  in  $L(G)$  bzw.  $T(M)$ ) ist, wie bereits gezeigt, für Typ 1,2,3 Grammatiken entscheidbar. Sollte die zu entscheidende reguläre Sprache durch einen DFA gegeben sein, so ist das Wortproblem sogar in linearer Zeit lösbar: Verfolge Zeichen für Zeichen die Zustandsübergänge im Automaten, die durch die Eingabe  $x$  hervorgerufen werden. Falls ein Endzustand erreicht wird, liegt  $x$  in der Sprache.

Das *Leerheitsproblem* stellt bei gegebenem  $G$  (bzw.  $M$ ) die Frage, ob  $L(G) = \emptyset$  (bzw.  $T(M) = \emptyset$ ). Auch dies ist entscheidbar: Sei  $M$  ein gegebener DFA (oder NFA) für die Sprache.  $T(M)$  ist offensichtlich genau dann leer, wenn es keinen Pfad vom Startzustand (von einem Startzustand) zu einem Endzustand gibt.

Eine ähnliche Methode verwendet das Pumping Lemma: Sei  $n$  die Pumping Lemma Zahl von  $L$  (d.h.  $n$  ist die Anzahl der Zustände eines DFAs für  $L$ ). Dann gilt:

$$L \neq \emptyset \Leftrightarrow \text{es gibt ein Wort der Länge } < n \text{ in } L$$

Begründung: ( $\Leftarrow$ ) Klar.

( $\Rightarrow$ ) Sei  $L \neq \emptyset$  und sei  $x$  ein Wort in  $L$  mit minimaler Länge. Angenommen  $|x| \geq n$ , dann gibt es aufgrund des Pumping Lemmas eine Zerlegung von  $x$  in  $uvw$ , so daß auch  $uw$  ein Element von  $L$  ist. Dies widerspricht der Minimalität von  $x$ . Deshalb muß  $x$  Länge  $< n$  haben.

Der Entscheidungsalgorithmus für  $L \stackrel{?}{=} \emptyset$  verläuft also so, daß alle Wörter  $x$  der Länge  $< n$  auf Mitgliedschaft in  $L$  ( $\rightarrow$  Wortproblem) geprüft werden müssen.

Das *Endlichkeitsproblem* stellt bei gegebenem  $G$  (bzw.  $M$ ) die Frage, ob  $|L(G)| < \infty$  (bzw.  $|T(M)| < \infty$ ), also ob die definierte Sprache endlich oder unendlich ist.

Sei wieder  $n$  die Pumping Lemma Zahl zu  $L$ . Es gilt:

$$|L| = \infty \Leftrightarrow \text{es gibt ein Wort der Länge } \geq n \text{ und } < 2n \text{ in } L$$

Begründung: ( $\Leftarrow$ ) Sei  $x \in L$  mit  $n \leq |x| < 2n$ . Aufgrund des Pumping Lemmas lässt sich  $x$  zerlegen in  $uvw$ , so daß  $\{uv^iw \mid i \geq 0\}$  Teilmenge von  $L$  ist. Also ist  $|L|$  unendlich.

( $\Rightarrow$ ) Sei  $|L| = \infty$  und sei angenommen, das kürzeste Wort  $x \in L$  mit Länge  $\geq n$  habe Länge  $\geq 2n$ . Aufgrund des Pumping Lemmas lässt sich  $x$  zerlegen in  $uvw$ , so daß auch  $uv^0w = uw$  Element von  $L$  ist. Da  $|v| \leq |uv| \leq n$ , hat dieses Wort eine Länge  $\geq n$ . Dies widerspricht der Minimalität von  $x$ . Daher gibt es ein Wort mit Länge zwischen  $n$  und  $2n$ .

Der Entscheidungsalgorithmus für  $|L| \stackrel{?}{<} \infty$  verläuft also so, daß alle Wörter  $x$  der Länge  $\geq n$  und  $< 2n$  auf Mitgliedschaft in  $L$  ( $\rightarrow$  Wortproblem) geprüft werden müssen.

Das *Schnittproblem* stellt bei gegebenen  $G_1, G_2$  (bzw.  $M_1, M_2$ ) die Frage ob  $L(G_1) \cap L(G_2)$  (bzw.  $T(M_1) \cap T(M_2)$ ) leer ist oder nicht.

Da die regulären Sprachen *effektiv* unter Schnitt abgeschlossen sind (d.h. zu gegebenen regulären Grammatiken  $G_1, G_2$  ist algorithmisch eine reguläre Grammatik  $G$  erzeugbar mit  $L(G) = L(G_1) \cap L(G_2)$ ), läßt sich die Frage auf das Leerheitsproblem reduzieren und ist damit entscheidbar.

Beim *Äquivalenzproblem* sind zwei reguläre Grammatiken bzw. endliche Automaten gegeben und es ist gefragt, ob diese dieselbe Sprache definieren.

Falls zwei DFAs vorliegen, läßt sich die Frage dadurch beantworten, daß zu jedem der Automaten der Minimalautomat konstruiert wird und diese dann auf Isomorphie verglichen werden.

Eine andere Lösung geht von der Tatsache aus, daß die regulären Sprachen effektiv unter Schnitt, Vereinigung und Komplementbildung abgeschlossen sind. Es gilt

$$L_1 = L_2 \Leftrightarrow (L_1 \cap \overline{L_2}) \cup (L_2 \cap \overline{L_1}) = \emptyset$$

Daher läßt sich das Problem auf die Entscheidbarkeit des Leerheitsproblems zurückführen.

Was die Effizienz des Verfahrens betrifft, so macht es einen großen Unterschied, in welcher Form die reguläre Sprache repräsentiert wird. Der oben angesprochene, auf DFAs basierende Algorithmus kommt mit Komplexität  $O(n^2)$  aus. Wenn die regulären Sprachen jedoch als Grammatiken, NFAs oder reguläre Ausdrücke gegeben sind, so ist das Äquivalenzproblem *NP-hart* (vgl. Kapitel über Komplexitätstheorie, Seite 169). Dies bedeutet, daß in diesen Fällen nur Algorithmen exponentieller Laufzeit zur Verfügung stehen.

## 1.3 Kontextfreie Sprachen

Die regulären Sprachen und die zugehörigen Formalismen, wie endliche Automaten, sind – wie sich gezeigt hat – sehr nützlich. Jedoch sind die Grenzen dieses einfachen Formalismus auch schnell erreicht. Die nächstgrößere Klasse der Chomsky-Hierarchie bilden die kontextfreien Sprachen. Diese sind besonders nützlich, um geklammerte Sprachstruk-

turen, wie sie insbesondere bei Programmiersprachen auftreten, zu beschreiben.

Typische Beispiele hierzu sind die Grammatiken für die (beliebig geklammerten) arithmetischen Ausdrücke

$$E \rightarrow T \mid E + T, \quad T \rightarrow F \mid T * F, \quad F \rightarrow a \mid (E)$$

sowie für die Anweisungen (etwa in Modula):

$$\begin{aligned} < \text{Anw} > &\rightarrow < \text{While-Anw} > \mid < \text{If-Anw} > \\ < \text{While-Anw} > &\rightarrow \text{WHILE } < \text{Bedingung} > \text{ DO } < \text{Anw} > \text{ END} \\ < \text{If-Anw} > &\rightarrow \text{IF } < \text{Bedingung} > \text{ THEN } < \text{Anw} > \text{ END} \\ < \text{Bedingung} > &\rightarrow \dots \end{aligned}$$

Die öffnenden und schließenden Klammerpaare, die hier erkennbar sind, sind ( und ), DO und END, sowie THEN und END.

Die nicht-reguläre Beispielsprache

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$$

ist, wie man leicht sieht, kontextfrei:

$$S \rightarrow ab \mid aSb$$

Dies beweist, wie bereits angekündigt, daß die Typ 3 Sprachen echt in der Klasse der Typ 2 Sprachen enthalten sind.

### 1.3.1 Normalformen

Wir untersuchen nun, auf welche möglichst einfachen Formen bei den Regeln von kontextfreien Grammatiken man sich beschränken kann. Das heißt, es geht darum, nachzuweisen, daß jede kontextfreie Grammatik in eine äquivalente solche umgeformt werden kann, so daß alle Regeln eine sog. Normalform besitzen.

Wir erinnern zunächst daran, daß jede kontextfreie Grammatik “ $\varepsilon$ -frei” gemacht werden kann (vgl. S. 18). Wir betrachten nun eine weitere allgemeine Umformung, die zum Ziel hat, alle Regeln der Form  $A \rightarrow B$  zu eliminieren, wobei  $A, B$  Variablen sind. Zunächst ist algorithmisch einfach feststellbar, ob es eine Menge von Variablen  $B_1, \dots, B_k$  gibt mit

$B_1 \rightarrow B_2, \dots, B_{k-1} \rightarrow B_k$  und  $B_k \rightarrow B_1$ . In diesem Fall ersetzen wir die Variablen  $B_1, \dots, B_k$  durch eine einzige Variable  $B$ .

Als nächstes können die Variablen so durchnumeriert werden,  $V = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ , daß aus  $A_i \rightarrow A_j \in P$  folgt  $i < j$ . Wir gehen nun von hinten nach vorne vor und eliminieren für  $k = n - 1, \dots, 1$  alle Regeln der Form  $A_k \rightarrow A_{k'}$ ,  $k' > k$ . Seien die Regeln mit  $A_{k'}$  auf der linken Seite gegeben durch

$$A_{k'} \rightarrow x_1 | x_2 | \dots | x_k.$$

Wir fügen dann die Regeln

$$A_k \rightarrow x_1 | x_2 | \dots | x_k$$

hinzu. Diese Umformung leistet offenbar das Gewünschte.

Nach diesen Vorbemerkungen definieren wir nun die wichtigste Normalform, die *Chomsky Normalform* (kurz: CNF).

**Definition.** Eine kontextfreie Grammatik  $G$  mit  $\epsilon \notin L(G)$  heißt in *Chomsky Normalform*, falls alle Regeln eine der beiden Formen haben:

$$A \rightarrow BC$$

bzw.

$$A \rightarrow a$$

Hierbei stehen  $A, B, C$  für Variablen und  $a$  für ein Terminalsymbol.

Offensichtlich bedeutet dies eine starke Einschränkung für eine kontextfreie Grammatik: Ableitungsbäume für solche Grammatiken sind – bis auf den letzten Ableitungsschritt – *Binärbäume*. Man überlegt sich ferner, daß ein Wort  $w \in L(G)$  in genau  $2|w| - 1$  Ableitungsschritten erzeugt wird.

### Satz.

ZU JEDER KONTEXTFREIEN GRAMMATIK  $G$  MIT  $\epsilon \notin L(G)$  GIBT ES EINE CHOMSKY NORMALFORM GRAMMATIK  $G'$  MIT  $L(G) = L(G')$ .

**Beweis:** Nach der oben diskutierten Vorverarbeitung hat jede Regel der gegebenen kontextfreien Grammatik  $G = (V, \Sigma, P, S)$  eine der Formen:

$$A \rightarrow a \quad (A \in V, a \in \Sigma)$$

bzw.

$$A \rightarrow x \quad (A \in V, x \in (V \cup \Sigma)^*, |x| \geq 2)$$

Für jedes Terminalzeichen  $a \in \Sigma$  fügen wir eine neue Variable  $B$  zu  $V$  hinzu, sowie zu  $P$  die Regel

$$B \rightarrow a$$

hinzu.

Als nächstes ersetzen wir jedes Terminalzeichen  $a$  auf der rechten Seite einer Regel durch die zugehörige, gerade eingeführte Variable  $B$  (außer die Regel hat bereits die Form  $A \rightarrow a$ ).

Nun haben alle Regeln die Form

$$A \rightarrow a$$

oder

$$A \rightarrow B_1 B_2 \dots B_k, \quad k \geq 2.$$

Nicht in Chomsky Normalform sind jetzt nur noch Regeln der Form

$$A \rightarrow B_1 B_2 \dots B_k, \quad k \geq 3.$$

Für jede solche Regel führen wir weitere neue Variablen  $C_2, \dots, C_{k-1}$  ein und ersetzen solche Regeln durch

$$\begin{array}{l} A \rightarrow B_1 C_2 \\ C_2 \rightarrow B_2 C_3 \\ \vdots \\ C_{k-1} \rightarrow B_{k-1} B_k \end{array}$$

Ein Beispiel für die Umformung in CNF findet sich – im Zusammenhang mit dem CYK-Algorithmus – auf Seite 63.

Wir erwähnen noch eine weitere Normalform, die sog. *Greibach Normalform* (kurz: GNF).

**Definition.** Eine kontextfreie Grammatik  $G$  mit  $\varepsilon \notin L(G)$  heißt in *Greibach Normalform*, falls alle Regeln die Form haben:

$$A \rightarrow aB_1B_2\dots B_k \quad (k \geq 0)$$

Hierbei stehen  $A, B_1, \dots, B_k$  für Variablen und  $a$  für ein Terminalsymbol.

Die Greibach Normalform ist eine natürliche Erweiterung der regulären Grammatik, dort wäre nur der Fall  $k = 0$  und  $k = 1$  zugelassen.

**Satz. (OHNE BEWEIS)**

ZU JEDER KONTEXTFREIEN GRAMMATIK  $G$  MIT  $\varepsilon \notin L(G)$  GIBT ES EINE GREIBACH NORMALFORM GRAMMATIK  $G'$  MIT  $L(G) = L(G')$ .

Wir erwähnen nur, daß die Konstruktion  $G \mapsto G'$  komplizierter ist, und daß der entsprechende Algorithmus exponentielle Laufzeit hat.

Wir erwähnen ferner, daß es sogar möglich ist, sich auf  $0 \leq k \leq 2$  zu beschränken.

### 1.3.2 Das Pumping Lemma

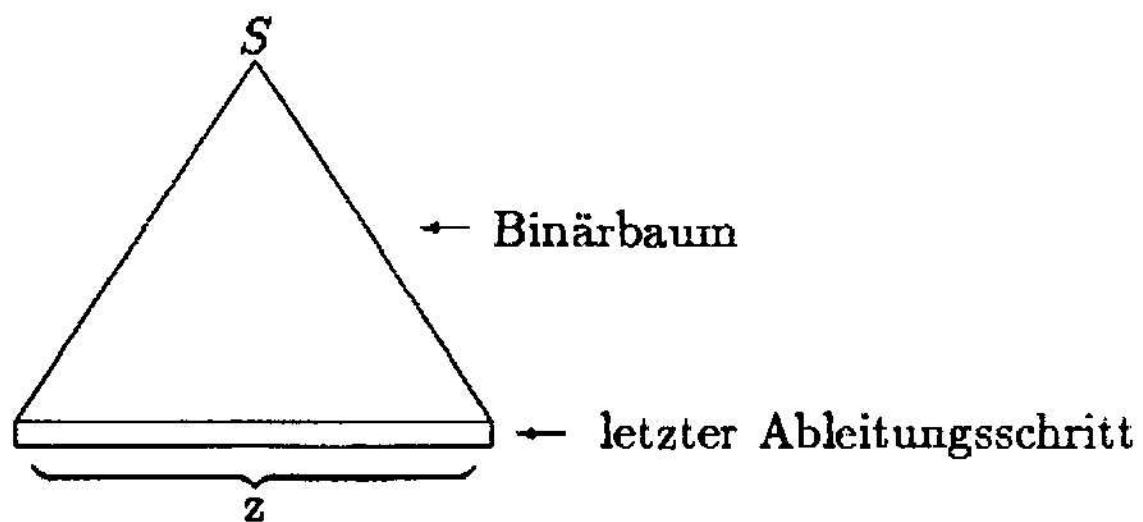
Wir beweisen nun in völliger Analogie zum Pumping Lemma für reguläre Sprachen eine entsprechende Version für kontextfreie Sprachen. Das Pumping Lemma stellt das Haupthilfsmittel dar, um von einer Sprache nachzuweisen, daß sie *nicht* kontextfrei ist.

**Satz. (PUMPING LEMMA,  $uvwxy$ -THEOREM)**

SEI  $L$  EINE KONTEXTFREIE SPRACHE. DANN GIBT ES EINE ZAHL  $n \in \mathbb{N}$ , SO DASS SICH ALLE WÖRTER  $z \in L$  MIT  $|z| \geq n$  ZERLEGEN LASSEN IN  $z = uvwxy$  MIT FOLGENDEN EIGENSCHAFTEN:

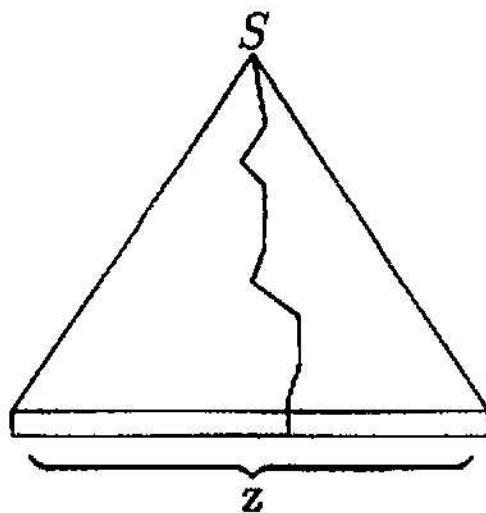
1.  $|vx| \geq 1$
2.  $|vwx| \leq n$
3. FÜR ALLE  $i \geq 0$  GILT:  $uv^iwx^i y \in L$

**Beweis:** Sei  $G$  eine Grammatik für  $L - \{\varepsilon\}$  in Chomsky Normalform. Sei  $k$  die Anzahl der Variablen in  $G$ . Wähle  $n = 2^k$ . Betrachte nun den Ableitungsbaum eines beliebigen Wortes  $z \in L(G)$  mit  $|z| \geq n$ . Dieser ist – bis auf den letzten Ableitungsschritt – ein Binärbaum:

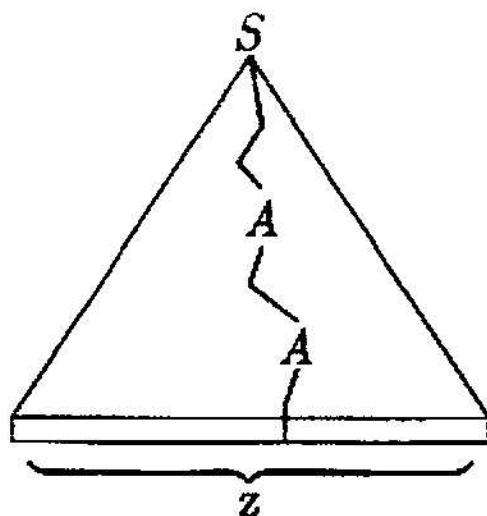


Dieser Binärbaum hat  $\geq 2^k$  Blätter. Daher muß mindestens ein Pfad der Länge  $\geq k$  existieren (siehe separates, nächstes Lemma).

Halte einen solchen Pfad maximaler Länge fest:

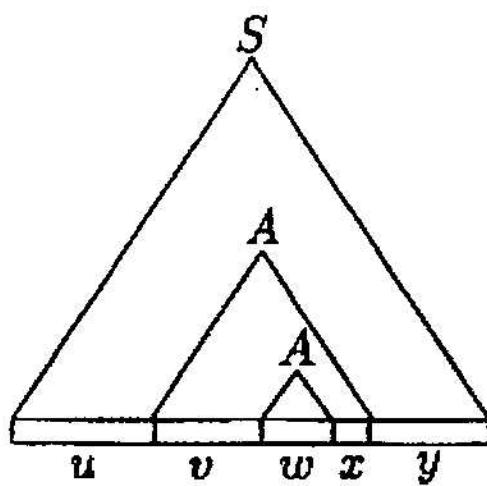


Einschließlich der Startvariablen befinden sich auf diesem Pfad  $\geq k + 1$  Variablen. Da die Grammatik nur  $k$  Variablen besitzt, muß mindestens eine Variable doppelt vorkommen (Schubfachschluß):



Um ein solches Doppelvorkommen einer Variablen  $A$  zu bestimmen, gehen wir hier immer *von unten nach oben* vor, bis eine Variable zum zweiten Mal auf dem Pfad erscheint. Dieses Vorgehen garantiert, daß das obere der beiden  $A$ 's höchstens  $k$  Schritte von der Blattebene entfernt ist.

Betrachten wir nun die Teilwörter, die aus den beiden  $A$ 's abgeleitet werden können. Diese induzieren eine Zerlegung von  $z$  in Teilwörter  $uvwxy$  wie folgt:

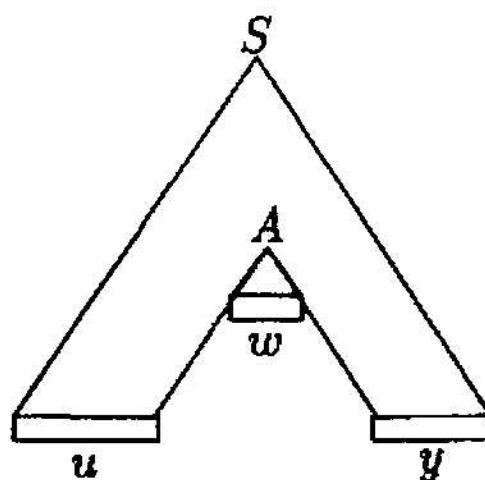


Aus der Tatsache, daß das obere  $A$  wegen der Chomsky Normalform zunächst mittels einer Regel der Form  $A \rightarrow BC$  weiter abgeleitet wird, folgt daß  $v$  oder  $x$  (oder beide) nicht leer ist. Damit ist Eigenschaft 1 der  $uvwxy$ -Zerlegung von  $z$  bestätigt.

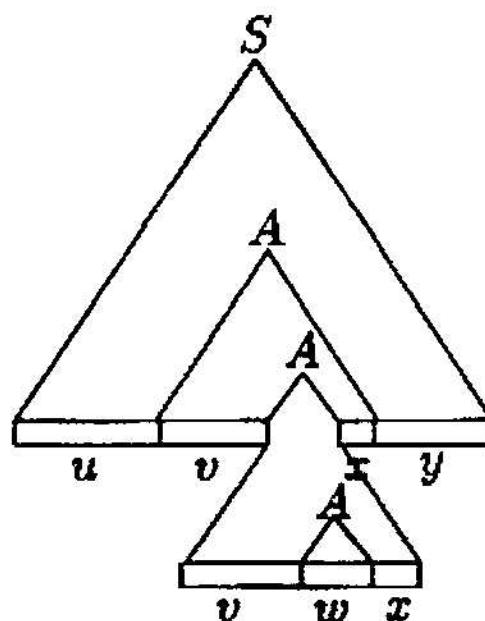
Die Eigenschaft 2 ergibt sich daraus, daß der Abstand des oberen  $A$ 's von der Blattebene höchstens  $k$  ist (siehe oben). Deshalb kann das vom oberen  $A$  abgeleitete Wort  $vwz$  höchstens die Länge  $2^k = n$  haben (vgl. nachfolgendes Lemma).

Die Ableitungsfolge (bzw. der Ableitungsbaum) für  $z$  kann aufgrund des Doppelvorkommens der Variablen  $A$  auf verschiedene Arten modifiziert werden. Zum Beispiel kann an das obere  $A$  der Ableitungsbaum

des unteren  $A$  gehängt werden. Wir erhalten damit eine Ableitung von  $uw\bar{y} = uv^0wx^0\bar{y}$ . Das heißt,  $uv^0wx^0\bar{y} \in L(G)$ .



Man kann auch an das untere  $A$  den Teilbaum, der am oberen  $A$  beginnt, hängen:



Dies ergibt eine Ableitung von  $uvv\bar{w}\bar{x}\bar{y} = uv^2wx^2\bar{y}$ . Allgemein gilt, daß für jedes  $i \geq 0$   $uv^iwx^i\bar{y}$  in  $L(G)$  liegt. Damit ist die Eigenschaft 3 bewiesen. ■

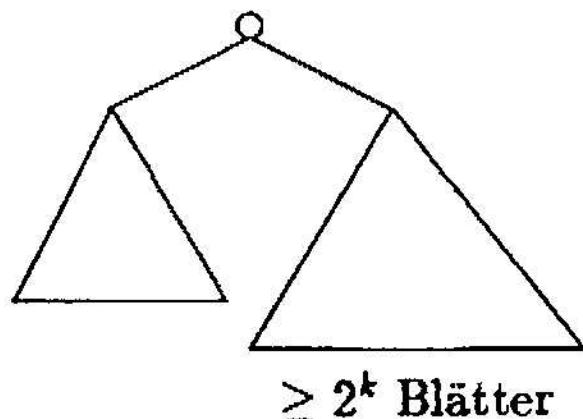
Das folgende Lemma wird im Beweis des Pumping Lemmas benötigt:

**Lemma.** Sei  $B$  ein Binärbaum (gemeint ist: jeder Knoten in  $B$  hat entweder 0 oder 2 Söhne) mit  $\geq 2^k$  Blättern.

Dann hat  $B$  mindestens einen Pfad der Länge  $\geq k$ .

**Beweis:** Induktion über  $k$ : Jeder Binärbaum mit mindestens  $2^0 = 1$  Blättern hat trivialerweise mindestens einen Pfad der Länge 0.

Gelte nun die Behauptung für ein (beliebiges, aber festes)  $k$ . Betrachte nun einen Binärbaum mit  $\geq 2^{k+1}$  Blättern. Mindestens einer seiner zwei Teilstämme hat  $\geq 2^{k+1}/2 = 2^k$  Blätter.



Somit existiert in diesem Unterbaum ein Pfad der Länge  $\geq k$ . Dieser Pfad kann zur Wurzel des Gesamtbaumes um 1 verlängert werden und liefert somit einen Pfad der gewünschten Länge  $\geq k + 1$ . ■

Es gelten sinngemäß dieselben Bemerkungen über die einseitige Implikation des Pumping Lemmas wie bei den regulären Sprachen:

$$(L \text{ kontextfrei}) \implies (\exists n \in \mathbb{N})(\forall z \in L, |z| \geq n)(\exists u, v, w, x, y) \\ [(z = uvwxy) \wedge 1 \wedge 2 \wedge 3]$$

**Beispiel:** Die Sprache

$$L = \{a^m b^m c^m \mid m \geq 1\}$$

ist nicht kontextfrei (aber kontextsensitiv).

Angenommen  $L$  sei kontextfrei. Dann liefert uns das Pumping Lemma eine Zahl  $n$ , so daß sich alle Wörter  $z = a^m b^m c^m$  mit  $|z| \geq n$  zerlegen lassen in  $uvwxy$  mit den Eigenschaften 1,2,3. Wähle etwa  $z = a^n b^n c^n$ . Dann ist  $|z| = 3n \geq n$ . Wegen Eigenschaft 2 kann  $vx$  nicht aus  $a$ 's,  $b$ 's *und*  $c$ 's bestehen. (Wegen der Längenbeschränkung von  $vwx$  kann sich dieses Wort nicht über den gesamten Bereich der  $b$ 's hinweg erstrecken).

Wegen Eigenschaft 1 ist  $vx$  nicht leer, und wegen Eigenschaft 3 (mit  $i = 0$ ) muß  $uv^0wx^0y = uw$  in  $L$  liegen. Wegen der obigen Diskussion kann  $uw$  also nicht die Form  $a^m b^m c^m$  haben. Dieser Widerspruch beweist, daß  $L$  nicht kontextfrei ist.

Daß  $L$  kontextsensitiv ist, wurde schon im einführenden Kapitel gezeigt (Seite 15). Damit sind die kontextfreien Sprachen tatsächlich *echt* in den kontextsensitiven Sprachen enthalten.

Weitere Beispiele: Die Sprachen

$$\{0^p \mid p \text{ ist Primzahl}\}$$

und

$$\{0^n \mid n \text{ ist Quadratzahl}\}$$

sind nicht kontextfrei. Da hier nur Wörter über dem einelementigen Alphabet  $\{0\}$  vorkommen, spielt es in der Aussage des Pumping Lemmas keine Rolle, an welcher Position im Wort  $z$  die Teilwörter  $v$  und  $x$  vorkommen. Daher können diese zusammengefaßt werden und in diesem Fall sind die Behauptungen des Pumping Lemmas für kontextfreie Sprachen und des Pumping Lemmas für reguläre Sprachen identisch. Wir haben bereits den Nachweis geführt, daß die obigen Sprachen aufgrund des Pumping Lemmas für reguläre Sprachen nicht regulär sind. Daher können diese Sprachen auch nicht kontextfrei sein.

*Bemerkung:* Tatsächlich gilt sogar der folgende (nicht leicht zu beweisende) Satz:

**Satz. (OHNE BEWEIS)**

**JEDE KONTEXTFREIE SPRACHE ÜBER EINEM EINELEMENTIGEN ALPHABET IST BEREITS REGULÄR.**

Im speziellen Kontext des Pumping Lemmas haben wir diesen Satz bereits verifiziert.

### 1.3.3 Abschlußeigenschaften

Wir wollen nun untersuchen, unter welchen Operationen die kontextfreien Sprachen abgeschlossen sind (vgl. hierzu den mathematischen Anhang).

**Satz.**

DIE KONTEXTFREIEN SPRACHEN SIND ABGESCHLOSSEN UNTER:

- VEREINIGUNG
- PRODUKT
- STERN

DIE KONTEXTFREIEN SPRACHEN SIND NICHT ABGESCHLOSSEN UNTER:

- SCHNITT
- KOMPLEMENT

**Beweis:** Der Abschluß unter Vereinigung ist trivial: Falls  $G_1 = (V_1, \Sigma, \delta_1, S_1)$  und  $G_2 = (V_2, \Sigma, \delta_2, S_2)$ ,  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$  kontextfreie Grammatiken sind, so ist  $G = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma, \delta_1 \cup \delta_2 \cup \{S \rightarrow S_1 | S_2\}, S)$  eine kontextfreie Grammatik für die Vereinigungsmenge.

Abschluß unter Produkt: Falls  $G_1 = (V_1, \Sigma, \delta_1, S_1)$  und  $G_2 = (V_2, \Sigma, \delta_2, S_2)$ ,  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$  kontextfreie Grammatiken sind, so ist  $G = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma, \delta_1 \cup \delta_2 \cup \{S \rightarrow S_1 S_2\}, S)$  eine kontextfreie Grammatik für das Produkt.

Abschluß unter Sternoperation: Falls  $G_1 = (V_1, \Sigma, \delta_1, S_1)$  eine kontextfreie Grammatik ist, so ist

$$G = (V_1 \cup \{S\}, \Sigma, \delta_1 \cup \{S \rightarrow \varepsilon | S_1, S_1 \rightarrow S_1 S_1\} - \{S_1 \rightarrow \varepsilon\}, S)$$

eine kontextfreie Grammatik für die reflexive und transitive Hülle von  $L(G_1)$ .

Die kontextfreien Sprachen sind nicht unter Schnitt abgeschlossen. Die Sprachen

$$L_1 = \{a^i b^j c^j \mid i, j > 0\}$$

und

$$L_2 = \{a^i b^i c^j \mid i, j > 0\}$$

sind beide kontextfrei. (Zum Beispiel kann  $L_1$  durch die Grammatik  $S \rightarrow AB, A \rightarrow a|aA, B \rightarrow bc|bBc$  dargestellt werden). Der Schnitt von  $L_1$  und  $L_2$  ist jedoch die Sprache

$$\{a^i b^i c^i \mid i > 0\}$$

die bekanntermaßen nicht kontextfrei ist.

Deshalb können die kontextfreien Sprachen auch nicht unter Komplement abgeschlossen sein. Wenn sie es doch wären, so ließe sich der Schnitt (unter Zuhilfenahme des Vereinigungsabschlusses) schreiben als:

$$L_1 \cap L_2 = \overline{L_1} \cup \overline{L_2}$$

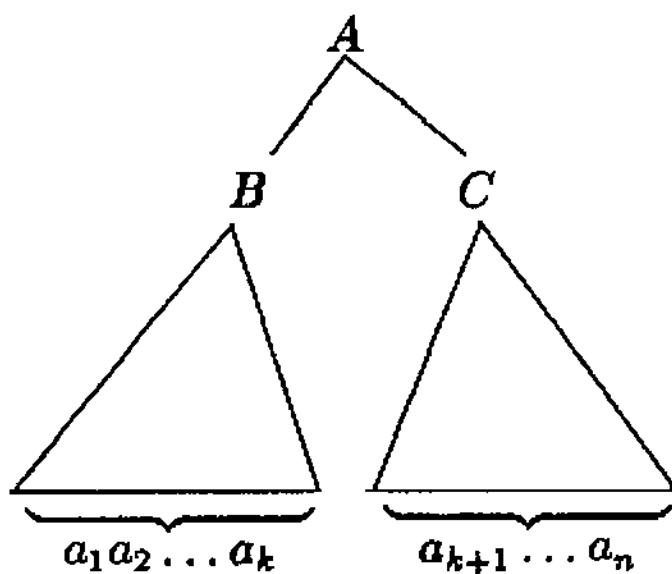
■

### 1.3.4 Der CYK-Algorithmus

Wir wissen, daß das Wortproblem für Typ 1,2,3 Grammatiken entscheidbar ist. Der entsprechende Algorithmus (vgl. Seite 21) hat allerdings – wegen seiner Allgemeinheit – exponentiellen Aufwand.

Wir werden nun einen wesentlich effizienteren Algorithmus für kontextfreie Sprachen kennenlernen – sofern diese durch Grammatiken in *Chomsky Normalform* gegeben sind. Dieser Algorithmus ist nach den Anfangsbuchstaben seiner drei Erfinder *Cocke*, *Younger* und *Kasami* benannt.

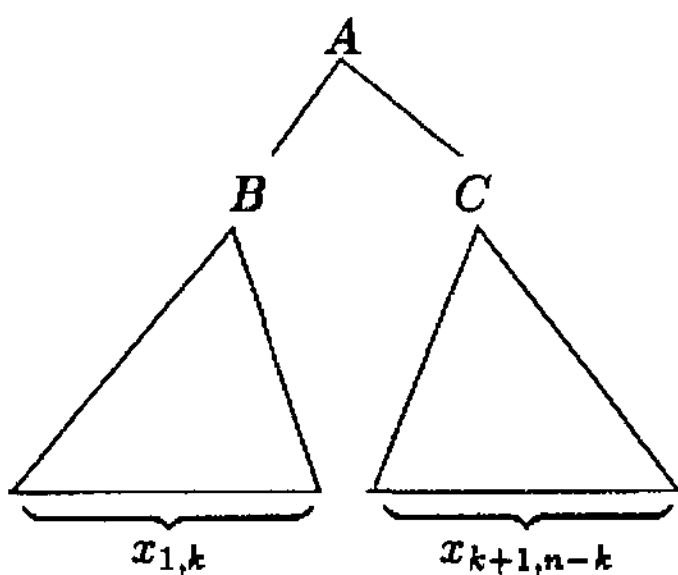
Wenn ein Wort  $x = a$  der Länge 1 abgeleitet werden kann, so ist dies nur aufgrund einer Regel der Form  $A \rightarrow a$  möglich. Gilt aber  $x = a_1 a_2 \dots a_n$  mit  $n \geq 2$ , dann kann  $x$  aus einer Variablen  $A$  nur deshalb ableitbar sein, weil zunächst eine Regel der Form  $A \rightarrow BC$  angewandt worden ist. Von  $B$  aus wird dann ein gewisses Anfangsstück von  $x$  abgeleitet und von  $C$  aus das Endstück. Es muß also ein  $k$  mit  $1 \leq k < n$  geben, so daß gilt:



Damit ist es möglich, das Wortproblem für  $x$  mit Länge  $n$  auf zwei entsprechende Entscheidungen für Wörter der Länge  $k$  und  $n - k$  zurück-

zuführen. Hierbei steht  $k$  jedoch nicht fest; es müssen alle Werte von 1 bis  $n - 1$  in Betracht gezogen werden. Dies legt die Methode des *dynamischen Programmierens* nahe: Beginnend mit der Länge 1 untersuchen wir systematisch alle Teilwörter von  $x$  auf ihre eventuelle Ableitbarkeit aus einer Variablen der Grammatik. Alle diese Informationen legen wir in einer Tabelle ab. Wenn nun ein Teilwort der Länge  $m \leq n$  untersucht werden soll, so stehen die Informationen über alle kürzeren Teilwörter bereits vollständig zur Verfügung.

Die folgende Notation erweist sich als nützlich: Für ein Wort  $x$  bezeichnet  $x_{i,j}$  dasjenige Teilwort von  $x$ , das an Position  $i$  beginnt und Länge  $j$  hat. Mit dieser Notation sieht das obige Bild folgendermaßen aus:



Der folgende Algorithmus verwendet eine Tabelle  $T[1..n, 1..n]$ , wobei aber nicht alle Matrixelemente benötigt werden, sondern nur eine Dreiecksmatrix: Für  $j = 1, \dots, n$  und für  $i = 1, \dots, n + 1 - j$  wird in  $T[i, j]$  notiert, aus welchen Variablen das Wort  $x_{i,j}$  abgeleitet werden kann.

Das Eingabewort  $x = a_1 \dots a_n$  ist in  $L(G)$ , falls sich schließlich  $S \in T[1, n]$  ergibt.

### CYK-Algorithmus

Eingabe:  $x = a_1 a_2 \dots a_n$

```

FOR i := 1 TO n DO (* Fall j = 1 *)
  T[i, 1] := {A | A → a_i ∈ P}
END;
  
```

```

FOR j := 2 TO n DO (* Fall j > 1 *)
  FOR i := 1 TO n+1-j DO
    T[i, j] := ∅;
    
```

```

FOR k :=1 TO j-1 DO
    T[i,j] := T[i,j] ∪ {A | A → BC ∈ P ∧
                           B ∈ T[i,k] ∧ C ∈ T[i+k, j-k]}
    END;
END;
IF S ∈ T[1,n] THEN
    WriteString( ' x liegt in L(G) ')
ELSE
    WriteString( ' x liegt nicht in L(G) ')
END

```

Es ist offensichtlich, daß dieser Algorithmus die Komplexität  $O(n^3)$  hat.

*Beispiel:* Die Sprache

$$L = \{a^n b^n c^m \mid n, m \geq 1\}$$

ist kontextfrei:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \\ A &\rightarrow ab \mid aAb \\ B &\rightarrow c \mid cB \end{aligned}$$

Umformen in CNF ergibt:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \\ A &\rightarrow CD \mid CF \\ B &\rightarrow c \mid EB \\ C &\rightarrow a \\ D &\rightarrow b \\ E &\rightarrow c \\ F &\rightarrow AD \end{aligned}$$

Sei  $x = aaabbcc$ . Dann erzeugt der Algorithmus die folgende Tabelle:

*i* →

<i>x</i> =	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>c</i>
<i>j</i>	<i>C</i>	<i>C</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>D</i>	<i>D</i>	<i>E, BE, B</i>	
↓			<i>A</i>				<i>B</i>	
			<i>F</i>					
		<i>A</i>						
		<i>F</i>						
	<i>A</i>							
	<i>S</i>							
	<i>S</i>							

Da *S* im untersten Kästchen vorkommt, liegt *x* in der Sprache.

### 1.3.5 Kellerautomaten

Wir wollen nun das Modell des endlichen Automaten so erweitern, daß dieses neue Automatenmodell genau die kontextfreien Sprachen erkennt. Den endlichen Automaten mangelte es an irgendeiner Form eines *Speichers*. Intuitiv kann ein endlicher Automat eine Sprache wie

$$L = \{a_1 a_2 \dots a_n \$ a_n \dots a_2 a_1 \mid a_i \in \Sigma\}$$

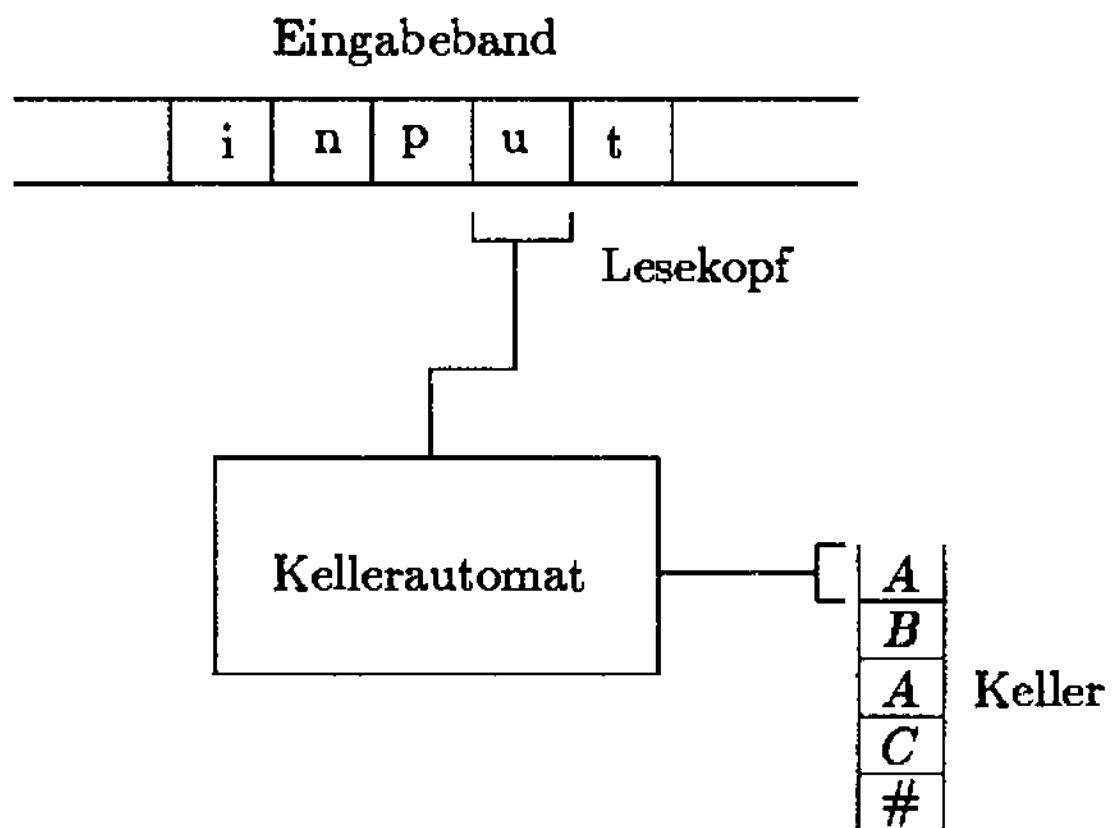
deshalb nicht erkennen, weil er zum Zeitpunkt, wenn er das Eingabezeichen  $\$$  erreicht, nicht mehr "wissen" kann, was  $a_1 a_2 \dots a_n$  war. Die einzige "gespeicherte Information", die ihm zur Verfügung steht, ist der Zustand, in dem er sich befindet.

Beim Kellerautomaten wird das NFA-Modell um einen Speicher erweitert, auf den jedoch nur in der Art eines *Stacks*, eines *Kellers*, zugegriffen werden kann. (Man beachte, ein Kellerautomat ist nach Definition zunächst *nichtdeterministisch*).

Die möglichen Aktionen eines Kellerautomaten hängen jetzt nicht nur vom Zustand und gelesenen Eingabezeichen ab, sondern auch vom Kellerinhalt (bzw. dem zur Zeit obersten Kellerzeichen). In jeden "Rechen-

schritt" kann sich nicht nur der Zustand, sondern auch der Inhalt des Kellers verändern.

*Skizze:*



**Definition.** Ein (*nichtdeterministischer*) *Kellerautomat* (engl.: *pushdown automaton*, kurz: PDA) wird angegeben durch ein 6-Tupel

$$M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$$

Hierbei sind:

- $Z$  die endliche Menge der *Zustände*
- $\Sigma$  das *Eingabealphabet*
- $\Gamma$  das *Kelleralphabet*
- $\delta : Z \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \longrightarrow \mathcal{P}_e(Z \times \Gamma^*)$  die *Überführungsfunktion*  
(Hierbei bedeutet  $\mathcal{P}_e$  die Menge aller *endlichen Teilmengen*)
- $z_0 \in Z$  der *Startzustand*
- $\# \in \Gamma$  das *unterste Kellerzeichen*

Intuitiv bedeutet

$$\delta(z, a, A) \ni (z', B_1 \dots B_k)$$

folgendes: Wenn sich  $M$  im Zustand  $z$  befindet, das Eingabezeichen  $a$  liest, und  $A$  das oberste Kellerzeichen ist, so kann  $M$  im nächsten Schritt in den Zustand  $z'$  übergehen und das oberste Kellerzeichen  $A$  durch die Zeichen  $B_1 \dots B_k$  ersetzen. (Danach ist  $B_1$  das oberste Kellerzeichen).

Man beachte, daß dies den Fall miteinschließt, daß  $A$  entfernt wird (die POP-Operation), wenn  $k = 0$  gewählt wird. Es ist zum Beispiel auch möglich, daß, ohne  $A$  zu verändern, ein weiteres Zeichen  $B$  in den Keller "gePUSHt" wird ( $B_1 \dots B_k = BA$ ).

In der Definition von  $\delta$  ist auch zugelassen, daß an der Stelle eines Eingabezeichens  $a \in \Sigma$  das leere Wort  $\epsilon$  steht. In diesem Fall findet ein sog. *spontaner Übergang*, ohne Lesen eines Eingabezeichens, statt.

Intuitiv bedeutet

$$\delta(z, \epsilon, A) \ni (z', B_1 \dots B_k)$$

folgendes: Wenn sich  $M$  im Zustand  $z$  befindet und  $A$  das oberste Kellerzeichen ist, so kann  $M$  im nächsten Schritt – ohne Lesen eines Eingabezeichens – in den Zustand  $z'$  übergehen und das oberste Kellerzeichen  $A$  durch die Zeichen  $B_1 \dots B_k$  ersetzen. (Danach ist  $B_1$  das oberste Kellerzeichen).

Was das Akzeptieren eines Eingabewortes betrifft, so weichen wir beim PDA insofern vom endlichen Automaten ab, daß es keine Endzustände gibt. Stattdessen werden akzeptierte Wörter dadurch charakterisiert, daß der Keller nach Abarbeiten eines solchen Wortes leer ist. (Zu Beginn jeder Rechnung steht immer das Zeichen  $\#$  im Keller).

Tatsächlich kann man zeigen, daß diese Form des *Akzeptierens durch leeren Keller* mit der des *Akzeptierens durch Endzustand* gleichwertig sind. Für das Folgende ist das Akzeptieren durch leeren Keller jedoch die praktischere Version.

Wir haben – im Unterschied zu NFAs – aus Einfachheitsgründen nur einen einzigen Startzustand in der Definition zugelassen. Dies ist keine echte Einschränkung, da mittels spontaner Übergänge von  $z_0$  aus jeder mögliche "eigentliche" Startzustand, ohne Lesen eines Eingabezeichens, erreichbar ist.

**Definition.** Eine *Konfiguration*  $k$  eines Kellerautomaten ist gegeben durch ein Tripel  $k \in Z \times \Sigma^* \times \Gamma^*$ .

(Die Idee hierbei ist, daß durch ein Konfigurationstriple eindeutig eine "Momentaufnahme" des Kellerautomaten beschrieben wird; und zwar durch Angabe des momentanen

Zustands, des noch zu lesenden Teils der Eingabe und des aktuellen Kellerinhalts – das oberste Kellerzeichen hierbei ganz links stehend).

Auf der Menge aller Konfigurationen definieren wir eine zweistellige Relation  $\vdash$  wie folgt. Informal gesprochen soll  $k \vdash k'$  genau dann gelten, wenn die Konfiguration  $k'$  aus  $k$  in einem “Rechenschritt” (=eine Anwendung der  $\delta$ -Funktion) hervorgeht.

Formal ausgedrückt:

$$(z, a_1 \dots a_n, A_1 \dots A_m) \vdash \left\{ \begin{array}{l} (z', a_2 \dots a_n, B_1 \dots B_k A_2 \dots A_m), \\ \text{falls } \delta(z, a_1, A_1) \ni (z', B_1 \dots B_k) \\ (z', a_1 a_2 \dots a_n, B_1 \dots B_k A_2 \dots A_m) \\ \text{falls } \delta(z, \varepsilon, A_1) \ni (z', B_1 \dots B_k) \end{array} \right.$$

Sei  $\vdash^*$  die reflexive und transitive Hülle von  $\vdash$  (siehe mathematischen Anhang). Die durch einen Kellerautomaten  $M$  (*durch leeren Keller*) akzeptierte Sprache ist

$$N(M) = \{x \in \Sigma^* \mid (z_0, x, \#) \vdash^* (z, \varepsilon, \varepsilon) \text{ für ein } z \in Z\}$$

*Beispiel:* Wir wollen einen Kellerautomaten für die obige Beispielsprache

$$L = \{a_1 a_2 \dots a_n \$ a_n \dots a_2 a_1 \mid a_i \in \{a, b\}\}$$

angeben. Sei

$$M = (\{z_0, z_1\}, \{a, b, \$\}, \{\#, A, B\}, \delta, z_0, \#)$$

Um Schreibarbeit zu sparen, schreiben wir statt  $\delta(z, a, A) \ni (z', x)$  einfach  $zaA \rightarrow z'x$ :

$$\begin{aligned} z_0 a \# &\rightarrow z_0 A \#, & z_0 a A &\rightarrow z_0 A A, & z_0 a B &\rightarrow z_0 A B \\ z_0 b \# &\rightarrow z_0 B \#, & z_0 b A &\rightarrow z_0 B A, & z_0 b B &\rightarrow z_0 B B \\ z_0 \$ \# &\rightarrow z_1 \#, & z_0 \$ A &\rightarrow z_1 A, & z_0 \$ B &\rightarrow z_1 B \\ z_1 a A &\rightarrow z_1 \varepsilon, & z_1 b B &\rightarrow z_1 \varepsilon, & z_1 \varepsilon \# &\rightarrow z_1 \varepsilon \end{aligned}$$

Es gilt zum Beispiel  $ba\$ab \in N(M)$ , denn:

$$\begin{aligned} (z_0, ba\$ab, \#) &\vdash (z_0, a\$ab, B \#) \vdash (z_0, \$ab, AB \#) \vdash \\ (z_1, ab, AB \#) &\vdash (z_1, b, B \#) \vdash (z_1, \varepsilon, \#) \vdash (z_1, \varepsilon, \varepsilon) \end{aligned}$$

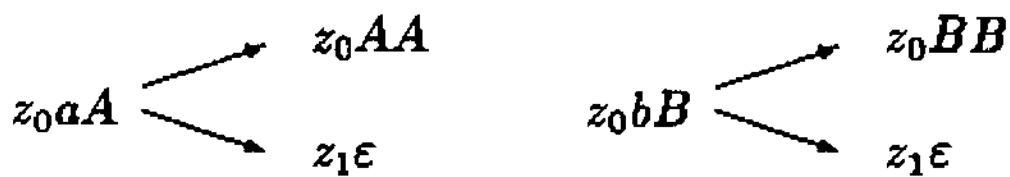
Man erkennt, daß bei diesem Kellerautomaten jede Konfiguration nur eine Folgekonfiguration besitzt: der Automat ist sogar deterministisch. Ersetzt man die 3. Zeile der Definition von  $\delta$  durch die Übergänge

$$z_0aA \rightarrow z_1\varepsilon, \quad z_0bB \rightarrow z_1\varepsilon, \quad z_0\varepsilon\# \rightarrow z_1\varepsilon$$

so erhält man einen Kellerautomaten  $M'$ , für den

$$N(M') = \{a_1a_2\dots a_n a_n \dots a_2 a_1 \mid a_i \in \{a, b\}\}$$

ist.  $M'$  hat die möglichen Übergänge



Beim Abarbeiten von  $aabbbaa$  sind folgende Konfigurationsfolgen möglich:

Eingabezeichen:

Konfigurationen:

$\varepsilon :$

$$(z_0, aabbbaa, \#) \xleftarrow{} (z_1, aabbbaa, \varepsilon)$$

$\vdash$

$a :$

$$(z_0, abbaa, A\#)$$

$\vdash$

$a :$

$$(z_0, bbbaa, AA\#)(z_1, bbbaa, \#) \xleftarrow{} (z_1, bbbaa, \varepsilon)$$

$\vdash$

$b :$

$$(z_0, baa, BAA\#)$$



$b :$

$$(z_0, aa, BBAA\#)$$

$\vdash$

$$(z_1, aa, AA\#)$$

$\vdash$

$a :$

$$(z_0, a, ABBA\#)$$



$$(z_1, a, A\#)$$

$\vdash$

$a :$

$$(z_0, \varepsilon, AABBA\#)(z_1, \varepsilon, BBAA\#) \xleftarrow{} (z_1, \varepsilon, \#) \xleftarrow{} (z_1, \varepsilon, \varepsilon)$$

Hier wird der Nichtdeterminismus benötigt, um die Wortmitte zu "erraten". Man kann zeigen, daß es für die von  $M'$  akzeptierte Sprache keinen äquivalenten *deterministischen* Kellerautomaten gibt.

**Satz.**

**EINE SPRACHE  $L$  IST KONTEXTFREI GENAU DANN, WENN  $L$  VON EINEM NICHTDETERMINISTISCHEN KELLERAUTOMATEN ERKANNT WIRD.**

**Beweis:** ( $\Rightarrow$ ) Sei  $G = (V, \Sigma, P, S)$  eine kontextfreie Grammatik für  $L$ . Wir geben einen Kellerautomaten  $M$  an, der Ableitungen von  $G$  mit seinem Kellerinhalt simuliert. Hierbei wählen wir als Kelleralphabet  $\Gamma = V \cup \Sigma$  und die Startvariable  $S$  als das unterste Kellerzeichen. Sobald dieses gePOPt wird, bedeutet das, daß eine Ableitung für das Eingabewort gefunden wurde.

$$M = (\{z\}, \Sigma, V \cup \Sigma, \delta, z, S)$$

Mit Hilfe von  $P$  definieren wir  $\delta$  wie folgt. Für jede Regel  $A \rightarrow \alpha \in P$  mit  $\alpha \in (V \cup \Sigma)^*$  setze:

$$\delta(z, \varepsilon, A) \ni (z, \alpha)$$

Ferner setze:

$$\delta(z, a, a) \ni (z, \varepsilon)$$

Das heißt: immer wenn das oberste Kellerzeichen eine Variable der Grammatik ist, wird ohne Lesen eines Eingabezeichens eine  $P$ -Regel angewandt; immer wenn das oberste Kellerzeichen ein Terminalzeichen ist und mit dem Eingabezeichen übereinstimmt, wird dieses einfach vom Keller gePOPt.

Es gilt nun für alle  $x \in \Sigma^*$ :

$$x \in L(G)$$

**genau dann wenn** es gibt eine Ableitung in  $G$  der Form  $S \Rightarrow \dots \Rightarrow x$

**genau dann wenn** es gibt eine Folge von Konfigurationen von  $M$  der Form  $(z, x, S) \vdash \dots \vdash (z, \varepsilon, \varepsilon)$

**genau dann wenn**  $x \in N(M)$

( $\Leftarrow$ ) Sei  $L = N(M)$  für einen Kellerautomaten  $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$ . Wir können annehmen, daß für jede  $\delta$ -Regel  $zaA \rightarrow z'B_1 \dots B_k$  gilt:  $k \leq 2$ . Denn komme etwa  $zaA \rightarrow z'B_1 \dots B_k$  in  $\delta$  vor mit  $k > 2$ , so können wir neue Zustände  $z_1, \dots, z_{k-2}$  wählen und diese  $\delta$ -Regel ersetzen durch:

$$\begin{aligned} zaA &\rightarrow z_1 B_{k-1} B_k \\ z_1 \varepsilon B_{k-1} &\rightarrow z_2 B_{k-2} B_{k-1} \\ &\vdots \\ z_{k-2} \varepsilon B_2 &\rightarrow z' B_1 B_2 \end{aligned}$$

Wir konstruieren nun eine Grammatik  $G$ , die Rechenschritte von  $M$  durch Linksableitungsschritte simuliert. Die "Variablen" dieser Grammatik setzen sich aus mehreren Bestandteilen zusammen (Kreuzprodukt), nämlich dem Zustand vor einer Folge von Rechenschritten des Kellerautomaten, dem verarbeiteten Kellersymbol und dem Zustand, der durchlaufen wird, wenn dieses Kellerzeichen wieder gePOPt wird.

Sei

$$G = (V, \Sigma, P, S)$$

wobei

$$V = \{S\} \cup Z \times \Gamma \times Z$$

und

$$\begin{aligned} P = \{ &S \rightarrow (z_0, \#, z) \mid z \in Z\} \\ &\cup \{(z, A, z') \rightarrow a \mid \delta(z, a, A) \ni (z', \varepsilon)\} \\ &\cup \{(z, A, z') \rightarrow a(z_1, B, z') \mid \delta(z, a, A) \ni (z_1, B), z' \in Z\} \\ &\cup \{(z, A, z') \rightarrow a(z_1, B, z_2)(z_2, C, z') \mid \delta(z, a, A) \ni (z_1, BC), \\ &\quad z', z_2 \in Z\} \end{aligned}$$

Diese Grammatik kann auch  $\varepsilon$ -Produktionen enthalten (denn  $a$  kann auch  $\varepsilon$  sein). Diese können nach dem Verfahren auf Seite 18 noch eliminiert werden.

Wir beweisen nun für alle  $x \in \Sigma^*$  die folgende Behauptung:

$$(z, A, z') \Rightarrow^* x \text{ genau dann wenn } (z, x, A) \vdash^* (z', \varepsilon, \varepsilon)$$

Für  $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$  beobachten wir zunächst:

$$\begin{aligned} (z, A, z') \Rightarrow a \text{ gdw } &(z, A, z') \rightarrow a \in P \\ \text{ gdw } &\delta(z, a, A) \ni (z', \varepsilon) \\ \text{ gdw } &(z, a, A) \vdash (z', \varepsilon, \varepsilon) \end{aligned}$$

Wir zeigen nun die Richtung von rechts nach links durch Induktion über die Anzahl  $n$  der Rechenschritte von  $M$ . Der kürzest-mögliche Fall ist  $n = 1$ . Dieser wird durch obige Beobachtung abgehandelt.

Sei nun  $n > 1$ , dann hat  $x$  die Form  $x = ay$ ,  $a \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$ , so daß gilt:  $(z, ay, A) \vdash (z_1, y, \alpha) \vdash^+ (z', \epsilon, \epsilon)$  für einen gewissen Zustand  $z_1$  und Kellerinhalt  $\alpha$ . Wir unterscheiden nun die drei denkbaren Fälle  $\alpha = \epsilon$ ,  $\alpha = B$  und  $\alpha = BC$ .

Der Fall  $\alpha = \epsilon$  ist nicht möglich, da  $(z_1, y, \epsilon)$  keine Folgekonfiguration besitzt.

*Fall  $\alpha = B$*  : Dann gilt  $(z_1, B, z') \Rightarrow^* y$  nach Induktionsvoraussetzung. Außerdem muß es in  $P$  eine Regel der Form  $(z, A, z') \rightarrow a(z_1, B, z')$  geben (dies ergibt sich aus der Form des ersten Rechenschritts). Damit erhalten wir insgesamt:  $(z, A, z') \Rightarrow a(z_1, B, z') \Rightarrow^* ay = x$ .

*Fall  $\alpha = BC$*  : Die Konfigurationsfolge  $(z_1, y, BC) \vdash^* (z', \epsilon, \epsilon)$  kann in zwei Teile zerlegt werden:  $(z_1, y, BC) \vdash^* (z_2, y_2, C)$  und  $(z_2, y_2, C) \vdash^* (z', \epsilon, \epsilon)$ , so daß  $y_2$  ein gewisses Endstück von  $y$  ist, d.h.  $y = y_1 y_2$ . Für  $y_1$ , den vorderen Teil von  $y$ , gilt ferner:  $(z_1, y_1, B) \vdash^* (z', \epsilon, \epsilon)$ . Nach Induktionsvoraussetzung gilt sowohl  $(z_1, B, z_2) \Rightarrow^* y_1$  als auch  $(z_2, C, z') \Rightarrow^* y_2$ . Ferner muß es in  $P$  eine Regel der Form  $(z, A, z') \rightarrow a(z_1, B, z_2)(z_2, C, z')$  geben (dies ergibt sich aus der Form des ersten Rechenschritts). Zusammengefaßt erhalten wir:

$$(z, A, z') \Rightarrow a(z_1, B, z_2)(z_2, C, z') \Rightarrow^* ay_1(z_2, C, z') \Rightarrow^* ay_1y_2 = x$$

Die Richtung von links nach rechts zeigen wir durch Induktion nach  $k$ , der Länge der Linksableitung von  $x$ .

Der Induktionsanfang ( $k = 1$ ) ergibt sich wieder aus der obigen Beobachtung.

Betrachten wir nun eine Ableitung mit  $k > 1$ .

*Fall 1:*  $(z, A, z') \Rightarrow a \Rightarrow^* x$ . Dann ist  $x = a$ . Dies ist bei  $k > 1$  nicht möglich.

*Fall 2:*  $(z, A, z') \Rightarrow a(z_1, B, z') \Rightarrow^* ay = x$ . Dann ist  $\delta(z, a, A) \ni (z_1, B)$  und nach Induktionsvoraussetzung gilt  $(z_1, y, B) \vdash^* (z', \epsilon, \epsilon)$ . Daraus folgt  $(z, ay, A) \vdash (z_1, y, B) \vdash^* (z', \epsilon, \epsilon)$ .

*Fall 3:*  $(z, A, z') \Rightarrow a(z_1, B, z_2)(z_2, C, z') \Rightarrow^* ay = x$ . Dann ist  $\delta(z, a, A) \ni (z_1, BC)$  und nach Induktionsvoraussetzung gilt  $(z_1, y_1, B) \vdash^* (z_2, \epsilon, \epsilon)$  und  $(z_2, y_2, C) \vdash^* (z', \epsilon, \epsilon)$  wobei  $y = y_1 y_2$ .

Daraus folgt

$$(z, ay_1y_2, A) \vdash (z_1, y_1y_2, BC) \vdash^* (z_2, y_2, C) \vdash^* (z', \varepsilon, \varepsilon)$$

Mit dieser Behauptung ergibt sich  $N(M) = L(G)$  wie folgt:

$$\begin{aligned} x \in N(M) &\quad \text{gdw } (z_0, x, \#) \vdash^* (z, \varepsilon, \varepsilon) \text{ für ein } z \in Z \\ &\quad \text{gdw } S \Rightarrow (z_0, \#, z) \Rightarrow^* x \text{ für ein } z \in Z \\ &\quad \text{gdw } x \in L(G) \end{aligned}$$

■

**Bemerkung:** Der Beweis des vorigen Satzes zeigt, daß man jeden Kellerautomaten so umkonstruieren kann, daß er nur *einen* Zustand hat: Denn sei  $M$  ein beliebiger Kellerautomat. Dann gilt aufgrund des Satzes  $N(M) = L(G)$  für eine kontextfreie Grammatik  $G$ . Wenn wir den Satz nun wieder auf  $G$  anwenden, so erhalten wir einen äquivalenten Kellerautomaten, der mit *einem* Zustand auskommt.

### 1.3.6 Deterministisch kontextfreie Sprachen

Kellerautomaten wurden zunächst als nichtdeterministisches Konzept eingeführt – und nur in dieser Form sind die von ihnen erkannten Sprachen *genau* die kontextfreien Sprachen.

Nun sollen auch deterministische Kellerautomaten eingeführt werden. Wir werden sehen, daß diese nur eine *echte Teilmenge* der kontextfreien Sprachen definieren – allerdings auch nach wie vor eine *echte Obermenge* der regulären Sprachen. Wir wollen bei der Definition von deterministischen Kellerautomaten (engl. kurz: DPDA) das Konzept des spontanen  $\varepsilon$ -Übergangs beibehalten. Deshalb muß man bei der folgenden Definition dies mitberücksichtigen.

**Definition.** Ein Kellerautomat  $M$  heißt *deterministisch*, falls für alle  $z \in Z$ ,  $a \in \Sigma$  und  $A \in \Gamma$  gilt:

$$|\delta(z, a, A)| + |\delta(z, \varepsilon, A)| \leq 1$$

Es kommt hinzu, daß deterministisch kontextfreie Kellerautomaten *per Endzustand* akzeptieren und nicht *per leerem Keller*.<sup>2</sup>

<sup>2</sup>Tatsächlich ist dies für *deterministische* Kellerautomaten ein Unterschied; für nichtdeterministische sind beide Akzeptiermechanismen äquivalent.

Eine Sprache heißt *deterministisch kontextfrei*, falls sie von einem deterministischen Kellerautomaten erkannt wird.

*Beispiel:* Die Sprache

$$L = \{a_1 \dots a_n \$ a_n \dots a_1 \mid a_i \in \Sigma\}$$

ist deterministisch kontextfrei, nicht jedoch

$$L' = \{a_1 \dots a_n a_n \dots a_1 \mid a_i \in \Sigma\}$$

Aus der Definition der deterministisch kontextfreien Sprachen ergibt sich, daß Konfigurationsbäume zu linearen Ketten "degenerieren". Das heißt, die Relation  $\vdash$  wird hier zu einer Funktion, d. h. für jede Konfiguration  $k$  gibt es höchstens eine Konfiguration  $k'$  mit  $k \vdash k'$ :

$$(z_0, x, \#) \vdash k_1 \vdash k_2 \vdash \dots \vdash k_n \vdash \dots$$

Wir erwähnen ohne Beweis den folgenden

**Satz.**

**DIE DETERMINISTISCH KONTEXTFREIEN SPRACHEN SIND UNTER KOMPLEMENTBILDUNG ABGESCHLOSSEN.**

Die kontextfreien Sprachen sind – wie bekannt – nicht Schnitt-abgeschlossen. Das angegebene Gegenbeispiel waren die Sprachen

$$L_1 = \{a^n b^n c^m \mid n, m \geq 1\}$$

und

$$L_2 = \{a^n b^m c^n \mid n, m \geq 1\}$$

Man stellt fest, daß diese Sprachen sogar *deterministisch* kontextfrei sind. Daher sind die deterministisch kontextfreien Sprachen gleichfalls nicht unter Schnitt abgeschlossen.

Dann können sie aber auch nicht unter Vereinigung abgeschlossen sein: Wenn dies der Fall wäre, ließe sich der Schnitt mittels Vereinigung und Komplement nach der deMorgan'schen Regel

$$L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$$

darstellen.

Wir fassen zusammen:

**Satz.**

DIE DETERMINISTISCH KONTEXTFREIEN SPRACHEN SIND *nicht* UNTER SCHNITT UND VEREINIGUNG ABGESCHLOSSEN.

*Bemerkung:* Die deterministisch kontextfreien Sprachen stimmen mit den sog.  $LR(k)$ -Sprachen überein. Diese spielen im Compilerbau eine wichtige Rolle ( $\rightarrow$  Vorlesung über Compilerbau oder Syntaxanalyse). Für deterministisch kontextfreie Sprachen ist das Wortproblem in *linearer Zeit* lösbar.

## 1.4 Kontextsensitive und Typ 0-Sprachen

Es sollen nun die Typ 1 und Typ 0 Sprachen gemeinsam behandelt werden. Gesucht ist ein Automatenmodell, das diese Sprachtypen beschreiben kann. Es muß offensichtlich allgemeiner sein als der Kellerautomat. Die wesentliche Beschränkung des Kellerautomaten ist die Zugriffsmöglichkeit auf seinen Speicher. Er darf eben nur nach dem Kellerprinzip (Last-in, First-out) angesprochen werden.

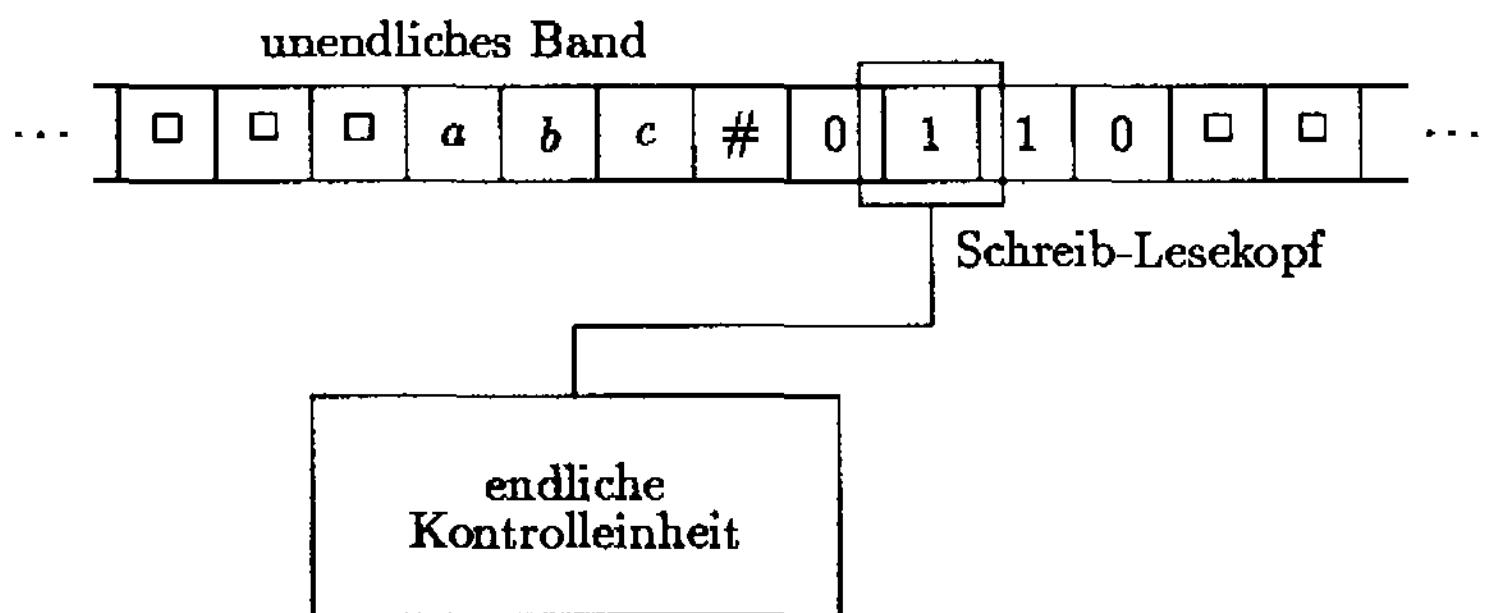
A.M. Turing<sup>3</sup> schlägt ein Automatenmodell vor, das (nur ein wenig) "berechnungsstärker" ist als der Kellerautomat und heute *Turingmaschine* genannt wird. Turings Intention war noch viel weitreichender, nämlich eine mathematisch klar beschreibbare Maschine anzugeben, die allgemein genug ist, um stellvertretend für *jeden beliebigen* algorithmischen Berechnungsprozeß zu stehen.

Das heißt, Turings Vorstellung ist es, mit der Turingmaschine den (zunächst nur intuitiv gegebenen) Begriff der *Berechenbarkeit*, des *effektiven Verfahrens* exakt beschrieben zu haben. Man ist heute davon überzeugt, daß ihm dieses geglückt ist (siehe Churchsche These, nächstes Kapitel).

---

<sup>3</sup>Alan M. Turing, 1912–1954, englischer Mathematiker, Kryptoanalytiker und Computerkonstrukteur. Seine 1937 erschienene Arbeit "On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem" hat die Berechenbarkeitstheorie, und damit die Theorie der Informatik, begründet.

Anschaulich beschrieben besteht eine Turingmaschine aus einem (potentiell) unendlichen Band, das in Felder eingeteilt ist. Jedes Feld kann ein einzelnes Zeichen des sog. Arbeitsalphabets der Maschine enthalten. Auf dem Band kann sich ein Schreib-Lesekopf bewegen. Nur solche Zeichen, auf denen sich dieser Kopf gerade befindet, können in dem momentanen Rechenschritt verändert werden. Der Kopf kann in einem Rechenschritt dann um maximal eine Position nach links oder nach rechts bewegt werden.



Bandfelder, die von dem Schreib-Lesekopf noch nie besucht und verändert wurden, enthalten das "Blank"-Zeichen  $\square$ .

**Definition.** Eine *Turingmaschine* (kurz: TM) ist gegeben durch ein 7-Tupel

$$M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$$

Hierbei sind:

- $Z$  die endliche *Zustandsmenge*,
- $\Sigma$  das *Eingabealphabet*,
- $\Gamma \supset \Sigma$  das *Arbeitsalphabet*,
- $\delta : Z \times \Gamma \longrightarrow Z \times \Gamma \times \{L, R, N\}$  im deterministischen Fall (bzw.  $\delta : Z \times \Gamma \longrightarrow \mathcal{P}(Z \times \Gamma \times \{L, R, N\})$  im nichtdeterministischen Fall) die *Überführungsfunktion*,
- $z_0 \in Z$  der *Startzustand*,
- $\square \in \Gamma - \Sigma$  das *Blank*,

- $E \subseteq Z$  die Menge der *Endzustände*.

Informal erklärt bedeutet

$$\delta(z, a) = (z', b, x) \text{ bzw. } \delta(z, a) \ni (z', b, x)$$

folgendes:

Wenn sich  $M$  im Zustand  $z$  befindet und unter dem Schreib-Lesekopf das Zeichen  $a$  steht, so geht  $M$  im nächsten Schritt in den Zustand  $z'$  über, schreibt (auf den Platz von  $a$ )  $b$  auf das Band und führt danach die Kopfbewegung  $x \in \{L, R, N\}$  aus. (Hierbei steht  $L$  für *links*,  $R$  für *rechts* und  $N$  für *neutral*, also Stehenbleiben).

**Definition.** Eine *Konfiguration* einer Turingmaschine ist ein Wort  $k \in \Gamma^* Z \Gamma^*$ .

Inhaltlich bedeutet eine Konfiguration eine "Momentaufnahme" der TM. Hierbei wird  $k = \alpha z \beta$  so interpretiert, daß  $\alpha \beta$  der nicht-leere, bzw. schon besuchte Teil des Bandes ist.  $z$  ist der Zustand, in dem sich die Maschine gerade befindet, und der Schreib-Lesekopf steht auf dem ersten Zeichen von  $\beta$ .

Gestartet werden Turingmaschinen dadurch, daß die Eingabe  $x \in \Sigma^*$  schon auf dem Band steht und der Schreib-Lesekopf auf dem ersten Zeichen von  $x$ . Dies wird dargestellt durch die *Startkonfiguration*  $z_0 x$ .

**Definition.** Wir definieren auf der Menge der Konfigurationen einer gegebenen Turingmaschine eine zweistellige Relation  $\vdash$ .

Es gilt:

$$a_1 \dots a_m z b_1 \dots b_n \vdash \left\{ \begin{array}{l} a_1 \dots a_m z' c b_2 \dots b_n, \\ \delta(z, b_1) = (z', c, N), \quad m \geq 0, \quad n \geq 1 \\ a_1 \dots a_m c z' b_2 \dots b_n, \\ \delta(z, b_1) = (z', c, R), \quad m \geq 0, \quad n \geq 2 \\ a_1 \dots a_{m-1} z' a_m c b_2 \dots b_n, \\ \delta(z, b_1) = (z', c, L), \quad m \geq 1, \quad n \geq 1 \end{array} \right.$$

Zwei Sonderfälle müssen separat definiert werden: Wenn  $n = 1$  und die Maschine nach rechts läuft, so trifft sie auf ein Blank:

$$a_1 \dots a_m z b_1 \xrightarrow{\quad} a_1 \dots a_m c z' \square \text{ falls } \delta(z, b_1) = (z', c, R)$$

Wenn  $m = 0$  und die Maschine nach links läuft, so trifft sie gleichfalls auf ein Blank:

$$z b_1 \dots b_n \xleftarrow{\quad} z' \square c b_2 \dots b_n \text{ falls } \delta(z, b_1) = (z', c, L)$$

Diese Definition ist so gestaltet, daß Konfigurationsbeschreibungen bei Bedarf verlängert werden, wenn die Maschine links oder rechts ein neues, bisher noch nicht besuchtes, Zeichen liest. (Dieses Zeichen kann dann nur ein Blank sein).

**Beispiel:** Gegeben sei folgende Turingmaschine, die eine Eingabe  $x \in \{0, 1\}^*$  als Binärzahl interpretiert und 1 hinzugaddiert:

$$M = (\{z_0, z_1, z_2, z_e\}, \{0, 1\}, \{0, 1, \square\}, \delta, z_0, \square, \{z_e\})$$

wobei

$$\begin{aligned}\delta(z_0, 0) &= (z_0, 0, R) \\ \delta(z_0, 1) &= (z_0, 1, R) \\ \delta(z_0, \square) &= (z_1, \square, L) \\ \delta(z_1, 0) &= (z_2, 1, L) \\ \delta(z_1, 1) &= (z_1, 0, L) \\ \delta(z_1, \square) &= (z_e, 1, N) \\ \delta(z_2, 0) &= (z_2, 0, L) \\ \delta(z_2, 1) &= (z_2, 1, L) \\ \delta(z_2, \square) &= (z_e, \square, R)\end{aligned}$$

Wenn diese Maschine mit der Eingabe 101 gestartet wird, so stoppt sie schließlich mit 110 auf dem Band, wobei sich der Schreib-Lesekopf wieder auf das erste nicht-leere Zeichen zurückbewegt hat.

$$\begin{aligned}z_0 101 &\xrightarrow{\quad} 1 z_0 01 \xrightarrow{\quad} 10 z_0 1 \xrightarrow{\quad} 101 z_0 \square \xrightarrow{\quad} 10 z_1 1 \square \\ &\xrightarrow{\quad} 1 z_1 00 \square \xrightarrow{\quad} z_2 110 \square \xrightarrow{\quad} z_2 \square 110 \square \xrightarrow{\quad} \square z_e 110 \square\end{aligned}$$

Beim 3. und 7. Konfigurationsübergang trat der Sonderfall in der Definition von  $\vdash$  auf.

**Definition.** Die von einer Turingmaschine  $M$  akzeptierte Sprache ist wie folgt definiert:

$$T(M) = \{x \in \Sigma^* \mid z_0 x \vdash^* \alpha z \beta; \alpha, \beta \in \Gamma^*; z \in E\}$$

Wir wollen im folgenden noch spezielle Turingmaschinen betrachten, die den Teil des Bandes, auf dem die Eingabe steht, niemals verlassen. Diese nennen wir *linear beschränkte Turingmaschinen* (engl. linear bounded automaton, kurz: LBA). Für eine solche Maschine ist es jedoch sinnvoll und notwendig, daß sie es erkennen kann, wenn sie sich auf einem Randfeld befindet. Das "Erkennen" des linken Randfeldes ist kein Problem, da gerade auf diesem Feld am Anfang der Schreib-Lesekopf steht. Somit kann sich die Maschine im ersten Rechenschritt dieses Feld "markieren", um später nicht über diesen linken Rand hinauszulaufen.

Der rechte Rand allerdings, also das letzte Zeichen der Eingabe, wird bei der folgenden Definition jedoch schon in der Startkonfiguration besonders markiert. Hierzu verdoppeln wir das Eingabealphabet  $\Sigma$  zu  $\Sigma' = \Sigma \cup \{\hat{a} \mid a \in \Sigma\}$ . Die "eigentliche" Eingabe  $a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n$  wird auf dem Band repräsentiert durch  $a_1 a_2 \dots a_{n-1} \hat{a}_n$ .

**Definition.** Eine nichtdeterministische Turingmaschine heißt *linear beschränkt*, wenn für alle  $a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n \in \Sigma^+$  und alle Konfigurationen  $\alpha z \beta$  mit  $z_0 a_1 a_2 \dots a_{n-1} \hat{a}_n \vdash^* \alpha z \beta$  gilt:  $|\alpha \beta| = n$ .

Die von einer linear beschränkten Turingmaschine  $M$  akzeptierte Sprache ist wie folgt definiert:

$$T(M) = \{a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n \in \Sigma^* \mid z_0 a_1 a_2 \dots a_{n-1} \hat{a}_n \vdash^* \alpha z \beta, \alpha, \beta \in \Gamma^*; z \in E\}$$

### Satz.

DIE VON LINEAR BESCHRÄNKEN, NICHTDETERMINISTISCHEN TURINGMASCHINEN (LBAs) AKZEPTIERBAREN SPRACHEN SIND GENAU DIE KONTEXTSENSITIVEN (TYP 1) SPRACHEN.

**Beweis:** ( $\Leftarrow$ ) Sei  $A$  eine Typ 1 Sprache, also  $A = L(G), G = (V, \Sigma, P, S)$ .

Wir beschreiben informell eine TM  $M$ , die  $A$  akzeptiert: Bei Eingabe von  $x = a_1 \dots a_n$  wählt  $M$  zunächst nichtdeterministisch eine Produktion  $u \rightarrow v \in P$  aus. Dann sucht  $M$  ein beliebiges Vorkommen von  $v$  auf dem Band auf. Falls ein solches gefunden werden kann, so ersetzt  $M$  dieses Teilwort durch  $u$ . (Falls  $u$  kürzer ist als  $v$ , so werden alle Bandsymbole rechts von  $u$  entsprechend nach links verschoben). Falls der nicht-leere Teil des Bandes nur noch die Startvariable  $S$  enthält, so stoppt  $M$  in einem Endzustand. Ansonsten werden diese nichtdeterministischen Ersetzungsvorgänge wiederholt.

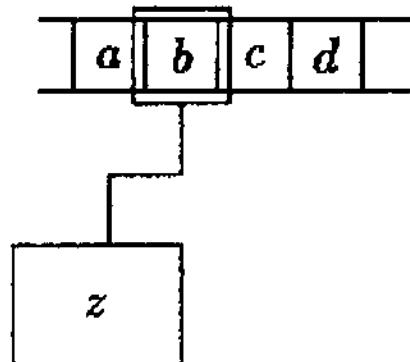
Nun gilt:

$$\begin{aligned} x \in L(G) &\text{ gdw es gibt eine Ableitung } S \Rightarrow \dots \Rightarrow x \\ &\text{ gdw es gibt eine Rechnung von } M, \text{ die diese Ableitung} \\ &\quad \text{in umgekehrter Richtung simuliert} \\ &\text{ gdw } x \in T(M) \end{aligned}$$

Da für die Regeln  $u \rightarrow v \in P$  gilt  $|u| \leq |v|$ , ist  $M$  linear beschränkt.

( $\Rightarrow$ ) Sei umgekehrt  $A = T(M)$  für eine linear beschränkte Turingmaschine  $M$ . Im folgenden beschreiben wir eine kontextsensitive Grammatik, die auf Wörtern, die Konfigurationen von  $M$  darstellen, operiert. Hierzu müssen wir Konfigurationen so beschreiben, daß sie aus nicht mehr Zeichen bestehen als die Eingabe, also der nicht-leere Teil des Bandes zu Beginn. Wir wählen zu diesem Zweck das Alphabet  $\Delta = \Gamma \cup (Z \times \Gamma)$ .

Die Konfiguration



wird beispielweise dargestellt durch  $a(z, b)cd$ . Dieses Wort hat nur die Länge  $4 = |abcd|$  (bezogen auf das zugrundeliegende, erweiterte Alphabet  $\Delta$ ).

$\delta$ -Übergänge von  $M$ , etwa

$$\delta(z, a) \ni (z', b, L)$$

können durch (kontextsensitive) Produktionen beschrieben werden:

$$c(z, a) \rightarrow (z', c) b \quad \text{für alle } c \in \Gamma.$$

Die so entstehende Produktionenmenge nennen wir  $P'$ . Falls also  $k \xrightarrow{*} k'$  unter  $M$  gilt, so gilt mittels  $P'$ :  $\tilde{k} \Rightarrow^* \tilde{k}'$  (und umgekehrt), wobei  $\tilde{k}$  die oben angegebene Darstellung der Konfiguration  $k$  ist.

Die gesuchte kontextsensitive Grammatik  $G = (V, \Sigma, P, S)$  sieht nun wie folgt aus:

$$V = \{S, A\} \cup (\Delta \times \Sigma)$$

$$P = \{S \rightarrow A(\hat{a}, a) \mid a \in \Sigma\} \tag{1}$$

$$\cup \{A \rightarrow A(a, a) \mid a \in \Sigma\} \tag{2}$$

$$\cup \{A \rightarrow ((z_0, a), a) \mid a \in \Sigma\} \tag{3}$$

$$\cup \{(\alpha_1, a)(\alpha_2, b) \rightarrow (\beta_1, a)(\beta_2, b) \mid \alpha_1 \alpha_2 \rightarrow \beta_1 \beta_2 \in P', \\ a, b \in \Sigma\} \tag{4}$$

$$\cup \{((z, a), b) \rightarrow b \mid z \in E, a \in \Gamma, b \in \Sigma\} \tag{5}$$

$$\cup \{(a, b) \rightarrow b \mid a \in \Gamma, b \in \Sigma\} \tag{6}$$

Die Idee hierbei ist die folgende: Zunächst sind mittels (1),(2),(3) Ableitungen möglich der Form

$$S \Rightarrow^* ((z_0, a_1), a_1)(a_2, a_2) \dots (a_{n-1}, a_{n-1})(\hat{a}_n, a_n)$$

Die ersten Komponenten stellen eine Startkonfiguration (repräsentiert über  $\Delta$ ) dar, die zweiten Komponenten das zugehörige Eingabewort.

Nun wird auf den ersten Komponenten mittels  $P'$  (Regelart (4)) eine Rechnung von  $M$  simuliert, bis ein Endzustand erreicht wird:

$$\dots \Rightarrow^* (\gamma_1, a_1) \dots (\gamma_{k-1}, a_{k-1})((z, \gamma_k), a_k)(\gamma_{k+1}, a_{k+1}) \dots (\gamma_n, a_n) \\ \text{mit } z \in E, \gamma_i \in \Gamma, a_i \in \Sigma$$

Danach können mittels (5),(6) alle ersten Komponenten weggelöscht werden. Es bleibt  $a_1 \dots a_n$  übrig:

$$\dots \Rightarrow^* a_1 \dots a_n$$

Man prüft leicht nach, daß alle Regeln vom Typ 1 sind. ■

Unter Weglassen der linearen Beschränktheit von  $M$  bzw. der Typ 1-Bedingung von  $G$  erhalten wir aus obigem Beweis sofort einen Beweis für den folgenden

**Satz.**

DIE DURCH ALLGEMEINE TURINGMASCHINEN AKZEPTIERBAREN SPRACHEN SIND GENAU DIE TYP 0-SPRACHEN.

*Bemerkungen:* Der Berechnungsbaum einer nichtdeterministischen TM kann von einer deterministischen Turingmaschine systematisch durchsucht werden (nach einer Konfiguration mit Endzustand) – allerdings ist nicht klar, ob die simulierende Maschine hierauf immer noch linear beschränkt ist, wenn es die ursprüngliche war.

Das bedeutet: im allgemeinen (Typ 0) Fall spielt es keine Rolle, ob wir von nichtdeterministischen oder von deterministischen Turingmaschinen reden, denn nichtdeterministische Turingmaschinen können durch deterministische simuliert werden. In der Typ 1-Situation allerdings war für den Äquivalenzbeweis eine *nichtdeterministische* TM notwendig. Ob man in diesem Fall auch mit einer deterministischen auskommen kann, ist ein bis heute ungelöstes Problem, das sog. LBA-Problem. Auf einen kurzen, formelhaften Nenner gebracht, lautet also die Frage, ob  $LBA = DLBA$ .

## 1.5 Tabellarischer Überblick

Wir stellen nun in Tabellenform die wichtigsten Resultate zusammen. Um die Tabellen jedoch vollständig zu machen, sind an der einen oder anderen Stelle auch Ergebnisse eingefügt, die im Text nicht behandelt wurden.

**Beschreibungsmittel.** Mit welchen Mitteln der Beschreibung kann welcher Sprachtyp dargestellt werden? Meist haben wir zumindest eine Grammatikart und einen äquivalenten Automaten kennengelernt.

Typ 3	reguläre Grammatik DFA NFA regulärer Ausdruck
Det. kf.	$LR(k)$ -Grammatik deterministischer Kellerautomat (DPDA)
Typ 2	kontextfreie Grammatik Kellerautomat (PDA)
Typ 1	kontextsensitive Grammatik linear beschränkter Automat (LBA)
Typ 0	Typ 0 - Grammatik Turingmaschine (TM)

**Determinismus und Nichtdeterminismus.** Wir stellen zusammen, inwieweit bei den verschiedenen Automatenmodellen die deterministische und die nichtdeterministische Version äquivalent sind.

Nichtdet. Automat	Determ. Automat	äquivalent?
NFA	DFA	ja
PDA	DPDA	nein
LBA	DLBA	?
TM	DTM	ja

Die Frage, ob sich nichtdeterministische LBAs äquivalent in deterministische umformen lassen, ist ungelöst. Diese Frage ist als *LBA-Problem* bekannt.

**Abschlußeigenschaften.** Die betrachteten Sprachklassen sind (sind nicht) abgeschlossen unter den folgenden Operationen.

	Schnitt	Vereinigung	Komplement	Produkt	Stern
Typ 3	ja	ja	ja	ja	ja
Det. kf.	nein	nein	ja	nein	nein
Typ 2	nein	ja	nein	ja	ja
Typ 1	ja	ja	ja	ja	ja
Typ 0	ja	ja	nein	ja	ja

Der Abschluß der kontextsensitiven Sprachen unter Komplementbildung wurde erst 1987 von Immerman und Szelepczényi gezeigt, nachdem das Problem 1964 von Kuroda gestellt wurde.

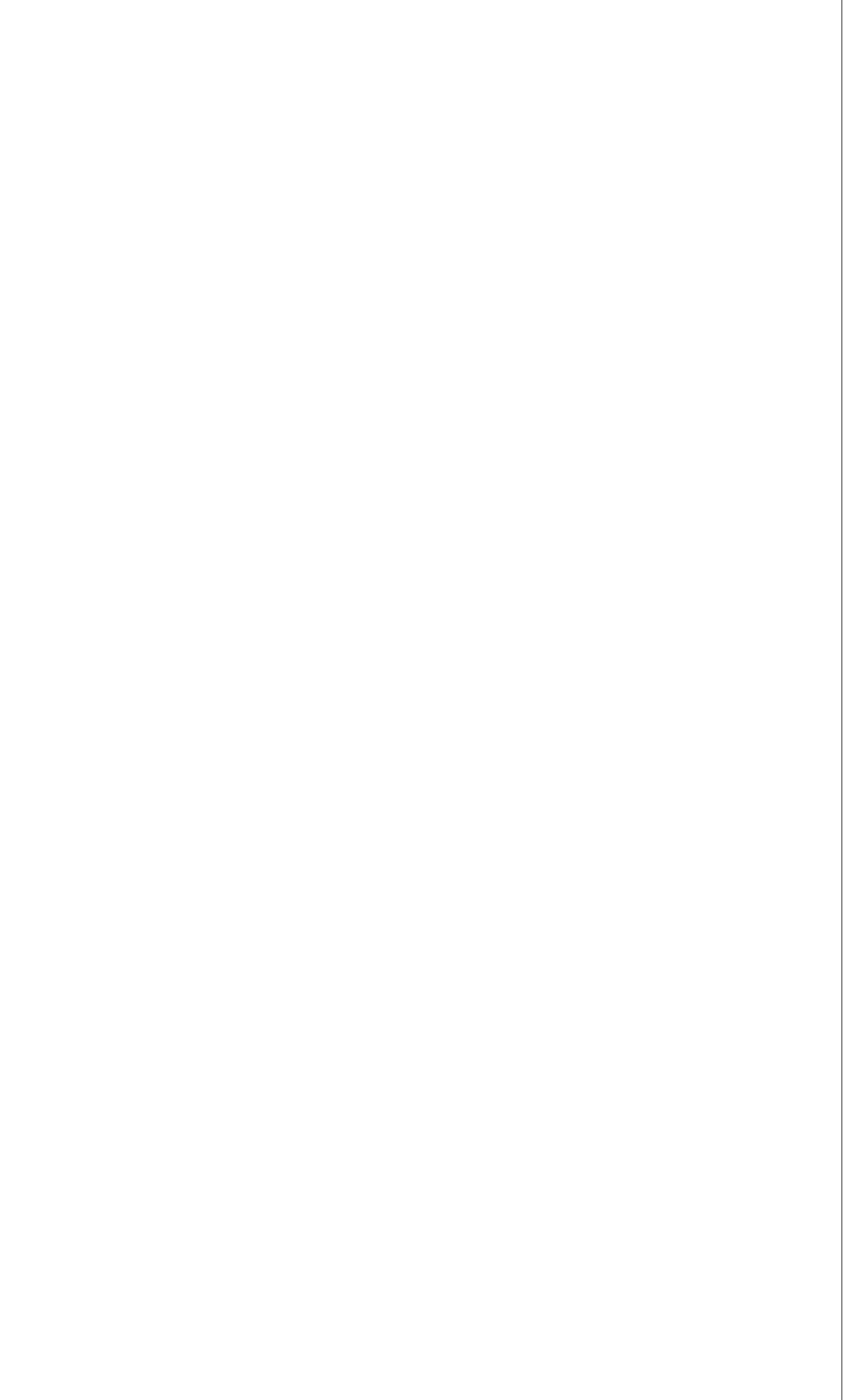
**Entscheidbarkeit.** Die folgenden Fragestellungen sind (sind nicht) entscheidbar. Einige der Unentscheidbarkeitsergebnisse können erst im nächsten Kapitel bewiesen werden.

	Wort- problem	Leerheits- problem	Schnitt- problem	Äquivalenz- problem
Typ 3	ja	ja	ja	ja
Det. kf.	ja	ja	nein	?
Typ 2	ja	ja	nein	nein
Typ 1	ja	nein	nein	nein
Typ 0	nein	nein	nein	nein

Für die deterministisch kontextfreien Sprachen ist bisher ungelöst, ob das Äquivalenzproblem entscheidbar ist (vgl. S. 130).

**Wortproblem.** Wir greifen noch speziell das Wortproblem heraus und stellen zusammen, welche Komplexität entsprechende Algorithmen haben.

Typ 3 (DFA gegeben)	lineare Komplexität, S. 48
Det. kf.	lineare Komplexität, S. 74
Typ 2 (CNF gegeben)	Komplexität: $O(n^3)$ , S. 63
Typ 1	exponentielle Komplexität, S. 22
Typ 0	unlösbar, vgl. S. 19 und S. 117



# Kapitel 2

## Berechenbarkeitstheorie

### 2.1 Intuitiver Berechenbarkeitsbegriff und Churchsche These

Jeder, der programmieren gelernt hat, weiß daß es so etwas wie einen intuitiven Berechenbarkeitsbegriff gibt. Man hat eine Vorstellung davon, welche Funktionen (auf den natürlichen Zahlen) berechenbar sind. Allerdings alleine auf dieser Intuition basierend den Nachweis zu führen, daß eine Funktion *nicht* berechenbar ist, erweist sich als schwierig bzw. unmöglich.

Es ist deshalb notwendig, den intuitiven Begriff in die Form einer mathematischen Definition zu bringen. Dann kann es auch gelingen, von einer Funktion den Nachweis zu führen, daß sie der Definition *nicht* entspricht.

Man handelt sich jedoch das neue Problem ein, daß begründet werden muß, daß die formale Definition wirklich den intuitiven Begriff erfaßt. Eine solche Begründung kann immer nur ein Plausibel-machen sein, jedoch kein mathematischer Beweis, da ja eben der intuitive Berechenbarkeitsbegriff (noch) nicht formal gefaßt ist.

Wir beginnen mit einer Diskussion des intuitiven Berechenbarkeitsbegriffs und einigen Beispielen.

Eine (evtl. partielle) Funktion  $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  soll als *berechenbar* angesehen werden, falls es ein Rechenverfahren, einen Algorithmus, gibt (z.B. in Form eines MODULA-Programms), das  $f$  berechnet, d.h. gestartet

mit  $(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$  als Eingabe (z.B. so daß  $n_1, \dots, n_k$  die Startwerte der Variablen  $x_1, \dots, x_n$  sind) soll der Algorithmus nach endlich vielen Schritten mit der Ausgabe von  $f(n_1, \dots, n_k)$  stoppen.

Im Fall einer partiellen Funktion (also einer Funktion, die an manchen Stellen undefiniert ist) soll der Algorithmus bei der entsprechenden Eingabe nicht stoppen (unendliche Schleife).

Jedem Algorithmus ist also eine Funktion, die durch ihn berechnet wird, zugeordnet.

### Beispiel 1: Der Algorithmus

```
INPUT( n );
REPEAT UNTIL FALSE;
```

“berechnet” die total undefinierte Funktion  $\Omega : n \mapsto \text{undef.}$

### Beispiel 2: Die Funktion

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ ein Anfangsabschnitt der} \\ & \text{Dezimalbruchentwicklung von } \pi \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(Bsp.  $f(314) = 1, f(5) = 0$ ) ist berechenbar, denn es gibt Näherungsverfahren für die Zahl  $\pi$ . (Es gibt z.B. Zahlenfolgen, die auf  $\pi$  konvergieren – zusammen mit einer Abschätzung des Fehlers). Diese brauchen nur bis die entsprechende Genauigkeit erreicht ist, berechnet werden.

### Beispiel 3: Die Funktion

$$g(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ irgendwo in der} \\ & \text{Dezimalbruchentwicklung von } \pi \text{ vorkommt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist möglicherweise nicht berechenbar. Unser bisheriges Wissen über die Zahl  $\pi$  reicht nicht aus, um eine Entscheidung über Berechenbarkeit oder Nicht-Berechenbarkeit zu treffen.

Interessanterweise könnte die Funktion  $g$  aus folgendem Grund berechenbar sein: Die Ziffernfolge von  $\pi$  ist anscheinend so “zufällig”, also kann es doch sein, daß jede Ziffernfolge irgendwann mal vorkommt. In

diesem Fall wäre  $g(n) = 1$  für alle  $n$ . Eine solche konstante Funktion ist sicher berechenbar.

#### Beispiel 4: Die Funktion

$$h(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls in der Dezimalbruchentwicklung von } \pi \text{ irgendwo} \\ & \text{mindestens } n\text{-mal hintereinander eine 7 vorkommt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

hat anscheinend einen ähnlich unsicheren Status wie  $g$ , was ihre Berechenbarkeit betrifft. Dies scheint jedoch nur so zu sein:  $h$  ist berechenbar! Der Grund ist folgender: Entweder kommen beliebig lange 7-er Folgen in  $\pi$  vor. Dann gilt:  $h(n) = 1$  für alle  $n$ . In diesem Fall ist  $h$  sicher berechenbar. Oder aber, es gibt eine Zahl  $n_0$ , so daß es in  $\pi$  7-er Folgen bis zur Länge  $n_0$ , aber nicht  $n_0+1$  gibt. Auch in diesem Fall ist  $h$  einfach berechenbar: Es ist  $h(n) = 1$ , falls  $n \leq n_0$ , und  $h(n) = 0$ , sonst. In jedem dieser Fälle gibt es einen Algorithmus zur Berechnung von  $h$ , und genau einer dieser Fälle muß vorliegen. Man beachte, daß die obige Berechenbarkeitsdefinition nicht konstruktiv ist: Für die Berechenbarkeit genügt es, daß ein Algorithmus existiert, wir müssen nicht unbedingt in der Lage sein, diesen existierenden Algorithmus auch explizit anzugeben (wie es bei diesem Beispiel der Fall ist: Wir wissen nicht, welcher der beiden Fälle vorliegt, und im zweiten Fall kennen wir auch  $n_0$  nicht).

Ein ähnliches Beispiel ist

$$i(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls das LBA-Problem eine positive Lösung hat} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Unsere momentane Unwissenheit über den Status des LBA-Problems (vgl. S. 81) ändert nichts daran, daß  $i$  berechenbar ist, denn  $i$  ist entweder die konstante 1-Funktion oder konstante 0-Funktion.

Im obigen Beispiel 2 wurde der reellen Zahl  $\pi$  eine Funktion  $f$ , die wir der Deutlichkeit halber jetzt  $f_\pi$  nennen, zugeordnet. Diese Funktion  $f_\pi$  ist berechenbar, da es Näherungsverfahren für  $\pi$  gibt. Ähnlich ist auch die Funktion  $f_e$  berechenbar, die der Eulerschen Konstanten  $e$  zugeordnet ist.

**Frage:** Gilt, daß für jede reelle Zahl  $r$  die zugeordnete Funktion  $f_r$  berechenbar ist? Antwort: Nein, denn es gibt überabzählbar viele reelle

Zahlen, aber nur abzählbar viele Rechenverfahren. Je zwei verschiedenen reellen Zahlen müßten ja auch zwei verschiedene Rechenverfahren zugeordnet werden. Die Abzählbarkeit der Menge der Rechenverfahren ergibt sich daraus, daß Rechenverfahren notwendigerweise durch einen endlichen Text beschrieben werden müssen. In diesem Sinne gibt es also berechenbare reelle Zahlen und nicht-berechenbare reelle Zahlen. (Diese Unterscheidung hat nichts mit rational/irrational zu tun, nur insoweit, daß rationale Zahlen immer berechenbar sind).

Wir werden im folgenden verschiedene Vorschläge kennenlernen, den intuitiven Berechenbarkeitsbegriff formal zu definieren: Turingmaschinen, WHILE-Programme, GOTO-Programme,  $\mu$ -rekursive Funktionen. Die historisch ersten dieser Definitionen (von Turing und Church) gehen auf 1936 zurück. Erstaunlicherweise hat sich gezeigt, daß alle diese Definitionen – so unterschiedlich ihre Konstruktion ist – untereinander äquivalent sind. Verschiedene dieser Äquivalenzen werden wir im folgenden nachvollziehen.

Aufgrund dessen, daß all diese Äquivalenzen gelten und daß sich niemand in der Lage sah, einen noch umfassenderen Berechenbarkeitsbegriff zu erfinden, ist man heute davon überzeugt, mit den angegebenen Definitionen genau *den* Berechenbarkeitsbegriff erfaßt zu haben. Das heißt, wenn von einer Funktion nachgewiesen ist, daß sie *nicht* Turingmaschinen-berechenbar ist, dann folgt aus dieser Überzeugung, daß die Funktion *überhaupt nicht* berechenbar ist.

Diese Überzeugung oder Hypothese faßt man unter dem Namen *Churchsche These* zusammen, die – wie bereits diskutiert – nicht beweisbar, aber allgemein akzeptiert, ist.

### Churchsche These.

DIE DURCH DIE FORMALE DEFINITION DER *Turing-Berechenbarkeit* (ÄQUIVALENT: *WHILE-Berechenbarkeit*, *GOTO-Berechenbarkeit*,  $\mu$ -*Rekursivität*) ERFASSTE KLASSE VON FUNKTIONEN STIMMT GENAU MIT DER KLASSE DER IM INTUITIVEN SINNE BERECHENBAREN FUNKTIONEN ÜBEREIN.

Gelegentlich findet sich in der Literatur die Formulierung, daß ein Beweis die Churchsche These benutzt. Dies bedeutet dann, daß im Verlauf des Beweises entweder in Umgangssprache oder in einer Programmiersprache ein Algorithmus formuliert wird und dann argumentiert

wird: Da ein intuitiver Algorithmus existiert, existiert auch eine entsprechende Turingmaschine. Mit einer solchen Turingmaschine wird dann weitergearbeitet, ohne diese Turingmaschine je direkt angegeben zu haben.

## 2.2 Turing-Berechenbarkeit

Turings Vorschlag zu einer formalen Definition des Berechenbarkeitsbegriffs basiert auf der – nach ihm benannten – Turingmaschine. Er ging hierbei von der Idee aus nachzuempfinden, wie ein Mensch eine systematische Berechnung, wie etwa eine Multiplikation nach der Schulmethode, durchführt. Er verwendet hierzu ein Rechenblatt – in Felder eingeteilt – auf dem die Rechnung, samt aller Zwischenergebnisse, notiert wird. Zur Verfügung stehen ihm hierbei ein Schreibwerkzeug und evtl. ein Radierer, um Zeichen auf Felder zu notieren bzw. wieder zu löschen.

Die jeweilige Aktion hängt nur von wenigen (endlich vielen) Symbolen ab, die sich im Umfeld der aktuellen Position des Schreibwerkzeugs befinden. Die Rechnung wird hierbei gesteuert von einem endlichen Programm.

Die formale Definition der Turingmaschine wurde bereits gegeben. Sie stellt noch eine gewisse Vereinfachung obiger Ideen dar: das 2-dimensionale Rechenblatt wird reduziert zu einem 1-dimensionalen Rechenband, das Schreibwerkzeug und der Radierer verschmelzen zu einem einzigen Schreib-Lesekopf, wie bei einem Tonbandgerät. Man kann jedoch nachweisen, daß auch anscheinend allgemeinere Definitionen (mehrere Bänder, 2- bzw.  $n$ -dimensionales Band, mehrere Schreib-Leseköpfe, getrennter Schreib- und Lesekopf, etc.) durch das einfache Modell simuliert werden können.

Bisher verwendeten wir Turingmaschinen für das *Akzeptieren* von Sprachen, nun müssen wir die Definition modifizieren, um das *Berechnen* von Funktionen zu erfassen. Wir geben gleich zwei Definitionen von Turing-Berechenbarkeit an, eine für Funktionen auf natürlichen Zahlen, eine für Funktionen auf Wörtern.

**Definition.** Eine Funktion  $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  heißt *Turing-berechenbar*, falls es eine (deterministische) Turingmaschine

$M$  gibt, so daß für alle  $n_1, \dots, n_k, m \in \mathbb{N}$  gilt:

$$f(n_1, \dots, n_k) = m$$

**genau dann wenn**

$$z_0 bin(n_1) \# bin(n_2) \# \dots \# bin(n_k) \xrightarrow{*} \square \dots \square z_e bin(m) \square \dots \square$$

wobei  $z_e \in E$ .

Hierbei bezeichnet  $bin(n)$  die Binärdarstellung der Zahl  $n \in \mathbb{N}$  (ohne führende Nullen).

**Definition.** Eine Funktion  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  heißt *Turing-berechenbar*, falls es eine (deterministische) Turingmaschine  $M$  gibt, so daß für alle  $x, y \in \Sigma^*$  gilt:

$$f(x) = y$$

**genau dann wenn**

$$z_0 x \xrightarrow{*} \square \dots \square z_e y \square \dots \square$$

wobei  $z_e \in E$ .

Man beachte, daß bei beiden Definitionen indirekt ausgedrückt wird, daß im Falle von  $f(x) = \text{undefiniert}$  die Maschine  $M$  in eine unendliche Schleife gehen kann.

**Beispiel:** Die Nachfolgerfunktion  $n \mapsto n + 1$  ist Turing-berechenbar. Eine entsprechende Turingmaschine wurde im vorigen Kapitel angegeben (Seite 77), denn diese Maschine transformiert  $bin(n)$  in  $bin(n + 1)$ .

**Beispiel:** Die überall undefinierte Funktion  $\Omega$  ist Turing-berechenbar, etwa durch die Maschine:

$$\delta(z_0, a) = (z_0, a, R) \quad \text{für alle } a \in \Gamma$$

**Beispiel:** Bekanntermaßen ist eine Sprache vom Typ 0, wenn sie von einer Turingmaschine akzeptiert wird. Das heißt, für genau diejenigen Wörter  $w$  stoppt die Maschine nach endlich vielen Schritten in einem

Endzustand, für die  $w \in A$  gilt. Für Wörter  $w \notin A$  braucht die Maschine nicht einmal zu stoppen – jedenfalls nicht in einem Endzustand. Dies entspricht genau derselben Situation wie bei einer Turingmaschine, die die folgende Funktion  $\chi'_A : \Sigma^* \rightarrow \{0, 1\}$  berechnet:

$$\chi'_A(w) = \begin{cases} 1, & w \in A \\ \text{undefiniert}, & w \notin A \end{cases}$$

Die oben angegebene Turingmaschine, die für die Typ 0-Eigenschaft von  $A$  verantwortlich ist, kann leicht so umkonstruiert werden, daß sie die Funktion  $\chi'_A$  berechnet (und umgekehrt). Daher stimmen die Typ 0-Sprachen genau mit den *semi-entscheidbaren* Sprachen überein (vgl. die ausführlichere Diskussion, Seite 114).

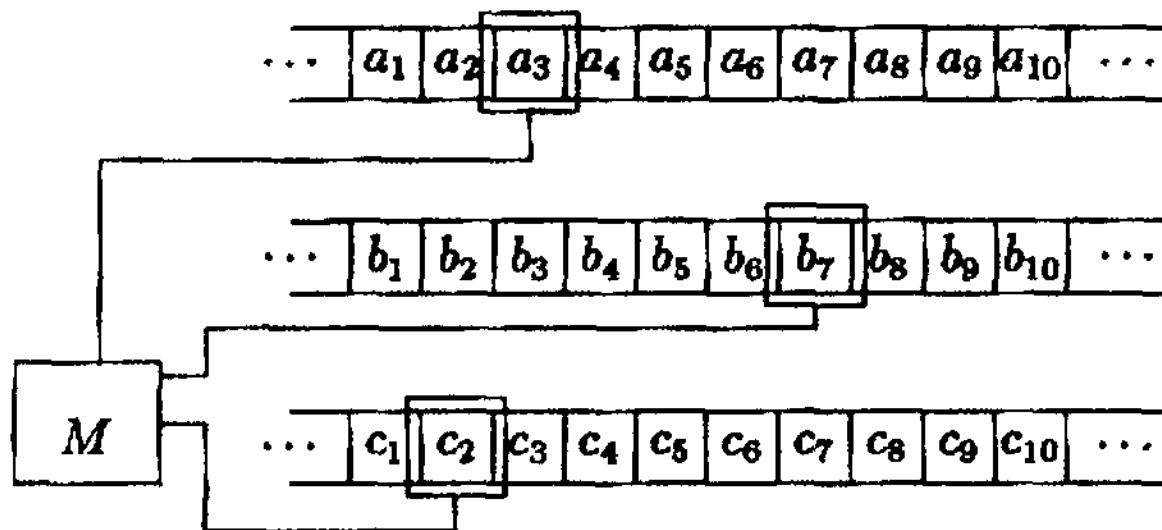
Eine *Mehrband-Turingmaschine* kann auf  $k \geq 1$  vielen Bändern unabhängig voneinander operieren, d.h. sie hat  $k$  Schreib-Leseköpfe, die in jedem Schritt lesen, schreiben und sich unabhängig voneinander bewegen können. Formal kann eine solche Maschine erfaßt werden, indem wir  $\delta$  als eine Funktion von  $Z \times \Gamma^k$  nach  $Z \times \Gamma^k \times \{L, R, N\}^k$  ansetzen. Der Begriff der Konfiguration, der von der Turingmaschine akzeptierten Sprache bzw. berechneten Funktion kann entsprechend verallgemeinert werden.

Wir zeigen nun, daß eine Mehrband-Turingmaschine nicht mehr “Berechnungskraft” besitzt als das Einfach-Modell mit einem Band. Das bedeutet, wenn es darum geht, irgendeine Turingmaschine mit bestimmten Berechnungsfähigkeiten anzugeben, daß wir zunächst auch eine Mehrband-Turingmaschine angeben können – was oft wesentlich einfacher ist – und uns dann auf den folgenden Satz berufen können.

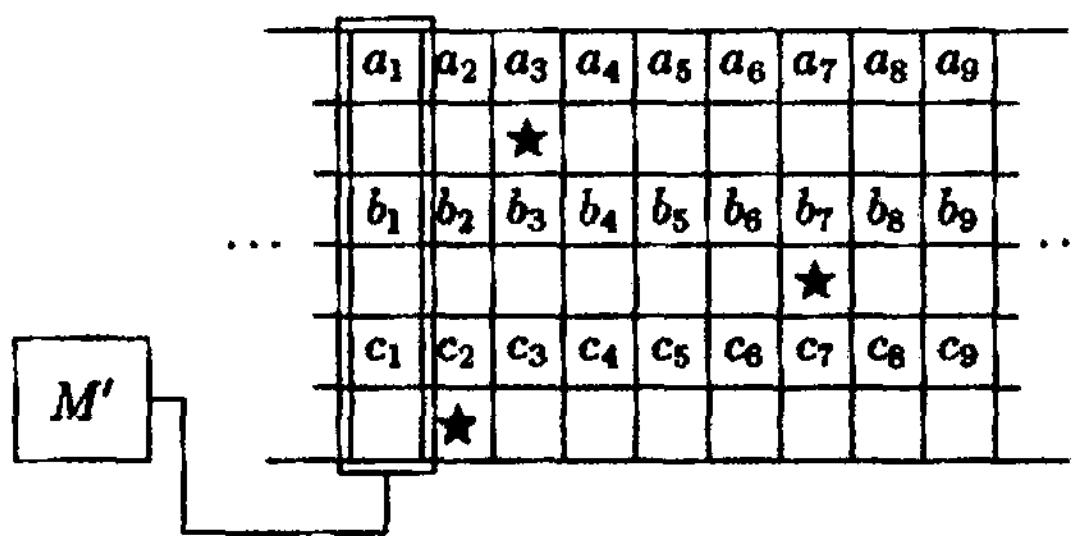
### Satz.

ZU JEDER MEHRBAND-TURINGMASCHINE  $M$  GIBT ES EINE (EINBAND-) TURINGMASCHINE  $M'$  MIT  $T(M) = T(M')$  BZW. SO, DASS  $M'$  DIESELBE FUNKTION BERECHNET WIE  $M$ .

**Beweis:** Sei  $k$  die Anzahl der Bänder von  $M$  und sei  $\Gamma$  das Arbeitsalphabet von  $M$ . Die Idee ist, daß wir das Band von  $M'$  in  $2k$  “Spuren” unterteilen, so daß eine Konfiguration von  $M$ , wie etwa



simuliert wird durch



Das heißt zunächst, daß das Arbeitsalphabet von  $M'$  als  $\Gamma' = \Gamma \cup (\Gamma \cup \{\star\})^{2k}$  gewählt wird, um diese Darstellung in Spuren zu ermöglichen.

$M'$  simuliert  $M$  wie folgt: Gestartet mit der Eingabe  $x_1 x_2 \dots x_n \in \Gamma^*$  erzeugt  $M'$  zunächst die Darstellung der Startkonfiguration von  $M$  in der angegebenen Spuren-Darstellung. Sodann simuliert  $M'$  jeweils einen Schritt von  $M$  durch mehrere Schritte, und zwar folgendermaßen.  $M'$  startet die Simulation so, daß der Schreib-Lesekopf links von allen  $\star$ -Markierungen steht.  $M'$  geht nach rechts, bis alle  $k$  Markierungen überschritten wurden.  $M'$  "weiß" nun, welche Zeile der  $\delta$ -Funktion von  $M$  anzuwenden ist (d.h.  $M'$  ist in einen entsprechenden Zustand übergegangen – hierzu muß gelten:  $|Z'| \geq |Z \times \Gamma^k|$ ). Dann geht  $M'$  wieder nach links über alle  $k$   $\star$ -Marken hinweg und führt alle entsprechenden Änderungen aus. ■

Wir vereinbaren nun folgende Notation: Wenn  $M$  eine 1-Band-Turingmaschine ist, so bezeichnet  $M(i, k)$ ,  $i \leq k$ , diejenige  $k$ -Band-Turingmaschine, die wir aus  $M$  dadurch erhalten, daß die Aktionen

von  $M$  nun auf Band  $i$  ablaufen und alle anderen Bänder unverändert bleiben. Etwas konkreter: Sei  $\delta(z, a) = (z', b, y)$ ,  $y \in \{L, R, N\}$ , eine typische Zeile der  $\delta$ -Funktion von  $M$ . In  $M(3, 5)$  etwa sieht dies dann folgendermaßen aus:

$$\delta(z, c_1, c_2, a, c_3, c_4) = (z', c_1, c_2, b, c_3, c_4, N, N, y, N, N)$$

für alle  $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \Gamma$ .

Falls die Gesamtzahl der Bänder  $k$  der Mehrband-Turingmaschine eine untergeordnete Rolle spielt ( $k$  ist eben einfach "genügend groß" gewählt), so schreiben wir nur  $M(i)$  anstatt  $M(i, k)$ .

Die  $+1$  – Addiermaschine von Seite 77 bezeichnen wir mit "Band:=Band+1" und anstelle von "Band:=Band+1"(i) schreiben wir "Band i:=Band i + 1". In ähnlicher Weise können wir auch Mehrbandmaschinen erhalten, die die Operationen "Band  $i :=$  Band  $i - 1$ ", "Band  $i := 0$ " und "Band  $i :=$  Band  $j$ " ausführen.

Als nächstes wollen wir (1-Band- oder Mehrband-) Turingmaschinen "hintereinanderschalten". Seien etwa  $M_i = (Z_i, \Sigma, \Gamma_i, \delta_i, z_i, \square, E_i)$ ,  $i = 1, 2$ , zwei Turingmaschinen, so bezeichnen wir durch (Flußdiagrammnotation)

start —————  $M_1$  —————  $M_2$  ————— stop

oder durch (Programmiersprachen-Notation)

$M_1; M_2$

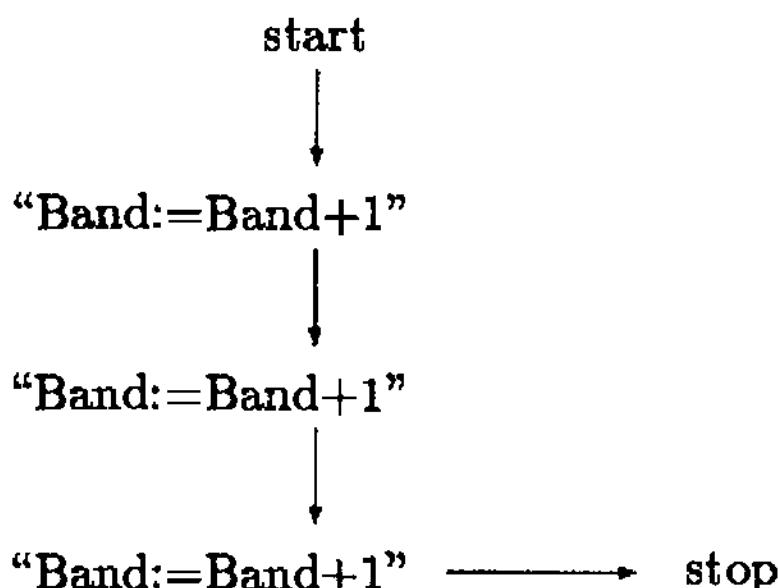
eine neue Turingmaschine

$$M = (Z_1 \cup Z_2, \Sigma, \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \delta, z_1, \square, E_2)$$

wobei (ohne Beschränkung der Allgemeinheit)  $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$  und

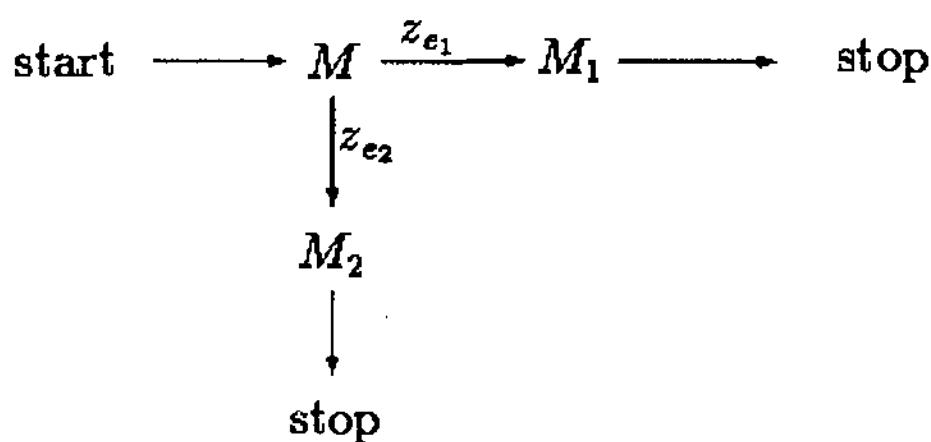
$$\delta = \delta_1 \cup \delta_2 \cup \{(z_e, a, z_2, a, N) \mid z_e \in E_1, a \in \Gamma_1\}$$

*Beispiel:*



ist eine Turingmaschine, die 3 hinzugaddiert.

In ähnlicher Weise bezeichnen wir mit



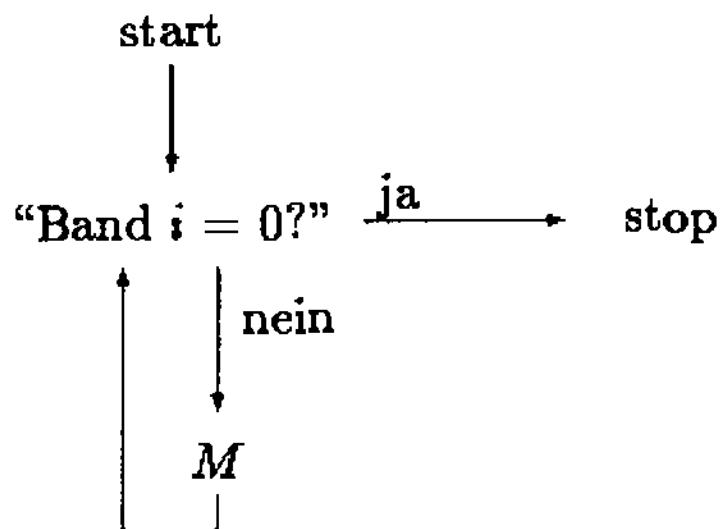
eine Turingmaschine, wobei vom Endzustand  $z_{e_1}$  von  $M$  aus nach  $M_1$  übergegangen wird, und von  $z_{e_2}$  aus nach  $M_2$ .

Betrachten wir noch eine spezielle Turingmaschine, die wir mit "Band=0?" bezeichnen: Es ist  $Z = \{z_0, z_1, ja, nein\}$ ; Startzustand ist  $z_0$ ; Endzustände sind *ja* und *nein*. Es ist

$$\begin{aligned}
 \delta(z_0, a) &= (\text{nein}, a, N) \quad \text{für } a \neq 0 \\
 \delta(z_0, 0) &= (z_1, 0, R) \\
 \delta(z_1, a) &= (\text{nein}, a, L) \quad \text{für } a \neq \square \\
 \delta(z_1, \square) &= (ja, \square, L)
 \end{aligned}$$

Anstatt "Band=0?"(i) schreiben wir: "Band  $i = 0?$ "

Sei  $M$  eine beliebige Turingmaschine. Dann nennen wir die Maschine



fortan "WHILE Band  $i \neq 0$  DO  $M$ ".

Man erkennt, daß wir nun schon verschiedene einfache Programmiersprachen-ähnliche Konzepte mit einer Mehrband-Turingmaschine simulieren können: Die Bandinhalte können als die Variablenwerte angesehen werden, es gibt einfache Wertzuweisungen, die Hintereinandерreihung von Programmen ist möglich, eine einfache Abfrage und eine While-Schleife können programmiert werden. Außerdem lässt sich jede solche Mehrband-Turingmaschine wieder durch eine 1-Band-Turingmaschine simulieren. Wir greifen dies im nächsten Kapitel wieder auf.

## 2.3 LOOP-, WHILE- und GOTO-Berechenbarkeit

Wir betrachten eine einfache Programmiersprache, genannt LOOP. LOOP-Programme sind aus folgenden syntaktischen Komponenten aufgebaut.

*Variablen:*  $x_0 \ x_1 \ x_2 \dots$

*Konstanten:* 0 1 2 ...

*Trennsymbole:* ; :=

*Operationszeichen:* + -

*Schlüsselwörter:* LOOP DO END

Die (induktive) Definition der *Syntax* von LOOP-Programmen ist wie folgt erklärt.

Jede Wertzuweisung der Form

$$x_i := x_j + c$$

bzw.

$$x_i := x_j - c$$

ist ein LOOP-Programm (wobei  $c$  eine Konstante ist).

Falls  $P_1$  und  $P_2$  bereits LOOP-Programme sind, dann auch

$$P_1; P_2$$

Falls  $P$  ein LOOP-Programm ist und  $x_i$  eine Variable, dann ist auch

$$\text{LOOP } x_i \text{ DO } P \text{ END}$$

ein LOOP-Programm.

Die *Semantik* von LOOP-Programmen ist wie folgt definiert.

Bei einem LOOP-Programm, das eine  $k$ -stellige Funktion berechnen soll, gehen wir davon aus, daß dieses mit den Startwerten  $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$  in den Variablen  $x_1, \dots, x_k$  gestartet wird und alle anderen vorkommenden Variablen den Anfangswert 0 haben.

Die Wertzuweisung  $x_i := x_j + c$  wird wie üblich interpretiert: der neue Wert der Variablen  $x_i$  berechnet sich zu  $x_j + c$ , wobei  $c$  eine Konstante ist. Bei  $x_i := x_j - c$  wird die *modifizierte Subtraktion* verwendet, also falls  $c > x_j$ , so wird das Resultat auf 0 gesetzt. (Die Variablen können also nur Werte  $\in \mathbb{N}$  annehmen).

Ein LOOP-Programm der Form  $P_1; P_2$  wird so interpretiert, daß zuerst  $P_1$  und dann  $P_2$  auszuführen ist.

Ein LOOP-Programm der Form  $\text{LOOP } x_i \text{ DO } P \text{ END}$  wird so interpretiert, daß das Programm  $P$  sooft ausgeführt wird, wie der Wert der Variablen  $x_i$  zu Beginn angibt. (Ändern des Variablenwerts von  $x_i$  im Innern von  $P$  hat also keinen Einfluß auf die Anzahl der Wiederholungen).

Das *Resultat* der Berechnung eines LOOP-Programms (nach Ausführung des LOOP-Programms) ergibt sich als Wert der Variablen  $x_0$ .

**Definition.** Eine Funktion  $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  heißt *LOOP-berechenbar*, falls es ein LOOP-Programm  $P$  gibt, das  $f$

in dem Sinne berechnet, daß  $P$ , gestartet mit  $n_1, \dots, n_k$  in den Variablen  $x_1, \dots, x_k$  (und 0 in den restlichen Variablen) stoppt mit dem Wert  $f(n_1, \dots, n_k)$  in der Variablen  $x_0$ .

Es ist klar, daß alle LOOP-berechenbaren Funktionen *totale* Funktionen sind, denn jedes LOOP-Programm stoppt zwangsläufig nach endlicher Zeit. (Mit LOOP-Programmen ist es nicht möglich, eine unendliche Schleife zu programmieren). Es stellt sich sofort die Frage, ob alle totalen und intuitiv berechenbaren Funktionen bereits LOOP-berechenbar sind. Wir werden sehen, daß dies nicht der Fall ist: Die *Ackermannfunktion* ist ein Beispiel für eine totale und berechenbare Funktion, die nicht LOOP-berechenbar ist (siehe Abschnitt 2.5).

Die allgemeine Form der Wertzuweisung gestattet auch die Simulation von spezielleren der Form  $x_i := x_j$  (man setze  $c = 0$ ) und  $x_i := c$  (man verwende für  $x_i$  eine weiter nicht benutzte Variable, die noch den Anfangswert 0 hat).

Ebenso ist es einfach, das Konstrukt IF-THEN-ELSE nachzuahmen, etwa wie folgt. Es soll

**IF**  $x = 0$  **THEN**  $A$  **END**

simuliert werden. Dies wird erreicht durch

```
y := 1;
LOOP x DO y:=0 END;
LOOP y DO A END
```

Kompliziertere IF-Bedingungen kann man dementsprechend formulieren. Bei der Angabe von speziellen LOOP-Programmen verwenden wir im folgenden solche simulierbare Konstrukte wie IF, um Schreibarbeit zu sparen.

*Beispiel:* Die Additionsfunktion ist LOOP-berechenbar mittels

```
 $x_0 := x_1;$ 
LOOP  $x_2$  DO  $x_0 := x_0 + 1$  END
```

Wir nennen dieses Programmstück kurz  $x_0 := x_1 + x_2$  und verallgemeinern dies auch auf beliebige andere Variablen-Indizes, etwa  $x_i := x_j + x_k$ .

Die Multiplikationsfunktion ist – basierend auf der Addition – LOOP-berechenbar durch:

$x_0 := 0;$

LOOP  $x_2$  DO  $x_0 := x_0 + x_1$  END

Man beachte, daß dies implizit zwei ineinander verschachtelte LOOP-Schleifen sind.

Analog kann man die Operationen *MOD* und *DIV* definieren. Wir erlauben uns im folgenden, LOOP-Programme mit komplizierteren Wertzuweisungen aufzuschreiben, etwa

$$x := (y \text{ DIV } z) + (x \text{ MOD } 5) * y$$

mit dem Verständnis, daß diese Wertzuweisungen in die elementare Form, wie sie von der Definition her vorgesehen ist, umgeschrieben werden können.

Wir erweitern nun die LOOP-Programme noch um ein weiteres Konzept: die WHILE-Schleife, und erhalten dadurch die *WHILE-Programme*.

Die *Syntax* von WHILE-Programmen enthält alle Konzepte, wie sie bei LOOP-Programmen vorkommen, mit folgendem Zusatz:

Falls  $P$  ein WHILE-Programm ist und  $x_i$  eine Variable, dann ist auch

WHILE  $x_i \neq 0$  DO  $P$  END

ein WHILE-Programm.

Die *Semantik* dieses neuen Konstrukts ist so definiert, daß das Programm  $P$  solange wiederholt auszuführen ist, wie der Wert von  $x_i$  ungleich Null ist.

Es ist klar, daß wir nun nachträglich das Konzept der LOOP-Schleife wieder fallenlassen könnten, denn

LOOP  $x$  DO  $P$  END

kann simuliert werden durch

$y := x;$   
**WHILE**  $y \neq 0$  **DO**  $y := y - 1; P$  **END**

**Definition.** Eine Funktion  $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  heißt **WHILE-berechenbar**, falls es ein WHILE-Programm  $P$  gibt, das  $f$  in dem Sinne berechnet, daß  $P$ , gestartet mit  $n_1, \dots, n_k$  in den Variablen  $x_1, \dots, x_k$  (und 0 in den restlichen Variablen) stoppt mit dem Wert  $f(n_1, \dots, n_k)$  in der Variablen  $x_0$  – sofern  $f(n_1, \dots, n_k)$  definiert ist, ansonsten stoppt  $P$  nicht.

Im Kapitel über Turingmaschinen wurde angedeutet, daß Wertzuweisungen, Sequenzenbildung (Hintereinanderschalten) von Turingmaschinen und WHILE-Schleifen auf einer Mehrband-Turingmaschine simulierbar sind. Hierbei entspricht dem  $i$ -ten Band der Turingmaschine gerade die Variable  $x_i$  des WHILE-Programms, wobei der Wert einer Variablen auf dem Band in Binärdarstellung dargestellt wird.

Schließlich kann noch jede Mehrband-Turingmaschine wieder durch eine (1-Band-) Turingmaschine simuliert werden.

Mit dieser Diskussion erhalten wir:

**Satz.**

TURINGMASCHINEN KÖNNEN WHILE-PROGRAMME SIMULIEREN.  
 DAS HEISST, JEDE WHILE-BERECHENBARE FUNKTION IST AUCH  
 TURING-BERECHENBAR.

Wir werden gleich sehen, daß auch die Umkehrung gilt. Hierzu betrachten wir noch einen Zwischenschritt: die GOTO-Programme.

GOTO-Programme bestehen aus Sequenzen von Anweisungen  $A_i$ , die jeweils durch eine **Marke**  $M_i$  eingeleitet werden:

$$M_1 : A_1; M_2 : A_2; \dots ; M_k : A_k$$

Als mögliche Anweisungen  $A_i$  sind zugelassen:

*Wertzuweisungen:*  $x_i := x_j \pm c$

*unbedingter Sprung:* GOTO  $M_i$

*bedingter Sprung:* IF  $x_i = c$  THEN GOTO  $M_i$

*Stopanweisung:* HALT

Beim Niederschreiben von GOTO-Programmen lassen wir Marken, die niemals angesprungen werden können (da sie hinter keinem GOTO vorkommen), oft auch weg.

Die Semantik solcher Programme sollte klar sein. (HALT-Anweisungen beenden ein GOTO-Programm – die letzte Anweisung eines GOTO-Programms sollte, wenn es kein GOTO ist, ein HALT sein). GOTO-Berechenbarkeit definiert man dann entsprechend der Definition von WHILE-Berechenbarkeit. Es ist klar, daß GOTO-Programme auch in unendliche Schleifen geraten können ( $M_1 : \text{GOTO } M_1$ ).

Jedes WHILE-Programm kann durch ein GOTO-Programm simuliert werden, denn eine WHILE-Schleife

WHILE  $x_i \neq 0$  DO  $P$  END

kann simuliert werden durch:

$M_1$ : IF  $x_i = 0$  THEN GOTO  $M_2$ ;

$P$ ;

GOTO  $M_1$ ;

$M_2$ : ...

Wir fassen zusammen:

**Satz.**

JEDES WHILE-PROGRAMM KANN DURCH EIN GOTO-PROGRAMM SIMULIERT WERDEN. DAS HEISST, JEDER WHILE-BERECHENBARE FUNKTION IST AUCH GOTO-BERECHENBAR.

Wir werden nun auch die Umkehrung zeigen, die auf den ersten Blick nicht ganz offensichtlich ist. Wie simuliert man ein GOTO-Programm durch ein WHILE-Programm?

Gegeben sei ein GOTO-Programm

$$M_1 : A_1; M_2 : A_2; \dots ; M_k : A_k$$

Wir simulieren dies durch ein WHILE-Programm mit *nur einer* WHILE-Schleife wie folgt:

```

count := 1;
WHILE count ≠ 0 DO
  IF count = 1 THEN A'_1 END ;
  IF count = 2 THEN A'_2 END ;
  :
  IF count = k THEN A'_k END ;
END

```

Hierbei ist  $A'_i$  folgendermaßen definiert:

$$A'_i = \begin{cases} x_j := x_i \pm c; \text{count} := \text{count} + 1 & \text{falls } A_i = x_j := x_i \pm c \\ \text{count} := n & \text{falls } A_i = \text{GOTO } M_n \\ \text{IF } x_j = c \text{ THEN count} := n & \text{falls } A_i = \text{IF } x_j = c \\ \text{ELSE count} := \text{count} + 1 \text{ END} & \text{THEN GOTO } M_n \\ \text{count} := 0 & \text{falls } A_i = \text{HALT} \end{cases}$$

Wir fassen zusammen:

### Satz.

JEDES GOTO-PROGRAMM KANN DURCH EIN WHILE-PROGRAMM (MIT NUR EINER WHILE-SCHLEIFE) SIMULIERT WERDEN. ALSO IST JEDOCH GOTO-BERECHENBARE FUNKTION AUCH WHILE-BERECHENBAR.

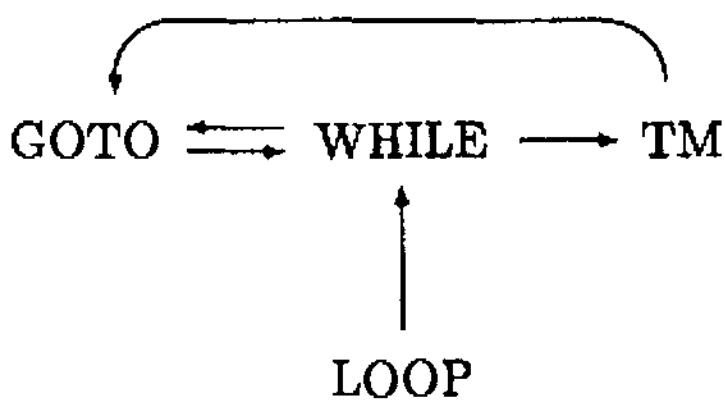
Wir heben den Aspekt, daß die Simulation mit nur einer WHILE-Schleife auskommt, im folgenden Satz besonders hervor.

**Satz.** (KLEENESCHE NORMALFORM FÜR WHILE-PROGRAMME)

JEDE WHILE-BERECHENBARE FUNKTION KANN DURCH EIN WHILE-PROGRAMM MIT NUR EINER WHILE-SCHLEIFE BERECHNET WERDEN.

**Beweis:** Sei ein beliebiges WHILE-Programm  $P$  zur Berechnung einer Funktion  $f$  gegeben. Wir formen  $P$  zunächst um in ein äquivalentes GOTO-Programm  $P'$  und dann wieder zurück in ein äquivalentes WHILE-Programm  $P''$ . Dieses hat nur noch eine WHILE-Schleife. ■

Als nächstes zeigen wir noch, daß Turingmaschinen durch GOTO-Programme simuliert werden können und haben damit dann alle im folgenden Diagramm eingetragenen Pfeile bewiesen.



Es gilt also durch einen Ringschluß, daß Turing-Berechenbarkeit, WHILE-Berechenbarkeit und GOTO-Berechenbarkeit ein und dasselbe sind, während die LOOP-berechenbaren Funktionen eine echte Teilmenge der WHILE-berechenbaren Funktionen (sogar der totalen WHILE-berechenbaren Funktionen) ausmachen.

Sei  $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_1, \square, E)$  eine Turingmaschine zur Berechnung einer Funktion  $f$ . Wir simulieren  $M$  durch ein GOTO-Programm, das folgendermaßen aufgebaut ist:

$$M_1 : P_1; M_2 : P_2; M_3 : P_3$$

Hierbei transformiert  $P_1$  die eingegebenen Anfangswerte der Variablen in Binärdarstellung und erzeugt eine Darstellung der Startkonfiguration von  $M$ , die sich in den Variablenwerten dreier Variablen  $x, y, z$  widerspiegelt. Wir geben diese Codierung von Turingmaschinen-Konfigurationen in 3 natürliche Zahlen gleich im Detail an.

$P_2$  führt eine Schritt-für-Schritt-Simulation der Rechnung von  $M$  durch – durch entsprechendes Verändern der Variablenwerte von  $x, y, z$ .

$P_3$  schließlich erzeugt aus der codierten Form der Endkonfiguration in  $x, y, z$  die eigentliche Ausgabe in den Ausgabevariablen  $x_0$ .

Man beachte, daß  $P_1$  und  $P_3$  gar nicht von  $M$ 's Überführungsfunktion  $\delta$  abhängen, sondern nur  $P_2$ .

Seien die Mengen  $Z$  und  $\Gamma$  durchnumeriert:

$$Z = \{z_1, \dots, z_k\}$$

und

$$\Gamma = \{a_1, \dots, a_m\}$$

Sei außerdem  $b$  eine Zahl mit  $b > |\Gamma|$ . Dann repräsentieren wir eine Turingmaschinen-Konfiguration

$$a_{i_1} \dots a_{i_p} z_l a_{j_1} \dots a_{j_q}$$

dadurch, daß die drei Programmvariablen  $x, y, z$  die Werte

$$\begin{aligned} x &= (i_1 \dots i_p)_b \\ y &= (j_q \dots j_1)_b \\ z &= l \end{aligned}$$

annehmen. Hierbei bedeutet  $(i_1 \dots i_p)_b$  die Zahl  $i_1 \dots i_p$  in  $b$ -ärger Darstellung, also:

$$x = \sum_{\mu=1}^p i_\mu \cdot b^{p-\mu}$$

Analoges gilt für  $y$  (die Ziffern stehen hier jedoch in umgekehrter Reihenfolge).

Das GOTO-Programmstück  $M_2 : P_2$  hat nun folgende Form:

```

 $M_2$ :  $a := y \text{ MOD } b ;$ 
      IF ( $z = 1$ ) AND ( $a = 1$ ) THEN GOTO  $M_{11} ;$ 
      IF ( $z = 1$ ) AND ( $a = 2$ ) THEN GOTO  $M_{12} ;$ 
      :
      IF ( $z = k$ ) AND ( $a = m$ ) THEN GOTO  $M_{km} ;$ 
```

$M_{11}$ :  $\otimes$

```

GOTO  $M_2$  ;
 $M_{12}$ : ⊕
    GOTO  $M_2$  ;
    :
 $M_{km}$ : ⊕
    GOTO  $M_2$  ;

```

Wir beschreiben nun, was an den durch  $\oplus$  bezeichneten Stellen passiert. Greifen wir repräsentativ das Programmstück, das mit der Marke  $M_i$ ; beginnt, heraus. Nehmen wir an, daß die entsprechende  $\delta$ -Anweisung lautet:

$$\delta(z_i, a_j) = (z_{i'}, a_{j'}, L)$$

Dies kann durch folgende Anweisungen simuliert werden:

```

 $z := i'$ ;
 $y := y \text{ DIV } b$ ;
 $y := b * y + j'$ ;
 $y := b * y + (x \text{ MOD } b)$ ;
 $x := x \text{ DIV } b$ ;

```

Entsprechend kann man sich die anderen Fälle vorstellen. Falls  $z_i$  Endzustand ist, so beenden wir  $\oplus$  einfach durch

GOTO  $M_3$ ;

Die Konstruktionen von  $P_1$  und  $P_3$  sind einfach und werden hier nicht ausgeführt.

Wir fassen zusammen:

### Satz.

GOTO-PROGRAMME KÖNNEN TURINGMASCHINEN SIMULIEREN.  
ALSO IST JEDE TURING-BERECHENBARE FUNKTION AUCH  
GOTO-BERECHENBAR.

## 2.4 Primitiv rekursive und $\mu$ -rekursive Funktionen

Einer der historisch ersten Ansätze, den Berechenbarkeitsbegriff zu fassen – zeitlich parallel zu Turings Ansatz – definiert induktiv eine Klasse von Funktionen, indem zunächst verschiedene Anfangsfunktionen angegeben werden, die per Definition in der Klasse enthalten sind. Sodann werden verschiedene Prinzipien angegeben, wie aus Funktionen, die in der Klasse liegen, neue Funktionen gewonnen werden können.

**Definition.** Die Klasse der *primitiv rekursiven Funktionen* (auf den natürlichen Zahlen) ist induktiv wie folgt definiert:

1. Alle konstanten Funktionen sind primitiv rekursiv.
2. Alle identischen Abbildungen (Projektionen) sind primitiv rekursiv. (Hierunter fällt beispielsweise auch eine dreistellige Funktion, die auf die zweite Komponente abbildet).
3. Die Nachfolgerfunktion auf den natürlichen Zahlen ist primitiv rekursiv.
4. Jede Funktion, die durch Einsetzung (Komposition) von primitiv rekursiven Funktionen entsteht, ist selber auch primitiv rekursiv.
5. Jede Funktion, die durch sog. primitive Rekursion aus primitiv rekursiven Funktionen entsteht, ist primitiv rekursiv. Primitive Rekursion bedeutet, daß die Definition von  $f(n+1, \dots)$  zurückgeführt wird auf  $f(n, \dots)$ . Formaler,  $f$  muß ein Gleichungssystem der folgenden Form erfüllen:

$$\begin{aligned} f(0, \dots) &= g(\dots) \\ f(n+1, \dots) &= h(f(n, \dots), \dots) \end{aligned}$$

wobei  $g, h$  bereits primitiv rekursive Funktionen sind.

**Beispiel:** Die Additionsfunktion  $\text{add} : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  ist primitiv rekursiv, denn sie kann dargestellt werden als

$$\begin{aligned} \text{add}(0, x) &= x \quad (\text{identische Abbildung}) \\ \text{add}(n+1, x) &= s(\text{add}(n, x)) \quad (s \text{ ist die Nachfolgerfunktion}) \end{aligned}$$

Das heißt, die Additionsfunktion läßt sich mittels primitiver Rekursion definieren, basierend auf einer identischen Abbildung und der Nachfolgerfunktion.

Ähnlich läßt sich die Multiplikation definieren, basierend auf einer konstanten Funktion und der Additionsfunktion.

$$\begin{aligned} \text{mult}(0, x) &= 0 \quad (\text{konstante Funktion}) \\ \text{mult}(n + 1, x) &= \text{add}(\text{mult}(n, x), x) \end{aligned}$$

Es ist einsichtig, daß alle primitiv rekursiven Funktionen intuitiv berechenbare Funktionen sind, denn die Basisfunktionen (gemäß 1., 2. und 3.) sind berechenbar und sowohl die Einsetzung (gemäß 4.) als auch die primitive Rekursion (gemäß 5.) erzeugen aus berechenbaren Funktionen wieder solche. Außerdem ist klar, daß primitiv rekursive Funktionen immer totale (d.h. überall definierte) Funktionen sind. Die Frage, ob *primitiv rekursiv = total und berechenbar* ist jedoch negativ zu beantworten, wie wir bald sehen werden.

Es gilt der folgende Satz.

**Satz. (OHNE BEWEIS)**

DIE KLASSE DER PRIMITIV REKURSIVEN FUNKTIONEN STIMMT  
MIT DER KLASSE DER LOOP-BERECHENBAREN FUNKTIONEN  
ÜBEREIN.

Die Grundidee des Beweises ist, daß bei der Darstellung einer LOOP-berechenbaren Funktion durch die Prinzipien der primitiven Rekursion folgende Korrespondenzen gelten:

Wertzuweisung	Basisfunktion
$P; Q$	Komposition
LOOP-Schleife	prim. Rekursion

Das heißt zum Beispiel, zum Nachempfinden einer Wertzuweisung genügen die Ausgangsfunktionen - und umgekehrt. Zur Simulation eines zusammengesetzten Programms der Form  $P; Q$  benötigt man im wesentlichen das Einsetzungsprinzip, usw.

Eine Erweiterung der Klasse der primitiv rekursiven Funktionen wird durch Hinzunahme des  $\mu$ -Operators erreicht. Sei  $f$  eine gegebene  $k+1$ -stellige Funktion. Die durch Anwendung des  $\mu$ -Operators auf  $f$  entstehende Funktion ist  $g : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  mit

$$g(x_1, \dots, x_k) = \min \left\{ n \mid \begin{array}{l} f(n, x_1, \dots, x_k) = 0 \text{ und für alle } m < n \\ \text{ist } f(m, x_1, \dots, x_k) \text{ definiert} \end{array} \right\}$$

Hierbei wird  $\min \emptyset = \text{undefined}$  gesetzt. Das heißt, durch Anwenden des  $\mu$ -Operators können wirklich partielle Funktionen entstehen. Beispielsweise entsteht durch Anwendung des  $\mu$ -Operators auf die zweistellige, konstante Funktion  $f(x, y) = 1$  die vollständig undefinierte Funktion  $\Omega$ .

**Definition.** Die Klasse der  $\mu$ -rekursiven Funktionen ist die kleinste Klasse von Funktionen, die die Basisfunktionen (konstante Funktionen, identische Abbildungen, Nachfolgerfunktion) enthält und abgeschlossen ist unter Einsetzung, primitiver Rekursion und Anwendung des  $\mu$ -Operators.

Es gilt der folgende Satz:

**Satz. (OHNE BEWEIS)**

DIE KLASSE DER  $\mu$ -REKURSIVEN FUNKTIONEN STIMMT GENAU MIT DER KLASSE DER WHILE- (GOTO-, TURING-) BERECHENBAREN FUNKTIONEN ÜBEREIN.

Da bei der Simulation von WHILE-Programmen durch  $\mu$ -rekursive Funktionen im obigen Satz jeder WHILE-Schleife ein  $\mu$ -Operator zugeordnet wird, lässt sich der Kleene'sche Normalformsatz für WHILE-Programme (vgl. S. 102) in folgenden Normalformsatz für  $\mu$ -rekursive Funktionen übersetzen:

**Satz. (KLEENE)**

FÜR JEDE  $n$ -STELLIGE  $\mu$ -REKURSIVE FUNKTIONEN  $f$  GIBT ES ZWEI  $n+1$  STELLIGE, PRIMITIV REKURSIVE FUNKTIONEN  $p$  UND  $q$ , SO DASS SICH  $f$  DARSTELLEN LÄSST ALS

$$f(x_1, \dots, x_n) = p(x_1, \dots, x_n, \mu q(x_1, \dots, x_n))$$

HIERBEI IST  $\mu q$  DIE DURCH ANWENDUNG DES  $\mu$ -OPERATORS AUF  $q$  ENTSTEHENDE FUNKTION.

## 2.5 Die Ackermannfunktion

Ackermann gab 1928 eine Funktion an, die zwar intuitiv berechenbar (also auch WHILE-berechenbar, vgl. Churchsche These) ist, jedoch nicht LOOP-berechenbar (bzw. primitiv rekursiv) ist.

In der später von Hermes noch vereinfachten Version ist diese Funktion wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \text{ack}(0, y) &= y + 1 \\ \text{ack}(x, 0) &= \text{ack}(x - 1, 1) \\ \text{ack}(x, y) &= \text{ack}(x - 1, \text{ack}(x, y - 1)) \end{aligned}$$

Wenn wir nach der dritten Zeile entwickeln, erhalten wir

$$\text{ack}(x, y) = \underbrace{\text{ack}(x - 1, \text{ack}(x - 1, \dots, \text{ack}(x - 1, 1) \dots))}_{y\text{-mal}}$$

Wir betrachten nun eine etwas veränderte Version, die zwar nach einem ähnlichen Rekursionsprinzip aufgebaut ist, jedoch nicht mit der oben angegebenen Funktion  $\text{ack}$  identisch ist. Wir nennen diese Funktion der Einfachheit halber *Ackermannfunktion* im folgenden.

$$\begin{aligned} a(0, y) &= a(x, 0) = 1 \\ a(1, y) &= 3y + 1 \\ a(x, y) &= \underbrace{a(x - 1, a(x - 1, \dots, a(x - 1, y) \dots))}_{y\text{-mal}} \end{aligned}$$

Durch Induktion nach dem ersten Argument dieser Funktion überzeugt man sich davon, daß diese für alle Werte von  $x, y$  definiert ist, daß also  $a$  eine totale Funktion von  $\mathbb{N}^2$  nach  $\mathbb{N}$  ist. (Für  $x = 0$  und  $x = 1$  und beliebiges  $y$  ist  $a(x, y)$  direkt definiert, und für  $x > 1$  wird die Definition von  $a(x, y)$  auf die Kombination verschiedener Werte von  $a(x - 1, \dots)$  zurückgeführt, welche nach Induktionsvoraussetzung definiert sind.)

Daß  $a$  im intuitiven Sinne berechenbar ist, ist klar. Zum Beispiel kann  $a$  mittels folgender rekursiver MODULA-Prozedur berechnet werden, die sich unmittelbar an der rekursiven Definition orientiert:

```

PROCEDURE a ( x , y : CARDINAL ) : CARDINAL ;
  VAR i,s : CARDINAL ;
  BEGIN
    IF (x=0) OR (y=0) THEN RETURN 1
    ELSIF x=1 THEN RETURN 3*y+1
    ELSE s:=y;
      FOR i:=1 to y DO
        s := a( x-1, s )
      END;
      RETURN s
    END; (* IF *)
  END a

```

Man könnte nun sagen: aufgrund der Churchschen These ist  $a$  auch WHILE-berechenbar. Ein formaler Beweis hierzu folgt jedoch etwas weiter unten.

Es ist klar, daß  $a$  in beiden Argumenten eine monoton wachsende Funktion ist. Dies wird bei den folgenden Abschätzungen immer wieder benötigt.

Als nächstes ordnen wir jedem LOOP-Programm  $P$  eine Funktion  $f_P : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  zu. Seien hierzu  $x_0, x_1, \dots, x_k$  die in  $P$  vorkommenden Variablen. In der folgenden Definition bezeichnet  $n_i$  den Startwert der Variablen  $x_i$  und  $n'_i$  den zugehörigen Endwert nach Ablauf des Programms  $P$ .

Wir setzen nun:

$$f_P(n) = \max\left\{\sum_{i=0}^k n'_i \mid \sum_{i=0}^k n_i \leq n\right\}$$

In Worten gibt also  $f_P(n)$  die größtmögliche Summe aller Variablenendwerte an, wenn  $P$  mit Anfangswerten gestartet wird, die in der Summe  $n$  nicht übersteigen.

**Lemma.** Für jedes LOOP-Programm  $P$  gibt es eine Konstante  $k$ , so daß für alle  $n \geq k$  gilt:  $f_P(n) < a(k, n)$ .

**Beweis:** Durch Induktion über den Aufbau des LOOP-Programms  $P$ .

Falls  $P$  die Form hat  $x_i := x_i \pm c$ , so gilt  $f_P(n) \leq n + n + c = 2n + c$ . Dann ist  $f_P(n) < 3n + 1 = a(1, n) \leq a(k, n)$  für alle  $k \geq 1$  und  $n \geq c$ . Wähle also z.B.  $k = c + 1$ .

Falls  $P$  die Form hat  $P_1; P_2$ , so gibt es nach Induktionsvoraussetzung Konstanten  $k_1, k_2$ , so daß für alle  $n \geq k_1$  gilt:

$$f_{P_1}(n) < a(k_1, n),$$

und für alle  $n \geq k_2$  gilt:

$$f_{P_2}(n) < a(k_2, n).$$

Für  $n \geq k_3 := \max\{k_1, k_2\}$  gilt nun die Abschätzung:

$$\begin{aligned} f_P(n) &\leq f_{P_2}(f_{P_1}(n)) \\ &\leq f_{P_2}(a(k_1, n)) \\ &< a(k_2, a(k_1, n)) \\ &\leq a(k_3, a(k_3, n)) \\ &\leq \underbrace{a(k_3, a(k_3, \dots, a(k_3, n) \dots))}_{n\text{-mal}} \quad \text{falls } n \geq 2 \\ &= a(k_3 + 1, n) \end{aligned}$$

Wähle also  $k = \max\{k_3 + 1, 2\}$ .

Falls  $P$  die Form hat LOOP  $x_i$  DO  $P'$  END, so gibt es nach Induktionsvoraussetzung eine Konstante  $k'$  so, daß für alle  $n \geq k'$  gilt:

$$f_{P'}(n) < a(k', n)$$

Nun gilt (hierbei ist  $n_i$  der Startwert der Variablen  $x_i$ ):

$$f_P(n) \leq \underbrace{f_{P'}(f_{P'}(\dots, f_{P'}(n), \dots))}_{n_i\text{-mal}}$$

$$\begin{aligned}
 &< \underbrace{a(k', a(k', \dots a(k', n) \dots))}_{n_i\text{-mal}} \\
 &\leq \underbrace{a(k', a(k', \dots a(k', n) \dots))}_{n\text{-mal}} \\
 &= a(k' + 1, n)
 \end{aligned}$$

Wähle also  $k = k' + 1$ . ■

### Satz.

**DIE ACKERMANNFUNKTION  $a$  IST NICHT LOOP-BERECHENBAR.**

**Beweis:** Angenommen,  $a$  ist LOOP-berechenbar, dann ist auch die Funktion  $g(n) = a(n, n)$  LOOP-berechenbar. Sei  $P$  ein LOOP-Programm für  $g$ . Es gilt  $g(n) \leq f_P(n)$ . Zu  $P$  wählen wir gemäß des obigen Lemmas eine Konstante  $k$ , so daß für alle  $n \geq k$  gilt:

$$f_P(n) < a(k, n)$$

Für  $n = k$  speziell ergibt sich

$$g(k) \leq f_P(k) < a(k, k) = g(k)$$

was ein Widerspruch ist. Damit folgt, daß  $a$  nicht LOOP-berechenbar ist. ■

Als nächstes zeigen wir, daß  $a$  nicht nur im intuitiven Sinn berechenbar ist, sondern auch im formalen Sinn der WHILE-Berechenbarkeit.

Als Zwischenschritt geben wir zunächst ein Programm für  $a$  an, das mit den Stackoperationen PUSH und POP operiert. Als nächstes zeigen wir dann, wie man diese Operationen durch ein WHILE-Programm simulieren kann.

```

INPUT(x,y);
INIT(stack);
PUSH(x, stack);
PUSH(y, stack);
WHILE size(stack)≠1 DO

```

```

y:=POP(stack);
x:=POP(stack);
IF (x=0) OR (y=0) THEN PUSH(1, stack)
ELSIF x=1 THEN PUSH(3*y+1, stack)
ELSE LOOP y DO
    PUSH(x-1, stack)
    END;
PUSH(y, stack)
END
END;
result:=POP(stack);
OUTPUT(result)

```

Wir skizzieren nun, wie die Stackoperationen durch ein WHILE-Programm simuliert werden können. Als erstes benötigen wir eine injektive, WHILE-berechenbare Funktion  $c : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ . Ein solche injektive Abbildung kann zum Beispiel durch  $c(x, y) = 2^{x+y} + x$  erreicht werden. Die folgende Tabelle deutet den Funktionsverlauf von  $c$  an.

		$x \longrightarrow$	0	1	2	3	4
		$y \downarrow$	0	1	2	3	4
0	1	1	3	6	11	20	
1	2	2	5	10	19	36	
2	4	4	9	18	35	68	
3	8	8	17	34	67	132	
4	16	16	33	66	131	260	

Aus einer Zahl  $n$ , die im Wertebereich von  $c$  liegt, können auf folgende Weise die Zahlen  $x$  und  $y$  mit  $c(x, y) = n$  wieder zurückgewonnen werden:

Bestimme die größte Zahl  $k$  mit  $2^k \leq n$ .

$$x := n - 2^k;$$

$$y := k - x$$

Es ist klar, daß sowohl die Funktion  $c$ , als auch die beiden Umkehrfunktionen, die wir im folgenden  $c_1, c_2$  nennen, WHILE- (sogar LOOP-) berechenbar sind. (Es ist unerheblich, wie  $c_1, c_2$  auf Werten, die nicht im Wertebereich von  $c$  liegen, definiert sind).

Sei  $(n_1, n_2, \dots, n_k)$  der Inhalt eines Stacks, wobei  $n_1$  das oberste Stackelement ist. Mit Hilfe der Funktion  $c$  stellen wir eine solche Zahlenfolge durch eine einzige Zahl  $n$  wie folgt dar:

$$n = c(n_1, c(n_2, \dots, c(n_k, 0) \dots))$$

Die Stackoperationen sind nun leicht programmierbar:

**INIT(stack)** wird simuliert durch:  $n := 0$

**PUSH(a, stack)** wird simuliert durch:  $n := c(a, n)$

**POP(stack)** wird simuliert durch:

```
result := c1(n) ;
n := c2(n) ;
RETURN result
```

Die Abfrage “size(stack) ≠ 1” kann simuliert werden durch:  $c_2(n) ≠ 0$

Durch diese Hinweise ist klar, daß  $c$  WHILE-berechenbar ist.

Wir fassen zusammen:

### Satz.

**ES GIBT TOTALE, WHILE-BERECHENBARE FUNKTIONEN, DIE NICHT LOOP-BERECHENBAR SIND.**

## 2.6 Halteproblem, Unentscheidbarkeit, Reduzierbarkeit

Der Berechenbarkeitsbegriff ist auf Funktionen zugeschnitten. Wir wollen nun einen entsprechenden Begriff für Sprachen (bzw. Teilmengen von  $\mathbb{N}$ ) einführen.

**Definition.** Eine Menge  $A \subseteq \Sigma^*$  heißt *entscheidbar*, falls die *charakteristische Funktion* von  $A$ , nämlich  $\chi_A : \Sigma^* \rightarrow \{0, 1\}$ , berechenbar ist. Hierbei ist für alle  $w \in \Sigma^*$ :

$$\chi_A(w) = \begin{cases} 1, & w \in A \\ 0, & w \notin A \end{cases}$$

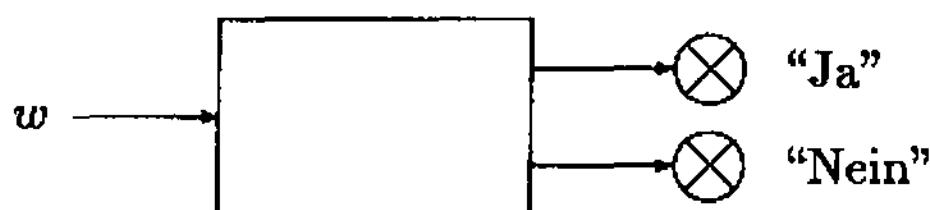
Eine Menge  $A \subseteq \Sigma^*$  heißt *semi-entscheidbar*, falls die "halbe" charakteristische Funktion von  $A$ , nämlich  $\chi'_A : \Sigma^* \rightarrow \{0, 1\}$ , berechenbar ist. Es gilt für alle  $w \in \Sigma^*$ :

$$\chi'_A(w) = \begin{cases} 1, & w \in A \\ \text{undefiniert}, & w \notin A \end{cases}$$

Die Definitionen lassen sich bei Bedarf natürlich sinngemäß auch auf Mengen  $A \subseteq \mathbb{N}$  übertragen.

Im Zusammenhang mit der Frage der Entscheidbarkeit werden Sprachen auch oft (*Entscheidungs-*) *Probleme* genannt. Die Darstellung von Sprachen geschieht dann oft in der Form von *gegeben* - *gefragt* Angaben (vgl. z.B. Seite 154).

Bildhaft gesprochen besagen die beiden Definitionen, daß im ersten Fall ein immer stoppender Algorithmus zur Verfügung steht, der das Entscheidungsproblem für  $A$  löst:



Im Fall der Semi-Entscheidbarkeit sieht das Bild so aus, daß der Algorithmus *nur einen* definitiven Ausgang hat. Falls der Algorithmus also für lange Zeit nicht gestoppt hat, so ist es nicht klar, ob der "Nein"-Fall ( $w \notin A$ ) vorliegt, oder ob er doch noch mit der Ausgabe "Ja" stoppt.



In diesem Fall ist die Situation also etwas unbefriedigend, aber bei vielen algorithmischen Problemen ist es das Beste, was erreichbar ist (z.B. bei Entscheidungsverfahren für die Prädikatenlogik, "Theorembeweisern").

Der folgende Satz ist offensichtlich.

**Satz.**

EINE SPRACHE  $A$  IST ENTSCHEIDBAR GENAU DANN WENN SO-  
WOHL  $A$  ALS AUCH  $\overline{A}$  SEMI-ENTSCHEIDBAR SIND.

**Beweis:** Die Richtung von links nach rechts ist klar. Für die Umkehrung betrachten wir einen Semi-Entscheidungsalgorithmus  $M_1$  für  $A$  und einen entsprechenden  $M_2$  für  $\overline{A}$ . Dann liefert folgender Algorithmus ein Entscheidungsverfahren:

```

INPUT (x);
FOR s := 1, 2, 3, ... DO
    IF  $M_1$  bei Eingabe  $x$  stoppt in s Schritten
        THEN OUTPUT(1) END;
    IF  $M_2$  bei Eingabe  $x$  stoppt in s Schritten
        THEN OUTPUT(0) END;
END

```

■

Im folgenden vergleichen wir den Begriff der Semi-Entscheidbarkeit mit dem der *rekursiven Aufzählbarkeit*.

**Definition.** Eine Sprache  $A \subseteq \Sigma^*$  heißt *rekursiv aufzählbar*, falls  $A = \emptyset$  oder falls es eine totale und berechenbare Funktion  $f : \mathbb{N} \longrightarrow \Sigma^*$  gibt, so daß

$$A = \{f(0), f(1), f(2), \dots\}$$

Sprechweise:  $f$  zählt  $A$  auf. (Man beachte, daß  $f(i) = f(j)$  zulässig ist).

**Satz.**

EINE SPRACHE IST REKURSIV AUFZÄHLBAR GENAU DANN WENN SIE SEMI-ENTSCHEIDBAR IST.

**Beweis:** Die Richtung von links nach rechts ist einfach: Angenommen  $A$  ist rekursiv aufzählbar mittels der Funktion  $f$ . Dann ist das Folgende ein Semi-Entscheidungsverfahren für  $A$ :

```
INPUT (x);
FOR n := 0, 1, 2, 3, ... DO
    IF f(n) = x THEN OUTPUT (1) END;
END
```

Für die Umkehrung benötigen wir einen Trick, der oft *dove-tailing* genannt wird. Angenommen  $A \neq \emptyset$  ist semi-entscheidbar mittels Algorithmus  $M$ .  $a$  sei ein festgehaltenes Element aus  $A$ . Wir müssen eine *totale* und berechenbare Funktion  $f$  angeben, so daß  $A$  der Wertebereich von  $f$  ist. Der folgende Algorithmus berechnet  $f$ :

```
INPUT (n);
Interpretiere n als Codierung eines Paars von natürlichen Zahlen – etwa gemäß des Schemas auf Seite 112 – also n = c(x, y). Seien x und y die zugeordneten Zahlen, also x = c1(n), y = c2(n) (falls n nicht Codierung eines Paars (x, y) ist, so setze x = 0 und y = 0);
IF M angesetzt auf x stoppt in y Schritten (und gibt 1 aus)
    THEN OUTPUT (x) ELSE OUTPUT (a) END;
```

Der Algorithmus stoppt offensichtlich immer und kann nur Wörter ausgeben, die in  $A$  liegen. Daher ist  $f$  eine totale und berechenbare Funktion und der Wertebereich von  $f$  ist eine Teilmenge von  $A$ . Sei nun umgekehrt  $z \in A$  beliebig. Dann stoppt  $M$ , angesetzt auf  $z$  innerhalb einer gewissen Schrittzahl  $s$ . Sei  $n = c(z, s)$ . Dann gilt aufgrund der Konstruktion des Algorithmus' für  $f$ , daß  $f(n) = z$ . Also ist  $A$  eine Teilmenge des Wertebereichs von  $f$ . Somit hat  $f$  die gewünschten Eigenschaften. ■

*Bemerkung:* Die letzten beiden Sätze zusammengenommen ergeben, daß eine Sprache genau dann entscheidbar ist, wenn diese Sprache und ihr Komplement rekursiv aufzählbar sind.

*Bemerkung:* Zusammen mit der Diskussion auf Seite 90 ergibt sich, daß die folgenden Aussagen alle äquivalent sind:

$A$  ist rekursiv aufzählbar.

$A$  ist semi-entscheidbar.

$A$  ist vom Typ 0.

$A = T(M)$  für eine Turingmaschine  $M$ .

$\chi_A'$  ist berechenbar.

$A$  ist Definitionsbereich einer berechenbaren Funktion.

$A$  ist Wertebereich einer berechenbaren Funktion.

*Bemerkung:* Der Begriff der *Abzählbarkeit* (vgl. Anhang) kann so definiert werden, daß er dem der rekursiven Aufzählbarkeit – bis auf einen kleinen, aber wichtigen Unterschied – ähnlich sieht:

Eine Menge  $A$  heißt *abzählbar*, falls  $A = \emptyset$  oder falls es eine totale Funktion  $f$  gibt, so daß

$$A = \{f(0), f(1), f(2), \dots\}$$

Der Unterschied ist der, daß hier nicht die *Berechenbarkeit* von  $f$  verlangt wird. Im Englischen lauten die beiden Begriffe auch *enumerable* und *recursively enumerable*. Manche deutschsprachigen Autoren lassen das "rekursiv" weg und unterscheiden nur noch zwischen *abzählbar* und *aufzählbar*. Da der Unterschied zwischen beiden Definitionen überhaupt nichts mit *auf* versus *ab* zu tun hat, bleiben wir lieber bei der ausführlichen Sprechweise.

Der Unterschied zwischen rekursiver Aufzählbarkeit und Abzählbarkeit wird bei folgendem Beispiel klar: Jede Teilmenge  $A'$  einer abzählbaren Menge

$$A = \{f(0), f(1), f(2), \dots\}$$

ist wieder abzählbar. Sei etwa  $a \in A' \neq \emptyset$  ein festgehaltenes Element. Wenn wir

$$g(n) = \begin{cases} f(n), & f(n) \in A' \\ a, & \text{sonst} \end{cases}$$

setzen, so ist  $g$  sicher eine wohl-definierte (aber nicht notwendigerweise berechenbare) Funktion. Es gilt nun

$$A' = \{g(0), g(1), g(2), \dots\}$$

Nicht jede Teilmenge einer rekursiv aufzählbaren Menge muß dagegen wieder rekursiv aufzählbar sein.

Wir wollen nun ein paar nicht-entscheidbare Probleme kennenlernen. Bei den ersten dieser Probleme sollen Turingmaschinen selbst (in geeignet codierter Form) als Eingaben vorkommen. Wir müssen uns also kurz darum kümmern, wie man eine Turingmaschine als Wort über  $\{0, 1\}$  schreiben kann.

Zunächst nehmen wir an, daß die Elemente von  $\Gamma$  und  $Z$  durchnumeriert sind, also

$$\Gamma = \{a_0, a_1, \dots, a_k\}$$

und

$$Z = \{z_0, z_1, \dots, z_n\},$$

wobei festgelegt sein soll, welche Nummern die Symbole  $\square$ , 0, 1,  $\#$  und die Start- und Endzustände erhalten. Jeder  $\delta$ -Regel der Form

$$\delta(z_i, a_j) = (z_{i'}, a_{j'}, y)$$

ordnen wir das Wort

$$w_{i,j,i',j',y} = \#\#\text{bin}(i)\#\text{bin}(j)\#\text{bin}(i')\#\text{bin}(j')\#\text{bin}(m)$$

zu, wobei

$$m = \begin{cases} 0, & y = L \\ 1, & y = R \\ 2, & y = N \end{cases}$$

Alle diese zu  $\delta$  gehörenden Wörter schreiben wir nun in beliebiger Reihenfolge hintereinander und erhalten – als Zwischenschritt – einen Code der zugrundeliegenden Turingmaschine über dem Alphabet  $\{0, 1, \#\}$ .

Jedem solchen Wort können wir schließlich ein Wort über  $\{0, 1\}$  zuordnen, indem wir noch folgende Codierung vornehmen:

$$\begin{array}{lcl} 0 & \mapsto & 00 \\ 1 & \mapsto & 01 \\ \# & \mapsto & 11 \end{array}$$

Es ist klar, daß auf diese Weise nicht jedes Wort in  $\{0,1\}^*$  ein sinnvoller Code einer Turingmaschine ist. Sei aber  $\widehat{M}$  irgendeine beliebige, feste Turingmaschine, dann können wir für jedes  $w \in \{0,1\}^*$  festlegen, daß  $M_w$  eine bestimmte Turingmaschine bezeichnet, nämlich:

$$M_w = \begin{cases} M, & \text{falls } w \text{ Codewort von } M \text{ ist} \\ \widehat{M}, & \text{sonst} \end{cases}$$

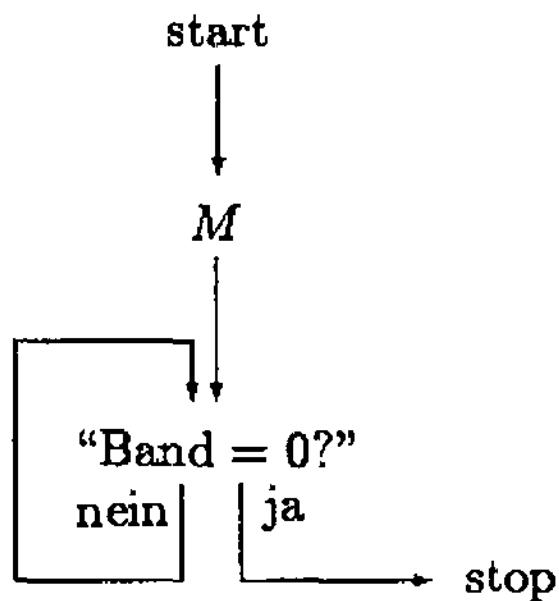
**Definition.** Unter dem *speziellen Halteproblem* oder *Selbst-anwendbarkeitsproblem* verstehen wir die Sprache

$$K = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ angesetzt auf } w \text{ hält}\}$$

**Satz.**

**DAS SPEZIELLE HALTEPROBLEM IST NICHT ENTSCHEIDBAR.**

**Beweis:** Angenommen,  $K$  ist entscheidbar. Dann ist  $\chi_K$  berechenbar mittels einer Turingmaschine  $M$ . Diese fiktive Maschine  $M$  könnte nun leicht zu einer Maschine  $M'$  umgebaut werden, die durch folgendes Bild definiert ist:



Das heißt,  $M'$  stoppt genau dann, wenn  $M$  0 ausgeben würde. Falls  $M$  1 ausgibt, gerät  $M'$  in eine Endlosschleife. Sei  $w'$  ein Codewort der Maschine  $M'$ . Nun gilt:

$$M' \text{ angesetzt auf } w' \text{ hält} \Leftrightarrow M \text{ angesetzt auf } w' \text{ gibt 0 aus}$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \chi_K(w') = 0 \\
 &\Leftrightarrow w' \notin K \\
 &\Leftrightarrow M_{w'} \text{ angesetzt auf } w' \text{ hält nicht} \\
 &\Leftrightarrow M' \text{ angesetzt auf } w' \text{ hält nicht}
 \end{aligned}$$

Dieser Widerspruch beweist, daß die Eingangsannahme falsch war:  $K$  ist nicht entscheidbar. ■

Wir werden noch eine ganze Reihe weiterer unentscheidbarer Probleme kennenlernen. Jedoch können wir uns für diese neuen Probleme *direkte*, und damit oft aufwendigen Beweise der Unentscheidbarkeit ersparen. Wir gehen nun anders vor. Wir führen neue Unentscheidbarkeitsbeweise dadurch, daß wir sie auf bereits bekannte unentscheidbare Sprachen zurückführen.

Wenn es uns gelingt, das Problem  $K$  als Spezialfall in ein neues, noch unbekanntes Problem sozusagen einzubetten (zu *reduzieren*), dann muß das neue Problem (erst recht) unentscheidbar sein. Diese Gedanken werden in der folgenden Definition und dem folgenden Lemma formal gefaßt.

**Definition.** Seien  $A \subseteq \Sigma^*$  und  $B \subseteq \Gamma^*$  Sprachen. Dann heißt  $A$  auf  $B$  *reduzierbar* – symbolisch mit  $A \leq B$  bezeichnet – falls es eine totale und berechenbare Funktion  $f : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$  gibt, so daß für alle  $x \in \Sigma^*$  gilt:

$$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

**Lemma.** Falls  $A \leq B$  und  $B$  entscheidbar (bzw. semi-entscheidbar) ist, so ist auch  $A$  entscheidbar (bzw. semi-entscheidbar).

**Beweis:** Es gelte  $A \leq B$  mittels Funktion  $f$ . Ferner sei  $\chi_B$  berechenbar. Dann ist auch die Komposition beider Funktionen  $\chi_B \circ f$  eine berechenbare Funktion. Es gilt

$$\chi_A(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & f(x) \in B \\ 0, & f(x) \notin B \end{array} \right\} = \chi_B(f(x))$$

Somit ist auch  $\chi_A$  berechenbar, also  $A$  entscheidbar.

Für den Fall der Semi-Entscheidbarkeit ersetze man  $\chi$  durch  $\chi'$  und 0 durch *undefiniert*. ■

Wir werden das Lemma immer in der logisch äquivalenten Form der Kontraposition anwenden: Sei  $A$  ein Problem, dessen Unentscheidbarkeit bereits nachgewiesen ist. Indem wir (lediglich)  $A \leq B$  zeigen, haben wir – mit Hilfe des Lemmas – schon den Nachweis geführt, daß  $B$  unentscheidbar ist. (Wäre  $B$  entscheidbar, so wäre es aufgrund des Lemmas auch  $A$ , Widerspruch).

**Definition.** Das (allgemeine) *Halteproblem* ist die Sprache

$$H = \{w\#x \mid M_w \text{ angesetzt auf } x \text{ hält}\}$$

**Satz.**

**DAS HALTEPROBLEM  $H$  IST NICHT ENTSCHEIDBAR.**

**Beweis:** Es genügt,  $K \leq H$  nachzuweisen (inhaltlich:  $K$  als Spezialfall in das Problem  $H$  einzubetten). Das ist hier völlig offensichtlich: Wähle  $f(w) = w\#w$ . Dann gilt:  $w \in K \Leftrightarrow f(w) \in H$ . ■

**Definition.** Das *Halteproblem auf leerem Band* ist die Sprache

$$H_0 = \{w \mid M_w \text{ angesetzt auf leerem Band hält}\}.$$

**Satz.**

**DAS HALTEPROBLEM AUF LEEREM BAND  $H_0$  IST NICHT ENTSCHEIDBAR.**

**Beweis:** Es genügt,  $H \leq H_0$  nachzuweisen.

Man kann jedem Wort  $w\#x$  eine Turingmaschine  $M$  zuordnen, die wie folgt verbal beschrieben ist.

Auf leerem Band gestartet schreibt  $M$  zunächst  $x$  aufs Band. Danach verhält sich  $M$  wie  $M_w$  (angesetzt auf  $x$ ). Es ist unerheblich, wie sich  $M$  verhält, wenn das Band zu Beginn nicht leer ist.

Die Funktion  $f$ , die Wörter der Form  $w\#x$  auf den Code der oben verbal beschriebenen Turingmaschine  $M$  abbildet, ist eine berechenbare Funktion und kann beliebig zu einer totalen Funktion ergänzt werden.

Nun gilt:

$$\begin{aligned} w\#x \in H &\iff M_w \text{ angesetzt auf } x \text{ hält} \\ &\iff M \text{ angesetzt auf leerem Band hält} \\ &\iff f(w\#x) \in H_0 \end{aligned}$$

Also vermittelt  $f$  die gewünschte Reduktion von  $H$  nach  $H_0$ . ■

Wir zeigen nun als nächstes ein sehr allgemeines Unentscheidbarkeitsresultat, das besagt, daß es hoffnungslos ist, einer Turingmaschine irgend einen Aspekt ihres funktionalen Verhaltens algorithmisch bestimmen zu wollen.

**Satz. (RICE)**

SEI  $\mathcal{R}$  DIE KLASSE ALLER TURING-BERECHENBAREN FUNKTIONEN. SEI  $\mathcal{S}$  EINE beliebige TEILMENGE HIERVON (MIT AUSNAHME VON  $\mathcal{S} = \emptyset$  UND  $\mathcal{S} = \mathcal{R}$ ). DANN IST DIE SPRACHE

$C(\mathcal{S}) = \{w \mid \text{DIE VON } M_w \text{ BERECHNETE FUNKTION LIEGT IN } \mathcal{S}\}$

UNENTSCHEIDBAR.

**Beweis:** Sei  $\Omega \in \mathcal{R}$  die überall undefinierte Funktion. Es ist entweder  $\Omega$  in  $\mathcal{S}$  oder nicht.

*Fall 1:*  $\Omega \in \mathcal{S}$ .

Da  $\mathcal{S} \neq \mathcal{R}$ , gibt es eine Funktion  $q \in \mathcal{R} - \mathcal{S}$ . Sei  $Q$  eine Turingmaschine, die  $q$  berechnet.

Jedem Wort  $w \in \{0,1\}^*$  ordnen wir nun ein Turingmaschine  $M$  zu, die wir verbal wie folgt beschreiben.

Angesetzt auf eine Eingabe  $y$  ignoriert  $M$  diese zunächst und verhält sich wie  $M_w$  angesetzt auf leerem Band. Falls diese Rechnung zu Ende kommt, so verhält sich  $M$  danach wie  $Q$  angesetzt auf  $y$ .

Für die von dieser Turingmaschine  $M$  berechnete Funktion  $g$  gilt nun:

$$g = \begin{cases} \Omega, & \text{falls } M_w \text{ auf leerem Band nicht stoppt} \\ q, & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Abbildung  $f$ , die  $w$  die Codierung von  $M$  zuordnet, ist total und berechenbar. Es gilt:

$$\begin{aligned} w \in H_0 &\implies M_w \text{ auf leerem Band stoppt} \\ &\implies M \text{ berechnet die Funktion } q \\ &\implies \text{die von } M_{f(w)} \text{ berechnete Funktion liegt nicht in } \mathcal{S} \\ &\implies f(w) \notin C(\mathcal{S}) \end{aligned}$$

Umgekehrt gilt:

$$\begin{aligned} w \notin H_0 &\implies M_w \text{ auf leerem Band stoppt nicht} \\ &\implies M \text{ berechnet die Funktion } \Omega \\ &\implies \text{die von } M_{f(w)} \text{ berechnete Funktion liegt in } \mathcal{S} \\ &\implies f(w) \in C(\mathcal{S}) \end{aligned}$$

Mit anderen Worten, die Funktion  $f$  vermittelt eine Reduktion von  $\overline{H_0}$  nach  $C(\mathcal{S})$ . Da  $H_0$  unentscheidbar ist, ist es auch  $\overline{H_0}$ , und damit auch  $C(\mathcal{S})$ .

*Fall 2:  $\Omega \notin \mathcal{S}$ .*

In diesem Fall zeigt man analog  $\overline{H_0} \leq C(\mathcal{S})$ . ■

*Beispiel:* Es folgt beispielsweise aus dem Satz von Rice, daß es nicht möglich ist, einer Turingmaschine anzusehen, ob sie eine konstante Funktion berechnet. Man wähle

$$\mathcal{S} = \{f \in \mathcal{R} \mid f \text{ ist eine konstante Funktion}\}.$$

Dann ist

$$C(\mathcal{S}) = \{w \mid M_w \text{ berechnet eine konstante Funktion}\}$$

unentscheidbar.

*Bemerkung:* Es gibt durchaus algorithmische Probleme, die noch "unlösbarer" sind als das Halteproblem, etwa das Äquivalenzproblem für Turingmaschinen:

$$\ddot{\mathcal{A}} = \{u \# v \mid M_u \text{ berechnet dieselbe Funktion wie } M_v\}$$

Es gilt:  $H \leq \tilde{A}$ , aber *nicht*  $\tilde{A} \leq H$ .

Tatsächlich kann man sogar unendliche Folgen von Problemen  $A_1, A_2, A_3, \dots$  angeben, so daß für alle  $i$ ,  $A_i \leq A_{i+1}$  gilt, aber nicht  $A_{i+1} \leq A_i$ . Man spricht vom (zunehmenden) *Grad der Unlösbarkeit*.

## 2.7 Das Postsche Korrespondenzproblem

Das *Postsche Korrespondenzproblem* (engl. Post's correspondence problem, abgekürzt: PCP) ist die folgende algorithmische Aufgabenstellung:

*gegeben:* Eine endliche Folge von Wortpaaren  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_k, y_k)$ , wobei  $x_i, y_i \in \Sigma^+$ . ( $\Sigma$  ist ein beliebiges Alphabet).

*gefragt:* Gibt es eine Folge von Indizes  $i_1, i_2, \dots, i_n \in \{1, 2, \dots, k\}$ ,  $n \geq 1$ , mit  $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n} = y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_n}$ ?

Wir nennen  $i_1, i_2, \dots, i_n$  dann eine *Lösung* des Korrespondenzproblems  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_k, y_k)$ .

*Beispiel:* Das Korrespondenzproblem

$$K = ((1, 101), (10, 00), (011, 11)),$$

also

$$\begin{array}{lll} x_1 = 1 & x_2 = 10 & x_3 = 011 \\ y_1 = 101 & y_2 = 00 & y_3 = 11 \end{array}$$

besitzt die Lösung  $(1, 3, 2, 3)$ , denn es gilt:

$$x_1 x_3 x_2 x_3 = 101110011 = y_1 y_3 y_2 y_3$$

Daß das PCP eine hohes Maß an "Komplexität" besitzt, zeigt das folgende harmlos aussehende Beispiel:

$$\begin{array}{llll} x_1 = 001 & x_2 = 01 & x_3 = 01 & x_4 = 10 \\ y_1 = 0 & y_2 = 011 & y_3 = 101 & y_4 = 001. \end{array}$$

Dieses Problem besitzt eine Lösung, aber die kürzeste Lösung besteht aus 66 Indizes: 2, 4, 3, 4, 4, 2, 1, 2, 4, 3, 4, 3, 4, 4, 3, 4, 4, 2, 1, 4, 4, 2,

1, 3, 4, 1, 1, 3, 4, 4, 4, 2, 1, 2, 1, 1, 3, 4, 3, 4, 1, 2, 1, 4, 4, 2, 1, 4, 1,  
1, 3, 4, 1, 1, 3, 1, 1, 3, 1, 2, 1, 4, 1, 1, 3.

*Bemerkung:* Der naive Algorithmus, der bei gegebener Eingabe  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_k, y_k)$  systematisch immer längere Indexfolgen  $i_1, i_2, \dots, i_n$  daraufhin untersucht, ob sie eine Lösung darstellen und im positiven Fall stoppt, demonstriert, daß das PCP *semi-entscheidbar* (oder *rekursiv aufzählbar*) ist: Es gibt ein Verfahren (das gerade Beschriebene), das bei Eingaben, die eine Lösung besitzen, diese nach endlich vielen Schritten findet und stoppt. Bei Eingaben, die keine Lösung besitzen, stoppt das Verfahren jedoch nicht.

Wir zeigen im folgenden, daß es ein immer stoppendes Verfahren nicht gibt, d.h. daß das PCP *unentscheidbar* ist. Dies führen wir zurück auf die Unentscheidbarkeit des Halteproblems H für Turingmaschinen. Genauer: Wir reduzieren zunächst H auf ein anderes Problem, genannt MPCP ("modifiziertes PCP"), und dann MPCP auf PCP.

Das Problem MPCP ist das folgende:

*gegeben:* wie beim PCP.

*gefragt:* Gibt es eine Lösung  $i_1, i_2, \dots, i_n$  mit  $i_1 = 1$  ?

**Lemma.**  $\text{MPCP} \leq \text{PCP}$ .

**Beweis:** Zunächst einige Notationen: Seien  $\$$  und  $\#$  neue Symbole, die im Alphabet  $\Sigma$  des MPCPs nicht vorkommen. Für ein Wort  $w = a_1 a_2 \dots a_m \in \Sigma^+$  sei

$$\begin{aligned}\bar{w} &= \# a_1 \# a_2 \# \dots \# a_m \# \\ \grave{w} &= \# a_1 \# a_2 \# \dots \# a_m \\ \acute{w} &= a_1 \# a_2 \# \dots \# a_m \#\end{aligned}$$

Jeder Eingabe  $K = ((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_k, y_k))$  für das MPCP wird nun folgendes zugeordnet:

$$f(K) = ((\bar{x}_1, \grave{y}_1), (\acute{x}_1, \grave{y}_1), (\acute{x}_2, \grave{y}_2), \dots, (\acute{x}_k, \grave{y}_k), (\$, \#\$))$$

Diese Abbildung  $f$  ist offensichtlich berechenbar. Wir zeigen nun, daß diese Funktion  $f$  eine Reduktion von MPCP nach PCP vermittelt, nämlich daß gilt:

$K$  besitzt eine Lösung mit  $i_1 = 1$  genau dann wenn  $f(K)$  (irgend) eine Lösung besitzt.

Angenommen,  $K$  besitze die Lösung  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  mit  $i_1 = 1$ , dann ist offensichtlich  $(1, i_2 + 1, \dots, i_n + 1, k + 2)$  eine Lösung für  $f(K)$ .

Andererseits, falls  $f(K)$  eine Lösung  $i_1, \dots, i_n$  besitzt, so kann wegen der Bauart der Wortpaare nur  $i_1 = 1$ ,  $i_n = k + 2$  und  $i_j \in \{2, \dots, k + 1\}$  für  $2 \leq j \leq n - 1$  sein. In diesem Fall ist  $(1, i_2 - 1, \dots, i_{n-1} - 1)$  eine Lösung für  $K$ . ■

**Lemma.**  $H \leq \text{MPCP}$ .

**Beweis:** Gegeben sei eine Turingmaschine  $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$  (genauer gesagt: deren Codierung) und ein Eingabewort  $w \in \Sigma^*$ . Unsere Aufgabe besteht nun darin, eine algorithmische Vorschrift anzugeben, die jedes solche Paar  $(M, w)$  überführt in eine Folge  $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$ , so daß gilt:

$M$  angesetzt auf  $w$  stoppt  
genau dann wenn  
 $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$  eine Lösung mit  $i_1 = 1$  besitzt.

Das Alphabet für das zu konstruierende MPCP wird  $\Gamma \cup Z \cup \{\#\}$  sein, und das erste Wortpaar lautet:  $(\#, \#z_0w\#)$ . Die uns interessierenden Lösungsworte müssen also mit diesem Paar beginnen. Die weiteren Paare können in folgende Gruppen unterteilt werden:

1. *Kopierregeln:*

$(a, a)$  für alle  $a \in \Gamma \cup \{\#\}$

2. *Überführungsregeln:*

- |                         |   |
|-------------------------|---|
| $(za, z'c)$             | falls $\delta(z, a) = (z', c, N)$                                 |
| $(za, cz')$             | falls $\delta(z, a) = (z', c, R)$                                 |
| $(bza, z'bc)$           | falls $\delta(z, a) = (z', c, L)$ , für alle $b \in \Gamma$       |
| $(\#za, \#z'\square c)$ | falls $\delta(z, a) = (z', c, L)$                                 |
| $(z\#, z'c\#)$          | falls $\delta(z, \square) = (z', c, N)$                           |
| $(z\#, cz'\#)$          | falls $\delta(z, \square) = (z', c, R)$                           |
| $(bz\#, z'bc\#)$        | falls $\delta(z, \square) = (z', c, L)$ , für alle $b \in \Gamma$ |

**3. Löschregeln:**

$(az_e, z_e)$  und  $(z_e a, z_e)$  für alle  $a \in \Gamma$  und  $z_e \in E$

**4. Abschlußregeln:**

$(z_e \#\#, \#)$  für alle  $z_e \in E$ .

Falls die Turingmaschine  $M$  bei Eingabe  $w$  stoppt, so gibt es eine Folge von Konfigurationen  $(k_0, k_1, \dots, k_t)$ , so daß gilt:  $k_0 = z_0 w$ ,  $k_t$  ist eine Endkonfiguration (also  $k_t = u z_e v$  mit  $u, v \in \Sigma^*$  und  $z_e \in E$ ), und  $k_i \vdash k_{i+1}$  für  $i = 0, 1, \dots, t-1$ . Die oben angegebene Eingabe für das MPCP besitzt dann eine Lösung mit einem Lösungswort der Form

$$\# k_0 \# k_1 \# \dots \# k_t \# k'_t \# k''_t \# \dots \# z_e \# \#$$

Hierbei entstehen  $k'_t, k''_t, \dots$  aus  $k_t = u z_e v$  durch Löschen von Nachbarsymbolen von  $z_e$ .

Der erste Teil der Lösung baut sich so auf, daß die Folge der  $x_{ij}$  eine Konfiguration hinter der Folge der  $y_{ij}$  „nachhinkt“. Der „Überhang“ hat also immer die Länge einer Konfiguration.

Falls umgekehrt die obige Eingabe für das MPCP eine Lösung (mit  $i_1 = 1$ ) besitzt, so läßt sich aus dieser Lösung in ähnlicher Weise eine stoppende Rechnung von  $M$  bei Eingabe  $w$  ablesen.

Damit ist gezeigt, daß die Abbildung, die jedem Paar  $(M, w)$ , wie oben angegeben, eine Eingabe für das MPCP zuordnet, eine Reduktion von  $H$  nach MPCP vermittelt. ■

Mit diesen beiden Lemmata und unter Ausnützen der Tatsache, daß  $H$  unentscheidbar ist, ergibt sich nun der folgende Satz.

**Satz.**

**DAS POSTSCHE KORRESPONDENZPROBLEM PCP IST UNENTSCHEIDBAR.**

Sogar der folgende spezielle Fall ist unentscheidbar:

**Satz.**

**DAS PCP IST BEREITS UNENTSCHEIDBAR, WENN MAN SICH AUF DAS ALPHABET  $\{0, 1\}$  BESCHRÄNKKT.**

**Beweis:** Wir nennen diese Variante des PCPs das 01-PCP und zeigen, daß gilt:  $\text{PCP} \leq 01\text{-PCP}$ . Sei  $\Sigma = \{a_1, \dots, a_m\}$  das Alphabet des gegebenen PCPs. Jedem Symbol  $a_j \in \Sigma$  ordnen wir das Wort  $\widehat{a_j} = 01^j \in \{0, 1\}^*$  zu und verallgemeinern dies auf beliebige Wörter  $w = a_1 \dots a_n \in \Sigma^+$  zu  $\widehat{w} = \widehat{a_1} \dots \widehat{a_n}$ . Dann gilt offensichtlich:

$(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$  hat eine Lösung  
genau dann wenn  
 $(\widehat{x}_1, \widehat{y}_1), \dots, (\widehat{x}_k, \widehat{y}_k)$  eine Lösung hat.

■

**Bemerkung:** Sei  $\text{PCP}_k$  die Variante des PCPs, wobei die Eingabe aus genau  $k$  Wortpaaren bestehen muß. Man kann zeigen, daß bereits  $\text{PCP}_k$  für  $k \geq 9$  unentscheidbar ist. Dagegen ist  $\text{PCP}_k$  für  $k \leq 2$  entscheidbar. Der Status von  $\text{PCP}_k$  für  $k \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  ist bis heute ein offenes Problem.

**Bemerkung:** Wie zu Beginn dieses Abschnitts (S. 125) argumentiert, ist das PCP semi-entscheidbar. Da wir nun  $H \leq \text{PCP}$  gezeigt haben, folgt mit dem Lemma auf Seite 120, daß auch das Halteproblem  $H$  semi-entscheidbar ist. Das heißt inhaltlich folgendes: Es gibt eine Turingmaschine  $U$ , die bei Eingabe von  $w \# x$  sich verhält wie  $M_w$  bei Eingabe  $x$  – zumindest, was das Halten bzw. Nicht-Halten betrifft. Man könnte leicht  $U$  auch so angeben, daß  $U$  bei Eingabe von  $w \# x$  gerade die von  $M_w$  berechnete Funktion an der Stelle  $x$  – sofern definiert – berechnet.

Mit anderen Worten,  $U$  verhält sich wie ein *Turingmaschinen-Interpreter*, selber programmiert als Turingmaschine.  $U$  kann sozusagen durch Angabe des ersten Teils des Eingabe universell „programmiert“ werden. Das heißt,  $w$  kann als das Programm und  $x$  als die „eigentliche“ Eingabe aufgefaßt werden. Wir nennen  $U$  eine *universelle Turingmaschine*.

Die Existenz von universellen Turingmaschinen wird als weiteres Indiz zugunsten der Churchschen These aufgefaßt.

Wir verwenden nun das PCP, um den Bogen zur Theorie der formalen Sprachen zu spannen.

**Satz.**

DAS SCHNITTPROBLEM FÜR KONTEXTFREIE SPRACHEN (VGL. SEITE 50, 83) IST UNENTSCHEIDBAR.

**Beweis:** Wir zeigen: PCP  $\leq$  Schnittproblem. Jedem Postschen Korrespondenzproblem  $K = ((x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k))$  (über irgendeinem Alphabet  $\Sigma$ ) müssen effektiv zwei Grammatiken  $G_1, G_2$  zugeordnet werden, so daß gilt:

$$\begin{aligned} &K \text{ hat Lösung} \\ &\text{genau dann wenn} \\ &\text{es gibt ein Wort in } L(G_1) \cap L(G_2). \end{aligned}$$

Es liegt nahe, daß die Konstruktion so angelegt sein muß, daß mittels  $G_1$  Folgen von  $x_i$ -Wörtern erzeugt werden können und mittels  $G_2$  Folgen von  $y_i$ -Wörtern. Es muß jedoch auch sichergestellt sein, daß die Indizes der  $x_i$  mit denen der  $y_i$  in jedem potentiellen (Lösungs-) Wort, das von beiden Grammatiken erzeugt werden kann, übereinstimmt. Um diese Indexübereinstimmung sicherzustellen, fügen wir dem Alphabet der Grammatiken die Symbole  $a_1, \dots, a_k$  hinzu.

Sei  $G_i = (\{S_i\}, \Sigma \cup \{a_1, \dots, a_k\}, P_i, S_i)$ ,  $i = 1, 2$ ,

wobei

$$\begin{aligned} P_1 = & \{S_1 \rightarrow a_1 x_1 \mid \dots \mid a_k x_k\} \\ & \cup \{S_1 \rightarrow a_1 S_1 x_1 \mid \dots \mid a_k S_1 x_k\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} P_2 = & \{S_2 \rightarrow a_1 y_1 \mid \dots \mid a_k y_k\} \\ & \cup \{S_2 \rightarrow a_1 S_2 y_1 \mid \dots \mid a_k S_2 y_k\} \end{aligned}$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned} &K \text{ besitzt die Lösung } i_1, \dots, i_n \\ &\text{genau dann wenn} \end{aligned}$$

$$a_{i_n} \dots a_{i_2} a_{i_1} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n} = a_{i_n} \dots a_{i_2} a_{i_1} y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_n} \in L(G_1) \cap L(G_2).$$

■

Wir stellen fest, daß die Grammatiken  $G_1, G_2$  sogar *deterministisch* kontextfrei sind. Deshalb haben wir sogar ein stärkeres Resultat bewiesen:

**Satz.**

DAS SCHNITTPROBLEM FÜR DETERMINISTISCH KONTEXTFREIE SPRACHEN IST UNENTSCHEIDBAR.

Ferner erhalten wir:

**Satz.**

DAS ÄQUIVALENZPROBLEM FÜR KONTEXTFREIE SPRACHEN IST UNENTSCHEIDBAR.

**Beweis:** Wir zeigen, daß das Schnittproblem für *deterministisch* kontextfreie Sprachen auf das Äquivalenzproblem für kontextfreie Sprachen reduzierbar ist. Hierzu nutzen wir aus, daß die deterministisch kontextfreien Sprachen effektiv unter Komplementbildung abgeschlossen und die kontextfreien Sprachen effektiv unter Vereinigung abgeschlossen sind.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 (G_1, G_2) \in \text{Schnittproblem} &\Leftrightarrow L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset \\
 &\Leftrightarrow L(G_1) \subseteq \overline{L(G_2)} \\
 &\Leftrightarrow L(G_1) \subseteq L(G'_2) \\
 &\Leftrightarrow L(G_1) \cup L(G'_2) = L(G'_2) \\
 &\Leftrightarrow L(G_3) = L(G'_2) \\
 &\Leftrightarrow (G_3, G'_2) \in \text{Äquivalenzproblem}
 \end{aligned}$$

Hierbei bedeutet  $G_2 \mapsto G'_2$  den Übergang zur Komplementgrammatik (bei deterministisch kontextfreien Grammatiken), und  $G_1, G'_2 \mapsto G_3$  den Übergang zur Vereinigungsgrammatik (bei kontextfreien Grammatiken). ■

**Bemerkung:** Aus dem Beweis geht nicht hervor, ob das Äquivalenzproblem für *deterministisch* kontextfreie Sprachen auch unentscheidbar ist. Tatsächlich ist dieses bis heute ein offenes Problem.

**Bemerkung:** Es folgt natürlich auch sofort die Unentscheidbarkeit des Äquivalenzproblems für jeden Formalismus, in den kontextfreie Gram-

matiken effektiv übersetzbare sind: nichtdeterministische Kellerautomaten, BNF, EBNF, Syntaxdiagramme, LBAs, kontextsensitive Grammatiken, Turingmaschinen, LOOP-, WHILE-, GOTO-Programme, usw.

**Satz.**

DAS PROBLEM, VON EINER KONTEXTFREIEN GRAMMATIK FESTZUSTELLEN, OB SIE MEHRDEUTIG IST (VGL. S. 25), IST UNENTSCHEIDBAR.

**Beweis:** Wir zeigen: PCP  $\leq$  Mehrdeutigkeitsproblem. Jedem Postschen Korrespondenzproblem  $K = ((x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k))$  (über einem Alphabet  $\Sigma$ ) muß effektiv eine kontextfreie Grammatik  $G$  zugeordnet werden, so daß gilt:

$K$  hat Lösung genau dann wenn es ein Wort in  $L(G)$  gibt, das zwei strukturell unterschiedliche Ableitungen besitzt.

Die gesuchte Grammatik  $G$  ist ganz ähnlich wie die beiden Grammatiken  $G_1, G_2$  beim Schnittproblem konstruiert.

Das Alphabet der Grammatik besteht aus  $\Sigma$  und zusätzlichen neuen Symbolen  $a_1, \dots, a_k$ .

Sei  $G = (\{S, S_1, S_2\}, \Sigma \cup \{a_1, \dots, a_k\}, P, S)$

wobei

$$\begin{aligned} P &= \{S \rightarrow S_1 \mid S_2\} \\ &\cup \{S_1 \rightarrow a_1 x_1 \mid \dots \mid a_k x_k\} \\ &\cup \{S_1 \rightarrow a_1 S_1 x_1 \mid \dots \mid a_k S_1 x_k\} \\ &\cup \{S_2 \rightarrow a_1 y_1 \mid \dots \mid a_k y_k\} \\ &\cup \{S_2 \rightarrow a_1 S_2 y_1 \mid \dots \mid a_k S_2 y_k\} \end{aligned}$$

Nun gilt:

$K$  besitzt die Lösung  $i_1, \dots, i_n$  genau dann wenn das Wort  $a_{i_n} \dots a_{i_2} a_{i_1} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n} = a_{i_n} \dots a_{i_2} a_{i_1} y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_n}$  durch eine Ableitung, die mit  $S \Rightarrow S_1$  beginnt, und eine zweite, die mit  $S \Rightarrow S_2$  beginnt, hergeleitet werden kann. ■

**Satz.**

DAS LEERHEITSPROBLEM FÜR TYP 1 SPRACHEN IST NICHT ENTSCHEIDBAR.

**Beweis:** Wir reduzieren das obige Schnittproblem für kontextfreie Sprachen auf dieses Problem. Da die Typ 1 Sprachen effektiv unter Schnitt abgeschlossen sind, gibt es eine berechenbare Abbildung  $(G_1, G_2) \mapsto G_3$  mit  $L(G_3) = L(G_1) \cap L(G_2)$ . Diese Abbildung vermittelt also die gewünschte Reduktion. ■

## 2.8 Der Gödelsche Satz

In diesem Abschnitt soll ein berühmter Satz bewiesen werden, der allgemein als “der Gödelsche Satz” bekannt ist (vgl. Hofstadter). Es wird im Kontext der Arithmetik, der Zahlentheorie, nachgewiesen, daß die Mittel der Mathematik, das Finden von Beweisen, seine Grenzen hat: jedes Beweissystem für die wahren arithmetischen Formeln ist notwendigerweise unvollständig. Das heißt, es bleiben immer Formeln übrig, die zwar wahr, aber nicht als solche beweisbar sind.

Wir betrachten zunächst arithmetische Formeln; dies sind Formeln, die mittels Quantoren, Variablen, Konstanten, der Relation  $=$  und den Operatoren  $+$  und  $*$  aufgebaut sind.

**Definition.** Der syntaktische Aufbau eines (arithmetischen) *Terms* ist induktiv wie folgt definiert:

- Jede Zahl  $n \in \mathbb{N}$  ist ein Term.
- Jede Variable  $x_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , ist ein Term.
- Wenn  $t_1$  und  $t_2$  Terme sind, dann auch  $(t_1 + t_2)$  und  $(t_1 * t_2)$ .

Der syntaktische Aufbau einer (arithmetischen) *Formel* ist induktiv wie folgt definiert:

- Wenn  $t_1$  und  $t_2$  Terme sind, dann ist  $(t_1 = t_2)$  eine Formel.
- Wenn  $F, G$  Formeln sind, dann sind auch  $\neg F$ ,  $(F \wedge G)$  und  $(F \vee G)$  Formeln.
- Wenn  $x$  eine Variable und  $F$  eine Formel ist, dann sind auch  $\exists x F$  und  $\forall x F$  Formeln.

Freie und gebundene Variablen sind wie üblich definiert. (Gebundene Variablen sind solche, die im Wirkungsbereich eines Quantors stehen).

Beispiel einer Formel der Arithmetik:

$$\forall x \exists y \forall z (((x * y) = z) \wedge ((1 + x) = (x * y)))$$

Wir geben solchen Formeln nun eine semantische Interpretation über den natürlichen Zahlen wie folgt:

Sei  $\phi : V \rightarrow \mathbb{N}$  eine sogenannte *Belegung* (hierbei ist  $V$  die Menge der *Variablen*). Wir erweitern die Anwendung von  $\phi$  auch auf Terme der Arithmetik wie folgt:

$$\begin{aligned}\phi(n) &= n \\ \phi((t_1 + t_2)) &= \phi(t_1) + \phi(t_2) \\ \phi((t_1 * t_2)) &= \phi(t_1) \cdot \phi(t_2)\end{aligned}$$

Auf der rechten Seite der Gleichungen sind die Additions- bzw. Multiplikationsfunktion auf den natürlichen Zahlen gemeint.

*Beispiel:* Sei  $\phi$  eine Belegung, die  $x$  auf 10 und  $y$  auf 8 abbildet. Dann ist

$$\phi((x + (5 * y))) = 10 + 5 \cdot 8 = 50.$$

Wir verabreden außerdem folgende Notationen: Mit  $F(x/n)$  bezeichnen wir diejenige Formel, die aus  $F$  entsteht, indem alle freien Vorkommen von  $x$  durch die Konstante  $n$  ersetzt werden. Wenn aus dem Kontext klar ist, welche Variable ersetzt werden soll (weil z.B. nur eine Variable frei vorkommt), so schreiben wir auch  $F(n)$ . Ferner drücken wir durch die Schreibweise  $F(x_1, \dots, x_n)$  aus, daß in der Formel  $F$  genau die Variablen  $x_1, \dots, x_n$  frei vorkommen.

**Definition.** Für arithmetische Formeln  $F$  definieren wir den Begriff "F ist wahr" wie folgt:

$(t_1 = t_2)$  ist wahr, falls  $\phi(t_1) = \phi(t_2)$  für alle Belegungen  $\phi$  gilt.

$\neg F$  ist wahr, falls  $F$  nicht wahr ist.

$(F \wedge G)$  ist wahr, falls  $F$  wahr ist und  $G$  wahr ist.

$(F \vee G)$  ist wahr, falls  $F$  wahr ist oder  $G$  wahr ist.

$\exists x F$  ist wahr, falls es ein  $n \in \mathbb{N}$  gibt, so daß  $F(x/n)$  wahr ist.

$\forall x F$  ist wahr, falls für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt, daß  $F(x/n)$  wahr ist.

**Beispiele:** Die Formel  $\forall x \exists y ((x + y) = (x * (x + 1)))$  ist wahr, denn für jede natürliche Zahl  $x$  gibt es ein  $y$  mit  $x + y = x \cdot (x + 1)$ , wähle nämlich  $y = x \cdot x$ .

Die Formel

$$\forall x \exists y ((x = 0) \vee ((x * y) = 1))$$

ist nicht wahr, da wir uns auf den Grundbereich der natürlichen Zahlen festgelegt haben. (Die Formel wäre dagegen für reelle Zahlen wahr).

**Definition.** Eine Funktion  $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  ist *arithmetisch repräsentierbar*, falls es eine arithmetische Formel  $F(x_1, \dots, x_k, y)$  gibt, so daß für alle  $n_1, \dots, n_k, m \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\begin{aligned} f(n_1, \dots, n_k) &= m \\ \text{genau dann wenn} \\ F(n_1, \dots, n_k, m) &\text{ wahr ist.} \end{aligned}$$

**Beispiele:** Die Additionsfunktion ist arithmetisch repräsentierbar mittels:

$$(y = (x_1 + x_2))$$

Analog ist es mit der Multiplikation. Die Funktionen DIV und MOD sind arithmetisch repräsentierbar durch:

$$\exists r ((r < x_2) \wedge (x_1 = y * x_2 + r))$$

und

$$\exists k ((y < x_2) \wedge (x_1 = k * x_2 + y))$$

In den obigen beiden Formeln kommt die (zunächst nicht zulässige) Teilformel  $(a < b)$  vor. Diese läßt sich wie folgt definieren:

$$\exists z (a + z + 1 = b)$$

Analog lassen sich die Relationen  $>$ ,  $\leq$ ,  $\geq$  definieren.

Wir haben bei obigen Beispielen der besseren Lesbarkeit wegen einige Klammern weggelassen und verabreden für das Folgende auch noch die Schreibweisen

$$\forall x < k (\dots) \text{ bzw. } \exists x < k (\dots)$$

für

$$\forall x (\neg(x < k) \vee (\dots)) \text{ bzw. } \exists x ((x < k) \wedge (\dots))$$

Als Vorbereitung für den nachfolgenden Beweis wollen wir uns mit der Codierung von beliebigen Zahlenfolgen beschäftigen. Eine Zahlenfolge  $(n_0, \dots, n_k)$  können wir aus einer einzelnen (geeignet gewählten) Zahl  $a$  wie folgt zurückerhalten:

$$n_i = a \text{ MOD } (1 + (i + 1) \cdot b)$$

Hierbei ist  $b$  gleichfalls geeignet zu wählen. Es ist klar, daß auf diese Weise jedem  $a, b, i$  genau ein  $n_i$  zugeordnet wird.

Die obige Formel kann arithmetisiert werden. Es gilt nämlich, daß

$$G(a, b, i, y) := y < (1 + (i + 1) * b) \wedge \exists k (a = y + k * (1 + (i + 1) * b))$$

eine wahre Formel ist, genau dann wenn  $y = a \text{ MOD } (1 + (i + 1) \cdot b)$ .

Das folgende Lemma basiert auf dem Chinesischen Restsatz.

**Lemma.** Für jede Zahlenfolge  $(n_0, \dots, n_k)$  gibt es  $a$  und  $b$ , so daß für  $i = 0, 1, \dots, k$  gilt:

$$n_i = a \text{ MOD } (1 + (i + 1) \cdot b)$$

(gleichwertig:  $G(a, b, i, n_i)$  ist wahr).

**Beweis:** Wir setzen  $s = \max(k, n_0, \dots, n_k)$  und wählen  $b = s!$ . Wir zeigen zunächst, daß die Zahlen  $b_i = 1 + (i + 1) \cdot b$  paarweise teilerfremd sind. Angenommen, es gibt eine Primzahl  $p$ , die sowohl  $b_i$  als auch  $b_j$  teilt ( $i < j$ ). Dann teilt  $p$  auch  $b_j - b_i = (j - i) \cdot b$ . Da  $(j - i) \leq k \leq s$ , gilt:  $(j - i)$  teilt  $b$ . Somit folgt:  $p$  teilt  $b$ . Zusammen mit  $p$  teilt  $b_i$  ergibt sich:  $p$  teilt 1, ein Widerspruch.

Als nächstes zeigen wir, daß zu je zwei verschiedenen Zahlen  $a$  und  $a'$  mit  $0 \leq a < a' < b_0 \cdot b_1 \cdot \dots \cdot b_k$  auch die Lösungen der Restsysteme

$$n_i = a \text{ MOD } b_i \quad (i = 0, \dots, k)$$

$$n'_i = a' \text{ MOD } b_i \quad (i = 0, \dots, k)$$

verschieden sind. Angenommen,  $(n_0, \dots, n_k) = (n'_0, \dots, n'_k)$ . Hieraus folgt, daß jedes  $b_i$  die Zahl  $a' - a$  teilt. Wegen der Teilerfremdheit der  $b_i$  folgt, daß  $b_0 \cdot b_1 \cdot \dots \cdot b_k$  auch  $a' - a$  teilt. Da  $a' - a < b_0 \cdot b_1 \cdot \dots \cdot b_k$ , ist dies ein Widerspruch.

Die Zahlen  $a \in \{0, \dots, b_0 \cdot b_1 \cdot \dots \cdot b_k - 1\}$  liefern somit insgesamt  $b_0 \cdot b_1 \cdot \dots \cdot b_k$  viele verschiedene Restsysteme und somit  $b_0 \cdot b_1 \cdot \dots \cdot b_k$  viele Lösungsfolgen  $(n_0, \dots, n_k)$  mit der Eigenschaft  $n_i < b_i$ . Somit tritt jede dieser Zahlenfolgen einmal als Lösung eines Restsystems auf.

Zu der vorgelegten Zahlenfolge  $(n_0, \dots, n_k)$  wähle man daher  $b$  wie oben angegeben und  $a$  so, daß die Folge Lösung des zu  $a$  gehörenden Restsystems ist. ■

### Satz.

**JEDE WHILE-BERECHENBARE FUNKTION IST ARITHMETISCH REPRÄSENTIERBAR.**

**Beweis:** Wir zeigen, daß es für jedes WHILE-Programm  $P$ , das die Programmvariablen  $x_0, \dots, x_k$  enthält, eine Formel  $F_P$  gibt mit den freien Variablen  $x_0, \dots, x_k$  und  $y_0, \dots, y_k$ , so daß für alle  $m_i$  und  $n_i$  aus  $\mathbb{N}$  gilt:

$F_P(m_0, \dots, m_k, n_0, \dots, n_k)$  ist wahr genau dann wenn  $P$ , gestartet mit den Variablenwerten  $m_0, \dots, m_k$  stoppt und die Programmvariablen dann die Werte  $n_0, \dots, n_k$  besitzen.

Der Satz ergibt sich dann folgendermaßen: Angenommen, das WHILE-Programm  $P$  berechnet eine  $n$ -stellige Funktion  $f$  mit  $n \leq k$ . Dann wird  $f$  durch folgende Formel  $F$  arithmetisch repräsentiert:

$$F(x_1, \dots, x_n, y) = \exists w_1 \dots \exists w_k F_P(0, x_1, \dots, x_n, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-n}, y, w_1, \dots, w_k)$$

Wir zeigen die Behauptung nun durch Induktion über den Aufbau des WHILE-Programms  $P$ .

$P$  habe die Form  $P = x_i := x_j + c$ .

Dann ist  $F_P = (y_i = x_j + c) \wedge \bigwedge_{k \neq i} (y_k = x_k)$ .

$P$  habe die Form  $P = x_i := x_j - c$ .

Dann ist

$$F_P = [(x_j < c) \vee (x_j = y_i + c)] \wedge [(x_j \geq c) \vee (y_i = 0)] \wedge \bigwedge_{k \neq i} (y_k = x_k)$$

$P$  habe die Form  $P = Q; R$ .

Dann existieren nach Induktionsvoraussetzung Formeln  $F_Q$  und  $F_R$ . Wir setzen:

$$F_P = \exists z_0 \dots \exists z_k (F_Q(x_0, \dots, x_k, z_0, \dots, z_k) \wedge F_R(z_0, \dots, z_k, y_0, \dots, y_k))$$

Den Fall der LOOP-Schleife brauchen wir nicht behandeln, da diese durch eine WHILE-Schleife simuliert werden kann. Habe also  $P$  die Form  $P = \text{WHILE } x_i \neq 0 \text{ DO } Q \text{ END}$ .

Nach Induktionsvoraussetzung existiert  $F_Q$ . Unter Verwenden der Formel  $G$  des vorigen Lemmas setzen wir:

$$F_P = \exists a_0 \exists b_0 \dots \exists a_k \exists b_k \exists t \quad (1)$$

$$[ G(a_0, b_0, 0, x_0) \wedge \dots \wedge G(a_k, b_k, 0, x_k) \wedge \quad (2)$$

$$G(a_0, b_0, t, y_0) \wedge \dots \wedge G(a_k, b_k, t, y_k) \wedge \quad (3)$$

$$\forall j < t \exists w (G(a_i, b_i, j, w) \wedge \neg(w = 0)) \wedge \quad (4)$$

$$G(a_i, b_i, t, 0) \wedge \quad (5)$$

$$\forall j < t \exists w_0 \dots \exists w_k \exists w'_0 \dots \exists w'_k \quad (6)$$

$$[ F_Q(w_0, \dots, w_k, w'_0, \dots, w'_k) \wedge$$

$$G(a_0, b_0, j, w_0) \wedge \dots \wedge G(a_k, b_k, j, w_k) \wedge$$

$$G(a_0, b_0, j + 1, w'_0) \wedge \dots \wedge G(a_k, b_k, j + 1, w'_k) ] ]$$

Wir besprechen die einzelnen Zeilen dieser Formel. In Zeile (1) wird die Existenz von Zahlenfolgen, jeweils repräsentiert durch ein Paar von Zahlen  $a_n, b_n$  gemäß vorigen Lemmas, behauptet. Die Zahlenfolge, die sich hinter  $a_n, b_n$  ( $n = 0, \dots, k$ ) verbirgt, soll die Zahlenwerte darstellen, die die Programmvariable  $x_n$  im Verlauf von  $t$  WHILE-Schleifendurchläufen erhält. Das heißt,  $t$  ist die (behauptete) Gesamtanzahl der WHILE-Schleifendurchläufe, bis  $x_i$  den Wert 0 erreicht. Diese intendierte Bedeutung der Zahlen  $a_n, b_n$  und  $t$  muß in den folgenden Zeilen im Detail verifiziert werden. In Zeile (2) wird ausgedrückt, daß die Startwerte der Programmvariablen gerade  $x_0, \dots, x_k$  sind; und entsprechend in Zeile (3), daß die Endwerte der Programmvariablen gerade  $y_0, \dots, y_k$  sind. Zeile (4) drückt aus, daß während aller Schleifendurchläufe die Programmvariable  $x_i$  einen Wert ungleich Null hat, und der Wert Null dann im  $t$ -ten Schritt erreicht wird (Zeile (5)). Ab Zeile (6) kommt zum Ausdruck, daß während aller Schleifendurchläufe gewährleistet ist, daß die

Variablenwerte vor und nach Ausführung von  $Q$  gemäß der Formel  $F_Q$  miteinander verknüpft sind. ■

**Satz.**

**DIE MENGE DER WAHREN ARITHMETISCHEN FORMELN IST NICHT REKURSIV AUFZÄHLBAR.**

**Beweis:** Für jede Formel  $F$  gilt, daß entweder  $F$  oder  $\neg F$  wahr ist (aber nicht beide). Wenn die Menge

$$WA = \{F \mid F \text{ ist wahre arithmetische Formel}\}$$

rekursiv aufzählbar wäre, dann wäre sie auch entscheidbar. (Entscheidungsverfahren: Bei Eingabe  $F$ , zähle  $WA$  auf:  $WA = \{F_0, F_1, F_2, \dots\}$ , bis für ein  $i$   $F = F_i$  oder  $F = \neg F_i$  ist).

Wir zeigen nun, daß  $WA$  nicht entscheidbar (und damit nicht rekursiv aufzählbar) ist. Hierzu sei  $A$  eine rekursiv aufzählbare, aber nicht entscheidbare Sprache (etwa  $A = K, H, H_0, PCP, \dots$ ). Da  $A$  rekursiv aufzählbar (also semi-entscheidbar) ist, ist die Funktion

$$\chi'_A(n) = \begin{cases} 1, & n \in A \\ \text{undefiniert}, & n \notin A \end{cases}$$

WHILE-berechenbar und mit dem vorigen Satz arithmetisch repräsentierbar mittels einer Formel  $F(x, y)$ .

Nun gilt:

$$\begin{aligned} n \in A &\Leftrightarrow \chi'_A(n) = 1 \\ &\Leftrightarrow F(n, 1) \text{ ist wahr} \\ &\Leftrightarrow F(n, 1) \in WA \end{aligned}$$

Mit anderen Worten, die berechenbare Abbildung  $n \mapsto F(n, 1)$  vermittelt eine Reduktion von  $A$  nach  $WA$ . Da  $A$  nicht entscheidbar ist, ist  $WA$  auch nicht entscheidbar und mit der obigen Diskussion auch nicht rekursiv aufzählbar. ■

**Bemerkung:** Die Menge  $WA$  der wahren arithmetischen Formeln heißt in anderen Darstellungen auch die "Arithmetik", die (elementare) "Zahlentheorie", die "Theorie der natürlichen Zahlen mit Addition und Multiplikation", symbolisch auch bezeichnet mit  $Th(\mathbb{N})$  oder  $Th(\mathbb{N}, *, +)$ .

Mathematiker waren immer schon an der *Axiomatisierung* (Kalkülierung) derartiger Theorien interessiert. Ohne auf den "syntaktischen Zuckerguß" spezieller Axiomensysteme oder Kalküle eingehen zu wollen, nehmen wir eine ganz abstrakte Sicht ein: Ein Beweis in einem gegebenen Beweissystem muß nach gewissen syntaktischen Regeln aufgebaut sein. Eine Minimalforderung ist es zu verlangen, daß die Menge aller zulässigen Beweise  $B \subseteq \Sigma^*$  entscheidbar ist.  $\Sigma$  ist hier das "Beweisalphabet". Ferner muß eine berechenbare "Interpretationsfunktion"  $F$  mit Definitionsbereich  $B$  existieren, so daß  $F(b)$  für  $b \in B$  angibt, was (also welche Formel) durch den Beweis  $b$  bewiesen wird.

Bei vielen logischen Beweissystemen sieht dies konkret so aus, daß die Beweise  $b$  aus Folgen von Formeln bestehen, so daß diese entweder – vorher festgelegte – *Axiome* sind, oder aus vorherigen Formeln der Folge durch Anwenden einer *Schlußregel* (etwa *modus ponens*) zustande kommen. Die Abbildung  $F$  ist dann nichts anderes als eine Projektion auf die letzte Formel der Folge.

**Definition.** Ein *Beweissystem* für eine Menge  $A \subseteq \Gamma^*$  ist ein Paar  $(B, F)$  mit folgenden beiden Eigenschaften:

- $B \subseteq \Sigma^*$  ist entscheidbar.
- $F : B \rightarrow A$  ist eine totale und berechenbare Funktion.

Mit  $Bew(B, F)$  bezeichnen wir die Gesamtheit des durch  $(B, F)$  Beweisbaren:

$$Bew(B, F) = \{ y \in \Gamma^* \mid \text{es gibt ein } b \in B \text{ mit } F(b) = y \}$$

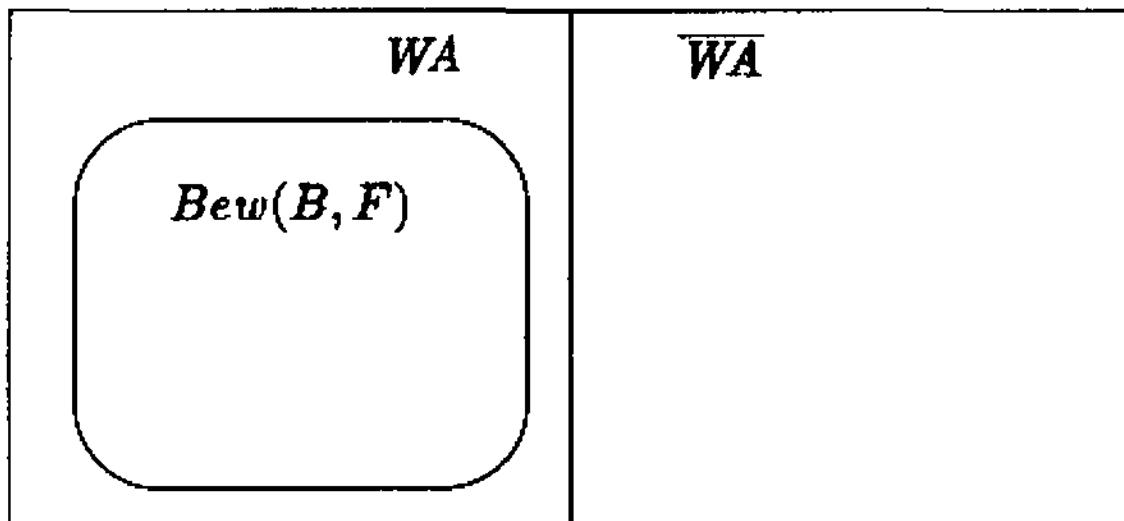
Ein Beweissystem  $(B, F)$  für  $A$  heißt *vollständig*, falls  $Bew(B, F) \supseteq A$  (also  $Bew(B, F) = A$ ) gilt (mit anderen Worten: falls  $F$  surjektiv ist).

Man beachte, daß die sogenannte *Korrektheit* des Beweissystems, nämlich  $Bew(B, F) \subseteq A$ , in der obigen Definition schon "eingebaut" ist.

**Satz. (GÖDELSCHER UNVOLLSTÄNDIGKEITSSATZ)**

JEDES BEWEISSSYSTEM FÜR DIE MENGE DER WAHREN ARITHMETISCHEN FORMELN, WA, IST NOTWENDIGERWEISE UNVOLLSTÄNDIG (D.H. ES BLEIBEN IMMER WAHRE ARITHMETISCHE FORMELN ÜBRIG, DIE NICHT BEWEISBAR SIND).

Skizze:



Menge der arithm. Formeln

**Beweis:** Angenommen  $WA = Bew(B, F)$  für ein Beweissystem  $(B, F)$ . Dann ist  $WA$  rekursiv aufzählbar, indem man alle  $b \in B$  durchläuft und  $F(b)$  ausgibt. Dies widerspricht jedoch dem vorigen Satz. ■

# Kapitel 3

## Komplexitätstheorie

Die Komplexitätstheorie versucht, algorithmische Probleme (formalisiert als Sprachen) gemäß ihres Bedarfs an “Berechnungsressourcen” (= Rechenzeit, Speicherplatz – als Funktion der Eingabelänge  $n$ ) zu klassifizieren. Hierbei gibt es zweierlei Aspekte. Einerseits versucht man, für konkrete Aufgabenstellungen möglichst effiziente Verfahren anzugeben und diese gemäß ihres Rechenaufwands zu analysieren. Dies liefert sowohl (evtl. praktisch verwertbare) *Algorithmen* zur Lösung des Problems, als auch eine prinzipielle *obere Schranke* für die Komplexität des Problems. Aus der Tatsache, daß es  $O(n^3)$ -Algorithmen für das Wortproblem bei kontextfreien Sprachen gibt ( $\rightarrow$  CYK-Algorithmus), schließen wir, daß die dem Wortproblem “inneliegende” Komplexität höchstens  $O(n^3)$  ist – sie könnte aber natürlich auch wesentlich kleiner sein.

Hierzu dienen andererseits Beweise von *unteren Schranken*, die meist viel schwieriger zu führen sind. Eine trivialerweise immer geltende untere Schranke für die Zeitkomplexität ist  $n$ . Dies liegt daran, daß jeder Algorithmus, der ein gewisses gegebenes Problem korrekt löst, zumindest die Eingabe vollständig lesen muß – und dies erfordert  $n$  Schritte.

Nachweise von (nicht-trivialen) unteren Schranken sind deshalb so schwierig, weil das Beweisargument jeden Algorithmus – auch bisher noch gar nicht erfundene – in Betracht ziehen muß.

### 3.1 Komplexitätsklassen und P-NP-Problem

Man teilt in der Komplexitätstheorie die entscheidbaren Sprachen in *Komplexitätsklassen* ein.

**Definition.** Sei  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  eine Funktion. Die Klasse  $TIME(f(n))$  besteht aus allen Sprachen  $A$ , für die es eine deterministische Mehrband-Turingmaschine  $M$  gibt mit  $A = T(M)$  und  $time_M(x) \leq f(|x|)$ .

Hierbei bedeutet  $time_M : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$  die Anzahl der Rechenschritte von  $M$  bei Eingabe  $x$ .

Dadurch, daß wir hier Mehrband-Turingmaschinen zulassen, ergeben sich realistischere Komplexitätsfunktionen  $f$  als z.B. bei der Einband-Turingmaschine. Bei der Einbandmaschine würde viel Rechenzeit anfallen für das Hin-und-herlaufen auf dem Band, um irgendwelche Informationen zu finden, die bei einem einzigen Band nur in sequentieller Form abgelegt sein können. Diese Rechenzeitanteile sind lediglich dem eingeschränkten Berechnungsmodell zuzuschreiben, haben aber mit dem zu lösenden Problem nichts zu tun.

Andererseits wissen wir, daß Mehrbandmaschinen durch Einbandmaschinen simuliert werden können (vgl. Seite 91). Wenn man diese Simulation analysiert, erkennt man, daß eine  $f(n)$  rechenzeitbeschränkte Mehrbandmaschine immerhin durch eine  $O(f^2(n))$  rechenzeit-beschränkte Einbandmaschine simuliert werden kann.

Wir wollen nun eine Klasse von Funktionen betrachten, wo die Operation des Quadrierens nicht aus der Klasse herausführt. Daher spielt es für diese Funktionenklasse keine Rolle, ob wir in der Definition der entsprechenden Komplexitätsklasse Einband- oder Mehrbandmaschinen verwenden. Dies ist die Klasse der *Polynome* und die zugehörige Komplexitätsklasse heißt  $P$ .

**Definition.** Ein *Polynom* ist eine Funktion  $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  der Form

$$p(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0, \quad a_i \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$$

Die Komplexitätsklasse  $P$  ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} P &= \{A \mid \text{es gibt eine Turingmaschine } M \\ &\quad \text{und ein Polynom } p \text{ mit} \\ &\quad T(M) = A \text{ und } \text{time}_M(x) \leq p(|x|)\} \\ &= \bigcup_{p \text{ Polynom}} \text{TIME}(p(n)) \end{aligned}$$

*Bemerkungen:* Für den Nachweis, daß ein Algorithmus polynomiale Komplexität hat, genügt es offensichtlich zu zeigen, daß seine Komplexität  $O(n^k)$  für eine Konstante  $k$  ist.

Ein Algorithmus mit der Komplexität  $n \log n$  ist auch als polynomial anzusehen (obwohl  $n \log n$  kein Polynom ist), denn  $n \log n = O(n^2)$ .

Funktionen wie  $n^{\log n}$  oder  $2^n$  können dagegen durch kein Polynom nach oben beschränkt werden.

Man kann argumentieren, daß die Klasse  $P$  genau diejenigen Probleme umfaßt, für die effiziente Algorithmen existieren. Ein Algorithmus z.B. der Komplexität  $2^n$  ist dagegen nicht effizient.

*Bemerkung:* Die Klasse  $P$ , ebenso wie noch weit größere Komplexitätsklassen, etwa  $\text{TIME}(2^n)$  oder gar  $\text{TIME}(2^{2^{\dots^{2^n}}})$  sind immer noch in der Klasse der primitiv rekursiven bzw. LOOP-berechenbaren Sprachen enthalten.

*Beweis:* Wir inspizieren nochmals die Äquivalenzbeweise von TM-Berechenbarkeit, GOTO-Berechenbarkeit und WHILE-Berechenbarkeit. Sei eine Turingmaschine  $M$  mit  $\text{time}_M(x) \leq f(|x|)$  gegeben. Diese kann durch ein GOTO-Programm simuliert werden (vgl. Seite 102), wobei für jeden Turingmaschinen-Schritt eine endliche Zahl von Wertzuweisungen bzw. GOTOs zu durchlaufen ist. Dieses GOTO-Programm kann schließlich in ein äquivalentes WHILE-Programm mit nur einer WHILE-Schleife umgeformt werden (vgl. Seite 101). Die Anzahl der WHILE-Schleifendurchläufe ist durch die Komplexität  $f(n)$  der Turingmaschine beschränkt. Daher kann die Zeile "WHILE count  $\neq 0$  DO" ersetzt werden durch " $y := f(n); \text{LOOP } y \text{ DO}$ ". Hierdurch degeneriert das WHILE-Programm zu einem LOOP-Programm. Man erkennt, daß alle mit Komplexität  $f(n)$  berechenbaren Funktionen LOOP-berechenbar sind, sofern  $f$  selbst eine LOOP-berechenbare Funktion ist (bzw. nach oben durch eine solche beschränkt werden kann).

Diese Klasse P ist nun relativ unabhängig von der betrachteten Maschine oder Programmiersprache, relativ zu der time definiert wird. Wir könnten auch den Rechenzeitbegriff bezogen auf WHILE-Programme definieren und würden dieselbe Klasse P erhalten. Dies muß jedoch in folgender Weise geschehen: Der Zeitaufwand für z.B. eine Wertzuweisung  $x_i := x_j$  muß so groß angesetzt werden, wie die Anzahl der Bits, die bei dieser Aktion übertragen werden. (Also etwa  $\log x_j$ ). Man spricht vom *logarithmischen Kostenmaß*. Wenn wir dagegen die Kosten für eine solche elementare Anweisung mit 1 ansetzen, so spricht man vom *uniformen Kostenmaß*. Solange die in den Variablen gespeicherten Zahlenwerte eine Konstante nicht überschreiten, sind beide Kostenmaße (bis auf einen konstanten Faktor) äquivalent – und man kann sich vorstellen, daß es von einem Programm viel einfacher ist, die uniformen Rechenzeitkosten festzustellen als die logarithmischen.

Betrachten wir folgendes Beispiel.

```

INPUT (n);
x := 2;
LOOP n DO x := x * x END;
OUTPUT (x)

```

Unter uniformem Kostenmaß ist dies ein Algorithmus mit polynomialer Komplexität<sup>1</sup>. Der Algorithmus berechnet jedoch die Zahl  $2^{2^n}$ . Allein für das Hinschreiben der Binärdarstellung dieser Zahl benötigt eine Turingmaschine  $2^n$  Schritte. Daher kann ihre Komplexität nicht polynomial beschränkt sein (genausowenig wie die Komplexität des obigen Programms unter dem logarithmischen Kostenmaß). Hier tritt also gerade der Fall ein, daß unter dem uniformen Kostenmaß Rechenoperationen mit 1 gewichtet werden, die ungeheuer große Zahlen beinhalten. Hier ist es nicht realistisch, das uniforme Maß anzuwenden.

Von diesen Extrembeispielen aber abgesehen ist es weit verbreitet, die Komplexität eines Algorithmus – formuliert in einer WHILE-Programm-ähnlichen Sprache – unter dem uniformen Kostenmaß anzugeben.

Man kann die gerade gegebenen Definitionen auch auf *nichtdeterministische* Turingmaschinen ausdehnen. Unter einer *akzeptierenden Rech-*

---

<sup>1</sup>Wir nehmen bei dieser Diskussion an, daß die Multiplikation unter dem uniformen Kostenmaß nur eine Zeiteinheit kostet.

nung verstehen wir im folgenden eine mit der Startkonfiguration beginnende Folge von Konfigurationen, die sukzessive mit  $\vdash$  verknüpft sind, so daß die Folge mit einer Konfiguration mit Endzustand endet.

**Definition.** Für nichtdeterministische Turingmaschinen  $M$  sei

$$ntime_M(x) = \begin{cases} \min [\text{Länge einer akzeptierenden Rechnung von } M \text{ auf } x], & x \in T(M) \\ 0, & x \notin T(M) \end{cases}$$

Sei  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  eine Funktion. Die Klasse  $NTIME(f(n))$  besteht aus allen Sprachen  $A$ , für die es eine **nichtdeterministische** Mehrband-Turingmaschine  $M$  gibt mit  $A = T(M)$  und  $ntime_M(x) \leq f(|x|)$ .

Ferner definieren wir:

$$NP = \bigcup_{p \text{ Polynom}} NTIME(p(n))$$

Es ist klar, daß  $P \subseteq NP$  gilt; aber ob die beiden Komplexitätsklassen gleich oder echt ineinander enthalten sind, ist unbekannt. Diese Fragestellung ist seit ca. 1970 bekannt und wird **P-NP-Problem** genannt. Dies wird oft als die **wichtigste Frage** der Theoretischen Informatik überhaupt angesehen.

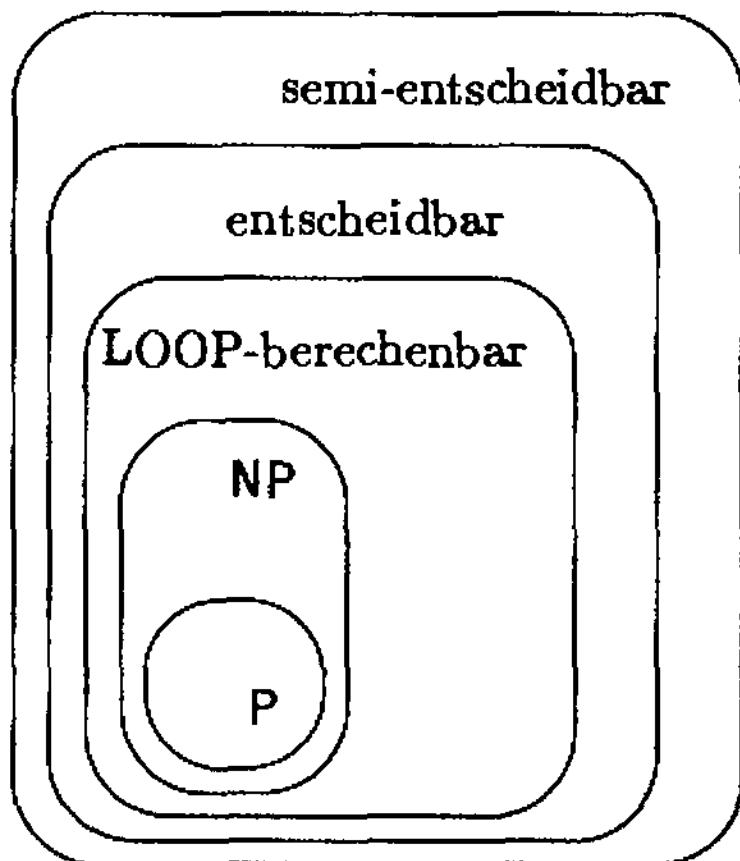
Die Bedeutung dieser Fragestellung erklärt sich daraus, daß es viele für die Praxis wichtige Aufgabenstellungen gibt, von denen man leicht nachweist, daß sie in  $NP$  liegen (z.B. Traveling Salesman Problem, gewisse Reihenfolgeprobleme, das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik u.v.a.m.). Polynomiale Algorithmen für diese Probleme sind aber nicht bekannt. Daher könnte es sich um mögliche Kandidaten für die Mitgliedschaft in  $NP - P$  handeln (und damit wären  $P$  und  $NP$  verschieden). Andererseits ist vielleicht noch niemandem der richtige Algorithmus mit polynomialer Komplexität eingefallen – obwohl er existiert.

Ein zweiter Grund für die Bedeutung und das Interesse an dem P-NP-Problem ist, daß es – insbesondere aufgrund der Arbeiten von S. Cook (1971) und R. Karp (1972) – gelungen ist, eine sehr schöne "Strukturtheorie" für das P-NP-Problem aufzubauen. Zentral ist hierbei der Begriff der **NP-Vollständigkeit**. Es konnte nämlich gezeigt werden, daß alle (bis auf wenige Ausnahmen) der oben angesprochenen NP-Probleme,

für die kein polynomialer Algorithmus bekannt ist, in einer Weise miteinander verknüpft sind, so daß entweder *alle* diese Probleme polynomiale Algorithmen besitzen (nämlich falls  $P = NP$ ) – oder keines (falls  $P \neq NP$ ).

Da (z.T. seit Jahrhunderten) von verschiedenen Forschern unabhängig voneinander erfolglos versucht wurde, polynomiale Algorithmen für NP-vollständige Probleme zu finden, wird dies allgemein für ein starkes Indiz (aber natürlich nicht als Beweis) zugunsten von  $P \neq NP$  angesehen.

*Überblick:*



### 3.2 NP-Vollständigkeit

Wir definieren nun Reduzierbarkeit im Kontext von polynomial zeitbeschränkten Berechnungen. Man vergleiche die folgende Definition und das anschließende Lemma mit denen auf Seite 120.

**Definition.** Seien  $A \subseteq \Sigma^*$  und  $B \subseteq \Gamma^*$  Sprachen. Dann heißt  $A$  auf  $B$  *polynomial reduzierbar* – symbolisch mit  $A \leq_p B$  bezeichnet – falls es eine totale und mit polynomialer Komplexität berechenbare Funktion  $f : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$  gibt, so daß für alle  $x \in \Sigma^*$  gilt:

$$x \in A \iff f(x) \in B.$$

**Lemma.** Falls  $A \leq_p B$  und  $B \in P$  (bzw.  $B \in NP$ ), so ist auch  $A \in P$  (bzw.  $A \in NP$ ).

**Beweis:** Es gelte  $A \leq_p B$  mittels Funktion  $f$ , die durch Turingmaschine  $M_f$  berechnet wird. Das Polynom  $p$  begrenze die Rechenzeit von  $M_f$ . Ferner sei  $B \in P$  mittels Turingmaschine  $M$ . Die Rechenzeit von  $M$  werde durch ein Polynom  $q$  begrenzt. Dann ist auch die Hintereinanderschaltung  $M_f; M$  beider Turingmaschinen ein polynomial zeitbeschränkter Algorithmus: Die Rechenzeit dieser Maschine bei Eingabe  $x$  kann durch

$$p(|x|) + q(|f(x)|) \leq p(|x|) + q(p(|x|))$$

begrenzt werden. Auch diese Funktion ist ein Polynom.

Es ist klar, daß  $M_f; M$  gerade  $A$  berechnet.

Analog geht der Fall  $B \in NP$  mit einer nichtdeterministischen Maschine  $M$ . ■

Wir kommen nun zu der entscheidenden Definition der NP-Vollständigkeit. Intuitiv ist eine Sprache  $A$  NP-vollständig, falls  $A$  mindestens so schwierig ist wie jedes Problem in NP.

**Definition.** Eine Sprache  $A$  heißt *NP-hart*, falls für alle Sprachen  $L \in NP$  gilt:  $L \leq_p A$ .

Eine Sprache  $A$  heißt *NP-vollständig*, falls  $A$  NP-hart ist und  $A \in NP$  gilt.

Mit dem gleichen Beweisargument wie im vorigen Lemma zeigt man, daß  $\leq_p$  eine *transitive* Relation auf Sprachen ist. Wenn wir also schon ein NP-hartes Problem  $A$  kennen, dann gestaltet sich der Nachweis der NP-Härte für ein anderes Problem  $B$  evtl. viel einfacher: Man zeige lediglich  $A \leq_p B$ . (Denn aus  $L \leq_p A$  für alle NP-Probleme  $L$  und aus  $A \leq_p B$  folgt mit der Transitivität, daß  $L \leq_p B$  gilt). Genauso werden wir gleich vorgehen – wir müssen allerdings ein erstes NP-hartes bzw. NP-vollständiges Problem bereitstellen.

### Satz.

SEI  $A$  NP-VOLLSTÄNDIG. DANN GILT:

$$A \in P \Leftrightarrow P = NP$$

**Beweis:** Sei  $A \in P$  und sei  $L$  eine beliebige Sprache in NP. Da  $A$  insbesondere NP-hart ist, gilt  $L \leq_p A$ . Mit dem vorigen Lemma folgt:  $L \in P$ . Da  $L$  beliebig aus NP gewählt war, folgt  $P = NP$ .

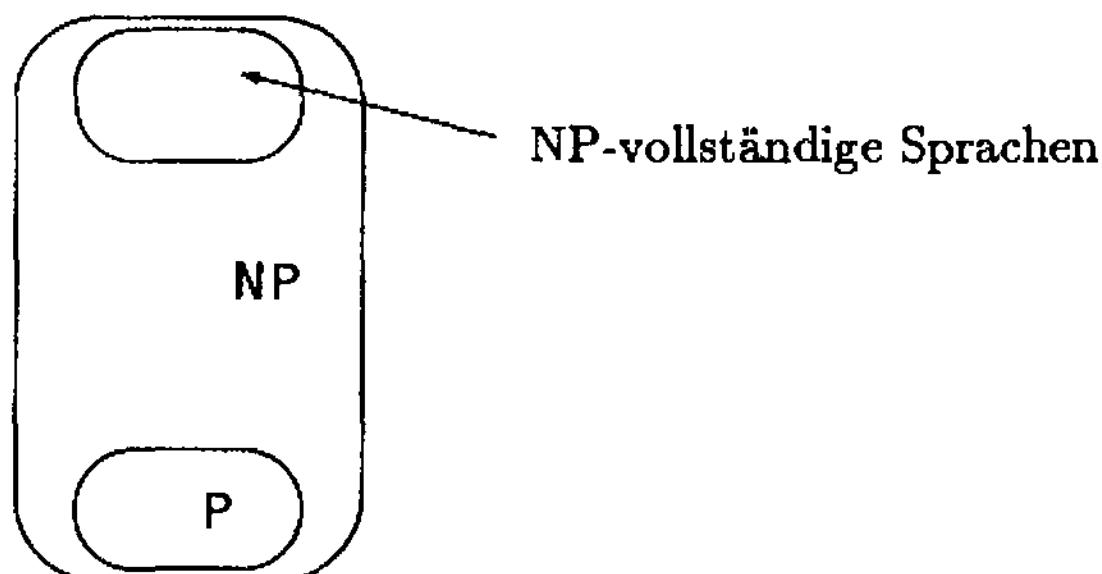
Sei umgekehrt  $P = NP$  angenommen. Da  $A \in NP$ , ist auch  $A \in P$ , was zu zeigen war. ■

Der Satz besagt also, daß es zum Nachweis von  $P = NP$  oder von  $P \neq NP$  genügt, von *irgendeinem* NP-vollständigen Problem  $A$  entweder den Nachweis  $A \in P$  oder  $A \notin P$  zu führen.

In gewissem Sinn sind die NP-vollständigen Probleme die "schwierigsten" Probleme in NP. Man glaubt allgemein nicht daran, daß es gelingen wird, polynomiale Algorithmen für NP-vollständige Sprachen zu finden. Mit anderen Worten, man glaubt, daß  $P \neq NP$  gilt.

Der Nachweis der NP-Vollständigkeit für ein gewisses Problem bedeutet also, daß die Existenz von effizienten Algorithmen für das Problem (wahrscheinlich) ausgeschlossen ist.

*Skizze:*



Es stellt sich die Frage, ob es Sprachen mit dieser universellen NP-Vollständigkeitseigenschaft überhaupt gibt. Wir lernen nun die erste kennen.

**Definition.** Das *Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik*, kurz *SAT*, ist das folgende:

*gegeben:* eine Formel  $F$  der Aussagenlogik

*gefragt:* Ist  $F$  erfüllbar, d.h. gibt es eine Belegung der Variablen mit Konstanten  $\in \{0, 1\}$ ,

so daß  $F$  den Wert 1 erhält?

Wir haben das Problem  $SAT$  hier in der *gegeben – gefragt* Notation angegeben. Zur eigentlichen Sprache  $SAT$  gelangen wir, indem (in diesem Falle) *Formeln* geeignet über einem Alphabet  $\Sigma$  codiert werden:

$$SAT = \{\text{code}(F) \in \Sigma^* \mid F \text{ ist eine erfüllbare Formel der Aussagenlogik}\}$$

**Satz. (Cook)**

DAS ERFÜLLBARKEITSPROBLEM DER AUSSAGENLOGIK,  $SAT$ , IST  
NP-VOLLSTÄNDIG.

**Beweis:** Wir zeigen zunächst  $SAT \in NP$ . Eine nichtdeterministische Maschine  $M$  kann erfüllbare Formeln  $F$  wie folgt erkennen. Zunächst wird in einem Durchlauf über die Eingabe festgestellt, welche Variablen in der Formel  $F$  vorkommen. Nehmen wir an, dies seien  $x_1, \dots, x_k$ . In der eigentlichen nichtdeterministischen Phase “rät”  $M$  nun Werte  $a_1, \dots, a_k, a_i \in \{0, 1\}$ , für die Variablen und setzt diese in  $F$  ein. (Das heißt, zu diesem Zeitpunkt existieren  $2^k$  mögliche nichtdeterministische unabhängige Rechnungen – für jede Belegung eine). Als nächstes rechnet  $M$  den Wert von  $F$  in deterministischer Art aus und geht in einen akzeptierenden Endzustand über genau dann, wenn der Wert = 1 ist.

Nun gilt:  $F \in SAT$  genau dann, wenn es eine nichtdeterministische Rechnung von  $M$  gibt, die  $F$  akzeptiert. Da außerdem  $k \leq |F|$  ist, ist die (nichtdeterministische!) Rechenzeit von  $M$  polynomial. Also ist  $SAT \in NP$ .

Der Hauptteil der Beweises besteht in dem Nachweis der NP-Härte von  $SAT$ . Hierzu sei  $L$  ein beliebiges NP-Problem. Dann ist  $L = T(M)$  für eine nichtdeterministische, polynomial zeitbeschränkte Turingmaschine  $M$ . (Wir können annehmen, daß  $M$ ’s  $\delta$ -Funktion die Zeile  $\delta(z_e, a) \ni (z_e, a, N)$  enthält, so daß ein einmal erreichter Endzustand nie mehr verlassen wird). Sei  $p$  ein Polynom, das die Rechenzeit von  $M$  beschränkt. Sei  $x = x_1 x_2 \dots x_n \in \Sigma^*$  eine Eingabe für  $M$ .

Wir geben nun eine Boolesche Formel  $F$  an, so daß gilt:

$$x \in L \Leftrightarrow F \text{ ist erfüllbar}$$

Sei  $\Gamma = \{a_1, \dots, a_l\}$  das Arbeitsalphabet von  $M$  und  $Z = \{z_1, \dots, z_k\}$  die Zustandsmenge. Die gesuchte Formel  $F$  enthält folgende Boolesche Variablen, die wir im folgenden auflisten. Wir geben hierbei gleich die intendierte Bedeutung der Variablen an.

Variable	Indizes	intendierte Bedeutung
$zust_{t,z}$	$t = 0, 1, \dots, p(n)$ $z \in Z$	$zust_{t,z} = 1 \Leftrightarrow$ nach $t$ Schritten befindet sich $M$ im Zustand $z$
$pos_{t,i}$	$t = 0, 1, \dots, p(n)$ $i = -p(n), \dots, p(n)$	$pos_{t,i} = 1 \Leftrightarrow$ $M$ 's Schreib-Lesekopf befindet sich nach $t$ Schritten auf Position $i$
$band_{t,i,a}$	$t = 0, 1, \dots, p(n)$ $i = -p(n), \dots, p(n)$ $a \in \Gamma$	$band_{t,i,a} = 1 \Leftrightarrow$ nach $t$ Schritten befindet sich auf Bandposition $i$ das Zeichen $a$

Die Formel  $F$  besteht aus mehreren Bestandteilen. Insbesondere kommt mehrfach eine Teilformel  $G$  vor, die folgende Eigenschaft hat.

$$G(x_1, \dots, x_m) = 1 \Leftrightarrow \text{für genau ein } i \text{ ist } x_i = 1$$

Die Größe dieser Formel  $G$  ist  $O(m^2)$ . Dieses wird im nachfolgenden Lemma gezeigt.

$F$  hat die Bauart:

$$F = R \wedge A \wedge \tilde{U}_1 \wedge \tilde{U}_2 \wedge E$$

Hierbei beschreibt  $R$  gewisse Randbedingungen,  $A$  die Anfangsbedingung,  $\tilde{U}_1$  und  $\tilde{U}_2$  beschreiben gewisse Übergangsbedingungen und  $E$  beschreibt die Endbedingung.

In  $R$  wird ausgedrückt, daß zu jedem Zeitpunkt  $t$  für genau ein  $z$  gilt:  $zust_{t,z} = 1$ . Ferner gibt es zu jedem Zeitpunkt  $t$  genau eine Bandposition  $i$ , so daß  $pos_{t,i} = 1$  gilt. Weiterhin muß zu jedem Zeitpunkt  $t$  und jeder Bandposition  $i$  für genau ein  $a$  gelten:  $band_{t,i,a} = 1$ .

$$\begin{aligned} R &= \bigwedge_t [ G(zust_{t,z_1}, \dots, Zust_{t,z_k}) \wedge G(pos_{t,-p(n)}, \dots, pos_{t,p(n)}) \\ &\quad \wedge \bigwedge G(band_{t,i,a_1}, \dots, band_{t,i,a_l}) ] \end{aligned}$$

$A$  beschreibt den Status der Variablen für den Fall  $t = 0$ .

$$A = \text{zust}_{0,z_0} \wedge \text{pos}_{0,1} \wedge \bigwedge_{j=1}^n \text{bar}, d_{0,j,x_j} \wedge \bigwedge_{j=-p(n)}^0 \text{band}_{0,j,\square} \wedge \bigwedge_{j=n+1}^{p(n)} \text{band}_{0,j,\square}$$

$\tilde{U}_1$  beschreibt den Übergang vom Zeitpunkt  $t$  nach  $t + 1$  an denjenigen Bandpositionen, wo sich der Kopf befindet (hierbei wird  $y \in \{-1, 0, +1\}$  angenommen).

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1 &= \bigwedge_{t,z,i,a} [ (\text{zust}_{t,z} \wedge \text{pos}_{t,i} \wedge \text{band}_{t,i,a}) \\ &\quad \rightarrow \bigvee_{\substack{z', a', y \text{ mit} \\ \delta(z, a) \ni (z', a', y)}} (\text{zust}_{t+1,z'} \wedge \text{pos}_{t+1,i+y} \wedge \text{band}_{t+1,i,a'}) ] \end{aligned}$$

$\tilde{U}_2$  besagt, daß auf Bandfeldern, auf denen der Kopf nicht steht, sich der Bandinhalt nicht ändern darf.

$$\tilde{U}_2 = \bigwedge_{t,i,a} ((\neg \text{pos}_{t,i} \wedge \text{band}_{t,i,a}) \rightarrow \text{band}_{t+1,i,a})$$

$E$  prüft nach, ob ein Endzustand erreicht wird. (Insbesondere wird dieser dann im Zeitpunkt  $p(n)$  erreicht).

$$E = \bigvee_{z \in E} \text{zust}_{p(n),z}$$

Nehmen wir zunächst an,  $x$  sei in  $L$ . Dann gibt es eine nichtdeterministische Rechnung der Länge  $\leq p(n)$ , die in einen Endzustand führt. Wenn alle Booleschen Variablen gemäß der angegebenen Intention – bezogen auf diese akzeptierende Rechnung – mit Wahrheitswerten belegt werden, so erhalten alle Teilformeln von  $F$  den Wert 1, also auch  $F$ . Also ist  $F$  erfüllbar.

Nehmen wir umgekehrt an,  $F$  sei erfüllbar durch eine gewisse Belegung der Variablen. Da durch diese Belegung insbesondere auch  $R$  erfüllt wird, hat diese Belegung die Eigenschaft, daß für jedes  $t$  die Variablenwerte von  $\text{zust}_{t,z}$ ,  $\text{pos}_{t,i}$  und  $\text{band}_{t,i,a}$  sinnvoll als Konfiguration von  $M$  interpretiert werden können.

Da die Belegung auch  $A$  erfüllt, entspricht die für  $t = 0$  aus den Variablenwerten abzulesende Konfiguration gerade der Startkonfiguration von  $M$  bei Eingabe  $x$ .

Da die Belegung auch  $\tilde{U}_1$  und  $\tilde{U}_2$  erfüllt, ist zwischen  $t$  und  $t+1$  immer die Nachfolgekonfigurationsbedingung erfüllt. Das heißt, es wird durch die Variablenbelegung für  $t = 0, 1, 2, \dots$  eine mögliche nichtdeterministische Rechnung beschrieben.

Da die Belegung auch  $E$  erfüllt, kommt in dieser Rechnung eine Endkonfiguration vor. Das heißt, die Eingabe  $x$  liegt in  $T(M) = L$ .

Als nächstes beobachten wir noch, daß die Formel  $F$  in polynomialer Zeit berechnet werden kann. Da die Formel nach den obigen Angaben von einer Turingmaschine bei Eingabe  $x$  unmittelbar "hingeschrieben" werden kann, ist die Rechenzeit linear mit der Länge der Formel verknüpft. Wir rechnen nach, daß alle Teile von  $F$  polynomiale Länge (in  $n = |x|$ ) haben:<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} |R| &= O(n^2) \\ |A| &= O(n) \\ |\tilde{U}_1| &= O(n^2) \\ |\tilde{U}_2| &= O(n^2) \\ |E| &= O(1) \end{aligned}$$

■

Um den Beweis des Satzes noch zum Abschluß zu bringen, muß noch das folgende Lemma bewiesen werden.

**Lemma.** Für jedes  $k$  gibt es eine Formel  $G$  mit den Variablen  $x_1, \dots, x_k$ , so daß  $G$  genau dann den Wahrheitswert 1 erhält, wenn genau eine der Variablen mit 1 belegt wird.

Die Formel  $G$  hat die Größe  $O(k^2)$ .

**Beweis:** Man wähle

$$G = \left( \bigvee_{i=1}^k x_i \right) \wedge \left( \bigwedge_{j=1}^{k-1} \bigwedge_{l=j+1}^k \neg(x_j \wedge x_l) \right)$$

---

<sup>2</sup>Die eigentliche Länge einer Formel hängt natürlich von der verwendeten Codierung (vgl. Seite 149) ab. Was wir hier abschätzen, ist die Anzahl der Variablenpositionen in der Formel. Diese hängt sicher polynomial mit der eigentlichen Codierungslänge zusammen.

Die erste Teilformel wird genau dann wahr, wenn *mindestens eine* Variable wahr ist. Die zweite Teilformel wird genau dann wahr, wenn *höchstens eine* Variable wahr ist (d.h. wenn es keine zwei verschiedenen Variablen gibt, die wahr werden).

Die Größe der Formel ist offensichtlich  $O(k^2)$ . ■

Der erste Teil des Beweises, in dem gezeigt wird, daß *SAT* in *NP* liegt, ist typisch für fast alle *NP*-Probleme: Der Nichtdeterminismus wird verwendet, um die fragliche Struktur (hier: erfüllende Belegung) zu "erraten". Danach wird nur überprüft, ob die nichtdeterministisch generierte Struktur tatsächlich eine Lösung darstellt ("guess and check"). Für die meisten *NP*-vollständigen Probleme gestaltet sich der Nachweis für die Zugehörigkeit in *NP* auf diese einfache Art.

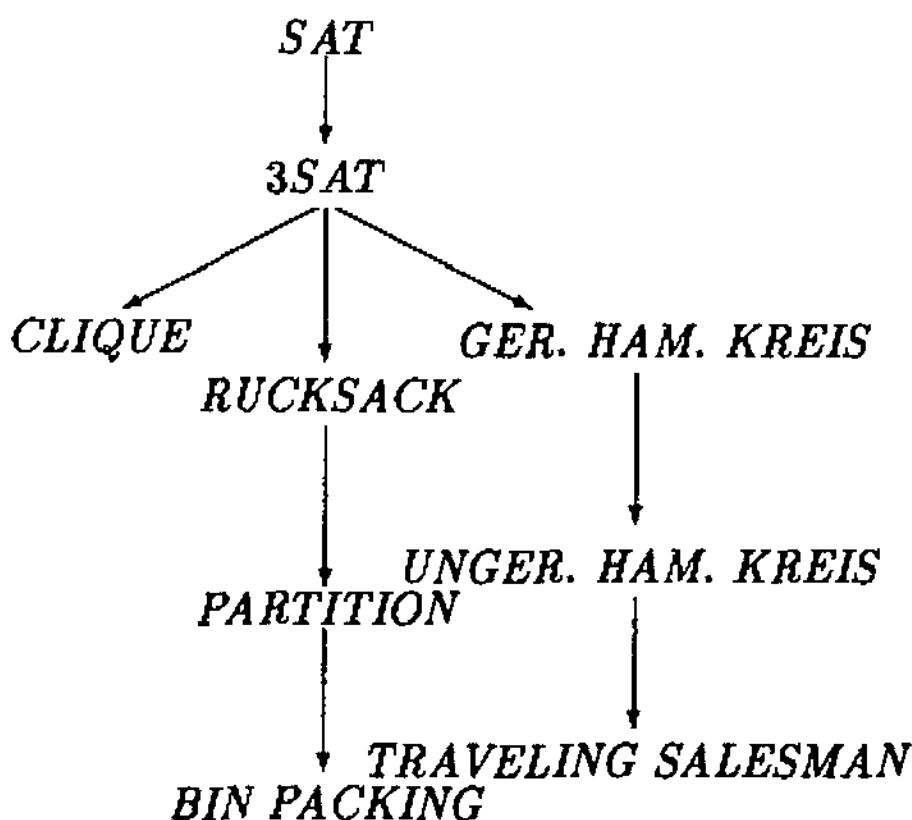
*Bemerkung:* Die bekannten deterministischen Algorithmen zur Berechnung von *SAT* haben die Komplexität  $2^{O(n)}$  – etwa indem man alle Belegungen der Eingabeformel systematisch durchprobiert. Da jede Sprache  $L \in \text{NP}$  auf *SAT* reduzierbar ist, kann die deterministische Komplexität von  $L$  nach oben mit  $2^{p(n)}$ ,  $p$  ein geeignetes Polynom, abgeschätzt werden (vgl. auch das Beweisargument im Lemma, Seite 147). Formelhaft ausgedrückt:

$$\text{NP} \subseteq \bigcup_{p \text{ Polynom}} \text{TIME}(2^{p(n)})$$

### 3.3 Weitere *NP*-vollständige Probleme

Wir wollen noch ein paar weitere bekannte *NP*-vollständige Probleme vorstellen. Der Nachweis der *NP*-Vollständigkeit gestaltet sich von jetzt ab einfacher als bei *SAT*. Wir brauchen nur eine polynomiale Reduktion von *SAT* zu dem fraglichen Problem angeben.

Im einzelnen werden wir folgende Reduktionen von *SAT* aus nachweisen:



Wir stellen diese algorithmischen Probleme nun vor.

### Definition.

#### 3SAT

*gegeben:* Eine Boolesche Formel  $F$  in konjunktiver Normalform (Klauselform) mit höchstens 3 Literalen pro Klausel.

*gefragt:* Ist  $F$  erfüllbar?

#### CLIQUE

*gegeben:* Ein (ungerichteter) Graph  $G = (V, E)$  und eine Zahl  $k \in \mathbb{N}$ .

*gefragt:* Besitzt  $G$  eine "Clique" der Größe  $k$ ? (Dies ist eine Teilmenge  $V'$  der Knotenmenge mit  $|V'| = k$  und für alle  $u, v \in V'$  mit  $u \neq v$  gilt:  $\{u, v\} \in E$ ).

#### RUCKSACK (oder SUBSET SUM)

*gegeben:* Natürliche Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{N}$  und  $b \in \mathbb{N}$ .

*gefragt:* Gibt es eine Teilmenge  $I \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$  mit  $\sum_{i \in I} a_i = b$ ?

**PARTITION**

*gegeben:* Natürliche Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{N}$ .

*gefragt:* Gibt es eine Teilmenge  $J \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$   
mit  $\sum_{i \in J} a_i = \sum_{i \notin J} a_i$ ?

**BIN PACKING**

*gegeben:* Eine "Behältergröße"  $b \in \mathbb{N}$ , die Anzahl der Behälter  $k \in \mathbb{N}$ , "Objekte"  $a_1, a_2, \dots, a_n \leq b$ .

*gefragt:* Können die Objekte so auf die  $k$  Behälter verteilt werden, daß kein Behälter überläuft?  
(Das heißt: gefragt ist, ob eine Abbildung  $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$  existiert, so daß für alle  $j = 1, \dots, k$  gilt:  $\sum_{f(i)=j} a_i \leq b$ ).

**GERICHTETER HAMILTON-KREIS**

*gegeben:* Ein gerichteter Graph  $G = (V, E)$ .

*gefragt:* Besitzt  $G$  einen Hamilton-Kreis? (Dies ist eine Permutation  $\pi$  der Knotenindizes  $(v_{\pi(1)}, v_{\pi(2)}, \dots, v_{\pi(n)})$ , so daß für  $i = 1, \dots, n - 1$  gilt:  $(v_{\pi(i)}, v_{\pi(i+1)}) \in E$  und außerdem  $(v_{\pi(n)}, v_{\pi(1)}) \in E$ ).

**UNGERICHTETER HAMILTON-KREIS**

*gegeben:* Ein ungerichteter Graph  $G = (V, E)$ .

*gefragt:* Besitzt  $G$  einen Hamilton-Kreis? (Dies ist eine Permutation  $\pi$  der Knotenindizes  $(v_{\pi(1)}, v_{\pi(2)}, \dots, v_{\pi(n)})$ , so daß für  $i = 1, \dots, n - 1$  gilt:  $\{v_{\pi(i)}, v_{\pi(i+1)}\} \in E$  und außerdem  $\{v_{\pi(n)}, v_{\pi(1)}\} \in E$ ).

**TRAVELING SALESMAN**

*gegeben:* Eine  $n \times n$  Matrix  $(M_{i,j})$  von "Entfernungen" zwischen  $n$  "Städten" und eine Zahl  $k$ .

*gefragt:* Gibt es eine Permutation  $\pi$  (eine "Rundreise"), so daß  $\sum_{i=1}^{n-1} M_{\pi(i), \pi(i+1)} + M_{\pi(n), \pi(1)} \leq k$ ?

Man überzeugt sich leicht davon, daß alle diese Probleme mit dem "guess and check" Argument in NP liegen. Für den Nachweis der NP-Vollständigkeit können wir uns im folgenden auf den Nachweis der NP-Härte konzentrieren.

**Satz.**

**3SAT IST NP-VOLLSTÄNDIG.**

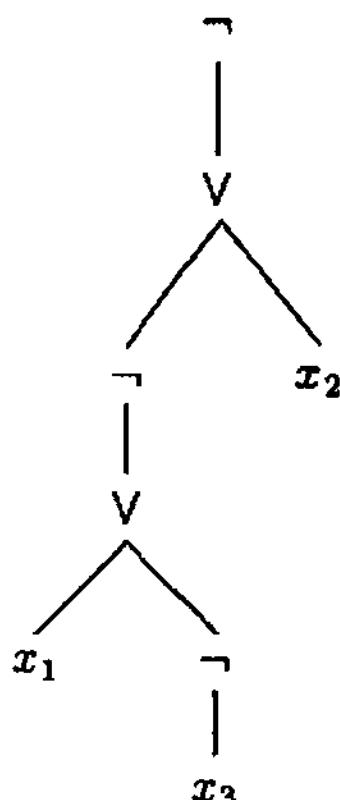
**Beweis:** Es genügt,  $SAT \leq_p 3SAT$  zu zeigen. Das heißt, wir müssen ein polynomiales Verfahren angeben, das beliebige Boolesche Formeln  $F$  in solche in konjunktiver Normalform mit höchstens 3 Literalen pro Klausel,  $F'$ , umformt, so daß gilt:

$$F \text{ ist erfüllbar} \Leftrightarrow F' \text{ ist erfüllbar}$$

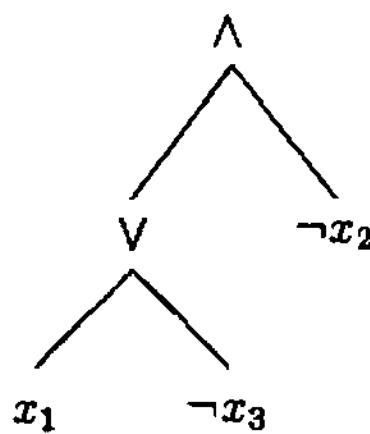
Das heißt, es ist lediglich *Erfüllbarkeitsäquivalenz* zwischen  $F$  und  $F'$  verlangt, nicht jedoch Äquivalenz im strengen Sinne. (Man erinnere sich daran, daß zwar grundsätzlich jede Formel äquivalent in konjunktive Normalform umformbar ist, daß das Verfahren aber exponentiellen Aufwand hat – außerdem werden nicht notwendigerweise nur 3 Literale pro Klausel erzeugt).

Wir formen  $F$  in mehreren Schritten (erfüllbarkeitsäquivalent) um. Dies stellen wir am besten an einem Beispiel dar.

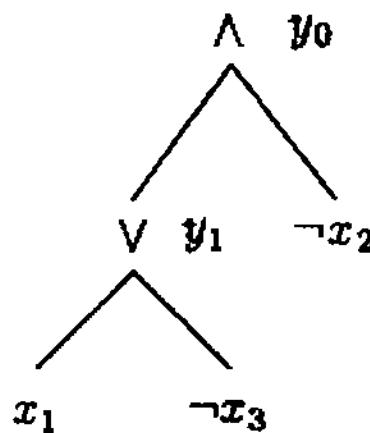
Sei  $F = \neg(\neg(x_1 \vee \neg x_3) \vee x_2)$ . Es ist anschaulicher, sich die Formel in einer Baumstruktur vorzustellen:



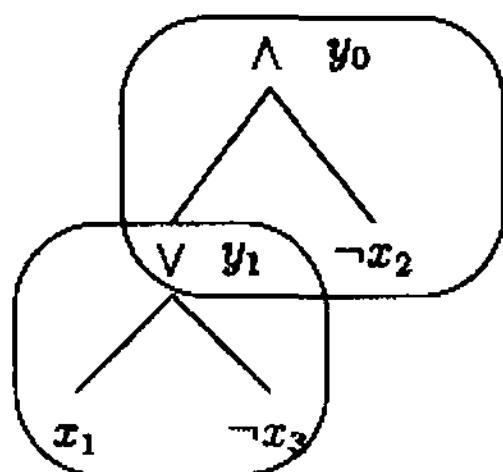
**1. Schritt:** Wir wenden nun deMorgan's Regeln an und bringen alle Negationszeichen zu den Blättern. Hierbei ändern sich evtl.  $\vee$  zu  $\wedge$  und umgekehrt. Das heißt, nach diesem Schritt sind die Blätter nur mit negierten oder unnegierten Variablen beschriftet und im Innern des Baumes kommt nur  $\vee$  und  $\wedge$  vor. Dieser Umformungsschritt erfordert nur einen Durchlauf über die Formel und kann daher mit linearer Komplexität realisiert werden.



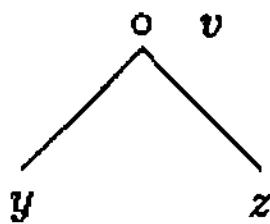
**2. Schritt:** Wir ordnen jedem inneren Knoten eine neue Variable  $\in \{y_0, y_1, \dots\}$  zu. Hierbei wird der Baumwurzel gerade  $y_0$  zugeordnet.



**3. Schritt:** Wir fassen jede Verzweigung (gedanklich) zu einer Dreier-Gruppe zusammen:



Jeder Verzweigung der Bauart



mit  $\circ \in \{\vee, \wedge\}$  ordnen wir eine Teilformel der Form

$$(v \leftrightarrow (y \circ z))$$

zu. Alle diese Teilformeln werden mit  $\wedge$  verknüpft – und zusätzlich kommt die Teilformel  $y_0$  hinzu. Dies ergibt eine neue Formel  $F_1$ :

$$F_1 = [y_0] \wedge [y_0 \leftrightarrow (y_1 \wedge \neg x_2)] \wedge [y_1 \leftrightarrow (x_1 \vee \neg x_3)]$$

Die Formeln  $F$  und  $F_1$  sind erfüllbarkeitsäquivalent. Man erhält aus einer erfüllenden Belegung für  $F$  eine für  $F_1$ , indem man die Belegung der  $x$ -Variablen übernimmt und die  $y$ -Variablen entsprechend den an den zugeordneten Baumknoten sich ergebenden Wahrheitswerten belegt. Umgekehrt ist jede erfüllende Belegung für  $F_1$  (restriktiv auf die  $x$ -Variablen) auch eine erfüllende Belegung für  $F$ .

**4. Schritt:** Jede der Teilformeln in eckigen Klammern wird separat in konjunktive Normalform umgeformt. Da in jeder solchen Teilformel nur 3 Variablen vorkommen, entsteht auf diese Weise die gewünschte konjunktive Normalform mit höchstens 3 Literalen pro Klausel.

Man beachte, daß in diesem Fall der exponentielle Aufwand für das Umformen in konjunktive Normalform keine Rolle spielt, da wir den Umformungsalgorithmus nur auf gewisse Teilformeln *konstanter Größe* anwenden. Das heißt, jede Teilformel in eckigen Klammern kann mit konstantem Aufwand umgeformt werden – und zwar nach folgendem “Rezept”:

$$\begin{aligned} [a \leftrightarrow (b \vee c)] &\mapsto (a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee b \vee c) \wedge (a \vee \neg c) \\ [a \leftrightarrow (b \wedge c)] &\mapsto (\neg a \vee b) \wedge (\neg a \vee c) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c) \end{aligned}$$

Wir erhalten also:

$$\begin{aligned} F' = y_0 \wedge (\neg y_0 \vee y_1) \wedge (\neg y_0 \vee \neg x_2) \wedge (y_0 \vee \neg y_1 \vee x_2) \\ \wedge (y_1 \vee \neg x_1) \wedge (\neg y_1 \vee x_1 \vee \neg x_3) \wedge (y_1 \vee x_3) \end{aligned}$$

Alle Umformungsschritte können mit polynomialen Aufwand durchgeführt werden, daher ist  $SAT \leq_p 3SAT$  gezeigt. ■

Es ist interessant zu bemerken, daß das entsprechend definierte Problem  $2SAT$  bereits in  $P$  liegt: Zunächst beobachten wir, daß es nur polynomial viele verschiedene Klauseln mit 2 Literalen über der Variablenmenge  $x_1, \dots, x_n$  gibt. Mit der Methode der Resolution kann die (Un)Erfüllbarkeit einer Klauselmenge festgestellt werden. Die Resolvente zweier 2-elementigen Klauseln ist selbst wieder nur höchstens 2-elementig. Daher ist die Menge der potentiellen Resolventen – und damit die Rechenzeit für den Erfüllbarkeitstest – polynomial beschränkt.

**Satz.**

**CLIQUE IST NP-VOLLSTÄNDIG.**

**Beweis:** Wir zeigen  $3SAT \leq_p CLIQUE$ . Sei  $F$  eine Formel in konjunktiver Normalform mit genau 3 Literalen pro Klausel. (Wir können der Einfachheit halber *genau* 3 Literale annehmen, indem wir Literale in der Klausel verdoppeln). Sei also

$$F = (z_{11} \vee z_{12} \vee z_{13}) \wedge \cdots \wedge (z_{m1} \vee z_{m2} \vee z_{m3})$$

wobei

$$z_{ij} \in \{x_1, x_2, \dots\} \cup \{\neg x_1, \neg x_2, \dots\}$$

Der Formel  $F$  wird nun ein Graph  $G = (V, E)$  und eine Zahl  $k \in \mathbb{N}$  zugeordnet: Setze

$$\begin{aligned} V &= \{(1,1), (1,2), (1,3), \dots, (m,1), (m,2), (m,3)\} \\ E &= \{\{(i,j), (p,q)\} \mid i \neq p \text{ und } z_{ij} \neq \neg z_{pq}\} \\ k &= m \end{aligned}$$

Es gilt nun:

$F$  ist erfüllbar durch eine Belegung  $B$

genau dann wenn es gibt in jeder Klausel ein Literal, das unter  $B$  den Wert 1 erhält, z.B.  $z_{1,j_1}, z_{2,j_2}, \dots, z_{m,j_m}$

genau dann wenn es gibt Literale  $z_{1,j_1}, z_{2,j_2}, \dots, z_{m,j_m}$ , die paarweise nicht komplementär sind

genau dann wenn es gibt Knoten  $(1, j_1), (2, j_2), \dots, (m, j_m)$  in  $G$ , die paarweise verbunden sind.

genau dann wenn  $G$  hat eine Clique der Größe  $k$

■

**Satz.**

**RUCKSACK** ist NP-vollständig.

**Beweis:** Wir reduzieren **3SAT** auf **RUCKSACK**. Sei

$$F = (z_{11} \vee z_{12} \vee z_{13}) \wedge \cdots \wedge (z_{m1} \vee z_{m2} \vee z_{m3})$$

wobei

$$z_{ij} \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \cup \{\neg x_1, \neg x_2, \dots, \neg x_n\}$$

eine Formel in 3-konjunktiver Normalform. Es ist also  $m$  die Anzahl der Klauseln und  $n$  die Anzahl der vorkommenden Variablen. Wir müssen nun, dem RUCKSACK-Problem gemäß, Zahlen  $a_1, \dots, a_k$  und  $b$  angeben.

Die Zahl  $b$  ist gegeben durch:

$$b = \underbrace{444 \dots 44}_{m} \underbrace{11 \dots 11}_{n}$$

also, etwa im Dezimalsystem,  $m$  mal die Ziffer 4, dann  $n$  mal die Ziffer 1.

Im folgenden fixieren wir der einfacheren Darstellung wegen Werte für  $m$  und  $n$ . Sagen wir, wir haben 3 Klauseln und 5 vorkommende Variablen. Dann lautet  $b$  also:

$$b = 44411111$$

Außerdem fixieren wir ein konkretes Beispiel und beziehen uns im folgenden auf das Beispiel. Sei also

$$F = (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_5) \wedge (\neg x_1 \vee x_5 \vee x_4) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_2 \vee \neg x_5)$$

Die Zahlen  $a_i$  unterteilen wir in verschiedene Klassen.

Die Zahlen  $v_1, \dots, v_n$  sind folgendermaßen definiert. An der  $i$ -ten Position in  $v_1$  steht eine 1, falls die Variable  $x_1$  in Klausel  $i$  – in positiver Form – vorkommt (eine 2 falls die Variable zweimal vorkommt, eine 3

falls sie dreimal vorkommt). Im hinteren Ziffernblock steht an Position 1 eine 1. Analog ist  $v_2$ , bezogen auf die Vorkommen von  $x_2$ , definiert. Ferner steht im hinteren Ziffernblock die 1 an Position 2, etc.

Konkret für das obige Beispiel lauten die Zahlen:

$$\begin{aligned}v_1 &= 100\ 10000 \\v_2 &= 000\ 01000 \\v_3 &= 000\ 00100 \\v_4 &= 010\ 00010 \\v_5 &= 110\ 00001\end{aligned}$$

Die Zahlen  $v'_i$  sind völlig analog definiert, nur auf die *negativen Vorkommen* der Variablen bezogen.

Am konkreten Beispiel ergibt dies:

$$\begin{aligned}v'_1 &= 010\ 10000 \\v'_2 &= 002\ 01000 \\v'_3 &= 100\ 00100 \\v'_4 &= 000\ 00010 \\v'_5 &= 001\ 00001\end{aligned}$$

Schließlich haben wir noch Zahlen  $c_j$  und  $d_j$  für  $j = 1, \dots, m$ , die so aufgebaut sind, daß im ersten Ziffernblock an Position  $j$  eine 1 (bei  $c_j$ ), bzw. eine 2 (bei  $d_j$ ) steht.

Konkret:

$$\begin{aligned}c_1 &= 100\ 00000 \\c_2 &= 010\ 00000 \\c_3 &= 001\ 00000 \\d_1 &= 200\ 00000 \\d_2 &= 020\ 00000 \\d_3 &= 002\ 00000\end{aligned}$$

Nun ergibt sich folgendes: Wenn die Formel  $F$  eine erfüllende Belegung besitzt, so läßt sich eine Auswahl aus den Zahlen treffen, die sich zu  $b$  aufsummieren: Für jedes  $i = 1, \dots, n$  nehme man  $v_i$  bzw.  $v'_i$  in die Auswahl auf, falls die Belegung die Variable  $x_i$  auf 1 bzw. auf 0 setzt.

Konkretes Beispiel: Eine erfüllende Belegung wäre etwa

$$\begin{aligned}x_1 &\mapsto 1 \\x_2 &\mapsto 0 \\x_3 &\mapsto 0 \\x_4 &\mapsto 1 \\x_5 &\mapsto 0\end{aligned}$$

Dies ergibt die Auswahl  $v_1, v'_2, v'_3, v_4, v'_5$ . Diese Zahlen summieren sich auf zu 2131111. Indem wir nun noch geeignet  $c_j$  und/oder  $d_j$  hinzunehmen, in diesem Fall  $d_1, c_2, d_2, c_3$ , erhalten wir die gewünschte Summe  $b$  ( $= 444\ 11111$ ).

Sei umgekehrt eine Auswahl von Zahlen gegeben, die sich exakt zu  $b$  aufsummieren. Da die Konstruktion der Zahlen so angelegt ist, daß keine Überträge zwischen den einzelnen Ziffern möglich sind, muß diese Auswahl derart sein, daß für jedes  $i$  genau eine der beiden Zahlen  $v_i$  und  $v'_i$  ausgewählt wurde. Wir behaupten, daß die Belegung, die man umgekehrt dieser Auswahl von  $v_i, v'_i$  zuordnen kann, eine erfüllende Belegung für  $F$  ist, also in jeder Klausel mindestens ein Literal wahr macht. Nehmen wir an, dies ist nicht so, dann bleibt für irgendein  $j$  die  $j$ -te Ziffer (die der Klausel  $j$  zugeordnet ist) beim Aufsummieren gleich 0. Dann kann aber durch Hinzufügen von  $c_j$  und  $d_j$  nicht mehr die in  $b$  geforderte Ziffer 4 erreicht werden. ■

### Satz.

**PARTITION** IST NP-VOLLSTÄNDIG.

**Beweis:** Sei  $(a_1, a_2, \dots, a_k, b)$  ein gegebenes RUCKSACK-Problem. Wir setzen  $M = \sum_{i=1}^k a_i$ , und definieren folgende Abbildung

$$(a_1, a_2, \dots, a_k, b) \mapsto (a_1, a_2, \dots, a_k, M - b + 1, b + 1)$$

und zeigen, daß sie eine Reduktion von **RUCKSACK** nach **PARTITION** vermittelt.

Wenn  $I \subseteq \{1, \dots, k\}$  eine Lösung des RUCKSACK-Problems darstellt, dann ist  $I \cup \{k+1\}$  eine Lösung des Partitionsproblems, wie man leicht nachrechnet.

Wenn  $J$  eine Lösung des Partitionsproblems ist, dann können die Zahlen  $M - b + 1$  und  $b + 1$  nicht beide in  $J$  oder beide nicht in  $J$  liegen, da ihre Summe zu groß ist. Nehmen wir o.B.d.A. an,  $M - b + 1$  liegt in  $J$ , dann ist  $J$  – ohne die Zahl  $M - b + 1$  eine Lösung des RUCKSACK-Problems, denn die Summe ist gerade  $b$ , wie man leicht nachrechnet. ■

**Satz.**

**BIN PACKING IST NP-VOLLSTÄNDIG.**

**Beweis.** Wir zeigen  $PARTITION \leq_p BIN\ PACKING$ . Die Reduktion wird bewerkstelligt durch:

$$(a_1, \dots, a_k) \mapsto \begin{cases} \text{Behältergröße: } & b = \sum_{i=1}^k a_i / 2 \\ \text{Zahl der Behälter: } & k = 2 \\ \text{Objekte: } & a_1, \dots, a_k \end{cases}$$

**Satz.**

**GERICHTETER HAMILTON-KREIS IST NP-VOLLSTÄNDIG.**

**Beweis:** Wir reduzieren  $3SAT$  auf dieses Problem. Sei  $F$  eine Formel in konjunktiver Normalform mit genau 3 Literalen pro Klausel. Sei also

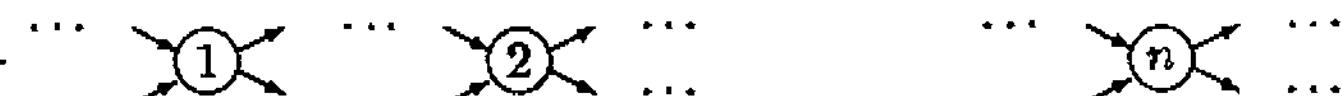
$$F = (z_{11} \vee z_{12} \vee z_{13}) \wedge \cdots \wedge (z_{m1} \vee z_{m2} \vee z_{m3})$$

wobei

$$z_{ij} \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \cup \{\neg x_1, \neg x_2, \dots, \neg x_n\}$$

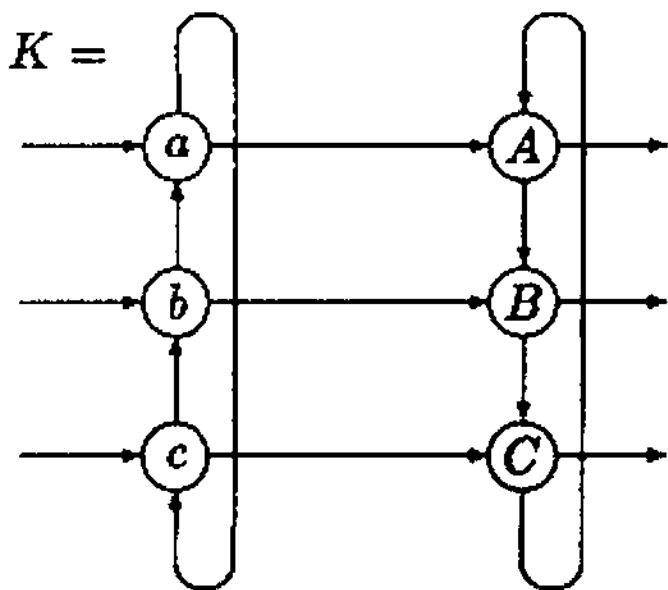
Es ist also  $m$  die Anzahl der Klauseln und  $n$  die Anzahl der vorkommenden Variablen.

Wir konstruieren nun den gesuchten Graphen. Dieser hat zunächst einmal die Knoten  $1, 2, \dots, n$ .

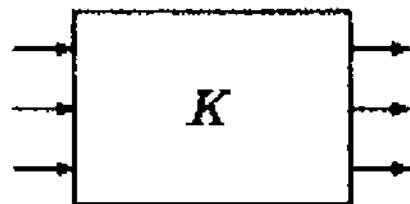


Von jedem Knoten  $i$  gehen jeweils zwei Kanten aus; die entsprechenden Pfade führen dann durch weitere Teilgraphen, die wir als nächstes beschreiben, und enden dann im Knoten  $i + 1$ . (Vom Knoten  $n$  aus führen die Pfade zurück zum Knoten 1).

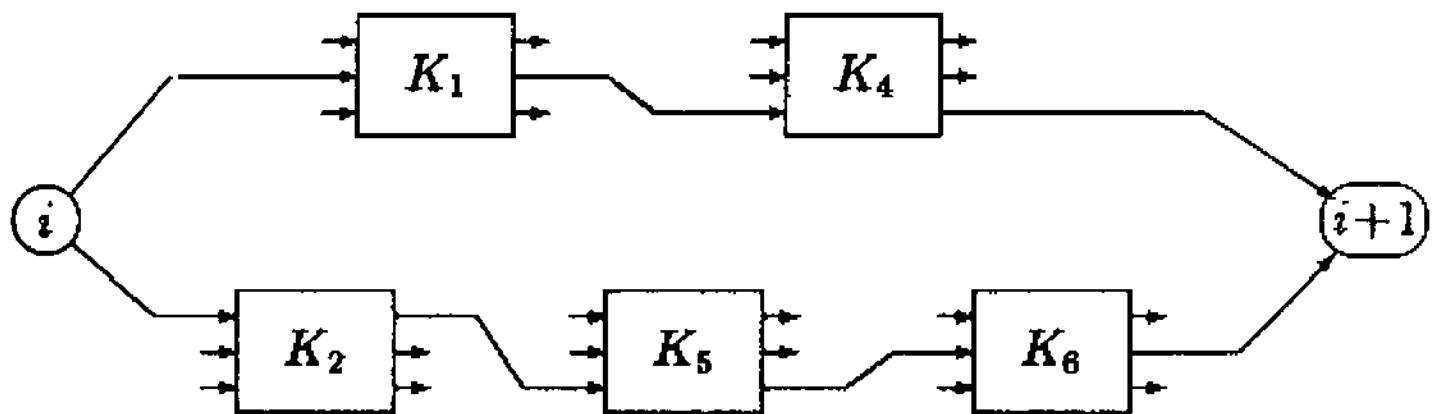
Die beiden von einem Knoten  $i$  ausgehenden Wege führen durch gewisse Graphen  $K$ , von denen  $m$  Kopien  $K_1, \dots, K_m$  bereitstehen:



Im folgenden stellen wir diese Graphen  $K$  durch folgendes Symbol dar:



Der obere vom Knoten  $i$  ausgehende Weg orientiert sich an den Vorkommen von  $x_i$  in den Klauseln; der untere an denen von  $\neg x_i$ . Nehmen wir ein konkretes Beispiel: Angenommen,  $x_i$  kommt in Klausel 1 an Position 2 und in Klausel 4 an Position 3 vor; ferner komme  $\neg x_i$  in Klausel 2 an Position 1, in Klausel 5 an Position 3 und in Klausel 6 an Position 2 vor. Dann sehen die beiden Verbindungen zwischen Knoten  $i$  und Knoten  $i + 1$  wie folgt aus:



Da von allen Knoten  $1, 2, \dots, n$  jeweils derartige Pfade durch die Teilgraphen  $K_1, \dots, K_m$  ausgehen, sind schließlich alle 3 Eingänge und Ausgänge der  $K_i$  "angeschlossen", und es gibt also keine "frei hängenden" Kanten mehr.

Damit ist der Graph  $G$  beschrieben. Bevor wir zum Beweis von

$$F \text{ ist erfüllbar} \Leftrightarrow G \text{ hat Hamilton-Kreis}$$

kommen, beweisen wir noch eine bemerkenswerte Eigenschaft des Graphen  $K$ :

Wenn der  $K$  umgebende Graph  $G$  einen Hamilton-Kreis besitzt, so verläuft dieser, immer wenn er den Teilgraphen  $K$  passiert, folgendermaßen: Wenn der Hamilton-Pfad bei  $a$  (bzw.  $b$  bzw.  $c$ ) in  $K$  hineinläuft, so verlässt er  $K$  bei  $A$  (bzw.  $B$  bzw.  $C$ ).

*Beweis* der Behauptung: Nehmen wir an, der Hamilton-Kreis betritt  $K$  beim Knoten  $a$ , verlässt  $K$  jedoch nicht beim Knoten  $A$ . Es ist einfacher zu argumentieren, wenn wir uns vorstellen, daß der Hamilton-Kreis mit der Kante zum Knoten  $a$  beginnt. Wir diskutieren die verschiedenen Möglichkeiten:

Der Pfad verläuft danach durch die Knoten  $a, A, B$  und verläßt  $K$  bei  $B$ : Dann ist der Knoten  $b$  in eine "Sackgasse" geraten, man kann  $b$  zwar noch erreichen, kann den Hamilton-Kreis jedoch nicht mehr schließen.

**Fall  $a - A - B - C$ :** wieder Sackgasse bei  $b$ .

**Fall  $a - c - C$ :** Knoten  $A$  ist nicht mehr erreichbar.

**Fall  $a - c - b - B$ :** Knoten  $A$  und  $C$  nicht mehr erreichbar.

**Fall  $a - c - b - B - C$ :** Knoten  $A$  nicht mehr erreichbar.

**Fall  $a - c - C - A - B$ :** Sackgasse bei  $b$ .

Damit sind alle Fälle erschöpft. Falls der Hamilton-Kreis bei  $b$  oder bei  $c$  nach  $K$  eintritt, so ist das Argument analog, da der Graph in  $a, b, c$  symmetrisch ist.

Das heißt also, daß ein bei  $a$  eintretender Hamilton-Kreis nur folgende Wege durch  $K$  nehmen kann:  $a - A, a - c - C - A$  oder  $a - c - b - B - C - A$ .

Wir fahren fort mit dem Beweis des Satzes:

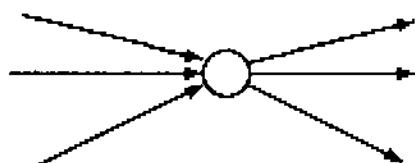
Wenn die Formel  $F$  eine erfüllende Belegung besitzt, so kann man, beginnend bei Knoten 1, auf folgende Art einen Hamilton-Kreis durchlaufen. Wenn die Variable  $x_i$  die Belegung 1 hat, so folge man von Knoten  $i$  aus dem oberen Pfad, sonst dem unteren. Danach durchläuft der Pfad die entsprechenden "Klauselgraphen"  $K_j$ , in denen  $x_i$  (bzw.  $\neg x_i$ ) vorkommt). Die Klauselgraphen müssen nun auf eine der drei o.a. Möglichkeiten durchlaufen werden (die Wahl hängt davon ab, wieviele weitere Literale in der Klausel  $j$  den Wert 1 erhalten). Dies kann immer so arrangiert werden, daß bei Rückkehr zum Knoten 1 alle Knoten der Klauselgraphen  $K_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , durchlaufen wurden. Diese Methode liefert also einen Hamilton-Kreis.

Sei umgekehrt angenommen,  $G$  besitze einen Hamilton-Kreis. Dieser Kreis durchläuft Knoten 1, dann gewisse  $K_j$ , Knoten 2, dann gewisse  $K_j$ , usw., bis er zum Knoten 1 zurückkehrt. An dieser Stelle brauchen wir die obige Behauptung über die Graphen  $K_j$ : es ist dem Hamilton-Kreis nämlich nicht möglich, anders als vorgesehen durch die Graphen  $K_j$  zu passieren. Wir definieren nun eine Variablen-Belegung für  $x_i$  anhand dessen, ob der Hamilton-Kreis den Knoten  $i$  nach oben ( $=1$ ) oder nach unten ( $=0$ ) verläßt. Diese Belegung erfüllt  $F$ , denn jeder Klauselgraph wird mindestens einmal passiert – die entsprechende Klausel erhält also den Wert 1. ■

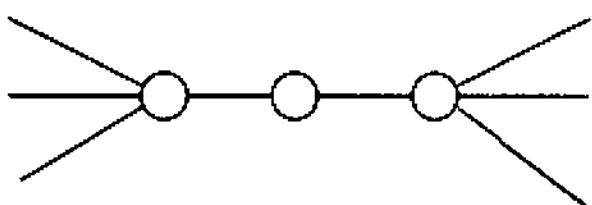
### Satz.

**UNGERICHTETER HAMILTON-KREIS IST NP-VOLLSTÄNDIG.**

**Beweis:** Wir zeigen, daß man den gerichteten Fall auf den ungerichteten reduzieren kann. Dazu muß angegeben werden, wie man gerichtete Graphen in ungerichtete transformiert, so daß die Hamilton-Kreis Eigenschaft erhalten bleibt. Jeder Knoten (mit gewissen herein kommenden und herausgehenden) Kanten



wird lokal ersetzt durch drei Knoten:



Nun gilt: Wenn der gerichtete Graph einen Hamilton-Kreis besitzt, hat der ungerichtete auch einen entsprechenden. Wenn umgekehrt der ungerichtete Graph einen Hamilton-Kreis besitzt, dann ist es nicht möglich, daß der Kreis, nachdem er in den linken Knoten einer Dreier-Gruppe hereinkommt, diese wieder nach links verläßt. In diesem Fall würde der Kreis, wenn er den mittleren Knoten irgendwann erreicht, in einer "Sackgasse" landen. Daher muß jeder Hamilton-Kreis, der von links in eine solche Dreier-Knotengruppe hineinläuft, diese nach rechts wieder verlassen. Mit anderen Worten, es wird genau die Pfeilrichtung im gerichteten Graphen eingehalten. Deshalb läßt sich aus dem ungerichteten Hamilton-Kreis auch wieder ein entsprechender im gerichteten Graphen gewinnen. ■

Es ist interessant zu bemerken, daß einerseits – wie gerade gezeigt – das Hamilton-Kreis Problem NP-vollständig ist, andererseits das Euler-Kreis Problem in P liegt, also effizient lösbar ist. Während bei einem Hamilton-Kreis nach einem Durchlauf durch den Graphen gefragt wird, auf dem jeder *Knoten* genau einmal vorkommt, muß bei einem Euler-Kreis jede *Kante* genau einmal vorkommen. Euler hat diese Frage anhand des "Königsberger Brückenproblems" analysiert und gelöst (und damit die Graphentheorie ins Leben gerufen): Ein Graph besitzt einen Euler-Kreis genau dann, wenn jeder Knoten eine gerade Anzahl von Nachbarn hat. Und dies ist sicher in polynomialer Zeit überprüfbar.

### Satz.

**TRAVELING SALESMAN IST NP-VOLLSTÄNDIG.**

**Beweis:** Wir zeigen *UNGERICHTETER HAMILTON-KREIS*  $\leq_p$

*TRAVELING SALESMAN.* Dies wird bewerkstelligt durch folgende Abbildung:

$$G = (\{1, \dots, n\}, E) \mapsto \begin{cases} \text{Matrix: } & M_{ij} = \begin{cases} 1, & \{i, j\} \in E \\ 2, & \{i, j\} \notin E \end{cases} \\ \text{Rundreiselänge: } & n \end{cases}$$

■

Wir erwähnen noch ein weiteres Resultat. Das Wortproblem für Typ 1 Sprachen ist bekanntermaßen entscheidbar (vgl. Seite 21), aber der angegebene Algorithmus hat exponentielle Komplexität. Das ist kein Zufall, denn es gilt der folgende Satz.

**Satz.**

**DAS WORTPROBLEM FÜR TYP 1 SPRACHEN IST NP-HART.**

**Beweis:** Sei  $L \in \text{NP}$  beliebig. Dann ist  $L = T(M)$  für eine nichtdeterministische, polynomial zeitbeschränkte Turingmaschine  $M$ . Sei  $p$  ein Polynom, das die Rechenzeit von  $M$  beschränkt. Sei  $x = x_1 x_2 \dots x_n \in \Sigma^*$  eine Eingabe für  $M$ . (Wir können o.B.d.A. annehmen, daß  $M$  im Falle des Akzeptierens alle verwendeten Bandfelder wieder mit Leerzeichen beschrieben hat, und mit dem Schreib-Lesekopf auf dem "Ursprung" stoppt).

Auf Seite 80 wurde eine kontextsensitive Grammatik angegeben (genauer: die Produktionenmenge  $P'$ ), die Konfigurationsübergänge von Turingmaschinen simulieren kann, sofern sich diese wie ein LBA verhalten, also den Bereich der Startkonfiguration nicht überschreiten.

Wir fügen dieser Grammatik noch eine weitere Produktion hinzu, nämlich

$$S \rightarrow \square^{p(n)}(z_0, x_1) x_2 \dots x_n \square^{p(n)-n}$$

Somit kann aus der Startvariablen  $S$  das (Start-)Konfigurationswort generiert werden (das links und rechts mit genügend Leerzeichen aufgefüllt wurde, damit der linke oder rechte Rand in der Rechnung von  $M$  auf  $x$  nicht überschritten wird).

Wir nennen diese Typ 1 Grammatik  $G_M$ .

Die Abbildung, die  $x$  die kontextsensitive Grammatik  $G_M$  und das Wort  $\square^{p(n)}(z_e, \square) \square^{p(n)-1}$  zuordnet, ist polynomial berechenbar und vermittelt gerade eine polynomiale Reduktion von  $L$  auf das kontextsensitive

Wortproblem, denn es gilt:

$$\begin{aligned} x \in L &\Leftrightarrow \square^{p(n)}(z_0, x_1) x_2 \dots x_n \square^{p(n)-n} \vdash^* \square^{p(n)}(z_e, \square) \square^{p(n)-1} \\ &\Leftrightarrow S \Rightarrow \square^{p(n)}(z_0, x_1) x_2 \dots x_n \square^{p(n)-n} \Rightarrow^* \square^{p(n)}(z_e, \square) \square^{p(n)-1} \\ &\Leftrightarrow \square^{p(n)}(z_e, \square) \square^{p(n)-1} \in L(G_M) \end{aligned}$$

■

Man beachte, daß wir nicht in der Lage waren, zu zeigen, daß das Typ 1 Wortproblem in NP liegt. Tatsächlich könnte dieses Problem "noch schwieriger" als die NP-vollständigen sein. (Genauer: das Problem ist "PSPACE-vollständig").

Wir erwähnen weiterhin noch, daß auch das auf Seite 83 diskutierte Äquivalenzproblem für NFAs, reguläre Grammatiken und für reguläre Ausdrücke NP-hart ist:

**Satz.**

**DAS PROBLEM, FÜR ZWEI GEGEBENE REGULÄRE AUSDRÜCKE FESTZUSTELLEN, OB DIESE INÄQUIVALENT SIND, IST NP-HART.**

**Beweis:** Wir zeigen, daß 3SAT auf dieses Problem polynomial reduzierbar ist. Sei  $F$  eine Formel in konjunktiver Normalform mit genau 3 Literalen pro Klausel. Sei also

$$F = (z_{11} \vee z_{12} \vee z_{13}) \wedge \dots \wedge (z_{m1} \vee z_{m2} \vee z_{m3})$$

wobei

$$z_{ij} \in \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \cup \{\neg x_1, \neg x_2, \dots, \neg x_k\}$$

Es ist also  $k$  die Anzahl der Variablen und  $m$  die Anzahl der Klauseln. Wir konstruieren nun zwei reguläre Ausdrücke  $\alpha$  und  $\beta$  über dem Alphabet  $\{0, 1\}$ .

$$\alpha = (\gamma_1 \mid \gamma'_1)(\gamma_2 \mid \gamma'_2) \dots (\gamma_k \mid \gamma'_k)$$

Die Ausdrücke  $\gamma_i$  und  $\gamma'_i$  haben die folgende Bauart:

$$\gamma_i = a_{i1} a_{i2} \dots a_{im}$$

wobei

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{Variable } x_i \text{ kommt in Klausel } j \text{ vor} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Ausdruck  $\gamma'_i$  ist entsprechend definiert, jedoch für die Vorkommen von  $\neg x_i$  anstatt  $x_i$ .

Jede Belegung der Variablen spiegelt sich nun in einem 0-1-Wort der Länge  $k \cdot m$  in  $L(\alpha)$  wider. Eine *erfüllende* Belegung ist dadurch charakterisiert, daß für  $j = 1, \dots, m$  eine Zahl  $x \in \{1, \dots, k\}$  existiert, so daß dieses 0-1-Wort an der Position  $(x-1) \cdot m + j$  eine 1 hat.

In  $\beta$  beschreiben wir nun alle möglichen 0-1-Wörter der Länge  $k \cdot m$  – bis auf diejenigen, die (potentiellen) erfüllenden Belegungen entsprechen. Für mindestens ein  $j$  muß also die oben angegebene Bedingung verletzt sein.

$$\beta = (\beta_1 \mid \beta_2 \mid \dots \mid \beta_m)$$

Mit  $\beta_j$  beschreiben wir also gerade diejenigen Wörter, für die an jeder Position  $(x-1) \cdot m + j$  eine 0 steht. Sei  $\sigma$  der reguläre Ausdruck  $(0 \mid 1)$ . Dann setzen wir:

$$\beta_j = (\sigma^{j-1} 0 \sigma^{m-j})^k$$

Hierbei steht  $\delta^n$  für  $\delta\delta\dots\delta$  ( $n$ -mal).

Nun gilt:

$$\begin{aligned} F \text{ ist erfüllbar} \\ \text{genau dann wenn} \\ L(\alpha) \not\subseteq L(\beta) \\ \text{genau dann wenn} \\ L((\alpha \mid \beta)) \neq L(\beta) \end{aligned}$$

Deshalb stellt die (polynomial berechenbare) Abbildung  $F \mapsto ((\alpha \mid \beta), \beta)$  eine Reduktion von *3SAT* auf das *Inäquivalenzproblem* dar. ■

Anstelle von regulären Ausdrücken lassen sich mit polynomialem Aufwand ebenso NFAs bzw. reguläre Grammatiken angeben, die dieselben Sprachen  $L((\alpha \mid \beta))$  bzw.  $L(\beta)$  definieren. Daher ist *NFA-Inäquivalenz* bzw. *reguläre Grammatik-Inäquivalenz* gleichfalls NP-hart (tatsächlich sogar “PSPACE-vollständig”). Andererseits ist das Äquivalenzproblem für DFAs in polynomialer Zeit lösbar (vgl. Seite 50).

*Bemerkung:* Man kann ferner feststellen, daß die oben angegebenen regulären Ausdrücke  $\alpha, \beta$  sogar ohne die Sternoperation auskommen. Deshalb haben wir sogar ein stärkeres Resultat gezeigt, nämlich daß die Inäquivalenz von *sternfreien* regulären Ausdrücken NP-hart ist.

(Tatsächlich ist dieses eingeschränkte Problem sogar NP-vollständig, siehe Börger (1985), S. 251).

Am Ende wollen wir noch erwähnen, daß es verschiedenartige Möglichkeiten gibt, doch mit NP-vollständigen Problemen fertig zu werden, zumindest den naiven "Probier-alle-Möglichkeiten" Algorithmus zu verbessern. Dieser hätte zum Beispiel beim Traveling Salesman Problem die Komplexität  $O(n!)$ , da es  $n!$  viele mögliche Anordnungen der  $n$  Reisepunkte gibt. Ein Ansatz, der auf der Methode des *dynamischen Programmierens* beruht, hat "nur" Komplexität  $O(n^2 2^n)$ . Weitere Verbesserungen sind möglich, z.B. mit gewissen *branch-and-bound* Verfahren.

Für manche der NP-vollständigen Probleme sind *probabilistische* Verfahren bekannt (z.B. für Hamilton-Kreis), die sogar im Mittel nur polynomiale Laufzeit erfordern. Problematisch bei einer Aussage über den Mittelwert ist immer, daß eine gewisse Wahrscheinlichkeitsverteilung auf der Menge der Eingaben angesetzt werden muß. Wie realistisch ist gerade diese Verteilung?

Umgekehrt kann auch eingeworfen werden, daß gerade die in "der Natur" vorkommenden Verteilungen bei der Anwendung eines Algorithmus normalerweise so "gutartig" sind, daß die exponentielle Laufzeit, die ja nur für den *schlechtesten* Fall zutrifft, vernachlässigbar ist.

Schließlich wollen wir noch erwähnen, daß es oftmals nicht notwendig ist, ein Problem exakt zu lösen. Beim Traveling Salesman Problem etwa könnten wir auch zufrieden sein, wenn der Algorithmus statt der kürzesten Rundreise eine Rundreise liefert, die garantiertermaßen höchstens 50% länger ist. Wenn uns noch weitere Zusatzinformationen zur Verfügung stehen, z.B. daß die Entfernungsmatrix die *Dreiecksungleichung*  $M_{ij} \leq M_{ik} + M_{kj}$  erfüllt, so stehen schnelle derartige Approximationsalgorithmen durchaus zur Verfügung.



# Anhang: Mathematische Grundlagen

Mit  $\mathbb{N}$  bezeichnen wir die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Null,  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ .

Eine endliche, nicht-leere Menge wird in diesem Zusammenhang oft *Alphabet* genannt. Die Elemente einer solchen Menge heißen dann *Zeichen* oder *Symbole*.

Für ein gegebenes Alphabet  $\Sigma$  bezeichne  $\Sigma^*$  die Menge aller *Wörter*, die sich durch Hintereinanderschreiben (Konkatenation) von Symbolen aus  $\Sigma$  bilden lassen. Dies ist nichts anderes als die Menge aller endlichen *Folgen* von Elementen aus  $\Sigma$ . Dies schließt auch die leere Folge, bzw. das *leere Wort* ein, welches wir mit  $\epsilon$  beschreiben. Falls beispielsweise  $\Sigma = \{a, b\}$ , so ist

$$\Sigma^* = \{\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \dots\}.$$

Mit  $\Sigma^+$  bezeichnen wir  $\Sigma^* - \{\epsilon\}$ .

Sei  $\circ$  eine Bezeichnung für die zweistellige Operation der Konkatenation, dann ist die algebraische Struktur  $(\Sigma^*, \circ)$  eine *Halbgruppe mit neutralem Element*, ein sog. *Monoid*. Mit anderen Worten, diese Struktur erfüllt die folgenden Axiome:

$$x \in \Sigma^* \wedge y \in \Sigma^* \Rightarrow x \circ y = xy \in \Sigma^* \quad (\text{Abgeschlossenheit})$$

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) = xyz \quad (\text{Assoziativität})$$

$$\epsilon \circ x = x \circ \epsilon = x \quad (\text{neutrales Element})$$

Da die Konkatenation assoziativ ist, lässt sich die Notation  $w^n$ , wobei  $w$  ein Wort und  $n$  eine natürliche Zahl ist, im üblichen Sinne interpretieren:  $w^n = ww\dots w$  ( $n$ -mal). Es ist  $w^0 = \epsilon$ .

Für ein Wort  $w$  bezeichnet  $|w|$  seine Länge und für eine Menge  $M$  bezeichnet  $|M|$  seine Mächtigkeit. Die Längenfunktion für Wörter hat – formal betrachtet – ähnliche Eigenschaften wie die Logarithmusfunktion:

$$|\varepsilon| = 0, \quad |uv| = |u| + |v|, \quad |w^n| = n \cdot |w|$$

Seien  $A, B$  Teilmengen von  $\Sigma^*$ , also sog. *Sprachen*. Dann definieren wir:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$$

$$\overline{A} = \Sigma^* - A$$

$$AB = \{xy \mid x \in A \text{ und } y \in B\}$$

Sei  $\mathcal{C}$  eine Klasse von Mengen (Sprachen). Dann heißt  $\mathcal{C}$  *Schnitt- (Vereinigungs-, Komplement-, Produkt-) abgeschlossen*, falls aus  $A \in \mathcal{C}$  und  $B \in \mathcal{C}$  folgt  $A \cup B$  (bzw.  $A \cap B, \overline{A}, AB \in \mathcal{C}$ ).

Man beachte, daß sich die Vereinigung über Schnitt- und Komplementbildung ausdrücken läßt (und analog, die Schnittbildung über Vereinigungs- und Komplementbildung):

$$A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$$

$$A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$$

Deshalb ist jede Klasse, die gegen Komplement und Schnitt abgeschlossen ist, immer auch unter Vereinigung abgeschlossen (bzw. jede gegen Komplement und Vereinigung abgeschlossene Klasse ist immer auch gegen Schnitt abgeschlossen).

Für eine Sprache  $A$  setzen wir  $A^0 = \{\varepsilon\}$  und ferner:

$$A^{n+1} = AA^n.$$

Speziell erhalten wir dann  $A^1 = A$ . Außerdem gilt:

$$A^i A^j = A^{i+j} \quad \text{und} \quad (A^i)^j = A^{ij}$$

Mit dieser Notation definieren wir ferner:

$$A^* = \bigcup_{n \geq 0} A^n$$

$$A^+ = \bigcup_{n \geq 1} A^n$$

Dies verallgemeinert die oben angegebenen Definitionen von  $\Sigma^*$  und  $\Sigma^+$ . Es gilt beispielsweise:

$$\{a^{2n} \mid n \geq 1\} = \{a^2\}^+ \quad \text{und} \quad \{a^{7n+3} \mid n \geq 0\} = \{a^7\}^* \{a^3\}$$

Seien  $R, S$  zweistellige Relationen auf  $\Sigma^*$ , also  $R, S \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ . In Analogie zu der obigen Definition setzen wir:

$$RS = \{(x, y) \mid \text{es gibt ein } z \text{ mit } xRz \text{ und } zSy\}$$

Für eine Relation  $R$  definieren wir  $R^0 = \{(x, x) \mid x \in \Sigma^*\}$  (die identische Abbildung) und schließlich:

$$R^{n+1} = RR^n$$

Damit können wir dann definieren:

$$R^* = \bigcup_{n \geq 0} R^n$$

$$R^+ = \bigcup_{n \geq 1} R^n$$

Anders ausgedrückt heißt dies, daß  $xR^*y$  gilt, falls  $x = y$  oder falls es  $z_1, z_2, \dots, z_n, n \geq 1$ , gibt mit  $xRz_1, z_1Rz_2, \dots, z_nRy$ .

Eine Relation  $R$  heißt *reflexiv*, falls für alle  $x$  gilt:  $xRx$ . Sie heißt *transitiv*, falls aus  $xRy$  und  $yRz$  folgt:  $xRz$ .

**Lemma.**  $R^*$  ist die kleinste reflexive und transitive Relation, die  $R$  umfaßt (die reflexive und transitive *Hülle* von  $R$ ).

**Beweis:**  $R^*$  ist reflexiv, denn  $R^0 \subseteq R^*$ .

$R^*$  ist transitiv, denn seien  $x, y, z$  mit  $xR^*y$  und  $yR^*z$  gegeben. Dann gibt es Zahlen  $i$  und  $j$  mit  $xR^iy$  und  $yR^jz$ . Dann gilt  $xR^{i+j}z$  und damit  $xR^*z$ .

$R^*$  umfaßt  $R$ , denn  $R = R^1 \subseteq R^*$ .

Sei  $R'$  eine beliebige reflexive und transitive Relation, die  $R$  umfaßt. Dann muß gelten:  $R^0 \subseteq R'$  und  $R = R^1 \subseteq R'$ . Da  $R'$  auch transitiv ist, folgt mit Induktion, daß  $R^2, R^3, \dots$  in  $R'$  enthalten sind. Also gilt  $R^* \subseteq R'$ . Damit ist gezeigt, daß  $R^*$  die kleinste solche Relation ist. ■

Analog zeigt man, daß  $R^+$  die kleinste transitive Relation ist, die  $R$  umfaßt.

Eine Relation  $R$  heißt *symmetrisch*, falls mit  $xRy$  immer auch  $yRx$  gilt. Eine Relation, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, heißt auch *Äquivalenzrelation*. Jedem Element  $x$  des Grundbereichs (hier:  $\Sigma^*$ ) kann die Menge der Elemente zugeordnet werden, die zu  $x$  äquivalent sind; diese bezeichnen wir mit  $[x]_R$ :

$$[x]_R = \{y \mid yRx\} = \{y \mid xRy\}$$

(Wenn  $R$  aus dem Kontext hervorgeht, schreiben wir auch einfach  $[x]$ ). Diese Mengen heißen *Äquivalenzklassen*. Hierbei ist  $x$  ein *Repräsentant* der Äquivalenzklasse. Die Grundmenge  $\Sigma^*$  wird in (endlich oder unendlich viele) Äquivalenzklassen disjunkt zerlegt:

$$\Sigma^* = [x_1] \cup [x_2] \cup \dots \cup [x_n] \cup \dots$$

Mit  $\text{Index}(R)$  bezeichnen wir die Anzahl der verschiedenen Äquivalenzklassen, die  $R$  hat. D.h.  $\text{Index}(R)$  ist die maximale Anzahl von Elementen  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  mit  $\neg x_i R x_j$  ( $i \neq j$ ). Falls  $\text{Index}(R) < \infty$  gilt, so sagen wir:  $R$  hat *endlichen Index*.

Zwei Mengen  $M_1$  und  $M_2$  heißen *gleichmächtig* oder *von gleicher Kardinalität*, falls es eine *bijektive* Abbildung zwischen  $M_1$  und  $M_2$  gibt. Falls eine Menge  $M$  gleichmächtig ist wie  $\mathbb{N}$ , die Menge der natürlichen Zahlen, so heißt sie *abzählbar unendlich*. Eine Menge  $M$  heißt (*höchstens*) *abzählbar*, falls sie endlich ist oder abzählbar unendlich. Dies kann (für  $M \neq \emptyset$ ) auch so charakterisiert werden, daß es eine *surjektive* Abbildung  $f$  von  $\mathbb{N}$  nach  $M$  gibt, also:

$$M = \{f(0), f(1), f(2), \dots\}$$

Intuitiv: die Elemente von  $M$  können "durchnumeriert" werden. Zu gegebenem Alphabet  $\Sigma$  ist  $\Sigma^*$  immer eine abzählbare Menge, denn man kann gemäß zunehmender Länge und innerhalb derselben Wortlänge lexikographisch die Elemente durchnumerieren.

Die Menge aller Sprachen über einem gegebenen Alphabet  $\Sigma$  ist gerade die Potenzmenge von  $\Sigma^*$ :

$$\mathcal{P}(\Sigma^*) = \{A \mid A \subseteq \Sigma^*\}$$

Die Potenzmenge einer abzählbar unendlichen Menge  $M$  (hier:  $M = \Sigma^*$ ) ist nicht mehr abzählbar (man sagt, sie ist überabzählbar).

*Beweis:* Sei  $f$  eine Abzählung (ohne Wiederholungen) von  $M$ , d.h.

$$M = \{f(0), f(1), f(2), \dots\}, \quad f(i) \neq f(j) \text{ für } i \neq j.$$

Angenommen,  $\mathcal{P}(M)$  ist abzählbar, dann gilt für eine geeignete Funktion  $g$ :

$$\mathcal{P}(M) = \{g(0), g(1), g(2), \dots\}$$

Definiere nun eine "Diagonalmenge"  $D$  wie folgt:

$$D = \{f(j) \mid f(j) \notin g(j), j \in \mathbb{N}\}$$

Da  $D \subseteq M$ , gilt  $D \in \mathcal{P}(M)$ . Somit ist  $D = g(n)$  für ein  $n$ . Nun gilt aber:

$$f(n) \in D \Leftrightarrow f(n) \notin g(n) \Leftrightarrow f(n) \notin D,$$

ein Widerspruch. ■

Komplexitätsfunktionen werden meist mit Hilfe der  $O$ -Notation angegeben. Hierdurch ist es möglich, sich auf die wesentlichen Charakteristika einer Funktion zu beschränken (genauer: unter Ignorieren konstanter Faktoren wird eine asymptotische obere Schranke angegeben).

Für eine Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  ist

$$O(f(n)) = \{g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid \text{es gibt Konstanten } c \text{ und } n_0, \text{ so daß für alle } n \geq n_0 \text{ gilt: } g(n) \leq c \cdot f(n)\}$$

Anstelle von  $\in$  bzw.  $\subseteq$  wird in diesem Zusammenhang oft = geschrieben. Diese "Gleichungen" sind natürlich nur von links nach rechts zu lesen.

*Beispiel:* Es gilt:  $3n^4 + 27n^3 \log n - 5 = 3n^4 + O(n^3 \log n) = O(n^4)$ .