Lutz Nasdala

Mathematik Beweisaufgaben

Beweise, Lern- und Klausur-Formelsammlung

Springer Vieweg

Mathematik Beweisaufgaben

Lutz Nasdala

Mathematik Beweisaufgaben

Beweise, Lern- und Klausur-Formelsammlung

Springer Vieweg

Lutz Nasdala
Gengenbach, Deutschland

ISBN 978-3-658-13956-8 ISBN 978-3-658-13957-5 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-658-13957-5

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Vieweg

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Vieweg ist Teil von Springer Nature
Die eingetragene Gesellschaft ist Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Vorwort

Was hat die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ mit den Hyperbelfunktionen $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$ gemein, warum ergibt die Summe der reziproken Quadratzahlen $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$, woher kommt das Additionstheorem $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$, wie kann man die Logarithmenregel $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ beweisen, und stimmt es, dass der Areatangens Hyperbolicus $\operatorname{artanh}(x)$ die Ableitung $\frac{1}{1-x^2}$ besitzt?

Für einen Mathematiker gibt es kaum etwas Schöneres als die Herleitung derartiger Zusammenhänge. Er erfreut sich an der Eleganz und Raffinesse eines jeden einzelnen Beweises. Angehende Ingenieure indes teilen diese Begeisterung nur selten. Gewohnt, Formeln kochrezeptartig anzuwenden, fühlen sie sich durch die Verschiedenartigkeit der Herleitungen eher über- als herausgefordert. Selbst wenn ein Beweis nachvollziehbar ist, bleibt die unbefriedigende Tatsache, dass man sich selbst nun nicht mehr an der Herleitung versuchen kann — schließlich wurde der „Trick“ ja schon verraten.

Die vorliegende Beweisaufgabensammlung richtet sich an alle, die die im Rahmen einer Mathematik 1-Vorlesung eingeführten Formeln nicht nur nachvollziehen und anwenden, sondern selbst herleiten wollen. Zur Unterstützung dienen die in einem Extrakapitel angegebenen Lösungshinweise: halbfertige Skizzen, Teilergebnisse, Nennung der Beweismethode oder eine Auflistung der relevanten Gleichungen. Wer beispielsweise das Additionstheorem für den Sinus nicht auf Anhieb beweisen kann, wird dort eine aus drei Dreiecken bestehende Zeichnung als Denkanstoß vorfinden, die es zu ergänzen gilt, bevor mit der Musterlösung verglichen werden kann. Bei umfangreicheren Herleitungen, zu denen unter anderem der Beweis der Potenzgesetze zählt, ist eine Aufteilung in mehrere Aufgaben vorgenommen worden.

Die Beweise werden komplettiert durch zwei Formelsammlungen. Die Gleichungen und Regeln der Lern-Formelsammlung sind von elementarer Bedeutung und müssen von meinen Studierenden ohne Nachschauen angewandt werden können. Als Beispiel seien das Skalar- und das Kreuzprodukt genannt, mit denen sich der Abstand zweier Geraden berechnen lässt. Die Abstandsformel selbst soll nicht auswendig gelernt werden. Die Klausur-Formelsammlung beinhaltet etwas anspruchsvollere Formeln und Lösungsstrategien und ist das einzige zu meinen Prüfungen zugelassene Hilfsmittel. Die Gliederung in sieben Kapitel orientiert sich an dem Lehrbuch „Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 1“ von Lothar Papula.

Ziel der Beweisaufgabensammlung ist die Herleitung der in den Formelsammlungen angegebenen, grundlegenden Gleichungen. Die Abstandsformel zweier Geraden werden Sie hier nicht finden, wohl aber den Beweis des Skalar- und des Kreuzproduktes. Zur Auflockerung umfassen die Aufgaben auch einige Rechnerübungen sowie sehr berühmte mathematische Beweise. Viel Spaß und trauen Sie keiner Formel, die Sie nicht selbst hergeleitet haben!

Gengenbach, im Juli 2016 — Prof. Dr.-Ing. habil. Lutz Nasdala

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Beweisaufgaben

Einleitung

Die als Basler Problem bekannte Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$$

gehört zum Inhalt vieler Mathematik-Vorlesungen. Sie dient als konvergente Majorante beim Thema Vergleichskriterien für unendliche Reihen. Wie man auf den Summenwert kommt, ist in diesem Zusammenhang irrelevant. Auf die Herleitung wird daher meist verzichtet, zumal sie den Rahmen der Vorlesung sprengen und nicht bei allen Studierenden auf Begeisterung stoßen würde. Schließlich gilt es, die Klausur zu bestehen, und man weiß, dass Beweise nur schwer abprüfbar sind. Wer herausfinden will, woher Formeln kommen und warum sie gelten, aber nicht gleich ein komplettes Mathematik-Studium absolvieren möchte, der wird hoffentlich viel Freude an diesem Buch haben.

Die Teile II und III enthalten eine in Lern- und Klausur-Formelsammlung aufgeteilte Zusammenstellung von mathematischen Sätzen und Gleichungen, die den Inhalt einer Mathematik 1-Vorlesung widerspiegeln. Teil I beinhaltet die zu den Formelsammlungen gehörigen Beweise und Herleitungen in Form von Beweisaufgaben. Mit den in Anhang C angegebenen Hinweisen sollten auch Studienanfänger in der Lage sein, einen Teil der Aufgaben zu lösen. Die mit einem „$\star$“ markierten Sternchenaufgaben erfordern bereits eine gewisse Beweiserfahrung. Und bei den mit einem „$\bigstar$“ gekennzeichneten Sternaufgaben, zu denen unter anderem das Basler Problem gehört, muss man schon ein richtiger Beweisprofi sein. Von daher sind auch Studierende höherer Semester angesprochen, und sogar für Absolventen dürfte die ein oder andere Herausforderung dabei sein. Letztendlich hängt es vor allem von den individuellen mathematischen Fähigkeiten und Neigungen ab, ob man sich den Beweisaufgaben stellen kann und möchte.

Das Aufstellen eines Beweises kann mit einer Schatzsuche verglichen werden. Man weiß vorher nicht, wohin die Reise geht und wie lang sie ist. Ein bisschen ist es auch wie Ahnenforschung. Es ist spannend zu sehen, wie weit die Wurzeln zurückverfolgt werden können bzw. müssen. Beispielsweise ist der in Aufgabe 30 verlangte Beweis der Symmetrie des Binomialkoeffizienten recht kurz: einsetzen, kürzen, fertig. Andere Beweise sind deutlich umfangreicher: Bevor man die in Aufgabe 125 behandelte Darstellung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung herleiten kann, sollte man sich von der Gültigkeit seiner beiden Teile überzeugt haben. Hierfür wird unter anderem die in Aufgabe 122 bewiesene Intervallregel und der Mittelwertsatz der Integralrechnung benötigt. Letzterer basiert auf dem Zwischenwertsatz — will man den ebenfalls beweisen? Wie war das nochmal mit der Stetigkeit, und wurde schon gezeigt, dass die ganzen Ableitungsregeln gelten? Mathematiker sind erst zufrieden, wenn klar ist, dass $1 + 1$ tatsächlich 2 ergibt. Dieses Buch richtet sich an Ingenieure. Um die Beweiskette nicht noch weiter zu verlängern und weil man sich leicht auf grafischem Wege von der Gültigkeit überzeugen kann, wird im Falle des Zwischenwertsatzes von einem strengen mathematischen Beweis abgesehen.

Auch an anderen Stellen ist der Unterschied zu einem klassischen Mathematik-Lehrbuch offenkundig. So wird zu Gunsten einer besseren Lesbarkeit auf die sonst übliche Kurzschreibweise mit Allquantor $\forall$ (für alle) und Existenzquantor $\exists$ (es gibt) verzichtet. Lediglich das Quadrat $\blacksquare$ für Beweisende wird beibehalten, damit nicht versehentlich die Lösungshinweise aus Anhang C mit den in Anhang D präsentierten Lösungen verwechselt werden. Sie werden keine Proposition, kein Lemma, kein Korollar und auch keine Gruppen und Ringe finden. Körperaxiome, Klammergesetze und das Vollständigkeitsaxiom werden nicht bewiesen, sondern es wird auf ihre Gültigkeit vertraut. Und nicht an jeder Stelle steht, dass $k \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$, wenn der Definitionsbereich aus dem Zusammenhang hervorgeht.

Anhang A enthält eine Kurzbeschreibung der unterschiedlichen Beweismethoden. In manchen Fällen ist ein wenig Rechnerunterstützung hilfreich, insbesondere bei Aussagen zum Konvergenzverhalten oder bei Gegenbeispielen. Im Rahmen dieses Buches wird die in Anhang B kurz vorgestellte Programmiersprache Python benutzt.

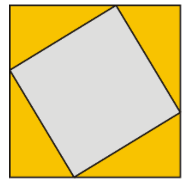
Viele Aufgaben bauen aufeinander auf. Wer die Quotientenregel herleiten möchte, sollte vorher die Produktregel bewiesen haben, welche ihrerseits auf dem Differentialquotienten basiert, dem Grenzwert des Differenzenquotienten. Auch wenn Quereinstiege nur bedingt möglich sind, müssen Sie deshalb nicht zwingend mit Aufgabe 1, dem Satz des Pythagoras, beginnen und sich dann mühsam vorarbeiten. Oftmals reicht eine Beschäftigung mit den vorangegangen Aufgaben des Abschnittes aus, bevor man sich einer speziellen Beweisaufgabe zuwendet.

1 Allgemeine Grundlagen

1.1 Satz des Pythagoras

Aufgabe 1. Es existieren über 400 verschiedene Beweise für den Satz des Pythagoras (6. Jahrhundert v. Chr.):

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{1}$$



Zu den bekanntesten Autoren gehören Leonardo da Vinci, Albert Einstein, Arthur Schopenhauer und mit James A. Garfield sogar ein ehemaliger Präsident der USA.
Gesucht ist der klassische Beweis von Euklid (3. Jahrhundert v. Chr.), der mit der dargestellten Skizze beginnt.

Aufgabe 2. Leiten Sie den trigonometrischen Pythagoras her:

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \tag{2}$$

Aufgabe 3. Zeigen Sie die Gültigkeit des hyperbolischen Pythagoras:

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1 \tag{3}$$

1.2 Potenzgesetze

Aufgabe 4. Beweisen Sie die drei Potenzgesetze

$$x^u x^v = x^{u+v} \tag{4}$$

$$x^u y^u = (xy)^u \tag{5}$$

$$(x^u)^v = x^{uv} \tag{6}$$

für reelle Basen $x, y \in \mathbb{R}$ und natürliche Exponenten $u, v \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Aufgabe 5. Beweisen Sie die beiden Potenzgesetze für die Division

$$\frac{x^u}{x^v} = x^{u-v} \tag{7}$$

$$\frac{x^u}{y^u} = \left(\frac{x}{y}\right)^u \tag{8}$$

für $x, y \in \mathbb{R}$ und $u, v \in \mathbb{N}^*$, ohne den Kehrwert (9) einzuführen.

L. Nasdala, *Mathematik Beweisaufgaben*,
DOI 10.1007/978-3-658-13957-5_1

Aufgabe 6.* Zeigen Sie exemplarisch für das erste Potenzgesetz (4), dass sich mithilfe des Kehrwertes

$$x^{-u} = \frac{1}{x^u} \quad \text{für} \quad x \neq 0 \tag{9}$$

die Gültigkeit der Potenzgesetze (4) bis (8) auf ganzzahlige Exponenten $u, v \in \mathbb{Z}$ erweitern lässt.

Aufgabe 7.* Die Potenzgesetze (4) bis (8) gelten bei positiven Basen $x, y > 0$ auch für rationale Exponenten $u, v \in \mathbb{Q}$. Der Beweis ist wieder exemplarisch für das erste Potenzgesetz (4) durchzuführen, welches in Aufgabe 6 für ganzzahlige Exponenten erweitert wurde.

Die Wurzelschreibweise darf verwendet werden:

$$x^{1/k} = \sqrt[k]{x} \quad \text{für} \quad k \in \mathbb{N}^* \tag{10}$$

Aufgabe 8.* Die Potenzgesetze (4) bis (8) seien für rationale Exponenten hergeleitet. Begründen Sie, dass dann auch reelle Exponenten $u, v \in \mathbb{R}$ benutzt werden dürfen.

1.3 Logarithmengesetze

Aufgabe 9. Zeigen Sie, dass die Logarithmenregel

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \tag{11}$$

äquivalent zum Potenzgesetz (4) ist.

Aufgabe 10. Beweisen Sie die Äquivalenz der Logarithmenregel

$$\log_a x^c = c \log_a x \tag{12}$$

mit der Potenzregel (6).

Aufgabe 11. Zeigen Sie, dass der Basiswechselsatz

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \tag{13}$$

ebenfalls äquivalent zum Potenzgesetz (6) ist.

Aufgabe 12. Wegen (12) $\Leftrightarrow$ (6) und (13) $\Leftrightarrow$ (6) muss gelten: (12) $\Leftrightarrow$ (13). Verifizieren Sie die Äquivalenz der beiden Logarithmengesetze, ohne die Potenzrechenregel anzuwenden.

1.4 Irrationalität der Wurzel aus 2

Aufgabe 13. Beweisen Sie, dass das Quadrat einer geraden Zahl ebenfalls gerade ist.

Aufgabe 14. Es ist zu zeigen, dass man durch Quadrieren einer ungeraden Zahl immer eine ungerade Zahl erhält.

Aufgabe 15. Folgende Aussage ist zu beweisen: Wenn eine Quadratzahl m^2 gerade ist, dann muss auch die Zahl m gerade sein.

Aufgabe 16.* Beweisen Sie, dass die Wurzel aus 2 eine irrationale Zahl ergibt: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

1.5 Primzahlen

Aufgabe 17.* Beweisen Sie die Existenz unendlich vieler Primzahlen (ein weiterer sehr berühmter Widerspruchsbeweis von Euklid).

Aufgabe 18. Gesucht ist der größte gemeinsame Teiler (ggT) zweier natürlicher Zahlen:

a) 546, 1764

b) 10 000 001, 100 001

c) 9 283 479, 2 089 349 234 720 389 479

d) 10 000 000 008 200 000 001 197, 10 000 000 002 200 000 000 057

Schreiben Sie hierfür ein Programm, das auf dem Euklidischen Algorithmus beruht:

1. Sortierung: Die größere Zahl sei m, die kleinere n.
2. Abbruch, falls $m = n$ (= ggT).
3. Austausch von m durch die Differenz $d = m - n$. Gehe zu Schritt 1.

Anmerkungen:

- Beispiel: $\mathrm{ggT}(168, 63) = \mathrm{ggT}(105, 63) = \mathrm{ggT}(63, 42) = \mathrm{ggT}(42, 21) = 21$
- Um die Aufgaben c) und d) in endlicher Zeit lösen zu können, muss der klassische Algorithmus „modernisiert“ werden. Wie könnte diese Optimierung aussehen?
- Der ggT zweier Zahlen lässt sich auch mittels Primfaktorzerlegung bestimmen: $\mathrm{ggT}(168, 63) = \mathrm{ggT}(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7,\ 3 \cdot 3 \cdot 7) = 3 \cdot 7 = 21$. Insbesondere bei größeren Zahlen ist der moderne Euklidische Algorithmus jedoch deutlich effizienter.

Aufgabe 19. Der französische Mathematiker Pierre de Fermat hat im Jahr 1637 die Vermutung aufgestellt, dass alle Zahlen

$$F_n = 2^{(2^n)} + 1 \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\} \tag{14}$$

Primzahlen sind. Erst im Jahre 1732 konnte der schweizerische Mathematiker Leonhard Euler ein Gegenbeispiel präsentieren, welches es von Ihnen zu finden gilt.

1.6 Gleichungen

Aufgabe 20. Leiten Sie die pq-Formel her, mit der sich quadratische Gleichungen lösen lassen.

Aufgabe 21. Wann besitzt ein homogenes LGS (lineares Gleichungssystem)

$$\underline{A}\,\underline{x} = \underline{0} \tag{15}$$

unendlich viele Lösungen, und wie sieht die Alternative aus? Führen Sie den Beweis exemplarisch anhand eines (2,2)-Gleichungssystems.

Aufgabe 22. Zeigen Sie für das Beispiel eines (2,2)-Gleichungssystems, dass bei einem inhomogenen LGS

$$\underline{A}\,\underline{x} = \underline{r} \tag{16}$$

drei Fälle auftreten können: a) genau eine Lösung, b) keine Lösung oder c) unendlich viele Lösungen.

Aufgabe 23. Warum muss bei Wurzelgleichungen immer eine Probe gemacht werden?

1.7 Ungleichungen

Aufgabe 24. Beweisen Sie die Gültigkeit der Bernoulli-Ungleichung

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad x \in \mathbb{R} \text{ mit } x \geq -1 \tag{17}$$

mittels vollständiger Induktion. Die nach dem Schweizer Mathematiker Jacob Bernoulli benannte Ungleichung findet sich in einer seiner Arbeiten aus dem Jahre 1689.

Aufgabe 25. Die folgende Ungleichung soll bewiesen werden:

$$2^n \geq n^2 \quad \text{für} \quad n \geq 4 \tag{18}$$

Aufgabe 26. Zeigen Sie, dass die Dreiecksungleichung

$$|x+y| \leq |x| + |y| \tag{19}$$

auf reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ angewandt werden darf.

Aufgabe 27. Zwei Zahlenwerte x_1 und x_2 können auf unterschiedlichen Wegen gemittelt werden. Bei relativ kleinen Abweichungen kommt meist das arithmetische Mittel

$$\overline{x}_{\mathrm{a}} = \frac{x_1 + x_2}{2} \tag{20}$$

zum Einsatz, z. B. $\overline{x}_{\mathrm{a}}(16; 18) = 17$. Soll über mehrere Größenordnungen hinweg gemittelt werden, so bietet sich das geometrische Mittel

$$\overline{x}_{\mathrm{g}} = \sqrt{x_1 x_2} \tag{21}$$

an: $\overline{x}_{\mathrm{g}}(100; 10000) = 1000$. Weitere bekannte Methoden sind das quadratische Mittel

$$\overline{x}_{\mathrm{q}} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} \tag{22}$$

und das harmonische Mittel:

$$\overline{x}_{\mathrm{h}} = \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} = \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2} \tag{23}$$

Ordnen Sie die vier Mittelwerte nach ihrer Größe. Ergibt sich für alle reellen Zahlen $x_1 \geq 0$ und $x_2 \geq 0$ die gleiche Reihenfolge?

Aufgabe 28.* Beweisen Sie, dass sich die Fakultät wie folgt abschätzen lässt:

$$n^n \geq n! \geq \sqrt{n^n} \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}^* \tag{24}$$

1.8 Binomialkoeffizient

Aufgabe 29.* Der für natürliche Zahlen $n, k \in \mathbb{N}$ definierte Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \quad \text{mit} \quad 0 \leq k \leq n \tag{25}$$

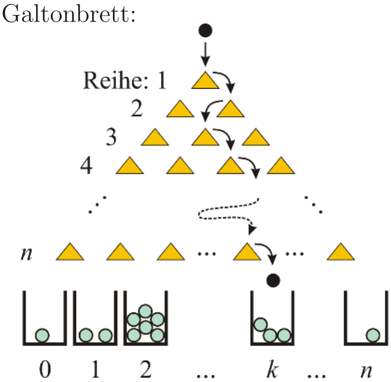
besitzt zwei wichtige Anwendungsgebiete:

- Als Koeffizient (Vorfaktor) beim binomischen Lehrsatz (29), wie sein Name verrät. Bei einem Binom $(a+b)$ handelt es sich um ein Polynom mit zwei Gliedern.

- Als Maß für Wahrscheinlichkeiten in der Kombinatorik.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei dem aus n Reihen bestehenden Galtonbrett die schwarze Kugel in Topf k landet, und stellen Sie die Beziehung zum Binomialkoeffizienten her.

Galtonbrett:



Aufgabe 30. Beweisen Sie die Symmetrie des Binomialkoeffizienten:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \tag{26}$$

Aufgabe 31. Zeigen Sie, dass sich der Binomialkoeffizient rekursiv berechnen lässt:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \tag{27}$$

In anderen Worten: Leiten Sie das Pascalsche Dreieck her.

Pascalsches Dreieck:

$$\begin{array}{lccccccccc}
n=0: & & & & & 1 & & & & \\
n=1: & & & & 1 & & 1 & & & \\
n=2: & & & 1 & \searrow + \swarrow & 2 & & 1 & & \\
n=3: & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
n=4: & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

Aufgabe 32. Der für $n \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ definierte allgemeine Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \prod_{j=1}^{k} \frac{n-(j-1)}{j} = \frac{n \cdot [n-1] \cdot [n-2] \cdot \ldots \cdot [n-(k-1)]}{k!} \quad , \quad \binom{n}{0} = 1 \tag{28}$$

liefert als Sonderfall den Binomialkoeffizienten (25), wie von Ihnen gezeigt werden soll.

Aufgabe 33.* Beweisen Sie die Gültigkeit des binomischen Lehrsatzes:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N} \tag{29}$$

Aufgabe 34. Leiten Sie den binomischen Lehrsatz aus der binomischen Reihe (178) her.

1.9 Mathebluten

Aufgabe 35. Mit Mathematik kann man abnehmen (oder zunehmen, je nach Bedarf). Ausgangspunkt des Beweises ist die Gleichung:

$$G = g + \ddot{u} \tag{30}$$

mit

G :	Tatsächliches Gewicht
g :	Idealgewicht
$\ddot{u}$:	Übergewicht

Nehmen Sie die folgenden elementaren Umformungen vor:

1. Erweiterung mit $(G - g)$
2. Ausmultiplizieren
3. Term $G\ddot{u}$ abziehen

Führen Sie die Rechnung zu Ende, und interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 36. Mithilfe der in Abschnitt 1.2 hergeleiteten Potenzregel für Potenzen

$$(x^u)^v = x^{uv}$$

lassen sich Vorzeichen umkehren. Überzeugen Sie sich zunächst von der Richtigkeit der folgenden Gleichungen:

$$(-1)^2 = 1$$

$$1^{\frac{1}{6}} = 1$$

$$(-1)^{\frac{1}{3}} = -1$$

Der Beweis ist sehr kurz:

$$1 = (-1)^2 = \left[(-1)^2\right]^{\frac{1}{6}} = \ldots$$

Aufgabe 37. Eine bemerkenswerte Eigenschaft der Logarithmusfunktion ist, dass man mit ihr die Reihenfolge zweier Zahlen ändern kann. Der Beweis beginnt mit der Ungleichung:

$$1 > 0$$

Führen Sie die folgenden Schritte durch:

1. Division durch 8
2. Addition von einem Achtel
3. Darstellung als Potenz
4. Logarithmus zur Basis 1/2
5. Subtraktion von 2

Aufgabe 38. Auf einen mehr oder weniger kommt es nicht an. Beweisen Sie diese Aussage, indem Sie den Kotangens partiell integrieren.

Aufgabe 39. Die alternierende harmonische Reihe

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \pm \dots$$

verdankt ihren Namen der Tatsache, dass der Summenwert wechselt (alterniert). Sie haben also als Anwender die Wahl, was herauskommen soll:

- Etwas zwischen $\frac{1}{2}$ und 1:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} < A &= \underbrace{1 - \frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}_{\frac{1}{3\cdot 4}} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}}_{\frac{1}{5\cdot 6}} + \underbrace{\frac{1}{7} - \frac{1}{8}}_{\frac{1}{7\cdot 8}} + \underbrace{\frac{1}{9} - \frac{1}{10}}_{\frac{1}{9\cdot 10}} \pm \dots \\ &= 1 \underbrace{- \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}_{-\frac{1}{2\cdot 3}} \underbrace{- \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}_{-\frac{1}{4\cdot 5}} \underbrace{- \frac{1}{6} + \frac{1}{7}}_{-\frac{1}{6\cdot 7}} \underbrace{- \frac{1}{8} + \frac{1}{9}}_{-\frac{1}{8\cdot 9}} - \frac{1}{10} \pm \dots < 1 \end{aligned}$$

  Gemäß Aufgabe 197 beträgt der Summenwert: $A = \ln(2) = 0{,}6931\dots$

- Eine beliebige Zahl größer als 1, also auch unendlich.
- Ein beliebige Zahl kleiner als $\frac{1}{2}$.

Beweisen Sie, dass der Summenwert verschwindet ($A = 0$), wenn man die Reihenglieder wie folgt umordnet:

$$A = \left[\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right] - \frac{1}{4} + \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right] - \frac{1}{8} + \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right] - \frac{1}{12} \pm \dots$$

Aufgabe 40. In Aufgabe 36 wurde bewiesen, dass Zahlen ihr Vorzeichen wechseln können. Der von Ihnen zu vervollständigende Alternativbeweis verwendet komplexe Zahlen:

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \dots$$

Aufgabe 41. Beweisen Sie, dass für alle Winkel φ die folgende Identität gilt:

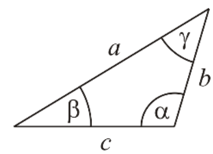
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = 1$$

2 Vektoralgebra

2.1 Sinus- und Kosinussatz

Aufgabe 42. Beweisen Sie den Sinussatz:

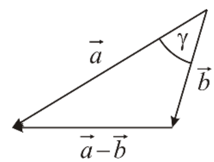
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \tag{31}$$



Aufgabe 43. Führen Sie einen geometrischen Beweis, um die Gültigkeit des Kosinussatzes

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \tag{32}$$

zu zeigen. Insbesondere darf das Skalarprodukt, welches aus der vektoriellen Darstellung des Kosinussatzes



$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\,|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos\gamma \tag{33}$$

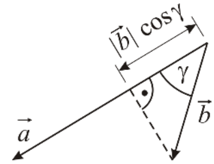
folgt, für die Herleitung nicht verwendet werden.

2.2 Skalar- und Kreuzprodukt

Aufgabe 44. Unter dem Begriff „Skalarprodukt" fasst man zwei Gleichungen zusammen:

1. Mathematische Definition als Verknüpfung zweier Vektoren zu einem Skalar:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \tag{34}$$



2. Geometrische Deutung als Projektion zweier Vektoren:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos\gamma \tag{35}$$

Leiten Sie den geometrischen Teil (35) aus dem Kosinussatz (33) her.

Aufgabe 45. Das von zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Parallelogramm besitzt den Flächeninhalt

$$A = \sqrt{(ab)^2 - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2} \quad . \tag{36}$$

Für die Herleitung ist das in Aufgabe 44 bewiesene Skalarprodukt zu verwenden.

L. Nasdala, *Mathematik Beweisaufgaben*,
DOI 10.1007/978-3-658-13957-5_2

Aufgabe 46. Rechnen Sie nach, dass sich die Fläche des von zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms (36) auch mithilfe des Kreuzproduktes ermitteln lässt:

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}| \quad \text{mit} \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \tag{37}$$

Aufgabe 47. Mit den Gleichungen (36) und (37) lässt sich der Flächeninhalt eines von zwei Vektoren aufgespannten Parallelogramms bestimmen. Welche dritte Möglichkeit der Flächenberechnung gibt es, wenn nicht nur $\vec{a}$ und $\vec{b}$, sondern auch der eingeschlossene Winkel bekannt ist?

Aufgabe 48. Warum gilt $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ für zwei orthogonale Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$?

Aufgabe 49. Zeigen Sie, dass der Vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ senkrecht auf der von den beiden Ausgangsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene steht.

Aufgabe 50. Verifizieren Sie, dass die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ein Rechtssystem bilden.

2.3 Spatprodukt

Aufgabe 51. Die zur Berechnung des Spatprodukts erforderlichen drei Vektoren lassen sich zyklisch vertauschen. Geben Sie einen Beweis hierfür an.

Aufgabe 52. Warum lässt sich mithilfe des Spatprodukts das Volumen des aufgespannten Parallelepipeds berechnen?

3 Funktionen und Kurven

3.1 Additionstheoreme

Aufgabe 53.* Für den Sinus gilt das Additionstheorem:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \, \cos y \pm \cos x \, \sin y \tag{38}$$

Beginnen Sie den Beweis mit dem Fall $\sin(x + y)$, und leiten Sie daraus die Variante für $\sin(x - y)$ her.

Aufgabe 54.* Beweisen Sie das Additionstheorem für den Kosinus:

$$\cos(x \pm y) = \cos x \, \cos y \mp \sin x \, \sin y \tag{39}$$

Aufgabe 55. Zeigen Sie, dass aus den Additionstheoremen (38) und (39) das Additionstheorem für den Tangens folgt:

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \, \tan y} \tag{40}$$

3.2 Hyperbelfunktionen

Aufgabe 56. Jede Funktion lässt sich als Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion darstellen. Im Falle der Exponentialfunktion liefert eine Symmetrisierung den Kosinus Hyperbolicus:

$$\cosh z = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}\right) \tag{41}$$

Zeigen Sie, dass es sich bei $\cosh(z)$ um eine gerade Funktion handelt und dass der Sinus Hyperbolicus

$$\sinh z = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}\right) \tag{42}$$

die zugehörige ungerade Funktion ist.

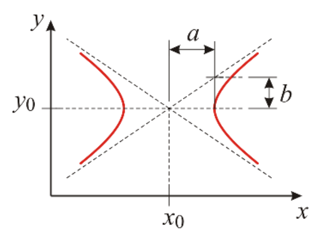
Aufgabe 57.* Die Kegelschnittgleichung einer Hyperbel mit Mittelpunkt (x_0, y_0) lautet:

$$\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 - \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 = 1 \tag{43}$$

Bei der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x} \tag{44}$$

handelt es sich ebenfalls um eine Hyperbel. Stellen Sie den mathematischen Zusammenhang zu Gleichung (43) her.

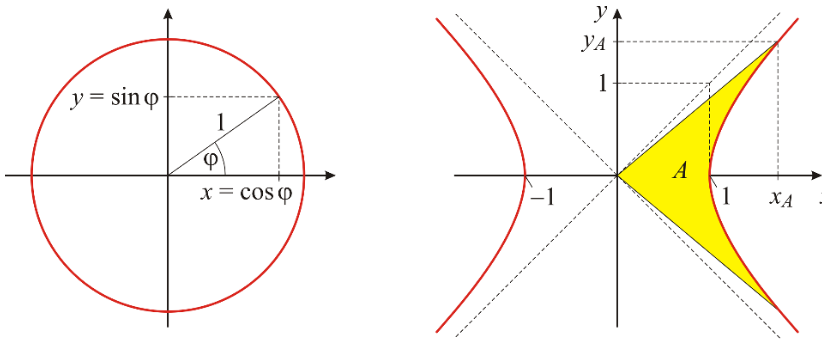


L. Nasdala, *Mathematik Beweisaufgaben*,
DOI 10.1007/978-3-658-13957-5_3

Aufgabe 58.★ In Analogie zu Kreisen, die sich durch die Kreisfunktionen Kosinus und Sinus parametrisieren lassen, können Hyperbeln auch mittels der Hyperbelfunktionen (41) und (42) dargestellt werden. Der Einheitskreis

$$x^2 + y^2 = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$$

ist aus dem Pythagoras herleitbar und benutzt den Winkel φ als Parameter, wie in Aufgabe 2 gezeigt wird.



Rechnen Sie nach, dass bei der Einheitshyperbel (aus (43) mit $x_0 = y_0 = 0$ und $a = b = 1$)

$$x^2 - y^2 = 1 \tag{45}$$

die Fläche A als Parameter verwendet werden kann, indem Sie x_A und y_A als Funktion von A angeben. In anderen Worten: Leiten Sie den Pythagoras für Hyperbelfunktionen (3) aus der Einheitshyperbel (45) her.

3.3 Allgemeine Kegelschnittgleichung

Aufgabe 59.★ In der allgemeinen Form besitzt die Kegelschnittgleichung

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{46}$$

einen gemischten Term Bxy. Die Mittelpunktsdarstellungen von Ellipse

$$\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 = 1 \tag{47}$$

und Hyperbel (43) sowie die Scheitelpunktsform der Parabel

$$x = c(y - y_0)^2 + x_0 \tag{48}$$

kommen hingegen ohne das Produkt xy aus. Zeigen Sie, dass der Koppelterm durch eine Drehung des Koordinatensystems eliminiert werden kann, und bestimmen Sie den zugehörigen Hauptachsenwinkel.

Aufgabe 60. Aus einer in Hauptachsen formulierten Kegelschnittgleichung

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \tag{49}$$

lassen sich folgende Kegelschnitte gewinnen:

- Ellipse (47) für $A \cdot B > 0$
- Hyperbel (43) für $A \cdot B < 0$
- Parabel (48) für $A = 0$ bzw. $y = y(x)$ für $B = 0$

Führen Sie den Beweis exemplarisch für die Ellipsengleichung (47) durch, d. h., bestimmen Sie den Mittelpunkt (x_0, y_0) und die Halbachsen a, b als Funktion der Parameter A bis E.

Aufgabe 61. Leiten Sie aus der Kegelschnittgleichung (49) die entarteten Kegelschnitte her:

- Zwei sich schneidende Geraden
- Gerade
- Punkt

Aufgabe 62. Die Kegelschnittgleichung (49) repräsentiert nicht nur einen Doppelkegel, sondern auch einen Zylinder, aus welchem sich zwei weitere Varianten gewinnen lassen:

- Zwei parallele Geraden
- Keine Lösung

Geben Sie jeweils ein Beispiel an.

3.4 Arkusfunktionen

Aufgabe 63.* Der Arkuskosinus ist als Umkehrfunktion des Kosinus definiert. Zeigen Sie, dass er in Abhängigkeit vom Arkussinus ausgedrückt werden kann:

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x \tag{50}$$

Aufgabe 64. Auch der Arkustangens, die Umkehrfunktion des Tangens, kann als Funktion vom Arkussinus angegeben werden, wie von Ihnen zu zeigen ist:

$$\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \tag{51}$$

Aufgabe 65. Beweisen Sie den folgenden Zusammenhang zwischen Arkuskotangens und Arkustangens:

$$\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x \tag{52}$$

3.5 Areafunktionen

Aufgabe 66. Leiten Sie, ausgehend von der Definitionsgleichung des Sinus Hyperbolicus, den Zusammenhang zwischen Areasinus Hyperbolicus und natürlichem Logarithmus her:

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \tag{53}$$

Aufgabe 67. Es ist zu zeigen, dass sich der Areakosinus Hyperbolicus als Funktion des natürlichen Logarithmus darstellen lässt:

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \tag{54}$$

Aufgabe 68. Die Aufgaben 66 und 67 legen nahe, dass auch der Areatangens Hyperbolicus in Abhängigkeit des natürlichen Logarithmus ausgedrückt werden kann:

$$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \tag{55}$$

Wie sieht der Beweis aus?

Aufgabe 69. Beweisen Sie den Zusammenhang zwischen Areakotangens Hyperbolicus und natürlichem Logarithmus:

$$\operatorname{arcoth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right) \tag{56}$$

3.6 Logarithmische Darstellungen

Aufgabe 70. Zeigen Sie, dass die allgemeine Exponentialfunktion $y = ca^x$ in logarithmischer Darstellung eine Gerade ergibt, aus der sich die Basis a und der Streckfaktor c ablesen lassen.

Aufgabe 71. Um eine Potenzfunktion $y = cx^b$ in eine Gerade zu überführen, muss man diese doppelt-logarithmisch darstellen. Wie lassen sich aus der von Ihnen aufzustellenden Geradengleichung Exponent b und Streckfaktor c bestimmen?

Aufgabe 72. Ist es möglich, die Summe zweier Funktionen durch einfach- oder doppelt-logarithmische Darstellungen in eine Gerade umzuformen?

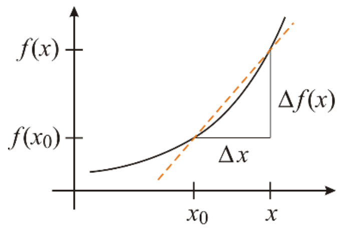
4 Differentialrechnung

4.1 Ableitungsregeln

Aufgabe 73. Die Ableitung einer Funktion lässt sich geometrisch als Steigung interpretieren und durch den Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

annähern. Was muss man tun, um die Steigung exakt bestimmen zu können?



Aufgabe 74. Beweisen Sie die Gültigkeit der Faktorregel:

$$f(x) = c \cdot g(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = c \cdot g'(x) \quad \text{mit} \quad c = \text{konst.} \tag{57}$$

Aufgabe 75. Gemäß der Summenregel lassen sich additiv zusammengesetzte Funktionen gliedweise differenzieren, wie von Ihnen zu zeigen ist:

$$f(x) = u(x) + v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) + v'(x) \tag{58}$$

Aufgabe 76. Leiten Sie die Produktregel her:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \tag{59}$$

Aufgabe 77. Beweisen Sie die Quotientenregel:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} \quad \text{mit} \quad v(x) \neq 0 \tag{60}$$

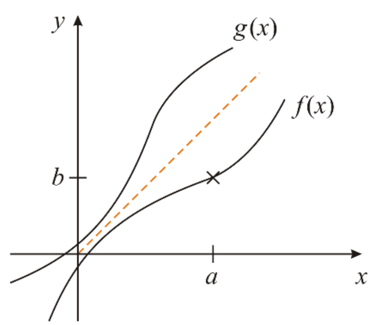
Aufgabe 78. Zeigen Sie, dass für verkettete Funktionen die Kettenregel gilt:

$$f(x) = g(u(x)) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{dg}{du} \cdot \frac{du}{dx} \tag{61}$$

Aufgabe 79. Ist eine Funktion $f(x)$ streng monoton steigend (oder fallend), dann lässt sie sich mithilfe ihrer Umkehrfunktion $g(x) = f^{-1}(x)$ differenzieren:

$$f'(a) = \frac{1}{g'(b)} \quad \text{mit} \quad b = f(a) \tag{62}$$

Leiten Sie die Umkehrregel aus der nebenstehenden Skizze her.



Aufgabe 80. Die Umkehrregel wird von einigen Autoren leider wie folgt angegeben: $f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))}$ mit $g(x) = f^{-1}(x)$. Warum ist diese Schreibweise falsch?

L. Nasdala, *Mathematik Beweisaufgaben*,
DOI 10.1007/978-3-658-13957-5_4

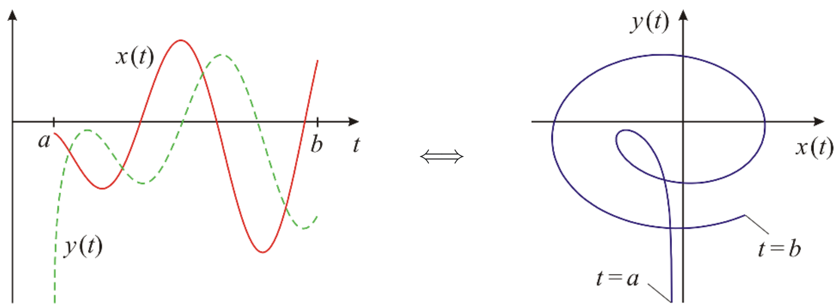
Aufgabe 81. Die von Ihnen herzuleitende logarithmische Differentiation

$$y' = y \cdot [\ln y]' \tag{63}$$

lässt sich prinzipiell auf jede Funktion $y = f(x) > 0$ anwenden. Das Haupteinsatzgebiet ist die Ableitung von Funktionen, die weder Potenz- noch Exponentialfunktionen sind:

$$f(x) = g(x)^{h(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = f(x) \cdot \frac{d[h(x) \cdot \ln g(x)]}{dx} \quad \text{mit} \quad g(x) > 0 \tag{64}$$

Aufgabe 82.* Zwei Funktionen $x = x(t)$ und $y = y(t)$, die dieselbe unabhängige Variable t besitzen, sind durch diese miteinander verknüpft. Zu der expliziten Darstellung $y = y(x)$ gelangt man durch Elimination des Parameters t — zumindest theoretisch, in der Praxis ist die Freistellung von $x(t)$ nach t oftmals nicht möglich. Als Beispiel betrachte man die folgende Parameterdarstellung:

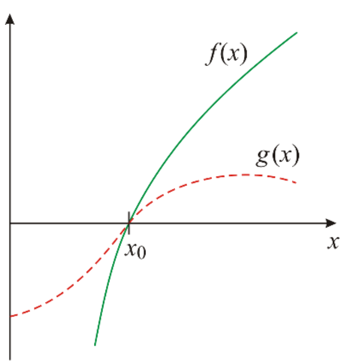


Zeigen Sie, dass man auch ohne Kenntnis der Umkehrfunktion $t = t(x)$ die Ableitung berechnen kann:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \quad \text{mit} \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt} \tag{65}$$

Aufgabe 83. Mit der im Jahre 1696 von L'Hospital veröffentlichten und nach ihm benannten Regel lassen sich unbestimmte Ausdrücke vom Typ $\frac{0}{0}$ und $\frac{\infty}{\infty}$ berechnen. Voraussetzung ist, dass der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert. Beschränken sich sich bei der Herleitung auf den Fall $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{„}\frac{0}{0}\text{“}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{66}$$



Aufgabe 84.* Es soll bewiesen werden, dass die Regel von L'Hospital (66) auch für unbestimmte Ausdrücke vom Typ $\frac{\infty}{\infty}$ Gültigkeit besitzt:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{“}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{67}$$

4.2 Ableitungen der Grundfunktionen

Aufgabe 85. Beweisen Sie die Konstantenregel: Die Ableitung einer konstanten Funktion $f(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$ führt auf die Nullfunktion $f'(x) = 0$.

Aufgabe 86.* Die Eulersche Zahl

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{68}$$

bildet die Basis der Exponentialfunktion e^x. Leiten Sie die Definitionsgleichung (68) aus der Forderung her, dass die (natürliche) Exponentialfunktion gleich ihrer Ableitung ist:

$$f(x) = \mathrm{e}^x \quad\Rightarrow\quad f'(x) = \mathrm{e}^x \tag{69}$$

Aufgabe 87.* Es existieren verschiedene Beweise für die Potenzregel. Sie besagt, dass eine Potenzfunktion $f(x) = x^n$ die Ableitung $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ besitzt. Gesucht ist die klassische Herleitung für natürliche Exponenten $n \in \mathbb{N}^*$, welche mit der Aufstellung des Differentialquotienten beginnt.

Aufgabe 88. Beweisen Sie die Potenzregel für natürliche Exponenten durch vollständige Induktion.

Aufgabe 89. Wie lässt sich die Gültigkeit der Potenzregel auf ganzzahlige Exponenten $n \in \mathbb{Z}$ erweitern?

Aufgabe 90.* Zeigen Sie, dass die Potenzregel auch auf reelle Exponenten $n \in \mathbb{R}$ angewandt werden darf:

$$f(x) = x^n \quad\Rightarrow\quad f'(x) = n \cdot x^{n-1} \tag{70}$$

Verwenden Sie für die Herleitung den Differentialquotienten.

Aufgabe 91. Leiten Sie die Ableitungsregel für den natürlichen Logarithmus mithilfe der Umkehrfunktion her:

$$f(x) = \ln x \quad\Rightarrow\quad f'(x) = \frac{1}{x} \tag{71}$$

Aufgabe 92. Gesucht ist ein äußerst eleganter Beweis der Potenzregel (70), welcher die Ableitungsregel für den natürlichen Logarithmus (71) benutzt. Der Definitionsbereich der Potenzfunktion $f(x) = x^n$ sei daher auf positive Zahlen $x > 0$ beschränkt.

Aufgabe 93.* Im Rahmen der nachfolgenden Aufgaben 95, 96 und 100 wird die Ableitungsregel für die Sinusfunktion auf unterschiedlichen Wegen hergeleitet. Als Vorüberlegung überprüfe man den Grenzwert

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1 \tag{72}$$

mithilfe des Einschnürungssatzes, welcher auch als Quetschlemma bekannt ist. Es handelt sich um einen geometrischen Beweis, der neben dem Sinus auch den Tangens benutzt. Beachten Sie, dass weder die Regel von L'Hospital noch die Taylorreihe verwendet werden darf, weil die Ableitung vom Sinus erst noch hergeleitet werden muss.

Aufgabe 94. Verifizieren Sie mithilfe von Gleichung (72) den Grenzwert:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\cos \alpha - 1}{\alpha} = 0 \tag{73}$$

Aufgabe 95. Zeigen Sie unter Verwendung des Additionstheorems für den Sinus, dass die Ableitung der Sinusfunktion die Kosinusfunktion ergibt:

$$f(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos x \tag{74}$$

Aufgabe 96.* Die Ableitungsregel für den Sinus lässt sich alternativ auch mithilfe der Beziehung

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2} \tag{75}$$

herleiten. Folgende Fragen drängen sich auf:

1. Woher kommt Gleichung (75)?
2. Wie sieht der Beweis aus?
3. Worin besteht der Vorteil gegenüber der Herleitung aus Aufgabe 95?

Aufgabe 97. Die Ableitung vom Kosinus erfordert ein Minuszeichen beim Sinus:

$$f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\sin x \tag{76}$$

Benutzen Sie für den Beweis den trigonometrischen Pythagoras.

Aufgabe 98. Überführen Sie die Kosinusfunktion in eine Sinusfunktion (mit Phasenverschiebung), um die Ableitungsregel für den Kosinus herzuleiten.

Aufgabe 99. Leiten Sie die Differentiationsregel für den Kosinus (76) ohne Gebrauch von Gleichung (74) mittels Additionstheorem her.

Aufgabe 100.* Gesucht ist ein sehr eleganter vektorieller Beweis, mit welchem sich die Ableitungsregeln von Sinus und Kosinus gleichzeitig ermitteln lassen.

Hinweis: Überlegen Sie, wie groß die Geschwindigkeit bei einer gleichförmigen Kreisbewegung ist.

Aufgabe 101. Beweisen Sie die Differentiationsregel für den Sinus Hyperbolicus:

$$f(x) = \sinh x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cosh x \tag{77}$$

Aufgabe 102. Verifizieren Sie, dass die Ableitungsregel für den Kosinus Hyperbolicus

$$f(x) = \cosh x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \sinh x \tag{78}$$

im Gegensatz zur Ableitung des Kosinus ohne Minuszeichen auskommt.

4.3 Ableitungen der erweiterten Grundfunktionen

Aufgabe 103. Leiten Sie die Ableitungsregel der allgemeinen Exponentialfunktion her:

$$f(x) = a^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = (\ln a)a^x \tag{79}$$

Aufgabe 104. Beweisen Sie die Ableitungsregel für Logarithmusfunktionen:

$$f(x) = \log_a |x| \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{(\ln a)x} \tag{80}$$

Starten Sie mit dem Fall $x > 0$.

Aufgabe 105. Überprüfen Sie die Ableitungsregel für den Tangens:

$$f(x) = \tan x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \tag{81}$$

Aufgabe 106. Benutzen Sie die in Aufgabe 105 bewiesene Ableitungsregel für den Tangens, um die Ableitungsregel für den Kotangens herzuleiten:

$$f(x) = \cot x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} \tag{82}$$

Aufgabe 107. Beweisen Sie die Ableitungsregel für den Arkussinus:

$$f(x) = \arcsin x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{83}$$

Aufgabe 108. Nennen Sie zwei Methoden, um die Ableitungsregel für den Arkuskosinus

$$f(x) = \arccos x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{84}$$

herzuleiten, und entscheiden Sie sich für die einfachere.

Aufgabe 109. Beweisen Sie die Gültigkeit der Ableitungsregel für den Arkustangens:

$$f(x) = \arctan x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \tag{85}$$

Aufgabe 110. Zeigen Sie, dass sich der Arkuskotangens wie folgt differenzieren lässt:

$$f(x) = \operatorname{arccot} x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{1}{1+x^2} \tag{86}$$

Aufgabe 111. Verifizieren Sie die Ableitungsregel für den Tangens Hyperbolicus:

$$f(x) = \tanh x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\cosh^2 x} \tag{87}$$

Aufgabe 112. Leiten Sie die Ableitungsregel für den Kotangens Hyperbolicus her:

$$f(x) = \coth x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{1}{\sinh^2 x} \tag{88}$$

Aufgabe 113. Die Differentiationsregel für den Areasinus Hyperbolicus

$$f(x) = \operatorname{arsinh} x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \tag{89}$$

soll mittels Umkehrregel hergeleitet werden.

Aufgabe 114. Der Areakosinus Hyperbolicus besitzt die folgende Ableitung:

$$f(x) = \operatorname{arcosh} x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \tag{90}$$

Gesucht ist ein Beweis, der ohne Umkehrregel auskommt.

Aufgabe 115. Verwenden Sie die Umkehrfunktion, um die Ableitungsregel für den Areatangens Hyperbolicus herzuleiten:

$$f(x) = \operatorname{artanh} x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{1-x^2} \tag{91}$$

Aufgabe 116. Überprüfen Sie die Ableitungsregel für den Areakotangens Hyperbolicus

$$f(x) = \operatorname{arcoth} x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{1-x^2} \tag{92}$$

mithilfe des natürlichen Logarithmus.

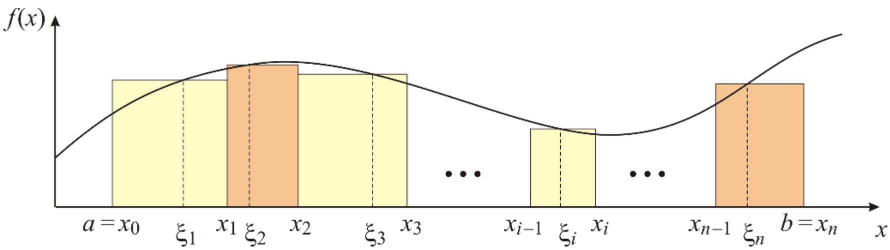
5 Integralrechnung

5.1 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Aufgabe 117. In der Mathematik unterscheidet man zwischen verschiedenen Integraldefinitionen: Riemann-Integral, Lebesgue-Integral, Stieltjes-Integral usw. Für Ingenieuranwendungen interessant ist nur die erste Variante. Aus diesem Grund lässt man meist den Namenszusatz weg, wenn die auf den deutschen Mathematiker Bernhard Riemann zurückgehende Definition gemeint ist.

Mit der von Riemann entwickelten Methode kann der Flächeninhalt unter einer stetigen Funktion $f(x) \geq 0$ wie folgt berechnet werden:

1. Zerlegung in n Rechtecke:



   Funktionen, die auf dem Intervall $[a, b]$ ganz oder teilweise unterhalb der x-Achse verlaufen, lassen sich auf analoge Weise aufteilen. Die Beschränkung auf positive Funktionswerte dient lediglich der Anschaulichkeit (keine Fallunterscheidungen, Beträge und Nullstellenanalysen).

2. Aufstellung der Riemannschen Zwischensumme:

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(\xi_i)}_{\text{Höhe}} \cdot \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\text{Breite}} \quad \text{mit} \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \tag{93}$$

   Die Funktion kann an einer beliebigen Stelle ξ_i innerhalb eines Intervalls $[x_{i-1}, x_i]$ ausgewertet werden. Im Grenzfall $n \to \infty$ hat die Wahl von ξ_i keinen Einfluss auf das Ergebnis — sonst läuft etwas falsch.

3. Grenzwertbetrachtung:

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n \tag{94}$$

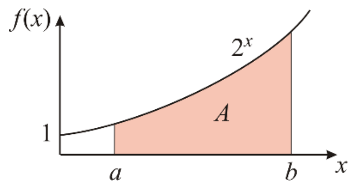
   Die Breite der Rechtecke kann zwar unterschiedlich sein, muss im Grenzfall aber gegen null gehen.

Von dem französischen Mathematiker Jean Gaston Darboux stammt eine etwas pragmatischere Berechnungsmethode. Wie könnte diese aussehen? Die Ermittlung des Flächeninhalts mittels Stammfunktionen ist nicht gemeint.

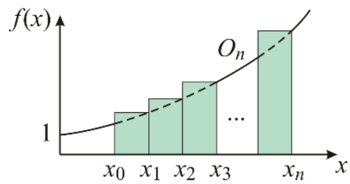
L. Nasdala, *Mathematik Beweisaufgaben*,
DOI 10.1007/978-3-658-13957-5_5

Aufgabe 118.* Die wahrscheinlich immer noch wichtigste Anwendung der Integralrechnung besteht in der Berechnung von Flächeninhalten. Beispielsweise ergibt sich die markierte Fläche unter der Exponentialfunktion $f(x) = 2^x$ zu:

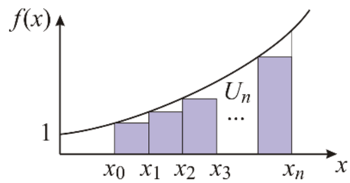
$$A = \int_a^b 2^x \, dx = \Bigg[\underbrace{\frac{1}{\ln(2)} 2^x}_{F(x)} \Bigg]_a^b = \frac{2^b - 2^a}{\ln 2} \tag{95}$$



Die Stammfunktion $F(x)$ resultiert aus dem Hauptsatz der Analysis, welcher besagt, dass die Integration die Umkehrung der Differentiation ist. In Aufgabe 123 wird der Hauptsatz der Analysis (auch: Fundamentalsatz) für unbestimmte Integrale hergeleitet. Der Beweis für bestimmte Integrale, zu denen das in Gleichung (95) benutzte gehört, erfolgt in Aufgabe 124.



Dass die Ermittlung von Flächen auch ohne Integrale möglich ist, soll diese Aufgabe demonstrieren. Ersetzen Sie A in der dargestellten Weise durch n Rechtecke gleicher Breite, und bestimmen Sie den Flächeninhalt für beide Varianten:



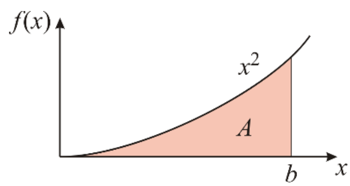
a) Obersumme O_n

b) Untersumme U_n

Zeigen Sie, dass für den Grenzfall unendlich vieler Streifen beide Näherungen gegen die exakte Lösung (95) konvergieren. Der Einfachheit halber sei $a \geq 0$ und $b > a$.

Aufgabe 119.* Gemäß dem noch zu beweisenden Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung kann man den Flächeninhalt unter einer Parabel folgendermaßen berechnen:

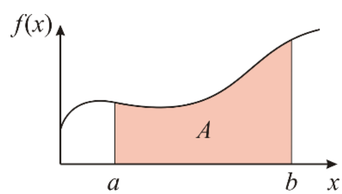
$$A = \int_0^b x^2 \, dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^b = \frac{1}{3} b^3 \tag{96}$$



Überprüfen Sie das Ergebnis, indem Sie die Fläche mithilfe der Obersumme ermitteln.

Aufgabe 120. Der Beweis des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung benutzt den Mittelwertsatz der Integralrechnung. Dieser besagt, dass für stetige Funktionen $f(x)$ ein $\xi \in [a, b]$ existiert mit der Eigenschaft:

$$\int_a^b f(x) \, dx = f(\xi) \cdot (b - a) \tag{97}$$



Weil der Mittelwertsatz (97) ein Sonderfall des in Aufgabe 121 bewiesenen erweiterten Mittelwertsatzes ist, soll hier eine geometrische Veranschaulichung genügen.

Bei Beschränkung auf positive Funktionswerte $f(x) \geq 0$ ist das (Riemann-)Integral auf der linken Seite von Gleichung (97) gleich dem Flächeninhalt A unter der Kurve von $f(x)$. Als was lässt sich die rechte Seite interpretieren?

Aufgabe 121:[⋆] Gegeben sei eine stetige Funktion $f(x)$ und die Funktion $g(x)$ mit $g(x) \geq 0$. In der erweiterten Form besagt der Mittelwertsatz der Integralrechnung, dass ein $\xi \in [a, b]$ (bzw. $\xi \in [b, a]$ für $b < a$) existiert mit der Eigenschaft:

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx = f(\xi) \cdot \int_a^b g(x)\, dx \tag{98}$$

Beweisen Sie diesen wichtigen Satz für $b \geq a$ (für $b < a$ gilt: $\int_a^b \ldots dx = -\int_b^a \ldots dx$).

Allgemeine Hinweise:

- Den erweiterten Mittelwertsatz der Integralrechnung (98) benötigt man für die in Aufgabe 185 behandelte Restgliedapproximation der Taylorreihe.
- Verwechslungsgefahr: Einige Autoren bezeichnen den erweiterten Mittelwertsatz als Mittelwertsatz (ohne Adjektiv).
- Für $g(x) = 1$ ergibt sich der (erste) Mittelwertsatz (97).
- Multipliziert man Gleichung (98) mit -1, dann erhält man eine für Funktionen $g(x) \leq 0$ gültige Variante.

Aufgabe 122:[⋆] Leiten Sie die Intervallregel her:

$$\int_a^c f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx \tag{99}$$

Die Intervallregel wird für den Beweis des Hauptsatzes benötigt, weshalb Gleichung (101) nicht benutzt werden darf.

Aufgabe 123:[⋆] Der Hauptsatz der Analysis lässt sich in zwei Teile untergliedern. Der im Rahmen dieser Aufgabe zu beweisende erste Teil behandelt unbestimmte Integrale und besagt, dass jede stetige Funktion $f(x)$ eine Stammfunktion $F(x)$ besitzt, deren Ableitung $F'(x)$ mit $f(x)$ übereinstimmt:

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\, dt \quad \Rightarrow \quad F'(x) = f(x) \tag{100}$$

Aufgabe 124:[⋆] Der zweite Teil des Hauptsatzes liefert eine Berechnungsvorschrift für bestimmte Integrale:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) \tag{101}$$

Eine (beliebige) Stammfunktion $F(x)$ ist an den Integrationsgrenzen a und b auszuwerten und die Differenz zu bilden. Wie auch beim ersten Teil sei $f(x)$ stetig. Zeigen Sie,

a) dass die Stammfunktion

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

Gleichung (101) erfüllt und

b) dass auch jede andere Stammfunktion $F(x)$ verwendet werden kann.

Aufgabe 125. Der erste Teil des Hauptsatzes (100) stellt eine Implikation dar. Zuerst wird integriert, dann abgeleitet. Beweisen Sie, dass man durch Ergänzung der Konstanten $F_a(x_0)$ den Hauptsatz zu einer Äquivalenzaussage erweitern kann:

$$F_a(x) = F_a(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \quad \Leftrightarrow \quad F_a'(x) = f(x) \tag{102}$$

Es reicht aus, die Gültigkeit der Umkehrung (erst Ableitung, dann Integration) zu zeigen: Eine Funktion $F_a(x)$ lässt sich vollständig rekonstruieren, wenn neben ihrer Ableitung auch ein Funktionswert (Startwert) an einer (beliebigen) Stelle x_0 bekannt ist.

Aufgabe 126. Handelt es sich bei der Darstellung mit Grenzen

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$$

und der Kurzschreibweise ohne Grenzen

$$F(x) = \int f(x)\, dx$$

um das gleiche unbestimmte Integral?

Aufgabe 127. Der Fundamentalsatz der Analysis gilt nur für stetige Funktionen. Zur Veranschaulichung dieser Forderung berechne man die Fläche, welche die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$$

mit der x-Achse auf dem Intervall $[1; 3]$ einschließt.

Aufgabe 128. In den Abschnitten 4.2 und 4.3 werden die Grundfunktionen abgeleitet. Suchen Sie alle Paare $f(x)$ und $f'(x)$ mit unterschiedlichen Definitionsbereichen heraus, und nehmen Sie die erforderlichen Erweiterungen und Fallunterscheidungen vor, damit eine Umkehrung (Integration) möglich ist.

5.2 Elementare Integrationsregeln

Aufgabe 129. Beweisen Sie die Vertauschungsregel:

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx \tag{103}$$

Das Vertauschen der Integrationsgrenzen bewirkt einen Vorzeichenwechsel des Integrals.

Aufgabe 130. Beweisen Sie die Gültigkeit der Faktorregel:

$$\int_a^b k \cdot f(t)\, dt = k \cdot \int_a^b f(t)\, dt \tag{104}$$

Sie besagt, dass ein konstanter Faktor $k \in \mathbb{R}$ vor das Integral gezogen werden darf.

Aufgabe 131. Gesucht ist die Herleitung der Summenregel:

$$\int_a^b f(x) + g(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx \tag{105}$$

Eine Summe von Funktionen kann gliedweise integriert werden.

Aufgabe 132. Es gibt vier elementare Integrationsregeln:

- Vertauschungsregel (103),
- Faktorregel (104),
- Summenregel (105) und
- die bereits in Aufgabe 122 eingeführte Intervallregel (99).

Benennen Sie die beiden Integrationsregeln, welche nur für bestimmte Integrale anwendbar sind, und erläutern Sie, wie sich die beiden anderen Regeln auf unbestimmte Integrale übertragen lassen.

5.3 Integrationstechniken

Aufgabe 133. Verifizieren Sie die Substitutionsmethode für verkettete Funktionen:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\ dx = F(g(x)) + C \quad \text{mit} \quad F'(x) = f(x) \tag{106}$$

Hinweis: Alle in diesem Abschnitt eingeführten Integrationstechniken (Substitution, partielle Integration und Integration durch Partialbruchzerlegung) sind gleichermaßen auf bestimmte und unbestimmte Integrale anwendbar.

Aufgabe 134. Zeigen Sie, dass sich Integrale mit linearer Verkettung durch eine lineare Substitution lösen lassen:

$$\int f(ax + b)\ dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C \quad \text{mit} \quad F'(x) = f(x) \tag{107}$$

Aufgabe 135. Die von Ihnen zu beweisende Substitutionsregel für Quotienten wird auch als logarithmische Integration bezeichnet:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ dx = \ln |f(x)| + C \tag{108}$$

Vier der in Abschnitt 4.3 behandelten elementaren Funktionen lassen sich auf diese Weise integrieren. Finden Sie heraus, welche dies sind, und ermitteln Sie exemplarisch für eine Grundfunktion die zugehörige Stammfunktion.

Aufgabe 136. Überprüfen Sie die Substitutionsregel für Produkte:

$$\int f(x) \cdot f'(x)\ dx = \frac{1}{2} f^2(x) + C \tag{109}$$

Aufgabe 137. Führen Sie die in den Aufgaben 134 bis 136 vorgestellten Substitutionsregeln auf den allgemeinen Ansatz (106) zurück.

Aufgabe 138. Leiten Sie die Methode der partiellen Integration her:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\, dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\, dx \tag{110}$$

Aufgabe 139. Die Methode der partiellen Integration (110) lässt sich nicht nur auf Produkte von Funktionen, sondern auch auf einzelne Funktionen anwenden. Mit $g(x) = x$ erhält man den wichtigen Sonderfall:

$$\int f(x)\, dx = x \cdot f(x) - \int x \cdot f'(x)\, dx \tag{111}$$

Bei neun der in Abschnitt 4.3 abgeleiteten Grundfunktionen ist eine Erweiterung mit $g'(x) = 1$ sinnvoll. Welche Funktionen sind gemeint? Bestimmen Sie von dreien die Stammfunktion $F(x)$.

Aufgabe 140. Gebrochenrationale Funktionen lassen sich in Partialbrüche zerlegen, welche vergleichsweise einfach integriert werden können.

Warum muss die Polynomordnung des Zählers kleiner als die des Nenners sein? Und was muss man tun, wenn diese Voraussetzung nicht erfüllt ist?

Aufgabe 141. Die zu integrierende gebrochenrationale Funktion $f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$ möge eine einfache konjugiert komplexe Nenner-Nullstelle besitzen:

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + px + q \quad \text{mit} \quad x_1 = x_2^* \quad \text{bzw.} \quad 4q > p^2 \tag{112}$$

Überprüfen Sie die Stammfunktion des zugehörigen Partialbruchs:

$$\int \frac{bx + c}{x^2 + px + q}\, dx = \frac{b}{2} \cdot \ln(x^2 + px + q) + \frac{2c - bp}{\sqrt{4q - p^2}} \cdot \arctan\left(\frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}}\right) + D \tag{113}$$

Aufgabe 142.* Im allgemeinen Fall können bei gebrochenrationalen Funktionen konjugiert komplexe Nenner-Nullstellen sogar mehrfach auftreten. Kontrollieren Sie den rekursiven Lösungsalgorithmus mit $k \geq 2$ und $\Delta = 4q - p^2 > 0$:

$$\int \frac{bx + c}{(x^2 + px + q)^k}\, dx = \frac{(2c - bp)x + cp - 2bq}{(k-1)\Delta(x^2 + px + q)^{k-1}} + \frac{(2k-3)(2c - bp)}{(k-1)\Delta} \cdot A_{k-1} \tag{114}$$

mit

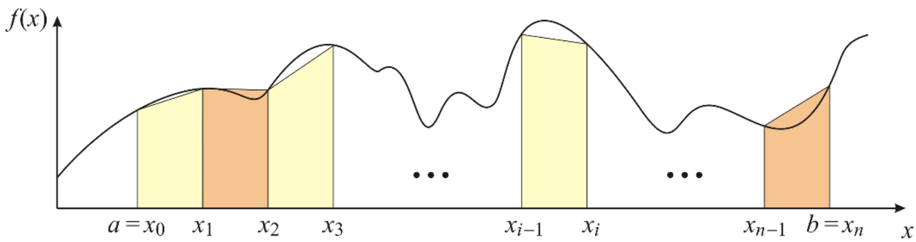
$$A_n = \int \frac{1}{(x^2 + px + q)^n}\, dx = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{\Delta}} \arctan\left(\dfrac{2x + p}{\sqrt{\Delta}}\right) + D & \text{für } n = 1 \\[2ex] \dfrac{2x + p}{(n-1)\Delta(x^2 + px + q)^{n-1}} + \dfrac{4n - 6}{(n-1)\Delta} \cdot A_{n-1} & \text{für } n > 1 \end{cases} \tag{115}$$

5.4 Numerische Integration

Aufgabe 143. Leiten Sie die Trapezregel her:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx \frac{x_n - x_0}{n}\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right] \tag{116}$$

Die Teilintervalle seien gleich groß: $\Delta x = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots$



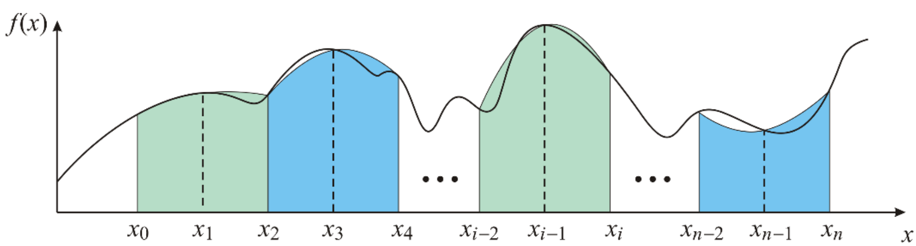
Aufgabe 144. Berechnen Sie den Integralwert:

$$A = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$$

Aufgabe 145.* Bei der von Ihnen herzuleitenden Simpsonregel wird die zu integrierende Funktion $f(x)$ durch Parabeln angenähert:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx \frac{x_n - x_0}{n}\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{3} + \frac{4}{3}\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + \frac{2}{3}\sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i})\right] \tag{117}$$

Die Stützstellen seien gleichmäßig verteilt. Beachten Sie ferner, dass der Parameter n eine gerade Zahl sein muss.

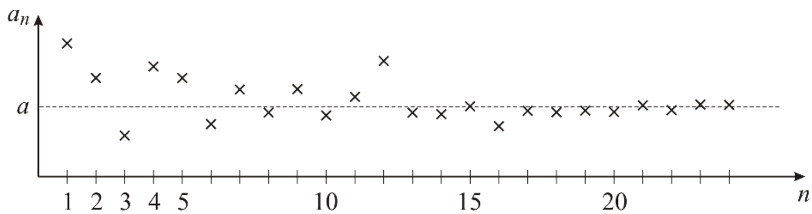


Aufgabe 146. Im Vergleich zur Trapezregel zeichnet sich die Simpsonregel dank ihres parabolischen Ansatzes durch ein hervorragendes Konvergenzverhalten aus. Beurteilen Sie selbst, wie groß die Unterschiede sind, indem Sie den Integralsinus aus Aufgabe 144 mit beiden Methoden annähern.

6 Potenzreihenentwicklungen

6.1 Grenzwerte von Folgen

Aufgabe 147.* Wie lässt sich formal beweisen, dass eine Folge (a_n) mit $n \in \mathbb{N}^*$ gegen den Grenzwert a konvergiert?



Aufgabe 148. Das Rechnen mit Unendlich bereitet Mathematikern Bauchschmerzen. So versagt bei der Gleichung $\frac{1}{\infty} = 0$ die Probe: Das Produkt $0 \cdot \infty$ ergibt nicht 1, wie man vermuten könnte, sondern stellt einen unbestimmten Ausdruck dar.

Gesucht ist ein auch unter formalen Gesichtspunkten korrekter Beweis der Konvergenz der harmonischen Folge:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0 \tag{118}$$

Aufgabe 149.* Beweisen Sie das Monotoniekriterium für monoton wachsende Folgen (a_n): Die Folge (a_n) konvergiert genau dann, wenn sie nach oben beschränkt ist.

Aufgabe 150. Ist das Monotoniekriterium umkehrbar?

Aufgabe 151. Zeigen Sie, dass eine konvergente Folge beschränkt ist.

Aufgabe 152. Lässt sich der Satz aus Aufgabe 151 umkehren, bzw. wofür ist er nütze?

Aufgabe 153.* Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der geometrische Folge

$$a_n = q^n \quad \text{mit } q \in \mathbb{R} \tag{119}$$

mithilfe der jeweils einfachsten Beweismethode:

1. Das Monotoniekriterium aus Aufgabe 149 bzw. 150 ist für den Fall $q \geq 0$ einsetzbar.
2. Das in Aufgabe 152 hergeleitete Divergenzkriterium ist auch für alternierende Folgen geeignet.
3. Die in Aufgabe 147 eingeführte fundamentale Grenzwertdefinition sollte als letzte Möglichkeit in Betracht gezogen werden, denn man muss den Grenzwert kennen oder erraten — was hier zum Glück nicht so schwer ist.

L. Nasdala, *Mathematik Beweisaufgaben*,
DOI 10.1007/978-3-658-13957-5_6

Aufgabe 154. Leiten Sie den Grenzwert der n-ten Wurzel her:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1 \quad \text{für } c > 0 \tag{120}$$

Aufgabe 155. Beweisen Sie, dass der Grenzwert der n-ten Wurzel aus n gleich 1 ist:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \tag{121}$$

Der Standardbeweis führt über den binomischen Lehrsatz und ist relativ aufwändig. Es wird daher empfohlen, die Folge durch eine Funktion zu ersetzen, d. h. statt $n \in \mathbb{N}^*$ sei $n \in \mathbb{R}$ mit $n > 0$. Dass die Erweiterung zu einer Funktion nicht immer trivial ist, demonstriert Aufgabe 158.

Aufgabe 156. Zeigen Sie, dass sich die (natürliche) Exponentialfunktion als Grenzwert einer Folge definieren lässt:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x \tag{122}$$

Aufgabe 157. Beweisen Sie, dass der folgende Quotient gegen null konvergiert:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^b}{a^n} = 0 \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R},\ a > 1 \tag{123}$$

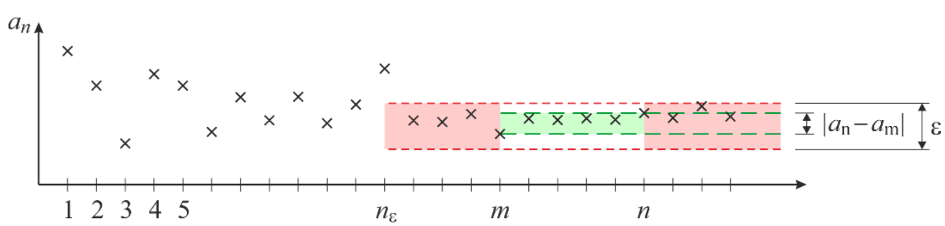
Aufgabe 158.* Auch dieser Quotient strebt gegen null, wie von Ihnen zu zeigen ist:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R} \tag{124}$$

Aufgabe 159. Eine Folge reeller Zahlen konvergiert, wenn es für jedes (noch so kleine) $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ ein n_ε gibt, für das gilt:

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \text{für alle } m, n > n_\varepsilon \tag{125}$$

Dieser wichtige Satz ist als Cauchy-Kriterium bekannt. Er bietet die Möglichkeit, auch solche Folgen auf Konvergenz zu untersuchen, deren Grenzwert a man nicht kennt.



Warum kann die fundamentale Grenzwertdefinition als Sonderfall des Cauchy-Kriteriums angesehen werden?

Aufgabe 160.* Leiten Sie das auf den französischen Mathematiker Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) zurückgehende Kriterium (125) her.

6.2 Endliche Reihen

Aufgabe 161. Gesucht ist ein Beweis ohne Worte (siehe Abschnitt A.6) für die Summenformel der arithmetischen Reihe:

$$\sum_{n=1}^{m} n = 1 + 2 + 3 + \ldots + m = \frac{m(m+1)}{2} \tag{126}$$

Aufgabe 162. Beweisen Sie die Gaußsche Summenformel (126) durch Induktion.

Aufgabe 163. Überprüfen Sie, dass sich die Summe der Quadratzahlen wie folgt berechnen lässt:

$$\sum_{n=1}^{m} n^2 = \frac{1}{6} m(m+1)(2m+1) \tag{127}$$

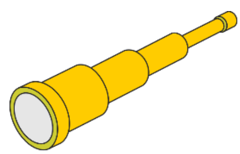
Aufgabe 164.* Die Methode der vollständigen Induktion besitzt einen großen Vorteil und einen großen Nachteil:

- Die einfache Anwendbarkeit: Mit ihr lassen sich bereits bekannte Gleichungen und hypothetische Zusammenhänge relativ einfach beweisen oder auch widerlegen.
- Kein Erkenntnisgewinn: Es ist nicht möglich, eine Formel herzuleiten.

Gelingt es Ihnen, die Summenformel für Quadratzahlen (127) selbst herzuleiten?

Aufgabe 165. Beweisen Sie die Gültigkeit der Summenformel der geometrischen Reihe:

$$\sum_{n=0}^{m} q^n = \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q} \quad \text{für} \quad q \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\} \tag{128}$$



Aufgabe 166.* Gesucht ist die Herleitung der geometrischen Summenformel (128).

Tipp: Aus zwei geometrischen Reihen lässt sich eine Teleskopreihe erzeugen.

Aufgabe 167. Zeigen Sie, dass es sich bei der folgenden Reihe um eine Teleskopreihe handelt, und überprüfen Sie die Summenformel:

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{1+m} \tag{129}$$

Aufgabe 168. Überprüfen Sie, dass die Summe der Kubikzahlen

$$\sum_{n=1}^{m} n^3 = \left[\sum_{n=1}^{m} n \right]^2 \tag{130}$$

gleich dem Quadrat der arithmetischen Reihe (126) ist.

6.3 Grenzwertsätze

Aufgabe 169. Es gibt im Wesentlichen drei Grenzwertsätze für konvergente Folgen (a_n) und (b_n): Die Summen-, die Produkt- und die Quotientenregel.

Im Rahmen dieser Aufgabe soll zunächst die Summenregel

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n \tag{131}$$

bewiesen werden. Bei der Gelegenheit ist auch die Differenzregel

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

herzuleiten, welche als Sonderfall der Summenregel (131) angesehen werden kann.

Aufgabe 170.☆ Verifizieren Sie die Produktregel für konvergente Folgen (a_n) und (b_n):

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n \tag{132}$$

Begründen Sie, warum dann auch die Faktorregel mit $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n \tag{133}$$

Aufgabe 171.★ Beweisen Sie die Quotientenregel:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad \text{mit} \quad a = \lim_{n\to\infty} a_n,\ b = \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0 \tag{134}$$

Leiten Sie zu diesem Zweck zunächst die Ungleichung

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| \leq |a_n - a| \cdot x + |b_n - b| \cdot y$$

her, und schätzen Sie die (zu ermittelnden) Parameter x und y ab.

Aufgabe 172. Begründen Sie, warum sich die Grenzwertsätze für Folgen (131) bis (134) auf Funktionen übertragen lassen:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) \tag{135}$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) \tag{136}$$

$$\lim_{x\to x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x\to x_0} f(x) \tag{137}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} \quad \text{für} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0 \tag{138}$$

Eine wichtige Voraussetzung für die Anwendbarkeit der Grenzwertsätze (135) bis (138) ist die Existenz der Grenzwerte $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. Was ist damit gemeint?

Aufgabe 173.* In manchen Fällen genügen die (klassischen) Grenzwertsätze (135) bis (138) nicht. Als Beispiele seien der Grenzwert einer Potenzfunktion

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)]^c = \left[\lim_{x \to x_0} f(x) \right]^c \tag{139}$$

und der Grenzwert einer Exponentialfunktion

$$\lim_{x \to x_0} c^{f(x)} = c^{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)} \tag{140}$$

genannt (konstanter Exponent bzw. Basis $c \in \mathbb{R}$). In beiden Fällen handelt es sich um eine Verkettung zweier Funktionen. Es reicht daher aus, den allgemeinen Fall herzuleiten:

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to x_0} f(x) \right) \tag{141}$$

Im Gegensatz zur Funktion f, die lediglich einen Grenzwert an der Stelle x_0 besitzen muss, sei die Funktion g an der Stelle x_0 bzw. $y_0 = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ stetig.

6.4 Konvergenzkriterien

Aufgabe 174. Bei den in Abschnitt 6.2 eingeführten endlichen Reihen handelt es sich um Partialsummen:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \tag{142}$$

Es werden also nur endlich viele Folgenglieder a_k addiert. Bei allen Konvergenzkriterien steht die Frage im Mittelpunkt, ob der Summenwert (endlicher Grenzwert)

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n \tag{143}$$

der (unendlichen) Reihe existiert (Konvergenz) oder nicht (Divergenz).

Leiten Sie das notwendige Konvergenzkriterium her, welches besagt, dass bei einer konvergenten Reihe die Folge (a_k) eine Nullfolge ist:

$$\lim_{k \to \infty} a_k = 0 \tag{144}$$

Benutzen Sie für den Beweis das Cauchy-Kriterium (125), und geben Sie ein Beispiel an, warum das notwendige Konvergenzkriterium (144) nicht hinreichend ist. Wofür ist es nütze?

Aufgabe 175. Zeigen Sie, dass absolut konvergente Reihen (Summenwert S existiert)

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = S$$

konvergent sind (A existiert):

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$$

Wieso lässt sich dieser Satz nicht umkehren?

Aufgabe 176. Wenn die (Vergleichs-)Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{mit} \quad b_n \geq 0$$

konvergiert, dann ist auch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{mit} \quad |a_n| \leq b_n \tag{145}$$

konvergent. Beweisen Sie das als Majorantenkriterium bekannte Vergleichskriterium (145).

Anmerkungen:

- Bei Summanden mit unterschiedlichen Vorzeichen lässt sich die Reihe mithilfe des in Aufgabe 175 bewiesenen Satzes über absolut konvergente Reihen abschätzen:

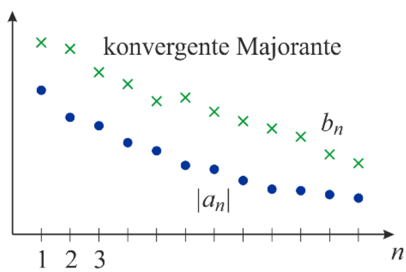
$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{146}$$

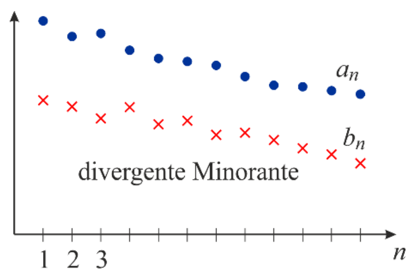
- Falls es eine endliche Anzahl von Summanden mit $|a_n| > b_n$ geben sollte, kann in Übereinstimmung mit dem Cauchy-Kriterium (125) bzw. (316) die Ersatzreihe

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k$$

  betrachtet werden. Eine Anhebung der unteren Grenze wirkt sich zwar auf den Summenwert aus, ändert aber nichts am Konvergenzverhalten.

- Durch Umkehrung des Majorantenkriteriums erhält man das Minorantenkriterium.





Aufgabe 177. Verifizieren Sie das Minorantenkriterium: Wenn die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{mit} \quad b_n \geq 0$$

divergiert, dann divergiert auch die Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{mit} \quad a_n \geq b_n \tag{147}$$

Aufgabe 178. Überprüfen Sie die Summenformel der geometrischen Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \text{für} \quad |q| \in (0;1) \tag{148}$$

Erläutern Sie, warum die Reihe für $|q| \notin [0;1)$ divergiert.

Aufgabe 179.* Leiten Sie das Quotientenkriterium

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \tilde{q} \begin{cases} <1 : & \text{Konvergenz} \\ =1 : & \text{keine Aussage} \\ >1 : & \text{Divergenz} \end{cases} \tag{149}$$

her, indem Sie die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ mit der geometrischen Reihe (148) vergleichen.

Aufgabe 180. Das Wurzelkriterium

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = w \begin{cases} <1 : & \text{Konvergenz} \\ =1 : & \text{keine Aussage} \\ >1 : & \text{Divergenz} \end{cases} \tag{150}$$

basiert ebenfalls auf dem Vergleich mit der geometrischen Reihe, wie von Ihnen gezeigt werden soll.

Aufgabe 181.* Das Wurzelkriterium ist schärfer als das Quotientenkriterium. Da diese Erkenntnis in der Praxis keine große Rolle spielt, soll statt des Beweises ein Beispiel genügen. Finden Sie eine Reihe, bei der das Quotientenkriterium versagt, nicht aber das Wurzelkriterium.

Aufgabe 182.* Das Leibniz-Kriterium besagt, dass eine alternierende Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \pm \ldots \quad \text{mit} \quad a_n \geq 0 \tag{151}$$

konvergiert, wenn für die Folge (a_n) gilt:

1. Sie erfüllt das notwendige Konvergenzkriterium (144), ist also eine Nullfolge:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{152}$$

2. Sie fällt monoton:

$$a_{n+1} \leq a_n \quad \text{für alle } n \tag{153}$$

Beweisen Sie das nach dem Universalgelehrten Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) benannte Kriterium. Worin unterscheidet es sich von den anderen Konvergenzkriterien, und welche Konsequenzen ergeben sich daraus?

6.5 Konvergenz der Taylorreihe

Aufgabe 183.[⋆] Der britische Mathematiker Brook Taylor (1685-1731) hat entdeckt, dass sich eine (stetig differenzierbare) Funktion $f(x)$ durch eine Potenzreihe annähern lässt:

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \end{aligned} \tag{154}$$

Der Fehler hängt von der Polynomordnung n und dem Abstand zwischen x und x_0 ab. Die Entwicklungsstelle x_0 wird auch im Reellen meist als Entwicklungspunkt bezeichnet — was ohne Imaginärteil etwas irreführend sein kann.

Leiten Sie das Taylorpolynom (154) aus dem Hauptsatz der Analysis (102) her, welcher besagt, dass eine Funktion durch Integration der Ableitung wiederhergestellt werden kann:

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\, dt$$

Aufgabe 184. Durch Grenzwertbildung lässt sich das Taylorpolynom (154) in eine Taylorreihe überführen:

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \tag{155}$$

Die Differenz zwischen Ausgangsfunktion und Taylorpolynom

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) \tag{156}$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \tag{157}$$

$$= \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\cdot(x-t)^n\, dt \tag{158}$$

bezeichnet man als Restglied $R_n(x)$:

- Als Synonym für den Fehler wird $R_n(x)$ benutzt, um die Ordnung n eines Taylorpolynoms festzulegen. Je größer die Anforderungen an die Genauigkeit sind, desto mehr Terme umfasst die endliche Reihe.
- Bei einer Taylorreihe muss sichergestellt sein, dass $R_n(x)$ gegen null strebt, weil sie ansonsten nicht mit der Ausgangsfunktion $f(x)$ übereinstimmen würde (auch nicht im Konvergenzintervall, siehe Aufgabe 190).

Zeigen Sie, dass die Integralform (158) des Restglieds gleich der Reihendarstellung (157) ist.

Aufgabe 185.* Das in Aufgabe 184 durch Rekursion gewonnene Restglied $R_n(x)$ ist nur in den seltensten Fällen analytisch berechenbar, so dass man sich in der Regel mit einer Abschätzung begnügen muss. Leiten Sie die auf den italienischen Mathematiker Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) zurückgehende Darstellung des Restglieds her:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1} \quad \text{mit} \quad \xi \in [x_0, x] \tag{159}$$

Anmerkungen zum Intervall $[x_0, x]$:

- Man weiß, dass die Stelle ξ existiert und dass sie irgendwo zwischen x_0 und x liegt.
- Die Formel für das Lagrangesche Restglied gilt nicht nur für den Fall $x \geq x_0$, sondern sinngemäß auch bei vertauschten Grenzen:

  $$\xi \in [x, x_0] \quad \text{für} \quad x < x_0$$

  Die Vertauschungsregel wird in Aufgabe 129 bewiesen.
- Mit der folgenden Variante lässt sich eine Fallunterscheidung umgehen:

  $$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \Theta(x - x_0))}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1} \quad \text{mit} \quad \Theta = \frac{\xi - x_0}{x - x_0} \in [0; 1] \tag{160}$$

  Auch bei dieser Darstellung liegt $\xi = x_0 + \Theta(x - x_0)$ auf dem Intervall von x_0 bis x (bzw. zwischen x und x_0).

Aufgabe 186. Leiten Sie die sogenannte Cauchy-Form des Restglieds her:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \cdot (x - \xi)^n \cdot (x - x_0) \quad \text{mit} \quad \xi \in [x_0, x] \tag{161}$$

Sie wird unter anderem für die in Aufgabe 197 behandelte Taylorreihenentwicklung der Logarithmusfunktion benötigt. Für $x < x_0$ vertauschen sich die Grenzen: $\xi \in [x, x_0]$.

Aufgabe 187. Der Konvergenzbereich einer Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x^1 + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots \tag{162}$$

wird mithilfe des Konvergenzradius ausgedrückt:

$$|x| \begin{cases} < r : & \text{Konvergenz} \\ = r : & \text{(noch) keine Aussage} \\ > r : & \text{Divergenz} \end{cases} \tag{163}$$

Zur Untersuchung der sich mit den Randwerten $x = r$ und $x = -r$ ergebenden Reihen stehen die in Abschnitt 6.4 bewiesenen Konvergenzkriterien zur Verfügung.

Leiten Sie den Konvergenzradius

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \tag{164}$$

aus dem Quotientenkriterium (149) her.

Aufgabe 188. Zeigen Sie, dass sich der Konvergenzradius (164) auch mithilfe des Wurzelkriteriums

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} \tag{165}$$

berechnen lässt.

Aufgabe 189. Die Entwicklung einer Funktion $f(x)$ in eine Taylorreihe (155)

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

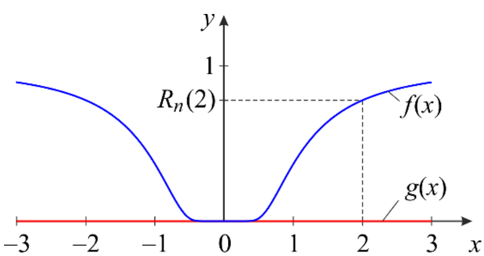
erfolgt in drei Schritten:

1. Bestimmung der Koeffizienten $c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$
2. Angabe des Konvergenzbereichs für $g(x)$
3. Nachweis, dass das Restglied $R_n(x)$ gegen null strebt, um auszuschließen, dass $g(x)$ gegen eine andere Funktion als $f(x)$ konvergiert.

Wie ermittelt man den Konvergenzbereich (einer um x_0 verschobenen Potenzreihe)?

Aufgabe 190.* Leider ist der Nachweis, dass das Restglied der Taylorreihe verschwindet, in der Regel recht aufwändig. Aus diesem Grund wird bei vielen Veröffentlichungen lediglich der Konvergenzradius einer Taylorreihe angegeben. Ingenieure gehen pragmatisch vor: Ihnen genügt eine grafische Bestätigung, dass innerhalb des Konvergenzbereichs durch Hinzunahme weiterer Terme die Ausgangsfunktion immer besser angenähert wird. Dies ist bei den allermeisten Funktionen der Fall.

Mathematiker verweisen auf Gegenbeispiele wie das folgende, bei denen das Restglied (156) nicht verschwindet, z. B. $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(2) = f(2) - g(2) \approx 0{,}789$:



Ausgangsfunktion:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \tag{166}$$

Obwohl die zugehörige Taylorreihe

$$g(x) = 0 \tag{167}$$

für $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, stimmt sie nur im Nullpunkt mit $f(x)$ überein.

Rechnen Sie nach, dass die Taylorreihe für die Stelle $x_0 = 0$ die Nullfunktion ergibt. Da die Funktion $f(x)$ eine stetige Ergänzung enthält, sind die Ableitungen $f^{(n)}(x)$ durch Grenzwertbildung zu ermitteln.

Außerdem ist zu beweisen, dass der Konvergenzradius gegen unendlich strebt.

6.6 Unendliche Reihen

Aufgabe 191.* Beweisen Sie, dass die harmonische Reihe divergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = \infty \tag{168}$$

Aufgabe 192. Zeigen Sie, dass die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \ldots = A \tag{169}$$

konvergiert. Ihr Summenwert A wird in Aufgabe 197 berechnet.

Aufgabe 193. Die allgemeine harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \frac{1}{1^{\alpha}} + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \ldots \quad \text{mit} \quad \alpha \in \mathbb{R} \tag{170}$$

divergiert für $\alpha \leq 1$, wie von Ihnen gezeigt werden soll.

Aufgabe 194.$^{\bigstar}$ Verwenden Sie das in Aufgabe 149 eingeführte Monotoniekriterium, um zu beweisen, dass die Reihe (170) für $\alpha > 1$ konvergiert.

Randnotiz: Die allgemeine harmonische Reihe ist ein Sonderfall der Riemannschen Zeta-Funktion, die sich für $\mathrm{Re}(s) > 1$ auch als Euler-Produkt schreiben lässt:

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \text{prim}} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \ldots\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{mit} \quad s \in \mathbb{C} \tag{171}$$

Die ζ-Funktion spielt eine herausragende Rolle in vielen mathematischen Disziplinen, insbesondere im Zusammenhang mit Primzahlen $p \in \{2, 3, 5, \ldots\}$. Für den Beweis der Riemannschen Vermutung, dass alle nicht-trivialen komplexen Nullstellen s den Realteil $\frac{1}{2}$ besitzen, sind seit 2000 eine Million US-Dollar ausgelobt.

Aufgabe 195.* Überprüfen Sie die Taylorreihe der Exponentialfunktion:

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad \text{mit} \quad x \in \mathbb{R} \tag{172}$$

Zum Nachweis der Restgliedkonvergenz $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = 0$ stehen (u. a.) die in Abschnitt 6.5 hergeleiteten Darstellungsformen zur Verfügung:

1. Reihe (157)
2. Integral (158)
3. Nach Lagrange (159) bzw. (160)
4. Nach Cauchy (161)

Aufgabe 196.* Leiten Sie die Taylorreihe der Sinusfunktion her:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} \quad \text{mit} \quad x \in \mathbb{R} \tag{173}$$

Aufgabe 197.* Verifizieren Sie die Taylorreihenentwicklung der Logarithmusfunktion:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad \text{mit} \quad x \in (-1;1] \tag{174}$$

Mit $x = 1$ erhält man den Summenwert der alternierenden harmonischen Reihe (169):

$$A = \ln(2) \tag{175}$$

Aufgabe 198. Beweisen Sie auf möglichst einfachem Wege die Gültigkeit der folgenden Taylorreihe:

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{mit} \quad |x| < 1 \tag{176}$$

Aufgabe 199.* Es existieren zwei verschiedene Definitionen der binomischen Reihe: (177) und (178). Leiten Sie zunächst die Variante

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k \quad \text{mit } x \in (-1;1) \quad \text{für } n \in \mathbb{R} \tag{177}$$

her, indem Sie das Binom $f(x) = (1+x)^n$ in eine Taylorreihe entwickeln. Dass die Taylorreihe gegen die Ausgangsfunktion $f(x)$ konvergiert, soll erst in Aufgabe 200 bewiesen werden.

Aufgabe 200.★ Zeigen Sie, dass die binomische Reihe (177) auf dem Konvergenzintervall mit ihrer Ausgangsfunktion übereinstimmt.

Aufgabe 201.* Leiten Sie die geometrische Reihe (148) aus der binomischen Reihe (177) her.

Aufgabe 202. Überführen Sie die binomische Reihe (177) in die verallgemeinerte Form:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k \quad \text{mit} \quad a, b, n \in \mathbb{R} \text{ und } |a| > |b| \tag{178}$$

Aufgabe 203. Durch Einsetzen von $x = 1$ in die Taylorreihe der Exponentialfunktion (172) erhält man die Reihendarstellung der Eulerschen Zahl:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = \mathrm{e} \tag{179}$$

In Aufgabe 86 wurde die Eulersche Zahl als Grenzwert einer Folge definiert:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$$

Welchen Ansatz würden Sie vorziehen, um e auf möglichst viele Nachkommastellen berechnen zu können: Folge oder Reihe?

6.7 Das Basler Problem

Aufgabe 204.★ Zu den berühmtesten und faszinierendsten Formeln der Mathematik gehört die Reihe der reziproken Quadratzahlen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6} \tag{180}$$

Bereits im Jahr 1644 hat der Italiener Pietro Mengoli (1625-1686) versucht, ihren Summenwert zu berechnen — ohne Erfolg. Bekannt ist die Reihe als Basler Problem, weil sich die renommierten Schweizer Mathematiker Jakob (1654-1705) und Johann Bernoulli (1667-1748) — ebenfalls erfolglos — um eine Lösung bemühten. Erst im Jahr 1735 (einige Quellen sagen 1734) konnte ein Schüler von Johann Bernoulli das Rätsel um die Basler Zahlenreihe lösen. Es war Leonard Euler (1707-1783).

Die von Euler gefundene Herleitung der Summenformel (180) basiert auf dem unendlichen Produkt der Sinusfunktion und der Taylorreihe der Kardinalsinusfunktion (241) — und ist vergleichsweise anspruchsvoll. Im Laufe der Jahrhunderte sind über ein Dutzend Alternativbeweise hinzugekommen. Die folgende Herleitung verwendet statt eines unendlichen Produkts uneigentliche Integrale — und ist immer noch ziemlich anspruchsvoll:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \tag{181}$$

$$= \frac{4}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{y^{2n}}{2n+1}\, dy \tag{182}$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{1}{y} \ln \frac{1+y}{1-y}\, dy \tag{183}$$

$$= \frac{4}{3} \int_0^1 \frac{\ln y}{y^2-1}\, dy \tag{184}$$

$$= \frac{4}{3} \int_0^1 \int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2y^2+1)(x^2+1)}\, dx\, dy \tag{185}$$

$$= \frac{4}{3} \int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{x^2+1}\, dx \tag{186}$$

$$= \frac{\pi^2}{6} \tag{187}$$

Verifizieren Sie Gleichungen (181) bis (187), indem Sie die fehlenden Zwischenschritte ergänzen.

7 Komplexe Zahlen und Funktionen

7.1 Die Eulersche Formel

Aufgabe 205. Die für reelle Zahlen eingeführten Sätze und Formeln gelten sinngemäß auch für komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$. Mit der in Aufgabe 213 bewiesenen Eulerschen Formel lässt sich eine Beziehung zwischen der kartesischen Darstellung

$$z = x + \mathrm{i}y \tag{188}$$

mit Realteil $x \in \mathbb{R}$ und Imaginärteil $y \in \mathbb{R}$ und der Polardarstellung

$$z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \tag{189}$$

mit Betrag $|z|$ und Winkel φ herstellen. Die Konstante

$$\mathrm{i} = \sqrt{-1} \tag{190}$$

bezeichnet man als imaginäre Einheit.

Geben Sie eine geometrische Interpretation des Betrags, der wie folgt definiert ist:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{191}$$

Aufgabe 206. Beweisen Sie die Gültigkeit der Betragsgleichung

$$|ab| = |a| \cdot |b| \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{C} \tag{192}$$

unter Verwendung von kartesischen Koordinaten. Der Gebrauch von Polarkoordinaten würde den Beweis zwar deutlich vereinfachen, ist aber nicht erlaubt, solange die Eulersche Formel (196) nicht benutzt werden darf.

Es handelt sich um ein Henne-Ei-Problem: Die Betragsgleichung (192) wird benötigt, um die Taylorreihe der komplexen Exponentialfunktion (195) zu verifizieren, welche ihrerseits für den Beweis der Eulerschen Formel erforderlich ist.

Aufgabe 207. Gesucht ist ein Beweis ohne Worte für die Dreiecksungleichung:

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{C} \tag{193}$$

Aufgabe 208.* Die Dreiecksungleichung (193) lässt sich auch auf formalem Wege herleiten. Wie sieht der mathematisch korrekte Beweis aus?

Aufgabe 209. Verallgemeinern Sie die Dreiecksungleichung (193):

$$|z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_m| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3| + \ldots + |z_m| \quad \text{mit} \quad z_i \in \mathbb{C} \tag{194}$$

L. Nasdala, *Mathematik Beweisaufgaben*,
DOI 10.1007/978-3-658-13957-5_7

Aufgabe 210. Der Konvergenzradius einer reellen Potenzreihe ist mittels Quotienten- oder Wurzelkriterium bestimmbar (vgl. Aufgaben 187 bis 189). Zeigen Sie, dass für komplexe Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad \text{mit} \quad z, z_0, c_n \in \mathbb{C}$$

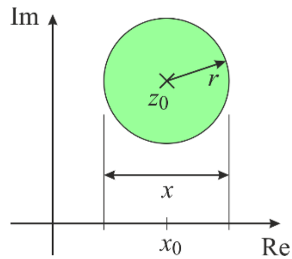
folgendes gilt:

1. Die zugehörige reelle Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot |z - z_0|^n$ ist eine Majorante.
2. Komplexe und reelle Potenzreihe besitzen den gleichen Konvergenzradius r.

Aufgabe 211. In Aufgabe 189 wird gezeigt, dass die Taylorreihe einer reellen Funktion das Konvergenzintervall

$$x \in (x_0 - r; x_0 + r)$$

besitzt; ob die Reihe auch auf den Rändern konvergiert, muss getrennt untersucht werden.



Im Komplexen wird aus dem Konvergenzintervall ein Kreis mit dem Radius r — der Begriff Konvergenzradius ist also treffend gewählt. Der Entwicklungspunkt z_0 kann neben dem Realteil auch einen Imaginärteil besitzen und bildet den Kreismittelpunkt.

Im Rahmen dieser Aufgabe soll demonstriert werden, dass der Konvergenzradius auch im Reellen seine Berechtigung hat. Gegeben sind drei reelle Funktionen mit $x \in \mathbb{R}$:

1. Tangensfunktion:
$$f_1(x) = \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)$$
2. Hyperbelfunktion:
$$f_2(x) = \frac{1}{2 - x}$$
3. Gebrochenrationale Funktion:
$$f_3(x) = \frac{1}{4 + x^2}$$

Die Taylorreihen an der Stelle $x_0 = 0$ besitzen das gleiche Konvergenzintervall:

$$x \in (-2; 2)$$

Erläutern Sie, warum der angegebene Konvergenzbereich plausibel ist, ohne eine Taylorreihenentwicklung durchzuführen.

Aufgabe 212. Begründen Sie, weshalb die in Aufgabe 195 eingeführte Taylorreihe der Exponentialfunktion auch im Komplexen Gültigkeit besitzt:

$$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \quad \text{mit} \quad z \in \mathbb{C} \tag{195}$$

Aufgabe 213. Leiten Sie die Eulersche Formel her:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \tag{196}$$

Hinweise:

- Die Potenzreihe der Sinusfunktion kann Gleichung (173) entnommen werden.
- Es gibt eine elegante Möglichkeit, die Taylorreihe der Kosinusfunktion herzuleiten.
- Die Eulersche Formel gilt auch für negative Winkel $\varphi < 0$, weshalb gelegentlich eine kompaktere Schreibweise verwendet wird:

$$e^{\pm iy} = \cos y \pm i\sin y \tag{197}$$

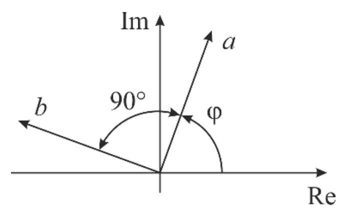
Aufgabe 214. Beweisen Sie die schönste Formel der Welt:

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \tag{198}$$

Sie vereint mit 0, 1, π, e und i gleich fünf der wichtigsten Zahlen — wenn nicht sogar die wichtigsten.

Aufgabe 215. Gegeben sei eine komplexe Zahl:

$$a = x + iy = |a|e^{i\varphi}$$



Zeigen Sie, dass man durch Multiplikation mit der komplexen Einheit i eine Zahl

$$b = i \cdot a = |a|e^{i\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}$$

erhält, die um 90° gegen den Uhrzeigersinn gedreht ist.

Aufgabe 216. Leiten Sie die beiden wichtigen Identitäten her:

$$\cos(\varphi) = \mathrm{Re}\left(e^{i\varphi}\right) = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \tag{199}$$

$$\sin(\varphi) = \mathrm{Im}\left(e^{i\varphi}\right) = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \tag{200}$$

Aufgabe 217. Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, dass eine Polynomfunktion der Ordnung n

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 \tag{201}$$

1. höchstens n reelle Nullstellen $z_i \in \mathbb{R}$,
2. genau n komplexe Nullstellen $z_i \in \mathbb{C}$

besitzt. Zeigen Sie, dass im Falle reeller Koeffizienten

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$$

komplexe Nullstellen immer als konjugiert komplexe Paare auftreten.

7.2 Die komplexe Erweiterung

Aufgabe 218. * Leiten Sie die folgende Stammfunktion mittels partieller Integration her:

$$\int \mathrm{e}^x \cdot \cos x \, dx = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x + \cos x) + C \tag{202}$$

Aufgabe 219. * Führen Sie eine komplexe Erweiterung durch, um das Integral (202) zu lösen. Sie werden feststellen, dass sich die Integration dadurch wesentlich vereinfacht.

Aufgabe 220. * Leiten Sie die trigonometrischen Formeln für Dreifachwinkel

$$\sin(3\varphi) = \quad 3\sin(\varphi) - 4\sin^3(\varphi) \tag{203}$$

$$\cos(3\varphi) = -3\cos(\varphi) + 4\cos^3(\varphi) \tag{204}$$

mithilfe von Additionstheoremen her.

Aufgabe 221. * Überzeugen Sie sich davon, dass man die trigonometrischen Beziehungen (203) und (204) auch aus der Eulerschen Formel herleiten kann.

Hinweis: Die in Abschnitt 1.2 bewiesenen Potenzgesetze sind auch im Komplexen gültig.

Aufgabe 222. Beweisen Sie die Gültigkeit der folgenden trigonometrischen Formeln:

$$\begin{aligned} \sin(5\varphi) &= 5\sin(\varphi) - 20\sin^3(\varphi) + 16\sin^5(\varphi) \\ \cos(5\varphi) &= 5\cos(\varphi) - 20\cos^3(\varphi) + 16\cos^5(\varphi) \end{aligned} \tag{205}$$

Sie haben die Wahl zwischen der mehrfachen Anwendung von Additionstheoremen (vgl. Aufgabe 220) und der Eulerschen Formel (siehe Aufgabe 221).

Aufgabe 223. Stellen Sie einen Zusammenhang zwischen dem Pythagoras für Hyperbelfunktionen (3)

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

und dem trigonometrischen Pythagoras (2)

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

her.

Aufgabe 224. * Komplexe Zahlen sind sehr nützlich bei der Lösung von Problemen aus dem Bereich der Schwingungslehre. Als Beispiel betrachte man die folgende Superposition von Schwingungen (mit $\alpha = \omega \cdot t$):

$$\sin(\alpha) + \sin(2\alpha) + \sin(3\alpha) + \ldots + \sin(n\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{n}{2}\alpha\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)} \tag{206}$$

Verifizieren Sie die Summenformel, indem Sie eine komplexe Erweiterung vornehmen.

7.3 Cardanische Formeln

Aufgabe 225. Die von dem italienischen Mathematiker Gerolamo Cardano (1501-1576) im Jahre 1545 veröffentlichten Formeln können als erste Anwendung der komplexen Zahlen angesehen werden. Sinn und Zweck der Cardanischen Formeln ist es, die Nullstellen einer kubischen Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{mit} \quad a, b, c \in \mathbb{R} \quad , \quad c \neq 0 \tag{207}$$

auf analytischem Wege zu bestimmen, d. h. es bedarf keiner numerischen Lösung. Der Fall $c = 0$ lässt sich mithilfe der pq-Formel für quadratische Gleichungen berechnen, weil die triviale Lösung $x = 0$ abgespalten werden kann.

Die Herleitung für den allgemeinen Fall $c \neq 0$ ist etwas umfangreicher und aus diesem Grund auf vier Aufgaben verteilt. Starten Sie mit dem Beweis, dass jede kubische Gleichung mithilfe der Substitution

$$x = z - \frac{a}{3} \in \mathbb{C} \tag{208}$$

in die sogenannte reduzierte Form (ohne quadratischen Term)

$$z^3 + pz + q = 0 \tag{209}$$

mit

$$p = b - \frac{a^2}{3} \tag{210}$$

und

$$q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c \tag{211}$$

überführt werden kann. Auch die reduzierte kubische Gleichung enthält mit $q = 0$ einen Sonderfall, der ohne Cardanische Formeln auskommt.

Aufgabe 226.★ Um die reduzierte kubische Gleichung (209) lösen zu können, wird ein zweites Mal substituiert:

$$z = u + v \in \mathbb{C} \tag{212}$$

Nach einigen (trickreichen) Umformungen erhält man die Zwischenergebnisse

$$\begin{aligned} u_k &= & &\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} \pm \sqrt{D}\right) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot 2\pi}} \\ v_k &= -\frac{p}{3u_k} &= &\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} \mp \sqrt{D}\right) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot 2\pi}} \end{aligned} \tag{213}$$

mit der Diskriminante

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \tag{214}$$

und $k \in \{0; 1; 2\}$, wie von Ihnen nachvollzogen werden soll.

Wichtiger Hinweis: Die Substitution beschränkt sich auf den kubischen Term und wird teilweise wieder rückgängig gemacht.

Aufgabe 227.★ Die Lösungen der reduzierten kubischen Gleichung (209) hängen in folgender Weise von der Diskriminante (214) ab:

1. Eine reelle und zwei (konjugiert) komplexe Lösungen für $D > 0$:

$$\begin{aligned} z_0 &= u_0 + v_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}} \\ z_{1,2} &= -\frac{u_0 + v_0}{2} \pm \frac{\sqrt{3}\,(u_0 - v_0)}{2}\mathrm{i} \end{aligned} \tag{215}$$

2. Eine einfache und eine doppelte reelle Nullstelle für $D = 0$:

$$\begin{aligned} z_0 &= 2u_0 &&= -\sqrt[3]{4q} \\ z_{1,2} &= -u_0 &&= \sqrt[3]{\frac{q}{2}} \end{aligned} \tag{216}$$

3. Drei verschiedene reelle Lösungen für $D < 0$:

$$z_k = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{q}{2}\sqrt{-\frac{27}{p^3}}\right) + \frac{k \cdot 2\pi}{3}\right) \quad \text{mit} \quad k = 0, 1, 2 \tag{217}$$

Leiten Sie im Rahmen dieser Aufgabe die ersten beiden Fälle her.

Hinweise:

- Beide Fälle lassen sich zusammenfassen: $D \geq 0$. Die reellen Nullstellen (216) ergeben sich als Sonderfall aus den komplexen Nullstellen (215).
- Den Fall $D < 0$ bezeichnet man als „Casus irreducibilis". Obwohl alle Nullstellen reell sind, ist dieser Fall im Reellen nicht lösbar. Er wird in Aufgabe 228 behandelt.
- Durch Rücksubstitution (208) erhält man das endgültige Ergebnis:

$$x_k = z_k - \frac{a}{3} \quad \text{mit} \quad k = 0, 1, 2 \tag{218}$$

Aufgabe 228.★ Gleichung (217) stellt den Kern der Cardanischen Formeln dar. Nutzen Sie bei der Herleitung aus, dass für $D < 0$ die Hilfsvariablen u_k und v_k konjugiert komplex sind.

Aufgabe 229. Überzeugen Sie sich von der Gültigkeit der Cardanischen Formeln, indem Sie ein Programm schreiben, welches die Nullstellen der kubischen Gleichung (207) für beliebige Parameter a, b und c mit $c \neq 0$ berechnen kann.

A Beweismethoden

A.1 Direkter Beweis

Ausgehend von einer Bedingung A (Voraussetzung bzw. eine als gültig vorausgesetzte Annahme), wird durch Umformungen und/oder logische Schlussfolgerungen eine Behauptung B auf direktem Wege bewiesen (A impliziert B, d. h. aus A folgt B):

$$A \Rightarrow B \tag{219}$$

Grundbegriffe der Aussagenlogik:

- **Implikation** (Folgerung): $A \Rightarrow B$

  Umkehrung (Kehrsatz): $B \Rightarrow A$

  Inversion: nicht $A \Rightarrow$ nicht B

  Kontraposition: nicht $B \Rightarrow$ nicht A

- **Äquivalenzumformung** (Konjunktion von $A \Rightarrow B$ und $A \Leftarrow B$):

  $$A \Leftrightarrow B$$

  De Morgansche Regeln ($\wedge$: Und-Verknüpfung; $\vee$: nicht-ausschließendes Oder):

  $$\text{nicht } (C \wedge D) \iff (\text{nicht } C \vee \text{nicht } D) \tag{220}$$

  $$\text{nicht } (C \vee D) \iff (\text{nicht } C \wedge \text{nicht } D) \tag{221}$$

  In der Alltagssprache ist meist das ausschließende Oder (Kontravalenz) gemeint.

Erläuterungen:

- Es gilt der Satz vom ausgeschlossenen Dritten: Aussagen A, B, C, ... (Gleichungen, Ungleichungen, mathematische Sätze, etc.) sind entweder wahr (w) oder falsch (f).
- Beispiel für eine Implikation: Wenn es regnet (A), dann ist die Straße nass (B).
- Implikationen sind nicht umkehrbar; Überschwemmungen und Rohrbrüche können schließlich ebenfalls zu einer nassen Straße führen.
- Manchmal sind mehrere Beweisschritte erforderlich: $A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow B$

Wahrheitstafel der Aussagenlogik:

A	B	nicht A	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Leftrightarrow B$	$A \Rightarrow B$	nicht $A \vee B$
w	w	f	w	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f	f
f	w	w	f	w	f	w	w
f	f	w	f	f	w	w	w
		Negation	Konjunktion	Disjunktion	Äquivalenz	**Implikation**	

A.2 Widerspruchsbeweis

Beweis der Behauptung B, indem man B negiert (Gegenannahme) und daraus einen Widerspruch (Kontradiktion) ableitet:

$$\text{nicht } B \Rightarrow \text{Widerspruch} \tag{222}$$

Hinweise:

- Die (Gegen-)Annahme (nicht B) muss falsch gewesen sein, also ist B richtig.
- Beispiel: Die Straße sei trocken (nicht B). Folglich müsste man ein unbenutztes Papiertaschentuch auf die Straße legen können, ohne dass es feucht wird. Sollte es sich vollsaugen (Widerspruch), dann ist die Straße offensichtlich nass (B).
- Doppelte Verneinung: nicht (nicht nass) = nicht trocken = nass

Der Widerspruchsbeweis kann um die Annahme A erweitert werden:

- Erzeugung eines beliebigen Widerspruchs (z. B. $C \wedge \text{nicht } C$):

  $$(A \wedge \text{nicht } B \quad \Rightarrow \quad \text{Widerspruch}) \quad \Longleftrightarrow \quad (A \Rightarrow B) \tag{223}$$

  Dass der Widerspruchsbeweis (223) äquivalent zum direkten Beweis ist, folgt aus der De Morgan-Regel (220) bzw. der Wahrheitstafel. Wegen des Widerspruchs gilt:

  $$\text{nicht } (A \wedge \text{nicht } B) \quad \Longleftrightarrow \quad (\text{nicht } A \vee B) \quad \Longleftrightarrow \quad (A \Rightarrow B)$$

- Sonderfall „Reductio ad absurdum“:

  $$(A \wedge \text{nicht } B \quad \Rightarrow \quad \text{nicht } A) \qquad \Longleftrightarrow \quad (A \Rightarrow B)$$

- Sonderfall „Reductio ad impossibile“:

  $$(A \wedge \text{nicht } B \quad \Rightarrow \quad B) \qquad \Longleftrightarrow \quad (A \Rightarrow B)$$

A.3 Beweis durch Kontraposition

Statt der Implikation (219) wird die Kontraposition benutzt:

$$\text{nicht } B \Rightarrow \text{nicht } A \tag{224}$$

Hinweise:

- Der direkte Beweis und der Beweis durch Kontraposition sind äquivalent:

  $$(\text{nicht } B \Rightarrow \text{nicht } A) \quad \Longleftrightarrow \quad (A \Rightarrow B)$$

- Beispiel: Wenn die Straße nicht nass ist (nicht B), dann regnet es nicht (nicht A).
- Verwechslungsgefahr: Der Begriff „indirekter Beweis“ wird von manchen Autoren als Synonym für den „Beweis durch Kontraposition“ gebraucht, während andere darunter den Widerspruchsbeweis verstehen. Richtig ist, dass der indirekte Beweis als Oberbegriff beide Beweismethoden umfasst.

A.4 Vollständige Fallunterscheidung

Aufteilung des Beweises in eine endliche Anzahl von Fällen: $F_1, F_2, \ldots, F_n$

A.5 Vollständige Induktion

Beweis einer für alle natürliche Zahlen $n \geq m$ geltenden Aussage $A(n)$:

1. **Induktionsanfang**:

   Man zeige die Gültigkeit der Aussage $A(m)$.

2. **Induktionsschritt** oder **Induktionsschluss**:

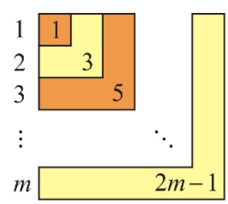
   Unter der Annahme, dass $A(n)$ für ein beliebiges n wahr ist (**Induktionsannahme**), zeige man, dass dann $A(n+1)$ ebenfalls wahr ist (**Induktionsbehauptung**):

$$A(n) \Rightarrow A(n+1) \tag{225}$$

Hinweise:

- Meist: $m = 0$ oder $m = 1$
- Anschauliche Erläuterung: Dominoeffekt
- Erweiterung für negative ganze Zahlen k: $A(k) \Rightarrow A(k-1)$
- Vereinfachte Bezeichnung: Der Zusatz „vollständig“ kann weggelassen werden.

A.6 Beweis ohne Worte



Veranschaulichung eines geometrischen oder arithmetischen Zusammenhangs mithilfe einer Skizze, z. B.:

$$\sum_{n=1}^{m} 2n - 1 = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2m-1) = m^2 \tag{226}$$

A.7 Gegenbeispiel

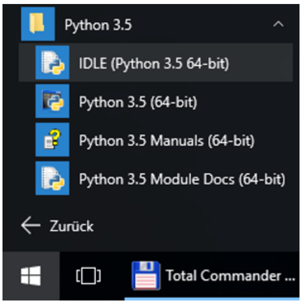
Zur Widerlegung einer Aussage reicht ein Gegenbeispiel aus.

Beispiel:

- Behauptung: Die Funktion $P(n) = n^2 + n + 41$ mit $n \in \mathbb{N}$ erzeugt ausschließlich Primzahlen.
- Wie man sich überzeugen kann, stimmt die Behauptung immerhin für $n \in [0; 39]$. Erst $n = 40$ liefert das gesuchte Gegenbeispiel: $P(40) = 1681 = 41 \cdot 41$

B Python

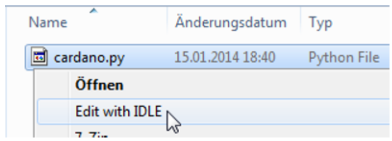
Es gibt eine Vielzahl von exzellenten Programmiersprachen. Für den Einsatz der Open-Source-Software Python sprechen die leichte Erlernbarkeit, die Verfügbarkeit für alle wichtigen Betriebssysteme (Windows, Linux, Android, iOS, etc.) und die Mathe-Bibliotheken.

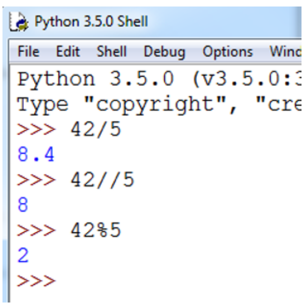


Integrierte Programmierumgebung IDLE

Aufruf unter Windows:

- Über das Startmenü
- Rechtsklick auf vorhandene Datei

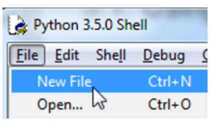


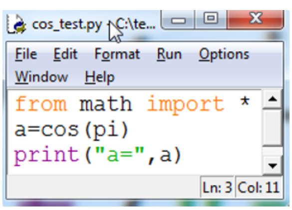


Nutzung mittels Kommandozeile

Interaktive Benutzung als Taschenrechner:

- Vorteil: Sofortige Anzeige, z. B. 42 mod 5 = 2
- Nachteil: Kein Batchjob (Stapelverarbeitung)

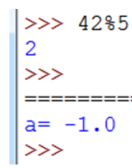




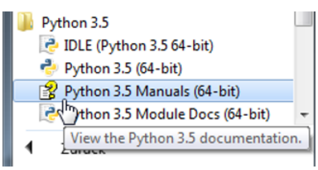
Nutzung mittels Skript-Datei

Im Mittelpunkt steht die Python-Datei (New File):

- Eingabe des Quellcodes in einem separaten Fenster (Editor)
- Dateiendung: py
- Starten: Run Module (F5)



Erste Zeile: Aktivierung der Mathe-Standardbibliothek



Dokumentation

Falls das mitgelieferte Handbuch nicht ausreicht:

- www.python.org, www.python-forum.de, usw.
- Suche nach „Python“ in Wikipedia, Google, ...

C Lösungshinweise

Allgemeine Grundlagen

Aufgabe 1. Der Satz des Pythagoras ist auf direktem Wege herleitbar:

- Der Flächeninhalt des äußeren Quadrates muss gleich der Summe der Teilflächen sein.
- Wenden Sie die erste binomische Formel an.

Die Grundlagen des direkten Beweises sind in Abschnitt A.1 aufgeführt. Da die mathematische Umsetzung des geometrischen Zusammenhangs keiner weiteren Erklärung bedarf, kann man auch von einem „Beweis ohne Worte“ (Abschnitt A.6) sprechen.

Aufgabe 2. Zeichnen Sie ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypothenuse die Länge 1 besitzt.

Aufgabe 3. Setzen Sie die Hyperbelfunktionen (41) und (42) ein.

Aufgabe 4. Benutzen Sie die Definitionsgleichung einer Potenz:

$$x^u = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{u\text{-mal}} \tag{227}$$

Aufgabe 5. Verwenden Sie die Definitionsgleichung (227). Außerdem ist eine Fallunterscheidung vorzunehmen.

Aufgabe 6. Nehmen Sie eine Fallunterscheidung vor:

1. Beide Exponenten negativ:

   Im Mittelpunkt der Herleitung steht das bereits für natürliche Exponenten bewiesene Potenzgesetz für die Multiplikation mit gleicher Basis (4).
2. Ein positiver und ein negativer Exponent:

   Sie benötigen das Potenzgesetz für die Division mit gleicher Basis (7).
3. Ein Exponent gleich null:

   Es ist zu zeigen, dass $x^0 = 1$ für $x \neq 0$ gelten muss.

Aufgabe 7. Stellen Sie die Exponenten als Brüche dar: $u = \dfrac{a}{b}$ und $v = \dfrac{c}{d}$

Aufgabe 8. Da sich reelle Zahlen aus rationalen und irrationalen Zahlen zusammensetzen, müssen nur noch irrationale Zahlen untersucht werden.

Überlegen Sie, wie sich eine irrationale Zahl wie $\sqrt{2}$ darstellen lässt.

Aufgabe 9. Erheben Sie beide Seiten der Logarithmengleichung zur a-ten Potenz, und substituieren Sie: $u = \log_a x$, $v = \log_a y$

Aufgabe 10. Substitution: $b = \log_a x$

Aufgabe 11. Lösungsansatz: Multiplikation mit Nenner

Aufgabe 12. Substitution: $c = \log_x y$

Aufgabe 13. Beginnen Sie den Beweis mit der Erzeugung einer geraden Zahl.

Aufgabe 14. Überlegen Sie, wie sich eine ungerade Zahl darstellen lässt.

Aufgabe 15. Beweis durch Kontraposition (siehe Abschnitt A.3)

Aufgabe 16. Wie in Abschnitt A.2 beschrieben, beginnt jeder Widerspruchsbeweis mit einer Gegenannahme:

Es sei $\sqrt{2}$ rational. Dann lässt sich $\sqrt{2}$ als Bruch zweier teilerfremder natürlicher Zahlen p und q darstellen: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$

Aufgabe 17. Gegenannahme: Es existieren nur endlich viele Primzahlen p_i.

Das Produkt aller Primzahlen $q = \prod_{i=1}^{N} p_i$ ist sicherlich keine Primzahl. Überlegen Sie, ob die nächstgrößere Zahl $q + 1$ eine Primzahl sein kann.

Aufgabe 18. Mit folgendem Algorithmus lassen sich die Werte zweier Zahlenvariablen tauschen, ohne eine Hilfsvariable einführen zu müssen:

$$\begin{aligned} m + n &\to m \\ m - n &\to n \\ m - n &\to m \end{aligned} \tag{228}$$

Beispiel: $63 + 168 = 231$, $231 - 63 = 168$, $231 - 168 = 63$

Der sogenannte Dreieckstausch vertauscht die Variablen m und n auch dann, wenn sie keine Zahlen, sondern andere Objekte wie Zeichenketten beinhalten:

$$\begin{aligned} m &\to k \\ n &\to m \\ k &\to n \end{aligned} \tag{229}$$

Der klassische Euklidische Algorithmus, programmiert in Python (siehe Anhang B):

```
# Berechnung des ggT der folgenden natuerlichen Zahlen:
m, n = 63, 168

while m != n:                   # Solange m ungleich n ...
    if m < n:                   # Vertauschung von m und n
        k = m                   # Hilfsvariable: k
        m = n
        n = k
    print("m=", m, ", n=",n)    # Kontrollausgabe
    m = m-n
print("ggT=", m)
```

Die jeweils kleinere Zahl wird solange von der größeren abgezogen, bis beide Zahlen gleich groß sind. Neben dem eigentlichen Ergebnis ($\text{ggT}(63, 168) = 21$) werden zu Kontrollzwecken auch die Zwischenschritte ausgegeben (Python Shell):

```
Python 3.5.0 (v3.5.0:374f501f4567, Sep 13 2015, 02:27:37) [MSC v.1900
Type "copyright", "credits" or "license()" for more information.
>>>
================= RESTART: C:\nasdala\Mathe_1\Beweise\euklid_1.py ==
m= 168 , n= 63
m= 105 , n= 63
m= 63 , n= 42
m= 42 , n= 21
ggT= 21
>>>
```

Wie bereits in der Aufgabenstellung erwähnt, müssen Sie den klassischen Algorithmus verbessern, um größere Zahlen behandeln zu können.

Aufgabe 19. 95 Jahre Handrechnung oder ein kleines Hilfsprogramm

Aufgabe 20. Lösen Sie die Gleichung

$$x^2 + px + q = 0 \tag{230}$$

durch quadratische Ergänzung.

Aufgabe 21. Koeffizientenmatrix:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Lösungsvektor:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Rechte Seite ist der Nullvektor:

$$\underline{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wenden Sie das Gaußsche Eliminationsverfahren an.

Aufgabe 22. Bei einem inhomogenen LGS ist die rechte Seite ungleich dem Nullvektor:

$$\underline{r} = \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad r^2 + s^2 \neq 0$$

Aufgabe 23. Betrachten Sie das folgende Beispiel:

$$\sqrt{15 - 2x} = -x$$

Aufgabe 24. Der Beweis durch vollständige Induktion wird in Abschnitt A.5 vorgestellt.

Aufgabe 25. Vollständige Induktion

Aufgabe 26. Quadrieren

Aufgabe 27. Einsetzen von $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$ liefert folgende Reihenfolge:

$$\overline{x}_\mathrm{h} = \frac{3}{2} \leq \overline{x}_\mathrm{g} = \sqrt{3} \leq \overline{x}_\mathrm{a} = 2 \leq \overline{x}_\mathrm{q} = \sqrt{5}$$

Zeigen Sie, dass die Sortierung auch für andere nicht-negative Zahlen gilt:

1. Harmonisches Mittel kleiner/gleich geometrisches Mittel:

$$\overline{x}_\mathrm{h} \leq \overline{x}_\mathrm{g}$$

2. Geometrisches Mittel kleiner/gleich arithmetisches Mittel:

$$\overline{x}_\mathrm{g} \leq \overline{x}_\mathrm{a}$$

3. Arithmetisches Mittel kleiner/gleich quadratisches Mittel:

$$\overline{x}_\mathrm{a} \leq \overline{x}_\mathrm{q}$$

Aufgabe 28. Da es sich bei n um eine natürliche Zahl handelt, liegt die Anwendung der vollständigen Induktion nahe. Eine deutlich einfachere Beweismethode ist der direkte Beweis.

Wer noch keine Idee für die Beweisführung hat, der sollte — dieser Tipp gilt ganz grundsätzlich — mit einer Plausibilitätsüberprüfung beginnen, z. B. für $n = 6$:

$$6^6 = \underbrace{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6}_{=46656} \geq 6! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}_{=720} \geq \sqrt{6^6} = \underbrace{\sqrt{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6}}_{=216}$$

Aufgabe 29. Stellen Sie die folgenden Vorüberlegungen an:

- Wie viele unterschiedliche Wege kann die Kugel durchlaufen?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel in Topf 0 landet?
- Wie wahrscheinlich ist es, dass Topf 1 aufgefüllt wird?
- ...

Aufgrund des symmetrischen Aufbaus ist bei jedem Hindernis die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel nach links fällt, genauso groß wie die des Verzweigens nach rechts.

Aufgabe 30. Die Symmetrie des Binomialkoeffizienten kann auf direktem Wege bewiesen werden: $\binom{n}{n-k}$ in die Definitionsgleichung einsetzen und ein paar Termumformungen vornehmen.

Aufgabe 31. Direkter Beweis

Aufgabe 32. Je nach Beweisrichtung ist der Bruch entweder zu erweitern oder zu kürzen.

Aufgabe 33. Bei dem mittels vollständiger Induktion durchzuführenden Beweis sind gleich mehrere Dinge zu beachten:

- Beim Induktionsanfang begegnet man dem Term $(a + b)^0$. Bedeutet dies, dass der binomische Lehrsatz nur für $a \neq -b$ anwendbar ist? Schließlich handelt es sich bei 0^0 um einen unbestimmten Ausdruck.
- Auch für $n \geq 1$ treten unbestimmte Ausdrücke vom Typ 0^0 auf, die durch Fallunterscheidung abgefangen werden müssen.
- Benutzen Sie beim Induktionsschritt die Rekursionsformel (27) für den Binomialkoeffizienten.
- Es sind relativ viele Umformungen erforderlich, so dass es nicht jedem auf Anhieb gelingt, aus der Induktionsannahme $A(n)$ auf die Induktionsbehauptung $A(n + 1)$ zu schließen. Es kann hilfreich sein, die Beweisrichtung umzukehren.
- An einer Stelle muss der Laufindex verschoben werden.

Aufgabe 34. Zeigen Sie, dass alle Terme mit $k > n$ verschwinden.

Aufgabe 35. Schritt 4: Ausklammern

Aufgabe 36. Es kann hilfreich sein, die Wurzelschreibweise zu verwenden:

$$1^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{1} \quad = 1$$
$$(-1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-1} = -1$$

Die kubische Parabel $f(x) = x^3$ ist streng monoton steigend, so dass die Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert ist. Aus $f(-1) = (-1)^3 = -1$ folgt: $\sqrt[3]{-1} = -1$

Aufgabe 37. Die Logarithmusfunktion ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. Aus der Definitionsgleichung (267) folgt die Identitätsgleichung:

$$b = \log_a a^b \tag{231}$$

Insbesondere gilt:

$$b = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^b$$

Aufgabe 38. Für die partielle Integration (Herleitung siehe Aufgabe 138) des Kotangens muss man ihn in zwei Faktoren aufteilen:

$$\cot x = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x$$

Aufgabe 39. Die Klammerausdrücke können vereinfacht werden:

$$A = \underbrace{\left[\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right]}_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} + \underbrace{\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right]}_{\frac{1}{6}} - \frac{1}{8} + \underbrace{\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right]}_{\frac{1}{10}} - \frac{1}{12} \pm \dots$$

Aufgabe 40. Definition der imaginären Einheit:

$$\mathrm{i} = \sqrt{-1}$$

Aufgabe 41. Erweitern Sie den Exponenten der komplexen Exponentialfunktion mit 2π:

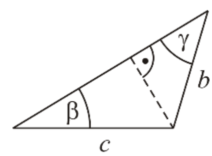
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi \cdot \frac{2\pi}{2\pi}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi \cdot \frac{\varphi}{2\pi}} = \dots$$

Vektoralgebra

Aufgabe 42. Zerlegen Sie das allgemeine Dreieck in zwei rechtwinklige Teildreiecke:

- Aus Symmetriegründen muss nur eine der beiden Gleichungen bewiesen werden, z. B.:

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$



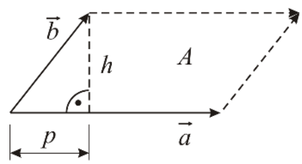
- Ziehen Sie in Betracht, dass der Fußpunkt des Lots außerhalb des Dreieckes liegen kann.

Aufgabe 43. Zerlegung in zwei rechtwinklige Teildreiecke

Aufgabe 44. Zweite binomische Formel: $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \ldots$

Aufgabe 45. Ermitteln Sie die folgenden Längen:

- Projektion p
- Höhe h



Aufgabe 46. Direkter Beweis:

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2} = \ldots$$

Aufgabe 47. Zur Flächenberechnung wird die Länge der beiden Vektoren benötigt.

Aufgabe 48. Zwei Vektoren sind zueinander orthogonal (senkrecht angeordnet), wenn der eingeschlossene Winkel 90° beträgt.

Aufgabe 49. Zu zeigen: $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{a} = 0$ und $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{b} = 0$.

Aufgabe 50. O.B.d.A. (Ohne Beschränkung der Allgemeinheit) verwende man:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 51. Ausmultiplizieren:

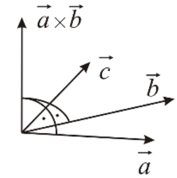
$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \ldots$$
$$\vec{b} \cdot \left(\vec{c} \times \vec{a}\right) = \ldots$$
$$\vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \ldots$$

Aufgabe 52. Hinweise:

- In Abhängigkeit von der Reihenfolge der Vektoren kann das Vorzeichen des Spatprodukts auch negativ sein, weshalb man zur Volumenberechnung den Betrag verwendet:

$$V = \left|\vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\right|$$

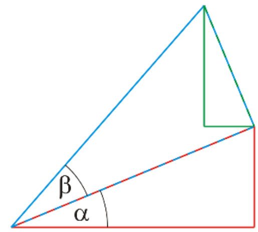
- Vervollständigen Sie für den Beweis die nebenstehende Skizze.



Funktionen und Kurven

Aufgabe 53. Hinweise:

- Für die Herleitung sollten die Variablen x und y durch α und β ausgetauscht werden, damit man besser zwischen Längen (lateinische Buchstaben) und Winkeln (griechische Buchstaben) unterscheiden kann.
- Vervollständigen Sie die Skizze.



Aufgabe 54. Siehe Aufgabe 53.

Aufgabe 55. Einsetzen:

$$\tan(x \pm y) = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos(x \pm y)} = \dots$$

Aufgabe 56. Zerlegung einer Funktion in einen geraden und einen ungeraden Anteil:

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{f_{\mathrm{g}}(x)} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{f_{\mathrm{u}}(x)} \tag{232}$$

Nachweis der Symmetrie:

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{g}}(x) &\stackrel{!}{=} f_{\mathrm{g}}(-x) \\ f_{\mathrm{u}}(x) &\stackrel{!}{=} -f_{\mathrm{u}}(-x) \end{aligned} \tag{233}$$

Aufgabe 57. Die Hyperbel $f(x) = \frac{1}{x}$ besitzt mit der x- und der y-Achse zwei orthogonale Asymptoten. Daraus folgt für die allgemeine Hyperbelgleichung (43), dass

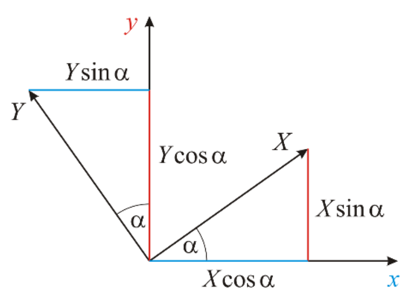
- der Mittelpunkt im Ursprung liegen muss,
- die Halbachsen gleich groß sein müssen und
- eine Koordinatendrehung vorgenommen werden muss.

Um eine Koordinatentransformation durchführen zu können, sollten Sie die Variablen x und y durch X und Y ersetzen:

$$\left(\frac{X - X_0}{a}\right)^2 - \left(\frac{Y - Y_0}{b}\right)^2 = 1$$

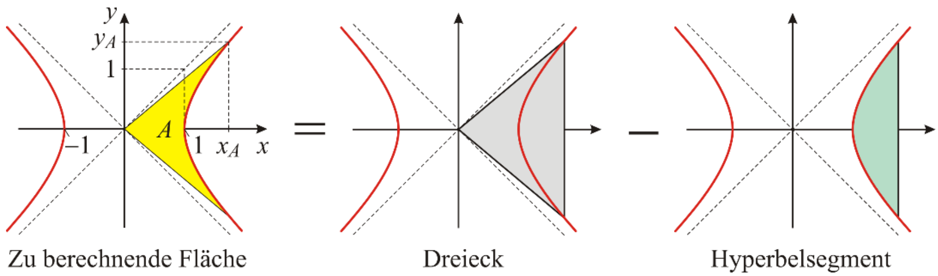
Für einen allgemeinen Drehwinkel α gilt:

$$\begin{aligned} x &= X \cos\alpha - Y \sin\alpha \\ y &= X \sin\alpha + Y \cos\alpha \end{aligned}$$



Geben Sie X und Y als Funktion von x und y an.

Aufgabe 58. Die Fläche A lässt sich als Differenz zweier Teilflächen auffassen:



Den Flächeninhalt des Hyperbelsegments ermittele man auf zwei unterschiedlichen Wegen: Integration in

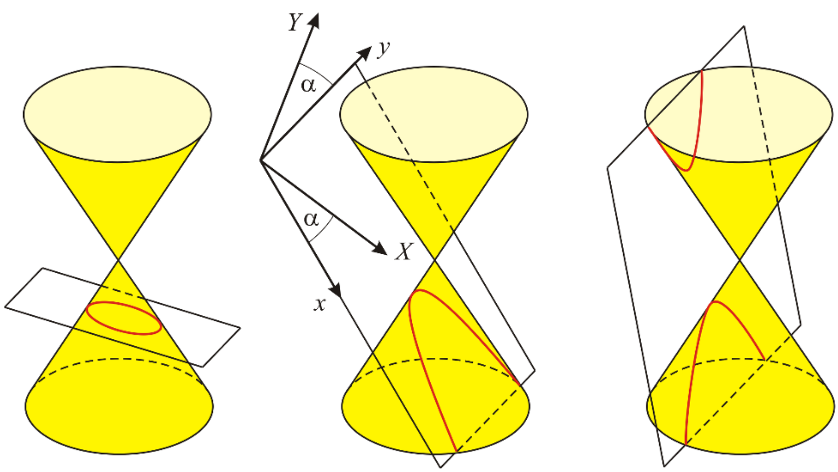
1. x-Richtung für die Koordinate x_A,
2. y-Richtung für die Koordinate y_A.

Für die Stammfunktionen siehe Gleichungen (89) und (90). Zunächst müssen Sie die Integrale durch partielle Integration vereinfachen.

Aufgabe 59. Wie in Aufgabe 57 gezeigt, müssen zur Unterscheidung der Koordinatensysteme unterschiedliche Variablen verwendet werden. Beispielsweise kann die allgemeine Form der Kegelschnittgleichung (46) auch mittels Großbuchstaben formuliert werden:

$$AX^2 + BXY + CY^2 + DX + EY + F = 0 \tag{234}$$

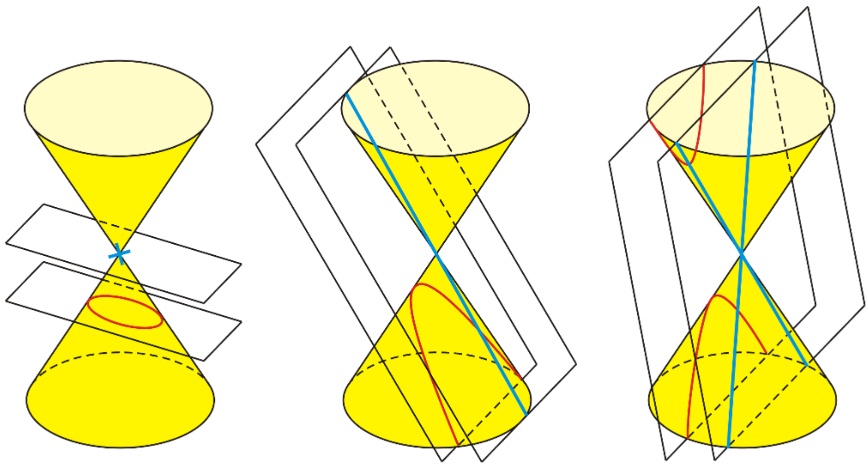
Stellen Sie die Hauptachsenkoordinaten x und y als Funktion von X und Y dar, und eliminieren Sie den gemischten Term.



Aufgabe 60. Quadratische Ergänzung

Aufgabe 61. Für die Sonderfälle gilt folgende Zuordnung:

- Ellipse → Punkt
- Parabel → Gerade
- Hyperbel → Zwei sich schneidende Geraden

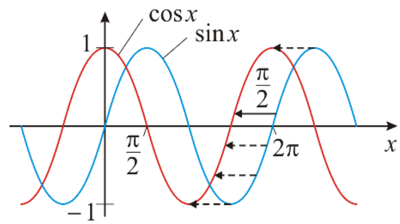


Aufgabe 62. Mögliche Vereinfachung: $A = C = D = 0$

Aufgabe 63. Die Kosinusfunktion ist achsensymmetrisch und lässt sich in Abhängigkeit der Sinusfunktion ausdrücken:

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \tag{235}$$

Die Phasenverschiebung beim Sinus beträgt $-90°$ bzw. $-\frac{\pi}{2}$ (Verschiebung nach links).



Aufgabe 64. Für den Beweis benötigt man die folgenden Zutaten:

- Trigonometrischer Pythagoras
- Definitionsgleichung des Tangens

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \tag{236}$$

- Umkehrfunktionen

Aufgabe 65. Als Kehrwert vom Tangens kann der Kotangens in Abhängigkeit von Sinus und Kosinus angegeben werden. Beachten Sie auch den Lösungshinweis zu Aufgabe 63.

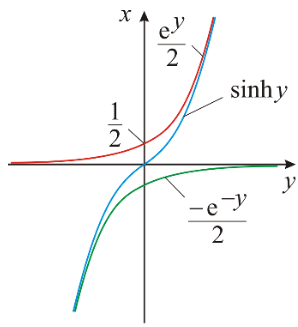
Aufgabe 66. Da der Areasinus Hyperbolicus $y = \operatorname{arsinh}(x)$ die Umkehrfunktion vom Sinus Hyperbolicus

$$x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

ist, müssen Sie die Gleichung lediglich nach y freistellen. Hierbei kann die Substitution

$$z = e^y > 0$$

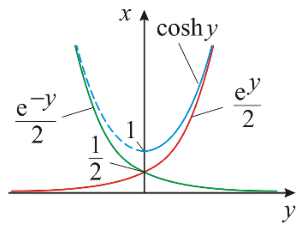
hilfreich sein.



Aufgabe 67. Der Areakosinus Hyperbolicus $y = \operatorname{arcosh}(x)$ ist die Umkehrfunktion vom Kosinus Hyperbolicus:

$$x = \cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$

Beachten Sie den Definitions- und Wertebereich.

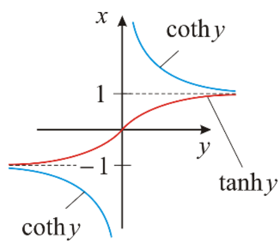


Aufgabe 68. Bilden Sie die Umkehrfunktion vom Tangens Hyperbolicus:

$$x = \tanh y = \frac{\sinh y}{\cosh y} \tag{237}$$

Aufgabe 69. Der Kotangens Hyperbolicus ist der Kehrwert vom Tangens Hyperbolicus:

$$x = \coth y = \frac{1}{\tanh y} = \frac{\cosh y}{\sinh y} \tag{238}$$



Aufgabe 70. Wenden Sie den Zehner-Logarithmus an, und substituieren Sie: $Y = \log y$.

Aufgabe 71. Substitution: $X = \log x$ und $Y = \log y$

Aufgabe 72. Beispiele: $y_1 = 2^x + 3^x$ und $y_2 = x^2 + x^3$

Differentialrechnung

Aufgabe 73. Sie müssen den Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{mit} \quad h = x - x_0$$

mittels Grenzwertbetrachtung in einen Differentialquotienten $\frac{df(x)}{dx}$ überführen.

Aufgabe 74. Stellen Sie den Differenzenquotienten auf, und bilden Sie den Grenzwert:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c \cdot g(x+h) - c \cdot g(x)}{h} = \ldots$$

Aufgabe 75. Der Differenzenquotient muss umsortiert und aufgeteilt werden.

Aufgabe 76. Ableitung einer in Produktform gegebenen Funktion $f(x) = u(x) \cdot v(x)$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) \cdot v(x+h) - u(x) \cdot v(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) \cdot v(x+h) - u(x) \cdot v(x+h) + u(x) \cdot v(x+h) - u(x) \cdot v(x)}{h} \\
&= \ldots
\end{aligned}$$

Aufgabe 77. Die Quotientenregel kann auf elegante Weise aus der bereits in Aufgabe 76 bewiesenen Produktregel hergeleitet werden. Lösen Sie zunächst die Funktion $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ nach $u(x)$ auf.

Aufgabe 78. Lösungsansatz für die Kettenregel:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{g(u(x+h)) - g(u(x))}{h} \cdot \frac{u(x+h) - u(x)}{u(x+h) - u(x)} \\
&= \ldots
\end{aligned}$$

Aufgabe 79. Spiegeln Sie den Punkt (a, b) und vergleichen Sie die Steigungsdreiecke:

1. Ausgangsfunktion an der Stelle a
2. Umkehrfunktion an der Stelle b

Aufgabe 80. Geben Sie ein Gegenbeispiel an, z. B. für $f(x) = \sqrt[5]{x}$.

Aufgabe 81. Führen Sie die folgenden Schritte durch:

1. Logarithmieren
2. Differentiation mittels Kettenregel
3. Auflösen nach y'

Aufgabe 82. Durch Einsetzen von $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ und $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ in die zu beweisende Ableitungsregel $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ erhält man:

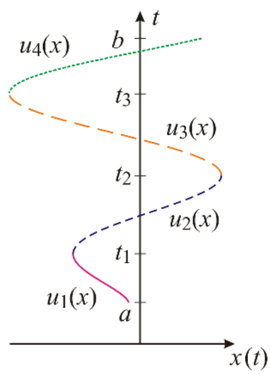
$$y' = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Außerdem gilt $y' = \frac{dy}{dx}$, weshalb die Formel suggeriert, dass für die Herleitung einfach nur mit dem Differential dt erweitert werden muss — doch ganz so einfach ist es nicht, denn das Kürzen und Erweitern mit Differentialen ist nicht erlaubt.

Der Schlüssel zum erfolgreichen Beweis ist die Umkehrfunktion von $x = x(t)$:

- Die Umkehrfunktion $t = t(x)$ existiert nur dann, wenn $x(t)$ streng monoton ist.
- Die Existenz der Umkehrfunktion bedeutet nicht, dass man sie analytisch darstellen kann. Beispielsweise lässt sich die zusammengesetzte Funktion $x(t) = t + \mathrm{e}^t$ nicht nach t freistellen, obwohl sie streng monoton steigt. Dies sei nur am Rande erwähnt, denn für den Beweis ist die Möglichkeit einer analytischen Darstellung unerheblich.
- Im Allgemeinen handelt es sich bei $x(t)$ mit $t \in [a; b]$ nicht um eine monotone Funktion, so dass man sie abschnittsweise umkehren muss. Bei n Extremstellen t_i erhält man $n + 1$ Umkehrfunktionen $u_i(x)$:

$$t = \begin{cases} u_1(x) & \text{für } t \in [a; t_1] \\ u_2(x) & \text{für } t \in (t_1; t_2] \\ u_3(x) & \text{für } t \in (t_2; t_3] \\ \vdots & \vdots \\ u_i(x) & \text{für } t \in (t_{i-1}; t_i] \\ \vdots & \vdots \\ u_{n+1}(x) & \text{für } t \in (t_n; b] \end{cases}$$



  Eine explizite Darstellung $t(x)$ ist nicht möglich, weil es Stellen x mit mehr als nur einem Funktionswert t gibt. Daher spricht man auch nicht von einer Funktion, sondern lediglich von einer „Kurve“.

Betrachten Sie den allgemeinen Fall, nehmen Sie also eine Fallunterscheidung vor, um differenzierbare Teilfunktionen $y_i = y(u_i(x))$ zu erhalten.

Aufgabe 83. Der formale Beweis verwendet den Mittelwertsatz der Differentialrechnung und ist vergleichsweise aufwändig, weshalb die anschauliche Herleitung genügen soll:

In der Nähe der gemeinsamen Nullstelle x_0 können die Funktionen f und g durch ihre Tangenten ersetzt werden.

Aufgabe 84. Bilden Sie den doppelten Kehrwert, um die bereits bewiesene Regel (66) benutzen zu können, und wenden Sie die Rückwurftechnik an.

Aufgabe 85. Überführen Sie den Differenzenquotienten durch Grenzwertbildung in den Differentialquotienten.

Aufgabe 86. Auch dieser Beweis beginnt mit der Aufstellung des Differentialquotienten:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x+h} - \mathrm{e}^x}{h} \\ &= \underbrace{\mathrm{e}^x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h}}_{k} \end{aligned}$$

Wegen der Forderung $f'(x) = f(x)$ muss der Faktor k, den man durch Ausklammern der Exponentialfunktion erhält, eins sein. Im weiteren Verlauf der Herleitung sind die folgenden Schritte durchzuführen:

1. Erste Substitution: $u = \mathrm{e}^h - 1$
2. Anwendung der Logarithmenregel für Potenzen (12)
3. Zweite Substitution

Randnotiz: Im Gegensatz zu den kursiv dargestellten Variablen x, h und u handelt es sich bei der Eulerschen Zahl e um eine Konstante, weshalb üblicherweise die aufrechte Schreibweise bevorzugt wird.

Aufgabe 87. Es erleichtert die Schreibarbeit, wenn man den binomischen Lehrsatz (29) verwendet.

Aufgabe 88. Zeigen Sie, dass die Potenzregel $A(n)$

$$[x^n]' = n \cdot x^{n-1}$$

für den Induktionsanfang $n = 1$ gilt. Der Induktionsschritt $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ beginnt mit der Multiplikation mit x.

Aufgabe 89. Kehrwert und Kettenregel

Aufgabe 90. Beachten Sie den Definitionsbereich der Potenzfunktionen $f(x) = x^n$:

1. Bei irrationalen Exponenten ist die Basis nur für nicht-negative Zahlen definiert:

$$x \geq 0 \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

2. Bei rationalen Exponenten $n = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ muss eine Fallunterscheidung vorgenommen werden:

$$f(x) = x^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p \quad \text{mit} \quad \begin{cases} x \in [0, \infty) & \text{falls } q \text{ gerade} \\ x \in (-\infty, \infty) & \text{falls } q \text{ ungerade} \end{cases}$$

Zwei Beispiele:

- Für $n = \frac{1}{2}$ erhält man die Wurzelfunktion $f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$, welche (im Reellen) nur für $x \geq 0$ definiert ist.
- Für $n = \frac{1}{3}$ erhält man die auch auf negative Zahlen anwendbare Kubikwurzel:

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x} = \begin{cases} -\sqrt[3]{-x} & \text{für } x < 0 \\ \sqrt[3]{x} & \text{für } x \geq 0 \end{cases} \tag{239}$$

Der in Aufgabe 87 benutzte binomische Lehrsatz (29) kann zur binomischen Reihe (178) erweitert werden, welche die folgenden Besonderheiten aufweist:

1. Die Fakultät $n!$ sei nur für natürliche Zahlen definiert (Gammafunktion (246) noch nicht eingeführt), so dass Gleichung (25) nicht angewendet werden darf. Aus diesem Grund muss die Berechnungsvorschrift für den Binomialkoeffizienten verallgemeinert werden, wie in Aufgabe 32 gezeigt.
2. Es existieren unendlich viele Terme.

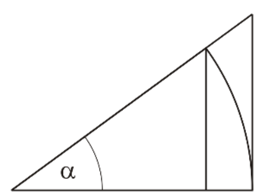
Aufgabe 91. Als Umkehrfunktion der (natürlichen) Exponentialfunktion lässt sich der natürliche Logarithmus mittels Umkehrregel (62) differenzieren.

Aufgabe 92. Verwenden Sie die in Aufgabe 81 eingeführte logarithmische Differentiation.

Aufgabe 93. Für den Beweis müssen Sie zunächst die folgende(n) Ungleichung(en) herleiten:

$$\cos\alpha \leq \frac{\alpha}{\sin\alpha} \leq \frac{1}{\cos\alpha}$$

Vergleichen Sie zu diesem Zweck die Flächeninhalte der beiden Dreiecke mit dem des Kreisausschnitts.



Aufgabe 94. Benutzen Sie das Additionstheorem für den Kosinus (39) mit $x = y = \frac{\alpha}{2}$.

Aufgabe 95. Das klassische Beweisrezept erfordert die folgenden Zutaten:

- Differentialquotient
- Sinus-Additionstheorem (38)
- Grenzwertsatz zur Aufteilung des Limes bei einer Addition (135)
- Grenzwerte (72) und (73)

Aufgabe 96. Leiten Sie Gleichung (75) aus den Additionstheoremen her, und setzen Sie sie in den Differentialquotienten ein.

Aufgabe 97. Aus dem trigonometrischen Pythagoras (2) folgt:

$$\cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x}$$

Beachten Sie, dass beide Vorzeichen auftreten können.

Aufgabe 98. Sinus-Additionstheorem (38) mit $y = \frac{\pi}{2}$:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + \cos x \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1}$$

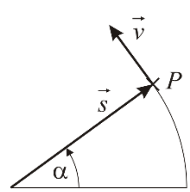
Grafische Veranschaulichung der Phasenverschiebung siehe Seite 63.

Aufgabe 99. Setzen Sie das Kosinus-Additionstheorem (39) in den Differenzenquotienten ein:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x\ \cos h - \sin x\ \sin h - \cos x}{h} \\ &= \ldots \end{aligned}$$

Aufgabe 100. Der Punkt P möge sich auf einer Kreisbahn mit Radius $r = 1$ bewegen. Ermitteln Sie:

- Ortsvektor $\vec{s}$
- Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$
- Zusammenhang zwischen $\vec{s}$ und $\vec{v}$



Die Winkelgeschwindigkeit sei $\omega = 1$.

Aufgabe 101. Verwenden Sie die Definitionsgleichung des Sinus Hyperbolicus.

Aufgabe 102. Stellen Sie den Kosinus Hyperbolicus mithilfe von Exponentialfunktionen dar.

Aufgabe 103. Logarithmische Ableitung (63)

Aufgabe 104. Benutzen Sie die Logarithmenregel (13) für einen Basiswechsel.

Aufgabe 105. Quotientenregel

Aufgabe 106. Als Kehrwert vom Tangens lässt sich der Kotangens mittels Kettenregel differenzieren.

Aufgabe 107. Für die Herleitung benötigt man die Umkehrfunktion vom Arkussinus und den trigonometrischen Pythagoras (2).

Aufgabe 108. Siehe Aufgabe 107.

Aufgabe 109. Der Arkustangens ist nicht der Quotient aus Arkussinus und Arkuskosinus, sondern die Umkehrfunktion vom Tangens.

Mithilfe des trigonometrischen Pythagoras kann eine Beziehung zwischen dem Tangens und dem Kosinus aufgestellt werden.

Aufgabe 110. Benutzen Sie die in Aufgabe 109 bewiesene Ableitungsregel für den Arkustangens.

Aufgabe 111. Für die Herleitung wird benötigt:

- Quotientenregel
- Hyperbolischer Pythagoras

Aufgabe 112. Sie können den Kotangens Hyperbolicus als Funktion vom Tangens Hyperbolicus angeben, dessen Ableitungregel in der vorigen Aufgabe bewiesen wurde.

Aufgabe 113. Es wird der hyperbolische Pythagoras benötigt.

Aufgabe 114. Verwenden Sie Gleichung (54), um den Areakosinus Hyperbolicus mithilfe des natürlichen Logarithmus darzustellen.

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass bei den Areafunktionen immer beide Wege in Frage kommen. Beispielsweise hätte bei der vorigen Aufgabe statt der Umkehrregel Gleichung (53) benutzt werden können, um den Areasinus Hyperbolicus abzuleiten.

Aufgabe 115. Hyperbolischer Pythagoras

Aufgabe 116. Gleichung (56)

Integralrechnung

Aufgabe 117. Um nicht jede einzelne Stelle $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ betrachten zu müssen, wird bei der Darboux-Variante eine Einschachtelung vorgenommen:

$$\text{Obersumme } O_n \geq \text{Riemannsche Zwischensumme } A_n \geq \text{Untersumme } U_n$$

Stellen Sie O_n und U_n grafisch und als Formeln dar.

Aufgabe 118. Breite eines Streifens:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Koordinaten:

$$x_0 = a$$

$$x_n = b$$

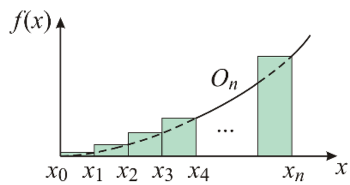
$$x_i = x_0 + i \cdot \Delta x \quad \text{mit} \quad i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$$

Bei der Summation der einzelnen Rechteckflächen ist die geometrische Reihe (128) sehr hilfreich.

Aufgabe 119. Stützstellen:

$$x_i = i \cdot \Delta x \quad \text{mit} \quad \Delta x = \frac{b}{n}$$

Die Summe von Quadratzahlen lässt sich mit Gleichung (127) berechnen.



Aufgabe 120. Ersetzen Sie die Fläche unter der Funktion $f(x)$ durch ein flächengleiches Rechteck und hinterfragen Sie die Voraussetzungen:

- Warum muss die Funktion stetig sein?
- Gilt der Mittelwertsatz der Integralrechnung nur für positive Funktionen?

Aufgabe 121. Der Beweis des erweiterten Mittelwertsatzes der Integralrechnung beginnt mit der Aussage:

$$m \leq f(x) \leq M \quad \text{mit} \quad m = \inf\{f(x)|x \in [a,b]\} \quad \text{und} \quad M = \sup\{f(x)|x \in [a,b]\}$$

Im weiteren Verlauf der Herleitung benötigt man die Implikation

$$f_1(x) \leq f_2(x) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f_1(x)\,dx \leq \int_a^b f_2(x)\,dx \quad \text{mit } b \geq a$$

sowie den Zwischenwertsatz für stetige Funktion $f(x)$: Zu jedem Zwischenwert

$$\eta \in [f(a), f(b)]$$

existiert mindestens ein $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = \eta$.

Aufgabe 122. Stellen Sie die Integrale mithilfe von Riemannschen Zwischensummen dar. Alternativ können auch Ober- oder Untersummen verwendet werden.

Es darf davon ausgegangen werden, dass die Funktion $f(x)$ auf dem Integrationsintervall $[a, c]$ stetig ist und $b \in [a, c]$.

Aufgabe 123. Der Beweis des Hauptsatzes (Teil 1)

$$\left[\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt\right]' = f(x) \tag{240}$$

führt über den Differentialquotienten.

Aufgabe 124. Lösungsansätze:

a) Setzen Sie $F_a(x)$ in den Hauptsatz (101) ein.

b) Stellen Sie eine Beziehung zwischen $F_a(x)$ und einer beliebigen Stammfunktion $F(x)$ her.

Aufgabe 125. Beachten Sie den kleinen, aber feinen Unterschied zwischen unbestimmten und bestimmten Integralen:

- Bei der Integralfunktion

  $$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$$

  handelt es sich um ein unbestimmtes Integral, weil die untere Grenze x_0 frei wählbar ist und somit unendlich viele Stammfunktionen existieren.

- Die Hinzunahme des Anfangswertes $F_a(x_0)$ bewirkt, dass die Funktion

  $$F_a(x) = F_a(x_0) + \underbrace{\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt}_{F(x)} = \int_{a}^{x} f(t)\, dt$$

  eindeutig definiert (bestimmt) ist, also ein bestimmtes Integral darstellt. Der tiefgestellte Index a soll verdeutlichen, dass die untere Grenze a festgelegt ist.

Würde man a als Variable betrachten, dann wäre $F_a(x)$ ein unbestimmtes Integral — man beachte den Konjunktiv. Diese Verwechslungsgefahr ist ein Grund, weshalb unbestimmte Integrale üblicherweise in der Kurzschreibweise ohne Grenzen

$$F(x) = \int f(x)\, dx$$

angegeben werden — dies sei nur am Rande erwähnt.

Die zu beweisende Äquivalenzaussage ist eine Kombination beider Teile des Hauptsatzes.

Aufgabe 126. Überlegen Sie,

- wo sich die untere Grenze x_0 befindet und
- warum es sinnvoll ist, bei der Kurzschreibweise eine Integrationskonstante $C \in \mathbb{R}$ einzuführen.

Aufgabe 127. Vergleichen Sie beide Lösungsansätze:

- (Unzulässige) Anwendung des Hauptsatzes
- Aufteilung in zwei Bereiche (und Ausnutzung der Symmetrie)

Aufgabe 128. Beispiel: Die Logarithmusfunktion $f(x) = \ln(x)$ ist nur für positive Zahlen $x > 0$ definiert. Die zugehörige Ableitung, die Hyperbelfunktion $f'(x) = \frac{1}{x}$, darf auch für negative Zahlen $x < 0$ ausgewertet werden.

Um den größtmöglichen Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bei der Integration zu erhalten, führt man beim Logarithmus Betragsstriche ein:

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C \quad \text{für} \quad x \neq 0$$

Zum Beweis, dass auch negative Zahlen eingesetzt werden dürfen, bilde man die Ableitung:

$$[\ln|x|]' = [\ln(-x)]' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x} \quad \text{für} \quad x < 0$$

Aufgabe 129. Zweiter Teil des Hauptsatzes (101)

Aufgabe 130. Für die Herleitung werden die Faktorregel der Differentiation (57) und beide Teile des Hauptsatzes benötigt.

Aufgabe 131. Summenregel der Differentialrechnung (58)

Aufgabe 132. Überlegen Sie, ob die Grenzen weggelassen werden dürfen.

Aufgabe 133. Um die Gültigkeit der Substitutionsregel zu beweisen, wende man den ersten Teil des Hauptsatzes an: Zeigen Sie, dass die Ableitung der Stammfunktion gleich der Integrandfunktion ist.

Aufgabe 134. Beweis durch Ableiten

Aufgabe 135. Ein Paradebeispiel ist der Kotangens:

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Aufgabe 136. Es gilt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Aufgabe 137. Um Verwechslungen zu vermeiden, sollten Sie bei der Quotienten- und der Produkt-Substitutionsmethode $f(x)$ durch $g(x)$ ersetzen.

Aufgabe 138. Ausgangspunkt ist die Produktregel der Differentialrechnung (59).

Aufgabe 139. Ein Beispiel ist der Arkustangens $f(x) = \arctan x$, der sich unter Zuhilfenahme der Substitutionsregel (108) partiell integrieren lässt:

$$\int \arctan x \, dx = x \cdot \arctan x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx = x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

Aufgabe 140. Gehen Sie den umgekehrten Weg: Addieren Sie Partialbrüche zu einem gebrochenrationalen Polynom.

Aufgabe 141. Beweis durch Ableiten

Aufgabe 142. Tipp: Leiten Sie die Stammfunktionen nicht mittels Quotienten-, sondern mittels Produktregel ab.

Ansonsten gilt: Augen zu und durch.

Aufgabe 143. Trapezbreite bei n Intervallen:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{mit} \quad a = x_0 \quad \text{und} \quad b = x_n$$

Mittlere Höhe des ersten Trapezes:

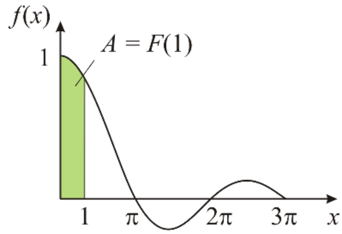
$$h_1 = \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}$$

Das Produkt ergibt den Integralwert bzw. die Fläche (bei positivem Integranden) des ersten Trapezes:

$$A_1 = \Delta x \cdot h_1 = \frac{x_n - x_0}{n} \cdot \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}$$

Aufgabe 144. Der sogenannte Kardinalsinus

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \tag{241}$$



ist nicht elementar integrierbar. Ob man den Integralsinus

$$F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt \tag{242}$$

als Stammfunktion bezeichnen darf, möge daher jeder für sich selbst entscheiden.

Man kann sogar beweisen, dass $F(x)$ — wie viele andere Integralfunktionen auch — nicht als analytische Funktion darstellbar ist. Das soll Sie aber nicht davon abhalten, es zumindest einmal selbst zu versuchen.

Sie müssen den Flächeninhalt A numerisch ermitteln, z. B. unter Verwendung der in Aufgabe 143 eingeführten Trapezregel. Schreiben Sie ein kleines Programm, mit dem sich A auf 4 Stellen Genauigkeit ermitteln lässt.

Aufgabe 145. Näherungsweise Integration mittels parabolischer Interpolation:

1. Aufstellung der allgemeinen Parabelgleichung:

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

2. Bestimmung der Parameter a, b und c aus 3 Stützpunkten:

$$P_0 = (x_0, y_0)$$

$$P_1 = (x_1, y_1) \quad \text{mit} \quad x_1 = \frac{x_0 + x_2}{2}$$

$$P_2 = (x_2, y_2)$$

3. Analytische Integration

Tipp: Wählen Sie zunächst $x_0 = 0$.

Aufgabe 146. Erweitern Sie das Python-Skript aus Aufgabe 144.

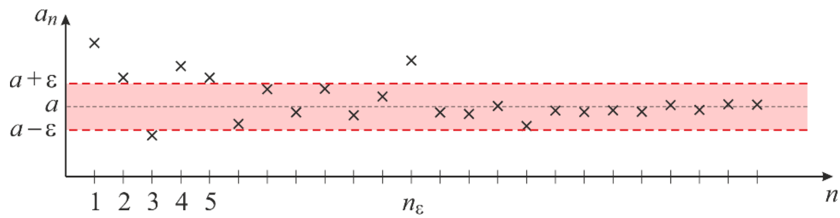
Die Effizienz kann anhand zweier Kriterien beurteilt werden:

- Genauigkeit bei gleichem numerischen Aufwand
- Numerischer Aufwand bei gleicher Genauigkeit

Als Maß für den numerischen Aufwand dient die Anzahl Stützstellen.

Potenzreihenentwicklungen

Aufgabe 147. Im Mittelpunkt des Beweises steht der sogenannte Epsilon-Schlauch. Die Variable ε gibt die gewünschte Abweichung (zulässige Toleranz) vom Grenzwert a an.



Für jedes (noch so kleine) $\varepsilon > 0$ existiert ein Startindex n_ε, für den gilt: ...

Aufgabe 148. Verwenden Sie die in Aufgabe 147 eingeführte Definition einer konvergenten Folge. Das heißt, Sie müssen den Startindex n_ε als Funktion der Schranke ε ausdrücken.

Aufgabe 149. Es ist zu zeigen, dass die beiden Aussagen äquivalent sind:

A: Die monoton wachsende Folge (a_n) ist konvergent.

B: Die monoton wachsende Folge (a_n) ist nach oben beschränkt.

Jede konvergente Folge besitzt einen Grenzwert. Die kleinste obere Schranke einer Folge bezeichnet man als Supremum.

Aufgabe 150. Rekapitulieren Sie die in den Abschnitten A.1 und A.3 erläuterten Grundbegriffe der Aussagenlogik:

- Eine Äquivalenzaussage $(A \Leftrightarrow B)$ ist die Konjunktion von Implikation $(A \Rightarrow B)$ und Umkehrung $(B \Rightarrow A)$.
- Implikation $(A \Rightarrow B)$ und Kontraposition (nicht $B \Rightarrow$ nicht A) sind äquivalent.

Folglich gilt:

$$(A \Leftrightarrow B) \quad \Longleftrightarrow \quad (\text{nicht } A \Leftrightarrow \text{nicht } B) \tag{243}$$

Aufgabe 151. Eine Folge (a_n) ist beschränkt, wenn sie eine untere Schranke s und eine obere Schranke S besitzt:

$$s \le a_n \le S \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}^* \tag{244}$$

Führen Sie das Intervall $(a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_1)$ ein. Wie viele Folgenglieder liegen auf dem Intervall, und wie viele befinden sich außerhalb?

Aufgabe 152. Vergegenwärtigen Sie sich den Unterschied zwischen der Umkehrung und der Kontraposition, siehe Anhang A.1.

Aufgabe 153. Hinweise:

- Als Beispiel einer alternierenden Folge betrachte man den Fall $q = -2$:

$$a_1 = -2\,;\ a_2 = 4\,;\ a_3 = -8\,;\ a_4 = 16\,;\ldots$$

- Eine unbeschränkte Folge divergiert, wie in Aufgabe 152 gezeigt.
- Die Bernoulli-Ungleichung (17) ist sehr hilfreich, um Unbeschränktheit zu zeigen.
- Für $q = -0{,}815$ konvergiert die geometrische Folge gegen $a = 0$:

$$|q^n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n > n_\varepsilon$$

  Auflösen nach n liefert den gesuchten Startindex $n_\varepsilon = \log_{0,815} \varepsilon$, z. B. $n_\varepsilon = 45{,}02\ldots$ für $\varepsilon = 0{,}0001$ bzw. aufgerundet: $n_\varepsilon = 46$.

Aufgabe 154. Benutzen Sie den Logarithmustrick:

$$x = \mathrm{e}^{\ln(x)} \quad \text{für } x > 0 \tag{245}$$

Aus der Definitionsgleichung des Logarithmus (267) folgt unmittelbar, dass Logarithmus- und Exponentialfunktion Umkehrfunktionen sind und sich deshalb aufheben.

Aufgabe 155. Logarithmustrick und Regel von L'Hospital (67)

Aufgabe 156. Anwendung des Logarithmustricks (245):

$$a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$$

Aufgabe 157. Um die Regel von L'Hospital (67) anwenden zu können, sei n eine positive reelle Zahl. Es ist also zu zeigen, dass die Potenzfunktion im Zähler langsamer gegen unendlich strebt als die Exponentialfunktion im Nenner.

Aufgabe 158. Bei Aufgabe 157 empfiehlt sich der Einsatz der Regel von L'Hospital, weil sich Zähler und Nenner als Funktionen auffassen lassen. Theoretisch ist dieser Weg auch bei der Folge

$$b_n = \frac{a^n}{n!}$$

möglich, denn die Fakultät kann zu der sogenannten Gammafunktion erweitert werden:

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t}\, dt \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{R} \setminus \{\ldots; -3; -2; -1\} \tag{246}$$

Anstatt sich mit dem uneigentlichen Integral abzumühen, sollten Sie die fundamentale Grenzwertdefinition aus Aufgabe 147 benutzen: Zeigen Sie, dass die Folge (b_n) gegen den Grenzwert

$$b = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

konvergiert, indem Sie zu jedem beliebigen $\varepsilon > 0$ ein n_ε ermitteln, so dass gilt:

$$|b_n - b| = \frac{|a|^n}{n!} < \varepsilon \quad \text{für alle } n > n_\varepsilon$$

Leider lässt sich diese Ungleichung nicht ohne Weiteres nach n umstellen, weshalb die in Aufgabe 28 bewiesene Abschätzung vorgenommen werden muss:

$$n! \geq \sqrt{n^n}$$

Aufgabe 159. Setzen Sie den Grenzwert in das Cauchy-Kriterium ein:

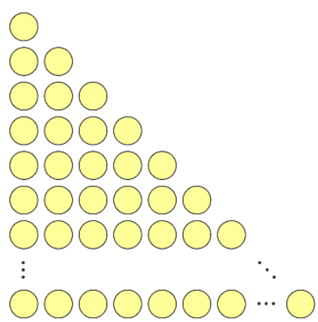
$$a = \lim_{m\to\infty} a_m$$

Aufgabe 160. Die Herleitung startet mit der fundamentalen Grenzwertdefinition (308)

$$\begin{aligned} |a_m - a| &< \varepsilon \qquad \text{für alle } m > n_\varepsilon \\ |a_n - a| &< \varepsilon \qquad \text{für alle } n > n_\varepsilon \end{aligned}$$

und verwendet die Dreiecksungleichung (19).

Aufgabe 161. Die Summenformel ist nach dem deutschen Mathematiker Carl Friedrich Gauß (1777-1855) benannt, der als Neunjähriger die Zahlen von 1 bis 100 (manche Quellen sprechen auch von 1 bis 40) addieren sollte. Zum Erstaunen seines Lehrers konnte „der kleine Gauß" die Fleißaufgabe in kürzester Zeit lösen.



So haben seine Mitschüler gerechnet — bzw. so wollte es der Lehrer haben:

$$\begin{array}{llll} 1+2=3 & & & \\ & 3+3=6 & & \\ & & 6+4=10 & \\ & & & 10+5=15 \\ & & & \qquad \ddots \end{array}$$

Aufgabe 162. Induktionsanfang für $m = 1$:

$$\sum_{n=1}^{1} n = \ldots$$

Induktionsannahme $A(m)$:

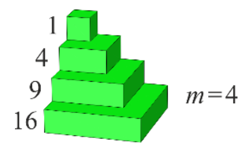
$$\sum_{n=1}^{m} n = \frac{m(m+1)}{2}$$

Führen Sie den Induktionsschritt durch: $A(m) \Rightarrow A(m+1)$

Aufgabe 163. Vollständige Induktion

Aufgabe 164. Die Summenformel lässt sich auf spielerische Art herleiten:

1. Basteln Sie eine Stufenpyramide, z.B. aus $m = 4$ Stufen.
2. Bauen Sie 5 weitere Stufenpyramiden.
3. Setzen Sie alle Pyramiden zu einem Quader zusammen.
4. Bestimmen Sie das Volumen des Quaders.
5. ...



Aufgabe 165. Verwenden Sie als Beweismethode die vollständige Induktion. Warum darf die Basis weder 0 noch 1 sein?

Aufgabe 166. Multiplizieren Sie die Partialsumme

$$S_m = \sum_{n=0}^{m} q^n = q^0 + q^1 + q^2 + q^3 + \ldots + q^m$$

mit q.

Aufgabe 167. Führen Sie eine Partialbruchzerlegung durch.

Aufgabe 168. Mit dem kleinen Gauß (126) lautet die Summenformel für Kubikzahlen wie folgt:

$$\sum_{n=1}^{m} n^3 = \left[\frac{m(m+1)}{2}\right]^2$$

Verwenden Sie als Beweismethode die vollständige Induktion.

Aufgabe 169. Laut Voraussetzung handelt es sich bei (a_n) und (b_n) um zwei konvergente Folgen, so dass die in Aufgabe 147 eingeführte fundamentale Grenzwertdefinition gilt. Im Falle von (a_n) existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Startindex n_ε mit:

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n > n_\varepsilon$$

Ersetzen Sie ε durch $\frac{\varepsilon}{2}$, und verwenden Sie die Dreiecksungleichung (19).

Aufgabe 170. Im Mittelpunkt der Herleitung steht die (von Ihnen noch zu beweisende) Abschätzung:

$$|(a_n \cdot b_n) - (a \cdot b)| \leq \underbrace{|a_n - a|}_{<\frac{\varepsilon}{2S}} \cdot \underbrace{|b_n|}_{\leq S} + \underbrace{|b_n - b|}_{<\frac{\varepsilon}{2S}} \cdot \underbrace{|a|}_{\leq S}$$

Der Parameter S ergibt sich aus dem in Aufgabe 151 eingeführten Satz, dass konvergente Folgen beschränkt sind.

Aufgabe 171. Mithilfe der Dreiecksungleichung (19) erhält man die Ungleichung:

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| &= \left|\frac{a_n b - a b_n}{b_n b}\right| \\ &= \left|\frac{(a_n - a) \cdot b + (b - b_n) \cdot a}{b_n b}\right| \\ &\leq \left|\frac{(a_n - a) \cdot b}{b_n b}\right| + \left|\frac{(b - b_n) \cdot a}{b_n b}\right| \\ &= \underbrace{|a_n - a|}_{<\,\varepsilon_a} \cdot \underbrace{\left|\frac{1}{b_n}\right|}_{x} + \underbrace{|b_n - b|}_{<\,\varepsilon_b} \cdot \underbrace{\left|\frac{a}{b_n b}\right|}_{y} \end{aligned} \tag{247}$$

Bestimmen Sie die Parameter x und y sowie ε_a und ε_b so, dass:

$$\varepsilon_a x + \varepsilon_b y \leq \varepsilon$$

Beachten Sie, dass die in Aufgabe 170 zur Abschätzung benutzte Schranke S nicht in Frage kommt, weil bei x und y der Kehrwert von b_n gebildet wird, wodurch sich das Relationszeichen umdreht: $\left|\frac{1}{b_n}\right| \geq \frac{1}{S}$.

Aufgabe 172. Beachten Sie, dass beim Grenzwert einer Folge $a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$ die Laufvariable n gegen unendlich strebt, beim Grenzwert einer Funktion $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ hingegen geht die Laufvariable x gegen ein beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$.

Definieren Sie den Grenzwert der Funktion $f(x)$ mithilfe einer Folge. Geben Sie zwei Beispiele von Funktionen an, die an einer Stelle keinen Grenzwert besitzen.

Aufgabe 173. Führen Sie Folgen (x_n) und (y_n) ein, welche die Grenzwerte x_0 bzw. x_{G} (Umbenennung wegen Verwechslungsgefahr mit Startwert für $n = 0$) und y_{G} besitzen.

Aufgabe 174. Die Partialsumme der Folgenglieder a_k

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

lässt sich ihrerseits auch als Glied einer Folge (S_n) auffassen. Mit dem Cauchy-Kriterium kann man die Konvergenz von Folgen nachweisen, deren Grenzwert S nicht bekannt ist.

Aufgabe 175. Beweisen Sie, dass $|A| \leq S$ gilt, indem Sie die Dreiecksungleichung (19) für unendlich viele Terme erweitern.

Aufgabe 176. Verwenden Sie das Monotoniekriterium aus Aufgabe 149.

Aufgabe 177. Man unterscheidet zwei Arten von Divergenz:

- Bei bestimmter Divergenz (im Sinne von eindeutig) strebt eine Folge (oder Funktion) gegen $+\infty$ oder $-\infty$.
- Andernfalls spricht man von unbestimmter Divergenz. Beispielsweise besitzt die alternierende Folge (S_m) mit

  $$S_m = (-q)^m \quad \text{und} \quad q \geq 1$$

  weder einen endlichen noch einen (bestimmten) unendlichen Grenzwert.

Aufgabe 178. Die endliche geometrische Reihe wird in Aufgabe 165 behandelt.

Aufgabe 179. Das Tilde-Zeichen wurde eingeführt, um den Grenzwert $\tilde{q}$ der Folge (q_n) mit

$$q_n = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

von der Basis q der geometrischen Reihe unterscheiden zu können. Beachten Sie, dass im Allgemeinen $q_n \neq q$ ist, und stellen Sie einen Zusammenhang zwischen q und $\tilde{q}$ her.

Aus der Kombination des Cauchy-Kriteriums (316) mit dem Satz über absolut konvergente Reihen (146) folgt die Aussage: Wenn die Ersatzreihe

$$\sum_{k=n_\varepsilon}^{\infty} |a_k|$$

konvergiert, dann ist auch die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

konvergent.

Aufgabe 180. Die für das Quotientenkriterium vorgenommene Beweisführung lässt sich auf das Wurzelkriterium übertragen: Betrachten Sie die Folge (w_n) mit

$$w_n = \sqrt[n]{|a_n|}\ ,$$

und stellen Sie eine Verbindung zwischen ihrem Grenzwert

$$w = \lim_{n\to\infty} w_n$$

und der geometrischen Reihe her.

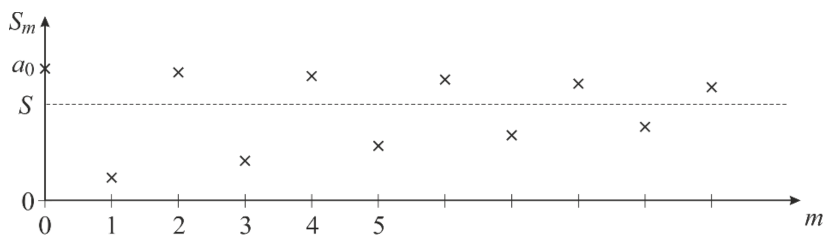
Aufgabe 181. Betrachten Sie das Beispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{(-1)^n - n}$$

Aufgabe 182. Zerlegen Sie die Folge der Partialsummen (S_m) in zwei Teilfolgen:

$$S_m = \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \cdot a_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \pm \ldots \begin{cases} \geq S & \text{für } m \text{ gerade} \\ \leq S & \text{für } m \text{ ungerade} \end{cases}$$

Weisen Sie nach, dass die Teilfolgen (S_{2k}) und (S_{2k+1}) monoton und beschränkt sind und gegen denselben Grenzwert S konvergieren.



Aufgabe 183. Partielle Integration:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\ dt \\ &= f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t) \cdot (x-t)^0\ dt \\ &= f(x_0) - \left[f'(t) \cdot (x-t)^1\right]_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} f''(t) \cdot (x-t)^1\ dt \\ &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \int_{x_0}^{x} f''(t) \cdot (x-t)^1\ dt \end{aligned}$$

Aufgabe 184. Setzen Sie die in Aufgabe 183 begonnene partielle Integration fort.

Aufgabe 185. Benutzen Sie den in Aufgabe 121 bewiesenen erweiterten Mittelwertsatz der Integralrechnung.

Aufgabe 186. Mittelwertsatz der Integralrechnung (97)

Aufgabe 187. Behandeln Sie die Potenzreihe als (normale) Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Aufgabe 188. Siehe Aufgabe 187.

Aufgabe 189. Substitution: $z = x - x_0$

Aufgabe 190. Anwendung der Ketten- und Produktregel liefert die Ableitungen für $x \neq 0$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \cdot 2x^{-3} \\
f''(x) &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \cdot 4x^{-6} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-6x^{-4}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \left[4x^{-6} - 6x^{-4}\right] \\
f'''(x) &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \left[8x^{-9} - 12x^{-7}\right] + \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \left[-24x^{-7} + 24x^{-5}\right] = \ldots
\end{aligned}$$

Es wird empfohlen, auch noch die vierte Ableitung $f^{(4)}(x)$ zu berechnen. Ermitteln Sie anschließend durch Grenzwertbetrachtung das Bildungsgesetz für die Ableitungen an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$:

$$f^{(n)}(0) = \lim_{x \to 0} f^{(n)}(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \leq 0}} f^{(n)}(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \geq 0}} f^{(n)}(x)$$

Die Regel von L'Hospital muss mehrmals angewandt werden. Dafür kann auf eine Fallunterscheidung verzichtet werden, denn links- und rechtsseitiger Grenzwert sind gleich.

Aufgabe 191. Zerlegen Sie die Reihe, um ihren Summenwert abschätzen zu können:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right] + \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right] + \ldots$$

Aufgabe 192. Mit dem Leibniz-Kriterium aus Aufgabe 182 lässt sich die Konvergenz einer alternierenden Reihe nachweisen.

Aufgabe 193. Minorantenkriterium (147)

Aufgabe 194. Da die Folge der Partialsummen (S_m) mit

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^\alpha}$$

für $\alpha > 1$ monoton steigt, muss nur noch gezeigt werden, dass sie beschränkt ist:

$$S_m \leq S_{2^m-1} = \frac{1}{1^\alpha} + \left[\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right] + \ldots$$

Bei der abschließenden Abschätzung kommt die geometrische Reihe (148) zum Einsatz.

Aufgabe 195. Die Entwicklungsstelle ist $x_0 = 0$, weshalb man die Taylorreihe auch als Mac Laurinsche Reihe bezeichnet.

Verwenden Sie die (allgemeine) Lagrangesche Darstellung des Restglieds (160).

Aufgabe 196. Das Quotientenkriterium zur Bestimmung des Konvergenzradius (164) gilt sinngemäß auch dann, wenn nur ungerade Potenzen auftreten:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} \cdot x^{2k+1} = x \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} \cdot z^k}_{h(z)} \quad \text{mit} \quad z = x^2 \tag{248}$$

Besitzt die Ersatzreihe $h(z)$ einen Konvergenzradius von r_z, dann beträgt der Konvergenzradius von $g(x)$:

$$r = \sqrt{r_z} \tag{249}$$

Der Vorfaktor x hat keinen Einfluss auf den Konvergenzradius.

Da unterschiedliche Ableitungen auftreten, muss das Restglied $R_n(x)$ mithilfe des Limes superior (oberer Grenzwert) abgeschätzt werden.

Zusatzaufgabe: Visualisieren Sie das Konvergenzverhalten durch Vergleich der Ausgangsfunktion $f(x)$ mit ausgewählten Taylorpolynomen, z. B. T_1, T_3, T_5, T_7, T_9, T_{15} und T_{45}.

Aufgabe 197. Der Nachweis der Restgliedkonvergenz erfordert eine Fallunterscheidung:

- Approximation nach Lagrange (159) für $x \in [0; 1]$
- Cauchy-Darstellung (161) für $x \in (-1; 0)$ bzw. $x \in (-1; 0]$

Aufgabe 198. Durch Kombination der Logarithmenregeln (11) und (12) mit $c = -1$ erhält man die Logarithmenregel für Quotienten:

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \tag{250}$$

Aufgabe 199. Wenden Sie die Potenzregel für die Differentiation (70) an:

$$\begin{aligned} f'(x) &= n \cdot (1+x)^{n-1} \\ f''(x) &= (n-1)n \cdot (1+x)^{n-2} \\ f'''(x) &= (n-2)(n-1)n \cdot (1+x)^{n-3} \end{aligned} \tag{251}$$

Aufgabe 200. Zeigen Sie mithilfe der Integralform (158) des Restglieds, dass die Taylorreihe (177)

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k$$

gegen die Ausgangsfunktion $f(x) = (1+x)^n$ konvergiert. Die Restglieddarstellung nach Lagrange (159) erlaubt keine Aussage über das Konvergenzverhalten.

Es muss eine Fallunterscheidung vorgenommen werden:

1a) $x \in [0;1)$ und $n \geq 0$

1b) $x \in [0;1)$ und $n < 0$

2) $x \in (-1;0)$

Aufgabe 201. Wählen Sie $n = -1$.

Aufgabe 202. Nehmen Sie eine Substitution vor: $x = \frac{b}{a}$

Aufgabe 203. Schreiben Sie ein Programm, um die Konvergenzgeschwindigkeit der beiden Ansätze zu vergleichen.

Aufgabe 204. Lösungsansätze für die sieben Teilschritte des direkten Beweises:

1. Zu Gleichung (181):
$$\frac{1}{n^2} = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(2n)^2}\right) \tag{252}$$

2. Zu Gleichung (182):
$$\int_0^1 y^{2n}\, dy = \left[\frac{1}{2n+1} y^{2n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+1} \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N} \tag{253}$$

3. Die bei Gleichung (183) auftretende Taylorreihe (176) besitzt den Konvergenzbereich $|x| < 1$ und divergiert an der oberen Grenze $x = 1$ bestimmt gegen ∞.

4. Zur Verifikation von Gleichung (184) muss partiell integriert werden:

$$\int_0^1 \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'} \cdot \underbrace{\ln\frac{1+x}{1-x}}_{v} \, dx = \underbrace{\left[\underbrace{\ln|x|}_{u} \cdot \underbrace{\ln\frac{1+x}{1-x}}_{v}\right]_0^1}_{=A=0} - \int_0^1 \underbrace{\ln|x|}_{u} \cdot \underbrace{\frac{2}{1-x^2}}_{v'} \, dx = 2\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1} \, dx \tag{254}$$

Um zu zeigen, dass der Ausdruck A verschwindet, wird eine beidseitige Grenzwertbetrachtung durchgeführt:

$$A = \left[\ln x \cdot \ln\frac{1+x}{1-x}\right]_0^1 = \underbrace{\lim_{\substack{b\to 1\\ b\leq 1}} \left[\ln b \cdot \left[\ln(1+b) - \ln(1-b)\right]\right]}_{B} - \underbrace{\lim_{\substack{a\to 0\\ a\geq 0}} \left[\ln a \cdot \ln\frac{1+a}{1-a}\right]}_{C}$$

mit

$$B = \underbrace{\ln(1)}_{=0} \cdot \ln(2) + \lim_{\substack{b\to 1\\ b\leq 1}} \frac{\ln(1-b)}{-\frac{1}{\ln b}} \overset{„\frac{\infty}{\infty}“}{=} \lim_{\substack{b\to 1\\ b\leq 1}} \frac{\frac{-1}{1-b}}{\frac{1}{b(\ln b)^2}} = \lim_{\substack{b\to 1\\ b\leq 1}} \frac{(\ln b)^2}{b-1} \overset{„\frac{0}{0}“}{=} \lim_{\substack{b\to 1\\ b\leq 1}} \frac{\frac{2\ln(b)}{b}}{1} = 0$$

und

$$C = \lim_{\substack{a\to 0\\ a\geq 0}} \frac{\ln\frac{1+a}{1-a}}{\frac{1}{\ln a}} \overset{„\frac{0}{0}“}{=} \lim_{\substack{a\to 0\\ a\geq 0}} \frac{\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1-a}}{\frac{-1}{a(\ln a)^2}} = \lim_{\substack{a\to 0\\ a\geq 0}} \frac{2(\ln a)^2}{-\frac{1}{a}} \overset{„\frac{\infty}{\infty}“}{=} \lim_{\substack{a\to 0\\ a\geq 0}} \frac{4\ln(a)}{\frac{1}{a}} \overset{„\frac{\infty}{\infty}“}{=} \lim_{\substack{a\to 0\\ a\geq 0}} \frac{\frac{4}{a}}{\frac{-1}{a^2}} = 0$$

Aus zwei- bzw. dreimaliger Anwendung von L'Hospital folgt die Behauptung, dass $A = B + C = 0$.

5. Das zu Gleichung (185) gehörige Integral lässt sich durch Partialbruchzerlegung lösen:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{(y^2x^2+1)(x^2+1)} \, dx &= \int \frac{1}{y^2-1} \cdot \frac{y^2x - x}{(y^2x^2+1)(x^2+1)} \, dx \\
&= \frac{1}{y^2-1} \int \frac{y^2x(x^2+1) - x(y^2x^2+1)}{(y^2x^2+1)(x^2+1)} \, dx \\
&= \frac{1}{y^2-1} \int \frac{y^2x}{y^2x^2+1} - \frac{x}{x^2+1} \, dx \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y^2-1} \cdot \ln\frac{y^2x^2+1}{x^2+1}
\end{aligned} \tag{255}$$

Hinweis: Die gezeigten Umformschritte beweisen die Gültigkeit der Stammfunktion. Die (nicht gezeigte) Herleitung ist deutlich umfangreicher, weil das Nennerpolynom zwei konjugiert komplexe Nullstellen aufweist. Die zugehörigen Ansätze werden in Aufgabe 141 behandelt.

6. Zur Herleitung von Gleichung (186) benötigt man die zu den Grundintegralen zählende Stammfunktion:

$$\int \frac{a}{(a^2x^2+1)}\,dx = \arctan(ax) + C \tag{256}$$

Sie ergibt sich unter Berücksichtigung der inneren Ableitung (Kettenregel) durch Umkehrung der Ableitung des Arkustangens (85).

7. Integral (187) lässt sich durch Anwendung der Substitutionsregel für Produkte (109) lösen:

$$\int \frac{\arctan x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + C \tag{257}$$

Komplexe Zahlen und Funktionen

Aufgabe 205. Stellen Sie die komplexe Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ in der Gaußschen Zahlenebene dar.

Aufgabe 206. Setzen Sie die komplexen Zahlen

$$a = p + \mathrm{i}q \quad \text{und} \quad b = s + \mathrm{i}t$$

in die Betragsgleichung ein, und wenden Sie die Definition des Betrags an.

Aufgabe 207. Stellen Sie zwei komplexe Zahlen a, b in der Gaußschen Zahlenebene dar.

Aufgabe 208. In Aufgabe 26 wird die Dreiecksungleichung für reelle Zahlen hergeleitet. Übertragen Sie die Beweisführung auf komplexe Zahlen:

$$|\underbrace{p + \mathrm{i}q}_{a} + \underbrace{s + \mathrm{i}t}_{b}| \leq |\underbrace{p + \mathrm{i}q}_{a}| + |\underbrace{s + \mathrm{i}t}_{b}| \quad \Leftrightarrow \quad \ldots$$

Überlegen Sie, welche Voraussetzung erfüllt sein muss, damit es sich beim Wurzelziehen nicht um eine Implikation, sondern um eine Äquivalenzumformung handelt.

Aufgabe 209. Wenden Sie die für zwei Summanden bewiesene Dreiecksungleichung (193) mehrmals an:

$$|a + \underbrace{b_1 + b_2}_{=\,b}| \leq |a| + \underbrace{|b_1 + b_2|}_{=\,|b|\,\leq\,|b_1| + |b_2|}$$

Aufgabe 210. Beweisen Sie die Abschätzung:

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|\,|z - z_0|^n$$

Der Konvergenzradius kann exemplarisch aus dem Quotientenkriterium (149) hergeleitet werden, vgl. Aufgabe 187.

Aufgabe 211. Es ist hilfreich, eine Skizze der Funktionen anzufertigen.

Aufgabe 212. Benutzen Sie das Majorantenkriterium aus Aufgabe 210.

Aufgabe 213. Differenzieren Sie die Taylorreihe der Sinusfunktion, um die Taylorreihe der Kosinusfunktion zu generieren.

Aufgabe 214. Eulersche Formel

Aufgabe 215. Geben Sie i in der Polardarstellung an.

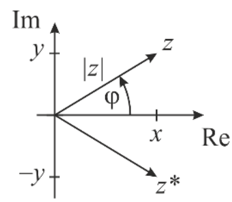
Aufgabe 216. In der kartesischen Form besitzt die komplexe Zahl

$$z = x + \mathrm{i}y$$

einen Real- und einen Imaginärteil:

$$\mathrm{Re}(z) = x \quad , \quad \mathrm{Im}(z) = y$$

Überführen Sie z in die Polarform, und bilden Sie die konjugiert Komplexe z^*.



Aufgabe 217. Beweisen Sie: Wenn $z_0 = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ eine Nullstelle von $f(z)$ ist, dann muss auch die Konjugierte z_0^* eine Nullstelle sein.

Aufgabe 218. Sie müssen zweimal partiell integrieren und die Rückwurftechnik anwenden.

Aufgabe 219. Bei der komplexen Erweiterung wird eine Kosinus- oder Sinusfunktion mithilfe der Eulerschen Formel in eine (komplexe) Exponentialfunktion überführt:

$$f(\alpha) = \cos(\alpha) + \mathrm{i}\sin(\alpha) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$$

Eine komplexe Erweiterung lässt sich rückgängig machen, indem nur der Realteil (oder Imaginärteil) betrachtet wird:

$$\cos(\alpha) = \mathrm{Re}(f(\alpha))$$

Aufgabe 220. Durch Einsetzen von $x = y$ in die allgemeinen Additionstheoreme (38) und (39) erhält man die Doppelwinkel-Additionstheoreme:

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x \tag{258}$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \tag{259}$$

Aufgabe 221. Der binomische Lehrsatz (29) ist sehr nützlich.

Aufgabe 222. Verwenden Sie die Eulersche Formel in Kombination mit dem binomischen Lehrsatz.

Aufgabe 223. Setzen Sie die imaginäre Zahl $z = \mathrm{i}y$ in die Hyperbelfunktionen (41) und (42) ein, und wenden Sie die Eulersche Formel an.

Aufgabe 224. Hinweise:

- Bei der komplexen Erweiterung kommt die Eulersche Formel zum Einsatz:

$$f(\alpha) = [\cos(\alpha) + \mathrm{i}\sin(\alpha)] = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$$

- Die geometrische Reihe (128) wird benötigt.
- Benutzen Sie Gleichung (200).

Aufgabe 225. Wenden Sie den binomischen Lehrsatz (29) auf den kubischen Term an.

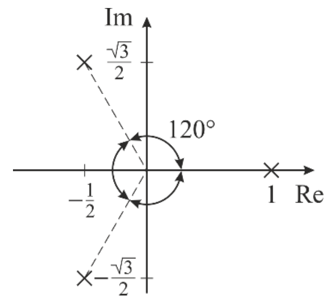
Aufgabe 226. Setzen Sie

$$\begin{aligned} z^3 &= (u+v)^3 \\ &= u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 \\ &= u^3 + 3uv(u+v) + v^3 \\ &= u^3 + 3uvz + v^3 \end{aligned}$$

in die reduzierte kubische Gleichung ein, und nehmen Sie einen Koeffizientenvergleich vor.

Aufgabe 227. Eine Kubikwurzel besitzt im Komplexen drei Lösungen:

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot 2\pi}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot\frac{2}{3}\pi} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{für } k = 1 \\ -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{für } k = 2 \end{cases} \tag{260}$$



Plusminus- und Minuspluszeichen heben sich auf:

$$\pm\alpha \mp \alpha = 0 \tag{261}$$

$$\pm\alpha \cdot (\mp\alpha) = -\alpha^2 \tag{262}$$

Aufgabe 228. Überführen Sie kartesische Koordinaten in Polarkoordinaten, z. B.:

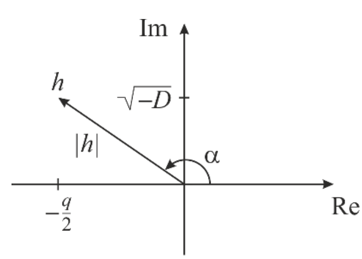
$$h = -\frac{q}{2} + \sqrt{D} = -\frac{q}{2} + \mathrm{i}\sqrt{-D} = |h| \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$$

Für den Winkel α gilt nicht nur

$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{-D}}{-\frac{q}{2}},$$

sondern auch:

$$\cos\alpha = \frac{-\frac{q}{2}}{|h|}$$



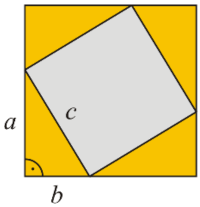
Aufgabe 229. Verwenden Sie zum Testen folgende Parameterkombinationen:

1. $a = -1$, $b = +4$, $c = -4$
2. $a = -3$, $b = +3$, $c = -1$
3. $a = -1$, $b = -4$, $c = +4$

D Lösungen

Allgemeine Grundlagen

Aufgabe 1. Beweis (fast) ohne Worte:



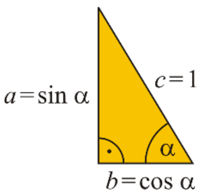
$$\underbrace{(a+b)^2}_{\text{großes Quadrat}} = \underbrace{4\left(\frac{ab}{2}\right)}_{\text{Dreiecke}} + \underbrace{c^2}_{\text{kleines Quadrat}}$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 = c^2$$

■

Aufgabe 2. Ein Bild sagt mehr als tausend Worte:



Setzt man die Definitionsgleichungen von Sinus (Gegenkathete durch Hypothenuse) und Kosinus (Ankathete durch Hypothenuse) in den Satz des Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$ ein, so erhält man den trigonometrischen Pythagoras:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

■

Aufgabe 3. Einsetzen der Hyperbelfunktionen (41) und (42):

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = \left[\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}\right)\right]^2 - \left[\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}\right)\right]^2 = \mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^{-z} = 1$$

■

Aufgabe 4. Alle drei Potenzgesetze lassen sich auf direktem Wege herleiten.

Multiplikation zweier Potenzen mit gleicher Basis (4):

$$x^u \cdot x^v = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{u\text{-mal}} \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{v\text{-mal}} = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{(u+v)\text{-mal}} = x^{u+v}$$

Die Potenzregel für zwei Potenzen mit gleichem Exponenten (5) ergibt sich mithilfe von Kommutativ- und Assoziativgesetz:

$$x^u \cdot y^u = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{u\text{-mal}} \cdot \underbrace{y \cdot y \cdot \ldots \cdot y}_{u\text{-mal}} = \underbrace{(xy) \cdot (xy) \cdot \ldots \cdot (xy)}_{u\text{-mal}} = (xy)^u$$

Potenzieren einer Potenz (6):

$$(x^u)^v = \underbrace{\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{u\text{-mal}} \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{u\text{-mal}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{u\text{-mal}}}_{v\text{-mal}} = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{(u \cdot v)-\text{mal}} = x^{uv}$$

■

Aufgabe 5. Beide Potenzgesetze können mithilfe der Definitionsgleichung einer Potenz auf direktem Wege bewiesen werden.

Bei der Division zweier Potenzen mit gleicher Basis (7) sind drei Fälle zu unterscheiden:

$$\frac{x^u}{x^v} = \frac{\overbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}^{u\text{-mal}}}{\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{v\text{-mal}}} = \begin{cases} \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{(u-v)\text{-mal}} = x^{u-v} & \text{falls } u > v \\ 1 & \text{falls } u = v \\ \dfrac{1}{\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{(v-u)\text{-mal}}} = \dfrac{1}{x^{v-u}} = x^{-(v-u)} & \text{falls } u < v \end{cases}$$

$$= x^{u-v} \quad \text{mit} \quad u, v \in \mathbb{N}^*$$

Division zweier Potenzen mit gleichem Exponenten (8):

$$\frac{x^u}{y^u} = \frac{\overbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}^{u\text{-mal}}}{\underbrace{y \cdot y \cdot \ldots \cdot y}_{u\text{-mal}}} = \underbrace{\frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \ldots \cdot \frac{x}{y}}_{u\text{-mal}} = \left(\frac{x}{y}\right)^u \quad \text{mit} \quad u \in \mathbb{N}^*$$

■

Aufgabe 6. Die Gültigkeit des Potenzgesetzes (4) für ganzzahlige Exponenten lässt sich zeigen, indem man die Gleichung durch Fallunterscheidung auf die bereits bewiesenen Potenzgesetze mit natürlichen Exponenten zurückführt:

1. Beide Exponenten negativ $(u, v < 0)$:

$$\begin{aligned} x^u \cdot x^v &= x^{-a} \cdot x^{-b} && \text{Substitution: } a = -u > 0,\ b = -v > 0 \\ &= \frac{1}{x^a} \cdot \frac{1}{x^b} && \text{Benutzung des Kehrwertes (9)} \\ &= \frac{1}{x^a \cdot x^b} \\ &= \frac{1}{x^{a+b}} && \text{Anwendung des Potenzgesetzes (4) im Nenner} \\ &= x^{-(a+b)} \\ &= x^{u+v} && \text{Rücksubstitution} \end{aligned}$$

2. Bei einem positiven und einem negativen Exponenten kommt das Potenzgesetz (7) zum Einsatz, z. B. $u > 0$, $v = -b < 0$:

$$x^u \cdot x^v = x^u \cdot x^{-b} = \frac{x^u}{x^b} = x^{u-b} = x^{u+v}$$

   Es gilt das Kommutativgesetz (Vertauschung der Faktoren x^u und x^v), so dass der Fall $u = -a < 0$, $v > 0$ nicht gesondert betrachtet werden muss.

3. Das Potenzgesetz soll auch dann gelten, wenn ein Exponent verschwindet, z. B. $u = 0$, $v \neq 0$:
$$x^0 \cdot x^v = \underbrace{x^{0+v}}_{x^v}$$
Kürzen durch x^v liefert die Forderung:
$$x^0 := 1 \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \neq 0 \tag{263}$$
Anmerkungen:
   - Bei der Identität (263) handelt es sich nicht um eine Folgerung, sondern um eine (nicht beweisbare) Definition.
   - Ansonsten wäre das Potenzgesetz nur für Exponenten $u \neq 0$, $v \neq 0$ gültig, was lästige Fallunterscheidungen (unnötige Schreibarbeit) nach sich ziehen würde.
   - Der Fall, dass beide Exponenten verschwinden, ergibt ebenfalls eine wahre Aussage:
$$\underbrace{x^0}_{1} \cdot \underbrace{x^0}_{1} = \underbrace{x^{0+0}}_{1}$$
   - Der unbestimmte Ausdruck 0^0 bleibt in der Regel undefiniert. Bestrebungen einzelner Mathematiker, ihn aus pragmatischen Gründen gleich eins zu setzen, haben sich nicht durchsetzen können. Schließlich gilt: $0^u = 0$ für $u > 0$.

Der Fall $u, v > 0$ wurde als bekannt vorausgesetzt, so dass die Fallunterscheidung vollständig ist: Das Potenzgesetz besitzt Gültigkeit für ganzzahlige Exponenten $u, v \in \mathbb{Z}$.

■

Aufgabe 7. Im Mittelpunkt des Beweises steht die Erweiterung der als Brüche dargestellten Exponenten $u = \frac{a}{b}$, $v = \frac{c}{d}$ auf den gemeinsamen Hauptnenner, um das bereits für ganzzahlige Exponenten bewiesene Potenzgesetz (4) anwenden zu können:
$$x^u \cdot x^v = x^{\frac{a}{b}} \cdot x^{\frac{c}{d}} = x^{\frac{ad}{bd}} \cdot x^{\frac{bc}{bd}} = \left(\sqrt[bd]{x}\right)^{ad} \cdot \left(\sqrt[bd]{x}\right)^{bc} = \left(\sqrt[bd]{x}\right)^{ad+bc} = x^{\frac{ad+bc}{bd}} = x^{u+v}$$
mit $a, c \in \mathbb{Z}$ und $b, d \in \mathbb{N}^*$. ■

Dass auch die anderen Potenzgesetze für rationale Exponenten gültig sind, lässt sich im Prinzip analog beweisen, allerdings ist es hilfreich, für die Herleitung die zugehörigen Wurzelgesetze zu verwenden:

- Produkt mit gleichem Exponenten (5) bzw. gleichem Wurzelexponenten:
$$\sqrt[b]{x} \cdot \sqrt[b]{y} = \sqrt[b]{xy} \tag{264}$$
- Potenz einer Potenz (6) bzw. Wurzel einer Wurzel:
$$\sqrt[b]{\sqrt[d]{x}} = \sqrt[bd]{x} \tag{265}$$

- Quotient mit gleichem Exponenten (8) bzw gleichem Wurzelexponenten:

$$\frac{\sqrt[b]{x}}{\sqrt[b]{y}} = \sqrt[b]{\frac{x}{y}} \tag{266}$$

Die für natürliche Wurzelexponenten $b, d \in \mathbb{N}^*$ geltenden Wurzelgesetze (264) bis (266) lassen sich ihrerseits aus den für natürliche Exponenten bewiesenen Potenzgesetzen herleiten.

Aufgabe 8. Im Gegensatz zu rationalen Zahlen sind irrationale Zahlen $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nicht als Bruch darstellbar, haben also beliebig viele Nachkommastellen, z. B.:

$$a = \sqrt{2} = 1{,}414213562373095\ldots$$

Obwohl irrationale Zahlen somit nie exakt berechnet werden können, lassen sie sich zumindest beliebig exakt durch rationale Zahlen annähern. Im Falle von $a = \sqrt{2}$ geschieht dies durch die Folge:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1{,}4 \\ a_2 &= 1{,}41 \\ a_3 &= 1{,}414 \\ a_4 &= 1{,}4142 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Das Folgenglied a_n besitzt die endliche Anzahl von n Nachkommastellen und ist daher eine rationale Zahl. Ersetzt man also den Grenzwert

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n$$

durch eine hinreichend genaue Annäherung a_n, so lässt sich auch für Potenzgesetze mit reellen Exponenten eine beliebige Genauigkeit erzielen. ∎

Aufgabe 9. Unter Verwendung der Definitionsgleichung des Logarithmus

$$a^b = x \quad \Leftrightarrow \quad b = \log_a x \tag{267}$$

mit $a > 0$ und $x > 0$ folgt durch Äquivalenzumformungen:

$$\begin{aligned} & & \log_a xy &= \log_a x + \log_a y && \text{Logarithmenregel (11)} \\ &\Leftrightarrow & a^{\log_a xy} &= a^{\log_a x + \log_a y} && \text{Anwendung der Exponentialfunktion } a^{(\ldots)} \\ &\Leftrightarrow & xy &= a^{\log_a x + \log_a y} && \text{Per Definition (267) gilt: } x = a^{\log_a x} \\ &\Leftrightarrow & a^u a^v &= a^{u+v} && \text{Substitution: } u = \log_a x,\ v = \log_a y \\ &\Leftrightarrow & z^u z^v &= z^{u+v} && \text{Potenzregel (4) mit beliebiger Basis } z > 0 \end{aligned}$$

∎

Aufgabe 10. Beweis der Äquivalenz von Logarithmenregel (12) und Potenzregel (6):

$$\begin{aligned}
& \log_a x^c = c \log_a x & \\
\Leftrightarrow \quad & x^c = a^{c \log_a x} & \text{Erhebung zur a-ten Potenz} \\
\Leftrightarrow \quad & (a^b)^c = a^{cb} & \text{Substitution: } b = \log_a x \text{ bzw. } x = a^b \text{ (vgl. (267))} \\
\Leftrightarrow \quad & (a^b)^c = a^{bc} &
\end{aligned}$$

■

Aufgabe 11. Auch der Basiswechselsatz (13) ist äquivalent zur Potenzregel (6):

$$\begin{aligned}
& \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} & \text{für } a \neq 1 \\
\Leftrightarrow \quad & \log_a x \cdot \log_b a = \log_b x & \text{Multiplikation mit Nenner} \\
\Leftrightarrow \quad & b^{\log_a x \cdot \log_b a} = x & \text{Erhebung zur b-ten Potenz} \\
\Leftrightarrow \quad & b^{v \log_b a} = a^v & \text{Substitution: } v = \log_a x \\
\Leftrightarrow \quad & b^{uv} = (b^u)^v & \text{Substitution: } u = \log_b a
\end{aligned}$$

■

Aufgabe 12. Äquivalenz der beiden Logarithmengesetze:

$$\begin{aligned}
& \log_a x^c = c \log_a x & \text{Logarithmenregel (12)} \\
\Leftrightarrow \quad & \log_a y = \log_x y \cdot \log_a x & \text{Substitution: } c = \log_x y \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{\log_a y}{\log_a x} = \log_x y & \text{Logarithmenregel (13) mit } x \neq 1
\end{aligned}$$

■

Aufgabe 13. Es sei $k \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl. Multiplikation mit 2 liefert eine beliebige gerade Zahl: $g = 2k$. Auch das Quadrat

$$g^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

ist ein Vielfaches von 2 und somit eine gerade Zahl. ■

Aufgabe 14. Es sei $k \in \mathbb{Z}$. Dann ist $u = 2k + 1$ ungerade. Unter Anwendung der ersten binomischen Formel lässt sich leicht zeigen, dass das Quadrat

$$\begin{aligned}
u^2 &= (2k+1)^2 \\
&= \underbrace{4k^2}_{\text{gerade}} + \underbrace{4k}_{\text{gerade}} + \underbrace{1}_{\text{ungerade}}
\end{aligned}$$

ebenfalls eine ungerade Zahl sein muss. ■

Aufgabe 15. Zu beweisende Implikation: m^2 gerade $\Rightarrow$ m gerade

Äquivalente Kontraposition: m ungerade $\Rightarrow$ m^2 ungerade

Dass das Quadrieren einer ungeraden Zahl wieder eine ungerade Zahl ergibt, wurde bereits in Aufgabe 14 bewiesen. ∎

Aufgabe 16. Aussage A: $\sqrt{2}$ ist irrational.

Gegenannahme (nicht A): $\sqrt{2}$ ist rational, lässt sich also als Bruch zweier teilerfremder natürlicher Zahlen p und q darstellen:

$$
\begin{array}{lrll}
 & \sqrt{2} = \dfrac{p}{q} & & \text{gekürzter Bruch (unterschiedliche Primfaktoren)} \\[2ex]
\Rightarrow & 2 = \dfrac{p^2}{q^2} & & \\[2ex]
\Rightarrow & 2q^2 = p^2 & & \text{Erkenntnis: } p^2 \text{ muss gerade (durch 2 teilbar) sein.} \\
 & & & \text{Somit ist auch } p \text{ gerade (vgl. Aufgabe 15).} \\[1ex]
\Rightarrow & 2q^2 = (2r)^2 & & \text{Substitution: } p = 2r \\[1ex]
\Rightarrow & q^2 = 2r^2 & & \text{Erkenntnis: } q^2 \text{ gerade, somit auch } q \text{ gerade}
\end{array}
$$

Sowohl p als auch q wären durch 2 teilbar, was im Widerspruch zur (Gegen-)Annahme (gekürzter Bruch) steht.

Aussage A ist folglich richtig: Die Wurzel aus 2 ist eine irrational Zahl. ∎

Aufgabe 17. Zu beweisen: Es existieren unendlich viele Primzahlen p_i.

Gegenannahme: Es gibt endlich viele Primzahlen $p_i \in \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots, p_N\}$.

Wie man sofort erkennt, ist das Produkt aller Primzahlen

$$q = \prod_{i=1}^{N} p_i = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot p_N$$

keine Primzahl. Auf die Frage, ob die nächstgrößere Zahl $r = q + 1$ eine Primzahl ist, lassen sich zwei verschiedene Antworten geben:

A) Die Zahl r kann keine Primzahl sein, denn sie ist größer als die größte Primzahl: $r > p_N$.

B) Die Zahl r muss eine Primzahl sein, denn eine Primfaktorzerlegung gelingt nicht. Teilt man r durch eine beliebige Primzahl p_i, so erhält man immer 1 als Rest, z. B.:

$$\frac{r}{3} = \frac{q+1}{3} = 2 \ \cdot \ 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot p_N + \frac{1}{3}$$

Die Aussagen A und B widersprechen sich. ∎

Aufgabe 18. Die gesuchten größten gemeinsamen Teiler sind:

a) $\text{ggT}(546, 1764) = 42$

b) $\text{ggT}(10\,000\,001, 100\,001) = 11$

c) $\text{ggT}(9\,283\,479, 2\,089\,349\,234\,720\,389\,479) = 3$

d) $\text{ggT}(10\,000\,000\,008\,200\,000\,001\,197, 10\,000\,000\,002\,200\,000\,000\,057) = 100\,000\,000\,019$

Der klassische Euklidische Algorithmus wird sehr aufwändig, wenn die kleinere Zahl n mehrfach von der größeren Zahl m abgezogen werden muss. Aus diesem Grund verwendet der moderne Euklidische Algorithmus statt der Differenz $m - n$ eine Division mit Rest:

$$r = m \bmod n$$

Python-Quellcode:

```
# Berechnung des ggT der folgenden natuerlichen Zahlen:
m, n = 9283479, 2089349234720389479
while m != n:
    if m < n:
        k = m
        m = n
        n = k
    print("m=", m, ", n=",n)
    r = m%n                    # Division mit Rest r
    if r == 0:
        m = n
    else:
        m = r
print("ggT=", m)
```

■

Aufgabe 19. Fermatsche Primzahlen: $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ und $F_4 = 65537$

Die Fermat-Zahl $F_5 = 4294967297$ hingegen ist keine Primzahl, denn sie ist durch 641 teilbar. Mit diesem Gegenbeispiel konnte Euler die Vermutung von Fermat widerlegen.

Python-Quellcode:

```
# Untersuchung der Fermat-Zahlen auf Primzahlen
for n in range(7):
    f = 2**(2**n) +1
    print("F(",n,")=",f)
    for i in range(2,f):            # Brute-Force-Methode
        if f%i == 0:
            print("Teiler:",i)
            break
```

■

Aufgabe 20. Herleitung der pq-Formel:

$$
\begin{aligned}
& & x^2 + px + q &= 0 & \\
\Leftrightarrow & & x^2 + px + q + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 &= 0 & \text{Quadratische Ergänzung} \\
\Leftrightarrow & & \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q & \\
\Leftrightarrow & & x_{1,2} + \frac{p}{2} &= \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} & \text{Maximal zwei Lösungen} \\
\Leftrightarrow & & x_{1,2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \checkmark &
\end{aligned}
$$

Doppelte Nullstelle $x_1 = x_2 = -\dfrac{p}{2}$ für $\left(\dfrac{p}{2}\right)^2 = q$; keine reelle Lösung für $\left(\dfrac{p}{2}\right)^2 < q$.

$\blacksquare$

Aufgabe 21. Ein homogenes LGS besitzt immer dann unendlich viele Lösungen, wenn die Koeffizientenmatrix $\underline{A}$ singulär ist. Dies ist der Fall, wenn die Determinate verschwindet:

$$\det \underline{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Lösungsschar} \tag{268}$$

Im Falle einer regulären Matrix existiert nur eine einzige Lösung, die triviale:

$$\det \underline{A} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{x} = \underline{0} \tag{269}$$

Die für den Beweis benötigte Determinate ergibt sich bei einer zweireihigen Matrix zu:

$$\det \underline{A} = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

Lösung eines homogenen (2,2)-Gleichungssystems mittels Gauß-Verfahren:

$$
\begin{aligned}
ax + by &= 0 \qquad | \cdot d \\
cx + dy &= 0 \qquad | \cdot b \quad \Big] - \\
\hline
\underbrace{(ad - bc)}_{\det \underline{A}}\, x &= 0
\end{aligned}
$$

Fallunterscheidung:

- Für $\det \underline{A} = ad - bc = 0$ kann x frei gewählt werden (bzw. y, falls $b = d = 0$):

  $$x = \lambda \in \mathbb{R}$$

  Rückeinsetzen (z. B. in die erste Gleichung, falls $b \neq 0$):

  $$y = -\frac{ax}{b} = -\frac{a}{b}\lambda$$

- Für $\det \underline{A} \neq 0$ muss $x = 0$ und somit auch $y = 0$ sein.

$\blacksquare$

Aufgabe 22. Lösung eines inhomogenen (2,2)-Gleichungssystems (mit $r^2 + s^2 \neq 0$):

$$\begin{array}{ll} ax + by = r & | \cdot d \\ cx + dy = s & | \cdot b \end{array} \Big] -$$
$$\underbrace{(ad - bc)}_{\det \underline{A}}\, x = \underbrace{dr - bs}_{R}$$

Fallunterscheidung:

a) Bei einer regulären Matrix mit $\det \underline{A} = ad - bc \neq 0$ erhält man eine eindeutige (nicht-triviale) Lösung:
$$x = \frac{dr - bs}{ad - bc}$$
und
$$y = \frac{r - ax}{b}$$
Sollte $b = 0$ sein, muss die zweite Gleichung verwendet werden: $y = \dfrac{s - cx}{d}$

b) Im Falle einer singulären Matrix ($\det \underline{A} = ad - bc = 0$) muss die rechte Seite R genauer untersucht werden. Ist $R = dr - bs \neq 0$, dann kann es keine Lösung geben.

c) Für $\det \underline{A} = ad - bc = 0$ und $R = dr - bs = 0$ existieren unendlich viele Lösungen:
$$x = \lambda \in \mathbb{R}$$
Die Variable y ergibt sich wie bei a) durch Rückeinsetzen von x in eine der beiden Ausgangsgleichungen bzw. kann für $b = d = 0$ ebenfalls frei gewählt werden.

■

Aufgabe 23. Um eine Wurzelgleichung nach der gesuchten Lösung x freistellen zu können, muss quadriert werden. Da es sich bei einer Quadratur um keine Äquivalenzumformung, sondern eine Implikation handelt, muss das ermittelte Ergebnis immer in die Ausgangsgleichung eingesetzt werden, um etwaige Scheinlösungen herauszufiltern.

Beispiel:

$$\begin{array}{lrl} & \sqrt{15 - 2x} = -x & \\ \Rightarrow & 15 - 2x = x^2 & \text{Quadratur} \\ \Leftrightarrow & x^2 + 2x - 15 = 0 & \\ \Leftrightarrow & x_1 = 3 \quad \text{und} \quad x_2 = -5 & \text{Zwei Lösungen?} \end{array}$$

$$\begin{array}{lrl} \text{Einsetzen von } x_1\text{:} & \sqrt{15 - 2 \cdot 3} = 3 \neq -3 & \text{Scheinlösung} \\ \text{Einsetzen von } x_2\text{:} & \sqrt{15 - 2 \cdot (-5)} = 5 = -(-5) & \checkmark \end{array}$$

Ergebnis der Probe: Nur $x_2 = -5$ ist eine Lösung der Wurzelgleichung.

■

Aufgabe 24. Beweis der Bernoulli-Ungleichung mittels Induktion:

1. Induktionsanfang:

$$\begin{array}{rrcll} & (1+x)^0 & \geq & 1+0\cdot x & \text{Einsetzen von } n=0 \\ \Leftrightarrow & 1 & \geq & 1 \quad \checkmark & \text{Grenzwertbetrachtung: } \lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x\geq -1}} (1+x)^0 = 1 \end{array}$$

2. Induktionsschluss:

$$\begin{array}{rrcll} & (1+x)^n & \geq & 1+nx & \text{Induktionsannahme } A(n) \\ \Leftrightarrow & (1+x)^n\cdot(1+x) & \geq & (1+nx)\cdot(1+x) & \text{Faktor } (1+x)\geq 0 \text{ für } x\geq -1 \\ \Leftrightarrow & (1+x)^{n+1} & \geq & 1+(n+1)x+\underbrace{nx^2}_{\geq 0} & \\ \Rightarrow & (1+x)^{n+1} & \geq & 1+(n+1)x & \text{Induktionsbehauptung } A(n+1) \end{array}$$

■

Anmerkungen:

- Beim Induktionsschluss handelt es sich nicht um eine Äquivalenzumformung, sondern (lediglich) um eine Implikation — was für den Induktionsbeweis typisch ist.
- Die Bernoulli-Ungleichung gilt sogar für $x \geq -2$. Der Fall $x \in [-2; -1)$ lässt sich allerdings nicht mehr durch Induktion überprüfen, sondern erfordert den Einsatz von Ableitungen.

Aufgabe 25. Beweis der Ungleichung (18) durch vollständige Induktion:

1. Induktionsanfang:

$$\begin{array}{rrcll} & 2^4 & \geq & 4^2 & \text{Einsetzen von } n=4 \\ \Leftrightarrow & 16 & \geq & 16 \quad \checkmark & \end{array}$$

2. Induktionsschritt:

$$\begin{array}{rrcll} & 2^n & \geq & n^2 & \text{Induktionsvoraussetzung } A(n) \\ \Leftrightarrow & 2\cdot 2^n & \geq & 2\cdot n^2 & \\ \Leftrightarrow & 2^{n+1} & \geq & 2n^2-(n+1)^2+(n+1)^2 & \\ \Leftrightarrow & 2^{n+1} & \geq & \underbrace{(n-1)^2-2}_{\geq 0 \text{ für } n\geq 4}+(n+1)^2 & \\ \Rightarrow & 2^{n+1} & \geq & (n+1)^2 & \text{Induktionsbehauptung } A(n+1) \end{array}$$

Geometrische Interpretation: Eine Exponentialfunktion strebt deutlich schneller gegen unendlich als eine Potenzfunktion. ■

Aufgabe 26. Direkter Beweis der Dreiecksungleichung (19):

$$\begin{aligned} & |x+y| &\leq\ & |x|+|y| \\ \Leftrightarrow\quad & |x+y|^2 &\leq\ & (|x|+|y|)^2 \\ \Leftrightarrow\quad & (x+y)^2 &\leq\ & |x|^2+2\cdot|x|\cdot|y|+|y|^2 \\ \Leftrightarrow\quad & x^2+2xy+y^2 &\leq\ & x^2+2\cdot|xy|+y^2 \\ \Leftrightarrow\quad & xy &\leq\ & |xy| \qquad \checkmark \end{aligned}$$

■

Beide Seiten der Dreiecksungleichung sind nicht-negativ (positiv oder null), so dass das Quadrieren keine Implikation, sondern eine Äquivalenzumformung darstellt. Man hätte die Ungleichungen also auch in umgekehrter Reihenfolge aufschreiben können, denn bei einer Äquivalenzumformung gilt die Umkehrung ebenfalls.

Mit $x = z - y$ erhält man eine interessante Variante der Dreiecksungleichung:

$$|z-y| \geq |z| - |y| \tag{270}$$

Aufgabe 27. Beweis der Ungleichung

$$\overline{x}_\mathrm{h} \leq \overline{x}_\mathrm{g} \leq \overline{x}_\mathrm{a} \leq \overline{x}_\mathrm{q} \tag{271}$$

durch Quadrieren (Äquivalenzumformung wegen $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$):

1. Harmonisches Mittel kleiner oder gleich dem geometrischen Mittel:

$$\begin{aligned} & \frac{2x_1x_2}{x_1+x_2} &\leq\ & \sqrt{x_1x_2} \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{4x_1^2x_2^2}{(x_1+x_2)^2} &\leq\ & x_1x_2 \\ \Leftrightarrow\quad & 4x_1x_2 &\leq\ & x_1^2+2x_1x_2+x_2^2 \\ \Leftrightarrow\quad & 0 &\leq\ & (x_1-x_2)^2 \qquad \checkmark \end{aligned}$$

2. Geometrisches Mittel kleiner oder gleich dem arithmetischen Mittel:

$$\begin{aligned} & \sqrt{x_1x_2} &\leq\ & \frac{x_1+x_2}{2} \\ \Leftrightarrow\quad & 4x_1x_2 &\leq\ & x_1^2+2x_1x_2+x_2^2 \\ \Leftrightarrow\quad & 0 &\leq\ & (x_1-x_2)^2 \qquad \checkmark \end{aligned}$$

3. Arithmetisches Mittel kleiner oder gleich dem quadratischen Mittel:

$$\begin{aligned} & \frac{x_1+x_2}{2} &\leq\ & \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}} \\ \Leftrightarrow\quad & x_1^2+2x_1x_2+x_2^2 &\leq\ & 2x_1^2+2x_2^2 \\ \Leftrightarrow\quad & 0 &\leq\ & (x_1-x_2)^2 \qquad \checkmark \end{aligned}$$

■

Aufgabe 28. Die erste Ungleichung ist ganz offensichtlich richtig (gleich viele Faktoren):

$$n^n = \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{n\text{-mal}} \geq \underbrace{1}_{\leq n} \cdot \underbrace{2}_{\leq n} \cdot \underbrace{3}_{\leq n} \cdot \ldots \cdot n = n!$$

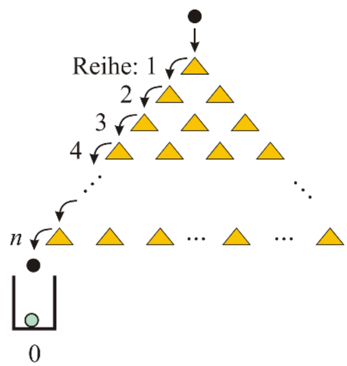
Zum Beweis der zweiten Ungleichung wird eine Umsortierung vorgenommen:

$$\sqrt{n^n} = \left(\sqrt{n}\right)^n = \underbrace{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \ldots \cdot \sqrt{n}}_{n\text{-mal}} = \begin{cases} \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{\frac{n}{2}\text{-mal}} & \text{für } n \text{ gerade} \\ \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{\frac{n-1}{2}\text{-mal}} \sqrt{n} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\leq n! = \begin{cases} [1 \cdot n] \cdot [2(n-1)] \cdot \ldots \cdot [k(n+1-k)] \cdot \ldots \cdot \left[\frac{n}{2} \cdot \frac{n+2}{2}\right] & \text{für } n \text{ gerade} \\ \underbrace{[1 \cdot n]}_{\geq n} \cdot \underbrace{[2(n-1)]}_{\geq n} \cdot \ldots \cdot \underbrace{[k(n+1-k)]}_{=(n-k)(k-1)+n \geq n} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\left[\frac{n-1}{2} \cdot \frac{n+3}{2}\right]}_{\geq n} \underbrace{\frac{n+1}{2}}_{\geq \sqrt{n}} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Für ungerade n gilt die Abschätzung: $\frac{n+1}{2} \geq \sqrt{n} \Leftrightarrow (n+1)^2 \geq 4n \Leftrightarrow (n-1)^2 \geq 0$ ■

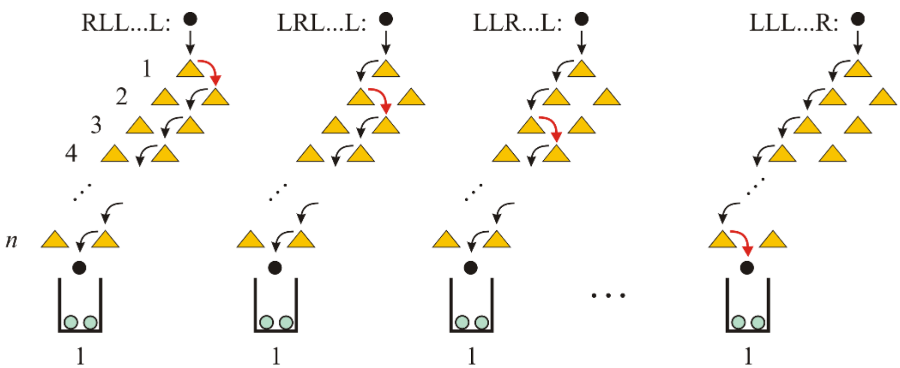
Aufgabe 29. Mit jeder Reihe verdoppelt sich die Anzahl Wege, so dass man insgesamt 2^n Kombinationsmöglichkeiten erhält, die sich wie folgt aufteilen:



- Zu Topf 0 führt nur ein einziger Weg, denn die Kugel muss immer nach links verzweigen. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel ganz links landet, liegt somit lediglich bei:

$$p_0 = \frac{1}{2^n}$$

- Für Topf 1 gibt es immerhin n verschiedene Wege (L für „links“ und R für „rechts“):



Folglich ist die Wahrscheinlichkeit:

$$p_1 = \frac{n}{2^n}$$

- Um in Topf 2 zu landen, muss die Kugel zweimal nach rechts verzweigen, z. B. LRRLL...L (in Kurzschreibweise). Für das erste R existieren n Möglichkeiten, für das zweite R nur noch $(n-1)$. Die Reihenfolge der Rs ist beliebig (Wege $\mathrm{LR_1R_2LL\ldots L}$ und $\mathrm{LR_2R_1LL\ldots L}$ sind gleich), so dass man insgesamt $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ Wege erhält. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel in Topf 2 landet, beträgt:

$$p_2 = \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{2^n}$$

- Bei Topf 3 sind es $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)$ Kombinationsmöglichkeiten, von denen jeweils $2\cdot 3 = 6$ zu den gleichen Wegen gehören, z. B.:

$$\mathrm{LR_1R_2R_3L\ldots L = LR_1R_3R_2L\ldots L = LR_2R_1R_3L\ldots L =}$$
$$\mathrm{LR_2R_3R_1L\ldots L = LR_3R_1R_2L\ldots L = LR_3R_2R_1L\ldots L}$$

  Die Wahrscheinlichkeit für Topf 3 ergibt sich somit zu:

$$p_3 = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{2^n}$$

- Durch Rekursion kommt man zu dem Ergebnis, dass

$$m_k = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}$$

  Wege zu Topf k führen. Eine Division durch die Gesamtzahl an Kombinationsmöglichkeiten liefert die zu ermittelnde Wahrscheinlichkeit:

$$p_k = \frac{m_k}{2^n}$$

Dass es sich bei Größe m_k um den Binomialkoeffizienten (25) handelt, wird spätestens beim Erweitern des Bruches offenkundig:

$$\begin{aligned} m_k &= \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}\cdot\frac{(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot(n-k-2)\cdot\ldots\cdot 1}{(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot(n-k-2)\cdot\ldots\cdot 1} \\ &= \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \\ &= \binom{n}{k} \end{aligned}$$

■

Aufgabe 30. Einsetzen des Binomialkoeffizienten (25):

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{[n-(n-k)]!\cdot(n-k)!} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} = \binom{n}{k}$$

■

Aufgabe 31. Einsetzen in Definitionsgleichung (25) und Erweiterung auf gemeinsamen Hauptnenner:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{[n-(k-1)]! \cdot (k-1)!} \cdot \frac{k}{k} + \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \cdot \frac{n-(k-1)}{n-(k-1)} \\
&= \frac{n! \cdot [k + n - (k-1)]}{[n-(k-1)]! \cdot k!} \\
&= \frac{(n+1)!}{[(n+1)-k]! \cdot k!} \\
&= \binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

■

Aufgabe 32. Für $n \in \mathbb{N}$ lässt sich der allgemeine Binomialkoeffizient

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \frac{n \cdot [n-1] \cdot [n-2] \cdot \ldots \cdot [n-k+1]}{k!} \cdot \frac{[n-k] \cdot [n-k-1] \cdot [n-k-2] \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{[n-k] \cdot [n-k-1] \cdot [n-k-2] \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} \\
&= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}
\end{aligned}$$

in der für den Binomialkoeffizienten (25) üblichen Kurzschreibweise (Verwendung der Fakultät) angeben.

Der sich bei natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ für $k = 0$ ergebende Grenzfall $\binom{n}{0}$ muss nicht gesondert vorgegeben werden, sondern folgt aus der Definitionsgleichung:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot (n-0)!} = \frac{1}{0!} = 1$$

■

Aufgabe 33. Beweis des binomischen Lehrsatzes (29) für $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mittels vollständiger Induktion:

1. Induktionsanfang:

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k}\, b^k && \text{Einsetzen von } n = 0 \\
&= \binom{0}{0} a^0\, b^0 \\
&= a^0\, b^0 \\
\Leftrightarrow \qquad 1 &= 1 && \text{für } a \neq 0,\ b \neq 0 \text{ und } a + b \neq 0
\end{aligned}$$

Etwas unbefriedigend ist, dass gleich an drei Stellen unbestimmte Ausdrücke vom Typ 0^0 auftreten können, die es zu vermeiden gilt. Aus diesem Grund wird der Induktionsanfang um eins verschoben:

$$\begin{aligned}
(a+b)^1 &= \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k}\, b^k && \text{Einsetzen von } n=1 \\
&= \binom{1}{0} a^1\, b^0 + \binom{1}{1} a^0\, b^1 \\
&= a\, b^0 + a^0\, b \\
\Leftrightarrow \quad a+b &= a+b \quad \checkmark && \text{für } a \neq 0,\ b \neq 0
\end{aligned}$$

Für $n=1$ müssen nur noch (bzw. immer noch, je nach Sichtweise) an zwei Stellen (a^0, b^0) unbestimmte Ausdrücke durch Fallunterscheidung abgefangen werden. Dies ist jedoch nicht weiter schlimm, denn die Berechnung von $(a+b)^n$ mit $a=0$ und/oder $b=0$ ist trivial und gelingt auch ohne binomischen Lehrsatz.

2. Induktionsschluss:

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k && \text{Induktionsannahme } A(n) \\
\Rightarrow \quad (a+b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k \cdot (a+b) && \text{Multiplikation mit } (a+b) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k}\, b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^{k+1} \\
&= \binom{n}{0} a^{n+1}\, b^0 + \left[\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k}\, b^k\right] + \\
&\quad + \underbrace{\left[\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^{k+1}\right]}_{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1}\, b^k} + \binom{n}{n} a^{n-n}\, b^{n+1} && \text{Verschiebung des Laufindex} \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]}_{\binom{n+1}{k}} a^{n+1-k}\, b^k && \text{Rekursionsformel (27)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k}\, b^k && \text{Induktionsbehauptung } A(n+1)
\end{aligned}$$

■

Anmerkungen:

- Bei der Aufteilung in zwei Summen mit anschließender Abspaltung des ersten bzw. letzten Glieds handelt es sich um eine Schlüsselstelle des Beweises. Ohne diese Umformung würde die Rekursionsformel (27) auf die nicht definierten Terme $\binom{n}{-1}$ und/oder $\binom{n}{n+1}$ führen (Verletzung der Forderung $0 \leq k \leq n$).
- Aus der Definitionsgleichung des Binomialkoeffizienten (25) folgt:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = \binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1$$

- Eine weitere Vereinfachung ist:

$$a^0 = b^0 = 1 \quad \text{für } a \neq 0,\ b \neq 0$$

  Wie bereits in Aufgabe 6 erwähnt, definieren einige Autoren den unbestimmten Ausdruck 0^0 zu eins, während andere das Problem geflissentlich ignorieren. Wer sich auf keine Diskussion einlassen möchte, fordert, dass der binomische Lehrsatz nur für $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gelten möge.

Aufgabe 34. Die für reelle Exponenten $n \in \mathbb{R}$ definierte binomische Reihe (178) besitzt unendlich viele Terme. Weil für natürliche Exponenten $n \in \mathbb{N}$ alle Binomialkoeffizienten mit $k > n$

$$\begin{aligned}
\binom{n}{n+1} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-n)}{(n+1)!} = 0 \\
\binom{n}{n+2} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 0 \cdot (-1)}{(n+2)!} = 0 \\
\binom{n}{n+3} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 0 \cdot (-1) \cdot (-2)}{(n+3)!} = 0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

verschwinden (Faktor 0 im Zähler), erhält man als Spezialfall den binomischen Lehrsatz:

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k + \sum_{k=n+1}^{\infty} \underbrace{\binom{n}{k}}_{=0} a^{n-k}\, b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k
\end{aligned}$$

■

Aufgabe 35. Abnehmen mit Mathe:

$$\begin{aligned}
& & G &= g + ü & &| \cdot (G-g)\\
&\Leftrightarrow & G\cdot(G-g) &= (g+ü)\cdot(G-g) & &|\ \text{Ausmultiplizieren}\\
&\Leftrightarrow & GG - Gg &= gG - gg + üG - üg & &| - Gü\\
&\Leftrightarrow & GG - Gg - Gü &= gG - gg - üg & &|\ \text{Ausklammern}\\
&\Leftrightarrow & G\cdot(G-g-ü) &= g\cdot(G-g-ü) & &| : (G-g-ü)\\
&\Leftrightarrow & G &= g
\end{aligned}$$

Fazit: Jeder Mensch besitzt sein Idealgewicht (Übergewicht $ü = 0$).

■

Aufgabe 36. Vorzeichen sind unwichtig:

$$1 = (-1)^2 = \left[(-1)^2\right]^{\frac{1}{6}} = (-1)^{\frac{2}{6}} = (-1)^{\frac{1}{3}} = -1$$

Dass $1 = -1$ gilt, lässt sich auch mit komplexen Zahlen zeigen (siehe z. B. Aufgabe 40).

■

Aufgabe 37. Die Reihenfolge zweier Zahlen lässt sich umdrehen:

$$\begin{aligned}
& & 1 &> 0 & &| : 8\\
&\Leftrightarrow & \frac{1}{8} &> 0 & &| + \tfrac{1}{8}\\
&\Leftrightarrow & \frac{1}{4} &> \frac{1}{8} & &|\ \text{Darstellung als Potenz}\\
&\Leftrightarrow & \left(\frac{1}{2}\right)^2 &> \left(\frac{1}{2}\right)^3 & &| \log_{\frac{1}{2}}(\ldots)\\
&\Leftrightarrow & 2 &> 3 & &| - 2\\
&\Leftrightarrow & 0 &> 1
\end{aligned}$$

Die Aussage $0 > 1$ stimmt überein mit der in Aufgabe 36 bewiesenen Tatsache, dass Vorzeichen austauschbar sind.

■

Aufgabe 38. Aus der partiellen Integration vom Kotangens

$$\begin{aligned}
A &= \int \cot x \; dx \\
&= \int \underbrace{\frac{1}{\sin x}}_{g(x)} \cdot \underbrace{\cos x}_{h'(x)} \; dx \\
&= \underbrace{\frac{1}{\sin x}}_{g(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{h(x)} - \int \underbrace{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}}_{g'(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{h(x)} \; dx \\
&= 1 + \underbrace{\int \cot x \; dx}_{A}
\end{aligned}$$

folgt die zu beweisende Aussage, dass es auf einen mehr oder weniger nicht ankommt:

$$A = 1 + A$$

Durch Kürzen erhält man eine weitere interessante Aussage:

$$0 = 1$$

Fazit: Was nicht passt, wird passend gemacht.

■

Aufgabe 39. Berechnung des Summenwerts der alternierenden harmonischen Reihe durch Umordnung der Reihenglieder:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \pm \dots \\
&= \left[\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right] - \frac{1}{4} + \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right] - \frac{1}{8} + \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right] - \frac{1}{12} \pm \dots \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} \pm \dots \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \pm \dots\right] \\
&= \frac{1}{2} A
\end{aligned}$$

Aus $A = \frac{A}{2}$ folgt das zu beweisende Ergebnis:

$$A = \ln(2) = 0$$

■

Aufgabe 40. Es gilt:

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = \mathrm{i}\cdot\mathrm{i} = \mathrm{i}^2 = -1$$

■

Aufgabe 41. Aus der Eulerschen Formel (196) für den Vollwinkel (360° bzw. 2π)

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi} = \cos(2\pi) + \mathrm{i}\sin(2\pi) = 1$$

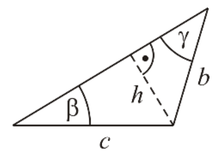
folgt, dass die komplexe Exponentialfunktion für jedes $\varphi \in \mathbb{R}$ gleich eins ist:

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi\cdot\frac{2\pi}{2\pi}}\\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\cdot\frac{\varphi}{2\pi}}\\ &= \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi}\right)^{\frac{\varphi}{2\pi}}\\ &= 1^{\frac{\varphi}{2\pi}}\\ &= 1\end{aligned}$$

■

Vektoralgebra

Aufgabe 42. Für die beiden rechtwinkligen Dreiecke gilt:



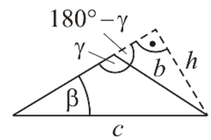
$$\sin\beta = \frac{h}{c}$$

$$\sin\gamma = \frac{h}{b}$$

Elimination der Höhe h liefert das gewünschte Ergebnis:

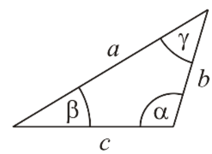
$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Anmerkungen:



- Der Sinussatz besitzt auch dann Gültigkeit, wenn der Lotfußpunkt außerhalb des Dreiecks liegt:

$$\sin\gamma = \sin(180° - \gamma) = \frac{h}{b}$$



- Aus Symmetrieüberlegungen folgt analog:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \quad \text{und} \quad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

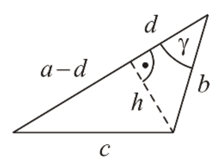
■

Aufgabe 43. In jedem Teildreieck gilt der Pythagoras:

$$c^2 = (a-d)^2 + h^2$$

$$b^2 = d^2 + h^2$$

Elimination von h (erste Gleichung minus zweite):



$$c^2 - b^2 = a^2 - 2ad$$

Elimination von d durch Kombination mit

$$\cos\gamma = \frac{d}{b}$$

liefert den Kosinussatz:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

■

Aufgabe 44. Anwendung der zweiten binomischen Formel auf den Kosinussatz (33):

$$\begin{aligned} |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\,|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos\gamma &= |\vec{a}-\vec{b}|^2 \\ &= (\vec{a}-\vec{b})^2 \\ &= \vec{a}\cdot\vec{a} - 2\,\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{b} \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\,\vec{a}\cdot\vec{b} \end{aligned}$$

Kürzen liefert das gesuchte Skalarprodukt (35):

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos\gamma$$

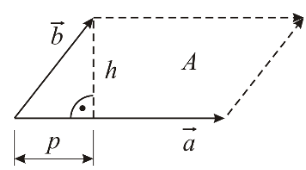
■

Aufgabe 45. Projektion mittels Skalarprodukt:

$$p = \frac{1}{a}\,\vec{a}\cdot\vec{b}$$

Höhe aus Pythagoras:

$$h = \sqrt{b^2 - p^2}$$



Fläche als Produkt aus Grundseite und Höhe:

$$A = ah = a\sqrt{b^2-p^2} = \sqrt{(ab)^2 - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}$$

■

Aufgabe 46. Referenzlösung aus Aufgabe 45:

$$\begin{aligned} A_{\text{Ref}} &= \sqrt{(ab)^2 - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2} \\ &= \sqrt{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)\cdot(b_1^2+b_2^2+b_3^2) - \left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)^2} \\ &= \sqrt{a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2 - 2\,(a_1a_2b_1b_2 + a_1a_3b_1b_3 + a_2a_3b_2b_3)} \end{aligned}$$

Berechnung der Fläche über das Kreuzprodukt:

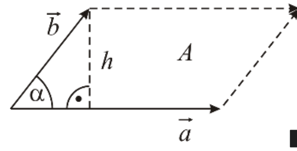
$$\begin{aligned} A &= |\vec{a}\times\vec{b}| \\ &= \sqrt{(a_2b_3-a_3b_2)^2 + (a_3b_1-a_1b_3)^2 + (a_1b_2-a_2b_1)^2} \\ &= \sqrt{a_2^2b_3^2 - 2a_2a_3b_2b_3 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_1^2 - 2a_1a_3b_1b_3 + a_1^2b_3^2 + a_1^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2} \\ &= A_{\text{Ref}} \end{aligned}$$

■

Aufgabe 47. Grundseite mal Höhe:

$$A = |\vec{a}| \cdot h = ab \sin \alpha$$

Meist wird mit dieser Formel nicht die Fläche A, sondern der Winkel α berechnet.



■

Aufgabe 48. Für zwei orthogonale Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ folgt aus dem Skalarprodukt (35):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

■

Aufgabe 49. Orthogonalität des Vektorprodukts:

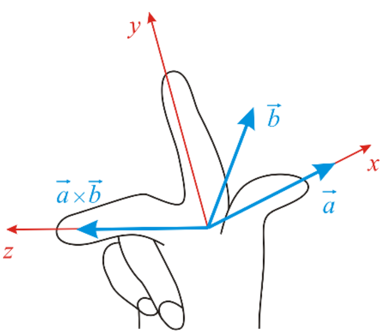
$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{a} = \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$= a_1\,(a_2 b_3 - a_3 b_2) + a_2\,(a_3 b_1 - a_1 b_3) + a_3\,(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$$

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{b} = b_1\,(a_2 b_3 - a_3 b_2) + b_2\,(a_3 b_1 - a_1 b_3) + b_3\,(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$$

■

Aufgabe 50. Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ bilden ein Rechtssystem:



Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachte man zwei in der xy-Ebene liegende Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a_1 > 0\,, \quad b_2 > 0$$

In Übereinstimmung mit der Rechten-Hand-Regel liefert das Vektorprodukt

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 b_2 \end{pmatrix}$$

einen Vektor, der in Richtung der z-Achse weist (gleicher Richtungssinn).

■

Aufgabe 51. Durch zyklische Vertauschung erhält man drei Varianten des Spatprodukts:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}\right] \\
&= a_1 \left(b_2 c_3 - b_3 c_2\right) + a_2 \left(b_3 c_1 - b_1 c_3\right) + a_3 \left(b_1 c_2 - b_2 c_1\right) \\
S_2 &= \vec{b} \cdot \left(\vec{c} \times \vec{a}\right) \\
&= b_1 \left(c_2 a_3 - c_3 a_2\right) + b_2 \left(c_3 a_1 - c_1 a_3\right) + b_3 \left(c_1 a_2 - c_2 a_1\right) \\
S_3 &= \vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \\
&= c_1 \left(a_2 b_3 - a_3 b_2\right) + c_2 \left(a_3 b_1 - a_1 b_3\right) + c_3 \left(a_1 b_2 - a_2 b_1\right)
\end{aligned}$$

Das Ergebnis ist identisch:

$$S_1 = S_2 = S_3 = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - \left(a_1 b_3 c_2 + a_2 b_1 c_3 + a_3 b_2 c_1\right)$$

■

Gegenbeispiel (Vorzeichenwechsel bei nicht-zyklischer Vertauschung):

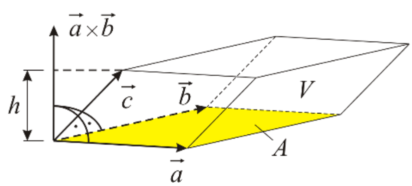
$$\vec{a} \cdot \left(\vec{c} \times \vec{b}\right) = -S_1$$

Aufgabe 52. Grundfläche aus Vektorprodukt (37):

$$A = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$$

Die Höhe des Spats erhält man durch Projektion von $\vec{c}$ auf das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ gemäß (35). Zur Vermeidung negativer Höhenangaben wird der Betrag vom Skalarprodukt genommen:

$$h = \frac{1}{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|} \left|\vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\right|$$



Das Produkt beider Größen ergibt das Volumen und ist gleich dem Betrag des Spatprodukts:

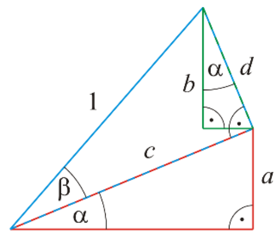
$$V = Ah = \left|\vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\right|$$

■

Funktionen und Kurven

Aufgabe 53. Für die drei rechtwinkligen Dreiecke gilt:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= a+b\\ &= c\sin\alpha + d\cos\alpha\\ &= \sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\sin\beta\end{aligned}$$



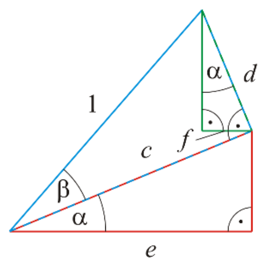
Berücksichtigung negativer Winkel:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\,\cos(-\beta) + \cos\alpha\,\sin(-\beta)\\ &= \sin\alpha\,\cos\beta - \cos\alpha\,\sin\beta\end{aligned}$$

■

Aufgabe 54. Additionstheorem für den Kosinus:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= e-f\\ &= c\cos\alpha - d\sin\alpha\\ &= \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta\end{aligned}$$



Erweiterung für negative Winkel:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\,\cos(-\beta) - \sin\alpha\,\sin(-\beta)\\ &= \cos\alpha\,\cos\beta + \sin\alpha\,\sin\beta\end{aligned}$$

■

Aufgabe 55. Aus den in den Aufgaben 53 und 54 hergeleiteten Additionstheoremen für Sinus und Kosinus folgt unmittelbar das Additionstheorem für den Tangens:

$$\begin{aligned}\tan(x\pm y) &= \frac{\sin(x\pm y)}{\cos(x\pm y)}\\ &= \frac{\sin x\,\cos y \pm \cos x\,\sin y}{\cos x\,\cos y \mp \sin x\,\sin y}\cdot\frac{\frac{1}{\cos x\,\cos y}}{\frac{1}{\cos x\,\cos y}}\\ &= \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x\,\tan y}\end{aligned}$$

Beachten Sie den Unterschied zwischen einem Plusminuszeichen ($\pm$) und einem Minuspluszeichen ($\mp$). Es existieren jeweils zwei Varianten der Additionstheoreme: Entweder gelten die oberen Zeichen oder die unteren.

■

Aufgabe 56. Der Kosinus Hyperbolicus ist eine gerade Funktion, weist also eine Spiegelsymmetrie bezüglich der Ordinate (y-Achse) auf:

$$\begin{aligned}\cosh(-x) &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right)\\ &= \cosh(x)\end{aligned}$$

Beim Sinus Hyperbolicus handelt es sich um eine ungerade Funktion, d. h. es gibt eine Punktsymmetrie zum Ursprung:

$$\begin{aligned}-\sinh(-x) &= -\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\right)\\ &= \sinh(x)\end{aligned}$$

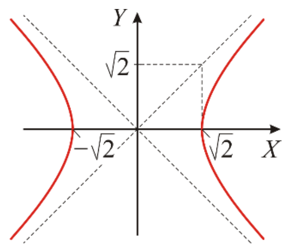
Durch Addition beider Hyperbelfunktionen erhält man die Exponentialfunktion:

$$\cosh(x) + \sinh(x) = \mathrm{e}^{x} \tag{272}$$

■

Aufgabe 57. Um zwischen verschiedenen Koordinatensystemen unterscheiden zu können, ersetzt man bei der allgemeinen Hyperbelgleichung (43) die Variablen x und y durch X und Y:

$$\left(\frac{X - X_0}{a}\right)^2 - \left(\frac{Y - Y_0}{b}\right)^2 = 1$$

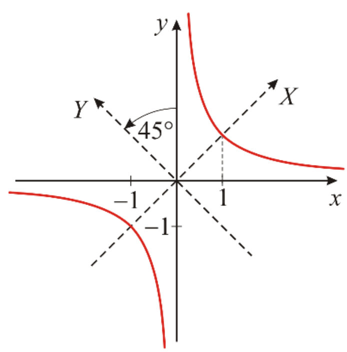


Ohne Verschiebung des Mittelpunkts $(X_0, Y_0) = (0, 0)$ und mit Halbachsen $a = b = \sqrt{2}$ vereinfacht sich die Hyperbelgleichung zu:

$$X^2 - Y^2 = 2$$

Koordinatentransformation bei Drehung um 45°

$$X = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \quad \text{und} \quad Y = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + y)$$



liefert die gesuchte Hyperbel:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(x + y)^2 - \frac{1}{2}(-x + y)^2 &= 2\\ \Leftrightarrow \qquad y &= \frac{1}{x}\end{aligned}$$

■

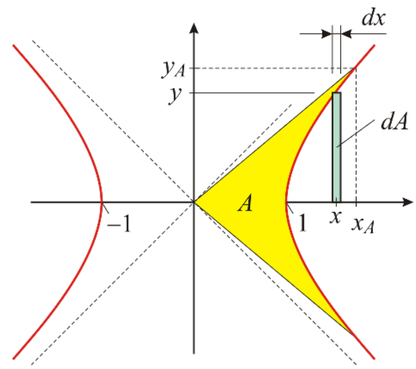
Aufgabe 58. Explizite Darstellung (Auflösen nach y) der Einheitshyperbel:

$$y = \pm\sqrt{x^2 - 1} \tag{273}$$

Integration in x-Richtung:

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} x_A \underbrace{\sqrt{x_A^2 - 1}}_{y_A} - 2 \int_1^{x_A} y \, dx$$

$$= \underbrace{x_A \, y_A}_{\text{Dreieck}} - \underbrace{2 \int_1^{x_A} \sqrt{x^2 - 1} \, dx}_{\text{Hyperbelsegement}}$$



Nebenrechnung zur Bestimmung der Stammfunktion für das Hyperbelsegment:

$$B = \int \sqrt{x^2 - 1} \, dx$$

$$= \int 1 \cdot \sqrt{x^2 - 1} \, dx \qquad \text{Erzeugung eines 2. Faktors}$$

$$= x \cdot \sqrt{x^2 - 1} - \int x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} \, dx \qquad \text{Partielle Integration}$$

$$= x\sqrt{x^2 - 1} - \int \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} \, dx - \underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \, dx}_{\operatorname{arcosh}(x) \text{ gemäß } (90)} \qquad \text{Erweiterung}$$

$$= \underbrace{x\sqrt{x^2 - 1} - \operatorname{arcosh} x}_{C} - \underbrace{\int \sqrt{x^2 - 1} \, dx}_{B} \qquad \text{Rückwurftechnik:}$$

$$= \frac{1}{2} \left[x\sqrt{x^2 - 1} - \operatorname{arcosh} x \right] \qquad B = C - B \;\Leftrightarrow\; B = \frac{C}{2}$$

Fortsetzung der Hauptrechnung:

$$A = x_A \, y_A - \left[x\sqrt{x^2 - 1} - \operatorname{arcosh} x \right]_1^{x_A}$$

$$= x_A \, y_A - x_A \, y_A + \operatorname{arcosh} x_A - \operatorname{arcosh} 1$$

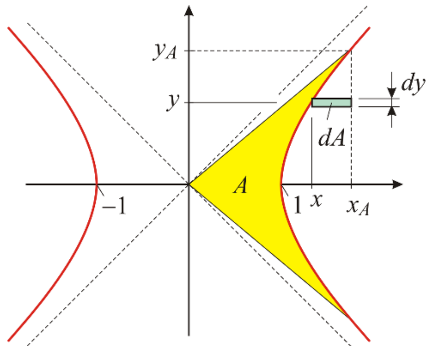
$$= \operatorname{arcosh} x_A$$

Anwendung der Umkehrfunktion liefert die erste der beiden gesuchten Koordinaten:

$$x_A = \cosh A \tag{274}$$

Analog die Integration in y-Richtung:

$$
\begin{aligned}
A &= x_A y_A - 2\int_0^{y_A} x_A - x\;dy \\
&= x_A y_A - 2x_A y_A + 2\underbrace{\int_0^{y_A} \sqrt{y^2+1}\;dy}_{D} \\
&= -x_A y_A + 2y_A\sqrt{y_A^2+1} - 2\int_0^{y_A} \frac{y^2}{\sqrt{y^2+1}}\;dy \\
&= x_A y_A - 2\int_0^{y_A} \frac{y^2+1}{\sqrt{y^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}\;dy \\
&= x_A y_A - 2\underbrace{\int_0^{y_A} \sqrt{y^2+1}\;dy}_{D} + 2\underbrace{\operatorname{arsinh} y_A}_{\text{siehe (89)}} \\
&= \operatorname{arsinh} y_A
\end{aligned}
$$



Auflösen nach der zweiten gesuchten Koordinate:

$$y_A = \sinh A \tag{275}$$

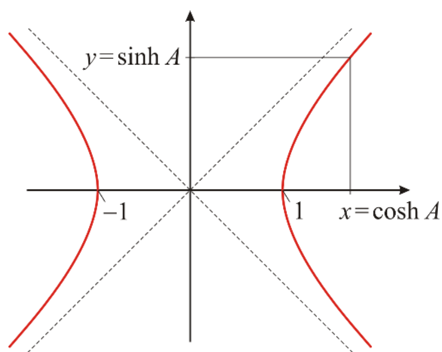
Einsetzen von (274) und (275) in die Kegelschnittgleichung der Einheitshyperbel (45) führt auf den Pythagoras für Hyperbelfunktionen (3):

$$x^2 - y^2 = \cosh^2 A - \sinh^2 A = 1$$

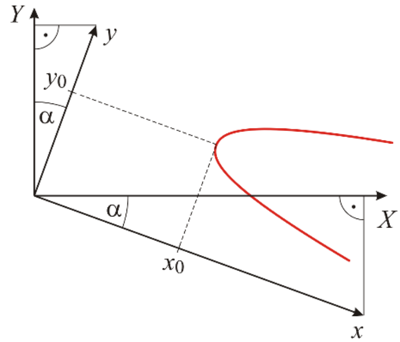
■

Anmerkungen:

- Der Koordinatenindex A kann bei der Ergebnisdarstellung weggelassen werden. Er wurde eingeführt, um bei der Integration zwischen Laufvariablen x, y und Grenzen x_A, y_A zu unterscheiden.
- Weil die Fläche A (Area) als Parameter verwendet wird, heißen die Funktionen arcosh und arsinh Areafunktionen.
- Bei den Arkusfunktionen arccos und arcsin ist der Bogen (Winkel in Bogenmaß) namensgebend.



Aufgabe 59. Allgemeine Kegelschnittgleichung:



$$AX^2 + BXY + CY^2 + DX + EY + F = 0$$

Koordinatendrehung:

$$\begin{aligned} X &= +x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ Y &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{aligned} \tag{276}$$

X, Y: Allgemeines Koordinatensystem
x, y: Hauptachsen, parallel zu Symmetrieachse(n)
x_0, y_0: Mittelpunkt oder Scheitelpunkt (Parabel)
α: Gesuchter Hauptachsenwinkel

Einsetzen und Ausmultiplizieren:

$$\begin{aligned} A\left[x^2\cos^2\alpha + 2xy\cos\alpha\sin\alpha + y^2\sin^2\alpha\right] \\ +B\left[-x^2\cos\alpha\sin\alpha + xy(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + y^2\sin\alpha\cos\alpha\right] \\ +C\left[x^2\sin^2\alpha - 2xy\sin\alpha\cos\alpha + y^2\cos^2\alpha\right] \\ +D\left[x\cos\alpha + y\sin\alpha\right] \\ +E\left[-x\sin\alpha + y\cos\alpha\right] \\ +F = 0 \end{aligned}$$

Umsortieren:

$$\begin{aligned} x^2\left[A\cos^2\alpha - B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha\right] \\ +xy\underbrace{\left[2A\cos\alpha\sin\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - 2C\sin\alpha\cos\alpha\right]}_{\stackrel{!}{=}0} \\ +y^2\left[A\sin^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha\right] \\ +x\left[D\cos\alpha - E\sin\alpha\right] \\ +y\left[D\sin\alpha + E\cos\alpha\right] \\ +F = 0 \end{aligned}$$

Elimination des gemischten Terms unter Berücksichtigung der Additionstheoreme (38) und (39) (mit $x = y = \alpha$)

$$(A - C)\underbrace{2\sin\alpha\cos\alpha}_{\sin(2\alpha)} + B(\underbrace{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}_{\cos(2\alpha)}) = 0$$

liefert den Hauptachsenwinkel:

$$\alpha = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{B}{C - A}\right) \tag{277}$$

■

Aufgabe 60. Quadratische Ergänzungen für den Fall der Ellipse ($A \cdot B > 0$):

$$Ax^2 + By^2 + Cx + \frac{1}{A}\left(\frac{C}{2}\right)^2 + Dy + \frac{1}{B}\left(\frac{D}{2}\right)^2 + E = \frac{1}{A}\left(\frac{C}{2}\right)^2 + \frac{1}{B}\left(\frac{D}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \qquad A\left[x + \frac{C}{2A}\right]^2 + B\left[y + \frac{D}{2B}\right]^2 = \frac{1}{A}\left(\frac{C}{2}\right)^2 + \frac{1}{B}\left(\frac{D}{2}\right)^2 - E$$

$$\Leftrightarrow \qquad 4A^2B\left[x - \left(-\frac{C}{2A}\right)\right]^2 + 4AB^2\left[y - \left(-\frac{D}{2B}\right)\right]^2 = BC^2 + AD^2 - 4ABE$$

Vergleich mit der Mittelpunktsform

$$\left[\frac{x - x_0}{a}\right]^2 + \left[\frac{y - y_0}{b}\right]^2 = 1$$

liefert den Mittelpunkt

$$x_0 = -\frac{C}{2A}$$
$$y_0 = -\frac{D}{2B}$$

und die Halbachsen:

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{BC^2 + AD^2 - 4ABE}{A^2B}}$$
$$b = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{BC^2 + AD^2 - 4ABE}{AB^2}} = \sqrt{\frac{A}{B}}\,a$$

■

Anmerkungen:

- Erlaubte Parameterkombinationen ergeben sich aus der Forderung, dass die beiden Radikanden nicht negativ sein dürfen:

$$ABC^2 + A^2D^2 \overset{!}{\geq} 4A^2BE$$

- Es existieren 4 unabhängige Parameter:
  - x_0, y_0, a und b
  - Von den 5 Parametern A bis E kann einer frei gewählt werden, z. B. $A = 1$.
- Einheitskreis als Sonderfall: $A = B = 1$, $C = D = 0$ und $E = -1$
- Parameter A und B können auch beide negativ sein: $A = B = -1$, $C = D = 0$ und $E = 1$ führt ebenfalls auf den Einheitskreis.

Aufgabe 61. Kegelschnittgleichung:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

Sonderfälle:

- Punkt (aus Ellipse) mit $C = D = E = 0$:

$$\begin{aligned} Ax^2 + By^2 = 0 \quad \text{für} \quad A \cdot B > 0 \\ \Rightarrow \quad x = y = 0 \end{aligned} \tag{278}$$

- Zwei sich schneidende Geraden (aus Hyperbel) mit $C = D = E = 0$:

$$\begin{aligned} Ax^2 + By^2 = 0 \quad \text{für} \quad A \cdot B < 0 \\ \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{-\frac{A}{B}}\,x \end{aligned} \tag{279}$$

- Gerade (aus Parabel) mit $A = B = 0$:

$$\begin{aligned} Cx + Dy + E = 0 \\ \Rightarrow \quad y = -\frac{C}{D}x - \frac{E}{D} \end{aligned} \tag{280}$$

■

Aufgabe 62. Beispiele:

- Zwei parallele Geraden:

$$\begin{aligned} y^2 + E = 0 \quad \text{mit} \quad E = -1 \\ \Rightarrow \quad y = \pm 1 \end{aligned} \tag{281}$$

- Keine Lösung:

$$y^2 = -1 \tag{282}$$

■

Aufgabe 63. Es gilt:

$$f(x) = \cos(x) = \cos(-x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{für} \quad x \in [0; \pi]$$

Der Definitionsbereich muss eingeschränkt werden, weil die Umkehrfunktion vom Kosinus nur für den streng monoton fallenden Kurvenabschnitt der ersten Halbperiode definiert ist. Berücksichtigt man außerdem, dass sich die Umkehrfunktion vom Sinus auf das Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ beschränkt, dann lässt sich die Umkehrfunktion $g(x) = f^{-1}(x)$ durch Vertauschung der Achsen bilden:

$$x = \cos(g) = \sin\left(-g + \frac{\pi}{2}\right)$$

Auflösung nach g:

$$g = \arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$$

■

Aufgabe 64. Der trigonometrische Pythagoras, kombiniert mit dem Tangens (236):

$$1 = \sin^2 z + \cos^2 z = \sqrt{\sin^2 z + \cos^2 z} = \sqrt{\sin^2 z + \frac{\sin^2 z}{\tan^2 z}} = \sin z \cdot \sqrt{\frac{\tan^2 z + 1}{\tan^2 z}}$$

Division durch die Wurzel und Anwendung des Arkussinus:

$$z = \arcsin \frac{\tan z}{\sqrt{\tan^2 z + 1}}$$

Substitution $x = \tan z$ bzw. $z = \arctan x$:

$$\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

■

Aufgabe 65. Mit dem aus Aufgabe 63 bekannten Zusammenhang

$$\cos x = \cos(-x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-x + \frac{\pi}{2}\right)$$

und der sich daraus ergebenden Beziehung

$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-x + \frac{\pi}{2}\right)$$

folgt für den Kotangens:

$$y = \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin\left(-x + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(-x + \frac{\pi}{2}\right)} = \tan\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{für} \quad x \in (0; \pi)$$

Bildung der Umkehrfunktion durch Vertauschung der Achsen:

$$x = \cot g = \tan\left(-g + \frac{\pi}{2}\right)$$

Auflösen nach g:

$$g = \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$$

Anmerkungen:

- Die Umkehrfunktion erfordert eine strenge Monotonie, weshalb der Kotangens auf das Intervall $x \in (0; \pi)$ eingeschränkt werden muss.
- Die zugehörige Tangensfunktion $\tan(z) = \tan\left(-x + \frac{\pi}{2}\right)$ besitzt den Definitionsbereich $z \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
- Obwohl der Tangens eine Periode von π besitzt, darf die Umkehrfunktion nur von $\tan\left(-x + \frac{\pi}{2}\right)$ und nicht von z. B. $\tan\left(-x - \frac{\pi}{2}\right)$ oder $\tan\left(-x + \frac{7\pi}{2}\right)$ gebildet werden.

■

Aufgabe 66. Definition des Sinus Hyperbolicus:

$$x = \sinh y = \frac{\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y}}{2} = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right) \quad \text{mit} \quad z = \mathrm{e}^y > 0$$

Nach Multiplikation mit z erhält man die quadratische Gleichung:

$$z^2 - 2xz - 1 = 0$$

Wegen der Forderung $z > 0$ existiert nur eine zulässige Lösung:

$$z = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

Rücksubstitution $y = \ln z$:

$$y = \operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

■

Aufgabe 67. Kosinus Hyperbolicus:

$$x = \cosh y = \frac{\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y}}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \quad \text{mit} \quad z = \mathrm{e}^y > 0$$

Multiplikation mit z liefert die quadratische Gleichung:

$$z^2 - 2xz + 1 = 0$$

Für $x \geq 1$ erfüllen beide Lösungen die Bedingung $z > 0$:

$$z_1 = x + \sqrt{x^2 - 1} \in [1; \infty) \quad \text{und} \quad z_2 = x - \sqrt{x^2 - 1} \in (0; 1]$$

Allerdings ist die Umkehrfunktion nur für den streng monoton steigenden Bereich des Kosinus Hyperbolicus definiert. Die Forderung $y = \ln z \geq 0$ erfüllt nur die erste Lösung:

$$y = \operatorname{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

■

Aufgabe 68. Tangens Hyperbolicus mit (41) und (42):

$$x = \tanh y = \frac{\sinh y}{\cosh y} = \frac{\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y}}{\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y}} \in (-1; 1) \tag{283}$$

Auflösen nach y:

$$\begin{aligned} & x\left(\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y}\right) = \mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y} \\ \Leftrightarrow \quad & \mathrm{e}^y(x - 1) = \mathrm{e}^{-y}(-x - 1) \\ \Leftrightarrow \quad & \mathrm{e}^{2y} = \frac{1 + x}{1 - x} \\ \Leftrightarrow \quad & y = \operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) \end{aligned}$$

■

Aufgabe 69. Der Beweis erfolgt analog zu Aufgabe 68:

$$x = \coth y = \frac{\cosh y}{\sinh y} = \frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}} \in \mathbb{R} \setminus [-1; 1] \tag{284}$$

Die Umkehrfunktion des Kotangens Hyperbolicus, den Areakotangens Hyperbolicus, erhält man durch Umstellen nach y:

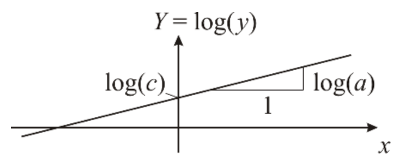
$$\begin{aligned} & x\left(e^y - e^{-y}\right) = e^y + e^{-y} \\ \Leftrightarrow \quad & e^y(x-1) = e^{-y}(x+1) \\ \Leftrightarrow \quad & e^{2y} = \frac{x+1}{x-1} \\ \Leftrightarrow \quad & y = \operatorname{arcoth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \end{aligned}$$

■

Aufgabe 70. Logarithmierung der allgemeinen Exponentialfunktion:

$$Y = \log(y) = \log(ca^x) = \log(c) + \log(a) \cdot x$$

Als Ergebnis bekommt man eine Gerade mit Ordinatenabschnitt $\log(c)$ und Steigung $\log(a)$.



■

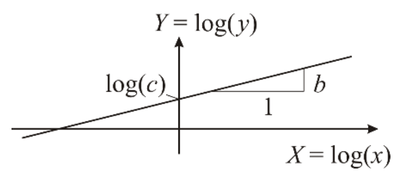
Aufgabe 71. Das Logarithmieren einer Potenzfunktion

$$Y = \log(y) = \log(cx^b) = \log(c) + b \cdot X$$

mit

$$X = \log(x)$$

liefert eine Gerade mit dem Ordinatenabschnitt $\log(c)$ und der Steigung b.



■

Aufgabe 72. Es ist im Allgemeinen nicht möglich, zusammengesetzte Funktionen durch Logarithmieren in eine Gerade zu überführen, wie die Gegenbeispiele demonstrieren:

x	$\log(2^x)$	$\log(3^x)$	$\log(2^x + 3^x)$
0	0	0	0,301 ...
1	0,301 ...	0,477 ...	0,698 ...
2	0,602 ...	0,954 ...	1,113 ...
	Gerade	Gerade	keine Gerade

x	$\log(x)$	$\log(x^2)$	$\log(x^3)$	$\log(x^2 + x^3)$
1	0	0	0	0,301 ...
10	1	2	3	3,041 ...
100	2	4	6	6,004 ...
	X	Gerade	Gerade	keine Gerade

■

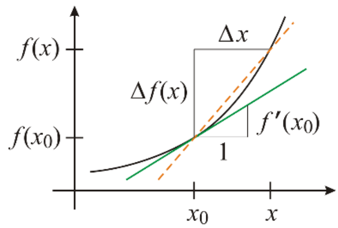
Differentialrechnung

Aufgabe 73. Mittels Grenzwertbetrachtung lässt sich der Differenzenquotient $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ in den Differentialquotienten $\frac{df(x)}{dx}$ überführen:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Weil sich die Ableitung auch an anderen Stellen x_0 bilden lässt, kann der Index entfallen:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad (285)$$



Grafische Interpretation: Tangente statt Sekante

■

Aufgabe 74. Mithilfe des in Gleichung (285) definierten Differentialquotientens erhält man die Ableitung der Funktion $f(x) = c \cdot g(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{c \cdot g(x+h) - c \cdot g(x)}{h} \\ &= c \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= c \cdot g'(x) \end{aligned}$$

Dass der Faktor c aus dem Grenzwert herausgezogen werden darf, wird in Aufgabe 172 gezeigt.

■

Aufgabe 75. Eine zusammengesetzte Funktion $f(x) = u(x) + v(x)$ lässt sich gliedweise differenzieren:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{[u(x+h) + v(x+h)] - [u(x) + v(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \\ &= u'(x) + v'(x) \end{aligned}$$

Gemäß dem Grenzwertsatz für die Addition (135) ist eine Aufteilung in zwei oder auch mehrere Terme möglich, sofern die Grenzwerte existieren.

■

Aufgabe 76. Eine in Produktform vorliegende Funktion $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ kann wie folgt abgeleitet werden:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)\cdot v(x+h) - u(x)\cdot v(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)\cdot v(x+h) - u(x)\cdot v(x+h) + u(x)\cdot v(x+h) - u(x)\cdot v(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \cdot v(x+h) + \lim_{h\to 0} u(x) \cdot \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \\
&= u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)
\end{aligned}$$

■

Aufgabe 77. Wenn man die Funktion $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ nach $u(x) = f(x) \cdot v(x)$ umstellt, kann die bereits bewiesene Produktregel (59) angewandt werden:

$$u'(x) = f'(x)\cdot v(x) + f(x)\cdot v'(x)$$

Auflösen nach der gesuchten Ableitung:

$$f'(x) = \frac{u'(x) - f(x)\cdot v'(x)}{v(x)} = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

■

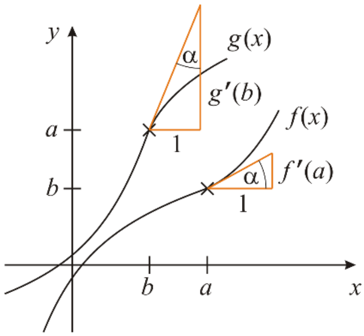
Aufgabe 78. Die Funktion $f(x) = g(u(x))$ lässt sich mittels Kettenregel differenzieren:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(u(x+h)) - g(u(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(u(x+h)) - g(u(x))}{u(x+h) - u(x)} \cdot \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(u(x+h)) - g(u(x))}{u(x+h) - u(x)} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \\
&= \frac{dg}{du} \cdot \frac{du}{dx}
\end{aligned}$$

Bei der Aufteilung in zwei Faktoren kommt der Grenzwertsatz für die Multiplikation (136) zum Einsatz.

■

Aufgabe 79. Da man eine Umkehrfunktion durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden $y = x$ erhält, kehrt sich die Steigung um, wie man anhand der Steigungsdreiecke erkennt:



$$\tan\alpha = \frac{f'(a)}{1} = \frac{1}{g'(b)}$$

Die Ableitung der Ausgangsfunktion $f(x)$ an der Stelle a lässt sich also indirekt über die Ableitung der Umkehrfunktion $g(x) = f^{-1}(x)$ an der Stelle

$$b = f(a)$$

bestimmen:

$$f'(a) = \frac{1}{g'(f(a))}$$

■

Aufgabe 80. Die Schreibweise $f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))}$ ist falsch und darf nicht verwendet werden, weil x im Gegensatz zu a keine Konstante, sondern eine Variable ist.

Als Beispiel betrachte man die fünfte Wurzel $f(x) = \sqrt[5]{x}$, die mithilfe der Umkehrfunktion $g(x) = x^5$ abgeleitet werden soll:

- Richtige Schreibweise:

$$f'(a) = \frac{1}{g'(b)} = \frac{1}{g'(f(a))}$$

  Mit der Ableitung der Umkehrfunktion $g'(x) = 5x^4$ folgt:

$$f'(a) = \frac{1}{5b^4} = \frac{1}{5\left(\sqrt[5]{a}\right)^4} = \frac{1}{5}a^{-\frac{4}{5}}$$

  Abschließend darf a durch x ersetzt werden:

$$f'(x) = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} \quad \checkmark$$

- Falsche Schreibweise:

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))}$$

  Einsetzen:

$$f'(x) = \frac{1}{\left[\left(\sqrt[5]{x}\right)^5\right]'} = \frac{1}{x'} = \frac{1}{1} = 1 \neq \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}$$

  Da sich Funktion und Umkehrfunktion aufheben, erhält man ein falsches Ergebnis.

■

Aufgabe 81. Die logarithmische Differentiation einer Funktion $y = f(x) > 0$ erfolgt in drei Schritten:

1. Logarithmieren:
$$\ln y = \ln f(x)$$

2. Ableitung mittels Kettenregel:
$$[\ln y]' = \frac{1}{y} \cdot y' = [\ln f(x)]'$$

3. Auflösen nach der gesuchten Ableitung:
$$y' = f(x) \cdot [\ln f(x)]'$$

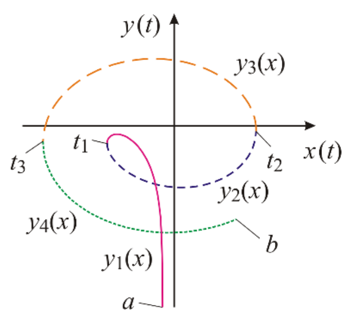
■

Bei Funktionen vom Typ $f(x) = g(x)^{h(x)}$ vereinfacht sich der Term $[\ln f(x)]'$ dank der Logarithmenregel (12) zu einem Produkt zweier Funktionen, so dass sich die Produktregel (59) anwenden lässt:

$$[\ln f(x)]' = [h(x) \cdot \ln g(x)]' = h'(x) \cdot \ln g(x) + h(x) \cdot \frac{g'(x)}{g(x)}$$

Aufgabe 82. Man betrachte den allgemeinen Fall, dass sich die Funktion $x(t)$ nur abschnittsweise umkehren lässt. Die Umkehrfunktionen $u_i(x)$ können statt des Parameters t in die Funktion $y(t)$ eingesetzt werden:

$$y = \begin{cases} y_1(x) & \text{für } t \in [a; t_1] \\ y_2(x) & \text{für } t \in (t_1; t_2] \\ y_3(x) & \text{für } t \in (t_2; t_3] \\ \vdots & \vdots \\ y_i(x) & \text{für } t \in (t_{i-1}; t_i] \\ \vdots & \vdots \\ y_{n+1}(x) & \text{für } t \in (t_n; b] \end{cases}$$



Es gibt zwar keine explizite Darstellung $y = y(x)$ der Gesamtfunktion, dank Fallunterscheidung lassen sich aber zumindest Teilfunktionen ermitteln, die über die Umkehrfunktionen $u_i(x)$ von x abhängen:

$$y_i = y_i(x) = y(u_i(x))$$

Ableitung der Teilfunktionen:

$$\begin{aligned}
y_i' &= \frac{dy_i}{dx} && \text{Quotient aus Differentialen} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{y(u_i(x+h)) - y(u_i(x))}{h} && \text{Limes des Differenzenquotienten} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{y(u_i(x)) - y(u_i(x_0))}{x - x_0} && \text{Äquivalente Schreibweise} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{\dfrac{y(u_i(x)) - y(u_i(x_0))}{t(x) - t(x_0)}}{\dfrac{x - x_0}{t(x) - t(x_0)}} && \text{Erweiterung (nicht erlaubt bei Differentialen)} \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{y(u_i(x)) - y(u_i(x_0))}{t(x) - t(x_0)}}{\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{x - x_0}{t(x) - t(x_0)}} && \text{Grenzwertsatz für die Division (138)} \\
&= \frac{\dfrac{dy_i}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} && \text{für } t = u_i \in (t_{i-1}; t_i] \\
&= \frac{\dot{y}_i}{\dot{x}}
\end{aligned}$$

Die Ableitungen der Teilfunktionen können auf zwei Arten dargestellt werden:

1. Als Funktion von x:

$$y_i' = y_i'(x)$$

   Die Variable x bezeichnet häufig eine Raumkoordinate.

2. Als Funktion von t:

$$y_i' = y_i'(t)$$

   In der Regel handelt es sich um eine Zeitangabe.

Bei der zweiten Variante sind die einzelnen Ableitungen über den Parameter t eindeutig zuordenbar und können zu einer Gesamtableitung zusammengefügt werden:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}(t) \quad \text{für} \quad t \in [a; b]$$

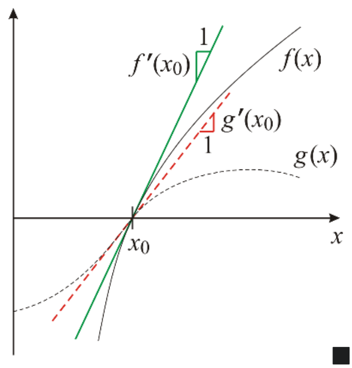
Das heißt, bei einer Parameterdarstellung ist eine Fallunterscheidung obsolet. Die Intervallgrenzen a und b können frei gewählt werden, z. B. $a = -\infty$ und $b = +\infty$.

■

Aufgabe 83. In der Nähe der Nullstelle x_0 können die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ durch ihre jeweiligen Tangenten ersetzt werden, welche man durch Linearisierung erhält:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = g'(x_0) \cdot (x - x_0)$$



Bildung des Quotienten und Kürzen:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{„}\frac{0}{0}\text{“}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) \cdot (x - x_0)}{g'(x) \cdot (x - x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Heute weiß man, dass der Marquis de L'Hospital die nach ihm benannte Regel nicht entdeckt, sondern vom Schweizer Mathematiker Johann Bernoulli übernommen hat. ■

Aufgabe 84. Quotient der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ an der Stelle x_0:

$Q = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	Unbestimmter Ausdruck vom Typ $\dfrac{\infty}{\infty}$
$= \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$	Doppelter Kehrwert
$\overset{\text{„}\frac{0}{0}\text{“}}{=} \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\left[\frac{1}{g(x)}\right]'}{\left[\frac{1}{f(x)}\right]'}$	Regel von L'Hospital (66) für den Typ $\dfrac{0}{0}$
$= \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{-\frac{g'(x)}{g^2(x)}}{-\frac{f'(x)}{f^2(x)}}$	Anwendung der Quotienten- oder Potenzregel
$= \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g'(x) \cdot f^2(x)}{f'(x) \cdot g^2(x)}$	Auflösung des Doppelbruchs
$= \underbrace{\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g'(x)}{f'(x)}}_{A} \cdot \underbrace{\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f^2(x)}{g^2(x)}}_{Q^2}$	Grenzwertsatz für die Multiplikation (136)

Der zu berechnende Grenzwert Q befindet sich ebenfalls auf der rechten Seite und muss daher auf die linke Seite „zurückgeworfen“ werden. Aus $Q = A \cdot Q^2$ folgt $Q = \frac{1}{A}$ und somit:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{“}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

■

Aufgabe 85. Ableitung einer konstanten Funktion $f(x) = c$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

■

Anmerkung zur Grenzwertbildung: Der letzte Schritt $\lim\limits_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$ mag sich einem intuitiv erschließen, ist aber nicht ganz trivial, denn es handelt sich um einen unbestimmten Ausdruck vom Typ $\frac{0}{0}$. Durch Ableitung von Zähler und Nenner nach h gemäß der Regel von L'Hospital (66) erhält man erwartungsgemäß:

$$\lim_{h\to 0} \frac{0}{h} \overset{„\frac{0}{0}“}{=} \lim_{h\to 0} \frac{0}{1} = 0$$

Aufgabe 86. Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion $f(x) = \mathrm{e}^x$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x+h} - \mathrm{e}^x}{h} = \underbrace{\mathrm{e}^x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h}}_{k}$$

Aus der Forderung, dass die Exponentialfunktion gleich ihrer Ableitung ist, folgt:

$$\begin{aligned}
1 &= \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} && \text{Bedingung } k = 1,\ \text{o.B.d.A. sei } h > 0. \\
&= \lim_{u\to 0} \frac{u}{\ln(u+1)} && \text{Erste Substitution: } u = \mathrm{e}^h - 1 \quad \Leftrightarrow \quad h = \ln(u+1) \\
&= \lim_{u\to 0} \frac{1}{\frac{1}{u} \cdot \ln(u+1)} && \text{Doppelbruch} \\
&= \lim_{u\to 0} \frac{1}{\ln(u+1)^{\frac{1}{u}}} && \text{Logarithmenregel (12)} \\
&= \frac{1}{\ln\left(\lim\limits_{u\to 0}(u+1)^{\frac{1}{u}}\right)} && \text{Grenzwertsatz (141)} \\
&= \frac{1}{\ln\left(\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)} && \text{Zweite Substitution: } n = \frac{1}{u} \text{ für } u > 0
\end{aligned}$$

Wegen $\ln(\mathrm{e}) = 1$ muss es sich im Nenner beim Argument vom natürlichen Logarithmus um die gesuchte Eulersche Zahl handeln:

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Beachten Sie, dass der Beweis umkehrbar ist: Aus der Kenntnis der Eulerschen Zahl folgt, dass die natürliche Exponentialfunktion gleich ihrer Ableitung ist.

■

Aufgabe 87. Ableitung einer Potenzfunktion $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} && \text{Differentialquotient} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\, h^k\right] - x^n}{h} && \text{Binomischer Lehrsatz (29)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^n + n \cdot x^{n-1}\, h + \left[\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\, h^k\right] - x^n}{h} && \text{Abspaltung zweier Terme} \\
&= n \cdot x^{n-1} + \lim_{h\to 0} \left[\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\, h^{k-1}\right] && \text{Kürzen} \\
&= n \cdot x^{n-1} && \text{Grenzwertbildung}
\end{aligned}$$

■

Aufgabe 88. Beweis der Potenzregel durch vollständige Induktion:

1. Für den Induktionsanfang $n = 1$ ist die Potenzregel $A(1)$ offensichtlich richtig: Die Funktion $f(x) = x^1 = x$ ist die Winkelhalbierende mit Steigung $f'(x) = 1 \cdot x^0 = 1$.
2. Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
& & [x^n]' &= n \cdot x^{n-1} && \text{Induktionsannahme } A(n) \\
\Rightarrow & & [x^n]' \cdot x &= n \cdot x^n && \text{Multiplikation mit } x \\
\Leftrightarrow & & [x^n]' \cdot x + x^n &= (n+1) \cdot x^n && \text{Addition von } x^n \\
\Leftrightarrow & & [x^n \cdot x]' &= (n+1) \cdot x^n && \text{Produktregel mit } x' = 1 \text{ gemäß } A(1) \\
\Leftrightarrow & & [x^{n+1}]' &= (n+1) \cdot x^n && \text{Induktionsbehauptung } A(n+1)
\end{aligned}$$

■

Aufgabe 89. Beweis der Potenzregel für Exponenten $n \in \mathbb{Z}$ durch Fallunterscheidung:

1. Für positive Exponenten $n \in \mathbb{N}^*$ siehe Aufgabe 87 oder 88.
2. Für $n = 0$ gilt die in Aufgabe 85 bewiesene Konstantenregel: $[x^0]' = [1]' = 0$.
3. Für negative Exponenten $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} = \{\dots, -3, -2, -1\}$ kann der Kehrwert mittels Ketten- und Potenzregel (für positive Exponenten $-n > 0$) abgeleitet werden:

$$[x^n]' = \left[\frac{1}{x^{-n}}\right]' = -\frac{1}{(x^{-n})^2} \cdot [x^{-n}]' = -\frac{1}{x^{-2n}} \cdot (-n) \cdot x^{-n-1} = n \cdot x^{n-1}$$

Eine alternative Beweismöglichkeit ist die Induktion in negative Richtung.

■

Aufgabe 90. Der in Aufgabe 87 vorgestellte direkte Beweis gilt ganz analog auch für reelle Exponenten $n \in \mathbb{R}$, so dass hier auf eine Erläuterung der einzelnen Umformschritte verzichtet werden kann:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\left[\sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k\right] - x^n}{h} = n \cdot x^{n-1} + \underbrace{\lim_{h \to 0} \left[\sum_{k=2}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1}\right]}_{0}$$

Dass statt des binomischen Lehrsatzes (29) die binomische Reihe (178) mit unendlich vielen Termen zum Einsatz kommt, ändert nichts am grundsätzlichen Rechenweg, weil alle Terme mit $k \geq 2$ gegen null streben.

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass Potenzfunktionen mit reellen Exponenten in der Regel nur für $x \geq 0$ definiert sind. Einzige Ausnahme sind Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten vom Typ

$$f(x) = x^{\frac{p}{2k-1}} = \left(\sqrt[2k-1]{x}\right)^p \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{N}^* \quad \text{und} \quad p \in \mathbb{Z}\,,$$

deren Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ nicht eingeschränkt werden muss.

■

Aufgabe 91. Die natürliche Logarithmusfunktion $f(x) = \ln(x)$ besitzt die natürliche Exponentialfunktion $g(x) = f^{-1}(x) = \mathrm{e}^x$ als Umkehrfunktion. Mit $g'(x) = \mathrm{e}^x$ (siehe Aufgabe 86 für die Herleitung) erhält man die Ableitung an der Stelle a:

$$f'(a) = \frac{1}{g'(f(a))} = \frac{1}{\mathrm{e}^{f(a)}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln a}} = \frac{1}{a}$$

Somit gilt auch allgemein:

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

In Aufgabe 80 wird erläutert, warum die Herleitung mittels Umkehrfunktion den Einsatz einer Konstanten a erfordert.

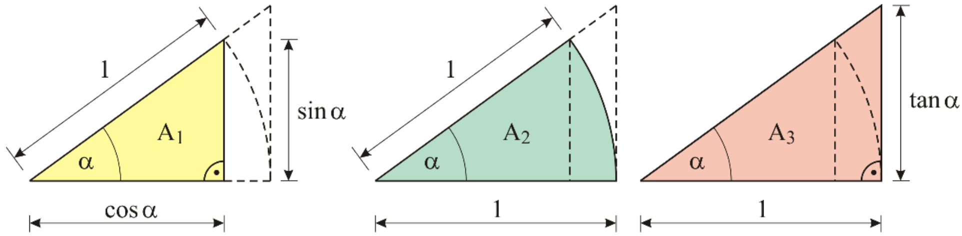
■

Aufgabe 92. Herleitung der Potenzregel mittels logarithmischer Ableitung:

$$\begin{aligned}
& & f(x) &= x^n && \text{für } x > 0 \text{ und } n \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow & \ln(f(x)) &= \ln(x^n) && \text{Anwendung des natürlichen Logarithmus} \\
& & &= n \cdot \ln(x) && \text{Logarithmenregel (12)} \\
&\Rightarrow & \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) &= n \cdot \frac{1}{x} && \text{Ableitung mittels Kettenregel} \\
&\Leftrightarrow & f'(x) &= n \cdot x^{n-1} && \text{Umstellen nach der gesuchten Ableitung}
\end{aligned}$$

■

Aufgabe 93. Der Flächeninhalt des Kreisausschnitts liegt zwischen denen der Dreiecke:



Für einen Radius von 1 erhält man somit die folgenden Ungleichungen:

$$\underbrace{\frac{1}{2}\sin\alpha\cdot\cos\alpha}_{=A_1} \leq \underbrace{\frac{1}{2}\alpha}_{=A_2} \leq \underbrace{\frac{1}{2}\tan\alpha}_{=A_3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\alpha \leq \frac{\alpha}{\sin\alpha} \leq \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \text{Multiplikation mit } \frac{2}{\sin\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\cos\alpha} \geq \frac{\sin\alpha}{\alpha} \geq \cos\alpha \qquad \text{Kehrwert}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\cos\alpha}}_{=1} \geq \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} \geq \underbrace{\lim_{\alpha\to 0}\cos\alpha}_{=1} \qquad \text{Grenzwertbetrachtung}$$

Damit beide Ungleichungen erfüllt sind, muss für den gesuchten Grenzwert gelten:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$$

■

Aufgabe 94. Aus dem Kosinus-Additionstheorem $\cos(x+y) = \cos x\,\cos y - \sin x\,\sin y$ mit $x = y = \frac{\alpha}{2}$ und dem trigonometrischen Pythagoras (2) folgt zunächst die Hilfsgleichung:

$$\cos\alpha = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Einsetzen in den zu berechnenden Grenzwert und Anwendung des Grenzwertsatzes (136):

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha\to 0}\frac{\cos\alpha - 1}{\alpha} &= \lim_{\alpha\to 0}\frac{1 - 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1}{\alpha} \\
&= \lim_{\alpha\to 0}\frac{-\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\frac{\alpha}{2}} \\
&= -\underbrace{\lim_{\alpha\to 0}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}_{=0} \cdot \underbrace{\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\frac{\alpha}{2}}}_{=1 \text{ gemäß } (72)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

■

Aufgabe 95. Ableitung der Sinusfunktion $f(x) = \sin x$ mittels Differentialquotient:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x\,\cos h + \cos x\,\sin h - \sin x}{h} && \text{Sinus-Additionstheorem (38)} \\
&= \sin x \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h}}_{= 0 \text{ gemäß (73)}} + \cos x \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}}_{= 1 \text{ gemäß (72)}} && \text{Grenzwertsatz für die Addition} \\
&= \cos x
\end{aligned}$$

■

Aufgabe 96. Multiplikation der Additionstheoreme (39) und (38):

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) \cdot \sin(a-b) &= [\cos a\,\cos b - \sin a\,\sin b] \cdot [\sin a\,\cos b - \cos a\,\sin b] \\
&= \sin a\,\cos a\left[\sin^2 b + \cos^2 b\right] - \sin b\,\cos b\left[\sin^2 a + \cos^2 a\right] \\
&= \frac{1}{2}\sin(2a) - \frac{1}{2}\sin(2b)
\end{aligned}$$

Bei der Vereinfachung kommen der trigonometrische Pythagoras $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ und die aus dem Sinus-Additionstheorem (38) herleitbare Gleichung $\sin(2a) = 2\sin a\,\cos a$ zum Einsatz. Durch Substitution $x = 2a$ und $y = 2b$ erhält man die Hilfsgleichung (75):

$$\sin x - \sin y = 2\,\cos\frac{x+y}{2} \cdot \sin\frac{x-y}{2}$$

Einsetzen in den Differenzenquotienten und Anwendung des Grenzwertsatzes für die Multiplikation:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2\,\cos\frac{2x+h}{2} \cdot \sin\frac{h}{2}}{h} \\
&= \underbrace{\lim_{h\to 0} \cos\frac{2x+h}{2}}_{= \cos x} \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}_{= 1 \text{ gemäß (72)}} \\
&= \cos x
\end{aligned}$$

Der Unterschied zu der in Aufgabe 95 gezeigten Herleitung besteht in der Vermeidung des Grenzwertes (73). Ob dies ein Vorteil ist, möge jeder für sich selbst entscheiden.

■

Aufgabe 97. Aus dem trigonometrischen Pythagoras (2) folgt:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \cos x \\
&= \begin{cases} +\sqrt{1-\sin^2 x} & \text{für } x \in \mathbb{D}_1 = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right] \\ -\sqrt{1-\sin^2 x} & \text{für } x \in \mathbb{D}_2 = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right] \end{cases}
\end{aligned}
$$

Ableitung nach der Kettenregel:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \begin{cases} -\dfrac{\sin x\, \cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} & \text{für } x \in \mathbb{D}_1 \\[2ex] +\dfrac{\sin x\, \cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} & \text{für } x \in \mathbb{D}_2 \end{cases} \\
&= -\frac{\sin x\, \cos x}{\cos x} \\
&= -\sin x
\end{aligned}
$$

Äußere und mittlere Ableitung erfolgen gemäß Potenzregel (70). Die innere Ableitung macht Gebrauch von der bereits bewiesenen Ableitungsregel für den Sinus (74).

■

Aufgabe 98. Der Kosinus lässt sich besonders einfach mittels Sinus-Ableitungsregel (74) differenzieren, wenn man die Phasenverschiebung von $\frac{\pi}{2}$ bzw. $-\frac{\pi}{2}$ ausnutzt:

$$
[\cos x]' = \left[\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right]' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x + \pi) = -\sin x
$$

■

Aufgabe 99. Die Kosinus-Ableitungsregel kann analog zu der in Aufgabe 95 behandelten Sinus-Ableitungsregel mithilfe des Differentialquotienten hergeleitet werden:

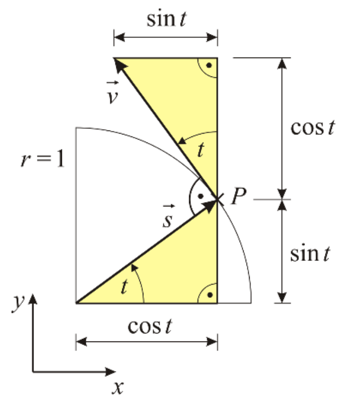
$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x\, \cos h - \sin x\, \sin h - \cos x}{h} && \text{Kosinus-Additionstheorem (39)} \\
&= \cos x \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h}}_{= 0 \text{ gemäß (73)}} - \sin x \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}}_{= 1 \text{ gemäß (72)}} && \text{Grenzwertsätze (135) und (137)} \\
&= -\sin x
\end{aligned}
$$

■

Aufgabe 100. Bei einer Winkelgeschwindigkeit von $\omega = \frac{d\alpha}{dt} = 1$ kann der in Bogenmaß anzugebende Winkel α durch die Zeit t ersetzt werden. Bei einem Radius von $r = |\vec{s}| = 1$ ergibt sich der Betrag der Geschwindigkeit ebenfalls zu $|\vec{v}| = \omega \cdot r = 1$.

Der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$ ist senkrecht zum Ortsvektor

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$



angeordnet, so dass sich seine Komponenten auf geometrische Weise bestimmen lassen:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

Da die Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$$

die Zeitableitung des Ortes ist, folgt aus einem Vergleich der Komponenten:

$$\frac{d(\cos t)}{dt} = -\sin t \qquad \text{und} \qquad \frac{d(\sin t)}{dt} = \cos t$$

■

Aufgabe 101. Der Sinus Hyperbolicus

$$f(x) = \sinh x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\right)$$

kann mithilfe der in Aufgabe 86 bewiesenen Ableitungsregel für die Exponentialfunktion differenziert werden:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right) = \cosh x$$

■

Aufgabe 102. Die Ableitung des Kosinus Hyperbolicus

$$f(x) = \cosh x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right)$$

liefert den Sinus Hyperbolicus:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\right) = \sinh x$$

■

Aufgabe 103. Mit der in Aufgabe 81 eingeführten logarithmischen Differentiationsregel lässt sich die allgemeine Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ ableiten:

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x) \cdot [\ln f(x)]' \\ &= a^x \cdot [x \cdot \ln a]' && \text{Logarithmengesetz (12)} \\ &= \ln a \cdot a^x && \text{Faktorregel (57) und Potenzregel } x' = 1 \end{aligned}$$

■

Aufgabe 104. Ableitung der Funktion $f(x) = \log_a |x|$ durch Fallunterscheidung:

- Für $x > 0$ fallen die Betragsstriche weg, und es kann mittels Logarithmenregel (13) ein Basiswechsel vorgenommen werden:

  $$f(x) = \log_a x = \frac{\log_\mathrm{e} x}{\log_\mathrm{e} a} = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x$$

  Mit der Ableitungsregel für den natürlichen Logarithmus (71) folgt:

  $$f'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$$

- Für $x < 0$ kann substituiert werden:

  $$\begin{aligned} f(x) = \log_a(-x) &= \frac{1}{\ln a} \cdot \ln(-x) \\ &= \frac{1}{\ln a} \cdot \ln u \\ &= g(u(x)) \quad \text{mit} \quad u = -x > 0 \end{aligned}$$

  Kettenregel und Rücksubstitution:

  $$f'(x) = \underbrace{\frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{u}}_{\frac{dg}{du}} \cdot \underbrace{(-1)}_{\frac{du}{dx}} = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$$

■

Aufgabe 105. Ableitung des Tangens $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ mittels Quotientenregel und trigonometrischem Pythagoras (2):

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

■

Aufgabe 106. Der Kotangens lässt sich als Kehrwert vom Tangens ausdrücken

$$f(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = [\tan x]^{-1}$$

und mithilfe von Ketten- und Potenzregel differenzieren:

$$f'(x) = -[\tan x]^{-2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Selbstverständlich kann alternativ auch die Quotientenregel benutzt werden.

■

Aufgabe 107. Als Umkehrfunktion vom Arkussinus

$$f(x) = \arcsin x$$

ist die Sinusfunktion

$$g(x) = f^{-1}(x) = \sin x$$

auf das Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ beschränkt. Unter Verwendung des trigonometrischen Pythagoras lässt sich ihre Ableitung wie folgt schreiben:

$$g'(x) = \cos x = +\sqrt{1 - \sin^2 x}$$

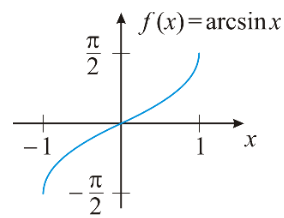
Die negative Wurzel kommt nicht in Betracht, weil der Kosinus nicht negativ werden kann: $\cos x \geq 0$ für $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

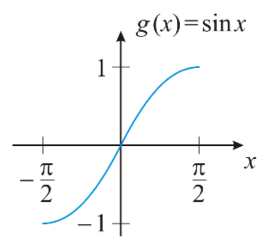
Durch Anwendung der Umkehrregel (62) erhält man die Ableitung an der Stelle a:

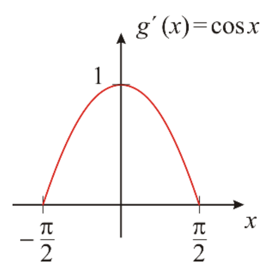
$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{1}{g'(f(a))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin a)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}} \end{aligned}$$

Und somit:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$







■

Aufgabe 108. Es kommen zwei Methoden in Frage:

1. Anwendung der Umkehrregel analog zu Aufgabe 107.
2. Ausnutzung des in Aufgabe 63 bewiesenen Zusammenhangs zwischen den Arkusfunktionen:
$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

Die zweite Möglichkeit ist deutlich einfacher, denn man kann die Ableitungsregel für den Arkussinus (83) benutzen:

$$[\arccos x]' = \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right]' = -\,[\arcsin x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

■

Aufgabe 109. Umkehrfunktion vom Arkustangens $f(x) = \arctan x$ ist der Tangens:

$$g(x) = f^{-1}(x) = \tan x$$

Seine Ableitung (81) kann mithilfe des trigonometrischen Pythagoras folgendermaßen geschrieben werden:

$$g'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1$$

Umkehrregel:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{1}{g'(f(a))} \\ &= \frac{1}{\tan^2(\arctan a) + 1} \\ &= \frac{1}{a^2 + 1} \end{aligned}$$

Austausch vom a durch x:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

■

Aufgabe 110. Der Arkuskotangens lässt sich mit Gleichung (52) als Funktion vom Arkustangens ausdrücken, dessen Ableitung (85) bekannt ist:

$$[\operatorname{arccot} x]' = \left[\frac{\pi}{2} - \arctan x\right]' = -[\arctan x]' = -\frac{1}{1 + x^2}$$

■

Aufgabe 111. Der Tangens Hyperbolicus

$$f(x) = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

kann mittels Quotientenregel und hyperbolischem Pythagoras (3) differenziert werden:

$$f'(x) = \frac{\cosh x \cdot \cosh x - \sinh x \cdot \sinh x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

■

Aufgabe 112. Als Kehrwert vom Tangens Hyperbolicus lässt sich der Kotangens Hyperbolicus

$$f(x) = \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = [\tanh x]^{-1}$$

entweder mithilfe der Quotientenregel oder mittels Ketten- und Potenzregel ableiten:

$$f'(x) = -[\tanh x]^{-2} \cdot \frac{1}{\cosh^2 x} = -\frac{1}{\sinh^2 x}$$

■

Aufgabe 113. Umkehrfunktion vom Areasinus Hyperbolicus $f(x) = \operatorname{arsinh} x$ ist der Sinus Hyperbolicus:

$$g(x) = \sinh x$$

Seine Ableitung lautet unter Verwendung des hyperbolischen Pythagoras (3):

$$g'(x) = \underbrace{\cosh x}_{>0} = +\sqrt{1 + \sinh^2 x}$$

Umkehrregel:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{1}{g'(f(a))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2(\operatorname{arsinh} a)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} \end{aligned}$$

Die Ableitungsregel gilt an jeder Stelle x:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

■

Aufgabe 114. Mit Gleichung (54) und der Kettenregel folgt:

$$
\begin{aligned}
[\operatorname{arcosh}(x)]' &= \left[\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right]' \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \cdot \left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right) \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}
\end{aligned}
$$

■

Aufgabe 115. Umkehrfunktion vom Areatangens Hyperbolicus $f(x) = \operatorname{artanh} x$:

$$g(x) = \tanh x$$

Anwendung des hyperbolischen Pythagoras (3) auf die Ableitung (87):

$$g'(x) = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$$

Umkehrregel:

$$
\begin{aligned}
f'(a) &= \frac{1}{g'(f(a))} \\
&= \frac{1}{1-\tanh^2(\operatorname{artanh} a)} \\
&= \frac{1}{1-a^2}
\end{aligned}
$$

Somit gilt:

$$f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

■

Aufgabe 116. Anwendung von Gleichung (56) und Differentiation mithilfe von Ketten- und Quotientenregel:

$$
\begin{aligned}
[\operatorname{arcoth}(x)]' &= \left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)\right]' \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1+x}{x-1}} \cdot \frac{(x-1)-(1+x)}{(x-1)^2} \\
&= \frac{1}{1-x^2}
\end{aligned}
$$

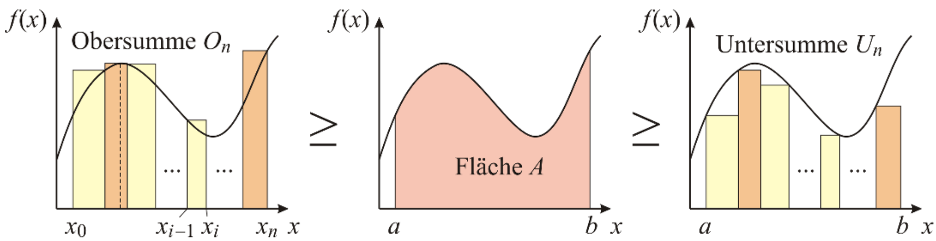
■

Integralrechnung

Aufgabe 117. Einschachtelung nach Darboux:

- Obersumme:
$$O_n = \sum_{i=1}^{n} \sup\{f(x)|x \in [x_{i-1}, x_i]\} \cdot (x_i - x_{i-1}) \tag{286}$$
Weil es sein kann, dass kein Maximum existiert, wird aus formalen Gründen für die Höhe eines Rechtecks das Supremum (kleinste obere Schranke) verwendet. Beispielsweise besitzt die nach unten geöffnete Parabel $f(x) = 4 - \frac{x^3}{x}$ wegen der (hebbaren) Definitionslücke kein Maximum, sondern nur ein Supremum: $\sup(f(x)) = 4$.

- Untersumme:
$$U_n = \sum_{i=1}^{n} \inf\{f(x)|x \in [x_{i-1}, x_i]\} \cdot (x_i - x_{i-1}) \tag{287}$$
Bei einem Infimum handelt es sich um die größte untere Schranke.



Im Grenzfall sind Ober- und Untersumme gleich dem gesuchten Flächeninhalt:

$$\lim_{n\to\infty} O_n = A = \lim_{n\to\infty} U_n \tag{288}$$

■

Anmerkungen:

- Die von Darboux entwickelte Einschachtelungsmethode ist äquivalent zur Riemannschen Zwischensumme.
- Die Integralrechnung wurde weder von Darboux (1842-1917) noch von Riemann (1826-1866) eingeführt, sondern geht zurück auf die Arbeiten von Isaac Newton (1643-1727) und Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).
- Die große Leistung von Riemann besteht in der mathematisch exakten Definition des Flächenbegriffs, weshalb man ihm zu Ehren den Grenzwert (288) als Riemann-Integral bezeichnet:
$$A = \int_a^b f(x)\, dx \tag{289}$$
Das von Leibniz eingeführte Integralzeichen $\int$ steht als lang gezogenes „S“ für eine (unendliche) Summe. Das Differential dx symbolisiert die Streifenbreite.

Aufgabe 118. Die Exponentialfunktion $f(x) = 2^x$ steigt monoton, so dass zur Berechnung der Obersumme die (konstante) Breite

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

mit dem Funktionswert an der jeweils rechten Intervallgrenze (größter Wert als Höhe) multipliziert werden muss:

$$O_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot f(x_i) = \Delta x \cdot \sum_{i=1}^{n} 2^{a+i\cdot\Delta x} = \Delta x \cdot 2^a \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(2^{\Delta x}\right)}_{q}{}^{i}$$

Summation unter Verwendung der endlichen geometrischen Reihe (128)

$$\sum_{i=1}^{n} q^i = \left[\sum_{i=0}^{n} q^i\right] - q^0 = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} - \frac{1-q}{1-q} = \frac{q-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-q^n}{q^{-1}-1} = \frac{1-2^{b-a}}{2^{-\Delta x}-1}$$

und Bildung des Grenzwerts mit L'Hospital (66):

$$\lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty} 2^a \frac{1-2^{b-a}}{2^{-\Delta x}-1}\Delta x = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\left(2^b-2^a\right)\Delta x}{1-2^{-\Delta x}} \overset{„\frac{0}{0}“}{=} \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2^b-2^a}{\ln(2)\cdot 2^{-\Delta x}} = \frac{2^b-2^a}{\ln 2}$$

Bei der Untersumme ist die Funktion an der jeweils linken Intervallgrenze auszuwerten:

$$U_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot f(x_{i-1}) = \Delta x \cdot \sum_{i=1}^{n} 2^{a+(i-1)\cdot\Delta x} = \Delta x \cdot 2^a \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(2^{\Delta x}\right)}_{q}{}^{i-1} = \frac{1}{q} \underbrace{\Delta x \cdot 2^a \sum_{i=1}^{n} \left(2^{\Delta x}\right)^i}_{O_n}$$

Beim Grenzübergang ($\Delta x \to 0$) verschwindet der Vorfaktor ($\frac{1}{q} = 2^{-\Delta x} \to 1$), womit der Beweis erbracht ist, dass beide Summen gegen die Lösung konvergieren:

$$A = \lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty} U_n = \frac{2^b-2^a}{\ln 2}$$

■

Aufgabe 119. Ermittlung der Obersumme mithilfe von Gleichung (127):

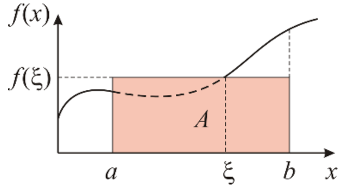
$$O_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot f(x_i) = \Delta x \cdot \sum_{i=1}^{n} [i \cdot \Delta x]^2 = (\Delta x)^3 \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} (\Delta x)^3$$

Einsetzen der Rechteckbreite $\Delta x = \frac{b}{n}$ und Grenzwertbetrachtung:

$$\lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \left(\frac{b}{n}\right)^3 = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6} b^3 = \frac{b^3}{3} = A$$

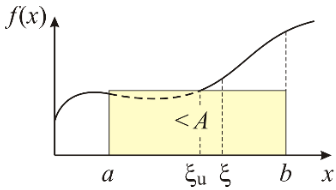
■

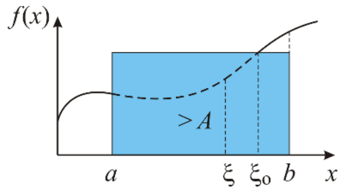
Aufgabe 120. Der Mittelwertsatz der Integralrechnung bedeutet anschaulich, dass die Fläche unter der Funktion $f(x)$ durch ein flächengleiches Rechteck der Breite $(b - a)$ ersetzt werden kann. Bei der Höhe $f(\xi)$ handelt es sich um den sogenannten integralen Mittelwert.



Erläuterungen:

- Die Stelle ξ fungiert gewissermaßen als Schieberegler. In der falschen Position führt er zu einem zu kleinen ($f(\xi_u) < f(\xi)$) oder zu großen ($f(\xi_o) > f(\xi)$) Rechteck:

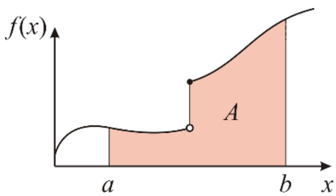


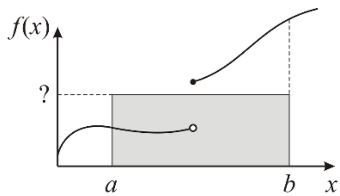


- Die Eindeutigkeit der Stelle ξ ist vom Funktionsverlauf abhängig, d. h. es besteht die Möglichkeit, dass zwei (oder mehr) Stellen mit gleichem Funktionswert existieren:

$$f(\xi_1) = f(\xi_2)$$

- Das folgende Beispiel einer Sprungfunktion demonstriert die Forderung nach einem stetigen Funktionsverlauf. Durch Aufteilung in zwei Teilgebiete ist der Flächeninhalt bestimmbar, die Bildung eines flächengleichen Rechtecks scheitert am fehlenden Funktionswert:



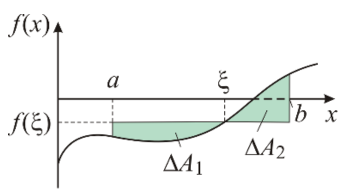


- Funktionswerte dürfen auch negativ sein. Zur Veranschaulichung betrachte man die unter- und oberhalb des integralen Mittelwerts $f(\xi)$ befindlichen Teilflächen ΔA_1 und ΔA_2. Die Forderung nach einem flächengleichen Rechteck ist äquivalent zu der Bedingung, dass die Teilflächen gleich groß sind:

$$\Delta A_1 = \Delta A_2$$

Da ξ, ΔA_1 und ΔA_2 unabhängig von der Lage der x-Achse sind, ist eine Einschränkung des Wertebereichs nicht erforderlich:

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$



■

Aufgabe 121. Der erweiterte Mittelwertsatz der Integralrechnung lässt sich auf direktem Wege beweisen. Es seien

$$m = \inf\{f(x)|x \in [a,b]\}$$

das Infimum von $f(x)$ auf dem Intervall $[a,b]$ mit $b \geq a$ und

$$M = \sup\{f(x)|x \in [a,b]\}$$

das Supremum von $f(x)$. Dann gilt:

$$\begin{array}{rcccccl}
 & m & \leq & f(x) & \leq & M & \\
\Rightarrow & m \cdot g(x) & \leq & f(x)\cdot g(x) & \leq & M \cdot g(x) & \text{mit } g(x) \geq 0 \\
\Rightarrow & \displaystyle\int_a^b m \cdot g(x)\, dx & \leq & \displaystyle\int_a^b f(x)\cdot g(x)\, dx & \leq & \displaystyle\int_a^b M \cdot g(x)\, dx & \text{gemäß (290)} \\
\Leftrightarrow & m \cdot \displaystyle\int_a^b g(x)\, dx & \leq & \underbrace{\displaystyle\int_a^b f(x)\cdot g(x)\, dx}_{} & \leq & M \cdot \displaystyle\int_a^b g(x)\, dx & \text{Faktorregel (104)} \\
 & & & = \eta \cdot \displaystyle\int_a^b g(x)\, dx & & & \text{mit } \eta \in [m,M]
\end{array}$$

Laut Zwischenwertsatz existiert für jeden Zwischenwert η der stetigen Funktion f eine Stelle $\xi \in [a,b]$ mit der Eigenschaft:

$$f(\xi) = \eta$$

■

Hinweise:

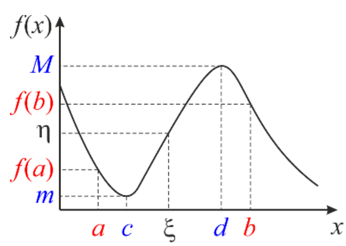
- Bei einer positiven Integrandfunktion ist der Integralwert ebenfalls positiv:

$$\int_a^b \underbrace{f_2(x) - f_1(x)}_{\geq 0}\, dx \geq 0$$

  Aufteilung in zwei Integrale gemäß der Summenregel (105) liefert die Implikation:

$$f_1(x) \leq f_2(x) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f_1(x)\, dx \leq \int_a^b f_2(x)\, dx \tag{290}$$

- Veranschaulichung des Zwischenwertsatzes:
  - In der allgemeinen Form besagt er, dass für jedes $\eta \in [f(a), f(b)]$ (mindestens) ein $\xi \in [a,b]$ existiert mit $f(\xi) = \eta$.
  - Insbesondere gibt es zu jedem Zwischenwert $\eta \in [m,M]$ ein $\xi \in [c,d] \subseteq [a,b]$ mit $f(\xi) = \eta$.



- Streng genommen darf man Faktor- und Summenregel nicht verwenden, weil sie aus dem Hauptsatz der Analysis folgen, welcher seinerseits auf dem (ersten) Mittelwertsatz basiert. Es sei daher angemerkt, dass der Sonderfall $g = 1$ ohne elementare Integrationsregeln herleitbar ist — wovon man sich leicht überzeugen kann.

Aufgabe 122. Herleitung der Intervallregel:

$$\begin{aligned}
\int_a^c f(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty} A_n && \text{Definition des Riemann-Integrals}\\
&= \lim_{n\to\infty} B_n + \lim_{n\to\infty} C_n && \text{Zerlegung in zwei unendliche Summen}\\
&= \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx
\end{aligned}$$

mit den Riemannschen Zwischensummen (93):

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\left(x_i^A - x_{i-1}^A\right) \qquad \text{mit} \quad x_0^A = a,\ x_n^A = c \ \text{ und } \ \xi_i \in \left[x_{i-1}^A, x_i^A\right]$$

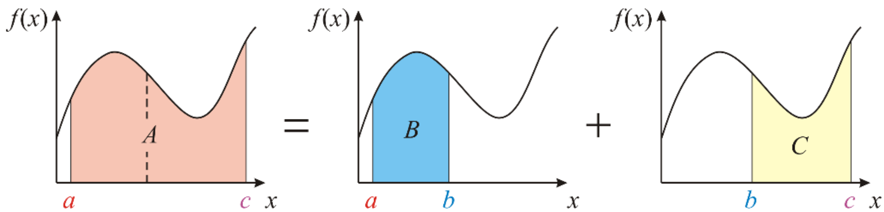
$$B_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\left(x_i^B - x_{i-1}^B\right) \qquad \text{mit} \quad x_0^B = a,\ x_n^B = b \ \text{ und } \ \xi_i \in \left[x_{i-1}^B, x_i^B\right]$$

$$C_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\left(x_i^C - x_{i-1}^C\right) \qquad \text{mit} \quad x_0^C = b,\ x_n^C = c \ \text{ und } \ \xi_i \in \left[x_{i-1}^C, x_i^C\right]$$

■

Anmerkungen:

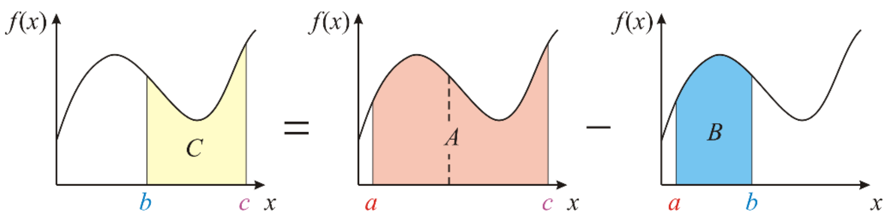
- Grafische Veranschaulichung der Intervallregel für $f(x) \geq 0$:



- Im Grenzfall $n \to \infty$ ist es unerheblich, ob eine Fläche in n oder $2n$ Rechtecke zerlegt wird.
- Durch Umsortierung erhält man eine alternative Darstellung der Intervallregel:

$$\int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \tag{291}$$

- Gleichung (291) lässt sich als Differenz zweier Flächen interpretieren:



- Die Intervallregel gilt auch für abschnittsweise stetige Funktionen.

Aufgabe 123. Aus Aufgabe 117 ist bekannt, dass (bestimmte) Integrale als unendliche Summen definiert sind:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

Um für $f(x)$ keine Zahl A, sondern eine von x abhängige Stammfunktion zu erhalten, muss man die Integrationsgrenze(n) ändern:

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

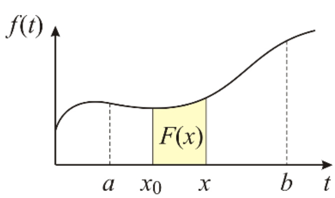
Die Ableitung der Stammfunktion, $F'(x)$, stimmt mit der Ausgangsfunktion $f(x)$ überein:

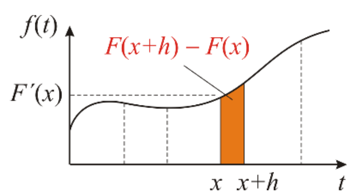
$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} && \text{Differentialquotient}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_{x_0}^{x+h} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right] && \text{Einsetzen der Stammfunktion}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(t)\,dt && \text{Intervallregel (99) bzw. (291)}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\, h\cdot f(\xi) && \text{Mittelwertsatz (97)}\\
&= \lim_{h\to 0} f(\xi) && \text{mit } \xi \in [x, x+h]\\
&= f(x)
\end{aligned}$$

■

Anmerkungen:

- Aus formalen Gründen muss beim Integranden x durch t (oder eine andere Variable) ersetzt werden, denn Integrationsvariable und (obere) Grenze dürfen nicht identisch sein.
- Geometrische Veranschaulichung von $f(x)$ bzw. $f(t)$, der Stammfunktion $F(x)$ und ihrer Ableitung $F'(x)$ für den Grenzfall $h \to 0$:





- Die Berechnung von Flächeninhalten mittels unendlicher Reihen ist selbst bei elementaren Funktionen recht aufwändig, wie die Aufgaben 118 und 119 zeigen. Die Menschheit kann sich also glücklich schätzen, dass Newton und Leibniz (unabhängig voneinander) die Integralrechnung entdeckt haben.

Aufgabe 124. Beweis des Hauptsatzes der Analysis (Teil 2):

a) Einsetzen der speziellen Stammfunktion $F_a(x)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F_a(b) - F_a(a) = \int_a^b f(t)\,dt - \underbrace{\int_a^a f(t)\,dt}_{0} \quad \checkmark$$

b) Aus der Intervallregel (99) folgt, dass sich zwei Stammfunktionen $F(x)$ und

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt = \underbrace{\int_a^{x_0} f(t)\,dt}_{C} + \underbrace{\int_{x_0}^x f(t)\,dt}_{F(x)}$$

höchstens um eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ unterscheiden können. Ihre Ableitungen sind (gemäß dem ersten Teil des Hauptsatzes) beide gleich $f(x)$ und somit identisch:

$$F_a'(x) = F'(x) \quad \Leftrightarrow \quad F_a(x) = F(x) + C$$

Weil sich bei bestimmter Integration die Konstante herauskürzt, liefern alle Stammfunktionen das gleiche Ergebnis:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F_a(b) - F_a(a) = [F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a)$$

■

Aufgabe 125. Umstellung des Hauptsatzes (101) mit $a = x_0$, $b = x$ und $F(x) = F_a(x)$:

$$f(x) = F_a'(x) \quad \Rightarrow \quad F_a(x) = F_a(x_0) + \int_{x_0}^x f(t)\,dt$$

■

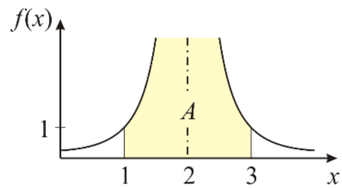
Aufgabe 126. Die untere Grenze x_0 ist frei wählbar und fungiert somit als Integrationskonstante C. Beide Darstellungsformen sind folglich äquivalent:

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt = \int_{x_1}^x f(t)\,dt + C = F_1(x) + C = \int f(x)\,dx$$

■

Aufgabe 127. Die Polstelle $x_{\mathrm{P}} = 2$ liegt auf dem Integrationsintervall $[1;3]$, weshalb der Hauptsatz der Analysis (101) nicht angewandt werden darf:

$$A_{\text{falsch}} = \int_1^3 \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = \left[\frac{-1}{x-2}\right]_1^3 = -1 - 1 = -2$$



Bei unstetigen Funktionen muss zuvor eine Gebietszerlegung vorgenommen werden. Unter Ausnutzung der Achsensymmetrie bezüglich $x = 2$ erhält man:

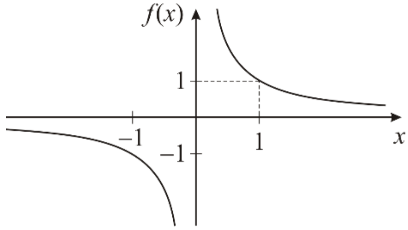
$$A = 2 \cdot \lim_{\substack{a \to 2 \\ a \geq 2}} \int_a^3 f(x)\,dx = 2 \cdot \lim_{\substack{a \to 2 \\ a \geq 2}} \left[\frac{-1}{x-2}\right]_a^3 = 2[-1 - (-\infty)] = \infty$$

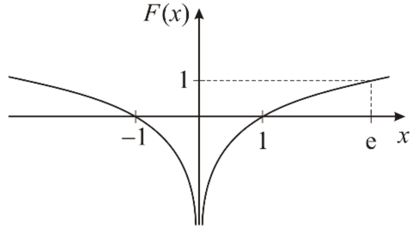
■

Aufgabe 128. In folgenden Fällen ist eine Anpassung des Definitionsbereichs erforderlich:

- Achsenspiegelung (Betragsstriche) des Logarithmus (Stammfunktion der Hyperbel, vgl. Aufgabe 91):

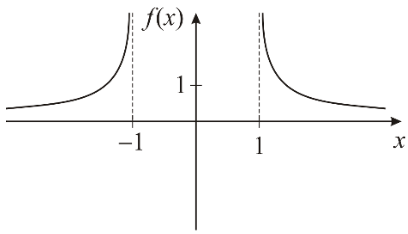
$$F(x) = \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{f(x)}\,dx = \ln|x| + C \quad \text{für} \quad x \neq 0 \tag{292}$$

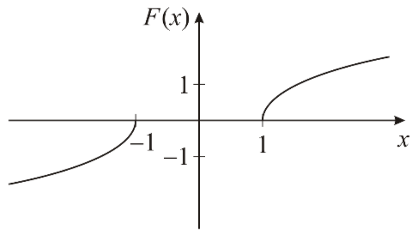




- Punktspiegelung des Areakosinus Hyperbolicus (aus Aufgabe 114):

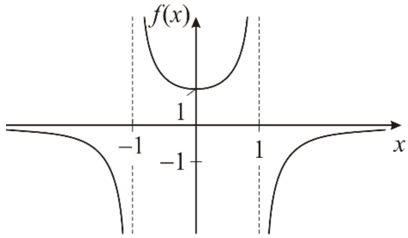
$$F(x) = \int \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}}_{f(x)}\,dx = \begin{cases} -\operatorname{arcosh}(-x) + C & \text{für } x < -1 \\ +\operatorname{arcosh}(+x) + C & \text{für } x > +1 \end{cases} \tag{293}$$

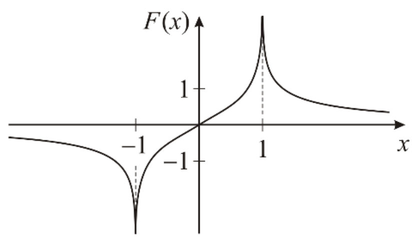




- Kombination von Areatangens Hyperbolicus und Areakotangens Hyperbolicus (aus Aufgaben 115 und 116) und Vereinfachung mit (55) und (56):

$$\begin{aligned} F(x) = \int \underbrace{\frac{1}{1-x^2}}_{f(x)}\,dx &= \begin{cases} \operatorname{artanh} x + C & \text{für} \quad |x| < 1 \\ \operatorname{arcoth} x + C & \text{für} \quad |x| > 1 \end{cases} \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C \quad \text{für} \quad |x| \neq 1 \end{aligned} \tag{294}$$





Anmerkung: Für die grafische Darstellung wurde jeweils $C = 0$ gewählt. ■

Aufgabe 129. Die Vertauschungsregel folgt aus dem zweiten Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung (101):

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)] = -\int_b^a f(x)\,dx$$

■

Aufgabe 130. Beweis der Faktorregel der Integration:

$$\begin{aligned}
\int_a^b k \cdot f(x)\,dx &= \int_a^b k \cdot \left[\int_a^x f(t)\,dt\right]' dx && \text{Hauptsatz (100)}\\
&= \int_a^b \left[k \cdot \int_a^x f(t)\,dt\right]' dx && \text{Faktorregel der Differentiation (57)}\\
&= \int_a^b G_a'(x)\,dx && \text{mit } G_a(x) = k \cdot \int_a^x f(t)\,dt\\
&= G_a(b) - \underbrace{G_a(a)}_{=0} && \text{Hauptsatz (101)}\\
&= k \cdot \int_a^b f(x)\,dx && \text{Austausch der Integrationsvariablen}
\end{aligned}$$

■

Aufgabe 131. Herleitung der Summenregel für die Integralrechnung unter Verwendung der Summenregel für die Differentialrechnung:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x) + g(x)\,dx &= \int_a^b \left[\int_a^x f(t)\,dt\right]' + \left[\int_a^x g(t)\,dt\right]' dx && \text{Hauptsatz (100)}\\
&= \int_a^b \Bigg[\underbrace{\int_a^x f(t)\,dt}_{F_a(x)} + \underbrace{\int_a^x g(t)\,dt}_{G_a(x)}\Bigg]' dx && \text{Summenregel (58)}\\
&= \int_a^b [F_a(x) + G_a(x)]'\,dx\\
&= [F_a(b) + G_a(b)] - \big[\underbrace{F_a(a)}_{=0} + \underbrace{G_a(a)}_{=0}\big] && \text{Hauptsatz (101)}\\
&= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx
\end{aligned}$$

■

Aufgabe 132. Intervall- und Vertauschungsregel gelten nur für bestimmte Integrale.

Faktor- und Summenregel dürfen auch auf unbestimmte Integrale angewandt werden: Untergrenze a sei beliebig (könnte auch x_0 sein); außerdem ersetze man die Obergrenze b durch die Variable x und die bisherige Integrationsvariable x durch t. ■

Aufgabe 133. Ableitung der Stammfunktion mithilfe der Kettenregel:

$$[F(g(x)) + C]' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

■

Aufgabe 134. Beweis der linearen Substitution:

$$\left[\frac{1}{a}F(ax+b) + C\right]' = \frac{1}{a}F'(ax+b) \cdot a = f(ax+b)$$

■

Aufgabe 135. Für den Beweis der Quotienten-Substitutionsregel wird die Kettenregel benötigt:

$$[\ln|f(x)| + C]' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

Die folgenden vier Grundfunktionen lassen sich als Quotient darstellen und logarithmisch integrieren:

1. Tangens:
$$\int \tan(x)\ dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\ dx = -\ln|\cos(x)| + C \tag{295}$$

2. Kotangens:
$$\int \cot(x)\ dx = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\ dx = \ln|\sin(x)| + C \tag{296}$$

3. Tangens Hyperbolicus:
$$\int \tanh(x)\ dx = \int \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\ dx = \ln(\cosh(x)) + C \tag{297}$$

4. Kotangens Hyperbolicus:
$$\int \coth(x)\ dx = \int \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}\ dx = \ln|\sinh(x)| + C \tag{298}$$

■

Aufgabe 136. Beweis der Produkt-Substitutionsregel:

$$\left[\frac{1}{2}f^2(x) + C\right]' = \frac{1}{2} \cdot 2f(x) \cdot f'(x) = f(x) \cdot f'(x)$$

■

Aufgabe 137. Bei den Substitutionsregeln (107), (108) und (109) handelt es sich um Sonderfälle des allgemeinen Ansatzes (106):

- Lineare Substitution mit $F'(x) = f(x)$ und $g(x) = ax + b$ mit $a \neq 0$:

$$\begin{aligned} & \int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = F(g(x)) + C \\ \Leftrightarrow \qquad & \int f(ax+b) \cdot a\, dx = F(ax+b) + C \\ \Leftrightarrow \qquad & \int f(ax+b)\, dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C_1 \end{aligned}$$

- Quotienten-Substitutionsregel mit $F'(x) = f(x) = \dfrac{1}{x}$ bzw. $F(x) = \ln|x|$:

$$\begin{aligned} & \int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = F(g(x)) + C \\ \Leftrightarrow \qquad & \int \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x)\, dx = \ln|g(x)| + C \end{aligned}$$

- Produkt-Substitutionsregel mit $F'(x) = f(x) = x$ bzw. $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2$:

$$\begin{aligned} & \int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = F(g(x)) + C \\ \Leftrightarrow \qquad & \int g(x) \cdot g'(x)\, dx = \frac{1}{2} g^2(x) + C \end{aligned}$$

Es existieren weitere, spezielle Substitutionsmethoden, z. B. für Wurzelfunktionen.

■

Aufgabe 138. Produktregel der Differentiation (59):

$$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Integration in den Grenzen von a bis b und Anwendung der Summenregel (105):

$$[u(x) \cdot v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x) \cdot v(x)\, dx + \int_a^b u(x) \cdot v'(x)\, dx$$

Umstellung liefert die Produktregel der Integration (partielle Integration):

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x)\, dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x)\, dx$$

Bei Bedarf können die Integrale vertauscht werden.

■

Aufgabe 139. Bei einer (einzigen) Grundfunktion genügt die partielle Integration:

1. (Allgemeine) Logarithmusfunktion:
$$\int \log_a |x|\, dx = x \cdot \log_a |x| - \int x \cdot \frac{1}{(\ln a)x}\, dx = x \cdot \log_a |x| - \frac{x}{(\ln a)} + C \qquad (299)$$

Bei einigen Grundfunktionen muss nach der partiellen Integration das Ersatzintegral mithilfe der Quotienten-Substitutionsregel (108) gelöst werden:

2. Arkustangens:
$$\int \arctan(x)\, dx = x \cdot \arctan(x) - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2}\, dx = x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C \qquad (300)$$

3. Arkuskotangens:
$$\int \operatorname{arccot}(x)\, dx = x \cdot \operatorname{arccot}(x) - \int x \cdot \frac{-1}{1+x^2}\, dx = x \cdot \operatorname{arccot}(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C \qquad (301)$$

4. Areatangens Hyperbolicus:
$$\int \operatorname{artanh}(x)\, dx = x \cdot \operatorname{artanh}(x) - \int x \cdot \frac{1}{1-x^2}\, dx = x \cdot \operatorname{artanh}(x) + \frac{1}{2}\ln|1-x^2| + C \qquad (302)$$

5. Areakotangens Hyperbolicus:
$$\int \operatorname{arcoth}(x)\, dx = x \cdot \operatorname{arcoth}(x) - \int x \cdot \frac{1}{1-x^2}\, dx = x \cdot \operatorname{arcoth}(x) + \frac{1}{2}\ln|1-x^2| + C \qquad (303)$$

Auch die folgenden Grundfunktionen sind partiell integrierbar. Zur Lösung des Ersatzintegrals benötigt man die allgemeine Substitutionsregel (106):

6. Arkussinus:
$$\int \arcsin(x)\, dx = x \cdot \arcsin(x) - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C \qquad (304)$$

7. Arkuskosinus:
$$\int \arccos(x)\, dx = x \cdot \arccos(x) - \int x \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + C \qquad (305)$$

8. Areasinus Hyperbolicus:
$$\int \operatorname{arsinh}(x)\, dx = x \cdot \operatorname{arsinh}(x) - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\, dx = x \cdot \operatorname{arsinh}(x) - \sqrt{x^2+1} + C \qquad (306)$$

9. Areakosinus Hyperbolicus:
$$\int \operatorname{arcosh}(x)\, dx = x \cdot \operatorname{arcosh}(x) - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx = x \cdot \operatorname{arcosh}(x) - \sqrt{x^2-1} + C \qquad (307)$$

■

Aufgabe 140. Die Idee der Integrationstechnik besteht in der Zerlegung des gebrochenrationalen Polynoms $r(x)$ in integrierbare Partialbrüche:

$$r(x) = \frac{z(x)}{N(x)} = \frac{a_1}{x - x_\mathrm{n}} + \frac{a_2}{(x - x_\mathrm{n})^2} + \ldots + \frac{a_k}{(x - x_\mathrm{n})^k} + \frac{b_1 x + c_1}{x^2 + px + q} + \ldots + \frac{b_k x + c_k}{(x^2 + px + q)^k}$$

Die Partialbrüche besitzen eine Gemeinsamkeit: Die Zählerordnung (0 oder 1) ist kleiner als die Nennerordnung (1 bis $2k$). Bei einer Erweiterung auf den Hauptnenner $N(x)$ folgt zwangsläufig, dass die Zählerordnung kleiner als die Nennerordnung sein muss:

$$\mathcal{O}(z) < \mathcal{O}(N)$$

Man spricht in diesem Fall von einer echt gebrochenrationalen Funktion.

Bei gebrochenrationalen Funktionen $f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$ mit unzulässiger Polynomordnung

$$\mathcal{O}(Z) \geq \mathcal{O}(N)$$

muss die Zählerordnung durch eine Polynomdivision reduziert werden:

$$f(x) = g(x) + r(x)$$

Der Anteil $g(x)$ ist ganzrational, der Rest $r(x) = \frac{z(x)}{N(x)}$ echt gebrochenrational.

■

Aufgabe 141. Stammfunktion:

$$F(x) = \frac{b}{2} \cdot \ln(x^2 + px + q) + \frac{2c - bp}{\sqrt{4q - p^2}} \cdot \arctan\left(\frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}}\right) + D$$

Ableitung unter Anwendung der Kettenregel liefert die Integrandfunktion:

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{b}{2} \cdot \frac{2x + p}{x^2 + px + q} + \frac{2c - bp}{\sqrt{4q - p^2}} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}}\right)^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \\
&= \frac{b}{2} \cdot \frac{2x + p}{x^2 + px + q} + 2\,\frac{2c - bp}{(4q - p^2) + (2x + p)^2} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{2bx + bp}{x^2 + px + q} + \frac{4c - 2bp}{4q + 4x^2 + 4xp} \\
&= \frac{bx + c}{x^2 + px + q}
\end{aligned}$$

■

Aufgabe 142. Überprüfung der Haupt-Stammfunktion

$$F(x) = \frac{(2c-bp)x+cp-2bq}{(k-1)\Delta(x^2+px+q)^{k-1}} + \frac{(2k-3)(2c-bp)}{(k-1)\Delta} \cdot \underbrace{\int \frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}}\,dx}_{A_{k-1}}$$

$$= \frac{(2c-bp)x+cp-2bq}{(k-1)\Delta} \cdot (x^2+px+q)^{1-k} + \frac{(2k-3)(2c-bp)}{(k-1)\Delta} \cdot A_{k-1}$$

mit $k \geq 2$ und $\Delta = 4q - p^2 > 0$ durch Differentiation:

$$F'(x) = \frac{2c-bp}{(k-1)\Delta(x^2+px+q)^{k-1}} + (1-k) \cdot \frac{(2c-bp)x+cp-2bq}{(k-1)\Delta(x^2+px+q)^k} \cdot (2x+p) +$$

$$+ \frac{(2k-3)(2c-bp)}{(k-1)\Delta} \cdot \frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}}$$

$$= \frac{(2k-2)(2c-bp)(x^2+px+q) + (1-k)\left[(2c-bp)x+cp-2bq\right](2x+p)}{(k-1)\Delta(x^2+px+q)^k}$$

$$= \frac{[2(2c-bp)p+(bp-2c)p+2(-cp+2bq)]x + 2(2c-bp)q + (-cp+2bq)p}{\Delta(x^2+px+q)^k}$$

$$= \frac{[4q-p^2]bx + [4q-p^2]c}{\Delta(x^2+px+q)^k}$$

$$= \frac{bx+c}{(x^2+px+q)^k} \quad \checkmark$$

Ableitung von

$$A_n = \frac{2x+p}{(n-1)\Delta(x^2+px+q)^{n-1}} + \frac{4n-6}{(n-1)\Delta} \cdot \underbrace{\int \frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}}\,dx}_{A_{n-1}}$$

für $n > 1$ ergibt:

$$A_n'(x) = \frac{2}{(n-1)\Delta(x^2+px+q)^{n-1}} - \frac{(2x+p)^2}{\Delta(x^2+px+q)^n} + \frac{4n-6}{(n-1)\Delta} \cdot \frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}}$$

$$= \frac{4(x^2+px+q) - (2x+p)^2}{\Delta(x^2+px+q)^n}$$

$$= \frac{1}{(x^2+px+q)^n} \quad \checkmark$$

Ableitung von

$$A_1 = \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \arctan\left(\frac{2x+p}{\sqrt{\Delta}}\right) + D$$

liefert:

$$A_1'(x) = \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{2x+p}{\sqrt{\Delta}}\right)^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\Delta}} = \frac{4}{\Delta + (2x+p)^2} = \frac{1}{x^2+px+q} \quad \checkmark$$

■

Aufgabe 143. Addition der durch lineare Interpolation gewonnenen Trapezflächen:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx A_1 + A_2 + \ldots + A_k + \ldots + A_n \quad \text{mit} \quad A_k = \frac{x_n - x_0}{n} \cdot \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}$$

$$= \frac{x_n - x_0}{n} \cdot \left[\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \ldots + \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2} \right]$$

$$= \frac{x_n - x_0}{n} \cdot \left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \ldots f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2} \right]$$

$$= \frac{x_n - x_0}{n} \cdot \left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]$$

■

Aufgabe 144. Programmierung der Trapezregel mit Python:

```
from math import *

def f(x):                          # zu integrierende Funktion
  if not x==0:
    return sin(x)/x                # Kardinalsinus
  else:
    return 1.                      # Grenzwert nach L'Hospital
x0   = 0.0                         # untere Grenze
xn   = 1.0                         # obere Grenze

for n in [10,100,1000,10000]:      # Anzahl Intervalle
  t = (f(x0)+f(xn))/2.             # Randwerte
  for i in range(1,n):
    xi=i/n*(xn-x0)
    t=t+f(xi)
  t=t*(xn-x0)/n
  print("n= %10i, t= %18.16f"%(n,t))  # Formatierte Ausgabe
print("Ende")
```

Einfluss der Intervallanzahl n auf die Genauigkeit:

n	A_n
10	0,945 832 071 866 9052
100	0,946 080 560 625 7324
1000	0,946 083 045 269 7914
10000	0,946 083 070 116 2104

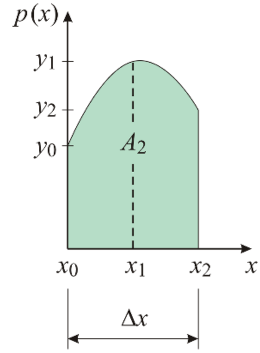
Rundung auf vier Nachkommastellen: $A \approx 0{,}9461$ ■

Aufgabe 145. Die Berechnung der Näherungslösung vereinfacht sich, wenn man die linke Stützstelle in den Ursprung legt und die Verschiebung nachträglich korrigiert.

Zur Bestimmung der Parameter a, b und c der (ersten) Parabel setzt man die Stützpunkte (x_0, y_0) mit $x_0 = 0$, (x_1, y_1) mit $x_1 = \frac{x_2}{2}$ und (x_2, y_2) in die allgemeine Parabelgleichung

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

ein:



$$y_0 = c$$

$$y_1 = a\left(\frac{x_2}{2}\right)^2 + b\left(\frac{x_2}{2}\right) + c$$

$$y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c$$

Elimination von a liefert:

$$b = \frac{4y_1 - y_2 - 3y_0}{x_2}$$

Rückeinsetzen:

$$a = \frac{y_2 - bx_2 - c}{x_2^2} = \frac{2y_0 - 4y_1 + 2y_2}{x_2^2}$$

Bestimmte Integration auf dem Intervall $[x_0, x_2]$ bzw. $[0, x_2]$:

$$A_2 = \int_{x_0}^{x_2} p(x)\,dx = \int_0^{x_2} ax^2 + bx + c\,dx = \frac{a}{3}x_2^3 + \frac{b}{2}x_2^2 + cx_2 = \underbrace{\frac{y_0 + 4y_1 + y_2}{6}}_{\text{Mittlere Höhe}} \cdot \underbrace{x_2}_{\Delta x}$$

Die (doppelte) Intervallbreite ist für alle Teilflächen gleich:

$$\Delta x = x_2 - x_0 = x_4 - x_2 = \ldots = 2 \cdot \frac{x_n - x_0}{n}$$

Durch Addition der Teilflächen erhält man schließlich die gesuchte Trapezregel:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx A_2 + A_4 + A_6 + \ldots + A_k + \ldots + A_n \quad \text{mit} \quad A_k = \frac{y_{k-2} + 4y_{k-1} + y_k}{6} \cdot \Delta x$$

$$= \left[\frac{y_0 + 4y_1 + y_2}{6} + \frac{y_2 + 4y_3 + y_4}{6} + \ldots + \frac{y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n}{6}\right] \cdot \Delta x$$

$$= \left[\frac{y_0 + y_n}{3} + \frac{4}{3}\sum_{i=1}^{n/2} y_{2i-1} + \frac{2}{3}\sum_{i=1}^{n/2-1} y_{2i}\right] \cdot \frac{x_n - x_0}{n}$$

■

Aufgabe 146. Erweitertes Python-Skript:

```
from math import *

def f(x):                   # zu integrierende Funktion
  if not x==0:
    return sin(x)/x
  else:
    return 1.
x0   = 0.0                  # untere Grenze
xn   = 1.0                  # obere Grenze

print("Stützstellen   Trapezregel            Simpsonregel")
for n in [2,6,10,100,1000,10000,100000,1000000,10000000]:
  t = (f(x0)+f(xn))/2.      # Randwerte Trapezregel
  s = (f(x0)+f(xn))/3.      # Randwerte Simpsonregel
  for i in range(1,n):
    xi=i/n*(xn-x0)
    t=t+f(xi)
    if i%2==1:              # ungerade (%: Modulo mit Rest=1)
      s=s+4./3.*f(xi)
    else:                   # gerade
      s=s+2./3.*f(xi)
  t=t*(xn-x0)/n
  s=s*(xn-x0)/n
  print("n= %10i, t= %18.16f, s= %18.16f"%(n,t,s))
print("Ende")
```

Bei der Simpsonregel reichen 2 Intervalle (bzw. ein Doppelintervall) aus, um eine Genauigkeit von 4 Nachkommastellen zu erhalten; bei 1000 Intervallen sind es sogar 12 Stellen. Um mit der Trapezregel die gleiche Genauigkeit zu erzielen, müssen zwischen 10^5 und 10^6 Stützstellen ausgewertet werden; der numerische Aufwand ist also über 100-mal höher.

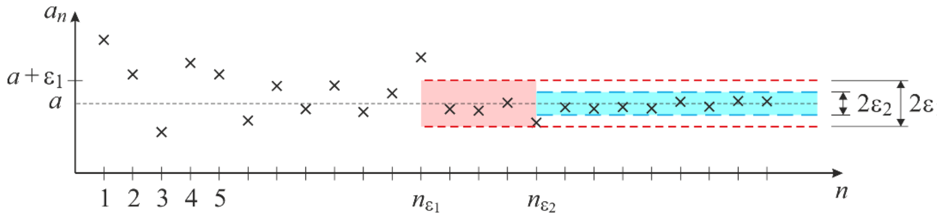
n	A_n^{Trapez}	A_n^{Simpson}
2	0,939 793 284 806 1772	0,946 145 882 273 5866
6	0,945 385 730 766 8585	0,946 083 831 311 6989
10	0,945 832 071 866 9052	0,946 083 168 838 0729
100	0,946 080 560 625 7324	0,946 083 070 377 0220
1000	0,946 083 045 269 7914	0,946 083 070 367 1820
10000	0,946 083 070 116 2104	0,946 083 070 367 1836
100000	0,946 083 070 364 6711	0,946 083 070 367 1872
1000000	0,946 083 070 367 1638	0,946 083 070 367 1642
10000000	0,946 083 070 367 2465	0,946 083 070 367 0757

■

Potenzreihenentwicklungen

Aufgabe 147. Eine Folge reeller Zahlen konvergiert gegen den Grenzwert a, wenn es für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ ein n_ε gibt, für das gilt:

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n > n_\varepsilon \tag{308}$$



Gibt man beispielsweise das ε_1 als Schranke vor, dann liegen alle Folgenglieder mit dem Index $n > n_{\varepsilon_1}$ innerhalb des ε_1-Schlauches. Wählt man mit ε_2 eine kleinere Schranke, dann muss der Startindex auf n_{ε_2} erhöht werden. ■

Aufgabe 148. Der Startindex wird in Abhängigkeit der (beliebig wählbaren) Schranke $\varepsilon > 0$ wie folgt definiert:

$$n_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} + \rho \quad \text{mit} \quad \rho \in [0;1)$$

Damit n_ε eine natürliche Zahl ist, muss $\frac{1}{\varepsilon} \in \mathbb{R}$ ggf. durch Addition von ρ aufgerundet werden. Mit $a_n = \frac{1}{n}$ und $a = 0$ erhält man:

$$|a_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon\rho} \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n > n_\varepsilon$$

Anmerkung: Auf das Aufrunden kann verzichtet werden, wenn man $n_\varepsilon \in \mathbb{R}$ zulässt. ■

Aufgabe 149. Für eine monoton wachsende Folge reeller Zahlen (a_n) mit $a_m \geq a_n$ für $m > n$ gilt das Monotoniekriterium:

(a_n) ist konvergent.

$\Leftrightarrow$ Es existiert ein (endlicher) Grenzwert: $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

$\Leftrightarrow$ Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_ε, für das gilt: $|a_n - a| = a - a_n < \varepsilon$ für alle $n > n_\varepsilon$

$\Leftrightarrow$ Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_ε, für das gilt: $a \geq a_n > a - \varepsilon$ für alle $n > n_\varepsilon$

$\Leftrightarrow$ Es existiert ein Supremum: $a = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\} = \sup\{a_n | n > n_\varepsilon\}$

$\Leftrightarrow$ (a_n) ist nach oben beschränkt.

Auf analoge Weise lässt sich beweisen, dass eine monoton fallende Folge genau dann konvergiert, wenn sie nach unten beschränkt ist. ■

Aufgabe 150. Weil das Monotoniekriterium eine Äquivalenzaussage darstellt, lässt es sich auch für Divergenzuntersuchungen einsetzen.

Für eine monoton steigende Folge gilt:

$$(a_n) \text{ ist divergent.} \quad \Leftrightarrow \quad (a_n) \text{ ist nach oben unbeschränkt.}$$

Für eine monoton fallende Folge gilt:

$$(a_n) \text{ ist divergent.} \quad \Leftrightarrow \quad (a_n) \text{ ist nach unten unbeschränkt.}$$

■

Aufgabe 151. Die Folge (a_n) sei konvergent gegen den Grenzwert a. Dann existiert gemäß der fundamentalen Grenzwertdefinition (308) für jedes beliebige ε_1, z. B. $\varepsilon_1 = 0{,}815$, ein Startindex $n_1 \in \mathbb{N}^*$ mit:

$$|a_n - a| < \varepsilon_1 \quad \text{für alle } n > n_1$$

Ermittlung einer oberen Schranke S:

- Da es sich bei n_1 um eine endliche Zahl handelt, kann man aus der Menge aller Folgenglieder mit $n \leq n_1$ das Maximum ermitteln:

$$S_1 = \max\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n_1}\}$$

- Für $n > n_1$, d. h. für fast alle (unendlich viele) Folgenglieder, stellt der Wert

$$S_2 = a + \varepsilon_1$$

eine obere Schranke dar.

- Obere Schranke aller Folgenglieder:

$$S = \max\{S_1, S_2\}$$

Mit der gleichen Argumentation erhält man eine untere Schranke:

$$s = \min\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n_1}, a - \varepsilon_1\}$$

Somit ist der Beweis erbracht, dass jede konvergente Folge (a_n) beschränkt ist:

$$a_n \in [s, S] \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}^*$$

■

Aufgabe 152. Mit der Implikation, dass eine konvergente Folge (A) beschränkt ist (B), lässt sich nicht viel anfangen. Dafür ist die Kontraposition, dass eine unbeschränkte Folge (nicht B) divergiert (nicht A), umso bedeutsamer. Sie liefert eine elegante Beweismethode für die Divergenz einer Folge.

Die Umkehrung „eine beschränkte Folge (B) ist konvergent (A)“ gilt im Allgemeinen nicht, wie das Gegenbeispiel der alternierenden Folge (a_n) mit $a_n = (-1)^n$ zeigt: Die Schranken sind $s = -1$ und $S = +1$, ein Grenzwert existiert nicht. ■

Aufgabe 153. Ob die geometrische Folge (a_n) mit $a_n = q^n$ konvergiert oder divergiert, hängt von der Basis q ab:

- $q = 0$: Die Folge ist konvergent, denn $a = a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$.
- $q \in (0; 1)$: Gemäß dem Monotoniekriterium ist die Folge konvergent, denn sie fällt (streng) monoton ($\frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$), und $s = 0$ ist wegen $q^n > 0$ eine untere Schranke. Dass die untere Schranke s mit dem Grenzwert $a = 0$ übereinstimmt, spielt für den Beweis keine Rolle.
- $q = 1$: Konvergente Folge mit $a = a_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$.
- $q \in (1; \infty)$: Die Folge divergiert, weil sie keine obere Schranke besitzt:
$$\begin{aligned} a_n &= q^n && \text{mit } q > 1 \\ &= (1+x)^n && \text{Substitution: } x = q - 1 > 0 \\ &\geq 1 + nx && \text{Bernoulli-Ungleichung (17)} \end{aligned}$$
Widerspruchsbeweis: Es sei S eine obere Schranke. Für $n_S = \frac{S}{x}$ erhält man ein $a_{n_S} \geq 1 + n_S x = 1 + S$.
- $q \in (-1; 0)$: Die Folge konvergiert gegen den Grenzwert $a = 0$, weil es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein
$$n_\varepsilon = \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|} = \log_{|q|} \varepsilon$$
gibt, für das gilt:
$$|a_n - a| = |q^n - 0| = |q|^n < |q|^{n_\varepsilon} = |q|^{\log_{|q|} \varepsilon} = \varepsilon \quad \text{für alle } n > n_\varepsilon$$
- $q = -1$: Die Folge divergiert, denn man erhält $q^n = (-1)^n = 1$ für gerade n und -1 für ungerade n.
- $q \in (-\infty; -1)$: Die Folge divergiert, weil sie unbeschränkt ist. Ob es keine obere oder keine untere Schranke gibt, ist unerheblich. Deshalb wird statt (a_n) die Folge (b_n) mit $b_n = |q|^n$ betrachtet, welche sich auf den Fall $q \in (1; \infty)$ zurückführen lässt.

Zusammenfassung: Die geometrische Folge konvergiert für $q \in (-1; 1]$, bei anderen Basen divergiert sie. ■

Aufgabe 154. Grenzwert der n-ten Wurzel von $c > 0$:
$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\ln(\sqrt[n]{c})} && \text{Logarithmustrick} \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{\ln(c)}{n}} && \text{Logarithmenregel (12) für Wurzeln (10)} \\ &= \mathrm{e}^{\ln(c)\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} && \text{Grenzwertsätze (140) und (137)} \\ &= \mathrm{e}^0 && \text{Harmonische Folge (118)} \\ &= 1 \end{aligned}$$
■

Aufgabe 155. Um die Regel von L'Hospital anwenden zu dürfen, wird die Folge (a_n) mit

$$a_n = \sqrt[n]{n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}^*$$

zu der Funktion

$$f(n) = \sqrt[n]{n} \quad \text{für } n \in \mathbb{R} \text{ mit } n > 0$$

erweitert. Die Grenzwerte sind identisch:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\ln\left(\sqrt[n]{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{\ln(n)}{n}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n}} \overset{„\frac{\infty}{\infty}“}{=} \mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \mathrm{e}^0 = 1 \tag{309}$$

■

Aufgabe 156. Exponentialfunktion als Grenzwert einer Folge:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} && \text{Logarithmustrick} \\
&= \mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)} && \text{Logarithmenregel und Grenzwertsatz (140)} \\
&= \mathrm{e}^b
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
b &= \lim_{n\to\infty} n\cdot\ln\left(1+\tfrac{x}{n}\right) && \text{Unbestimmter Ausdruck vom Typ „}\infty\cdot 0\text{“} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{n+x}{n}\right)}{\frac{1}{n}} && \text{Doppelbruch für L'Hospital} \\
&\overset{„\frac{0}{0}“}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n+x}\cdot\frac{n-(n+x)}{n^2}}{-\frac{1}{n^2}} && \text{Ketten- und Quotientenregel im Zähler} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{n+x} && \text{Kürzen} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+\frac{x}{n}} && \text{Elementare Umformung: Erweiterung mit } \frac{1}{n} \\
&= x
\end{aligned}$$

■

Hinweise:

- Um die Regel von L'Hospital benutzen zu können, wird die bereits aus Aufgabe 155 bekannte Methode angewandt: Erweiterung der Folge (diskrete Funktion) zu einer (kontinuierlichen) Funktion.
- Die sich für $x = 1$ ergebende Eulersche Zahl

  $$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

  wurde in Aufgabe 86 aus der Forderung hergeleitet, dass die natürliche Exponentialfunktion e^x gleich ihrer Ableitung sein soll.

Aufgabe 157. Die Folge bzw. Funktion

$$f(n) = \frac{n^b}{a^n} \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R},\ a > 1$$

konvergiert für $n \to \infty$ gegen null:

- Der Fall $b < 0$ ist trivial, weil der Zähler gegen null und der Nenner gegen unendlich strebt.
- Für $b = 0$ ist der Zähler eins und der Nenner unendlich.
- Im Fall $b > 0$ muss die Regel von L'Hospital solange angewandt werden, bis der Exponent der Potenzfunktion im Zähler kleiner oder gleich null ist.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^b}{a^n} \text{„}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\text{“} \begin{cases} 0 & \text{für } b \le 1 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{bn^{b-1}}{\ln(a)\, a^n} \text{„}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\text{“} \begin{cases} 0 & \text{für } b \le 2 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b(b-1)n^{b-2}}{\ln^2(a)\, a^n} \text{„}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\text{“} \begin{cases} 0 & \text{für } b \le 3 \\ \ldots \text{„}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\text{“}\ 0 & \text{für } b > 3 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

■

Aufgabe 158. Die Folge (b_n) mit

$$b_n = \frac{a^n}{n!}$$

konvergiert gegen

$$b = 0\ ,$$

denn es gibt zu jedem (noch so kleinen) $\varepsilon \in (0; 1]$ einen Index

$$n_\varepsilon = \frac{a^2}{\varepsilon} + \rho \quad \text{mit} \quad \rho \in [0; 1)\ ,$$

für den gilt:

$$|b_n - b| = \frac{|a|^n}{n!} \le \frac{|a|^n}{\sqrt{n^n}} = \left(\frac{a^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} < \left(\frac{a^2}{n_\varepsilon - \rho}\right)^{\frac{n}{2}} = \varepsilon^{\frac{n}{2}} \le \varepsilon \quad \text{für alle } n > n_\varepsilon$$

Erläuterungen:

- Das ϵ darf nicht größer als eins sein, weil sich sonst das letzte Relationszeichen umkehren würde.
- Das ρ dient dem Aufrunden zur nächsten natürlichen Zahl $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$.
- Durch die Bildung des Kehrwertes dreht sich bei der Ungleichung (24) das Relationszeichen um:

$$n! \ge \sqrt{n^n} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n!} \le \frac{1}{\sqrt{n^n}}$$

Somit ist der Beweis erbracht, dass die Fakultät $n!$ schneller gegen unendlich geht als jede Exponentialfunktion a^n.

■

Aufgabe 159. Durch Einsetzen des Sonderfalls $m \to \infty$ bzw. des Grenzwerts

$$a = \lim_{m\to\infty} a_m$$

in das Cauchy-Kriterium (125) erhält man die fundamentale Grenzwertdefinition (308):

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n > n_\varepsilon$$

Das $\varepsilon > 0$ sei beliebig (klein), und der Startindex n_ε möge (als Funktion von ε) existieren.

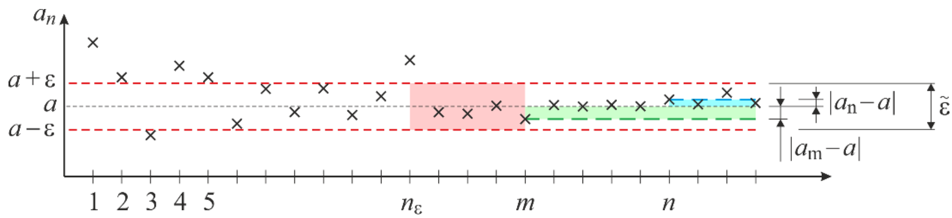
■

Aufgabe 160. Gemäß der fundamentalen Grenzwertdefinition konvergiert eine Folge (a_n) gegen den Grenzwert a, wenn es für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ ein n_ε gibt, für das gilt:

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n > n_\varepsilon$$

Der Index ist austauschbar:

$$|a_m - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } m > n_\varepsilon$$



Mithilfe der Dreiecksungleichung $|x+y| \le |x| + |y|$ erhält man die Beziehung:

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) + (a - a_m)| \le \underbrace{|(a_n - a)|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|(a - a_m)|}_{<\varepsilon} < 2 \cdot \varepsilon \quad \text{für alle } m, n > n_\varepsilon$$

Substitution $\tilde{\varepsilon} = 2\varepsilon \in (0; \infty)$ liefert das Cauchy-Kriterium:

$$|a_n - a_m| < \tilde{\varepsilon} \quad \text{für alle } m, n > n_{\tilde{\varepsilon}}$$

■

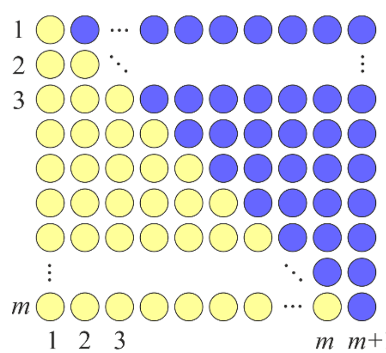
Aufgabe 161. Die Gaußsche Summenformel lässt sich als halbes Rechteck visualisieren:

$$\sum_{n=1}^{m} n = 1 + 2 + 3 + \ldots + m = \frac{m \cdot (m+1)}{2}$$

So (oder ähnlich) dürfte der kleine Gauß seinerzeit gerechnet haben:

$$1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = \ldots = 50 + 51 = 101$$

Und schließlich: $50 \cdot 101 = 5050$



■

Aufgabe 162. Beweis der Gaußschen Summenformel durch vollständige Induktion:

- Induktionsanfang für $m = 1$:

$$\sum_{n=1}^{1} n = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} \quad \checkmark$$

- Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{m} n = \frac{m(m+1)}{2} && \text{Induktionsannahme } A(m) \\
\Leftrightarrow \quad & \left[\sum_{n=1}^{m} n\right] + (m+1) = \frac{m(m+1)}{2} + (m+1) && \text{Addition einer weiteren Zahl} \\
\Leftrightarrow \quad & \sum_{n=1}^{m+1} n = \frac{(m+1)(m+2)}{2} && \text{Induktionsbehauptung } A(m+1)
\end{aligned}$$

■

Aufgabe 163. Die Summenformel für Quadratzahlen kann mittels vollständiger Induktion bewiesen werden. Für den Induktionsanfang $m = 1$ ist die Summenformel richtig:

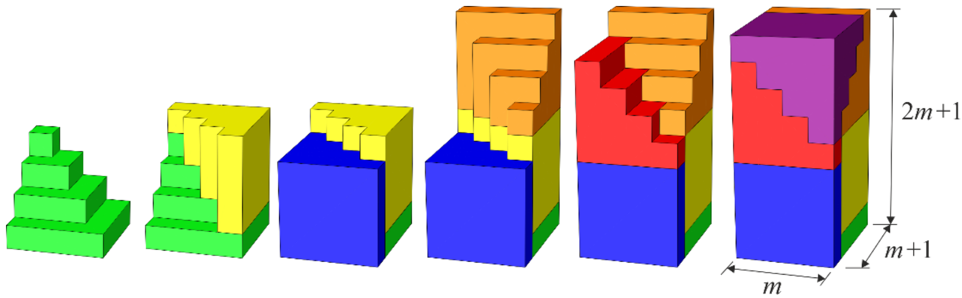
$$\sum_{n=1}^{1} n^2 = 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} \quad \checkmark$$

Um zu zeigen, dass man auch andere Obergrenzen m verwenden darf, wird der Induktionsschritt durchgeführt:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{m} n^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} && \text{Induktionsannahme} \\
\Leftrightarrow \quad & \left[\sum_{n=1}^{m} n^2\right] + (m+1)^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (m+1)^2 && \\
\Leftrightarrow \quad & \sum_{n=1}^{m+1} n^2 = \frac{m+1}{6} \cdot [m(2m+1) + 6(m+1)] && \\
& \qquad = \frac{m+1}{6} \cdot \left[2m^2 + 7m + 6\right] && \\
& \qquad = \frac{(m+1)(m+2)[2(m+1)+1]}{6} && \text{Induktionsbehauptung}
\end{aligned}$$

■

Aufgabe 164. Beweis ohne (viel) Worte:



Volumen einer m-stufigen Pyramide:

$$V_m = \sum_{n=1}^{m} n^2 = 1 + 4 + 9 + \ldots + m^2$$

Sechs Pyramiden können zu einem Quader zusammengesetzt werden. Die Aufteilung des Quadervolumens

$$V = m \cdot (m+1) \cdot (2m+1)$$

auf alle Stufenpyramiden liefert die herzuleitende Summenformel für Quadratzahlen:

$$V_m = \frac{V}{6} = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

■

Aufgabe 165. Beweis der geometrischen Summenformel durch vollständige Induktion:

- Induktionsanfang für $m = 0$:

$$\sum_{n=0}^{0} q^n = q^0 = 1 = \frac{1-q^{0+1}}{1-q} \quad \checkmark$$

  mit $q \neq 0$ (Vermeidung von 0^0) und $q \neq 1$ (keine Division durch null)

- Induktionsschritt:

$$\sum_{n=0}^{m} q^n = \frac{1-q^{m+1}}{1-q} \qquad \text{Induktionsannahme } A(m)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{m+1} q^n = \frac{1-q^{m+1}}{1-q} + q^{m+1} \qquad \text{Addition einer weiteren Potenz}$$

$$= \frac{1-q^{m+1}}{1-q} + \frac{q^{m+1}-q^{m+2}}{1-q}$$

$$= \frac{1-q^{m+2}}{1-q} \qquad \text{Induktionsbehauptung } A(m+1)$$

■

Aufgabe 166. Gesucht ist die Summenformel der endlichen geometrischen Reihe:

$$S_m = \sum_{n=0}^{m} q^n = q^0 + q^1 + q^2 + q^3 + \ldots + q^m$$

Multiplikation mit q:

$$q \cdot S_m = q^1 + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots + q^{m+1}$$

Durch Differenzbildung beider Gleichungen erhält man eine Reihe, die sich wie ein Teleskop zusammenschrumpfen lässt:

$$S_m - q \cdot S_m = q^0 \underbrace{- q^1 + q^1}_{=0} \underbrace{- q^2 + q^2}_{=0} \underbrace{- q^3 + q^3}_{=0} - \ldots \underbrace{- q^m + q^m}_{=0} - q^{m+1}$$

Somit gilt für $q \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$:

$$S_m = \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q}$$

■

Aufgabe 167. Durch Partialbruchzerlegung erhält man eine Teleskopreihe:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\
&= \left[\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] + \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right] + \ldots + \left[\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right] \\
&= \frac{1}{1} + \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right] + \left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right] + \left[-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right] + \ldots - \frac{1}{m+1} \\
&= 1 - \frac{1}{m+1}
\end{aligned}$$

■

Aufgabe 168. Die Summenformel für Kubikzahlen

$$\sum_{n=1}^{m} n^3 = \left[\sum_{n=1}^{m} n\right]^2 = \left[\frac{m(m+1)}{2}\right]^2$$

lässt sich durch vollständige Induktion beweisen:

- Induktionsanfang für $m = 1$:

$$\sum_{n=1}^{m} n^3 = 1^3 = 1 = \left[\frac{1 \cdot (1+1)}{2}\right]^2 \quad \checkmark$$

- Induktionsschritt:

$$\sum_{n=1}^{m} n^3 = \left[\frac{m(m+1)}{2}\right]^2 \qquad \text{Induktionsannahme } A(m)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{m+1} n^3 = \left[\frac{m(m+1)}{2}\right]^2 + (m+1)^3 \qquad \text{Addition einer weiteren Kubikzahl}$$

$$= \left(\frac{m+1}{2}\right)^2 \cdot \left[m^2 + 4(m+1)\right]$$

$$= \left[\frac{(m+1)(m+2)}{2}\right]^2 \qquad \text{Induktionsbehauptung } A(m+1)$$

■

Aufgabe 169. Die Folgen sind konvergent, besitzen also Grenzwerte $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Gegeben sei $\varepsilon > 0$. Somit ist auch $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, und es existiert ein Index n_ε mit:

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n > n_\varepsilon$$

Unter Verwendung der Dreiecksungleichung (19) folgt die zu beweisende Summenregel:

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a + b)| &= |(a_n - a) + (b_n - b)| \\ &\leq \underbrace{|(a_n - a)|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|(b_n - b)|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon \quad \text{für alle } n > n_\varepsilon \end{aligned}$$

Für die Herleitung der Differenzregel ersetzt man b_n durch $-b_n$ und b durch $-b$:

$$\begin{aligned} |(a_n - b_n) - (a - b)| &= |(a_n - a) + (b - b_n)| \\ &\leq |(a_n - a)| + |(b_n - b)| < \varepsilon \quad \text{für alle } n > n_\varepsilon \end{aligned}$$

■

Aufgabe 170. Konvergente Folgen (a_n) und (b_n) besitzen nicht nur (endliche) Grenzwerte a und b, sondern auch Schranken:

$$a_n \in [s_a, S_a] \quad \text{und} \quad b_n \in [s_b, S_b] \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

Der betragsgrößte Wert ist eine Konstante, die nicht kleiner als eins (Vermeidung der Division durch null bei zwei Nullfolgen) sein möge:

$$S = \max\{|s_a|, |S_a|, |s_b|, |S_b|, 1\} \tag{310}$$

Gemäß der fundamentalen Grenzwertdefinition gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ bzw. $\frac{\varepsilon}{2S} > 0$ ein n_ε, so dass gilt:

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2S} \quad \text{und} \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2S} \quad \text{für alle } n > n_\varepsilon$$

Schließlich erhält man mithilfe der Dreiecksungleichung (19) die Bestätigung, dass der Grenzwertsatz für die Multiplikation Gültigkeit besitzt:

$$\begin{aligned} |(a_n \cdot b_n) - (a \cdot b)| &= |(a_n - a) \cdot b_n + (b_n - b) \cdot a| \\ &\leq |(a_n - a) \cdot b_n| + |(b_n - b) \cdot a| \\ &= \underbrace{|a_n - a|}_{<\frac{\varepsilon}{2S}} \cdot \underbrace{|b_n|}_{\leq S} + \underbrace{|b_n - b|}_{<\frac{\varepsilon}{2S}} \cdot \underbrace{|a|}_{\leq S} \\ &< \varepsilon \quad \text{für alle } n > n_\varepsilon \end{aligned}$$

Bei einer konstanten Folge ($b_n = c$) vereinfacht sich die Produktregel zur Faktorregel.

■

Aufgabe 171. Im Mittelpunkt des Beweises steht die (für beliebig wählbare Toleranzen $\varepsilon > 0$ und zugehörige Startindizes n_ε bzw. n_b) zu erfüllende Ungleichung (247):

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| \leq \underbrace{|a_n - a|}_{<\,\varepsilon_a} \cdot \underbrace{\left|\frac{1}{b_n}\right|}_{x} + \underbrace{|b_n - b|}_{<\,\varepsilon_b} \cdot \underbrace{\left|\frac{a}{b_n b}\right|}_{y} < \varepsilon \quad \text{für alle } n > \max\{n_\varepsilon, n_b\} \tag{311}$$

Eine Größe, die zur Abschätzung von x und y herangezogen werden kann, ist der Grenzwert b, weil dieser gemäß Voraussetzung nicht null sein darf. Anstelle des allgemeinen $\varepsilon > 0$ betrachte man $\frac{|b|}{3} > 0$. Da (b_n) konvergiert, existiert ein Index n_b, so dass:

$$b_n \neq 0 \quad \text{und} \quad |b_n - b| < \frac{|b|}{3} \quad \text{für alle } n > n_b$$

Gemäß der modifizierten Dreiecksungleichung (270) gilt $|b - b_n| \geq |b| - |b_n|$ und somit:

$$|b| - |b_n| \leq |b - b_n| = |b_n - b| < \frac{|b|}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3}|b| < |b_n| \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{|b_n|} < \frac{3}{2|b|}$$

Damit die Ungleichung (311) erfüllt ist, wähle man:

$$\varepsilon_a = \frac{|b|}{3}\varepsilon \quad \text{und} \quad \varepsilon_b = \begin{cases} \dfrac{b^2}{3|a|}\varepsilon & \text{für } a \neq 0 \\ \varepsilon & \text{für } a = 0 \end{cases}$$

Es ist $\varepsilon_a \cdot x < \frac{|b|}{3}\varepsilon \cdot \frac{3}{2|b|} = \frac{\varepsilon}{2}$ und wegen $y = x \cdot \left|\frac{a}{b}\right|$ auch $\varepsilon_b \cdot y < \frac{\varepsilon}{2}$. Die Fallunterscheidung für ε_b verhindert eine Division durch $a = 0$.

■

Aufgabe 172. Die Grenzwertsätze für Folgen lassen sich auf Funktionen übertragen, weil sich die Grenzwerte der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ mithilfe von (beliebigen) Folgen (x_n), die ihrerseits den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_{\mathrm{G}} \tag{312}$$

besitzen, ausdrücken lassen:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_{\mathrm{G}}} f(x) &= \lim_{n\to\infty} f(x_n)\\ \lim_{x\to x_{\mathrm{G}}} g(x) &= \lim_{n\to\infty} g(x_n)\end{aligned} \tag{313}$$

Die Grenzwerte müssen existieren. Dazu gehört bei endlichen x_{G} die Forderung, dass links- und rechtsseitiger Grenzwert gleich sind:

$$\lim_{x\to x_{\mathrm{G}}} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_{\mathrm{G}}\\ x\le x_{\mathrm{G}}}} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_{\mathrm{G}}\\ x\ge x_{\mathrm{G}}}} f(x) \tag{314}$$

Beispiele:

- Die Sprungfunktion

  $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 2 \\ 1 & \text{für } x \ge 2 \end{cases}$$

  besitzt an der Stelle $x_{\mathrm{G}} = 2$ keinen Grenzwert, denn $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x\le 2}} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x\ge 2}} f(x) = 1$.

- Die Funktion

  $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 2 \\ 1 & \text{für } x \ne 2 \end{cases} \tag{315}$$

  ist an der Stelle $x_{\mathrm{G}} = 2$ zwar unstetig, besitzt dort aber dennoch einen Grenzwert:

  $$\lim_{x\to 2} f(x) = 1 \ne f(2)$$

- Eine Hyperbel besitzt im Unendlichen den Grenzwert null:

  $$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

  (Die Grenzwertsätze gelten auch für $x \to \infty$ oder $x \to -\infty$.)

- Der Grenzwert darf unendlich sein (uneigentlicher Grenzwert):

  $$\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^x = \infty$$

- Der Sinus besitzt im Unendlichen keinen Grenzwert:

  $$\lim_{x\to\infty} \sin(x) = ?$$

Erhält man durch Anwendung eines Grenzwertsatzes einen unbestimmten Ausdruck, z. B. vom Typ $\frac{\infty}{\infty}$, dann kann dieser mithilfe der Regel von L'Hospital (67) behandelt werden.

■

Aufgabe 173. Es seien Folgen (x_n) und (y_n) gegeben mit $y_n = f(x_n)$ und den Grenzwerten:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_{\mathrm{G}} \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{x\to x_{\mathrm{G}}} f(x) = y_{\mathrm{G}}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_{\mathrm{G}}} g(f(x)) &= \lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) \\ &= \lim_{n\to\infty} g(y_n) \\ &= g(y_{\mathrm{G}}) \\ &= g\left(\lim_{x\to x_{\mathrm{G}}} f(x)\right)\end{aligned}$$

Wie bereits am Beispiel der Funktion (315) erläutert, muss der Funktionswert $f(x_{\mathrm{G}})$ nicht gleich dem Grenzwert y_{G} sein. Lediglich bei der Funktion g wird Stetigkeit (an der Stelle y_{G}) vorausgesetzt, damit das Ergebnis nicht davon abhängt, ob (y_n) von links oder rechts gegen y_{G} konvergiert.

■

Aufgabe 174. Gemäß dem Cauchy-Kriterium (125) konvergiert die Reihe bzw. Folge (S_n), wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_ε gibt, für das gilt:

$$|S_n - S_m| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{m} a_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon \quad \text{für alle } m > n > n_\varepsilon \tag{316}$$

Für $m = n + 1$ erhält man:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+1} a_k\right| = |a_{n+1}| < \varepsilon$$

Da ε beliebig klein sein kann, muss (a_n) eine Nullfolge sein: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

In Aufgabe 191 wird gezeigt, dass die harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

gegen unendlich strebt. Sie divergiert also, obwohl (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n}$ eine Nullfolge ist.

Weil das notwendige Konvergenzkriterium nicht hinreichend ist, eignet es sich nicht zum Konvergenznachweis. Dafür lässt sich mit seiner Hilfe bei manchen Reihen sehr schnell Divergenz nachweisen, wie im Falle der alternierenden Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 \pm \ldots \tag{317}$$

Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \neq 0$.

■

Aufgabe 175. Es gilt die Abschätzung:

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| && \text{absolut konvergente Reihe} \\
&= |a_0| + |a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots \\
&\geq |a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots| && \text{verallgemeinerte Dreiecksungleichung (194)} \\
&= \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| && \text{(bedingt) konvergente Reihe} \\
&= |A|
\end{aligned}$$

Der Satz über absolut konvergente Reihen ist nicht umkehrbar. Insbesondere darf das Relationszeichen nicht durch ein Gleichheitszeichen ersetzt werden. Als Beispiel betrachte man die alternierende harmonische Reihe (169), die bedingt konvergiert, während die harmonische Reihe (168) divergiert.

■

Allgemeine Erläuterungen:

- Weil die Summanden a_n unterschiedliche Vorzeichen besitzen können, spricht man bei der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ von bedingter Konvergenz (das Adjektiv kann auch entfallen).
- Für die Konvergenz einer Reihe ist unerheblich, ob der Summenwert A positiv oder negativ ist.
- In Aufgabe 26 wird die Gültigkeit der Dreiecksungleichung durch Quadrieren und Vergleich beider Seiten gezeigt. Die verallgemeinerte Dreiecksungleichung (194) lässt sich durch Rekursion herleiten und gilt sogar für komplexe Zahlen.

Aufgabe 176. Gemäß dem Monotoniekriterium für Folgen ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, denn die Folge der Partialsummen (S_m) mit

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} |a_n|$$

ist monoton steigend und begrenzt durch den Summenwert der Vergleichsreihe.

■

Aufgabe 177. Die Minorante steigt monoton, denn sie besitzt positive Summanden $b_n \geq 0$. Folglich ist sie bestimmt divergent mit dem (uneigentlichen) Grenzwert $+\infty$.

Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ strebt ebenfalls gegen unendlich (und ist somit divergent), weil ihre Summanden größer als oder genauso groß wie die der Vergleichsreihe sind: $a_n \geq b_n$.

■

Aufgabe 178. Summenformel der endlichen geometrischen Reihe (128):

$$S_m = \sum_{n=0}^{m} q^n = \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q} \quad \text{für} \quad q \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$$

Fallunterscheidung:

- Für $|q| \in (0; 1)$ bzw. $q \in (-1; 1) \setminus \{0\}$ existiert der Grenzwert, denn $\lim\limits_{m\to\infty} q^{m+1} = 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

- Für $q \in \mathbb{R} \setminus [-1; 1]$ erhält man wegen $\lim\limits_{m\to\infty} |q^{m+1}| = \infty$ eine divergente Reihe.
- Der Fall $q = -1$ liefert eine divergente alternierende Reihe (317).
- Auch für $q = 1$ ist die Reihe divergent:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1^n = 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots = \infty$$

- Für $q = 0$ stellt der erste Summand den unbestimmten Ausdruck 0^0 dar.

■

Aufgabe 179. Im Mittelpunkt des Quotientenkriteriums steht die aus Quotienten

$$q_n = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 0$$

gebildete Folge (q_n) mit dem Grenzwert:

$$\tilde{q} = \lim_{n\to\infty} q_n \geq 0$$

Gemäß der fundamentalen Grenzwertdefinition (308) konvergiert (q_n), wenn es zu jedem beliebigen $\varepsilon > 0$ einen Index $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt, so dass:

$$|q_n - \tilde{q}| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_\varepsilon$$

Insbesondere gilt dann

$$q_n < q \quad \text{für alle } n \geq n_\varepsilon$$

mit der oberen Schranke:

$$q = \tilde{q} + \varepsilon$$

Verwendet man n_ε als untere Grenze für die (Ersatz-)Reihe, dann lässt sich diese mithilfe der geometrischen Reihe (148) abschätzen:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n_\varepsilon}^{\infty} a_{k+1}\right| &\leq \sum_{k=n_\varepsilon}^{\infty} |a_{k+1}| && \text{mit } |a_{k+1}| = q_k \cdot |a_k| < q \cdot |a_k| \\
&= \underbrace{|a_{n_\varepsilon+1}|}_{<q\cdot|a_{n_\varepsilon}|} + \underbrace{|a_{n_\varepsilon+2}|}_{<q^2\cdot|a_{n_\varepsilon}|} + \underbrace{|a_{n_\varepsilon+3}|}_{<q^3\cdot|a_{n_\varepsilon}|} + \underbrace{|a_{n_\varepsilon+4}|}_{<q^4\cdot|a_{n_\varepsilon}|} + \ldots \\
&< |a_{n_\varepsilon}| \cdot \sum_{k=1}^{\infty} q^k && \text{Geometrische Reihe (148)} \\
&= |a_{n_\varepsilon}| \cdot \left[\frac{1}{1-q} - 1\right] && \text{für } q \in (0;1)
\end{aligned}$$

Der Summenwert ist endlich. Somit ist gezeigt, dass die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

konvergiert (sogar absolut), wenn ihr Quotientengrenzwert

$$\tilde{q} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q - \varepsilon < 1 - \varepsilon$$

kleiner als eins ist. Man beachte, dass das $\tilde{q}$ der Eins beliebig nahe kommen kann, weil ε beliebig klein werden darf.

Für $\tilde{q} > 1$ divergiert die Reihe, denn (a_n) ist dann keine Nullfolge; dies verletzt das notwendige Konvergenzkriterium (144). Der Fall $\tilde{q} = 1$ erfordert weitere Untersuchungen.

■

Der Vollständigkeit halber sei angemerkt, dass sich die Folge (a_n) aus mehreren Teilfolgen zusammensetzen kann, z. B.:

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{für } n \text{ gerade} \\ -\dfrac{1}{2^n} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

In solchen Fällen muss zwischen dem oberen Grenzwert (Limes superior) und dem unteren Grenzwert (Limes inferior) unterschieden werden:

- $\limsup\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$: Konvergenz
- $\liminf\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$: Divergenz

Aufgabe 180. Die Folge (w_n) mit

$$w_n = \sqrt[n]{|a_n|} \geq 0 \tag{318}$$

konvergiert gegen den Grenzwert

$$w = \lim_{n\to\infty} w_n \ ,$$

wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert mit:

$$|w_n - w| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_\varepsilon$$

Abschätzung nach oben:

$$w_n < \underbrace{w + \varepsilon}_{q} \quad \text{für alle } n \geq n_\varepsilon \tag{319}$$

Zu untersuchende (Ersatz-)Reihe mit n_ε als untere Grenze:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n_\varepsilon}^{\infty} a_k\right| &\leq \sum_{k=n_\varepsilon}^{\infty} |a_k| && \text{Abschätzung: } |a_k| = w_k^k < q^k \\
&= \underbrace{|a_{n_\varepsilon}|}_{<q^{n_\varepsilon}} + \underbrace{|a_{n_\varepsilon+1}|}_{<q^{n_\varepsilon+1}} + \underbrace{|a_{n_\varepsilon+2}|}_{<q^{n_\varepsilon+2}} + \underbrace{|a_{n_\varepsilon+3}|}_{<q^{n_\varepsilon+3}} + \ldots && \text{gemäß (318) und (319)} \\
&< q^{n_\varepsilon} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k && \text{Geometrische Reihe (148)} \\
&= q^{n_\varepsilon} \cdot \left[\frac{1}{1-q}\right] && \text{für } q \in (0;1)
\end{aligned}$$

Man erhält einen endlichen Summenwert, d. h. eine Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

konvergiert (absolut), wenn ihr Wurzelgrenzwert kleiner als eins ist:

$$w = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q - \varepsilon < 1 - \varepsilon$$

Das ε darf beliebig klein sein, weshalb das w der Eins beliebig nahe kommen kann.

Sollte $w > 1$ sein, dann kann (a_n) keine Nullfolge sein; die Reihe divergiert. Der Fall $w = 1$ liefert keine Erkenntnisse bezüglich des Konvergenzverhaltens.

■

Wie auch beim Quotientenkriterium muss der Grenzwertbegriff im Falle unterschiedlicher Häufungspunkte etwas erweitert werden:

- $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$: Konvergenz
- $\liminf\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$: Divergenz

Aufgabe 181. Der Unterschied zwischen beiden Konvergenzkriterien offenbart sich bei Reihen, die aus mehreren Teilfolgen gebildet werden, z. B.:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{3^{(-1)^n - n}}_{a_n} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^3} + \ldots \tag{320}$$

mit

$$a_n = \begin{cases} 3^{-n+1} & \text{für } n \text{ gerade} \\ 3^{-n-1} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Nächstes Folgenglied:

$$a_{n+1} = \begin{cases} 3^{-n-2} & \text{für } n \text{ gerade} \\ 3^{-n} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Quotient:

$$q_n = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \begin{cases} 3^{-3} & \text{für } n \text{ gerade} \\ 3 & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Das Quotientenkriterium liefert wegen

$$\limsup_{n\to\infty} q_n = 3 \geq 1$$

und

$$\liminf_{n\to\infty} q_n = \frac{1}{27} \leq 1$$

keine Aussage über das Konvergenzverhalten.

Bildung der n-ten Wurzel:

$$w_n = \sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 3^{\frac{-n+1}{n}} & \text{für } n \text{ gerade} \\ 3^{\frac{-n-1}{n}} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Gemäß dem Wurzelkriterium konvergiert die Reihe:

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \frac{1}{3} < 1$$

■

Anmerkungen zum betrachteten Beispiel (320):

- Es handelt sich um eine geometrische Reihe (148), bei der Summanden paarweise vertauscht sind:

$$S = \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3^0} = \frac{1}{2}$$

- Im Gegensatz zum Quotientenkriterium gibt es beim Wurzelkriterium nur einen Häufungspunkt: $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = \limsup\limits_{n\to\infty} w_n = \liminf\limits_{n\to\infty} w_n$

Aufgabe 182. Die Folge der Partialsummen (S_m) mit

$$\begin{aligned}
S_0 &= a_0 \\
S_1 &= a_0 - a_1 && = S_0 - a_1 \\
S_2 &= a_0 - a_1 + a_2 && = S_1 + a_2 \\
&\vdots && \vdots \\
S_{2k-1} &= a_0 - a_1 + a_2 \mp \ldots - a_{2k-1} && = S_{2k-2} - a_{2k-1} \\
S_{2k} &= a_0 - a_1 + a_2 \mp \ldots - a_{2k-1} + a_{2k} && = S_{2k-1} + a_{2k} \\
&\vdots && \vdots
\end{aligned}$$

lässt sich in zwei Teilfolgen zerlegen. Aus der Bedingung $0 \leq a_{n+1} \leq a_n$ folgt:

- Die Teilfolge (S_{2k}) ist wegen

  $$S_{2k} = \underbrace{a_{2k} - a_{2k-1}}_{\leq 0} + S_{2k-2} \leq S_{2k-2}$$

  monoton fallend und besitzt null als untere Schranke:

  $$S_{2k} = \underbrace{a_0 - a_1}_{\geq 0} + \underbrace{a_2 - a_3}_{\geq 0} \pm \ldots + \underbrace{a_{2k-2} - a_{2k-1}}_{\geq 0} + a_{2k} \geq 0$$

- Auf analoge Weise lässt sich zeigen, dass die Teilfolge (S_{2k+1}) monoton steigt und nach oben durch a_0 beschränkt ist:

  $$S_{2k+1} = \underbrace{a_{2k} - a_{2k+1}}_{\geq 0} + S_{2k-1} \geq S_{2k-1}$$

  und

  $$S_{2k+1} = a_0 \underbrace{- a_1 + a_2}_{\leq 0} \underbrace{- a_3 + a_4}_{\leq 0} \mp \ldots \underbrace{- a_{2k-1} + a_{2k}}_{\leq 0} - a_{2k+1} \leq a_0$$

Laut dem in Aufgabe 149 bewiesenen Monotoniekriterium konvergieren beide Teilfolgen:

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k} = \overline{S} < \infty \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} S_{2k+1} = \underline{S} < \infty$$

Die Grenzwerte sind identisch, denn (a_n) ist nach Voraussetzung eine Nullfolge:

$$\underline{S} - \overline{S} = \lim_{k\to\infty} S_{2k+1} - \lim_{k\to\infty} S_{2k} = \lim_{k\to\infty} (S_{2k+1} - S_{2k}) = \lim_{k\to\infty} -a_{2k+1} = 0 \tag{321}$$

Somit ist gezeigt, dass sich alternierende Reihen mit dem Leibniz-Kriterium auf Konvergenz untersuchen lassen.

Im Gegensatz zu anderen Konvergenzkriterien lässt sich keine absolute, sondern lediglich bedingte Konvergenz nachweisen. Die „Bedingung“ lautet, dass benachbarte Summanden nicht auseinander gerissen werden, weil sie sich im Grenzfall (321) paarweise aufheben. Beispielsweise darf man die (bedingt konvergente) alternierende harmonische Reihe (169) nicht in eine (divergente) Reihe mit positiven und eine (ebenfalls divergente) Reihe mit negativen Summanden aufteilen.

■

Aufgabe 183. Durch mehrfache partielle Integration

$$
\begin{aligned}
& & f(x) &= f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\; dt & &= f(x_0) + R_0(x) \\
&\text{mit} & R_0(x) &= \frac{1}{0!}\int_{x_0}^{x} f'(t)\cdot(x-t)^0\; dt & &= -\frac{1}{1!}\left[f'(t)\cdot(x-t)^1\right]_{x_0}^{x} + R_1(x) \\
&\text{mit} & R_1(x) &= \frac{1}{1!}\int_{x_0}^{x} f''(t)\cdot(x-t)^1\; dt & &= -\frac{1}{2!}\left[f''(t)\cdot(x-t)^2\right]_{x_0}^{x} + R_2(x) \\
&\text{mit} & R_2(x) &= \frac{1}{2!}\int_{x_0}^{x} f'''(t)\cdot(x-t)^2\; dt & &= -\frac{1}{3!}\left[f'''(t)\cdot(x-t)^3\right]_{x_0}^{x} + R_3(x) \\
& & &\vdots & &\vdots \\
&\text{mit} & R_{n-1}(x) &= \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t)\cdot(x-t)^{n-1}\; dt & &= \underbrace{-\frac{1}{n!}\left[f^{(n)}(t)\cdot(x-t)^n\right]_{x_0}^{x}}_{=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n} + R_n(x)
\end{aligned}
$$

erhält man die gesuchte Reihe:

$$
f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{T_n(x)} + R_n(x) \tag{322}
$$

Aus dem Index n des Taylorpolynoms $T_n(x)$ ist die höchste Potenz ersichtlich. Das aus Termen der Ordnung $n+1$ und höher bestehende Restglied $R_n(x)$ wird vernachlässigt.

■

Aufgabe 184. Durch Fortsetzung der in Aufgabe 183 begonnenen Rekursion überführt man die Integralform des Restglieds in eine unendliche Reihe:

$$
\begin{aligned}
R_n(x) &= \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\cdot(x-t)^n\; dt \\
&= \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1} + R_{n+1}(x) \\
&= \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1} + \frac{f^{(n+2)}(x_0)}{(n+2)!}\cdot(x-x_0)^{n+2} + R_{n+2}(x) \\
&= \dots \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k
\end{aligned}
$$

■

Aufgabe 185. Herleitung der Lagrangeschen Restgliedformel:

$$\begin{aligned}
R_n(x) &= \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\cdot(x-t)^n\,dt && \text{Restglied der Taylorreihe als Integral}\\
&= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\cdot\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\,dt && \text{Erweiterter Mittelwertsatz (98) mit } \xi\in[x_0,x]\\
& && \text{(bzw. } \xi\in[x,x_0] \text{ für } x<x_0)\\
&= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\cdot\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right]_{x_0}^{x} && \text{Potenzregel}\\
&= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1} && \text{Restglied nach Lagrange}
\end{aligned}$$

Anmerkungen zur Stetigkeit der $(n+1)$-ten Ableitung der Funktion f:

- Der für die Herleitung verwendete erweiterte Mittelwertsatz der Integralrechnung fordert, dass $f^{(n+1)}(x)$ stetig ist.
- Der deutsche Mathematiker Oscar Schlömilch (1823-1901) konnte zeigen, dass die Restgliedformel auch für unstetige $f^{(n+1)}$ Gültigkeit besitzt. Lediglich $f^{(n)}$ muss stetig sein.

■

Aufgabe 186. Die auf Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) zurückgehende Darstellung folgt unmittelbar aus der Anwendung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung (97) auf die Integralform (158) des Restglieds:

$$\begin{aligned}
R_n(x) &= \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\cdot(x-t)^n\,dt\\
&= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\cdot(x-\xi)^n\cdot(x-x_0)
\end{aligned}$$

■

Aufgabe 187. Anwendung des Quotientenkriteriums (149) auf die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\underbrace{c_n x^n}_{a_n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}x^{n+1}}{c_n x^n}\right| = |x|\cdot\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|}_{\frac{1}{r}}\begin{cases} <1 & : \text{ Konvergenz}\\ =1 & : \text{ keine Aussage}\\ >1 & : \text{ Divergenz}\end{cases}$$

liefert den Konvergenzradius:

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|\begin{cases} >|x| & : \text{ Konvergenz}\\ =|x| & : \text{ keine Aussage}\\ <|x| & : \text{ Divergenz}\end{cases}$$

■

Aufgabe 188. Mit dem Wurzelkriterium (150)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n x^n|} = |x| \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}_{\frac{1}{r}} \begin{cases} < 1 : & \text{Konvergenz} \\ = 1 : & \text{keine Aussage} \\ > 1 : & \text{Divergenz} \end{cases}$$

erhält man

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$$

als Konvergenzradius der Potenzreihe (162).

■

Aufgabe 189. Um den Konvergenzradius r ermitteln zu können, wird die Taylorreihe mithilfe der Substitution

$$z = x - x_0$$

in eine (unverschobene) Potenzreihe (162) überführt:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}}_{c_k} (x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

Zur Auswahl stehen das Quotientenkriterium (164) und das Wurzelkriterium (165). Die Reihe konvergiert für $|z| = |x - x_0| < r$.

Durch Rücksubstitution erhält einen um x_0 verschobenen Konvergenzbereich (163):

$$x \begin{cases} \in (x_0 - r, x_0 + r) : & \text{Konvergenz} \\ \in \{x_0 - r, x_0 + r\} : & \text{keine Aussage} \\ \notin [x_0 - r, x_0 + r] : & \text{Divergenz} \end{cases} \tag{323}$$

■

Aufgabe 190. Ableitungen für $x \neq 0$:

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \cdot 2x^{-3}$$

$$f''(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \left[4x^{-6} - 6x^{-4}\right]$$

$$f'''(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \left[8x^{-9} - 36x^{-7} + 24x^{-5}\right]$$

$$f^{(4)}(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \left[16x^{-12} - 144x^{-10} + 300x^{-8} - 120x^{-6}\right]$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \left[2^n \cdot x^{-3n} + a_{3n-2} \cdot x^{-3n+2} + a_{3n-4} \cdot x^{-3n+4} + \ldots + a_{n+2} \cdot x^{-n-2}\right]$$

Die Ableitungen an der Stelle $x_0 = 0$ erhält man durch Grenzwertbetrachtungen:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{3n}} \left[2^n + a_{3n-2}\cdot x^2 + a_{3n-4}\cdot x^4 + \ldots + a_{n+2}\cdot x^{3n-n-2}\right] \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{3n}} \cdot \lim_{x\to 0} \left[2^n + a_{3n-2}\cdot x^2 + a_{3n-4}\cdot x^4 + \ldots + a_{n+2}\cdot x^{3n-n-2}\right] \\
&= 2^n \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^{-3n}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}} \\
&\overset{\text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{“}}{=} 2^n \cdot \lim_{x\to 0} \frac{-3n\cdot x^{-3n-1}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}\cdot(-2x^{-3})} \\
&= 3n\cdot 2^{n-1} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^{-3n+2}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}} \\
&\overset{\text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{“}}{=} 3n\cdot 2^{n-1} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{(-3n+2)x^{-3n+1}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}\cdot(-2x^{-3})} \\
&= 3n(3n-2)\cdot 2^{n-2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^{-3n+4}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}} \\
&= \ldots = 0
\end{aligned}$$

L'Hospital muss solange angewandt werden, bis der Zähler $\lim\limits_{x\to 0} x^{0} = 1$ oder $\lim\limits_{x\to 0} x^{1} = 0$ ist. Weil alle Ableitungen verschwinden, erhält man als Taylorreihe die Nullfunktion:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lim\limits_{x\to 0} f^{(n)}(x)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{c_n}_{=0} \cdot x^n = 0 \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}$$

Das Wurzelkriterium liefert die Bestätigung, dass der Konvergenzradius (erstaunlicherweise) gegen unendlich geht:

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \infty$$

■

Abschließend seien zwei weitere Beispiele genannt, bei denen die Taylorreihenentwicklung versagt, weil sämtliche Ableitungen (an der Stelle $x_0 = 0$) null sind:

$$f_1(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x \geq 0 \end{cases} \tag{324}$$

und

$$f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\cosh\left(x^{-3}\right)} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \tag{325}$$

Aufgabe 191. Die harmonische Reihe strebt gegen unendlich:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\Big[\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{>2\cdot\frac{1}{4}}\Big]+\Big[\underbrace{\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{8}}_{>4\cdot\frac{1}{8}}\Big]+\Big[\underbrace{\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}}_{>8\cdot\frac{1}{16}}\Big]+\Big[\underbrace{\frac{1}{17}+\ldots+\frac{1}{32}}_{>16\cdot\frac{1}{32}}\Big]+\ldots$$

$$\geq 1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots}_{\text{unendlich viele Terme}}$$

$$=\infty$$

Namensgebend für die harmonische Folge und die harmonische Reihe ist das harmonische Mittel (23), z. B. $\frac{1}{7}$ als harmonischer Mittelwert von $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{8}$.

■

Aufgabe 192. Die alternierende harmonische Reihe

$$A = \frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\pm\ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot a_n \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{1}{n} \tag{326}$$

ist (bedingt) konvergent, wie sich mit dem Leibniz-Kriterium leicht feststellen lässt:

1. Nullfolge (notwendiges Konvergenzkriterium):

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \quad ✓$$

2. Streng monoton fallende Folge:

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}^* \quad ✓$$

■

Aufgabe 193. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}} \quad \text{mit} \quad \alpha \leq 1$$

besitzt mit der harmonischen Reihe (168) eine divergente Minorante:

$$\frac{1}{n^{\alpha}} \geq \frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad n^{\alpha} \leq n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}^*$$

■

Aufgabe 194. Die Reihe konvergiert für $\alpha > 1$, weil die Folge der Partialsummen (S_m) monoton steigt und eine obere Schranke besitzt:

$$
\begin{aligned}
S_m &= \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^\alpha} \\
&\leq \sum_{n=1}^{2^m-1} \frac{1}{n^\alpha} \\
&= \frac{1}{1^\alpha} + \Bigg[\underbrace{\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}}_{\leq \frac{2}{2^\alpha}}\Bigg] + \Bigg[\underbrace{\frac{1}{4^\alpha} + \ldots + \frac{1}{7^\alpha}}_{\leq \frac{4}{4^\alpha}}\Bigg] + \ldots + \Bigg[\underbrace{\frac{1}{\left(2^{m-1}\right)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{\left(2^m - 1\right)^\alpha}}_{\leq \frac{2^{m-1}}{\left(2^{m-1}\right)^\alpha}}\Bigg] \\
&\leq \left(2^0\right)^{1-\alpha} + \left(2^1\right)^{1-\alpha} + \left(2^2\right)^{1-\alpha} + \ldots + \left(2^{m-1}\right)^{1-\alpha} \\
&= \sum_{n=0}^{m-1} \left(2^n\right)^{1-\alpha} \\
&= \sum_{n=0}^{m-1} \left(2^{1-\alpha}\right)^n \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \big(\underbrace{2^{1-\alpha}}_{q}\big)^n \\
&= \frac{1}{1 - 2^{1-\alpha}} \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}^*
\end{aligned}
$$

Die geometrische Reihe konvergiert, da die Basis $q = 2^{1-\alpha} = \dfrac{1}{2^{\alpha-1}} \in (0; 1)$.

■

Aufgabe 195. Entwicklung der Exponentialfunktion

$$f(x) = \mathrm{e}^x$$

in eine Taylorreihe:

1. Bildung der Ableitungen:

$$f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}$$

   Taylorreihe (155) für die Entwicklungsstelle $x_0 = 0$:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n!}}_{c_n} x^n \quad \checkmark$$

2. Konvergenzradius gemäß Quotientenkriterium (164):

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty} n+1 = \infty \quad \checkmark$$

3. Das Lagrangesche Restglied (160) verschwindet:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}|R_n(x)| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{f^{(n+1)}(x_0+\Theta(x-x_0))}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}\right| \quad \text{mit} \quad \Theta\in[0;1]\\ &= \underbrace{\mathrm{e}^{\Theta x}}_{\leq \mathrm{e}^{|x|}}\cdot\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}_{=0 \text{ gemäß } (124)}\\ &= 0 \quad \checkmark\end{aligned}$$

■

Aufgabe 196. Taylorreihe der Sinusfunktion $f(x)=\sin(x)$ an der Stelle $x_0=0$:

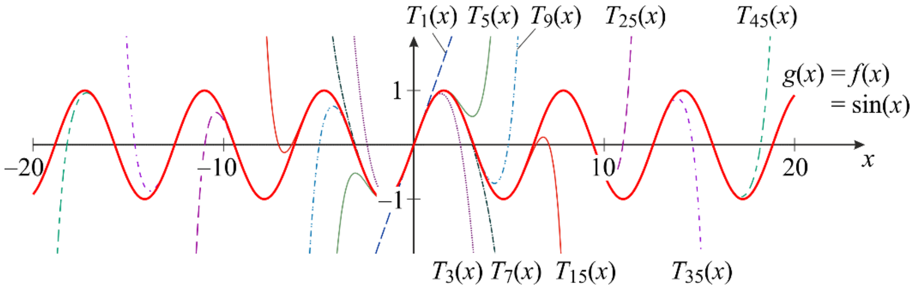
1. Ableitungen:

$f'(x)=\cos x,\ f''(x)=-\sin x,\ f'''(x)=-\cos x,\ f^{(4)}(x)=\sin x,\ f^{(n)}(x)=f^{(n-4)}(x)$

Mit $\sin(0)=0$ und $\cos(0)=1$ erhält man die Taylorpolynome:

$$\begin{aligned}T_n(x) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\\ &= \frac{1}{1!}x^1-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7\pm\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\\ &= \begin{cases}0 & \text{für } n=0\\ \sum\limits_{k=0}^{(n-1)/2}\underbrace{\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}}_{c_{2k+1}}x^{2k+1} & \text{für } n \text{ ungerade}\\ T_{n-1}(x) & \text{für } n \text{ gerade und } n\geq 2\end{cases}\end{aligned}$$

Taylorreihe: $g(x)=\lim\limits_{n\to\infty}T_n(x) \quad \checkmark$



2. Ermittlung des Konvergenzradius (249):

$$r = \sqrt{\lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_{2k+1}}{c_{2k+3}}\right|} = \sqrt{\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,\frac{(2k+3)!}{(-1)^{k+2}}\right|} = \sqrt{\lim_{k\to\infty}(2k+2)(2k+3)} = \infty\,\checkmark$$

3. Abschätzung des Lagrangeschen Restglieds (160) mit dem Limes superior:

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty}|R_n(x)| &= \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}\right| && \text{mit} \quad \Theta\in[0;1]\\
&\le \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| && \text{Grenzwert (124)}\\
&= 0 && \checkmark
\end{aligned}$$

■

Aufgabe 197. Taylorreihenentwicklung der Logarithmusfunktion an der Stelle $x_0 = 0$:

1. Funktion und Ableitungen:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(x+1)\ , & f(0) &= 0\\
f'(x) &= +\frac{1}{(x+1)}\ , & f'(0) &= +0!\\
f''(x) &= -\frac{1}{(x+1)^2}\ , & f''(0) &= -1!\\
f'''(x) &= +\frac{2}{(x+1)^3}\ , & f'''(0) &= +2!\\
f^{(4)}(x) &= -\frac{3!}{(x+1)^4}\ , & f^{(4)}(0) &= -3!\\
&\ \vdots & &\ \vdots\\
f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{(x+1)^n}\ , & f^{(n)}(0) &= (-1)^{n-1}\cdot(n-1)!
\end{aligned}$$

Taylorreihe:

$$\begin{aligned}
g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\\
&= f(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{n!}x^n\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{(-1)^{n-1}}{n}}_{c_n}x^n \quad \checkmark
\end{aligned}$$

2. Konvergenzradius aus Quotientenkriterium:

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \frac{n+1}{(-1)^n} \right| = 1$$

Der untere Rand $x = -1$ liefert eine divergente Reihe, die sich lediglich durch das Vorzeichen von der harmonischen Reihe (168) unterscheidet:

$$g(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (-1)^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Für den oberen Rand $x = +1$ erhält man die konvergente alternierende harmonische Reihe (169). Das Konvergenzintervall lautet also:

$$x \in (-1; 1] \quad \checkmark$$

3. Für $x \in [0; 1]$ gilt mit der Restgliedapproximation nach Lagrange (159):

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} \right| \quad \text{mit} \quad \xi \in [0; x] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left| (-1)^n \cdot \frac{n!}{(\xi+1)^{n+1}} \right| \cdot \underbrace{x^{n+1}}_{\leq 1} \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \underbrace{\frac{1}{(\xi+1)^{n+1}}}_{\leq 1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Für $x \in (-1; 0]$ kommt die Cauchy-Darstellung (161) zum Einsatz:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \cdot (x-\xi)^n \cdot x \right| \quad \text{mit} \quad \xi \in [x; 0] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| (-1)^n \cdot \frac{n!}{(\xi+1)^{n+1}} \cdot \frac{1}{n!} \cdot (x-\xi)^n \cdot x \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{|x-\xi|^n}{(\xi+1)^{n+1}} \cdot |x| \\
&= \frac{|x|}{\xi+1} \cdot \lim_{n\to\infty} \Bigg(\underbrace{\frac{\xi - x}{\xi+1}}_{= b \in [0; 1)} \Bigg)^n \\
&= 0
\end{aligned}$$

Nebenrechnung: Aus $x \in (-1; 0]$ und $\xi \in [x; 0]$ folgt unmittelbar, dass die Basis $b \geq 0$ sein muss. Außerdem ist $b < 1$:

$$x > -1 \quad \Leftrightarrow \quad -x < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \xi - x < \xi + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\xi - x}{\xi + 1} < 1$$

Das Restglied $R_n(x)$ geht also gegen null für $x \in (-1; 1]$.

■

Aufgabe 198. Aufteilung in zwei Funktionen:

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$$

Ersetzt man bei der Taylorreihe (174)

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad \text{für} \quad x \in (-1;1]$$

die Variable x durch $-x$, so erhält man die Taylorreihe der zweiten Funktion:

$$\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (-x)^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \quad \text{für} \quad x \in [-1;1)$$

Subtraktion beider Logarithmusfunktionen liefert die gesuchte Taylorreihe:

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \\ &= 2\left[\frac{x^1}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots\right] \\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{für} \quad x \in (-1;1) \end{aligned}$$

■

Aufgabe 199. Entwicklung des Binoms

$$f(x) = (1+x)^n$$

in eine Taylorreihe:

1. Ableitungen (und Funktionswert für $k = 0$):

$$f^{(k)}(x) = (n-k+1) \cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)n \cdot (1+x)^{n-k} \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{N} \qquad (327)$$

Taylorreihenentwicklung (155) an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n-k+1) \cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)n}{k!} \cdot x^k \qquad (328) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot x^k \end{aligned}$$

mit dem allgemeinen Binomialkoeffizienten (28):

$$c_k = \frac{(n-k+1) \cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)n}{k!} = \binom{n}{k}$$

2. Bestimmung des Konvergenzradius von $g(x)$ mittels Quotientenkriterium:

$$\begin{aligned}
r &= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right| \\
&= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(n-k+1)\cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)n}{k!} \cdot \frac{(k+1)!}{(n-k)\cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)n} \right| \\
&= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{k+1}{n-k} \right| \\
&= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{1+\frac{1}{k}}{\frac{n}{k}-1} \right| \\
&= 1
\end{aligned}$$

Lässt man beliebige $n \in \mathbb{R}$ zu, dann gehören die Ränder nicht zum Konvergenzintervall der binomischen Reihe (328). Beispielsweise erhält man für $n = -1$ mit

$$\binom{-1}{k} = \frac{(-k)\cdot \ldots \cdot (-3)(-2)(-1)}{k!} = (-1)^k \quad \text{für} \quad k \in \mathbb{N} \tag{329}$$

die beiden divergenten Reihen:

$$g(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k} = 1 - 1 + 1 - 1 \pm \ldots$$

und

$$g(-1) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k} \cdot (-1)^k = 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots = \infty$$

3. Konvergenz des Restglieds siehe Aufgabe 200.

■

Aus Anwendersicht ist die Frage nach dem Konvergenzverhalten der Ränder uninteressant. Schließlich kann man auch ohne binomische Reihe ausrechnen, dass $(1-1)^n = 0$ für $n > 0$ und $(1+1)^n = 2^n$ für $n \in \mathbb{R}$.

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass der Konvergenzbereich in folgender Weise von $n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ abhängt:

- $x \in (-1; 1)$ für $n \leq -1$ (allgemeine harmonische Reihe (170) als Vergleichsreihe)
- $x \in (-1; 1]$ für $n \in (-1; 0)$ (Nachweis der Konvergenz von $g(1)$ mit Leibniz)
- $x \in [-1; 1]$ für $n > 0$ (Vergleich mit allgemeiner harmonischer Reihe)

Bei natürlichen Exponenten $n \in \mathbb{N}$ erhält man als Sonderfall den für alle $x \in \mathbb{R}$ gültigen binomischen Lehrsatz, vgl. Aufgaben 33, 34 und 202.

Aufgabe 200. Für den Konvergenznachweis wird die Integralform des Restglieds (158)

$$R_m(x) = \frac{1}{m!} \int_0^x f^{(m+1)}(t) \cdot (x-t)^m \, dt$$

mit den Ableitungen (327)

$$f^{(k)}(x) = k! \binom{n}{k} \cdot (1+x)^{n-k}$$

verwendet:

1a) Für $x \in [0;1)$ und $n \geq 0$ gilt die Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} |R_m(x)| &= \lim_{m\to\infty} \left| \frac{1}{m!} \int_0^x (m+1)! \binom{n}{m+1} (1+t)^{n-(m+1)} \cdot (x-t)^m \, dt \right| \\
&= \lim_{m\to\infty} (m+1) \left| \binom{n}{m+1} \right| \int_0^x \underbrace{(1+t)^n}_{\leq (1+x)^n} \cdot \underbrace{(1+t)^{-m-1}}_{\leq 1} \cdot (x-t)^m \, dt \\
&\leq \lim_{m\to\infty} (m+1) \left| \binom{n}{m+1} \right| (1+x)^n \int_0^x (x-t)^m \, dt \\
&= \lim_{m\to\infty} (m+1) \left| \binom{n}{m+1} \right| (1+x)^n \left[\frac{-(x-t)^{m+1}}{m+1} \right]_0^x \\
&= (1+x)^n \cdot \underbrace{\lim_{m\to\infty} \left| \binom{n}{m+1} \right| x^{m+1}}_{=A_1} \\
&= 0 \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Die Taylorreihe (328) konvergiert absolut (Betrag bei Quotientenkriterium):

$$g_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left| \binom{n}{k} \right| \cdot x^k = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=-1}^{m} \left| \binom{n}{k+1} \right| \cdot x^{k+1} \tag{330}$$

Als „letztes" Glied der Reihe $g_1(x)$ muss A_1 gemäß dem notwendigen Konvergenzkriterium gegen null gehen:

$$A_1 = \lim_{m\to\infty} \left| \binom{n}{m+1} \right| x^{m+1} = 0$$

1b) Auch für $x \in [0;1)$ und $n < 0$ verschwindet das Restglied:

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} |R_m(x)| &= \lim_{m\to\infty} (m+1) \left| \binom{n}{m+1} \right| \int_0^x \underbrace{(1+t)^n}_{\leq 1} \cdot \underbrace{(1+t)^{-m-1}}_{\leq 1} \cdot (x-t)^m \, dt \\
&\leq \lim_{m\to\infty} (m+1) \left| \binom{n}{m+1} \right| \int_0^x (x-t)^m \, dt \\
&= A_1 \\
&= 0 \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Aufgrund der Ähnlichkeit zu Fall 1a) sind nicht alle Zwischenschritte dargestellt.

2) Für $x \in (-1;0)$ erhält man:

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} |R_m(x)| &= \lim_{m\to\infty} (m+1) \left| \binom{n}{m+1} \int_0^x (1+t)^{n-m-1} \cdot (x-t)^m \, dt \right| \\
&= \lim_{m\to\infty} (m+1) \left| \binom{n}{m+1} \right| \int_0^{-x} (1-t)^{n-m-1} \cdot \underbrace{|(x+t)^m|}_{=(-x-t)^m \le (-x+xt)^m} \, dt \\
&\le \lim_{m\to\infty} (m+1) \left| \binom{n}{m+1} \right| \int_0^{-x} (1-t)^{n-1} (1-t)^{-m} \, (-x)^m (1-t)^m \, dt \\
&= \lim_{m\to\infty} (m+1) \left| \binom{n}{m+1} \right| (-x)^m \underbrace{\int_0^{-x} (1-t)^{n-1} \, dt}_{B} \\
&= B \cdot \lim_{m\to\infty} (m+1) \left| \frac{n}{m+1} \cdot \binom{n-1}{m} \right| (-x)^m \\
&= nB \cdot \underbrace{\lim_{m\to\infty} \left| \binom{n-1}{m} \right| (-x)^m}_{= A_2} \\
&= 0 \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Erläuterungen:

- Um eine positive obere Integrationsgrenze ($-x \ge 0$) zu bekommen, wird beim Integranden t durch $-t$ ersetzt.
- Eine Schlüsselstelle ist die Abschätzung $(-x-t)^m \le (-x+xt)^m$. Als Beispiel betrachte man $x = -\frac{1}{2}$ und $t = \frac{1}{4} \in [0;-x]$; es gilt: $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)^m \le \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\right)^m$
- Der Integralwert B ist endlich.
- Rechenregel für den allgemeinen Binomialkoeffizienten (28):

$$\binom{n}{m+1} = \prod_{j=1}^{m+1} \frac{n-(j-1)}{j} = \frac{n}{m+1} \cdot \prod_{j=1}^{m} \frac{n-j}{j} = \frac{n}{m+1} \cdot \binom{n-1}{m}$$

- Da die binomische Reihe (328) für $n \in \mathbb{R}$ (absolut) konvergiert, muss auch die Reihe

$$g_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left| \binom{n-1}{k} \right| \cdot |x|^k \tag{331}$$

  konvergent sein. Aus dem notwendigen Konvergenzkriterium folgt: $A_2 = 0$.

Somit ist der Beweis erbracht, dass für $x \in (-1;1)$ die binomische Reihe $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k$ gegen das Binom $f(x) = (1+x)^n$ konvergiert. ■

Aufgabe 201. Überführung der binomischen Reihe in die geometrische Reihe:

$$
\begin{aligned}
& (1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k && \text{für } x \in (-1;1) \text{ und } n \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow\ & (1-q)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k} (-q)^k && \text{mit } n=-1 \text{ und } x=-q \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (-q)^k && \text{Binomialkoeffizient (329)} \\
& = \sum_{k=0}^{\infty} q^k && \text{für } q \in (-1;1)
\end{aligned}
$$

Der Fall $q = 0$ erfordert eine Grenzwertbetrachtung des ersten Summanden: $\lim\limits_{q \to 0} q^0 = 1$

■

Aufgabe 202. Verallgemeinerung der binomischen Reihe:

$$
\begin{aligned}
& (1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k && \text{für } x \in (-1;1) \text{ und } n \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow\ & \left(1+\frac{b}{a}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{b}{a}\right)^k && \text{mit } x = \frac{b}{a} \text{ für } |b| < |a| \\
\Leftrightarrow\ & (a+b)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k && \text{Multiplikation mit } a^n
\end{aligned}
$$

Ob die binomische Reihe für die Grenzfälle $a = b$ und $a = -b$ bzw. $|x| = 1$ konvergiert, hängt vom Definitionsbereich des Exponenten n ab, wie in Aufgabe 199 diskutiert.

■

Aufgabe 203. Partialsumme der Reihe:

$$E_m = \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{m!}$$

Folgenglied:

$$F_m = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$$

In der Theorie liefert der Grenzwert in beiden Fällen die Eulersche Zahl:

$$\lim_{m\to\infty} E_m = \lim_{m\to\infty} F_m = \mathrm{e}$$

Der Praktiker möchte wissen, wie groß m gewählt werden muss, um e auf hinreichend viele Nachkommastellen berechnen zu können.

Zur Beurteilung des Konvergenzverhaltens dient das folgende Python-Programm:

```
# Berechnung der Eulerschen Zahl:
from math import *

E_m = 1                                  # Startwert der Reihe
for n in range(1,17):
    E_m = E_m + 1/factorial(n)           # Reihe
    F_m = (1+1/n)**n                     # Folge
    print("E_%2i"%n,"=%15.12f"%E_m, \
        ", F_%2i"%n,"=%15.12f"%F_m)      # Formatierte Ausgabe

print("Weitere Folgenglieder:")
for i in [100,1000,1e6,1e9,1e12]:
    F_m = (1+1/i)**i
    print("F_=%13i"%i,"=%15.12f"%F_m)
```

Die Reihe konvergiert sehr schnell: 12 Nachkommastellen Genauigkeit mit nur 16 Termen. Mit der Folge lässt sich e nur auf 6 Nachkommastellen berechnen (numerische Probleme).

m	E_m	F_m
1	2	2
2	2,5	2,25
3	2,666 666 666 667	2,370 370 370 370
4	2,708 333 333 333	2,441 406 250 000
5	2,716 666 666 667	2,488 320 000 000
6	2,718 055 555 556	2,521 626 371 742
7	2,718 253 968 254	2,546 499 697 041
8	2,718 278 769 841	2,565 784 513 950
9	2,718 281 525 573	2,581 174 791 713
10	2,718 281 801 146	2,593 742 460 100
11	2,718 281 826 198	2,604 199 011 898
12	2,718 281 828 286	2,613 035 290 225
13	2,718 281 828 447	2,620 600 887 886
14	2,718 281 828 458	2,627 151 556 301
15	2,718 281 828 459	2,632 878 717 728
16	2,718 281 828 459	2,637 928 497 367
100		2,704 813 829 422
1000		2,716 923 932 236
1000 000		2,718 280 469 096
1000 000 000		2,718 282 052 012
1000 000 000 000		2,718 523 496 037

■

Aufgabe 204. Für das Basler Problem gibt es eine Lösung:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{4}{3}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}\right] && \text{Hilfsgleichung (252)} \\
&= \frac{4}{3}\left[\frac{1}{1^2} + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{3^2} + \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{4^2}\right) + \ldots\right] && \text{Sortieren und Kürzen} \\
&= \frac{4}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \\
&= \frac{4}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{y^{2n}}{2n+1}\, dy && \text{Bestimmte Integration (253)} \\
&= \frac{4}{3}\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n}}{2n+1}\, dy \\
&= \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{1}{y}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n+1}}{2n+1}\, dy \\
&= \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{1}{y} \ln\frac{1+y}{1-y}\, dy && \text{Taylorreihe (176)} \\
&= \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{\ln y}{y^2-1}\, dy && \text{Partielle Integration (254)} \\
&= \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{\ln y^2}{y^2-1}\, dy && \text{Logarithmenregel (12)} \\
&= \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{1}{y^2-1}\left[\ln\frac{x^2y^2+1}{x^2+1}\right]_{x=0}^{\infty} dy \\
&= \frac{4}{3}\int_0^1 \int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2y^2+1)(x^2+1)}\, dx\, dy && \text{Integral (255)} \\
&= \frac{4}{3}\int_0^{\infty} \int_0^{1} \frac{x}{(x^2y^2+1)(x^2+1)}\, dy\, dx \\
&= \frac{4}{3}\int_0^{\infty} \left[\frac{\arctan(xy)}{x^2+1}\right]_{y=0}^{1} dx && \text{Grundintegral (256)} \\
&= \frac{4}{3}\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{x^2+1}\, dx \\
&= \frac{4}{3}\left[\frac{(\arctan x)^2}{2}\right]_{x=0}^{\infty} && \text{Integral (257)} \\
&= \frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}$$

∎

Komplexe Zahlen und Funktionen

Aufgabe 205. In der Gaußschen Zahlenebene erzeugt die komplexe Zahl

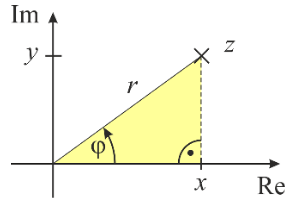
$$z = x + \mathrm{i}y$$

ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten x und y. Die Hypothenuse r lässt sich als Radius interpretieren und mithilfe des Pythagoras (1)

$$r^2 = x^2 + y^2$$

berechnen:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$



Der Betrag der komplexen Zahl ist somit gleich dem Radius der Polardarstellung.

■

Aufgabe 206. Dass die Betragsgleichung

$$|ab| = |a| \cdot |b|$$

auch für komplexe Zahlen

$$a = p + \mathrm{i}q \quad \text{und} \quad b = s + \mathrm{i}t \quad \text{mit} \quad p, q, s, t \in \mathbb{R}$$

gilt, überprüft man am einfachsten durch Einsetzen (mit $\mathrm{i}^2 = -1$):

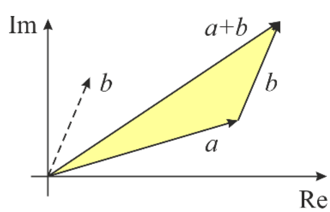
$$\begin{aligned}
& |(p + \mathrm{i}q) \cdot (s + \mathrm{i}t)| = |p + \mathrm{i}q| \cdot |s + \mathrm{i}t| \\
\Leftrightarrow \quad & |(ps - qt) + \mathrm{i}(pt + qs)| = |p + \mathrm{i}q| \cdot |s + \mathrm{i}t| \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt{(ps - qt)^2 + (pt + qs)^2} = \sqrt{p^2 + q^2} \cdot \sqrt{s^2 + t^2} \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt{(ps)^2 - 2pqst + (qt)^2 + (pt)^2 + 2pqst + (qs)^2} = \sqrt{(p^2 + q^2) \cdot (s^2 + t^2)} \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt{(ps)^2 + (qt)^2 + (pt)^2 + (qs)^2} = \sqrt{(ps)^2 + (pt)^2 + (qs)^2 + (qt)^2} \\
\Leftrightarrow \quad & 42 = 42
\end{aligned}$$

■

Aufgabe 207. Aus der Zeichnung wird ersichtlich, woher die Dreiecksungleichung

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

ihren Namen hat: In einem Dreieck kann keine Seite länger sein als die beiden anderen zusammen.



■

Aufgabe 208. Die in Aufgabe 26 für reelle Zahlen vorgenommene Beweisführung lässt sich auf komplexe Zahlen $a = p + \mathrm{i}q \in \mathbb{C}$ und $b = s + \mathrm{i}t \in \mathbb{C}$ mit $p, q, s, t \in \mathbb{R}$ übertragen:

$$\begin{array}{rrcll}
 & |(p+\mathrm{i}q) + (s+\mathrm{i}t)| & \leq & |p+\mathrm{i}q| + |s+\mathrm{i}t| & \\
\Leftrightarrow & \underbrace{\sqrt{(p+s)^2+(q+t)^2}}_{\geq 0} & \leq & \underbrace{\sqrt{p^2+q^2}+\sqrt{s^2+t^2}}_{\geq 0} & \\
\Leftrightarrow & (p+s)^2+(q+t)^2 & \leq & p^2+q^2+2\sqrt{p^2+q^2}\,\sqrt{s^2+t^2}+s^2+t^2 & \text{Quad./Wurzel} \\
\Leftrightarrow & \underbrace{ps+qt}_{\in\mathbb{R}} & \leq & \underbrace{\sqrt{p^2+q^2}\,\sqrt{s^2+t^2}}_{\geq 0} & \\
\Leftrightarrow & (ps)^2+2pqst+(qt)^2 & \leq & (p^2+q^2)(s^2+t^2) & \text{Quad./Wurzel} \\
\Leftrightarrow & 2(pt)(qs) & \leq & (pt)^2+(qs)^2 & \\
\Leftrightarrow & 0 & \leq & [(pt)-(qs)]^2 &
\end{array}$$

■

Aufgabe 209. Durch Rekursion erhält man die verallgemeinerte Dreiecksungleichung:

$$\begin{array}{rrcll}
 & |z_1 + a_2| & \leq & |z_1| + |a_2| & \text{mit } a_2 = z_2 + a_3 \\
\Rightarrow & |z_1 + z_2 + a_3| & \leq & |z_1| + \underbrace{|z_2 + a_3|}_{\leq |z_2|+|a_3|} & \text{mit } a_3 = z_3 + a_4 \\
\Rightarrow & |z_1 + z_2 + z_3 + a_4| & \leq & |z_1| + |z_2| + \underbrace{|z_3 + a_4|}_{\leq |z_3|+|a_4|} & \text{mit } a_4 = z_4 + a_5 \\
\Rightarrow & |z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_m| & \leq & |z_1| + |z_2| + |z_3| + \ldots + |z_m| &
\end{array}$$

■

Aufgabe 210. Durch Anwendung der verallgemeinerten Dreiecksungleichung (194) und der Betragsgleichung (192) folgt die zu beweisende Aussage, dass jede komplexe Potenzreihe eine reelle Majorante besitzt:

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n (z - z_0)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot |z - z_0|^n$$

Sollte die reelle Potenzreihe konvergieren, dann tut dies auch die komplexe Ausgangsreihe. Der Konvergenzradius r der komplexen Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ stimmt mit dem der reellen Reihe (164) überein, weil beim Quotientenkriterium (149) (und Wurzelkriterium) die Beträge der Reihenglieder verwendet werden:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}(z-z_0)^{n+1}}{c_n(z-z_0)^n}\right| = |z - z_0| \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|}_{\frac{1}{r}} \begin{cases} < 1 : & \text{Konvergenz} \\ > 1 : & \text{Divergenz} \end{cases}$$

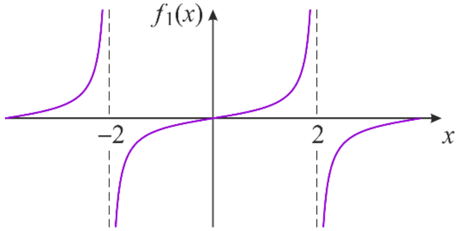
■

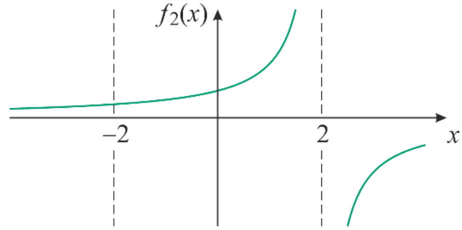
Aufgabe 211. Die (nicht dargestellten) Taylorreihen der ersten beiden Funktionen

$$f_1(x) = \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right) \quad \text{und} \quad f_2(x) = \frac{1}{2-x}$$

weisen einen Konvergenzradius von $r = 2$ auf, weil die Polstellen den Konvergenzbereich begrenzen. Dass die Hyperbel nur einen Pol besitzt, ändert nichts am Konvergenzintervall:

$$x \in (-r - x_0; r + x_0) = (-2; 2)$$





Bei der gebrochenrationalen Funktion

$$f_3(x) = \frac{1}{4 + x^2}$$

gibt es keine Polstelle. Deshalb mag es auf den ersten Blick verwundern, dass der Konvergenzbereich ebenfalls beschränkt ist.

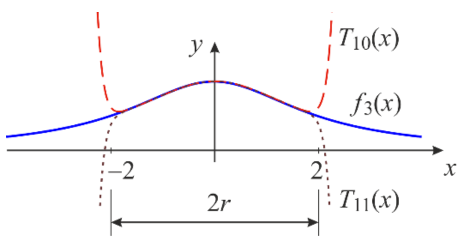
Was im Reellen nicht erklärbar ist, wird im Komplexen offensichtlich: Die gebrochenrationalen Funktion weist nämlich ebenfalls eine Singularität auf, und zwar bei:

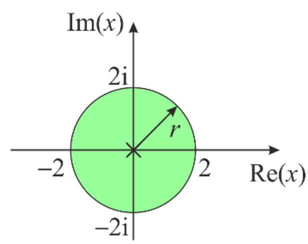
$$x_{\mathrm{P}} = \pm 2\mathrm{i}$$

Es handelt sich gewissermaßen um eine konjugiert komplexe Polstelle, welche für den eingeschränkten Konvergenzradius von

$$r = |x_{\mathrm{P}}| = 2$$

verantwortlich ist.





Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass das Taylorpolynom von f_3 (wie auch das der Hyperbel f_2) eine geometrische Reihe (128) ist:

$$T_m(x) = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{m} \left(-\frac{1}{4}\right)^n x^{2n} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{m} q^n = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q} \quad \text{mit} \quad q = -\frac{x^2}{4}$$

■

Aufgabe 212. In Aufgabe 210 wird gezeigt, dass jede komplexe Potenzreihe eine reelle Majorante besitzt. Dies gilt inbesondere für die komplexe Exponentialfunktion:

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, z^n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{1}{n!}\, z^n\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot |z|^n \quad \text{mit} \quad z = x + \mathrm{i}y$$

Weil die Taylorreihe der reellen Exponentialfunktion (172) für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, besitzt die komplexe Exponentialfunktion ebenfalls einen unendlichen Konvergenzradius $r \to \infty$.

■

Aufgabe 213. Taylorreihe der Sinusfunktion (173):

$$\sin\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, \varphi^{2n+1}$$

Ableitung beider Seiten liefert die Taylorreihe der Kosinusfunktion:

$$\cos\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, \varphi^{2n} \tag{332}$$

Taylorreihe der Exponentialfunktion (172) mit imaginärem Argument:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, (\mathrm{i}\varphi)^n \\
&= \frac{1}{0!}\, \varphi^0 + \frac{1}{1!}\, \mathrm{i}\varphi^1 - \frac{1}{2!}\, \varphi^2 - \frac{1}{3!}\, \mathrm{i}\varphi^3 + \frac{1}{4!}\, \varphi^4 + \frac{1}{5!}\, \mathrm{i}\varphi^5 - \frac{1}{6!}\, \varphi^6 - \frac{1}{7!}\, \mathrm{i}\varphi^7 + \ldots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, \varphi^{2n} + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, \varphi^{2n+1} \\
&= \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi
\end{aligned}$$

Dieser wichtige Zusammenhang zwischen der komplexen Exponentialfunktion und den Kreisfunktionen Sinus und Kosinus wird bisweilen auch als Eulersche Identität bezeichnet.

■

Aufgabe 214. Einsetzen von $\varphi = \pi$ in die Eulersche Formel:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = \cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi = -1$$

Somit gilt:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0$$

■

Aufgabe 215. Die Multiplikation mit der komplexen Einheit

$$\mathrm{i} = 0 + \mathrm{i} \cdot 1 = 1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \tag{333}$$

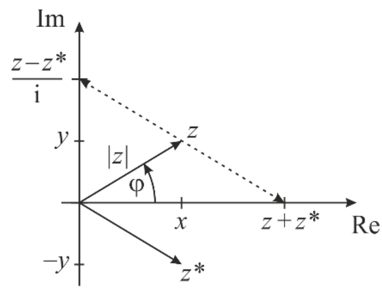
entspricht einer Drehung von 90° gegen den Uhrzeigersinn:

$$b = \mathrm{i} \cdot a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \cdot |a|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = |a|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}$$

■

Aufgabe 216. Komplexe Zahl mit Radius $|z| = 1$:

$$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$$



Für die Konjugierte wird φ durch $-\varphi$ ersetzt:

$$z^* = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi$$

Summe aus z und z^*:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} = 2\cos\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \cos\varphi = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2}$$

Differenz aus z und z^*:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} = 2\mathrm{i}\sin\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \sin\varphi = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2\mathrm{i}}$$

■

Aufgabe 217. Es sei

$$z_0 = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$

eine Nullstelle von $f(z)$:

$$f(z_0) = a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \ldots + a_1 z_0 + a_0 = 0 \quad \text{mit} \quad a_i \in \mathbb{R}$$

Dann ist auch die Konjugierte $z_0^* = r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$ eine Nullstelle:

$$\begin{aligned} f(z_0^*) &= a_n \left(z_0^*\right)^n + a_{n-1} \left(z_0^*\right)^{n-1} + \ldots + a_1 z_0^* + a_0 \\ &= a_n r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\varphi} + a_{n-1} r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-1)\varphi} + a_1 r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} + a_0 \\ &= \left[a_n r\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi} + a_{n-1} r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)\varphi} + a_1 r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + a_0\right]^* \\ &= \left[a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + a_1 z_0 + a_0\right]^* \\ &= \left[f(z_0)\right]^* \\ &= 0^* \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

Aufgabe 218. Integration unter Verwendung von reellen Zahlen:

$$
\begin{aligned}
A &= \int \underbrace{\mathrm{e}^x}_{f} \cdot \underbrace{\cos x}_{g'} \, dx \\
&= \underbrace{\mathrm{e}^x}_{f} \cdot \underbrace{\sin x}_{g} - \int \underbrace{\mathrm{e}^x}_{f'=u} \cdot \underbrace{\sin x}_{g=v'} \, dx && \text{1. partielle Integration} \\
&= \mathrm{e}^x \cdot \sin x - \underbrace{\mathrm{e}^x}_{u} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{v} + \int \underbrace{\mathrm{e}^x}_{u'} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{v} \, dx + 2C && \text{2. partielle Integration} \\
&= \underbrace{\mathrm{e}^x(\sin x + \cos x)}_{B} - \underbrace{\int \mathrm{e}^x \cdot \cos x \, dx}_{A} + 2C && \text{Rückwurftechnik:} \\
& && A = B - A + 2C \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x + \cos x) + C && \Leftrightarrow \quad A = \frac{B}{2} + C
\end{aligned}
$$

In Aufgabe 219 wird eine effiziente Alternative zur partiellen Integration vorgestellt, mit der sich Integrale vom vorliegenden Typ sehr elegant lösen lassen. Die Methode verwendet komplexe Zahlen.

■

Aufgabe 219. Integration durch komplexe Erweiterung (Ergänzung des Imaginärteils):

$$
K = \int \mathrm{e}^x \underbrace{(\cos x + \mathrm{i}\sin x)}_{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}} \, dx = \int \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} \, dx = \frac{\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}}{1+\mathrm{i}} + C = \frac{1-\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^x(\cos x + \mathrm{i}\sin x) + C
$$

Betrachtung nur des Realteils:

$$
\int \mathrm{e}^x \cos x \, dx = \mathrm{Re}(K) = \mathrm{Re}\left(\frac{1-\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^x(\cos x + \mathrm{i}\sin x) + C\right) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x + \cos x) + C
$$

■

Aufgabe 220. Dreifachwinkel-Additionstheorem für den Sinus:

$$
\begin{aligned}
\sin(3\varphi) &= \sin(\varphi + 2\varphi) \\
&= \sin(\varphi)\cos(2\varphi) + \cos(\varphi)\sin(2\varphi) && \text{Additionstheorem (38)} \\
&= \sin\varphi\left[\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right] + \cos\varphi\,[2\sin\varphi\cos\varphi] && \text{Additionstheoreme (259), (258)} \\
&= 3\sin\varphi \underbrace{\cos^2\varphi}_{1-\sin^2\varphi} - \sin^3\varphi \\
&= 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi && \text{Trigonometrischer Pythagoras (2)}
\end{aligned}
$$

Die Herleitung des zugehörigen Kosinus-Additionstheorems erfolgt analog:

$$\begin{aligned}\cos(3\varphi) &= \cos(\varphi + 2\varphi) \\ &= \cos(\varphi)\,\cos(2\varphi) - \sin(\varphi)\,\sin(2\varphi) && \text{Additionstheorem (39)} \\ &= \cos\varphi\left[\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right] - \sin\varphi\,[2\sin\varphi\cos\varphi] \\ &= \cos^3\varphi - 3\underbrace{\sin^2\varphi}_{1-\cos^2\varphi}\,\cos\varphi \\ &= 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi\end{aligned}$$

Aufgabe 221. Mit dem binomischen Lehrsatz (29) für $n = 3$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \tag{334}$$

und der Eulerschen Formel (196) für die Winkel φ und 3φ erhält man:

$$\begin{aligned}\left[e^{i\varphi}\right]^3 &= e^{i(3\varphi)} && \text{Potenzgesetz (6)} \\ &= [\cos\varphi + i\sin\varphi]^3 \\ &= [\cos\varphi]^3 + 3[\cos\varphi]^2\, i\sin\varphi + 3\cos\varphi\,[i\sin\varphi]^2 + [i\sin\varphi]^3 && \text{Gleichung (334)} \\ &= \left[\cos^3\varphi - 3\cos\varphi\,\sin^2\varphi\right] + i\left[3\cos^2\varphi\,\sin\varphi - \sin^3\varphi\right] && \text{Real- und Imaginärteil} \\ &= \Big[\underbrace{4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi}_{=\cos(3\varphi)\ \checkmark}\Big] + i\Big[\underbrace{3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi}_{=\sin(3\varphi)\ \checkmark}\Big] && \text{Trigon. Pythagoras (2)}\end{aligned}$$

■

Aufgabe 222. Der in Aufgabe 221 beschrittene Lösungsweg ist auf beliebige Vielfache eines Winkels übertragbar, weshalb hier auf eine Kommentierung der Zwischenschritte verzichtet werden kann:

$$\begin{aligned}\left[e^{i\varphi}\right]^5 &= e^{i(5\varphi)} \\ &= \big[\cos\varphi + i\sin\varphi\big]^5 \\ &= \Big[\cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\underbrace{\sin^2\varphi}_{1-\cos^2\varphi} + 5\cos\varphi\underbrace{\sin^4\varphi}_{1-2\cos^2\varphi+\cos^4\varphi}\Big] + \\ &\quad + i\Big[5\underbrace{\cos^4\varphi}_{1-2\sin^2\varphi+\sin^4\varphi}\sin\varphi - 10\underbrace{\cos^2\varphi}_{1-\sin^2\varphi}\sin^3\varphi + \sin^5\varphi\Big] \\ &= \Big[\underbrace{16\cos^5\varphi - 20\cos^3\varphi + 5\cos\varphi}_{=\cos(5\varphi)\ \checkmark}\Big] + i\Big[\underbrace{5\sin\varphi - 20\sin^3\varphi + 16\sin^5\varphi}_{=\sin(5\varphi)\ \checkmark}\Big]\end{aligned}$$

Der Beweis von Additionstheoremen gehört zu den großen Stärken der komplexen Zahlen. Eine rein reelle Herleitung ist zwar möglich, aber sehr aufwändig, wenn Additionstheoreme mehrmals angewandt werden müssen.

■

Aufgabe 223. Einsetzen einer imaginären Zahl $z = \mathrm{i}y$ in die Hyperbelfunktionen unter Anwendung der Eulerschen Formel (197)

$$\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}y} = \cos y \pm \mathrm{i} \sin y$$

liefert

$$\cosh z = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}\right) = \cos y$$

und:

$$\sinh z = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}\right) = \mathrm{i} \sin y$$

Folglich sind der trigonometrische und der hyperbolische Pythagoras äquivalent:

$$\begin{aligned} 1 &= \cosh^2 z - \sinh^2 z \\ &= (\cos y)^2 - (\mathrm{i} \sin y)^2 \\ &= \cos^2 y + \sin^2 y \end{aligned}$$

■

Aufgabe 224. Ermittlung des Summenwerts der endlichen Reihe $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin(k\alpha)$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \cos(k\alpha) + \mathrm{i} \sin(k\alpha) &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha} && \text{Komplexe Erweiterung} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right]^{k} && \text{Potenzgesetz (6)} \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right]^{k} && \text{Indexverschiebung} \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \cdot \frac{1 - \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right]^{n}}{1 - \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right]} && \text{Geometrische Reihe (128)} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}n\alpha}{2}} - \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}n\alpha}{2}}}{\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\alpha}{2}} - \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\alpha}{2}}} \cdot \frac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}n\alpha}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\alpha}{2}}} && \text{Potenzgesetze (4), (6) und (9)} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{n}{2}\alpha\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n+1}{2}\alpha} && \text{Gleichung (200)} \end{aligned}$$

Betrachtung nur des Imaginärteils (Rückgängigmachung der komplexen Erweiterung):

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(k\alpha) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{\sin\left(\frac{n}{2}\alpha\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n+1}{2}\alpha}\right) = \frac{\sin\left(\frac{n}{2}\alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{n+1}{2}\alpha\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}$$

■

Aufgabe 225. Durch Einsetzen von

$$x = z - \frac{a}{3}$$

in die kubische Gleichung erhält man eine reduzierte kubische Gleichung:

$$\begin{aligned}
0 &= x^3 + ax^2 + bx + c \\
&= \left(z - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(z - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(z - \frac{a}{3}\right) + c \\
&= z^3 - az^2 + \frac{a^2}{3}z - \frac{1}{27}a^3 + az^2 - \frac{2}{3}a^2 z + \frac{1}{9}a^3 + bz - \frac{ab}{3} + c \\
&= z^3 + \underbrace{\left[b - \frac{1}{3}a^2\right]}_{p} z + \underbrace{\left[\frac{2}{27}a^3 - \frac{ab}{3} + c\right]}_{q}
\end{aligned}$$

■

Aufgabe 226. Einsetzen von

$$z = u + v$$

in die reduzierte kubische Gleichung:

$$\begin{aligned}
0 &= z^3 + pz + q \\
&= (u+v)^3 + pz + q \\
&= u^3 + \underbrace{3u^2v + 3uv^2}_{3uvz} + v^3 + pz + q \\
&= \underbrace{[3uv + p]}_{\overset{!}{=} 0 \text{ (I)}} \cdot z + \underbrace{[u^3 + v^3 + q]}_{\overset{!}{=} 0 \text{ (II)}}
\end{aligned}$$

Die auf diese Weise erzeugte lineare Gleichung muss für beliebige z erfüllt sein, weshalb beide Koeffizienten verschwinden müssen.

Gleichung (I) lässt sich nach

$$v = -\frac{p}{3u} \tag{335}$$

auflösen und in Gleichung (II) einsetzen:

$$u^3 = -v^3 - q = \frac{p^3}{27u^3} - q = 0$$

Multiplikation mit u^3:

$$\underbrace{u^6}_{y^2} + q\underbrace{u^3}_{y} - \frac{p^3}{27} = 0$$

Lösung der quadratischen Gleichung mittels „pq-Formel“:

$$u^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{D}$$

mit der Diskriminante:

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$$

Wegen der Mehrdeutigkeit des Winkels im Komplexen

$$u^3 = u^3 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}k \cdot 2\pi} \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z}$$

liefert die Kubikwurzel drei Lösungen:

$$u_k = \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} \pm \sqrt{D}\right) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}k \cdot 2\pi}} \quad \text{mit} \quad k = 0, 1, 2 \qquad \checkmark$$

Folglich existieren auch drei Lösungen für die Variable v. Diese erhält man durch Einsetzen von u_k in Gleichung (335):

$$\begin{aligned}
v_k &= -\frac{p}{3u_k} \\
&= -\frac{p}{3} \cdot u_k^{-1} \\
&= -\frac{p}{3} \cdot \left[\left(-\frac{q}{2} \pm \sqrt{D}\right) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}k \cdot 2\pi}\right]^{-\frac{1}{3}} \\
&= -\frac{p}{3} \cdot \left(-\frac{q}{2} \pm \sqrt{D}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \underbrace{\left(-\frac{q}{2} \mp \sqrt{D}\right)^{-\frac{1}{3}} \left(-\frac{q}{2} \mp \sqrt{D}\right)^{\frac{1}{3}}}_{=1} \cdot \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k \cdot 2\pi}\right)^{-\frac{1}{3}} \\
&= -\frac{p}{3} \cdot \Bigg(\underbrace{\frac{q^2}{4} - D}_{= -\frac{p^3}{27}}\Bigg)^{-\frac{1}{3}} \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} \mp \sqrt{D}\right) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k \cdot 2\pi}} \\
&= \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} \mp \sqrt{D}\right) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k \cdot 2\pi}} \quad \text{mit} \quad k = 0, 1, 2 \qquad \checkmark
\end{aligned}$$

Anmerkungen zum Sonderfall $q = 0$:

- Es ist sinnvoll, den Sonderfall $q = 0$ abzufangen, denn die Lösung der kubischen Gleichung ohne Konstante ist offensichtlich:

$$z^3 + pz = 0 \quad \Rightarrow \quad z_0 = 0,\ z_1 = \sqrt{-p},\ z_2 = -\sqrt{-p}$$

- Es ist nicht erforderlich, den Fall $q = 0$ gesondert zu betrachten, denn die ermittelten Lösungsformeln für u_k und v_k gelten für beliebige Kombinationen von $p \in \mathbb{R}$ und $q \in \mathbb{R}$.
- Selbst der Fall $p = q = 0$ bzw. $D = 0$ und $u_k = 0$ muss nicht abgefangen werden. Gleichung (335) enthält zwar einen unbestimmten Ausdruck, das Ergebnis stimmt dennoch: $v_k = 0$.

■

Aufgabe 227. Ob die drei Nullstellen

$$
\begin{aligned}
z_k &= u_k + v_k \\
&= \underbrace{\sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{D}}}_{=u_0} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot\frac{2}{3}\pi} + \underbrace{\sqrt[3]{-\frac{q}{2} \mp \sqrt{D}}}_{=v_0} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot\frac{2}{3}\pi} \\
&= \begin{cases} u_0 + v_0 & \text{für } k=0 \\ u_0 \cdot \left[-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right] + v_0 \cdot \left[-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right] & \text{für } k=1 \\ u_0 \cdot \left[-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right] + v_0 \cdot \left[-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right] & \text{für } k=2 \end{cases}
\end{aligned}
\tag{336}
$$

reell oder komplex sind, hängt von der Diskriminante ab:

1. Es sei $D > 0$ (bzw. $D \geq 0$). Dann liefert $k = 0$ eine reelle Lösung:

   $$z_0 = u_0 + v_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}$$

   Die Nullstellen z_1 und z_2 sind konjugiert komplex:

   $$
   \begin{aligned}
   z_1 &= -\frac{1}{2}u_0 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}u_0 - \frac{1}{2}v_0 - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}v_0 \\
   &= -\frac{u_0 + v_0}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}\,(u_0 - v_0)}{2} \\
   z_2 &= z_1^*
   \end{aligned}
   $$

2. Beim Sonderfall $D = 0$ ist $u_0 = v_0$, so dass man eine einfache und eine doppelte reelle Nullstelle erhält:

   $$
   \begin{aligned}
   z_0 &= 2u_0 = 2 \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} = -\sqrt[3]{4q} \\
   z_1 &= -u_0 = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}} = \sqrt[3]{\frac{q}{2}} \\
   z_2 &= z_1
   \end{aligned}
   $$

Bezüglich des Plusminuszeichens sei angemerkt, dass beide Varianten zu äquivalenten Ergebnissen führen. Lediglich die Variablen z_1 und z_2 sind vertauscht:

- Bei u_0 und v_0 möge das obere Zeichen gelten:

  $$z_1 = -\frac{1}{2}\left[\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}\right] + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}\right] = z_2^*$$

- Das untere Zeichen möge gelten:

  $$\tilde{z}_1 = -\frac{1}{2}\left[\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}}\right] + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}}\right] = \tilde{z}_2^*$$

■

Aufgabe 228. Die Hilfsvariable p muss negativ sein ($p < 0$), damit die Diskriminante einen negativen Wert annehmen kann:

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$$

Für q gibt es keine diesbezüglichen Einschränkungen: $q \in \mathbb{R}$. Folglich handelt es sich bei der Hilfsvariablen

$$h = -\frac{q}{2} + \sqrt{D} = -\frac{q}{2} + \mathrm{i}\sqrt{-D} = \underbrace{\sqrt{\frac{q^2}{4} - D}}_{=|h|} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \quad \text{mit} \quad \alpha \in (0, \pi) \tag{337}$$

um eine komplexe Zahl, deren Winkel α zwischen 0° und 180° liegt; der Imaginärteil von h ist positiv: $\sqrt{-D} > 0$. Dies ist der Hauptgrund, weshalb man den Winkel

$$\alpha = \arccos\left(\frac{-\frac{q}{2}}{|h|}\right) \in (0, \pi) \tag{338}$$

mithilfe der in Aufgabe 63 eingeführten Arkuskosinusfunktion ermitteln sollte. Die Verwendung des Arkustangens ist zwar möglich, erfordert aber wegen des ungeeigneten Wertebereichs $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ eine Fallunterscheidung. Für den Arkuskosinus spricht außerdem, dass sich hier die Hypothenuse vergleichsweise einfach darstellen lässt:

$$|h| = \sqrt{\frac{q^2}{4} - D} = \sqrt{-\frac{p^3}{27}} \tag{339}$$

Einsetzen von (339) und (338) in (337) liefert die Hilfsgleichung:

$$h = -\frac{q}{2} + \sqrt{D} = \sqrt{-\frac{p^3}{27}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\arccos\left(-\frac{q}{2}\sqrt{-\frac{27}{p^3}}\right)} \tag{340}$$

In Aufgabe 227 wird gezeigt, dass das Plusminuszeichen beim Term $\pm\sqrt{D} = \pm\mathrm{i}\sqrt{-D}$ keine weitere Lösung liefert, sondern lediglich eine Vertauschung von z_1 und z_2 bewirkt. Bei Verwendung des oberen Zeichens lauten die gesuchten drei reellen Lösungen:

$$\begin{aligned}
z_k &= u_k + v_k \\
&= u_0 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot\frac{2}{3}\pi} + v_0 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot\frac{2}{3}\pi} && \text{Gleichung (336)} \\
&= \sqrt[3]{h} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot\frac{2}{3}\pi} + \underbrace{\sqrt[3]{h^*}}_{=\left(\sqrt[3]{h}\right)^*} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot\frac{2}{3}\pi} && \text{Hilfsgleichung (340)} \\
&= 2 \cdot \mathrm{Re}\left(\sqrt[3]{h} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot\frac{2}{3}\pi}\right) && \text{Gleichung (199)} \\
&= 2 \cdot \mathrm{Re}\left(\sqrt[3]{\sqrt{-\frac{p^3}{27}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{q}{2}\sqrt{-\frac{27}{p^3}}\right)}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot\frac{2}{3}\pi}\right) && \text{Hilfsgleichung (340)} \\
&= 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{q}{2}\sqrt{-\frac{27}{p^3}}\right) + k \cdot \frac{2}{3}\pi\right) && \text{für } k = 0, 1, 2
\end{aligned}$$

■

Aufgabe 229. Python-Quellcode:

```
# Cardanische Formeln zur Loesung der kubischen Gleichung
# x**3+a*x**2+b*x+c=0

from math import pi, cos, acos, sqrt    # Mathe-Bibliothek

#a,b,c =  -1.,  4., -4.       # D>0
#a,b,c =  -3.,  3., -1.       # D=0
a,b,c  =  -1., -4., +4.       # D<0  (Casus irreducibilis)

p = b-a**2/3.                 # Reduzierte Form der
q = 2.*a**3/27.-a*b/3.+c      # kubischen Gleichung

D = (q/2.)**2. + (p/3.)**3.   # Diskriminante

if D>0:                       # Fallunterscheidung
  print("D>0:")
  du = -q/2.+sqrt(D)
  if du < 0:
    u0 = -(-du)**(1./3.)
  else:
    u0 = du**(1./3.)
  dv = -q/2.-sqrt(D)
  if dv < 0:
    v0 = -(-dv)**(1./3.)
  else:
    v0 = dv**(1./3.)
  x0 = u0+v0 -a/3.
  x12re = -(u0+v0)/2. -a/3.
  x12im = sqrt(3.)*(u0-v0)/2.
  print("x0  =%9.4f"%x0)
  print("x1/2=%9.4f"%x12re,"+/-%9.4f"%x12im,"i")
elif D==0:
  print("D=0:")
  u0 = (-q/2.)**(1./3.)
  x0 = 2.*u0 -a/3.
  x1 = -u0 -a/3.
  print("x0   =%9.4f"%x0)     # Formatierte Ausgabe: 9 Ziffern
  print("x1=x2=%9.4f"%x1)     # mit 4 Nachkommastellen
else:
  print("D<0:")
  for k in range(3):          # Schleife: k=0,1,2
    xk = 2*sqrt(-p/3.)*cos(1./3.*acos(-q/2. *  \
           sqrt(-27./p**3))+k*2*pi/3.) -a/3.   # 2. Zeile
    print("x"+str(k)+"=%9.4f"%xk)
```

Die Zahlenbeispiele wurden bewusst einfach gewählt, damit die Ergebnisse per Kopfrechnung überprüft werden können:

1. Die kubische Gleichung
$$x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0$$
besitzt wegen $D \approx 3{,}704 > 0$ eine reelle und eine konjugiert komplexe Nullstelle:
$$x_0 = 1$$
$$x_{1,2} = 0 \pm 2\mathrm{i}$$

2. Das Polynom
$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$$
ist ein Beispiel für den Sonderfall $D = 0$ und weist somit eine reelle und eine doppelte reelle Nullstelle auf:
$$x_0 = 1$$
$$x_{1,2} = 1$$
Dass die Nullstelle sogar dreifach vorkommt, ist für den Test unerheblich.

3. Bei der Gleichung
$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$$
ist die Diskriminante negativ: $D \approx -1{,}333 < 0$. Man erhält drei unterschiedliche reelle Nullstellen:
$$x_0 = 2$$
$$x_1 = -2$$
$$x_2 = 1$$

Abschließend noch zwei Beispiele mit nicht-ganzzahligen Lösungen:

- Für $D > 0$:
$$x^3 + 1{,}2x^2 - 3{,}4x + 5{,}6 \quad \Rightarrow \quad x_0 \approx -2{,}9753 \text{ und } x_{1,2} \approx 0{,}8877 \pm 1{,}0460\,\mathrm{i}$$

- Für $D < 0$:
$$x^3 - 6{,}5x^2 + 4{,}3x + 2{,}1 \quad \Rightarrow \quad x_0 \approx 5{,}6775\,;\; x_1 \approx -0{,}3229\,;\; x_2 \approx 1{,}1454$$

■

Teil II

Lern-Formelsammlung

Einleitung

Wissen Sie auch ohne Taschenrechner, was 13 mal 17 ergibt? Wer das große Einmaleins nicht gelernt hat — was nicht schlimm ist —, der wird vielleicht wie folgt rechnen:

$$13 \cdot 17 = (10+3) \cdot (10+7) = 10 \cdot 10 + 10 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + 3 \cdot 7 = 100 + 70 + 30 + 21 = 221$$

Das kleine Einmaleins reicht aus, um mithilfe des Distributivgesetzes derartige Aufgaben lösen zu können. Wer die 3. binomische Formel und Quadratzahlen kennt, kommt noch etwas schneller zum Ziel:

$$13 \cdot 17 = 15 \cdot 15 - 2 \cdot 2 = 225 - 4 = 221$$

Das Beispiel zeigt, wie Mathematik funktioniert: Aus bekannten Formeln und Sätzen lassen sich neue Gleichungen und Erkenntnisse generieren. Wem das Produkt aus 3 und 7 Kopfzerbrechen bereitet, der sollte zunächst die 7er-Reihe rekapitulieren. Nur wer das kleine Einmaleins beherrscht, kann daraus das große Einmaleins ableiten — und muss es nicht auswendig lernen.

Können Sie beurteilen, ob die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

konvergiert oder divergiert? Mit dieser und ähnlichen Fragen werden Studierende von Ingenieurstudiengängen im Rahmen von Mathematik-Vorlesungen konfrontiert. Wer weiß, dass die harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

divergiert, kann lächelnd auf das Minorantenkriterium verweisen. Wem die harmonische Reihe noch nie untergekommen ist, der wird die Frage nur schwerlich beantworten können. Um die Geheimnisse der komplexen Zahlen erforschen zu können, sollte man Potenzgesetze sicher anwenden können. Und wer nicht an den Aufgaben der Vektoralgebra verzweifeln möchte, muss in der Lage sein, das Kreuzprodukt vom Skalarprodukt zu unterscheiden. Man muss also bereits über ein gewisses Repertoire an mathematischen Formeln verfügen, um einer Mathematik-Vorlesung folgen zu können. Und spätestens in der Klausur muss das, was mit dem kleinen Einmaleins begonnen hat, abrufbereit sein.

Der Pythagoras sitzt, die pq-Formel ebenfalls, und Ableiten mittels Produkt- und Kettenregel stellt mittlerweile auch kein Problem mehr dar. Doch was gehört sonst noch zum unverzichtbaren mathematischen Handwerkszeug? Mehrere hundert Seiten starke Formelsammlungen sind wenig hilfreich, wenn wichtige und nicht ganz so wichtige mathematische Errungenschaften gleichberechtigt nebeneinander stehen. Es ist sicherlich unstrittig, dass jeder angehende Ingenieur in der Lage sein sollte, eine Sinusfunktion zu skizzieren. Den Areakotangens Hyperbolicus hingegen schüttelt niemand so schnell aus dem Ärmel. Ob man den Verlauf des Tangens wissen muss — darüber lässt sich streiten.

Auf den folgenden 16 Seiten finden Sie eine Zusammenstellung von Gleichungen, Skizzen und Erkenntnissen, die nach Meinung des Autors von so elementarer Bedeutung sind, dass sie jeder angehende Ingenieur beherrschen sollte. Hilfreich ist es natürlich, wenn man den Inhalt der „Lern-Formelsammlung“ nicht einfach nur wie Vokabeln auswendig lernt, sondern durch Rechnen von Aufgaben verinnerlicht. Irgendwann weiß man einfach, dass die Logarithmusfunktion $f(x) = \ln(x)$ als Ableitung die Hyperbel $f'(x) = \frac{1}{x}$ besitzt. Wer ein wirklich tiefgreifendes Verständnis für die Ableitung des Logarithmus erlangen möchte, dem sei Aufgabe 91 auf Seite 19 ans Herz gelegt.

Am effizientesten lernt, wer sich Formeln und Skizzen nicht nur einprägt, sondern in der Lage ist, Querverbindungen herzustellen. Drei Beispiele seien genannt:

1. Wenn man nach dem Sinus von 60° fragt, bekommt man viele Antworten: $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, oder war es doch $\frac{\sqrt{3}}{2}$? Sollten Sie keine Ahnung haben, können Sie entweder in einem schlauen Buch nachschlagen und hoffen, es nicht wieder zu vergessen, oder — heißer Tipp — sich den Wert herleiten: Zeichnen Sie ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge $c = 1$. Das halbe Dreieck ist rechtwinklig, die Länge der Hypothenuse $c = 1$, die kurze Kathete $b = \frac{1}{2}$, und aus dem Pythagoras folgt $a = \sqrt{c^2 - b^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ für die lange Kathete. Richtig ist also: $\sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Es ist nicht erforderlich, sich den Verlauf der Arkuskosinusfunktion einzuprägen, wenn man weiß, dass sie die Umkehrfunktion vom Kosinus ist. Zwischen 0° und 180° fällt die Kosinusfunktion streng monoton und kann daher an der Winkelhalbierenden gespiegelt werden.

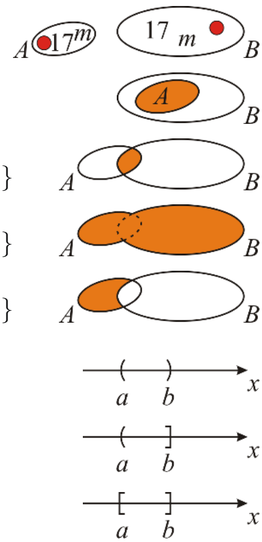
3. Wer sich die Formel des Newton-Verfahrens nicht merken kann oder möchte, muss lediglich in der Lage sein, eine Tangentengleichung aufzustellen und ihre Nullstelle zu berechnen.

Den Tangens finden Sie in der Klausur-Formelsammlung.

1 Allgemeine Grundlagen

1.1 Mengenlehre

Gleiche Mengen:	$A = B$	
Teilmenge:	$A \subset B$	
Schnittmenge (Durchschnitt):	$A \cap B$	$= \{x \,\vert\, x \in A \;\wedge\; x \in B\}$
Vereinigungsmenge:	$A \cup B$	$= \{x \,\vert\, x \in A \;\vee\; x \in B\}$
Differenzmenge (Restmenge):	$A \setminus B$	$= \{x \,\vert\, x \in A \;\wedge\; x \notin B\}$
Offenes Intervall:	(a, b)	$= \{x \in \mathbb{R} \,\vert\, a < x < b\}$
Halboffenes Intervall:	$(a, b]$	$= \{x \in \mathbb{R} \,\vert\, a < x \leq b\}$
Abgeschlossenes Intervall:	$[a, b]$	$= \{x \in \mathbb{R} \,\vert\, a \leq x \leq b\}$



1.2 Fallunterscheidungen

Betrag:

$$|x| = \begin{cases} +x & \text{für} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{für} \quad x < 0 \end{cases} \tag{341}$$

Vorzeichen (Signum):

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \text{für} \quad x > 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \\ -1 & \text{für} \quad x < 0 \end{cases} \tag{342}$$

1.3 Fakultät

Definition:

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \tag{343}$$

Sonderfall:

$$0! = 1 \tag{344}$$

L. Nasdala, *Mathematik Beweisaufgaben*,
DOI 10.1007/978-3-658-13957-5_8

1.4 Potenzgesetze

Rechenregeln:

$$x^u x^v = x^{u+v} \quad , \quad x^u y^u = (xy)^u \tag{345}$$

$$(x^u)^v = x^{uv} \tag{346}$$

Kehrwert und Wurzel:

$$x^{-u} = \frac{1}{x^u} \tag{347}$$

$$x^{1/u} = \sqrt[u]{x} \tag{348}$$

Sonderfall:

$$x^0 = 1 \quad \text{für} \quad x \neq 0 \tag{349}$$

Aus (345) und (347) folgt:

$$\frac{x^u}{x^v} = x^{u-v} \quad , \quad \frac{x^u}{y^u} = \left(\frac{x}{y}\right)^u \tag{350}$$

1.5 Logarithmengesetze

Definition (Basis $a > 0$ und somit auch $x > 0$):

$$a^b = x \quad \Leftrightarrow \quad b = \log_a x \tag{351}$$

Natürlicher Logarithmus und Zehner-Logarithmus als Sonderfälle:

$$\ln x = \log_{\mathrm{e}} x \quad , \quad \log x = \log_{10} x \tag{352}$$

Rechenregeln:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y \tag{353}$$

$$\log_a x^c = c \log_a x \tag{354}$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \tag{355}$$

Äquivalenz: (353) $\Leftrightarrow$ (345a), (354) $\Leftrightarrow$ (346), (355) $\Leftrightarrow$ (346); aus (353) und (354) mit $c = -1$ folgt:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \tag{356}$$

1.6 Die pq-Formel

Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \text{mit} \quad D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \tag{357}$$

Reelle Lösung(en) für Diskriminante $D \geq 0$, (konjugiert) komplexe Lösungen für $D < 0$.

1.7 Ungleichungen

Bei Multiplikation mit einer negativen Zahl ändert sich das Relationszeichen:

$$x > y \quad \Leftrightarrow \quad -x < -y \tag{358}$$

1.8 Binomische Formeln

1. binomische Formel:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{359}$$

2. binomische Formel:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \tag{360}$$

3. binomische Formel:

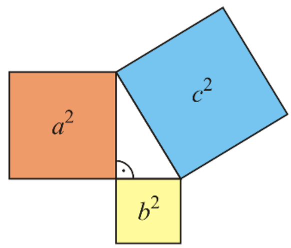
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \tag{361}$$

1.9 Satz des Pythagoras

Schon die alten Griechen wussten:

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{362}$$

In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Fläche der beiden Kathetenquadrate gleich der Fläche des Hypotenusenquadrates.



1.10 Lineare Gleichungssysteme

Varianten:

- Ein homogenes LGS

$$\underline{A}\,\underline{x} = \underline{0} \tag{363}$$

  besitzt entweder genau eine Lösung (triviale Lösung: $\underline{x} = \underline{0}$) oder unendlich viele.

- Ein inhomogenes LGS

$$\underline{A}\,\underline{x} = \underline{r} \tag{364}$$

  kann entweder genau eine Lösung (nicht-trivial: $\underline{x} \neq \underline{0}$), keine Lösung (leere Menge) oder unendlich viele Lösungen (Lösungsschar) besitzen.

Bestimmung der Lösung mittels Gauß-Verfahren in zwei Schritten:

1. Bei der Vorwärtselimination wird das LGS mithilfe elementarer Umformungen in eine Stufenform (pro Zeile eine Variable weniger) gebracht.
2. Ermittlung der einzelnen Unbekannten durch Rückwärtseinsetzen.

2 Vektoralgebra

2.1 Lineare Unabhängigkeit

Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ sind linear unabhängig, wenn

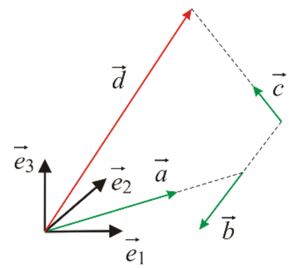
- man durch Linearkombination jeden beliebigen Vektor $\vec{d} \in \mathbb{R}^3$ bilden kann:

$$\vec{d} = x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c} \qquad (365)$$

- sich der Nullvektor nur als triviale Linearkombination darstellen lässt:

$$\vec{0} = x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c} \quad \text{mit} \quad x_1 = x_2 = x_3 = 0 \qquad (366)$$

- das Volumen des aufgespannten Parallelepipeds (Spatprodukt) ungleich null ist.



Alle drei (bzw. vier) Aussagen sind äquivalent und gelten sinngemäß auch im $\mathbb{R}^n$.

2.2 Lineare Abhängigkeit

Durch Negation einer Unabhängigkeitsbedingung lässt sich die lineare Abhängigkeit der (drei) Vektoren nachweisen (Vektoren sind komplanar, liegen also in einer Ebene).

Vierte Beweismöglichkeit: Lässt sich ein Vektor als Linearkombination der beiden anderen

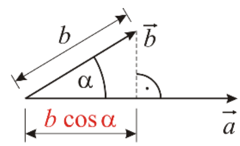
$$\vec{c} = x_1\vec{a} + x_2\vec{b} \qquad (367)$$

darstellen, dann sind die Vektoren linear abhängig (nicht umkehrbare Implikation).

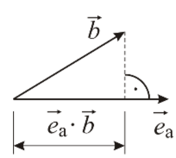
2.3 Skalarprodukt

Skalarprodukt zweier Vektoren:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = a\,b\cos\alpha \qquad (368)$$



Skalarprodukt als Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ bzw. $\vec{e}_a = \vec{a}/|\vec{a}|$



Hinweise:

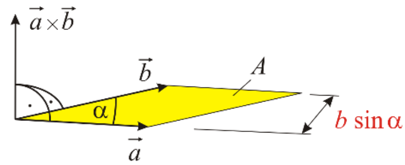
- Betrag (Länge): $a = |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
- Wichtiger Sonderfall: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{a} \perp \vec{b}$ (senkrecht)
- Skalarprodukt gilt auch im $\mathbb{R}^2$ (und im $\mathbb{R}^n$).

L. Nasdala, *Mathematik Beweisaufgaben*,
DOI 10.1007/978-3-658-13957-5_9

2.4 Kreuzprodukt

Kreuzprodukt zweier Vektoren:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \quad (369)$$



Hinweise:

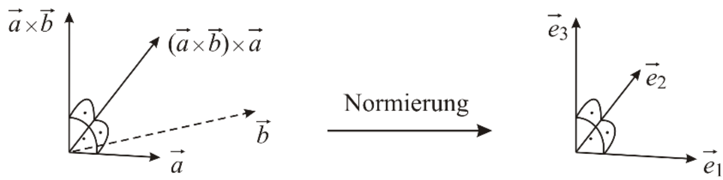
- Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms:

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}| = a\, b \sin\alpha \quad (370)$$

- Wichtiger Sonderfall: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; \vec{a}$ und $\vec{b}$ sind linear abhängig (kollinear).
- Die Orientierung von $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ ergibt sich aus der Rechten-Hand-Regel.
- Kreuzprodukt gilt nur im $\mathbb{R}^3$.
- Andere Bezeichnung: Vektorprodukt

2.5 Orthogonale Basis

Aus zwei (unabhängigen) Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ lässt sich ein kartesisches, rechtshändiges Koordinatensystem (rechtwinkliges Rechtssystem, orthogonale Basis) erzeugen:



Einheitsvektoren:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

$$\vec{e}_2 = \frac{(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}}{|(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}|} \quad (371)$$

$$\vec{e}_3 = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$$

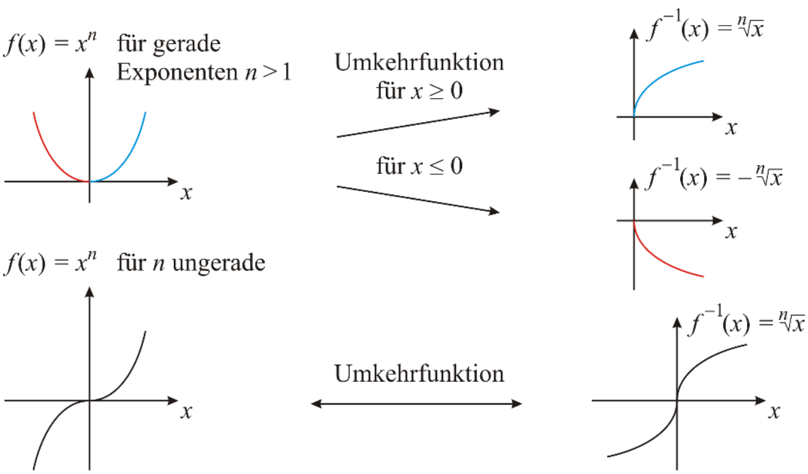
3 Funktionen und Kurven

3.1 Funktion und Umkehrfunktion

Definition: Unter einer Funktion $f(x)$ versteht man eine Abbildung, die jedem x aus dem Definitionsbereich $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}$ einen **eindeutigen** Wert $f \in \mathbb{R}$ zuweist (Gegenbeispiel: Kreis).

Ist $f(x)$ streng monoton steigend (oder fallend), so existiert eine Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$.

3.2 Potenz- und Wurzelfunktionen



3.3 Ganzrationale Funktionen

Fundamentalsatz der Algebra: Eine Polynomfunktion der Ordnung n

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \tag{372}$$

besitzt höchstens n Nullstellen $x_i \in \mathbb{R}$ bzw. genau n Nullstellen $x_i \in \mathbb{C}$.

3.4 Gebrochenrationale Funktionen

Quotient zweier Polynomfunktionen:

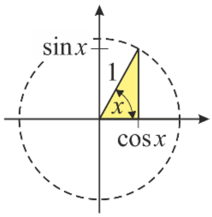
$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} \tag{373}$$

Linearfaktorzerlegung liefert Nullstellen, Pole und (hebbare) Definitionslücken.

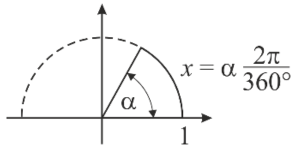
L. Nasdala, *Mathematik Beweisaufgaben*,
DOI 10.1007/978-3-658-13957-5_10

3.5 Trigonometrische und Arkusfunktionen

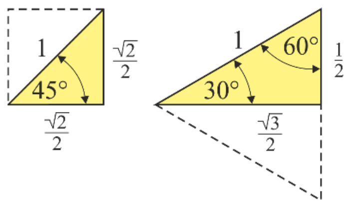
Sinus und Kosinus im Einheitskreis:



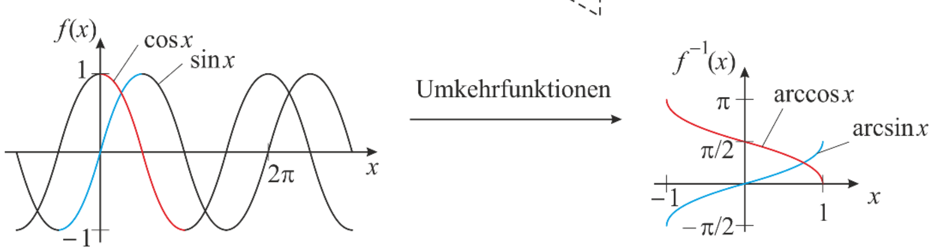
Grad- und Bogenmaß:



Wichtige Dreiecke:



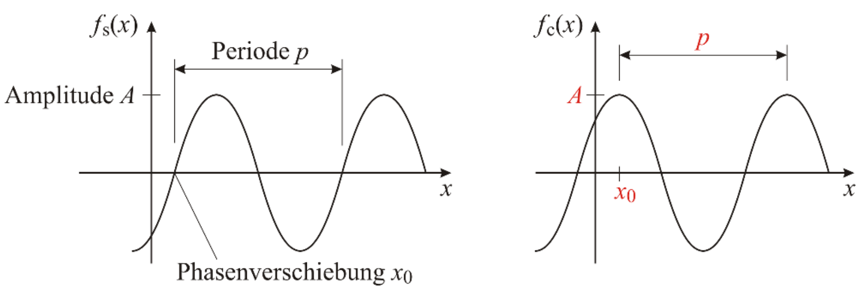
$\cos 0°$	$=$	1	$=$	$\sin 90°$
$\cos 30°$	$=$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$=$	$\sin 60°$
$\cos 45°$	$=$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$=$	$\sin 45°$
$\cos 60°$	$=$	$\frac{1}{2}$	$=$	$\sin 30°$
$\cos 90°$	$=$	0	$=$	$\sin 0°$



$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x) \tag{374}$$

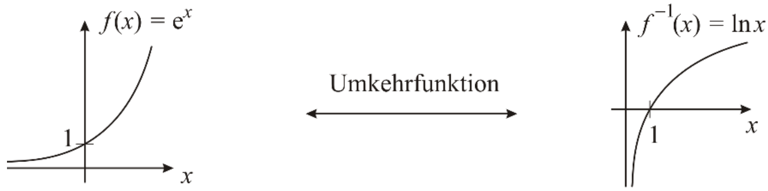
Allgemeine Sinus- und Kosinusfunktionen

$$f_s(x) = A \sin\left(\frac{2\pi}{p}(x - x_0)\right) \quad , \quad f_c(x) = A \cos\left(\frac{2\pi}{p}(x - x_0)\right) \tag{375}$$



Trigonometrische Funktionen werden auch als Kreisfunktionen bezeichnet.

3.6 Exponential- und Logarithmusfunktionen



3.7 Logarithmische Darstellungen

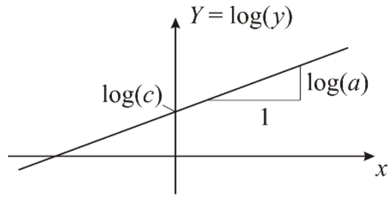
Varianten:

- Eine Exponentialfunktion

$$y = ca^x$$

ergibt in (einfach-) logarithmischer Darstellung eine Gerade:

$$Y = \log(c) + \log(a)\,x$$

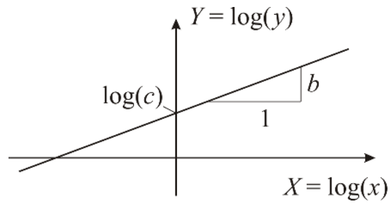


- Eine Potenzfunktion

$$y = cx^b$$

erscheint in doppelt-logarithmischer Darstellung als Gerade:

$$Y = \log(c) + bX$$



3.8 Polarkoordinaten

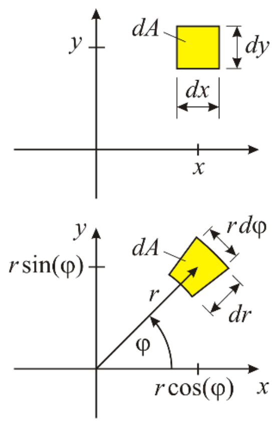
Betrag:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{376}$$

Winkel:

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \in (-90°, 90°) & \text{für} \quad x > 0 \\ 90° & \text{für} \quad x = 0 \wedge y > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 180° \in (90°, 270°) & \text{für} \quad x < 0 \\ 270° & \text{für} \quad x = 0 \wedge y < 0 \end{cases} \tag{377}$$

Infinitesimales Flächenelement: $dA = dx\,dy = r d\varphi\,dr$



4 Differentialrechnung

4.1 Ableitungen von Grundfunktionen

$$\begin{array}{r|c|c|c|c|c|c|c|c|}
f(x) = & c = \text{const.} & x^n \text{ mit } n \in \mathbb{R} & \mathrm{e}^x & \ln x & \sin x & \cos x & \sinh x & \cosh x \\
f'(x) = & 0 & n \cdot x^{n-1} \text{ (Potenzregel)} & \mathrm{e}^x & \dfrac{1}{x} & \cos x & -\sin x & \cosh x & \sinh x
\end{array} \tag{378}$$

4.2 Ableitungsregeln für zusammengesetzte Funktionen

Faktorregel:

$$f(x) = c \cdot g(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = c \cdot g'(x) \tag{379}$$

Summenregel:

$$f(x) = g(x) + h(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(x) + h'(x) \tag{380}$$

Produktregel:

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x) \tag{381}$$

Quotientenregel:

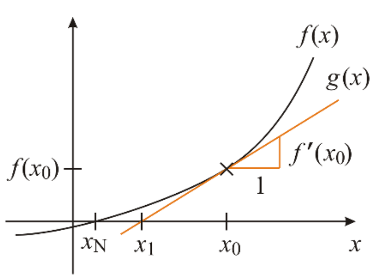
$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h^2(x)} \quad \text{mit} \quad h(x) \neq 0 \tag{382}$$

Kettenregel:

$$f(x) = g(h(x)) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{dg}{dh} \cdot \frac{dh}{dx} \tag{383}$$

Die Ausdrücke dx, dg und dh werden als *Differentiale* bezeichnet.

4.3 Linearisierung einer Funktion



Tangente der Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$:

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{384}$$

L. Nasdala, *Mathematik Beweisaufgaben*,
DOI 10.1007/978-3-658-13957-5_11

4.4 Newton-Verfahren

Numerisches Verfahren zur Lösung nichtlinearer Gleichungen:

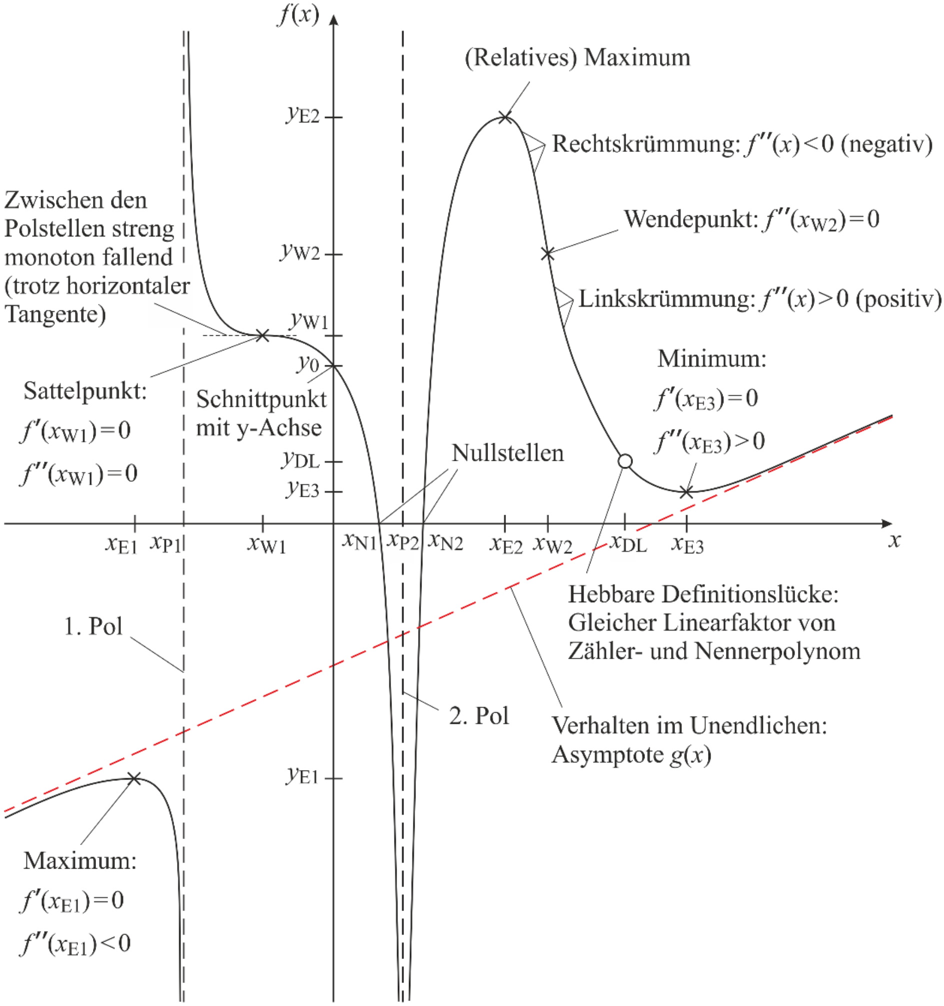
- Gesucht: Nullstelle(n) x_N einer Funktion $f(x)$
- Iterationsvorschrift folgt aus Gleichung (384) mit x_i statt x_0 und x_{i+1} anstelle $x = x_1$:
$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{385}$$
- Iterationsende: $|x_{i+1} - x_i| < \mathrm{err}_\mathrm{tol}$.
- Vorteil: Hervorragendes Konvergenzverhalten
- Nachteil: Bei ungeeignetem Startwert x_0 (in der Nähe einer Extremstelle) kann das Verfahren divergieren (Konvergenz nur in der Nähe der Lösung garantiert).

4.5 Kurvendiskussion

Hauptmerkmale einer (gebrochenrationalen) Funktion:

- Definitionsbereich (hebbare und nicht hebbare Definitionslücken)
- Wertebereich (ggf. erst nach Extremwertbestimmung möglich)
- Symmetrie:
  - Spiegelsymmetrie zur y-Achse (gerade Funktion):
$$f(x) = f(-x) \tag{386}$$
  - Punktsymmetrie zum Ursprung (ungerade Funktion):
$$f(x) = -f(-x) \tag{387}$$
  - Eher uninteressant: Symmetrien bezüglich einer beliebigen Achse bzw. eines beliebigen Punktes
- Ordinatenabschnitt (Schnittpunkt mit y-Achse)
- Nullstellen
- Polstellen
- Relative Extrempunkte:
  - Extremstelle x_E (aus 1. Ableitung)
  - Extremwert $f(x_\mathrm{E})$
- Wende- und Sattelpunkte (aus 2. Ableitung)
- Verhalten im Unendlichen (Grenzwertbestimmung ggf. mittels Polynomdivision)

Grafische Darstellung:



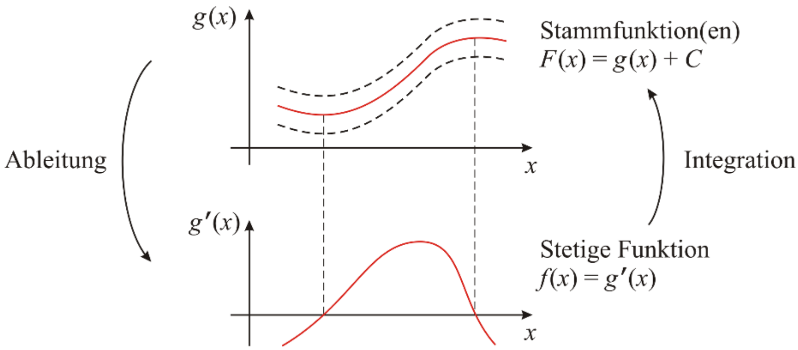
Weitere Merkmale einer Funktion:

- Periodizität: $f(x+p) = f(x)$ mit Periode p
- Stetigkeit
- Monotonie:
  - $f(x)$ steigt monoton, wenn für $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) \leq f(x_2)$
  - $f(x)$ steigt streng monoton, wenn für $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) < f(x_2)$
  - Analoger Nachweis für (streng) monoton fallende Funktionen

5 Integralrechnung

5.1 Fundamentalsatz der Analysis

Die Integration (lat. integrare: wiederherstellen) ist die Umkehrung der Differentiation:



Bestimmte Integration

Das bestimmte Integral (a: untere Grenze, b: obere Grenze) ist eine Zahl (Flächeninhalt):

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \tag{388}$$

Unbestimmte Integration

Das unbestimmte Integral ist wie die Integrandfunktion $f(x)$ (kurz: der Integrand) eine Funktion der Integrationsvariablen x und besitzt eine Integrationskonstante $C \in \mathbb{R}$:

$$\int f(x)\,dx = F(x) \tag{389}$$

Einige Stammfunktionen können Abschnitt 4.1 entnommen werden:

- Die angegebenen Grundfunktionen (elementare Funktionen) sind Stammfunktionen der zugehörigen Ableitungen.
- In den meisten Fällen besitzen $g(x)$ und $g'(x)$ den gleichen Definitionsbereich: in der Regel $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, z. B. für $\sin(x)$ und $\cos(x)$.
- Zu den Ausnahmen zählt der (natürliche) Logarithmus $g(x) = \ln(x)$, der im Gegensatz zur Ableitung $g'(x) = \frac{1}{x}$ nur für $x > 0$ definiert ist. Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \tag{390}$$

L. Nasdala, *Mathematik Beweisaufgaben*,
DOI 10.1007/978-3-658-13957-5_12

5.2 Partielle Integration

Integration der Produktregel $f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$ mit $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ liefert:

$$\int g'(x) \cdot h(x)\, dx = g(x) \cdot h(x) - \int g(x) \cdot h'(x)\, dx \tag{391}$$

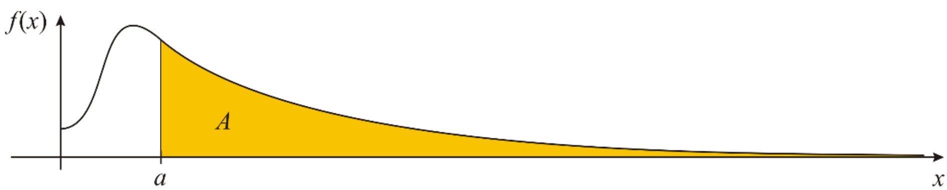
Partielle Integration für bestimmte Integrale:

$$\int_a^b g'(x) \cdot h(x)\, dx = [g(x) \cdot h(x)]_a^b - \int_a^b g(x) \cdot h'(x)\, dx \tag{392}$$

5.3 Uneigentliche Integrale

Unbeschränkter Integrationsbereich

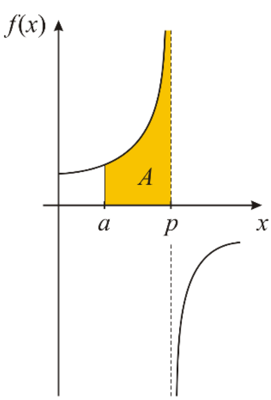
Problem: $\int\limits_a^\infty f(x)\, dx$, $\int\limits_{-\infty}^b f(x)\, dx$ oder $\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)\, dx$ (unendliches Integrationsintervall)



Lösung (Grenzwertbetrachtung):

$$A = \int_a^\infty f(x)\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\, dx \tag{393}$$

Unbeschränkter Integrand



Problem: Polstelle p an der (rechten) Intervallgrenze

Lösung (linksseitiger Grenzwert):

$$A = \int_a^p f(x)\, dx = \lim_{\substack{b\to p\\ b\le p}} \int_a^b f(x)\, dx \tag{394}$$

Varianten:

- Rechtsseitiger Grenzwert bei Polstelle an linker Grenze
- Aufteilung in zwei Bereiche bei Pol innerhalb des Intervalls (nicht-stetiger Integrand wie bei Sprungfunktion)

6 Potenzreihenentwicklungen

6.1 Endliche Reihen

$$\sum_{n=1}^{m} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_m \tag{395}$$

Arithmetische Reihe (kleiner Gauß):

$$\sum_{n=1}^{m} n = 1 + 2 + 3 + \ldots + m = \frac{m(m+1)}{2} \tag{396}$$

6.2 Unendliche Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \tag{397}$$

Laufindex n kann auch z. B. mit 0 beginnen (passend zum allgemeinen Reihenglied a_n).

Geometrische Reihe (konvergent für $|x| < 1$):

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \ldots \tag{398}$$

Harmonische Reihe (divergent):

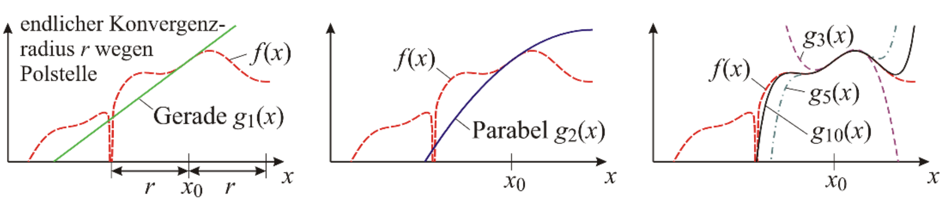
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots \tag{399}$$

Korrekte(re) Schreibweise: $S = \lim\limits_{m\to\infty} S_m$ (Summenwert) mit $S_m = \sum\limits_{n=1}^{m} a_n$ (Partialsumme)

6.3 Taylorreihen

Annäherung einer Funktion $f(x)$ an einer Stelle x_0 durch eine Potenzreihe:

$$g(x) = \lim_{m\to\infty} g_m(x) \quad \text{mit} \quad g_m(x) = \sum_{n=0}^{m} c_n (x - x_0)^n \tag{400}$$

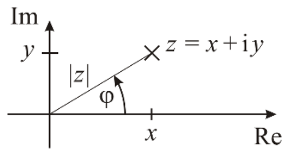


L. Nasdala, *Mathematik Beweisaufgaben*,
DOI 10.1007/978-3-658-13957-5_13

7 Komplexe Zahlen und Funktionen

7.1 Grundlagen

Gaußsche (komplexe) Zahlenebene:



Imaginäre Einheit (aus $\mathrm{i}^2 = -1$):

$$\mathrm{i} = \sqrt{-1} \qquad (401)$$

Eulersche Formel:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi \qquad (402)$$

7.2 Darstellung einer komplexen Zahl

$$z = \underbrace{x + \mathrm{i}y}_{\text{kartesische Darstellung}} = \underbrace{|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}_{\text{Exponentialdarstellung}} = \underbrace{|z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)}_{\text{trigonometrische Darstellung}} \in \mathbb{C} \qquad (403)$$

Real- und Imaginärteil (kartesische Koordinaten; algebraische bzw. kartesische Form):

$$x = \mathrm{Re}(z) = |z|\cos\varphi \quad , \quad y = \mathrm{Im}(z) = |z|\sin\varphi \qquad (404)$$

Betrag und Winkel (Polarkoordinaten; Eulersche Darstellung oder auch Polarform):

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \varphi = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \in (-90°, 90°) & \text{für} \quad x > 0 \\ \operatorname{sgn}(y) \cdot 90° & \text{für} \quad x = 0 \\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) + 180° \in (90°, 270°) & \text{für} \quad x < 0 \end{cases} \qquad (405)$$

Das Rechnen mit komplexen Zahlen unterscheidet sich formal nicht von den reellen Zahlen (komplexe Einheit i als Variable auffassen; wichtig: Potenzrechenregeln!).

7.3 Konjugiert komplexe Zahl

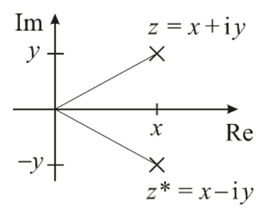
$$z^* = \overline{z} = x - \mathrm{i}y = |z|(\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi) = |z|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \qquad (406)$$

Produkt mit der komplex Konjugierten ist eine reelle Zahl:

$$zz^* = (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y) = x^2 + y^2 = |z|^2 \in \mathbb{R} \qquad (407)$$

Erweiterung mit konjugiert komplexem Nenner bei Division:

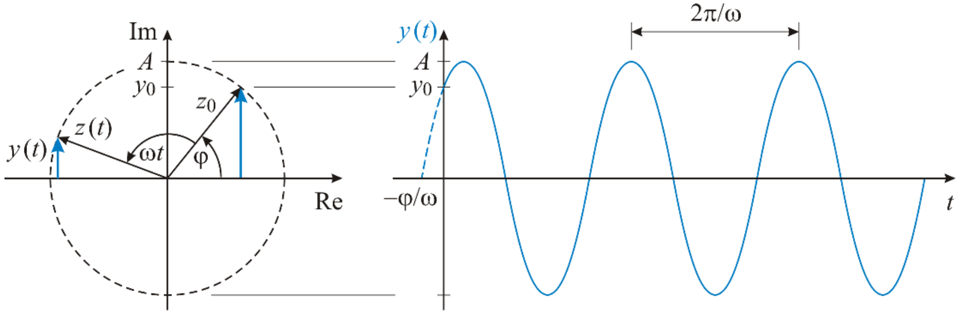
$$\frac{a + \mathrm{i}b}{c + \mathrm{i}d} = \frac{(a + \mathrm{i}b)(c - \mathrm{i}d)}{(c + \mathrm{i}d)(c - \mathrm{i}d)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \mathrm{i}\frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \qquad (408)$$



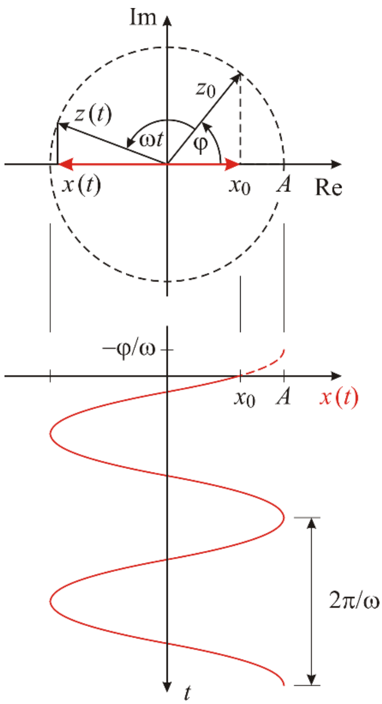
L. Nasdala, *Mathematik Beweisaufgaben*,
DOI 10.1007/978-3-658-13957-5_14

7.4 Harmonische Schwingungen

Sinuszeiger



Kosinuszeiger



Komplexe Erweiterung

Varianten:

- Sinuszeiger

$$y(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

als Imaginärteil:

$$\begin{aligned} z(t) &= x(t) + \mathrm{i}y(t) \\ &= A\left[\cos(\omega t + \varphi) + \mathrm{i}\sin(\omega t + \varphi)\right] \\ &= A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + \varphi)} \end{aligned} \tag{409}$$

- Kosinuszeiger

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

als Realteil:

$$\begin{aligned} z(t) &= x(t) + \mathrm{i}y(t) \\ &= A\left[\cos(\omega t + \varphi) + \mathrm{i}\,\sin(\omega t + \varphi)\right] \\ &= A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + \varphi)} \end{aligned} \tag{410}$$

Mögliche Einsatzgebiete von komplexen Sinus- bzw. Kosinuszeigern $z(t)$:

- Technische Anwendungen der Schwingungslehre und Elektrotechnik
- Herleitung von Additionstheoremen
- Mehrfache partielle Integration

Teil III

Klausur-Formelsammlung

Einleitung

Außer der Klausur-Formelsammlung ist bei den Mathematik 1-Klausuren des Autors kein weiteres Hilfsmittel zugelassen. Am Rande sei erwähnt, dass insbesondere die Benutzung eines Taschenrechner nicht gestattet ist.

Die Formelsammlungen sind aufeinander abgestimmt und ergänzen sich gegenseitig. Zum Beispiel stehen die Ableitungen von Sinus und Kosinus in der Lern-Formelsammlung, müssen also den Studierenden bekannt sein, während sich die Ableitungen von Tangens und Kotangens der Klausur-Formelsammlung entnehmen lassen. Die Klausuren selbst setzen sich hauptsächlich aus Anwendungsaufgaben zusammen — auch wenn dieses Buch den gegenteiligen Eindruck vermitteln mag. Die Herleitungen des Quotienten- und Wurzelkriteriums oder gar die der binomischen Reihe sind nicht klausurrelevant, weil bereits deren Anwendung für viele Studierende eine Herausforderung darstellt.

Beim Thema Vektoralgebra lässt sich zeigen, dass Mathematik mehr ist als Einsetzen und Umformen. Zum Standard gehören Aufgaben, bei denen nach dem Abstand zwischen Punkten, Geraden und Ebenen gefragt ist. Obwohl für sämtliche Kombinationsmöglichkeiten Abstandsformeln existieren, sind diese weder in der Lern- noch in der Klausur-Formelsammlung aufgeführt. Von den Studierenden wird nämlich erwartet, dass sie die erforderlichen Gleichungen während der Prüfung selbstständig aufstellen können. Dass die Kenntnis von Skalar- und Kreuzprodukt hierfür ausreicht, wird im Rahmen der Vorlesung vorgeführt. Vom Auswendiglernen der Abstandsformeln wird sogar ausdrücklich abgeraten, und zwar mit dem Hinweis, dass ein Ergebnis ohne nachvollziehbaren Rechenweg nicht gewertet werden kann. Um die Herleitung zu erleichtern, findet sich in der Klausur-Formelsammlung eine Skizze zur Veranschaulichung des Abstandsvektors. Dieser lässt sich unter anderem entnehmen, dass man für die Abstandsermittlung zweier Geraden lediglich das Volumen des zugehörigen Parallelepipeds durch die Grundfläche teilen muss.

Auch an anderen Stellen müssen Transferleistungen erbracht werden: Bei den Kegelschnitten sind Parabel und Hyperbel nach rechts bzw. nach links und rechts geöffnet, und bei den Anwendungen der Integralrechnung dreht der Rotationskörper exemplarisch um die x-Achse. Bei geänderten Bezugsachsen müssen die Formeln folglich entsprechend modifiziert werden.

Abschließend sei noch darauf hingewiesen, dass nicht alle Gleichungen der Lern- und Klausur-Formelsammlung (Teile II und III) in die Beweisaufgabensammlung (Teil I) aufgenommen worden sind. Im Falle von Definitionen, z. B. $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$, gibt es nichts zu beweisen. Bei der Bogenlänge oder der komplexen Logarithmusfunktion ist die erläuternde Skizze Beweis genug, und auch andere Gleichungen wie die binomischen Formeln dürften selbsterklärend sein.

1 Allgemeine Grundlagen

1.1 Allgemeine binomische Formeln

Binomischer Lehrsatz

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k \quad , \quad n \in \mathbb{N} \tag{411}$$

Binomialkoeffizienten (n über k):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \quad , \quad 0 \le k \le n \tag{412}$$

Rekursive Berechnung der Binomialkoeffizienten mittels Pascalschem Dreieck:

$$\begin{array}{lccccccccc}
n=0: & & & & & 1 & & & & \\
n=1: & & & & 1 & & 1 & & & \\
n=2: & & & 1 & {}_{\searrow + \swarrow} & 2 & & 1 & & \\
n=3: & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
n=4: & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \\[2ex]
\Rightarrow \quad \binom{3}{0} = 1 \, , \; \binom{3}{1} = 3 \, , \ldots
\end{array} \tag{413}$$

Binomische Reihe

Verallgemeinerung des binomischen Lehrsatzes liefert die binomische Reihe:

$$(a+b)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} a^{r-k}\, b^k \quad , \quad r \in \mathbb{R} \tag{414}$$

Verallgemeinerte Binomialkoeffizienten:

$$\binom{r}{k} = \prod_{j=1}^{k} \frac{r-(j-1)}{j} = \frac{r \cdot [r-1] \cdot [r-2] \cdot \ldots \cdot [r-(k-1)]}{k!} \quad , \quad \binom{r}{0} = 1 \tag{415}$$

1.2 Transzendente Zahlen

Eulersche Zahl:

$$\mathrm{e} = 2{,}718281828459045\ldots \tag{416}$$

Kreiszahl:

$$\pi = 3{,}141592653589793\ldots \tag{417}$$

Im Gegensatz zu *algebraischen Zahlen* (z. B. $\sqrt{2}$; aus $x^2 - 2 = 0$) lassen sich *transzendente Zahlen* nicht aus einer algebraischen Gleichung $c_n x^n + \ldots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = 0$ berechnen.

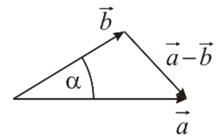
Weitere transzendente Zahlen: $\cos(1)$, $2^{\sqrt{2}}$, $\ln(3)$, usw.

L. Nasdala, *Mathematik Beweisaufgaben*,
DOI 10.1007/978-3-658-13957-5_15

2 Vektoralgebra

2.1 Kosinussatz

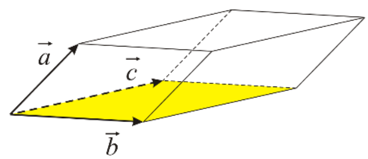
$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha \qquad (418)$$



2.2 Spatprodukt

Spatprodukt dreier Vektoren:

$$\langle\vec{a},\vec{b},\vec{c}\rangle = \det(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) \qquad (419)$$

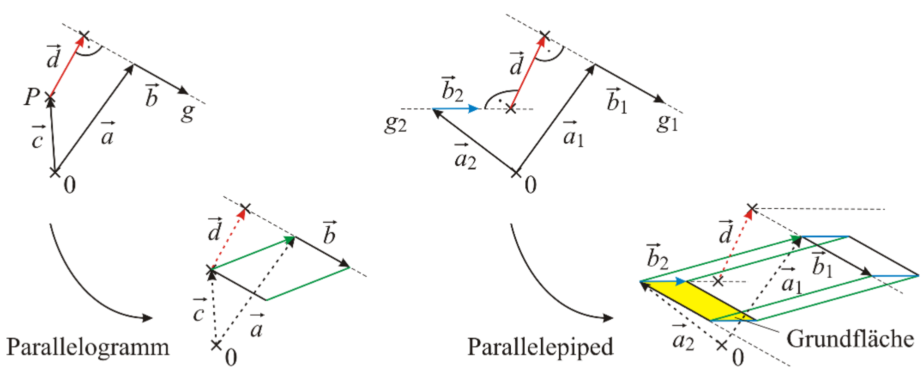


Hinweise:

- Spatprodukt liefert (orientiertes) Volumen des aufgespannten Parallelepipeds.
- Ergebnis kann auch negativ sein (Selbstdurchdringung bei Finiten Elementen).
- Zyklische Vertauschung ist möglich: $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \vec{b}\cdot\left(\vec{c}\times\vec{a}\right) = \vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$

2.3 Abstandsvektoren

Veranschaulichung des Abstandsvektors $\vec{d}$ zwischen einem Punkt P und einer Geraden g sowie zwischen zwei Geraden g_1 und g_2:



L. Nasdala, *Mathematik Beweisaufgaben*,
DOI 10.1007/978-3-658-13957-5_16

3 Funktionen und Kurven

3.1 Satz des Pythagoras

Trigonometrischer Pythagoras (Einheitskreis für $x = \cos z$ und $y = \sin z$):

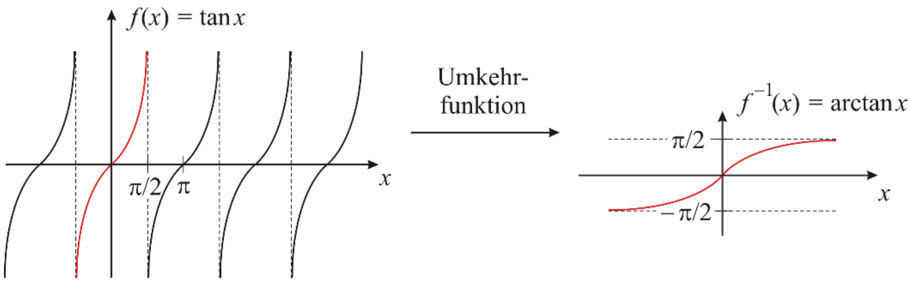
$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \tag{420}$$

Hyperbolischer Pythagoras (Einheitshyperbel für $x = \cosh z$ und $y = \sinh z$):

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1 \tag{421}$$

3.2 Tangens und Arkustangens

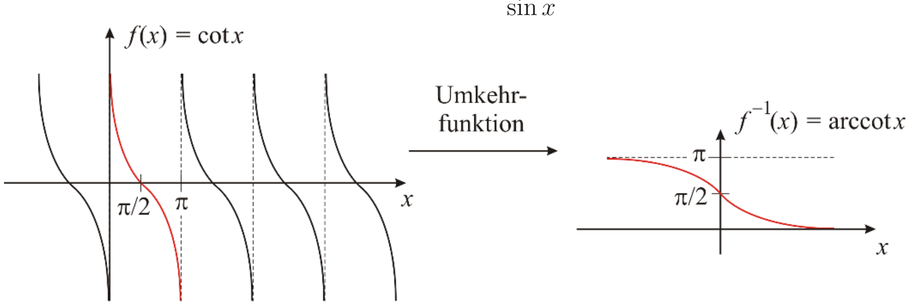
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \tag{422}$$



$$\arctan(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \tag{423}$$

3.3 Kotangens und Arkuskotangens

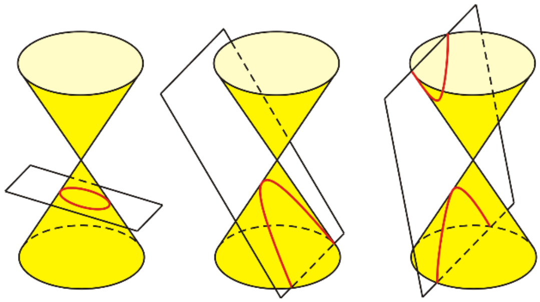
$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \tag{424}$$



$$\operatorname{arccot}(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x) \tag{425}$$

L. Nasdala, *Mathematik Beweisaufgaben*,
DOI 10.1007/978-3-658-13957-5_17

3.4 Kegelschnitte



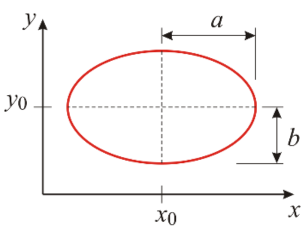
Allgemeine Kegelschnittgleichung:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{426}$$

Sechs Fälle beim Doppelkegel:
Ellipse, Parabel, Hyperbel, Punkt, Gerade, 2 sich schneidende Geraden

Zwei Fälle beim Zylinder:
keine Lösung, 2 parallele Geraden

Ellipse



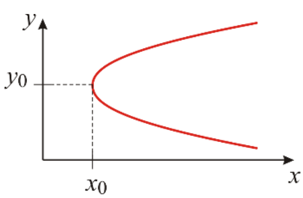
Ellipse mit Mittelpunkt (x_0, y_0) und Halbachsen a und b:

$$\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 = 1 \tag{427}$$

Kreis als Sonderfall mit Radius $r = a = b$:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Parabel

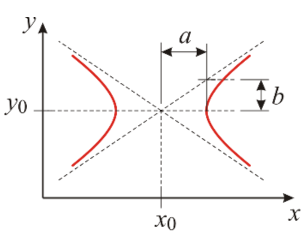


Nach rechts geöffnete Parabel mit Scheitelpunkt (x_0, y_0) und Streckfaktor c:

$$x = c(y - y_0)^2 + x_0 \tag{428}$$

Scheitelpunktsform in expliziter Darstellung $x = f(y)$

Hyperbel



Hyperbel mit Mittelpunkt (x_0, y_0):

$$\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 - \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 = 1 \tag{429}$$

Steigung der Asymptoten: $\pm\dfrac{b}{a}$

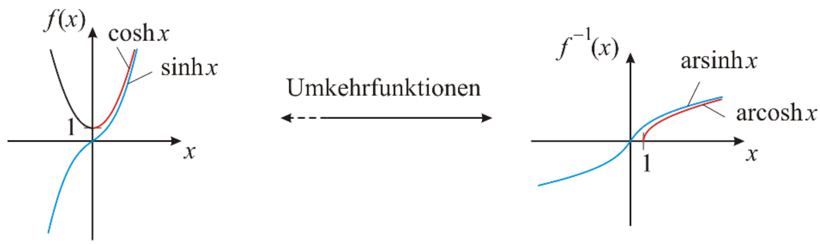
3.5 Hyperbel- und Areafunktionen

Sinus Hyperbolicus und Kosinus Hyperbolicus:

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right) \quad , \quad \cosh(x) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right) \tag{430}$$

Areasinus Hyperbolicus und Areakosinus Hyperbolicus:

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \quad , \quad \operatorname{arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \tag{431}$$

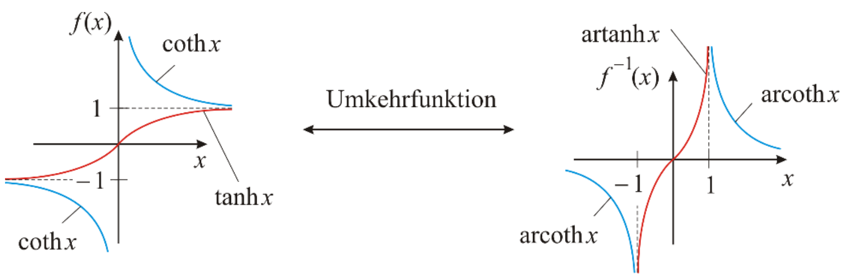


Tangens Hyperbolicus und Kotangens Hyperbolicus:

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \quad , \quad \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} \tag{432}$$

Areatangens Hyperbolicus und Areakotangens Hyperbolicus:

$$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad , \quad \operatorname{arcoth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right) \tag{433}$$



3.6 Additionstheoreme

$$\sin(x \pm y) = \sin x \, \cos y \pm \cos x \, \sin y \tag{434}$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \, \cos y \mp \sin x \, \sin y \tag{435}$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \, \tan y} \tag{436}$$

4 Differentialrechnung

4.1 Ableitungen von Grundfunktionen

$$\begin{array}{r|c|c|}
f(x) = & a^x & \log_a |x| \\
f'(x) = & (\ln a)a^x & \dfrac{1}{(\ln a)x}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|c|c|c|c|c|c|}
f(x) = & \tan x & \cot x & \arcsin x & \arccos x & \arctan x & \operatorname{arccot} x \\
f'(x) = & \dfrac{1}{\cos^2 x} & -\dfrac{1}{\sin^2 x} & \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \dfrac{1}{1+x^2} & -\dfrac{1}{1+x^2}
\end{array} \tag{437}$$

$$\begin{array}{r|c|c|c|c|c|c|}
f(x) = & \tanh x & \coth x & \operatorname{arsinh} x & \operatorname{arcosh} x & \operatorname{artanh} x & \operatorname{arcoth} x \\
f'(x) = & \dfrac{1}{\cosh^2 x} & -\dfrac{1}{\sinh^2 x} & \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} & \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} & \dfrac{1}{1-x^2} & \dfrac{1}{1-x^2}
\end{array}$$

In folgenden Fällen erfordert die Umkehrung (Integration) eine Fallunterscheidung:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \begin{cases} -\operatorname{arcosh}(-x) + C & \text{für } x < -1 \\ +\operatorname{arcosh}(+x) + C & \text{für } x > +1 \end{cases} \tag{438}$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \begin{cases} \operatorname{artanh} x + C & \text{für } |x| < 1 \\ \operatorname{arcoth} x + C & \text{für } |x| > 1 \end{cases} \tag{439}$$

4.2 Logarithmische Ableitung

Ziel: Ableitung von Funktionen $y = f(x) > 0$, die nicht direkt differenzierbar sind.

Allgemeiner Ansatz

1. Logarithmieren: $\ln y = \ln f(x)$
2. Differentiation mittels Kettenregel $[\ln y]' = \frac{1}{y} \cdot y'$ liefert:

$$y' = f(x) \cdot [\ln f(x)]' \tag{440}$$

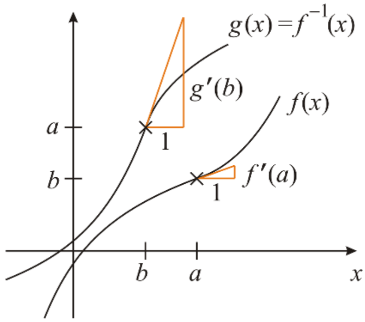
Wichtiger Sonderfall

Ableitung von Funktionen des Typs $f(x) = g(x)^{h(x)}$ mit $g(x) > 0$:

$$f'(x) = f(x)\frac{d[h(x)\ln g(x)]}{dx} \tag{441}$$

L. Nasdala, *Mathematik Beweisaufgaben*,
DOI 10.1007/978-3-658-13957-5_18

4.3 Ableitung mittels Umkehrfunktion



Ableitung (Steigung) an der Stelle $x = a$:

$$f'(a) = \frac{1}{g'(b)} \quad \text{mit} \quad b = f(a) \tag{442}$$

Anschließend ersetze man a durch x.

4.4 Implizite Differentiation

Ziel: Ableitung einer in impliziter Form $F(x, y) = 0$ gegebenen Funktion $y = y(x)$:

1. Ableitung der Funktionsgleichung $F(x, y) = 0$ nach x
2. Auflösung nach $y' = \dfrac{dy}{dx}$

4.5 Ableitung einer in Parameterform gegebenen Funktion

Ableitung einer Funktion $y = y(x)$, wenn $y = y(t)$ und $x = x(t)$ nur indirekt über einen Parameter t (z. B. die Zeit oder ein Winkel) miteinander verknüpft sind:

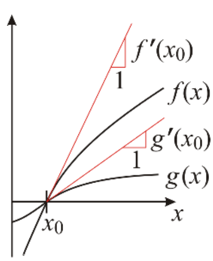
$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \quad \text{mit} \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}\,, \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt} \tag{443}$$

4.6 Regel von L'Hospital

Grenzwertbestimmung einer Funktion im Fall eines unbestimmten Ausdrucks $\frac{0}{0}$ (oder $\frac{\infty}{\infty}$):

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \;„\overset{\frac{0}{0}}{=}“\; \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{444}$$

- Unbestimmte Ausdrücke vom Typ 0^0, ∞^0, 1^∞, $\infty - \infty$ und $0 \cdot \infty$ müssen zunächst entsprechend umgeformt werden.
- Gegebenenfalls mehrfach anwenden.



5 Integralrechnung

5.1 Integration durch Partialbruchzerlegung

Integration einer gebrochenrationalen Funktion $f(x) = \dfrac{Z(x)}{N(x)}$:

1. Polynomdivision, falls Polynomordnung $\mathcal{O}(Z) \geq \mathcal{O}(N)$:

   $\Rightarrow$ $f(x) = g(x) + r(x)$

   $g(x)$: ganzrationaler Anteil (Asymptote bei Kurvendiskussion)

   $r(x) = \dfrac{z(x)}{N(x)}$ mit $\mathcal{O}(z) < \mathcal{O}(N)$: echt gebrochenrationale Funktion (Rest)

2. Bestimmung der Nenner-Nullstellen x_n (konjugiert komplex $x_{1,2}$, falls $\frac{p^2}{4} - q < 0$)
3. Ansatz für Teilbrüche (Partialbrüche):

   a) einfache Nullstelle: $\dfrac{a_1}{x - x_\mathrm{n}}$

   b) doppelte Nullstelle: $\dfrac{a_1}{x - x_\mathrm{n}} + \dfrac{a_2}{(x - x_\mathrm{n})^2}$

   c) k-fache Nullstelle: $\dfrac{a_1}{x - x_\mathrm{n}} + \dfrac{a_2}{(x - x_\mathrm{n})^2} + \ldots + \dfrac{a_k}{(x - x_\mathrm{n})^k}$

   d) konjugiert komplexe Nullstelle: $\dfrac{b_1 x + c_1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \dfrac{b_1 x + c_1}{x^2 + px + q}$

   e) k-fache konjugiert komplexe Nullstelle: $\dfrac{b_1 x + c_1}{x^2 + px + q} + \ldots + \dfrac{b_k x + c_k}{(x^2 + px + q)^k}$

4. Ermittlung der unbekannten Konstanten a_1, a_2, $\ldots$, b_1, c_1, $\ldots$:

   a) Darstellung von $f(x)$ bzw. $r(x)$ als Summe aller Teilbrüche

   b) Erweiterung der Teilbrüche auf gemeinsamen Hauptnenner

   c) Einsetzmethode oder Koeffizientenvergleich (Lösung eines LGS)

   Eine dritte Möglichkeit ist die Zuhaltemethode (Grenzwertmethode): sehr effizient (keine Erweiterung auf Hauptnenner), aber nur für einfache Nullstellen geeignet.

5. Integration der Teilbrüche und ggf. von $g(x)$

L. Nasdala, *Mathematik Beweisaufgaben*,
DOI 10.1007/978-3-658-13957-5_19

5.2 Integration durch Substitution

Allgemeiner Lösungsansatz:

1. Substitution (Austausch) der Integrationsvariablen x durch $u = u(x)$
2. Ableitung der Hilfsfunktion u:

$$u'(x) = \frac{du}{dx} \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{u'(x)}$$

   Bei $x = x(u)$ Ableitung nach der Hilfsfunktion:

$$dx = \frac{dx}{du}\,du$$

3. Integration:

$$\int f(x)\,dx = \int h(u)\,du \tag{445}$$

4. Rücksubstitution der Integrationsvariablen

Hinweise:

- Die Kunst besteht darin, $u(x)$ so zu wählen, dass sich alle (verbleibenden) Terme mit x herauskürzen (Integration nur möglich, wenn $h(u)$ unabhängig von x).
- Bei bestimmter Integration (mit substituierten Grenzen)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} h(u)\,du \tag{446}$$

  ist die Rücksubstitution obsolet.

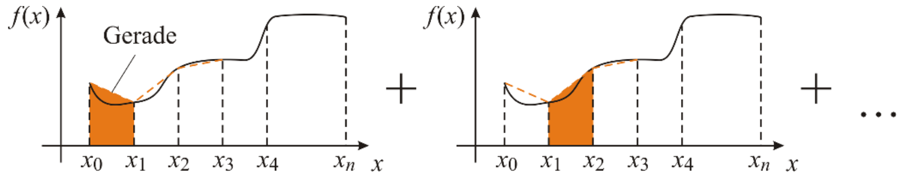
Spezielle Lösungsansätze:

$$\begin{array}{r|c|c|c|c|c|} & \text{(A)} & \text{(B)} & \text{(C)} & \text{(D)} & \text{(E)} \\ f(x) = & g(ax+b) & u(x)\cdot u'(x) & \dfrac{u'(x)}{u(x)} & g(u(x))\cdot u'(x) & g(\mathrm{e}^x, \sinh x, \ldots) \\ u = & ax+b & u(x) & u(x) & u(x) & \mathrm{e}^x \end{array} \tag{447}$$

$$\begin{array}{r|c|c|c|} & \text{(F)} & \text{(G)} & \text{(H)} \\ f(x) = & g\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right) & g\left(x, \sqrt{x^2+a^2}\right) & g\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right) \\ x = & a\sin(u) \quad \text{mit } u \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] & a\sinh(u) & a\cosh(u) \quad \text{mit } u \geq 0 \end{array} \tag{448}$$

5.3 Numerische Integration

Trapezregel



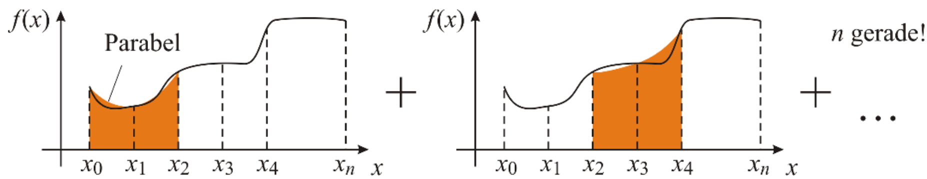
Näherungslösung:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}(x_1-x_0)+\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}(x_2-x_1)+\ldots \tag{449}$$

Bei äquidistanter Verteilung der Stützstellen $\Delta x = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots$ erhält man:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx \frac{x_n-x_0}{n}\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right] \tag{450}$$

Simpsonregel



Näherungslösung:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx \frac{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)}{6}(x_2-x_0)+\frac{f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)}{6}(x_4-x_2)+\ldots \tag{451}$$

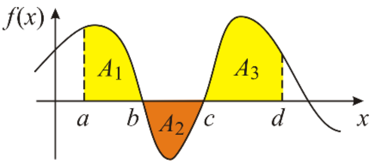
Äquidistante Verteilung der Stützstellen:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx \frac{x_n-x_0}{n}\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{3}+\frac{4}{3}\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1})+\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i})\right] \tag{452}$$

Aufgrund des quadratischen Ansatzes liefert die Simpsonregel bei gleichem numerischen Aufwand eine deutlich bessere Ergebnisqualität als die Trapezregel.

5.4 Anwendungen

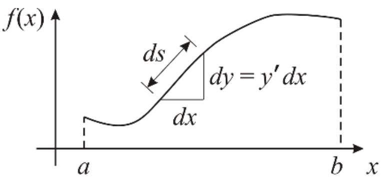
Flächeninhalt



Beispiel für Flächenaufteilung:

$$
\begin{aligned}
A &= A_1 + A_2 + A_3 \\
&= \int_a^b f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx
\end{aligned}
\tag{453}
$$

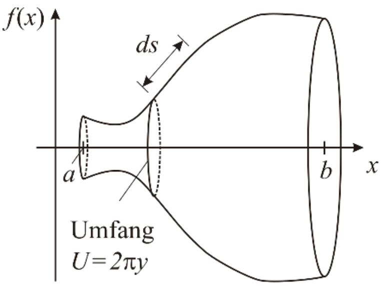
Bogenlänge



Anwendung des Pythagoras liefert die Bogenlänge:

$$S = \int_{s_a}^{s_b} ds = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx \tag{454}$$

Mantelfläche und Volumen eines Rotationskörpers



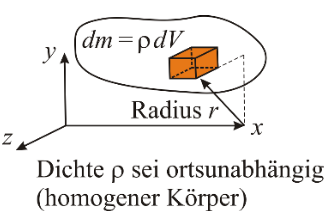
Mantelfläche:

$$M = \int_{s_a}^{s_b} 2\pi y\,ds = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx \tag{455}$$

Volumen:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx \tag{456}$$

Volumen, Schwerpunkt und Massenträgheitsmoment



Schwerpunkt in x-Richtung:

$$x_S = \frac{1}{V} \iiint_V x\,dV \quad \text{mit} \quad V = \iiint_V dV \tag{457}$$

Massenträgheitsmoment um die x-Achse:

$$J_x = \iiint_m r^2\,dm = \rho \iiint_V \left(y^2 + z^2\right)\,dV \tag{458}$$

6 Potenzreihenentwicklungen

6.1 Konvergenzkriterien

Eine unendliche Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn der Summenwert S existiert.

Wichtige konvergente Reihen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = \mathrm{e} \tag{459}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6} \tag{460}$$

Wichtige Grenzwerte (von Folgen für $n \in \mathbb{N}$ bzw. von Funktionen für $n \in \mathbb{R}$):

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} \tag{461}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \tag{462}$$

Quotientenkriterium

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q \begin{cases} < 1 & : \text{ Reihe konvergiert} \\ > 1 & : \text{ Reihe divergiert} \end{cases} \tag{463}$$

Wurzelkriterium

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = w \begin{cases} < 1 & : \text{ Reihe konvergiert} \\ > 1 & : \text{ Reihe divergiert} \end{cases} \tag{464}$$

Vergleichskriterien

Konvergente/divergente Vergleichsreihe: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$

- **Majorantenkriterium** für $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ bzw. $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (Beweis der Konvergenz):

$$|a_n| \leq b_n \quad \text{für alle } n \tag{465}$$

- **Minorantenkriterium** (Beweis der Divergenz):

$$a_n \geq b_n \geq 0 \quad \text{für alle } n \tag{466}$$

L. Nasdala, *Mathematik Beweisaufgaben*,
DOI 10.1007/978-3-658-13957-5_20

Notwendiges Konvergenzkriterium

Die Nullfolge ist ein notwendiges, aber nicht hinreichendes Konvergenzkriterium:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{467}$$

Hauptanwendung: Beweis der Divergenz

Leibniz-Kriterium

Anwendbar auf alternierende Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot a_n = a_0 - a_1 + a_2 \mp \ldots$ mit $a_n \geq 0$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \wedge \quad a_{n+1} \leq a_n \;\text{ für alle } n \tag{468}$$

Es lässt sich (lediglich) **bedingte Konvergenz** nachweisen, d. h. das Kommutativgesetz ist nicht gültig. Bei einer absolut konvergenten Reihe besitzt auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ bzw. $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ einen Summenwert (Nachweis z. B. mit Quotientenkriterium; Kommutativgesetz gültig).

6.2 Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x^1 + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots \tag{469}$$

Konvergenzbereich

Menge aller Zahlen x, für die die Potenzreihe konvergiert.

Konvergenzradius

Konvergenzradius aus Quotientenkriterium:

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \tag{470}$$

Konvergenzradius aus Wurzelkriterium:

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} \tag{471}$$

- Konvergenz für $|x| < r$
- Divergenz für $|x| > r$
- Weitere Untersuchungen erforderlich für $|x| = r$

6.3 Taylorreihen

Entwicklung einer Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 (Entwicklungspunkt) in eine Taylorreihe:

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots \end{aligned} \tag{472}$$

Mac Laurinsche Reihe als Sonderfall für $x_0 = 0$:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots \tag{473}$$

Bei Funktionen vom Typ $f(x) = x^i b(x)$ kann die Potenzfunktion x^i abgespalten werden.

6.4 Grenzwertsätze

Wenn die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ existieren, gilt:

$$\lim_{x\to x_0} cf(x) = c \lim_{x\to x_0} f(x) \tag{474}$$

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)]^c = \left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]^c \tag{475}$$

$$\lim_{x\to x_0} c^{f(x)} = c^{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)} \tag{476}$$

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) \tag{477}$$

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) \tag{478}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} \quad \text{für} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0 \tag{479}$$

Hinweise:

- Der Grenzwert einer Funktion existiert, wenn links- und rechtsseitiger Grenzwert gleich sind (relevant für endliche x_0): $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\leq x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\geq x_0}} f(x)$
- Die Grenzwertsätze gelten auch für $x \to \infty$.
- Grenzwerte dürfen unendlich sein (bestimmte Divergenz, uneigentlicher Grenzwert $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$); ggf. ist die Regel von L'Hospital anzuwenden.
- Die Grenzwertsätze gelten sinngemäß auch für Folgen (a_n) und (b_n); im Gegensatz zu (differenzierbaren) Funktionen müssen diese konvergent sein (endliche Grenzwerte).
- Konstante $c = \text{const.}$

7 Komplexe Zahlen und Funktionen

7.1 Hauptwert einer komplexen Zahl

Der Winkel (Phase) einer komplexen Zahl ist wegen der Periodizität

$$z = z \cdot 1 = z \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}k \cdot 360^\circ} \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z} \tag{480}$$

mehrdeutig. Aus Gründen der Einfachheit wird nur der Hauptwert angegeben, z. B.:

$$z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \quad \text{mit} \quad \varphi \in [-90^\circ, 270^\circ) \tag{481}$$

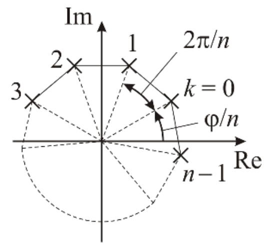
Folge: Rechenoperationen Radizieren und Logarithmieren liefern mehrdeutige Lösungen; im Gegensatz zur Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und dem Potenzieren.

7.2 Wurzelziehen

Mit (480) folgt für die Lösungsmenge einer n-ten Wurzel:

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{|z|}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}} \ , \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \tag{482}$$

Es existieren n unterschiedliche Lösungen, die sich als regelmäßiges n-Eck darstellen lassen.



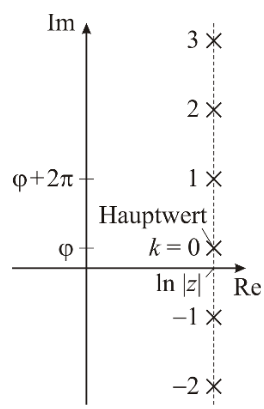
7.3 Logarithmus

Natürlicher Logarithmus:

$$\ln z = \ln\left(|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi + k \cdot 2\pi)}\right) = \underbrace{\ln|z| + \mathrm{i}\varphi}_{\text{Hauptwert } \mathrm{Ln}\, z} + \mathrm{i}k \cdot 2\pi \ , \quad k \in \mathbb{Z} \tag{483}$$

Hinweise:

- Die komplexe Logarithmusfunktion lässt sich auf jede Zahl $z \neq 0$ anwenden, also auch auf eine negative reelle.
- Die (unendlich vielen) Lösungen befinden sich auf einer Geraden, die parallel zur imaginären Achse verläuft.
- Der Winkel ist im Bogenmaß anzugeben, damit Real- und Imaginärteil die gleiche Einheit besitzen.



L. Nasdala, *Mathematik Beweisaufgaben*,
DOI 10.1007/978-3-658-13957-5_21

7.4 Cardanische Formeln

Gesucht ist die analytische Lösung einer kubischen Gleichung:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{mit} \quad a, b, c \in \mathbb{R} \quad , \quad c \neq 0 \tag{484}$$

Mittels Substitution $x = z - \frac{a}{3} \in \mathbb{C}$ Überführung in die reduzierte Form:

$$z^3 + pz + q = 0 \quad \text{mit} \quad p = b - \frac{a^2}{3} \ , \ q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c \tag{485}$$

Falls $q \neq 0$, erneute Substitution $z = u + v \in \mathbb{C}$ erforderlich:

$$(u+v)^3 + pz + q = u^3 + 3uv\underbrace{(u+v)}_{z} + v^3 + pz + q = \underbrace{(3uv+p)}_{=0\ (\mathrm{I})} z + \underbrace{(u^3+v^3+q)}_{=0\ (\mathrm{II})} = 0 \tag{486}$$

Umformung der Gleichungen (I) und (II) liefert die Lösungen

$$u_k = \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} \pm \sqrt{D}\right) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot 2\pi}} \ , \quad v_k = -\frac{p}{3u_k} = \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} \mp \sqrt{D}\right) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot 2\pi}} \ , \quad k \in \mathbb{Z} \tag{487}$$

in Abhängigkeit der Diskriminante:

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \tag{488}$$

Fallunterscheidungen

Für $D > 0$ eine reelle und zwei (konjugiert) komplexe Lösungen:

$$z_0 = u_0 + v_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}} \ , \quad z_{1,2} = -\frac{u_0 + v_0}{2} \pm \frac{\sqrt{3}\,(u_0 - v_0)}{2}\mathrm{i} \tag{489}$$

Für $D = 0$ eine einfache und eine doppelte reelle Nullstelle:

$$z_0 = 2u_0 = -\sqrt[3]{4q} \quad , \quad z_{1,2} = -u_0 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}} \tag{490}$$

Für $D < 0$ (Casus irreducibilis; im Reellen nicht lösbar) drei verschiedene reelle Lösungen:

$$z_k = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{q}{2}\sqrt{-\frac{27}{p^3}}\right) + \frac{k \cdot 2\pi}{3}\right) \quad , \quad k = 0, 1, 2 \tag{491}$$

Endgültige Lösung aus Rücksubstitution: $x_k = z_k - \frac{a}{3}$ mit $k = 0, 1, 2$

Polynome höherer Ordnung

Quartische (biquadratische) Gleichungen sind ebenfalls analytisch lösbar. Allgemeine Polynome fünfter und höherer Ordnung erfordern numerische Ansätze (Newton-Verfahren).

Stichwortverzeichnis

L. Nasdala, *Mathematik Beweisaufgaben*,
DOI 10.1007/978-3-658-13957-5