LEHRBUCH

Gert Höfner

Mit Selbsttests gezielt Mathematik lernen

Für Studienanfänger aller Fachrichtungen zur Vorbereitung und studienbegleitend

Springer Spektrum

Mit Selbsttests gezielt Mathematik lernen

Gert Höfner

Mit Selbsttests gezielt Mathematik lernen

Für Studienanfänger aller Fachrichtungen zur Vorbereitung und studienbegleitend

Springer Spektrum

Gert Höfner
Langenfeld, Deutschland

ISBN 978-3-662-52962-1 ISBN 978-3-662-52963-8 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-52963-8

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Planung: Dr. Andreas Rüdinger

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist Teil von Springer Nature
Die eingetragene Gesellschaft ist Springer-Verlag GmbH Berlin Heidelberg
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorwort

Im Mathematikunterricht werden derzeit vor allem schematische Rechenverfahren eingeübt, bei denen das Verständnis für die eigentliche Problemstellung vernachlässigt wird. Auch die Vorkurse an den Hochschulen konzentrieren sich im Wesentlichen auf diese, bereits beherrschten, schematischen Rechenverfahren. Für eine Vertiefung des mathematischen Verständnisses fehlt in diesen Kursen die Zeit.

Der vorliegende Kurs ist deshalb grundsätzlich anders aufgebaut. Er hilft Ihnen Ihre Wissenslücken zu erkennen und zu schließen. Der Kurs ist in 5 Tage gegliedert, die jeweils für ein Teilgebiet der Mathematik stehen. Jeder Tag besteht wiederum aus 5 Kapiteln. Im ersten Kapitel können Sie Ihren Wissensstand überprüfen. Nach einem Vergleich mit der Lösung im zweiten Kapitel entscheiden Sie, ob Sie mit dem nächsten Test fortfahren dürfen. Wenn Sie bei dem Test feststellen, dass Sie die Aufgabe nicht lösen konnten oder sehr unsicher waren, sollten Sie die Erklärungen und Informationen im dritten Kapitel studieren, die Sie durch Übungen im vierten Kapitel vertiefen können. Ihr Lernerfolg lässt sich anschließend mit den Lösungen zu den Übungen im fünften Kapitel überprüfen, bevor Sie zum nächsten Test übergehen. Sollten Sie die Arbeit an einem Teil nicht an einem Tag abschließen, dann war die Zeit notwendig, um die fehlenden Kenntnisse aufzuarbeiten.

Bedanken möchte ich mich bei Herrn Dipl.-Ing. Arne Brockmann für die sorgfältige und pünktliche Anfertigung des Manuskripts in LaTeX und bei Herrn Dr. Andreas Rüdinger vom Springer Verlag in Heidelberg für seine wesentlichen Hinweise und die fürsorgliche Betreuung bei der Ausarbeitung des Werkes.

Langenfeld, im Juni 2016 Gert Höfner

Inhaltsverzeichnis

Teil I

1. Tag – Arithmetik

1. Tag – Arithmetik

Die Arithmetik ist die Lehre von den Grundrechenarten, der Erweiterung des Bereiches der natürlichen Zahlen und der Teilbarkeit. Arithmetik kommt vom griechischen Wort *arithmos*, welches Zahl bedeutet. Die Arithmetik ist die Grundlage für die Algebra und stellt für diese die Zahlen, die Regeln und die Grundlagen bereit.

In diesem Buch bedeutet Arithmetik die Sicherung von Grundfertigkeiten, um Aufgaben numerisch lösen zu können. Dazu ist es erforderlich, die Rechenoperationen sicher zu beherrschen, ihre Gesetze, die Hilfszeichen wie Klammern oder vereinfachte Schreibweisen (Summen-, Produktzeichen, Binomialkoeffizienten oder Determinanten) zu wiederholen und gegebenenfalls zu erklären, zu üben und so zu festigen, dass die sichere Anwendung in den folgenden Kapiteln gewährleistet ist. Somit bildet die Arithmetik auch in diesem Kurs das Fundament, damit Sie später mit Ihren Kenntnissen Mathematik im jeweiligen Fachgebiet anwenden können. Wer will denn ein Haus auf einem unzureichenden Fundament gründen?

Im Mittelpunkt dieses Kapitels steht also das numerische Rechnen, wobei der Einsatz des Taschenrechners oft gute Dienste leisten kann.

1 Tests zur Arithmetik

Übersicht

1.1 Summenzeichen

1. Stellen Sie folgende Summe mit dem Summenzeichen dar!

$$1 + 3 + 5 + \ldots + 97 + 99 + 101$$

2. Welchen Wert hat die Summe?

$$\sum_{i=1}^{10} \left(i^2 - 1 \right)$$

Gehen Sie zu Kapitel 2.1!

G. Höfner, *Mit Selbsttests gezielt Mathematik lernen*,
DOI 10.1007/978-3-662-52963-8_1

1.2 Produktzeichen

1. Stellen Sie das folgende Produkt mit dem Produktzeichen dar!

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 42$$

2. Welchen Wert hat das Produkt?

$$\prod_{i=1}^{5}(2i-1)$$

Gehen Sie zu Kapitel 2.2!

1.3 Vorrangsregeln

Zu berechnen ist:

$$[2 \cdot (-10) : (-5)] + 28 : 4 - 2 \cdot 3^2$$

Gehen Sie zu Kapitel 2.3!

1.4 Gleiches miteinander multiplizieren (Potenzen mit natürlichen Zahlen als Exponenten)

Zeitungsaustragen als Ferienjob ist eine Möglichkeit, um das Taschengeld mehr oder weniger gut aufzubessern. Der Schüler macht dem Chef einen ungewöhnlichen Vorschlag, indem er ihm anbietet, den ersten Tag für einen Cent zu arbeiten. Der Chef meint allerdings, dass es wegen Einarbeitung und anderer Notwendigkeiten besser wäre, wenn der Schüler nicht nur einen sondern mehrere Tage arbeiten würde. Gut, meint der Schüler, am zweiten Tag möchte er allerdings zwei Cent, am dritten vier Cent und an jedem weiteren Arbeitstag das Doppelte des vorangegangenen Tages. Klingt ja gar nicht so schlecht meint der Chef, rechnet auch aus, was der Schüler am zehnten Tag bekommt und beschließt, ihn fünf Wochen zu je sechs Tagen arbeiten zu lassen.

Was muss

1. am zehnten Tag,
2. am letzten Arbeitstag bezahlt werden?

Gehen Sie zu Kapitel 2.4!

1.5 Binomischer Satz

Schreiben Sie als Summe!

$$(a-b)^7$$

Gehen Sie zu Kapitel 2.5!

1.6 Klammern

Lösen Sie die Klammern auf und fasse zusammen!
Berechnen Sie den Wert des Terms für $x=-2$!

$$T\left(x\right)=3\left[10x-2\left(3-2x\right)+5\left(2-x\right)\right]$$

Gehen Sie zu Kapitel 2.6!

1.7 Absoluter Betrag

Berechnen Sie x!

$$|x-a|=|b|,\quad \text{für } a=2 \text{ und } b=-3$$

Gehen Sie zu Kapitel 2.7!

1.8 Bruchrechnung

Vereinfachen Sie den folgenden Term:

$$\frac{\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{x}{1-x}-\dfrac{x+1}{x}}$$

Gehen Sie zu Kapitel 2.8!

1.9 Rechenoperationen der dritten Stufe

1. Vereinfachen Sie!

$$\left[\left(\frac{1}{n^2}\right)^3\right]^2$$

2. Berechnen Sie!

$$2^0 - \frac{3^{-2} \cdot 9^{\frac{-3}{2}}}{(-2)^{-3}}$$

3. Fassen Sie so weit wie möglich zusammen!

   a) $\frac{1}{4}a^2b^2 - \frac{1}{6}ab + \frac{1}{5}a^2b^2 + \frac{7}{8}ab$

   b) $(x+y)^2\,[(x+y)\cdot z]^3$

   c) $\left(\frac{a}{b}\right)^n : a^{2n}$

Gehen Sie zu Kapitel 2.9!

1.10 Wurzeln

1. a) Welche Werte dürfen für x in den Radikanten eingesetzt werden, damit die Wurzel bestimmt werden kann?

$$\sqrt[4]{4-x}$$

   b) Berechnen Sie den Wert der Wurzel für $x = -12$!

2. Formen Sie den Bruch so um, dass im Nenner keine Wurzel mehr steht!

$$\frac{a}{a-\sqrt{b}}$$

3. Vereinfachen Sie!

   a) $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x}}$

   b) $\sqrt[3]{a\,(bc)^2} \cdot \sqrt[3]{a^2bc^2}$

   c) $\sqrt[3]{x^2} : \sqrt[6]{x}$

Gehen Sie zu Kapitel 2.10!

1.11 Logarithmen

Berechne Sie!

$$\ln \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$$

Gehen Sie zu Kapitel 2.11!

1.12 Logarithmensysteme

Berechne Sie mit dem Taschenrechner!

$$\mathrm{ld}\,(10)$$

Bemerkung: $\log_2(x) = \mathrm{ld}\,(x)$

Gehen Sie zu Kapitel 2.12!

1.13 Logarithmengesetze

Lösen Sie so weit wie möglich auf!

$$\log_a \sqrt[n]{\frac{b^2\,(c+d)}{\mathrm{e}^4}}, \qquad \mathrm{e} \neq 0,\ \ a \neq 1,\ \ a > 0,\ \ c+d \geq 0$$

Gehen Sie zu Kapitel 2.13!

1.14 Anwendung der Logarithmenrechnung

1. Wie viele (lose) Rollen werden bei einem Potenzflaschenzug benötigt, um eine Last mit einer Gewichtskraft von $F = 40\,000$ N (entspricht einer Masse von 400 kg) durch eine Kraft zu heben, die den Wert von $F_1 \leq 600$ N nicht überschreitet, wenn der Wirkungsgrad $\eta = 0{,}64$ beträgt?

$$F_1 \leq \frac{F_2}{2^n \cdot \eta}$$

2. Nach wie vielen Jahren hat sich ein Guthaben (allgemein G_0 €) durch Zins und Zinseszins verdoppelt, wenn der Zinssatz 4,5 % beträgt (Zinsfaktor 1,045)?

$$2 \cdot G_0 = G_0 \cdot 1{,}045^n$$

Gehen Sie zu Kapitel 2.14!

1.15 Namen für Potenzen von zehn

1. Wie oft muss zehn verzehnfacht werden, um Tausend zu erhalten?

2. Wie nennt man einen, der Megaeuro besitzt?

3. Wie viele Meter sind 3,2 Millimeter?

Versuchen Sie die Antwort auf alle drei Fragen zu finden und gehen Sie dann zu Kapitel 2.15!

2 Lösungen zu den Tests zur Arithmetik

Übersicht

2.1 Summenzeichen

Ergebnisse:

1. $\sum_{i=1}^{51}(2i-1)$ oder $\sum_{i=0}^{50}(2i+1)$

   Wichtig ist dabei:

   a) der erste Summand

   b) der letzte Summand

   c) die Anzahl der Summanden

G. Höfner, *Mit Selbsttests gezielt Mathematik lernen*,
DOI 10.1007/978-3-662-52963-8_2

2. 375

Haben Sie beide Teilergebnisse richtig bestimmt?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 1.2!
Nein – Gehen Sie zu Kapitel 3.1!

2.2 Produktzeichen

Ergebnisse:

1. $\prod_{i=1}^{21} 2i$

2. 945

Haben Sie beide Ergebnisse bestimmt?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 1.3!
Nein – Gehen Sie zu Kapitel 3.2!

2.3 Vorrangsregeln

1. Zunächst werden alle Rechenoperationen der dritten Stufe ausgeführt (hier ist es die Potenzrechnung).

$$[2 \cdot (-10) : (-5)] + 28 : 4 - 2 \cdot 9$$

2. Dann werden die Rechenoperationen der zweiten Stufe ausgeführt (Punktrechnung geht vor Strichrechnung).

$$[(-20) : (-5)] + 7 - 18 = 4 + 7 - 18$$

3. Abschließend die Strichrechnungen (Addition und Subtraktion).

$$4 + 7 - 18 = -7$$

Haben Sie dieses Ergebnis bestimmt?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 1.4!
Nein – Gehen Sie zu Kapitel 3.3!

2.4 Gleiches miteinander multiplizieren (Potenzen)

1. Am ersten Tag beträgt der Lohn, wie abgesprochen einen Cent. Am zweiten Tag wird verdoppelt, am dritten das Verdoppelte wieder verdoppelt – also vervierfacht. Am zehnten Tag wurde neunmal verdoppelt – also muss der eine Cent des ersten Tages neunmal mit 2 multipliziert werden.

$$0{,}01 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 0{,}01 \cdot 2^9 = 0{,}01 \cdot 512 = 5{,}12$$

   Am zehnten Tag müssten 5,12 € Lohn bezahlt werden, was angesichts der Minitagelöhne der vorangegangenen neun Tage ein rechter Hungerlohn wäre.

2. Würde der Vertrag allerdings unter den Bedingungen für fünf Wochen mit jeweils sechs Tagen also für dreißig Tage abgeschlossen, dann würde der eine Cent neunundzwanzigmal mit zwei multipliziert werden müssen. Das wären allerdings

$$0{,}01 \cdot 2^{29} = 0{,}01 \cdot 536\,870\,912 = 5\,368\,709{,}12,$$

   also fünf Millionen dreihundertachtundsechszig Tausend siebenhundertneun Euro und zwölf Cent.

Nicht zu verwechseln ist die Potenzrechnung mit der Multiplikation, denn

$$0{,}01 \cdot 2 \cdot 29 = 0{,}01 \cdot 58 = 0{,}58,$$

also 0,58 Cent wären ja auch ein recht mieser Monatslohn. Vielleicht hat der Chef diesen Fehler gemacht, als er den Vertrag abschloss?

Haben Sie diese Rechnung verstanden – sicher bei der Arbeit mit Potenzen als eine spezielle Multiplikation von gleichen Faktoren?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 1.5!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 3.4!

2.5 Binomischer Satz

Ergebnis:

$$\binom{7}{0} a^7 b^0 - \binom{7}{1} a^6 b^1 + \binom{7}{2} a^5 b^2 - \binom{7}{3} a^4 b^3 + \binom{7}{4} a^3 b^4 - \binom{7}{5} a^2 b^5 + \binom{7}{6} a^1 b^6 - \binom{7}{7} a^0 b^7$$

reicht aus oder die Rechnung ausgeführt:

$$a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7ab^6 - b^7$$

Haben Sie eine der Summendarstellungen angegeben?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 1.6!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 3.5!

Hinweis: Binomialkoeffizienten
Bei der Darstellung eines Binoms

$$(a+b)^n \qquad (n \text{ ist eine natürliche Zahl: } n \in \mathbb{N})$$

können die Koeffizienten aus dem Pascal'sche Dreieck (Blaise Pascal, franz. Mathematiker, 1623–1662) abgelesen oder nach der Formal von Leonard Euler (schw. Mathematiker, 1707–1783) berechnet werden. Zur Definition ist der Begriff der Fakultät festzulegen.

Definition 2.1

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n, \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad \text{gelesen: „n Fakultät“}$$

Ergänzung: $0! = 1$

$1! = 1$

♦

Eine Auswahl von Fakultätswerten ist in Tabelle 2.1 dargestellt.

Tab. 2.1 Auflistungen der expliziten Fakultätswerte von 0 bis 11

n	n!
0	1
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5 040
8	40 320
9	362 880
10	3 628 800
11	39 916 800
⋮	⋮

Definition 2.2

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \qquad n, k \in \mathbb{N}, \quad \text{mit } \ n \geq k, \qquad \text{gelesen: „}n\text{ über }k\text{“}$$

♦

Somit lässt sich das Pascal'sche Dreieck in folgender Darstellung angeben:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
\iddots\ \ddots & & \iddots\ \ddots & & \iddots\ \ddots & & \iddots\ \ddots & & \iddots\ \ddots
\end{array}$$

Die Werte der Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ oder Eulerschen Symbole können in Tabellenzusammenstellungen nachgeschlagen, mit dem Taschenrechner nach der hier angegebenen Definition berechnet oder direkt mit einem Tastendruck bestimmt werden. Die Symmetrie des Pascal'schen Dreiecks in einer Formel ausgedrückt:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Das Bildungsgesetz des Pascal'schen Dreiecks in einer Formel ausgedrückt:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

2.6 Klammern

Ergebnis:

$$T(x) = 27x + 12$$
$$T(-2) = -42$$

Haben Sie diese Ergebnisse bestimmt?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 1.7!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 3.6!

2.7 Absoluter Betrag

Ergebnisse:

$$x_1 = 5, \text{ denn } |5-2| = |3| = |-3|$$
$$3 = 3$$

und

$$x_2 = -1, \text{ denn } |-1-2| = |-3| = |-3|$$
$$3 = 3$$

Haben Sie diese Ergebnisse bestimmt?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 1.8!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 3.7!

2.8 Bruchrechnung

Ergebnis:

$$\frac{1-x}{1+x}$$

Haben Sie dieses Ergebnis bestimmt?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 1.9!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 3.8!

2.9 Rechenoperationen der dritten Stufe

Ergebnisse:

1. $n^{-12} = \dfrac{1}{n^{12}}$

2. $1 - \dfrac{\frac{1}{9}}{-\frac{1}{2^3}\sqrt[2]{9^3}} = 1 + \dfrac{8}{9 \cdot \sqrt[2]{3^6}} = 1 + \dfrac{8}{243} = \dfrac{251}{243}$

3. a) $\dfrac{9}{20}a^2b^2 + \dfrac{17}{24}ab$

   b) $(x+y)^5\, z^3$

   c) $\left(\dfrac{1}{ab}\right)^n$

Haben Sie alle Ergebnisse richtig bestimmt?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 1.10!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 3.9!

2.10 Wurzeln

Ergebnisse:

1. a) Der Wert von x darf nicht größer als 4 sein, da sonst ein negativer Radikant entsteht.

   b) $\sqrt[4]{4-(-12)} = \sqrt[4]{4+12} = \sqrt[4]{16} = 2$

2. $$\frac{a\left(a+\sqrt{b}\right)}{\left(a-\sqrt{b}\right)\left(a+\sqrt{b}\right)} = \frac{a\left(a+\sqrt{b}\right)}{a^2-b}$$

3. a) $\sqrt[3]{x}$

   b) $\sqrt[3]{a^3b^3c^4} = abc\sqrt[3]{c}$

   c) $\sqrt{x}$

Haben Sie alle Ergebnisse richtig bestimmt?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 1.11!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 3.10!

2.11 Logarithmen

Ergebnis:

$$-\frac{1}{2}, \text{ denn } \mathrm{e}^{-0,5} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$$

Haben Sie dieses Ergebnis bestimmt?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 1.12!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 3.11!

2.12 Logarithmensysteme

Ergebnis:

$$\begin{aligned} 2^3 = 8 < 10 < 16 &= 2^4 \\ 3 < \mathrm{ld} &< 4 \\ \mathrm{ld} &\approx 3{,}321928095\ldots \end{aligned}$$

Haben Sie dieses Ergebnis bestimmt?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 1.13!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 3.12!

2.13 Logarithmengesetze

Ergebnis:

$$\frac{1}{n}\left[2 \cdot \log_a(b) + \log_a(c+d) - 4 \cdot \log_a(\mathrm{e})\right]$$

Haben Sie dieses Ergebnis bestimmt?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 1.14!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 3.13!

2.14 Anwendung der Logarithmenrechnung

1.

$$2^n = \frac{F_2}{\eta F_1} = \frac{40\,000}{600 \cdot 0{,}64} \approx 104{,}167$$

Abschätzung:

$$64 = 2^6 < 104{,}167 < 2^7 = 128$$

6 Rollen reichen nicht aus, aber 7 Rollen genügen, um die Last zu heben.
Berechnung:

$$n = \frac{\ln(40\,000) - \ln(600) - \ln(0{,}64)}{\ln(2)} \approx 6{,}71$$

Hubkraft:

$$F_1 = \frac{40\,000}{128 \cdot 0{,}64} \approx 489 \text{ N (Newton)}$$

2.

$$2 = 1{,}045^n$$
$$n = \frac{\lg(2)}{\lg(1{,}045)} \approx 15{,}7473\ldots$$

Es dauert 15 Jahre und knapp 9 Monate.

Haben Sie diese Ergebnisse bestimmt?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 1.15!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 3.14!

2.15 Namen für Potenzen von zehn

1. 1 000 = $10 \cdot 10 \cdot 10$ – also muss die Zehn zweimal verzehnfacht werden, um Tausend zu erhalten.

2. Mega ist der Vorsatz für Million, die man erhält, wenn man zehn sechsmal mit sich selbst multipliziert $\left(10^6\right)$. Einer der über Megaeuro verfügt, hat eine Million Euro (10^6 €) – ist also ein Millionär.

3. Milli ist der Vorsatz für Tausendstel ($\frac{1}{1\,000} = \frac{1}{10^3}$). Für $\frac{1}{10^3}$ kann auch 10^{-3}geschrieben werden. Somit sind 3,2 Millimeter auch 3,2 Tausendstel Meter oder

$$3{,}2 \text{ mm} = \frac{3{,}2}{1\,000} \text{ m} = 0{,}0032 \text{ m}.$$

Haben Sie das verstanden und sind Ihnen auch die anderen Vorsilben für Zehnervielfache bekannt?

Ja – Ende des 1. Tages – Arithmetik.

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 3.15!

3 Informationen zu den Themen der Arithmetik

Übersicht

3.1 Summenzeichen

Das Summenzeichen mit dem Symbol Σ – griechischer Buchstabe Sigma – dient der vereinfachten Darstellung von Summen mit n-Summanden.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Gelesen: „Summe aller a_i mit i gleich eins bis n."

Als Laufindex (hier i) kann jede beliebige Variable genommen werden. Unter dem Summenzeichen steht eine Zahl, die für den Laufindex eingesetzt wird, um den ersten Summanden zu erhalten. Der untere Summationsindex kann, muss aber nicht eins sein. Der obere Summationsindex ist eine ganze Zahl (größer als der untere Summationsindex).

G. Höfner, *Mit Selbsttests gezielt Mathematik lernen*,
DOI 10.1007/978-3-662-52963-8_3

Beispiel 3.1

$$\sum_{i=1}^{6}(2i-3) = -1+1+3+5+7+9 = 24$$

■

Beispiel 3.2

$$2+4+6+\ldots+102 = \sum_{i=1}^{51}2i$$

■

Bemerkung: Nur wenn der untere Summationsindex gleich eins ist, gibt der obere Summationsindex die Anzahl der Summanden an.

Die Summe

$$\sum_{i=m}^{n}a_i$$

hat $(n-m+1)$ Summanden.

Rechenregeln für das Summenzeichen:

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n}a_i \pm \sum_{i=1}^{n}b_i$

   Im Allgemeinen ist jedoch $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_i b_i \neq \sum_{i=1}^{n}a_i \cdot \sum_{i=1}^{n}b_i$.

2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}ca_i = c\sum_{i=1}^{n}a_i$

   Allgemein ist $\displaystyle\sum_{i=m}^{n}ca_i = (n-m+1)\,c\sum_{i=m}^{n}a_i$.

3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}c = n \cdot c$

   Allgemein ist $\displaystyle\sum_{i=m}^{n}c = (n-m+1)\,c$.

Gehen Sie zu Kapitel 4.1!

3.2 Produktzeichen

Das Produktzeichen mit dem Symbol Π – griechischer Buchstabe Pi – dient der vereinfachten Darstellung von Produkten mit n-Faktoren.

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n$$

Gelesen: „Produkt aller a_i mit i gleich eins bis n."

Als Laufindex (hier i) kann jede beliebige Variable genommen werden. Unter dem Produktzeichen steht eine Zahl, die für den Laufindex eingesetzt wird, um den ersten Faktor zu erhalten. Der untere Produktindex kann, muss aber nicht eins sein. Der obere Produktindex ist eine ganze Zahl (größer als der untere Produktindex).

Beispiel 3.3

$$\prod_{i=1}^{4} \left(\frac{i}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{16}{4} = 1 \cdot 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{4}$$

■

Beispiel 3.4

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = \prod_{i=1}^{n} i = n!$$

■

Bemerkung: Nur wenn der untere Produktindex gleich eins ist, gibt der obere Produktindex die Anzahl der Faktoren an.

Das Produkt

$$\prod_{i=m}^{n} a_i$$

hat $(n - m + 1)$ Faktoren.

Rechenregeln für das Produktzeichen:

1. $\prod_{i=1}^{n} a_i b_i = \prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \prod_{i=1}^{n} b_i$

   Im Allgemeinen ist jedoch $\prod_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) \neq \prod_{i=1}^{n} a_i \pm \prod_{i=1}^{n} b_i$.

2. $\prod_{i=1}^{n} ca_i = c^n \prod_{i=1}^{n} a_i$

   Allgemeinen ist $\prod_{i=m}^{n} ca_i = c^{n-m+1} \prod_{i=m}^{n} a_i$.

3. $\prod_{i=1}^{n} c = c^n$

   Allgemeinen ist $\prod_{i=m}^{n} c = c^{n-m+1}$.

Gehen Sie zu Kapitel 4.2!

3.3 Grundrechenarten und Rechengesetze

Vorrangsregeln beim Berechnen von Termen:

1. Zunächst werden die Rechenoperationen der dritten Stufe ausgeführt (Potenzen, Wurzeln und Logarithmen).
2. Danach werden die Rechenoperationen der zweiten Stufe ausgeführt (Multiplikation und Division).
3. Zum Schluss werden die Rechenoperationen der 1. Stufe ausgeführt (Addition und Subtraktion).
4. Gleichartige Rechenoperationen werden von links nach rechts ausgeführt (in Leserichtung).

Soll die Reihenfolge geändert werden, dann hilft nur eines: *Klammern setzen!* Diese Hauptvorfahrtsregel, die über allem anderen steht, kennt der Computer ganz sicher!

5. Rechenoperationen in Klammern werden vor allen anderen Operationen ausgeführt.

Für die Multiplikation und die Division von Zahlen gelten folgende Rechengesetze, die mitunter bei der zahlenmäßigen Berechnung vorteilhaft angewandt werden können:

1. **Rechnen mit Klammern (Distributivgesetz) – Teil I**
   Es muss zuerst das berechnet werden, was in den Klammern steht!

   Beispiel 3.5

$$2 \cdot (14 - 8) = 2 \cdot 6 = 12$$

Bemerkung: Das Malzeichen vor der Klammer kann weggelassen werden. ■

Beispiel 3.6

$$12 : (6-2) = 12 : 4 = 3$$

■

Beispiel 3.7

$$\frac{48}{16-8} = \frac{48}{8} = 6$$

Bemerkung: Der Bruchstrich ersetzt die Klammern um Summen und Differenzen, sodass sie vor der Division ausgeführt werden müssen. ■

Ein gemeinsamer Faktor kann in Summen und Differenzen ausgeklammert werden (vor die Klammer geschrieben werden).

Beispiel 3.8

$$24 + 12 + 28 = 4\,(6 + 3 + 7) = 64$$

■

Beispiel 3.9

$$801 \cdot 6 - 801 \cdot 7 = 801\,(6-7) = 801 \cdot (-1) = -801$$

■

In reinen Multiplikationsaufgaben können beliebig Klammern gesetzt oder weggelassen werden (Assoziativgesetz der Multiplikation).

2. **Bei der Multiplikation darf die Reihenfolge der Faktoren beliebig vertauscht werden, ohne dass sich das Ergebnis ändert (Kommutativgesetz)**

   Mit diesem Gesetz kann eine Multiplikationsaufgabe mitunter sehr vereinfacht werden, wenn es gelingt, eine Multiplikation mit zehn oder Vielfachen von zehn durch das Zusammenfassen von geeigneten Faktoren zu erreichen.

Beispiel 3.10

$$125 \cdot 3 \cdot 8 = (125 \cdot 8) \cdot 3 = 1\,000 \cdot 3 = 3\,000$$

■

Beispiel 3.11

$$2 \cdot 32 \cdot 5 \cdot 11 = (2 \cdot 5) \cdot (11 \cdot 32) = 10 \cdot 352 = 3\,520$$

■

3. Besonderheiten bei der Multiplikation und Division mit null und eins

a) Jede Zahl, wird sie mit eins multipliziert, ändert ihren Wert nicht.
b) Jede Zahl, wird sie mit null multipliziert, wird null.
c) Jede Zahl, wird sie durch eins dividiert, ändert ihren Wert nicht.
d) Eins dividiert durch eine Zahl gibt den Kehrwert der Zahl.

Beispiel 3.12

$$\text{Zahl:} \quad 2; \quad \text{Kehrwert:} \quad \frac{1}{2}$$

■

e) Null dividiert durch eine Zahl (verschieden von null) ergibt null.
f) Division durch null ist verboten oder nicht möglich.

Für die Addition und die Subtraktion von Zahlen gelten folgende Rechengesetze, die mitunter bei der zahlenmäßigen Berechnung vorteilhaft angewandt werden können:

4. Rechnen mit Klammern – Teil II

Es muss zuerst das berechnet werden, was in den Klammern steht!

Beispiel 3.13

$$(24 + 36) - 22 = 60 - 22 = 38$$

■

Beispiel 3.14

$$45 - (12 + 33) = 45 - 45 = 0$$

■

Bei der Addition dürfen beliebig Klammern gesetzt werden (Assoziativgesetz).

Beispiel 3.15

$$24 + 12 + 28 = 24 + (12 + 28) = 24 + 40 = 64$$

■

Beispiel 3.16

$$\begin{aligned}1{,}2 + 0{,}3 + 1{,}5 - 2{,}7 = (1{,}2 + 0{,}3) + 1{,}5 - 2{,}7 &= 1{,}5 + 1{,}5 - 2{,}7\\ &= 3{,}0 - 2{,}7 = 0{,}3\end{aligned}$$

■

5. **Bei der Addition darf die Reihenfolge der Summanden beliebig vertauscht werden, ohne dass sich das Ergebnis ändert (Kommutativgesetz)**

   Mit diesem Gesetz kann eine Additionsaufgabe mitunter sehr vereinfacht werden, wenn es gelingt, gleiche Stellenwerte (Zehntel-, Zehner-, Einerstellen usw.) aufzufüllen.

Beispiel 3.17

$$23 + 43 + 27 + 57 = 23 + 27 + 43 + 57 = 50 + 100 = 150$$

■

Beispiel 3.18

$$1{,}7 + 34{,}6 - 2{,}7^{*} + 15{,}4 = (1{,}7 - 2{,}7) + (34{,}6 + 15{,}4) = -1 + 50 = 49$$

* Durch $+(-2{,}7) = -2{,}7$ kann die Aufgabe ebenfalls als Additionsaufgabe verstanden werden. ■

Bei der Multiplikation und Division werden folgende Schreibweisen verwendet:

1. **Malnehmen heißt Multiplikation (es tun, heißt multiplizieren).**
   Die Fachbezeichnungen heißen:

   $$\textbf{Faktor} \cdot \textbf{Faktor} = \textbf{Produkt}$$

2. **Teilen heißt Division (es tun, heißt dividieren).**
   Die Fachbezeichnungen heißen:

   $$\textbf{Dividend} : \textbf{Divisor} = \textbf{Quotient}$$

Multiplikation und Division sind Umkehroperationen zueinander.
Es ist

$$12 : 4 = 3,$$

weil

$$4 \cdot 3 = 12$$

ist.

Bei der Multiplikation und Division von Zahlen mit dem gleichen Vorzeichen sind das Produkt und der Quotient positiv (Tab. 3.1).

Tab. 3.1 Multiplikation/Division von Zahlen mit dem gleichen Vorzeichen

ausführliche Schreibweise	vereinfachte Schreibweise
$(+3) \cdot (+15) = +45$	$3 \cdot 15 = 45$
$(-2{,}1) \cdot (-5) = +10{,}5$	$(-2{,}1) \cdot (-5) = 10{,}5$
$(+30) : (+6) = +5$	$30 : 6 = 5$
$(-42) : (-7) = +6$	$(-42) : (-7) = 6$

Bei der Multiplikation und Division von Zahlen mit unterschiedlichen Vorzeichen sind das Produkt und der Quotient negativ (Tab. 3.2).

Tab. 3.2 Multiplikation/Division von Zahlen mit unterschiedlichen Vorzeichen

ausführliche Schreibweise	vereinfachte Schreibweise
$(-1{,}2) \cdot (+1{,}5) = -1{,}8$	$(-1{,}2) \cdot 1{,}5 = -1{,}8$
$(+3{,}5) \cdot (-2{,}1) = -7{,}35$	$(+3{,}5) \cdot (-2{,}1) = -7{,}35$
$(+7{,}5) : (-1{,}5) = -5{,}0$	$7{,}5 : (-1{,}5) = -5{,}0$
$(-1{,}2) : (+0{,}2) = -6{,}0$	$(-1{,}2) : 0{,}2 = -6{,}0$

Das Divisionszeichen (:) kann auch als Bruchstrich geschrieben werden. Der Bruchstrich ersetzt die Klammern um Summen oder Differenzen.

Beispiel 3.19

$$(20 - 4) : (5 - 3) = \frac{20 - 4}{5 - 3} = \frac{16}{2} = 8$$

■

Gehen Sie zu Kapitel 4.3!

3.4 Gleiches miteinander multiplizieren (Potenzen)

Sind die Faktoren eines Produktes gleich, so kann das in der Mathematik als Potenz geschrieben werden.

Beispiel 3.20

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$$

■

Beispiel 3.21

$$3 \cdot 3 = 3^2 = 9$$

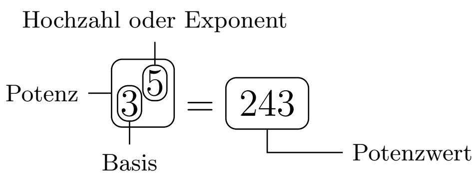
■

Beispiel 3.22

$$(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = (-5)^4 = 625$$

■

Bezeichnungen:



Mitunter wird die Potenzrechnung mit der Multiplikation verwechselt. Beispielsweise ist zwei hoch drei nicht sechs, sondern acht (siehe Beispiel 4.20). Ebenso ist zu beachten, dass die Basis und die Hochzahl bei einer Potenz im Allgemeinen nicht vertauscht werden dürfen (siehe Beispiel 4.20 und 4.21).

Besondere Festlegungen sind:

1. Jede Zahl hoch eins ergibt die Zahl selbst.

$$1\ 000^1 = 1\ 000$$

2. Jede Zahl (verschieden von null) hoch null ist eins.

$$1\ 000\ 0000^0 = 1$$

3. Jede Zahl mit einem negativen Exponenten ist gleich ihrem Kehrwert mit positivem Exponenten.

Gehen Sie zu Kapitel 4.4!

3.5 Binomischer Satz

Nach dem binomischen Satz werden zweigliedrige Summen oder Binomen potenziert. Für den Exponenten zwei ergeben sich die binomischen Formeln.

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

Für den Exponenten n ($n \in \mathbb{N}$) heißt der binomische Satz in der Schreibweise mit Binomialkoeffizienten:

$$\begin{aligned} (a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots \\ \ldots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n. \end{aligned}$$

Der Beweis dieser Formel erfolgt durch vollständige Induktion.

Bemerkung: Die Summenbildung von $(a-b)^n$ beginnt mit einem positiven Summanden. Es folgt ein Summand mit negativem Vorzeichen usw. (abwechselnd Plus und Minus).

Gehen Sie zu Kapitel 4.5!

3.6 Klammern

Im Bereich der rationalen Zahlen sind zwei Rechenoperationen so definiert, dass die Anwendung dieser Operationen auf zwei beliebige rationale Zahlen wieder eine rationale Zahl ergibt. Diese Operationen sind:

1. Addition: Summand $+$ Summand $=$ Summe

   $a + b = c$

2. Multiplikation: Faktor $\cdot$ Faktor $=$ Produkt

   $a \cdot b = c$

Bemerkungen:

1. Der Operator der Addition ist nicht mit dem positiven Vorzeichen einer Zahl zu verwechseln, welches auch weggelassen werden kann.
2. Der Operator der Multiplikation ist ein Punkt oder ein Sternchen, welches nach Vereinbarung nicht geschrieben werden muss.

Die Verwendung des „×" als Multiplikationszeichen für rationale Zahlen sollte unterlassen werden, da es zu Verwechslungen mit der Variablen x kommen kann.

1. Rechengesetze:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd}, \qquad b\neq 0 \quad \text{und} \quad d\neq 0$$
$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}, \qquad b\neq 0 \quad \text{und} \quad d\neq 0$$

2. Beide Operationen sind kommutativ, assoziativ und durch das distributive Gesetz miteinander verbunden.

   Kommutativgesetz: Summanden und Faktoren können beliebig vertauscht werden.

Addition	Multiplikation
$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$	$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}$

   Assoziativgesetz: Summanden und Faktoren können in beliebiger Reihenfolge zusammengefasst werden.

Addition	Multiplikation
$\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}$	$\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}$

   Distributivgesetz:

$$\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}$$

Bemerkung: Das Distributivgesetz ist die Grundlage für das Ausklammern und Ausmultiplizieren (von Polynomen).

Beispiel 3.23

$$\begin{aligned}
&3\{a-4[b+2(a-b)+5(b-2a)]+3b\}\\
&=3\{a-4[b+2a-2b+5b-10a]+3b\}\\
&=3\{a-4[-8a+4b]+3b\}\\
&=3\{a+32a-16b+3b\}\\
&=99a-39b
\end{aligned}$$

■

Beispiel 3.24

$$\begin{aligned} &21x^2y^3z + 35x^3yz - 49xy^2z^2 \\ = &\ 7xyz\left(3xy^2 + 5x^2 - 7yz\right) \end{aligned}$$

■

3. Es gibt genau ein Element, welches ein beliebiges anderes Element der rationalen Zahlen bei Anwendung einer Rechenoperation unverändert lässt. Dieses Element wird als *neutrales Element* der Operation bezeichnet.

   Das neutrale Element der Addition ist die rationale Zahl Null.

   $$\frac{p}{q} + 0 = 0 + \frac{p}{q} = \frac{p}{q}$$

   Das neutrale Element der Multiplikation ist die rationale Zahl Eins.

   $$\frac{p}{q} \cdot 1 = 1 \cdot \frac{p}{q} = \frac{p}{q}$$

   Die neutralen Elemente der beiden Operationen sind voneinander verschieden.

   $$1 \neq 0$$

4. Die Umkehrung der beiden Operationen ist im Bereich der rationalen Zahlen fast uneingeschränkt möglich (Ausnahme ist die Umkehrung der Multiplikation, denn die Verwendung des neutralen Elementes der Addition als Divisor ist nicht möglich).

   Zu jeder rationalen Zahl $\frac{p}{q}$ mit $q \neq 0$ gibt es eine rationale Zahl $\left(-\frac{p}{q}\right)$, sodass

   $$\frac{p}{q} + \left(-\frac{p}{q}\right) = 0.$$

   Zu jeder rationalen Zahl $\frac{p}{q} \neq 0$ gibt es eine rationale Zahl $\frac{q}{p}$, sodass

   $$\frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p} = 1$$

   ist. Daraus ergibt sich für die Subtraktion von rationalen Zahlen

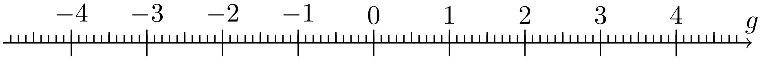
   $$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - cb}{bd}, \qquad b \neq 0, \quad d \neq 0$$

   und für die Division

   $$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}, \qquad b \neq 0, \quad c \neq 0, \quad d \neq 0.$$

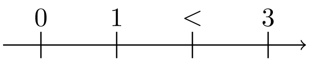
Somit können im Bereich der rationalen Zahlen die Grundrechenoperationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division mit Ausnahme der Division durch null ohne Einschränkung ausgeführt werden.

Die Menge der rationalen Zahlen ist eindeutig durch Punkte auf einer Zahlengeraden darstellbar.



Die Abbildung ist nicht umkehrbar eindeutig, da es Punkte auf der Zahlengeraden gibt, denen keine rationale Zahl zugeordnet ist.

Die Menge der rationalen Zahlen ist geordnet, da von zwei verschiedenen rationalen Zahlen stets die kleinere festgeschrieben werden kann. Die kleinere von zwei Zahlen wird durch den Punkt der Zahlengeraden dargestellt, der links von dem Punkt liegt, der die größere Zahl markiert.



Ist der Zähler einer rationalen Zahl ein ganzzahliges Vielfaches des Nenners, dann wird die Zahl als ganze Zahl bezeichnet. Die Menge der ganzen Zahlen ist bezüglich der Division nicht abgeschlossen und bildet somit auch keinen Zahlenkörper wie die rationalen Zahlen (Eigenschaften 1. bis 4.). Die Menge der ganzen Zahlen ist eine echte Teilmenge der rationalen Zahlen.

Auf der Zahlengeraden liegen rechts vom Nullpunkt die Punkte für die positiven und links die für die negativen ganzen Zahlen. Plus- und Minuszeichen können als Vorzeichen und Operationszeichen verwendet werden.

Operationszeichen

$$(+6)-(-7)+(-4) = 9 \longleftarrow$$ Vorzeichen Plus kann bei positiven Zahlen weggelassen werden

Vorzeichen

Rechenregeln:

1. $\left(+\frac{a}{b}\right) + \left(+\frac{c}{d}\right) = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$
2. $\left(-\frac{a}{b}\right) + \left(-\frac{c}{d}\right) = -\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$
3. $\left(-\frac{a}{b}\right) + \left(+\frac{c}{d}\right) = -\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$
4. $\left(+\frac{a}{b}\right) + \left(-\frac{c}{d}\right) = \frac{a}{b} - \frac{c}{d}$
5. $\left(+\frac{a}{b}\right) - \left(+\frac{c}{d}\right) = \frac{a}{b} - \frac{c}{d}$
6. $\left(+\frac{a}{b}\right) - \left(-\frac{c}{d}\right) = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$
7. $\left(-\frac{a}{b}\right) - \left(+\frac{c}{d}\right) = -\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$
8. $\left(-\frac{a}{b}\right) - \left(-\frac{c}{d}\right) = -\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$
9. $\left(+\frac{a}{b}\right) \cdot \left(+\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}$
10. $\left(+\frac{a}{b}\right) \cdot \left(-\frac{c}{d}\right) = -\frac{ac}{bd}$
11. $\left(-\frac{a}{b}\right) \cdot \left(+\frac{c}{d}\right) = -\frac{ac}{bd}$
12. $\left(-\frac{a}{b}\right) \cdot \left(-\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}$

Besonderheiten beim Rechnen mit null und eins:

1. $\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}$
2. $\frac{a}{b} - 0 = \frac{a}{b}$
3. $\frac{a}{b} \cdot 0 = 0$
4. $\frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$
5. $\frac{a}{b} : 1 = \frac{a}{b}$
6. $0 : a = 0, \quad \text{für} \quad a \neq 0$

Die Division durch null ($a : 0$) ist nicht definiert! Die Menge der rationalen Zahlen ($\mathbb{Q}$) besteht aus der Menge der Quotienten, die sich aus beliebigen Paaren ganzer Zahlen bilden lassen. Allerdings muss vorausgesetzt werden, dass der Divisor stets ungleich null ist.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \ \text{mit} \ p, q \in \mathbb{Z} \ \text{und} \ q \neq 0 \right\}$$

Somit besteht die Menge der rationalen Zahlen aus der Menge der gemeinen Brüche.

Darstellung und Bezeichnungen:

Zähler (Dividend)

$$\downarrow$$

Bruchstrich, Divisionszeichen, auch Doppelpunkt $\longrightarrow$ $\dfrac{p}{q}$

$$\uparrow$$

Nenner (Divisor) ungleich null!

Die Menge der rationalen Zahlen kann auch als Menge der Dezimalbrüche geschrieben werden, die eine periodische Dezimalbruchentwicklung besitzen (dabei ist eine abbrechende Dezimalbruchentwicklung als eine solche periodische zu charakterisieren, die Periode null besitzt, was man aber in der Regel nicht schreibt).

Beispiel 3.25

$$\frac{5}{2} = 2{,}5\overline{0}, \qquad \frac{1}{3} = 0,\overline{3}, \qquad \frac{10}{11} = 0,\overline{90}, \qquad \frac{13}{15} = 0{,}8\overline{6}$$

■

Spezielle Bezeichnungen für rationale Zahlen:

1. Dezimalbrüche (mit abbrechender oder periodischer Dezimalbruchentwicklung).

   Beispiel 3.26

   $$z_1, z_2z_3\overline{z_4z_5z_6}$$

z_1 :	ganzer Teil der rationalen Zahl
z_2z_3 :	Vorperiode
$z_4z_5z_6$:	Periode

   ■

2. Gemeine Brüche in der Form Zähler durch Nenner.

   $$\frac{p}{q}, \qquad \text{mit} \quad q \neq 0$$

   Bezeichnungen für besondere Formen der gemeinen Brüche finden Sie in Tabelle 3.3.

   Tab. 3.3 Spezielle gemeine Brüche

Bedingung	Bezeichnung	Besonderheit	Beispiele
$p = 1,\ q \neq 1$	Stammbruch	$\frac{p}{q} < 1$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$
$p < q$	echter Bruch	$\frac{p}{q} < 1$	$\frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{5}{8}, \ldots$
$p > q$	unechter Bruch	$\frac{p}{q} > 1$	$\frac{8}{7}, \frac{10}{7}, \frac{32}{15}, \ldots$
$p = kq,\ \ k \in \mathbb{Z}$	uneigentlicher Bruch	$\frac{p}{q} = k,\ \ k \in \mathbb{Z}$	$\frac{8}{4}, \frac{12}{6}, \frac{-9}{3}, \ldots$
Tausch von Zähler und Nenner	reziproker Bruch	$\frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p} = 1$	$\frac{1}{3}$ zu $\frac{3}{1}$

   Hinweis: Summen aus ganzen Zahlen und echten Brüchen werden als gemischte Zahlen bezeichnet.

Beispiel 3.27

$$2\frac{3}{5}$$

soll bedeuten

$$2 + \frac{3}{5} = \frac{13}{5}$$

■

Diese Gewohnheit verstößt gegen die Vereinbarung, dass als Operationszeichen nur das Multiplikationszeichen weggelassen werden darf. Demzufolge bedeutet diese Schreibweise konsequent:

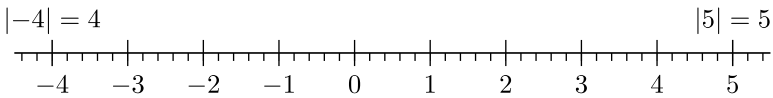
$$2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$$

Die zu Irrtümern führende Schreibweise von Brüchen als gemischte Zahlen ist zu vermeiden. Rationale Zahlen werden demzufolge nicht als gemischte Zahlen, sondern als unechte Brüche dargestellt, die zudem für das Kürzen und Erweitern besser geeignet sind.

Gehen Sie zu Kapitel 4.6!

3.7 Absoluter Betrag

Die Bildung des absoluten Betrages ist eine Rechenoperation, die als die Bestimmung des Abstandes einer Zahl von null beschrieben werden kann.



Definition 3.1
Der absolute Betrag einer Zahl ist:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{wenn} \quad a \geq 0 \\ -a, & \text{wenn} \quad a < 0 \end{cases}$$

♦

Da

$$-(-a) = +a$$

ist, kann der absolute Betrag einer Zahl nur positiv sein. Für das Rechnen mit absoluten Beträgen rationaler Zahlen gilt:

1. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

2. $|a : b| = \dfrac{|a|}{|b|}$

3. Dreiecksungleichung:
$$|a + b| \leq |a| + |b|$$
Der Betrag einer Summe ist nicht größer als die Summe der Beträge der Summanden.

4. $|a - b| \leq |a| + |b|$

Beispiel 3.28

$$a = 3, \qquad -a = -3, \qquad |a| = 3, \qquad -|a| = -3$$

■

Beispiel 3.29

$$a = -2, \qquad -a = 2, \qquad |a| = 2, \qquad -|a| = -2$$

■

Beispiel 3.30

$$|a - 3b| + 4\,(3a - b) + |-a + b|$$

ergibt für $a = 2$ und $b = -3$ den Wert

$$\begin{aligned}
&|2 - 3\,(-3)| + 4\,(3 \cdot 2 - (-3)) + |-2 - 3| \\
= &|2 + 9| + 4\,(6 + 3) + |-2 - 3| \\
= &|11| + 4 \cdot 9 + |-5| \\
= &52
\end{aligned}$$

■

Beispiel 3.31

$$\frac{a + |a|}{2} = \begin{cases} \dfrac{a + a}{2} = \dfrac{2a}{2} = a, & \text{für} \quad a \geq 0 \\ \dfrac{a - (a)}{2} = \dfrac{0}{2} = 0, & \text{für} \quad a < 0 \end{cases}$$

■

Gehen Sie zu Kapitel 4.7!

3.8 Bruchrechnung

Die folgenden Zahlen sind gleich:

Erweitern

$$\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$$

Kürzen

Formänderungen von rationalen Zahlen bedeuten von links nach rechts gelesen Erweitern, von rechts nach links gelesen Kürzen der rationalen Zahl.

Das Erweitern wird bei der Addition und Subtraktion von ungleichnamigen Brüchen benötigt, und das Kürzen vor allem bei der Multiplikation und Division zweckmäßiger Weise vor der Berechnung ausgeführt, wenn dadurch eine Möglichkeit besteht, die Rechnung zu vereinfachen.

Die Rechengesetze für rationale Zahlen (Bruchrechnung) lauten:

1. Addition und Subtraktion:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}, \qquad \text{mit} \quad b \neq 0, \quad d \neq 0, \quad c \neq 0$$

2. Multiplikation und Division:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \text{und} \qquad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

Beispiel 3.32

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{7} - \frac{1}{42} + \frac{5}{6} - \frac{11}{12} = \frac{56}{84} + \frac{48}{84} - \frac{2}{84} + \frac{70}{84} - \frac{77}{84} = \frac{95}{84}$$

Nenner	**Erweiterungsfaktor**	**erweiterter Zähler**
3	28	56
7	12	48
$2 \cdot 3 \cdot 7$	2	2
$2 \cdot 3$	14	70
$2^2 \cdot 3$	7	77

Hauptnenner: $3 \cdot 7 \cdot 2^2 = 84$ ∎

Beispiel 3.33

$$
\begin{aligned}
&\frac{2x-3}{3x-3}-\frac{3x-1}{4x+4}+\frac{x+2}{x^2-1}\\
&=\frac{8x^2-4x-12}{12\,(x+1)\,(x-1)}-\frac{9x^2-12x+3}{12\,(x+1)\,(x-1)}+\frac{12x+24}{12\,(x+1)\,(x-1)}\\
&=\frac{-x^2+20x+9}{12\,(x+1)\,(x-1)}\\
&=-\frac{x^2-20x-9}{12\,(x^2-1)}
\end{aligned}
$$

Nenner	**Erweiterungsfaktor**	**erweiterter Zähler**
$3\,(x-1)$	$4\,(x+1)$	$4\,(x+1)\,(2x-3)$
$2\cdot 2\,(x+1)$	$3\,(x-1)$	$3\,(x-1)\,(3x-1)$
$(x+1)\,(x-1)$	12	$12\,(x+2)$

Hauptnenner: $12\,(x+1)\,(x-1)=12\left(x^2-1\right)$ ■

Beispiel 3.34

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{5a}{3b}+\frac{3a}{2b}\right)\cdot\left(\frac{7a^2}{8b}-\frac{5b^2}{3a}\right)&=\frac{10a+9a}{6b}\cdot\frac{21a^3-40b^3}{24ab}\\
&=\frac{19a\left(21a^3-40b^3\right)}{6b\cdot 24ab}=\frac{19\left(21a^3-40b^3\right)}{144b^2}
\end{aligned}
$$

■

Beispiel 3.35

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{u}{u-v}-\frac{v^2}{(u+v)^2}-\frac{v}{u-v}+\frac{u^2}{(u-v)^2}\right):\frac{uv}{u^2-v^2}\\
&=\frac{u+v}{v}-\frac{v\,(u-v)}{u\,(u+v)}-\frac{u+v}{u}+\frac{u\,(u+v)}{v\,(u-v)}\\
&=\frac{2u^4+2u^3v-2u^2v^2+2uv^3}{uv\,(u^2-v^2)}\\
&=\frac{2\left(u^3+u^2v-uv^2+v^3\right)}{v\,(u^2-v^2)}
\end{aligned}
$$

■

Beispiel 3.36

$$\frac{3x - \frac{4}{5y}}{6z - \frac{7}{10y}} = \frac{\frac{15xy - 4}{5y}}{\frac{60zy - 7}{10y}} = \frac{2\,(15xy - 4)}{60zy - 7}$$

■

Gehen Sie zu Kapitel 4.8!

3.9 Rechenoperationen der dritten Stufe

Die Multiplikation stellt eine spezielle Addition (die gleicher Summanden) dar.

$$a + a + \ldots + a = na, \qquad n\text{-Summanden}$$

Die Multiplikation gleicher Faktoren führt dann zur Potenzrechnung.

$$a \cdot a \cdot \ldots \cdot a = a^n = b, \qquad n\text{-Faktoren}$$

Dabei sind a und b reelle Zahlen. Nach dieser Begriffsbildung ist der Exponent zunächst eine natürliche Zahl ungleich eins und null. Der Potenzwert b ergibt sich aus der Basis a, die mit dem Exponenten n potenziert wird. Basis und Exponent bilden zusammen die Potenz a^n.

$$a^n = b$$

Ist die Basis positiv, dann ist der Potenzwert unabhängig vom Exponenten immer positiv. Ist die Basis negativ, dann ist der Potenzwert bei geraden Exponenten positiv und bei ungeraden Exponenten negativ.

Beispiel 3.37

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

■

Beispiel 3.38

$$(-3)^4 = 81$$

■

Beispiel 3.39

$$(-2)^3 = -8$$

Zu beachten ist im diesem Beispiel, dass das Vorzeichen zur Basis gehört (Klammern). ■

Beispiel 3.40

$$-4^2 = -16$$

In diesem Beispiel ist das Minuszeichen das Vorzeichen des Potenzwertes. ■

Das Permanenzprinzip in der Mathematik sichert, dass alle Gesetze erhalten bleiben, wenn die Begriffsbestimmung der Potenz erweitert wird.

1. Erweiterung der Potenzdefinition:
$$a^0 = 1, \qquad a \neq 0$$
2. Erweiterung der Potenzdefinition:
$$a^1 = a$$
3. Erweiterung der Potenzdefinition:
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \qquad n > 0, \quad a \neq 0$$
4. Erweiterung der Potenzdefinition (Wurzeln):
$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}, \qquad a^p \geq 0, \quad q \neq 0, \quad p, q \text{ ganze Zahlen}$$

Potenzgesetze:

1. Addition und Subtraktion von Potenzen:
Summen und Differenzen von Potenzen können nur dann durch Zusammenfassen vereinfacht werden, wenn sie in Basis und Exponenten übereinstimmen.

   Beispiel 3.41

   $$a^4 - a^3 - a^2$$

   kann nicht zusammengefasst werden, da die Exponenten der Potenz nicht übereinstimmen. ■

Beispiel 3.42

$$3\,(a-b)^3 + 4\,(a-b)^2 - 3\,(a-b)^2 + 5\,(a-b)^3 = 8\,(a-b)^3 + (a-b)^2$$

■

2. Multiplikation und Division von Potenzen:
Produkte oder Quotienten von Potenzen können durch Zusammenfassen vereinfacht werden, wenn sie entweder in der Basis oder im Exponenten übereinstimmen.

	gleiche Exponenten	**gleiche Basis**
Multiplikation	$a^n \cdot b^n = (ab)^n$	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
Division	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

Potenzen mit gleichem Exponenten werden multipliziert (dividiert), indem das Produkt (der Quotient) mit dem gleichen Exponenten potenziert wird. Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert (dividiert), indem die Exponenten addiert (subtrahiert) werden.

Beispiel 3.43

$$a^{n+1} \cdot a^{n-1} = a^{2n}$$

■

Beispiel 3.44

$$(0{,}125)^{10} \cdot 8^{10} = (0{,}125 \cdot 8)^{10} = 1^{10} = 1$$

■

Beispiel 3.45

$$\frac{a^{n-2}}{a^{n-3}} = a^{n-2-(n-3)} = a^1 = a$$

■

Beispiel 3.46

$$\frac{3^4}{6^4} = \left(\frac{3}{6}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

■

3. Potenzen werden potenziert, indem die Basis mit dem Produkt der Exponenten potenziert wird.
$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Beispiel 3.47

$$\left(a^2bc^4\right)^3 = a^6b^3c^{12}$$

■

Beispiel 3.48

$$\left(\frac{1}{a^2}\right)^3 = \left(a^{-2}\right)^3 = a^{-6} = \frac{1}{a^6}$$

■

In Wissenschaft und Technik werden sehr große und sehr kleine Zahlen als Produkte von rationalen Zahlen zwischen Eins und Zehn und einer Zehnerpotenz dargestellt. Dabei werden die in Tabelle 3.4 aufgelisteten Bezeichnungen und Abkürzungen verwendet.

Tab. 3.4 Bezeichnung der Zehnerpotenzen in Wissenschaft und Technik

	Zehnerpotenz	**Bezeichnung**	**Abkürzung**
0,000000000001	10^{-12}	Piko	p
0,000000001	10^{-9}	Nano	n
0,000001	10^{-6}	Mikro	μ
0,001	10^{-3}	Milli	m
0,01	10^{-2}	Zenti	c
0,1	10^{-1}	Dezi	d
1	10^0		
10	10^1	Deka	da
100	10^2	Hekto	h
1 000	10^3	Kilo	k
1 000 000	10^6	Mega	M
1 000 000 000	10^9	Giga	G
1 000 000 000 000	10^{12}	Tera	T

Beispiel 3.49
Durchmesser eines Wasserstoffatomes:

$$0{,}0000000053 \text{ cm} = 5{,}3 \cdot 10^{-9} \text{ cm}$$

■

Beispiel 3.50
Masse der Erde:

$$5\,997\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000 \text{ kg} = 5{,}997 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

■

Gehen Sie zu Kapitel 4.9!

3.10 Wurzeln

Die n-te Wurzel aus dem Radikanden $b \geq 0$ ist die nichtnegative Zahl a, die mit $n > 0$ potenziert, den Radikanden ergibt.

$$\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = a^n = b, \qquad \text{mit} \quad a, b \geq 0, \quad n \neq 0$$

Beispiel 3.51

$$\sqrt[3]{64} = 4, \quad \text{da} \quad 4 > 0 \quad \text{und} \quad 4^3 = 64$$

■

Beispiel 3.52

$$\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{2}{3}, \quad \text{da} \quad \frac{2}{3} > 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

■

Beispiel 3.53

$$\sqrt[5]{0{,}00001} = 0{,}1, \quad \text{da} \quad 0{,}1 > 0 \quad \text{und} \quad 0{,}1^5 = 0{,}00001$$

■

Beispiel 3.54

$$\sqrt{169} = 13, \quad \text{da} \quad 13 > 0 \quad \text{und} \quad 13^2 = 169$$

■

Bemerkungen: Der Wurzelexponent Zwei (Quadratwurzel) wird vereinbarungsgemäß weggelassen.

Durch die Erweiterung der Potenzdefinition

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}, \qquad a^p \geq 0, \quad q \neq 0$$

lässt sich jede Wurzel als Potenz mit gebrochenem Exponenten und jede Potenz mit gebrochenem Exponenten als Wurzel schreiben. Aus diesem Grunde sind alle Gesetze der Potenzrechnung auch als Gesetze der Wurzelrechnung aufzufassen. Das Radizieren ergibt reelle Zahlen als Resultate. In der Praxis werden diese Wurzelwerte mit dem Taschenrechner durch hinreichend genaue rationale Zahlen angegeben.

Beispiel 3.55

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab}$$

■

Beispiel 3.56

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \qquad \text{mit } b \neq 0$$

■

Beispiel 3.57

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{m+n}{mn}} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}$$

■

Beispiel 3.58

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p = a^{\frac{mp}{n}} = \sqrt[n]{a^{mp}}$$

■

Aus rechentechnischen Gründen ist es günstig, Wurzeln im Nenner von Brüchen zu vermeiden. Das Verfahren funktioniert in den nachfolgend angegebenen Typen von Wurzeln im Nenner der Brüche und wird als *Rationalmachen des Nenners* bezeichnet.

Beispiel 3.59

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

■

Beispiel 3.60

$$\frac{2}{\sqrt[3]{3}} = \frac{2\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{3}} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{9}$$

■

Beispiel 3.61

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{b\sqrt{a}-a\sqrt{b}} &= \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(b\sqrt{a}+a\sqrt{b}\right)}{\left(b\sqrt{a}-a\sqrt{b}\right)\left(b\sqrt{a}+a\sqrt{b}\right)} \\ &= \frac{ab+a\sqrt{ab}-b\sqrt{ab}-ab}{b^2a-a^2b} \\ &= \frac{\sqrt{ab}\,(a-b)}{ab\,(b-a)} = \frac{-\sqrt{ab}}{ab}, \qquad \text{mit } a,b \neq 0\end{aligned}$$

■

Gehen Sie zu Kapitel 4.10!

3.11 Logarithmen

Der Logarithmus n einer Zahl b zur Basis a ist der Exponent, mit dem die Basis des Logarithmus potenziert werden muss, um den Numerus b zu erhalten.

$$n = \log_a(b) \quad \Rightarrow \quad a^n = b \text{ oder } a^{\log_a(b)} = b$$

Die Basis des Logarithmus ist eine positive Zahl ungleich null oder eins. Der Logarithmus ist eine reelle Zahl. Der Numerus ist eine positive reelle Zahl.

Beispiel 3.62

$$\log_2(64) = 6, \text{ denn } 2^6 = 64$$

■

Beispiel 3.63

$$\log_a\left(a^3\right) = 3, \text{ denn } a^3 = a^3$$

■

Beispiel 3.64

$$\log_{10}(0{,}01) = -2, \text{ denn } 10^{-2} = 0{,}01$$

■

Im Körper der reellen Zahlen ist das Logarithmieren immer möglich, wenn die hier angegebenen Einschränkungen beachtet werden.

Gehen Sie zu Kapitel 4.11!

3.12 Logarithmensysteme

Die Logarithmen zu einer festen Basis bilden ein Logarithmensystem. Obwohl jede positive Zahl ungleich eins als Basis des Logarithmensystems geeignet ist, sind drei Basen ausgezeichnet.

1. Basis 10 – das System der dekadischen Logarithmen, Zehnerlogarithmen oder Brigg'sche Logarithmen (H. Briggs, englischer Mathematiker, 1556–1630).
   Schreibweise:
   $$\log_{10}(b) = \lg(b)$$
   Zehnerlogarithmen bestehen aus einer Kennzahl, die aus der entsprechenden Zehnerpotenz bestimmt wird, und der Mantisse, die zusammen mit der Kennzahl auf der Anzeige des Taschenrechners abgelesen werden kann. Beispiele für Kennzahlen:
   $$\begin{aligned} &\vdots \\ \lg(0{,}00001) &= -5 \\ \lg(0{,}0001) &= -4 \\ \lg(0{,}001) &= -3 \\ \lg(0{,}01) &= -2 \\ \lg(0)\ &\text{ist nicht definiert (ERROR), da } 10^x \neq 0 \\ \lg(1) &= 0 \\ \lg(10) &= 1 \\ \lg(100) &= 2 \\ \lg(1000) &= 3 \\ &\vdots \end{aligned}$$
   Zehnerlogarithmen werden vor allem in der Wirtschaft verwendet.

2. Basis e – System der natürlichen Logarithmen, logarithmus naturalis.
   $$\mathrm{e} = 2{,}7182818\ldots$$

Schreibweise:

$$\log_{\mathrm{e}}(b) = \ln(b)$$

Natürliche Logarithmen werden vor allem in der Naturwissenschaft und Technik verwendet.

3. Basis 2 – System der dyadischen Logarithmen oder binären Logarithmen. Schreibweise:

$$\log_2(b) = \mathrm{ld}(b)$$

Binäre Logarithmen werden in der Informationstechnik verwendet.

Logarithmen der Basis b können in die der Basis a nach folgender Formel umgerechnet werden:

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

Der Umrechnungsfaktor

$$\frac{1}{\log_b(a)}$$

heißt Modul. Der Wert des Moduls ist in Tabelle 3.5 mit vier Kommastellen angegeben und kann mit einem Taschenrechner überprüft werden.

Tab. 3.5 Umrechnungsfaktoren der Logarithmensysteme

	lg	**ln**	**ld**
lg	1	2,3026	3,3219
ln	0,4343	1	1,4428
ld	0,3010	0,6931	1

Für alle Logarithmensysteme gilt:

1. Der Logarithmus der Logarithmenbasis ist gleich eins.

$$\log_a(a) = 1, \quad \text{da } a^1 = a$$

2. Der Logarithmus von eins ist gleich null (zu jeder zulässigen Logarithmenbasis).

$$\log_a(1) = 0, \quad \text{da } a^0 = 1$$

3. Der Logarithmus von null ist in keinem Logarithmussystem definiert (Error).

4. Der Logarithmus einer negativen Zahl ist ebenfalls nicht definiert.

Gehen Sie zu Kapitel 4.12!

3.13 Logarithmengesetze

Die Logarithmengesetze lassen sich somit aus den Potenzgesetzen für das Rechnen mit Potenzen der gleichen Basis ableiten.

1. Aus $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ folgt: $\log_a (b \cdot c) = \log_a (b) + \log_a (c)$.

2. Aus $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ folgt: $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a (b) - \log_a (c)$.

3. Aus $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ folgt: $\log_a (b)^n = n \cdot \log_a (b)$
   oder $\log_a \sqrt[n]{b} = \dfrac{1}{n} \log_a (b)$.

Beispiel 3.65

$$\log_b \frac{a^2 (x+y)^2}{\sqrt[3]{z}} = 2 \left[\log_b (a) + \log_b (x+y)\right] - \frac{1}{3} \log_b (z)$$

■

Beispiel 3.66

$$\frac{2}{3} \log_a (b+c) - 4 \log_a (d) = \log_a \frac{\sqrt[3]{(b+c)^2}}{d^4}$$

■

Gehen Sie zu Kapitel 4.13!

3.14 Anwendung der Logarithmenrechnung

Gleichungen, bei denen die gesuchte Größe im Exponenten steht, heißen Exponentialgleichungen. Der Exponent wird durch Logarithmieren beider Seiten der Gleichung bestimmt.
Grundtyp:

$$a^n = b \qquad \text{Lösung:} \qquad n \cdot \log_a (a) = \log_a (b), \qquad \text{mit} \qquad \log_a (a) = 1$$
$$n = \log_a (b)$$

In der Praxis wird der Ingenieur den natürlichen Logarithmus (Bestimmung der Leuchtkraftabnahme, der Verdünnungskonzentration, der Zerfallszeit radioaktiven Materials, dem organischen Wachstum usw.) und der Wirtschaftswissenschaftler den dekadischen Logarithmus (Bestimmung der Laufzeit eines Kredits, Bestimmung des Bevölkerungswachstums usw.) benutzen, auch wenn Logarithmen zur Basis a über den Modul berechnet werden können.

$$\begin{aligned} a^n &= b \\ \ln(a^n) &= \ln(b) \\ n \cdot \ln(a) &= \ln(b) \\ n &= \frac{\ln(b)}{\ln(a)} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a^n &= b \\ \lg(a^n) &= \lg(b) \\ n \cdot \lg(a) &= \lg(b) \\ n &= \frac{\lg(b)}{\lg(a)} \end{aligned}$$

Gehen Sie zu Kapitel 4.14!

3.15 Namen für Potenzen von zehn

Vielfache von Maßeinheiten (Meter, Gramm, Volt usw.) werden im Zehnersystem mit international üblichen Vorsilben versehen (Tab. 3.6). Beispielsweise bedeutet ein Megawatt eine elektrische Leistung von einer Million Watt.

Tab. 3.6 Bezeichnungen für Potenzen von Zehn

Zehnerpotenz	Bezeichnung	Abkürzung	Zahl
10^{24}	Yotta	Y	Quadrillion
10^{21}	Zetta	Z	Trilliarde
10^{18}	Exa	E	Trillion
10^{15}	Peta	P	Billiarde
10^{12}	Tera	T	Billion
10^{9}	Giga	G	Milliarde
10^{6}	Mega	M	Million
10^{3}	Kilo	k	Tausend
10^{2}	Hekto	h	Hundert
10^{1}	Deka	da	Zehn

Beispiel 3.67
34 210 010 320 bedeutet: vierunddreißig Milliarden zweihundertzehn Millionen zehn Tausend drei Hundert und zwei Zehner. ■

Beispiel 3.68
Drei Millionen einhundert Tausend sechs Hundert zwölf wird folgendermaßen als Zahl dargestellt:

$$3\,100\,612$$

■

Beispiel 3.69
Dreizehn Milliarden Meter können auch als 13 mal 10^9 Meter geschrieben oder als dreizehn Gigameter bezeichnet werden. ■

Gehen Sie zu Kapitel 4.15!

4 Übungsaufgaben Arithmetik

Übersicht

4.1 Summenzeichen

Zu berechnen ist:

1. $\sum_{i=1}^{4} 2i$

2. $\sum_{i=1}^{10} i^2$

3. $\sum_{i=0}^{3} \frac{2i+1}{3i-1}$

4. $\sum_{i=2}^{5} 3 \cdot 10^{-i}$

G. Höfner, *Mit Selbsttests gezielt Mathematik lernen*,
DOI 10.1007/978-3-662-52963-8_4

5. Die Summe der ungeraden Zahlen von 3 bis 217 ist durch das Summenzeichen zu beschreiben.

Gehen Sie zu Kapitel 5.1!

4.2 Produktzeichen

Zu berechnen ist:

1. $\prod_{i=1}^{4} (2i-1)$
2. $\prod_{i=1}^{3} \frac{i}{2}$
3. $\prod_{i=3}^{6} \frac{2}{i}$
4. $\prod_{i=0}^{3} \binom{3}{i}$
5. Das Produkt der ungeraden Zahlen von 3 bis 21 ist durch das Produktzeichen zu beschreiben.

Gehen Sie zu Kapitel 5.2!

4.3 Vorrangsregeln

Zu Berechnen ist:

$$2a + 3b^2 : (a-c) - a \cdot b : c + 1$$

für

	a	**b**	**c**
1.	2	3	−1
2.	5	−4	2
3.	−1	2	2
4.	−4	−1	−4
5.	−2	−2	2

Gehen Sie zu Kapitel 5.3!

4.4 Gleiches miteinander multiplizieren (Potenzen)

1. Schreiben Sie als Produkt und berechnen Sie den Wert.

   a) 2^7

   b) 5^3

   c) 10^4

2. Sind die folgenden Rechnungen richtig oder falsch. Verbessern Sie falsche Angaben.

   a) $4^4 = 216$

   b) $10^5 = 10\,000$

   c) $1^{100} = 100$

3. Was ergibt:

   a) $(-100)^1$

   b) $45\,678^0$

   c) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^0$

4. Schreiben Sie als Potenz mit der Basis 10.

   a) 1 000 000

   b) 10

   c) 0,001

5. Wie lautet das Vorzeichen einer Potenz mit einer negativen Zahl als Basis, wenn der Exponent

   a) eine gerade Zahl,

   b) eine ungerade Zahl ist?

Gehen Sie zu Kapitel 5.4!

4.5 Binomischer Satz

1. Es ist als Summe darzustellen:

$$(a + b)^5$$

2. Es ist als Summe darzustellen:

$$(a-1)^8$$

3. Was ergibt

$$999^4$$

nach Anwendung des binomischen Satzes?

4. Es ist

$$(x+1)^8-(x-1)^8$$

zu berechnen.

5. Welches Binom ist durch die Summe

$$x^9+9x^6+27x^3+27$$

dargestellt?

Gehen Sie zu Kapitel 5.5!

4.6 Klammern

1. Die Klammern sind aufzulösen und die Ausdrücke so weit wie möglich zusammenzufassen:

   a) $123a-147b-[25a-(17a-19b)-(23b+4a+11b)]$
   b) $24r-(6s-5r)-[7s-(6r+5s)-(-4r+3s)-9r]$
   c) $75x-39y-\{23z-[-14x-(17y-19z)]-22y-27x\}$
   d) $2r\,(-3r+5s)+4rq-\left(8r^2+10rs+rq\right)-(7r+3q)\,3s$
   e) $2ab\,[5\,(cd-2fg)-9\,(x+3y)]-5ab\,[3\,(y-4x)-4\,(fg-2cd)]$
   $+\,6ad\cdot 5bc$

2. Es ist so weit wie möglich auszuklammern:

   a) $(x+y)\,(9a+8b)-(x+y)\,(7a+6b)+(x+y)\,(a-5b)$
   b) $(u-v)\,13+(5g-2k)\,(u-v)-(3g-7k)\,(u-v)-5k\,(u-v)$
   c) $4m\,(2a-3b)+3n\,(3b-2a)$
   d) $(a-b)\,(3e+5g-f)-(b-a)\,(4f-g-7e)+(a-b)\,(2g-e+9f)$
   e) $x^2-3x+xy-3y$

Gehen Sie zu Kapitel 5.6!

4.7 Absoluter Betrag

1. Welchen Wert hat

$$|3x - 2y| + 3, \qquad \text{für } x = 7 \text{ und } y = 9?$$

2. Die Tabelle ist zu ergänzen!

x	$-x$	$\|x\|$	$\|-x\|$
2			
-3			
	2		
	-3		

3. Was ergibt

$$\left|9 - x^2\right| + (x-3)^2, \qquad \text{für } -3 \leq x \leq 3?$$

4. Was ergibt

$$\frac{|x|}{x}, \qquad \text{für } x \neq 0?$$

5. Was ergibt

$$\frac{x + y + |x - y|}{2}?$$

6. Welche Eigenschaft hat die Abbildung $x \mapsto |x|$?

Gehen Sie zu Kapitel 5.7!

4.8 Bruchrechnung

Zu berechnen ist:

1. $\dfrac{x}{3} + \dfrac{5x}{6} - \dfrac{7x}{9}$

2. $\dfrac{3u - 5v}{15uv} - \dfrac{u - 7w}{12uw} - \dfrac{5v - 4w}{20vw} + \dfrac{3}{4u} + \dfrac{3}{5v} + \dfrac{4}{3w}$

3. $\dfrac{2}{(x-1)^3}+\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{2}{1-x}-\dfrac{1}{x}$

4. $\dfrac{49\left(u^2-2uv+v^2\right)}{14\,(u+v)}:35\,(u-v)$

5. $\dfrac{8z}{9u-9v}\cdot\dfrac{3\left(u^2-v^2\right)}{4z^2}$

6. $\left(0{,}16a^2-0{,}25b^2\right):\dfrac{0{,}4a+0{,}5b}{5ab}$

7. $\dfrac{2m-2n}{3u+3v}:\dfrac{4\,(m-n)^2}{5\,(u^2-v^2)}$

8. $\dfrac{\frac{5x}{4}}{bx}$

9. $\dfrac{\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{x+y}}{\dfrac{1}{x-y}-\dfrac{1}{x+y}}$

10. $\dfrac{2}{1-\dfrac{3}{7-\dfrac{1}{4}}}$

Gehen Sie zu Kapitel 5.8!

4.9 Rechenoperationen der dritten Stufe

Folgende Terme sind unter Beachtung der Potenzgesetze zu vereinfachen.

1. $\frac{3}{4}a^nbx^3\cdot\frac{4}{5}ab^mx^4\cdot\frac{5}{6}a^2x^p$

2. $4m^7-\left(-m^7\right)+\left(-2m^7\right)$

3. $\dfrac{4a^7b^4}{5c^4d}\cdot\dfrac{15bc^3}{8a^6}\cdot\dfrac{2cd}{3ab}$

4. $3{,}5^3\cdot\left(\dfrac{1}{7}\right)^3$

5. $\dfrac{(a+b)^{-3}}{(a+b)^2}$

6. $\dfrac{a^3b^{-4}}{x^{-7}y^5} \cdot \dfrac{a^{-4}b^5}{x^9y^{-3}}$

7. $\left(\dfrac{a^{-2}b^3}{x^{-1}y^{-4}}\right)^2$

8. $\left(\dfrac{y^3}{3} + \dfrac{2}{5}y - \dfrac{4}{3y}\right) \cdot \left(y - \dfrac{1}{4y}\right)$

9. Die Gravitationskonstante ist als Zehnerpotenz anzugeben.

$$\gamma = 0{,}0000000000668\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$$

10. Die Wellenlänge von Gammastrahlen ist auszuschreiben.

$$3 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{cm} \leq \lambda \leq 3 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{cm}$$

Gehen Sie zu Kapitel 5.9!

4.10 Wurzeln

Folgende Terme sind unter Beachtung der Potenzgesetze zu vereinfachen.

1. $\sqrt[4]{6} + 3\sqrt[4]{6}$

2. $\sqrt[5]{y^4 \cdot \sqrt[5]{y^6}}$

3. $\left(\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}\right)^2$

4. $\dfrac{\sqrt[3]{500}}{\sqrt[3]{4}}$

5. $\sqrt{12^2 + 35^2}$

6. $\sqrt{\dfrac{64u^3v^4}{125vw^6}}$

7. $\sqrt{\dfrac{m^2n^2 + n^2p^2}{9q^2}}$

8. $\left(\sqrt[3]{-a}\right)^5, \qquad$ für $a < 0$

Die Nenner in der Aufgabe 9. und 10. sind rational zu machen.

9. $\dfrac{4}{\sqrt[3]{3}}$

10. $\dfrac{3 + \sqrt{6}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

Gehen Sie zu Kapitel 5.10!

4.11 Logarithmen

Bestimmen und begründen Sie!

1. $\log_a \dfrac{1}{a^2}$

2. $\log_a \sqrt{a}$

3. $\log_{\frac{1}{3}} (27)$

4. $\log_2 \dfrac{1}{8}$

5. $\log_{10} 1\,000$

Gehen Sie zu Kapitel 5.11

4.12 Logarithmensysteme

Bestimmen Sie mit dem Taschenrechner:

1. $\mathrm{ld}\,(2{,}43)$

2. $\mathrm{ld}\,(0{,}68)$

3. $\ln\,(7{,}42)$

4. $\ln\,(0{,}38)$

5. $\lg\,(0{,}0241)$

Gehen Sie zu Kapitel 5.12!

4.13 Logarithmengesetze

Die Logarithmen in Aufgabe 1 bis 3 sind aufzuspalten.

1. $\lg \dfrac{x^2\,(y+z)^3}{\sqrt[3]{y+2z}}$

2. $\log_a \sqrt[3]{\dfrac{b}{(c+3)^3}}$

3. $\ln \dfrac{3a^2}{bc\sqrt{d}}$

Unter einem Logarithmus sind zusammenzufassen:

4. $2\lg(a) - 4\lg(b) + 3\lg(c) - \dfrac{1}{2}\lg(d)$

5. $\dfrac{1}{2}\lg(a+b) - 3\lg(c)$

Gehen Sie zu Kapitel 5.13!

4.14 Anwendung der Logarithmenrechnung

1. Eine Fernsehkamera benötigt 42 % des Tageslichtes, um gute Bilder aufnehmen zu können. In einem See nimmt die Lichtintensität pro Meter um 15 % ab. Bis zu welcher Tiefe können ohne künstliche Lichtquellen Aufnahmen gemacht werden?

2. Ein Kapital von 3 000 € liegt auf Zins- und Zinseszins. Nach welcher Zeit ist der Betrag bei einem Zinssatz von 2,5 % per annum auf 4 200 € angewachsen?

3. Ein Kapital, welches auf Zins- und Zinseszins liegt, soll bei einem Zinssatz von 3,2 % auf das 2,5-Fache des Anfangswertes anwachsen. Welche Zeit ist dafür erforderlich?

4. Im Jahr 2000 hatte Indonesien 224,8 Millionen Einwohner, die Bevölkerungswachstumsrate betrug 2,3 %. Wann überschreitet bei gleichbleibender Wachstumsrate die Einwohnerzahl die 300 Millionen Grenze?

5. Bakterienstämme verdoppeln sich alle 30 Minuten. Nach welcher Zeit ist die 1 000-fache Menge vorhanden, wenn dem Wachstum nicht entgegengewirkt wird?

Gehen Sie zu Kapitel 5.14!

4.15 Namen für Potenzen von zehn

1. Schreiben Sie die Zahl mit Ziffern: elf Millionen dreihundertzwei Tausend und sechshunderteinundzwanzig.
2. Wie viele Millionen, Tausender und Zehner enthält die Zahl

$$32\,420\,103?$$

3. Lesen Sie die Zahl

$$36\,423\,125\,000.$$

4. Wie viele Millionen hat eine Zahl, die 312 Zehntausender darstellt?
5. Wie viele 10-€-Scheine sind notwendig, um eine Summe von Zehntausend Euro zu ergeben?

Gehen Sie zu Kapitel 5.15!

5 Lösungen zu den Übungsaufgaben Arithmetik

Übersicht

5.1 Summenzeichen

1. $\begin{array}{ccccc} i=1 & i=2 & i=3 & i=4 & \\ 2+ & 4+ & 6+ & 8 & =20 \end{array}$

2. 385

3. $\begin{array}{ccccc} i=0 & i=1 & i=2 & i=3 & \\ \dfrac{+1}{-1}+ & \dfrac{3}{2}+ & \dfrac{5}{5}+ & \dfrac{7}{8} & = -1+\dfrac{12}{8}+1+\dfrac{7}{8}=\dfrac{12}{8}+\dfrac{7}{8}=\dfrac{19}{8} \end{array}$

4. $3\,(0{,}01+0{,}001+0{,}0001+0{,}00001)=0{,}03333$

G. Höfner, *Mit Selbsttests gezielt Mathematik lernen*,
DOI 10.1007/978-3-662-52963-8_5

5. $\sum_{i=2}^{109}(2i-1)=\sum_{i=1}^{108}(2i+1)$

Gehen Sie zu Kapitel 1.2!

5.2 Produktzeichen

1. $$\begin{array}{lllll} i=1 & i=2 & i=3 & i=4 & \\ 1\cdot & 3\cdot & 5\cdot & 7 & =105 \end{array}$$

2. $\frac{3}{4}$

3. $$\begin{array}{lllll} i=3 & i=4 & i=5 & i=6 & \\ \frac{2}{3}\cdot & \frac{2}{4}\cdot & \frac{2}{5}\cdot & \frac{2}{6} & =\frac{16}{360}=\frac{2}{45} \end{array}$$

4. $\binom{3}{0}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{3}{2}\cdot\binom{3}{3}=1\cdot 3\cdot 3\cdot 1=9$

5. $\prod_{i=2}^{11}(2i-1)=\sum_{i=1}^{10}(2i+1)$

Gehen Sie zu Kapitel 1.3!

5.3 Vorrangsregeln

1. $4+27:3-6:(-1)+1=20$

2. $10+48:3-(-20):2+1=37$

3. $-2+12:(-3)-(-2):2+1=-4$

4. $a-c=-4-(-4)=0$
   Division durch null ist verboten – unlösbare Aufgabe!

5. $-4+12:(-4)-4:2+1=-8$

Gehen Sie zu Kapitel 1.4!

5.4 Gleiches miteinander multiplizieren (Potenzen)

1. a) $2^7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 128$

   b) $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

   c) $10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$

2. a) 4^4 bedeutet: $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256 \neq 216$, Lösung ist falsch angegeben.

   b) $10^5 = 10\,000$ bedeutet: $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100\,000 \neq 10\,000$, falsche Lösung angegeben.

   c) $1^{100} = 100$ bedeutet, dass eins hundertmal mit sich selbst multipliziert wird. Das ergibt, so oft auch immer, eins und nicht hundert. Lösung ist falsch angegeben.

3. a) $(-100)^1 = -100$

   b) $45\,678^0 = 1$

   c) $\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$

4. a) $1\,000\,000 = 10^6$

   b) $10 = 10^1$

   c) $0{,}001 = \frac{1}{1\,000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$

5. Das Vorzeichen einer Potenz mit einer negativen Zahl als Basis

   a) ist positiv, wenn der Exponent eine gerade Zahl,

   b) ist negativ, wenn der Exponent eine ungerade Zahl ist.

Gehen Sie zu Kapitel 1.5!

5.5 Binomischer Satz

1. $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

2. $a^8 - 8a^7 + 28a^6 - 56a^5 + 70a^4 - 56a^3 + 28a^2 - 8a + 1$

3. $(1\,000 - 1)^4 = 10^{12} - 4 \cdot 10^9 + 6 \cdot 10^6 - 4 \cdot 10^3 + 1 = 996\,005\,996\,001$
   Hilfe: $1\,000 = 10^3$

4. $16x^7 + 112x^5 + 112x^3 + 16x$

5. $\left(x^3 + 3\right)^3$

Gehen Sie zu Kapitel 1.6!

5.6 Klammern

1. Lösungen zum Klammern auflösen:

   a) $119a - 132b$

   b) $40r - 5s$

   c) $34x - 34y - 4z$

   d) $-14r^2 - 21rs + 3rq - 9qs$

   e) $42abx - 69aby$

   Zwischenschritte – Lösungshinweise:
   Auflösen der Klammern „von innen nach außen" (also erst die runden Klammern) unter Beachtung der Vorzeichenregeln der Multiplikation.
   $-(6r - 2s)$ bedeutet: $-1\,(6r - 2s) = -6r + 2s$

   a) $123a - 147b - [25a - 17a + 19b - 23b - 4a - 11b]$

   b) $24r - 6s + 5r - (7s - 6r - 5s + 4r - 3s - 9r]$

   c) $75x - 39y - \{23z - [-14x - 17y + 19z] - 22y - 27x\}$

   d) $-6r^2 + 10rs + 4rq - 8r^2 - 10rs - rq - 21rs - 9qs$

   e) $2ab\,[5cd - 10fg - 9x - 27y] - 5ab\,[3y - 12x - 4fg + 8cd] + 30abcd$

   Zusammenfassen:

   a) $123a - 147b - [4a - 15b]$

   b) $29r - 6s - [-s - 11r]$

   c) In diesem Schritt ist keine Zusammenfassung möglich.

d) $-14r - 21rs + 3rq - 9qs$

e) In diesem Schritt ist keine Zusammenfassung möglich.

2. Lösungen zum Ausklammern:

a) $(x + y)(3a - 3b) = 3(x + y)(a - b)$

b) $(u - v)(13 + 2g)$

c) $(2a - 3b)(4m - 3n)$

d) $(a - b)(-5e + 12f + 6g)$

e) $(x - 3)(x + y)$

Nach dem Kommutativgesetz ist die Reihenfolge der Faktoren ohne Bedeutung.
Zwischenschritte – Lösungshinweise:

a) Aus den drei Gliedern wird $(x + y)$ ausgeklammert.
$(x + y)[(9a + 8b) - (7a + 6b) + (a - 5b)]$
Zusammenfassen des Inhalts der 2. Klammer führt zum Resultat. Schließlich wird noch 3 ausgeklammert.

b) Der Faktor $(u - v)$ wird aus den vier Gliedern ausgeklammert.
$(u - v)[13 + (5g - 2k) - (3g - 7k) - 5k]$
$(u - v)(13 + 5g - 2k - 3g + 7k - 5k)$
$(u - v)(13 + 2g)$

c) Um gleiche Faktoren zu erhalten, wird aus $(3b - 2a)$ der Faktor (-1) ausgeklammert.
$(3b - 2a) = -(2a - 3b)$
Nun kann $(2a - 3b)$ ausgeklammert werden.
$(2a - 3b)(4m - 3n)$

d) Nach Ausklammern von (-1) im zweiten Glied kann der gemeinsame Faktor $(a - b)$ herausgezogen werden.
$(a - b)(3e + 5g - f + 4f - g - 7e + 2g - e + 9f)$

e) Aus den ersten beiden Gliedern wird x und aus den letzten beiden y ausgeklammert (partielles Ausklammern).
$x(x - 3) + y(x - 3)$
Aus beiden verbleibenden Summanden wird der gemeinsame Faktor $(x - 3)$ ausgeklammert.

Gehen Sie zu Kapitel 1.7!

5.7 Absoluter Betrag

1. 6

2. Lösungstabelle

x	$-x$	$\lvert x\rvert$	$\lvert -x\rvert$
2	-2	2	-2
-3	3	3	-3
-2	2	2	-2
3	-3	3	-3

3. 1. Fall: $9 - x^2 \geq 0,\;$ für $\;-3 \leq x \leq 3.$

   Der Betragsstrich kann weggelassen werden.

$$9 - x^2 + x^2 - 6x + 9 = -6x + 18 = 3\,(6 - 2x)$$

   2. Fall: $9 - x^2 < 0,\;$ für $\;x < -3\;$ und $\;x > +3.$

   Der Betragsstrich wird durch eine Minusklammer ersetzt.

$$\begin{aligned}-\left(9 - x^2\right) + x^2 - 6x + 9 &= -9 + x^2 + x^2 - 6x + 9\\ &= 2x^2 - 6x\\ &= 2x\,(x - 3)\end{aligned}$$

4. $$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{für } x > 0 \\ -1, & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

5. 1. Fall: Für $x \geq y$ ist $x - y \geq 0$ und damit:

$$\frac{x + y + x - y}{2} = \frac{2x}{2} = x$$

   2. Fall: Für $x < y$ ist $x - y < 0$ und damit:

$$\frac{x + y - (x - y)}{2} = \frac{x + y - x + y}{2} = \frac{2y}{2} = y$$

6. Die Abbildung ist eindeutig. Die Abbildung ist aber nicht eineindeutig oder umkehrbar eindeutig.

Gehen Sie zu Kapitel 1.8!

5.8 Bruchrechnung

1. $\frac{7x}{18}$, Hauptnenner: 18
2. $\frac{uv + vw + uw}{uvw}$, Hauptnenner: $60uvw$
3. $\frac{x^3 + 1}{x\,(x-1)^3}$, Hauptnenner: $x\,(x-1)^3$
4. $\frac{u - v}{10\,(u+v)}$
5. $\frac{2\,(u+v)}{3z}$
6. $5ab\,(0{,}4a - 0{,}5b)$
7. $\frac{5\,(u-v)}{6\,(m-n)}$
8. $\frac{5bx^2}{4}$
9. $\frac{x}{y}$
10. $\frac{18}{5} = 3{,}6$

Gehen Sie zu Kapitel 1.9!

5.9 Rechenoperationen der dritten Stufe

1. $\frac{1}{2}a^{n+3}b^{m+1}x^{p+7}$
2. $3m^7$
3. b^4
4. $\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

5. $\dfrac{1}{(a+b)^5}$

6. $\dfrac{b}{ax^2y^2}$

7. $\dfrac{b^6x^2y^8}{a^4}$

8. $\dfrac{y^4}{3} + \dfrac{19}{60}y^2 - \dfrac{43}{30} + \dfrac{1}{3y^2}$

9. $\gamma = 6{,}68 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$

10. $0{,}000000000003\ \mathrm{cm} \leq \lambda \leq 0{,}00000003\ \mathrm{cm}$

Gehen Sie zu Kapitel 1.10!

5.10 Wurzeln

1. $4\sqrt[4]{6}$

2. $y\,\sqrt[25]{y}$

3. $2x + 2\sqrt{x^2 - y^2} = 2\left(x + \sqrt{x^2 - y^2}\right)$

4. 5

5. 37

6. $\dfrac{8uv^2}{5w^3}\sqrt{\dfrac{u}{5v}}$

7. $\dfrac{n}{3q}\sqrt{m^2 + p^2}$

8. $-a\sqrt[3]{a^2}$

9. $\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{9}$

10. $\sqrt{3}$

$$\text{zu 10.: } \frac{\left(3+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)} = \frac{3\sqrt{3}-3\sqrt{2}+\sqrt{2\cdot 9}-\sqrt{3\cdot 4}}{3-2}$$
$$= 3\sqrt{3}-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

Gehen Sie zu Kapitel 1.11!

5.11 Logarithmen

1. -2, denn $a^{-2} = \dfrac{1}{a^2}$
2. $\dfrac{1}{2}$, denn $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$
3. -3, denn $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3} = 3^3 = 27$
4. -3, denn $2^{-3} = \dfrac{1}{8}$
5. 3, denn $10^3 = 1\,000$

Gehen Sie zu Kapitel 1.12!

5.12 Logarithmensysteme

1. 1,2810
2. −0,5564
3. 2,0042
4. −0,9676
5. −1,6180

Gehen Sie zu Kapitel 1.13!

5.13 Logarithmengesetze

1. $2\lg(x) + 3\lg(x+z) - \dfrac{1}{3}\lg(y+2z)$

2. $\frac{1}{3}\left(\log_a(b) - 3\log_a(c+3)\right)$

3. $\ln(3) + 2\ln(a) - \left[\ln(b) + \ln(c) + \frac{1}{2}\ln(d)\right]$

4. $\lg \frac{a^2 c^3}{b^4\sqrt{d}}$

5. $\lg \frac{\sqrt{a+b}}{c^3}$

Gehen Sie zu Kapitel 1.14!

5.14 Anwendung der Logarithmenrechnung

1. Ansatz: $0{,}42 = 1 \cdot 0{,}85^x$

   Auflösung: $x = \frac{\lg(0{,}42)}{\lg(0{,}85)} \approx 5{,}338$

   In einer Tiefe von 5,33 Meter beträgt die Lichtintensität noch 42 % des Tageslichtes.

2. Ansatz: $4\,200 = 3\,000 \cdot 1{,}025^n$

   Auflösung: $n = \frac{\lg \frac{4\,200}{3\,000}}{\lg(1{,}025)} \approx 13{,}626$

   Es dauert 13 Jahre und gut 7,5 Monate – bei jährlicher Verzinsung also 14 Jahre.

3. Ansatz: $2{,}5 = 1{,}032^n$

   Auflösung: $n = \frac{\lg(2{,}5)}{\lg(1{,}032)} \approx 29{,}09$

   In 30 Jahren hat sich das Kapital mindestens auf den 2,5-fachen Wert erhöht.

4. Ansatz: $300 \cdot 10^6 = 224{,}8 \cdot 10^6 \cdot 1{,}023^n$

   Auflösung: $n = \frac{\ln \frac{300}{224}}{\ln(1{,}023)} \approx 12{,}847$

   Nach knapp 13 Jahren wird die 300-Millionengrenze überschritten.

5. Ansatz: $1\,000 = 2^n$

   Auflösung: $n = \dfrac{\ln(1\,000)}{\ln(2)} \approx 9{,}96$

   Nach knapp 5 Stunden ist die 1 000-fache Anzahl vorhanden.

Gehen Sie zu Kapitel 1.15!

5.15 Namen für Potenzen von zehn

1. Die Zahl elf Millionen dreihundertzwei Tausend und sechshunderteinundzwanzig ergibt, wird sie durch Ziffern ausgedrückt:

   $$11\,302\,621$$

2. Die Zahl

   $$32\,420\,103$$

   enthält: zweiunddreißig Millionen, vierhundertzwanzig Tausender und keinen Zehner.

3. Die Zahl

   $$36\,423\,125\,000$$

   wird gelesen: sechsunddreißig Milliarden vierhundertdreiundzwanzig Millionen und einhundertfünfundzwanzig Tausend.

4. Eine Zahl, die 312 Zehntausender besitzt, stellt gut drei Millionen dar.

5. Es sind 1 000 Stück 10-€-Scheine erforderlich, um die Summe von Zehntausend Euro zu erhalten.

Ende des ersten Tages im Aufbaukurs Mathematik!

Teil II

2. Tag – Algebra

2. Tag – Algebra

Algebra ist das Teilgebiet der Mathematik, das zueinander ähnliche arithmetische Aufgabenstellungen mit allgemeinen Methoden einheitlich und möglichst universell löst. Zunächst wurde die Algebra als eine Theorie zur Lösung von Gleichungen bezeichnet. Heute werden in der Algebra allgemeine Strukturen in Mengen mathematischer Objekte (etwa Zahlen) untersucht und gemeinsame Eigenschaften erforscht. Von besonderer Bedeutung ist die lineare Algebra. Die Methoden der linearen Algebra sind vollständig ausgearbeitet und bilden eine abgeschlossene Theorie.

Mathematische Modelle drücken einen praktischen Sachverhalt durch Gleichungen (Formeln) und Ungleichungen aus, in denen die aus Zahlen, Variablen und mathematischen Zeichen bestehenden Terme zueinander in Relation gesetzt werden. Nach der Lösung des mathematischen Modells sind die mathematischen Objekte wieder in praktische Größen umzusetzen. Die sichere Beherrschung der (wenigen) Regeln zur Lösung von algebraischen Gleichungen oder Ungleichungen ist somit eine wichtige Voraussetzung, um Probleme der Naturwissenschaft, Technik oder Wirtschaft durch mathematische Modelle lösen zu können.

6 Tests zur Algebra

Übersicht

6.1 Einteilung der Gleichungen

Die nachfolgend angegebenen Gleichungen sind nach dem Sachverhalt, den sie ausdrücken, nach der Zahl der Unbekannten und nach ihrem Aufbau zu beurteilen.

1. $2x - 3y = 4$
2. $a^2 + b^2 = c^2$
3. $3 + x^2 = 4$
4. $2^x = 3x$

G. Höfner, *Mit Selbsttests gezielt Mathematik lernen*,
DOI 10.1007/978-3-662-52963-8_6

5. $\sin(x) = 2 + x$
6. $x^4 - 3x^2 + 5 = 0$
7. $\sqrt{x} = x^2 + 4, \quad \text{für } x \geq 0$
8. $\frac{1}{x} = \frac{1}{x-1}, \quad \text{für} \quad x_1 \neq 0 \text{ und } x_2 \neq 1$
9. $9 = 9$
10. $x^{\frac{1}{3}} = x + 2, \quad \text{für } x \geq 0$

Gehen Sie zu Kapitel 7.1!

6.2 Einfache Gleichungen

Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung

$$3x - 4 + 2x = -6 + 8x.$$

Gehen Sie zu Kapitel 7.2!

6.3 Gleichungen mit Klammern

Bestimme die Lösung der Gleichung

$$3x - 4(3 - 2x) = -2x + 5(2x - 9).$$

Gehen Sie zu Kapitel 7.3!

6.4 Gleichungen mit Beträgen

Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung

$$|x - 3| = 4.$$

Gehen Sie zu Kapitel 7.4!

6.5 Bruchgleichungen

Die Gleichung

$$\frac{x}{4x-12}+\frac{x+1}{2\,(x-3)}=\frac{2x-1}{x-3}-\frac{5\,(x-1)}{4x}, \quad \text{mit } x\neq 3,\ x\neq 0$$

ist nach x aufzulösen.

Gehen Sie zu Kapitel 7.5!

6.6 Formeln umstellen

Die Formel, nach der die Stromstärke von n hintereinander geschalteten galvanischen Elementen berechnet werden kann, soll nach n aufgelöst werden.

$$I=\frac{n\cdot U}{n\cdot R_{\mathrm{i}}+R_{\mathrm{a}}}$$

n : Anzahl der Elemente

R_{i} : Innenwiderstand

R_{a} : Außenwiderstand

U : Urspannung

I : Stromstärke

Gehen Sie zu Kapitel 7.6!

6.7 Textaufgaben

Gertrud ist zwei Jahre jünger als ihre Schwester Franziska. Der Vater ist fünf Jahre jünger als das Fünffache des Alters von Gertrud. Zusammen sind der Vater und seine beiden Töchter 74 Jahre alt. Wie alt sind der Vater, Gertrud und Franziska?

Gehen Sie zu Kapitel 7.7!

6.8 Prozent sind Hundertstel

In einem Betrieb mit 250 wahlberechtigten Angehörigen nutzen 150 ihr Stimmrecht. Wie viel Prozent sind das von einhundert Wahlberechtigten?

In einem anderen Betrieb sind es 70 von 125, die zur Wahl des Betriebsrates gehen. In welchem Betrieb ist die Wahlbeteiligung höher?

Gehen Sie zu Kapitel 7.8!

6.9 Einkaufspreis und Selbstkosten

Mit der Mehrwertsteuer von 19 % beträgt der Verkaufspreis eines Fahrrades 142,80 €. Was würde das Fahrrad ohne Mehrwertsteuer kosten?

Gehen Sie zu Kapitel 7.9!

6.10 Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen

Die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 16 \\ 4x &= -y + 3 \end{aligned}$$

ist zu bestimmen.

Gehen Sie zu Kapitel 7.10!

6.11 Quadratische Gleichungen

Die Lösung der Gleichung

$$8x^2 - 6x + 1 = 0$$

ist zu bestimmen.

Gehen Sie zu Kapitel 7.11!

6.12 Polynomgleichungen

Die Lösungen der Gleichung

$$x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = 0$$

sind zu besitmmen.

Gehen Sie zu Kapitel 7.12!

6.13 Wurzelgleichungen

Die Lösung der Gleichung

$$x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$$

ist zu bestimmen.

Gehen Sie zu Kapitel 7.13!

6.14 Exponentialgleichungen

Wird ein Kapital n Jahre fest angelegt und werden Zinsen im Folgejahr mitverzinst, so wächst das Kapital G_0 nach n Jahren auf G_n an.

$$G_n = b^n \cdot G_0, \quad \text{mit dem Zinsfaktor } b = \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

Nach wie vielen Jahren hat sich ein Kapital verdoppelt, das mit 5,2 % durch Zins und Zinseszins wächst?

Gehen Sie zu Kapitel 7.14!

6.15 Logarithmengleichungen

Der Wert von x ist zu bestimmen.

$$\lg(2x - 1) = \lg(x + 1) + 2, \quad \text{für } x > \frac{1}{2}$$

Gehen Sie zu Kapitel 7.15!

6.16 Lineare Ungleichungen

Es sind die Lösungsmenge und die größte ganze Zahl zu bestimmen, die folgende Ungleichung erfüllt:

$$\frac{7}{4}x - \frac{7}{2} > \frac{23}{4}x + \frac{3}{2}$$

Gehen Sie zu Kapitel 7.16!

6.17 Lineare Ungleichungssysteme

Für die Herstellung von Tischen und Schränken werden zwei Holzarten benötigt. Die Herstellung eines Tisches erfordert 0,15 m^3 der ersten und 0,2 m^3 der zweiten Holzart. Die Herstellung eines Schrankes erfordert 0,2 m^3 der ersten und 0,10 m^3 der zweiten Holzart.

Von der ersten Holzart stehen 60 m^3 und von der zweiten 40 m^3 zur Verfügung. Geben Sie grafisch den Bereich an, in dem die Punkte liegen, deren Koordinaten für eine Produktion von Tischen und Schränken geeignet sind.

Gehen Sie zu Kapitel 7.17!

6.18 Determinanten

Berechne den Wert der Determinante.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -15 & 6 & 9 \\ 8 & -4 & 12 \end{pmatrix}$$

Gehen Sie zu Kapitel 7.18!

7 Lösungen zu den Tests zur Algebra

Übersicht

7.1 Einteilung der Gleichungen

1. Bestimmungsgleichung, linear mit zwei Variablen
2. Identische Gleichung
3. Bestimmungsgleichung, quadratisch (ganzrational), eine Variable
4. Bestimmungsgleichung, Exponentialgleichung (transzendent), eine Variable

G. Höfner, *Mit Selbsttests gezielt Mathematik lernen*,
DOI 10.1007/978-3-662-52963-8_7

5. Bestimmungsgleichung, goniometrische Gleichung (transzendent), eine Variable
6. Bestimmungsgleichung, ganzrational (4. Grades), eine Variable
7. Bestimmungsgleichung, algebraisch (Wurzelgleichung), eine Variable
8. Bestimmungsgleichung, rational (Bruchgleichung, gebrochen rational), eine Variable
9. Identische Gleichung
10. Bestimmungsgleichung, algebraisch (Wurzelgleichung: $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ für $x \geq 0$)

Antwort richtig?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 6.2!
Nein – Gehen Sie zu Kapitel 8.1!

7.2 Einfache Gleichungen

Wenn

$$x = \frac{2}{3}$$

bestimmt wurde, kann die Arbeit sofort bei Kapitel 6.3 fortgesetzt werden. Andernfalls müssen Sie die Erklärung lesen. Gehen Sie zu Kapitel 8.2!

7.3 Gleichungen mit Klammern

Heißt die Lösung

$$x = -11?$$

Ja – Es klappt ja gut. Gehen Sie sofort zu Kapitel 6.4!
Nein – Neu ist nur, dass Klammern auftreten. Gehen Sie zu Kapitel 8.3!

7.4 Gleichungen mit Beträgen

Wenn die Lösungsmenge

$$L = \{-1; 7\}$$

vollständig bestimmt wurde, dann spricht das für absolute Sicherheit beim Umgang mit den absoluten Beträgen. Gehen Sie sofort zu Kapitel 6.5!
In Kapitel 8.4 wird die Sache noch einmal erläutert. Um Hilfe zu finden, gehen Sie zu Kapitel 8.4!

7.5 Bruchgleichungen

Wenn

$$x = \frac{15}{14}$$

bestimmt wurde, dann bedeutet das eine große Sicherheit bei der Lösung dieser bestimmt nicht einfachen Bruchgleichung. Gehen Sie zu Kapitel 6.6!
In Kapitel 8.5 wird Ihnen wieder geholfen und die Aufgabe schrittweise gelöst. Gehen Sie zu Kapitel 8.5!

7.6 Formeln umstellen

Heißt die Lösung

$$n = \frac{IR_\mathrm{a}}{U - IR_\mathrm{i}} \quad \text{oder (erweitert mit } -1\text{)}$$
$$n = -\frac{IR_\mathrm{a}}{IR_\mathrm{i} - U}$$

Ja – Das Ergebnis ist richtig! Gehen Sie zu Kapitel 6.7!

Nein – Es wird erläutert und Ihnen geholfen. Gehen Sie zu Kapitel 8.6!

7.7 Textaufgaben

Eine Gleichung kann durch systematisches Probieren, durch Zufall oder durch Überlegung gefunden werden:

Gertrud ist 11 Jahre alt, Franziska ist 13 Jahre und der Vater ist 50 Jahre alt.

Dann beträgt der Altersunterschied zwischen Gertrud und Franziska 2 Jahre, die Summe der Jahre ergibt 74 und der Vater hat das fünffache Alter von Gertrud minus fünf Jahre, wie es durch die Bedingungen der Aufgabe vorgeschrieben wird. Eine andere Lösung ist falsch, denn mindestens eine Bedingung der Textaufgabe wäre dann verletzt. In dem Fall müssen Sie sich das „Problem“

Textaufgabe in Kapitel 8.7 erklären lassen. Gehen Sie zu Kapitel 8.7! Andernfalls sind alle Überlegungen okay, die zu diesem Ergebnis geführt haben. Es kann gesagt werden: Weiter so!

Weiter bei Kapitel 6.8!

7.8 Prozent sind Hundertstel

In einem Betrieb mit 250 wahlberechtigten Angehörigen nutzen 150 ihr Stimmrecht. Das sind in dem Betrieb

$$\frac{150}{250} \cdot 100\ \% = 60\ \%,$$

60 Prozent oder 60 auf 100 Wahlberechtigte.

In einem anderen Betrieb sind es 70 von 125, die zur Wahl des Betriebsrates gehen. Also, da

$$\frac{70}{125} \cdot 100\ \% = 56\ \%,$$

56 Prozent. Der Unterschied beträgt vier Prozentpunkte.

Haben Sie diese Antwort richtig bestimmt?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 6.9!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 8.8!

7.9 Einkaufspreis und Selbstkosten

Das Fahrrad würde ohne Mehrwertsteuer 120,00 € kosten. Die Rechnung bedeutet, dass für das Fahrrad mit MWSt 119 % bezahlt und ohne MWSt 100 % bezahlt werden müssen.

Wenn 119 % einem Preis von 142,80 € entsprechen, dann sind 100 %

$$\frac{142{,}80}{119\ \%} \cdot 100\ \% = 120{,}00\,€.$$

Die Rechnung war falsch, wenn 19 % von 100 % abgezogen und der Wert für 81 % des Kaufpreises berechnet wurde!

Haben Sie diesen Wert richtig berechnet?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 6.10!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 8.9!

7.10 Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen

Die Lösung heißt:

$$x = 2 \quad \text{und} \quad y = -5$$

Wie auch immer die Lösung gefunden wurde, wenn sie nur richtig ist, sind weitere Informationen unnötig über die möglichen Lösungsverfahren. Gehen Sie zu Kapitel 6.11!
Wir informieren über mögliche Lösungsverfahren in Kapitel 8.10!

7.11 Quadratische Gleichungen

Ergebnis:

$$L = \{0{,}25; 0{,}50\} \quad \text{oder} \quad x_1 = \frac{1}{4} \wedge x_2 = \frac{1}{2}$$

Lösung richtig?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 6.12!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 8.11!

7.12 Polynomgleichungen

Ergebnis:

$$x_1 = -3, \qquad x_2 = 1, \qquad x_3 = 4$$

Lösung richtig?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 6.13!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 8.12!

7.13 Wurzelgleichungen

Ergebnis:

$$x_1 = 9, \qquad x_2 = 4$$

Lösung richtig?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 6.14!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 8.13!

7.14 Exponentialgleichungen

Ergebnis:

Das Geld muss mindestens 14 Jahre auf Zins- und Zinseszins liegen, um sich bei einem Zinssatz von 5,2 % zu verdoppeln (genau genommen bereits nach 13,67 Jahren – also nach 13 Jahren und gut 8 Monaten).

Lösung richtig?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 6.15!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 8.14!

7.15 Logarithmengleichungen

Das Ergebnis

$$-\frac{101}{98}$$

ist falsch, denn $x > \frac{1}{2}$ (Definitionsbereich) ist nicht erfüllt. Es gibt keine Lösung!

Lösung so bestimmt?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 6.16!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 8.15!

7.16 Lineare Ungleichungen

Ergebnis:

$$x < -\frac{5}{4}$$

Größte ganze Zahl der Lösungsmenge ist -2.

Lösung richtig?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 6.17!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 8.16!

7.17 Lineare Ungleichungssysteme

Ergebnis:

$$
\begin{array}{llll}
0{,}15x + 0{,}20y \leq 60, & \text{mit} & x \geq 0 & \text{(x: Tische)} \\
0{,}20x + 0{,}10y \leq 40, & \text{mit} & y \geq 0 & \text{(y: Schränke)}
\end{array}
$$

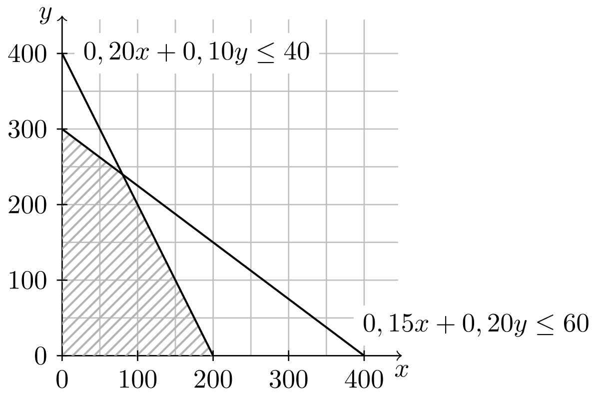


Abb. 7.1 Grafische Darstellung des Lösungsbereiches

Gehen Sie zu Kapitel 6.18, wenn der Lösungsbereich richtig dargestellt wurde.
Gehen Sie zu Kapitel 8.17, wenn Erklärungsbedarf besteht.

7.18 Determinanten

Ergebnis: 1 296

Lösung richtig?

Ja – Ende des 2. Tages – Algebra

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 8.18!

8 Informationen zu den Themen der Algebra

Übersicht

8.1 Einteilung der Gleichungen

Ein aus Zahlen, Konstanten, Variablen und Rechenzeichen nach den mathematischen Regeln (Syntax) zusammengesetzter Ausdruck ist ein *Term*. Ein Term nimmt, werden die Variablen mit geeigneten, das heißt aus dem Definitionsbereich entnommenen Werten belegt, einen Zahlenwert an. Eine *Gleichung* drückt die Gleichheit zweier Terme durch die Verbindung mit dem Gleichheitszeichen aus.

G. Höfner, *Mit Selbsttests gezielt Mathematik lernen*,
DOI 10.1007/978-3-662-52963-8_8

Äquivalent sind Gleichungen, wenn sie den gleichen Definitionsbereich und die gleiche Lösungsmenge besitzen. Daraus ergeben sich die folgenden Umformungsregeln für Gleichungen.

Aus

$$T_1 = T_2$$

folgt

$$T_1 + T = T_2 + T,$$
$$T_1 \cdot T = T_2 \cdot T.$$

Auf beiden Seiten einer Gleichung darf der gleiche Term addiert und beide Seiten einer Gleichung dürfen mit dem gleichen Term multipliziert werden.

Gleichungen werden nach folgenden Kriterien eingeteilt:

1. Nach der Zahl der in ihr enthaltenen Variablen. So gibt es Gleichungen mit einer, mit zwei oder allgemein mit n Variablen.

2. Nach der Art des Aufbaus der Gleichung, wodurch die Verknüpfung der Variablen mit den Konstanten charakterisiert ist.

Algebraische Gleichungen sind dadurch gekennzeichnet, dass die bei rationalen Zahlen erlaubten Rechenoperationen und das Radizieren in endlicher Anzahl durchgeführt werden und die Variable nicht im Exponenten erscheint. Beispielsweise sind Exponentialgleichungen (die Variable tritt mindestens einmal im Exponenten einer Potenz auf) keine algebraischen Gleichungen; Logarithmengleichungen (die Variable tritt mindesten einmal im Argument eines Logarithmus auf) oder goniometrische Gleichungen (die Variable tritt mindestens einmal als Argument einer trigonometrischen Funktion auf) sind ebenfalls keine algebraischen Gleichungen.

Algebraische Gleichungen können nach einer endlichen Zahl von Umformungsschritten in der Form

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 n^1 + a_0 = 0$$

mit den reellen Koeffizienten a_n und der natürlichen Zahl n dargestellt werden.

Diese auch als *Potenzgleichungen* bezeichneten algebraischen Gleichungen haben den Grad n, wenn

$$a_n \neq 0$$

ist. Der Grad einer algebraischen Gleichung gibt somit den höchsten Exponenten einer in der Gleichung vorkommenden Variabelenpotenz an.

Eine weitere Unterteilung der algebraischen Gleichungen ist nach den mit Variablen auszuführenden Rechenoperationen möglich.

Beispiel 8.1

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x^2-1}$$

ist für $x \neq 0, x \neq 1, x \neq -1$ eine algebraische Gleichung und in dieser nicht aufgelösten Form eine gebrochen rationale Gleichung oder Bruchgleichung. ∎

Beispiel 8.2

$$\sqrt{x-1} + x = 5$$

ist eine algebraische Gleichung und in dieser Form eine Wurzelgleichung. ∎

Beispiel 8.3

$$3x^6 - x^4 + \sqrt{\pi} = 7$$

ist eine ganzrationale Gleichung (Polynomgleichung) sechsten Grades. ∎

Beispiel 8.4

$$3x - 4\mathrm{e} = 7$$

ist eine Polynomgleichung ersten Grades oder eine lineare Gleichung mit einer Unbekannten, denn e ist als Basis des natürlichen Logarithmus eine Konstante und keine Variable. ∎

Eine weitere Einteilung von Gleichungen kann durch den in der Gleichung ausgedrückten Sachverhalt erfolgen. Es gibt nach diesem Einteilungskriterium:

1. Identische Gleichungen – die Gleichungen enthalten keine Variablen, die Übereinstimmung beider Seiten der Gleichung ist offensichtlich oder bewiesen.

   Beispiel 8.5

   $$3 = 3 \qquad \text{oder} \qquad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

   ∎

2. Bestimmungsgleichungen – die Gleichungen enthalten eine oder mehrere Variable, die zu bestimmen sind.

3. Funktionsgleichungen – eine abhängige Variable wird aus einer oder mehreren unabhängigen Variablen bestimmt.

Beispiel 8.6

$$y = f(x) \qquad \text{oder} \qquad y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

■

In diesem Kapitel werden ausschließlich Bestimmungsgleichungen behandelt.

Gehen Sie zu Kapitel 9.1!

8.2 Einfache Gleichungen

Eine Gleichung entsteht, wenn zwei Terme durch ein Gleichheitszeichen miteinander verbunden werden.

$$T_1 = T_2$$

Es gibt nur zwei Regeln zum Umformen von Gleichungen, wenn die Lösungsmenge bestimmt werden soll. Diese Regeln werden auch *äquivalente Umformungen* genannt. Die durch die äquivalenten Umformungen erhaltenen Gleichungen sind den ursprünglichen äquivalent.

Regel 1: Auf beiden Seiten einer Gleichung darf der gleiche Term addiert werden. Aus

$$T_1 = T_2$$

entsteht

$$T_1 + T = T_2 + T.$$

Regel 2: Beide Seiten einer Gleichung können mit dem gleichen Term multipliziert werden, wobei dieser ungleich Null sein muss. Aus

$$T_1 = T_2$$

entsteht

$$T_1 \cdot T = T_2 \cdot T.$$

Bemerkung: Quadrieren, Radizieren oder Multiplikation mit dem Faktor Null sind keine äquivalenten Umformungen für Gleichungen, verändern also die Ausgangsgleichung.

Beispiel 8.7

$$3x - 4 = 5x + 8$$

1. Lösung der Gleichung durch äquivalente Umformungen:

a) Ordnen und zusammenfassen:

   * Alle Glieder mit x sollen auf die linke Seite der Gleichung,
   * alle Glieder ohne x sollen auf die rechte Seite der Gleichung gebracht werden.

   Auf beiden Seiten der Gleichung wird der Term

$$-5x + 4$$

   addiert.

$$\begin{aligned} 3x - 4 - 5x + 4 &= 5x + 8 - 5x + 4 \\ -2x &= 12 \end{aligned}$$

b) Auflösen nach x – beide Seiten der Gleichung werden mit dem Term

$$\left(-\frac{1}{2}\right)$$

   multipliziert.

$$\begin{aligned} (-2x)\left(-\frac{1}{2}\right) &= \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 12 \\ x &= -6 \end{aligned}$$

2. Ergebnis: $x = -6$
3. Probe:

$$\begin{aligned} 3\,(-6) - 4 &= -22 \\ 5\,(-6) + 8 &= -22 \\ -22 &= -22 \end{aligned}$$

   ergibt eine wahre Aussage.

4. Lösungsmenge:

$$L = \{-6\}$$

■

Es besteht die Möglichkeit dies noch etwas zu üben. Gehen Sie zu Kapitel 9.2!

8.3 Gleichungen mit Klammern

In folgender Reihenfolge sind Gleichungen, die Klammern enthalten, zu bearbeiten:

1. Auf beiden Seiten der Gleichung werden die Klammern aufgelöst.
2. Ordnen und Zusammenfassen.
3. Auflösen nach x durch die Multiplikation mit einem geeigneten Faktor.
4. Probe.

Beispiel 8.8

$$\begin{array}{lrcll}
 & 3x - 4\,(3 - 2x) &=& -2x + 5\,(2x - 9) & \\
1. & 3x - 12 + 8x &=& -2x + 10x - 45 & \\
2. & 11x - 12 &=& 8x - 45 & \\
3. & 3x &=& -33 & \\
 & x &=& -11 & \\
4. & -33 - 4\,(3 + 22) &=& -33 - 4 \cdot 25 = -133 & \text{(linke Seite)} \\
 & 22 + 5\,(-22 - 9) &=& 22 - 5 \cdot 31 = -133 & \text{(rechte Seite)}
\end{array}$$

■

Zum Üben gehen Sie zu Kapitel 9.3!

8.4 Gleichungen mit Beträgen

Im Allgemeinen haben Gleichungen mit Beträgen zwei Lösungen. Das resultiert aus der Definition des absoluten Betrages.

Definition 8.1

$$|a| = \begin{cases} a, \text{wenn } a \geq 0 \text{ ist.} \\ -a, \text{wenn } a < 0 \text{ ist.} \end{cases}$$

$|a|$ wird gelesen: „Betrag von a“. ♦

Somit ergeben sich aus einer Gleichung mit einem Betrag im Allgemeinen zwei Gleichungen.

Beispiel 8.9

$$|x-3| = 4$$

1. Fall: Für $x \geq 3$ ist $x - 3 \geq 0$.
Somit kann nach der oberen Zeile der Betragsdefinition der Betragsstrich weggelassen werden.

$$\begin{aligned} x - 3 &= 4 \\ \text{ergibt:} \qquad x &= 7 \end{aligned}$$

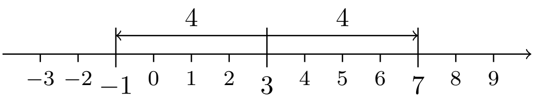
2. Fall: Für $x < 3$ ist $x - 3 < 0$.
Somit kann nach dem unteren Teil der Betragsdefinition der Betragsstrich durch eine Klammer ersetzt werden, die negativ bewertet wird.

$$\begin{aligned} -(x-3) &= 4 \\ -x + 3 &= 4 \\ -x &= 1 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Das ergibt die in Kap. 7.4 angegebene Lösungsmenge. Es ist auch eine grafische Interpretation der Aussage möglich:
Der Betrag ist immer positiv und kann als Abstand gedeutet werden. Gesucht sind demzufolge die Zahlen x, die von 3 den Abstand 4 haben.

$$|x-3| = 4$$

Das ist rechts von 3 die Zahl 7 und links die Zahl -1.



■

Gehen Sie zu Kapitel 9.4!

8.5 Bruchgleichungen

Bruchterme, wie sie in Kap. 6.5 auf beiden Seite stehen (die Variable steht im Nenner von Brüchen), schaffen eine Bruchgleichung.

$$\frac{x}{4x-12} + \frac{x+1}{2(x-3)} = \frac{2x-1}{x-3} - \frac{5(x-1)}{4x}$$

Die Gleichung ist für $x = 3$ und $x = 0$ nicht definiert. Es handelt es sich um x-Werte, bei denen mindestens ein Nenner den Wert null annimmt.

Die Nenner werden in Primfaktoren zerlegt, das sind Faktoren, die sich nicht weiter zerlegen lassen.

1. $4x - 12 = 2 \cdot 2 \cdot (x - 3)$ (ausklammern)
2. $2\,(x-3)$ (lässt sich nicht weiter zerlegen)
3. $(x-3)$ (lässt sich nicht weiter zerlegen)
4. $4x = 2 \cdot 2 \cdot x$ (Primzahlzerlegung)

Der Hauptnenner aller vier Brüche ist das kleinste gemeinsame Vielfache (k. g. V.):

$$2 \cdot 2\,(x-3) \cdot x = 4x\,(x-3)$$

Die Gleichung wird nun mit dem Hauptnenner (Term) multipliziert:

$$\begin{aligned} &4x\,(x-3)\,\frac{x}{4x-12} + 4x\,(x-3)\,\frac{x+1}{2\,(x-3)} \\ &= 4x\,(x-3)\,\frac{2x-1}{x-3} - 4x\,(x-3)\,\frac{5\,(x-1)}{4x} \end{aligned}$$

Kürzen der vier Brüche (Hauptnenner) führt zur Gleichung (ohne Brüche):

$$x^2 + 2x\,(x+1) = 4x\,(2x-1) - 5\,(x-3)\,(x-1)$$

Es ist also eine Gleichung mit Klammern entstanden. Wenn der Hauptnenner richtig bestimmt wurde, dann sind alle Nenner der Bruchgleichung in ihm als Faktor enthalten. Bei der Multiplikation kürzen sich die Nenner. Ausmultiplizieren ergibt:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x^2 + 2x &= 8x^2 - 4x - 5\left(x^2 - 4x + 3\right) \\ x^2 + 2x^2 + 2x &= 8x^2 - 4x - 5x^2 + 20x - 15 \\ 3x^2 + 2x &= 3x^2 + 16x - 15 \\ 2x - 16x &= -15 \\ -14x &= -15 \\ x &= \frac{15}{14} \end{aligned}$$

Auf die Probe soll hier ausnahmsweise verzichtet werden, denn das ist aufwendige Rechenarbeit.

Zwei weitere (sicher einfachere) Beispiele bevor Sie der selbstständig üben:

Beispiel 8.10

$$\frac{3}{x} - \frac{5}{2x} = \frac{2}{x-1}, \qquad \text{mit } x \neq 0;\;\; x \neq 1$$

Hauptnenner:

1. Nenner: x
2. Nenner: $2x$
3. Nenner: $x - 1$

k. g. V.: $2x\,(x-1)$

Es werden nun beide Seiten der Gleichung mit dem Hauptnenner multipliziert.

$$
\begin{aligned}
2x\,(x-1)\cdot\frac{3}{x} - 2x\,(x-1)\,\frac{5}{2x} &= 2x\,(x-1)\,\frac{2}{x-1} \\
6\,(x-1) - 5\,(x-1) &= 4x \\
6x - 6 - 5x + 5 &= 4x \\
x - 1 &= 4x \\
-3x &= 1 \\
x &= -\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Bei der Probe kann die Bruchrechnung wiederholt werden. ■

Beispiel 8.11

$$
\frac{2x+3}{3x-12} - \frac{3x-1}{2x-8} = \frac{1}{12}
$$

Hauptnenner:

1. Nenner: $3x - 12 = 3\,(x-4)$
2. Nenner: $2x - 8 = 2\,(x-4)$
3. Nenner: $12 = 2\cdot 2\cdot 3$

k. g. V.: $12\,(x-4)$

$$
\begin{aligned}
12\,(x-4)\,\frac{2x+3}{3x-12} - 12\,(x-4)\,\frac{3x-1}{2\,(x-4)} &= 12\,(x-4)\,\frac{1}{12} \\
4\,(2x+3) - 6\,(3x-1) &= x - 4 \\
8x + 12 - 18x + 6 &= x - 4 \\
-11x &= -22 \\
x &= 2
\end{aligned}
$$

Wieder kann durch die Durchführung der Probe die Bruchrechnung wiederholt werden. ■

Gehen Sie zu Kapitel 9.5!

8.6 Formeln umstellen

Formelnumstellen heißt, eine gegebene Gleichung (Formel) nach einer bestimmten, angegebenen oder gewünschten Größe aufzulösen. Bei Gleichungen in der Mathematik heißt diese Größe meist x.

Für x steht in der Formel meistens ein ganz anderer Buchstabe, der eine Größe vertritt, die berechnet werden soll; das heißt, aus den Größen und Zahlen (Term), die auf der rechten Seite stehen.

Bei der Testaufgabe (Kap. 6.6) wurde die angegebene Lösung (Kap. 7.6) bestimmt:

$$I = \frac{nU}{nR_\mathrm{i} + R_\mathrm{a}}$$

Multiplikation mit dem Nenner auf der rechten Seite $(nR_\mathrm{i} + R_\mathrm{a})$:

$$I\,(nR_\mathrm{i} + R_\mathrm{a}) = \frac{nU}{nR_\mathrm{i} + R_\mathrm{a}}\,(nR_\mathrm{i} + R_\mathrm{a})$$

Ordnen:

$$nIR_\mathrm{i} - nU = -IR_\mathrm{a}$$

Wenn

$$(IR_\mathrm{i} - U) \neq 0,$$

folgt:

$$n = \frac{-IR_\mathrm{a}}{IR_\mathrm{i} - U}.$$

Oder mit dem (-1) erweiterten Zähler und Nenner (Zähler und Nenner werden mit -1 multipliziert):

$$n = \frac{IR_\mathrm{a}}{U - IR_\mathrm{i}}$$

Gehen Sie zu Kapitel 9.6!

8.7 Textaufgaben

Nur dann sind Textaufgaben unterhaltsam, wenn man sie lösen kann. Andernfalls sind sie ein echtes Ärgernis. Warum geben die Töchter und der Vater nicht gleich ihr Alter an, warum verschlüsseln sie es hier durch komplizierte Rechnungen?

Oder: Auf einem Bauernhof sind 28 Kühe und Hühner. Sie haben zusammen 78 Beine. Wie viele Kühe und Hühner sind auf dem Bauernhof?

Wer ist denn ein solcher Dummkopf und zählt erst die Beine, um die Anzahl der Hühner und Kühe zu bestimmen? Weiß denn jeder, was hier stillschweigend vorausgesetzt wird, dass Hühner meist zwei und Kühe in der Regel keine fünf Beine haben? Es soll eine Gleichung gefunden werden.

Wenn x Hühner vorhanden sind, dann sind $(28 - x)$ Kühe auf dem Bauernhof.

$$\begin{aligned} 2x + 4\,(28 - x) &= 78 \\ 2x - 4x + 112 &= 78 \\ 2x &= 34 \\ x &= 17 \end{aligned}$$

Das sind also 17 Hühner und $(28 - 17)$ oder 11 Kühe.

Hätte man nicht besser gleich die Zahl der Kühe, die sich leichter als Hühner zählen lassen, bestimmt und die Zahl der Hühner als Differenz zur Gesamtzahl berechnet, vorausgesetzt, diese ist überhaupt bekannt.

Doch gibt es auch durchaus ernst zu nehmende Probleme im täglichen Leben, die durch die Mathematik in der Form einer Gleichung gelöst werden müssen und auch können, wenn systematisch vorgegangen wird. Vor allem aber müssen Textaufgaben erst einmal ihren Schrecken verlieren! Also zunächst zu der Altersaufgabe aus dem Test, um den Schrecken abzubauen, und dann folgt ein weiteres Problem, welches auch hier gelöst wird.

Beispiel 8.12

Systematisches Lesen der Aufgabe (hier aus Kap. 6.7):

Wenn Gertrud x Jahre alt ist, dann ist Franziska zwei Jahre älter (Gertrud soll zwei Jahre jünger sein), also

$$x + 2$$

Jahre alt.

Der Vater ist fünfmal so alt wie Gertrud. Halt! – Doch nicht ganz so alt. Er darf noch fünf Jahre von dem angegebenen Produkt abziehen:

$$5x - 5 = 5\,(x - 1)\,.$$

Wer kommt schon auf die Idee, dass der Vater

$$5\,(x - 1)$$

Jahre alt ist, wenn er es sich nicht auf diese Weise überlegt?

Also:	Alter von Gertrud:	x
	Alter von Franziska:	$x + 2$
	Alter des Vaters:	$5\,(x - 1)$

Die Summe, so steht es in der Aufgabe, soll vierundsiebzig ergeben.

Aufstellen der Gleichung:

Nachdem die Vorbereitung so gründlich durchgeführt wurde findet sich die Gleichung wie von selbst zu:

$$x + x + 2 + 5\,(x - 1) = 74$$

Ist es nicht oft das durchaus verständliche Bestreben, möglichst schnell zu der Lösung zu kommen, irgendeinen „Ansatz“ zu finden, was aber die Lösung in weite Ferne rücken lässt? Also ist richtiges Probieren und gründliches Überlegen entscheidend, denn was anschließend noch kommt, das ist nur noch Routine.

Lösen der Gleichung:

Ausmultiplizieren:	$2x + 2 + 5x - 5 = 74$
Ordnen und Zusammenfassen:	$7x = 74 + 3$
Aufgelöst nach x:	$x = 11$

Probe im Text:

Gertrud ist 11 Jahre alt (Ergebnis). Franziska ist 2 Jahre älter, also ist sie 13 Jahre alt. Der Vater ist schließlich $(55 - 5)$ Jahre, also 50 Jahre alt. Das ergibt das angegebene „Gesamtalter“ von 74 Jahren.

Antwortsatz:

Gertrud ist elf, Franziska dreizehn und der Vater fünfzig Jahre alt. ■

Natürlich kann man die Lösung einer Aufgabe durch Probieren finden. Es gibt viele Schüler, die über diesen Weg Mathematik gelernt haben, indem sie Textaufgaben (und damit Probleme) durch Probieren richtig lösen konnten, also Erfolge verzeichnen konnten.
Im Beispiel:

Alter von Gertrud	von Franziska	vom Vater	Summe
5	7	20	32

Bei diesem Alter des Vaters sollte man schon erstaunt sein. Nicht nur das – Gertrud ist zu jung angesetzt. Nächster Versuch folgt!

Alter von Gertrud	von Franziska	vom Vater	Summe
15	17	70	102

Also ist das Alter von Gertrud zu hoch angesetzt, denn die Summe übersteigt die vorgegebene von 74 Jahren um 28. Nächster Versuch:

Alter von Gertrud	von Franziska	vom Vater	Summe
10	12	45	67

Das „Gesamtalter“ ergibt 67, also einen Wert, der gering unter der vorgegebenen Summe liegt. Deswegen der vermutlich letzte Versuch:

Alter von Gertrud	von Franziska	vom Vater	Summe
11	13	50	74

Die Alter von Gertrud, Franziska und dem Vater erfüllen die Bedingungen in der Aufgabenstellung der Textaufgabe. Geschafft!

Beispiel 8.13
Aufgabenstellung:
Eine Firma kann einen Auftrag in neun Tagen ausführen. Eine zweite Firma, die sich an der Ausschreibung beteiligt hat, will den Auftrag in elf Tagen realisieren. Da der Termin aufgrund eines Hochwasserschadens drängt, sollen die beiden Firmen den Auftrag gemeinsam übernehmen. Nun teilt aber die zweite Firma mit, dass sie die Arbeit erst drei Tage später als die erste beginnen kann – Wie viele Tage benötigen die Firmen unter den genannten Bedingungen?

Systematisches Lesen des Problems:
Die zweite Firma schafft die Arbeiten in 11 Tagen. Somit kann sie an einem Tage ein Elftel der Arbeiten erledigen.

Die erste Firma arbeitet x Tage. Somit schafft sie

$$\frac{1}{9} \cdot x$$

der gesamten Arbeit.

Die zweite Firma arbeitet $(x - 3)$ Tage (3 Tage weniger) und leistet damit einen Teilbetrag von

$$\frac{1}{11}(x-3)$$

von der Gesamtarbeit. Nebenbei sei hier aber auch bemerkt, dass diese Überlegungen auch dann eine wichtige Rolle spielen müssen, wenn der Anteil am ausgelobten Element des Auftrags errechnet werden soll.

Aufstellen der Gleichung:
Bei gemeinsamer Arbeit am Auftrag ergibt die Summe der Anteile beider Firmen den gesamten Auftrag.

$$\frac{1}{9}x + \frac{1}{11}(x-3) = 1$$

Lösen der Gleichung:

$$\begin{aligned}\frac{1}{9}x + \frac{1}{11}x - \frac{3}{11} &= 1\\ \frac{20}{99}x &= \frac{14}{11}\\ x &= \frac{63}{10} = 6{,}3\end{aligned}$$

Probe im Text:

Wenn die erste Firma 6,3 Tage arbeitet, dann erfüllt sie

$$\frac{1}{9} \cdot x = 0{,}7$$

Teile oder 70 % der Arbeit. Dann arbeitet die zweite Firma (3 Tage weniger) 3,3 Tage mit einem Anteil von

$$\frac{1}{11} \cdot 3{,}3 = 0{,}3$$

oder 30 % Anteil an der Arbeit.

Antwortsatz:

Die erste Firma arbeitet 6,3 Tage und realisiert 70 % des Auftrages. Die zweite Firma erarbeitet in 3,3 Tagen die restlichen 30 % des Auftrages. ■

Hoffentlich verlieren Textaufgaben nun etwas von ihrem Schrecken!

Gehen Sie zu Kapitel 9.7!

8.8 Prozent sind Hundertstel

Bereits zuvor wurde beschrieben und damit wiederholt, dass unser Zehnersystem das geeignete und allgemein bekannte (gewohnte) System ist, welches unter anderem auch zum Vergleich von Bruchwerten gut geeignet ist. Wenn die Zahl im Nenner Hundert heißt, dann wird dieser Bruch durch den Zähler auch als Prozentzahl angegeben.

Beispiel 8.14

$$\begin{aligned}\frac{1}{100} &= 1\ \%\\ \frac{32}{100} &= 32\ \%\end{aligned}$$

■

1. Brüche können in Prozent ausgedrückt werden, indem sie auf den Nenner Einhundert erweitert oder gekürzt werden.

   Beispiel 8.15

   $$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{75}{100} = 75\ \%$$

   ■

2. Brüche können als Dezimalzahlen geschrieben werden, indem der Zähler durch den Nenner dividiert wird.

   Beispiel 8.16

   $$\frac{2}{5} = 0{,}4$$

   ■

3. Prozentzahlen können als Brüche geschrieben werden, indem die Anzahl der Hundertstel in den Zähler und als Nenner einhundert geschrieben wird.

   Beispiel 8.17

   $$0{,}12\ \% = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}$$

   ■

4. Dezimalzahlen können als Brüche geschrieben werden, indem die Anzahl der Hunderstel im Zähler und im Nenner Hundert geschrieben wird.

   Beispiel 8.18

   $$0{,}239 \approx \frac{24}{100} = \frac{6}{25}$$

   ■

5. Prozentzahlen können als Dezimalbrüche dargestellt werden, indem die Zahl der Prozente in dem Dezimalbruch als Hundertstel geschrieben werden (also geteilt durch hundert).

   Beispiel 8.19

   $$213\ \% = 2{,}13$$

   ■

6. Dezimalzahlen werden in Prozent angegeben, indem die Zahl der Hundertstel mit dem Prozentzeichen geschrieben wird (also mal hundert).

   Beispiel 8.20

   $$0{,}99 = 99\ \%$$

   ■

Gehen Sie zu Kapitel 9.8!

8.9 Grundwert

Bei der Prozentrechnung gibt es drei Begriffe:

1. der Grundwert (G),
2. der Prozentwert (P),
3. der Prozentsatz (p).

Nun ist nur noch zu beachten, dass dem Grundwert stets 100 % und dem Prozentwert immer p Prozent entsprechen. Der Ansatz lautet für den Dreisatz:

1. bei Berechnung des Grundwertes:

   $$G = \frac{P \cdot 100\ \%}{p\ \%}, \qquad \text{mit} \quad \begin{aligned} P &\cong p\ \% \\ G &\cong 100\ \% \end{aligned}$$

2. bei Berechnung des Prozentwertes:

   $$P = \frac{G \cdot p\ \%}{100\ \%}, \qquad \text{mit} \quad \begin{aligned} G &\cong 100\ \% \\ P &\cong p\ \% \end{aligned}$$

3. bei Berechnung des Prozentsatzes:

   $$p\ \% = \frac{100\ \% \cdot P}{G}, \qquad \text{mit} \quad \begin{aligned} G &\cong 100\ \% \\ P &\cong p\ \% \end{aligned}$$

Bei einem (etwa durch die Mehrwertsteuer) vermehrtem Grundwert wird der Prozentsatz auf den Grundwert aufgeschlagen.
Bei einem (etwa durch eine Preissenkung) vermindertem Grundwert wird der Prozentsatz von dem Grundwert abgezogen.

Beispiel 8.21
Bei einer Preiserhöhung um 5 % wird ein Stück Butter, das zuvor 1,20 € gekostet hat, um

$$\frac{1{,}2\,€ \cdot 5\ \%}{100\ \%} = 0{,}06\,€,$$

also um 6 *ct* teurer, sodass die Butter dann 1,26 € kostet. ■

Beispiel 8.22
Wenn ein Fahrrad 145 € kostet und es im Preis einen Nachlass von 12 % gibt, dann kostet es nur noch 124,60 €.

$$\frac{145\,€ \cdot 12\ \%}{100\ \%} = 17{,}40\,€ \quad (142\,€ - 17{,}40\,€ = 124{,}60\,€)$$

■

Gehen Sie zu Kapitel 9.9!

8.10 Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen

Allgemein kann ein Gleichungssystem mit den zwei Variablen x, y als

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$

dargestellt werden. Es gibt drei rechnerische Verfahren, um die Lösung dieses Gleichungssystems auf die Lösung einer linearen Gleichung mit nur einer Variablen zurückzuführen. Demonstriert wird das an dem in Kapitel 6.10 angegebenen Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 16 \\ 4x &= -y + 3 \end{aligned}$$

1. Einsetzungsverfahren – Eine Gleichung wird nach einer Variablen aufgelöst; der entstehende Term wird in die andere Gleichung für die Variable eingesetzt.
   Eine Gleichung nach einer Variablen auflösen: $4x = -y + 3$ ergibt $y = -4x + 3$. Eingesetzt in die andere Gleichung:

$$\begin{aligned} 3x - 2\,(-4x + 3) &= 16 \\ 3x + 8x - 6 &= 16 \\ 11x &= 22 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Aus $y = -4x + 3$ ergibt sich für $x = 2$: $\quad y = -5$.

2. Gleichsetzungsverfahren – Beide Gleichungen werden nach der gleichen Variablen aufgelöst und die entstandenen Terme gleichgesetzt.
   Beide Gleichungen nach einer Variablen auflösen:

Aus	$4x = -y + 3$	ergibt sich:	$y = -4x + 3$.
Aus	$3x - 2y = 16$	ergibt sich:	$y = 1{,}5x - 8$.

   Gleichsetzen der Formeln:

   $$\begin{aligned} -4x + 3 &= 1{,}5x - 8 \\ -\frac{11}{2}x &= -11 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

   Der Wert von y ergibt sich, indem $x = 2$ in eine der nach y aufgelösten Gleichungen eingesetzt wird.

   $$y = -4 \cdot 2 + 3 = -5$$

3. Additionsverfahren – Eine oder beide Gleichungen wird oder werden mit einem geeigneten Faktor multipliziert, sodass vor einer Variablen betragsgleiche Koeffizienten mit entgegengesetztem Vorzeichen stehen. Gliedweise Addition der Gleichungen führt zum Ergebnis:

   $$\begin{array}{rrcrcrl} & 3x & - & 2y & = & 16 & \\ & 4x & + & y & = & 3 & \quad | \cdot 2 \\ \\ & 3x & - & 2y & = & 16 & \\ + & (\,8x & + & 2y\,) & = & 6 & \\ \hline & 11x & & & = & 22 & \\ & x & & & = & 2 & \end{array}$$

   y kann durch Einsetzen von $x = 2$ aus einer der beiden Gleichungen berechnet werden.

In jedem Falle muss die Probe in beiden Gleichungen durchgeführt werden. Es gibt zwei Möglichkeiten:

1. Wenn Sie alle Rechenverfahren beherrschen, kann das für das spezielle Gleichungssystem geeignetste Verfahren ausgewählt werden.

2. Wenn Sie nur ein Rechenverfahren sicher beherrschen, dann werden Sie das Ergebnis nicht immer auf dem kürzesten und einfachsten Weg doch mit größter Sicherheit erreichen.

Hierbei kann die Entscheidung ganz individuell getroffen werden.

Gehen Sie zu Kapitel 9.10!

8.11 Quadratische Gleichungen

Die quadratische Gleichung

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$

mit

$$A \neq 0$$

hat im Bereich der komplexen Zahlen genau zwei Lösungen. Da $A \neq 0$ vorausgesetzt wird, ergibt sich die Normalform einer quadratischen Gleichung nach der Division mit A

$$x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} = 0$$

und der Feststellung

$$\frac{B}{A} = p$$

sowie

$$\frac{C}{A} = q$$

als

$$x^2 + px + q = 0.$$

1. Spezialfall: $p = 0$ (rein quadratische Gleichung)

   $$x^2 = -q$$
   $$x_{1,2} = \sqrt{-q}$$

   Ist $q \geq 0$, so heißen die Lösungen:

   $$x_1 = +\sqrt{q}i$$
   $$x_2 = -\sqrt{q}i$$

   Ist $q < 0$, so heißen die Lösungen:

   $$x_1 = +\sqrt{-q}$$
   $$x_2 = -\sqrt{-q}$$

2. Spezialfall: $q = 0$ (gemischt quadratische Gleichung ohne Absolutglied)

   $$x^2 + px = 0 \Rightarrow x(x + p) = 0$$

Lösungen – ein Produkt ist dann gleich null, wenn ein Faktor null ist:

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = -p$$

3. Allgemeiner Fall (gemischt quadratische Gleichung):

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= 0 \\ x^2 + px &= -q \\ x^2 + px + \left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right] &= -q \\ \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\ x_{1,2} + \frac{p}{2} &= \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\ x_{1,2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \end{aligned}$$

Der Ausdruck (Radikand) $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ wird als Diskriminante bezeichnet. Ist

a) $D > 0$, so hat die quadratische Gleichung zwei voneinander verschiedene reelle Lösungen.
b) $D = 0$, so hat die quadratische Gleichung zwei gleiche reelle Lösungen.
c) $D < 0$, so hat die quadratische Gleichung zwei komplexe Lösungen, die zueinander konjugiert komplex sind.

Beispiel 8.23

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{3}{8} &= 0 \\ x_{1,2} &= -\frac{5}{8} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{8}\right)^2 - \frac{3}{8}} \\ x_{1,2} &= -\frac{5}{8} \pm \sqrt{\frac{25}{64} - \frac{3}{8}} \\ x_{1,2} &= -\frac{5}{8} \pm \sqrt{\frac{1}{64}} \\ x_1 &= -\frac{1}{2} \\ x_2 &= -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

■

Beispiel 8.24

$$
\begin{aligned}
x^2 + 7x + 20 &= 0 \\
x_{1,2} &= -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 20} \\
x_{1,2} &= \frac{7}{2} \pm \sqrt{-\frac{31}{4}} \\
x_1 &= -\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{31}}{2} i \\
x_2 &= -\frac{7}{2} - \frac{\sqrt{31}}{2} i
\end{aligned}
$$

■

Nach den Wurzelsätzen von F. Vieta (franz. Mathematiker, 1540–1603) bestehen zwischen den Koeffizienten der Normalform und den Lösungen der quadratischen Gleichung folgende Zusammenhänge:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= -p \\
x_1 \cdot x_2 &= q
\end{aligned}
$$

Verschiedene Gleichungen lassen sich auf quadratische Gleichungen zurückführen.

Beispiel 8.25

$$x + a\sqrt{x} + b = 0$$

Substitution von $x = z^2$ führt zu:

$$z^2 + az + b = 0$$

■

Beispiel 8.26

$$x^4 + ax^2 + b = 0$$

Substitution von $z = x^2$ führt zu:

$$z^2 + az + b = 0$$

■

Wenn beide Seiten einer Gleichung quadriert werden, können Wurzelgleichungen mitunter auf quadratische Gleichungen zurückgeführt werden.

Gehen Sie zu Kapitel 9.11!

8.12 Polynomgleichungen

Algebraische Gleichungen können nach endlich vielen Schritten in Polynomgleichungen der Gestalt

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

mit den reellen Koeffizienten a_i umgewandelt werden, wobei der Grad n ist, wenn $a_n \neq 0$ vorausgesetzt wird. Aus dem Fundamentalsatz der Algebra lässt sich ableiten, dass eine Polynomgleichung n-ten Grades im Bereich der komplexen Zahlen n Lösungen hat. Da die Koeffizienten der Polynomgleichung reelle Zahlen sind, ist mit einer komplexen Zahl als Lösung auch die dazu konjugiert komplexe Zahl eine Lösung der Gleichung. Komplexe Lösungen treten in Polynomgleichungen stets paarweise auf.

Es gibt auch für Polynome dritten und vierten Grades Lösungsformeln (Cardano'sche Formel). Lösungen von Polynomen, die einen Grad größer als vier besitzen, können durch Näherungsverfahren mit beliebiger Genauigkeit bestimmt werden. Bei den meisten Verfahren ist dazu die Berechnung des Polynomwertes an der Stelle x erforderlich. Für jeden x-Wert lässt sich der zugehörige y-Wert berechnen.

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Somit stellt sich das Problem der Lösung von Polynomgleichungen als Bestimmung der Nullstellen (reelle Lösungen) von Funktionen dar. Die Nullstellen können, für den Fall, dass es sich um reelle Lösungen handelt, als Linearfaktoren abgespalten werden. Damit verringert sich der Grad des Polynoms um eine ganze Zahl. Komplexe Lösungen, die paarweise auftreten, ergeben als Produkt einen quadratischen Faktor mit reellen Koeffizienten, sodass sich durch dessen Abspaltung der Grad des ursprünglich gegebenen Polynoms um zwei verringert. Ein Polynom n-ten Grades lässt sich in Linearfaktoren (reelle Lösungen) und quadratische Faktoren (komplexe Lösungen) zerlegen. Polynomwerte können nach dem Hornerschema berechnet werden. Das Hornerschema ist auf vielfältige Weise anwendbar (Erweiterung zu einem doppelzeiligen Schema zur Berechnung komplexer Funktionswerte, Bestimmung der Ableitungen).

Hier wird das Hornerschema zur Bestimmung der Polynomwerte und zur Abspaltung von Linearfaktoren im Falle von reellen Lösungen benutzt, um umständliche Potenzrechnungen oder die Polynomdivision zu vermeiden.

Allgemein ist

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = (x - x_1) \cdot \Big(b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \Big) + r_0$$

Durch Koeffizientenvergleich der Koeffizienten, die auf beiden Seiten bei den gleichen Potenzen von x stehen, ergeben sich folgende Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
a_n &= b_{n-1} \\
a_{n-1} &= b_{n-2} - x_1 b_{n-1} \\
a_{n-2} &= b_{n-3} - x_1 b_{n-2} \\
&\vdots \\
a_1 &= b_0 - x_1 b_1 \\
a_0 &= r_0 - x_1 b_0
\end{aligned}
$$

Die Gleichungen werden nach den zu bestimmenden Koeffizienten aufgelöst:

$$
\begin{aligned}
b_{n-1} &= a_n \\
b_{n-2} &= a_{n-1} + x_1 b_{n-1} \\
b_{n-3} &= a_{n-2} + x_1 b_{n-2} \\
&\vdots \\
b_0 &= a_1 + x_1 b_1 \\
r_0 &= a_0 + x_1 b_0
\end{aligned}
$$

Damit sind Formeln zur Berechnung der unbekannten Polynomkoeffizienten gegeben, die nach dem Schema von William Georg Horner (engl. Mathematiker, 1786–1837) recht übersichtlich berechnet werden können.

$$
\begin{array}{c|ccccccccccc}
 & a_n & & a_{n-1} & & a_{n-2} & & \cdots & a_1 & & a_0 & \\
 & & \downarrow + & x_1 b_{n-1} & \downarrow + & x_1 b_{n-2} & \downarrow + & \cdots & x_1 b_1 & \downarrow + & x_1 b_0 & \downarrow + \\
\hline
x_1 & b_{n-1} & \nearrow \cdot x_1 & b_{n-2} & \nearrow \cdot x_1 & b_{n-3} & & \cdots & b_0 & \nearrow \cdot x_1 & r_0 &
\end{array}
$$

Beispiel 8.27

Für $x = -3$ hat das Polynom $x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 6x - 10 = 0$ den Wert -568:

$$
\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 1 & -3 & 2 & 0 & 6 & -10 \\
 & & -3 & 18 & -60 & 180 & -558 \\
\hline
-3 & 1 & -6 & 20 & -60 & 186 & \underline{\underline{-568}}
\end{array}
$$

und die Darstellung:

$$\left(x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 6x - 10\right) = \left(x^4 - 6x^3 + 20x^2 - 60x + 186\right) \cdot (x + 3) - 586$$

■

Beispiel 8.28
Für $x = 3$ ist

$$x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -4 & 2 & 5 & -6 \\ & & 3 & -3 & -3 & 6 \\ \hline 3 & 1 & -1 & -1 & 2 & \underline{\underline{0}} \end{array}$$

eine Lösung des Polynoms, woraus sich die Darstellung:

$$\left(x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 5x - 6\right) = \left(x^3 - x^2 - x + 2\right) \cdot (x - 3)$$

ergibt. ■

Die Lösung von Polynomgleichungen ist nach dem Näherungsverfahren von Isaac Newton (engl. Physiker, 1643–1727) sowohl für reelle als auch komplexe Werte sehr gut zu bestimmen, wenn ein geeigneter Startwert (Anfangslösung) vorliegt.

Gehen Sie zu Kapitel 9.12!

8.13 Wurzelgleichungen

Wurzelgleichungen haben meist einen mit mehr oder weniger großen Einschränkungen belasteten Definitionsbereich. Es muss ausgeschlossen werden, dass der Radikand negativ ist.

Durch Potenzieren muss eine Wurzelgleichung in eine Polynomgleichung überführt werden. Dabei sind die Wurzeln gegebenenfalls schrittweise zu isolieren.

Beispiel 8.29

$$\begin{aligned} x + 2 - \sqrt{2x^2 - 2x + 12} &= 0 \\ x + 2 &= \sqrt{2x^2 - 2x + 12} \\ (x + 2)^2 &= 2x^2 - 2x + 12 \\ x^2 + 4x + 4 &= 2x^2 - 2x + 12 \\ x^2 - 6x + 8 &= 0 \\ x_{1,2} &= 3 \pm \sqrt{9 - 8} \\ x_1 &= 4 \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Beide Lösungen gehören zum Definitionsbereich der Gleichung. ■

Beispiel 8.30

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x+8}+\sqrt{x+3}-\sqrt{x} &= 0\\
\sqrt{x+8}+\sqrt{x+3} &= \sqrt{x}\\
x+8+x+3+2\sqrt{(x+8)\,(x+3)} &= x\\
2\sqrt{(x+8)\,(x+3)} &= -x-11\\
4\,(x+8)\,(x+3) &= x^2+22x+121\\
4x^2+44x+96 &= x^2+22x+121\\
3x^2+22x-25 &= 0\\
x^2+\frac{22}{3}x-\frac{25}{3} &= 0\\
x_{1,2} &= -\frac{11}{3}\pm\sqrt{\frac{121}{9}+\frac{75}{9}}\\
x_{1,2} &= \frac{-11\pm 14}{3}\\
x_1 &= 1\\
x_2 &= -\frac{25}{3}
\end{aligned}
$$

Die erste Lösung erfüllt die Gleichung bei der Probe nicht und die zweite Lösung gehört nicht zum Definitionsbereich der Wurzelgleichung. Die Wurzelgleichung besitzt somit keine Lösung. ∎

Es ist in jedem Fall bei der Lösung einer Wurzelgleichung eine Probe durchzuführen. Negative Vorzeichen vor Wurzeln werden beim Quadrieren zu positiven Vorzeichen.

Beispiel 8.31

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x+1-\sqrt{3x+4}} &= 3\\
x+1-\sqrt{3x+4} &= 9\\
x-8 &= \sqrt{3x+4}\\
(x-8)^2 &= 3x+4\\
x^2-16x+64 &= 3x+4\\
x^2-19x+60 &= 0\\
x_{1,2} &= \frac{19}{2}\pm\sqrt{\frac{361}{4}-\frac{240}{4}}\\
x_{1,2} &= +\frac{19}{2}\pm\frac{11}{2} \quad\Rightarrow\quad x_1=15, x_2=4
\end{aligned}
$$

Nur $x_1 = 15$ ist eine Lösung der Wurzelgleichung:

$$\sqrt{15 + 1 - \sqrt{45 + 4}} = \sqrt{16 - \sqrt{49}} = \sqrt{16 - 7} = \sqrt{9} = 3$$

$x_2 = 1$:

$$\sqrt{4 + 1 - \sqrt{12 + 4}} = \sqrt{5 - \sqrt{16}} = \sqrt{5 - 4} = \sqrt{1} \neq 3$$

■

Gehen Sie zu Kapitel 9.13!

8.14 Exponentialgleichungen

Tritt die Variable oder treten die Variablen mindestens einmal im Exponenten einer Potenz auf, so wird dadurch eine Exponentialgleichung bestimmt. Im Allgemeinen werden Exponentialgleichungen durch Näherungsverfahren gelöst. In Spezialfällen ist die direkte Bestimmung der Variablen möglich, insbesondere wenn eine Exponentialgleichung auf den Grundtyp

$$a^x = b$$

zurückgeführt werden kann. Dabei sind a und b positive reelle Zahlen, mit

$$a \neq 1,$$

denn

$$1^x = 1.$$

Auf den Grundtyp kann die Exponentialgleichung nicht zurückgeführt werden, wenn die Variablen nicht ausschließlich im Exponenten einer Potenz stehen. Der Exponent kann als Logarithmus bestimmt werden. Die theoretische Lösung heißt:

$$\begin{aligned}
\log_a\left(a^x\right) &= \log_a\left(b\right) \\
x \cdot \log_a\left(a\right) &= \log_a\left(b\right) \\
x &= \log_a\left(b\right)
\end{aligned}$$

In der Praxis wird die Lösung durch dekadische oder natürliche Logarithmen bestimmt.

$$\begin{aligned}
\ln\left(a^x\right) &= \ln\left(b\right) \\
x &= \frac{\ln\left(b\right)}{\ln\left(a\right)}, \qquad \text{mit} \quad \ln\left(a\right) \neq 0, \quad \text{für} \quad a \neq 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lg\left(a^x\right) &= \lg(b)\\ x &= \frac{\lg(b)}{\lg(a)}, \qquad \text{mit} \quad \ln(a) \neq 0, \quad \text{für} \quad a \neq 1\end{aligned}$$

Lassen sich beide Seiten der Gleichung auf die gleiche Basis zurückführen,

$$a^x = a^b,$$

so kann die Lösung durch Vergleich der Exponenten bestimmt werden, da Potenzen mit gleichen Basen nur dann übereinstimmen, wenn auch die Exponenten gleich sind. Somit gilt

$$a^x = a^b \quad \Rightarrow \quad x = b,$$

Eine Exponentialgleichung in der angegebenen Form lässt sich meist auf eine algebraische Gleichung zurückführen. Wie bei allen transzendenten Gleichungen ist die Überprüfung des Resultates durch eine Probe erforderlich.

Beispiel 8.32

$$\begin{aligned}\left(\frac{3{,}46}{4{,}80}\right)^{\frac{x+1}{x}} &= \left(\frac{2{,}80}{1{,}62}\right)^2 \qquad \text{mit} \quad x \neq 0\\ \frac{x+1}{x}\ln\frac{3{,}46}{4{,}80} &= 2\cdot\ln\frac{2{,}80}{1{,}62}\\ (x+1)\cdot\ln\frac{3{,}46}{4{,}80} &= 2x\cdot\ln\frac{2{,}80}{1{,}62}\\ x\left(\ln\frac{3{,}46}{4{,}80} - 2\cdot\ln\frac{2{,}80}{1{,}62}\right) &= -\ln\frac{3{,}46}{4{,}80}\\ x &= -\frac{\ln(3{,}46)-\ln(4{,}80)}{\ln(3{,}46)-\ln(4{,}80)-2\cdot\ln(2{,}80)+2\cdot\ln(1{,}62)}\\ &\approx -0{,}23025\end{aligned}$$

■

Beispiel 8.33

$$\begin{aligned}a^{(2x+4)x} &= a^{3x-4}a^{2x+5}\\ a^{2x^2+4x} &= a^{5x+1}\\ \Rightarrow \qquad 2x^2+4x &= 5x+1\\ 2x^2 - x - 1 &= 0\\ x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} &= 0\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}} \\
\Rightarrow \qquad x_1 &= 1 \\
x_2 &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Beide Lösungen erfüllen die Exponentialgleichung. ■

Gehen Sie zu Kapitel 9.14!

8.15 Logarithmengleichungen

Als Logarithmengleichungen werden Gleichungen bezeichnet, bei denen die Variable mindestens einmal als Numerus oder im Numerus eines Logarithmus auftritt. Lassen sich logarithmische Gleichungen auf die Grundform

$$\log_a(x) = b$$

zurückführen, so heißt die Gleichung nach der Definition des Logarithmus:

$$x = a^b,$$

Dabei ist

$$a > 0 \qquad \text{und} \qquad a \neq 1.$$

Haben die Logarithmen auf beiden Seiten einer Logarithmengleichung die gleiche Basis, so können sie nach den Logarithmengesetzen zusammengefasst werden.

$$\log_a(x) = \log_a(b)$$

Durch den Vergleich der Argumente (Numeri) ergibt sich die Gleichung

$$x = b,$$

denn die Logarithmen können bei gleicher Logarithmenbasis nur dann übereinstimmen, wenn die Numeri gleich sind.

Beispiel 8.34

$$
\begin{aligned}
\ln(x+1) &= 3{,}46 \\
x + 1 &= \mathrm{e}^{3{,}46} \\
x &= \mathrm{e}^{3{,}46} - 1 \\
x &\approx 30{,}8170
\end{aligned}
$$

■

Beispiel 8.35

$$\begin{aligned}
\lg\left(16x^2\right) - \lg(8x) &= 2 \cdot \lg\left(4x^2\right) - \lg\left(x^2\right) + \lg(10) \\
\lg\frac{16x^2}{8x} &= \lg\frac{16x^4 \cdot 10}{x^2} \\
2x &= 160x^2 \\
x\,(80x - 1) &= 0 \\
x &= \frac{1}{80}
\end{aligned}$$

$x_1 = 0$ entfällt, da $\lg(x)$ für $x = 0$ nicht definiert ist. ■

Gehen Sie zu Kapitel 9.15!

8.16 Lineare Ungleichungen

Wenn für eine Ungleichung

$$T_1 < T_2$$

gilt, so ist:

1. $T_1 + T < T_2 + T$
   Auf beiden Seiten einer Ungleichung darf der gleiche Term addiert werden.
2. $T_1 \cdot T < T_2 \cdot T$ für Termbelegungen mit $T > 0$,
   aber
   $T_1 \cdot T > T_2 \cdot T$ für Termbelegungen mit $T < 0$.
   Aus der für die Multiplikation zu Gleichungen abweichenden Regelung bei Ungleichungen folgt oft, dass eine Fallunterscheidung bei der Bestimmung der Lösungsmenge notwendig ist.

Beispiel 8.36

$$\begin{aligned}
3x - 5 &\leq 4x - 1 \\
-x &\leq 4 \\
x &\geq -4
\end{aligned}$$

■

Enthalten Ungleichungen Beträge oder Brüche, so sind Fallunterscheidungen unumgänglich.

Beispiel 8.37

$$|x-2| \leq 3$$

1. Fall: Wenn $x \geq 2$ ist, können die Betragsstriche weggelassen werden.
Es folgt: $x \leq 5$ oder $x \in [2;5]$ in der Intervalldarstellung.

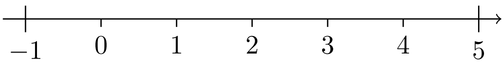
2. Fall: Wenn $x < 2$ ist, wird vor den Inhalt des Betrages nach der Definition ein Minuszeichen gesetzt (Minusklammer), woraus folgt:

$$\begin{aligned} -(x-2) &\leq 3 \\ -x &\leq 1 \\ x &\geq -1 \qquad \text{oder} \quad x \in [-1;2) \end{aligned}$$

Die Vereinigungsmenge ergibt die Lösungsmenge der (linearen) Ungleichung:

$$x \in [-1;5]$$

Geometrisch sind das die Zahlen auf der Zahlengeraden, deren Punkte den Abstand von 3 vom Wert 2 nicht überschreiten.



■

Beispiel 8.38

$$\frac{1}{2x-1} \leq \frac{1}{3x+1}, \qquad x \neq \frac{1}{2}, \quad x \neq -\frac{1}{3}$$

1. Fall: $x < -\frac{1}{3}$, womit $3x+1 < 0$, aber auch $2x-1 < 0$ ist.
Da $(3x+1)(2x-1) > 0$ ist, ergibt sich bei Multiplikation der Ungleichung in dem Fall:

$$\begin{aligned} 3x+1 &\leq 2x-1 \\ x &\leq -2 \\ L_1 &= (-\infty;-2] \end{aligned}$$

2. Fall: $x > -\frac{1}{3}$, aber $x < \frac{1}{2}$, womit $3x+1 > 0$ und $2x-1 < 0$ ist.
Da in dem Fall $(3x+1)(2x-1) < 0$ ist, ergibt sich in dem Fall bei Multiplikation:

$$\begin{aligned} 3x+1 &\geq 2x-1 \\ x &\geq -2 \\ L_2 &= \left(-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

3. Fall: $x > \frac{1}{2}$ und somit auch $x > -\frac{1}{3}$. Dadurch ist $3x+1>0$ und $2x-1>0$. In dem Fall ist das Produkt $(3x+1)(2x-1) > 0$, und es ergibt sich bei der Ungleichung in dem Fall:

$$3x + 1 \leq 2x - 1$$
$$x \leq -2$$

Das ist jedoch zu der Voraussetzung, dass $x > \dfrac{1}{2}$ ist, ein Widerspruch.

Die gemeinsame Lösungsmenge ergibt sich als Lösungsmenge der Ungleichung als Vereinigungsmenge von L_1 und L_2 zu:

$$L = (-\infty; -2] \cup \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$$

■

Gehen Sie zu Kapitel 9.16!

8.17 Lineare Ungleichungssysteme

Durch eine lineare Gleichung mit zwei Variablen x, y wird eine lineare Funktionsgleichung beschrieben. Das Bild dieser Funktion im kartesischen Koordinatensystem ist eine Gerade. Eine Gerade teilt die Koordinatenebene in zwei Halbebenen. Koordinaten, die auf einer Geraden liegen, erfüllen die Geradengleichung (Funktionsgleichung). Für Punkte in der einen Halbebene gilt

$$a \cdot x + b \cdot y < c,$$

für die andere gilt

$$a \cdot x + b \cdot y > c$$

und für Punkte auf der Geraden

$$a \cdot x + b \cdot y = c.$$

Auf diese Weise unterteilt eine Ungleichung die Koordinatenebene in zwei Halbebenen. Die eine Halbebene ist die Lösungsmenge und die andere vereint die Punkte, die nicht zur Lösungsmenge der Ungleichung gehören. Die Punkte auf der Geraden sind dann Elemente der Lösungsmenge, wenn das Gleichheitszeichen, also der Gleichheitsfall bei der Ungleichung, mit eingeschlossen ist. Die Gerade wird gestrichelt dargestellt, wenn die Punkte auf ihr nicht zur Lösungsmenge gehören. Die Geradengleichung wird in eine Achsenabschnittsform oder Normalform umgewandelt und dann in ein Koordinatensystem eingezeichnet.

Beispiel 8.39
Achsenabschnittsform:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

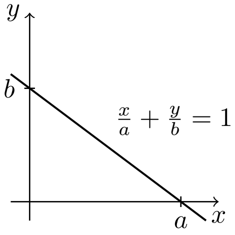


Abb. 8.1 Beispiel für die Darstellung einer Geraden in der Achsenabschnittsform

■

Beispiel 8.40
Normalform ($y = mx + n$):

$$y = 3x - 4$$

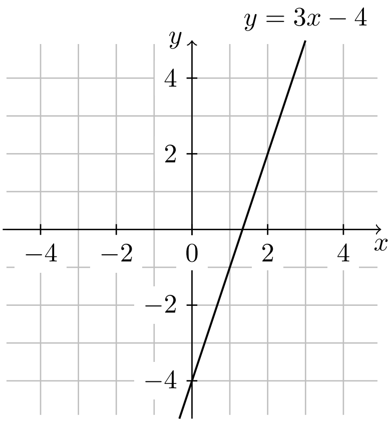


Abb. 8.2 Darstellung der Geraden $y = 3x - 4$ in der Normalform

■

Beispiel 8.41
Die Lösungsmenge der Ungleichung

$$3y - 4x \leq 12$$

wird schraffiert. Die Punkte der Geraden gehören selbst zur Lösungsmenge.

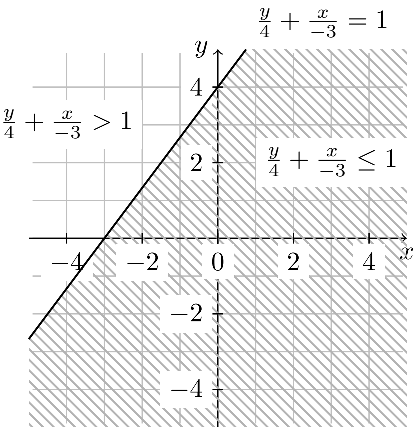


Abb. 8.3 Grafische Darstellung der Lösungsmenge der Ungleichung $\frac{y}{4} + \frac{x}{-3} \leq 1$

■

Zur Bestimmung der Halbebene, die Lösungsmenge ist, werden die Koordinaten eines Testpunktes eingesetzt. Liegt der Ursprung nicht auf der Trennungsgeraden, so eignen sich seine Koordinaten besonders gut als Testpunkt. Ergeben die Koordinaten des Testpunktes, in die Ungleichung eingesetzt, eine wahre Aussage, so liegt er in der Lösungshalbebene. Im anderen Fall führen seine Koordinaten in die Ungleichung eingesetzt zu einer falschen Aussage, und die andere Halbebene ist die Lösungsmenge (Abb. 8.3).

Beispiel 8.42
Wie in Abbildung 8.4 dargestellt, wird die Lösungsmenge der Ungleichung

$$y < 3x - 2$$

schraffiert. Die Punkte auf der Geraden gehören nicht zur Lösungsmenge.

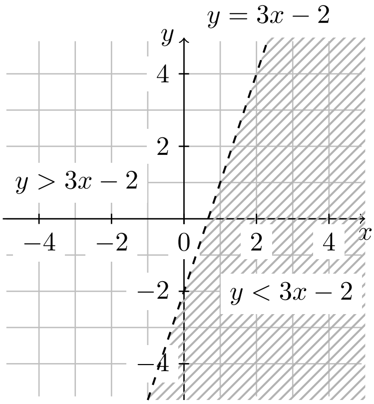


Abb. 8.4 Grafische Darstellung der Lösungsmenge der Ungleichung $y < 3x - 2$

■

Die gemeinsame Lösungsmenge für lineare Ungleichungen mit einer Variablen, die in einem System vereint sind, ergibt sich als die Durchschnittsmenge der Lösungsmengen der einzelnen Ungleichungen.

Beispiel 8.43
Die Ungleichung

$$4y + 3x \leq 12$$

ergibt die Achsenabschnittsform:

$$\frac{y}{3} + \frac{x}{4} \leq 1,$$

und besitzt mit der Ungleichung

$$y \leq 2x + 1.$$

die in Abbildung 8.5 dargestellte Durchschnittsmenge.

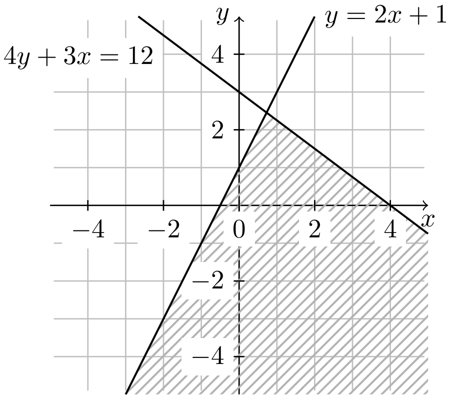


Abb. 8.5 Grafische Darstellung der Durchschnittsmenge der beiden Ungleichungen $4y + 3x \leq 12$ und $y \leq 2x + 1$

■

Beispiel 8.44
Das Ungleichungssystem

$$\begin{aligned} y + x &\leq 4 \\ -y + 2x &\geq 2 \\ 3y + 2x &\geq 3 \\ y &\geq -1 \end{aligned}$$

besitzt die in Abbildung 8.6 dargestellte Durchschnittsmenge.

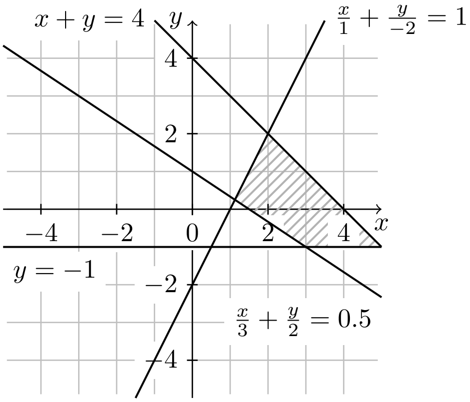


Abb. 8.6 Grafische Darstellung der Durchschnittsmenge des Ungleichungssystems

Die Lösungsmenge ist wieder der schraffierte Bereich (einschließlich Rand). ■

Ungleichungen, die den Lösungsbereich nicht einschränken, sind überflüssig.

Beispiel 8.45
Die Gerade g_3 ist überflüssig (Abb. 8.7).

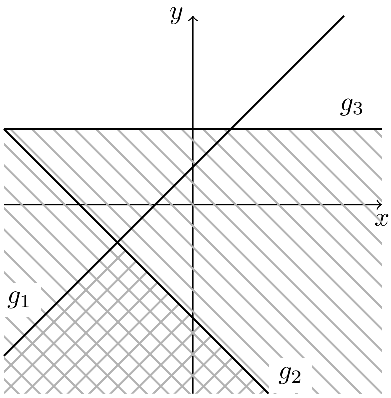


Abb. 8.7 Darstellung einer nicht einschränkenden Ungleichung g_3

■

Ungleichungen, die sich mit anderen Ungleichungen des Systems widersprechen, bewirken eine leere Lösungsmenge.

Beispiel 8.46
Die Ungleichung g_3 widerspricht den Forderungen der Ungleichungen, die durch g_1 und g_2 dargestellt werden (Abb. 8.8).

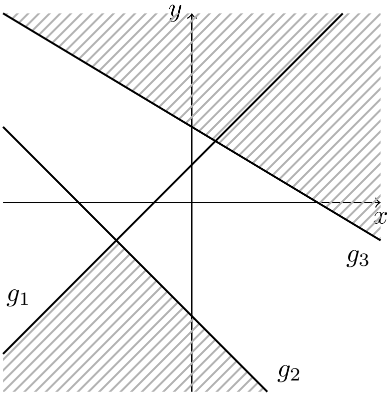


Abb. 8.8 Grafische Darstellung von sich widersprechenden Ungleichungen

■

Gehen Sie zu Kapitel 9.17!

8.18 Determinanten

Das lineare Gleichungssystem, mit den zwei Unbekannten x_1 und x_2

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

hat die Lösungen

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$
$$x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

unter der Voraussetzung $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$.

Zähler und Nenner der Lösung haben die gleiche Struktur. Diese wird durch den Begriff der Determinante definiert. Eine zweireihige Determinante ist ein quadratisches Schema aus zwei Zeilen und zwei Spalten.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Die von links oben nach rechts unten verlaufende Diagonale ist die Haupt- und die entgegengesetzt verlaufende ist die Nebendiagonale.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = D$$

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - b_2 a_{12} = D_{x_1}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = b_2 a_{11} - b_1 a_{21} = D_{x_2}$$

Somit ergeben sich die Lösungen des angegebenen Gleichungssystems:

$$x_1 = \frac{D_{x_1}}{D} \qquad \text{und} \qquad x_2 = \frac{D_{x_2}}{D}, \qquad \text{mit} \quad D \neq 0$$

Die Koeffizientendeterminante D ist gleich null, wenn die linearen Gleichungen einen Widerspruch enthalten oder linear abhängig sind. Die Lösungsformel in der Darstellung durch Determinanten wird als Cramer'sche Regel nach Gabriel Cramer (schw. Mathematiker, 1704–1752) bezeichnet.

Die Cramer'sche Regel ergibt für ein lineares Gleichungssystem mit drei Variablen:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

mit

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{D}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{D}, \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{D}$$

Beispiel 8.47

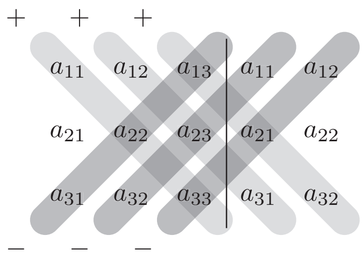
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 6 \\ x_1 - 2x_2 &= 5 \end{aligned}$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, \qquad D_{x_1} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}, \qquad D_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$x_1 = \frac{11}{4} \qquad x_2 = -\frac{9}{8}$$

■

Die Berechnung des Wertes einer dreireihigen Determinante (Schema aus drei Zeilen und drei Spalten) berechnet sich nach der Regel von Sarrus (Pierre Frédéric Sarrus, franz. Mathematiker, 1798–1861). Dazu wird rechts neben der Determinante die erste und zweite Spalte wiederholt.



Nach der Regel von Sarrus ist von der Summe des Produktes der drei in Richtung der Hauptdiagonalen verlaufenden Elemente die Summe der Produkte auf der in Richtung der Nebendiagonalen verlaufenden Elemente zu subtrahieren.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- \left(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}\right)$$

Beispiel 8.48

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} -3 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 2 & -1 \\ -4 & 1 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right. = (-3)\,(-1)\cdot 0 + 2\,(-2)\,(-4) + 1\cdot 2\cdot 1$$
$$- \left[1\,(-1)\,(-4) + (-3)\,(-2)\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 0\right] = 8$$

■

Ein lineares Gleichungssystem mit n-Gleichungen

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}$$

und der n-reihigen Koeffizientendeterminante (n-Zeilen und n-Spalten)

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

hat für

$$i = 1, \ldots, n$$

die Lösung

$$x_i = \frac{D_{x_i}}{D}$$

D_{x_i} entsteht aus D, indem die i-te Spalte von D durch die Absolutglieder b_1, b_2,. . ., b_n des Gleichungssystems ersetzt wird.

n-reihige Determinanten müssen zur Berechnung auf zweireihige oder dreireihige Determinanten zurückgeführt oder entwickelt werden.

Gehen Sie zu Kapitel 9.18!

9 Übungsaufgaben Algebra

Übersicht

9.1 Einteilung der Gleichungen

Folgende Gleichungen sind genau zu beschreiben:

1. $3x - 4y = 5$
2. $\sqrt{2x-1} + \sqrt{5} = \sqrt{x}$
3. $\dfrac{1}{x-4} = 3$
4. $y = f(x_1, x_2)$

G. Höfner, *Mit Selbsttests gezielt Mathematik lernen*,
DOI 10.1007/978-3-662-52963-8_9

5. $e^x = 4 + x$

Gehen Sie zu Kapitel 10.1!

9.2 Einfache Gleichungen

Die Lösungen der folgenden Gleichungen sind zu bestimmen:

1. $2x + 5 = x - 8$
2. $4x + 5 = 5$
3. $3x - 1 = x + 5$
4. $4{,}2 + 2{,}1x = -0{,}2x - 0{,}4$
5. $x + 2 = x + 1$
6. $1 : x = 5$
7. $7 \cdot x = 14$
8. $\frac{1}{3}x + 2 = \frac{1}{2}x - 6$
9. $6x + 2 = 7x$
10. $1{,}5x + 0{,}5 = 3{,}5$

Gehen Sie zu Kapitel 10.2!

9.3 Gleichungen mit Klammern

Die Lösungen der folgenden Gleichungen sind zu bestimmen:

1. $4\,(x - 1) = 3x + 2$
2. $5\,(x + 1) = 4\,(x - 1)$
3. $3\,(3 + 2x) - 4\,(2 + x) = 21$

4. $7\,(2x-3)+4=5\,(x-7)-3$

5. $(x-5)^2=(x+2)^2-7$

6. $36=\frac{3}{4}\,(x+0{,}5)-2x$

7. $0{,}2\,(x-0{,}1)=2{,}4\,(x+3{,}6)-7{,}2$

8. $4\,(x-2)=4x-8$ (Vorsicht Falle!)

9. $4\,(x-2)=4x+8$ (Vorsicht Falle!)

10. $2\,(6-5x)+4\,(x-1)=3x$

Gehen Sie zu Kapitel 10.3!

9.4 Gleichungen mit Beträgen

Die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen ist zu bestimmen:

1. $|2x-5|=3$

2. $|x-7|=1$

3. $1{,}6-|2x|=0{,}4$

4. $2{,}5+|x|=7{,}8$

5. $|2x|=2$

6. $|x|=-1$

Gehen Sie zu Kapitel 10.4!

9.5 Bruchgleichungen

Lösen Sie von den angegebenen zehn Bruchgleichungen mindestens fünf richtig.

1. $\frac{12}{3x-1}=2, \qquad x\neq\frac{1}{3}$

2. $\dfrac{3}{2x+1} = \dfrac{4}{5x-1}, \qquad x \neq -\dfrac{1}{2},\ x \neq \dfrac{1}{5}$

3. $\dfrac{2x-1}{3x-1} + 1 = 0, \qquad x \neq \dfrac{1}{3}$

4. $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{x-1} = 2, \qquad x \neq 1$

5. $\dfrac{x+1}{2x+1} = \dfrac{x}{2x-1}, \qquad x \neq -\dfrac{1}{2},\ x \neq \dfrac{1}{2}$

6. $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x-1}, \qquad x \neq 0,\ x \neq 1$

7. $\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x-3} = \dfrac{2}{x-4}, \qquad x \neq 2,\ x \neq 3,\ x \neq 4$

8. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{x^2-1}, \qquad x \neq 0,\ x \neq 1,\ x \neq -1$

9. $\dfrac{5x+9}{x} - \dfrac{7x-1}{x-1} = -2, \qquad x \neq 0,\ x \neq 1$

10. $\dfrac{2x-3}{x-2} + \dfrac{7-3x}{x-2} = -2, \qquad x \neq 2$

Gehen Sie, um zu vergleichen, ab mindestens fünf Gleichungen (Probe!), die richtig gelöst wurden, zu Kapitel 10.5!

9.6 Formeln umstellen

Die folgenden Gleichungen (Formeln) sind nach der gewünschten Größe aufzulösen!

1. $U = 2\,(a+b)$ nach a
   Umfang eines Rechtecks mit den Seiten a und b.

2. $V = a \cdot b \cdot c$ nach a
   Volumen eines Quaders mit den Kanten der Länge a, b, c.

3. $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ nach α
   Winkelsumme in einem ebenen Dreieck.

4. $A = \frac{1}{2}(a + c) \cdot h$ nach a

   Fläche eines Trapez mit der Deckseite a, der Grundseite c und der Höhe h.

5. $A = \frac{1}{2}(a + c) \cdot h$ nach h

   Fläche eines Trapez mit der Deckseite a, der Grundseite c und der Höhe h.

6. $l_t = l_0 (1 + \alpha t)$ nach t
   Länge eines Stabes l_0, der um t Grad erwärmt wird und der den (linearen) Ausdehnungskoeffizienten α besitzt.

7. $l_t = l_0 (1 + \alpha t)$ nach l_0
   Länge des Stabes l_0, der um t Grad erwärmt wird und der den (linearen) Ausdehnungskoeffizienten α besitzt.

8. $s = \frac{g}{2} t^2$ nach g

   Weg-Zeit-Gleichung des freien Falls (g – Erdbeschleunigung).

9. $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$ nach f

   Linsenformel, f ist die Brennweite, g die Gegenstandsweite und b die Bildweite.

10. $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$ nach b

    Linsenformel, f ist die Brennweite, g die Gegenstandsweite und b die Bildweite.

Gehen Sie zu Kapitel 10.6!

9.7 Textaufgaben

Bitte nehmen Sie sich Zeit für die Überlegungen beim Lösen der Aufgaben. Versprochen: Die Lösungen werden ausführlich erläutert (Kap. 10.7).

1. Die Summe aus einer Zahl und der um 1 größeren Zahl dividiert durch 7 ergibt das Doppelte der Zahl, vermindert um 41.

2. Gibt es übernatürliche Gaben? Oder kann durch eine Gleichung der Gegenbeweis angetreten werden? Wenn man sich eine Zahl denkt, diese nicht verrät, so kann sie trotzdem sicher erraten werden!
   Aufgabe: Denken Sie an eine natürliche Zahl größer als 3. Diese Zahl soll mit 8 multipliziert werden; danach wird von dem Produkt 12 subtrahiert. Die Differenz wird durch 4 geteilt und zum Quotienten 3 addiert. Als Ergebnis ergibt sich (in jedem Fall!) das Doppelte der gedachten Zahl. Versuche den Beweis zu diesem Zahlenrätsel anzutreten.

3. Der Graben eines Baufundamentes wird durch zwei Pumpen entleert. Die eine Pumpe benötigt 25 Minuten und die andere 15 Minuten. Wie lange müssen beide zusammen angestellt werden, um den Graben vollständig zu entleeren?

4. Der Ganove Knacki fährt mit dem Fahrrad nach einem Einbruch mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 22 Kilometer pro Stunde eilig vom Tatort weg. Nach vier Minuten entdeckt Polizist Eifrig die Tat, verfolgt Knacki mit dem Dienstfahrrad und holt ihn nach zwanzig Minuten schwitzend ein. Welche Durchschnittsgeschwindigkeit des Dienstrades kann Eifrig im Protokoll vermerken?

5. Wie viele Liter 30-%-igen Alkohols müssen zu 3 Litern 80-%-igem Alkohol zugegossen werden, um 50-%-igen Alkohol zu erhalten? Wie viele Liter 50-%-igen Alkohol entstehen dabei?

Natürlich kann man auch lernen, indem man die Lösungen in Kap. 10.7, die dort wie zugesagt recht ausführlich erläutert werden, nachprüft. Doch ist eines auch klar, irgendwann müssen Sie einmal selbst beginnen, etwa wenn Sie auf sich allein gestellt sind und eine Lösung vorlegen müssen, dass Muster aber nicht griffbereit haben. Mit jeder selbständig gelösten Textaufgabe wächst die Sicherheit enorm! Vor allem aber das Selbstvertrauen dafür, auch die nächste lösen zu können.

Hinweis: Aufgabe 1 und 2 sind nicht besonders schwer. Aufgabe 3 wird in Kap. 8.7 in ähnlicher Form erläutert. Aufgabe 4 und 5 erfordern gründliches Nachdenken und haben einen etwas höheren Schwierigkeitsgrad.

Gehen Sie zu Kapitel 10.7!

9.8 Prozent sind Hundertstel

1. Schreiben Sie die Brüche als Dezimalzahlen.

   a) $\frac{2}{25}$ b) $\frac{1}{10}$ c) $\frac{2}{7}$

2. Schreiben Sie die folgenden Brüche als Prozentzahl.

   a) $\frac{2}{25}$ b) $\frac{1}{10}$ c) $\frac{2}{7}$

3. Schreiben Sie die Prozentzahlen als Brüche.

   a) 32 % b) 47 % c) 120 %

4. Schreiben Sie die Prozentzahlen als Dezimalzahlen.

   a) 34 % b) 0,1 % c) 215 %

5. Schreiben Sie die Dezimalzahlen als Prozentangaben.

   a) 0,23 b) 1,25 c) 0,179

Gehen Sie zu Kapitel 10.8!

9.9 Grundwert

1. Wie hoch ist die Gebühr, wenn auf eine Summe von 345,80 € ein Zuschlag von 18 % erhoben wird?
2. In einem Betrieb kommen von 240 Beschäftigten 145 mit dem Fahrrad zur Arbeit. Wie viel Prozent sind das?
3. An einem Tag nehmen 46 % der Beschäftigten am Kantinenessen teil. Das sind 69 Beschäftigte. Wie viele Beschäftigte sind insgesamt in dem Betrieb?
4. Wie hoch ist der Preis eines Computers, wenn er mit der Mehrwertsteuer (19 %) 571,20 € beträgt?
5. Der Lottogewinn von 32 180 € soll auf drei Spieler nach ihrem Einsatz aufgeteilt werden.

   A hat 10 € bezahlt.

B hat 15 € bezahlt.

C hat 25 € bezahlt.

Wie viel Euro erhält jeder der drei Spieler?

Gehen Sie zu Kapitel 10.9!

9.10 Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen

Bestimmen Sie die Lösungen von:

1. $$\begin{aligned} 30x + 17y &= 13 \\ -15x - 8y &= 7 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} -y + x &= 1 \\ 43y - 11x &= 53 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} y &= 4x - 5 \\ 2y &= 4x - 2 \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} 0{,}2x - 0{,}4y &= 1{,}6 \\ 2{,}1x - 0{,}1y &= 2{,}1 \end{aligned}$$

5. $$\frac{3x-4}{3y+1} = \frac{2}{3}$$
$$3\,(x-y) + 2\,(x+2y) = 4$$

Gehen Sie zu Kapitel 10.10!

9.11 Quadratische Gleichungen

Die Lösungen nachfolgender Gleichungen sind zu bestimmen:

1. $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{9} = 0$

2. $12x^2 - ax - 6a^2 = 0$

3. $\frac{5+x}{3-x} - \frac{8-3x}{x} = \frac{2x}{x-2} \quad \text{mit } x \neq 0, 2, 3$

4. $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

5. $x - a\sqrt{x} = ab + b^2, \quad \text{wobei } (a, b > 0)$

Gehen Sie zu Kapitel 10.11!

9.12 Polynomgleichungen

Es ist der Polynomwert zu berechnen und die Polynomaufspaltung für die angegebene Stelle aufzuschreiben.

1. $y = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 5, \qquad \text{für } x_0 = 3$

2. $y = x^5 - 2x^4 + x^3 - 2x^2 + 10, \qquad \text{für } x_0 = -2$

3. $y = x^4 - x^2 + 10, \qquad \text{für } x_0 = 1$

4. $y = 3x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 10x - 48, \qquad \text{für } x_0 = 2$

5. Was folgt für die Art der Nullstellen eines Polynoms mit ungeradem Grad und der Tatsache, dass komplexe Nullstellen nur paarweise auftreten können?

Gehen Sie zu Kapitel 10.12!

9.13 Wurzelgleichungen

Die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen ist zu bestimmen.

1. $\sqrt[3]{x + 5} = 2$

2. $\sqrt{9x + 72} - \sqrt{11x + 5{,}6} = 0$

3. $\sqrt{3 - x} + \sqrt{x - 4} = 0$

4. $\sqrt{x + 2 - \sqrt{2x - 6}} = 2$

5. $\sqrt{2x - 1} + \sqrt{x - 1{,}5} = \dfrac{6}{\sqrt{2x - 1}}$

Gehen Sie zu Kapitel 10.13!

9.14 Exponentialgleichungen

Von nachfolgenden Gleichungen sind die Lösungen zu bestimmen:

1. $2{,}34^x = 6{,}821$

2. $0{,}003^{x-1} = 0{,}004$

3. $\sqrt[x]{\frac{21}{23}} = \frac{7}{8}$

4. $a^{3x} a^{2x-1} = \sqrt[x]{a^4}$

5. Bei einem Potenzflaschenzug gilt für die aufzuwendende Kraft F_1

$$F_1 = \frac{F_2}{2^n \eta}.$$

Wie viel (lose) Rollen n werden benötigt, wenn eine Last 40.000 N mit der Kraft $F_1 \leq 600$ N bei einem Wirkungsgrad $\eta = 0{,}67$ gehoben werden soll?

Gehen Sie zu Kapitel 10.14!

9.15 Logarithmengleichungen

Von nachfolgenden Gleichungen sind die Lösungen zu bestimmen:

1. $2 + 3 \cdot \ln(x) = 3{,}5$

2. $\ln \sqrt[3]{3x} = 2{,}48$

3. $\lg\left(x^3\right) + 2\lg(x) = 4{,}81$

4. $\lg(x) - \lg(a) = b$

5. $a \cdot b^{c \cdot \lg(x) + d} = \mathrm{e}$

Gehen Sie zu Kapitel 10.15!

9.16 Lineare Ungleichungen

Die Lösungsmengen sind zu bestimmen:

1. $3x - 5 \geq 4x - 4$

2. $2\,(x+4) \geq 3\,(4-x) + 10x$

3. $|3x - 1| \leq 2$

4. $|2 - 4x| + 1 \leq x$

5. $\dfrac{1}{2-x} < 1 \qquad \text{für } \; x \neq 2$

Gehen Sie zu Kapitel 10.16!

9.17 Lineare Ungleichungssysteme

Die folgenden Lösungsmengen sind zu bestimmen:

1. $3x + 2y \leq -6$

2. $x + 2y > 2$

3. $$\begin{aligned} y &\leq 3 - 2x \\ 2x - 3y &\leq 6 \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} 4y + 3x &\leq 12 \\ 10y + 25x &\leq 50 \\ y &\leq 2{,}5 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

5. Welche Punkte gehören der durch Aufgabe 4. definierten Lösungsmenge an?
$$P_1\,(1;1)\,, \quad P_2\,(0;1)\,, \quad P_3\,(1;3)\,, \quad P_4\,(2;1)$$

Gehen Sie zu Kapitel 10.17!

9.18 Determinanten

Zu berechnen ist:

1. $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 4 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

Die Lösung der folgenden linearen Gleichungssysteme ist nach der Regel von Cramer zu bestimmen:

4. $$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 &= 5 \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 7 \\ -3x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Gehen Sie zu Kapitel 10.18!

10 Lösungen zu den Übungsaufgaben Algebra

Übersicht

10.1 Einteilung der Gleichungen

1. Bestimmungsgleichung mit zwei Variablen – lineare Gleichung.

2. Bestimmungsgleichung mit einer Variablen – Wurzelgleichung.

3. Bestimmungsgleichung mit einer Variablen, gebrochen rationale Gleichung, die sich allerdings in eine lineare Gleichung verwandeln lässt.

4. Funktionsgleichung mit zwei unabhängigen Variablen.

G. Höfner, *Mit Selbsttests gezielt Mathematik lernen*,
DOI 10.1007/978-3-662-52963-8_10

5. Exponentialgleichung, Bestimmungsgleichung mit einer Variablen.

Gehen Sie zu Kapitel 6.2!

10.2 Einfache Gleichungen

1. $2x + 5 = x - 8$

   $x = -13$

2. $4x + 5 = 5$

   $x = 0$

3. $3x - 1 = x + 5$

   $x = 3$

4. $4{,}2 + 2{,}1x = -0{,}2x - 0{,}4$

   $x = -2$

5. $x + 2 = x + 1$

   Es gibt keine Lösung. Eine Zahl plus eins kann nicht gleich der Zahl plus zwei sein.

6. $1 : x = 5$

   $x = \frac{1}{5}$

7. $7 \cdot x = 14$

   $x = 2$

8. $\frac{1}{3}x + 2 = \frac{1}{2}x - 6$

   $x = 48$

9. $6x + 2 = 7x$

   $x = 2$

10. $1{,}5x + 0{,}5 = 3{,}5$

    $x = 2$

Gehen Sie zu Kapitel 6.3!

10.3 Gleichungen mit Klammern

1. $4\,(x-1) = 3x + 2$

   $$x = 6$$

2. $5\,(x+1) = 4\,(x-1)$

   $$x = -9$$

3. $3\,(3+2x) - 4\,(2+x) = 21$

   $$x = 10$$

4. $7\,(2x-3) + 4 = 5\,(x-7) - 3$

   $$x = -\frac{7}{3}$$

5. $(x-5)^2 = (x+2)^2 - 7$

   $$x = 2$$

6. $36 = \dfrac{3}{4}\,(x+0{,}5) - 2x$

   $$x = -28{,}5 = -\frac{57}{2}$$

7. $0{,}2\,(x-0{,}1) = 2{,}4\,(x+3{,}6) - 7{,}2$

   $$x = -\frac{73}{110}$$

8. $4\,(x-2) = 4x - 8$ (Vorsicht Falle!)

   Nachdem die Klammern ausmultipliziert sind, steht auf beiden Seiten Gleiches – eine Identität ($4x - 8 = 4x - 8$). Sie ist immer richtig, gleich welche Zahl für x eingesetzt wird.

9. $4\,(x-2) = 4x + 8$ (Vorsicht Falle!)

   Die Lösungsmenge ist die leere Menge. Die Gleichung fordert, dass $-8 = 8$ ist. Das ist ein Widerspruch.

10. $2\,(6-5x) + 4\,(x-1) = 3x$

    $$x = \frac{8}{9}$$

Gehen Sie zu Kapitel 6.4!

10.4 Gleichungen mit Beträgen

1. Aus $2x - 5 \geq 0$ folgt

$$\begin{aligned} 2x - 5 &= 3 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

   und aus $2x - 5 < 0$ folgt

$$\begin{aligned} -(2x - 5) &= 3 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

   $L = \{1; 4\}$

2. Aus $x - 7 \geq 0$ folgt

$$\begin{aligned} x - 7 &= 1 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

   und aus $x - 7 < 0$ folgt

$$\begin{aligned} -(x - 7) &= 1 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

   $L = \{6; 8\}$

3. Zunächst führt Ordnen und Zusammenfassen zu

$$\begin{aligned} -|2x| &= -1{,}2 \\ \text{oder } \ |2x| &= 1{,}2 \end{aligned}$$

   Für $x \geq 0$ ist

$$\begin{aligned} 2x &= 1{,}2 \\ x &= 0{,}6 \end{aligned}$$

   und für $x < 0$ ist

$$\begin{aligned} -2x &= 1{,}2 \\ x &= -0{,}6 \end{aligned}$$

   $L = \{-0{,}6; 0{,}6\}$

4. $|x| = 5{,}3$ und $L = \{-5{,}3; 5{,}3\}$

5. $|2x| = 2$ ist für $x \geq 0$

$$\begin{aligned} 2x &= 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

und für $x < 0$

$$\begin{aligned} -2x &= 2 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

$L = \{-1; 1\}$

6. Ein x, dessen Betrag kleiner als null ist, gibt es nicht.
$L = \{\}$ (leere Menge)

Das ist alles nicht so leicht zu verstehen. Deswegen ein guter Rat: Die Lösung wird verständlich, wenn man sich die Relationen auf der Zahlengeraden veranschaulicht, wie das in Kap. 8.4 gezeigt wurde.

Gehen Sie zu Kapitel 6.5!

10.5 Bruchgleichungen

1. $x = \frac{7}{3}$ Hauptnenner: $(3x - 1)$

2. $x = 1$ Hauptnenner: $(2x + 1)(5x - 1)$

3. $x = \frac{2}{5}$ Hauptnenner: $(3x - 1)$

4. $x = \frac{5}{2}$ Hauptnenner: $(x - 1)$

5. Die Gleichung hat keine Lösung! $(x - 1)$ kann nicht gleich x sein.
Hauptnenner: $(2x + 1)(2x - 1) = 4x^2 - 1$ (3. binomische Formel)

6. Die Gleichung hat keine Lösung! $(x - 1)$ kann nicht gleich x sein.
Hauptnenner: $x(x - 1)$

7. $x = \frac{8}{3}$ Hauptnenner: $(x - 2)(x - 3)(x - 4)$

8. $x = -\frac{1}{2}$ Hauptnenner: $x(x - 1)(x + 1) = x\left(x^2 - 1\right)$

9. $x = 3$ Hauptnenner: $x\,(x-1)$

10. $x = 0$ Hauptnenner: $x - 2$

Wenn Sie nicht mindesten acht Aufgaben richtig gelöst haben, dann deutet das weniger auf Mängel in den Kenntnissen hin, die für die Auflösung von Gleichungen erforderlich sind, als vielmehr auf mangelhafte Kenntnisse in der Bruchrechnung. Eine Berichtigung wäre sinnvoll und in besonderer Weise nützlich.

Gehen Sie zu Kapitel 6.6!

10.6 Formeln umstellen

1. $a = \frac{U}{2} - b$

2. $a = \frac{V}{b \cdot c}$

3. $\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma$

4. $a = \frac{2A}{h} - c$

5. $h = \frac{2A}{a+c}$

6. $t = \frac{l_t}{\alpha l_0} - \frac{1}{\alpha} = \frac{l_t - l_0}{\alpha l_0}$

7. $l_0 = \frac{l_t}{1 + \alpha t}$

8. $g = \frac{2s}{t^2}$

9. $f = \frac{gb}{b+g}$, Zwischenschritt : $\frac{1}{f} = \frac{b+g}{gb}$

10. $b = \frac{fg}{g-f}$, Zwischenschritte: $\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g}$

$$\frac{1}{b} = \frac{g-f}{f \cdot g}$$

Wieder ist eine Berichtigung eventuell falscher Überlegungen dringend anzuraten.

Gehen Sie zu Kapitel 6.7!

10.7 Textaufgaben

1. Die unbekannte Zahl heißt: x

   Die um 1 größere Zahl ist: $x + 1$

   Die Summe der beiden Zahlen ist: $x + x + 1 = 2x + 1$

   Die Summe dividiert durch 7 ergibt: $\frac{2x+1}{7} = \frac{2x}{7} + \frac{1}{7} = \frac{2}{7}x + \frac{1}{7}$

   Das Doppelte der Zahl ist: $2x$

   Das Doppelte vermindert um 41 ergibt: $2x - 41$

   Somit besteht eine Gleichheit zwischen

   $$\frac{2}{7}x + \frac{1}{7} = 2x - 41,$$

   mit der Lösung

   $$\begin{aligned} 2x - \frac{2}{7}x &= 41 + \frac{1}{7} \\ \frac{12}{7}x &= \frac{288}{7} \\ x &= 24 \end{aligned}$$

   Die unbekannte Zahl heißt 24.

2. Die gedachte Zahl heißt: x

   Das Achtfache der Zahl ist: $8x$

   Die Differenz ist: $8x - 12$

   Geteilt durch 4 ergibt: $(8x - 12) : 4$

   Addition von 3 soll $2x$ ergeben:

   $$\frac{8x-12}{4} + 3 = 2x$$

   Das ist tatsächlich so. Zauberkraft ist also dabei nicht im Spiel!

   $$2x - 3 + 3 = 2x$$

   ist eine Gleichung, die vereinfacht durch Umformung entsteht.
   Beispiel: Gedacht wird die Zahl 13. Das Achtfache ergibt 104. Vermindert um 12 lässt 92 entstehen. Durch 4 geteilt ergibt sich 23. Addition von 3 führt zu 26. Diese geteilt durch 2 ergibt 13, also die gedachte Zahl.
   Erfinden Sie selbst weitere solcher „Zauberaufgaben“.

3. In einer Minute leert die erste Pumpe den 25. Teil und die zweite den 15. Teil des Grabens. Beide werden gleichzeitig angestellt (Summe) und arbeiten x Minuten zusammen, um die Grube (eine Grube gleich eins) zu entleeren.
   Ansatz:
$$\left(\frac{1}{25}+\frac{1}{15}\right)x = 1$$
$$\frac{3+5}{75}x = 1$$
$$x = \frac{75}{8} = 9{,}375$$
   Zusammen leeren die Pumpen die Grube in 9,375 Minuten. Das sind 9 Minuten und 22,5 Sekunden.

4. Der Weg, den Ganove und Polizist bis zum „Treffpunkt“ nach der Flucht des Ganoven zurücklegen, ist gleich. Davon abgesehen eilt der Ganove dem Polizisten voraus und umgekehrt der Polizist dem Ganoven nach.
$$s_{\text{Ganove}} = s_{\text{Polizist}}$$
   Bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit v, die eine Zeit t lang eingehalten wird, berechnet sich der zurückgelegte Weg s durch:
$$s = v \cdot t$$
   Hier wird eine Anleihe aus der Physik benötigt. Doch dazu gibt es notfalls auch Formelsammlungen, die natürlich bei der Lösung von Textaufgaben mitunter sehr nützlich sind. Also ist:
$$v_{\text{Ganove}} \cdot t_{\text{Ganove}} = v_{\text{Polizist}} \cdot t_{\text{Polizist}}$$
$$v_{\text{Polizist}} = \frac{v_{\text{Ganove}} \cdot t_{\text{Ganove}}}{t_{\text{Polizist}}}$$
   Gegeben sind: $v_{\text{Ganove}} = 22\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $t_{\text{Ganove}} = 24$ min und $t_{\text{Polizist}} = 20$ min
   Bei dieser Aufgabe müssen stets die verwendeten Maßeinheiten übereinstimmen.
$$t_{\text{Ganove}} = 24 \text{ min} = 0{,}4 \text{ h}$$
$$t_{\text{Polizist}} = 20 \text{ min} = \frac{1}{3} \text{ h}$$
$$v_{\text{Polizist}} = \frac{22 \cdot 0{,}4}{\frac{1}{3}} = 66 \cdot 0{,}4\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 26{,}4\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Der Polizist fährt also $\frac{1}{3}$ Stunde oder 20 Minuten mit einer Geschwindigkeit von 26,4 km/h und legt dabei eine Entfernung von 8,8 Kilometer zurück.
Der Ganove fährt mit 22 km/h eine Zeit von 0,4 Stunden oder 24 Minuten und legt dabei ebenfalls 8,8 Kilometer zurück und wird dann gestellt.

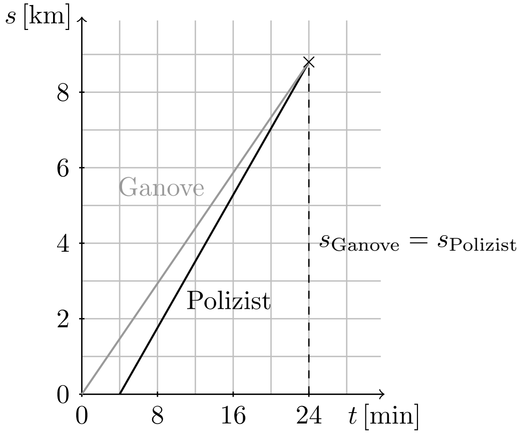


Abb. 10.1 Grafische Darstellung der Zeit-Weg-Funktionen des Ganoven und des Polizisten

5. Analyse der Aufgabe:

	Gesamtvolumen [l]	**Alkoholgehalt [l]**
80-%-iger Alkohol	3	$0{,}8 \cdot 3 = 2{,}4$
30-%-iger Alkohol	x	$0{,}3 \cdot x$
50-%-iger Alkohol	$3 + x$	$0{,}5\,(3 + x)$

Der Alkoholgehalt des 80-%-igen Alkohols und des 30-%-igen müssen 50 % des Volumens im gewünschten Alkohol betragen.

$$2{,}4 + 0{,}3x = 0{,}5\,(3 + x)$$

Auflösen der Gleichung:

$$\begin{aligned} 2{,}4 + 0{,}3x &= 1{,}5 + 0{,}5x \\ 0{,}2x &= 0{,}9 \\ x &= 4{,}5 \end{aligned}$$

Antwortsatz:
Aus drei Litern 80-%-igem Alkohol entstehen durch Mischung mit 4,5 Liter 30-%-igem Alkohol 7,5 Liter 50-%-iger Alkohol.
Probe:

$$3 \cdot 0{,}8 + 4{,}5 \cdot 0{,}3 = 2{,}4 + 1{,}35 = 3{,}75 \text{ Liter}$$

Das sind 50 % reiner Alkohol (3,75 Liter von 7,5 Liter).

Bitte die Lösungen gründlich durchdenken. Das Leben stellt nun einmal Textaufgaben, und nicht immer werden die Lösungen wie hier ausführlich erläutert. Nur weiter Mut und auch etwas Geduld.

Gehen Sie zu Kapitel 6.8!

10.8 Prozent sind Hundertstel

1. a) $\frac{2}{25} = 0{,}08$ b) $\frac{1}{10} = 0{,}10$ c) $\frac{2}{7} \approx 0{,}286$
2. a) $\frac{2}{25} = 8\ \%$ b) $\frac{1}{10} = 10\ \%$ c) $\frac{2}{7} \approx 29\ \%$
3. a) $32\ \% = \frac{32}{100}$ b) $47\ \% = \frac{47}{100}$ c) $120\ \% = \frac{120}{100} = \frac{6}{5}$
4. a) $34\ \% = 0{,}34$ b) $0{,}1\ \% = 0{,}001$ c) $215\ \% = 2{,}15$
5. a) $0{,}23 = 23\ \%$ b) $1{,}25 = 125\ \%$ c) $0{,}179 = 17{,}9\ \%$

Gehen Sie zu Kapitel 6.9!

10.9 Grundwert

1. Die Gebühr auf eine Summe von 345,80 € beträgt bei einem Zuschlag von 18 % 62,24 €.

$$\frac{345{,}80\,€ \cdot 18\ \%}{100\ \%} = 62{,}244\,€$$

Die Gebühr mit dem Zuschlag beträgt 408,04 €.

2. Wenn in einem Betrieb von 240 Beschäftigten 145 mit dem Fahrrad zur Arbeit kommen, dann sind das gut 60 %.

$$\frac{100}{240} \cdot 145 \approx 0{,}6042$$

3. Wenn an einem Tag 46 % der Beschäftigten oder 69 in der Kantine essen, dann sind im Betrieb insgesamt 150 Menschen beschäftigt.

$$\frac{69}{46\ \%} \cdot 100\ \% = 150$$

4. Der Preis eines Computers beträgt ohne Mehrwertsteuer 480,00 €, wenn mit Mehrwertsteuer (19 %) 571,20 € zu zahlen sind.

5. Der Lottogewinn von 32 180 € soll auf drei Spieler nach ihrem Einsatz aufgeteilt werden.

   A hat 10 € bezahlt.

   B hat 15 € bezahlt.

   C hat 25 € bezahlt.

   Nach ihrem Anteil erhält

Spieler A:	$\frac{10}{50} = \frac{1}{5} = 20\ \%$,	6 436,00 €.
Spieler B:	$\frac{15}{50} = \frac{3}{10} = 30\ \%$,	9 654,00 €.
Spieler C:	$\frac{25}{50} = \frac{1}{2} = 50\ \%$,	16 090,00 €.

Gehen Sie zu Kapitel 6.10!

10.10 Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen

1. $x = -\frac{223}{15}, \qquad y = 27$

   Empfohlenes Lösungsverfahren: Additionsverfahren

2. $x = 3, \qquad y = 2$

   Empfohlenes Lösungsverfahren: Einsetzungsverfahren

3. $x = 2, \qquad y = 3$

   Empfohlenes Lösungsverfahren: Gleichsetzungsverfahren

4. $x = \frac{34}{41}, \qquad y = -\frac{147}{41}$

   Empfohlenes Lösungsverfahren: Additionsverfahren

5. $x = \dfrac{38}{39}, \qquad y = -\dfrac{34}{39}$

   Empfohlen wird nach Auflösung der Klammern und Multiplikation mit dem Hauptnenner das Einsetzungsverfahren.

Gehen Sie zu Kapitel 6.11!

10.11 Quadratische Gleichungen

1. $x_1 = \dfrac{1}{6},\ \ x_2 = -\dfrac{2}{3}$

2. $x_1 = \dfrac{3}{4}a,\ \ x_2 = -\dfrac{2}{3}a$

3. $x_1 = 1,\ \ x_2 = \dfrac{12}{5}$

4. $x_1 = 1,\ \ x_2 = -1,\ \ [x_3 = 2i;\ \ x_4 = -2i]$

5. $x = (a+b)^2,\ \ x = b^2$ ist keine Lösung (Probe: $b^2 - ab \neq ab + b^2$)

Gehen Sie zu Kapitel 6.12!

10.12 Polynomgleichungen

1. $y\,(3) = 20, \qquad \left(x^3 + 2x + 5\right) \cdot (x-3) + 20$

	1	−3	2	−1	5
		3	0	6	15
3	1	0	2	5	$\underline{\underline{20}}$

2. $y\,(-2) = -70, \qquad \left(x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 20x + 40\right) \cdot (x+2) - 70$

	1	−2	1	−2	0	10
		−2	8	−18	40	−80
−2	1	−4	9	−20	40	$\underline{\underline{-70}}$

3. $y\,(1) = 10, \qquad \left(x^3 - x^2\right) \cdot (x-1) + 10$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -1 & 0 & 10 \\ & & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \underline{\underline{10}} \end{array}$$

4. $y\,(2) = 20, \qquad \left(3x^4 + 2x^3 + 7x^2 + 12x + 34\right) \cdot (x-2) + 20$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 3 & -4 & 3 & -2 & 10 & -48 \\ & & 6 & 4 & 14 & 24 & 68 \\ \hline 2 & 3 & 2 & 7 & 12 & 34 & \underline{\underline{20}} \end{array}$$

5. Da die Koeffizienten des Polynoms reelle Zahlen sind, ist mindestens eine Lösung reell.

Gehen Sie zu Kapitel 6.13!

10.13 Wurzelgleichungen

1. $x = 3$

2. $x = 33{,}2$

3. Die Gleichung hat keine reelle Lösung.

$$\left.\begin{array}{lcl} 3 - x \geq 0 & \Rightarrow & x \leq 3 \\ x - 4 \geq 0 & \Rightarrow & x \geq 4 \end{array}\right\} \text{Widerspruch!}$$

4. Keine reellen Lösungen

5. Multiplizieren mit $\sqrt{2x-1}$:

$$\begin{aligned}
2x - 1 + \sqrt{(x-1{,}5)\,(2x-1)} &= 6 \\
\sqrt{(x-1{,}5)\,(2x-1)} &= -2x + 7 \\
2x^2 - 4x + 1{,}5 &= 4x^2 - 28x + 49 \\
-2x^2 + 24x - 47{,}5 &= 0 \\
x^2 - 12x + \frac{95}{4} &= 0 \\
x_{1,2} &= 6 \pm \sqrt{36 - \frac{95}{4}} = 6 \pm \sqrt{\frac{49}{4}} = 6 \pm 3{,}5 \\
x_1 &= 2{,}5 \ \text{(Lösung)} \\
x_2 &= 9{,}5 \ \text{(keine Lösung! Was sich} \\
&\qquad \text{durch Einsetzen zeigt.)}
\end{aligned}$$

Gehen Sie zu Kapitel 6.14!

10.14 Exponentialgleichungen

1. $x \approx 2{,}26$

2. $x \approx 1{,}9505$

3. $x \approx 0{,}6813$

4. $x_1 = 1, \qquad x_2 = -\frac{4}{5}$

5. Es sind 7 Rollen erforderlich.

$$\begin{aligned}
2^n &\geq \frac{F_2}{F_1 \cdot \eta} \\
n &\geq \frac{\ln \frac{F_2}{F_1 \cdot \eta}}{\ln(2)} \approx 6{,}64
\end{aligned}$$

$n = 7$ (Anzahl der Rollen muss eine natürliche Zahl sein.)

Gehen Sie zu Kapitel 6.15!

10.15 Logarithmengleichungen

1. $$\begin{aligned} \ln\left(x^3\right) &= 1{,}5 \\ \ln(x) &= 0{,}5 \\ x &= \mathrm{e}^{0{,}5} \approx 1{,}6487 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} \sqrt[3]{3x} &= \mathrm{e}^{2{,}48} \\ 3x &= \mathrm{e}^{7{,}44} \\ x &\approx 567{,}5843 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} \lg\left(x^3\right) + \lg\left(x^2\right) &= 4{,}81 \\ \lg\left(x^5\right) &= 4{,}81 \\ x^5 &= 10^{4{,}81} \\ x &= \sqrt[5]{10^{4{,}81}} \approx 9{,}1622 \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} \frac{x}{a} &= 10^b \\ x &= a \cdot 10^b \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} b^{c \cdot \lg(x)+d} &= \frac{e}{a} \\ c \cdot \lg(x) + d &= \log_b(e) - \log_b(a) \\ \lg(x) &= \frac{\log_b(e) - \log_b(a) - d}{c} \\ x &= 10^{\frac{\log_b(e)-\log_b(a)-d}{c}} \end{aligned}$$

Gehen Sie zu Kapitel 6.16!

10.16 Lineare Ungleichungen

1. $x \in (-\infty; -1]$

2. $x \in \left(-\infty; -\frac{4}{5}\right]$

3. $x \in \left[-\frac{1}{3}; 1\right]$

4. $\emptyset$

1. Fall: Für $x \leq \frac{1}{2}$ folgt:

$$\begin{aligned} 2 - 4x + 1 &\leq x \\ -5x &\leq -3 \\ x &\geq \frac{3}{5} \qquad \text{Widerspruch!} \end{aligned}$$

2. Fall: Für $x > \frac{1}{2}$ folgt:

$$\begin{aligned} -2 + 4x + 1 &\leq x \\ 3x &\leq 1 \\ x &\leq \frac{1}{3} \qquad \text{Widerspruch!} \end{aligned}$$

5. $x \in (-\infty; 1) \cup (2; \infty)$

1. Fall: Für $x < 2$ und damit $2 - x > 0$ folgt:

$$\begin{aligned} 1 &< 2 - x \\ x &< 1 \end{aligned}$$

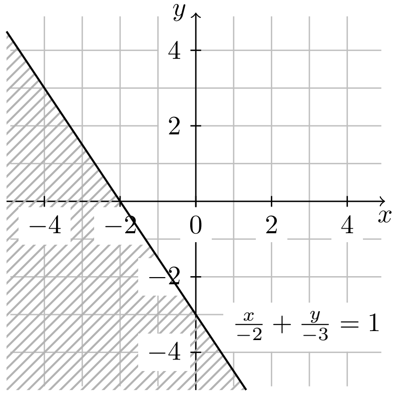
2. Fall: Für $x > 2$ und damit $2 - x < 0$ folgt:

$$\begin{aligned} 1 &> 2 - x \\ x &> 1 \end{aligned}$$

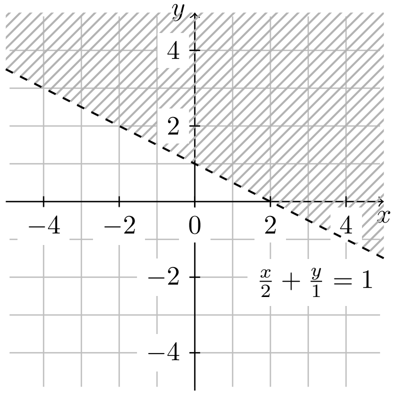
Gehen Sie zu Kapitel 6.17!

10.17 Lineare Ungleichungssysteme

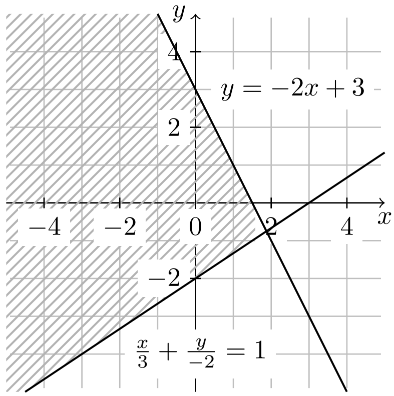
1. Grafische Lösung:



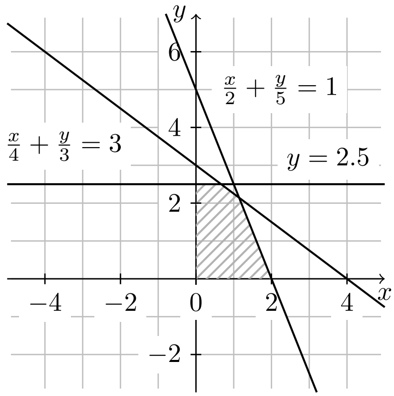
2. Grafische Lösung:



3. Grafische Lösung:



4. Grafische Lösung:



5. $P_1 \in L, \quad P_2 \in L, \quad P_3 \notin L, \quad P_4 \notin L$

Gehen Sie zu Kapitel 6.18!

10.18 Determinanten

1. $(-3 + 8) = 5$

2. $(-18 - 8) = -26$

3. $(-6 + 40 + 1) - (10 + 6 - 4) = 35 - 12 = 23$

4. $D = -7, \quad D_{x_1} = -23, \quad D_{x_2} = 6$
$$x_1 = \frac{23}{7}, \qquad x_2 = -\frac{6}{7}$$

5. $D = 28, \quad D_{x_1} = -28, \quad D_{x_2} = 84, \quad D_{x_3} = 0$
$$x_1 = -1, \qquad x_2 = 3, \qquad x_3 = 0$$

Ende des zweiten Tages im Aufbaukurs Mathematik!

Teil III

3. Tag – Analysis I

3. Tag – Analysis I

Der Grundbegriff der Analysis ist der der Funktion. Leonard Euler (1707–1783) hat den Begriff zum ersten mal verwendet und definiert: eine Funktion ist eine veränderliche Größe, die von einer anderen veränderlichen Größe abhängt. Dieser Funktionsbegriff wird auch heute noch in der Schulmathematik angegeben, gleichzeitig jedoch erweitert, da er für die Anwendung im allgemeinen Fall noch abstrakter gefasst werden muss. Die Begriffsbestimmung auf mengentheoretischer Grundlage ist eine Zurückführung des Funktionsbegriffs auf die Begriffe der Mengenlehre.

Von besonderer Bedeutung sind die linearen Zusammenhänge zwischen den unabhängigen und abhängigen Veränderlichen. Durch die „Linearisierung“ komplexer Zusammenhänge kann in geeigneten Fällen eine brauchbare Näherungslösung für wirtschaftswissenschaftliche oder technische Probleme gefunden werden.

Funktionale Abhängigkeiten bedeuten, dass jedem Wert der unabhängigen Veränderlichen genau ein Wert oder eindeutig ein Wert der abhängigen zugeordnet worden ist.

11 Tests zur Analysis I

Übersicht

11.1 Einteilung der Funktionen

Welche Funktionen sind rational?

1. $y = x^3 + 5x^2 + 3$

2. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 + 2}$

3. $y = 2x^2 + \mathrm{e}^2$

4. $y = \mathrm{e}^x, \qquad \text{mit } \mathrm{e} \approx 2{,}71828\ldots$ (irrationale Zahl)

Gehen Sie zu Kapitel 12.1!

G. Höfner, *Mit Selbsttests gezielt Mathematik lernen*,
DOI 10.1007/978-3-662-52963-8_11

11.2 Darstellung der Funktionen

Die Menge der natürlichen Zahlen wird durch die Funktionsgleichung

$$y = x + 3$$

in sich selbst abgebildet.

1. Welche Funktionswerte (Wertetafel) entstehen für $x = 1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 7$?

2. Die Funktion ist für $x \leq 7$ und $x \in \mathbb{N}$ grafisch darzustellen.

3. Zu entscheiden ist, ob die folgenden Paare Elemente der angegebenen Funktion für $x > 0$ sind.

$$(0;3)\,,\quad (1;4)\,,\quad (6;8)\,,\quad (101;104)\,,\quad (306;615)\,,\quad (-3;0)$$

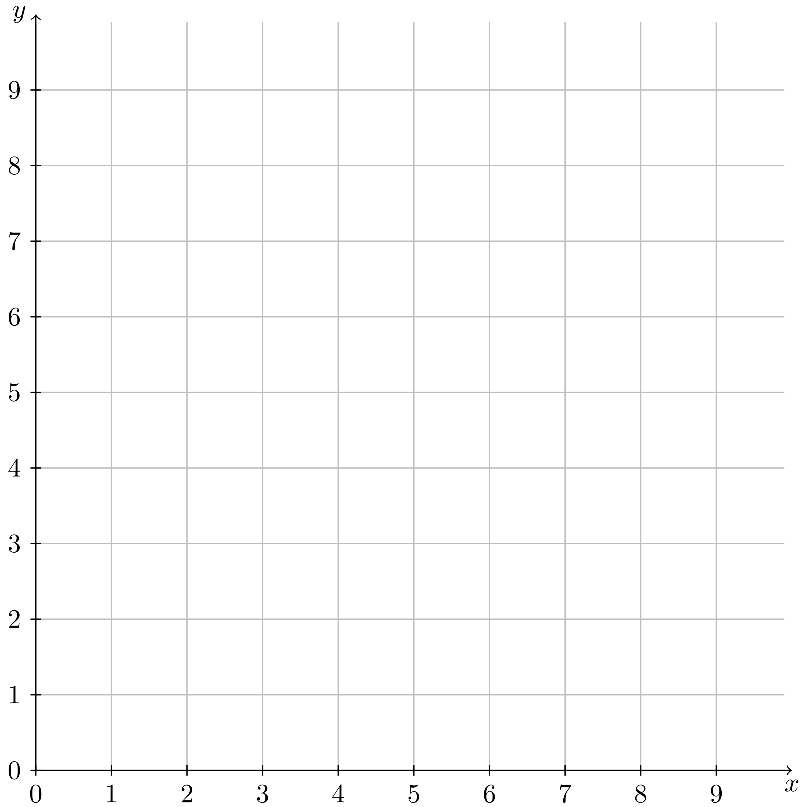


Abb. 11.1 Koordinatensystem für die Lösung

Gehen Sie zu Kapitel 12.2!

11.3 Allgemeine Eigenschaften der Funktionen

Für die Funktion

$$y = x^2 - 2x + 1$$

sind zu bestimmen:

1. der Ausschnitt des Definitionsbereiches, in dem die Funktion eigentlich monoton wächst (fällt),
2. der Schnittpunkt mit der y-Achse,
3. der/die Schnittpunkte mit der x-Achse,
4. eine untere Schranke für die Funktionswerte,
5. die Umkehrfunktion(en) und deren Definitionsbereich.

Gehen Sie zu Kapitel 12.3!

11.4 Normalform – lineare Funktion

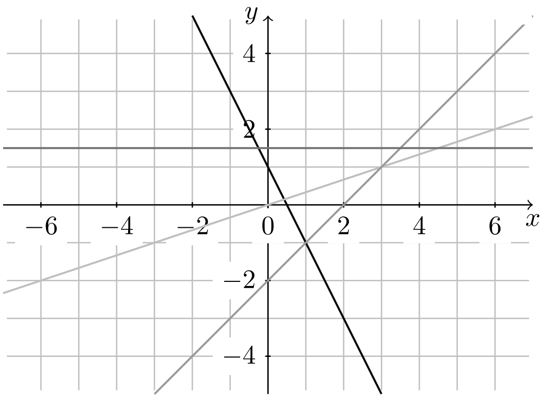


Abb. 11.2 Darstellung verschiedener linearer Funktionen

Den vier Funktionskurven sind die richtigen Funktionsgleichungen zuzuordnen.

1. $y = -2x + 1$
2. $y = \frac{1}{3}x$
3. $y = x - 2$

4. $y = 1{,}5$

Gehen Sie zu Kapitel 12.4!

11.5 Zwei-Punkte-Gleichung

Wie lautet die Gleichung der Geraden durch die zwei Punkte:

$$(-2;3) \quad \text{und} \quad (1;-2)?$$

Das Ergebnis ist durch die grafische Darstellung zu überprüfen.

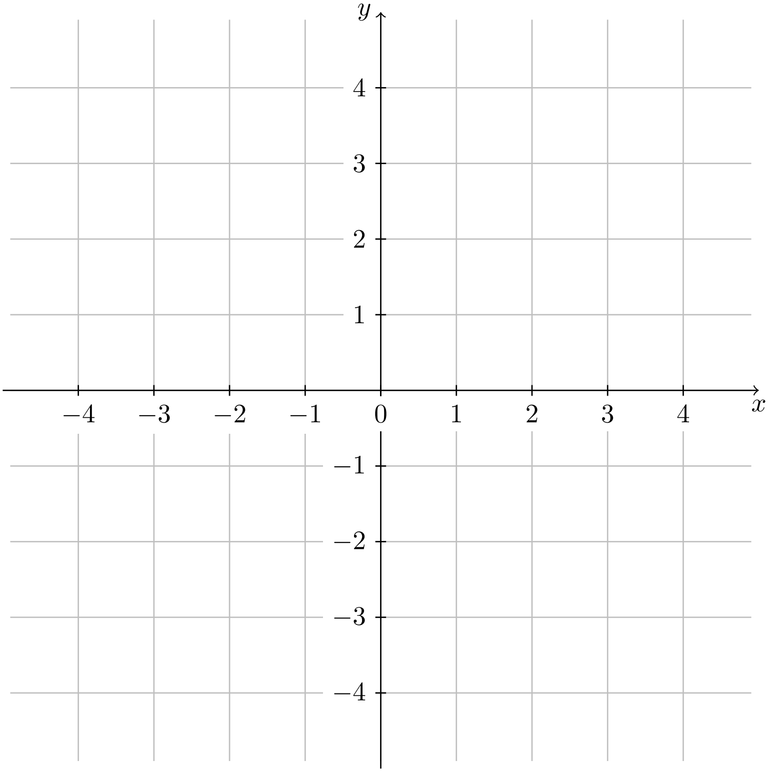


Abb. 11.3 Koordinatensystem für die grafische Darstellung

Gehen Sie zu Kapitel 12.5!

11.6 Punkt-Richtungs-Gleichung

Wie lautet die Gleichung der Geraden, die durch den Punkt

$$(-1; 2)$$

geht und deren Funktionswert um drei Einheiten abnimmt, wenn x um eine Einheit wächst?

Das Ergebnis ist durch die grafische Darstellung zu überprüfen.

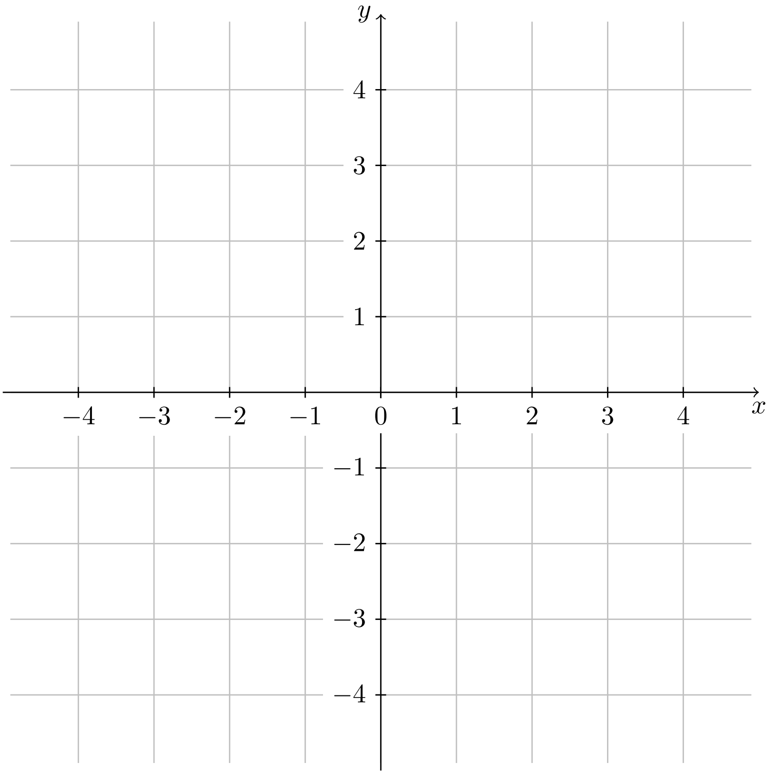


Abb. 11.4 Koordinatensystem für die grafische Darstellung

Gehen Sie zu Kapitel 12.6!

11.7 Achsen-Abschnitts-Gleichung

In welchen Punkten schneidet die Funktion

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$$

die Koordinatenachsen?

Prüfen Sie das Ergebnis durch eine grafische Darstellung

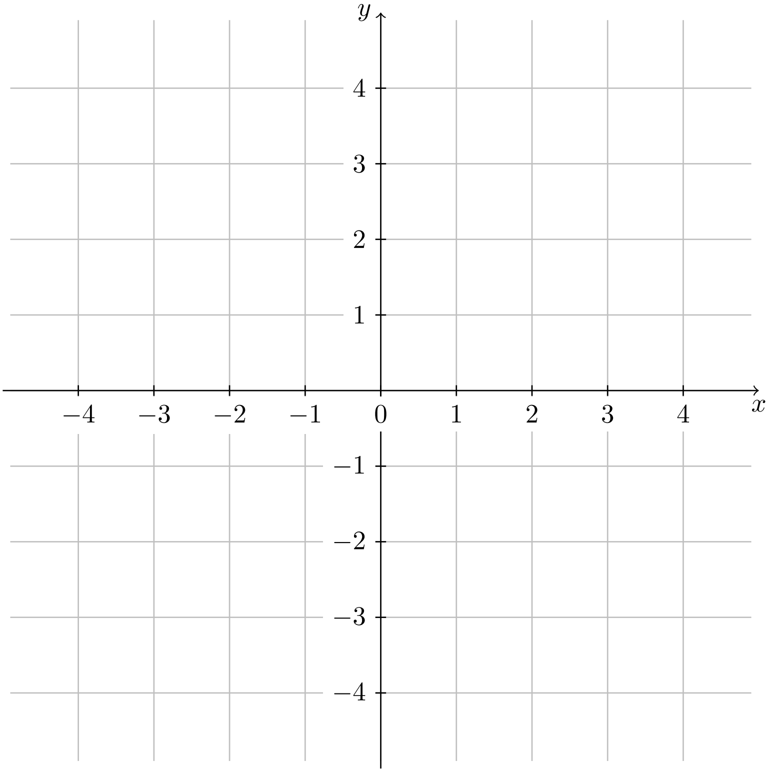


Abb. 11.5 Koordinatensystem für die grafische Darstellung

Gehen Sie zu Kapitel 12.7!

11.8 Quadratische Funktion

Stellen Sie die Funktion

$$y = 1{,}5x^2 - 6x + 4{,}5$$

grafisch dar!

Gehen Sie zu Kapitel 12.8!

11.9 Potenzfunktion

Geben Sie drei Punkte an, die alle Funktionen mit der Gleichung

$$y = x^n, \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

gemeinsam haben.

Gehen Sie zu Kapitel 12.9!

11.10 Wurzelfunktion

Skizzieren Sie den Verlauf der Funktion

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{1+x}, \qquad \text{für} \quad -3 \leq x \leq 5!$$

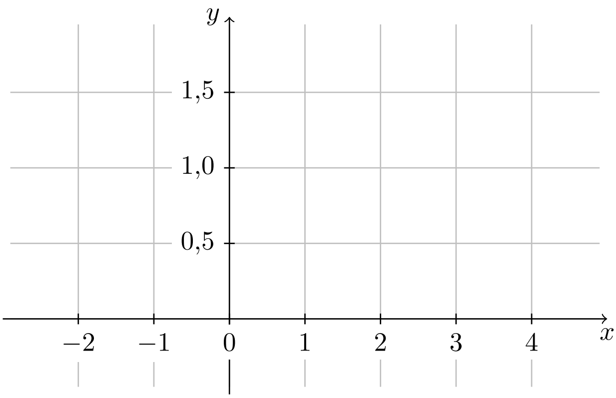


Abb. 11.6 Koordinatensystem für die Lösung

Gehen Sie zu Kapitel 12.10!

11.11 Exponentialfunktion

Stellen Sie die Funktionen

$$y = 10^x \qquad \text{und} \qquad y = \mathrm{e}^x, \qquad \text{mit} \quad x \in \mathbb{R}$$

in dem folgenden Koordinatensystem dar. Beschreiben Sie die Gemeinsamkeiten und Unterschiede.

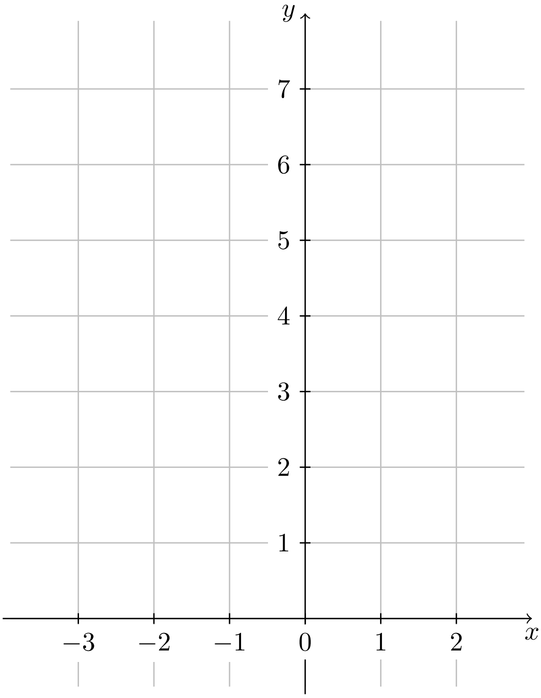


Abb. 11.7 Koordinatensystem für die Lösung

Gehen Sie zu Kapitel 12.11!

11.12 Logarithmusfunktion

Stellen Sie die Funktion

$$y = \mathrm{e}^x$$

und ihre Umkehrfunktion in einem Koordinatensystem dar.

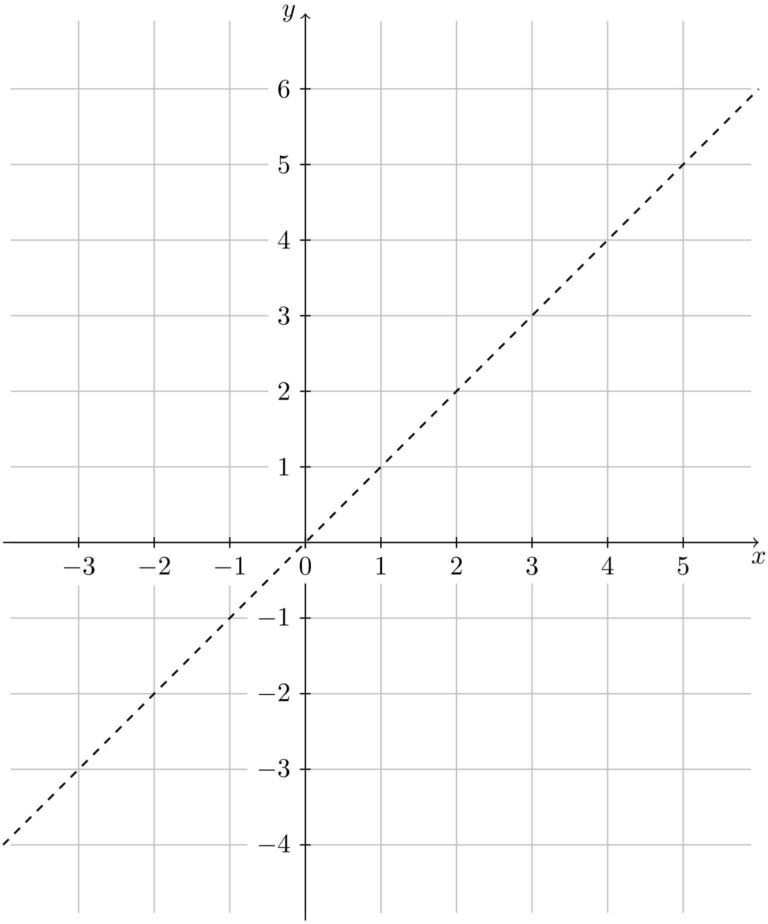


Abb. 11.8 Koordinatensystem für die Lösung

Gehen Sie zu Kapitel 12.12!

11.13 Arithmetische Folgen

Schon als Schulkind machte Carl Friedrich Gauß seinem Lehrer klar, dass er in der Mathematik einmal sehr bedeutend sein wird.

Wie bildete er die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis 100 ohne Taschenrechner?

Gehen Sie zu Kapitel 12.13!

11.14 Geometrische Folgen

Ein Schüler macht vor einer Ferienfahrt seiner Mutter den folgenden Vorschlag:

„Gib mir statt insgesamt 50 € für den ersten Tag nur einen Cent, für den zweiten zwei Cent, für den dritten vier und für jeden weiteren Tag das Doppelte des Vortages."

Ist der Vorschlag bei 14 Tagen Abwesenheit gut? Sicher! Nur für wen?

1. Wie hoch ist der Betrag am 14. (dem letzten) Tag?

2. Wie hoch ist der Gesamtbetrag nach 14 Tagen?

Gehen Sie zu Kapitel 12.14!

12 Lösungen zu den Tests zur Analysis I

Übersicht

12.1 Einteilung der Funktionen

Ergebnisse:

1. Rationale Funktion
2. Rationale Funktion
3. Rationale Funktion
4. Nichtrationale (transzendente) Funktion, Exponentialfunktion

Haben Sie die Funktionen so eingeteilt?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 11.2!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 13.1!

G. Höfner, *Mit Selbsttests gezielt Mathematik lernen*,
DOI 10.1007/978-3-662-52963-8_12

12.2 Darstellung der Funktionen

1. Wertetafel:

x	1	2	3	5	7
y	4	5	6	8	10

2. Grafische Darstellung: Die Punkte dürfen nicht verbunden werden!

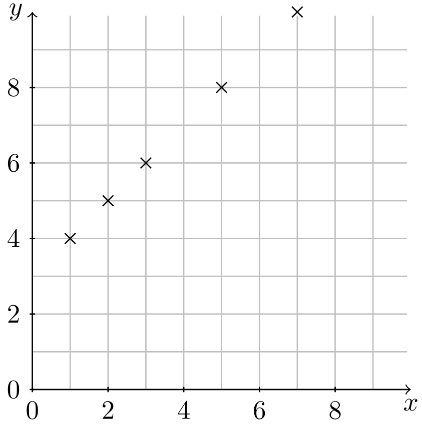


Abb. 12.1 Darstellung der Funktionsgleichung $y = x + 3$

3. $(0; 3) \in F$, $(1; 4) \in F$, $(6; 8) \notin F$,
$(101; 104) \in F$, $(306; 615) \notin F$, $(-3; 0) \notin F$

Alle drei Lösungen richtig?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 11.3!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 13.2!

12.3 Allgemeine Eigenschaften der Funktionen

Ergebnisse:
Die Funktion

$$y = (x - 1)^2$$

(umgeformt nach der zweiten binomischen Formel) ist mit der gegebenen Funktion identisch.

1. Für $x < 1$ ist die Funktion eigentlich monoton fallend.
   Für $x > 1$ ist die Funktion eigentlich monoton wachsend.

2. $S_y\,(0;1)$

3. $x = 1$ (Berührungspunkt), $Sx\,(1;0)$

4. $y \geq 0$

5. Für $x \geq 0$ lauten die Umkehrfunktionen: $y_1 = 1 + \sqrt{x}$
$y_2 = 1 - \sqrt{x}$

Haben Sie die Ergebnisse so bestimmt?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 11.4!
Nein – Gehen Sie zu Kapitel 13.3!

12.4 Normalform – lineare Funktion

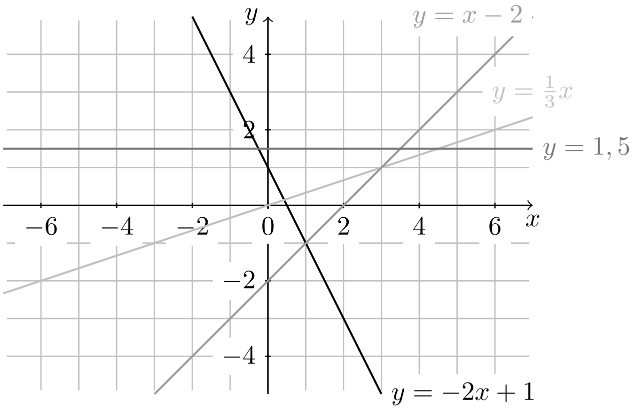


Abb. 12.2 Darstellung verschiedener linearer Funktionen

Haben Sie das alles richtig erkannt?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 11.5!
Nein – Gehen Sie zu Kapitel 13.4!

12.5 Zwei-Punkte-Gleichung

Ergebnis:

$$y = -\frac{5}{3}x - \frac{1}{3}$$
$$\frac{y-3}{x-(-2)} = \frac{-2-3}{1-(-2)}$$
$$y - 3 = -\frac{5}{3}x - \frac{10}{3}$$

Wenn die Punkte auf dem Schaubild der Funktion

$$y = -\frac{5}{3}x - \frac{1}{3}$$

liegen, dann kann nichts schiefgegangen sein.

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 11.6!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 13.5!

12.6 Punkt-Richtungs-Gleichung

Ergebnis:

$$m = -3 = \frac{y-2}{x-(-1)}$$
$$y - 2 = -3x - 3$$
$$y = -3x - 1$$

Auch hier sollte die Überprüfung am Schaubild zeigen, dass die Funktionsgleichung richtig bestimmt wurde. War es richtig?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 11.7!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 13.6!

12.7 Achsen-Abschnitts-Gleichung

Ergebnisse:

$$S_y\,(0;2) \quad \text{und} \quad S_x\,(3;0)$$

Ist Ihnen die Bedeutung dieser Darstellung klar geworden?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 11.8!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 13.7!

12.8 Quadratische Funktion

Ergebnis:

$$y = 1{,}5x^2 - 6x + 4{,}5$$

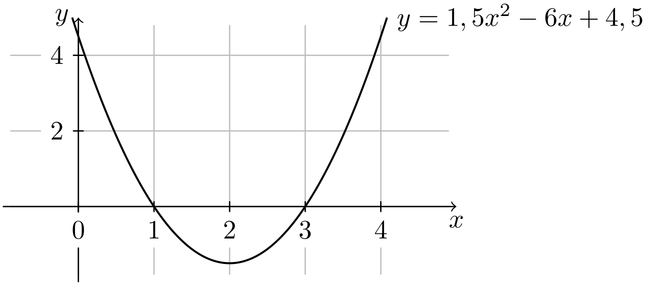


Abb. 12.3 Grafische Darstellung der Lösungsfunktion $y = 1{,}5x^2 - 6x + 4{,}5$

Darstellung richtig?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 11.9!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 13.8!

12.9 Potenzfunktion

Ergebnis:

$$P_1\,(0;0),\ P_2\,(1;1) \text{ und } \begin{cases} P_3\,(-1;-1) & \text{wird von den Funktionen mit ungeraden Exponenten angenommen.} \\ P_4\,(-1;1) & \text{wird von den Funktionen mit geraden Exponenten angenommen.} \end{cases}$$

Haben Sie die Punkte so angegeben und bestimmt?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 11.10!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 13.9!

12.10 Wurzelfunktion

Ergebnis:
Definitionsbereich:

$$\{x \geq -1\}$$

Wertetafel:

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	0	$\frac{1}{2}$	$+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$+\frac{\sqrt{5}}{2}$	$+\frac{\sqrt{6}}{2}$

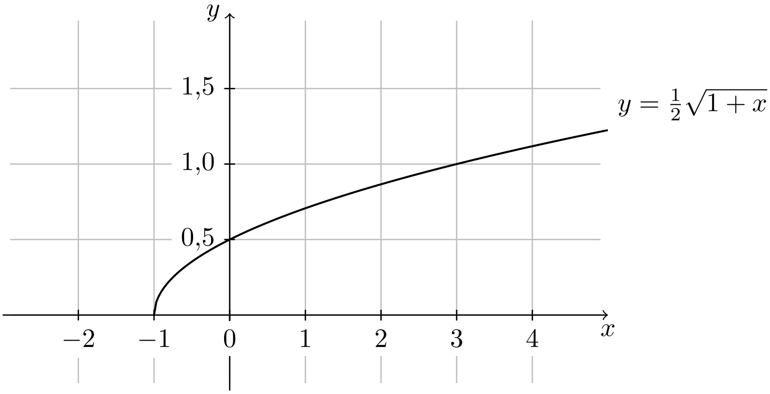


Abb. 12.4 Grafische Darstellung der Funktion $y = \frac{1}{2}\sqrt{1+x}$

Darstellung richtig, Ergebnisse korrekt?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 11.11!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 13.10!

12.11 Exponentialfunktion

Ergebnis:

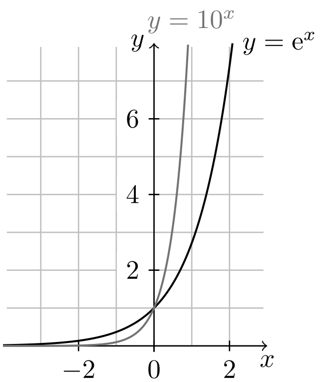


Abb. 12.5 Grafische Dastellung der Funktionen $y = 10^x$ und $y = \mathrm{e}^x$

Gemeinsamkeiten:

- Beide Funktionen sind Exponentialfunktionen.
- Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$
- Wertebereich: $y > 0$
- Im gesamten Definitionsbereich monoton wachsend.
- Der Punkt $(0; 1)$ ist der Schnittpunkt mit der y-Achse.
- Asymptote: x-Achse

Unterschied:

- Je größer die Basis (zum Beispiel $\mathrm{e} < 10$), umso stärker steigt die Funktion an.

Ergebnisse und Beschreibung richtig?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 11.12!
Nein – Gehen Sie zu Kapitel 13.11!

12.12 Logarithmusfunktion

Ergebnis:

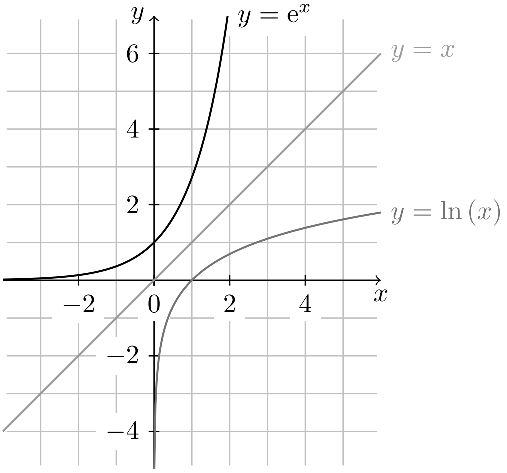


Abb. 12.6 Grafische Dastellung der Funktionen $y = \mathrm{e}^x$, $y = x$ und $y = \ln x$

Haben Sie die Darstellung so angegeben?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 11.13!
Nein – Gehen Sie zu Kapitel 13.12!

12.13 Arithmetische Folgen

Ergebnis:

$$\begin{array}{rcrcccrcr}
1 & + & 2 & + & \dots & + & 99 & + & 100 \\
100 & + & 99 & + & \dots & + & 2 & + & 1 \\
\hline
101 & + & 101 & + & \dots & + & 101 & + & 101
\end{array}$$

$$s_{100} = \frac{100}{2}(1 + 100) = 5050$$

Haben Sie die Summe richtig bestimmt?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 11.14!
Nein – Gehen Sie zu Kapitel 13.13!

12.14 Geometrische Folgen

Ergebnis:
Das Geschäft wäre für die Mutter schlecht!

1. Am 14. Tag sind es $x_{14} = 2^{13} \cdot 0{,}01 = 81{,}92\,€$

2. Insgesamt sind für vierzehn Tage

$$s_{14} = 0{,}01\frac{2^{14} - 1}{2 - 1} = 163{,}83\,€$$

zu zahlen.

Haben Sie diese Beträge bestimmt?

Ja – Ende des 3. Tages – Analysis I
Nein – Gehen Sie zu Kapitel 13.14!

13 Informationen zu den Themen der Analysis I

Übersicht

13.1 Einteilung der Funktionen

Durch die Funktionsgleichung in expliziter Darstellung kann mit jedem Wert der unabhängigen Variablen aus dem Definitionsbereich der Wert der abhängigen Variablen mit beliebiger Genauigkeit berechnet werden. Diese Form der Darstellung

$$y = f(x)$$

ist die Grundlage der Einteilung der Funktionen in Funktionsklassen, deren Angehörige oder Elemente sich durch die Gemeinsamkeiten in wichtigen Merkmalen auszeichnen. Somit ist der Term auf der rechten Seite der expliziten Funktionsdarstellung die Grundlage für die Einteilung oder die Zuordnung der Funktionen zu einer anzuwendenden Rechenoperation bei der Berechnung des y-Wertes.

G. Höfner, *Mit Selbsttests gezielt Mathematik lernen*,
DOI 10.1007/978-3-662-52963-8_13

Werden zur Berechnung der Funktionswerte nur Rechenoperationen benötigt, die im Körper der rationalen Zahlen ohne Einschränkung auszuführen sind (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division mit Ausnahme durch null, Potenzieren mit ganzzahligen Exponenten), so ist die Funktion rational. Nichtrationale Funktionen sind unter anderem:

1. **Wurzelfunktionen**
   Hierbei ist der Definitionsbereich so festzulegen, dass der Radikand nicht negativ wird.

   Beispiel 13.1

   $$y = \sqrt[4]{\frac{x}{x+1}}, \qquad \text{mit} \quad x < -1 \quad \text{oder} \quad x \geq 0$$

   ■

2. **Exponentialfunktionen**
   Nach der Erweiterung der Potenzdefinition ist die Exponentialfunktion für alle reellen Zahlen definiert.

   Beispiel 13.2

   $$y = 10^{x+1}, \qquad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}$$

   ■

3. **Logarithmusfunktionen**
   Der Definitionsbereich der Logarithmusfunktion ist so festzulegen, dass der Numerus größer als null ist.

   Beispiel 13.3

   $$y = 3 \cdot \ln(2x+1), \qquad \text{für} \quad x > -\frac{1}{2}$$

   ■

4. **Trigonometrische Funktionen**
   Der Definitionsbereich der Sinus- und Kosinusfunktion ist uneingeschränkt die Menge der rationalen Zahlen, wobei das Argument (x-Wert) als Bogenmaß zu werten ist. Der Definitionsbereich der Tangens- und Kotangensfunktion schließt spezielle Vielfache von $\frac{\pi}{2}$ beziehungsweise von π aus.

   Tangensfunktion: Nicht zum Definitionsbereich gehören

   $$x = (2k+1)\,\frac{\pi}{2}, \qquad \text{für } \ k \in \mathbb{N},$$

somit alle ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$.

Kotangensfunktion: Nicht zum Definitionsbereich gehören

$$x = k \cdot \pi, \qquad \text{für } k \in \mathbb{N},$$

somit alle ganzzahligen Vielfachen von π.

Rationale Funktionen, bei denen die Division (durch die unabhängige Variable) bei der Berechnung der Funktionswerte nicht benötigt wird, sind ganzrationale Funktionen. Ganzrationale Funktionen können in der Form

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

mit den reellen Koeffizienten a_i geschrieben werden. Ist $a_n \neq 0$, dann hat die ganzrationale Funktion oder das Polynom den Grad n. Ganzrationale Funktionen oder Polynome (n-gliedrige Summen) sind für alle reellen Zahlen definiert.

Beispiel 13.4

$$y = x^4 - 3x^2 + 5x - 7$$

ist eine ganzrationale Funktion vierten Grades. ■

Eine rationale Funktion lässt sich als Quotient zweier ganzrationaler Funktionen darstellen:

$$y = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

Ist der Grad der ganzrationalen Funktion im Zähler größer oder gleich dem Grad der rationalen Funktion im Nenner, so wird die Funktion als *unecht gebrochene rationale Funktion* bezeichnet.

Ist $n < m$, so stellt die Funktion eine *echt gebrochene rationale Funktion* dar. Durch Polynomdivision kann jede unecht gebrochene rationale Funktion in eine Summe aus einer ganzrationalen Funktion und einer echt gebrochenen rationalen Funktion zerlegt werden.

Beispiel 13.5

$$y = \frac{x^5 + 3x^3 - 2x^2 + 11}{x^3 - 3x^2 + 2x - 1}$$

$$
\begin{array}{llllll}
\big(x^5 & + & 3x^3 - & 2x^2 & & +11\big) : \big(x^3 - 3x^2 + 2x - 1\big) = x^2 + 3x + 10 \\
-\big(x^5 - & 3x^4 + & 2x^3 - & x^2\big) & & \\
\hline
 & 3x^4 + & x^3 - & x^2 & & \\
 & -\big(3x^4 - & 9x^3 + & 6x^2 & -\ 3x\big) & \\
\hline
 & & 10x^3 - & 7x^2 & +\ 3x & +11 \\
 & & -\big(10x^3 - & 30x^2 & +20x & -10\big) \\
\hline
 & & & 23x^2 & -17x & +21
\end{array}
$$

$$y = x^2 + 3x + 10 + \frac{23x^2 - 17x + 21}{x^3 - 3x^2 + 2x - 1}$$

■

Gebrochenrationale Funktionen sind für alle reellen Zahlen mit Ausnahme der Werte definiert, in denen die ganzrationalen Funktionen im Nenner den Wert null haben. In diesen Werten haben die Funktionen Lücken, Sprünge oder Polstellen. Eine weitere Möglichkeit ist die Einteilung der Funktionen in algebraische und transzendente Funktionen.

Algebraische Funktionen erfassen alle rationalen Funktionen und die Wurzelfunktionen, nichtrationale Funktionen (mit Ausnahme der Wurzelfunktionen) bilden die Klasse der transzendenten Funktionen.

Gehen Sie zu Kapitel 14.1!

13.2 Darstellung der Funktionen

Eine Funktion mit einer unabhängigen Variablen besteht aus den geordneten Paaren

$$(x; y)\,,$$

wobei jedem Wert des Definitionsbereiches eindeutig ein y aus dem Wertebereich zugeordnet ist. Eine Darstellungsform von Funktionen ist dann zu akzeptieren, wenn durch den Definitionsbereich und eine Zuordnungsvorschrift die Menge der geordneten Paare $(x; y)$ (Funktionswerte) eindeutig erkennbar ist. Wichtige Darstellungsformen sind:

1. **Darstellung der Funktionswerte durch eine Wertetabelle – tabellarische Darstellung**
   Diese Darstellungsart ist eine meist ausschnittsweise Angabe von ausgewählten Funktionswerten, die durch Beobachtung oder in Form einer Messreihe ermittelt wurden. Ein Nachteil, neben unvollständiger Angabe

der Funktionswerte, besteht in der geringen Anschaulichkeit dieser Darstellungsform. Jedoch ist diese Darstellungsform besonders gut geeignet, die Funktionswerte mit der geforderten Genauigkeit zu erfassen. Damit können sie beliebig oft, direkt abgelesen werden (beispielsweise Lohnsteuertabellen). Zwischenwerte können durch Interpolation und Randwerte durch Extrapolation näherungsweise berechnet werden.

Beispiel 13.6
Ausschnitt aus der Wertetabelle für die Funktion, die reellen Zahlen ihr Quadrat zuordnet (Tab. 13.1).

Tab. 13.1 Ausschnitt aus der Wertetabelle für die Funktion, die reellen Zahlen ihr Quadrat zuordnet

	0,00	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
5,6	31,36	31,47	31,58	31,70	31,81	31,92	32,04	32,15	32,26	32,38
5,7	32,49	32,60	32,72	32,83	32,95	33,06	33,18	33,29	33,41	33,52
5,8	33,64	33,76	33,87	33,99	34,11	34,22	34,34	34,46	34,57	34,69
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Aus der Tabelle ist direkt abzulesen:

$$5{,}72^2 = 32{,}72 \qquad \text{oder} \qquad \sqrt{33{,}06} = 5{,}75$$

Die (lineare) Interpolation („in die Tabelle hinein“):

a) Der Wert $5{,}727^2$ liegt zwischen: $5{,}72^2 = 32{,}72$ und
$5{,}73^2 = 32{,}83$.

Die Differenz von 0,11 oder 11 Einheiten wird in zehn gleichmäßige Teile geteilt. Das ergibt 1,1 Einheiten pro Zehntelteil (interpoliert werden hierbei die Tausendstel). Es sind sieben Teile zu berücksichtigen, $1{,}1 \cdot 7 = 7{,}7$ oder aufgerundet 8 Einheiten beziehungsweise 0,8.
Dieser Wert ist zu 32,72 hinzuzunehmen.

$$5{,}727^2 = 32{,}80$$

Die Tabellendifferenz zwischen den beiden Nachbarwerten ist durch zehn zu dividieren und mit der zu interpolierenden Ziffer zu multiplizieren. Dieser Wert wird zu dem kleineren der benachbarten Werte addiert.

b) Interpolation („aus der Tabelle heraus“):

Der Wert $\sqrt{33{,}25}$ liegt zwischen

$\sqrt{33{,}18} = 5{,}76$ und

$\sqrt{33{,}29} = 5{,}77$

Die Differenz (kleinere Differenz) zwischen dem zu berechnenden Wert und dem nächstkleineren Wert beträgt

$$33{,}25 - 33{,}18 = 0{,}07$$

oder 7 Einheiten. Diese mit 10 multipliziert und durch die Tabellendifferenz von

$$33{,}29 - 33{,}18 = 0{,}11$$

oder 11 Einheiten dividiert, ergibt

$$\frac{70}{11}$$

oder abgerundet 6 als letzte Ziffer, die dem kleineren Wert angehängt wird.

$$\sqrt{33{,}25} \approx 5{,}766$$

■

2. **Grafische Darstellung einer Funktion**
Die eineindeutige Zuordnung zwischen Funktionswerten $(x; y)$ und den Punkten des kartesischen Koordinatensystems ist die Grundlage für die grafische Darstellung einer Funktion. Das Funktionsbild ist eine Kurve. Nicht jede Kurve stellt eine Funktion dar, da die Zuordnung von x- zu y-Werten eindeutig sein muss. Für einen schnellen Überblick über den Gesamtverlauf der Funktion ist die grafische Darstellung gut geeignet, da sie markante Stellen und den groben Verlauf anschaulich macht. Der Nachteil besteht in der oft nur begrenzten Genauigkeit mit der die Funktionswerte aus der Abbildung abgelesen werden können.

Beispiel 13.7
Darstellung eines Ausschnitts der Funktion $y = x^2$, die jeder reellen Zahl ihr Quadrat zuordnet (hier etwa $-2{,}2 \leq x \leq +2{,}2$).

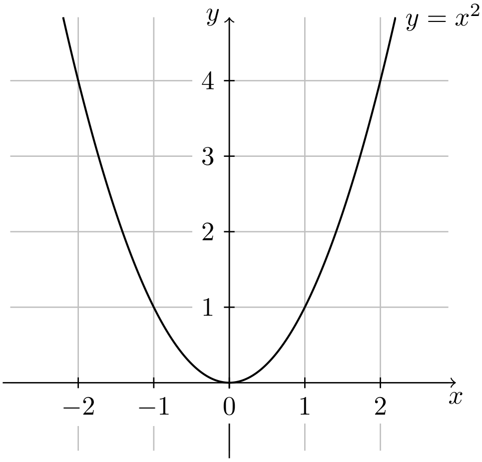


Abb. 13.1 Darstellung eines Ausschnitts der Funktion $y = x^2$, die jeder reellen Zahl ihr Quadrat zuordnet (Abb. 13.1, hier etwa $-2{,}2 \leq x \leq +2{,}2$)

■

Beispiel 13.8
Die Peripherie (Umfang) eines Kreises mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung stellt eine Kurve aber keine Funktion dar, da den Elementen des Definitionsbereiches

$$-r < x < r$$

nicht nur ein, sondern zwei Funktionswerte zugeordnet werden (Abb. 13.2).

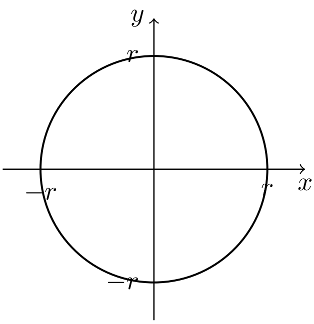


Abb. 13.2 Kreis um den Koordinatenursprung als Mittelpunkt mit dem Definitionsbereich $-r < x < r$

■

In der Praxis gibt es Messgeräte, die eine funktionale Abhängigkeit von physikalischen Werten von der Zeit aufzeichnen (Abhängigkeit des Druckes

– Barograph, der Spannung – Oszillograph, der Herzfrequenz – Elektrokardiogramm (EKG) usw. Diese Geräte zeichnen immer Funktionsbilder auf, da einem Zeitwert genau ein Wert der abhängigen Größe zugeordnet wird. Es entsteht ein über der Zeitachse einfacher Kurvenzug.

Die Gestalt der Funktionsbilder ist durch die Auswahl des entsprechenden Ausschnitts aus dem Definitionsbereich und durch den Maßstab der x- und y-Achse wesentlich zu beeinflussen.

Beispiel 13.9
Es entsteht ein verzerrtes Bild der Sinusfunktion, wenn die Länge einer Periode nicht ca. 6,28 Einheiten der Ordinatenachse entspricht (Abb. 13.3).

$$360^\circ = 2 \cdot \pi \approx 6{,}28$$

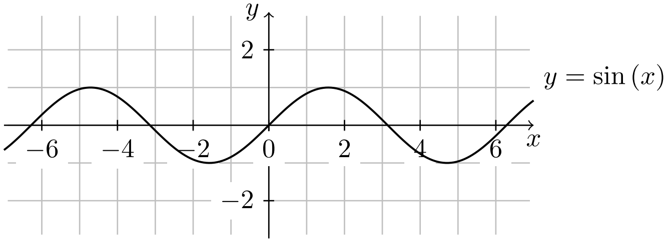


Abb. 13.3 Darstellung der Sinusfunktion $y = \sin(x)$

■

Für Funktionen, deren Definitionsbereich die Menge der reellen Zahlen ist, kann nur ein Funktionsausschnitt grafisch dargestellt werden. Dazu ist ein geeigneter Ausschnitt auf der x-Achse (Abszissenachse) auszuwählen.

Ist die Funktion nur für isolierte oder diskrete Abszissenwerte definiert (zum Beispiel nur für die Menge der natürlichen oder ganzen Zahlen), so ergeben sich isolierte Punkte im kartesischen Koordinatensystem. Diese Punkte dürfen grundsätzlich nicht miteinander verbunden werden. Voraussetzung für die Verbindung der Punkte, die sich aus der Darstellung der Zahlen aus der Wertetabelle ergeben, ist die Stetigkeit des Kurvenverlaufes in den Zwischenwerten; vor allem aber auch, dass die Funktion in allen Zwischenwerten definiert ist.

3. **Die analytische Darstellung einer Funktion – Darstellung der Funktionswerte durch eine Funktionsgleichung**

   Bei allen Formen der analytischen Darstellung einer Funktion ist der Definitionsbereich eindeutig anzugeben. Das ist, wird keine Einschränkung mitgeteilt, bei den reellen Funktionen die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Für reelle Funktionen ist diese Zahlenmenge der größtmögliche Definitionsbereich. Damit wird bei der grafischen Darstellung die ganze reelle Zahlengeraden erfasst.

   Der Vorteil der analytischen Darstellung einer Funktion besteht darin, dass zu jedem Wert der unabhängigen Variablen der Wert der abhängigen Variablen mit beliebiger Genauigkeit berechnet werden kann. Der Nachteil ist die geringere Anschaulichkeit dieser Darstellung.

   a) Explizite Form

      Die nach der abhängigen Variablen aufgelöste Form der analytischen Darstellung (Funktionsgleichung) wird als explizite Form der analytischen Darstellung bezeichnet.

      $$y = f(x)$$

      Beispiel 13.10

      $$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

      ist definiert für $-r \leq x \leq +r$ und ergibt das grafische Bild eines Halbkreises. Hierbei ist zu beachten, dass zwei Funktionen mit jeweils einem Halbkreis zu einem Kreis in der Darstellung verbunden wurden (oberer Teil für die positive Wurzelfunktion und unterer Halbkreis für die negative Wurzelfunktion, mit dem jeweils angegebenen Definitionsbereich, Abb. 13.4).

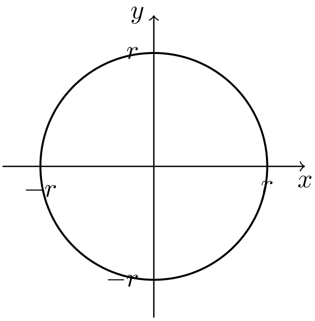


Abb. 13.4 Darstellung der Funktion $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ mit dem Definitionsbereich $-r \leq x \leq r$

■

b) Implizite Form
Steht die abhängige Variable nicht isoliert auf einer Seite (linke Seite der Funktionsgleichung), denn mitunter ist die Auflösung nach der abhängigen Variablen gar nicht möglich, so ist die analytische Darstellung in impliziter Form gegeben:

$$F(x; y) = 0.$$

Durch die implizite Form der analytischen Darstellung können Kurven beschrieben werden, die als nicht eindeutige Zuordnungen auch keine Funktionskurven sind.

Beispiel 13.11
Durch die implizite Form $x^2 + y^2 = r^2$ wird für $-r \leq x \leq +r$ ein Kreis mit dem Radius r um den Koordinatenursprung als Mittelpunkt beschrieben (Abb. 13.5).

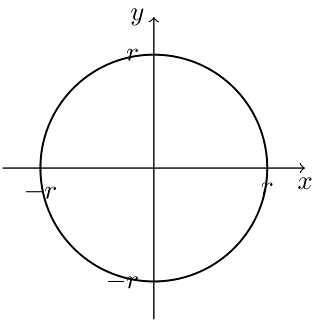


Abb. 13.5 Kreis mit dem Radius r um den Koordinatenursprung als Mittelpunkt und dem Definitionsbereich $-r \leq x \leq r$

■

Explizite und implizite Form der analytischen Darstellung einer Funktion haben beide die Eigenschaft, dass den Werten der unabhängigen Variablen die Werte der abhängigen Variablen zugeordnet werden, das heißt, aus den x-Werten können die y-Werte direkt berechnet werden.

c) Parameterdarstellung
Werden sowohl die x-Werte als auch die y-Werte aus einem Parameter berechnet, so ist die Funktionsbeschreibung durch eine Parameterdarstellung gegeben. Die Parameterdarstellung ist durch die Angabe des Parameterbereiches eindeutig festgelegt.

Zuordnungen in der expliziten und impliziten Form der analytischen Darstellung zeigt Abbildung 13.6:

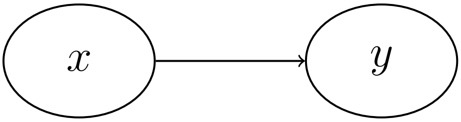


Abb. 13.6 Zuordnungen in der expliziten und impliziten Form der analytischen Darstellung

Zuordnung bei der Parameterform der analytischen Darstellung zeigt Abbildung 13.7:

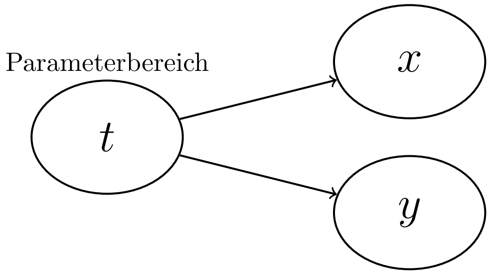


Abb. 13.7 Zuordnung bei der Parameterform der analytischen Darstellung

Beispiel 13.12

$$x = \frac{1}{2}t \qquad x \in \mathbb{R}$$
$$y = 2t - 3$$

Die tabellarische Darstellung für ausgewählte Parameter hat drei Zeilen.

t	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2
y	-11	-9	-7	-5	-3	-1	1	3	5

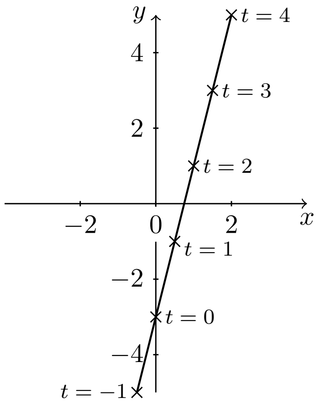


Abb. 13.8 Grafische Darstellung der Parametergleichungen $x = \frac{1}{2}t$ und $y = 2t - 3$

Das grafische Bild ergibt eine Gerade, wie es auch durch die Elimination des Parameters (Herauslösung) aus der expliziten Form unschwer erkennen lässt (Abb. 13.8).

$$x = \frac{1}{2}t \quad \Rightarrow \quad t = 2x$$
$$y = 2 \cdot (2x) - 3 = 4x - 3$$

■

Gehen Sie zu Kapitel 14.2!

13.3 Allgemeine Eigenschaften der Funktionen

In der angewandten Mathematik haben die ganzrationalen Funktionen ersten Grades (lineare Funktionen) eine ganz besondere Bedeutung, da mit ihnen die einfachsten Modelle gebildet und berechnet werden können. Spezielle Eigenschaften von Funktionen sowie spezielle Funktionen sind folgende:

1. *Monoton wachsend* ist eine Funktion, wenn jedem kleineren Wert des Definitionsbereiches ein Funktionswert zugeordnet ist, der nicht größer ist als der Funktionswert, der zu dem größeren Wert des Definitionsbereiches gehört. Monoton wachsend ist eine Funktion also genau dann, wenn für

$$x_1 < x_2 \quad \text{folgt} \quad f(x_1) \leq f(x_2)\,.$$

Monoton fallend ist sie genau dann, wenn für

$$x_1 < x_2 \quad \text{folgt} \quad f(x_1) \geq f(x_2)\,.$$

In dieser Definition ist der Fall noch eingeschlossen, dass die Funktionswerte im ausgewählten Intervall oder insgesamt konstant verlaufen (Gleichheitszeichen). Die Funktion ist genau dann streng monoton wachsend, wenn aus

$$x_1 < x_2, \quad \text{dass} \quad f(x_1) < f(x_2)$$

folgt und ganau dann streng monoton fallend, wenn aus

$$x_1 < x_2, \quad \text{dass} \quad f(x_1) > f(x_2)$$

folgt. Für den Fall, dass eine der angegebenen Eigenschaften nicht für den gesamten Definitionsbereich, wohl aber für einen oder mehrere Abschnitte (Intervalle) des Definitionsbereiches gültig ist, so ist die Funktion in diesem Intervall monoton.

Beispiel 13.13
$y = x^4$ ist eine im Intervall $x \in (-\infty; 0]$ streng monoton fallende und im Intervall $x \in [0; \infty)$ streng monoton wachsende Funktion (Abb. 13.9).

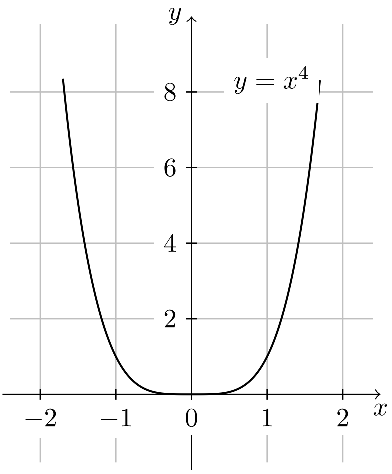


Abb. 13.9 Grafische Darstellung der Funktion $y = x^4$

■

2. Sind die Funktionswerte durch einen Wert beschränkt, den sie nicht über- oder unterschreiten können, so werden die Funktionen als *beschränkt* bezeichnet. Funktionen deren Funktionswerte alle reellen Zahlen annehmen können, sind unbeschränkte Funktionen. Eine Zahl, die durch die Funktionswerte nicht unterschritten wird, ist eine *untere Schranke* (s) und eine

Zahl, die durch die Funktionswerte nicht überschritten wird, ist eine *obere Schranke* (S) der Funktion.

Beispiel 13.14
Die Funktion

$$y = x^3$$

ist eine unbeschränkte Funktion (Abb. 13.10).

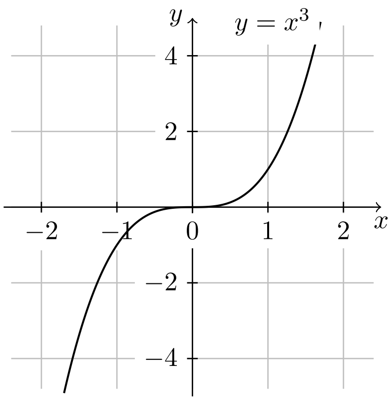


Abb. 13.10 Grafische Darstellung der Funktion $y = x^3$

■

Beispiel 13.15
Eine untere Schranke der Funktion

$$y = \mathrm{e}^x$$

ist die null aber auch $s = -1$ oder $s = -100$ und alle negativen Zahlen (Abb. 13.11).

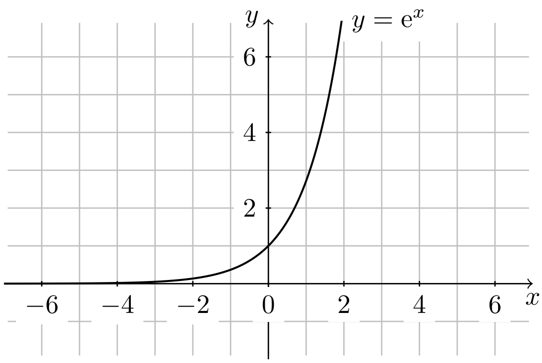


Abb. 13.11 Grafische Darstellung der Funktion $y = \mathrm{e}^x$

■

3. Die Funktion

$$y = 3 \cdot \sin(x)$$

ist nach oben und unten beschränkt. Beispiele für Schranken sind: $s = -4$ und $s = 3$ (Abb. 13.12).

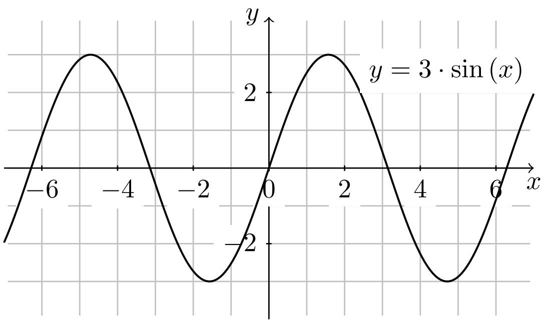


Abb. 13.12 Grafische Darstellung der Funktion $y = 3 \cdot \sin(x)$

Bemerkung: Bei beschränkten Funktionen sind die größte untere Schranke und die kleinste obere Schranke als Grenzwerte von besonderer Bedeutung.

4. *Gerade Funktionen* sind die, bei denen für alle Werte des Definitionsbereiches gilt:

$$f(x) = f(-x)$$

Gerade Funktionen verlaufen in axialer Symmetrie zur y-Achse.

Beispiel 13.16
Als Beispiel dient eine quadratische Funktion (Abb. 13.13):

$$y = x^2$$
$$y(-2) = 4 = y(2)$$

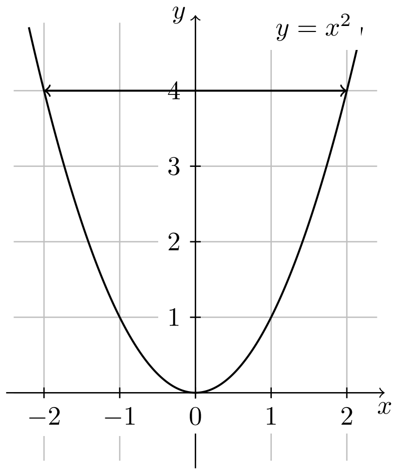


Abb. 13.13 Grafische Darstellung der Symmetrie zur y-Achse der Funktion $y = x^2$

■

5. *Ungerade Funktionen* erfüllen in allen Werten des Definitionsbereiches die Bedingung

$$f(x) = -f(-x) .$$

Ungerade Funktionen verlaufen zentralsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

Beispiel 13.17
Als Beispiel dient die ungerade Funktion (Abb. 13.14):

$$y = x^3$$
$$y(2) = 8 = -y(-2) = -(-8) = 8$$

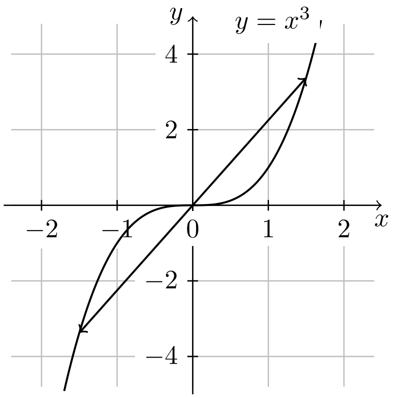


Abb. 13.14 Grafische Darstellung der Zentralsymmetrie zum Koordinatenursprung der Funktion $y = x^3$

■

6. Um periodische Vorgänge in Natur, Technik oder der Wirtschaft zu erfassen, müssen sich die Werte der Funktionen nach einem konstanten Wert der unabhängigen Variablen (meist ist dies die Zeit) wiederholen. In der Mathematik werden diese Zusammenhänge durch *periodische Funktionen* dargestellt. Haben alle Werte der unabhängigen Variablen x und $x + a$ den gleichen Funktionswert, so ist die Funktion mit der Periodenlänge a periodisch.

   Gilt also für alle $x \in D$ und $(x + ka) \in D$

$$f(x) = f(x + ka),$$

   wobei k eine beliebige ganze Zahl ist, so ist die Funktion mit der Periodenlänge a periodisch.

   Primitive Periode wird die kleinste Periode $p \neq 0$ genannt, für die

$$f(x) = f(x + p)$$

   gilt. Jede Periode a der Funktion muss somit ein ganzzahliges Vielfaches der primitiven Periode p sein.

Beispiel 13.18

Eine harmonische Schwingung (beispielsweise die Schwingung einer Stimmgabel) kann durch die Funktion

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \rho)$$

beschrieben werden. Dabei ist y die Elongation (Auslenkung aus der Ruhelage) eine Funktion der Zeit t. Die Schwingung wird durch

$A > 0$	Amplitude,
$\omega = 2\pi\nu$	Kreisfrequenz,
ρ	Nullphasenwinkel

bestimmt. Das Argument der Sinusfunktion

$$\omega t + \rho$$

ist der Phasenwinkel der Schwingung. Die Sinusfunktion hat die primitive Periode $2 \cdot \pi$. Somit ist

$$A \cdot \sin(\omega t + \rho) = A \cdot \sin(\omega t + \rho + 2 \cdot \pi)\,.$$

■

7. *Umkehrfunktionen* – Werden bei einer Funktion den Werten der unabhängigen Variablen eindeutig Werte der abhängigen Variablen zugeordnet, so ordnet die Umkehrfunktion den Werten der abhängigen Variablen eindeutig Werte der unabhängigen Variablen zu. Somit können nur die Funktionen eine Umkehrfunktion besitzen, die eineindeutige Wertzuweisungen besitzen oder umkehrbar eindeutig sind. Eineindeutige Funktionen besitzen eine Umkehrfunktion oder *inverse Funktion*. Die zur Funktion f inverse Funktion wird mit f^{-1} bezeichnet.

   Funktionen, die im gesamten Definitionsbereich streng monoton (wachsend oder fallend) verlaufen, sind eineindeutige Funktionen und besitzen demzufolge eine Umkehrfunktion (Abb. 13.15).

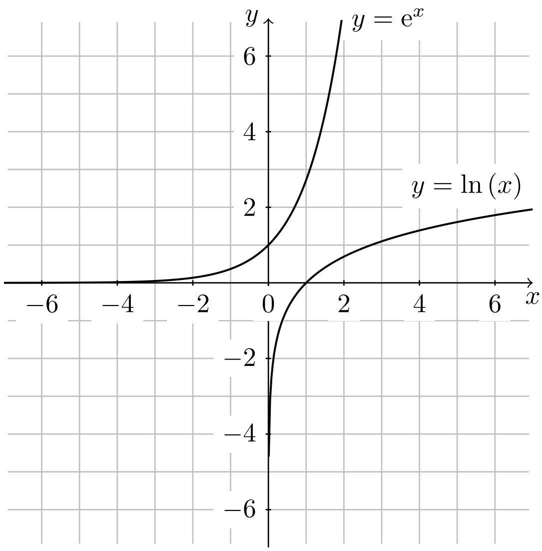


Abb. 13.15 Beispiel der grafischen Darstellung der Funktion $y = \mathrm{e}^x$ und ihrer Umkehrfunktion $y = \ln(x)$

Funktionen, die im Intervall streng monoton sind, besitzen für die so ausgezeichneten Werte des Definitionsbereiches eine Umkehrfunktion (Abb. 13.16).

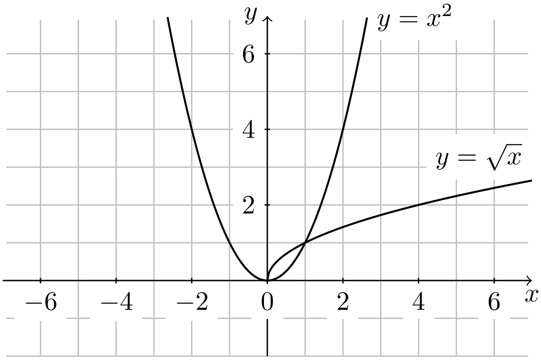


Abb. 13.16 Beispiel der grafischen Darstellung der Funktion $y = x^2$ und ihrer Umkehrfunktion für ausgezeichnete Werte $y = \sqrt{x}$ für $x \geq 0$

Ist eine Kurve im gesamten Definitionsbereich oder in einem Intervall des Definitionsbereiches streng monoton, dann kann die Umkehrfunktion in zwei Schritten bestimmt werden.

i Auflösen der Funktionsgleichung

$$y = f(x)$$

nach der Variablen x. Das ist nur eine Formänderung, die absolut keine Veränderung an den Funktionswerten bewirkt.

ii Vertauschen von x und y. Dieser Schritt ist formal rechnerisch ganz leicht zu realisieren (im Gegensatz zum ersten Schritt, wo die Auflösung mitunter rechnerisch sehr schwierig oder mitunter gar nicht möglich ist), jedoch bedeutet es für die Funktionswerte entscheidende Veränderungen (Tab. 13.2).

Tab. 13.2 Übersicht über die Änderung der Funktion der Funktionswerte bei der Bestimmung der Umkehrfunktion

Funktion		**Umkehrfunktion**
die unabhängige Veränderliche	**wird**	abhängige Veränderliche
Argument	**wird**	Funktionswert
die abhängige Veränderliche	**wird**	unabhängige Veränderliche
der Funktionswert	**wird**	Argument
der Definitionsbereich	**wird**	Wertebereich
der Wertebereich	**wird**	Definitionsbereich

Die Umkehrfunktion ist das Spiegelbild der Funktion an der Achse, die den III. und I. Quadranten des Koordinatensystems halbiert (Abb. 13.17).

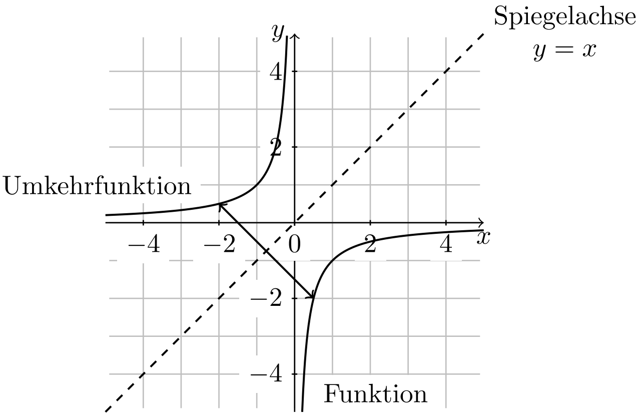


Abb. 13.17 Beispielhafte Darstellung einer Funktion, der zugehörigen Umkehrfunktion und der Spiegelachse $y = x$

Beispiel 13.19

Die Funktion (Gerade)

$$y = 3x - 1$$

ist eine im gesamten Definitionsbereich monoton wachsende Funktion. Die Umkehrfunktion lautet

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$

und ergibt zusammen mit der Funktion das Bild. Die Spiegelachse ist durch die Gerade $y = x$ gegeben (Abb. 13.18).

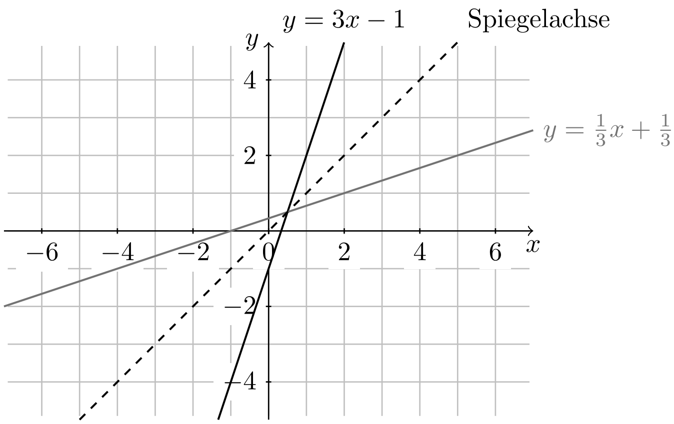


Abb. 13.18 Grafische Darstellung der Funktion $y = 3x - 1$ und der zugehörigen Umkehrfunktion $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

Rechnerische Lösung:

i Auflösung der Funktion

$$y = 3x - 1$$

nach x:

$$x = \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}$$

ii Vertauschen von x und y:

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$

Der Schnittpunkt der beiden Geraden muss auf der Geraden $y = x$ liegen, denn dort werden die Veränderlichen „getauscht“ oder einander wechselseitig zugewiesen.

$$S\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

■

Beispiel 13.20
Die Funktion

$$y = x^2$$

ist für $x \geq 0$ und für $x < 0$ eine streng monoton wachsende (beziehungsweise fallende) Funktion (Abb. 13.19 und 13.20).

i Umkehrfunktion

$$y = x^2, \quad \text{für} \quad x \geq 0 \quad \longmapsto \quad y = \sqrt{x}, \quad \text{mit} \quad x \geq 0$$

das heißt:

$$x \geq 0 \quad \longmapsto \quad y \geq 0$$

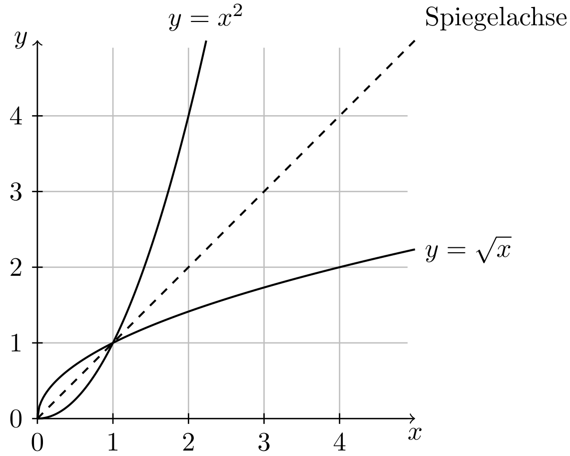


Abb. 13.19 Grafische Darstellung der Funktion $y = x^2$ für den Definitionsbereich $x \geq 0$ und die dazugehörige Umkehrfunktion $y = \sqrt{x}$

ii Umkehrfunktion

$$y = x^2, \quad \text{für} \quad x \leq 0 \quad \longmapsto \quad y = -\sqrt{x}, \quad \text{mit} \quad x \geq 0$$

das heißt:

$$x \geq 0 \quad \longmapsto \qquad\qquad y \geq 0$$

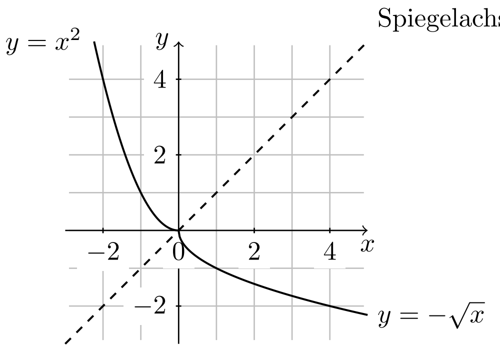


Abb. 13.20 Grafische Darstellung der Funktion $y = x^2$ für den Definitionsbereich $x \leq 0$ und die dazugehörige Umkehrfunktion $y = -\sqrt{x}$

■

Gehen Sie zu Kapitel 14.3!

13.4 Normalform – lineare Funktion

Die Funktionsgleichung

$$y = mx + n$$

ist die allgemeine Darstellung einer linearen Funktion, die auch als Normalform bezeichnet wird. Die Schaubilder dieser Funktionen sind Geraden.

1. Spezialfall:

$$n = 0$$

Die Geraden gehen durch den Koordinatenursprung.

2. Spezialfall:

$$m = 0$$

Die Gerade ist eine Parallele zur x-Achse im Abstand n.

3. Spezialfall:

$$m = 0 \quad \text{und} \quad n = 0$$

Somit ist

$$y = 0.$$

Das ist die Gleichung der x-Achse.

Bemerkung: Parallelen zur y-Achse oder die Achse selbst sind keine Funktionen, da sonst die Bedingung der Eindeutigkeit verletzt würde.

m und n sind in

$$y = mx + n$$

beliebige reelle Zahlen. n gibt den Schnittpunkt mit der y-Achse an.

$$x = 0$$
$$S_y\,(0; n)$$

m gibt die Veränderung des y-Wertes an, wenn sich x um eine Einheit ändert.

$$\begin{aligned} y\,(0) &= n \\ y\,(1) &= m + n \\ y\,(1) - y\,(0) &= m \end{aligned}$$

m bezeichnet somit die Steigung der Geraden.

Eine Gerade ist durch die Angabe von zwei Punkten oder einem Punkt und die (überall gleichen) Steigung festgelegt.

Beispiel für die grafische Darstellung (Abb. 13.21):

y-Achsenabschnitt:	$n = -1$
Steigung der Funktion:	$m = 2$
Funktionsgleichung:	$y = 2x - 1$

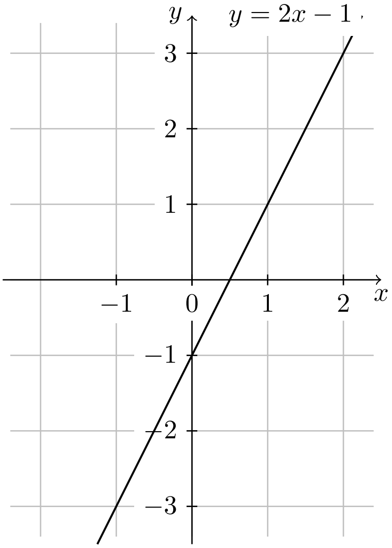


Abb. 13.21 Grafische Darstellung der Beispielfunktion $y = 2x - 1$

Zwei Funktionswerte lauten:

$$S_y\,(0; -1) \qquad S_x\,(0{,}5; 0)$$

Gehen Sie zu Kapitel 14.4!

13.5 Zwei-Punkte-Gleichung

Durch zwei (verschiedene) Punkte ist eine Gerade und somit ihre Funktionsgleichung ebenfalls eindeutig festgelegt.

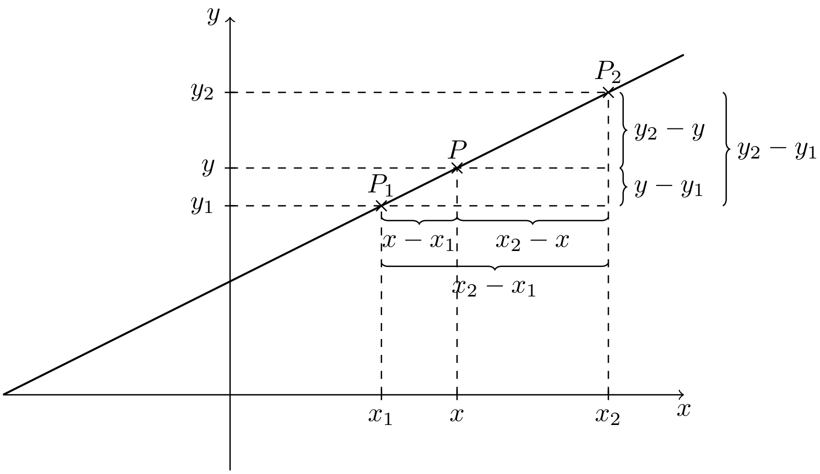


Abb. 13.22 Grafische Herleitung der Zwei-Punkte-Gleichung

Ohne den allgemeinen Fall zu beschränken, liegt in Abbildung 13.22 ein beliebiger Punkt auf der Geraden P zwischen den beiden Geradenpunkten P_1 und P_2. Da die Steigung einer Geraden in jedem Punkt gleich ist, sind alle Steigungsdreiecke ähnlich (Übereinstimmung in den drei Winkeln). Somit ist

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

für unterschiedliche Punkte P, P_1, P_2 auf der Geraden. Die Formel wird als die *Zwei-Punkte-Form der Geradengleichung* bezeichnet.

Die Koordinaten der zwei gegebenen Punkte eingesetzt, umgeformt zur Normalform ergibt die Möglichkeit der Darstellung im Koordinatensystem. Der Bruchterm auf der rechten Seite ist die gesuchte Steigung der Geraden.

Beispiel 13.21

$P_1\,(-3; 0), \quad P_2\,(2; -1)$

$$\begin{aligned} \frac{y - 0}{x - (-3)} &= \frac{-1 - 0}{2 - (-3)} && \\ \frac{y}{x + 3} &= -\frac{1}{5} && m = -\frac{1}{5} \\ y &= -\frac{1}{5}x - \frac{3}{5} && \text{Normalform} \end{aligned}$$

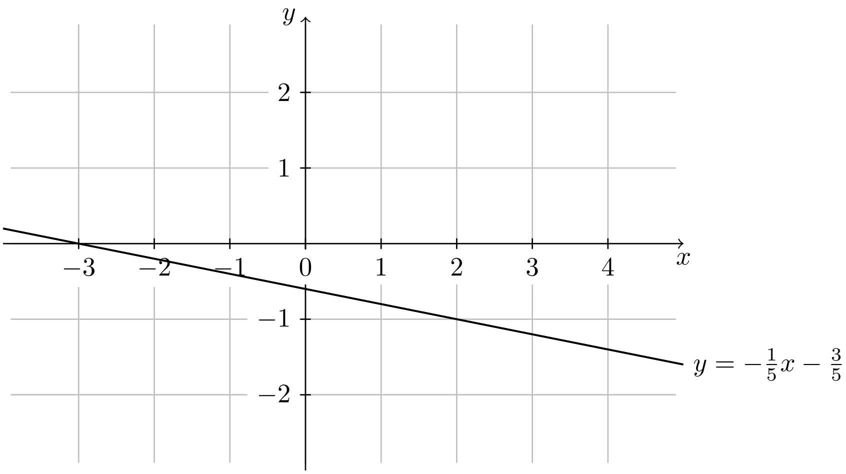


Abb. 13.23 Grafische Darstellung der Geradengleichung $y = -\frac{1}{5}x - \frac{3}{5}$

■

Gehen Sie zu Kapitel 14.5!

13.6 Punkt-Richtungs-Gleichung

Der Bruchterm auf der rechten Seite der Gleichung

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ist die Steigung der Geraden. Der Quotient aus der Differenz von zwei beliebigen y-Werten durch die Differenz der x-Werte, die zu den y-Werten im Zähler gehören, ergibt die Steigung der Geraden, die an allen Stellen gleich ist.

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$$

Die Gleichung der Geraden durch den gegebenen Punkt

$$P_1\,(x_1; y_1)$$

mit der Steigung m

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

lautet somit

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)\,.$$

Beispiel 13.22

$$
\begin{aligned}
P\,(-2;1)\,, \qquad m &= -\frac{1}{2} \\
\frac{y-1}{x-(-2)} &= -\frac{1}{2} \\
y - 1 &= -\frac{1}{2}\,(x+2) \\
y &= -\frac{1}{2}x
\end{aligned}
$$

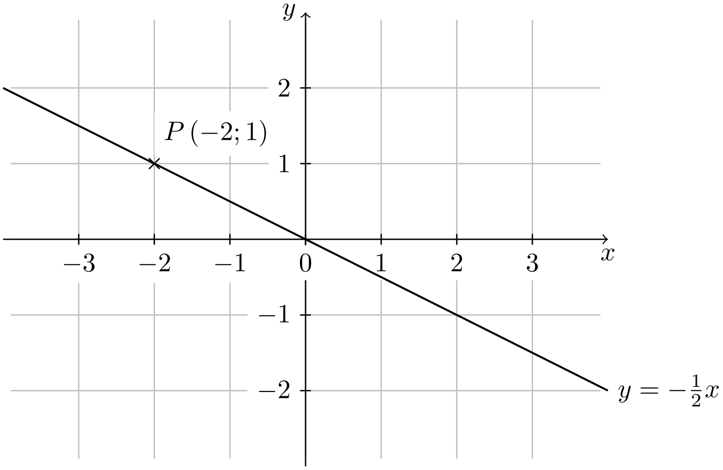


Abb. 13.24 Grafische Darstellung der Geradengleichung $y = -\frac{1}{2}x$ durch den Punkt $P\,(-2;1)$

■

Gehen Sie zu Kapitel 14.6!

13.7 Achsen-Abschnitts-Gleichung

Besonders gut eignet sich zur Darstellung einer Geraden durch ihr Schaubild die Achsenabschnittsform der Funktionsgleichung, weil die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sofort abzulesen sind (Abb. 13.25). Bei der Normalform

$$y = mx + n$$

kann nur der Schnittpunkt mit der y-Achse (n) unmittelbar abgelesen werden.

Die Achsenabschnittsform

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

ergibt für $x = 0$,

$$\frac{y}{b} = 1 \qquad \text{oder} \qquad y = b,$$

den Schnittpunkt mit der y-A6chse $(0; b)$ und für $y = 0$,

$$\frac{x}{a} = 1 \qquad \text{oder} \qquad x = a,$$

den Schnittpunkt mit der x-Achse $(a; 0)$. Umformung in die Normalform ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} &= 1 \\ \frac{y}{b} &= 1 - \frac{x}{a} \\ y &= b\left(-\frac{x}{a} + 1\right) \end{aligned}$$

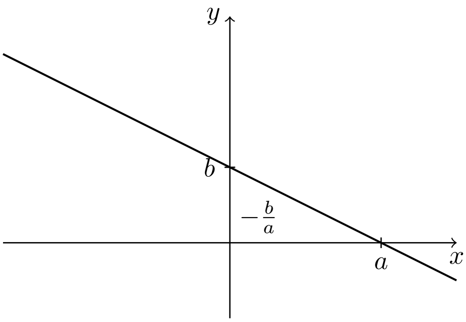


Abb. 13.25 Grafische Darstellung einer Geraden mit x-Achsen-Schnittpunkt $(a; 0)$ und y-Achsen-Schnittpunkt $(0; b)$

Gehen Sie zu Kapitel 14.7!

13.8 Quadratische Funktion

Die ganzrationale Funktion

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \qquad \text{mit} \quad a_n \neq 0$$

stellt für $n = 2$ eine quadratische Funktion dar.

$$y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \qquad \text{mit} \quad a_2 \neq 0$$

1. Für $a_2 = 1$ und $a_1 = a_0 = 0$ ergibt sich die Potenzfunktion

$$y = x^2,$$

deren Bild (Abb. 13.26) die *Normalparabel* genannt wird (nur als Hinweis: Schablonen für die Normalparabel gibt es im Schreibwarengeschäft).

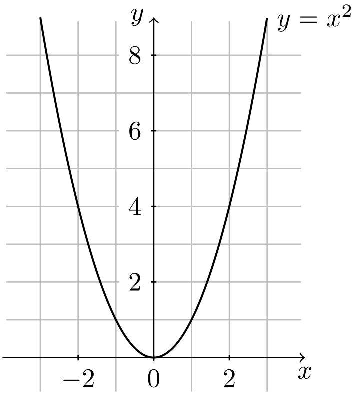


Abb. 13.26 Grafische Darstellung der Normalparabel $y = x^2$

2. Für $a_2 = 1$ und $a_0 \neq 0$ aber $a_1 = 0$ ergibt sich eine um a_0 in Richtung der y-Achse verschobene Normalparabel (Abb. 13.27).

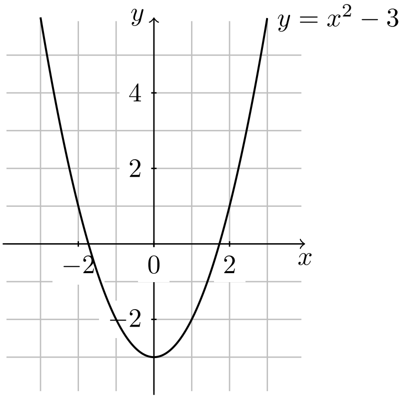


Abb. 13.27 Grafische Darstellung einer entlang der y-Achse verschobenen Normalparabel mit der Funktion $y = x^2 - 3$

3. Für $a_2 = 1$ und $a_1 \neq 0$ ist

$$y = x^2 + a_1 x + a_0$$

durch quadratische Ergänzung in

$$y = x^2 + a_1 x + \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 + a_0$$

oder

$$y = \left(x + \frac{a_1}{2}\right)^2 + a_0 - \left(\frac{a_1}{2}\right)^2$$

umzuformen. Diese Parabel ist eine verschobene Normalparabel, deren Scheitel im Punkt

$$S\left(-\frac{a_1}{2}; a_0 - \left(\frac{a_1}{2}\right)^2\right)$$

liegt.

Beispiel 13.23

$$\begin{aligned}
&y = x^2 + 4x + 5\\
&y = (x+2)^2 + 1\\
&S\,(-2; 1)
\end{aligned}$$

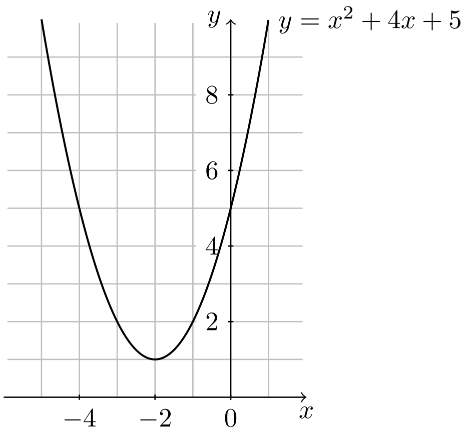


Abb. 13.28 Darstellung der verschobenen Normalparabel $y = x^2 + 4x + 5$

■

4. Der Koeffizient a_2 bewirkt eine Streckung oder Stauchung der Normalparabel und bei Vorzeichenwechsel eine Spiegelung an der x-Achse. Der Scheitelpunkt dieser Parabel (keine Normalparabel mehr) kann ebenso durch quadratische Ergänzung bestimmt werden.

Gehen Sie zu Kapitel 14.8!

13.9 Potenzfunktion

Besondere Bedeutung kommt der Funktion

$$y = ax^n$$

zu. Diese Funktion wird *Potenzfunktion* genannt. Der Exponent ist im Allgemeinen eine reelle Zahl. Aus der Erweiterung der Potenzdefinition folgt, dass sich für rationale Zahlen im Exponenten im Allgemeinen eine Wurzelfunktion ergibt.

1. Der Exponent ist eine rationale Zahl: *Wurzelfunktion* mit dem Definitionsbereich

   $$x > 0, \qquad \text{für negative Exponenten } \; x \neq 0.$$

   Beispiel 13.24

   $$n = \frac{3}{4}$$
   $$y = ax^{\frac{3}{4}} = a\sqrt[4]{x^3}, \qquad \text{für } \; x \geq 0$$

   Die Bilder dieser Funktion sin4d verallgemeinerte Halbparabeln. ■

2. Ist der Exponent eine negative ganze Zahl, so ist die Potenzfunktion eine echt gebrochene rationale Funktion, die für alle Werte $x \neq 0$ definiert ist.

   Beispiel 13.25

   $$n = -3$$
   $$y = ax^{-3} = \frac{a}{x^3}, \qquad \text{für } \; x \neq 0$$

   Die Bilder der Funktionen sind Hyperbeln. ■

3. Ist der Exponent eine natürliche Zahl $(n > 1)$, so ist die Potenzfunktion eine ganzrationale Funktion n-ten Grades.

   Beispiel 13.26

   $$n = 3$$
   $$y = ax^3$$

   Der Definitionsbereich dieser Funktion ist die Menge der reellen Zahlen, und die Funktionsbilder sind verallgemeinerte Parabeln. ■

Durch die reelle Zahl a wird eine Streckung oder Stauchung der Potenzfunktion bewirkt. Zunächst sei

$$a = 1.$$

Die Potenzfunktion

$$y = x^n$$

geht in jedem Fall durch den Punkt $(1; 1)$, da

$$1^n = 1$$

für alle reellen Zahlen festgesetzt ist.

Für $n > 0$ geht die Potenzfunktion durch den Punkt $(0; 0)$. Für $n < 0$ ist die Potenzfunktion für den x-Wert null nicht definiert.

Potenzfunktionen mit geradzahligem ganzen Exponenten sind gerade Funktionen. Die zugehörigen Funktionsbilder verlaufen axialsymmetrisch zur y-Achse.

Potenzfunktionen mit ungeradzahligem ganzen Exponenten sind ungerade Funktionen. Die zugehörigen Funktionsbilder verlaufen zentralsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

Beispiel 13.27
Gerade Funktion (Abb. 13.29):

$$y = x^4, \quad \text{also} \quad n = 4.$$

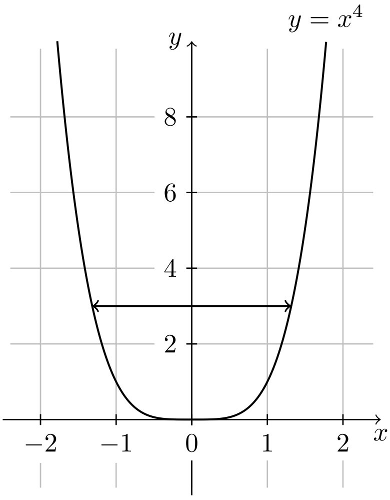


Abb. 13.29 Darstellung der Achsensymmetrie der Funktion $y = x^4$

■

Beispiel 13.28
Ungerade Funktion (Abb. 13.30):

$$y = \frac{1}{x}, \quad \text{also} \quad n = -1.$$

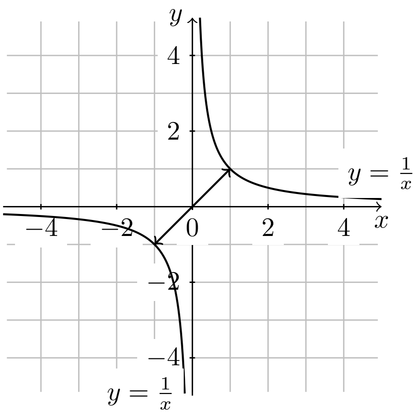


Abb. 13.30 Darstellung der Zentralsymmetrie der Funktion $y = \frac{1}{x}$

■

Ist in der Potenzfunktion

$$y = ax^n$$

- $a > 1$, so wird die Funktion in y-Achsenrichtung gestreckt,
- $0 < a < 1$, so wird die Funktion in y-Achsenrichtung gestaucht (bezogen auf die Vergleichsfunktion mit $a = 1$),
- $a < 0$, so erfolgt eine Spiegelung der Parabel mit positivem Vorzeichen an der x-Achse.

Gehen Sie zu Kapitel 14.9!

13.10 Wurzelfunktion

Wurzelfunktionen

$$y = \sqrt[n]{x}$$

sind die Umkehrfunktionen der Potenzfunktionen

$$y = x^n,$$

die für nichtnegative x-Werte definiert sind.

Da die Potenzfunktionen mit geradem Exponenten nicht im Gesamtverlauf eigentlich monoton sind, zerfällt der Definitionsbereich in zwei Intervalle, in denen die Funktion streng monoton fallend oder streng monoton wachsend ist. Zur Sicherung der Eindeutigkeit der Funktion wird bei geradem Wurzelexponenten zwischen zwei voneinander getrennten Funktionen unterschieden.

1. Die Funktion
$$y = \sqrt[2n]{x}$$
ergibt für $x \geq 0$ einen positiven Parabelast (es sind verallgemeinerte Halbparabeln, siehe auch Abschnitt 13.9 – Potenzfunktionen), der im I. Quadranten verläuft.

2. Der (negative) Parabelast
$$y = -\sqrt[2n]{x}$$
ergibt für $x \geq 0$ einen Parabelast, der im IV. Quadranten verläuft.

Für ungerade Wurzelexponenten wäre theoretisch eine eindeutige Wurzelfunktion zur Potenzfunktion
$$y = x^{2n+1}$$
anzugeben, da die Funktion im Gesamtbereich streng monoton wachsend verläuft. Die Wurzel aus einer negativen Zahl ist jedoch nicht definiert (im Bereich der reellen Funktionen), sodass auch Potenzfunktionen mit einem ungeraden Exponenten als Umkehrfunktion nur einen Parabelast besitzen. Bei Wurzelfunktionen ist zunächst erst einmal in jedem Fall der Definitionsbereich aus der Bedingung zu bestimmen, dass der Radikand nicht negativ wird.

Beispiel 13.29
Der Definitionsbereich der Funktion
$$y = -2 + \sqrt{x^2 - 9}$$
besteht aus der Menge der reellen Zahlen x mit $x \leq -3$ und $x \geq 3$. ■

Gehen Sie zu Kapitel 14.10!

13.11 Exponentialfunktion

Wenn $a > 0$ ist, hat die Exponentialfunktion

$$y = a^x$$

keine Einschränkungen für den Definitionsbereich in der Menge der reellen Zahlen. Somit definiert eine Exponentialfunktion eine eineindeutige Zuordnung zwischen der Menge der reellen Exponenten zu einer festen Basis und der Gesamtmenge der reellen Potenzwerte dieser Basis.

Für $a = 1$ ist diese Zuordnung nicht eineindeutig, aber eindeutig, denn

$$1^x = 1.$$

Der Wertebereich einer Exponentialfunktion

$$y = a^x, \qquad \text{mit} \quad a > 0 \quad \text{und} \quad a \neq 1$$

umfasst die Menge der positiven reellen Zahlen

$$0 < y < \infty.$$

Die Bilder der Exponentialfunktion

$$y = a^x, \qquad \text{mit} \quad a > 1$$

stellen streng monoton wachsende Funktionen dar. Für

$$0 < a < 1$$

sind die Funktionen streng monoton fallend. Die Bilder verlaufen im I. und II. Quadranten des Koordinatensystems. Die x-Achse ist für jede Exponentialfunktion

$$y = a^x, \qquad \text{mit} \quad a > 0 \quad \text{und} \quad a \neq 1$$

Asymptote.

Alle Exponentialfunktionen

$$y = a^x, \qquad \text{mit} \quad a > 0$$

schneiden die y-Achse im Punkt $(0; 1)$.

$$y = a^0 = 1, \qquad \text{mit} \quad a > 0.$$

Beispiel 13.30

Zeitgesetz des radioaktiven Zerfalls – n ist die von der Zeit abhängige (veränderliche) Anzahl der zur Zeit t noch nicht zerfallenen Atome.

$$n = n\,(t)$$
$$n = n_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

Weiterhin bedeuten hierbei:

n_0 die Anzahl der zu einem willkürlich festgesetzten Zeitpunkt null noch nicht zerfallenen Atome,

e die Basis des natürlichen Logarithmus, eine irrationale Zahl $(\mathrm{e} \approx 2{,}718\ldots)$,

λ die für das betreffende Isotop spezifische Zerfallskonstante,

t der seit dem Zeitpunkt Null gemessene (veränderliche) Zeitabschnitt.

Aus

$$n = \frac{n_0}{2}$$

ergibt sich die sogenannte Halbwertszeit T (die Zeit, nach der die Hälfte der ursprünglich vorhandenen Teile zerfallen ist).

$$\frac{n_0}{2} = n_0 \mathrm{e}^{-\lambda \cdot t}$$
$$T = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

■

Weitere Beispiele für Exponentialfunktionen sind in den Abbildungen 13.31 und 13.32 dargestellt.

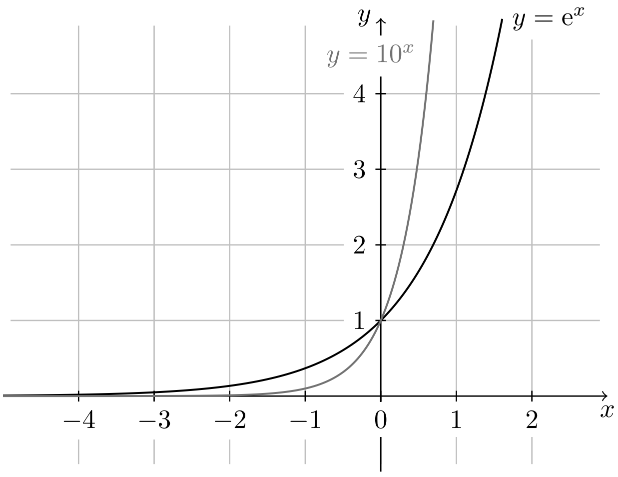


Abb. 13.31 Beispiele für Exponentialfunktionen

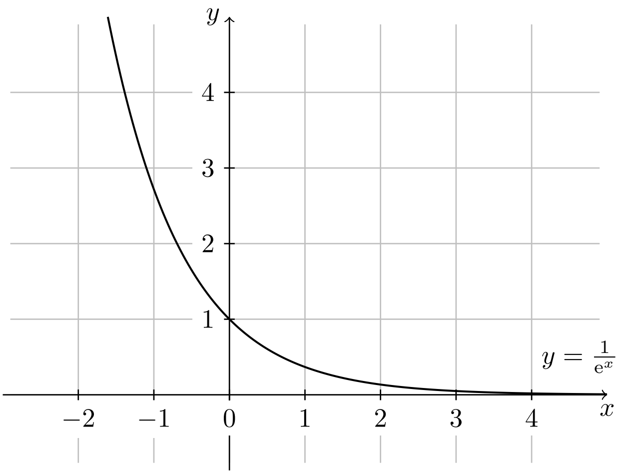


Abb. 13.32 Beispiel einer Exponentialfunktion

Gehen Sie zu Kapitel 14.11!

13.12 Logarithmusfunktion

Die Exponentialfunktion $y = a^x$ ist für $a > 0$, $a \neq 1$ streng monoton. Somit besitzt sie eine eindeutig bestimmte Umkehrfunktion.

1. Schritt: Auflösung nach x

$$\log_a(y) = \log_a a^x$$
$$x = \log_a(y), \qquad \text{mit} \quad a > 0 \quad \text{und} \quad a \neq 1.$$

Der Definitionsbereich der Exponentialfunktion $x \in \mathbb{R}$ wird zum Wertebereich der Logarithmusfunktion $y \in \mathbb{R}$. Zum Wertebereich der Logarithmusfunktion gehören somit alle reelle Zahlen.

Der Wertebereich der Exponentialfunktion $y > 0$ wird zum Definitionsbereich der Logarithmusfunktion $x > 0$. Die Logarithmusfunktion ist ausschließlich für positive Werte des Argumentes definiert (ohne Null).

2. Schritt: Vertauschung von x und y

$$y = \log_a(x), \qquad \text{für} \quad a > 0 \quad \text{und} \quad a \neq 1 \quad \text{und} \quad x > 0.$$

Wie in Abbildung 13.33 dargestellt, liegen die Bilder von

$$y = a^x$$

und

$$y = \log_a(x)$$

in axialer Symmetrie zur Achse

$$y = x,$$

die den I. und III. Quadranten des Koordinatensystems halbiert.

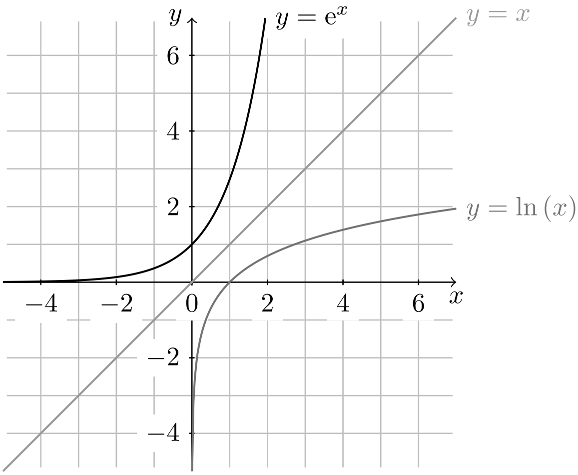


Abb. 13.33 Beispiel einer Exponentialfunktion und ihrer Umkehrfunktion

Haben Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen die gleiche Basis, so sind sie zueinander invers.

Eigenschaften der Logarithmusfunktionen (verschiedener Basen $a > 1$) sind:

1. Für $a > 1$ sind alle Logarithmusfunktionen im gesamten Definitionsbereich $x > 0$ streng monoton wachsend.

2. Die y-Achse ist Asymptote für alle Kurven der Logarithmusfunktion $y = \log_a(x)$, mit $a > 1$.

3. Je kleiner a ist, umso steiler steigt die Kurve der Funktion für $x > 1$, umso langsamer schmiegen sich die Kurven für $x < 1$ an die Asymptote (y-Achse) an.

4. Alle Logarithmusfunktionen gehen durch den Punkt $(1; 0)$.

5. Logarithmusfunktionen

$$y = \log_a(x)$$

   verlaufen mit $a > 1$ und $x > 0$ im IV. Quadranten und I. Quadranten des Koordinatensystems.

Gehen Sie zu Kapitel 14.12!

13.13 Arithmetische Folgen

Eine Zahlenfolge mit einer konstanten Differenzenfolge ist eine arithmetische Folge. Anders ausgedrückt: *Die Differenz zwischen zwei Nachbargliedern ist konstant.*

$$x_n - x_{n-1} = d$$

Für alle n ist d konstant. Daraus ergibt sich die rekursive Darstellung einer arithmetischen Zahlenfolge:

$$x_n = x_{n-1} + d$$

Um zum nachfolgenden Glied zu kommen, ist zum vorangegangenen Glied der Wert der konstanten Differenz zu addieren. Die Darstellung der arithmetischen Zahlenfolge lautet:

$$\begin{array}{llllll}
x_1, & x_1+d, & x_1+2d, & x_1+3d, & \ldots, & x_1+(n-1)\,d, \; \ldots \\
 & x_2\;, & x_2+\;d, & x_2+2d, & \ldots, & x_n \qquad\;\; , \; \ldots \\
 & & x_3\;, & x_3+\;d, & \ldots, & x_n \qquad\;\; , \; \ldots \\
 & & & x_4\;, & \ldots, & x_n \qquad\;\; , \; \ldots
\end{array}$$

Somit lautet die unabhängige Darstellung der arithmetischen Zahlenfolge mit dem Anfangsglied x_1 und der konstanten Differenz:

$$x_n = x_1 + (n-1)\,d.$$

Für die n-te Partialsummenfolge ergibt sich:

$$\begin{array}{rl}
s_n = & x_1 + x_1 + d + \ldots + x_1 + (n-2)d + x_1 + (n-1)d \\
+\; s_n = & x_1 + (n-1)d + x_1 + (n-2)d + \ldots + x_1 + d + x_1 \\
\hline
2s_n = & 2x_1 + (n-1)d + 2x_1 + (n-1)d + \ldots + 2x_1 + (n-1)d + 2x_1 + (n-1)d
\end{array}$$

Nach Zusammenfassen folgt:

$$\begin{aligned}
2s_n &= n\,[2x_1 + (n-1)\,d] \\
s_n &= \frac{n}{2}\,[x_1 + x_1 + (n-1)\,d] \\
s_n &= \frac{n}{2}\,(x_1 + x_n)
\end{aligned}$$

Einfacher ist der Beweis durch vollständige Induktion.

Für

$$d > 0$$

ist die arithmetische Folge monoton wachsend, für

$$d < 0$$

monoton fallend und für

$$d = 0$$

eine konstante Folge.

Beispiel 13.31
Die Summe aller durch 7 teilbaren Zahlen zwischen 10 und 1 000 ergibt sich mit

$$d = 7, \qquad x_1 = 14, \qquad x_n = 994$$

$$\begin{aligned} x_n &= x_1 + (n-1)\,d \\ n &= \frac{x_n - x_1}{d} + 1 = \frac{994 - 14}{7} + 1 = 141 \\ s_n &= \frac{141}{2}\,(14 + 994) = 71\,064 \end{aligned}$$

■

Bestimmungsgrößen einer arithmetischen Zahlenfolge sind :

$$x_1, \quad d, \quad x_n, \quad n, \quad s_n$$

Zur Berechnung gibt es nur zwei unabhängige Formeln:

$$\begin{aligned} x_n &= x_1 + (n-1)\,d \\ s_n &= \frac{n}{2}\,(x_1 + x_n) \end{aligned}$$

Gehen Sie zu Kapitel 14.13!

13.14 Geometrische Folgen

Eine Zahlenfolge mit konstanter Quotientenfolge ist eine *geometrische Folge.* Anders ausgedrückt: Der Quotient zwischen zwei benachbarten Glieder ist bei einer geometrischen Zahlenfolge konstant:

$$q = \frac{x_n}{x_{n-1}}$$

gilt für alle Gliednummern n. Die rekursive Darstellung der geometrischen Zahlenfolge lautet:

$$x_n = q x_{n-1}.$$

Um zum nachfolgenden Glied einer geometrischen Zahlenfolge zu kommen, ist das vorhergehende mit dem konstanten Quotienten zu multiplizieren. Die Darstellung der geometrischen Zahlenfolge lautet demzufolge:

$$x_1, \; x_1 q, \; x_1 q^2, \ldots, \; x_1 q^{n-1}, \ldots.$$

Somit ergibt sich für die unabhängige Darstellung das allgemeine Glied einer geometrischen Zahlenfolge:

$$x_n = x_1 q^{n-1}$$

Für	$q > 1$	ist eine geometrische Zahlenfolge monoton wachsend.
Für	$q = 1$	ist eine geometrische Zahlenfolge konstant.
Für	$0 < q < 1$	ist eine geometrische Zahlenfolge monoton fallend.

Für das n-te Glied der Partialsummenfolge gilt:

$$s_n = x_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \qquad \text{oder} \qquad s_n = x_1 \frac{1 - q^n}{1 - q},$$

für $q \neq 1$ – also keine konstante Folge vorausgesetzt.

Beweis durch vollständige Induktion:

1. Induktionsanfang:
   Für $n = 1$ ist $s_1 = x_1$.

2. Induktionsschritt:

   a) Induktionsannahme: Für $n = k$ gilt:

   $$s_k = x_1 \frac{q^k - 1}{q - 1}$$

   b) Induktionsbeweis:

   $$\begin{aligned} s_{k+1} = s_k + x_{k+1} = x_1 \frac{q^k - 1}{q - 1} + x_1 q^k &= x_1 \frac{q^k - 1 + q^k (q - 1)}{q - 1} \\ &= x_1 \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1} \qquad q.e.d. \end{aligned}$$

   c) Induktionsschluss:

   $$s_n = x_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

   gilt für alle natürlichen Zahlen n $(q \neq 1)$.

Die Bestimmungsgrößen einer geometrischen Zahlenfolge sind:

$$x_1, \;\; q, \;\; x_n, \;\; n, s_n.$$

Für die Bestimmung gibt es zwei voneinander unabhängige Gleichungen.

$$\begin{aligned} x_n &= x_1 \cdot q^{n-1} \\ s_n &= x_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, \qquad \text{für} \quad q \neq 1 \end{aligned}$$

Beispiel 13.32
Von einer geometrischen Zahlenfolge sind bekannt:

$$x_1 = 0{,}2, \quad q = 3, \quad s_n = 656.$$

Zu berechnen sind:

$$x_n \quad \text{und} \quad n$$

$$\begin{aligned}
s_n &= x_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{x_1 q^{n-1} q - x_1}{q - 1} = \frac{x_n q - x_1}{q - 1} \\
x_n &= \frac{s_n (q-1) + x_1}{q} = \frac{1\,312{,}2}{3} = 437{,}4 \\
x_n &= x_1 q^{n-1} \\
\lg(x_n) &= \lg\left(x_1 q^{n-1}\right) = \lg(x_1) + \lg\left(q^{n-1}\right) \\
(n-1) &= \frac{\lg(x_n) - \lg(x_1)}{\lg(q)} \\
n &= \frac{\lg \frac{x_n}{x_1}}{\lg(q)} + 1 = \frac{\lg(2\,187)}{\lg(3)} + 1 = 8
\end{aligned}$$

■

Anwendungen geometrischer Zahlenfolgen:

1. Vorzugszahlen (im Ingenieurswesen)
   Abmessungen von Werkstücken sind in der Industrie nach Vorzugszahlen gestuft. Der Stufung liegt eine geometrische Zahlenfolge zugrunde, die nach der gewünschten Feinheit der Unterteilung zwischen zwei benachbarten Zehnerpotenzen Zwischenwerte standardisiert.

   Benachbarte Werte dieser Stufung haben einen konstanten Quotienten. Beispiel für eine Zehner-Stufung (Zwischenschaltung von neun Werten):

   $$q = \sqrt[10]{10} \approx 1{,}259$$

   R10: 1,00 1,25 1,60 2,00 2,50 3,15 4,00 5,00 6,30 8,00 10,00

2. Zinseszinsrechnung (in der Wirtschaft)
   Wird ein Kapital G_0 mit einem Zinssatz von p % verzinst, so erhöht sich sein Wert nach einem Jahr auf:

   $$G_1 = G_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

   Der Wert nach zwei Jahren ergibt sich aus dem Kapital, den Zinsen und den Zinsen für die Zinsen.

   $$G_2 = G_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(1 + \frac{p}{100}\right) = G_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$$

Nach n-Jahren hat sich das Kapital G_0 durch Zinsen und Zinseszinsen auf den Wert

$$G_n = G_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

erhöht.

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right) = k$$

wird als Zinsfaktor bezeichnet.

Beispiel 13.33

Auf welchen Wert wächst ein Kapital, das mit einem Zinssatz von 7,25 % acht Jahre auf Zinseszins liegt?

$$G_8 = G_0 \cdot 1{,}0725^8 \approx G_0 \cdot 1{,}7506$$

Das Kapital erhöht sich um den Faktor 1,75 (175 %). Ein Kapital von 1 000 € erreicht demzufolge den Wert von 1 750 € nach acht Jahren. ■

Beispiel 13.34

Wie hoch ist ein Kapital gewesen, das nach elf Jahren durch Zins und Zinseszins bei 6,2 % auf einen Wert von 20 340 € gewachsen ist?

$$G_0 = \frac{G_{11}}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{11}} = \frac{20\ 340}{1{,}062^{11}} = 10\ 495\,€$$

Das Anfangskapital betrug 10 495 €. ■

Beispiel 13.35

Zu welchem Zinssatz wird ein Kapital von 5 000 € verliehen, wenn nach vier Jahren 8 000 € zurückzuzahlen sind?

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right) = \sqrt[n]{\frac{G_n}{G_0}}$$

$$p = \left(\sqrt[4]{\frac{8\ 000}{5\ 000}} - 1\right) \cdot 100$$

$$p \approx 12{,}5\ \%$$

Der Zinssatz beträgt knapp 12,5 %. ■

Beispiel 13.36

Nach welcher Zeit verdoppelt sich ein Kapital bei einem Zinssatz von 7,5 %?

$$2 \cdot G_0 = G_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

$$n = \frac{\ln(2)}{\ln\left(1 + \frac{p}{100}\right)} = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}075)}$$

$$n \approx 9{,}58$$

Nach zehn Jahren hat sich das Kapital verdoppelt. ■

Weitere Anwendungsgebiete für die geometrische Zahlenfolge sind die Amplitudenwerte bei einer gedämpften Schwingungen, bei einer stufenweisen Verdünnung einer Lösung, beim dynamischen Zuwachs (biologischem Zuwachs) usw.

Gehen Sie zu Kapitel 14.14!

14 Übungsaufgaben Analysis I

Übersicht

14.1 Einteilung der Funktionen

1. Die folgenden Funktionen sind zu bezeichnen und der Definitionsbereich anzugeben.

   a) $y = \sqrt{9 - x^2}$

   b) $y = 3x^2 - 4x + 7$

   c) $y = \ln\left(x^2 - 1\right)$

   d) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

   e) $y = \mathrm{e}^{3x+4}$

G. Höfner, *Mit Selbsttests gezielt Mathematik lernen*,
DOI 10.1007/978-3-662-52963-8_14

2. Die unecht gebrochen rationalen Funktionen sind in eine Summe von ganzrationaler Funktion und echt gebrochener zu verwandeln.

   a) $y = \dfrac{x^3 - 2x + 1}{x}$

   b) $y = \dfrac{x^5 - x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 3x - 3}{x^3 - 2x^2 + 3x + 1}$

   c) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

Gehen Sie zu Kapitel 15.1!

14.2 Darstellung der Funktionen

1. Aus der folgenden Tabelle ist durch lineare Interpolation der Funktionswert für $x = 58{,}4$ der Funktion

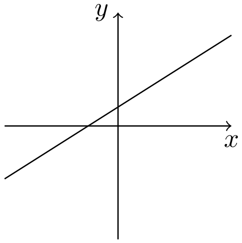
$$f(x) = \frac{\pi \cdot x^\circ}{180^\circ}$$

   und der x-Wert für $f(x) = 1{,}026$ näherungsweise anzugeben.

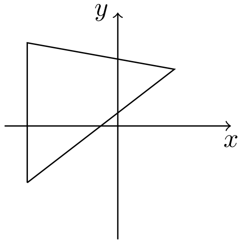
x	$\cdots$	58	59	$\cdots$
$f(x)$	$\cdots$	1,1012	1,030	$\cdots$

2. Welche der angegebenen Kurvenzüge sind eine grafische Darstellung einer Funktion?

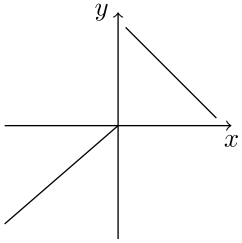
a)



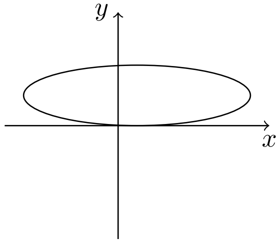
b)



c)



d)



3. Die explizite Form der Funktionsdarstellung ist anzugeben.

$$x^y = \frac{a}{b} \quad \text{mit} \begin{cases} x > 0, & b > 0 \\ x \neq 1, & a > 0 \end{cases}$$

4. Die Parameterdarstellung der Funktionen sind grafisch darzustellen.

   a) $x = 2t, \qquad y = \dfrac{t}{t-1}, \qquad t \neq 1$

   b) $x = t - 2, \qquad y = 1 + t^2$

   c) $x = 2\cos(t), \qquad y = 2\sin(t), \qquad 0 \leq t \leq \pi$

5. In den (Aufgabe 4) angegebenen Darstellungen ist der Parameter herauszulösen (zu eliminieren).

Gehen Sie zu Kapitel 15.2!

14.3 Allgemeine Eigenschaften der Funktionen

1. In welchen Intervallen sind die folgenden Funktionen streng monoton?

   a) $y = x^5$

   b) $y = 3x^2 - 2x + 1$

   c) $y = \mathrm{e}^{2x-1}$

2. Welche Funktionen sind gerade, ungerade oder periodisch? Bei periodischen Funktionen ist die primitive Periode festzulegen.

   a) $y = \sin(x)$

b) $y = 4\cos(x)$

c) $y = \tan(x)$

d) $y = x^2 - 3$

e) $y = \ln|2x - 1|$

f) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

g) $y = x^3 - x + 3$

h) $y = \dfrac{1}{x^3}$

3. Wenn möglich, ist die Umkehrfunktion oder sind die Umkehrfunktionen für Monotonieintervalle zu bestimmen.

   a) $y = 2x - 5$

   b) $y = x^2 + 4x - 2$

   c) $y = \cos(x)$

Gehen Sie zu Kapitel 15.3!

14.4 Normalform – lineare Funktion

1. Stellen Sie die Funktionen mithilfe eines geeigneten Steigungsdreiecks dar.

   a) $y = \dfrac{3}{5}x$ b) $y = -\dfrac{1}{3}x$ c) $y = \dfrac{2}{7}x$

2. Durch welche Quadranten des Koordinatensystems verlaufen die Schaubilder von folgenden linearen Funktionen?

   a) $y = 2x$ b) $y = x + 1$ c) $y = -10$

3. Zeichnen Sie die Schaubilder der folgenden Funktionen.

   a) $y = \dfrac{3}{4}x + 2$ b) $y = \dfrac{2}{3}x - 1$ c) $y = -x + 3{,}5$

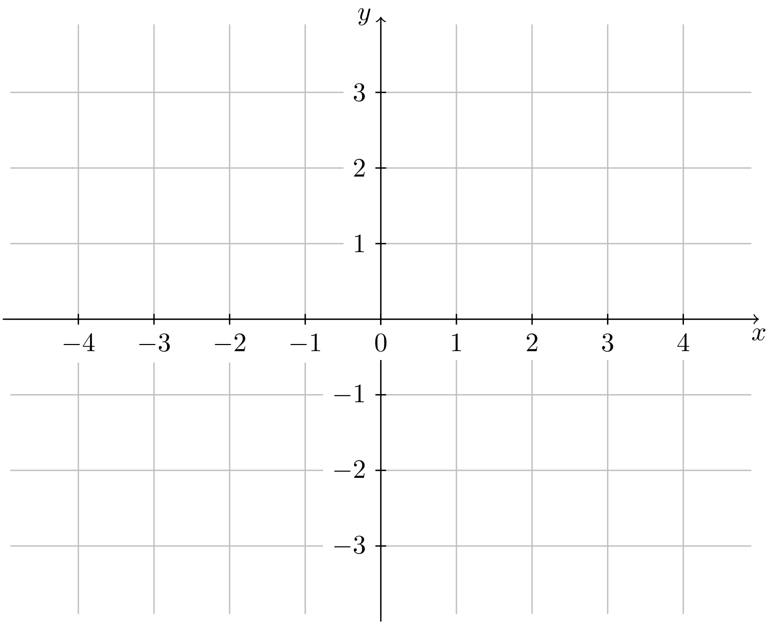


Abb. 14.1 Koordinatensystem für die Lösung der 1. Aufgabe

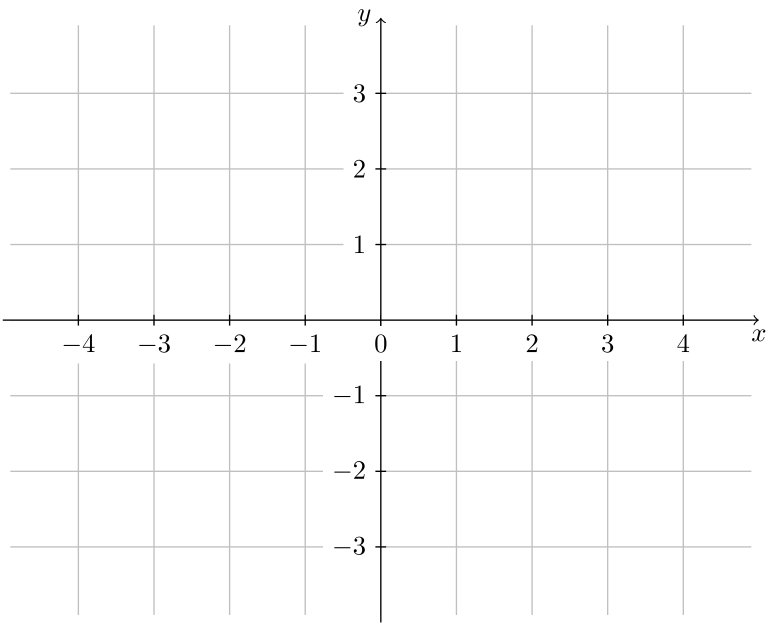


Abb. 14.2 Koordinatensystem für die Lösung der 2. Aufgabe

Gehen Sie zum Vergleich der Lösungen zu Kapitel 15.4!

14.5 Zwei-Punkte-Gleichung

1. Sind folgende, durch zwei Punkte festgelegte lineare Funktionen eigentlich monoton?

   a) $P_1\,(0;2)\,,\quad P_2\,(2;3)$

   b) $P_1\,(-1;1)\,,\quad P_2\,(1;0)$

   c) $P_1\,(-5;4)\,,\quad P_2\,(3;4)$

2. Wie heißen die Funktionsgleichungen der linearen Funktionen durch die beiden Punkte?

   a) $P_1\,(2;-3)\,,\quad P_2\,(1;-2)$

   b) $P_1\,(0;1)\,,\quad P_2\,(-1;1)$

   c) $P_1\,(-1;2)\,,\quad P_2\,(3;-2)$

3. Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen der Funktionen a), b) und c).

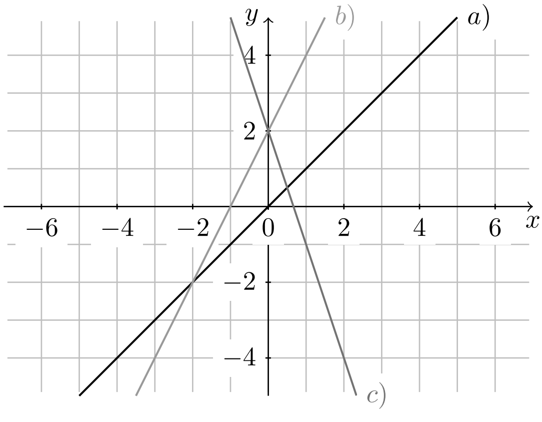


Abb. 14.3 Darstellung verschiedener Geradengleichungen

Gehen Sie zum Vergleich der Lösungen zu Kapitel 15.5!

14.6 Punkt-Richtungs-Gleichung

1. Bestimmen Sie die Steigung der Geraden durch die folgenden Punkte.

   a) $P_1\,(-1;0)\,, \qquad P_2\,(2;0)$

   b) $P_1\,(3;-2)\,, \qquad P_2\,(-5;4)$

   c) $P_1\,(1;0)\,, \qquad P_2\,(-3;-2)$

2. Wie heißen die Funktionsgleichungen der Geraden durch den Punkt P mit der Steigung m?

   a) $P\,(2;0)\,, \qquad m = 2$

   b) $P\,(3;-2)\,, \qquad m = -1{,}5$

   c) $P\,(0;4)\,, \qquad m = -6{,}5$

3. Bestimmen Sie den Schnittpunkt mit der y-Achse und die Steigung der folgenden Geraden.

   a) $3x + y = 2$

   b) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = \dfrac{1}{6}$

   c) $3y + 9x = 3$

Gehen Sie zum Vergleich der Lösungen zu Kapitel 15.6!

14.7 Achsen-Abschnitt-Gleichung

Bestimmen Sie die Achsenabschnittsform und stellen Sie die zugehörigen Geraden in einem Koordinatensystem dar.

1. $2x + y = 2$

2. $3x + 5y = 15$

3. $y + 2x = 3$

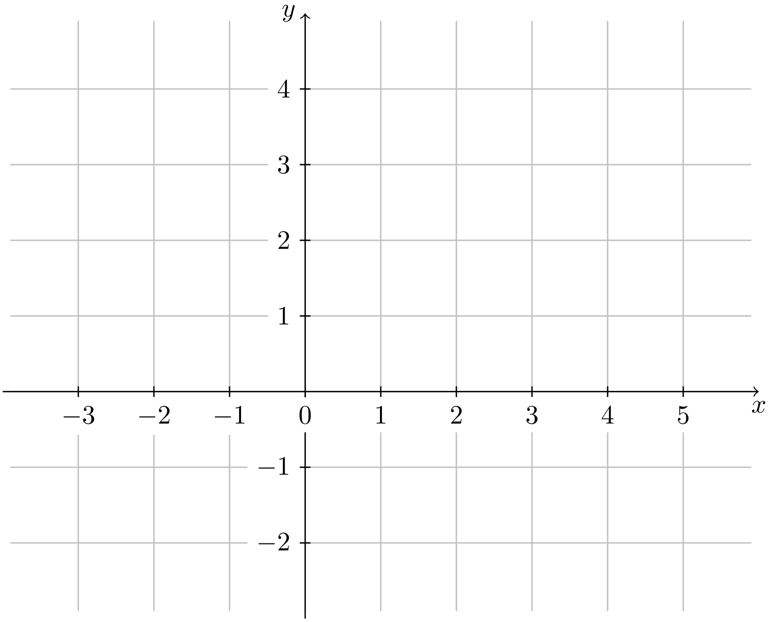


Abb. 14.4 Koordinatensystem für die Lösung

Gehen Sie zu Kapitel 15.7!

14.8 Quadratische Funktionen

1. Es ist grafisch darzustellen:

$$y = x^2 - 3!$$

2. Wie heißt die Funktionsgleichung einer Normalparabel mit den Scheitelpunktkoordinaten $S\,(2;1)$?

3. Wo liegt der Scheitel der Parabel

$$y = (x-5)^2 + 1?$$

4. Wo liegt der Scheitel der Parabel

$$y = x^2 - x - 6?$$

5. In einem einzelnen Koordinatensystem sind die folgenden Funktionsgraphen darzustellen.

   a) $y = x^2$

   b) $y = 2x^2$

   c) $y = \frac{1}{3}x^2$

   d) $y = -x^2$

Gehen Sie zu Kapitel 15.8!

14.9 Potenzfunktionen

Es sind die folgenden Potenzfunktionen

$$y = ax^n$$

in dem angegebenen Intervall darzustellen (möglichst auf Millimeterpapier).

1. $a = 1, \qquad n = 3, \qquad x \in [-2; 2]$

2. $a = 1, \qquad n = -2, \qquad x \in [-3; 3]$

3. $a = \frac{1}{2}, \qquad n = 2, \qquad x \in [-4; 4]$

4. $a = 2, \qquad n = -1, \qquad x \in [-3; 3], \qquad x \neq 0$

5. Die beiden Äste der Neil'schen Parabel

   $y = x\sqrt{x}$

   und $y = -x\sqrt{x}$

   sind für $x \geq 0$ darzustellen (implizite Form: $y^2 = x^3$)

Gehen Sie zu Kapitel 15.9!

14.10 Wurzelfunktion

1. Der Definitionsbereich ist zu bestimmen.

   a) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

b) $y = \sqrt{x^2 - 1}$

c) $y = \sqrt[3]{x - 3}$

d) $y = 1 + \sqrt{16 - x^2}$

e) $y = 4 - \sqrt{5 - x}$

2. Das Bild der Funktion
$$y = \sqrt[4]{x}$$
als Umkehrfunktion zu
$$y = x^4$$
ist im Bereich
$$0 \leq x \leq 16$$
zu zeichnen.

3. Aus dem Gesetz des freien Falls ergibt sich für die Ausflussgeschwindigkeit v einer Flüssigkeit aus einem Gefäß bei Vernachlässigung der Reibung die Beziehung in Abhängigkeit zur Höhe der Flüssigkeit:
$$v = \sqrt{2gh}, \qquad \text{mit } g \approx 10 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$
   a) Das Bild der Funktion ist im Bereich $0 \leq h \leq 2$ (Meter) zu zeichnen.
   b) Aus dem Bild ist abzulesen, wie sich die Ausflussgeschwindigkeit verändert, wenn die Flüssigkeitshöhe auf die Hälfte abgenommen hat.

Gehen Sie zu Kapitel 15.10!

14.11 Exponentialfunktion

1. In einem Koordinatensystem sind darzustellen:
$$y = 10^x \quad \text{und} \quad y = \frac{1}{10^x}, \qquad \text{für } -2 \leq x \leq 2.$$

2. In welcher Beziehung stehen die Bilder der Funktion:
$$y = a^x \quad \text{und} \quad y = \frac{1}{a^x}, \qquad \text{mit } a > 0 \text{ und } a \neq 1$$
zueinander ?

3. Die Exponentialfunktionen sind grafisch darzustellen.

   a) $y = 3^x$

   b) $y = 0{,}8 \cdot 5^x$, der Wertebereich ist anzugeben.

   c) $y = \left(\frac{3}{4}\right)^{-x} + 5$, der Wertebereich ist anzugeben.

Gehen Sie zu Kapitel 15.11!

14.12 Logarithmusfunktion

1. Bestimmen Sie die inversen Funktionen!

   a) $y = \mathrm{e}^x$

   b) $y = 10^x$

   c) $y = 2^x$

2. Stellen Sie die folgenden Funktionen in einem Koordinatensystem dar!

   a) $y = 2^x$

   b) $y = \mathrm{ld}\,(x)$

3. Der Definitionsbereich ist zu bestimmen.

   a) $y = 3 \cdot \ln\left(x^2\right)$

   b) $y = 2 \cdot \ln|3x - 1|$

   c) $y = \ln(3x - 1)$

Gehen Sie zu Kapitel 15.12!

14.13 Arithmetische Folgen

1. Von einer arithmetischen Zahlenfolge sind bekannt:

$$d = 2, \quad x_{10} = 13, \quad s_n = 315.$$

   Zu berechnen sind x_n, x_1 und n.

2. Bei der Bohrung eines Brunnens sind die Kosten auf jeweils 50 cm Tiefe bezogen und dadurch festgelegt, dass die ersten 50 cm Tiefe Kosten von 1,80 €, die zweiten 2,5 € und jeder folgende halbe Meter Tiefe jeweils 70 ct mehr als der vorangegangene halbe Meter kostet.
   a) Wie hoch sind die Kosten, wenn die Bohrung von 12,50 m auf 13,00 m erweitert werden muss?
   b) Wie hoch sind die Gesamtkosten für eine Bohrung von 20 m Tiefe?
   c) Wie tief kann die Bohrung erfolgen, wenn insgesamt 100 € aufgewendet werden können. Wie viel Geld bleibt als Rest übrig?

3. Eine Spule mit einem Durchmesser von 1,5 cm und einer Länge von 4 cm soll aus Draht mit dem Durchmesser von 0,5 mm gewickelt werden.
   a) Wie viel Draht geht auf die n-te Wicklungslänge?
   b) Wie viel Draht wird insgesamt für n Wicklungen benötigt?

Gehen Sie zu Kapitel 15.13!

14.14 Geometrische Folgen

1. Von einer geometrischen Folge sind bekannt:
$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad q = 2, \quad x_n = 64.$$
   Zu berechnen sind:
$$n \quad \text{und} \quad s_n$$

2. Eine Drehmaschine soll elf Drehzahlstufungen mit konstantem Stufensprung aufweisen. Die niedrigste hat den Wert von 130 Umdrehungen pro Minute und die höchste 1 300 Umdrehungen pro Minute. Wie lauten die Stufenzahlen?

3. Nach fünf Jahren wurde ein Zuwachs um 20 % im verfügbaren Einkommen erreicht. Wie hoch ist der durchschnittliche jährliche Zuwachs?

4. Nach welcher Zeit verdreifacht sich ein Geldbetrag, der mit 8,5 % auf Zinseszins steht?

5. In einer Flasche mit einem Fassungsvermögen von 0,7 Litern befindet sich 40-%-iger Alkohol. Wie oft können aus der Flasche 0,02 Liter entnommen und mit Wasser aufgefüllt werden, sodass der Alkoholgehalt noch über 32 % liegt?

Gehen Sie zu Kapitel 15.14!

15 Lösungen zu den Übungsaufgaben Analysis I

Übersicht

15.1 Einteilung der Funktionen

1. a) Nichtrationale aber algebraische Funktion – Wurzelfunktion. $D = [-3; 3]$

   b) Ganz rationale Funktion zweiten Grades, quadratische Funktion. $D = \mathbb{R}$ – Definitionsbereich ist die Menge der reellen Zahlen (ohne Ausnahme).

   c) Nichtrationale Funktion oder transzendente Funktion, Logarithmusfunktion. $D = \{x;\ \text{mit}\ |x| > 1\}$ – Definitionsbereich sind alle reellen Zahlen, deren Betrag größer ist als eins.

   d) Gebrochen rationale Funktion (unecht gebrochen), definiert für alle reellen Zahlen mit Ausnahme von null ($x \neq 0$) $D = \mathbb{R}/\,\{0\}$.

G. Höfner, *Mit Selbsttests gezielt Mathematik lernen*,
DOI 10.1007/978-3-662-52963-8_15

e) Nichtrationale Funktion oder transzendente Funktion. $D = \mathbb{R}$ – Definitionsbereich ist die Menge der reellen Zahlen (ohne Ausnahme).

2. a) $y = \dfrac{x^3 - 2x + 1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad y = x^2 - 2 + \dfrac{1}{x}$

   ist eine echt gebrochene rationale Funktion.

   b) $$y = \frac{x^5 - x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 3x - 3}{x^3 - 2x^2 + 3x + 1}$$
   $$\Leftrightarrow \quad y = x^2 + x + 2 + \frac{2x^2 - 4x - 5}{x^3 - 2x^2 + 3x + 1}$$

   ist eine echt gebrochene rationale Funktion.

   c) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ ist eine echt gebrochen rationale Funktion.

Gehen Sie zu Kapitel 11.2!

15.2 Darstellung der Funktionen

1. $f\,(58{,}4) = 1{,}019$

   $f\,(58{,}8) = 1{,}026$

2. a) Funktionskurve

   b) keine Funktionskurve

   c) Funktionskurve

   d) keine Funktionskurve

3. $y = \log_x \dfrac{a}{b}$ oder $y = \dfrac{\ln(a) - \ln(b)}{\ln(x)}$, mit $x > 0$ und $x \neq 1$

4. a) Grafische Lösung:

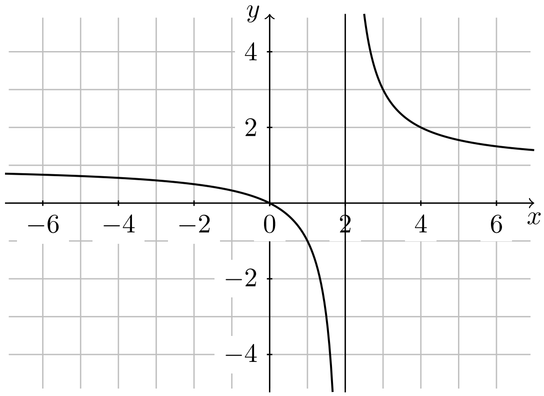


Abb. 15.1 Parameterdarstellung der Funktionen $x = 2t$ und $y = \frac{t}{t-1}$ für $t \neq 1$

b) Grafische Lösung:

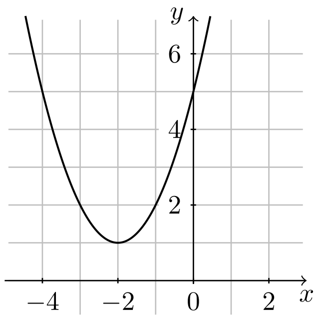


Abb. 15.2 Parameterdarstellung der Funktionen $x = t - 2$ und $y = 1 + t^2$

c) Grafische Lösung:

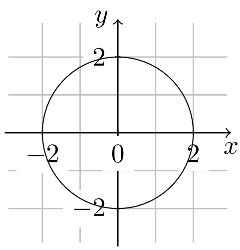


Abb. 15.3 Parameterdarstellung der beiden Funktionen $x = 2\cos(t)$ und $y = 2\sin(t)$ für $0 \leq t \leq \pi$

5. a) $y = \dfrac{x}{x-2} \qquad x \neq 2$

b) $y = (x+2)^2 + 1, \qquad x \in \mathbb{R} \qquad$ oder $\qquad y = x^2 + 4x + 5$

c) $x^2 + y^2 = 4, \qquad$ mit $\quad \sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$

Gehen Sie zu Kapitel 11.3!

15.3 Allgemeine Eigenschaften der Funktionen

1. a) Im gesamten Definitionsbereich ist die Funktion streng monoton wachsend.

   b) Für $x \begin{cases} \leq \frac{1}{3} & \text{ist die Funktion streng monoton fallend.} \\ \geq \frac{1}{3} & \text{ist die Funktion streng monoton wachsend.} \end{cases}$

   c) Die Funktion ist im gesamten Definitionsbereich streng monoton wachsend.

2. a) Ungerade periodische Funktion, primitive Periode 2π. Definiert für alle reellen Zahlen (Bogenmaß).

   b) Gerade periodische Funktion, primitive Periode 2π. Definiert für alle reellen Zahlen (Bogenmaß).

   c) Ungerade periodische Funktion, primitive Periode π.

   $$x \in \mathbb{R} \backslash (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

   d) Gerade Funktion, $x \in \mathbb{R}$.

   e) Weder gerade, noch ungerade, noch periodische Funktion.

   $$x > \frac{1}{2}$$

   f) Gerade Funktion, $x \in \mathbb{R}$

   g) Ungerade Funktion, $x \in \mathbb{R}$

   h) Ungerade Funktion, $x \neq 0$

3. a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ ergibt sich:

   $$y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}$$

b) 1. Fall: Für $x \leq -2$ ist die Funktion streng monoton fallend.
$y = -2 - \sqrt{6+x},\ x \geq -6$

2. Fall: Für $x \geq -2$ ist die Funktion streng monoton wachsend.
$y = -2 + \sqrt{6+x},\ x \geq -6$

c) Für $0 \leq y \leq \pi$ ist $y = \cos(x)$ streng monoton fallend.
$y = \arccos(x)$ ist Umkehrfunktion mit $x \in [0; 1]$.

Gehen Sie zu Kapitel 11.4!

15.4 Normalform – lineare Funktion

1. Grafische Darstellung der Lösung:

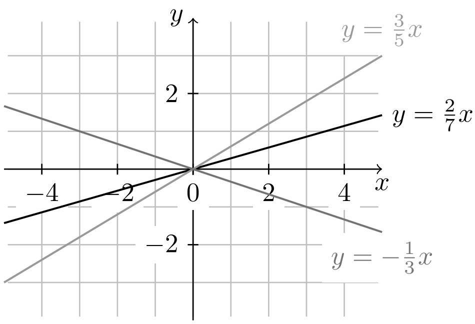


Abb. 15.4 Grafische Darstellung der Funktionen $y = \frac{3}{5}x$, $y = -\frac{1}{3}x$ und $y = \frac{2}{7}x$

2. a) Durch den III. und I. Quadranten.
   b) Durch den III., II. und I. Quadranten.
   c) Durch den III. und IV. Quadranten.

3. Grafische Darstellung der Lösung:

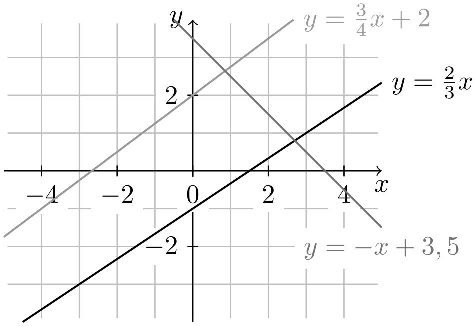


Abb. 15.5 Grafische Darstellung der Funktionen $y = \frac{3}{4}x + 2$, $y = -x + 3{,}5$ und $y = \frac{2}{3}x - 1$

Gehen Sie zu Kapitel 11.5!

15.5 Zwei-Punkte-Gleichung

1. a) Eigentlich monoton wachsend
   b) Eigentlich monoton fallend
   c) Konstant

2. a) $\dfrac{y-(-3)}{x-2} = \dfrac{-2-(-3)}{1-2} = -1$ oder in Normalform: $y = -x - 1$

   b) $\dfrac{y-1}{x-0} = \dfrac{1-1}{-1} = 0$

   oder in Normalform: $y = 1$ (Parallele zur x-Achse)

   c) $\dfrac{y-2}{x-(-1)} = \dfrac{-2-2}{3-(-1)} = -1$ oder in Normalform: $y = -x + 1$

3. Grafische Lösung:

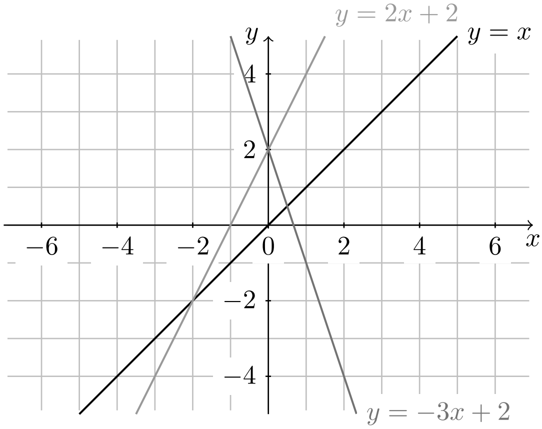


Abb. 15.6 Lösung zu Aufgabe 3

Gehen Sie zu Kapitel Kapitel 11.6!

15.6 Punkt-Richtungs-Gleichung

1. **a)** $P_1\,(-1;0)$, $P_2\,(2;0)$, $m = \dfrac{0-0}{2-(-1)} = 0$

   b) $P_1\,(3;-2)$, $P_2\,(-5;4)$, $m = \dfrac{4-(-2)}{-5-3} = -\dfrac{6}{8} = -\dfrac{3}{4}$

   c) $P_1\,(1;0)$, $P_2\,(-3;-2)$, $m = \dfrac{-2-0}{-3-1} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

2. **a)** $P\,(2;0)$, $m = 2$, $\dfrac{y-0}{x-2} = 2$ oder $y = 2x - 4$

   b) $P\,(3;-2)$, $m = -1{,}5$, $\dfrac{y-(-2)}{x-3} = -1{,}5$ oder $y = -1{,}5x + 2{,}5$

   c) $P\,(0;4)$, $m = -6{,}5$, $\dfrac{y-4}{x} = -6{,}5$ oder $y = -6{,}5x + 4$

3. **a)** $n = 2$, $m = -3$, $S_y\,(0;2)$

   b) $n = 0{,}5$, $m = -1{,}5$, $S_y\,(0;0{,}5)$

   c) $n = 1$, $m = -3$, $S_y\,(0;1)$

Gehen Sie zu Kapitel 11.7!

15.7 Achsen-Abschnitts-Gleichung

1. $y = -2x + 2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{2} = 1$

2. $y = -2x + 3 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{y}{3} + \dfrac{x}{1{,}5} = 1$

3. $y = -0{,}6x + 3 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{y}{3} + \dfrac{x}{5} = 1$

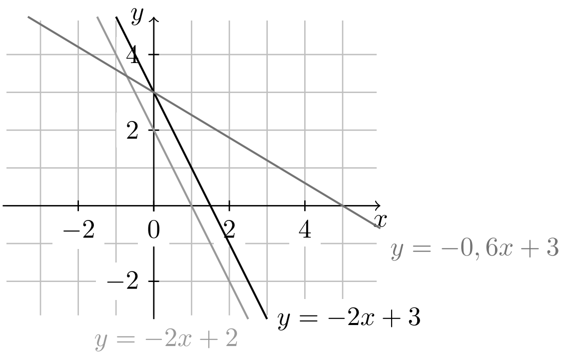


Abb. 15.7 Darstellung der Funktionen $y = -2x + 2$, $y = -2x + 3$ und $y = -0{,}6x + 3$

Gehen Sie zu Kapitel 11.8!

15.8 Quadratische Funktion

1. Grafische Darstellung:

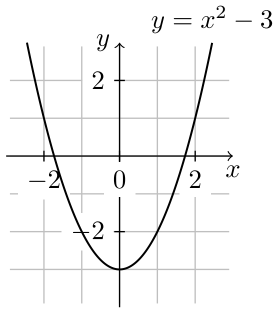


Abb. 15.8 Darstellung der Funktion $y = x^2 - 3$

2. $y = (x - 2)^2 + 1 \quad \text{oder} \quad y = x^2 - 4x + 5$

3. $S\,(5;1)$

4. $S\,(0{,}5;-6{,}25)$
   $y = (x - 0{,}5)^2 - 6{,}25$

5. Grafische Darstellung:

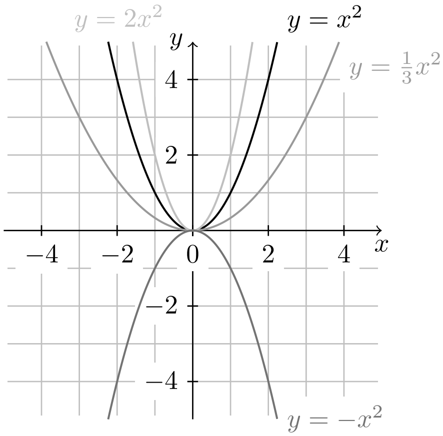


Abb. 15.9 Darstellung der Funktionen $y = 2x^2$, $y = x^2$, $y = \frac{1}{3}x^2$ und $y = -x^2$

Gehen Sie zu Kapitel 11.9!

15.9 Potenzfunktion

1. Grafische Darstellung:

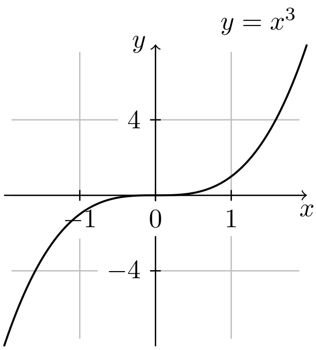


Abb. 15.10 Darstellung der Potenzfunktion $y = x^3$

2. Grafische Darstellung:

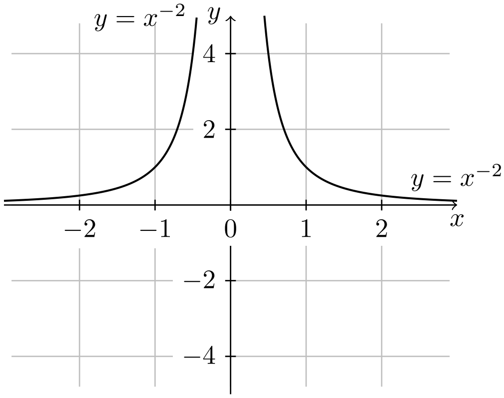


Abb. 15.11 Darstellung der Potenzfunktion $y = x^{-2}$

3. Grafische Darstellung:

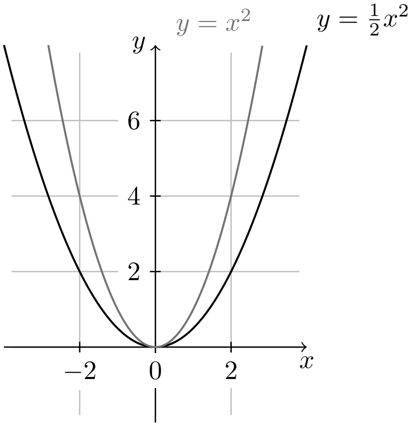


Abb. 15.12 Vergleichende Darstellung der Potenzfunktion $y = \frac{1}{2}x^2$ und der Funktion $y = x^2$ der Normalparabel

4. Grafische Darstellung:

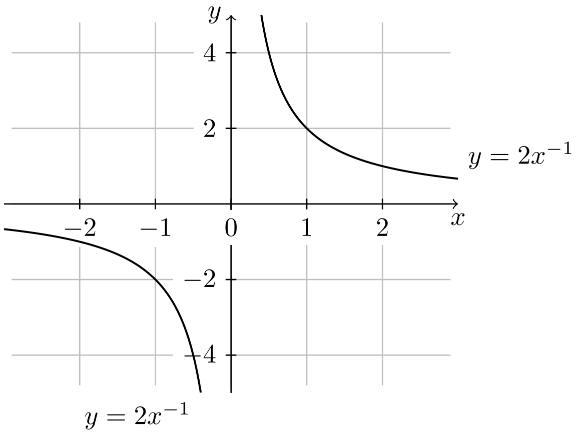


Abb. 15.13 Darstellung der Potenzfunktion $y = 2x^{-1}$

5. Grafische Darstellung:

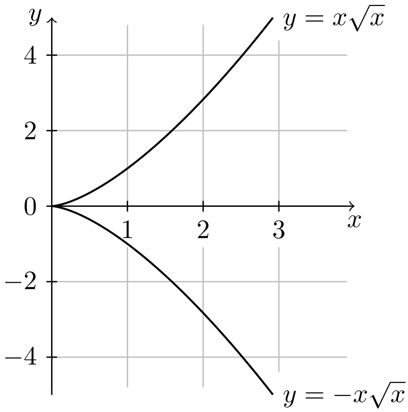


Abb. 15.14 Darstellung der beiden Äste der Neil'schen Parabel $y = x\sqrt{x}$ und $y = -x\sqrt{x}$ für den Wertebereich $x \geq 0$

Gehen Sie zu Kapitel 11.10!

15.10 Wurzelfunktion

1. a) $x \in \mathbb{R}$, Radikand kann nicht negativ werden.

   b) $|x| \geq 1$

   c) $x \geq 3$

d) $x \in [-4; 4]$

e) $x \leq 5$

2. Grafische Lösung:

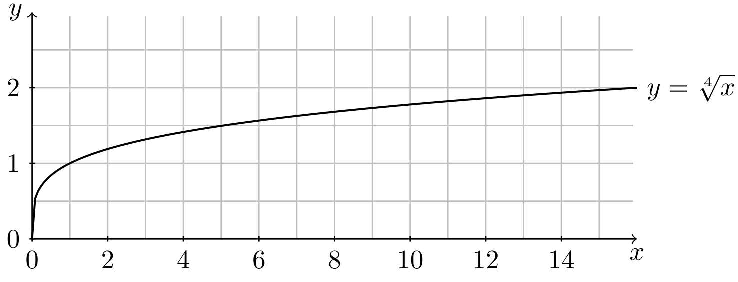


Abb. 15.15 Grafische Darstellung der Wurzelfunktion $y = \sqrt[4]{x}$

3. a) Grafische Lösung:

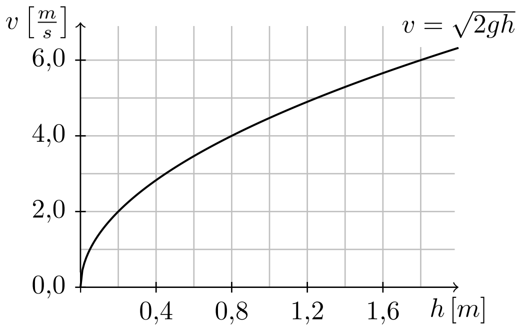


Abb. 15.16 Grafische Darstellung der Funktion $v = \sqrt{2gh}$

b) v nimmt auf das 0,7-Fache ab.
Rechnerische Lösung:

$$v_{\frac{1}{2}} = \sqrt{2g\frac{h}{2}}, \qquad \text{mit} \quad v = \sqrt{2gh}$$
$$v_{\frac{1}{2}} = \frac{v}{\sqrt{2}} \approx 0{,}71v$$

Gehen Sie zu Kapitel 11.11!

15.11 Exponentialfunktion

1. Grafische Lösung:

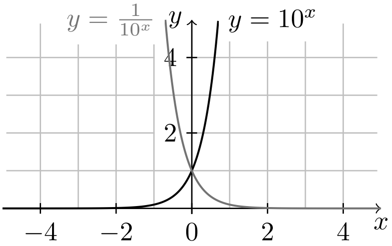


Abb. 15.17 Darstellung der Exponentialfunktionen $y = 10^x$ und $y = \frac{1}{10^x}$

2. Die Bilder der Funktionen sind axialsymmetrisch zur y-Achse. Es ist:

$$a^x = \frac{1}{a^x}$$

3. Grafische Lösung:

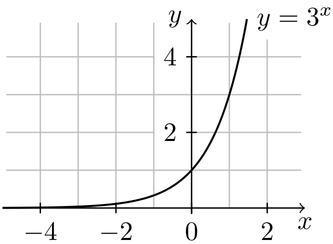


Abb. 15.18 Grafische Darstellung der Exponentialfunktion $y = 3^x$

4. Wertebereich: $y > 0$

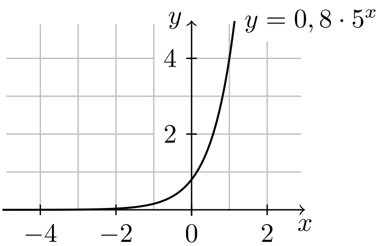


Abb. 15.19 Grafische Darstellung der Exponentialfunktion $0{,}8 \cdot 5^x$

5. Wertebereich: $y > 5$

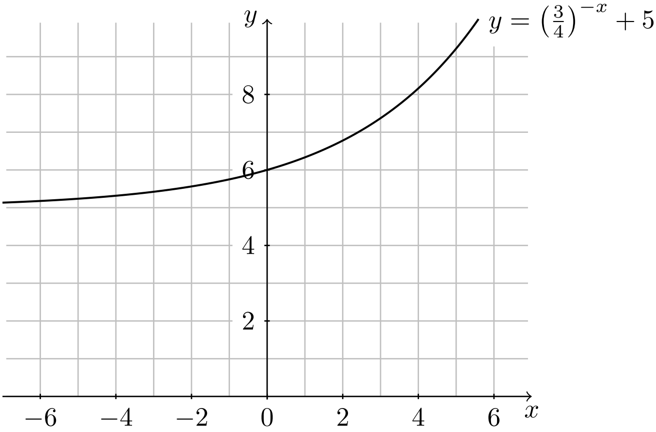


Abb. 15.20 Grafische Darstellung der Exponentialfunktion $y = \left(\frac{3}{4}\right)^{-x} + 5$

Gehen Sie zu Kapitel 11.12!

15.12 Logarithmusfunktion

1. a) $y = \ln(x)\,, \qquad x > 0$

   b) $y = \lg(x)\,, \qquad x > 0$

   c) $y = \mathrm{ld}(x)\,, \qquad x > 0$

2. Grafische Lösung:

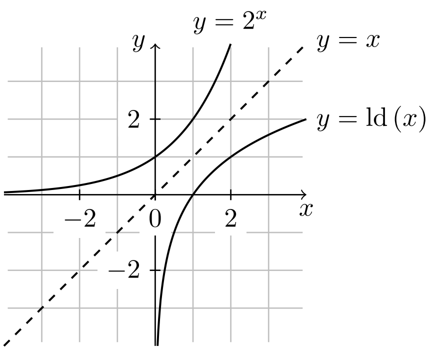


Abb. 15.21 Grafische Darstellung der Funktionen $y = 2^x$ und $y = \mathrm{ld}(x)$

3. a) $y = 3 \cdot \ln\left(x^2\right), \qquad x \neq 0$

b) $y = 2 \cdot \ln|3x-1|, \qquad x \neq \frac{1}{3}$

c) $y = \ln(3x-1), \qquad x > \frac{1}{3}$

Gehen Sie zu Kapitel 11.13!

15.13 Arithmetische Folgen

1. $x_{10} = x_1 + (10-1) \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -5$

$$s_n = \frac{n}{2}(x_1 + x_n)$$
$$s_n = \frac{n}{2}[x_1 + x_1 + (n-1)\,d]$$
$$s_n = \frac{n}{2}[2x_1 + (n-1)\,d]$$

Für $s_n = 315$, $x_1 = -5$ und $d = 2$ folgt:

$$n^2 - 6n - 315 = 0$$

und die Lösung:

$$n = 21$$

($n = -15$ entfällt, da n eine natürliche Zahl sein muss). Somit ist

$$x_{21} = -5 + (21-1)\,2 = 35.$$

2. a) $n = 26$ (Es ist der sechsundzwanzigste halbe Meter)
$x_1 = 1{,}8\,€$, $d = 0{,}70\,€$

$$x_{26} = 1{,}80 + (26-1)\,0{,}70 = 19{,}30$$

Die Bohrung in der angegebenen Tiefe (von 12,50 m auf 13,00 m) kostet 19,30 €.

b) $s_{40} = \frac{40}{2}(1{,}80 + 1{,}80 + 39 \cdot 0{,}70) = 618\,€$

Die Kosten für ein Loch von 20 Meter Tiefe betragen 618 €.

c) $\frac{n}{2}[x_1 + x_1 + (n-1)\,d] \leq 100$

Das Loch erreicht eine Tiefe von 7,50 Meter.

$$s_{15} = \frac{15}{2}(1{,}80 + 11{,}60) = 100{,}50$$

Somit fehlen von 100 € noch 0,50 €.

3. a) Jede Wicklungslage der Spule erfordert

$$\frac{l}{D}$$

Windungen (l – Länge der Spule, D – Durchmesser des Drahtes). Das sind für die Aufgabe achtzig Windungen pro Lage. Somit benötigt die erste Wicklungslage (also die innerste Wicklung)

$$x_1 = 80 \cdot 1{,}55 \cdot \pi \text{ mm} = 124 \cdot \pi \text{ mm}$$

Draht. Jede weitere Wicklungslage erfordert

$$d = 80 \cdot 1 \cdot \pi \text{ mm}$$

mehr als die Vorhergehende. Die n-te Wicklungslage erfordert

$$x_n = 124 \cdot \pi + (n-1) \cdot 80 \cdot \pi = [124 + (n-1) \cdot 80] \cdot \pi \text{ mm}$$

Draht.
Beispiel: $n = 11$

$$x_{11} = [124 + 10 \cdot 80] \cdot \pi \approx 2{,}90 \text{ m}$$

b) Für n Wicklungslagen werden insgesamt

$$s_n = \frac{n}{2}\left[124\pi + 124\pi + (n-1)\,80\pi\right] = \frac{n}{2}\pi\left[248 + (n-1)\,80\right] \text{ mm}$$

Draht benötigt.
Beispiel: $n = 11$

$$s_n \approx 18{,}10$$

Für elf Wicklungslagen sind etwa 18,10 Meter Draht erforderlich.

Gehen Sie zu Kapitel 11.14!

15.14 Geometrische Folgen

1.
$$x_n = x_1 q^{n-1}$$
$$n - 1 = \frac{\ln(128)}{\ln(2)}$$
$$n = 8$$
$$s_8 = \frac{1}{2}\frac{2^8 - 1}{2 - 1} = 127{,}5$$

2. R10 (aus Kap. 13.14):
   130, 163, 206, 260, 325, 410, 520, 650, 819, 1 040, 1 300

3. $1{,}2 = 1 \cdot q^5$

   $$q = \sqrt[5]{1{,}2} = 1{,}03714$$

   Durchschnittlich betrug der jährliche Zuwachs 3,7 %.

4. $3 \cdot G_0 = G_0 \cdot 1{,}085^n$

   $$n = \frac{\ln(3)}{\ln(1{,}085)} \approx 13{,}5$$

   Nach dreizehneinhalb Jahren (14 Jahren) hat sich der Betrag bei diesem Zinssatz verdreifacht.

5. $0{,}4 \left(\frac{0{,}70 - 0{,}02}{0{,}7}\right)^n \geq 0{,}32$

   $$n \leq \frac{\ln(0{,}32) - \ln(0{,}40)}{\ln(0{,}68) - \ln(0{,}70)} = 7{,}7$$

   $$n = 7$$

   Nach sieben Entnahmen liegt die Alkoholkonzentration noch über 32 % (genauer beträgt er ca. 32,66 %).

Ende des dritten Tages im Aufbaukurs Mathematik!

Teil IV

4. Tag – Analysis II

4. Tag – Analysis II (Infinitesimalrechnung)

Die Infinitesimalrechnung setzt sich zusammen aus der Differenzialrechnung und der Intergralrechnung, deren Grundlage das Konzept des Grenzwertes ist. Durch das Differenzieren wird die Ableitung einer Funktion bestimmt, durch das Integrieren wird die Stammfunktion einer Funktion bestimmt. Mit den Methoden der Infinitesimalrechnung können zahlreiche Probleme in Theorie und Praxis gelöst werden.

Infinitesimalrechnung bedeutet, dass mit Größen operiert wird, die jeden noch so kleinen oder großen vorgegebenen Wert unter- oder überschreiten, wobei sich im Falle der Konvergenz endliche Resultate ergeben.

Integralrechnung bedeutet: Es wird der Grenzwert einer Summe von Produkten gebildet, wobei ein Faktor gegen null strebt. Anwendungen sind beispielsweise Berechnung von Mittelwerten, Flächen, Volumina, optimaler Nutzungsdauer usw.

Differenzialrechnung bedeutet: Es wird der Grenzwert einer Folge von Quotienten aus Differenzen gebildet, wobei die Differenz im Nenner (Divisor) gegen null strebt. Anwendungen sind beispielsweise die Berechnung der Steigung einer Funktion, die Berechnung von Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, Extremwerten usw.

16 Tests zur Analysis II

Übersicht

16.1 Konvergente Zahlenfolgen

Geben Sie eine untere Schranke an, sodass sich ein Glied der Zahlenfolge

$$\{x_n\} = \left\{\frac{2}{n+1}\right\} \qquad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}$$

finden lässt mit einem Abstand zum vorhergehenden Glied, der kleiner als

$$\frac{1}{100}$$

ist.

Wie heißt die Nummer N des Gliedes, sodass die Glieder x_n und alle weiteren mit einer größeren Gliednummer

$$n \geq N$$

einen Abstand ϵ (ϵ – Epsilon – kleiner griechischer Buchstabe) von dieser unteren Schranke haben, der kleiner ist als

$$\frac{1}{100}.$$

G. Höfner, *Mit Selbsttests gezielt Mathematik lernen*,
DOI 10.1007/978-3-662-52963-8_16

In der Formelsprache dargestellt:

$$|x_n - g| < \epsilon = \frac{1}{100}, \qquad \text{für} \quad n \geq N$$

Gehen Sie zu Kapitel 17.1!

16.2 Beispiele für konvergente Folgen

Ein Tennisball fällt aus einer Höhe von einem Meter auf einen Betonboden, prallt zurück und steigt neunzig Zentimeter über den Boden, nach dem zweiten Fall 81 Zentimeter, nach dem dritten 729 Millimeter usw.

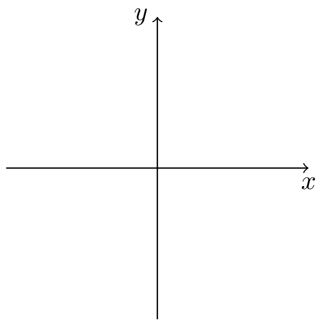
Welchen Weg über den Boden legt der Ball insgesamt zurück, bis er endlich zur Ruhe kommt?

Gehen Sie zu Kapitel 17.2!

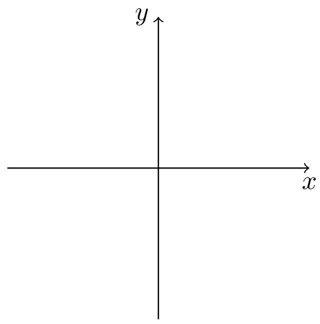
16.3 Stetigkeit von Funktionen

Skizzieren Sie die folgenden Funktionen. Bestimmen Sie zuvor den jeweils größten Definitionsbereich.

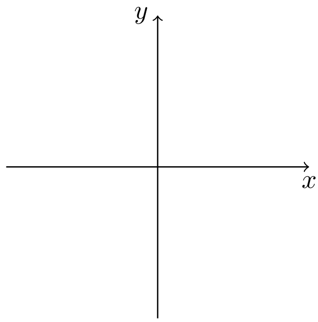
a) $y = \dfrac{x}{x}$



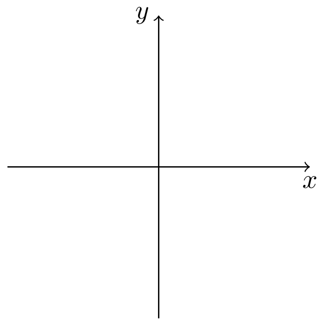
b) $y = \dfrac{1}{x}$



c) $y = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & \text{wenn } x \neq 0 \\ 1, & \text{wenn } x = 0 \end{cases}$



d) $y = |x|$



Gehen Sie zu Kapitel 17.3!

16.4 Differenzenquotient

Wie lautet der Differenzenquotient der Funktion

$$y = 3x^2 - 2x + 2$$

an der Stelle $x_1 = 1$ mit

a) Δx

b) $\Delta x = 2$

Erläuterung: $\Delta x = x_2 - x_1$

$x_2 = x_1 + \Delta x$

Gehen Sie zu Kapitel 17.4!

16.5 Ableitungsregeln

Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion

$$y = 3x^2 - \frac{2}{x^2} + 4\sqrt[5]{x^2}, \qquad \text{mit } x \neq 0$$

Gehen Sie zu Kapitel 17.5!

16.6 Anwendung der Differenzialrechnung

1. Die Gesamtkosten eines Angebotsmonopolisten in einer Planungsperiode kann durch die Funktion

$$K(x) = 0{,}25x^3 - 2x^2 + 6x + 12{,}5, \qquad \text{mit} \quad D_K = D_{\text{ök}},$$

die Nachfrage kann durch die Funktion

$$p(x) = 18 - 2x$$

beschrieben werden.

Bestimmen Sie $D_{\text{ök}}$, berechne das Gesamtkosten- und Betriebskostenminimum sowie das Betriebsoptimum und zeichnen Sie Graph$\left(K'\right)$, Graph(k_{V}) und Graph(K) in ein Koordinatensystem.

2. Bestimmen Sie die Erlösfunktion $E\,(x)$ und das Erlösmaximum. Stellen Sie die Gewinnfunktion G auf und berechnen Sie das Gewinnmaximum. Zeichnen Sie Graph(K), Graph(E) und Graph(G) in ein Koordinatensystem.

Erläuterung: Dabei versteht man unter dem Betriebsminimum (BM) die Ausbringungsmenge x, bei deren Produktion die geringsten durchschnittlichen variablen Kosten entstehen, und unter dem Betriebsoptimum (BO) die Ausbringungsmenge, bei deren Produktion die geringsten Durchschnittskosten entstehen.

Gehen Sie zu Kapitel 17.6!

16.7 Elastizität

Die Nachfrage eines Produktes hängt linear vom Preis der nachgefragten Ware ab.

$$x\,(p) = 30 - 2p$$

Zu berechnen ist die Elastizität des Preises. Ist sie dort, wo Preis und Nachfrage nichtnegativ sind positiv oder negativ? Gesucht sind also die Bereiche der Elastizität und der Nichtelastizität.

Bemerkung: In der Betriebswirtschaft spielt es nur eine Rolle, ob die Nachfrage elastisch oder unelastisch reagiert. In der Regel ist $\epsilon < 0$. Man interessiert sich für $|\epsilon|$. Wenn $|\epsilon| \geq 1$ ist, spricht man von elastischem, wenn $0 \leq |\epsilon| < 1$ von unelastischem Verhalten.

Gehen Sie zu Kapitel 17.7!

16.8 Grundintegrale

Bestimmen Sie die Stammfunktion von

$$\int \left(3x^2 - \frac{2}{x^4} + 3x - \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}} \right) \mathrm{d}x.$$

Gehen Sie zu Kapitel 17.8!

16.9 Bestimmte Integration

Berechnen Sie nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

$$\int_{x_0}^{x} \left(3t^2 - \frac{1}{t} \right) \mathrm{d}t.$$

Gehen Sie zu Kapitel 17.9!

16.10 Flächenberechnung

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der x-Achse und dem Graphen der Funktion

$$y = \left(\frac{x^2}{4} - 1 \right)^2$$

vollständig eingegrenzt wird.

Gehen Sie zu Kapitel 17.10!

16.11 Konsumenten- und Produzentenrente

Für die Nachfragefunktion soll gelten

$$x\,(p) = -0{,}2p + 15.$$

Aufgrund des Marktmechanismus hat sich ein Preis beim Gleichgewichtspunkt

$$p_0 = 30\,€$$

eingestellt.

Welche Gesamtsumme E^* wären die Konsumenten bereit gewesen zu zahlen? Welche Summe haben die Konsumenten aufgrund des Marktgleichgewichts eingespart?

Fortsetzung des Beispiels:

Jeder Produzent bietet seine gesamte Warenmenge zu einem Preis $p_0 \geq 10$ € an. Steigt der Marktpreis treten neue Anbieter hinzu. Die bisherigen Anbieter halten ihr Angebot unveränderlich.

Angebotsfunktion:

$$p_{\mathrm{A}}(x) = 10 + 1{,}5x$$

Welcher Marktpreis stellt sich nun ein?

Gehen Sie zu Kapitel 17.11!

17 Lösungen zu den Tests zur Analysis II

Übersicht

17.1 Konvergente Zahlenfolgen

Ergebnis:
Die größte untere Schranke ist null. Nur ab dieser unteren Schranke ist der Abstand kleiner als jede vorgegebene, noch so kleine positive Zahl (ϵ).

$$\epsilon = \frac{1}{100}, \qquad \left|\frac{2}{n+1} - 0\right| < \frac{1}{100}, \qquad n > 199$$

Erst ab $n > 199$ ist der Abstand für Glieder der Zahlenfolge mit größerer Gliednummer kleiner als der vorgegebene Abstand von

$$\frac{1}{100}.$$

Haben Sie das gewusst oder verstanden?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 16.2!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 18.1!

G. Höfner, *Mit Selbsttests gezielt Mathematik lernen*,
DOI 10.1007/978-3-662-52963-8_17

17.2 Beispiele für konvergente Folgen

Ergebnis:

$$s = 1 + \frac{2 \cdot 0{,}9}{1 - 0{,}9} = 1 + \frac{1{,}8}{0{,}1} = 19 \text{ m}$$

Haben Sie den Grenzwert so bestimmt?

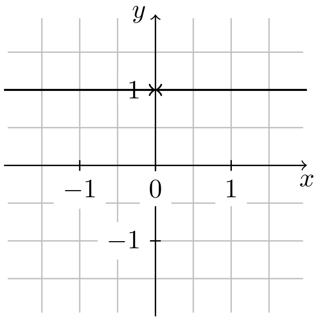
Ja – Gehen Sie zu Kapitel 16.3!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 18.2!

17.3 Stetigkeit von Funktionen

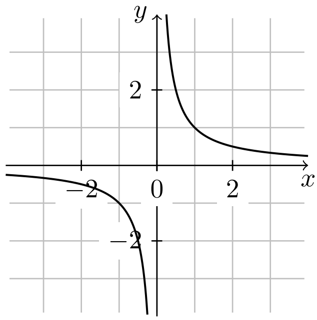
Ergebnisse:

a) $y = \frac{x}{x}$, $x \neq 0$



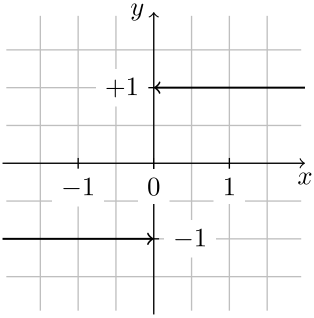
Unstetigkeit bei $x = 0$ behebbar (Festsetzung – $y(0) = 1$)

b) $y = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$



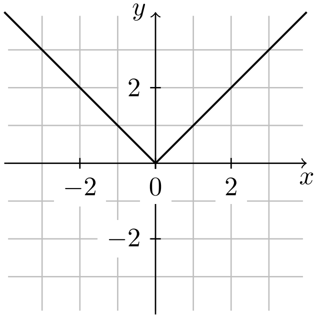
Funktion bei $x = 0$ unstetig (Unstetigkeit nicht behebbar)

c) $y = \dfrac{|x|}{x}$, $x \neq 0$



Funktionswert bei $x = 0$ ist nicht gleich dem Grenzwert (existiert an der Stelle nicht!), somit ist die Funktion unstetig

d) $y = |x|$



Knick bei $x = 0$, stetige Funktion

Stimmen Ihre Skizzen und Beurteilungen mit den hier angegebenen überein?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 16.4!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 18.3!

17.4 Differenzenquotient

Ergebnis:

a) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x - 2 + 3\Delta x, \qquad \text{mit} \quad x_1 = 1$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6 - 2 + 3\Delta x = 4 + 3\Delta x$$

b) $\Delta x = 2$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4 + 3 \cdot 2 = 10$$

Haben Sie den allgemeinen Differenzenquotient und der speziellen an der Stelle $x_1 = 1$ so bestimmt?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 16.5!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 18.4!

17.5 Ableitungsregeln

Ergebnis:

$$y' = 6x + \frac{4}{x^3} + \frac{8}{5 \cdot \sqrt[5]{x^3}}, \qquad \text{für} \quad x > 0$$

Haben Sie die Ableitung richtig angegeben?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 16.6!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 18.5!

17.6 Anwendung der Differenzialrechnung

Ergebnisse:

1. Ökonomischer Definitionsbereich durch die Bedingung:

$$x \in [0; 9]$$

Grenzkostenminimum:

$$P_{\min}\left(\frac{8}{3}; \frac{2}{3}\right)$$

Gesamtkostenfunktion (gegeben):

$$K(x) = 0{,}25x^3 - 2x^2 + 6x + 12{,}5$$

Variable Gesamtkosten (also ohne die fixen Kosten):

$$K_{\mathrm{v}} = 0{,}25x^3 - 2x^2 + 6x$$

Variable Stückkostenfunktion:

$$\begin{aligned} k_{\mathrm{v_{St}}} &= \frac{K_{\mathrm{v}}(x)}{x} = 0{,}25x^2 - 2x + 6x \\ k'_{\mathrm{v_{St}}} &= 0{,}5x - 2 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Minimale variable Stückkosten:

$$P_{\min}(4; 8)$$

Stückkostenfunktion:

$$k_{\mathrm{St}}(x) = \frac{K(x)}{x} = 0{,}25x^2 - 2x + 6 + \frac{12{,}5}{x}, \qquad \text{mit } x \neq 0$$

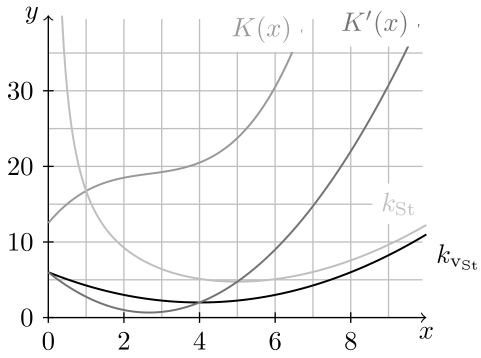


Abb. 17.1 Darstellung der Graphen von $K(x)$, $K'(x)$, $k_{\mathrm{St}}(x)$ und $k_{\mathrm{v_{St}}}(x)$ im Definitionsbereich $D_{\text{ök}}$

2. Erlösfunktion:

$$E(x) = p(x) \cdot x = 18x - 2x^2$$
$$E'(x) = 18 - 4x$$

Erlösmaximum:

$$P_{\max}(4{,}5; 40{,}5)$$

Gewinnfunktion:

$$\begin{aligned} G(x) &= E(x) - K(x) \\ &= 18x - 2x^2 - \left(0{,}25x^3 - 2x^2 + 6x + 12{,}5\right) \\ &= -0{,}25x^3 + 12x - 12{,}5 \\ G(4) &= -\frac{1}{4} \cdot 64 + 12 \cdot 4 - 12{,}5 = 19{,}5 \end{aligned}$$

Gewinnmaximum:

$$G_{\max}(4; 19{,}5)$$

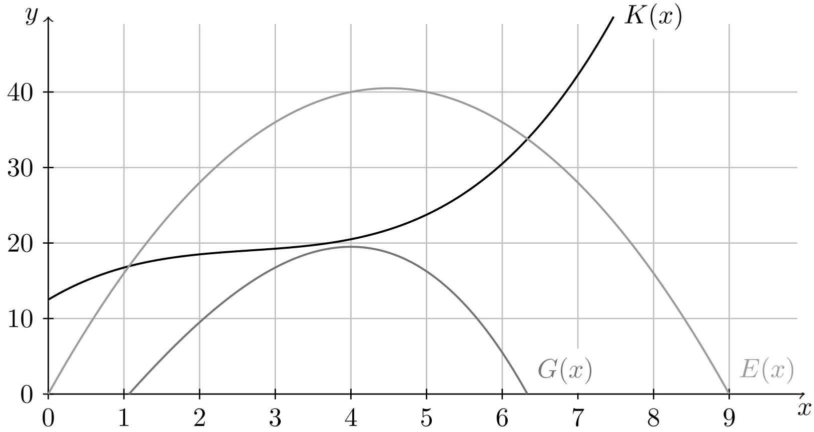


Abb. 17.2 Darstellung der Graphen von $K(x)$, $E(x)$ und $G(x)$

Sind Sie zu den gleichen Ergebnissen gekommen?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 16.7!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 18.6!

17.7 Elastizität

Ergebnis:

$$\epsilon = -2\frac{p}{30-2p}$$

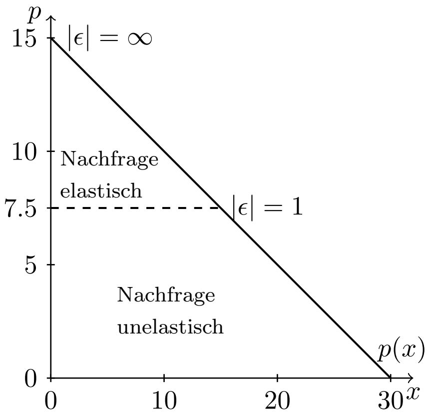


Abb. 17.3 Darstellung der Elastizitätsbereiche

Haben Sie diese Ergebnisse bestimmt?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 16.8!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 18.7!

17.8 Grundintegrale

Ergebnis:

$$F(x) = x^3 + \frac{2}{3x^3} + \frac{3}{2}x^2 - 12\sqrt[3]{x} + c$$

haben Sie die Stammfunktion richtig bestimmt?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 16.9!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 18.8!

17.9 Bestimmte Integration

Ergebnis:

$$x^3 - x_0^3 + \ln|x_0| - \ln|x|$$

haben Sie das bestimmte Integral so ermittelt?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 16.10!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 18.9!

17.10 Flächenberechnung

Ergebnis:

$$\frac{32}{15}\ \text{FE} \approx 2{,}1\ \text{FE} \qquad \text{(FE: Flächeneinheiten)}$$

Haben Sie diesen Flächenwert bestimmt?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 16.11!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 18.10!

17.11 Konsumenten- und Produzentenrente

Konsumentenrente:

$$K_{\mathrm{R}} = \int_0^{x_0} p(x)\ \mathrm{d}x - p_0 \cdot x_0$$

$$E^* = \int_0^9 p(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^9 (-5x + 75)\ \mathrm{d}x = -\frac{5}{2}x^2 + 75x \Big|_0^9$$

$$= -\frac{405}{2} + 675 = 472{,}5$$

$$K_R = 472{,}5 - 30 \cdot 9 = 202{,}50\ €$$

Produzentenrente:

$$P_{\mathrm{R}} = x_0 \cdot p_0 - \int_0^{x_0} p_{\mathrm{A}}(x)\ \mathrm{d}x$$

$$P_{\mathrm{R}} = 10 \cdot 25 - \int_0^{10} (10 + 1{,}5x)\ \mathrm{d}x = 250 - \ 10x + \frac{3}{4}x^2 \Big|_0^{10}$$

$$= 250 - (100 + 75) = 75$$

Haben Sie diese Ergebnisse gefunden?

Ja – Ende des 4. Tages - Analysis II

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 18.11!

18 Informationen zu den Themen der Analysis II

Übersicht

18.1 Konvergente Zahlenfolgen

Eine unendliche Zahlenfolge ist eine Folge, deren Definitionsbereich die unendliche Menge der natürlichen Zahlen oder eine unendliche Teilmenge dieser Menge bildet. Bei unendlichen Zahlenfolgen werden solche Eigenschaften untersucht, die sich aus dem Verhalten der Glieder mit hoher – beliebig großer – Gliednummer ergeben. Sie sind unabhängig von den ersten Gliedern oder einer endlichen Anzahl von Gliedern der Zahlenfolge. Durch den Begriff der oberen oder unteren Schranke werden solche Eigenschaften beschrieben.

Beispiel 18.1
Die Folge

$$\left\{\frac{1}{n}\right\} = 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots$$

hat die untere Schranke -5. Diese Schranke wird nicht durch eine endliche Anzahl der Glieder bestimmt. Null ist allerdings die größte untere Schranke. Nur diese untere Schranke besitzt die Eigenschaft, dass der Abstand zwischen den

G. Höfner, *Mit Selbsttests gezielt Mathematik lernen*,
DOI 10.1007/978-3-662-52963-8_18

Gliedern der Zahlenfolge und der Schranke ab einer bestimmten Gliednummer jeden vorgegebenen Wert, mag er noch so klein gewählt werden, unterschreiten kann. Dieser Abstand bestimmt allerdings die Nummer des Gliedes, ab dem der Abstand unterschritten wird. Je kleiner der vorgeschriebene Abstand ist, umso größer ist natürlich auch die Gliednummer – allerdings unterschreiten dann alle Glieder mit einer höheren Gliednummer diese Abstandsvorgabe. Wenn es sich um eine unendliche Zahlenfolge handelt, und nur für solche Folgen ist die Fragestellung überhaupt interessant, sind es ab dieser Gliednummer unendlich viele Glieder. ■

Anders ausgedrückt:
Nur endliche viele Glieder der Zahlenfolge können den Abstand zur Schranke nicht unterschreiten.

Beispiel 18.2
Der Abstand zwischen den Gliedern der Zahlenfolge

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}$$

und der unteren Schranke -1 beträgt in jedem Fall mindestens 1. Dieser Abstand kann von keinem Glied der Zahlenfolge unterschritten werden. ■

Eine Schranke bei der jeder vorgegebene Abstand zwischen ihr und den Gliedern der Zahlenfolge ab einer bestimmten Stelle unterschritten werden kann, wird *Grenzwert* der Zahlenfolge genannt.

Definition des Grenzwertes einer Zahlenfolge: Eine Zahlenfolge

$$\{x_n\}$$

hat den Grenzwert g, wenn sich für jede (noch so kleine aber positive) Zahl ϵ eine Gliednummer $N(\epsilon)$ angeben lässt, sodass gilt:

$$|x_n - g| < \epsilon, \text{ für alle } n, \text{ mit } n \geq N(\epsilon)\,.$$

Die zugehörige Schreibweise lautet:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = g$$

Gelesen: „Limes von x_n für n gegen unendlich gleich g.“ (Limes lat. – die Grenze.)

Beispiel 18.3
Für die Zahlenfolge

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}$$

ist der Grenzwert null.

1. Für einen Abstand
$$\epsilon = \frac{1}{1\,000} = 10^{-3}$$
wird für alle Glieder der Folge, deren Index (Gliednummer) größer oder gleich 1 001 ist (ab dem 1 001-tem Glied) der vorgegebene Abstand zum Grenzwert null unterschritten. Nur endlich viele, nämlich 1 000 Glieder erfüllen die Abstandsvorgabe nicht.

   Der Nachweis dafür, dass
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$
ist, kann durch spezielle Werte von ϵ nicht erbracht werden. Die Definition fordert, dass die Bedingung für alle möglichen (noch so klein gewählten) ϵ erfüllt sein muss.

2. Für
$$\epsilon > 0 \ \text{(beliebig klein)}$$
ist
$$|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$$
$$\frac{1}{n} < \epsilon \quad \Rightarrow \quad n > \frac{1}{\epsilon}$$
Es lässt sich somit für jedes ϵ die Nummer eines Gliedes $\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$ finden, sodass alle Glieder mit höherer Gliednummer den ϵ-Abstand zum Grenzwert unterschreiten. Erst dadurch wurde nachgewiesen, dass
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

■

Zahlenfolgen, die einen Grenzwert besitzen, sind konvergente Zahlenfolgen. Spezielle Zahlenfolgen mit dem Grenzwert null heißen Nullfolgen. Für Nullfolgen gilt:
$$|x_n| < \epsilon, \quad \text{für alle } n, \text{ für die } n \geq N(\epsilon) \text{ ist}$$

Zahlenfolgen, die keinen Grenzwert haben, heißen *divergente Folgen.* Es wird zwischen bestimmter Divergenz und unbestimmter Divergenz unterschieden. Bestimmt divergent sind Folgen dann, wenn jeder vorgegebene Wert überschritten beziehungsweise unterschritten werden kann.

Beispiel 18.4

$$\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty \ \text{ oder } \ \lim_{n\to\infty} (-n) = -\infty$$

■

Beispiel 18.5
Die Folge

$$\{(-1)^n\, n\}$$

ist unbestimmt divergent. ■

Ohne Beweis wird der folgende Satz angegeben: Jede beschränkte monotone Folge ist konvergent.

Beispiel 18.6

$$\{x_n\} = 0{,}3; 0{,}33; 0{,}333; \ldots$$

ist monoton wachsend und beschränkt. Beispiel für eine obere Schranke ist 0,34. Der Grenzwert der Zahlenfolge ist $\frac{1}{3}$. ■

Gehen Sie zu Kapitel 19.1!

18.2 Beispiele für konvergente Folgen

Aus der Definition des Konvergenzbegriffes von Zahlenfolgen lässt sich ein Konvergenzkriterium ableiten:

Für eine konvergente Zahlenfolge

$$\{x_n\}$$

bildet die Differenzenfolge eine Nullfolge. Das bedeutet: Der Abstand zwischen zwei Gliedern der Folge

$$d_n = |x_{n+1} - x_n|$$

unterschreitet ab einem zu bestimmenden Glied mit der Nummer $N(\epsilon)$ jeden vorgegebenen noch so kleinen positiven Wert von ϵ.

Zur Verwendung als Vergleichsfolgen bei der Grenzwertbestimmung wird der Grenzwert einiger spezieller Zahlenfolgen angegeben (ohne den Beweis durch eine Grenzwertabschätzung mit $\epsilon > 0$):

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{k^n}{n^\alpha} = \infty, \quad \text{für} \quad k > 1,\ \alpha > 0$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\lg(n)}{n} = 0$

3. Aus $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{q} - 1) = 0,$ mit $q > 0$ folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} x_1 \dfrac{1-q^n}{1-q} = \dfrac{x_1}{1-q}$, für $|q| < 1$

   Konvergenz der unendlichen geometrischen Reihe

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$

   Dieser Grenzwert kann nicht mit Mitteln der Elementarmathematik bewiesen werden. Zum Beweis dienen die Eigenschaften:

   - Die Folge ist beschränkt (obere Schranke z. B. 3).
   - Die Folge ist monoton wachsend.

Nach einem bereits genannten Satz (vgl. Kap. 18.1) sind beschränkte und monotone Zahlenfolgen konvergent.

Gehen Sie zu Kapitel 19.2!

18.3 Stetigkeit von Funktionen

Aus der analytischen Darstellung einer Funktion kann die grafische Darstellung über eine Wertetabelle gefunden werden. Dazu werden die (endlichen) Elemente einer Wertetabelle als Punkte in ein kartesisches Koordinatensystem eingetragen. Anschließend werden die Punkte zu einer Kurve verbunden. Dabei wird stillschweigend vorausgesetzt, dass es im Kurvenverlauf weder Lücken noch Sprungstellen gibt. Ein Kurvenverlauf ohne Lücken und Sprünge ist ein stetiger Kurvenverlauf. Die zugehörige Funktionskurve wird als *stetig* bezeichnet.

Definition 18.1
Eine Funktion, deren Definitionsbereich eine Umgebung der Stelle x_0 enthält, ist an dieser Stelle stetig, wenn die folgenden drei Bedingungen alle erfüllt sind:

1. Die Funktion ist an dieser Stelle x_0 definiert.
2. Die Funktion hat an dieser Stelle x_0 einen Grenzwert hat – $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g$.
3. Der Grenzwert an dieser Stelle ist gleich dem Funktionswert ist – $f(x_0) = g$.

Eine Funktion ist in einem Intervall stetig, wenn sie in jedem Punkt des Intervalls stetig ist. ♦

Eine Funktion ist unstetig an der Stelle

$$x = x_0,$$

wenn mindestens einer der folgenden drei Fälle gegeben ist:

1. Die Funktion ist in der Umgebung definiert und es kann kein Funktionswert festgesetzt werden, sodass der Funktionswert gleich dem Grenzwert ist (wenn rechtsseitiger und linksseitiger Grenzwert auseinanderfallen oder wenn mindestens einer davon nicht existiert, entsteht eine Lücke, im anderen Fall kann der Grenzwert als Funktionswert definiert werden – behebbare Unstetigkeit).
2. Der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert nicht.
3. Der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert zwar, ist aber nicht gleich dem Funktionswert $f(x_0)$, er gibt also eine Sprungstelle.

Beispiel 18.7
Die Funktion

$$y = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$$

hat zwar für

$$x \to -2$$

den Grenzwert

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = -4$$

doch ist sie in dem Punkt nicht definiert. Die Funktion ist in diesem Punkt nicht stetig (Lücke). ■

Beispiel 18.8
Die Funktion

$$y = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x}, & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0, & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

ist im Punkt $x = 0$ unstetig. Die Funktion ist zwar für alle reellen Zahlen definiert, hat auch einen Grenzwert, jedoch ist dieser Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

nicht gleich dem Funktionswert. ■

Beispiel 18.9
Die Funktion

$$y = \frac{|x|}{x}$$

ist für $x = 0$ unstetig. Die Funktion ist dort nicht definiert und besitzt an der Stelle auch keinen Grenzwert, da zwar linksseitiger (-1) wie auch rechtsseitiger $(+1)$ Grenzwert existieren, diese aber nicht übereinstimmen und sich dadurch an der Stelle die Unstetigkeit nicht beheben lässt.

■

Im zweiten Beispiel ist die Unstetigkeit der Funktion durch eine Neufestsetzung des Funktionswertes mit

$$y = 1, \quad \text{für} \quad x = 0$$

behebbar. Im dritten Beispiel ist die Unstetigkeit der Funktion in der Stelle $x = 0$ nicht behebbar. Im ersten Beispiel kann die Unstetigkeit durch die Festsetzung

$$y = -4, \quad \text{für} \quad x = -2$$

behoben werden.

Die in einem Intervall des Definitionsbereiches oder insgesamt stetigen Funktionen besitzen wichtige Eigenschaften:

Satz über Zwischenwerte: Wenn eine Funktion in einem abgeschlossenen Intervall

$$[x_1; x_2]$$

stetig ist und

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

gilt, so nimmt die Funktion in dem Intervall mindestens einmal jeden Wert zwischen $f(x_1)$ und $f(x_2)$ an.

Insbesondere hat eine in einem abgeschlossenen Intervall

$$[x_1; x_2]$$

stetige Funktion mindestens eine Nullstelle, wenn es zwei Funktionswerte gibt, die ein unterschiedliches Vorzeichen haben.

Beispiel 18.10

$$y = x^3 - 2x - 3$$

ist eine in dem Intervall

$$[0; 2]$$

stetige Funktion mit

$$y(0) = -3 \ \text{ und } \ y(2) = 1.$$

Die Funktion hat zwischen 0 und 2 mindestens eine reelle Nullstelle. ■

Satz über Maximum und Minimum: Ist eine Funktion in einem Intervall

$$[x_1; x_2]$$

stetig, so hat sie in diesem Intervall ein Maximum und ein Minimum (der Funktionswerte).

Ganzrationale Funktionen sind für alle reellen Zahlen stetige Funktionen. Gebrochen rationale Funktionen sind in den Punkten unstetig, in denen der Nenner null wird.

Gehen Sie zu Kapitel 19.3!

18.4 Differenzenquotient

In der Physik wird die Geschwindigkeit als Quotient von Weg und der dafür benötigten Zeit definiert.

$$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

Dabei sind s_2 der zum Zeitpunkt t_2 zurückgelegte und s_1 der zum Zeitpunkt t_1 zurückgelegte Weg. Der Quotient aus Wegdifferenz und Zeitdifferenz ergibt die Durchschnittsgeschwindigkeit im Zeitraum $t_2 - t_1$. Die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t führt allerdings nach dieser Begriffsbestimmung auf den unsinnigen, weil nicht definierten Ausdruck „null dividiert durch null", da $t_2 = t_1$ ist und folglich auch $s_2 = s_1$ sein muss.

Mit den Mitteln der Elementarmathematik ist es grundsätzlich nicht möglich, die Momentangeschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt für eine ungleichförmige Bewegung zu bestimmen. Erst durch Isaac Newton (1643–1727) wurde dieses Problem gelöst.

Durch zwei Punkte einer Funktionskurve kann eine Sekante gelegt werden, deren Steigung sich als Quotient der y-Wertdifferenz durch die Differenz der x-Werte ergibt.

$$\tan \alpha = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

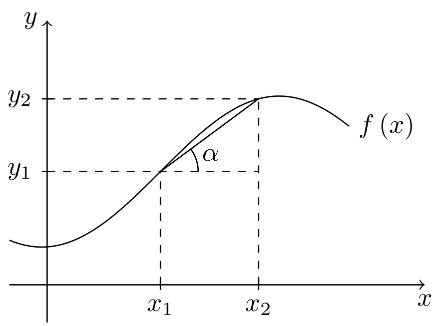


Abb. 18.1 Darstellung einer Sekante durch zwei Punkte der Funktion $f(x)$

Handelt es sich um zwei verschiedene Punkte, so ist $x_1 \neq x_2$ und die Berechnung der Steigung der Sekante immer ausführbar. Rutscht der Abszissenwert

x_2 immer näher an x_1 heran, so dreht sich die Sekante mehr und mehr in die Richtung der Tangente im Kurvenpunkt $(x_1; y_1)$. Doch im Grenzfall führt das zu dem in der Elementarmathematik unsinnigen Quotienten von null dividiert durch null, was jedoch nicht definiert ist. Mit den Methoden der Elementarmathematik lässt sich die Steigung der Tangente in einem Punkt einer beliebigen Funktionskurve

$$y = f(x)$$

nicht berechnen. Dieses Problem führte Gottfried Wilhelm Leibniz (dt. Mathematiker und Philosoph, 1646–1716) zur Differenzialrechnung. Die Steigung der Sekante gibt eine durchschnittliche Steigung der Funktion in dem angegebenen Intervall an.

Beispiel 18.11

$$y = 3x^2 - 2x + 4$$

Die Steigung der Sekante in den Punkten mit den Abszissenwerten

$$x_1 = 2 \qquad \text{und} \qquad x_2 = 3$$

beträgt:

$$\tan\alpha = \frac{25 - 12}{1} = 13$$
$$\alpha \approx 85{,}6^\circ$$

■

Der Quotient aus der y-Wert-Differenz und der x-Wert-Differenz

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

wird *Differenzenquotient* der Funktion

$$y = f(x)$$

genannt.

Anders formuliert: Da die beiden Punkte nicht identisch sind, gilt

$$x_2 - x_1 = \Delta x \neq 0 \qquad \text{oder} \qquad x_2 = x_1 + \Delta x.$$

Somit ist der Differenzenquotient der Funktion

$$y = f(x)$$

in den Punkten $P_2(x_2; y_2)$ und $P_1(x_1; y_1)$:

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}, \qquad \text{mit} \quad \Delta x \neq 0$$

Beispiel 18.12
Der Differenzenquotient für die Funktion

$$y = 3x^2 - 2x + 4$$

lautet im Punkt $(x_1; y_1)$ und dem Punkt mit einem Abstand des Abszissenwertes von Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3\,(x_1 + \Delta x)^2 - 2\,(x_1 + \Delta x) + 4 - \left(3x_1^2 - 2x_1 + 4\right)}{\Delta x}$$

oder allgemein im Punkt $(x; y)$:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{3\,(x + \Delta x)^2 - 2\,(x + \Delta x) + 4 - \left(3x^2 - 2x + 4\right)}{\Delta x}\\ &= \frac{6x\Delta x + 3\Delta x^2 - 2\Delta x}{\Delta x}\\ &= 6x - 2 + 3\Delta x\end{aligned}$$

Es ergibt sich beispielsweise für $x = 2$ und $\Delta x = 1$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 13 \qquad \text{(siehe vorheriges Beispiel)}$$

Somit kann die Steigung und der Steigungswinkel einer Sekante allgemein bestimmt werden, wenn der x-Wert des Punktes und der zweite Punkt durch den Abstand der Abszissenwerte festgelegt sind.

Ist Δx sehr klein (hinreichend klein), so hat der Divisor einen endlichen Wert und der Quotient ergibt einen Näherungswert für die Steigung der Tangente in dem betrachteten Punkt. ■

Gehen Sie zu Kapitel 19.4!

18.5 Ableitungsregeln

Die Bestimmung der Ableitung durch den Grenzwert des Differenzenquotienten ist sehr zeitaufwendig. Deswegen werden für spezielle Funktionen Ableitungsregeln zusammengestellt. Sie können durch den Grenzwert des zugehörigen Differenzenquotienten bewiesen werden.

Ableitung einer Potenzfunktion:

$$\begin{aligned}y &= x^n\\ y' &= nx^{n-1}\end{aligned}$$

Da für n jede reelle Zahl eingesetzt werden kann ($x \neq 0$), ist in dieser Regel auch die Ableitung von Wurzelfunktionen enthalten. Beispiele für Ableitungen von Potenzfunktionen zeigt Tabelle 18.1.

Tab. 18.1 Beispiele für Ableitungen von Potenzfunktionen

Funktion	umgeschrieben	differenziert	vereinfacht
$y = x^3$		$y' = 3x^{3-1}$	$y' = 3x^2$
$y = \frac{1}{x^2}$	$y = x^{-2}$	$y' = -2x^{-2-1}$	$y' = -\frac{2}{x^3}$
$y = \sqrt[4]{x}$	$y = x^{\frac{1}{4}}$	$y' = \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$	$y' = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$
$y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$	$y = x^{-\frac{2}{3}}$	$y' = -\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}-1} = -\frac{2}{3x^{\frac{5}{3}}}$	$y' = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}$
$y = c$	$y = cx^0$	$y' = 0 \cdot cx^{-1}$	$y' = 0$

Ableitung der Sinusfunktion:

$$y = \sin(x)$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin(x)}{\Delta x}, \qquad \text{mit} \qquad \begin{aligned} &\sin(x+\Delta x) - \sin(x) \\ &= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x+\Delta x}{2} \end{aligned}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right), \text{ wobei } \lim_{z \to 0} \frac{\sin(z)}{z} = 1, \quad \text{mit} \quad z = \frac{\Delta x}{2}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos(x)$$

Ableitung der Kosinusfunktion ohne Beweis:

$$y = \cos(x)$$
$$y' = -\sin(x)$$

Ableitungsregeln:

1. Summenregel

   Die Ableitung einer Summe (Differenz) von Funktionen ist gleich der Summe (Differenz) der Ableitungen dieser Funktionen.

$$\begin{aligned} y &= f_1(x) + f_2(x) \\ y' &= f_1'(x) + f_2'(x) \end{aligned}$$

   Der Beweis ergibt sich aus dem Grenzwertsatz zur Bestimmung des Grenzwertes einer Summe von Funktionen. Dieser ist gleich der Summe der Grenzwerte der einzelnen Summanden. Eine Verallgemeinerung heißt:

$$\begin{aligned} y &= f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) \\ y' &= f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots + f_n'(x) \end{aligned}$$

   (Beweis kann durch vollständige Induktion geführt werden)

   Beispiel 18.13

$$\begin{aligned} y &= 3x^2 + 4x - 5 \\ y' &= 6x + 4 \end{aligned}$$

   ■

2. Produktregel

$$\begin{aligned} y &= f_1(x) \cdot f_2(x) \\ y' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_1(x + \Delta x) \cdot f_2(x + \Delta x) - f_1(x) \cdot f_2(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

   Der Zähler wird so umgeformt, dass

$$f_1(x) \cdot f_2(x + \Delta x) - f_1(x) \cdot f_2(x + \Delta x) = 0$$

   addiert wird.

$$\begin{aligned} y' = \lim_{\Delta x \to 0} \Bigg[& \frac{f_1(x + \Delta x) \cdot f_2(x + \Delta x) - f_1(x) \cdot f_2(x)}{\Delta x} \\ & + \frac{f_1(x) \cdot f_2(x + \Delta x) - f_1(x) \cdot f_2(x + \Delta x)}{\Delta x} \Bigg] \end{aligned}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f_1(x + \Delta x) - f_1(x)}{\Delta x} f_2(x + \Delta x) + \frac{f_2(x + \Delta x) - f_2(x)}{\Delta x} f_1(x) \right]$$
$$y' = f_1'(x) \cdot f_2(x) + f_2'(x) f_1(x), \qquad \text{da} \lim_{\Delta x \to 0} f_2(x + \Delta x) = f_2(x)$$

Durch vollständige Induktion lässt sich die Produktregel für n-Faktoren beweisen.

$$\begin{aligned} y &= f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) \\ y' &= f_1'(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) + \ldots \\ &\qquad + f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n'(x) \end{aligned}$$

Die Ableitung eines Produktes aus n-Faktoren besteht aus n-Summanden. Die Summanden stellen Produkte aus den Ableitungen jedes Summanden und den $(n-1)$ undifferenzierten Faktoren dar.

Beispiel 18.14

$$\begin{aligned} y &= \left(x^2 + 1\right) \sqrt{x} \sin(x) \\ y' &= 2x\sqrt{x} \sin(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(x^2 + 1\right) \sin(x) + \cos(x) \left[\left(x^2 + 1\right) \sqrt{x}\right] \end{aligned}$$

■

Die Ableitung der Potenzfunktion

$$y = x^n, \qquad \text{mit} \quad n > 1$$

kann aus der Produktregel schnell hergeleitet werden, da das Potenzieren bekanntlich eine spezielle Multiplikation darstellt.

$$y = x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n\text{-Faktoren}}, \qquad y = x \longmapsto y' = 1$$

$$y' = \overbrace{\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{(n-1)\text{-Faktoren}} + \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{(n-1)\text{-Faktoren}} + \ldots + \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{(n-1)\text{-Faktoren}}}^{n\text{-Summanden}} = n \cdot x^{n-1}$$

3. Quotientenregel

$$y = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \qquad \text{für} \quad f_2(x) \neq 0$$

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{f_1(x + \Delta x)}{f_2(x + \Delta x)} - \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{f_1(x + \Delta x) f_2(x) - f_1(x) f_2(x + \Delta x)}{f_2(x + \Delta x) f_2(x)} \right] \end{aligned}$$

Dem Zähler wird

$$f_1(x)\,f_2(x) - f_1(x)\,f_2(x) = 0$$

hinzugefügt:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{f_1(x+\Delta x)\,f_2(x) - f_1(x)\,f_2(x)}{f_2(x+\Delta x)\,f_2(x)} + \frac{f_1(x)\,f_2(x) - f_1(x)\,f_2(x+\Delta x)}{f_2(x+\Delta x)\,f_2(x)}\right]$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{f_2(x+\Delta x)\,f_2(x)}\left[\frac{f_1(x+\Delta x) - f_1(x)}{\Delta x} f_2(x) - \frac{f_2(x+\Delta x) - f_2(x)}{\Delta x} f_1(x)\right]$$

$$y' = \frac{f_1'(x)\,f_2(x) - f_2'(x)\,f_1(x)}{[f_2(x)]^2}$$

Beispiel 18.15

$$\begin{aligned} y &= \frac{x-1}{2x^2+3x-4} \\ y' &= \frac{1\cdot\left(2x^2+3x-4\right) - (4x+3)(x-1)}{(2x^2+3x-4)^2} \end{aligned}$$

■

Der Quotient ist stets nach dem Differenzieren zu vereinfachen. Nach der Quotientenregel kann auch die Ableitung für die Tangens- und Kotangensfunktion bestimmt werden.

Beispiel 18.16

$$\begin{aligned} y &= \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ y' &= \frac{\cos(x)\cdot\cos(x) + \sin(x)\cdot\sin(x)}{\cos^2(x)}, \qquad \text{mit} \quad \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \\ y' &= \frac{1}{\cos^2(x)} \end{aligned}$$

■

Beispiel 18.17

$$y = \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$
$$y' = -\frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\sin^2(x)}$$
$$y' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$$

■

4. Ableitung der Umkehrfunktion
   Streng monotone Funktionen besitzen Umkehrfunktionen. Wird nach dem ersten Schritt (Auflösen nach x) der zweite nicht durchgeführt (y und x werden eigentlich im zweiten Schritt miteinander vertauscht), dann ergibt sich die Ableitung der Umkehrfunktion als Kehrwert der Ableitung der ursprünglichen Funktion.

   Ist
   $$y = f(x)$$
   eine eindeutige in einem Intervall $(x_1; x_2)$ differenzierbare Funktion und ist dort
   $$f^{-1} \neq 0,$$
   so ist auch die Umkehrfunktion
   $$f^{-1} = \rho$$
   im Intervall $(x_1; x_2)$ mit der Ableitung
   $$\rho'(y) = \frac{1}{f^{-1}(x)}$$
   differenzierbar. Somit hat das Produkt aus Ableitung der Funktion und Ableitung der Umkehrfunktion den Wert eins.

   Beispiel 18.18
   Aus den Potenzfunktionen ergeben sich in den Monotonieintervallen als Umkehrfunktionen die Wurzelfunktionen. Für
   $$y = \sqrt[n]{x}, \qquad \text{für} \quad y > 0, \quad x > 0$$
   heißt die Umkehrfunktion
   $$x = \rho(y) = y^n, \qquad \text{mit} \quad y > 0.$$

Nach der Regel zur Ableitung einer Potenzfunktion mit ganzen Exponenten ist

$$\rho' = (y) = ny^{n-1}$$
$$f'(x) = \frac{1}{\rho'(y)} = \frac{1}{ny^{n-1}},$$

mit

$$y = \sqrt[n]{x}$$

ergibt sich

$$f'(x) = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}},$$

Dieses Ergebnis stimmt mit dem überein, das man erhält, wenn die Potenzfunktion nach der Regel

$$y = x^n \longmapsto y' = nx^{n-1}$$

differenziert wird:

$$y = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$
$$y' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n}x^{\frac{-n+1}{n}} = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$$

■

Die Ableitung einer Funktion in impliziter Darstellung ist mitunter besser durch die der Umkehrfunktion zu bestimmen.

Beispiel 18.19
Durch die Gleichung

$$x + y^3 - y^5 = 0$$

wird eine Kurve bestimmt. Die Steigung der Tangente im Punkt $(0; 1)$ ist zu ermitteln.

$$x = -y^3 + y^5$$
$$\rho'(y) = -3y^2 + 5y^4$$
$$\tan\alpha = f'(x) = \frac{1}{-3y^2 + 5y^4}$$
$$\tan\alpha_0 = f'(0) = \frac{1}{-3\cdot 1^2 + 5\cdot 1^4} = \frac{1}{2}$$
$$\alpha_0 \approx 26{,}5^\circ$$

■

Ohne Beweis (Grenzwert des Differenzenquotienten) werden die Ableitungen der Exponential- und Logarithmusfunktion angegeben:

5. Exponentialfunktion

$$y = a^x \longmapsto y' = a^x \ln(a), \qquad \text{für} \quad a > 0$$

Spezialfall :

$$\begin{aligned} &a = \mathrm{e} \qquad \text{(Basis des natürlichen Logarithmus)} \\ &y = \mathrm{e}^x \longmapsto y' = \mathrm{e}^x \end{aligned}$$

Beispiel 18.20

$$y = 3^x \longmapsto y' = 3^x \ln(3)$$

■

6. Logarithmusfunktion

$$y = \log_a(x) \longmapsto y' = \frac{1}{x} \log_a(\mathrm{e}) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}, \quad \text{mit} \quad a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0.$$

Spezialfall :

$$y = \ln(x) \longmapsto y' = \frac{1}{x}$$

Beispiel 18.21

$$y = \lg(x) \longmapsto y' = \frac{1}{x \cdot \ln(10)}$$

■

7. Steht ein konstanter Faktor vor einer Funktion, $y = cf(x)$, so kann er im zugehörigen Differenzenquotienten ausgeklammert und bei der Grenzwertbildung vor die Ableitung geschrieben werden.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cf(x + \Delta x) - cf(x)}{\Delta x} = c \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = c \cdot f'(x)$$

Ein konstanter Faktor bleibt beim Differenzieren erhalten (im Unterschied zum konstanten Summanden, der beim Differenzieren wegfällt).

Gehen Sie zu Kapitel 19.5!

18.6 Anwendung der Differenzialrechnung

Die ausführliche Darstellung der Lösung von Aufgabe Kap. 16.6!

1. Die Gesamtkosten eines Angebotsmonopolisten in einer Planungsperiode kann durch die Funktion

$$K(x) = 0{,}25x^3 - 2x^2 + 6x + 12{,}5,$$
$$\text{mit} \quad D_K = D_{\text{ök}},$$

die Nachfrage kann durch die Funktion

$$p(x) = 18 - 2x$$

beschrieben werden.

Bestimmen Sie $D_{\text{ök}}$, berechnen Sie das Gesamtkosten- und Betriebskostenminimum sowie das Betriebsoptimum und zeichne Sie $\text{Graph}\big(K'\big)$, $\text{Graph}(k_{\text{v}})$ und $\text{Graph}(K)$ in ein Koordinatensystem.

Lösung:

Ökonomischer Definitionsbereich durch die Bedingung:

$$\begin{aligned} x \geq 0; \quad p\,(x) &\geq 0 \\ p\,(x) = 18 - 2x &\geq 0 \\ 2x &\leq 18 \\ x &\leq 9 \end{aligned}$$

Grenzkostenfunktion aus:

$$\begin{aligned} K\,(x) &= 0{,}25x^3 - 2x^2 + 6x + 12{,}5 \\ K'\,(x) &= 0{,}75x^2 - 4x + 6, \quad \text{kein Extrempunkt der Kosten} \\ K''\,(x) &= 1{,}5x - 4, \quad \text{Wendepunkt: } x = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

$K'\,(x)$ gibt in der Praxis den Kostenzuwachs bei einer Erhöhung der Ausbringungsmenge um eine Einheit an.

$$\begin{aligned} K'\,(x) &= 0{,}75x^2 - 4x + 6 \\ K''\,(x) &= 1{,}5x - 4 = 0 \\ 1{,}5x - 4 &= 0 \\ x &= \frac{8}{3} \\ K'\left(\frac{8}{3}\right) &= \frac{3}{4} \cdot \frac{64}{9} - \frac{4 \cdot 8}{3} + 6 = \frac{2}{3} \\ P_{\min}\left(\frac{8}{3}; \frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

Gesamtkostenfunktion (gegeben):

$$K(x) = 0{,}25x^3 - 2x^2 + 6x + 12{,}5$$

Variable Gesamtkosten (also ohne die fixen Kosten):

$$K_\mathrm{v} = 0{,}25x^3 - 2x^2 + 6x$$

Variable Stückkostenfunktion:

$$\begin{aligned} k_{\mathrm{v}_\mathrm{St}} &= \frac{K_\mathrm{v}(x)}{x} = 0{,}25x^2 - 2x + 6x \\ k'_{\mathrm{v}_\mathrm{St}} &= 0{,}5x - 2 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Minimale variable Stückkosten:

$$P_\mathrm{min}(4; 8)$$

Mit Fixkosten entsteht die Stückkostenfunktion:

$$k_\mathrm{St}(x) = \frac{K(x)}{x} = 0{,}25x^2 - 2x + 6 + \frac{12{,}5}{x}, \qquad \text{mit} \quad x \neq 0$$

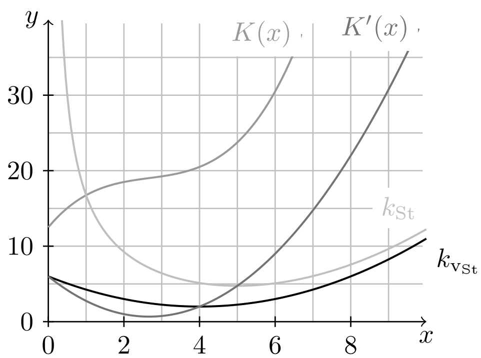


Abb. 18.2 Darstellung der Graphen von $K(x)$, $K'(x)$, $k_\mathrm{St}(x)$ und $k_{\mathrm{v}_\mathrm{St}}(x)$ im Definitionsbereich $D_\text{ök}$

2. Bestimmen Sie die Erlösfunktion $E(x)$ und das Erlösmaximum. Stellen Sie die Gewinnfunktion G auf und berechnen Sie das Gewinnmaximum. Zeichnen Sie Graph(K), Graph(E) und Graph(G) in ein Koordinatensystem.

Erläuterung: Dabei versteht man unter dem Betriebsminimum (BM) die Ausbringungsmenge x, bei deren Produktion die geringsten durchschnittlichen variablen Kosten entstehen, und unter dem Betriebsoptimum (BO) die Ausbringungsmenge, bei deren Produktion die geringsten Durchschnittskosten entstehen.

Lösung:

Erlösfunktion:

$$E(x) = p(x) \cdot x = 18x - 2x^2$$
$$E'(x) = 18 - 4x$$

Erlösmaximum:

$$P_{\max}(4{,}5; 40{,}5)$$

Gewinnfunktion:

$$\begin{aligned} G(x) &= E(x) - K(x) \\ &= 18x - 2x^2 - \left(0{,}25x^3 - 2x^2 + 6x + 12{,}5\right) \\ &= -0{,}25x^3 + 12x - 12{,}5 \\ G'(x) &= -0{,}75x^2 + 12 = 0 \\ x &= 4 \\ G''(x) &= -1{,}5x < 0,\ \text{Maximum} \\ G(4) &= -\frac{1}{4} \cdot 64 + 12 \cdot 4 - 12{,}5 = 19{,}5 \quad G_{\max}(4; 19{,}5) \end{aligned}$$

Bei der Ausbringungsmenge $x = 4$, wird ein Gewinnmaximum von 19,5 erreicht.

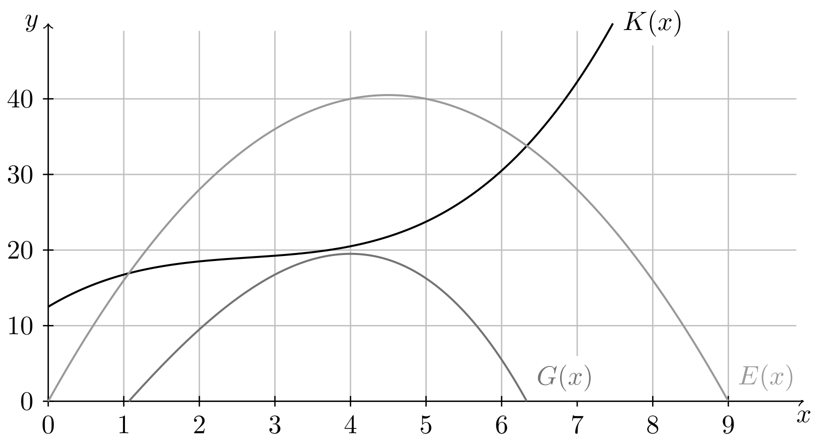


Abb. 18.3 Darstellung der Graphen von $K(x)$, $E(x)$ und $G(x)$

Gehen Sie zu Kapitel 19.6!

18.7 Elastizität

Die Ausführliche Darstellung der Lösung von Kapitel 16.7!

Die Nachfrage eines Produktes ist vom Preis der nachgefragten Ware linear abhängig.

$$x(p) = 30 - 2p$$

Zu berechnen ist die Elastizität des Preises. Ist sie dort, wo Preis und Nachfrage nichtnegativ sind positiv oder negativ? Gesucht sind also die Bereiche der Elastizität und der Nichtelastizität (Abb. 18.4).

Die allgemeine Formel für die Elastizität lautet:

$$\epsilon = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)}$$

Die Nachfragefunktion

$$x(p) = 30 - 2p$$

und deren Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = -2$$

in die Formel für die Elastizität eingesetzt ergibt die Elastizität in Abhängigkeit vom Preis p:

$$\epsilon = -2\frac{p}{30 - 2p}.$$

Die Bedingung eines nichtnegativen Preises und einer nichtnegativen Nachfrage ergibt den Definitionsbereich

$$0 \leq p < 15$$

für die Nachfragefunktion. Für die 1-Elastizität ergibt sich daraus:

$$\begin{aligned}\epsilon &= -2\frac{p}{30 - 2p} = -1\\ p &= 7{,}5\end{aligned}$$

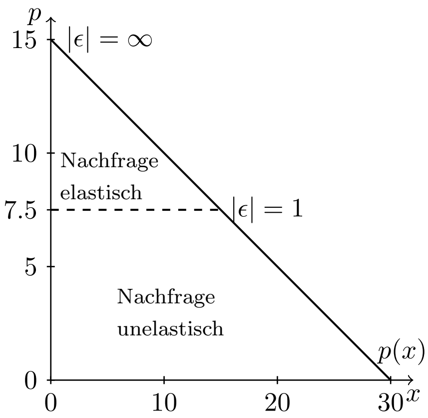


Abb. 18.4 Darstellung der Elastizitätsbereiche

Gehen Sie zu Kapitel 19.7!

18.8 Grundintegrale

Grundintegrale entstehen aus der Umkehrung der Ableitungsregeln, soweit diese sich einfach umkehren lassen.

Integration der Potenzfunktion:

$$\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

Dabei ist n eine reelle Zahl, $n \neq -1$.

Ist n keine natürliche Zahl, so ergeben sich für x Einschränkungen aus der Bedingung der Stetigkeit als Voraussetzung für die Integrierbarkeit. Für

$$n = -1$$

ist:

$$\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln |x| + c.$$

Integration der trigonometrischen Funktionen:

$$\int \cos(x) \, \mathrm{d}x = \sin(x) + c$$

$$\int \sin(x) \, \mathrm{d}x = -\cos(x) + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)} \, \mathrm{d}x = \tan(x) + c, \qquad \text{für } x \neq (2k+1)\,\frac{\pi}{2}, \quad k \text{ eine ganze Zahl}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(x)} \, \mathrm{d}x = -\cot(x) + c, \qquad \text{für } x \neq k \cdot \pi$$

$\int \tan(x)\,\mathrm{d}x$ oder $\int \cot(x)\,\mathrm{d}x$ führen nicht zu Funktionen, bei denen der Funktionswert unmittelbar aus den Werten der unabhängigen Variablen berechnet werden kann. Die Integrale sind mittelbare Funktionen.

Beispiel 18.22

$$\int \tan(x)\ \mathrm{d}x = \ln(\cos(x)) + c$$

■

Es gibt wenig Integrale, die sofort als Grundintegrale zu identifizieren sind. Es ist aber wichtig, diese wenigen Grundintegrale sicher zu kennen, da verschiedene Verfahren das Ziel haben, zu berechnende Integrale auf Grundintegrale zurückzuführen. Somit ist auch für die Wahl eines günstigen Lösungsweges die Beherrschung der Grundintegrale wichtig.

Die Integrationskonstante c kann zunächst jede reelle Zahl annehmen. Dadurch ergeben sich unendlich viele unbestimmte Integrale zu einem Integranden. Durch eine Veränderung von c bleibt die Steigung in einem Abzissenwert gleich. Die Funktionen lassen sich im Koordinatensystem durch Parallelverschiebung der Bilder um c in Richtung der y-Achse zur Deckung bringen (Abb. 18.5).

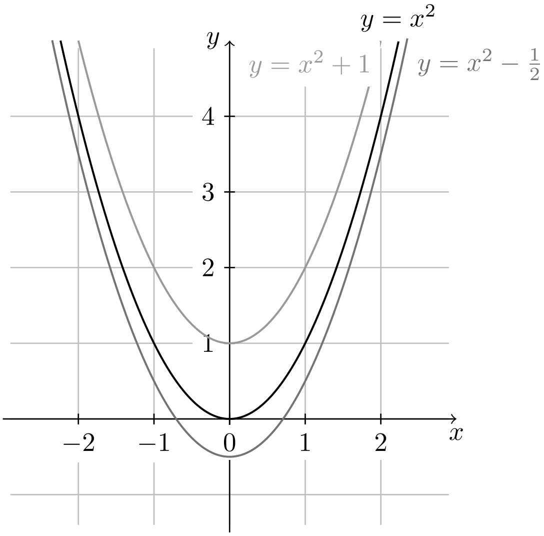


Abb. 18.5 Darstellung der Funktion $F(x) = x^2 + c$ für verschiedene Wert für c

Durch einen Punkt, der auf einer Stammfunktion liegt, kann die Integrationskonstante c bestimmt werden. Aus der Schar der unendlich vielen Stammfunktionen wird durch einen Punkt eine Stammfunktion eindeutig bestimmt. Einsetzen des Punktes

$$P(x_1; y_1)$$

in das zugehörige unbestimmte Integral

$$y = F(x) + c$$

ergibt:

$$\begin{aligned} y_1 &= F(x_1) + c \\ c &= y_1 - F(x_1) \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Stammfunktion:

$$y = F(x) - F(x_1) + y_1$$

Ist die Integrationskonstante nicht mehr frei wählbar, sondern nach einer vorgegebenen Bedingung bestimmt worden, so ergibt sich aus einer unendlichen Schar der unbestimmten Integralfunktionen eine ausgewählte Funktion. Diese Funktion wird als *partikuläres Integral* bezeichnet. Die vorgegebene Bedingung (zum Beispiel durch die Angabe eines Punktes) wird *Anfangsbedingung* genannt. Eine spezielle Bedingung ist die Angabe einer Nullstelle der Stammfunktion

$$(x_N; 0)\,.$$

Dann ist

$$y_1 = 0$$

und

$$c = -F(x_1)\,.$$

Das partikuläre Integral wird geschrieben als:

$$I(x) = \int_{x_1}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) - F(x_1)\,.$$

Diese Schreibweise kann auch für bestimmte Integrale mit einer variablen oberen Grenze verwendet werden. x_1 ist die untere Grenze und x die obere Grenze des Integrals, welches gelesen wird: „Integral über f von $x\,\mathrm{d}x$ in den Grenzen von x-Eins bis x."

In der hier angegebenen Schreibweise ist die untere Grenze x_1 stets eine Nullstelle der Stammfunktion

$$I(x) = F(x) - F(x_1)\,.$$

Beispiel 18.23
Gesucht ist das partikuläre Integral, das bei

$$x = 2$$

eine Nullstelle hat und dessen Ableitung

$$f(x) = 3x^2$$

lautet.
Lösung:

$$\begin{aligned} \int 3x^2 \, \mathrm{d}x &= x^3 + c \qquad \text{(unbestimmtes Integral)} \\ c &= -F(2) = -8 \\ I(x) &= x^3 - 8 \end{aligned}$$

■

Gehen Sie zu Kapitel 19.8!

18.9 Bestimmte Integration

In das partikuläre Integral

$$I(x) = \int_{x_1}^{x} f(x) \, \mathrm{d}x = F(x) - F(x_1)$$

wird für x der feste Wert x_2 eingesetzt:

$$I(x) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) \, \mathrm{d}x = F(x_2) - F(x_1)$$

Dieser Ausdruck wird als *bestimmtes Integral* der Funktion $f(x)$ in den Grenzen von x_1 und x_2 bezeichnet. Der Wert des bestimmten Integrals ist eine Konstante. Die Bestimmung erfolgt als Funktionswert der Funktion, die an der Stelle

$$x = x_1$$

eine Nullstelle hat und deren Ableitung $f(x)$ ist. Das partikuläre Integral ist eine Funktion. Das bestimmte Integral ist eine Konstante. Die Berechnung des bestimmten Integrals erfolgt in vier Einzelschritten:

1. Durch unbestimmte Integration wird die Stammfunktion bestimmt.

2. Der Wert der Stammfunktion wird an der oberen Grenze x_2 berechnet.
3. Der Wert der Stammfunktion wird an der unteren Grenze x_1 berechnet.
4. Die Differenz
$$F(x_2) - F(x_1)$$
ergibt den Wert des bestimmten Integrals.

Bei der Differenzbildung im vierten Punkt fällt die Integrationskonstante der unbestimmten Integration offensichtlich weg. Diese vier Arbeitsschritte werden symbolisch angegeben:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\, \mathrm{d}x = F(x)\big|_{x_1}^{x_2} = F(x_2) - F(x_1)$$

Beispiel 18.24

$$\int_{1}^{2} \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x = \ln(x)\big|_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$$

■

Gehen Sie zu Kapitel 19.9!

18.10 Flächenberechnung

Die Anwendung der Integralrechnung zur Berechnung von Flächen beruht auf der Definition des bestimmten Integrals als Grenzwert einer Summenfolge deren Glieder gegen null gehen, weil der Faktor Δx beliebig klein gemacht werden kann. Es wurde bereits bei der Herleitung des bestimmten Integrals als Flächeninhalt auf die Fläche Bezug genommen, die von der Funktion $y = f(x)$, der x-Achse und zwei Parallelen zur y-Achse im Abstand x_1 und x_2 begrenzt wird (Abb. 18.6). Dabei wurde vorausgesetzt, dass für alle $x \in [x_1; x_2]$ $f(x) > 0$ gilt.

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, \mathrm{d}x = F(x_2) - F(x_1)$$

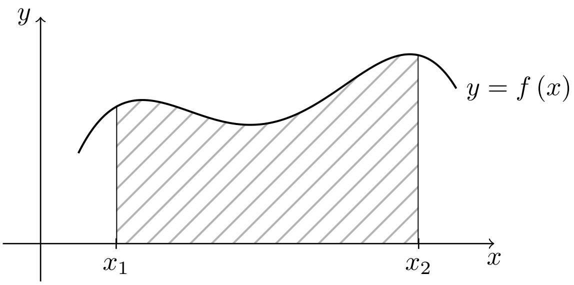


Abb. 18.6 Darstellung der Fläche unter der Funktion $y = (x)$ in den Grenzen x_1 und x_2

Für geradlinig begrenzte Flächen stimmen die Ergebnisse mit denen der durch planimetrische Berechnungsformeln erhaltenen überein.

Beispiel 18.25
Berechnung der Fläche unter der Geraden

$$y = \frac{1}{2}x + 1$$

in den Grenzen $x_1 = 1$ und $x_2 = 4$ (Abb. 18.7).

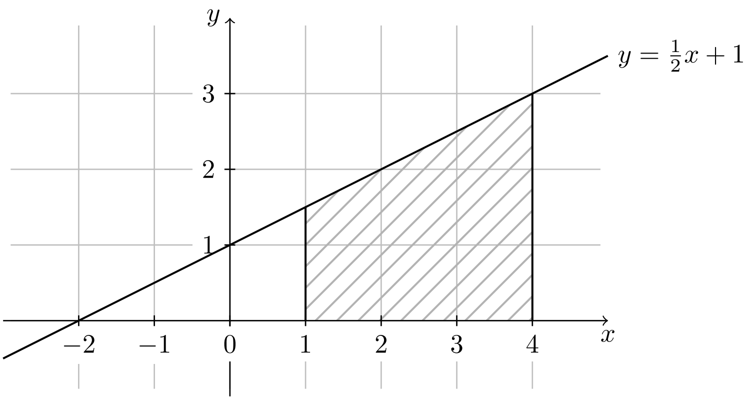


Abb. 18.7 Darstellung der Fläche unter der Geraden $y = \frac{1}{2}x + 1$ in den Grenzen $x_1 = 1$ und $x_2 = 4$

$$A = \int_1^4 \left(\frac{1}{2}x + 1\right) \mathrm{d}x = \left.\frac{x^2}{4} + x\right|_1^4 = 8 - \frac{1}{4} - 1 = \frac{27}{4}\ \mathrm{FE}$$

Berechnung der Trapezfläche unter der Kurve:

$$y\,(1)=\frac{3}{2},\qquad y\,(4)=3$$

$$A\frac{\left(3+\frac{3}{2}\right)}{2}\cdot 3=\frac{27}{4}\text{ FE}$$

■

Wenn nicht beachtet wird, dass alle Funktionswerte positiv sein müssen, so ergibt sich die Differenz der Teilflächen, da der Flächeninhalt bei der Integration mit einem Vorzeichen behaftet ist.

Beispiel 18.26
Berechnung der Fläche, die von einer Sinusfunktion und der x-Achse eingeschlossen wird (Abb. 18.8).

$$\int_0^{2\pi}\sin\,(x)\;\mathrm{d}x=-\cos\,(x)|_0^{2\pi}=-1-(-1)=0$$

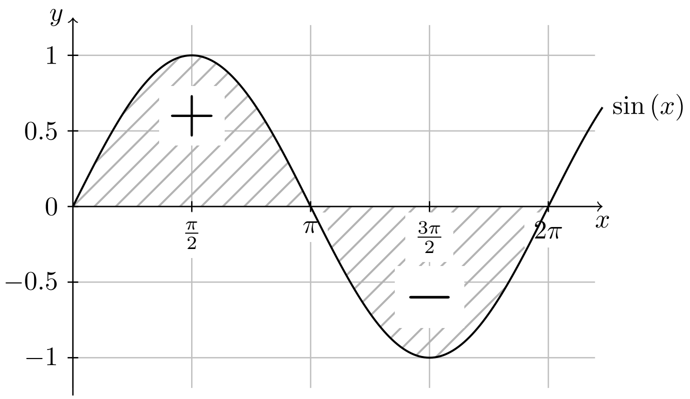


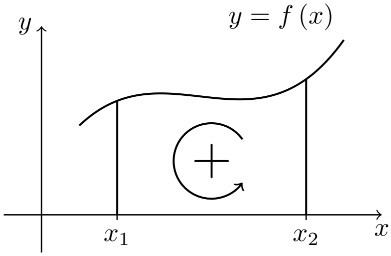
Abb. 18.8 Berücksichtigung des Vorzeichens der Teilflächen bei Vorzeichenwechsel der Funktionswerte

Dieses Ergebnis kann niemals der Flächeninhalt zwischen Sinusfunktion und der x-Achse für eine Periode $2\cdot\pi$ sein! ■

Nach der Definition des bestimmten Integrals als Grenzwert einer Summe von Produkten ergeben sich folgende vier Fälle:

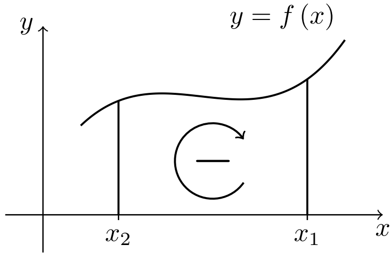
1. Mathematisch positive Richtung (entgegen dem Drehsinn der Uhrzeiger orientiert):

$$\left.\begin{array}{r}\Delta x > 0\\ f\left(x\right) > 0\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad A > 0$$



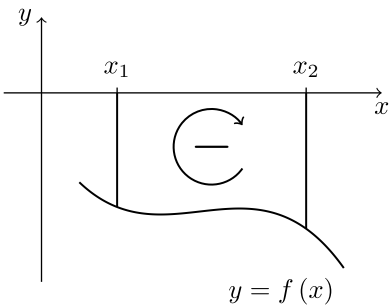
2. Mathematisch negative Richtung (mit dem Drehsinn der Uhrzeiger orientiert):

$$\left.\begin{array}{r}\Delta x < 0\\ f\left(x\right) > 0\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad A < 0$$



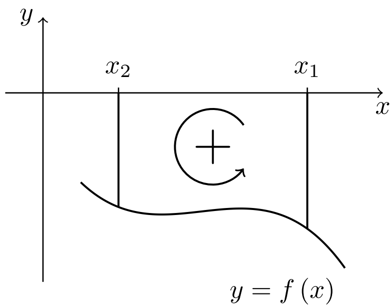
3. Mathematisch negative Richtung:

$$\left.\begin{array}{r}\Delta x > 0\\ f\left(x\right) < 0\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad A < 0$$



4. Mathematisch positive Richtung:

$$\left.\begin{array}{r}\Delta x < 0\\ f\left(x\right) < 0\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad A > 0$$



Beispiel 18.27

$$A_1 = \int_0^{\pi} \sin\left(x\right)\,\mathrm{d}x = -\cos\left(x\right)\Big|_0^{\pi} = 1 - (-1) = 2$$

$$A_2 = \int_{\pi}^{2\pi} \sin\left(x\right)\,\mathrm{d}x = -\cos\left(x\right)\Big|_{\pi}^{2\pi} = -1 - (-(-1)) = -2$$

Aus Symmetriegründen müssen sich betragsmäßig gleiche Flächeninhalte ergeben, die allerdings ein unterschiedliches Vorzeichen haben, da bei π eine Nullstelle der Sinusfunktion liegt. Somit beträgt der Flächeninhalt zwischen der Sinusfunktion und der x-Achse in einer Periodenlänge vier Flächeneinheiten. ∎

Bei der Bestimmung einer Fläche zwischen einer Funktion und der x-Achse darf sich im Integrationsintervall keine Nullstelle befinden oder: Nie über Nullstellen der Funktion hinweg integrieren!

Beispiel 18.28
Die Fläche zwischen der Funktion

$$y = x^2 - x - 2,$$

und der x-Achse ist in den Grenzen von -2 bis $+4$ zu bestimmen (Abb. 18.9).

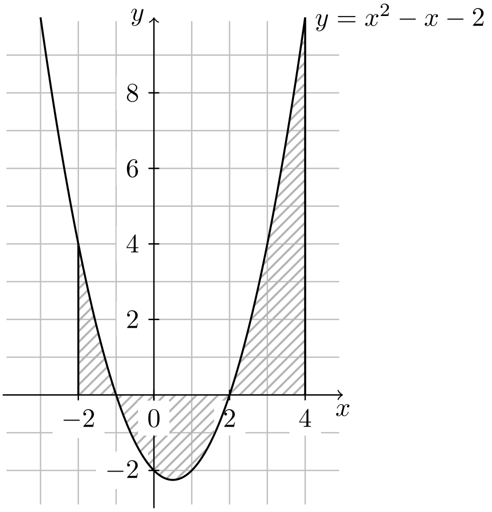


Abb. 18.9 Grafische Darstellung der zu berechnenden Fläche

Nullstellen der Funktion: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$

$$A_1 = \int_{-2}^{-1} \left(x^2 - x - 2\right) \, \mathrm{d}x \qquad = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \Big|_{-2}^{-1}$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \left(-\frac{8}{3} - 2 + 4\right) = \frac{11}{6}$$

$$A_2 = \int\limits_{-1}^{2} \left(x^2 - x - 2\right) \,\mathrm{d}x \qquad = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\Big|_{-1}^{2}$$

$$= \frac{8}{3} - 2 - 4 - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) = -\frac{9}{2}$$

$$A_3 = \int\limits_{2}^{4} \left(x^2 - x - 2\right) \,\mathrm{d}x \qquad = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\Big|_{2}^{4}$$

$$= \frac{64}{3} - 8 - 8 - \left(\frac{8}{3} - 2 - 4\right) = \frac{26}{3}$$

$$A = A_1 + |A_2| + A_3 = 15 \text{ FE}$$

■

Auf entsprechende Weise wird der Flächeninhalt zwischen einer Funktion (Umkehrfunktion) und der y-Achse bestimmt:

$$A_y = \int\limits_{y_1}^{y_2} g\,(y) \,\mathrm{d}y$$

Beispiel 18.29
Die Fläche zwischen der Funktion

$$y = x^2$$

und der y-Achse zwischen $y_1 = 0$ und $y_2 = 9$ ist zu bestimmen (Abb. 18.10).

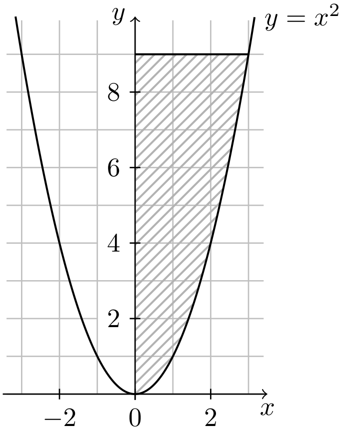


Abb. 18.10 Grafische Darstellung der zu berechnenden Fläche

$$x = \sqrt{y} \qquad y \geq 0$$

$$A_y = \int_0^9 \sqrt{y}\,\mathrm{d}y = \frac{2}{3}y\sqrt{y}\bigg|_0^9 = \frac{2}{3} \cdot 9 \cdot \sqrt{9} = 18 \text{ FE}$$

$$A_x = \int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\bigg|_0^3 = \frac{27}{3} = 9 \text{ FE}$$

$A_x + A_y$ beschreibt eine Rechtecksfläche mit den drei Seiten x-Achse, und der Parallelen zur x-Achse im Abstand 9, der y-Achse und ihrer Parallelen im Abstand 3. Die Summe der berechneten Flächen A_x und A_y stimmt überein. ■

Der Flächeninhalt zwischen zwei Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ berechnet sich aus der Differenz der Flächeninhalte (Integrationsregel für Integration von Summen mit gleichen Integrationsgrenzen):

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f_1(x)\,\mathrm{d}x - \int_{x_1}^{x_2} f_2(x)\,\mathrm{d}x$$

$$A = \int_{x_1}^{x_2} [f_1(x) - f_2(x)]\,\mathrm{d}x$$

Gehen Sie zu Kapitel 19.10!

18.11 Konsumenten- und Produzentenrente

Konsumentenrente:

$$K_{\mathrm{R}} = \int_0^{x_0} p(x)\,\mathrm{d}x - p_0 \cdot x_0$$

Für die Nachfragefunktion soll gelten:

$$x(p) = -0{,}2p + 15$$

Aufgrund des Marktmechanismus hat sich ein Preis beim Gleichgewichtspunkt

$$p_0 = 30\,€$$

eingestellt.

Welche Gesamtsumme E^* wären die Konsumenten bereit gewesen zu zahlen? Welche Summe haben die Konsumenten aufgrund des Marktgleichgewichts eingespart?

$$\begin{aligned}
x &= -0{,}2p + 15 \\
p &= -5x + 75 \\
x_0 &= 9 p_0 = 30 \\
E_0 &= 9 \cdot 30 = 270 \\
E^* &= \int\limits_0^9 p\,(x)\ \mathrm{d}x = \int\limits_0^9 (-5x + 75)\ \mathrm{d}x = -\frac{5}{2}x^2 + 75x\Big|_0^9 = -\frac{405}{2} + 675 = 472{,}5 \\
K_\mathrm{R} &= 472{,}5 - 30 \cdot 9 = 202{,}50\ €
\end{aligned}$$

Produzentenrente:

$$P_\mathrm{R} = x_0 \cdot p_0 - \int\limits_0^{x_0} p_\mathrm{A}\,(x)\ \mathrm{d}x$$

Fortsetzung des Beispiels:

Jeder Produzent bietet seine gesamte Warenmenge zu einem Preis $p_0 \geq 10\,€$ an.

Steigt der Marktpreis, treten neue Anbieter hinzu. Die bisherigen Anbieter halten ihr Angebot unveränderlich.

Angebotsfunktion:

$$p_\mathrm{A}\,(x) = 10 + 1{,}5x$$

Welcher Marktpreis stellt sich nun ein?

Das ist der Preis p_0 bei dem gilt:

$$p\,(x) = p_\mathrm{A}\,(x)$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
-5x + 75 &= 10 + 1{,}5x \\
6{,}5x &= 65 \\
x_0 &= 10 \\
p_0(x_0) &= 25
\end{aligned}$$

Welches ist der zusätzliche Gewinn (Produzentenrente), der dadurch entsteht, dass die Anbieter zum Preis p_0 verkaufen können?

$$P_\mathrm{R} = 10 \cdot 25 - \int\limits_0^{10} (10 + 1{,}5x)\ \mathrm{d}x = 250 - \ 10x + \frac{3}{4}x^2\Big|_0^{10} = 250 - (100 + 75) = 75$$

Gehen Sie zu Kapitel 19.11!

19 Übungsaufgaben Analysis II

Übersicht

19.1 Konvergente Zahlenfolgen

1. Für welches n unterschreitet der Abstand zwischen Gliedern der Zahlenfolge
$$\left\{\frac{n-1}{n+1}\right\}$$
und dem Grenzwert 1 den Abstand $\frac{1}{100}$.

2. Zu beweisen ist
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+1}=1.$$

3. Welche Folgen sind konvergent (divergent)?

   a) $\left\{\frac{100}{n^2}\right\}$

   b) $\{x_1q^n\}\,, \qquad \text{für} \quad |q|>1$

   c) $\{x_1q^n\}\,, \qquad \text{für} \quad |q|<1$

Gehen Sie zu Kapitel 20.1!

G. Höfner, *Mit Selbsttests gezielt Mathematik lernen*,
DOI 10.1007/978-3-662-52963-8_19

19.2 Beispiele für konvergente Folgen

1. Zu begründen ist, ob und warum die Folge

$$0{,}4; 0{,}34; 0{,}334; 0{,}3334; \ldots$$

   konvergent ist.

2. Ab welchem Glied unterschreitet der Abstand zwischen zwei benachbarten Gliedern der Zahlenfolge

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$$

   den Wert von $\epsilon = \dfrac{1}{100}$?

3. Radioaktive Elemente zerfallen nach dem Gesetz

$$n = n_0 \mathrm{e}^{-\lambda \cdot t}$$

   n : die Anzahl der nach der Zeit t nicht zerfallenen Kerne.

   n_0 : die Anzahl der nicht zerfallenen Kerne zum Zeitpunkt $t = 0$.

   λ : Zerfallskonstante

   Nach welcher Zeit ist die Hälfte der radioaktiven Atomkerne von Radium ^{226}Ra mit der Zerfallskonstanten

$$\lambda = 4{,}28 \cdot 10^{-4} a^{-1} \quad \text{(pro Jahr)}$$

   zerfallen (Halbwertszeit)?

4. Zu bestimmen ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k}{n^\alpha}, \quad \text{für } \alpha > 0.$$

5. Zu bestimmen ist

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}.$$

Gehen Sie zu Kapitel 20.2!

19.3 Stetigkeit von Funktionen

Sind die Unstetigkeitsstellen behebbar?

1. $y = \dfrac{x}{|x|}$, bei $x = 0$

2. $y = \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$, bei $x = 4$

3. $y = \dfrac{1-x}{1-|x|}$, bei $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$

4. Es ist ein Intervall anzugeben, in dem die Funktion

$$y = 3x^3 + 4x^2 + 6x - 9$$

eine reelle Nullstelle hat.

5. Das Maximum und Minimum der Funktion ist in dem angegebenen Intervall zu bestimmen.

$$y = -x^2 + 6x + 4, \qquad [1;4]$$

Gehen Sie zu Kapitel 20.3!

19.4 Differenzenquotient

1. Das Weg-Zeit-Gesetz beim freien Fall beschreibt eine gleichförmig beschleunigte Bewegung

$$s = \frac{g}{2}t^2,$$

mit $g \approx 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Es sind der zurückgelegte Weg und die Geschwindigkeit für die erste, zweite, dritte, vierte und die fünfte Sekunde zu berechnen.

2. Es ist die Steigung der Sekante für die Funktion

$$y = -0{,}5x^2 - 2x + 5$$

durch die Punkte mit den Abszissen

$$x_1 = 1 \text{ und } x_2 = 2$$

zu bestimmen. Wie groß ist der Steigungswinkel?

Für die folgenden Funktionen ist der Differenzenquotient für den Punkt mit dem Abszissenwert x und $x + \Delta x$ aufzustellen.

3. $y = x^3$

4. $y = -3x + 2$

5. $y = \dfrac{1}{x}$ für $x \neq 0$

Gehen Sie zu Kapitel 20.4!

19.5 Ableitungsregeln

Es sind die Ableitungen folgender Funktionen zu bestimmen.

1. $y = \left(x^2 + 3x - 4\right)\left(x^3 - 4x^2 + 5x - 7\right)$

2. $y = \dfrac{2 - 3x^2}{x + 5x^3}$

3. $y = 2 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} + x^2$

4. $y = 2 \cdot \sin(x) + 3 \cdot \cos(x)$

5. $y = 3 \cdot 8^x$

6. $y = 3 \cdot \ln(x)$

7. $y = \sqrt{\dfrac{x}{1 - x}}$

   Bemerkung: Die Ableitung ist hier über die Umkehrfunktion zu bestimmen.

8. Welchen Wert hat die Ableitung der Funktionskurve an der Stelle $(0; 1)$?
$$x - y^2 + y^3 = 0$$

9. Wo hat die Kurve mit der Gleichung
$$y = 2x^3 - 4x^2 + 2x - 5$$
waagerechte Tangenten?

10. Die Funktion
$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
soll folgende vier Bedingungen erfüllen.

    a) $y(0) = 2$

    b) $y'(0) = -3$

    c) $y'(1) = 4$

    d) $y'(-1) = -2$

    Wie sind die Parameter a, b, c, d festzulegen?

Gehen Sie zu Kapitel 20.5!

19.6 Anwendung der Differenzialrechnung

1. Ein Bauunternehmen benötig pro Jahr 1 200 Wandplatten, die je Stück 30,00 € kosten. Die Lieferung soll gleichmäßig in n Teilen zu je x Stück erfolgen, wobei jede Lieferung 80,00 € Transportkosten verursacht.

   Für die Lagerung der bereitzustellenden Exemplare entstehen jährliche Kosten. Diese betragen $K_3 = 2{,}4 \cdot x$ €.

   Wie viele Lieferungen sind zu vereinbaren, damit möglichst geringe Gesamtkosten entstehen?

2. Für eine Einproduktunternehmung wurden in Abhängigkeit des Produktionsniveaus $x > 0$ die Kosten durch $K(x) = 6x + 40$ und die Preis-Absatz-Beziehung gemäß $p(x) = 30 - 2x$ geschätzt.

   a) Geben Sie die Gewinnfunktion G mit $g(x) = x \cdot p(x) - K(x)$ an.

   b) Berechnen Sie den Bereich positiver Gewinne sowie das gewinnmaximale Produktionsniveau.

   c) Bestimmen Sie das Produktionsniveau mit maximalem Stückgewinn.

3. Ein Einproduktunternehmen besitzt die Nachfragefunktion

$$x(p) = \frac{2\,880}{p} - 100$$

   sowie die Kostenfunktion

$$K(x) = 5x + 200.$$

   Bestimmen Sie für das Unternehmen die gewinnmaximale Menge, den gewinnmaximalen Preis sowie den maximalen Gewinn.

Gehen Sie zu Kapitel 20.6!

19.7 Elastizität

1. Die Nachfrage nach einem Gut folgt der Funktionsgleichung

$$x(p) = 200\mathrm{e}^{-0{,}1p}.$$

   Der Stückkostenpreis liegt zur Zeit bei $p_0 = 3$ €.

   Wie hoch ist die Punktelastizität bei diesem aktuellen Preis?

2. Es sei $x(p) = -0{,}2p + 10$ ein Modell für die Nachfrage nach einem Gut in Abhängigkeit vom Preis.

   Ermitteln Sie die Elastizitätsfunktion.

   Berechnen Sie ihre Werte in den Preisen $p_1 = 0$, $p_2 = 20$, $p_3 = 25$ und $p_4 = 50$.

   Wie elastisch ist dort die Funktion? Was bedeutet jeweils eine relative Zunahme pro Prozentpunkt des Preises p in diesem Punkt für die Nachfrage?

3. Die Nachfragefunktion einer Ware sei gegeben durch $x(p) = -4p + 50$.

   Bestimmen Sie die Preiselastizität der Nachfrage $\epsilon_{x,p}$

   a) als Funktion,
   b) bei einem Preis $p = 2$ und
   c) wenn die Menge bei $x = 5$ liegt.

Gehen Sie zu Kapitel 20.7!

19.8 Grundintegrale

Zu bestimmen ist.

1. $\int x^2 \,\mathrm{d}x$

2. $\int \sqrt{x} \,\mathrm{d}x$

3. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$

4. $\int 3^x \,\mathrm{d}x$

5. $\int \sin(x) \,\mathrm{d}x$

6. Welchen Wert hat die Integralkonstante, wenn die Stammfunktionen durch den Punkt $P(0;1)$ gehen sollen. Es sind die in den Aufgaben 1. bis 5. bestimmten Stammfunktionen zu verwenden.

Gehen Sie zu Kapitel 20.8!

19.9 Bestimmte Integration

Zu berechnen sind:

1. $\int\limits_0^2 x^4 \, \mathrm{d}x$

2. $\int\limits_1^2 \frac{1}{x^3} \, \mathrm{d}x$

3. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \, \mathrm{d}x$

4. $\int\limits_1^{10} \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$

5. $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$

Gehen Sie zu Kapitel 20.9!

19.10 Flächenberechnung

1. Es ist der Flächeninhalt der Fläche zwischen der Funktion
$$y = \left(\frac{x^4}{4} - 1\right)^2$$
und der x-Achse in den Grenzen von -2 bis $+2$ zu berechnen.

2. Es ist der Flächeninhalt der Fläche zwischen der Funktion
$$y = -x^2 + 3x$$
und der x-Achse in den Grenzen von -1 bis $+2$ zu berechnen.

3. Es ist der Flächeninhalt zwischen der Funktion
$$y = x^3 - 6x^2 + 8x$$
und der x-Achse in den Grenzen von $x_0 = -1$ und $x_1 = 3$ zu berechnen.

4. Es ist der Inhalt der Fläche zwischen den durch die Gleichung

$$x^2 = 2(y+3) \qquad \text{und}$$
$$y = x + 1$$

bestimmten Kurven zu berechnen.

5. Es ist der Flächeninhalt zwischen den Kurven mit den Gleichungen

$$y^2 = 2x \qquad \text{und}$$
$$y = x - 4$$

zu berechnen.

Gehen Sie zu Kapitel 20.10!

19.11 Konsumenten- und Produzentenrente

1. Für ein Produkt laute die Nachfragefunktion

$$x(p) = -0{,}5p + 50.$$

Aufgrund des Marktmechanismus hat sich der Preis beim Gleichgewichtspunkt $p_0 = 60$ € eingestellt.

   a) Bestimmen Sie die Konsumentenrente.

   b) Zeichnen Sie diese mithilfe der Nachfragefunktion.

2. Die Nachfragefunktion eines Produktes sei

$$p_{\mathrm{N}}(x) = -2x + 100.$$

Die Angebotsfunktion sei

$$p_{\mathrm{A}}(x) = 20 + 2x.$$

   a) Bestimmen Sie welches Marktgleichgewicht sich einstellt (gleicher Preis p_0, bei dem $p_{\mathrm{N}}(x) = p_{\mathrm{A}}(x)$ gilt).
   b) Berechnen Sie die Produzentenrente. Welchem Prozentsatz des tatsächlichen Umsatzes entspricht die Produzentenrente?
   c) Zeichnen Sie diese mithilfe der Nachfrage- und Angebotsfunktion.

3. Für ein Produkt ist die Nachfragefunktion gegeben durch

$$x\,(p) = -0{,}1p + 20.$$

   Aufgrund des Marktmechanismus hat sich der Preis beim Gleichgewichtspunkt $p_0 = 20\,€$ eingestellt.

   a) Welche Gesamtsumme wäre der Konsument bereit gewesen zu zahlen?

   b) Welches ist die Konsumentenrente?

   c) Zeichnen Sie diese mithilfe der Nachfragefunktion.

Gehen Sie zu Kapitel 20.11!

20 Lösungen zu den Übungsaufgaben Analysis II

Übersicht

20.1 Konvergente Zahlenfolgen

1. Der Abstand wird von allen Gliedern der Zahlenfolge unterschritten, deren Gliednummer größer als 199 ist.

2. $$\begin{aligned} \left|\frac{n-1}{n+1} - 1\right| &< \epsilon \\ 1 - \frac{n-1}{n+1} &< \epsilon \\ n+1-(n-1) &< \epsilon\,(n+1) \\ 2 &< \epsilon\,(n+1) \\ n+1 &> \frac{2}{\epsilon} \\ n &> \frac{2}{\epsilon} - 1 \end{aligned}$$

   Für $N = \frac{2}{\epsilon} - 1$ und alle $n \geq N$ wird jeder beliebig vorgegebene Abstand unterschritten.

G. Höfner, *Mit Selbsttests gezielt Mathematik lernen*,
DOI 10.1007/978-3-662-52963-8_20

3. a) Nullfolge, konvergent
   b) Divergenz, bestimmte Divergenz
   c) Zahlenfolge ist konvergent.

Gehen Sie zu Kapitel 16.2!

20.2 Beispiele für konvergente Folgen

1. Die Folge ist beschränkt.
   Begründung: Eine untere Schranke ist 0,2. Die Folge ist monoton fallend. Der Grenzwert der Folge beträgt (beachten Sie: es ist keine geometrische Folge, Angabe ohne Beweis):
   $$\frac{1}{3}$$
2. Tabelle 20.1 zeigt die Lösung:

Tab. 20.1 Abstände zwischen benachbarten Gliedern der Zahlenfolge $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$

Gliednummer	**Gliedwert**	**Abstand**
$n = 1$	2,000	—
$n = 2$	2,250	0,250
$n = 3$	2,370	0,120
$n = 4$	2,441	0,071
$n = 5$	2,488	0,047
$n = 6$	2,522	0,034
$n = 7$	2,546	0,024
$n = 8$	2,566	0,020
$n = 9$	2,581	0,015
$n = 10$	2,594	0,013
$n = 11$	2,604	0,010
$n = 12$	2,613	0,009
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n \to \infty$	$\mathrm{e} \approx 2{,}7182818284\ldots$	$\to 0$

Ab dem zwölften Glied wird der Abstand von einem Hunderstel zwischen den benachbarten Gliedern der Folge unterschritten.

3. $$\begin{aligned} n &= \frac{n_0}{2} \\ \frac{n_0}{2} &= n_0 \mathrm{e}^{-\lambda \cdot t_\mathrm{H}} \\ \frac{1}{2} &= \mathrm{e}^{-\lambda \cdot t_\mathrm{H}} \\ -\lambda \cdot t_\mathrm{H} &= -\ln(2) \\ t_\mathrm{H} &= \frac{\ln(2)}{\lambda} = 1\,620 \text{ Jahre} \end{aligned}$$

   Die Halbwertszeit von ^{226}Ra beträgt knapp 1 620 Jahre.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k}{n^\alpha} = 0$

5. Die Folge ist divergent:
   $$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$$

Gehen Sie zu Kapitel 16.3!

20.3 Stetigkeit von Funktionen

1. $y = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$

   Bei $x = 0$ ist die Unstetigkeit der Funktion nicht behebbar, denn rechtsseitiger und linksseitiger Grenzwert stimmen nicht überein.

2. Behebbare Unstetigkeit mit
   $$y = 4, \qquad \text{für } x = 4$$

3. Behebbare Unstetigkeit bei $x = 1$, denn
   $$\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{1+|x|} = 1.$$

   Nicht behebbare Unstetigkeit an der Stelle $x = -1$, da der Grenzwert für $x = -1$ nicht existiert.

4. Im Intervall $[0; 1]$ ist
   $$f(0) = -9 < 0 \qquad \text{und} \qquad f(1) = 4 > 0$$

5. $x_{\max} = 3, \qquad P_{\max}\,(3; 13)$
   $x_{\min} = 1, \qquad P_{\min}\,(1; 9)$

Gehen Sie zu Kapitel 16.4!

20.4 Differenzenquotient

1. Tabelle 20.2 zeigt die Lösung:

   Tab. 20.2 Zurückgelegter Weg und zugehörige Geschwindigkeit in den ersten fünf Sekunden

Zeit	zurückgelegter Weg	Geschwindigkeit
1. Sekunde	4,91 m	4,91 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$
2. Sekunde	14,71 m	14,71 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$
3. Sekunde	24,53 m	24,53 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$
4. Sekunde	34,33 m	34,33 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$
5. Sekunde	44,15 m	44,15 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$

   Beispielsweise ist:

   $$v_3 = \frac{s_3 - s_2 - s_1}{3 - 1 - 1} = 24{,}53\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

2. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-1 - 2{,}5}{1} = -3{,}5$
   $\alpha \approx 105{,}9^\circ$

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \dfrac{3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2$

4. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-3\,(x + \Delta x) + 2 - (-3x + 2)}{\Delta x} = \dfrac{-3\Delta x}{\Delta x} = -3$
   Da es sich bei dem Bild der angegebenen (linearen) Funktion um eine Gerade handelt, ist die Steigung konstant und insbesondere unabhängig von der betrachteten Stelle.

5. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\dfrac{1}{x + \Delta x} - \dfrac{1}{x}}{\Delta x} = \dfrac{x - x - \Delta x}{x\,(x + \Delta x)\,\Delta x} = -\dfrac{1}{x^2 + x\Delta x}$

Gehen Sie zu Kapitel 16.5!

20.5 Ableitungsregeln

1. $y' = (2x+3)\left(x^3 - 4x^2 + 5x - 7\right) + \left(3x^2 - 8x + 5\right)\left(x^2 + 3x - 4\right)$

2. $y' = \dfrac{\left(x+5x^3\right)(-6x) - \left(1+15x^2\right)\left(2-3x^2\right)}{\left(x+5x^3\right)^2}$

3. $y' = \dfrac{1}{2x\sqrt{x}} + 2x$

4. $y' = 2 \cdot \cos(x) - 3 \cdot \sin(x)$

5. $y' = 3 \cdot 8^x \ln(8)$

6. $y' = \dfrac{3}{x}$

7. $$\begin{aligned} x &= \frac{y^2}{1+y^2} \\ x' &= \frac{2y \cdot \left(1+y^2\right) - y^2 \cdot 2y}{\left(1+y^2\right)^2} \\ y' &= \frac{1}{x'} = \frac{1}{\frac{2y \cdot \left(1+y^2\right) - y^2 \cdot 2y}{\left(1+y^2\right)^2}} = \frac{\left(1+y^2\right)^2}{2y} \qquad \Bigg| y = \sqrt{\frac{x}{1-x}} \\ &= \frac{1}{2(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{x}} \end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned} x &= y^2 - y^3 \\ y' &= \frac{1}{2y - 3y^2} \\ y'(0) &= -1 \\ \alpha &= 135^\circ \end{aligned}$$

9. $$\begin{aligned} y' &= 6x^2 - 8x + 2 \stackrel{!}{=} 0 \\ 0 &= x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} \\ x_{1,2} &= \frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{1}{3}} \\ x_1 &= 1 \\ x_2 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

10.
$$y(0) = d = 2$$
$$y' = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$y'(0) = c = -3$$
$$y'(1) = 4 = 3a + 2b - 3$$
$$y'(-1) = -2 = 3a - 2b - 3$$
$$y'(1) + y'(-1) = 2 = 6a - 6 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{4}{3}$$
$$y'(1) = 4 = 3 \cdot \frac{4}{3} + 2b - 3 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{3}{2}$$

Die Gleichung der gesuchten Funktion mit den vier vorgegebenen Eigenschaften lautet:
$$y = \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 3x + 2$$

Gehen Sie zu Kapitel 16.6!

20.6 Anwendung der Differenzialrechnung

1. $K = K_1 + K_2 + K_3$ (K_1 sind die Fixkosten)

$$K = 1\,200 \cdot 30 + 80 \cdot n + 2{,}4 \cdot x, \qquad \text{mit } n \cdot x = 1\,200$$
$$x = 1\,200n^{-1}$$
$$K = K(n) = 36\,000 + 80n + 2\,880n^{-1}$$
$$K'(n) = 80 - 2\,880n^{-2}$$
$$0 = 80n^2 - 2\,880$$
$$n^2 = \frac{2\,880}{80} = 36$$
$$n = 6$$

Sechs Lieferungen zu $x = \frac{1\,200}{6} = 200$ Stück sind optimal.

$K_{\min}(6) = 36\,000 + 480 + 480 = 36\,960$ €

2. a) $G(x) = 30x - 2x^2 - 6x - 40 = -2x^2 + 24x - 40$

b) $G(x) = 0, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 10$

Positive Gewinne gibt es zwischen $(2; 10)$.

Gewinnmaximales Produktionsniveau für $x = 6$.

$G_{\max}(6; 32)$

c) $g(x) = \dfrac{G(x)}{x} = -2x + 24 - \dfrac{40}{x}$

$$g'(x) = -2 + \frac{40}{x^2}$$

$$x_1 = 2\sqrt{5} \quad \text{(Produktionsniveau mit maximalem Stückgewinn)}$$

3. $p = \dfrac{2\,880}{x+100} \quad \Rightarrow \quad g = xp(x) - K(x) = \dfrac{2\,880x}{x+100} - 5x - 200$

$$g'(x) = \frac{(x+100)\,2\,880 - 2\,880x}{(x+100)^2} - 5 \overset{!}{=} 0$$

$$0 = -5x^2 - 1\,000x + 238\,000$$

$$x_1 = 140 \quad \wedge \quad x_2 = -340 \text{ (mit p-q-Formel)}$$

Gewinnmaximale Menge bei 140 (negative Werte entfallen).

Aus den Formeln können dann der gewinnmaximale Preis $p = 12$ sowie der maximale Gewinn $g(140) = 780$ errechnet werden.

Gehen Sie zu Kapitel 16.7!

20.7 Elastizität

1. Formel:

$$\epsilon_{x,p} = x'(p_0)\,\frac{p_0}{x(p_0)} = -20\mathrm{e}^{-0,1p}\,\frac{p}{200\mathrm{e}^{-0,1p}}$$

$$\epsilon_{x,p}(3) = -14{,}82\,\frac{3}{148{,}16} = -0{,}3 \quad \text{(Lösung im Punkt unelastisch)}$$

2. $x'(p) = -0{,}2$

$$\epsilon_{x,p} = -0{,}2\,\frac{p}{-0{,}2p+10}$$

$\epsilon_{x,p}(p_1) = 0$ — vollkommen unelastisch

$\epsilon_{x,p}(p_2) = \dfrac{-0{,}2\cdot 20}{-0{,}2\cdot 20+10} = \dfrac{-4}{6} = -\dfrac{2}{3}$ — unelastisch

$\epsilon_{x,p}(p_3) = \dfrac{-0{,}2\cdot 25}{-0{,}2\cdot 25+10} = \dfrac{-5}{5} = -1$ — proportional elastisch

$\epsilon_{x,p}(p_4) = \dfrac{-0{,}2\cdot 50}{-0{,}2\cdot 50+10} = \dfrac{-10}{0} = -\infty$ — vollkommen elastisch

Eine relative Zunahme von p um 1 % bewirkt eine relative Abnahme von x um 0 % in p_1, 0,666 . . . % in p_2, 1 % in p_3 und beliebiger Höhe nahe p_4.

3. a) $\epsilon_{x,p} = x'(p)\,\dfrac{p}{x(p)} = -4\,\dfrac{p}{-4p+50}$

b) $\epsilon_{x,p}(2) = \dfrac{-8}{42} = -0{,}19$

Pro Prozentpunkt, um den der Preis von $p = 2$ € aus steigt, fällt die Nachfrage um ca. 19 %. Im $p = 2$ reagiert die Nachfrage unelastisch auf Preisänderungen.

c) Wenn $x = 5$, dann ist

$$p = -0{,}25 \cdot 5 + 12{,}5 = 11{,}25$$
$$\epsilon_{x,p}(11{,}25) = -\frac{45}{5} = -9$$

Pro Prozentpunkt, um den der Preis von $p = 11{,}25$ € aus steigt, fällt die Nachfrage um ca. 9 %. In $p = 11{,}25$ reagiert die Nachfrage elastisch auf Preisänderungen.

Gehen Sie zu Kapitel 16.8!

20.8 Grundintegrale

1. $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + c$

2. $F(x) = \dfrac{2}{3} x\sqrt{x} + c$

3. $F(x) = -\dfrac{1}{x} + c$

4. $F(x) = \dfrac{3^x}{\ln(3)} + c$

5. $F(x) = -\cos(x) + c$

6. a) $c_1 = 1$

   b) $c_2 = 1$

   c) Die Stammfunktion ist für $x = 0$ nicht definiert.

   d) $c_4 = 1 - \dfrac{1}{\ln(3)}$

   e) $c_5 = 1 + \cos(0) = 1 + 1 = 2$

Gehen Sie zu Kapitel 16.9!

20.9 Bestimmte Integration

1. $\int\limits_0^2 x^4 \, \mathrm{d}x = \frac{32}{5}$

2. $\int\limits_1^2 \frac{1}{x^3} \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{2 \cdot 1^2} = \frac{3}{8}$

3. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \, \mathrm{d}x = 1 - 0 = 1$

4. $\int\limits_1^{10} \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln(10) - \ln(1) = \ln(10)$

5. $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^0 = \mathrm{e} - 1$

Gehen Sie zu Kapitel 16.10!

20.10 Flächenberechnung

1. In dem Integrationsintervall befinden sich keine Nullstellen.

$$\int\limits_{-2}^{2} \left(\frac{x^4}{16} - \frac{x^2}{2} + 1 \right) \mathrm{d}x = \frac{32}{15} \text{ FE}$$

2. Nullstelle im Integrationsintervall $[-1; 2]$ bei $x = 0$ (Abb. 20.1).

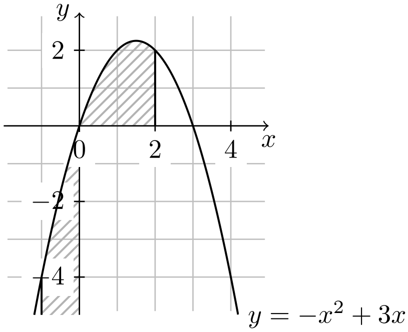


Abb. 20.1 Grafische Darstellung der zu berechnenden Fläche

$$A_1 = -\frac{11}{6}\ \text{FE}, \qquad A_2 = \frac{10}{3}\ \text{FE}, \qquad A = \frac{31}{6}\ \text{FE}$$

3. Nullstellen im Integrationsintervall sind: $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$. $x_3 = 4$ liegt außerhalb des Intervalls.

$$F(x) = \int \left(x^3 - 6x^2 + 8x\right)\, \mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 + c$$

$$A_1 = \int_{-1}^{0} f(x)\, \mathrm{d}x = -\frac{25}{4}$$

$$A_2 = \int_{0}^{2} f(x)\, \mathrm{d}x = 4$$

$$A_3 = \int_{2}^{3} f(x)\, \mathrm{d}x = -\frac{7}{4}$$

$$A = \left|-\frac{25}{4}\right| + 4 + \left|-\frac{7}{4}\right| = 12\ \text{FE}$$

4. Die Abszissen der Schnittpunkte sind (Abb. 20.2): $x_1 = -2$, $x_2 = 4$. Nullstelle im Integrationsintervall von $y = x + 1$ ist

$$x_{N_1} = -1$$

und von $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$

$$x_{N_2} = \sqrt{6}.$$

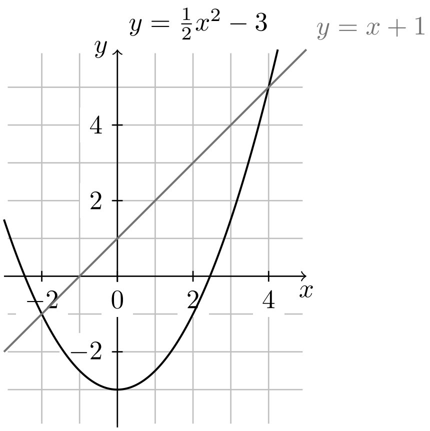


Abb. 20.2 Grafische Darstellung der beiden Funktionen $x^2 = 2(y+3)$ und $y = x + 1$

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int\limits_{-2}^{-1} \left[(x+1) - \left(\frac{1}{2}x^2 - 3\right)\right] \, \mathrm{d}x \\
&= -\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + 4x \Big|_{-2}^{-1} \\
&= \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} - 4\right) - \left(\frac{8}{6} + \frac{4}{2} - 8\right) \\
&= -\frac{7}{6} - \frac{3}{2} + 4 = \frac{4}{3} \\
A_2 &= \int\limits_{-1}^{\sqrt{6}} \left[(x+1) - \left(\frac{1}{2}x^2 - 3\right)\right] \, \mathrm{d}x \\
&= -\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + 4x \Big|_{-1}^{\sqrt{6}} \\
&= \left(-\frac{6\sqrt{6}}{6} + \frac{6}{2} + 4\sqrt{6}\right) - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} - 4\right) \\
&= 3\sqrt{6} + \frac{5}{2} - \frac{1}{6} + 4 = \frac{19 + 9\sqrt{6}}{3} \\
A_3 &= \int\limits_{\sqrt{6}}^{4} \left[(x+1) - \left(\frac{1}{2}x^2 - 3\right)\right] \, \mathrm{d}x \\
&= -\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + 4x \Big|_{\sqrt{6}}^{4} \\
&= \left(-\frac{64}{6} + \frac{16}{2} + 16\right) - \left(-\frac{6\sqrt{6}}{6} + \frac{6}{2} + 4\sqrt{6}\right) \\
&= -\frac{64}{6} + 21 - 3\sqrt{6} = \frac{31 - 9\sqrt{6}}{3} \\
A &= A_1 + A_2 + A_3 = 18 \text{ FE}
\end{aligned}$$

Eine einfachere Rechnung (da die Parabel im Integrationsintervall stets unter der Geraden verläuft) lautet:

$$\begin{aligned}
A = \int\limits_{-2}^{4} \left[(x+1) - \left(\frac{1}{2}x^2 - 3\right)\right] \, \mathrm{d}x &= -\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + 4x \Big|_{-2}^{4} \\
&= -\frac{64}{6} + \frac{16}{2} + 16 - \left(\frac{8}{6} + \frac{4}{2} - 8\right) \\
&= -\frac{72}{6} + \frac{12}{2} + 24 = 18 \text{ FE}
\end{aligned}$$

5. Die Gleichung der ersten Kurve

$$x = y + 4$$

in die Gleichung für die zweite Kurve eingesetzt ergibt die beiden Schnittpunkte (Abb. 20.3):

$$
\begin{aligned}
y^2 &= 2x = 2\,(y+4) \\
y^2 &= 2y+8 \\
y^2 - 2y - 8 &= 0 \\
y_{1,2} &= 1 \pm \sqrt{1+8} \\
y_1 &= -2, \qquad y_2 = 4
\end{aligned}
$$

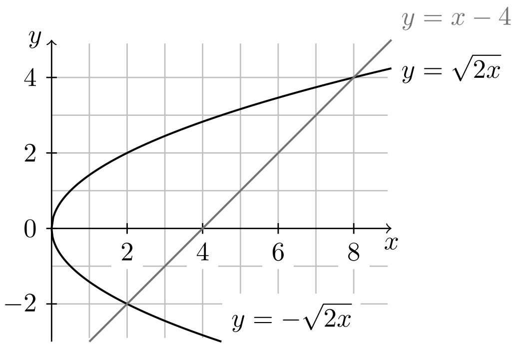


Abb. 20.3 Grafische Darstellung der beiden Funktionen $y = x - 4$ und $y^2 = 2x$

$$A_y = \int_{-2}^{4} \left[y + 4 - \frac{1}{2} y^2 \right] \mathrm{d}y = 18 \text{ FE}$$

Gehen Sie zu Kapitel 16.11!

20.11 Konsumenten- und Produzentenrente

1. a) Rechnerische Lösung:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= -0{,}5 \cdot 60 + 50 = 20 \\
p\,(x) &= -2x + 100
\end{aligned}
$$

$$K_{\mathrm{R}} = \int_0^{x_0} p(x)\,\mathrm{d}x - p_0 x_0 = \int_0^{20} (-2\cdot x + 100)\,\mathrm{d}x - 60\cdot 20$$
$$= -x^2 + 100x\Big|_0^{20} - 1200$$
$$= -400 + 2000 - 1200$$
$$= 400$$

b) Grafische Lösung (Abb. 20.4):

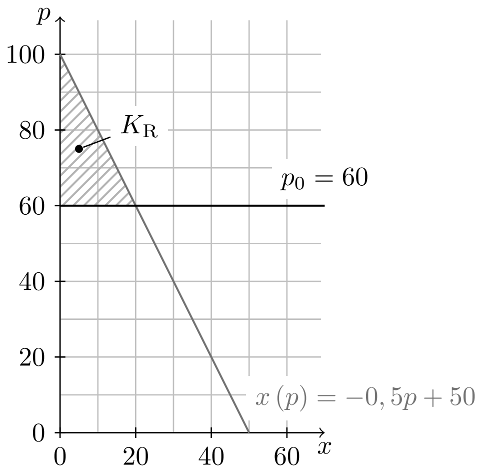


Abb. 20.4 Grafische Darstellung der Konsumentenrente K_{R}

2. a) $p_{\mathrm{N}} = -2x + 100$ und $p_{\mathrm{A}} = 20 + 2x$ gleichsetzen:
   $x_0 = 20$; $p_0 = p_{\mathrm{N}}(x_0) = 60$

   b) Produzentenrente:

$$P_{\mathrm{R}} = p_0 x_0 - \int_0^{x_0} p_{\mathrm{A}}(x)\,\mathrm{d}x = 60\cdot 20 - \int_0^{20} (2x + 20)\,\mathrm{d}x$$
$$= 1200 - 800$$
$$= 400$$

Also: $\frac{400}{1200}\cdot 100\ \% = 33,\overline{3}\ \%$

c) Grafische Lösung (Abb. 20.5):

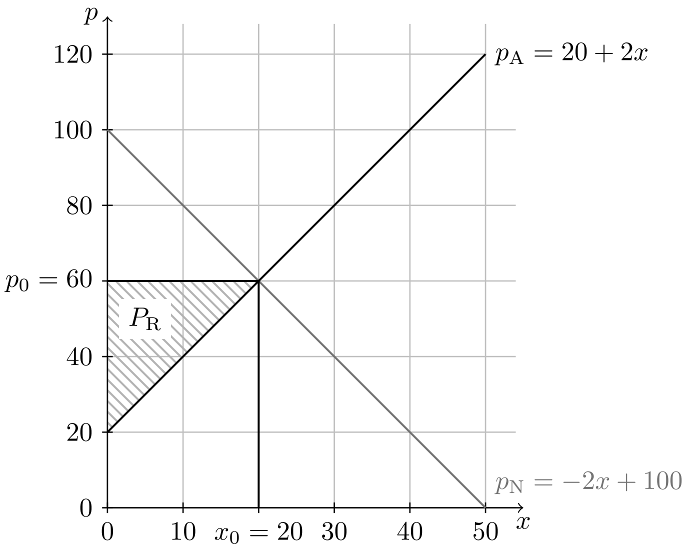


Abb. 20.5 Grafische Darstellung der Produzentenrente P_R

3. a) Gesamtsumme, die der Konsument bereit gewesen wäre zu zahlen:

$$x_0 = -2 + 20 = 18$$

$$\begin{aligned} E^* = \int_0^{x_0} p(x)\, \mathrm{d}x &= \int_0^{18} (-10x + 200)\, \mathrm{d}x \\ &= -5x^2 + 200x \Big|_0^{18} \\ &= 1980 - 0 \\ &= 1980 \end{aligned}$$

b) Konsumentenrente:

$$K_R = E^* - p_0 x_0 = 1980 - 360 = 1620$$

c) Grafische Lösung (Abb. 20.6):

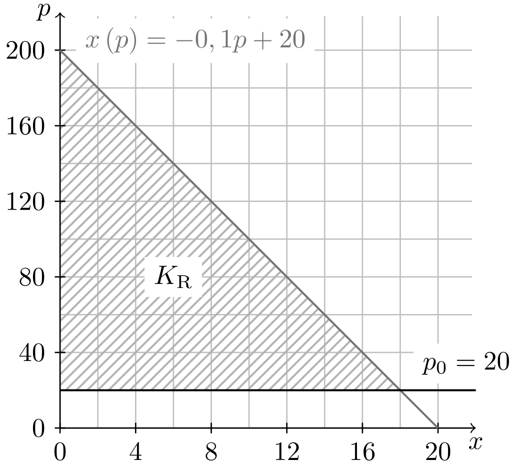


Abb. 20.6 Grafische Darstellung der Konsumentenrente K_{R}

Ende des vierten Tages im Aufbaukurs Mathematik!

Teil V

5. Tag – Analysis III

21 Tests zur Analysis III

Übersicht

21.1 Funktionen mit mehr als einer unabhängigen Variablen

Die Flächenfunktion zur Berechnung der Rechteckfläche lautet

$$A = l \cdot b.$$

1. Welches ist die abhängige und welches sind die unabhängigen Variablen?
2. Wie lautet der Definitionsbereich der Funktion?
3. Aus welchen Elementen besteht die Funktion?

Gehen Sie zu Kapitel 22.1!

21.2 Niveaufunktion

Das Endvermögen bei einer stetigen Verzinsung (Zinseszisrechnung) hängt bei konstantem Anfangskapital von der Laufzeit (n) und dem Zinssatz (i) ab.

Aus i ergibt sich der Zinsfaktor (q):

$$q = \left(1 + \frac{i}{100}\right).$$

G. Höfner, *Mit Selbsttests gezielt Mathematik lernen*,
DOI 10.1007/978-3-662-52963-8_21

Als Funktion von n und q dargestellt lautet die Funktionsgleichung für den Endwert des aufgezinsten Vermögens (K_n)

$$K_n = K_0 q^n.$$

Wie lauten die expliziten Funktionsgleichungen der Isoklinen (konstanter Endwert)?

Gehen Sie zu Kapitel 22.2!

21.3 Partielle Ableitung

Bestimmen Sie den Gradienten und die Hessematrix der Funktion

$$z = f(x; y) = 2x^3 - y^2 + xy.$$

Gehen Sie zu Kapitel 22.3!

21.4 Partielle Elastizität

Die Nachfragefunktion in Abhängigkeit von den Preisen p_1 und p_2 lautet:

$$x(p_1; p_2) = 20 - 2p_1 + p_2$$

Beispiel: $p_1 = 5$, $p_2 = 4$

1. Um wie viel Prozent ändert sich die Nachfrage bei einem Prozent Preiserhöhung von Gut 1 (Preis p_1)?
2. Um wie viel Prozent ändert sich die Nachfrage bei einem Prozent Preiserhöhung von Gut 2 (Preis p_2)?

Gehen Sie zu Kapitel 22.4!

21.5 Totales Differenzial

Die Nachfragefunktion in Abhängigkeit von den Preisen p_1 und p_2 lautet (vgl. Kap. 21.4):

$$x(p_1; p_2) = 20 - 2p_1 + p_2$$

1. Berechnen Sie das totale Differenzial der Nachfrage.

2. Wie groß ist die maximale Nachfrageänderung, wenn sich p_1 um Δp_1 und p_2 um Δp_2 ändern?

3. Wie groß ist die maximale Nachfrageänderung, wenn $\Delta p_1 = 2\ \%$ und $\Delta p_2 = 5\ \%$ beträgt?

Gehen Sie zu Kapitel 22.5!

21.6 Extremwerte (Lagrange)

Drei Aspekte sollen beim Kauf eines neuen Autos eine Rolle spielen:

- der Komfort soll möglichst hoch sein,
- die Motorleistung soll möglichst hoch sein,
- der Preis darf die Summe von 100 000 € nicht überschreiten.

Dabei soll die Cobb-Douglas-Funktion den Nutzen (U) in Abhängigkeit vom Komfort (x_1) und der Motorenleistung (x_2) wie folgt beschreiben:

$$U(x_1; x_2) = x_1^{0,25} x_2^{0,75}$$

Weiter ist vorausgesetzt, dass der Preis von beiden linear abhängig ist und durch die Koeffizienten folgendermaßen bestimmt wird:

$$p(x_1; x_2) = p_1 x_1 + p_2 x_2 = 10x_1 + 15x_2 = 100 \ \text{(in Tausend €)}$$

Aufgabe: $U(x_1; x_2)$ ist unter der Nebenbedingung $p(x_1; x_2)$ zu minimieren.

Gehen Sie zu Kapitel 22.6!

22 Lösungen zu den Tests zur Analysis III

Übersicht

22.1 Funktionen mit mehr als einer unabhängigen Variablen

Ergebnisse:

1. Die Fläche A ist abhängige Variable. Die Länge (l) und die Breite (b) sind die unabhängigen Variablen.

2. $l > 0$ und $b > 0$

3. Sie besteht aus geordneten Tripeln, durch die jeder Länge und Breite des Definitionsbereiches eine Fläche zugeordnet wird.

$$A = f\,(l; b)$$

Haben Sie die Fragen richtig beantwortet?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 21.2!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 23.1!

G. Höfner, *Mit Selbsttests gezielt Mathematik lernen*,
DOI 10.1007/978-3-662-52963-8_22

22.2 Niveaufunktion

Ergebnis:

$$q(n) = q = \sqrt[n]{\frac{K_c}{K_0}}$$
$$n = \frac{\lg K_c - \lg K_0}{\lg q}$$

Haben Sie diese Formeln für Laufzeit und Zinsfaktor bestimmt?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 21.3!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 23.2!

22.3 Partielle Ableitung

Ergebnis:

$$\text{Gradient: } \nabla f = \begin{pmatrix} 6x^2 + y \\ -2y + x \end{pmatrix}$$

$$\text{Hessematrix: } H_f = \begin{pmatrix} 12x & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Haben Sie diese Matrizen bestimmt?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 21.4!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 23.3!

22.4 Partielle Elastizität

1.

$$\epsilon_{x,p_1} = \frac{\partial x}{\partial p_1} \frac{p_1}{x(p_1;p_2)} = -2\frac{p_1}{20 - 2p_1 + p_2}, \quad \text{Nebenrechnung: } \frac{\partial x}{\partial p_1} = -2$$

Für $p_1 = 5$ und $p_2 = 4$ ist

$$\epsilon_{x;p_1}(5;4) = \frac{-10}{20 - 10 + 4} = -\frac{10}{14} = -\frac{5}{7}.$$

Bei einer Preiserhöhung von Ware 1 um ein Prozent, fällt die Nachfrage nach der Ware um ungefähr $\frac{5}{7}$ %. Der Zusammenhang zwischen Absatzmenge x und Preis 1 ist unelastisch $\left(\frac{5}{7} < 1\right)$.

2.

$$\epsilon_{x,p_2} = \frac{\partial x}{\partial p_2} \frac{p_2}{x\left(p_1; p_2\right)} = \frac{p_2}{20 - 2p_1 + p_2}, \quad \text{Nebenrechnung: } \frac{\partial x}{\partial p_2} = 1$$

Für $p_1 = 5$ und $p_2 = 4$ ist

$$\epsilon_{x;p_2}\left(5; 4\right) = \frac{4}{20 - 10 + 4} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}.$$

Bei einer Preiserhöhung von Ware 2 um ein Prozent, steigt die Nachfrage nach der Ware um ungefähr $\frac{2}{7}$ %. Der Zusammenhang zwischen Absatzmenge x und Preis 2 ist unelastisch $\left(\frac{2}{7} < 1\right)$.

Haben Sie die Aufgabe richtig und vollständig gelöst?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 21.5!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 23.4!

22.5 Totales Differenzial

1. Totales Differenzial von x in Abhängigkeit von p_1 und p_2:

$$\mathrm{d}x = \frac{\partial x}{\partial p_1}\mathrm{d}p_1 + \frac{\partial x}{\partial p_2}\mathrm{d}p_2 = -2\mathrm{d}p_1 + \mathrm{d}p_2$$

2. Maximale Änderung der Nachfrage in Abhängigkeit von den Preisänderungen Δp_1 und Δp_2:

$$|\mathrm{d}x| = \left|\frac{\partial x}{\partial p_1}\Delta p_1\right| + \left|\frac{\partial x}{\partial p_2}\Delta p_2\right| = |-2\mathrm{d}p_1| + |\mathrm{d}p_2|$$

3. Wenn $\Delta p_1 = 2$ % und $\Delta p_2 = 5$ %, dann gilt:

$$|\Delta x| = |-2 \cdot 0{,}02| + |1 \cdot 0{,}05| = 0{,}04 + 0{,}05 = 0{,}09,$$

also beträgt die maximale Änderung der Nachfrage (x) neun Prozent.

Haben Sie alle drei Teilaufgaben richtig gelöst?

Ja – Gehen Sie zu Kapitel 21.6!

Nein – Gehen Sie zu Kapitel 23.5!

22.6 Extremwerte (Lagrange)

Für $x_1 = 2{,}5$ und $x_2 = 5{,}0$ ergibt sich ein maximaler Nutzen $N = 4{,}20448$. Die Gesamtsumme von 100 000 € wird dabei vollständig verwendet.

$$p = \underbrace{25\,000}_{\text{für Komfort}} + \underbrace{75\,000}_{\text{für die Motorleistung}} = 100\,000$$

Haben Sie dieses Ergebnis erreicht – absolut perfekt!

Ja – Ende: 5. Tag – Analysis II
Die letzte Testaufgabe wird erläutert! – Gehen Sie zu Kapitel 23.6!

23 Informationen zu den Themen der Analysis III

Übersicht

23.1 Funktionen mit mehr als einer unabhängigen Variablen

Eine Funktion mit einer unabhängigen Variablen ist als Menge der geordneten Paare

$$(x; y)$$

definiert, wobei einem Wert des Definitionsbereiches x eindeutig ein Wert des Wertebereiches y zugeordnet ist. In der Praxis hängt jedoch meist eine Größe von mehreren anderen Größen ab.

Beispiel 23.1
Im Gleichstromkreis ergibt sich die Stromstärke aus dem Quotienten von Spannung und Widerstand nach dem Ohmschen Gesetz zu

$$I = \frac{U}{R}.$$

Jedem Wertepaar $(U; R)$ wird eindeutig eine Stromstärke zugeordnet.
Schreibweise:

$$(U; R) \longmapsto I$$

oder

$$I = f\left(U; R\right)$$

G. Höfner, *Mit Selbsttests gezielt Mathematik lernen*,
DOI 10.1007/978-3-662-52963-8_23

Die Menge der geordneten Wertetripel $(U; R; I)$ bildet eine Funktion mit zwei unabhängigen Variablen. Dabei kann aus jedem Wertepaar von Spannung und Widerstand die zugehörige Stromstärke berechnet werden. Bei praktischen Aufgaben beschränken sich die Intervalle, aus denen U- und R-Werte entnommen werden, auf Intervalle der positiven reellen Zahlen. Ausgenommen ist theoretisch (Division durch null) und praktisch (Kurzschluss) der Widerstandswert $R = 0$. ■

Eine Funktion mit zwei unabhängigen Variablen ist somit eine eindeutige Abbildung des Mengenkreuzproduktes

$$X_1 \times X_2$$

auf die Menge

$$Y.$$

Wird jedem Paar $(x_1; x_2)$ eindeutig ein

$$y \in Y$$

zugeordnet, so heißt die Menge der geordneten Tripel

$$(x_1; x_2; y)$$

Funktion mit zwei unabhängigen Variablen.

Schreibweise:

$$y = f(x_1; x_2) \qquad \text{oder} \qquad (x_1; x_2) \longmapsto y$$

Beispiel 23.2

Die Funktion

$$y = 3x_1^2 - 2x_2 + x_1 x_2$$

ist für $x_1 \in \mathbb{R}$ und $x_2 \in \mathbb{R}$ definiert; somit für den Definitionsbereich

$$D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Ausgewählte Funktionswerte lauten:

$$\begin{aligned} (-1; 0) &\longmapsto (-1; 0; 3) \\ (2; 1) &\longmapsto (2; 1; 12) \\ (-1; -2) &\longmapsto (-1; -2; 9) \end{aligned}$$

■

Der Funktionsbegriff kann auf die folgende Weise erweitert werden:

Die Menge der geordneten $(n+1)$-Tupel

$$(x_1; x_2; \ldots; x_n; y)$$

ist eine Funktion der n unabhängigen Veränderlichen, wenn durch eine eindeutige Abbildung der Menge

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = D$$

eine Menge

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \times Y$$

zugeordnet wird.

Beispiel 23.3
Den Koordinaten eines Punktes im Raum wird der Luftdruck p zugeordnet.

$$(x; y; z) \longmapsto (x; y; z; p)$$

■

Schreibweise für eine Funktion mit n-unabhängigen Variablen:

$$x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \ldots, x_n \in X_n$$

$$y = f\,(x_1; x_2; \ldots; x_n)$$

Beispiel 23.4
Für die Zuordnungsvorschrift

$$y = 3x_1x_2 + x_3^2 - 2x_2x_4$$

ergeben sich folgende ausgewählten Funktionswerte:

$$(1; 1; 1; 1) \longmapsto (1; 1; 1; 1; 2)$$
$$(-1; 0; 2; -2) \longmapsto (-1; 0; 2; -2; 4)$$
$$(3; 2; -2; -3) \longmapsto (3; 2; -2; -3; 34)\,.$$

■

Die n unabhängigen Variablen sind in ihren Definitionsbereichen frei, vor allem aber frei von den anderen Werten der unabhängigen Variablen zu wählen. Ist eine der unabhängigen Variablen von einer anderen abhängig, dann kann diese durch die andere ersetzt werden. Die Zahl der unabhängigen Variablen reduziert sich dadurch um eine ganze Zahl.

Die Einteilung der Funktionen überträgt sich von der Einteilung der Funktionen mit einer unabhängigen Variablen, wobei die Zahl der Variablen mit anzugeben ist.

Beispiel 23.5

$$y = \mathrm{e}^{x_1} \sin(x_2) + 3x_1$$

ist eine transzendente Funktion mit drei Variablen (zwei unabhängigen Variablen). ■

Beispiel 23.6

$$y = 3x_1x_2^2 + 3x_2x_3^2 - x_1x_3$$

ist eine ganzrationale Funktion mit vier Variablen. ■

Funktionen mit insgesamt drei Variablen oder zwei unabhängigen Variablen können in einem räumlichen Koordinatensystem grafisch dargestellt werden (Abb. 23.1).

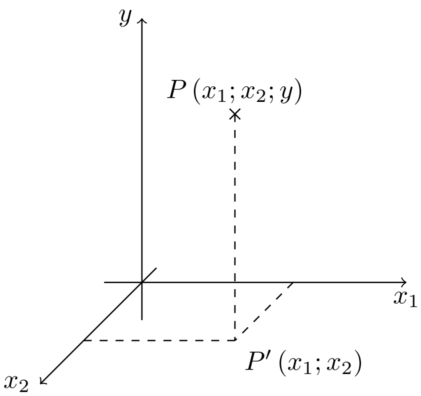


Abb. 23.1 Grafische Darstellung des Punktes P im dreidimensionalen Raum

Die Achsen x_1, x_2, y bilden dabei ein Rechtssystem (bei Drehung der x_1 auf die x_2 Achse vollzieht eine Schraube eine Bewegung in Richtung der y-Achse). Den Funktionswerten werden Punkte im (räumlichen) kartesischen Koordinatensystem so zugeordnet, dass die Werte der abhängigen Variablen als Höhe oberhalb (unterhalb) der Ebene $X_1 \times X_2$ des Definitionsbereiches angeordnet werden. Die Menge der Punkte in der Funktionsebene bildet somit eine einfach über (oder unter) der x_1-x_2-Ebene liegende räumliche Fläche.

Eine Vorstellung von der räumlichen Fläche erhält man am leichtesten, wenn die Schnittkurven mit den Koordinatenebenen bestimmt werden.
Für $y = 0$ ergibt sich die Schnittkurve in der x_1-x_2-Ebene.
Für $x_1 = 0$ ergibt sich die Schnittkurve in der x_2-y-Ebene.
Für $x_2 = 0$ ergibt sich die Schnittkurve in der x_1-y-Ebene.

Wird eine Variable konstant gehalten, so ergeben sich Schnittkurven im Abstand der Konstanten zu der Ebene der Variablen, die nicht konstant bleiben.

Beispiel 23.7

$$y = k \longmapsto k = f\left(x_1; x_2\right)$$

ist eine Kurve, die als Schnittkurve der Fläche mit einer zur Koordinatenebene x_1-x_2 parallelen Ebene im Abstand k entsteht. ∎

Die Schnittkurven sind stets in impliziter Form gegeben.

Beispiel 23.8

$$y = x_1^2 + x_2^2$$

$x_1 = 0$:	Schnittkurve in der x_2-y-Ebene – $y = x_2^2$ (Parabel)
$x_2 = 0$:	Schnittkurve in der x_1-y-Ebene – $y = x_1^2$ (Parabel)
$y = 0$:	Schnittkurve in der x_1-x_2-Ebene – $x_1^2 + x_2^2$ (Punkt)
$y = r^2$(Konstante):	Schnittkurve in einer Parallelebene zur x_1-x_2-Ebene im Abstand r^2 (Kreis).

Es entsteht ein Rotationsparaboloid (rotierende Parabel mit Scheitel im Koordinatenursprung des räumlichen Systems um die y-Achse). Definiert ist die Funktion für alle Elemente der Menge

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Eine genaue Untersuchung der Funktionen mit drei Variablen erfolgt in der R_3-Geometrie (analytische Geometrie des Raumes). ∎

Ein wichtiger Funktionstyp für Funktionen mit mehr als einer unabhängigen Variablen ist in der Wirtschaftswissenschaft der sogenannte Cobb-Douglas-Typ. Es wird hierbei die abhängige Größe als Produkt von Potenzen zweier wesentlicher unabhängiger Größen $(x_1; x_2)$ dargestellt.

Beispiel 23.9
Darstellung des Nutzens U von den zwei wesentlichen Größen x_1 und x_2:

$$U\left(x_1; x_2\right) = 4x_1^{0,2} x_2^{1,5}$$

∎

Gehen Sie zu Kapitel 24.1!

23.2 Niveaufunktion

Wird der Wert der abhängigen Variablen durch n unabhängige Variable bestimmt, so ist es eine Funktion mit $(n+1)$ Variablen.

$$z = f\left(x_1; x_2; \ldots; x_n\right)$$

Bei drei Variablen

$$z = f\left(x; y\right)$$

kann die Funktion grafisch in einem dreidimensionalen Raum dargestellt werden. Über der x-y-Ebene wird der zugehörige z-Wert als Höhe angetragen. Damit ergibt sich durch die Funktion eine Fläche im Raum.

Für konstante z-Werte können die zugehörigen Funktionswerte als zweidimensionale Graphen im kartesischen Koordinatensystem dargestellt werden. Es sind die Kurven konstanter Höhe, die auch als Niveaulinien (Höhenlinien) bezeichnet werden.

Das Endvermögen bei einer stetigen Verzinsung (Zinseszinsrechnung) hängt bei konstantem Anfangskapital von der Laufzeit (n) und dem Zinssatz (i) ab. Aus i ergibt sich der Zinsfaktor (q):

$$q = \left(1 + \frac{i}{100}\right).$$

Als Funktion von n und q dargestellt, lautet die Funktionsgleichung für den Endwert des aufgezinsten Vermögens (K_n)

$$K_n = K_0 q^n.$$

K_c ist der konstante Endwert des Kapitals (der erreicht werden soll).

Aus der obigen Formel können die Gleichungen für den Zinssatz $q\left(n\right)$ und die Laufzeit $n(q)$ einer stetigen Verzinsung hergeleitet werden.

1. Zur Bestimmung des Zinssatzes, der erforderlich ist um den Endwert des Kapitals K_c nach n Jahren zu erhalten, muss nach q^n umgestellt werden:

$$q^n = \frac{K_\mathrm{c}}{K_0}$$

   Auflösen nach der Basis q ergibt:

$$q\left(n\right) = q = \sqrt[n]{\frac{K_\mathrm{c}}{K_0}}$$

2. Zur Bestimmung der Laufzeit, um bei gegebenem Zinssatz den Endwert K_c zu erreichen, muss zuerst logarithmiert werden (Logarithmus zur Basis 10):

$$n \cdot \lg q = \lg K_\mathrm{c} - \lg K_0$$

Anschließend kann nach n aufgelöst werden:

$$n = \frac{\lg K_c - \lg K_0}{\lg q}$$

Um beispielsweise bei einem Anfangskapital von 5 000 € das „Niveau“ von 7 200 € zu erreichen, wäre

1. bei einem Zinsfaktor von 1,03 ($p = 3\ \%$) eine Laufzeit von $n = 14$ Jahren zu vereinbaren (n (Jahre) kann hier nur ganze Werte annehmen),

$$n = \frac{\lg 7\,200 - \lg 5\,000}{\lg 1{,}03} \approx 12{,}337$$

2. bei einer Laufzeit von 5 Jahren ein Zinssatz von $p = 7{,}7\ \%$ erforderlich

$$q = \sqrt[5]{\frac{7\,200}{5\,000}} \approx 1{,}076.$$

In der Wirtschaftswissenschaft werden die Höhenlinien des Nutzens *Indifferenzkurven* genannt. Eine typische Nutzenfunktion stellt die Cobb-Douglas-Funktion dar.

Beispiel 23.10

$$U(x_1; x_2) = 4x_1^{0{,}3}x_2^{1{,}2}$$
$$U(x_1; x_2) = 10$$

Die Indifferenzkurven lauten (zum Beispiel für $c = 10$):

$$2{,}5 = x_1^{0{,}3}x_2^{1{,}2}$$

$$x_1^{0{,}3} = \frac{2{,}5}{x_2^{1{,}2}}, \qquad x_2^{1{,}2} = \frac{2{,}5}{x_1^{0{,}3}}$$

$$x_1 = \left(\frac{2{,}5}{x_2^{1{,}2}}\right)^{\frac{10}{3}} = \frac{2{,}5^3 \cdot \sqrt[3]{2{,}5}}{x_2^4}, \qquad x_2 = \left(\frac{2{,}5}{x_1^{0{,}3}}\right)^{\frac{10}{12}} = \frac{\sqrt[6]{2{,}5^5}}{\sqrt[4]{x_1}}$$

■

Höhenlinien (Niveaulinien) von Produktionsfunktionen werden auch als *Isoquanten* bezeichnet.

Gehen Sie zu Kapitel 24.2!

23.3 Partielle Ableitung

Der Gradient fasst die partiellen Ableitungen der ersten Ordnung in einem Spaltenvektor zusammen.

$$
\begin{aligned}
y &= f\left(x_1; x_2; \ldots; x_i; \ldots; x_n\right) \\
\frac{\partial y}{\partial x_i} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x_1; x_2; \ldots; x_i + \Delta x; \ldots; x_n\right) - f\left(x_1; x_2; \ldots; x_i; \ldots; x_n\right)}{\Delta x}
\end{aligned}
$$

Gradient:

$$
\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial y}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial y}{\partial x_n} \end{pmatrix}
$$

In der Testaufgabe von Abschnitt 21.3, $z = f(x; y) = 2x^3 - y^2 + xy$, ist:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= 6x^2 + y \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= -2y + x \\
\nabla f &= \begin{pmatrix} 6x^2 + y \\ -2y + x \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Die partiellen Ableitungen sind Richtungsableitungen. Die Variable in der angegebenen Richtung wird differenziert – die anderen Variablen werden als Konstanten behandelt.

Für Funktionen mit zwei unabhängigen Variablen

$$
z = f(x; y)
$$

kann die Hessematrix aus den Ableitungen der zweiten Ordnung gebildet werden.

$$
H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{pmatrix}
$$

Nach dem Lemma von Schwarz sind die gemischten Ableitungen der zweiten Ordnung gleich.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

Beispiel 23.11
Die Hessematrix im Beispiel

$$z = f(x; y) = 2x^3 - y^2 + xy$$

lautet

$$H_f = \begin{pmatrix} 12x & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

mit

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 1, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2.$$

■

Die Werte der Hessematrix werden benötigt, um lokale Extrempunkte von Funktionen mit zwei unabhängigen Variablen zu berechnen.

Gehen Sie zu Kapitel 24.3!

23.4 Partielle Elastizität

Für die Elastizität einer Variablen $y = f(x)$, die von einer anderen abhängt, ergab sich:

$$\epsilon_{f(x),x} = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)}$$

Diese Formel erhält man, indem man die Ableitung der Funktion mit einer unabhängigen Variablen durch die partielle Ableitung nach der Variablen ersetzt, von der die Elastizität abhängt.

$$\begin{aligned} z &= f(x_1; x_2; \ldots; x_i; \ldots; x_n) \\ \epsilon_{z,x_i} &= \frac{\partial z}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{f(x_1; x_2; \ldots; x_i; \ldots; x_n)} \end{aligned}$$

Von besonderer Bedeutung in der Wirtschaftswissenschaft sind die bereits mehrfach erwähnten Cobb-Douglas-Funktionen. Die Elastizitäten haben unabhängig von einem speziellen Punkt einen konstanten Wert.

Beispiel 23.12
Beispiel einer Nutzenfunktion:

$$U(x_1; x_2) = 5x_1^{1,4}x_2^{0,6}, \quad \text{mit} \quad \frac{\partial U}{\partial x_1} = 7x_1^{0,4}x_2^{0,6}, \quad \frac{\partial U}{\partial x_2} = 3x_1^{1,4}x_2^{-0,4}$$

$$\epsilon_{U;x_1} = 7x_1^{0,4}x_2^{0,6}\frac{x_1}{5x_1^{1,4}x_2^{0,6}} = \frac{7}{5} = 1{,}4$$

$$\epsilon_{U;x_2} = 3x_1^{1,4}x_2^{-0,4}\frac{x_2}{5x_1^{1,4}x_2^{0,6}} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

Die Nutzenfunktion ist bezüglich x_1 elastisch ($1{,}4 > 1$) und bezüglich x_2 unelastisch ($0{,}6 < 1$). ■

Gehen Sie zu Kapitel 24.4!

23.5 Totales Differenzial

Das totale Differenzial gibt den Zuwachs $\mathrm{d}f$ der Funktion

$$f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$$

an, die durch die jeweils (infiniten) Zuwächse der unabhängigen Variablen

$$\mathrm{d}x_1; \mathrm{d}x_2; \ldots; \mathrm{d}x_n$$

entstehen:

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n.$$

Beispiel 23.13

$$f(x_1; x_2; x_3) = 0{,}5\,(x_1 + 4x_2)^4 + 3x_1x_3$$

Nebenrechnung:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2\,(x_1 + 4x_2)^3 + 3x_3$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 8\,(x_1 + 4x_2)^3$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 3x_1$$
$$\mathrm{d}f = \left[2\,(x_1 + 4x_2)^3 + 3x_3\right]\mathrm{d}x_1 + 8\,(x_1 + 4x_2)^3\,\mathrm{d}x_2 + 3x_1\mathrm{d}x_3$$

■

Bei kleinen Änderungen der unabhängigen Variablen ($\Delta x_i \approx \mathrm{d}x_i$) wird das totale Differenzial verwendet, um die Änderung von $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \Delta f$ durch $\mathrm{d}f$ abzuschätzen.

Dieses findet insbesondere in der Fehlerrechnung Anwendung. Hierbei ist jedoch zu beachten, dass bei der Abschätzung des Maximalfehlers immer vom ungünstigsten Fall ausgegangen wird.

1. Alle Summanden des totalen Differenzials gehen betragsmäßig in die Berechnung ein. Es wird vom „schlimmsten Fall" ausgegangen, das heißt, alle Änderungen werden addiert.

2. Bei der Fehlerrechnung darf nie abgerundet, sondern muss immer aufgerundet werden (größtmöglichster Abweichungs- oder Toleranzbereich).

Gehen Sie zu Kapitel 24.5!

23.6 Extremwerte (Lagrange)

Drei Aspekte sollen beim Kauf eines neuen Autos eine Rolle spielen:

- Der Komfort soll möglichst hoch sein.
- Die Motorleistung soll möglichst hoch sein.
- Der Preis darf die Summe von 100 000 € nicht überschreiten.

Dabei soll die Cobb-Douglas-Funktion den Nutzen (U) in Abhängigkeit vom Komfort (x_1) und der Motorenleistung (x_2) wie folgt beschreiben:

$$U(x_1; x_2) = x_1^{0,25} x_2^{0,75}$$

Weiter ist vorausgesetzt, dass der Preis von beiden linear abhängig ist und durch die Koeffizienten folgendermaßen bestimmt wird:

$$p(x_1; x_2) = p_1 x_1 + p_2 x_2 = 10x_1 + 15x_2 = 100 \;\; (\text{in Tausend } €)$$

Aufgabe: $U(x_1; x_2)$ ist unter der Nebenbedingung $p(x_1; x_2)$ zu minimieren.

Es handelt sich bei dieser Problemstellung um eine Optimierungsaufgabe einer Funktion mit zwei unabhängigen Variablen, die durch eine Nebenbedingung miteinander verbunden sind.

In der bisherigen Praxis wurde so vorgegangen, dass eine unabhängige Variable mithilfe der Nebenbedingung durch die andere ersetzt wurde, die Funktion wurde differenziert und die erste Ableitung null gesetzt (Substitutionsmethode).

Nunmehr kommt die Methode von Lagrange (franz. Mathematiker, 1736–1813) zur Anwendung, deren Vorgehen hier exemplarisch erläutert wird. Die Schritte wiederholen sich algorithmisch, wobei allerdings betont werden muss, dass sich Cobb-Douglas-Funktionen als Zielfunktionen in besonderer Weise günstig für die Rechnung erweisen. Es wird der Lagrange-Operator

$$\Lambda = U + \lambda p$$

als Hilfsfunktion gebildet und ein Punkt gesucht, in dem alle (drei) partiellen Ableitungen erster Ordnung null sind.

$$\begin{aligned} \Lambda\left(x_1; x_2\right) &= U\left(x_1; x_2\right) + \lambda p\left(x_1; x_2\right) \\ \Lambda\left(x_1; x_2; \lambda\right) &= x_1^{0,25} x_2^{0,75} + \lambda\left(100 - 10x_1 - 15x_2\right) \end{aligned}$$

Für die drei partiellen Ableitungen der ersten Ordnung gilt dann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Lambda}{\partial x_1} &= 0{,}25x_1^{-0,75} x_2^{0,75} - 10\lambda = 0 \\ \frac{\partial\Lambda}{\partial x_2} &= 0{,}75x_1^{0,25} x_2^{-0,25} - 15\lambda = 0 \\ \frac{\partial\Lambda}{\partial\lambda} &= 100 - 10x_1 - 15x_2 = 0 \end{aligned}$$

Die ersten beiden Gleichungen nach λ aufgelöst ergeben:

$$\begin{aligned} \lambda &= 0{,}025x_1^{-0,75} x_2^{0,75} \\ \lambda &= 0{,}05x_1^{0,25} x_2^{-0,25} \end{aligned}$$

Gleichgesetzt ergibt sich:

$$\begin{aligned} 0{,}025x_1^{-0,75} x_2^{0,75} &= 0{,}05x_1^{0,25} x_2^{-0,25} && \Big|\cdot x_1^{0,75} \\ 0{,}025x_1^{0} x_2^{0,75} &= 0{,}05x_1^{1} x_2^{-0,25} \\ x_2^{0,75} &= \frac{50}{25} x_1 x_2^{-0,25} && \Big|\cdot x_2^{0,25} \\ x_2 &= 2x_1 \end{aligned}$$

In die dritte Ableitung eingesetzt folgt daraus:

$$\begin{aligned} 100 - 10x_1 - 30x_1 &= 0 \\ 100 - 40x_1 &= 0 \\ x_1 &= 2{,}5 \;\text{ daraus folgt: }\; x_2 = 5{,}0 \\ U\left(2{,}5; 5{,}0\right) &= 2{,}5^{0,25} \cdot 5^{0,75} = 4{,}2045 \end{aligned}$$

Gehen Sie zu Kapitel 24.6!

24 Übungsaufgaben Analysis III

Übersicht

24.1 Funktionen mit mehr als einer unabhängigen Variablen

1. Die Funktionen sind zu klassifizieren.

   a) $y = \sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2}$

   b) $y = 3x_1x_2^2 + 4x_2x_3^2 - 5x_3x_4^2$

   c) $y = \ln|x_1 + x_2| - 3x_1x_2$

2. Die Funktionswerte sind zu berechnen.

   a) $y = 3x_1^2 + 2x_2^2 \quad (2; -1)$

   b) $y = \mathrm{e}^{x_1}\left[\cos(x_2) + \sin(x_3)\right] \quad \left(1; \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

   c) $y = 2x_1^2x_2 - x_2x_3 + 3x_3x_2 \quad (1; -1; 2)$

3. Gesucht ist das Bild der Funktion $y = \sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2}$ für $r \in \mathbb{R}$ größer als null und $r^2 \geq x_1^2 + x_2^2$.

Gehen Sie zu Kapitel 25.1

G. Höfner, *Mit Selbsttests gezielt Mathematik lernen*,
DOI 10.1007/978-3-662-52963-8_24

24.2 Niveaufunktion

1. Die Funktion
$$G\left(p_1; p_2\right) = x_1 p_1 + x_2 p_2$$
gibt die Abhängigkeit des Gewinns von den beiden Preisen p_1 und p_2 an. Wie lauten die Niveaufunktionen für den konstanten Gewinn G_0?

2. Es sind die Gleichungen der Niveaulinien für die Cobb-Douglas-Funktion zu bestimmen.
$$f\left(x; y\right) = 10x^{0,2}y^{0,8}$$

3. Ein Betrag von $h \cdot 100$ € (Vielfaches von 100 €) ist mit 10-€- und 5 €-Scheinen auszuzahlen. Welche Möglichkeiten ergeben sich dafür (allgemeine Lösung und spezielle Lösung für 40 000 €)?

Gehen Sie zu Kapitel 25.2!

24.3 Partielle Ableitung

1. Bestimmen Sie den Gradienten und die Hessematrix der Funktion
$$z = 0{,}5x^{1,2}y^{0,8}.$$

2. Bestimmen Sie den Wert der ersten partiellen Ableitungen im Punkt $(1; -1; 3)$.
$$f\left(x; y; z\right) = 3xz - 2xy + yz$$

3. Das Volumen eines Kreiszylinders hängt vom Radius der Grundfläche und der Höhe ab:
$$V = \pi r^2 h.$$
Wie lauten der Gradient und die Hessematrix?

Gehen Sie zu Kapitel 25.3!

24.4 Partielle Elastizität

1. Es sei
$$z = z\left(r_1; r_2\right) = ar_1^b r_2^c$$

eine zweidimensionale Cobb-Douglas-Produktionsfunktion, welche durch zwei nichtnegative Faktoreinsatzmengen r_1 und r_2 die produzierte Menge z beschreibt. Wie groß sind die Inputelastizität (ϵ_{z,r_1}) und die Outputelastizität (ϵ_{z,r_2})?

2. a) Sei $f(x; y; z) = 3xz - 2xy + yz$. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von f nach x, y und z im Punkt $(1; -1; 3)$.
   b) Berechnen Sie die partielle Elastizität von f nach x in diesem Punkt.
   c) Sei $f(a; K) = a^\alpha K^\beta$. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von f nach a und K im Punkt (1;2).
   d) Berechnen Sie die partielle Elastizität von f nach a.

3. Den Nutzen, den Sie beim Besuch einer Pizzeria vom Verzehr einer Pizza haben, sei in Abhängigkeit von der Größe x_1 der Pizza und der Menge an Belag x_2 (unter der Voraussetzung, dass sie Ihnen schmeckt) gegeben durch
$$U(x_1; x_2) = x_1 x_2 + 2x_2.$$
   a) Ermitteln Sie die Elastizität des Nutzens beider Kriterien als Funktion im Punkt (15;20).
   b) Interpretieren Sie das Ergebnis für den Punkt. Ist der Nutzen bezüglich x_1 bzw. x_2 elastisch, proportional elastisch oder unelastisch? Wie verändert sich der Nutzen pro Prozentpunkt, um den x_1 oder x_2 steigt.

Gehen Sie zu Kapitel 25.4!

24.5 Totales Differenzial

1. Berechne Sie das totale Differenzial der Funktion
$$z = f(x; y) = x^3 + 7x^2y + 3xy^5 - 4y^6.$$

2. Um welchen Wert ändert sich näherungsweise das Volumen eines Quaders mit den Seiten a, b und c,
$$V = abc,$$
wenn sich die Seiten um da, db und dc ändern?

3. Unter Verwendung des totalen Differenzials ist die Änderung des Volumens eines Kreiszylinders abzuschätzen, wenn sich der Radius um Δr und seine Höhe um Δh ändern.

$$V(r;h) = \pi r^2 h$$

Bemerkung: Bei Δr und Δh handelt es sich um kleine Änderungen, wie sie etwa in der Fehlerrechnung auftreten, sodass sie durch die Differenziale dr und dh ersetzt werden können. Beachten Sie auch, dass in der Fehlerrechnungen alle Komponenten (Summanden) mit ihren Beträgen eingehen, um den „schlimmsten" Fall zu erfassen. Die Änderung des Zylindervolumens bei der Änderung des Radius von $r = 10$ cm um 3 mm und der Höhe von $h = 30$ cm um 5 mm ist anzugeben.

Gehe Sie zu Kapitel 25.5!

24.6 Extremwerte (Lagrange)

1. Der Nutzen, den Sie beim Besuch eines Chinalokals vom Verzehr eines Gerichtes haben, sei in Abhängigkeit von der Menge x_1 an Fleisch und der Menge x_2 an Gemüse (in Gramm, unter der Voraussetzung, dass es Ihnen schmeckt) gegeben durch

$$U(x_1;x_2) = x_1 \cdot x_2 + 2x_2.$$

Der Preis eines Gerichtes sei gegeben durch

$$P(x_1;x_2) = 0{,}5x_1 + x_2.$$

Sie haben genau 20 € zur Verfügung. Ermitteln Sie den maximalen Nutzen unter der Budgetbeschränkung.

2. Zur Herstellung von Glas G werden die Rohstoffe x (Kalk) und y (Sand) benötigt. Dabei kostet eine Mengeneinheit (ME) von x 2 Geldeinheiten (GE) und eine ME von y 3 GE. Die Produktionsfunktion lautet:

$$G(x;y) = 10\sqrt{xy}$$

Es sind 100 ME des Glases herzustellen. Ermitteln Sie das Kostenminimum unter Anwendung des Lagrangeansatzes.

3. Bei einem an der Wand befestigten und oben offenen Abfallbehälter soll das Fassungsvermögen 2 m^3 betragen. Wie sind die Abmessungen zu wählen, wenn der Behälter die Form eines Quaders hat und die Oberfläche einen minimalen Wert annehmen soll (Materialverbrauch)?

Gehen Sie zu Kapitel 25.6!

25 Lösungen zu den Übungsaufgaben Analysis III

Übersicht

25.1 Funktionen mit mehr als einer unabhängigen Variablen

1. a) Algebraische Funktion mit drei Variablen
   b) Ganzrationale Funktion mit fünf Variablen
   c) Transzendente (nichtrationale, nichtalgebraische) Funktion mit drei Variablen

2. a) $y\,(2;-1) = 14$
   b) $y\left(1; \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{e}$
   c) $y\,(1;-1;2) = -6$

3. Das Funktionsbild ist eine Halbkugel über der x_1-x_2-Ebene mit dem Radius r.

Gehen Sie zu Kapitel 21.2!

G. Höfner, *Mit Selbsttests gezielt Mathematik lernen*,
DOI 10.1007/978-3-662-52963-8_25

25.2 Niveaufunktion

1. $p_1 = \frac{G_0}{x_1} - \frac{x_2}{x_1}p_2, \qquad p_2 = \frac{G_0}{x_2} - \frac{x_1}{x_2}p_1$

2. $y^{0{,}8} = \frac{c}{10x^{0{,}2}}, \qquad x^{0{,}2} = \frac{c}{10y^{0{,}8}}$

   $y = \frac{c^{1{,}25}}{10^{1{,}25}x^{0{,}25}} = \sqrt[4]{\frac{c^5}{10^5 x}}, \qquad x = \frac{c^5}{10^5 y^4}$

3. Allgemeine Lösung:

$$100h = 10z + 5f, \quad \text{mit } h, z, f \in G$$

h: Anzahl der Hundert-Euro-Scheine
z: Anzahl der Zehn-Euro-Scheine
f: Anzahl der Fünf-Euro-Scheine

$$z = 10h - 0{,}5f, \qquad f = 2\,(10h - z)$$

Spezielle Lösung:

$$h = 400 \quad (400 \text{ mal } 100\,€ = 40\,000\,€)$$

$$z = 4\,000 - 0{,}5f, \qquad f = 2\,(4\,000 - z)$$

Zum Beispiel:
$f = 60$ bedeutet $z = 3\,970$ oder $z = 1\,500$ bedeutet $f = 5\,000$

Gehen Sie zu Kapitel 21.3!

25.3 Partielle Ableitung

1. $$\nabla z = \begin{pmatrix} 0{,}6y^{0{,}8}x^{0{,}2} \\ 0{,}4x^{1{,}2}y^{-0{,}2} \end{pmatrix}$$

$$H\,(z) = \begin{pmatrix} 0{,}12y^{0{,}8}x^{-0{,}8} & 0{,}48x^{0{,}2}y^{-0{,}2} \\ 0{,}48x^{0{,}2}y^{-0{,}2} & -0{,}08x^{1{,}2}y^{-1{,}2} \end{pmatrix}$$

2. $\frac{\partial f}{\partial x} = 3z - 2y = 9 + 2 = 11$

   $\frac{\partial f}{\partial y} = -2x + z = -2 + 3 = 1$

   $\frac{\partial f}{\partial z} = 3x + y = 3 - 1 = 2$

3. $\nabla V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{\partial V}{\partial h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\pi r h \\ \pi r^2 \end{pmatrix}$

$$H_V = \begin{pmatrix} 2\pi h & 2\pi r \\ 2\pi r & 0 \end{pmatrix}$$

Gehen Sie zu Kapitel 21.4!

25.4 Partielle Elastizität

1. Es sei

$$z = z(r_1; r_2) = a r_1^b r_2^c$$

eine zweidimensionale Cobb-Douglas-Produktionsfunktion, welche durch zwei nichtnegative Faktoreinsatzmengen r_1 und r_2 die produzierte Menge z beschreibt. Wie groß sind die Inputelastizität (ϵ_{z,r_1}) und die Outputelastizität (ϵ_{z,r_2})?

$$\epsilon_{z,r_1} = abr_1^{b-1} r_2^c \frac{r_1}{a r_1^b r_2^c} = b, \qquad \text{mit } \frac{\partial z}{\partial r_1} = abr_1^{b-1} r_2^c$$

$$\epsilon_{z,r_2} = acr_1^{b} r_2^{c-1} \frac{r_2}{a r_1^b r_2^c} = c, \qquad \text{mit } \frac{\partial z}{\partial r_2} = acr_1^{b} r_2^{c-1}$$

2. a) (vgl. Lösung Kap. 25.3, Aufgabe 2)

$$\frac{\partial f(x;y;z)}{\partial x} = 3z - 2y = 9 + 2 = 11$$

$$\frac{\partial f(x;y;z)}{\partial y} = -2x + z = -2 + 3 = 1$$

$$\frac{\partial f(x;y;z)}{\partial z} = 3x + y = 3 - 1 = 2$$

b) $\epsilon_{f,x} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{x}{f(x;y;z)} = (3z - 2y) \frac{x}{3xz - 2xy + yz}$

$$= (9 - 2(-1)) \frac{1}{3 + 2 - 3} = \frac{11}{2} = 5{,}5$$

c) $\frac{\partial f}{\partial a} = \alpha a^{\alpha - 1} 2^\beta = \alpha 2^\beta$

$$\frac{\partial f}{\partial K} = \beta a^\alpha K^{\beta - 1} = \beta 2^{\beta - 1}$$

d) $\epsilon_{f,a} = \alpha a^{\alpha - 1} K^\beta \frac{a}{a^\alpha K^\beta} = \alpha$

3. a)
$$\begin{aligned}
U(x_1,x_2) &= x_1x_2 + 2x_2\\
\epsilon_{U,x_1} &= x_2\frac{x_1}{x_1x_2+2x_2}\\
\epsilon_{U,x_1}(15{,}20) &= \frac{300}{340} = 0{,}882\\
\epsilon_{U,x_2} &= (x_1+2)\,\frac{x_2}{x_1x_2+2x_2}\\
\epsilon_{U,x_2}(15{,}20) &= \frac{340}{340} = 1{,}0
\end{aligned}$$

b) Ausgehend von der Kombination (15,20):
Der Nutzen ist bezüglich x_1 unelastisch, bezüglich x_2 proportional elastisch. Pro Prozentpunkt Wachstum der Pizzagröße wächst der Nutzen um ca. 0,882 %. Pro Prozentpunkt Wachstum des Belags wächst der Nutzen um ca. 1 %.

Gehen Sie zu Kapitel 21.5!

25.5 Totales Differenzial

1. Nebenrechnung:
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 14xy + 3y^5$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 7x^2 + 15xy^4 - 24y^5$$

$$\mathrm{d}f = \left(3x^2 + 14xy + 3y^5\right)\mathrm{d}x + \left(7x^2 + 15xy^4 - 24y^5\right)\mathrm{d}y$$

2. $\mathrm{d}V = (bc)\,\mathrm{d}a + (ac)\,\mathrm{d}b + (ab)\,\mathrm{d}c$

3. $V(r,h) = \pi r^2 h,$
$$\frac{\partial V}{\partial r} = 2\pi rh$$
$$\frac{\partial V}{\partial h} = \pi r^2$$

Totales Differenzial: $\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial V}{\partial h}\mathrm{d}h = (2\pi rh)\,\mathrm{d}r + \left(\pi r^2\right)\mathrm{d}h$

Beide Änderungen positiv:
$$\begin{aligned}
\Delta V &\approx \left|\frac{\partial V}{\partial r}\Delta r\right| + \left|\frac{\partial V}{\partial h}\Delta h\right|\\
&\approx |2\pi rh\Delta r| + \left|\pi r^2\Delta h\right|
\end{aligned}$$

Bei der praktischen Berechnung ist es meist von Vorteil, zunächst den relativen Fehler

$$\frac{\Delta V}{V} = \left|\frac{2\Delta r}{r}\right| + \left|\frac{\Delta h}{h}\right| = \frac{2\cdot 3}{100} + \frac{5}{300} = \frac{18+5}{300} = \frac{23}{300} \approx 0{,}0767$$

anzugeben. Der relative Maximalfehler beträgt somit 7,7 %. Der absolute Maximalfehler ergibt sich aus

$$\Delta V = 0{,}0767 \cdot \pi \cdot 100^2 \cdot 300 = 0{,}0767 \cdot \pi \cdot 3\,000\,000 = 722\,881 \text{ mm}^3.$$

Das Ergebnis für dieses Zahlenbeispiel ist:

$$V = (9424{,}778 \pm 722{,}9) \text{ cm}^3.$$

Dem entspricht ein relativer Fehler von 7,7 %.

Gehen Sie zu Kapitel 21.6!

25.6 Extremwerte (Lagrange)

1. 1. Schritt:

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2) &= 20 - (0{,}5x_1 + x_2) \\ L(x_1, x_2, \lambda) &= x_1x_2 + 2x_2 + \lambda(20 - 0{,}5x_1 - x_2) \\ \frac{\partial L}{\partial x_1} &= x_2 - 0{,}5\lambda \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= x_1 + 2 - \lambda \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 20 - 0{,}5x_1 - x_2 \end{aligned}$$

   2. Schritt: Auflösen nach λ:

$$\begin{aligned} 2x_2 &= \lambda \\ x_1 + 2 &= \lambda \end{aligned}$$

   Gleichsetzen:

$$\begin{aligned} 2x_2 &= x_1 + 2 \\ x_2 &= 0{,}5x_1 + 1 \end{aligned}$$

   3. Schritt: Einsetzen in die Budgetbeschränkung:

$$\begin{aligned} 0{,}5x_1 + 0{,}5x_1 + 1 = 20 \quad &\Rightarrow \quad x_1 = 19, \quad x_2 = 10{,}5 \\ U(19; 10{,}5) &= 220{,}5 \end{aligned}$$

2. $L(x, y, \lambda) = K(x, y) + \lambda \cdot f(x, y) = 2x + 3y + \lambda\left\lfloor 10\sqrt{xy} - 100 \right\rfloor$

$$\nabla L = \begin{pmatrix} 2 + 5\lambda\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \\ 3 + 5\lambda\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \\ 10\sqrt{xy} - 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die ersten beiden Zeilen nach λ aufgelöst und gleichgesetzt:

$$\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{y}{x}} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{2}y$$

Eingesetzt in die dritte Gleichung:

$$\sqrt{\frac{3}{2}y^2} = 10 \quad \Rightarrow \quad y \approx 8{,}16, \quad \text{negativer Wert entfällt, kann keine Menge sein}$$

$$x = 1{,}5 \cdot 8{,}16 = 12{,}25$$

$$\lambda = -\frac{2}{5}\sqrt{\frac{12{,}25}{8{,}16}} \approx -0{,}49$$

$$K\,(12{,}25; 8{,}16) \approx 48{,}99$$

3. Oberfläche:

$$O = xy + 2yz + xz$$

Volumen:

$$V = xyz = 2$$
$$0 = 2 - xyz$$

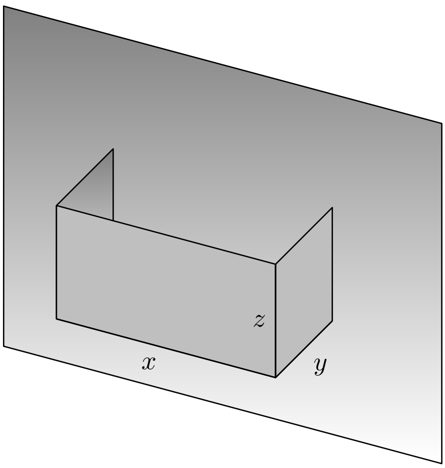


Abb. 25.1 Skizze des Abfallbehälters

Bildung der Hilfsfunktion:

$$\Lambda = xy + 2yz + xz + \lambda\,(2 - xyz)$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x} = y + z - \lambda yz = 0 \tag{25.1}$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial y} = x + 2z - \lambda xz = 0 \tag{25.2}$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial z} = 2y + x - \lambda xy = 0 \tag{25.3}$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial \lambda} = 2 - xyz = 0 \tag{25.4}$$

Gleichung (26.1), (26.2) und (26.3) nach λ auflösen:

$$\lambda = \frac{y+z}{yz} \tag{25.5}$$

$$\lambda = \frac{x+2z}{xz} \tag{25.6}$$

$$\lambda = \frac{2y+x}{xy} \tag{25.7}$$

Gleichungen (26.5) und (26.6) gleichsetzen:

$$\frac{y+z}{yz} = \frac{x+2z}{xz} \quad \Rightarrow \quad x\,(y+z) = y\,(x+2z)$$

$$zx = 2zy$$

$$x = 2y \tag{25.8}$$

Gleichungen (26.5) und (26.7) gleichsetzen:

$$\frac{y+z}{yz} = \frac{2y+x}{xy} \quad \Rightarrow \quad x\,(y+z) = z\,(2y+x)$$

$$xy = 2yz$$

$$x = 2z \tag{25.9}$$

Gleichungen (26.8) und (26.9) gleichsetzen:

$$2y = 2z \quad \Rightarrow \quad y = z \tag{25.10}$$

$$x = 2y = 2z \tag{25.11}$$

Gleichung (26.10) und (26.11) in Gleichung (26.4) eingesetzt:

$$2z \cdot z \cdot z = 2$$

$$z^3 = 1 \quad \Rightarrow \quad z = 1 \text{ m}, \quad y = 1 \text{ m}, \quad x = 2 \text{ m}$$

$$O_{\min} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 6 \text{ m}^2$$

Ende des fünften Tages im Aufbaukurs Mathematik!

Literaturverzeichnis

Peters, H.: Wirtschaftsmathematik. Verlag W. Kohlhammer, Stuttgart (2006)

Akkerboom, H., Peters, H.: Wirtschaftsmathematik – Übungsbuch. Verlag W. Kohlhammer, Stuttgart (2008)

Schöwe, R.: Analysis – Wirtschaft. Cornelsen Verlag, Berlin (1998)

Schöwe, R.: Lineare Algebra – Wirtschaft. Cornelsen Verlag, Berlin (1998)

Schuldenzucker, U.: Prüfungstraining – Analysis und Lineare Algebra. Schäffer-Poeschel Verlag, Stuttgart (2014)

Christiaans, T., Ross, M.: Wirtschaftsmathematik für das Bachlor-Studium. Springer Gabler, Wiesbaden (2016)

Schuldenzucker, U.: Prüfungstraining – Finanzmathematik. Schäffer-Poeschel Verlag, Stuttgart (2014)

Schuldenzucker, U.: Prüfungstraining – Deskriptive Statisktik. Schäffer-Poeschel Verlag, Stuttgart (2014)

Schuldenzucker, U.: Prüfungstraining – Induktive Statistik. Schäffer-Poeschel Verlag, Stuttgart (2014)

Walz, G., Zeilfelder, F., Rießinger, T.: Brückenkurs Mathematik für Studieneinsteiger aller Disziplinen. Springer Spektrum, Heidelberg (2014)

G. Höfner, *Mit Selbsttests gezielt Mathematik lernen*,
DOI 10.1007/978-3-662-52963-8