LEHRBUCH

Klaus Renger

Finanzmathematik mit Excel

Grundlagen – Beispiele – Lösungen

4. Auflage

Springer Gabler

Finanzmathematik mit Excel

Klaus Renger

Finanzmathematik mit Excel

Grundlagen – Beispiele – Lösungen

4. Auflage

Springer Gabler

Klaus Renger
Halle, Deutschland

ISBN 978-3-658-14099-1 ISBN 978-3-658-14100-4 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-658-14100-4

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Gabler

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Gabler ist Teil von Springer Nature
Die eingetragene Gesellschaft ist Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

Vorwort zur 4. Auflage

In Anbetracht durchweg positiver Reaktionen von Lesern der ersten drei Auflagen habe ich keine Veranlassung gesehen, vom bisherigen Konzept meines Buches abzuweichen. Der gesamte Inhalt blieb, nachdem er in der zweiten Auflage sorgfältig überarbeitet sowie durch einige praktische Übungsbeispiele ergänzt worden war, unverändert. Die Tatsache, dass sich das wirtschaftliche Umfeld durch niedrigere Zinsniveaus derzeit verändert hat, wirkt sich auf keinen der Berechnungsalgorithmen selbst aus und musste daher nicht explizit berücksichtigt werden, zumal die Anschaulichkeit der Zahlenbeispiele beeinträchtigt worden wäre.

Die ursprünglich beigefügte CD-ROM ist entfallen, doch alle für die einzelnen Bilder und Übungsbeispiele entwickelten Excel-Tabellen können von der Verlags-Homepage **www.springer.com** unter diesem Buchtitel als Zusatzmaterial heruntergeladen und auf dem PC mit der eBook-Ausgabe zu einem interaktiv nutzbaren Lehr- und Übungsprogramm verbunden werden.

Für das an meinem Buch und vor allem an den zugehörigen Lernprogrammen gezeigte Interesse möchte ich mich bei allen Lesern und den Anwendern meiner Excel-Tabellen herzlich bedanken.

Klaus Renger Halle (Saale), April 2016

Vorwort zur 1. Auflage

Auf finanzmathematische Zusammenhänge verschiedenster Art stößt man überall in der volks- und betriebswirtschaftlichen Praxis. Dieser Tatsache tragen die Universitäten und Hochschulen weitgehend Rechnung, indem sie dem Fach "Finanzmathematik" im Rahmen der wirtschaftswissenschaftlichen Ausbildung das entsprechende Gewicht beimessen. So sind auch neue Lehrbücher stets willkommen, die einerseits das notwendige Grundwissen und andererseits neue fachliche Aspekte beinhalten.

Die Bearbeitung des vorliegenden Buches beruht auf einem Konzept, das zunächst die Darstellung aller wichtigen finanzmathematischen Grundlagen in leicht verständlicher, gestraffter Form vorsieht. Dabei wird besonderes Augenmerk auf die Problematik der Effektivzinsberechnung nach neuen EU-Normen gerichtet. Ein zweites Anliegen ist, durchgängig Praxisbezogenheit und Anschaulichkeit zu erreichen, indem für jeden theoretischen Sachverhalt mindestens ein praktisches Beispiel ausgewählt und dessen Lösung ausführlich erläutert wird. Um den logischen Zusammenhalt innerhalb der theoretischen Ausführungen im ersten Teil des Buches nicht zu unterbrechen, sind die Beispiele in einem zweiten Teil des Buches untergebracht und dort einer gleich lautenden Gliederung zugeordnet.

Der besondere Vorzug dieses Lehrbuches liegt darin, dass für die einzelnen Anwendungsbeispiele nicht nur spezielle Lösungsansätze dargestellt, sondern für jeden Aufgabentyp passfähige, allgemein verwendbare Excel-Tabellen entwickelt werden. Die ausführliche Erläuterung des methodischen Vorgehens bleibt dabei nicht nur auf den betreffenden Anwendungsfall beschränkt. Darüber hinaus wird gezeigt, wie man einfache Berechnungstabellen für ähnliche Anwendungen systematisch modifizieren oder schrittweise zu komfortablen, multifunktionalen Excel-Lösungen erweitern kann. Im Zuge der Notwendigkeit, dabei auf die breite Funktionsvielfalt von "Microsoft Excel" zu verweisen, ist so für die Finanzmathematik zugleich ein Excel-Lehrbuch entstanden. Diesbezüglich bin ich Herrn Dr. Gert-Harald Fröhlich, Professor für Mathematik und Datenverarbeitung im Fachbereich Wirtschaftswissenschaften der Hochschule Harz Wernigerode, der mit seinen Anregungen und Ideen letztendlich Anstoß für dieses Buch gab, zu Dank verpflichtet.

Die Lernprozesse zur Bearbeitung finanzmathematischer Aufgabenstellungen und deren Umsetzung in Excel-Lösungen unterstützt eine interaktive CD-ROM. Erstens erleichtert diese dank zahlreicher Hyperlinks die Kommunikation zwischen theoretischen Erläuterungen (im Teil 1) und der rechnerischen Lösung praktischer Beispiele (im Teil 2). Zweitens ermöglicht sie durch gleichzeitiges Öffnen von originalen Mustervorlagen der einem Beispiel zugeordneten Excel-Tabellen, den jeweiligen Aufgabentyp sowie dessen Lösung zu variieren und mit unterschiedlichen Eingabedaten zu experimentieren bzw. die Ergebnisse selbst entwickelter Excel-Lösungen auf ihre Richtigkeit und Vollständigkeit zu überprüfen.

Das vorliegende Buch ist aus einem Lehrmanuskript für die universitäre Ausbildung von Studenten wirtschaftswissenschaftlicher Fachrichtungen im Grund- und Hauptstudium hervorgegangen, das die Vermittlung finanzmathematischer Grundlagen in Form von rechnergestützten Übungen vorsieht. Es wurde so gestaltet, dass es nicht nur als fachspezifisches Lehr- oder Studienmaterial, sondern auch als Anleitung zum Selbststudium dienen kann. Insofern eignet es sich für die Hoch- und Fachhochschulausbildung und als ergänzendes Lehrbuch für Auszubildende in Banken, Sparkassen und Versicherungen ebenso, wie als Arbeitsmaterial für Mitarbeiter in Finanz- und Controllingabteilungen der Unternehmen, vor allem aber für die Weiterbildung im Finanzdienstleistungssektor.

Dank seines übersichtlichen Aufbaus und der Transparenz aller ausgewählten Beispiellösungen dürfte dieses Buch als anwendungsorientiertes Nachschlagewerk für alle diejenigen von Interesse sein, die beruflich oder privat finanzmathematische Berechnungen ausführen müssen oder möchten.

Klaus Renger Halle (Saale), Juni 2003

Inhaltsverzeichnis

Teil 1: Finanzmathematische Grundlagen

Teil 2: Beispiellösungen mit Excel

Teil 1

Finanzmathematische Grundlagen

1. Zinsrechnung

1.1 Einführung

Als *Zins* bezeichnet man den Preis für zeitweilig überlassene Vermögenswerte, insbesondere für Geld[1]. Da dieser Preis in der Regel nicht nur einmalig, sondern periodisch erneut gezahlt wird, ist es gerechtfertigt, von "Zinsen" zu sprechen. Vereinnahmte Zinsen (Habenzinsen) sind Quelle für dynamisches Wachstum eigenen Kapitals; für fremdes Kapital entrichtete Zinsen (Sollzinsen) stellen einen wichtigen Kostenfaktor dar. Die Finanzmathematik wird grundlegend geprägt durch die Art und Weise, wie die Zinsen zu berechnen und (mit dem Kapital) zu verrechnen sind.

Die Zinsen Z werden für einen Kapitalgrundwert (in der Regel das sog. Anfangskapital K_0 bei $t = 0$) und für eine Periode (in der Regel ein Jahr) als Prozent vom Hundert ermittelt:

$$Z = \frac{p^{\%}}{100} \cdot K_0 = i \cdot K_0 \ . \tag{1.1}$$

Für $p^{\%}$ wird häufig der Begriff *Zinsfuß* verwendet[2]. i heißt (Jahres-)*Zinssatz*, der eventuell mit dem Zusatz "p. a." (pro anno bzw. per annum) genauer spezifiziert ist, um Verwechslungen mit Zinssätzen auszuschließen, die für unterjährige Zeitabschnitte gelten. Auch die Fälligkeit von Zinszahlungen muss beachtet werden, wobei insbesondere meist nur die Extreme *nachschüssig* (am Ende einer Periode oder am Ende der Laufzeit) und *vorschüssig* (am Anfang einer Periode oder am Anfang der Laufzeit) in Betracht gezogen werden. Schließlich ist von grundlegender Bedeutung, ob und wie die Zinsen mit dem Kapital verrechnet werden. Aus diesen Unterscheidungen folgen die üblichen Klassifizierungen für die Zinsrechnung. In Bild 1.1 sind drei Klassifizierungsmerkmale dargestellt.

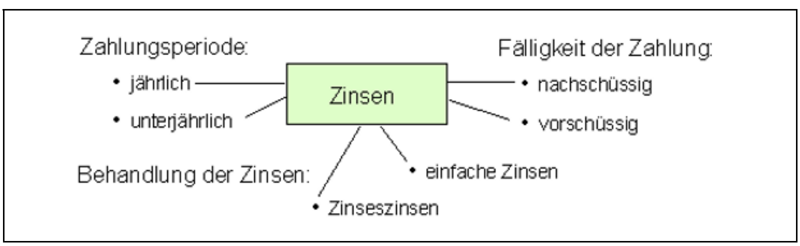


Bild 1.1 Arten der Verzinsung (Klassifikation)

[1] Vgl. etwa Kobelt/Schulte (1999), S. 33

[2] Vgl. Pfeifer (2000), S. 27, und Tietze (2000), S.18

K. Renger, *Finanzmathematik mit Excel*, DOI 10.1007/978-3-658-14100-4_1

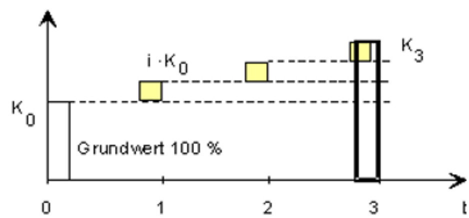
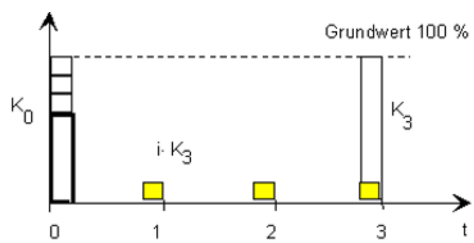
1.2 Einfache Zinsrechnung

Einfache Verzinsung bedeutet, dass die Zinsen entweder bei Fälligkeit ausgezahlt oder gesondert gutgeschrieben, zwischenzeitlich aber weder mit dem Kapitalgrundwert verrechnet noch selbst verzinst werden. Somit ergeben sich bei einer Kapitalanlage mit einer Laufzeit von n Jahren die jährlichen Zinsen:

$$Z_t = i \cdot K_0 \quad \text{mit} \quad t = 1, 2, \ldots, n \,. \tag{1.2}$$

Bezüglich der Zinszahlung sind drei Fälle zu unterscheiden (Tabelle 1.1).

Tabelle 1.1 Zahlungsmodus einfacher Zinsen

Fall A:	Die Zinsen werden regelmäßig bei Fälligkeit (i.allg. am Ende jeder Zinsperiode) ausgezahlt. Eine besondere Zinsrechnung scheint neben Gl. (1.1) dabei zunächst nicht erforderlich zu sein.
Fall B:	Die jährlichen Zinsen $i \cdot K_0$ werden aufgesammelt und am Ende der Laufzeit mit dem Kapital verrechnet (*nachschüssige Zinszahlung*).  Daraus folgt: Zinsen in n Jahren $\quad Z_n = n \cdot i \cdot K_0 \quad$ (1.3) Kapitalendwert $\quad K_n = K_0 + Z_n$ (*einfache Aufzinsung*) $\quad \boxed{K_n = K_0 \cdot (1 + i \cdot n)} \quad$ (1.4)
Fall C:	Die Zinsen für die gesamte Laufzeit n werden bereits am Anfang der Laufzeit ausgezahlt und mit dem Anfangskapital verrechnet (*vorschüssige Zinszahlung*).  Daraus folgt: Zinsen in n Jahren $\quad Z_n = n \cdot i \cdot K_n \quad$ (1.5) Kapitalbarwert $\quad K_0 = K_n - Z_n$ (*einfache Abzinsung*) $\quad \boxed{K_0 = K_n \cdot (1 - i \cdot n)} \quad$ (1.6)

Durch entsprechende Umstellung dieser Gleichungen resultieren für Fall B und C jeweils vier sog. Grundaufgaben (Tabelle 1.2).

Tabelle 1.2 Grundaufgaben der einfachen Zinsrechnung

	nachschüssig	*vorschüssig*
Endwert	$K_n = K_0 \cdot (1 + i \cdot n)$	$K_n = \dfrac{K_0}{1 - i \cdot n}$
Barwert	$K_0 = \dfrac{K_n}{1 + i \cdot n}$	$K_0 = K_n \cdot (1 - i \cdot n)$
(nomineller) Zinssatz	$i = \dfrac{K_n / K_0 - 1}{n}$	$i = \dfrac{1 - K_0 / K_n}{n}$
Laufzeit	$n = \dfrac{K_n / K_0 - 1}{i}$	$n = \dfrac{1 - K_0 / K_n}{i}$
aus Gl.	(1.4)	(1.6)

Beispiele: 1.1, 1.2, 1.3 für nachschüssige Zinszahlung
1.4 für vorschüssige Zinszahlung

Einfache Diskontrechnung

Bei der Berechnung von Barwerten K_0 gemäss Gl. (1.4) bzw. (1.6) wird der Kapitalendwert jeweils durch Multiplikation mit einem Zinsfaktor kleiner 1 verringert:

$$K_0 = K_n \cdot \frac{1}{1 + i \cdot n} \quad \text{bzw.} \quad K_0 = K_n \cdot (1 - i \cdot n) \; .$$

Die Verringerung entspricht einem Abschlag vom Endwert

$$K_0 = K_n - D_n \, , \tag{1.7}$$

der als *Diskont* D_n bezeichnet und mit den Formeln aus Tabelle 1.2 für die Fälle B und C wie folgt berechnet wird:

Fall B (nachschüssige Verzinsung):

$$D_n = K_n - K_0 = K_n - \frac{K_n}{1 + i \cdot n} = i \cdot n \cdot \frac{K_n}{1 + i \cdot n} \, , \tag{1.8}$$

$$D_n = i \cdot n \cdot K_0 \, . \tag{1.9}$$

Bei dieser sog. amtlichen oder "bürgerlichen" Diskontierung ist der Diskont als Zins vom Barwert aufzufassen. Da K_0 aber nach Gl. (1.7) zu berechnen ist, ergibt sich D_n praktisch gemäß Gl. (1.8).

Fall C (vorschüssige Verzinsung):

$$D_n = K_n - K_0 = K_n - K_n \cdot (1 - i \cdot n) = i \cdot n \cdot K_n \tag{1.10}$$

Der Diskont ergibt sich somit als Zins vom Endwert. i bezeichnet man hier als *Diskontsatz*[3]. Diese Art der Diskontierung ist im Wechselverkehr unter Kaufleuten von alters her üblich ("kaufmännische" Diskontierung). Mathematisch ist Gl. (1.10) die erste Näherung von Gl. (1.8).

Beispiel: 1.6 Diskontierung eines Handelswechsels

Die hier dargestellten Arten unterschiedlicher Zins- bzw. Diskontrechnung sind in Tabelle 1.3 nochmals gegenübergestellt, um die Analogien zu verdeutlichen.

Tabelle 1.3 Vorschüssige und nachschüssige einfache Verzinsung

Nachschüssige Verzinsung	Vorschüssige Verzinsung	Gl.
$\boxed{K_n = K_0 \cdot (1 + i_{\text{nach}} \cdot n)}$	$K_n = \dfrac{K_0}{1 - i_{\text{vor}} \cdot n}$	(1.4)
	$\boxed{K_0 = K_n \cdot (1 - i_{\text{vor}} \cdot n)}$	(1.6)
Endkapital = Anfangskapital + Zinsen vom Anfangskapital	**Anfangskapital** = Endkapital – Zinsen vom Endkapital	

Bei Übereinstimmung der Zinssätze $i_{\text{vor}} = i_{\text{nach}}$ ergeben sich wegen der Bezugnahme auf verschiedene Grundwerte unterschiedliche Zinsen und somit unterschiedliche jährliche Kapitalentwicklungen. Eine Übereinstimmung der jährlichen Kapitalentwicklung K_1/K_0 kommt bei nachschüssiger und vorschüssiger Verzinsung folglich nur zustande, wenn die Zinssätze unterschiedlich sind. Gemäß den Gln. (1.4) und (1.6) gilt mit $n = 1$:

$$\frac{K_1}{K_0} = 1 + i_{\text{nach}} = \frac{1}{1 - i_{\text{vor}}} \; ; \quad i_{\text{nach}} = \frac{i_{\text{vor}}}{1 - i_{\text{vor}}} > i_{\text{vor}} \; . \tag{1.11}$$

Unterjährige Verzinsung

Bei Vorgabe des Jahreszinssatzes i ist zur Berechnung von Zinsen die Laufzeit n auch in Jahren anzugeben. Für unterjährige Laufzeiten $n < 1$ (bzw. nichtganzzahlige n) muss Klarheit darüber bestehen, wie die Jahresbruchteile anzugeben sind. Wenn – wie in Deutschland bislang üblich – für das Jahr 360 und für jeden Monat 30 Zinstage zugrunde

[3] Vgl. etwa Locarek-Junge (1997), S. 50.

gelegt werden (sog. 30/360-Tage-Methode), ist das Jahr nicht nur durch Tage, sondern auch durch Monats-, Quartals- und Halbjahresperioden ganzzahlig teilbar. Erfolgt die Zeitzählung in einer dieser unterjährigen Perioden, dann muss bei der Zinsrechnung gemäss Gl. (1.6) mittels Division durch die Zahl der Perioden pro Jahr m entweder die unterjährige Laufzeit dem Jahreszinssatz i oder der Jahreszinssatz der unterjährigen Periode angepasst werden:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + i \cdot \frac{n}{m}\right) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m} \cdot n\right). \tag{1.12}$$

Den unterjährigen Zinssatz

$$i_r = \frac{i}{m} \tag{1.13}$$

bezeichnet man als *relativen Zinssatz*. Wenn die Laufzeit in (Zins-)Tagen t gezählt wird, ergibt sich folgende *kaufmännische Zinsformel*, mit der Sparkassen und Banken die unterjährigen Zinsen bei wechselnden Zahlungen berechnen[4]:

$$K_t = K_0 \cdot \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right) = K_0 + \frac{\frac{K_0 \cdot t}{100}}{\frac{360}{p\%}} = K_0 + \frac{\text{Zinszahl}}{\text{Zinsdevisor(-teiler)}} \tag{1.14}$$

Dem gegenüber herrscht in anderen Ländern die taggenaue Verzinsung auf Basis eines Jahres mit 365 (bzw. 366) Kalendertagen vor (sog. actual/365-Tage-Methode), wobei auf die unterschiedlichen Monatslängen von 28, 29, 30 oder 31 Tagen Rücksicht genommen wird. Diese Zählweise für Zinstage hat sich trotz jahrelanger Bestrebungen innerhalb der EU zur Vereinheitlichung der Effektivzinsberechnung bei Verbraucherkrediten[5] bisher nicht allgemein durchsetzen können.

Beispiel: 1.5 Berechnung von Stückzinsen

Verzinsung mit veränderlichem Zinssatz

Bei jährlich veränderlichem Zinssatz i_t (t = 1, 2, ..., n) und nachschüssiger Zinsgutschrift geht Gl. (1.4) über in

$$K_n = K_0 + i_1 \cdot K_0 + i_2 \cdot K_0 + \ldots + i_n \cdot K_0 = K_0 \cdot \left(1 + \sum_{t=1}^{n} i_t\right) \tag{1.15}$$

[4] Vgl. Pfeifer (2000), S. 33

[5] Vgl. Wimmer/Stöckl-Pukall (1998), S. 35

Der gleiche Kapitalendwert ergibt sich, wenn das Anfangskapital jährlich mit dem Zinssatz $\bar{i}$ vergütet wird, der dem arithmetischen Mittelwert der gestaffelten Zinssätze entspricht:

$$\frac{K_n}{K_0} = \left(1 + \sum_{t=1}^{n} i_t\right) = 1 + \bar{i} \cdot n \,; \quad \bar{i} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{t=1}^{n} i_t \ . \tag{1.16}$$

Beispiel: 1.7 Bundesschatzbrief (Typ A)

1.3 Zinseszinsrechnung

1.3.1 Jährliche Zinseszinsen

Wie bei der einfachen Zinsrechnung werden zunächst Jahresperioden betrachtet. Im Unterschied zur einfachen Zinsrechnung werden die Zinsen bei Fälligkeit nicht gesondert gutgeschrieben, sondern mit dem Kapital verrechnet und in der nächsten Periode selbst mit verzinst (*Zinseszinsen*). Die jährlichen Zinsen und die Kapitalentwicklung insgesamt hängen somit von der Fälligkeit der Zinsen ab (Tabelle 1.5, nächste Seite).

Durch entsprechende Umstellung der Gln. (1.17) und (1.18) zur Berechnung der Kapitalendwerte erhält man jeweils drei weitere Grundaufgaben: die Berechnung des Barwertes K_0, des Jahreszinssatzes i und der Laufzeit n der Kapitalanlage (Tabelle 1.4).

Tabelle 1.4 Grundaufgaben der jährlichen Zinseszinsrechnung

	nachschüssig	*vorschüssig*
Endwert	$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$	$K_n = \dfrac{K_0}{(1-i)^n}$
Barwert	$K_0 = \dfrac{K_n}{(1+i)^n}$	$K_0 = K_n \cdot (1-i)^n$
(nomineller) Zinssatz	$i = \sqrt[n]{K_n / K_0} - 1$	$i = 1 - \sqrt[n]{K_0 / K_n}$
Laufzeit	$n = \dfrac{\log K_n - \log K_0}{\log(1+i)}$	$n = \dfrac{\log K_0 - \log K_n}{\log(1-i)}$
aus Gl.	(1.17)	(1.18)

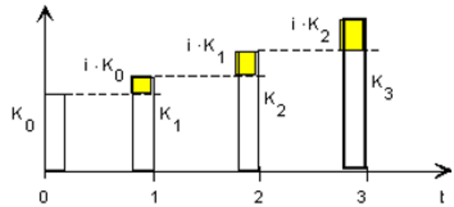
Tabelle 1.5 Zahlungsmodus für jährliche Zinseszinsen

Fall A: Bei regelmäßiger Auszahlung fälliger Zinsen kommt der Zinseszinseffekt nicht zustande und es besteht kein Unterschied zur einfachen Verzinsung.

Fall B: Die Jahreszinsen $Z_t = i \cdot K_{t-1}$ werden vom Anfangskapital berechnet und am Ende jeder Periode t dem Kapital zugeschlagen

(*nachschüssige Zinseszinsen*).

Daraus folgt:



$K_1 = K_0 + i \cdot K_0 = K_0 \cdot (1+i)$

$K_2 = K_1 \cdot (1+i) = K_0 \cdot (1+i)^2$

usw.

Allgemein:

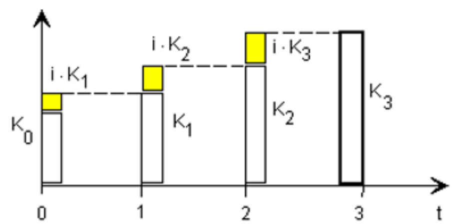
$$\boxed{K_n = K_0 \cdot (1+i)^n = K_0 \cdot q^n} \qquad (1.17)$$

q^n (dekursiver) Aufzinsungsfaktor

Fall C: Die Jahreszinsen $Z_t = i \cdot K_{t+1}$ werden vom Endkapital berechnet und am Beginn jeder Periode t dem Kapital zugeschlagen

(*vorschüssige Zinseszinsen*).

Daraus folgt mit



$K_0 = K_1 - i \cdot K_1 = K_1 \cdot (1-i)$:

$K_1 = \dfrac{K_0}{1-i}$

$K_2 = \dfrac{K_1}{(1-i)} = \dfrac{K_0}{(1-i)^2}$

usw.

Allgemein:

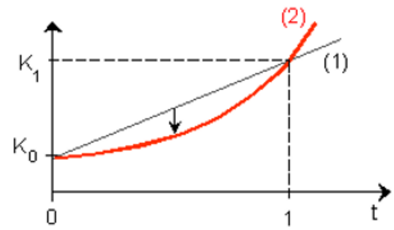
$$\boxed{K_n = \frac{K_0}{(1-i)^n}} \qquad (1.18)$$

$\dfrac{1}{(1-i)^n}$ (antizipativer) Aufzinsungsfaktor

Beispiele: 1.8 Endwertberechnung
1.9 Barwertberechnung
1.10 Laufzeitberechnung

Unterjährige Verzinsung

Bei der einfachen Zinsrechnung gemäß Gl. (1.4) wachsen die Zinsen zeitlich linear (lineare Verzinsung). Überträgt man Gl. (1.17) für die jährlich nachschüssige Zinseszinsrechnung auf unterjährige Zeitabschnitte, dann ergibt sich ein stetig exponentieller Verlauf (exponentielle Verzinsung), der für $t < 1$ trotz gleichen Jahreszinssatzes i unterhalb des linearen Verlaufes von Gl. (1.4) liegt, d. h. die Zinsen sind geringer (Bild 1.2).



Für $t < 1$ entwickelt sich das Kapital K_t bei exponentieller Verzinsung (2) langsamer als bei linearer Verzinsung (1);

bei $t = 1$ besteht dieser Unterschied nicht mehr:

$$K_1 = K_0 \cdot (1 + i \cdot 1) = K_0 \cdot (1 + i)^1 .$$

Bild 1.2 Vergleich von linearer und exponentieller Verzinsung

Bei nichtganzzahligen Laufzeiten $n = n_1 + n_2$ sind zwei verschiedene Arten der Zinseszinsrechnung üblich, wobei die ganzjährigen Zeitabschnitte n_1 und der unterjährige Rest n_2 (mit $n_2 < 1$) getrennt zu betrachten sind:

1. Bei *linearer Verzinsung* für den unterjährigen Laufzeitabschnitt ergibt sich

$$\boxed{K_n = K_0 \cdot (1+i)^{n_1} \cdot (1 + i \cdot n_2)} \tag{1.19}$$

Diese sog. **gemischte Verzinsung** ist die in Deutschland vorherrschende Zinsformel und war bis zum Jahr 2000 auch Grundlage für Effektivzinsberechnungen, wobei das Jahr mit 360 Tagen und gleichlangen Monaten von je 30 Tagen gezählt wird (vgl. Abschn. 1.2).

2. Bei *exponentieller Verzinsung* für den unterjährigen Laufzeitabschnitt ergibt sich

$$K_n = K_0 \cdot (1+i)^{n_1} \cdot (1+i)^{n_2} = K_0 \cdot (1+i)^{n_1+n_2} = K_0 \cdot q^n . \tag{1.20}$$

Gl. (1.17) kann in diesem Fall also uneingeschränkt angewendet werden, wobei es praktisch zweckmäßig ist, den Exponent in Jahresbruchteilen $n = n_p / m$ anzugeben:

$$\boxed{K_n = K_0 \cdot (1+i)^{n_p/m}} \tag{1.21}$$

Darin ist n_p die Laufzeit, ausgedrückt als Zahl der sich entsprechend m ergebenden unterjährigen Laufzeitperioden. Als Periodenzahl pro Jahr kommen praktisch infrage:

$m = 1$	$m = 2$	$m = 4$	$m = 12$	$m = 52$	$m = 365$
Jahr	Halbjahre	Vierteljahre	Monate	Wochen	Tage

Diese international verbreitete Zinseszinsformel ist vom Europäischen Rat für zukünftige Effektivzinsberechnungen bei Verbraucherkrediten in den EU-Mitgliedstaaten als verbindlich erklärt[6] und in nationales Recht umgesetzt worden[7]. Die Anpassung beschränkt sich in Deutschland aber lediglich darauf, bei Beibehaltung gleicher Monatslängen für das Jahr 365 Tage zugrunde zu legen (sog. 30,42/365-Tage-Methode). Entsprechend beruhen demnach auch Vierteljahres- und Halbjahresperioden nicht auf ganzen Tagen. Die Zeitzählung für Zinstage erfolgt dagegen nach wie vor im kaufmännischen Sinne auf Basis von 30-Tage-Monaten (siehe Abschn. 2.5).

> Logisch konsequent wäre es, wenn Jahresbruchteile, die nicht als ganze Wochen, Monate, Vierteljahre oder Halbjahre ausgedrückt werden können, in tatsächlichen Kalendertagen (actual) gezählt würden. (Auf dieses Problem wird im Teil 2 anhand von Beispielen näher eingegangen.)

Für $n_2 = 0$, d. h. wenn die Laufzeit volle Jahre umfasst, sind die Gln. (1.19) und (1.20) identisch.

Beispiele: 1.11, 1.12

1.3.2 Unterjährlich nachschüssige Zinseszinsen

Bei vielen Verzinsungsvorgängen werden mehrmals im Jahr Zinsen mit dem Grundkapital verrechnet, somit also ab der kommenden Periode selbst mitverzinst. Welcher Einfluss sich bei m unterjährigen Zinsperioden auf die Kapitalentwicklung ergibt, hängt von der Art der unterjährigen Verzinsung ab.

1. Bei *linearer Verzinsung* wird den unterjährigen Perioden der (unterjährige) *relative* Zinssatz $i_r = i/m$ zugeordnet, und das Kapital entwickelt sich innerhalb eines Jahres ($n = 1$) analog zu Gl. (1.17) gemäß

$$K_1 = K_0 \cdot (1 + i_r)^m = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m > K_0 \cdot (1 + i) \qquad (1.22)$$

und nach n Jahren bzw. n_p Laufzeitperioden entsprechend zu

$$\boxed{K_n = K_0 \cdot \left((1 + i_r)^m\right)^n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot n} = K_0 \cdot (1 + i_r)^{n_p}}\,. \qquad (1.23)$$

Beispiel: 1.13

---

[6] Vgl. Richtlinie 98/7/EG vom 16.2.1998

[7] Vgl. Preisangabenverordnung vom 28.7.2000

2. Bei *exponentieller Verzinsung* ist den unterjährigen Perioden der unterjährige Zinssatz

$$i_k = \sqrt[m]{1+i} - 1 \tag{1.24}$$

zuzuordnen, und das Kapital entwickelt sich innerhalb eines Jahres gemäß

$$K_1 = K_0 \cdot (1+i_k)^m = K_0 \cdot (1+i) \tag{1.25}$$

und nach n Jahren bzw. n_p Laufzeitperioden entsprechend zu

$$\boxed{K_n = K_0 \cdot \left((1+i_k)^m\right)^n = K_0 \cdot (1+i_k)^{m \cdot n} = K_0 \cdot (1+i_k)^{n_p} = K_0 \cdot (1+i)^n} \tag{1.26}$$

also unabhängig von der Anzahl m der unterjährigen Perioden. Daraus folgt, dass bei exponentieller Verzinsung eine zwischenzeitliche Zinskapitalisierung keinen Einfluss auf die Kapitalentwicklung bewirkt. Den mit Gl. (1.24) aus m resultierenden unterjährigen Zinssatz i_k bezeichnet man deshalb als (jahres-)*konformen* Zinssatz.

Die Kapitalentwicklung nach Gl. (1.22) nähert sich umso mehr an Gl. (1.26) an, je kürzer die unterjährigen Zinsperioden werden. Für den theoretischen Grenzfall der *stetigen Verzinsung* mit $m \to \infty$ gilt bei konstantem Jahreszinssatz i (ohne Beweis):

$$K_1 = K_0 \cdot \lim_{m/i \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m/i}\right)^{\frac{m}{i} \cdot i} = K_0 \cdot e^i \quad \text{bzw.} \quad K_n = K_0 \cdot e^{i \cdot n} . \tag{1.27}$$

Gl. (1.27) beschreibt natürliches Wachstum[8]; der Zinsfaktor $(1+i)$ ist mathematisch die erste Näherung von e^i .

1.3.3 Jährlich vorschüssige Verzinsung

Vorschüssige Zinseszinsen (s. Fall C in den Tabellen 1.4 und 1.5) spielen im Finanzsektor praktisch keine Rolle. Gl. (1.18) – umgestellt nach dem Barwert K_0 – bildet aber die rechnerische Grundlage für die *degressive* (Buchwert-)*Abschreibung* von Betriebsmitteln. Fasst man K_n als Anschaffungswert AW, K_0 als Buchwert BW_t im Jahr t und i als jährlichen Abschreibungssatz auf, dann gilt analog zu Gl. (1.18):

$$BW_t = AW \cdot (1-i)^t . \tag{1.28}$$

Am Ende der Nutzungsdauer (bei $t = n$) verbleibt der Restbuchwert

$$RW = AW \cdot (1-i)^n . \tag{1.29}$$

[8] Vgl. Ihrig/Pflaumer (2001), S. 23 f., und Pfeifer (2000), S. 67 ff.

Den Zinsfaktor $(1-i)^t$ bezeichnet man als *degressiven Abschreibungsfaktor*. Wird der Restbuchwert vorgegeben, dann ergibt sich der jährliche Abschreibungssatz durch Umstellung von Gl. (1.29):

$$\boxed{i = \left(1 - \sqrt[n]{\frac{RW}{AW}}\right)}. \tag{1.30}$$

Beispiel: 1.14

Mit der gleichen analogen Betrachtungsweise ist Gl. (1.6) als Berechnungsformel für den Zeitwert eines Betriebsmittels bei linearer Abschreibung und $(1-i\cdot t)$ als *linearer Abschreibungsfaktor* aufzufassen:

$$BW_t = AW\cdot(1-i\cdot t) \text{ bzw. } RW = AW\cdot(1-i\cdot n). \tag{1.31}$$

Auf weitergehende detaillierte Ausführungen soll hier nicht eingegangen werden.

1.3.4 Jährliche Verzinsung mit veränderlichem Zinssatz

Wenn für jedes Laufzeitjahr t individuelle Nominalzinssätze $1+i_t = q_t$ vereinbart sind, gilt:

$$K_1 = K_0\cdot q_1$$
$$K_2 = K_1\cdot q_2 = K_0\cdot q_1\cdot q_2$$
$$\vdots$$
$$K_n = K_{n-1}\cdot q_n = K_0\cdot q_1\cdot q_2\cdot\ldots\cdot q_n$$

allgemein:

$$\boxed{K_n = K_0\cdot\prod_{t=1}^{n} q_t = K_0\cdot\prod_{t=1}^{n}(1+i_t)} \tag{1.32}$$

Eine Vergleichsrechnung mit jährlich nachschüssiger Verzinsung bei gleichem Zinssatz j ergibt:

$$\frac{K_n}{K_0} = \prod_{t=1}^{n}(1+i_t) = (1+j)^n \qquad j = \sqrt[n]{\prod_{t=1}^{n}(1+i_t)} - 1 \tag{1.33}$$

Den Zinssatz j, der sich gemäß Gl. (1.33) als geometrischer Mittelwert aus den nominellen Jahreszinsen i_t ergibt, bezeichnet man als *effektiven Zinssatz*.

Beispiel: 1.15 Bundesschatzbrief (Typ B)

1.3.5 Zinseszinsrechnung für Zahlungsreihen

Zum Zwecke von mittel- und langfristigen Wirtschaftlichkeitsbetrachtungen müssen zeitlich auseinander liegende Zahlungen unter Berücksichtigung von Zins und Zinseszins zusammengefasst und gegenübergestellt werden. Für Zahlungen P_t, die beginnend bei $t = 0$ und dann jeweils am Ende eines Laufzeitjahres t ($t = 1, 2, ..., n$) fällig sind (s. Bild 1.3), ergibt sich der Gegenwartswert *PV* (*Present Value*) bezüglich $t = 0$ als Summe aller Barwerte gemäß Gl. (1.17) (s. Tabelle 1.4)

$$PV = \sum_{t=0}^{n} \frac{P_t}{\left(1+i_{0,t}\right)^t} \tag{1.34}$$

und der zukünftige Wert *FV* (*Future Value*) bezüglich $t = n$ als Summe aller Endwerte gemäß Gl. (1.17)

$$FV = \sum_{t=0}^{n} P_t \cdot \left(1+i_{t,n}\right)^{n-t} . \tag{1.35}$$

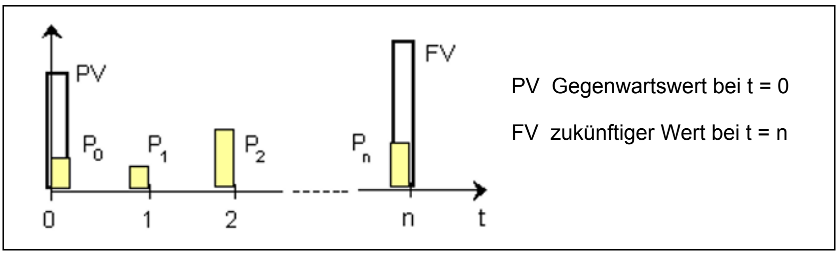


Bild 1.3 Darstellung von Barwert und Endwert einer Zahlungsreihe

Den Verhältnissen auf dem Kapitalmarkt wird Rechnung getragen, wenn in Gl. (1.34) für die Zeitintervalle (0, *t*) die reale Zinsstruktur $i_{0,t}$ berücksichtigt wird[9]. Diese als *Kassazinssätze* (*Spot Rates*) bezeichneten jährlichen Zinssätze sind in (0, *t*) als konstant anzusehen, unterscheiden sich jedoch für die einzelnen Zeithorizonte *t* entsprechend den für Anleihen mit dieser Laufzeit erzielbaren Renditen[10]. In der Regel sind die Kassazinssätze umso höher, je länger die Laufzeit ist ("normale" Zinsstruktur); andernfalls spricht man von inverser Zinsstruktur.

Die als *implizierte Terminzinssätze* (*implied Forward Rates*) bezeichneten Zinssätze $i_{t,n}$ für zukünftige Zeiträume[11], die in Gl. (1.35) zu berücksichtigen sind, leiten sich aus der

[9] Vgl. Pfeifer (2000), S. 109, und Heidorn (2002), S. 42 ff.
[10] Vgl. Kruschwitz (2000), S. 88
[11] Vgl. Kruschwitz (2002), S. 56 f.

Zinsstruktur $i_{0,t}$ ab. Der Kapitalendwert K_n jeder einzelnen Zahlung P_t kann als Äquivalent ihres Barwertes K_0 mit Hilfe der jeweiligen Kassazinssätze ausgedrückt werden:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1+i_{0,n}\right)^n = \frac{P_t}{\left(1+i_{0,t}\right)^t} \cdot \left(1+i_{0,n}\right)^n = P_t \cdot \left(1+i_{t,n}\right)^{n-t} . \tag{1.36}$$

Folglich gilt für die Terminzinssätze[12]

$$i_{t,n} = \left(\frac{\left(1+i_{0,n}\right)^n}{\left(1+i_{0,t}\right)^t}\right)^{\frac{1}{n-t}} - 1 , \tag{1.37}$$

und Gl. (1.35) kann unter Verwendung der Kassazinssätze geschrieben werden als

$$FV = \left(1+i_{0,n}\right)^n \cdot \sum_{t=0}^{n} \frac{P_t}{\left(1+i_{0,t}\right)^t} = PV \cdot \left(1+i_{0,n}\right)^n . \tag{1.38}$$

Analog zu Gl. (1.37) können aus den Kassazinssätzen bezüglich zweier aufeinander folgender Jahre $t - 1$ und t die einperiodischen Terminzinssätze i_t für das Laufzeitjahr t errechnet werden[13]:

$$i_t = \frac{\left(1+i_{0,t}\right)^t}{\left(1+i_{0,t-1}\right)^{t-1}} - 1 . \tag{1.39}$$

(s. Zahlenbeispiel in Tabelle 1.6). Auf Zinssätzen dieser Art beruhen die Gln. (1.15) und (1.33).

Tabelle 1.6 Berechnung von Terminzinssätzen für einen Fünfjahreszeitraum (n = 5)

t	0	1	2	3	4	5
$i_{0,t}$		0,0550	0,0570	0,0600	0,0640	0,0690
$i_{t,n}$	0,0690	0,0725	0,0771	0,0826	0,0892	
i_t		0,0550	0,0590	0,0660	0,0761	0,0892

Obgleich die Zinsstruktur praktisch immer zeitlichen Änderungen unterliegt, wird zur Vereinfachung finanzmathematischer Berechnungen oftmals $i_{0,t} = i_{0,t-1}$ für alle t angenommen.

Beispiel: 1.16

[12] Vgl. ebenda, S.57

[13] Vgl. Pfeifer (2000), S. 115

2. Investitions- und Finanzierungsrechnung

2.1 Einführung

Unter einer *Investition* soll im folgenden die Verwendung finanzieller Mittel zur Schaffung von Sachvermögen bzw. immateriellem Vermögen einerseits (Realinvestitionen) oder von Finanzvermögen andererseits (Finanzinvestitionen) verstanden werden[14]. Dabei stehen anfänglichen Auszahlungen zukünftige Ein- und Auszahlungen gegenüber[15], die aus der Nutzung der geschaffenen Vermögenswerte resultieren und die Vorteilhaftigkeit der Investition prägen.

Betriebswirtschaftlich von einer Investition nicht zu trennen ist deren *Finanzierung*, also die Beschaffung finanzieller Mittel. Aus Sicht des Unternehmens beginnt die Finanzierung mit einer Einzahlung (z. B. eines Kredits) und hat zukünftig überwiegend Auszahlungen (z. B. Tilgungen) zur Folge. Aus Sicht des Fremdkapitalgebers stellt die Finanzierung eine Finanzinvestition dar, die allerdings nicht allein auf Realinvestitionen gerichtet sein muss.

Trotz grundsätzlicher Verschiedenheiten beider finanzwirtschaftlicher Prozesse ergeben sich gemeinsame Ansatzpunkte für deren finanzmathematische Beurteilung, nämlich wenn es sich um mittel- oder langfristige Zahlungsströme handelt, die durch einmalige Zahlungen bei $t = 0$ (Investitionsauszahlung A_0 bzw. Krediteinzahlung E_0) ausgelöst werden. Für eine Investition ist dieser Zusammenhang vereinfacht in Bild 2.1 dargestellt.

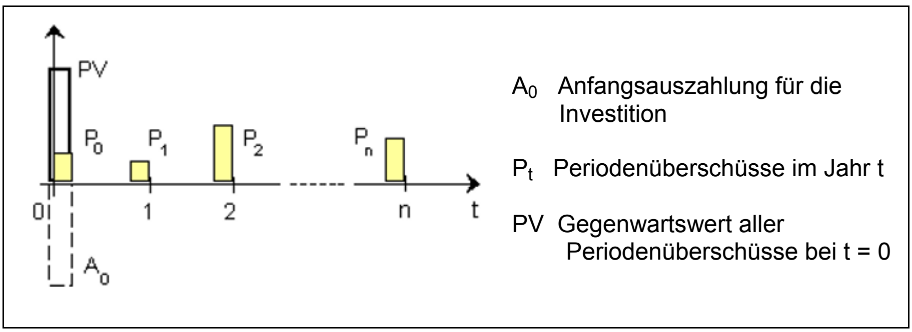


Bild 2.1 Zahlungsstrom für ein Investitionsobjekt

[14] Vgl. Wöhe (2000), S. 618-621

[15] Vgl. Kruschwitz (2000), S. 3-4

K. Renger, *Finanzmathematik mit Excel*, DOI 10.1007/978-3-658-14100-4_2

Bei dieser sog. dynamischen Investitionsrechnung wird im Gegensatz zur statischen Investitionsrechnung die Verzinsung des Kapitals nicht außer Acht gelassen[16]. Im Unterschied zur Finanzierungsrechnung wird bei der Investitionsrechnung die unterjährige Verzinsung allerdings vernachlässigt. Alle Einzahlungen und Auszahlungen innerhalb eines Laufzeitjahres ($t-1, t$) werden der Einfachheit halber ohne Verzinsung auf das jeweilige Jahresende gelegt und zu einer resultierenden Zahlung, dem Periodenüberschuss P_t, zusammengefasst, der dem Charakter eines Cash Flow entspricht[17].

Der Zweck der Investitionsrechnung besteht darin nachzuprüfen, ob die in ein Objekt anfangs investierten finanziellen Mittel (sog. Anfangsauszahlung A_0) durch den Gegenwartswert aller aus dem Investitionsobjekt resultierenden Periodenüberschüsse P_t (die auch negativ sein können) aufgewogen und die Investition somit als wirtschaftlich sinnvoll eingeschätzt werden kann. Voraussetzung dafür wäre gemäß Gl. (1.34), neben den Periodenüberschüssen die zugehörigen Kapitalverzinsungen $i_{0,t}$ anzugeben. Diese werden bei der vereinfachten Version der Investitionsrechnung durch einen in $(0, n)$ konstanten externen Zinssatz ersetzt, den *Kalkulationszinssatz* i, der das durchschnittliche Zinsniveau eines als vollkommen betrachteten Kapitalmarktes widerspiegeln soll[18]. Die Festlegung des Kalkulationszinssatzes kann sich entweder an der Verzinsung für eine Alternativanlage des zu investierenden Kapitals A_0 (z. B. Effektivzinssatz einer Finanzinvestition bzw. Durchschnittsrendite eines vergleichbaren anderen Investitionsobjektes) oder an dem zu zahlenden Fremdkapitalzins orientieren[19]. So gesehen begründet der Kalkulationszinssatz eine Mindestzielstellung des Investors für das betrachtete Objekt[20].

Bei Finanzierungen sind analoge Betrachtungen mit umgekehrten Vorzeichen anzustellen, denn die Zahlungsreihe beginnt mit einer Einzahlung E_0, und anstelle von Periodenüberschüssen bildet der Gegenwartswert von Auszahlungen A_t die mit E_0 direkt vergleichbare Gegenleistung. Bei Finanzierungsrechnungen sind alle Zahlungen zeitpunktgenau zu berücksichtigen, und unterjährige Zinsen dürfen nicht vernachlässigt werden.

2.2 Kapitalwertmethode

Wie eingangs schon erläutert, kann eine Investition als vorteilhaft angesehen werden, wenn der Gegenwartswert zukünftiger Periodenüberschüsse die anfängliche Investitionsauszahlung A_0 übersteigt: $PV > A_0$. Der Zeitpunkt $t = 0$ ist dabei als (Bau-)Beginn und A_0 als Äquivalent aller Auszahlungen für die Investitionsmaßnahme anzusehen, d.h.:

[16] Vgl. etwa Kruschwitz (2000), S. 43.

[17] Vgl. Perridon/Steiner (1999), S.542, und Pfeifer (2000), S. 99

[18] Vgl. Kruschwitz (2000), S. 52

[19] Vgl. Tietze (2000), S. 220

[20] Vgl. Pfeifer (2000), S. 100

- Eventuelle Vorleistungen für diese Investition, wie z. B. Auszahlungen für Forschung, Entwicklung und Investitionsvorbereitung, müssten bis $t = 0$ aufgezinst werden und gehen mit ihrem zukünftigen Wert gemäß Gl. (1.35) in A_0 ein.
- Erfolgen die Investitionsauszahlungen gestaffelt über mehrere Perioden hinweg, müssten alle bei $t > 0$ erfolgenden Zahlungen abgezinst und als Gegenwartswert gemäß Gl. (1.34) in A_0 einbezogen werden.

Während A_0 somit einmaligen Aufwand verkörpert, sind die jährlichen Periodenüberschüsse P_t ($t = 1, 2, ..., n$) die Differenz von Ein- und Auszahlungen, die aus laufenden Erträgen und Aufwendungen während der Nutzungsdauer $(0, n)$ sowie aus eventuellen Liquidationserlösen bei $t = n$ resultieren.

Unter Berücksichtigung dieser Überlegungen ist eine Investition vorteilhaft, wenn

$$\boxed{KW = PV - A_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{P_t}{(1+i)^t} - A_0 > 0} \tag{2.1}$$

gilt. KW bezeichnet man als *Nettobarwert* (*Net Present Value*) oder *Kapitalwert* einer Investitionsmaßnahme.

Beispiel: 2.1

Die Aufspaltung in einmalige und laufende Aufwendungen und Erträge ist nicht zwingend erforderlich, sondern der Kapitalwert kann als Äquivalent aller Aus- und Einzahlungen auch wie folgt ausgedrückt werden:

$$KW = \sum_{t=0}^{n} \frac{E_t - A_t}{(1+i)^t} > 0 \, . \tag{2.2}$$

Um eventuelle Zahlungen aus Vorperioden einzubeziehen, könnte die Zeitzählung statt bei $t = 0$ bei Werten $t < 0$ beginnen, wodurch sich der Abzinsungsfaktor $1/(1+ i)^t$ automatisch in einen Aufzinsungsfaktor umwandelt und der Endwert der Vorauszahlungen bezüglich $t = 0$ richtig bestimmt wird.

Gl. (2.2) ist insofern eine verallgemeinerte Darstellung, als sie auch Finanzierungen nachbildet. Im Unterschied zu Investitionen, bei denen in der Regel $E_0 = 0$ gilt, steht am Anfang von Finanzierungen in erster Linie eine Einzahlung E_0 (z.B. der Kredit) neben eventuellen Auszahlungen A_0 (z.B. Gebühren, Disagio).

Der Kapitalwert ist bei fest vorgegebenen Zahlungsreihen (E_t, A_t) bzw. (A_0, P_t) vom gewählten Kalkulationszinssatz i abhängig. Dieser als *Kapitalwertfunktion* $KW(i)$ bezeichnete Zusammenhang hat für Investitionen meist den in Bild 2.2 dargestellten typischen Verlauf[21]. Die Analogie zu Finanzierungen wird in Bild 2.3 verdeutlicht. Die jeweilige Nullstelle $KW(j) = 0$ ist ein spezifisches Merkmal der vorgegebenen Zahlungsreihe und

[21] Vgl. etwa Tietze (2000), S. 229 f.

spiegelt den sog. *internen Zinssatz j* wider. Ob das Vorteilhaftigkeitskriterium $KW > 0$ erfüllt ist, hängt allein vom extern kalkulierten Zinssatz ab, wobei bei Investitionen $i < j$ und bei Finanzierungen $i > j$ gelten muss.

Beispiele: 2.2 Kapitalwertfunktion bei Investition
2.3 Kapitalwertfunktion bei Finanzierung

2.3 Methode des internen Zinssatzes

Der interne Zinssatz j ist diejenige künftige Verzinsung bezüglich einer Zahlungsreihe, bei der sich finanzmathematisch kalkulierte (d. h. beispielsweise auf $t = 0$ abgezinste) Leistungen und Gegenleistungen ausgleichen. Daraus folgt:

- Bei Investitionen ist j zu interpretieren als Rendite der Investitionsmaßnahme.

  Daher muss j bei Investitionen über dem Kalkulationszinssatz i liegen, damit die Vorteilhaftigkeit gegenüber alternativen Anlagemöglichkeiten gegeben ist. Diese Aussage $j > i$ läuft konform mit der Forderung nach einem positiven Kapitalwert (vgl. Bild 2.2).

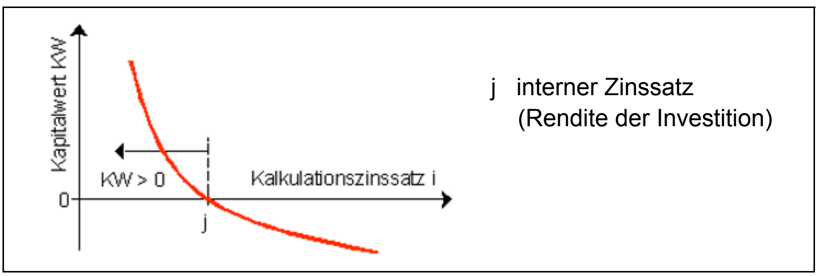


Bild 2.2 Kapitalwertfunktion $KW(i)$ für eine Investition

Beispiel: 2.4

- Bei Finanzierungen stellt j den Fremdkapitalzinssatz dar.

  Daher muss j bei Finanzierungen unter dem Kalkulationszinssatzes i liegen, damit die Vorteilhaftigkeit gegenüber alternativen Finanzierungsmöglichkeiten gegeben ist. Diese Aussage $j < i$ ist ebenso gleichbedeutend mit der Forderung nach einem positiven Kapitalwert (vgl. Bild 2.3).

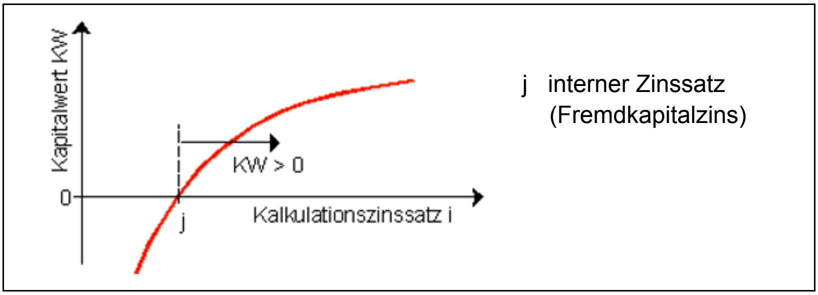


Bild 2.3 Kapitalwertfunktion *KW*(*i*) für eine Finanzierung

Die Bestimmung des internen Zinssatzes *j* durch Nullsetzen der Kapitalwertfunktion gibt wie die Berechnung des Kapitalwertes Aufschluss über die Vorteilhaftigkeit von Investitions- oder Finanzierungsmaßnahmen. Für Auswahlentscheidungen folgt daraus nicht zwangsläufig, dass beim alternativen Vergleich verschiedenartiger Investitionsprojekte dasjenige mit dem größten internen Zinssatz vorzuziehen ist[22].

Beispiel: 2.5 Auswahl von Investitionsvarianten

Ausgangspunkt für den Vergleich bildet immer ein externer Zinssatz. Dieser Kalkulationszinssatz *i* stellt für Investitionen eine Hürde dar, die vermittels höherer interner Kapitalverzinsung zu überspringen ist, und bei Finanzierungen geht es um die Unterbietung alternativer, mit *i* verzinster Finanzierungsangebote auf dem Markt.

Die Nullstellenbestimmung der Kapitalwertfunktion auf Grundlage von Gl. (2.2)

$$\sum_{t=0}^{n} \frac{E_t - A_t}{(1+j)^t} = 0\,, \tag{2.3}$$

oder in der spezifischeren Form

$$\boxed{\sum_{t=1}^{n} \frac{P_t}{(1+j)^t} - A_0 = 0} \quad \text{für Investitionen} \tag{2.4}$$

bzw.

$$\boxed{E_0 - \sum_{t=1}^{n} \frac{A_t}{(1+j)^t} = 0} \quad \text{für Finanzierungen} \tag{2.5}$$

ist mit Hilfe von Excel meist insofern unproblematisch, als Add-Ins für iterative Lösungen verfügbar sind. Lediglich bei bestimmten Konstellationen der zugrunde liegenden Zahlungsreihen existieren entweder keine oder mehrere Nullstellen im praktisch relevanten Bereich der Kapitalwertfunktion. Insbesondere wenn im Rahmen der Entschei-

22 Vgl. Bitz/Ewert/Terstege (2002), S. 137 f.

dungsvorbereitung ein oder mehrere Einzelinvestitionen in Kombination mit deren Finanzierung zugleich berücksichtigt werden sollen und es dadurch zu mehreren Vorzeichenwechseln innerhalb der Zahlungsreihe kommt, sind Interpretationsschwierigkeiten hinsichtlich des Verlaufs der Kapitalwertfunktion nicht auszuschließen. Solche sog. Nicht-Normalinvestitionen[23] sollen hier als atypisch ausgeklammert werden.

Beispiele: 2.6, 2.7

Im Finanzbereich, also bei Geldanlagen sowie bei der Kreditfinanzierung, wird der nach Gl. (2.3) bzw. Gl. (2.5) berechnete interne Zinssatz, der neben dem Nominalzins andere Kapitalkosten (wie z. B. verschiedene Gebühren) in einem Durchschnittswert zusammenfasst, als *effektiver Jahreszins* bezeichnet. Dies ist korrekt unter ganz bestimmten Bedingungen, auf die in Abschn. 2.5 ausführlicher eingegangen wird.

2.4 Amortisationsrechnung

Die Nutzungszeit eines Investitionsobjekts, bei der das eingesetzte Kapital (Anfangsauszahlung A_0) zuzüglich einer Verzinsung in Höhe des Kalkulationszinssatzes durch objektbezogene Rückflüsse gerade wiedergewonnen wird[24] und die Investitionsmaßnahme rentabel zu werden beginnt, bezeichnet man als *Amortisationsdauer* τ. Mit anderen Worten: es wird dasjenige Laufzeitjahr τ gesucht, in dem der Kapitalwert null wird. Dazu kann Gl. (2.1) in der modifizierten Form

$$\boxed{\sum_{t=1}^{\tau} \frac{P_t}{(1+i)^t} - A_0 = 0} \qquad (2.6)$$

angewendet werden. Die Lösung dieses Problems ist mit Tabellenkalkulations-Programmen wie Excel einfach zu realisieren.

Eine Lösung $\tau \leq n$ setzt voraus, dass bei n Laufzeitjahren der Kapitalwert tatsächlich positiv ist. Andernfalls ist Gl. (2.6) geeignet, um nachzurechnen, durch welche konkreten Maßnahmen ein positiver Kapitalwert innerhalb der Nutzungsdauer erreichbar ist. Bei unverändert zutreffendem Kalkulationszinssatz i kommen dafür praktisch folgende Möglichkeiten in Betracht:

- Einsparung an einmaligem Aufwand (geringere Anfangsauszahlung A_0),
- Erhöhung oder zeitliches Vorziehen einzelner Periodenüberschüsse P_t,

[23] Vgl. Tietze (2000), S. 234, und Kobelt/Schulte (1999), S. 99
[24] Vgl. Perridon/Steiner (1999), S. 56

- Erwirtschaftung zusätzlicher Periodenüberschüsse (verlängerte Nutzungsdauer oder kürzere Nutzungsdauer bei höheren Liquidationserlösen).

Beispiele: 2.8, 2.9

2.5 Berechnung des effektiven Jahreszinses

Im Kapitalanlage- und Kreditgeschäft wird mit nominellen Zinsen operiert, die die tatsächlichen Kapitalerträge bzw. Kapitalkosten nicht umfassend widerspiegeln. Veränderliche Zinssätze während der Laufzeit, unterjährige Zinskapitalisierung (d. h. Zahlung und Verrechnung von Zinsen mit dem Grundkapital), Sonderzahlungen verschiedenster Art (z. B. Gebühren), marktregulierende Kurszuschläge oder -abschläge verhindern oder erschweren Vergleiche zwischen alternativen Anlage- bzw. Finanzierungsmöglichkeiten.

Im Unterschied zu Sachinvestitionen, bei denen für erbrachte Kapitalleistungen (Auszahlungen) ein höherer Gesamtbetrag an zukünftigen Rückflüssen (Einzahlungen) gemäß Gl. (2.1) bzw. (2.2) angestrebt wird, sind Geldanlage- und Kreditgeschäfte generell dadurch gekennzeichnet, dass Leistungen und Gegenleistungen finanzmathematisch äquivalent sind[25]. Diese Äquivalenz, die in Gl. (2.3) bzw. (2.5) durch Abzinsung mit dem internen Zinssatz j für die Gegenwart bei $t = 0$ hergestellt wird, muss auch für die Zukunft bei $t = n$ gelten:

$$E_0 \cdot (1+j)^n - \sum_{t=0}^{n} A_t \cdot (1+j)^{n-t} = 0 \,. \tag{2.7}$$

Die Äquivalenz bleibt demnach erhalten, wenn jede einzelne Zahlung nach dem Muster von Gl. (1.34) mit dem internen Zinssatz aufgezinst wird.

Finanzmathematische Grundlage für alle bisher im Kapitel 2 dargestellten Formeln bildet die jährlich nachschüssige Zinseszinsrechnung gemäß Gl. (1.17), angewandt auf periodische Zahlungen bei $t = 0$ sowie an den Jahresenden während einer Laufzeit von n ganzen Jahren. Wenn nach denselben Grundsätzen unterschiedliche Zahlungsreihen gegenübergestellt werden, bildet der interne Zinssatz j einen geeigneten und anerkannten Vergleichsmaßstab, der auch als *effektiver Jahreszins* bezeichnet wird.

Für Anlage- und Kreditgeschäfte reichen diese mathematisch eingeschränkten Bedingungen allein nicht aus, weil eher unterjährliche Zahlungen die Regel darstellen und weil die Laufzeit einzelner Maßnahmen nicht genau an einem Jahresende beendet sein muss.

[25] Vgl. Tietze (2000), S.191

Das Problem besteht in praktisch sehr unterschiedlichen Zinsberechnungsmodalitäten für unterjährige Zahlungen und für nichtganzzahlige ("gebrochene") Laufzeitabschnitte[26].

Alte Berechnungsvorschrift nach PAngV von 1985

Die in deutschen Sparkassen und Banken vorherrschende kaufmännische Zinsrechnung wird insbesondere durch folgende Gepflogenheiten dominiert:

1. unterjährig lineare Zinsberechnung (einfache Zinsen) auf Basis von Laufzeitjahren mit 360 Zinstagen und 30 Zinstagen für alle Monate bei Verwendung des unterjährigen relativen Zinssatzes i_r nach Gln. (1.12) bis (1.15) (vgl. Abschn. 1.2),
2. jährlich nachschüssige Verrechnung der Zinsen mit dem Grundkapital (jährliche Zinseszinsen) gemäß Gl. (1.17), seltener unterjährlich nachschüssige Zinseszinsen gemäß Gl. (1.22),
3. gemischte Verzinsung gemäß Gl. (1.19) bei nicht-ganzzahligen Laufzeiten, wobei der unterjährige Laufzeitrest an das Ende der Laufzeit gelegt wird.

An diese Regeln, die auf § 248 Abs. 2 und § 608 BGB beruhen, war die bisher geltende Preisangabenverordnung (PAngV) angelehnt[27]. Darin ist für Verbraucherkreditverträge die Angabe eines einheitlich berechneten Effektivzinssatzes vorgeschrieben, der diesem Grundmuster entspricht. Für den Fall der Einzahlung eines Darlehens als Einmalbetrag E_0 zum Zeitpunkt $t = 0$ lautet die Berechnungsvorschrift:

$$E_0 = \sum_{t=1}^{n_1} \frac{A_t}{(1+j)^t} + \frac{A_{n_2}}{(1+j)^{n_1}} \quad . \tag{2.8}$$

Der Index t steht für die Kapitalisierungszeitpunkte der Zinsen am Ende eines jeden vollen Laufzeitjahres bis $t = n_1$ (ohne den gebrochenen Laufzeitrest n_2). Im Unterschied zu Gl. (2.5) sind als Auszahlungen A_t hier nicht allein die tatsächlichen Tilgungs-, Zins- und Gebührenzahlungen am Jahresende gemeint, sondern das *jährlich nachschüssige Äquivalent* aller Zahlungen des Kreditnehmers im Laufzeitjahr (t–1, t) unter Berücksichtigung unterjährig linearer Aufzinsung entsprechend Gl. (1.4):

$$A_t = \sum_{k=1}^{K_t} A_k \cdot \left[1 + \left(t - t_k\right) \cdot j\right]. \tag{2.8a}$$

Darin bedeuten A_k die tatsächlichen Zahlungsbeträge, t_k die Zahlungszeitpunkte auf der bei $t = 0$ beginnenden (Jahres-)Zeitskala und K_t die Anzahl der Zahlungen im Jahr

[26] Vgl. Renger (2000), S. 640

[27] Vgl. Verordnung zur Regelung der Preisangaben vom 14.3.1985

($t-1$, t). Für die unterjährigen Zinsen sind die Jahresbruchteile bis zum Ende des jeweiligen Laufzeitjahres ($t-t_k$) maßgeblich[28].

Der zweite Term in Gl. (2.8) steht für einen unterjährigen Laufzeitrest $n_2 = n - n_1$ (gebrochene Laufzeit) der Gesamtlaufzeit n, der an das Laufzeitende gelegt wird[29]. A_{n_2} ist das *jährlich vorschüssige Äquivalent* aller Zahlungen in diesem Laufzeitabschnitt unter Berücksichtigung linearer Diskontierung bis zum Beginn des gebrochenen Laufzeitabschnittes:

$$A_{n_2} = \sum_{k=1}^{K_{n_2}} \frac{A_k}{1+\left(t_k - n_1\right)\cdot j} \,. \tag{2.8b}$$

Darin ist K_{n_2} die Anzahl der Zahlungsbeträge A_k bzw. Zahlungszeitpunkte t_k innerhalb dieses letzten Laufzeitabschnittes $n_2 = n - n_1 < 1$.

In Gl. (2.8), die mit den Bestandteilen (2.8a) und (2.8b) eine Verallgemeinerung von Gl. (2.4) darstellt, ist der interne Zinssatz j die durch Näherungsverfahren zu bestimmende Größe, die bislang als korrekt ermittelter effektiver Jahreszins galt. Bei ganzjähriger Laufzeit entfällt wegen $n_2 = 0$ der Term mit Gl. (2.8b), und bei ausschließlich jährlichen Zahlungen entfällt die Berechnung äquivalenter Zahlungen gemäß Gl. (2.8a), so dass Gl. (2.8) in Gl. (2.4) übergeht.

Neue Berechnungsvorschrift nach EU-Richtlinie

Mit Wirkung vom 1. 9. 2000 wurde die deutsche PAngV an die für die EU-Mitgliedstaaten vorgeschriebene Effektivzinsberechnung[30] angepasst. Die Berechnungsvorschrift[31] lautet bei Einzahlung eines Darlehens als Einmalbetrag E_0 zum Zeitpunkt $t = 0$:

$$\boxed{E_0 = \sum_{k=1}^{K} \frac{A_k}{\left(1+i_{eff}\right)^{t_k}}} \,. \tag{2.9}$$

Darin ist $k = 1, 2, ..., K$ der Index für die einzelnen Auszahlungen A_k, t_k der in Jahren oder Jahresbruchteilen ausgedrückte Zeitabstand zwischen der Kreditvergabe ($t = 0$) und der Zahlung A_k und i_{eff} der nach dieser Vorschrift als Effektivzinssatz berechnete interne Zinssatz. Im Unterschied zu Gl. (2.8) geht in Gl. (2.9) die tatsächliche Zahlungsreihe mit den tatsächlichen Terminen ein und nicht eine äquivalente Zahlungsreihe mit jährlich nachschüssigen Zahlungen.

---

[28] Vgl. Kruschwitz/Decker (1994), S. 621 f.

[29] Vgl. Schierenbeck (1997), S. 153, und Locarek-Junge (1997), S. 149

[30] Vgl. Richtlinie 98/7/EG vom 16.2.1998

[31] Vgl. Preisangabenverordnung vom 28.7.2000, Anhang zu § 6

Von den Zahlungszeitpunkten ist abhängig, wie die *Jahresbruchteile* $t_k = t/m$ anzugeben sind.

- Erfolgen die Zahlungen in jährlichen Abständen ($m = 1$), so ergeben sich ganzzahlige t_k. Dann ist Gl. (2.9) mit Gl. (2.5) identisch.
- Erfolgen die Zahlungen in monatlichen Abständen, so werden die Jahresbruchteile als Quotient aus Zeitabstand in Monaten und $m = 12$ Monaten eines Jahres angegeben. Dabei werden jeweils gleich lange Monate mit je 365/12 = 30,41666 Tagen zu Grunde gelegt. Analoges gilt für Zahlungen in viertel- oder halbjährlichen Perioden.
- Erfolgen die Zahlungen unregelmäßig an beliebigen Kalendertagen, so ergeben sich die Jahresbruchteile als Quotient aus Zeitabstand t in Zinstagen und $m = 365$ Tagen des Jahres.

Dieses neue Vorgehen entspricht der international verbreiteten AIBD-Methode zur Effektivzinsberechnung[32], bei der im unterjährigen Bereich unabhängig von jeglichen Zinsverrechnungszeitpunkten mit exponentieller Verzinsung, also täglich mit Zinseszinsen kalkuliert wird.

Beispiel: 2.10 Teilzahlungskredit

Bemerkenswert an der in Deutschland eingeführten neuen Berechnungsvorschrift ist jedoch eine davon abweichende Besonderheit für unregelmäßige Zahlungen, denn der einzelne Tag ist als Zinsperiode nicht zugelassen. Anstatt den gesamten Zeitabstand kalendergenau in Tagen zu zählen (was theoretisch sinnvoll und praktisch einfacher wäre), wird t_k aus periodischen Jahresbruchteilen ($m \neq 365$) und restlichen Tagen t zusammengesetzt[33]:

$$t_k = \frac{n_p}{m} + \frac{t}{365} \quad . \tag{2.10}$$

Diese restlichen Tage t sind nach der 30/360-Tage-Methode (d. h. 30 Zinstage für jeden Monat und 360 für das Jahr – siehe Abschn. 1.2) zu bestimmen, werden dann aber gemäß Gl. (2.10) fälschlicher Weise auf 365 Tage bezogen. Diese widersprüchliche Inkonsequenz ist bedauerlich[34].

Beispiele: 2.11, 2.12

Die Änderungen beziehen sich wohlgemerkt nur auf die standardisierte Effektivzinsberechnung und berühren die bislang übliche Zinsberechnungs- und Zinszahlungspraxis zunächst nicht. Wenn sich jedoch die Einsicht durchsetzen sollte, dass die finanzmathematischen Formeln, die dieser Effektivzinsberechnung zugrunde liegen, nicht nur einfa-

---

[32] Vgl. Bockholt (1997), S. 250, und Kruschwitz/Decker (1994), S. 627

[33] Vgl. Anlage zu § 6 PAngV vom 28.7.2000, Beispiel 6.6.

[34] Vgl. Wimmer (2000), S. 179, und Renger (2005), S. 159

cher handhabbar (wie aus der Gegenüberstellung der Gln. (2.8) und (2.9) leicht ersichtlich ist), sondern auch einleuchtender und transparenter (wie an Beispielen noch nachzuweisen ist) sind, dürfte sich eine Abkehr von der bisherigen unterjährig linearen Verzinsung und Anlehnung an den neuen Standard bei den einzelnen Finanzprodukten nach und nach durchsetzen.

Bestandteil der Vorschriften für die Berechnung des effektiven Jahreszinses nach der Methode des internen Zinssatzes ist neben der finanzmathematischen Formel eine Liste von Kosten des Kreditnehmers, die in die Berechnung nicht einbezogen werden dürfen, wie z. B. Überweisungskosten, Kontoführungsgebühren und Kosten für bestimmte Absicherungen[35]. Hierin unterscheiden sich die neuen Regelungen von den alten nicht.

[35] Vgl. § 6 Abs.3 PAngV vom 28.7.2000

3. Rentenrechnung

3.1 Einführung

Unter *Rente* soll eine homogene Zahlungsreihe mit periodisch wiederkehrenden Zahlungen gleicher Höhe verstanden werden, die in der Regel zusammen mit periodischen Zinsbeträgen entweder auf ein Konto eingezahlt oder von einem Konto ausgezahlt werden. Wegen der dominierenden Rolle derartiger Zahlungsreihen im Finanzbereich und auf Grund von mathematischen Besonderheiten wird diesen speziellen Zahlungsreihen ein gesondertes Kapitel gewidmet.

Aus üblichen Zahlungsweisen für die Rente in Kombination mit den zugehörigen Zinszahlungen (s. Bild 3.1) folgen Grundaufgaben der Rentenrechnung, die hier darzustellen sind[36].

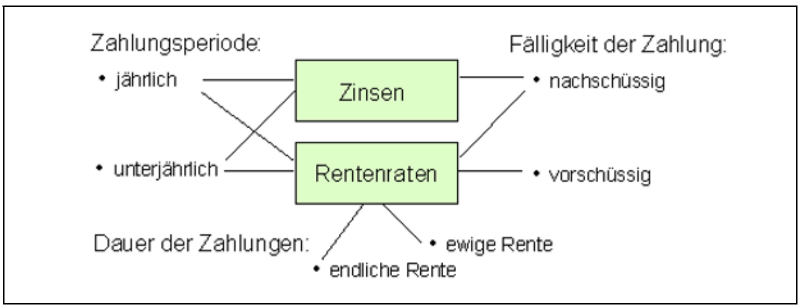


Bild 3.1 Arten der Rentenzahlung (Klassifikation)

Für die einzelne (konstante) Rentenzahlung ist der Begriff *Rentenrate* r üblich. Wie bei den im vorhergehenden Kapitel betrachteten inhomogenen Zahlungsreihen ist auch hier der äquivalente Gegenwartswert einer Rentenzahlung analog zu Gl. (1.34), der sog. *Rentenbarwert* R_0, oder der zukünftige Wert am Laufzeitende analog zu Gl. (1.35), der sog. *Rentenendwert* R_n, sowie eventuell der effektive Jahreszins von Interesse. Bezüglich der Zinsen wird generell periodisch nachschüssige Zahlung unterstellt, wobei Renten- und Zinszahlungsperiode nicht zwangsläufig übereinstimmen. Als Vorteil derartiger Zahlungsreihen stellt sich heraus, dass sich die meisten Äquivalenzbeziehungen in Form von analytisch lösbaren Berechnungsformeln angeben lassen.

[36] Vgl. etwa Kobelt/Schulte (1999), S. 111 ff.

K. Renger, *Finanzmathematik mit Excel*, DOI 10.1007/978-3-658-14100-4_3

3.2 Jährliche Rentenzahlungen

Zunächst wird vom einfachsten Fall ausgegangen, dass während einer Laufzeit von n ganzen Jahren am Ende jedes Laufzeitjahres die Rate r auf ein Konto eingezahlt und zusammen mit jährlich nachschüssigen Zinseszinsen dort thesauriert wird. Hierbei handelt es sich um einen Sonderfall der in Bild 1.3 dargestellten Zahlungsreihe mit $P_0 = 0$ und $P_t = r$ für alle t (s. Bild 3.2).

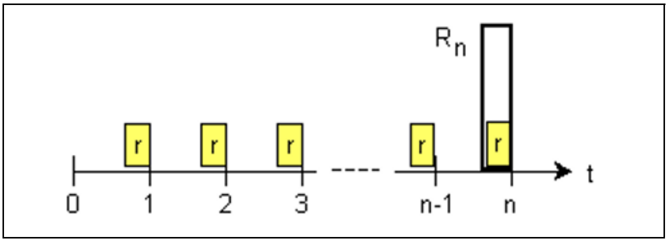


Bild 3.2 Schematische Darstellung einer jährlich nachschüssigen Rente

Der zukünftige Wert dieser Zahlungsreihe bei $t = n$, der *Rentenendwert* R_n, ergibt sich bei konstant bleibenden Zinssätzen $i_{t,n} = i$ für alle t nach Gl. (1.35)

$$FV = R_n = r \cdot \sum_{t=1}^{n} (1+i)^{n-t} \quad . \tag{3.1}$$

Die Zinseszinszahlungen bilden eine geometrische Reihe. Mit $q = 1 + i$ und

$$\sum_{t=1}^{n} q^{n-t} = q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q^1 + q^0 = \sum_{t=1}^{n} q^{t-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1} \tag{3.2}$$

folgt aus Gl. (3.1) die **Rentenendwertformel**

$$\boxed{R_n = r \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = r \cdot s_n} \quad . \tag{3.3}$$

Der Ausdruck

$$s_n = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \, , \tag{3.4}$$

mit dem die Rentenrate zu multiplizieren ist, heißt *Rentenendwertfaktor* (auch: Aufzinsungssummenfaktor[37]). Gl. (3.3) ist die Grundformel für die Rentenrechnung, die durch geringfügige Modifizierungen anderen Formen der Rentenzahlung angepasst werden kann.

[37] Vgl. Däumler (1992), S. 53

Der Gegenwartswert dieser (Renten-)Zahlungsreihe bei $t = 0$, der *Rentenbarwert* R_0, ist derjenige Kapitalbetrag, der notwendig wäre, um die Rente (d. h. jährlich nachschüssige Rentenraten r im Zeitraum von n Jahren) zu zahlen. Das finanzmathematische Äquivalenzprinzip[38] gestattet, von R_n auszugehen und diesen Wert gemäß Gl. (1.17) für n Jahre abzuzinsen:

$$\boxed{R_0 = \frac{R_n}{(1+i)^n} = r \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n} = r \cdot b_n} \; . \tag{3.5}$$

Der Ausdruck

$$b_n = \frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n} = \frac{s_n}{(1+i)^n} \tag{3.6}$$

heißt *Rentenbarwertfaktor* (auch: Abzinsungs- oder Diskontierungssummenfaktor[39]).

Aus den Gln. (3.3) und (3.5) ist zu ersehen, wie sich für eine festgelegte Rentenzahlungsreihe äquivalente Einmalzahlungen bei $t = n$ bzw. $t = 0$ berechnen lassen. Umgekehrt kann bei Vorgabe einer dieser Einmalzahlungen sowie der vorgesehenen Laufzeit n eine äquivalente Rente ausgerechnet werden, indem die Gln. (3.3) bzw. (3.5) entsprechend umgestellt werden:

$$r = \frac{R_n}{s_n} = R_n \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1} = R_n \cdot v_n \quad \text{bzw.} \tag{3.7}$$

$$\boxed{r = \frac{R_0}{b_n} = R_0 \cdot \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = R_0 \cdot w_n} \; . \tag{3.8}$$

Der Ausdruck in Gl. (3.7)

$$v_n = \frac{i}{(1+i)^n - 1} = \frac{1}{s_n} \tag{3.9}$$

gestattet die Verrentung einer Abschlusszahlung und heißt *Restwertverteilungsfaktor*[40]. Von finanzwirtschaftlicher Bedeutung ist insbesondere Gl. (3.8). Der Ausdruck

$$w_n = \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \tag{3.10}$$

heißt *Annuitätenfaktor* (auch: Kapitalwiedergewinnungsfaktor[41]) .

Beispiel: 3.1a

---

[38] Vgl. ebenda, S. 53

[39] Vgl. ebenda, S. 50

[40] Vgl. ebenda, S. 108 f., 128

[41] Vgl. ebenda, S. 118

Die Formeln dieses Abschnitts bilden die Berechnungsgrundlage für eine Reihe spezieller Zahlungsreihen, die je nach der Richtung der Zahlungen entweder Finanzinvestitionen oder Finanzierungen sein können.

- Mit den Gln. (3.3) bzw. (3.7) können einerseits sog. *Sparpläne* erstellt werden, nach denen mittels einzuzahlender Rentenraten ein Guthabenkonto mit dem Sparziel R_n aufgebaut wird ("kapitalbildende" endliche Rente). Andererseits würden vereinnahmte Rentenraten (etwa vergleichbar mit Bafög) nach n Jahren auf die zu tilgende Schuldenlast R_n anwachsen. Abgesehen von kaufmännischen Feinheiten, wie eventuell unterschiedlich hohe Zinssätze (Habenzinssatz bei Guthaben bzw. Sollzinssatz bei Schulden), unterscheiden sich beide Prozesse finanzmathematisch prinzipiell nicht.

  Beispiel: 3.3

- Ein praktisches Beispiel für die Anwendung der Gln. (3.5) bzw. (3.8) stellen sog. *Auszahlpläne* dar, bei denen ein Guthabenkonto R_0 durch auszuzahlende Rentenraten periodisch abgebaut wird ("kapitalverzehrende" endliche Rente). Das analoge Gegenbeispiel sind auszuzahlende Rentenraten als äquivalente Gegenleistung für eine einmalige Einzahlung bei $t = 0$ (z. B. ein Darlehen), wobei die entstandene Schuld R_0 allmählich abgetragen wird.

  Beispiele: 3.4, 3.6

Häufig treten zwei (oder mehr) der genannten Zahlungsprozesse kombiniert auf, so z. B. ein Sparplan entweder in Verbindung mit einem Auszahlplan (etwa bei Pensionsrückstellungen) oder mit einem Darlehen (etwa bei Bausparplänen).

Beispiel: 3.5

Wie lange es dauert, bis die Gegenleistung für eine Einmalzahlung R_0 in Form einer Rente vollständig erbracht ist, hängt bei vorgegebenem Zinssatz i vom Verhältnis aus Rentenrate und Rentenbarwert r/R_0 ab. Durch Umstellung von Gl. (3.8) ergibt sich die *Rentenlaufzeit n* (in Jahren):

$$\boxed{n = \frac{\lg \dfrac{r/R_0}{r/R_0 - i}}{\lg(1+i)}} \text{. Darin muss gelten: } i \le r/R_0 \le 1+i\,. \qquad (3.11)$$

– Für $r/R_0 = 1+i$ oder $r = (1+i)\cdot R_0$ ist $n = 1$; d. h. eine einzige, nach Ablauf eines Jahres gezahlte Rentenrate r reicht aus, um die Gegenleistung für R_0 zu erbringen.

– Für $r/R_0 = i$ oder $r = i \cdot R_0$ geht n gegen unendlich; d. h. mit Rentenraten in Höhe der Jahreszinsen für R_0 kann die Gegenleistung für R_0 niemals erbracht werden. Dieser Sonderfall wird als **ewige Rente** bezeichnet.

Umgekehrt ausgedrückt beträgt der Barwert einer ewigen Rente

$$\boxed{R_0 = \frac{r}{i}} \quad . \tag{3.12}$$

Gegen diesen Wert muss auch Gl. (3.5) für $n \to \infty$ konvergieren:

$$\lim_{n\to\infty} R_0 = r \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n} = \frac{r}{i} \quad . \tag{3.13}$$

Ein Guthabenkonto R_0 bleibt durch die Auszahlung von Rentenraten $r = i \cdot R_0$ demnach unverändert (sog. "kapitalerhaltende" Rente). Ebenso kann eine Schuld durch alleinige Zahlung der Zinsen niemals getilgt werden, was sich beispielsweise im Dilemma der Staatsverschuldung einleuchtend offenbart.

Beispiele: 3.7, 3.8

Praktisch können Rentenzahlungen mit sehr großer Laufzeit allerdings näherungsweise als ewige Rente angesehen werden, da der Beitrag sehr später Ratenzahlungen zum Rentenbarwert meist vernachlässigbar ist (z. B. bei Erbpachten oder Leibrenten). So gilt etwa für langfristige Pachtverträge über 99 Jahre:

$$\lim_{n\to 99} R_0 = r \cdot \lim_{n\to 99} \frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n} \approx \frac{r}{i} \quad . \tag{3.13a}$$

An dieser Stelle sei nochmals darauf verwiesen, dass die Fälligkeit der Rentenzahlungen bisher ausschließlich am Jahresende (postnumerando) angenommen wurde. Bei Abweichungen von dieser Annahme muss die als Rentenendwertformel bezeichnete Grundformel der Rentenrechnung Gl. (3.3) modifiziert werden. Das prinzipielle Vorgehen hierfür wird beispielhaft zunächst für den Fall dargestellt, dass die jährlichen Rentenzahlungen bereits am Jahresanfang (pränumerando) fällig sind.

Jährlich vorschüssige Rentenzahlungen

Als einzige Veränderung gegenüber der bisher betrachteten jährlichen (Renten-)Zahlungsreihe wird nunmehr die Fälligkeit der Rentenraten r am Beginn des jeweiligen Laufzeitjahres unterstellt. Ungeachtet dessen bleibt die jährlich nachschüssige Zinszahlung unverändert (s. Bild 3.3).

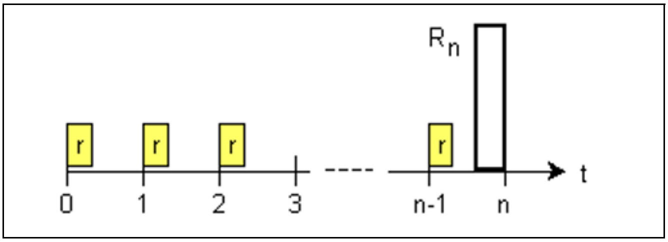


Bild 3.3 Schematische Darstellung einer jährlich vorschüssigen Rente

Das schon mehrfach erwähnte Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik erlaubt, jede der jährlich vorschüssigen Raten innerhalb des betreffenden Laufzeitjahres in eine fiktive Zahlung am Jahresende umzuwandeln. Dies geschieht durch einfache Aufzinsung gemäß Gl. (1.4) oder (1.17) mit $n = 1$. Dann geht Gl. (3.3) über in

$$R_n = \underbrace{r \cdot (1+i)}_{r_e} \cdot s_n \,. \tag{3.14}$$

Während in der einschlägigen Literatur der Zinsfaktor $q = 1+i$ häufig dem Rentenendwertfaktor zugeordnet und als "jährlich vorschüssiger Rentenendwertfaktor" deklariert wird[42], erscheint es geraten, den logisch sinnvollen Zusammenhang zwischen tatsächlich gezahlten Rentenraten r und deren Fälligkeit am Jahresende fiktiv herzustellen, um die Gl. (3.3) und deren Umformungen gewissermaßen als einheitliche Transformationsebene für Rentenzahlungen zu betrachten. Der Vorteil liegt auf der Hand, denn der Formelapparat wird stark dezimiert und die Modifizierung der Formeln beschränkt sich auf eine inhaltlich nachvollziehbare Anpassung.

Beispiel: 3.1b

Für den hier betrachteten Fall wird r in eine *konforme* (jährlich nachschüssige) *Ersatzrentenrate*

$$\boxed{r_e = r \cdot (1+i)} \tag{3.15}$$

transformiert[43], die zwecks Berechnung des Rentenendwertes in Gl. (3.3) anstelle von r einzusetzen ist. Dieses Vorgehen gilt für die Gln. (3.5), (3.8), (3.11) und (3.12) gleichermaßen, weil sie aus Gl. (3.3) hervorgegangen sind. Als Rentenbarwert einer jährlich vorschüssigen *ewigen Rente* ergibt sich demgemäß

$$R_0 = \frac{r_e}{i} = r \cdot \frac{1+i}{i} \,. \tag{3.16}$$

[42] Vgl. etwa Tietze (2000), S. 100

[43] Vgl. Kobelt/Schulte (1999), S. 131

Bei Anwendung von Gl. (3.8) ist zu beachten, dass zuerst die Ersatzrentenrate r_e berechnet wird und danach eine *Rücktransformation* gemäß

$$r = \frac{r_e}{1+i} \tag{3.17}$$

erfolgen muss, um aus der konformen Ersatzrentenrate die tatsächliche (jährlich vorschüssige) Rate zu ermitteln.

3.3 Unterjährliche Rentenzahlungen

Die unterjährliche Zahlung von Rentenraten in m Perioden pro Jahr (z. B. $m = 12$ bei monatlicher Zahlung, vgl. Abschn. 1.3.1) stellt den verallgemeinerten Fall dar, der jährliche Rentenzahlungen als Sonderfall ($m = 1$) einschließt. Für die Zinszahlungen wird der jährliche Modus trotz unterjährlicher Rentenzahlungen meist beibehalten; dennoch sind auch unterjährige Zinsperioden üblich, insbesondere die gleichen Perioden wie für die Rentenzahlungen (s. Bild 3.4).

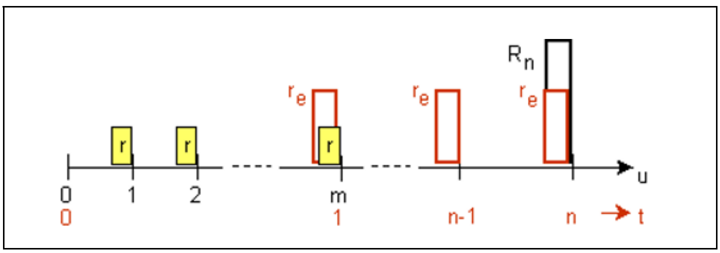


Bild 3.4 Schematische Darstellung einer unterjährlich nachschüssigen Rente

3.3.1 Unterjährliche Renten- und Zinszahlungen

Wenn die unterjährlichen Renten- und Zinszahlungen nachschüssig synchron erfolgen, dann sind die Gln. aus Abschn. 3.2 in unveränderter Form anzuwenden, indem statt der Laufzeitjahre n die unterjährigen Perioden n_p gezählt werden. Außerdem ist anstelle des Jahreszinssatzes i der unterjährige Zinssatz in den Formeln zu verwenden.

1. Wenn unterjährig *lineare Verzinsung* im kaufmännischen Sinne zugrunde liegt, ist der unterjährige Zinssatz gemäß Gl. (1.13) als relativer Zinssatz i_r aufzufassen:

$$R_n = r \cdot \frac{(1+i_r)^{n_p} - 1}{i_r}. \tag{3.18}$$

Der Jahreszinssatz $i = i_r \cdot m$ wird als Nominalzinssatz bezeichnet.

2. Wenn unterjährig *exponentielle Verzinsung* erfolgen soll, dann ist der unterjährige Zinssatz gemäß Gl. (1.24) als jahreskonformer Zinssatz i_k aufzufassen:

$$R_n = r \cdot \frac{(1+i_k)^{n_p} - 1}{i_k}. \tag{3.19}$$

Der zugehörige Jahreszinssatz $(1+i_k)^m - 1 = i_{eff}$ ist gleich dem Effektivzinssatz.

Diese Analogiebeziehungen zwischen unterjährlich und jährlich nachschüssiger Periodizität gelten auch bei vorschüssigen (d. h. am jeweiligen Periodenanfang fälligen) Rentenraten, wenn durch deren Transformation die Synchronität mit der unterjährigen Zinsperiode hergestellt wird. Dies geschieht, indem die vorschüssigen Rentenraten analog zu Gl. (3.15) bis zum Periodenende einfach aufgezinst und anstelle von r in die Formeln eingesetzt werden:

$$r_e = r \cdot (1+i_r) \text{ bzw. } r_e = r \cdot (1+i_k). \tag{3.20}$$

Beispiel: 3.1b

3.3.2 Unterjährlich nachschüssige Rentenzahlungen bei jährlicher Zinszahlung

Bei Beibehaltung jährlicher Zinszahlungen bietet sich Gl. (3.3) als Berechnungsgrundlage an, wobei deren Anpassung an die unterjährlichen Rentenzahlungen wiederum nach demselben Schema erfolgt wie bei jährlich vorschüssigen Rentenzahlungen in Gl. (3.14):

Für die m Rentenzahlungen innerhalb eines jeden Laufzeitjahres wird der Rentenendwert $R_m = r_e$ als fiktive äquivalente Einmalzahlung am Jahresende errechnet. Dieser Wert ist für jedes volle Laufzeitjahr gleich und stellt eine jährlich nachschüssige Ersatzrentenrate r_e dar, die anstelle von r in Gl. (3.3) einzusetzen ist (s. Bild 3.4). Wie dieser Rentenendwert für die unterjährlichen Raten r zu berechnen ist, hängt wiederum von der Art der unterjährigen Verzinsung ab.

1. Bei *linearer Verzinsung* für die m unterjährigen Laufzeitabschnitte ergibt sich gemäß Gl. (1.12):

$$\begin{aligned} r_e &= r \cdot (1 + i_r(m-1)) + r \cdot (1 + i_r(m-2)) + \ldots + r \cdot (1+i_r) + r \\ &= r \cdot m + r \cdot i_r \cdot \sum_{u=1}^{m} (m-u). \end{aligned} \tag{3.21}$$

Die einfachen Zinszahlungen bilden eine arithmetische Reihe. Mit $i_r = i/m$ und

$$\sum_{u=1}^{m}(m-u)=(m-1)+(m-2)+\ldots+1=\sum_{u=1}^{m}(u-1)=m\cdot\frac{m-1}{2} \tag{3.22}$$

folgt aus Gl. (3.21) eine jahreskonforme Ersatzrentenrate von

$$\boxed{r_e=r\cdot m\cdot\left(1+i_r\cdot\frac{m-1}{2}\right)=r\cdot\left(m+i\cdot\frac{m-1}{2}\right)}\,. \tag{3.23}$$

2. Bei *exponentieller Verzinsung* für die unterjährigen Laufzeitabschnitte ergibt sich gemäß Gl. (1.26):

$$\begin{aligned} r_e &= r\cdot(1+i_k)^{m-1}+r\cdot(1+i_k)^{m-2}+\ldots+r\cdot(1+i_k)+r \\ &= r\cdot\sum_{u=1}^{m}(1+i_r)^{m-u}\,. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Die Zinseszinszahlungen bilden eine geometrische Reihe. Mit $i_k=(1+i)^{1/m}-1$ und

$$\sum_{u=1}^{m}(1+i_k)^{m-u}=\sum_{u=1}^{m}(1+i_k)^{u-1}=\frac{(1+i_k)^m}{i_k} \tag{3.25}$$

folgt aus Gl. (3.24) eine jahreskonforme Ersatzrentenrate von

$$\boxed{r_e=r\cdot\frac{(1+i_k)^m-1}{i_k}=r\cdot\frac{i}{(1+i)^{1/m}-1}=r\cdot\frac{i}{i_k}}\,. \tag{3.26}$$

Die Gln. (3.23) und (3.26) erlauben, wahlweise vom Jahreszinssatz i oder von den unterjährigen Periodenzinssätzen i_r bzw. i_k auszugehen. In der gegenwärtigen Praxis wird die Zinsvorgabe per annum vorgezogen, wobei stets der nominelle Zinssatz gemeint ist. Von der Wahl des unterjährigen Zinssatzes (linear oder exponentiell) hängt ab, ob Nominal- und Effektivzinssatz übereinstimmen. Bei Verwendung des relativen Zinssatzes für die unterjährige Zinsberechnung ist diese Übereinstimmung nicht gegeben.

<u>Zu 1:</u>

Bei unterjährig linearer Verzinsung ist somit die Rentenendwertformel

$$R_n=r_e\cdot s_n=r\cdot\left(m+i\cdot\frac{m-1}{2}\right)\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i} \tag{3.27}$$

anzuwenden. Gl. (3.27) gilt in dieser Form nur, wenn die Laufzeit volle Jahre umfasst, weil andernfalls die letzte Rate (für den Laufzeitrest n_2) einen niedrigeren Wert hätte. Deshalb müsste bei $n=n_1+n_2$ zunächst nur der Rentenendwert für den ganzzahligen Laufzeitanteil n_1 mit Gl. (3.27) berechnet und bis zum Laufzeitende einfach aufgezinst werden; die letzte fiktive Rate für den Laufzeitrest $n_2 < 1$ Jahr mit $n_2 \cdot m$ (anstelle von m) Perioden ist nach Gl. (3.23) individuell zu bestimmen und zu addieren:

$$R_n = R_{n_1} \cdot (1 + i \cdot n_2) + r \cdot n_2 \cdot \left(m + i \cdot \frac{n_2 \cdot m - 1}{2} \right) . \tag{3.28}$$

Zu 2:

Bei unterjährig exponentieller Verzinsung lautet die Rentenendwertformel, wenn man vom Jahreszinssatz ausgeht:

$$R_n = r_e \cdot s_n = r \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{1/m} - 1} . \tag{3.29}$$

Wenn darin durch Einsetzen von $i = (1 + i_k)^m - 1$ und $m \cdot n = n_p$ auf unterjährige Größen zurückgegriffen wird, lautet die Rentenendwertformel:

$$\boxed{R_n = r \cdot \frac{(1 + i_k)^{n_p} - 1}{i_k}} , \tag{3.30}$$

die im Gegensatz zu Gl. (3.27) auch anwendbar ist, wenn die Zahl der unterjährigen Perioden n_p nicht ganzzahlig durch m teilbar ist, d. h. wenn die in Jahren gemessene Laufzeit n einen unterjährigen Rest ($n_2 > 0$) enthält.

Beispiele: 3.2 (Abschn. 3.3.2 in Teil 2) Sparplan
3.4, 3.5 Auszahlplan
3.7, 3.8 ewige Rente

Bemerkenswert ist einerseits die Übereinstimmung von Gl. (3.30) mit Gl. (3.19), weil bei unterjährig exponentieller Verzinsung der Zahlungs- und Kapitalisierungszeitpunkt der Zinsen ohne Belang ist (vgl. Abschn. 1.3.2), und andererseits die Tatsache, dass offensichtlich eine Verallgemeinerung der Rentenendwertformel vorliegt. Speziell für jährliche Renten (m = 1) ist $n_p = n$ und $i_k = i$, und Gl. (3.30) geht in Gl. (3.3) über. Folglich entfallen die rechentechnischen Unterschiede zwischen jährlicher und unterjährlicher Verzinsung – vorausgesetzt, dass generell mit dem jeweiligen Periodenzinssatz operiert wird.

Hieran zeigt sich einmal mehr der Vorteil der EU-einheitlichen Regelungen zur Effektivzinsberechnung, der eine gänzliche Abkehr von der herkömmlichen kaufmännischen Zinseszinsrechnung auf Basis unterjährig linearer Verzinsung gemäß Gl. (3.28) als gerechtfertigt erscheinen lässt. Warum soll von einem Jahreszinssatz ausgegangen werden, der dann doch nicht den gesetzlich vorgeschriebenen Vergleichsmaßstab darstellt? Zugegeben ist es praktisch einfacher, unterjährig den relativen Zinssatz i_r zu berechnen als den konformen Zinssatz i_k. Das ist aber auch nicht erforderlich, wenn von vornherein vom unterjährigen Zinssatz (mit zweistelliger Genauigkeit nach dem Komma) ausgegangen wird. Als Jahreszinssatz ergibt sich damit zwangsläufig der Effektivzinssatz.

Die Darstellung der unterjährlichen Rentenrechnung beschränkt sich hier auf die Rentenendwertformel. Auf die ausführliche Herleitung der übrigen Formeln kann verzichtet werden, weil nach demselben Schema lediglich r durch r_e ersetzt werden muss. Tabelle 3.1 enthält eine Gegenüberstellung der wichtigsten Formeln für unterjährig exponentielle Verzinsung.

3.3.3 Unterjährlich vorschüssige Rentenzahlungen bei jährlicher Zinszahlung

In gleicher Weise wie unter Abschn. 3.3.2 muss eine für diesen Fall geltende jahreskonforme Ersatzrentenrate r_e berechnet werden, wobei wiederum die Art der unterjährigen Verzinsung zu beachten ist.

1. Bei *linearer Verzinsung* für die unterjährigen Laufzeitabschnitte erbringt jede unterjährliche Rate einen zusätzlichen Zinsbetrag in Höhe von $r \cdot i_r$ im Vergleich zur nachschüssigen Zahlung. Ausgehend von Gl. (3.23) ergibt sich demnach

   $$\boxed{r_e = r \cdot m \cdot \left(1 + i_r \cdot \frac{m-1}{2} + i_r\right) = r \cdot \left(m + i \cdot \frac{m+1}{2}\right)} \tag{3.31}$$

   Einziger Unterschied zu Gl. (3.23) ist das Pluszeichen rechts im Zähler.

2. Bei *exponentieller Verzinsung* für die unterjährigen Laufzeitabschnitte ergibt sich auf Grund derselben Überlegung aus Gl. (3.26)

   $$\boxed{r_e = r \cdot (1 + i_k) \cdot \frac{(1+i_k)^m - 1}{i_k} = r \cdot \frac{i}{1-(1+i)^{-1/m}} = r \cdot \frac{i \cdot (1+i_k)}{i_k}} \tag{3.32}$$

   Die Analogie zu jährlich vorschüssigen Rentenzahlungen zeigt sich hier wiederum sehr deutlich bei der Rentenendwertformel:

   $$R_n = r_e \cdot s_n = r \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{1-(1+i)^{-1/m}} = r \cdot (1+i_k) \cdot \frac{(1+i_k)^{n p} - 1}{i_k}\,. \tag{3.33}$$

Beispiele: 3.2, 3.3, 3.5, 3.6 Sparplan
3.4, 3.5 Auszahlplan

Als Zusammenfassung sind die wichtigsten Formeln zur Rentenrechnung in Tabelle 3.1 so dargestellt, dass die Analogien zwischen jährlichen und unterjährlichen Zahlungen deutlich zu erkennen sind.

Tabelle 3.1 Formeln zur Rentenrechnung (unterjährig exponentielle Zinsen)

Fälligkeit der Raten r	Rentenendwert R_n	Rentenbarwert R_0	Speziell: $n \to \infty$ (ewige Renten)
Jährliche Renten (m = 1)			
nachschüssig	$r \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$	$r \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n}$	$r \cdot \frac{1}{i}$
vorschüssig	$r \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$	$r \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^{n-1}}$	$r \cdot (1+i) \cdot \frac{1}{i}$
Unterjährliche Renten (m Perioden pro Jahr)			
nachschüssig	$r \cdot \frac{(1+i_k)^{n \cdot m} - 1}{i_k}$	$r \cdot \frac{(1+i_k)^{n \cdot m} - 1}{i_k \cdot (1+i_k)^{n \cdot m}}$	$r \cdot \frac{1}{i_k}$
vorschüssig	$r \cdot (1+i_k) \cdot \frac{(1+i_k)^{n \cdot m} - 1}{i_k}$	$r \cdot \frac{(1+i_k)^{n \cdot m} - 1}{i_k \cdot (1+i_k)^{n \cdot m - 1}}$	$r \cdot (1+i_k) \cdot \frac{1}{i_k}$

Beispiel: 3.10 Faktoren der Rentenrechnung

3.3.4 Annuitätenmethode der Investitionsrechnung

Vom inhaltlichen Sachverhalt her müsste diese Methode eigentlich unter Abschn. 2 angeordnet sein. Aus finanzmathematischer Sicht handelt es sich jedoch um ein Problem der Rentenrechnung. Es geht nämlich darum, eine beliebig inhomogene Zahlungsreihe von jährlichen Periodenüberschüssen P_t, wie sie bei der Investitionsplanung auftritt, in eine äquivalente homogene Zahlungsreihe umzuwandeln[44].

Der Barwert einer Zahlungsreihe PV nach Gl. (2.1) wird als Rentenbarwert aufgefasst

$$PV = \sum_{t=1}^{n} \frac{P_t}{(1+i)^t} \to R_0 = r \cdot \frac{(1-i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n} > A_0 \tag{3.34}$$

und gemäß Gl. (3.8) in eine jährlich nachschüssige Rente umgewandelt:

[44] Vgl. etwa Kobelt/Schulte (1999), S. 145 ff.

$$\boxed{r=\sum_{t=1}^{n}\frac{P_t}{(1+i)^t}\cdot\frac{i\cdot(1-i)^n}{(1-i)^n-1}=PV\cdot w_n>A_0\cdot w_n}\ . \tag{3.35}$$

Gl. (3.35) besagt, dass regelmäßige Einzahlungen r, die mit den jährlichen Periodenüberschüssen äquivalent sind (sog. *Überschussannuitäten*), einem Investitionsobjekt nur dann zur Vorteilhaftigkeit verhelfen, wenn sie größer sind als die auf dieselben Zahlungsperioden bezogenen Annuitäten der Anfangsauszahlung $A_0 \cdot w_n$.

Zu einer Verallgemeinerung von Gl. (3.35) kommt man, wenn alle Zahlungen für ein Investitionsobjekt, eventuell getrennt nach Einzahlungen E_t und Auszahlungen A_t, wie in Gl. (2.2) formell gleich behandelt werden, unabhängig davon, ob es sich um einmalige oder laufende Zahlungen handelt. Dann ergibt sich:

$$\sum_{t=0}^{n}\frac{E_t}{(1+i)^t}\cdot w_n-\sum_{t=0}^{n}\frac{A_t}{(1+i)^t}\cdot w_n=e-a=KW\cdot w_n>0\ . \tag{3.36}$$

Die Differenz aus Einzahlungsannuität e und Auszahlungsannuität a, die sog. *Kapitalwertannuität*, muss größer als null sein, wenn die Investition vorteilhaft sein soll. An diesem Zusammenhang wird deutlich, dass sich die Annuitätenmethode hinsichtlich ihrer Ergebnisse von der Kapitalwertmethode nicht unterscheidet.

Bei der Investitionsplanung kann auch das umgekehrte Vorgehen von Nutzen sein:

Ausgehend von der Investitionsauszahlung A_0 und unter Berücksichtigung des Kalkulationszinssatzes i wird mit $A_0 \cdot w_n$ der durchschnittliche Mindestwert für die während der Nutzungsdauer n jährlich zu erwirtschaftenden Cash Flows P_t als Anhaltswert für die Planung der Jahresscheiben vorgegeben:

$$P_t \geq A_0\cdot w_n \quad \text{für alle } t=1,2,\ldots,n\ . \tag{3.37}$$

Der Annuitätenfaktor w_n wird dabei zutreffend und anschaulich auch als "Kapitalwiedergewinnungsfaktor" bezeichnet. Bei Erfüllung dieser jährlichen Mindestwerte gemäß Gl. (3.37) würde sich eine Berechnung des Kapitalwertes erübrigen.

Beispiel: 3.9

4. Kredit- und Tilgungsrechnung

4.1 Einführung

Gegenstand der Kredit- und Tilgungsrechnung ist die Festlegung der Rückzahlungen für einmalig gezahlte Kredite einschließlich der Zinsen und Gebühren entweder

a) am Fälligkeitstag in einer Summe (sog. gesamtfällige Schuld) oder

b) in rechnerisch nachvollziehbaren Teilbeträgen zeitlich gestaffelt.

Allgemein handelt es sich um ein Problem der Investitionsrechnung nach Gl. (2.5), bei dem der Nettobarwert aller Auszahlungen A_t gleich der bei $t = 0$ eingezahlten Kreditsumme sein muss, d. h. der Kapitalwert ist gleich null. Der spezielle Fall a) der *einmaligen* Rückzahlung eines Kredits reduziert sich auf Zinseszinsformeln.

Im speziellen Fall b) geht es um *periodische* Auszahlungen A_t zur Tilgung einer Schuld $E_0 = S$ in zeitlich gleichen Abständen $t = 1, 2, ..., n$, die sog. *Annuitäten*. Die Annuitäten setzen sich zusammen aus Tilgungsrate T_t, Zinsen Z_t und eventuell weiteren Bestandteilen, die zunächst außer Acht gelassen werden:

$$\boxed{A_t = T_t + Z_t} \tag{4.1}$$

Im Kreditgeschäft werden periodische Tilgungszahlungen insbesondere bei mittel- und langfristigen Krediten bevorzugt, wobei zwei grundsätzliche Tilgungsarten vorherrschend sind[45]:

1. *Ratentilgung* mit gleichbleibenden Tilgungsraten T_t = konst.
   Da der Zins nur auf die jeweilige Restschuld zu zahlen ist, nimmt die Annuität mit t ab.

2. *Annuitätentilgung* mit gleichbleibenden Annuitäten A_t = konst.
   Wegen abnehmender Zinsen nehmen die Tilgungsraten gemäß Gl. (4.1) mit t zu.

Unterschiede ergeben sich insbesondere auch durch unterschiedlich praktizierte Verrechnung der Zinsen und Kreditgebühren.

Aus der Kombination üblicher Zahlungsweisen für die Annuitäten mit unterschiedlichen Zinskonditionen (s. Bild 4.1) folgen grundlegende Berechnungsformeln bzw. -tabellen, die in diesem Abschnitt darzustellen sind.

Für die Annuitäten wird (wie auch für die Zinsen) durchweg *nachschüssige* Zahlung vorausgesetzt, weil davon auszugehen ist, dass die erste Ratenzahlung nicht zeitgleich mit der Kreditvergabe erfolgt, sondern frühestens am Ende der ersten Laufzeitperiode.

[45] Vgl. ebenda S. 153 ff.

K. Renger, *Finanzmathematik mit Excel*, DOI 10.1007/978-3-658-14100-4_4

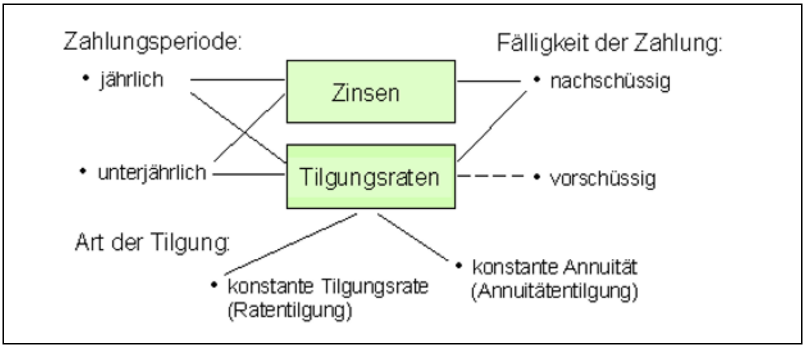


Bild 4.1 Arten periodischer Tilgungszahlungen (Klassifikation)

4.2 Ratentilgung

4.2.1 Jährliche Ratentilgung

Bei Ratentilgung wird die Schuld S gleichmäßig auf die Laufzeitperioden verteilt und nachschüssig getilgt. Bei n Jahren Laufzeit beträgt die jährliche Tilgungsrate

$$\boxed{T_t = \frac{S}{n} = konst.} \tag{4.2}$$

Die Restschuld RS_t am Jahresende verringert sich demnach linear und beträgt nach t Jahren ($t = 1, 2, ..., n$)

$$RS_t = S - t \cdot T_t = S - t \cdot \frac{S}{n} = \frac{S}{n} \cdot (n - t) \quad \text{bzw.} \quad RS_n = 0\,. \tag{4.3}$$

Mit den Tilgungsraten sind die Zinsen Z_t auf die im Vorjahr verbleibende Restschuld auszuzahlen (s. Bild 4.2):

$$Z_t = i \cdot RS_{t-1} = i \cdot \frac{S}{n} \cdot (n - t + 1)\,. \tag{4.4}$$

Die Auszahlung A_t am Ende des Laufzeitjahres t beträgt somit insgesamt

$$A_t = T_t + Z_t = \frac{S}{n} \cdot [1 + i \cdot (n - t + 1)]\ . \tag{4.5}$$

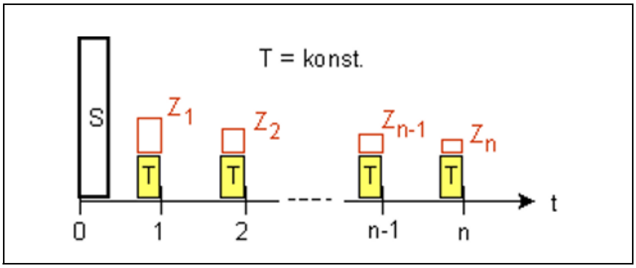


Bild 4.2 Schematische Darstellung der jährlichen Ratentilgung

Die Anwendung der Gln. (4.2) bis (4.5) erübrigt sich, wenn – wie allgemein üblich – alle Größen in eine Tabelle, den sog. *Tilgungsplan*, aufgenommen und mittels Tabellenkalkulation rekursiv berechnet werden. Für das Jahr t ergibt sich dann die Berechnungsreihenfolge nach Tabelle 4.1, wobei sich alle Größen auf das Jahresende (bzw. das Vorjahresende $t-1$) beziehen. Speziell gilt $RS_0 = S$ für $t = 0$ und $RS_n = 0$ für $t = n$.

Tabelle 4.1 Tilgungsplan für jährliche Ratentilgung

1	2	3	4	5	6
t	RS_{t-1}	$T_t = \frac{S}{n}$	$Z_t = i \cdot RS_{t-1}$	$A_t = T_t + Z_t$	$RS_t = RS_{t-1} - T_t$

Beispiel: 4.1

4.2.2 Unterjährliche Ratentilgung

Die Gesamtschuld wird in unterjährliche Raten aufgeteilt. Bei m Tilgungsraten pro Jahr und n Jahren Laufzeit beträgt die Tilgungsrate

$$\boxed{T_u = \frac{S}{m \cdot n} = \text{konst.}} \tag{4.6}$$

Die Zinsen werden unterjährig berechnet, doch bei ihrer Fälligkeit am Ende des jeweiligen Laufzeitjahres müssen sie zwischenzeitlich auf einem gesonderten Konto kumuliert werden. Für die Berechnung der unterjährigen Zinsen ist maßgebend, ob lineare oder exponentielle Verzinsung zu berücksichtigen ist.

1. Bei linearer Verzinsung für die unterjährigen Laufzeitabschnitte ist der relative unterjährige Zinssatz i_r gemäß Gl. (1.13) anzuwenden, und es gilt:

$$\boxed{Z_u = i_r \cdot RS_{u-1} = \frac{i}{m} \cdot RS_{u-1}} \,. \tag{4.7}$$

2. Bei exponentieller Verzinsung für die unterjährigen Laufzeitabschnitte ($u = 1, 2, \ldots m$) ist der zu i konforme unterjährige Zinssatz i_k gemäß Gl. (1.24) zugrunde zu legen. Der Zinseszinseffekt wird erreicht, indem in die unterjährige Verzinsung die Zinsen der vorhergehenden Periode einbezogen werden:

$$\boxed{Z_u = i_k \cdot \left(Z_{u-1} + RS_{u-1}\right) = \left((1+i)^{1/m} - 1\right) \cdot \left(Z_{u-1} + RS_{u-1}\right)} \,. \tag{4.8}$$

Für den Tilgungsplan ergibt sich damit das Berechnungsschema nach Tabelle 4.2, das für alle $t = 1, 2, \ldots, n$ gleichermaßen fortzusetzen ist.

Tabelle 4.2 Tilgungsplan für unterjährliche Ratentilgung bei jährlicher Zinszahlung

1	2	3	4	5	6
u	RS_{u-1}	T_u	$Z_u = i_r \cdot RS_{u-1}$ bzw. $Z_u = i_k \left(Z_{u-1} + RS_{u-1}\right)$	$A_u = \begin{cases} T_u & u \neq m \\ T_u + \sum_{u=1}^{m} Z_u & u = m \end{cases}$	$RS_u = RS_{u-1} - T_u$

Beispiel: 4.2c

Bei unterjährlicher Tilgung ist es üblich, von der jährlichen Zinsfälligkeit abzugehen und die Zinsen auch unterjährig in die Annuitäten einzubeziehen. Das Berechnungsschemas vereinheitlicht sich dann für alle $u = 1, 2, \ldots, m$ gemäß Tabelle 4.3.

Tabelle 4.3 Tilgungsplan für unterjährliche Ratentilgung und Zinszahlung

1	2	3	4	5	6
u	RS_{u-1}	$T_u = \frac{S}{m \cdot n}$	$Z_u = i_r \cdot RS_{u-1}$ bzw. $Z_u = i_k \cdot RS_{u-1}$	$A_u = T_u + Z_u$	$RS_u = RS_{u-1} - T_u$

Beispiele: 4.2a, 4.2b

Dem Vorteil einer gleichmäßigeren Aufteilung der Zinslast auf alle Tilgungsperioden steht für den Schuldner der Nachteil gegenüber, dass die Zinsen gewissermaßen vorschüssig verrechnet werden, also schon früher gezahlt werden müssen. Deshalb schreibt der Gesetzgeber vor, den *effektiven Jahreszinssatz* anzugeben, für den alle tatsächlich geleisteten Annuitäten (zuzüglich anderer Kreditkosten wie z. B. Gebühren für Vertragsabschluss) denselben Nettobarwert verkörpern, wie bei Zugrundelegung der exakten Berechnungsweise.

„Exakt“ war in Deutschland bislang, die Zinsen gemäß Gl. (4.7) unterjährig linear nach der so genannten 30/360-Tage-Methode zu berechnen und am Ende jedes Laufzeitjahres zu zahlen. Jetzt gilt für exakte Vergleichsrechnungen zur Ermittlung des effektiven Jahreszinses laut PAngV die unterjährig exponentielle Verzinsung auf der Basis von 365 Tagen pro Jahr nach der AIBD-Methode (vgl. Abschn. 2.5). Bei dieser Berechnungsmethode beeinflusst der Zeitpunkt der Zinszahlung den effektiven Jahreszins nicht. Daher kann die Vergleichsrechnung auf Basis des konformen Zinssatzes i_k entweder nach Tabelle 4.2 oder nach Tabelle 4.3 ausgeführt werden.

Daraus folgt weiter, dass bei strenger Periodizität mit gleichen Periodenlängen von jeweils 365/*m* Tagen die Berechnung unterjährlicher Tilgungspläne identisch ist mit der Berechnung jährlicher Tilgungspläne nach dem Schema in Tabelle 4.1, wenn i durch den Periodenzinssatz i_k und n durch die Zahl der Tilgungsperioden $n_p = m \cdot n$ ersetzt wird. Hierbei widersprüchlich wäre es, den relativen Zinssatz i_r zu verwenden, weil die unterjährige Kapitalisierung linearer Zinsen nicht zu dem gewünschten Jahreszins führt.

4.3 Tilgung durch gleichbleibende Annuitäten (Annuitätentilgung)

4.3.1 Jährliche Annuitätentilgung

Bei der Annuitätentilgung werden Schuld und Sollzinsen gleichmäßig auf die Laufzeitperioden verteilt und nachschüssig gezahlt (s. Bild 4.3). Bei gleichbleibender Annuität in allen Tilgungszeitpunkten ist der Zinsanteil am Anfang der Laufzeit wegen der hohen Restschuld relativ hoch, demzufolge sind die Tilgungsraten anfangs niedriger. Diese Relationen kehren sich zum Ende der Laufzeit hin um.

Gesucht ist der konstante, in gleichen Zeitabständen mehrfach zu zahlende Betrag A, der gerade auf dieselbe Summe anwächst, wie der Endwert der Schuld S. Aufschluss über diesen Zusammenhang gibt die Äquivalenzbeziehung zwischen Zinseszins- und Rentenrechnung:

$$S \cdot (1+i)^n = A \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad . \tag{4.9}$$

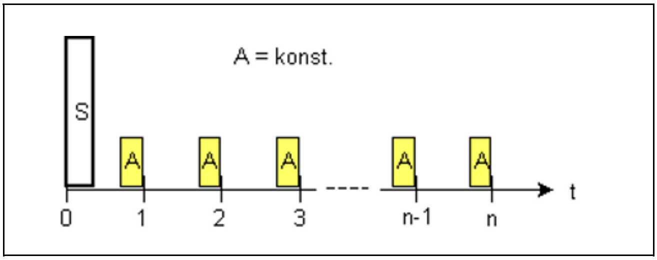


Bild 4.3 Schematische Darstellung der jährlichen Annuitätentilgung

Als jährliche *Annuität A* ergibt sich daraus

$$\boxed{A = S \cdot \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = S \cdot w_n}. \tag{4.10}$$

Gl. (4.10) ist identisch mit Gl. (3.8) für jährlich nachschüssige Rentenzahlungen mit dem Rentenbarwert $R_0 = S$, der Rentenrate $r = A$ und dem Annuitätenfaktor w_n (auch als Kapitalwiedergewinnungs- oder Verrentungsfaktor bezeichnet, s. Gl. (3.10)).

Nach Ablauf von $t < n$ Jahren ist die äquivalente Gegenleistung für die Kreditschuld S noch nicht vollständig erbracht. Die *Restschuld* RS_t ergibt sich aus der aufgezinsten Schuld, verringert um die bis dahin gezahlten Annuitäten gemäß Gl.(3.3):

$$RS_t = S \cdot (1+i)^t - A \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i} . \tag{4.11}$$

Durch Einsetzen von Gl. (4.10) für A erhält man mit $1 + i = q$

$$RS_t = S \cdot q^t - S \cdot q^n \cdot \frac{q-1}{q^n - 1} \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1} = S \cdot \left(q^t - \frac{q^n \cdot (q^t - 1)}{q^n - 1} \right)$$

und weiter umgeformt:

$$\boxed{RS_t = S \cdot \frac{q^n - q^t}{q^n - 1}} \tag{4.12}$$

Zum selben Resultat führt die folgende Überlegung:

Die Restschuld ist gleich der Summe der abgezinsten Annuitäten, die während der Restlaufzeit $n - t$ noch zu zahlen sind. Bei Anwendung der Rentenbarwertformel Gl.(3.5) gilt

$$RS_t = A \cdot \frac{1}{q^{n-t}} \cdot \frac{q^{n-t} - 1}{q - 1} = A \cdot \frac{1}{q^n} \cdot \frac{q^n - q^t}{q - 1},$$

und nach Einsetzen von Gl. (4.10) ergibt sich weiter

$$RS_t = S \cdot q^n \cdot \frac{q-1}{q^n-1} \cdot \frac{1}{q^n} \cdot \frac{q^n - q^t}{q-1} = S \cdot \frac{q^n - q^t}{q^n - 1} \quad \text{(s. o.).}$$

Speziell folgt daraus

$$RS_0 = A \cdot \frac{1}{q^n} \cdot \frac{q^n-1}{q-1} = S \qquad \text{für } t = 0 \text{ und}$$

$$RS_n = 0 \qquad \text{für } t = n\,.$$

Die *Zinsen Z* in der Periode *t* ergeben sich mit Gl. (4.12) aus der Restschuld des Vorjahres $Z_t = i \cdot RS_{t-1}$:

$$\boxed{Z_t = S \cdot i \cdot \frac{q^n - q^{t-1}}{q^n - 1}} \tag{4.13}$$

Als *Tilgungsrate T* für das Jahr *t* ergibt sich aus $T_t = A - Z_t$ mit Gln. (4.10) und (4.13):

$$T_t = S \cdot q^n \frac{q-1}{q^n-1} - S \cdot i \cdot \frac{q^n - q^{t-1}}{q^n - 1} = \frac{S}{q^n - 1} \cdot \left[\underbrace{q^n(q-1) - i \cdot q^n}_{=0} + i \cdot q^{t-1} \right]$$

$$\boxed{T_t = S \cdot i \cdot \frac{q^{t-1}}{q^n - 1}}\,. \tag{4.14}$$

Die Anwendung der Gln. (4.12) bis (4.14) erübrigt sich bei rekursiver Berechnung dieser Größen in einem Tilgungsplan. Für eine Jahreszeile *t* ergibt sich dann die Berechnungsreihenfolge nach Tabelle 4.4.

Tabelle 4.4 Tilgungsplan für jährliche Annuitätentilgung

1	2	3	4	5	6
t	RS_{t-1}	$A_t = A$	$Z_t = i \cdot RS_{t-1}$	$T_t = A_t - Z_t$	$RS_t = RS_{t-1} - T_t$

Alle Größen beziehen sich auf das Ende des Laufzeitjahres *t* bzw. des Vorjahres $t-1$, wobei $RS_0 = S$ gilt und $RS_n = 0$ sein muss.

Beispiel: 4.4

4.3.2 Unterjährliche Annuitätentilgung bei jährlicher Zinszahlung

Bei jährlich nachschüssiger Zinsfälligkeit bestehen Analogien zur unterjährlich nachschüssigen Rentenzahlung gemäß Abschn. 3.3.2. Die Jahresannuität A, in der gemäß Gl. (4.10) jährliche Zinseszinsen berücksichtigt sind, muss derart in m gleiche Annuitäten a aufgegliedert werden, dass innerhalb der Jahresperioden gilt:

$$A = \sum \text{unterjährliche Tilgungsraten} + \sum \text{unterjährige Zinsen am Jahresende}$$

(s. Bild 4.4). Die im Laufe des Jahres gezahlten unterjährlichen Annuitäten a sind (mit Ausnahme der letzten) reine Tilgungsraten ohne Zinsbestandteile; die Zinsen auf die zwischenzeitlichen Restschuldbeträge werden erst am Ende des Jahres verrechnet.

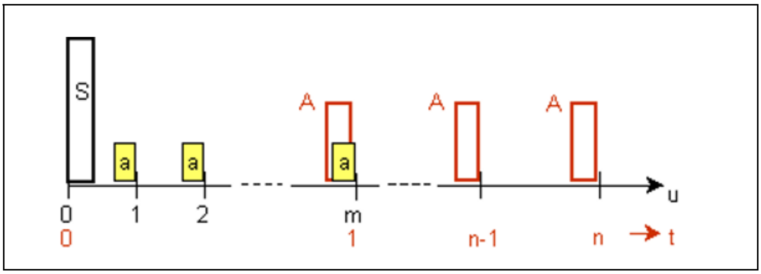


Bild 4.4 Schematische Darstellung der unterjährlichen Annuitätentilgung

Fasst man nun A analog zur jahreskonformen Ersatzrentenrate, mit der die unterjährlichen Rentenperioden an die jährliche Zinsperiode angepasst werden, als eine Größe auf, die sich aus konstanten unterjährlichen Annuitäten a ergibt, dann gelten die in Abschn. 3.3.2 abgeleiteten Formeln für unterjährlich nachschüssige Rentenzahlungen entsprechend:

1. Bei *linearer Verzinsung* für die unterjährigen Laufzeitabschnitte ergibt sich durch Umstellung von Gl. (3.23):

   $$a = \frac{A}{m} \cdot \frac{1}{1 + i_r \cdot \frac{m-1}{2}},$$

   wobei A der Ersatzrentenrate r_e entspricht. Durch Einsetzen von Gl. (4.10) folgt daraus:

   $$\boxed{a = S \cdot \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \cdot \frac{i_r}{1 + i_r \cdot \frac{m-1}{2}}}\,. \tag{4.15}$$

2. Bei *exponentieller Verzinsung* für die unterjährigen Laufzeitabschnitte ergibt sich bei Umstellung von Gl. (3.26):

$$a = A \cdot \frac{i_k}{i}$$

und durch Einsetzen von Gl.(4.10):

$$\boxed{a = S \cdot \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \cdot i_k} \quad . \tag{4.16}$$

Für den Tilgungsplan ergibt sich das unterjährige Berechnungsschema nach Tabelle 4.5, das für alle Laufzeitjahre t = 1, 2, ... n genauso fortzusetzen ist.

Tabelle 4.5 Tilgungsplan für unterjährliche Annuitätentilgung bei jährlicher Zinszahlung

1	2	3	4	5	6
u	RS_{u-1}	$A_u = a$	$Z_u = i_r \cdot RS_{u-1}$ bzw. $Z_u = i_k \left(Z_{u-1} + RS_{u-1}\right)$	$T_u = \begin{cases} a & u \neq m \\ a - \sum_{u=1}^{m} Z_u & u = m \end{cases}$	$RS_u = RS_{u-1} - T_u$

Beispiel: 4.5

4.3.3 Unterjährliche Annuitätentilgung bei unterjährlicher Zinszahlung

Das Berechnungsschema für den Tilgungsplan vereinfacht sich, wenn die Zinsperiode der Tilgungsperiode angepasst wird und demnach die Zinsanteile Z_u *unterjährlich nachschüssig* verrechnet werden. Spalte 5 in Tabelle 4.5 wird dann für $u = 1, 2, \ldots, m$ zu $T_u = a - Z_u$ vereinheitlicht und in Spalte 4 entfällt die unterjährliche Zinskapitalisierung bei exponentieller Verzinsung. Das so veränderte Rechenschema (s. Tabelle 4.6) gleicht dem für jährliche Annuitätentilgung in Tabelle 4.4. Der Jahreszinssatz i wird in Abhängigkeit von der gewünschten Zinsaufteilung lediglich durch einen unterjährigen Zinssatz i_r oder i_k ersetzt, und anstelle von n Laufzeitjahren sind $n_p = m \cdot n$ unterjährige Laufzeitperioden zu berücksichtigen.

Entsprechendes muss auch für die Berechnung der unterjährlichen Annuität in Anlehnung an Gl. (4.10) gelten. In der jetzigen Bankpraxis ist es üblich, von unterjährig linearer Zinsaufteilung auszugehen und den relativen Zinssatz $i_r = i/m$ zu verwenden. Dann folgt in Analogie zu Gl. (4.10):

$$\boxed{a = S \cdot \frac{i_r \cdot (1+i_r)^{m \cdot n}}{(1+i_r)^{m \cdot n} - 1}} \tag{4.17}$$

Wenn von unterjährig exponentieller Zinsverteilung ausgegangen wird, dann ist der konforme Zinssatz $i_k = (1+i)^{1/m} - 1$ zu verwenden. Eingesetzt in Gl. (4.10) folgt

$$\boxed{a = S \cdot \frac{i_k \cdot (1+i_k)^{m \cdot n}}{(1+i_k)^{m \cdot n} - 1}} = S \cdot \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \cdot i_k \quad . \tag{4.18}$$

Bei zeitgleicher Fälligkeit von Tilgungsrate und Zinsen sind demnach die Jahresperioden einfach durch unterjährige Perioden zu ersetzen. Zu beachten ist jedoch, dass es Unterschiede bezüglich der unterjährigen Zinsverteilung gibt.

- Bei unterjährig exponentieller Verzinsung besteht kein Unterschied zur jährlichen Verzinsung. Das erkennt man daran, dass die Gln. (4.16) und (4.18) zur Berechnung der unterjährlichen Annuität identisch sind.
- Die Verwendung des unterjährigen relativen Zinssatzes i_r hat zur Folge, dass der effektive Jahreszinssatz j größer ist als der nominelle Jahreszins i, der für die Berechnung des relativen Zinssatzes zugrunde gelegt wurde. Um diesen Widerspruch zu beseitigen, wurde als Grundlage für die Effektivzinsberechnung die AIBD-Methode verbindlich eingeführt (vgl. Abschn. 2.5). Dem sollte in der Bankpraxis auch dadurch Rechnung getragen werden, dass unterjährig generell dem konformen Zinssatz i_k Geltung verschafft wird.

Beispiel: 4.6

4.3.4 Tilgung mit Prozentannuitäten

Aus Sicht der Buchung ist es vorteilhaft, wenn die regelmäßig zu zahlenden Annuitäten als Prozentsatz der ursprünglichen Schuldsumme S bzw. als glatte Prozentwerte angegeben werden können[46]. Bei jährlicher Tilgung geht es in Gl. (4.10) um die Vorgabe des Annuitätenfaktors w (z. B. in Prozent von S) und somit um die direkte Vorgabe der Annuität A:

$$\boxed{A = S \cdot w = \frac{w\%}{100} \cdot S} \; . \tag{4.19}$$

[46] Vgl. Kobelt/Schulte (1999), S. 179, und Tietze (2000), S. 161

Für die Berechnung von Tilgungsraten und Zinsen ändert sich nichts gegenüber Abschn. 4.3.2. Die Restschuld am Ende des Laufzeitjahres t ergibt sich analog zur Herleitung von Gl. (4.12) aus Gl. (4.11):

$$RS_t = S \cdot q^t - A \cdot \frac{q^t - 1}{q-1} = S \cdot \left(q^t - w \cdot \frac{q^t - 1}{q-1} \right). \tag{4.20}$$

Die Laufzeit endet, wenn die Schuld vollends getilgt ist:

$$RS_n = S \cdot q^n - A \cdot \frac{q^{n-1}}{q-1} = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad S \cdot q^n = A \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}.$$

Hinsichtlich des allgemeinen Berechnungsschemas für den Tilgungsplan bestehen keine Unterschiede zur jährlichen Annuitätentilgung laut Tabelle 4.4, abgesehen von der Ermittlung von A. Allerdings sind nachfolgende Besonderheiten zu beachten.

Für die Tilgungsplanung gibt es generell *zwei Möglichkeiten*:

1. Die Laufzeit n wird vorgegeben; dann resultiert daraus mit S und $q = 1 + i$ die Annuität A:

   $$A = S \cdot \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = S \cdot w_n \qquad \text{(vgl. Abschn. 4.3.2, Gl. (4.10))}.$$

2. Mit dem Annuitätenfaktor w wird die Annuität A vorgegeben; dann resultiert daraus die Laufzeit n durch Umformung von Gl. (3.10):

   $$w = \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}; \quad w \cdot (1+i)^n - w = i \cdot (1+i)^n; \quad (1+i)^n \cdot (w - i) = w;$$

   $$\boxed{n = \frac{\lg w - \lg(w-i)}{\lg(1+i)}}. \tag{4.21}$$

   Aus Gl. (4.21) ergibt sich in der Regel eine nichtganzzahlige Laufzeit $n = n_1 + n_2$. Deren ganzzahliger Anteil n_1 bestimmt, eingesetzt in Gl. (4.20), die Höhe der *Abschlusszahlung*, für die allgemein $A > RS_{n_1} \geq 0$ gilt:

   $$\boxed{RS_{n_1} = S \cdot \left(q^{n_1} - w \cdot \frac{q^{n_1} - 1}{q-1} \right)}. \tag{4.22}$$

Um die Abschlusszahlung zu vermeiden, kann w nachträglich so korrigiert werden, dass n ganzzahlig wird. Mit Gl. (4.21) wird dann nicht n aus w, sondern w mit einem gerundeten Laufzeitwert $\tilde{n} = n_1$ oder $\tilde{n} = n_1 + 1$ ermittelt und die Prozentannuität als korrigierter Wert $\tilde{w}$ bestimmt:

$$\boxed{\tilde{w}\% = q^{\tilde{n}} \cdot \frac{q-1}{q^{\tilde{n}}-1} \cdot 100} \qquad (4.23)$$

Auf Grund dieser Möglichkeit, die Belastung des Kreditnehmers durch wechselseitige Abstimmung zwischen Tilgungshöhe (mittels w) und Tilgungsdauer n wunschgemäß zu bestimmen, sind die hier gezeigten Zusammenhänge von allgemeingültiger Bedeutung für die Tilgungsplanung.

Beispiel: 4.7

Unterjährliche Tilgung mit Prozentannuitäten

Für die unterjährlichen Annuitäten a werden in gleicher Weise prozentuale Anteile von S im voraus festgelegt, wodurch die exakte Berechnung nach den Gln. (4.15) bzw. (4.16) entfällt. Den Tilgungsplan erstellt man in Anlehnung an die jährliche Annuitätentilgung gemäß Tabelle 4.6 unter Verwendung der unterjährlichen Laufzeitperioden $u = 1, 2, \ldots, n_p$ und eines unterjährigen Zinssatzes i_u (i_r oder i_k).

Tabelle 4.6 Tilgungsplan für unterjährliche Tilgung mit Prozentannuitäten

1	2	3	4	5	6
u	RS_{u-1}	$A_u = a$	$Z_u = i_r \cdot RS_{u-1}$ bzw. $Z_u = i_k \cdot RS_{u-1}$	$T_u = a - Z_u$	$RS_u = RS_{u-1} - T_u$

Die rekursive Berechnung wird abgebrochen, wenn die Restschuld plus Zinsen erstmals kleiner ist als die vorgesehene Annuität (oder zufällig gleich):

$$RS_{n_p-1} \cdot (1 + i_u) \leq a \,. \qquad (4.24)$$

Auf diese Weise ergibt sich auch die vorher unbekannte Zahl der unterjährigen Laufzeitperioden n_p. Wie mit der noch zu tilgenden Restschuld RS_{n_p-1} praktisch weiter zu verfahren ist, bedarf einer gesonderten Festlegung. In der Regel wird diese sog. Abschlusszahlung nochmals voll verzinst und am Ende der Periode n_p getilgt.

Beispiele: 4.8, 4.9

4.4 Spezielle Tilgungsprobleme

4.4.1 Berücksichtigung von Kreditgebühren und Disagio

In den bisherigen Ausführungen wurden außer den regelmäßig fälligen Kreditzinsen keine weiteren Kosten berücksichtigt, so dass die Anfangsschuld $RS_0 = S$ mit dem ausgereichten Darlehen D generell übereinstimmte. Üblicherweise sind zur Abgeltung des Verwaltungsaufwands, der mit einer Kreditvergabe verbundenen ist, bei $t = 0$ eine einmalige Kreditgebühren fällig. Diese sind als Prozentsatz g des Darlehens vereinbart und können wie folgt verrechnet werden[47]:

a) Das vereinbarte Darlehen D wird in voller Höhe ausgezahlt, während die Gebühren in das Schuldkonto einfließen:

$$S' = D \cdot (1+g) > D\,. \tag{4.25}$$

Die um die Gebühren erhöhte Anfangsschuld S' wirkt sich sukzessive erhöhend auf Tilgung und Zinsen aus.

b) Der auf der vereinbarten Anfangsschuld S beruhende Tilgungsplan bleibt unverändert, während das ausgezahlte Darlehen D' um die einbehaltenen Gebühren vermindert ist:

$$D' = S - g \cdot D = S \cdot (1-g) < S\,. \tag{4.26}$$

Finanzmathematisch das gleiche ist ein prozentualer Abschlag $\delta \cdot D$ vom Darlehen, der formal eine Vorauszahlung von Zinsen darstellt (Abgeld, *Disagio*). Bei der Baufinanzierung spricht man von *Damnum*; es hat neben der Gebührendeckung vor allem die Aufgabe, durch eine anfängliche Einmalzahlung die laufende Zinsbelastung geringer zu halten.

Beispiele: 4.10, 4.11, 4.12, 4.14

In beiden Fällen ist die Leistung des Kreditinstituts in Form des ausgereichten Darlehens geringer als die vom Schuldner geforderte Gegenleistung in Form von Tilgungs- und Zinszahlungen. Im Ergebnis einer Investitions- bzw. Finanzierungsrechnung (s. Abschn. 2.2) mit dem nominellen Kreditzinssatz i als Kalkulationszinssatz würde ein negativer Kapitalwert verbleiben, der mit den Kreditgebühren $g \cdot D$ (bzw. mit dem Disagio $\delta \cdot D$) übereinstimmt. Die Kapitalwertannuität ist Ausdruck für die laufenden Kapitalkosten, die der Schuldner neben den Zinskosten zusätzlich trägt. Die Summe aus beiden Kostenbestandteilen bestimmt den effektiven Jahreszins j.

---

[47] Vgl. Kobelt/Schulte (1999), S. 183 f., und Locarek-Junge (1997), S. 144

4.4.2 Berücksichtigung von tilgungsfreien Zeiten

Tilgungsfreie Perioden werden vereinbart, um den Schuldner zeitweise von der Tilgung zu entlasten. Folgende praktische Verfahrensweisen sind üblich[48]:

a) *Zahlungsaufschub*: Die Zahlung der Annuitäten beginnt nicht sofort, sondern mit zeitlicher Verzögerung von k Jahren. In dieser Zeit erhöht sich die Darlehensschuld D um Zinseszinsen. Mit

$$S_k = D \cdot (1+i)^k > D \tag{4.27}$$

ergibt sich die in den Laufzeitjahren $t = k+1, k+2, \ldots, n$ zu zahlende Annuität A' aus Gl. (4.10):

$$A' = D \cdot (1+i)^k \cdot w_{n-k} = D \cdot (1+i)^k \cdot \frac{i \cdot (1+i)^{n-k}}{(1+i)^{n-k} - 1} > D \quad \text{und daraus}$$

$$A' = D \cdot \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^{n-k} - 1} \quad . \tag{4.28}$$

Während der tilgungsfreien Zeit $t = 1, 2, \ldots, k$ werden auch keine Zinsen gezahlt.

Beispiel: 4.13a

b) *Tilgungsstreckung*: Die Zahlung der Annuitäten beginnt mit zeitlicher Verzögerung von k Jahren, aber im Unterschied zu a) sind jährlich die Zinsen fällig. Dadurch erhöht sich die Schuld $S = D$ bis zum Beginn der eigentlichen Tilgung nicht. Berechnungsgrundlage für die Annuität nach Gl. (4.10) sind aber ebenfalls $n - k$ Laufzeitjahre.

Beispiele: 4.3, 4.13b, 4.14

In beiden Fällen kommt es zwar zu Abweichungen von den regelmäßigen Zins- und Tilgungszahlungen, aber der effektive Jahreszins j ändert sich dadurch nur, wenn für unterjährige Perioden der relative Zinssatz i_r zugrunde gelegt wird.

[48] Vgl. Tietze (2000), S. 150

4.4.3 Berücksichtigung von Agio

Häufig ist neben Tilgung und Zinsen ein Aufschlag (Aufgeld, *Agio*) als fester Prozentsatz α der Tilgung zu zahlen. Damit würde sich die Anfangsschuld analog zu Gl. (4.25) erhöhen:

$$S' = D \cdot (1+\alpha) > D\,. \tag{4.29}$$

Im Unterschied zu Kreditgebühren wird das Agio $\alpha \cdot D$ meist nicht bei $t = 0$ gezahlt, sondern unverzinst auf alle Laufzeitperioden verteilt und mit den Tilgungsraten bzw. Annuitäten verrechnet:

– Bei Ratentilgung ergibt sich die jährliche Annuität aus T_t und Z_t analog zu Gl. (4.5):

  $$A_t = (1+\alpha) \cdot T_t + Z_t \tag{4.30}$$

– Bei Annuitätentilgung ist zuerst A = konst und daraus mit Z_t die jährliche Tilgungsrate zu bestimmen. Für die Annuität A ist in Gl. (4.10) die um den Faktor $(1+\alpha)$ erhöhte Schuld S' zu berücksichtigen. Um eine Verzinsung der Schuld bzw. Tilgung ohne diesen Aufschlag zu gewährleisten, ist der Zinssatz i fiktiv mit dem reziproken Wert $1/(1+\alpha)$ zu multiplizieren[49]:

  $$A = (1+\alpha) \cdot D \cdot \hat{q}^n \frac{\hat{q}-1}{\hat{q}^n - 1} \quad \text{mit} \quad \hat{q} = 1 + \frac{i}{1+\alpha}\,. \tag{4.31}$$

  Daraus ergibt sich gemäß Gl. (4.30) die Tilgungsrate

  $$T_t = \frac{A - Z_t}{1+\alpha}\quad. \tag{4.32}$$

Wie ein Disagio erhöht das Agio die laufenden Kapitalkosten und somit den effektiven Jahreszins (siehe Kapitel 5).

Beispiel: 4.15

Die im Abschn. 4.4 nur andeutungsweise und unvollständig dargestellten Besonderheiten sind lediglich als Hinweis aufzufassen, dass die praktischen Konditionen für Kreditverträge sehr vielfältig sein können, zumal diese und andere spezielle Probleme auch kombiniert auftreten. Deshalb spielt die Bestimmung des effektiven Jahreszinssatzes als Vergleichsmaßstab für jeden Tilgungsplan eine elementare, unverzichtbare Rolle.

---

[49] Vgl. Kruschwitz (2001), S. 135

5. Kurs- und Renditerechnung

5.1 Einführung

Die mit Finanzinvestitionen oder Finanzierungen verbundenen Zinszahlungen sind stets auf den Nennwert des Kapitals (*Nominalkapital* K_0) bezogen. Wegen unterschiedlicher Zinsusancen, weil andere Formen des Entgelts anstelle von Zinsen eine Rolle spielen können (z. B. Dividenden), weil die Kapitalbindung zusätzliche Kosten verursacht (z. B. Bearbeitungsgebühren und Provisionen) und weil sonstige Zuschläge oder Abzüge als ein- oder mehrmalig fällige Zahlungen auf vertraglicher Basis verrechnet werden, kann der *Nominalzinssatz i* nicht die alles umfassende Messgröße für Kapitalertrag bzw. Kapitalkosten sein.

Deshalb wird – wie in den vorhergehenden Kapiteln eingehend erläutert – durch Zusammenfassung aller Erträge und Kosten für die gesamte Laufzeit der Kapitalbindung ein realer durchschnittlicher Zinssatz ermittelt, der *effektive Jahreszinssatz* (häufig auch als *Effektivzinssatz* oder im Sinne von Kapitalertrag als *Rendite* bezeichnet). Der unter Verwendung des Effektivzinssatzes berechnete Barwert einer Zahlungsreihe wird als *Realkapital* K_0' bezeichnet[50]. Die Abweichung des Effektivzinssatzes vom Nominalzinssatz wird durch das Verhältnis von Realkapital und Nominalkapital bei $t = 0$, den *Kurs* C_0, ausgedrückt[51]:

$$\boxed{C_0 = \frac{K_0'}{K_0} \cdot 100} \quad . \qquad (5.1)$$

Diesen Kurs C_0, der zunächst auf vertraglich vereinbarten Leistungen und Gegenleistungen im Rahmen eines Anlage- oder Kreditgeschäfts beruht, könnte man als *internen Kurs* bezeichnen.

Eine besondere Bedeutung erlangt diese Kategorie auf dem Kapitalmarkt, wenn zukünftige Zahlungsleistungen bzw. Zahlungsansprüche auf andere Personen übertragen werden, beispielsweise bei Kündigung von Darlehensverträgen oder im Wertpapierhandel. Dann müssen die zukünftigen Zahlungen entsprechend den veränderten Marktbedingungen sowie unter Berücksichtigung von Angebot und Nachfrage neu bzw. zusätzlich bewertet werden. Im Ergebnis dieser Bewertung des Realkapitals wird durch Kurszuschläge oder -abschläge der effektive Jahreszins zielgerichtet verändert.

Eine Erhöhung des effektiven Jahreszinses ist beispielsweise in zweierlei Form zu erzielen:

---

[50] Vgl. Köhler (1992), S. 223 und Kobelt/Schulte (1999), S. 192

[51] Vgl. etwa Kobelt/Schulte (1999), S. 192

K. Renger, *Finanzmathematik mit Excel*, DOI 10.1007/978-3-658-14100-4_5

– Bei gleichem Realkapital K_0' wird das Nominalkapital um einen prozentualen Anteil α_0 (sog. Aufgeld oder *Agio*) erhöht. Folglich verringert sich das Realkapital relativ zum Nominalkapital:

$$\widetilde{C}_0 = \frac{K_0'}{K_0 \cdot (1+\alpha_0)} \cdot 100 = \frac{C_0}{1+\alpha_0} . \tag{5.2}$$

– Bei unverändertem Nominalkapital wird das Realkapital K_0' um einen prozentualen Anteil δ_0 (sog. Abgeld oder *Disagio*) verringert:

$$\widetilde{C}_0 = \frac{K_0' \cdot (1-\delta_0)}{K_0} \cdot 100 = C_0 \cdot (1-\delta_0) . \tag{5.3}$$

Beispiel: 5.1

Bei negativem Vorzeichen der so definierten Auf- oder Abschläge sinkt der effektive Jahreszins. Ein $\alpha_0 < 0$ würde dann einen Abschlag vom Nominalkapital und ein $\delta_0 < 0$ einen Aufschlag auf das Realkapital darstellen. Diesen nach Gln. (5.2) und (5.3) auf dem Kapitalmarkt erzielten Kurs $\widetilde{C}_0$, der Gegenstand dieses Kapitels ist, könnte man als *externen Kurs* bezeichnen. Im folgenden wird C_0 stets in dem Sinne verstanden, dass die extern begründeten Abweichungen vom Nominalwert darin enthalten sind. Da einzelne Aspekte, die den effektiven Jahreszins bestimmen, dennoch zum Teil getrennt voneinander betrachtet werden, wird i_{eff} als Symbol für den nach PAngV endgültig berechneten effektiven Jahreszins hier nicht verwendet, sondern das Symbol j.

Der Kurs wird in Prozent des Nominalwertes angegeben (sog. *Prozentkurs*) und als Preis (= Kurswert in €) für 100 € Nominalkapital, z. B. eines festverzinslichen Wertpapiers, interpretiert. Bei Aktien wird davon abweichend unter Kurs der Preis einer Aktie in € (sog. *Stücknotiz*) verstanden.

Wenn $K_0' = K_0$ ist, spricht man vom Parikurs $C_0 = 100$. Andernfalls gilt:

$$C_0 = \begin{cases} < 100 & \text{("unter pari"): Der effektive Jahreszins ist höher als der Nominalzins.} \\ > 100 & \text{("über pari"): Der effektive Jahreszins liegt unter dem Nominalzins.} \end{cases}$$

Im folgenden geht es um den wechselseitigen finanzmathematischen Zusammenhang zwischen Kurs und effektivem Jahreszins[52]:

- Einerseits kann nach Gl. (5.1) der Kurs berechnet werden, der aus einem bestimmten Effektivzinssatz j resultiert (***Kursrechnung***).
- Andererseits soll aber auch der Effektivzinssatz bestimmt werden können, der sich auf Grund eines gegebenen Kurses C_0 ergibt (***Renditerechnung***).

[52] Vgl. ebenda, S. 193

Dabei ist von der Überlegung auszugehen, dass die Abweichung des Realkapitals vom Nominalkapital

$$K_0 - K_0' = \left(1 - \frac{C_0}{100}\right) \cdot K_0 \tag{5.4}$$

im Sinne der Investitionsrechnung einen Kapitalwert darstellt, der die Abweichung der internen Verzinsung – also des effektiven Jahreszinses j – zukünftiger Zahlungen von der nominellen Verzinsung i ausdrückt. Dieser durch den Kurs realisierte Kapitalwert muss finanzmathematisch quasi auf alle zukünftigen Zinsperioden (entweder der Laufzeit oder der Restlaufzeit) verteilt und mit dem nominellen Zinssatz i so verrechnet werden, dass sich der Effektivzinssatz j ergibt.

Um verschiedenartige Angebote im Kapitalanlage- oder Kreditgeschäft untereinander verglichen zu können, sollte der effektive Jahreszins stets exakt nach PAngV ausgerechnet werden, auch wenn der deutsche Gesetzgeber dies nur für Verbraucherkredite vorschreibt. Hierzu eignet sich auch bei ungleichmäßigen Zahlungsströmen generell Gl. (2.9), die auf der Methode des internen Zinssatzes beruht (s. Abschn. 2.5).

Bei *gleichmäßigen* Zahlungsströmen gibt es einfachere Lösungen, weil K_0' in Abhängigkeit von j auf Grundlage der Zinseszins-, Renten- oder Tilgungsrechnung explizit dargestellt und somit C_0 nach Gl. (5.1) analytisch ermittelt werden kann. Bei vorgegebenem Kurs muss j – von Ausnahmen abgesehen – zwar auch mittels Iterationsverfahren (z. B. mit Excel-Zielwertsuche) bestimmt werden, allerdings auf Grundlage von speziellen Formeln, ohne den Zahlungsstrom gemäß Gl. (2.9) komplett abbilden zu müssen.

5.2 Kurs einer gesamtfälligen Schuld

Der einfachste Zahlungsstrom beginnt mit der Zahlung des Nominalkapitals K_0 im betrachteten Bezugszeitpunkt $t = 0$ und endet mit der Rückzahlung des Nominalkapitals zuzüglich der Zinsen bei $t = n$ (s. Bild 5.1).

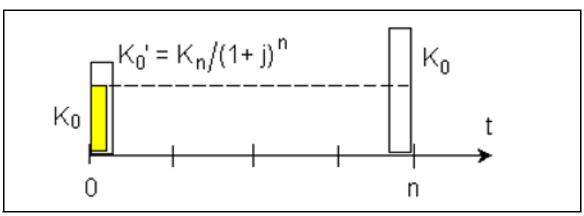


Bild 5.1 Schematische Darstellung der gesamtfälligen Schuld mit Zinsansammlung

Die Höhe der Rückzahlung K_n ist abhängig von der Art der nominellen Verzinsung. Für den allgemeinsten Fall gemischter Verzinsung – exponentiell im Laufzeitintervall n_1 und linear im Laufzeitabschnitt n_2 – gilt Gl. (1.19). Wenn auf den Endwert zusätzlich ein Agio $\alpha_n \cdot K_0$ gezahlt wird, ist

$$K_n = K_0 \cdot (1+i)^{n_1} \cdot (1+i \cdot n_2) + \alpha_n \cdot K_0 \,. \tag{5.5}$$

Unabhängig davon beruht die Bestimmung des Realkapitals nach den Regeln der Effektivzinsberechnung auf exponentieller Verzinsung. Somit ergibt sich bezüglich $t = 0$ das Realkapital $K_0' = K_n \big/ (1+j)^n$ und mit Gl. (5.1) der Kurs C_0:

$$\boxed{C_0 = \frac{(1+i)^{n_1} \cdot (1+i \cdot n_2) + \alpha_n}{(1+j)^n} \cdot 100} \qquad \text{mit} \quad n = n_1 + n_2 \tag{5.6}$$

Beispiele: 5.1, 5.2, 5.3

Gl. (5.6) vereinfacht sich, wenn entweder n ganzjährig ist oder/und unterjährig exponentielle Nominalverzinsung vorliegt und somit der lineare Zinsfaktor für n_2 entfällt. Wenn außerdem kein Rückzahlungsagio berücksichtigt werden muss, gilt

$$C_0 = \left(\frac{1+i}{1+j}\right)^n \cdot 100 \quad \text{bzw.} \quad j = (1+i) \cdot \left(\frac{100}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \,. \tag{5.7}$$

Eine spezielle Art von gesamtfälliger Schuld stellen langfristige Anleihen ohne Zinsschein (*Nullkupon-Anleihen*) dar. Die Nominalverzinsung entfällt also ($i = 0$), und die Vorstellungen über die gewünschte Rendite werden durch Kursdifferenzen zwischen Ausgabekurs C_0 und Rückgabekurs C_n gesteuert. Dafür gibt es generell zwei Möglichkeiten:

1. Die Emission erfolgt zum Parikurs $C_0 = 100$, während die gewünschte Rendite durch ein Rückzahlungsagio bei $t = n$ analog zu Gl. (5.5) realisiert wird (s. Bild 5.2).

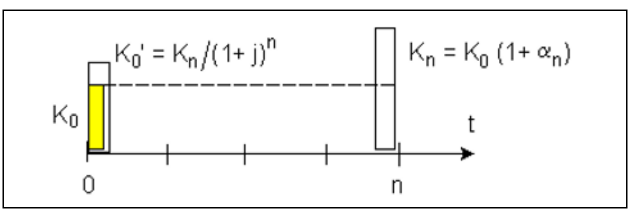


Bild 5.2 Darstellung einer Nullkupon-Anleihe mit Rückzahlungsagio

Dann ergibt sich mit $K_n = K_0 \cdot (1+\alpha_n)$ für den Kurs C_0 bzw. für die Rendite j

$$C_0 = \frac{1+\alpha_n}{(1+j)^n} = 100 \quad ; \quad j = (1+\alpha_n)^{\frac{1}{n}} - 1 \,. \tag{5.8}$$

2. Die Rückzahlung erfolgt bei $t = n$ zum Nennwert $K_n = K_0$, während die gewünschte Rendite durch ein Ausgabedisagio $C_0 = K_0 \cdot (1 - \delta_0)$ realisiert wird (s. Bild 5.3).

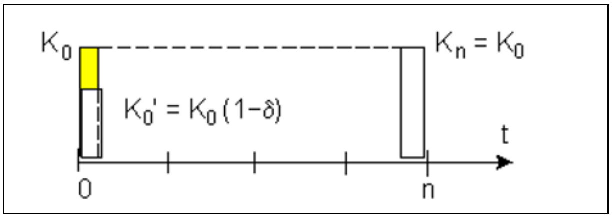


Bild 5.3 Darstellung einer Nullkupon-Anleihe mit Auszahlungsdisagio

Für diese klassische Form, die sog. *Zerobonds*, betragen Kurs C_0 bzw. Rendite j

$$C_0 = \frac{100}{(1+j)^n} = 100 \cdot (1 - \delta_0); \quad j = \left(\frac{1}{1-\delta_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 . \tag{5.9}$$

Beispiel: 5.4

Bei der Erstausgabe sind Nullkupon-Anleihen in der Regel mit ganzzahligen Laufzeitjahren n ausgestattet, doch bei fortschreitender Laufzeit müssen bei der Kursberechnung nichtganzzahlige Restlaufzeiten t_k berücksichtigt werden. Diese sind nach den Regeln der Effektivzinsberechnung gemäß Gl. (2.10) zu bestimmen.

5.3 Kurs einer Zinsschuld

5.3.1 Jährliche Zinszahlungen

Im Unterschied zur gesamtfälligen Schuld mit Zinsansammlung – wie unter Abschn. 5.2 dargestellt – wird am Ende der Laufzeit nur das Nominalkapital K_0 gesamtfällig getilgt, während die jährlich fälligen Zinsen $i \cdot K_0$ regelmäßig, im einfachsten Fall jährlich nachschüssig, gezahlt werden. Die Tilgung einer Nominalschuld von K_0 umfasst bei einer Laufzeit von n Jahren folgende zukünftige Leistungen (s. Bild 5.4):

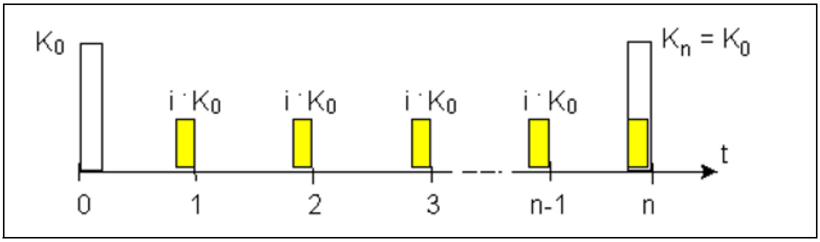


Bild 5.4 Darstellung einer jährlichen Zinsschuld

Falls am Ende der Laufzeit zusätzlich ein Agio von $\alpha_n \cdot K_0$ vereinbart ist, errechnet sich der Barwert aller zukünftigen Leistungen bei einer Effektivverzinsung j mit den Gln. (3.5) und (1.17) wie folgt:

$$K_0' = \qquad i \cdot K_0 \cdot \frac{(1+j)^n - 1}{j \cdot (1+j)^n} \qquad + K_0 \cdot \frac{1+\alpha_n}{(1+j)^n} \tag{5.10}$$

Realkapital   Rentenbarwert der Zinsen   Barwert der Rückzahlung

Wenn darin der Rentenbarwertfaktor bezüglich j mit b_n' und der Abzinsungsfaktor mit $1/q_n'$ bezeichnet werden:

$$b_n' = \frac{(1+j)^n - 1}{j \cdot (1+j)^n} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{q_n'} = \frac{1}{(1+j)^n},$$

dann ergibt sich nach Gl. (5.1) als Kurs der Zinsschuld

$$\boxed{C_0 = \left(i \cdot b_n' + \frac{1+\alpha_n}{q'^n} \right) \cdot 100}\ . \tag{5.11}$$

Beispiel: 5.5

Im Kreditgeschäft ist der Kurs einer Zinsschuld bei $t = 0$ der Preis, den der Kreditgeber verlangt bzw. der Kreditnehmer bezahlen muss, damit bei gegebener Nominalverzinsung i eine bestimmte Effektivverzinsung j erreicht wird.

Im Anlagegeschäft gilt dasselbe analog für festverzinsliche Wertpapiere. Der Börsenhandel am Rentenmarkt ermöglicht die Steuerung der Rendite nicht nur beim Kauf, sondern danach auch weiterhin durch die Wahl des Rückzahlungskurses C_n, insbesondere durch vorzeitigen Verkauf. Durch Umstellung von Gl. (5.11) ergibt sich mit $b_n' \cdot q'^n = s_n'$ (s. Gl. (3.6)):

$$\boxed{C_n = C_0 \cdot q'^n - i \cdot s'_n \cdot 100 = 100 \cdot (1 + \alpha_n)} \, . \tag{5.12}$$

Liegt der Rückgabekurs unter pari, dann ist in Gl. (5.12) anstelle eines Agio ein Disagio $C_n = 100 \cdot (1 - \delta_n)$ anzusetzen.

Zur Berechnung des Effektivzinssatzes j in Abhängigkeit von C_0 und C_n kann Gl. (5.12) wie folgt umgeformt werden:

$$C_n - C_0 = C_0 \cdot \left(q'^n - 1\right) - i \cdot s'_n \cdot 100 \text{, multipliziert mit } \frac{1}{C_0 \cdot s'_n} \text{ ergibt}$$

$$\boxed{j = i \cdot \frac{100}{C_0} + \frac{C_n - C_0}{C_0} \cdot v'_n} \quad \text{mit } v'_n = \frac{1}{s'_n} = \frac{j}{(1+j)^n - 1} \, . \tag{5.13}$$

Die Renditeberechnung ist mit Gl. (5.13) sehr anschaulich interpretierbar:

- Der erste Term stellt den jährlich erzielten *relativen Zinsgewinn* dar.
- Im zweiten Term wird der *relative Kursgewinn* bei $t = n$ durch Multiplikation mit dem Restwertverteilungsfaktor v'_n gemäß Gl. (3.7) auf eine jährlich nachschüssige Rente in (0; n) zurückgeführt[53].

Die Summe beider Gewinnanteile ergibt den effektiven Jahreszins j.

Allerdings kann j aus Gl. (5.13) nicht explizit berechnet werden, weil auch v'_n von j bestimmt wird, sondern man muss – zunächst ausgehend von einem Schätzwert $\tilde{j}$ für v'_n – iterativ vorgehen. Dabei zeigt sich, dass eine gute Näherung j_1 bereits dann entsteht, wenn von $\tilde{j} = i$ ausgegangen wird. Angesichts starker Konvergenz kann eventuell schon im zweiten Schritt mit $\tilde{j} = j_1$ eine ausreichende Übereinstimmung von j_2 mit j erzielt werden. Andernfalls lässt sich durch weitere Iterationsschritte das Ergebnis beliebig verbessern.

Beispiel: 5.5

In der Handelspraxis mit Wertpapieren wird vereinfachend (finanzmathematisch unkorrekt) von einer linearen Verteilung des relativen Kursgewinns auf die Laufzeit ausgegangen[54]:

$$j \approx i \cdot \frac{100}{C_0} + \frac{C_n - C_0}{C_0} \cdot \frac{1}{n} \, . \tag{5.14}$$

[53] Vgl. Däumler (1992), S. 108 f.

[54] Vgl. Tietze (2000), S. 302, und Kobelt/Schulte (1999), S. 199

Diese als *Börsenformel* bezeichnete Näherung eignet sich lediglich für kurze Laufzeiten bzw. für grobe Überschlagsrechnungen.

Es sei noch darauf verwiesen, dass Gl. (5.13) die Berechnung des Effektivzinssatzes für Nullkupon-Anleihen als Spezialfälle einschließt:

– mit $i = 0$, $C_0 = 100$ und $C_n = 100 \cdot (1 + \alpha_n)$ ergibt sich j nach Gl. (5.8) und

– mit $i = 0$, $C_0 = 100 \cdot (1 - \delta_0)$ und $C_n = 100$ ergibt sich j nach Gl. (5.9).

5.3.2 Unterjährige Zinszahlungen

Für endfällige Darlehen bzw. Wertpapiere mit regelmäßigen Zinszahlungen wird der Nominalzinssatz i stets per anno angegeben, auch wenn die Zinsen unterjährig – insbesondere halb- oder vierteljährlich nachschüssig – zahlbar sind. Anstelle des jährlichen Zinssatzes i ist bei m unterjährigen Zinszahlungen

– $i_r = \dfrac{i}{m}$ (wenn unterjährig lineare Verzinsung erfolgt) oder

– $i_k = (1+i)^{1/m} - 1$ (wenn unterjährig exponentielle Verzinsung erfolgt)

für die gleich bleibenden Rentenraten $i_r \cdot K_0$ bzw. $i_k \cdot K_0$ maßgeblich. Folglich sind in den Gln. (5.9) bis (5.14) der nominelle Jahreszinssatz i durch i_r oder i_k sowie die Laufzeit n durch die Zahl der Laufzeitperioden $n_p = m \cdot n$ zu ersetzen (vgl. Abschn. 3.3.1). Der daraus ermittelte Realzinssatz ist dann noch nicht j, sondern der jahreskonforme Periodenzinssatz j_k gemäß Gl. (1.24), aus dem der effektive Jahreszinssatz mit

$$j = (1 + j_k)^m - 1 \tag{5.15}$$

noch auszurechnen ist.

Beispiel: 5.6

Handel mit Kupon-Anleihen

Unabhängig von der Länge der Zinsperiode ist noch eine praxisrelevante Besonderheit zu beachten. Beim Handel mit festverzinslichen Wertpapieren (*Kupon-Anleihen*) zwischen zwei Zinsterminen wird dem Käufer der Kupon für die nächste Zinszahlung überlassen. Dafür hat der Verkäufer Anspruch auf die linear aufgelaufenen Zinsen der angebrochenen Zinsperiode (sog. *Stückzinsen*). Die nominelle Zinsrechnung beginnt somit unmittelbar nach dem letzten Zinstermin, während die für die Effektivzinsberechnung maßgebliche Restlaufzeit beim Kaufzeitpunkt $t' = 0$ beginnt (s. Bild 5.5).

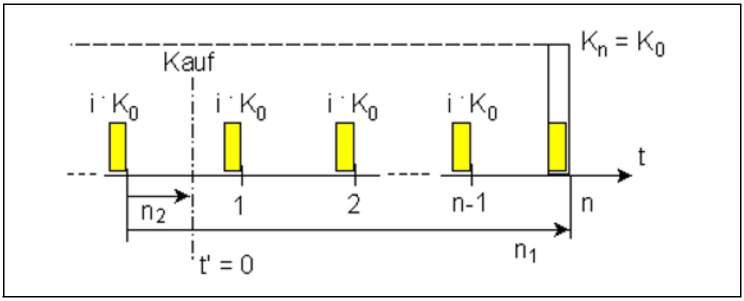


Bild 5.5 Darstellung des Kaufs einer Kupon-Anleihe zwischen zwei Zinsterminen

Bezeichnet man die anteilige Periodendauer seit der letzten Zinszahlung bis zum Kauf mit n_2, so betragen die an den bisherigen Inhaber der Anleihe zu zahlenden Stückzinsen $i \cdot n_2 \cdot K_0$. Dieser Betrag geht gemäß Gl. (5.2) als Aufgeld $\alpha_0 = i \cdot n_2$ in die Kursrechnung ein. Bezeichnet man weiterhin die ganzzahlige Laufzeit von der letzten Zinszahlung bis zum Ende mit n_1, dann verändert sich Gl. (5.10) für das Realkapital mit $n = n_1 - n_2$ wie folgt:

$$K_0' = i \cdot K_0 \cdot \frac{(1+j)^{n_1} - 1}{j \cdot (1+j)^n} + K_0 \cdot \frac{1+\alpha_n}{(1+j)^n} \ . \tag{5.16}$$

Darin ist nach wie vor ein eventuelles Rückzahlungsaufgeld α_n einbezogen. Bei Einberechnung der zusätzlich zu erstattenden Stückzinsen als Aufgeld gemäß Gl. (5.2) beträgt der *Kaufkurs* der Anleihe

$$C_0 = \frac{i \cdot s'_{n_1} + 1 + \alpha_n}{q'^n} \cdot \frac{100}{1 + i \cdot n_2} \ . \tag{5.17}$$

Beispiel: 5.7a

Dem Verkäufer einer Kupon-Anleihe wird zusätzlich zum Verkaufskurs $C_n = 100 \cdot (1 + \alpha_n)$ der Zinsertrag seit der letzten Zinszahlung erstattet. In Anlehnung an Gl. (5.10) ergibt sich aus Sicht des Emissions- bzw. Kaufzeitpunktes $t = 0$ das Realkapital

$$K_0' = i \cdot K_0 \cdot \frac{(1+j)^{n_1} - 1}{j \cdot (1+j)^{n_1}} + K_0 \cdot \frac{1+\alpha_n + i \cdot n_2}{(1+j)^n} \ , \tag{5.18}$$

wobei der Barwert der laufenden Zinszahlungen von n_1 bestimmt wird, während die Gesamtlaufzeit $n = n_1 + n_2$ beträgt (s. Bild 5.6).

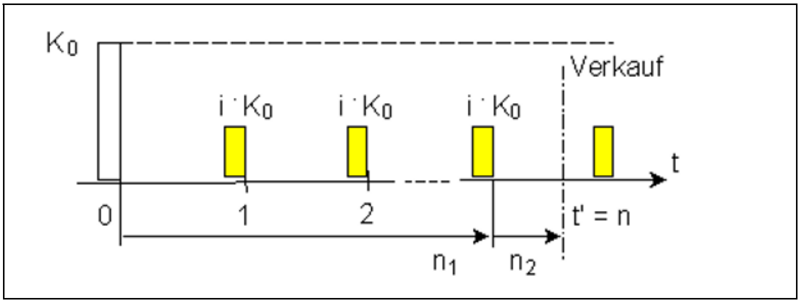


Bild 5.6 Darstellung des Verkaufs einer Kupon-Anleihe zwischen zwei Zinsterminen

Daraus resultiert die Formel für den Kaufkurs der Anleihe

$$C_0 = \left(i \cdot b'_{n_1} + \frac{1 + \alpha_n + i \cdot n_2}{q'^n} \right) \cdot 100 = 100 \cdot (1 + \alpha_0) \tag{5.19}$$

oder analog zu Gl. (5.12) entsprechend umgeformt für den *Verkaufskurs*

$$C_n = C_0 \cdot q'^n - \left(i \cdot s'_{n_1} \cdot q'^{n_2} + i \cdot n_2 \right) \cdot 100 = 100 \cdot (1 + \alpha_n) \,. \tag{5.20}$$

Beispiele: 5.7b, 5.8

Liegt der Verkaufskurs unter pari, dann ist in Gl. (5.20) anstelle eines Agio ein Disagio $C_n = 100 \cdot (1 - \delta_n)$ anzusetzen; dasselbe gilt analog für den Kaufkurs in Gl. (5.19). Diese Bemerkungen erübrigen sich, wenn die Kurse aus der Rendite *j* errechnet werden sollen. In der Regel muss dagegen – ausgehend von Kursvorgaben – die Rendite bestimmt werden, was auf Grundlage der Gln. (5.17), (5.19) oder (5.20) nur mit Näherungsverfahren möglich ist. Mittels entsprechend angelegter Excel-Tabellen ist das sehr einfach zu bewerkstelligen.

Was hier zunächst für jährliche Zinsperioden dargestellt ist, gilt auch für unterjährige Zinsperioden, wenn – wie oben erläutert – die zutreffenden unterjährigen Zinssätze und Laufzeitperioden richtig eingesetzt werden.

5.3.3 Kurs einer ewigen Rente

Langfristige Zinszahlungen für ein Nominalkapital, dessen Rückzahlung in absehbar endlicher Zeit nicht vorgesehen ist, kann man als ewige Rente auffassen (s. Abschn. 3.2). Aus dem Nominalkapital resultiert die Rentenrate $r = K_0 \cdot i$. Daraus folgt gemäß

Gl. (3.12) der Realwert $K'_0 = r/j$. Durch Einsetzen in die Kursformel Gl. (5.1) ergibt sich

$$\boxed{C_0 = \frac{i}{j} \cdot 100} \quad \text{oder} \quad j = i \cdot \frac{100}{C_0}\,, \tag{5.21}$$

was identisch ist mit Gl. (5.13) ohne Kursgewinn. Zinszahlungen für eine langfristige Schuld (z. B. Pfandbriefe) können näherungsweise als ewige Rente angesehen werden[55].

Bei unterjährigen Zinszahlungen ist i durch i_r bzw. i_k (je nachdem, ob unterjährig lineare oder exponentielle Verzinsung vorliegt) und j durch j_k zu ersetzen (vgl. Abschn. 5.3.2).

Beispiel: 5.9

5.4 Kurs einer Annuitätenschuld

Eine Nominalschuld K_0, deren Rückzahlung durch Annuitätentilgung erfolgt (d. h. durch konstante Beträge aus Tilgungsrate und Nominalzinsen, s. Abschn. 4.3), wird Annuitätenschuld genannt. Der mathematisch-formale Unterschied zur Zinsschuld besteht darin, dass der Rückzahlungsbetrag am Ende der Laufzeit entfällt ($K_n = 0$) und an Stelle regelmäßiger Zinszahlungen die Annuitäten A treten (s. Bild 5.7).

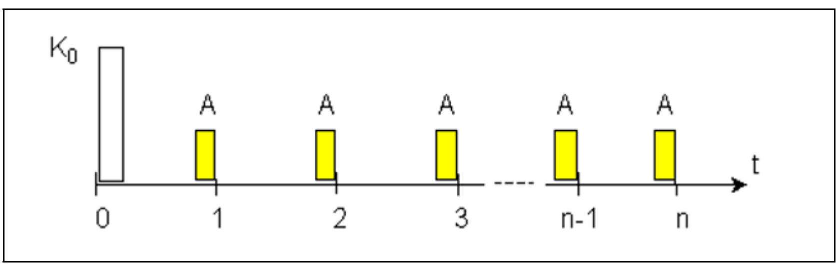


Bild 5.7 Darstellung einer jährlichen Annuitätenschuld

Handelt es sich um jährlich nachschüssige Annuitäten, dann ergibt sich bei einer Effektivverzinsung j als Barwert aller zukünftigen Leistungen nach Gl. (3.5) der Rentenbarwert

$$K'_0 = A \cdot \frac{(1+j)^n - 1}{j \cdot (1+j)^n} = A \cdot b'_n\,. \tag{5.22}$$

---

[55] Vgl. Kruschwitz (2001), S. 110, und Tietze (2000), S. 115

Die jährliche Annuität beträgt nach Gl. (4.10) mit $S = K_0$

$$A = K_0 \cdot \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = K_0 \cdot w_n \quad \text{bzw.} \quad K_0 = \frac{A}{w_n}. \tag{5.23}$$

Da b_n und w_n zueinander reziprok sind, kann der Kurs einer jährlichen Annuitätenschuld gemäß Gl. (5.1) wahlweise durch die Rentenbarwert- oder Annuitätenfaktoren ausgedrückt werden:

$$\boxed{C_0 = \frac{b_n'}{b_n} \cdot 100 = \frac{w_n}{w_n'} \cdot 100}. \tag{5.24}$$

Beispiel: 5.10

Bei regelmäßiger Zahlung eines *Agio* $\alpha \cdot T_t$ als prozentualen Aufschlag auf die periodischen Tilgungsraten (vgl. Abschn. 4.4.3) muss die Berechnung der Annuität A analog zu Gl. (4.31) modifiziert werden. Gl. (5.23) geht dann über in

$$A = (1+\alpha) \cdot K_0 \cdot \hat{w}_n \quad \text{mit} \quad \hat{w}_n = \frac{\frac{i}{1+\alpha} \cdot \left(1 + \frac{i}{1+\alpha}\right)^n}{\left(1 + \frac{i}{1+\alpha}\right)^n - 1} \tag{5.25}$$

und die Kursformel lautet, ausgedrückt durch die Annuitätenfaktoren,

$$\boxed{C_0 = (1+\alpha) \cdot \frac{\hat{w}_n}{w_n'} \cdot 100}. \tag{5.26}$$

Beispiel: 5.12

Werden – ohne die Laufzeit exakt zu berücksichtigen – *Prozentannuitäten* festgelegt, dann verbleibt am Ende des vorletzten Laufzeitjahres n_1 außer A noch eine Abschlusszahlung $RS_{n_1} < A$, die in der Regel erst ein volles Jahr später fällig ist (s. Abschn. 4.3.4). Die Berechnung des Realkapitals erfolgt dann analog zu Gl. (5.10):

$$K_0' = A \cdot \frac{(1+j)^{n_1} - 1}{j \cdot (1+j)^{n_1}} + \frac{(1+i) \cdot RS_{n_1}}{(1+j)^{n_1+1}} = K_0 \cdot w \cdot b_n' + K_0 \cdot \frac{q^{n_1+1} - w \cdot q \cdot s_{n_1}}{q'^{\,n_1+1}}. \tag{5.27}$$

Darin ist w der vorgegebene Prozentsatz für die regelmäßigen Zahlungen; für die Abschlusszahlung wurde Gl. (4.22) herangezogen. Für den Kurs nach Gl. (5.1) folgt daraus:

$$\boxed{C_0 = w \cdot \left(b'_{n_1} - \frac{q \cdot s_{n_1}}{q'^{n_1+1}} \right) \cdot 100 + \frac{q^{n_1+1}}{q'^{n_1+1}} \cdot 100} \,. \tag{5.28}$$

Gl. (5.24) ist darin als Spezialfall enthalten, wenn sich auf Grund der festgelegten Prozentannuitäten eine ganzzahlige Laufzeit $n = n_1$ ohne Restschuld ergibt.

Beispiel: 5.13

Unterjährliche Annuitätenzahlungen

Das Realkapital K'_0 für unterjährliche Annuitäten a ergibt sich ganz analog zu Gl. (5.22) mit einem Barwertfaktor b'_{n_p} , der anstelle von n Laufzeitjahren die Zahl der unterjährigen Laufzeitperioden $n_p = m \cdot n$ sowie die gemäß Gl. (5.15) auf diese Perioden umgerechnete Rendite j_k berücksichtigt. Somit lautet die Kursformel gemäß Gl. (5.1):

$$\boxed{C_0 = \frac{a \cdot b'_{n_p}}{K_0} \cdot 100} \quad \text{mit} \quad b'_{n_p} = \frac{(1+j_k)^{m \cdot n} - 1}{j_k \cdot (1+j_k)^{m \cdot n}} \tag{5.29}$$

Wie die unterjährliche Annuität a aus der Nominalschuld $S = K_0$ zu berechnen ist, hängt von der Art der unterjährigen Verzinsung ab (s. Abschn. 4.3.2 und 4.3.3)[56].

1. Bei unterjährig linearer Nominalverzinsung und jährlicher Zinszahlung ergibt sich a aus K_0 gemäß Gl. (5.23) unter Beachtung von Gl. (3.23) bzw. (4.15). Demnach gilt:

$$a = \frac{K_0 \cdot w_n}{m + i \cdot \frac{m-1}{2}} \, ; \quad C_0 = \frac{1}{m + i \cdot \frac{m-1}{2}} \cdot \frac{b'_{n_p}}{b_n} \cdot 100 \,. \tag{5.30}$$

   In dieser Darstellung muss also einerseits in b_n der nominelle Jahreszinssatz i und andererseits in b'_{n_p} die unterjährige Rendite j_k eingesetzt werden.

2. Bei unterjährig linearer Nominalverzinsung und unterjährlicher Zinszahlung zusammen mit jeder Tilgungsrate ergibt sich a aus K_0 gemäß Gl. (4.17) und damit der Kurs

[56] In diesem Zusammenhang ist darauf zu verweisen, dass die Annuität a in der Kursformel verbleiben kann, ohne sie weiter in Abhängigkeit von Zinssätzen und Laufzeit auszudrücken, weil deren Wert bei der Kurs- oder Renditerechnung für eine Kreditvereinbarung ohnehin bereits feststeht. Die weiteren Ausführungen hierzu begründen jedoch die Kursformeln des folgenden Abschnitts 5.5 .

$$a = K_0 \cdot w_{n_p} = \frac{K_0}{b_{n_p}}\,; \quad C_0 = \frac{b'_{n_p}}{b_{n_p}} \cdot 100\,. \tag{5.31}$$

Darin muss im nominellen Barwertfaktor b_{n_p} der relative Zinssatz i_r und in b'_{n_p} die unterjährige Rendite j_k eingesetzt werden.

3. Bei unterjährig exponentieller Nominalverzinsung gilt für den Kurs ebenfalls Gl. (5.31) mit dem Unterschied, dass in b_{n_p} der unterjährig konforme Zinssatz i_k einzusetzen ist.

Erfolgen Zins- und Tilgungszahlungen bei einer unterjährlichen Annuitätenschuld synchron (das betrifft die praktisch relevanten Fälle 2 und 3), besteht also kein Unterschied zur Kursrechnung für eine jährliche Annuitätenschuld – vorausgesetzt, es werden die zutreffenden Periodenzinssätze richtig berücksichtigt. Für $m = 1$ (jährliche Perioden) gehen beide Kursformeln, sowohl Gl. (5.31) als auch Gl. (5.30), in Gl. (5.24) über.

Beispiele: 5.11, 5.12, 5.14

Kurs einer jährlichen Annuitätenschuld bei tilgungsfreien Zeiten

Die Zahlung der Annuitäten beginnt nicht in der ersten Periode nach der Kreditauszahlung, sondern mit zeitlicher Verzögerung um k Perioden, während die Schuld bis dahin verzinst wird. Für den Fall, dass diese nominellen Zinsen bis zum Tilgungsbeginn bei $t = k$ periodisch gezahlt werden (*Tilgungsstreckung*, s. Abschn. 4.2.2), handelt es sich um die Kombination der Annuitätenschuld mit einer Zinsschuld (s. Bild 5.8).

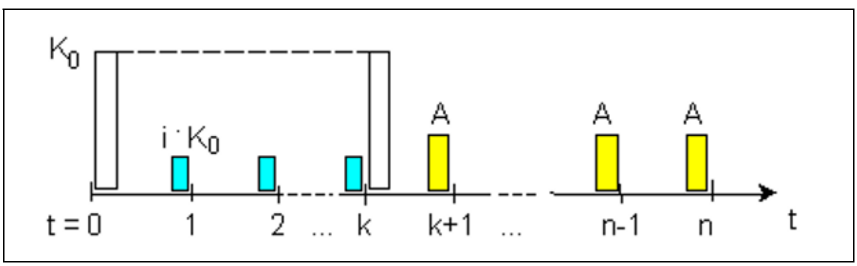


Bild 5.8 Darstellung einer Annuitätenschuld mit Tilgungsstreckung

Wird n als Gesamtlaufzeit beibehalten, dann ist das Realkapital aus $n - k$ Annuitätenzahlungen gemäß Gl. (5.22) zusammen mit den Zinszahlungen in $(0; k)$ analog zu Gl. (5.10) um die tilgungsfreie Zeit k bis auf $t = 0$ mit dem Effektivzinssatz j abzuzinsen:

$$K_0' = i \cdot K_0 \cdot b_k' + \cdot \frac{A \cdot b_{n-k}'}{(1+j)^k} \,. \tag{5.32}$$

Unter Berücksichtigung von Gl. (5.23) folgt daraus nach Gl. (5.1) für den Kurs

$$C_0 = \left(i \cdot b_k' + \frac{b_{n-k}'}{b_{n-k}} \cdot \frac{1}{q'^k} \right) \cdot 100 \,. \tag{5.33}$$

Beispiel: 5.15a

Werden die fälligen Nominalzinsen dagegen bis $t = k$ mit Zinseszinsen angesammelt (vollständiger *Zahlungsaufschub*, s. Abschn. 4.2.2), dann gehen diese in die Berechnung der Annuitäten nach Gl. (5.23) ein. Mit $A = K_0 \cdot (1+i)^k \cdot w_{n-k}$ ergibt sich dann für den Kurs

$$C_0 = \frac{b_{n-k}'}{b_{n-k}} \cdot \left(\frac{q}{q'} \right)^k \cdot 100 \,. \tag{5.34}$$

Für $k = 0$ gehen sowohl Gl. (5.33) als auch Gl. (5.34) folgerichtig in Gl. (5.24) über. Für $k = n$ entspricht Gl. (5.33) dem Kurs einer Zinsschuld und Gl. (5.34) dem Kurs einer gesamtfälligen Schuld.

Beispiel: 5.15b

5.5 Kurs einer endlichen Rente

Der Zahlungsstrom einer endlichen Rente ähnelt dem einer Annuitätenschuld nach Bild 5.6 mit dem Unterschied, dass primär die regelmäßigen Zahlungen (Rentenraten r) vorgegeben sind und daraus die Rentenbarwerte $R_0 = K_0$ (bzw. K_0') resultieren (s. Bild 5.9). Somit kann die endliche Rente als Sonderfall einer Annuitätenzahlung aufgefasst werden oder umgekehrt. Wenn in den für die Annuitätenschuld dargestellten Formeln A oder a durch r ersetzt wird, dann gelten diese auch für eine jährlich bzw. unterjährlich nachschüssige Rente.

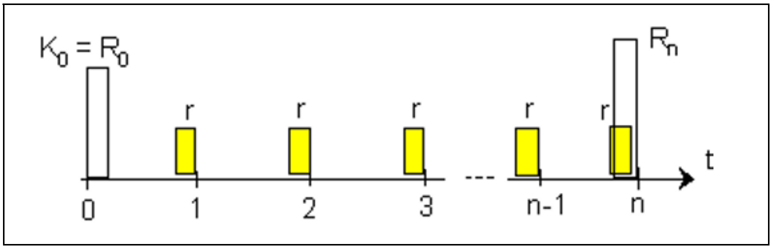


Bild 5.9 Darstellung einer jährlich nachschüssigen Rente

Für $n_p = m \cdot n$ *unterjährlich nachschüssige* Rentenraten beträgt das Realkapital $K_0' = r \cdot b_{n_p}'$, wobei vorschriftgemäß von unterjährig exponentieller Verzinsung mit j_k auszugehen ist.

– Falls die nominelle Verzinsung ebenfalls unterjährig exponentiell mit i_k oder i_r erfolgen sollte, ist $K_0 = r \cdot b_{n_p}$ und die Kursformel somit identisch mit Gl. (5.31).

– In der Regel wird unterjährig lineare Nominalverzinsung mit jährlicher Zinskapitalisierung vorliegen. Dann ist die Kursformel Gl. (5.30) zutreffend.

Beispiel: 5.16 Ratenkredit

Für $n_p = m \cdot n$ *unterjährlich vorschüssige* Rentenraten müssen die Kursformeln geringfügig modifiziert werden, indem nachschüssige Ersatzrentenraten gebildet werden (s. Abschn. 3.3).

– Bei unterjährig exponentieller Verzinsung ist $r_e = r \cdot (1 + i_k)$ bzw. $r_e = r \cdot (1 + j_k)$ anstelle von r in die Kursformel einzusetzen. Gl. (5.31) geht dann über in

$$C_0 = \frac{1 + j_k}{1 + i_k} \cdot \frac{b_{n_p}'}{b_{n_p}} \cdot 100 \,. \tag{5.35}$$

– Bei unterjährig linearer Verzinsung und jährlicher Zinszahlung geht Gl. (5.30) wegen Gl. (3.31) über in

$$C_0 = \frac{1 + j_k}{m + i \cdot \dfrac{m+1}{2}} \cdot \frac{b_{n_p}'}{b_n} \cdot 100 \,. \tag{5.36}$$

Gelegentlich wird auf den Rentenendwert ein Agio $\alpha_n \cdot n_p \cdot r$ in Höhe eines prozentualen Anteils der insgesamt eingezahlten Rentenraten gezahlt (sog. *Bonus- oder Prämiensparen*). Dies wirkt sich auf das Realkapital aus, während das Nominalkapital unverändert bleibt. Für unterjährig vorschüssige Rentenraten ergibt sich beispielsweise

$$K_0' = r \cdot \frac{(1+j_k) \cdot s'_{n_p} + \alpha_n \cdot n_p}{(1+j_k)^{n_p}} = r \cdot \left((1+j_k) \cdot b'_{n_p} + \frac{\alpha_n \cdot m \cdot n}{(1+j)^n} \right) \tag{5.37}$$

und bei unterjährig linearer Nominalverzinsung für den Kurs:

$$C_0 = \frac{(1+j_k) \cdot b'_{n_p} + \dfrac{\alpha_n \cdot m \cdot n}{(1+j)^n}}{\left(m + i \cdot \dfrac{m+1}{2} \right) \cdot b_n} \cdot 100\,. \tag{5.38}$$

Der Bonus muss also wie der Rentenendwert mittels Effektivzinssatz auf $t = 0$ abgezinst werden. Diese Vorgehensweise ist genauso auf andere Zahlungsmodalitäten für Rentenraten und Zinsen übertragbar.

Beispiel: 5.17 Prämiensparen

Die Ausführungen konnten hier auf unterjährliche Rentenraten beschränkt werden, weil – wie schon mehrfach ausgeführt – jährliche Zahlungen als Sonderfall $m = 1$ in allen Formeln enthalten sind.

Außerdem sind in den Formeln *ewige Renten* als Sonderfall $n \to \infty$ enthalten. Mit

$$\lim_{n \to \infty} b'_{n_p} = \frac{1}{j_k} \quad \text{und} \quad \lim_{n \to \infty} b_{n_p} = \frac{1}{i_k}$$

geht Gl. (5.22) beispielsweise über in

$$C_0 = \frac{i_k}{j_k} \cdot 100 = \frac{i/m}{(1+j)^{1/m} - 1} \cdot 100\,; \tag{5.39}$$

das ist der Kurs für eine unterjährlich nachschüssige Rente, der für $m = 1$ wiederum mit Gl. (5.21) für eine jährlich nachschüssige ewige Rente identisch ist. In Analogie dazu können die Kursformeln für vorschüssige ewige Renten leicht hergeleitet werden.

Alle Kursformeln für endliche Renten – wie auch für die verschiedenen Formen der Annuitätenschuld in Abschn. 5.4 – haben eines gemeinsam: sie können nicht explizit nach j bzw. j_k umgestellt werden. Bei der Kursrechnung auf Grundlage von Excel-Tabellen ist dies allerdings auch nicht erforderlich, weil die Rendite bei Kursvorgabe durch Iterationsverfahren leicht bestimmt werden kann.

5.6 Kurs einer Ratenschuld

Im Gegensatz zur Annuitätenschuld erfolgt die jährliche Tilgung einer Ratenschuld K_0 nicht durch gleichbleibende Annuitäten, sondern als Summe aus konstanten Tilgungsraten $T = K_0/n$ und von Jahr zu Jahr abnehmenden Zinsen Z_t (s. Abschn. 4.2.1 und Bild 5.10):

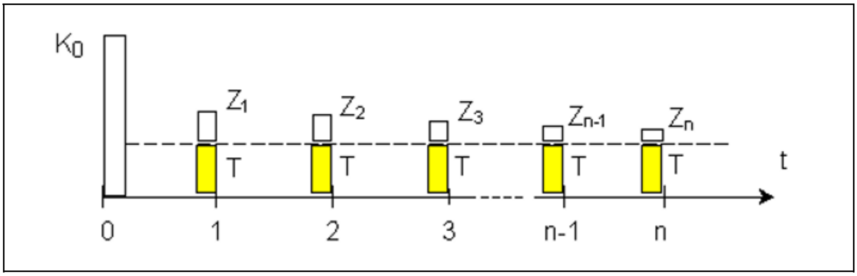


Bild 5.10 Darstellung einer jährlichen Ratenschuld

Die Verzinsung der jährlichen Raten erfolgt wiederum mit dem Effektivzinssatz j. Bezogen auf den Nennwert K_0 resultiert aus allen zukünftigen Tilgungszahlungen ein Realkapital von

$$K_0'^T = \frac{K_0}{n} \cdot \frac{1}{q'^n} \cdot \frac{q'^n - 1}{q' - 1} = \frac{K_0}{n} \cdot b_n' \; . \tag{5.40}$$

Der entsprechende Ausdruck für den Barwert der jährlichen Zinszahlungen gemäß Gl. (4.4) ergibt sich nach einigen Umformungen, auf deren Darstellung hier verzichtet wird[57], aus

$$K_0'^Z = \sum_{t=1}^{n} \frac{Z_t}{q'^t} = \frac{i \cdot K_0}{n} \cdot \sum_{t=1}^{n} \frac{n+1-t}{q'^t} = \frac{K_0}{n} \cdot \frac{i}{j} \cdot \left(n - b_n'\right) \; . \tag{5.41}$$

Aus der Summe dieser beiden Barwerte

$$K_0' = K_0'^T + K_0'^Z = K_0 \cdot \frac{b_n'}{n} \cdot \left(1 - \frac{i}{j}\right) + K_0 \cdot \frac{i}{j}$$

folgt mit Gl. (5.1) der Kurs einer Ratenschuld:

$$\boxed{C_0 = \left(1 - \frac{i}{j}\right) \cdot \frac{b_n'}{n} \cdot 100 + \frac{i}{j} \cdot 100} \; . \tag{5.42}$$

Beispiel: 5.18

[57] Vgl. Kobelt/Schulte (1999), S. 219

Unterjährliche Ratenzahlungen

Bei unterjährlicher Ratentilgung wird die Nominalschuld K_0 durch gleichmäßige Aufteilung auf alle $n_p = m \cdot n$ Laufzeitperioden getilgt: $T_u = K_0 / m \cdot n$ (s. Abschn. 4.2.2). Bei exponentieller Verzinsung dieser unterjährigen Tilgungsraten mit dem jahreskonformen Effektivzinssatz j_k beträgt deren Realkapital

$$K_0'^T = \frac{K_0}{m \cdot n} \cdot \frac{(1+j_k)^{m \cdot n} - 1}{j_k \cdot (1+j_k)^{m \cdot n}} = \frac{K_0}{n_p} \cdot b'_{n_p} = \frac{K_0}{n} \cdot \frac{j}{m \cdot j_k} \cdot b'_n \,. \tag{5.43}$$

(vgl. unterjährliche Annuitätenzahlung in Abschn. 5.4).

Bezüglich der nominellen Zinsberechnung und -kapitalisierung ist wiederum zwischen verschiedenen praktischen Modalitäten zu unterscheiden.

1. Bei unterjährig linearer Nominalverzinsung und jährlicher Zinszahlung würden durch Anwendung von Gl. (5.41) die Zinseinsparungen ΔZ_t infolge der (vorgezogenen) unterjährlichen Tilgungszahlungen unberücksichtigt bleiben. Es geht dabei jährlich um den gleichen Zinsbetrag, der bei Berechnung der Ersatzrentenrate gemäß Gl. (3.23) aufgeschlagen, hier aber wegen abnehmender Restschuld jährlich nachschüssig abgezogen werden muss[58]:

$$\Delta Z_t = \frac{K_0}{m \cdot n} \cdot \frac{i \cdot (m-1)}{2} \,. \tag{5.44}$$

   Bei Berücksichtigung dieses Abzugs beträgt das Realkapital aller Zinszahlungen

$$K_0'^Z = K_0 \cdot \frac{i}{j} - \frac{K_0}{n} \cdot \left(\frac{i}{j} + \frac{i \cdot (m-1)}{2m} \right) \cdot b'_n \tag{5.45}$$

   und mit Gl. (5.43) das gesamte Realkapital

$$K'_0 = K_0'^T + K_0'^Z = K_0 \cdot \frac{b'_n}{n} \cdot \left(\frac{j}{m \cdot j_k} - \frac{i}{j} - \frac{i \cdot (m-1)}{2m} \right) + K_0 \cdot \frac{i}{j} \,. \tag{5.46}$$

   Weiter folgt daraus gemäß Gl. (5.10) der Kurs

$$C_0 = \left(\frac{j}{m \cdot j_k} - \frac{i}{j} - \frac{i \cdot (m-1)}{2m} \right) \cdot \frac{b'_n}{n} \cdot 100 + \frac{i}{j} \cdot 100 \,. \tag{5.47}$$

Beispiel: 5.20

[58] Vgl. Kobelt/Schulte (1999), S. 224

2. Bei unterjährig exponentieller Nominalverzinsung ist Gl. (5.42) anwendbar, indem die Zahl der Jahre n durch die Zahl der unterjährigen Perioden $n_p = m \cdot n$ sowie die Jahreszinssätze i und j durch die nach Gl. (1.24) errechneten konformen unterjährigen Zinssätze i_k bzw. j_k ersetzt werden:

$$C_0 = \left(1 - \frac{i_k}{j_k}\right) \cdot \frac{b'_{n_p}}{n_p} \cdot 100 + \frac{i_k}{j_k} \cdot 100\,. \tag{5.48}$$

3. Bei unterjährig linearen und zusammen mit den Tilgungsraten zahlbaren Nominalzinsen gilt für den Kurs ebenfalls Gl. (5.48) mit dem Unterschied, dass anstelle von i_k der relative unterjährige Zinssatz $i_r = i/m$ einzusetzen ist.

Beispiel: 5.19

Teil 2

Beispiellösungen mit Excel

Vorbemerkungen

Microsoft Excel ist auf die Nutzung von finanzmathematischen Tabellenrechnungen vorbereitet und im Rahmen seines Funktions-Assistenten (Schaltfläche *fx* auf der Standard-Symbolleiste) mit einer größeren Anzahl von Makros für finanzmathematische Problemstellungen ausgestattet. Diese ***Excel-Funktionen*** sollen so weit als möglich bei den hier gezeigten Beispiellösungen verwendet werden.

Unabhängig davon werden in den Tabellen darüber hinaus auch eigene ***Excel-Formeln*** erstellt, um die vielfältigen Möglichkeiten aufzuzeigen, mit denen die individuellen Problemstellungen anschaulich dargestellt, gelöst und verallgemeinert werden können. Ein sinnvoller Tabellenaufbau ist dabei für die Problemlösung ebenso eine wichtige Voraussetzung wie eine geeignete logisch-mathematische Struktur der Verknüpfung zwischen den Tabellenfeldern.

Der Umfang der Tabellen und deren Struktur ist bewusst auf relativ isolierte Einzelprobleme beschränkt worden und soll für den ungeübten Leser (und Rechner) im Einzelnen nachvollziehbar sein. Ziel soll also nicht der Aufbau professioneller Programme sein, die alle denkbaren bzw. praktisch relevanten Details finanzwirtschaftlicher Aufgabenstellungen berücksichtigen. Vielmehr soll der Weg zur systematischen Erstellung abgegrenzter und leicht überschaubarer Musterlösungen aufgezeigt werden, wobei die Ausführungen im Teil 1 des Buches die theoretische Grundlage bilden. Unter denselben Gliederungspunkten werden deshalb zunächst Zahlenbeispiele ausführlich erklärt und vorgerechnet, um dann anhand dieser Beispiele die Schrittfolgen für den Tabellenaufbau und die Formelstrukturen nachvollziehbar zu demonstrieren. Auf diese Weise sollen einerseits die Beispiellösungen in den selbst erstellten Tabellen überprüft und andererseits beliebig andere Zahlenbeispiele für diesen speziellen Aufgabentyp berechnet werden können.

1. Zinsrechnung mit Excel

1.1 Einführung

Bei der Zinsrechnung wird vorrangig mit folgenden Größen und Symbolen operiert:

K_0	Anfangskapital bei $t = 0$ (in €)
K_n	Endkapital bei $t = n$ (in €)
K_t	Kapital im Jahr t (in €)
Z_t	Zinsbetrag ("Zinsen") im Jahr t (in €)
i	(nomineller) Zinssatz p.a.
$q = 1 + i$	Zinsfaktor
j, i_{eff}	effektiver Jahreszinssatz
n	Laufzeit der Kapitalanlage (in a)
m	Zahl der Laufzeit- oder Zinsperioden pro Jahr
n_p	Zahl der Laufzeitperioden
i_r, i_k	relativer bzw. konformer unterjähriger Zinssatz

In Anbetracht unterschiedlich praktizierter Zeitzählung bei der Zinsrechnung berücksichtigt der Tabellenaufbau

1. Laufzeitperioden (z. B. Jahre, Monate, Tage) oder
2. Kalenderperioden, insbesondere bei unterjährigen Zahlungen.

Zu 1: **Laufzeitperioden**

Für die Zinsrechnung eignet sich eine Excel-Tabelle nach dem Muster von Bild 1.1e.

Die Zellen A4:A8 (in der Excel-Schreibweise kennzeichnet der Doppelpunkt einen Vektor aus zusammenhängenden Zellen) sowie A10, C4:C5, C10 und D8 werden bei der Eintragung von Buchstaben automatisch als Text formatiert. Die Zellen B4:B7 sind für die Eingabe von gegebenen Zahlenwerten vorgesehen, die Zellen C8 und B10 für die Eintragung von Excel-Funktionen oder selbst erstellten Formeln zur Berechnung von Ergebnissen oder Zwischenergebnissen.

K. Renger, *Finanzmathematik mit Excel*, DOI 10.1007/978-3-658-14100-4_6

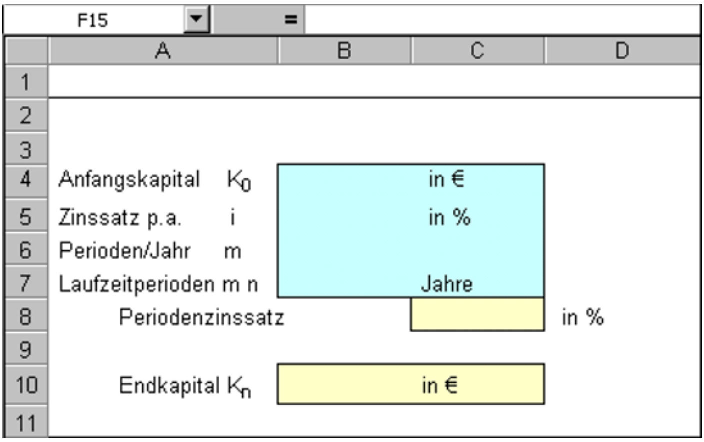


Bild 1.1e Tabellenvorlage zur Berechnung des Kapitalendwertes (Zahlungsperioden)

Zur optischen Kennzeichnung verschiedener Zelleneigenschaften ist es zweckmäßig, die Zellen verschieden farbig zu unterlegen. Dazu markiert man die betreffenden Zellen, klickt auf die Markierung mit der rechten Maustaste und öffnet das Menü ZELLEN FORMATIEREN. Dort werden in sechs Registern viele Möglichkeiten angeboten, die Zelle visuell und strukturell zu verändern. Beispielsweise können Rahmen gesetzt, Gitternetzlinien durch weißes Muster unsichtbar gemacht, andere Schriftgrößen, -arten und -farben einstellt, einzelne Buchstaben hoch oder tief gesetzt werden usw.

Wichtiger als die genannten optischen Formatierungen ist jedoch die Zuweisung der "Kategorie" im Register ZAHLEN. Bereits vor der Eingabe sollte man diese Auswahl vornehmen. Allen Zellen, die für Geldbeträge vorgesehen sind, wird eine "Zahl" mit zwei Nachkommastellen und 1.000er Punkt als Trennzeichen zugeordnet; dies betrifft die Zellen B4 und B10. Noch einfacher lässt sich dieses Zahlenformat mit der Tastenkombination <Strg+!> einstellen. Die Geldeinheit (z. B. €, DM, $) mit einzubeziehen ist möglich, aber nicht unbedingt erforderlich. Zweckmäßig ist hingegen, für Prozentangaben auch die Formatierung "Prozent" (mit zwei Dezimalstellen) in den Zellen B5 und C8 vorzunehmen. Zellen, wie B6 und B7, in denen ganze Zahlen stehen sollen, brauchen nicht extra formatiert zu werden, weil ihnen bei Eingabe einer Zahl sofort dieses "Standard"-Format zugeordnet wird.

Zu 2: **Kalenderzeitpunkte**

Die Excel-Tabelle könnte das Aussehen von Bild 1.2e haben. Anstatt die Anzahl der Laufzeitperioden $n_p = m \cdot n$ vorzugeben, werden die Zahlungstermine als Kalendertage eingetragen und daraus später die Laufzeit berechnet. Die Möglichkeiten der Formatierung für Datumsangaben sind im Register ZAHLEN, Kategorie "Datum" aufgelistet.

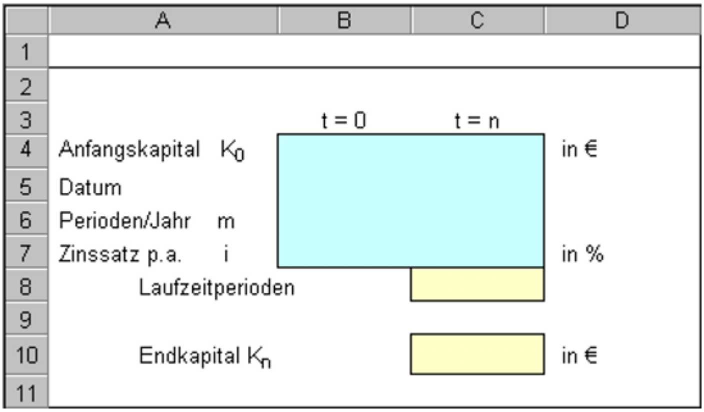


Bild 1.2e Tabellenvorlage zur Berechnung des Kapitalendwertes (Zahlungstermine)

Die Vorlagen in Bild 1.1e und 1.2e sind nur Vorschläge für die ersten und einfachsten Beispiele der Zins- und Zinseszinsrechnung. Weitere Anpassungen an spezielle Aufgabenstellungen sind erforderlich und werden an entsprechender Stelle besprochen.

1.2 Einfache Zinsrechnung

In eine neue Arbeitsmappe (wir wollen sie unter dem Namen "Zinsen.xls" speichern) wird das Arbeitsblatt "Tabelle1" nach dem Muster von Bild 1.1e vorbereitet. Dann kann es mit konkreten Beispielen los gehen.

Beispiel 1.1:	Ein Kapitalbetrag von 5.000 € ist zu 5,5% p.a. bei einfacher Verzinsung ausgeliehen. Wie hoch ist die Rückzahlung, wenn das Geld nach 7 Jahren zurück gefordert wird?

Nachdem die Vorgabewerte $A_0 = 5000$, $i = 5{,}5$ und $n = 7$ in die Tabellenvorlage eingetragen sind, kann in Zelle B10 die Formel zur Berechnung des Endwertes erstellt werden. Jede Formel beginnt mit einem Gleichheitszeichen. In den Formeln erscheinen nicht die im Beispiel vorgegebenen und in die Tabellenfelder eingetragenen Zahlenwerte, sondern sog. *relative Zellbezüge*, d. h. die Bezeichnung der jeweiligen Zelle, in denen der Zahlenwert eingetragen ist. Mit dieser Intension wird Gl. (1.4) wie folgt in Excel-schreibweise umgesetzt:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel in B10	Ergebnis
(1.4)	$K_5 = 5.000 \cdot (1 + 5{,}50 / 100 \cdot 7)$	=B4*(1+B5*B7)	6.925,00

Die Division durch 100 führt Excel selbst aus, vorausgesetzt, der Zelle B5 wurde die Kategorie "Prozent" zugeordnet. Ansonsten könnte auch der dimensionslose Zinssatz (hier: 0,055) in eine als "Standard" formatierte Zelle eingetragen werden.

Die vorerst fertige Excel-Tabelle, die später für unterjährige Rechnungen noch ergänzt wird, zeigt Bild 1.3e. Der Inhalt einer markierten Zelle wird übrigens oben in der sog. Bearbeitungszeile angezeigt und kann hier jederzeit korrigiert werden. Eine Korrektur kann mit ✗ rückgängig gemacht oder mit ✓ bestätigt werden. Für jede Zahlenänderung in den Zellen B4, B5 oder/und B7 wird der neu berechnete Kapitalendwert in Zelle B10 angezeigt, d. h. es können beliebige andere Zahlenbeispiele ausgeführt werden. Es ist zu beachten, dass in Zelle B10 nicht der angezeigte Wert, sondern nur die Formel verändert werden kann!

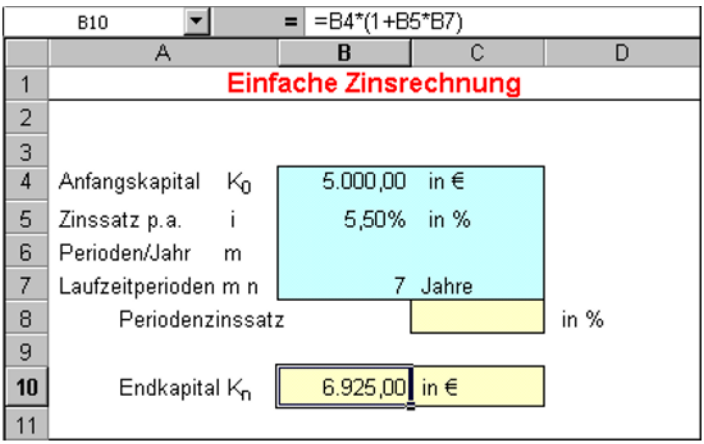


Bild 1.3e Excel-Tabelle für Beispiel 1.1

Für zahlreiche Grundaufgaben der Finanzmathematik hält Excel Makro-Funktionen bereit, mit denen die fehlerfreie Eingabe erleichtert, kontrolliert und erläutert wird. Für die einfache Zinsrechnung existiert eine solche Funktion jedoch nicht. Dies soll Anlass sein, für interessierte Leser die Erstellung einer benutzerdefinierten Funktion zu erklären.

Benutzerdefinierte Funktion

Um eine benutzerdefinierte Funktion zu vereinbaren, ist wie folgt vorzugehen:

– Im Menüpunkt EXTRAS/MAKRO/VISUAL BASIC-EDITOR öffnet sich das Fenster "Microsoft Visual Basic -". Aus dessen Untermenü EINFÜGEN/MODUL kann ein neues Fenster "Modul1 (Code)" eingeblendet werden. Ein blinkender Kursor signalisiert die Eingabebereitschaft für Visual Basic-Code.

– Für eine Excel-Funktion gilt folgender allgemeiner Aufbau:

  Function *Funktionsname(an Funktion übergebene Argumente)*
  Berechnungsvorschrift(en) der Funktion
  End Function

  Das Einrücken der zweiten Zeile dient nur der besseren Übersichtlichkeit. Für die gewünschte Funktion zeigt Bild 1.4e die erforderlichen Eintragungen.

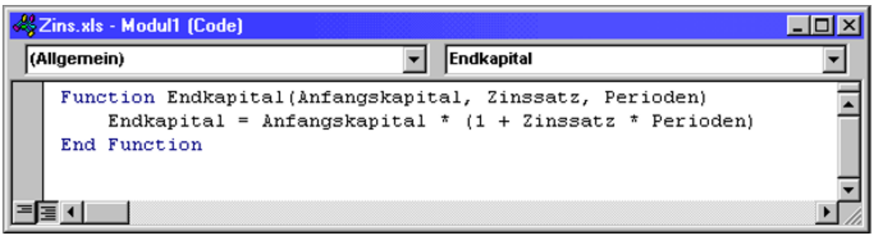


Bild 1.4e Visual Basic Modul für die einfache Zinsrechnung

– In Zelle B11 (B10 soll erhalten bleiben und zum Vergleich dienen) kann nun mit der Schaltfläche f_x (Menü EINFÜGEN/FUNKTION) der Funktions-Assistent aufgerufen und unter der Kategorie "Alle" die neue Funktion ausgewählt werden, um sie für das Beispiel anzuwenden. Das sich öffnende Fenster zeigt Bild 1.5e. Die Eintragung der Zellbezüge kann manuell in diesem Fenster oder durch Anklicken der betreffenden Zellen automatisch erfolgen.

– In der Bearbeitungszeile wird jetzt keine Formel angezeigt, sondern der Name dieser Funktion in Excelschreibweise mit den benutzten Argumenten: =Endkapital(B4;B5;B7). In dieser Form kann die Funktion auch manuell ohne Zuhilfenahme des Assistenten eingetragen werden.

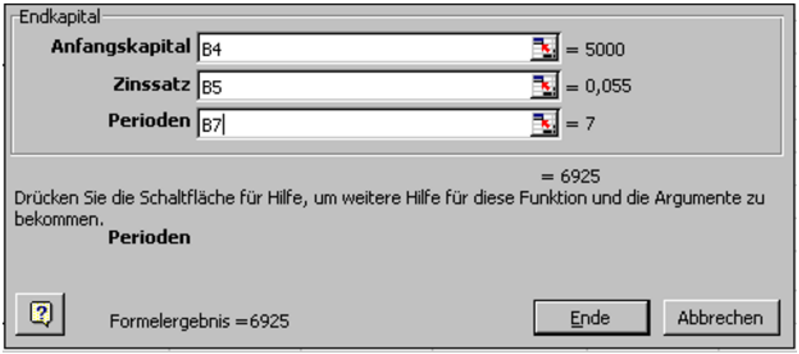


Bild 1.5e Funktions-Assistent für Beispiel 1.1

Beispiel 1.2: Nach Ablauf von 7 Jahren ist ein Kapitalbetrag von 10.000 € zu zahlen (beispielsweise an einen Erben). Welcher Kapitalbetrag ist bei einfacher Verzinsung von 5,5% p.a. heute bereitzustellen?

Beispiel 1.1 ist in der Weise abgewandelt worden, dass nunmehr der Endwert gegeben ist und daraus der Anfangs- oder Barwert bestimmt werden soll. Die Vorgehensweise könnte dieselbe sein mit dem Unterschied, dass in Zelle B10 der Zahlenwert $K_5 = 10000$ und in Zelle B4 eine Excel-Formel (oder Excel-Funktion) zur Berechnung des Barwertes erstellt wird. Dazu wäre Gl. (1.4) nach K_0 umzustellen (vgl. Tabelle 1.2):

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel in B4	Ergebnis
(1.4)	$K_0 = \dfrac{10.000}{1 + 5{,}50/100 \cdot 5}$	=B10/(1+B5*B7)	7.220,22

Dies ist allerdings der umständlichere Weg.

Einfacher ist, eine komfortable Möglichkeit von Excel zu nutzen, die ***Zielwertsuche***. Sie besteht darin, für diejenige Größe, für deren Berechnung eine Excel-Formel oder Excel-Funktion bereits vorliegt, einen Zahlenwert (*Zielwert*) fest vorzugeben und dafür eines der Argumente als Variable zu definieren. Dazu wird in der Tabelle Bild 1.3e die Zielzelle B10 markiert und der Menüpunkt EXTRAS/ZIELWERTSUCHE aufgerufen. Das richtige Ausfüllen des Fensters ist aus Bild 1.6e ersichtlich. Das Ergebnis in B4 lautet $K_0 = 7.220{,}22$.

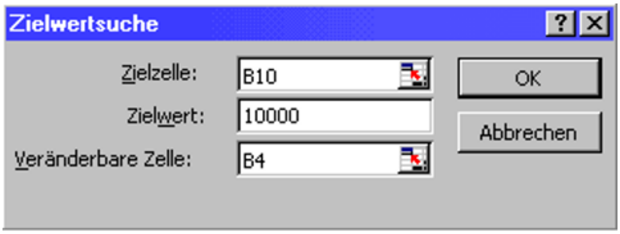


Bild 1.6e Zielwertsuche für Beispiel 1.2

> Beispiel 1.3: Für ein zu gleichen Teilen vererbtes Grundstück im Wert von 24.000 € zahlt der Nutzer an seinen Miterben, der auf die Nutzung verzichtet hat, zu einem späteren Zeitpunkt einen Betrag von 15.315 € aus. Wann wurde das Grundstück übertragen, wenn 4,25 % p.a. Zinsen vereinbart waren?

Die Zahlenwerte K_0 = 12.000 (für den Erbanteil) und i = 4,25% (für den Jahreszinssatz) können in die Zellen B4 bzw. B5 der Tabelle gemäß Bild 1.3e sofort eingetragen werden. Weiterhin ist (wie in Beispiel 1.2) für die Zielzelle B10, in der die Formel oder Funktion steht, der Wert K_n = 15.315 vorgegeben. Gesucht ist die Zeitdauer bis zur Auszahlung des Erbanteils.

Die Lösung erfolgt wiederum über EXTRAS/ZIELWERTSUCHE (analog zu Bild 1.5e) mit B10 als Zielzelle, 15315 als Zielwert und B7 als veränderbare Zelle. Ergebnis: Das Grundstück ist n = 6,5 Jahre vorher übertragen worden.

Bei Verzicht auf die Zielwertsuche muss zur Berechnung der Laufzeit n in Zelle B7 folgende Formel eingetragen werden (vgl. Tabelle 1.2):

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel in B4	Ergebnis
(1.4)	$n = \dfrac{15.315/12.000 - 1}{0,0425}$	=(B10/B4-1)/B7	6,50%

> Beispiel 1.4: Wie hoch ist der Kaufpreis von Finanzierungsschätzen (das sind einfach abgezinste Bundeswertpapiere ohne laufende Zinszahlung) mit 1.000 € Nennwert, einer festen Laufzeit von 2 Jahren und einem vorschüssigen Zinssatz von 5,45 % p.a. Wie hoch ist die Rendite dieses Wertpapiers, verglichen mit nachschüssiger Zinszahlung?

Bei Finanzierungsschätzen wird am Ende der Laufzeit deren Nennwert ausgezahlt. Der Kaufpreis (=Barwert) ergibt sich durch vorschüssige Verrechnung linearer Zinsen mit dem Nennwert gemäß Gl. (1.6).

Wegen der Analogien zur nachschüssigen Zinsrechnung (vgl. Tabelle 1.3 im Teil 1) empfiehlt es sich, die bisher verwendete Excel-Tabelle nach Bild.1.3e als Grundlage für eine neue Tabelle zu nutzen und sie deshalb zunächst innerhalb der Arbeitsmappe "Zinsen.xls" zu kopieren. Dazu klickt man mit der rechten Maustaste unten auf "Tabelle1" der Arbeitsmappe und wählt in dem sich öffnenden Menü "Verschieben/kopieren ...". Wenn die Kopie an zweiter Position stehen soll, muss "Tabelle2" markiert werden. Wichtig ist, links unten das Feld "Kopieren" zu aktivieren, sonst findet nur eine Verschiebung statt (s. Bild 1.7e).

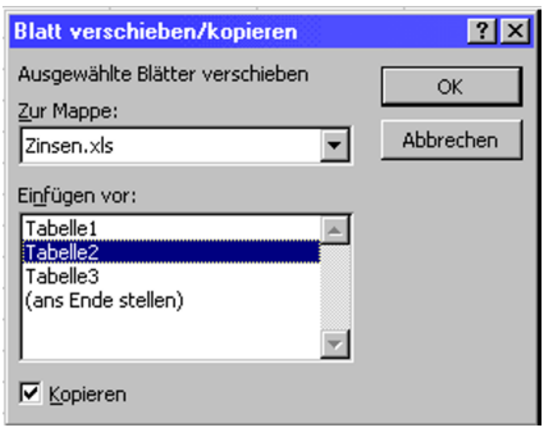


Bild 1.7e Kopieren einer Excel-Tabelle innerhalb der Arbeitsmappe

Die kopierte Tabelle wird mit der Bezeichnung "Tabelle1(1)" eingefügt, was Anlass sein sollte, sich gleich eine andere Bezeichnung zu überlegen, z. B. die zugehörige Bildnummer in diesem Buch (das wäre Bild 1.8e). Das Umbenennen wird durch Anklicken mit der rechten Maustaste oder durch Doppelklicken mit der linken Maustaste zugänglich gemacht.

In der kopierten Tabelle werden die Platzierungen von Anfangs- und Endwert vertauscht und die Vorgabewerte K_n = 1.000, i = 5,45 und n = 2 eingetippt. Die ursprüngliche Excel-Formel in B10 wird durch Einfügen des Minuszeichens korrigiert:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel in B10	Ergebnis
(1.6)	$K_0 = 1.000 \cdot (1 - 5{,}45 / 100 \cdot 2)$	=B4*(1-B5*B7)	891,00

In Bild 1.8e ist die neue Excel-Tabelle, die natürlich auch eine andere Überschrift erhalten sollte, dargestellt.

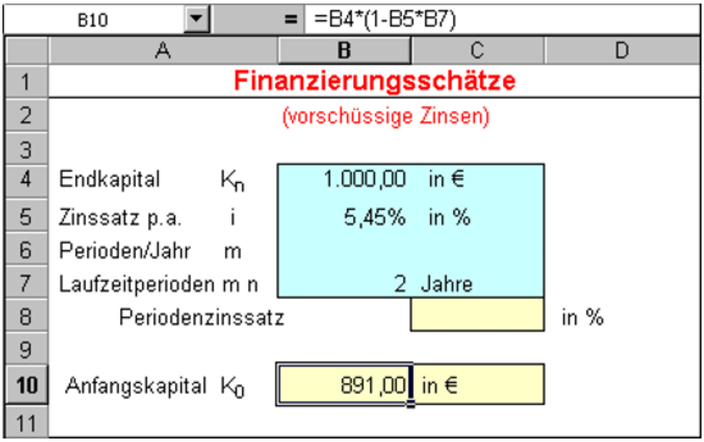


Bild 1.8e Excel-Tabelle für Beispiel 1.4

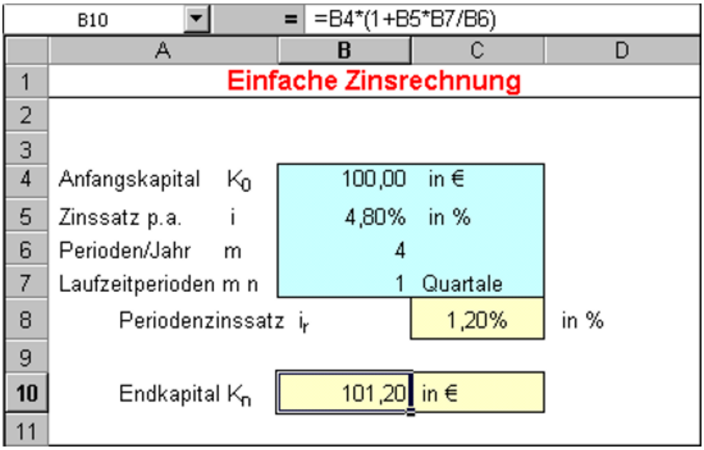
Für welchen jährlichen Zinssatz (Rendite) dieselbe Kapitalentwicklung von 891,00 € auf 1000 € bei *nachschüssiger* Verzinsung eintritt, kann in der zuvor verwendeten Excel-Tabelle (s. Bild 1.3e) mit $K_0 = 891$, $n = 2$ und durch Zielwertsuche für B10 (Zielwert 1000) mit B5 als veränderbare Zelle herausgefunden werden. Als Ergebnis erhält man 6,12 %. In gleicher Weise wird der effektive Jahreszins ausgerechnet, allerdings mit einer anderen Vergleichsbasis (s. Abschn. 1.3.1).

> Beispiel 1.5: Welcher Kaufpreis muss für einen Sparbrief (Nennwert 100 €, Zinsen 4,8 % p.a.), der am 01.03. emittiert wurde, am 01.06. unter Berücksichtigung der Stückzinsen gezahlt werden?

Die seit der Emission aufgelaufenen einfachen Zinsen sind an den Emittenten zu zahlen, werden dem Käufer aber gutgeschrieben und bei der nächsten Zinszahlung in voller Höhe zurückerstattet. Der Kaufpreis erhöht sich um diese sog. Stückzinsen.

Nun kann die Excel-Tabelle Bild 1.3e zunächst wieder kopiert und dann weiter vervollständigt werden, indem die Laufzeit als Zahl unterjähriger Perioden angegeben wird. In unserem Beispiel beträgt die Zeitdifferenz genau 3 Monate oder 1 Quartal. Deshalb ist $m = 4$ (für Quartale) in Zelle B6 als Zahlenwert einzugeben sowie in der Excel-Formel von Zelle B10 einzubauen:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel in B10	Ergebnis
(1.12)	$K_n = 100 \cdot (1 + 0{,}048 \cdot 1/4)$	=B4*(1+B5*B7/B6)	101,20


B10 = =B4*(1+B5*B7/B6)

	A	B	C	D
1	Einfache Zinsrechnung			
2				
3				
4	Anfangskapital K_0	100,00	in €	
5	Zinssatz p.a. i	4,80%	in %	
6	Perioden/Jahr m	4		
7	Laufzeitperioden m n	1	Quartale	
8	Periodenzinssatz i_r		1,20%	in %
9				
10	Endkapital K_n	101,20	in €	
11				

Bild 1.9e Excel-Tabelle für Beispiel 1.5 ($m = 4$)

Bild 1.9e zeigt die nunmehr vollständige Excel-Tabelle, mit deren Hilfe auch die Beispiele 1.1 bis 1.3 lösbar sind, wenn in Zelle B6 $m = 1$ (für Jahre) berücksichtigt wird. Außerdem kann in Zelle C8 der unterjährige relative Zinssatz i_r angezeigt werden, wenn Gl. (1.13) als Excel-Formel =B5/B6 eingegeben wird.

Es soll noch auf eine entbehrliche, aber recht komfortable Möglichkeit aufmerksam gemacht werden, die Periodenbezeichnung in Abhängigkeit von der Zahl der Jahresperioden m automatisch einzutragen. Dazu muss in Zelle C7 folgende Excel-Funktion stehen:

=WENN(B6=1;"Jahre";WENN(B6=4;"Quartale";WENN(B6=360;"Tage";"")))

Die genaue Erläuterung dieser Funktion erfolgt später an anderer Stelle.

Statt Quartale anzugeben (was in diesem Beispiel nur zufällig möglich ist), müssen im Allgemeinen die Zinstage gezählt werden. Dabei ist zu beachten, dass bei der kaufmännischen Zinsrechnung der Monat 30 Zinstage und das Jahr 360 Tage hat, und dass für den ersten Tag keine Zinsen berechnet werden. Im Beispiel beträgt die Laufzeit 90 Zinstage. Bild 1.10e zeigt die erforderlichen Eintragungen sowie das Ergebnis, das mit Bild 1.9e übereinstimmen muss.

C8 = =B5/B6

	A	B	C	D
1	**Einfache Zinsrechnung**			
2				
3				
4	Anfangskapital K_0	100,00	in €	
5	Zinssatz p.a. i	4,80%	in %	
6	Perioden/Jahr m	360		
7	Laufzeitperioden m n	90	Tage	
8	Periodenzinssatz i_r		0,013%	in %
9				
10	Endkapital K_n	101,20	in €	
11				

Bild 1.10e Excel-Tabelle für Beispiel 1.5 (m = 360)

Das Zählen der Zinstage zwischen Kalenderterminen ist müßig und kann Excel auch selbst ausführen. Dazu wird die Tabellenvorlage von Bild 1.2e verwendet. Darin sind nicht die Laufzeitperioden anzugeben, sondern die beiden Zahlungstage, Beginn und Ende der Laufzeit, im Kalenderformat (s. Bild 1.11e).

C8 = =TAGE360(B5;C5;WAHR)*B6/360

	A	B	C	D
1	**Einfache Zinsrechnung**			
2				
3		t = 0	t = n	
4	Anfangskapital K_0	100,00		in €
5	Datum	01.03.00	01.06.00	
6	Perioden/Jahr m	360		
7	Zinssatz p.a. i	4,80%		
8	Laufzeitperioden		90	Tage
9				
10	Endkapital K_n		101,20	in €
11				

Bild 1.11e Excel-Tabelle für Beispiel 1.5 (m = 360)

Die genaue Zahl der zwischen diesen beiden Kalendertagen liegenden Zinstage kann die Excel-Funktion =TAGE360( ) nach der in Deutschland üblichen kaufmännischen Zinsrechnung bestimmen. Dazu wird in Zelle C8 mit f_x der Funktions-Assistent aufgerufen, unter der Kategorie "Datum & Zeit" diese Funktion gesucht und für Ausgangs- und Enddatum B5 bzw. C5 eingetippt (oder in der Tabelle angeklickt). Das Fenster des

Funktions-Assistenten, das dem für Beispiel 1.1 selbst erstellten Fenster ähnelt (vgl. Bild 1.5e), zeigt Bild 1.12e. Damit die Zinstage in andere Laufzeitperioden (z. B. Monate) umgerechnet werden können, muss noch mit $m/360$ multipliziert werden (vgl. Bild 1.11e).

Im Beispiel ergeben sich für $m = 360$, 12 oder 4 die Werte 90, 3 bzw. 1 als Zahl der Laufzeitperioden. Analog zur Excel-Tabelle Bild 1.9e (Zelle C7) kann die Formel zur Anzeige der Zeiteinheit in Abhängigkeit von m in Zelle D8 kopiert und angepasst werden.

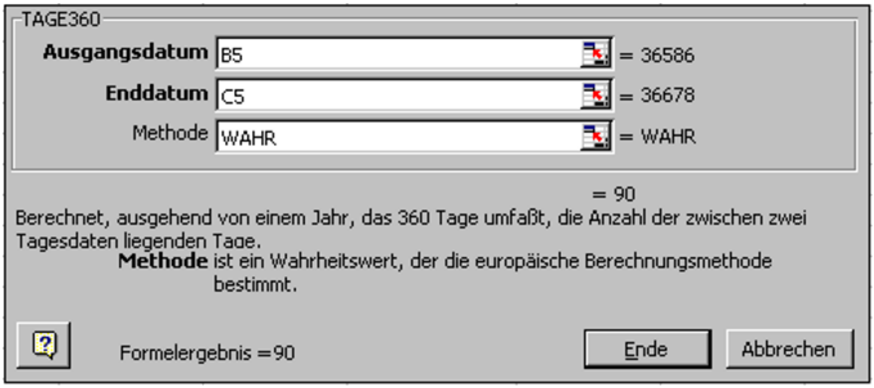


Bild 1.12e Funktions-Assistent zur Ermittlung der Zinstage

Die Berechnung des Endkapitals in Zelle C10 erfolgt nach derselben Formel wie in Zelle B10 von Bild 1.10e, allerdings mit anderen Zellbezügen für Zinssatz und Laufzeit:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel in C10	Ergebnis
(1.12)	$K_n = 100 \cdot (1 + 0{,}048 \cdot 90/360)$	=B4*(1+B7*C8/B6)	101,20

> Beispiel 1.6: Ein Handelswechsel über 3.720,00 €, der am 25.6. fällig ist, wird am 16.4. eingelöst. Welcher Betrag ist bei einem Diskontsatz von 4% zu zahlen?

Wie in Beispiel 1.4 werden im kaufmännischen Wechselverkehr die Zinsen vom Endwert als sog. Diskont berechnet und vom Endwert subtrahiert (Fall C in Abschn. 1.2):

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel in B10	Ergebnis
(1.6)	$K_0 = 3.720 \cdot (1 - 0{,}04 \cdot 69/360)$	=C4*(1-B7*C8/B6)	3.691,48

Unter Ausnutzung der in Tabelle 1.3 des theoretischen Teils gezeigten Analogien kann die zuvor erstellte Excel-Tabelle Bild 1.11e in ein anderes Arbeitsblatt kopiert und mit wenigen Änderungen entsprechend umgestaltet werden (s. Bild 1.13e).

C10 = =C4*(1-B7*C8/B6)

	A		B	C	D
1	**Einfache Diskontrechnung**				
2					
3			t = 0	t = n	
4	Endkapital	K_n		3.720,00	in €
5	Datum		16.04.00	25.06.00	
6	Perioden/Jahr	m	360		
7	Zinssatz p.a.	i	4,00%		
8	Laufzeitperioden			69	Tage
9					
10	Barwert K_0			3.691,48	in €
11					

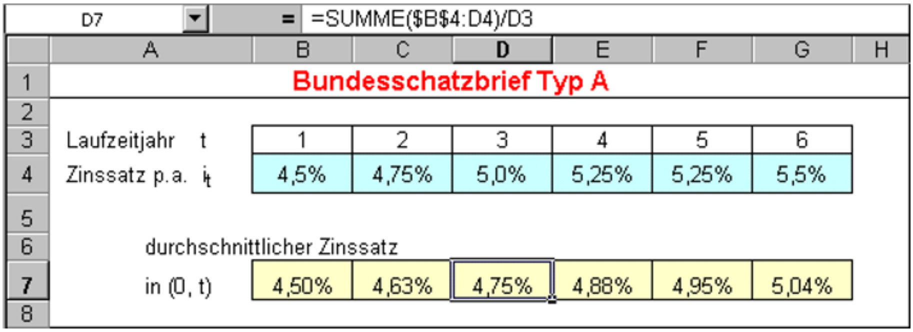
Bild 1.13e Excel-Tabelle für Beispiel 1.6

Beispiel 1.7: Bundesschatzbriefe vom Typ A haben eine Laufzeit von bis zu 6 Jahren mit jährlich steigenden Zinssätzen. Sie sind nach dem ersten Laufzeitjahr jederzeit rückzahlbar. Die Zinsen werden jährlich nachschüssig (oder bei Rückgabe) ausgezahlt, was bei deren Konsumierung einer einfachen Verzinsung gleich kommt.

Es ist der durchschnittliche Zinssatz in Abhängigkeit von der Laufzeit zu berechnen, wenn folgende Jahreszinssätze gelten (Konditionen vom 1.9.2000):

Jahr	1	2	3	4	5	6	
Zinssatz	4,50	4,75	5,00	5,25	5,25	5,50	in %

Für diese Aufgabe muss eine neue Tabelle nach dem Muster von Bild 1.14e erstellt werden. Wenn in der Arbeitsmappe "Zinsen.xls" kein leeres Arbeitsblatt vorhanden ist, wird über das Menü EINFÜGEN/TABELLE eine neue Tabelle aufgerufen. Sie erscheint nicht wunschgemäß hinter der letzten Tabelle, sondern davor. Indem man den Mauszeiger unten auf den Namen der neuen Tabelle legt, lässt sie sich mit gedrückter linker Maustaste leicht nach rechts verschieben. Mit anschließendem Doppelklick kann man die von Excel gewählte Bezeichnung gleich noch in "Bild 1.14e" umbenennen.



D7 = =SUMME($B$4:D4)/D3

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Bundesschatzbrief Typ A							
2								
3	Laufzeitjahr t	1	2	3	4	5	6	
4	Zinssatz p.a. i_t	4,5%	4,75%	5,0%	5,25%	5,25%	5,5%	
5								
6	durchschnittlicher Zinssatz							
7	in (0, t)	4,50%	4,63%	4,75%	4,88%	4,95%	5,04%	
8								

Bild 1.14e Excel-Tabelle für Beispiel 1.7

Nach dem Eintragen der vorgegebenen Zinssätze in Zeile 4 können die Berechnungsformeln in Zeile 6 eingegeben werden. Grundlage ist Gl. (1.16).

– Für die Laufzeit $t = 1$ Jahr ist $\bar{i} = i_1$. Deshalb wird in Zelle B6 der Wert aus Zelle B4 mit Hilfe der Excel-Formel =B4 einfach übernommen.

– Der durchschnittliche Zinssatz für die Laufzeit $t = 2$ Jahre würde sich in Zelle C6 mit der Excel-Formel =(B4+C4)/C3 ergeben.

– Es gibt noch eine andere Variante: die Nutzung der Excel-Funktion =SUMME( ). Die zu addierenden Zahlen werden in der Klammer entweder einzeln benannt und durch Semikolon getrennt oder – wenn diese Zahlen unmittelbar neben- oder untereinander stehen – als geschlossener Bereich mit Doppelpunkt definiert. Für Zelle D6 ($t = 3$) sieht das folgendermaßen aus:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel in C6	Ergebnis
(1.16)	$\bar{i} = \dfrac{0{,}045 + 0{,}0475 + 0{,}05}{2}$	=SUMME(B4:D4)/D3	4,75 %

Die Summenfunktion kann für eine markierte Zelle (hier D6) unter Zuhilfenahme des Funktions-Assistenten aufgerufen werden. In der oberen Symbolleiste gibt es dafür auch die spezielle Schaltfläche Σ. Excel bietet generell einen Vorschlag für den zu summierenden Bereich an und umrahmt ihn in der Tabelle mit einer umlaufenden gestrichelten Linie. Bei diesem Beispiel wird der richtige Bereich B4:D4 nicht automatisch gefunden, sondern muss mit gedrückter linker Maustaste neu markiert werden. Anschließend wird oben in der Bearbeitungszeile noch die Division durch die Laufzeit (Zelle D3) ergänzt.

Anmerkung: Das Ergebnis $\bar{i} = 4{,}75$ % ist übrigens nicht gleichzusetzen mit dem effektiven Jahreszins (Rendite), denn dabei wird im Gegensatz zu dieser Darstellung die Wiederanlage der Zinsen zu denselben Konditionen, also Zinseszinsrechnung, unterstellt.

Kopieren von Formeln

Die mehrfache Wiederholung des gleichen Vorgehens in den anderen Zellen von Zeile 6 kann man sich ersparen, wenn man die Technik für das Kopieren von Formeln beherrscht. Dazu führt man den Mauszeiger auf die rechte untere Ecke der markierten Zelle D6, die mit einem kleinen Quadrat gekennnzeichnet ist. Der Mauszeiger verwandelt sich in ein schwarzes Kreuz. Mit gedrückter linker Maustaste zieht man die angeklickte Ecke nach rechts in Zelle E6, wobei sich die Zellbezüge innerhalb der kopierten Formel systematisch verändern.

Die kopierte Formel in Zelle E6 ist so allerdings noch fehlerhaft. Sie bezieht sich zwar auf die richtige Laufzeit $t = 4$, aber die Summe wird wiederum nur aus drei Zinssätzen C4:E4 gebildet. Dieser Mangel wird beseitigt, indem in der ursprünglichen Formel der relative Zellbezug =B4 durch zusätzliche Dollarzeichen in einen *absoluten Zellbezug* =$B$4 umgewandelt wird (s. Bild 1.14e). Eine so gekennzeichnete Zelle bleibt beim Kopieren unverändert. Nach dieser Korrektur kann Zelle D6 nach rechts bis zur Spalte G und auch nach links bis zur Spalte B kopiert werden.

Weitere Möglichkeiten zum Kopieren von Formeln sind über die Excel-Hilfe zu erfahren.

1.3 Zinseszinsrechnung

1.3.1 Jährliche Zinseszinsen

Beispiel 1.8: Nach der Geburt ihres Kindes haben die Eltern 10.000 € bei einer Bank mit einem Festzinssatz von 6,3 % p. a. angelegt. Wie hoch ist das zinseszinslich angesammelte Endkapital am 18. Geburtstag des Kindes?

Als Tabellenvorlage ist die in Bild 1.3e dargestellte Excel-Tabelle geeignet, wobei für deren Kopie weiterhin die Arbeitsmappe "Zinsen.xls" genutzt werden kann. Die jährlich nachschüssige Zinseszinsrechnung gemäß Gl. (1.17) erfordert nur wenige Änderungen gegenüber der einfachen Zinsrechnung nach Gl. (1.4):

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel in B10	Ergebnis
(1.17)	$K_{18} = 10.000 \cdot (1 + 6{,}30/100)^{18}$	=B4*(1+B5)^B7	30.033,00

Bild 1.15e zeigt die neue Excel-Formel in Zelle B10. Der zum Potenzieren verwendete Operator ^ wird nach dem Eintippen erst sichtbar, wenn man anschließend noch die

Leertaste betätigt. Ansonsten gibt es im Vergleich zu Bild 1.3e aus Excel-Sicht nichts weiter zu berücksichtigen.

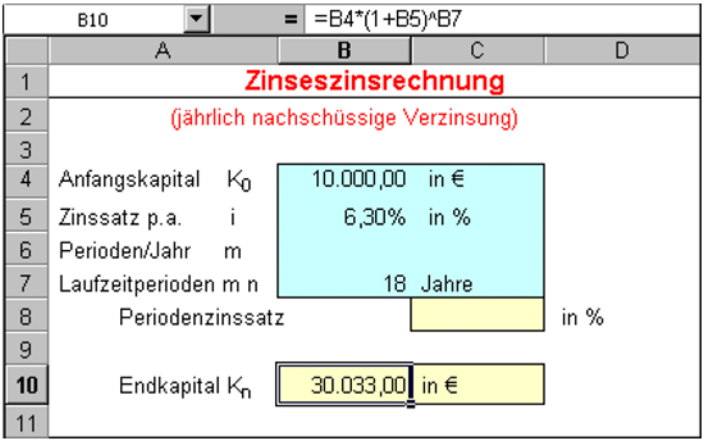


Bild 1.15e Excel-Tabelle für Beispiel 1.8

Für die Zinseszinsrechnung kann auch die Excel-Funktion =ZW( ) genutzt werden, die unter der Kategorie "Finanzmathematik" des Funktions-Assistenten zu finden ist (s. Bild 1.16e).

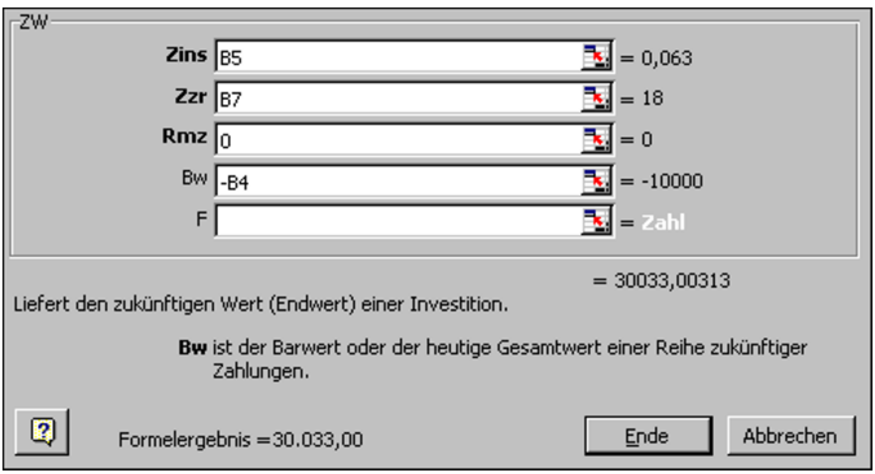


Bild 1.16e Excel-Funktion für Zinseszinsrechnung

Die Zahl der Laufzeitperioden wird bei Excel mit Zzr (Zahlungszeitraum) abgekürzt. Weiterhin ist in dieser Funktion vorgesehen, regelmäßige Zahlungen Rmz zu berücksichtigen, was hier nicht der Fall ist und deshalb diese Parameterzeile unausgefüllt bleibt oder mit Null versehen wird. Dagegen muss als Barwert Bw das Anfangskapital K_0 aus Zelle B4 berücksichtigt werden. Excel beachtet außerdem die Zahlungsrichtung. Wenn K_0 als Auszahlung und K_n als Einzahlung interpretiert werden, ist B4 mit negativem Vorzeichen zu versehen. Die Excel-Funktion lautet dann komplett: =ZW(B5;B7;0;-B4) und führt zu demselben Ergebnis wie die Excel-Formel.

Beispiel 1.9:	Aus einer Geschäftsbeteiligung soll nach Ablauf von 4 Jahren eine Gewinnausschüttung von 5.000 € getätigt werden. Wie groß ist der Barwert dieser zukünftigen Ausschüttung heute, wenn mit 8% p.a. Zinseszinsen gerechnet wird?[59]

Die Umstellung von Gl. (1.17) nach K_0 (s. Tabelle 1.5) ist nicht notwendig, sondern es kann die für Beispiel 1.8 entwickelte Excel-Tabelle (Bild 1.15e) genutzt werden. Analog zu Beispiel 1.2 erhält man den Barwert durch *Zielwertsuche* für Zelle B10, wo die Excel-Formel oder Excel-Funktion steht, mit dem Zielwert 5000 und B4 als veränderliche Zelle. Der gesuchte Barwert beträgt 3.675,15 € (s. Bild 1.17e)

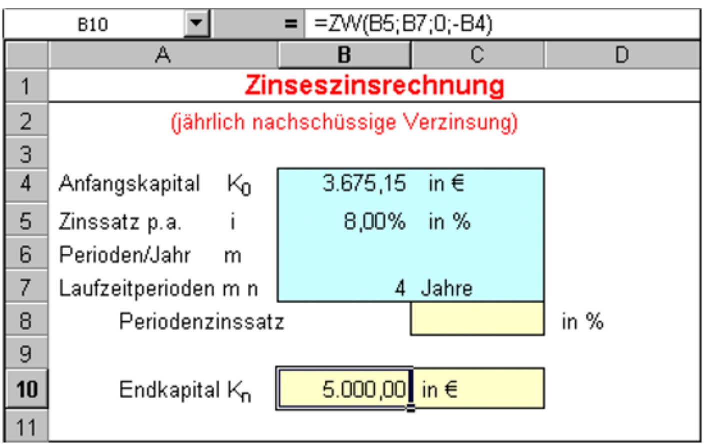


Bild 1.17e Excel-Tabelle für Beispiel 1.9

[59] Vgl. Kobelt/Schulte (1999), S. 47

> Beispiel 1.10: a) Nach welcher Laufzeit würde sich ein Kapitalbetrag bei 8% jährlichen Zinseszinsen verdoppeln?
>
> b) Bei welchem Zinssatz würde sich ein Kapitalbetrag nach 10 Jahren Laufzeit verdoppeln?

Auch für diese beiden Aufgabenstellungen muss die Zinseszinsformel Gl. (1.17) nicht umgestellt werden, wenn in der Excel-Tabelle nach Bild 1.17e ein beliebiger Barwert (z. B. 100 €) in B4 sowie Zinssatz oder Laufzeit in B5 bzw. B7 eingetragen werden. Mit *Zielwertsuche* in B10 für das Doppelte von B4 als Zielwert (also 200 €) kann die jeweils gesuchte Größe als veränderliche Zelle deklariert und so ihr Wert bestimmt werden.

Als Lösungen erhält man für a) i = 7,18 % und für b) n = 9 Jahre.

> Beispiel 1.11: Auf welchen Betrag wächst ein Sparkonto von 1.000 € bei 3,5 % p.a. Zinsen nach $2^1/_2$ Jahren?
>
> Welchen Einfluss hat das Kalenderdatum der Einzahlung (z. B. 1.1., 1.7. oder 1.10.), wenn es sich um ein Sparbuch handelt?

Das Problem besteht darin, dass durch die Banken innerhalb einer Jahresperiode in der Regel mit einfachen Zinsen gemäß Gl. (1.4) gerechnet wird, die nach jeweils einem ganzen Laufzeitjahr "kapitalisiert" (d. h. mit dem Grundkapital verrechnet) werden. So kommt der jährlich nachschüssige Zinseszinseffekt zustande, wenn die Laufzeit mindestens zwei (ganze) Jahre umfasst. Für unvollendete Laufzeitjahre verbleibt dann immer ein Rest von einfachen Zinsen. Diese sogenannte "gemischte Verzinsung" ergibt für das Beispiel:

Gl.	Zahlenrechnung	Ergebnis
(1.19)	$K_n = 1000 \cdot (1 + 3{,}5/100)^2 \cdot (1 + 3{,}5 * 0{,}5/100)$	1.089,97

Für die Umsetzung in eine Excel-Tabelle sollen zwei Versionen vorgestellt werden. Zunächst kann die in Bild 1.15e dargestellte Tabelle wieder innerhalb der Arbeitsmappe kopiert und dann entsprechend erweitert werden (s. Bild 1.18e).

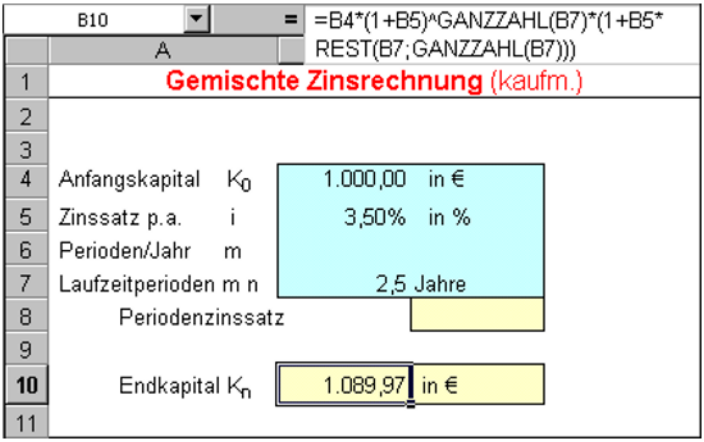


Bild 1.18e Excel-Tabelle für Beispiel 1.11 (Version 1)

Die als Dezimalzahl eingegebene Laufzeit muss in einen ganzzahligen Anteil n_1 und in den Rest n_2 aufgeteilt werden. Das erreicht man durch die Excel-Funktionen =GANZZAHL(B7) bzw. =REST(B7;GANZZAHL(B7)), wobei in der Funktion für den Rest die erstgenannte Funktion den Divisor darstellt.

Die Laufzeit als Dezimalzahl anzugeben ist mit Ausnahme von Halb- oder Vierteljahren unüblich. Statt dessen wird sie möglichst in Jahresbruchteilen, bezogen auf Halbjahre, Quartale, Monate oder Wochen angegeben, die unabhängig von der Zahl der Kalendertage jeweils als gleichlang angesehen werden. Für die $2^1/_2$ Jahre in unserem Beispiel kommen Halbjahre ($m = 2$), Quartale ($m = 4$), Monate ($m = 12$) oder Wochen ($m = 52$) und letztendlich auch Zinstage ($m = 360$) in Frage. Diese Wahlmöglichkeit wird nun in der Excel-Tabelle von Bild 1.18e zusätzlich berücksichtigt. Für $m = 4$ (Quartale) würde sich beispielsweise ergeben (vgl. Bild 1.19e):

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel in B10	Ergebnis
(1.19)	$n_1 = 8/4$	=GANZZAHL(B7/B6)	2 a
	$n_2 = (10-8)/4$	=REST(B7;B6)/B6	0,5 a

Das Ergebnis ist immer das gleiche, auch wenn ein anderes m gewählt wird.

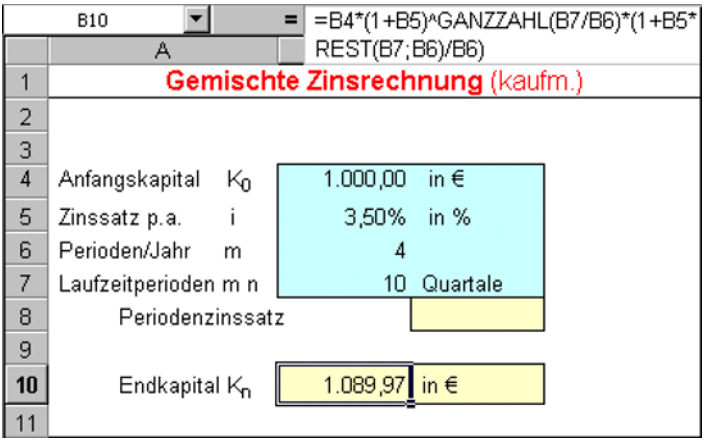


Bild 1.19e Excel-Tabelle für Beispiel 1.11 (Version 2)

Für den Fall, dass die Laufzeit nicht durch eines der $m < 360$ ganzzahlig teilbar ist, müssen bei Anwendung der Excel-Tabelle Bild 1.19e die Zinstage zwischen Zahlungsterminen manuell gezählt werden, was sehr umständlich ist. Deshalb soll noch eine weitere Version gezeigt werden, die auf der Excel-Tabelle Bild 1.11e aufbaut und gemäß Bild 1.20e modifiziert werden muss. Den ganzzahligen Laufzeitanteil in Jahren für Zelle C8 erhält man mittels der zusammengesetzten Excel-Funktion

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel in C8	Ergebnis
(1.19)	$n_1 = 720/360$	=GANZZAHL(TAGE360(B5;B7;WAHR)/360)	2 a

Das Ergebnis von Zelle C8 kann zur Berechnung des Laufzeitrestes in Zelle B10 herangezogen werden. Nun ist eine taggenaue gemischte Zinsrechnung einfacher zu bewerkstelligen.

C10 `=B4*(1+B7)^C8*(1+B7*(TAGE360(B5;C5;WAHR)/360-C8))`

	A	B	C	D
1	**Gemischte Zinsrechnung** (kaufm.)			
2				
3		t = 0	t = n	
4	Anfangskapital K_0	1.000,00		in €
5	Datum	01.01.98	01.07.00	
6	Perioden/Jahr m	1		
7	Zinssatz p.a. i	3,50%		
8	Laufzeitperioden		2	Jahre
9				
10	Endkapital K_n		1.089,97	in €
11				

Bild 1.20e Excel-Tabelle für Beispiel 1.11 (Version 3a)

Bei Sparbuch-Konten der deutschen Sparkassen ist noch die Besonderheit zu beachten, dass die Zinszahlung nicht abhängig vom Beginn der Laufzeit erfolgt, sondern unabhängig davon jeweils am Ende eines jeden Kalenderjahres. Bei einer Einzahlung auf das Sparkonto inmitten des Kalenderjahres müsste in einem ersten Schritt zunächst der Kontostand nach der ersten Zinszahlung am Jahresende berechnet werden, um so in den jährlichen Zinszahlungsrhythmus zu kommen. Dies in der Excel-Tabelle zu realisieren, ist in verschiedener Weise möglich.

Hier bietet sich an, für den Kontostand am Ende des Einzahlungsjahres zunächst eine andere geeignete Excel-Tabelle zu benutzen, nämlich die aus Bild 1.11e. Erfolgte die Einzahlung beispielsweise am 01.10.98, so ergäbe sich per 01.01.99 (90 Zinstage) ein Kontostand von 1.008,75 €. Dieser Wert aus Zelle C10 in Tabelle "Bild 1.11e" (so wurde sie hier benannt) kann direkt in die Tabelle von Bild 1.20 e übernommen werden. Anstelle den Zahlenwert einzutragen, setzt man in Zelle B4 ein Gleichheitszeichen, geht zur Tabelle "Bild 1.11e" und klickt dort auf Zelle C10. Die interne Excel-Schreibweise für diesen relativen Zellbezug aus einer anderen Tabelle ist in Bild 1.21e zu ersehen. Die Bezeichnung der Tabelle wird also in Hochkomma gesetzt und mit einem Ausrufezeichen abgeschlossen. Dann erst folgt die Zellenbezeichnung.

Die $2^1/_2$-jährige Laufzeit endet in unserem Beispiel am 01.04.01 mit dem Resultat, dass der Zinsbetrag bzw. das Endkapital einen höheren Wert hat. Kein Unterschied wäre aufgetreten, wenn die Einzahlung am 01.07.98 erfolgt wäre (was selbst nachgeprüft werden kann).

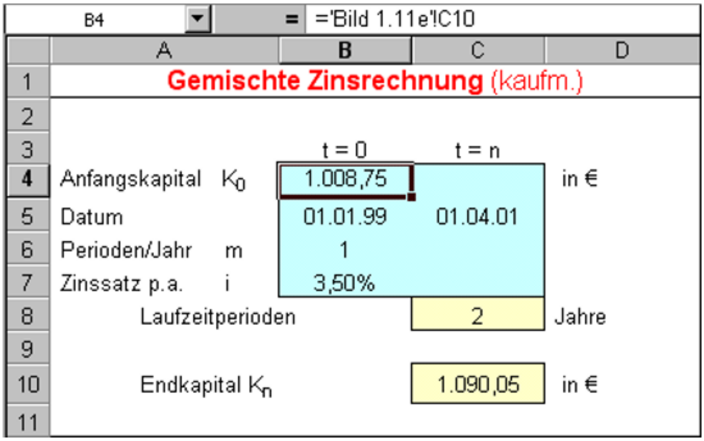


Bild 1.21e Excel-Tabelle für Beispiel 1.11 (Version 3b)

> Beispiel 1.12: Auf welchen Betrag würde das Sparkonto von Beispiel 1.11 anwachsen, wenn unterjährig exponentielle Verzinsung erfolgt?

Aus Gl. (1.20) ist zu ersehen, dass bei unterjährig exponentieller Verzinsung die Laufzeit nicht mehr in ganze und gebrochene Jahresanteile untergliedert werden muss. Für den neuen EU-Berechnungsmodus der Effektivzinsberechnung gilt dies uneingeschränkt, wenn die Laufzeit in Form von ganzzahligen Vielfachen unterjährlicher Perioden n_p ausgedrückt werden kann, wie in diesem Beispiel. Wenn dies nicht der Fall ist, sind Besonderheiten zu beachten, auf die in Abschn. 2.5 noch ausführlich einzugehen ist.

Wenn als unterjährige Perioden wiederum $m = 4$ Quartale gewählt werden, ist wie folgt zu rechnen:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel in B10	Ergebnis
(1.21)	$K_5 = 1000 \cdot (1 + 3{,}5/100)^{10/4}$	=B4*(1+B5)^(B7/B6)	1.089,81

Die Umsetzung dieser Rechnung erfolgt in einer Kopie der Excel-Tabelle von Bild 1.19e, die unter Anwendung von Gl. (1.21) modifiziert wird (s. Bild 1.22e).

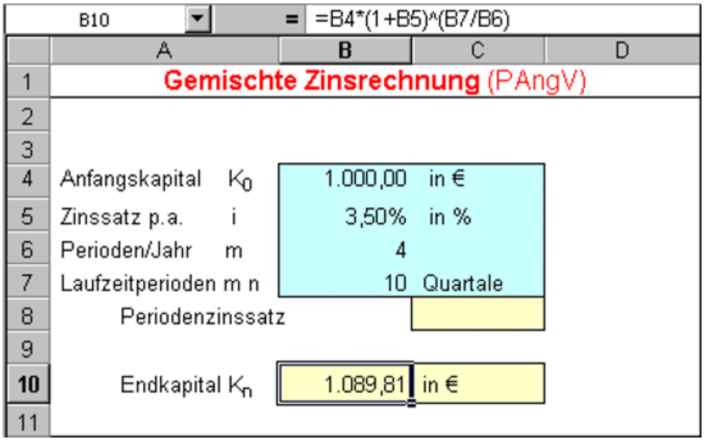


Bild 1.22e Excel-Tabelle für Beispiel 1.12

1.3.2 Unterjährlich nachschüssige Zinseszinsen

Beispiel 1.13:	Für kurzfristige Geldanlagen schreibt eine Bank vierteljährlich 1,2% einfache Zinsen gut. Ein Unternehmer möchte 120.000 € für 9 Monate anlegen. Welcher Kapitalbetrag wird zurückgezahlt, und wie hoch ist der effektive Jahreszins?

Wenn von einfachen Zinsen die Rede ist, ergibt sich der vierteljährliche Zins nach Gl. (1.13) aus einem (nominellen) Jahreszins von 4,8 %. Durch die vierteljährige Kapitalisierung der Zinsen entsteht ein unterjähriger Zinseszinseffekt gemäß Gl. (1.23). Die Laufzeit beträgt $n = {}^3/_4$ Jahre bzw. $n_p = 3$ Laufzeitperioden (Quartale). Demnach ist folgende Rechnung durchzuführen:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel in B10	Ergebnis
(1.23)	$K_3 = 120.000 \cdot (1 + 4{,}8/400)^3$	=B4*(1+B5/B6)^B7	124.372,05

Dazu wird die Excel-Tabelle in Bild 1.15e um die unterjährige Periodizität ergänzt, indem aus dem Jahreszinssatz in Zelle C8 der relative Zinssatz =B5/B6 errechnet und anstelle von B5 in der Excel-Formel berücksichtigt wird (s. Bild 1.23e).

Zur Bestimmung des effektiven Jahreszinses muss eine *Vergleichsrechnung* durchgeführt werden, die auf unterjährig exponentieller Verzinsung gemäß Gl. (1.26) beruht.

Dem effektiven Jahreszinssatz entspricht nach Gl. (1.24) der unterjährig konforme Zinssatz i_k, der in Zelle C8 mit der Excel-Formel =(1+B5)^(1/B6)-1 errechnet werden kann. Nur um diese eine Formel unterscheidet sich die Excel-Tabelle für die Vergleichrechnung (s. Bild 1.24e) von der in Bild 1.23e. Wenn nun mittels Zielwertsuche in Zelle B10 derselbe Kapitalendwert in Abhängigkeit von Zelle B5 gesucht wird, erhält man als effektiven Jahreszins i_{eff} = 4,89 %. Demnach ist i_{eff} derjenige Jahreszinssatz, der bei unterjährig exponentieller Verzinsung (entsprechend der PAngV) zu demselben Kapitalendwert führt, wie der nominelle Zinssatz i, wenn innerhalb der unterjährigen Perioden eine lineare Verzinsung mit dem relativen Zinssatz erfolgt. Zu demselben Ergebnis wäre man übrigens gekommen, wenn die Zielwertsuche in Zelle C8 mit dem Zielwert 1,2 % durchgeführt worden wäre.

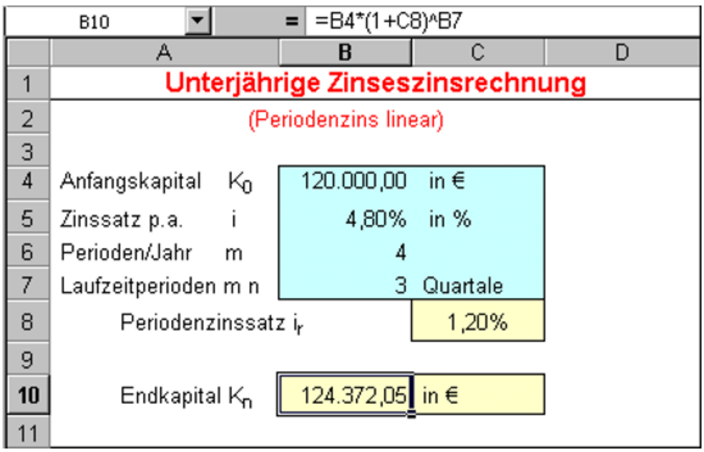


Bild 1.23e Excel-Tabelle für Beispiel 1.13 (unterjährig linear)

Die Excel-Tabelle nach Bild 1.24e ersetzt die Tabelle in Bild 1.15e, weil sie auch für $m = 1$, also für Jahresperioden, gilt. Ebenso würde diese Tabelle mit $m = 0{,}5$ auch für 2-Jahresperioden anzuwenden sein, falls dieser Fall praktisch einmal zutreffen sollte.

Nach Gl. (1.26) ergibt sich dasselbe Endkapital bei *jährlicher* Zinseszinsrechnung, weil die Kapitalisierungszeitpunkte der Zinsen bei unterjährig exponentieller Verzinsung ohne Bedeutung sind. Deshalb kann diese Aufgabe ebenso mit der Excel-Tabelle Bild 1.22e gelöst werden. Um das nachzuprüfen ist in die Tabelle Bild 1.22e entweder der genaue Wert des Effektivzinssatzes (am besten durch Kopieren) zu übertragen oder mit Zielwertsuche für Zelle B10 der Endwert vorzugeben und daraus der Jahreszinssatz zu bestimmen.

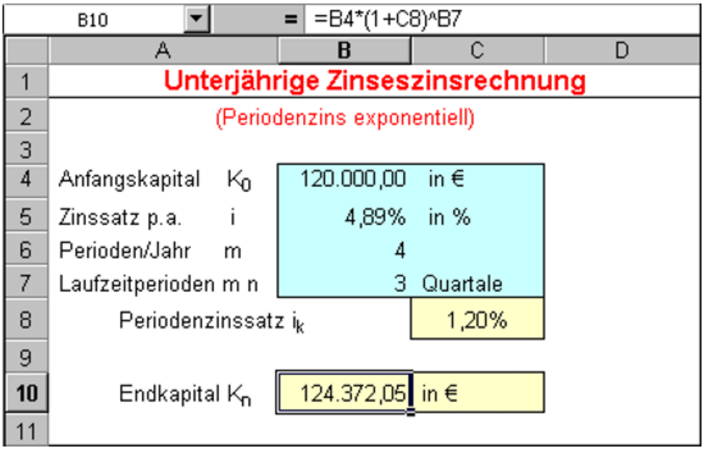


Bild 1.24e Excel-Tabelle für Beispiel 1.13 (unterjährig exponentiell)

1.3.3 Jährlich vorschüssige Verzinsung

Analoges Anwendungsgebiet zur jährlich vorschüssigen Verzinsung ist die (arithmetisch-) degressive Abschreibung, die auch als Buchwert-Abschreibung bezeichnet wird. In Gl. (1.18) entspricht K_0 dem Buchwert BW_t, der – ausgehend vom Anschaffungswert AW – durch Multiplikation mit dem konstanten Abschreibungsfaktor $(1-i)$ von Jahr zu Jahr sukzessiv herabgesetzt wird. Die Anpassung von Gl. (1.18) an die Abschreibungsrechnung wurde in Gl. (1.29) vorgenommen.

Beispiel 1.14:	Eine Maschine mit einem Anschaffungswert von 60.000 € soll 7 Jahre genutzt werden. Wie entwickeln sich die jährlichen Buchwerte bei degressiver Abschreibung mit jährlichen Abschreibungssätzen von 20, 30, 50 und 70% ? Die Entwicklung der Buchwerte über der Nutzungsdauer im Vergleich zur linearen Abschreibung ist grafisch darzustellen.

Für die Maschine unseres Beispiels wird ein Abschreibungsplan erstellt, der nicht nur den sog. *Restbuchwert* nach Gl. (1.29) am Ende der Nutzungsdauer $n = 7$, sondern auch die Buchwerte am Ende jedes Nutzungsjahres t aufzeigt. In der in Bild 1.25e wiedergegebenen Excel-Tabelle ist in Zeile 10 für die unterschiedlichen i der Anschaffungswert AW eingetragen; das entspricht dem Ausgangszustand bei $t = 0$. In der gleichen Spalte darunter sind jeweils die Buchwerte am Jahresende berechnet worden. Für $t = 2$ und einen Abschreibungssatz von $i = 20$ % ist in Zelle B12 folgende Rechnung durchzuführen:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel in B12	Ergebnis
(1.28)	$BW_2 = 60 \cdot (1 - 20/100)^2$	=B10*(1-B9)^A12	38,400

B12 = =WENN($A12="";"";B$10*(1-B$9)^$A12)

	A	B	C	D	E	F
1	**Degressive** (Buchwert-)**Abschreibung**					
2						
3						
4	Anschaffungswert (T€)		60,000			
5						
6	Nutzungsdauer (Jahre)		7			
7						Lineare
8	Nutzungsjahr	Buchwerte (T€) bei einem Abschreibungssatz von				Abschreibung
9		20%	30%	50%	70%	14,3%
10	0	60,000	60,000	60,000	60,000	60,000
11	1	48,000	42,000	30,000	18,000	51,429
12	2	38,400	29,400	15,000	5,400	42,857
13	3	30,720	20,580	7,500	1,620	34,286
14	4	24,576	14,406	3,750	0,486	25,714
15	5	19,661	10,084	1,875	0,146	17,143
16	6	15,729	7,059	0,938	0,044	8,571
17	7	12,583	4,941	0,469	0,013	0,000
18						

Bild 1.25e Excel-Tabelle für Beispiel 1.14

Damit die einmal erstellte Excel-Formel in alle anderen Tabellenfelder kopiert werden kann, ist diese wie folgt zu modifizieren:

- Damit in allen Zeilen für t immer auf $AW = 60$ und auf das jeweilige i zurückgegriffen wird, ist Zeile 10 bzw. Zeile 9 in der Formel mit einem $-Zeichen zu fixieren.
- Damit in allen Spalten für die verschiedenen i immer auf das Jahr t zurück gegriffen wird, ist Spalte A in der Formel mit einem $-Zeichen zu fixieren.
- Nach Überschreiten der Nutzungsdauer $t > n$ soll kein Wert mehr erscheinen, sondern die Zelle soll frei bleiben. Diese Bedingung ist durch Einbindung der Formel in eine WENN-Funktion zu realisieren (s. Bild 1.25e). Wenn anstelle eines Formelergebnisses die Zelle leer bleiben soll, dann erreicht man dies durch einen "Text" (bei Excel erfolgt die Kennzeichnung von Text durch Anführungszeichen) ohne Buchstaben, also einfach durch "" oder " " (mit Leerzeichen). Die Excel-Funktion in Zelle B12 ist wie folgt zu deuten:

Wenn die Zelle A12 leer ist, dann soll Zelle B12 auch leer sein, andernfalls ist der Formelwert zu berechnen und einzutragen. Diese drei Aussagen werden innerhalb der Klammer durch Semikolon getrennt.

- Als Voraussetzung dafür, dass die WENN-Funktion in Spalte B funktioniert, muss in Spalte A statt $t > n$ ebenfalls ein leerer Text stehen. Dies wird in Zelle A18 durch die Excel-Funktion =WENN(A17<$C$6;A17+1;"") ermöglicht. Weil in Zelle A17 wegen $t = 7$ das Laufzeitende erreicht ist, kommt die Erhöhung um 1 nicht mehr zur Ausführung, sondern es wird leerer Text eingetragen.

Die als Beispiel gewählte Funktion für Zelle B12 (s. Bearbeitungszeile in Bild 1.25e) kann in den Zellbereich B11:E18 kopiert werden; die Funktion von Zelle A18 kann in den Spaltenbereich A11:A18 kopiert werden.

Zum Vergleich mit der degressiven Abschreibung sollen in Spalte F die Buchwerte BW_t bei *linearer Abschreibung* errechnet werden. Während bei degressiver Abschreibung am Ende der Nutzungsdauer ein Restbuchwert $BW_n = RW > 0$ verbleibt, sinkt bei linearer Abschreibung der Buchwert auf null. Demnach beträgt der jährliche Abschreibungssatz $i = 1/n$, im Beispiel rund 14,3 % für $n = 7$. Für $t = 2$ ist in Zelle F12 folgende Rechnung durchzuführen:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel in B12	Ergebnis
(1.31)	$BW_2 = 60 \cdot (1 - 2/7)$	=F10*(1-F9*A12)	42,857

Diese Formel kann in Zelle B12 ebenfalls ergänzt werden, um die Abbruchbedingung bei $t > n$ zu berücksichtigen und ein Kopieren in den Spaltenbereich F11:F18 zu gewährleisten. Die komplette Formel lautet dann =WENN(A12="";"";F$10*(1-F$9*A12)).

Excel-Diagramm erstellen

Abschließend sollen die Ergebnisse grafisch dargestellt werden. Das erledigt der Diagramm-Assistent von Excel. Dabei ist wie folgt vorzugehen:

– In der Excel-Tabelle wird der gesamte Datenbereich A9:F17 einschließlich Kopfspalte und Kopfzeile markiert und dann der Diagramm-Assistent mit der Schaltfläche  der Symbolleiste aufgerufen. Hier wählt man unter Diagrammtyp "Linie" ein einfaches Liniendiagramm aus. Im zweiten Ablaufschritt erkennt man schon das fertige Diagramm, das man im selben Arbeitsblatt unterhalb der Tabelle anordnen kann.

– Im dritten Schritt besteht die Möglichkeit, die Achsen zu bezeichnen (s. Bild 1.26e), Gitternetzlinien einzufügen oder zu unterdrücken, die Legende anzuordnen u.a.m.

– Im letzten Schritt wird die Platzierung innerhalb der Excel-Mappe ausgewählt.

Diese automatisch erstellte Grafik lässt sich individuell vielfältig modifizieren. Hierzu stehen gesonderte Kontextmenüs für alle Diagrammelemente zur Verfügung.

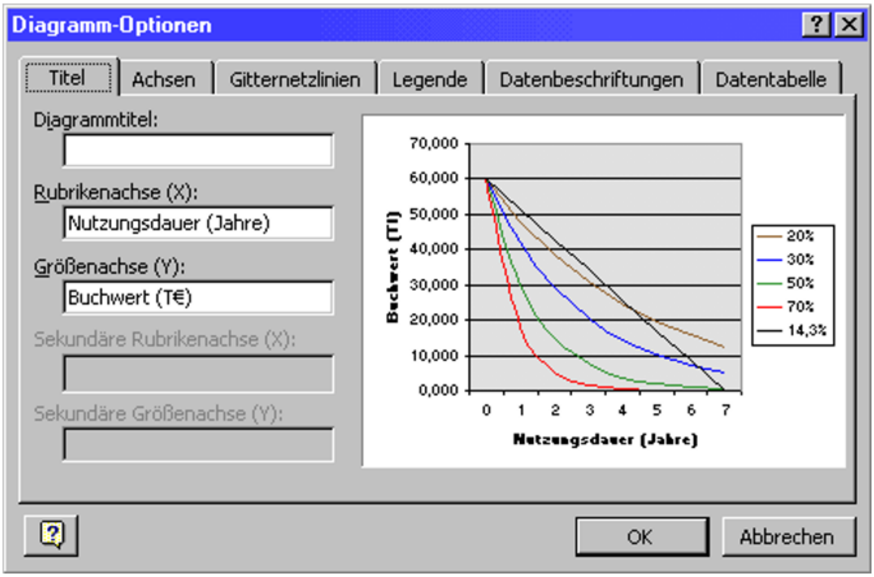


Bild 1.26e Diagramm-Assistent für Beispiel 1.14

- Als Hintergrundfarbe für die "Zeichnungsfläche" kann unter ZEICHNUNGSFLÄCHE FORMATIEREN weiß statt grau ausgewählt werden.
- Im Menü für die X-Achse ("Rubrikenachse") muss unter ACHSE FORMATIEREN/ SKALIERUNG das Feld "Größenachse (Y) schneidet zwischen Rubriken" deaktiviert werden, damit die Skala bei $t = 0$ beginnt.
- Im Menü für die Y-Achse ("Größenachse") kann unter ZAHLEN die Anzeige der Nachkommastellen unterdrückt werden.
- Für die einzelnen Datenreihen können andere Farben oder Muster gewählt werden.

Das fertige Diagramm zeigt Bild 1.27e. Es bleibt mit der Excel-Tabelle verknüpft und passt sich veränderten Eingabedaten, wie beispielsweise Anschaffungswert, Nutzungsdauer oder Abschreibungssätzen, an.

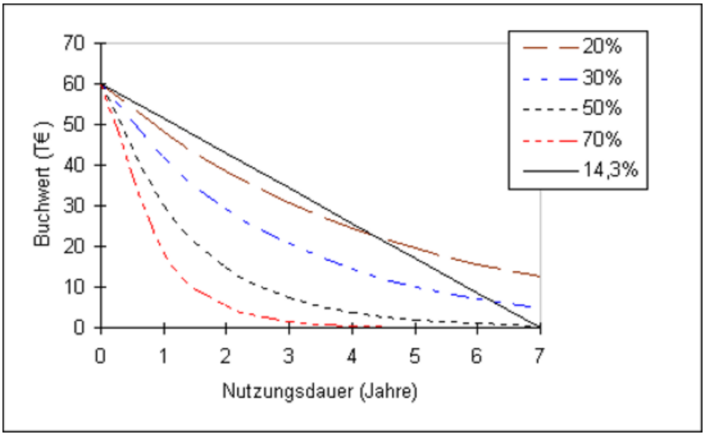


Bild 1.27e Diagramm für Beispiel 1.14

1.3.4 Jährliche Verzinsung mit veränderlichem Zinssatz

Beispiel 1.15: Bundesschatzbriefe vom Typ B haben eine Laufzeit von bis zu 7 Jahren mit jährlich steigenden Zinssätzen. Im Gegensatz zu Typ A (s. Beispiel 1.7) werden die Zinsen aber nicht ausgezahlt, sondern jährlich nachschüssig kapitalisiert, zu den gleichen Konditionen verzinst und erst bei Rückgabe ausgezahlt. Wie bei Typ A ist die Rückzahlung schon nach Ablauf eines Jahres möglich.

Es ist die Rendite in Abhängigkeit von der Laufzeit zu berechnen, wenn folgende Jahreszinssätze gelten (Konditionen vom 1.9.2000):

Jahr	1	2	3	4	5	6	7	
Zinssatz	4,50	4,75	5,00	5,25	5,25	5,50	5,50	in %

Zur Lösung dieser Aufgabe kann von einer Kopie der in Bild 1.14e dargestellten Tabelle ausgegangen werden, die wie folgt zu erweitern ist (s. Bild 1.28e):

– Für das Jahr 7 wird eine zusätzliche Spalte eingefügt. Dazu klickt man mit der rechten Maustaste auf G des Spaltenkopfes, um diese Spalte zu markieren und gleichzeitig das Menü zu öffnen, in dem "Zellen einfügen" auszuwählen ist. Dieses Vorgehen hat zwar eine Korrektur zur Folge, weil die neue Spalte davor und nicht danach eingefügt wird, aber dafür stimmt überall die Formatierung der zusätzlichen Spalte.

– Das Einfügen einer zusätzlichen Zeile, in der die Zinssätze als Zinsfaktoren ($1+i/100$) ausgedrückt werden, ist sinnvoll für die unten verwendete Excel-Funktion. Dazu wird vor der (Leer-)Zeile 5 eine zusätzliche Zeile eingefügt, nach Wunsch mit Rahmen versehen und beschriftet. Der Zinsfaktor errechnet sich beispielsweise in Zelle B5 mit der Excel-Formel =1+B4, die nach rechts bis $t = 7$ kopiert werden kann.

D7 = =PRODUKT($B$5:D5)^(1/D3)-1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Bundesschatzbrief Typ B								
2									
3	Laufzeitjahr t	1	2	3	4	5	6	7	
4	Zinssatz i_t	4,5%	4,75%	5,0%	5,25%	5,25%	5,5%	5,5%	
5	Zinsfaktor $(1+i_t)$	1,0450	1,0475	1,0500	1,0525	1,0525	1,0550	1,0550	
6									
7	Rendite in (0, t)	4,50%	4,62%	4,75%	4,87%	4,95%	5,04%	5,11%	
8									

Bild 1.28e Excel-Tabelle für Beispiel 1.15

Für den durchschnittlichen Jahreszinssatz gilt bei einer Laufzeit von beispielsweise $t = 3$ folgende Rechnung:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel in D7	Ergebnis
(1.32)	$j = \sqrt[3]{1{,}045 \cdot 1{,}0475 \cdot 1{,}05} - 1$	=PRODUKT(B5:D5)^(1/D3)-1	4,75 %

Es handelt sich hier um den geometrischen Mittelwert, der identisch ist mit dem *effektiven Jahreszins*. Wenn die Excel-Funktion =PRODUKT( ) wie in Bild 1.28e modifiziert wird, kann sie in den gesamten Bereich B7:H7 kopiert werden.

1.3.5 Zinseszinsrechnung für Zahlungsreihen

Die Berücksichtigung von mehreren, zeitlich versetzten Zahlungen P_t stellt eine Verallgemeinerung der Zinseszinsrechnung dar und bildet die Voraussetzung für die dynamische Investitions- und Finanzierungsrechnung. Im Beispiel 1.16 wird eine Reihe aus einer sofortigen und fünf zukünftigen Zahlungen ($t = 0, 1, ..., 5$) betrachtet, die der *Zinsstruktur* $i_{0,t}$ des Zahlenbeispiels von Tabelle 1.6 im Teil 1 unterliegen.

> Beispiel 1.16: Für die folgenden jährlich nachschüssigen Zahlungen sind der Gegenwartswert bei t = 0 sowie der zukünftige Wert bei t = 5 unter Berücksichtigung der angegebenen Zinsstruktur zu berechnen.
>
> | Jahr | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
> |---|---|---|---|---|---|---|---|
> | Zahlung | 300 | 500 | 200 | 1100 | 900 | 600 | in € |
> | Zinsstruktur | | 5,5 | 5,7 | 6,0 | 6,4 | 6,9 | in % |

Dazu wird eine Excel-Tabelle nach dem Muster von Bild 1.29e aufgebaut. Für die Berechnung des Barwertes jeder einzelnen Zahlung nach Gl. (1.17) können die vorgegebenen Zinssätze in Zeile 5 verwendet werden. Beispielsweise gilt für die Zahlung im Jahr 2 (vgl. Tabelle 1.4):

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel in E7	Ergebnis
(1.17)	$K_0 = \dfrac{200}{(1+5{,}7/100)^2}$	=E4/(1+E5)^E3	179,01

Die Formel kann unmodifiziert in den Zellbereich C7:H7 kopiert werden.

Die Berechnung der Endwerte jeder einzelnen Zahlung erfordert die vorherige Bestimmung der *Terminzinssätze* $i_{t,n}$ in Zeile 6 nach Gl. (1.37). Für $t = 1$ ist ergibt sich:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel in D6	Ergebnis
(1.37)	$i_{1,5} = \sqrt[4]{\dfrac{(1+6{,}9/100)^5}{(1+5{,}5/100)^1}} - 1$	=((1+H5)^H3/(1+D5)^D3)^(1/(H3-D3))-1	7,25 %

Wenn in der Excel-Formel die absoluten Zellbezüge H5 und H3 durch $-Zeichen fixiert werden (s. Bild 1.29e), kann sie in den Zellbereich C6:G6 kopiert werden. Für einzelne Endwerte ergibt sich dann beispielsweise für die Zahlung im Jahr 2:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel in E8	Ergebnis
(1.17)	$K_0 = 200 \cdot (1+7{,}71/100)^3$	=E4*(1+E6)^(H3-E3)	249,90

Wenn die Zelle H3 mit $-Zeichen fixiert wird, kann die Excel-Formel in den Zellbereich (C8:H8) kopiert werden. Zeile 8 stellt wie Zeile 7 Zwischenergebnisse bereit.

Der *Gegenwartswert PV* aller Zahlungen ist gemäß Gl. (1.34) gleich der Summe der einzelnen Barwerte; in Zelle C10 muss die Excel-Funktion =SUMME(C7:H7) stehen.

Der *zukünftige Wert FV* aller Zahlungen bei $t = 5$ ist gemäß Gl. (1.35) gleich der Summe der einzelnen Endwerte; in Zelle H10 muss die Excel-Funktion =SUMME(C8:H8) stehen.

D6 = =((1+$H$5)^$H$3/(1+D5)^D3)^(1/($H$3-D3))-1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Zinseszinsrechnung für Zahlungsreihen**								
2									
3	Jahr t		0	1	2	3	4	5	
4	Zahlung P_t (in €)		300	500	200	1.100	900	600	
5	Zinsstruktur $i_{0,t}$			5,5%	5,7%	6,0%	6,4%	6,9%	
6	Terminzinssatz $i_{t,n}$		6,90%	7,25%	7,71%	8,26%	8,92%		
7	Barwerte		300,00	473,93	179,01	923,58	702,22	429,80	
8	Endwerte		418,80	661,62	249,90	1.289,33	980,31	600,00	
9									
10	Gegenwartsw. PV		3.008,55	in €		Zukünftiger Wert FV		4.199,96	in €
11									

Bild 1.29e Excel-Tabelle für Beispiel 1.16

2. Investitions- und Finanzierungsrechnung mit Excel

2.1 Einführung

Bei der Investitions- und Finanzierungsrechnung wurden im Teil 1 folgende Größen und Symbole verwendet:

P_t	Zahlung am Ende der Periode t, Periodenüberschuss (in €)
E_t , A_t	Ein- bzw. Auszahlung in der Periode t (in €)
E_k , A_k	Ein- bzw. Auszahlung im Zeitpunkt t_k (in €)
E_0 , A_0	Anfangseinzahlung bzw. -auszahlung (in €)
t	Zahlungsperiode
t_k	Zahlungszeitpunkt
i	(nomineller) Zinssatz p.a., Kalkulationszinssatz
$q = 1 + i$	Zinsfaktor
j, i_{eff}	interner Zinssatz
n	Nutzungsdauer bzw. Laufzeit (in a)
m	Zahl der Zinsperioden pro Jahr
n_p	Zahl der Laufzeitperioden
PV	Gegenwartswert aller Zahlungen in $t = 1, 2, ..., n$
KW	Kapitalwert (in €)
τ	Amortisationsdauer (in a)

Die Investitionsrechnung basiert durchweg auf jährlich nachschüssigen Zinseszinsen gemäß Gl. (1.17); deshalb wird in den Formeln häufig der Zinsfaktor $q = 1 + i$ verwendet. Eine Zahlung in der Periode $t$resultiert allgemein aus Einzahlungen $E_t > 0$ und Auszahlungen $A_t < 0$. Somit gilt: $P_t = E_t - A_t$. Für Finanzierungsrechnungen sind auch unterjährige Zahlungen zu berücksichtigen.

Für alle Excel-Tabellen dieses Kapitels empfiehlt sich, eine neue Excel-Mappe anzulegen und diese unter dem Namen "Invest.xls" zu speichern.

K. Renger, *Finanzmathematik mit Excel*, DOI 10.1007/978-3-658-14100-4_7

2.2 Kapitalwertmethode

Die Vorteilhaftigkeit einer geplanten Investition im Vergleich zu einer Alternativanlage des Kapitals kann durch Berechnung des Kapitalwertes eingeschätzt werden.

Beispiel 2.1: Der Betreiber eines Taxi-Unternehmens will entscheiden, ob bei einem derzeitigen Zinsniveau von 6 % für festverzinsliche Kapitalanlagen die Anschaffung eines zusätzlichen PKW zu einem Kaufpreis von 40.000 €, der fünf Jahre genutzt werden soll, vorteilhaft ist.[60] Für die Nutzungsjahre kalkuliert er folgende Jahresüberschüsse:

Jahr	1	2	3	4	5	
Überschuss	15.000	12.000	5.000	9.000	7.000	in €

Zur Berechnung des Kapitalwertes wird eine Tabelle angelegt, die der in Bild 1.29e dargestellten Tabelle stark ähnelt (s. Bild 2.1e). In Zeile 7 kann man als zusätzliche Information die Barwerte der Periodenüberschüsse P_t ($t = 1, 2, ..., 5$) bestimmen. Für das Jahr 2 würde sich beispielsweise ergeben:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel in D7	Ergebnis
(1.17)	$K_0 = 12.000/(1+0{,}06)^2$	=D4/$B$5^D3	10.680 €

Die Excel-Formel ist in den Zellbereich C7:G7 zu kopieren. In Zelle B7 summiert man gemäß Gl. (1.34) alle Barwerte und erhält den *Nettobarwert*, den Gegenwartswert der Periodenüberschüsse (ohne Berücksichtigung der Anfangsauszahlung A_0), der Ausdruck für die innere Ertragskraft der Investition ist. Der Kapitalwert ergibt sich nach Gl. (2.1) als Differenz von Nettobarwert und Anfangsauszahlung und beträgt 1.389 € zugunsten der Investition. Die Investition wäre also als vorteilhaft im Vergleich zur Anlage in Wertpapieren anzusehen.

Zur Berechnung des Nettobarwertes stellt Excel die Funktion =NBW( ) bereit, mit deren Hilfe der Kapitalwert in Zelle B8 berechnet wird (s. Bild 2.1e).

[60] In Anlehnung an Kobelt/Schulze (1999), S 64 ff.

B8 =NBW(B5;C4:G4)+B4

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Kapitalwertmethode							
2								
3	Nutzungsjahr t	0	1	2	3	4	5	
4	Periodenüberschuss P_t	-40.000	15.000	12.000	5.000	9.000	7.000	in €
5	Kalkulationszinssatz i	6,0%						
6				Barwerte der Periodenüberschüsse				
7	Nettobarwert	41.389	14.151	10.680	4.198	7.129	5.231	in €
8	Kapitalwert KW	1.389						
9								

Bild 2.1e Excel-Tabelle für Beispiel 2.1

Beispiel 2.2: Wie ändert sich die Vorteilhaftigkeit einer Investition in Abhängigkeit vom Kalkulationszinssatz? Dieser als Kapitalwertfunktion bezeichnete Zusammenhang ist für das Beispiel 2.1 grafisch darzustellen.

Dafür wird eine neue Tabelle angelegt, die im selben Tabellenblatt für Beispiel 2.1 unterhalb der Kapitalwertberechnung platziert werden kann (s. Bild 2.2e). Ein Wertebereich von 4 bis 11 % für den Kalkulationszinssatz *i* ist ausreichend auch für nachfolgende Beispiele. Der Kapitalwert wird wie in Beispiel 2.1 mit Hilfe der Excel-Funktion =NBW( ) berechnet, wobei der Zellbereich mit den Jahresüberschüssen ebenso wie die Investitionsauszahlung in Zelle B4 mit $-Zeichen fixiert wird. So kann die Formel in Zeile 13 für alle Zinsfaktoren kopiert werden.

D13 =NBW(D12;$C$4:$G$4)+$B$4

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
11	Kapitalwertfunktion								
12	i	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%
13	KW(i)	3.409	2.378	1.389	438	-475	-1.352	-2.196	-3.008

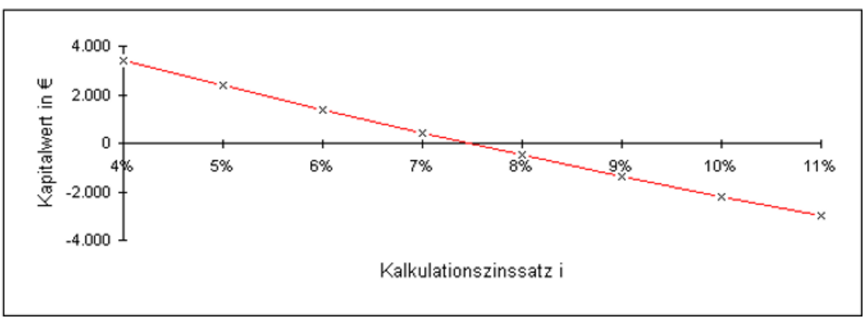


Bild 2.2e Kapitalwertfunktion für Beispiel 2.1

Die grafische Darstellung erstellt man mit Hilfe des Diagramm-Assistenten wie in Beispiel 1.13 beschrieben. Vorher ist der Zellbereich B13:I13 für die Kapitalwerte zu markieren. Im Menü DATENQUELLE werden dann als "Beschriftung der Rubrikenachse (X)" die Zinssätze *i* zuordnet, indem man den Zellbereich B12:I12 markiert (s. Bild 2.3e).

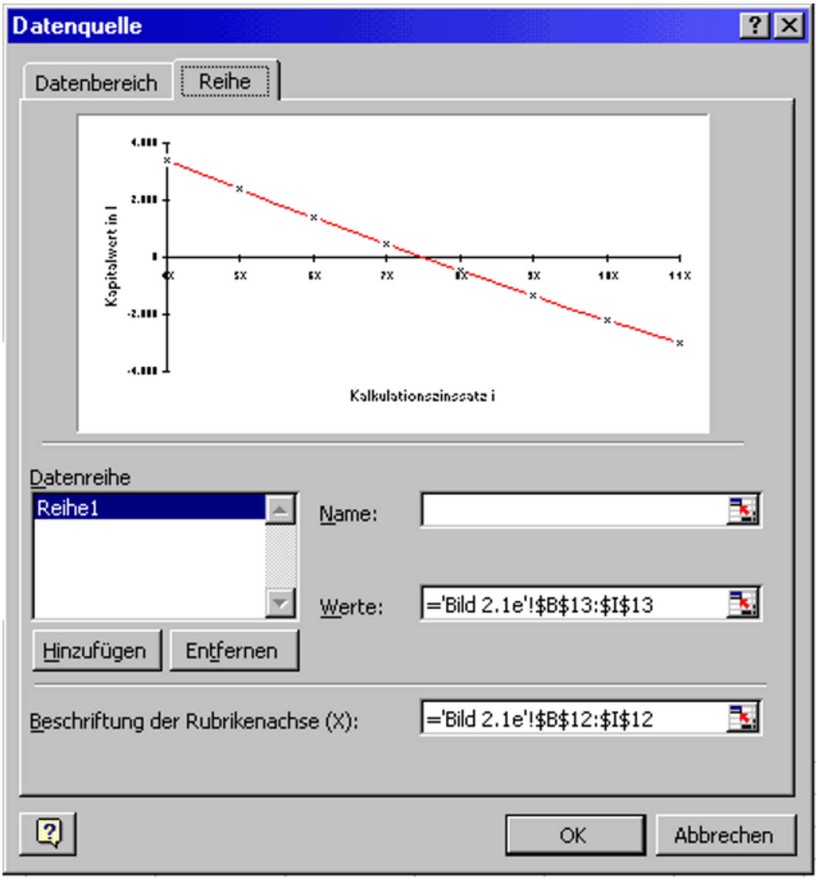


Bild 2.3e Zuordnung der Datenreihen für die Kapitalwertfunktion

Wichtig ist noch die "Rubrikenachse" so zu formatieren, dass sie von der "Größenachse (Y)" nicht zwischen den Rubriken geschnitten wird. Diese Einstellung findet man, wenn man mit der rechten Maustaste auf die Abszisse klickt und den Menüpunkt ACHSE FORMATIEREN/SKALIERUNG auswählt.

Aus Bild 2.2e ist ersichtlich, dass die Investition für Werte des Kalkulationszinssatzes unterhalb von etwa 7,5 % vorteilhaft ist. Bei Werten oberhalb von 7,5 % ist die Investition dagegen nicht vorteilhaft, weil der Kapitalwert negativ wird. Mit anderen Worten ist die Rendite der Investition, der interne Zinssatz *j*, dann niedriger als der (externe) Kalkulationszinssatz *i* für alternative Anlagemöglichkeiten.

Beispiel 2.3: Der Taxi-Unternehmer (s. Beispiel 2.1) erwägt anstelle der Eigenfinanzierung des zusätzlichen PKW eine Fremdfinanzierung. Für den Kredit in Höhe von 40.000 € (Kaufpreis) sind folgende jährliche Rückzahlungen vereinbart:

Jahr	1	2	3	4	5	
Rückzahlung	14.500	11.500	4.500	8.500	10.131	in €

Ist diese Finanzierung angesichts der Ergebnisse der Investitionsrechnung von Beispiel 2.1 und Beispiel 2.2 als vorteilhaft einzuschätzen?

Die Analyse der Kapitalwertfunktion für Beispiel 2.1 ergab, dass die Investition bis zu einer Obergrenze des Kalkulationszinssatzes von 7,5 % vorteilhaft ist (s. Bild 2.2e). Dieser Wert entspricht der Rendite der Investition, die aus den geschätzten jährlichen Überschüssen resultiert. Dieser Wert ist als Kalkulationszinssatz für die Vorteilhaftigkeitsrechnung bezüglich der Finanzierung zugrunde zu legen.

Bei der Eintragung der Zahlungsreihe in die für Bild 2.1 e verwendete Excel-Tabelle ist zu berücksichtigen, dass die Vorzeichen umgekehrt sind: die Kreditzahlung positiv (Einzahlung), die Rückzahlungen negativ (Auszahlungen). Das Ergebnis der Kapitalwertmethode ist aus Bild 2.4e ersichtlich; die Finanzierung ist wegen des negativen Kapitalwertes unvorteilhaft.

B8 = =NBW(B5;C4:G4)+B4

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Kapitalwertmethode						
2								
3	Nutzungsjahr t	0	1	2	3	4	5	
4	Periodenüberschuss P_t	40.000	-14.500	-11.500	-4.500	-8.500	-10.131	in €
5	Kalkulationszinssatz i	7,5%						
6				Barwerte der Periodenüberschüsse				
7	Nettobarwert	-40.483	-13.488	-9.951	-3.622	-6.365	-7.057	in €
8	Kapitalwert KW	-483						
9								

Kapitalwertfunktion

i	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%
KW(i)	-4.168	-3.058	-1.995	-977	0	937	1.837	2.702

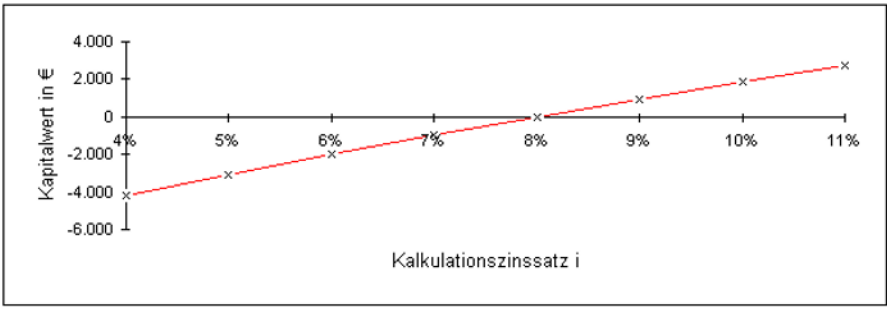


Bild 2.4e Excel-Tabelle für Beispiel 2.3

Noch deutlicher sind die Zusammenhänge mit Hilfe der Kapitalwertfunktion zu erklären (s. Bild 2.4e, unten). Der Schnittpunkt mit der Abszisse liegt bei 8,0 %. Dieser Wert entspricht dem internen Zinssatz *j*, also dem effektiven Jahreszins der Finanzierungsvereinbarung. Diesem Sollzinssatz steht eine Rendite der Investition von nur 7,5 % gegenüber; die Finanzierung ist also unvorteilhaft.

Die Beispiele zeigen, dass ein enger Zusammenhang zwischen Kapitalwert und internem Zinssatz besteht. Die Kapitalwertfunktion verdeutlicht diesen Zusammenhang. Die Ermittlung des internen Zinssatzes ist deshalb von zentraler Bedeutung.

2.3 Methode des internen Zinssatzes

> Beispiel 2.4: Durch Bestimmung des internen Zinssatzes ist zu klären, ob die eigenfinanzierte Investition von Beispiel 2.1 bei demselben Kalkulationszinssatz von 6 % auch dann noch vorteilhaft ist, wenn die Nutzungsdauer des PKW auf 3 Jahre verkürzt wird und ein Restwerterlös von 12.500 € realisiert werden kann.

Die in Bild 2.5e dargestellte Investitionsrechnung ergibt, dass die Verkürzung der Nutzungsdauer zu einem negativen Kapitalwert führt und deshalb nicht vorteilhaft ist. In Zelle G8 wird nun zusätzlich der interne Zinssatz *j* mit der Excel-Funktion =IKV( ) ermittelt. In die Funktion geht gemäß Gl. (2.3) die gesamte Zahlungsreihe einschließlich der Anfangsauszahlung sowie ein geschätzter Anfangswert für die Iteration (hier wurde willkürlich der Kalkulationszinssatz von 6 % gewählt) ein.

G8 = =IKV(B4:G4;6%)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Methode des internen Zinssatzes**							
2								
3	Nutzungsjahr t	0	1	2	3	4	5	
4	Periodenüberschuss P_t	-40.000	15.000	12.000	17.500	0	0	in €
5	Kalkulationszinssatz i	6,0%						
6				Barwerte der Periodenüberschüsse				
7	Nettobarwert	39.524	14.151	10.680	14.693	0	0	in €
8	Kapitalwert KW	-476			Interner Zinssatz j		5,37%	
9								

Kapitalwertfunktion

i	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%
KW(i)	1.075	287	-476	-1.215	-1.931	-2.625	-3.298	-3.951

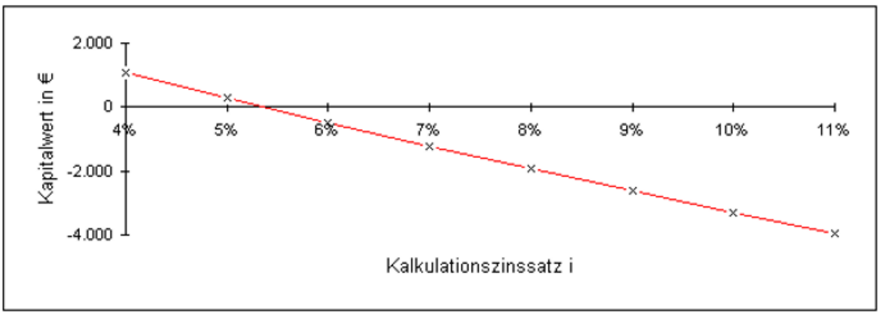


Bild 2.5e Excel-Tabelle für Beispiel 2.4

Der interne Zinssatz, also die Rendite der Investition, sinkt von ursprünglich 7,5 % auf 5,37 %. Für diesen Zinssatz würde ein finanzmathematisches Gleichgewicht zwischen der Anfangsauszahlung (dem Preis des PKW) und dem Barwert der jährlichen Einzahlungen (den erwirtschafteten Periodenüberschüssen) bestehen. Der Schnittpunkt der Kapitalwertfunktion mit der Abszisse markiert den Wert des internen Zinssatzes *j*.

Gleichgewicht bedeutet: der Kapitalwert ist null. Mit der Excel-Tabelle Bild 2.5e kann der interne Zinssatz als derjenige Wert des Kalkulationszinssatzes gefunden werden, für den sich ein Kapitalwert von null ergibt. Das erreicht man durch Zielwertsuche für Zelle B8 mit der veränderlichen Zelle B5. Das Ergebnis stimmt mit Zelle G8 überein (s. Bild 2.6e).

B8 = =NBW(B5;C4:G4)+B4

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		**Methode des internen Zinssatzes**						
2								
3	Nutzungsjahr t	0	1	2	3	4	5	
4	Periodenüberschuss P_t	-40.000	15.000	12.000	17.500	0	0	in €
5	Kalkulationszinssatz i	5,37%						
6				Barwerte der Periodenüberschüsse				
7	Nettobarwert	-40.000	14.235	10.807	14.957	0	0	in €
8	Kapitalwert KW	0			Interner Zinssatz j		5,37%	
9								

Bild 2.6e Interner Zinssatz für Beispiel 2.4

Beispiel 2.5: Der Investition von Beispiel 2.1 soll – ähnlich wie in Beispiel 2.4 – eine zweite Variante gegenübergestellt werden, deren Kapitalbindung von der ersten Variante abweicht. Bei einem Kaufpreis von nur 30.000 € ist eine dreijährige Nutzungsdauer mit folgenden Jahresüberschüssen vorgesehen:

Jahr	1	2	5	
Überschuss	5.000	12.000	19.000	in €

Welche Schlussfolgerungen können hinsichtlich der Vorteilhaftigkeitsrangfolge beider Varianten gezogen werden?

Die Lösung des Problems liegt in der Gegenüberstellung beider Kapitalwertfunktionen. Deshalb wird die Excel-Tabelle für Beispiel 2.1 (vgl. Bild 2.1e) um je eine zusätzliche Zeile für die Eingabe- und Ergebnisdaten der neuen Variante erweitert (s. Bild 2.7e oben).

Auch für die Berechnung der zweiten Kapitalwertfunktion wird eine zusätzliche Zeile eingefügt. Dabei ist es vorteilhaft, diese neue Zeile als Kopie der ersten (bereits vorhandenen) auszuführen, weil dann auch gleich die Formelstruktur mit übernommen wird. Die Formeln müssen der neuen Eingabezeile 5 angepasst werden. Für $i = 0{,}06$ und $n = 3$ ergibt sich beispielsweise (vgl. Bild 2.7 e unten):

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel in D15	Ergebnis
(2.1)	$KW = 31.389 - 30.000$	=NBW(D13;$C$5:$G$5+$B$5)	1.389 €

Diese Formel wird in die benachbarten Zellen B15 und C15 bzw. E15 bis I15 kopiert.

D15 = =NBW(D13;$C$5:$G$5)+$B$5

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Kapitalwertmethode								
2									
3	Nutzungsjahr t	0	1	2	3	4	5		
4	Periodenüberschuss P_t	-40.000	15.000	12.000	5.000	9.000	7.000	in €	
5		-30.000	5.000	12.000	19.000				
6	Kalkulationszinssatz i	6,0%							
7									
8	Kapitalwert KW	1.389		Variante 1		Interner Zinssatz j	7,48%		
9		1.350		Variante 2			8,00%		
10									
11									
12	Kapitalwertfunktion								
13	i	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%
14	KW(i)	3.409	2.378	1.389	438	-475	-1.352	-2.196	-3.008
15		2.793	2.059	1.350	664	1	-641	-1.262	-1.863

Bild 2.7e Kapitalwertfunktionen für Beispiel 2.5

Nun muss die neue Kapitalwertfunktion noch in die Grafik aufgenommen werden. Dazu fügt man im Menü DATENQUELLE des Diagramms die Werte der neuen Reihe hinzu (s. Bild 2.8e).

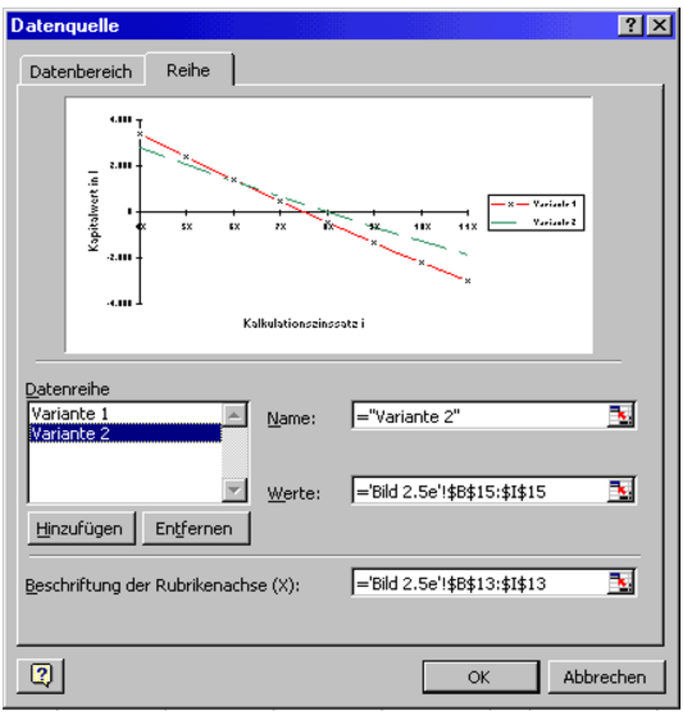


Bild 2.8e Hinzufügen der Datenreihe für Variante 2

Das Ergebnis verdeutlicht, dass die neue Variante 2 zwar einen höheren internen Zinssatz von 8,0 % aufweist, bei dem zugrunde gelegten Kalkulationszinssatz von 6 % jedoch einen geringeren Kapitalwert als die ursprüngliche Variante aus Beispiel 2.1 hat. Knapp oberhalb von $i = 6\,\%$ schneiden sich beide Kapitalwertfunktionen und die Vorteilhaftigkeitsrangfolge kehrt sich um (s. Bild 2.9e).

Kapitalwertfunktion

i	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%
KW(i)	3.409	2.378	1.389	438	-475	-1.352	-2.196	-3.008
	2.793	2.059	1.350	664	1	-641	-1.262	-1.863

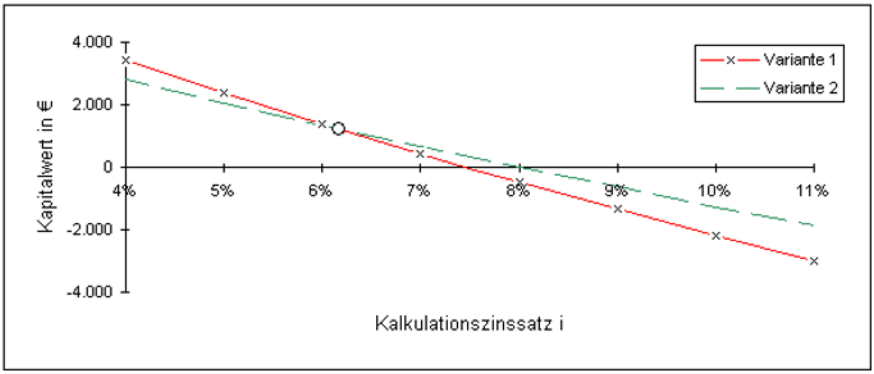


Bild 2.9e Hinzufügen der Datenreihe für Variante 2

An diesem Beispiel ist ersichtlich, dass bei Auswahlentscheidungen über Investitionsprojekte mit stark unterschiedlicher Kapitalstruktur der interne Zinssatz j nicht als alleiniges Kriterium herangezogen werden darf.

In Teil 1, Abschn. 2.3 wurde angedeutet, dass bei bestimmten Konstellationen der Zahlungsreihen mehrere Nullstellen der Kapitalwertfunktion im praktisch relevanten Bereich liegen können. Für das Beispiel 2.1 wurden zwei derartige Konstellationen rein mathematisch konstruiert und in den beiden folgenden Beispielen demonstriert.

Beispiel 2.6: In Anlehnung an die Ausgangsbedingungen von Beispiel 2.1 (Anfangsauszahlung 40.000 €, Kalkulationszinssatz 6 %) werden nun folgende Periodenüberschüsse angenommen:

Jahr	1	2	3	4	5	
Überschuss	42.800	92.500	-98.975	-53.361	57.096,27	in €

Nachdem man die Zahlungen in eine vorbereitete Kopie der kompletten Excel-Tabelle gemäß Bild 2.5e (einschließlich der Kapitalwertfunktion-Grafik) eingetragen hat, wird als interner Zinssatz in Zelle G8 der Wert 5,0 % ausgewiesen (s. Bild 2.10e).

Die Grafik zeigt außerdem zwei weitere Nullstellen der Kapitalwertfunktion bei 7,0 % und 10,0 % an. Aus der grafischen Darstellung erkennt man weiterhin, dass der Kapitalwert im Bereich der Nullstellen etwa zwischen -1 € und +1 € schwankt, praktisch also nahe null liegt. Unterschiede bezüglich der Vorteilhaftigkeit der Investition bei verschiedenen Werten des Kalkulationszinssatzes *i* sind demnach kaum festzustellen, weil der interne Zinssatz nicht eindeutig ausgewiesen wird – mit anderen Worten, eine klare Investitionsentscheidung lässt sich nicht treffen.

G8 = =IKV(B4:G4;6%)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Methode des internen Zinssatzes							
2								
3	Nutzungsjahr t	0	1	2	3	4	5	
4	Periodenüberschuss P_t	-40.000	42.800	92.500	-98.975	-53.361	57.096	in €
5	Kalkulationszinssatz i	6,0%						
6				Barwerte der Periodenüberschüsse				
7	Nettobarwert	39.999	40.377	82.325	-83.101	-42.267	42.666	in €
8	Kapitalwert KW	-1			Interner Zinssatz j		5,00%	
9								

11	Kapitalwertfunktion								
12	i	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%
13	KW(i)	3	0	-1	0	1	1	0	-3

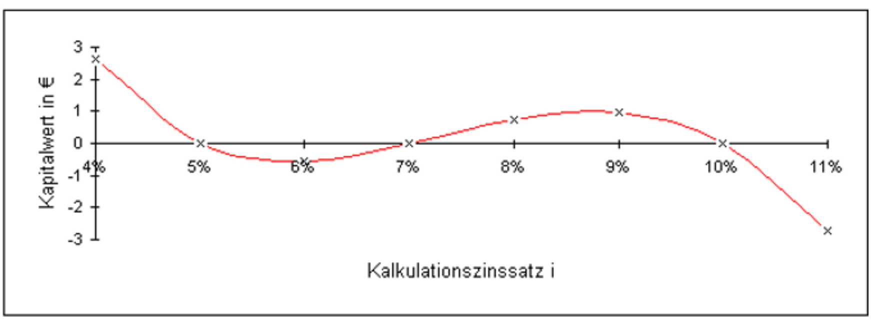


Bild 2.10e Interner Zinssatz für Beispiel 2.6

Dieses Bild verändert sich bei ganz geringen Änderungen einzelner Periodenüberschüsse. Wenn beispielsweise entweder der letzte oder vorletzte Periodenüberschuss wahlweise um nur einen Euro erhöht wird (auf 57.097,27 € bzw. -53.360 €), dann verschwinden jeweils die beiden Nullstellen bei 5 % bzw. 7 % (s. Bild 2.11e). Jetzt existiert in diesem Bereich zwar rechnerisch nur eine Nullstelle, an dem sehr flachen Verlauf der Kapitalwertfunktion zwischen 4 und 11 % hat sich dennoch nichts geändert.

Kapitalwertfunktion

i	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%
KW(i)	3	1	0	1	1	2	1	-2

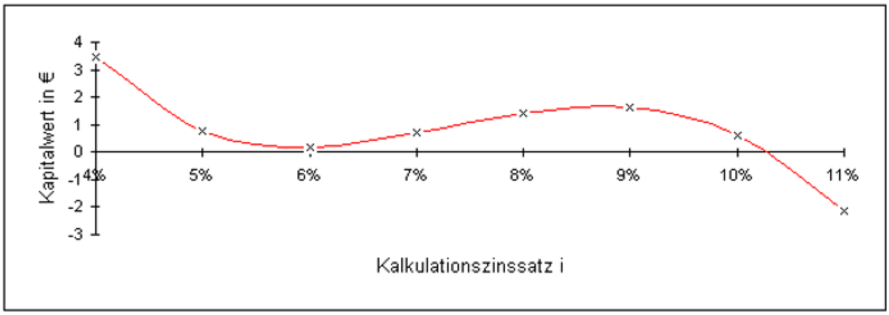


Bild 2.11e Veränderte Kapitalwertfunktion von Beispiel 2.6

Beispiel 2.7:	Das Beispiel 2.1 wird bei sonst gleichen Vorgaben (Anfangsauszahlung 40.000 €, Kalkulationszinssatz 6 %) hinsichtlich der Periodenüberschüsse wie folgt abgewandelt:

Jahr	1	2	3	4	5	
Überschuss	-42.000	92.500	97.125	-53.370	-59.019	in €

Die Kapitalwertfunktion für diese Zahlungsreihe offenbart ein anderes Phänomen, einen parabelförmigen Verlauf im praktisch relevanten Bereich des Kalkulationszinssatzes (s. Bild 2.12e). Zwischen den beiden Nullstellen 5 % und 10 % liegt ein begrenzter Vorteilhaftigkeitsbereich für die Investition mit KW > 0.

G8 = =IKV(B4:G4;8%)

Methode des internen Zinssatzes

	B	C	D	E	F	G	H
Nutzungsjahr t	0	1	2	3	4	5	
Periodenüberschuss P_t	-40.000	-42.000	92.500	97.125	-53.370	-56.019	in €
Kalkulationszinssatz i	6,0%						
			Barwerte der Periodenüberschüsse				
Nettobarwert	40.115	-39.623	82.325	81.548	-42.274	-41.861	in €
Kapitalwert KW	115				Interner Zinssatz j	10,00%	

Kapitalwertfunktion

i	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%
KW(i)	-184	0	115	167	162	104	0	-147

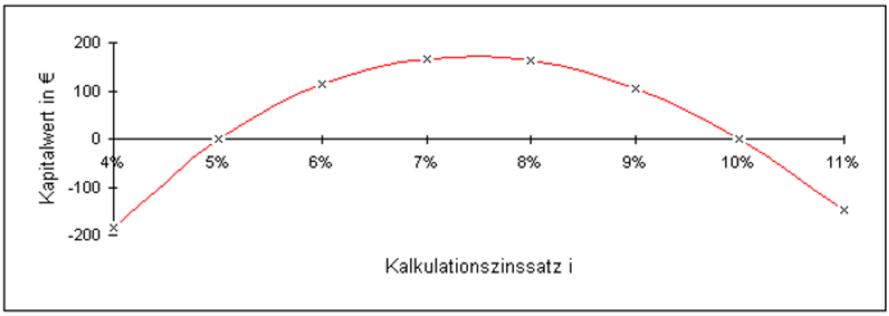


Bild 2.12e Interner Zinssatz für Beispiel 2.7

Aus der Zahlungsreihe ist zu erkennen, dass im ersten Jahr zunächst noch eine weitere Investitionsauszahlung erfolgt, ehe im zweiten und dritten Jahr ein positiver Periodenüberschuss auftritt. Die Auszahlungen in den beiden letzten Jahren sind nur als Kredittilgungen interpretierbar, ansonsten wäre es irrational, die Nutzungsdauer nach drei Jahren fortzusetzen. Der Kurvenverlauf bildet eine Kombination von Investition (im vorderen Abschnitt) und Finanzierung (im hinteren Abschnitt) ab.

Solche in den Beispielen 2.6 und 2.7 dargestellten Zahlungsreihen werden zu Recht als "Nicht-Normalinvestitionen" bezeichnet[61]. Sie können zustande kommen, wenn Investitions- und Finanzierungsprobleme kombiniert werden. Dafür ist die Kapitalwertmethode in der hier angewendeten Form ungeeignet, weil sie einen *vollkommenen Kapitalmarkt* voraussetzt; d. h. es wird ein einheitlicher Kalkulationszinssatz verwendet, der zeitlich unverändert bleibt und entweder von reinen Investitions- oder reinen Finanzierungsproblemen ausgeht[62].

[61] Vgl. Tietze (2000), S.229 ff.

[62] Vgl. ebenda S. 220.

2.4 Amortisationsrechnung

Gesucht ist die Mindestnutzungsdauer eines Investitionsobjekts nach wirtschaftlichen Gesichtspunkten, unabhängig von der physischen Lebensdauer dieses Objekts. Gegenüber alternativen Investitionen ist eine Investition nur dann vorteilhaft, wenn der Kapitalwert größer null ist. Bei dieser Rechnung müssen die mit der Aussonderung des Objekts am Ende der tatsächlichen Nutzungsdauer verursachten Zahlungen – entweder aus Erlösen (durch Verkauf an Nachnutzer) oder aus Kosten (bei Entsorgung) – berücksichtigt werden.

Beispiel 2.8: Eine geplante Investition mit 200.000 € Anschaffungskosten lässt zum jeweiligen Jahresende folgende Periodenüberschüsse erwarten: 70.000 € im ersten und zweiten Jahr, 40.000 € im dritten und vierten Jahr bzw. 10.000 € im fünften und sechsten Jahr.

Nach wie viel Jahren wird der Kapitalwert null, wenn der Kalkulationszinssatz 6% beträgt und wenn mit folgenden Liquidationserlösen in Abhängigkeit von der Nutzungsdauer gerechnet werden kann:

Nutzungsdauer	1	2	3	4	5	6	in a
Liquidationserlös	60	50	40	30	20	10	in T€

Welcher Periodenüberschuss müsste bei einer Amortisationsdauer von drei Jahren im dritten Jahr erzielt werden?

Für die sog. *dynamische* Amortisationsrechnung[63] wird die Excel-Tabelle von Bild 2.1e so abgewandelt, dass der Kapitalwert für alle möglichen Nutzungsdauern $\tau = 1, 2, \ldots, n$ innerhalb der maximal möglichen Laufzeit n gesondert berechnet werden kann (s. Bild 2.13e). Als zusätzliche Vorgabezeile 5 wird auch die variable Zahlung am Ende der jeweiligen Nutzungsdauer eingefügt. Bei einer Nutzungsdauer von 2 Jahren ergibt sich beispielsweise, dass die Investition wegen des negativen Kapitalwertes von -27 T€ noch unvorteilhaft ist:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel in E9	Ergebnis
(2.6)	$KW = \frac{70}{1{,}06} + \frac{70+60}{1{,}06^2} - 200$	=NBW(B6;C4:E4)+B4+E5/B6^E8	-27 T€

Die Excel-Formel kann in den Zellbereich C9:H9 kopiert werden, wenn zuvor die Zellen B6, C4, B4 und B6 mit $-Zeichen versehen werden, um sie als absolut feststehend zu deklarieren (s. Bild 2.13e).

63 Vgl. Perridon/Steiner (1999), S. 54, und Däumler (1992), S. 201.

E9 = =NBW($B$6;$C$4:E4)+$B$4+E5/(1+$B$6)^E3

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1				Amortisationsrechnung					
2									
3	Laufzeitjahr t	0	1	2	3	4	5	6	
4	Periodenüberschuss P_t	-200	70	70	40	40	10	10	T€
5	Liquidationserlös E_t		60	50	40	30	20	10	T€
6	Kalkulationszinssatz i	6%							
7									
8	Nutzungsdauer n		1	2	3	4	5	6	
9	Kapitalwert KW (t = n)		-77	-27	-4	17	16	15	T€
10	Amortisationsdauer τ					4			a
11									

Bild 2.13e Amortisationsrechnung für Beispiel 2.8

Für die Bestimmung der Amortisationsdauer in Zeile 10 eignet sich folgende aus Excel-Funktionen zusammengesetzte Formel:

Zelle	Excel-Formel	Zahlenrechnung	Ergebnis
E10	=WENN(UND(E9>=0;D9<0);E8;"")	$-4 \geq 0$ und $-27 < 0$ (falsch)	E10 = ""
F10	=WENN(UND(F9>=0;E9<0);F8;"")	$17 \geq 0$ und $-4 < 0$ (wahr)	F10 = 4
G10	=WENN(UND(G9>=0;F9<0);G8;"")	$16 \geq 0$ und $17 < 0$ (falsch)	G10 = ""

In Abhängigkeit vom Wahrheitswert zweier konjunktiv verknüpfter Aussagen durch die Excel-Funktion =UND( ) wird entweder die Nutzungsdauer als Amortisationsdauer oder nichts (leerer Text "") eingetragen. (Die Formel ist nur einmal zu schreiben und kann in den Zellbereich C10:H10 kopiert werden).

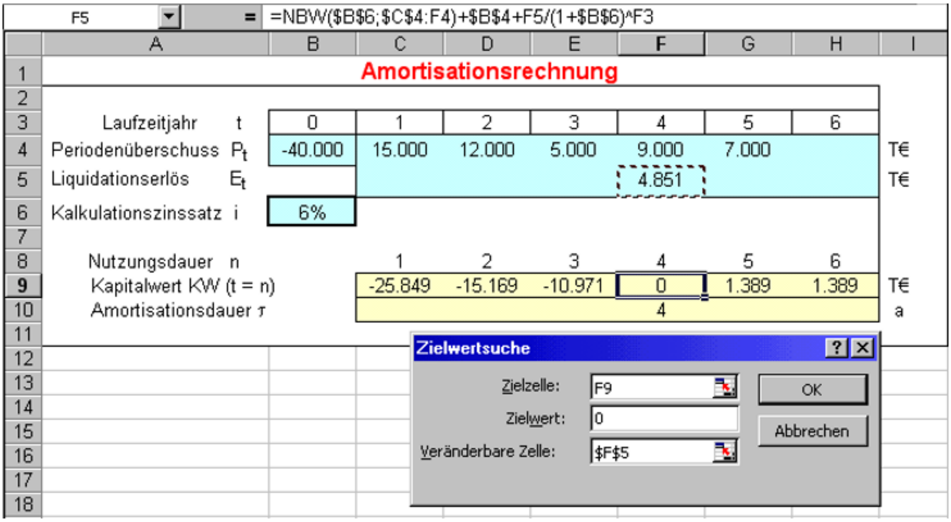
Den zweiten Teil der Aufgabenstellung kann man durch ZIELWERTSUCHE lösen, indem man für Zelle E9 den Zielwert null in Abhängigkeit vom Wert der Zelle E4 berechnet. Das Ergebnis lautet P_3 = 45,3 T€.

Beispiel 2.9: Bei welchem Restwert würde sich der PKW in Aufgabe 2.1 nach 4 Jahren amortisieren?

Für diese Aufgabe gilt folgender Lösungsansatz:

Gl.	Zahlenrechnung	Ergebnis
(2.6)	$KW = \frac{15}{1{,}06} + \frac{12}{1{,}06^2} + \frac{5}{1{,}06^3} + \frac{9 + E_4}{1{,}06^4} = 0$ in T€	$E_4 = 4.851$ €

Mit der Excel-Tabelle von Bild 2.13e kann die Lösung durch Zielwertsuche gefunden werden, indem für die Formel in Zelle F9 der Zielwert null in Abhängigkeit von Zelle F5 vorgegeben wird (s. Bild 2.14e).



F5 = =NBW($B$6;$C$4:F4)+$B$4+F5/(1+$B$6)^F3

	A		B	C	D	E	F	G	H	I
1					Amortisationsrechnung					
2										
3	Laufzeitjahr	t	0	1	2	3	4	5	6	
4	Periodenüberschuss	P_t	-40.000	15.000	12.000	5.000	9.000	7.000		T€
5	Liquidationserlös	E_t					4.851			T€
6	Kalkulationszinssatz	i	6%							
7										
8	Nutzungsdauer	n		1	2	3	4	5	6	
9	Kapitalwert KW (t = n)			-25.849	-15.169	-10.971	0	1.389	1.389	T€
10	Amortisationsdauer τ						4			a

Bild 2.14e Amortisationsrechnung für Beispiel 2.9

2.5 Berechnung des effektiven Jahreszinses

Für die Effektivzinsberechnung ist laut Preisangabenverordnung (PAngV) von unterjährig exponentieller Verzinsung gemäß Gl. (2.9) auszugehen. Dafür wird zunächst eine universell anwendbare Tabelle entwickelt, die von einer einmaligen Anfangseinzahlung E_0 und Auszahlungen A_t $(t = 1, 2, ..., n)$ nach zeitlich jeweils gleichen unterjährigen Perioden ausgeht (s. Bild 2.15e). Es handelt sich um ein Problem zur Bestimmung des internen Zinssatzes.

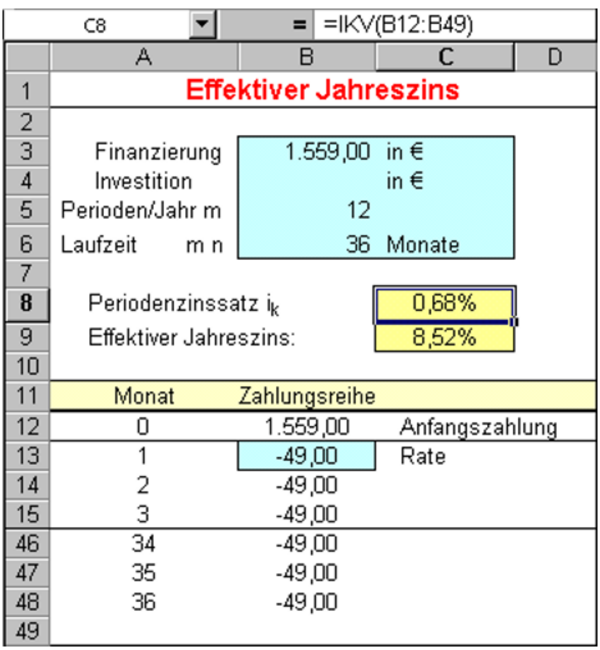
Beispiel 2.10: Für einen neuen Personalcomputer sind 1.559,- € zu zahlen. Der Händler bietet einen Teilzahlungskredit an, der in 36 monatlichen Raten á 49,00 € zurückzuzahlen ist. Wie hoch ist der effektive Jahreszins?

Die monatlichen Raten enthalten Tilgungs-, Zins- und Kostenbestandteile. Aussagen zur Zusammensetzung dieser Anteile, insbesondere zur Höhe und Art der nominellen Verzinsung – wie im Kapitel 4 besprochen – fehlen bei dieser Art von Ratenkreditgeschäften, erübrigen sich allerdings bei Angabe des effektiven Jahreszinses.

Die in Bild 2.15e dargestellte Excel-Tabelle enthält in Spalte B ab Zeile 13 alle Ratenzahlungen. Deren Wert wird in Zelle B13 mit dem richtigen Vorzeichen (hier minus wegen Auszahlung) eingetragen und mit der Formel =$B$3 in Zelle B14 übernommen. Damit die Reihe am Ende der Laufzeit automatisch abbricht, sind Prüfbedingungen wie folgt einzubauen:

Zelle	Excel-Formel	Ergebnis
A14	=WENN(A13<$B$6;A13+1;"")	2
B14	=WENN(A14="";"";$B$13)	- 49,00
B12	=WENN(B3="";-B4;B3)	1.599,00

Die Zellen A14 und B14 sind zu markieren und (mindestens) bis zur Zeile 48 zu kopieren. Da diese Tabelle für Investitionen und Finanzierungen ausgelegt sein soll, sieht sie getrennte Eingabezellen für Anfangseinzahlungen (B3) und Anfangsauszahlungen (B4) vor. Dieser Wert muss der Zahlungsreihe für die monatlichen Raten mit dem richtigen Vorzeichen als zeitlich erster Wert in Zelle B12 hinzugefügt werden.



C8 = =IKV(B12:B49)

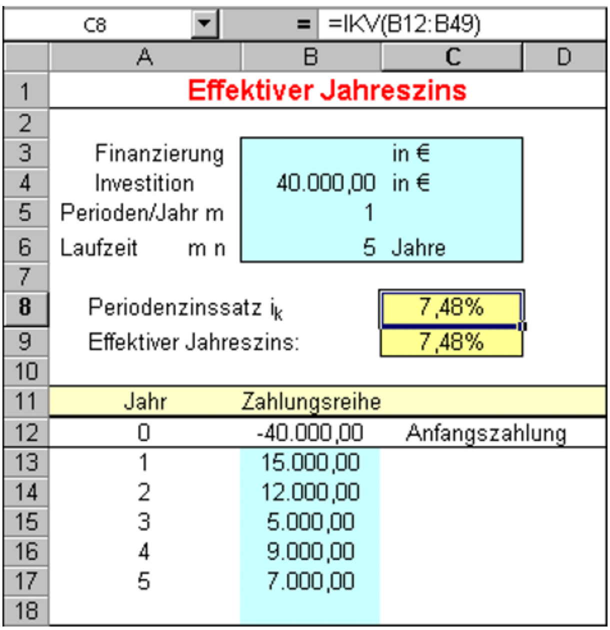
	A	B	C	D
1	Effektiver Jahreszins			
2				
3	Finanzierung	1.559,00	in €	
4	Investition		in €	
5	Perioden/Jahr m	12		
6	Laufzeit m n	36	Monate	
7				
8	Periodenzinssatz i_k		0,68%	
9	Effektiver Jahreszins:		8,52%	
10				
11	Monat	Zahlungsreihe		
12	0	1.559,00	Anfangszahlung	
13	1	-49,00	Rate	
14	2	-49,00		
15	3	-49,00		
46	34	-49,00		
47	35	-49,00		
48	36	-49,00		
49				

Bild 2.15e Excel-Tabelle für Beispiel 2.10

Den internen Zinssatz mit Excel zu bestimmen ist unkompliziert, wenn die Zahlungen periodisch erfolgen. Dafür steht die Excel-Funktion =IKV( ) zur Verfügung, mit der eine iterative Lösung erfolgt. In diese Funktion geht als Argument die gesamte Zahlungsreihe einschließlich der Anfangszahlung bei $t = 0$ ein (vgl. Abschn. 2.3). Zu beachten ist lediglich, dass sich der so berechnete Zinssatz auf die Zahlungsperiode bezieht, also einen unterjährig konformen Zinssatz i_k darstellt, der auf Grundlage von Gl. (1.24) in einen Jahreszinssatz i_{eff} umzurechnen ist:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel in C9	Ergebnis
(1.24)	$i_{eff} = (1+0{,}00684)^{12} - 1$	=(1+C8)^B5-1	8,52 %

Um die allgemeingültige Anwendbarkeit der Excel-Tabelle zu überprüfen, soll der Effektivzinssatz für ein Investitionsvorhaben anhand des Beispiels 2.1 berechnet werden. Die Reihe der jährlichen Einzahlungen wird ab Zelle B13 mit positivem Vorzeichen eingetragen (s. Bild 2.16e). Das Ergebnis, ein interner (= effektiver) Zinssatz von etwa 7,5 %, ist auch in Bild 2.2e als Nulldurchgang der Kapitalwertfunktion abzulesen.



C8 = =IKV(B12:B49)

	A	B	C	D
1	Effektiver Jahreszins			
2				
3	Finanzierung		in €	
4	Investition	40.000,00	in €	
5	Perioden/Jahr m	1		
6	Laufzeit m n	5	Jahre	
7				
8	Periodenzinssatz i_k		7,48%	
9	Effektiver Jahreszins:		7,48%	
10				
11	Jahr	Zahlungsreihe		
12	0	-40.000,00	Anfangszahlung	
13	1	15.000,00		
14	2	12.000,00		
15	3	5.000,00		
16	4	9.000,00		
17	5	7.000,00		
18				

Bild 2.16e Effektiver Jahreszins für Beispiel 2.1

Die Excel-Funktion =IKV( ) ist nicht anwendbar, wenn die zeitlichen Zahlungsabstände ungleich sind. Für diesen Fall muss die Excel-Tabelle Bild 2.15e mehrfach modifiziert werden.

Beispiel 2.11:	Ein am 3. Januar 2000 ausgereichter Kredit in Höhe von 100 T€ ist wie folgt zu tilgen: je 30 T€ am 15.05 und 15.11.2000, je 20 T€ am 15.01. und 15.06.2001 und 10 T€ am 15.02.2002.

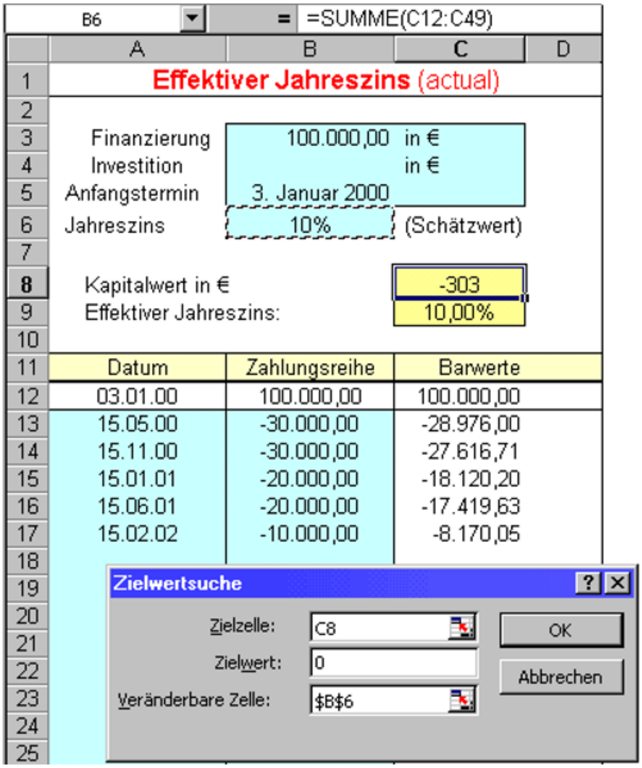
Die Lösung erfolgt auf Basis der Methode des internen Zinssatzes gemäß Gl. (2.9) durch Nullstellenbestimmung der Kapitalwertfunktion. Dazu sind Anfangszahlung und -termin aus dem Eingabefeld in Zeile 12 zu übernehmen und daran anschließend alle anderen Zahlungstermine mit den Zahlungsbeträgen (negatives Vorzeichen wegen Auszahlung) einzutippen (s. Bild 2.17e). Eine zusätzliche Spalte wird für die Barwerte der einzelnen Zahlungen vorgesehen, die zunächst für einen geschätzten Jahreszinssatz (hier im Beispiel für 10 %) berechnet werden.

Für den Barwert der ersten Rückzahlung am 15.05.2000 gilt bei *taggenauer Zeitzählung*:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel in C13	Ergebnis
(2.9)	$K_0 = \dfrac{30.000}{(1+0{,}10)^{133/365}}$	=B13/(1+$C$9)^((A13-$A$12)/365)	-28.976,00 €

Die Excel-Formel wird in Spalte C nach unten kopiert, beispielsweise bis in Zelle C49. Nach dem bereits mehrfach beschriebenen Muster kann die Formel um eine zusätzliche Abbruchbedingung erweitert werden.

Die Barwerte werden zusammen mit der Anfangszahlung zum Kapitalwertwert summiert, der bei einem willkürlich geschätzten Zinssatz von 10 % –303 € beträgt. Mit Zielwertsuche wird dieser Wert in Abhängigkeit vom Zinssatz in Zelle B6 iterativ auf null gesetzt (s. Bild 2.17e). Es ergibt sich ein interner (= effektiver) Jahreszinssatz, der mit =B6 in Zelle C9 übertragen und mit zweistelliger Genauigkeit angezeigt werden kann, von 10,35 %.


B6 = =SUMME(C12:C49)

	A	B	C	D
1	Effektiver Jahreszins (actual)			
2				
3	Finanzierung	100.000,00	in €	
4	Investition		in €	
5	Anfangstermin	3. Januar 2000		
6	Jahreszins	10%	(Schätzwert)	
7				
8	Kapitalwert in €		-303	
9	Effektiver Jahreszins:		10,00%	
10				
11	Datum	Zahlungsreihe	Barwerte	
12	03.01.00	100.000,00	100.000,00	
13	15.05.00	-30.000,00	-28.976,00	
14	15.11.00	-30.000,00	-27.616,71	
15	15.01.01	-20.000,00	-18.120,20	
16	15.06.01	-20.000,00	-17.419,63	
17	15.02.02	-10.000,00	-8.170,05	

Bild 2.17e Excel-Tabelle für Beispiel 2.11 (taggenaue Berechnung)

Die Umsetzung der EU-Richtlinie zur Effektivzinsberechnung in nationales Recht sieht jedoch eine derart taggenaue Zählweise, die bei unregelmäßigen Zahlungen einfach und für ein Jahr von 365 Kalendertagen logisch richtig wäre, nicht vor.

Das Grundprinzip besteht darin, bei wöchentlichen, monatlichen, viertel- und halbjährlichen Zahlungsabständen das Jahr von 365 Tagen gleichmäßig aufzuteilen. Das bedeutet letztendlich eine gleichmäßige Verteilung der Jahreszinsen – unabhängig von der konkreten Anzahl der Zinstage einer Periode:

1 Jahr = 2 Halbjahre = 4 Quartale = 12 Monate = 52 Wochen = 365 Tage.

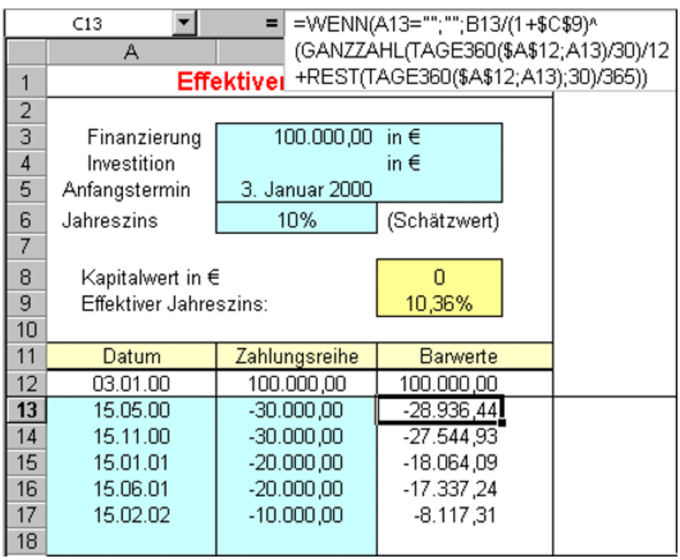
Für unregelmäßige Zahlungen bestünde die logische Schlussfolgerung darin, die Jahreszinsen gleichmäßig auf Kalendertage zu verteilen und die Zahlungsabstände in Tagen zu zählen. Aber gerade das ist nicht vorgesehen. Statt dessen werden alle Zahlungsabstände als Summe von Jahresbruchteilen ganzer Monate (oder Wochen, Halbjahre usw.) und restlicher Tage gebildet, wobei die Zählung der Tage auf dem kaufmännischen 30-Tage-Raster für Monate beruht.

Rechnerisch bietet sich an, den Zeitabstand von der Kreditvergabe bis zur ersten Tilgung in Beispiel 2.11 mit der Excel-Funktion =TAGE360( ) zu bestimmen und in 30-Tage-Monate und restliche Zinstage umzurechnen. Für die Jahresbruchteile, die als Exponent in die Zinseszinsformeln eingehen, ergibt sich daraus schließlich:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel in C13 (Ausschnitt)	Ergebnis
	$n_p = [03.01.;03.05.]$	=GANZZAHL(TAGE360(A12;A13)/30)	4 Mon
	$t = [03.05.;15.05.]$	=REST(TAGE360(A12;A13);30)	12 d
(2.10)	$t_k = \frac{4}{12} + \frac{12}{365}$	=GANZZAHL(TAGE360(A12;A13)/30)/12 +REST(TAGE360(A12;A13);30)/365	0,36621 a

Zwecks dieser Berechnung nach PAngV werden in einer Kopie von Tabelle Bild 2.17e die Formeln in Spalte C für die Barwerte dementsprechend geändert. Das Ergebnis (nach der Nullwertbestimmung des Kapitalwertes) zeigt Bild 2.18e.

In der zweiten Nachkommastelle des so berechneten effektiven Jahreszinses erkennt man einen geringfügigen Unterschied von einem hundertstel Prozent. Es erhebt sich die Frage, ob sich für den privaten Nutzer dieser höhere Aufwand lohnt, zumal die Transparenz geringer ist. Überdies stellt sich bei näherer Betrachtung der der PAngV beigefügten Musterbeispiele heraus, dass die Berechnungsformeln in Tabelle Bild 2.18e noch nicht alle Besonderheiten der neuen Regelung erfassen. Darauf soll der Vollständigkeit halber nun noch eingegangen werden.


C13 =WENN(A13="";"";B13/(1+$C$9)^(GANZZAHL(TAGE360($A$12;A13)/30)/12+REST(TAGE360($A$12;A13);30)/365))

	A	B	C
1	Effektiver		
2			
3	Finanzierung	100.000,00	in €
4	Investition		in €
5	Anfangstermin	3. Januar 2000	
6	Jahreszins	10%	(Schätzwert)
7			
8	Kapitalwert in €		0
9	Effektiver Jahreszins:		10,36%
10			
11	Datum	Zahlungsreihe	Barwerte
12	03.01.00	100.000,00	100.000,00
13	15.05.00	-30.000,00	-28.936,44
14	15.11.00	-30.000,00	-27.544,93
15	15.01.01	-20.000,00	-18.064,09
16	15.06.01	-20.000,00	-17.337,24
17	15.02.02	-10.000,00	-8.117,31
18			

Bild 2.18e Excel-Tabelle für Beispiel 2.11 (Berechnung nach PAngV)

> Beispiel 2.12: Die Darlehenssumme beträgt 10.000 € und die Darlehensauszahlung erfolgt am 15.10.1999. Der Darlehensnehmer hat folgende Raten zurückzuzahlen[64]:
>
> - Jeweils am 15. eines Monats (d. h. periodisch) 1.000 €, erstmals am 15.11.1999 und letztmals am 15.03.2000.
> - Zusätzliche Zahlungen jeweils am Ende eines bestimmten Monats in folgender Höhe: 10/1999 25,00 €, 11/1999 47,50 €, 12/1999 42,50 €, 01/2000 37,50 € und 02/2000 32,50 € .
> - Am 05.04.2000 5.031,67 € (insgesamt 10.216,67 €).

Bei diesem Beispiel handelt es sich um ein Gemisch von periodischen Zahlungen (von je 1.000 € monatlich) und unregelmäßigen Zahlungen (zu verschiedenen Terminen in unterschiedlicher Höhe). Ohne die Zahlungen am Monatsende wäre die Excel-Tabelle von Bild 2.18e anwendbar. Wenn aber Zahlungen am letzten Kalendertag eines Monats erfolgen, dann muss die 30-Tage-Zählweise für jeden Monat garantiert werden:

- Bei Monaten mit 31 Kalendertagen müsste generell der 30. eingetragen werden. Das erledigt aber das zusätzliche Argument "WAHR" in der Excel-Funktion =TAGE360( ). In den Tabellen von Abschn. 1 wurde dies bereits berücksichtigt.
- Beim Monat Februar erfolgt mit dem Argument "WAHR" keine Korrektur von 28 bzw. 29 auf 30 und ist auch manuell nicht durchführbar. Deshalb kann folgender Trick angewendet werden: Der Kalendertag am Monatsende wird innerhalb der Funktion =TAGE360( ) zunächst um einen Tag erhöht, damit der nächste Monat erreicht wird, und dieser Tag wird danach wieder subtrahiert.

Diese Funktionserweiterungen sind aus Bild 2.19e zu ersehen.

[64] Musterbeispiel 6.6 aus Anhang zu § 6 PAngV vom 28. 6. 2000

C13 = =WENN(A13="";"";B13/(1+$C$9)^(GANZZAHL((TAGE360($A$12;A13+1;WAHR)-1)/30)/12+REST(TAGE360($A$12;A13+1;WAHR)-1;30)/365))

	A		
1	Effektiver		
2			
3	Finanzierung	10.000,00	in €
4	Investition		in €
5	Anfangstermin	15. Okt 99	
6	Jahreszins	6%	(Schätzwert)
7			
8	Kapitalwert in €		0
9	Effektiver Jahreszins:		6,17%
10			
11	Datum	Zahlungsreihe	Barwerte
12	15.10.99	10.000,00	10.000,00
13	31.10.99	-25,00	-24,94
14	15.11.99	-1.000,00	-995,02
15	30.11.99	-47,50	-47,15
16	15.12.99	-1.000,00	-990,06
17	31.12.99	-42,50	-41,97
18	15.01.00	-1.000,00	-985,13
19	31.01.00	-37,50	-36,85
20	15.02.00	-1.000,00	-980,23
21	29.02.00	-32,50	-31,78
22	15.03.00	-1.000,00	-975,34
23	05.04.00	-5.031,67	-4.891,52
24			

Bild 2.19e Excel-Tabelle für Beispiel 2.12 (Berechnung nach PAngV)

Nur so stimmt das Ergebnis für den effektiven Jahreszins (i_{eff} = 6,17 %) mit dem im Anhang zu § 6 PAngV exakt überein. Mit der kalendertag-genauen Berechnung nach Bild 2.17e ergäbe sich ein Wert von 6,14 %.[65]

[65] Vgl. Renger (2005), S. 166 f.

3. Rentenrechnung mit Excel

3.1 Einführung

Bei der Rentenrechnung ist die Verwendung folgender Größen und Symbole üblich:

r	konstante regelmäßige Zahlung (Rentenrate)
r_e	jährlich nachschüssige Ersatzrentenrate
R_n	Rentenendwert bei $t = n$ (in €)
R_0	Rentenbarwert bei $t = 0$ (in €)
R_t	Rentenkapital im Jahr t (in €)
$q^n = (1 + i)^n$	Aufzinsungsfaktor
n	Laufzeit der Rentenzahlung (in a)
m	Zahl der unterjährigen Zahlungsperioden pro Jahr
n_p	Laufzeit (in unterjährigen Zahlungsperioden)
i_r, i_k	relativer bzw. konformer unterjähriger Zinssatz

Für grundlegende Rentenberechnungen eignet sich das in Bild 3.1e dargestellte Tabellengerüst, das sich von Excel-Tabelle Bild 1.1e nur wenig unterscheidet. Insbesondere die regelmäßigen Zahlungen stellen ein neues Element dar.

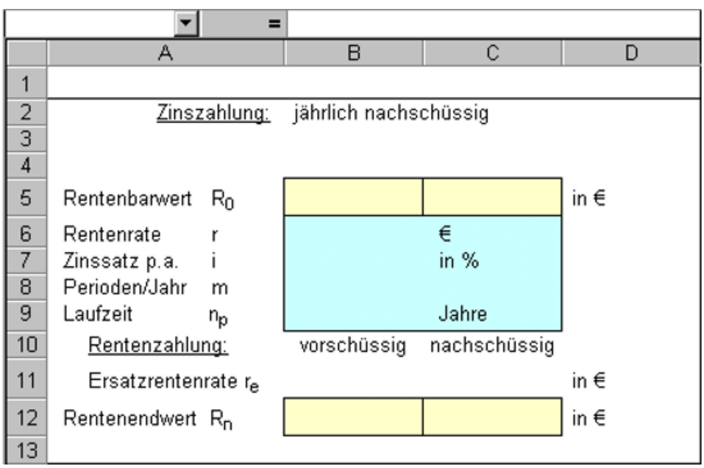


Bild 3.1e Tabellenvorlage für die Rentenrechnung

K. Renger, *Finanzmathematik mit Excel*, DOI 10.1007/978-3-658-14100-4_8

Mit dieser Tabelle wird eine neue Excel-Mappe namens "Renten.xls" angelegt, in die alle weiteren Tabellen für dieses Kapitel aufgenommen werden.

3.2 Jährliche Rentenzahlungen

Beispiel 3.1: Für jährliche Ratenzahlungen in Höhe von 2.400 € auf ein Sparkonto wird ein Festzinssatz von 5,5 % p.a. gewährt. Auf welchen Betrag ist das Kapital nach 10 Jahren angewachsen, wenn die Zahlungen jeweils

a) am Jahresende und
b) am Jahresbeginn erfolgen?

Für beide Zahlungsreihen ist auch der Barwert zu bestimmen.

Es handelt sich bei a) um jährlich nachschüssige und bei b) um jährlich vorschüssige Rentenzahlungen. Die Zinszahlung erfolgt generell jährlich nachschüssig, wenn nichts anderes vereinbart ist. Für den Rentenendwert R_{10} und den Rentenbarwert R_0 würden zu a) folgende Rechnungen gelten:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel in C12/C5	Ergebnis
(3.3)	$R_{10} = 2.400 \cdot \frac{(1+0{,}055)^{10}-1}{0{,}055}$	=B6*((1+B7)^B9-1)/B7	30.900,85 €
(3.5)	$R_0 = 2.400 \cdot \frac{(1+0{,}055)^{10}-1}{0{,}055 \cdot (1+0{,}055)^{10}}$	=C12/(1+B7)^B9	18.090,30 €

Zur Berechnung des Rentenendwertes kann in Zelle C12 auch die Excel-Funktion =ZW(B7;B9;-B6) verwendet werden, die bereits aus der Zinseszinsrechnung bekannt ist (vgl. Bild 1.16e). Während bei $t = 0$ jedoch keine Zahlung erfolgt und demnach bei Bw nichts einzutragen ist, steht bei Rmz jetzt die Rate aus Zelle B6 mit negativem Vorzeichen für Auszahlungen (s. Bild 3.2e). Eine entsprechende Excel-Funktion gibt es auch für die Bestimmung des Barwertes in Zelle C5. Sie kann unter Zuhilfenahme des Funktionsassistenten erstellt werden und muss lauten =BW(B7;B9;-B6).

C12 = =ZW(B7;B9;-B6)

	A	B	C	D
1	**Jährliche Rentenzahlungen**			
2	Zinszahlung:	jährlich nachschüssig		
3				
4				
5	Rentenbarwert R_0		18.090,30	in €
6	Rentenrate r	2.400,00	€	
7	Zinssatz p.a. i	5,5%		
8	Perioden/Jahr m			
9	Laufzeit n_p	10	Jahre	
10	Rentenzahlung:	vorschüssig	nachschüssig	
11	Ersatzrentenrate r_e			in €
12	Rentenendwert R_n		30.900,85	in €
13				

Bild 3.2e Excel-Tabelle für Beispiel 3.1a

Für den Fall b) ist anstelle der tatsächlichen Rate r gemäß Gl. (3.15) die nachschüssige Ersatzrentenrate $r_e = 2.400 \cdot (1 + 0{,}055) = 2.532$ € einzusetzen. Die dazu erforderliche Zwischenrechnung mit der Excel-Formel =B6*(1+B7) erfolgt in Zelle B11, was in den Excel-Funktionen zu berücksichtigen ist (s. Bild 3.3e).

B12 = =ZW(B7;B9;-B11)

	A	B	C	D
1	**Jährliche Rentenzahlungen**			
2	Zinszahlung:	jährlich nachschüssig		
3				
4				
5	Rentenbarwert R_0	19.085,27	18.090,30	in €
6	Rentenrate r	2.400,00	€	
7	Zinssatz p.a. i	5,5%		
8				
9	Laufzeit n_p	10	Jahre	
10	Rentenzahlung:	vorschüssig	nachschüssig	
11	Ersatzrentenrate r_e	2.532,00		in €
12	Rentenendwert R_n	32.600,40	30.900,85	in €
13				

Bild 3.3e Excel-Tabelle für Beispiel 3.1b

Bevor weitere Möglichkeiten für den Umgang mit dieser Tabelle erörtert werden, soll zunächst die Berücksichtigung unterjähriger Rentenzahlungen einbezogen werden.

3.3 Unterjährliche Rentenzahlungen

> Beispiel 3.2: Beispiel 3.1 wird dahingehend abgeändert, dass nicht 2.400 € jährlich, sondern 200 € monatlich auf das Sparkonto übertragen werden, und zwar jeweils
> a) am Monatsende und b) am Monatsanfang.

Über die Art der unterjährigen Verzinsung liegen keine Angaben vor. Deshalb werden verschiedene Versionen, die praktisch relevant sind, berücksichtigt.

3.3.1 Unterjährliche Renten- und Zinszahlungen

Wenn bei unterjährlichen Ratenzahlungen die Zinsen mit derselben Periodizität nachschüssig gezahlt werden, dann besteht mathematisch kein Unterschied zur jährlich nachschüssigen Renten- und Zinszahlung. Es muss nur beachtet werden, dass anstelle des Jahreszinssatzes der Zinssatz der jeweiligen unterjährigen Periode eingesetzt werden muss.

Wenn von einem nominellen Jahreszins i ausgegangen wird, ist weiterhin zu berücksichtigen, ob innerhalb der unterjährigen Perioden lineare oder exponentielle Verzinsung vorgesehen ist. Danach richtet sich die Bestimmung des unterjährigen Zinssatzes als relativer Zinssatz i_r oder als konformer Zinssatz i_k. Ausgehend von $i = 5{,}5$ % für Beispiel 3.1 und 3.2 ergibt sich nach Gln. (1.13) bzw. (1.24):

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel in D7	Ergebnis
(1.13)	$i_r = 0{,}055/12$	=B7/B8	$0{,}0045833 \mathrel{\widehat{=}} 0{,}46\ \%$
(1.24)	$i_k = (1+0{,}055)^{1/12} - 1$	=(1+B7)^(1/B8)-1	$0{,}0044717 \mathrel{\widehat{=}} 0{,}45\ \%$

Die Excel-Tabelle von Bild 3.3e ist entsprechend zu modifizieren. Zunächst wird in Zeile 8 die Zahl der unterjährigen Perioden m ergänzt. Dann wird die zusätzliche Zelle D7 für den unterjährigen Zinssatz eingerichtet, die in alle anderen Formeln anstelle von Zelle B7 eingeht (s. Bild 3.4e). In diese Tabelle soll außerdem eine Wahlmöglichkeit für unterjährig lineare oder unterjährig exponentielle Verzinsung eingebaut werden. Dazu ist die Erstellung kleiner Makros erforderlich.

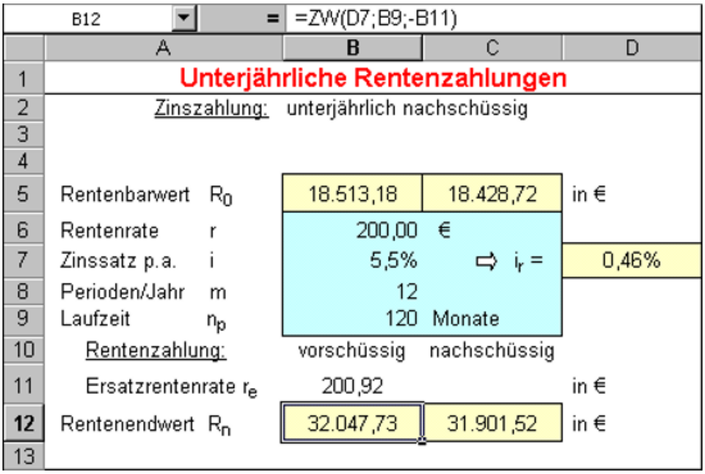


Bild 3.4e Excel-Tabelle für Beispiel 3.2 mit unterjährig linearer Verzinsung

Makros aufzeichnen

Für die Excel-Tabelle Bild 3.4e soll ein Makro erstellt werden, das unterjährig exponentielle Verzinsung bei der Berechnung von Rentenend- und Rentenbarwerten berücksichtigt. Ein solches Makroprogramm entsteht automatisch, indem alle Tabellenänderungen aufgezeichnet werden. Das Vorgehen ist wie folgt:

– Im Menü EXTRAS ist auf MAKRO zu zeigen und auf AUFZEICHNEN zu klicken. In das sich öffnende Fenster wird ein Makroname eingegeben, z. B. der Text "exponentiell" (s. Bild 3.5e), und eventuell eine Auswahltaste.

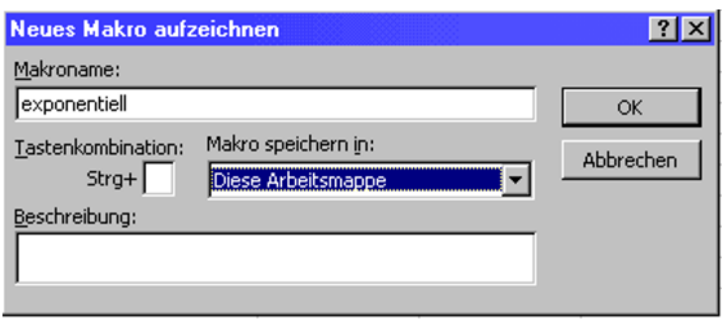


Bild 3.5e Excel-Tabelle für Beispiel 3.2 mit unterjährig linearer Verzinsung

Zugleich erscheint im Bildschirmfenster eine spezielle Symbolleiste, mit der die Aufzeichnung später beendet werden kann.

- Die Tabellenänderungen, die das Makro vornehmen soll, werden nun in beliebiger Reihenfolge ausgeführt. Im Beispiel ist lediglich die Formel zur Berechnung des konformen Zinssatzes in Zelle D7 einzutragen (s. oben) und der Index r im Symbol für den unterjährigen Zinssatz durch k zu ersetzen.
- Durch linken Mausklick in der Symbolleiste AUFZEICHNEN BEENDEN oder im Menü EXTRAS/MAKRO/AUFZEICHNUNG BEENDEN wird das Makro fertiggestellt.
- Die Ausführung des Makros kann (wenn keine Tastenkombination zugeordnet wurde) aus dem Menü EXTRAS/MAKRO/MAKROS.../AUSFÜHREN erfolgen. Hier soll noch eine komfortablere Möglichkeit aufgezeigt werden, die Nutzung einer Optionsschaltfläche.
- Durch rechten Mausklick auf eine beliebige Symbolleiste erscheint ein Kontextmenü, mit dem sich die Symbolleiste "Formular" einblenden lässt. Darin ist die gewünschte Optionsschaltfläche ◉ auszuwählen und an geeigneter Stelle in der Tabelle anzuordnen (s. Bild 3.6e). Durch rechten bzw. linken Mausklick kann die Schaltfläche markiert, der Standardtext durch "exponentiell" ersetzt und das aufgezeichnete Makro namens "exponentiell" zugewiesen werden.
- Mit der linken Maustaste lässt sich die Optionsschaltfläche aktivieren und das Makro ausführen (s. Bild 3.6e).

In gleicher Weise muss nun noch ein zweites Makro "linear" für die unterjährig lineare Verzinsung aufgezeichnet werden, das einer Optionsschaltfläche "linear" zugewiesen wird, um den Ausgangszustand von Bild 3.4e wieder herstellen zu können.

C12 = =ZW(D7;B9;-B6)

	A	B	C	D
1	Unterjährliche Rentenzahlungen			
2	Zinszahlung:	unterjährlich nachschüssig		
3		○ linear	◉ exponentiell	
4				
5	Rentenbarwert R_0	18.624,83	18.541,92	in €
6	Rentenrate r	200,00	€	
7	Zinssatz p.a. i	5,5%	⇨ i_k =	0,45%
8	Perioden/Jahr m	12		
9	Laufzeit n_p	120	Monate	
10	Rentenzahlung:	vorschüssig	nachschüssig	
11	Ersatzrentenrate r_e	200,89		in €
12	Rentenendwert R_n	31.813,91	31.672,28	in €
13				

Bild 3.6e Excel-Tabelle für Beispiel 3.2 mit unterjährig exponentieller Verzinsung

3.3.2 Unterjährlich nachschüssige Rentenzahlungen bei jährlicher Zinszahlung

Um die Unterschiede zwischen unterjährlicher und jährlicher Zinszahlung zu erkennen, wird am Beispiel 3.2 mit den Zahlen von Beispiel 3.1 festgehalten. Das Berechnungsprinzip besteht darin, den Rhythmus der Rentenzahlungen durch äquivalente Raten, nämlich jährlich nachschüssige *Ersatzrentenraten* r_e, der Zinszahlung anzupassen.

Grundlage ist eine Kopie der Excel-Tabelle von Bild 3.3e mit der zusätzlichen Eingabezeile 8 für die Zahl der unterjährigen Perioden m, die um die Berechnung der Ersatzrentenrate in Zelle C11 erweitert wird. Bei unterjährig linearer Verzinsung ergibt sich:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel in C11	Ergebnis
(3.23)	$r_e = 200 \cdot \left(12 + 0{,}055 \cdot \frac{11}{2}\right)$	=B6*(B8+B7*(B8-1)/2)	2.460,50

Mit dieser Ersatzrentenrate gelten die Formeln für jährlich nachschüssige Rentenzahlungen. In die entsprechenden Excel-Funktionen =ZW( ) und =BW( ) in den Zellen C12 bzw. C5 ist der Jahreszinssatz i, die Laufzeit n (in Jahren) und anstelle der tatsächlichen unterjährlichen Rate r die jährliche Ersatzrentenrate r_e einzusetzen (s. Bild 3.7e).

C12 = =ZW(B7;B9;-C11)

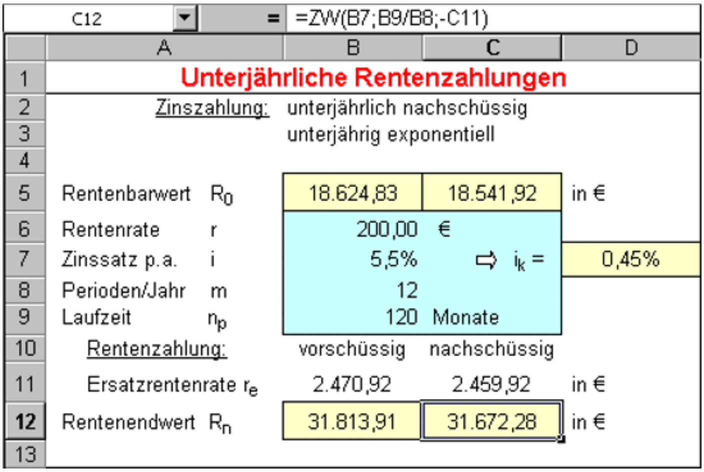
	A	B	C	D
1	Unterjährliche Rentenzahlungen			
2	Zinszahlung:	jährlich nachschüssig		
3		unterjährig linear		
4				
5	Rentenbarwert R_0	18.629,24	18.546,33	in €
6	Rentenrate r	200,00	€	
7	Zinssatz p.a. i	5,5%		
8	Perioden/Jahr m	12		
9	Laufzeit n	10	Jahre	
10	Rentenzahlung:	vorschüssig	nachschüssig	
11	Ersatzrentenrate r_e	2.471,50	2.460,50	in €
12	Rentenendwert R_n	31.821,44	31.679,81	in €
13				

Bild 3.7e Excel-Tabelle für Beispiel 3.2 mit unterjährig linearer Verzinsung

Dasselbe gilt entsprechend bei unterjährig exponentieller Verzinsung. Die Ergebnisse zeigt Bild 3.8e, einer Kopie der Excel-Tabelle von Bild 3.6e (ohne Optionsschaltflächen). Für die Ersatzrentenrate ergibt sich:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel in C11	Ergebnis
(3.26)	$r_e = 200 \cdot \frac{0{,}055}{0{,}0044717}$	=B6*B7/D7	2.459,92

Ein Vergleich mit den Ergebnissen von Bild 3.6e lässt keine Unterschiede erkennen, weil bei unterjährig exponentieller Verzinsung der Kapitalisierungszeitpunkt der Zinsen ohne Belang für die Kapitalentwicklung ist (vgl. Teil 1, Abschn. 3.3.1).


C12 = =ZW(B7;B9/B8;-C11)

	A	B	C	D
1	Unterjährliche Rentenzahlungen			
2	Zinszahlung:	unterjährlich nachschüssig		
3		unterjährig exponentiell		
4				
5	Rentenbarwert R_0	18.624,83	18.541,92	in €
6	Rentenrate r	200,00	€	
7	Zinssatz p.a. i	5,5%	⇨ i_k =	0,45%
8	Perioden/Jahr m	12		
9	Laufzeit n_p	120	Monate	
10	Rentenzahlung:	vorschüssig	nachschüssig	
11	Ersatzrentenrate r_e	2.470,92	2.459,92	in €
12	Rentenendwert R_n	31.813,91	31.672,28	in €
13				

Bild 3.8e Excel-Tabelle für Beispiel 3.2 mit unterjährig exponentieller Verzinsung

3.3.3 Unterjährlich vorschüssige Rentenzahlungen bei jährlicher Zinszahlung

Die Berechnung von Rentenend- und Rentenbarwert bei periodisch vorschüssigen Ratenzahlungen ist in Spalte B der betreffenden Excel-Tabellen vorgesehen. Das einzige, was sich gegenüber den unterjährlich nachschüssigen Zahlungen (s. Abschn. 3.3.2) ändert, ist die Berechnung der jährlich nachschüssigen Ersatzrentenrate. Bei unterjährig linearer Verzinsung gilt:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel in B11	Ergebnis
(3.31)	$r_e = 200 \cdot \left(12 + 0{,}055 \cdot \frac{13}{2}\right)$	=B6*(B8+B7*(B8+1)/2)	2.471,50

Dieser Wert ist in den Excel-Funktionen =ZW( ) sowie =BW( ) in den Zellen B12 bzw. B5 als regelmäßige Zahlung Rmz mit negativem Vorzeichen zu berücksichtigen (s. Bild 3.7e).

Analog gilt bei unterjährig exponentieller Verzinsung:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel in B11	Ergebnis
(3.32)	$r_e = 200 \cdot 0{,}055 \cdot \frac{1{,}0044717}{0{,}0044717}$	=B6*B7*(1+D7)/D7	2.470,92

Auch die sich hieraus ergebenden Rentenend- und Rentenbarwerte (s. Bild 3.8e) sind wie bei nachschüssigen Rentenraten identisch mit denen in Bild 3.6e.

Zusammenfassend ergeben sich in Auswertung verschiedener Rechnungen für die Beispiele 3.1 und 3.2 folgende **Schlussfolgerungen**:

1. Die Excel-Tabelle in Bild 3.6e berücksichtigt jährlich nach- und vorschüssige Rentenzahlungen als Sonderfall mit $m = 1$. Die Art der unterjährigen Verzinsung beeinflusst die Ergebnisse dabei nicht. Demzufolge sind die Tabellen von Bild 3.2e und 3.3e in Bild 3.6e integriert und selbst überflüssig.

2. Die Excel-Tabelle in Bild 3.6e berücksichtigt mit ihren Optionsmöglichkeiten unterjährlich nachschüssige sowie vorschüssige Rentenzahlungen uneingeschränkt, wenn Zins- und Ratenzahlungen periodisch synchron erfolgen. Bei unterjährig linearer Verzinsung und jährlicher Zinszahlung gilt diese Tabelle nur bei $m = 1$.

3. Bei jährlicher Zinszahlung und unterjährig linearer Zinsrechnung kann auf die Berechnung einer jährlich nachschüssigen Ersatzrentenrate nicht verzichtet werden. Die eigens dafür bereit gestellte Excel-Tabelle in Bild 3.7e ist nur anwendbar, wenn die Laufzeit ganze Jahre umfasst.

Dem gegenüber kann bei unterjährig exponentieller Zinsrechnung auf die Berechnung einer jährlichen Ersatzrentenrate generell verzichtet werden; die Excel-Tabelle in Bild 3.6e gilt unabhängig vom Zinszahlungsmodus, und die Excel-Tabelle von Bild 3.8e ist überflüssig!

Weitere Anwendungen

Beispiel 3.3:	Welcher gleichbleibende Geldbetrag müsste monatlich vorschüssig gespart werden, um bei einem Zinssatz von 4,2 % p.a. nach 20 Jahren ein Kapital von 100.000 € anzusammeln?

Bei diesen sogenannten *Sparplänen* schreiben deutsche Banken und Sparkassen in der Regel alljährlich einfache Zinsen gut. Also ist die Excel-Tabelle von Bild 3.7e zu verwenden, damit zunächst eine jährlich nachschüssige Ersatzrentenrate berechnet werden kann. Für unterjährlich vorschüssige Ratenzahlungen wird diese Ersatzrentenrate in Zelle B11 und der Rentenendwert in Zelle B12 berechnet. Zelle B12 dient als Zielzelle für die Zielwertsuche; der Zielwert beträgt 100.000 und als veränderliche Zelle wird B6 markiert (s. Bild 3.9e). Als Ergebnis wird iterativ eine monatliche Rate von 267,993 € ermittelt.

Rechnerisch ergibt sich aus der Monatsrate im ersten Schritt die Ersatzrentenrate r_e

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel in B11	Ergebnis
(3.31)	$r_e = 267{,}993 \cdot \left(12 + 0{,}042 \cdot \frac{13}{2}\right)$	=B6*(B8+B7*(B8+1)/2)	3.289,08 €

und daraus in einem zweiten Schritt der Rentenendwert R_{20}:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel in B12	Ergebnis
(3.3)	$R_{20} = 3.289{,}08 \cdot \frac{1{,}042^{20} - 1}{0{,}042}$	=B6*((1+B7)^B9-1)/B7	100.000 €

Anmerkung: Für monatlich nachschüssige Ratenzahlungen wird die Ersatzrentenrate in Zelle C11 und der zugehörige Rentenendwert in Zelle C12 berechnet.

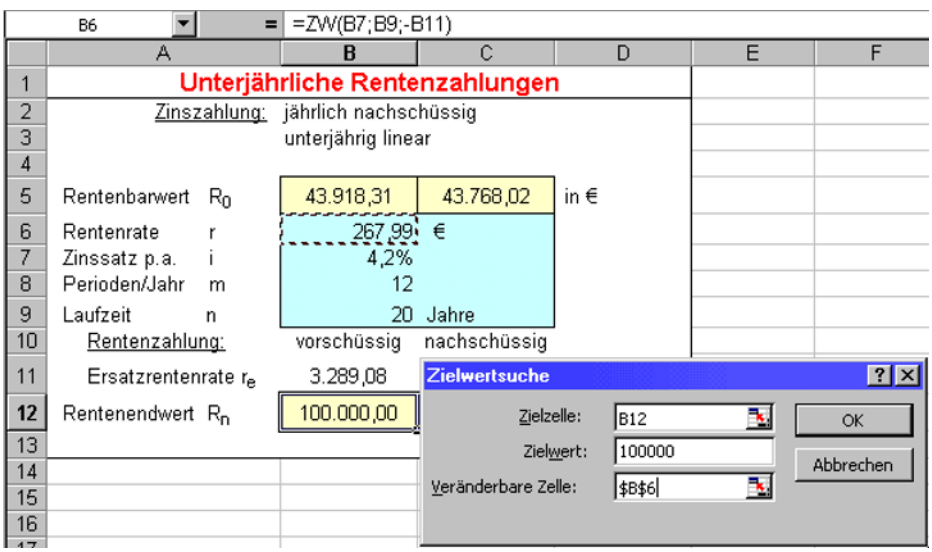


Bild 3.9e Excel-Tabelle für Beispiel 3.3

Beispiel 3.4:	Welche Rentenrate könnte 15 Jahre lang monatlich nachschüssig ausgezahlt werden, wenn dafür ein Kapitalbetrag von 100.000 € zur Verfügung steht, der mit 3,75 % p.a. verzinst wird?

Hierbei handelt es sich um einen sogenannten *Auszahl-* oder *Entnahmeplan*, eine Rentenzahlung, für die bei $t = 0$ ein Anfangskapital als Rentenbarwert R_0 zur Verfügung steht. Zur Excel-Lösung eignet sich bei unterjährig linearer Verzinsung und jährlich nachschüssiger Zinszahlung ebenfalls die Tabelle aus Bild 3.7e. Für die gesuchte nachschüssige Monatsrate in Zelle B6 wird in Zelle C11 die Ersatzrentenrate und in Zelle C5 der Rentenbarwert ermittelt. Also ist in Zelle C5 durch Zielwertsuche ein Wert von 100.000 vorzugeben und als veränderliche Zelle B6 zu wählen (s. Bild 3.10e). Als Ergebnis wird iterativ eine monatliche Rate von 724,022 € errechnet.

Die rechnerische Nachprüfung muss wiederum in den folgenden zwei Schritten erfolgen, erstens der Bestimmung der Ersatzrentenrate r_e

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel in C11	Ergebnis
(3.23)	$r_e = 724{,}022 \cdot \left(12 + 0{,}0375 \cdot \frac{11}{2}\right)$	=B6*(B8+B7*(B8-1)/2)	8.837,59 €

und zweitens der Berechnung des Rentenbarwertes R_0:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel in C5	Ergebnis
(3.5)	$R_0 = 8837{,}59 \cdot \frac{1{,}0375^{15} - 1}{0{,}0375 \cdot 1{,}0375^{15}}$	=B6*((1+B7)^B9-1)/B7	100.000 €

Dank der Möglichkeit von Excel, die Lösung durch Zielwertsuche iterativ zu bestimmen, kann auf die Umstellung von Gl. (3.5) nach r_e und von Gl. (3.23) nach r verzichtet werden.

Eine Kombination der Beispiele 3.3 und 3.4, also die Verbindung eines Auszahlplanes mit einem vorgeschalteten Sparplan, stellt das grundlegende Finanzierungsmodell für die private oder betriebliche Altersvorsorge dar. Eigens für diesen Zweck könnte man zwei Tabellenrechnungen koppeln, indem man beispielsweise den in Bild 3.7e belegten Tabellenbereich A4:D13 kopiert und zweimal untereinander anordnet (s. Beispiel 3.5 mit Bild 3.11e).

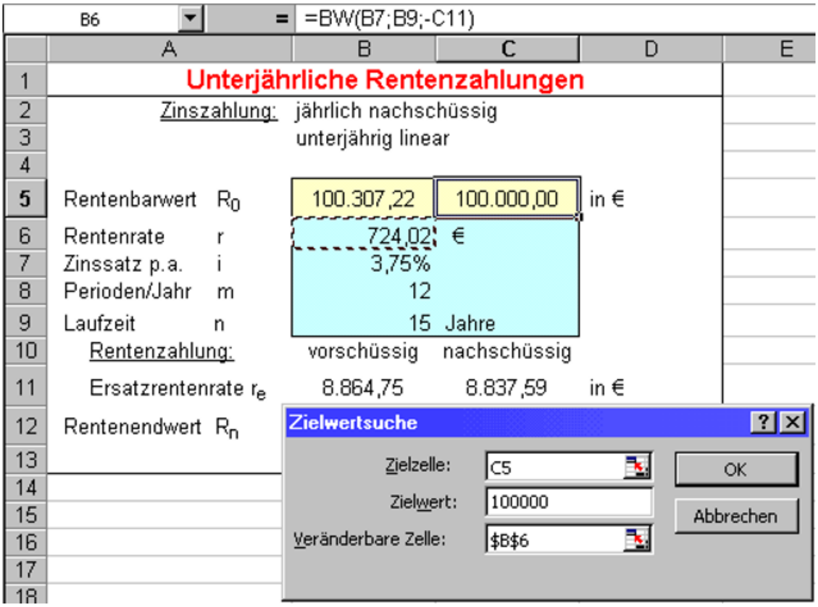


Bild 3.10e Excel-Tabelle für Beispiel 3.4

Beispiel 3.5:	Welcher Betrag muss 20 Jahre lang monatlich vorschüssig eingezahlt werden (Sparplan), wenn daran anschließend eine 15-jährige monatlich nachschüssige Rente von 500 € ausgezahlt werden soll (Auszahlplan). Für den gesamten Zeitraum sei ein Festzinssatz von 4 % p.a. (unterjährig linear, jährliche Zahlung) vereinbart.

Der auszuzahlenden nachschüssigen Rente, deren Berechnung im unteren Tabellenbereich von Bild 3.11e erfolgt, kann in Zelle C16 eindeutig ein Rentenbarwert von 67.933,35 € zugeordnet werden. (Zwecks besserer Übersichtlichkeit sind die nicht benötigten Zellen gelöscht worden.)

Der erste Teil der Aufgabe, das Ansparen, wird im oberen Tabellenbereich von Bild 3.11e ausgeführt. Für die noch unbekannte Rate r ist in Zelle B6 zunächst ein beliebiger Wert einzutragen, worauf in Zelle B12 der zugehörige Rentenendwert R_{20} erscheint. Dieser Wert muss aber identisch sein mit dem Barwert für den Auszahlplan. Man könnte nun (mit Zielwertsuche für Zelle B12) den Barwert für den Auszahlplan als Zielwert vorgeben und die zugehörige Sparrate bestimmen. Einfacher für die Eingabe ist die Definition einer gesonderten Zielzelle, mit der die beiden Zahlungsvorgänge direkt gekoppelt werden. Die Kopplung wird in Zelle C14 realisiert, indem die Differenz von Rentenendwert des Sparplanes und Rentenbarwert des Auszahlplanes mittels der Excel-Formel =B12–C16 gebildet und mit Zielwertsuche der Zielwert 0 als Vorgabe für die veränderliche Zelle B6 eingegeben wird (s. Bild 3.11e). Als Resultat ergibt sich eine Sparrate von $r = 186{,}08$ €.

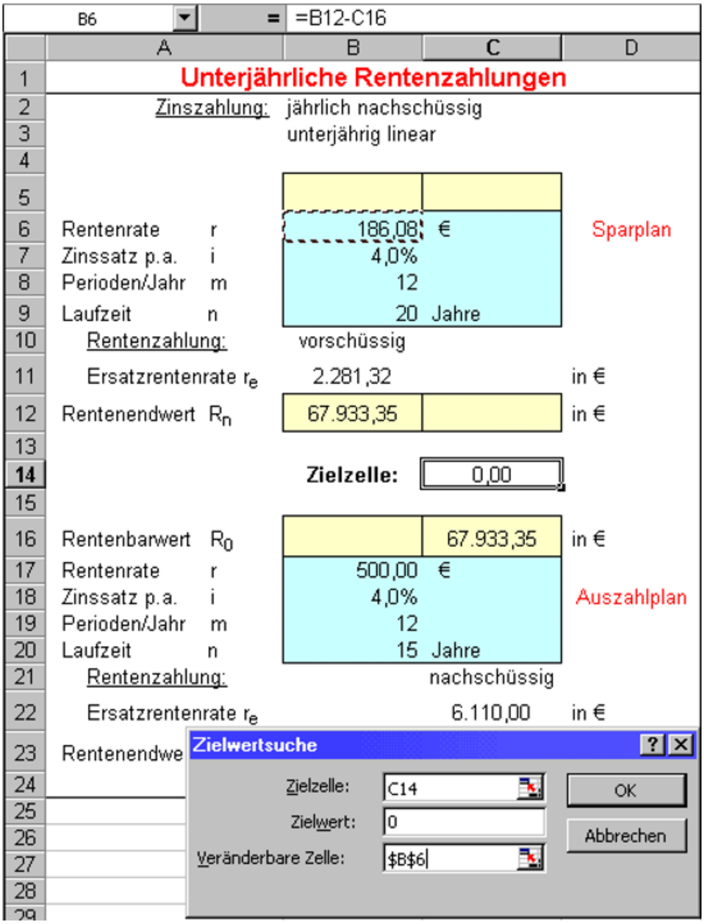
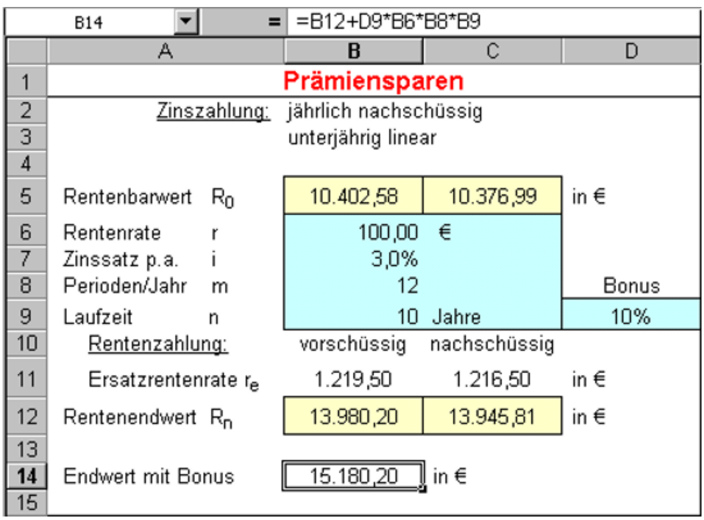


Bild 3.11e Excel-Tabelle für Beispiel 3.5

Beispiel 3.6:	Ein längerfristiger Sparplan mit monatlich vorschüssigen Raten von 100 € ist am Ende der Laufzeit von zehn Jahren mit einem zusätzlichen Bonus ausgestattet (sog. Prämiensparen). Wie hoch ist das Endkapital, wenn jährlich nachschüssig 3% Zinseszinsen gezahlt werden und der Bonus am Ende 10% der insgesamt eingezahlten Raten beträgt, und wie hoch ist der effektive Jahreszins?

Als Rentenendwert (ohne Bonus) ergibt sich mit der Excel-Tabelle von Bild 3.7e ein Wert von 13.980,20 €. In einer Kopie dieser Tabelle (s. Bild 3.12e) kann für den Bonus eine zusätzliche Zelle und für den gesamten Endwert (mit Bonus) eine weitere Zelle mit folgender Berechnung eingerichtet werden:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel in B14	Ergebnis
	$K_{12} = 13.980{,}20 + 0{,}1 \cdot 100 \cdot 12 \cdot 10$	=B12+D9*B6*B8*B9	15.180,20 €



B14 = =B12+D9*B6*B8*B9

	A	B	C	D
1		Prämiensparen		
2	Zinszahlung:	jährlich nachschüssig		
3		unterjährig linear		
4				
5	Rentenbarwert R_0	10.402,58	10.376,99	in €
6	Rentenrate r	100,00	€	
7	Zinssatz p.a. i	3,0%		
8	Perioden/Jahr m	12		Bonus
9	Laufzeit n	10	Jahre	10%
10	Rentenzahlung:	vorschüssig	nachschüssig	
11	Ersatzrentenrate r_e	1.219,50	1.216,50	in €
12	Rentenendwert R_n	13.980,20	13.945,81	in €
13				
14	Endwert mit Bonus	15.180,20	in €	
15				

Bild 3.12e Excel-Tabelle für Beispiel 3.6

Der Effektivzinssatz ist derjenige Jahreszins, mit dem bei alleiniger Zahlung der monatlichen Raten, also ohne Berücksichtigung des Bonus, ein Endwert von 15.180,20 € erzielt wird. Weil hierbei unterjährig exponentielle Verzinsung zu berücksichtigen ist, muss die Excel-Tabelle von Bild 3.8e benutzt werden. Bei Vorgabe des Endwertes als Zielwert in Zelle B14 ergibt sich mit Zielwertsuche in Abhängigkeit von der veränderlichen Zelle B7 ein effektiver Jahreszins von 4,60 % (s. Bild 3.13e).

B12 = =ZW(B7;B9/B8;-B11)

	A	B	C	D
1	Unterjährliche Rentenzahlungen			
2	Zinszahlung:	unterjährlich nachschüssig		
3		unterjährig exponentiell		
4				
5	Rentenbarwert R_0	9.683,12	9.646,91	in €
6	Rentenrate r	100,00	€	
7	Zinssatz p.a. i	4,60%	⇨ i_k =	0,38%
8	Perioden/Jahr m	12		
9	Laufzeit n_p	120	Monate	
10	Rentenzahlung:	vorschüssig	nachschüssig	
11	Ersatzrentenrate r_e	1.229,69	1.225,09	in €
12	Rentenendwert R_n	15.180,20	15.123,43	in €
13				

Bild 3.13e Bestimmung des Effektivzinssatzes für Beispiel 3.6

Ewige Renten

Ein Auszahlplan kann so angelegt sein, dass die Rentenrate den Zinsertrag nicht übersteigt. Dann bleibt das Kapital in seiner anfänglichen Höhe R_0 unverändert (sogenannte "kapitalerhaltende" Rente). Für den Fall, dass die Rentenrate gar unter dem Zinsertrag liegt, würde der Auszahlplan zugleich einen Sparplan für die nicht ausgezahlten Zinsanteile enthalten ("kapitalerhöhende" Rente). Unveränderte Bedingungen vorausgesetzt, d. h. gleichbleibender Zinssatz und konstante Rentenrate, handelt es sich theoretisch um *ewige Renten*, auch wenn die Laufzeit praktisch jederzeit abgebrochen werden kann. Im umgekehrten Sinne können zeitlich langfristige Zahlungsvorgänge, wie beispielsweise die Pacht für Immobilien, als ewige Rente angesehen und mit einem entsprechenden Barwert bewertet werden.

Beispiel 3.7: Welche ewige Rente kann monatlich nachschüssig ausgezahlt werden, wenn dafür ein Kapitalbetrag von 100.000 € zur Verfügung steht, der mit 3,75 % p.a. verzinst wird?

Es wird wiederum unterstellt, dass die Zinsen unterjährig linear berechnet und jährlich nachschüssig kapitalisiert werden. Deshalb dient für dieses Beispiel die Excel-Tabelle von Bild 3.7e als Grundlage und wird innerhalb der Excel-Mappe gesondert kopiert und mit der Überschrift "Ewige Rentenzahlungen" versehen (s. Bild 3.14e).

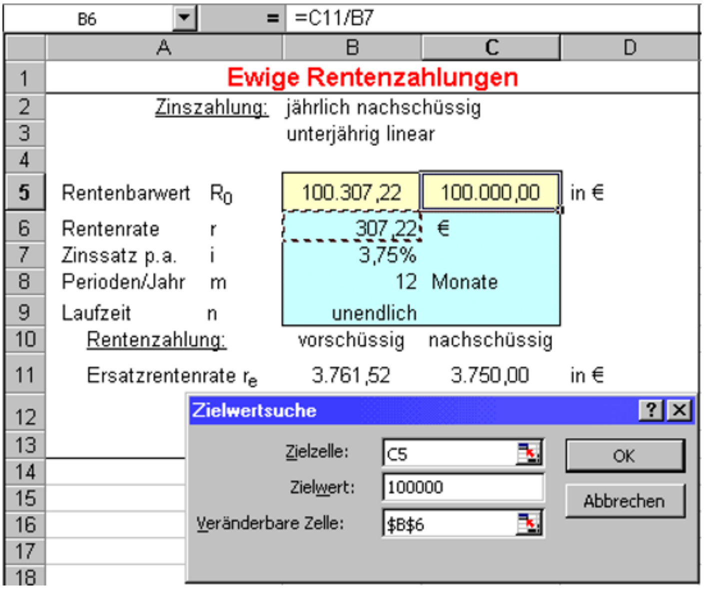


Bild 3.14e Excel-Tabelle für Beispiel 3.7

Die Berechnung der Rentenendwerte entfällt. Die Barwerte in Zelle C5 bzw. B5 sind von der jährlichen Ersatzrentenrate, die gleich dem jährlichen Zinsbetrag ist, gemäß Gl. (3.12) zu bilden. Die Transformationsbeziehungen zwischen der fiktiven Ersatzrentenrate r_e und der tatsächlichen unterjährlich nach- oder vorschüssigen Zahlung r – Rechnungen, die innerhalb der Jahresperiode gelten und von der Laufzeit unabhängig sind – bleiben unverändert.

Die Lösung findet man durch Zielwertsuche für den Barwert in Zelle C5, da die Rentenzahlungen monatlich nachschüssig erfolgen sollen. (Bei monatlich vorschüssigen Zahlungen wäre B5 die Zielzelle.) Als Zielwert ist 100.000 und als veränderliche Zelle B6 einzutragen. Durch Iteration stellt sich eine Rentenrate von $r = 307{,}22$ € ein (s. Bild 3.14e).

Bei monatlich vorschüssigen Rentenzahlungen würde die Rate $r = 306{,}28$ € betragen, was aus derselben jährlich nachschüssige Ersatzrentenrate resultiert. Dieses Ergebnis ist mit der Excel-Tabelle von Bild 3.14e leicht zu ermitteln und soll durch progressive Rechnung nachgeprüft werden. Aus r folgt

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel in C11	Ergebnis
(3.31)	$r_e = 306{,}28 \cdot (12 + 0{,}0375 \cdot 6{,}5)$	=B6*(B8+B7*(B8-1)/2)	3.750 €

und daraus der Rentenbarwert

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel in C5	Ergebnis
(3.12)	$R_0 = \dfrac{3.750}{0{,}0375}$	=C11/C7	100.000 €

Für langfristige Rentenzahlungen ist von Interesse, wie sich der Rentenbarwert dem der ewigen Rente nähert. Dies ist gleichbedeutend mit der Frage, inwieweit zukünftige Zahlungen aus gegenwärtiger Sicht ins Gewicht fallen.

Beispiel 3.8: Es ist tabellarisch und grafisch darzustellen, wie sich der Rentenbarwert einer jährlich nachschüssigen Rente in Abhängigkeit von Laufzeit n und Zinssatz i an den Barwert der ewigen Rente annähert.

Unter Berücksichtigung von Gln. (3.3) für R_0 und Gl. (3.12) für den Barwert der ewigen Rente R_0^{ew} ergibt sich

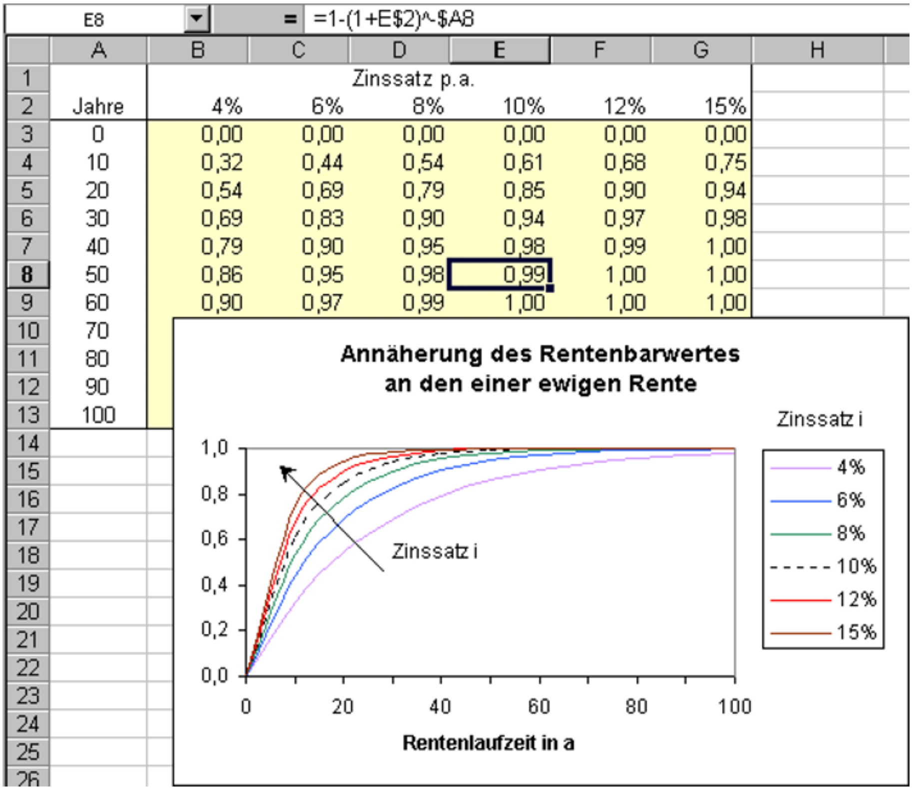
$$\frac{R_0}{R_0^{\mathrm{ew}}} = \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n} = 1 - \frac{1}{(1+i)^n} \quad \text{und} \quad \lim_{n \to \infty} \frac{R_0}{R_0^{\mathrm{ew}}} = 1\,. \tag{3.11a}$$

Für i = 10 % und n = 50 Jahre würde sich beispielsweise ergeben:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel in E9	Ergebnis
(3.11a)	$\dfrac{R_0}{R_0^{\mathrm{ew}}} = 1 - \dfrac{1}{(1+0{,}10)^{50}}$	=1-(1+E$3)^(-$A9)	0,9915

D. h. alle Ratenzahlungen, die mehr als 50 Jahre später erfolgen, gehen in den Rentenbarwert mit weniger als 1 % ein.

Die Excel-Tabelle und das daraus erstellte Diagramm zeigt Bild 3.15e. Die Excel-Formel von Zelle E9, in der die Kopfzeile 3 sowie die Kopfspalte A mit $-Zeichen fixiert sind, kann in den gesamten Tabellenbereich B4:G14 kopiert werden. Aus den Ergebnissen ist zu erkennen, dass sich der Rentenbarwert umso früher an den Barwert der ewigen Rente annähert, je höher der Zinssatz ist.



	A	B	C	D	E	F	G
1				Zinssatz p.a.			
2	Jahre	4%	6%	8%	10%	12%	15%
3	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
4	10	0,32	0,44	0,54	0,61	0,68	0,75
5	20	0,54	0,69	0,79	0,85	0,90	0,94
6	30	0,69	0,83	0,90	0,94	0,97	0,98
7	40	0,79	0,90	0,95	0,98	0,99	1,00
8	50	0,86	0,95	0,98	0,99	1,00	1,00
9	60	0,90	0,97	0,99	1,00	1,00	1,00
10	70						
11	80						
12	90						
13	100						

Bild 3.15e Excel-Tabelle für Beispiel 3.8

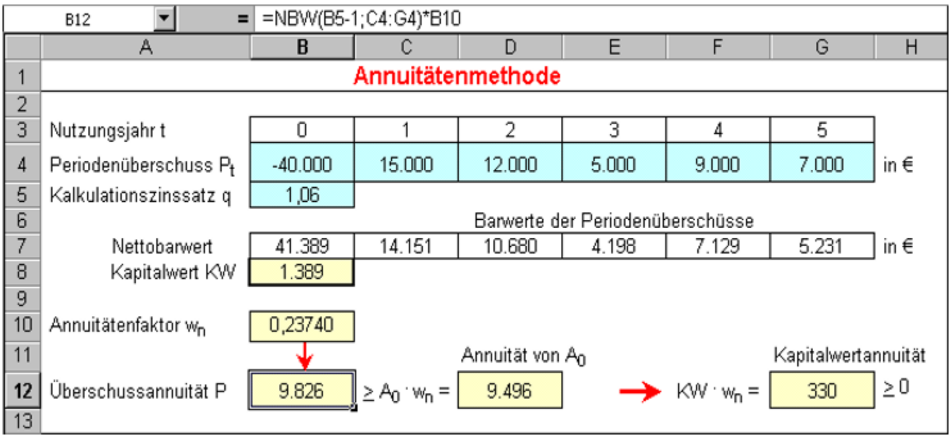
3.3.4 Annuitätenmethode der Investitionsrechnung

Beispiel 3.9:	Wie hoch muss die jährliche Überschussannuität für die Investition in Beispiel 2.1 mindestens sein, damit diese gerade noch als vorteilhaft eingeschätzt werden kann? Welcher äquivalenten Annuität entsprechen die im Beispiel berücksichtigten Periodenüberschüsse?

Zur Lösung dieser Aufgabe muss die Anfangsauszahlung A_0 in Höhe von 40.000 € über die beabsichtigte Nutzungsdauer des Investitionsobjekts von fünf Jahren "verrentet", d. h. in äquivalente jährlich nachschüssige Auszahlungen A_t ($t = 1, 2, ..., 5$) von jeweils gleicher Höhe umgewandelt werden. Das geschieht durch Multiplikation mit dem Annuitätenfaktor auf Basis des Kalkulationszinssatzes $i = 6$ %:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Funktion in B10	Ergebnis
(3.10)	$w_5 = \dfrac{0{,}06 \cdot 1{,}06^5}{1{,}06^5 - 1}$	=RMZ(B5-1;G3;-1)	0,23740
(3.8)	$A_t = 40.000 \cdot 0{,}23740$	=–B4*B10 in D12	9.496 €

Für diese Rechnung wird eine Kopie der Tabelle von Bild 2.1e mit der Überschrift "Annuitätenmethode" versehen und um einige Elemente erweitert (s. Bild 3.16e).



B12 = =NBW(B5-1;C4:G4)*B10

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Annuitätenmethode							
2								
3	Nutzungsjahr t	0	1	2	3	4	5	
4	Periodenüberschuss P_t	-40.000	15.000	12.000	5.000	9.000	7.000	in €
5	Kalkulationszinssatz q	1,06						
6			Barwerte der Periodenüberschüsse					
7	Nettobarwert	41.389	14.151	10.680	4.198	7.129	5.231	in €
8	Kapitalwert KW	1.389						
9								
10	Annuitätenfaktor w_n	0,23740						
11				Annuität von A_0			Kapitalwertannuität	
12	Überschussannuität P	9.826	$\geq A_0 \cdot w_n =$	9.496		$KW \cdot w_n =$	330	≥ 0
13								

Bild 3.16e Excel-Tabelle für Beispiel 3.9

Die Annuität der Einzahlungen $E_t = P$, die sich aus dem Nettobarwert der Periodenüberschüsse P_t ergibt, muss diesen Wert A_t übersteigen, damit die Vorteilhaftigkeit der Investition gegeben ist:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Funktion in B12	Ergebnis
(3.8)	$E_t = 41.389 \cdot 0{,}23740$	=NBW(B5-1;C4:G4)*B10	9.826 €

Der Nettobarwert der Überschüsse kann in Zelle B12 neu berechnet oder aus Zelle B7 übernommen werden. Mit 9.826 € ist die Überschussannuität größer als die Annuität der Anfangsauszahlung und die Vorteilhaftigkeitsbedingung somit erfüllt.

Die gleiche Aussage, ausgedrückt als Differenz zwischen jährlicher Ein- und Auszahlungsannuität, ergibt sich, wenn der Kapitalwert in eine jährlich nachschüssige Rente, die so genannte *Kapitalwertannuität*, umgewandelt wird:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel in G12	Ergebnis
(3.8)	$E_t - A_t = 1.389 \cdot 0{,}23740$	= B8*B10	330 €

Daraus ist ersichtlich, dass die Ergebnisse von Annuitäten- und Kapitalwertmethode übereinstimmen und sich nur um den Faktor w_n unterscheiden.

Faktoren für die Rentenrechnung

> Beispiel 3.10: Für die wichtigsten Faktoren der Zinseszins- und Rentenrechnung – insbesondere zur Berechnung des Rentenend- und Rentenbarwertes sowie der Rentenrate – ist eine Tabelle zu erstellen, aus der diese Faktoren in Abhängigkeit vom Zinssatz und von der Laufzeit zu ersehen sind.

Die Bereitstellung verschiedener Faktoren der Rentenrechnung erleichtert die sofortige Ermittlung des Rentenendwertes, des Rentenbarwertes oder der Rentenrate. Deshalb existieren in der Fachliteratur[66] entsprechende Tabellenwerke. So wurde im vorhergehenden Beispiel 3.9 die Verwendung des Kapitalwiedergewinnungs- oder Annuitätenfaktors w_n für Investitionsentscheidungen demonstriert. Weitere praktische Anwendungen finden sich etwa im Rahmen der Kredit- und Tilgungsrechnung.

Die Berechnung der wichtigsten Faktoren (Aufzinsungsfaktor q^n, Rentenendwertfaktor s_n, Rentenbarwertfaktor b_n und Annuitätenfaktor w_n) wird hier zunächst für $n = 3$ Jahre und $i = 6$ % gezeigt:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel	Excel-Funktion	Zelle	Ergebnis
(1.17)	$q^3 = (1+0{,}06)^3$	=(1+D4)^B6	=POTENZ(1+D4;B6)	A10	1,191016
(3.4)	$s_3 = \frac{1{,}191016-1}{0{,}06}$	=(A10-1)/D4	=ZW(D4;B6;-1)	B10	3,183600
(3.6)	$b_3 = \frac{3{,}183600}{1{,}191016}$	=B10/A10	=BW(D4;B6;-1)	C10	2,673012
(3.10)	$w_3 = \frac{1}{2{,}673012}$	=1/C10	=RMZ(D4;B6;-1)	D10	0,374110

---

[66] vgl. Däumler (1989)

Anstelle der Formeln können zur Berechnung der Faktoren auch die entsprechenden Excel-Formeln herangezogen werden. Die zugehörige Excel-Tabelle zeigt Bild 3.17e. Diese Tabelle ermöglicht die Berechnung aller dieser Faktoren auch für unterjährige Perioden, wenn als Periodenzinssatz der konforme unterjährige Zinssatz gemäß Gl. (1.24) verwendet und somit unterjährig exponentielle Verzinsung zu Grunde gelegt wird.

D10 = =RMZ(D4;B6;-1)

	A	B	C	D	E
1	**Faktoren der Rentenrechnung**				
2	Zinszahlung:	unterjährig exponentiell			
3				Periodenzinssatz	
4	Zinssatz p.a. i	6,00%	⇨ i_k =	6,00%	
5	Perioden/Jahr m	1			
6	Laufzeit n = n_p	3 Jahre			
7					
8	Aufzinsungsfaktor	Endwertfaktor	Barwertfaktor	Annuitätenfaktor	
9	q^n	s_n	b_n	w_n	
10	1,191016	3,183600	2,673012	0,374110	
11					

Bild 3.17e Excel-Tabelle für Beispiel 3.10

4. Kredit- und Tilgungsrechnung mit Excel

4.1 Einführung

Obgleich die Tilgungsrechnung auf der Zinseszins- und Rentenrechnung aufbaut, sind für analoge Größen zum Teil andere Symbole üblich. Angesichts der praktischen Besonderheiten des Kreditgeschäfts ist eine deutliche Abgrenzung von der Rentenrechnung durchaus zweckmäßig.

D	Darlehen, Kredit (in €)
S	Barwert der Rückzahlungen bei $t = 0$ (in €) ("ursprüngliche Schuld")
RS_t	Restschuld am Ende der Periode t (in €)
T_t	Tilgungsleistung am Ende der Periode t (in €)
Z_t	Zinsbetrag für die Periode t (in €)
A_t	Annuität im Jahr t (in €)
a, A_u	unterjährliche Annuität (in €)
$q^n = (1+i)^n$	Aufzinsungsfaktor
n	Laufzeit für die Rückzahlung (in a)
k	tilgungsfreie Zeit (in Perioden)
m	Zahl der unterjährigen Zahlungsperioden pro Jahr
n_p	Laufzeit (in unterjährigen Zahlungsperioden)
i_r, i_k	relativer bzw. konformer unterjähriger Zinssatz

Gegenüber der Rentenrechnung wird die Tilgungsrechnung um detailliertere Informationen zu den einzelnen Zahlungen sowie zum Stand der Kapitalentwicklung am Ende jeder Periode innerhalb der Laufzeit, den sog. *Tilgungsplan*, erweitert. Dafür wird eine Excel-Tabelle entsprechend Bild 4.1e in der neuen Mappe "Tilgung.xls" bereit gestellt.

K. Renger, *Finanzmathematik mit Excel*, DOI 10.1007/978-3-658-14100-4_9

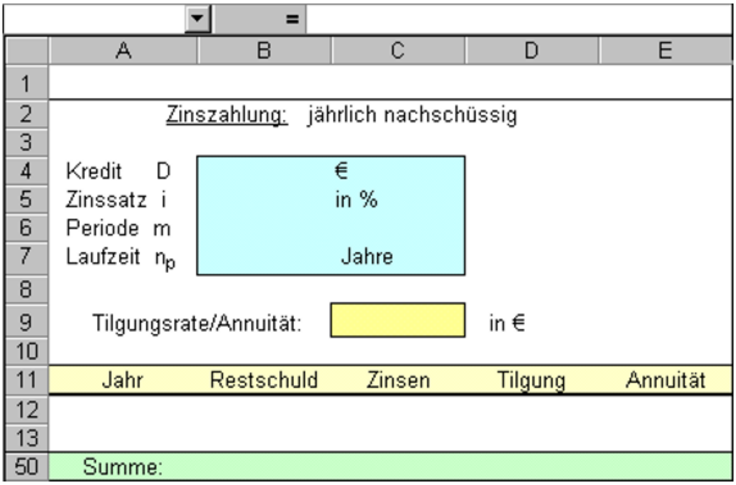


Bild 4.1e Tabellenvorlage für die Tilgungsrechnung

4.2 Ratentilgung

4.2.1 Jährliche Ratentilgung

> Beispiel 4.1: Ein Unternehmer nimmt einen Kredit von 100.000 € bei 9% jährlichen Kreditzinsen auf. Die Rückzahlung des Kredits soll innerhalb von 5 Jahren durch jährlich nachschüssige Ratentilgung erfolgen.
>
> Die Tabelle für den Tilgungsplan ist so zu erstellen, dass sie auch für andere Laufzeiten anwendbar ist.

Eine Kopie der Tabelle von Bild 4.1e erhält die Überschrift "Jährliche Ratentilgung". Nach dem Eintragen aller Ausgangsdaten in den Tabellenkopf wird zunächst die konstante Tilgungsrate ermittelt:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel in C9	Ergebnis
(4.2)	$T = \dfrac{100.000}{5}$	= B4/B7	20.000 €

Alle weiteren Größen werden entsprechend dem Schema in Tabelle 4.1 Periode für Periode rekursiv berechnet. Zweckmäßig ist, zeilenweise vorzugehen und die Excel-Formeln in einzelnen Schritten so zu vervollständigen und zu verallgemeinern, dass sie schließlich kopiert werden können (vgl. Bild 4.2e).

C9 = =B4/B7

	A	B	C	D	E
1			Jährliche Ratentilgung		
2		Zinszahlung:	jährlich nachschüssig		
3					
4	Kredit D	100.000,00 €			
5	Zinssatz i	9,00%			
6	Periode m				
7	Laufzeit n_p		5 Jahre		
8					
9		Tilgungsrate:	20.000,00	in €	
10					
11	Jahr	Restschuld	Zinsen	Tilgung	Annuität
12	=1	=B4	=B12*B5	=C9	=C12+D12
13	=A12+1	=B12-D12	=B13*$B$5	=$C$9	=C13+D13
14	=WENN(A13<$B$7;A13+1;"")			=WENN(A14="";"";$C$9)	
15					

Bild 4.2e Tabellenrechnung bei Ratentilgung

Basis für die nachschüssigen Zahlungen der Periode t bildet die jeweils verbleibende Restschuld aus der vorhergehenden Periode RS_{t-1}.

- *Zeile 12*:
  Im Jahr 1 ist der ausgezahlte Kredit als Restschuld anzusehen, sofern weder Abzüge noch Aufschläge zu berücksichtigen sind ("ursprüngliche Schuld" =B4). Außer der Tilgungsrate (=C9) sind auf die Restschuld die Zinsen (=B12*B5) zu zahlen. Die Annuität ergibt sich als Summe von Zinsen und Tilgungsrate.

- *Zeile 13*:
  Im zweiten Jahr an können die laufende Nummer (=A12+1) sowie die Restschuld (=B12–D12) aus Werten der vorhergehenden Zeile berechnet werden, Zinsen und Annuität greifen dagegen auf Werte derselben Zeile zurück. Nur für den Zinssatz und die Tilgungsrate müssen mittels $-Zeichen feste Zellbezüge hergestellt werden.

- *Zeile 14*
  entsteht als Kopie aus Zeile 13, wenn darin alle Zellbezüge – wie in Bild 4.2e gezeigt – richtig berücksichtigt sind.

  Zusätzlich werden nun die Formeln um Abbruchbedingungen derart ergänzt, dass alle Zeilen nach dem letzten Laufzeitjahr leer bleiben. In Spalte A wird deshalb mit der Excel-Funktion =WENN( ) nach dem Laufzeitende gefragt und bei $t > n$ ein Text ohne Zeichen (="") eingetragen (s. Bild 4.2e, Zelle A14). Diese Eintragung wird dann in allen übrigen Zellen derselben Zeile überprüft und gegebenenfalls übernommen (für Zelle D14 dargestellt in Bild 4.2e).

Wichtiger Hinweis: Die Formeln werden stets schrittweise ergänzt, ohne bereits ausgeführte Abschnitte vorher erst noch einmal zu löschen. Nur so ist es rational möglich, auch wesentlich kompliziertere Excel-Formeln systematisch aufzubauen!

- *Zeilen 15 - 49*:
  Die um die Abbruchbedingungen vervollständigte Zeile 14 kann je nach gewünschter Tabellenlänge nach unten kopiert werden. Dazu ist der Zellbereich A14:E14 zu markieren, der Cursor auf die linke untere Ecke des markierten Bereiches zu setzen und bei gedrückter linker Maustaste nach unten zu ziehen. Ob die Abbruchbedingungen exakt funktionieren, kann durch Vorgabe einer anderen Laufzeit in Zelle B7 überprüft werden.

Der fertige Tilgungsplan ist in Bild 4.3e dargestellt. Zusätzlich wurde am Ende der Tabelle noch eine Summenzeile eingerichtet, die neben zusätzlichen Informationen über die resultierende Verzinsung die Richtigkeit der gesamten Tilgungszahlungen bestätigt.

D50 = =SUMME(D12:D49)

	A	B	C	D	E
1	**Jährliche Ratentilgung**				
2		Zinszahlung:	jährlich nachschüssig		
3					
4	Kredit D	100.000,00 €			
5	Zinssatz i	9,00%			
6	Periode m				
7	Laufzeit n_p	5	Jahre		
8					
9		Tilgungsrate:	20.000,00	in €	
10					
11	Jahr	Restschuld	Zinsen	Tilgung	Annuität
12	1	100.000,00	9.000,00	20.000,00	29.000,00
13	2	80.000,00	7.200,00	20.000,00	27.200,00
14	3	60.000,00	5.400,00	20.000,00	25.400,00
15	4	40.000,00	3.600,00	20.000,00	23.600,00
16	5	20.000,00	1.800,00	20.000,00	21.800,00
17					
50	Summe:	300.000,00	27.000,00	100.000,00	127.000,00

Bild 4.3e Excel-Tabelle für Beispiel 4.1 (Ausschnitt)

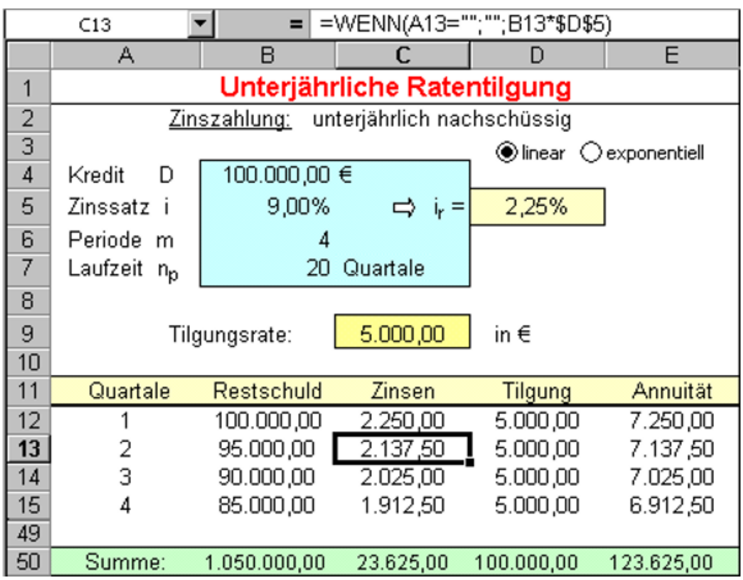
4.2.2 Unterjährliche Ratentilgung

> Beispiel 4.2: Im Unterschied zu Beispiel 4.1 soll der Kredit von 100.000 € in vierteljährlichen Raten getilgt werden. Ausgehend von 9 % p. a. Nominalzins sollen Tilgungspläne für folgende Varianten der unterjährigen Verzinsung erstellt werden:
>
> a) unterjährig linear bei vierteljährlicher Zinszahlung,
> b) unterjährig exponentiell bei vierteljährlicher Zinszahlung,
> c) unterjährig linear bei jährlich nachschüssiger Zinszahlung.

Bei periodisch synchronen Tilgungs- und Zinszahlungen besteht hinsichtlich der rekursiven Tabellenrechnung kein Unterschied zwischen jährlicher und unterjährlicher Periodizität. Deshalb bildet eine Kopie der Excel-Tabelle aus Bild 4.3e die Grundlage eines Tilgungsplanes für unterjährliche Ratentilgung. Voraussetzung ist allerdings, dass die zu tilgende Schuld gleichmäßig auf alle Perioden verteilt wird:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel in C9	Ergebnis
(4.6)	$T = \dfrac{100.000}{4 \cdot 5}$	= B4/B7	5.000 €

Die Excel-Formel in Zelle C9 braucht nicht geändert werden, wenn als Laufzeit in Zelle B7 die Zahl der Perioden $n_p = m \cdot n$ angegeben wird (s. Bild 4.4e).



C13 = =WENN(A13="";"";B13*$D$5)

	A	B	C	D	E
1	Unterjährliche Ratentilgung				
2		Zinszahlung:	unterjährlich nachschüssig		
3				linear	exponentiell
4	Kredit D	100.000,00 €			
5	Zinssatz i	9,00%	⇨ i_r =	2,25%	
6	Periode m	4			
7	Laufzeit n_p	20	Quartale		
8					
9		Tilgungsrate:	5.000,00	in €	
10					
11	Quartale	Restschuld	Zinsen	Tilgung	Annuität
12	1	100.000,00	2.250,00	5.000,00	7.250,00
13	2	95.000,00	2.137,50	5.000,00	7.137,50
14	3	90.000,00	2.025,00	5.000,00	7.025,00
15	4	85.000,00	1.912,50	5.000,00	6.912,50
49					
50	Summe:	1.050.000,00	23.625,00	100.000,00	123.625,00

Bild 4.4e Excel-Tabelle für Beispiel 4.2a (Ausschnitt)

Für die Zinsberechnung muss ein Periodenzinssatz verwendet werden, wobei Ausschlag gebend ist, wie der nominelle Jahreszinssatz auf die Perioden verteilt wird, als relativer oder als konformer Zinssatz (vgl. Tabelle 4.3, Spalte 4). Beide Versionen können in einer einzigen Excel-Tabelle berücksichtigt werden, indem in Zelle D5 die jeweilige Umrechnungsgleichung über Schalter auf Basis kleiner Makros eingetragen wird (vgl. "Makros aufzeichnen" in Abschn. 3.3.1). Der absolute Zellbezug von B5 auf D5 wird in einer Formel von Spalte C geändert und dann über die gesamte Spalte kopiert (s. Bild 4.4e).

Die Verwendung des unterjährig relativen Zinssatzes hat zur Folge, dass der effektive Jahreszins, der als offizieller Preis des Kreditvertrages gilt, höher ist als der nominelle. Der effektive Jahreszins wird bestimmt, indem man zunächst auf "exponentiell" umschaltet und so einen Tilgungsplan errechnet, für den der effektive Jahreszinssatz mit dem nominellen übereinstimmt. Im Beispiel ist dies für einen vierteljährlichen Zinssatz von 2,18 % der Fall. Nun bestimmt man mittels Zielwertsuche in Zelle D5 denjenigen Jahreszinssatz in Zelle B5, der einem Vierteljahreszins von 2,25 % (= relativer Zinssatz) entspricht. Im Beispiel ergibt sich ein Wert von 9,31 % (s. Bild 4.5e).

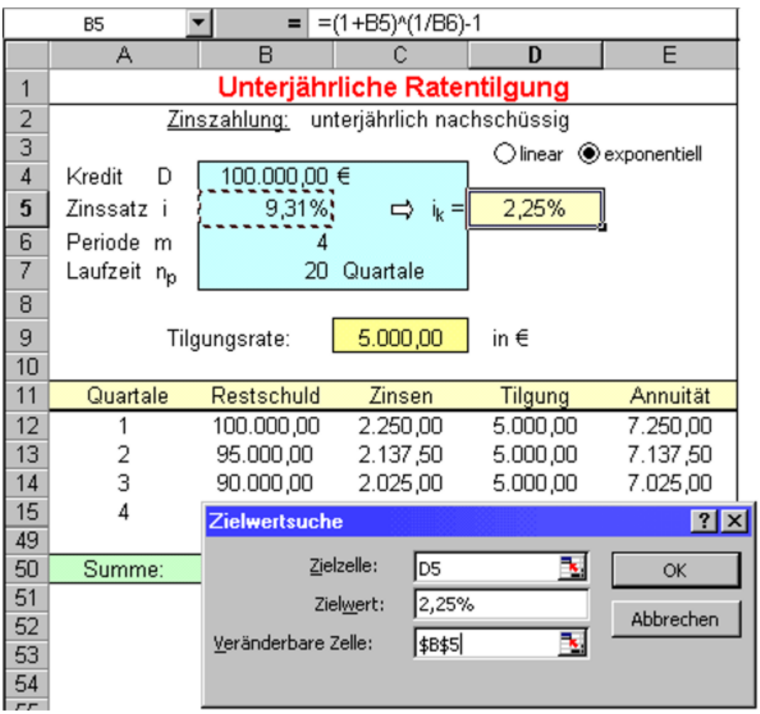
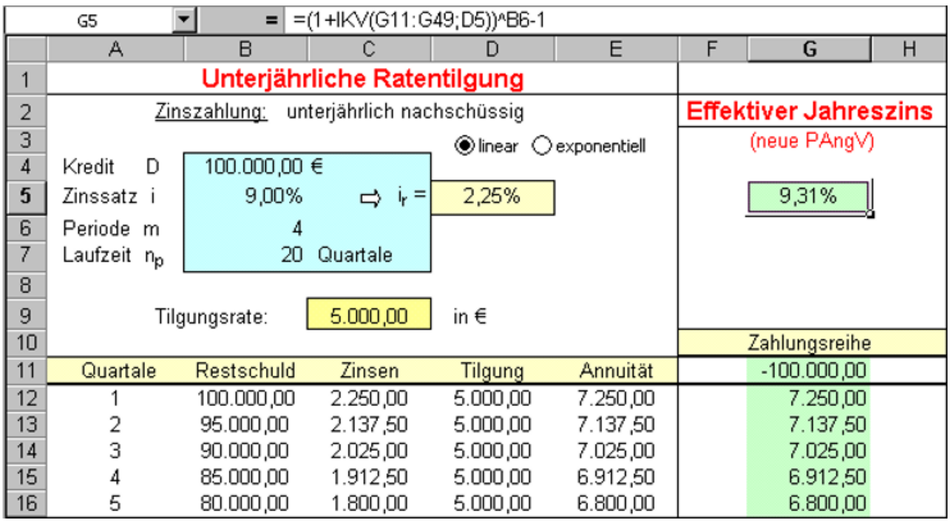


Bild 4.5e Excel-Tabelle für Beispiel 4.2b (Ausschnitt)

Dasselbe Ergebnis für den effektiven Jahreszins ist zu erzielen, wenn aus der Zahlungsreihe – bestehend aus Kreditzahlung bei $t = 0$ und allen Annuitäten – mit der Excel-Funktion =IKV( ) der interne Zinssatz bestimmt wird.

Dazu richtet man im selben Tabellenblatt rechts neben der Zahlungsreihe eine zusätzliche Spalte ein, in die man die Annuitäten mit relativen Zellbezügen zu Spalte E überträgt (s. Bild 4.6e). An den Anfang dieser Reihe wird zusätzlich der Kreditbetrag mit umgekehrtem Vorzeichen eingetragen, ebenfalls mittels relativem Zellbezug =-B4. Daraus wird mit =IKV( ) in Zelle G5 zunächst der interne Periodenzinssatz berechnet, der gemäß Gl. (1.24) exponentiell in einen Jahreszinssatz umzurechnen ist (s. Bild 4.6e). Bei linearer unterjähriger Verzinsung bestätigt sich für Beispiel 4.2a der Wert von 9,31 %, während für Beispiel 4.2b der effektive Zinssatz mit 9 % denselben Wert behält wie der nominelle Zinssatz.



G5 = =(1+IKV(G11:G49;D5))^B6-1

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Unterjährliche Ratentilgung						
2		Zinszahlung:	unterjährlich nachschüssig				Effektiver Jahreszins	
3				linear	exponentiell		(neue PAngV)	
4	Kredit D	100.000,00 €						
5	Zinssatz i	9,00%	⇨ i_r =	2,25%			9,31%	
6	Periode m	4						
7	Laufzeit n_p	20	Quartale					
8								
9		Tilgungsrate:	5.000,00	in €				
10							Zahlungsreihe	
11	Quartale	Restschuld	Zinsen	Tilgung	Annuität		-100.000,00	
12	1	100.000,00	2.250,00	5.000,00	7.250,00		7.250,00	
13	2	95.000,00	2.137,50	5.000,00	7.137,50		7.137,50	
14	3	90.000,00	2.025,00	5.000,00	7.025,00		7.025,00	
15	4	85.000,00	1.912,50	5.000,00	6.912,50		6.912,50	
16	5	80.000,00	1.800,00	5.000,00	6.800,00		6.800,00	

Bild 4.6e Effektiver Jahreszins für Beispiel 4.2a (Ausschnitt)

Übrigens ersetzt die Excel-Tabelle in Bild 4.6e auch die Tabelle für jährliche Ratentilgung von Bild 4.3e, weil mit $m = 1$ auf Jahresperioden umgestellt werden kann. Die Art der unterjährigen Verzinsung spielt in diesem Fall keine Rolle[67].

[67] Es empfiehlt sich, diese Aussagen am Beispiel zu überprüfen, indem anstelle von 20 Quartalen bei $m = 1$ als Laufzeit 5 Jahre eingetragen werden.

Jährlich nachschüssige Zinszahlung (Beispiel 4.2c)

Wenn die Zinsen – wie in Tabelle 4.2 dargestellt – unterjährig berechnet, dann aber auf einem separaten Zinskonto kumuliert und erst am Ende jedes Laufzeitjahres verrechnet (kapitalisiert) werden, dann entspricht dies einer in Deutschland üblichen Praxis, die bis zum Jahr 2000 die Grundlage für die Berechnung des effektiven Jahreszinssatzes darstellte (vgl. Teil 1, Abschn. 2.5). Diese Version erfordert weitergehende Modifikationen der Excel-Tabelle von Bild 4.6e, die man am besten wieder in einer neuen Kopie wie folgt ausführt:

- *Zelle C13:*
  Zu den Zinsen für Periode 2 werden in einem ersten Erweiterungsschritt die Zinsen der vorhergehenden Periode 1 addiert (einfache Zinsrechnung):

  =WENN(A13="";"";C12+B13*$D$5))

  In einem zweiten Schritt muss berücksichtigt werden, dass die Kumulierung am Ende jedes Laufzeitjahres beendet und danach neu begonnen wird. Dazu prüft man mit der Excel-Funktion REST( )=0 die Ganzzahligkeit von $(t-1)/m$. Wenn die vorhergehende Periode ein volles Laufzeitjahr beschließt, wird das Zinskonto neu gefüllt:

  =WENN(A13="";"";WENN(REST(A12;$B$6)=0;B13*$D$5;C12+B13*$D$5)).

  In dieser endgültigen Form kann die Formel bis zum Ende der Spalte kopiert werden.

- *Zelle E13:*
  Die Zinsen sind erst am Ende eines jeden Laufzeitjahres zu zahlen; deshalb ist die Annuität zunächst identisch mit der Tilgungsrate:

  =WENN(A13="";"";WENN(REST(A13;$B$6)=0);C13+D13;D13)).

  Außerdem müssen die Zinsen am Laufzeitende hinzugerechnet werden – unabhängig davon, ob ein volles Laufzeitjahr erreicht ist. Dazu ist die Excel-Funktion =ODER( ) geeignet:

  =WENN(A13="";"";WENN(ODER(A13=$B$7;REST(A13;$B$6)=0);C13+D13;D13)).

  Auch diese Formel wird bis ans Spaltenende kopiert. Ob die zweite Erweiterung funktioniert, kann festgestellt werden, wenn in Zelle B7 eine Laufzeit vorgegeben wird, die einen unterjährigen Rest hat, z. B. 10 Quartale (s. Bild 4.7e).

E21 = =WENN(A21="";"";WENN(ODER(A21=$B$7;REST(A21;$B$6)=0);C21+D21;D21))

Unterjährliche Ratentilgung

Zinszahlung: jährlich nachschüssig, unterjährig linear

Kredit	D	100.000,00 €	
Zinssatz	i	9,00%	⇨ i_r = 2,25%
Periode	m	4	
Laufzeit	n_p	10 Quartale	

Tilgungsrate: 10.000,00 in €

Quartale	Restschuld	Zinsen	Tilgung	Annuität
1	100.000,00	2.250,00	10.000,00	10.000,00
2	90.000,00	4.275,00	10.000,00	10.000,00
3	80.000,00	6.075,00	10.000,00	10.000,00
4	70.000,00	7.650,00	10.000,00	17.650,00
5	60.000,00	1.350,00	10.000,00	10.000,00
6	50.000,00	2.475,00	10.000,00	10.000,00
7	40.000,00	3.375,00	10.000,00	10.000,00
8	30.000,00	4.050,00	10.000,00	14.050,00
9	20.000,00	450,00	10.000,00	10.000,00
10	10.000,00	675,00	10.000,00	10.675,00

Bild 4.7e Excel-Tabelle für Beispiel 4.2c

Der effektive Jahreszins beträgt 8,98 % bei 20 Quartalen bzw. 8,97 % bei 10 Quartalen.

Tilgungsfreie Zeiten

> Beispiel 4.3: Zur Finanzierung eines Erweiterungsbaus nimmt ein Eigenheim-Besitzer eine Hypothek in Höhe von 90.000 € auf, die mit 8,2 % p. a. zu verzinsen ist. Die Rückzahlung erfolgt binnen 12 Jahren durch jährliche Ratentilgung, wobei eine Tilgungsstreckung um die ersten beiden Jahre vereinbart wird. Wie ist der Tilgungsplan zu berechnen?

Die Berücksichtigung von tilgungsfreien Laufzeitanteilen erfordert nur wenige zusätzliche Änderungen in den bereits erstellten Tabellen. Da es im Beispiel um Ratenzahlung im jährlichen Rhythmus geht, kann entweder die Tabelle von Bild 4.3e oder die von Bild

4.6e als Ausgangsbasis dienen. Folgende Erweiterungen sind erforderlich (vgl. Bild 4.8e):

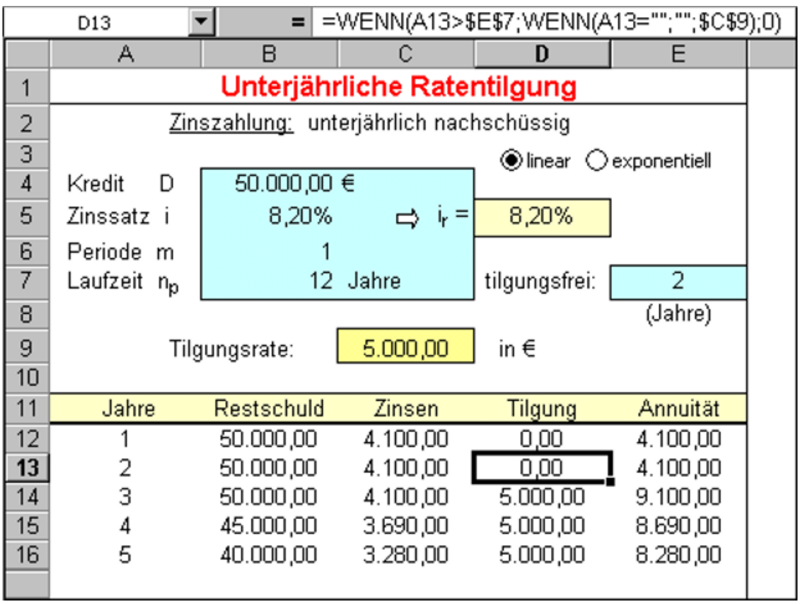
- Im Vorgabeteil der Tabelle ist eine Zelle für die tilgungsfreie Zeit vorzusehen, z. B. E7 für $k = 2$.
- Bei der Berechnung der Tilgungsrate in Zelle C9 ist die tilgungsfreie Zeit von der Laufzeit zu subtrahieren:

  =B4/(B7-E7).

- Die Zahlung der Tilgungsrate ist von der Beendigung der tilgungsfreien Zeit abhängig zu machen, andernfalls ist null einzutragen. Die Excel-Formel in Zelle D13 ist entsprechend zu ergänzen

  =WENN(A13>$E$7;WENN(A13="";"";$C$9);0)

  und in die gesamte Spalte zu kopieren (auch in Zelle D12).



Jahre	Restschuld	Zinsen	Tilgung	Annuität
1	50.000,00	4.100,00	0,00	4.100,00
2	50.000,00	4.100,00	0,00	4.100,00
3	50.000,00	4.100,00	5.000,00	9.100,00
4	45.000,00	3.690,00	5.000,00	8.690,00
5	40.000,00	3.280,00	5.000,00	8.280,00

Bild 4.8e Excel-Tabelle für Beispiel 4.3 (Ausschnitt)

Die Tilgungsstreckung wirkt sich auf den effektiven Jahreszins nicht aus, weil während der tilgungsfreien Zeit die Zinsen auf die Darlehensschuld zu zahlen sind.

4.3 Tilgung durch gleichbleibende Annuitäten (Annuitätentilgung)

Wie bei der Ratentilgung soll auch in diesem Abschnitt das schrittweise Erweitern der Tabellen für den Tilgungsplan dargestellt werden. Um die Unterschiede zu verdeutlichen, wird das Beispiel 4.1 in entsprechend abgewandelter Form wiederum herangezogen.

4.3.1 Jährliche Annuitätentilgung

> Beispiel 4.4: Ein Kredit von 100.000 € soll bei 9 % jährlichen Kreditzinsen innerhalb von 5 Jahren zurückgezahlt werden, im Unterschied zu Beispiel 4.1 jedoch nicht mit gleichbleibenden Tilgungsraten, sondern mit gleichbleibenden Annuitäten.
>
> Die Tabelle für den Tilgungsplan ist so zu erstellen, dass sie auch für andere Laufzeiten anwendbar ist.

Da keine Unterschiede hinsichtlich des Tabellenaufbaus bestehen, kann die Excel-Tabelle in Bild 4.3e innerhalb der Mappe kopiert und mit der Überschrift "Jährliche Annuitätentilgung" versehen werden. Anstelle der Tilgungsrate wird in Zelle C9 zuerst die konstante Annuität berechnet:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel in C9	Ergebnis
(4.10)	$A = 100.000 \cdot \dfrac{0{,}09 \cdot 1{,}09^5}{1{,}09^5 - 1}$	=RMZ(B5;B7;-B4)	25.709,25 €

Nun werden die Formeln in den ersten drei Zeilen des Tilgungsplanes auf notwendige Änderungen überprüft, wobei das Schema von Tabelle 4.4 zu Hilfe genommen werden kann. Man wird dabei schnell feststellen, dass lediglich die Berechnung der Tilgungsrate in Spalte D korrigiert werden muss, denn sie ergibt sich als Differenz von Annuität und Zinsen des betreffenden Jahres: $T_t = A - Z_t$. Für $t = 3$ beispielsweise steht dafür in Zelle D14 die Excel-Formel =$C$9-C14 innerhalb der WENN-Funktion (vgl. Bild 4.9e). Diese Zelle wird bis ans Spaltenende kopiert.

D14 = =WENN(A14="";"";$C$9-C14)

	A	B	C	D	E
1	**Jährliche Annuitätentilgung**				
2		Zinszahlung:	jährlich nachschüssig		
3					
4	Kredit D	100.000,00 €			
5	Zinssatz i	9,00%			
6	Periode m				
7	Laufzeit n_p		5 Jahre		
8					
9		Annuität:	25.709,25	in €	
10					
11	Jahr	Restschuld	Zinsen	Tilgung	Annuität
12	1	100.000,00	9.000,00	16.709,25	25.709,25
13	2	83.290,75	7.496,17	18.213,08	25.709,25
14	3	65.077,68	5.856,99	19.852,25	25.709,25
15	4	45.225,42	4.070,29	21.638,96	25.709,25
16	5	23.586,46	2.122,78	23.586,46	25.709,25
17					
50	Summe:	317.180,32	28.546,23	100.000,00	128.546,23

Bild 4.9e Excel-Tabelle für Beispiel 4.4

Ob die Tabelle noch Fehler enthält, ergeben folgende Nachprüfungen:

1. In Spalte E erscheinen die konstanten Annuitätszahlungen.
2. Im letzten Laufzeitjahr muss die Tilgungsrate mit der Restschuld übereinstimmen.
3. Die Summe aller Tilgungsraten in Zelle D50 muss mit der ursprünglichen Schuld übereinstimmen.

Die Annuitätentilgung weist in der Summenzeile im Vergleich zur Ratentilgung einen höheren Zinsbetrag aus. Das hat jedoch keinen Einfluss auf den effektiven Jahreszins, weil ein Teil der Zinslast zeitlich nach hinten verlagert wird.

4.3.2 Unterjährliche Annuitätentilgung bei jährlicher Zinszahlung

Beispiel 4.5: Im Unterschied zu Beispiel 4.4 soll der Kredit von 100.000 € in vierteljährlichen Annuitäten getilgt werden. Bei einem nominellen Jahreszinssatz von 9 % und einer Laufzeit von 20 Quartalen sind die Zinsen

a) unterjährig linear
b) unterjährig exponentiell

zu berechnen und jährlich nachschüssig zu zahlen.

Die unterjährige Annuität a wird aus der jährlichen Annuität A genauso berechnet, wie die unterjährliche Rentenrate aus der jährlichen nach Gl. (3.23) bzw. (3.26). Ausgehend von der Kreditzahlung ergibt sich bei *unterjährig linearer* Verzinsung für dieses Beispiel:

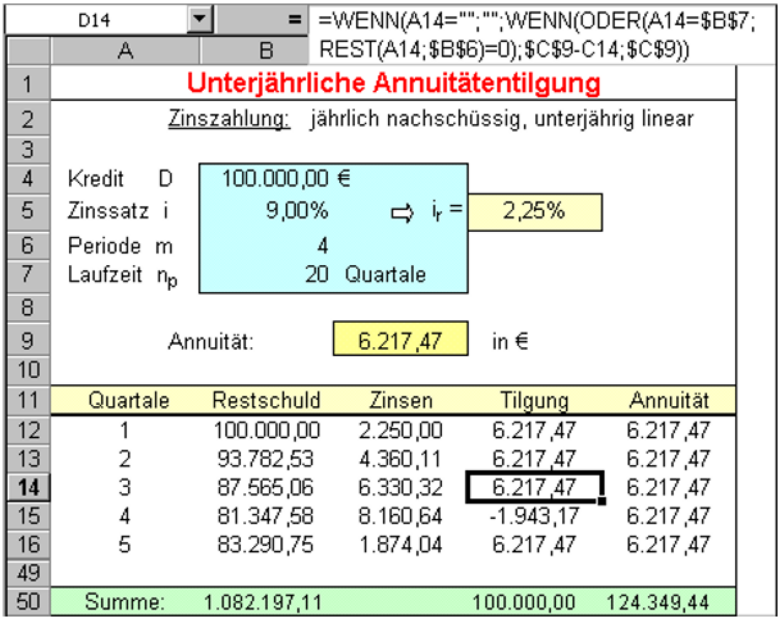
Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel in C9	Ergebnis
(4.15)	$a = 100.000 \cdot \frac{1{,}09^5}{1{,}09^5 - 1} \cdot \frac{0{,}0225}{1 + 0{,}0225 \cdot 1{,}5}$	=RMZ(B5;B7/B6;-B4)/ (B6*(1+D5*(B6-1)/2))	6.217,47 €

Als Ausgangsbasis für den Tilgungsplan, der die geringsten Änderungen erfordert, eignet sich eine Kopie der Excel-Tabelle von Bild 4.7e. Darin wird die Überschrift umbenannt in "Unterjährliche Annuitätentilgung" und in Zelle C9 die Berechnungsformel dafür eingetragen (s. Bild 4.10e).

In den Spalten A bis C braucht nichts geändert werden. Nur die Tilgungsrate in Spalte D wird unterschiedlich bestimmt – je nachdem, ob Zinsen verrechnet werden oder nicht:

– Solange keine Zinsen verrechnet werden, ist die Tilgungsrate identisch mit der Annuität (=$C$9).
– In der letzten Periode eines jeden Laufzeitjahres ist die Tilgungszahlung so zu reduzieren, dass sie zusammen mit den bis dahin angesammelten Jahreszinsen die konstante Annuität ergibt. Dabei kann es anfangs passieren, dass ein negativer Tilgungsbetrag ausgewiesen wird und sich die Restschuld wieder erhöht (s. Bild 4.10e).
– Am Ende der Laufzeit, also in der letzten Periode, muss der Rest der Zinsen in jedem Fall verrechnet werden.

Die Umsetzung eines analogen Sachverhalts in eine Excel-Formel mit Hilfe der ODER-Funktion wurde für die Berechnung der Annuität in Spalte E im Abschn. 4.2.2 im Detail erläutert. In Bild 4.10e ist die komplette Formel für Zelle D14 sichtbar; sie muss über die gesamte Spaltenlänge kopiert werden.



D14 = =WENN(A14="";"";WENN(ODER(A14=$B$7;REST(A14;$B$6)=0);$C$9-C14;$C$9))

	A	B	C	D	E
1	Unterjährliche Annuitätentilgung				
2		Zinszahlung: jährlich nachschüssig, unterjährig linear			
3					
4	Kredit D	100.000,00 €			
5	Zinssatz i	9,00%	⇨ i_r =	2,25%	
6	Periode m	4			
7	Laufzeit n_p	20 Quartale			
8					
9		Annuität:	6.217,47	in €	
10					
11	Quartale	Restschuld	Zinsen	Tilgung	Annuität
12	1	100.000,00	2.250,00	6.217,47	6.217,47
13	2	93.782,53	4.360,11	6.217,47	6.217,47
14	3	87.565,06	6.330,32	6.217,47	6.217,47
15	4	81.347,58	8.160,64	-1.943,17	6.217,47
16	5	83.290,75	1.874,04	6.217,47	6.217,47
49					
50	Summe:	1.082.197,11		100.000,00	124.349,44

Bild 4.10e Excel-Tabelle für Beispiel 4.5a (Ausschnitt)

Bei *unterjährig exponentieller* Verzinsung wird die unterjährliche Annuität im Beispiel wie folgt berechnet:

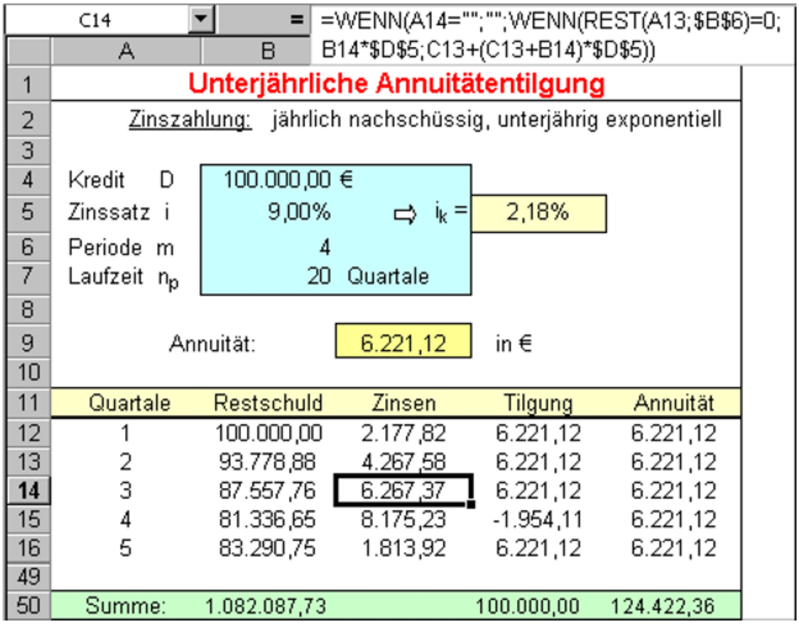
Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel in C9	Ergebnis
(4.16)	$a = 100.000 \cdot \frac{1{,}09^5}{1{,}09^5 - 1} \cdot \left(1{,}09^{0{,}25} - 1\right)$	=RMZ(B5;B7/B6;-B4) *D5/E5	6.221,12 €

Als Grundlage für den Tilgungsplan kann eine Kopie der Tabelle in Bild 4.10e verwendet werden. Bevor in Zelle C9 der zweite Faktor der Excel-Formel geändert wird, ist in Zelle E5 der unterjährig konforme Zinssatz i_k =(1+B5)^(1/B6)–1 zu berechnen (vgl. Bild 4.5e).

Dann muss in Spalte C innerhalb der Excel-Funktionen die Berechnungsformel für die unterjährigen Zinseszinsen gemäß Gl. (4.8) (s. Tabelle 4.5) erweitert werden. Für Zelle C14 lautet die Änderung

=C13+(C13+B14)*$D$5.

Die komplette Excel-Funktion, die in die gesamte Spalte kopiert werden muss, ist in Bild 4.11e oben angezeigt.



C14 = =WENN(A14="";"";WENN(REST(A13;$B$6)=0;B14*$D$5;C13+(C13+B14)*$D$5))

	A	B	C	D	E
1	Unterjährliche Annuitätentilgung				
2	Zinszahlung: jährlich nachschüssig, unterjährig exponentiell				
3					
4	Kredit D	100.000,00 €			
5	Zinssatz i	9,00%	⇨ i_k =	2,18%	
6	Periode m	4			
7	Laufzeit n_p	20 Quartale			
8					
9	Annuität:		6.221,12	in €	
10					
11	Quartale	Restschuld	Zinsen	Tilgung	Annuität
12	1	100.000,00	2.177,82	6.221,12	6.221,12
13	2	93.778,88	4.267,58	6.221,12	6.221,12
14	3	87.557,76	6.267,37	6.221,12	6.221,12
15	4	81.336,65	8.175,23	-1.954,11	6.221,12
16	5	83.290,75	1.813,92	6.221,12	6.221,12
49					
50	Summe:	1.082.087,73		100.000,00	124.422,36

Bild 4.11e Excel-Tabelle für Beispiel 4.5b (Ausschnitt)

Auf eine Auswahlmöglichkeit zwischen unterjährig linearer und unterjährig exponentieller Verzinsung in der selben Tabelle wurde hier zugunsten einer klaren Darstellung bewusst verzichtet. Das schließt nicht aus, dass trotz der etwas größeren Zahl von erforderlichen Änderungen entsprechende Makros aufgezeichnet und – wie in Abschn. 3.3.1 gezeigt – einer Optionsschaltfläche zugeordnet werden können. Zu beachten wäre lediglich, dass diese Makros anders benannt werden müssen als die bisher verwendeten, weil sie nicht tabellenbezogen angelegt, sondern intern für die Mappe gespeichert werden und damit allen Tabellen innerhalb der Mappe zugänglich sind.

4.3.3 Unterjährliche Annuitätentilgung bei unterjährlicher Zinszahlung

Beispiel 4.6: Der Kredit von 100.000 € soll wie in Beispiel 4.5 in vierteljährlichen Annuitäten getilgt werden. Am nominellen Jahreszinssatz von 9 % und an der Laufzeit von 20 Quartalen ändert sich nichts. Die Zinsen sind wiederum

a) unterjährig linear
b) unterjährig exponentiell

zu berechnen, jedoch im Unterschied zu Beispiel 4.5 nicht jährlich nachschüssig, sondern vierteljährlich nachschüssig zusammen mit den Tilgungsraten zu zahlen.

Generell wäre es sehr einfach, die Tabelle für jährliche Annuitätentilgung aus Bild 4.9e entsprechend zu modifizieren. Um mit geringstem Aufwand eine möglichst komfortable Tabelle zu gewinnen, wird auf die Tabelle für unterjährige Ratentilgung in Bild 4.8e zurückgegriffen und analog zur jährlichen Annuitätentilgung mit wenigen Änderungen angepasst. In einer Kopie werden zunächst die Überschrift in "Unterjährliche Annuitätentilgung" umbenannt und dann die Vorgabedaten für dieses Beispiel eingetragen (die tilgungsfreie Zeit ist Null). In Zelle C9 muss die unterjährige Annuität bei unterjährig linearer Verzinsung wie folgt berechnet werden:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel in C9	Ergebnis
(4.17)	$a = 100.000 \cdot \frac{0{,}0225 \cdot 1{,}0225^{20}}{1{,}0225^{20} - 1}$	=RMZ(D5;B7;-B4)	6.264,21 €

Ansonsten ist lediglich Spalte D zu ändern – hier dargestellt am Beispiel von Zelle D14 – indem von der Annuität aus Zelle C9 die Tilgungsrate subtrahiert wird:

```
=WENN(A14>$E$7;WENN(A14="";"";$C$9-C14);0).
```

Nach dem Kopieren dieser Excel-Formel innerhalb der gesamten Spalte D muss für jede Periode in Spalte E der Wert der unterjährlichen Annuität erscheinen, und in der letzten Periode müssen Restschuld und Tilgungsrate übereinstimmen (s. Bild 4.12e).

Die Heranziehung des unterjährig relativen Zinssatzes i_r verursacht bei unterjährigen Zinsperioden – darauf wurde immer wieder hingewiesen – einen effektiven Jahreszinssatz, der den nominellen Jahreszinssatz übersteigt. Diese Tatsache ist unabhängig von der Art der periodischen Tilgung und wird allein durch die Periodenzahl m bestimmt. Deshalb beträgt der effektive Jahreszins 9,31 % wie in Beispiel 4.2a (vgl. Bild 4.6e).

C9 = =RMZ(D5;B7;-B4)

	A	B	C	D	E
1	Unterjährliche Annuitätentilgung				
2		Zinszahlung:	unterjährlich nachschüssig		
3				linear	exponentiell
4	Kredit D	100.000,00 €			
5	Zinssatz i	9,00%	⇨ i_r =	2,25%	
6	Periode m	4			
7	Laufzeit n_p	20 Quartale		tilgungsfrei:	0
8					(Quartale)
9		Annuität:	6.264,21	in €	
10					
11	Quartale	Restschuld	Zinsen	Tilgung	Annuität
12	1	100.000,00	2.250,00	4.014,21	6.264,21
13	2	95.985,79	2.159,68	4.104,53	6.264,21
14	3	91.881,27	2.067,33	4.196,88	6.264,21
15	4	87.684,39	1.972,90	4.291,31	6.264,21
16	5	83.393,08	1.876,34	4.387,86	6.264,21
31	20	6.126,36	137,84	6.126,36	6.264,21
50	Summe:	1.123.739,62	25.284,14	100.000,00	125.284,14

Bild 4.12e Excel-Tabelle für Beispiel 4.6a (Ausschnitt)

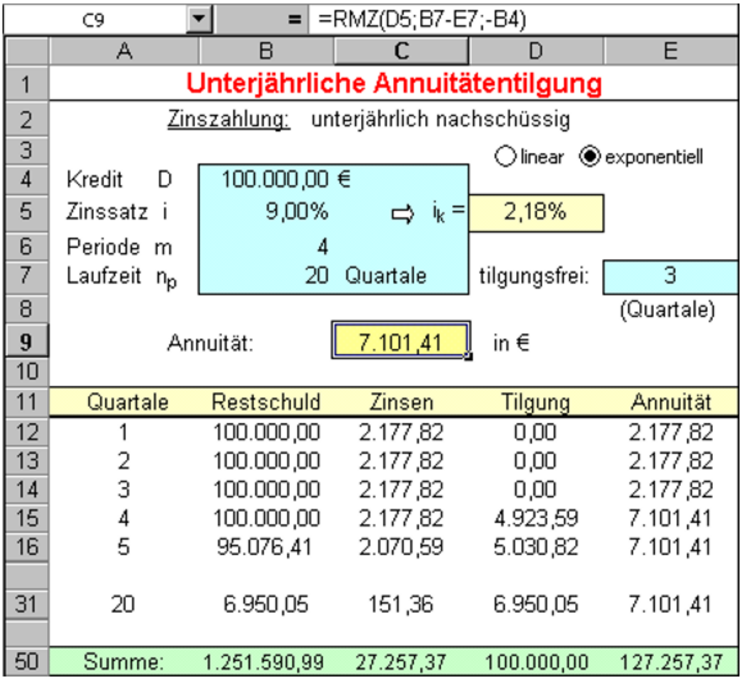
Für unterjährig exponentielle Verzinsung gemäß Beispiel 4.6b ist in der Excel-Tabelle von Bild 4.12e lediglich die Optionsschaltfläche "exponentiell" zu aktivieren, denn die zugehörigen Makros stehen für die gesamte Excel-Mappe zur Verfügung. Die unterjährliche Annuität beträgt dann 6.221,12 € und hat denselben Wert wie bei jährlicher Zinszahlung in Bild 4.11e. Somit bestätigt sich wiederum, dass bei unterjährig exponentieller Verzinsung mit dem konformen Zinssatz i_k die Zeitpunkte der Zinskapitalisierung ohne Belang sind. In beiden Fällen beträgt der effektive Jahreszinssatz 9 % und stimmt mit dem nominellen Jahreszinssatz überein.

Dank der vollständigen Kopie der in Bild 4.8e dargestellten Excel-Tabelle ist neben der Berechnung des effektiven Jahreszinssatzes in Bild 4.12e auch die Berücksichtigung von tilgungsfreien Perioden im Sinne von Tilgungsstreckung exakt übernommen worden. Allerdings müssen innerhalb der Excel-Funktion =RMZ( ) zur Berechnung der Annuität die k tilgungsfreien Perioden von der Gesamtlaufzeit subtrahiert werden, wenn eine entsprechende Verlängerung der Tilgungsdauer nicht vorgesehen ist.

Für einen Tilgungsaufschub um $k = 3$ Quartale würde sich für Beispiel 4.6b ergeben:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel in C9	Ergebnis
(4.17)	$a = 100.000 \cdot \dfrac{0{,}0225 \cdot 1{,}0225^{17}}{1{,}0225^{17} - 1}$	=RMZ(D5;B7-E7;-B4)	7.101,41 €

Die Annuität erhöht sich von 6.221,12 € auf 7.101,41 €, weil für die Tilgung nur ein verkürzter Zeitraum verbleibt (s. Bild 4.13e). Auf den effektiven Jahreszins hat das keinen Einfluss, weil während der tilgungsfreien Zeit regulär Zinsen gezahlt werden.



C9 = =RMZ(D5;B7-E7;-B4)

	A	B	C	D	E
1	Unterjährliche Annuitätentilgung				
2		Zinszahlung:	unterjährlich nachschüssig		
3				○ linear	◉ exponentiell
4	Kredit D	100.000,00 €			
5	Zinssatz i	9,00%	⇨ i_k =	2,18%	
6	Periode m	4			
7	Laufzeit n_p	20	Quartale	tilgungsfrei:	3
8					(Quartale)
9		Annuität:	7.101,41	in €	
10					
11	Quartale	Restschuld	Zinsen	Tilgung	Annuität
12	1	100.000,00	2.177,82	0,00	2.177,82
13	2	100.000,00	2.177,82	0,00	2.177,82
14	3	100.000,00	2.177,82	0,00	2.177,82
15	4	100.000,00	2.177,82	4.923,59	7.101,41
16	5	95.076,41	2.070,59	5.030,82	7.101,41
31	20	6.950,05	151,36	6.950,05	7.101,41
50	Summe:	1.251.590,99	27.257,37	100.000,00	127.257,37

Bild 4.13e Excel-Tabelle für Beispiel 4.6b mit $k = 3$ tilgungsfreien Perioden (Ausschnitt)

4.3.4 Tilgung mit Prozentannuitäten

> Beispiel 4.7: Ein Kredit von 100.000 € wird in jährlich gleichen Raten von 24.000 € für Tilgung einschließlich 9 % p. a. nominelle Zinsen solange zurückgezahlt, bis eine niedrigere Restschuld verbleibt. Diese ist dann ein Jahr später zu tilgen.
>
> Der Tilgungsplan soll anschließend so korrigiert werden können, dass innerhalb der errechneten Laufzeit alle Raten ausgeglichen sind. Wie groß ist diese konstante Annuität?

Im Unterschied zu Beispiel 4.2 ergeben sich die jährlichen Annuitäten jetzt nicht unmittelbar aus der Laufzeit, sondern die Annuitäten sind als fester prozentualer Anteil der Schuld w = 24 % vorher festgelegt worden. Für die erste Rückzahlung verbleiben bei 9 % Zinsen noch 15 % für die erste Tilgungsrate. Im weiteren Verlauf nimmt der Tilgungsanteil wegen abnehmender Zinsen allmählich zu. Eine konsequente Annuitätentilgung ist solange möglich, bis ein kleinerer Betrag übrig bleibt, die Abschlusszahlung, die in der Regel am Ende einer weiteren Periode zusammen mit den entsprechenden Zinsen fällig ist.

Am Berechnungsmodus für den Tilgungsplan ändert sich nur wenig; deshalb kann die in Bild 4.9e dargestellte Tabelle kopiert und mit neuer Überschrift versehen werden. Ins Vorgabefeld wird an Stelle der Laufzeit die Prozentannuität w platziert und für die Berechnung der Laufzeit wird eine (gelb unterlegte) neue Zelle angelegt (s. Bild 4.14e). Zunächst sind folgende Rechnungen erforderlich:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel/Funktion	Zelle	Ergebnis
(4.19)	$A = 0{,}24 \cdot 100.000$	=B7*B4	C9	24.000,00 €
(4.21)	$n = \dfrac{\lg 0{,}24 - \lg 0{,}15}{\lg 1{,}09}$	=ZZR(B5;B7*B4;-B4)	D7	5,454 a

In der Tabellenrechnung sind im weiteren folgende Formeländerungen erforderlich, die exemplarisch für Zeile13 erläutert werden:

- In Spalte A ist bei der Abbruchbedingung für die Laufzeitjahre auf das errechte Laufzeitende in Zelle D7 Bezug zu nehmen:

  =WENN(A12<$D$7;A12+1;"").

- Die letzte Tilgungsrate muss mit der Restschuld am Ende des letzten vollen Laufzeitjahres (in unserem Beispiel zu Beginn des sechsten Jahres in Zelle B17) übereinstimmen; deshalb ist vorher immer zu prüfen, wann dieser Fall eintritt. Die in Zelle D13 bereits bestehende Formel wird entsprechend ergänzt (s. Bild 4.14e):

  =WENN(A13>$D$7;B13;WENN(A13="";"";$C$9-C13)).

Nach diesen beiden Änderungen können die Zellen A13 und D13 bis ans Tabellenende kopiert werden. Im sechsten Jahr ist noch eine Restschuld von knapp 11.150 € fällig. In der Summenzeile ist das absolute Ausmaß der gesamten Zinsbelastung ersichtlich, aber entscheidend ist der effektive Jahreszinssatz, der hier gleich dem nominellen Zinssatz ist.

D13 = =WENN(A13>$D$7;B13;WENN(A13="";"";$C$9-C13))

	A	B	C	D	E
1	Jährliche Tilgung in Prozentannuitäten				
2		Zinszahlung:	jährlich nachschüssig		
3					
4	Kredit D	100.000,00 €			
5	Zinssatz i	9,00%			
6	Periode m	1		Laufzeit n_p	
7	Annuität w	24,0%		5,45	
8					
9		Annuität A	24.000,00	in €	
10					
11	Jahr	Restschuld	Zinsen	Tilgung	Annuität
12	1	100.000,00	9.000,00	15.000,00	24.000,00
13	2	85.000,00	7.650,00	16.350,00	24.000,00
14	3	68.650,00	6.178,50	17.821,50	24.000,00
15	4	50.828,50	4.574,57	19.425,44	24.000,00
16	5	31.403,07	2.826,28	21.173,72	24.000,00
17	6	10.229,34	920,64	10.229,34	11.149,98
18					
50	Summe:	346.110,91	31.149,98	100.000,00	131.149,98

Bild 4.14e Excel-Tabelle für Beispiel 4.7

Wenn nach dieser Rechnung doch lieber durchweg konstante Annuitäten gewünscht werden, so kann das durch Zielwertsuche bewerkstelligt werden, indem in Zelle D7 eine Laufzeit von 5,0 oder 6,0 Jahren als Zielwert vorgegeben und die Zelle B7 mit der Prozentannuität (nicht die Zelle C9!) als veränderlich angegeben wird. Für $n = 5$ Jahre ergibt sich $w = 25{,}7$ %; das entspricht in Übereinstimmung mit Bild 4.9e einer Jahresannuität von 25.709.25 €.

Unterjährige Prozentannuitäten

Beispiel 4.8:	Der Kredit von 100.000 € soll im Unterschied zu Beispiel 4.7 in monatlich gleichen Raten aus Tilgung und Zinsen von 2.000 € getilgt werden. Der nominelle Jahreszinssatz beträgt 9 % und wird linear auf Monate umgerechnet. Wann ist der Kredit endgültig getilgt, wenn die zuletzt fällige Zahlung am Monatsende erfolgt? Wie hoch ist die verbleibende letzte Zahlung?

Unterjährige Perioden können rechnerisch wie Jahresperioden gehandhabt werden, wenn die Zinszahlungen an diese Perioden gebunden sind. Unterschiede ergeben sich lediglich durch die Art der Umrechnung des Jahreszinssatzes in einen unterjährigen Zinssatz i_r oder i_k. Darauf wurde wiederholt hingewiesen. Demzufolge könnte im Prinzip die Excel-Tabelle von Bild 4.14e verwendet werden. Besser den unterjährlichen Rechnungen angepasst und mit höherer Funktionalität versehen ist jedoch die Excel-Tabelle von Bild 4.12e, die deshalb innerhalb derselben Mappe kopiert und mit neuer Überschrift "Unterjährige Prozentannuitäten" versehen wird (s. Bild 4.15e).

Die speziell notwendigen Formeländerungen lassen sich leicht aus der Excel-Tabelle Bild 4.14e übernehmen:

- Zunächst ist der Zellbereich (A7:C7) und danach die Zelle C9 zu kopieren und an jeweils gleicher Stelle der neuen Tabelle einzufügen.
- Des weiteren werden die ersten beiden Zeilen des Tilgungsplanes (A12:E13) übertragen. (Dabei geht die Einbeziehung der tilgungsfreien Zeit verloren, auf die hier verzichtet werden soll.)

Nun muss noch gewährleistet werden, dass in allen Formeln der unterjährige Zinssatz berücksichtigt wird. Wo bisher noch der Jahreszinssatz aus Zelle B5 eingeht, kann man sich im Menü EXTRAS/DETEKTIV/SPUR ZUM NACHFOLGER optisch anzeigen lassen (s. Bild 4.15e). In den Formeln der Zellen D7, C12 und C13 ist also B5 durch D5 zu ersetzen.

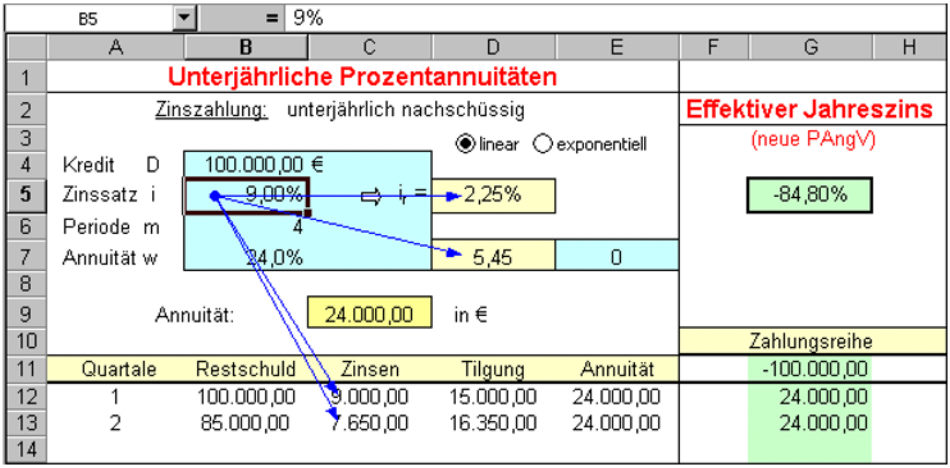


Bild 4.15e Erstellung der Excel-Tabelle für Beispiel 4.8

Wenn jetzt die speziellen Daten für Beispiel 4.8 ($w = 2$ % und $m = 12$ Monate) ins Eingabefeld eingetragen werden, wird in Zelle D7 eine Laufzeit von knapp 63 Monaten angezeigt, und so weiß man, wie weit nach unten die Tabellenzeile 13 (einschließlich G13) kopiert werden muss. Die Zahlenrechnungen ergeben:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel/Funktion	Zelle	Ergebnis
(4.19)	$A = 0{,}02 \cdot 100.000$	=B7*B4	C9	2.000,00 €
(4.21)	$n = \dfrac{\lg 0{,}02 - \lg 0{,}0125}{\lg 1{,}0075}$	=ZZR(D5;B7*B4;-B4)	D7	62,90 Mon.

Die fertige Tabellenrechnung erbringt eine Abschlusszahlung am Ende des 63. Monats von 1.804,38 € bei einem effektiven Jahreszins von 9,38 % (s. Bild 4.16e).

Wenn statt des unterjährig linearen der konforme Zinssatz i_k berücksichtigt werden soll (Anklicken des Optionsschaltfeldes "exponentiell"), dann beträgt die Abschlusszahlung 949,06 € und der effektive Jahreszinssatz ist gleich dem nominellen Zinssatz 9 %.

D7 = =ZZR(D5;B7*B4;-B4)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Unterjährliche Prozentannuitäten**							
2		Zinszahlung:	unterjährlich nachschüssig			**Effektiver Jahreszins**		
3				linear	exponentiell	(neue PAngV)		
4	Kredit D	100.000,00 €						
5	Zinssatz i	9,00%	⇨ i_r =	0,75%			9,38%	
6	Periode m	12						
7	Annuität w	2,0%	n_p =	62,90	Monate			
8								
9		Annuität:	2.000,00	in €				
10							Zahlungsreihe	
11	Monate	Restschuld	Zinsen	Tilgung	Annuität		-100.000,00	
12	1	100.000,00	750,00	1.250,00	2.000,00		2.000,00	
13	2	98.750,00	740,63	1.259,38	2.000,00		2.000,00	
14	3	97.490,63	731,18	1.268,82	2.000,00		2.000,00	
15	4	96.221,80	721,66	1.278,34	2.000,00		2.000,00	
16	5	94.943,47	712,08	1.287,92	2.000,00		2.000,00	
74	63	1.790,95	13,43	1.790,95	1.804,38		1.804,38	
75								
76	Summe:	3.440.584,02	25.804,38	100.000,00	125.804,38			

Bild 4.16e Excel-Tabelle für Beispiel 4.8 (Ausschnitt)

Beispiel 4.9: Die monatlichen Annuitäten zur Tilgung eines Kredits von 80.000 € betragen jeweils 0,75 % des Kredits. Durch Vereinbarung zusätzlicher Sondertilgungen von bis zu 5.000 € am Ende jedes Laufzeitjahres wird dem Kreditnehmer die Möglichkeit eingeräumt, die Laufzeit entsprechend zu verkürzen.

Für die ersten 10 Jahre gilt ein nomineller Jahreszinssatz von 5,5 %, der linear auf die Monate verteilt wird. Um schlechteren Konditionen für die Zeit danach aus dem Weg zu gehen, möchte der Kreditnehmer die Höhe der Sondertilgung so wählen, dass er nach 10 Jahren schuldenfrei ist.

Für diese Rechnung muss die Excel-Tabelle von Bild 4.16e zwecks Berücksichtigung der Sondertilgungen um eine zusätzliche Spalte, die vor Spalte E eingefügt wird, erweitert werden. Für die Vorgabe eines konstanten Sonderzahlungsbetrages kann beispielsweise die Zelle E4 eingerichtet werden, von der aus der Zahlenwert mittels der Excel-Formel =E$4 in den jeweils letzten Monat aller Laufzeitjahre übertragen wird (s. Bild 4.17e). Ohne Sondertilgungen würde die Laufzeit 206,54 Monate betragen; als Tabellenlänge reichen jedoch 121 Zeilen (für 10 Jahre) aus.

Im nächsten Schritt wird als beabsichtigter Sonderzahlungsbetrag in Zelle E4 ein beliebiger Wert vorgegeben, z. B. 3.000 €. Dieser Betrag muss erstmals im 12. Monat zur Annuität addiert und im Folgemonat von der Restschuld zusätzlich abgesetzt werden:

Zahlenrechnung	Excel-Formel/Funktion	Zelle	Ergebnis
$A_{12} = 600 + 3.000$	=WENN(A23="";"";C23+D23+E23)	F23	3.600,00 €
$R_{12} = 77.128,33 - 3.000$	=WENN(A24="";"";B23-D23-E23)	B24	74.128,33 €

Beide Formeln können in die nachfolgenden Zellen der betreffenden Spalte B bzw. F kopiert werden, damit alle Sonderzahlungen richtig berücksichtigt werden. Im Ergebnis dieser Rechnung verbleibt nach 10 Tilgungsjahren in Zelle B132 eine Restschuld von 3.899,94 € (s. Bild 4.17e).

B24 = =WENN(A24="";"";B23-D23-E23)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Unterjährliche Prozentannuitäten** (mit Sondertilgung)								
2		Zinszahlung:	unterjährlich nachschüssig		linear	exponentiell	**Effektiver Jahreszins**		
3							(neue PAngV)		
4	Kredit D	80.000,00 €		Sondertilg.	3.000,00	€			
5	Zinssatz i	5,50%	i_r =	0,46%				5,64%	
6	Periode m	12							
7	Annuität w	0,75%	n_p =	206,54	Monate				
8									
9		Annuität:	600,00	in €					
10								Zahlungsreihe	

	Monate	Restschuld	Zinsen	Tilgung	Sondertilgung	Annuität	Zahlungsreihe
11							-80.000,00
12	1	80.000,00	366,67	233,33		600,00	600,00
13	2	79.766,67	365,60	234,40		600,00	600,00
14	3	79.532,26	364,52	235,48		600,00	600,00
15	4	79.296,79	363,44	236,56		600,00	600,00
16	5	79.060,23	362,36	237,64		600,00	600,00
17	6	78.822,59	361,27	238,73		600,00	600,00
18	7	78.583,86	360,18	239,82		600,00	600,00
19	8	78.344,04	359,08	240,92		600,00	600,00
20	9	78.103,11	357,97	242,03		600,00	600,00
21	10	77.861,09	356,86	243,14		600,00	600,00
22	11	77.617,95	355,75	244,25		600,00	600,00
23	12	77.373,70	354,63	245,37	3.000,00	3.600,00	3.600,00
24	13	74.128,33	339,75	260,25		600,00	600,00
25							
130	119	8.028,92	36,80	563,20		600,00	600,00
131	120	7.465,72	34,22	565,78	3.000,00	3.600,00	7.499,94
132	121	**3.899,94**	17,87	582,13		600,00	
133							

Bild 4.17e Excel-Tabelle für Beispiel 4.9 (Ausschnitt)

Wenn nun – wie laut Aufgabenstellung angestrebt – die Schuld nach genau 10 Jahren getilgt sein soll, müssen die jährlichen Sonderzahlungen etwas höher ausfallen. Den genauen Wert gewinnt man durch Zielwertsuche in Zelle B132 mit dem Zielwert 0 (keine Restschuld) und der veränderbaren Zelle E4. Als Ergebnis erhält man in Zelle E4 als jährliche Sondertilgung einen Wert von 3.300,91 €. Weichen die einzelnen Sondertilgungen in der Realität betragsmäßig oder zeitlich von dieser Modellrechnung ab, dann kann man bereits gezahlte Sondertilgungen in Spalte E als Festwerte entsprechend eintragen und die Rechnung für den Rest der Laufzeit analog wiederholen.

Der effektive Jahreszins – bezogen auf die zehn Laufzeitjahre bis zur restlosen Tilgung – beträgt 5,64 %. Dieser Wert bleibt unverändert, auch wenn die Schuld nach 10 Jahren noch nicht vollständig getilgt ist. Zur exakten Lösung dieses Problems sind die Hinweise im Beispiel 4.11 zu beachten.

4.4 Spezielle Tilgungsprobleme

4.4.1 Berücksichtigung von Kreditgebühren und Disagio

Beispiel 4.10: Ein Darlehen von 100.000 € mit jährlicher Annuitätentilgung ist zur Verringerung der laufenden Zinszahlung mit einem Disagio von 5 % versehen. Der nominelle Jahreszins beträgt 7 % bei einer Laufzeit von 5 Jahren.

Wie ändert sich der Tilgungsplan, wenn das Schuldenkonto zusätzlich mit Bearbeitungsgebühren von 1,3 % des ausgezahlten Kredits belastet wird?

Im Tilgungsplan sind alle Kreditkosten zu berücksichtigen und der effektive Jahreszins anzugeben.

Das zu Beginn der Laufzeit fällige Disagio von 5.000 € würde bei gleichem Nominalzinssatz wie in Beispiel 4.4 weder die zu tilgende Schuld von 100.000 € noch die Annuitäten verändern. Den laufenden Kreditkosten sind jedoch Aufschläge zuzurechnen, die einem äquivalenten Barwert in Höhe des Disagio entsprechen und als Vorauszahlung von Zinsen interpretiert werden können. Demzufolge müssen die nominellen Zinsen vergleichsweise niedriger ausfallen. Alles zusammen schlägt sich im effektiven Jahreszins nieder.

Für dieses Beispiel wird eine der bereits vorhandenen Excel-Tabellen ausgewählt, die wegen ihrer Vielseitigkeit als besonders geeignet erscheint, die Tabelle aus Bild 4.13e. Mit $m = 1$ ist sie für jährliche Annuitätentilgung anwendbar. Es wird wieder eine Kopie erstellt und mit veränderter Überschrift versehen (s. Bild 4.18e). Um Platz für ein zusätzliches Eingabefeld für das Disagio zu schaffen, werden die Optionsschaltfelder an eine freie Stelle verschoben (vorher mit rechter Maustaste anklicken!). In Zelle B4 wird der ausgezahlte Darlehensbetrag $D' = 95.000$ und in Zelle D4 der zugehörige Disagiosatz $\delta = 5\ \%$ eingesetzt. Ansonsten sind nur noch zwei Änderungen erforderlich:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel/Funktion	Zelle	Ergebnis
(4.26)	$S = \dfrac{95.000}{1-0{,}05}$	=B4/(1-E4)	B12	100.000,00 €
(4.10)	$A = 100.000 \cdot \dfrac{0{,}07 \cdot 1{,}07^5}{1{,}07^5 - 1}$	=RMZ(D5;B7-E7;-B12)	C9	24.389,07 €

Man könnte auch umgekehrt in Zelle B12 die Schuld S eintragen und daraus in Zelle B4 den Auszahlungsbetrag $D' = S \cdot (1-\delta)$ errechnen. Wichtig ist nur, dass für die Berechnung der Annuitäten die volle Schuld und für die Berechnung des Effektivzinssatzes auf der rechten Seite der Tabelle der tatsächliche ausgezahlte Kredit berücksichtigt werden. Es ergibt sich ein effektiver Jahreszins von 8,95 %, also etwas weniger als 9 % in Beispiel 4.4.

B12 = =B4/(1-E4)

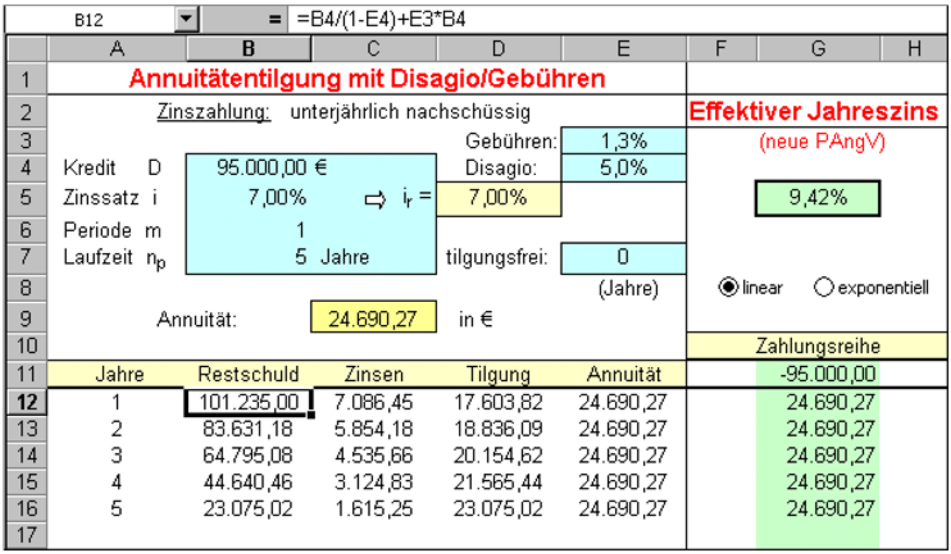
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Annuitätentilgung mit Disagio							
2	Zinszahlung: unterjährlich nachschüssig					Effektiver Jahreszins		
3						(neue PAngV)		
4	Kredit D	95.000,00 €		Disagio:	5,0%			
5	Zinssatz i	7,00%	⇨ i_r =	7,00%			8,95%	
6	Periode m	1						
7	Laufzeit n_p	5 Jahre		tilgungsfrei:	0			
8					(Jahre)	◉ linear	○ exponentiell	
9	Annuität:		24.389,07	in €				
10						Zahlungsreihe		
11	Jahre	Restschuld	Zinsen	Tilgung	Annuität		-95.000,00	
12	1	100.000,00	7.000,00	17.389,07	24.389,07		24.389,07	
13	2	82.610,93	5.782,77	18.606,30	24.389,07		24.389,07	
14	3	64.004,63	4.480,32	19.908,75	24.389,07		24.389,07	
15	4	44.095,88	3.086,71	21.302,36	24.389,07		24.389,07	
16	5	22.793,52	1.595,55	22.793,52	24.389,07		24.389,07	
17								

Bild 4.18e Excel-Tabelle für Beispiel 4.10

Bearbeitungsgebühren, Provisionen und andere Kosten, die zu Beginn der Laufzeit zu zahlen sind, werden in der Regel Bestandteil des Disagio sein. In diesem Beispiel ist an Gebührenarten gedacht, die aus dem Disagio herausgelöst sind, weil sie einerseits als prozentualer Anteil des ausgezahlten Kreditbetrages $g \cdot D'$ berechnet werden und andererseits den Auszahlbetrag nicht mindern, sondern zusätzlich in die Schuld S eingehen sollen. Dazu ist neben dem zusätzlichen Eingabefeld für den Gebührensatz g lediglich eine Formel in der Tabelle von Bild 4.18e zu ergänzen:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel	Zelle	Ergebnis
(4.25)	$S = 95.000 \cdot \left(\frac{1}{1-0{,}05} + 0{,}013 \right)$	= B4/(1-E4)+E3*B4	B12	101.235,00 €

Damit erhöhen sich die Annuität um 301,20 € und der effektive Jahreszins auf 9,42 % (s. Bild 4.19e).



B12 = =B4/(1-E4)+E3*B4

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Annuitätentilgung mit Disagio/Gebühren						
2		Zinszahlung: unterjährlich nachschüssig				Effektiver Jahreszins		
3				Gebühren:	1,3%		(neue PAngV)	
4	Kredit D	95.000,00 €		Disagio:	5,0%			
5	Zinssatz i	7,00%	⇨ i_r =	7,00%			9,42%	
6	Periode m	1						
7	Laufzeit n_p	5 Jahre		tilgungsfrei:	0			
8					(Jahre)	linear	exponentiell	
9		Annuität:	24.690,27	in €				
10							Zahlungsreihe	
11	Jahre	Restschuld	Zinsen	Tilgung	Annuität		-95.000,00	
12	1	101.235,00	7.086,45	17.603,82	24.690,27		24.690,27	
13	2	83.631,18	5.854,18	18.836,09	24.690,27		24.690,27	
14	3	64.795,08	4.535,66	20.154,62	24.690,27		24.690,27	
15	4	44.640,46	3.124,83	21.565,44	24.690,27		24.690,27	
16	5	23.075,02	1.615,25	23.075,02	24.690,27		24.690,27	
17								

Bild 4.19e Erweiterte Excel-Tabelle für Beispiel 4.10

Ein Disagio – genauer gesagt, der zur Steuerung der Nominalverzinsung vorgesehene Teil eines Disagios – bezieht sich auf die volle Kreditlaufzeit, es sei denn, dass wegen des Zinsänderungsrisikos ein Festzinssatz nur für einen kürzeren Zeitraum, die sogenannte *Zinsbindungsfrist*, vereinbart ist[68]. Dann gilt auch das Disagio für diesen Zeitraum und muss bei Zinsanpassung später eventuell korrigiert werden. Folglich kann der effektive Jahreszins in diesem Fall auch zunächst nur für diese Anfangsphase der Kredittilgung ermittelt werden; man bezeichnet ihn offiziell[69] als *anfänglichen effektiven Jahreszins*.

---

[68] Vgl. Tietze (2000), S. 205.
[69] Vgl. § 6 Abs. 1 PAngV vom 28.7.2000

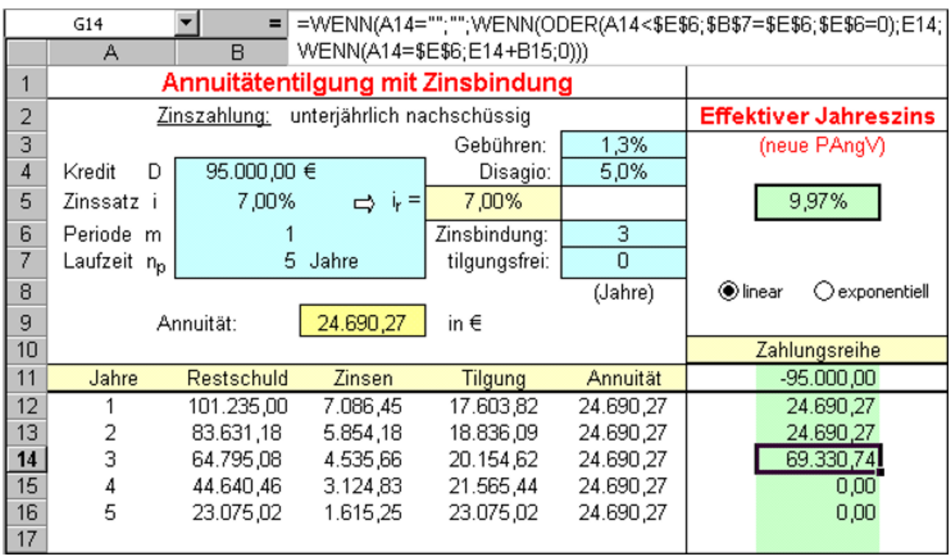
Beispiel 4.11:	Welcher anfängliche effektive Jahreszins ergibt sich, wenn für das Darlehen von Beispiel 4.10 bei sonst gleichen Konditionen eine dreijährige Zinsbindung vereinbart wird?

In der Excel-Tabelle von Bild 4.19e wird die Zinsbindungsfrist bei der Effektivzinsberechnung durch entsprechende Anpassung der Zahlungsreihe in Spalte G berücksichtigt. Innerhalb der ersten drei Perioden (Zellen G12 bis G14) bleiben die Annuitäten unverändert und dann wird so gerechnet, als wäre der Vertrag beendet. Anstelle aller nachfolgenden Zahlungen geht als deren Äquivalent die Restschuld am Ende der Zinsbindungsfrist, der Wert aus Zelle B15, in die Effektivzinsberechnung ein. Somit ergibt sich als fiktive Abschlusszahlung A_3 (vgl. Bild 4.20e):

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel	Zelle	Ergebnis
	$A_3 = 24.690{,}27 + 44.640{,}46$	=E14+B15	G14	69.330,74 €

Der anfängliche effektive Jahreszins beträgt 9,97 % und ist deswegen höher als der zuvor berechnete, weil sich dasselbe Disagio auf einen kürzeren Zeitraum bezieht, somit also eher verbraucht ist.

Wenn die Tabellenrechnung für beliebige Zinsbindungsfristen anwendbar sein soll, ist in den Formeln von Spalte G außerdem zu gewährleisten, dass für die Zeit nach der Zinsbindungsfrist alle Zahlungen automatisch null gesetzt werden, was einige zusätzliche Prüfungen erfordert (s. Bild 4.20e), auf deren weitere Kommentierung hier verzichtet wird.



G14 = =WENN(A14="";"";WENN(ODER(A14<$E$6;$B$7=$E$6;$E$6=0);E14;WENN(A14=$E$6;E14+B15;0)))

	A	B	C	D	E	F	G
1	Annuitätentilgung mit Zinsbindung						
2		Zinszahlung:	unterjährlich nachschüssig				Effektiver Jahreszins
3				Gebühren:	1,3%		(neue PAngV)
4	Kredit D	95.000,00 €		Disagio:	5,0%		
5	Zinssatz i	7,00%	⇨ i_r =	7,00%			9,97%
6	Periode m	1		Zinsbindung:	3		
7	Laufzeit n_p	5 Jahre		tilgungsfrei:	0		
8					(Jahre)		linear / exponentiell
9		Annuität:	24.690,27	in €			
10							Zahlungsreihe
11	Jahre	Restschuld	Zinsen	Tilgung	Annuität		-95.000,00
12	1	101.235,00	7.086,45	17.603,82	24.690,27		24.690,27
13	2	83.631,18	5.854,18	18.836,09	24.690,27		24.690,27
14	3	64.795,08	4.535,66	20.154,62	24.690,27		69.330,74
15	4	44.640,46	3.124,83	21.565,44	24.690,27		0,00
16	5	23.075,02	1.615,25	23.075,02	24.690,27		0,00
17							

Bild 4.20e Excel-Tabelle für Beispiel 4.11

Beispiel 4.12:	Wie ändern sich Tilgungsplan und effektiver Jahreszins, wenn das Darlehen von Beispiel 4.10 unter den sonst gleichen Konditionen in vierteljährlichen Annuitäten getilgt wird?

Die Lösung ist einfach, denn in der Excel-Tabelle von Bild 4.19e sind unterjährige Perioden bereits berücksichtigt. Die Laufzeit muss mit $m = 4$ lediglich in Quartale umgerechnet und eingetragen werden (s. Bild 4.21e). Die Tabelle ermöglicht auch, wahlweise von unterjährig linearer oder exponentieller Verzinsung auszugehen.

C9 = =RMZ(D5;B7-E7;-B12)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Annuitätentilgung mit Disagio/Gebühren							
2		Zinszahlung:	unterjährlich nachschüssig			Effektiver Jahreszins		
3				Gebühren:	1,3%		(neue PAngV)	
4	Kredit D	95.000,00 €		Disagio:	5,0%			
5	Zinssatz i	7,00%	⇨ i_r =	1,75%			10,00%	
6	Periode m	4						
7	Laufzeit n_p	20	Quartale	tilgungsfrei:	0			
8					(Quartale)	◉ linear	○ exponentiell	
9		Annuität:	6.042,84	in €				
10							Zahlungsreihe	
11	Quartale	Restschuld	Zinsen	Tilgung	Annuität		-95.000,00	
12	1	101.235,00	1.771,61	4.271,23	6.042,84		6.042,84	
13	2	96.963,77	1.696,87	4.345,98	6.042,84		6.042,84	
14	3	92.617,80	1.620,81	4.422,03	6.042,84		6.042,84	
15	4	88.195,77	1.543,43	4.499,42	6.042,84		6.042,84	
16	5	83.696,35	1.464,69	4.578,15	6.042,84		6.042,84	
31	20	5.938,91	103,93	5.938,91	6.042,84		6.042,84	

Bild 4.21e Excel-Tabelle für Beispiel 4.12 (Ausschnitt)

4.4.2 Berücksichtigung von tilgungsfreien Zeiten

Beispiel 4.13: Wie ändern sich Tilgungsplan und effektiver Jahreszins, wenn für das Darlehen von Beispiel 4.11 unter sonst gleichen Konditionen eine tilgungsfreie Zeit von einem halben Jahr als

a) Tilgungsstreckung oder

b) Rückzahlungsaufschub für Tilgung und Zinsen

vereinbart werden?

Eine *Tilgungsstreckung* bei unveränderter Laufzeit wurde in Abschn. 4.2.2 bereits ausführlich erläutert und in die Excel-Tabellen zur Berechnung von Tilgungsplänen integriert. Durch systematische Übernahme entsprechender Formeln aus der Tabelle von Bild 4.8e ist dieser Fall somit in den meisten anderen Tabellen bereits berücksichtigt, so auch in der Excel-Tabelle von Bild 4.21e.

Die beabsichtigte tilgungsfreie Zeit $k = 2$ Quartale braucht also lediglich in Zelle E7 eingetragen zu werden. Wenn mit dem unterjährigen relativen Zinssatz gerechnet wird, erhöht sich die Annuität um 562,23 €, der effektive Jahreszins sinkt aber auf 9,78 % (s. Bild 4.22e). Bei unterjährig exponentieller Verzinsung mit dem konformen Zinssatz beträgt der effektiver Jahreszins 9,59 %, was durch Aktivierung des anderen Optionsschaltfeldes angezeigt werden kann.

D13 = =WENN(A13>$E$7;WENN(A13="";"";$C$9-C13);0)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Annuitätentilgung mit Disagio/Gebühren							
2		Zinszahlung:	unterjährlich nachschüssig			Effektiver Jahreszins		
3				Gebühren:	1,3%		(neue PAngV)	
4	Kredit D	95.000,00 €		Disagio:	5,0%			
5	Zinssatz i	7,00%	⇨ i_r =	1,75%			9,78%	
6	Periode m	4						
7	Laufzeit n_p	20	Quartale	tilgungsfrei:	2			
8					(Quartale)	◉ linear	○ exponentiell	
9		Annuität:	6.605,07	in €				
10							Zahlungsreihe	
11	Quartale	Restschuld	Zinsen	Tilgung	Annuität		-95.000,00	
12	1	101.235,00	1.771,61	0,00	1.771,61		1.771,61	
13	2	101.235,00	1.771,61	0,00	1.771,61		1.771,61	
14	3	101.235,00	1.771,61	4.833,46	6.605,07		6.605,07	
15	4	96.401,54	1.687,03	4.918,04	6.605,07		6.605,07	
16	5	91.483,50	1.600,96	5.004,11	6.605,07		6.605,07	
31	20	6.491,47	113,60	6.491,47	6.605,07		6.605,07	

Bild 4.22e Excel-Tabelle für Beispiel 4.13a (Ausschnitt)

Ein *Zahlungsaufschub* für Tilgungs- und Zinszahlungen ist aus rechentechnischer Sicht für den Tilgungsplan trivial, weil sich lediglich gemäß Gl. (4.27) die ursprüngliche Schuld um die Zinsen erhöht und die Annuitäten dementsprechend höher ausfallen. Allerdings spielt bei unterjährigen Perioden wiederum die Art der Verzinsung eine Rolle – hier soll in Übereinstimmung mit den Tilgungsphasen von unterjährig exponentieller Verzinsung (mit dem relativen oder konformen) Zinssatz ausgegangen werden –, und außerdem beeinflusst die. die Zahlungsverzögerung den effektiven Jahreszinssatz.

Als Ausgangsbasis eignet sich ein komplette Kopie der in Bild 4.22e dargestellten Tabelle, in der sich zunächst die Berechnung der unterjährigen Annuität ändert:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Funktion	Zelle	Ergebnis
(4.28)	$a' = 101.235 \cdot \dfrac{0{,}0175 \cdot 1{,}0175^{20}}{1{,}0175^{18} - 1}$	=RMZ(D5;B7-E7; -B12*(1+D5)^E7)	B12	6.838,27 €

Weiterhin sind folgende Excel-Formeln zu modifizieren:

– Die Zinszahlungen müssen wie die Tilgungszahlungen für $t \leq k$ unterdrückt werden, was durch eine zusätzliche Prüfbedingung in Spalte C erreicht wird. Für Zelle C12 gilt

  =WENN(A12>$E$7;WENN(A12="";"";B12*$D$5);0).

– Die Restschuld erhöht sich während der zahlungsfreien Zeit sukzessive um die Zinsen, zuerst in Zelle B13

  =WENN(A13="";"";WENN(C12=0;B12*(1+$D$5);B12-D12))

– Die veränderten Zellinhalte von C12 und B13 müssen in derselben Spalte bis ans Tabellenende kopiert werden (s. Bild 4.23e).

Aus diesen Ergebnissen ist im Vergleich zur Tilgungsstreckung in Bild 4.21e zu erkennen, dass bei sonst gleichen Kreditkonditionen die Annuitäten zwar höher, der Effektivzins aber dennoch geringer und somit ein Zahlungsaufschub günstiger für den Kreditnehmer ist. Das hängt mit der späteren Fälligkeit der Gegenleistungen für den Kredit zusammen.

C13 = =WENN(A13>$E$7;WENN(A13="";"";B13*$D$5);0)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Annuitätentilgung mit Zahlungsaufschub**							
2		Zinszahlung:	unterjährlich nachschüssig			**Effektiver Jahreszins**		
3				Gebühren:	1,3%		(neue PAngV)	
4	Kredit D	95.000,00 €		Disagio:	5,0%			
5	Zinssatz i	7,00%	⇨ i_r =	1,75%			9,70%	
6	Periode m	4						
7	Laufzeit n_p	20	Quartale	zahlungsfrei:	2			
8					(Quartale)	◉ linear	○ exponentiell	
9		Annuität:	6.838,27	in €				
10							Zahlungsreihe	
11	Quartale	Restschuld	Zinsen	Tilgung	Annuität		-95.000,00	
12	1	101.235,00	0,00	0,00	0,00		0,00	
13	2	103.006,61	0,00	0,00	0,00		0,00	
14	3	104.809,23	1.834,16	5.004,11	6.838,27		6.838,27	
15	4	99.805,12	1.746,59	5.091,68	6.838,27		6.838,27	
16	5	94.713,44	1.657,49	5.180,78	6.838,27		6.838,27	
30								
31	20	6.720,66	117,61	6.720,66	6.838,27		6.838,27	

Bild 4.23e Excel-Tabelle für Beispiel 4.13b (Ausschnitt)

Beispiel 4.14: Für die Finanzierung eines Energiesparhauses gewährt die Kreditanstalt für Wiederaufbau (KfW) einen Kredit zu folgenden Konditionen:

- maximale Laufzeit: 30 Jahre,
- tilgungsfreie Laufzeit: 5 Jahre,
- Auszahlungskurs: 96 % (entspricht einem Disagio von 4 %),
- nominaler Zinssatz: 3,0 % p.a.,
- Zinsbindungsfrist: 10 Jahre,
- Zahlungsperioden: vierteljährlich.

Der anfängliche effektive Jahreszinssatz ist mit 3,54 % angegeben. Dieser Wert ist für einen Kredit von 100.000 € auf seine Richtigkeit zu überprüfen.

Dafür kann problemlos die (entsprechend der Laufzeit von mindestens 41 Quartalen erweiterte) Tabelle von Bild 4.22e verwendet werden. Auf die recht komplizierten Formeln zum automatischen Abbruch der Zahlungsreihe für die Effektivzinsberechnung – so wie es im Beispiel 4.11 und Bild 4.20e erklärt ist – kann verzichtet werden, wenn nach der Zinsbindungsfrist (hier 40 Quartale) alle Zelleninhalte in Spalte H einfach gelöscht werden. Zur Annuität im 40. Quartal muss allerdings noch die Restschuld, die am Beginn des 41. Quartals in Zelle B52 erscheint, addiert werden (vgl. Bild 4.24e). Dann bestätigt sich die Richtigkeit des angegebenen Effektivzinssatzes von 3,54 %. Von der Kredithöhe ist dieser Wert übrigens nicht abhängig. Interessant ist die schon erwähnte Tatsache, dass ohne tilgungsfreie Zeiten die Restschuld nach 10 Jahren zwar geringer ist, der Kredit sich aber auf 3,58 % leicht verteuert.

G51 = =E51+B52

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Annuitätentilgung mit Disagio						
2		Zinszahlung:	unterjährlich nachschüssig			Effektiver Jahreszins		
3				Gebühren:			(neue PAngV)	
4	Kredit D	96.000,00 €		Disagio:	4,0%			
5	Zinssatz i	3,00%	⇨ i_r =	0,75%			3,54%	
6	Periode m	4						
7	Laufzeit n_p	120	Quartale	tilgungsfrei:	20			
8					(Quartale)	◉ linear	○ exponentiell	
9		Annuität:	1.425,02	in €				
10							Zahlungsreihe	
11	Quartale	Restschuld	Zinsen	Tilgung	Annuität		-96.000,00	
12	1	100.000,00	750,00	0,00	750,00		750,00	
13	2	100.000,00	750,00	0,00	750,00		750,00	
14								
31	20	100.000,00	750,00	0,00	750,00		750,00	
32	21	100.000,00	750,00	675,02	1.425,02		1.425,02	
33	22	99.324,98	744,94	680,08	1.425,02		1.425,02	
34								
50	39	87.043,25	652,82	772,19	1.425,02		1.425,02	
51	40	86.271,05	647,03	777,98	1.425,02		86.918,09	
52	41	**85.493,07**	641,20	783,82	1.425,02			
53	42	84.709,25	635,32	789,70	1.425,02			
54								

Bild 4.24e Excel-Tabelle für Beispiel 4.14 (Ausschnitt)

Die Excel-Funktion =IKV( ) funktioniert hier allerdings nur, wenn ein ergebnisnaher Startwert für die Iteration als zusätzlicher Parameter eingegeben wird, z. B. 3 % oder einfach die Zelle B5 (vgl. Beispiel 2.4).

4.4.3 Berücksichtigung von Agio

In Abschn. 4.4.1 wurden zwei Möglichkeiten gezeigt, zusätzliche Kreditkosten zu verrechnen, die als einmalige Zahlung zu Beginn der Kreditlaufzeit, also bei Ausgabe des Darlehens, fällig sind. Dabei erhöht sich entweder die ursprüngliche Schuld S nach Gl. (4.25), oder der Auszahlungsbetrag D vermindert sich nach Gl. (4.26). Beide Größen verändern sich nicht, wenn zusätzliche Kosten periodisch verrechnet werden. Neben den nominellen Zinsen üblich ist ein prozentualer Aufschlag $\alpha \cdot T_t$ auf die periodischen Tilgungszahlungen, der die Restschuldbeträge RS_t aus dem Darlehen nicht beeinträchtigt und somit selbst keine zusätzlichen Zinsen verursacht. Die Berücksichtigung eines derart vereinbarten Agio α (in %) wird am Beispiel eines Annuitätendarlehens gezeigt.

Beispiel 4.15: Ein Darlehen von 100.000 € mit jährlicher Annuitätentilgung ist mit einem Tilgungsagio von 5 % versehen. Der nominelle Jahreszins beträgt 7 % bei einer Laufzeit von 5 Jahren.

Wie ändert sich der Tilgungsplan, wenn das Schuldenkonto zusätzlich mit Bearbeitungsgebühren von 1,3 % des ausgezahlten Kredits belastet wird?

Es handelt sich hierbei um eine Abwandlung von Beispiel 4.10 hinsichtlich des Agio. Am vorteilhaftesten ist, wieder die Excel-Tabelle von Bild 4.19e als Grundlage zu verwenden, weil hier die Gebühren schon berücksichtigt sind. In deren Kopie ist aber die Einbeziehung des Disagio vorher rückgängig zu machen; das betrifft den ausgezahlten Kredit in Zelle B4 sowie die Division durch den Faktor (1+E4) in Zelle B12. Für das vorgegebene Agio wird Zelle E4 verwendet (s. Bild 4.25e). Folgende Rechnungen bilden den Ausgangspunkt:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel/Funktion	Zelle	Ergebnis
(4.25)	$S = 100.000 \cdot (1+0{,}013)$	= B4*(1+E3)	B12	101.300,00 €
(4.30)	$\hat{q} = 1 + 0{,}07/(1+0{,}013)$			1,0691
	$A = 101.300 \cdot 1{,}0691^5 \cdot \dfrac{0{,}0691}{1{,}0691^5 - 1}$			
		=RMZ(D5/(1+E4);B7-E7;-B12*(1+E4))	C9	25.710,33 €

Für den Tilgungsplan sind folgende Formeln zu modifizieren:

- Die Differenz von Annuität von und Zinsen (C9–C12) ist um das Agio größer als der Tilgungsbetrag für die erste Periode; das muss in Zelle D12 korrigiert werden, damit die Restschuld richtig berechnet wird:

  =WENN(A12>$E$7;WENN(A12="";"";($C$9-C12)/(1+$E$4));0).

- Bei der Kontrollrechnung für die Annuität in Zelle E12 muss das Agio dann wieder einbezogen werden:

  =C12+D12*(1+$E$4).

Die Zellen D12 und E12 sind bis zum Tabellenende zu übertragen.

Ohne Gebühren ($g = 0$ in Zelle E3) ergibt sich für Beispiel 4.15 ein effektiver Jahreszins von 8,51 %, und mit Gebühren beträgt der effektive Jahreszins genau 9,0 % (s. Bild 4.25e).

C9 = =RMZ(D5/(1+E4);B7-E7;-B12*(1+E4))

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Annuitätentilgung mit Agio/Gebühren							
2		Zinszahlung:	unterjährlich nachschüssig			Effektiver Jahreszins		
3				Gebühren:	1,3%		(neue PAngV)	
4	Kredit D	100.000,00 €		Agio:	5,0%			
5	Zinssatz i	7,00%	⇨ i_r =	7,00%			9,00%	
6	Periode m	1						
7	Laufzeit n_p	5 Jahre		tilgungsfrei:	0			
8					(Jahre)	◉ linear	○ exponentiell	
9		Annuität:	25.710,33	in €				
10							Zahlungsreihe	
11	Jahre	Restschuld	Zinsen	Tilgung	Annuität		-100.000,00	
12	1	101.300,00	7.091,00	17.732,69	25.710,33		25.710,33	
13	2	83.567,31	5.849,71	18.914,87	25.710,33		25.710,33	
14	3	64.652,43	4.525,67	20.175,86	25.710,33		25.710,33	
15	4	44.476,57	3.113,36	21.520,92	25.710,33		25.710,33	
16	5	22.955,65	1.606,90	22.955,65	25.710,33		25.710,33	

Bild 4.25e Excel-Tabelle für Beispiel 4.15

Die Excel-Tabelle ist durch das Kopieren wieder so angelegt, dass sie auch für unterjährige Perioden funktioniert. Sollte die Annuitätentilgung beispielsweise wie in Beispiel 4.12 vierteljährlich erfolgen, so beträgt die unterjährige Annuität bei unterjährig linearer Verzinsung beispielsweise 6.297,57 € und der effektive Jahreszins 9,55 %.

5. Kurs- und Renditerechnung mit Excel

5.1 Einführung

Für die Kursrechnung sollen neben bereits definierten Größen und Symbolen folgende verwendet werden:

K_0	Nominalkapital (in €) bei $t = 0$
K'_0	Realkapital (in €), Barwert einer mit dem Effektivzinssatz abgezinsten Zahlungsreihe
C_0	Kurs bei Laufzeitbeginn
i	Nominalzinssatz
j	Effektivzinssatz, Rendite
$q = 1 + i$	nomineller Aufzinsungsfaktor
$q' = 1 + j$	effektiver Aufzinsungsfaktor
α_0, α_n	Agio (in %), einmaliges Aufgeld bei $t = 0$ bzw. n
δ_0, δ_n	Disagio (in %), einmaliges Abgeld bei $t = 0$ bzw. n
n	Laufzeit (in a)
m	Zahl der unterjährigen Zahlungsperioden pro Jahr
$n_p = m \cdot n$	Laufzeit (in unterjährigen Zahlungsperioden)
i_r, i_k	relativer bzw. konformer unterjähriger Zinssatz

Für eine Reihe grundlegender Rechnungen innerhalb dieses Kapitels wird in einer neuen Excel-Mappe "Kurs.xls" die erste Tabelle nach dem Muster von Bild 5.1e bereitgestellt.

K. Renger, *Finanzmathematik mit Excel*, DOI 10.1007/978-3-658-14100-4_10

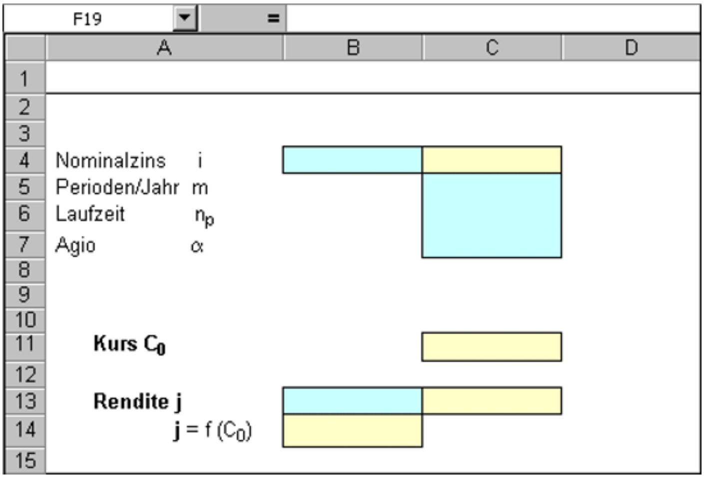


Bild 5.1e Tabellenvorlage für die Kurs- und Renditerechnung

5.2 Kurs einer gesamtfälligen Schuld

Beispiel 5.1: In einem privatrechtlichen Schuldvertrag über 50.000 € sind 5 % einfache Zinsen vereinbart, die mit der gesamtfälligen Schuld nach Ablauf von 6 Jahren an den Gläubiger zu zahlen sind. Zwei Jahre nach Auszahlung des Darlehens überträgt der Gläubiger die Forderung an seine Bank und erhält dafür 48.500 € .

a) Wie hoch ist die Rendite der Bank und

b) welchen Verlust nimmt der bisherige Kreditgeber in Kauf?

Als Voraussetzung für die modifizierte Anwendung der Kursformel Gl. (5.6) werden in zwei gesonderten Zellen der nominale und der reale Aufzinsungsfaktor berechnet. Für die (einfachen) Nominalzinsen ist die Gesamtlaufzeit von 6 Jahren maßgebend, während aus Sicht der Bank nur die Restlaufzeit von 4 Jahren in Betracht kommt:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel	Zelle	Ergebnis
(1.4)	$1+0{,}05\cdot 6$	=1+B4*(C6+2)	C9	1,3000
(1.17)	$q^4=(1+j)^4$	=(1+B13)^C6	C10	gesucht

(5.6) (5.3)	$C_0 = \dfrac{1{,}3000}{q^4} \cdot 100 = (1-0{,}03) \cdot 100$	=C9/C10*100	C11	97,0

Der Kurs für die Übertragung der Schuld an die Bank ist durch das Abgeld von 2.500 € gleich 3 % des Nominalkapitals nach Gl. (5.3) vorgegeben. Für die Rendite j kann in Zelle B13 zunächst eine beliebige Zahl eingetragen werden, z. B. der Nominalzinssatz. Der gesuchte Wert ergibt sich durch Zielwertsuche für den Kurswert 97,0 in Abhängigkeit von der veränderlichen Zelle B13 (s. Bild 5.2e).

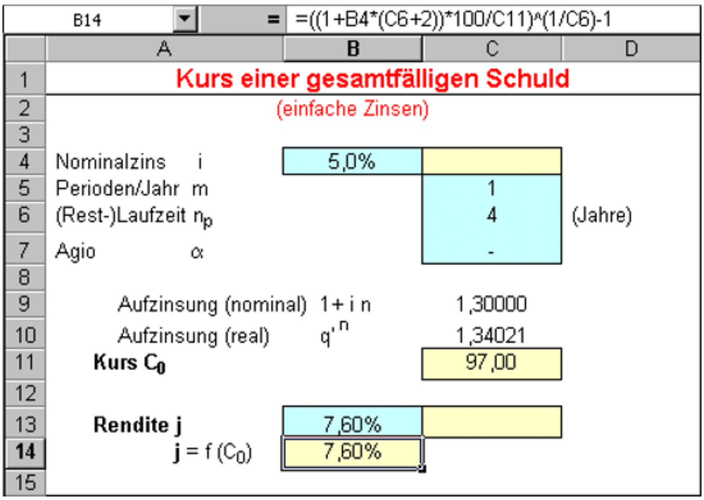


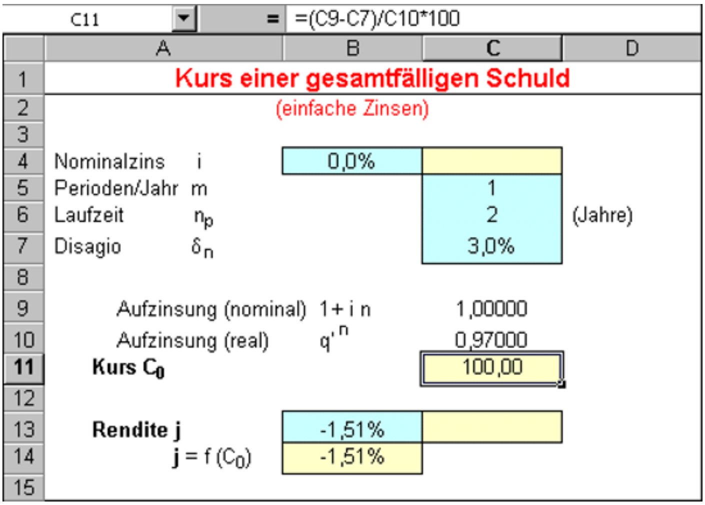
Bild 5.2e Excel-Tabelle für Beispiel 5.1a

Zur Rendite von 7,60 % kommt man auch auf direktem Weg, denn die Kursformel kann nach j umgestellt werden. Das ist jedoch vergleichsweise umständlich (s. Zelle B14 in Bild 5.2e).

Aus der Sicht des ursprünglichen Kreditgebers entfallen die Nominalzinsen, während am Ende der zweijährigen Laufzeit das Abgeld von 3 % erscheint, das in die Kursformel mit einbezogen werden muss:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel in C11	Ergebnis
(5.6)	$C_0 = \dfrac{1-0{,}03}{q^2} \cdot 100$	=(C9-C7)/C10*100	100
(5.6)	$j = \left(\dfrac{97}{100}\right)^{\frac{1}{2}} - 1$	=((1-C7)*100/C11)^(1/C6)-1	-0,0151

Die Zielwertsuche in Zelle C11 für einen Kurs von 100 in Abhängigkeit von Zelle B13 ergibt eine Rendite von -1,51 %, also eine Einbuße für den Kreditgeber (s. Bild 5.3e).


C11 = =(C9-C7)/C10*100

	A		B	C	D
1	Kurs einer gesamtfälligen Schuld				
2	(einfache Zinsen)				
3					
4	Nominalzins	i	0,0%		
5	Perioden/Jahr	m		1	
6	Laufzeit	n_p		2	(Jahre)
7	Disagio	δ_n		3,0%	
8					
9	Aufzinsung (nominal)		1+i n	1,00000	
10	Aufzinsung (real)		q'^n	0,97000	
11	**Kurs C_0**			100,00	
12					
13	**Rendite j**		-1,51%		
14		j = f (C_0)	-1,51%		
15					

Bild 5.3e Excel-Tabelle für Beispiel 5.1b

Beispiel 5.2:	Eine gesamtfällige Schuld sei mit vierteljährlichen Zinseszinsen von 0,5 % (2 % p.a.) versehen, die vollständig angesammelt und am Ende der Laufzeit von 5 Jahren neben dem Gesamtkapital plus einem Aufgeld von 10 % zu zahlen sind. Wie hoch ist die Rendite des Kreditgebers?

Im Unterschied zu Beispiel 5.1 wird das Nominalkapital unterjährig exponentiell mit dem relativen Zinssatz $i_r = i/m$ verzinst. Die Kursrechnung kann deshalb auf Basis unterjähriger Perioden (hier: Quartale) erfolgen, wobei die unterjährigen Zinssätze zu verwenden sind. Da die gesuchte Rendite einen Jahreszinssatz darstellt, muss in Zelle C13 die entsprechende Umrechnung vorgenommen werden:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel	Zelle	Ergebnis
(1.23)	$(1+0{,}005)^{20}$	=(1+C4)^C6	C9	1,1049
(1.26)	$(1+j_k)^{20}$	=(1+C13)^C6	C10	j_k gesucht
(5.6)	$C_0=\frac{1{,}1049+0{,}10}{(1+j_k)^{20}}\cdot 100=100$	=(C9+C7)/C10*100	C11	100
(1.24)	$j_k=(1+j)^4-1$	=(1+B13)^C5-1	C13	j gesucht

Mit dem Rückzahlungsaufgeld $\alpha_n = 10\,\%$ wird der niedrige Nominalzinssatz aufgestockt. Dadurch ergibt sich bei Auszahlung des Darlehens zu 100 % eine Rendite von 3,80 %, was durch Zielwertsuche in Zelle C11 mit Zelle B13 als veränderliche Zelle ermittelt werden kann (s. Bild 5.4e).

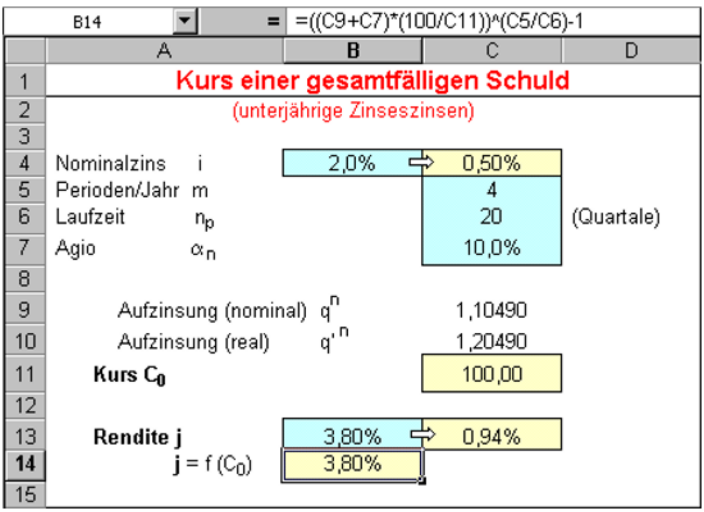


Bild 5.4e Excel-Tabelle für Beispiel 5.2

Auch bei diesem Beispiel kann die Rendite j in Abhängigkeit vom Kurs C_0 durch Umstellung von Gl. (5.6) direkt berechnet werden (vgl. Bild 5.4e):

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel in B14	Ergebnis
(5.6)	$j=\left(\frac{1{,}1049+0{,}1}{100}\cdot 100\right)^{\frac{4}{20}}-1$	=((C9+C7)*(100/C11))^(C5/C6)-1	3,80 %

Beispiel 5.3: Zu welchem Kurs müsste das Darlehen von Beispiel 5.2 ausgezahlt werden, wenn ohne Rückzahlungsaufgeld dieselbe Rendite erzielt werden soll?

Hier soll die Möglichkeit demonstriert werden, die Rendite durch den Ausgabekurs eines Darlehens zu steuern. Wenn in der Excel-Tabelle von Bild 5.4e das Rückzahlungsaufgeld null gesetzt und in Zelle B13 eine Rendite von 3,8 % vorgeben wird, ergibt sich ein Ausgabekurs von $C_0 = 91{,}70$ (s. Bild 5.5e); das entspricht nach Gl. (5.3) einem Disagio von $\delta_0 = 9{,}3$ %.

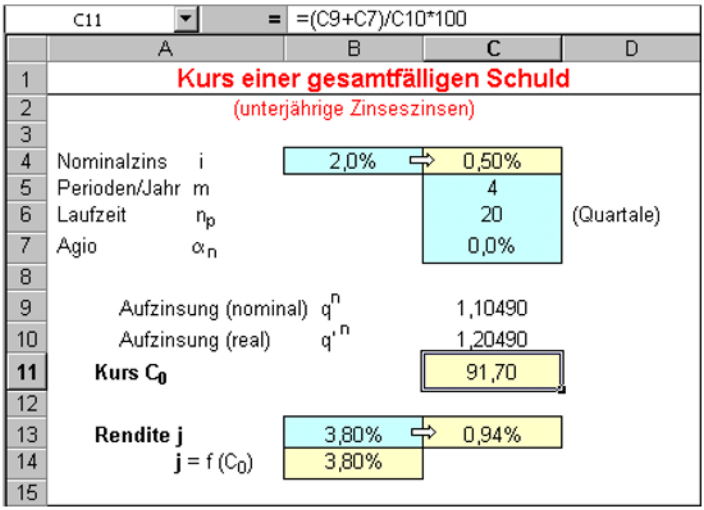
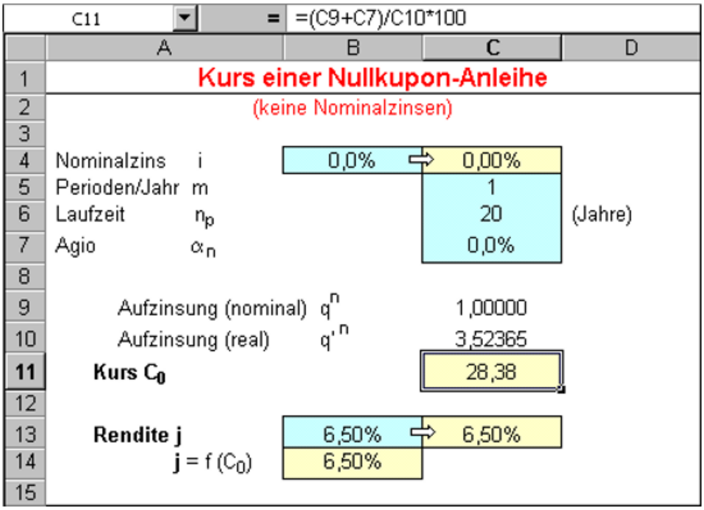


Bild 5.5e Excel-Tabelle für Beispiel 5.3

Beispiel 5.4: Wie hoch ist der Emissionskurs einer Nullkupon-Anleihe, die nach 20-jähriger Laufzeit zu pari zurückgezahlt wird, wenn der effektive Jahreszins 6,5 % beträgt?

Es handelt sich um einen Sonderfall von Gl. (5.6) gemäß Bild 5.3 und Gl. (5.9), bei dem die Rendite durch ein Disagio bei der Ausgabe geregelt wird. Zur Berechnung eignet sich die Excel-Tabelle von Bild 5.4e, indem $i = 0$ und $\alpha_n = 0$ gesetzt werden. Als Ergebnis erhält man $C_0 = 28{,}38$, also ein Disagio von $\delta_0 = 71{,}62$ % (s. Bild 5.6e).



C11 = =(C9+C7)/C10*100

	A	B	C	D
1	Kurs einer Nullkupon-Anleihe			
2	(keine Nominalzinsen)			
3				
4	Nominalzins i	0,0%	0,00%	
5	Perioden/Jahr m		1	
6	Laufzeit n_p		20	(Jahre)
7	Agio α_n		0,0%	
8				
9	Aufzinsung (nominal) q^n		1,00000	
10	Aufzinsung (real) q'^n		3,52365	
11	**Kurs C_0**		28,38	
12				
13	**Rendite j**	6,50%	6,50%	
14	$j = f(C_0)$	6,50%		
15				

Bild 5.6e Excel-Tabelle für Beispiel 5.4

Nach der Emission unterliegt die Nullkupon-Anleihe an der Börse starken Kurs- und Renditeschwankungen, die sich erst bei Annäherung an den Parikurs zum Laufzeitende hin stabilisieren. Vorzeitiger Handel ist demnach mit Abweichungen von der anfänglichen Rendite verbunden (s. Beispiel 5.5).

5.3 Kurs einer Zinsschuld

5.3.1 Jährliche Zinszahlungen

Beispiel 5.5: Eine mit 6,5 % p.a. festverzinsliche Anleihe (z. B. Bundesobligation), deren Rückzahlung endfällig zum Nennwert erfolgt, wird bei einer Restlaufzeit von zwei Jahren zu einem Kurs von 104,5 angeboten. Mit welcher Rendite ist ein Kauf verbunden?

Es geht hier zunächst um ganzjährige Perioden. Zur Bestimmung des Kurses C_0 gemäß Gl. (5.11) kann die Excel-Tabelle von Bild 5.4e durch folgenden Rechnungen modifiziert werden, wobei für j in Zelle B13 zunächst der nominelle Zinssatz eingetragen wird:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel	Zelle	Ergebnis
(1.17)	$q'^2 = (1+0{,}065)^2$	=(1+B13)^C6	C9	1,13423
(3.6)	$b_2' = \dfrac{1{,}13423-1}{1{,}13423 \cdot 0{,}065}$	=BW(B13;C6;-1)	C10	1,82063
(5.11)	$C_0 = \left(0{,}065 \cdot 1{,}82063 + \dfrac{1+0{,}00}{1{,}13423}\right) \cdot 100$	=(B4*C10+(1+C7)/C9)*100	C11	100,0

Die Rechnung mit $j = i$ hat den Vorteil, dass durch das Ergebnis $C_0 = 100$ die Richtigkeit der Formeln bestätigt wird. Bei $j > i$ ergibt sich ein Kurs unter pari und umgekehrt. Die gesuchte Rendite resultiert aus Zielwertsuche in Zelle C11 für den vorgegeben Kurs und beträgt 4,11 % (s. Bild 5.7e).

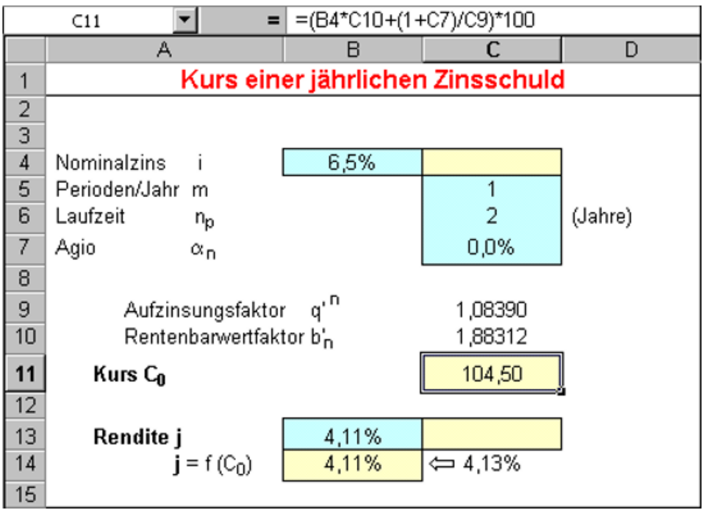


Bild 5.7e Excel-Tabelle für Beispiel 5.5

Die Rendite j kann durch iterative Rechnung in zwei Schritten mit genügender Genauigkeit auf direktem Weg aus dem vorgegebenen Kurs ermittelt werden. Dazu wird für den Restwertverteilungsfaktor in Gl. (5.13) mit i zunächst ein genäherter Wert $v_n' \approx v_n$ und daraus j_1 bestimmt. Im zweiten Schritt wird diese Rechnung wiederholt, wobei v'_n nun mit j_1 bestimmt wird:

Gl.	Zahlenrechnung in Zelle C14 (1. Schritt)	Ergebnis
(3.9)	$v_2 = \dfrac{0{,}065}{1{,}065^2 - 1} = 0{,}48426$	
(5.13)	$j_1 = 0{,}065 \cdot \dfrac{100}{104{,}5} + \dfrac{100 - 104{,}5}{104{,}5} \cdot 0{,}48426$	0,0413
Excel-Formel	=(B4+C7)*(100/C11)+(100-C11)/C11*B4/((1+B4)^C6-1)	

	Zahlenrechnung in Zelle B14 (2. Schritt)	Ergebnis
(3.9)	$v_2' = \dfrac{0{,}0413}{1{,}0413^2 - 1} = 0{,}4899$	
(5.13)	$j_2 = 0{,}065 \cdot \dfrac{100}{104{,}5} + \dfrac{100 - 104{,}5}{104{,}5} \cdot 0{,}4899$	0,0411
Excel-Formel	=(B4+C7)*(100/C11)+(100-C11)/C11*C14/((1+C14)^C6-1)	

In der Exceltabelle von Bild 5.7e kann das Zwischenergebnis vom ersten Schritt in Zelle C14 unsichtbar gemacht werden, indem als Schriftfarbe weiß gewählt wird.

Bei diesem Beispiel wurde unterstellt, dass der Kauf unmittelbar nach einem Zinstermin stattgefunden hat. In der Realität ist beim Handel mit börsennotierten Wertpapieren von nichtganzzahligen Restlaufzeiten auszugehen.

5.3.2 Unterjährige Zinszahlungen

Beispiel 5.6: Ein vermietetes Einfamilienhaus wird auf dem Immobilienmarkt zu einem Preis von 320.000 € angeboten. Die monatlich fälligen Mieteinnahmen betragen langfristig 1.550 €.

Welcher Kurs müsste ausgehandelt werden, wenn der Käufer eine Rendite aus Mieteinnahmen und Restwerterlös von 7,7 % anstrebt, wobei er einkalkuliert, dass er das Haus nach einer Laufzeit von 30 Jahren für die Hälfte des gegenwärtigen Angebots wieder veräußern könnte.

Wenn unterstellt wird, dass die regelmäßigen Mieteinnahmen einen Monat nach dem Kauf beginnen, gelten sie als unterjährig nachschüssige Zahlungen. Als Grundlage für die Renditerechnung ist unterjährig exponentielle Verzinsung maßgeblich und somit der

Monat als Zinsperiode zulässig. Bei einer Nutzungsdauer von 30 Jahren würde die Laufzeit $n_p = 360$ Monate betragen. Der monatliche Nominalzinssatz ergibt sich nach Gl. (1.1) als Quotient aus Miete und Angebotspreis: $i_k = 1.550/320.000 = 0{,}004844$.

Für die Kursrechnung wird die Excel-Tabelle aus Bild 5.7e kopiert und so ergänzt, dass sie für unterjährige Perioden anwendbar ist. Dazu müssen die Jahreszinssätze exponentiell in unterjährige Zinssätze umgerechnet werden, wobei sich in Zelle B4 ein nomineller Jahreszinssatz von 5,97 % einstellt, wenn für i_k der oben errechnete Wert vorgegeben wird (Zielwertsuche):

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel	Zelle	Ergebnis
(5.15)	$i_k = (1+0{,}0597)^{1/12} - 1$	=(1+B4)^(1/C5)-1	C4	0,004844
(5.15)	$j_k = (1+0{,}077)^{1/12} - 1$	=(1+B13)^(1/C5)-1	C13	0,006201

Aufzinsungs- und Barwertfaktor (Zelle C9 und C10) sind aus den unterjährigen Zinssätzen zu berechnen; deshalb muss in beiden Formeln der kopierten Excel-Tabelle B13 durch C13 ersetzt werden. Für eine Laufzeit von 360 Monaten ergeben sich die aus Bild 5.8e ersichtlichen Werte.

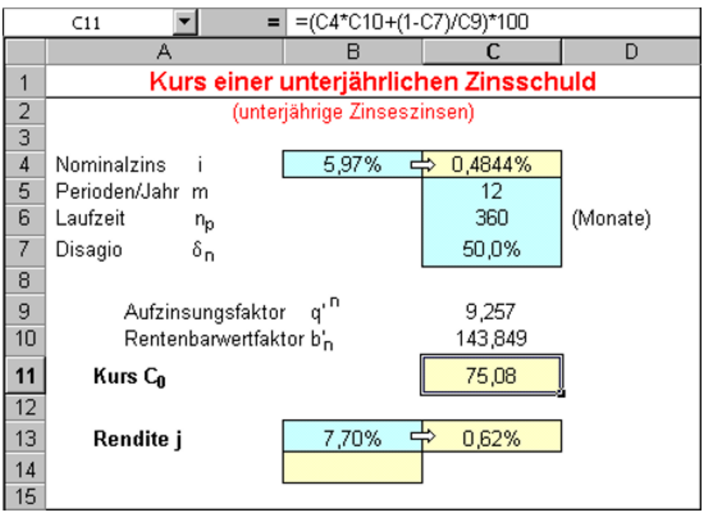


Bild 5.8e Excel-Tabelle für Beispiel 5.6

In der Kursformel ist statt des Agio α_n ein Disagio δ_n zu berücksichtigen, also eine Vorzeichenumkehr vorzunehmen:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel	Zelle	Ergebnis
(5.11)	$C_0 = \left(0{,}004844 \cdot 143{,}449 + \dfrac{1-0{,}5}{9{,}257}\right) \cdot 100$	=(C4*C10+(1-C7)/C9)*100	C11	75,08

Der Kurs von 75,08 entspricht einem Kaufpreis von 240.256 €. Ohne Berücksichtigung des Wertabschlags am Laufzeitende ergäbe sich ein Kurs von 80,48 und ein Kaufpreis von 257.536 €. Mit geringfügigem Aufwand können demnach verschiedene Varianten errechnet werden.

Beispiel 5.7: Eine Bundesanleihe mit 5,3 % festem Jahreszins und einer Laufzeit bis zum 30. März 2006 wird am 30. Juli 2002 zu einem Börsenkurs von 98,9 gekauft.

a) Wie hoch ist die Rendite für den Käufer unter Berücksichtigung der gezahlten Stückzinsen?

b) Wie hoch wäre die Rendite eines Anlegers, der diese zehnjährige Anleihe am 30. März 1996 zum Emissionskurs von 96,5 erworben und am 30. Juli 2002 verkauft hat?

Grundlage für die erste Frage sind Bild 5.5 und die in Bild 5.7e dargestellte Excel-Tabelle, die hier verändert werden muss (vgl. Bild 5.9e). Als Rendite wird zunächst auch 5,3 % angenommen.

Mit $n_1 = 4$ für die jährliche Nominalverzinsung und $n_2 = 120/360 = 1/3$ als unterjährige Zahlungsdauer für die Stückzinsen sind folgende Rechnungen erforderlich:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel	Zelle	Ergebnis
(1.17)	$q'^n = (1+0{,}053)^{4-1/3}$	=(1+B13)^(C6-C7/360)	C9	1,20847
(3.4)	$s'_{n_1} = \dfrac{1{,}053^4 - 1}{0{,}053}$	=ZW(B13;C6;-1)	C10	4,32938
(5.17)	$C_0 = \dfrac{0{,}053 \cdot 4{,}32938 + 1}{1{,}20847} \cdot \dfrac{100}{1+0{,}053/3}$	=(B4*C10+1)/C9*100/(1+B4*C7/360)	C11	99,97

Wegen der linearen Stückzinsen weicht der Kurs vom Parikurs ab. Bei Zielwertsuche für einen Börsenkurs von 98,9 beträgt die Rendite 5,64 % (s. Bild 5.9e).

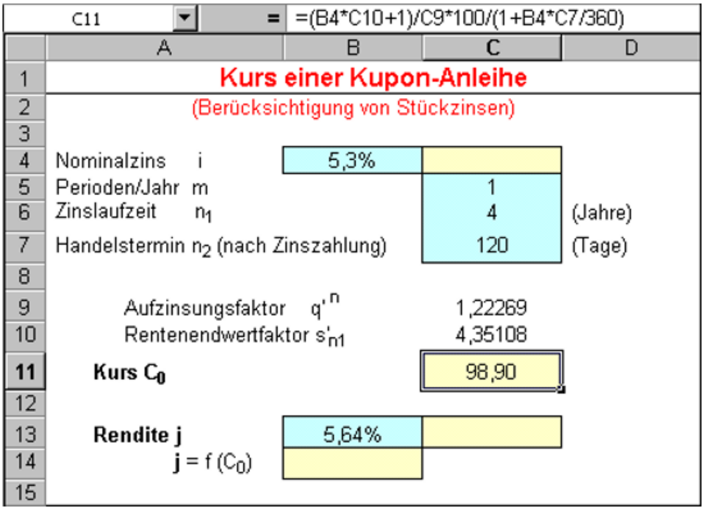


Bild 5.9e Excel-Tabelle für Beispiel 5.7a

Der *Verkauf* einer Anleihe ist in Bild 5.6 schematisch für den in b) zutreffenden Fall dargestellt, denn die erste Laufzeitperiode stimmt mit einer nachschüssigen Zinsperiode überein. Der zwischen zwei Zinsterminen liegende Verkaufstermin bestimmt die Laufzeit $n = n_1 + n_2$ (mit $n_1 = 6$ und $n_2 = 120/360 = 1/3$). Zur Bestimmung der Rendite aus den Kursen können wahlweise die Gln. (5.19) oder (5.20) herangezogen werden. Für die Zahlenrechnung – hier dargestellt mit Gl. (5.19) – wird als Rendite zunächst wieder $j = i$ vorgegeben:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel	Zelle	Ergebnis
(1.17)	$q'^n = (1+0{,}053)^{6+1/3}$	=(1+B13)^(C6+C7/360)	C9	1,38690
(3.6)	$b'_{n_1} = \dfrac{1{,}053^6 - 1}{0{,}053 \cdot (1+0{,}053)^6}$	=BW(B13;C6;-1)	C10	5,02736
(5.19)	$C_0 = \left(0{,}053 \cdot 5{,}02736 + \dfrac{1 - 0{,}011 + 0{,}053/3}{1{,}3869}\right) \cdot 100$	=(B4*C10+(1-C8+B4*C7/360)/C9)*100	C11	99,23

Für diese Rechnung ist wieder die Excel-Tabelle aus Bild 5.7e zu kopieren und entsprechend zu modifizieren. Letztendlich ist die so entstehende Excel-Tabelle (s. Bild 5.10e) allgemeingültiger, weil sie für $n_2 = 0$ der Gl. (5.11) genügt. Auf die iterative Bestimmung der Rendite nach Gl. (5.13) kann verzichtet werden, denn mittels Zielwertsuche in Zelle C11 für den gegebenen Kurswert $C_0 = 96{,}5$ ergibt sich in der als veränderlich deklarierten Zelle B13 eine Rendite von 5,83 % (s. Bild 5.10e).

C11 = =(B4*C10+(1+B4*C7/360-C8)/C9)*100

	A	B	C	D
1	**Kurs einer Kupon-Anleihe**			
2	(Berücksichtigung von Stückzinsen)			
3				
4	Nominalzins i	5,3%		
5	Perioden/Jahr m		1	
6	Zinslaufzeit n_1		6	(Jahre)
7	Handelstermin n_2 (nach Zinszahlung)		120	(Tage)
8	Diagio δ_n		1,1%	
9	Aufzinsungsfaktor q'^n		1,43195	
10	Rentenbarwertfaktor b'_{n1}		4,94328	
11	**Kurs C_0**		96,50	
12				
13	**Rendite j**	5,83%		
14	j = f (C_0)			
15				

Bild 5.10e Excel-Tabelle für Beispiel 5.6b

An dieser Stelle sei darauf verwiesen, dass zur Bestimmung der Rendite generell auch die Zahlungsreihe lückenlos dargestellt und nach dem in Abschn. 2.5 gezeigten Vorgehen mit der *Methode des internen Zinssatzes* behandelt werden kann. Für dieses Beispiel mit vorgegebenen Kalenderterminen eignet sich eine Excel-Tabelle nach dem Muster von Bild 2.14e, die rechts neben der Excel-Tabelle Bild 5.10e angeordnet und entsprechend angepasst wurde (siehe Bild 5.11e).

H14 =G14/(1+$H$4)^((F14-$F$7)/365)

	E	F	G	H	
1		**Effektiver Jahreszins**			
2					
3		Kapitalwert in €		0,00	Zielzelle
4		Effektiver Jahreszins		5,83%	veränderbare Zelle
5					
6		Datum	Zahlung	Barwert	
7		30.03.96	-96,50	-96,500	
8		30.03.97	5,30	5,008	
9		30.03.98	5,30	4,732	
10		30.03.99	5,30	4,472	
11		30.03.00	5,30	4,225	
12		30.03.01	5,30	3,992	
13		30.03.02	5,30	3,772	
14		30.07.02	100,67	70,300	
15					

Bild 5.11e Berechnung der Rendite für Beispiel 5.7b

Der Kapitalwert wird durch Zielwertsuche in Zelle H3 null gesetzt. Auf diese Weise ist es möglich, die Richtigkeit speziell entwickelter Kursformeln nachzuprüfen.

Beispiel 5.8: Eine Anleihe mit Halbjahreskupon und einer Restlaufzeit von 15 Monaten wird zum Börsenkurs von 102,5 gekauft. Wie ist hoch die Rendite, wenn der nominelle Zinssatz 6 % p.a. beträgt und die Anleihe zu pari zurückgezahlt wird?

Die halbjährige Zinsperiode (m = 2) wird als Laufzeitperiode gewählt. Bis zum Laufzeitende (n_p = 2,5 Halbjahre) stehen drei Zinszahlungen (n_1 = 3) von jeweils 3 % bevor, doch für drei Monate (n_2 = 0,5 Halbjahre) müssen lineare Stückzinsen erstattet werden. In Anlehnung an Bild 5.5 sind folgende Rechnungen erforderlich:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel	Zelle	Ergebnis
(1.17)	$q'^{n_p} = (1+0{,}06/2)^{2{,}5}$	=(1+C13)^(C6-C7/6)	C9	1,07670
(3.4)	$s'_{n_1} = \dfrac{1{,}03^3 - 1}{0{,}03}$	=ZW(C13;C6;-1)	C10	3,09090
(5.17)	$C_0 = \dfrac{0{,}03 \cdot 3{,}0909 + 1}{1{,}0767} \cdot \dfrac{100}{1 + 0{,}03 \cdot 0{,}5}$	=(C4*C10+1)/C9*100/(1+C4*C7/6)	C11	99,99

In die Kursformel Gl. (5.17) gehen Halbjahreszinssätze ein. Für die nominelle Verzinsung gilt $i_r = i/m$ = 0,03. Als Rendite-konformer unterjähriger Zinssatz wurde zunächst ebenfalls 3 % angenommen, was annähernd den Parikurs bedingt. Die Umrechnung des nominellen Jahreszinssatzes in einen relativen Zinssatz erfolgt in Zelle C4 mit der Excel-Formel =B4/C5. Die Umrechnung der Rendite in einen konformen Halbjahreszinssatz erfolgt in Zelle C13 mit der Excel-Formel =(1+B13)^(1/C5)-1. Zur Bestimmung der Rendite, die einem Kaufkurs von 102,5 entspricht, wird bei der Zielwertsuche für Zelle C11 als veränderbare Zelle B13 gewählt. Als Ergebnis findet Excel auf dem Umweg über Zelle C13 die Rendite 3,93 % (s. Bild 5.12e).

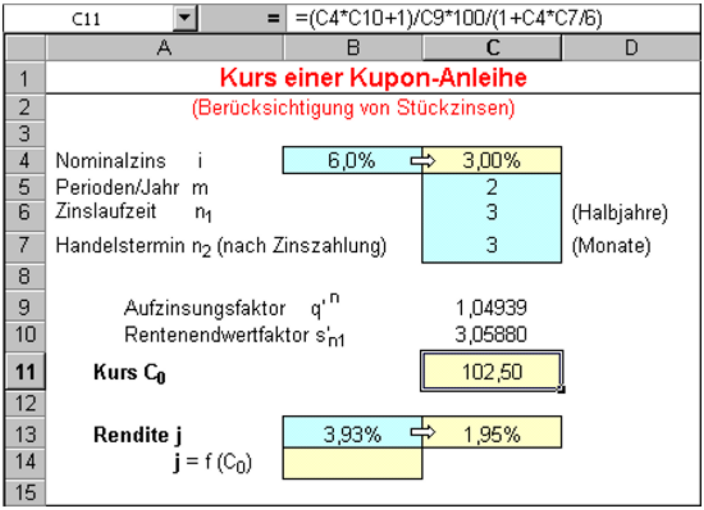


Bild 5.12e Excel-Tabelle für Beispiel 5.8

5.3.3 Kurs einer ewigen Rente

Beispiel 5.9:	Ein vermietetes Einfamilienhaus wird auf dem Immobilienmarkt zu einem Preis von 320.000 € angeboten. Die monatlich fälligen Mieteinnahmen betragen langfristig 1.550 € (vgl. Beispiel 5.6). Welcher Kurs müsste ausgehandelt werden, wenn der Käufer eine Rendite aus Mieteinnahmen von 7,7 % für eine unabsehbar lange Nutzungsdauer anstrebt?

Im Unterschied zu Beispiel 5.6 besteht hier die Vorstellung, die Nutzungsdauer auf die Lebensdauer des Hauses auszudehnen, also als nahezu unendlich anzusehen, und dabei einen Restwerterlös außer acht zu lassen. Unter diesen stark vereinfachten (für Überschlagsrechnungen aber durchaus akzeptablen) Bedingungen kann Gl. (5.21) in der Form $C_0 = i_k / j_k \cdot 100$ angewendet, die gewünschte Rendite mit Gl. (5.15) umgerechnet und somit der gesuchte Kurs ermittelt werden.

In einer Excel-Tabelle nach dem Muster von Bild 5.13e sind folgende Berechnungen erforderlich:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel	Zelle	Ergebnis
(1.1)	$i_k = \dfrac{1.550}{300.000}$	=C6/C7	C4	0,004844
(5.15)	$j_k = (1+0{,}077)^{1/12} - 1$	=(1+B13)^(1/C5)-1	C13	0,006201
(5.21)	$C_0 = \dfrac{0{,}004844}{0{,}006201} \cdot 100$	=C4/C13*100	C11	78,115
(5.21)	$j = \left(1 + \dfrac{0{,}004844}{78{,}115} \cdot 100\right)^{12} - 1$	=(1+C4/C11*100)^C5-1	B14	0,077

Dem Kurs von 78,12 entspricht ein Kaufpreis von etwa 250.000 €. Durch Umstellung von Gl. (5.21) könnte bei vorgegebenem Kurs direkt auch die Rendite bestimmt werden. Eine Zielwertsuche ist also bei beiden Versionen nicht erforderlich.

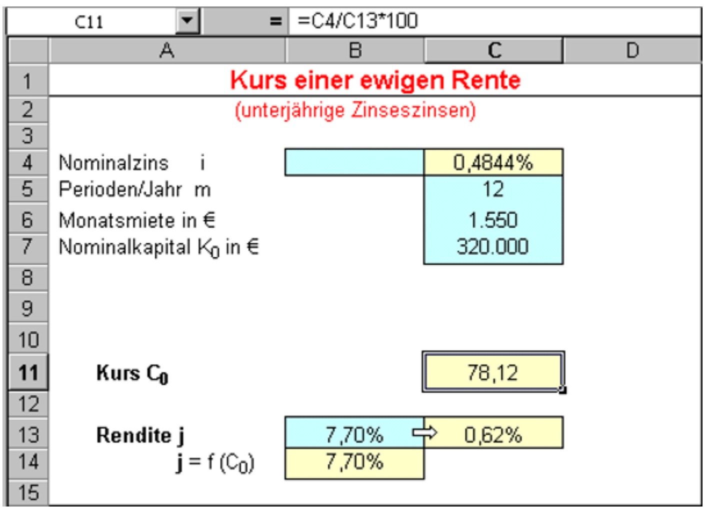


Bild 5.13e Excel-Tabelle für Beispiel 5.9

Auf das annähernd gleiche Ergebnis wie bei der Unterstellung einer ewigen Rente kommt man übrigens ab einer Laufzeit von 100 Jahren, und bei 50 Jahren (= 600 Monaten) weicht der Kurs um weniger als 1 % von dem der ewigen Rente ab, wobei die Höhe des Disagio kaum mehr eine Rolle spielt. Das kann mit der Excel-Tabelle von Bild 5.8e leicht nachgeprüft werden.

5.4 Kurs einer Annuitätenschuld

In den Kapiteln 4.3 und 4.4 wurden einige Probleme des Zusammenhangs zwischen Kurs und Rendite bei Darlehen bereits vorweggenommen, indem an die Tilgungspläne eine Tabelle zur Berechnung des effektiven Jahreszinses gekoppelt war. Darauf kann hier Bezug genommen werden, weil sich lediglich die mathematische Herangehensweise ändert.

Als Tabellengerüst eignet sich die Excel-Tabelle von Bild 5.8e, die zunächst für jährliche Annuitätentilgung aufbereitet wird.

> Beispiel 5.10: Ein Darlehen von 100.000 € mit jährlicher Annuitätentilgung ist zur Verringerung der laufenden Zinszahlung mit einem Disagio von 5 % (Auszahlung 95.000 €) versehen. Der nominelle Jahreszins beträgt 7 % bei einer Laufzeit von 5 Jahren.
>
> a) Wie hoch ist der effektive Jahreszins? (vgl. Beispiel 4.9).
>
> b) Welchen Wert muss das Disagio bei einem gewünschten effektiven Jahreszins von 8,15 % annehmen?

Der Auszahlungskurs kann nach Gl. (5.24) wahlweise aus Rentenbarwertfaktoren b_n oder deren reziproken Werten, den Annuitätenfaktoren w_n, berechnet werden. Hier bietet sich die erstgenannte Version an weil dieser Faktor für das Realkapital von Kupon-Anleihen bereits benötigt und in Zelle C10 ermittelt wurde. Folglich ist nur noch der Rentenbarwertfaktor für das Nominalkapital in Zelle C9 zu bestimmen.

Folgende Rechnungen sind durchzuführen (vgl. Bild 5.14e):

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Funktion	Zelle	Ergebnis
(3.6)	$b_n = \frac{1{,}07^5 - 1}{0{,}07 \cdot 1{,}07^5}$	=BW(B4;C6;-1)	C9	4,1002
(3.6)	$b'_n = \frac{1{,}07^5 - 1}{0{,}07 \cdot 1{,}07^5}$	=BW(B13;C6;-1)	C10	4,1002
(5.24)	$C_0 = \frac{4{,}1002}{4{,}1002} \cdot 100$	=C10/C9*100	C11	100,00

Bei anfänglicher Vorgabe von $j = i$ ergibt sich ein Parikurs ($\delta_0 = 0$, kein Disagio). Die unter a) gesuchte Rendite für einen Auszahlungskurs von $C_0 = (1 - \delta_0) \cdot 100 = 95$ findet man durch Zielwertsuche in Zelle C11 (Zielwert 95 mit B13 als veränderlicher Zelle); sie beträgt 8,95 % in Übereinstimmung mit Beispiel 4.9 (vgl. Bilder 5.14e und 4.18e) .

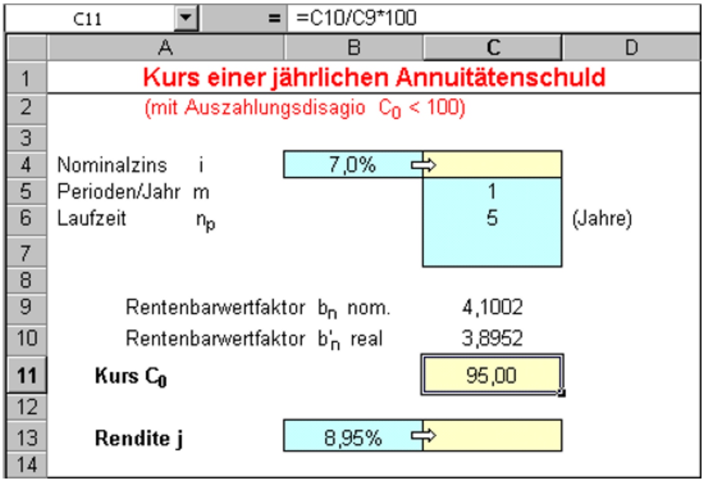


Bild 5.14e Excel-Tabelle für Beispiel 5.10a

Bei Vorgabe der unter b) gewünschten Rendite in Zelle B13 beträgt der Kurs 96,99; das entspricht einem Disagio von etwa 3 % (s. Bild 5.15e). Dieses Ergebnis kann mit der Excel-Tabelle von Bild 4.18e nachgeprüft werden.

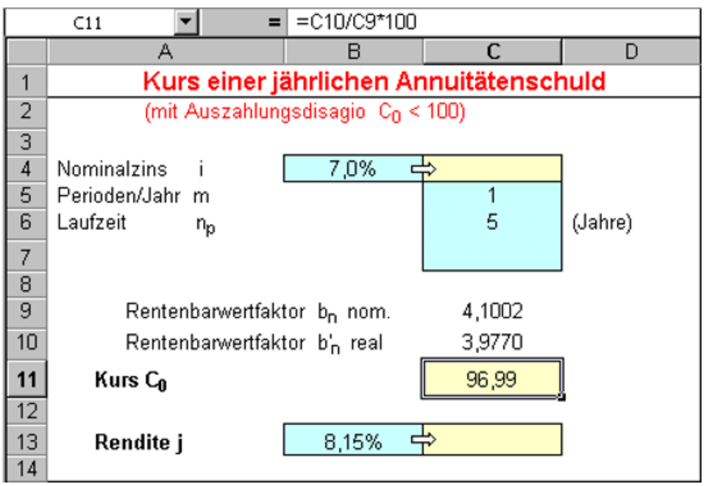


Bild 5.15e Excel-Tabelle für Beispiel 5.10b

> Beispiel 5.11: Das Darlehen von Beispiel 5.10 soll nach sonst gleichen Konditionen, aber nicht jährlich, sondern durch vierteljährliche Annuitäten getilgt werden.
>
> Wie hoch ist der effektive Jahreszins? (vgl. Beispiel 4.11).

Für unterjährige Perioden muss die Excel-Tabelle von Bild 5.14e oder 5.15e (am besten wieder in einer Kopie) entsprechend modifiziert werden. Zunächst wird gemäß Gl. (1.24) in Zelle C13 der Effektivzins j aus Zelle B13 in einen unterjährig konformen Zinssatz j_k umgerechnet. Da das in anderen Tabellen bereits erfolgt ist, kann die Formel von dort kopiert werden, z. B. aus Tabelle Bild 5.12e

Im Beispiel ist nichts darüber gesagt, wie der nominelle Jahreszins i in einen Quartalszinssatz umzurechnen ist; deshalb soll hier nochmals demonstriert werden, wie man mittels kleiner Makros beide Varianten wahlweise berücksichtigen kann.

- Bevor die Zelle C4 markiert wird, um dort die Formel =B4/C5 zur Umrechnung des nominellen Zinssatzes aus Zelle B4 in einen unterjährig relativen Zinssatz einzugeben, wird im Menü EXTRAS/MAKRO/AUFZEICHNEN der Makrorecorder aufgerufen, der Makroname "linear" zugeordnet und danach im Menü EXTRAS/MAKRO/AUFZEICHNUNG BEENDEN wieder ausgeschaltet.
- Dasselbe wird für die Umrechnung in einen unterjährig konformen Zinssatz wiederholt: Makrorecorder einschalten, Makroname "exponentiell" zuordnen, Zelle C4 anklicken, Formel =(1+B4)^(1/C5)-1 eintragen, Aufzeichnung beenden.

Zwei mit "linear" und "exponentiell" bezeichnete Optionsschaltflächen werden eingefügt und die entsprechenden Makros zugeordnet[70].

Schließlich sind in den Excel-Funktionen zur Bestimmung der Rentenbarwertfaktoren die Jahreszinssätze aus den Zellen B4 und B13 durch die jeweiligen unterjährigen Zinssätze aus C4 bzw. C13 zu ersetzen. Dann ergeben sich für $m = 4$, $n_p = 20$ und $j = i = 0{,}07 \mathrel{\hat{=}} 7\,\%$ folgende Zahlenrechnungen (vgl. Bild 5.16e):

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Funktion	Zelle	Ergebnis
(1.13)	$i_r = 0{,}07/4$	=B4/C5	C4	0,0175
(3.6)	$b_n = \dfrac{1{,}0175^{20} - 1}{0{,}0175 \cdot 1{,}0175^{20}}$	=BW(C4;C6;-1)	C9	16,7529
(1.24)	$i_k = 1{,}07^{1/4} - 1$	=(1+C4)^(1/C5)-1	C13	0,01706
(3.6)	$b'_n = \dfrac{1{,}01706^{20} - 1}{0{,}01706 \cdot 1{,}01706^{20}}$	=BW(C13;C6;-1)	C10	16,8252

[70] Die einzelnen Schritte dieses Vorgehens sind in Teil 2, Abschn. 3.3.1 etwas ausführlicher erläutert.

(5.24)	$C_0 = \frac{16{,}7529}{15{,}9152} \cdot 100$	=C10/C9*100	C11	100,43

Wegen der unterjährig linearen Nominalverzinsung weicht der Kurs vom Parikurs ab und beträgt 100,43. Bei einem Kurs von 95 (= 5 % Disagio) beträgt die Rendite 9,44 %, was wiederum durch Zielwertsuche bestimmt werden kann (s. Bild 5.16e). In der Excel-Tabelle von Bild 4.21e erzielt man – ohne Berücksichtigung von Gebühren – dasselbe Ergebnis.

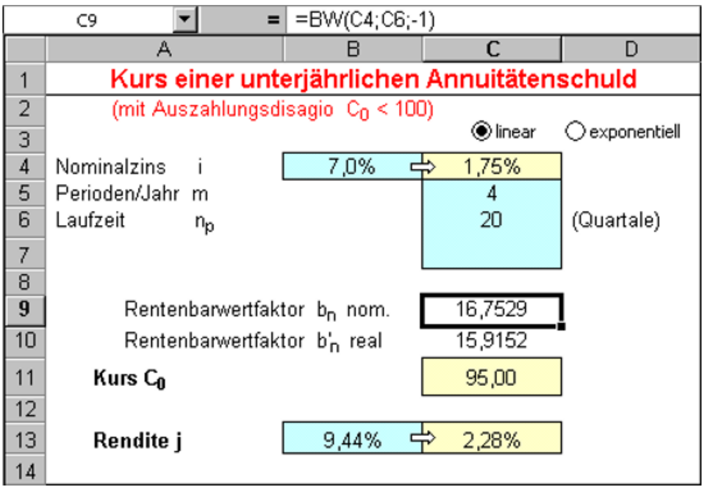


Bild 5.16e Excel-Tabelle für Beispiel 5.11

Bei unterjährig exponentieller Nominalverzinsung führt das Disagio von 5 % zu einer Rendite von 9,25 % (bitte selbst ausprobieren).

Beispiel 5.12:	Ein Darlehen von 100.000 € mit jährlicher Annuitätentilgung ist mit einem Tilgungsagio von 5 % versehen. Der nominelle Jahreszins beträgt 7 % bei einer Laufzeit von 5 Jahren (vgl. Beispiel 4.13). Welche Rendite hat dieses Darlehen bei voller Auszahlung und wie ändert sich die Rendite bei vierteljährlicher Annuitätentilgung?

Grundlage bildet die Excel-Tabelle von Bild 5.16e mit $m = 1$ und $n = 5$, die in Zelle C7 um das periodische Aufgeld α von 5 % erweitert werden muss. Dazu sind zwei Änderungen erforderlich, die modifizierte Berechnung des nominellen Annuitäten- bzw. Rentenbarwertfaktors und die Korrektur der Kursformel. Im Annuitäten- oder Rentenbarwertfaktor wird i durch den Faktor $(1+\alpha)$ dividiert und im Kurs wird das Realkapital K_0 mit diesem Faktor multipliziert. Folgende Zahlenrechnungen sollen das verdeutlichen:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Funktion	Zelle	Ergebnis
(5.25)	$\hat{b}_n = \dfrac{(1+0{,}07/1{,}05)^5 - 1}{0{,}07/1{,}05 \cdot (1+0{,}07/1{,}05)^5}$	=BW(C4/(1+C5);C6;-1)	C9	4,1371
(3.6)	$b'_n = \dfrac{1{,}07^5 - 1}{0{,}07 \cdot 1{,}07^5}$ (unverändert)	=BW(C13;C6;-1)	C10	4,1002
(5.26)	$C_0 = 1{,}05 \cdot \dfrac{4{,}1002}{4{,}1371} \cdot 100$	=(1+C5)*C10/C9*100	C11	104,06

Im Zahlenbeispiel wurde die Rendite j gleich dem Nominalzins $i = 0{,}07$ gesetzt, wobei sich ein Kurs von 104,06 ergibt (s. Bild 5.17e). Das heißt, dass die mit Aufgeld versehenen Annuitäten einer äquivalenten Kreditauszahlung von 104.060 € entsprechen würden. Bei einer Kreditauszahlung von 100 % (bedeutet Parikurs) beträgt der effektive Jahreszins 8,51 %. Dieses durch Zielwertsuche für Zelle C11 gefundene Ergebnis stimmt mit Bild 4.25e überein, wenn man die Gebühren außer Acht lässt.

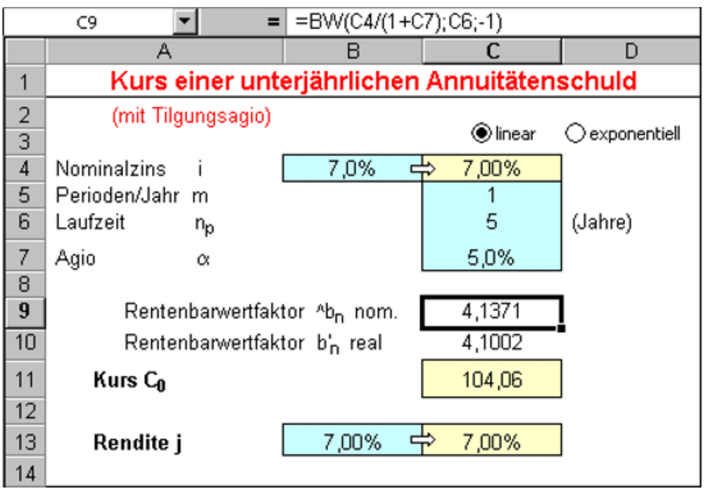


Bild 5.17e Excel-Tabelle für Beispiel 5.12 (jährliche Annuitäten)

Die in Bild 5.17e dargestellte Excel-Tabelle war von vornherein auf unterjährige Annuitätentilgung ausgerichtet, so dass mit $m = 4$ und $n = 20$ und Zielwertsuche mit $C_0 = 100$ sehr einfach die Rendite für vierteljährliche Annuitäten bestimmt werden kann. Sie verschlechtert sich bei unterjährig linearer Nominalverzinsung[71] gegenüber den jährlichen Zahlungen auf 8,97 % (s. Bild 5.18e) und bei unterjährig exponentieller Verzinsung auf 8,79 %.

C11 = =(1+C7)*C10/C9*100

	A	B	C	D
1	**Kurs einer unterjährlichen Annuitätenschuld**			
2	(mit Tilgungsagio)			
3			◉ linear	○ exponentiell
4	Nominalzins i	7,0% ⇨	1,75%	
5	Perioden/Jahr m		4	
6	Laufzeit n_p		20	(Quartale)
7	Agio α		5,0%	
8				
9	Rentenbarwertfaktor $^{\wedge}b_n$ nom.		16,8898	
10	Rentenbarwertfaktor b'_n real		16,0856	
11	**Kurs C_0**		100,00	
12				
13	**Rendite j**	8,97% ⇨	2,17%	
14				

Bild 5.18e Excel-Tabelle für Beispiel 5.12 (vierteljährliche Annuitäten)

Übrigens ersetzt diese zuletzt entwickelte Excel-Tabelle alle vorher in den Bildern 5.14e bis 5.16e dargestellten Excel-Tabellen, weil diese ganz systematisch erweitert worden sind. So könnte ohne weiteres neben dem Tilgungsagio ein Auszahlungsdisagio berücksichtigt werden, falls dieser Fall praktisch zutreffen würde.

Beispiel 5.13: Ein Darlehen wird jährlich in gleichen Raten von 24 % der Schuld (Prozentannuitäten, bestehend aus Tilgungsanteilen plus 9 % nominelle Zinsen) zurückgezahlt.

a) Wie hoch ist die Rendite bei Beibehaltung des nominellen Zinssatzes und Auszahlung des Darlehens mit einem Disagio von 5 %?

b) Mit welchem Disagio müsste das Darlehen ausgezahlt werden, damit bei einer von Rendite 9 % die laufenden Zinszahlungen auf 7,5 % verringert werden?

c) Welcher Wert ergibt sich für den nominellen Zinssatz bei einem Disagio von 5 %, wenn als Rendite 9 % angestrebt werden?

[71] Bei den Beispielen in diesem Abschn. 5.4 wurde stets periodische Zinskapitalisierung unterstellt.

Bei Vorgabe fester Annuitäten als Prozentwert der Schuld gemäß Gl. (4.19) ergibt sich am Ende des vorletzten Laufzeitjahres n_1 neben der letzten vollen Annuität eine restliche Abschlusszahlung, die meist ein Jahr später ($n_1 + 1$) fällig ist (vgl. Beispiele 4.7 und 4.8). Aus dieser Überlegung resultiert die Kursformel Gl. (5.25), die hier in eine Excel-Tabelle umgesetzt werden soll. Dazu wird die in Bild 5.16e dargestellte Excel-Tabelle kopiert und vor Zeile 11 um zwei Zeilen erweitert (dazu die Zeilen 11 und 12 markieren und im Kontextmenü ZEILEN EINFÜGEN wählen).

Von der Kopie kann Zeile 10 mit dem realen Barwertfaktor bezüglich n_1 beibehalten werden, ansonsten sind für Zwischenergebnisse dreier weiterer Faktoren aus Gl. (5.28), für den nominellen Rentenendwertfaktor bezüglich n_1 sowie für die wegen der Abschlusszahlung bei $n_1 + 1$ erforderlichen Zinsfaktoren, jeweils eine neue Zeile einzurichten (s. Bild 5.19e). Die ganzzahlige Laufzeit n_1 wird nicht vorgegeben, sondern errechnet. Wenn zunächst $j = i = 0{,}09$ gesetzt wird, ergeben sich für das Beispiel folgende Zahlenrechnungen:

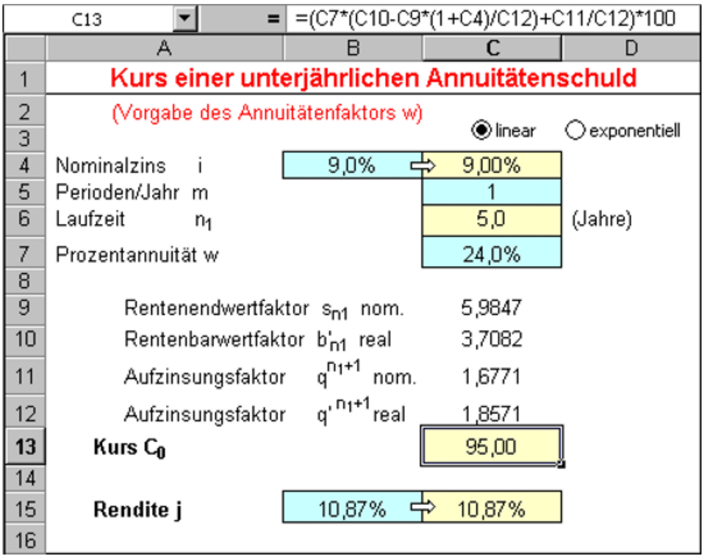
Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Funktion	Zelle	Ergebnis
(4.21)	$n = \dfrac{\lg 0{,}24 - \lg(0{,}24 - 0{,}09)}{\lg 1{,}09}$	ganzzahliger Anteil n_1: =GANZZAHL(ZZR(C4;C7;-1))	C6	5,454 5,0 a
(3.3)	$s_{n_1} = \dfrac{1{,}09^5 - 1}{0{,}09}$	=ZW(C4;C6;-1)	C9	5,9847
(3.6)	$b'_{n_1} = \dfrac{1{,}09^5 - 1}{0{,}09 \cdot 1{,}09^5}$	=BW(C15;C6;-1)	C10	3,88965
	$q^{n_1+1} = 1{,}09^6$	=(1+C4)^(C6+1)	C11	1,6771
	$q'^{\,n_1+1} = 1{,}09^6$	=(1+C15)^(C6+1)	C12	1,6771
(5.28)	$C_0 = 0{,}24 \cdot \left(3{,}8897 - \dfrac{1{,}09 \cdot 5{,}9847}{1{,}6771}\right) \cdot 100 + \dfrac{1{,}6671}{1{,}6771} \cdot 100$ =(C7*(C10-C9*(1+C4)/C12)+C11/C12)*100		C13	100,00

Dass sich ein Kurs von 100 ergibt, bestätigt die Richtigkeit der Formeln.

Die unter a) gesuchte Rendite erhält man durch Zielwertsuche für Zelle C13 mit dem Zielwert 95 und B15 als veränderliche Zelle; sie beträgt 10,87 % (s. Bild 5.19e). Das Ergebnis kann mit der Excel-Tabelle von Bild 4.16e nachgeprüft werden, wenn die Vorgaben richtig eingestellt und in Zelle G11 die um 5 % geringere Auszahlung (z. B. -95.000 bei einer Darlehensschuld von 100.000) eingetragen wird.

Unter b) und c) wird von der Überlegung ausgegangen, dass der ursprüngliche Zinssatz von 9 % die gewünschte Rendite darstellt und dass ein Disagio dazu dient, die laufende

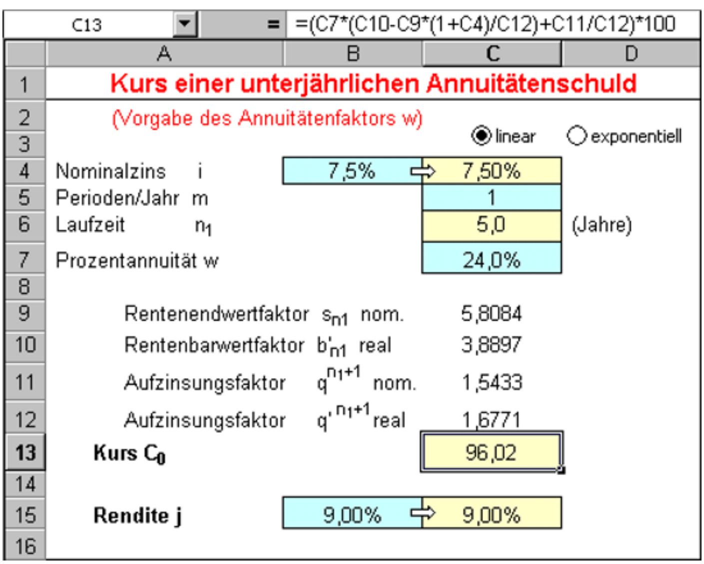
Zinsbelastung des Kreditnehmers zu verringern. Bei einem Nominalzinssatz von 7,5 % beträgt der Kurs 96,02 und das Disagio somit 4 % (s. Bild 5.20e).



C13 = =(C7*(C10-C9*(1+C4)/C12)+C11/C12)*100

	A	B	C	D
1	Kurs einer unterjährlichen Annuitätenschuld			
2	(Vorgabe des Annuitätenfaktors w)			
3			◉ linear	○ exponentiell
4	Nominalzins i	9,0% ⇨	9,00%	
5	Perioden/Jahr m		1	
6	Laufzeit n_1		5,0	(Jahre)
7	Prozentannuität w		24,0%	
8				
9	Rentenendwertfaktor s_{n1} nom.		5,9847	
10	Rentenbarwertfaktor b'_{n1} real		3,7082	
11	Aufzinsungsfaktor q^{n_1+1} nom.		1,6771	
12	Aufzinsungsfaktor q'^{n_1+1} real		1,8571	
13	**Kurs C_0**		95,00	
14				
15	**Rendite j**	10,87% ⇨	10,87%	
16				

Bild 5.19e Excel-Tabelle für Beispiel 5.13a



C13 = =(C7*(C10-C9*(1+C4)/C12)+C11/C12)*100

	A	B	C	D
1	Kurs einer unterjährlichen Annuitätenschuld			
2	(Vorgabe des Annuitätenfaktors w)			
3			◉ linear	○ exponentiell
4	Nominalzins i	7,5% ⇨	7,50%	
5	Perioden/Jahr m		1	
6	Laufzeit n_1		5,0	(Jahre)
7	Prozentannuität w		24,0%	
8				
9	Rentenendwertfaktor s_{n1} nom.		5,8084	
10	Rentenbarwertfaktor b'_{n1} real		3,8897	
11	Aufzinsungsfaktor q^{n_1+1} nom.		1,5433	
12	Aufzinsungsfaktor q'^{n_1+1} real		1,6771	
13	**Kurs C_0**		96,02	
14				
15	**Rendite j**	9,00% ⇨	9,00%	
16				

Bild 5.20e Excel-Tabelle für Beispiel 5.13b

Bei einem Disagio von 5 % würde sich eine Nominalverzinsung von 7,1 % einstellen. Dieses letztgenannte Ergebnis liefert wie oben eine Zielwertsuche für den Kurswert 95, allerdings mit Zelle B4 als veränderliche Zelle.

Beispiel 5.14:	Wie ändert sich für das Darlehen von Beispiel 5.13 der nominelle Jahreszinssatz, wenn monatliche Prozentannuitäten in Höhe von 2 % der Darlehensschuld festgelegt sind, ein Disagio von 5 % einbehalten wird und die Rendite 9 % betragen soll?

Die Excel-Tabelle von Bild 5.20e ist durch das Kopieren aus Bild 5.16e schon so angelegt, dass unterjährliche Prozentannuitäten berücksichtigt werden können. Wenn $m = 12$ und für beide Zinssätze in Spalte B zunächst 9 % eingetragen wird, dann ergibt sich ein Parikurs von 100 nur dann, wenn mit unterjährig exponentieller Verzinsung gerechnet wird. Bei unterjährig linearer Verzinsung mit dem relativen Zinssatz stellt sich als *interner Kurs* ein Wert von 100,86 ein. Ein Disagio von 5 % (Auszahlungskurs 95) verringert bei gleichbleibender Rendite nicht nur den nominellen Zinssatz auf 6,43 %, sondern damit zugleich die Laufzeit von ursprünglich 62 auf 58 volle Monate (s. Bild 5.21e).

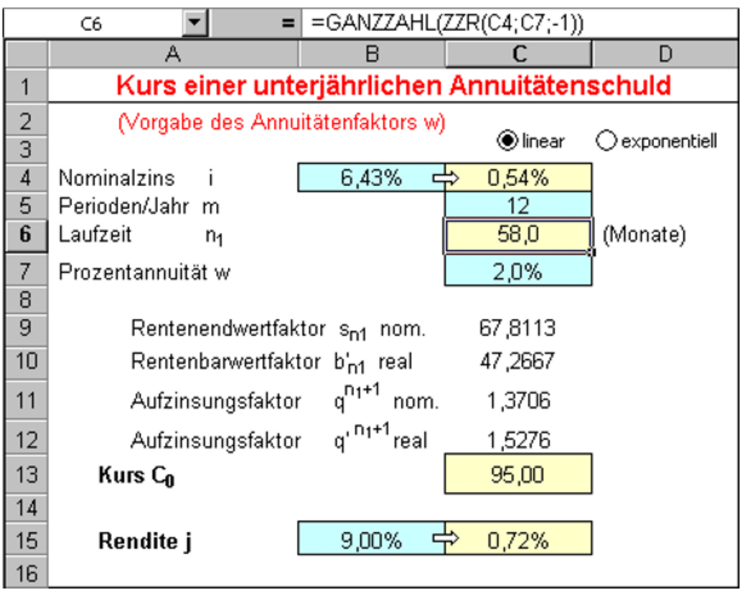


Bild 5.21e Excel-Tabelle für Beispiel 5.14

Auch dieses Ergebnis kann mit der Excel-Tabelle von Bild 4.16e nachgeprüft werden.

> Beispiel 5.15: Für ein Darlehen mit jährlicher Annuitätentilgung und einer Gesamtlaufzeit von 10 Jahren soll bei einem Disagio von 5 % eine Rendite von 9 % erzielt werden. Welcher nominelle Jahreszins muss bei Gewährung von Tilgungsfreiheit für die ersten 2,5 Jahre vereinbart sein, wenn während dieser Zeit
>
> a) halbjährlich Zinsen gezahlt werden (Tilgungsstreckung) oder
>
> b) keine Zinsen gezahlt, sondern mit halbjährigen Zinseszinsen angesammelt werden (Zahlungsaufschub).

Als Laufzeitperioden werden halbe Jahre gewählt ($m = 2$). Wegen der tilgungsfreien Zeit von $k = 5$ Halbjahren muss einerseits rechnerisch gewährleistet werden, dass für die Annuitätentilgung nur $n - k = 15$ Halbjahresperioden verbleiben. Andererseits muss die Modalität der Zinszahlungen während der tilgungsfreien Zeit beachtet werden. Angenommen, anfangs sind nur die Tilgungszahlungen ausgesetzt (sog. Tilgungsstreckung) und die Sollzinsen werden halbjährlich in Höhe von $i/2$ auf die ursprüngliche Schuld gezahlt, dann wird zur Berechnung des Realkapitals gemäß Gl. (5.32) neben dem Barwertfaktor b'_5 für die Zinszahlungen in (0; k) noch der Abzinsungsfaktor $1/q'^5$ für den Barwert der Annuitäten bezüglich $t = 5$ zusätzlich benötigt.

Für diesen Sachverhalt kann eine Kopie der Excel-Tabelle von Bild 5.21e entsprechend aufbereitet werden (s. Bild 5.22e). In der folgenden Zahlenrechnung für den Kurs ist für den nominellen und effektiven Halbjahreszinssatz jeweils der gleiche Wert von 5 % gewählt worden:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Funktion/Formel	Zelle	Ergebnis
(3.6)	$b_{n-k} = \dfrac{1{,}05^{15} - 1}{0{,}05 \cdot 1{,}05^{15}} = b'_{n-k}$	=BW(C4;C6-C7;-1) =BW(C15;C6-C7;-1)	C9 C10	10,3797
(3.6)	$b'_k = \dfrac{1{,}05^5 - 1}{0{,}05 \cdot 1{,}05^5}$	=BW(C15;C7;-1)	C11	4,3295
	$q'^k = 1{,}05^5$	=(1+C15)^C7	C12	1,2763
(5.33)	$C_0 = \left(0{,}05 \cdot 4{,}3295 + \dfrac{10{,}3797}{10{,}3797} \cdot \dfrac{1}{1{,}2763}\right) \cdot 100$	=(C4*C11+C10/C9/C12)*100	C11	100,00

Wenn 9 % als Rendite in Zelle B15 vorgegeben wird und in Zelle C11 der Zielwert 95 in Abhängigkeit von Zelle B4 gesucht wird, dann ergibt sich als Resultat für Beispiel 5.15a ein Nominalzinssatz von 7,8 % p.a. (s. Bild 5.22e).

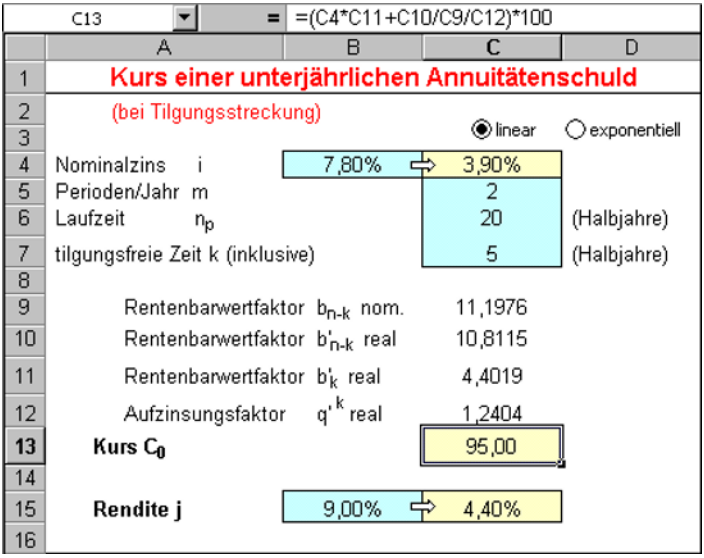


Bild 5.22e Excel-Tabelle für Beispiel 5.15a

Bei Zahlungsaufschub für Tilgung und Zinsen ist gemäß Gl. (5.34) nur statt des Barwertfaktors b_5' in Zelle C11 der nominelle Aufzinsungsfaktor q^5 zusätzlich bereitzustellen. Allerdings muss auch die Kursformel geändert werden, wie am folgenden Zahlenbeispiel (Vorgaben wie oben) gezeigt wird:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Formel	Zelle	Ergebnis
(5.34)	$C_0 = \frac{10{,}3797}{10{,}3797} \cdot \frac{1{,}2763}{1{,}2763} \cdot 100$	=(C10/C9*C11/C12)*100	C11	100,00

Bei einem Disagio von 5 % und einer gewünschten Rendite von $j = 9$ % beträgt der Nominalzinssatz 7,93 % p.a. (s. Bild 5.23e).

C13 = =(C10/C9*C11/C12)*100

	A		B	C	D
1	**Kurs einer unterjährlichen Annuitätenschuld**				
2	(bei Zahlungsaufschub)				
3				◉ linear	○ exponentiell
4	Nominalzins	i	7,93% ⇨	3,97%	
5	Perioden/Jahr	m		2	
6	Laufzeit	n_p		20	(Halbjahre)
7	tilgungsfreie Zeit k (inklusive)			5	(Halbjahre)
8					
9	Rentenbarwertfaktor	b_{n-k} nom.		11,1445	
10	Rentenbarwertfaktor	b'_{n-k} real		10,8115	
11	Aufzinsungsfaktor	q^k nom.		1,2147	
12	Aufzinsungsfaktor	q'^k real		1,2404	
13	**Kurs C_0**			95,00	
14					
15	**Rendite j**		9,00% ⇨	4,40%	
16					

Bild 5.23e Excel-Tabelle für Beispiel 5.15b

5.5 Kurs einer endlichen Rente

Beispiel 5.16: Für den Kauf eines Computers wird ein Teilzahlungskredit von 1.200 € gewährt, der in 36 gleichen Monatsraten mit je einem Zinsaufschlag von 5 % zurückzuzahlen ist.

a) Welche Rendite liegt dem Kreditvertrag zugrunde?

b) Welcher nominelle Jahreszins würde bei unterjährig linearer Verzinsung zu denselben Ratenzahlungen führen und worin liegt der formelle Unterschied zur Annuitätentilgung?

Bei Teilzahlungskrediten für Konsumgüter (auch als *Ratenkredite* bekannt), war es üblich, wie bei der Ratentilgung die Schuld nach Gl. (4.6) zunächst gleichmäßig auf alle Laufzeitperioden zu verteilen. In diesem Beispiel wären das 1.200/36 = 33,33 €. Auf diese konstanten Tilgungsraten wurde einfach ein prozentualer Anteil des Kredits als Zinspauschale aufgeschlagen, so dass konstante Annuitäten zustande kamen (hier 35,00 €). Im Unterschied zur Annuitätentilgung wurde bei diesem Ratenkredit aber kein Nominalzins angegeben. Der aufgeschlagene Prozentanteil des Kredits konnte lediglich für die erste Periode als Zinssatz interpretiert werden. Der Vorteil dieser Vorgehensweise bestand darin, dass aus Kredit, Zahl der Laufzeitperioden und diesem konstanten Zinsaufschlag der effektive Jahreszinssatz nach einer einfachen Näherungsformel berechnet werden konnte (sog. *Uniformmethode*)[72].

Finanzmathematisch korrekt ist, wenn man diesen prozentualen Anteil der Schuld, der den Tilgungsraten zugeschlagen wird, als Agio betrachtet, das die nominellen Zinsen sowie eventuelle Gebühren vollständig ersetzt. Dieses Agio bestimmt den Kurs und damit die Rendite. Die Lösung des Beispiels kann mit der Excel-Tabelle von Bild 5.18e gefunden werden, indem man $i = 0$ vorgibt und für einen Kurs von 100 die Rendite bestimmt. Als Ergebnis der Zielwertsuche erhält man eine Rendite von 3,24 % (s. Bild 5.24e).

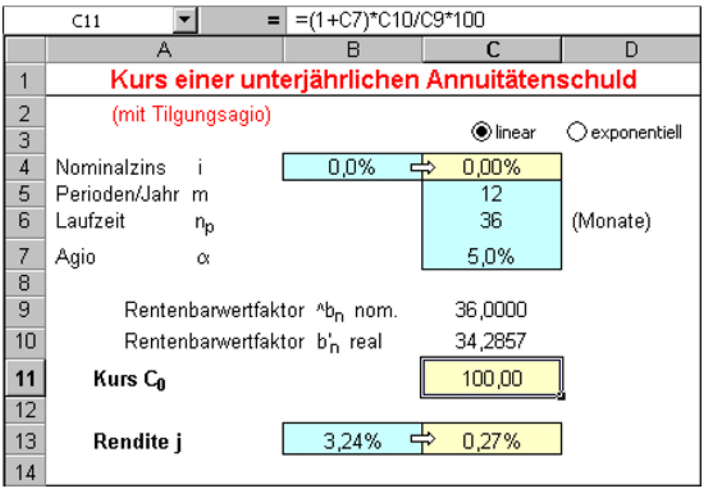


Bild 5.24e Excel-Tabelle für Beispiel 5.16

Dem konstanten Agio würden Nominalzinssätze entsprechen, die mit sinkender Restschuld von Monat zu Monat zunehmen. Indem man nun in einem zweiten Rechengang das Agio null setzt und bei der Zielwertsuche für den Parikurs den nominellen Jahreszins in Zelle B4 als variabel deklariert, findet man, dass dem Agio von 5 % ein fester Nominalzinssatz von 3,19 % p.a. adäquat ist.

Beide Rechengänge können auch mit der Excel-Tabelle von Bild 4.25e nachgeprüft werden, wobei man hier im Tilgungsplan die Unterschiede hinsichtlich der Restschuldentwicklung erkennt, wenn die Ratentilgung mit Agio durch eine Annuitätentilgung ohne Agio ersetzt wird. Während die Tilgungsrate vorher gleichbleibend 33,33 € betrug, ist sie ohne Agio anfangs geringer und nimmt dann zu (s. Bild 5.25e). Die Annuität beträgt in beiden Fällen 35,00 €.

[72] vgl. Wimmer/Stöckl-Pukall (1998), S. 13, und Locarek-Junge (1997), S. 54.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Annuitätentilgung mit Agio						
2		Zinszahlung:	unterjährlich nachschüssig				Effektiver Jahreszins	
3				Gebühren:			(neue PAngV)	
4	Kredit D	1.200,00 €		Agio:	0,0%			
5	Zinssatz i	3,19%	⇨ i_r =	0,27%			3,24%	
6	Periode m	12						
7	Laufzeit n_p	36	Monate	tilgungsfrei:	0			
8					(Monate)	◉ linear	○ exponentiell	
9		Annuität:	35,00	in €				
10							Zahlungsreihe	
11	Monate	Restschuld	Zinsen	Tilgung	Annuität		-1.200,00	
12	1	1.200,00	3,19	31,81	35,00		35,00	
13	2	1.168,19	3,11	31,89	35,00		35,00	
14	3	1.136,30	3,02	31,98	35,00		35,00	
15	4	1.104,33	2,94	32,06	35,00		35,00	
16	5	1.072,27	2,85	32,15	35,00		35,00	
47	36	34,91	0,09	34,91	35,00		35,00	
50	Summe:	22.544,15	60,00	1.200,00	1.260,00			

Bild 5.25e Tilgungsplan für Beispiel 5.16

Beispiel 5.17: Im Rahmen von Sparplänen gewährt eine Bank bei monatlich vorschüssigen Sparraten von 100 € einen Zinssatz von 2,5 % p.a. (unterjährig linear). Wenn ein Sparziel von 5 Jahren erreicht wird, erhält der Sparer einen zusätzlichen Bonus in Höhe von 5 % der insgesamt eingezahlten Raten. Wie hoch ist unter Berücksichtigung dieses Bonus die Rendite?

Die Besonderheit dieser auch als *Prämiensparen* bezeichneten Zahlungsart besteht im Gegensatz zur Annuitätentilgung einerseits darin, dass nur die vorschüssige Zahlungsweise einen Sinn ergibt (erste Ratenzahlung bei Vertragsabschluss, alle Ratenzahlungen werden verzinst, auch die letzte). Andererseits wird die Rendite durch ein Agio α_n am Ende der Laufzeit gesteuert.

Für den Kurs dieser Zahlungsreihe nach Gl. (5.38) muss wieder eine der bereits vorhandenen Tabellen modifiziert werden. Am besten eignet sich die Excel-Tabelle Bild 5.15e. Darin ist vor Zeile 11 eine zusätzliche Zeile für den effektiven Aufzinsungsfaktor $(1+j)^n$ einzufügen (s. Bild 5.26e). Nun fehlt in Zelle C14 noch die Formel für den unterjährig konformen Zinssatz, die aus einer der vorhergehenden Tabellen kopiert werden kann.

Bei einer (willkürlich) eingetragenen Rendite von 2,5 % (bzw. mit $j_k = 0{,}206$ in Zelle C14) ergeben sich für $n = 5$ bzw. $n_p = 60$ und $\alpha_{60} = 0{,}06$ die folgenden Zahlenrechnungen:

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Funktion/Formel	Zelle	Ergebnis
(3.6)	$b_n = \frac{1{,}025^5 - 1}{0{,}025 \cdot 1{,}025^5}$	=BW(B4;C6/C5;-1)	C9	4,6458
(3.6)	$b'_{n_p} = \frac{1{,}00206^{60} - 1}{0{,}00206 \cdot 1{,}00206^{60}}$	=BW(C14;C6;-1)	C10	56,386
	$q'^n = 1{,}025^5$		C11	1,1314
(5.38)	$C_0 = \frac{1{,}00206 \cdot 56{,}386 + \frac{0{,}06 \cdot 60}{1{,}1314}}{(12 + 0{,}025 \cdot 13/2) \cdot 4{,}6458} \cdot 100$			105,63
	=((1+C14)*C10+C7*C6/C11)/(C5+B4*(C5+1)/2)/C9*100		C12	

Das gesuchte Ergebnis, eine Rendite von 4,75 %, erhält man wieder durch Zielwertsuche in Zelle C12 für den Kurswert 100 mit der veränderlichen Zelle B14 (s. Bild 5.26e).

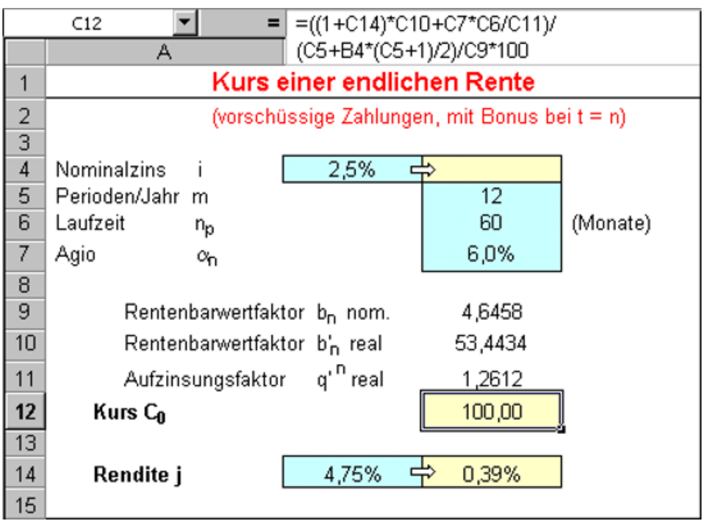


Bild 5.26e Excel-Tabelle für Beispiel 5.17

5.6 Kurs einer Ratenschuld

> Beispiel 5.18: Ein Darlehen von 100.000 € mit jährlicher Ratentilgung ist zur Verringerung der laufenden Zinszahlung mit einem Disagio von 5 % (Auszahlung 95.000 €) versehen. Der nominelle Jahreszins beträgt 7 % bei einer Laufzeit von 5 Jahren.
>
> a) Wie hoch ist der effektive Jahreszins? (vgl. Beispiele 4.9 und 5.10).
>
> b) Welchen Wert muss das Disagio bei einem gewünschte effektiven Jahreszins von 8,15 % annehmen?

Um Raten- und Annuitätenschuld hinsichtlich Kurs und Rendite vergleichen zu können, wurde ein schon mehrfach verwendetes Zahlenbeispiel ausgewählt. Als Grundlage für jährliche Ratentilgung eignet sich die Excel-Tabelle von Bild 5.14e. Darin muss lediglich die Kursformel verändert werden, wobei die Berechnung des nominellen Rentenbarwertfaktors in Zelle C9 entfällt. Für die folgende Zahlenrechnung wird als Rendite in Zelle B13 zunächst $j = i = 0{,}07$ gewählt.

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Funktion	Zelle	Ergebnis
(3.6)	$b'_n = \dfrac{1{,}07^5 - 1}{0{,}07 \cdot 1{,}07^5}$	=BW(B13;C6;-1)	C10	4,1002
(5.42)	$C_0 = \left(1 - \dfrac{0{,}07}{0{,}07}\right) \cdot \dfrac{4{,}1002}{5} \cdot 100 + \dfrac{0{,}07}{0{,}07} \cdot 100$ =(1-B4/B13)*C10/C6*100+B4/B13*100		C11	100,00

Mit Zielwertsuche in Zelle C11 für einen Kurs von 95,0 in Abhängigkeit von Zelle B13 ergibt sich die unter a) gesuchte Rendite von 9,03 % (s. Bild 5.27e).

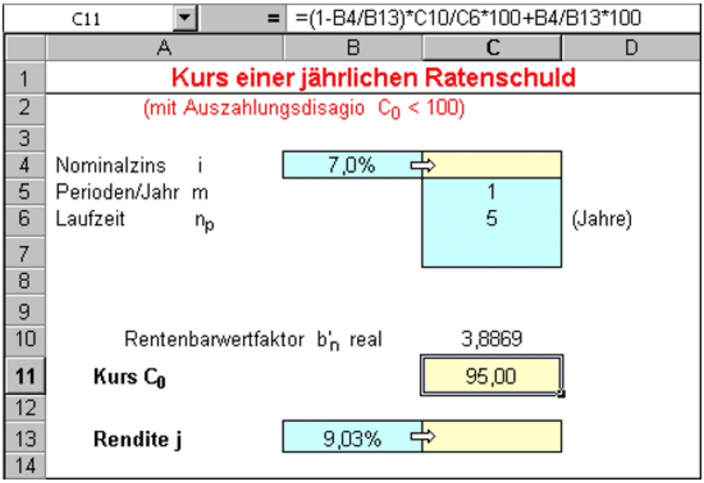


Bild 5.27e Excel-Tabelle für Beispiel 5.18

Bei Vorgabe der unter b) gewünschten Rendite von 8,15 % beträgt der Kurs 97,11; das entspricht einem Ausgabedisagio von knapp 3 %.

Beispiel 5.19: Das Darlehen von Beispiel 5.18 soll nicht in jährlichen, sondern in vierteljährlichen Raten getilgt werden. Die Nominalzinsen werden unterjährig linear berechnet und sind zusammen mit den Tilgungsraten fällig. Wie hoch ist der effektive Jahreszins

a) bei einem Auszahlungsdisagio von 5 %?

b) bei voller Auszahlung des Darlehens, aber einem Tilgungsagio von 5 %?

Im Prinzip wäre die Excel-Tabelle von Bild 5.27e hierfür geeignet, weil sich bei Synchronität von Tilgungs- und Zinszahlungen die Rechnungen nur hinsichtlich unterschiedlicher Periodenlängen unterscheiden. Vorteilhafter ist die Verwendung einer Kopie aus Bild 5.16e, weil diese Tabelle die Wahlfreiheit zwischen unterjährig linearer und exponentieller Nominalverzinsung zulässt.

Am folgenden Zahlenbeispiel ist ersichtlich, welche Änderungen in der Excel-Tabelle für die Teilaufgabe a) vorzunehmen sind.

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Funktion	Zelle	Ergebnis
(1.13)	$i_r = 0{,}07/4$	=B4/C5	C4	0,0175
(1.24)	$j_k = 1{,}07^{1/4} - 1$	=(1+B13)^(1/C5)-1	C13	0,01706
(3.6)	$b'_{n_p} = \dfrac{(1{,}01706)^{20} - 1}{0{,}01706 \cdot 1{,}01706^{20}}$	=BW(C13;C6;-1)	C10	16,825
(5.42)	$C_0 = \left(1 - \dfrac{0{,}0175}{0{,}01706}\right) \cdot \dfrac{16{,}825}{20} \cdot 100 + \dfrac{0{,}0175}{0{,}01706} \cdot 100$			100,41
	=(1-C4/C13)*C10/C6*100+C4/C13*100		C11	

Wegen des Unterschieds zwischen unterjährig linearer Nominalverzinsung und unterjährig exponentieller Effektivverzinsung stellt sich ein interner Kurs ungleich 100 ein. Bei Ausgabe des Darlehens zum Parikurs 100 würde sich eine Rendite von 7,19 % einstellen (bitte mittels Zielwertsuche nachprüfen).

Die gesuchte Rendite für einen Ausgabekurs von 95 ergibt sich wiederum mittels Zielwertsuche in Zelle C11; sie beträgt 9,56 % (s. Bild 5.28e). Bei unterjährig exponentieller Verzinsung würde die Rendite 9,37 % betragen, was durch vorheriges Anklicken der rechten Optionsschaltfläche und nochmalige Zielwertsuche nachgeprüft werden kann.

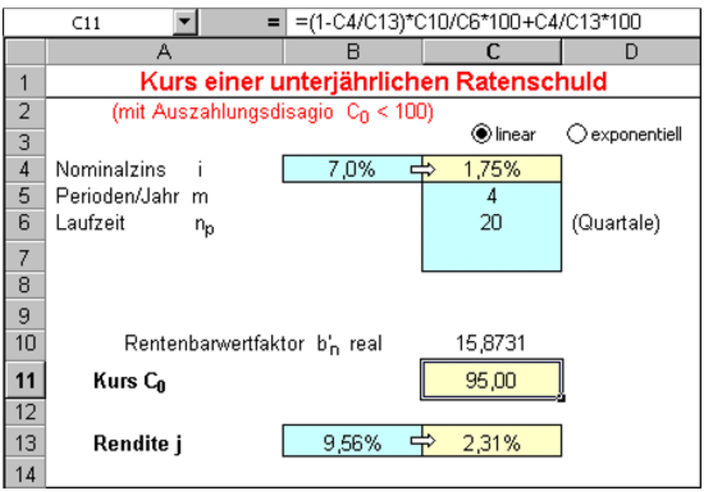


Bild 5.28e Excel-Tabelle für Beispiel 5.19a

Diese Ergebnisse lassen sich auch mit der Excel-Tabelle von Bild 4.6e erzielen, indem in Zelle B5 ein Nominalzinssatz von 7 % vorgegeben und in Zelle G11 die Nominalschuld durch den Auszahlungsbetrag des Darlehens, also den Zahlenwert –95.000, ersetzt wird.

Je nachdem, ob lineare oder exponentielle Verzinsung ausgewählt ist, werden die oben genannten Renditen angezeigt.

Für die Lösung der Teilaufgabe b) ist noch das Tilgungsagio α gemäß Gl. (4.30) in die Kursformel einzuarbeiten. Wie die nachfolgende Zahlenrechnung zeigt, entsprechen 5 % Agio auf die Tilgungsraten einem internen Kurs von 104,62.

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Funktion	Zelle	Ergebnis
(5.42)	$C_0 = \left(1{,}05 - \dfrac{0{,}0175}{0{,}01706}\right) \cdot \dfrac{16{,}825}{20} \cdot 100 + \dfrac{0{,}0175}{0{,}01706} \cdot 100$			104,62
	=(1+C7-C4/C13)*C10/C6*100+C4/C13*100		C11	

Bei voller Auszahlung des Darlehens, also einem Kurs von 100, beträgt die Rendite 9,08 % (s. Bild 5.29e). Da die hier verwendete Excel-Tabelle mit $m = 1$ auch den Fall der jährlichen Ratentilgung erfasst, ist die Excel-Tabelle von Bild 5.27e überflüssig.

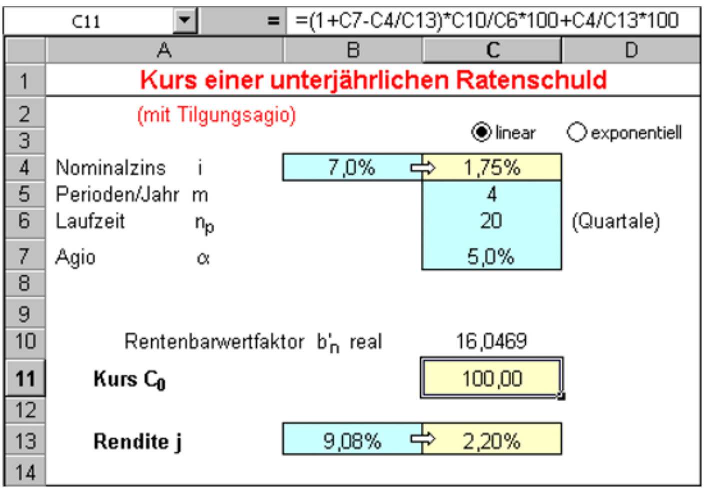


Bild 5.29e Excel-Tabelle für Beispiel 5.19b

Beispiel 5.20:	Das Darlehen von Beispiel 5.18 soll wie in Beispiel 5.19 in vierteljährlichen Raten getilgt werden. Die Nominalzinsen werden gleichfalls unterjährig linear berechnet, sind im Unterschied zu Beispiel 5.19 aber jährlich nachschüssig zu zahlen. Wie hoch ist der effektive Jahreszins bei einem Auszahlungsdisagio von 5 %?

Für dieses Beispiel eignet sich eine Kopie der Excel-Tabelle aus Bild 5.27e. Als einzige Änderung ist in Zelle C11 lediglich die für diesen Fall zutreffende Kursformel neu einzutragen, wie aus der folgenden Zahlenrechnung zu ersehen ist.

Gl.	Zahlenrechnung	Excel-Funktion	Zelle	Ergebnis
(3.6)	$b'_n = \dfrac{1{,}07^5 - 1}{0{,}07 \cdot 1{,}07^5}$	=BW(B13;C6;-1)	C10	4,1002
(5.47)	$C_0 = \left(\dfrac{0{,}07}{4 \cdot 0{,}01706} - \dfrac{0{,}07}{0{,}07} - \dfrac{0{,}07 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right) \cdot \dfrac{4{,}1002}{5} \cdot 100 + \dfrac{0{,}07}{0{,}07} \cdot 100$			99,97
	=((B13/C5/C13-B4/B13-B4*(C5-1)/2/C5)*C10/C6 +B4/B13)*100		C11	

Als Rendite wurde hier zunächst wieder $j = i = 0{,}07$ bzw. $j_k = 0{,}01706$ vorgegeben, doch wegen des Unterschieds zwischen linearer Nominalverzinsung und exponentieller Effektivverzinsung weicht der Kurs vom Parikurs geringfügig ab. Die gesuchte Rendite für einen Auszahlungskurs von 95 (man findet sie wiederum durch Zielwertsuche in Zelle C11) beträgt 9,29 % (s. Bild 5.30e).

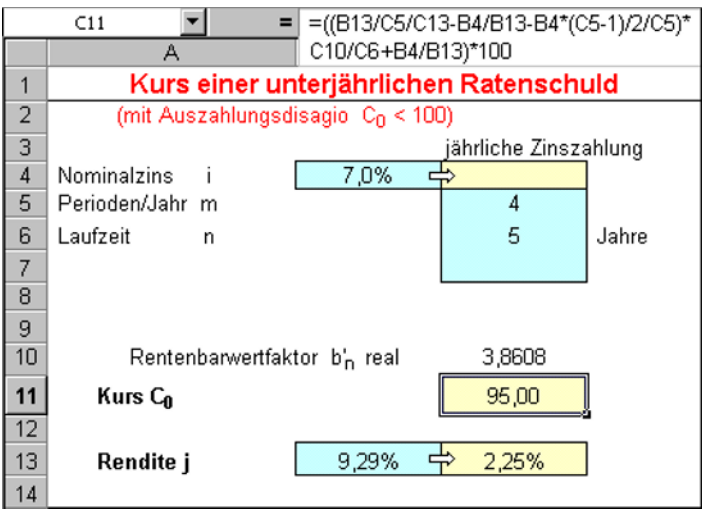


Bild 5.30e Excel-Tabelle für Beispiel 5.20

Literaturverzeichnis

Bitz, M.; **Ewert, J.**; **Terstege, U.**: Investition – Multimediale Einführung in finanzmathematische Entscheidungskonzepte, Wiesbaden 2002.

Blohm, H.; **Lüder, K.**: Investition (7. Auflage), München 1991.

Bockholt, H.: EU-Effektivzins – Auswirkungen auf das Bankgeschäft, in: Die Bank 4/97, S. 250-251.

Däumler, K.-D.: Finanzmathematisches Tabellenwerk für Praktiker und Studierende (3. Auflage), Herne/Berlin 1989.

Däumler, K.-D.: Grundlagen der Investitions- und Wirtschaftlichkeitsrechnung (7. Auflage), Herne/Berlin 1992.

Heidorn, Th.: Finanzmathematik in der Bankpraxis – Vom Zins zur Option (4. Auflage), Wiesbaden 2002.

Ihrig, H.; **Pflaumer, P.**: Finanzmathematik – Intensivkurs (10. Auflage), München/ Wien 2001.

Kobelt, H.; **Schulte, P.**: Finanzmathematik (7. Auflage). Berlin/Herne 1999.

Kober, J.; **Knöll, H.-D.**; **Rometsch, U.**: Finanzmathematische Effektivzins-Berechnungsmethoden, Mannheim 1992.

Köhler, H.: Finanzmathematik (3. Auflage), München/Wien 1992.

Kruschwitz, L.: Finanzierung und Investition (3. Auflage), München/Wien 2002.

Kruschwitz, L.: Finanzmathematik (3. Auflage), München 2001.

Kruschwitz, L.: Investitionsrechnung (8. Auflage), München/Wien 2000.

Kruschwitz, L.; **Decker, R. O. A.**: Effektivrenditen bei beliebigen Zahlungsstrukturen, in: ZfB 64 (1994) 5, S. 619-628.

Locarek-Junge, H.: Finanzmathematik (3. Auflage), München/Wien 1997.

Perridon, L.; **Steiner, M.**: Finanzwirtschaft der Unternehmung (10. Auflage), München 1999.

Pfeifer, A.: Praktische Finanzmathematik (2. Auflage), Thun/Frankfurt a. M. 2000.

Preisangabenverordnung (PAngV), Neufassung vom 28. Juli 2000, BGBl. I, S. 1244 ff.

Renger, K.: Effektivzinsberechnung nach den neuen EU-Regelungen, in: Finanz Betrieb 2 (2000), S. 640-650.

Renger, K.: Neue EU-Richtlinien für die Effektivzinsberechnung – Eine kritische Betrachtung, in: Gramlich, D; Hinz, H. (Hrsg.): Kapitalmarkt, Unternehmen und Information, Wiesbaden 2005, S. 155-174.

K. Renger, *Finanzmathematik mit Excel*, DOI 10.1007/978-3-658-14100-4

Richtlinie 98/7/EG des europäischen Parlaments und des Rates vom 16.2.1998 zur Änderung der Richtlinie 87/102/EWG zur Angleichung der Rechts- und Verwaltungsvorschriften der Mitgliedstaaten über den Verbraucherkredit, ABl. L101/17 vom 1.4.1998.

Schierenbeck, H.: Ertragsorientiertes Bankmanagement, Band 1: Grundlagen, Marktzinsmethode und Rentabilitäts-Controlling (5. Auflage), Wiesbaden 1997.

Tietze, J.: Einführung in die Finanzmathematik (3. Auflage), Braunschweig/Wiesbaden 2000.

Verordnung zur Regelung der Preisangaben vom 14. März 1985, Art. 1 Preisangabenverordnung (PAngV), BGBl. I, S. 580 ff.

Wimmer, K.; **Stöckl-Pukall, E.**: Neuregelung der Effektivzinsberechnung, in: Die Bank 1/98, S. 33-37.

Wimmer, K.: Neuer Modus der Effektivzinsberechnung bei Verbraucherkrediten, in: Die Bank 3/2000, S.178-182.

Wöhe, G.: Einführung in die Allgemeine Betriebswirtschaftslehre, München (2000).

Stichwortverzeichnis

Benutzungshinweise für das Zusatzmaterial

Bestandteile und Funktion

Dieses für Teil 2 des Lehrbuches zusätzlich bereitgestellte Material enthält alle Excel-Tabellen und grafischen Darstellungen, die im Text erläutert und jeweils einem Bild zugeordnet sind. Sie lassen sich separat im Original öffnen, nach eigenem Ermessen modifizieren sowie für andere Zahlenwerte und weitere experimentelle Zwecke nutzen. Dem Leser ist es somit frei gestellt, auf die eigene Erstellung der Tabellen zu verzichten und gleich auf das fertige Muster zurückzugreifen. Die zutreffenden Tabellen können wahlweise aus den Unterverzeichnissen oder den Excel-Mappen für die jeweiligen Kapitel aufgerufen bzw. entnommen werden. Die Ordner und Excel-Mappen sind schreibgeschützt abgespeichert, damit ihr Originalzustand möglichst nicht verloren geht.

Durch den Erwerb entweder des kompletten Lehrbuches oder von einzelnen Kapiteln als PDF-eBook profitiert der Leser neben mehrfarbiger Gestaltung zusätzlich von der Möglichkeit, das Lehrbuch umfassend interaktiv zu nutzen. So erlauben zahlreiche innerhalb des Textes eingefügte Links, allen Verweisen auf Formeln, Bilder, andere Textabschnitte oder Fußnoten blitzschnell nachzugehen und danach wieder zurück zu springen. Insbesondere wird dadurch auch die straffe Trennung zwischen dem theoretischen Teil 1 und dem anwendungsorientierten Teil 2 des Lehrbuches aufgehoben, indem mittels *interner* Links ein direkter Sprung zu den praktischen Anwendungsbeispielen erfolgen kann.

Darüber hinaus sind alle mit "e" gekennzeichneten Bilder mittels *externer* Links mit den Excel-Dateien im Zusatzmaterial direkt verknüpft und können automatisch in separaten Fenstern angezeigt werden – vorausgesetzt, sie liegen im selben Ordner. So ist der unmittelbare Zugriff auf die zugehörigen Berechnungen und grafischen Darstellungen innerhalb der Zahlenbeispiele gewährleistet. Gegenüber der Print-Ausgabe der Buches erweitert sich dadurch die Funktionalität in sinnvoller Weise zugunsten eines effektiveren Lehr- oder Lernprozesses.

Erwähnt sei außerdem, dass durch Einblendung des Navigationsfensters "Lesezeichen" des PDF-Readers, welches das Inhaltsverzeichnis am linken Rand sichtbar macht, beim eBook die Orientierung im Text wesentlich erleichtert wird.

Systemvoraussetzungen

Die Nutzung der Excel-Tabellen erfordert neben einem Computerprogramm zur Öffnung von xls-Dateien keine besonderen technischen Ansprüche.

Die multimediale Erweiterung des eBooks mit direkter Einbeziehung der Excel-Tabellen – so wie oben beschrieben – kann derzeit weder in handelsüblichen eBook-Readern noch in einem Tablet-Computer, sondern nur auf einem PC realisiert werden. Dazu ist der im Zusatzmaterial enthaltene Ordner komplett auf einen (internen oder externen) Speicher des PC, z. B. auch einen USB-Stick, zu dekomprimieren. Dieser Ordner enthält folgende inhaltlichen Bestandteile:

1. alle mit den fünf Kapiteln im Teil 2 des Buchtextes verknüpften Excel-Tabellen, abgelegt in den Unterverzeichnissen "Bilder_1" bis "Bilder_5",
2. fünf Excel-Mappen namens "Zinsen.xls", "Invest.xls", "Renten.xls", "Tilgung.xls" und "Kurs.xls", in denen alle zu den Beispielen im Teil 2 gehörenden Excel-Tabellen kapitelweise zusammengefasst sind, und
3. diese Benutzungshinweise.

Im selben Ordner wird das im PDF-Format erworbene eBook zusätzlich abgelegt und von dort aus geöffnet. In dieser erweiterten Form kann der ganze Ordner auch als Daten-CD gebrannt und vom DVD/CD-Laufwerk aus direkt benutzt werden. Letzteres hat den Vorteil, dass eine versehentliche Überspeicherung der originalen Excel-Dateien verhindert wird.

Zur Wiedergabe des eBooks stehen auf modernen PCs meist Standardprogramme zur Verfügung; andernfalls eignet sich kostenlose Software, wie beispielsweise Adobe Reader oder Foxit Reader.