
Geschichte der Mathematik kompakt

Franka Miriam Brückler

Geschichte der Mathematik kompakt

Das Wichtigste aus Analysis,
Wahrscheinlichkeitstheorie, angewandter
Mathematik, Topologie und Mengenlehre



Springer Spektrum

Franka Miriam Brückler
Naturwissenschaftliche Fakultät, Mathematische
Abteilung
Universität Zagreb
Zagreb
Kroatien

ISBN 978-3-662-55573-6 ISBN 978-3-662-55574-3 (eBook)
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-55574-3>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum
© Springer-Verlag GmbH Deutschland 2018
Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften. Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Planung: Iris Ruhmann

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist Teil von Springer Nature
Die eingetragene Gesellschaft ist Springer-Verlag GmbH Deutschland
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

*An meine lieben Eltern Nevena und Vlado, ohne
die es mich und folglich auch dieses Buch nicht
geben würde.*

Vorwort

Wie keine andere der Wissenschaften ist die Mathematik eine kumulative Wissenschaft: Jedes mathematische Resultat, welches je korrekt bewiesen wurde, bleibt ein Teil der Mathematik und wird nicht durch neue Erkenntnisse widerlegt. Somit ist die Geschichte der Mathematik von besonderer Bedeutung für das Verständnis ihres Inhalts. Während viele Menschen denken, die Mathematik wäre vor langer Zeit „fertiggestellt“, ist die Wahrheit weit davon entfernt. Nicht nur, dass sich Mathematik immer weiter (und schneller) entwickelt, sondern auch die Entstehungsgeschichte der mehr oder weniger, je nach individueller Ausbildung, bekannten, „alten“ Resultate ist verzweigt, ja oft verworren, da die Mathematik ja nicht unabhängig von den anderen geschichtlichen Entwicklungen entdeckt (oder erschaffen, je nach philosophischem Standpunkt) wurde. Durch Studieren der Mathematikgeschichte kann so mancher entdecken, dass Mathematiker auch Menschen sind, dass Mathematik von vielen Einflüssen angetrieben wurde und wird, dass es oft mehr als einen „richtigen“ Weg zur Lösung eines mathematischen Problems gibt, dass oft theoretische Resultate aus praktischen Gründen gefunden wurden und umgekehrt, dass nicht selten anscheinend abstrakte mathematische Theorien ihre Anwendung fanden. Insofern ist eine Grundkenntnis der Geschichte der Mathematik für Mathematiker und Nichtmathematiker fast gleichermaßen von Nutzen, da sie auch die Verständigung zwischen professionellen Mathematikern und allgemeinem Publikum erleichtert.

Die zweiteilige „Geschichte der Mathematik Kompakt“ wendet sich vor allem an Vortragende, Universitätsprofessoren und auch Gymnasiallehrer sowie Studierende der Mathematik, aber auch an alle anderen, die eine übersichtliche, kurze Darstellung der wichtigsten Momente in der Geschichte der Mathematik suchen. Die Trennung der Themen in die zwei Bände wurde nach dem folgenden Prinzip vorgenommen: In dem 1. Band (Geschichte der Mathematik Kompakt: Das Wichtigste aus Arithmetik, Geometrie, Algebra, Zahlentheorie und Logik) ist die Geschichte mathematischer Teilgebiete beschrieben, in denen bis spätestens der Renaissance schon bedeutende Resultate bewiesen wurden und die man schon in der Renaissancezeit als eigenständige Teilgebiete betrachten kann. Dies sind Arithmetik, Geometrie, Algebra, Zahlentheorie und mathematische Logik. In dem vorliegenden 2. Band finden sich dann die Teilgebiete, welche zwar auch nicht wenige ihrer Wurzeln schon in alten Zeiten haben, aber in denen erst in der

Neuzeit die Entwicklung zu Teildisziplinen hin stattfand. Dies sind die mathematische Analysis und Wahrscheinlichkeitstheorie, Topologie, Mengentheorie sowie angewandte Mathematik. Dementsprechend werden bei Kreuzverweisen zwischen den Büchern die Bezeichnungen „1. Buch“ und „2. Buch“ verwendet; mit „2. Buch“ meinen wir dieses, und mit „1. Buch“ meinen wir das Buch, das die Geschichte der Arithmetik, Geometrie, Algebra, Zahlentheorie und Logik behandelt.

Im Gegensatz zu anderen, umfassenderen Büchern zum Thema wollen wir uns hier nur auf das Wesentliche und/oder Interessanteste konzentrieren. Wir verzichten willentlich auf Vollständigkeit, um vor allem einen Eindruck der bedeutendsten Entwicklungen zu vermitteln. Wir hoffen, dass wir dies wenigstens teilweise erfolgreich schaffen und auch, dass diese zwei Bücher so manchem Leser das Thema näherbringen und ihn, oder sie, zur Suche nach mehr Informationen über die Mathematikgeschichte im Allgemeinen oder über spezifische Inhalte ermutigt. Aus diesem Grund versuchten wir auch, trotz Knappeit, eine möglichst große Bandbreite von mathematischen Begriffen und Themen anzusprechen. Im Zweifelsfall wurde eher eine Beschreibung der Geschichte von nicht nur dem Fachpublikum bekannten Inhalten gewählt, teilweise um einem möglichst breiten Publikum zugänglich zu bleiben, vor allem aber, weil ja sowieso die moderne, spezialisierte Mathematik ihr Fundament in den elementareren, älteren Erkenntnissen hat. Im Endeffekt heißt das, dass man durch die Lektüre dieser zwei Bücher, besonders im ersten, mehr über „alte“ Mathematik (bis ca. 18. Jh.) als modernere Entwicklungen erfährt. Eine Ausnahme davon ist natürlich die Mengenlehre, die bekannterweise erst in der zweiten Hälfte des 19. Jh. entstanden ist.

Wir müssen hier kurz unsere Entscheidung bezüglich der Inhalte im Kapitel „Angewandte Mathematik“ begründen sowie erklären, warum einigen bekannten und wichtigen Gebieten (Funktionalanalysis, Maßtheorie, Differenzialgleichungen, ...) keine eigenständigen Abschnitte gewidmet wurden. Bekanntlich ist die Bezeichnung „angewandte Mathematik“ nicht ganz eindeutig, auch fallen darunter viele sehr verschiedene Themen. Wir entschieden uns, uns nur auf die Beschreibung der geschichtlichen Entwicklung der numerischen Mathematik und Statistik inklusive Fehlerrechnung zu begrenzen, als die zwei quasi bekanntesten Gebieten der angewandten Mathematik. Die meisten anderen angewandten Gebiete wie Chaoostheorie, Spieltheorie oder Computermathematik sind unseres Erachtens viel zu spezifisch für unsere Zielsetzung, und auch wurden sie hauptsächlich im 20. Jh. entwickelt, während wir uns in unseren zwei Büchern auf die Gebiete, welche bis zum Ende des 19. Jh. bedeutend entwickelt wurden, konzentriert haben. Mathematische Physik (und Astronomie, Chemie, Biologie, Ökonomie, ...) ist ein viel zu weites Gebiet, eine Behandlung, die dem Zweck dieser Bücher, eine kompakte Übersicht nur der wichtigsten Entwicklungen zu beschreiben, entspricht, ist einerseits nach unserer Meinung unmöglich, außerdem würde sie auch eine Behandlung relativ vieler nichtmathematischer Inhalte erfordern. Trotzdem findet man mehrere historisch interessante Momente der mathematischen Physik, und vereinzelt auch Chemie, in den Kapiteln verstreut. Ähnliches gilt für Differenzialgleichungen – einige historisch bekannte Beiträge

zu diesem Thema findet man in dem Kapitel zur Analysis. Die ungemein wichtigen Gebiete der Funktionalanalysis und Maßtheorie würden andererseits zu einem viel zu hohen mathematischen Niveau führen: Unsere Bücher sollen nicht nur kompakt, sondern auch einem möglichst großen Leserkreis zugänglich sein; einige kurze Kommentare zu der Geschichte dieser zwei Gebiete findet man in den Kapiteln zur Analysis und Mengenlehre.

Notwendigerweise mussten wir uns auch mit der Schreibweise fremdländischer Namen auseinandersetzen. Für Personennamen orientierten wir uns an der Schreibweise in der auch im Springer-Verlag zweibändig veröffentlichten *6000 Jahre Mathematik, Eine kulturgeschichtliche Zeitreise* von H. Wußing (2008, 2009), welche wir auch, besonders dem an den kulturgeschichtlichen Hintergründen der Mathematikgeschichte interessierten Leser, als weiterführende Literatur empfehlen. Bei der Nennung von Publikationstiteln wählten wir bei in lateinischer Schrift erschienenen Werken die Originaltitel und bei anderen die deutsche Übersetzung der Titel. Außer den gerade genannten Büchern empfehlen wir als weiterführende Literatur zum Thema *A History of Mathematics* von V. J. Katz (Pearson Education Limited, Harlow, 2014) und *The History of Mathematics: An Introduction* von D. M. Burton (McGraw-Hill, 2006) oder die mehr auf spezielle mathematische Inhalte ausgerichtete *Mathematics and Its History* von J. Stillwell (Springer, New York, 2010). Für Biografien verweisen wir auf die Webseite *MacTutor History of Mathematics Archives* der St. Andrews University in Schottland, <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/>, die auch für die Kurzbiografien in diesem Buch die Hauptquelle war.

Am Ende des Vorwörtes will ich mich bei allen bedanken, die zur Entstehung dieser Bücher beigetragen haben: Frau Iris Ruhmann und Frau Stella Schmoll aus dem Springer-Verlag, von denen die Idee dieser Veröffentlichung ausging und die mir wertvolle Hilfestellungen bei der Entstehung gegeben haben; meinen mathematischen Kollegen in Kroatien, die mich vor fast 20 Jahren bei meinen ersten Bemühungen, einen Lehrkurs für Studierende der Mathematik in Osijek zu entwerfen, unterstützten, allen voran Professor Šime Ungar, dem ich auch mein ganzes Wissen über das Textverarbeitungsprogramm LaTeX, in dem dieses Buch geschrieben wurde, verdanke; meinen Freunden, welche mich, bei Bedarf auch durch Kritik, unterstützten: Ingrid Böhm samt Familie, Željka Bilać, Vladimir Stilinović, Krešimir Molčanov, Maja Kurek, Igor Mamić, und zuletzt, aber bei Weitem nicht am wenigsten Ilkay Gürkan Durmuş.

Zagreb, 15. Juni 2017

Franka Miriam Brückler

Inhaltsverzeichnis

1	Geschichte der Analysis	1
1.1	Vorgeschichte der Analysis	1
1.2	Vorläufer der modernen Infinitesimalrechnung im 17. Jh.	14
1.3	Newton und Leibniz	24
1.4	Entwicklungen im 18. und 19. Jh.	35
1.5	Anfänge der komplexen Analysis	58
	Literaturverzeichnis	61
2	Geschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie	65
2.1	Anfänge der Kombinatorik	65
2.2	Entstehung der kombinatorischen Wahrscheinlichkeitstheorie	70
2.3	Modernisierung der Wahrscheinlichkeitstheorie	75
	Literaturverzeichnis	86
3	Geschichte der angewandten Mathematik	89
3.1	Anfänge der numerischen Mathematik	89
3.2	Anfänge der Fehlerrechnung und Statistik	109
	Literaturverzeichnis	120
4	Geschichte der Topologie	123
4.1	Entstehung der Graphentheorie	123
4.2	Entstehung der geometrischen und algebraischen Topologie	129
	Literaturverzeichnis	135
5	Geschichte der Mengenlehre	137
5.1	Entwicklung des Unendlichkeitsbegriffs vor Cantor	137
5.2	Begründung der naiven Mengenlehre	140

5.3 Axiomatisierung der Mengenlehre	147
Literaturverzeichnis	149
Nachwort	151
Sachverzeichnis	153

1.1 Vorgeschichte der Analysis

Mathematische Analysis befasst sich mit reellwertigen, und auch komplexwertigen, Funktionen einer oder mehr Variablen. Insbesondere ist dabei die Infinitesimalrechnung ein wichtiger und großer Teil der Analysis. Die ersten Entwicklungen zur Infinitesimalrechnung hin liegen weit in der Geschichte, aber erst ab dem 17. Jh. wurden infinitesimale Methoden im modernen Sinn entwickelt, und der Begriff der Funktion wurde erst im 17. Jh. verwendet und im 19. Jh. präzisiert.

Verschiedene Autoren setzen den Ursprung des Funktionskonzepts in verschiedene Zeiten (siehe [42]). Als Ursprung funktionalen Denkens könnte man mathematische Tabellen verschiedener alter Zivilisationen nennen. Die sumerisch-babylonische Zivilisation hinterließ besonders viele Zahlentabellen (von Quadratzahlen, Quadratwurzeln, reziproken Zahlen, ...). Die alten Griechen, Inder und die moslemischen Mathematiker des Mittelalters erstellten verschiedene trigonometrische Tabellen. Im 17. Jh. wurden auch die Logarithmen entdeckt, siehe Abschn. 3.2. Jedoch muss hervorgehoben werden, dass – obwohl man solche Tabellen als frühe Funktionstabellen ansehen kann – in keinem dieser Fälle vom bewussten funktionalen Denken die Rede sein kann. Es dauerte außerordentlich lange, bis sich die Idee einer Funktion, also eines der heute zentralen mathematischen Begriffe, zu formieren begann und noch länger, bis der Begriff zufriedenstellend definiert wurde.

Andererseits kann man, besonders in der griechischen Antike, schon recht früh von infinitesimalen Methoden reden. Im 1. Buch erwähnten wir den Versuch des Philosophen **Antiphon** (ca. Mitte 5. Jh. v. Chr.), das Problem der Quadratur des Kreises durch den Kreis eingeschriebene Vielecke mit einer immer größer werdenden Seitenzahl zu lösen. Weil es möglich ist, jedes davon mit Zirkel und Lineal zu quadrieren, dachte Antiphon, dass auch das Problem der Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal lösbar ist. Mo-

dern ausgedrückt dachte er, dass eine konvergente unendliche Folge algebraischer Zahlen notwendigerweise zu einer algebraischen Zahl konvergiert ([49]).

Als Vorläufer der Idee des Grenzwertes muss auch der Philosoph **Zenon von Elea** (ca. 490–430 v. Chr.) genannt werden. Von Zenon stammen, so Aristoteles, vier Paradoxien der Bewegung. In allen vier benutzt Zenon die unendliche Teilbarkeit des Raumes bzw. der Zeit, um das paradoxale Resultat der Unmöglichkeit der Bewegung zu erhalten. Zenons Paradoxien der Bewegung sind die Folgenden:

1. *Dichotomie*: Bewegung ist unmöglich, da man jede Entfernung, die ein Objekt zurückzulegen hat, zunächst halbieren, dann die Hälfte halbieren usw. und in beliebig viele, immer kleinere, Teile zerlegen kann, aber wie viele Teile man auch nimmt, es bleibt immer noch ein Restabstand bis zum Endpunkt.
2. *Achilles und die Schildkröte*: Da Achilles schneller als die Schildkröte ist, gewährt er ihr einen Vorsprung. Doch, obwohl er schneller ist, kann er sie nie fangen. Bis er nämlich den Startpunkt der Schildkröte erreicht hat, ist sie etwas vorwärtsgekommen. Bis Achilles diesen Punkt erreicht, ist die Schildkröte wieder noch etwas weiter gekrochen usw. Zenon schließt daraus, dass Achilles die Schildkröte nie einholen wird.
3. *Der Pfeil*: Zu jedem Zeitpunkt ist der Pfeil in einer Position, die man nicht von einer unbeweglichen Position des Pfeiles unterscheiden kann. Also ist die Bewegung des Pfeiles unmöglich.
4. *Das Stadion*: Wenn zwei Reihen gleich großer Körper, auch gleich in der Anzahl, sich in verschiedenen Richtungen gleich schnell entlang einer genau solchen dritten Reihe von Körpern bewegen, schließt Zenon daraus, dass die halbe Zeit gleich doppelter Zeit ist.

Nicht nur, dass diese Paradoxien die Fragen zur Natur des Kontinuums aufwerfen, welche erst mit der Schaffung der Mengenlehre (Abschn. 5.2) zufriedenstellend genau beschrieben werden konnten, sondern man kann in den ersten zwei auch die Problematik der Bildung von Grenzwerten erkennen. „Die Dichotomie“ und „Achilles und die Schildkröte“ sind diesbezüglich mathematisch äquivalent und führen auf die unendliche geometrische Reihe $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots$. Der Fehler Zenons ist, dass er aus der Tatsache, dass keine der Partialsummen dieser Reihe gleich 1 ist, folgert, dass auch der Grenzwert nicht 1 sein kann ([31, 44, 49]).

Zenons Zeitgenosse und berühmter atomistischer Philosoph **Demokrit von Abdera** (ca. 460–370 v. Chr.) soll die Idee der Teilung eines Kegels in unendlich dünne, der Grundfläche parallele, Scheiben beschrieben haben. Bei Demokrit entsteht hieraus ein Dilemma: Wenn man eine solche Scheibe betrachtet, sind ihre zwei Kreisflächen dann gleich oder nicht? Wenn ja, wäre die Gesamtheit kein Kegel, sondern ein Zylinder, wenn nicht, wäre der Rand des Kegels ungleichmäßig ([12, 43, 49]).

Erste präzise infinitesimale Betrachtungen scheinen von **Eudoxos von Knidos** (ca. 408–355 v. Chr.) zu stammen. Seine Lehre von Verhältnissen und Proportionen wurde schon in unserem 1. Buch beschrieben, für dieses Thema ist sein anderer großer Bei-

trag von Interesse. Eudoxos schuf nämlich eine frühe Form der Grenzwertberechnung, die für Flächen- und Voluminaberechnungen verwendbar ist, quasi eine antike Form der Integration. Diese Methode erhielt im 17. Jh. den Namen Exhaustionsmethode ([49]). Die Methode basiert auf einem Satz, der im X. Buch Euklids *Elemente* enthalten ist.¹

Theorem 1.1 (EEX1: Eudoxos Exhaustionsprinzip) *Gegeben seien zwei verschiedene, aber gleichartige Größen. Wenn man von der größeren mindestens die Hälfte wegnimmt, vom Rest wieder mindestens seine Hälfte, und wenn man dies wiederholt, wird irgendwann ein Rest übrig bleiben, der kleiner als die kleinere der zwei Größen ist.*

Modern formuliert: Für jedes $0 < \varepsilon < a$ und jede Folge (a_n) mit den Eigenschaften $a_0 = a$ und $a_{n+1} \leq \frac{a_n}{2}$ existiert eine natürliche Zahl n mit der Eigenschaft

$$a - \sum_{i=1}^n a_i < \varepsilon.$$

Insbesondere bedeutet dies, dass alle geometrischen Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^n$ mit $q \leq \frac{1}{2}$ konvergieren.

In dem Beweis dieses Satzes wird eine, auch von Eudoxos stammende, Definition benutzt, die in den *Elementen* als 4. Definition im V. Buch enthalten ist.

► **Definition 1.1** Zwei (gleichartige) Größen haben ein Verhältnis, wenn ein Vielfaches einer der Größen größer als die andere ist.

Euklid benutzt **Theorem 1.1** in dem XII. Buch der *Elemente* (der Inhalt dieses Buches wird allgemein Eudoxos zugeschrieben), um zu beweisen, dass sich Kreisflächen wie Quadratflächen über deren Durchmessern verhalten² und dass das Volumen einer Pyramide bzw. eines Kegels gleich einem Drittel des Volumens eines Prismas bzw. eines Zylinders mit gleicher Grundfläche und Höhe ist ([27, 45, 49]).

Theorem 1.2 (EEXII2) *Die Flächen zweier Kreise verhalten sich wie die Flächen der Quadrate über deren Durchmessern.*

Beweis Wir beschreiben die groben Züge des Originalbeweises Euklids (siehe z. B. [27]) nach [45]:

Man betrachte die ein- und umgeschriebenen regulären Vielecke V_n und \bar{V}_n eines Kreises: Quadrat, regelmäßiges Achteck usw. (siehe Abb. 1.1). Also hat das n -te Vieleck V_n

¹Wie im 1. Buch wird auch hier mit EEN n die n -te Proposition im N -ten Buch der *Elemente* bezeichnet.

²Dieser Satz wird oft Hippokrates von Chios zugeschrieben. Falls dies stimmt, musste schon ihm, im 5. Jh. v. Chr., eine Variante des Satzes 1.1 bekannt gewesen sein ([24]).

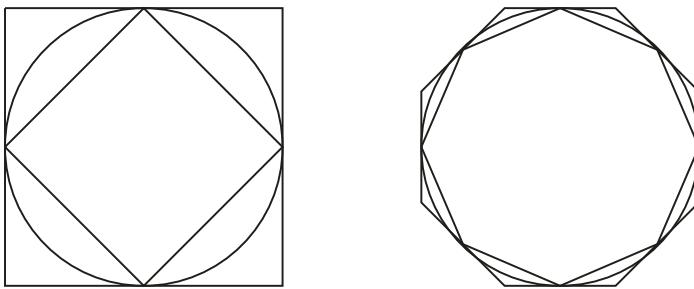


Abb. 1.1 Illustration zum Beweis der Proportionalität der Kreisfläche und dem Quadrat des Durchmessers

bzw. $\bar{V}_n 2^{n+1}$ Seiten. Die Differenz der Flächen $F(\bar{V}_n) - F(V_n)$ kann, nach [Satz 1.1](#), beliebig klein gemacht werden, und es folgt, dass die Fläche $F(V_n)$ die Kreisfläche beliebig genau approximiert.

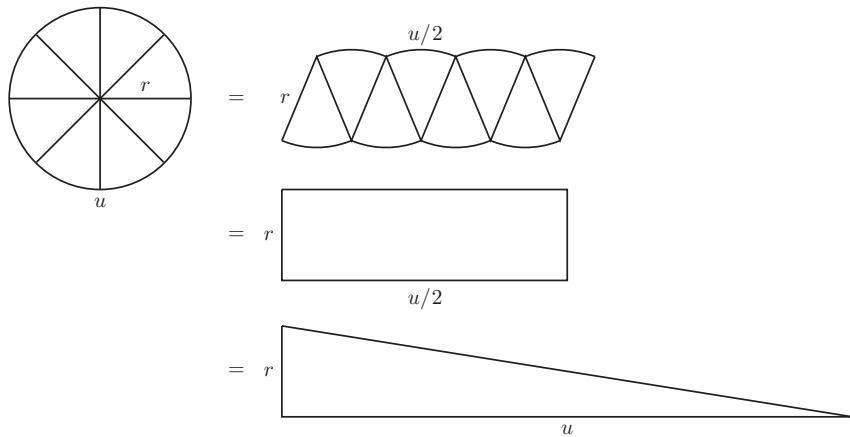
Andererseits kann man elementargeometrisch zeigen, dass sich die Flächen ähnlicher, verschiedenen Kreisen eingeschriebener, Vielecke wie die Quadrate über den Kreisdurchmessern verhalten (dies wird in der Proposition EEXII1 gezeigt). Wenn jetzt für zwei Kreise K_1 und K_2 das Verhältnis $F(K_1) : F(K_2)$ deren Flächen kleiner (oder größer) als das Verhältnis v der Quadrate deren Durchmesser wäre, könnte man ein n wählen, für welches $F(V_{1,n}) : F(V_{2,n})$ auch kleiner bzw. größer wäre als v , in beiden Fällen also eine Kontradiktion (hier haben wir natürlich mit $V_{1,n}$ und $V_{2,n}$ die den Kreisen K_1 und K_2 eingeschriebenen 2^{n+1} -Ecke bezeichnet). Es verbleibt dann die Behauptung des Satzes als einzige Möglichkeit. \square

Archimedes aus Syrakuse (ca. 287–212 v. Chr.) benutzte die Exhaustionsmethode in seinen Flächen- und Voluminaberechnungen. Er beruft sich explizit auf Eudoxos und verändert die [Definition 1.1](#) in ein Lemma, welches als Axiom von Archimedes bekannt ist:

Lemma 1.1 (Axiom von Archimedes) *Die größere von zwei gegebenen Längen oder zwei gegebenen Flächen oder zwei gegebenen Volumina überragt die kleinere um eine Differenz, welche, genügend oft vervielfacht, beide Größen überragt.*

Besonders berühmt ist Archimedes' Beweis, dass die Proportionalitätskonstante zwischen Kreisumfang und Kreisdurchmesser gleich ist wie die zwischen Kreisfläche und Quadrat über dem Radius ([Abb. 1.2](#)):

Theorem 1.3 (Archimedes' Kreissatz) *Jeder Kreis K hat die gleiche Fläche wie das rechtwinklige Dreieck D , dessen eine Kathete die Länge des Kreisradius hat und die andere die Länge u des Kreisumfanges.*

**Abb. 1.2** Archimedes' Kreissatz

Beweis Wir geben die Grundzüge des Originalbeweises (nach [1, 10]) in moderner Notation. Wir bezeichnen mit $F(A)$ die Fläche der Figur A .

Zunächst beweist man, dass $F(K)$ nicht größer als $F(D)$ sein kann. Man nehme das Gegenteil $F(K) - F(D) > 0$ an. Da jedes dem Kreis eingeschriebene Vieleck durch Entfernung von Kreisabschnitten entsteht, ist die Fläche jedes eingeschriebenen n -Ecks V_n kleiner als $F(K)$, also ist für jedes n die Differenz $\delta_n = F(K) - F(V_n) > 0$. Man kann auch beweisen (dies ist z. B. in Euklids *Elementen* Teil des Beweises der Proposition EEX2), dass für jedes n auch $\delta_{2n} < \delta_n/2$, also vermindert sich die Fläche der Kreisabschnitte bei Verdoppelung der Anzahl der Seiten um mehr als die Hälfte.

Man betrachtet jetzt die eingeschriebenen 2^k -Ecke V_4 (Quadrat), V_8 , V_{16} , ... Das Exhaustionsprinzip ([Satz 1.1](#)) führt zum Schluss: Für ein genügend großes k gilt

$$0 < \delta_{2^k} = F(K) - F(V_{2^k}) < F(K) - F(D). \quad (1.1)$$

Andererseits gilt für jedes eingeschriebene reguläre n -Eck (siehe [Abb. 1.3](#) links; mit $u(V_n)$ bezeichnen wir den Umfang von V_n):

$$F(V_n) = n \cdot \frac{|ON| \cdot |AB|}{2} < n \cdot \frac{r \cdot |AB|}{2} = \frac{r}{2} u(V_n) < \frac{r}{2} u = F(D),$$

also ist für jedes n die Differenz $F(V_n) - F(D)$ negativ, eine Kontradiktion mit [Ungl. 1.1](#). Also gilt nicht $F(K) - F(D) > 0$.

Archimedes nimmt jetzt an, dass $F(D) - F(K) > 0$. Jetzt werden umgeschriebene reguläre Vielecke \bar{V}_n betrachtet. Offensichtlich gilt $\Delta_n = F(\bar{V}_n) - F(K) > 0$ für jedes n . Wieder kann bewiesen werden, dass $\Delta_{2n} < \frac{\Delta_n}{2}$, und die Betrachtung umgeschriebener 2^k -Ecke führt dann, analog wie im ersten Fall, zu

$$0 < \Delta_{2^k} = F(\bar{V}_{2^k}) - F(K) < F(D) - F(K)$$

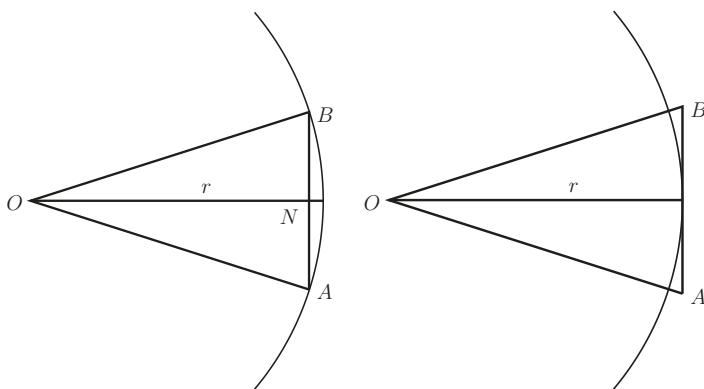


Abb. 1.3 Illustrationen zum Beweis von Archimedes' Kreissatz

für ein genügend großes k und (siehe Abb. 1.3 rechts)

$$F(\bar{V}_n) = n \cdot \frac{r \cdot |AB|}{2} = \frac{r}{2} u(\bar{V}_n) > \frac{r}{2} u = F(D)$$

für alle n , was für $n = 2^k$ zwei kontradiktorische Ungleichungen ergibt. Also gilt auch nicht $F(D) - F(K) > 0$, und es bleibt nur die Möglichkeit $F(K) = F(D)$. \square

Die Bezeichnung π für die Proportionalitätskonstante aus obigem Satz Archimedes' stammt nicht, wie manche denken könnten, von den alten Griechen. Der Erste, der den griechischen Buchstaben π in der heutigen mathematischen Bedeutung verwendet hat, war der Engländer William Jones (1675–1749) in seinem Lehrbuch *Synopsis palmariorum matheseos* (1706). Er gibt keine Erklärung seiner Wahl und benutzt den gleichen Buchstaben auch, wie vor ihm J. Wallis, für den „Umfang“, den der Schwerpunkt einer Figur während einer Rotation beschreibt. Auf jeden Fall wurde Jones Symbol nicht gleich populär, sondern erst, nachdem L. Euler ab 1736 den gleichen Buchstaben für das Verhältnis des Kreisumfangs zum Kreisdurchmesser zu benutzen begann ([7]). Neben dem Beweis des obigen Kreissatzes enthält Archimedes' *Kreisrechnung* auch seine berühmte Schätzung des π -Wertes, welche er durch ein iteratives Verfahren, das wir im Abschn. 3.1 beschreiben werden, erhalten hat.

Dank einer erst vor etwas mehr als 100 Jahren entdeckten Schrift³ von Archimedes, *Methodenlehre*, wissen wir, dass Archimedes die meisten seiner Sätze heuristisch (durch „mechanische“ Überlegungen, meist auf dem Hebelprinzip basierend) entdeckt hat und sie danach rigoros (unter Verwendung der Exhaustionsmethode) bewiesen hat. Archimedes erklärt: „Natürlich ist es einfacher, einen Beweis anzugeben, wenn man davor einiges

³Dies ist der berühmte Archimedes-Palimpsest, siehe dazu <http://www.archimedespalimpsest.org/>.

Abb. 1.4 Archimedes' Hebelprinzip: Im Gleichgewicht gilt $m_1 r_1 = m_2 r_2$



Wissen erworben hat über die Fragen der Methode, als ihn ohne Vorkenntnisse zu finden“ ([45, 49]).

Archimedes' Hebelprinzip ist durch Abb. 1.4 illustriert: Der Hebel ist im Gleichgewicht, wenn die Drehmomente beider Gewichte in Bezug auf den Stützpunkt des Hebels gleich sind. Da hier als einzige Kraft die Gravitation betrachtet wird, vereinfacht sich dieses zur Gleichung $m_1 r_1 = m_2 r_2$, wenn m_1 und m_2 die Massen der Gewichte und r_1 und r_2 deren Entfernung zum Stützpunkt sind.

Archimedes benutzte sein Hebelprinzip, um das Kugelvolumen zu bestimmen. Dieses Resultat findet man in Archimedes' Schrift *Über Kugel und Zylinder*. Archimedes beweist als Proposition 34:

Theorem 1.4 (Kugelvolumen) *Das Volumen einer Kugel ist gleich $\frac{2}{3}$ des Volumens des Zylinders mit gleichem Radius und Höhe (bzw. viermal so groß wie das Volumen eines Konus mit gleichem Radius und Höhe gleich Radius).*

Modern schreiben wir dies als

$$V = \frac{4}{3}r^3\pi.$$

Die Entdeckung dieser Regel mittels Hebelprinzip war die Folgende. Archimedes stellte sich eine Kugel vor, sowie einen Zylinder und einen Konus, deren Radius und die Höhe beide gleich dem Kugeldurchmesser sind⁴ (Abb. 1.5). Wenn diese drei Körper aus gleichem Material sind, ist deren Volumen proportional zur Masse, also kann man aus Gleichgewichtsbetrachtungen auf die Relation zwischen Volumina schließen. Archimedes konnte unter Verwendung des Hebelprinzips argumentieren, dass, wenn man diese Körper wie in Abb. 1.6 aufhängen würde, der Waagebalken horizontal wäre, also die ganze Konstruktion im Gleichgewicht wäre.

Um dieses Gleichgewicht zu argumentieren, stellte sich Archimedes vor, dass die drei Körper parallel zur Zylinderbasis geschnitten wurden (Gerade AD in Abb. 1.5), in dünne zylinderförmige Schichten (die Länge der Strecke \overline{AX} bezeichnen wir mit x). Die Radien

⁴Eigentlich nahm er an, dass der Zylinder viermal dichter ist als die Kugel und dass sein Radius gleich dem der Kugel ist, aber unsere Variante ist dieser Annahme äquivalent und kann deswegen auf Dichtebetrachtungen verzichten. Da nämlich die Dichte die Proportionalitätskonstante zwischen Masse und Volumen ist, bedeutet bei gleicher Masse eine viermal größere Dichte einen doppelt kleineren Radius des Zylinders [3]).

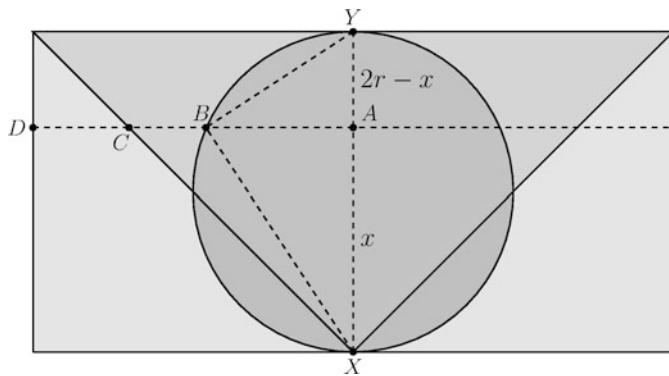


Abb. 1.5 Illustration zur Archimedes' Bestimmung des Kugelvolumens

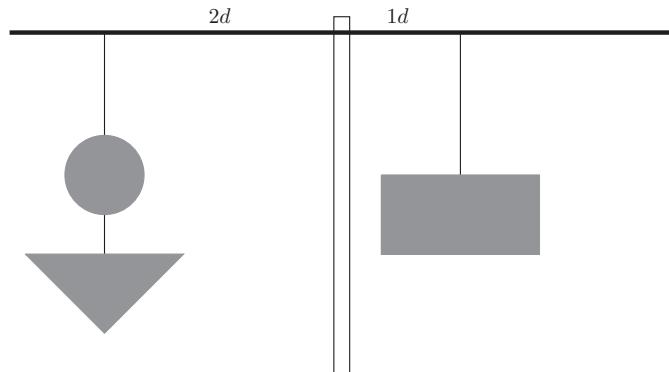


Abb. 1.6 Archimedes Argument zur Beziehung zwischen den Volumina von Kugel, Zylinder und Konus

der drei Schichten sind dann, wenn man den Radius der Kugel mit r bezeichnet, der Reihe nach: $|AB| = \sqrt{x(2r-x)}$ (Kugelschicht), $|AC| = x$ (Konusschicht) und $|AD| = 2r$ (Zylinderschicht). Die Volumina der Schichten sind jeweils den Quadraten dieser Radien proportional. Wenn man die Momente⁵ dieser Schichten in Bezug auf der Geraden XY liegenden Punkt, der von X um ein Durchmesser der Kugel entfernt ist, vergleicht, bemerkt man: Das kombinierte Moment der Kugelschicht und der Konusschicht ist für jedes x zwischen 0 und $2r$ gleich dem Moment der Zylinderschicht. Als Formel geschrieben:

$$x(2r-x)\pi \Delta x + x^2\pi \Delta x = 4r^2\pi \Delta x, \quad 0 \leq x \leq 2r.$$

⁵Der Moment eines Körpers in Bezug auf einen Punkt ist das Produkt des Körpervolumens mit der Entfernung des Punktes zum geometrischen Schwerpunkt des Körpers.

Da Archimedes, wie schon vor ihm Euklid, wusste, dass das Verhältnis der Volumina eines Zylinders und eines Kegels mit gleichem Radius und Höhe gleich $3 : 1$ ist, erhält man, wenn man jetzt alle Schichten addiert, dies entspricht der modernen Integration zur Bestimmung des Volumens eines Rotationskörpers mit bekannten Querschnittflächen, dass $2(V + v) = 3v$ ist, wenn mit v das Volumen des Zylinders und mit V das Kugelvolumen bezeichnet ist. Also ist $V = \frac{v}{2}$, bzw. das Kugelvolumen ist gleich einem Sechstel des Volumens eines Zylinders, dessen Radius und Höhe dem Kugeldurchmesser gleich sind. Da dieser Zylinder ein viermal größeres Volumen als der im [Satz 1.4](#) beschriebene hat, folgt die Behauptung des Satzes.

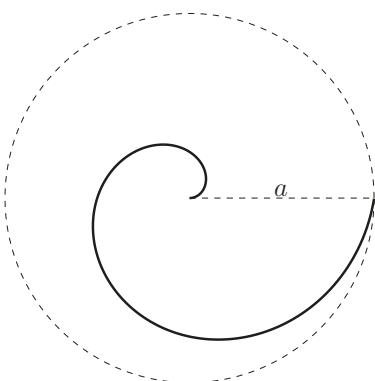
Nach dieser „physikalischen Entdeckung“ gibt Archimedes auch einen geometrischen, exakten Beweis mittels Exhaustionsmethode (ähnlich wie im Beweis des Kreissatzes, durch doppelte *Reductio ad absurdum*). Archimedes konnte auch zeigen, dass die Oberfläche einer Kugel genau viermal so groß ist wie die Fläche eines Kreises mit gleichem Radius, oder anders ausgedrückt (man vergleiche mit der Aussage des [Satzes 1.4](#)), dass die Oberfläche einer Kugel genau $\frac{2}{3}$ der Oberfläche des sie umschreibenden Zylinders ist ([[1](#), [6](#), [15](#), [25](#), [37](#), [40](#)]).

Archimedes beschrieb in *Über Spiralen* auch die Spirale, die nach ihm benannt ist. Die Archimedische Spirale ([Abb. 1.7](#)) entsteht als Trajektorie eines Punktes, welcher sich gleichmäßig auf einem Strahl von seinem Ausgangspunkt fortbewegt, wobei der Strahl gleichmäßig um diesen Ausgangspunkt rotiert. Dies bedeutet, dass die Gleichung der Archimedischen Spirale in Polarkoordinaten⁶

$$r = a\varphi$$

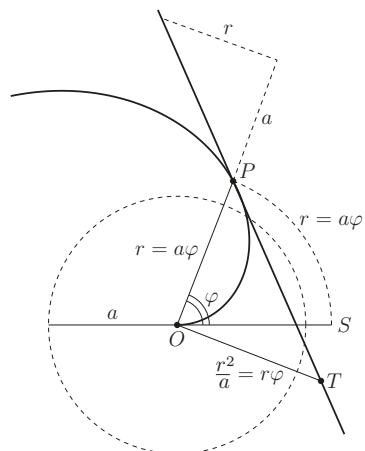
ist. Archimedes zeigte:

Abb. 1.7 Archimedische Spirale



⁶Der Erste, der Polarkoordinaten benutzte, war Newton, die erste Veröffentlichung mit deren Benutzung stammt aber von Jakob Bernoulli (1691) ([4]).

Abb. 1.8 Tangente an Archimedischer Spirale



Theorem 1.5 (Archimedische Spirale: Tangente) Gegeben sei die Archimedische Spirale $r = a\varphi$, O der Ausgangspunkt, P ein beliebiger Punkt auf der Spirale und T der Schnittpunkt der Spiralentangente durch P mit der Senkrechten durch zu OP , welche durch O geht (Abb. 1.8). Die Strecke \overline{OT} wird dann Subtangente genannt.

Das Verhältnis der Länge der Subtangente zu dem Abstand $r = |OP|$ ist für jeden Spiralenpunkt P gleich $r : a$.⁷

Genauer gesagt, zeigte Archimedes durch doppelte *Reductio ad absurdum* (wie im Beweis des [Kreissatzes 1.3](#)), dass die Länge der Subtangente gleich der Länge des Kreisbogens \widehat{PS} um O durch P ist, wobei (siehe Abb. 1.8) S der Schnittpunkt dieses Kreises mit der sogenannten Grundlinie (also Polarachse) ist ([25]).

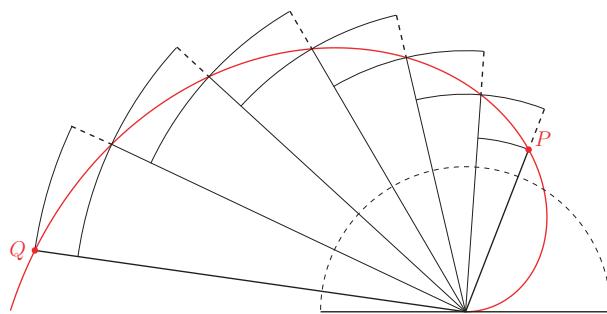
Durch (gedanklichen) Vergleich von Gewichten (wenn man die Fläche einer Spiralumdrehung dreifach aus dem gleichen Material schneidet, wie einmal die gestrichelt begrenzte Kreisfläche, siehe Abb. 1.7, wiegen die drei „Spiralscheiben“ gleich viel wie die Kreisscheibe) kam Archimedes zu der Feststellung: Die durch eine Drehung der Archimedischen Spirale bestimmte Fläche ist einem Drittel der Fläche des umschriebenen Kreises gleich. Dies generalisierte er zu:

Theorem 1.6 (Archimedische Spirale: Fläche) Die von zwei Radiusvektoren begrenzte Fläche der Archimedischen Spirale ist die Differenz der Kuben der Längen dieser Radiusvektoren, geteilt durch 6a:

$$F = \frac{r_2^3 - r_1^3}{6a} = a^2 \frac{\varphi_2^3 - \varphi_1^3}{6}.$$

⁷Man bemerke, dass dies die Konstruktion der Tangente in einem beliebigen Punkt der Spirale ermöglicht.

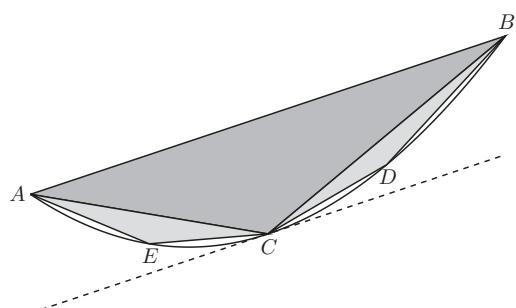
Abb. 1.9 Illustration zur Quadratur der Archimedischen Spirale



Dies beweist er durch Exhaustion. Dafür teilt er den Winkel zwischen den beiden Radiusvektoren in eine Anzahl gleicher Teile (Abb. 1.9), bemerkt, dass die Längen der so entstandenen Radiusvektoren eine arithmetische Folge bilden, zeichnet ein- und umgeschriebene Kreisausschnitte. Die eingeschriebenen Ausschnitte bilden eine Figur mit kleinerem und die umgeschriebenen eine Figur mit größerem Flächeninhalt, als der gesuchte ist. Durch Vergleich der Flächeninhalte dieser um- und eingeschriebenen Figur und dann durch Exhaustion (wir würden sagen: durch Grenzwert, wenn die Anzahl der Teile ins Unendliche geht) beweist er die Behauptung des Satzes ([1, 25, 40]). Modern formuliert könnte man sagen, dass Archimedes explizit die unteren und oberen Integralsummen für äquidistante Zerlegungen des Winkelintervalls berechnet. Er bestimmte durch Exhaustion deren gemeinsamen Grenzwert, wenn die Anzahl n der Unterintervalle ins Unendliche geht.

Wir wollen unsere Auswahl von Archimedes' Resultaten mit der Kurzbeschreibung seiner Quadratur der Parabel beenden. Im Gegensatz zu Kreisabschnitten können nämlich Parabelsegmente mit Zirkel und Lineal quadriert werden. Archimedes konnte beweisen: Der Flächeninhalt P eines Parabelsegments (siehe Abb. 1.10) ist gleich $\frac{4}{3}$ der Fläche des Dreiecks, dessen eine Seite gleich der Sehne \overline{AB} , die das Segment bestimmt, ist, und das die gleiche Höhe wie das Segment hat, also dessen dritte Ecke der Punkt C auf der Parabel ist, in dem die Tangente parallel zu \overline{AB} ist. Archimedes' geniale Einsicht, die zum Beweis der Behauptung führte, war: Wenn man das Dreieck $\triangle ABC$ vom

Abb. 1.10 Illustration der Archimedes' Quadratur des Parabelsegments



Parabelsegment entfernt, entstehen zwei neue Parabelsegmente. In diese kann man analoge Dreiecke $\triangle ACE$ und $\triangle BCD$ einschreiben und dann die Schritte ins Unendliche wiederholen. Archimedes beweist: Die Fläche des Dreiecks $\triangle ABC$ ist genau viermal so groß wie zusammengenommen die Flächen der Dreiecke $\triangle ACE$ und $\triangle BCD$. Daraus folgt, da dies für eine beliebige Sehne \overline{AB} gilt, dass in jedem Schritt die Restfläche des Parabelsegments um $\frac{1}{4}$ vermindert und weiter nach Eudoxos' Exhaustionsprinzip, dass

$$P = D + \frac{1}{4}D + \frac{1}{16}D + \dots = D \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{4}{3}D,$$

wenn mit D die Fläche des Dreiecks $\triangle ABC$ bezeichnet ist ([6, 11, 36]).

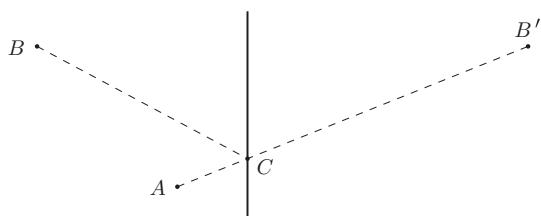
Ein wichtiger Teil der Anwendungen der Infinitesimalrechnung sind Optimierungsprobleme, also Probleme der Bestimmung von Minimal- und Maximalwerten von Funktionen. Eines der ältesten solcher Probleme stammt von **Heron von Alexandria** (wahrscheinlich 1. Jh. n. Chr.):

Problem 1.1 (Heros Problem des kürzesten Weges) Wenn zwei Punkte A und B auf einer Seite einer Geraden gegeben sind, wird der Punkt C auf dieser Geraden gesucht, für den die Summe der Abstände $|AC| + |CB|$ minimal ist.

Heron löste dieses Problem auf die folgende Weise: Wenn B' der bezüglich der Geraden spiegelsymmetrische Punkt zu B ist (Abb. 1.11), dann gilt $|CB| = |CB'|$ für jeden Punkt C auf der Geraden, also sucht man C mit minimalem Wert von $|AC| + |CB'|$. Doch der kürzeste Weg von A zu B' ist längs einer Geraden, also ist C der Schnittpunkt der vorgegebene Geraden mit der Geraden AB' ([38]).

Nach der griechischen Antike gab es bis zur Neuzeit kaum nennenswerte Beiträge, die man als Vorfürer der Infinitesimalrechnung auffassen könnte. In den Werken einiger arabischer und indischer Mathematiker findet man vereinzelte „infinitesimale“ Resultate und Betrachtungen. Eine Ausnahme zu diesem allgemeinen „Stillstand“ der Analysis bildet der französische Bischof und Wissenschaftler **Nicole d'Oresme** (ca. 1330–1382). Bei Oresme findet man sowohl eine, noch nicht klar ausgebildete, Idee der Funktion als Beziehung zwischen zwei Variablen und auch eine frühe Form des Funktionsgraphen, bei ihm Theorie der Formlatituden (*de latitudinibus formarum*) genannt.

Abb. 1.11 Herons Problem des kürzesten Weges



Nach Oresme ist jede messbare Größe (außer Zahlen, die er noch altgriechisch als ganze Zahlen, zusammengesetzt aus diskreten Einheiten versteht) als stetig zu denken, also werden messbare Größen durch Strecken, Flächen und Volumina dargestellt. Oresme beschreibt in seinen *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum* und *Questiones super geometriam Euclidis* die grafische Illustration der Beziehung zwischen der Ausdehnung (*extensio*) und Betrag (*intensio*) von Qualitäten. Nach der damaligen Auffassung waren Qualitäten diverse physikalische Phänomene, beispielsweise die Geschwindigkeit, die verschiedene Intensitäten haben können, und diese sind in Beziehung zu deren Ausdehnung, beispielsweise Zeit. Oresme trug die Intensitäten vertikal als Längen (*latitudo*) über der horizontalen Linie, auf der die Ausdehnungen auch als Längen repräsentiert sind (*longitudo*). Man erkennt dabei leicht die Grundidee des Funktionsgraphen, die erst nach der Einführung der analytischen Geometrie im 17. Jh. (siehe 1. Buch) im modernen Sinne ausgebildet wurde. Dabei zeigt Oresme auch ein, noch nicht ganz klar ausgebildetes, Verständnis der funktionalen Beziehung zwischen Intensitäten und Extensionen. Seine „Graphen“ sahen etwa wie auf Abb. 1.12 dargestellt aus. Die Linie, die die oberen Enden der Latituden verbindet, nennt er *Linea intensionis* (oder *Linea summitatis*). Diese, die zwei Grenzlongituden und das Segment, welches sich zwischen diesen zwei Grenzlongituden befindet, beschreibt nach Oresme die betrachtete Qualität. Oresme unterscheidet, je nach Form der so entstandenen Figur, uniforme Qualitäten (*Qualitas uniformis*, mit konstanter Intensität; die Figur ist ein Rechteck), uniform diffiforme Qualitäten (*Uniformiter difformis*, wenn die *Linea intensionis* eine schräge Gerade bildet; die Figur ist ein Trapez) und diffiform diffiforme Qualitäten (*Difformiter difformis*, also alle anderen Typen von Figuren).

Oresme konnte im Fall der Geschwindigkeit und Zeit durch Latituden und Longituden den um diese Zeit bekannten Satz von Merton zeigen. Dieser Satz erhielt den Namen nach dem *Merton College* in Oxford, dessen Gelehrte ihn als Erste in den 1330er-Jahren formulierten: Im Falle einer uniform diffiformen Geschwindigkeit (also eines sich mit konstanter Beschleunigung bewegenden Körpers) ist (in einem gegebenen Zeitintervall) der zurückgelegte Weg gleich wie im Falle einer uniformen (also konstanten) Geschwindigkeit, wenn diese gleich der Geschwindigkeit im mittleren Zeitpunkt. Oresme konnte dies durch Vergleich von Flächen des Rechtecks und Trapezen zeigen, man sieht dadurch, dass er verstand, dass man die entsprechende zurückgelegte Strecke als Fläche interpretieren kann. Dies kann auch als eines der ersten Erkenntnisse der mathematischen Physik

Abb. 1.12 Oresmes Formlatituden: uniform, uniform difform und difform difform

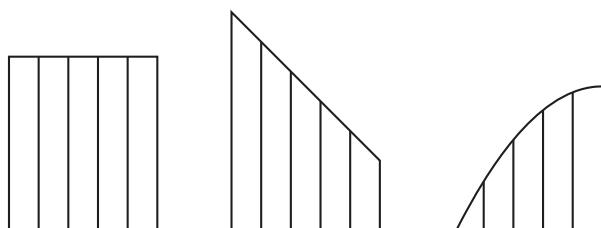
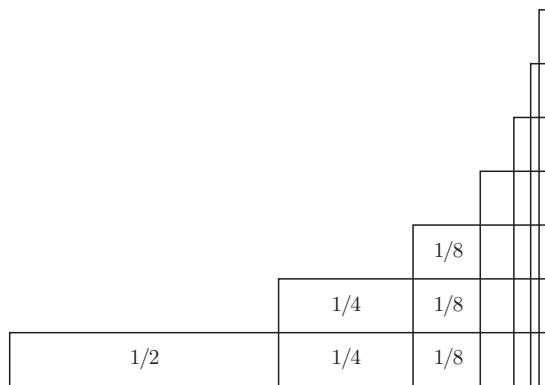


Abb. 1.13 Oresmes
geometrischer Beweis der
Konvergenz der Reihe $\sum_n \frac{2}{2^n}$



betrachtet werden. Interessant ist auch, dass Oresme zudem erwähnt, die Latituden müssten nicht unbedingt senkrecht zu den Longituden aufgetragen werden und könnten auch dreidimensional betrachtet werden ([42, 45, 49, 51]).

Auch beschäftigte sich Oresme mit unendlichen Summen (also Reihen); er konnte die Divergenz der harmonischen Reihe $\sum_n \frac{1}{n}$ und auch die Konvergenz der geometrischen Reihe $\sum_n \frac{2}{2^n}$ zum Wert 2 geometrisch zeigen. Oresmes Beweis der Divergenz der harmonischen Reihe erfolgt durch die auch heute noch standardmäßige Gruppierung von Termen

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \dots > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

und die Konvergenz der geometrischen Reihe durch eine Illustration wie auf Abb. 1.13 ([45, 49]).

1.2 Vorläufer der modernen Infinitesimalrechnung im 17. Jh.

Während der Renaissance wurde bekannterweise die Antike wiederentdeckt. Dies bezieht sich auch auf die mathematischen Errungenschaften. So kam auch die Exhaustionsmethode wieder zum Vorschein. In den letzten Jahrzehnten vor Leibniz und Newton wurden Methoden zur Berechnung von Volumina und Flächen, welche der modernen Integrierung entsprechen, wiederentdeckt und weiterentwickelt. Im Gegensatz zur Antike (bis auf die Ausnahme der Bestimmung der Tangente auf die Archimedische Spirale durch Archimedes, siehe Abschn. 1.1) wurden jetzt, besonders dank Einführung der analytischen Geometrie in den 1630er-Jahren (siehe 1. Buch), Methoden zur Bestimmung von Tangenten und Extrema, also Problemen, welche durch Ableitungen zu lösen sind, entwickelt.

Der berühmte Astronom **Johannes Kepler** (1571–1630) verfasste die *Nova stereometria doliorum vinariourum* (1615), die „Neue Stereometrie der Weinfässer“. Hierin beschreibt er die Bestimmung der Volumina von über 90 Rotationskörpern. Keplers Methode basiert auf der von Archimedes, ist aber einerseits weniger präzise, andererseits der modernen Integralrechnung zwecks Voluminabestimmung ähnlicher. Kepler teilt die Körper in geeignete, infinitesimal dünne, zylindrische Schichten ([8, 30]).

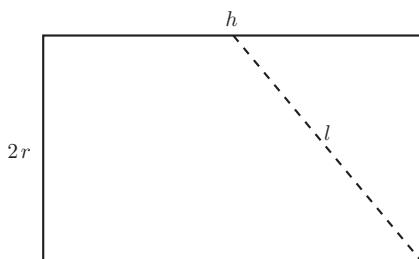
Interessant ist auch Keplers Weinfassproblem, ein Optimierungsproblem. Er wurde durch eine reelle Begebenheit inspiriert: Anlässlich seiner zweiten Heirat kaufte Kepler ein Weinfass. Dabei war ihm die Preisbestimmungsmethode des Weinhandlers suspekt. Die Methode war nämlich, das Fass flachzulegen und einen Stock durch die Öffnung bis zum entgegengesetzten Deckel zu führen. Der Preis war der Länge des eingeführten Stockteiles proportional. Kepler bemerkte aber, dass diese Länge (also auch der Weinpreis) bei einem langen, dünnen Fass gleich groß sein kann wie bei einem kurzen dicken Fass, also dass verschiedene Volumina gleich verrechnet werden konnten. Das folgende Problem entstand:

Problem 1.2 (Keplers Fassproblem) Wenn man ein Weinfass approximativ als Zylinder betrachtet, bei welchem Radius r und welcher Höhe (Länge) h ist für eine gegebene Stocklänge l (siehe Abb. 1.14) das Fassvolumen am größten?

Kepler fand die Lösung ($h = \frac{2l}{\sqrt{3}}$, $r = \frac{l}{\sqrt{6}}$) durch Wertvergleiche und, was wichtiger ist, bemerkte, dass für Maße, die nahe an diesen optimalen Maßen liegen, die Volumänderungen bei gleichen Maßänderungen viel kleiner sind als bei Maßen, die weiter vom Optimum entfernt sind. Heute sagen wir: Der Extremalwert wird in einem kritischen (stationären) Punkt erzielt ([8]).

Galileos Student **Bonaventura Francesco Cavalieri** (1598–1647) entwickelte seinerseits Keplers Methode zur Flächen- und Volumenberechnung weiter und schaffte eine eigene Version, als Methode der Indivisibilien bekannt. Diese beschrieb er 1635 in *Geometria indivisibilis continuorum nova quadam ratione promota*. Ebene Figuren betrachtete er als aus parallelen Linien bestehend und räumliche als aus parallelen ebenen Figuren bestehend. Seine Indivisibilien sind also unendlich dünn. Er stellt sich eine ebene Figur (Abb. 1.15), oder eine räumliche, als zwischen zwei Geraden bzw. Ebenen eingeklemmt

Abb. 1.14 Keplers Fassproblem



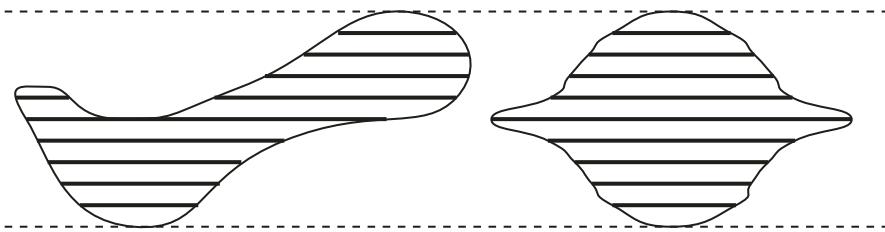


Abb. 1.15 Cavalieris Prinzip

vor. Die Indivisiblen sind dann die Durchschnittsmengen der Figur mit den diesen Geraden/Ebenen parallelen Geraden/Ebenen. Die Figur ist dann als die Gesamtheit dieser Indivisiblen aufzufassen.

Das nach ihm benannte, berühmte, Cavalieris Prinzip wird dann so formuliert: Ebene bzw. räumliche Figuren (also deren Flächen bzw. Volumina) stehen in demselben Verhältnis wie die Gesamtheiten ihrer Indivisiblen. Cavalieri konnte dann mithilfe dieses Ansatzes einige Flächen berechnen, die wir heute mit $\int_0^1 x^n dx$ bezeichnen würden und auch auf einfacher Weise Archimedes' Resultat zum Kugelvolumen erhalten ([12, 45, 49]).

Unter den Vorläufern der Differenzialrechnung, also des Ableitens, müssen vor allen Descartes und Fermat erwähnt werden, zwei Wissenschaftler, die (wie im Kapitel zur Geometrie im 1. Buch beschrieben) auch die analytische Geometrie begründeten. Beide entwickelten Verfahren zur Bestimmung von Tangenten auf (ebenen) Kurven, deren Gleichungen bekannt sind. **René Descartes'** (1596–1650) Ziel war, Winkel zwischen je zweien sich schneidenden Kurven, d. h. den Winkel zwischen deren Normalen im Schnittpunkt, zu bestimmen. Da es einfach ist, Normalen auf Kreisen zu finden, suchte Descartes einen Kreis, der um den betrachteten Punkt P am besten an der Kurve anliegt (siehe Abb. 1.17). Diesen fand er allgemein dadurch, dass er zunächst einen Kreis fand, der die Kurve in zwei Punkten nahe an P schneidet und dann diese zwei Punkte gegen P streben ließ. Mit dieser Methode fand er Normalen- und dann natürlich leicht Tangentengleichungen für mehrere Kurven ([21]). Unter anderem bestimmte Descartes die Tangente an der Zykloide (der Rollkurve eines Kreises, siehe Abb. 1.16). Die Zykloide, die von Galileo den Namen erhielt, wurde im 17. Jh. von vielen namhaften Mathematikern untersucht.

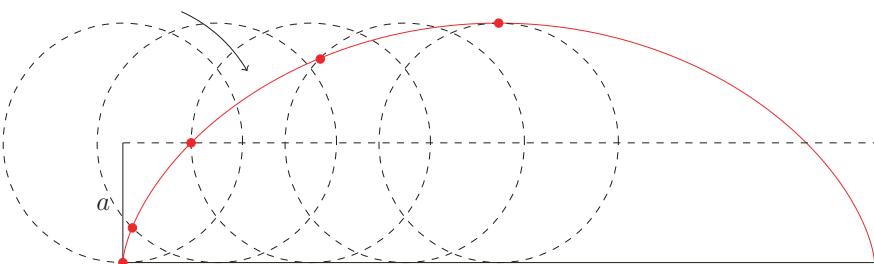
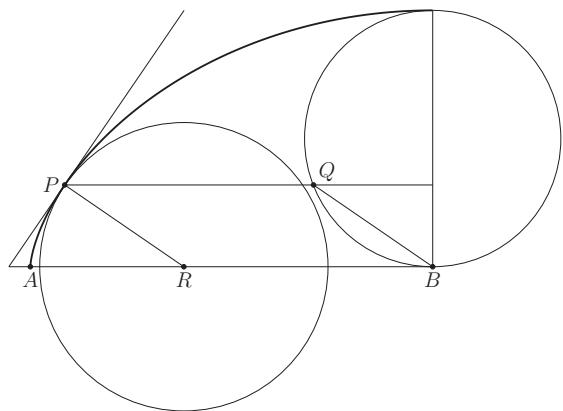


Abb. 1.16 Zykloide

Abb. 1.17 Descartes'
Bestimmung der
Zykloidentangente



Beispiel 1.1 (Descartes' Bestimmung der Zykloidentangente)

Sei P der Punkt, in dem die Tangente gesucht wird (Abb. 1.17). Die „halbwegs gerollte“ Position des die Zykloide erzeugenden Kreises ist auch eingezeichnet, sein Punkt, der auf der Grundlinie liegt, sei B . Durch P wird die Parallelle zur Grundlinie gezeichnet und deren Schnittpunkt Q mit dem Kreis bestimmt sowie die Parallelen zur Geraden QB . Der Schnittpunkt dieser letzten Parallelen mit der Grundlinie ist R , der Krümmungsmittelpunkt der Zykloide im Punkt P . Die Normale in P ist dann die Gerade PR , also ist die Tangente die Senkrechte zu PR in P ([48]).

Pierre de Fermat (1607–1665) Methode der Tangentenbestimmung war anders und der modernen Methode ähnlicher. Sie basiert auf der Verwendung eines kleinen Zuwachses E (wir würden Δx schreiben). Seine Idee ist die Folgende: Sei A ein Punkt auf der Kurve, in dem die Tangente $y = kx + l$ auf die Kurve $y = f(x)$ gesucht wird. Wenn E ein kleiner Zuwachs ist, dann sind die Dreiecke $\triangle OXA$ und $\triangle OYB$ auf Abb. 1.18 annähernd ähnlich, da $f(x + E)$ annähernd $k(x + E) + l$ gleich ist. Also ist

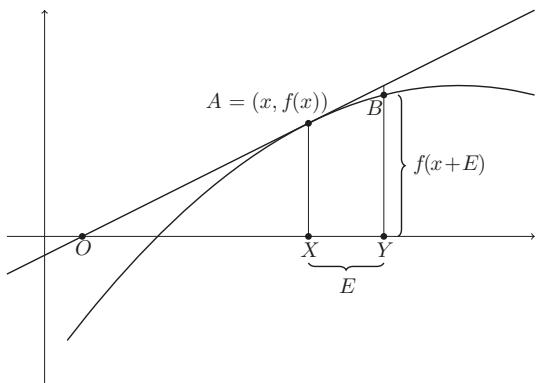
$$\frac{|OX|}{|OX| + E} \approx \frac{f(x)}{f(x + E)}, \quad (1.2)$$

und dementsprechend kann durch Bestimmung von $|OX|$ auch der Koeffizient $k = \frac{f(x)}{|OX|}$ bestimmt werden. Aus Gl. 1.2 erhält man

$$|OX| = \frac{f(x)}{(f(x + E) - f(x))/E}. \quad (1.3)$$

Nachdem man die rechte Seite der Gl. 1.3 ausgerechnet hat, setzt man $E = 0$ und erhält $|OX|$.

Abb. 1.18 Illustration zur Fermat'schen Methode der Bestimmung von Tangenten auf Kurven



Beispiel 1.2

Für $y = x^3$ erhält man aus Gl. 1.3

$$|OX| = \frac{x^3}{3x^2 + 3xE + E^2}. \quad (1.4)$$

Wenn $E = 0$, erhält man $|OX| = \frac{x}{3}$, also hat die Tangente im Punkt (x, x^3) die Steigung $3x^2$ ([18]).

Es ist leicht einzusehen, dass hier Fermat eigentlich den Grenzwert des Quotienten $\frac{f(x+E)-f(x)}{E}$ für $E \rightarrow 0$ bestimmt. Ähnlich werden in seiner Methode zur Bestimmung von Minima und Maxima die kritischen Punkte mittels E bestimmt ([18, 29, 49]).

Beispiel 1.3

Man bestimme den Teilungspunkt einer Strecke a , sodass das Produkt der Längen der zwei so entstandenen Teile maximal ist. Die zwei Teile haben Längen x und $a - x$, also wird das Maximum der Funktion $f(x) = x(a - x)$ gesucht. Man setzt $f(x)$ mit $f(x + E) = (x + E)(a - x - E) = xa - x^2 - 2xE + Ea - E^2$ gleich (wenn E klein ist, ist $f(x) \approx f(x + E)$) und erhält die Bedingung $Ea - 2xE - E^2 = 0$. Da E zwar klein, aber doch nicht gleich null ist, wird durch E geteilt und erhält so $2x = a - E$. Am Ende wird wieder $E = 0$ gesetzt und erhält als Lösung $x = \frac{a}{2}$ (und $f(x) = \frac{a^2}{4}$) ([18]).

Fermats Methode wurde zwar erst viel später veröffentlicht, war aber unter damaligen Mathematikern bekannt. Eine verbale Formulierung dieser Methode für Polynome wurde 1659 vom niederländischen Mathematiker **Johannes (Jan) Hudde** (1628–1704)

veröffentlicht. Seine Regel kann man mit modernen Formeln so ausdrücken ([22]): Ein Polynom $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ hat ein Maximum oder Minimum, wenn

$$a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1} = 0.$$

Ein anderer Student Galileos, **Evangelista Torricelli** (1608–1647), auch in der Geschichte der Physik eine bedeutende Figur, kombinierte die antike Exhaustionsmethode mit Cavalieris Methode der Indivisiblen und konnte so verschiedene, recht beeindruckende, Ergebnisse, welche man heute als Integrale interpretieren würde, erhalten. Das berühmteste seiner Resultate ist, dass er zeigte, dass das Volumen eines unendlichen Körpers endlich sein kann. Er zeigte nämlich, dass (modern ausgedrückt)

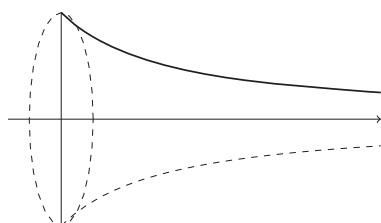
$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = 1$$

ist, also dass der Rotationskörper der Hyperbel $y = \frac{1}{x}$ um die x -Achse (von 1 weiter) endliches Volumen π hat. Dieser Körper (siehe Abb. 1.19) wird heute oft Torricellis Trompete genannt. Dieses für Torricellis Zeit paradoxale Resultat⁸ ist der erste „Auftritt“ eines unechten Integrals in der Geschichte. Torricelli konnte auch zeigen, dass die Fläche unter einem Bogen der Zykloide genau dreimal so groß ist wie die Fläche des rollenden Kreises, der sie erzeugt. Pascal andererseits bestimmte das Volumen und die Oberfläche des entsprechenden Rotationskörpers ([12, 49]).

Unabhängig von Torricelli bestimmte auch **Gilles Personne de Roberval** (1602–1675) die Fläche unter einem Bogen der Zykloide. Wichtiger aber ist seine präzisere Variante der Methode Cavalieris. Für Roberval muss eine Fläche aus Flächen, und nicht Linien, zusammengesetzt sein, ebenso ein Volumen aus Volumina und nicht aus Flächen. So bestimmt er Flächen unter den Kurven $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) durch Teilung in dünne Rechtecke ([9, 12, 28]).

Was bei allen erwähnten Vorgängern der modernen Infinitesimalrechnung fehlte, war eine kalkülmäßige Form, welche eine effiziente Bestimmung der Tangenten, Flächen und Volumina ermöglichen würde. Einen großen Schritt in diese Richtung schaffte **John Wallis**.

Abb. 1.19 Torricellis Trompete



⁸Der Philosoph Thomas Hobbes beispielsweise sagte 1672 dazu: „Um dies als Vernunft zu verstehen, braucht man nicht Geometer oder Logiker zu sein, sondern man muss verrückt sein“ (zitiert nach [45]).

John Wallis (1616–1703) gilt als der einflussreichste englische Mathematiker vor Newton. Er wirkte als Professor für Geometrie in Oxford. Während des englischen Bürgerkriegs engagierte er sich an der Seite des Parlaments und wurde für sein kryptologisches Können bekannt. Wallis war einer der frühen Mathematikhistoriker und beschäftigte sich auch mit Logik und englischer Grammatik. Aus der Gruppe der Wissenschaftler, mit welchen er sich regelmäßig traf, entstand die berühmte *Royal Society*. Wallis führte das moderne Unendlichkeitszeichen ∞ 1655 im Werk *De sectionibus conicis* ein. Sein berühmtestes Werk, *Arithmetica infinitorum* (1656), enthält auch eine der berühmtesten „unendlichen“ Darstellungen der Zahl π , das Wallis-Produkt ([12]):

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \dots$$

Schon der Titel von Wallis' *Arithmetica infinitorum* (1656) kündigt an, was sein Hauptverdienst ist. Von Cavalieris und Torricellis Methoden beeinflusst, entwickelte Wallis eine präzisere und effizientere, rechnerische Methode zur Berechnung von Flächen und Volumina ein. Zunächst gab er eine neue Variante der Flächenberechnung, welche wir heute mit dem Integral

$$\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}$$

(für natürliche Zahlen m) ausdrücken.

Beispiel 1.4 (Wallis' Berechnung von $\int_0^a x^2 dx$)

Wallis' stellte sich die Fläche unter der Kurve $y = x^2$ als aus n dünnen Rechtecken, jedes $\frac{a}{n}$ breit, zusammengesetzt vor (Abb. 1.20). Er verglich die Summe der Flächen dieser Rechtecke mit der Fläche des Rechtecks $[0, a] \times [0, a^2]$, welches aus n Rechtecken der Fläche $\frac{a}{n} \cdot a^2$ besteht. Man erhält das Verhältnis

$$\frac{\sum_{i=1}^n \frac{a}{n} \cdot \left(\frac{ia}{n}\right)^2}{n \cdot \frac{a}{n} \cdot a^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{ia}{n}\right)^2}{a^2 + a^2 + \dots + a^2} = \frac{0^2 + 1^2 + \dots + n^2}{n^2 + n^2 + \dots + n^2}. \quad (1.5)$$

Durch Betrachtung der rechten Seite von Gl. 1.5 für $n = 2, 3, 4$ zog er den richtigen Schluss (durch Analogie, nicht durch formelle mathematische Induktion), dass das Verhältnis aus Gl. 1.5 für jedes n gleich $\frac{1}{3} + \frac{1}{3n}$ ist, also je größer der Wert n , desto näher dem Wert $\frac{1}{3}$ ist. Dementsprechend schloss er, dass das Verhältnis der gesuchten Fläche und der Fläche a^3 des Rechtecks $[0, a] \times [0, a^2]$ gleich $\frac{1}{3}$ ist ([6]).

Abb. 1.20 Wallis' Berechnung von $\int_0^1 x^2 dx$

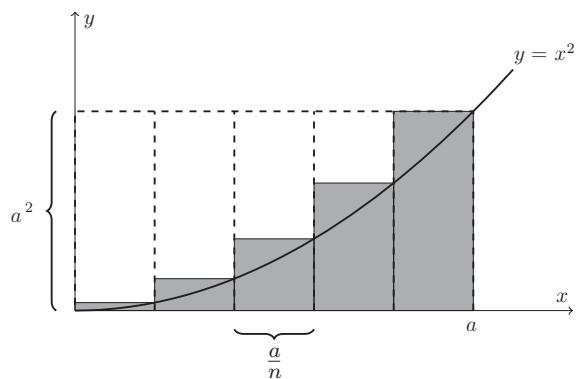
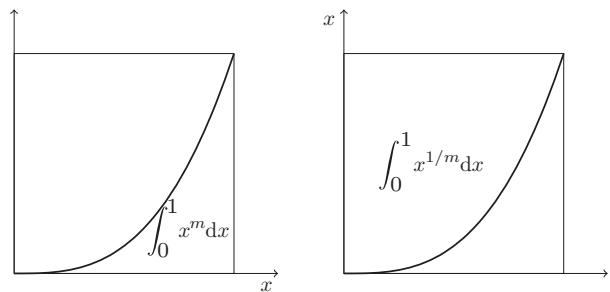


Abb. 1.21 Die Beziehung zwischen $\int_0^1 x^m dx$ und $\int_0^1 x^{1/m} dx$



Das eigentlich Neue bei Wallis ist aber, dass er aus diesen Resultaten weiter den Wert der Integrale $\int_0^1 x^{1/m} dx$ berechnete. Da $y = x^{1/m}$ äquivalent mit $y^m = x$ ist, kann man durch Auswechslung der Koordinatenachsen (Abb. 1.21) aus $\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}$ schließen, dass $\int_0^1 x^{1/m} dx = 1 - \frac{1}{m+1} = \frac{1}{1+1/m}$ ist. Daraus folgt, so Wallis wieder durch Analogie, dass $\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}$ für alle Zahlen m (natürlich außer für $m = -1$) gilt ([45]).

Blaise Pascal (1623–1662) leistete auch einen Beitrag zum Thema Tangentenkonstruktion. Er beschrieb 1659 für den Fall eines Kreisbogens das Dreieck, welches später Leibniz *triangulum characteristicum* (charakteristisches Dreieck) nennen würde. Dies ist das rechteckige Dreieck, welches von einer Tangente gebildet wird, wenn man einen kleinen Teil der Tangente um den Berührungsrand als Hypotenuse nimmt und durch Parallelen zu den Koordinatenachsen die Katheten bildet (Abb. 1.22). Dieses ist immer dem Dreieck, das von dem Normalenabschnitt zwischen Tangentenberührungsrand und x-Achse bestimmt wird, ähnlich ([49]).

Der unmittelbare Vorgänger (und auch Professor) von Newton war **Isaac Barrow**, der sich mit der Bestimmung von Tangenten auf Kurven befasste und dabei das dem charakteristischen Dreieck Pascals ähnliche Barrow'sche Differenzialdreieck (Abb. 1.23) betrachtete. Er betrachtete Tangenten als Grenzfälle von Sekanten, wenn sich deren Schnittpunkte mit der Kurve zueinander bewegen. Wichtiger ist aber, dass Barrow (und

Abb. 1.22 Pascals charakteristisches Dreieck

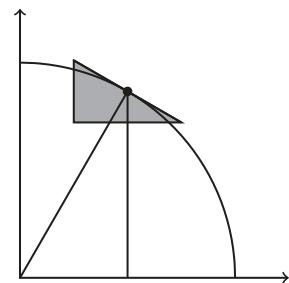
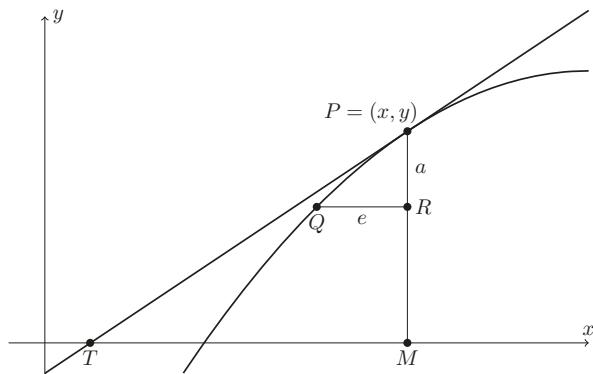


Abb. 1.23 Barrow'sches Differenzialdreieck



auch Torricelli etwas früher) bemerkte, dass die Geschwindigkeit aus der Kenntnis der Strecke, und umgekehrt, die Strecke aus der Kenntnis der Geschwindigkeit bestimmt werden können sowie dass Strecken als Flächen unter dem Graphen der Geschwindigkeit in Abhängigkeit von Zeit interpretiert werden können und zugleich die Geschwindigkeit als Steigung des Graphen der Strecke in Abhängigkeit von Zeit.

Da die Geschwindigkeitsbestimmung ein Problem der Ableitung, also dem Tangentenproblem äquivalent ist, und umgekehrt die Streckenbestimmung eine Integralaufgabe ist, also der Flächenberechnung äquivalent, begann sich somit das Bewusstsein über die Inversität der zwei Fundamentaloperationen der Infinitesimalrechnung auszubilden. Barrows 1670 veröffentlichte *Lectiones Geometricae*, also Vorlesungen über Geometrie, enthalten sowohl seine Tangentenbestimmungsmethode als auch einen Beweis der geometrischen Interpretation des Fundamentalsatzes der Analysis ([6, 34, 12, 45]).

Beispiel 1.5 (Barrows Tangentenbestimmungsmethode)

Wenn $f(x, y) = 0$ die Gleichung einer ebenen Kurve ist und P ein Punkt auf der Kurve, in dem die Tangente gesucht wird, braucht man einen zweiten Punkt T , um die Tangente eindeutig zu bestimmen. Beispielsweise kann T der Schnittpunkt der Tangente und der x -Achse sein. Wenn man das „Differenzialdreieck“ $\triangle PQR$ sowie die Projektion M des

Punktes P auf die x -Achse betrachtet (Abb. 1.23), bemerkte Barrow: Je näher Q zu P ist, desto genauer gilt die auf der Ähnlichkeit von Dreiecken basierende Gleichung

$$|TM| : y = |QR| : |PR| = e : a \quad (1.6)$$

(mit kleinem $e = |QR|$, $a = |PR|$). Wenn (x, y) die Koordinaten von P sind, sind die Koordinaten von Q gleich $(x - e, y - a)$. Da Q auf der Kurve ist, gilt $f(x - e, y - a) = 0$.

Beispielsweise kann man das kartesische Blatt betrachten, eine Kurve mit der Gleichung $x^3 + y^3 = kxy$, die zuerst von Descartes studiert wurde. Dann erhält man aus $(x - e)^3 + (y - a)^3 = k(x - e)(y - a)$ und $x^3 + y^3 = 3axy$ (P liegt ja auch auf der Kurve) die Gleichung

$$3xe^2 + 3ya^2 - 3x^2e - 3y^2a - e^3 - a^3 = kea - kax - key.$$

Alle Terme, die Potenzen von e und a enthalten, die höher als 1 sind, sowie auch deren Produkte werden entfernt, es verbleibt:

$$3x^2e + 3y^2a = kax + key.$$

Zuletzt wird das Verhältnis $e : a$ bestimmt:

$$e : a = (kx - 3y^2) : (3x^2 - ky).$$

Daraus kann die Abszisse $|OT|$ des Punktes T bestimmt werden: $|OT| = |OM| - |TM| = x - |TM|$. Aus Gl. 1.6 erhält man

$$|TM| = y \frac{e}{a} = \frac{kxy - 3y^3}{3x^2 - ky},$$

und so sind die Koordinaten von T gleich $\left(x - \frac{kxy - 3y^3}{3x^2 - ky}, 0\right)$, und man kann die Gleichung der Tangente, also der Gerade TP , bestimmen ([6]).

Isaac Barrow (1630–1677) hatte einen interessanten Lebenslauf. Als Junge war er so anstrengend, dass man seinen Vater beten hörte, falls Gott eines seiner Kinder zu sich nehmen würde, könnte er am besten auf Isaac verzichten. Er studierte auf der berühmten *Trinity College* in Cambridge. Wie zu der Zeit üblich, war das zunächst ein Studium ohne Spezialisierung. Nach seinem ersten Abschluss blieb er als *Fellow* an der *Trinity College*, sehr gut in Griechisch, Theologie und Naturwissenschaften ausgebildet. Im Zeitraum 1655–1659 bereiste er Italien und die Türkei, während der

Überfahrt in die Türkei überlebte er einen Piratenangriff (und beteiligte sich selbst an dessen Abwehr) und landete zunächst in Smyrna, lebte danach in Konstantinopel, wo er vor allem die orthodoxe Kirchenlehre studierte. Nach seiner Rückkehr wurde er ordiniert und zum Professor für Griechisch in Cambridge ernannt. Ab 1662 wurde er der einzige Inhaber des sogenannten Lucasischen Katheders für Naturwissenschaften und lehrte Mathematik und Optik, unter seinen Studenten befand sich auch Isaac Newton. Seine Vorlesungen wurden später auch veröffentlicht. Im Jahr 1669 verzichtete er auf die Stelle und wurde königlicher Kaplan in London. Als er 1677 an Fieber erkrankte, versuchte er sich mit Fasten und Opium zu kurieren, da ihm diese Methode schon früher in Konstantinopel half. Diesmal verblieb sie erfolglos und Barrow starb in wenigen Tagen ([6, 12, 49]).

Wir sehen also: Mitte des 17. Jh. bestand schon eine Fülle an Resultaten zu den Themen Tangentenbestimmung, Minima und Maxima, Berechnung von Flächen und Volumina. Die Zeit war reif für die endliche Vereinigung dieser Methoden, und dies schafften in den nächsten Jahrzehnten Newton und Leibniz.

1.3 Newton und Leibniz

Wenn man den vorigen Abschnitt gelesen hat und an die allgemein bekannte Aussage „Newton und Leibniz entdeckten die Differenzial- und Integralrechnung“ denkt, stellt sich die Frage: Was war denn bei Newton und Leibniz so anders? Auf jeden Fall waren sie offensichtlich nicht die Ersten, die infinitesimale Methoden entwickelten. Waren sie präziser? Nicht wirklich. Aber sie schafften endlich aus dem Vielerlei der Methoden und Resultate eine einheitliche, kalkülmäßige (wie Wallis sagen würde: arithmetische) Methode der Infinitesimalrechnung, inklusive der expliziten Aussage der Beziehung zwischen Ableitung und Integral (Tangente und Quadratur, Geschwindigkeit und Strecke), welche heute als Fundamentalsatz der Analysis, manchmal auch Newton-Leibniz-Formel, genannt wird und modern so ausgedrückt wird:

Theorem 1.7 (Fundamentalsatz der Analysis) Wenn $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem offenen Intervall I ist, dann ist die Funktion $F : I \rightarrow \mathbb{R}$, die durch

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

definiert ist, für jedes $a \in I$ auf I differenzierbar, und umgekehrt, wenn $F' = f$ auf I , dann ist

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

für alle $a, b \in I$.

Obwohl mathematisch äquivalent, waren Newtons und Leibniz' Ansätze der Infinitesimalrechnung sehr verschieden. Newton, als angewandter Mathematiker und Physiker, betrachtet vor allem von Zeit abhängige Größen, Leibniz, der Philosoph, räsonierte abstrakter. Newtons Resultate bezüglich der Infinitesimalrechnung sind etwa 10 Jahre älter als die von Leibniz, was zu deren berühmtem Prioritätenstreit führte. Heute wird aber allgemein angenommen, dass Newtons und Leibniz' Verdienst der Erschaffung der modernen Infinitesimalrechnung unabhängige Leistungen waren.

Kurzbiografie von Sir Isaac Newton

Isaac Newton (1642–1727) wurde nach dem Tode seines Vaters geboren. Als er 3 Jahre alt war, heiratete seine Mutter wieder und ließ den kleinen Isaac bei ihrer Mutter. Nachdem sie zum zweiten Mal 1659 Witwe wurde, wünschte seine Mutter, dass Isaac ein Farmer wurde. Newton hasste die Farmerarbeit. Sein Lehrer konnte die Mutter überzeugen, dass sie zulässt, dass Isaac die Schule beendet. Danach studierte Newton auf der *Trinity College* in Cambridge. Man weiß nicht viel über sein Studium, außer dass er verschiedene philosophische Werke gründlich kennengelernt hat sowie dass er während des Studiums das Interesse an Mathematik entdeckt hat. Er schloss sein Studium 1665 ab, kurz darauf, als das *Trinity College* wegen Pest geschlossen wurde, zog er sich auf das Familienwesen in Woolsthorpe zurück. In den 2 Jahren, die er dort verbrachte, entwickelte er seine neuen, revolutionären Ideen der Infinitesimalrechnung, Optik und Gravitation.

Später erbte er Barrows Position auf der *Trinity College*. In den 1670er-Jahren verwickelte er sich in wissenschaftliche Streite mit anderen Wissenschaftlern und erlebte seinen ersten Nervenzusammenbruch 1678. Ein Jahr später starb seine Mutter, und Newton lebte immer zurückgezogener, arbeitete aber vor allem an seinen physikalischen Resultaten weiter. Sein bedeutendstes Werk, die *Philosophiae naturalis principia mathematica*, meist einfach als *Principia* bekannt, wurde 1687 veröffentlicht. Darin findet man, unter anderem, das berühmte Newton'sche Gravitationsgesetz: Jede zwei Objekte ziehen sich durch eine Kraft an, die entlang ihrer Verbindungsgeraden wirkt und deren Betrag proportional zu dem Produkt der Massen dieser Objekte und umgekehrt proportional zum Quadrat deren Abstandes ist.

Zu dieser Zeit wurde Newton zunehmend politisch aktiv, da der damalige König James II., ein Katholik, auf offene Positionen, auch in der Wissenschaft, Katholiken unabhängig von deren Fähigkeiten einstellte. Newton, selbst ein Protestant, engagierte sich gegen diese Politik, insbesondere auf der Universität in Cambridge.

Nach seinem zweiten Nervenzusammenbruch 1693 zog sich Newton komplett aus der Wissenschaft zurück. In seinem letzten Lebensabschnitt beschäftigte er sich mit der Politik, konnte viele hohe Positionen erreichen und wurde auch ein reicher Mann. Ab 1703 war er Präsident der *Royal Society*, im Jahr 1705 wurde er der erste Wissenschaftler mit dem Titel *Sir*. Seine letzten Jahre sind vor allem durch den Prioritätenstreit mit Leibniz gekennzeichnet ([12]).

Newton's Variante der Infinitesimalrechnung ist als Fluxionsmethode bekannt. Deren wichtige Komponente ist die Benutzung von Reihenentwicklungen. Von Einflüssen ist besonders der von Wallis und Barrow bemerkbar. Newton entwarf sein Fluxionskalkül in den 1660er-Jahren. Seine ersten zwei Abhandlungen zum Thema, *De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas* und dessen Erweiterung *De Methodis Serierum et Fluxionum*, entstanden zwar 1669 bzw. 1671, wurden aber erst 1711 bzw. 1736 gedruckt. Es scheint, dass in den 1670er-Jahren die englischen Verleger wenig Interesse am Druck von wissenschaftlichen Texten hatten, meist wird dies durch die Zerstörung der Londoner Druckereien durch den großen Brand 1666 erklärt. Im Zeitraum 1691–1693 verfasste Newton *Tractatus De Quadratura Curvarum*, der 1704 als Anhang seiner *Optiks* veröffentlicht wurde. Trotzdem waren Newtons Manuskripte unter den englischen Wissenschaftlern schon bald nach deren Verfassung bekannt.

Newton's variable Größen x, y, z, v, \dots sind zeitabhängig (also Funktionen der Variablen t) und werden Fluenten genannt. Deren Geschwindigkeiten (also Ableitungen nach der Zeit) nennt er Fluxionen. In den 1690er-Jahren begann Newton die Fluxionen mit einem über das Fluentsymbol gesetzten Punkt zu bezeichnen: Die Fluxion von x ist also \dot{x} . Wenn man beispielsweise eine Kurve mit der Gleichung $f(x, y) = 0$ in der Ebene betrachtet, sind bei Newton x und y die Koordinaten eines sich entlang dieser Kurve bewegenden Punktes, und \dot{x} und \dot{y} sind dessen horizontale und vertikale Geschwindigkeitskomponenten. Die Fluxionen der Fluxionen (doppelte Ableitungen nach t) bezeichnet er dann mit Doppelpunkten (\ddot{x}); das, was wir heute Integral von x nennen, wurde von Newton mit \dot{x} bezeichnet. Die Steigung der Tangente im Punkt (x, y) der Kurve ist dann der Quotient zweier endlicher Größen, $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Newtons Methode benutzt einen kleinen Zuwachs $o\dot{x}$ der Größe x , wobei o ein unendlich kleiner Zuwachs von t ist ([6, 7, 12, 35, 41, 49]).

In *De Methodis Serierum et Fluxionum* formuliert Newton ganz klar die Fundamentalaufgabe der Infinitesimalrechnung: Gegeben die Beziehung zwischen Fluenten, die Beziehung zwischen deren Fluxionen zu finden, und umgekehrt. Modern ausgedrückt, befasst sich nach Newtons Auffassung die Infinitesimalrechnung mit den Methoden, wie man aus einer Kurvengleichung $f(x, y) = 0$ den Quotient $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ bestimmt und wie man aus einer Differenzialgleichung, die \dot{x} und \dot{y} verbindet, die Beziehung $f(x, y) = 0$ bestimmt.

Es folgen zwei bekannte Beispiele von Newtons Fluxionsmethode, beide aus [35].

Beispiel 1.6 (Ableitungen, Newtons Variante)

Gegeben sei die Beziehung

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0. \quad (1.7)$$

Die Substitution $x + o\dot{x}$ für x und $y + oy$ für y ergibt

$$\begin{aligned} & x^3 + 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2o^2x + \dot{x}^3o^3 \\ & -ax^2 - 2a\dot{x}ox - a\dot{x}^2o^2 \\ & +axy + a\dot{x}oy + a\dot{y}ox + a\dot{x}\dot{y}o^2 \\ & -y^3 - 3\dot{y}oy^2 - 3\dot{y}^2o^2y - \dot{y}^3o^3 \\ & = 0. \end{aligned}$$

Wegen Gl. 1.7 wird dies zu

$$\begin{aligned} & 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2o^2x + \dot{x}^3o^3 - 2a\dot{x}ox - a\dot{x}^2o^2 + \\ & +a\dot{x}oy + a\dot{y}ox + a\dot{x}\dot{y}o^2 - 3\dot{y}oy^2 - 3\dot{y}^2o^2y - \dot{y}^3o^3 = 0 \end{aligned}$$

vereinfacht. Division durch o resultiert in

$$\begin{aligned} & 3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + a\dot{y}x + a\dot{x}y - 3y^2\dot{y} + 3xo\dot{x}^2 + \\ & +o^2\dot{x}^3 - ao\dot{x}^2 + ao\dot{x}\dot{y} - 3yo\dot{y}^2 - o^2\dot{y}^3 = 0. \end{aligned}$$

Doch da man annimmt, dass o unendlich klein ist, kann man die Terme, die o enthalten, vernachlässigen, und es verbleibt die Gleichung

$$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{y}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 = 0.$$

Beispiel 1.7 (Integration, Newtons Variante)

Zunächst bemerkt Newton, dass in jedem Term einer Gleichung, die Fluxionen enthält, die gleiche Gesamtpotenz der Fluxionen enthalten sein muss: $\dot{x} + \dot{x}\dot{y}x - ax^2 = 0$ muss als $\dot{x}\dot{z} + \dot{x}\dot{y}x - ax^2\dot{z}^2 = 0$ verstanden werden, mit $\dot{z} = 1$. Wenn in einer solchen Gleichung genau zwei Fluenten auftreten, ist der erste Lösungsschritt, daraus deren Verhältnis zu bestimmen. Beispielsweise bestimmt man aus der Gleichung

$$\dot{y}^2 = \dot{x}\dot{y} + \dot{x}^2y^2$$

das Verhältnis

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + x^2}. \quad (1.8)$$

Die Wurzel $\sqrt{\frac{1}{4} + x^2}$ wird als unendliche Reihe $\frac{1}{2} + x^2 - x^4 + 2x^6 - 5x^8 + 14x^{10} + \dots$ dargestellt, also erhält man aus Gl. 1.8

$$\frac{\dot{y}}{x} = 1 + x^2 - x^4 + 2x^6 - 5x^8 + 14x^{10} + \dots$$

bzw.

$$\frac{\dot{y}}{x} = x^2 - x^4 + 2x^6 - 5x^8 + 14x^{10} + \dots$$

Diese Reihen integriert er gliedweise und erhält

$$\frac{\dot{y}}{x} = (x+) \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{7}x^7 - \frac{5}{9}x^9 + \frac{14}{11}x^{11} + \dots$$

Aus dem vorigen Beispiel ist ersichtlich, dass Newton die Wallis'sche Regel zur Integration von Potenzen kannte sowie dass Integrale schon am Anfang auch verbunden mit der Lösung von Differenzialgleichungen betrachtet wurden. Wichtiger ist aber, auf seine Verwendung von Reihenentwicklungen hinzuweisen. Newton selbst hebt im Vorwort des [35] klar hervor: Das Rechnen mit Zahlen und Variablen ist ähnlich, und dementsprechend ist es natürlich, die Darstellung der Zahlen durch Dezimalbrüche in analoger Weise auf Variablen anzuwenden. Er spricht auch seine Verwunderung aus, dass dies bisher niemandem außer dem deutschen Mathematiker **Nicolaus Mercator** (eigentlich Niklaus Kauffman, 1620–1687) eingefallen ist,⁹ der dies für die Quadratur der Hyperbel benutzte. Mercator veröffentlichte nämlich 1668 in seiner *Logarithmotechnia* die Mercator-Reihe (die er nur mit Worten beschreibt)

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (1.9)$$

als Ausdruck für die Fläche, die wir heute mit $\int_0^x \frac{dt}{1+t}$ bezeichnen würden.¹⁰ Da

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots,$$

entstand die Mercator-Reihe quasi durch gliedweise Integration. Deswegen gilt Mercator als Begründer der Potenzreihentheorie. Newton selbst entdeckte verschiedene Reihenentwicklungen, von denen die allgemeine binomische Reihe am berühmtesten ist. In einem

⁹Nicolaus Mercator ist nicht mit dem Kartografen und Geografen Gerhard Mercator (1512–1594) zu verwechseln, nach dem die in Erdkunde bekannte Mercator'sche Projektion benannt ist.

¹⁰Die Bezeichnung „natürlicher Logarithmus“ stammt auch von N. Mercator ([26]).

Brief an H. Oldenburg (1676) schreibt er sie in der folgenden, für den modernen Leser ungewohnten, Form:

$$(P + PQ)^{m/n} = P^{m/n} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \dots$$

Dabei stehen A, B, C, D, \dots jeweils für den unmittelbar vorstehenden Term (also ist $A = P^{m/n}$, $B = \frac{m}{n}AQ = \frac{m}{n}P^{m/n}Q$ usw.). Newton entwickelte auch eine Methode, mit der er die Inversen von Reihen berechnete. Da die wichtigen transzendenten Funktionen als Integrale von algebraischen Funktionen berechnet werden konnten, beispielsweise $\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, genügte es für Newton, die Potenzreihenentwicklungen algebraischer Funktionen durch Benutzung der binomischen Reihe und seiner Reiheninvertierungsmethode zu berechnen, um auch die Reihenentwicklungen transzendenter Funktionen durchgliedweise Integration zu erhalten ([6, 22, 45]).

Beispiel 1.8 (Newtons Reiheninversion)

Wenn Newton die Reihe

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots \quad (1.10)$$

kennt, erhält er die Reihe für x dadurch, dass er $x = b_0 + b_1y + b_2y^2 + \dots$ in Gl. 1.10 einsetzt und die Koeffizienten vergleicht. Beispielsweise erhält er als Spezialfall der binomischen Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}t^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}t^6 + \dots$$

Durch gliedweise Integration erhält Newton

$$y = \arcsin x = x + \frac{1}{2 \cdot 3}t^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}t^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}t^7 + \dots$$

Wenn man jetzt rechts $x = b_0 + b_1y + b_2y^2 + \dots$ einsetzt, erhält man

$$y = (b_0 + b_1y + b_2y^2 + \dots) + \frac{1}{6}(b_0 + b_1y + b_2y^2 + \dots)^3 + \frac{3}{40}(b_0 + b_1y + b_2y^2 + \dots)^5 + \dots$$

Erst folgt $b_1 = 1$, da auf rechter Seite y^1 nur in der ersten Klammer erhalten werden kann. Weiter ist $b_0 = 0$, weil rechts der Koeffizient von y^0 gleich $b_0 + \frac{b_0^3}{6} + \frac{3b_0^5}{40} + \dots$ ist und rechts 0 ist. Newton entwickelte eine Tabellenmethode, durch die er die weiteren Koeffizienten b_2, b_3, \dots effizient berechnen konnte. In unserem Fall erhielt er so die Potenzreihe für Sinus ([45]),

$$\sin y = x = y - \frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{120} - \dots$$

Kurzbiografie von Gottfried Wilhelm Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) ist vor allem als Philosoph und Mathematiker berühmt, gilt aber als „letzter Universalgelehrter“. Als junger Mann in diplomatischem Dienst besuchte er 1672 Paris, wo er Christiaan Huygens kennenlernte; Huygens beehrte Leibniz in Mathematik und Physik, unter anderem gab er ihm auch einige Schriften Pascals zum Studium. Zu gleicher Zeit entwarf er auch eine Verbesserung der Rechenmaschine Pascals. Im Jahr 1673 besuchte er London und lernte mehrere Mitglieder der Royal Society kennen, freundete sich mit deren Sekretär Henry Oldenburg an und wurde auch zum Mitglied der *Royal Society* gewählt. Er kehrte nach Paris zurück und beschäftigte sich dort mit Pascals und Descartes' Schriften. Leibniz blieb bis 1676 in Paris und entwickelte in diesen Jahren die Fundamentalideen seiner Variante der Infinitesimalrechnung.

Leibniz' Ziel der universellen symbolischen Sprache resultierte in großer Aufmerksamkeit, die er der mathematischen Symbolik schenkte. So ist es nicht verwunderlich, dass nicht wenige heutige Symbole von Leibniz stammen: $\int \dots dx$ für Integral, $\frac{dy}{dx}$ für Ableitung,¹¹ aber auch \cdot für Multiplikation, $:$ für Division, \dots

Ab 1676 lebte er in Hannover, zunächst als Bibliothekar und später als Hofrat des Herzogs Johann Friedrich von Braunschweig-Lüneburg. Leibniz führte auch geologische Projekte in dieser Anstellung durch und beschäftigte sich weiterhin mit Mathematik. Bis 1679 hatte er schon das binäre Zahlensystem entwickelt, veröffentlicht aber seine diesbezüglichen Resultate erst 1701. Er entwickelte auch die Idee der Determinante, arbeitete auch an seiner formellen logischen Sprache weiter, beschäftigte sich mit der Dynamik. Im Auftrag Johann Friedrichs Nachfolgers Ernst August unternahm er viele Reisen durch Europa, um eine Geschichte des Welfenhauses zu schreiben. Zwar schrieb er sie am Ende nicht, aber traf auf seinen Reisen mit vielen bedeutenden Wissenschaftlern zusammen. In den 1680er-Jahren veröffentlichte er seine Version der Infinitesimalrechnung. In seiner zweiten Lebenshälfte verfasste er mehrere philosophische Schriften und unterstützte die Gründung mehrerer wissenschaftlicher Akademien, war aber auch sehr vom Prioritätenstreit mit Newton (siehe weiter unten) präokkupiert ([6, 12]).

Während Newtons Resultate in Originalform dem heutigen Leser schwer verständlich sind, wurde Leibniz' Stil maßgebend für die Analysis. Dies ist nicht verwunderlich, wenn man bedenkt, dass Leibniz vom Wunsch getrieben wurde, eine universelle symbolische Sprache zu entwerfen und er dementsprechend der Notation viel Aufmerksamkeit geschenkt hat. Von Leibniz stammen das moderne Integralzeichen \int und die Differenzialnotation dx .

¹¹Die Bezeichnung $\frac{\partial y}{\partial x}$ für partielle Ableitungen wurde 1786 von Legendre eingeführt ([7]).

Leibniz' Beschäftigung mit der Infinitesimalrechnung war eine Folge seiner Lösung einer Aufgabe, die ihm 1672 Christaan Huygens (1629–1695) gestellt hat. Dies war die Aufgabe der Bestimmung der unendlichen Summe der Kehrwerte aller Dreieckszahlen

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \dots = ?$$

Leibniz bemerkte, dass jeder Summand die Form

$$\frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$$

hat und so die Aufgabe die Form

$$\frac{2}{1} - \frac{2}{2} + \frac{2}{2} - \frac{2}{3} + \dots + \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} + \dots$$

erhält, also die n -te Partialsumme gleich

$$2 - \frac{2}{n+1}$$

ist. Daraus schloss Leibniz korrekt, dass die ganze Reihe die Summe 2 hat. Die Kernidee, die zur Lösung geführt hat, war hier, jeden Summand d_n der Summe $\sum d_n$ als Differenz zweier benachbarter Terme einer anderen Folge (a_n) darzustellen: Wenn $d_n = a_{n+1} - a_n$ für alle n , dann ist $\sum_{i=1}^n d_i = a_1 - a_{n+1}$. Dies führte Leibniz zur Idee der Inversität zwischen Ableitung und Integral ([6, 41]).

Nach der Bestimmung der Summe $\sum \frac{2}{n(n+1)}$ entdeckte (1673) Leibniz eine der bekanntesten unendlichen Darstellungen der Zahl π , die Leibniz-Reihe

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Leibniz veröffentlichte diese Reihe und das nach ihm benannte Konvergenzkriterium für Reihen im Jahr 1682. Diese Entwicklung für π war aber schon 2 Jahre früher einem anderen der Pioniere der Theorie der Reihenentwicklungen bekannt: Der schottische Mathematiker **James Gregory** (1638–1675) konnte 1671 verschiedene Reihenentwicklungen angeben, nämlich die ersten fünf bis sechs Terme der Entwicklungen der Tangens- und Arkustangensfunktion, der Sekansfunktion und deren Logarithmus und auch die binomische Reihe. Auch benutzte er eine Variante des Vergleichskriteriums der Reihenkonvergenz und gab eine fast so allgemeine Definition von Integralen wie Riemann. Die Reihe für Arkustangens

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

wird heute oft als Gregory-Reihe bezeichnet oder auch als Gregory-Mādhava-Reihe, weil sie schon früher von dem indischen Mathematiker **Mādhava** (1350–1425) entdeckt wurde ([12]).¹² In beiden Fällen handelt es sich eigentlich um die Entwicklung der Variablen x in Potenzen von $\operatorname{tg} x$. Solche Reihenentwicklungen bekamen später den Namen Taylor'sche Reihen, nach Brook Taylor (siehe Abschn. 1.4). Gregory starb nämlich, trotz mehrerer wertvoller Beiträge, relativ unbekannt mit nur 36 Jahren an einem Schlaganfall ([6, 12, 13, 45, 49]).

Leibniz' Konzept der Infinitesimalrechnung ist analytisch-geometrisch und beruht auf der Generalisierung des charakteristischen Dreiecks Pascals. Wie beschrieben benutzte ihn auch Barrow, Leibniz selbst beruft sich aber nur auf Pascal. Bei Leibniz sieht die Benutzung des charakteristischen Dreiecks so aus: Gegeben eine Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$, ist das charakteristische Dreieck um einen Punkt P der Kurve bei Leibniz das Dreieck $\triangle PQR$ mit Katheten dx und dy und Hypotenuse als Teil der Tangente in P (Abb. 1.24). Dieses Dreieck ist dem Dreieck $\triangle PVW$ ähnlich, welches von der Normalen, der Abszissenachse und der Senkrechten aus P auf die Abszissenachse gebildet wird, also gilt

$$\sigma dx = y dy.$$

Leibniz nimmt dx und dy als unendlich klein und „summiert“, erhält so

$$\int \sigma dx = \int y dy.$$

Nun kann Leibniz für eine gegebene Beziehung zwischen σ und y so die Beziehung zwischen x und y finden, also ein Integralproblem lösen. Wenn beispielsweise $\sigma = \frac{a^2}{y}$, gilt $a^2 dx = y^2 dy$, also hat die Kurve $\frac{y^3}{3} = a^2 x$ die vorgegebene Eigenschaft. Ähnlich schließt Leibniz aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle PQR$ und $\triangle PVW$ zuerst auf $y ds = n dx$ und

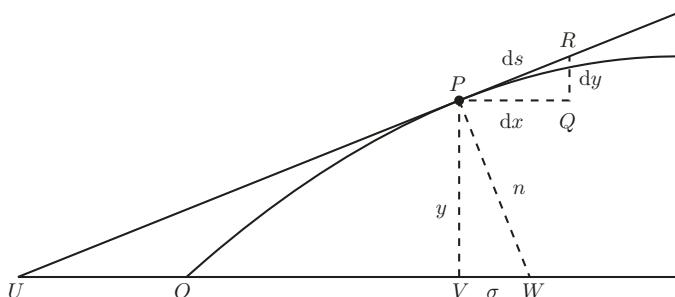


Abb. 1.24 Das charakteristische Dreieck bei Leibniz

¹²Mādhava benutzte diese Reihe, um den π -Wert auf 11 Dezimalstellen genau zu berechnen.

dann auf $\int y \, ds = \int n \, dx$, erhält also die Formel zur Bestimmung der Oberfläche eines Rotationskörpers ([5, 6]).

In seinen ersten Schriften zum Thema benutzte Leibniz zunächst die Abkürzung „omn.“ als Integralbezeichnung. Hier ist besonders Cavalieris Einfluss sichtbar, da Cavalieri selbst seine Quadraturen als *omnes lineae figurae* bezeichnete. Zu dieser Zeit benutzte Leibniz auch l für die „Differenz zweier benachbarter Ordinaten“, also für heutiges dy . Unter Benutzung dieser Symbolik findet man in einem seiner Manuskripte aus 1675 verschiedene Formeln zur Differenzial- und Integralrechnung, beispielsweise

$$\text{omn. } xl = x \text{ omn. } l - \text{omn.} \overline{\text{omn.}} \, l, \quad (1.11)$$

in der wir unschwer die Regel der partiellen Integration erkennen können (Leibniz benutzte die Überstreichung mit dem sogenannten *Vinculum* im Sinne heutiger Klammern). Schon im gleichen Jahr entschied Leibniz, dass ein verlängertes S, also \int , die bessere Bezeichnung für Integrale wäre, da die Integration für ihn eine Form der Summation war. Leibniz bemerkte auch die Dimensionshomogenität: $\int l$ (falls l Längen sind) ergibt eine Quadratur, $\int xl$ ist ein Volumen (also beschreibt die Gl. 1.11 ein Volumen als Differenz zweier Volumina). Bald darauf führte er auch das Differenzialsymbol d ein. Zunächst wurde das d von Leibniz im Nenner geschrieben (y/d), bald beschloss er, dass die heutige Schreibweise dy besser ist. Im Jahr 1677 zeigte Leibniz durch Verwendung der Symbole dx im Sinn kleiner Zuwächse (analog wie E bei Fermat oder o bei Newton) die Produkt- und Quotientregel für Ableitungen ([6, 34, 41]).

Man kann, trotz offensichtlicher Parallelen zwischen Newtons und Leibniz' Konzepten, doch einige fundamentale Unterschiede finden. Der Auffälligste ist, dass bei Newton die Steigung der Tangente ein Quotient zweier endlicher Größen \dot{y} und \dot{x} ist, während bei Leibniz dies ein Quotient zweier infinitesimaler Größen dy und dx ist ([6, 41]).

Leibniz ist, mit Johann Bernoulli, auch der Erste, der den Begriff „Funktion“ benutzt hatte (in einem Brief 1673). In einem Brief an Leibniz gibt 1694 Bernoulli den wohl ersten Versuch der Definition einer Funktion ([12, 42]):

► **Definition 1.2 (Funktion, Johann Bernoullis Definition)** Man nennt hier eine Funktion einer Variable eine Größe, die in irgendeiner Weise aus dieser Größe und Konstanten zusammengesetzt ist.

Schon Newtons und Leibniz' Zeitgenossen bemerkten, dass die Infinitesimalrechnung, wenn auch offensichtlich leistungsfähig und korrekte Ergebnisse liefernd, auf wackligem mathematischem Fundament steht: Die Inkremente (o bei Newton, dx bei Leibniz) werden bald als von null verschieden (bei Division mit ihnen) und bald als null gleich (wenn man die sie enthaltende Terme der Gleichung streicht) verwendet. Wie kann etwas zugleich null gleich und von null verschieden sein? Der berühmteste dieser Kritiker war der irische Bischof und empiristischer Philosoph **George Berkeley** (1684–1753). Er stellte

1734 die Fragen (deutsche Übersetzung nach [49]): „Was sind Fluxionen? Geschwindigkeiten verschwindender Inkremente? Und was sind diese verschwindenden Inkremente? Sie sind weder endliche Größen noch unendlich kleine, und doch sind sie auch nicht nichts. Dürfen wir sie nicht die Geister verstorbener Größen nennen?“. Der moderne Leser versteht natürlich, dass das Problem in dem damals noch nicht klar entwickelten Konzept des Grenzwerts lag. Es dauerte aber noch 200 Jahre, bis Bolzano, Cauchy und Weierstraß diesen präzisierten ([12]).

Man kann diesen Abschnitt natürlich nicht beenden, ohne einige Worte über den berühmten Prioritätenstreit zwischen Newton und Leibniz zu sagen. Wie beschrieben sind zwar Newtons erste Resultate etwa 10 Jahre älter als die Leibniz', und auch besteht die Möglichkeit, dass Leibniz bei seinen Besuchen 1673 und 1676 in London Newtons Schriften gesehen hat (hier muss aber hervorgehoben werden, dass 1673 Leibniz' Mathematikkenntnisse noch eher dürftig waren). Leibniz' erste Resultate stammen aus 1675, ein Jahr später schrieb ihm Newton. Der Brief reiste lange, Leibniz' baldige und Newtons Verdienste um die Reihenlehre lobende Antwort erschien Newton deswegen verspätet. Newton sandte einen zweiten Brief, aus dem klar hervorging, dass er nicht an der Korrespondenz interessiert war und auch keine Details eigener Resultate preisgeben wollte. Dieser Brief enthält das berühmte Anagramm Newtons, $6a 2c d ae 13e 2f 7i 3l 9n 4o 4q 2r 4s 9t 12v x$. (*Data Aequatione quotcumque, fluentes quantitates involuente fluxiones inventire, et vice versa*, also die schon erwähnte Hauptaufgabe der Infinitesimalrechnung nach Newton). Dieser Brief brauchte über ein halbes Jahr, bis er in Leibniz' Händen landete. Als Antwort sandte Leibniz die Beschreibung der Grundideen seiner Methode, Newton antwortete, dass dabei nichts Neues entdeckt wurde. Leibniz' erste Schrift zum Thema wurde 1684 veröffentlicht (*Nova Methodus pro Maximis et Minimis, itemque Tangentibus*), Newtons erste Veröffentlichung der Grundzüge seiner Fluxionsmethode ist Teil seiner berühmten *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687). Der Streit entfachte aber in voller Kraft erst Jahre später, als 1710 John Keill, ein schottischer Mathematiker und Mitglied der *Royal Society*, in einem Artikel in den *Transactions of the Royal Society of London* Leibniz des Plagiates beschuldigte. Leibniz verlangte 1711 eine Entschuldigung von der *Royal Society*, eine Kommission zur Bestimmung der Priorität wurde ins Leben gerufen. Leibniz wurde nicht einmal nach seiner Meinung gefragt, 1713 wurde beschlossen, Newton wäre im Recht. Newton, zu der Zeit Präsident der *Royal Society*, schrieb den Endbericht selbst. Leibniz erfuhr durch Johann Bernoulli von dieser Entscheidung, veröffentlichte danach ein anonymes Pamphlet, in dem er einen Fehler Newtons erwähnt, den Johann Bernoulli bemerkte hatte. Keill veröffentlichte eine Antwort, Leibniz zog sich aus dem Streit zurück, da er, wie er sagte, nicht einem Idioten Antwort geben wolle. Leibniz starb 1716, der Streit dauerte aber an. Heute werden aber allgemein beide, Newton und Leibniz, als Erschaffer der modernen Infinitesimalrechnung betrachtet, deren Errungenschaften unabhängig voneinander erreicht und in verschiedener Form dargestellt wurden. Auch muss hervorgehoben werden, dass obwohl zweifelsfrei Newtons Resultate älter sind, sich die Leibniz'sche Formulierung der Infinitesimalrechnung als wegweisend erwies ([12, 49]).

1.4 Entwicklungen im 18. und 19. Jh.

Die Newton'sche Variante in englischsprachigen Ländern und die Leibniz'sche auf dem europäischen Kontinent verbreiteten sich unwahrscheinlich schnell, da sie effiziente Methoden zur Lösung vieler bisher kompliziert erscheinenden Probleme lieferten. Noch zu Newtons und Leibniz' Lebzeiten konnten andere Mathematiker neue Resultate im Bereich der Infinitesimalrechnung erzielen, die praktische Anwendung wurde sehr schnell weiterentwickelt. Dafür brauchte es über 100 Jahre, bis die Grundlagen der Infinitesimalrechnung zufriedenstellend rigoros definiert wurden. In diesem Abschnitt beschreiben wir die wichtigsten Momente und Beiträge in der Periode der Entwicklung von der Newton-Leibniz'schen Originalform zur modernen, präzise definierten Infinitesimalrechnung.

Wie im [Abschn. 1.3](#) erwähnt, war **Johann Bernoulli** (1667–1748) direkt mit Leibniz im Kontakt und ist sogar für die Bezeichnung „Integral“ verantwortlich (während Leibniz die Bezeichnung *calculus summatoris* vorzog, schlug Johannes die Bezeichnung *calculus integralis* vor). Johann und sein älterer Bruder **Jakob Bernoulli** (1654–1705) waren die ersten „Nachfolger“ des Leibniz'schen infinitesimalen Kalküls. Beide konnten mit der Infinitesimalrechnung diverse neue Resultate erzielen, besonders in Bezug auf Differentialgleichungen (die berühmte Bernoulli'sche Gleichung $y' + p(x)y = q(x)y^n$ mit $n \neq 0, 1$ wurde von Jakob studiert), und haben auch für die Verbreitung der Ideen der Infinitesimalrechnung viel getan. Anfangs, bis 1697, waren die Brüder Kollegen, danach brach jeder Kontakt ab, und sie wurden zu Rivalen ([\[12\]](#)).

Während eines Aufenthalts in Paris unterrichtete Johann den **Marquis de L'Hôpital** (Guillaume François Antoine, Marquis de L'Hôpital, auch de L'Hôpital, 1661–1704) im Infinitesimalkalkül. Das Resultat ist das erste Lehrbuch der Differentialrechnung (ohne Integralrechnung), L'Hôpitals *Analyse des infiniments petits* (1696). Der größte Teil des Inhalts ist aber auf Johann Bernoulli zurückzuführen, inklusive der bekannten Regel von L'Hôpital. L'Hôpital selbst bedankt sich nur im Vorwort bei beiden Bernoullis, „besonders bei dem Jüngeren“, für die Ideen ([\[12\]](#)). Im Lehrbuch L'Hôpitals finden sich viele Beispiele der Anwendungen der Differentialrechnung, wir erwähnen hier ein bekanntes Optimierungsproblem (nach [\[38\]](#)):

Problem 1.3 (L'Hôpitals Flaschenzugproblem) Ein gewichtsloses Kabel der Länge r ist an der Decke im Punkt A befestigt. Das andere Ende des Kabels ist an einem Flaschenzug im Punkt C befestigt. Das Ende eines anderen Kabels, dessen Länge l ist, ist an der Decke im Punkt B befestigt ($|AB| = d > r$). Am anderen Ende dieses zweiten Kabels (Punkt D) ist ein Gewicht angebracht. Dieses zweite Kabel ist über den Flaschenzug geführt, also ist $|BC| + |CD| = l$, und das ganze System kann sich anpassen, um zum Gleichgewicht zu gelangen ([Abb. 1.25](#)). Wie weit unter der Decke ist die endgültige Position des Gewichts? Die Lösung entspricht physikalisch der Bestimmung der Position der niedrigsten Potenzialenergie, also der Bestimmung des Minimums der Potenzialenergie.

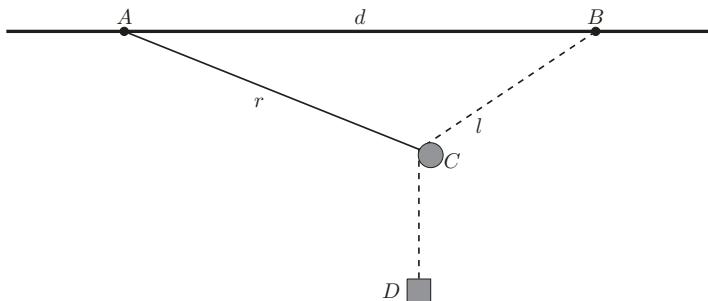
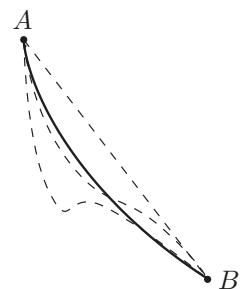


Abb. 1.25 L'Hôpitals Flaschenzugproblem

Abb. 1.26 Problem der Brachystochrone



Johann Bernoulli konnte 1691 (wie auch Leibniz und Huygens) die Gleichung der Kettenkurve bestimmen.¹³

Im Jahr 1696 stellte Johann Bernoulli das folgende Problem:

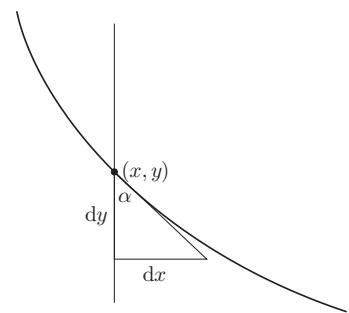
Problem 1.4 (Problem der Brachystochrone) Von allen Kurven, die durch zwei nicht in gleicher Höhe und nicht direkt übereinanderliegenden Punkte gehen, ist die Kurve zu bestimmen, auf der sich ein reibungsfrei bewegender Massenpunkt, nur unter Einwirkung der Gravitation, am schnellsten vom höheren zum niedrigeren Punkt bewegt (Abb. 1.26).

Johann selbst sowie Jakob, Newton, Leibniz und L'Hôpital konnten das Problem lösen. Das Interessante dabei ist der Vergleich der zwei Lösungen der Brüder Bernoulli.

Johanns Lösung war die elegantere, einfallsreichere. Er bemerkte die Analogie mit Lichtbrechung: Nach Fermat'schem Prinzip nimmt das Licht den Weg der minimalen Zeit, und daraus folgt das Snelliuss'sche Brechungsgesetz $\sin \alpha_1/v_1 = \sin \alpha_2/v_2$, wenn α_1 und α_2 der Einfallswinkel und der Winkel des gebrochenen Lichtstrahls sind (in Bezug auf die Grenzebene zwischen zwei Medien, in denen sich das Licht mit den Geschwindigkeiten

¹³Die hyperbolischen Funktionen wurden von Vincenzo Riccati (1707–1775) in seinem zweiteiligen Werk *Opuscula ad res physicas et mathematicas pertinentium* (1757–1762) eingeführt ([33]).

Abb. 1.27 Illustration zur Johannes Bernoullis Lösung des Brachystochronenproblems



v_1 und v_2 bewegt). Bernoulli betrachtet das infinitesimale rechtwinklige Dreieck (mit Katheten dx i dy und Hypotenuse $\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$, siehe Abb. 1.27) in einem beliebigen Punkt der Brachystochrone und betrachtet sie lokal (um diesen Punkt) als Weg eines Lichtstrahls, welches an der Vertikale durch diesen Punkt bricht. Da nach dem Brechungsgesetz der Sinus des Brechungswinkels proportional zur Geschwindigkeit ist, erhält Johann

$$kv = \sin \alpha = \frac{dx}{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}},$$

woraus die Differenzialgleichung

$$dx = \frac{kv}{\sqrt{1 - k^2 v^2}} dy$$

folgt. Da weiter die Geschwindigkeit vertikal fallender Körper proportional zur Quadratwurzel der zurückgelegten Strecke y ist, also $v = a\sqrt{y}$, erhält Johann endlich die Differenzialgleichung

$$dx = \frac{k\sqrt{y}}{\sqrt{1 - k^2 a^2 y}} dy.$$

Johann löst diese Gleichung und zeigt somit: Die Lösung des Brachystochronenproblems ist eine Zykloide ([14]).

Die Lösung Jakob Bernoullis ist grundverschieden von der Lösung Johans, auch ist sie viel komplizierter, aber für die Geschichte der Mathematik bedeutender. Jakob erkannte nämlich, dass das Brachystochronenproblem eine neue Aufgabenstellung in der Mathematik darstellt. Während bisher mit verschiedenen Methoden die Punkte, in denen eine gegebene Kurve $y = f(x)$ ein Minimum oder Maximum erreicht, gesucht wurden, ist das Brachystochronenproblem ein Problem, in dem unter allen möglichen Kurven diejenige gesucht wird, für die eine bestimmte Eigenschaft minimal oder maximal wird. Somit begründete Jakobs Lösung des Brachystochronenproblems ein neues Teilgebiet der Analysis,

die Variationsrechnung. Man sucht hier unter allen möglichen Kurven y diejenige, für die ein Integral von der Form

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (1.12)$$

einen minimalen oder maximalen Wert annimmt. Da das infinitesimale Element einer Kurve gleich $\sqrt{1 + (y')^2} dx$ ist und die Zeit gleich Weg durch Geschwindigkeit $k\sqrt{y}$ ist, führt das Brachystochronenproblem auf die Minimisierung von

$$\int_a^b \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{y}} dx.$$

Da es sich um die Frage der Minimisierung eines von einer unbekannten Funktion abhängigen linearen Funktional¹⁴ handelt, ist somit Jakob Bernoullis Begründung der Variationsrechnung als Anfang der Funktionalanalysis anzusehen. Die moderne Funktionalanalysis, eine Verallgemeinerung der klassischen Infinitesimalanalysis, entwickelte sich Anfang des 20. Jh. durch Arbeiten von F. Riesz, E. Schmidt, M. R. Fréchet und ganz besonders des polnischen Mathematikers **Stefan Banach** (1892–1945) und des ungarisch-amerikanischen Mathematikers **John von Neumann** (1903–1957) ([50]). Trotz der Wichtigkeit dieses mathematischen Teilgebietes für die moderne Mathematik (und Physik) müssen wir leider auf die Beschreibung der Geschichte der Funktionalanalysis verzichten, um immer noch dem Attribut „kompakt“ im Titel unseres Buches gerecht zu werden.¹⁵

Wie im Abschn. 1.3 beschrieben waren Reihenentwicklungen für Leibniz und Newton, besonders für Newton, ein wichtiges Hilfsmittel der Infinitesimalrechnung. N. Mercator, Gregory, Newton und Leibniz können zwar als Väter der Taylor-Reihen betrachtet werden, den Namen erhielten sie aber nach dem englischen Mathematiker **Brook Taylor** (1685–1731). Taylor veröffentlichte 1715 *Methodus incrementorum directa et inversa*, in der die Taylorreihen in einer für den modernen Leser ungewohnten Form erscheinen, nämlich als Reihe von Zuwächsen (Differenzen), welche eigentlich die Newton-Gregory-Formel für Interpolation ist. Diese wurde unabhängig voneinander von Gregory und Newton um 1670 entdeckt, verbunden mit deren Entdeckung der binomischen Reihe (siehe Abschn. 1.3).

¹⁴Lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen sind Abbildungen mit der Eigenschaft $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ für alle Skalare α, β und Vektoren x, y . Lineare Funktionale sind lineare Abbildungen eines Vektorraumes (hier der Vektorraum der zweimal stetig differenzierbaren Funktionen y) in sein Skalarfeld (hier ist dies \mathbb{R}).

¹⁵Den Leser, der an einer relativ kurzen Übersicht der Geschichte der Begründung der Funktionalanalysis interessiert ist, verweisen wir auf den Artikel *The establishment of functional analysis* von G. Birkhoff und E. Kreyszig (Historia Mathematica 11 (1984), 258–321).

Während wir heute diese Formel in ihrer endlichen Form zwecks Interpolation durch n Punkte benutzen, war sie ursprünglich in ihrer Reihenform

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{b} \Delta f(a) + \frac{(h/b)(h/b-1)}{2!} \Delta^2 f(a) + \dots$$

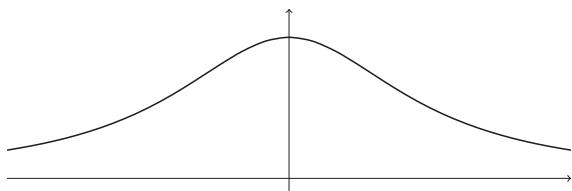
entdeckt, mit $\Delta f(a) = f(a+b)-f(a)$, $\Delta^2 f(a) = \Delta f(a+b)-\Delta f(a) = f(a+2b)-2f(a+b)+f(a)$ usw. Als Grenzfall, wenn $b \rightarrow 0$, erhielt Taylor dann das, was heute Taylorentwicklung einer Funktion genannt wird. Im gleichen Jahr 1715 veröffentlichte Taylor auch das Buch *Linear perspective*, in dem er generelle Prinzipien der linearen Perspektive mathematisch beschreibt. Von Taylor stammt auch der Ausdruck „lineare Perspektive“ ([12, 22, 45, 50]).

Taylors Zeitgenosse, der schottische Mathematiker **Colin Maclaurin** (1698–1746), veröffentlichte 1742 die zweiteilige, 763-seitige *Treatise of fluxions*. Dies war die erste systematische Beschreibung von Newtons Methoden, teilweise als Antwort auf Bischof Berkeleys Kritik gedacht. Dieses Werk half auch, Newtons Ideen auf dem europäischen Kontinent bekanntzumachen (1749 erschien eine französische Übersetzung). Maclaurin benutzt algebraische Ungleichungen, um den Fundamentalsatz der Infinitesimalrechnung zu beweisen. Er zeigt, dass, wenn die Quadratur unter einer Kurve von 0 bis x gleich x^n ist, die Kurve die Gleichung $y = nx^{n-1}$ hat: Zunächst zeigte er, dass $n(x-o)^{n-1}o < x^n - (x-o)^n$ und $(x+o)^n - x^n < n(x+o)^{n-1}o$ gilt und weiter, dass $n(x-o)^{n-1} < y < n(x+o)^{n-1}$ gilt. Daraus zeigte er, dass $y = nx^{n-1}$, nicht einfach durch Grenzwert, wenn $o \rightarrow 0$ (den gab es zu Maclaurins Zeit ja noch nicht, und gerade die Frage solcher Grenzübergänge war ja das Hauptproblem, welches Berkeleys Kritik ansprach), sondern im Stil von Archimedes: Maclaurin zeigte, dass weder $y > nx^{n-1}$ noch $y < nx^{n-1}$ sein kann. Bekannter ist aber Maclaurin für seine Beiträge zur Theorie der unendlichen Reihen. Heute werden Taylor-Entwicklungen um 0 nach ihm Maclaurin-Reihen genannt. Maclaurin benutzte Reihenentwicklungen zur Bestimmung von Maxima und Minima und der Wendepunkten. Maclaurins *Treatise of fluxions* war ein großer Schritt in Richtung Präzisierung der Infinitesimalrechnung, auch enthält dieses Werk viele Anwendungen, auch auf physikalische Probleme und ist somit auch ein Beitrag zur Entstehung der mathematischen Physik ([12, 22, 23]).

Verbunden mit der Geschichte der Infinitesimalrechnung ist auch die älteste erhaltene mathematische Schrift, die von einer Frau verfasst war. Es handelt sich um *Institutioni analitiche* (1748), ein umfassendes und didaktisch durchdachtes Lehrbuch zur Differenzial- und Integralrechnung, von **Maria Gaetana Agnesi** (1718–1799) verfasst. Agnesi war eine italienische Gelehrte, in Philosophie und Linguistik gewandt, im zweiten Lebensabschnitt widmete sie sich verschiedenen Wohltätigkeitsprojekten. Ihr Analysislehrbuch war sehr gepriesen und wurde auch ins Englische übersetzt. In diesem Lehrbuch ist auch die Kurve beschrieben, nach der Agnesi am besten bekannt ist, die Versiera (Abb. 1.28). Es handelt sich um eine algebraische Kurve mit der Gleichung $y = \frac{a^3}{x^2+a^2}$ ([6]).

Die zentrale Figur der Mathematik des 18. Jh. und einer der einflussreichsten Mathematiker der Geschichte ist **Leonhard Euler**. Er hinterließ wichtige Beiträge in allen damals

Abb. 1.28 Versiera der Agnesi



existierenden mathematischen Disziplinen und wird auch als Begründer einiger neuer Disziplinen (analytische Zahlentheorie, siehe 1. Buch, und Topologie, siehe [Abschn. 4.1](#)) angesehen. Seine Beiträge zur mathematischen Analysis sind zahlreich, und eine so kompakte Übersicht der Mathematikgeschichte, wie die unsere es ist, kann leider seinem Beitrag nicht gerecht werden. Nach [6] ist Eulers *Introductio in analysin infinitorum* (1748) für die mathematische Analysis das, was Euklids *Elemente* für die Geometrie oder Al-Hwārizmīs *Al-Kitāb al-muhtaṣar fī hisab al-ğabr wa-l-muqābala* für die Algebra sind.

Kurzbiografie von Leonhard Euler

Leonhard Euler (1707–1783) wurde in Basel geboren, St. Petersburg und Berlin waren aber die Städte, in denen er seine mathematische Karriere machte. Er studierte Philosophie und Recht in Basel, wurde aber zu gleicher Zeit von Johann Bernoulli (der nach dem Tod seines Bruders Jakob dessen Stelle auf der Basler Universität „geerbt“ hatte) ermutigt, Mathematik zu lernen. Als 1727 Daniel Bernoulli, Johanns Sohn, für Euler eine Stelle auf der St. Petersburger Akademie der Wissenschaften fand, siedelte Euler dorthin über. Als Daniel 1733 nach Basel zurückkehrte, wurde Euler Professor der Mathematik an der St. Petersburger Akademie, und die damit verbundene Gehaltserhöhung ermöglichte es Euler zu heiraten. Er hatte 13 Kinder, doch nur fünf davon überlebten das Kindesalter.

Eulers Gesundheitsprobleme begannen schon kurz nach der Heirat. Ein Fieber 1735 hinterließ Folgen, und besonders seine mit Kartografie verbundenen Aufgaben waren zu viel für Eulers Augen. Ab 1738 war er praktisch blind auf dem rechten Auge. Als 1740 die politische Situation in St. Petersburg unruhig wurde, siedelte Euler nach Berlin um, wohin ihn Friedrich der Große verbunden mit seiner Reorganisation der Berliner Akademie eingeladen hatte. In seiner Berliner Zeit verfasste er fast 400 Schriften zu den verschiedensten mathematischen Themen und sogar eine populärwissenschaftliche Schrift unter dem Titel *Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie*. Euler wurde aber zunehmend unzufriedener in Berlin, besonders wegen der Einnahmen Friedrichs des Großen in die Führung der Akademie.

Nachdem Katharina die Große 1762 Kaiserin von Russland wurde, eröffnete sich die Möglichkeit einer Rückkehr Eulers nach St. Petersburg. Euler kehrte 1766 zurück nach St. Petersburg, doch 1771 wurde er nach einer Krankheit vollkommen

blind. Dies hinderte ihn jedoch nicht, weiterzuarbeiten. Sein berühmtes Gedächtnis und zwei seiner Söhne halfen ihm dabei, und ein großer Teil seiner umfangreichen Arbeiten (mehr als 800 während seines Lebens!) wurde in diesem Zeitraum verfasst ([12]).

Besonders bekannt ist Eulers Beitrag zur Theorie der unendlichen Reihen. Am bekanntesten ist, dass er das berühmte Baseler Problem gelöst hat. Euler zeigte 1735, dass

$$\frac{\pi}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}. \quad (1.13)$$

Die Frage der Summation dieser Reihe wird dem italienischen Mathematiker Pietro Mengoli (1625–1686) zugeschrieben. Das Problem wurde bekannt, als es Jakob Bernoulli 1689 beschrieb; beide Brüder Bernoulli versuchten erfolglos, diese Summe zu bestimmen. Euler startete mit der Reihenentwicklung der Funktion Sinus

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Daraus folgt

$$\frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \dots \quad (1.14)$$

Die Lösungen der Gleichung $\frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0$ sind alle $x = (n\pi)^2$ mit ganzzahligem $n \neq 0$. Euler wusste, dass, wenn $p(x) = 0$ eine polynomiale Gleichung mit Lösung a ist, dann $p(x)$ den Faktor $(x - a)$ enthält (dies wurde zuerst von Thomas Harriot (1560–1621) bemerkt, 1637 von René Descartes bewiesen). Wenn x_1, x_2, \dots, x_n alle Nullstellen eines Polynoms $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + 1$ sind, gilt dann $p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$, und es folgt

$$\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} = -a_1.$$

Euler nimmt an, ohne Beweis, dass die Regel „die Summe der Kehrwerte aller Nullstellen ist gleich minus Koeffizient von x^n “ auch für unendliche Polynome, also Potenzreihen, gilt und erhält aus Gl. 1.14

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \pi^2} = \frac{1}{6},$$

woraus Gl. 1.13 folgt ([6, 12, 45]).

Wie man aus dem obigen „Beweis“ sieht, kannte Euler die Potenzreihe für Sinus. Diese, wie auch viele andere, waren schon Newton und Leibniz bekannt, aber Euler erzielte viele neue Resultate zum Thema und fand noch mehr Anwendungsmöglichkeiten der Potenzreihen. In *Introductio in analysin infinitorum* leitet Euler die Potenzreihe für die Exponentialfunktion ab und weiter die berühmte Euler’sche Formel

$$e^{iv} = \cos v + i \sin v \quad (1.15)$$

(das Symbol e für die Basis des natürlichen Logarithmus stammt auch von Euler). Euler betrachtet dafür zunächst eine Basis $a > 1$. Dann kann man annehmen, dass

$$a^\omega = 1 + k\omega,$$

für eine nur von a abhängige Konstante k und ein unendlich kleines ω („so klein, dass es gerade noch nicht null ist“). Newtons Binomialsatz ergibt

$$a^{j\omega} = (1 + k\omega)^j = 1 + \frac{j}{1}k\omega + \frac{j(j-1)}{1 \cdot 2j}jk^2\omega^2 + \frac{j(j-1)(j-2)}{1 \cdot 2j \cdot 3j}j^2k^3\omega^3 + \dots$$

Wenn man $x = j\omega$ nimmt, muss t unendlich groß sein, da ω unendlich klein ist. Also kann man annehmen, dass $\frac{j-1}{j} = \frac{j-2}{j} = \dots = 1$, und man erhält

$$a^x = 1 + \frac{j}{1}x + \frac{j^2}{2!}x^2 + \frac{j^3}{3!}x^3 + \dots$$

Insbesondere erhält man für $x = 1$ und $j = 1$ die Reihendarstellung für e. Diese benutzte Euler, um den Wert von e auf 23 Dezimalstellen genau zu bestimmen ([6, 19, 46]).

Aus der Potenzreihe für die Exponentialfunktion leitet Euler jetzt die Potenzreihen für Sinus und Kosinus ab. Sein Weg ist ganz anders als die Methoden Newtons und Leibniz'. Euler faktorisiert $\cos^2 x + \sin^2 z = 1$ und erhält¹⁶

$$(\cos x + i \sin x)(\cos x - i \sin x) = 1.$$

Daraus folgt

$$(\cos y \pm i \sin y)(\cos z \pm i \sin z) = \cos(y+z) \pm i \sin(y+z)$$

und weiter die Moivres Formel

$$(\cos z \pm i \sin z)^n = \cos(nz) \pm i \sin(nz).$$

¹⁶Zu der Zeit, als er dieses in *Introductio in analysin infinitorum* schrieb, benutzte er noch die alte Bezeichnung $\sqrt{-1}$ für die imaginäre Einheit, aber da gerade Euler das Symbol i später, 1777, eingeführt hat, benutzen wir natürlich dieses Symbol.

Aus dieser Formel erhält man

$$\cos nz = \frac{(\cos z + i \sin z)^n + (\cos z - i \sin z)^n}{2}, \quad (1.16)$$

$$\sin nz = \frac{(\cos z + i \sin z)^n - (\cos z - i \sin z)^n}{2i}. \quad (1.17)$$

Wenn man den Binomialsatz benutzt für ein unendlich großes n und unendlich kleines z (also $\sin z = z$, $\cos z = 1$) mit endlichem Wert $v = nz$, erhält man die Reihenentwicklungen für Sinus und Kosinus. Wenn man andererseits die Gl. 1.16 und 1.17 in der Form

$$\cos v = \frac{(1 + iv/n)^n + (1 - iv/n)^n}{2},$$

$$\sin v = \frac{(1 + iv/n)^n - (1 - iv/n)^n}{2i}$$

schreibt, immer noch mit n unendlich groß, gilt auch $e^{iv} = (1 + \frac{iv}{n})^n$, also ist

$$\cos v = \frac{e^{iv} + e^{-iv}}{2},$$

$$\sin v = \frac{e^{iv} - e^{-iv}}{2i}.$$

Wenn man endlich die erste dieser Gleichungen mit 2 und die andere mit $2i$ multipliziert, addiert und am Ende durch 2 teilt, erhält man die Euler'sche Formel 1.15 ([6, 12, 46, 39]).

Euler bemerkte auch 1755 eine wichtige Eigenschaft der Taylorreihen. Er sagte, dass man, wenn eine Potenzreihe $a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots$ gegeben ist, ein genügend kleines x finden kann, mit der Eigenschaft, dass der Betrag eines beliebigen Terms größer ist als der Betrag des Restes der Reihe nach diesem Term. Er hat diese Behauptung nicht bewiesen, benutzte sie aber, um Minima und Maxima zu bestimmen. Wenn beispielsweise $f(x)$ ein lokales Maximum der Funktion f ist, gilt für kleine $h > 0$

$$f(x) > f(x \pm h) = f(x) \pm h \frac{df}{dx}(x) + h^2 \frac{d^2f}{dx^2}(x) \pm \dots$$

Wenn h genügend klein ist, ist $|h \frac{df}{dx}(x)|$ größer als der Betrag der Restreihe. Da die Ungleichung für $+h$ und $-h$ gleichermaßen gelten muss, bedeutet dies, dass $\frac{df}{dx}(x) = 0$ sein muss. Auch folgt, weil $h^2 > 0$, wenn $\frac{d^2f}{dx^2}(x) \neq 0$, dass $\frac{d^2f}{dx^2}(x) < 0$ wenn $f(x)$ ein lokales Maximum ist ([22]).

Euler war der Erste, der den Begriff der Funktion als fundamentalen mathematischen Begriff hervorhebt und Analysis als das Teilgebiet der Mathematik beschreibt, welches sich mit Funktionen befasst. In *Institutiones calculi differentialis* versucht er, teilweise

durch die weiter unten beschriebene Betrachtung des Problems der Saitenschwingung inspiriert, den Begriff der Funktion zu definieren ([12, 42]):

► **Definition 1.3 (Funktion, Eulers Definition (1755))** Eine Funktion einer variablen Größe ist ein analytischer Ausdruck, welcher in irgendeiner Weise aus dieser variablen Größe und Zahlen oder konstanten Größen zusammengesetzt ist.

Natürlich ist dies noch weit von der modernen Definition entfernt, insbesondere erklärt Euler nicht, was er unter „analytischem Ausdruck“ versteht. Aus dem Rest des Textes ist aber offensichtlich, dass er damit die mathematischen Formeln meint, mit denen Funktionsregeln beschrieben werden, und auch, dass er als solche auch unendliche Ausdrücke (Reihen, unendliche Produkte und Kettenbrüche) zulässt. Euler teilt die Funktionen in algebraische und transzendentale und schlägt vor, die transzententalen Funktionen durch ihre Potenzreihenentwicklungen zu studieren (er achtete aber nicht immer, sogar oft nicht, auf den Konvergenzbereich). Er ist der Erste, der die Logarithmen systematisch als Exponenten interpretiert (vor ihm wurden sie durch die Korrespondenz zwischen einer arithmetischen Folge und einer geometrischen Folge, siehe 1. Buch, verstanden). Auch die trigonometrischen Funktionen sind jetzt Funktionen, die über ihre Reihenentwicklungen verstanden werden. Euler definierte in *Introductio in analysin infinitorum* auch die Gamma-Funktion, die Erweiterung der Fakultäten $n!$ auf reelle Zahlen.¹⁷ Bei Euler trifft man auch zum ersten Mal den Begriff „stetige Funktion“, aber noch nicht in der modernen Bedeutung. Die Stetigkeit bei Euler bedeutet, dass der analytische Ausdruck der Funktion ein einzelner ist, also nicht durch verschiedene Formeln auf verschiedenen Teilen der Domäne definiert ist. Auch das Symbol $f(x)$ für Funktion der Variable x stammt von Euler; er verwendete es zum ersten Mal 1734 ([12, 17, 42]).

Historisch interessant ist auch Eulers Behandlung der Leibniz'schen Differenziale dx . Er versucht, deren zweifelhafte Natur (gleich null und zugleich nicht gleich null) durch die folgende „Definition“ zu klären: „Denen, die fragen, was die infinitesimal kleine Größe in Mathematik ist, antworten wir: Sie ist eigentlich gleich null“ (*Institutiones calculi differentialis*, 1755). Er begründet dies dadurch, dass $x \cdot 0 = 0$ für jedes x , also $\frac{0}{0}$ jeden beliebigen Wert annehmen kann. Wenn $dx = 0$, erklärt das auch, warum $adx = 0$ für jede endliche Größe a . Doch sind Differenziale verschiedener Variablen bei Euler verschiedene Nullen: Während $\frac{dx}{dx} = 1$ ist, kann $\frac{dy}{dx}$ verschiedene Werte annehmen. Auch kann Euler mit seinem Argument die Streichung der höheren Potenzen der Differenziale in Ausdrücken erklären, beispielsweise folgt aus $\frac{dx+(dx)^2}{dx} = 1 + dx = 1$, dass $dx + (dx)^2 = dx$. Das Differenzial eines Ausdrucks $a(x, y)$ ist dann die Differenz von $a(x + dx, y + dy)$ und $a(x, y)$. Euler verwendet diese Idee konsequent weiter und erhält die Regeln für das Differenzieren

¹⁷Das Symbol $n!$ für Fakultäten stammt von Christian Kramp, der ihn 1808 einführte, er benutzte dafür auch die Bezeichnung *facultes* ([7]).

im Allgemeinen sowie Formeln für Differenziale verschiedener Elementarfunktionen. Wir geben im Folgenden zwei Beispiele ([17]).

Beispiel 1.9 (Eulers Beweis der Quotientenregel)

Euler benutzt zunächst die geometrische Reihe:

$$\frac{1}{1+dq} = \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{1+dq/q} = \frac{1}{q} \left(1 - \frac{dq}{q} + \frac{dq^2}{q^2} - \dots \right) = \frac{1}{q} - \frac{dq}{q^2}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} d\left(\frac{p}{q}\right) &= \frac{p+dp}{q+dq} - \frac{p}{q} = (p+dp)\left(\frac{1}{q} - \frac{dq}{q^2}\right) - \frac{p}{q} = \\ &= \frac{p}{q} - \frac{pdq}{q^2} + \frac{dp}{q} - \frac{dpdq}{q^2} - \frac{p}{q} = \frac{qdp - pdq}{q^2}. \end{aligned}$$

Beispiel 1.10 (Differenzial von Sinus nach Euler)

Da

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

gilt, folgt für $y = \sin x$

$$dy = \sin(x+dx) - \sin x = \sin x \cos(dx) + \sin(dx) \cos x - \sin x.$$

Da dx eigentlich gleich 0 ist, ist $\cos(dx) = 1$ und $\sin(dx) = 0$, und es verbleibt $dy = \cos x dx$.

Man kann auch aus den obigen Beispielen bemerken: Zu Eulers Zeit war die Differentialrechnung immer noch, wie im Original bei Leibniz, wirklich Rechnung mit Differentialen.

In *Insistitutiones calculi integralis* (1768–1770) definiert Euler, wie vor ihm Leibniz und Johann Bernoulli, Integrale als formale Inversen von Differentialen, beispielsweise folgt aus der im Beispiel 1.10 erhaltenen Formel, dass $\int \cos x dx = \sin x$, plus/minus eine geeignete Konstante. Im gleichen Werk findet man auch die erste systematische Darlegung der Infinitesimalrechnung für Funktionen mit mehreren Variablen. Er konnte beispielsweise zeigen, dass für eine Funktion $y = f(x_1, x_2, \dots)$ das entsprechende Differenzial dy in der Form $dy = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \dots$ darstellbar ist, wobei p_1, p_2, \dots Funktionen von x_1, x_2, \dots sind. Details zu seinem Beweis dieser Form des totalen Differenzials findet man in [17].

Euler arbeitete auch an Problemen der Variationsrechnung. Seine *Methodus inventiendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis*

isoperimetrici latissimo sensu accepti erschien 1744 und enthält viele Beispiele und auch die Verallgemeinerung der ursprünglichen Variante Jakob Bernoullis auf den Fall, dass der Integrand F in Gl. 1.12 höhere Ableitungen von y enthält. Euler bemerkte auch, dass die Aufgabe erst durch Angabe von Festpunkten, durch die die gesuchte Kurve laufen soll, eindeutig wird. Auch leistete Euler bedeutende Beiträge zur Theorie der Differentialgleichungen, unter anderem war er einer der Ersten, die sich mit partiellen Differentialgleichungen beschäftigten und beschrieb die Lösungen homogener linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Er beschrieb auch verschiedene Lösungsmethoden für Differentialgleichungen ([12, 50]).

Jean le Rond d'Alembert (1717–1783) war das uneheliche Kind eines Artillerieoffiziers und einer ehemaligen Nonne, die in ihrem späterem Leben in viele Liebeleien und politische Intrigen verwickelt worden war. Die Mutter legte das neugeborene Kind auf der Treppe der Pariser Kirche St. Jean le Rond ab, und so wurde er als Jean le Rond getauft und in ein Heim für Waisen gebracht. Sein Vater fand ihn jedoch bald darauf und sorgte dafür, dass der Junge in der Familie eines Gläzers aufwuchs und auch, dass er eine private Schule besuchen konnte. Als der Vater 1726 starb, hinterließ er Jean le Rond genügend Geld, um ausgebildet zu werden. Er wurde in ein jansenistisches Kolleg eingeschrieben, bald darauf nannte er sich selbst Jean d'Alembert. In dieser Schule lernte er Mathematik und Physik, nach Schulabschluss 1735 entschied er sich für eine Karriere im Recht, in der Freizeit widmete er sich aber der Mathematik. Als er sich 1738 zum Rechtsanwalt qualifizierte, entschloss er sich, dass diese Karriere nichts für ihn sei, versuchte sich eine kurze Zeit in der Medizin, aber seine ganze Leidenschaft galt der Mathematik, und er widmete sich bald darauf vollständig seinem Lieblingsthema. Er wurde berühmt für seine Beiträge zur Infinitesimalrechnung und ganz besonders zur mathematischen Physik. D'Alembert gilt als Begründer der Theorie der partiellen Differentialgleichungen und deren Anwendungen in der Physik. Er verbrachte sein ganzes Leben in Paris, bis auf wenige Reisen, wirkte an der Akademie der Wissenschaften, suchte oft Streit mit Kollegen (berühmt ist seine Rivalität mit dem Mathematiker und Physiker Alexis Clairaut, und auch die anfangs guten Beziehungen zu Euler endeten in Streit), wurde einer der Herausgeber und Autoren der *Encyclopédie* Diderots, im zweiten Lebensabschnitt beschäftigte er sich auch mit Philosophie. Er starb an einer Blasenkrankheit und wurde in einem Gemeinschaftsgrab begraben, da er als Atheist bekannt war ([12]).

Wie schon gesagt, war das größte Problem mit der Infinitesimalrechnung die nicht geklärte Frage ihrer Grundlagen. Der Erste, oder einer der Ersten, der bemerkte, dass für die Begründung der Infinitesimalrechnung Grenzwerte fundamental sind, war **Jean le Rond d'Alembert**. Er war einer der Herausgeber der *Encyclopédie* Diderot's, und in seinem

Artikel zum Begriff *Differential* definierte er die Ableitung als Grenzwert des entsprechenden Differenzenquotienten, war also wohl der erste bekannte Mathematiker, der die Ableitung als besonderen Begriff in der Infinitesimalrechnung betrachtete. Leider war er aber außerstande, den Begriff des Grenzwerts hinreichend präzise zu erklären. Andererseits führten ihn seine Überlegungen zum Thema Grenzwerte zum Konvergenzkriterium für Reihen, das heute seinen Namen trägt ([6, 12, 16]).

D'Alembert befasste sich auch viel mit Differentialgleichungen. Unter anderem beschäftigte er sich mit Systemen linearer Differentialgleichungen. Seine wichtigsten Beiträge zum Thema liegen aber im Bereich der partiellen Differentialgleichungen und physikalischen Anwendungen. Besonders berühmt sind seine Resultate über Saitenschwingungen. Er begann mit der Grundform $y = a \sin(\frac{\pi}{l}x)$, die von Taylor 1715 beschrieben wurde (a ist die Schwingungsamplitude, l ist die Saitenlänge). Diese Form beschreibt aber nur eine der möglichen „Momentanaufnahmen“ der Saite. D'Alembert konnte 1747 auch die Zeitabhängigkeit miteinbeziehen und die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

(mit Randbedingungen $y(0, t) = y(L, t) = 0$) aufstellen. Er konnte auch ihre allgemeine Lösung als $y = f(s+x) + f(s-x)$ bestimmen, wobei f eine beliebige periodische, ungerade, zweimal differenzierbare differenzierbare Funktion ist. Euler erhielt 1748 grundsätzlich die gleiche Lösung, behauptete zugleich, dass die Funktion f durch Angabe von Anfangsbedingungen (Anfangsposition $Y(x)$ und Anfangsgeschwindigkeit $V(x)$) eindeutig bestimmt ist. Nach Euler ist

$$y(x, t) = \frac{1}{2} \left(Y(x+ct) + Y(x-ct) + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} V(s) ds \right),$$

und Euler lässt sogar zu, dass Y und V nicht Funktionen im üblichen Sinne sein müssen, sondern dass deren Graphen irgendeine mit der Hand zu zeichnende Form haben können. Dies alles mag dem heutigen Leser unklar erscheinen. Wenn man sich aber erinnert, dass der Begriff der Funktion zu dieser Zeit noch nicht klar ausgebildet war, und bedenkt, dass man damals Funktionen mit Formeln, inklusive unendlicher Reihen (siehe die etwas spätere [Definition 1.3](#) Eulers), gleichsetzte, wird einiges klarer. Diese Formeln, also Funktionen in dem Sinne der Mitte des 18. Jh., verstand man als differenzierbar. Andererseits ist es leicht einzusehen, dass die Saite auch nicht differenzierbare, also noch allgemeinere, Formen annehmen kann, beispielsweise eine Dreiecksform im Zupfmoment. Somit entstand eine Diskussion, was eigentlich D'Alemberts „allgemeine“ Funktionen sein sollten ([2, 42, 45, 50]).

Nur kurz darauf, 1753, argumentierte **Daniel Bernoulli** (1700–1782), Sohn Johann Bernoullis, dass die Schwingung als Überlagerung (Superposition) sinusoidaler Wellen zu beschreiben ist. Dies war nicht nur eine physikalische Rechtfertigung einer früheren

(1744) Idee Eulers, einzelne algebraische Funktionen als trigonometrische Reihen darzustellen, es erweiterte die gerade erwähnten Diskussionen. Bernoulli behauptete 1753, dass die allgemeine Lösung der Wellengleichung in der Form

$$y = a_1 \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right) \cos\left(\frac{\pi c}{l}t\right) + a_2 \sin\left(\frac{2\pi}{l}x\right) \cos\left(\frac{2\pi c}{l}t\right) + \dots$$

darstellbar ist, ja er behauptete sogar, dass mit geeigneter Wahl der Koeffizienten a_n und c jede Funktion in dieser Form dargestellt werden kann. Die natürliche Frage, ob man D'Alemberts „beliebige“ Funktion in der Form einer trigonometrischen Reihe darstellen konnte, wurde aufgeworfen. Da Daniel Bernoulli dies nicht beweisen, sondern nur physikalisch argumentieren und keine Regel zur Bestimmung der Koeffizienten angeben konnte, argumentierten Euler, D'Alembert und auch etwas später Lagrange gegen Bernoullis Lösungsvorschlag, betrachteten seine Idee als noch restriktiver als das ursprüngliche Resultat D'Alemberts. Erst durch Fouriers und Dirichlets Resultate in den ersten Jahrzehnten des 19. Jh. wurde Daniel Bernoullis Behauptung gerechtfertigt. Auch sonst ist Daniel Bernoulli besonders in der mathematischen Physik, inklusive deren Anwendungen auf medizinische Fragen, berühmt. Nach seinem Hauptwerk *Hydrodynamica* (1738) erhielt eine ganze Teildisziplin der Physik ihren Namen ([42, 45, 47, 50]).

Im zweiten Teil des 18. Jh. wurden immer mehr Anwendungen der Infinitesimalrechnung gefunden, außerhalb, aber auch innerhalb der Mathematik. So begründete **Gaspard Monge** (1746–1818) mit seiner *Application de l'analyse à la géométrie* (1800) die Differentialgeometrie. Viele neue physikalische Anwendungen wurden von **Joseph-Louis Lagrange** gefunden. Er entwickelte eine Neuformulierung der klassischen Mechanik, die als analytische oder Lagrange-Mechanik bekannt ist. In seiner *Mécanique analytique* (1788) findet man die berühmten Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

mit denen der Bewegungsablauf eines Systems von n Massenpunkten mit (generalisierten) Koordinaten q_i und zugehörigen Kräften Q_i beschrieben ist, wenn $T(t, q_i, \dot{q}_i)$ die kinetische Energie des Systems ist (mit t ist wie üblich die Zeit bezeichnet) [50].

Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) war ein italienisch-französischer Mathematiker, besonders für seine Beiträge zur Analysis und mathematischen Physik berühmt, aber auch als Zahlentheoretiker und Algebraiker (siehe 1. Buch). Er wurde in Turin in einer italienischen Familie geboren und als Giuseppe Lodovico Lagrangia getauft, sein Urgroßvater väterlicherseits war ein Kavallerieoffizier der französischen Armee, und Lagrange zog schon als Jugendlicher diese französische Seite seiner Familie vor. Lagranges Vater verlor viel Geld durch erfolglose Spekulationen, sodass die Familie nicht reich war. Lagrange sagte später: „Wenn ich reich gewesen

wäre, hätte ich mich wahrscheinlich nicht der Mathematik gewidmet“. Anfangs studierte er Recht, nach der Lektüre eines Werkes Halley über Anwendungen der Algebra in der Optik entdeckte er 1693 sein Interesse für Mathematik und Physik. Er wurde ein größtenteils autodidaktisch ausgebildeter Mathematiker, und mit nur 19 Jahren wurde er schon Professor der Mathematik an der Königlichen Artillerieschule in Turin. Im Jahr 1766, als Euler nach St. Petersburg zurückzog, bekam Lagrange mit Unterstützung d'Alemberts Eulers Stelle an der Berliner Akademie. Ein Jahr später heiratete er, die Ehe blieb kinderlos. Lagrange blieb 20 Jahre lang in Berlin, konnte mit seinen Arbeiten zahlreiche wissenschaftliche Preise gewinnen. Seine Frau starb 1783, er selbst hatte auch gesundheitliche Probleme, und nach dem Tod Friedrichs des Großen nahm er das Angebot der Pariser Akademie an und zog 1787 dorthin. Die französische Revolution überstand er ohne größere Probleme, wohl wegen seiner Auffassung, dass allgemein „eines der wichtigsten Prinzipien jedes weisen Mannes ist, sich den Gesetzen des Landes, in dem er lebt, anzupassen, auch wenn sie unvernünftig sind“. Im Jahr 1792 heiratete er erneut, dieses mal die junge Tochter eines seiner Kollegen. In den 1790er-Jahren lehrte er an den berühmten *École Polytechnique* und *École Normale*, war aber nicht als guter Vortragender bekannt. Unter Napoleon wurde er zum Grafen ernannt, zwei Tage vor seinem Tod wurde er mit dem Orden *Grand Croix of the Ordre Impérial de la Réunion* geehrt ([12]).

Lagrange versuchte Ende des 18. Jh., die Frage der mathematisch rigorosen Definition der Ableitung durch Verwendung von Taylorentwicklungen zu lösen. Nach Lagrange soll die Infinitesimalrechnung auf Algebra der unendlichen Reihen reduziert werden. Nach Lagranges Auffassung (man vergleiche damit auch die im Abschn. 1.3 zitierte Aussage Newtons) ist das Rechnen mit unendlichen Reihen genauso immer noch Algebra wie das Rechnen mit endlichen algebraischen Ausdrücken, wie das Rechnen mit unendlichen Dezimalbrüchen immer noch Arithmetik ist. So war die Entwicklung von $f(x + h)$ in eine Potenzreihe für Lagrange ein algebraischer Prozess. Lagrange dachte 1797 (*Théorie des fonctions analytiques*), dass er bewiesen hat, dass jede Funktion (immer noch, wie bei Euler, mit einem analytischen Ausdruck identifiziert) eine Potenzreihenentwicklung in der Form

$$f(x + h) = f(x) + p(x)h + q(x)h^2 + r(x)h^3 + \dots \quad (1.18)$$

besitzt (bis auf eventuell endlich viele Stellen x) und definiert die Ableitung (Derivation) der Funktion f und höhere Ableitungen als

$$\begin{aligned} f'(x) &= p(x), \\ f''(x) &= 2q(x), \\ f'''(x) &= 6r(x), \\ &\dots \end{aligned}$$

Lagranges Versuch der Definition der Ableitung einer Funktion ist der erste Versuch, welcher Newtons physikalische Überlegungen oder Leibniz' Quotienten infinitesimaler Größen vermeidet. Die Ableitungen sind jetzt auch Funktionen, wie eben f es ist. Auch die Symbolik $f'(x), f''(x), \dots$ für Ableitungen stammt von Lagrange selbst (eigentlich schrieb Lagrange f_x, f'_x, f''_x für $f(x), f'(x), f''(x)$, siehe [7]). Für Lagrange ist die Fundamentaleigenschaft der Ableitung, dass

$$f(x+i) = f(x) + i f'(x) + iV,$$

wenn man i für jedes D so klein wählen kann, dass sich V zwischen $-D$ und D befindet. Daraus folgert Lagrange:

Theorem 1.8 (Zwischenwertsatz, Lagranges Formulierung) *Für jedes D kann ein i gefunden werden mit der Eigenschaft*

$$i(f'(x) - D) < f(x+i) - f(x) < i(f'(x) + D).$$

Es ist unschwer zu erkennen, dass diese Form quasi die moderne $\varepsilon - \delta$ -Definition der Ableitung ist, doch ist sie hier nur ein Satz, der aus einem leider nicht korrekt bewiesenen Satz folgt. Diesen Satz benutzt Lagrange weiter, um verschiedene Eigenschaften von Ableitungen zu beweisen, beispielsweise, dass eine positive Ableitung auf eine steigende und eine negative Ableitung auf eine fallende Funktion hinweist oder um das Lagrange'sche Restglied der Taylorentwicklung zu erhalten ([6, 20, 22]).

Nun gab es ja das eine „kleine“ Problem mit Lagranges Resultaten über Ableitungen: Sie sind aus der nicht korrekt bewiesenen und eben nicht so generell gültigen [Entwicklung 1.18](#) abgeleitet. Es fehlten also noch einige Schritte bis zur endlichen rigorosen Definition der Grenzwerte, Ableitungen und Integrale. Dies schaffte **Augustin-Louis Cauchy** durch Benutzung von Ungleichungen. Cauchy war der Erste, der bemerkte, dass Taylorentwicklungen nicht so selbstverständlich sind, wie sie bei Lagrange erscheinen:

Beispiel 1.11 (Cauchys Funktion)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die durch

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

definiert ist ([Abb. 1.29](#)), hat dieselbe Taylorentwicklung um 0 wie die Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 0$. Funktionen sind also im Allgemeinen nicht durch ihre Taylorreihen bestimmt ([6]).

In drei Schriften in den 1820er-Jahren (*Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique*, 1821; *Résumé des lecons sur le calcul infinitesimal*, 1823; *Lecons sur le calcul différentiel*,

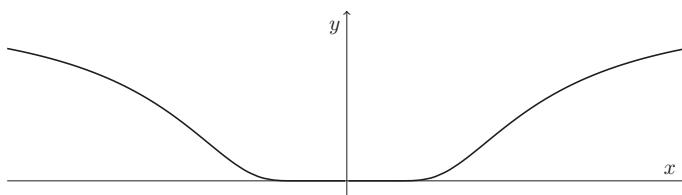


Abb. 1.29 Cauchys Beispiel einer Funktion, die nicht mit ihrer Taylor-Entwicklung übereinstimmt

1829) transformierte Cauchy die Infinitesimalrechnung in die moderne Form. Im *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique* gibt Cauchy seine Definition der Funktion, des Grenzwertes und der Stetigkeit:

► **Definition 1.4 (Funktion, Cauchys Definition (1821))** Wenn variable Größen so miteinander verbunden sind, dass, wenn der Wert einer davon gegeben ist, daraus die Werte der anderen bestimmt werden können, werden im Allgemeinen diese verschiedenen Größen über diese eine ausgedrückt, die dann unabhängige Variable genannt wird; und die anderen Größen, die über die unabhängige Variable ausgedrückt sind, sind die, die Funktionen dieser Variablen genannt werden.

Mit der obigen Definition versuchte Cauchy, implizit und explizit definierte Funktionen zu umfassen, aber – wie Euler – ist seine Vorstellung von Funktionen mit den entsprechenden Formeln gleichgesetzt ([12]).

Oft wird gesagt, dass Cauchy die $\varepsilon - \delta$ -Sprache in die Analysis eingeführt hat. Dies stimmt nicht ganz, obwohl seine Definitionen und Beweise leicht in eine $\varepsilon - \delta$ -Version umgewandelt werden können. Cauchy definierte den Grenzwert so:

► **Definition 1.5 (Grenzwert, Cauchys Definition (1821))** Wenn sich aufeinanderfolgende Werte, die einer Variablen zugeschrieben sind, unbegrenzt einem bestimmten Wert nähern, sodass am Ende die Differenz zu ihm so klein, wie man will, wird, wird der letzte Wert der Grenzwert der anderen Werte genannt.

Cauchy behauptet weiter, dass unendlich kleine (infinitesimale) Größen die Größen sind, deren Grenzwert gleich null ist. D'Alemberts frühere (1765) Beschreibung von Grenzwerten war inhaltlich der obigen Definition Cauchys ähnlich, bei beiden kann man den Satzteil „für jedes $\varepsilon > 0$ “ herauslesen, aber nicht den Teil „existiert $\delta > 0$ “. Im Gegensatz zu D'Alembert (der seine Definition innerhalb eines enzyklopädischen Artikels schrieb) benutzt Cauchy seine Definition, um Sätze zu beweisen. Auch ist Cauchys Hintergrundkonzept der Variablen, denen nach einer Regel Werte zugewiesen werden, tiefer als die alte Denkweise über Approximationen als Rechenprozesse ([6, 16]).

Weiter definiert Cauchy auch stetige Funktionen (nach [16] übersetzt):

► **Definition 1.6 (Stetige Funktion, Cauchys Definition (1821))** Die Funktion $f(x)$ ist eine stetige Funktion der Variablen x innerhalb zwei gegebener Grenzen, wenn für jedes x zwischen diesen Grenzen der numerische Wert der Differenz $f(x+\alpha) - f(x)$ sich zusammen mit α unendlich verringert. Mit anderen Worten, die Funktion $f(x)$ bleibt stetig in Bezug auf x zwischen diesen gegebenen Grenzen, wenn, zwischen den Grenzen, ein unendlich kleiner Zuwachs der Variable immer einen unendlich kleinen Zuwachs der Funktion ergibt.

Vier Jahre früher gab der Prager Mathematiker und Priester **Bernard Bolzano** (1781–1848) eine ähnliche Definition:

► **Definition 1.7 (Stetige Funktion, Bolzanos Definition)** „Nach einer richtigen Erklärung nähmlich versteht man unter der Redensart, dass eine Function $f(x)$ für alle Werthe von x , die inner- oder ausserhalb gewisser Grenzen liegen, nach dem Gesetze der Stetigkeit sich andere, nur so viel, dass, wenn x irgend ein solcher Werth ist, der Unterschied $f(x + \omega) - f(x)$ kleiner als jede gegebene Grösse gemacht werden könne, wenn man nur ω so klein, als man nur immer will, annehmen kann.“ ([16])

Bolzano benutzt diese Definition, um zu beweisen, dass Polynome stetige Funktionen sind, der Beweis ist ein $\varepsilon - \delta$ -Beweis (mit Notation D für unser ε und ω_1 für unser δ). Bolzanos mathematische Beiträge wurden aber erst in der zweiten Hälfte des 19. Jh. bekannt, anscheinend weil er kaum Kontakte außerhalb von Prag hatte ([16, 42]).

Im Jahr 1823 gab Cauchy die moderne Definition der Ableitung ([22]):

► **Definition 1.8 (Ableitung)** Die Ableitung $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$ ist der Grenzwert, wenn er existiert, des Quotienten

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

wenn h gegen 0 strebt.

Er benutzt seine Definitionen, um beispielsweise den Zwischenwertsatz zu beweisen:

Theorem 1.9 (Zwischenwertsatz, Cauchys Formulierung) Wenn $f(x)$ auf $[x, x+a]$ stetig ist, gilt

$$\min_{[x,x+a]} f'(x) \leq \frac{f(x+a) - f(x)}{a} \leq \max_{[x,x+a]} f'(x).$$

Der Anfang des entsprechenden Beweises lautet bei Cauchy: „Seien δ, ϵ zwei sehr kleine Zahlen; die erste wird so gewählt, dass für alle Werte von i , die kleiner als δ sind,

und für alle Werte von x das Verhältnis $(f(x + i) - f(x))/i$ immer größer als $f'(x) - \varepsilon$ und kleiner als $f'(x) + \varepsilon$ ist“. Doch in anderen Beweisen benutzt Cauchy andere Notation, auch oft einfach Worte, um die Ungleichungen auszudrücken. Man muss jedoch bemerken, dass das, was wir heute $\varepsilon - \delta$ -Argumente nennen, also Argumente über Ungleichungen, schon vor Bolzano und Cauchy vereinzelt zu finden sind, beispielsweise bei Lagrange (siehe oben), ([16, 22]).

Augustin-Louis Cauchys (1789–1857) erste Lebensjahre sind von der Französischen Revolution geprägt. Im Jahr 1793, während der Terrorherrschaft, floh seine Familie auf das Land, sie konnten aber schon bald nach Paris zurückkehren, und Lagrange und Laplace waren oft Gäste im Heim der Cauchys. Seinen ersten akademischen Posten, eine Dozentposition in Analysis, erhielt er 1815 an der *École Polytechnique* (wo er auch studiert hatte). Berühmt wurde er 1816 durch einen Artikel, in dem er ein Problem Fermats bezüglich Polygonalzahlen gelöst hatte. Bald darauf, als Carnot und Monge politisch nicht mehr akzeptabel waren und aus der Akademie entlassen wurden, bekam Cauchy einen der so frei gewordenen Plätze. In den 1820er-Jahren stellte er die reelle Analysis auf neue, rigorosere, Fundamente und begründete die komplexe Analysis. Seine Beziehungen mit anderen Wissenschaftlern waren eher schlecht, insbesondere durch seine radikale, fast fanatische, katholische Einstellung. Als der norwegische Mathematiker Niels Henrik Abel ihn in 1826 in Paris besuchte, bemerkte er: „Cauchy ist verrückt, und man kann nichts dazu tun, doch ist er im Moment der Einzige, der wirklich weiß, wie Mathematik getan werden sollte“. Oft verloren sich an ihn gesendete Arbeiten anderer Wissenschaftler (Abels, Galois', ...) in Cauchys Schubladen, entweder komplett, oder sie wurden erst viel später rezensiert. Nicht selten veröffentlichte er Resultate anderer Mathematiker unter seinem Namen. Cauchy war zeitlebens ein konsequenter Unterstützer der Dynastie der Bourbonen. So ging er nach der Julirevolution 1830 in freiwilliges Exil und weigerte sich, dem neuen Regime einen Eid abzulegen. Er kehrte erst 1838 nach Paris zurück, konnte zwar seine Position an der Akademie wieder beziehen, erhielt aber seine Lehrpositionen nicht zurück. Auch verschiedene andere Positionen wurden ihm später wegen seiner politischen und religiösen Überzeugungen verweigert. Nach Umsturz von Louis-Philippe 1848 bekam er seine Universitätspositionen wieder, aber seine Beziehungen zu anderen (insbesondere Liouville) blieben schlecht und gespannt. Trotz seiner umstrittenen Persönlichkeit ist er zweifelslos einer der größten Mathematiker des 19. Jh., und auch einer der produktivsten Mathematiker überhaupt – er schrieb sogar 789 mathematische Artikel ([12]).

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) entwickelte, verbunden mit seiner Beschäftigung mit der Verbreitung der Wärme, die Theorie der trigonometrischen Reihen.

Wie wir gesehen haben, war er nicht der Erste, der an die Entwicklung von periodischen Funktionen in Termen von Sinus- und Kosinusfunktionen gedacht hat, seine Theorie war aber allgemeiner. Nach Fourier kann jede Funktion auf jedem Intervall durch eine trigonometrische Reihe dargestellt werden. Er gab zwar keinen Beweis, dafür aber mehrere überzeugende Beispiele von Anwendungen, und ihm zu Ehren werden deswegen heute trigonometrische Reihenentwicklungen von Funktionen Fourierreihen genannt. Damit verbundene Betrachtungen zur Natur von Funktionen brachten Fourier zur folgenden Definition einer Funktion, ein Versuch, sich von der bisher üblichen Identifikation von Funktionen mit Formeln zu entfernen:

► **Definition 1.9 (Funktion, Fouriers Definition (1822))** Allgemein stellt die Funktion $f(x)$ eine Folge von Werten oder Ordinaten dar, von denen jede willkürlich ist. Für unendlich viele gegebene Werte auf der Abszisse x existiert die gleiche Anzahl von Ordinaten $f(x)$. Alle haben bestimmte numerische Werte, positiv, negativ oder Null. Wir nehmen nicht an, dass diese Ordinaten einem allgemeinen Gesetz folgen; sie folgen eine auf die andere in irgendeiner Weise, und jede von ihnen ist gegeben, als ob sie eine einzelne Größe wäre.

Um 1820 führte Fourier die Bezeichnung \int_a^b für bestimmte Integrale ([7, 12, 42, 45, 47]).

Die Theorie der Fourierreihen wurde von **Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet** (1805–1859) weiterentwickelt. Er fand 1829 die ausreichenden Bedingungen, dass eine Funktion mit ihrer Fourierreihe übereinstimmt (sogenannte Dirichlet-Bedingungen). Dies war auch das erste rigorose Resultat zum Thema, später leisteten Heine und Cantor (siehe auch Abschn. 5.2) wichtige Beiträge dazu. In *Über die Darstellung ganz willkürlicher Funktionen durch Sinus- und Cosinusreihen* gibt Dirichlet die fast ganz moderne Definition einer Funktion:

► **Definition 1.10 (Funktion, Dirichlets Definition (1837))** „Man denke sich unter a und b zwei feste Werthe und unter x eine veränderliche Grösse, welche nach und nach alle zwischen a und b liegenden Werthe annehmen soll. Entspricht nun jedem x ein einziges, endliches y , und zwar so, dass, während x das Intervall von a bis b stetig durchläuft, $y = f(x)$ sich ebenfalls allmählich verändert, so heisst y eine stetige oder continuirliche Function von x für dieses Intervall. Es ist dabei gar nicht nöthig, dass y in diesem ganzen Intervalle nach demselben Gesetze von x abhängig sei, ja man braucht nicht einmal an eine durch mathematische Operationen ausdrückbare Abhängigkeit zu denken. Geometrisch darstellt, d. h. x und y als Abszisse und Ordinate gedacht, erscheint eine stetige Function als eine zusammenhängende Curve von der jeder zwischen a und b enthaltenen Abszisse nur ein Punkt entspricht. Diese Definition schreibt den einzelnen Theilen der Curve kein gemeinsames Gesetz vor; man kann sich dieselbe aus den verschiedenartigsten Theilen zusammengesetzt oder ganz gesetzlos gezeichnet denken. Es geht hieraus hervor, dass eine solche Function für ein Intervall als vollständig bestimmt nur dann anzusehen ist, wenn sie entweder für den ganzen Umfang desselben graphisch gegeben ist, oder mathematischen, für die einzelnen Theile desselben geltenden Gesetzen unterworfen wird.“

So lange man über eine Function nur für einen Theil des Intervalls bestimmt hat, bleibt die Art ihrer Fortsetzung für das übrige Intervall ganz Willkür überlassen.“ ([51])

Eine fast gleiche Definition stammt von **Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski** (1792–1856); auch in seiner Definition (1838) wird noch die Stetigkeit verlangt, aber man kann sie, wie auch Dirichlets, leicht auf nichtstetige Funktionen generalisieren ([12, 51]).

Die Analysis bekam ihr vollkommen rigoroses, modernes Gewand durch die Arbeit Karl Weierstraß’.

Karl Weierstraß (1815–1897) zeichnete sich schon im Gymnasium durch außerordentliches mathematisches Verständnis aus, doch immatrikulierte er sich auf Wunsch seines Vaters für ein Studium des Rechts, der Finanzen und der Wirtschaft in Bonn. Weierstraß litt aber unter der Zerrissenheit zwischen dem Studium und seiner eigentlichen Liebe, der Mathematik. Anstatt die Vorlesungen zu besuchen (er besuchte auch keine mathematischen Vorlesungen), verbrachte er 4 Jahre mit Trinken und Fechten, studierte aber mathematische Literatur (Laplace, Jacobi, Abel, ...) auf eigene Faust. Nachdem er endlich die Entscheidung getroffen hatte, Mathematiker zu werden, verließ er die Uni Bonn. Ein Familienfreund konnte schließlich seinen Vater überzeugen, ihm zu erlauben, an der Akademie Münster Mathematik zu studieren, danach belegte er Lehrerexamina und konnte 1841 eine Stelle als Gymnasiallehrer in Münster bekommen, später wurde er Lehrer in Deutsch-Krone und Braunsberg. Neben Mathematik musste er auch Physik, Botanik, Geografie, Geschichte, Deutsch, Kaligrafie und Turnen unterrichten. Ab 1850 litt er an Schwindelanfällen. Seine Unzufriedenheit mit dem anstrengenden, nicht erfüllenden Berufsleben wuchs. Als er 1854 den Artikel *Zur Theorie der Abelschen Functionen* in *Crelle's Journal* wurde er endlich bekannt und bekam einen Ehrendoktortitel der Universität in Königsberg. Er bekam 1856 eine Stelle am Berliner Königlichen Gewerbeinstitut, bessere Angebote folgten. Sein Wunsch, eine Anstellung an der Berliner Friedrichs-Wilhelm-Universität zu bekommen, ging noch im selben Jahr in Erfüllung. Seine Vorträge zogen Studenten aus aller Welt nach Berlin; unter seinen Studenten findet man viele namhafte Mathematiker: Cantor, Frobenius, Klein, Lie, Minkowski, Schwarz ... Privat unterrichtete er 1870–1874 die russische Mathematikerin Sofia Wassiljewna Kowalewskaja (1850–1891), da ihr als Frau nicht gestattet wurde, an einer Universität zu studieren. Bis zu ihrem frühen Tod blieb er in ständigem Kontakt mit ihr, verbrannte aber alle ihre Briefe nach ihrem Tod. Nach einem völligen Zusammenbruch 1861 und langer Erholung hörten zwar die Schwindelanfälle auf, wurden aber durch andere gesundheitliche Probleme ersetzt, sodass er weiter nur im Sitzen unterrichten konnte, seine letzten Lebensjahre verbrachte er in einem Rollwagen. Wie seine Studentin Kowalewskaja starb Weierstraß auch an Lungenentzündung ([12]).

Cauchys Definitionen waren, wenn auch fast ganz modern, doch nicht vollständig präzise. Insbesondere ist der Unterschied zwischen uniformer und allgemeiner Konvergenz und Stetigkeit unklar. In den 1850er-Jahren schaffte es endlich **Karl Weierstraß**, vollständig rigorose Fundamente der Analysis zu schaffen. Als Beispiel nennen wir seine Definition des Grenzwertes:

► **Definition 1.11 (Grenzwert, Weierstraß' Definition)** Eine Funktion $f(x)$ hat einen Grenzwert L in $x = x_0$, wenn für jede positive Zahl ε ein δ existiert, sodass $|f(x) - L| < \varepsilon$ für alle x , für welche $0 < |x - x_0| < \delta$ gilt.

Weierstraß benutzte auch \lim , um Grenzwerte zu bezeichnen, er schrieb aber noch, beispielsweise, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$. Die Symbolik $\lim_{x \rightarrow x_0}$ wurde anscheinend zuerst 1905 vom englischen Mathematiker John Gaston Leathem verwendet, dessen Verwendung wurde 1908 von Godfrey Harold Hardy (1877–1947) popularisiert ([6, 7, 22, 32]).

Die exakte Bedingung, dass eine Funktion ein Integral besitzt, stammt von **Georg Friedrich Bernhard Riemann**, und man spricht deswegen in der klassischen Analysis von Riemann-integrierbaren Funktionen. Riemann wollte die notwendigen Bedingungen, damit eine Funktion in ihre Fourierreihe entwickelt werden kann, finden und bemerkte dadurch die Notwendigkeit einer präziseren und zugleich weiteren Definition des Integrals. Er beschreibt das Integral $\int_a^b f(x)dx$ als Grenzwert der Summe

$$\delta_1 f(a + \varepsilon_1 \delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2 \delta_2) + \dots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n \delta_n),$$

wenn alle $\delta_i = x_i - x_{i-1}$ gegen 0 streben und wenn dieser Grenzwert unabhängig von der Wahl der x_i ($a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b = x_n$) und der positiven ε_i ist. Somit bekam das Riemann'sche Integral auch für nichtstetige Funktionen eine Bedeutung. Weierstraß konnte 1885 auch den Approximationssatz beweisen, nach welchem jede auf einem Segment stetige Funktion beliebig genau, uniform, mit einem Polynom approximiert werden kann ([12, 47, 50]).

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866) zeigte schon zu seiner Schulzeit mathematische Interessen. Auf Wunsch seines Vaters, eines lutheranischen Pfarrers, immatrikulierte er zunächst für Theologie in Göttingen, aber besuchte auch mathematische Vorlesungen und holte sich die Zustimmung seines Vaters zum Studienwechsel. Einer seiner Professoren war Gauß, aber nur als Unterrichtender für elementare Vorlesungen. Riemann wechselte 1847 nach Berlin und studierte dort unter Steiner, Jacobi und Dirichlet. Besonders Dirichlets logische Analysen von fundamentalen Fragen sowie seine Vermeidung langer Rechnungen hatten großen Einfluss auf den jungen Riemann. Ab 1849 arbeitete er an seiner Dissertation bei Gauß wieder in Göttingen, aber mehr als Gauß beeinflussten Riemann der Physiker

Wilhelm Weber, durch den er solide Grundlagen in theoretischer Physik erwarb, und Listing, der ihn in fundamentale Ideen der Topologie einführte. Riemann habilitierte 1854 mit dem berühmten Vortrag *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, in dem er die Grundlagen der Geometrie neu definierte. Auf Basis der Differenzialgeometrie, wie sie von Gauß entwickelt worden war, ging darin Riemann auf n -dimensionale Mannigfaltigkeiten über und setzte als Fundament der Geometrie nur die Existenz einer Metrik voraus. Außer zum Thema Grundlagen der Geometrie hinterließ Riemann in seinem kurzen Leben fundamentale Resultate in Analysis, der reellen wie komplexen, sowie Topologie und Zahlentheorie (unter anderem die Riemann'sche Vermutung, siehe 1. Buch) wichtige Beiträge. Seine Karriere verbrachte er in Göttingen. Er heiratete 1862 und hatte eine Tochter, aber im gleichen Jahr ging eine Erkältung in Tuberkulose über, und so starb er 1866 mit nur 40 Jahren ([12]).

Während des 19. Jh. wurden viele „exotische“ Funktionen entdeckt, die auf die Notwendigkeit einer besseren Definition des fundamentalen Begriffs der Funktion hinwiesen. Wir erwähnten schon Cauchys Funktion, die eine Taylorreihe besitzt, die nur in einem Punkt mit der Funktion übereinstimmt. Von Dirichlet andererseits stammt das älteste Beispiel einer Funktion, die in jedem Punkt des Segments $[0, 1]$ unstetig ist. Dies ist die Dirichlet-Funktion, die durch

$$d(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

definiert ist. Weierstraß fand 1872 eine stetige Funktion, welche nirgends differenzierbar ist. Solche Beispiele veranlassten den berühmten Mathematiker Poincaré, 1899 zu sagen: „Früher, als eine neue Funktion erfunden wurde, war es mit einem praktischen Ziel. Heute werden sie erfunden, um zu zeigen, dass die Argumentation unserer Vorfahren falsch war, und wir werden niemals etwas mehr aus ihnen bekommen als dieses.“ ([12, 51])

Solche pathologischen, bizarren Funktionen führten zur endlicher moderner Definition von Funktionen. **Hermann Hankel** (1839–1873) gab die folgende Definition:

► **Definition 1.12 (Funktion, Hankels Definition (1970))** „Eine Funktion heißt y von x , wenn jedem Werte der veränderlichen Größe x innerhalb eines gewissen Intervalles ein bestimmter Wert von y entspricht; gleichviel, ob y in dem ganzen Intervalle nach demselben Gesetze von x abhängt oder nicht; ob die Abhängigkeit durch mathematische Operationen ausgedrückt werden kann oder nicht.“ ([51])

Dies reduzierte **Édouard Jean-Baptiste Goursat** (1858–1936) zur

► **Definition 1.13 (Funktion, Goursats Definition (1923))** Wir nennen y eine Funktion von x , falls jedem Wert von x ein Wert von y entspricht. Eine solche Beziehung wird durch die Formel $y = f(x)$ ausgedrückt.

Schließlich gab **Patrick Suppes** (1922–2014) eine auf Mengentheorie basierende abstrakte Definition ([12]):

► **Definition 1.14 (Funktion, Suppes' Definition (1960))** f ist eine Funktion genau dann, wenn f eine Relation¹⁸ ist und $(\forall x)(\forall y)(\forall z)$ aus $(x, y) \in f$ und $(x, z) \in f$ die Gleichheit $y = z$ folgt.

1.5 Anfänge der komplexen Analysis

Der erste Auftritt komplexer Zahlen geschah Mitte des 16. Jh., als Cardano in seiner *Ars Magna* die Lösung kubischer Gleichungen beschrieb. Bald darauf konnte Bombelli Regeln zur Rechnung mit komplexen Zahlen angeben. Andererseits konnten erst um die Jahrhundertwende des 18./19. Jh. Gauß und Wessel die komplexe Zahlenebene einführen. Mehr dazu finden Sie in den Kapiteln zur Arithmetik und Algebra im 1. Buch, hier wenden wir uns kurz, wie eben der Stil dieser zwei Bücher ist, den Highlights in der Anfangsgeschichte der komplexen Funktionen zu.

Natürlich können schon die Tartaglia-Cardano-Formeln zur Lösung kubischer Gleichungen als erste Form komplexer Funktionen angesehen werden. Die ersten bewussten Versuche, solche Funktionen zu verstehen, fallen aber erst ins 17. Jh., verbunden mit den Studien reeller transzenter Funktionen. Johann Bernoulli war 1702 der Erste, der eine komplexe Funktion erwähnte. Dies war der komplexe Logarithmus. Da

$$\frac{dx}{1+x^2} = \frac{dx}{2(1+x\sqrt{-1})} + \frac{dx}{2(1-x\sqrt{-1})}$$

gilt, zog Johann Bernoulli den Schluss, dass „imaginäre Logarithmen reelle Kreissektoren darstellen“. Doch war zugleich Johann noch recht unsicher, wie man sogar reelle Logarithmen verstehen sollte: Er war überzeugt, dass $\frac{d}{dx} \ln(-x) = \frac{1}{x} = \frac{d}{dx} \ln(x)$ bedeutet, dass $\ln(-x) = \ln(x)$ gilt. Euler bemerkte diesen Fehler und machte sogar den Schritt, zu behaupten, dass der komplexe Logarithmus unendlich viele Werte hat – dies ist ja anhand

¹⁸Eine binäre Relation zwischen zwei Mengen X und Y ist eine Untermenge des kartesischen Produkts $X \times Y$ bzw. nach Suppes: A ist einer Relation $\Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow (\exists y)(\exists y)(x = (y, z)))$.

seiner Formel (1748; siehe Abschn. 1.4) leicht zu argumentieren, da aus dieser folgt, dass die komplexe Exponentialfunktion periodisch ist. Andererseits entdeckte zu gleicher Zeit D'Alembert, dass viele physikalisch bedeutende Funktionen als reelle und imaginäre Teile einer komplexen Funktion auftreten. Dabei entdeckte er im hydrodynamischen Kontext die heute als Cauchy-Riemann'sche Bedingungen bekannten Gleichungen ([19, 33, 45]).

Als eigentlicher Begründer der komplexen Analysis gilt Cauchy. Er konnte 1837 zeigen, dass eine im Punkt z_0 differenzierbare komplexe Funktion komplexer Variablen immer analytisch ist, d. h. ihrer Potenzreihenentwicklung um z_0 gleich ist. Wie wir gesehen haben, war gerade dies das Problem mit der Begründung der reellen Analysis: Noch Lagrange identifizierte fälschlicherweise reelle Funktionen mit deren Taylor'schen Reihen, es stellte sich aber heraus, dass zwar reelle Funktionen nicht unbedingt, wenn differenzierbar, auch analytisch sind (siehe Cauchys Beispiel 1.11), aber dafür die komplexen Funktionen diese Eigenschaft haben. Cauchy entdeckte dabei, dass eine komplexe Funktion

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

genau dann differenzierbar und somit analytisch im Punkt z_0 ist, wenn in diesem Punkt die Cauchy-Riemann'schen Bedingungen erfüllt sind:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Dass dieses der Existenz des Grenzwertes

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

äquivalent ist (man beachte, dass man hier verlangt, dass dieser Grenzwert gleich ist, aus welcher auch immer von unendlich vielen Richtungen z gegen z_0 strebt), bewies 1851 **Georg Friedrich Bernhard Riemann** als Teil seiner Dissertation ([33]).

Weiter konnte Cauchy auch komplexe Integrale berechnen und bewies verschiedene berühmte Sätze, beispielsweise den Integralsatz von Cauchy:

Theorem 1.10 (Integralsatz von Cauchy) *Wenn eine Funktion f auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ analytisch ist, gilt*

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

für jede Kontur¹⁹ γ innerhalb von G .

Diesen Satz kannte inhaltlich schon Gauß (1811), der erste Beweis ist aber von Cauchy (1814). Gauß war jedoch der Erste, der den Begriff der komplexen Integrale klar beschrieb ([33, 45]).

Riemanns Dissertation trug den Titel *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Größe* (1851). Hierin findet man die Definition einer komplexen Funktion (Riemann verlangt gleich die Differenzierbarkeit) und eine

Tab. 1.1 Geschichte der Analysis: Übersicht

Was?	Wer?	Wann?
Erste infinitesimale Betrachtungen	Zenon von Elea, Demokrit von Abdera	5. Jh. v. Chr.
Exhaustionsmethode	Eudoxos von Knidos Archimedes aus Syrakuse	4. Jh. v. Chr. 3. Jh. v. Chr.
Tangentenkonstruktionen auf allgemeine Kurven	Descartes, Fermat, Pascal, Barrow	Mitte 17. Jh.
Cavalieris Indivisiblen und verwandte Quadraturmethoden	Cavalieri, Roberval, Torricelli, Wallis	Mitte 17. Jh.
Begründung der modernen Infinitesimalrechnung	Newton Leibniz	1660er-Jahre 1670er-Jahre
Potenzreihen	N. Mercator Newton, J. Gregory Euler	1668 um 1670 1730–1750
Variationsrechnung	Jakob Bernoulli	1696
Funktionsbegriff	Leibniz, Johann Bernoulli Euler	1673 1755
Moderne Definitionen von Grenzwert, Stetigkeit, Ableitung, Integral, Funktion	B. Bolzano, A.-L. Cauchy Riemann, Weierstraß Goursat	1817, 1821 Mitte 19. Jh. 1923
Komplexe Analysis	A.-L. Cauchy B. Riemann	1814–1837 1851

¹⁹Eine Kontur ist eine geschlossene, einfach zusammenhängende, also zusammenhängende ohne Selbstdurchdringungen, Kurve in der Ebene.

Erweiterung von Cauchys Theorie. Insbesondere führt Riemann hier topologische Methoden in die komplexe Analysis ein, was später zur Definition der Riemann'schen Flächen führte (siehe Abschn. 4.2), ([12, 50]).

Für mehr Details zur Geschichte der komplexen Zahlen und Funktionen verweisen wir unsere Leser auf [33] oder die entsprechenden Kapitel in [45].

In der Tab. 1.1 ist eine Übersicht der Geschichte der Analysis angegeben.

Literaturverzeichnis

1. Anglin, W.S., Lambek, J.: *The Heritage of Thales*. Springer, New York (1995)
2. Ball, W.W.R.: *A Short Account of the History of Mathematics*. Dover Publications, New York (1960)
3. Benson, D.C.: *The Moment of Proof: Mathematical Epiphanies*. Oxford Univ. Press, New York (1999)
4. Boyer, C.B.: Newton as an originator of polar coordinates. *Amer. Math. Monthly* **56**, 73–78 (1949)
5. Brumbaugh, Z.: The integration theory of Gottfried Wilhelm Leibniz. <http://sites.math.rutgers.edu/~cherlin/History/Papers2000/brumbau.html>. Zugegriffen 25 Mai 2017
6. Burton, D.M.: *The History of Mathematics: An Introduction* (6. Aufl). McGraw-Hill, New York (2006)
7. Cajori, F.: *A History of Mathematical Notation*. Dover Publications, New York (1993)
8. Cardil, R.: Kepler: The volume of a wine barrel. MAA Convergence. <http://www.maa.org/press/periodicals/convergence/kepler-the-volume-of-a-wine-barrel-introduction>. Zugegriffen 13 Mai 2017
9. Carroll, M.T., Dougherty, S.T., Perkins, D.: Indivisibles, infinitesimals and a tale of seventeenth-century mathematics. *Math. Mag.* **86**, 239–254 (2013)
10. Casselman, B.: Archimedes on the Circumference and Area of a Circle. <http://www.ams.org/samplings/feature-column/fc-2012-02>. Zugegriffen 14 Apr. 2017
11. Casselman, B.: Archimedes' quadrature of the parabola – full text as translated by T.L. Heath. <http://www.math.ubc.ca/~cass/archimedes/parabola.html>. Zugegriffen 27 Apr. 2017
12. O'Connor, J.J., Robertson, E.F.: MacTutor History of Mathematics Archives. <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/>. Zugegriffen 13 Apr. 2017
13. Dehn, M., Hellinger, E.D.: Certain mathematical achievements of James Gregory. In: Anderson, M., Katz, V., Wilson, R. (Hrsg.) *Sherlock Holmes in Babylon and Other Tales of Mathematical History*, S. 208–217. The Mathematical Association of America, Washington DC (2004)
14. Erlichson, H.: Johann Bernoulli's brachistochrone solution using Fermat's principle of least time. *Eur. J. Phys.* **20**, 299–304 (1999)
15. Eves, H.W.: *Great Moments in Mathematics (Before 1650)*. Mathematical Association of America, Washington DC (1983)
16. Felscher, W.: Bolzano, Cauchy, Epsilon, Delta. *Amer. Math. Monthly* **107**, 844–862 (2000)
17. Ferzola, A.P.: Euler and differentials. In: Anderson, M., Katz, V., Wilson, R. (Hrsg.) *Sherlock Holmes in Babylon and Other Tales of Mathematical History* S. 369–374. The Mathematical Association of America, Washington DC (2004)
18. Ginsburg, D., Groose, B., Taylor, J., Vernescu, B.: History of the differential from the 17th century. <http://www.math.wpi.edu/IQP/BVCalcHist/calc2.html>. Zugegriffen 19 Mai 2017
19. González-Velasco, E.A.: *Journey Through Mathematics*. Springer, New York (2011)

20. Grabiner, J.V.: The origins of Cauchy's theory of the derivative. *Hist. Math.* **5**, 379–409 (1978)
21. Grabiner, J.: Descartes and problem-solving. *Math. Mag.* **68**, 83–97 (1995)
22. Grabiner, J.: The changing concept of change: The derivative from Fermat to Weierstrass. In: Anderson, M., Katz, V., Wilson, R. (Hrsg.) *Sherlock Holmes in Babylon and Other Tales of Mathematical History*, S. 218–227. The Mathematical Association of America, Washington DC (2004)
23. Grabiner, J.: Was Newton's calculus a dead end? The continental influence of Maclaurin's Treatise of fluxions. In: Anderson, M., Katz, V., Wilson, R. (Hrsg.) *Sherlock Holmes in Babylon and Other Tales of Mathematical History*, S. 310–324. The Mathematical Association of America, Washington DC (2004)
24. Heath, T.: A History of Greek Mathematics Bd. I, Oxford University Press, London (1921)
25. Heath, T.: A History of Greek Mathematics, Bd. II. Oxford University Press, London (1921)
26. Hofmann, J.E.: On the discovery of the logarithmic series and its development in England up to Cotes. In: Anderson, M., Katz, V., Wilson, R. (Hrsg.) *Sherlock Holmes in Babylon and Other Tales of Mathematical History*, S. 235–239. The Mathematical Association of America, Washington DC (2004)
27. Joyce, D.E.: Elements (1998). <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html>. Zugegriffen 25 März 2017
28. Jullien, V.: Roberval's indivisibles. In: Jullien, V. (Hrsg.) *Seventeenth-century indivisibles revisited*, S. 177–210. Birkhäuser, Cham (2015)
29. Katz, M.G., Schaps, D.M., Shnider, S.: Almost equal: The method of adequality from Diophantus to Fermat and beyond. <https://arxiv.org/abs/1210.7750>. Zugegriffen 10 Apr. 2017
30. Matematicas Visuales. http://www.matematicasvisuales.com/english/html/history/kepler_keplerbarrel.html. Zugegriffen 27 Apr. 2017
31. McLaughlin, W.I.: Eine Lösung für Zenons Paradoxien. <http://www.spektrum.de/magazin/eine-loesung-fuer-zenos-paradoxien/822041>. Zugegriffen 5 Apr. 2017
32. Miller, J.: Earliest uses of various mathematical symbols. <http://jeff560.tripod.com/calculus.html>. Zugegriffen 25 Mai 2017
33. Nahin, P.J.: An Imaginary Tale: The Story of $\sqrt{-1}$. Princeton Univ. Press, Princeton (1998)
34. Nauenberg, M.: Barrow and Leibniz on the fundamental theorem of the calculus. <https://arxiv.org/pdf/1111.6145.pdf>. Zugegriffen 22 Mai 2017
35. Newton, I. (Hrsg. Colson, J.): The Method of Fluxions and Infinite Series; With Its Application to the Geometry of Curve-lines. <https://archive.org/details/methodoffluxions00newt>. Zugegriffen 25 Mai 2017
36. Reeder, M.: Archimedes' quadrature of the parabola. <https://www2.bc.edu/mark-reeder/1103quadparab.pdf>. Zugegriffen 20 Apr. 2017
37. Sanchis, G.R.: Archimedes' method for computing areas and volumes. Convergence, <http://www.maa.org/press/periodicals/convergence/archimedes-method-for-computing-areas-and-volumes-introduction>. Zugegriffen 10 Mai 2017
38. Sanchis, G.R.: Historical activities for the calculus classroom. Convergence, <http://www.maa.org/press/periodicals/convergence/historical-activities-for-the-calculus-classroom>. Zugegriffen 6 Juni 2017
39. Sandifer, E.: How Euler did it. <http://eulerarchive.maa.org/hedi/HEDI-2007-08.pdf>. Zugegriffen 21 Mai 2017
40. Schierscher, G.: Matheliebe. Ausstellungskatalog. Liechtensteinisches Landesmuseum, Vaduz (2013)
41. Šikić, Z.: Kako je stvarana novovjeka matematika (Wie die neuzeitliche Mathematik erschaffen wurde, in kroatischer Sprache). Školska knjiga, Zagreb, (1989)

42. Siu, M.-K.: Concept of function – its history and teaching. In: Swetz, F., Fauvel, J., Bekken, O., Johansson, B., Katz, V. (Hrsg.) Learn From the Masters, S. 105–121. The Mathematical Association of America, Washington DC (1997)
43. Stanford Encyclopedia of Philosophy: Democritus. <https://plato.stanford.edu/entries/democritus/>. Zugegriffen 13 Apr. 2017
44. Stanford Encyclopedia of Philosophy: Zeno's Paradoxes. <https://plato.stanford.edu/entries/paradox-zeno/>. Zugegriffen 5 Apr. 2017
45. Stillwell, J.: Mathematics ans Its History. Springer, New York (2010)
46. Varadarajan, V.S.: Euler and his work on infinite series. Bull. Amer. Math. Soc. **44**, 515–539 (2007)
47. Van Vleck, E.B.: The influence of Fourier's series upon the development of mathematics. Science **39**, 113–124 (1914)
48. Whitman, E.A.: Some historical notes on the cycloid. In: Anderson, M., Katz, V., Wilson, R. (Hrsg.) Sherlock Holmes in Babylon and Other Tales of Mathematical History, S. 183–187. The Mathematical Association of America, Washington DC (2004)
49. Wußing, H.: 6000 Jahre Mathematik, Eine kulturgeschichtliche Zeitreise – 1. Von den Anfängen bis Leibniz und Newton. Springer, Berlin (2008)
50. Wußing, H.: 6000 Jahre Mathematik, Eine kulturgeschichtliche Zeitreise – 2. Von Euler bis zur Gegenwart. Springer, Berlin (2009)
51. Youschkevitch, A.P.: The concept of function up to the middle of the 19th century. Archive for History of Exact Sciences **16**, 37–85 (1976)

2.1 Anfänge der Kombinatorik

Obwohl das Grundthema der Kombinatorik, das Abzählen endlicher Mengen, implizit schon von Anfang an Teil der Mathematik war, kann man vor dem 17. Jh. oder sogar dem 18. Jh. nicht von einer selbstständigen Disziplin reden. Mehr sogar, die Geschichte der Kombinatorik vor dieser Zeit ist nicht geradlinig zu verfolgen, und auch sind Referenzen über das Thema schwer zu finden.

Die zwei Grundprinzipien, die Summen- und die Produktregel (Abb. 2.1), sind schon Tausende von Jahren als offensichtlich und logisch anerkannt. Schon seit den Anfängen des mathematischen Denkens war den Menschen sicherlich klar, dass, wenn man zuerst einen Teil einer Menge abzählt und dann deren Rest, die Summe gleich der Anzahl aller Elemente der Menge ist. Die Produktregel scheint ebenso alt zu sein. Hierzu wird besonders eine berühmte Aufgabe aus dem altägyptischen Papyrus Rhind (ca. 1650 v. Chr.) angeführt ([3]):

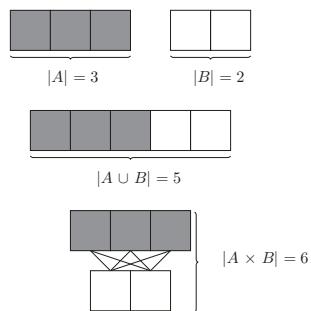
Beispiel 2.1 (Aufgabe 79, Papyrus Rhind)

In jedem von 7 Häusern befinden sich je 7 Katzen. Jede Katze fängt 7 Mäuse. Jede Maus hatte 7 Weizenähren gegessen. Jede Ähre hätte 7 *Hekat*¹ Mehl ergeben. Wie viel macht das alles (Häuser, Katzen, Mäuse, Ähren, Mehl) zusammen?

Ähnliche Aufgaben findet man in Europa ab Mittelalter, z. B. bei Fibonacci im 13. Jh. Aus dieser Zeit stammen auch verschiedene anderen Aufgaben mit, wenigstens teilweise,

¹Das Hekat ist ein altägyptisches Maß für Volumen, es entspricht etwa 4,8 Litern.

Abb. 2.1 Kombinatorische Grundprinzipien



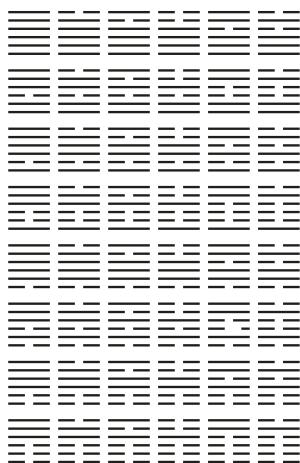
kombinatorischem Inhalt, beispielsweise das bekannte Wolf-Ziege-Kohl-Problem in den *Propositiones ad Acuedos Juvenes* von **Alkuin** (Alcuin of York, ca. 732–804).

Beispiel 2.2 (Wolf-Ziege-Kohl-Problem aus *Propositiones ad Acuedos Juvenes*)

Ein Mann musste einen Wolf, eine Ziege und einen Haufen Kohl über den Fluss bringen. Er konnte nur ein Boot finden, mit dem er höchstens zwei davon überführen konnte. Aber er hatte den Auftrag, alle drei in gutem Zustand zu überführen. Wie konnte dies geschehen? (Übersetzt nach [13]).

Alkuin war ein Berater Karls des Großen und der Hauptverantwortliche für dessen erste europäische Bildungsreform. Die *Propositiones ad Acuedos Juvenes* ist die älteste bekannte mathematische Aufgabensammlung in lateinischer Sprache; nach [24] ist aber nicht erwiesen, dass Alkuin wirklich der Autor dieses Textes war. Die darin enthaltenen Aufgaben sind hauptsächlich elementar-arithmetisch, einige logisch mit Elementen der Kombinatorik ([3, 13, 24]).

Anders als die zwei kombinatorischen Grundprinzipien sind Permutationen, Variationen und Kombinationen, nicht nur dem Namen nach, bedeutend jünger. Als ältestes Beispiel zum Thema gilt das altchinesische *I Ching* (*Buch der Wandlungen*). Der Inhalt des *I Ching* soll teilweise schon im 7. Jh. v. Chr. entstanden sein. Das System des *I Ching* besteht aus zwei Symbolen, Yang (—) und Yin (– –). Diese werden zunächst in $2^3 = 8$ Trigramme, also geordnete Tripel, kombiniert und dann die Trigramme in $2^6 = 64$ Hexagramme (geordnete Paare von Trigrammen, also geordnete Sechstupel der zwei Symbole Yin und Yang, siehe Abb. 2.2). Somit ist das System des *I Ching* das älteste bekannte Beispiel von Variationen mit Wiederholung. Man muss hier aber betonen, dass es in den ältesten Schriften zum Thema keine Anhaltspunkte dafür gibt, dass die alten Chinesen sich dabei der allgemeinen Regel bewusst waren; die Hexagramme wurden zwar in einer symmetrischen Anordnung aufgezählt, die Ordnung zeigt aber kein mathematisches System. Erst im 11. Jh. findet man eine systematische Anordnung, die der numerischen Ordnung der binären Zahlen von 000000 bis 111111 entspricht, wenn man Yang als 1 und Yin als 0 nimmt. Dies bedeutet aber nicht, dass die alten Chinesen die binären Zahlen vor

Abb. 2.2 I Ching

Leibniz² entdeckt haben, da keine Beweise bekannt sind, dass die Chinesen die Hexagramme numerisch interpretiert haben ([3, 23]).

Die alten Inder andererseits hatten von Anfang an, also seit Jahrtausenden, auffälliges Interesse an großen Zahlen. Irgendwann begannen sie sich auch für das Abzählen verschiedener Anordnungen zu interessieren. In einem medizinischen Text von Sushruta (6. Jh. v. Chr.) findet man die Aufzählung verschiedener Geschmacksrichtungen, welche man durch das Kombinieren der 6 Basisaromen (süß, sauer, salzig, scharf, bitter, herb) erhalten kann. Diese Kombinationen werden systematisch aufgezählt: 6 einzelne, 15 in Paaren usw. Aus den späteren Jahrhunderten sind auch andere ähnliche Beispiele erhalten, aber in allen Fällen scheint die gesuchte Zahl durch Aufzählen aller Möglichkeiten gefunden worden zu sein, also ohne tiefere kombinatorische Erkenntnisse. Der erste Anhaltspunkt in dieser Richtung ist die Schrift *Bṛhatsaṃhitā* aus dem 6. Jh. Hierin wird beschrieben, wie man Düfte durch Mischen von 4 von 16 Zutaten in verschiedenen Proportionen erhält. Während die genaue Regel bezüglich dieser Proportionen unklar ist und somit auch die genaue Bedeutung der angegebenen 96 Düften, ist hier weitaus interessanter, dass angegeben wird, es gibt 1820 Möglichkeiten, 4 von 16 Zutaten zu wählen. Dies ist der korrekte Wert für $\binom{16}{4}$, und es ist nicht sehr wahrscheinlich, dass dieser durch Aufzählen aller Möglichkeiten erhalten wurde ([3, 23]).

Bhāskara II (1114–1185) ist einer der berühmtesten altindischen Mathematiker und Astronomen. Seine Beiträge werden als der Höhepunkt der klassischen Zeit indischer Mathematik betrachtet, und nach ihm dauerte es über 200 Jahre bis zu

²G. W. Leibniz kannte diese chinesischen Hexagramme und schrieb deswegen den alten Chinesen die Entdeckung der binären Zahlen zu.

den nächsten wichtigeren mathematischen Resultaten in Indien. Seine zwei rein mathematischen Schriften heißen *Lilāvati* und *Bijaganita*, er schrieb aber auch mathematisch-astronomische Schriften. Die *Lilāvati* ist nach seiner Tochter benannt, angeblich hat er diesen mathematischen Text geschrieben, um seine Tochter über die Prophezeiung, dass sie nie heiraten wird, zu trösten. Er beschäftigte sich mit der Pell'schen Gleichung (siehe 1. Buch) und anderen diophantischen Gleichungen, war sich bewusst, dass die Gleichung $x^2 = 9$ zwei Lösungen hat, beschrieb Rechenmethoden im dezimalen Positionssystem, auch für das Rechnen mit negativen Zahlen und Null (alle Regeln werden korrekt angegeben, außer dass er das Resultat der Division $n : 0$ als unendlich betrachtet). Er kannte auch die Additionstheoreme für Sinus. Sogar die Grundideen der Infinitesimalrechnung können in seinem mathematisch-astronomischen Werk *Siddhanta Siromani* gefunden werden ([6]).

Im 12. Jh. schrieb der wohl berühmteste altindische Mathematiker Bhāskara II die Schrift *Lilavati*. In dieser Schrift findet man Beispiele, die beweisen, dass Bhāskara II sowohl die Regel für Kombinationen wie auch die für Permutationen bekannt waren ([3]).

Beispiel 2.3

Bhāskara II beschreibt, wie man die Anzahl der möglichen Arrangements von geöffneten und geschlossenen Türen in einem Gebäude mit 8 Türen findet. Für dieses wie auch für das alte, oben beschriebene Problem des Kombinierens von 6 Geschmacksrichtungen nennt er die Lösungen in Tabellen der Form $(k, \binom{n}{k})$ für $n = 8$ und $n = 6$.

Beispiel 2.4

Wie viele Variationen der Form des Gottes Sambhu erhält man durch verschiedene Anordnungen der 10 Attribute, welche er in seinen 10 Händen hält? Offensichtlich handelt es sich hier um Permutationen. Bhāskara II führt nicht nur die genaue Lösung, 3628800, an, sondern erklärt auch, wie man solche Antworten erhält: Die Anzahl der Variationen in spezifischen Figuren ist das Produkt der arithmetischen Folge, welche mit 1 beginnt und je 1 bis zu der Anzahl von Plätzen zunimmt, also $n!$.

Die altindischen kombinatorischen Resultate wurden von den islamischen Mathematikern des Mittelalters übernommen, vereinzelt gab es auch eigene Beiträge zum Thema. Auch die jüdischen Mathematiker dieser Zeit zeigten Interesse für kombinatorische Probleme. So zählt z. B. der spanische jüdische Gelehrte und Dichter **Rabbi ben Ezra** (Abraham ben Meir ibn Ezra, 1092–1167) im 12. Jh. die Planetenkonjunktionen. Dem jüdischen Historiker Josephus (1. Jh.) wird hingegen ein anderes berühmtes arithmetisch-kombinatorisches Problem zugeschrieben, das Josephus-Problem ([3, 12]). Interessanterweise sind Varianten

dieses Problems in verschiedenen Zeiten und Kulturen bekannt: im europäischen Mittelalter und der Renaissance, beispielsweise bei Cardano, als *Ludus Sancti Petri* oder eben als Josephus-Problem, in jüdischer mittelalterlicher Literatur (bei Rabbi ben Ezra), in den mittelalterlichen moslemischen Ländern, in Indien und im 17. Jh. sogar in Japan. Meist handelt es sich um eine gerade Anzahl von Personen, die im Kreis oder linear aufgestellt werden, von denen ein Teil, meist die Hälfte, durch Abzählen jeder n -ter Person geopfert werden muss (meist werden diese über Bord geworfen). Die Hälfte aller Personen sind „die Guten“, und diese sollen durch geeignete Anfangsordnung gerettet werden. Die Guten und die Schlechten, also die Geretteten und die Geopferten, sind je nach Autor und Kultur, in der dieses Problem erscheint, Christen und Türken, Christen und Juden, Moslems und „Ungläubige“, Gelehrte und Schurken, Seemänner und Räuber ([3, 12]). Wir geben hier die Formulierung (nach [22]), die dem Problem ihren Namen gab und die auf einen Text aus ca. 370 n. Chr. der meist Ambrosius von Milan zugeschrieben wird, zurückgeht.

Problem 2.1 (Josephus-Problem) Der jüdische Historiker Flavius Josephus lebte im 1. Jh. n. Chr. und beschrieb die jüdischen Kriege mit den Römern. Bei der Belagerung der Siedlung Yodfat sollen er und seine 40 Soldaten sich in einer Höhle versteckt gehalten haben. Als das Versteck entdeckt worden war, wollten sich die Soldaten lieber umbringen, als den Römern in die Hände zu fallen. Josephus wollte aber wenigstens sich und seinem Freund das Leben retten und schlug vor, nach dem römischen Brauch des *Decimatio* vorzugehen. Alle 41 stellten sich im Kreis auf und jeder Zehnte bringt sich um. An welche Stellen sollen sich Josephus und sein Freund stellen, um als Letzte übrig zu bleiben und sich so lebend den Römern übergeben zu können?

Bei jüdischen und christlichen Autoren bis zur Renaissance sind kombinatorische Probleme oft mit theologischen Themen verbunden. So findet man in dem jüdischen Text *Sefer Jetzira* (*Buch der Schöpfung*, wahrscheinlich aus dem 8. Jh.) die Berechnung der Anzahl $\binom{22}{2}$ der Wahlen von 2 Buchstaben aus dem 22-buchstabigen hebräischen Alphabet, da man verschiedenen Buchstabenkombinationen mystische Bedeutungen zuschrieb. Der katalanische Mystiker, Theologe und Philosoph **Ramon Llull** (ca. 1232–1316) wollte Basiskategorien identifizieren und dann durch deren Kombinationen das gesamte mögliche Wissen konstruieren. Dafür schuf er Diagramme, mit welchen er Kombinationen göttlicher Attribute demonstrierte. Andere Autoren in der Renaissance wiederum berechneten die Anzahlen der Permutationen in diversen theologischen Begriffen, beispielsweise in AMEN ([23]).

Man kann diese kurze Übersicht der kombinatorischen Frühgeschichte nicht ohne die Erwähnung des Pascal'schen Dreiecks beenden. Obwohl dieses arithmetische Dreieck seinen Namen nach Blaise Pascal erhielt (siehe [Abschn. 2.2](#)), war es schon mehrere Jahrhunderte vor Pascal bekannt. Der binomische Lehrsatz für die Exponenten 2 und 3 (und natürlich 1) war in Indien schon vor **Brahmagupta** (568 – nach 665) bekannt, bei ihm findet man ihn aber explizit. In der altindischen Mathematik wird der Binomialsatz zur Berechnung der Quadratwurzeln und kubischen Wurzeln verwendet, da dafür auf der

Differenz $(a + b)^n - a^n$ basierende Methoden entwickelt wurden. Diese ersten indischen Erkenntnisse zum Thema „binomischer Lehrsatz“ wurden von den mittelalterlichen moslemischen Mathematikern übernommen. Insbesondere beschreibt spätestens **Nasīr ad-Dīn At-Tūsī** (1201–1274) in einem Manuskript (1265) die Konstruktion des arithmetischen Dreiecks, in dem sich die Koeffizienten der Expansion von $(a + b)^n$ befinden, verbunden mit der Berechnung von Wurzeln. Es gibt aber Anhaltspunkte, dass schon einige Jahrhunderte früher moslemische oder sogar indische Mathematiker dieses Dreieck entdeckt hatten. Auf jeden Fall war es um die gleiche Zeit auch in China bekannt und wird 1303 in einem Text von **Zhu Shijie** beschrieben. In Europa tritt das arithmetische Dreieck erst im 16. Jh. auf, in Michael Stifels *Arithmetica integra* (1544) sowie auf der Titelseite eines Werks von Apianus (1527). Diese alten Autoren (At-Tūsī, Stifel und andere) verwendeten das Dreieck vor allem verbunden mit den Wurzelberechnungen (siehe auch Abschn. 3.1), also in seiner Verbindung mit dem binomischen Lehrsatz, doch war wohl auch seine kombinatorische Interpretation auch wenigstens latent bekannt ([3, 6, 23]).

2.2 Entstehung der kombinatorischen Wahrscheinlichkeitstheorie

Die Würfel- und andere Glücksspiele faszinierten die Menschen seit dem Altertum. Es brauchte aber lange, bis man aufhörte, die Ergebnisse z. B. eines Würfelwurfs als Resultate der Einwirkung übernatürlicher Mächte anzusehen, und den Zufall anstatt dessen mathematisch-rational zu analysieren.

Der Erste, der einen Versuch in diese Richtung gemacht hatte, war der berühmt-berüchtigte Arzt, Mathematiker und Spieler **Girolamo Cardano** (1501–1576, mehr zu ihm im Kapitel über Algebra im 1. Buch). Er schrieb (wahrscheinlich um 1562) ein Büchlein *Liber de ludo aleae*, das *Buch über das Würfelspiel*, eigentlich als eine Art Hilfe für Berufsspieler gedacht. Dieser Text wurde aber erst 1663 veröffentlicht, nachdem Fermat und Pascal (siehe weiter unten) schon die Grundzüge der kombinatorischen Wahrscheinlichkeitstheorie entworfen haben. Trotzdem ist der Inhalt von Cardanos Buch historisch interessant, und wir wollen hier einige der wichtigsten Punkte erwähnen.

Cardano sieht im Glück beim Spiel immer noch die Einmischung einer übernatürlichen Macht (er nennt sie die „Autorität des Prinzen“), aber versucht durch seine Analyse, die Chancen rational zu erfassen. Er definiert hier die klassische Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses (Ereignisses): Die Einsätze sollen, so Cardano, in dem Verhältnis gesetzt werden, in dem die Anzahl der günstigen und möglichen Ergebnisse liegt. In der Zeit nach Cardano gaben andere berühmte Mathematiker (Leibniz, Jakob Bernoulli, de Moivre) Varianten dieser Definition, die dann mit Laplace ihre moderne Form erhielt:

- ▶ **Definition 2.1 (Klassische Wahrscheinlichkeit (Laplace, 1812))** Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist das Verhältnis der Anzahl der für das Ereignis günstigen Fälle

und der Anzahl aller möglichen Fälle, wenn kein Grund existiert, anzunehmen, dass einer der Fälle öfter als ein anderer auftreten sollte, d. h., wenn alle Fälle für uns gleich wahrscheinlich sind.

Cardano entdeckte auch die Multiplikationsregel für unabhängige Ereignisse (als Regel für Wettchancen ausgesagt): „.... in Vergleichen, wo die Wahrscheinlichkeit eine Hälfte ist, wie bei geraden und ungeraden Seiten, werden wir die Anzahl der Würfe mit sich selbst multiplizieren, 1 vom Produkt abziehen, und das Verhältnis dieses Restes zu Einheit wird das Verhältnis der Einsätze sein. Also in 2 aufeinanderfolgenden Würfen multiplizieren wir 2 mit sich selbst, was 4 ergibt; wir ziehen 1 ab; der Rest ist 3; also wird der richtige Einsatz des Spielers 3 gegen 1 sein; weil, wenn er auf eine ungerade Zahl zielt und eine gerade wirft, das heißtt, wenn er nach einer geraden entweder eine gerade oder ungerade wirft, verliert er oder auch, wenn er nach einer ungeraden eine gerade erhält. Also verliert er dreimal und gewinnt einmal.“ ([11, 12, 25]).

Weniger bekannt ist, dass noch ein berühmter Renaissancewissenschaftler seinen Beitrag zur Frühgeschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie gemacht hat: **Galileo Galilei** (1564–1642), eher als Astronom bekannt, schrieb 1620 einen (wie auch Cardanos, viel später erschienenen, in Galileos Fall erst 1718) Text über Ergebnisse von Würfelspiele. Hierin erklärt er, warum beim Wurf von drei Würfeln die Augensummen nicht alle gleich wahrscheinlich sind, ähnlich wie es 80 Jahre früher Cardano für den Fall zweier Würfel erklärte (dies war Galileo aber nicht bekannt) ([11, 25]).

Blaise Pascal (1623–1662) war ein Sohn des Juristen und Hobbymathematikers Étienne Pascal. Sein Vater unterrichtete ihn größtenteils selbst, entschied aber, dass Blaise bis zu seinem 15. Lebensjahr keine Mathematik lernen sollte. Als Blaise 12 Jahre alt war, entdeckte aber sein Vater, dass Blaise selbst die Winkelsumme im Dreieck entdeckt hat und ließ zu, dass Blaise Euklid studierte. Mit 14 Jahren begann Blaise, seinen Vater zu den Treffen des Mersenne'schen Kreises zu begleiten, mit 16 hat er den berühmten Satz über den *Hexagrammum Mysticum* bewiesen. Als Hilfe für seinen Vater, der zu der Zeit als Steuereinnehmer arbeitete, konstruierte Blaise von 1642–1645 die mechanische Rechenmaschine, die als Pascaline bekannt ist. Nach einem Unfall 1646 wurde sein Vater von zwei Anhängern einer religiösen Bewegung gepflegt, und die hinterließen einen tiefen Eindruck bei der ganzen Familie. Der junge, immer kränkliche Blaise widmete sich danach intensiv auch der Religion und Philosophie. Zu der Zeit bewies er die Existenz des Vakuums, und 1653 veröffentlichte er seine berühmte Abhandlung über die Hydrostatik. Ihm zu Ehren wird die SI-Einheit für Druck Pascal (Pa) genannt. Zur Zeit der unten beschriebenen Begründung der Wahrscheinlichkeitstheorie verschlechterte sich Pascals Gesundheitszustand, und im Herbst 1654 kam er bei einem Unfall fast ums Leben. Er zog sich komplett in die religiöse Lehre des Jansenismus zurück und verfasste in seinem

letzten Lebensabschnitt vor allem religiöse und philosophische Schriften, von denen die *Pensées* die berühmteste ist. Er starb mit nur 39 Jahren an der Metastasierung eines Magenkrebses in das Gehirn ([6]).

Da Cardanos Büchlein so spät veröffentlicht wurde, aber auch, weil es diverse Fehler enthielt und nicht mathematisch rigoros war, werden **Blaise Pascal** und **Pierre de Fermat** (1601–1665) als „Väter der Wahrscheinlichkeitstheorie“ angesehen. In einem Briefwechsel dieser zwei großen Wissenschaftler wurden 1654 die Grundzüge der kombinatorischen Wahrscheinlichkeit entworfen. In diesem Briefwechsel werden zwei berühmte Probleme der Würfelspiele behandelt, die auch schon früher bekannt waren, aber nie zufriedenstellend gelöst wurden: das Problem der Würfel und das Problem der Punkte.

Problem 2.2 (Problem der Würfel) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 24 würfeln eines Würfelpaares mindestens einmal eine doppelte Sechs auftritt?

Problem 2.3 (Problem der Punkte) Zwei Spieler spielen ein faires Spiel in Runden. Derjenige, der zuerst insgesamt 6 Runden gewinnt, erhält einen Geldpreis. Wie soll man den Preis aufteilen, wenn das Spiel beim Punktestand 5 : 3 unterbrochen werden muss?

Die Probleme wurden Pascal von dem damals bekannten Spieler Chevalier de Méré (eigentlich Antoine Gombaud, 1607–1684) gestellt, und Pascal kontaktierte darauf Fermat ([11]). Das Problem der Würfel ist leicht zu lösen, wie Pascal und Fermat schnell festgestellt haben: Die Wahrscheinlichkeit, dass man in einem bestimmten Wurf ein Paar Sechser würfelt beträgt $1/36$, also ist die Wahrscheinlichkeit, dass man nicht ein Paar Sechser würfelt, gleich $p = 35/36$. Die Würfe sind unabhängig voneinander, und es folgt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass in keinem der 24 Würfe ein Paar Sechser gewürfelt wird, gleich p^{24} . Folglich ist die von de Méré gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich $1 - p^{24} \approx 49,14\%$, also kleiner als 50 %.

Das Problem der Punkte ist weit interessanter und brachte sozusagen die Wahrscheinlichkeitstheorie ins Rollen. Pascal und Fermat konnten sich schon bald über die Lösung einigen und sogar die Problemstellung generalisieren. Der erste Spieler A braucht noch a Punkte und der Spieler B noch b , um das Spiel zu gewinnen. Also ist das Spiel in spätestens $a + b - 1$ Runden vorüber. In diesen $a + b - 1$ Runden können 2^{a+b-1} gleich wahrscheinliche Gewinnreihenfolgen auftreten, und wenn von denen in k Fällen der Spieler A a - oder mehrmals gewinnt, sind diese Fälle zu seinen Gunsten, und die restlichen $l = 2^{a+b-1} - k$ Fällen zugunsten B, also soll der Gewinn im Verhältnis $k : l$ verteilt werden.

Beispiel 2.5

In der Originalfassung des Problems der Punkte ist $a = 1$ und $b = 3$, also ist das Spiel in spätestens 3 Runden entschieden (siehe Abb. 2.3). Die möglichen Gewinnreihenfolgen (bezüglich der zwei Spieler A und B) in diesen 3 Runden sind AAA, AAB, ABA,

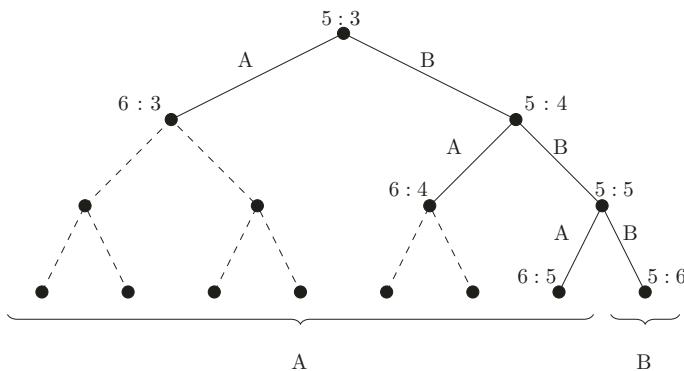


Abb. 2.3 Baumillustration des Punkteproblems von de Méré

AAB, ABB, BAB, BBA, BBB, deren 8. Da außer im Fall BBB der Spieler A gewinnt (er braucht ja nur noch einen Punkt), soll der Gewinn im Verhältnis 7 : 1 geteilt werden.

Offensichtlich ist es bei größeren a und b zu langwierig, alle 2^{a+b-1} Möglichkeiten aufzuzählen. Pascal bemerkte zunächst, dass nicht die Reihenfolge, sondern nur die Anzahlen der Punkte für A und B in diesen $a + b - 1$ Runden wichtig sind. So suchte er eine effiziente Methode, um Anzahlen von Reihenfolgen von zwei Buchstaben (A und B bei uns) zu finden, die eine bestimmte Länge $n = a + b - 1$ haben und in denen der eine Buchstabe (sagen wir A) genau bzw. mindestens k -mal auftritt. Dazu benutzte er das Dreieck, welches heute unter dem Namen Pascal'sches Dreieck bekannt ist. Wie im [Absch. 2.1](#) beschrieben, war dieses Dreieck schon Jahrhunderte vor Pascal bekannt. Insbesondere war auch bei europäischen Autoren der Renaissance seine Beziehung zum binomischen Satz beschrieben. Pascal war aber der Erste, der dieses Dreieck vollständig analysierte. Er bewies verschiedene Beziehungen zwischen den im Pascal'schen Dreieck enthaltenen Zahlen, die wir heute mit $\binom{n}{k}$ bezeichnen³ und Binomialkoeffizienten nennen. Er veröffentlichte seine Abhandlung über das Dreieck, *Le Traité du triangle arithmétique*, im Jahr seiner Korrespondenz mit Fermat: 1654. Bei Pascal ist das Dreieck noch in einer rechteckigen Matrix enthalten, die moderne Form ist in [Abb. 2.4](#) zu sehen ([8, 14]). Es ist leicht einzusehen, dass durch die Korrespondenz zum Thema Problem der Punkte Pascal und Fermat zugleich die Binomialverteilung begründeten: Die Wahrscheinlichkeit, dass in genau k von n (unabhängigen) Versuchen ein Ereignis („Erfolg“) auftritt, für den die Wahrscheinlichkeit des Auftritts in einem einzelnen Versuch p ist, beträgt

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

³Das Symbol $\binom{n}{k}$ für die Anzahl der Wahlen von k von n Elementen entstand im 19. Jh. durch Abwandlung des Symbols $\left(\frac{n}{k}\right)$, welches Euler für Binomialkoeffizienten benutzte ([5]).

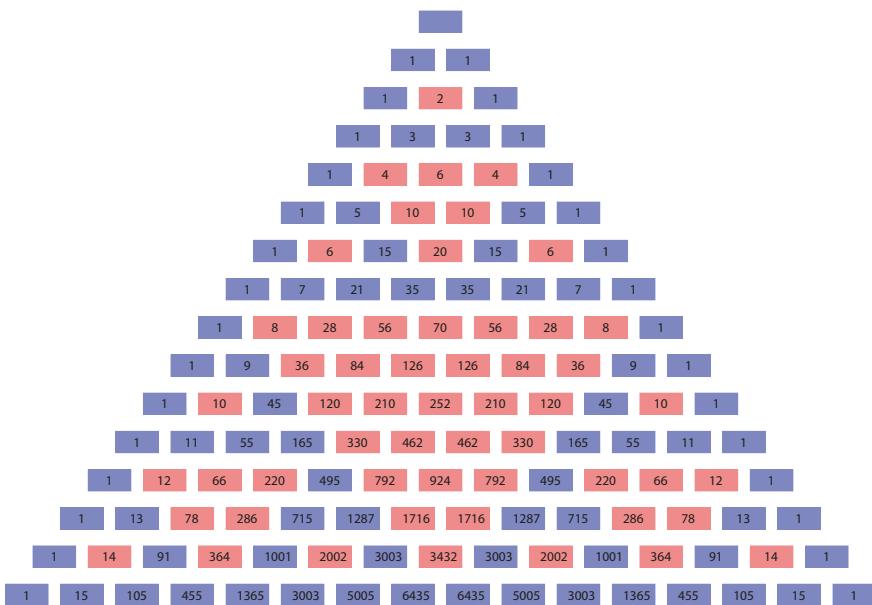


Abb. 2.4 Pascal'sches Dreieck und das Muster, welches darin entsteht, wenn man die Positionen gerader und ungerader Zahlen verschiedenfarbig einfärbt

Pascals und Fermats Resultate wurden von dem niederländischen Wissenschaftler Christiaan Huygens (1629–1695) systematisiert und erweitert. Von ihm stammt das erste veröffentlichte mathematische Buch über Wahrscheinlichkeit, *De ratiociniis in ludo aleae* (1656). Besonders wichtig an Huygens' Buch ist, dass hier zum ersten Mal der Erwartungswert erwähnt wird. Allerdings ist seine Definition noch etwas diffus als Wert eines Spieles beschrieben: Wenn man die gleiche Chance hat, entweder 3 oder 7 Schillinge zu gewinnen und es gleich wahrscheinlich ist, den einen oder anderen Gewinn zu erzielen, ist das Spiel 5 Schillinge „wert“, und somit wären 5 Schillinge der geeignete Einsatz. Der Ausdruck „Erwartung“ stammt aber vom niederländischen Mathematiker Frans van Schooten (1615–1660), der Huygens' Text in Lateinische übersetzt hat ([9, 12, 25]).

Anfang des 18. Jh., 1713, erschien (posthum) **Jakob Bernoullis** (1654–1705) *Ars conjectandi*, das von vielen Autoren als das erste wichtige Werk zum Thema angesehen wird, ein Wendepunkt in der Geschichte dieser Disziplin. Man könnte sogar sagen, dass durch dieses Werk die Wahrscheinlichkeitstheorie zur selbstständigen mathematischen Disziplin wurde. Es ist nicht nur weit umfassender als die Texte der Vorgänger, sondern enthält viele Neuigkeiten. Insbesondere findet man hier zum ersten Mal in der Geschichte die theoretische Diskussion der Wahrscheinlichkeit als eine Zahl zwischen 0 und 1.

Ars Conjectandi ist vierteilig. Der erste der Teile enthält „nur“ Huygens' Werk mit Bernoullis Kommentaren. Der zweite Teil enthält kombinatorische, für die Wahrscheinlichkeit, bedeutende Prinzipien, die dann im dritten Teil auf konkrete

wahrscheinlichkeitstheoretische Probleme angewendet werden. In dem zweiten Teil sind alle klassischen Resultate über Permutationen und Kombinationen enthalten und auch der erste vollständige Beweis des Binomialsatzes für den Fall positiver ganzzahliger Exponenten. Der vierte Teil ist am wichtigsten und interessantesten von allen. Dieser unvollendete Teil der *Ars Conjectandi* beschäftigt sich im Allgemeinen mit den Fragen der Anwendungen der Wahrscheinlichkeit auf „zivile, moralische und ökonomische“ Fragen. Hier wird die fundamentale Frage der Beziehung zwischen Wahrscheinlichkeit *a priori* und Wahrscheinlichkeit *a posteriori* gestellt: Wenn man eine genügend große Anzahl der Beobachtungen der Ergebnisse eines zufälligen Experiments hat, kann man daraus die theoretische Wahrscheinlichkeit schätzen? Die Antwort ist zugleich das Letzte, was in *Ars Conjectandi* enthalten ist (nach [7]):

Theorem 2.1 (Bernoullis (schwaches) Gesetz der großen Zahlen) *Sei $p = \frac{r}{n}$ die (theoretische) Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses in einem zufälligen Experiment. Für eine genügend große Anzahl N der (unabhängig voneinander durchgeführten) Experimente ist dann die Entfernung der relativen Häufigkeit $\frac{R}{N}$ dieses Ereignisses zu p nicht größer als ein fixer Betrag:*

$$\left| \frac{R}{N} - p \right| \leq \frac{1}{n}.$$

Heute spricht man von „Konvergenz in Wahrscheinlichkeit“ der relativen Häufigkeit gegen die theoretische Wahrscheinlichkeit p und meint damit: Wenn man ein zufälliges Experiment unbegrenzt wiederholt, immer unter gleichen Bedingungen, und jeder Versuch von allen anderen Versuchen unabhängig ist, dann werden die relativen Häufigkeiten eines Ereignisses A immer weniger variieren und sich mit Wahrscheinlichkeit 1 der theoretischen Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A in einem einzelnen Experiment nähern. Modern formuliert (für binomialverteilte Zufallsvariablen): Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\left| \frac{R}{N} - p \right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Bernoulli selbst nannte dieses Resultat den „goldenen Satz“, der Name „Gesetz der großen Zahlen“ stammt von S.-D. Poisson ([4, 7, 17]).

2.3 Modernisierung der Wahrscheinlichkeitstheorie

Im Laufe des 18. Jh. wurde die Wahrscheinlichkeitstheorie immer populärer und entwickelte sich stetig weiter. Jakob Bernoullis Resultate wurden zunächst von **Abraham de Moivre** weiterentwickelt. De Moivre ist zwar vor allem für seine Formel für Potenzierung

komplexer Zahlen berühmt, aber seine wichtigsten Beiträge leistete er gerade in der Wahrscheinlichkeitstheorie. Die wichtigste seiner Schriften, *The Doctrine of Chance: A method of calculating the probabilities of events in play*, erschien in vier Ausgaben: die erste Ausgabe in Lateinisch, 1711, die zweite in Englisch, 1718, und zwei weitere erweiterte englische Ausgaben 1738 und 1756.

Abraham de Moivre (1667–1754) wurde in Frankreich geboren, aber wanderte aus Glaubensgründen nach England aus. In Frankreich wurde nämlich 1685 das Edikt von Nantes, welches die Glaubensfreiheit garantierte, aufgehoben; de Moivre war protestantischen Glaubens und wurde deswegen einmal sogar verhaftet. In London lebte er von privatem Mathematikunterricht, den er auch in Londoner Kaffeehäusern gab. Er floh vor religiöser Diskriminierung in Frankreich, hatte aber zeitlebens mit der nationalen Diskriminierung in England zu kämpfen und konnte nie eine Professur erreichen. Zu seinen Freunden zählten Edmund Halley und Newton. De Moivre blieb unverheiratet. Um seinen Tod rankt sich die Geschichte, dass er, als er bemerkte, dass er jeden Tag etwa eine Viertelstunde länger schlief, vorausgesagt hatte, dass er sterben würde, wenn er zum ersten Mal volle 24 Stunden schlafen wird. Angeblich geschah dies wirklich ([6]).

The Doctrine of Chance enthält nicht nur viele interessante Probleme und Anwendungen (siehe unten, [Beispiel 2.4](#)) sowie einige wichtige Definitionen (beispielsweise der statistischen Unabhängigkeit von Ereignissen), sondern auch, dies bezieht sich auf die Ausgabe von 1756, die erste Form des heute als Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace bekannten Satzes und somit auch die erste Erscheinung der Normalverteilung in der Geschichte. In der Ausgabe von 1738 findet man auch die Stirling'sche Formel für die Fakultäten, die er schon 1730 in *Miscellanea Analytica* benutzt hatte. Bei de Moivre fehlt 1730 noch die Proportionalitätskonstante in der Schätzung $n!$ als proportional zu $\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ für große n . De Moivre selbst schreibt 1738 die Entdeckung der Proportionalitätskonstante $\sqrt{2\pi}$ dem schottischen Mathematiker James Stirling (1692–1770) zu und verwendete die Formel, um die erste Form des Grenzwertsatzes zu beweisen. De Moivre bewies den Grenzwertsatz nur für binomialverteilte Variablen für den Fall $p = \frac{1}{2}$, später (1812) konnte Laplace die Aussage auf beliebige $p \in [0, 1]$ erweitern.

Vereinfacht ausgesagt: Wenn man eine Reihe unabhängiger zufälliger Experimente durchführt, bei denen in jeder Durchführung der Erfolg mit gleicher Wahrscheinlichkeit p auftritt, kann man für große Anzahlen n der Experimente die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen l und m Erfolge aufgetreten sind, als

$$\sum_{i=l}^m \binom{n}{i} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \approx \Phi\left(\frac{2m-n}{\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{2l-n}{\sqrt{n}}\right) \quad (2.1)$$

schätzen, wobei die Integrale

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt. \quad (2.2)$$

zufriedenstellend genau berechnet und tabelliert werden konnten. Somit war dies viel effizienter, als lange Summen der Form wie in Gl. 2.1 links auszurechnen.

De Moivre entdeckte den Satz durch die Suche nach Approximationen für Berechnungen der Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten Zufallsvariablen bei großen n (also vielen Versuchen). Er zeigte 1733, dass

$$\left(\frac{n}{2} + d\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \approx \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} e^{-2d^2/n}$$

und

$$\sum_{|k-n/2| \leq d} \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \approx \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{d/\sqrt{n}} e^{-2t^2} dt.$$

Diese Idee der Konvergenz der Binomialverteilungen für wachsende n ist durch Abb. 2.5 dargestellt.

Bevor wir uns weiteren Entwicklungen zuwenden, stellen wir noch das Berühmteste unter den in *The Doctrine of Chance* enthaltenen Problemen (aus der dritten Ausgabe 1756). Dieses Problem wurde für den Fall $a = b$ schon von Pascal, Fermat und Huygens gelöst.

Problem 2.4 (Ruin des Spielers) Zwei Spieler spielen wiederholt ein Spiel, in dem der Erste mit Wahrscheinlichkeit p den Betrag 1 von dem zweiten Spieler gewinnt, und mit Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ den Betrag 1 an den zweiten Spieler verliert. Wenn die An-

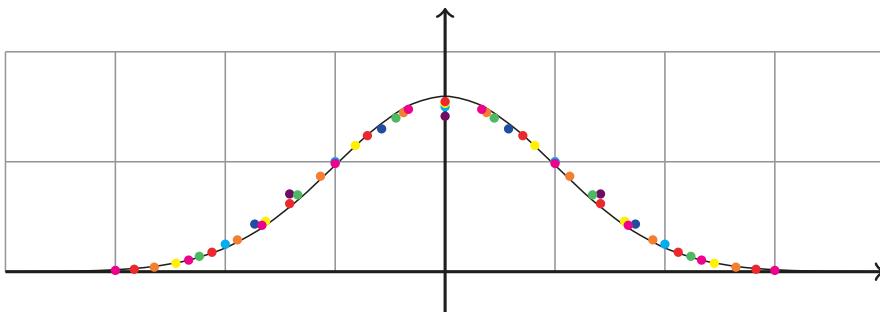


Abb. 2.5 Die Normalkurve als Grenzwert von Punkten $\left(\frac{k-\frac{n}{2}}{\sqrt{n}}, \frac{\sqrt{n}}{2^n} \binom{n}{k}\right)$ mit $k = 0, 1, \dots, n$

Abb. 2.6 Illustration zu de Moivres Lösung des Problems des Ruins des Spielers

$(q/p)^a$	
$(q/p)^3$	
$(q/p)^2$	
$(q/p)^1$	
	$(q/p)^{a+1}$
	$(q/p)^{a+2}$
	$(q/p)^{a+b}$

fangsvermögen a und b der zwei Spieler gegeben sind, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der zweite Spieler ruiniert wird (d. h. sein ganzes Vermögen b verliert)?

Wie de Moivre gab auch Jakob Bernoulli diese allgemeine Problemstellung, gab auch eine Lösung an, aber ohne Beschreibung des Lösungsweges. De Moivre dagegen fand einen eleganten Lösungsweg, der nicht den Binomialsatz, sondern einen „Trick“ benutze. Die Idee war, sich die Vermögen beider Spieler als Türme der Höhe a bzw. b der einzelnen Geldstücke vorzustellen (siehe Abb. 2.6). Den Geldstücken werden Nominalwerte $\left(\frac{q}{p}\right)^i$ zugeschrieben, denen vom ersten Spieler mit $i = a, a-1, \dots, 2, 1$ (der erste Spieler setzt also in der ersten Runde das Geldstück mit Nominalwert $\left(\frac{q}{p}\right)^a$) und denen des zweiten Spielers mit $i = a+1, a+2, \dots, a+b$ (der Zweite spielt also zunächst mit dem Geldstück mit nominalem Wert $\left(\frac{q}{p}\right)^{a+1}$). Man stellt sich vor, dass das gewonnene Geldstück immer von der Spitze des Geldturms des Verlierers auf die Spitze der Geldturms des Gewinners gestellt wird. Dies bedeutet, dass der Nominaleinsatz des zweiten Spielers in jeder Runde genau $\frac{q}{p}$ -mal größer ist als der des ersten Spielers, also ist der nominale Erwartungswert jeder Runde 0:

$$p \left(\frac{q}{p}\right)^{i+1} - q \left(\frac{q}{p}\right)^i = 0$$

für alle i . Wenn nun mit P die Wahrscheinlichkeit des Ruins des zweiten Spielers bezeichnet wird (also die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Spieler alle b seiner Geldstücke gewinnt), ist $Q = 1 - P$ die Wahrscheinlichkeit des Ruins des ersten Spielers. Andererseits müssen die gesamten Nominalerwartungen beider Spieler gleich sein, da sie ja in jeder Runde gleich sind, also muss

$$P \sum_{j=1}^b \left(\frac{q}{p}\right)^{a+j} = (1 - P) \sum_{i=1}^a \left(\frac{q}{p}\right)^i$$

erfüllt sein. Daraus erhält man die Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}} = p^b \frac{p^a - q^a}{p^{a+b} - q^{a+b}}$$

des Ruins des zweiten Spielers ([6, 20, 19]).

Daniel Bernoulli (1700–1782), ein Neffe Jakob Bernoullis und vor allem als mathematischer Physiker berühmt (siehe Abschn. 1.4), leistete aber auch einige bedeutende Beiträge zur Wahrscheinlichkeitstheorie. Er wendete die Wahrscheinlichkeitstheorie auf Versicherungen an, als Erster wendete er auch systematisch Differenzialgleichungen auf wahrscheinlichkeitstheoretische Probleme an. Auch begründete er die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der kinetischen Gastheorie. Besonders bekannt ist aber sein Beitrag zu einem der berühmtesten Probleme der Geschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie:

Problem 2.5 (St. Petersburger Paradox) Ein Spieler spielt ein Spiel, in dem eine Münze geworfen wird. Er erhält eine Geldeinheit, wenn Kopf im ersten Wurf auftritt, zwei Geldeinheiten, wenn Kopf zum ersten Mal beim zweiten Wurf auftritt, vier Geldeinheiten, wenn Kopf im dritten Wurf zum ersten Mal geworfen wird, usw. 2^{n-1} Geldeinheiten, wenn der n -te Wurf der erste ist, in dem Kopf auftritt. Welchen Betrag sollte der Spieler einsetzen, damit das Spiel fair wird?

Der Name des Problems geht darauf zurück, dass Daniel Bernoulli seine Analyse des Problems in den Berichten der St. Petersburger Akademie der Wissenschaften 1738 veröffentlichte. Es ist leicht einzusehen, dass der Gewinn 2^{n-1} mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2^n}$ ausgezahlt wird (für eine Wurfserie vom Typ ZZ... ZK mit $n-1$ mal Z). Anscheinend ist deswegen die erwartete Auszahlung an den Spieler gleich

$$1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \dots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty,$$

also wäre jeder noch so große (genauer gesagt, nur ein unendlich großer) Einsatz „fair“.

Das Paradoxe an diesem Paradox entdecken wir, wenn wir genauer nachdenken. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler innerhalb der ersten fünf Würfe gewinnt, ist sehr hoch: $\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^5} = 96,875\%$. Mit hoher Wahrscheinlichkeit gewinnt der Spieler also höchstens 16 Geldeinheiten: weit weniger als unendlich! Also wäre ein Einsatz von 16 oder vielleicht 20 Geldeinheiten viel eher als fair anzusehen. Was ist korrekt?

Daniel Bernoulli schlug den folgenden Ausweg vor: Man soll den vom Spieler erwarteten Nutzen in Betracht ziehen (in seinen Worten: Man muss zwischen der „mathematischen“ und „moralischen“ Erwartung unterscheiden). Dieser hängt auch vom schon bestehenden Vermögen des Spielers ab. Wenn der Spieler viel Geld besitzt und in einem Spiel sein Vermögen, wenn auch mit hoher Wahrscheinlichkeit, nur um einen relativ kleinen Betrag vergrößern kann, dann ist das Spiel von kleinem Nutzen für den Spieler, und umgekehrt. Bezeichnen wir die Nutzenfunktion mit U (engl. *utility*). Ihre Variable ist der

Geldbesitz G des Spielers. Daniel Bernoulli nahm an, dass die Änderung des Nutzens (dU) bei einer Änderung des Geldbesitzes von G auf $G + dG$ dem derzeitigen Geldbesitz umgekehrt proportional ist: $dU = k \frac{dG}{G}$. Man kann annehmen, dass $k = 1$ ist. Wenn man auch, logischerweise, annimmt, dass der Beginnnutzen U_0 gleich null ist, bei einem Anfangsbesitz von G_0 Geldeinheiten, erhält man

$$U(G) = \ln \frac{G}{G_0}.$$

Der erwartete oder mittlere Nutzen im beschriebenen Spiel ist dann, so Daniel Bernoulli, gleich

$$\bar{U} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n U(G_n) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \ln \frac{G_n}{G_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ln \frac{G_0 - E + 2^{n-1}}{G_0},$$

da ja der Geldbesitz im Fall eines Einsatzes E und eines Gewinns im Wurf n von $G_0 - E$ auf $G_n = G_0 - E + 2^{n-1}$ wächst. Daniel Bernoullis Vorschlag der Auflösung des St. Petersburger Paradoxen ist also, die Gleichung

$$\bar{U} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(G_0 - E + 2^{n-1})}{2^n} = \ln G_0$$

nach E aufzulösen. Numerisch ist dies heutzutage leicht und schnell zu erledigen. Man erhält beispielsweise, dass bei einem Anfangsvermögen von 10 Geldeinheiten ein Einsatz von etwa 3 Geldeinheiten vernünftig ist, bei einem Anfangsvermögen von 1000 Geldeinheiten sollte man aber, nach diesem Modell, „nur“ etwa 6 Einheiten einsetzen ([2, 4, 11, 18]).

Die Wahrscheinlichkeit birgt auch heute noch viele Möglichkeiten für Trugschlüsse, nicht nur unter Nichtmathematikern. Deswegen wollen wir hier auch ein berühmtes Beispiel eines Denkfehlers im Kontext elementarer Wahrscheinlichkeitstheorie, welches von einem überaus begabten (und bekannten) Mathematiker stammt. Jean le Rond d'Alembert (1717–1783), der vor allem in der Geschichte der mathematischen Analysis (siehe Abschn. 1.4) bekannt ist, befasste sich mit der folgenden Frage: Wenn man eine faire Münze zweimal hintereinander wirft, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man mindestens einmal Kopf wirft? D'Alemberts „Lösung“ war: Falls man schon beim ersten Wurf einen Kopf wirft, muss man nicht noch ein anderes Mal werfen. Also sind die möglichen Ergebnisse: im ersten Wurf Kopf; im ersten Wurf Zahl, dann Kopf; in beiden Würfen Zahl. Dies bedeutet, dass die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich $\frac{2}{3}$ ist. Leser, die an mehr Informationen zu diesem und anderen berühmten Fehlern in der Geschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie interessiert sind, verweisen wir auf den Artikel [10].

Kurzbiografie von Pierre-Simon Laplace

Pierre-Simon Laplace (1749–1827) studierte Theologie, ohne Abschluss, da er während des Studiums seine Liebe zur Mathematik entdeckte und nach Paris zog, wo d'Alembert ihn mathematisch förderte. Eine Zeit lang arbeitete er auch mit dem Vater der modernen Chemie, Antoine Lavoisier, zusammen. Gemeinsam konnten sie beweisen, dass die Atmung eine Form der Verbrennung ist. Laplace ist außer für seine wahrscheinlichkeitstheoretischen Resultate besonders auch auf dem Gebiet der mathematischen Astronomie und mathematischen Physik berühmt. Er konnte die Stabilität des Sonnensystems rechnerisch beweisen. Sein berühmtestes Werk ist *Traité de Mécanique Céleste* (1799–1825). In diesem Werk ist auch die berühmte Laplace'sche partielle Differenzialgleichung $\Delta\Phi = 0$ enthalten (die Gleichung selbst war schon vor Laplace bekannt). Hier findet man auch oft die berühmte Wendung „man kann leicht sehen, dass ...“, mit der er Resultate, von denen er überzeugt war, begleitete, anstatt die Beweise anzugeben.

Als Persönlichkeitsmerkmal von Laplace ist vor allem sein politischer Opportunismus auffällig. Er schaffte es, in der turbulenten Zeit der Jahrhundertwende des 18./19. Jh., nicht nur seine wissenschaftliche Karriere zu verfolgen, sondern sich auch an wichtigen politischen Stellen zu halten. Seine zwischenmenschlichen Beziehungen waren auch problematisch, da er sich oft über andere Kollegen stellte und unbescheiden war. Vor der Revolution war er als Prüfer der Königlichen Artillerie tätig, und in dieser Funktion prüfte er den damals 16-jährigen Napoleon Bonaparte. Während der Revolution war er Mitglied des Komitees für Maße und Gewichte. Unter Napoleons Herrschaft schaffte es Laplace 1799 zur Position des Innenministers, hielt sich aber nur sechs Wochen. Später kommentierte Napoleon, auf Laplaces analytische Erfolge anspielend, dass Laplace den „Geist des unendlich Kleinen“ in die Regierung gebracht hatte. Er wurde von Napoleon 1806 zum Grafen geadelt. Er unterstützte 1814 die Wiederkehr der Bourbonen und stimmte gegen Napoleon. Er wurde 1817 Marquis. Als er 1826 das Gesetz, welches die Pressefreiheit beschränkte, unterstützte, verlor er seine letzten politischen Freunde ([6]).

In den Endjahrzehnten des 18. Jh. begann sich **Pierre-Simon Laplace** mit der Wahrscheinlichkeitstheorie zu beschäftigen. Seine Arbeit kulminierte in dem berühmten Buch *Théorie Analytique des Probabilités* (1812). Es behandelt alle klassischen Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung, inklusive deren Entstehungsgeschichte, aber erweitert auch viele frühere Resultate. Die zweite Ausgabe wurde mit einem langen Vorwort (153 Seiten!) veröffentlicht, welches oft separat als *Essai Philosophique sur les Probabilités* gedruckt wurde und dessen Ziel es ist, ein allgemeineres Publikum in die Wahrscheinlichkeitsrechnung einzuführen. In diesem Text beschäftigte sich Laplace auch mit der philosophischen Seite der Wahrscheinlichkeit. Nach Laplace ist Zufall nichts anderes

als die Bezeichnung für Ereignisse, deren Ursache noch nicht erklärt werden kann. Das Universum ist deterministisch, eine Intelligenz (später Laplace'scher Dämon genannt), welche alle Daten über den gegenwärtigen Zustand hätte, könnte die zukünftigen Zustände daraus mathematisch erfassen ([25]).⁴

Der erste Teil der *Théorie Analytique des Probabilités* ist der Analysis gewidmet, der zweite Teil beginnt mit der klassischen Definition der Wahrscheinlichkeit (siehe Anfang des Abschn. 2.2). Laplace beweist fundamentale Regeln für die Wahrscheinlichkeitsrechnung, beispielsweise dass die Wahrscheinlichkeit, dass eines von zwei inkompatiblen (sich ausschließenden) Ereignissen eintritt, gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten dieser zwei Ereignisse ist sowie die Multiplikationsregel für unabhängige Ereignisse. Hier findet man auch die Lösung des berühmten Buffon'schen Nadelproblems, welches 1777 Georges Louis Leclerc, Comte de Buffon (1707–1788) beschrieben hatte ([4]).

Problem 2.6 (Buffon'sches Nadelproblem) Auf einer Ebene sind parallele, gleich entfernte, Geraden eingezeichnet. Die Entfernung zweier Nachbargeraden sei a . Eine dünne Nadel der Länge $l \leq a$ wird auf die Ebene geworfen. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel eine der Geraden schneidet.

Dieses klassische Problem der geometrischen Wahrscheinlichkeitstheorie wird durch Integralrechnung gelöst. In Abb. 2.7 links sieht man, dass die Bedingung, dass die Nadel eine der Linien schneidet, gleich $\frac{l}{2} \sin \varphi < d$ ist, wenn mit d der Abstand des Mittelpunktes der Nadel zur näheren der Linien ist und φ der Winkel zwischen Nadel und Linien.

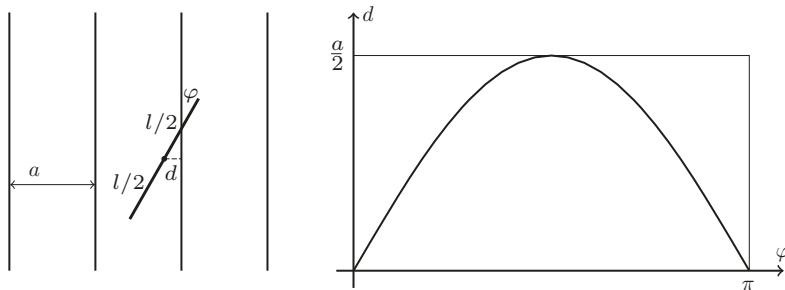


Abb. 2.7 Illustration zum Buffon'schen Nadelproblem

⁴Nach den modernen Erkenntnissen der Physik und der Chaostheorie ist dies aber unmöglich. Als Begründer der Chaostheorie gilt Jules Henri Poincaré, der unter anderem bemerkte, dass in vielen dynamischen Systemen schon kleine Änderungen der Anfangsbedingungen (also auch kleine Fehler in deren Beträgen) große Differenzen im Resultat verursachen können. Dies bedeutet, dass, auch wenn rein theoretisch, das Verhalten eines Systems vorhergesagt werden könnte, es dies in Praxis oft nicht sein wird, da die Anfangsbedingungen eines Systems niemals exakt gemessen werden können ([21]).

Dies bedeutet, wenn man annimmt, dass φ uniform innerhalb des Segments $[0, \pi]$ verteilt ist und d uniform zwischen 0 und $a/2$, dass die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich dem Verhältnis der Fläche unter der Kurve $d = \frac{l}{2} \sin \varphi$ zwischen 0 und π und der Fläche des Rechtecks $[0, \pi] \times [0, a]/2$ (Abb. 2.7 rechts) ist. Die Integralrechnung ergibt die Wahrscheinlichkeit $\frac{2l}{a\pi}$. Laplace bemerkte auch, dass man diese Formel dazu benutzen könnte, den Wert der Kreiszahl π statistisch-experimentell durch Wiederholung des im Buffon'schen Nadelproblem beschriebenen Experiments zu schätzen ([4, 1]).⁵

In der *Théorie Analytique des Probabilités* enthalten ist auch der Satz von Bayes, nach **Thomas Bayes** (1702–1761) benannt, der sich als Erster mit Fragen der bedingten Wahrscheinlichkeit beschäftigte und einen Spezialfall des folgenden Satzes formulierte:

Theorem 2.2 (Satz von Bayes) *Für zwei Ereignisse A und B gilt*

$$P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A),$$

wenn man mit $P(X|Y)$ die bedingte Wahrscheinlichkeit bezeichnet, dass X eintritt, unter der Bedingung, dass Y eingetreten ist.

Der Name „Satz von Bayes“ stammt aber nicht von Laplace, sondern von Poincaré ([6]). Ein bedeutender Teil der *Théorie Analytique des Probabilités*, inklusive seine Generalisierung des Grenzwertsatzes, bezieht sich auch auf statistische Anwendungen (siehe Abschn. 3.2). Laplaces generalisierte Version des Grenzwertsatzes bezieht sich auf wiederholte Versuche, für eine beliebige Wahrscheinlichkeit p des Erfolges in einzelnen Versuchen (bei de Moivre war $p = 1/2$):

Theorem 2.3 (Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace, moderne Fassung) *Für n unabhängige Bernoulli-Versuche⁶, wobei jedem die Erfolgswahrscheinlichkeit gleich p ist, ist für genügend große Versuchszahlen n die Anzahl k der Erfolge approximativ normalverteilt, d. h., für jede zwei reelle Zahlen $a < b$ gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a \leq \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b \right) = \Phi(b) - \Phi(a),$$

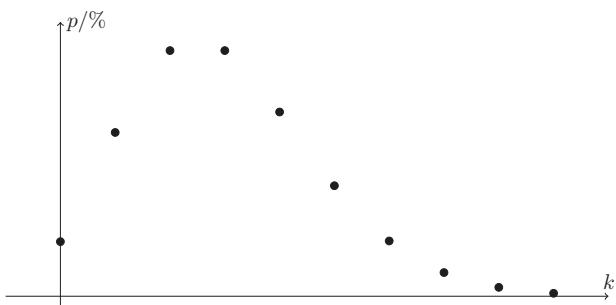
wobei Φ die durch Gl. 2.2 definierte Normalverteilungsfunktion ist.

Siméon Denis Poisson (1781–1840) hinterließ in seinem relativ kurzen Leben über 300 mathematische Schriften. Außer für seine Beiträge zur Wahrscheinlichkeitstheorie ist er vor allem als mathematischer Physiker bekannt. Sein Hauptwerk zum Thema Wahrscheinlichkeit und Statistik ist das 1837 erschienene Buch *Recherches sur la probabilité des*

⁵Das beste Resultat mit dieser Methode ist bisher mit 3408 Würfen (Lazzerini, 1901) erzielt worden: π wurde auf 6 Dezimalstellen genau erhalten ([4]).

⁶Ein Bernoulli-Versuch ist ein zufälliges Experiment mit nur zwei möglichen Ergebnissen.

Abb. 2.8 Poissonverteilung
(für $\lambda = 3$)



judgements en matière criminelle et matière civile. Hier führt er eine der bis heute am meisten verwendeten diskreten Distributionen, die Poisson-Verteilung, ein. Ähnlich wie die Normalverteilung ist diese auch ein Grenzfall der Binomialverteilung unter bestimmten Bedingungen: Wenn $n \rightarrow \infty$ und $p \rightarrow 0$ (n ist die Anzahl der Experimente und p die Erfolgswahrscheinlichkeit), aber pn zugleich gegen λ konvergiert (λ ist die durchschnittliche Anzahl von Erfolgen in einem bestimmten Zeitintervall), erhält Poisson die Wahrscheinlichkeit $\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, $k \in \mathbb{N}$, von genau k Erfolgen in dem Zeitintervall (siehe Abb. 2.8). Poissons Buch aus 1837 enthält auch zwei Formen des Gesetzes der großen Zahlen (dem er, wie schon erwähnt, den Namen gegeben hat). Die Berühmtere ist seine Generalisierung von Bernoullis Gesetz der großen Zahlen, die für binomialverteilte Zufallsvariablen formuliert war. Poisson konnte seine Variante unter Verwendung von Laplaces Grenzwertsatz beweisen: Wenn X die Anzahl der Erfolge in wiederholten Versuchen und p_i die Erfolgswahrscheinlichkeit im i -ten Versuch ist, dann gilt für alle $\varepsilon, Q > 0$ und genügend große Versuchszahlen n

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - \bar{p}\right| > \varepsilon\right) < Q.$$

Dabei ist \bar{p} das arithmetische Mittel von p_1, \dots, p_n ([4, 6, 15]).

Um die Mitte des 19. Jh. verschob sich die Hauptaktivität der Wahrscheinlichkeitstheorie aus Frankreich nach Russland. Der erste berühmte russische Wahrscheinlichkeitstheoretiker war **Pafnuti Lwowitsch Tschebyschow** (1821–1894). Er konnte 1846 das Gesetz der großen Zahlen und 1887 den zentralen Grenzwertsatz weiter generalisieren. Sein Student **Andrei Andrejewitsch Markow** (1856–1922) begann die Theorie stochastischer Prozesse durch Einführung der „verketteten Wahrscheinlichkeiten“, heute als Markow-Ketten bekannt. Dies sind Folgen von Zufallsvariablen, bei denen die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses nur von dem Resultat des unmittelbar vorigen Ereignisses abhängt. Er hatte keine physikalischen Anwendungen im Sinn, aber wendete seine Ketten verbunden mit seinem Interesse an Literatur an, an Folgen zweier „Zustände“ von Buchstaben im Text: Vokal und Konsonant ([4, 6, 15]).

Um die Jahrhundertwende des 19./20. Jh. bestand das Hauptproblem der Wahrscheinlichkeit in der zirkularen klassischen Definition: Die Wahrscheinlichkeit wird als Quotient von günstigen und allen möglichen Ergebniszahlen definiert, vorausgesetzt,

alle Ergebnisse sind *gleich* wahrscheinlich: Die Wahrscheinlichkeit ist hiermit also über Wahrscheinlichkeit definiert?! Dieses Problem wurde endlich 1933 aus der Welt geschafft, als **Andrei Nikolajewitsch Kolmogorow** in der Monografie *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* die Axiome der Wahrscheinlichkeitstheorie einführte. Im Zeitalter des „Axiomatisierungstrends“ in der Mathematik und vor allem von der Axiomatisierung der Maßtheorie⁷ beeinflusst, führte Kolmogorow seine sechs Axiome der Wahrscheinlichkeit ein: Gegeben sei eine (nichtleere) Menge Ω und eine Familie \mathcal{F} von Untermengen von Ω (diese Untermengen nennt Kolmogorow Zufallsereignisse). Wenn

1. \mathcal{F} ein „Mengenfeld“ ist;
2. $\Omega \in \mathcal{F}$;
3. eine Funktion P , die jedem Element A aus \mathcal{F} eine nichtnegative Zahl $P(A)$, die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A , zuordnet
4. und dabei $P(\Omega) = 1$ gilt sowie
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ für disjunkte $A, B \in \mathcal{F}$ und
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0$, wenn $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \dots, A_n \in \mathcal{F}$ für alle n und $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$,

dann ist Ω mit \mathcal{F} und P ein Wahrscheinlichkeitsraum. Heute werden die Axiome etwas kürzer angegeben: \mathcal{F} muss eine σ -Algebra sein und P ein normiertes Maß auf \mathcal{F} ([16]).

Andrei Nikolajewitsch Kolmogorow (1903–1987) wurde als außereheliches Kind geboren. Seine Mutter starb bei seiner Geburt, sein Vater, der bis zur Revolution im Exil lebte, fiel 1919 im Bürgerkrieg. Kolmogorow wurde von seiner Tante aufgezogen. Nach dem Schulabschluss arbeitete er eine Zeit lang als Eisenbahnschaffner, immatrikulierte sich dann 1920 an der Moskauer Universität und studierte Mathematik, Metallurgie und russische Geschichte. Ab 1922 befasste er sich intensiv mit Mathematik, anfangs zunächst mit Analysis und Maßtheorie. Nach seinem Diplom 1925 begann er, sich auch mit Wahrscheinlichkeit zu befassen, später auch mit Funktionalanalysis, Geometrie, Topologie, numerischer und allgemein angewandter Mathematik, Geschichte und Didaktik der Mathematik. Ab 1931 arbeitete er als Professor an der Moskauer Universität. Mit seinem guten Freund, dem Topologen Pawl Alexandrow, wohnte er in einer Datscha in Komarowka, und ihr Heim wurde zum Treffpunkt vieler bedeutender Mathematiker damaliger Zeit. Kolmogorow heiratete 1942. Im Laufe seines Lebens erhielt er viele namhafte wissenschaftliche Preise. Kolmogorow hatte auch viele nichtmathematische Interessen, insbesondere die Poesie des russischen Dichters Puschkin ([6]).

⁷Den an einer kurzen Beschreibung der Geschichte der Maßtheorie interessierten Leser verweisen wir auf den Abschn. *Measure* in J. Stillwells Buch *Mathematics and Its History* (Springer, 2010).

Tab. 2.1 Geschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie: Übersicht

Was?	Wer?	Wann?
Erste mathematische Betrachtungen über Glücksspiele	G. Cardano	Mitte 16. Jh.
Begründung der kombinatorischen Wahrscheinlichkeitstheorie	B. Pascal, P. de Fermat	1654
Erstes umfassendes Werk zum Thema	Jakob Bernoulli	1713
Zentraler Grenzwertsatz	A. de Moivre, P.-S. Laplace, P. L. Tschebyschow	1756 1812 1887
Gesetze der großen Zahlen	Jakob Bernoulli, S.-D. Poisson, P. L. Tschebyschow	1713 1837 1846
Axiomatisierung	A. N. Kolmogorow	1933

Zu guter Letzt wollen wir nach unserem kurzen Ausflug in die Geschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie darauf hinweisen, dass diese, aus Glücksspielproblemen entstandene Disziplin, im Laufe der Zeit auch viele praktische Anwendungen fand. Dabei meinen wir nicht nur die Statistik (deren kurze Geschichte im [Absch. 3.2](#) beschrieben wird), sondern auch die Naturwissenschaften. Insbesondere ist die Wahrscheinlichkeitstheorie, neben Funktionalanalysis und abstrakter Algebra, ein wichtiges Fundament der Quantentheorie.

In der [Tab. 2.1](#) ist eine Übersicht der Geschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie angegeben.

Literaturverzeichnis

1. Alsina, C., Nelsen, R.B.: *Bezaubernde Beweise*. Springer Spektrum, Berlin (2013)
2. Basieux, P.: *Abenteuer Mathematik – Brücken zwischen Wirklichkeit und Fiktion*. Rowohlt, Reinbek (1999)
3. Biggs, N.L.: *The roots of combinatorics*. Hist. Math. **6**, 109–136 (1979)
4. Burton, D.M.: *The History of Mathematics: An Introduction* (6. Aufl.). McGraw-Hill, New York (2006)
5. Cajori, F.: *A History of Mathematical Notation*. Dover Publications, New York (1993)
6. O'Connor, J.J., Robertson, E.F.: *MacTutor History of Mathematics Archives*. <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/>. Zugegriffen 13 Mai 2017
7. Denker, M.: Tercentennial anniversary of Bernoulli's law of large numbers. Bull. Amer. Math. Soc. **50**, 373–390 (2013)
8. Edwards, A.W.F.: Pascal and the problem of points. Intern. Stat. Review / Revue Intern. Statistique **50**, 259–266 (1982)
9. Freudenthal, H.: Huygens' foundations of probability. Hist. Math. **7**, 113–117 (1980)

10. Gorroochurn, P.: Errors of probability in historical context. *Am. Stat.* **65**, 246–254 (2011)
11. Gorroochurn, P.: Some laws and problems of classical probability and how Cardano anticipated them. *Chance* **25**, 13–20 (2012)
12. Gullberg, J.: From the Birth of Numbers. W. W. Norton & Co., New York (1997)
13. Hadley, J., Singmaster, D.: Problems to sharpen the young. *Math. Gazette* **76**, 102–126 (1992)
14. Pengelley, D.: Pascals treatise on the arithmetical triangle: Mathematical induction, combinations, the binomial theorem and Fermats theorem. https://www.math.nmsu.edu/hist_projects/pascalII.pdf. Zugegriffen 8 Mai 2017
15. Seneta, E.: A tricentenary history of the law of large numbers. *Bernoulli* **19**, 1088–1121 (2013)
16. Shafer, G., Vovk, V.: The sources of Kolmogorovs Grundbegriffe. *Stat. Sci.* **21**, 70–98 (2006)
17. Sheynin, O.B.: Studies in the history of probability and statistics. XXI.: On the early history of the law of large numbers. *Biometrika* **55**, 459–467 (1968)
18. Sheynin, O.B.: Studies in the history of probability and statistics. XXIII.: Daniel Bernoulli on the normal law. *Biometrika* **57**, 199–202 (1970)
19. Song, S., Song, J.: A note on the history of the gamblers ruin problem. *Comm. Stat. Appl. Methods* **20**, 157–168 (2013)
20. Stahl, S.: The evolution of the normal distribution. *Math. Mag.* **79**, 96–113 (2006)
21. Stillwell, J.: Mathematics ans Its History. Springer, New York (2010)
22. Urban, W.: Das Josephus-Problem. <http://www.hib-wien.at/leute/wurban/informatik/Josephus/josephus.html>. Zugegriffen 6 Mai 2017
23. Wilson, R.: Combinatorics: a Historical and Pedagogical Approach. In: Katz, V.J. (Hrsg.) Using History to Teach Mathematics, an International Perspective, S. 191–199. The Mathematical Association of America, Washington, DC (2000)
24. Wußing, H.: 6000 Jahre Mathematik, Eine kulturgeschichtliche Zeitreise – 1. Von den Anfängen bis Leibniz und Newton. Springer, Berlin (2008)
25. Wußing, H.: 6000 Jahre Mathematik, Eine kulturgeschichtliche Zeitreise – 2. Von Euler bis zur Gegenwart. Springer, Berlin (2009)

3.1 Anfänge der numerischen Mathematik

Die numerische Mathematik befasst sich mit der (möglichst effizienten, algorithmischen) Berechnung von Näherungslösungen verschiedener Typen mathematischer Probleme: mit allgemeinen Gleichungen und Gleichungssystemen, bestimmten Integralen, Differenzialgleichungen, Extremen von Funktionen, Koeffizienten von Funktionen, die bestimmte Bedingungen erfüllen, Auf den ersten Blick könnte man meinen, dass es sich um ein erst in der modernen Computerzeit entwickeltes Gebiet handelt. Zwar erlebte die numerische Mathematik mit der Einführung moderner Computer eine intensive Entwicklung, ihre Ursprünge kann man aber noch im Altertum finden.

Viele alte Völker besaßen Näherungswerte beispielsweise für die Kreiszahl π oder die Länge $\sqrt{2}$ der Diagonale des Einheitsquadrats, aber es ist nicht bekannt, wie solche Werte gefunden wurden; sehr wahrscheinlich war das eher empirisch. Lineare und möglicherweise kompliziertere Interpolationsmethoden¹ werden auch in alten Kulturen verbunden mit astronomischen Tabellen vermutet, doch sind keine Details dazu überliefert. Bis zur griechischen Antike gibt es aber eine bekannte Ausnahme. Es handelt sich um die babylonische Methode der Wurzelberechnung: Der Wert \sqrt{N} kann durch $a + \frac{N-a^2}{2a} = \frac{1}{2}(a + \frac{N}{a})$ angenähert werden, wenn a^2 die größte Zahl mit der Eigenschaft $a^2 < N$. Durch wiederholte Anwendung mit immer dem letzten errechneten Näherungswert anstelle von a erzielt man immer bessere Approximationen von \sqrt{N} .

¹Das Interpolationsproblem besteht im Finden einer Funktion, deren Graph durch gegebene Punkte passiert. Diese Funktion kann dann unter bestimmten Voraussetzungen zur Schätzung der Zwischenwerte benutzt werden.

Beispiel 3.1 (Berechnung von $\sqrt{2}$ mit altbabylonischer Methode)

Da $1^2 \leq 2 \leq 2^2$ ist der Anfangsschätzwert a für $\sqrt{2}$ gleich 1.

Im zweiten Schritt berechnen wir daraus die neue Schätzung: $\frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{1} \right) = 1,5$. Dann wird diese als a benutzt usw. In den ersten vier Schritten erhalten wir:

Schritt	a	$\sqrt{n} \approx$
1	1	1,5
2	1,5	1,416666666...
3	1,416666666	1,414215686275...
4	1,414215686275...	1,414213562375...

Der vierte berechnete Schätzwert $\sqrt{2} \approx 1,414213562375$ ist schon auf 11 Dezimalstellen genau!

Allgemein bestehen iterative Methoden zur Lösung von Gleichungen $f(x) = 0$ in einer Vorschrift von der Form $a_{n+1} = F(a_n)$, durch die man aus einer Schätzung a_n eine bessere a_{n+1} erhält. Wenn die so berechnete Folge (a_n) gegen die Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ konvergiert, spricht man von einer konvergenten iterativen Methode. Die babylonische Methode zur Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 = N$ ist also die älteste bekannte konvergente iterative Methode zur numerischen Lösung von Gleichungen.

Die altbabylonische Wurzelberechnungsmethode ist auch als Heron-Verfahren bekannt. In seiner *Metrika* beschreibt **Heron von Alexandria** (1. Jh. n. Chr.) diese Methode an dem Beispiel der Berechnung von $\sqrt{720}$. Aus Herons Formulierung ist es klar, dass ihm bewusst war, dass man durch wiederholte Anwendung des Verfahrens die Genauigkeit beliebig verbessern kann ([8, 30]).

Der interessanteste Beitrag der griechischen Antike zum Thema iterative numerische Verfahren stammt allerdings von Archimedes aus Syrakuse (ca. 287–212 v. Chr.). Er fand nämlich eine iterative Methode, mit der beliebig viele Stellen der Kreiszahl π berechnet werden können. Bis zur modernen Zeit, in der Reihenentwicklungen zu diesem Zweck herangezogen werden, basierten alle Berechnungen von Dezimalstellen der Zahl π auf dieser Idee. Archimedes startete mit einem Kreis, dem je ein reguläres Sechseck ein- und umgeschrieben ist. In jedem Schritt wurde die Anzahl der Seiten der ein- und umgeschriebenen Vielecke verdoppelt. Wenn wir mit u_n den Umfang des eingeschriebenen $6 \cdot 2^n$ -Ecks bezeichnen und mit U_n den des umgeschriebenen $6 \cdot 2^n$ -Ecks, gilt zunächst

$$u_0 < u_1 < \dots < u_n < \dots < u < \dots < U_n < \dots < U_1 < U_0,$$

wobei mit u der Kreisumfang bezeichnet ist. Weiter entdeckte Archimedes die rekursive Beziehung zwischen den Umfängen dieser Vielecke: Jeder nächste Umfang

eines umgeschriebenen Vielecks ist das harmonische Mittel der Umfänge der um- und eingeschriebenen Vielecke im vorigen Schritt:

$$U_{n+1} = \frac{2U_n u_n}{U_n + u_n}.$$

Andererseits ist jeder nächste Umfang des eingeschriebenen Vielecks das geometrische Mittel des diesem Schritt entsprechenden Umfangs des umgeschriebenen Vielecks und des Umfangs des eingeschriebenen Vielecks aus dem vorigen Schritt:

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n U_{n+1}}.$$

Die Anfangswerte (für einen Kreis mit Radius $r = 1$) sind $u_0 = 6$, $U_0 = 4\sqrt{3}$ (die Umfänge des ein- und umgeschriebenen regelmäßigen Sechsecks). Durch alternierende Einsetzung in die zwei durch die beiden obigen Formeln ausgedrückte Regeln berechnete Archimedes die Umfänge des ein- und umgeschriebenen 96-ecks, u_4 und U_4 . Da offensichtlich immer u_n kleiner und U_n größer ist als der Kreisumfang, erhielt er so die berühmte Schätzung des π -Wertes ([7, 20]):

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Dies formulierte Archimedes als

Theorem 3.1 (Archimedes' π -Schätzung) *Der Umfang jedes Kreises ist von seinem dreifachen Durchmesser um einen Teil größer, welcher kleiner als $\frac{1}{7}$ und größer als $\frac{10}{71}$ des Kreisdurchmessers ist.*

Durch um- und eingeschriebene Vielecke wurden, bewusst nach der Methode Archimedes' oder auch ohne der Kenntnis derselben, bis diese Methode in moderner Zeit durch effizientere Methoden der Analysis nicht verdrängt wurde, immer bessere Schätzungen des π -Wertes erhalten: Liu Hui in China (3. Jh., auf 5 Dezimalstellen genau), Zu Chongzhi auch in China (5. Jh., auf 7 Dezimalstellen genau), Al-Kāšī im heutigen Usbekistan (um 1430, auf 14 Dezimalstellen genau), Van Ceulen in Deutschland (1596, auf 35 Dezimalstellen genau).

Wir sehen also, dass erste iterative numerische Methoden zur Lösung von Gleichungen $f(x) = 0$ schon lange vor der modernen Rechnerzeit gefunden und benutzt wurden, aber eher als Methoden, die sich auf spezifische Einzelfälle bezogen. Die ersten allgemeinen iterativen Methoden scheinen aus dem alten China zu stammen. Die alten Chinesen entwickelten zunächst eine Methode zur Berechnung von Quadratwurzeln. Die Quadratwurzelberechnung findet man schon in dem ältesten erhaltenen altchinesischen mathematischen Text, dem *Arithmetischen Klassiker des Zhou-Gnomons* (*Zhoubi suanjing*, zwischen 100 v. Chr. und 100 n. Chr.). Es handelt sich eigentlich um eine

Variante des allgemeineren Divisionsalgorithmus (siehe dazu [26, 29]). Die Methode basiert auf der Generalisierung der Formel $(a + b)^2 = a^2 + (2a + b)b$ auf Quadrate von Summen mit mehr als zwei Termen.

Beispiel 3.2 (Altchinesische Berechnung von $\sqrt{55.225}$)

Offensichtlich ist 55.225 ein Quadrat einer dreistelligen Zahl (abc) (plus eventuell ein gebrochener Teil). Deswegen basiert die Berechnung auf der Formel

$$(100a + 10b + c)^2 = 10.000a^2 + 100(20a + b)b + (20(10a + b) + c)c.$$

Später, im 13. Jh., findet man auch eine geometrische Rechtfertigung dieser Regel (Abb. 3.1). Zuerst bestimmt man a , sodass $10.000a^2$ den größtmöglichen Betrag kleiner als $n = (100a + 10b + c)^2$ hat. In unserem Fall ($n = 55.225$) ist also $a = 2$, und man hat

$$55.225 = 40.000 + 100(40 + b)b + (20(20 + b) + c)c,$$

also

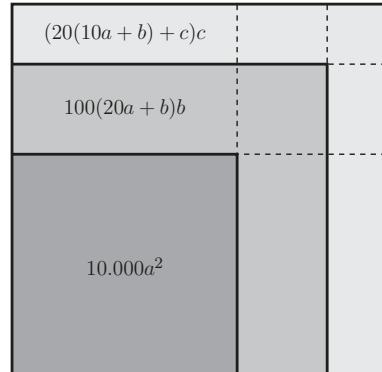
$$15.225 = 100(40 + b)b + (20(20 + b) + c)c.$$

Jetzt bestimmt man die einstellige Zahl b mit der Eigenschaft, dass die zweistellige Zahl ($4b$) mit b multipliziert so nahe wie möglich an 152 kommt (d. h., $100(40 + b)b \leq 15.225$ mit möglichst kleiner Differenz). Wenn man also diverse Produkte $41 \cdot 1, 42 \cdot 2$ usw. schätzt, sieht man leicht ein, dass $b = 3$ sein muss. Dies bedeutet

$$15.225 = 12.900 + (460 + c)c,$$

also sucht man noch die einstellige Zahl c , sodass $(460 + c)c$ möglichst nahe an $15.225 - 12.900 = 2325$ kommt. Mit $c = 5$ kann man dies exakt erzielen und erhält somit $\sqrt{55.225} = 235$ ([26]).

Abb. 3.1 Geometrischer Hintergrund des altchinesischen Quadratwurzelberechnungsverfahrens



In Europa wurde die im Grunde gleiche Methode von **Theon von Alexandria** Ende des 4. Jh. beschrieben. Theon erklärt die von Ptolemäus verwendete Methode und benutzt dabei, typisch altgriechisch, nicht numerische Rechenmethoden, sondern erklärt die Rechnung geometrisch durch eine der Abb. 3.1 ähnliche Abbildung.

Die Quadratwurzelberechnung wurde später zur Methode der Kubikwurzelberechnung abgewandelt. Der älteste bekannte altchinesische Algorithmus der Kubikwurzelberechnung ist in den *Neun Kapiteln* (*Jiuzhang suanshu*, ca. 200 v. Chr.–300 n. Chr.) beschrieben. Die Methoden der Quadrat- und Kubikwurzelberechnung wurden in China während des 1. Jtsd. zu allgemeineren Methoden zur Lösung kubischer Gleichungen weiterentwickelt. Der Höhepunkt der altchinesischen iterativen Methoden zur Lösung von Gleichungen ist **Qui Jiushaos** (ca. 1202–1261) *Shushu jiuzhang* (*Neun Bücher über Mathematik*, 1247). Hierin ist die Methode *Tianyuan* zur Lösung polynomialer Gleichungen beliebigen Grades beschrieben, die im Grunde dem Horner-Schema äquivalent ist. [14, 26, 29, 30, 32, 33].

Auch die alten Inder besaßen Methoden zur Wurzelberechnung, ihnen wird die folgende Methode zugeschrieben: Wenn man die Quadratwurzel von N bestimmen will (also die Gleichung $f(x) = x^2 - N = 0$ lösen will), schätzt man zuerst die erste oder die ersten Ziffern der Lösung x und erhält so die Schätzung α . Dann ist $x = \alpha + y$, und $f(\alpha + y) = 0$ führt zu

$$y = \frac{-f(\alpha)}{2\alpha + y}.$$

Wenn man y als genügend klein annehmen kann, kann man ihn aus dem Nenner streichen und erhält die Regel

$$y_1 = \frac{N - \alpha^2}{2\alpha}$$

zur Berechnung der Schätzung der ersten Ziffer y_1 von y . Falls $f(\alpha + y_1) > 0$, ist y_1 zu groß, und man vermindert y_1 um 1, wenn notwendig mehrmals, bis die Ungleichung $f(\alpha + y_1) \leq 0$ nicht erfüllt ist. Die Methode wird wiederholt, bis man nicht die gewünschte Anzahl von Ziffern von \sqrt{N} berechnet hat. Es ist leicht einzusehen, dass es sich um eine frühe Form des Newton-Verfahrens handelt.

Beispiel 3.3 (Berechnung von $\sqrt{2}$ mit altindischer Methode)

Im ersten Schritt schätzen wir die erste Ziffer von $x = \sqrt{2}$ als $\alpha = 1$. Dann ist $2 = (1 + y)^2 = 1 + (2 + y)y$, also $y = \frac{1}{2 + y} \approx \frac{1}{2} = 0,5$. Die Schätzung $1 + 0,5 = 1,5$ ist aber zu groß ($1,5^2 > 2$), man nimmt also als neues $\alpha = 1,4$ ($1,4 < 2$). Wir wiederholen: $2 = (1,4 + y)^2 = 1,4^2 + (2,8 + y)y$, also $y = \frac{0,04}{2,8 + y} \approx \frac{0,04}{2,8} = 0,01\dots$, also ist die neue

Schätzung $\alpha = 1,41$. Man fährt auf die gleiche Art fort, um weitere Ziffern von $\sqrt{2}$ zu erhalten.

Allgemein waren aber altindische Methoden zur Berechnung von Quadrat- und Kubikwurzeln auf der binomischen Formel begründet: Wenn $x = y^2$ (bzw. $x = y^3$) und man

eine erste Schätzung a für y hat, ist $y = a + b$ und $x - a^2 = 2ab + b^2$ (bzw. $x - a^3 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$), und dies kann man, ähnlich wie bei alten Chinesen beschrieben, ausnutzen, um den Restteil b der Wurzel y zu bestimmen ([9, 17, 32]).

Natürlich sind in den moslemischen Ländern des Mittelalters auch Methoden zur Wurzelberechnung (Quadrat- und Kubikwurzeln) bekannt gewesen, ab dem 11. Jh. findet man die Beschreibungen bei mehreren Autoren. Die Algorithmen sind im Grunde die Gleichen (oder sehr ähnlich), wie sie die alten Chinesen und Inder benutzten. **Omar Khayyam** (?1048–1131) sagt in seiner *Algebra* (mehr zu Khayyams Algebra im entsprechenden Kapitel des 1. Buches), dass die persisch-arabischen Autoren ihre Methoden von den Indern übernommen haben und dass er selbst die Methode für höhere Wurzeln generalisiert hat. Diese ist aber nicht überliefert, genauso wenig wie **Al-Bīrūnī** (973–1048) auch vom Autor selbst erwähnte, aber nicht erhaltene, Abhandlung zum Thema. Auf jeden Fall findet man solche Algorithmen ab dem 12. Jh. in den moslemischen Ländern, beispielsweise 1172 bei **Al-Samaw’al** (ca. 1130–1175) und 1265 **Naṣīr ad-Dīn at-Tūsī** (ca. 1201–1274). Vom letzten der großen Mathematiker des moslemischen Mittelalters, **Ǧamšīd Al-Kāšī** (ca. 1389–1429), wurde 1427 der *Schlüssel zur Arithmetik* verfasst, in dem er die allgemeine Methode zur Berechnung von n -ten Wurzeln beschreibt, die auf dem Binomialsatz begründet und im Grunde das Ruffini-Horner-Verfahren ist ([14, 17]).

Von Al-Kāšī stammt auch eine berühmte (und schon im 1. Buch erwähnte) iterative Methode zur Lösung von Gleichungen, mit der er $\sin 1^\circ$ berechnete; diesen Wert verwendete er dann auch für die erwähnte Approximation von π . Eigentlich berechnet Al-Kāšī den Wert der damals von moslemischen Astronomen verwendeten Variante der Sinus-Funktion, die wir (wie im Artikel [1]) mit Sin bezeichnen werden. Der Unterschied ist nicht nur, dass die Werte in babylonischer Tradition (siehe dazu das Kapitel über Arithmetik im 1. Buch) sexagesimal angegeben sind,² sondern auch, dass $\text{Sin } \alpha$ die halbe Länge der Sehne mit Mittelwinkel 2α darstellt, nicht in der heute üblichen Längeneinheit gleich Kreisradius gemessen, sondern mit der Längeneinheit gleich $(0; 1)_{60} = 60^{-1}$ Kreisradius. Al-Kāšī beginnt mit zwei Voraussetzungen:

- Der Wert von $\text{Sin } 3^\circ$ kann beliebig genau berechnet werden, da dieser mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist (d. h. mit den vier Grundoperationen und Quadratwurzeln ausgedrückt werden kann, siehe 1. Buch).³ Al-Kāšī nimmt den selbst berechneten Näherungswert $\text{Sin } 3^\circ = (3; 8, 24, 33, 59, 34, 28, 15)_{60}$ (dies entspricht dem modernen, auf 14 Dezimalstellen genauen, Wert $\sin 3^\circ = 0,05233595624294$).

²Wir werden die sexagesimalen Zahlen in der Form $(\dots a_1, a_0; a_{-1}, a_{-2}, \dots)_{60}$ angeben, mit der Bedeutung $\dots + a_1 60 + a_0 + a_{-1} 60^{-1} + a_{-2} 60^{-2} + \dots$

³Der exakte Wert ist $\sin 3^\circ = \sin(18^\circ - 15^\circ) = \sin 18^\circ \cos 15^\circ - \sin 15^\circ \cos 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

$$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} = \frac{2(1-\sqrt{3})\sqrt{5+\sqrt{5}+(\sqrt{10}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+1)}}{16}.$$

2. Die Beziehung zwischen den Werten von Sin eines Winkels und des dreifachen Winkels ist

$$\text{Sin}(3\alpha) = 3\text{Sin}(\alpha) - (0; 0,4)_{60}\text{Sin}^3(\alpha). \quad (3.1)$$

Dies ist offensichtlich der modernen Form $\sin(3\alpha) = 3 \sin(\alpha) - 4 \sin^3(\alpha)$ äquivalent.

Wenn man $\alpha = 1^\circ$ und den Wert für $\text{Sin } 3^\circ$ in Gl. 3.1 einsetzt und $\text{Sin}(\alpha)$ als Unbekannte x nimmt, erhält man die kubische Gleichung $3x - 4x^3 = (3; 8, 24, 33, 59, 34, 28, 15)_{60}$ bzw.

$$x = \frac{x^3 + (15)_{60}\text{Sin } 3^\circ}{(45)_{60}} = \frac{x^3 + (47, 6; 8, 29, 53, 37, 3, 45)_{60}}{(45)_{60}}. \quad (3.2)$$

Die Gl. 3.2 benutzt Al-Kāšī wiederholt, iterativ, um eine nach der anderen (sexagesimalen) Ziffer von $x = \text{Sin } 1^\circ$ zu bestimmen. Offensichtlich ist (und schon mit älteren Methoden gezeigt) $1 < x < (10)_{60}$, also $x = (a_0; a_{-1}a_{-2}\dots)_{60}$. Da a_0 eine ganze Zahl (zwischen 1 und 59) sein muss, kann in Gl. 3.2 der Teil $x^3/(45)_{60}$ vernachlässigt werden, und wir erhalten

$$a_0 = \left\lfloor \frac{(47, 6; 8, 29, 53, 37, 3, 45)_{60}}{(45)_{60}} \right\rfloor = 1.$$

Dabei haben wir mit $\lfloor \cdot \rfloor$ die Abrundungsfunktion bezeichnet. Der entsprechende Rest r_0 der Division $\frac{(47, 6; 8, 29, 53, 37, 3, 45)_{60}}{(45)_{60}}$ ist $r_0 = (2, 6; 8, 29, \dots)_{60}$. Also ist $x = (1; a_{-1}a_{-2}\dots)_{60}$. Dies setzt man wieder in Gl. 3.2 ein:

$$(1; a_{-1}\dots)_{60} = \frac{(1; a_{-1}\dots)_{60}^3 + (47, 6; 8, 29, 53, 37, 3, 45)_{60}}{(45)_{60}}$$

bzw.

$$(0; a_{-1}\dots)_{60} = \frac{(1; a_{-1}\dots)_{60}^3 + (2, 6; 8, 29, \dots)_{60}}{(45)_{60}}.$$

Da man jetzt nur a_{-1} sucht, kann man $(1; a_{-1}\dots)_{60}^3$ mit 1 schätzen und erhält

$$(0; a_{-1}\dots)_{60} = \frac{(2, 7; 8, 29, \dots)_{60}}{(45)_{60}} = (0; 2\dots)_{60},$$

also ist $a_{-1} = 2$ und $x = (1; 2\dots)_{60}$. Analog macht Al-Kāšī weiter, bis er nicht $x = (1; 2, 49, 43, 11, 14, 44, 16, 19, 16)_{60}$ erhält, was $\sin 1^\circ = 0,01745240643728$ (auf 14 Dezimalstellen genau!) entspricht. Wir wollen hier auch bemerken, dass Al-Kāšī wie auch im 12. Jh. Šaraf ad-Dīn at-Tūsī (ca. 1135–1213) eine Form des Newton-Verfahrens (siehe

weiter unten) zur Wurzelberechnung (also zur Lösung von Gleichungen von der Form $x^n = N$) benutzten ([1, 34]).

Der berühmteste europäische mittelalterliche Mathematiker **Leonardo aus Pisa (Fibonacci)** (ca. 1170–1240) beschreibt in seiner *Liber abbaci* (1202, 1228) und *Practica geometriae* (1220) Methoden zur Berechnung von Kubikwurzeln. Seine Methode ist die Gleiche wie bei den moslemischen Mathematikern vor ihm, er behauptet aber, dass er die Methode selbst gefunden hat. Seine Methode beschreibt er an Beispielen, erklärt aber auch, dass die Methode auf der Regel, die wir heute als $(10a + b)^3 = (10a)^3 + 3(10a)^2b + 3(10a)b^2 + b^3$ schreiben, basiert. Es ist aus seinen Beispielen klar, dass Fibonacci die Prozedur als eine iterative betrachtet.

Beispiel 3.4 (Fibonaccis Kubikwurzelberechnung)

Wir wollen $\sqrt[3]{9.876.543}$ berechnen. Zunächst trennt man die letzten drei Ziffern ab von $x = 9.876.543$ und betrachtet 9876. Fibonacci sagt: Zunächst finden wir „auf herkömmliche Weise“ die Kubikwurzel $a = 21$ von 9876. Der Rest ist $9876 - 21^3 = 615$ (bzw. $9.876.000 - (10a)^3 = 615.000$). Wir haben also $x = (10a)^3 + 615.543$. Die Zahl $3 \cdot (10a)^2 = 132.300$ wird berechnet. Jetzt wird die letzte Ziffer $b = 4$ gefunden ($\sqrt[3]{x} = 10a + b = 210 + b$) und zu $10a = 210$ addiert: $x = 214^3 + r$. Man berechnet $3 \cdot (10a)^2b = 529.200$ und zieht von $x - (10a)^3$ ab: $615.543 - 529.200 = 86.343$. Davon wird $3b^2 \cdot (10a) = 48 \cdot 210 = 10.080$ abgezogen: $85.343 - 10.080 = 76.263$. Endlich wird $b^3 = 64$ abgezogen, und man erhält den Rest 76.199:

$$x = 9.876.543 = 214^3 + 76.199 = (10a + b)^3 + r.$$

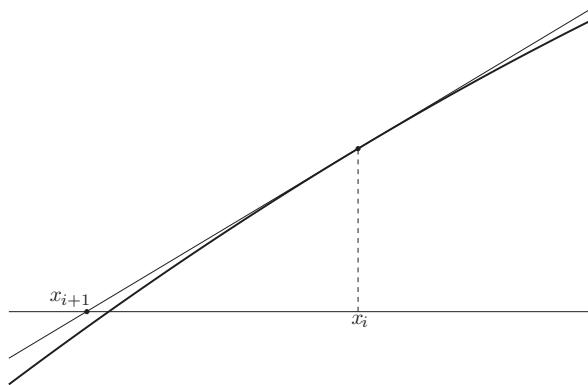
Natürlich ist die Schreibweise bei Fibonacci noch anders als bei uns, auch werden alle Rechenschritte ausführlich kommentiert ([14]). Fibonacci löste auch bei einem Wettbewerb, welcher 1225 von Kaiser Friedrich II. veranstaltet wurde, unter anderen Aufgaben auch die kubische Gleichung

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20.$$

Die Aufgaben bei dem Wettbewerb waren von Johannes von Palermo, einem Gelehrten am Hof Friedrichs II., gestellt, die obige kubische Gleichung entnahm er Omar Khayyams *Algebra*. Fibonacci gab die Lösung sexagesimal als $(1; 22,07,42,33,04,40)_{60}$ an, dezimal entspricht dies 1,36880810785. Diese Lösung ist auf neun Dezimalstellen genau, leider ist aber nicht überliefert, wie Fibonacci diese berechnet hat. Er kannte ja die Methode zur Kubikwurzelberechnung, und es ist möglich, bei Weitem aber nicht sicher, dass er eine Variante des Horner-Schemas oder der mit dem Sekantenverfahren verwandten *Regula Falsi* entwickelt hat ([6]).

Der bekannteste Algorithmus zur numerischen Lösung von Gleichungen von der Form

$$f(x) = 0 \tag{3.3}$$

Abb. 3.2 Newton-Verfahren

ist wohl das iterative Newton-Verfahren

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \quad (3.4)$$

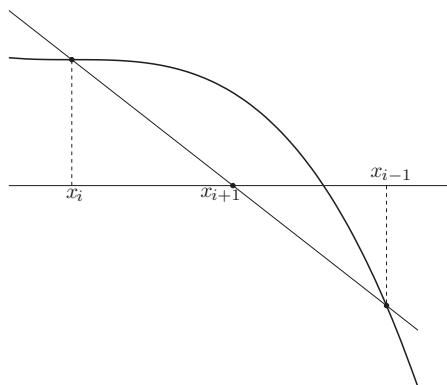
in dem, grafisch gesehen, aus einer Annäherung x_i der Lösung von Gl. 3.3 eine bessere Annäherung x_{i+1} als der Schnittpunkt der Tangente zu $y = f(x)$, die in $x = x_i$ gezogen wird, mit der x -Achse erhalten wird (Abb. 3.2).

Als Vorläufer des Newton-Verfahrens gilt der französische Mathematiker **François Viète** (1540–1603), vor allem für seine Beiträge zur Theorie von polynomialem Gleichungen berühmt (siehe das Kapitel zur Algebra im 1. Buch). Er beschrieb in seiner *De numerosa potestatum* (1600) eine Methode zur Lösung von polyomialen Gleichungen $p(x) = N$ (Viète schreibt den konstanten Term N rechts), die man als Generalisierung des oben beschriebenen indischen Quadratwurzelberechnungsverfahrens betrachten kann. Ähnlich wie Al-Käſī berechnet Viète die einzelnen Ziffern iterativ, eine nach der anderen. Wenn die ersten $i + 1$ Ziffern a_0, a_1, \dots, a_i der Lösung $x = a_0 10^k + a_1 10^{k-1} + \dots + a_i 10^{k-i} + \dots$ schon berechnet sind, könnte man mit modernen Formeln Viètes Regel zur Bestimmung der nächsten Ziffer a_{i+1} als Bestimmung der ersten Ziffer von

$$\left\lfloor \frac{N - 0,5 (p(x_i + 10^{k-i-1}) + p(x_i))}{p(x_i + 10^{k-i-1}) - p(x_i) - 10^{(k-i-1)n}} \right\rfloor$$

beschreiben, wobei n der Polynomgrad ist. Viète selbst beschreibt seine Methode nie explizit, er gibt nur verschiedene Beispiele an. Wenn man $f(x) = p(x) - N$ nimmt, bemerkt man, dass Viètes Regel fast der Regel

$$x_{i+1} = x_i - 10^{k-i-1} \left\lfloor \frac{f(x_i)}{f(x_i + 10^{k-i-1}) - f(x_i)} \right\rfloor$$

Abb. 3.3 Sekantenverfahren

gleich ist, was wiederum der Benutzung der Differenz $10^{k-i-1} (f(x_i + 10^{k-i-1}) - f(x_i))$ als Approximation für $f'(x_i)$ in Gl. 3.4 entspricht.

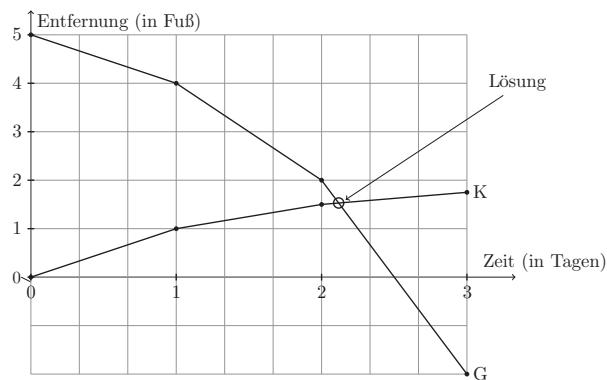
Newton kannte Viètes Methode und kommentierte sie. Er entwickelte 1665 die Methode, die heute als Sekantenverfahren bekannt ist (Abb. 3.3). Das Newton-Verfahren beschreibt er (für polynomiale Gleichungen) zum ersten Mal 1669. Diese erste Variante verlangt noch sehr viele Rechenschritte (für Details dazu verweisen wir den Leser auf [34]). Später entwickelte Newton verschiedene iterative Verfahren zur Lösung von bestimmten Gleichungstypen. Das Newton-Verfahren im Sinne von Formel 3.4 veröffentlichte Newton in der zweiten und dritten Ausgabe seiner *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* und benutze sie, um die sogenannte Kepler'sche Gleichung $x - e \sin x = M$ zu lösen. Das Newton-Verfahren wird manchmal auch Newton-Raphson-Verfahren genannt, da **Joseph Raphson** (1668–1712) es für kubische Gleichungen ohne Quadratterm 1690 (also vor der 2. Auflage der *Principia*) beschrieb. Die moderne Formulierung dieser Methode stammt von Lagrange 1798 ([9, 34]).

Wenden wir uns jetzt dem zweiten klassischen Thema der numerischen Mathematik, der Interpolation zu. Auch hier ist die altchinesische Mathematik von Interesse. Im den 7. Kapitel der *Neun Kapitel* findet man eine Aufgabe, deren Lösung offensichtlich durch lineare Interpolation erhalten wurde.

Beispiel 3.5 (Aufgabe aus den Neun Kapiteln)

Zwei Ratten graben sich (in entgegengesetzten Richtungen) durch eine 5 Fuß dicke Wand. Beide Ratten graben sich am ersten Tag je 1 Fuß durch die Wand. Weiter macht die größere der zwei Ratten jeden Tag das Doppelte des vorigen Tages und die kleinere jeden Tag die Hälfte des vorigen Tages. Nach wie vielen Tagen treffen sich die Ratten, und wie viel Fuß hat jede bis zum Treffen gegraben? Als Lösung werden $2\frac{2}{17}$ Tage und 3 Fuß $4\frac{12}{17}$ Zoll bzw. 1 Fuß $5\frac{5}{17}$ Zoll angegeben ([30]). Der Lösungsweg mittels linearer Interpolation ist durch Abb. 3.4 illustriert.

Abb. 3.4 Lineare Interpolation (Lösung von Aufg. 3.5)



Tab. 3.1 Die Entsprechung zwischen Elementen einer arithmetischen und einer geometrischen Folge

Arithmetische Folge	1	2	3	4	...	n	...	„Logarithmus“ von x
Geometrische Folge	q	q^2	q^3	q^4	...	q^n	...	x

Die lineare Interpolation spielt auch eine bedeutende Rolle in der Entstehung der ersten Logarithmentabelle. Im 1. Buch, im Kapitel zur Geschichte der Arithmetik, erwähnten wir, dass die Logarithmen als Rechenhilfsmittel entworfen wurden, um die Multiplikation und Division auf Addition und Subtraktion zurückzuführen. Unabhängig voneinander konstruierten 1614 der schottische Adlige **John Napier** und 1620 der Schweizer Uhrmacher **Joost Bürgi** (1552–1632) die ersten Logarithmentabellen in der Geschichte. Im Endeffekt sind ihre Konstruktionen recht verschieden, obwohl beide von den Idee der Entsprechung der arithmetischen Folge (n) und geometrischen (q^n) (siehe Tab. 3.1) inspiriert waren, welche von mehreren Autoren des 16. Jh. stammt (M. Stifel, N. Chuquet, ...).

Ein erster Versuch in die Richtung, Multiplikation auf Addition und Subtraktion zu reduzieren, ist unter dem Namen Prosthaphaeresis bekannt. Der deutsche Mathematiker und Astronom **Paul Wittich** (?1546–1586) weilte 1580 einige Monate in Uraniborg, Tycho Brahes Observatorium auf der Insel Hven (Ven, heute Schweden). Er brachte die Idee mit, deren Ursprung unbekannt ist, die Formel

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

zu diesem Zweck zu benutzen ([1, 18]).

Beispiel 3.6 (Prosthaphaeresisrechnungsbeispiel)

Um die Multiplikation $0,99027 \cdot 0,17365$ durchzuführen, finden wir in trigonometrischen Tabellen $0,99027 = \sin 82^\circ$, $0,17365 = \sin 10^\circ$. Dann wird gerechnet: $\alpha - \beta = 72^\circ$,

$\alpha + \beta = 92^\circ$. In den Tabellen liest man jetzt $\cos 72^\circ = 0,309017$, $\cos 92^\circ = -0,034899$. Man subtrahiert und dividiert durch 2: $0,99027 \cdot 0,17365 = \frac{0,309017 - (-0,034899)}{2} = 0,17463$.

Der Nachteil der Methode Prosthaphaeresis war, dass nicht klar war, wie man sie für Division, Potenzierung oder Wurzelrechnung abwandeln könnte. Obwohl die Methode recht oft verwendet wurde, suchte man weiter nach besseren Methoden.

John Napier (1550–1617) war ein schottischer Adliger. Der Nachname kommt in vielen verschiedenen Schreibweisen vor (Napeir, Nepair, Neper, Neper, Nappare, Naper, Naipper), zur Zeit seines Lebens wäre die Schreibweise Jhone Neper üblich gewesen. Napier war gut ausgebildet, teilweise auch im europäischen Ausland, es sind aber keine Quellen darüber erhalten, wo und wie lange er ausgebildet worden war. Er heiratete 1574, lebte in einer Burg und beschäftigte sich mit der Leitung seiner Ländereien. Dabei benutzte er sein erfinderisches Talent und seine naturwissenschaftlichen Kenntnisse. Er interessierte sich zunehmend für theologische Fragen, und als eifriger Protestant veröffentlichte er eine Schrift über die Offenbarung von St. Johannes. Napiers Beschäftigung mit der Mathematik war nur hobbymäßig. Außer seiner ersten Logarithmentabelle der Geschichte sind auch sein Rechenhilfsmittel „Napier’sche Rechenstäbchen“ (im 1. Buch beschrieben) sowie seine Gedächtnissstützen für gewisse Formeln der sphärischen Trigonometrie (Neper’sche Analogien und die Neper-Regel für rechtwinklige sphärische Dreiecke) bekannt. Napier war seinen Zeitgenossen wohl wegen seiner intellektuellen Fähigkeiten suspekt, was möglicherweise der Grund verschiedener „dunkler“ Legenden über ihn ist (beispielsweise, dass er mit den „Mächten der Dunkelheit“ im Bunde war). Auf jeden Fall ermöglichte seine Entdeckung der Logarithmen eine schnellere Entwicklung der Wissenschaften, und Laplace sagte 200 Jahre später, dass die Logarithmen „dadurch, dass sie die Mühen verkürzten, das Leben des Astronomen verdoppelt haben“ ([8]).

Napier veröffentlichte seine Logarithmentabelle 1614 unter dem Titel *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*. Diese Tabelle hatte zwar eine Benutzungsanleitung, aber keine Erklärungen, wie diese zustande gekommen ist. Seine Methode beschreibt Napier in der posthum 1619 veröffentlichten *Mirifici Logarithmorum Cannonis Descriptio*.

Um seine Logarithmentabelle zu konstruieren, benutzte Napier einige effiziente Rechnungs- und Approximationsverfahren, was der Grund war, die Beschreibung dieser Konstruktion in diesem Kapitel anstatt in dem Kapitel zur Analysis (oder Arithmetik) zu geben. Napier bemerkte zunächst, dass er, um die Zwischenabstände zwischen den Zahlen der geometrischen Folge $w, wq, wq^2, \dots, wq^n, \dots$ so gering wie möglich zu machen (um dementsprechend für Zwischenwerte die zugehörigen Elemente der arithmetischen Folge

1, 2, 3, ..., n , ... schätzen zu können), eine Zahl q möglichst nahe an 1 wählen sollte. Diese soll aber auch so gewählt werden, dass man die Potenzen q^n leicht und schnell berechnen kann (damals gab es ja noch keine Rechenmaschinen). Napier bemerkte: Zahlen von der Form $q = 1 - 10^{-m}$ (mit $m \in \mathbb{N}$) erfüllen diese Bedingung. Es gilt nämlich $q^2 = q(1 - 10^{-m}) = q - 10^{-m}q$, also kann q^2 dadurch berechnet werden, dass man von q die Zahl q mit um m Plätze nach links verschobenem Dezimalkomma erhält. Analoges gilt für alle weiteren Potenzen:

$$q^{k+1} = q^k - 10^{-m}q^k, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (q = 1 - 10^{-m}).$$

Beispiel 3.7

Für $m = 5$ ist

$$\begin{aligned} q &= 0,99999, \\ q^2 &= 0,99999 - 0,0000099999 = 0,9999800001, \\ q^3 &= 0,9999800001 - 0,00000999800001 = 0,999970000299999 \end{aligned}$$

usw.

Zweitens benötigte Napier jetzt eine genügend genaue Methode, mit der man für ein x zwischen zwei aufeinanderfolgenden Potenzen q^k und q^{k+1} den entsprechenden Wert y schätzt, der in der entsprechenden arithmetischen Folge zwischen k und $k + 1$ liegt (modern ausgedrückt: Man will $y = \log_q x$ möglichst genau schätzen). Napier benutzte hier lineare Interpolation. Der direkte Weg würde jetzt bedeuten, dass man n als Logarithmus von q^n definiert. Diesen Weg schlug, unabhängig von Napier, der Schweizer Uhrmacher, Mathematiker und Astronom **Jost Bürgi** (1552–1632) ein. Er arbeitete lange am Kaiserhof in Prag, wo auch Kepler arbeitete. Bürgi veröffentlichte seine *Progress Tabulen* 1620. Diese wurden mit $q = 1,0001$ berechnet. Bürgi nennt für $N = 10^8 \cdot 1,0001^L$ die Zahl $10L$ „die rote Zahl der schwarzen Zahl“ N (und in diesen zwei Farben waren die Tabellen auch gedruckt). Seiner Variante des Logarithmus, also die „roten Zahlen“, entsprechen in moderner Notation

$$\text{BLog } N = \frac{10}{\ln 1,0001} \cdot \ln(10^{-8}N).$$

Napier wählte einen komplizierteren Weg, der sich aber als viel nützlicher erwiesen hat; der direkte Weg verlangt nämlich zu viele Rechnungsschritte, um eine zufriedenstellende Genauigkeit zu erzielen, die für Bürgi (und Napier) ohne Computer nicht ausführbar waren, und so waren die Tabellen Bürgis von weit kleinerem Gebrauchswert als die Napiers ([3, 8, 11]).

Napier wählte zunächst $q = 1 - 10^{-7}$ und betrachtete die geometrische Folge $(wq^n)_n$ mit n -tem Term gleich $10^7(1 - 10^{-7})^n$ (also $w = 10^7$). Der Grund dieser Wahl liegt in dem

eigentlichen Ziel Napier's, die Logarithmen zur Erleichterung trigonometrischer Berechnungen zu verwenden. In damaligen Sinustabellen bezogen sich die Sinuswerte auf Kreise mit verschiedenen Radien; was wir heute beispielsweise als „Sinus auf drei Dezimalstellen genau angegeben“ bezeichnen würden, waren damals auf dreistellige ganze Zahlen gerundete halbe Sehnenlängen, welche gegebenen halben Mittelwinkeln in einem Kreis mit Radius 10^3 entsprechen. Da die genauesten zu Napier's Zeit existierenden Sinustabellen für Kreise mit Radius 10^7 ausgerechnet wurden, wählte Napier eben $w = 10^7$ und $m = 7$.

Napier's Konstruktion der Logarithmen erfolgt schrittweise durch drei Vorbereitungstabellen. Napier's erste Tabelle enthielt die Zahlen

$$10^7(1 - 10^{-7})^n, \quad n = 0, 2, \dots, 100.$$

Die letzte dieser Zahlen ist (auf ganzzahligem Teil gerundet) gleich $9.999.900 = 10^7(1 - 10^{-5})$, die Zahlen der ersten Tabelle befinden sich also zwischen 9.999.999 und 9.999.900.

Jetzt wird die zweite Tabelle berechnet, in welcher sich die Zahlen

$$10^7(1 - 10^{-5})^n, \quad n = 0, 1, \dots, 50$$

befinden. Man erhält eine Zahlenfolge zwischen 10.000.000 und $9.995.001,22\dots \approx 9.995.000 = 10^7(1 - 2000^{-1})$.

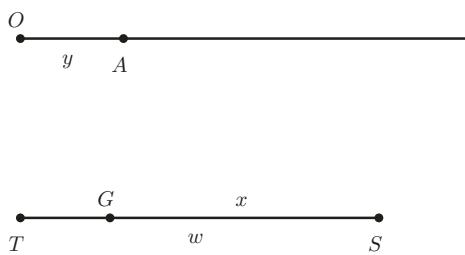
Die Berechnung der dritten Tabelle Napier's startet mit der Berechnung der Zahlen u^n ($n = 1, \dots, 21$) mit $u = 1 - 2000^{-1} = 0,9995$, deren Potenzen, wie die Potenzen von q , auch effizient berechnet werden können ($u^{n+1} = u^n - \frac{1}{2}10^{-3}u^n$). Diese Zahlen werden dann mit Zahlen v^k multipliziert ($v = 1 - 10^{-2} = 0,99$), die dritte Tabelle enthält endlich die Zahlen

$$10^7 \cdot 0,9995^n 0,99^k, \quad n = 1, \dots, 21, k = 1, \dots, 69.$$

Insgesamt sind das 1449 Zahlen zwischen 4.998.609 und 10.000.000. Diese entspricht Sinuswerten für Winkel zwischen $29,991^\circ \approx 30^\circ$ und 90° .

Man muss hier hervorheben: Die drei Tabellen enthalten Zahlen aus verschiedenen geometrischen Folgen, man kann sie also nicht einfach miteinander multiplizieren oder dividieren. Auch sind diese fast 1500 Zahlen nicht genug, um eine siebenstellige Genauigkeit bei linearer Interpolation zu sichern. Doch Napier hatte etwas anderes im Sinn ... Er drehte den Spieß um, und anstatt ganzzahlige Exponenten und entsprechende dezimale Sinuswerte zu betrachten, nimmt er ganzzahlige Sinuswerte und dazugehörige gebrochene Exponentenwerte. Um die entsprechende Rechnung durchzuführen, ersinnt Napier eine dynamische Verbindung zwischen der arithmetischen und geometrischen Folge, quasi eine physikalische Definition der ersten Logarithmen der Geschichte. Er stellt sich zwei sich auf parallelen Geraden bewegenden Partikel vor. Ein Partikel (A) startet im Punkt O auf der einen Gerade und bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit v_0 , der andere (G) bewegt sich auf der anderen Gerade von Punkt T zu Punkt S , deren Entfernung gleich w ist

Abb. 3.5 Illustration zur Definition des Napier'schen Logarithmus



(Abb. 3.5). Dabei ist die Anfangsgeschwindigkeit von \$G\$ gleich der Geschwindigkeit von \$A\$, und in jedem Moment ist die Geschwindigkeit von \$G\$ proportional zu dessen Entfernung zum Zielpunkt \$S\$. Napier definiert:

► **Definition 3.1 (Napier'scher Logarithmus)** Wenn \$G\$ in einem Moment \$t\$ auf Entfernung \$x\$ von \$S\$ ist und bis zum selben Moment \$A\$ die Strecke \$y\$ zurückgelegt hat, dann ist \$y\$ der (Napier'sche) Logarithmus von \$x\$.

Dabei denkt sich Napier die Werte \$x\$ als Sinuswerte. Da die so definierte Funktion, wie wir gleich sehen werden, noch kein Logarithmus im modernen Sinn ist, schreiben wir \$y = \text{NapLog } x\$. Der erste Unterschied ist, dass \$\text{NapLog} 10^7 = 0\$ ist. Also ist die 1 nicht der Nullpunkt dieser Funktion. Offensichtlich ist \$\text{NapLog}\$ eine fallende Funktion.

Durch Aufstellung der Differenzialgleichung \$\dot{x} = -kx\$ (mit \$k = v_0/w\$ und Anfangsbedingung \$x(0) = w\$ sowie der Beziehung \$y = v_0 t\$), welche der beschriebenen Situation entspricht, kann man mit den Mitteln der Infinitesimalrechnung (die zur Zeit Napiers noch nicht existierte) leicht die moderne Formel für \$\text{NapLog}\$ erhalten:

$$\text{NapLog } x = 10^7 \ln \frac{10^7}{x}.$$

Napier zeigte erst, dass in gleichen Zeitabständen die Positionen \$y = \text{NapLog } x\$ von \$A\$ eine arithmetische und die entsprechenden Entfernungen (Sinuswerte) \$x\$ eine geometrische Folge bilden. Er zeigte weiterhin die folgenden Sätze:

Theorem 3.2 Es gilt \$10^7 - x < \text{NapLog } x < \frac{10^7(10^7 - x)}{x}\$.

Theorem 3.3 Wenn \$x_1 x_4 = x_2 x_3\$, dann ist

$$\text{NapLog } x_1 + \text{NapLog } x_4 = \text{NapLog } x_2 + \text{NapLog } x_3.$$

Theorem 3.4 Für \$x_1 < x_2\$ gilt

$$10^7 \frac{x_2 - x_1}{x_2} < \text{NapLog } x_1 - \text{NapLog } x_2 < 10^7 \frac{x_2 - x_1}{x_1}.$$

Aus diesen Sätzen erhält man leicht die Grundeigenschaften des Napier'schen Logarithmus:

$$\text{NapLog}(10^7 ab) = \text{NapLog}(10^7 a) + \text{NapLog}(10^7 b),$$

$$\text{NapLog}\left(10^7 \frac{a}{b}\right) = \text{NapLog}(10^7 a) - \text{NapLog}(10^7 b),$$

$$\text{NapLog}(10^7 \sqrt{a}) = \frac{\text{NapLog}(10^7 a)}{2}.$$

Jetzt kann endlich die Tabelle der Napier'schen Logarithmen berechnet werden. Für die Werte x aus der ersten Tabelle werden die zugehörigen $y = \text{NapLog } x$ berechnet.

Beispiel 3.8

Beginnen wir mit $x = 9.999.999$. Dann ist $10^7 - x = 1$ und

$$\frac{10^7(10^7 - x)}{x} = \frac{10^7}{9.999.999} = 1,00000010000001.$$

Also ist nach [Satz 3.2](#)

$$1 < \text{NapLog } 9.999.999 < 1,00000010000001, \quad (3.5)$$

durch lineare Interpolation erhält Napier $\text{NapLog } 9.999.999 = 1,00000005$.

Weiter bedeutet die Bedingung auf die Bewegung des Partikels G , dass im Moment $t = i \in \mathbb{N}$

$$\text{NapLog}|G_t S| = i \text{NapLog}|G_1 S|$$

gilt (mit G_t ist die Position des Punktes G im Moment t bezeichnet). Insbesondere ist also für den letzten Wert der ersten Tabelle

$$\text{NapLog } 9.999.900,0004950 = 100 \text{NapLog } 9.999.999,$$

und es folgt (aus der [Ungl. 3.5](#))

$$100 < \text{NapLog } 9.999.900,0004950 < 100,000010000001. \quad (3.6)$$

Wieder durch lineare Interpolation schätzt Napier: $\text{NapLog } 9.999.900 = 100,000005$.

Wenn man jetzt $\text{NapLog } 9.999.900$ berechnen will, nimmt man den dem Wert $9.999.900$ nächsten Wert $x_1 = 9.999.900,0004950$ in der ersten Tabelle. Aus [Satz 3.4](#) erhält man

$$\begin{aligned} 0,00049500495002 &< \text{NapLog } 9.999.900 - \text{NapLog } 9.999.900,0004950 \\ &< 0,00049500495005, \end{aligned}$$

also nimmt Napier NapLog 9.999.900 = NapLog 9.999.900,0004950 + 0,00049500.
Endlich folgt aus [Ungl. 3.6](#)

$$100,0004950 < \text{NapLog } 9.999.900 < 100,0005050$$

(der auf 7 Ziffern genaue Wert von NapLog 9.999.900 ist 100,0005000).

Analog konnte Napier die Napier'schen Logarithmen der Sinuswerte der zweiten Tabelle, genauer gesagt deren obere und untere Schranken, ausrechnen und weiter auch für die Werte der dritten Tabelle. Danach wurden die Logarithmen der x aus den ersten zwei Tabellen verworfen, die Logarithmen der dritten Tabelle wurden zur Basistabelle. Somit hatte er die Logarithmen der Zahlen 5.000.000 („Sinus“ von 30°) bis 10.000.000 („Sinus“ von 90°). Letztlich benutzte er, um die Werte NapLog x für x zwischen 0 und 5.000.000, auszurechnen, die Beziehung

$$\text{NapLog}x = \text{NapLog}(2x) + \text{NapLog}\frac{10^7}{2}$$

(diese kann man leicht aus dem [Satz 3.4](#) erhalten).

Der Oxforder Geometrieprofessor **Henry Briggs** (1561–1631) erfuhr von Napiers Logarithmenkonstruktion und reiste 1615 nach Edinburgh. Napier und Briggs konnten sich einigen, dass Logarithmen mit Nullpunkt 1 viel günstiger wären, da dann der Logarithmus eines Produktes bzw. eines Quotienten die Summe bzw. die Differenz der entsprechenden Logarithmen wäre. Auch bemerkten sie, dass es (wegen der allgemein üblichen Basis 10) von Vorteil wäre, wenn man aus dem Logarithmus einer Zahl den Logarithmus der zehnfachen Zahl einfach erhalten könnte. So kam es, dass nach Napiers Tod Briggs die erste Tabelle der dekadischen Logarithmuswerte $\log x$ berechnete und 1624 unter dem Titel *Arithmetica Logarithmica* veröffentlichte. Deswegen ist der dekadische Logarithmus auch als Briggs'scher Logarithmus bekannt ([[2](#), [3](#), [11](#)]).

Wenden wir uns noch kurz einigen wichtigen Entwicklungen in Sachen Interpolation zu. Die ältesten Quellen, die quadratische Interpolation (d. h. die Bestimmung einer Parabel durch drei gegebene Punkte) enthalten, stammen aus der Zeit um 600 n. Chr. Man findet sie bei dem Astronomen **Liu Zhuo** in China sowie bei **Brahmagupta** in Indien. Brahmaguptas Regel aus ca. 625 n. Chr. würde heute mit der Formel

$$f(a + xt) = f(a) + \frac{x}{2} (f(a + t) - f(a - t)) + \frac{x^2}{2} (f(a + t) - 2f(a) + f(a - t))$$

dargestellt werden.

Erst ab dem 17. Jh., größtenteils durch die Fortschritte in Astronomie und Physik bedingt, fingen Mathematiker an, systematisch Interpolationsmethoden zu entwickeln. Die erste Variante ist die schon im [Abschn. 1.3](#) erwähnte Newton-Gregory-Interpolationsformel (ca. 1670), welche eigentlich die Generalisierung der gerade erwähnten Regel Brahmaguptas ist. Der englische Mathematiker **Edward Waring** (1736–1798),

ansonsten eher als Zahlentheoretiker bekannt, veröffentlichte 1779 eine neue Variante der Interpolationsformel, welche heute meist Lagrange'sche Interpolationsformel genannt wird, da die gleiche Regel 1795 von Lagrange, anscheinend ohne Kenntnis der Publikation Warings, veröffentlicht wurde. Für mehr Details zu diesen und moderneren Entwicklungen verweisen wir auf [18].

Wie der Leser sicher schon bemerkt hat, ist für die Frühgeschichte der numerischen Mathematik besonders die altchinesische Mathematik interessant. Dies gilt auch für das Thema linearer Gleichungssysteme. In dem berühmtesten altchinesischen mathematischen Werk, den *Neun Kapiteln*, ist das achte Kapitel dem Thema gewidmet. Die Aufgaben selbst sind typischerweise mit Wörtern beschrieben. Eine Beispielaufgabe aus den *Neun Kapiteln* lautet:

Beispiel 3.9 (Aufgabe aus den *Neun Kapiteln*)

(Nach [30] zitiert)

Aus drei Garben einer guten Ernte, zwei Garben einer mittelmäßigen Ernte und einer Garbe einer schlechten Ernte erhält man den Ertrag von 39 *Tou*.

Aus zwei Garben einer guten Ernte, drei Garben einer mittelmäßigen Ernte und einer Garbe einer schlechten Ernte erhält man den Ertrag von 34 *Tou*.

Aus einer Garbe guter Ernte, zwei Garben mittelmäßiger Ernte und drei schlechter Ernte erhält man den Ertrag von 26 *Tou*.

Wie viel ist jedes Mal aus 1 Garbe der Ertrag der guten, mittelmäßigen und schlechten Ernte?

Das Interessante hier ist aber nicht die Aufgabe, sondern deren Lösungsverfahren, *Fang-cheng* genannt. Hier wird zum ersten Mal in der Geschichte eine Tabellenmethode verwendet. Die Berechnung selbst wurde mithilfe von Rechenstäbchen ausgeführt, in moderner Symbolik fängt die Lösung mit der folgenden Tabelle an:

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

Auffällig ist, dass es sich um die (erweiterte) Matrix des Gleichungssystems handelt, mit dem Unterschied zur modernen Schreibweise, dass die Bedeutung von Spalten (Unbekannte) und Reihen (Gleichungen) vertauscht ist. Danach wird diese Zahlentabelle durch Verdreifachung der ersten und zweiten Spalte und wiederholtes Subtrahieren der dritten Spalte in die folgende Form transformiert:

		3
4	5	2
8	1	1
39	24	39

Jetzt wird die erste Spalte verfünfacht und von ihr wiederholt die zweite Spalte abgezogen. Man erhält

		3
	5	2
36	1	1
99	24	39

Zuletzt wird die Lösung berechnet: Eine Garbe der schlechten Ernte bringt den Ertrag von $\frac{99}{36} = 2\frac{3}{4}$ Tou, eine Garbe der mittelmäßigen $(24 - 1 \cdot 2\frac{3}{4}) : 5 = 4\frac{1}{4}$ Tou und der guten $(39 - 1 \cdot 2\frac{3}{4} - 2 \cdot 4\frac{1}{4}) : 3 = 9\frac{1}{4}$ Tou. Unübersehbar ist: Der Algorithmus ist das klassische Gauß'sche Eliminationsverfahren ([12, 26, 30, 35]).

Europa andererseits übernahm im Spätmittelalter die arabische algebraische Tradition und transformierte sie in der Renaissance in die moderne systematische Algebra. Doch obwohl die Beiträge von Tartaglia, Cardano, Ferrari, Viète zur Algebra im Allgemeinen (siehe 1. Buch) zweifellos beeindruckend sind, sind erste europäische systematische Methoden zur Lösung von linearen Gleichungssystemen erst im 16. Jh. bei dem eher unbekannten Autor Jean Borrel (Johannes Buteo) aufzufinden. Der erste berühmte Mathematiker, der eine systematische Methode beschrieb, wie ein lineares Gleichungssystem auf eine einzige Gleichung mit einer Unbekannten zurückzuführen war, ist Sir Isaac Newton. Newton hatte einen Einfluss auf die Autoren des 18. Jh. ([12]).

Interessanterweise entstand aber das „echte“ Gauß'sche Eliminationsverfahren in Verbindung mit der Begründung einer anderen wichtigen Technik der angewandten Mathematik, der Methode der kleinsten Quadrate (siehe Abschn. 3.2). Schon während des 18. Jh. entstand das Bedürfnis, aus diskreten Messdaten eine Funktion zu berechnen, die den Trend gut beschreibt und deren Fehler in Bezug auf die Messdaten möglichst gering sind. Zwei berühmte Mathematiker, **Adrien-Marie Legendre** (1752–1833) und **Carl Friedrich Gauß** (1777–1855), kamen auf die Idee, zu diesem Zweck die Summe der Quadrate der Differenzen zwischen gemessenem und geschätztem y-Wert zu minimieren. Dies ist eines der drei Resultate, die unabhängig von Legendre und Gauß gefunden wurden (zwei, das quadratische Reziprozitätsgesetz und die asymptotische Verteilung der Primzahlen, wurden schon im 1. Buch im Kapitel über Zahlentheorie beschrieben). In allen drei Fällen war zwar Legendre der Erste, aber seine Beweise enthielten Unvollständigkeiten und Fehler, sodass Gauß die ersten fehlerfreien Beweise zuzuschreiben sind. Gauß konnte Anfang des 19. Jh. die Methode der kleinsten Quadrate dafür benutzen, um die Orbiten des Planetoiden Ceres zu berechnen. Darauf konnte Legendre das allgemeine Modell aufstellen (1805), und dies führte, wie in den Fällen der zwei zahlentheoretischen Resultate, zu einem Prioritätsdisput zwischen Gauß und Legendre. In beiden Varianten führte die Minimierung der Quadratdistanzen zu einem linearen Gleichungssystem. Um so entstandene Systeme sogenannter Normalgleichungen zu lösen, beschrieb Gauß dann 1810 formell die Methode, mit der deren Lösungen effizient berechnet werden können, das klassische Gauß'sche Eliminationsverfahren. Mit der Zeit wurde es dann zwecks effizienten Berechnens verbessert und abgewandelt ([12]).

Zu guter Letzt wollen wir noch einige Worte zum Thema numerische Integration sagen. Natürlich kann man die altgriechischen, auf der Exhaustionsmethode basierenden, Berechnungen verschiedener Flächen und Volumina als Vorläufer der numerischen Integration sehen (siehe Abschn. 1.1). Wenn man in solchen Methoden einfach den numerischen Wert einer in endlich vielen Schritten erzielter Approximation anstatt des Grenzwertes nimmt, hat man eine numerische Annäherung des entsprechenden Integrals berechnet. Unter numerischer Integration versteht man aber eher die approximative Berechnung von Integralwerten bei Integranden, für die keine Stammfunktion angegeben werden kann, oder bei nur diskret gegebenen Funktionswerten des Integranden, beispielsweise bei Messresultaten. Als Klassiker der numerischen Integration gelten die Trapezregel und die Simpson'sche Formel.

Die Geschichte der Trapezregel, also der Regel, bei der anstatt der eigentlichen Funktion deren lineares Interpolationspolynom integriert wird (Abb. 3.6), scheint eher im Dunkeln zu liegen, und es ist nicht bekannt, wer und wann sie zuerst angewandt hat. Doch hat vor Kurzem Prof. M. Ossendrijver von der Humboldt-Universität in Berlin auf fünf babylonischen Keilschrifttafeln Beweise gefunden, dass die alten Babylonier die Trapezmethode (natürlich nicht als Integral gedacht) benutzt haben, um die Position des Planeten Jupiter zu berechnen ([21]).

Die Simpson'sche Formel, bei der anstatt des Integranden das entsprechende quadratische Interpolationspolynom integriert wird (Abb. 3.7), bekam ihren Namen nach dem

Abb. 3.6 Trapezregel

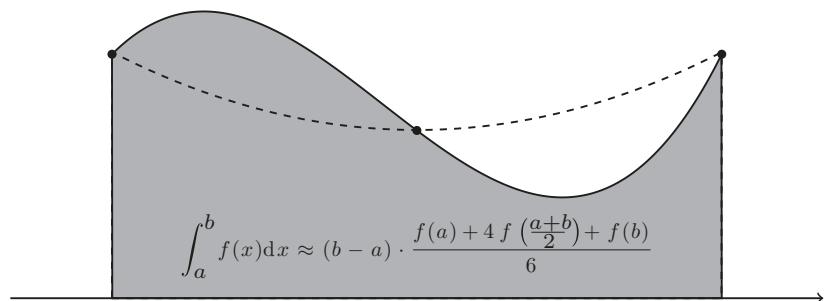
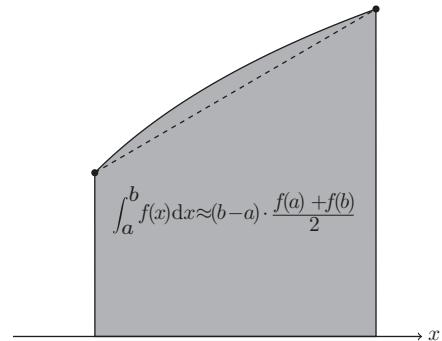


Abb. 3.7 Simpson'sche Formel

britischen Mathematiker **Thomas Simpson** (1710–1761). Seine *Mathematical Dissertations on a Variety of Physical and Analytical Subjects* (1743) enthält die Formel, aber Simpson selbst behauptet, dass er sie von Newton übernommen hat. Die Formel war aber auch schon etwa 100 Jahre früher Torricelli und Gregory bekannt ([10]). Andererseits ist die moderne Variante der erwähnten Newton-Raphson-Methode zur numerischen Lösung von Gleichungen eigentlich Simpsons Werk, als Verbesserung von Newtons und Raphsons älteren Varianten 1740 veröffentlicht und mit Wörtern beschrieben ([8, 34]).

3.2 Anfänge der Fehlerrechnung und Statistik

Statistische, insbesondere demografische, Daten wurden schon seit dem Altertum gesammelt, doch systematische, auf Wahrscheinlichkeitsrechnung gestützte Methoden zu deren Analyse sind neuzeitliche Entwicklungen. Ab dem 16. Jh. wurden immer mehr Daten über die Bevölkerung gesammelt, beispielsweise Geburts- und Totenregister. Diese Tabelle wurden dann nach der Entstehung der Wahrscheinlichkeitstheorie (Abschn. 2.2) auch vom Standpunkt der Wahrscheinlichkeit betrachtet. Der Erste, der aus statistischen Daten Schlüsse zog, war ein englischer Tuchhändler, **John Graunt** (1620–1674). Graunt leitete 1662 aus einem Geburtenregister die etwas größere Erwartung von Knaben- als Mädchen-geburten, eine größere Lebenserwartung für Frauen und Konstanz der jährlichen Anzahlen von Gestorbenen (abgesehen von Epidemien) ab. Etwas später, 1712, betrachtete der Niederländer 'sGravesende die Anzahlen von Knaben- und Mädchen-geburten in London und benutzte die Binomialverteilung, um die Hypothese zu testen, dass in den 82 Jahren von 1629–1710 die auftretenden relativen Häufigkeiten von Knabengeburten, die zwischen 50,27 % und 53,62 % schwankten, ein Ergebnis des Zufalls sind. Er multiplizierte diese Häufigkeiten mit der jährlichen Durchschnittsanzahl der Geburten (11.429) und bekam so die obere und untere Grenze (5745 und 6128) der Knabengeburten. Danach benutzte er die Binomialverteilung, um zu berechnen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass in 82 aufeinanderfolgenden Jahren von 11.429 Geburten zwischen 5745 und 6128 Jungen waren und erhielt eine sehr kleine Wahrscheinlichkeit von 0,292⁸². Seine Schlussfolgerung war deswegen, dass die höhere Anzahl von Jungengeburten durch Gottes Einwirkung zu stande kam. Noch etwas später beschäftigten sich auch Edmund Halley und Abraham de Moivre mit Geburts- und Totenregistern und auch mit Leibrenten. De Moivre konnte in seinem *Annuities upon Lives* (1725) aus Halleys Daten Formeln für Renten entwickeln, unter anderem auch für Teilung oder Erbschaft von Renten ([8, 16, 24, 31]).

Jakob Bernulli andererseits stellte mit seinem Gesetz der großen Zahlen (siehe Abschn. 2.2), in *Arc conjectandi* (1713) veröffentlicht, die Verbindung zwischen theoretischer Wahrscheinlichkeit *a priori* und statistischer Wahrscheinlichkeit *a posteriori* her. Bernoulli versuchte auch, die Stichprobengröße im Urnenmodell zu schätzen, damit die *a posteriori* berechnete Wahrscheinlichkeit „moralisch sicher“ der echten Wahrscheinlichkeit entspricht.

Beispiel 3.10

In einer Urne befinden sich 3000 weiße und 2000 schwarze Kugeln. Die Kugeln werden zufällig gezogen, und nachdem man die Farbe der gezogenen Kugel festgestellt hat, wird sie wieder in die Urne zurückgelegt. Bernoulli formuliert die Fragestellung so: „Kann man dies so viele Male durchführen, dass es 10-mal, 100-mal, 1000-mal usw. wahrscheinlicher ist (d. h. moralisch sicher), dass die Anzahlen der gezogenen weißen und schwarzen Kugeln im gleichen Verhältnis (3 : 2) wie in der Urne sind, als dass dieses Verhältnis irgendein anderes ist?“.

Sei N die Anzahl der Ziehungen und $n = \frac{N}{3000+2000} = 0,0002N$; das Verhältnis $n : N = 0,0002$ ist die Fehlerspanne. Das wahre Verhältnis der Anzahlen der Kugeln ist $p = 3 : 2$. Aus dem Gesetz der großen Zahlen erhielt Jakob Bernoulli die untere Grenze für N :

$$N = 5000n \geq 25.500 + 5758 \log \frac{c}{1000},$$

wobei c das Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten, dass das Verhältnis durch das Verhältnis von Frequenzen korrekt geschätzt wird und dass es nicht korrekt geschätzt wird, ist (also $c = 10, 100, 1000, \dots$). Insbesondere, wenn diese Wahrscheinlichkeit der korrekten Schätzung mindestens 1000-mal größer sein sollte als die Wahrscheinlichkeit der inkorrechten Schätzung, erhielt Jakob die Anzahl von mindestens 25.500 Ziehungen ([22, 23]).

Jakobs und Johanns Neffe **Nicholas Bernoulli** (1687–1759) war Herausgeber der *Arc conjectandi*. Er war anscheinend auch der Erste, der die Beziehung zwischen der Länge eines Intervalls und der Wahrscheinlichkeit, dass eine Zufallsgröße in diesem Intervall landet, studierte und erste konkrete, grobe Schätzungen anhand der Binomial-distribution berechnete. Eine allgemeinere Theorie ließ noch 100 Jahre auf sich warten. Laplaces *Théorie Analytique des Probabilités* (1812) ist nicht nur die Basis moderner Wahrscheinlichkeitstheorie, sondern auch der mathematischen Statistik. Laplace wendet Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Fehlerrechnung an und entwickelte auch die Methode der kleinsten Quadrate. Er beschreibt auch verschiedenartige Anwendungen der Wahrscheinlichkeit auf statistische Fragen. Poisson beschäftigte sich etwas später mit den Anwendungsmöglichkeiten der Wahrscheinlichkeitstheorie im Gerichtswesen und veröffentlichte 1837 *Recherches sur la probabilité des judgements en matière criminelle et matière civile* ([7, 23, 31]).

Die gerade erwähnte Methode der kleinsten Quadrate wurde aber nicht von Laplace entworfen, genauso wenig wie die Fehlerrechnung von ihm begründet wurde. Wir müssen jetzt wieder die Geschichte etwa 200 Jahre zurückspulen, um die andere wichtige Richtung der Entwicklung der Statistik verfolgen zu können. Im 17. Jh. wurden nämlich immer mehr naturwissenschaftliche Daten gesammelt, insbesondere die Astronomie verlangte zuverlässige Messungen. So waren es die Astronomen, die zuerst mit der Frage der

Behandlung von Messfehlern konfrontiert wurden. Meist entwickelten sie eigene, *ad hoc*, Methoden, um den echten Wert anhand mehrerer Messergebnisse zu schätzen.

Galileo Galilei (1564–1642) war der Erste, dem bewusst war, dass alle Messungen mit Fehlern behaftet sind und dass man eine systematische Behandlung dafür braucht. In seinem berühmten *Dialogo opera i due Massimi Sistemi del Mondo Tolemaico e Copernicano* (1632) behauptet er, dass man die Sicherheit der durch Beobachtung (Messung) erhaltenen Ergebnisse vergrößert, wenn man möglichst viele Messungen durchführt. Galileo erwähnt hier mehrere Punkte, die für die Fehleranalyse von Wichtigkeit sind:

- Es gibt nur einen einzigen genauen Wert für eine physikalische Größe (bei ihm ist das die Entfernung eines Sterns zum Erdmittelpunkt), doch alle Messungen enthalten Fehler (wegen Imperfektion des Betrachters, des Messinstruments, ...).
- Man nimmt an, dass die Fehler symmetrisch um Null angeordnet sind sowie
- dass kleine Fehler wahrscheinlicher als große sind.

Demnach kann man Galileo als Begründer der Fehlerrechnung betrachten. Leider aber schlug er keine konkrete Methode vor, wie man aus den Messdaten eine Schätzung des echten Wertes berechnen sollte ([24, 31]).

Die Problemstellung war also die Folgende: Gegeben seien n Messwerte x_1, x_2, \dots, x_n einer physikalischen Größe x , beispielsweise der Entfernung eines Sterns zum Erdmittelpunkt. Wie kann man daraus eine verlässliche Schätzung \bar{x} des echten Messwertes erhalten? Ein Satz Galileos („... es ist plausibler, dass die Betrachter sich wenig geirrt haben, als dass sie sich viel geirrt haben ...“) kann beispielsweise so interpretiert werden, dass Galileo \bar{x} durch Minimierung der Summe aller absoluten Beträge der Abweichungen

$$F(x) = \sum_{i=1}^n |x - x_i|$$

berechnen würde. Ob das wirklich seine Idee war oder erst anderen Wissenschaftlern eingefallen ist, wissen wir nicht. Aber es ist heute bekannt, dass man, wenn man diesen Ansatz nimmt, als \bar{x} den Medianwert⁴ erhält.

Eine andere Idee hatte der englische Mathematiker **Roger Cotes** (1682–1716). Sein Vorschlag war der Folgende: Wenn man Massen mit Beträgen m_1, m_2, \dots, m_n auf Entfernungen x_1, x_2, \dots, x_n vom Hebelstützpunkt anordnet (und sich dabei den Hebel als x -Achse vorstellt), ist die Position \bar{x} des Stützpunktes im Gleichgewicht der wahrscheinlichste Wert von x . Es ergibt sich also bei Cotes der gewichtete Mittelwert

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

⁴In einer Folge von Zahlen ist der Medianwert der Wert, der an mittlerer Stelle steht, wenn die Zahlen in einer aufsteigenden Ordnung sortiert sind.

Dabei sollten die Massen (Gewichte) m_i bei Cotes umgekehrt proportional zu den Abweichungen in einzelnen Messungen sein. Wenn man diese alle als gleich annimmt ($m_1 = m_2 = \dots = m_n$), erhält man das arithmetische Mittel als Schätzung des echten Wertes:

$$x = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

Heute wissen wir, dass dies der Punkt des Minimums der Fehlerfunktion in der Form

$$F(x) = \sum_{i=1}^n (x - x_i)^2 \quad (3.7)$$

ist, was einige Autoren dazu veranlasst hat, Cotes als Urheber der Methode der kleinsten Quadrate zu betrachten. Auf jeden Fall scheint die Benutzung des arithmetischen Mittelwertes zur Schätzung der echten Wertes spätestens in den 1770er-Jahren generell üblich gewesen zu sein, da Daniel Bernoulli 1777 diese als allgemein angenommen beschreibt.

Mitte des 18. Jh. begannen Mathematiker, sich mit der Form der Fehlerkurve zu beschäftigen. Thomas Simpson beispielsweise schlug 1757 die Form auf [Abb. 3.8](#) vor, Laplace andererseits berechnete 1774 aus den Bedingungen der Symmetrie um Null und des monotonen Fallens für positive Fehlerbeträge die Formel $\phi(x) = \frac{m}{2} e^{-m|x|}$ für die Fehlerkurve (diese Laplace'sche Fehlerkurve ist auf [Abb. 3.9](#) zu sehen). Später erhielt Laplace eine andere, in 0 nicht definierte Fehlerkurve $\tilde{\phi}(x) = \frac{1}{2a} \ln \frac{a}{|x|}$ ([24]).

Zu dieser Zeit wurde auch das allgemeinere Problem, für gegebene Datenpaare (x_i, y_i) zweier abhängiger Größen x und y Ausgleichskurven zu berechnen, untersucht. Der

Abb. 3.8 Simpsons Fehlerkurve

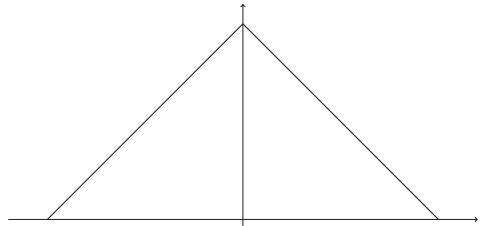


Abb. 3.9 Laplaces Fehlerkurve

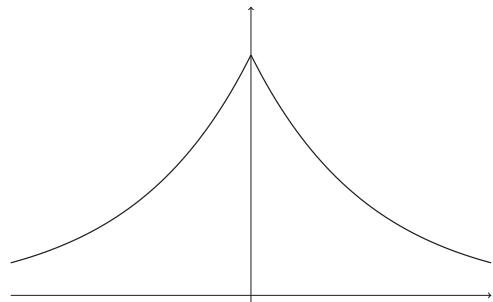
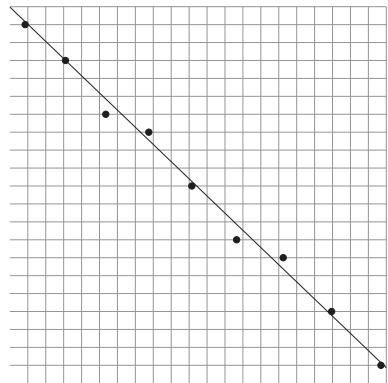


Abb. 3.10 Ausgleichsgerade für Datenpaare



kroatische Wissenschaftler **Josip Rudjer Bošković** (1711–1787) unternahm mit dem Engländer Christopher Maire eine Expedition von Rom nach Rimini, um Daten zur Messung zweier Meridiangrade zu sammeln, und entwickelte seine Methode, um die Messdaten auszugleichen. Diese entsprach der Minimierung der absoluten Abweichungen: Die Koeffizienten der Ausgleichsgeraden $y = ax + b$ werden durch Minimierung des Gesamtfehlers

$$F(x) = \sum_{i=1}^n |ax_i + b - y_i|$$

erhalten. Seine Methode beschrieb Bošković in *De Litteraria expeditione per pontificam ditionem ad dimetiendo duos meridiani gradus a P.P. Maire et Boscovich* (1755). Diese Methode beschrieb 1789 auch Laplace ([28]). Bald darauf (wie schon im [Abschn. 3.1](#) erwähnt) verbesserten Legendre und Gauß die Idee und entwickelten die eigentliche Methode der kleinsten Quadrate, bei der die Koeffizienten der Ausgleichsgeraden ([Abb. 3.10](#)) durch Minimierung der Summe der Quadrate der Abweichungen

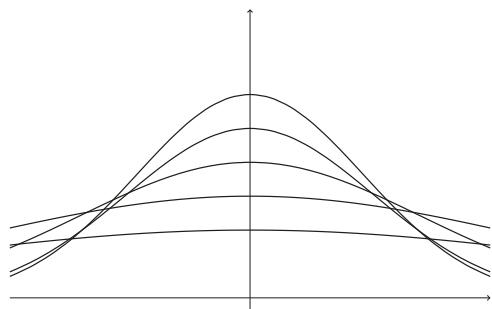
$$F(x) = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$$

erhalten werden.

Gauß entwickelte 1801 die Methode zwecks Bestimmung der Bahn des Planetoiden Ceres, er veröffentlichte sie 1809 in seiner *Theoria motus corporum coelestium*, behauptete aber, dass er die Methode schon seit 1795 benutzt. Im Gegensatz zu Legendre veröffentlichte Gauß auch einen Beweis, dass das arithmetische Mittel die [Summe 3.7](#) der Quadratabweichungen minimiert. Gauß erklärte auch die Benutzung des Kriteriums der kleinsten Quadrate durch drei Grundvoraussetzungen:

1. Kleine Fehler sind wahrscheinlicher als große.
2. Für jede reelle Zahl e sind die Fehler e und $-e$ gleich wahrscheinlich.

Abb. 3.11 Gauß'sche Fehlerkurven



3. Wenn man über mehrere Messungen der gleichen Größe verfügt, ist das arithmetische Mittel der wahrscheinlichste echte Wert der Größe.

Daraus konnte Gauß dann die Gauß'sche Kurve, also die Normalverteilung, als Fehlerkurve erhalten: Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der zufälligen Messfehler ist durch

$$\phi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$$

definiert, wobei h eine positive Konstante ist, die Gauß als „Messungspräzision“ interpretierte. In Abb. 3.11 ist die Kurve $y = \phi(x)$ für einige verschiedene h dargestellt. Gauß selbst war nicht ganz zufrieden, dass er die Methode der kleinsten Quadrate durch Benutzung eines speziellen Minimums einer Summe der Quadratabweichungen erhalten hatte und versuchte später mehrmals, seine Fehlerkurve auch durch andere Argumente zu erklären. Heute findet man das Argument in dem Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace, wenn man annimmt, dass die Fehler der einzelnen Messungen durch Zusammenspiel vieler „atomarer“ Fehler entstehen ([19, 24, 27, 31]).

Die Anwendung der Statistik in Geisteswissenschaften, besonders Soziologie, beginnt mit dem belgischen Mathematiker und Astronom **Lambert Adolphe Jaques Quetelet** (1796–1874). Er konzipierte 1835 den „durchschnittlichen Menschen“ (*l'homme moyen*), um dessen Eigenschaften die Eigenschaften aller Menschen normalverteilt sind. Quetelet betrachtete es als Pflicht des Staates, demografische Daten zu sammeln und zu analysieren. Er selbst arbeitete auch an der Sammlung und Analyse statistischer Daten in Bezug auf Kriminalität und Mortalität und bemerkte als Erster, dass in der menschlichen Gesellschaft, wenn man größere Populationen (beispielsweise Nationen) als Ganzes betrachtet, viele Eigenschaften mit großer Regelmäßigkeit auftreten und oft normalverteilt erscheinen.

Beispiel 3.11

Quetelet betrachtete 1846 die Tab. 3.2 mit Brustumfängen von 5738 schottischen Soldaten und bemerkte, dass deren Verteilung (Abb. 3.12) der Verteilung, die bei

Tab. 3.2 Quetelets Tabelle der Brustumfänge schottischer Soldaten

Brustumfang (in Inch)	Frequenz
33	3
34	18
35	81
36	185
37	420
38	749
39	1073
40	1079
41	934
42	658
43	370
44	92
45	50
46	21
47	4
48	1

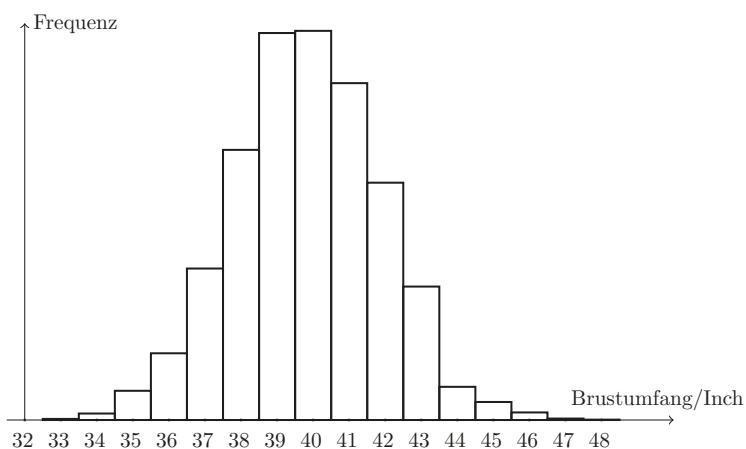


Abb. 3.12 Säulendiagramm zu Daten aus Tab. 3.2

wiederholten Messungen in der Astronomie auftritt, ähnelt und behauptete, die Verteilung der Brustumfänge wäre die normale.⁵

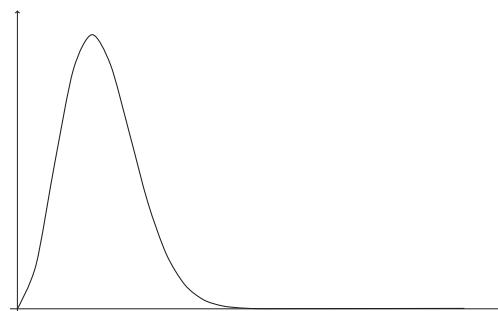
Quetelet bemerkte, dass die jährliche Anzahl von Morden in Frankreich fast konstant ist und sogar die verschiedenen Mordwaffen in jedem Jahr in fast gleichen Verhältnissen verwendet worden waren. Seine Behauptung, dass die Konstanz der Frequenz von Verbrechen verschiedener Arten innerhalb eines Staates auf den Einfluss äußerer, allgemein gesellschaftlicher, Bedingungen auf Kriminalität hinweist, verursachte viele Diskussionen über das Verhältnis des freien persönlichen Willens und gesellschaftlichen Determinismus. Quetelet entwickelte statistische Methoden zur Analyse und zum Vergleich von (astronomischen, geophysischen und meteorologischen) Daten und organisierte 1853 den ersten internationalen statistischen Kongress. So kam es, dass nach Quetelet die Bedeutung des Wortes „Statistik“ aus der ursprünglichen (Beschreibung allgemeiner Fakten über einen Staat; *statum* ist das lateinische Wort für Staat) in die moderne abgewandelt wurde ([8, 5, 13, 15]).

Die Ideen Quetelets fanden schon bald ihre Entsprechungen außerhalb der Soziologie. Der Priester und Naturforscher **Gregor Mendel** (1822–1884) begründete die Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie in der Vererbungslehre ([4]). Wenn man die menschliche Gesellschaft als ein großes Ganzes betrachten und statistisch beschreiben kann, liegt es nahe, die noch zahlreicheren Molekülenpopulationen in Gasen ähnlich zu betrachten. **James Clerk Maxwell** (1831–1879) und **Ludwig Boltzmann** (1844–1906) begründeten so um 1860 die statistische Thermodynamik. Ein Gas ist aus einer enormen Menge von Molekülen, die ständig in Bewegung sind, zusammengesetzt. In quasi jedem Moment ereignen sich Zusammenstöße von Gasmolekülen. Maxwell und Boltzmann konnten, anhand damals bekannter physikalischen Gesetze, zeigen, dass es in jedem Moment für jede Richtung und jede Geschwindigkeit Moleküle gibt, die sich mit dieser Geschwindigkeit in die Richtung bewegen. Doch sind nicht alle Geschwindigkeiten gleich wahrscheinlich. Maxwell wendete die Gauß'sche Fehlerrechnung an und konnte daraus die Verteilungskurve für Molekülgeschwindigkeiten (Abb. 3.13) herleiten ([5, 15]).

Ein Verwandter Charles Darwins, der britische Naturforscher **Sir Francis Galton** (1822–1911), begründete in den 1870er-Jahren die Regressionsanalyse. Galton war bekannt für seine Vorliebe für die Sammlung von Daten jeglicher Art. So hatte er nicht nur jeden Tag die Temperatur seines Tees gemessen, zusammen mit dem Volumen des dafür verwendeten Wassers, sondern fertigte sich ein Hilfsmittel, welches er in der Tasche trug, um bei Ansicht einer Frau diskret deren Grad an Attraktivität zu registrieren; er kam zum Schluss, dass Englands attraktivsten Frauen in London leben und die am wenigsten attraktiven in Aberdeen. Er begründete auch die *Anthropometric Laboratory*, in der Freiwillige diverse persönliche Merkmale messen lassen konnten. Solche Messungen halfen auch, Quetelets Ansätze zu bestätigen. Galton verglich die Durchmesser der Samen der

⁵Nach modernen Kriterien kann diese Hypothese aber nicht angenommen werden, siehe [24].

Abb. 3.13 Die Maxwell-Boltzmann-Verteilungskurve

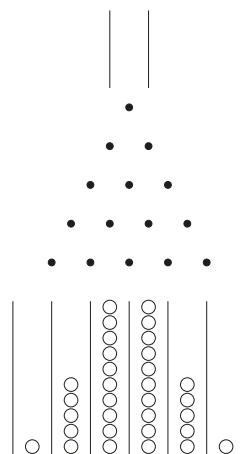


duftenden Platterbse in zwei Generationen, und zeichnete das, was man heute ein Korrelationsdiagramm nennt. Dabei entdeckte er die Beziehung, die er zunächst „Reversion“ (Umkehrung) nannte, später aber als „Regression“ bezeichnete: Der Mediandurchmesser der Nachkommen der größeren Samen war kleiner als der Mediandurchmesser der Elternsamten und umgekehrt, der Mediandurchmesser der Nachkommen der kleineren Samen war größer als der Mediandurchmesser der Elternsamten. Später zeichnete er weitere Korrelationsdiagramme, z. B. zum Vergleich der Größen von Eltern und (erwachsenen) Kindern bei Menschen. In diese Diagramme zeichnete er die Gerade, die den Trend am besten beschrieb (visuell sieht das wie eine Ausgleichsgerade, Abb. 3.10, aus, nur, dass kein funktionaler Zusammenhang zwischen den zwei Variablen besteht und somit mehrere Punkte mit gleicher Abszisse auftreten können). Galton nahm die Steigung dieser Geraden als Index der Korrelation (*de facto* Korrelationskoeffizient), der den Grad des Zusammenhangs zwischen zwei Variablen beschreibt. Galton war auch überzeugt, dass die Normalverteilung praktisch allgegenwärtig ist und ist zusammen mit dem Amerikaner C. S. Peirce und dem Deutschen Wilhelm Lexis der Autor der entsprechenden Bezeichnung „normal“.

Von Galton stammt auch ein berühmtes Hilfsmittel zur Visualisierung der Binomialverteilung, das Galton-Brett, von ihm Quincunx genannt (Abb. 3.14). In jeder Reihe von oben nach unten ist je ein Stift mehr, symmetrisch, angeordnet. Wenn man von oben Kugeln loslässt, verteilen sie sich unten nach Regeln der Binomialverteilung, bei vielen Kugeln wird diese der Normalverteilung immer ähnlicher. Man kann dies mit der Bedeutung der Normalverteilung der Messfehler auch so interpretieren: Jede Reihe entspricht einer Messung, der zufällige Abprall einer Kugel nach links oder rechts entspricht einer Abweichung vom wahren Messwert nach oben oder nach unten.

Die Normalverteilung wurde vor allem durch den Vater der modernen Testierung statistischer Hypothesen, dem englischen Mathematiker **Karl Pearson** (1857–1936), popularisiert. Er selbst sagte 1923: „Vor vielen Jahren nannte ich die Laplace-Gauß’sche Kurve⁶ die Normalkurve, doch während dieser Name der internationalen Frage der Priorität ausweicht, hat er den Nachteil, dass er Menschen dazu verleitet zu glauben, alle anderen

⁶Bald darauf erfuhr er von de Moivres Beitrag und schrieb ihm die Entdeckung der Normalkurve zu.

Abb. 3.14 Galton-Brett

Frequenzverteilungen seien in einem oder anderen Sinne abnormal“. Doch war zu dieser Zeit die Bezeichnung „Normalverteilung“ schon so allgemein bekannt, dass keiner sie ändern würde. Pearson befasste sich mit den verschiedensten Wissenschaften, unter anderem Psychologie, und veröffentlichte auch literarische Werke, ist in der Geschichte der Statistik vor allem wegen der Einführung des χ^2 -Tests und der mathematischen Begründung des Korrelationskoeffizienten berühmt ([5, 8, 13, 24, 25]).

So kam es, dass zur Zeit des großen Mathematikers **Jules Henri Poincaré** (1854–1912), berühmt für seine Beiträge zu fast allen mathematischen Gebieten, die Normaldistribution (von zufälligen Fehlern) so allgegenwärtig und bekannt war, dass er sagte: „Jeder ist so davon überzeugt, sagte mir eines Tages Herr Lippmann,⁷ weil die Experimentatoren glauben, es ist ein mathematischer Satz, und die Mathematiker, dass es eine experimentell ermittelte Tatsache ist“. Über Poincaré wird auch die Anekdote berichtet, dass er jeden Morgen einen Laib Brot von 1 kg bei seinem Bäcker holte und zu Hause diese Brot abwog. Er sammelte so Daten und erwartete eine normalverteilte Distribution der Gewichtswerte, mit Maximum über 1 kg, aber stellte fest, dass die Verteilung zwar wie eine normale aussah, mit einem Maximum über 950 g. Er vermutete, dass der Bäcker ein Betrüger war und zeigte ihn bei den Pariser Behörden an. Diese sollen den Bäcker verwarnt haben, und Poincaré soll weiter mit seiner Sammlung von Gewichtsdaten für dessen Brotlaibe gemacht haben und dann eine nicht symmetrische, leicht rechtsgeneigte, Verteilung erhalten haben, aus der er den Schluss gezogen haben soll, der Bäcker wäre nicht besser geworden, sondern gibt ihm, wegen der Anzeige, immer die größtmöglichen Laibe. Ob diese Geschichte wahr ist oder nicht, zeigt sie doch, wie die Normalverteilung am öftesten angewendet wird, aber nach einigem Nachdenken (die Laibe werden eher vor dem Backen gewogen, und beim Backen ist es normal, dass ein Gewichtsverlust entsteht, auch

⁷Poincaré meint hier den französischen Physiker Gabriel Lippmann.

kann die Luftfeuchtigkeit die Gewichtswerte beeinflussen) warnt diese Geschichte auch vor möglichen fehlerhaften Anwendungen der Normalverteilung ([5]).

Wir wollen unseren kurzen Ausflug in die Geschichte der Statistik mit Bier beenden. Eine der für die statistischen Hypothesentests bedeutende Verteilung wurde nämlich in einer Brauerei entdeckt. Der Engländer **William Sealy Gosset** (1876–1937) studierte Chemie und Mathematik in Oxford, bekam 1899 eine Anstellung in der berühmten irischen Brauerei *Guiness* in Dublin. Er begann sich mit statistischen Fragen zu beschäftigen, kontaktierte Karl Pearson und unternahm auch 1906/7 Studien in seinem Labor in London. Um die kleinen Stichproben der Brauerei zum Zwecke der Qualitätskontrolle statistisch zu analysieren, entwarf er die Distribution, die heute als Student-t-Verteilung bekannt ist, sowie den statistischen t-Test, der auf dieser Verteilung basiert. Da er, wegen Verbot seitens der Brauerei, um Betriebsgeheimnisse zu schützen, nicht seine Resultate unter eigenem Namen veröffentlichen durfte, veröffentlichte er sie als „Student“, und unter diesem Namen wurde auch Gosssets Verteilung bekannt ([8]).

Eine kurze Übersicht der Geschichte der numerischen Mathematik und Statistik ist in der Tab. 3.3 enthalten.

Tab. 3.3 Geschichte der numerischen Mathematik und Statistik: Übersicht

Was?	Wer? Wo?	Wann?
Iterative Methoden zur Wurzelberechnung	Babylonien Heron von Alexandria China Indien Fibonacci	2. Jtsd. v. Chr. 1. Jh. n. Chr. ab 1. Jh. v. Chr. 1. Jtsd. n. Chr. 13. Jh.
Iterative Methode zur Berechnung von π	Archimedes aus Syrakuse	3. Jh. v. Chr.
Iterative Methoden zur Lösung von Gleichungen	China Viète Newton	1. Jtsd. n. Chr. um 1600 1660er-Jahre
Lineare Interpolation Quadratische Interpolation Allgemeine Interpolation	China China, Indien Newton, Gregory, Waring	Anfang 1. Jtsd. n. Chr. um 600. n. Chr. 17./18. Jh.
Logarithmentafeln	Napier, Bürgi, Briggs	1614, 1620, 1624
Gauß'sches Eliminationsverfahren	China C. F. Gauß	Anfang 1. Jtsd. n. Chr. 1810
Methode der kleinsten Quadrate	A.-M. Legendre, C. F. Gauß	Anfang 19. Jh.
Gauß'sche Fehlerkurve und deren Anwendungen	C. F. Gauß Quetelet, F. Galton, K. Pearson, Mendel, Maxwell, Boltzmann	Anfang 19. Jh. 2. Hälfte des 19. Jh.

Literaturverzeichnis

1. Aaboe, A.: Al-Kāshī's iteration method for the determination of $\sin 1^\circ$. <http://www.jphogendijk.nl/arabsci/Kashi-Aaboe.pdf>. Zugegriffen 22 Febr. 2017
2. Anglin, W.S., Lambek, J.: The Heritage of Thales. Springer, New York (1995)
3. Ayoub, R.: What is a Napierian logarithm? Amer. Math. Monthly **100**, 351–364 (1993)
4. Basieux, P.: Abenteuer Mathematik – Brücken zwischen Wirklichkeit und Fiktion. Rowohlt, Reinbek (1999)
5. Bellos, A.: Alex's Adventures in Numberland. Bloomsbury Publishing, London (2011)
6. Brown, E., Brunson, J.C.: Fibonacci's forgotten number. College Math. J. **39**, 112–120 (2008)
7. Burton, D.M.: The History of Mathematics: An Introduction (6. Aufl). McGraw-Hill, New York (2006)
8. O'Connor, J.J., Robertson, E.F.: MacTutor History of Mathematics Archives. <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/>. Zugegriffen 20 Apr. 2017
9. Fuller, A.T.: Horner versus Holdred: An episode in the history of root computation. Hist. Math. **26**, 29–51 (1999)
10. Gleizer, G.I.: Povijest matematike za školu (Geschichte der Mathematik für die Schule, kroatische Übersetzung des russischen Originals). Školske novine & Hrvatko matematičko društvo, Zagreb (2003)
11. González-Velasco, E.A.: Journey Through Mathematics. Springer, New York (2010)
12. Grcar, J.E.: Mathematicians of Gaussian elimination. Notices of the AMS **58**, 782–792 (2011)
13. Gullberg, J.: From the Birth of Numbers. W. W. Norton & Company, New York (1997)
14. Johansson, B.G.: Cube root extraction in medieval mathematics. Hist. Math. **38**, 338–367 (2011)
15. Kasner, E., Newman, J.: Mathematics and the Imagination. Dover Publ., Mineola, New York (1940)
16. Lightner, J.E.: A brief look at the history of probability and statistics. Math. Teacher **84**, 623–630 (1991)
17. Luckey, P.: Die Ausziehung der n -ten Wurzel und der binomische Lehrsatz in der islamischen Mathematik. Mathematische Annalen **120**, 217–274 (1948)
18. Meijering, E.: A chronology of interpolation. Proceedings of the IEEE **90**, 319–342 (2002)
19. Merriman, M.: On the history of the method of least squares. The Analyst **4**, 33–36 (1877)
20. Offner, C.D.: Computing the digits in π . <http://www.cs.umb.edu/~offner/files/pi.pdf>. Zugegriffen 17 Mai 2017
21. Ossendrijver, M.: Ancient Babylonian astronomers calculated Jupiter's position from the area under a time-velocity graph. Science **351**, 482–484 (2016)
22. Polasek, W.: The Bernoullis and the origin of probability theory: Looking back after 300 years. Reson. **5**, 26–42 (2000)
23. Sheynin, O.B.: On the early history of the law of large numbers. Biometrika **55**, 459–467 (1968)
24. Stahl, S.: The evolution of the normal distribution. Math. Mag. **79**, 96–113 (2006)
25. Stanton, J.M.: Galton, Pearson, and the peas: A brief history of linear regression for statistics instructors. <http://ww2.amstat.org/publications/jse/v9n3/stanton.html> (2001). Zugegriffen 15 Mai 2017
26. Swetz, F.: The evolution of mathematics in ancient China. In: Anderson, M., Katz, V., Wilson, R. (Hrsg.) Sherlock Holmes in Babylon and Other Tales of Mathematical History, S. 60–68. The Mathematical Association of America, Washington DC (2004)
27. Triplat Horvat, M., Lapaine, M., Tutić, D.: Application of Bošković geometric adjustment method on five meridian degrees. <http://www.rudjerboskovic.com.hr/assets/PDF/KoG15-Boskovic.pdf> (2011). Zugegriffen 1 Juni 2017

28. Varićak, V.: Matematički rad Bošković, I. dio (Bošković's mathematische Werke, Teil I; in Kroatisch). JAZU (Jugoslawische Akademie der Wissenschaften und Künste), Zagreb (1912)
29. Wang, L., Needham, J.: Horner's method in Chinese mathematics: Its origins in the root-extraction procedures of the Han dynasty. *T'oung Pao* **43**, 345–401 (1955)
30. Wußing, H.: 6000 Jahre Mathematik, Eine kulturgeschichtliche Zeitreise – 1. Von den Anfängen bis Leibniz und Newton. Springer, Berlin (2008)
31. Wußing, H.: 6000 Jahre Mathematik, Eine kulturgeschichtliche Zeitreise – 2. Von Euler bis zur Gegenwart. Springer, Berlin (2009)
32. Yong, L.L.: The geometrical basis of the ancient Chinese square-root method. *Isis* **61**, 92–102 (1970)
33. Yong, L.L. The development of polynomial equations in traditional China. [http://sms.math.nus.edu.sg/smsmedley/Vol-14-1/The development of polynomial equations in traditional China\(Lam Lay Yong\).pdf](http://sms.math.nus.edu.sg/smsmedley/Vol-14-1/The%20development%20of%20polynomial%20equations%20in%20traditional%20China(Lam%20Lay%20Yong).pdf) (1986). Zugegriffen 30 März 2017
34. Ypma, T.J.: Historical development of the Newton-Raphson method. *SIAM Review* **37**, 531–551 (1995)
35. Yuan, Y.-X.: Jiu zhang suan shu and Gauss algorithm for linear equations. http://www.math.uiuc.edu/documents/vol-ismp/10_yuan-ya-xiang.pdf. Zugegriffen 24 Apr. 2017

4.1 Entstehung der Graphentheorie

Die Topologie ist ein relativ junges, der Geometrie verwandtes, Teilgebiet der Mathematik. Im Gegensatz zur Geometrie, wo bei Betrachtung von Objekten die metrischen Eigenschaften (Größe und Form) im Vordergrund stehen und von Interesse sind, sind typische topologische Fragen, ob ein Objekt zusammenhängend ist und, wenn ja, ob es (und wie viele) Löcher besitzt. Anders ausgedrückt: Für den Geometer werden die Objekte bezüglich isometrischer Abbildungen klassifiziert, für den Topologen bezüglich stetiger Verformungen. Man will also feststellen, welche Eigenschaften durch Homöomorphismen, stetige bijektive Abbildungen mit stetigen Inversen, erhalten werden; diese Eigenschaften werden auch topologische Invarianten genannt.

Üblicherweise werden zwei Ergebnisse **Leonhard Eulers** im 18. Jh. als erste topologische Resultate angesehen: die Lösung des Königsberger Brückenproblems und die Entdeckung der Euler'schen Polyederformel. Beide gehören heute in die Graphentheorie, ein Untergebiet der Topologie, welches eng mit der Kombinatorik verbunden ist. Somit ist der Anfang der Topologie zugleich Anfang der Graphentheorie ([4]).

Problem 4.1 (Königsberger Brückenproblem) Die Stadt Königsberg (heute Kaliningrad) ist durch den Fluss Pregel zweigeteilt; im Fluss liegen zwei Inseln. Die vier Stadtteile sind insgesamt durch sieben Brücken verbunden (Abb. 4.1 links): Eine Brücke verbindet die zwei Inseln, eine der Inseln ist durch je zwei Brücken mit den Festlandstadtteilen verbunden und die andere mit je einer. Die Aufgabe lautet: Kann man einen Spaziergang durch die vier Stadtteile von Königsberg machen, sodass jede der Brücken genau einmal überquert wird?

Im Jahr 1736 veröffentlichte Euler die Lösung dieses Problems unter dem Titel *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*. Schon der Titel suggeriert die Haupteinsicht Eulers: Es handelt sich um ein Problem, welches sich zwar auf geometrische Objekte bezieht, für dessen Lösung aber nicht die metrischen Eigenschaften (Größe der Stadtteile und Inseln, Längen der Brücken) von Wichtigkeit sind, sondern deren Lage in Bezug zueinander. Anders ausgedrückt: Es ist nur wichtig, was und wie miteinander verbunden ist. Heute wird das Problem durch den zugehörigen Graphen repräsentiert. Die Stadtteile werden durch Punkte (Knoten oder Ecken des Graphen) dargestellt und jede Brücke durch eine die entsprechenden Knoten verbindende Linie (Kante des Graphen), siehe Abb. 4.1 rechts. Euler löste das allgemeine Problem. Er zeigte ([7]):

1. Wenn es mehr als zwei Stadtteile gibt, aus denen eine ungerade Anzahl von Brücken tritt, ist das Problem unlösbar (nur dieses wird rigoros bewiesen).
2. Wenn sich in genau zwei Stadtteilen eine ungerade Anzahl von Brücken treffen, ist der Spaziergang möglich, wenn man in einem dieser zwei Stadtteile beginnt und im anderen endet.
3. Wenn sich in allen Stadtteilen gerade Anzahlen von Brücken treffen, dann kann man den Spaziergang in einem beliebigen der Stadtteile beginnen und im gleichen enden.

Modern ausgedrückt ist ein Rundgang im Graphen (in dem jede Kante genau einmal überquert wird)¹ genau dann möglich, wenn entweder alle Knoten geraden Grades sind oder genau zwei von ungeradem Grad sind (der Grad eines Knotens ist die Anzahl der in ihm zusammentreffenden Kanten).

Das zweite von Eulers Resultaten, die die Graphentheorie und somit Topologie begründeten, schrieb er 1750 in einem Brief an Christian Goldbach² nieder. Dies ist die berühmte Euler'sche Polyederformel:

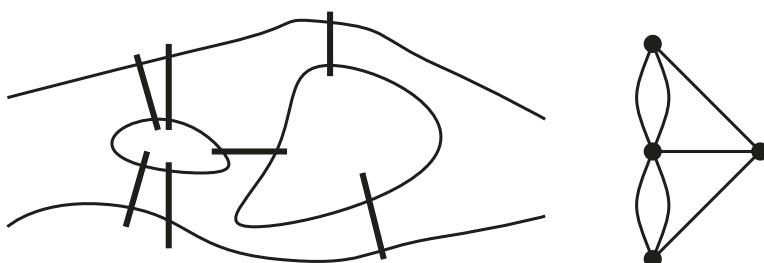


Abb. 4.1 Das Königsberger Brückenproblem und der zugehörige Graph

¹Euler zu Ehren werden solche Rundgänge Eulertouren genannt.

²Christian Goldbach, 1690–1764, deutscher Mathematiker, vor allem für die bis heute unbewiesene Goldbach'sche Vermutung der Zahlentheorie bekannt: Jede natürliche Zahl, die größer als 2 ist, kann man als Summe zweier Primzahlen darstellen.

Theorem 4.1 (Polyedersatz von Euler) Wenn man die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen eines konvexen³ Polyeders jeweils mit E , K und F bezeichnet, gilt

$$E - K + F = 2.$$

Euler veröffentlichte 1752 mehr Details und einen unvollkommenen Beweis der Formel. Der erste Beweis stammt anscheinend von Legendre (1794), ist aber geometrisch: Legendre projiziert den Polyeder auf eine Sphäre und benutzt die Formel Harriots für die Fläche sphärischer Vielecke ([10, 15]). Der wenig bekannte Schweizer Mathematiker **Simon Lhuilier** (1750–1840) bemerkte 1813, dass die Formel für Polyeder mit N Löchern die Form

$$E - K + F = 2 - 2N$$

hat und entdeckte so die erste topologische Invariante der Geschichte, die Anzahl der Löcher einer Fläche, genauer gesagt die sogenannte Euler-Charakteristik $\chi = 2 - 2N$ einer Fläche ([4]). Beispielsweise hat die Oberfläche einer Kugel die Euler-Charakteristik 2, und die eines Torus hat die Euler-Charakteristik 0. Heutzutage wird die Euler'sche Polyederformel meist graphentheoretisch interpretiert und bewiesen: Wenn man sich vorstellt, das man den Polyeder zuerst bis zu einem kugelförmigen Ballon aufbläst (auf dem dann alle Ecken und Kanten immer noch eingezeichnet sind), ein Loch in den Ballon macht (egal wo, nur nicht auf einer der Kanten des ehemaligen Polyeders), kann man den Ballon auf einer Ebene ausbreiten und erhält einen ebenen Graphen des Polyeders.⁴ Es scheint, so [10], dass der Erste, der das Thema so betrachtet hat, Cauchy war. Auch muss hier erwähnt werden, dass Descartes noch mehr als 100 Jahre vor Euler eine der Euler'schen Polyederformel äquivalente Beziehung gefunden hat (die aber unveröffentlicht blieb und erst später bekannt wurde)⁵ [12, 15]:

Theorem 4.2 (Polyederformel von Descartes) Wenn vier rechte Winkel mit der Anzahl der Raumwinkel multipliziert werden und von diesem Produkt acht rechte Winkel abgezogen werden, verbleibt die Summe aller ebener Winkel des Polyeders:

$$360^\circ E - 720^\circ = \sum_{i=1}^F \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{i,j},$$

wenn mit n_i die Eckenanzahl der i -ten Fläche bezeichnet ist und die Innenwinkel der i -ten Seite mit $\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,n_i}$.

³Ein Polyeder ist konvex, wenn für jede zwei Punkte innerhalb des Polyeders die Verbindungsstrecke ganz innerhalb des Polyeders liegt. Es ist also ein Polyeder ohne Löcher und Dellen.

⁴Ein Graph heißt ebener Graph, wenn er auf einer ebenen Fläche so gezeichnet werden kann, dass sich die Kanten nur in den Knoten schneiden.

⁵Descartes unveröffentlichtes Manuskript über Polyeder blieb in seinem Nachlass. Als Leibniz in Paris in den 1670er-Jahren weilte, machte er Kopien von diesem und anderen Manuskripten Descartes'. Diese Kopie wurde erst im 19. Jh. unter Papieren aus Leibniz' Nachlass gefunden ([12]).

Die Äquivalenz mit Eulers Formel ist leicht einzusehen, wenn man beachtet, dass in einem n_i -Eck die Winkelsumme gleich $(n_i - 2) \cdot 180^\circ$ ist sowie, dass $\sum_{i=1}^F n_i = 2K$, da jede Kante in an je zwei Ecken Anteil hat.

Beispiel 4.1

Ein dreiseitiges Prisma hat $F = 5$ Flächen und $E = 6$ Ecken (also 6 Raumwinkel). Die Anzahl der Kanten ist $E = 9$ und $E - K + F = 6 - 9 + 5 = 2$.

Andererseits sind zwei von den Prismenflächen Dreiecke (mit Winkelsummen 180°) und drei Vierecke (mit Winkelsummen 360°), also ist $360^\circ E - 720^\circ = 360^\circ \cdot 4 = 2 \cdot 180^\circ + 3 \cdot 360^\circ$.

Somit könnte man auch Descartes als „Vater“ der Topologie betrachten. Andererseits war anscheinend der Erste, der die Euler'sche Polyederformel rein topologisch verstand, erst Jules Henri Poincaré (1854–1912). Er bemerkte: Jede Ecke teilt zwei Kanten, jede Kante teilt zwei Flächen. Daraus folgt, dass jede Unterteilung (Zweiteilung einer Kante durch Einsatz einer neuen Ecke bzw. einer Fläche durch Einsatz einer neuen Kante) die Summe $E - K + F$ unverändert lässt: Eine eingesetzte Ecke erhöht zugleich E und K um 1, eine eingesetzte Kante erhöht zugleich K und F um 1. Analog gilt dies für die Löschung einzelner Ecken oder Kanten. Poincaré generalisierte auch die Euler-Charakteristik auf n -dimensionale Polytopen⁶ ([15]).

Zu einer richtigen Unterdisziplin wurde die Graphentheorie aber über ein Jahrhundert nach Euler, und zwar verbunden mit Anwendungen. Insbesondere tritt damit verbunden die Graphenart, die als Baum bekannt ist, auf: Ein Baum ist ein zusammenhängender azyklischer Graph, also ein Graph, in dem man von jedem Knoten jeden anderen (den Kanten folgend) erreichen kann, aber keine geschlossenen Pfade möglich sind. Einerseits untersuchte der deutsche Physiker **Gustav Kirchhoff** (1824–1887) elektrische Stromkreise und entwickelte dabei eine Theorie der Spannbäume,⁷ um die elektrischen Stromstärken in den einzelnen Abzweigungen zu bestimmen. Durch das, was man heute einem dem Netzwerk entsprechenden Graphen nennen würde, zeigte Kirchhoff, dass man nicht alle möglichen (unabhängigen) Zyklen berücksichtigen muss, sondern dass diese durch einen der Spannbäume bestimmt sind. Andererseits war der englische Mathematiker **Arthur Cayley** an chemischen kombinatorischen Problemen interessiert und zählte Bäume (von Cayley selbst stammt auch diese Bezeichnung), die bei Aufzählung von Strukturisomeren⁸ auftreten. Insbesondere zählte er die Isomere der Alkane (gesättigte azyklische Kohlenwasserstoffe) C_nH_{2n+2} mit einer gegebenen Anzahl n der Kohlenstoffatome C (die drei

⁶Polytope sind Generalisierungen von Vielecken auf beliebige Dimensionen.

⁷Ein Spannbaum in einem Graphen ist ein Untergraph, der ein Baum ist und mit dem Graphen alle Knoten gemeinsam hat.

⁸Wenn die gleichen Sorten und Anzahlen von Atomen in einem Molekül verschiedenartig verbunden sind, spricht man von Strukturisomeren.

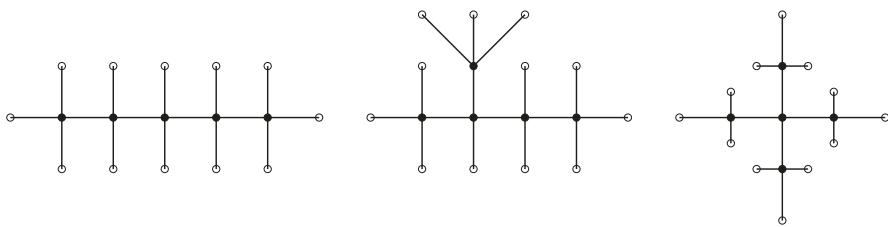


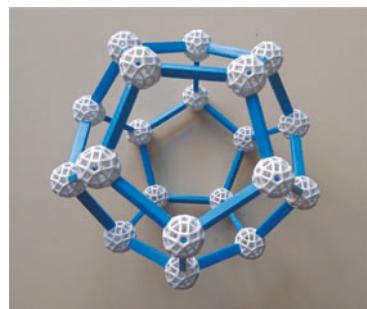
Abb. 4.2 Graphen der drei Strukturisomere mit chemischer Formel C₅H₁₂

Strukturisomere des Pentans C₅H₁₂ sind durch ihre Graphen auf [Abb. 4.2](#) dargestellt). Cayley erkannte, dass man die Alkane durch Bäume darstellen kann, in denen es genau n Knoten mit Grad 4 gibt (entspricht den Kohlenstoffatomen mit Valenz 4) und $2n+2$ Knoten mit Grad 1 (Wasserstoffatome haben Valenz 1). Bis heute behielt die Graphentheorie die Chemie als ein wichtiges Anwendungsbereich ([6]).

Arthur Cayley (1821–1895) zeigte seine mathematischen Fähigkeiten schon als Kind. Er studierte Mathematik in Cambridge, und nach dem Studium blieb er dort als *Fellow*. Nach dem Ablauf dieses zeitlich begrenzten Stipendiums musste er sich einen Beruf suchen, von dem er leben konnte. Er wählte Jura und wurde Anwalt in London. Er hatte eine erfolgreiche juristische Karriere im Zeitraum 1849–1863, behielt aber seine mathematischen Interessen. Er tauschte sich viel mit noch einem Mathematiker-Anwalt in London aus, James Joseph Sylvester (1814–1897). Cayley behielt auch Kontakt mit dem irischen Mathematiker William Rowan Hamilton (1805–1865), den er bei seinem früheren Aufenthalt in Dublin kennengelernt hatte. Während seiner 14-jährigen Anwaltskarriere veröffentlichte Cayley etwa 250 mathematische Texte; insgesamt enthalten seine gesammelten Werke (1889 veröffentlicht) 967 Arbeiten zu verschiedenen mathematischen Themen. Als er 1863 zum Professor der Mathematik in Cambridge berufen wurde, gab er seine juristische Karriere auf, obwohl dies auch eine Kürzung seines Gehalts bedeutete. So konnte er sich endlich voll der Mathematik widmen, bald darauf heiratete er auch. Im zweiten Lebensabschnitt erreichte er hohes internationales Ansehen und wurde durch verschiedene Preise, Mitgliedschaften und Funktionen honoriert. Cayley ist besonders für seinen Beitrag zur Algebra (besonders Matrixalgebra) berühmt (siehe 1. Buch) sowie für die hier beschriebene Entwicklung der Graphentheorie ([4]).

Cayleys Freunde **James Joseph Sylvester** (1814–1897) und der irische Mathematiker **Sir William Rowan Hamilton** (1805–1865) leisteten auch Beiträge zum Thema Graphentheorie. Von Sylvester, aus einem kurzen Artikel in der Zeitschrift *Nature* (1878), stammt die Bezeichnung „Graph“, und Hamilton entwarf 1859 ein berühmtes

Abb. 4.3 Reguläres Dodekaeder als die Welt für Hamiltons *Icosian game* (Fotografie eines eigenen Zometool-Modells)

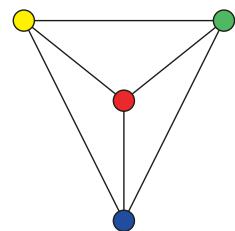
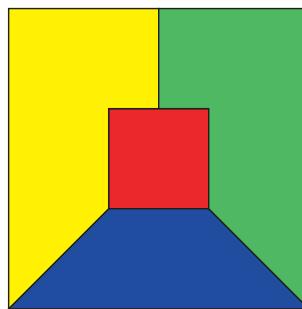


graphentheoretisches Rätsel, das *Icosian game*, auch als *Reise um die Welt* bekannt ([6]). Hamilton zu Ehren werden Rundgänge in Graphen, bei denen jeder Knoten je einmal besucht wird, Hamiltonkreise genannt.

Problem 4.2 (Hamiltons Spiel) Wenn man sich einen regulären Dodekaeder ([Abb. 4.3](#)) als die Weltkugel vorstellt, seine 20 Ecken als Städte und die Kanten als mögliche Reisewege, ist es das Ziel des Spiels, eine Reise um die Welt zu finden, bei der alle Städte genau einmal besucht werden und man am Ende in die Anfangsstadt zurückkehrt.

Um diese kurze Darstellung der Anfänge der Graphentheorie zu beenden, wollen wir noch einige Worte über eines der berühmtesten mathematischen Probleme überhaupt sagen, welches über 100 Jahre als das Vierfarbenproblem bekannt und erst kürzlich als der Vierfarbensatz bewiesen ist. Der südafrikanische Mathematiker und Botaniker **Francis Guthrie** (1831–1899) studierte Mathematik in London. Guthrie bemerkte, wie wohl auch andere Menschen vor ihm, dass man verschiedene Landkarten immer mit nur vier Farben einfärben konnte, sodass angrenzende Länder nie gleichfarbig dargestellt werden. Er stellte 1852 die Frage: Welche ist die Mindestanzahl von Farben, mit der man Landkarten einfärben kann? Graphentheoretisch ausgesagt: Welche ist die Mindestanzahl von Farben, mit denen man die Knoten eines ebenen Graphen einfärben kann, dabei aber nie zwei mit einer Kante verbundenen Knoten gleich eingefärbt werden? Als Bedingungen stellte er, dass die Landkarte nur aus Ländern besteht und dass Länder immer „einfach zusammenhängend“ sind, also ohne „Löcher“ und immer nur in einem Teil (die USA beispielsweise würde diese Bedingung nicht erfüllen, da die Staaten Hawaii und Alaska nicht mit dem Rest der USA verbunden sind). Diese Frage leitete er unter anderem an seinen Professor Augustus de Morgan weiter. Im Jahr 1878 wurde das Problem von Cayley zum ersten Mal im Druck erwähnt. Schon bald wurde das Problem recht populär: Zwar lehrte die Erfahrung, dass vier Farben genügen, und es ist auch nicht schwer, ein Beispiel zu finden, für das wirklich vier Farben notwendig sind (siehe [Abb. 4.4](#)), aber es fehlte ein mathematischer Beweis. **Alfred Kempe** (1849–1922), ein Student Cayleys, veröffentlichte 1879 einen angeblichen Beweis, der sich 11 Jahre später als mangelhaft erwies. Den Fehler entdeckte **Percy Heawood** (1861–1955), konnte aber durch Vereinfachung von Kempes Argumenten den Fünffarbensatz beweisen: Jede ebene Landkarte kann mit 5 Farben so eingefärbt werden,

Abb. 4.4 Es gibt Landkarten, zu deren Einfärbung mindestens vier Farben benötigt werden



dass angrenzende Länder verschiedenfarbig dargestellt werden. Während des 20. Jh. wurden immer mehr Beweise für den Vierfarbensatz für Landkarten mit maximal n Ländern, wobei n immer größer wurde, gefunden ([2, 9]). Endlich konnten dann 1976 **Kenneth Appel** und **Wolfgang Haken** einen Beweis des Vierfarbensatzes vorstellen, allerdings wurde der Beweis durch intensiven Einsatz von Computern erzielt und eröffnete somit eine neue Frage: Wann ist so ein Beweis als mathematisch rigoros anzusehen? Die Diskussion dauert an ([9]).

4.2 Entstehung der geometrischen und algebraischen Topologie

Eines der bekanntesten, oder vielleicht auch das bekannteste, aller Untergebiete der Topologie ist die Knotentheorie, sie hat ihre Ursprünge in den Endjahrzehnten des 18. Jh. Ein mathematischer Knoten ist eine geschlossene Kurve im dreidimensionalen euklidischen Raum, welche nirgendwo sich selbst durchdringt; zwei oder mehr Knoten, die sich nicht schneiden, aber ineinander verschlungen sein können, nennt man eine Verschlingung. Zwei Knoten (oder Verschlingungen) sind äquivalent, wenn man den einen in den anderen durch eine stetige Verformung überführen kann (Abb. 4.5). Aus 1794 stammen Knotenzeichnungen und -tabellen von Carl Friedrich Gauß. Später (1833), verbunden mit seiner Arbeit an elektrodynamischen Problemen, bewies er das älteste bekannte Resultat der Knotentheorie: Er entdeckte eine topologische Invariante, die sogenannte Gauß'sche Verschlingungszahl einer Verschlingung ([3]).

Abb. 4.5 Äquivalenz von Knoten

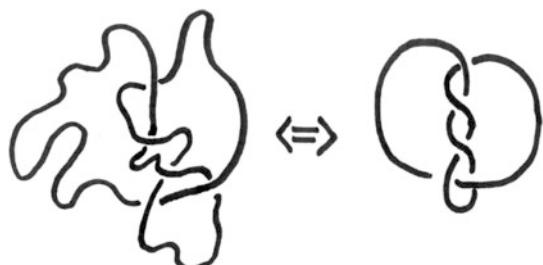




Abb. 4.6 Eigenes Modell des Möbiusbandes

Der deutsche Mathematiker **Johann Benedict Listing** (1802–1882) war ein Student Gauß' und arbeitete an topologischen Konzepten weiter. Von ihm stammt der Name „Topologie“ (1836 in einem Brief, 1847 in der veröffentlichten Schrift *Vorstudien zur Topologie*), jedoch hielt sich bis Ende des 19. Jh. die Bezeichnung *Analysis situs* als Name für Topologie. Listing entwickelte eine eigene Methode zur Bezeichnung von Knoten und beschäftigte sich mit der Chiralität von Knoten, d. h. der (In-)Äquivalenz zwischen Knoten und seinem Spiegelbild ([3, 4]).

Vier Jahre vor Möbius (1861) beschrieb Listing auch die wohl berühmteste topologisch interessante Fläche, das Möbiusband. Es ist eine einseitige, nicht orientierbare Fläche, deren interessante Eigenschaften auch in der Popularisierung der Mathematik Anwendung gefunden haben (Abb. 4.6). Den Namen bekam die Fläche nach einem anderen deutschen Mathematiker, **August Ferdinand Möbius** (1790–1860), der sich hauptsächlich mit Geometrie befasste und 1858 das Möbiusband entdeckte. Diese Entdeckung wurde posthum 1865 veröffentlicht ([4, 13]).

Zu gleicher Zeit wie Listing beschäftigte sich auch ein viel berühmterer Mathematiker mit der Frage des Zusammenhangs von Flächen: **Bernhard Riemann** (1826–1866). Im Jahr 1851 beschrieb er die Riemann'schen Flächen. Dies sind, vereinfacht gesagt, zusammenhängende Flächen (besser gesagt: Mannigfaltigkeiten), welche wegen implizit definierter Funktionen, die keine eindeutigen Funktionen auf der komplexen Zahlenebene definieren, eingeführt worden sind. Riemanns Idee ist die Entfernung gewisser Kurven aus der komplexen Zahlenebene, sodass eine (dichte, offene) Menge Ω übrig bleibt, auf der die Funktion auf eine oder mehr Weisen eindeutig definiert ist. Man kombiniert dann so viele Kopien von Ω entlang der ausgeschnittenen Kurven, wie es eindeutige Versionen der Funktion gibt.

Beispiel 4.2

Die Quadratwurzel ist implizit durch $z^2 - w = 0$ definiert. Wenn man aus der komplexen Ebene den negativen Teil N der reellen Achse entfernt, kann man auf dem Rest Ω der komplexen Ebene die Quadratwurzel auf zwei Arten eindeutig definieren: als $z = \sqrt{|w|} \exp(i\varphi/2)$ oder als $z = -\sqrt{|w|} \exp(i\varphi/2)$ (wenn $w = |w| \exp(i\varphi)$). Wenn man dann zwei Kopien von Ω nimmt und sie entlang des Schnitts N „aneinanderklebt“ enthält man die entsprechende Riemann'sche Fläche.

Aufbauend auf Riemanns Resultaten konnte in den 1860er-Jahren der französische Mathematiker **Marie Ennemond Camille Jordan** (1838–1922) viele neue topologische Konzepte und Invarianten einführen. Am berühmtesten davon sind die Homotopie von Wegen⁹ und der Satz von Jordan ([5]):

Theorem 4.3 (Jordans Kurvensatz (1893)) *Jede einfach geschlossene Kurve in der Ebene (also geschlossene Kurve, welche sich selbst nirgendwo schneidet, siehe Abb. 4.7 rechts) teilt die Ebene in zwei disjunkte Gebiete, ein (durch die Kurve) beschränktes (das „innere Gebiet“) und ein unbeschränktes (das „äußere Gebiet“).*

Zu dieser Zeit war die Suche nach Wegen zur Klassifikation von Flächen schon recht intensiv. Riemann und Jordan vermuteten, dass die Euler-Charakteristik eine geschlossene Fläche topologisch (also bis auf Homöomorphismus) vollständig bestimmt, und Möbius hatte 1863 die Grundformen solcher Flächen entdeckt: die 2-Sphäre ohne Loch, mit einem Loch (Torus), zwei Löchern etc. Später wurde bewiesen (Dehn und Heegaard, 1907), dass auch wirklich alle geschlossenen orientierbaren Flächen einem der Möbius'schen Grundtypen (Abb. 4.8) äquivalent sind ([15]).

In den 1860er-Jahren bekam die Knotentheorie einen naturwissenschaftlichen Schub. Der berühmte britische Physiker Lord Kelvin (William Thomson, 1824–1907) stellte die Hypothese auf, dass Atome eigentlich Verknotungen im Äther sind und dass verschiedenenartige Verknotungen verschiedenen Elementen entsprechen. Diese Idee regte (nicht

Abb. 4.7 Eine einfach geschlossene Kurve (links) und eine, die es nicht ist

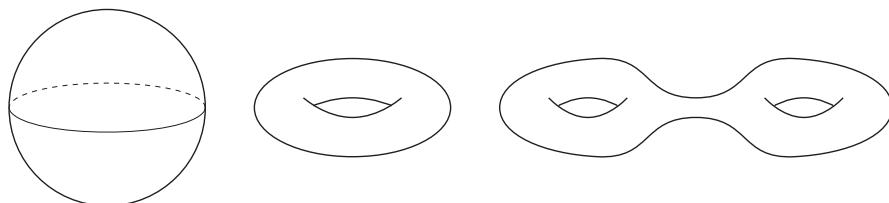


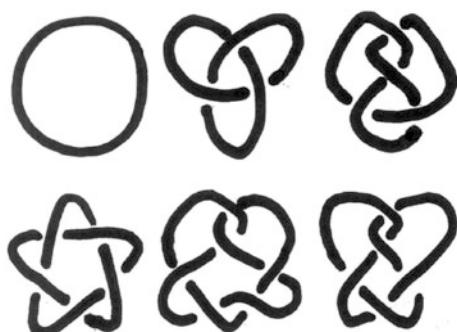
Abb. 4.8 Grundtypen geschlossener, orientierbarer 2-Flächen im 3-Raum

⁹Vereinfacht gesagt ist dies eine stetige Verformung von zwei Wegen mit gleichen Endpunkten ineinander.

nur) Mathematiker an, Knotentabellen zu erstellen. Die erste Knotentabelle stammt vom schottischen mathematischen Physiker **Peter Guthrie Tait** (1831–1901). Er organisierte seine Tabelle nach der Anzahl von Kreuzungen in den Knotenprojektionen¹⁰ und konnte bis 1885 alle sogenannten alternierenden Knoten¹¹ mit Projektionen mit bis zu zehn Kreuzungen auflisten. Tait stellte auch verschiedene Hypothesen über Knoten auf, die erst Ende des 20. Jh. bewiesen wurden. Mit Tait kommunizierten, und leisteten eigene Beiträge zum Thema, der britische Mathematiker (und Pfarrer) **Thomas P. Kirkman** (1806–1995) und der amerikanische Mathematiker und Ingenieur **Charles Newton Little** (1858–1923). Bis 1899, also nachdem schon durch das Michelson-Morley'sche Experiment bewiesen war, dass Lord Kelvins Atommodell falsch ist, entstanden so Tabellen aller Knoten mit bis zu zehn Kreuzungen,¹² inklusive erster Methoden zur Lösung des Hauptproblems, also der Entscheidung, ob zwei Knotenprojektionen den gleichen Knoten darstellen oder nicht. Diese Tabellen wurden später rigoros analysiert (Alexander und Briggs, 1927) und vervollständigt (Reidemeister, 1932) ([1, 3, 8]). Interessanterweise hat die Knotentheorie und allgemeine Topologie in moderner Zeit aber doch viele Anwendungen in der Chemie gefunden, verbunden mit der Klassifikation von Molekülen, aber auch als Inspiration für die Synthese neuer Moleküle. So sind bis heute beispielsweise Moleküle mit der Topologie eines Möbiusbandes oder auch einer Kleeblattschlinge, des einfachsten nichttrivialen Knotens, bekannt. Die ersten sechs Knoten, mit fünf oder weniger Kreuzungen darstellbar, sind in Abb. 4.9 dargestellt.

Die topologischen Ideen und Resultate Listings, Riemanns und Jordans konnte endlich der berühmte französische Mathematiker Jules Henri Poincaré (1854–1912), oft als „letzter Universalist unter den Mathematikern“ bezeichnet, präzisieren und systematisieren. Er veröffentlichte 1895 *Analysis situs*, die erste systematische Darstellung der Topologie. Er begründete auch die algebraische Topologie durch Einführung (1895) der

Abb. 4.9 Knoten mit maximal fünf Kreuzungen



¹⁰Eine Knotenprojektion ist eine Darstellung des Knotens in der Ebene, in der bei den Kreuzungen klar hervorgehoben ist, welche der zwei Stränge oberhalb des anderen verläuft, wie in Abb. 4.5.

¹¹Ein alternierender Knoten besitzt eine Projektion, in der die Kreuzungen abwechselnd Über- und Unterführungen sind.

¹²1974 wurde ein doppelter Eintrag in Littles Tabelle entdeckt.

Fundamentalgruppe eines topologischen Raumes. Deren Elemente sind Homotopieklassen von Schleifen (geschlossenen Wegen); wenn zwischen zwei Schleifen eine Homotopie existiert, werden sie als äquivalent betrachtet. Die Gruppenoperation wird durch das „Aneinanderreihen“ von Schleifen definiert. Wenn alle Schleifen zur trivialen Schleife homotopisch sind (also wenn man jede Schleife innerhalb des Raumes zu einem Punkt stetig zusammenziehen kann), ist die Fundamentalgruppe des Raumes trivial. Solche Räume nennt man auch einfach zusammenhängend. Beispielsweise (siehe Abb. 4.10) hat die 2-Sphäre eine triviale Fundamentalgruppe, und (siehe Abb. 4.11) ein Torus hat eine nichttriviale Fundamentalgruppe ([4, 15]).

Poincaré konnte zeigen, dass jede zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit trivialer Fundamentalgruppe der 2-Sphäre topologisch äquivalent ist und stellte die Vermutung auf, dass dies auch im dreidimensionalen Fall stimmt. Dies ist die berühmte Vermutung von Poincaré. Sie konnte zunächst in den 1960er-Jahren in n -dimensionaler Variante für $n > 4$ bewiesen werden, dann 1982 für vierdimensionale Mannigfaltigkeiten. Die ursprüngliche $n = 3$ -Vermutung wurde eines der sieben Millennium-Probleme und ist als Einziges davon bis heute gelöst: Der russische Mathematiker Grigorij Perelman schaffte dies 2002 (der Beweis wurde 2006 anerkannt). Somit ist jetzt nicht mehr von der Poincaré-Vermutung, sondern von dem Satz von Poincaré die Rede ([4, 15, 16]).

Es würde den Rahmen dieses Buches sprengen, noch mehr Details zur Geschichte der Topologie anzugeben. Wir beenden somit diese kurze Beschreibung des Entstehens dieser Disziplin durch Nennung einiger *Highlights* der Namen und Resultate, die zur heutigen Form der Topologie beitrugen. Der niederländische Mathematiker **Luitzen Egbertus**

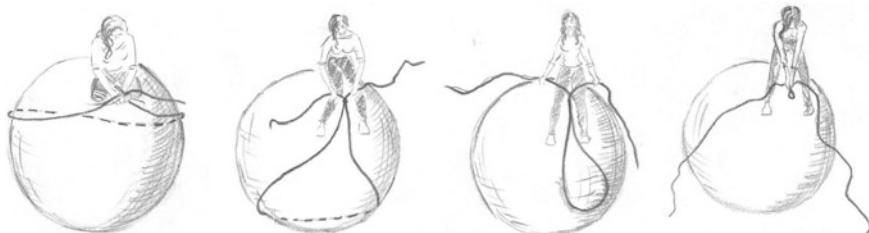


Abb. 4.10 Die 2-Sphäre ist einfach zusammenhängend

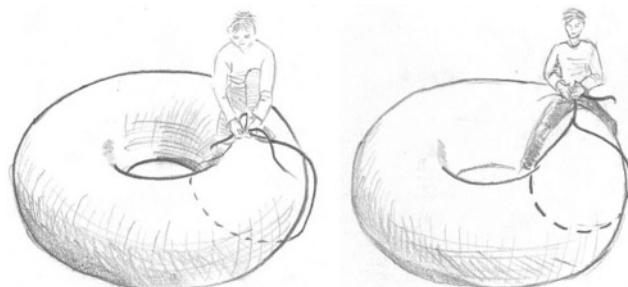


Abb. 4.11 Ein Torus ist nicht einfach zusammenhängend

Jan Brouwer (1881–1966) wird oft als „der Vater moderner Topologie“ bezeichnet und konnte nicht nur verschiedene Varianten des Fixpunktsatzes beweisen, sondern auch die topologische Invarianz der Dimension und die erste korrekte Definition der Dimension angeben ([4, 14]). Die Konzepte der offenen und abgeschlossenen Mengen entstanden durch Generalisierung der analytischen Konvergenz, besonders durch Arbeiten **Karl Weierstraß** und **Georg Cantors**. Weierstraß konnte 1877 den Satz von Bolzano und Weierstraß beweisen und führte den Begriff der Umgebung ein, und Cantor führte 1872 den Begriff der Ableitung einer Menge (also die Menge aller Häufungspunkte) ein und definierte abgeschlossene Mengen (1884, siehe auch Abschn. 5.2). **Maurice René Fréchet** (1878–1973) gab eine erste Definition von kompakten Räumen und generalisierte euklidische auf allgemeine metrische Räume. In den 1930er-Jahren, aufbauend auf früheren Ideen und Arbeiten von Fréchet, Frygues Riesz (1880–1956), Felix Hausdorff (1868–1942) und anderen, diskutierte die Gruppe französischer Mathematiker, welche unter dem Pseudonym Nicolas Bourbaki wirkten, über den axiomatischen Zugang zur Topologie. Sie formulierten 1940 die einzigen drei Axiome der Topologie ([4, 11]):

1. Die leere Menge ist offen.
2. Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist eine offene Menge.
3. Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist eine offene Menge.

In der Tab. 4.1 ist eine Übersicht der Geschichte der Topologie aufgeführt.

Tab. 4.1 Geschichte der Topologie: Übersicht

Was?	Wer?	Wann?
Graphentheorie: Königsberger Brückenproblem, Polyederformel	L. Euler	1736 bzw. 1750
Erste topologische Invariante χ	S. Lhuilier	1813
Andwendungen von Graphen	G. Kirchhoff, A. Cayley, J. J. Sylvester, W. R. Hamilton	1850er- bis 1870er-Jahre
Vierfarbenproblem	F. Guthrie	1852
Knotentabellen	C. F. Gauß P. G. Tait, T. P. Kirkman, C. N. Little	1794 Ende 19. Jh.
Anfänge der Flächenklassifikation	A. F. Möbius B. Riemann, M. E. C. Jordan	1863 1850er- bis 1860er-Jahre
Anwendungen der Gruppentheorie in der Topologie	M. E. C. Jordan J. H. Poincaré	1866 1895
Axiomatisierung	Bourbaki-Gruppe	1940

Literaturverzeichnis

1. Adams, C.C.: The Knot Book. American Mathematical Society, Providence (2004)
2. Burton, D.M.: The History of Mathematics: An Introduction (6. Aufl). McGraw-Hill, New York (2006)
3. Colberg, E.: A brief history of knot theory. <http://www.math.ucla.edu/~radko/191.1.05w/erin.pdf>. Zugegriffen 15 Mai 2017
4. O'Connor, J.J., Robertson, E.F.: MacTutor History of Mathematics Archive. <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/> (2016). Zugegriffen 15 Apr. 2017
5. Hales, T.C.: Jordan's proof of the Jordan curve theorem. Studies in Logic, Grammar and Rhetoric **10**, 45–60 (2007)
6. Harary, F.: Graph Theory. Addison-Wesley Publ. Co., Reading, Massachusetts (1969)
7. Hopkins, B., Wilson, R.J.: The truth about Königsberg. https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Polya/hopkins.pdf. Zugegriffen 11 Mai 2017
8. Hoste, J., Thistlethwaite, M., Weeks, J.: The first 1.701.936 knots. Math. Intelligencer **20**, 33–48 (1998)
9. Krantz, S.G., Parks, H.R.: A Mathematical Odyssey. Springer, New York (2014)
10. Malkevich, J.: Euler's polyhedral formula. AMS Feature Column. <http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-eulers-formula>. Zugegriffen 11 Mai 2017
11. Moore, G.H.: The emergence of open sets, closed sets, and limit points in analysis and topology. Hist. Math. **35**, 220–241 (2008)
12. Phillips, T.: Descartes' lost theorem. <http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-descartes1>. Zugegriffen 1 Juni 2017
13. Pickover, C.: The Möbius Strip. Thunder's Mouth Press, New York (2006)
14. Stanford Encyclopedia of Philosophy. <https://plato.stanford.edu/index.html>. Zugegriffen 15 Mai 2017
15. Stillwell, J.: Mathematics ans Its History. Springer, New York (2010)
16. Ungar, Š.: Slutnja koja je postala teorem (Die Vorahnung, welche zum Satz wurde; in kroatischer Sprache). Matematičko fizički list **61**, 20–23 (2010)

5.1 Entwicklung des Unendlichkeitsbegriffs vor Cantor

Die Idee der Unendlichkeit begann schon in der Antike nicht nur Philosophen und Theologen, sondern auch Mathematiker zu interessieren. Man erinnere sich nur an Zenons Paradoxe oder Eudoxos' Exhaustionsmethode (siehe Abschn. 1.1). Aristoteles unterschied zwischen aktueller und potenzieller Unendlichkeit, glaubte aber, dass nur die potenzielle existieren kann: „Aber mein Argument beraubt die Mathematiker in keiner Weise ihrer Forschung, obgleich es die Existenz des Unendlichen bestreitet, im Sinne der aktuellen Existenz, als etwas, was bis zu so einem Ausmaß vergrößert wurde, dass man es nicht durchgehen kann; weil, wie es ist, brauchen sie die Unendlichkeit nicht und verwenden sie auch nicht, sondern verlangen nur, dass das Segment beliebig lang werden kann ...“. Im Mittelalter befassten sich viele Gelehrte mit der Idee der Unendlichkeit, so z. B. Thomas von Aquin (ca. 1225–1274) und Thomas Bradwardine (ca. 1295–1349). Interessant ist Bradwardines Auffassung, dass eine kontinuierliche Größe aus einer unendlichen Anzahl gleichartiger kontinuierlicher Größen zusammengesetzt ist ([1, 3]).

In der Renaissance finden wir zum ersten Mal die Erkenntnis der fundamentalen Eigenschaft unendlicher Mengen: Jede unendliche Menge ist in Bijektion¹ mit einer ihrer echten Teilmengen. Galileo Galilei (1564–1642) bemerkte dies für die Menge natürlicher Zahlen: Wenn man alle Quadratzahlen aufzählt, entspricht jeder von ihnen genau eine natürliche Zahl,

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 4 & 9 & \dots & n^2 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \end{array}$$

¹Eine eindeutige Abbildung zwischen zwei Mengen, durch die jedem Element einer Menge genau ein Element der anderen Menge entspricht, und umgekehrt.

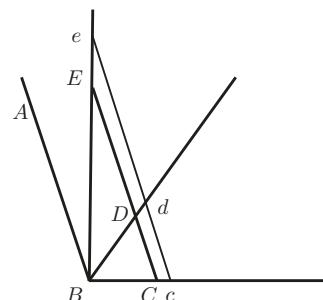
Also gibt es gleich viele Quadratzahlen wie alle, scheinbar zahlreichere, natürlichen Zahlen. Galileo bemerkt, dass in der Welt des Unendlichen andere Regeln gelten als für endliche (begrenzte) Größen (*Quantità terminate*). Insbesondere ist es klar, dass Galileo die Existenz unendlicher Mengen nicht leugnet ([1, 7]).

Ende 17. Jh. wurde nach der Begründung der Infinitesimalrechnung immer klarer, dass durch die Geschichte der Mathematik zwei Fragen mit dem Thema Unendlichkeit entstanden sind: der Unterschied zwischen potenzieller und aktueller Unendlichkeit sowie der Kontrast zwischen der diskreten Natur der Zahlen und der kontinuierlichen Natur geometrischer Objekte ([4]). Trotzdem war die Idee der Unendlichkeit für viele Mathematiker problematisch, und bis zum 19. Jh. waren viele der Ansicht, dass keine unendlichen Mengen existieren. So dachte 1741 z. B. Bošković (1711–1787), dass er bewiesen hat, unendlich große Mengen existieren nicht. Seine Argumentation ([12]) war die Folgende:

Beispiel 5.1 (Paradox von Bošković)

Man betrachte (siehe Abb. 5.1) einen Winkel in der Ebene. Seine Spitze sei B . Man teile den Winkel durch seine Winkelhalbierende BD . Falls einer der so entstandenen Teile der Ebene einen unendlichen Flächeninhalt hat, gilt dasselbe auch für den anderen, da die Flächeninhalte offensichtlich gleich sind. Beginnend mit einem Punkt C auf einer der Winkelstrahlen zeichnet man eine Parallele zum anderen Winkelstrahl. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Winkelhalbierenden sei D . Auf der Geraden CD bestimmt man nun den Punkt E mit der Eigenschaft, dass seine Entfernung zu D gleich doppelter Entfernung von C bis D ist. Wenn man Parallelen zu CDE zieht, teilt man den Teil der Ebene, der durch den Winkel CBE bestimmt ist, in Streifen. Sei cde eine dieser Parallelen. Wegen der Wahl von E ist der Flächeninhalt des Dreiecks dBe zweimal größer als die Fläche des Dreiecks cBd . Demzufolge hat das Viereck $dDee$ einen doppelten Flächeninhalt wie $cCdD$. Da dies für jede Parallele cde gilt, schließt Bošković, dass der durch den Winkel CBD bestimmte Teil der Ebene den halben Flächeninhalt des Teils DBE hat. Da dieser aber kleiner als der durch DBA bestimmte und dieser gleich dem durch den Winkel DBC bestimmten Flächeninhalt ist, erscheint dies paradoxal: Ein Teil scheint doppelt so groß wie die Gesamtheit zu sein.

Abb. 5.1 Illustration zum Unendlichkeitsparadox von Bošković



Diese anscheinend paradoxale Eigenschaft der Existenz einer bijektiven Abbildung zwischen einer unendlichen Menge und einer echten Untermenge dieser Menge wurde von Bernard Bolzano (1781–1848) an mehreren Beispielen als typische Eigenschaft unendlicher Mengen untersucht. Bolzanos *Paradoxien des Unendlichen* wurden posthum 1851 veröffentlicht, hier tritt auch der Begriff „Menge“ zum ersten Mal in der Geschichte auf. Unter anderem untersuchte Bolzano Galileos Beispiel und konnte weiter zeigen, dass die Intervalle $\langle 0, 1 \rangle$ und $\langle 0, 2 \rangle$ gleich viele Elemente haben (die Bijektion ist durch die Regel $f(x) = 2x$ gegeben). Er erklärt auch viele der alten Paradoxien der Unendlichkeit, unter anderem einen, der auf Galileo zurückgeht ([1, 3, 6]).

Beispiel 5.2 (Bolzanos Erklärung von Galileos Paradox)

Man betrachtet ein Quadrat $ABCD$ und zeichnet ihm einen Viertelkreis mit Mittelpunkt A und Radius $|AB|$ ein (Abb. 5.2). Eine Parallelle zu AD wird eingezeichnet, die das Quadrat in P und R schneidet, die Diagonale AC in N und den Viertelkreis in M .

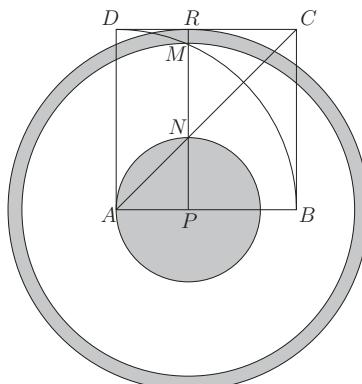
Wenn jetzt PR sich der Geraden AD nähert, wird der Kreis mit Radius $|PN|$ immer kleiner. Wenn PR mit AD koinzidiert, wird der Kreis zum Punkt A . Während dieses Grenzübergangs wird der Kreisring zwischen den Kreisen mit Radien $|PM|$ und $|PR|$ immer dünner und geht in einen Kreis mit Radius $|AC|$ über.

Andererseits ist es nicht schwer zu zeigen, dass für jede Position von PR die Gleichung $|PN|^2 = |PR|^2 - |PM|^2$ gilt. Im Grenzübergang würde dies bedeuten, dass der Punkt A die gleiche Fläche hat wie der Kreis mit Radius $|AC|$. Paradox? Nein! Bolzano zeigte: Ein Punkt hat genau wie eine Kreislinie eine Fläche gleich null und das anscheinende Paradox kommt daher, dass man denkt, dass man aus der Anzahl der Punkte in einer Figur auf ihren Flächeninhalt schließen kann.

Heutzutage benutzen einige Autoren die beschriebene Eigenschaft der unendlichen Mengen als deren Definition:

► **Definition 5.1 (Unendliche Menge)** Eine Menge A ist unendlich, wenn eine echte Untermenge $B \subset A$ und eine bijektive Abbildung $f : A \rightarrow B$ existieren.

Abb. 5.2 Illustration zum Unendlichkeitsparadox von Galileo



Während man jetzt denken könnte, dass die Mengenlehre geschaffen wurde, um die Fragen der Unendlichkeit beantworten zu können, ist dies doch nicht ganz so wahr. Zwar kann man sagen, dass die Mengenlehre eine mathematische Theorie der Unendlichkeit ist, ihre Entstehung ist aber vor allem mit der Beantwortung bestimmter Fragen über die Natur und das Kontinuum der reellen Zahlen verbunden ([10]).

5.2 Begründung der naiven Mengenlehre

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918) wurde in St. Petersburg (Russland) geboren. Als er 11 Jahre alt war, zog die Familie nach Frankfurt. Cantor studierte Mathematik in Zürich und Berlin. Unter seinen Berliner Professoren waren Karl Weierstraß und Leopold Kronecker. Cantors Doktorarbeit war zahlentheoretisch, aber als er 1869 eine Stelle in Halle erhielt, begann er, sich unter dem Einfluss des älteren Kollegen Heine für die Analysis zu interessieren. Seine Versuche, die Konvergenz trigonometrischer Reihen unter verschiedenen Bedingungen, wie z. B. „bis auf endlich viele Punkte“, zu beweisen, inspirierten ihn, das lineare Kontinuum der reellen Zahlen präziser zu beschreiben. In den 1870er-Jahren begründete er die Mengenlehre. Cantor heiratete 1874, 10 Jahre später fingen seine Depressionsanfälle an (siehe auch weiter unten). In der Endzeit seiner mathematischen Aktivität, den 1890er-Jahren, erlitt er auch einige persönliche Tragödien: Innerhalb von 3 Jahren starben seine Mutter, sein jüngerer Bruder und sein jüngster Sohn. Um die Jahrhundertwende wurde sein Verhalten immer exzentrischer, und er fing an, sich mit der Theorie, dass Roger Bacon Shakespeares Dramen verfasste, zu beschäftigen. So kam es sogar dazu, dass, als er als angesehener Wissenschaftler zur Feier des 500. Jahrestages der schottischen Universität St. Andrew's eingeladen wurde, fast nur über diese Theorie geredet hat. Seine Aufenthalte in Sanatorien wurden immer häufiger. In Pension ging er 1913 und litt in der Zeit des ersten Weltkrieges an Armut und Unterernährung. Cantor starb 1918 in einem Sanatorium in Halle an einem Herzinfarkt ([3]).

Der deutsche Mathematiker, Begründer des Konzeptes der uniformen Stetigkeit, Heinrich Edouard Heine (1821–1881) arbeitete, als Cantor eine Stelle in Halle erhielt, an der Frage der Eindeutigkeit der Repräsentation einer Funktion durch ihre Fourierreihe. Er konnte 1870 zeigen: Wenn eine Funktion fast überall uniform stetig ist und die zugehörige Fourierreihe uniform konvergiert, dann ist die Darstellung eindeutig. Unter seinem Einfluss fing auch Cantor an, sich mit solchen Fragen zu beschäftigen und versuchte zu präzisieren, auf welchen Untermengen von \mathbb{R} die Ausnahmen zur uniformen Stetigkeit und Konvergenz stattfinden dürfen. Dies führte ihn zum Problem der präzisen Definition

des linearen Kontinuums der reellen Zahlen. Cantor definierte 1870 reelle Zahlen als Äquivalenzklassen von Fundamentalfolgen rationaler Zahlen² und zeigte die eindeutige Korrespondenz mit Punkten einer Gerade. Weiter definierte Cantor typisch topologische Begriffe: die Umgebung eines Punktes (ein Intervall, in dessen Innerem sich der Punkt befindet) und den Häufungspunkt einer Menge (ein Punkt p ist ein Häufungspunkt, wenn jede seiner Umgebungen unendlich viele Elemente der Menge enthält). Beispielsweise besitzen endliche Mengen und \mathbb{N} keine Häufungspunkte, andererseits ist 1 ein Häufungspunkt für Intervalle $(0, 1)$ und $[0, 1]$. Weiter definiert Cantor derivierte Mengen: A' ist die Menge aller Häufungspunkte von A , A'' ist die Menge aller Häufungspunkte von A' usw. Eine Menge A ist der v -ten Sorte, wenn ihre v -fach derivierte Menge $A^{(v)}$ endlich ist. Unter Verwendung dieser Begriffe zeigte Cantor, dass die Fourierreihenentwicklung eindeutig ist, wenn sie höchstens auf einer Menge der Sorte v divergiert ([9]).

Somit leistete Cantor einen wichtigen Beitrag zur Analysis und Topologie, aber er entdeckte auch die Faszination der Menge \mathbb{R} und unendlicher Mengen im Allgemeinen. Schon lange vor Cantor war mehr oder weniger die Idee des Kontinuums der reellen Zahlen, also der bijektiven Korrespondenz zwischen reellen Zahlen und den Punkten einer Gerade, präsent. Anfang des 19. Jh. wurde den Mathematikern langsam klar, dass diese intuitive Idee präziser begründet werden sollte. Bolzano bemerkte 1817, dass der Zwischenwertsatz, den mehrere Mathematiker vor ihm als offensichtlich benutzten, einen Beweis verlangt. Insbesondere bemerkte Bolzano, dass man die Intervallschachtelungseigenschaft³ beweisen sollte. Solche Fragen führten zu der fundamentalen Frage: Was ist eine reelle Zahl? ([5, 10]).

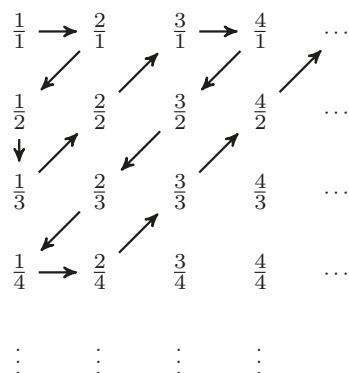
Cantor freundete sich 1872 mit **Richard Dedekind** (1831–1916) an, der sich auch mit der Frage der präzisen Definition der Menge der reellen Zahlen befasste. Während Cantor die reellen Zahlen als Äquivalenzklassen von Fundamentalfolgen rationaler Zahlen zu definieren versuchte, definierte Dedekind die irrationalen Zahlen durch Dedekind'sche Schnitte ([10]). Ein Dedekind'scher Schnitt ist ein geordnetes Paar von zwei nichtleeren Mengen $A, B \subseteq \mathbb{Q}$ mit den Eigenschaften, dass jedes Element von A von jedem Element von B kleiner ist, dass A kein größtes Element besitzt und dass $\mathbb{Q} = A \cup B$. So kann z. B. $\sqrt{2}$ durch den Schnitt $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 > 2\}$ definiert werden.

Im Laufe des Jahres 1873 bewies Cantor, dass die Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen und die Menge \mathbb{Z} der ganzen Zahlen gleichmächtig sind, also gleich viele Elemente enthalten. Dabei ging er von der Eigenschaft aus, die offensichtlich für endliche Mengen stimmt: Zwei Mengen sind gleichmächtig, wenn eine bijektive Abbildung von einer Menge auf die andere existiert. Diese Eigenschaft formalisierte er einige Jahre später als Definition der Gleichmächtigkeit von Mengen. In dem konkreten Fall der Mengen \mathbb{N} und \mathbb{Z} kann die gesuchte Bijektion z. B. durch die Reihung von ganzen Zahlen als Folge 0,

²Eine Folge heißt Fundamentalfolge, wenn der Abstand beliebiger Folgenglieder a_m und a_n mit wachsenden m und n beliebig klein wird.

³Wenn $[a_0, b_0] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq \dots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \dots$ eine unendliche Folge geschachtelter Intervalle ist, ist deren Durchschnitt $\cap [a_n, b_n]$ nicht leer.

Abb. 5.3 Die Menge der positiven rationalen Zahlen ist abzählbar unendlich



$1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$ definiert werden.⁴ Mengen, die der Menge \mathbb{N} gleichmächtig sind, sind als unendliche abzählbare Mengen bekannt, und die Anzahl ihrer Elemente wird mit \aleph_0 (Aleph-Null) bezeichnet. Beides, der Begriff der Abzählbarkeit und das Symbol \aleph_0 , stammt auch von Cantor (aus seinen späteren Schriften).

Im gleichen Jahr, 1873, zeigte Cantor, dass auch die Menge \mathbb{Q} der rationalen Zahlen abzählbar unendlich ist. Er zeigte, dass die Menge der positiven rationalen Zahlen \mathbb{Q}^+ der Menge \mathbb{N} gleichmächtig ist. Daraus folgt trivial, dass die Mengen der negativen rationalen und negativne ganzen Zahlen gleichmächtig sind, also ist $\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$ zugleich der Menge $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$ und der Menge \mathbb{N} gleichmächtig, woraus die abzählbare Unendlichkeit von \mathbb{Q} folgt. Der Beweis, dass \mathbb{Q}^+ abzählbar unendlich ist, also dass man alle positiven rationalen Zahlen in einer Folge aufzählen kann, ist durch die Abb. 5.3 illustriert: Die Reihenfolge ist durch die Pfeile definiert, Brüche mit gleichem Wert wie ein früher aufgezählter Bruch werden übersprungen ([1, 3, 6, 11]).

Diese Ideen Cantors werden oft als Geschichte erzählt, die den Namen „Hilberts Hotel“ trägt. **David Hilbert** (1862–1643) erzählte die Geschichte in einem Vortrag 1924, hat sie aber nie veröffentlicht. Bekannt wurde sie durch das Buch *One, Two, Three ... Infinity* von George Gamow 1947 ([8]). Hier unsere Variante, mit Stadion anstatt Hotel:

Beispiel 5.3 (Hilberts Stadion)

Es existierte, oder wird vielleicht irgendwann existieren, ein Stadion mit unendlich vielen Plätzen für die Fans. Die Sitze waren mit natürlichen Zahlen nummeriert. Für das Finale der Weltraummeisterschaft waren die Karten ausverkauft. Eine Viertelstunde vor dem Anpfiff erschien aber nicht mehr und nicht weniger als Pelé vor dem Stadion und suchte noch einen Sitzplatz. Der arme Kassierer konnte nur sagen: Wir sind leider ausverkauft. Aber Pelé abweisen kam ja nicht infrage. Glücklicherweise war der Kassierer

⁴Man bemerke: Eine Menge A ist der Menge \mathbb{N} gleichmächtig, wenn alle Elemente von A als eine unendliche Folge a_1, a_2, a_3, \dots aufzählbar sind. In diesem Fall ist die gesuchte Bijektion durch $a(n) = a_n, n \in \mathbb{N}$, definiert.

David aber eine ehemaliger Mathematikstudent und erinnerte sich an die Grundideen Cantors. So schaltete er den Lautsprecher ein und sagte: „Alle Zuschauer werden gebeten, ihre Sitzplätze auf den Sitzplatz mit der nächsthöheren Zahl zu wechseln“. Der Zuschauer auf Platz 1 wechselte also auf 2, der von 2 auf 3 usw. Da es ja unendlich viele Plätze gab, konnte jeder Zuschauer, wie groß auch seine Sitzplatznummer n war, auf Platz $n + 1$ wechseln, und Pelé bekam Platz Nummer 1, wie es sich eben für eine Fußballlegende gehört.⁵

Doch Davids Probleme wurden gleich noch schlimmer. Zehn Minuten vor Anpfiff erschienen die Sportminister aller, unendlich vieler, Länder des Universums. Falls man für sie keine Plätze fand, drohten sie, jegliche finanzielle Unterstützung für Fußball in allen Ländern zu streichen. Nach kurzem Nachdenken erinnerte sich David des Beweises, dass \mathbb{Z} abzählbar ist. Die entsprechende Anweisung an die Zuschauer war einfach: „Wir bitten alle Zuschauer auf den Sitzplatz mit doppelter Nummer zu wechseln“. Pelé wechselte also (leider) auf 2, der dortige Zuschauer auf 4 usw. Jeder Zuschauer, mit welcher Sitzplatznummer n auch immer, konnte auf Platz $2n$ wechseln und es blieben (abzählbar) unendlich viele Sitzplätze mit ungeraden Nummern für die Sportminister.⁶

Katastrophe verhindert! Doch aller Sorgen sind drei. Eine Minute vor Anpfiff und Kassenschluss erschien eine (abzählbar) unendliche Anzahl von fliegenden Untertassen, auf jeder eine (abzählbar) unendliche Anzahl von Außerirdischen aus dem einzigen Eck des Weltraumes, in dem Fußball nicht beliebt war. Sie alle wollten das Finale sehen, um endlich zu verstehen, warum andere Weltraumbewohner so von einem Spiel begeistert waren, in dem ein Vielfaches (einige Weltraumbewohner haben mehr als 2 Beine) von 44 haarigen Beinen einem Ball nachrennt. Es ist unwichtig, was geschehen haben könnte, wenn ein anderer als David an der Kasse gearbeitet hatte. So erinnerte er sich an die Abzählbarkeit von \mathbb{Q} und gab die Anweisung: „Jeder Zuschauer wird gebeten, von seinem Platz auf den Platz mit der Zahl 2 hoch seine gegenwärtige Nummer zu wechseln!“. Die Zuschauer wechselten also von 1 auf 2, von 2 auf 4, von n auf 2^n . Während dieses Umordnens im Stadion teilte David jeder fliegenden Untertasse eine ungerade Primzahl zu (die Untertassen wurden also 3, 5, 7, 11, ... numeriert). Da es nach Euklids Satz unendlich viele Primzahlen gibt, konnten alle Untertassen numeriert werden. Endlich wurden die Außerirdischen instruiert, nach dem Prinzip vom Sieb des Eratosthenes zu verfahren: Die Außerirdischen aus Untertasse Nummer 3 erhielten die Sitzplätze, deren Nummern durch 3 teilbar sind, die aus Untertasse Nummer 5 bekamen alle noch unbesetzten Plätze, deren Nummern durch 5 teilbar sind usw.⁷ Endlich konnte (natürlich mit etwas Verspätung) das Spiel beginnen.

⁵Mit \aleph_0 ausgedrückt: $1 + \aleph_0 = \aleph_0$.

⁶Mit \aleph_0 ausgedrückt: $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.

⁷Man bemerke, dass dies ein anderer als durch Abb. 5.3 illustrierter Beweis der Gleichheit $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ ist.

Kehren wir zurück von Hilberts Zeit in die Zeit Cantors. Im gleichen Jahr 1873, in dem er die obigen Resultate beweisen konnte, bewies Cantor auch, dass die algebraischen Zahlen abzählbar unendlich sind. Dies führte logischerweise zu folgenden Fragen: Sind etwa alle unendlichen Mengen gleichmächtig? Insbesondere, ist die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen abzählbar unendlich?

Für viele Mathematiker, auch für die Autorin dieses Buches, ist der Moment, in dem Cantor bewiesen hat, dass \mathbb{R} nicht mit \mathbb{N} gleichmächtig ist und somit unendliche Mengen verschiedener Mächtigkeit existieren, der Geburtsmoment der Mengenlehre. Dies war im Dezember 1873, und der Beweis wurde 1874 in der berühmten mathematischen Zeitschrift *Crelles Journal* veröffentlicht. Schnell wurden Cantors Resultate kontrovers. Schon auf den ersten Blick ist sein Resultat überraschend: Erst 1844 konnte Joseph Liouville die Existenz transzenter, also nichtalgebraischer reeller, Zahlen beweisen. Kurz vor Cantors Beweis konnte Charles Hermite die Transzendenz von e beweisen, und erst einige Jahre später, 1882, konnte Ferdinand von Lindemann die Transzendenz von π beweisen. Die transzententen Zahlen schienen also 1873 eine ziemlich seltene Zahlensorte zu sein. Und dann kam Cantor mit seinen Beweisen der Abzählbarkeit der algebraischen Zahlen und der Unabzählbarkeit von \mathbb{R} , aus denen einfach folgt: Es gibt überabzählbar viele, also mehr als algebraische, transzendenten Zahlen!

Doch diese „schockierende“ Erkenntnis war nur der Anfang der Kontroverse. Nach dem Beweis der Unabzählbarkeit von \mathbb{R} versuchte Cantor etwas, was offensichtlich schien, zu beweisen: Ein Quadrat besteht aus mehr Punkten als ein Segment. Aber, 1877 konnte er das Gegenteil beweisen und mehr dazu. Cantor zeigte, dass ein Segment einem Quadrat, einem Würfel und allgemein einem beliebig (ganzzahlig) dimensionalen Raum gleichmächtig ist. Formeller gesagt, für jede zwei natürliche Zahlen m und n sind die Mengen \mathbb{R}^m und \mathbb{R}^n gleichmächtig. Berühmt wurde Cantors Kommentar in seinem Brief an Dedekind, in dem er sein Resultat beschrieb: „Ich sehe es, aber ich glaube es nicht!“ Diese überraschende Erkenntnis eröffnete die Frage des Sinns des Begriffs der Dimension. Dies wurde später (1912) von Brouwer geklärt, der beweisen konnte, dass die Bijektion zwischen verschiedendifensionalen Räumen nie stetig sein kann.

Die Kontroverse um Cantors Resultate intensivierte sich recht schnell. Dazu trug besonders **Leopold Kronecker** (1823–1891), zu der Zeit einer der Herausgeber der Zeitschrift *Crelles Journal*, bei. Er war sehr skeptisch gegenüber Cantors neuen Resultaten und wollte zunächst den neuen Artikel nicht veröffentlichen, nach Intervention von Dedekind und Weierstraß wurde dieser doch 1878 veröffentlicht. In diesem Artikel findet man nicht nur das Resultat, welches die Frage der Dimension verursachte, sondern auch die oben angegebene Definition der Gleichmächtigkeit, den Beweis, dass die Mächtigkeit der natürlichen Zahlen die kleinste unter den unendlichen ist sowie dass abzählbar viele Kopien von \mathbb{R} zusammen immer noch mit \mathbb{R} gleichmächtig sind.

Der Grund für Kroneckers Opposition war seine konstruktivistische Überzeugung, dass man zum Beweis der Existenz eines mathematischen Objekts eine explizite Konstruktion benötigt. Mehr sogar, er verlangte, dass die Konstruktion in endlich vielen Schritten aus

ganzen Zahlen erfolgt und lehnte sogar die Existenz irrationaler Zahlen ab. Demgegenüber waren Cantors Beweise extrem unkonstruktivistisch.

Zwischen 1879 und 1884 veröffentlichte Cantor in der Zeitschrift *Mathematische Annalen* sechs Artikel, in denen er die Mengenlehre detailliert beschrieb. In dem letzten dieser Artikel führte er das Konzept der wohlgeordneten⁸ Mengen ein sowie Ordinalzahlen und deren (transfinite) Arithmetik. Dabei führte er die Ordinalzahlen als Ordnungstypen wohlgeordneter Mengen ein, mit dem Ziel, die Kardinalzahlen genauer zu beschreiben. Die kleinste transfinite Zahl, also die Ordinalzahl von \mathbb{N} mit der Standardordnung, bezeichnete er mit ω ([1, 3, 11]).

Die Kontroverse mit Kronecker und seinen Gesinnungsgegnern dauerte aber an, und 1884 erlitt Cantor seinen ersten Depressionsanfall. Nach modernen Erkenntnissen zum Krankheitsbild hatte das weniger mit dieser Kontroverse zu tun, sondern mehr mit seinen schwierigen zwischenmenschlichen Beziehungen und seinen mathematischen Sorgen. Insbesondere muss man hier die Kontinuumshypothese nennen. Nach Cantors 1870er-Resultaten waren zwei verschiedene unendliche Mächtigkeiten, heute Kardinalzahlen genannt, bekannt: die von \mathbb{N} (\aleph_0) und die von \mathbb{R} (\mathfrak{c}). In Cantors Artikel von 1874 ist bewiesen, dass $\aleph_0 < \mathfrak{c}$. Die natürliche Frage ist: Gibt es eine Kardinalzahl zwischen \aleph_0 und \mathfrak{c} ? Die Vermutung, dass es keine gibt, wird heute als Kontinuumshypothese bezeichnet und meist durch die Formel

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

dargestellt, da bewiesen werden kann, dass $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ und mit \aleph_1 die kleinste Kardinalzahl größer als \aleph_0 bezeichnet wird. Cantors erste Versuche, diese Vermutung zu beweisen oder zu widerlegen, scheiterten. Zu gleicher Zeit scheiterten auch seine Versuche, eine Stelle in Berlin zu bekommen, und er erlitt den erwähnten Depressionsanfall. Er erholte sich bis zum nächsten Jahr und arbeitete weiter. In den Jahren 1895 und 1897 veröffentlichte er endlich eine vollständige, zweiteilige Beschreibung der Mengenlehre.

Das berühmteste Resultat aus dieser zweiten Phase ist

Theorem 5.1 (Cantor) *Jede Menge A hat weniger Elemente als ihre Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ (die Menge aller Untermengen von A).*

Der Beweis erfolgt durch das Diagonalverfahren von Cantor.

Beweis Da die Abbildung $A \ni x \mapsto \{x\} \in \mathcal{P}(A)$ offensichtlich injektiv ist, kann die Kardinalzahl von A nie größer als die von $\mathcal{P}(A)$ sein. Nehmen wir an, dass eine bijektive Abbildung $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ existiert. Man betrachte die Menge $M = \{x \in A : x \notin f(x)\}$.

⁸Eine geordnete Menge heißt wohlgeordnet, wenn jede ihrer nichtleeren Untermengen ein kleinstes Element besitzt.

Dies ist eine Untermenge von A , also $M \in \mathcal{P}(A)$, also (da f bijektiv) existiert ein $a \in A$ mit der Eigenschaft $f(a) = M$. Jetzt ist entweder $a \in M$ oder $a \notin M$. Im ersten Fall ist, nach Definition von M , $a \notin f(a) = M$ und zugleich $a \in M$, was unmöglich ist. Im zweiten Fall folgt (wieder aus Definition von M) aus $a \notin M$, dass $a \in M$. In beiden Fällen erhalten wir also eine Kontradiktion, und der Satz ist somit bewiesen. \square

Eine einfache, und wichtige, Konsequenz des Satzes von Cantor ist, dass für jede Kardinalzahl eine größere existiert und somit unendlich viele unendliche Kardinalzahlen existieren: Es gibt nicht nur zwei, sondern unendlich viele verschiedene Unendlichkeiten.

Eine Variante des Diagonalverfahrens wird auch für den Beweis der Unabzählbarkeit von \mathbb{R} benutzt. Dies tat auch Cantor 1891, als er einen vom ersten Beweis einfacheren Beweis der Unabzählbarkeit der Menge $\langle 0, 1 \rangle$ (und somit auch \mathbb{R}) beschrieb ([10]). Man nimmt das Gegenteil an: Wenn $\langle 0, 1 \rangle$ abzählbar ist, kann man alle Zahlen aus diesem Intervall in einer Folge aufzählen:⁹

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, \underline{7}528752\ldots \\ x_2 &= 0,5\underline{0}38567\ldots \\ x_3 &= 0,119\underline{3}453\ldots \\ x_4 &= 0,255\underline{3}602\ldots \\ &\vdots \end{aligned} \tag{5.1}$$

Man konstruiert jetzt die Zahl $x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots \in \langle 0, 1 \rangle$, sodass die Ziffer a_i gleich 9 ist, außer wenn x_i als i -te Ziffer (also Diagonalziffer) eine 9 hat; in diesem Fall nimmt man $a_i = 8$. In dem obigen Fall ist $x = 0,9989\ldots$. Da sich x von jeder der Zahlen x_i mindestens in der i -ten Ziffer unterscheidet, ist x nicht in unserer Liste angeführt, also sind darin nicht alle Zahlen aus $\langle 0, 1 \rangle$ enthalten, und wir haben eine Kontradiktion mit der Annahme der Abzählbarkeit von $\langle 0, 1 \rangle$.

In den 1890er-Jahren versuchte sich Cantor mit Kronecker zu versöhnen und lud ihn zu der ersten Sitzung der Deutschen Mathematikervereinigung ein (1891). Kronecker war aber durch den Tod seiner Ehefrau verhindert, der Sitzung beizuwohnen, und starb auch selbst kurz danach.

Als nicht besonders wichtige, aber historisch interessante Information wollen wir am Ende dieser kurzen Beschreibung der Entstehung der Mengenlehre erwähnen, dass die drei berühmtesten mengentheoretischen Symbole, \cap (Durchschnitt), \cup (Union) und \in („ist Element von“) nicht von Cantor stammen, sondern 1888 bzw. 1889 von Giuseppe

⁹Um die Eindeutigkeit der Dezimaldarstellung von Zahlen sicherzustellen, wählen wir für jede Zahl die Darstellung mit unendlich vielen von null verschiedenen Ziffern. Beispielsweise wird $1/2$ als $0,4999\ldots$ und nicht als $0,50000\ldots$ geschrieben.

Peano eingeführt wurden. Peano war auch der Erste, der explizit die Verwendung des Auswahlaxioms¹⁰ erwähnte ([1, 3, 11]).

5.3 Axiomatisierung der Mengenlehre

Cantor konnte in dem Zeitraum 1873–1897 die sogenannte naive (also nicht axiomatisierte) Mengenlehre vollständig begründen. Doch gerade dann, 1897, wurde das erste Paradox der Mengenlehre bekannt: Die Gesamtheit aller Ordinalzahlen bildet keine Menge. Dieses Paradox ist nach **Cesare Burali-Forti** (1861–1931) benannt. Das Paradoxale dabei ist, dass in der naiven Mengenlehre jede Kollektion $\{x : \varphi(x)\}$, wobei φ eine beliebige Eigenschaft ist, eine Menge sein sollte. Cantor selbst konnte 1899 auch ein Paradox angeben: Die Klasse aller Mengen (bzw. aller Kardinalzahlen) ist keine Menge (wenn sie eine Menge wäre, hätte sie eine Kardinalzahl, die größer als alle Kardinalzahlen aller Mengen wäre). Kurz danach, 1902, entdeckte der englische Logiker **Bertrand Russell** den wohl berühmtesten aller Paradoxe der Mengenlehre: Die Kollektion $A = \{x : x \notin x\}$ ist keine Menge. Wenn sie nämlich eine wäre, dann wäre entweder $A \in A$ oder $A \notin A$. Wenn $A \in A$, wäre nach Definition von A auch $A \notin A$, andererseits wenn $A \notin A$, folgt wiederum aus der Definition von A , dass $A \in A$. Diese Russell’sche Antinomie wurde unabhängig von Russell auch von Ernst Zermelo entdeckt ([1, 3]).

Diese Paradoxe führten zu der Frage: War etwa Kronecker im Recht? Andererseits konnte man zu der Zeit die Mengenlehre nicht mehr einfach beiseiteschieben, da sie schon Einfluss auf andere mathematische Gebiete entwickelt hatte (beispielsweise benutzte sie Henri Lebesgue, um 1902 das Lebesgue-Maß und das Lebesgue-Integral zu definieren). Also musste man einen Weg finden, um die Paradoxe aus der Mengenlehre zu entfernen. Eine Idee war, dass die Paradoxe vielleicht von dem Auswahlaxiom stammen. Doch war schon bekannt, dass die Benutzung des Auswahlaxioms direkte Auswirkungen auf andere mathematische Gebiete hat. Als Beispiel nennen wir Giuseppe Vitalis (1875–1932) Verwendung des Auswahlaxioms, um die Existenz einer nicht Lebesgue-messbaren Untermenge der reellen Zahlen zu beweisen. Vitali zeigte auch, unter Verwendung des Auswahlaxioms, dass ein Kreis in abzählbar viele disjunkte, kongruente Untermengen aufgeteilt werden kann. Eine berühmtere, und zugleich noch mehr verwirrende, Folge des Auswahlaxioms ist das berühmte Banach-Tarski-Paradox: Eine Kugel kann in endlich viele Teile zerlegt werden, aus denen zwei Kugeln mit gleichem Volumen wie die Anfangskugel lückenlos zusammengesetzt werden können ([5, 10]).

Mit der Zeit wurden auch verschiedene dem Auswahlaxiom äquivalente Formulierungen gefunden. So zeigten **Ernst Zermelo** (1871–1956) und **Émile Borel** (1871–1956),

¹⁰Für jede nichtleere Menge, die aus nichtleeren Mengen besteht, kann eine neue Menge durch Auswahl je eines Elements aus jeder der Mengen formiert werden.

dass das Auswahlaxiom dem viel intuitiveren und schon von Cantor verwendeten Wohlordnungssatz äquivalent ist:

Theorem 5.2 (Wohlordnungssatz) *Jede Menge kann wohlgeordnet werden.*

Andererseits versuchte Russell durch die Ausgabe der *Principia Mathematica* mit Alfred North Whitehead (1861–1947) die ganze Mathematik auf Logik zurückzuführen, doch auch dieses monumentale Werk konnte nicht einen Weg zur Entfernung der Paradoxe angeben. Die Lösung war, die Mengenlehre zu axiomatisieren. Der erste Versuch einer Axiomatisierung der Mengenlehre stammt von Zermelo (1908). Sein Axiomensystem wurde von verschiedenen Mathematikern verbessert, bis er um 1922 die heutige Form der sogenannten Zermelo-Fraenkel-Axiome der Mengenlehre erhielt. Dieses System verhindert die Paradoxe, behält aber alle mengentheoretischen Resultate Cantors bei ([3]).

Der berühmte Logiker **Kurt Gödel** (1906–1978) konnte 1940 beweisen, dass man in diesem Axiomensystem das Auswahlaxiom nicht widerlegen kann. 1963 bewies **Paul Cohen** (1934–2007) seine Unabhängigkeit von den Zermelo-Fraenkel'schen Axiomen, sodass heutzutage diese Axiome meist durch das Auswahlaxiom erweitert werden.

Ähnlich erging es der Hypothese, die Cantor „verrückt“ gemacht hat. Auch für sie bewies 1963 Cohen ihre Unabhängigkeit von den Zermelo-Fraenkel'schen Axiomen (auch wenn man ihnen das Auswahlaxiom hinzufügt). Ab dieser Zeit, genauer gesagt ab ca. 1950, ist Mathematik nicht mehr als eine Kollektion „deduktiver Systeme“ (Tarski, 1936) mit eigenen Axiomen angesehen, sondern die Axiome einzelner Disziplinen als mengentheoretische Definitionen innerhalb der Mengenlehre. Die ZFC-Axiomatik, also die Zermelo-Fraenkel-Axiome mit Auswahlaxiom, wird heute als Grundlage der gesamten Mathematik angesehen. So zeigte sich nicht etwa Poincarés „Prophezeihung“, dass spätere Generationen Cantors Ideen „als eine Krankheit betrachten werden, von der man

Tab. 5.1 Geschichte der Mengenlehre: Übersicht

Was?	Wo? Wer?	Wann?
Erste Betrachtungen über die Unendlichkeit	antikes Griechenland mittelalterliches Europa	5.–4. Jh. v. Chr. 13.–14. Jh. n. Chr.
Existenz verschieden großer Unendlichkeiten	G. Cantor	1873
Naive Mengenlehre	G. Cantor	1873–1897
Erste Paradoxe	C. Burali-Forti, G. Cantor, B. Russell, E. Zermelo	um 1900
Axiomatisierung	E. Zermelo, A. Fraenkel u. a.	1908–1930
Unabhängigkeit des Auswahlaxioms und der Kontinuumshypothese	K. Gödel, P. Cohen	1940 bzw. 1963

sich erholt hat“, sondern eher die Aussage Hilberts: „Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen hat, soll uns niemand vertreiben können“ ([2, 10]).

Eine kurze Übersicht der Geschichte der Mengenlehre ist in der Tab. 5.1 enthalten.

Literaturverzeichnis

1. Aczel, A.D.: Die Natur der Unendlichkeit. Rowohlt, Reinbek bei Hamburg (2002)
2. Basieux, P.: Abenteuer Mathematik – Brücken zwischen Wirklichkeit und Fiktion. Rowohlt, Reinbek (1999)
3. O'Connor, J.J., Robertson, E.F.: MacTutor History of Mathematics Archive. <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/> (2016). Zugegriffen 18 Apr. 2017
4. Gleizer, G.I.: Povijest matematike za školu (Geschichte der Mathematik für die Schule, kroatische Übersetzung des russischen Originals). Školske novine & Hrvatko matematičko društvo, Zagreb (2003)
5. Haaparanta, L.: The Development of Modern Logic. Oxford University Press, Oxford (2009)
6. Kasner, E., Newman, J.: Mathematics and the Imagination. Dover Publ., Mineola, New York (1940)
7. Knobloch, E.: Galileo and German thinkers: Leibniz. In: Pepe, L. (Hrsg.) Galileo e la scuola galileiana nelle Università del Seicento, S. 127–139. Studi. Centro Interuniversitario per la Storia delle Università Italiane, Bologna (2011)
8. Kragh, H.: The true (?) story of Hilbert’s infinite hotel. <https://arxiv.org/abs/1403.0059>. Zugegriffen 6 Juni 2017
9. Scoville, N.: Georg Cantor at the dawn of point-set topology. <http://www.maa.org/press/periodicals/convergence/georg-cantor-at-the-dawn-of-point-set-topology-introduction>. Zugegriffen 7 Juni 2017
10. Stillwell, J.: Mathematics ans Its History. Springer, New York (2010)
11. Tait, W.W.: Cantors *Grundlagen* and the paradoxes of set theory. <http://home.uchicago.edu/~wwtx/cantor.pdf>. Zugegriffen 20 Apr. 2017
12. Varićak, V.: Matematički rad Boškovićev, I. dio (Bošković’s mathematische Werke, Teil I; in Kroatisch). JAZU (Jugoslavische Akademie der Wissenschaft und Künste), Zagreb (1912)

Nachwort

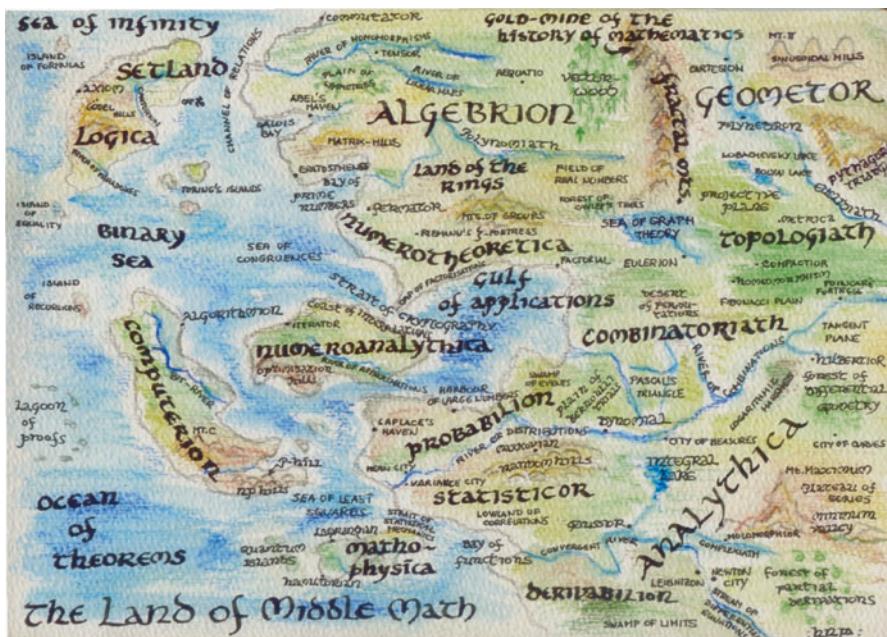


Abb. 1 Mathematische Landkarte (von der Autorin selbst entworfenes und gezeichnetes Bild)

Zu guter Letzt wollen wir am Ende dieser „kompakten“ Übersicht der Geschichte der Mathematik zwei berühmte Listen offener mathematischer Probleme erwähnen. Eine davon enthielt als erstes Problem die Frage der Gültigkeit der Kontinuumshypothese. Dies ist die berühmte Liste David Hilberts (1862–1943) der 23 Probleme, die er 1900 beim Internationalen Mathematiker-Kongress als fundamentale Probleme für die Zukunft der Mathematik vorstellte. Einige davon sind immer noch nicht gelöst, und eines davon, die im 1. Buch erwähnte Riemann'sche Hypothese, ging auch in die im Moment bekannteste

Liste offener mathematischer Probleme, die 2000 vom Clay-Institute vorgestellten sieben Millennium-Probleme (davon ist eines, die Poincaré-Vermutung, inzwischen bewiesen). Solche Listen beweisen etwas, was hoffentlich auch durch die Lektüre dieser zwei Bände der Leser bemerkt hat: Die Mathematik ist ständig in Bewegung. Probleme werden gelöst, werfen aber auch immer neue Fragen auf. Mathematik ist nicht nur wichtig und nützlich, sie ist auch lebendig und somit ein wichtiger Teil der menschlichen Kultur. Und zugleich ist sie auch eine Art Kunst, in der zwar logische Regeln einen Rahmen bilden, aber Kreativität und Einfallsreichtum ausschlaggebend sind. Mathematik ist eine weite, bunte Welt, in der jeder sein Lieblingsreiseziel finden kann ([Abb. 1](#)).

Wir verabschieden uns hier von unseren Leserinnen und Lesern mit dem Lieblingszitat der Autorin:

Das Wesen der Mathematik liegt in ihrer Freiheit. (G. Cantor)

Sachverzeichnis

- \aleph_0 , 142
 \int , 30, 33
lim, 56
 π , 32
 π , 6, 20, 31, 41, 83, 89–91, 144
 dx , 30, 33
 $\sqrt{2}$, 89
 $\varepsilon - \delta$, 51
 i , 42
Elemente, 3, 5, 40
Neun Kapitel, 93
- A**
at-Tūsī, Šaraf ad-Dīn, 95
at-Tūsī, Naṣr ad-Dīn, 70, 94
Abel, Niels Henrik, 53
Ableitung, 14, 22, 24, 26, 27, 33, 45, 49, 52
Ableitung, partielle, 30
Agnesi, Maria Gaetana, 39
Al-Bīrūnī, 94
Al-Hwārizmī, 40
Al-Kāṣī, Ğamsīd, 91, 94, 95, 97
Al-Samaw’al, 94
Alcuin of York, 66
Alkuin, 66
Antiphon, 1
Appel, Kenneth, 129
Approximationssatz von Weierstraß, 56
Archimedes aus Syrakuse, 4, 6, 7, 9–11, 14, 39, 90
Archimedes von Syrakuse, 7, 15
Archimedes-Palimpsest, 6
Aristoteles, 2, 137
Ausgleichsgerade, 112, 113
- Auswahlaxiom, 147, 148
Axiom von Archimedes, 4
Axiome der Mengenlehre, 148
Axiome der Topologie, 134
Axiome der Wahrscheinlichkeit, 85
- B**
Bürgi, Jost, 99, 101
Banach, Stefan, 38
Banach-Tarski-Paradox, 147
Barrow’sches Differenzialdreieck, 21, 23
Barrow, Isaac, 21, 23, 26, 32
Baseler Problem, 41
Baum, 126
Bayes, Thomas, 83
Berkeley, George, 33, 39
Bernoulli, Daniel, 40, 47, 79, 80, 112
Bernoulli, Jakob, 9, 35–37, 40, 41, 70, 74, 75, 78, 109, 110
Bernoulli, Johann, 33–36, 40, 41, 45, 47, 58
Bernoulli, Nicholas, 110
Bhāskara II, 67, 68
Binomialkoeffizient, 73
Binomialsatz, 42, 43, 75, 77, 93, 94
Binomialverteilung, 73, 77, 84, 109
Bošković, Josip Rudjer, 113, 138
Boltzmann, Ludwig, 116
Bolzano, Bernard, 34, 52, 139, 141
Bombelli, Rafael, 58
Borel, Émile, 147
Bourbaki, Nicolas, 134
Brachystochrone, 36, 37
Bradwardine, Thomas, 137

- Brahmagupta, 69, 105
 Briggs, Henry, 105
 Brouwer, Luitzen Egbertus Jan, 134, 144
 Buffon'sches Nadelexperiment, 82
 Buffon'sches Nadelpproblem, 82
 Buffon, Georges Louis Leclerc, Comte de, 82
- C**
 Cantor, Georg, 134, 140, 141, 145–148
 Cardano, Girolamo, 58, 69, 70
 Cauchy, Augustin-Louis, 34, 50, 51, 53, 57, 59, 125
 Cauchy-Riemann'sche Bedingungen, 59
 Cavalieri, Bonaventura, 15, 19, 20, 33
 Cavalieris Prinzip, 15, 16
 Cayley, Arthur, 126–128
 Chaostheorie, 82
 Chongzi, Zu, 91
 Cohen, Paul, 148
 Cotes, Roger, 111
- D**
 d'Alembert, Jean le Rond, 46, 47, 51, 59, 80, 81
 de Moivre, Abraham, 70, 75, 76, 78, 83, 109
 de Moivres Formel, 42
 De Morgan, Augustus, 128
 de Roberval, Gilles Personne, 19
 Dedekind'scher Schnitt, 141
 Dedekind, Richard, 141, 144
 Demokrit von Abdera, 2
 Descartes, René, 16, 17, 23, 41, 125, 126
 Dezimalbruch, 49
 Diagonalargument, 145
 Differenzial, 30, 44, 45
 Differenzialgeometrie, 48
 Differenzialgleichung, 28, 37, 46, 47
 Differenzialgleichung, partielle, 46, 47
 Differenzialrechnung, 45
 Dirichlet, Johann Peter Gustav Lejeune, 48, 54, 56, 57
 Dirichlet-Funktion, 57
 Distribution, normale, 76
 Divergenz, 14
 Dreieck, charakteristisches, 21, 32
- E**
 e, 42, 144
 Eudoxos von Knidos, 2–4, 137
 Euklid, 3, 5, 9, 40
 Euler'sche Formel, 42, 43, 59
 Euler'sche Polyederformel, 124, 126
 Euler, Leonhard, 6, 39, 40, 42–44, 46–49, 58, 73, 123, 124
 Euler-Charakteristik, 126, 131
 Eulertour, 124
 Exhaustionsmethode, 3, 4, 7, 9, 11, 12, 14, 19, 108, 137
 Exponentialfunktion, 42
 Ezra, Rabbi ben, 68
- F**
 Fakultät, 44
 Fehlerkurve, 112
 Fehlerrechnung, 110, 111
 Fermat, Pierre de, 17, 18, 72, 77
 Fibonacci, 65, 96
 Fixpunktsatz, 134
 Fläche, Riemann'sche, 130
 Fluxion, 26, 39
 Formel, Simpson'sche, 108
 Fourier, Jean Baptiste Joseph, 33, 48, 53
 Fourierreihe, 48, 53, 54, 140
 Fréchet, Maurice René, 38, 134
 Fundamentalgruppe, 133
 Fundamentalsatz der Analysis, 24
 Fundamentalsatz der Infinitesimalrechnung, 39
 Funktion, 1, 13, 33, 43, 47, 51, 54, 55, 57, 58
 Funktion, algebraische, 44
 Funktion, analytische, 59
 Funktion, hyperbolische, 36
 Funktion, komplexe, 58, 59
 Funktion, stetige, 44, 52, 57
 Funktion, transzendent, 44, 58
 Funktionalanalysis, 38
 Funktionsgraph, 13
- G**
 Gödel, Kurt, 148
 Galilei, Galileo, 15, 16, 19, 71, 111, 137, 139
 Galton, Sir Francis, 116, 117
 Galton-Brett, 117
 Gamma-Funktion, 44

- Gauß'sches Eliminationsverfahren, 107
Gauß, Carl Friedrich, 56, 58, 60, 107, 113, 129
Gesetz der großen Zahlen, 84
Gesetz der großen Zahlen, Bernoullis, 75, 109
Gleichmächtigkeit, 141, 144
Gleichung, 97
Gleichung, Bernoulli'sche, 35
Gleichung, Laplace'sche, 81
Gleichungssystem, lineares, 106
Goldbach, Christian, 124
Gosset, William Sealy, 119
Goursat, Édouard, 58
Graph, 124, 127
Graunt, John, 109
Gregory, James, 31, 38, 109
Gregory-Reihe, 32
Grenzwert, 2, 3, 11, 18, 34, 39, 46
Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace, 76, 83, 114
Grenzwertsatz, zentraler, 84
Guthrie, Francis, 128
- H**
- Haken, Wolfgang, 129
Halley, Edmund, 109
Hamilton, Sir William Rowan, 127
Hamiltonkreis, 128
Hankel, Hermann, 57
Harriot, Thomas, 41, 125
Heawood, Percy, 128
Hebelprinzip, 7
Hermite, Charles, 144
Heron von Alexandria, 12, 90
Heron-Verfahren, 90
Hilbert'sche Probleme, 151
Hilbert, David, 142, 151
Hippokrates von Chios, 3
Homöomorphismus, 123
Horner-Schema, 93, 94, 96
Hudde, Johannes (Jan), 18
Huygens, Christiaan, 30, 31, 36, 74, 77
- I**
- I Ching, 66
Indivisible, 15
Indivisiblen, 19
- Infinitesimalrechnung, 1, 3, 12, 24–26, 31, 32, 35, 39, 46, 51, 68, 138
Integral, 3, 9, 14, 20, 22, 24, 27, 28, 30, 33, 35, 45
Integral, Riemann'sches, 56
Integral, uneigentliches, 19
Integralsatz von Cauchy, 59
Integration, numerische, 108
Integration, partielle, 33
Interpolation, 39, 89, 103, 105
Interpolation, Lagranges Formel für, 106
Interpolation, lineare, 98, 99, 101, 104
Interpolation, Newton-Gregorys Formel für, 105
Interpolation, quadratische, 105
Invariante, topologische, 123, 125
iteratives Verfahren, 96
- J**
- Jacobi, Carl, 56
Jiushao, Qui, 93
Jones, William, 6
Jordan, Marie Ennemond Camille, 131
Josephus-Problem, 68
- K**
- Königsberger Brückenproblem, 123
Kempe, Alfred, 128
Kepler, Johannes, 15, 101
Kettenkurve, 36
Khayyam, Omar, 94, 96
Kirchhoff, Gustav, 126
Kirkman, Thomas P., 132
Knotentheorie, 129, 132
Kolmogorow, Andrei Nikolajewitsch, 85
Kombination, 67–69, 75
Konstruktionen mit Zirkel und Lineal, 11
Kontinuum, 2
Kontinuumshypothese, 145, 148
Konvergenz, 47
Konvergenzkriterium, 31
Korrelationskoeffizient, 117, 118
Kosinus, 43
Kowalewskaja, Sofia Wassiljewna, 55
Kreis, 4
Kreisquadratur, 1
Kreissatz von Archimedes, 4
Kronecker, Leopold, 140, 144–146

- Kugel, 7
 Kugelvolumen, 9, 16
 Kurve, Gauß'sche, 114
 Kurvensatz von Jordan, 131
- L**
 L'Hôpital, Guillaume François Antoine, marquis de, 35, 36
 Lagrange, Joseph-Louis, 48–50, 98, 106
 Lagrange-Gleichungen, 48
 Laplace'scher Dämon, 82
 Laplace, Pierre-Simon, 70, 76, 81, 83, 100, 110, 112, 113
 Lebesgue, Henri, 147
 Legendre, Adrien-Marie, 30, 107, 113, 125
 Lehrsatz, binomischer, 69
 Leibniz, Gottfried Wilhelm, 21, 25, 30–36, 38, 42, 45, 50, 67, 70, 125
 Leibniz-Reihe, 31
 Leonardo aus Pisa, 65, 96
 Lhuilier, Simon, 125
 Lindemann, Ferdinand von, 144
 lineares Kontinuum, 140, 141
 Liouville, Joseph, 144
 Listing, Johann Benedict, 57, 130
 Little, Charles Newton, 132
 Liu Hui, 91
 Liu Zhuo, 105
 Llull, Ramon, 69
 Lobatschewski, Nikolai Iwanowitsch, 55
 Logarithmus, 44, 58, 99, 100, 102, 105
 Logarithmus, Briggs'scher, 105
 Logarithmus, dekadischer, 105
 Logarithmus, Napierscher, 103–105
 Logarithmus, natürlicher, 28
 Lord Kelvin, 131
- M**
 Möbius, August Ferdinand, 130, 131
 Möbiusband, 130
 Méré, Chevalier de, 72
 Mādhava, 32
 Maßtheorie, 147
 Maclaurin, Colin, 39
 Maclaurin-Reihe, 39
 Markow, Andrei Andrejewitsch, 84
 Markow-Ketten, 84
- Maximum, 43
 Maxwell, James Clerk, 116
 Median, 111
 Mendel, Gregor, 116
 Menge, abzählbare, 142
 Menge, unendliche, 137, 139, 144, 146
 Mengoli, Pietro, 41
 Mercator, Nicolaus, 28, 38
 Mercator-Reihe, 28
 Mersenne'scher Kreis, 71
 Methode der kleinsten Quadrate, 107, 110, 112, 113
 Methode, iterative, 90, 91
 Millenium-Probleme, 133, 152
 Minimum, 43
 Mittel, arithmetisches, 112–114
 Mittelwert, gewichteter, 111
 Monge, Gaspard, 48, 53
 Multiplikationsregel für Wahrscheinlichkeit, 71
- N**
 Napier, John, 99–103, 105
 Neumann, John von, 38
 Neun Kapitel, 106
 Newton, Sir Isaac, 9, 24–28, 33, 34, 36, 38, 42, 50, 76, 98, 107, 109
 Newton-Gregory-Formel für Interpolation, 38
 Newton-Leibniz-Formel, 24
 Newton-Raphson-Verfahren, 109
 Newton-Verfahren, 97, 98
 Normaldistribution, 114
 Normalverteilung, 83, 114, 117
- O**
 Optimierung, 12, 15, 18, 35
 Oresme, Nicole d', 12
- P**
 Papyrus Rhind, 65
 Parabel, 11
 Paradox von Burali-Forti, 147
 Paradox von Cantor, 147
 Paradox von Russell, 147
 Paradox, St. Petersburger, 79, 80
 Pascal'sches Dreieck, 69, 73
 Pascal, Blaise, 19, 21, 30, 32, 69, 72, 73, 77

Pascaline, 71
Peano, Giuseppe, 146
Pearson, Karl, 117, 119
Perelman, Grigorij, 133
Permutation, 68, 75
Perspektive, lineare, 39
Physik, mathematische, 14, 22, 46–48, 53
Poincaré, Jules Henri, 82, 83, 118, 126, 132, 148
Poincarés Vermutung, 133
Poisson, Siméon Denis, 75, 83, 110
Poisson-Verteilung, 84
Polarkoordinaten, 9
Polyedersatz von Euler, 124
Polytope, 126
Potenzreihe, 28, 29, 41–44, 49
Problem der Punkte, 73
Problem des Ruins des Spielers, 78
Produktregel, 65
Prostaphaeresis, 99, 100
Prozess, stochastischer, 84
Ptolemäus, Klaudius, 93

Q

Quadratur, 14, 15, 22, 24, 33
Quadratur der Archimedischen Spirale, 10
Quetelet, Lambert Adolphe Jaques, 114, 116

R

Raphson, Joseph, 98
Regel von L'Hôpital, 35
Regressionsanalyse, 116
Regula Falsi, 96
Reihe, binomische, 28, 29, 31, 38
Reihe, geometrische, 2, 3, 12, 14
Reihe, harmonische, 14
Reihe, Taylor'sche, 32, 59
Reihe, trigonometrische, 54
Reihe, unendliche, 2, 14, 28, 29, 31, 38, 41, 47
Riccati, Vincenzo, 36
Riemann'sche Hypothese, 151
Riemann, Bernhard, 31, 130, 131
Riemann, Georg Friedrich Bernhard, 56, 59, 61
Riesz, Frédéric, 38

Russell'sche Antinomie, 147
Russell, Bertrand, 147, 148

S

Satz von Cantor, 145, 146
Satz von Merton, 13
Satz von Poincaré, 133
Schmidt, Ehrhard, 38
Sekantenverfahren, 98
Shijie, Zhu, 70
Simpson, Thomas, 109, 112
Sinus, 29, 41–43, 94, 102
Spirale, Archimedische, 9
Steiner, Jakob, 56
Stifel, Michael, 70
Stirling'sche Formel, 76
Stirling, James, 76
Student-t-Verteilung, 119
Summenregel, 65
Suppes, Patrick, 58
Sylvester, James Joseph, 127

T

t-Test, 119
Tait, Peter Guthrie, 132
Tangente, 10, 14, 16, 17, 21–24, 33
Tangentenproblem, 16, 17, 26
Taylor, Brook, 32, 38, 47
Taylorreihe, 38, 39, 43, 49, 50
Theon von Alexandria, 93
Thomas von Aquin, 137
Torricelli, Evangelista, 19, 20, 22, 109
Torricellis Trompete, 19
Trapezregel, 108
Tschebyschow, Pafnuti Lwowitsch, 84

V

Van Ceulen, Ludolph, 91
Variation, 66
Variationsrechnung, 38, 45
Verhältnis, 3
Vermutung, Goldbach'sche, 124
Verschlingung, 129
Versiera der Agnesi, 39
Verteilung, Poisson'sche, 84

Viète, François, 97
Vierfarbenproblem, 128
Vierfarbensatz, 128
Vitali, Giuseppe, 147

W

Wahrscheinlichkeit, 70
Wahrscheinlichkeit, klassische, 70
Wallis, John, 6, 19–21, 26, 28
Wallis-Produkt, 20
Waring, Edward, 105
Weierstraß, Karl, 34, 55–57, 134, 140,
 144
Wellengleichung, 47, 48
Wessel, Caspar, 58
Wittich, Paul, 99
Wohlordnungssatz, 148

Wolf-Ziege-Kohl-Problem, 66
Wurzelberechnung, 70, 89, 91, 93, 96, 97

Z

Zahl, algebraische, 144
Zahl, binäre, 67
Zahl, ganze, 141
Zahl, irrationale, 141, 145
Zahl, natürliche, 141
Zahl, rationale, 142
Zahl, reelle, 141, 144
Zahl, transzendente, 144
Zahlensystem, binäres, 30
Zenon von Elea, 2, 137
Zenons Paradoxien, 2
Zermelo, Ernst, 147, 148
ZFC-Axiome, 148
Zwischenwertsatz, 52
Zykloide, 16, 17, 19, 37



Willkommen zu den Springer Alerts

Jetzt
anmelden!

- Unser Neuerscheinungs-Service für Sie:
aktuell *** kostenlos *** passgenau *** flexibel

Springer veröffentlicht mehr als 5.500 wissenschaftliche Bücher jährlich in gedruckter Form. Mehr als 2.200 englischsprachige Zeitschriften und mehr als 120.000 eBooks und Referenzwerke sind auf unserer Online Plattform SpringerLink verfügbar. Seit seiner Gründung 1842 arbeitet Springer weltweit mit den hervorragendsten und anerkanntesten Wissenschaftlern zusammen, eine Partnerschaft, die auf Offenheit und gegenseitigem Vertrauen beruht.

Die SpringerAlerts sind der beste Weg, um über Neuentwicklungen im eigenen Fachgebiet auf dem Laufenden zu sein. Sie sind der/die Erste, der/die über neu erschienene Bücher informiert ist oder das Inhaltsverzeichnis des neuesten Zeitschriftenheftes erhält. Unser Service ist kostenlos, schnell und vor allem flexibel. Passen Sie die SpringerAlerts genau an Ihre Interessen und Ihren Bedarf an, um nur diejenigen Informationen zu erhalten, die Sie wirklich benötigen.

Mehr Infos unter: springer.com/alert