



Cornelie Leopold

Geometrische Grundlagen der Architekturdarstellung

5. Auflage

Geometrische Grundlagen der Architekturdarstellung

Cornelie Leopold

Geometrische Grundlagen der Architekturdarstellung

5., überarbeitete und erweiterte Auflage

Unter Mitwirkung von Andreas Matievits

Cornelie Leopold
TU Kaiserslautern Fachbereich Architektur
Kaiserslautern, Deutschland

ISBN 978-3-658-07845-4 ISBN 978-3-658-07846-1 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-658-07846-1

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Vieweg

© Springer Fachmedien Wiesbaden 2012, 2015

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften. Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen.

Umschlaggrafik: Andreas Matievits, Axonometrie des Sonderegger-Wohnhauses (Gebäudeentwurf Beat Consoni)
Lektorat: Ralf Harms

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Fachmedien Wiesbaden ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
(www.springer.com)

INHALTSVERZEICHNIS

Vorwort	9
1 EINFÜHRUNG	11
1.1 Aufgaben der Geometrie für die Architekturdarstellung	11
1.2 Kommunikationsprozess	15
1.3 Zeichnen	17
1.3.1 Anfänge des Zeichnens	17
1.3.2 Grafisches Zeichensystem	20
1.4 Visuelle Wahrnehmung	21
1.5 Raumvorstellung	24
1.5.1 Bedeutung der Raumvorstellung	24
1.5.2 Entwicklung des Raumvorstellungsvermögens	27
2 ABBILDUNGSMETHODEN	29
2.1 Projektionsarten	29
2.1.1 Zentralprojektion	30
2.1.2 Parallelprojektion	32
2.2 Invarianten der Abbildungen	34
2.2.1 Invarianten der Parallelprojektion	34
2.2.2 Invarianten der Zentralprojektion	36
2.3 Projektive Erweiterung des Anschauungsraumes	38
2.4 Abbildungsmethoden zur Rekonstruktion des räumlichen Objektes aus der Zeichnung	40
2.4.1 Kotierte Projektion	40
2.4.2 Zugeordnete Normalrisse (Zweitafel- bzw. Dreitafelprojektion)	41
2.4.3 Axonometrie	46
2.4.4 Rekonstruktion bei der Zentralprojektion	46
2.5 Navigation im dreidimensionalen digitalen Modell	47
3 PARALLEL- UND ZENTRALPROJEKTION EBENER FIGUREN	49
3.1 Parallelprojektion ebener Figuren - Affinität	49
3.2 Zentralprojektion ebener Figuren - Kollineation	53
3.3 Affines Bild eines Kreises	57
3.4 Ellipsenkonstruktionen	63
3.4.1 Punktkonstruktion aus Haupt- und Nebenscheiteln	63
3.4.2 Papierstreifenkonstruktion	64
3.4.3 Konstruktion der Ellipsenachsen aus einem Paar konjugierter Durchmesser nach Rytz	65
3.4.4 Scheitelkrümmungskreise der Ellipse	67
3.4.5 Punktkonstruktion aus konjugierten Ellipsendurchmessern	69
3.4.6 Die Gärtnerkonstruktion der Ellipse	70
4 AXONOMETRIE	71
4.1 Schiefe Axonometrie	74
4.1.1 Grundrissaxonometrie	74

4.1.2	Aufrissaxonometrie	75
4.2	Normale Axonometrie	76
4.3	Zeichenmethoden	77
4.3.1	Axonometrische Aufbaumethode	77
4.3.2	Einschneideverfahren	79
4.4	Orientierung	80
4.5	Axonometrievarianten	81
4.5.1	Durchsichtsaaxonometrie	81
4.5.2	Schnittaxonometrie	82
4.5.3	Explosionsaxonometrie	83
4.6	Computergestützte Axonometrie	84
5	ZUGEORDNETE NORMALRISSE - ZWEITAFEL- BZW. DREITAFELPROJEKTION	87
5.1	Darstellung von Punkten	88
5.2	Darstellung von Geraden	89
5.3	Darstellung von Ebenen	92
5.4	Grundaufgaben der Lage	95
5.4.1	Lage zweier Geraden im Raum	95
5.4.2	Verbindungsebene dreier Punkte	97
5.4.3	Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene	98
5.4.4	Schnittgerade zweier Ebenen	100
5.5	Seitenrisse	102
5.6	Grundaufgaben des Messens	106
5.6.1	Wahre Größe einer Strecke	106
5.6.2	Neigungswinkel einer Geraden gegen die Grundrissebene	108
5.6.3	Abtragen einer gegebenen Strecke auf einer Geraden	108
5.6.4	Wahre Gestalt einer ebenen Figur	109
5.6.5	Normale einer Ebene	111
5.6.6	Abstand eines Punktes von einer Ebene	112
5.6.7	Normalriss eines Kreises	113
6	POLYEDER	115
6.1	Platonische Körper	117
6.2	Archimedische Körper	124
7	GEKRÜMMTE FLÄCHEN UND KÖRPER	125
7.1	Erzeugung und Unterscheidung gekrümmter Flächen und Körper	125
7.1.1	Strahlflächen	126
7.1.2	Schiebflächen	128
7.1.3	Drehflächen	128
7.1.4	Schraubflächen	130
7.2	Krümmung von Flächen	132
7.3	Darstellung gekrümmter Flächen	135
7.4	Grundformen	138
7.4.1	Kugel	139
7.4.2	Zylinder	143
7.4.3	Kegel	146

8	DURCHDRINGUNGEN GEKRÜMMTER FLÄCHEN	155
8.1	Verschiedene Arten von Durchdringungen	155
8.2	Punktkonstruktion	158
8.2.1	Punktkonstruktion mit Hilfsebenen	158
8.2.2	Punktkonstruktion mit Hilfskugeln	161
8.3	Tangentenkonstruktion	162
9	ABWICKLUNG	165
9.1	Abwicklung von Polyedern	166
9.2	Abwicklung von gekrümmten Körpern	167
9.2.1	Abwicklung eines Drehzylinders	168
9.2.2	Abwicklung eines Drehkegels	170
10	LICHT UND SCHATTEN	173
10.1	Schattenkonstruktionen bei Parallelbeleuchtung	176
10.1.1	Schattenkonstruktionen ebenflächiger Körper	179
10.1.2	Schattenkonstruktionen gekrümmter Körper	183
10.1.3	Schattenkonstruktionen von Körpern auf andere Körper	186
10.2	Schattenkonstruktionen bei Zentralbeleuchtung	189
11	KOTIERTE PROJEKTION	191
11.1	Darstellung von Kurven und Flächen	192
11.1.1	Darstellung einer Geraden	192
11.1.2	Darstellung einer Ebene	194
11.1.3	Darstellung eines Drehkegels	194
11.2	Grundaufgaben bei Geländebearbeitungen	194
11.2.1	Ebene durch horizontale Gerade	195
11.2.2	Schnitt zweier Flächen bzw. Ebenen	196
11.2.3	Ebene durch geneigte Gerade	197
11.2.4	Gerade in eine Ebene legen	198
11.2.5	Böschungsfläche durch kreisförmige horizontale Plattform	199
11.2.6	Böschungsfläche durch beliebige Raumkurve	201
11.3	Querprofil	202
11.4	Dachausmittlung	203
11.4.1	Dachausmittlung bei gleich geneigten Dachebenen	204
11.4.2	Dachausmittlung bei unterschiedlich geneigten Dachebenen	205
12	NORMALE AXONOMETRIE	207
12.1	Grundgesetze der normalen Axonometrie	207
12.2	Einschneideverfahren	212
12.3	Computergestützte normale Axonometrie	222
13	ZENTRALPROJEKTION - PERSPEKTIVE	223
13.1	Entwicklung der Perspektive als Nachbildung des Sehens	225
13.2	Bestimmungselemente der Zentralprojektion	226
13.3	Zeichenmethoden	228
13.3.1	Durchstoßmethode	228
13.3.2	Spurpunkt-Fluchtpunkt-Methode	231

13.3.3	Kollineation	233
13.4	Messen in der Perspektive	237
13.4.1	Messen einer Strecke	237
13.4.2	Messen eines Winkels	243
13.5	Teilen in der Perspektive	244
13.6	Perspektives Bild eines Kreises	249
13.7	Randverzerrungen	256
13.8	Wahl der Parameter einer Perspektive	260
13.9	Licht und Schatten in der Perspektive	264
13.9.1	Schatten in der Perspektive bei Parallelbeleuchtung	264
13.9.2	Schatten in der Perspektive bei Zentralbeleuchtung	271
13.10	Spiegelung in der Perspektive	272
13.10.1	Horizontale Spiegelebene	273
13.10.2	Vertikale Spiegelebene	275
13.11	Fotorekonstruktion	277
13.11.1	Fotorekonstruktion bei bekanntem horizontalen Rechteck	279
13.11.2	Fotorekonstruktion bei bekanntem vertikalen Rechteck	281
13.12	Geneigte Bildebene	283
13.12.1	Blick nach unten	285
13.12.2	Blick nach oben	288
13.13	CAD-Perspektiven und Renderings	289
ANHANG		293
Geometrische Grundkonstruktionen		294
Bezeichnungen		296
Literatur		297
Abbildungsnachweis		301
Index		305

Vorwort

Dieses Buch wendet sich insbesondere an Studierende der Architektur, des Bauingenieurwesens, der Stadt- und Raumplanung sowie an alle, die einen Beruf im Bereich des Planen und Bauens erlernen oder dort bereits tätig sind. Es beschäftigt sich mit der Geometrie als Basis der Architektur und ihrer Darstellung. Die Geometrie ermöglicht, die Formen räumlicher Objekte zu erfassen und zu beschreiben sowie diese auf zweidimensionalen Zeichnungsträgern darzustellen. Sie schafft die Hintergründe und Voraussetzungen der Architekturzeichnungen als Grundlage für das Bauen sowie als Kommunikationsmedien im Entwurfs-, Planungs- und Ausführungsprozess. Das vorliegende Buch führt in die geometrischen Grundlagen der Architekturdarstellung ein. Die Kapitel bauen inhaltlich aufeinander auf, ihre Reihenfolge ist didaktisch motiviert. Die hier vorgestellten geometrischen Grundlagen haben einen universellen Anspruch der Anwendbarkeit und werden in diesem Buch exemplarisch an der Architektur aufgezeigt. Fotos von gebauter Architektur und Architekturzeichnungen verdeutlichen die Zusammenhänge und lassen mögliche Anwendungsbereiche sichtbar werden. Zeichnungen von Studierenden zeigen an einigen Beispielen die Umsetzung in Studienprojekten. Die räumliche Vorstellung wird durch die Verknüpfung der geometrischen Grundlagen mit Architekturobjekten erleichtert. Die Kenntnisse der geometrischen Grundlagen sowie die räumliche Vorstellungsfähigkeit sind auch bedeutend für computergestütztes Zeichnen und Visualisieren. Es ist ein wesentliches Ziel dieses Buches, räumliche Vorstellungsfähigkeit und räumliches Denken zu vermitteln und zu vertiefen. Die Leserinnen und Leser sollten sich die Inhalte stets räumlich vorstellend erarbeiten. Dieser Prozess kann durch Modelle und eigenes Zeichnen unterstützt werden.

Mein besonderer Dank gilt Andreas Matievits für den unermüdlichen Einsatz bei der Konzeption und dem Erstellen der Zeichnungen, der Gestaltung des Layouts und der Titelgrafik sowie für die vielen Anregungen und Verbesserungsvorschläge beim Entstehen der ersten Auflage. Außerdem danke ich den Studierenden, allen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern, die in den vergangenen Jahren durch ihre Zeichnungen, Ideen und Beiträge einen Anteil am Zustandekommen und der Weiterentwicklung dieses Buches haben.

In der vorliegenden fünften Auflage wurden in einigen Kapiteln Aktualisierungen und Ergänzungen vorgenommen. Insbesondere wurde das letzte Kapitel des Buches über Zentralprojektion - Perspektive um einige Themen erweitert und so entsprechend der Erfahrungen der letzten Jahre an die aktuelle Lehre angepasst.

Kaiserslautern, im Mai 2015

Cornelie Leopold

"So wie die Schrift ein Zeichen des Redens, das Reden ein Zeichen des Verstandes, so sind die mathematischen Zeichnungen und die geometrischen Figuren wie die Zeichen ihrer, der Menschen, Vorstellungen."¹

1 EINFÜHRUNG

1.1 Aufgaben der Geometrie für die Architekturdarstellung

Die Auseinandersetzung mit Architektur, Stadt oder Landschaft bzw. allgemein räumlichen Objekten und Strukturen verlangt nach Kommunikationsmöglichkeiten über Räumliches. Zeichnungen und Modelle (Bild 1.1) sind Kommunikationsmedien in der Bauplanung. Sie sind erforderlich, um sich über Entwurf und Planung verständigen zu können.

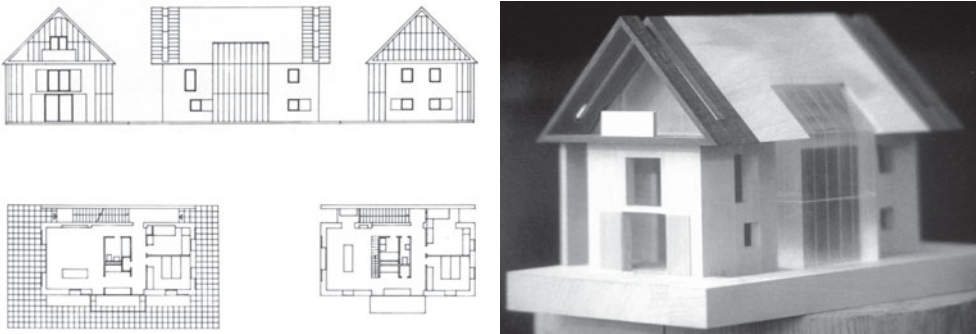


Bild 1.1: Zeichnung und Modell als Kommunikationsmittel in der Bauplanung - Wohnhaus für zwei Familien, Essen-Schönebeck, 1985, Burkhard Grashorn

Dabei können mehrere Ebenen unterschieden werden. Skizzieren, Zeichnen, Modellbauen werden im Entwurfsprozess verwendet, um die Gedanken und Vorstellungen zu entwickeln und zu präzisieren. Das Ergebnis des Entwerfens schließlich, das Geplante, wird dann ebenfalls in einer Zeichnung festgehalten, um es den Entscheidungsträgern über das Bauprojekt oder den Ausführenden der Planung mitzuteilen. Das Zeichnen spielt also sowohl als Entwurfsmittel als auch als Darstellungsmittel eine Rolle. Die Zeichnung kann im gesamten Entwurfsprozess die Ideen und Vorstellungen sichtbar werden lassen und hilft diese zu überprüfen; genauso steht sie am Ende des Entwurfsprozesses, um den Entwurf denen vorzustellen, die über das Projekt entscheiden bzw. dieses ausführen. Das dreidimensionale Planungsobjekt wird im Modell als dreidimensionales Gebilde wiedergegeben, nur in einem anderen Maßstab und reduziert auf die wesentliche Form.

1. Daniele Barbaro (1513 - 1570) in seinem Kommentar zu den Vitruv-Ausgaben, zitiert nach: Werner Oechslin: Geometrie und Linie. Die Vitruvianische "Wissenschaft" von der Architekturzeichnung. In: Daidalos 1, 1981, S. 29.

Die Geometrie hat hierbei die Aufgabe, sich mit geometrischen Grundformen zu beschäftigen und ein Formrepertoire zur Verfügung zu stellen. In der Zeichnung wird das dreidimensionale Planungsobjekt auf zweidimensionalen Zeichnungsträgern dargestellt. Für diesen Zweck hat die Darstellende Geometrie Abbildungsmethoden entwickelt. Beim Abbilden gehen aber Informationen verloren. Daher müssen Möglichkeiten gefunden werden, wie aus den zweidimensionalen Zeichnungen alle Informationen über das dreidimensionale Objekt entnommen werden können. Die Geometrie hat die Grundlagen zu liefern, um zweidimensionale Zeichnungen dreidimensionaler Objekte herzustellen bzw. zu verstehen und um die räumlichen Objekte aus der zweidimensionalen Zeichnung zu rekonstruieren.

Räumliche Vorstellungskraft und räumliches Denken können bei der Beschäftigung mit diesen grundlegenden Methoden der Geometrie entwickelt und trainiert werden, die wichtige Voraussetzungen für jede Planungs- und Entwurfsarbeit sind.

Für die Geometrie ergeben sich in diesem Zusammenhang somit folgende Aufgaben:

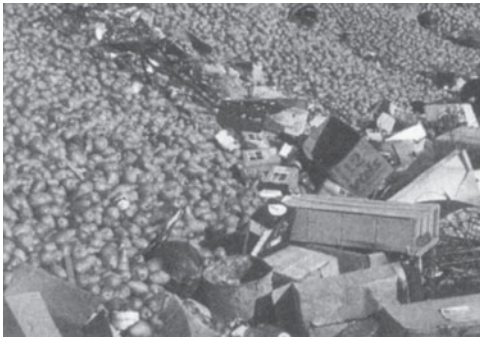


Bild 1.2: Ungeordnet und komplex



Bild 1.3: Geometrisch geordnete Formen - Metamorphose, 1936, Herbert Bayer

1. Erfassen und Beschreiben geometrischer Formen

Die meisten Dinge, die uns umgeben, sind nicht einfach, sondern komplex (Bild 1.2). Um Dinge erfassen und erkennen zu können, müssen wir sie auf Wahrnehmungs- bzw. Erzeugungskriterien und somit auf ein Ordnungssystem beziehen. Eine der Möglichkeiten, die Dinge auf ein einfaches Ordnungssystem zu beziehen, ist die Annahme, alle körperlichen Dinge seien aus geometrisch beschreibbaren Grundformen zusammengesetzt² oder könnten zumindest mittels einfacher geometrisch beschreibbarer Grundformen angenähert werden (Bild 1.3). Geometrie ist ein vom Menschen geschaffenes Ordnungssystem, um Formen begreifbar und erfassbar zu machen. Ihr kann die Rolle eines sinnlichen Ordnungsfaktors zugewiesen werden. Als Kommunikationsmedien über die Formen dienen Modelle und Zeichnungen. Ein Würfel kann z. B. auf Grundlage einer Zeichnung aus einem Netz von sechs Quadraten zusammengesetzt werden (Bild 1.4).

2. Vgl. Wolfgang Meisenheimer: Raumstrukturen. Reihe ad. Düsseldorf, 3. Auflage 1990, 2.11.

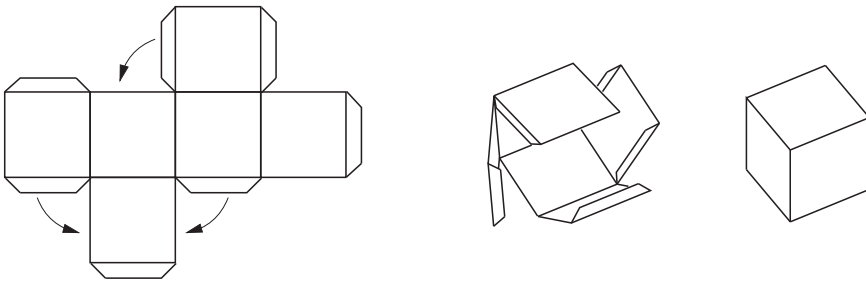


Bild 1.4: Herstellung eines Würfelmodells aus einem Netz

2. Methoden zur Abbildung räumlicher Objekte in die Zeichenebene

Um ein räumliches Objekt in einer Zeichnung zu präsentieren, sind Methoden zur Abbildung des räumlichen Objektes in die Zeichenebene erforderlich.

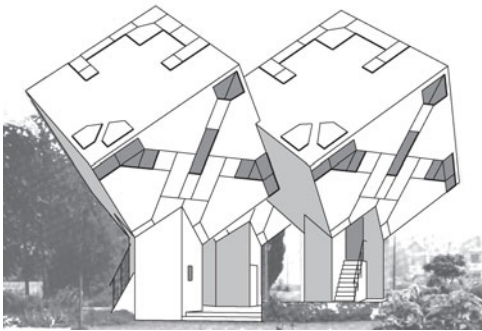


Bild 1.5: Perspektive (Fotomontage) - Baumhäuser, Helmond, Niederlande, 1976, Piet Blom

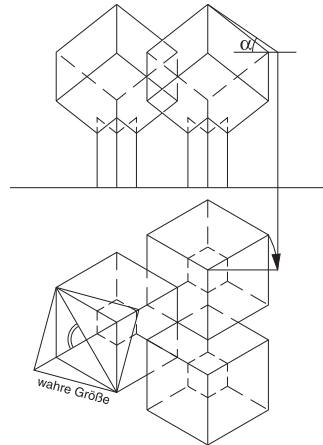


Bild 1.6: Grund- und Aufriss der Baumhäuser

Die Baumhäuser von Piet Blom (vgl. Bild 5.28) bauen auf der Würfelform auf, indem der Würfel auf seine Raumdiagonale gestellt und von einem Prisma unterstützt wird. Bild 1.5 zeigt die Baumhäuser in einer Perspektive, Bild 1.6 in Grund- und Aufriss aufgrund der Abbildungsmethoden der Zentral- bzw. Parallelprojektion.

3. Rekonstruktionen geometrischer Eigenschaften aus dem Bild des Objektes

Um aus der Zeichnung das räumliche Objekt rekonstruieren zu können, müssen Methoden zu einer umkehrbaren Eindeutigkeit der Zeichnung entwickelt werden. Dann können Abmessungen des Objektes sowie die Lage von Ebenen zueinander ermittelt werden. In Bild 1.6 wurde die wahre Gestalt einer Würfelfläche und der Neigungswinkel α einer Würfelfkante gegen die Standebene ermittelt. Die räumlichen Objekte können mit Hilfe dieser Methoden aus den Zeichnungen erfasst werden.

4. Ausführen geometrischer Konstruktionen des Raumes in der Zeichenebene

Um räumliche Probleme wie z. B. Konstruktionen von Durchdringungen, Anschlüssen, Dachausmittlungen in der Zeichnung lösen zu können, müssen Konstruktionsmethoden zur Verfügung stehen. Das räumliche Problem des "Würfels von Ruprecht von der Pfalz" (Bild 1.7), einen Würfel prismatisch so zu durchbohren, dass sich ein gleichgroßer Würfel hindurchschieben lässt, kann in der Zeichnung durch Seitenrisskonstruktionen untersucht werden.

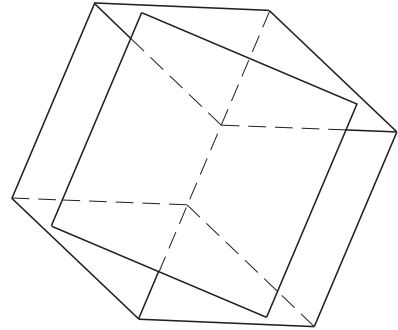


Bild 1.7: Würfel von Ruprecht von der Pfalz

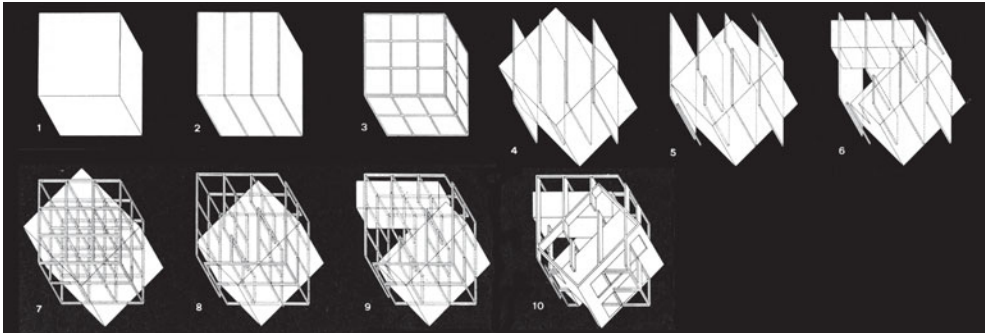


Bild 1.8: Peter Eisenman, House III

Im Entwurfsprozess können diese Methoden verwendet werden, um ausgehend von geometrischen Grundformen mittels Formmetamorphosen zu komplexeren Formen zu gelangen wie Peter Eisenman in House III (Bild 1.8).

5. Räumliches Vorstellungsvermögen und räumliches Denken trainieren

Die Fähigkeit, sich räumliche Dinge und Prozesse vorstellen zu können und räumlich zu denken, ist im Bereich der Architektur und Planung eine wichtige Grundvoraussetzung. Das Lösen geometrisch räumlicher Probleme anhand von Zeichnungen und Modellen kann diese Fähigkeiten unterstützen und weiterentwickeln. Sich vorstellen zu können, wie ein räumlicher Gegenstand von verschiedenen Seiten aussieht, ihn in der Vorstellung zu drehen, räumliche Beziehungen herzustellen und sich im Raum zu orientieren, das sind Fähigkeiten, die unter Raumvorstellungsvermögen subsummiert werden. In Tests zum Raumvorstellungsvermögen, wie z. B. dem dreidimensionalen Würfeltest von Georg Gittler (Bild 1.9) werden solche Fähigkeiten getestet.

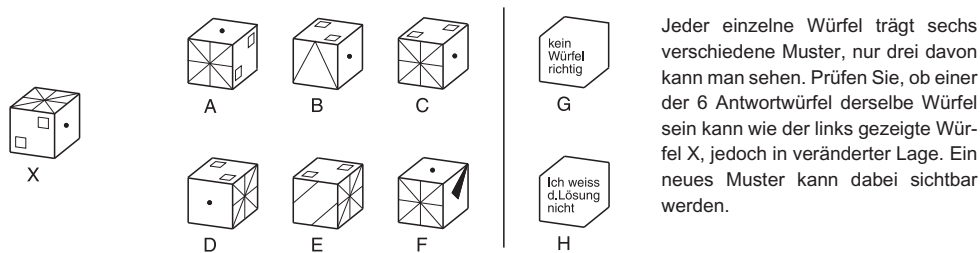


Bild 1.9: Dreidimensionaler Würfeltest

1.2 Kommunikationsprozess

Im Kommunikationsprozess der Bauplanung müssen Mitteilungen gemacht und Informationen übermittelt werden. Dazu bedarf es eines geeigneten Kommunikationsmediums. Im Planungsstadium muss mit den Entscheidungsträgern und den Betroffenen der Bauplanung kommuniziert werden, um zu einem akzeptablen und optimalen Planungsergebnis zu kommen und die Entscheidungsträger zu überzeugen. Im Ausführungsstadium muss über das zu bauende Objekt mit den Ausführenden, z. B. den Handwerkern, eine Kommunikation stattfinden, damit das gebaute Objekt schließlich mit dem Geplanten übereinstimmt. Dazu muss etwas anderes das noch nicht existente, noch nicht gebaute Objekt repräsentieren. Es wird ein Zeichen für das Planungsobjekt benötigt. Dieses Zeichen kann die Zeichnung oder das Modell sein. Die zur Kommunikation nötigen Elemente sind Sender, Empfänger, Kanal, Medium und das zumindest teilweise übereinstimmende Zeichenrepertoire (Bild 1.10). Wie Informationen mitgeteilt werden - visuell, akustisch, haptisch, gestisch - und in welcher kommunikativen Situation sie gegeben werden, hat eine Auswirkung auf den Kommunikationsprozess.

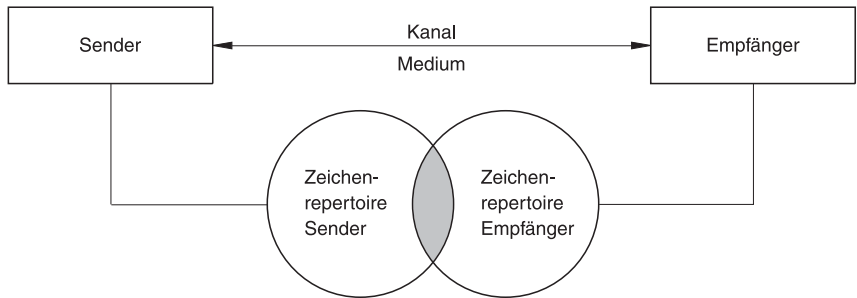


Bild 1.10: Kommunikationsmodell

Im Kommunikationsprozess der Bauplanung ist der Kanal das Sehen; die Medien sind graphische Gebilde, Gezeichnetes auf Papier, Gezeichnetes auf dem Bildschirm, etc.. Den graphischen Gebilden müssen Bedeutungen zugeordnet werden, erst dann ist die Zeichnung ein Zeichen für das Geplante. Nur mittels Zeichen ist eine Kommunikation möglich. Die **Semiotik**³ beschäftigt sich mit Bedingungen, Wirkungen und Funktionen von Zeichen und Zeichensystemen.

Ein Zeichen wird als eine triadische Relation verstanden, die drei Bezüge umfasst: den Bezug zu materiellen Mitteln, den Bezug zu einem Objekt, das bezeichnet wird, und den Bezug zu einem Interpreten und dessen Interpretationen des Zeichens, dem Interpretantenbezug.

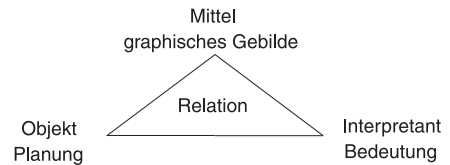


Bild 1.11: Zeichenmodell der Zeichnung

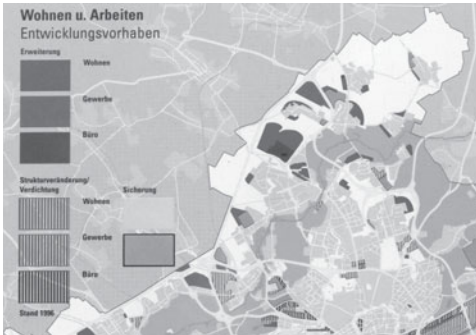


Bild 1.12: Beispiele von Zeichnungslegenden

Wohnen und Arbeiten in Frankfurt a. M. und Investorenplan der Unterneustadt in Kassel

In der Zeichnung muss auf ein Zeichenrepertoire zurückgegriffen werden. Eine Kommunikation ist nur möglich, wenn Zeichenrepertoire von Sender und Empfänger mindestens teilweise übereinstimmen. Ein gemeinsames Zeichenrepertoire wird z. B. durch eine Zeichnungslegende (Bild 1.12) geschaffen. Es kann auch durch Normen, die in den sogenannten DIN-Normen (Bild 1.13) festgelegt und konventionalisiert sind, herbeigeführt werden. Das technische Zeichnen beschäftigt sich mit diesen DIN-Normen. In den Bauzeichnungen werden die so konventionalisierten Zeichnungselemente als Zeichenrepertoire für die Abbildung des dreidimensionalen Bauobjektes in der Zeichenebene benutzt. Die Kompetenz der Adressaten bzw. Empfänger bei der Kommunikation mittels einer Zeichnung sind sehr unterschiedlich. Kompetenz und Interessenlage der zu informierenden Gruppe, Planungsgegenstand sowie subjektive Vorstellungen des Darstellenden bestimmen die Art der Zeichnung.

3. Elisabeth Walther: Allgemeine Zeichenlehre. Einführung in die Grundlagen der Semiotik. DVA Stuttgart 1979.

Max Bense: Das Universum der Zeichen. Agis-Verlag Baden-Baden 1983.

Die von Lasswell aufgestellte Formel:

"Wer sagt was mit welchen Mitteln zu wem mit welcher Wirkung?"⁴

beschreibt vereinfacht die verschiedenen wichtigen Komponenten des Kommunikationsprozesses. Wenn über einen Gebäudeentwurf kommuniziert werden soll, muss überlegt werden, wer der Adressat der Mitteilung ist und welche Wirkung erzielt werden soll. Aus diesen Überlegungen resultiert dann die Wahl der Abbildungsmethode. Stark vereinfacht bedeutet das:

Entscheidungsträger als Adressaten



Zeichnung sollte anschaulich sein



Axonometrie oder Perspektive

Ausführende als Adressaten



Zeichnung sollte maßgetreu sein



Grund- und Aufriss

Linienart	Anwendungsbereich	Zuordnung zu Maßstab			
		≤ 1 : 100		≥ 1 : 50	
		Linienbreite			
Vollinie	Begrenzung von Schnittflächen	0,5	0,5	1,0	1,0
Vollinie	Sichtbare Kanten und sichtbare Umrisse von Bauteilen, Begrenzung von Schnittflächen von schmalen oder kleinen Bauteilen	0,25	0,35	0,5	0,7
Vollinie	Maßlinien, Maßhilfslinien, Hinweislinien Lauflinien, Begrenzung von Ausschnittdarstellungen, vereinfachte Darstellungen	0,18	0,25	0,35	0,5
Strichlinie	Verdeckte Kanten und verdeckte Umrisse von Bauteilen	0,25	0,35	0,5	0,7
Strichpunktlinie	Kennzeichnung der Lage der Schnittebenen	0,5	0,5	1,0	1,0

Bild 1.13: Ausschnitt aus DIN 1356 Bauzeichnungen - Linienarten und Linienbreiten

1.3 Zeichnen

1.3.1 Anfänge des Zeichnens

Die bisher entdeckten ältesten Zeichnungen der Menschheit sind bildliche Darstellungen, die zeigen, dass sich in den Urgesellschaften schon vielfältiges bildnerisches Gestalten entwickelt hatte. Die Ursprünge werden in einer magisch-rituellen Körperbemalung und in willkürlich hinterlassenen Spuren des Fußes und der Hand (Bild 1.14) gesehen.

Aus diesen Spuren werden dann absichtsvoll erzeugte Zeichen. Viele Zeugnisse der frühen bildnerischen Betätigung sind ab der Mittelsteinzeit erhalten. Die Motive kreisen um das Thema Jagd.

4. Harold D. Lasswell: The Structure and Function of Communication in Society. In: L. Bryson (Hrsg.): The Communications of Ideas. New York 1948, S. 37.

Es sind noch keine Anhaltspunkte dafür vorhanden, dass die Zeichnungen als Planungsmittel dienen. Spätestens am Ende der Jungsteinzeit wurden geometrisch genaue Kreisfiguren mittels Drehmechanik erzeugt; Astronomen deuten die Zeichnung mit den Kreisfiguren als Sternbildkarte (Bild 1.15).

Die megalithischen Baukörper, z. B. die jungsteinzeitliche Kultstätte von Stonehenge/England, entstanden in der Auseinandersetzung mit der vorhandenen Natur und sind nicht Produkt einer detaillierten Planung, wie dies die Pyramiden darstellen. Die Gegensätzlichkeit dieser aufeinanderfolgenden Bauperioden kann in der sozialen Verwandlung der Gesellschaft gesehen werden. Die mechanisch-technischen Hilfsmittel waren dieselben. Die Gesellschaft entwickelte sich von einer Stammesordnung zur theokratischen Monarchie. Insbesondere in Ägypten hat sich diese Veränderung rasch vollzogen. Zentrale Planung kennzeichnete die Gesellschaft. Ein ausgedehntes Verkehrs- und Bewässerungskanalsystem entstand. Die staatliche Verwaltung musste die Kontrolle über alle Vorgänge im Land ausüben.



Bild 1.14: Fingerzeichnung in der Höhle von Altamira / Spanien

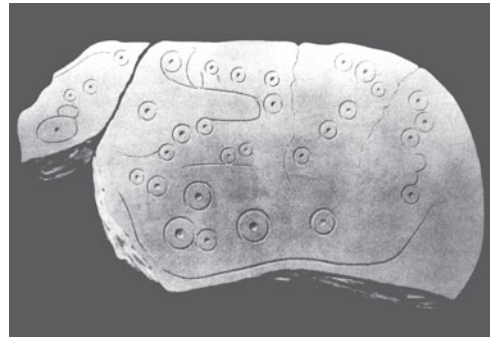


Bild 1.15: Jungsteinzeitliche Zeichnung des „Steins vom Sewan - See“, 4. Jahrtausend v. Chr.

So entwickelten sich Zahlzeichen und ein Zahlensystem, eine Bilderschrift. Den Schreibern wurde die Pflege und Weiterentwicklung der Kulturtechniken überlassen. Eine staatliche Aufgabe erwuchs aus der Notwendigkeit, die Ackerflächen entlang des Nils jedes Jahr nach der Überschwemmung neu aufzuteilen. Dies war Anlass für die Entwicklung einer neuen kulturellen Technik, mit der die Felder, Wege und Kanäle objektiv eingemessen werden können: die Feld- oder Landvermessung. Die Ägypter nannten sie "Seilkunst", weil das Seil bei der Vermessung das wichtigste Werkzeug war (Bild 1.16). Der Begriff der geraden Linie (lat. linum = Bindfaden aus Flachs) kann als Abstraktion des gespannten Seils interpretiert werden. Die Feldaufteilungen werden dann auf Papyrus festgehalten. Der Schritt vom Zeichnen auf der Nilschlammebene zum Zeichnen auf einem Plan war vollzogen. Eine systematische geometrische Lehre war aber noch nicht entwickelt. Es gab nur Handlungsanweisungen und Vorschriften in Form von Rezepten.⁵

5. Vgl. Jörg Sellenriek: Zirkel und Lineal. Kulturgeschichte des konstruktiven Zeichnens. München 1987.

Eine wissenschaftliche Grundlehre der Geometrie wird erst ab dem 6. Jh. v. Chr. von den Griechen entwickelt. Auch einige praktische Regeln der Raumgeometrie wurden von den Ägyptern durch die Notwendigkeit, Transportbehälter und Vorrathshäuser für die Steuerabgaben herzustellen, aufgestellt. Sie konnten z. B. den Inhalt eines zylindrischen Behälters rechnerisch und zeichnerisch in einen rechteckigen umwandeln.

Die große repräsentative Staatsarchitektur erforderte schließlich eine vollständige Vorplanung in Form von Zeichnungen. Das Bauzeichnungswesen wurde entwickelt. Die Höhenausdehnung, die im Vergleich zur Feldmessung nun hinzukam, wurde in den Plänen so wiedergegeben, dass die orthogonalen Höhenmaße in den Plan um den rechten Winkel geklappt wurden (Bild 1.17).

So entwickelten sich die Bauzeichnungen aus der Notwendigkeit der Vorplanung zu einem Zeichensystem.



Bild 1.16: Feldvermessungsszene aus der Grabkammer Menena, um 1400 v. Chr.

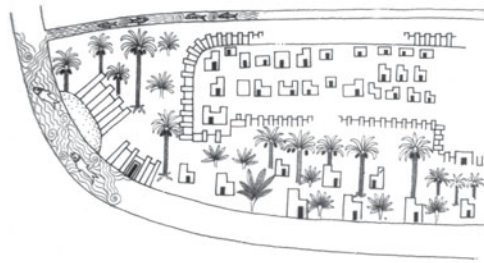


Bild 1.17: Stadt Madaktu, ca. 650 v. Chr.

Parallel zu den phylogenetischen Anfängen des Zeichnens und der Geometrie kann die individualgenetische Entwicklung aufgezeigt werden. Zufällige Spuren des Kindes in der sogenannten Kritzelphase (Bild 1.18) werden allmählich zu absichtsvoll gesetzten Formen und Farben.⁶ Die Kritzeleien im Alter bis etwa drei Jahren sind als Schmierspuren der Arm- und Handmotorik geprägt und stellen nichts dar. Das Kind erkennt nach und nach einen Zusammenhang zwischen seinen Bewegungen und den Kritzeln auf dem Papier und beginnt sein Gekritzel zu benennen, ohne dass das Benannte erkennbar ist. Erst allmählich können Analogien zwischen einem darzustellenden Gegenstand oder Ereignis und dem Gezeichneten gesehen werden. Zwischen dem 3. und 4. Lebensjahr beginnt das Kind bewusst Formen darzustellen und ordnet diesen Formen dann Bedeutungen zu. Es erkennt, dass der gezeichnete Kreis ein Kopf sein könnte. Das Kind setzt seine Vorstellung von einem Objekt in die Zeichnung um, nicht dessen visuelle Beobachtung.

6. Hans-Günther Richter: Die Kinderzeichnung. Entwicklung, Interpretation, Ästhetik. Düsseldorf 1987.

Die frühen darstellenden Phasen des Kindes werden daher Pre-Schema- (4.-7. Lebensjahr) und Schema-Stufe (7.-9. Lebensjahr) genannt. Möglichkeiten des Darstellens von räumlichen Gegenständen in Zeichnungen entwickeln die Kinder in verschiedenen Phasen ähnlich der phylogenetischen Entwicklung. Im Alter von 6-8 Jahren entstehen häufig Zeichnungen, bei denen die Ansichten der Gegenstände in die Draufsicht hineingeklappt werden; Grund- und Aufriss werden sozusagen miteinander kombiniert (Bild 1.19, vgl. Bild 1.17). Das Kind kann in diesem Alter die verschiedenen Blickwinkel noch nicht koordinieren. Es handelt sich nicht um wirkliche Projektionen der Gegenstände. Die Entfernungen und die Blickwinkel spielen noch keine Rolle. Dennoch erarbeitet sich das Kind in dieser Zeichenphase schon die verschiedenen Projektionen, ohne sie untereinander koordinieren zu können. Im Alter von 8-9 Jahren erscheinen dann Zeichnungen, die zugleich Perspektiven, Proportionen, Maße und Entfernungen berücksichtigen. Es beginnt die Phase des visuellen Realismus.



Bild 1.18: Zeichnung von Hannah
(1 Jahr, 4 Monate alt)



Bild 1.19: Zeichnung von Fabian (7 Jahre alt)

1.3.2 Grafisches Zeichensystem

Als graphische Elemente stehen in einer Zeichnung Punkte, Linien und Flächen zur Verfügung. Punkte können durch unterschiedliche Symbole (Bild 1.20) gekennzeichnet werden, die in Farbe und Größe differenziert werden können. Eine Linie kann unterschiedliche visuelle Variablen haben:

- Form (gerade, geknickt, gekrümmt, kreisförmig ...)
- Richtung
- Farbe/Helligkeitswert
- Muster (Vollinie, gestrichelt, strichpunktiert ...)
- Größe⁷

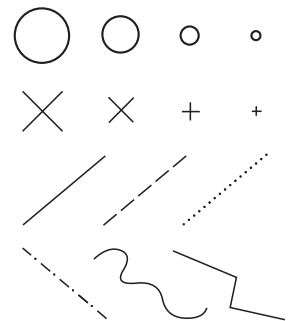


Bild 1.20: Darstellungen von
Punkten und Linien

7. Jacques Bertin: Graphische Semiologie. Berlin 1974, S.15ff.

Flächen können nur durch ihre Begrenzungen bzw. ihre Umrisse dargestellt werden, durch Farben bzw. Helligkeitswerte und durch Muster (Bild 1.21).

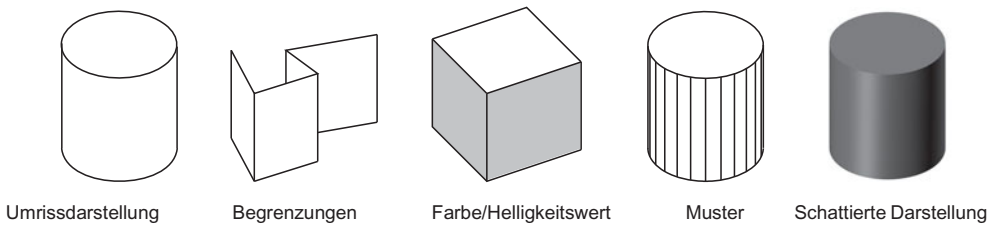


Bild 1.21: Mögliche Darstellungen von Flächen

1.4 Visuelle Wahrnehmung

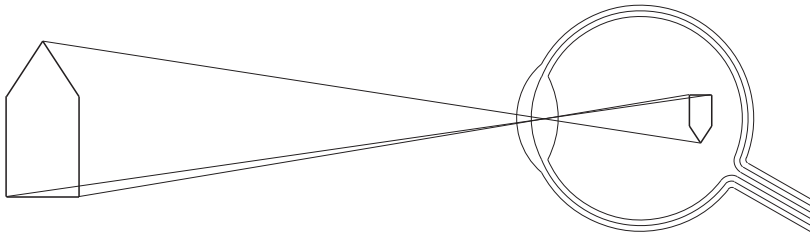


Bild 1.22: Sehvorgang - Abbildungsvorgang im Auge

Der Kommunikationsprozess in der Bauplanung wurde als visuelle Kommunikation gekennzeichnet. Die Grundlage der visuellen Kommunikation ist die visuelle Wahrnehmung. Der Wahrnehmungsvorgang wird als Reiz-Reaktionsschema aufgefasst. Nach Helmholtz⁸ nehmen wir nie die Gegenstände der Außenwelt unmittelbar wahr, sondern wir nehmen nur Wirkungen dieser Gegenstände auf unsere Nervenapparate wahr. Der optische Sehvorgang wird mit dem Fotografieren verglichen. Der Gegenstand wird auf die Netzhaut projiziert (Bild 1.22).

Das Netzhautbild wird an das Gehirn übermittelt und dort zu einem Eindruck der Szene verarbeitet, den wir dann wahrnehmen. Dies ist ein stark vereinfachtes Wahrnehmungsmodell.⁹ Was beim Wahrnehmen alles vor sich geht, ist damit noch nicht erfasst.

8. Hermann von Helmholtz: Über das Sehen des Menschen. In: Vorträge und Reden. 1. Band, 5. Aufl., Braunschweig 1903, S. 115.

9. Irvin Rock: Wahrnehmung - Vom visuellen Reiz zum Sehen und Erkennen. Heidelberg 1985, S. 1.

In Bild 1.23 können wir eine Vase auf weißem Grund sehen oder aber zwei Gesichter im Profil.

Wie ist es zu erklären, dass ein Bild zwei ganz verschiedene Eindrücke hervorrufen kann, wenn das Wahrnehmen ähnlich zustande kommt wie das Bild durch eine Kamera? Die Kamera-Analogie muss als naiver Realismus bezeichnet werden, bei dem die Welt, die wir wahrnehmen, identisch ist mit der realen Welt, die unabhängig vom Betrachter existiert. Diese Vorstellung kann jedoch nicht aufrechterhalten werden. Unsere Erfahrungswelt ist nicht einfach gleichzusetzen mit der physikalischen Welt. Unser Denken schafft ein eigenständiges Bild der Welt. Die Welt, die wir in unserer Wahrnehmung erschaffen, unterscheidet sich qualitativ von der physikalischen Welt, weil wir sie nur innerhalb der Grenzen unserer Sinne erfassen können. Wir haben keinen unmittelbaren Wirklichkeitszugang, wie schon Helmholtz feststellte, sondern alle Informationen sind durch unsere Sinnesorgane und unser Denken gefiltert. Hinzu kommen Seherfahrungen, die unser Wahrnehmen beeinflussen.



Bild 1.23: Rubinsche Vase

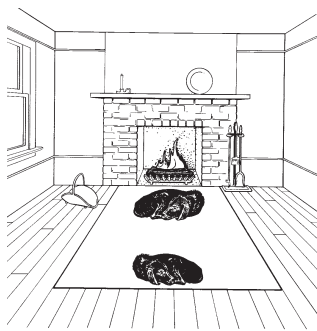


Bild 1.24: Ponzo-Täuschung

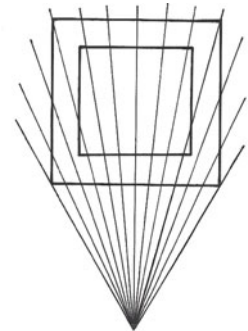


Bild 1.25: Quadrattäuschung

Die Hunde bzw. die Strecken in Bild 1.24 sehen verschieden groß aus, obwohl sie genau gleich groß sind. Der italienische Psychologe Mario Ponzo hat diese Täuschung entdeckt. Das Bild mit den Hunden enthält noch weitere Täuschungen. Die Wandleiste links unten ist nicht als Verlängerung der gegenüberliegenden Leiste rechts oben zu erkennen (Poggendorff-Täuschung) und die vordere Teppichkante erscheint kürzer als die untere Kante der Rückwand. Die Täuschungen kommen dadurch zustande, dass jeweils andere Entfernungen unterstellt werden, da das Bild als perspektivisches Bild eines Raumes interpretiert wird.

Auch die Quadrattäuschung (Bild 1.25) ist auf die perspektivische Sehgewohnheiten zurückzuführen. Das gezeichnete Quadrat erscheint durch die Strahlen als Trapez. Durch die Strahlen wird die Zeichnung als perspektivisches Bild eines Quadrats interpretiert und dieses erscheint dann verzerrt als Trapez.

Wie kommt es zur Interpretation einer Zeichnung als Bild eines Raumes?
Wann wirkt eine bestimmte Zeichnung räumlich, eine andere aber nicht?

Die visuellen Wahrnehmungserfahrungen prägen das Erfassen von Zeichnungen. Durch Vergleichen mit dem visuellen Wahrnehmen und dem in der Zeichnung Dargestellten wird die Zeichnung als Darstellung von etwas Räumlichem interpretiert.

Transformationen dreidimensionaler Objekte in die zweidimensionale Zeichnung sind an Gesetzmäßigkeiten gebunden, die aus den Wahrnehmungsvorgängen der realen dreidimensionalen Welt entwickelt werden. Die in Darstellender Geometrie benutzten Abbildungsmethoden beinhalten die Gesetzmäßigkeiten. Wenn einige Ebenen des räumlichen Objektes parallel zur Bildebene liegen und einige Kanten einander decken, wird eine flächige Deutung der Zeichnung begünstigt. Am Beispiel von Würfel und Oktaeder¹⁰ (Bild 1.26) wird dies deutlich.

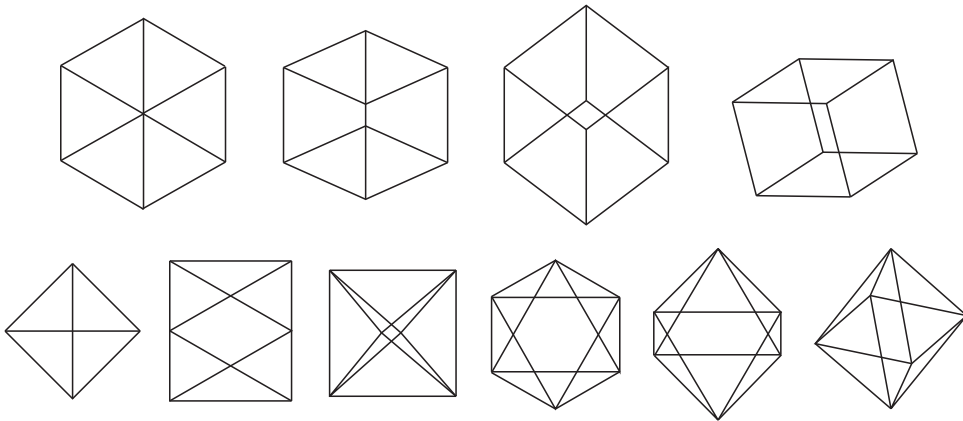


Bild 1.26: "Wirksame" und "unwirksame" Bilder von Würfel und Oktaeder

Eine Zeichnung des Objektes in schräger Lage, bei der jede Kante zu sehen ist, ermöglicht eher eine räumliche Deutung der Zeichnung. Allerdings muss der Betrachter der Zeichnung bereits eine Vorstellung von der wahren Form bzw. Räumlichkeit besitzen, um die Zeichnung räumlich wahrnehmen zu können. Der Betrachter sucht stets nach bekannten regelmäßigen Figuren. Sind diese in der ebenen Zeichnung zu erkennen, bleibt es bei der zweidimensionalen Deutung, sonst wird nach einer regelmäßigen Figur mittels einer dreidimensionalen Interpretation gesucht. Metzger bezeichnet dies als das Gesetz der größten Ordnung, der guten Gestalt. In einer Zeichnung, insbesondere in einer axonometrischen Darstellung, kann oft nicht klar zwischen oben und unten bzw. vorne und hinten unterschieden werden.

10. Wolfgang Metzger: Gesetze des Sehens. 3. Auflage, Frankfurt a. M. 1975, S. 457.

Die Zeichnung lässt manchmal verschiedene Deutungen offen, wie das Bodenmuster in Pompeji (Bild 1.28).

Die Zeichnung gibt nicht eindeutig an, ob etwas als konkav oder konvex zu deuten ist. Aus Erhebungen können visuell Vertiefungen werden oder umgekehrt. Die Personen auf der Treppe (Bild 1.29) machen die zwei Interpretationsmöglichkeiten deutlich.

Durch Vereinigungen beider Interpretationsmöglichkeiten in einer Zeichnung entstehen unmögliche Objekte wie in Bild 1.27 und 1.30.

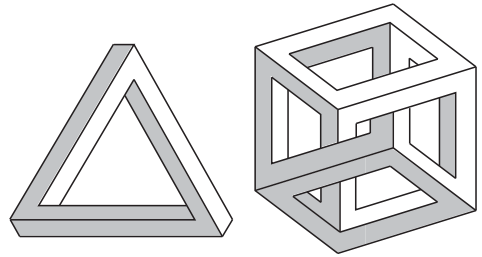


Bild 1.27: Unmögliche Dreibalken-Konstruktion und unmöglicher Würfel



Bild 1.28: Bodenmuster in Pompeji

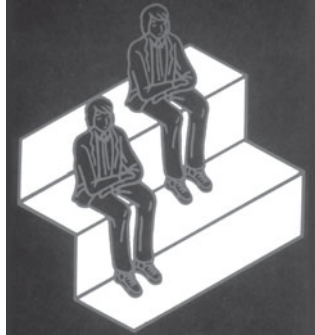


Bild 1.29: "Images of illusion", 1984, Shigeo Fukuda

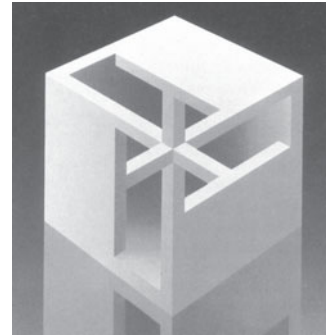


Bild 1.30: Unmöglicher Würfel, 1984, Dirk Huizer

1.5 Raumvorstellung

1.5.1 Bedeutung der Raumvorstellung

Räumliches Vorstellungsvermögen ist die Fähigkeit, in der Vorstellung räumlich zu sehen und räumlich zu denken. Raumvorstellung ist ein Faktor der Intelligenz des Menschen. In der Psychologie wurden verschiedene Theorien zum Aufbau und zur Struktur der menschlichen Intelligenz erarbeitet. Als Primärfaktoren der Intelligenz wurden nach Thurstone¹¹ unterschieden: sprachliches Verständnis, Wortflüssigkeit, rechnerisches Denken, Wahrnehmungsgeschwindigkeit, Raumvorstellung, Gedächtnis und logisches Denken. Gardner¹² entwickelte ein umfassenderes Bild der menschlichen Intelligenz, eine Theorie der multiplen Intelligenzen.

11. L. L. Thurstone: Primary Mental Abilities. Chicago 1938.

12. Howard Gardner: Frames of Mind - The Theory of Multiple Intelligences. New York 1985.

Er spricht dann von sechs unterschiedlichen menschlichen Intelligenzen: linguistische, musikalische, logisch-mathematische, räumliche, körperlich-kinästhetische, intra- und interpersonale Intelligenz. In allen Intelligenzkonzepten wird der Raumvorstellung eine essentielle Bedeutung zugesprochen. Ausgehend von der sinnlichen Raumwahrnehmung werden die Sinneseindrücke gedanklich verarbeitet, so dass Vorstellungsbilder entstehen, die auch ohne das Vorhandensein der realen Objekte verfügbar sind. Raumvorstellung beschränkt sich nicht darauf, diese Bilder im Gedächtnis zu speichern und in Form von Erinnerungsbildern bei Bedarf abzurufen, sondern auch aktiv mit den Bildern umzugehen, mit den vorgestellten Objekten zu agieren und neue Bilder aus vorhandenen vorstellungsmäßig zu entwickeln.

Raumvorstellungsvermögen brauchen wir, um uns täglich in unserer dreidimensionalen Umwelt zurechtzufinden, z. B. sich ankleiden, sich fortbewegen. Um wie in Architektur und Planung gestaltend auf die Umwelt einwirken zu können, ist Raumvorstellung von besonderer Bedeutung. Wir müssen die wahrgenommenen Dinge in der Vorstellung verändern und diese veränderten räumlichen Vorstellungen auch anderen mitteilen können.

Die Raumvorstellung beinhaltet die komplexe Fähigkeit, mit zwei- oder dreidimensionalen Objekten in der Vorstellung zu arbeiten. Es können fünf Komponenten unterschieden werden: räumliche Wahrnehmung, Veranschaulichung, Vorstellungsfähigkeit von Rotationen, räumliche Beziehungen und räumliche Orientierung.¹³ Diese Komponenten können aber nicht völlig getrennt voneinander gesehen werden. Bild 1.31 - 1.35 zeigen Beispiele verschiedener Tests zu den Raumvorstellungskomponenten.

Welcher Wasserspiegel?

Betrachten Sie den Wasserspiegel in der rechts gezeigten Flasche. Daneben sind Bilder derselben Flasche in gekippter Position. Entscheiden Sie, welche der drei Abbildungen den richtigen Winkel des Wasserspiegels zeigt: A, B oder C.

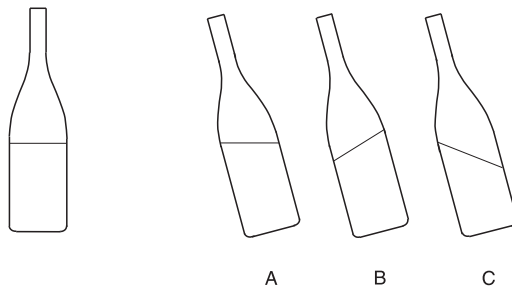


Bild 1.31: Testbeispiel zur räumlichen Wahrnehmung - Identifikation der Horizontalen und Vertikalen

13. Peter H. Maier: Räumliches Vorstellungsvermögen. Frankfurt a. M. 1994, S.14.

EINFÜHRUNG

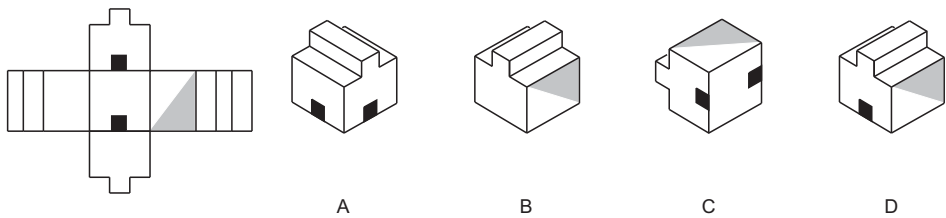


Bild 1.32: Testbeispiel zur Veranschaulichung - "Differential Aptitude Tests": Welches der Objekte A - D kann aus dem links abgebildeten Muster (Außenseite des Objektes) gefaltet werden?

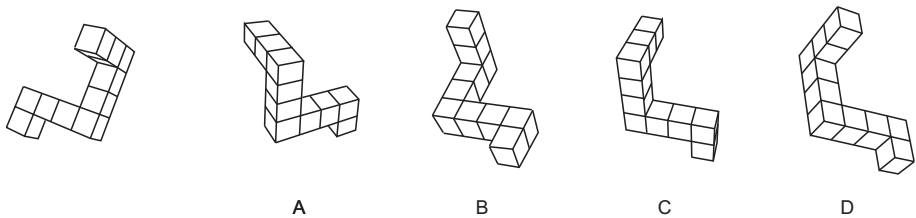


Bild 1.33: Testbeispiel zur Vorstellungsfähigkeit von Rotationen - "Mental Rotation Test": Welche der Objekte A - D stimmen mit dem links abgebildeten überein?

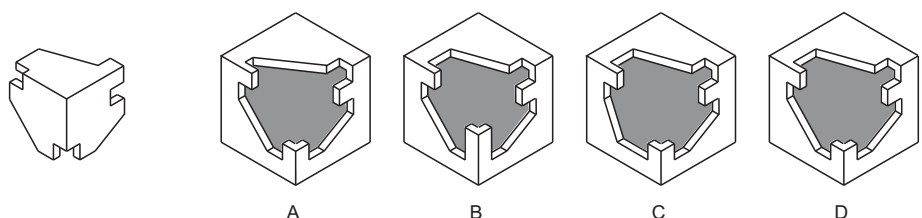


Bild 1.34: Testbeispiel zu räumlichen Beziehungen: Welcher der vier Würfel A - D kann durch das links abgebildete Eckstück passend ergänzt werden?

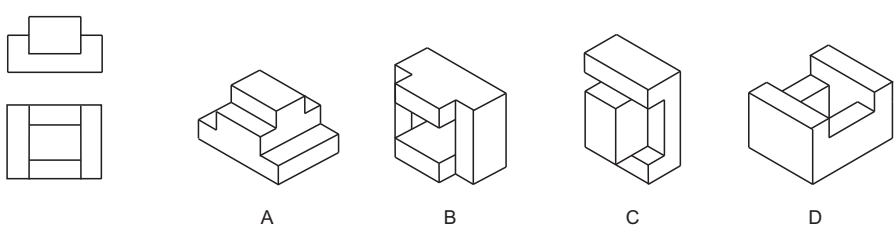


Bild 1.35: Testbeispiel zur räumlichen Orientierung: Welches der Objekte A - D kann die beiden links gezeigten Ansichten erzeugen?

1.5.2 Entwicklung des Raumvorstellungsvermögens

Das Raumvorstellungsvermögen entwickelt sich vom Tag der Geburt an. Das Baby lernt, Gesichter, Formen und Dinge zu erkennen und zu unterscheiden. Das Kleinkind entdeckt die Entfernung und wie diese das Aussehen eines Gegenstands in Bezug auf Größe und Perspektive beeinflusst. Im Alter zwischen 7 und 14 entwickelt sich die räumliche Intelligenz am stärksten. Nach Studien von Piaget und Inhelder¹⁴ entdeckt das Kind zuerst **topologische** Bezüge, d. h. Merkmale wie offen und geschlossen, begrenzt, benachbart, aufeinanderfolgend werden erkannt. Mit Beginn der Schulzeit entwickelt sich dann eine **projektive** Raumvorstellung, mit der das Kind in der Lage ist, verschiedene Betrachterstandpunkte einzunehmen. Besonders bekannt geworden ist der Drei-Berge-Versuch (Bild 1.36) zur räumlichen Orientierung, bei dem die Versuchsperson verschiedene Betrachterstandpunkte in der Vorstellung einnehmen muss.

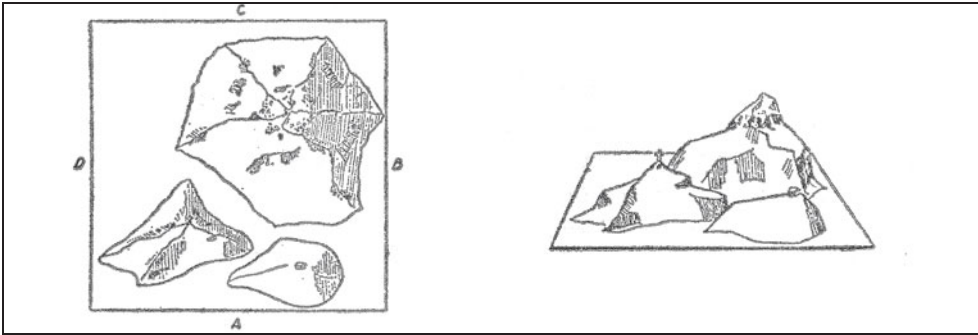


Bild 1.36: Drei-Berge-Versuch von Jean Piaget und Bärbel Inhelder

In diesem Versuch wurde Kindern ein Pappmaché-Modell mit verschiedenen hohen Bergen vorgelegt. Vom Standort A aus sieht das Kind die verschiedenen Berge. Das Kind soll dann mit drei Pappstücken in Form von Bergen zeigen, was eine Person von den anderen Standpunkten aus sieht, ohne dass das Kind selbst diesen Standpunkt einnimmt. Es zeigte sich, dass die Kinder erst ab ca. 7 Jahren in der Lage waren, den momentanen Standpunkt vorstellend zu verlassen und die anderen Standpunkte nur in der Vorstellung einzunehmen. Vor diesem Alter zeigten die Kinder stets dasselbe Bild, gleichgültig, welchen Standpunkt sie vorstellend einnehmen sollten.

Schließlich wird teilweise parallel zur projektiven Raumvorstellung die **euklidische** Raumvorstellung entwickelt. Die Person ist dann in der Lage, den Erhalt von Abständen, Längen, Flächen, Volumina bzw. deren Veränderung zu beurteilen. Diese Entwicklungen finden am stärksten im Alter von 9 bis 14 Jahren statt.

14. Jean Piaget und Bärbel Inhelder: Die Entwicklung des räumlichen Denkens beim Kinde. Stuttgart 1971.

Durch verschiedene Studien¹⁵ wurde herausgefunden, dass Raumvorstellung bei Personen verschiedenen Alters trainierbar ist. Beim Training der Raumvorstellung spielen visuelle Modelle und ganz besonders greifbare räumliche Modelle (Bild 1.37) eine bedeutende Rolle. Handlungsorientierte Aktivitäten an diesen Modellen, auch das Anfertigen von Skizzen, Schneiden, Zusammensetzen, Abwickeln der Modelle erweisen sich als wirkungsvoll. Um sich räumliche Gegenstände und deren Manipulation bzw. Veränderung besser vorstellen zu können, ist es hilfreich, mit greifbaren Modellen diese Prozesse tatsächlich durchzuführen. An deren Stelle können auch **virtuelle Modelle** treten, die veränderliche Prozesse noch besser aufzeigen können. Bild 1.38 zeigt ein mittels VRML (Virtual Reality Modeling Language) erzeugtes virtuelles Modell,¹⁶ das in eine virtuelle Welt integriert ist, in der Interaktionen und Animationen möglich sind. Anhand des virtuellen Modells kann beobachtet werden, wie sich die Schnittkurve der beiden Körper verändert, wenn der Durchmesser des Zylinders vergrößert bzw. verkleinert wird.

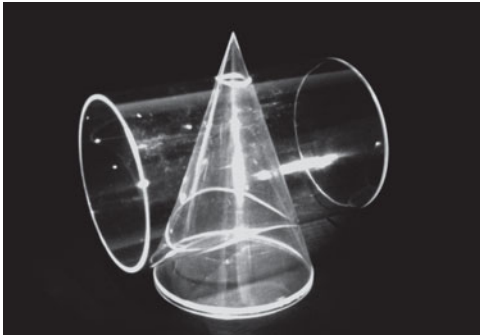


Bild 1.37: Räumliches Modell der Durchdringung von Kegel und Zylinder

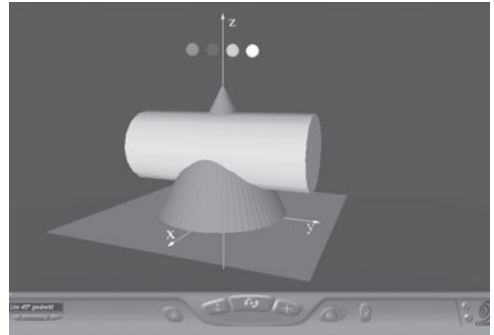


Bild 1.38: Virtuelles Modell der Durchdringung von Kegel und Zylinder

Ein Training durch das Betrachten von Modellen von oben, von vorne, von der Seite, etc. führt allmählich dazu, in anderen Fällen sich die verschiedenen Ansichten eines räumlichen Gegenstandes in der Vorstellung erarbeiten zu können. Wirkungsvoll sind auch Aufgaben, bei denen aus den Ansichten auf einen möglichen räumlichen Gegenstand geschlossen werden muss oder umgekehrt die verschiedenen Ansichten eines räumlichen Gegenstandes angegeben werden sollen (vgl. Testaufgabe in Bild 1.35). Die Darstellende Geometrie, die bei der Lösung der geometrischen Problemstellungen immer auf Bilder und Vorstellungen der räumlichen Objekte zurückgreift, kann die Raumvorstellung weiterentwickeln. Daher sollte beim Erarbeiten der Inhalte dieses Buches stets räumlich vorstellend gearbeitet werden und nicht nur einzelne Zeichenschritte nachvollzogen werden.

15. G. Gittler: Intelligenzförderung durch Schulunterricht: Darstellende Geometrie und räumliches Vorstellungsvermögen.
In: G. Gittler et al.: Die Seele ist ein weites Land: aktuelle Forschungen am Wiener Institut für Psychologie, Wien 1994.

16. Im Internet unter der Adresse http://www.uni-kl.de/AG-Leopold/dg/forschung/raumvorstellung/vrml_modelle

2 ABBILDUNGSMETHODEN

2.1 Projektionsarten

Um dreidimensionale Objekte wie Gebäude, Stadträume oder Bauteile darzustellen, werden diese auf eine Bildfläche bzw. eine Bildebene abgebildet. Der hierbei verwendete mathematische Abbildungsbegriff bedeutet, dass die Elemente einer Menge A eindeutig den Elementen einer Menge B zugeordnet werden, d. h. die Punkte im Raum werden eindeutig den Punkten der Bildfläche bzw. Bildebene zugeordnet. Dabei können die Objekte auch auf eine gekrümmte Bildfläche abgebildet werden. Bild 2.1 zeigt die Abbildung der räumlichen Umgebung auf eine Kugeloberfläche, also auf eine gekrümmte Bildfläche durch Spiegelung am Beispiel der Géode im Parc de la Villette in Paris.



Bild 2.1: Kugel als Bildfläche - Géode, Parc de La Villette, Paris, 1980-86, A. Fainsilber

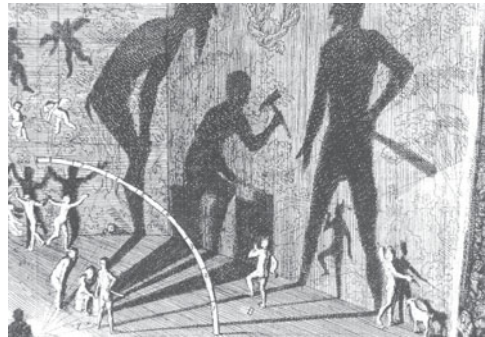
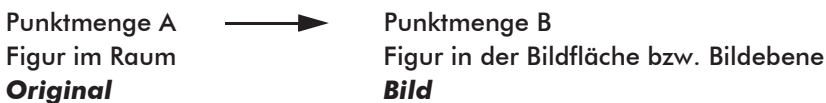


Bild 2.2: Methode des Projizierens: Schattentheater, 1678, Samuel van Hoogstraten



Bei der Abbildung der dreidimensionalen Objekte auf eine zweidimensionale Bildfläche bzw. Bildebene geht eine Dimension verloren. Es entstehen zweidimensionale Bilder dreidimensionaler Gegenstände. In den häufigsten Fällen beschränken wir uns auf die Abbildung der räumlichen Objekte auf eine **Bildebene**. Dabei benutzen wir die **Methode des Projizierens**, die der Projektion eines Gegenstandes auf eine Leinwand mit Hilfe einer Lichtquelle nachempfunden ist. Die Methode des Projizierens wird am Beispiel eines Schattentheaters deutlich, bei dem kleine Figuren mit Hilfe von Rampenlichtern an die Wand projiziert werden (Bild 2.2). Die projizierten Figuren stellen die Theaterszenen dar. Solche Schattenspiele waren in Frankreich besonders im 19. Jahrhundert beliebt. Die Projektion wird in zwei Varianten verwendet.

2.1.1 Zentralprojektion

Bei der ersten Variante der Methode des Projizierens wird von einem Projektionszentrum O ($O \notin \pi$) aus durch jeden Punkt P des räumlichen Objekts ein Projektionsstrahl OP gezogen und sein Durchstoßpunkt P' mit der Bildebene π ermittelt.

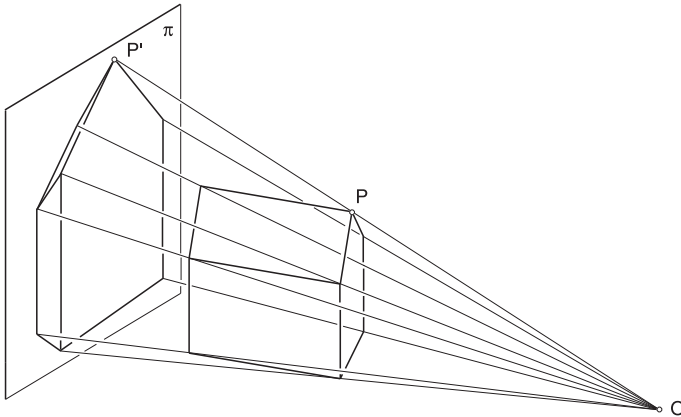


Bild 2.3: Methode der Zentralprojektion

Der Punkt P' ist das Bild von P , auch Riss genannt. Jedem Punkt P , außer dem Projektionszentrum O , wird genau ein Punkt P' in der Bildebene π zugeordnet. Die Abbildung ist also für alle Punkte $P \neq O$ eine eindeutige Abbildung. Diese Abbildung heißt **Zentralprojektion**, das entstandene Bild heißt **Zentralriss** oder **Perspektive**.



Dieses Abbildungsverfahren ist dem natürlichen Sehvorgang so weit wie möglich nachgebildet. Dürer hat dieses Verfahren in Form einer Versuchsanordnung in einem Holzschnitt (Bild 2.4) dargestellt.

Eine Zeichnung von 1583 (Bild 2.5) erläutert diese Versuchsanordnung. Die Öse in der Wand (G) stellt das Projektionszentrum dar. Der gespannte Faden zwischen der Öse in der Wand und einem Punkt des abzubildenden Objekts (L) steht für den Projektionsstrahl. Der Durchstoßpunkt (N) des Fadens mit der Bildebene wird mit Hilfe eines Fadenkreuzes festgehalten. Die Bildebene ist festgelegt durch den Rahmen und eine klappbare Zeichenebene. Nach dem Entfernen des gespannten Fadens kann die Zeichenebene in den Rahmen geklappt und der erhaltene Durchstoßpunkt mit Hilfe des Fadenkreuzes auf die Zeichenebene übertragen werden. Das Objekt wird dann punktweise in der Bildebene ermittelt.

Bis zur Erfindung der Fotografie war dieser Perspektiv-Zeichentisch weit verbreitet. Er kann das Abbildungsverfahren der Zentralprojektion anschaulich vor Augen führen.

Bei der Abbildung werden Geraden im Raum auf Geraden in der Bildebene abgebildet. Die Abbildungsmethode der Zentralprojektion auf eine Bildebene ist **geradentreu**. Dadurch wird eine gewisse "Ähnlichkeit" zwischen Original und Bild erreicht. Dies ist bei der Abbildung auf eine Kugeloberfläche wie in Bild 2.1 nicht der Fall. Geraden erscheinen dort in der Bildfläche als gekrümmte Linien. Daher kommt nur in Sonderfällen eine Abbildung auf eine gekrümmte Bildfläche zur Anwendung. Bei einer Panorama-Perspektive wird zum Beispiel der Raum auf eine zylindrische Bildfläche abgebildet.

Als Zentralriss bzw. Perspektive kann der Schatten eines Gegenstandes bei künstlicher Beleuchtung mit einer nahezu punktförmigen Lichtquelle interpretiert werden.



Bild 2.4: Veranschaulichung der Methode, 1525, Albrecht Dürer

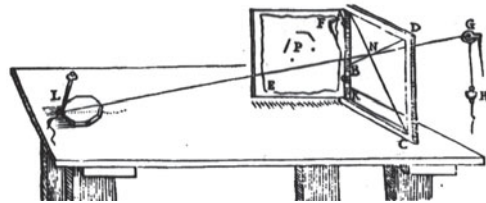


Bild 2.5: Erläuterungszeichnung zu Dürers Zeichenmaschine, 1583

Die Lichtquelle ist dabei das Projektionszentrum. Der Lichtstrahl kann als Projektionsstrahl gedeutet werden (Bild 2.6).

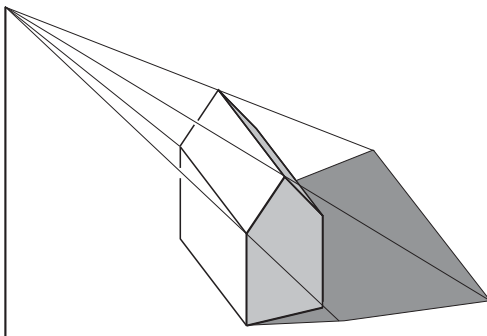


Bild 2.6: Schatten bei Zentralbeleuchtung

Eine Fotografie eines Objektes (Bild 2.7) kann ebenfalls als Zentralriss gedeutet werden. Die Bildebene ist die lichtempfindliche Oberfläche des Films, das Projektionszentrum ein Punkt im Objektiv.

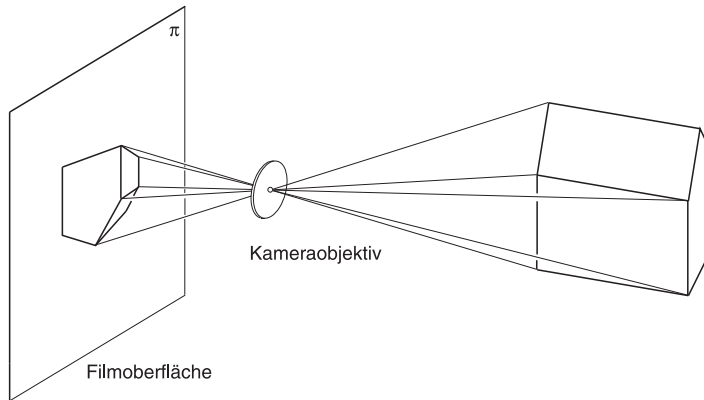


Bild 2.7: Fotografie

Die Zentralprojektion ist ein vereinfachtes Modell des Sehvorgangs und des Fotografierens. Daher kann die Zentralprojektion anschauliche, aber wenig maßgerechte Bilder liefern.

2.1.2 Parallelprojektion

Die Methode des Projizierens wird in der zweiten Variante so verändert, dass das Projektionszentrum "ins Unendliche" rückt. Die Projektionsstrahlen gehen dann nicht durch ein Projektionszentrum, sondern sind alle untereinander parallel.

Die Richtung der Projektionsstrahlen bestimmt das entstehende Bild (Bild 2.8). Diese Abbildung heißt **Parallelprojektion**, das entstandene Bild **Parallelriss**. Die Parallelprojektion ist wie die Zentralprojektion eine eindeutige, geradentreue Abbildung. Die Abbildungsmethode entspricht nicht dem Sehvorgang. Die Parallelprojektion liefert daher Bilder, die nicht immer sehr anschaulich sind. Dafür können die Maßverhältnisse der räumlichen Objekte aus den Bildern leichter abgelesen werden.

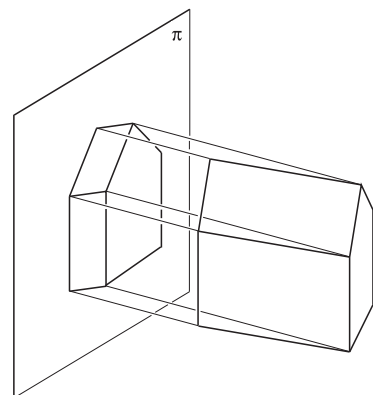


Bild 2.8: Parallelriss eines Hauses

Ein Modell für dieses Abbildungsverfahren kann darin gesehen werden, dass die Sonne als Projektionszentrum gedeutet wird. Da die Sonne sehr weit entfernt ist, werden die Lichtstrahlen als parallel angenommen. Daher kann der Schatten eines Gegenstandes auf die Standebene bei natürlicher Beleuchtung (Sonne) als Parallelriss gedeutet werden (Bild 2.9).

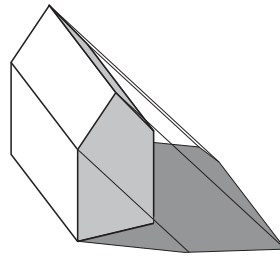


Bild 2.9: Schatten bei Parallelbeleuchtung

Zu unterscheiden sind:

1. **Schiefe** (allgemeine) **Parallelprojektion** ($0 < \alpha < 90^\circ$)

Die Projektionsstrahlen treffen schief auf die Bildebene auf (Bild 2.10).

Und der Sonderfall:

2. **Normalprojektion** (senkrechte Parallelprojektion)

Die Projektionsstrahlen treffen senkrecht auf die Bildebene auf (Bild 2.11). Das entstandene Bild heißt **Normalriss**.

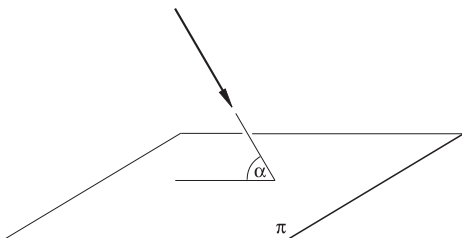


Bild 2.10: Schiefe Parallelprojektion

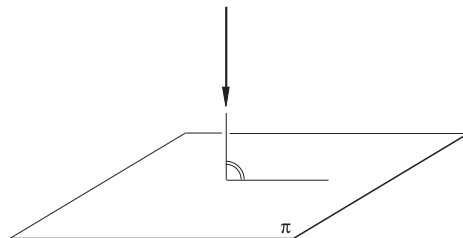


Bild 2.11: Senkrechte Parallelprojektion

Bei der Normalprojektion kann eine Aussage darüber getroffen werden, wie eine Strecke bei der Abbildung verzerrt wird. Eine Strecke kann im Normalriss nicht länger sein als im Original. Das Bild jeder Strecke wird verkürzt. Wenn die Strecke jedoch parallel zur Bildebene ist, dann bleibt sie unverzerrt. Es ist bei Normalprojektion sogar eine einfache Aussage über den Verkürzungsfaktor möglich (vgl. Bild 2.12):

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \cos \alpha \longrightarrow 0 \leq \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \leq 1$$

Das Verzerrungsverhältnis der Länge der Bildstrecke A'B' zur Originalstrecke AB ist gleich dem Kosinus ihres Neigungswinkels gegen die Bildebene (Bild 2.12). Bei schiefer Parallelprojektion ist eine solche Aussage nicht möglich.

Aus einem Normalriss lassen sich am leichtesten die wahren Größen von Strecken und Winkeln des Originals ermitteln. Die Normalprojektion ist daher zur Herstellung technischer Zeichnungen, die Grundlage für die Umsetzung eines geplanten Projektes in die Realität sind, am besten geeignet. Die Handwerker können aus den Normalrissen die wahren Abmessungen des Objektes rekonstruieren. Die Normalrisse besitzen aber im allgemeinen eine geringe Anschaulichkeit.

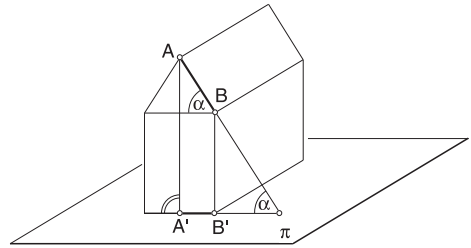


Bild 2.12: Verzerrungsverhältnis einer Strecke bei Normalprojektion

2.2 Invarianten der Abbildungen

Für das Verstehen der Bilder von räumlichen Objekten ist es wichtig zu wissen, wie sich die Bilder im Vergleich zum Original durch die Abbildung verändert haben bzw. was unverändert geblieben ist. Diese Informationen können dann zum Konstruieren der Bilder der räumlichen Objekte eingesetzt werden. Geometrische Größen, Eigenschaften oder Begriffe, die bei einer Abbildung unverändert bleiben, heißen die **Invarianten** der Abbildung. Diese Invarianten kennzeichnen die jeweilige Abbildungsmethode. Daher werden im folgenden die Invarianten der Parallel- und Zentralprojektion untersucht.

2.2.1 Invarianten der Parallelprojektion

Bei der Parallelprojektion bleiben einige Eigenschaften und geometrische Größen der abzubildenden Objekte erhalten.

Sind zwei Geraden im Raum zueinander parallel, so sind diese im Bild auch wieder parallel zueinander. Die Parallelität von Geraden bleibt somit bei Parallelprojektion erhalten, d. h. die Parallelprojektion ist eine **paralleltreue** Abbildung (Bild 2.13).

Diese Eigenschaft ist beim Konstruieren von Parallelrissen besonders hilfreich.

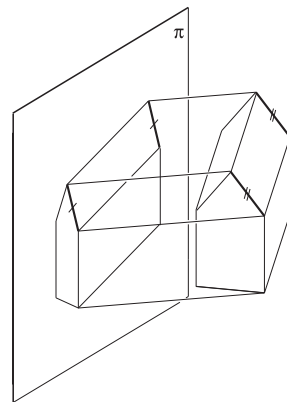


Bild 2.13: Parallelentreue

Bild 2.14 zeigt drei gleich lange Strecken AB, BC und CD, die auf einer Geraden liegen. Die Länge der Strecken verändert sich zwar im Bild, aber die drei Bildstrecken A^pB^p , B^pC^p und C^pD^p sind wieder gleich lang. Allgemein bedeutet dies, dass das Teilverhältnis bei Parallelprojektion unverändert bleibt. Das heißt z. B., dass der Mittelpunkt einer Strecke auch wieder auf den Mittelpunkt der Bildstrecke abgebildet wird. Die Parallelprojektion ist **teilverhältnistreue**.

$$\overline{AB} \div \overline{CD} = \overline{A^pB^p} \div \overline{C^pD^p}$$

Die wahre Größe bzw. Gestalt von Strecken, Winkeln und ebenen Figuren, welche in Ebenen parallel zur Bildebene liegen, bleibt bei Parallelprojektion erhalten. Bild 2.15 zeigt die Wand eines Hauses, die parallel zur Bildebene π liegt.

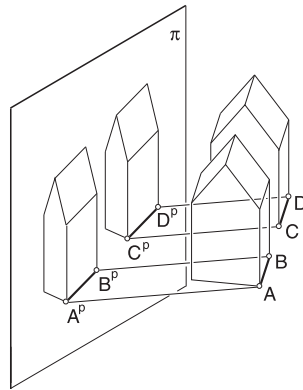


Bild 2.14: Teilverhältnistreue

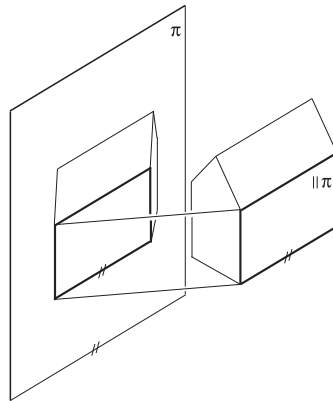


Bild 2.15: Erhalt der wahren Größe

Liegt eine senkrechte Parallelprojektion (Normalprojektion) vor, so kommt noch eine weitere Invariante hinzu. Es ist bei Normalprojektion eine Aussage möglich, wann ein rechter Winkel erhalten bleibt. Liegt ein Schenkel eines rechten Winkels parallel zur Bildebene π (der zweite Schenkel darf nicht in Projektionsrichtung verlaufen), so bildet sich dieser wieder als rechter Winkel ab. In Bild 2.16 wird aus dem räumlichen Rechteck des Hausdaches im Normalriss wieder ein Rechteck, da die Traufe parallel zur Bildebene liegt.

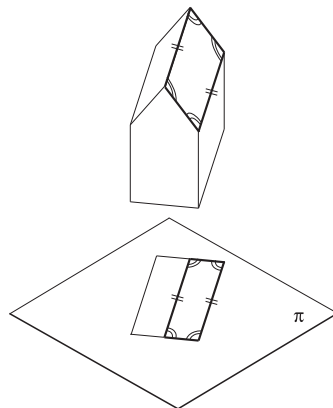


Bild 2.16: Erhalt eines rechten Winkels

2.2.2 Invarianten der Zentralprojektion

Eine ebene Figur ist mit ihrer Bildfigur ähnlich, wenn die Figur in einer Ebene parallel zur Bildebene liegt. Ein Winkel wird daher in wahrer Größe abgebildet, wenn beide Schenkel parallel zur Bildebene verlaufen (Bild 2.17).

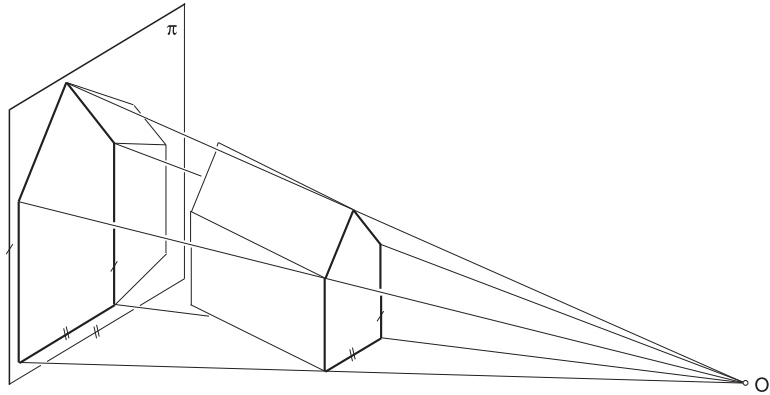


Bild 2.17: Ähnlichkeit ebener Figuren

Das Doppelverhältnis von vier auf einer Geraden liegenden Punkten bleibt bei der Abbildung erhalten (Bild 2.18). Die Teilverhältnisse bleiben nicht erhalten.

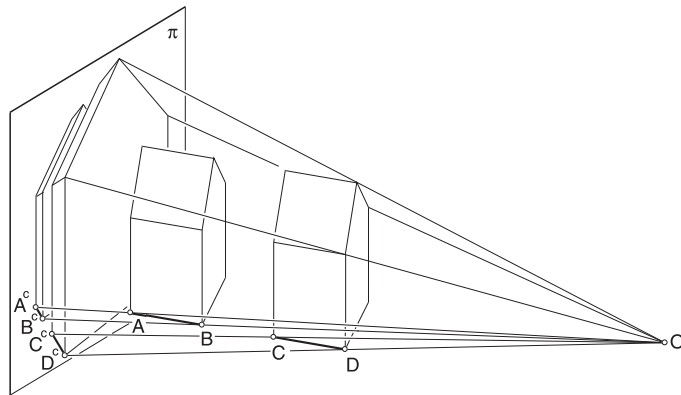


Bild 2.18: Doppelverhältnistreue

Das Doppelverhältnis ist der Quotient der beiden Teilverhältnisse. Die Zentralprojektion ist **doppelverhältnistreu**.

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \div \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{A^cC^c}}{\overline{B^cC^c}} \div \frac{\overline{A^cD^c}}{\overline{B^cD^c}}$$

Die Invarianten der Parallel- und Zentralprojektion können in Bild 2.19 und Bild 2.20 am Beispiel der Darstellungen zweier identischer Gebäude mit gleich großen Fenstern in gleichem Abstand verglichend betrachtet werden. In beiden Parallelrissen erscheinen parallele Geraden parallel, Teilverhältnisse bleiben erhalten und in der Darstellung links bleibt zusätzlich die wahre Gestalt sowie Größe der Giebelwand entsprechend des gewählten Maßstabs erhalten, da die Giebelwand parallel zur Bildebene ist.

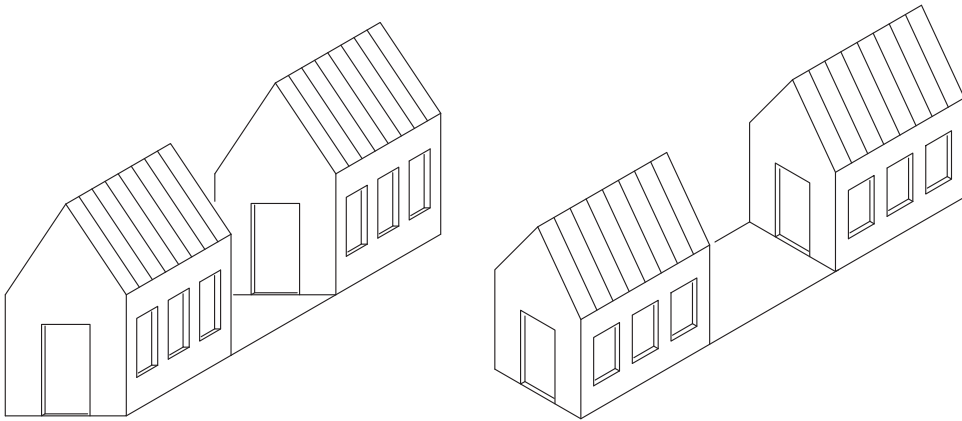


Bild 2.19: Parallelrisse zweier identischer Gebäude mit gleich großen Fenstern in gleichem Abstand, links: Giebelwand parallel zur Bildebene, rechts: allgemeine Lage

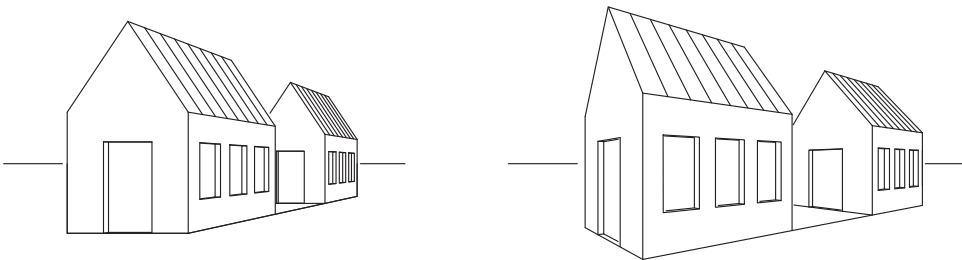


Bild 2.20: Zentralrisse zweier identischer Gebäude mit gleich großen Fenstern in gleichem Abstand, links: Giebelwand parallel zur Bildebene, rechts: allgemeine Lage

In den beiden Zentralrissen erscheinen parallele Geraden im allgemeinen nicht parallel. Vertikale Kanten bleiben parallel, da diese parallel zur Bildebene sind. Teilverhältnisse bleiben im allgemeinen nicht erhalten. Es entsteht eine Tiefenwirkung, da gleich große Elemente perspektivisch verzerrt werden. In der Darstellung links bleibt die wahre Gestalt der Giebelwand zusätzlich erhalten, diese wird ähnlich vergrößert bzw. verkleinert, da diese parallel zur Bildebene ist.

Zusammenfassung der Invarianten:

Parallelprojektion	Zentralprojektion
Parallelität von Geraden	Parallelität von Geraden nur, wenn die Geraden parallel zur Bildebene sind
Teilverhältnistreue	Doppelverhältnistreue
Wahre Größe und Gestalt von Strecken, Winkeln und ebenen Figuren in Ebenen parallel zur Bildebene bleiben erhalten.	Winkel in Ebenen parallel zur Bildebene bleiben erhalten (Ähnlichkeit ebener Figuren, die parallel zur Bildebene liegen).
Senkrechte Parallelprojektion: Rechter Winkel bleibt erhalten, falls ein Schenkel parallel zur Bildebene ist.	

2.3 Projektive Erweiterung des Anschauungsraumes

Indem die Geometrie verwendet wird, um räumliche Objekte der Wirklichkeit zu erfassen und abzubilden, hat sie Bezüge zur empirisch erfassbaren Welt. Daher liegt der Geometrie hier ein Raumbegriff zugrunde, der durch Idealisierung bzw. Modellbildung aus der Erfahrungswelt abgeleitet wurde. Dieser Raum ist der sogenannte **Anschauungsraum**. "Anschauung" kennzeichnet den Zugang zu Dingen der Wirklichkeit über die Sinne, insbesondere durch visuelles Erleben. Der Anschauungsraum enthält Punkte, Geraden und Ebenen. Diese werden mit anschaulichen Vorstellungen verknüpft, die aus der Erfahrungswelt abgeleitet und idealisiert wurden. Im Gegensatz dazu werden in der axiomatischen Geometrie, wie sie von David Hilbert begründet wurde und heute in der geometrischen Forschung zugrunde gelegt wird, Punkte, Geraden, Ebenen und Beziehungen zwischen diesen Elementen ohne inhaltliche Bedeutungen eingeführt. In der anwendungsorientierten Geometrie, wie sie hier gebraucht wird, sind den geometrischen Elementen aus der Anschauung abgeleitete inhaltliche Bedeutungen zugeordnet. Räumliche Objekte des Anschauungsraumes werden mit Hilfe der Zentral- oder Parallelprojektion auf eine Bildebene abgebildet.

Diese beiden Abbildungsmethoden unterscheiden sich nur dadurch, dass sich einmal die Projektionsstrahlen in einem Punkt schneiden, sie im anderen Fall parallel zueinander sind. Durch das Einführen von Fernelementen lassen sich viele Probleme, die sich auf den Sonderfall paralleler Geraden beziehen, leichter lösen. Der Anschauungsraum wird durch das Hinzufügen von **Fernelementen**, Fernpunkten und Ferngeraden, **projektiv erweitert**.

- ! Parallele Geraden (verschiedene) haben genau einen **Fernpunkt** gemeinsam. Sie schneiden sich in einem Fernpunkt.
- Parallele Ebenen (verschiedene) haben genau eine **Ferngerade** gemeinsam. Sie schneiden sich in der Ferngeraden.

Jede Gerade besitzt genau einen Fernpunkt, der auch als Richtung der Geraden gedeutet werden kann. Die Ferngerade einer Ebene ist die Menge der Fernpunkte der Geraden dieser Ebene. Nach dieser projektiven Erweiterung können wir die Parallelprojektion als Zentralprojektion deuten, bei der das Projektionszentrum ein Fernpunkt ist. Im projektiv erweiterten Anschauungsraum haben zwei verschiedene Ebenen genau eine Gerade gemeinsam und zwei verschiedene Geraden in einer Ebene genau einen Punkt gemeinsam. Die projektive Erweiterung des Anschauungsraumes führt zu einer sinnvollen Raumkonstruktion, da dann z. B. allen Bildpunkten jeweils auch ein Urbildpunkt zugeordnet werden kann.

Werden zwei parallele Geraden g_1 und g_2 (in Bild 2.21 Beispiel einer Straße) mittels Zentralprojektion abgebildet, so sind diese im Bild (g_1^c und g_2^c) im allgemeinen nicht parallel, sondern schneiden einander im Punkt F^c . Es stellt sich die Frage, was der Urbildpunkt von diesem Punkt F^c ist. Mit Hilfe der eingeführten Fernelemente kann der Punkt F^c (Fluchtpunkt) als Bildpunkt des Fernpunktes der Geraden g_1 und g_2 verstanden werden.

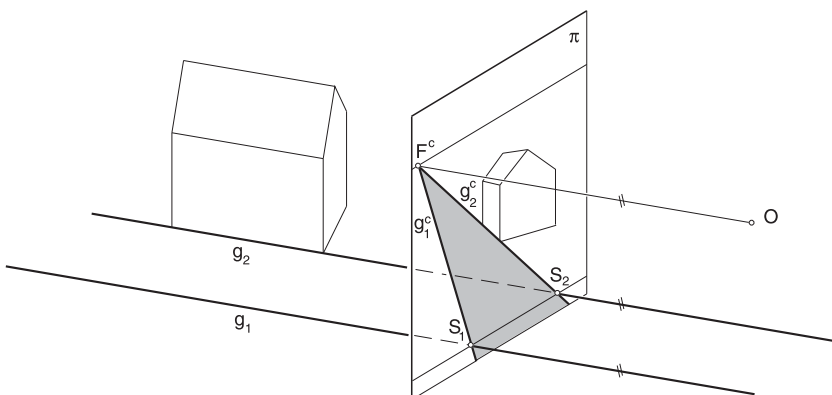


Bild 2.21: Fluchtpunkt F^c als Bildpunkt des Fernpunktes zweier paralleler Geraden

2.4 Abbildungsmethoden zur Rekonstruktion des räumlichen Objektes aus der Zeichnung

Die Zentral- und Parallelprojektion sind zwar eindeutige Abbildungen, da jedem Raumpunkt genau ein Punkt auf der Bildebene zugeordnet wird, aber keine umkehrbar eindeutigen, da alle Punkte auf dem Projektionsstrahl denselben Bildpunkt besitzen. Jeder Punkt der Bildebene ist das Bild von unendlich vielen Raumpunkten. Wenn jedoch das Raumobjekt aufgrund der Zeichnung rekonstruiert werden soll, ist eine umkehrbar eindeutige Abbildung nötig. Das Objekt soll durch die Zeichnung eindeutig festgelegt werden, und die Zeichnung soll nicht unendlich viele Interpretationen zulassen. Daher müssen Methoden gefunden werden, um eine umkehrbar eindeutige Abbildung zu erreichen. Die drei wichtigsten Methoden hierzu sind bei der Parallelprojektion: die kotierte Projektion, die Zweitafelprojektion und die Axonometrie. Bild 2.22 zeigt ein Wohnhaus von R. Cavadini im Foto und in Zweitafelprojektion.

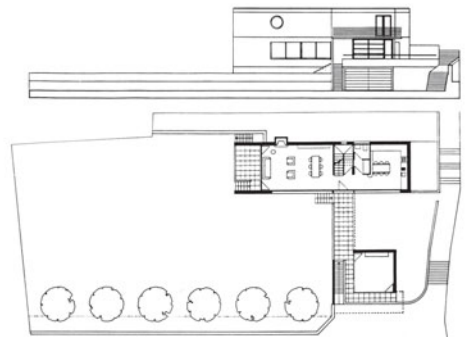


Bild 2.22: Räumliches Objekt und Zeichnung (Zweitafelprojektion) am Beispiel des Wohnhauses Calzascia-Vairora, Gerra Piano, Tessin, 1991-1992, Raffaele Cavadini

2.4.1 Kotierte Projektion

Die **Kotierte Projektion** wird in der Praxis nur bei der senkrechten Parallelprojektion (Normalprojektion) angewandt. Das Objekt wird auf eine horizontale Bildebene projiziert. Sie heißt deshalb auch senkrechte Eintafelprojektion. Es wird dabei an jeden Bildpunkt die auf dem Projektionsstrahl in der vorgegebenen Maßeinheit (L.E.=Längeneinheit) gemessene Entfernung des Originalpunktes von der Bildebene als **Kote** (von frz. 'à coté de' = 'neben') geschrieben.

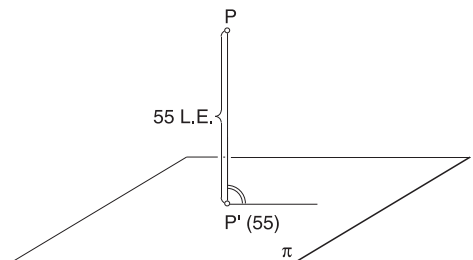


Bild 2.23: Kotierte Projektion

Die kotierte Projektion wird vorwiegend für Geländedarstellungen (Bild 2.25) verwendet. Eine topografische Karte stellt das Ergebnis einer kotierten Projektion dar. In Form eines Lageplans ist das vorhandene Gelände Ausgangspunkt für alle Planungen und Entwürfe. Ein zweiter Anwendungsbereich der kotierten Projektion sind Dachausmittlungen. Hier werden die Schnittgeraden von verschiedenen Dachebenen wie in Bild 2.24 ermittelt.

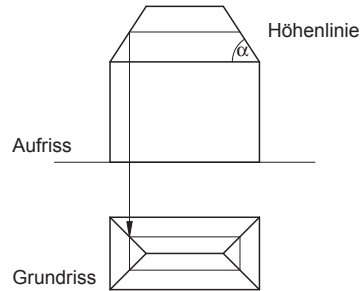


Bild 2.24: Dachausmittlung

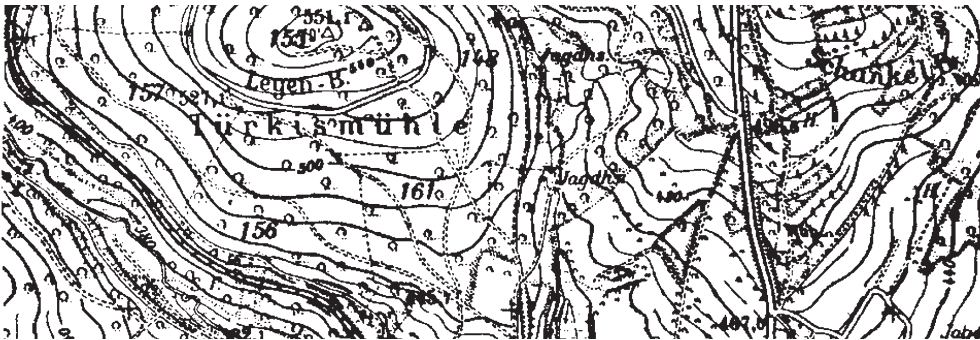


Bild 2.25: Geländedarstellung durch Höhenlinien

2.4.2 Zugeordnete Normalrisse (Zweitafel- bzw. Dreitafelprojektion)

Das räumliche Objekt wird bei der Zwei- bzw. Dreitafelprojektion auf zwei bzw. drei zueinander senkrecht stehende Bildebenen senkrecht projiziert (Bild 2.26). Zur leichteren Handhabung und Orientierung kann ein räumliches Koordinatensystem eingeführt werden. Hierfür wird i. a. ein räumliches **kartesisches Rechtskoordinatensystem** gewählt.

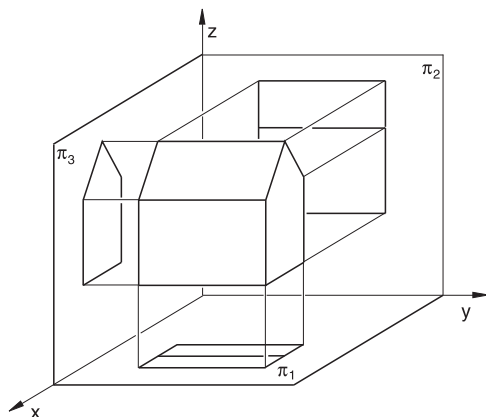


Bild 2.26: Dreitafelprojektion

Dieses kartesische Rechtskoordinatensystem ist durch folgende Eigenschaften gekennzeichnet:

- Die drei Koordinatenachsen x , y und z stehen paarweise senkrecht aufeinander.
- Auf allen drei Koordinatenachsen wird die gleiche Längeneinheit gewählt. Dadurch entsteht der sogenannte Einheitswürfel.
- Die Reihenfolge und Orientierung der drei Koordinatenachsen wird in einem Rechtskoordinatensystem so gewählt, dass die positive x -Achse mit der positiven y -Achse und die positive y -Achse mit der positiven z -Achse durch eine Drehung um 90° im Uhrzeigersinn zur Deckung gebracht werden kann, wenn das Koordinatensystem in Richtung der positiven z -Achse bzw. positiven x -Achse betrachtet wird.

Das Rechtssystem kann auch mit Hilfe der "Drei-Finger-Regel" gekennzeichnet werden (Bild 2.28).

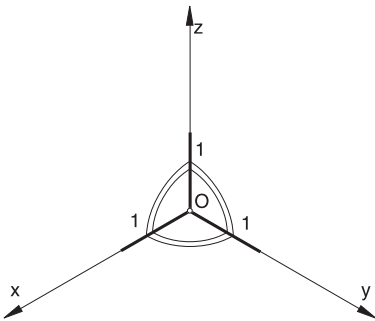


Bild 2.27: Kartesisches Rechtskoordinatensystem



Bild 2.28: "Drei-Finger-Regel" des Rechtssystems

Es gelingt stets mit der rechten Hand mit dem Daumen in Richtung der positiven x -Achse, dem Zeigefinger in Richtung der positiven y -Achse und dem Mittelfinger in Richtung der positiven z -Achse zu zeigen. Nach der Einführung eines räumlichen kartesischen Rechtskoordinatensystems ergibt sich:

die xy -Ebene ist die **Grundrissebene** π_1 ,
 die yz -Ebene ist die **Aufrissebene** π_2 ,
 die xz -Ebene ist die **Kreuzrissebene** π_3 .
 Der Koordinatenursprung O und die Punkte P , P' , P'' , P''' bestimmen einen Quader, den Koordinatenquader.

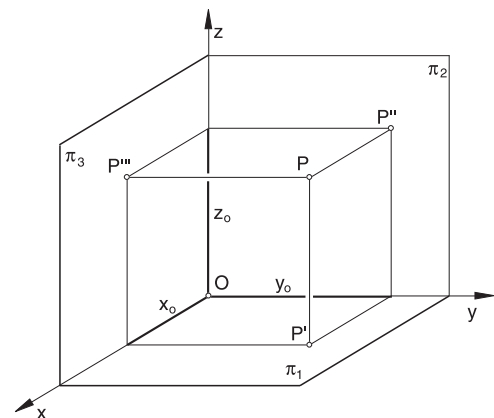


Bild 2.29: Koordinatenquader

Ist ein Punkt $P(x_o, y_o, z_o)$ im Raum gegeben, so gilt:

Grundriss	P'	von P hat die Koordinaten	$(x_o, y_o, 0)$
Aufriss	P''	von P hat die Koordinaten	$(0, y_o, z_o)$
Kreuzriss	P'''	von P hat die Koordinaten	$(x_o, 0, z_o)$

Damit ist ersichtlich, dass jeder Raumpunkt durch zwei seiner Normalrisse (Grund-, Auf- oder Kreuzriss) eindeutig bestimmt ist.

Um zeichnen zu können, werden die Rissebenen um eine Rissachse in eine Ebene, die Zeichenebene, geklappt (Bild 2.30). Man spricht dann von Normalrissen in zugeordneter Lage oder kurz von **zugeordneten Normalrissen**.

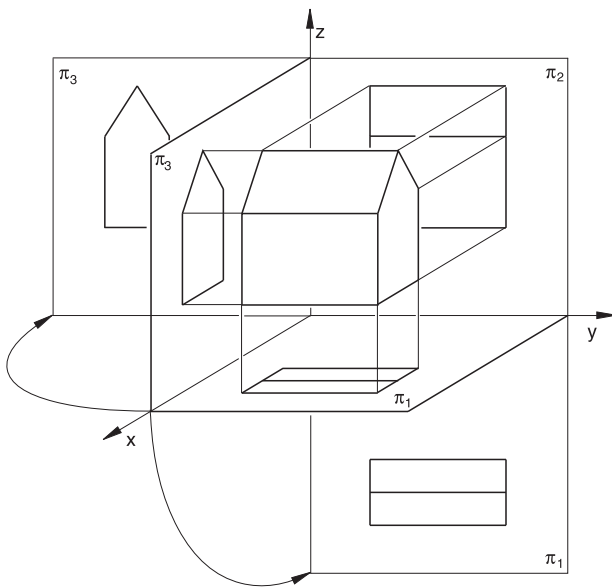


Bild 2.30: Klappen der Rissebenen in die Zeichenebene

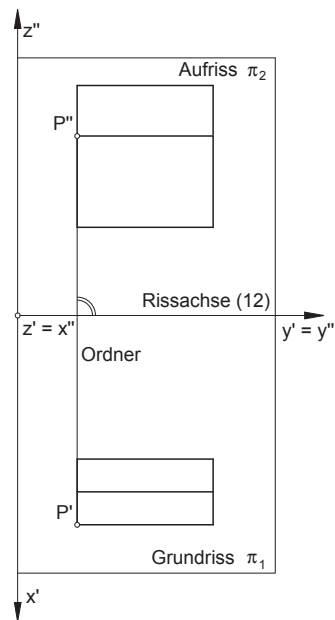


Bild 2.31: Zugeordnete Normalrisse

Die Koordinatenachse, um die geklappt wird (die Schnittgerade je zweier Rissebenen), heißt **Rissachse** und wird mit (12) bei $\pi_1 \cap \pi_2$, (13) bei $\pi_1 \cap \pi_3$ und (23) bei $\pi_2 \cap \pi_3$ bezeichnet. Aus dieser Vorgehensweise folgt, dass zwei zugeordnete Normalrisse eines Punktes P auf einer Geraden senkrecht zur Rissachse, auf einem **Ordner**, liegen. Der Grundriss P' und der Aufriss P'' des Raumpunktes P in Bild 2.31 liegen z. B. auf einem Ordner senkrecht zur Rissachse (12).

Zwei zugeordnete Normalrisse (Grund- und Aufriss, Auf- und Kreuzriss oder Grund- und Kreuzriss) können ein räumliches Objekt umkehrbar eindeutig festlegen. Daher verwendet man in der **Zweitafelprojektion** zwei zugeordnete Normalrisse des räumlichen Objektes, meistens Grund- und Aufriss.

Zum schnelleren Erfassen des räumlichen Objektes können auch **Drei- und Mehr-tafelprojektionen** sinnvoll sein. Dazu werden die in Bild 2.30 gezeigten Bildebenen zu einem Quader ergänzt und das Objekt durch Normalprojektionen auf die Innenflächen des Quaders abgebildet. Zur Herstellung der zugeordneten Normalrisse kann dann der Quader abgewickelt werden. In Europa ist diese Methode nach DIN ISO 5456-2 : 1998-04, Projektionsmethode 1 wie in Bild 2.32 üblich. In Amerika wird nach DIN ISO 5456-2 : 1998-04, Projektionsmethode 3 vorgegangen. Nach der Projektionsmethode 3 stellt man sich den Quader durchsichtig vor ("glass box") und zeichnet die Ansichten auf den Außenflächen der "glass box" nach. Eine Abwicklung der "glass box" führt dann zur Anordnung wie in Bild 2.33.

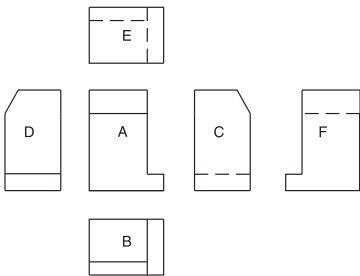
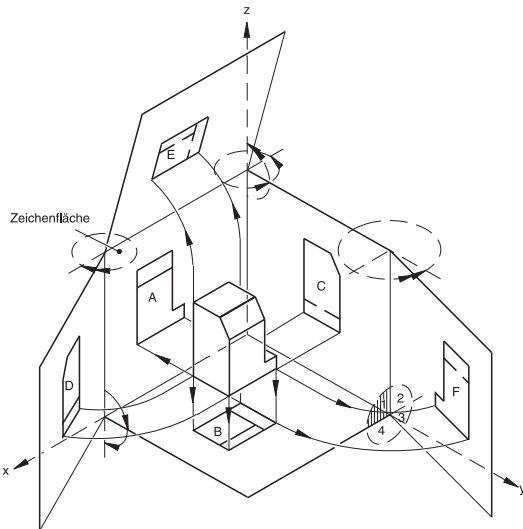


Bild 2.32: Europäische Anordnung - Projektionsmethode 1

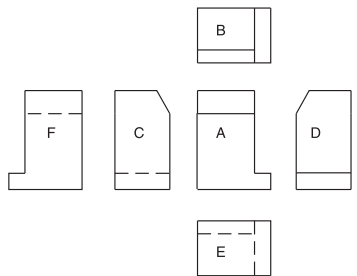
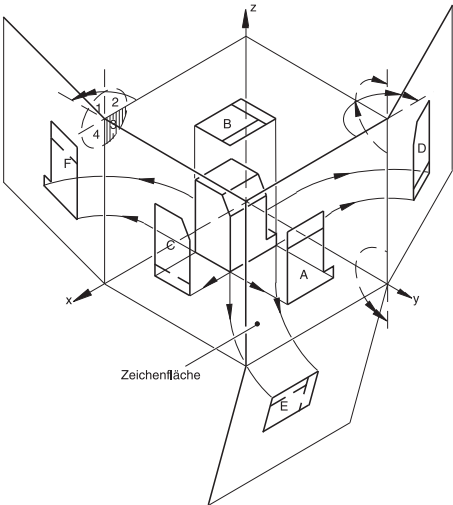


Bild 2.33: Amerikanische Anordnung - Projektionsmethode 3

Der Begriff "Grundriss" wird in Darstellender Geometrie und in Architekturzeichnungen unterschiedlich verwendet. In der Darstellenden Geometrie versteht man unter Grundriss stets die "Sicht von oben", während in Bauzeichnungen nach DIN 1356-1:1995-02 unter Grundriss folgendes verstanden wird:

Grundriss Typ A:

Der Grundriss ist die Draufsicht auf den unteren Teil eines horizontal geschnittenen Bauobjektes.

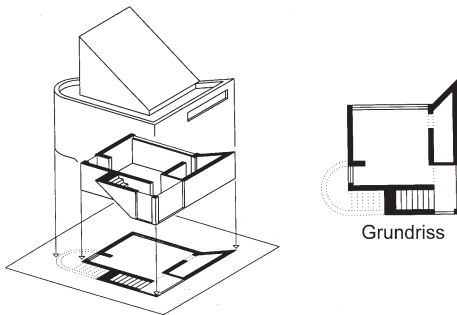


Bild 2.34: Grundrisstyp A nach DIN 1356-1

Grundriss Typ B:

Der Grundriss kann auch die gespiegelte Untersicht unter den oberen Teil eines horizontal geschnittenen Bauobjektes sein (Verwendung in der Tragwerksplanung).

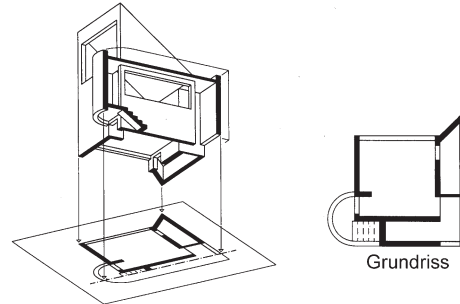


Bild 2.35: Grundrisstyp B nach DIN 1356 -1

Die Sicht von oben, die in Bauzeichnungen als 'Draufsicht' oder 'Dachaufsicht' bezeichnet wird, heißt in der Darstellenden Geometrie **Grundriss**.

Die Methode der Zweitafelprojektion findet Verwendung, um Werkpläne herzustellen, da die Maße leicht aus den Bildern rekonstruiert werden können. Auch zum Ausführen geometrischer Konstruktionen des Raumes in der Zeichenebene, z. B. Ermitteln der Schnittgeraden zweier Dachebenen, ist diese Methode am besten geeignet (vgl. Kapitel 5.4.4).

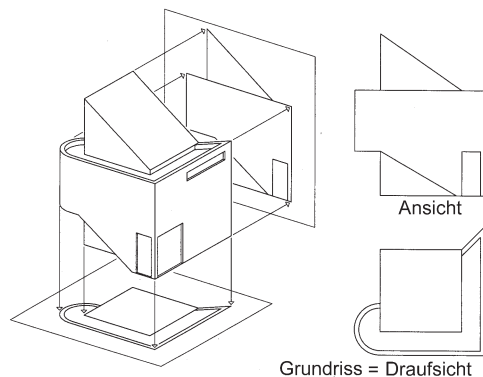


Bild 2.36: Grundriss in Darstellender Geometrie

2.4.3 Axonometrie

Die **Axonometrie** wird in Verbindung mit allgemeiner oder senkrechter Parallelprojektion angewandt. Dabei wird zusammen mit dem abzubildenden Objekt ein räumliches kartesisches Rechtskoordinatensystem, auf welches die Originalpunkte bezogen sind, auf die Bildebene projiziert. Es entstehen eher anschauliche Bilder, die aber im Unterschied zur Perspektive stärker die Eigenschaften des räumlichen Objektes erhalten, da die Parallelprojektion mehr Invarianten aufweist als die Zentralprojektion (vgl. Kapitel 13). Das Bild des räumlichen Koordinatensystems wird bei einer Axonometrie mit Einheiten vorgegeben (Bild 2.38). Ist ein Objekt auf das räumliche Koordinatensystem bezogen (Bild 2.37), so kann das axonometrische Bild des Objektes gezeichnet werden (s. Kapitel 4).

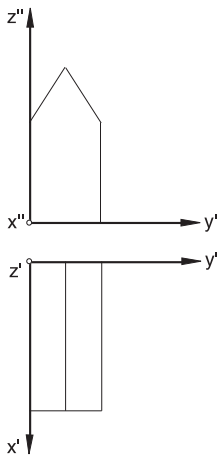


Bild 2.37: Grund- und Aufriss eines Hauses

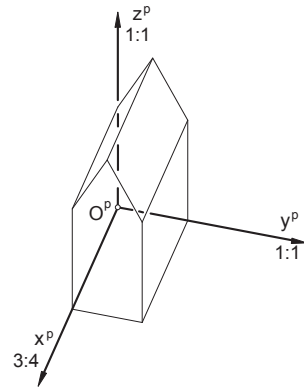


Bild 2.38: Axonometrisches Bild des Hauses

2.4.4 Rekonstruktion bei der Zentralprojektion

Meistens wird die Zentralprojektion verwendet, um die Objekte anschaulich, entsprechend unseres Sehens, darzustellen. Zur **Rekonstruktion** des Objektes dienen dann der vorhandene Grund- und Aufriss des Objektes. Doch für einige Zwecke ist es auch nützlich, das Objekt aus einer Perspektive rekonstruieren zu können:

- z. B.:
- Herstellung von Landkarten aus Luftaufnahmen
 - Rekonstruktion eines Bauwerkes aus Fotos (Bauaufnahme)
 - Fotomontage aus Bestand und Entwurf

Die Zentralprojektion ist wie die Parallelprojektion keine umkehrbar eindeutige Abbildung. Die umkehrbare Eindeutigkeit kann nur durch Zusatzinformationen, wie z. B. die wahre Größe eines Rechtecks, erreicht werden (vgl. Kapitel 13.11).

2.5 Navigation im dreidimensionalen digitalen Modell

Auch wenn mit einem dreidimensionalen CAD-Programm (Computer Aided Design) gearbeitet wird, in das räumliche Objekte dreidimensional eingegeben werden, sind Verfahren erforderlich, die eine Navigation im dreidimensionalen digitalen Modell ermöglichen, da die üblichen Ein- und Ausgabemedien wie Maus, Bildschirm und Drucker nur zweidimensional sind. Dazu werden die hier vorgestellten Abbildungsmethoden der Parallel- und Zentralprojektion mit den in Kapitel 2.4 dargestellten Methoden der umkehrbaren Eindeutigkeit verwendet, um die Navigation im Raum auch bei der Arbeit mit CAD-Programmen zu ermöglichen. Der Bildschirm kann dafür in vielen CAD-Programmen in mehrere Fenster unterteilt werden, die unterschiedliche Bilder des räumlichen Objekts zeigen. Die umkehrbare Eindeutigkeit der Zweitafelprojektion ermöglicht eine Navigation im Raum mit Hilfe von zwei Fenstern, in denen Grund- und Aufriss des Objektes dargestellt werden.

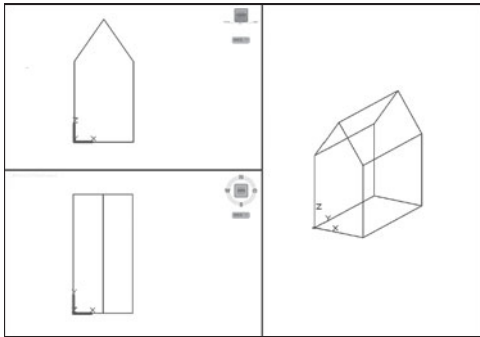


Bild 2.39: Drei Fenster mit Drauf-, Ansicht und Axonometrie in AutoCAD®

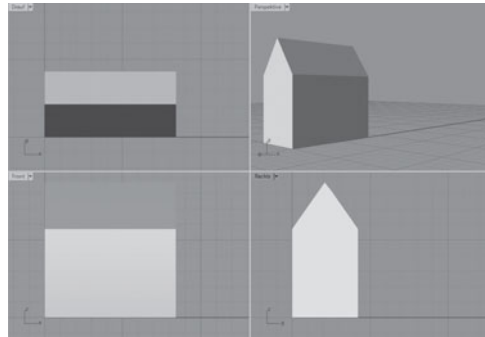


Bild 2.40: Vier Fenster mit Drauf-, Ansicht, Seitenansicht, Perspektive in Rhinoceros®

Im dritten bzw. vierten Fenster wird dann ein Kreuzriss, eine Axonometrie oder eine Perspektive gewählt. Dadurch wird eine permanente Kontrolle mit Hilfe einer anschaulichen Visualisierung des entworfenen bzw. bearbeiteten räumlichen Objekts ermöglicht. Die Darstellung in einer Axonometrie ist bei der Modellierung besonders hilfreich, da dort das Objekt anschaulich, aber trotzdem in korrekten Proportionen und parallelentreu gezeigt wird. In allen Fenstern kann gearbeitet werden, also immer in dem Fenster, das für den jeweiligen Arbeitsschritt am geeignetsten ist. So kann im Grundriss zwar das Objekt nach links oder rechts, vorne oder hinten verschoben werden. Die Höhe des Objektes kann jedoch nur im Aufriss kontrolliert bzw. eingestellt werden. Wird nur ein Fenster verwendet, so können leicht Fehler bei der räumlichen Positionierung entstehen. In AutoCAD® (Bild 2.39) muss der Nutzer diese Fenster selbst einstellen. Für das dreidimensionale Arbeiten ist eine solche Voreinstellung mit mindestens drei Fenstern unbedingt ratsam. Im 3D-Modellierprogramm Rhinoceros® ist das Arbeitsfenster bereits beim Programmstart in vier Fenster unter-

teilt: Draufsicht, Ansicht, Seitenansicht und eine Perspektive des Objekts (Bild 2.40). Die Orientierung der Fenster entspricht der amerikanischen Anordnung der verschiedenen Ansichten (vgl. Bild 2.33). Der Nutzer kann auch die verschiedenen Ansichten in den Fenstern entsprechend seiner Wünsche ändern und zwischen einem einzelnen Fenster und der Vier-Fenster-Ansicht hin und her schalten. Dies ermöglicht ein bequemes Navigieren im räumlichen digitalen Modell, indem jeweils im passenden Fenster gearbeitet wird. Die Lupenfunktion Zoom und die Möglichkeit Pan, den sichtbaren Ausschnitt in den einzelnen Fenstern zu verschieben, erleichtern ergänzend in allen Programmen das digitale Modellieren im Raum.

Eine Möglichkeit, sich nur mit einem Fenster im dreidimensionalen digitalen Modell zurechtzufinden, ist das interaktive Anzeigen von räumlichen Bezügen, wie dies im Modellierprogramm SketchUp[®] verwirklicht ist. Um trotz nur eines Fensters im Raum navigieren zu können, müssen insbesondere Bezüge zum räumlichen Koordinatensystem hergestellt werden. In SketchUp[®] sind die drei Koordinatenachsen x, y und z

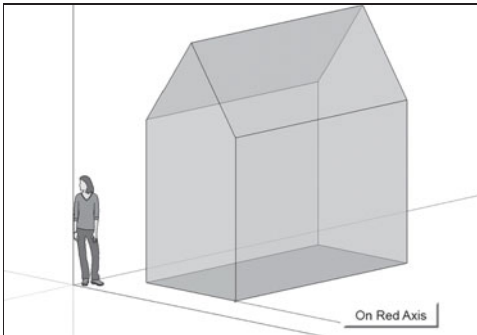


Bild 2.41: Zeichnen einer Geraden parallel zur x-Achse ("on red axis") in SketchUp[®]

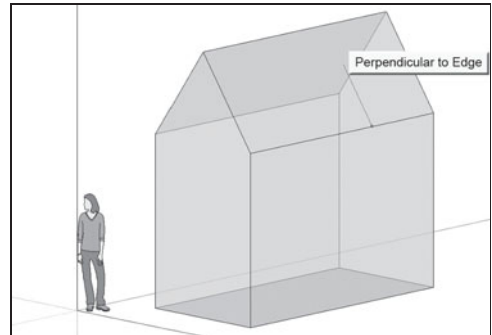


Bild 2.42: Gerade senkrecht zur Kante in der Ebene zeichnen ("perpendicular to edge")

als rote, grüne und blaue Achsen umgesetzt. Eine räumlich korrekte Modellierung wird dann möglich, wenn beim Zeichnen auf das interaktive Anzeigen der Parallelität zu den Koordinatenachsen, z. B. Gerade parallel zur x-Achse zeichnen, geachtet wird (Bild 2.41). Entsprechend können andere interaktiv angezeigte Bezüge innerhalb des räumlichen digitalen Modells wie Parallelität zu vorhandenen Kanten, Festlegen eines Punktes bzw. einer Linie in einer vorhandenen Ebene oder Senkrechte zu einer Geraden in einer Ebene genutzt werden. In Bild 2.42 wird eine Gerade senkrecht zur Traufe des Hauses in der Dachebene gezeichnet. Bei dieser Arbeitsweise ist ein interaktives Drehen des Objektes oder die Darstellung des Objektes wenigstens nacheinander in verschiedenen Ansichten sinnvoll, um die richtige Platzierung bzw. Modellierung zu überprüfen.

3 PARALLEL- UND ZENTRALPROJEKTION EBENER FIGUREN

Um herauszufinden, wie sich die Objekte im Bild durch Parallel- und Zentralprojektion verändern, werden die Abbildungen auf ebene Figuren eingeschränkt. Indem untersucht wird, wie sich die Figur im Bild verändert hat und welche Zusammenhänge es zwischen Original- und Bildfigur gibt, können die geometrischen Gesetzmäßigkeiten der Parallel- und Zentralprojektion aufgezeigt werden. Diese Gesetzmäßigkeiten sind Grundlage für das Zeichnen der Bilder der räumlichen Objekte.

3.1 Parallelprojektion ebener Figuren - Affinität

Eine ebene Figur, die in der Ebene ε liegt, z. B. ein Vieleck, wird mittels Parallelprojektion auf eine Bildebene δ abgebildet.

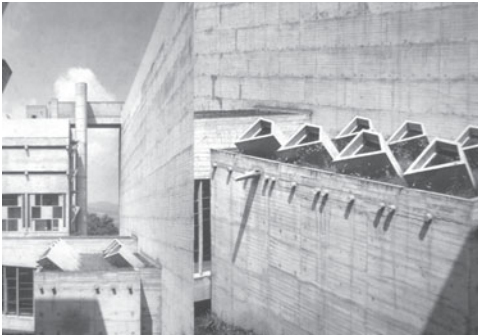


Bild 3.1: Couvent Sainte Marie de la Tourette, Frankreich, 1957-60, Le Corbusier

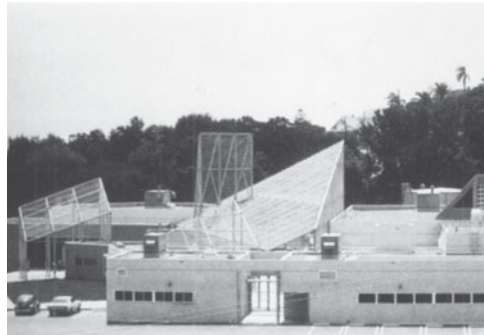


Bild 3.2: Cabrillo Marine Museum, San Pedro, Kalifornien, 1979, Frank O. Gehry

Die Schnittfigur eines Prismas kann als Bild der Grundfigur des Prismas wie in Bild 3.1 und Bild 3.2 aufgefasst werden. Die beiden Ebenen ε und δ heißen dann **affin** (lat. verwandt) aufeinander bezogen. Die Figur in der Ebene ε ist affin zur Bildfigur in der Ebene δ .

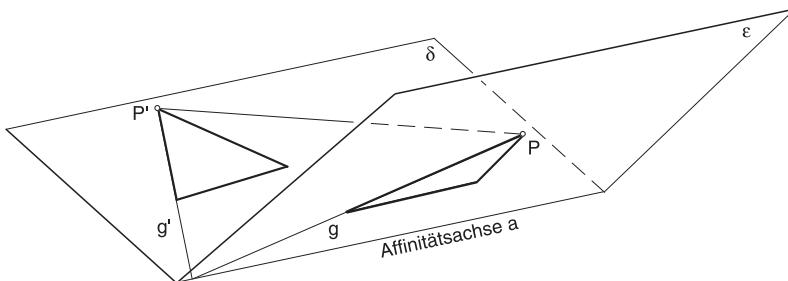


Bild 3.3: Affinität zwischen den Ebenen ε und δ

Die Schnittgerade a der Ebenen ε und δ heißt **Affinitätsachse**, die parallelen Projektionsstrahlen heißen **Affinitätsstrahlen**. Die wichtigsten Eigenschaften einer **Affinität** folgen aus den Eigenschaften der Parallelprojektion:

1. Jedem Punkt P von ε ist umkehrbar eindeutig Punkt P' von δ zugeordnet. Die Punkte der Affinitätsachse a sind sich selbst zugeordnet.
2. Einander zugeordnete Punkte P und P' liegen auf einem Affinitätsstrahl. Alle Affinitätsstrahlen sind untereinander parallel.
3. Jeder Geraden g von ε ist umkehrbar eindeutig eine Gerade g' von δ zugeordnet.
4. Einander zugeordnete Geraden g und g' schneiden einander auf der Affinitätsachse a (Bild 3.3).

Wenn die Affinität zwischen den Ebenen ε und δ des Raumes gezeichnet wird, so wird aus der räumlichen Affinität eine ebene Affinität. Wird die Ebene ε und δ des Raumes, zwischen denen eine Affinität (Achse a , zugeordnetes Punktepaar A, B) besteht, in der Projektionsrichtung p auf eine Bildebene π projiziert, so entsteht eine ebene Affinität der Bildebene π .

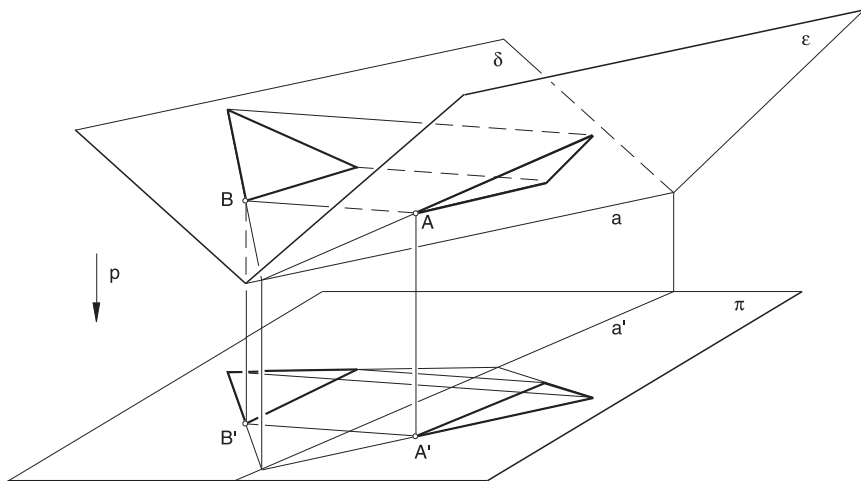


Bild 3.4: Ebene Affinität

Eine Affinität zwischen zwei Ebenen geht bei Parallelprojektion über in eine ebene Affinität der Bildebene.

Zum Zeichnen kann auch die Ebene, in der die abzubildende Figur liegt, um die Affinitätsachse in die Bildebene gedreht werden. Bei dieser Drehung bleibt die affine Beziehung erhalten. Der Parallelriss einer ebenen Figur und die in die Bildebene gedrehte ebene Figur sind zueinander affin. Die Drehachse ist dabei die Affinitätsachse a , und die Bilder der Drehsehnen PP_0 sind die Affinitätsstrahlen.

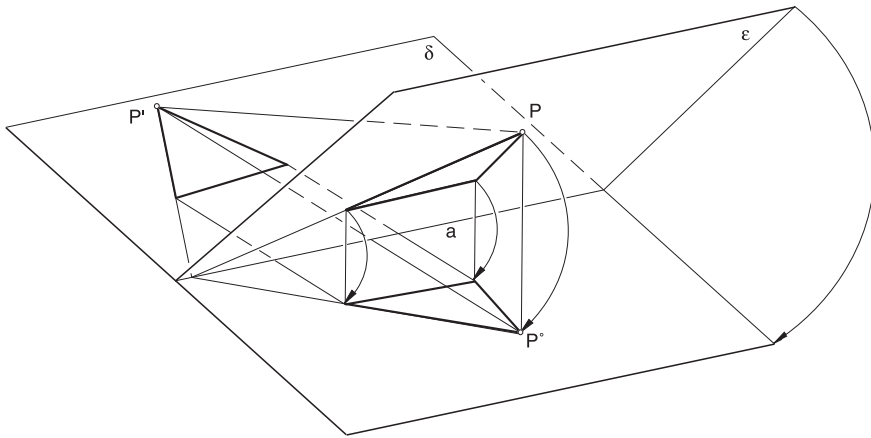


Bild 3.5: Parallelriss und Drehlage einer ebenen Figur



Eine Affinität ist bestimmt durch die Achse a und ein Paar einander zugeordneter Punkte $P - P'$.

Die Eigenschaften der Affinität können benutzt werden, um den Parallelriss einer ebenen Figur zu ermitteln. Bei den folgenden Problemstellungen können die Zusammenhänge der Affinität angewandt werden:

1. Konstruktion des ebenen Schnittes eines Prismas (vgl. Kapitel 5.4.4)

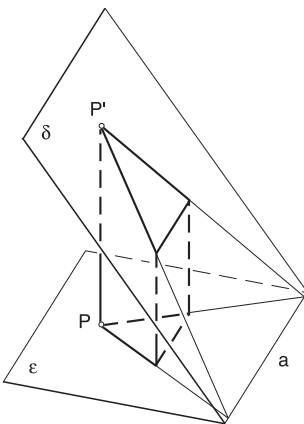


Bild 3.6: Ebener Schnitt eines Prismas

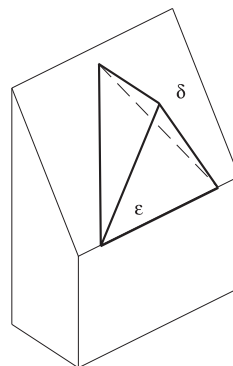


Bild 3.7: Dachgaube

2. Drehen einer ebenen Figur

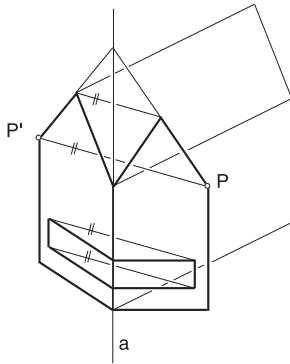


Bild 3.8: Bild einer gedrehten ebenen Figur

3. Schattenkonstruktion bei Parallelbeleuchtung (vgl. Kapitel 8)

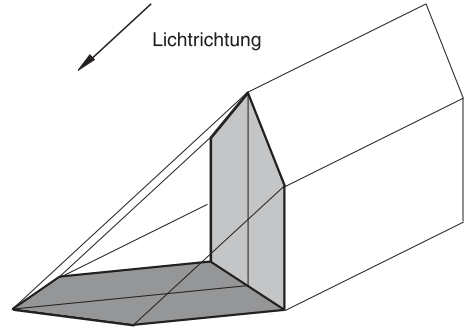


Bild 3.9: Schattenkonstruktion bei Parallelbeleuchtung

4. Konstruktion des axonometrischen Risses aus dem Normalriss eines Objektes

Aus dem in die Zeichenebene gedrehten Grundriss eines Hauses kann z. B. der axonometrische Grundriss des Hauses konstruiert werden.

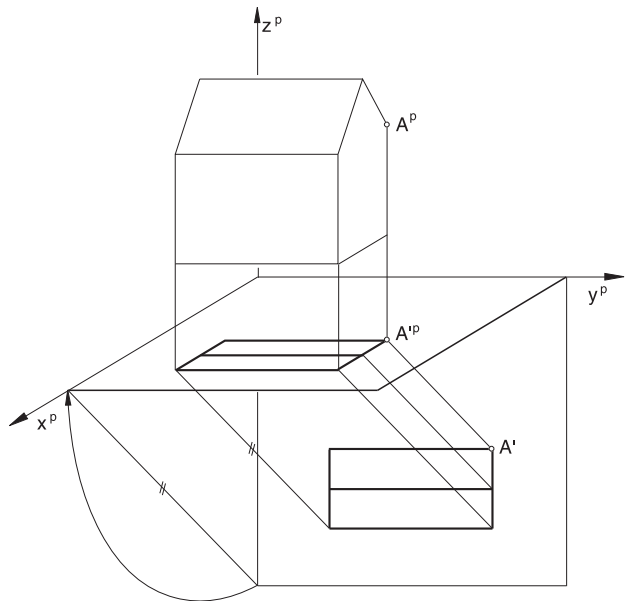


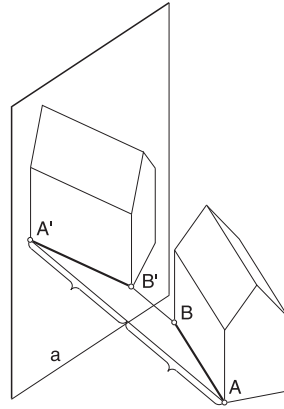
Bild 3.10: Konstruktion des axonometrischen Grundrisses aus dem Grundriss eines Hauses

Ein Sonderfall der Affinität ist die **senkrechte Affinität**, bei der die Affinitätsstrahlen senkrecht zur Affinitätsachse stehen. Dieser Fall entsteht, wenn die wahre Gestalt einer ebenen Figur aus den Normalprojektionen der Figur, z. B. Grund- und Aufriss, ermittelt wird (vgl. Kapitel 5.6.4).

In der axonometrischen Zeichnung bleibt aber die räumliche senkrechte Affinität im allgemeinen nicht erhalten, so dass daraus in der Axonometrie eine allgemeine Affinität wird.

Die **Spiegelung** ist ein Sonderfall der senkrechten Affinität, bei der Punkt und Bildpunkt den gleichen Abstand von der Affinitätsachse haben.

Bild 3.11: Spiegelbild eines Hauses



3.2 Zentralprojektion ebener Figuren - Kollineation

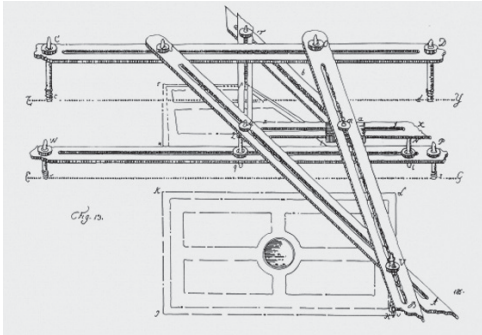


Bild 3.12: Perspektograph, 1752, Johann Heinrich Lambert



Bild 3.13: Beth Shalom Synagogue, Elkins Park, Pennsylvania, 1954, Frank Lloyd Wright

Wird eine Ebene ε auf eine Ebene δ durch eine Zentralprojektion abgebildet, so heißen die beiden Ebenen **kollinear** aufeinander bezogen. Die Schnittfigur einer Pyramide wie in Bild 3.13 kann als kollineares Bild der Grundfigur der Pyramide aufgefasst werden.

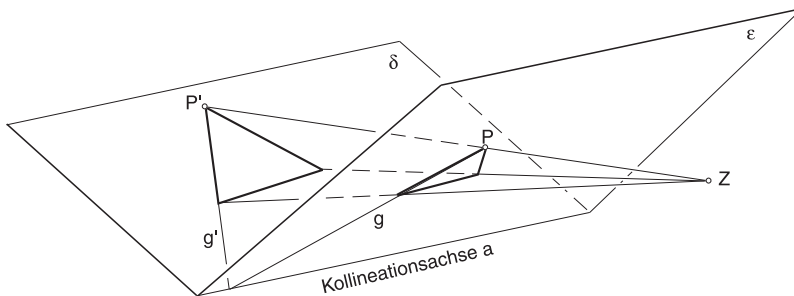


Bild 3.14: Kollineation zwischen den Ebenen ε und δ .

Eine Figur in der Ebene ε ist kollinear zur Bildfigur in der Ebene δ . Die Schnittgerade a der Ebenen ε und δ heißt **Kollineationsachse**, die Projektionsstrahlen heißen **Kollineationsstrahlen**, die einander alle im **Kollineationszentrum** Z schneiden. Die Eigenschaften einer **Kollineation** folgen aus den Eigenschaften der Zentralprojektion:

1. Jedem Punkt P von ε ist umkehrbar eindeutig Punkt P' von δ zugeordnet. Die Punkte der Kollineationsachse a sind sich selbst zugeordnet (Bild 3.14).
2. Einander zugeordnete Punkte P und P' liegen auf Kollineationsstrahlen, die einander im Kollineationszentrum Z schneiden.
3. Jeder Geraden g von ε ist umkehrbar eindeutig eine Gerade g' von δ zugeordnet.
4. Gerade g und Bildgerade g' schneiden einander auf der Kollineationsachse a .

Die Kollineation zwischen den Ebenen ε und δ geht durch Parallel- oder Zentralprojektion auf die Bildebene π über in eine ebene Kollineation.



Eine ebene Kollineation ist bestimmt durch die Vorgabe der Kollineationsachse a , des Kollineationszentrums Z und einem Paar einander zugeordneter Punkte P und P' (Bild 3.16).

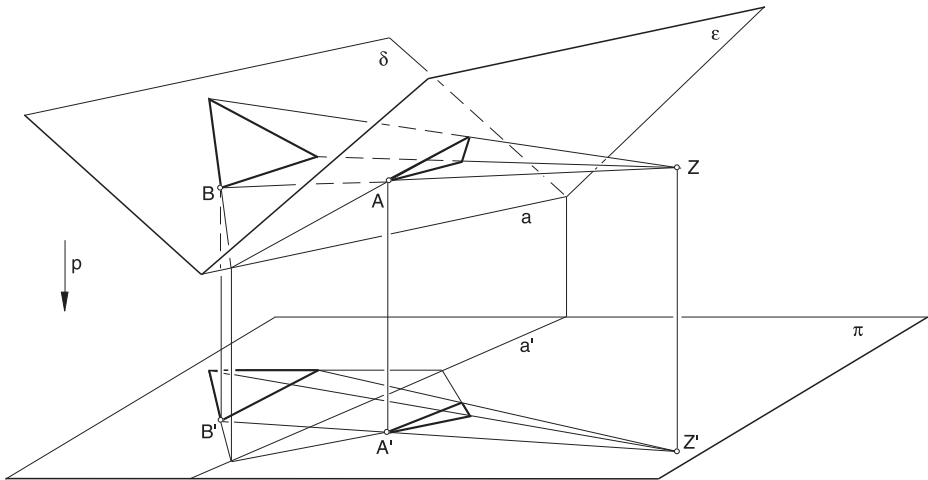


Bild 3.15: Ebene Kollineation

Wie bei der Affinität kann beim Zeichnen die Ebene, in der die abzubildende Figur liegt, um die Kollineationsachse in die Bildebene gedreht werden. Bei dieser Drehung bleibt die kollineare Beziehung erhalten. Der Zentralriss einer ebenen Figur und ihre Drehung in die Bildebene sind zueinander kollinear (Bild 3.16).

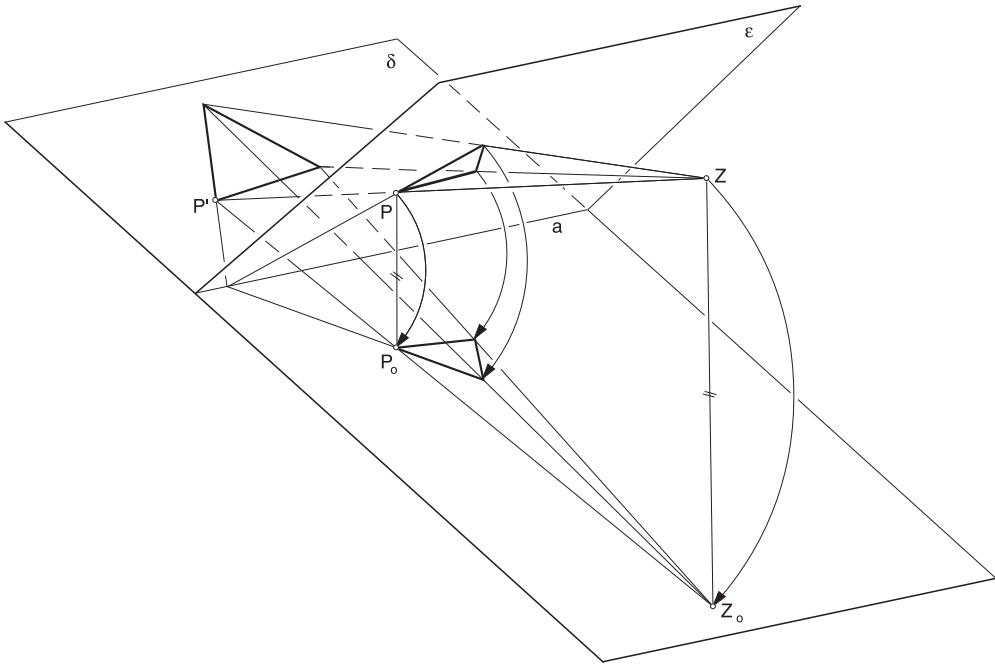


Bild 3.16: Zentralriss und Drehlage einer ebenen Figur

Die Eigenschaften der Kollineation können benutzt werden, um das kollineare Bild einer ebenen Figur zu ermitteln. Bei den folgenden Problemstellungen können die Zusammenhänge der Kollineation angewandt werden:

1. Konstruktion des ebenen Schnittes einer Pyramide

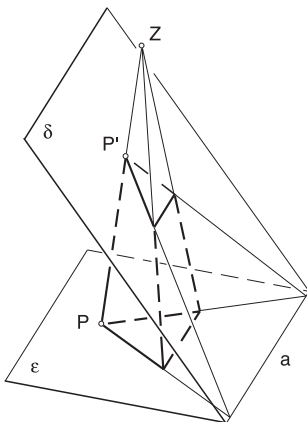


Bild 3.17: Ebener Schnitt einer Pyramide

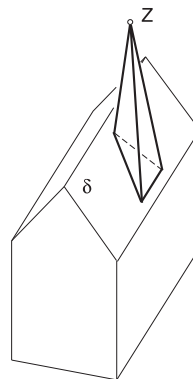


Bild 3.18: Dachreiter

2. Drehen einer ebenen Figur
in einer Perspektive

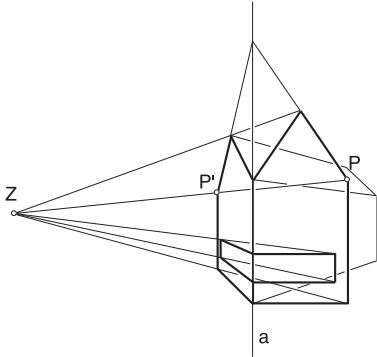


Bild 3.19: Drehen einer Figur

3. Schattenkonstruktion einer ebenen
Figur bei Zentralbeleuchtung

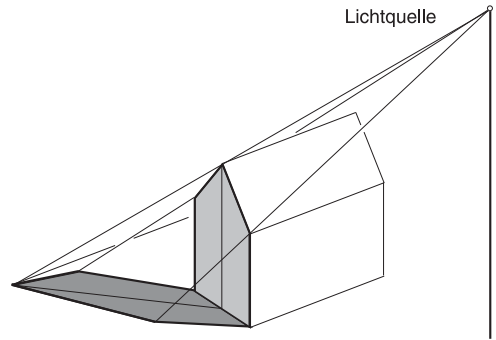


Bild 3.20: Schattenkonstruktion bei Zentralbeleuchtung

4. Konstruktion des perspektiven Risses aus dem Normalriss eines Objektes
(vgl. Kapitel 13.3.3)

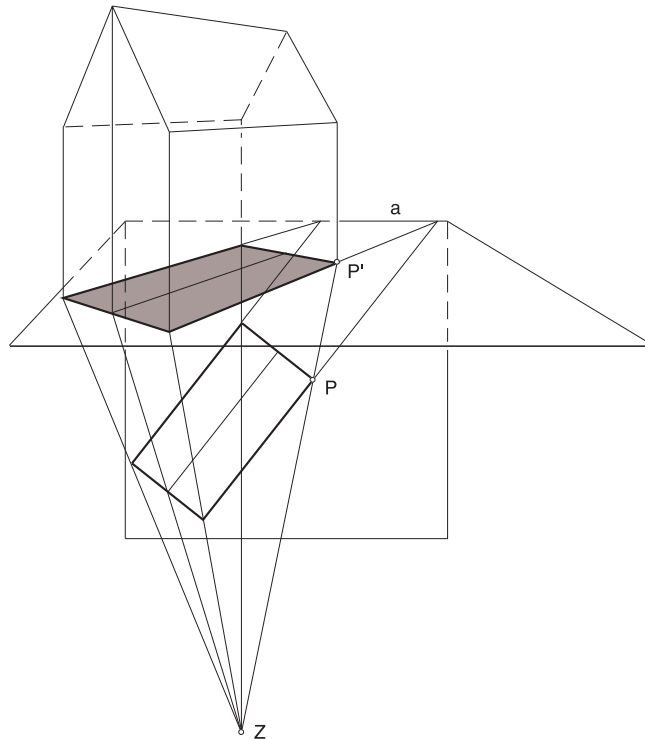


Bild 3.21: Konstruktion des perspektiven Grundrisses aus dem Grundriss eines Hauses

3.3 Affines Bild eines Kreises

Nach den Vielecken wird der Kreis als weitere grundlegende ebene Figur durch Parallelprojektion abgebildet. Mit Hilfe der Affinität wird das Bild eines Kreises bei Parallelprojektion analysiert.

! Das affine Bild eines Kreises ist eine **Ellipse**.

Die Eigenschaften der Ellipse können aus denen des Kreises und der Affinität abgeleitet werden.

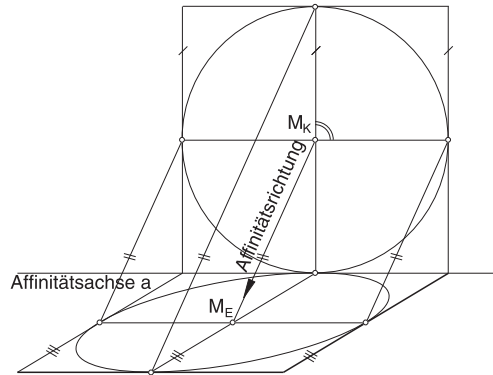


Bild 3.22: Eigenschaften des Kreises - Affinität - Eigenschaften der Ellipse



Bild 3.23: Rad und Schatten auf der Straße bei Sonnenlicht



Bild 3.24: Detail an der Oberbaumbrücke, Berlin

Kreis	Ellipse
Kreisdurchmesser	Ellipsendurchmesser
parallele Kreistangenten	parallele Ellipsentangenten
senkrechte Kreisdurchmesser	konjugierte Ellipsendurchmesser

Aus den Eigenschaften des Kreises und der Affinität ergeben sich folgende Eigenschaften der Ellipse und Definitionen:

1. Jeder durch den Kreismittelpunkt M_K gehenden Kreissehne (Kreisdurchmesser) entspricht eine durch M_E gehende Ellipsensehne. Diese wird wegen der Teilverhältnistreue der Affinität durch M_E halbiert. M_E heißt **Mittelpunkt der Ellipse** und die durch ihn gehenden Sehnen heißen **Ellipsendurchmesser**.
2. Die Eigenschaft der Kreisdurchmesser, dass in ihren Endpunkten die Tangenten zueinander parallel sind, bleibt wegen der Parallelentreue der Affinität auch für Ellipsendurchmesser erhalten.
3. Ein Paar von Ellipsendurchmessern heißt zueinander **konjugiert**, wenn es Bild eines Paares zueinander senkrechter Kreisdurchmesser ist. Jeder Ellipsendurchmesser halbiert die zu seinem konjugierten Durchmesser parallelen Sehnen und ist wegen der Parallelentreue der Affinität parallel zu den Tangenten in den Endpunkten seines konjugierten Ellipsendurchmessers.
4. Es gibt nur ein einziges Paar konjugierter Durchmesser der Ellipse, das auch zueinander senkrecht ist, d. h. es gibt ein Paar zueinander senkrechter Kreisdurchmesser, das auf zueinander senkrechte Ellipsendurchmesser abgebildet wird. Diese zueinander senkrechten konjugierten Ellipsendurchmesser heißen **Achsen der Ellipse**, ihre Endpunkte **Scheitel**. Die lange Achse einer Ellipse heißt ihre **Hauptachse**, die kurze ihre **Nebenachse**. Die Scheitel auf der Hauptachse der Ellipse heißen ihre **Hauptscheitel**, die auf der Nebenachse ihre **Nebenscheitel**.

Haupt- und Nebenachsen sowie die Scheitel der Ellipse können mit Hilfe einer Thaleskreiskonstruktion (Bild 3.28) gefunden werden, wenn der Kreis (Urbild), die Affinitätsachse a und der Mittelpunkt M_E der Ellipse gegeben sind.

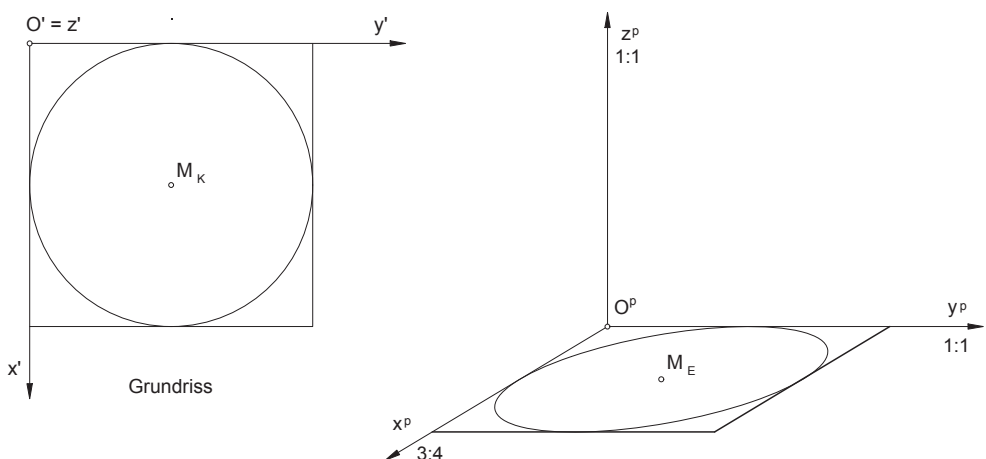


Bild 3.25: Kreis in der Grundrissebene - Axonometrie

Bei einer entsprechenden Problemstellung ist es meistens möglich, diese Elemente leicht zu ermitteln.

Soll zum Beispiel die vorgegebene Axonometrie eines in der Grundrissebene liegenden Kreises wie in Bild 3.25 gezeichnet werden, so kann die y -Achse als die Affinitätsachse verwendet werden, da bei dieser Axonometrie die y -Achse unverzerrt bleibt. Um einen Zusammenhang zwischen dem Grundriss des Objektes und seinem axonometrischen Grundriss herzustellen, können beide so angeordnet werden, dass die y' -Achse mit der y^p -Achse zusammenfällt (Bild 3.26).

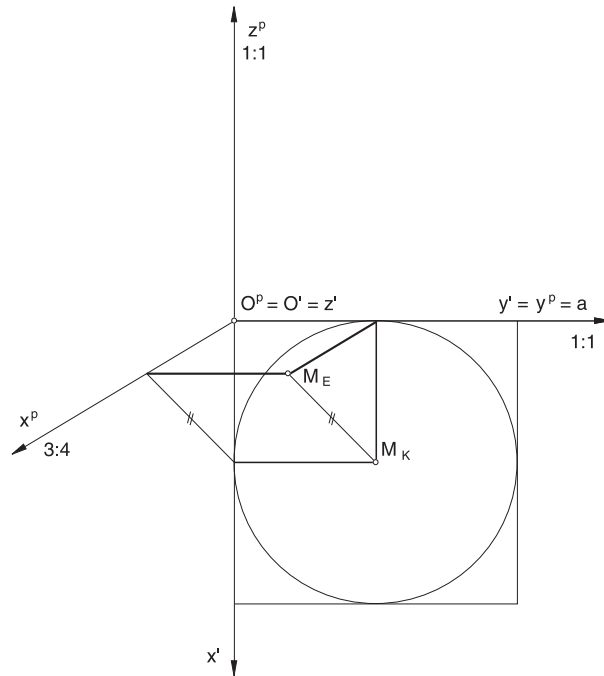


Bild 3.26: Zusammenhang zwischen Grundriss und axonometrischem Grundriss

Damit sich die beiden Bilder in der Zeichenebene nicht überlagern, kann der Grundriss auch nach oben in die Zeichenebene geklappt werden (Bild 3.27). Die y -Achse ist wieder die Affinitätsachse a , und die Affinitätsrichtung ist bestimmt durch die Verbindungsgerade des Kreismittelpunktes M_K mit dem Ellipsenmittelpunkt M_E . Die Ellipse ist mit diesen Bestimmungselementen der Affinität festgelegt.

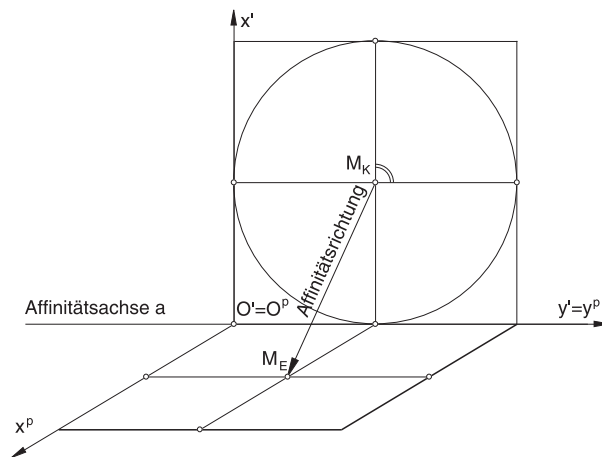


Bild 3.27: Bestimmungselemente der Affinität

Die Ellipse kann mit Hilfe der Affinität punkt- und tangentialweise aus dem Kreis ermittelt werden. Zum Zeichnen der Ellipse sollten mindestens acht Punkte mit Tangenten an die Ellipse bestimmt werden. Bild 3.28 zeigt die Konstruktion von acht Ellipsenpunkten mit Tangenten, indem die Seiten und die Diagonalen des Quadrats mit Hilfe der Affinität abgebildet werden. Das Quadrat mit Diagonalen wird in ein Parallelogramm mit Diagonalen abgebildet. Da beim Quadrat die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen, werden diese in konjugierte Ellipsendurchmesser abgebildet, mit der Eigenschaft, dass die Tangenten in den Endpunkten der Ellipsendurchmesser parallel sind zum konjugierten Ellipsendurchmesser (vgl. 3. Eigenschaft, S. 58). Damit entsteht ein zweites Parallelogramm, in das die Ellipse eingeschrieben werden kann. Insbesondere die Tangenten helfen, den Verlauf der Ellipse zu bestimmen.

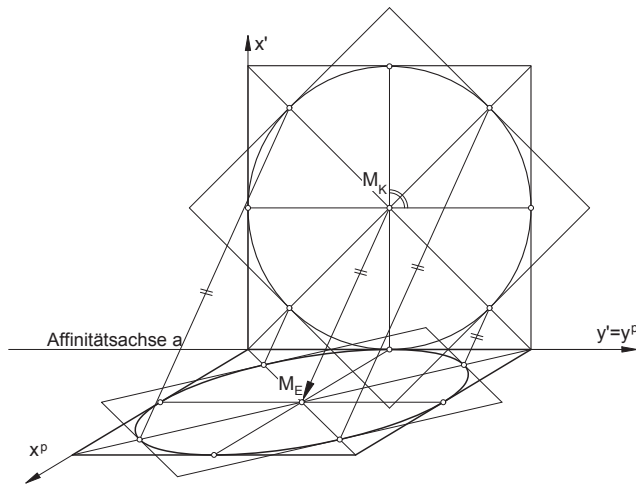


Bild 3.28: Konstruktion von Punkten und Tangenten der Ellipse als affines Bild des Kreises

Beliebige Punkte mit Tangenten können ebenfalls mittels der Affinität als Ellipsenpunkte mit Tangente gefunden werden. In Bild 3.29 wird Punkt P_K mit Tangente $t(P_K)$ in den Ellipsenpunkt P_E mit Tangente $t(P_E)$ abgebildet.

Die Ellipse kann präziser gezeichnet werden, wenn der längste und kürzeste Ellipsendurchmesser, d. h. die Achsen (Haupt- und Nebenachse) und Scheitel (Haupt- und Nebenscheitel) der Ellipse (vgl. 4. Eigenschaft, S. 58), bekannt sind. In den meisten CAD-Programmen müssen diese bekannt sein, um die Ellipse als Kurve einzuzichnen. Um die Achsen und Scheitel zu finden, muss das Paar zueinander senkrecht stehender Kreisdurchmesser gesucht werden, das auf zueinander senkrecht stehende Ellipsendurchmesser abgebildet wird. Daher muss ein Quadrat als den Kreis umschreibende Figur gesucht werden, das durch die Affinität in ein spezielles Parallelogramm, ein Rechteck, als die Ellipse umschreibende Figur abgebildet wird.

Wenn im Sonderfall das Quadrat in eine Raute, ein Parallelogramm mit gleich langen Seiten, abgebildet wird, bilden die Diagonalen der Raute die Achsen der Ellipse, da bei der Raute die Diagonalen ebenfalls senkrecht aufeinander stehen. Das ist z. B. der Fall, wenn die Koordinatenachsen der Trägerebene des Kreises in einer Axonometrie gleich verkürzt werden.

Bild 3.30 zeigt das Quadrat mit Kreis im allgemeinen Fall das in das Rechteck mit Ellipse abgebildet wird. Die beiden Figuren schneiden einander auf der Affinitätsachse, da die Punkte der Affinitätsachse bei der Abbildung fest bleiben.

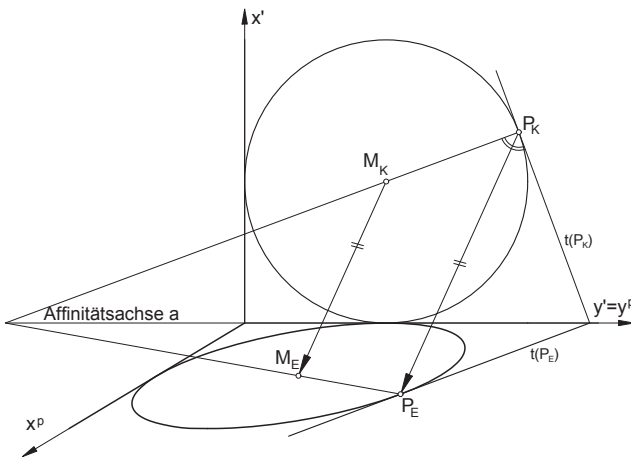


Bild 3.29: Konstruktion eines beliebigen Punktes der Ellipse mit Tangente

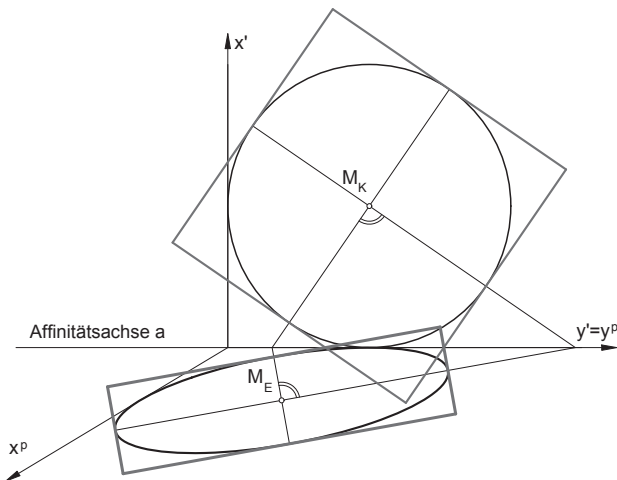


Bild 3.30: Ellipse mit Rechteck als affines Bild des Kreises mit Quadrat

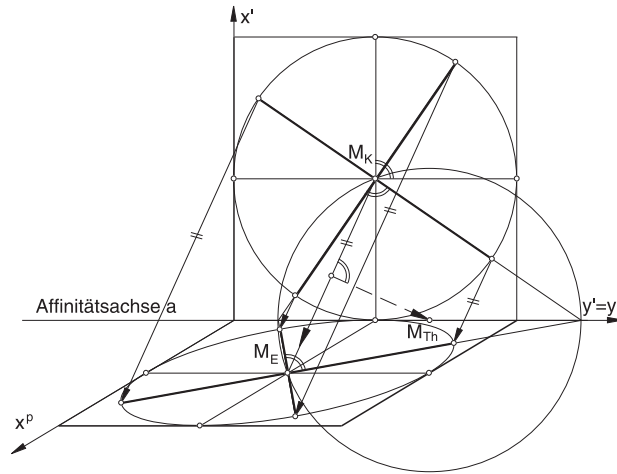


Bild 3.31: Konstruktion der Ellipsenachsen mit Hilfe eines Thaleskreises

Die Achsen der Ellipse sind die Bilder der senkrecht aufeinanderstehenden Kreisdurchmesser, die auf senkrecht aufeinanderstehende Ellipsendurchmesser abgebildet werden. Daher muss ein "Rechtwinkelpaar" von Kreisdurchmessern gesucht werden, das auf ein "Rechtwinkelpaar" von Ellipsendurchmessern abgebildet wird. Diese werden mit Hilfe eines Thaleskreises gefunden:

1. Der Thaleskreis muss durch den Kreismittelpunkt M_K und den Ellipsenmittelpunkt M_E gehen. Da sich eine Gerade und ihre Bildgerade jeweils auf der Affinitätsachse a schneiden, liegt der Mittelpunkt M_{Th} des Thaleskreises auf der Affinitätsachse a . Daher ist der Schnittpunkt der Affinitätsachse a mit der Mittelsenkrechten der Strecke $M_K M_E$ der Mittelpunkt des Thaleskreises.
2. Der Thaleskreis schneidet die Affinitätsachse a in Punkten des gesuchten Kreisdurchmesser- und Ellipsendurchmesserpaars. Verbindet man diese beiden Schnittpunkte mit dem Ellipsenmittelpunkt M_E , so erhält man die beiden Achsen der Ellipse.
3. Affinitätsstrahlen durch die Endpunkte der gefundenen zueinander senkrechten Kreisdurchmessern schneiden die Achsen der Ellipse in ihren Scheiteln.

Bildet man eine Ellipse mittels Parallelprojektion ab, so entsteht als affines Bild der Ellipse wieder eine Ellipse. Die Achsen und Scheitel der Ellipse bleiben dabei i. a. nicht erhalten. Wegen der Parallelentreue und Teilverhältnistreue der Affinität gehen aber konjugierte Durchmesser der Originalellipse in konjugierte Durchmesser der Bildellipse über. Aus den Achsen der Ellipse werden also bei der Abbildung konjugierte Ellipsendurchmesser der Bildellipse.

Entsprechend der Anwendung der Affinität auf den Schnitt eines Prismas, entsteht eine Ellipse, wenn ein Drehzylinder schräg geschnitten wird (vgl. Kapitel 7.4.2). Die Hörsaalgebäude der Technischen Universität Kaiserslautern (Bild 3.32) werden aus schräg geschnittenen Drehzylindern gebildet. Auch beim Geschäftsgebäude Hilios in Kobe, Japan, von Shin Takamatsu und Gabriel E. Lahyani, das 1988-91 gebaut wurde (Bild 3.33), tritt eine Ellipse als schräger Schnitt eines Drehzylinders auf. In beiden Fällen können die Ellipsen als affine Bilder der Grundkreise der Drehzylinder konstruiert werden.

3.4 Ellipsenkonstruktionen

Je nachdem was von einer Ellipse bekannt ist, können auch andere Zusammenhänge für die Konstruktion der Ellipse Anwendung finden.



Bild 3.32: Hörsaalgebäude der TU Kaiserslautern, 1993, Scherer, Saarbrücken



Bild 3.33: Gebäude Hilios, Kobe, Japan, 1988-91, Shin Takamatsu und Gabriel E. Lahyani

3.4.1 Punktkonstruktion aus Haupt- und Nebenscheiteln

Die Kreise um den Ellipsenmittelpunkt durch die Scheitel der Ellipse heißen Scheitelkreise, und zwar **Hauptscheitelkreis** oder **Nebenscheitelkreis**, je nachdem ob der Kreis durch die beiden Hauptscheitel oder durch die beiden Nebenscheitel der Ellipse geht. Jede Ellipse ist ein affines Bild ihres Hauptscheitelkreises und affines Bild ihres Nebenscheitelkreises. Daraus kann die folgende Punkt- und Tangentenkonstruktion der Ellipse entwickelt werden:

Die Ellipse entsteht erstens aus dem Hauptscheitelkreis durch eine senkrechte Affinität mit der Hauptachse der Ellipse als Affinitätsachse. Sie entsteht zweitens aus dem Nebenscheitelkreis durch eine senkrechte Affinität mit der Nebenachse als Affinitätsachse.

Die Punkte P_1 und P_2 des Haupt- und Nebenseitelkreises, deren Bildpunkt der Ellipsenpunkt P ist, liegen auf einer Geraden durch den Ellipsenmittelpunkt.¹

Daher kann ein beliebiger Ellipsenpunkt P gefunden werden, indem durch den Ellipsenmittelpunkt eine beliebige Gerade, durch den Schnittpunkt P_2 mit dem Nebenseitelkreis eine Parallele zur Hauptachse und durch ihren Schnittpunkt P_1 mit dem Hauptsitelkreis eine Parallele zur Nebenachse gezeichnet wird. Der Schnittpunkt der beiden Affinitätsstrahlen ist ein Ellipsenpunkt P . Die Tangenten t_E an die Ellipse geht durch die erste Affinität aus der Hauptsitelkreistangente t_K hervor.

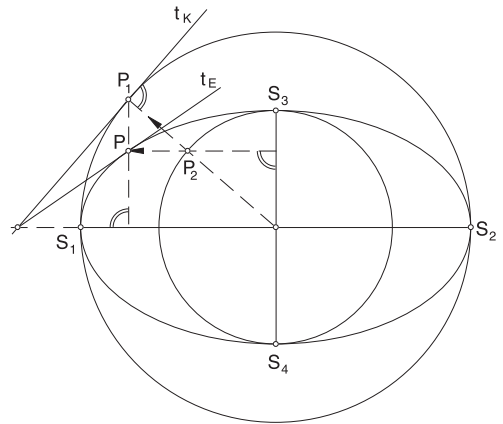


Bild 3.34: Ellipse als affines Bild ihres Haupt- und Nebenseitelkreises

3.4.2 Papierstreifenkonstruktion

Wird in der Figur von Bild 3.34 für die Punktkonstruktion einer Ellipse eine Parallele durch den Ellipsenpunkt P zur verwendeten Geraden durch den Ellipsenmittelpunkt gezogen, so entstehen mehrere Parallelogramme.

Daraus folgt:

Der Ellipsenpunkt P liegt auf einer Geraden, die die Hauptachse in einem Punkt X und die Nebenachse in einem Punkt Y derart schneidet, dass gilt:

$$\begin{aligned} \overline{PX} &= \text{Länge der halben Nebenachse} = b \\ \overline{PY} &= \text{Länge der halben Hauptachse} = a \end{aligned}$$

Markiert man die Punkte X und Y auf einem Papierstreifen und bewegt diesen Papierstreifen so, dass X auf der Hauptachse und Y auf der Nebenachse der Ellipse läuft, so wandert P auf der Ellipse.

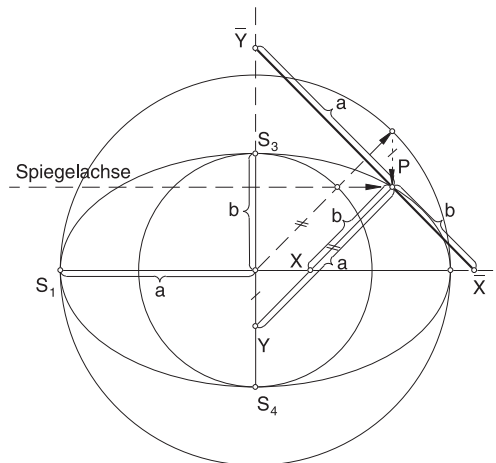


Bild 3.35: Papierstreifenkonstruktion der Ellipse

1. Zum Beweis vgl. F. Reutter: Darstellende Geometrie. Band 1, S.22f.

Wird der Papierstreifen an der Parallelen zur Hauptachse durch P gespiegelt, so entsteht ein weiterer Papierstreifen, auf dem die Punkte X und Y auf verschiedenen Seiten des Punktes P liegen.

Aus diesen beiden möglichen Papierstreifen ergibt sich insgesamt die folgende Papierstreifenkonstruktion:

Markiert man auf einen Papierstreifen drei Punkte X, Y und P in beliebiger Reihenfolge derart, dass \overline{PX} = Länge der halben Nebenachse, \overline{PY} = Länge der halben Hauptachse, und bewegt diesen Papierstreifen so, dass X auf der Hauptachse der Ellipse und Y auf der Nebenachse der Ellipse zu liegen kommt, so beschreibt P die Ellipse.

Diese Konstruktion war schon Proclus Diadochos (410-485 n. Chr.) bekannt. Sie wird verwendet, um Ellipsenzirkel zu bauen.

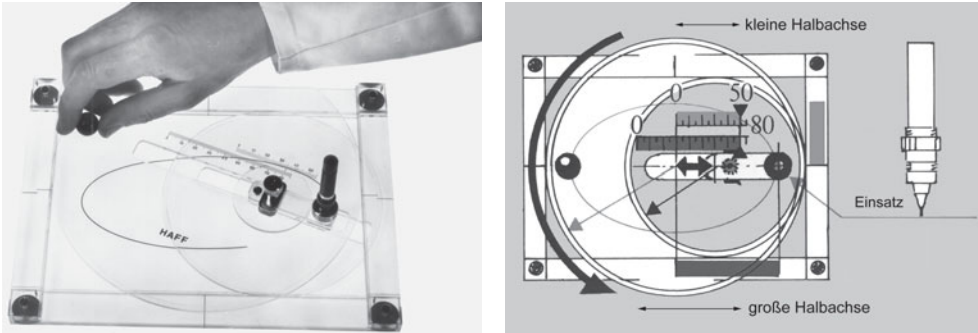


Bild 3.36: Ellipsenzirkel

Je nachdem, was von der Ellipse bekannt ist, kann diese Konstruktion in unterschiedlicher Reihenfolge auch verwendet werden, um fehlende Bestimmungsstücke der Ellipse zu finden (vgl. Kapitel 5.6.7).

3.4.3 Konstruktion der Ellipsenachsen aus einem Paar konjugierter Durchmesser nach Rytz

Die Rytz'sche Konstruktion (David Rytz, 1845) ermöglicht, aus **zwei konjugierten Durchmessern** einer Ellipse, also den Bildern zweier senkrecht aufeinanderstehender Kreisdurchmesser, die Achsen zu bestimmen.

Die Ellipse wird bei dieser Konstruktion als affines Bild des Haupt- und Nebenscheitelskreises betrachtet. Unter Verwendung des Thaleskreises kann die Lage der Achsen gefunden werden.

Die Zusammenhänge bei der Papierstreifenkonstruktion liefern schließlich die Längen der Achsen und damit die Scheitel der Ellipse.²

Es ergibt sich die folgende Ellipsenkonstruktion (Bild 3.38):

Die Strecke $M_E Q$ wird um den Punkt M um 90° gedreht (Punkt R). Dann sucht man den Mittelpunkt H der Strecke PR und zeichnet mit H als Mittelpunkt einen Kreis durch M . Dieser Kreis schneidet die Gerade PR in zwei Punkten. Derjenige dieser Schnittpunkte, der weiter von P entfernt ist, heißt Y , der andere X . Es ist ein Papierstreifen wie in 3.4.2 entstanden. X liegt auf der Verlängerung der Hauptachse. Y liegt auf der Verlängerung der Nebenachse.

\overline{PX} = Länge der halben Nebenachse = b

\overline{PY} = Länge der halben Hauptachse = a

Das Ergebnis der Konstruktion ist unabhängig von der Drehrichtung und der Wahl des Ellipsendurchmessers, der gedreht wird.

Die Rytz'sche Konstruktion kann z. B. angewandt werden, wenn das axonometrische Bild eines Kreises konstruiert werden soll, entsprechend der Thaleskreiskonstruktion in Kapitel 3.3.

Im folgenden Beispiel liegt der Kreis in der Aufrissebene. Um das axonometrische Bild dieses Kreises mit dem Bildkoordinatensystem (O^P, x^P, y^P, z^P) zu finden, werden im Aufriss die senkrecht aufeinanderstehenden Kreisdurchmesser parallel zu den Koordinatenachsen y'' und z'' eingezeichnet. Deren Bilder in der Axonometrie sind dann konjugierte Ellipsendurchmesser (Bild 3.37).

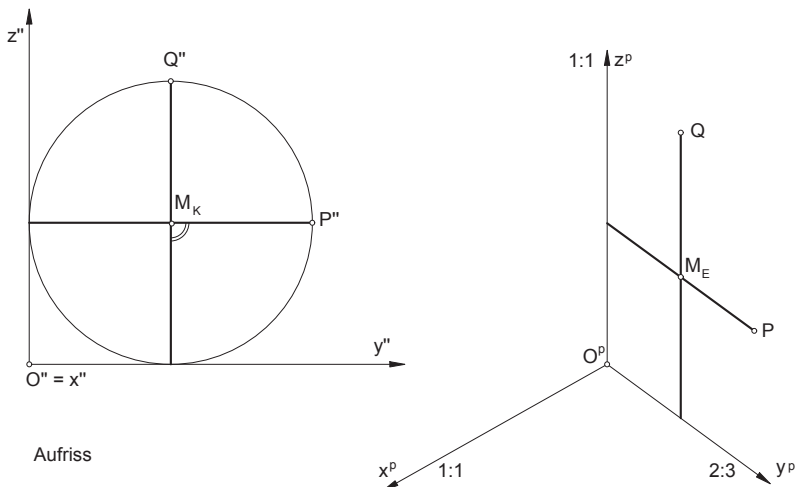


Bild 3.37: Axonometrische Bilder der senkrechten Kreisdurchmesser - konjugierte Ellipsendurchmesser

2. Zur Begründung s. F. Reutter: Darstellende Geometrie, Band 1, S. 25.

Es könnten auch beliebige senkrecht aufeinander stehende Kreisdurchmesser gewählt werden und deren Bilder dann als konjugierte Ellipsendurchmesser in der Axonometrie gesucht werden. Die Parallelen zu den Koordinatenachsen sind jedoch leichter in der Axonometrie zu ermitteln. Aus diesen konjugierten Ellipsendurchmessern können dann mit Hilfe der Rytz'schen Konstruktion die Achsen und Scheitel der Ellipse gefunden werden.

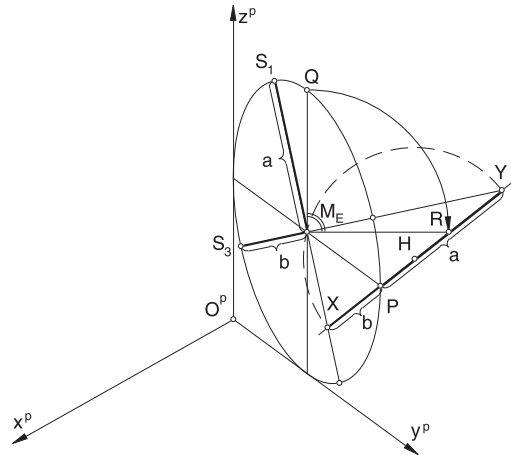


Bild 3.38: Rytz'sche Konstruktion

1. Drehe $M_E Q$ um M_E um 90°
 \rightarrow Gerade $M_E R$
2. Suche Mittelpunkt H von PR
3. Zeichne Kreis um H durch M_E
 \rightarrow Schnittpunkte Y und X mit Gerade PR
4. Die Gerade $M_E X$ ist die Hauptachse, die Gerade $M_E Y$ die Nebenachse der Ellipse.
5. Mit $\overline{PY} = a$ und $\overline{PX} = b$ erhält man die Haupt- und Nebenscheitel der Ellipse.

3.4.4 Scheitelkrümmungskreise der Ellipse

Wenn die Haupt- und Nebenscheitel einer Ellipse gefunden wurden, kann die Ellipse mit Hilfe der Scheitelkrümmungskreise gezeichnet werden. Die Scheitelkrümmungskreise stellen eine gute Näherung der Ellipse um die Scheitel herum dar.

Durch drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, geht genau ein Kreis. Wählt man auf einer Kurve drei Punkte P , X und Y , so bestimmen diese einen Kreis. Durch Berechnung der Grenzlage dieses Kreises für den Fall, dass X und Y gegen P gehen (Bild 3.39), wird im allgemeinen ein eindeutig bestimmter Kreis erhalten.

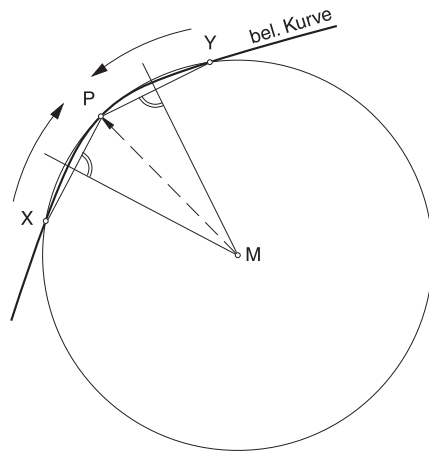


Bild 3.39: Krümmungskreis einer Kurve im Punkt P

Dieser Kreis heißt Krümmungskreis der Kurve im Punkt P. Der Krümmungskreis einer Kurve in einem Kurvenpunkt P stellt in einer kleinen Umgebung von P eine gute Näherung der Kurve dar.

Existiert der Krümmungskreis einer Kurve in einem Kurvenpunkt P, so haben die Kurve und der Krümmungskreis in P dieselbe Tangente. Der Mittelpunkt des Krümmungskreises einer Ellipse in einem Scheitel liegt daher auf derselben Achse der Ellipse, auf der der Scheitel liegt.

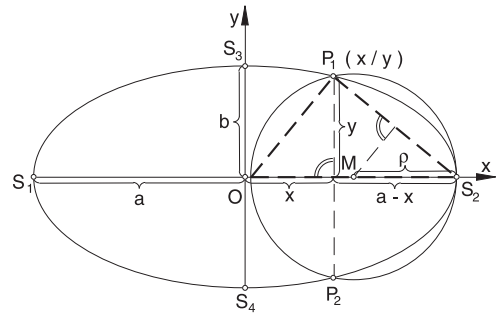


Bild 3.40: Krümmungskreis der Ellipse im Scheitel S₂

Wenn die Ellipse wie in Bild 3.40 mit dem Mittelpunkt in den Koordinatenursprung gelegt wird, so ergibt sich die folgende Ellipsengleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

und nach dem Höhensatz gilt:

$$y^2 = [2\rho - (a - x)](a - x)$$

$$\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = [2\rho - (a - x)](a - x) \rightarrow \frac{b^2}{a^2}(a + x) = 2\rho - (a - x)$$

Um den Scheitelkrümmungskreis für Hauptscheitel S₂ zu finden, muss P₁ gegen S₂ wandern, d. h. $x \rightarrow a$:

Daraus folgt:

$$\rho_a = \frac{b^2}{a}$$

Analog kann für die Nebenscheitel ermittelt werden:

$$\rho_b = \frac{a^2}{b}$$

Diese Krümmungskreisradien können konstruktiv umgesetzt werden:

Da die Dreiecke $M_E S_2 S_3$, $S_2 A M_1$, $S_3 M_2 A$ zueinander ähnlich sind (sie stimmen in allen drei Winkeln überein), ergibt sich:

$$\frac{a}{b} = \frac{\rho_b}{a} \quad \text{und} \quad \frac{a}{b} = \frac{b}{\rho_a} \rightarrow$$

$$\rho_a = \frac{b^2}{a} \quad \text{und} \quad \rho_b = \frac{a^2}{b} \quad \text{wie gefordert.}$$

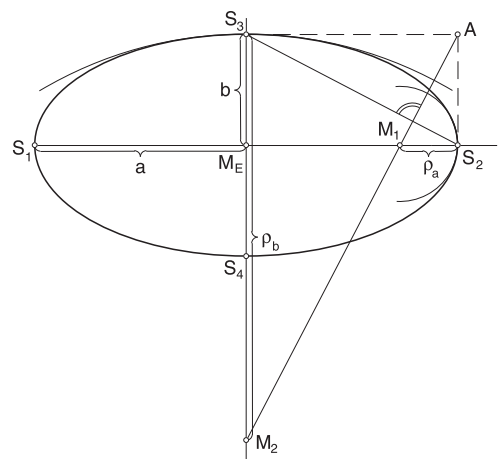


Bild 3.41: Konstruktive Bestimmung der Scheitelkrümmungskreise einer Ellipse

Die Ellipse verläuft ganz innerhalb der beiden Nebenscheitelkrümmungskreise und ganz außerhalb der beiden Hauptscheitelkrümmungskreise. Dies kann beim Zeichnen einer Ellipse verwendet werden. In einer Umgebung der Scheitel verläuft die Ellipse auf den Scheitelkrümmungskreisen. Weiter entfernt von den Scheiteln können je nach Bedarf noch weitere Ellipsenpunkte mit Tangenten konstruiert werden. Mit Hilfe des Kurvenlineals wird dann die Ellipse eingezeichnet. Dabei kann die Symmetrie der Ellipse ausgenutzt werden (Bild 3.41).

3.4.5 Punktkonstruktion aus konjugierten Ellipsendurchmessern

Bei dieser Punktkonstruktion gehen wir zunächst vom Urbild der Ellipse, dem Kreis, aus. Die Tangenten in den Endpunkten zweier aufeinander senkrechter Kreisdurchmesser bilden ein Quadrat.³ Die halbe Quadratseite und der zugehörige Radius werden in eine Anzahl gleicher Teile geteilt (hier 4 Teile, Teilpunkte 1, 2, 3 bzw. I, II, III). Nun wird Punkt A mit den Teilpunkten 1, 2 und 3 verbunden sowie Punkt B mit den Teilpunkten I, II und III. Die Geraden A1 und BI bzw. A2 und BII bzw. A3 und BIII schneiden einander in einem Punkt des Kreises, da die entsprechenden rechtwinkligen Dreiecke (markiert in Bild 3.42) kongruent sind. Wenn die beiden aufeinander senkrechten Kreisdurchmesser AB und CD auf die konjugierten Ellipsendurchmesser A'B' und C'D' mittels Parallelprojektion abgebildet werden, entsteht eine entsprechende Punktkonstruktion der Ellipse, da die Parallelprojektion teilverhältnis- und parallelentreu ist. Die Tangenten in den Endpunkten zweier konjugierter Ellipsendurchmesser bilden ein Parallelogramm. Die Verbindungsgeraden entsprechender Teilpunkte 1, 2 und 3 mit A' bzw. I, II und III mit B' schneiden einander entsprechend wie beim Kreis in Ellipsenpunkten.

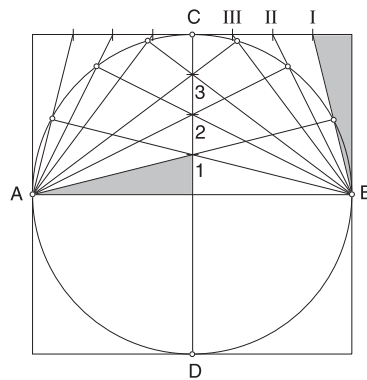


Bild 3.42: Kreiskonstruktion

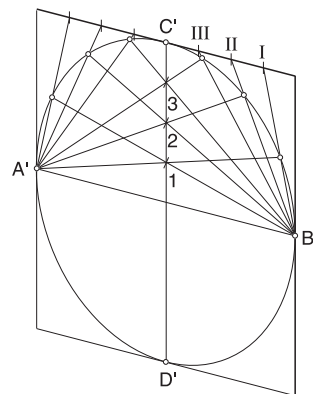


Bild 3.43: Punktkonstruktion der Ellipse aus konjugierten Ellipsendurchmessern

3. Vgl. W. Noli: Darstellende Geometrie. II. Teil, Gießen 1982, S. 9.

3.4.6 Die Gärtnerkonstruktion der Ellipse

Jede Ellipse besitzt zwei Brennpunkte mit der folgenden Eigenschaft:

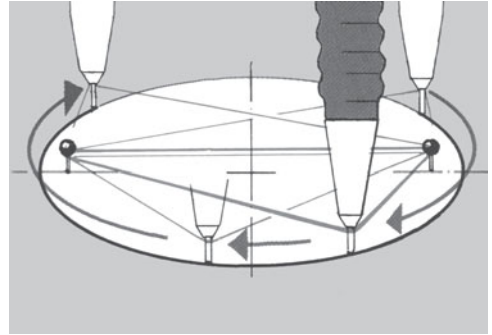
! Die Summe der Abstände eines Ellipsenpunktes von den beiden Brennpunkten ist konstant.

Daraus resultiert die sogenannte Gärtnerkonstruktion der Ellipse:

Eine Schnur der Länge der Hauptachse ($2a$) wird mit den Enden in den beiden Brennpunkten der Ellipse festgehalten. Ein Stift, der sich in der Schnur bewegt, beschreibt dann die Ellipse.



Bild 3.44: Gärtnerkonstruktion



$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

Diese Zusammenhänge werden oft auch als Definition der Ellipse verwendet:

Die Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte, für die die Summe der Abstände von zwei festen Punkten, den Brennpunkten, konstant ist.

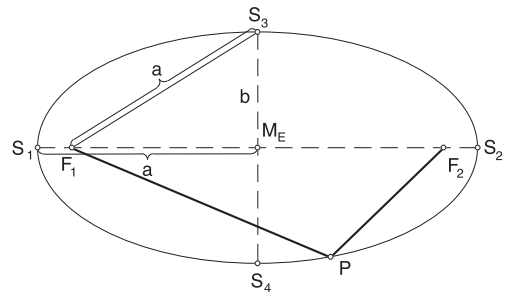


Bild 3.45: Brennpunkte einer Ellipse

Wird ein Kreis mittels Zentralprojektion abgebildet, so ergibt sich ein **kollineares Bild eines Kreises**. Welche Kurven dann als Kreisbilder entstehen können, wird im Zusammenhang der Zentralprojektion in Kapitel 13.6 untersucht.

4 AXONOMETRIE

Um anschauliche Bilder räumlicher Objekte zu erhalten, die auch die Proportionen der Objekte erhalten, sind Axonometrien die geeigneten Mittel. Sie entstehen auf der Grundlage der Parallelprojektion. Es können die schiefe oder die senkrechte Parallelprojektion zum Zeichnen der Axonometrien verwendet werden.

Axonometrien sind geeignet, um stadträumliche Strukturen, wie in Bild 4.1 das Euroforum in Köln, oder den Zusammenhang von Gebäudekomplexen aufzuzeigen. Andere Anwendungsbereiche betreffen die Konzeption eines Gebäudes (Bild 4.2) und das Gestaltungskonzept. Zusätzlich können Axonometrien herangezogen werden, um den Aufbau von funktionalen Einheiten und Innenräumen zu verdeutlichen. Bestens geeignet sind Axonometrien auch zur Darstellung von Detaillösungen. Eine Axonometrie kann ähnlich wie ein Modell Objekte und Strukturen präsentieren.

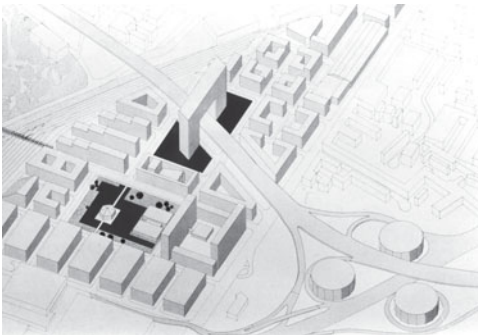


Bild 4.1: Axonometrie eines Stadtteils, Euroforum Köln, 1992, O. M. Ungers

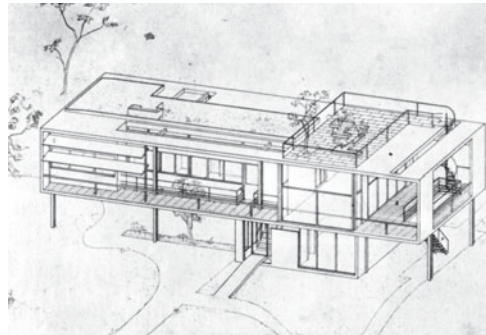
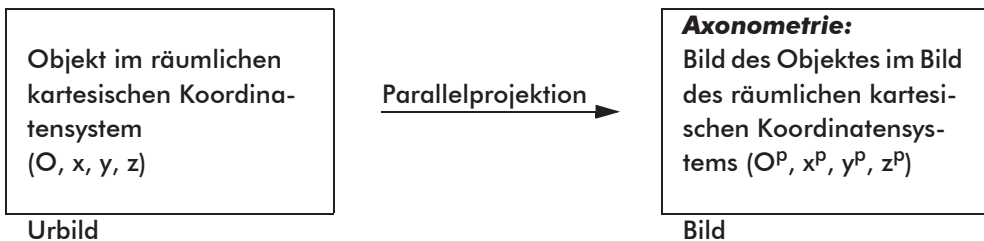


Bild 4.2: Haus eines Blumenzüchters, Rebbio (Como), Italien, 1936-37, G. Terragni



Eine Axonometrie ist ein Parallelriss eines Objektes in einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem (O, x, y, z), das so in die Bildebene π abgebildet wird, dass alle Koordinatenachsen x, y und z im Bild als Geraden x^P, y^P und z^P zu sehen sind und keine der Achsenbilder zusammenfallen. Das Koordinatensystem wird als Rechtskoordinatensystem (vgl. Kapitel 2.4.2) verwendet.

Je nachdem, ob die Projektionsstrahlen schief oder senkrecht auf die Bildebene auf-
treffen, wird zwischen **schiefer** und **normaler** (senkrechter) **Axonometrie** unter-
schieden.

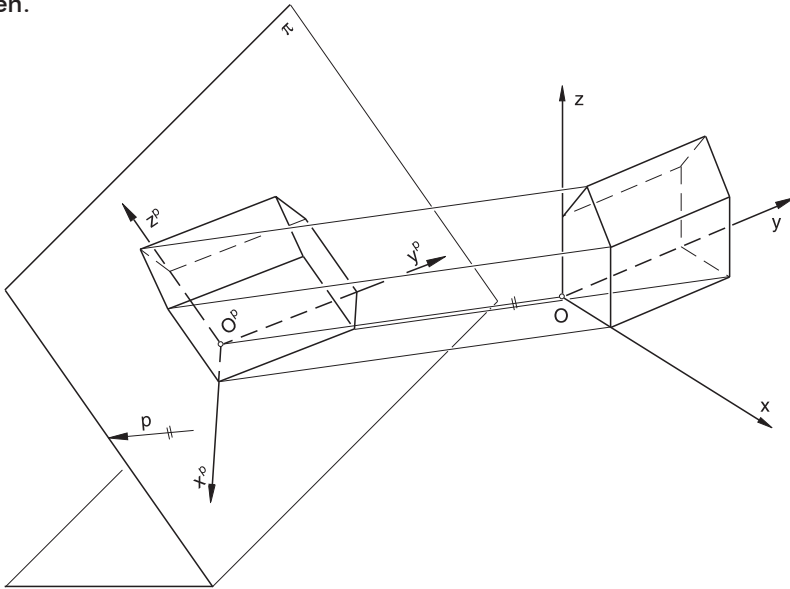


Bild 4.3: Schiefe Axonometrie

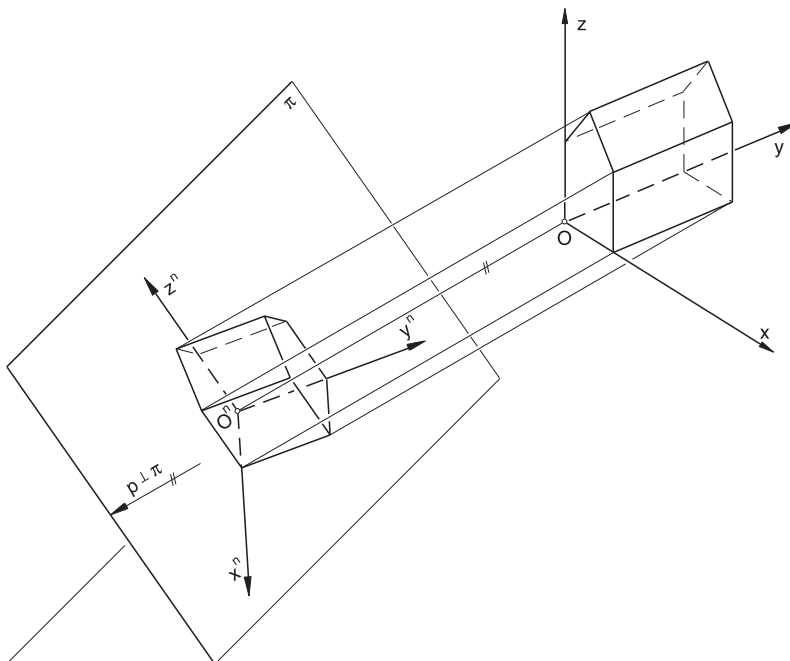


Bild 4.4: Normale Axonometrie

Die Grundlage für das praktische Zeichnen von axonometrischen Bildern ist der **Satz von Pohlke** (K. Pohlke¹, 1860), der auch als Hauptsatz der Axonometrie bezeichnet wird:



Jedes ebene Dreiein ist ein Parallelriss eines räumlichen kartesischen Koordinatensystems, dessen Einheitsstrecke durch das ebene Dreiein bestimmt ist.

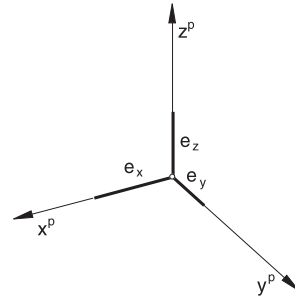


Bild 4.5: Bild des Koordinatensystems

Die Achsenrichtungen und die Einheitsstrecken (Verkürzungen) können beliebig angenommen werden.

Entsprechend der Verkürzungen auf den drei Koordinatenachsen werden drei Arten von Axonometrien unterschieden:

monometrische Projektion:

Verkürzungen aller drei Koordinatenachsen sind gleich.

dimetrische Projektion:

Verkürzungen auf zwei Koordinatenachsen sind gleich.

trimetrische Projektion:

Die Verkürzungen auf allen Koordinatenachsen sind unterschiedlich.²

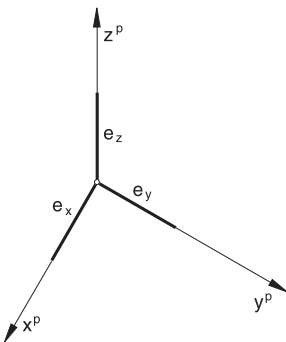


Bild 4.6: Monometrische Projektion

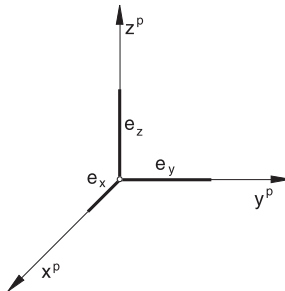


Bild 4.7: Dimetrische Projektion

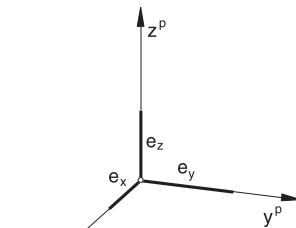


Bild 4.8: Trimetrische Projektion

1. Karl Wilhelm Pohlke (1810-1876) hat diesen Satz 1853 gefunden und 1860 ohne Beweis in seinem Lehrbuch für Darstellende Geometrie veröffentlicht. Der erste vollständige Beweis erschien 1864 im Jahrbuch für Mathematik von H. A. Schwarz (1843-1921).

2. Vgl. DIN ISO 10209-2: 1994-12, S. 8.

4.1 Schiefe Axonometrie

Jedes beliebig angenommene Koordinatensystem mit Einheitsstrecken führt im allgemeinen zu einer schiefen Axonometrie. Zwei Arten von schiefen Axonometrien werden am häufigsten verwendet: **Grundrissaxonometrie** und **Aufrissaxonometrie**.

4.1.1 Grundrissaxonometrie

Ist in einer Axonometrie die x^P -Achse senkrecht zur y^P -Achse und sind die Verkürzungen auf diesen Achsen jeweils 1:1, so heißt die Axonometrie **Grundrissaxonometrie**, Vogelprojektion, Militärprojektion oder planometrische Projektion. Die Grundrissaxonometrie zeigt den Grundriss unverzerrt. Daher eignet sie sich besonders gut zur Darstellung von Stadtteilen, Gebäudekomplexen und Innenräumen.

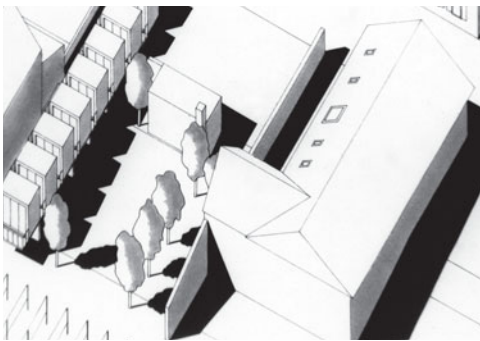


Bild 4.9: Grundrissaxonometrie eines Gebäudezusammenhangs, 1997, Studienprojekt

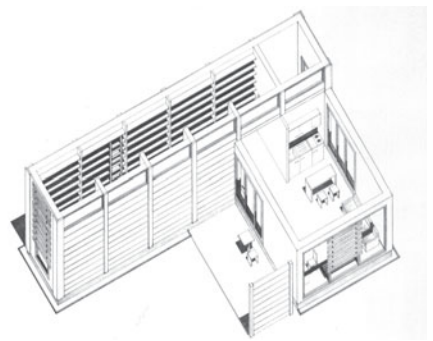


Bild 4.10: Grundrissaxonometrie der Innenraumstruktur, 1996, Studienprojekt

Geeignete Annahmen für den Winkel zwischen x^P - und z^P -Achse und für die Verkürzung auf der z^P -Achse sind:

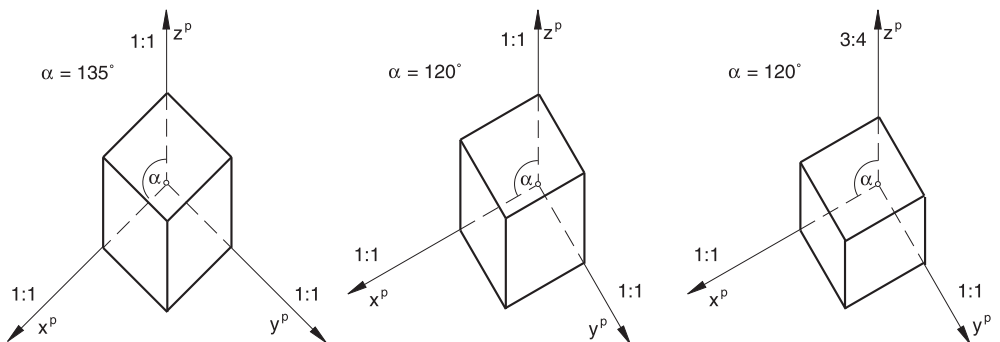


Bild 4.11: Geeignete Bildkoordinatensysteme für eine Grundrissaxonometrie

4.1.2 Aufrissaxonometrie

Ist bei einer Axonometrie die y^P -Achse senkrecht zur z^P -Achse und sind die Verkürzungsverhältnisse auf diesen Achsen jeweils 1:1, so heißt die Axonometrie **Aufrissaxonometrie**, frontale Axonometrie oder Kavalierprojektion (der Ausdruck Kavalier stammt aus der Festungsbaukunst). Durch diese Eigenschaft bilden sich alle Figuren, die parallel zur Aufrissebene liegen, in wahrer Gestalt ab. Verwendung findet die Aufrissaxonometrie vor allem dann, wenn an einem Objekt das Wesentliche in der Frontansicht unverzerrt gezeigt werden soll (z. B. bei Häuserfassaden).

In der Gegenüberstellung von Grundrissaxonometrie und Aufrissaxonometrie eines Gebäudes (Bild 4.13) wird deutlich, dass eine Aufrissaxonometrie dann das Gebäude sehr viel besser darstellen kann als eine Grundrissaxonometrie, wenn die wesentlichen Informationen über das Gebäude in der Fassade bzw. in einer vertikalen Ebene liegen.

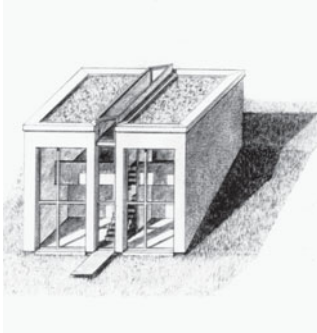


Bild 4.12: Aufrissaxonometrie, 1993, Studienprojekt

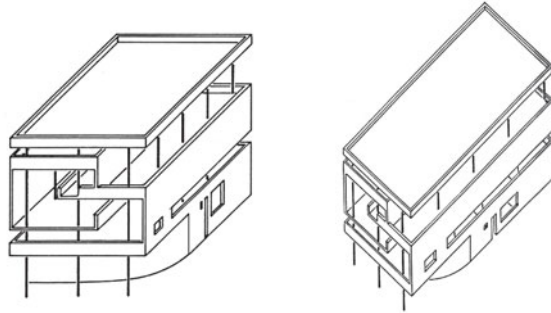


Bild 4.13: Aufriss- und Grundrissaxonometrie im Vergleich, Entwurf zur Villa in Karthago, Tunesien, 1928, Le Corbusier

Geeignete Annahmen für den Winkel zwischen x^P - und z^P -Achse sowie für die Verkürzung auf der x^P -Achse sind:

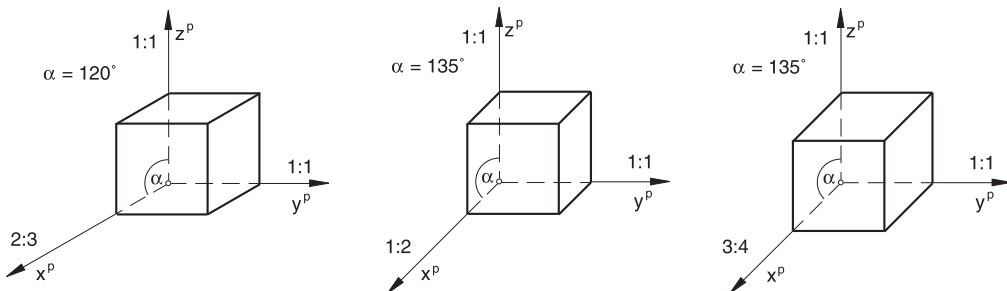


Bild 4.14: Geeignete Bildkoordinatensysteme für eine Aufrissaxonometrie

4.2 Normale Axonometrie

Bei der normalen (senkrechten) Axonometrie kann das Bild des Koordinatensystems nicht beliebig vorgegeben werden. Die Bildebene muss senkrecht zur Projektionsrichtung stehen. Daraus ergeben sich Zusammenhänge zwischen den Neigungswinkeln der Koordinatenachsen gegen die Bildebene und den Verkürzungen. Wie normale Axonometrien gezeichnet werden und wie die Winkel der Bildkoordinatenachsen und Verkürzungen aus der Vorgabe der Projektionsrichtung ermittelt werden können, wird in Kapitel 12 erläutert. Bild 4.15 zeigt zwei normale Axonometrien des Gästehauses "Old/New Rokko" von Tadao Ando, die mit AutoCAD® erstellt wurden. Hier sind alle Axonometrien normale Axonometrien, wie auch in den meisten anderen CAD-Programmen.

Für die Winkel zwischen den Bildern der Koordinatenachsen und die damit zusammenhängenden Verkürzungen werden in DIN ISO 5456-3: 1998-04 die Dimetrie und die Isometrie empfohlen.

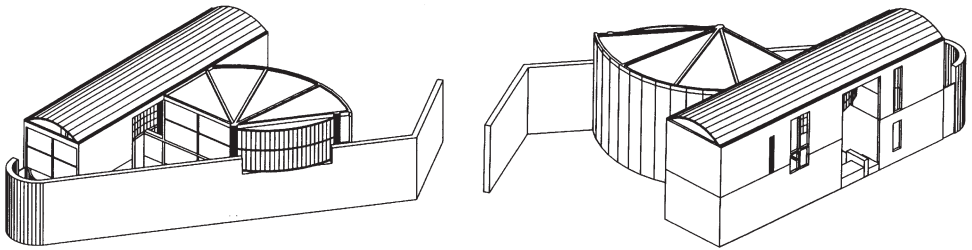
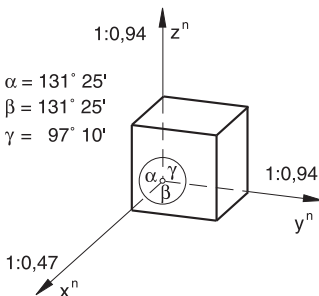


Bild 4.15: Normale Axonometrien des Gästehauses "Old/New Rokko" in Kobe, Japan, 1985/86, Tadao Ando

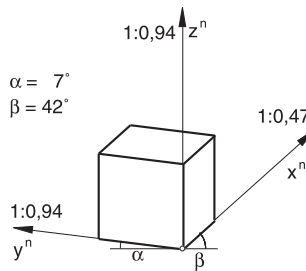
Dimetrie $e_x + e_y + e_z = \frac{1}{2} + 1 + 1$

$$e + e_x + e_y + e_z = 1 + \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{2}{3}\sqrt{2}$$



Isometrie $e_x + e_y + e_z = 1 + 1 + 1$

$$e + e_x + e_y + e_z = 1 + \sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}}$$



Angabe nach DIN ISO 5456-3

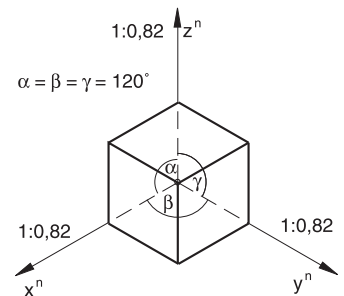


Bild 4.16: Dimetrie (mit zwei möglichen Angaben) und Isometrie als normale Axonometrien

4.3 Zeichenmethoden

4.3.1 Axonometrische Aufbaumethode

Der abzubildende Gegenstand wird in ein räumliches kartesisches Rechtskoordinatensystem eingebettet. Nach der Wahl des Bildkoordinatensystems mit Einheitsstrecken ist es empfehlenswert, anhand des Einheitswürfels die Anschaulichkeit und Zweckmäßigkeit der gewählten Axonometrie zu überprüfen.

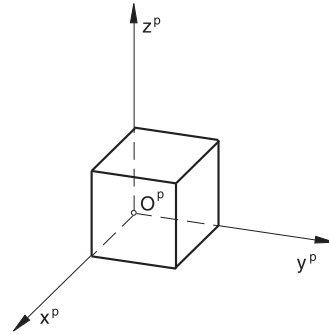


Bild 4.17: Einheitswürfel

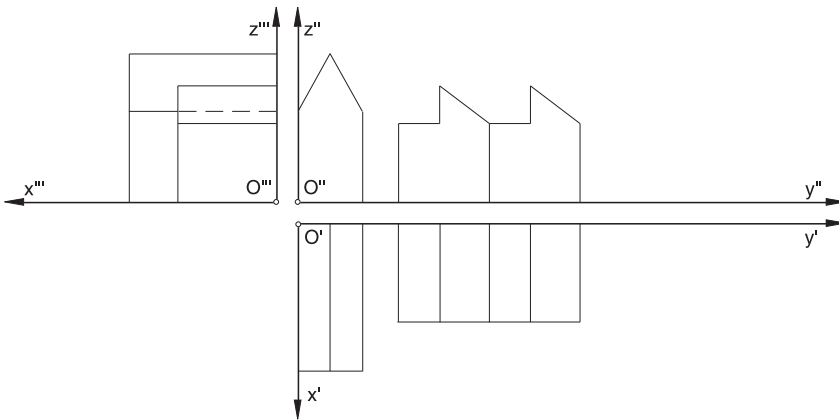


Bild 4.18: Einführen des Koordinatensystems in Grund-, Auf- und Kreuzriss

Sind Grund-, Auf- und Kreuzriss des abzubildenden Objektes, z. B. eines Gebäudeensembles bekannt, so können die Koordinatenachsen in diesen Rissen eingeführt werden. Da nur die Verkürzungsmaße für Strecken parallel zu den Koordinatenachsen unmittelbar bekannt sind, ist es sinnvoll, die Koordinatenachsen parallel zu den Hauptrichtungen des abzubildenden Objekts zu legen. Mit Hilfe eines Probekörpers kann geprüft werden, welche Teile des Objektes sichtbar sind bzw. welche sich überlagern, um die geeignete Axonometrie herauszufinden.

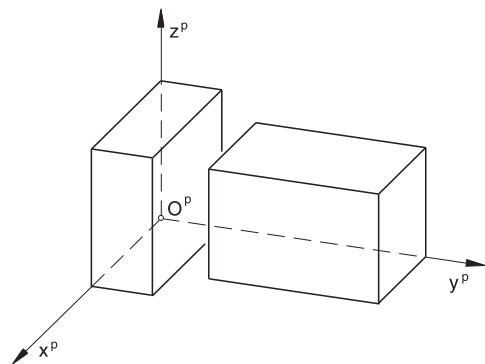


Bild 4.19: Probekörper in der gewählten Axonometrie

Die Axonometrie kann nach der Entscheidung für ein axonometrisches Bildkoordinatensystem unter Ausnutzung der Parallelen- und Teilverhältnistreue der Parallelprojektion punkt- und geradenweise konstruiert werden.

Bei Gebäuden ist es meist sinnvoll, zunächst mit dem axonometrischen Bild des Grundrisses zu beginnen und dann die Höhen unter Beachtung der Verkürzungen darauf aufzubauen.

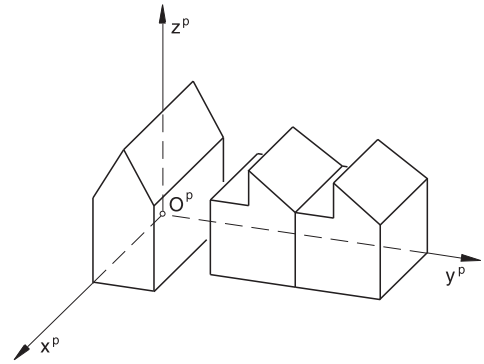


Bild 4.20: Axonometrie eines Gebäudeensembles



Bild 4.21: Axonometrie des Stuhles "Rot und Blau", 1918, G. Th. Rietveld, Studienprojekt

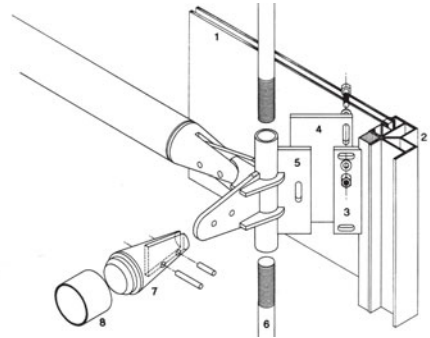


Bild 4.22: Ecke der Aufzugsschachtverkleidung, Bürogeb., London, 1988-90, Sh. Robson

Bei anderen Objekten kann es geeigneter sein, die Axonometrie entsprechend der Einzelteile aufzubauen.

Bild 4.21 zeigt die Axonometrie des Stuhles "Rot und Blau" von G. Th. Rietveld. Es wäre hier nicht sinnvoll, mit dem axonometrischen Bild des Grundrisses zu beginnen, da fast keine der Kanten in der Grundrissebene liegen. Die Axonometrie des Stuhles wird am besten stabweise entwickelt. Eine ähnliche Vorgehensweise empfiehlt sich auch beim Zeichnen der Axonometrie eines Details. In Bild 4.22 wurde das Detail der Eckausbildung bei der Aufzugsschachtverkleidung des Bürogebäudes für die "British Land Company" in einer Axonometrie dargestellt. Hier empfiehlt es sich ebenfalls Element für Element die Axonometrie zu zeichnen.

Diese Zeichenmethoden werden Axonometrische Aufbaumethoden genannt, da die Objekte in der Axonometrie ähnlich wie beim Bauvorgang aufgebaut werden.

4.3.2 Einschnideverfahren

Das sogenannte Einschnideverfahren ermöglicht, die Axonometrie nach Vorgabe der Projektionsrichtung zu zeichnen. Dies entspricht einer anschaulich intuitiveren Vorgehensweise als direkt das axonometrische Koordinatensystem festzulegen.

Zwei zugeordnete Normalrisse eines Objektes (z. B. Grund- und Aufriss) werden beliebig in die Zeichenebene gelegt und durch je ein Bündel von Projektionsstrahlen, den sogenannten Einschnidestrahlen, projiziert. Der Schnittpunkt der Projektionsstrahlen der Risse eines Punktes P ist der Bildpunkt P^p von P (Bild 4.23). Dabei bestimmen die Lage der Risse auf der Zeichenebene und die Richtungen der sogenannten Einschnidestrahlen die Axonometrie.

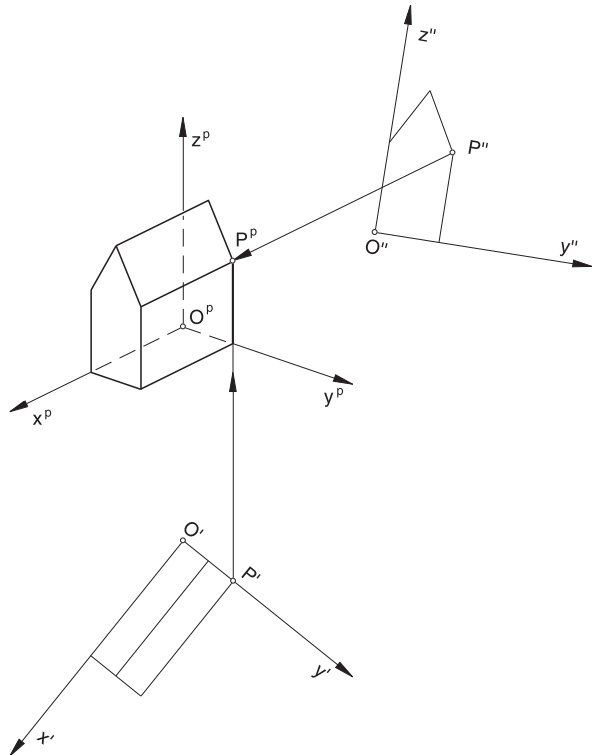


Bild 4.23: Einschnideverfahren

Um eine monometrische Grundrissaxonometrie zu zeichnen, ist es möglich, das Einschnideverfahren auf den Grundriss einzuschränken. Der Grundriss wird entsprechend der Projektionsrichtung p auf die Zeichenebene gelegt. Die Höhen des Objektes werden dann in z^p -Richtung, parallel zur Projektionsrichtung p , abgetragen (Bild 4.24).

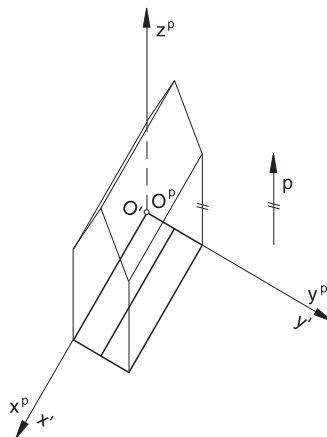


Bild 4.24: Grundrissaxonometrie mittels Einschnideverfahren

4.4 Orientierung

Beim Zeichnen einer Axonometrie muss beachtet werden, welche Sicht, Ober- oder Untersicht, jeweils vorliegt.

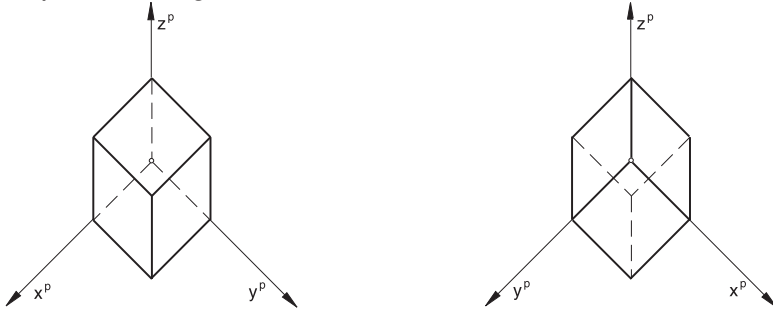


Bild 4.25: Ober- und Untersicht eines Objektes in einer Axonometrie

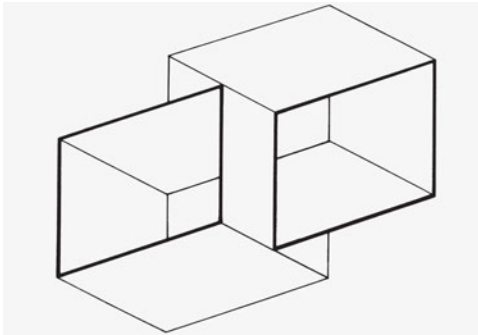


Bild 4.26: Studie structural, 1955, Josef Albers

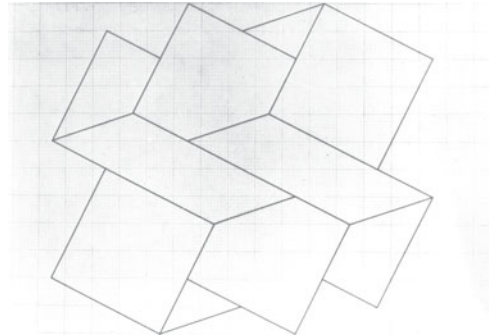


Bild 4.27: k - 19, 1956, Josef Albers

Dies ergibt sich aus dem gewählten Rechtskoordinatensystem. Die Richtungen der Koordinatenachsenbilder bestimmen, welche Sicht vorliegt:

Eine **Obersicht** liegt vor, wenn die positive x^p -Achse auf kürzestem Weg in die positive y^p -Achse durch eine Drehung in mathematisch positivem Sinn (Gegenuhrzeigersinn) übergeht.

Eine **Untersicht** liegt vor, wenn die positive x^p -Achse durch eine Drehung in mathematisch negativem Sinn (Uhrzeigersinn) übergeht. Die Überprüfung der Sichtweise kann auch mit Hilfe der Drei-Finger-Regel (vgl. Kapitel 2.4.2) erfolgen.

Werden beide Möglichkeiten - Ober- und Untersicht - miteinander verknüpft, so entstehen Bilder unmöglicher räumlicher Situationen wie in Bild 4.26 und 4.27. Josef Albers hat hier in den Studien zwei Sichtweisen eines Objektes in einem Bild vereint.

4.5 Axonometrievarianten

Die Wahl der Axonometrie hängt vom darzustellenden Gegenstand und der gewünschten Aussage ab. Neben den unterschiedlichen Sichtweisen auf das Objekt, können die Axonometrien auch in Bezug auf das Dargestellte variieren. Beispielhaft sollen hier drei Varianten, Durchsichtsaxonometrie, Schnittaxonometrie und Explosionsaxonometrie, solche Möglichkeiten aufzeigen.

4.5.1 Durchsichtsaxonometrie

In einer Durchsichtsaxonometrie sollen die Zusammenhänge zwischen außen und innen eines Gebäudes deutlich gemacht werden. Dazu werden Objektteile, die die Sicht ins Innere verstellen, in der Zeichnung weggelassen oder als durchsichtig

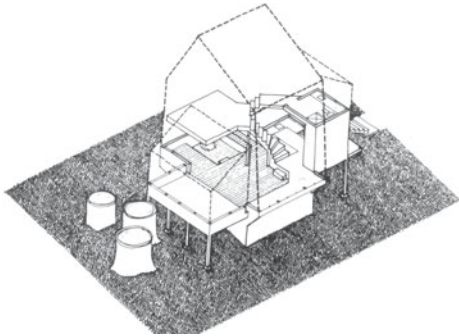


Bild 4.28: Durchsichtsaxonometrie - Bonham House, Kalifornien, 1961-62, Ch. Moore

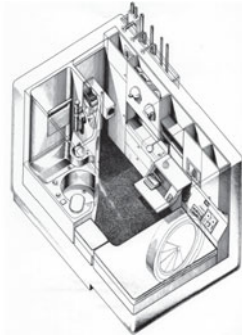


Bild 4.29: Kapsel - Nakagin Capsule Tower, Tokio, 1970-72, Kisho Kurokawa

angenommen. Diese Darstellungen sind geeignet, um den Zusammenhang zwischen dem Baukörper und der Raumkonzeption sichtbar werden zu lassen.

Charles Moore (Bild 4.28) hat seine Entwürfe häufig auf diese Art und Weise dargestellt. Die im Vergleich zur äußeren Hülle ungewohnte, komplizierte Gliederung im Innenraum kann damit verständlich vermittelt werden. Es entsteht eine Art Röntgenblick in das Gebäude. Was in der Zeichnung jeweils durchsichtig gemacht wird oder was weggeschnitten wird, muss je nach Zweck der Zeichnung und des darzustellenden Objektes entschieden werden.

Bei der Darstellung einer Kapsel des Nakagin Capsule Tower von Kisho Kurokawa in einer Durchsichtsaxonometrie (Bild 4.29) liegt der Schwerpunkt der Darstellung auf der Unterbringung aller Funktionen auf engstem Raum. Das gleichzeitige Zeigen der Kapsel von außen und der Anschlüsse lässt die Konzeption der Kapsel im Zusammenhang der Struktur des Turms verständlich werden.

4.5.2 Schnittaxonometrie

Um funktionale Zusammenhänge eines Gebäudes oder z. B. den Aufbau der Raumfolgen und Geschosse aufzuzeigen, können auch horizontale und/oder vertikale Schnitte durch ein Gebäude gelegt werden. Die Axonometrie des geschnittenen Gebäudes verdeutlicht besser die Zusammenhänge. Schnittaxonometrien erreichen eine bessere Anschaulichkeit als reine Schnittdarstellungen, bei denen ein räumliches Verständnis erst erarbeitet werden muss.

Bei einem horizontalen Schnitt wie in Bild 4.30 ist zur axonometrischen Darstellung eine Sicht von oben, z. B. eine Grundrissaxonometrie, sinnvoll. Dann bleibt der Grundriss in der axonometrischen Darstellung unverzerrt und die Axonometrie lässt die Struktur des Grundrisses mit der Verteilung der Räume plastisch erscheinen. Auf diese Weise kann der Grundrissentwurf räumlich klar werden.

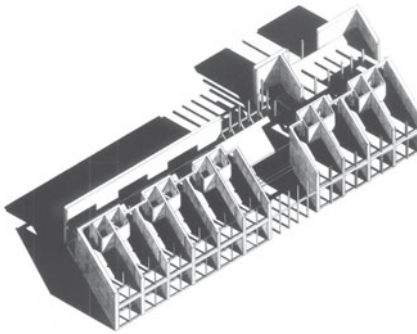


Bild 4.30: Schnittaxonometrie mit horizontalem Schnitt, 1995, Studienprojekt

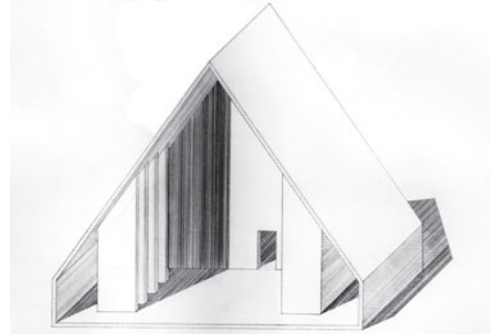


Bild 4.31: Schnittaxonometrie mit vertikalem Schnitt, 2010, Studienprojekt

Bei einem vertikalen Schnitt wie in Bild 4.31 wird eher eine Axonometrie mit Blick von vorne, z. B. eine Aufrissaxonometrie, gewählt. Dann erscheint die Ansicht unverzerrt und die konstruktive Struktur im Innenraum z. B. kann durch die weggeschnittene Außenwand aufgezeigt werden.

Ähnlich können zu unterschiedlichen Zwecken Schnittaxonometrien verwendet werden. Die Schnittebenen und die Art der axonometrischen Darstellung müssen jeweils für den Zweck geeignet gewählt werden. Es ist dabei auch möglich, mehrere Schnittebenen, z. B. eine horizontale und eine vertikale Schnittebene in das Objekt zu legen. Empfehlenswert ist jedoch hierbei, eine Zeichnung nicht zu komplex zu gestalten, um die Lesbarkeit nicht zu gefährden. Die Integration von Schatten in die Darstellung unterstützt die räumliche Wirkung.

4.5.3 Explosionsaxonometrie

Um den Aufbau und das Gefüge von Einzelteilen eines Gebäudes bzw. Gegenstandes zu erläutern, kann es empfehlenswert sein, den Gegenstand bzw. das Gebäude in einem "explodierten" Zustand darzustellen. Die Einzelteile werden dabei nicht beliebig "explodiert", wie der Begriff nahelegt, sondern das Objekt wird in die wichtigsten Bestandteile zerlegt und dann in einer so weit auseinandergezogenen Position gezeichnet, dass die einzelnen Bestandteile zu erkennen sind. Die gewünschte Aussage bestimmt, in welche Bestandteile das Objekt zerlegt wird. Aus allen Axonometrien kann hier ausgewählt werden. Es muss überlegt werden, welche Axonometrie dem Objekt und der Art der "Explosion" am besten gerecht wird.

Eine Explosionsaxonometrie kann z. B. geeignet sein, um den Aufbau von Geschossen aufzuzeigen.

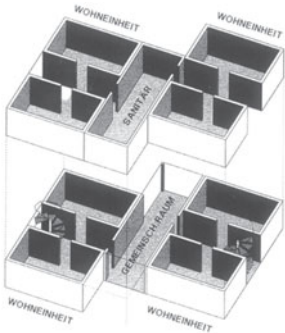


Bild 4.32: Geschosse eines Doppelhauses

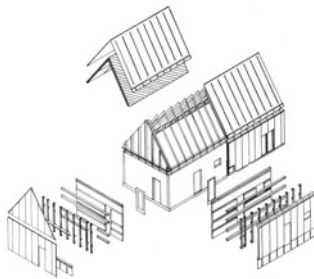


Bild 4.33: Explosionsaxonometrie und ganzes Objekt

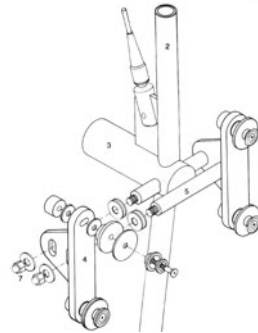


Bild 4.34: Glasbefestigung in Explosionsaxonometrie

In Bild 4.32 werden die beiden Stockwerke eines Doppelhauses mit den verschiedenen Modulen dargestellt. Das Verstehen der Explosionsaxonometrie wird verbessert, wenn mittels Linien angegeben wird, wie die Bauteile auseinander geschoben wurden. Diese Linien erleichtern das Verständnis des Gefüges und das Zusammenfügen der Einzelteile in Gedanken zu einem Ganzen.

Die Explosionsaxonometrie kann auch verwendet werden, um den Aufbau und das Ineinandergreifen der einzelnen Bauteile zu erläutern. Eine zusätzliche Darstellung des zusammengebauten Objektes bzw. eines Teils des Objektes in zusammengefügt Zustand (Gebäudehälfte rechts in Bild 4.33) kann zum besseren Verständnis beitragen.

Bild 4.34 zeigt einen weiteren Anwendungsbereich der Explosionsaxonometrie. Der Aufbau eines Details mit allen Bauelementen wie die Glasbefestigung im Sterling Hotel, Flughafen Heathrow in London, kann in einer Explosionsaxonometrie gut verdeutlicht werden.

4.6 Computergestützte Axonometrie

Beim computergestützten Zeichnen ist die Einbettung des Objektes in ein dreidimensionales Koordinatensystem von Anfang an von Bedeutung. Das axonometrische Bildkoordinatensystem, d. h. die Sicht auf das räumliche Objekt am zweidimensionalen Bildschirm, wird in den meisten Programmen interaktiv gewählt.

Da in vielen CAD-Programmen keine eindeutig definierten geometrischen Begriffe verwendet werden, kann häufig nur indirekt erschlossen werden, welche Art von Axonometrie zur Anwendung kommt. Wählt der Benutzer nur eine Blickrichtung, so handelt es sich um eine normale Axonometrie, da eine normale Axonometrie mit der Angabe der Blickrichtung schon festgelegt ist. Die Bildebene ist dann senkrecht zur Blickrichtung (vgl. Kapitel 12).

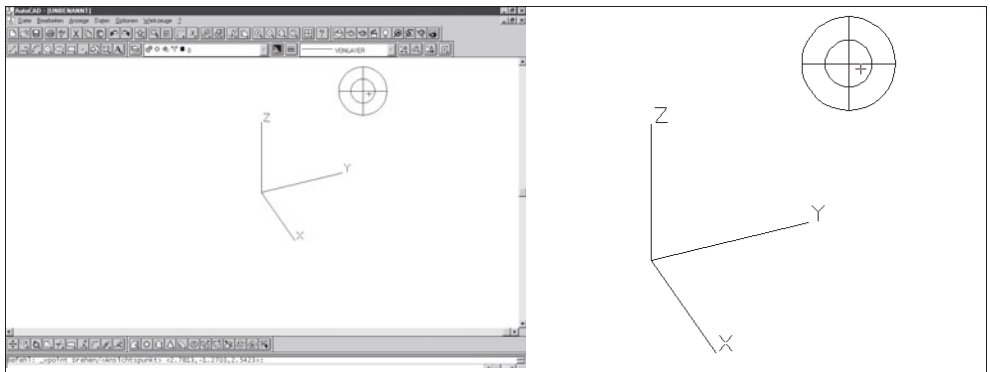


Bild 4.35: Kompass und Achsendreibein zur Wahl der Blickrichtung für die Axonometrie (AutoCAD®)

Bei einer schiefen Axonometrie muss außer der Blickrichtung auch die Lage der Bildebene in Relation zur Blickrichtung angegeben werden.

Bei der interaktiven Wahl des axonometrischen Bildkoordinatensystems tritt das Problem der Orientierung auf. Es ist dem gezeigten Dreibein grundsätzlich nicht anzusehen, ob eine Ober- oder Untersicht vorliegt. Hierbei hilft in einigen CAD-Programmen die zusätzliche Darstellung eines "Kompasses" (Bild 4.35). Der Kompass ist eine zweidimensionale Darstellung eines Globus. Der Mittelpunkt ist der Nordpol mit den Koordinaten $(0, 0, 1)$, der innere Kreis stellt den Äquator dar $(n, n, 0)$ und der gesamte äußere Kreis steht für den Südpol $(0, 0, -1)$. Mit einem Fadenkreuz kann die Position auf dem Globus gewählt werden, und zusammen mit dem Vorgabezielpunkt $(0, 0, 0)$ ergibt sich daraus die Blickrichtung für die Axonometrie. Wenn das Fadenkreuz also im Innern des kleinen Kreises bleibt, liegt eine Obersicht, sonst eine Untersicht vor.

Das bei der gewählten Blickrichtung entstehende Bild des Koordinatensystems wird als Achsendreibein angezeigt. Sind die Koordinatenachsen beschriftet und wird die "Drei-Finger-Regel" des Koordinaten-Rechtssystems (vgl. Bild 2.28) beachtet, so kann auch direkt aus der Darstellung des Koordinatensystems auf Ober- oder Untersicht geschlossen werden. Die gleichzeitige Darstellung eines einfachen Objektes in einer schattierten Flächendarstellung lässt die Wahl des axonometrischen Bildkoordinatensystems anschaulicher werden.

In einigen CAD-Programmen wird daher bei der Wahl oder auch direkt im Auswahlmenü ein Testobjekt, z. B. ein einfaches Haus, gezeigt, das deutlich macht, welche Sicht vorliegt (Bild 4.36).

Um eine schiefe Axonometrie computergestützt zu erzeugen, werden in einem CAD-Programm verschiedene gebräuchliche Axonometrien angeboten, wie z. B. Grundrissaxonometrie, Aufrissaxonometrie und Isometrie.

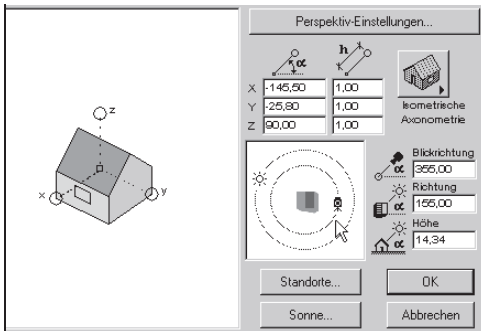


Bild 4.36: Orientierung mit Hilfe eines Testobjektes (ArchiCAD®)

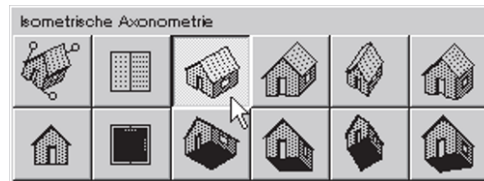


Bild 4.37: Auswahl unter vordefinierten schiefen Axonometrien (ArchiCAD®)

Mit Hilfe des Testobjektes werden die wählbaren Axonometrien veranschaulicht, so dass die richtige Auswahl leichter fällt (Bild 4.37). Auch eine Sicht von schräg oben oder unten wird im Testobjekt direkt deutlich.

Eine freie Definition der Lage der Bildebene durch den Benutzer, die bei einer beliebig schiefen Axonometrie zusätzlich zur Blickrichtung festgelegt werden müsste, ist in einem CAD-Programm nicht sinnvoll zu realisieren. Daher verwendet die Mehrzahl der CAD-Programme ausschließlich Normale Axonometrien, da diese gleichzeitig anschaulichere Darstellungen liefern als schiefe Axonometrien. Da jedoch diese Begrifflichkeit meistens nicht verwendet wird, sondern nur allgemein zwischen der Verwendung von Parallel- oder Zentralprojektion (Perspektive) unterschieden wird, muss der Nutzer darauf achten, welche Arten von Axonometrien das jeweilige Programm verwendet. Wenn alle Axonometrien Normale Axonometrien sind, können keine Grundriss- oder Aufrissaxonometrien erzeugt werden.

In AutoCAD®, SketchUp® und Rhinoceros® kommen ausschließlich Normale Axonometrien zur Darstellung. Der Nutzer stellt in SketchUp® die Kamera auf "Parallele Projektion" (Bild 4.38) bzw. in Rhinoceros® die Projektion im Ansichtsfenster auf parallel (Bild 4.39) ein, um eine axonometrische Darstellung zu erhalten.

Hilfreich ist die Anzeige des Koordinatensystems, in SketchUp® als rote, grüne und blaue Achsen bzw. in Rhinoceros® zusätzlich zu den Achsen im Objekt als beschriftetes Koordinatensystem x, y und z links unten. Die Veränderung der axonometrischen Darstellung erfolgt interaktiv durch Drehen der Ansicht.

In SketchUp® wird durch die Veränderung der Hintergrundfarbe direkt deutlich, ob eine Übersicht mit Sicht auf den Boden in grün oder dunkelgrau bzw. Untersicht mit Blick in den Himmel in blau oder hellgrau je nach gewähltem Darstellungsstil vorliegt.

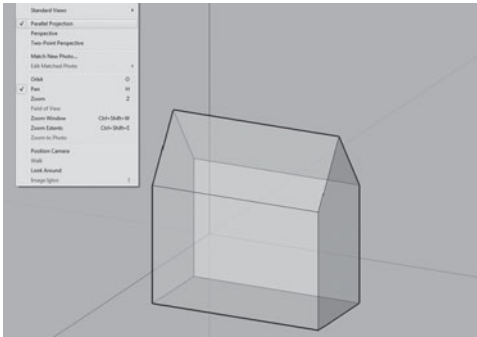


Bild 4.38: Objekt mit Koordinatenachsen zur Orientierung (SketchUp®)

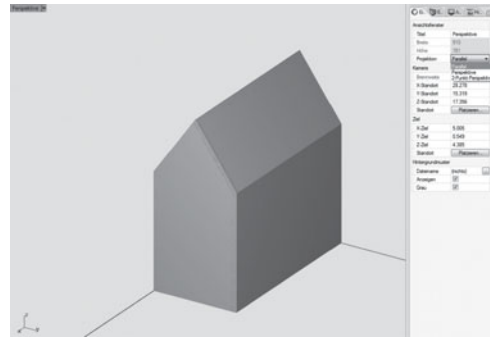


Bild 4.39: Wahl der Parallelprojektion und interaktives Drehen (Rhinoceros®)

5 ZUGEORDNETE NORMAL RISSE - ZWEITAFEL- BZW. DREITAFELPROJEKTION

Als eine der wichtigsten Methoden, um die Zeichnung eines räumlichen Objektes umkehrbar eindeutig zu machen und damit das räumliche Objekt aus der Zeichnung erfassen zu können, wurde in Kapitel 2.4.2 die Methode der zugeordneten Normalrisse eingeführt. Sie wird für alle maßgerechten Zeichnungen eingesetzt, die Grundlage für den Entwurfs- und Ausführungsprozess sind.

Mit Hilfe der zugeordneten Normalrisse können die Lage der verschiedenen Bauteile zueinander und im Raum sowie die wahre Gestalt und Größe der Teile ermittelt werden. Die Methode der zugeordneten Normalrisse kann benutzt werden, um räumliche Probleme in der Zeichnung zu lösen. In Kapitel 1 wurde dies als eine Aufgabe der Geometrie für die Architekturdarstellung beschrieben.



Bild 5.1: Dächer in Lucca, Italien

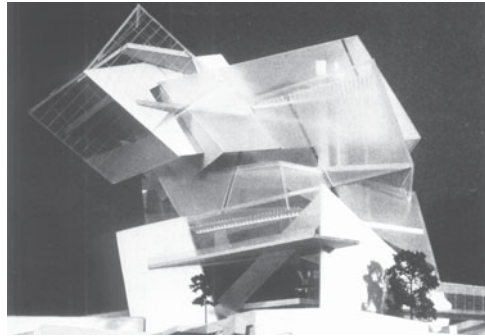


Bild 5.2: Victoria und Albert Museum, London, 1996, Daniel Libeskind

Ein solches räumliches Problem kann darin bestehen, die Schnittlinien und Anschlüsse von verschiedenen Gebäudeteilen wie in Bild 5.1 und 5.2 herauszufinden.

Um sich dieser Methode systematisch zu nähern, wird zuerst die Darstellung der geometrischen Grundelemente Punkt, Gerade und Ebene in zugeordneten Normalrissen behandelt. Danach werden diese Grundelemente zueinander in Beziehung gesetzt. Es wird z. B. untersucht, ob ein Punkt in einer gegebenen Ebene liegt oder in welcher Geraden zwei Ebenen einander schneiden (vgl. Kapitel 5.4).

Da jeder Raumpunkt durch zwei seiner Normalrisse (Grund-, Auf- oder Kreuzriss) eindeutig bestimmt ist, genügt es, das Objekt jeweils in zwei zugeordneten Normalrissen darzustellen. Daher wird diese Methode auch **Zweitafelprojektion** genannt. Die Objekte werden meistens in Grund- und Aufriss dargestellt. Werden Grund-, Auf- und Kreuzriss verwendet, so spricht man von einer **Dreitafelprojektion**.

5.1 Darstellung von Punkten

Bei der Zweitafelprojektion wird ein Punkt im Raum auf zwei verschiedene Bildebenen senkrecht projiziert. Die beiden Bildebenen stehen senkrecht aufeinander und werden zum Zeichnen um die Rissachse in eine Ebene geklappt. Die so entstandenen Risse, Grundriss und Aufriss, werden dadurch so angeordnet, dass Grundriss P' und Aufriss P'' eines Raumpunktes P auf einem Ordner senkrecht zur Rissachse (12) liegen. P' kennzeichnet den Grundriss und P'' den Aufriss des Punktes P .

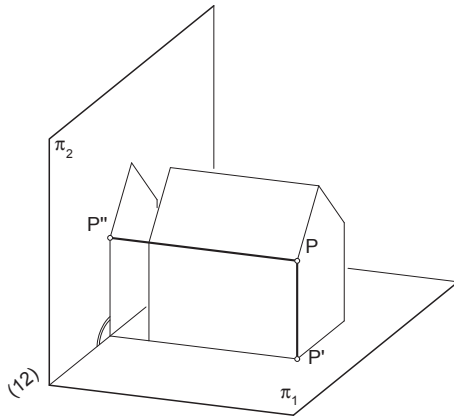


Bild 5.3: Grund- und Aufriss eines Punktes P

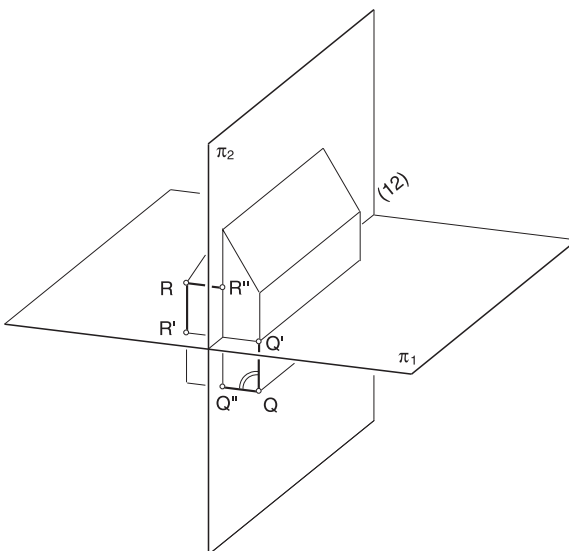
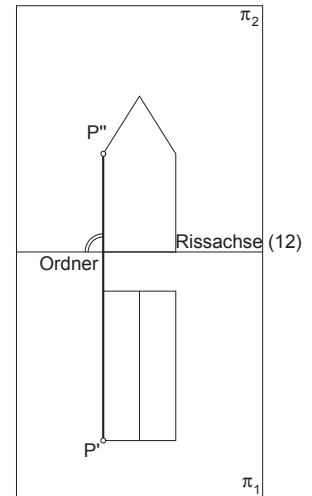
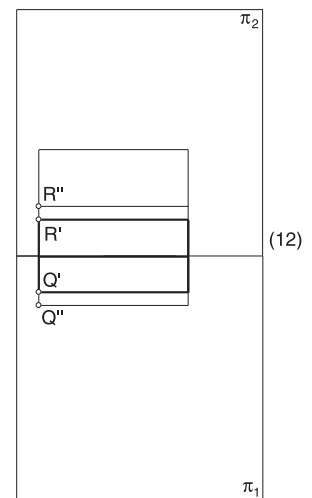


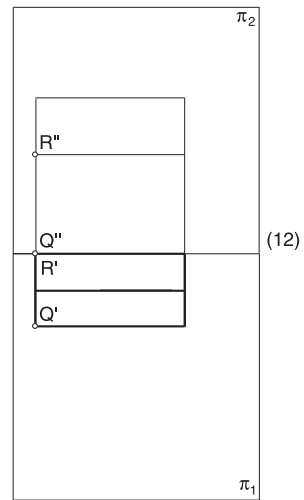
Bild 5.4: Punkt Q unter der Grundrissebene und Punkt R hinter der Aufrissebene



Ein Punkt kann auch unter der Grundrissebene (Punkt Q) oder hinter der Aufrissebene (Punkt R) liegen (Bild 5.4). Daher ist es erforderlich, immer die Bezeichnungen P' bzw. P'' zu verwenden.

Zum besseren Erkennen der Risse können in einem solchen Fall die Risse auch auseinandergezogen werden, damit sie einander in den verschiedenen Rissebenen nicht überdecken (Bild 5.5).

Bild 5.5: Auseinanderziehen von Grund- und Aufriss



5.2 Darstellung von Geraden

Eine Gerade ist bestimmt durch zwei Punkte A und B in Grund- und Aufriss.

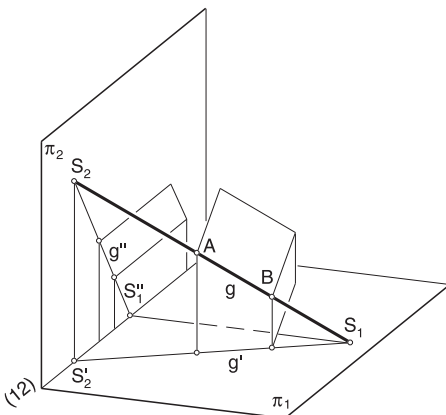
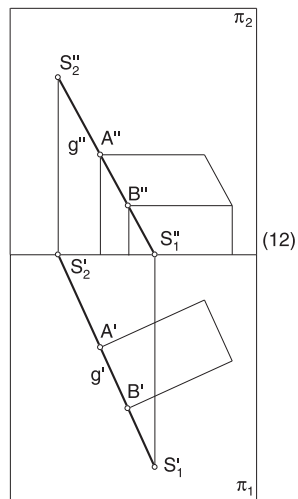


Bild 5.6: Grund- und Aufriss einer Geraden g



Die Lage der Geraden im Raum kann auch gekennzeichnet werden mit Hilfe der Durchstoßpunkte der Geraden mit den Rissebenen. Der Durchstoßpunkt der Geraden g mit der Grundrissebene wird **Grundrissspurpunkt** S_1 , der Durchstoßpunkt mit der Aufrissebene wird **Aufrissspurpunkt** S_2 genannt.

Den zugeordneten Normalrissen kann entnommen werden, ob die Gerade eine besondere Lage im Raum einnimmt.

Es können die folgenden Geraden spezieller Lage im Raum unterschieden werden:

1. Gerade g ist senkrecht zur Grundrissebene ($g \perp \pi_1$):
 g ist eine **erstprojizierende** oder **grundrissprojizierende Gerade**. Die Gerade g erscheint im Grundriss nur als Punkt und verläuft im Aufriss in Orderrichtung.

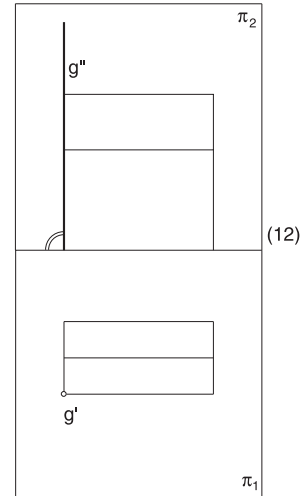
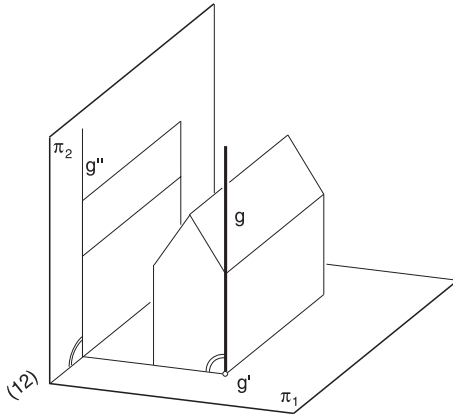


Bild 5.7: Erstprojizierende Gerade

2. Gerade g ist senkrecht zur Aufrissebene ($g \perp \pi_2$):
 g ist eine **zweitprojizierende** oder **aufrissprojizierende Gerade**. Die Gerade g erscheint dann im Aufriss nur als Punkt und verläuft im Grundriss in Orderrichtung.

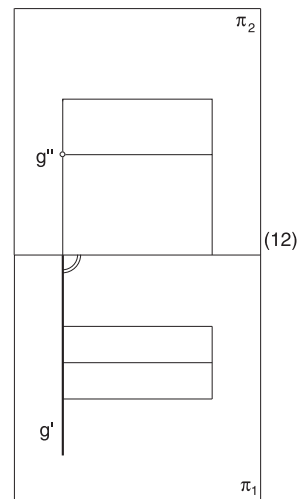
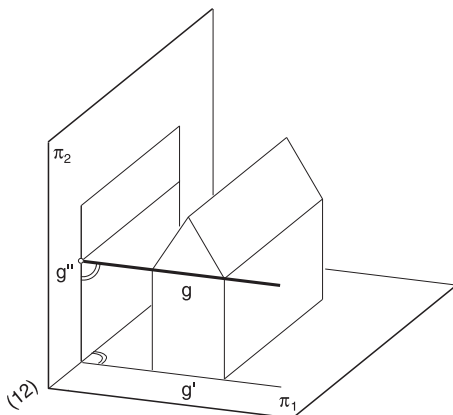


Bild 5.8: Zweitprojizierende Gerade

3. Gerade g ist parallel zur Grundrissebene ($g \parallel \pi_1$):

g ist eine **Hauptlinie erster Art** oder eine **Höhenlinie**. Ob eine Gerade eine Höhenlinie ist, kann im Aufriss festgestellt werden (Bild 5.9). Eine Höhenlinie erscheint im Aufriss parallel zur Rissachse.

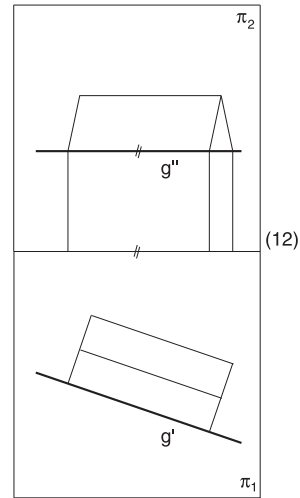
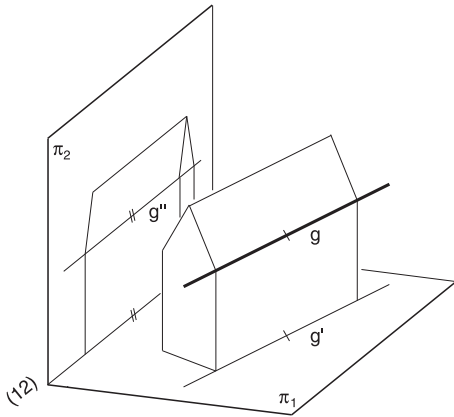


Bild 5.9: Höhenlinie

4. Gerade g ist parallel zur Aufrissebene ($g \parallel \pi_2$):

g ist eine **Hauptlinie zweiter Art** oder eine **Frontlinie**. Ob eine Gerade eine Frontlinie ist, kann im Grundriss festgestellt werden (Bild 5.10). Eine Frontlinie erscheint im Grundriss parallel zur Rissachse.

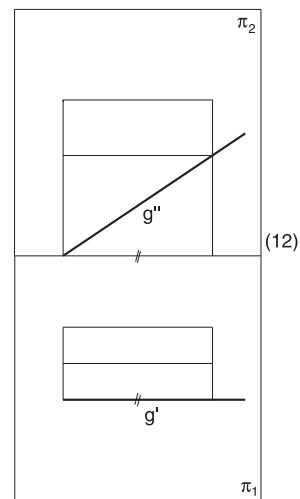
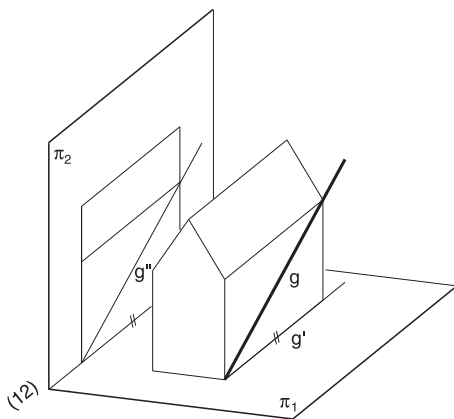


Bild 5.10: Frontlinie

5.3 Darstellung von Ebenen

! Eine Ebene ist eindeutig bestimmt durch drei Punkte (nicht kollinear) oder durch zwei einander schneidende bzw. parallele Geraden.

Die drei Punkte A, B und C bzw. die beiden Geraden g und h bestimmen die Dachebene δ des Hauses in Bild 5.11 eindeutig. Der vierte Punkt D der Dachebene δ ist nicht mehr frei wählbar.

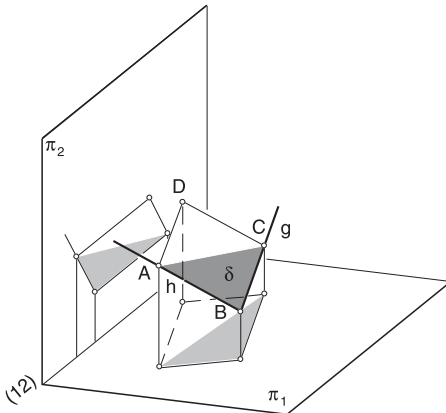
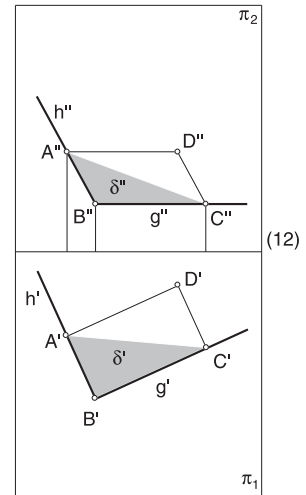


Bild 5.11: Grund- und Aufriss einer Ebene



Die Lage einer Ebene im Raum kann auch mittels der Schnittgeraden mit den Risesebenen, den Spuren der Ebene, angegeben werden.

$e_1 = \delta \cap \pi_1$ ist die Spur der Ebene δ in π_1 : 1. Spur von δ oder **Grundrissspur**.

$e_2 = \delta \cap \pi_2$ ist die Spur der Ebene δ in π_2 : 2. Spur von δ oder **Aufrissspur**.

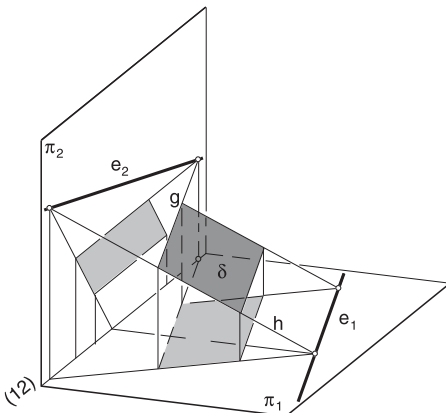
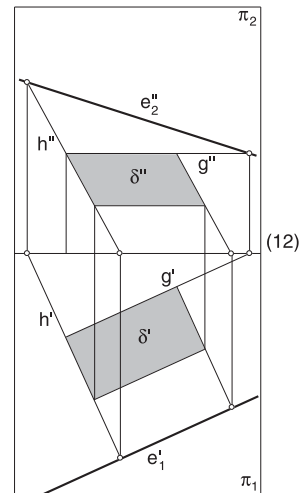


Bild 5.12: Darstellung einer Ebene durch ihre Spuren



Die Spurpunkte der Geraden einer Ebene δ liegen auf den Spuren der Ebene δ . Die Spuren einer Ebene δ schneiden einander auf der Rissachse.

Es können folgende besondere Lagen einer Ebene δ im Raum unterschieden werden:

1. Die Ebene δ ist senkrecht zur Grundrissebene ($\delta \perp \pi_1$). Sie ist eine **grundrissprojizierende Ebene**. Der Grundriss δ' der Ebene δ ist in diesem Fall eine Gerade.

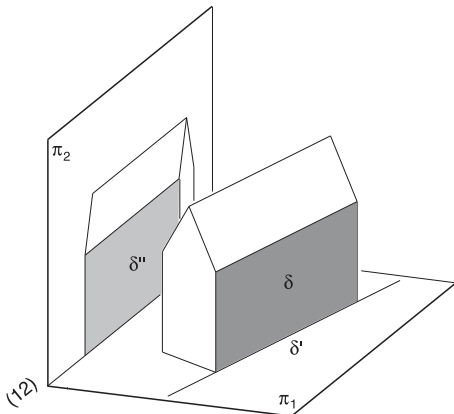
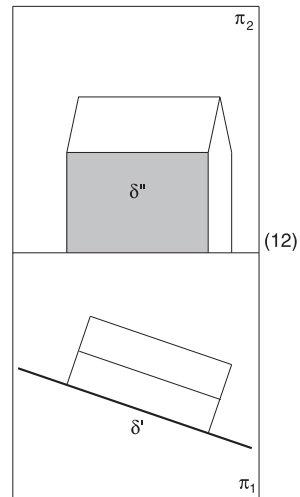


Bild 5.13: Grundrissprojizierende Ebene



2. Die Ebene δ ist senkrecht zur Aufrissebene ($\delta \perp \pi_2$). Sie ist eine **auftrissprojizierende Ebene**. Der Aufriss δ'' der Ebene δ ist eine Gerade.

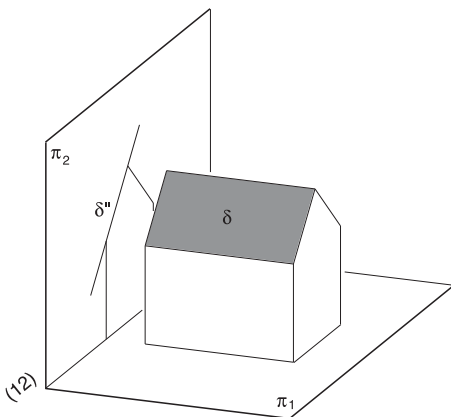
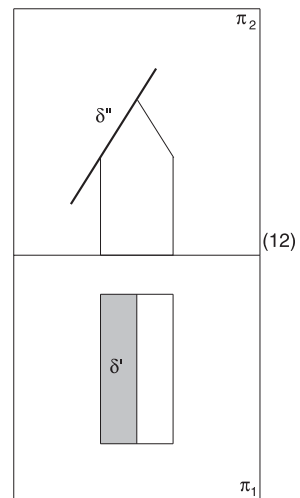


Bild 5.14: Aufrissprojizierende Ebene



3. Die Ebene δ ist parallel zur Grundrissebene. Der Aufriss δ'' der Ebene δ ist dann eine Gerade parallel zur Rissachse (12).

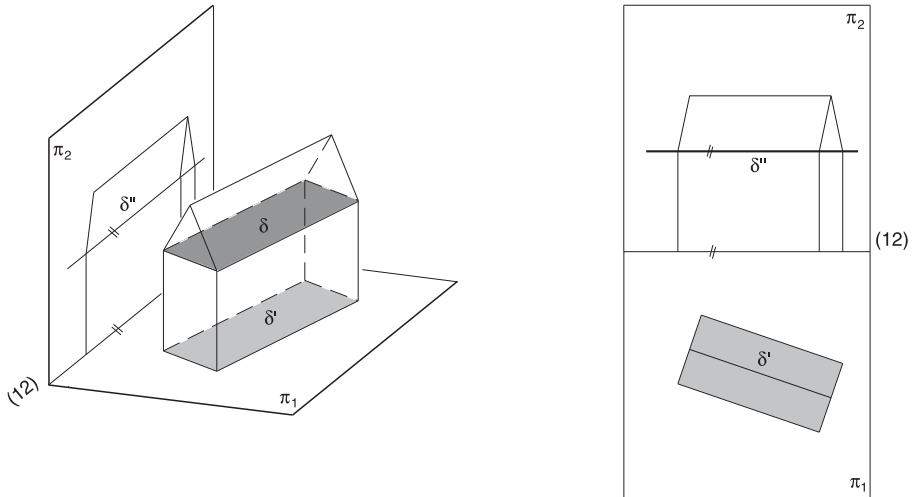


Bild 5.15: Ebene parallel zur Grundrissebene

4. Die Ebene δ ist parallel zur Aufrissebene. Der Grundriss δ' der Ebene δ ist dann eine Gerade parallel zur Rissachse (12).

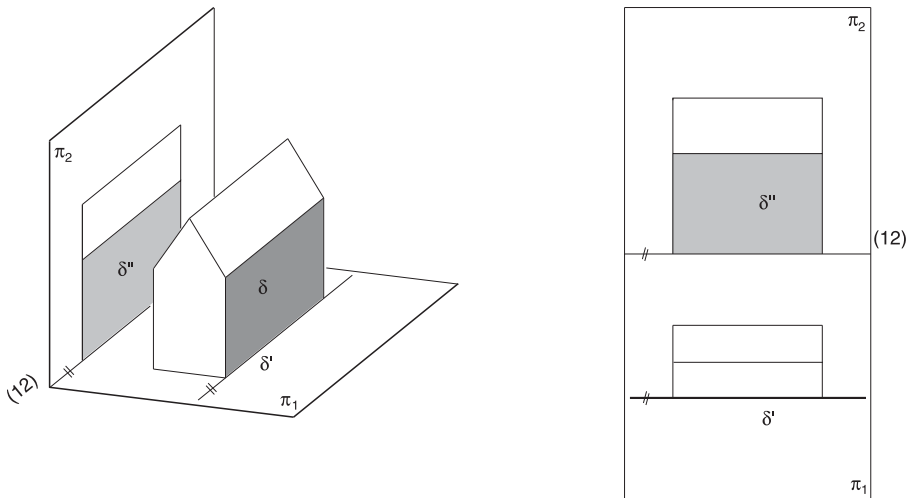


Bild 5.16: Ebene parallel zur Aufrissebene

5.4 Grundaufgaben der Lage

5.4.1 Lage zweier Geraden im Raum

Zwei Geraden im Raum können drei verschiedene Lagen zueinander einnehmen:

1. Die Geraden g und h schneiden einander.

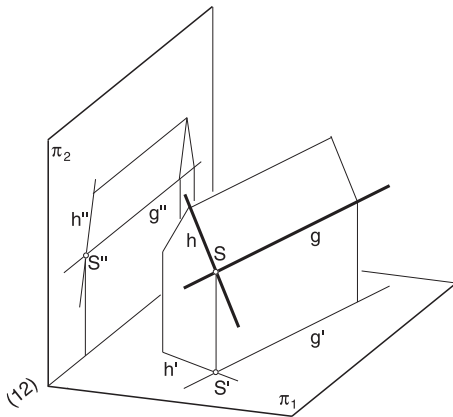
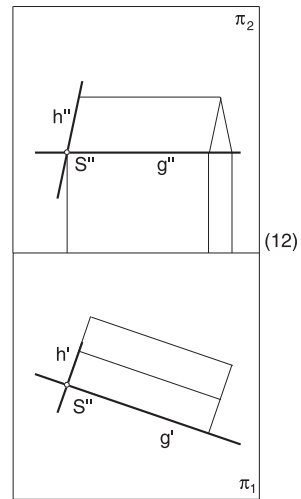


Bild 5.17: Zwei einander schneidende Geraden g und h



2. Die Geraden g und h sind parallel.

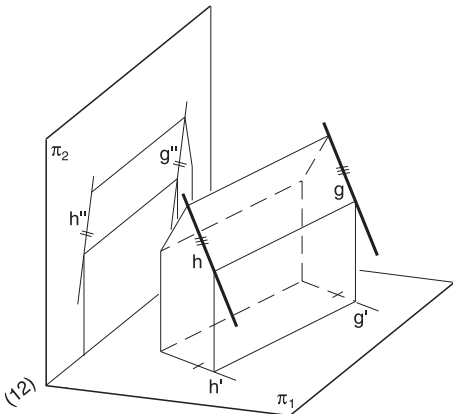
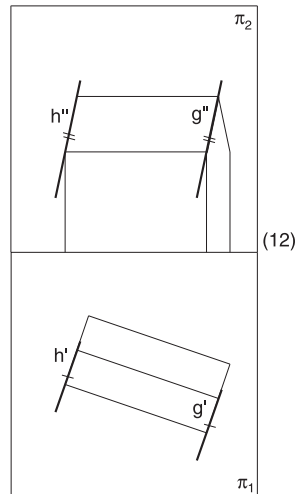


Bild 5.18: Zwei zueinander parallele Geraden g und h



3. Die Geraden g und h sind windschief.

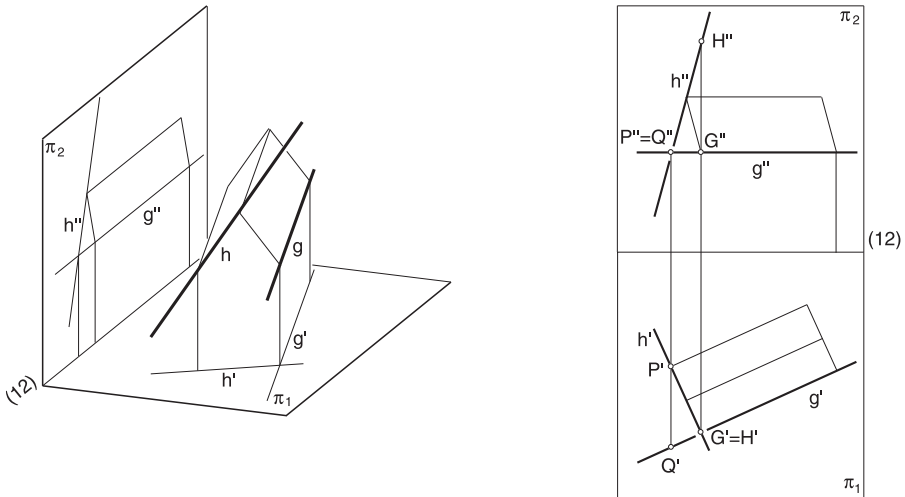


Bild 5.19: Zwei zueinander windschiefe Geraden g und h

Der Fall der windschiefen Geraden kann in zugeordneten Normalrissen dadurch vom Fall der einander schneidenden Geraden unterschieden werden, dass die scheinbaren Schnittpunkte der Geraden in den verschiedenen Rissen nicht auf einem Ordner liegen.

Die Sichtbarkeit kann mit Hilfe der Risse geklärt werden. Im Aufriss ist zu erkennen, dass die Gerade h im Punkt H höher liegt als die Gerade g im Punkt G . Daher verläuft die Gerade h an dieser Stelle über der Geraden g . Dies kann im Grundriss durch unterbrechen der Geraden g gekennzeichnet werden. Im Grundriss ist zu sehen, dass die Gerade g im Punkt Q vor der Geraden h im Punkt P verläuft. Daher muss die Gerade h im Aufriss unterbrochen dargestellt werden.

Bei allen Konstruktionen muss auf den Unterschied zwischen wahren und scheinbaren Schnittpunkten geachtet werden. Nur mindestens zwei zugeordnete Normalrisse können die Lage der Geraden im Raum umkehrbar eindeutig kennzeichnen.

Liegen zwei Geraden in einer Ebene, so gibt es nur zwei verschiedene Fälle:

1. Die Geraden schneiden einander.
2. Die Geraden sind zueinander parallel.

Sie können dann nicht windschief zueinander sein.

5.4.2 Verbindungsebene dreier Punkte

Eine Ebene ist durch drei Punkte A, B und C bestimmt. Daher muss ein beliebiger vierter Punkt D dieser Ebene so konstruiert werden, dass er in derselben Ebene liegt. Nachdem ein Riss des Punktes D beliebig festgelegt wurde, kann der andere Riss des Punktes D eindeutig bestimmt werden, so dass der Punkt D in der Ebene ABC liegt.

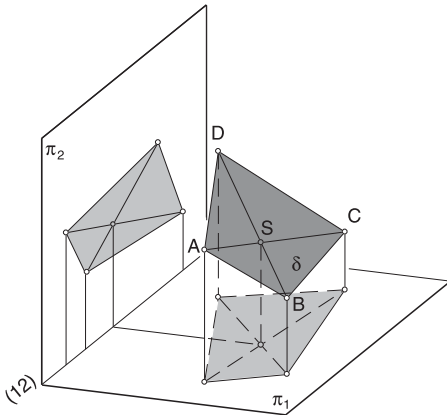
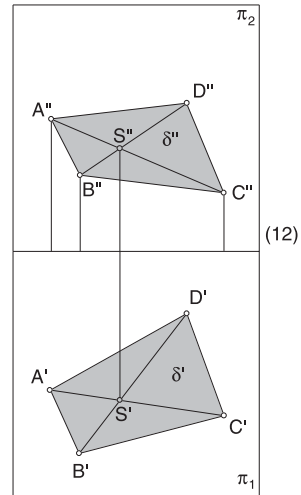


Bild 5.20: Festlegen eines weiteren Punktes einer Ebene



1. Die Geraden $B'D'$ und $A'C'$ schneiden einander im Punkt S' .
2. Der Ordner durch S' schneidet die Gerade $A''C''$ in S'' .
3. Die Gerade $B''S''$ und der Ordner durch D' schneiden einander in D'' .

Soll der vierte Punkt so konstruiert werden, dass ein Parallelogramm entsteht, so kann dieser aufgrund der Parallelentreue der Parallelprojektion gefunden werden.

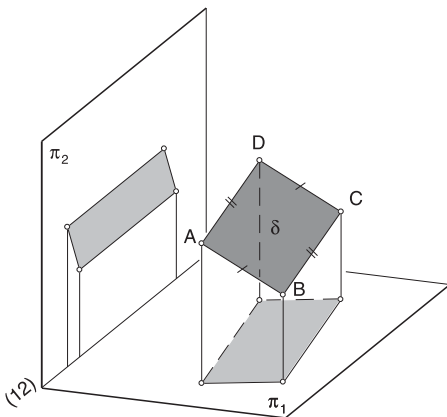
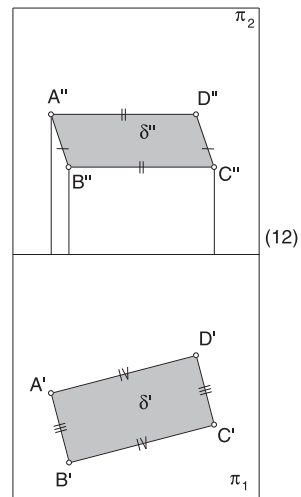


Bild 5.21: Festlegen des vierten Punktes eines Parallelogramms



5.4.3 Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene

Um den Schnittpunkt S einer Geraden g mit einer Ebene PQR zu konstruieren, wird die **Methode der Deckgeraden** angewandt:

Durch die Gerade g wird eine grundriss- oder aufrissprojizierende Hilfsebene ε gelegt. Die Konstruktion in Bild 5.22 wird mit einer grundrissprojizierenden Hilfsebene durchgeführt. Diese Hilfsebene ε schneidet die Ebene PQR in der Geraden d , die sich im Grundriss mit der Geraden g deckt. Die Gerade d ist eine Deckgerade. Sie wird mit Hilfe der Schnittpunkte 1 und 2 mit den Geraden der Ebene PQR gefunden. Diese Deckgerade d schneidet die Gerade g in dem gesuchten Schnittpunkt S .

1. $d' = g'$, da ε grundrissprojizierend ist.
2. Punkt $1'$ ist der Schnittpunkt von d' und $R'P'$.
3. Punkt $2'$ ist der Schnittpunkt von d' und $P'Q'$.
4. Punkt $1''$ wird mit Hilfe eines Ordners durch $1'$, geschnitten mit der Geraden $R''P''$, gefunden.
5. Punkt $2''$ wird mit Hilfe eines Ordners durch $2'$, geschnitten mit der Geraden $P''Q''$, gefunden.
6. d'' ist die Verbindungsgerade von $1''$ und $2''$.
7. Der Aufriss des gesuchten Schnittpunktes (S'') ist der Schnittpunkt der Geraden d'' und g'' .
8. Der Grundriss des Schnittpunktes (S') wird mit Hilfe eines Ordners durch S'' , geschnitten mit der Geraden g' , gefunden.

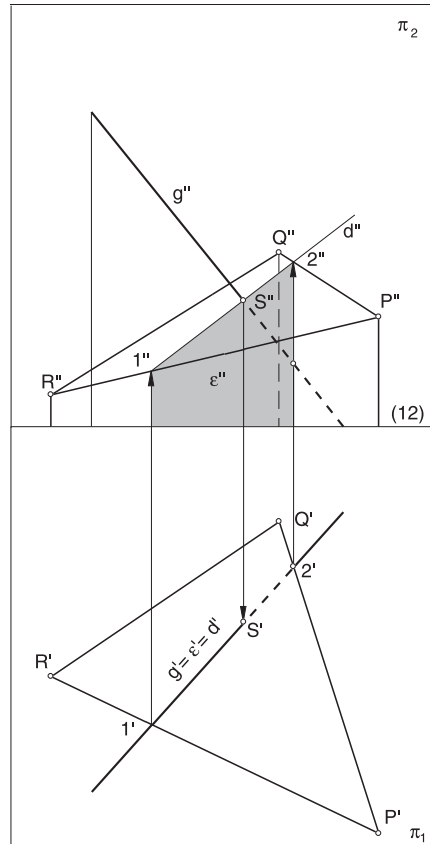
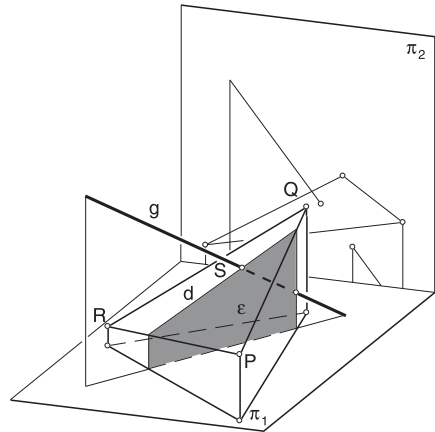


Bild 5.22: Methode der Deckgeraden mit grundrissprojizierender Hilfsebene

Diese Methode wird auch für Schattenkonstruktionen benötigt (vgl. Kapitel 10). Die Gerade ist dann der Lichtstrahl, der die Schattenauffangfläche im Schattenpunkt trifft.

Eine entsprechende Konstruktion lässt sich mit einer aufrissprojizierenden Hilfsebene durchführen. Die Vorgehensweise wird am Beispiel eines Hauses mit Anbau (Bild 5.23) gezeigt. Mit Hilfe der Methode der Deckgeraden kann herausgefunden werden, wo der First des Anbaus (Gerade g) die Dachebene des Hauptgebäudes (Ebene $ABCD$) schneidet (Schnittpunkt S).

1. $d'' = g''$, da ε aufrissprojizierend ist.
2. Punkt $1''$ ist der Schnittpunkt von d'' und $A''D''$.
3. Punkt $2''$ ist der Schnittpunkt von d'' und $B''C''$.
4. Die Punkte $1'$ und $2'$ werden mit Hilfe von Ordern durch $1''$ bzw. $2''$, geschnitten mit der Geraden $A'D'$ bzw. $B'C'$, gefunden.
5. d' ist die Verbindungsgerade von $1'$ und $2'$.
6. Der Grundriss des gesuchten Schnittpunktes (S') ist der Schnittpunkt der Geraden d' und g' .
7. Der Aufriss des Schnittpunktes (S'') wird mit Hilfe eines Ordners durch S' , geschnitten mit der Geraden g'' , gefunden.

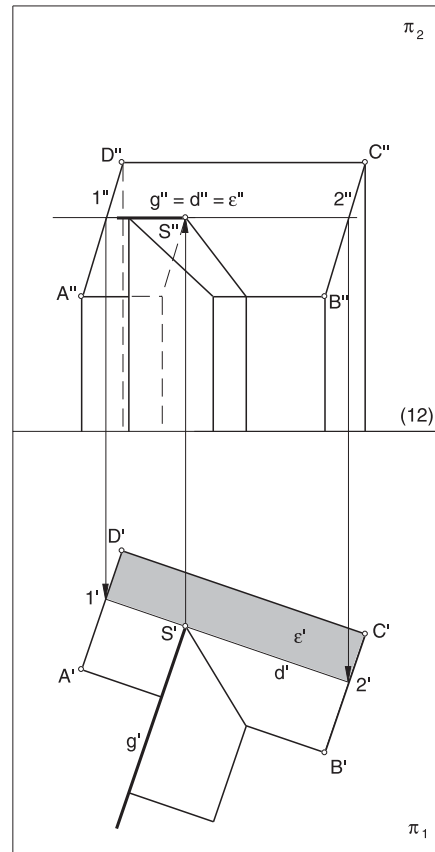
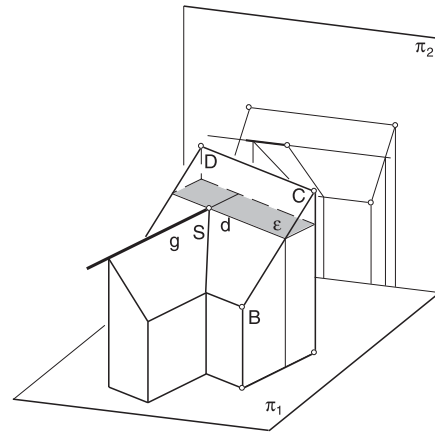


Bild 5.23: Methode der Deckgeraden mit aufrissprojizierender Hilfsebene

5.4.4 Schnittgerade zweier Ebenen

Das Problem, die Schnittgerade zweier Ebenen zu bestimmen, kann zerlegt werden in das Bestimmen der Schnittpunkte zweier Geraden der einen Ebene mit der anderen Ebene (Kapitel 5.4.3). Dabei müssen die Geraden nicht derselben Ebene entnommen werden. Die Schnittgerade ist dann die Verbindungsgerade der beiden ermittelten Schnittpunkte (Bild 5.24). Um den Durchstoßpunkt G der Geraden BC mit dem Dreieck PQR zu finden, wird eine grundrissprojizierende Hilfsebene durch die Gerade BC gelegt. Die Methode der Deckgeraden liefert den Durchstoßpunkt G.

1. $d_1' = B'C'$, da eine grundrissprojizierende Hilfsebene gewählt wurde.
2. d_1' schneidet das Dreieck $P'Q'R'$ in der Strecke $1'2'$.
3. Ordner durch $1'$ schneidet $P''Q''$ in $1''$; Ordner durch $2''$ schneidet $R''P''$ in $2''$.
4. d_1'' ist die Verbindungsgerade von $1''$ und $2''$.
5. G'' ist der Schnittpunkt von d_1'' und $B''C''$.

Um den Durchstoßpunkt H der Geraden RP mit dem Dreieck ABC zu finden, wird eine aufrissprojizierende Hilfsebene durch die Gerade RP gelegt. Die Konstruktion kann analog mit der Deckgeraden d_2 durchgeführt werden. Die Gerade BC schneidet das Dreieck PQR im Punkt G. Die Gerade RP schneidet das Dreieck ABC im Punkt H. Die Verbindungsgerade GH ist die gesuchte Schnittgerade der beiden Ebenen.

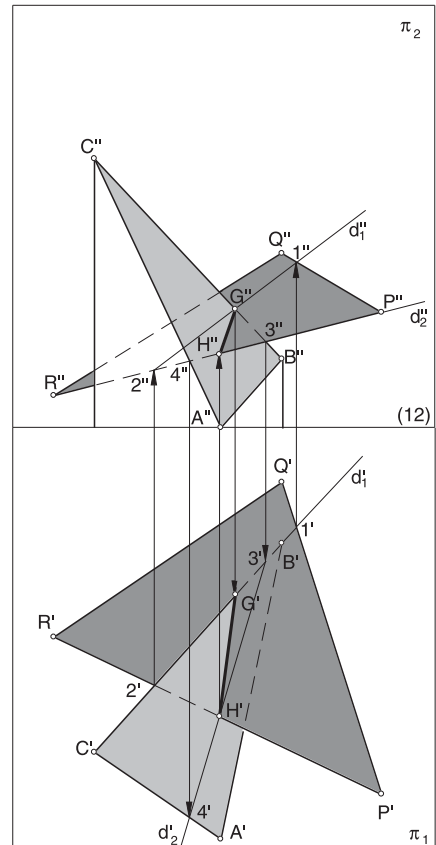
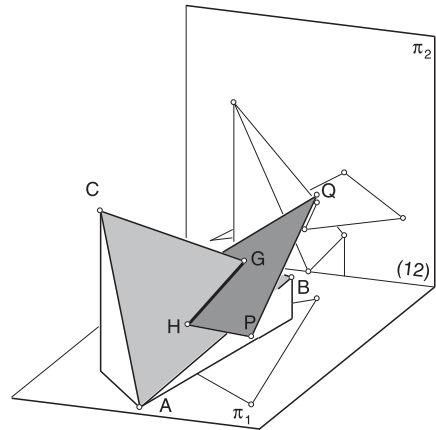


Bild 5.24: Schnittgerade zweier Ebenen

Die Schnittgerade zweier Ebenen wird beispielsweise benötigt, um die Verschneidung zweier Dachebenen ε und δ zu ermitteln (Bild 5.26).

Mit Hilfe von grundrissprojizierenden Hilfsebenen durch den First und die Traufe der Dachebene δ wurden nach der Methode der Deckgeraden die beiden Schnittpunkte von First und Traufe der Dachebene δ mit der Dachebene ε gefunden. Die Verbindungsgerade ist die Schnittgerade der beiden Dachebenen.



Bild 5.25: Pavillon beim Bahnhof Zoo, Berlin,
Peter Stürzebecher

Diese Methode kann für alle Probleme angewandt werden, bei denen Ebenen zum Schnitt gebracht werden müssen. Der Pavillon in Bild 5.25 besteht aus einem Quader und einem Würfel. Die entstehenden Schnittgeraden können mit Hilfe der Methode der Deckgeraden gefunden werden, indem die Kanten des einen Körpers mit den Ebenen des anderen Körpers zum Schnitt gebracht werden.

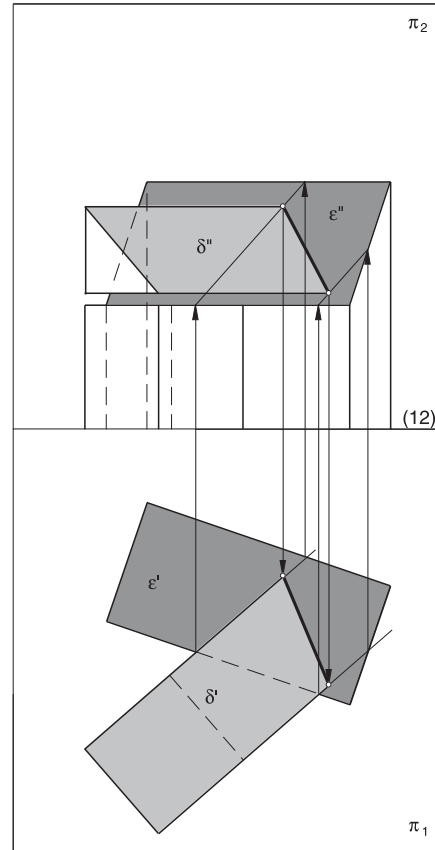
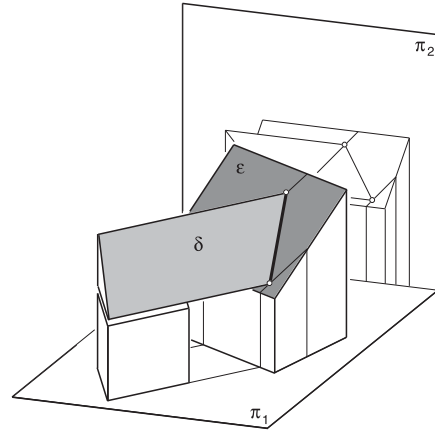


Bild 5.26: Schnittgerade zweier Dachebenen

5.5 Seitenrisse

Aus verschiedenen Gründen erweist es sich als zweckmäßig, neben Grund-, Auf- und Kreuzrissebene eine neue Rissebene, genannt **Seitenrissebene**, einzuführen:

1. Ein Seitenriss des Objekts in einer gewünschten Blickrichtung kann das Objekt anschaulicher darstellen als vorhandene zugeordnete Risse.
2. Mit Hilfe spezieller Seitenrisse können einige Problemstellungen, insbesondere Maßaufgaben (vgl. Kapitel 5.6), gelöst werden.

Um die Informationen über das durch zwei zugeordnete Normalrisse, z. B. Grund- und Aufriss, gegebene Objekt weiterverwerten zu können, muss die neu eingeführte Seitenrissebene senkrecht zu einer der bisherigen Rissebenen sein:

Seitenrissebene $\pi_4 \perp \pi_1$

oder $\pi_4 \perp \pi_2$

oder $\pi_4 \perp \pi_3$

Der Seitenriss ist dann ein neuer zugeordneter Normalriss. Gemeinsam mit dem Riss, zu dem die neue Seitenrissebene senkrecht gewählt wurde, liegen dann zwei neue zugeordnete Normalrisse vor, in Bild 5.27 Grund- und Seitenriss. Der neue Seitenriss kann mit Hilfe der Informationen aus dem dann nicht mehr zugeordneten Riss, dem wegfallenden Riss, entnommen werden. In Bild 5.27 ist der wegfallende Riss der Aufriss.

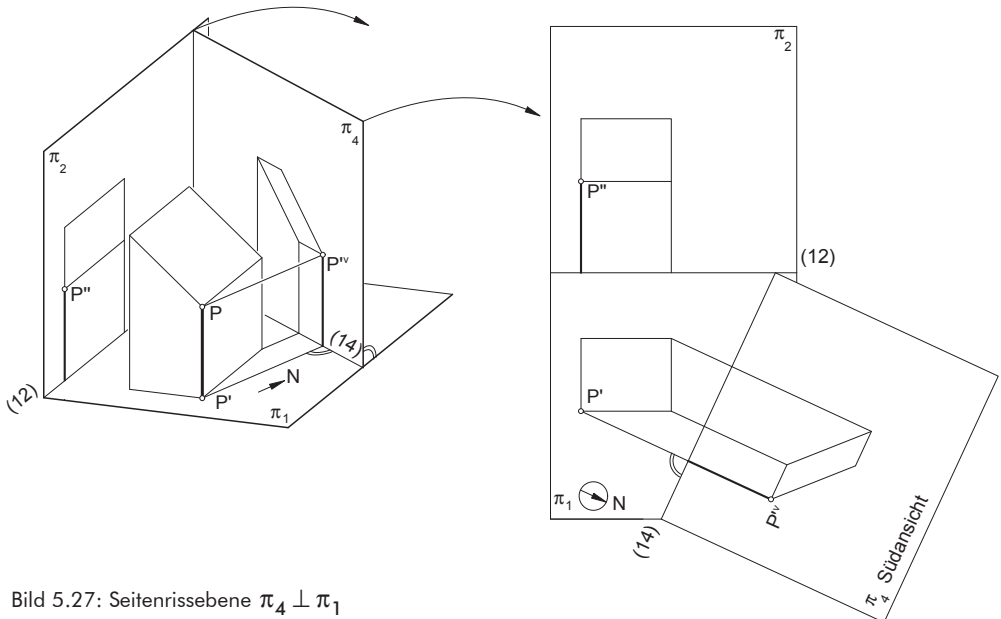


Bild 5.27: Seitenrissebene $\pi_4 \perp \pi_1$

Da die neue Seitenrissebene π_4 senkrecht zur Grundrissebene gewählt wurde, haben die Bilder der Punkte im Seitenriss die gleichen Höhen wie im Aufriss, d. h. der neue Riss P^V eines Punktes P muss von der neuen Rissachse gleichweit entfernt sein wie der Aufriss des Punktes P von der Rissachse (12). Daher gilt: Der Abstand des neuen Risses P^V des Punktes P von der neuen Rissachse (14) ist gleich dem Abstand seines Risses P^H von der Rissachse (12). Für einen beliebigen Seitenriss gilt dann allgemein:

! Der Abstand des neuen Risses von der neuen Rissachse ist gleich dem Abstand des wegfallenden Risses von der wegfallenden Rissachse.

Der neu eingeführte Seitenriss und der Grundriss sind zugeordnete Normalrisse, d. h. die Ordner sind senkrecht zur neuen Rissachse (14). Die Richtung, in der man den Abstand des neuen Risses senkrecht von der neuen Rissachse aus anträgt, ist zu Beginn der Einführung des neuen Risses frei wählbar.



Bild 5.28: Baumhäuser, Helmond, Niederlande, 1976, Piet Blom



Bild 5.29: Vitra-Feuerwehrhaus, Weil am Rhein, 1992-93, Zaha Hadid

Die neue Seitenrissebene wurde in Bild 5.27 gewählt, um einen anschaulicheren Riss des Hauses zu erhalten bzw. um eine bestimmte Ansicht des Gebäudes zu erstellen, z. B. die Ansicht des Hauses aus einer bestimmten Himmelsrichtung, hier Südansicht. Eine Seitenrissebene kann auch eingeführt werden, um eine spezielle Lage eines Objektes zu erreichen. Diese Lage kann zuvor im Entwurfsprozess experimentell im Modell entwickelt worden sein und wird dann mit Hilfe von Seitenrissen in die Zeichnung umgesetzt.

Sehr komplex ist die Problemstellung bei einem Gebäude wie dem Feuerwehrhaus von Zaha Hadid (Bild 5.29). Auch hier kann mit Hilfe von Seitenrissen die schräge Lage der verschiedenen Gebäudeteile ermittelt werden.

Soll ein Würfel mit der Raumdiagonalen d senkrecht zur Grundrissebene gestellt werden, wie bei den Baumhäusern von Piet Blom (Bild 1.5 und Bild 5.28), so muss

1. eine Seitenrissebene $\pi_3 \parallel d$ und
2. eine Seitenrissebene $\pi_4 \perp d$ gewählt werden.

Die Risse π_3 und π_4 in zugeordneter Lage stellen den Würfel dann in der gewünschten Lage dar (Bild 5.30).

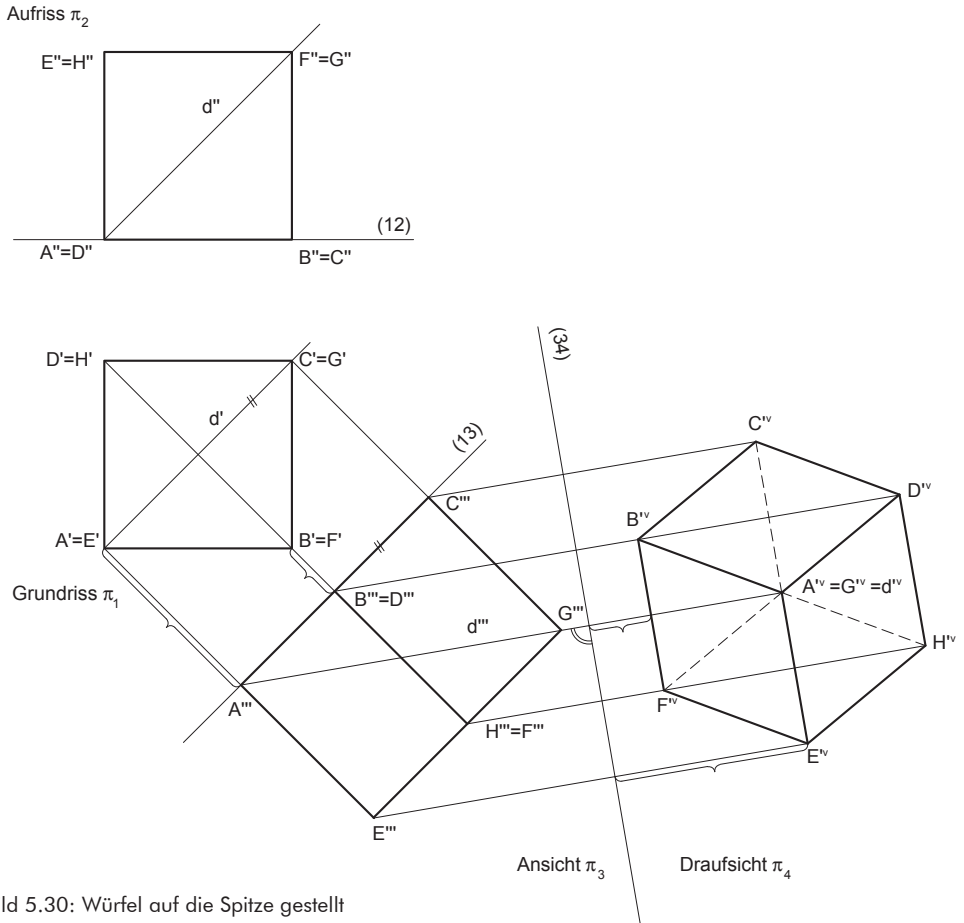


Bild 5.30: Würfel auf die Spitze gestellt

1. Rissachse (13) $\parallel d'$, da $\pi_3 \perp \pi_1$ und $\pi_3 \parallel d$ gewählt wird.
2. Ordner und Höhen aus dem Aufriss, im Seitenriss π_3 abgetragen, liefern den Seitenriss des Würfels. Die Raumdiagonale d ist parallel zu dieser Seitenrissebene π_3 .
3. Rissachse (34) $\perp d''$, da $\pi_4 \perp \pi_3$ und $\pi_4 \perp d$ gewählt wird.
4. Ordner und Abstände zur Rissachse (13) aus dem Grundriss entnommen und von der neuen Rissachse (34) aus abgetragen, ergeben den neuen Seitenriss des Würfels. Die Raumdiagonale d steht senkrecht zu dieser Seitenrissebene π_4 .
5. Die Seitenrisse π_3 und π_4 können als Ansicht und Draufsicht eines auf die Diagonale gestellten Würfels betrachtet werden.

Die Einführung einer Seitenrissebene kann auch erforderlich sein, um eine Maßangabe in die Zeichnung umzusetzen. Ist beispielsweise der Grundriss eines Hauses und die Dachneigung gegeben, so kann die Dachneigung in einem Seitenriss eingezeichnet werden. Die Dachneigung ist in einem Seitenriss zu sehen, in dem die Dachebene projizierend ist. Die Seitenrissebene muss also senkrecht zu einer Höhenlinie (z. B. Traufe) der Dachebene gewählt werden (Bild 5.31).

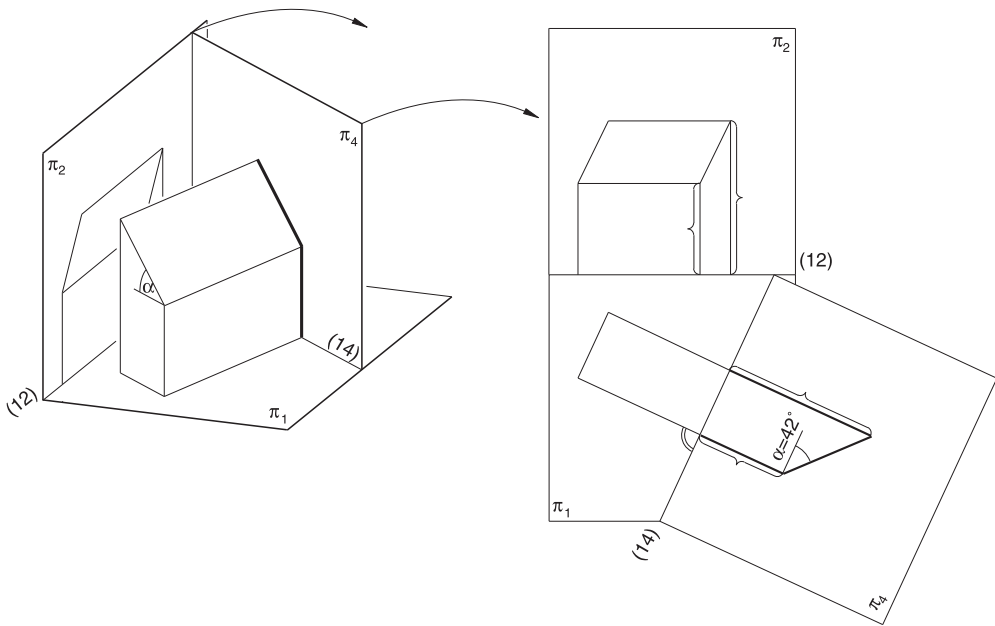


Bild 5.31: Dachneigung in einem Seitenriss

1. Rissachse (14) wird senkrecht zur Traufe im Grundriss gewählt.
2. Die Traufhöhe kann dem Aufriss entnommen werden und wird im Seitenriss abgetragen.
3. Der Dachneigungswinkel $\alpha = 42^\circ$ kann im Seitenriss abgetragen werden.
4. Die Höhe des Firstes kann dem Seitenriss entnommen und im Aufriss eingezeichnet werden.

Beim CAD-gestützten Arbeiten entspricht dieser Vorgehensweise das Einführen eines **Benutzerkoordinatensystems**. Das Objekt ist zunächst eingebettet in ein sogenanntes **Weltkoordinatensystem**, das ein festes kartesisches Koordinatensystem im Raum ist. Um bestimmte Problemstellungen zu lösen, kann dann ein neues Koordinatensystem, ein Benutzerkoordinatensystem, eingeführt werden, das sich dem Objekt anpasst. So kann der Würfel wie in Bild 5.30 auf die Spitze gestellt werden, indem die z-Achse in die Raumdiagonale des Würfels gelegt wird.

5.6 Grundaufgaben des Messens

Zugeordnete Normalrisse sind relativ maßgetreue Bilder der räumlichen Objekte. Daher sind sie geeignet, um wahre Größen und die wahre Gestalt von Teilen des Objektes aus der Zeichnung zu ermitteln. Im Folgenden sind die wichtigsten Problemstellungen zusammengestellt.

5.6.1 Wahre Größe einer Strecke

Um die wahre Größe einer Strecke, die in Grund- und Aufriss gegeben ist, zu ermitteln, stehen grundsätzlich zwei Methoden zur Verfügung: Umklappen und Drehen.

1a. **Umklappen des Projektionstrapezes:**

Die wahre Größe einer Strecke AB lässt sich durch Umklappen des Projektionstrapezes $A'B'BA$ in die Grundrissebene bestimmen.

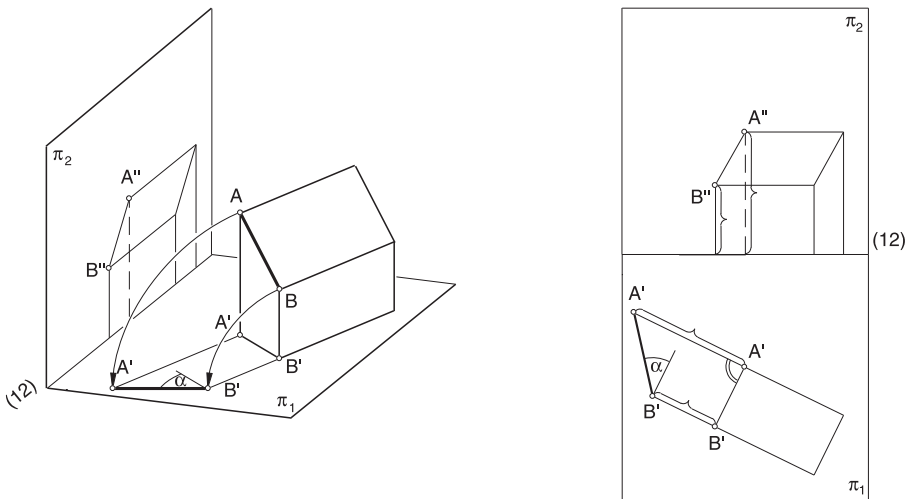


Bild 5.32: Umklappen des Projektionstrapezes

1b. **Umklappen durch Einführen einer Seitenrissebene** parallel zur Strecke bzw. durch die Strecke:

Nach dem Einführen einer Seitenrissebene π_4 durch die Strecke AB erscheint in der Seitenrissebene π_4 die Strecke AB in wahrer Größe (Bild 5.33).

Die Methoden "Umklappen des Projektionstrapezes" und "Umklappen durch Einführen einer Seitenrissebene" unterscheiden sich in der Vorstellung, nicht jedoch in der Ausführung der Zeichenschritte.

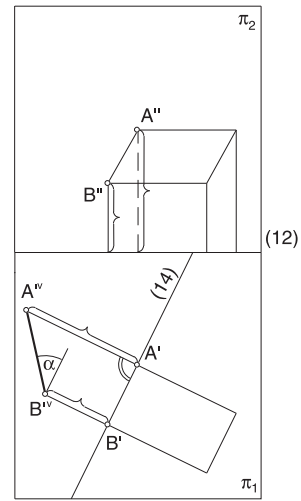
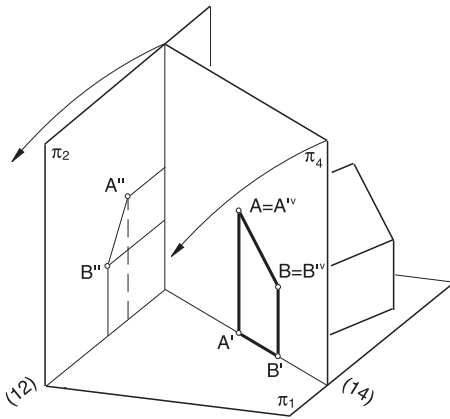


Bild 5.33: Umklappen durch Einführen einer Seitenrissebene durch die Strecke

Anstatt die Rissebene in Bezug zur Strecke zu ändern, wird in der zweiten Methode, beim Drehen, die Lage der Strecke zur Rissebene geändert.

2. **Monge'sche Drehkonstruktion:**

Eine Strecke erscheint dann in wahrer Größe, wenn sie parallel zur Rissebene liegt. Daher wird die Strecke AB z. B. um die vertikale Gerade durch den Punkt A gedreht, bis sie parallel zur Aufrissebene liegt. Im Aufriss erscheint dann die wahre Größe der Strecke AB.

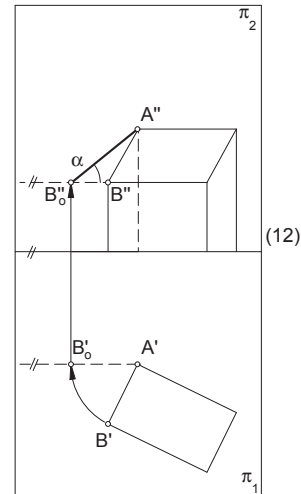
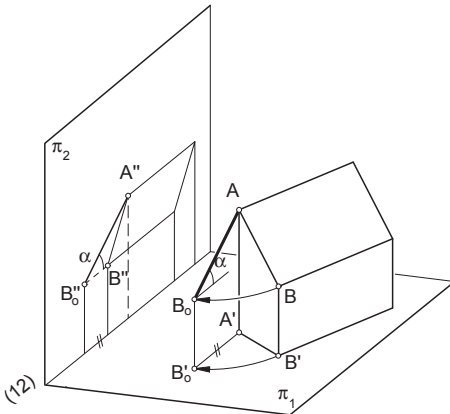
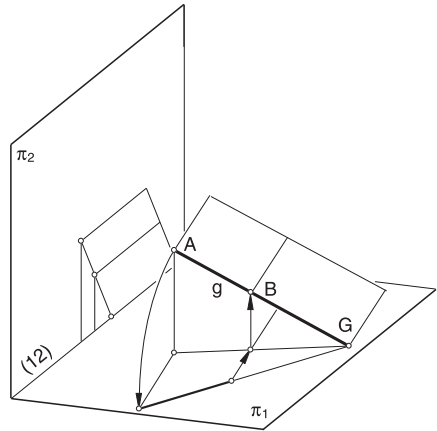


Bild 5.34: Monge'sche Drehkonstruktion

5.6.2 Neigungswinkel einer Geraden gegen die Grundrissebene

Der Neigungswinkel kann im Zusammenhang mit den Konstruktionen der wahren Größe der Strecke AB auf der Geraden gefunden werden. In Bild 5.32 - 5.34 ist jeweils der Neigungswinkel α der Geraden AB gegen die Grundrissebene eingezeichnet. Entsprechend kann der Neigungswinkel der Geraden AB gegen eine andere Rissebene konstruiert werden.



5.6.3 Abtragen einer gegebenen Strecke auf einer Geraden

Die Länge der Strecke kann in einem Seitenriss abgetragen werden, zu dem die Gerade g parallel ist. Über Ordner erhält man den Endpunkt der Strecke in Grund- und Aufriss. Ist z. B. von einem Haus mit Pultdach die Lage von First und Ortgang mit Schnittpunkt A und außerdem die wahre Länge des Ortgangs (\overline{AB}) bekannt, so kann mit dieser Methode Grund- und Aufriss der Traufe gefunden werden.

1. Seitenriss π_4 wird gewählt mit Rissachse $(14)=g'$.
2. Ordner durch A' und Abtragen des Abstandes von A' zur Rissachse (12) ergibt A''.
3. Ein beliebiger Punkt G der Geraden g in Grund- und Aufriss gewählt, liefert g'' als Verbindungsgerade von A'' und G'. G wurde hier als Grundrisspurpunkt der Gerade g gewählt.
4. Abtragen der wahren Länge AB von A'' aus ergibt B''.
5. Mittels Ordner erhält man B' und dann B''.

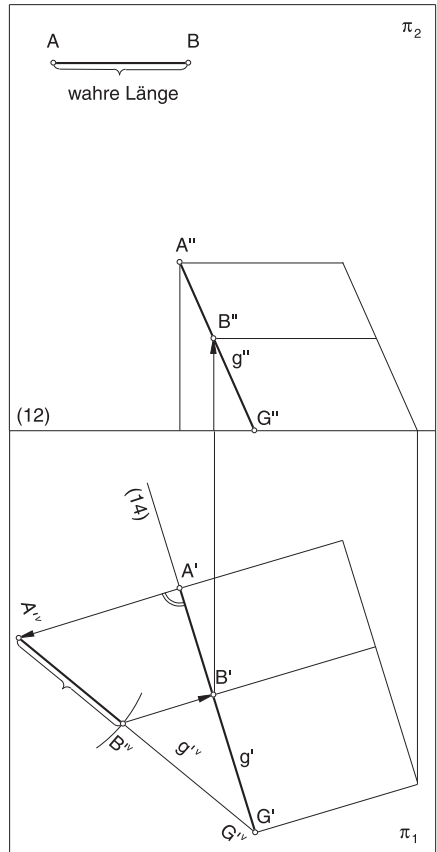


Bild 5.35: Abtragen einer Strecke

5.6.4 Wahre Gestalt einer ebenen Figur

Um die wahre Gestalt (wahre Längen und Winkel) einer ebenen Figur aus zugeordneten Normalrissen zu ermitteln, wird die ebene Figur zu einer Rissebene parallel gedreht. Dazu muss man sich eine Hauptlinie der Ebene verschaffen, d. h. eine Gerade, die parallel ist zu der Rissebene, zu der die Figur parallel gedreht wird, da die Drehachse bei der Drehung fest bleibt.

! Die Ausgangsfigur und die gedrehte Figur sind zueinander affin.

Affinitätsachse ist die Drehachse, also die Hauptlinie, um die gedreht wird. Die Affinitätsrichtung ist senkrecht zur Affinitätsachse (vgl. Kapitel 3.1). Nachdem man einen Punkt der ebenen Figur parallel gedreht hat, kann die gedrehte Figur mit Hilfe der Zusammenhänge der Affinität ergänzt werden. In Bild 5.36 wird die wahre Gestalt einer Dachebene δ ermittelt. Da die Traufe des Daches eine Höhenlinie ist, kann die Dachebene mit der Traufe als Drehachse zur Grundriss-ebene parallelgedreht werden.

1. Die Traufe h wird als Drehachse gewählt.
2. P_o' liegt auf der Senkrechten zu h' durch P' (Bild des Kreisbogens bei der Drehung).
3. Seitenriss P'' mit Rissachse (14) durch diese Senkrechte entsteht durch Abtragen der Höhe von P'' . Hier ist der wahre Abstand a des Punktes P von der Drehachse zu sehen.
4. Dieser wahre Abstand kann von der Drehachse aus auf der Senkrechten abgetragen werden. P_o' ist gefunden.
5. Die Gerade g' schneidet die Affinitätsachse h' im Unendlichen, also auch $g_o' \rightarrow g_o' \parallel h'$.

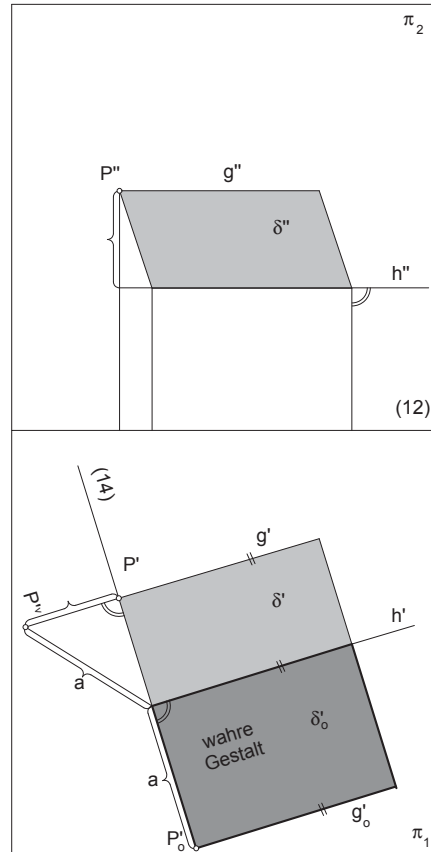
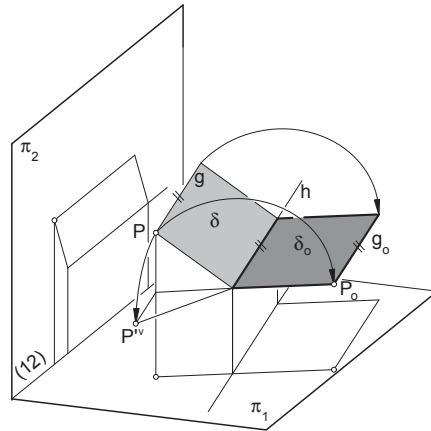


Bild 5.36: Wahre Gestalt einer Dachebene δ

Wenn keine der Kanten der Figur eine Hauptlinie ist, muss zuerst eine Hauptlinie konstruiert werden. Bild 5.37 zeigt den allgemeinen Fall einer ebenen Figur im Raum, Dreieck PQR, das um eine Frontlinie f zur Aufrissebene parallel gedreht wird, um die wahre Gestalt zu ermitteln.

1. Eine Frontlinie f des Dreiecks PQR wird als Drehachse gewählt, d. h. f senkrecht zu den Ordnern beliebig, z. B. durch R' .
2. f'' wird so konstruiert, dass f im Dreieck PQR liegt, indem der Schnittpunkt von f und $P'Q'$ in den Aufriss gebracht und dieser mit R'' verbunden wird $\rightarrow f''$.
3. Q_0 entsteht durch Drehung des Punktes Q um f . Q_0'' liegt also auf einem Kreis um f , der im Aufriss projizierend erscheint, d. h. auf einer Geraden senkrecht zu f'' durch Q'' .
4. Der wahre Abstand des Punktes Q von der Drehachse f wird mit Hilfe eines Seitenrisses ermittelt (Seitenriss Q'').
5. Q_0'' liegt auf der Senkrechten zu f'' in diesem Abstand von $f'' \rightarrow Q_0''$.
6. Da R auf der Drehachse liegt, gilt: $R'' = R_0''$.
7. P_0'' kann analog zu Q_0'' oder wie hier mit Hilfe der Lage der Geraden $Q_0''P_0''$ durch Q_0'' und den Schnittpunkt von $Q''P''$ mit der Drehachse f , der bei der Drehung fest bleibt, gefunden werden.

Die wahre Gestalt eines Dreiecks könnte auch aus den wahren Größen der drei Dreiecksseiten zusammengesetzt werden, da ein Dreieck durch seine drei Seiten bestimmt ist. Bei einer anderen Figur mit mehr Seiten wird dieses Verfahren sehr aufwendig, da die Figur in Dreiecke zerlegt, d. h. trianguliert werden müsste. Dann wird deutlich, dass das Parallelrehen der Figur zu einer Rissebene ein wesentlich schnelleres Verfahren ist.

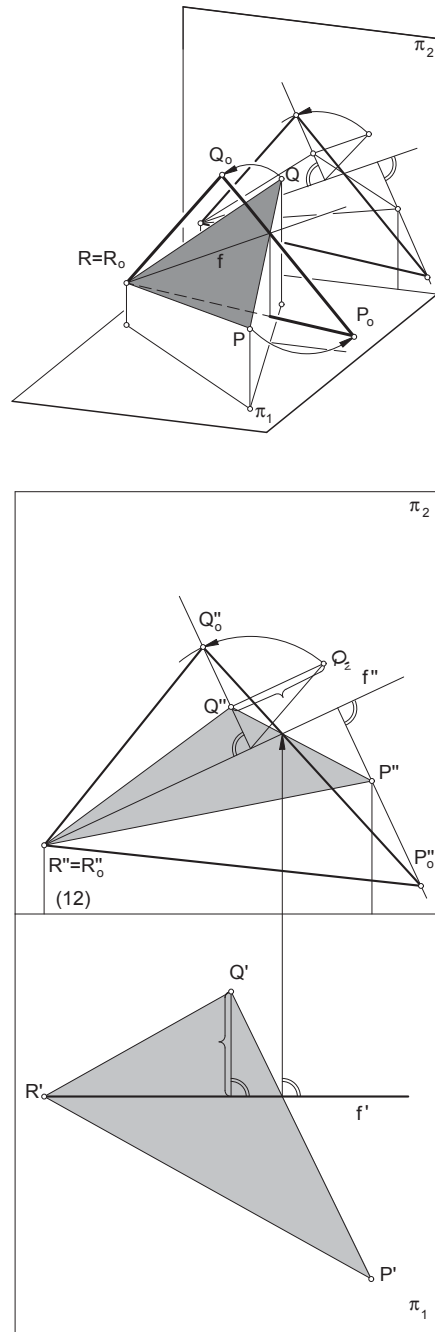


Bild 5.37: Wahre Gestalt eines Dreiecks

5.6.5 Normale einer Ebene

Soll ein Quader so auf einer Ebene zu liegen kommen, dass seine Kanten senkrecht zur Ebene stehen, so muss die Richtung der Normalen einer Ebene ermittelt werden (Bild 5.38). Die Normale einer Ebene ist senkrecht zu jeder Geraden der Ebene. Im allgemeinen werden rechte Winkel bei der Normalprojektion in die Rissebenen verzerrt. Der Riss des rechten Winkels ist bei Normalprojektion wieder ein rechter Winkel, falls ein Schenkel parallel zur Rissebene ist, also Hauptlinie ist (vgl. Kapitel 2.2.1). Daraus folgt:

Der Grundriss der Normalen n der Ebene ε im Punkt P ist senkrecht zum Grundriss jeder Höhenlinie der Ebene, d. h. $n' \perp h'$. Der Aufriss der Normalen der Ebene im Punkt P ist senkrecht zum Aufriss jeder Frontlinie dieser Ebene, d. h. $n'' \perp f''$.

1. Das Basisrechteck des Quaders in der Ebene ε ist in Grund- und Aufriss gegeben.
2. Eine beliebige Höhenlinie h in der Ebene ε wird in Grund- und Aufriss konstruiert.
3. Die Normale n kann im Grundriss senkrecht zu h' eingezeichnet werden $\rightarrow n' \perp h'$.
4. Eine beliebige Frontlinie f in der Ebene ε wird in Grund- und Aufriss konstruiert.
5. Die Normale n kann dann im Aufriss senkrecht zu f'' eingezeichnet werden $\rightarrow n'' \perp f''$.
6. Die anderen Quaderkanten sind parallel zu der Normalen n .
7. Der Quader hat hier eine beliebige Höhe. Nach Wahl eines beliebigen Punktes auf einer Quaderkante, können die anderen Abschlusskanten des Quaders mittels Parallelen und Ordern gefunden werden. Um eine vorgegebene Höhe des Quaders abzutragen, muss ein Seitenriss parallel zu einer Quaderkante hergestellt werden (vgl. Kapitel 5.6.3).

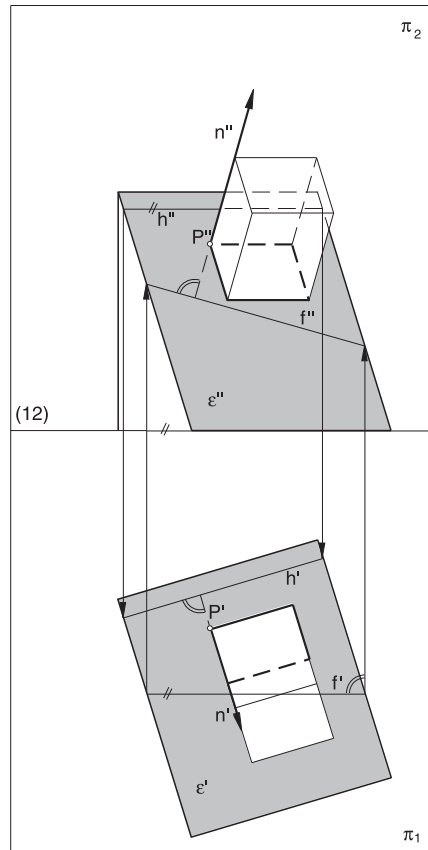
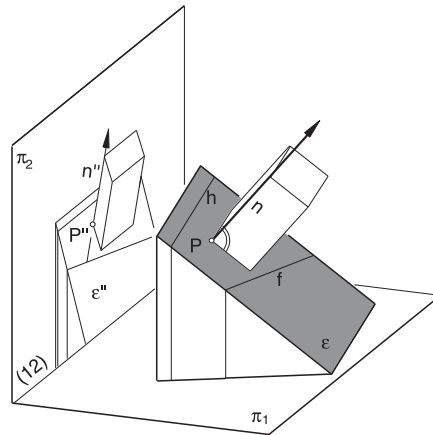
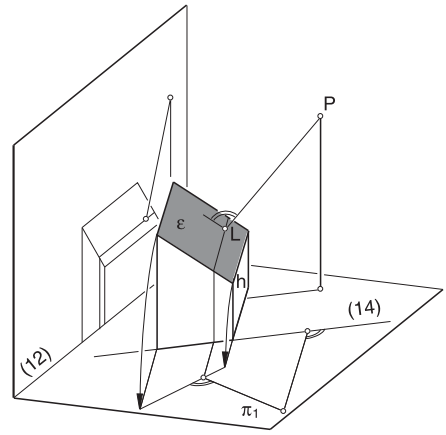


Bild 5.38: Normale einer Ebene im Punkt P

5.6.6 Abstand eines Punktes von einer Ebene

Soll vom oberen Ende eines Mastes ein möglichst kurzes Seil zu einer Ebene gespannt werden, so muss dessen Abstand von der Ebene ermittelt werden. Der Abstand eines Punktes von einer Ebene ist die kürzeste Entfernung. Den Abstand des Punktes P von der Ebene ε erhält man, indem das Lot vom Punkt P auf die Ebene ε gefällt wird. In einem Seitenriss, in dem die Ebene ε projizierend erscheint, kann die Richtung des Lotes eingezeichnet werden und der Lotfußpunkt L ermittelt werden (Bild 5.39).



1. Rissachse (14) $\perp h'$, da die Seitenrissebene $\pi_4 \perp \pi_1$ und $\pi_4 \perp \varepsilon$ gewählt wird, damit ε in der Seitenrissebene projizierend ist.
2. Die Seitenrisse ε'' und P'' können mittels Ordern und den Höhen der Eckpunkte im Aufriss gefunden werden.
3. Das Lot von P'' auf ε'' ergibt den Lotfußpunkt L'' im Seitenriss.
4. Ordner durch L'' geschnitten mit der Senkrechten durch P' zur Höhenlinie h' ergibt L' .
5. Ordner durch L' geschnitten mit dem Aufriss einer Höhenlinie durch L (diese kann im Grundriss durch L' und parallel zu h' eingezeichnet und dann mittels Ordern in den Aufriss gebracht werden) liefert L'' .
6. Die Verbindung PL in allen Rissen gibt die Lage des Seiles an.
7. Die Länge der Strecke $P''L''$ ist der wahre Abstand des Punktes P von der Ebene ε und damit die Länge des Seiles.

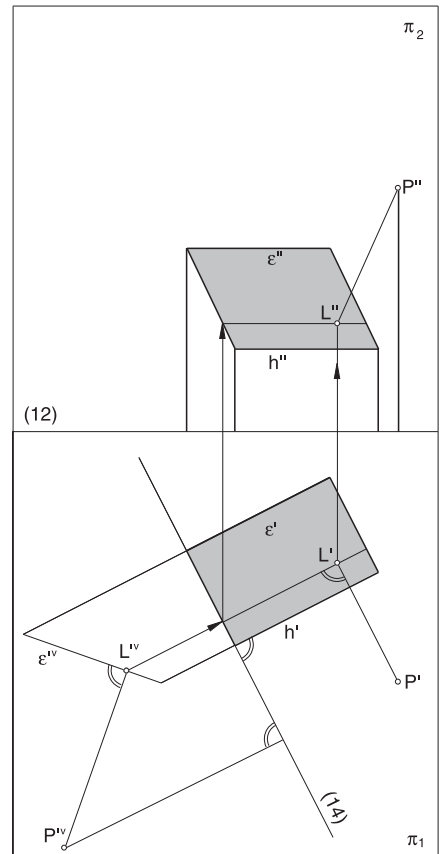


Bild 5.39: Abstand des Punktes P von der Ebene ε

5.6.7 Normalriss eines Kreises

Ein Kreis wird bei Parallelprojektion als Ellipse abgebildet. Daher wird eine in einer Dachebene liegende kreisrunde Dachöffnung auch in Grund- und Aufriss als Ellipse zu sehen sein. Ist die Dachebene und der Mittelpunkt M des Kreises in Grund- und Aufriss bekannt, so kann das Bild des Kreises mit Radius r in beiden Rissen gefunden werden (Bild 5.40). Der Konstruktion liegt zugrunde:

1. Die Hauptachse der Ellipse ist der längste Ellipsendurchmesser.
2. Bei Normalprojektion (z. B. Grund- und Aufriss) werden Strecken stets verkürzt bzw. sie bleiben maximal gleich lang (vgl. Kapitel 2.1.2).

Die Hauptachse der Ellipse liegt also jeweils auf einer Hauptlinie (Kapitel 5.2), da auf einer Hauptlinie der wahre Radius des Kreises erhalten bleibt. Im Grundriss liegt die Hauptachse auf einer Höhenlinie und im Aufriss auf einer Frontlinie.

1. $h'' \parallel (12)$ durch M'' und h' mit Hilfe von Ordern, so dass h in der Ebene ε liegt, zeichnen.
2. Radius r auf h' abtragen, liefert die Hauptscheitel S_1' und S_2' der Ellipse im Grundriss.
3. $f' \parallel (12)$ durch M' und f'' mit Hilfe von Ordern, so dass f in der Ebene ε liegt, zeichnen.
4. Radius r auf f'' abtragen, liefert die Hauptscheitel der Ellipse im Aufriss.
5. Im Seitenriss π_4 mit Rissachse $(14) \perp h'$ Radius r abtragen (S_3'' und S_4''). Die Dachebene ε ist in diesem Seitenriss projizierend.
6. Ordner durch S_3'' und S_4'' schneiden die Senkrechte zu h' durch M' in den Nebenscheiteln der Ellipse S_3' und S_4' im Grundriss.
7. Im Aufriss kann die Nebenachse senkrecht zu f'' eingezeichnet werden.
8. Die Nebenscheitel der Ellipse im Aufriss können z. B. mit Hilfe der Papierstreifenkonstruktion (vgl. Kapitel 3.4.2) gefunden werden.

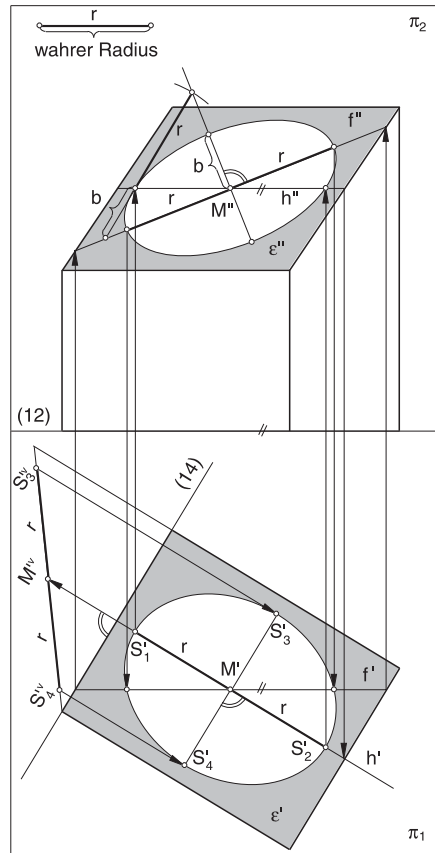
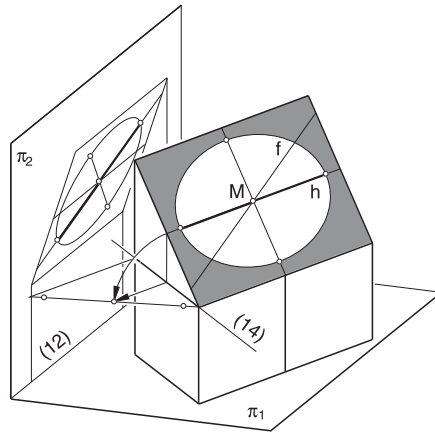


Bild 5.40: Kreisrunde Dachöffnung

Wenn diese Aufgabe CAD-gestützt gelöst wird, so kann mit einem Benutzerkoordinatensystem gearbeitet werden. Zunächst ist das Objekt auf das Weltkoordinatensystem bezogen (vgl. Kapitel 5.5). Um den Kreis in der Dachebene einzeichnen zu können, wird ein Benutzerkoordinatensystem so eingeführt, dass die xy -Ebene in der Dachebene liegt. Bild 5.42 zeigt das Haus mit diesem Benutzerkoordinatensystem in einer Axonometrie. In Bild 5.41 ist das Haus mit kreisrunder Öffnung in der Dachebene in der Draufsicht des so gewählten Benutzerkoordinatensystems gezeigt. Der Kreis erscheint hier als Kreis. In der Axonometrie oder in Grund- und Aufriss des Objektes bezüglich des Weltkoordinatensystems erscheint dann automatisch das elliptische Bild dieses Kreises.

Dieser Vorgehensweise entspricht es, wenn eine Seitenrissebene so eingeführt wird, dass die Dachebene in wahrer Gestalt erscheint. In dieser Seitenrissebene kann der Kreis eingezeichnet und hieraus die Parameter für die Ellipsen entwickelt werden.

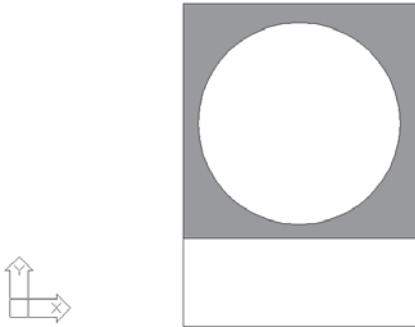


Bild 5.41: Draufsicht des Hauses im gewählten Benutzerkoordinatensystem

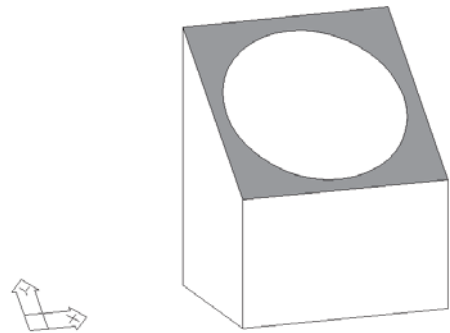


Bild 5.42: Axonometrie des Hauses mit Benutzerkoordinatensystem

Beim CAD-gestützten Arbeiten übernimmt das Zeichnen der Ellipsen das CAD-Programm, nachdem ein geeignetes Benutzerkoordinatensystem gewählt und der Kreis in der Ebene eingezeichnet wurde.

6 POLYEDER

Die **Polyeder** (Vielfläche) sind Körper, die aus Ebenenstücken gebildet werden. Es sind sehr viele verschiedene Polyeder möglich. Die Dachelemente des "Maison de l'homme" in Zürich von Le Corbusier (Bild 6.1) werden aus Polyedern gebildet. Aus gekippten Polyedern wurde das UFA Kinozentrum in Dresden von Coop Himmelb(l)au zusammengefügt (Bild 6.2).

Da Ebenen immer einander in Geraden schneiden, besteht ein Polyeder aus ebenen Vielecken. Diese Vielecke oder Polygone müssen einfach geschlossen sein, um Polyeder daraus zu bilden. Ein nicht einfach geschlossenes Polygon entsteht, wenn die Seitenbegrenzungsstrecken einander kreuzen (überschlagenes Polygon). Verläuft jede Verbindungsstrecke zweier beliebiger Punkte eines Polygons in seinem Inneren, so ist es **konvex**, andernfalls **konkav** (Bild 6.3).

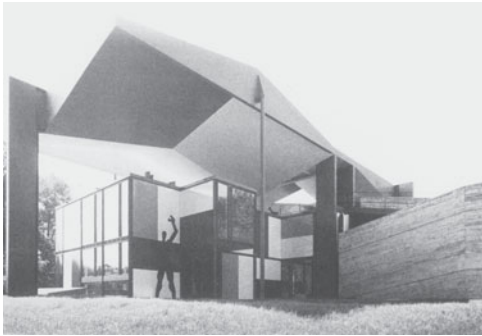


Bild 6.1: Maison de l'homme, Zürich, 1963, Le Corbusier

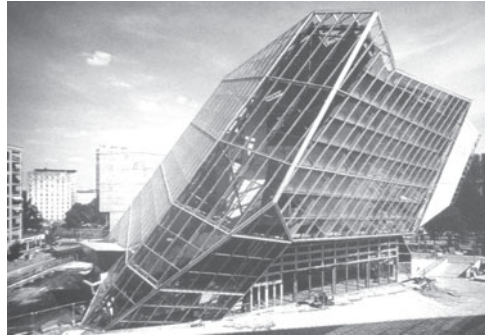


Bild 6.2: UFA Kinozentrum, Dresden, 1997-98, Coop Himmelb(l)au

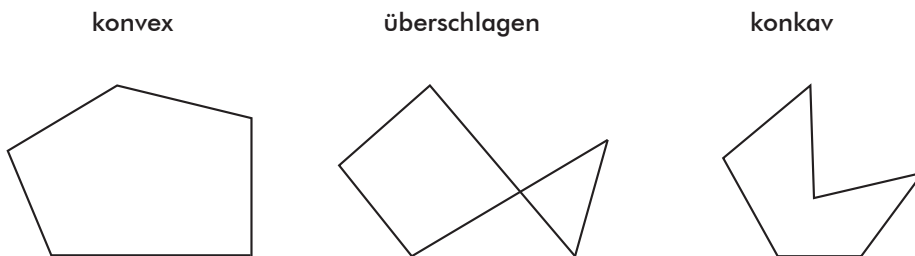


Bild 6.3: Polygone

Auch die Polyeder können in **konvexe** und **konkave Polyeder** unterteilt werden. Ein Polyeder ist konvex, wenn die Verbindungsstrecke zweier beliebiger Punkte des Polyeders stets nur innerhalb des Polyeders verläuft, im anderen Fall ist es konkav.

Für jede Seitenfläche eines konvexen Polyeders gilt:
Das Polyeder liegt vollständig auf einer Seite der Seitenfläche.

Bei den Berechnungsalgorithmen der verdeckten Linien ("hidden-line") in einem CAD-Programm, um eine Darstellung des Objektes unter Berücksichtigung der Sichtbarkeit zu ermöglichen, muss zwischen konvexen und konkaven Polyedern unterschieden werden. Jede Begrenzungsfläche eines konvexen Polyeders kann mit Hilfe der Normalen und der Projektionsrichtung auf Sichtbarkeit geprüft werden.

Die das Polyeder begrenzenden Polygone heißen Seitenflächen, die Strecken, in denen je zwei Seitenflächen zusammenstoßen, heißen Kanten, ihre Endpunkte Ecken des Polyeders.

Polyeder sind z. B.: Würfel, Quader, Prisma, Pyramide.

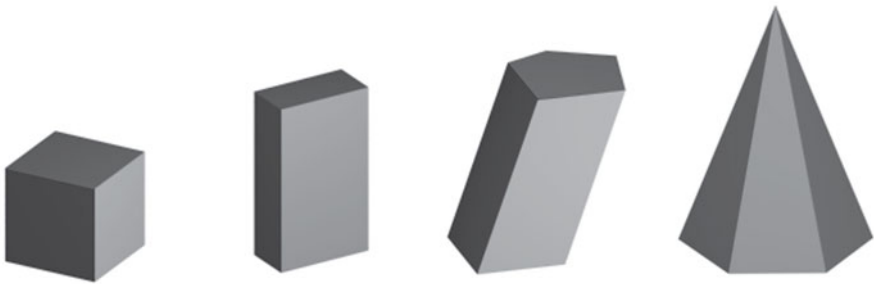


Bild 6.4: Beispiele für Polyeder - Würfel, Quader, Prisma, Pyramide

Die einfachsten Polyeder können als Prismen und Pyramiden gewonnen werden. Ein Prisma entsteht aus einem Leitpolygon und parallelen Kanten durch die Ecken des Leitpolygons. Würfel und Quader sind somit spezielle Prismen.

Eine Pyramide entsteht ebenfalls aus einem Leitpolygon und Kanten, die Verbindungsgeraden zwischen den Ecken und der Spitze sind.

! Für jedes konvexe Polyeder gilt der **Eulersche Polyedersatz**: $e + f - k = 2$.

e = Anzahl der Ecken

f = Anzahl der Seitenflächen

k = Anzahl der Kanten

Beispiel: Würfel $e = 8$ $f = 6$ $k = 12$

Für konkave Polyeder gilt dieser Satz nicht.

Die Zahl $e + f - k$ heißt **Euler-Charakteristik** eines Polyeders.

Der Würfel von Ruprecht von der Pfalz (vgl. Bild 1.7 und 6.5) ist ein Beispiel eines konkaven Polyeders. Für das durch den Restkörper bestimmte konkave Polyeder gilt:

$$e = 20 \quad f = 10 \quad k = 30$$

$e + f - k = 0$, d. h. die Euler-Charakteristik ist 0.

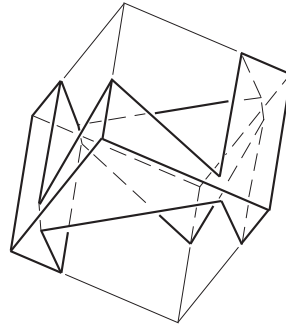


Bild 6.5: Würfel von Ruprecht von der Pfalz - konkaves Polyeder

6.1 Platonische Körper

Neben Prismen und Pyramiden zählen zu den konvexen Polyedern die regelmäßigen (regulären) Polyeder, die sogenannten **Platonischen Körper**. Die Platonischen Körper werden aus gleichen regelmäßigen Polygonen gebildet, so dass in jeder Ecke gleich viele Polygone aneinanderstoßen.

Ein konvexes Polyeder heißt regulär oder regelmäßig, wenn es von regelmäßigen kongruenten Polygonen (gleichseitigen Vielecken) begrenzt wird und in jeder Ecke dieselbe Anzahl von Kanten zusammentreffen.

Platonische Körper sind somit reguläre Polyeder, bei denen alle Ecken, Kanten und Flächen nicht unterscheidbar sind und sämtliche Flächen reguläre Polygone sind.

Schon in vorgriechischer Zeit hatten einige dieser Körper wegen ihres regelmäßigen Aufbaus kultischen und religiösen Symbolwert. In Platons (427 v. Chr. - 374 v. Chr.) Dialog "Timaios"¹ gewinnen die regulären Körper kosmologische Bedeutung. Sie werden den vier Elementen Feuer, Luft, Erde und Wasser zugeordnet. Im Dodekaeder aus regulären Fünfecken, dem Ordenssymbol der Pythagoreer, sieht Platon in besonderer Weise die Symmetrie des gesamten Universums widerspiegelt.

Erde	→	Würfel
Feuer	→	Tetraeder
Luft	→	Oktaeder
Wasser	→	Ikosaeder
Schale des ganzen Universums: Kosmos	→	Dodekaeder

1. Platon: Werke in acht Bänden, 7. Band, Dialog "Timaios", Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1971, S. 103 ff.

Nach diesen Erwähnungen der regulären Polyeder in kosmologischem Zusammenhang bei Platon geht später Euklid von Alexandria (365 v. Chr. - 300 v. Chr.) in dem für die Geometrie grundlegenden Werk "Die Elemente" ausführlichst auf die Platonischen Körper ein. Euklid beweist im Buch XIII der "Elemente"², dass es nicht mehr als diese fünf Platonischen Körper gibt: Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder, Würfel, Dodekaeder.

! Die fünf Platonischen Körper: Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder, Würfel und Dodekaeder sind die einzigen regulären Polyeder.

Johannes Kepler hat in einer Zeichnung die Platonischen Körper mit den kosmologischen Bedeutungen verknüpft (Bild 6.6). Auf der Suche nach der harmonischen Gestalt der Welt, kam den Platonischen Körpern bei ihm große Bedeutung zu. Kepler ordnete auch die Planetenbahnen den Platonischen Körpern zu.

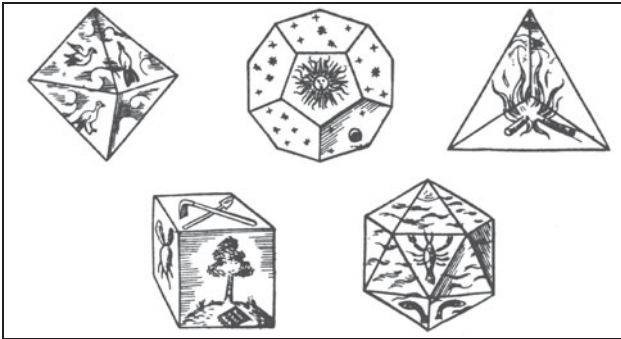


Bild 6.6: Die Platonischen Körper in einer Zeichnung von J. Kepler (~1600)

Begründung nach Euklid:

Ein reguläres Polyeder ist konvex, besitzt also keine einspringenden Ecken und Kanten. Es ist kein Körper möglich, bei dem alle Ecken und Kanten einspringen. Würden nur einige Ecken und Kanten einspringen, so wären sie voneinander unterscheidbar, entgegen der Definition. Daraus folgt: Die Summe der Polygonwinkel, die an einer Ecke zusammenstoßen, muss kleiner als 2π ($=360^\circ$) sein. Andernfalls lägen diese Polygone in einer Ebene (s. Euklid: Buch XI, § 21).

Aus zwei Polygonen lässt sich keine Ecke errichten. Es müssen also mindestens drei Polygone in einer Ecke zusammenstoßen. Wegen der Regularität müssen alle Polygonwinkel gleich sein. Die Polygonwinkel müssen also kleiner als $2\pi/3$ (120°) sein. Wenn nun versucht wird, aus regulären Dreiecken, Vierecken, Fünfecken, ..., n-Ecken Polyeder zu bilden, so kann festgestellt werden:

2. Euklid: Die Elemente. Buch I-XIII. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1980, S. 331 und 412 f.

Beim regulären 3-Eck beträgt der Polygonwinkel: 60° (Winkelsumme 180°),
 beim regulären 4-Eck beträgt der Polygonwinkel: 90° (Winkelsumme 360°),
 beim regulären 5-Eck beträgt der Polygonwinkel: 108° (Winkelsumme 540°),
 beim regulären 6-Eck beträgt der Polygonwinkel: 120° (Winkelsumme 720°).

Beim regulären n -Eck beträgt der Polygonwinkel: $(n-2) \times \frac{180^\circ}{n}$
 (Winkelsumme $(n-2) \times 180^\circ$).

Es können also nur reguläre 3-, 4- und 5-Ecke als Flächen regulärer Polyeder gewählt werden.

Beim regulären 4-Eck, dem Quadrat, mit nur rechten Winkeln (90°) können nicht mehr als drei Quadrate in einer Ecke zusammenstoßen, ohne die Winkelsumme von 2π zu erreichen bzw. zu übertreffen. Es entsteht der **Würfel (Hexaeder)**.

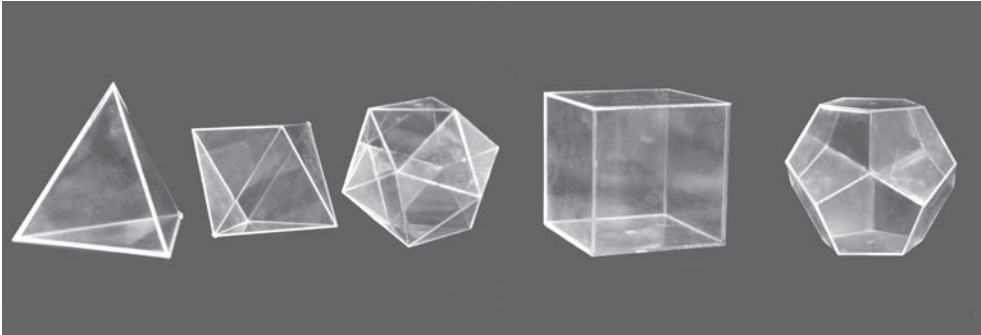


Bild 6.7: Die 5 Platonischen Körper: Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder, Hexaeder(Würfel), Dodekaeder

Auch beim regulären 5-Eck können nicht mehr als drei Fünfecke in einer Ecke zusammenstoßen. Es entsteht der **Dodekaeder**.

Wird aus regulären 3-Ecken ein Polyeder gebildet, so können drei, vier oder fünf gleichseitige Dreiecke in einer Ecke zusammenstoßen, da erst sechs Dreiecke die Winkelsumme 2π ergeben. Das gleichseitige Dreieck kann daher bei drei verschiedenen Polyedern als Fläche auftreten:

Tetraeder (3 Dreiecke in einer Ecke, 4 Seitenflächen),

Oktaeder (4 Dreiecke in einer Ecke, 8 Seitenflächen),

Ikosaeder (5 Dreiecke in einer Ecke, 20 Seitenflächen).

Es sind also nicht mehr als diese fünf regulären Polyeder möglich.

Euklid zeigt in Buch XIII der "Elemente", dass diese fünf Möglichkeiten auch konstruierbar sind, also somit existieren. Dazu werden die regulären Körper Kugeln einbeschrieben, so wie in der Ebene Polygone Kreisen einbeschrieben werden.

Einen Überblick über die Platonischen Körper, die Anzahl der Ecken, Flächen und Kanten vermittelt die folgende Tabelle gemäß dem Eulerschen Polyedersatz.

begrenzende Flächen	Anzahl der Seitenflächen einer Ecke	Anzahl der			regelmäßige Körper
		Ecken e	Flächen f	Kanten k	
gleichseitige Dreiecke	3	4	4	6	Tetraeder
gleichseitige Dreiecke	4	6	8	12	Oktaeder
gleichseitige Dreiecke	5	12	20	30	Ikosaeder
Quadrate	3	8	6	12	Hexaeder (Würfel)
regelmäßige Fünfecke	3	20	12	30	Dodekaeder

In der Tabelle fällt auf, dass Oktaeder und Würfel, Ikosaeder und Dodekaeder jeweils gleich viele Ecken wie der andere Körper Flächen besitzen. Die Zahl der Kanten ist jeweils gleich groß.

Zwei Polyeder heißen **dual**, wenn wechselweise die Punkteigenschaften des einen und die Flächeneigenschaften des anderen identisch sind.

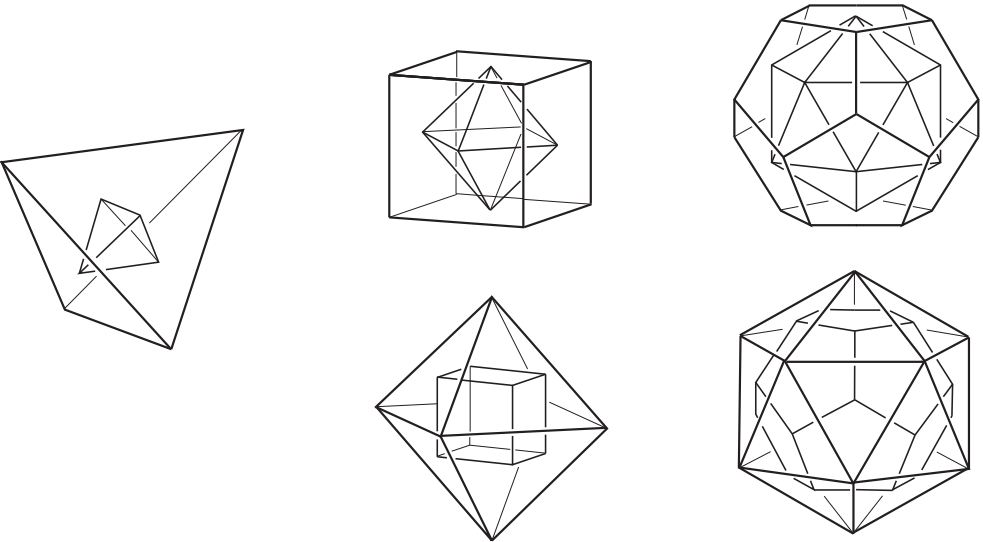


Bild 6.8: Duale Platonische Körper einander einbeschrieben

Oktaeder und Würfel, Dodekaeder und Ikosaeder sind jeweils zueinander dual. Das Tetraeder ist zu sich selbst dual. Die beiden dualen Polyeder gehen durch Vertauschen der Ecken- und Flächeneigenschaften ineinander über. Die Kanteneigenschaften bleiben erhalten.

Diese Dualitätseigenschaft kann benutzt werden, um die zueinander dualen Polyeder einander einzubeschreiben, so dass die Ecken des einbeschriebenen Körpers auf die Flächenmitten der umhüllenden Körper zu stehen kommen (Bild 6.8).

Zwei zueinander duale Körper können sich gegenseitig so durchdringen, dass sich die Kanten in ihren Mitten rechtwinklig kreuzen. Es entstehen dann Sternformen wie in Bild 6.9.

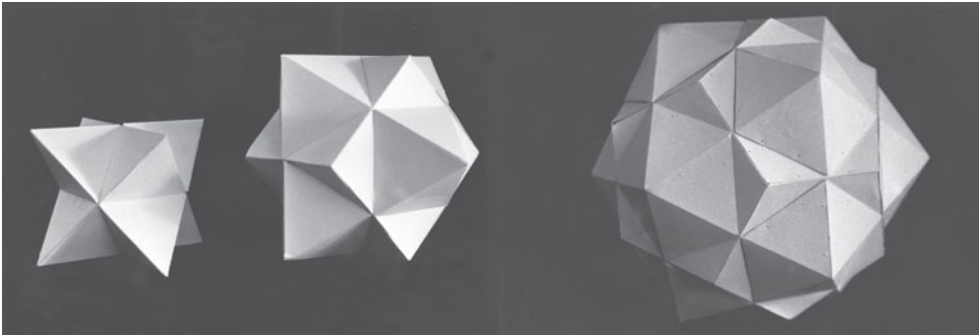


Bild 6.9: Duale Platonische Körper als Sternformen

Die Platonischen Körper werden häufig für Raumpackungen verwendet, die Grundlage für den Aufbau von Raumfachwerken sind. Die Raumfachwerke werden am vollkommensten, wenn sie aus regulären Polyedern, also aus den Platonischen Körpern gebildet werden. Die Regelmäßigkeit führt dazu, dass die Stäbe im Raumfachwerk alle gleich lang sind und einheitliche Knoten verwendet werden können. Dies sind von der Fertigung und Montage her besonders günstige Voraussetzungen und ermöglichen ein modulares Bauen aus weitgehend identischen Bauelementen. Das von Max Mengerlinghausen³ bereits aus den dreißiger Jahren stammende "MERO"-System greift auf solche Raumpackungen zurück.

Mit Hilfe von Winkelüberlegungen kann untersucht werden, mit welchen Platonischen Körpern Raumpackungen möglich sind. Nur mit Hilfe von Würfeln ist eine lückenlose Füllung des Raumes mit nur einer Art von Platonischen Körpern möglich.

3. M. Mengerlinghausen: Komposition im Raum. Die Kunst individueller Baugestaltung mit Serienelementen. Gütersloh 1983.

Wenn verschiedene Arten von Platonischen Körpern zur Raumpackung herangezogen werden, so kann festgestellt werden, dass Raumpackungen aus Oktaeder und Tetraeder möglich sind. Eine Kombination aus Tetraeder und Oktaeder als Raumfachwerk zeigt Bild 6.10 und Bild 6.11.

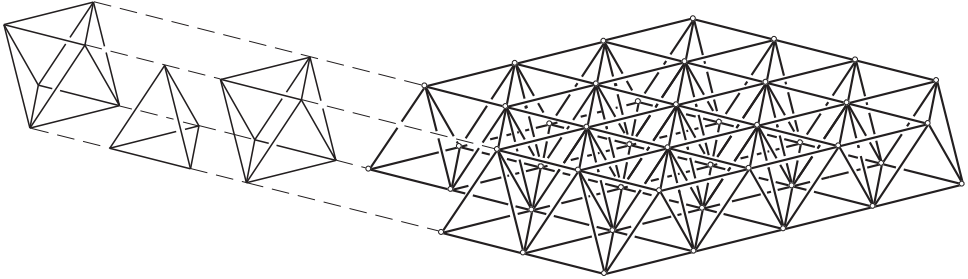


Bild 6.10: Tetraeder-Oktaeder-Packung



Bild 6.11: Flugzeughalle "Atlantis" Frankfurt a. M., Tetraeder-Oktaeder-Packung



Bild 6.12: Mensa der Universität Kaiserslautern, Tetraeder-Halboctaeder-Packung

Tetraeder und Halboctaeder (Bild 6.13) können auch eine Raumpackung erzeugen. Daher findet auch diese Kombination Verwendung in Raumfachwerken (Bild 6.12).

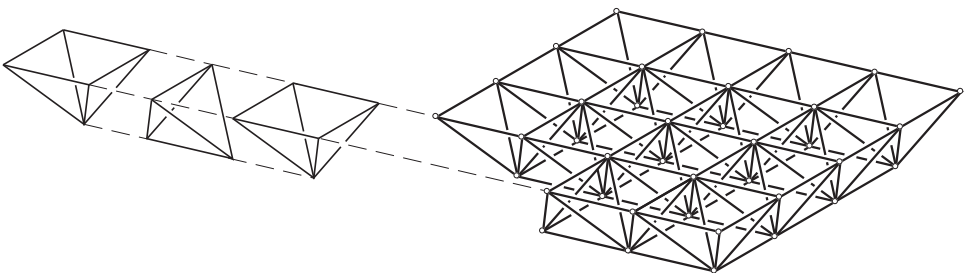


Bild 6.13: Tetraeder-Halboctaeder-Packung

Eine weitere Anwendung finden die Platonischen Körper in der Herstellung von sphärischen Raumfachwerken.

Richard Buckminster Fuller entwickelte geodätische Aufteilungen der Kugeloberfläche, indem Polyedernetze auf die Kugeloberfläche projiziert werden. Eine **geodätische Linie** einer Fläche ist die kürzeste Verbindungslinie zwischen zwei Punkten einer Fläche. In der Ebene entspricht der geodätischen Linie die Gerade. Auf der Kugeloberfläche sind die Großkreise geodätische Linien (vgl. Kapitel 7.4.1).

Fuller verwendete u. a. das Ikosaeder als Ausgangsform, um eine Kugel anzunähern (Bild 6.14). Dabei werden die dreieckigen Seitenflächen in kleinere Dreiecke unterteilt und die neuen Ecken vom Mittelpunkt der Umkugel aus auf die Umkugel projiziert. Die erhaltenen Dreiecke sind dann allerdings keine regulären Dreiecke mehr.

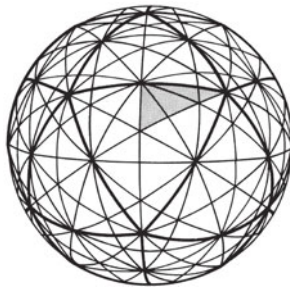
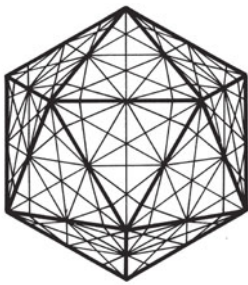


Bild 6.14: Entwicklung der geodätischen Kuppel aus dem Ikosaeder

Bild 6.15: USA-Pavillon, Montreal, 1967, R. B. Fuller

Die Punkte auf der Umkugel zusammen bilden die Ecken eines nicht mehr regulären Polyeders, das sich einer Kugel um so besser annähert, je feiner die Unterteilung gewählt wird. Auf diese Weise kann die sogenannte **geodätische Kuppel** (Bild 6.15) konstruiert werden.

Bei der Netzkonstruktion muss beachtet werden, dass eine Netzverfeinerung zu einer überproportionalen Vermehrung der Konstruktionselemente: Knoten, Stäbe und Platten führt. Dadurch vermehrt sich der Fertigungs- und Montageaufwand. Eine gröbstmögliche Netzteilung ist daher sinnvoll.

Fullers bekannteste geodätische Kuppel ist der USA-Pavillon auf der Weltausstellung in Montreal, Kanada, im Jahre 1967. Die Kuppel hatte einen Durchmesser von 76m und eine Höhe von 41,5m. Der Pavillon wurde von den Besuchern der Weltausstellung in einer Einschienenbahn durchquert.

6.2 Archimedische Körper

Wird der Gedanke zur Bildung der Platonischen Körper so verallgemeinert, dass mehrere Arten regulärer Polygone zur Bildung der Körper zugelassen werden, so entstehen die **Archimedischen Körper** oder **halbregulären Polyeder**.

Ein konvexes Polyeder heißt Archimedischer Körper oder halbreguläres Polyeder, wenn es von regulären Polygonen begrenzt wird und jede Ecke gleich ausgebildet ist. Archimedes (~287 v. Chr. - 212 v. Chr.) hatte schon die einzelnen Typen der halbregulären Polyeder⁴ untersucht. Durch Abstumpfen der Ecken und Kanten der Platonischen Körper können alle dreizehn Archimedische Körper gefunden werden.

Einer der Archimedischen Körper, das Rhombenkuboktaeder (Bild 6.16), bildet die Grundlage für den MERO-Knoten (Bild 6.17). Bild 6.18 zeigt die Gerippe-Struktur eines Rhombenkuboktaeders aus MERO-Norm-Knoten und -Norm-Stäben.

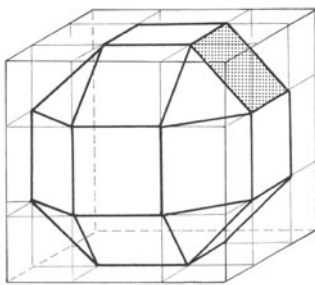


Bild 6.16: Rhombenkuboktaeder

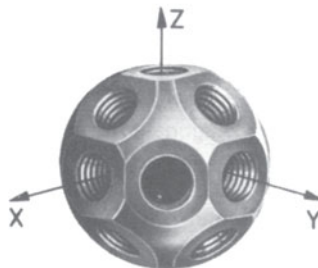


Bild 6.17: MERO-Norm-Knoten

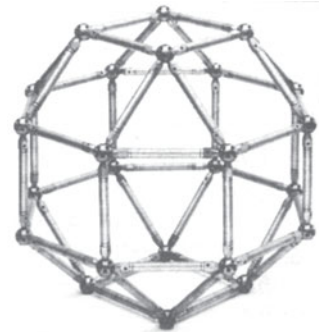


Bild 6.18: Modell aus MERO-Knoten und -Stäben

Ein anderer Archimedischer Körper findet als Fußball seine Verwendung: das abgestumpfte Ikosaeder (Bild 6.19). Es besteht aus regulären Fünfecken und Sechsecken. Durch Abschneiden der Ecken so, dass regelmäßige Vielecke entstehen, kann es aus dem Ikosaeder hergeleitet werden. Aus den Dreiecken des Ikosaeders werden Sechsecke. Die fünf Dreiecke in einer Ecke des Ikosaeders lassen durch das Abschneiden die Fünfecke entstehen. Stellen wir uns diesen Körper aufgeblasen vor, so liegt der sogenannte Europa-Fußball vor uns. Aus den Archimedischen Körpern entstehen durch Dualisierung die **Catalanischen Körper**, die aus nur einer Art nichtregelmäßiger Polygone aufgebaut sind.

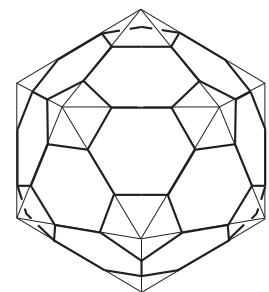


Bild 6.19: Abgestumpftes Ikosaeder - Fußball

4. Bei J. Kepler findet sich im 2. Buch von "Harmonices mundi", 1619, eine vollständige Theorie der halbregulären Polyeder.

7 GEKRÜMMTE FLÄCHEN UND KÖRPER

Ein Körper im Raum wird aus Flächenstücken gebildet, die ein Volumen umschließen. Die Summe der Begrenzungsflächen ist die Oberfläche des Körpers. Der **Körper** ist die Menge aller Punkte, die innerhalb und auf den Begrenzungsflächen liegen. Das Guggenheim Museum in Bilbao von F. O. Gehry (Bild 7.2) wird aus mehreren Körpern gebildet. Eine **Fläche** dagegen ist eine zweidimensionale Punktmenge im Raum, die kein Volumen umschließen muss. Das offene Flächentragwerk des Deutschen Pavillons in Montreal von Frei Otto (Bild 7.1) ist ein Architekturbeispiel für eine Fläche. Die Polyeder in Kapitel 6 sind Körper, deren Begrenzungsflächen aus Ebenenstücken entstehen. Im Folgenden werden Flächen und Körper untersucht, die aus gekrümmten Flächenstücken gebildet werden. Gekrümmte Flächen finden in der Architektur vor allem Verwendung als Flächentragwerke bzw. Schalen. Die Krümmung der Fläche hat einen Einfluss auf die Steifigkeit.

Als Materialien werden Stahlbeton, Holz, Metalle, Zelt- oder Kunststoffe verwendet.

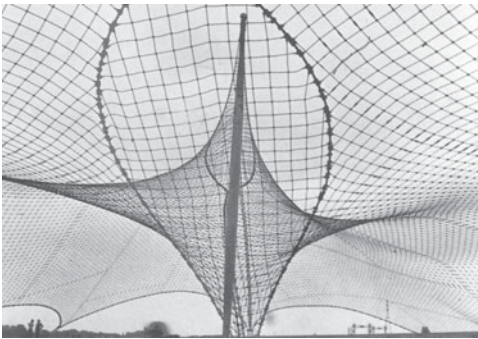


Bild 7.1: Fläche - Deutscher Pavillon, Montreal, 1965-67, F. Otto und R. Gutbrod

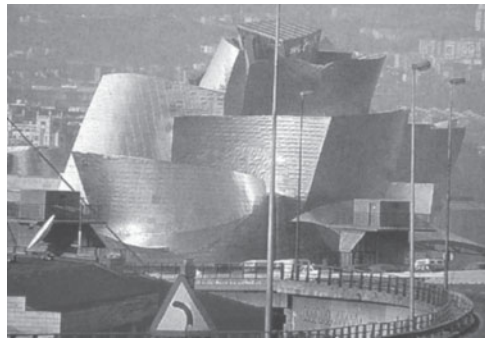


Bild 7.2: Körper - Guggenheim Museum, Bilbao, Spanien, 1993-97, Frank O. Gehry

7.1 Erzeugung und Unterscheidung gekrümmter Flächen und Körper

Eine gekrümmte Fläche kann durch die Bewegung einer Kurve erzeugt werden. Die Flächen können dann nach der Art der Kurve, die bewegt wird, und der Art der Bewegung unterschieden werden.

Kurve		Bewegung	
Strahlfläche	← Gerade	Verschiebung →	Schiebfläche
		Drehung →	Drehfläche
		Schraubung →	Schraubfläche

7.1.1 Strahlflächen

Eine Fläche heißt **Strahlfläche** oder Regelfläche, wenn durch jeden Flächenpunkt eine Flächengerade (Erzeugende) geht. Sie kann aus Geraden erzeugt werden.

Wird eine Gerade g längs irgendeiner Kurve c verschoben, so entsteht ein Zylinder.

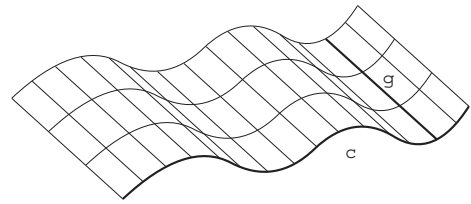


Bild 7.3: Zylinder

Durch Drehung einer Geraden um eine Drehachse können drei verschiedene Arten von Strahl- und Drehflächen entstehen, je nachdem wie die Gerade parallel, schneidend oder windschief zur Drehachse liegt.

Liegt die Gerade g parallel zur Drehachse a , so entsteht ein **Drehzylinder** (Bild 7.4).

Wenn die Gerade g die Drehachse a in einem Punkt schneidet, so entsteht ein **Drehkegel** (Bild 7.5).

Liegt die Gerade g windschief zur Drehachse a , so entsteht ein **einschaliges Drehhyperboloid** (Bild 7.6). Die Fläche heißt Drehhyperboloid, da sie auch aus einer Hyperbel erzeugt werden kann (vgl. Kapitel 7.1.3).

Ein einfaches Fadenmodell des Drehhyperboloids kann so entstehen: Verbindet man übereinanderliegende Randpunkte zweier kongruenter, koaxial angeordneter Kreisscheiben durch gespannte Fäden, so hat man das Modell eines Drehzylinders; Verdrehung der beiden Scheiben gegeneinander liefert dann (unter Verringerung des Abstandes) das Modell einer Erzeugendenschar eines Drehhyperboloids. Eine zweite Erzeugendenschar desselben Drehhyperboloids entsteht, wenn die beiden Scheiben in anderer Richtung gleich weit gegeneinander verdreht werden.

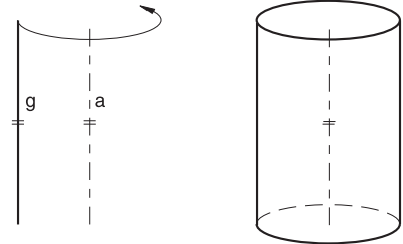


Bild 7.4: Drehzylinder als Strahlfläche

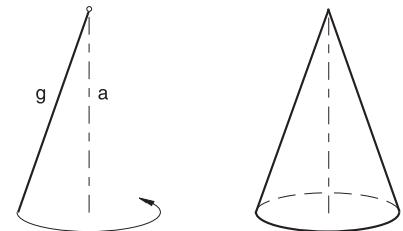


Bild 7.5: Drehkegel als Strahlfläche

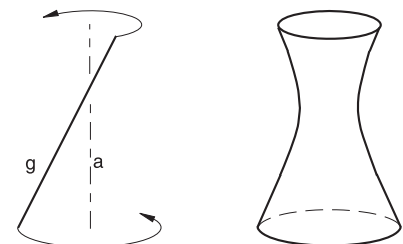


Bild 7.6: Einschaliges Drehhyperboloid als Strahlfläche

Eine andere, auch in der Architektur interessante Strahlfläche entsteht, wenn die gegenüberliegenden Seiten eines windschiefen Vierecks in gleiche Teile unterteilt und entsprechende Teilpunkte durch Geraden miteinander verbunden werden. Da dies für beide Seitenpaare ausgeführt werden kann, liegen auf dieser Fläche zwei Scharen von Geraden (Bild 7.7).

Die Fläche heißt **Hyperbolisches Paraboloid**, da sie auch aus Parabeln erzeugt werden kann (vgl. Kapitel 7.1.2).

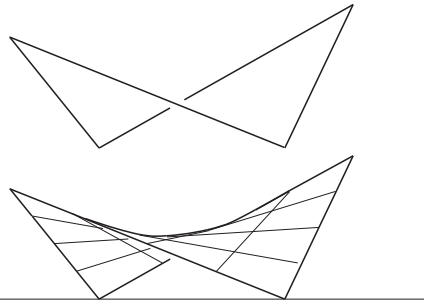


Bild 7.7: Hyperbolisches Paraboloid als Strahlfläche



Bild 7.8: Einfaches Vierpunktsegel als Sonnenschutz



Bild 7.9: Kirche San José Obrero, Monterrey, Mexiko, 1959, F. Candela u. E. de la Mora

Ein Hyperbolisches Paraboloid kann durch das Aufspannen eines Tuches hergestellt werden. Ein Vierpunktsegel, dessen vier Punkte ein windschiefes Viereck bilden, ist ein Hyperbolisches Paraboloid (Bild 7.8).

Die Strahlflächen sind beim Bauen einfacher zu handhaben als andere gekrümmte Flächen, da der Verlauf der Geraden auf der Fläche zum Verschalen verwendet werden kann. So können die Strahlflächen z. B. aus Stahlbeton hergestellt werden, indem der Beton in Formen gegossen wird, die aus geradlinigen Schalungsbrettern hergestellt werden. Felix Candela hat in dieser Weise viele Schalen aus Stahlbeton gebaut, insbesondere auch viele Bauwerke mit Hyperbolischen Paraboloiden als Flächentragwerke, wie in Bild 7.9 die Kirche San José Obrero in Monterrey, Mexiko.

Durch Schraubung einer Geraden können verschiedene Arten von **Strahlschraubflächen** entstehen (vgl. Kapitel 7.1.4).

7.1.2 Schiebflächen

Eine Fläche kann erzeugt werden, indem eine beliebige Kurve verschoben wird. Es entsteht eine **Schiebfläche**.

Wird diese Kurve c längs einer Geraden g verschoben, so entsteht ein allgemeiner Zylinder (Bild 7.3).

Eine Schiebfläche entsteht auch, wenn die Kurve c längs einer Leitkurve l verschoben wird (Bild 7.10). So kann das Hyperbolische Paraboloid als Schiebfläche erzeugt werden, indem eine Parabel längs einer anderen Parabel verschoben wird (Bild 7.11). Die beiden Parabeln sind nach entgegengesetzten Seiten geöffnet. Der Name Paraboloid erfasst diese Erzeugungsweise der Fläche aus Parabeln.

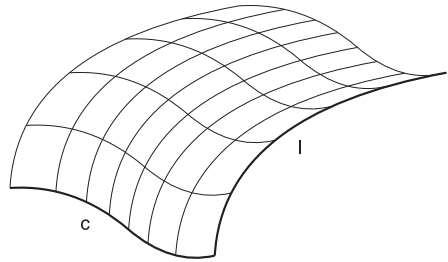


Bild 7.10: Schiebfläche

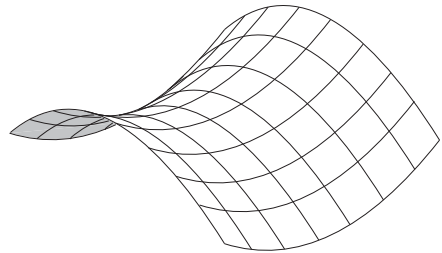


Bild 7.11: Hyperbolisches Paraboloid als Schiebfläche

7.1.3 Drehflächen

Eine **Drehfläche** entsteht durch Drehung (Rotation) einer Kurve um eine Gerade a , die Drehachse. Die Kurve heißt auch Erzeugende der Fläche. Wird eine Gerade um eine Achse gedreht, so können Drehzylinder (Bild 7.4), Drehkegel (Bild 7.5) oder einschaliges Drehhyperboloid (Bild 7.6) entstehen.

Ist die erzeugende Kurve der Drehfläche ein Kreis bzw. Bogenstück, so können vier Fälle von Drehflächen unterschieden werden, je nachdem wie die Drehachse zum Kreis liegt. Geht die Drehachse a durch den Kreismittelpunkt M , so entsteht eine **Kugel** (Bild 7.12). Schneidet die Drehachse den Kreisbogen und rotiert das größere Bogenstück, so entsteht ein Körper ähnlich einem **Apfel** (Bild 7.13).

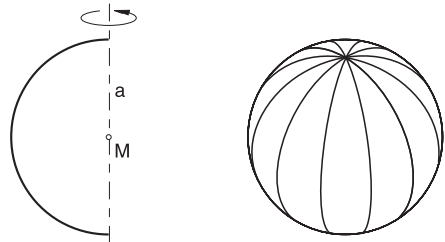


Bild 7.12: Kugel als Drehfläche

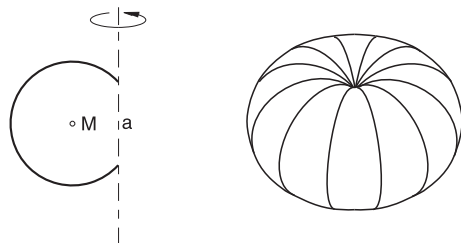


Bild 7.13: Apfel als Drehfläche

Rotiert das kleinere Bogenstück, so entsteht ein Körper ähnlich einer **Zitrone** (Bild 7.14).

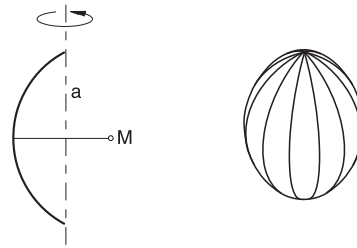


Bild 7.14: Zitrone als Drehfläche

Im vierten Fall geht die Drehachse am Kreis vorbei. Es entsteht eine Ringfläche, ein sogenannter **Torus**. Auch die Fälle "Zitrone" und "Apfel" werden in der Geometrie als Torus bezeichnet.

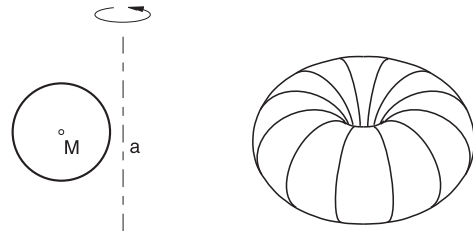


Bild 7.15: Torus als Drehfläche

Ist die erzeugende Kurve einer Drehfläche eine beliebige Kurve, so können andere Drehflächen entstehen. Bild 7.16 zeigt eine Kurve, die bei Rotation um die Drehachse a eine Vase erzeugt.

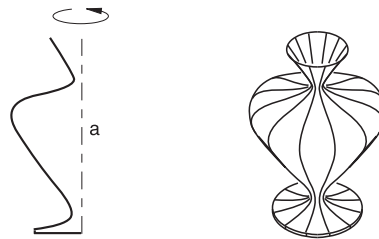


Bild 7.16: Vase als Drehfläche

Ein anderes Beispiel einer bekannten Drehfläche ist in Bild 7.17 zu sehen. Die Kurve erzeugt bei Drehung um die Achse a einen Zwiebelturm, wie er auch ähnlich in Bild 7.19 als Kuppel des Mausoleums Taj Mahal in Indien vorkommt.

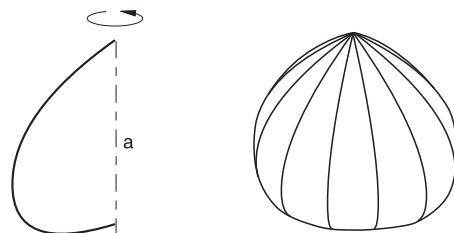


Bild 7.17: Zwiebelturm als Drehfläche

Dreht man eine Hyperbel um eine Achse, die Nebenachse der Hyperbel, so entsteht das einschalige Drehhyperboloid. Bei Rotation einer Hyperbel um ihre Hauptachse entsteht ein zweischaliges Drehhyperboloid (Bild 7.18).

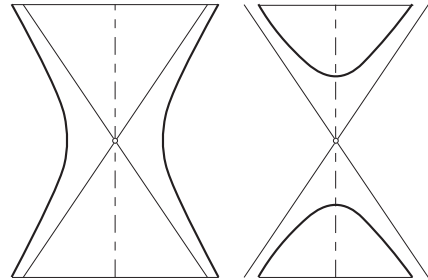


Bild 7.18: Einschaliges und zweischaliges Drehhyperboloid

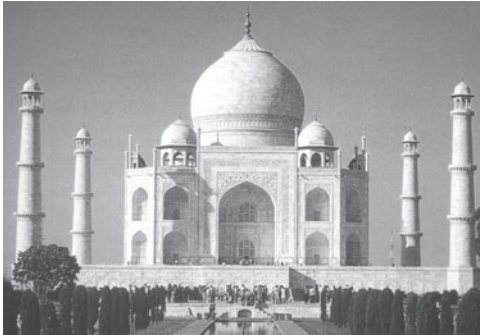


Bild 7.19: Zwiebelförmige Kuppel des Taj Mahal, Indien, 1632-52



Bild 7.20: Drehhyperboloid - Kathedrale Brasília, Brasilien, 1959-70, Oscar Niemeyer

7.1.4 Schraubflächen

Bewegt man eine Kurve mittels einer Schraubung im Raum, so entsteht eine **Schraubfläche**. Eine Schraubung ist eine Bewegung, die sich aus einer Drehung um eine feste Achse a (Schraubachse) und einer dazu proportionalen Schiebung längs dieser Achse a zusammensetzt (Bild 7.21).

Ist φ der Drehwinkel und s die Schiebungsstrecke, so gilt: $s = p \times \varphi$. Der Proportionalitätsfaktor p heißt Schraubparameter.

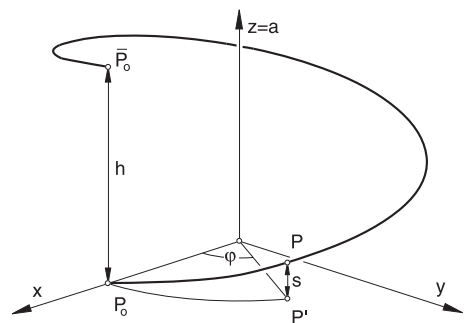


Bild 7.21: Schraubung

Zu einer vollen Umdrehung $\varphi = 2\pi$ gehört die Schieb Strecke $h = 2\pi p$, die Ganghöhe der Schraubung. Das Vorzeichen von p legt den Schraub Sinn fest:

$p > 0$: Rechtsschraubung

$p < 0$: Linksschraubung.

Bei einer Rechtsschraubung zeigen die Finger der rechten Hand in Drehrichtung, wenn der Daumen in Richtung der Schraubachse zeigt. Bei einer Linksschraubung zeigen entsprechend die Finger der linken Hand in Drehrichtung.

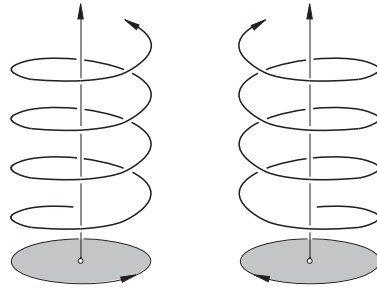


Bild 7.22: Rechtsschraubung und Linksschraubung



Bild 7.23: Eingangstreppe in der "Pyramide du Grand Louvre", Paris, 1981-89, I. M. Pei

Die Verschraubung eines Punktes führt zur Schraublinie. Eine Schraubfläche entsteht, wenn eine Kurve um eine Achse verschraubt wird. Ist die verschraubte Kurve eine Gerade, so entsteht eine **Strahlschraubfläche**.

Eine Wendeltreppe wird mit Hilfe der gleichen Art einer Schraubung gebildet. Grund- und Aufriss der Wendelfläche (Bild 7.24) kann konstruiert werden, indem das Geradenstück g um die Achse a verschraubt wird. Die beiden Randschraublinien erscheinen im Grundriss als Kreis und im Aufriss als Sinuslinien.

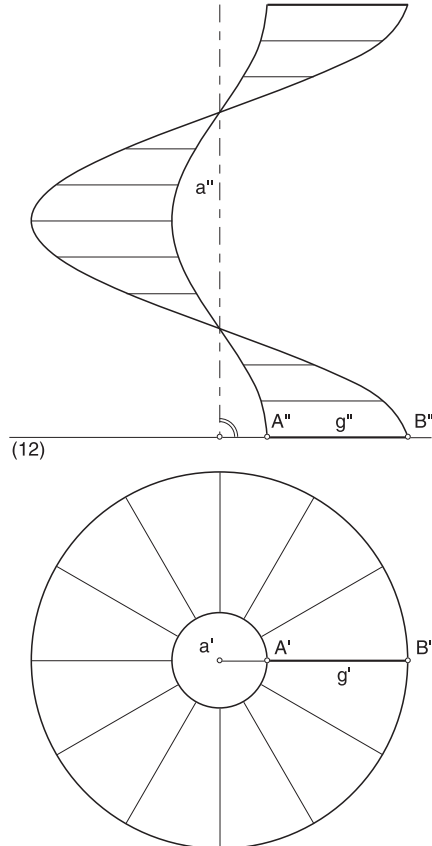


Bild 7.24: Grund- und Aufriss einer Wendelfläche

Je nach Lage der verschraubten Geraden g zur Schraubachse a unterscheidet man vier Typen:

1. Eine Strahlschraubfläche heißt **gerade**, wenn die Gerade senkrecht zur Schraubachse liegt,
2. Sie heißt **schief**, wenn die Gerade schief zur Schraubachse liegt.
3. Sie heißt **geschlossen**, wenn die Gerade die Achse schneidet.
4. Wenn die Gerade windschief zur Schraubachse liegt, heißt sie **offen**.

Gewendelte Rampen wie die beiden sich überschneidenden Stahlbetonrampen des Pinguinbeckens im Londoner Zoo (Bild 7.25) sind gerade und geschlossene Strahlschraubflächen und werden auch **Wendelflächen** genannt. Eine solche Wendelfläche liegt auch dem Guggenheim Museum (Bild 7.26) zugrunde. Die schiefe geschlossene Strahlschraubfläche tritt bei vielen Gewinden und beim Korkenzieher auf. Sie kann auch die Verschalung einer Wendeltreppe (Bild 7.23) bilden.

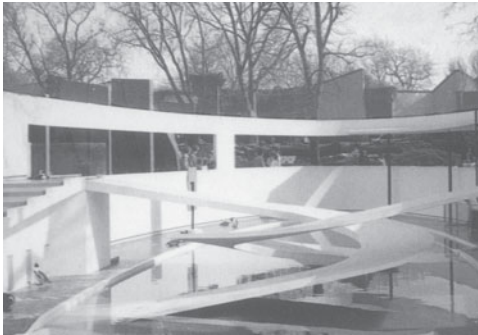


Bild 7.25: Gewendelte Rampen, Londoner Zoo, 1934, B. Lubetkin und Tecton

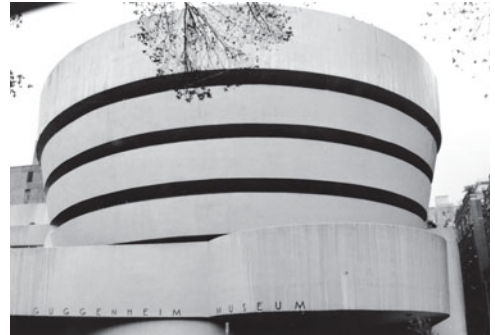


Bild 7.26: Guggenheim Museum, New York, 1956-59, Frank Lloyd Wright

7.2 Krümmung von Flächen

Für das Tragverhalten einer gekrümmten Fläche in einem Bauwerk spielt die **Krümmung** der Fläche eine wichtige Rolle. Diese wird mit Hilfe der auf ihr liegenden Kurven untersucht. Die Krümmung kann sich innerhalb der Fläche von Punkt zu Punkt unterscheiden. Es handelt sich daher um eine lokale Betrachtung der Fläche. Nur in sogenannten regulären Flächenpunkten kann die Krümmung betrachtet werden. Bilden die Tangenten der Flächenkurven der Fläche Φ im Punkt P eine Ebene $\tau(P)$, so heißt P ein **regulärer Flächenpunkt** (Bild 7.27) der Fläche Φ und $\tau_\Phi(P)$ die Tangentenebene von Φ im Punkt P . Ist dies nicht der Fall, so heißt P **singulärer Flächenpunkt**.

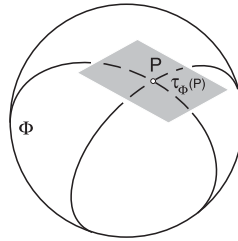
Die Differentialgeometrie beschäftigt sich mit der Krümmung von Kurven und Flächen.

Die Krümmung κ einer Kurve im Punkt P kann als Kehrwert des Krümmungsradius r beschrieben werden (vgl. Bild 3.39). Sie wird definiert als:

$$\kappa(P) = \frac{1}{r(P)}$$

Um die Krümmung einer Fläche in Punkt P zu beschreiben, legt man durch die Fläche zwei zueinander senkrechte Normalschnitte: Schnitt durch Normale n und Tangente t der Fläche. Es gibt zwei solcher zueinander senkrechter Normalschnitte, bei denen die Krümmung einen Extremwert annimmt. Dies sind die Hauptnormalschnitte mit den **Hauptkrümmungen** κ_1 und κ_2 der Fläche in Punkt P (Bild 7.28).

P ist ein regulärer
Flächenpunkt



P ist ein singulärer
Flächenpunkt

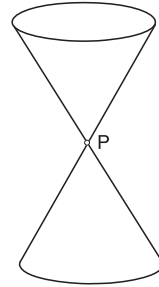


Bild 7.27: Reguläre und singuläre Flächenpunkte

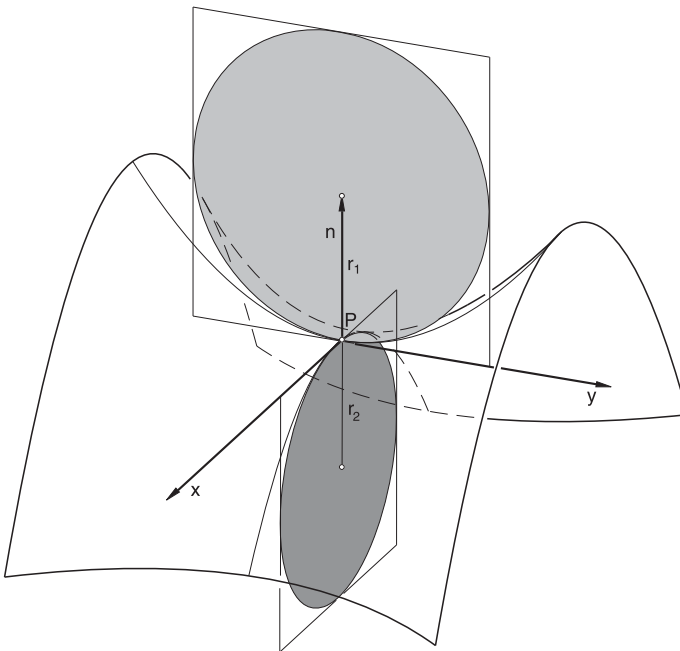


Bild 7.28: Hauptkrümmungen einer Fläche

Als die **Gaußsche Krümmung** der Fläche im Punkt P bezeichnet man das Produkt der Hauptkrümmungen:

$$\kappa(P) = \kappa_1(P) \times \kappa_2(P) = \frac{1}{r_1(P)} \times \frac{1}{r_2(P)}$$

Die Flächen werden nach ihren Krümmungen unterschieden, je nachdem ob die Gaußsche Krümmung null, positiv oder negativ ist. Ist die Gaußsche Krümmung $\kappa(P) \neq 0$, so handelt es sich um eine **doppelt gekrümmte Fläche**. Bei doppelt gekrümmten Flächen berührt die Tangentenebene die Fläche nur in einem Punkt.

1. Liegen die Hauptkrümmungsmittelpunkte M_1 und M_2 auf derselben Seite der Tangentenebene $\tau_\Phi(P)$, die von den Tangenten t_1 und t_2 aufgespannt wird, so heißt P ein **elliptischer Flächenpunkt**. Die Gaußsche Krümmung ist positiv ($\kappa > 0$). Die Fläche heißt **doppelt gleichsinnig gekrümmt**. Ellipsoide ("Futuro" in Bild 7.33) sind Beispiele für Flächen, die in allen Punkten doppelt gleichsinnig gekrümmt sind.

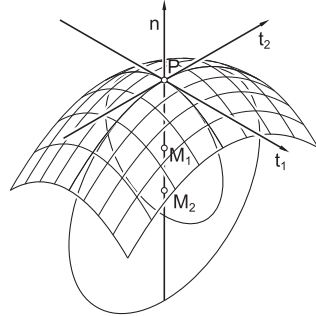


Bild 7.29: Elliptischer Flächenpunkt - doppelt gleichsinnig gekrümmte Fläche

2. Liegen die Hauptkrümmungsmittelpunkte M_1 und M_2 auf verschiedenen Seiten der Tangentenebene $\tau_\Phi(P)$, so heißt P ein **hyperbolischer Flächenpunkt**. Die Gaußsche Krümmung ist dann negativ ($\kappa < 0$). Die Fläche heißt **doppelt gegensinnig gekrümmt**. Das Hyperbolische Paraboloid ist ein Beispiel für eine Fläche, die in allen Punkten doppelt gegensinnig gekrümmt ist. Der Philips-Pavillon (Bild 7.34) wird aus Teilen mehrerer Hyperbolischer Paraboloiden (im Modell der unter den Tisch fallende Teil) gebildet.

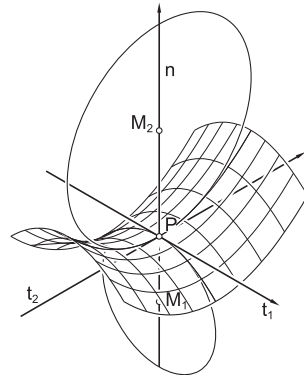


Bild 7.30: Hyperbolischer Flächenpunkt - doppelt gegensinnig gekrümmte Fläche

3. Ist die Gaußsche Krümmung $\kappa=0$, so heißt P ein **parabolischer Flächenpunkt**. Dies tritt ein, wenn eine der beiden Hauptkrümmungen null ist, d. h. einer der beiden Krümmungsradien unendlich ist. Die Fläche heißt **einfach gekrümmt**. Zylinder und Kegel sind Beispiele für Flächen, die in allen (regulären) Punkten einfach gekrümmt sind.

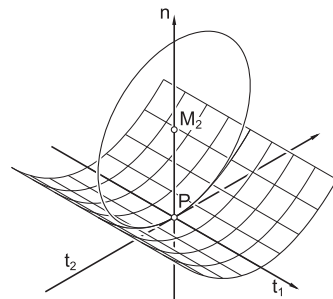


Bild 7.31: Parabolischer Flächenpunkt - einfach gekrümmte Fläche

Flächen wie der Torus in Bild 7.32 weisen Bereiche mit allen drei verschiedenen Arten von Krümmungen auf: einfache, doppelt gleichsinnige und doppelt gegensinnige Krümmungen.

Punkte wie Punkt P_1 , die "außen" am Torus liegen, sind elliptische Flächenpunkte. Punkte wie Punkt P_2 , die "innen" am Torus liegen, sind hyperbolische Flächenpunkte. Punkte "unten" und "oben" am Torus, wie Punkt P_3 , sind parabolische Flächenpunkte. Die Tangentenebene berührt den Torus in P_3 entlang eines Kreises.

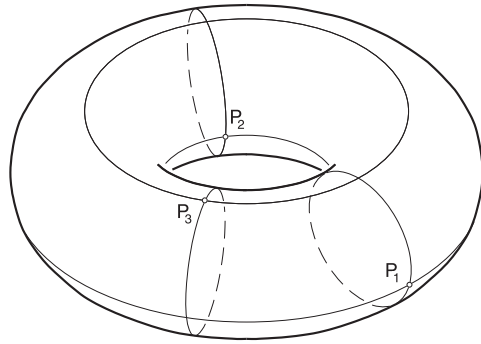


Bild 7.32: Torus mit drei Bereichen unterschiedlicher Arten von Krümmungen

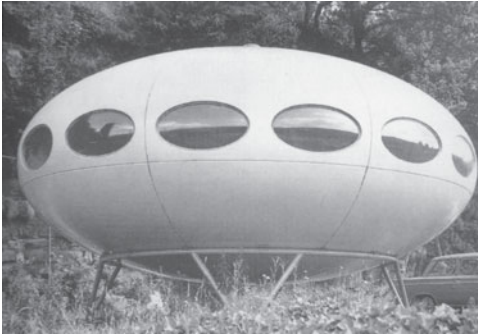


Bild 7.33: Ellipsoid - Futuro, 1968, M. Suuronen und J. Ronkka, Finnland

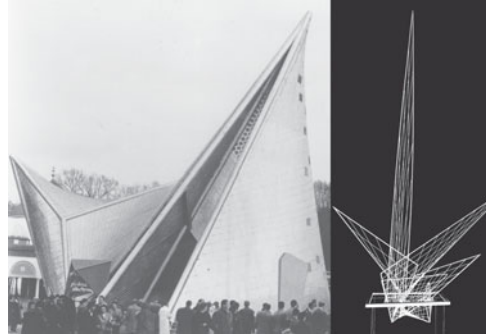


Bild 7.34: Hyperbolische Paraboloid - Philips-Pavillon, Brüssel, 1958, Le Corbusier

7.3 Darstellung gekrümmter Flächen

Um eine Fläche darzustellen wird nicht jeder Punkt einer Fläche abgebildet. Gezeichnet werden die Begrenzungskurven und der **Umriss** der Fläche (Bild 7.35).

Was jeweils den Umriss der Fläche bildet, ist abhängig von der verwendeten Projektionsrichtung für die Darstellung der Fläche. Wird die Fläche Φ auf eine Bildebene π mittels Parallelprojektion projiziert, so gibt es Sehstrahlen, die die Fläche Φ berühren (Bild 7.36).

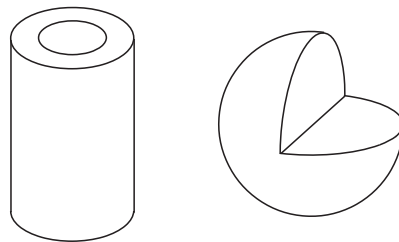


Bild 7.35: Zylinderrohr und Kugelobjekt, dargestellt durch Umriss und Begrenzungskurven

Die Berührungspunkte bilden eine Flächenkurve u , die **Kontur** oder den **wahren Umriss** der Fläche. Das Bild der Kontur u in der Bildebene π ist der **Umriss** oder **scheinbare Umriss** u^p der Fläche in der Darstellung. Ein Umrisspunkt U der Fläche Φ ist ein solcher Punkt der Fläche Φ , in dem die Tangentenebene $\tau(U)$ projizierend ist.

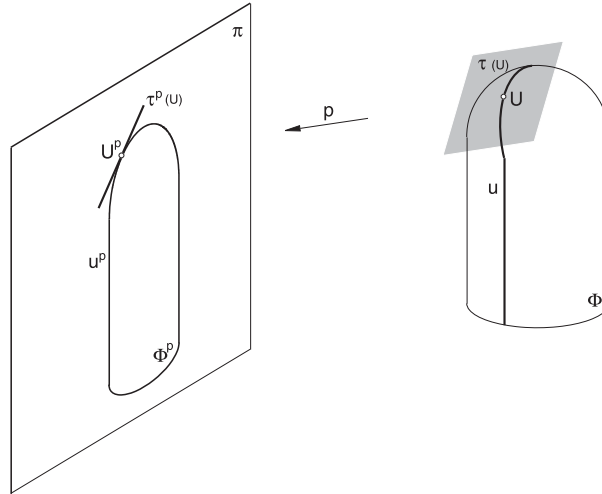


Bild 7.36: Wahrer und scheinbarer Umriss einer Fläche

Je nachdem ob eine Normalprojektion oder schiefe Parallelprojektion vorliegt, heißt der scheinbare Umriss **Normalumriss** oder **Schrägumriss**. Die Bilder von Flächenkurven, die die Kontur schneiden, berühren den Umriss. Daher lässt sich der Umriss auch als Hüllkurve der gleichverteilten Leitkurven (in Bild 7.37 Breitenkreise der Halbkugel und des Zylinder) finden.

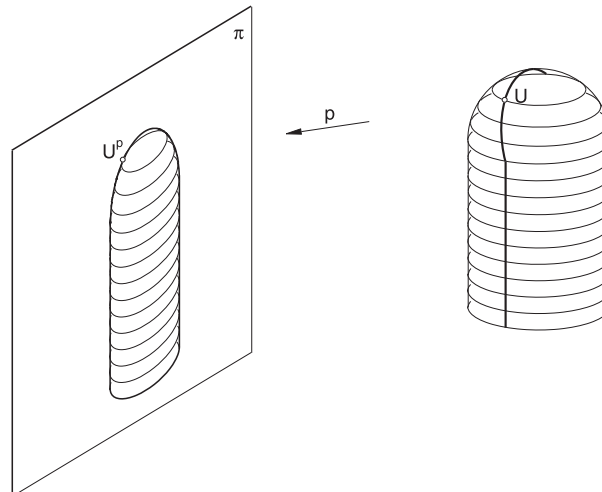


Bild 7.37: Umriss als Hüllkurve der Flächenkurven

Eine Fläche kann durch gleichverteilte Erzeugende oder Leitkurven dargestellt werden (Bild 7.38). Soll die Fläche in erster Linie anschaulich dargestellt werden, so wird die Darstellung durch eine Schattierung der Fläche ergänzt.

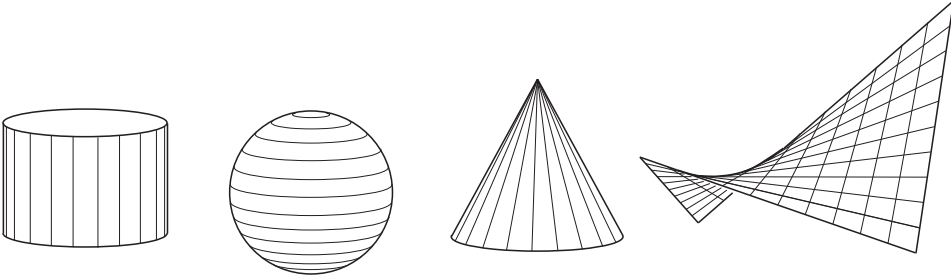


Bild 7.38: Darstellung von Flächen durch gleichverteilte Erzeugende oder Leitkurven

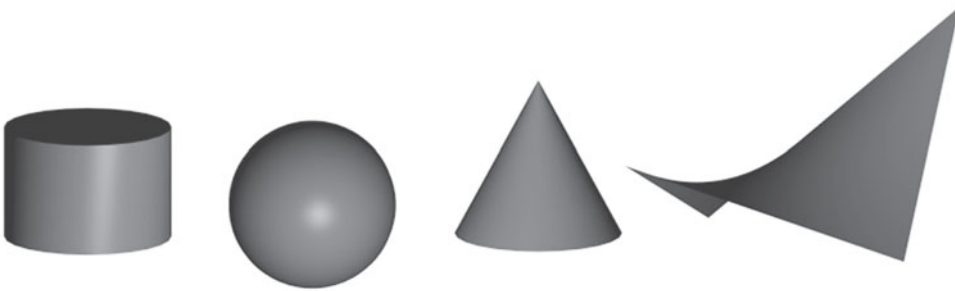


Bild 7.39: Gerenderte Darstellung von Zylinder, Kugel, Kegel und Hyperbolischem Paraboloid

Bei der Schattierung werden die Variationen der Helligkeitsverhältnisse berücksichtigt, wie dies z. B. im Rendering von CAD-Programmen geleistet wird (Bild 7.39). Für das Rendern müssen Lichtquellen gesetzt, das Umgebungslicht bestimmt und den Objekten Materialien zugewiesen werden. Die gerenderten Objekte lassen die Form plastischer erscheinen.

Um den wahren und scheinbaren Umriss einer Fläche zu finden, kann der Vergleich mit den Schattenkonstruktionen (Kapitel 10) hilfreich sein. Die Lichtrichtung bei der Schattenkonstruktion entspricht der Projektionsrichtung. Der wahre Umriss der Fläche ist mit der Eigenschattengrenze und der scheinbare Umriss mit der Schlagschattengrenze bei Parallelbeleuchtung vergleichbar.

7.4 Grundformen

Körper und Flächen, wie sie in Bauwerken Verwendung finden, werden häufig aus geometrischen Grundformen abgeleitet oder kombiniert.

Die wichtigsten geometrischen Grundformen sind Kugel, Zylinder und Kegel. Mittels Schnitten und Durchdringungen dieser Grundformen können Teilformen und kombinierte Formen (Bild 7.40) entstehen.

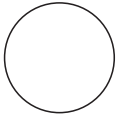


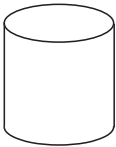
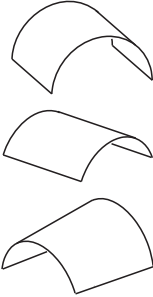
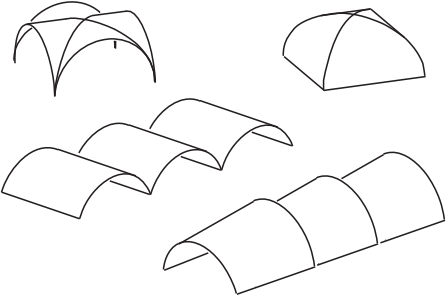
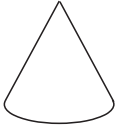
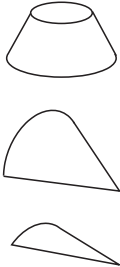
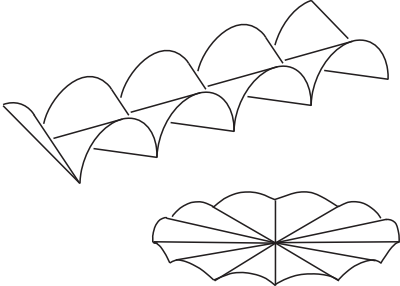
Grundform	Teilformen	kombinierte Formen
		
		
		

Bild 7.40: Aus Grundformen entwickelte Teilformen und kombinierte Formen

7.4.1 Kugel

Die Kugel entsteht durch Drehung eines Großkreises um einen beliebigen Kreisdurchmesser (s. Bild 7.12). Sie zeichnet sich durch völlige Symmetrie aus. Alle Punkte der Kugeloberfläche haben den gleichen Abstand vom Kugelmittelpunkt. Daher ist eine Kugel durch die Angabe des Mittelpunktes und des Radius bestimmt. In allen Punkten ist die Fläche gleich gekrümmt. Aufgrund der doppelten Krümmung weist die Kugelschale ein günstiges Tragverhalten auf. Es ist aber relativ aufwendig, eine Schalung für eine Kugel herzustellen, da keine Geraden auf der Kugel liegen. Mittels anderer Systeme, wie z. B. der geodätischen Kuppel von Buckminster Fuller (vgl. Bild 6.15), kann die Kugel angenähert werden. Die Kugel findet Verwendung in Kuppeln, insbesondere der römischen Kreiskuppel wie im Pantheon in Rom oder in neuerer Zeit als Sphärisches Kino (Bild 7.41). Die Kugel dient auch als Verbindungsstück in Bausystemen wie dem Möbelbausystem USM Haller (Bild 7.42).



Bild 7.41: Sphärisches Kino, Debis-Bau Potsdamer Platz, Berlin, 1992-98, Renzo Piano

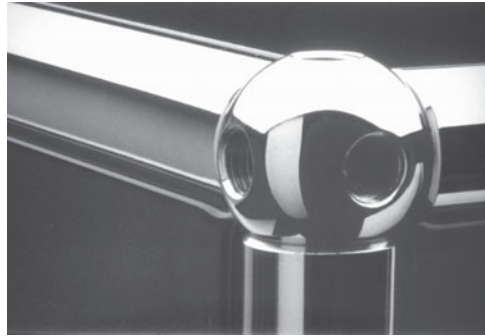


Bild 7.42: Kugel als Verbindungsstück im Möbelbausystem, 1963, USM Haller

Wird eine Kugel mit Hilfe der Parallelprojektion dargestellt, so ist die Kontur (wahrer Umriss) der Kugel ein Großkreis. Dieser Kreis bildet sich als Umriss (scheinbarer Umriss) im allgemeinen als Ellipse ab. Bei senkrechter Parallelprojektion, also in Grund- und Aufriss sowie in einer normalen Axonometrie, ist der Umriss ein Großkreis. In einer schiefen Axonometrie dagegen muss der Umriss der Kugel als Ellipse konstruiert werden (Bild 7.43). Daher eignet sich eine normale Axonometrie besonders zur Kugeldarstellung (vgl. Kapitel 12).

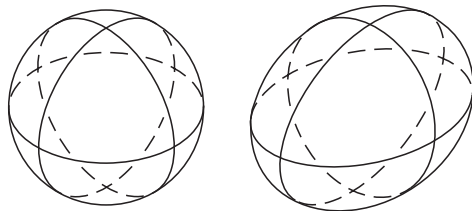


Bild 7.43: Normal- und Schrägumriss einer Kugel mit Großkreisen

Ebene Schnitte einer Kugel sind immer Kreise. Geht die Schnittebene durch den Kugelmittelpunkt, so wird ein **Großkreis** ausgeschnitten. Bei allen anderen Lagen der Schnittebene erhält man **Kleinkreise** der Kugel mit unterschiedlichen Radien.

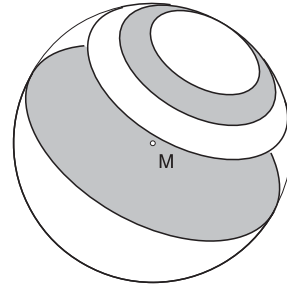


Bild 7.44: Ebene Schnitte einer Kugel

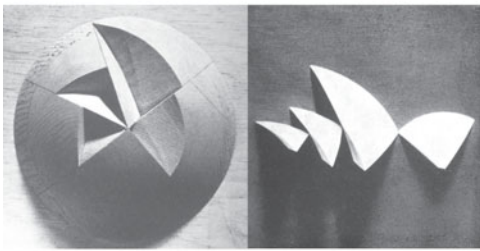


Bild 7.45: Modell des Kugelschalensystems



Bild 7.46: Kugelschalensystem - Opernhaus, Sydney, 1956-76, Jørn Utzon

Das Holzmodell in Bild 7.45 zeigt, welche Kugelteile für das Kugelschalensystem verwendet wurden. Utzon vergleicht seine Vorgehensweise mit der Operation, die man vornimmt, um eine Orange in kleine Schnitze zu zerteilen. Die Oberfläche der Kugel mit ihrer gleichmäßigen Krümmung erwies sich als besonders geeignet, um das Kugelschalensystem aus vorgefertigten Betonsegmenten erstellen zu können.

Durch zwei ebene Schnitte der Kugel entsteht in Bild 7.47 eine Kugelschale. Die Kugel mit dem Mittelpunkt M wird bei dieser Kugelschale zunächst mit der Grundrissebene abgeschnitten. Eine zweite aufrissprojizierende Schnittebene schneidet die Kugelschale schräg ab.

Für die Darstellung der Kugelschale unter Berücksichtigung der Sichtbarkeit ist die Konstruktion der **Umrissberührungspunkte** zwischen Kugelumriss und Schnittkurve wesentlich, da sich dort die Sichtbarkeit der Schnittkurve ändert.

Die Kugelschale kann in Grund- und Aufriss konstruiert werden.

1. Die Grundrissebene π_1 schneidet die Kugel in einem Kleinkreis, der im Grundriss in wahrer Gestalt eingezeichnet werden kann. Der Radius kann dem Aufriss entnommen werden.
2. Die zweite Schnittebene schneidet die Kugel ebenfalls in einem Kleinkreis, der aber im Grundriss als Ellipse erscheint, da er schräg zu π_1 liegt.
3. Die Senkrechte zur Schnittebene durch M_K'' liefert den Ellipsenmittelpunkt M_E'' und ein Ordner M_E' .
4. Das senkrecht aufeinander stehende Kreisdurchmesserpaar, ein Durchmesser parallel und der andere senkrecht zur Aufrissebene, wird im Grundriss als Haupt- und Nebenachse der Ellipse abgebildet, da der rechte Winkel im Grundriss erhalten bleibt.
5. Den Nebenseitel der Ellipse S_3' erhält man mittels Ordnern aus dem Aufriss und der Senkrechten zu den Ordnern durch M_E' .
6. Die Hauptachse verläuft in Ordnerichtung. Die Länge der halben Hauptachse a ist identisch mit dem Kreisradius, der dem Aufriss entnommen werden kann $\rightarrow S_1'$ und S_2' .
7. Für die Konstruktion der Umrissberührungspunkte wird der Kreis, der den Kugelumriss im Grundriss bildet, im Aufriss gesucht. Dieser Kreis liegt im Aufriss projizierend in der Höhe von M_K'' , senkrecht zu den Ordnern.
8. Der Schnittpunkt mit der aufrissprojizierenden Schnittebene ist der Aufriss der beiden Umrissberührungspunkte, U_1'' und U_2'' . Ein Ordner liefert auf dem Kugelumriss im Grundriss die Grundrisse dieser beiden Punkte U_1' und U_2' .
9. Weitere allgemeine Ellipsenpunkte können mit Hilfe von aufrissprojizierenden Hilfsebenen ψ parallel zur Grundrissebene konstruiert werden (vgl. Bild 8.12).
10. Die Kugelschale kann unter Berücksichtigung der Sichtbarkeit mit Umriss und Begrenzungskurven gezeichnet werden.

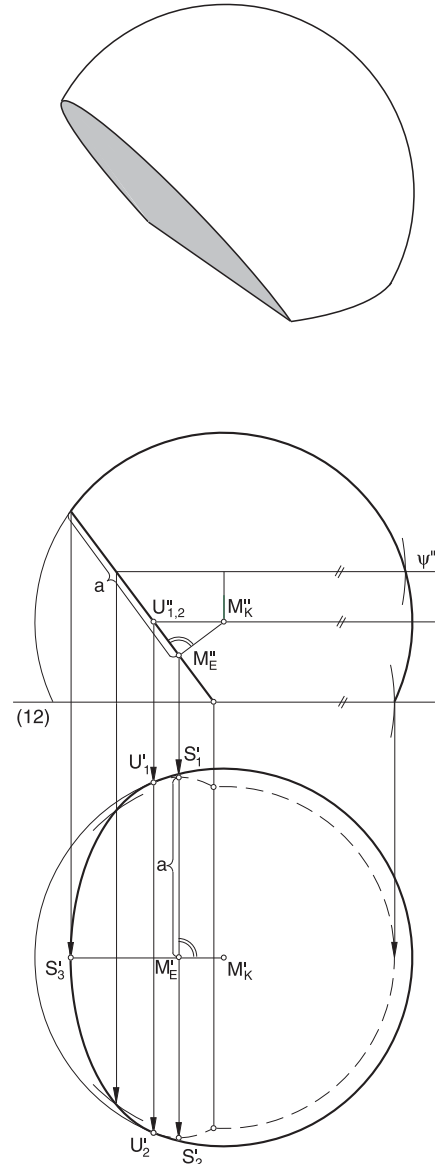
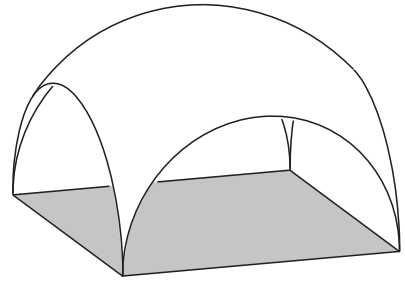


Bild 7.47: Kugelschale in Axonometrie, Grund- und Aufriss

Ebene Schnitte einer Kugel sind auch die Grundlage einer **Stutzkuppel**. Eine Verbindung von Kuppel und Quadrat bzw. Würfel und Halbkugel wird hierbei ermöglicht. In römisch-griechischer Zeit entwickelte sich diese Kuppelform, und die frühe byzantinische Baukunst erweiterte dieses Prinzip zur Pendentifkuppel. Dort wird die Stutzkuppel nochmals horizontal geschnitten und über dem so entstandenen Kreis eine neue Halbkugel errichtet. In der Hagia Sophia ist die Pendentifkuppel anzutreffen. Die Stutzkuppel entsteht durch den Schnitt einer Halbkugel mit vier grundrissprojizierenden Schnittebenen durch die vier Seiten eines dem Großkreis der Kugel einbeschriebenen Quadrates, z. B. Schnittebene ε . Die Halbkugel wird in Halbkreisen geschnitten, die im Grundriss als Strecken und im Aufriss als Ellipsen zu sehen sind.



1. Die Ordner durch die Eckpunkte des Quadrats im Grundriss liefern im Aufriss die Nebenscheitel S_3'' und S_4'' der Ellipse.
2. Durch Halbieren des Ellipsendurchmessers entsteht der Ellipsenmittelpunkt M_E'' .
3. Der zu S_3S_4 senkrechte Kreisdurchmesser ist parallel zur Aufrissebene und bildet sich daher in wahrer Länge im Aufriss ab. Diese wahre Länge ist im Seitenriss zu sehen.
4. S_1'' ist ein Hauptscheitel der Ellipse.
5. Die anderen Ellipsen werden entsprechend konstruiert bzw. parallel verschoben.
6. Der Kreis des Kugelumrisses im Aufriss ist im Grundriss projizierend, d. h. erscheint als Strecke durch M_K' senkrecht zu den Ordnern.
7. Die Schnittpunkte mit den Schnittebenen durch die Quadratseiten sind die Grundrisse der Umrissberührpunkte U_1' und U_2' .
8. Die Aufrisse der Umrissberührpunkte U_1'' und U_2'' , die durch Ordner gefunden werden, präzisieren den Umriss der Hängekuppel im Aufriss. Sie kennzeichnen den Übergang zwischen Kugel und Ellipse im Umriss.

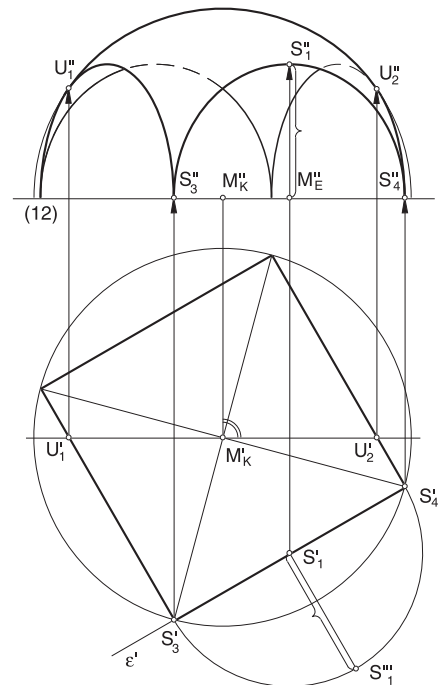


Bild 7.48: Stutzkuppel in Axonometrie, Grund- und Aufriss

7.4.2 Zylinder

Ein Zylinder ist eine Strahl- und Schiebfläche, da er durch Schiebung einer Geraden erzeugt werden kann (vgl. Bild 7.3). Die auf dem Zylinder liegenden Geraden (Erzeugenden) sind also alle parallel zueinander. Zylinder sind einfach gekrümmte Flächen. In allen Punkten einer Geraden des Zylinders ist die Fläche gleich gekrümmt. Aufgrund der Erzeugung des Zylinders mittels Geraden kann eine Schalung der Fläche leicht hergestellt werden. Der Zylinder findet Verwendung in der Architektur z. B. als Baukörper (Bild 7.49) und als Dachfläche (Bild 7.50).

Zur Darstellung eines Zylinders müssen die Umriss-erzeugenden und die Abschlusskurven ermittelt werden.

Je nach Leitkurve und der Lage der Geraden zu der Kurve können verschiedene Arten von Zylindern unterschieden werden. Ist die erzeugende Kurve ein Kreis, so entsteht ein **Kreiszyylinder**.

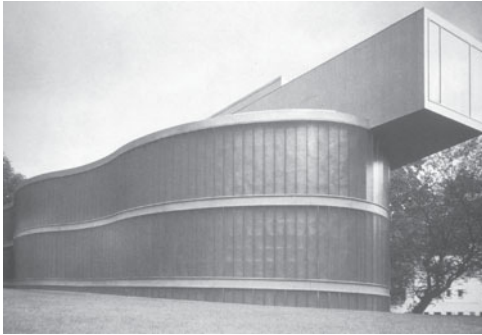


Bild 7.49: Neanderthal Museum, Mettmann, 1996, Günter Zamp Kelp und Julius Krauss



Bild 7.50: Museums Café in Lousiana, Humlebaek, Dänemark, 1991, J. Bo u. V. Wohlert

Es handelt sich um einen **geraden Kreiszyylinder** oder **Drehzylinder**, wenn die Gerade senkrecht zur Kreisebene steht (Bild 7.51). Sonst spricht man von einem **schiefen Kreiszyylinder** oder **elliptischen Zylinder** (Bild 7.52).

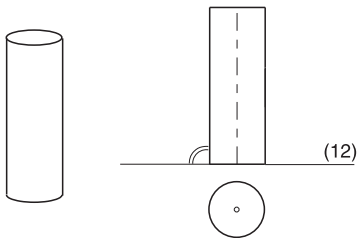


Bild 7.51: Gerader Kreiszyylinder (Drehzylinder)

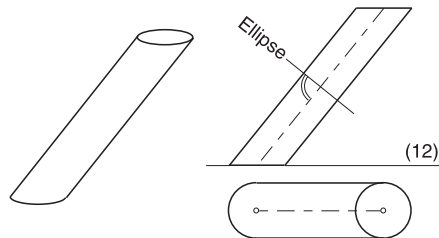


Bild 7.52: Schiefer Kreiszyylinder (elliptischer Zylinder)

Beide, gerade und schiefe, Kreiszylinder finden Anwendung in Bauwerken. Bild 7.53 zeigt die Ausflugsgaststätte Kornhaus von Carl Fieger in Dessau mit geradem Kreiszylinder. Das Postmuseum in Frankfurt von G. Behnisch (Bild 7.54) besitzt als Element einen schiefen Kreiszylinder, der Tageslicht in das Untergeschoss des Gebäudes fallen lässt und die obere und untere Ebene des Gebäudes miteinander verbindet.

Die zylindrische Fläche wird mittels Schnittebenen begrenzt. Am Beispiel des geraden Kreiszylinders werden die möglichen Lagen von Schnittebenen untersucht. Es können drei verschiedene Fälle auftreten. Kreis und Geraden als Schnittkurven (Fall 1 und 3) können leicht gefunden werden. Die Schnittellipse (Fall 2) kann als affines Bild des Leitkreises konstruiert werden. Die Affinität ist bestimmt durch die Affinitätsachse a , die als Schnittgerade der Ebenen von Kreis und Ellipse ermittelt werden kann, und einem Paar einander zugeordneter Punkte, z. B. Kreismittelpunkt M_K und Ellipsenmittelpunkt M_E (Bild 7.56).



Bild 7.53: Gerader Kreiszylinder - Kornhaus, Dessau, 1929-30, Carl Fieger



Bild 7.54: Schiefer Kreiszylinder - Postmuseum, Frankfurt a. M., 1986-90, G. Behnisch

1. Die Schnittkurve ist ein Kreis, wenn die Schnittebene ε senkrecht zu den Erzeugenden liegt.
2. Die Schnittkurve ist eine Ellipse, wenn ε schräg zu den Erzeugenden liegt.
3. Die Schnittkurve besteht aus zwei Geraden, wenn ε parallel zu den Erzeugenden liegt.

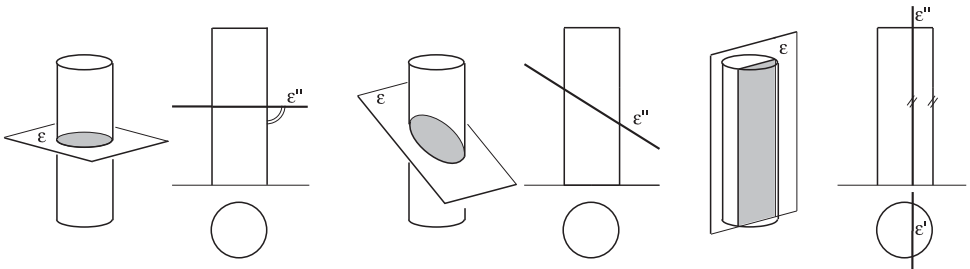


Bild 7.55: Schnitte eines Drehzylinders

In der Grundrissaxonometrie bildet sich der Kreis als Kreis in wahrer Gestalt ab, da er in der Grundrissebene liegt. Nach dem Einzeichnen der Affinitätsachse a und des Ellipsenmittelpunktes M_E in der Axonometrie kann die Schnittellipse unter Anwendung der Affinität (Thaleskreiskonstruktion, Bild 3.28) gefunden werden.

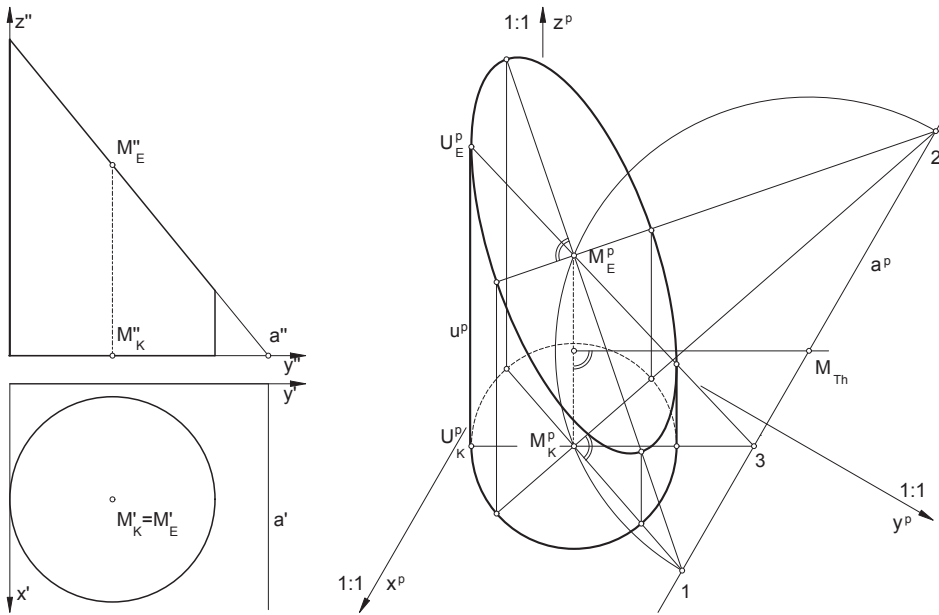


Bild 7.56: Grund- und Aufriss sowie Grundrissaxonometrie des schräg geschnittenen Drehzylinders

1. Affinitätsachse a , Kreis mit Mittelpunkt M_K und Ellipsenmittelpunkt M_E wird aus Grund- und Aufriss in das axonometrische Koordinatensystem übertragen.
2. Die Mittelsenkrechte der Strecke $M_K^p M_E^p$ schneidet die Affinitätsachse a^p im Mittelpunkt des Thaleskreises M_{Th}^p .
3. Der Thaleskreis um M_{Th}^p durch M_K^p und M_E^p schneidet a^p in den Punkten 1 und 2.
4. Die Verbindungsgeraden $1 M_E^p$ und $2 M_E^p$ sind die Achsen der Ellipse.
5. Die Geraden $1 M_K^p$ und $2 M_K^p$ sind die affinen Urbilder der Ellipsenachsen. Affinitätsstrahlen durch die Endpunkte dieser Kreisdurchmesser schneiden die Ellipsenachsen in den Scheiteln.
6. Die Umrissgeraden des Drehzylinders können als Tangenten an den Kreis parallel zur z -Achse gefunden werden. Die Umrissgerade u^p berührt den Kreis in Punkt U_K^p .
7. Die Gerade $U_K^p M_K^p$ schneidet a^p in Punkt 3. Die Bildgerade $3 M_E^p$ schneidet die Umrissgerade u^p (Affinitätsstrahl) im Umrissberührpunkt U_E^p .
8. Durch die gleiche Konstruktion wird der Umriss des Zylinders an der anderen Seite gefunden.
9. Die Ellipse kann mit Hilfe der Scheitelkrümmungskreise (vgl. Kapitel 3.4.4) eingezeichnet, und die Umrisslinien können unter Berücksichtigung der Sichtbarkeit ergänzt werden.

7.4.3 Kegel

Ein Kegel ist eine Strahlfläche. Er entsteht durch Bewegung einer Geraden längs einer Kurve I , wobei ein Punkt der Geraden, die Kegelspitze S , festgehalten wird. Kegel sind, wie Zylinder, einfach gekrümmte Flächen, aber in allen Punkten einer Geraden des Kegels liegt eine andere Krümmung der Fläche vor. Die Kegelspitze ist ein singulärer Flächenpunkt, in dem eine Krümmung nicht definiert ist. Wie für den Zylinder kann auch für den Kegel eine Schalung hergestellt werden.

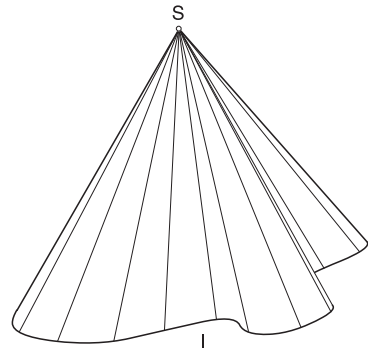


Bild 7.57: Kegel mit Spitze S und Leitkurve I

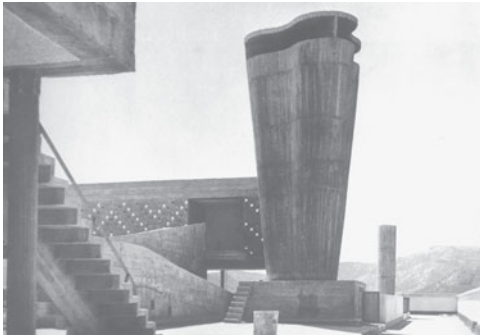


Bild 7.58: Dachterrasse der "Unité d'Habitation", Marseille, 1945-52, Le Corbusier



Bild 7.59: Oberbaumbrücke, Berlin, 1894-1902, Wiederherstellung 1993-95

Die Schalung ist aber aufwendiger herzustellen, da sich die den Erzeugenden entlang laufenden Verschalungsbretter zur Spitze hin verjüngen müssen. Kegel sind aufgrund dieser ungünstigen Eigenschaften nicht so häufig in der Architektur anzutreffen wie Zylinder. Aber auch sie finden Verwendung als Baukörper wie in dem Ende eines Lüftungsschachtes auf der Dachterrasse der "Unité d'Habitation" in Marseille von Le Corbusier (Bild 7.58). Häufiger ist der Kegel als Dachfläche eines Turmes wie bei der Oberbaumbrücke in Berlin (Bild 7.59) anzutreffen. Der Kegel sitzt dann meist als kegelförmiges Dach auf einem drehzylindrischen Turm.

Zur Darstellung eines Kegels müssen die Umriss erzeugenden und die Abschlusskurven ermittelt werden.

Auch beim Kegel werden verschiedene Arten von Kegeln unterschieden, je nachdem welche Leitkurve vorliegt und wie die Kegelspitze zu der Leitkurve liegt. Ist die erzeugende Kurve ein Kreis, so entsteht ein **Kreiskegel**.

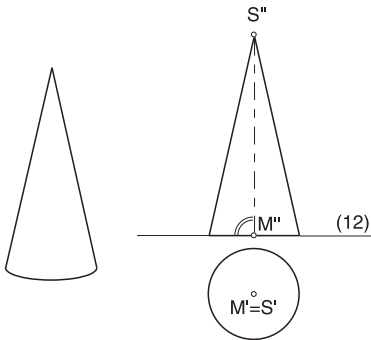


Bild 7.60: Gerader Kreiskegel (Drehkegel)

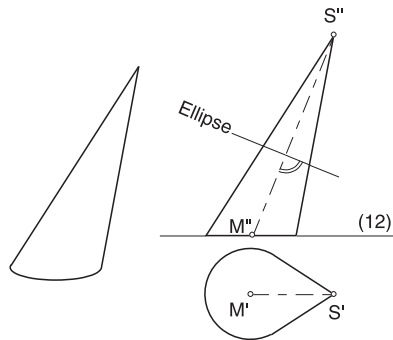


Bild 7.61: Schiefer Kreiskegel (elliptischer Kegel)

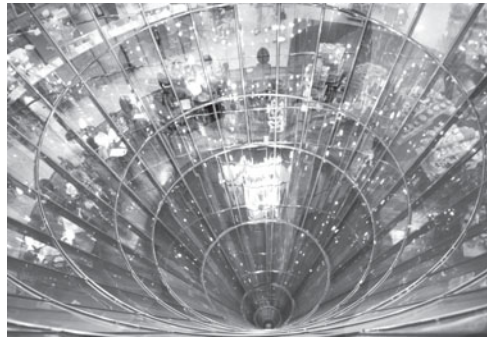


Bild 7.62: Galeries Lafayette, Berlin, 1993-96, Jean Nouvel - Außenansicht und Blick in einen der drehkegelförmigen Hohlräume, die das Gebäude durchstoßen

Ein **gerader Kreiskegel** oder **Drehkegel** liegt vor, wenn die Kegelspitze senkrecht über der Kreisebene steht (Bild 7.60).

Liegt die Spitze schräg über der Kreisebene, so spricht man von einem **schiefen Kreiskegel** oder **elliptischen Kegel** (Bild 7.61).

Am häufigsten ist der Drehkegel in Bauwerken zu finden. In Bild 7.62 sehen wir von außen die kegelförmigen Aufbauten der Galeries Lafayette in Berlin von Jean Nouvel. Das Gebäude ist vollständig mit Glas verkleidet. Mehrere drehkegelförmige Hohlräume durchstoßen die Innenräume des Gebäudes. Dadurch entstehen Sichtbezüge im Innenraum, da durch die Neigung der Kegelerzeugenden die Gebäudeebenen sich unterschiedlich ausdehnen. Das zweite Bild zeigt einen Blick in einen Drehkegel von oben hinein.

Um die möglichen Lagen von Schnittebenen bei einem Drehkegel zu untersuchen, wird der Kegel zunächst als unbegrenzt betrachtet. Hierzu wird er durch Rotation einer Geraden, die die Drehachse in einem Punkt schneidet, um die Drehachse erzeugt. Es entsteht ein "Doppelkegel".

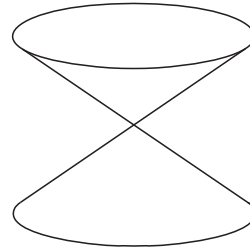


Bild 7.63: Drehkegel als Doppelkegel

Insgesamt können fünf Fälle von Kegelschnitten, zwei Sonderfälle und drei allgemeine Fälle festgestellt werden.

Die beiden Sonderfälle sind:

1. Die Schnittebene ε geht durch die Kegelspitze. Es werden zwei Geraden ausgeschnitten.
2. Die Schnittebene ε ist parallel zum Leitkreis. Die Schnittkurve ist ein Kreis.

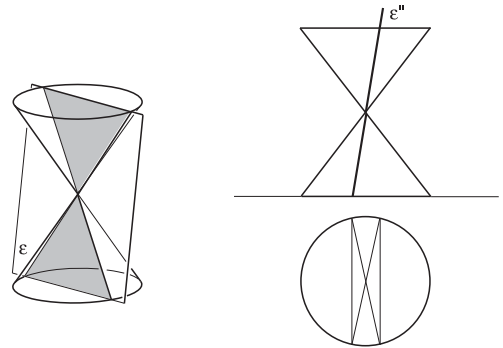


Bild 7.64: Schnittebene des Drehkegels durch die Kegelspitze

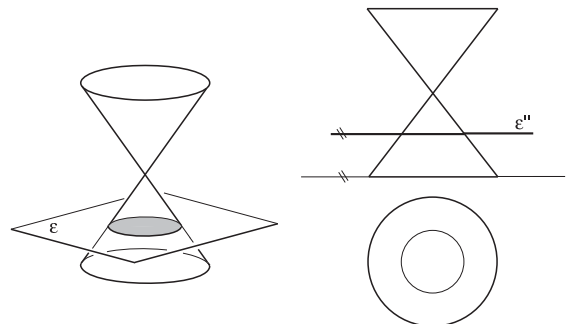


Bild 7.65: Schnittebene des Drehkegels parallel zum Leitkreis

Neben diesen beiden Sonderfällen von Schnitten eines Drehkegels können drei grundsätzlich unterschiedliche Fälle je nach Neigung β der Schnittebene in Relation zur Neigung α der Erzeugenden des Drehkegels unterschieden werden.

1. Die Ebene ε schneidet alle Erzeugenden.
Es entsteht eine **Ellipse**.

$$\alpha > \beta$$

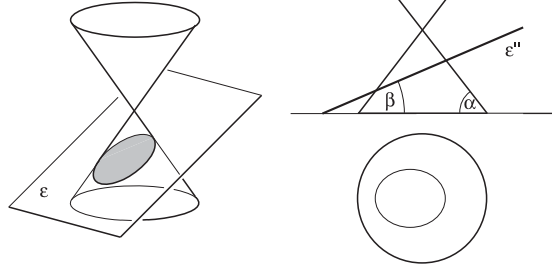


Bild 7.66: Elliptischer Schnitt eines Drehkegels

2. Die Ebene ε ist parallel zu einer Erzeugenden.
Es entsteht eine **Parabel**.

$$\alpha = \beta$$

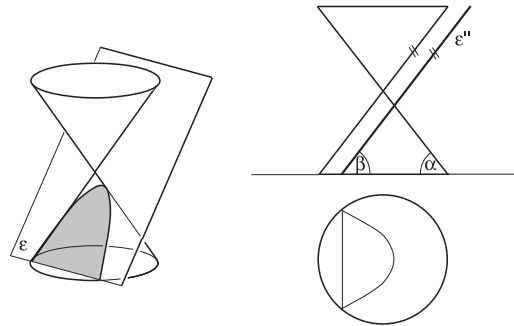


Bild 7.67: Parabolischer Schnitt eines Drehkegels

3. Die Ebene ε ist parallel zu zwei Erzeugenden.
Es entsteht eine **Hyperbel**.

$$\alpha < \beta$$

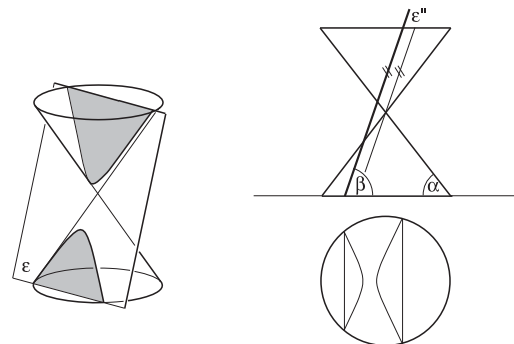
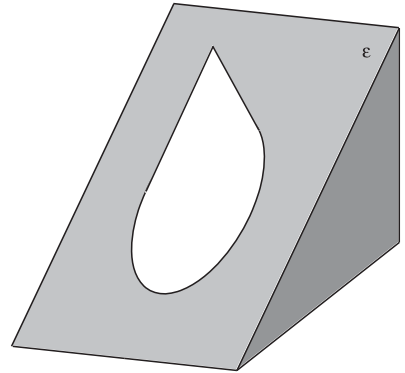


Bild 7.68: Hyperbolischer Schnitt eines Drehkegels

Auch wenn die Kegelschnitte im allgemeinen nicht in wahrer Gestalt in den Rissen erscheinen, so gilt doch, dass der Typ des Kegelschnitts bei der Abbildung mittels Parallelprojektion erhalten bleibt, sofern die Schnittebene nicht projizierend ist. Die Konstruktion der Kegelschnitte kann punktweise bzw. mit Hilfe der Scheitel erfolgen.

Beim **elliptischen Kegelschnitt** kann die entstehende Ellipse mit Hilfe der Scheitel konstruiert werden. Es ist zu beachten, dass der Mittelpunkt der Ellipse nicht auf der Drehkegelachse liegt. Der Ellipsenmittelpunkt kann als Mittelpunkt eines Ellipsendurchmessers gefunden werden.



1. ϵ'' schneidet die Umriss erzeugenden des Kegels im Aufriss in den Hauptscheiteln S_1'' und S_2'' der Ellipse.
2. Ordner durch S_1'' und S_2'' schneiden die Senkrechte zu den Ordnern durch a' in S_1' und S_2' .
3. Durch Halbieren des Ellipsendurchmessers $S_1''S_2''$ erhält man den Mittelpunkt der Ellipse M_E'' und mit Hilfe eines Ordners M_E' .
4. Die Nebenachse der Ellipse ist im Aufriss projizierend, verläuft daher im Grundriss in Orderrichtung.
5. Um die Länge der Nebenachse zu finden, wird eine aufrissprojizierende Hilfsebene ψ durch die Nebenachse senkrecht zur Drehkegelachse a gelegt ($\psi'' \perp a''$ durch M_E'').
6. Die Hilfsebene ψ schneidet den Kegel in einem Kreis k mit Mittelpunkt M_K und Radius r . Da der Kreis parallel zur Grundrissebene liegt, kann k' in wahrer Gestalt als Kreis um a' mit Radius r eingezeichnet werden.
7. k' schneidet die Nebenachse in den Nebenscheiteln S_3' und S_4' .
8. Die Ellipse kann mit Hilfe der Scheitelkrümmungskreise (vgl. Kapitel 3.4.4) eingezeichnet werden.

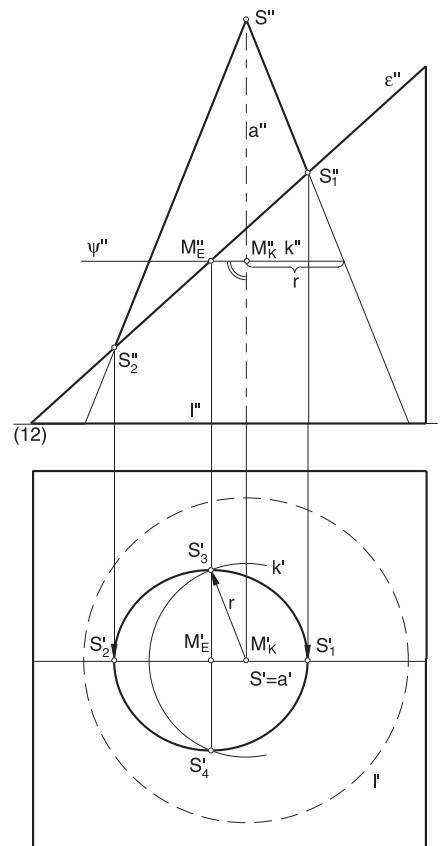
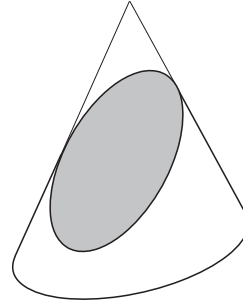


Bild 7.69: Konstruktion des elliptischen Kegelschnitts im Grundriss

Die Ellipse e kann auch als perspektiv kollineares Bild des Leitkreises l des Drehkegels betrachtet werden (vgl. Kapitel 3.2). Die Kegelspitze S ist das Kollineationszentrum, die Kollineationsachse b ist die Schnittgerade zwischen Leitkreisebene und Ellipsenebene. Mit Hilfe eines Paares einander zugeordneter Punkte P_l (Punkt des Leitkreises l) und P_e (Punkt der Ellipse) kann die Ellipse punktweise konstruiert werden (Bild 7.70).



1. Die Ebenen durch e'' und l'' im Aufriss schneiden einander im Aufriss der Kollineationsachse b'' . b' verläuft in Ordnerichtung.
2. Zu einem beliebigen Punkt Q_l' wird der zugehörige Ellipsenpunkt Q_e' gesucht.
3. Der Punkt P_l des Leitkreises wird mittels Kollineation auf den Punkt P_e der Ellipse abgebildet. Damit ist ein Paar einander zugeordneter Punkte der Kollineation bekannt.
4. Der Punkt Q_e' der Ellipse muss auf dem Kollineationsstrahl $S'Q_l'$ liegen.
5. Außerdem muss Q_e' auf der Bildgeraden $P_e'Q_e'$ von $P_l'Q_l'$ liegen. Diese erhält man, indem $P_l'Q_l'$ mit b' zum Schnitt gebracht wird.
6. $P_e'Q_e'$ geht ebenfalls durch diesen Schnittpunkt, da alle Punkte der Kollineationsachse b bei der Abbildung fest bleiben.
7. Auf diese Weise können beliebig viele Punkte der Ellipse konstruiert werden.

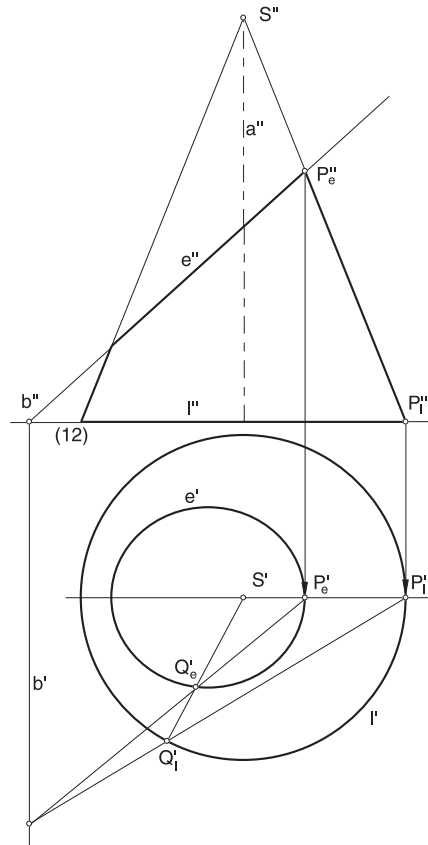
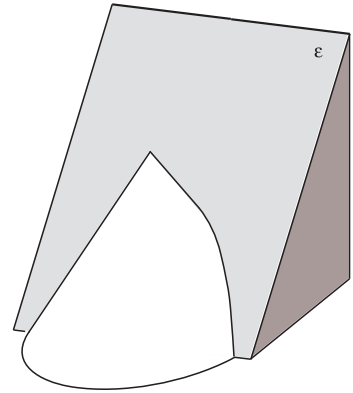


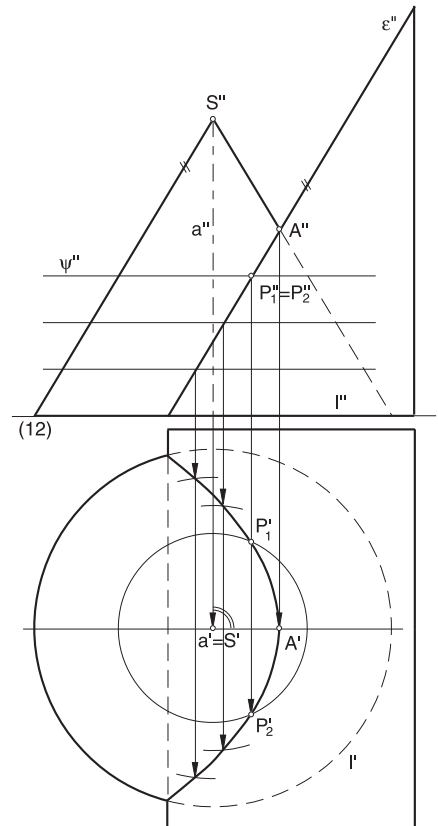
Bild 7.70: Ellipse als perspektiv kollineares Bild des Leitkreises des Drehkegels

Wird ein Drehkegel mit einer Ebene geschnitten, die die gleiche Neigung hat wie die Erzeugenden des Kegels, so entsteht eine Parabel.

Beim **parabolischen Kegelschnitt** können der Scheitel A und weitere Punkte der Parabel mittels Hilfsschnittebenen senkrecht zur Drehkegelachse gefunden werden (Bild 7.71).



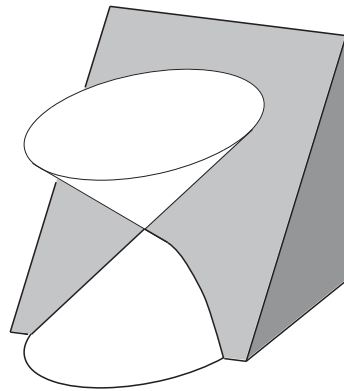
1. Die Parabelachse ist parallel zu der Kegelerzeugenden, zu der die Schnittebene ε parallel ist. Sie erscheint im Grundriss senkrecht zu den Ordnern durch S' .
2. Scheitel A liegt im Aufriss auf der Umriss erzeugenden des Kegels. A'' ist also der Schnittpunkt von ε'' und der Kegelumsrisserzeugenden. Ordner durch A'' geschnitten mit der Parabelachse ergibt A' .
3. Beliebige aufrissprojizierende Hilfsschnittebene ψ senkrecht zu a schneidet den Kegel in einem Kreis. Im Grundriss kann dieser Kreis um a in wahrer Gestalt eingezeichnet werden.
4. ψ'' schneidet ε'' in einer aufrissprojizierenden Geraden, die im Grundriss in Ordnerrichtung verläuft. Diese schneidet den Kreis um a im Grundriss in P_1' und P_2' . Im Aufriss fallen die beiden Parabelpunkte zusammen, $P_1''=P_2''$.
5. Weitere Parabelpunkte können mit entsprechenden aufrissprojizierenden Hilfsschnittebenen konstruiert werden.



Auch die Parabel kann wie die Ellipse als perspektiv kollineares Bild des Leitkreises des Drehkegels konstruiert werden (vgl. Bild 7.70).

Bild 7.71: Konstruktion des parabolischen Kegelschnitts im Grundriss

Wird der Drehkegel mit einer Ebene geschnitten, die steiler ist als die Erzeugenden des Kegels, so entsteht ein **hyperbolischer Kegelschnitt**. Es entstehen beide Hyperbeläste, wenn der Drehkegel zu einem Doppelkegel ergänzt wird. Mittels aufrissprojizierender Hilfsebenen senkrecht zur Drehkegelachse kann die Hyperbel punktwise konstruiert werden. Die Schnittebene ε ist bei einem hyperbolischen Schnitt parallel zu zwei Erzeugenden e_1 und e_2 des Kegels. Die Parallelen zu diesen beiden Erzeugenden durch den Mittelpunkt M der Hyperbel sind die **Asymptoten der Hyperbel** (Bild 7.72).



1. ε'' schneidet die Umrisserzeugenden des Kegels in den Scheiteln S_1'' und S_2'' der Hyperbel. Ordner durch S_1'' und S_2'' geschnitten mit der Senkrechten zu den Ordnern durch a' liefern S_1' und S_2' .
2. Der Mittelpunkt M' bzw. M'' der Hyperbel wird durch Halbieren von $S_1'S_2'$ bzw. $S_1''S_2''$ gefunden.
3. Beliebige aufrissprojizierende Hilfsschnittebene ψ senkrecht zu a schneidet den Kegel in einem Kreis. Im Grundriss kann der Kreis um a' in wahrer Gestalt eingezeichnet werden.
4. ψ'' schneidet ε'' in einer aufrissprojizierenden Geraden, die im Grundriss in Orderrichtung verläuft. Diese schneidet den Kreis um a im Grundriss in P_1' und P_2' . Im Aufriss fallen die beiden Hyperbelpunkte zusammen, $P_1'' = P_2''$.
5. Weitere Hyperbelpunkte können auf diese Weise konstruiert werden.
6. Die Asymptoten der Hyperbel werden als Parallelen durch M zu den Erzeugenden e_1 und e_2 des Kegels, zu denen ε parallel ist, gefunden.

Wird die Hyperbel als perspektiv kollineares Bild des Leitkreises I des Drehkegels aufgefasst, so entsteht analog zur Ellipse und Parabel die Hyperbel unter Anwendung der Kollineation (vgl. Bild 7.70).

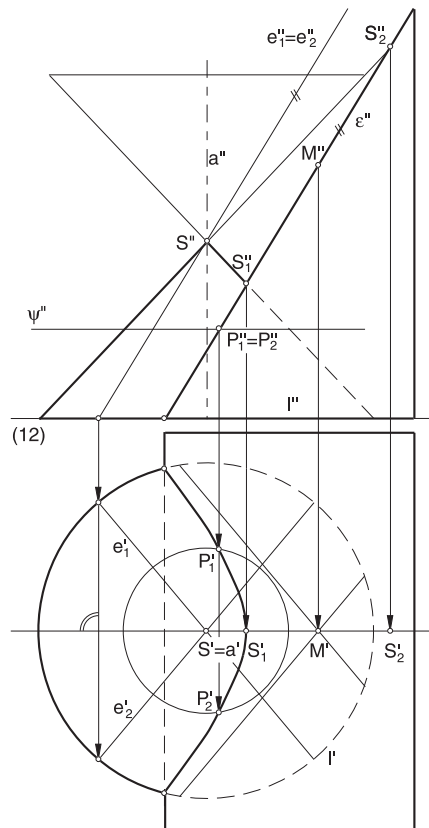


Bild 7.72: Konstruktion des hyperbolischen Kegelschnitts im Grundriss

Das Terminal für Fährschiffe in Nagasaki, Japan, von Shin Takamatsu und Gabriel E. Lahyani wird im Hauptgebäude aus einem elliptischen Zylinder und einem Drehkegel gebildet. Der Drehkegel sitzt mit der Spitze nach unten auf dem zylindrischen Gebäudeteil und wird oben schräg abgeschnitten. Bild 7.73 zeigt das Terminal in einem Modellfoto. Der elliptische Abschluss des Drehkegels ist verglast und belichtet den zweigeschossigen Raum, in dem sich die Haupteingangshalle befindet, von oben.

In Bauwerken tritt am häufigsten der Sonderfall eines hyperbolischen Kegelschnitts auf, bei dem die Schnittebene ε parallel zur Drehkegelachse verläuft. Eine vertikale Wand, die einen Drehkegel mit vertikaler Achse schneidet, erzeugt diesen Sonderfall der Hyperbel.

Das State of Illinois Center in Chicago von Helmut Jahn (Bild 7.74) entsteht aus einem Viertelkegel und findet in einem hyperbolischen Kegelschnitt den vertikalen Abschluss. Oben wird der Kegel in einem Viertelkreis abgeschlossen.

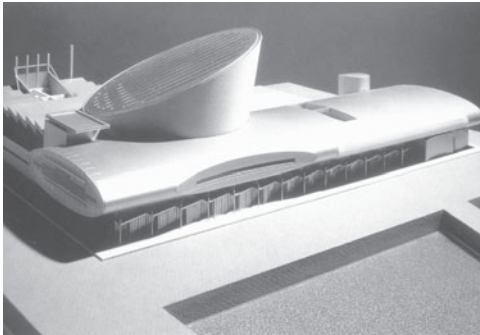


Bild 7.73: Ferry Terminal, Nagasaki, 1993-97,
Sh. Takamatsu u. G. E. Lahyani



Bild 7.74: State of Illinois Center, Chicago,
1979-84, Helmut Jahn

Diese Form ergab sich aus einem über dem Grundstückskarree entwickelten Würfel, der den Kegel begrenzt. Durch das Gebäude verläuft ein Drehzylinder, der als schräg abgeschnittenes Element mit elliptischem Abschluss oben aus der Dachebene ragt.

8 DURCHDRINGUNGEN GEKRÜMMTER FLÄCHEN

Die Grundformen von Körpern und Flächen werden in Bauwerken geschnitten und miteinander kombiniert verwendet (vgl. Bild 7.40). Bei den kombinierten Formen durchdringen gekrümmte Flächen einander. Sind Φ_1 und Φ_2 zwei Flächen, dann heißt die Menge der Punkte, die beiden Flächen angehören, **Schnittkurve** oder **Durchdringungskurve** $c = \Phi_1 \cap \Phi_2$. Die Durchdringungskurve c ist im allgemeinen keine ebene Kurve, sondern eine **Raumkurve** (Beispiele in Bild 8.1 und 8.2).

8.1 Verschiedene Arten von Durchdringungen

In Sonderfällen kann eine ebene Kurve auftreten. Ein solcher Sonderfall stellt das Kreuzgewölbe und das Klostergewölbe dar.

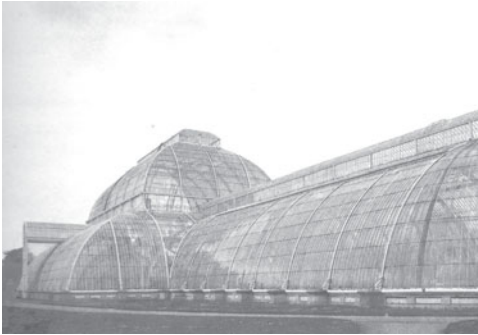


Bild 8.1: Palmenhaus, Kew/Surrey, England, 1844-48, D. Burton und R. Turner

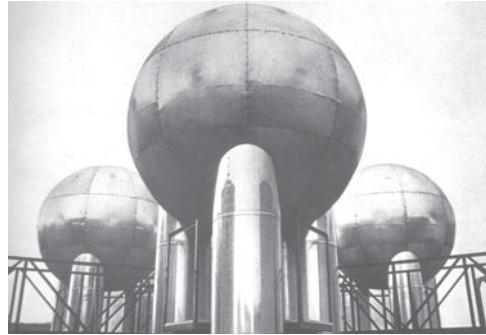


Bild 8.2: Kühltürme des Rehabilitationszentrums, Wien-Meidling, 1965-67, Gustav Peichl

Beim **Kreuzgewölbe** (Bild 8.3) durchdringen einander zwei horizontal liegende halbe Drehzylinder mit gleichen Radien. Die Drehachsen stehen dabei rechtwinklig aufeinander und schneiden einander. In diesem Fall zerfällt die Durchdringungskurve in zwei ebene Kurven, zwei halbe Ellipsen, die einander im höchsten Punkt schneiden.

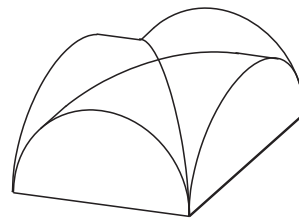


Bild 8.3: Kreuzgewölbe

Das **Klostergewölbe** (Bild 8.4) entsteht aus der gleichen Zylinderanordnung. Nur werden beim Klostergewölbe diejenigen Zylinderteile verwendet, die im Innern beider Zylinder liegen.

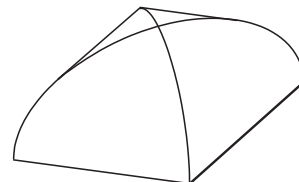


Bild 8.4: Klostergewölbe

Ein aus Grundformen kombinierter Körper kann, wie am Beispiel Kreuzgewölbe und Klostergewölbe sichtbar wird, auf unterschiedliche Art und Weise aus diesen Grundformen zusammengesetzt sein. Werden die Grundformen als Körper mit einem Volumen verstanden, so ist der Körper als die Menge aller Punkte, die auf der Oberfläche oder im Innern liegen, definiert. Es können dann drei verschiedene Arten von Verknüpfungen der Körper definiert werden:

1. **Vereinigung** der Körper

Der aus der Vereinigung zweier Körper Φ_1 und Φ_2 entstehende Körper $\Phi_1 \cup \Phi_2$ besteht aus der Menge aller Punkte, die dem einen **oder** dem anderen Körper angehören (Bild 8.5). Das Kreuzgewölbe entsteht aus der Vereinigung der beiden Zylinder.

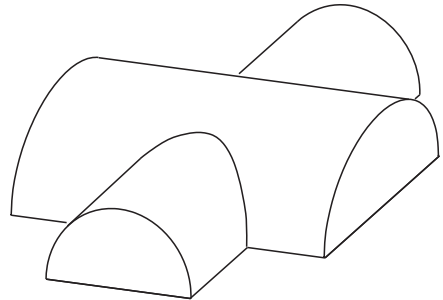


Bild 8.5: Vereinigung zweier Zylinder

2. **Differenz** der Körper

Wird die Differenz aus zwei Körpern Φ_1 und Φ_2 gebildet, so wird das Volumen des einen Körpers Φ_2 vom anderen Körper Φ_1 subtrahiert. $\Phi_1 - \Phi_2$ besteht aus der Menge aller Punkte, die dem Körper Φ_1 **und nicht** dem Körper Φ_2 angehören (Bild 8.6).

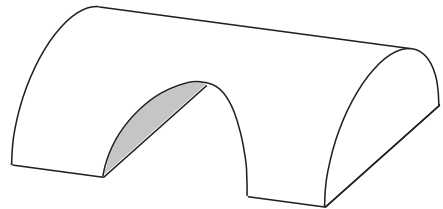


Bild 8.6: Differenz zweier Zylinder

3. **Durchschnitt** der Körper

Der aus dem Durchschnitt der beiden Körper Φ_1 und Φ_2 entstehende Körper $\Phi_1 \cap \Phi_2$ besteht aus der Menge aller Punkte, die dem einen **und** dem anderen Körper angehören (Bild 8.7). Das Klostergewölbe kann im Unterschied zum Kreuzgewölbe als Durchschnitt der beiden Zylinder entstehen.

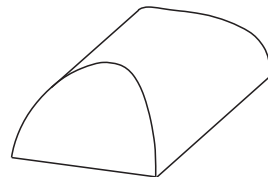


Bild 8.7: Durchschnitt zweier Zylinder

Diese auf Mengen operierenden Verknüpfungen werden auch **Boolesche Operationen** genannt. Bei der Verwendung eines CAD-Programms muss die Möglichkeit bestehen, ein dreidimensionales Objekt als Volumenmodell, auch Festkörperobjekt genannt, zu definieren, um diese Booleschen Operationen anwenden zu können. Nachdem die Operation Vereinigung, Differenz oder Durchschnitt gewählt wurde, kann ein volumenorientiertes CAD-Programme die Durchdringungskurve berechnen und anzeigen. Um das zusammengesetzte Objekt unter Berücksichtigung verdeckter Linien oder gerendert darzustellen, wird im CAD-Programm ein Netz über das Volumenmodell gelegt. Damit wird dem Volumenmodell auch ein Flächenmodell zugeordnet, mit dessen Hilfe die verdeckte Linienrechnung und das Rendern des Modells durchgeführt werden kann (Bild 8.8 und Bild 8.9).

In allen Fällen bestimmen die Größe und Lage der Körper zueinander die entstehende Durchdringungskurve. In Bild 8.10 sind unterschiedliche Durchdringungen eines Drehkegels und eines Drehzylinders dargestellt.

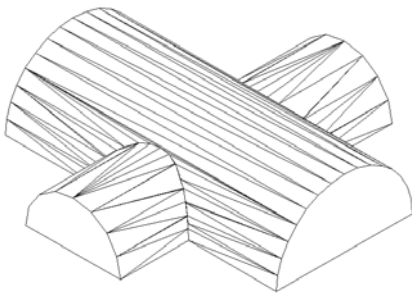


Bild 8.8: Modell mit Netz für die verdeckte Linienrechnung

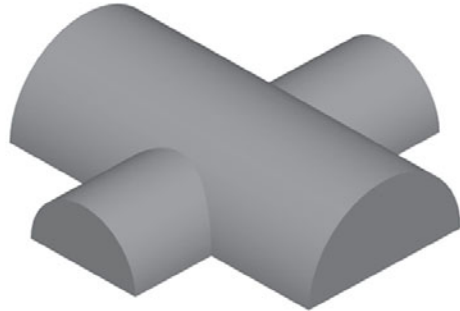


Bild 8.9: Gerendertes Modell

Der Drehkegel ist in allen drei Fällen der gleiche, der Drehzylinder variiert im Radius. Bei kleinem Zylinderradius entsteht eine zweigeteilte Schnittkurve rechts und links. Berührt der Zylinder den Kegel, so handelt es sich um eine Schnittkurve mit einem sogenannten Doppelpunkt. Wird der Zylinderradius wieder größer, dann zerfällt die Schnittkurve wieder in zwei Teile: eine kleine Kurve oben und eine große Kurve unten.

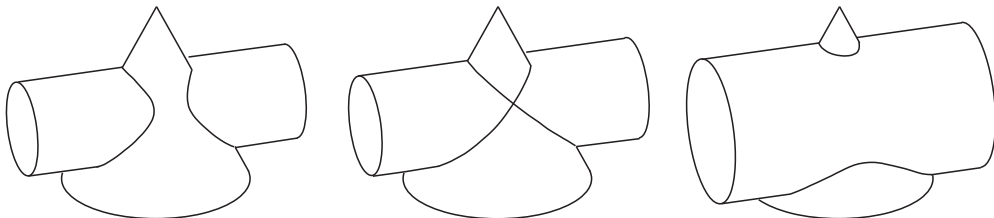


Bild 8.10: Durchdringungskurve Drehkegel - Drehzylinder

Die räumliche Durchdringungskurve kann im allgemeinen nur punktweise konstruiert werden. Die Konstruktion von Tangenten in Punkten der Schnittkurve kann für das Erfassen des Kurvenverlaufs hilfreich sein.

8.2 Punktkonstruktion

Um einen gemeinsamen Punkt der beiden Flächen Φ_1 und Φ_2 zu finden, wird eine Hilfsfläche Ψ (in der Regel eine Ebene oder Kugel) so gewählt, dass sie einfach zu zeichnende Schnittkurven aus beiden Flächen ausschneidet. Die Hilfsfläche Ψ schneidet aus der Fläche Φ_1 eine Hilfsschnittkurve c_1 , aus der Fläche Φ_2 eine Hilfsschnittkurve c_2 aus. Schnittpunkte der Hilfsschnittkurven c_1 und c_2 sind gemeinsame Punkte der beiden Flächen Φ_1 und Φ_2 , also Punkte der Durchdringungskurve (Bild 8.11). Für einen Punkt P der Durchdringungskurve c gilt also:

$$P = (\Phi_1 \cap \Psi) \cap (\Phi_2 \cap \Psi)$$

$$P = c_1 \cap c_2$$

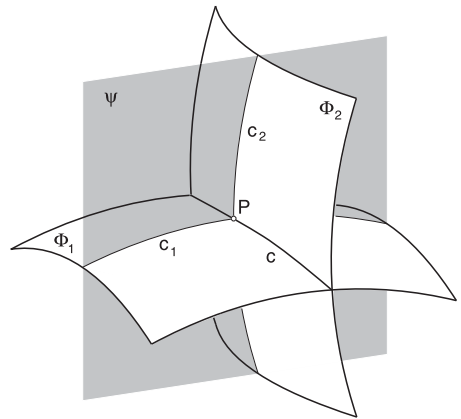


Bild 8.11: Punktkonstruktion mittels Hilfsfläche

Da die Schnittkurven möglichst einfach zu zeichnen sein sollen, das sind in erster Linie Geraden und Kreise, werden als Hilfsflächen Ψ im allgemeinen geeignete **Hilfsebenen** oder **Hilfskugeln** gewählt.

8.2.1 Punktkonstruktion mit Hilfsebenen

Als Hilfsfläche Ψ kann je nach Lage der Flächen eine Ebene gewählt werden, so dass sie einfache Kurven (i. a. Geraden und Kreise) aus beiden Flächen ausschneidet. Am Beispiel einer Halbkugel Φ_1 und eines Drehzylinders Φ_2 wird das Hilfsebenenverfahren zur Punktkonstruktion durchgeführt (Bild 8.12). Hier kann als Hilfsebene ψ eine zur Achse a des Zylinders parallele Ebene, die gleichzeitig parallel zur Grundrissebene ist, gewählt werden. Aus der Halbkugel wird dann ein Kreis, aus dem Drehzylinder werden zwei Geraden ausgeschnitten. Die Schnittpunkte des Kreises und der Geraden sind Punkte der Schnittkurve c . Bei der Konstruktion der Durchdringungskurve in Grund- und Aufriss muss beachtet werden, dass die Hilfsschnittkurven in den Rissen einfach zu zeichnen sind.

Durch die Wahl mehrerer entsprechender Hilfsebenen können viele Punkte der Schnittkurve konstruiert werden. Es ist jedoch für die Genauigkeit günstig, außer allgemeine Punkte der Schnittkurve auch besondere Punkte, wie z. B. höchster Punkt, tiefster Punkt, Umrissberührpunkte, zu ermitteln (Bild 8.12).

1. Die zur Drehzylinderachse a parallele und aufrissprojizierende Hilfsebene ψ ($\psi'' \parallel a''$) schneidet die Halbkugel Φ_1 im Kreis k .
2. Kreis k ist parallel zu π_1 , kann also im Grundriss als Kreis k' gezeichnet werden. Der Radius kann dem Aufriss entnommen werden.
3. Aus dem Drehzylinder Φ_2 werden zwei Geraden g_1 und g_2 ausgeschnitten. g_1' und g_2' sind parallel zu a' im horizontalen Abstand von g_1 und g_2 zur Achse a . Dieser horizontale Abstand kann dem Kreuzriss entnommen werden.
4. Die Schnittpunkte P_1' und P_2' des Kreises k' und der Geraden g_1' und g_2' sind die Grundrisse von Punkten der gesuchten Schnittkurve c . Ordner durch P_1' und P_2' , geschnitten mit ψ'' , ergeben P_1'' und P_2'' .
5. Höchster Punkt H und tiefster Punkt T ist im Aufriss zu sehen. Ordner durch H'' und T'' geschnitten mit a' liefern H' und T' .
6. Mittels einer Hilfsebene durch a ($\psi'' = a''$) werden die Umrissberührpunkte U_1' und U_2' ermittelt, in denen im Grundriss die Sichtbarkeit der Schnittkurve wechselt.
7. Nach der Konstruktion weiterer Punkte und Tangenten (vgl. Kapitel 8.3) kann die Schnittkurve von Halbkugel Φ_1 und Drehzylinder Φ_2 eingezeichnet werden.

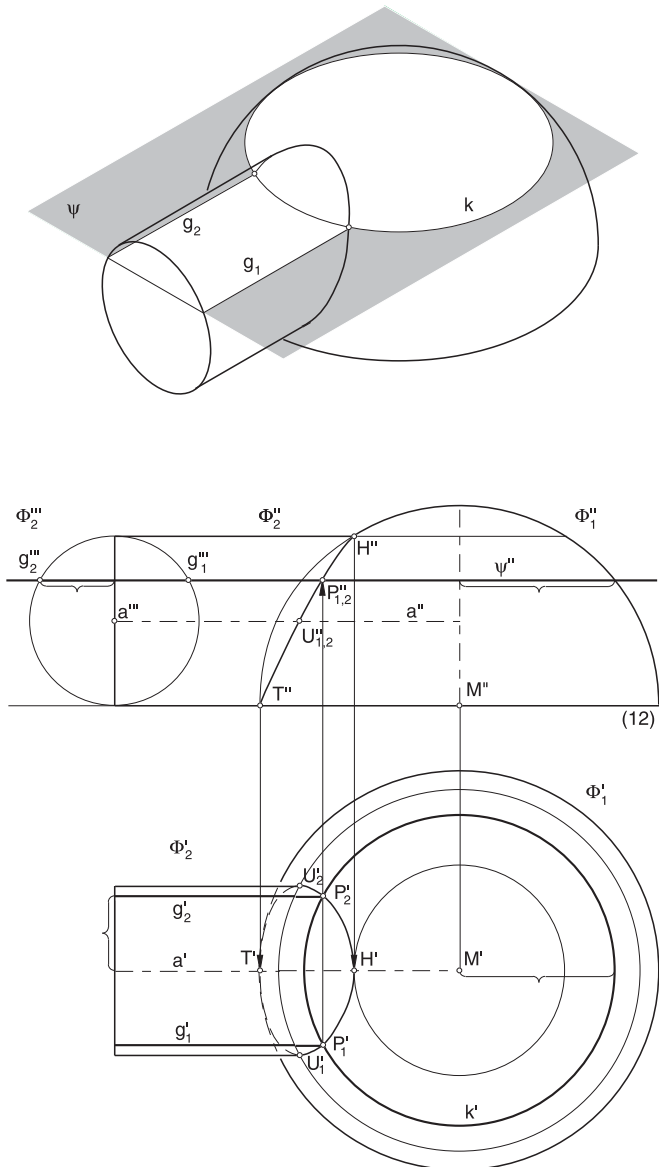


Bild 8.12: Punktkonstruktion mit Hilfsebenen am Beispiel Halbkugel und Drehzylinder

Durchdringt ein Drehzylinder eine Kugel in der Weise, dass die Zylinderachse durch den Kugelmittelpunkt geht, entsteht als Durchdringungskurve ein Kreis.

Bei der Konstruktion von Punkten der Durchdringungskurve von Flächen muss sich die Wahl der Hilfsebenen nach den Flächen und deren Lage im Raum richten.

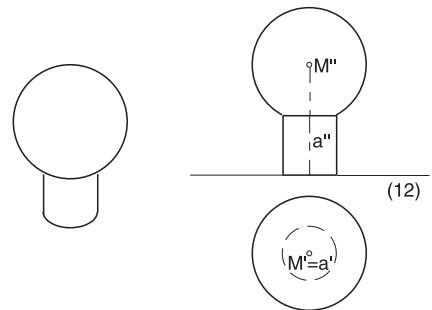


Bild 8.13: Kreis als Durchdringungskurve

Ist eine der Flächen ein Kegel, so können die Hilfsebenen parallel zum Leitkreis oder durch die Kegelspitze gelegt werden. Die Hilfsebenen durch die Kegelspitze werden als sogenannte Pendelebenen variiert. Damit aus Drehkegel und Drehzylinder Geraden ausgeschnitten werden, muss die Pendelebene ψ durch die Kegelspitze und parallel zur Zylinderachse a gewählt werden (Bild 8.14).

1. Die Pendelebene ψ durch S und parallel zu a liegt aufrissprojizierend, da die Zylinderachse a aufrissprojizierend ist.
2. ψ schneidet aus dem Zylinder zwei Geraden g_1 und g_2 aus, die aufrissprojizierend sind und folglich in Orderrichtung im Grundriss verlaufen.
3. Aus dem Kegel schneidet ψ ebenfalls zwei Geraden e_1 und e_2 aus. Sie werden mit Hilfe ihres Schnittpunktes mit dem Leitkreis l des Kegels im Grundriss gefunden.
4. Die Schnittpunkte P_1' , P_2' , P_3' und P_4' der Geraden g_1 , g_2 , e_1 und e_2 sind Punkte der Durchdringungskurve.
5. Durch Variation der Pendelebene können weitere allgemeine und besondere Punkte der Durchdringungskurve ermittelt werden.

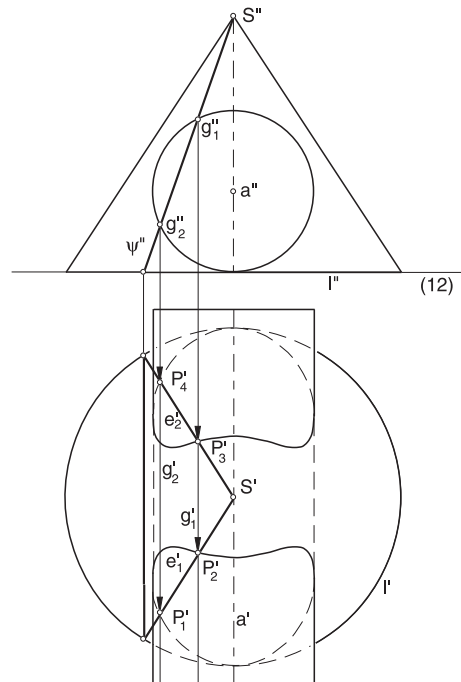


Bild 8.14: Pendelebenen am Beispiel Durchdringung von Drehkegel und Drehzylinder

8.2.2 Punktkonstruktion mit Hilfskugeln

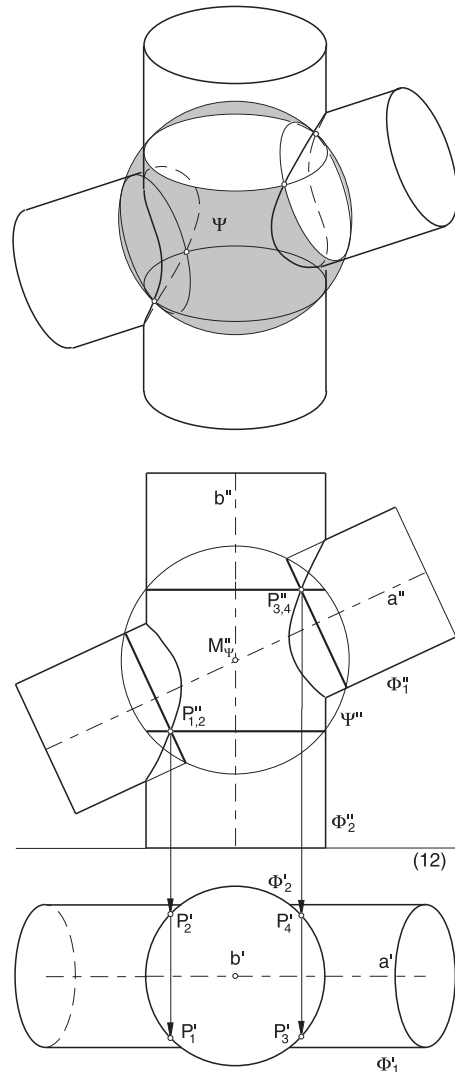
Als Hilfsflächen können auch Kugeln so gewählt werden, dass diese Kreise aus den Flächen ausschneiden. Bei Drehflächen können Kugeln um Punkte der Drehachse als Hilfsflächen genommen werden. Sind beide Flächen Drehflächen, dann müssen die Drehachsen einander schneiden, um dieses Hilfskugelverfahren anwenden zu können. Die Hilfskugel Ψ schneidet aus jedem Drehzylinder zwei Kreise aus. Die Schnittpunkte dieser vier Kreise sind dann Punkte der Durchdringungskurve (Bild 8.15).

Der Radius der Hilfskugel darf nicht kleiner als der Radius der größeren der beiden Zylinder gewählt werden, da die Kugel sonst nichts aus diesem Zylinder ausschneidet. Der Radius darf aber auch nicht zu groß gewählt werden, da sich die Kreise auf der Kugeloberfläche sonst nicht schneiden.

Bei der Konstruktion in Grund- und Aufriss muss beachtet werden, dass die mit der Hilfskugel ausgeschnittenen Kreise in den Rissen auch einfach zu zeichnen sind, d. h. als Strecken oder Kreise in den Rissen erscheinen. Dies ist dann der Fall, wenn die Drehachsen parallel zu einer Rissebene (im Bild 8.15 parallel zur Aufrissebene) sind.

1. Hilfskugel Ψ schneidet die beiden Zylinder Φ_1 und Φ_2 jeweils in zwei Kreisen.
2. Die vier Kreise sind im Aufriss als Strecken zu sehen, da a und b parallel zur Aufrissebene sind und die ausgeschnittenen Kreise jeweils senkrecht zu den Drehachsen der Zylinder liegen.
3. Die Schnittpunkte $P_{1,2}''$ und $P_{3,4}''$ sind die Aufrisse von Punkten der Durchdringungskurve.
4. Im Grundriss ist die Schnittkurve bereits zu sehen, da der Zylinder Φ_2 grundrissprojizierend ist.

Bild 8.15: Durchdringungskurve zweier Drehzylinder mittels Hilfskugelverfahren



Als Hilfe für die Wahl einer geeigneten Hilfsfläche kann folgende Tabelle dienen:

Fläche	Hilfsfläche	Hilfsschnittkurve
Kugel	Ebenen	Kreise
	Kugeln	Kreise
Zylinder	Ebenen parallel zu den Erzeugenden	Geraden (Erzeugende)
	Ebenen parallel zur Leitkurve	Leitkurve
Kegel	Ebenen durch die Spitze	Geraden (Erzeugende)
	Ebenen parallel zur Leitkurve	Kurven ähnlich zur Leitkurve
Drehfläche	Ebenen senkrecht zur Achse	Kreise
	Kugeln um Punkte der Achse	zwei Kreise
	Ebenen durch die Achse	Meridiane

Um Punkte der Durchdringungskurve zweier Flächen zu finden, braucht man Hilfsflächen, die für beide Flächen geeignet sind.

8.3 Tangentenkonstruktion

Um die Durchdringungskurve zweier Flächen besser näherungsweise zeichnen zu können, ohne sehr viele Kurvenpunkte zu konstruieren, ist es sinnvoll, die Kurventangenten in den Punkten der Durchdringungskurve zu ermitteln. Tangenten geben den Verlauf der Kurve besser an als viele Punkte. Zur Konstruktion der Tangente an die Schnittkurve c zweier Flächen steht das **Tangentenebenenverfahren** zur Verfügung.

In Bild 8.16 ist c die Durchdringungskurve zweier Flächen Φ_1 und Φ_2 und P ein regulärer Punkt von c . In P gibt es eine eindeutige Tangentenebene $\tau_1(P)$ an die Fläche Φ_1 und eine eindeutige Tangentenebene $\tau_2(P)$ an die Fläche Φ_2 . Die Tangente an die Durchdringungskurve c in Punkt P ist die Schnittgerade t dieser beiden Tangentenebenen.

$$t(P) = \tau_1(P) \cap \tau_2(P)$$

Da ein Punkt der Tangente t bereits bekannt ist, nämlich der Kurvenpunkt P , genügt es, einen weiteren Punkt X der Tangente zu bestimmen. Dieser Punkt X wird mit Hilfe der Spuren der Tangentenebenen in einer Hilfsebene χ gefunden. Punkt X ist der Schnittpunkt der Spuren s_1 und s_2 der beiden Tangentenebenen in der Hilfsebene χ (Bild 8.16).

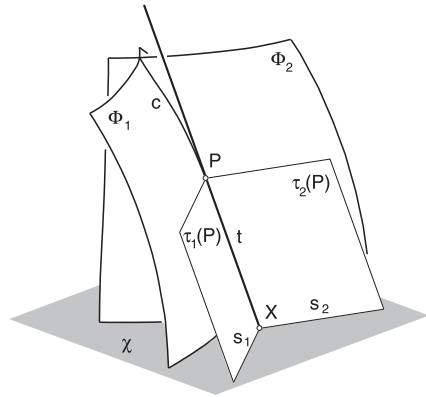


Bild 8.16: Tangentenebenenverfahren

Am Beispiel eines Drehkegels und eines Drehzylinders wird das Tangentenebenenverfahren durchgeführt (Bild 8.17 und 8.18). Als Hilfsebene χ ist hier die Leitkreisebene des Drehkegels Φ_1 geeignet.

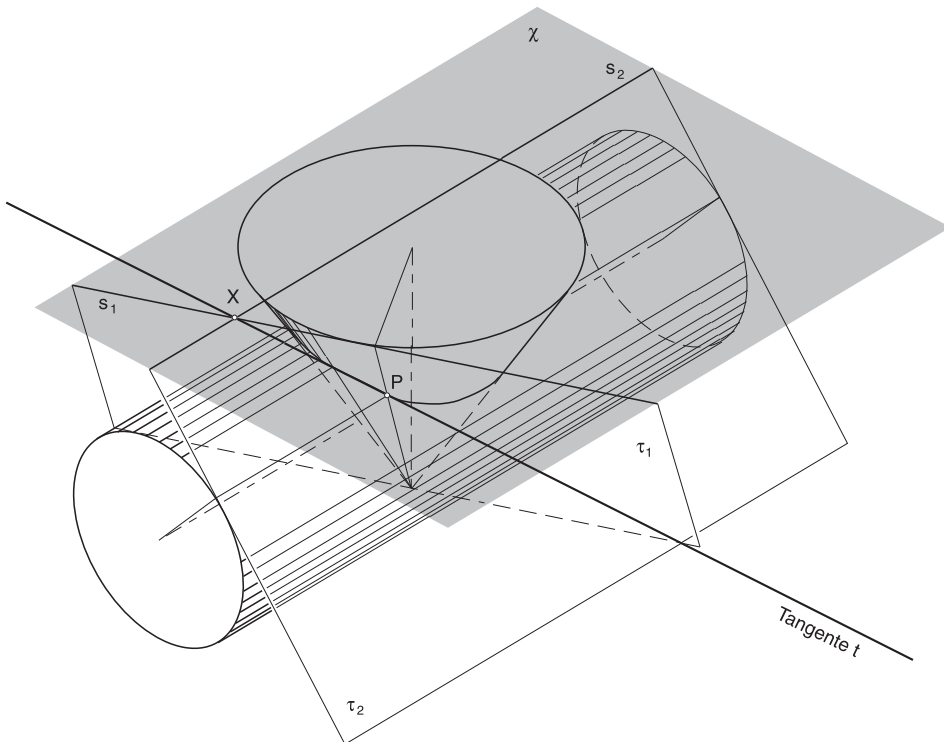


Bild 8.17: Tangentenebenenverfahren am Beispiel eines Drehkegels und eines Drehzylinders

Die Tangentenebene $\tau_1(P)$ an den Kegel schneidet die Hilfsebene χ in der Spur s_1 . Die Tangentenebene $\tau_2(P)$ an den Zylinder schneidet die Hilfsebene χ in der Spur s_2 . Die Spuren s_1 und s_2 haben den Punkt X gemeinsam. Daher ist X ein weiterer Punkt der Tangente $t(P)$. Sie kann also als Verbindungsgerade PX eingezeichnet werden (Bild 8.18).

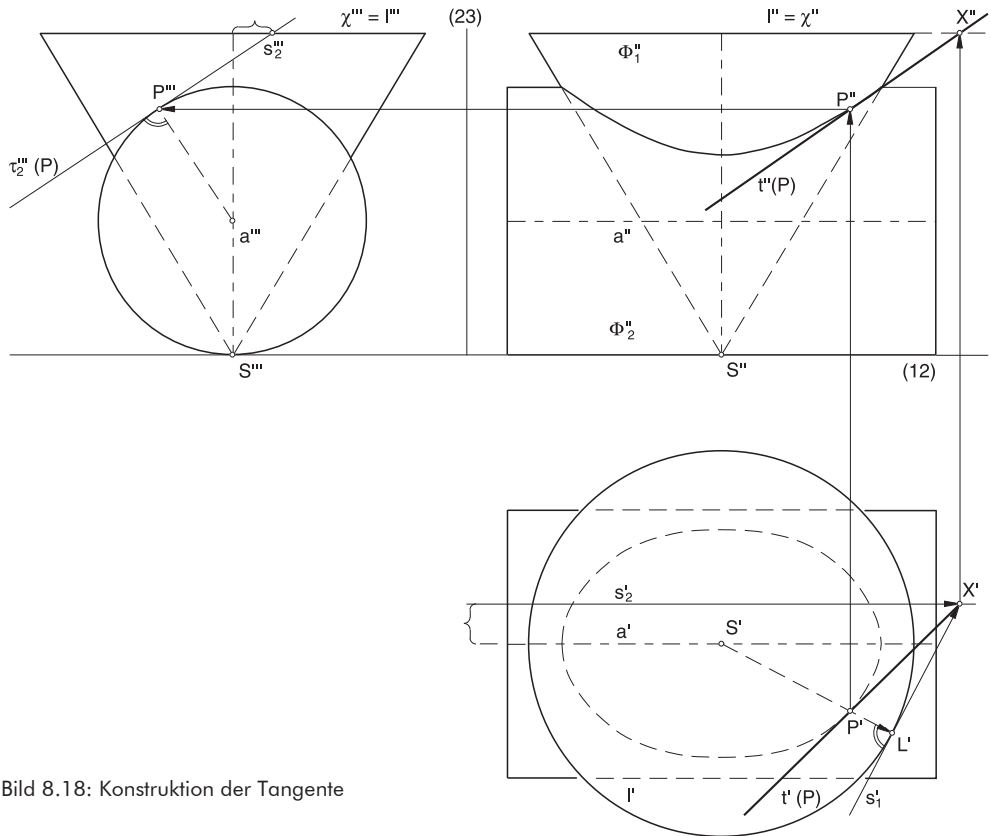


Bild 8.18: Konstruktion der Tangente

1. Hilfsebene χ kann aufrissprojizierend durch den Leitkreis l des Kegels gewählt werden ($\chi'' = l''$).
2. Die Tangentenebene $\tau_1(P)$ berührt den Kegel in einer Erzeugenden (Gerade SP). Diese berührt den Leitkreis l in Punkt L ($S'P \cap l' = L'$).
3. Die Spur s_1 der Tangentenebene $\tau_1(P)$ in χ ist die Tangente an den Leitkreis l im Punkt L .
4. Die Tangentenebene $\tau_2(P)$ an den Zylinder erscheint im Kreuzriss projizierend und kann als Tangente an den Leitkreis des Zylinders in P''' eingezeichnet werden.
5. Die Spur s_2''' ist im Kreuzriss projizierend.
6. Der Grundriss der Spur s_2' kann als Parallele zu a' im horizontalen Abstand, der im Kreuzriss zu erkennen ist, eingezeichnet werden.
7. X' ist der Schnittpunkt von s_1' und s_2' . Ordner durch X' , geschnitten mit χ' , liefert X'' .
8. $t'(P)$ ist die Verbindungsgerade $P'X'$, und $t''(P)$ ist die Verbindungsgerade $P''X''$.

9 ABWICKLUNG

Unter einer Abwicklung eines Körpers versteht man eine Darstellung seiner Oberfläche in wahrer Gestalt.

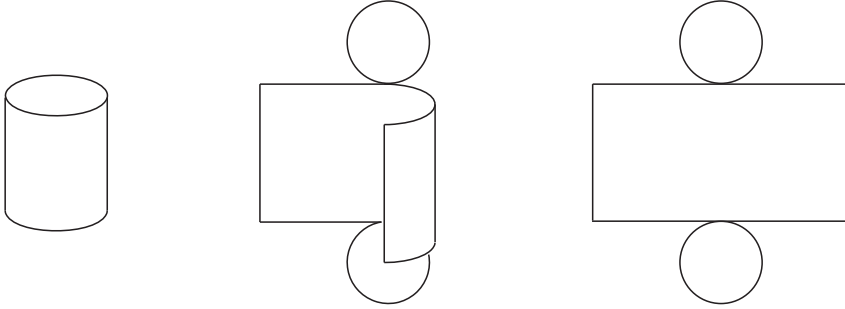


Bild 9.1: Oberfläche und Abwicklung eines Körpers

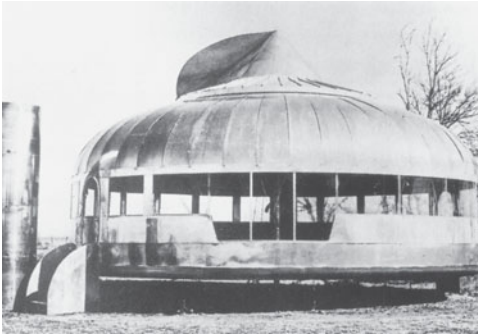


Bild 9.2: Wichita-Haus mit Transportröhre, Wichita, USA, 1946, Richard Buckminster Fuller

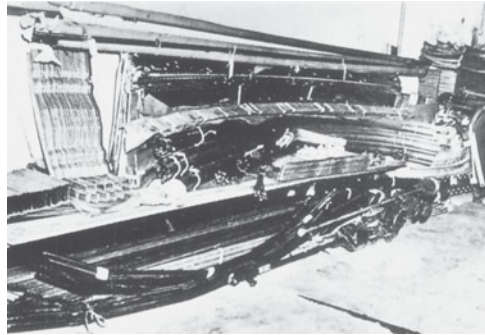


Bild 9.3: Wichita-Haus zum Transport zerlegt

Diese Oberfläche setzt sich im allgemeinen aus einer Mantelfläche sowie einer Grund- und Deckelfläche zusammen (Bild 9.1).



Eine Fläche heißt **abwickelbar**, wenn sie ohne Dehnung und Stauchung so verbogen werden kann, dass das Ergebnis, die Abwicklung dieser Fläche, Teil einer Ebene ist.

Die Abwicklung eines Körpers wird benötigt, wenn dieser Körper z. B. beim Modellbau oder mit Hilfe von Verschalungen aus ebenflächigen Materialien wie Karton, Blech oder Brettern hergestellt werden soll. Bild 9.2 zeigt das Wichita-Haus von Richard Buckminster Fuller, das aus Stahl, Aluminium und Plexiglas industriell gefertigt wurde und, in alle Einzelteile zerlegt (Bild 9.3), in einem erstaunlich kleinen Transportbehälter Platz fand. Obwohl das Dach des Hauses geometrisch nicht abwickelbar ist, wurde die Form durch Blechstücke angenähert.

9.1 Abwicklung von Polyedern

Um Polyeder abzuwickeln, muss die wahre Gestalt von allen Ebenenstücken, die das Polyeder bilden, ermittelt werden. Es entsteht dann ein Netz aus den Ebenenstücken, aus denen das Polyeder zusammengefal-
tet werden kann. Bild 9.4 zeigt die Abwicklung eines Hauses.

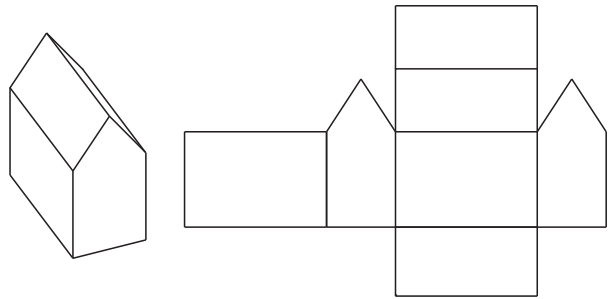


Bild 9.4: Abwicklung eines Hauses

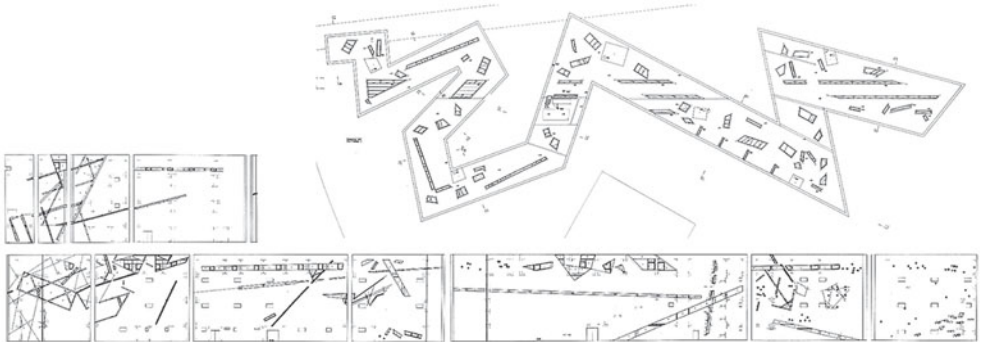


Bild 9.5: Dachaufsicht und halbe Fassadenabwicklung - Jüdisches Museum, Erweiterungsbau zum Berlin Museum, Berlin, 1989-98, Daniel Libeskind

Die Abwicklungen finden auch Anwendung als Wand- oder Fassadenabwicklung. In städtebaulichen Entwürfen kann es sinnvoll sein, die Fassaden benachbarter Gebäude in wahrer Gestalt aneinandergereiht zu zeigen. In einer Fassadenabwicklung werden die Zusammenhänge der komplex verwinkelten Fassade des Jüdischen Museums in Berlin von Daniel Libeskind (Bild 9.5) deutlich. Für die Bauausführung ist die Fassadenabwicklung erforderlich. Die wahre Gestalt jedes Ebenenstückes muss konstruiert werden. Die wahren Längen und Höhen sind aus Grund- und Aufriss in diesen Beispielen direkt ablesbar.

In anderen Fällen kann es erforderlich sein, nach allgemeinen Methoden, wie z. B. Paralleldrehen der ebenen Figur zu einer Rissebene, die wahre Gestalt der Ebenenstücke zu konstruieren. Dabei kann die Affinität zwischen Riss und Drehlage (Kapitel 3.1) benutzt werden. Zum Abwickeln einer schräg geschnittenen Pyramide wie in Bild 9.6 werden die Pyramidenseiten, wie z. B. Seite ABS, in die Grundrissebene hineingeklappt. Die Gerade AB ist dann die Affinitätsachse.

Dreieck $A^0B^0S^0$ ist die wahre Gestalt der Pyramidenseite ABS . Um das Netz der Pyramide zu erhalten, müssen entsprechende Konstruktionen für die anderen Pyramiden-seiten durchgeführt werden. Das Basisquadrat ist bereits im Grundriss in wahrer Gestalt zu sehen.

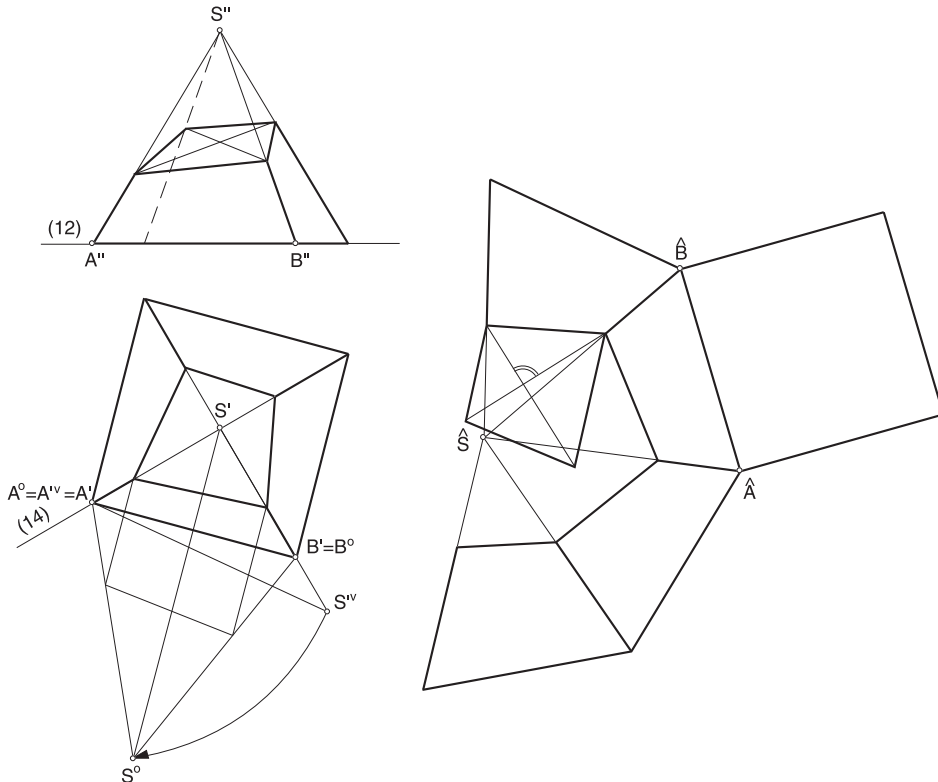


Bild 9.6: Netz einer schräg geschnittenen Pyramide

9.2 Abwicklung von gekrümmten Körpern

Nicht alle gekrümmten Körper können abgewickelt werden. Eine Kugel kann nicht abgewickelt, sondern nur angenähert werden, z. B. durch die geodätische Kuppel (vgl. Kapitel 6.1). Daher kann eine geografische Karte der Erdoberfläche nicht gleichzeitig winkel-, längen- und flächentreu sein. Die in Geografie und Astronomie entwickelten verschiedenen Landkartenentwürfe können nur entweder flächen- oder winkeltreu sein.

Flächen sind **abwickelbar**, wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

1. Die Fläche ist eine Strahlfläche, d. h. sie wird aus Geraden gebildet.
 2. Jede Tangentenebene berührt die Fläche in einer Geraden (Erzeugenden).
- Kegel und Zylinder sind die einfachsten Beispiele für abwickelbare Flächen.

Der allgemeine Typ einer abwickelbaren Fläche heißt **Torse**. Sie entsteht aus den Tangenten an eine Raumkurve. Die Torse tritt z. B. als Böschungsfäche durch den Straßenrand einer Bergstraße auf. Sie könnte auch als Dachfläche zwischen einer beliebigen Raumkurve und einer Wand wie in Bild 9.7 eingesetzt werden. Ein hyperbolisches Paraboloid (vgl. Bild 7.7) ist ein Beispiel für eine Strahlfläche, die nicht abwickelbar ist. Hier schneidet die Tangentenebene die Fläche und berührt sie nicht in der Erzeugenden.

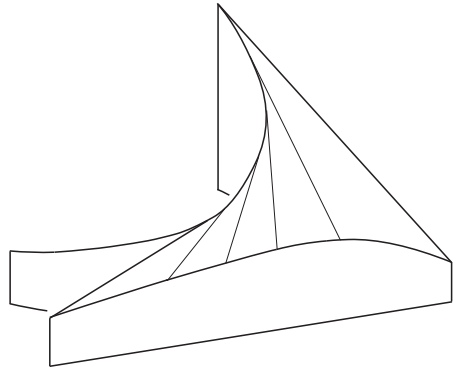


Bild 9.7: Torse

Um eine Abwicklung durchzuführen, müssen wahre Längen und Winkel ermittelt und in die Abwicklung übertragen werden.

9.2.1 Abwicklung eines Drehzylinders

Ein Drehzylinder wird entlang einer Erzeugenden aufgeschnitten und dann in die Ebene hinein abgerollt (vgl. Bild 9.1). Aus dem Leitkreis wird in der Abwicklung eine Strecke mit der Länge des Leitkreisbogens. Die Bogenlänge des Leitkreises ist $2\pi r$. Die Erzeugenden stehen senkrecht zur Leitkreisebene. Daher stehen sie auch in der Abwicklung senkrecht zur Abwicklung des Leitkreises. Aus einem Drehzylinder wird also in der Abwicklung ein Rechteck aus Bogenlänge und Erzeugendenlänge (Bild 9.8).

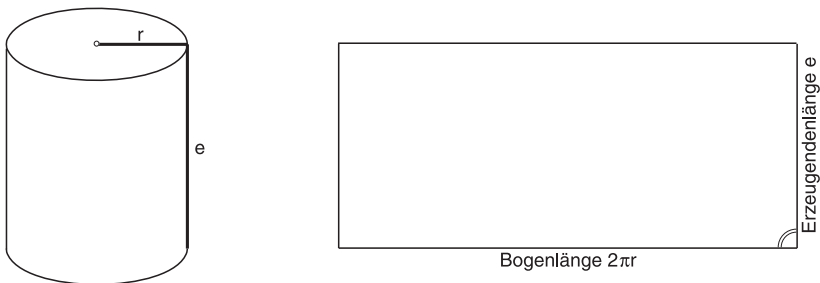
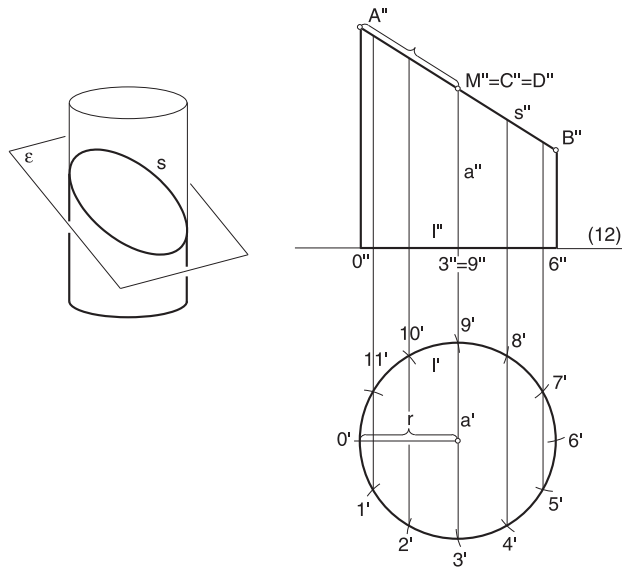


Bild 9.8: Abwicklung eines Drehzylinders

Soll nun aber nicht ein ganzer Drehzylinder, sondern nur ein Teil bis zu einer Schnittkurve abgewickelt werden, so müssen die wahren Längen der einzelnen Erzeugenden bis zur Schnittkurve ermittelt werden.

Durch diese Punkte auf den einzelnen Erzeugenden in der Abwicklung wird dann die Abwicklung der Schnittkurve näherungsweise eingezeichnet. In Bild 9.9 ist ein Drehzylinderteil bis zu der elliptischen Schnittkurve durch die Ebene ε gegeben. Die Abwicklung dieses Drehzylinderteils wird mit Hilfe einer Unterteilung des Leitkreises und den wahren Längen der Erzeugenden durch diese Teilpunkte durchgeführt.



1. Der Leitkreis l wird im Grundriss in z. B. 12 gleiche Teile unterteilt (Teilpunkte $0'$, $1'$, ..., $11'$).
2. Die Abwicklung des Leitkreises l ist eine Strecke mit der Bogenlänge $2\pi r$. Die Teilpunkte des Leitkreises können durch Teilung dieser Strecke in 12 Teile in der Abwicklung markiert werden ($\hat{0}$, $\hat{1}$, ..., $\hat{11}$, $\hat{0}$).
3. Die Erzeugenden durch diese Teilpunkte sind senkrecht zu l .
4. Die wahren Längen der Erzeugenden können dem Aufriss entnommen werden, da sie parallel zur Aufrissebene liegen.
5. Die Abwicklung der elliptischen Schnittkurve \hat{s} kann näherungsweise durch die Endpunkte der Erzeugenden eingezeichnet werden.
6. Die wahre Gestalt von Kreis und Ellipse als Deckflächen des Zylinders sind aus Grund- und Aufriss zu erfassen.

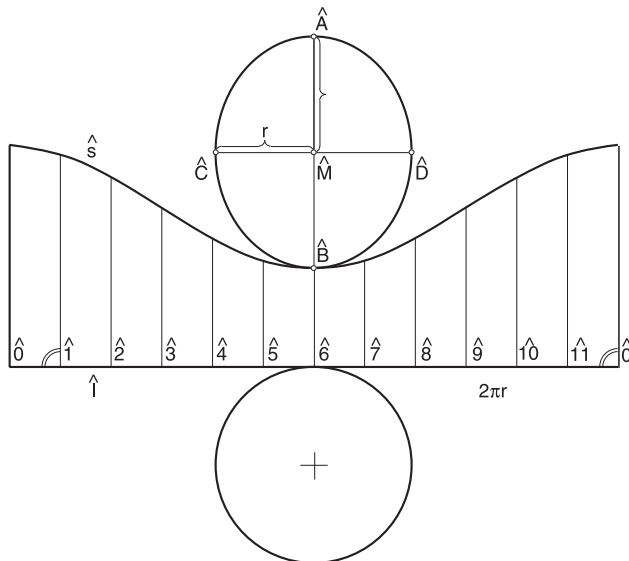


Bild 9.9: Abwicklung eines Drehzylinderteils

9.2.2 Abwicklung eines Drehkegels

Ein Drehkegel wird ebenfalls entlang einer Erzeugenden aufgeschnitten und dann in die Ebene abgerollt (Bild 9.10).

Bei der Abwicklung eines Drehkegels wird ausgenutzt, dass der Leitkreis I des Drehkegels beim Abwickeln zu einem Kreisbogen um die Kegelspitze S wird, da alle Punkte des Leitkreises von der Spitze S gleich weit entfernt sind. Der Radius dieses Kreisbogens ist die Länge der Erzeugenden bis zum Leitkreis.

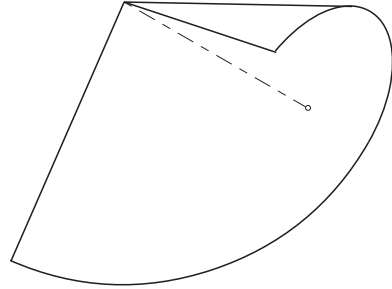


Bild 9.10: Abrollen des Drehkegels in eine Ebene

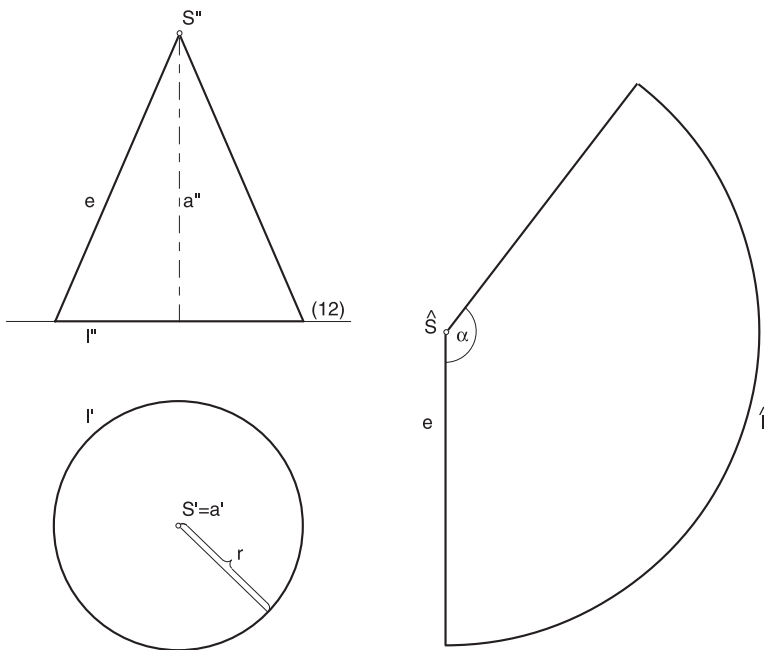


Bild 9.11: Abwicklung eines Drehkegels

Der Drehkegelmantel wird daher in der Abwicklung zu einem Kreissektor (Bild 9.11) mit Radius e (wahre Länge der Erzeugenden) und der Bogenlänge $2\pi r$ (Bogenlänge des Leitkreises I).

Der Öffnungswinkel α des Kreissektors kann aus der Verhältnisgleichung

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{2\pi r}{2\pi e} \rightarrow \alpha = \frac{r}{e} \cdot 360^\circ \text{ gewonnen werden.}$$

Wenn nur ein Teil eines Drehkegels bis zu einer Schnittkurve abgewickelt werden soll, muss der Leitkreis in Teile unterteilt werden und die wahren Längen der Erzeugenden durch diese Teilpunkte konstruiert werden. In Bild 9.12 ist ein Drehkegelteil bis zur elliptischen Schnittkurve abgewickelt. Um die wahren Längen der Erzeugenden durch die Teilpunkte bis zur Schnittellipse herauszufinden, dreht man diese jeweils auf einem Kreis senkrecht zur Drehkegelachse a in den Umriss hinaus. Dort ist die Erzeugende parallel zur Aufrissebene und kann daher in wahrer Länge gesehen werden.

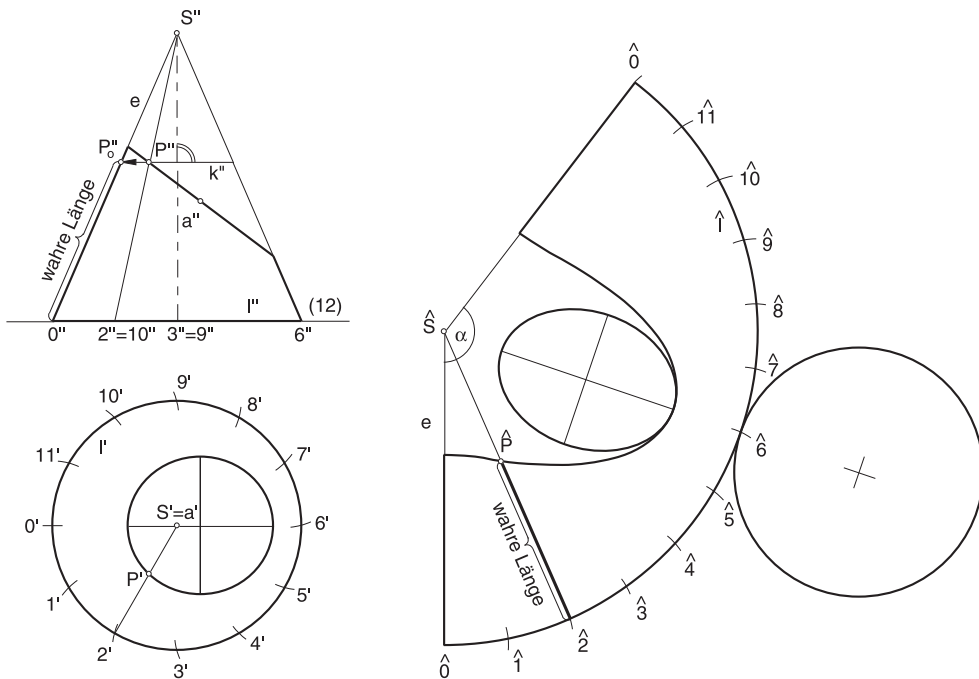


Bild 9.12: Abwicklung eines Drehkegelteils

1. Der Leitkreis I wird im Grundriss in z. B. 12 gleiche Teile unterteilt (Teilpunkte $0', 1', \dots, 11'$).
2. Die Abwicklung des Leitkreises I ist ein Kreisbogen um S mit Radius e . Die Bogenlänge $2\pi r$ muss auf den Kreisbogen in der Abwicklung mittels der Teilstücke mit Hilfe eines Zirkels übertragen werden, oder der Öffnungswinkel α des Kreissektors wird mit $\alpha = \frac{r}{e} \cdot 360^\circ$ in der Abwicklung eingezeichnet.

3. Die Teilpunkte des Leitkreises können durch Teilung dieses Kreisbogens in 12 Teile in der Abwicklung markiert werden 0, 1, ..., 11, 0.
4. Die Erzeugenden durch diese Teilpunkte gehen auch in der Abwicklung durch die Spitze \hat{S} .
5. Die wahren Längen dieser Erzeugenden bis zur Schnittellipse können im Aufriss konstruiert werden, indem sie auf einem Kreis k senkrecht zu a ($k^\perp \perp a$) in den Umriss hinausgedreht werden.
6. Die Abwicklung der elliptischen Schnittkurve kann näherungsweise durch die Endpunkte der Erzeugenden eingezeichnet werden.
7. Die wahre Gestalt des Leitkreises als Bodenfläche ist dem Grundriss zu entnehmen. Die Ellipse als Deckelfläche des Drehkegelteils in wahrer Gestalt ist aus Grund- und Aufriss zu erfassen, die Hauptachse ist im Aufriss, die Nebenachse im Grundriss in wahrer Länge zu sehen.

Die Abwicklung eines schiefen Kreiskegels gestaltet sich als schwieriger, da die Spitze nicht gleich weit von allen Punkten des Leitkreises entfernt ist. Der Leitkreis ist in der Abwicklung daher kein Kreisbogen und kann nur punktweise gefunden werden.

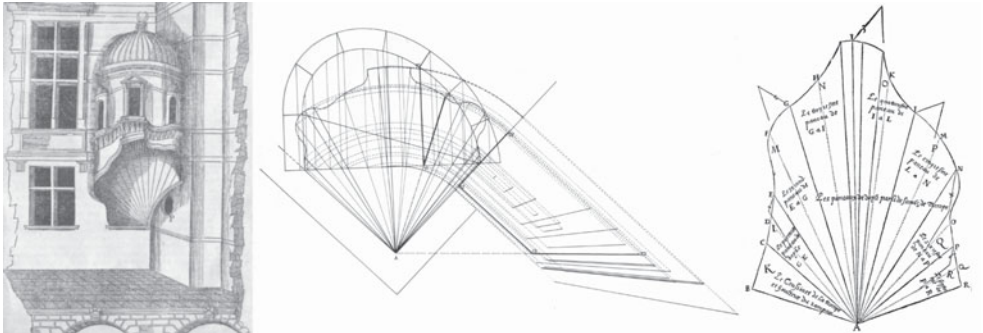


Bild 9.13: Trompe in Anet, Frankreich, 1549-1551, Philibert de l'Orme - "Traité" und Abwicklung der konischen Laibungsfläche

In der Kunst des Steinschnitts spielen Abwicklungen eine besondere Rolle. Die sogenannten "Traits" wurden verwendet, um die wahren Abmessungen der Steine zu ermitteln und damit die Zuschnitte der Steinblöcke vorzubereiten. Bild 9.13 zeigt die komplizierte Konstruktion der Trompe, die von Philibert de l'Orme an der Gartenseite des Schlosses in Anet 1549-1551 gebaut wurde. Eine Trompe ist ein einwärts gebogenes Mauerwerk in der Form eines allgemeinen Kegels (vgl. Bild 7.57). Die Form erinnert an eine Trompete. Der "Traité" besteht aus verschiedenen übereinandergelegten Zeichnungen: dem Grundriss, einem Vertikalschnitt durch die konische Laibungsfläche der Trompe und verschiedenen vertikalen Schnitten durch die Kegel-erzeugenden, die in die Wandebene gedreht und dann alle übereinandergelegt werden.¹ Für die Abwicklung in Bild 9.13 werden im "Traité" die wahren Längen der Kegel-erzeugenden und der Kurvenabschnitte ermittelt.

1. Genaue Konstruktionsbeschreibung in ARCH+ 137, 6/1997, S. 60 ff.

10 LICHT UND SCHATTEN

Licht ist ein bestimmendes Element des Raumes, da erst durch Licht die visuelle Raumwahrnehmung ermöglicht wird. Farben und Texturen werden durch Licht erkennbar. Das Licht bewirkt Schatten; Licht und Schatten sind untrennbar miteinander verknüpft. Auch wenn keine Lichtquelle zu sehen ist, so sagt der Schatten etwas über die Lage der Lichtquelle aus.

Die Schatten verdeutlichen vor- und zurückspringende Gebäudeteile, wie dies beim Einfamilienhaus in Morbio Superiore, Tessin, von Mario Botta (Bild 10.1) zu erkennen ist. Die räumliche Gestalt des Gebäudes tritt durch die Schatten hervor. Während hier durch das Licht dunkle Stellen erzeugt werden, lassen in Umkehrung hierzu Lichtschlitze das Licht in den Innenraum des Negev-Monuments (Bild 10.2). Das Licht von außen tritt durch die Schlitze in den Innenraum, und diese Lichtschlitze bilden sich dann als helle Bänder auf Boden und Wand ab.

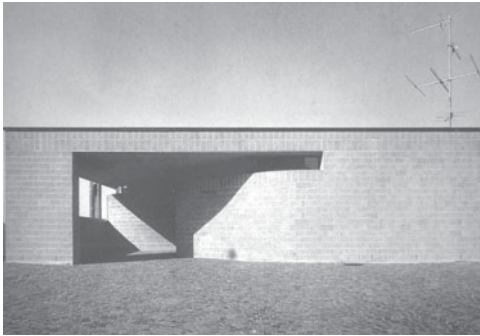


Bild 10.1: Schatten - Einfamilienhaus in Morbio Superiore, Tessin, 1982-83, Mario Botta

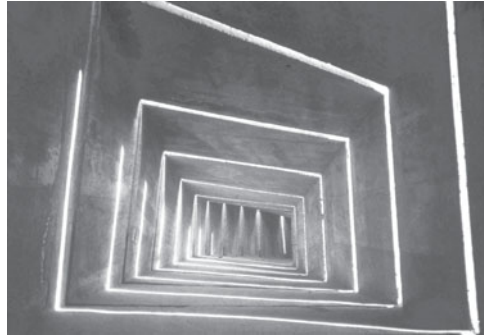


Bild 10.2: Licht - Negev-Monument, Beer-Sheva, Israel, 1963-68, Dani Karavan

Le Corbusier beschreibt sehr treffend die Bedeutung von Licht und Schatten für die Architektur: "Architektur ist das kunstvolle, korrekte und großartige Spiel der unter dem Licht versammelten Baukörper. Unsere Augen sind geschaffen, die Formen unter dem Licht zu sehen: Lichter und Schatten enthüllen die Formen; die Würfel, Kegel, Kugeln, Zylinder oder die Pyramiden sind die großen primären Formen, die das Licht klar offenbart; ihr Bild erscheint uns rein und greifbar, eindeutig."¹

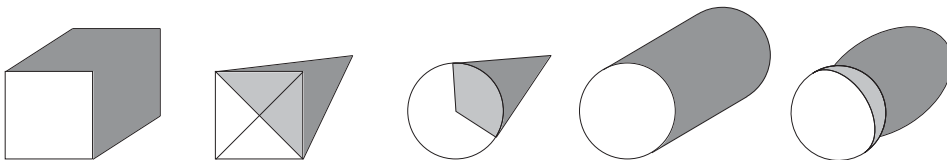


Bild 10.3: Grundrisse von Grundformen mit ihren Schatten

1. Le Corbusier: Ausblick auf eine Architektur. Gütersloh, 1969, S. 38.

Mittels Schatten kann deutlich gemacht werden, ob eine Erhebung oder eine Öffnung vorliegt. Bild 10.4 zeigt zweimal das gleiche Quadrat. Durch den Schatten wird die Deutung des linken Quadrats als vorspringender Würfel, des rechten Quadrats als quadratische Öffnung in einer Wand assoziiert.



Bild 10.4: Erhebung oder Öffnung

Schatten lässt die dargestellten Objekte räumlich erscheinen. Vor- und Rücksprünge, Erhöhungen und Vertiefungen können vor allem in Ansichten (Bild 10.5) und Draufsichten (Bild 10.6) mittels Schatten verdeutlicht werden. Aber auch in Axonometrien und Perspektiven werden die Objekte durch den Schatten deutlicher erfassbar. Die Schatten modellieren die plastische Form.

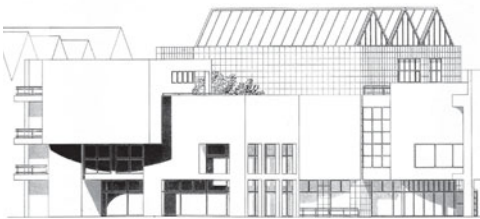


Bild 10.5: Ost-Ansicht des Stadthauses, Ulm, 1986-92, Richard Meier

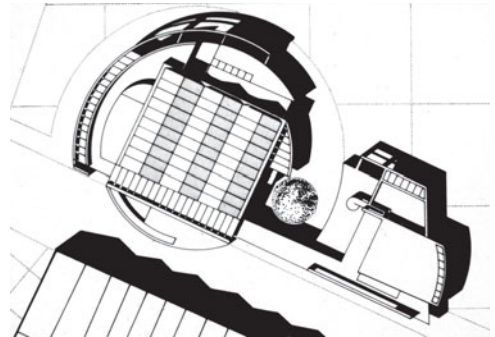


Bild 10.6: Lageplan des Stadthauses, Ulm, 1986-92, Richard Meier

Neben dieser Bedeutung für eine räumlich anschaulichere Bildwirkung spielt der Schatten auch eine Rolle zur Beurteilung der technisch-funktionalen Qualität des Raumes bzw. des Raumgefüges. Grundlage für die Betrachtung von Verschattungs- und Besonnungsverhältnissen in Stadträumen sind Schattenkonstruktionen für realistische Sonnenstände im Laufe des Tages und des Jahres bezogen auf den geographischen Ort. Diese Überlegungen sind wichtig für die Beurteilung der Auswirkungen einer geplanten Bebauung auf die Umgebung, für klimagerechtes Bauen sowie z. B. die optimale Ausrichtung und Integration von Solaranlagen.

Bei den Schattenkonstruktionen unterscheiden wir zwischen **natürlicher Beleuchtung**, die Sonne als Lichtquelle, und **künstlicher Beleuchtung**, eine Lampe als Lichtquelle. Der Schatten bei natürlicher Beleuchtung kann mit Hilfe der Parallelprojektion (Bild 10.7) ermittelt werden. Die natürliche Beleuchtung durch die Sonne wird als **Parallelbeleuchtung** gedeutet, die Lichtquelle ist ein Fernpunkt, liegt also im Unendlichen.

Wegen der großen Entfernung der Sonne im Vergleich zu den Entfernungen innerhalb des Objekts und zur Schattenauffangfläche werden die Sonnenstrahlen in diesem Modell als parallel angenommen. Die künstliche Beleuchtung mit einer idealisiert punktförmigen Lichtquelle wird als **Zentralbeleuchtung** (Bild 10.7) gedeutet, bei der sich die Lichtstrahlen in einem Punkt schneiden. Der Schatten bei künstlicher Beleuchtung kann als das Ergebnis einer Zentralprojektion interpretiert werden (vgl. Kapitel 2.1).

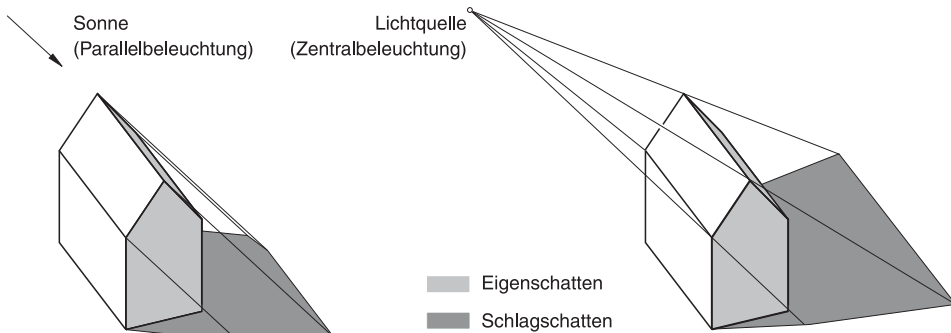


Bild 10.7: Schatten bei Parallel- und Zentralbeleuchtung

Durch die Sonne oder eine Lampe als Lichtquelle wird Schatten erzeugt, bei dem wir **Schlagschatten** und **Eigenschatten** unterscheiden. Der Schlagschatten entsteht durch die Projektion des Objekts mittels Lichtstrahlen auf die Auffangflächen. Die **Schlagschattengrenze** trennt den Teil der Auffangfläche, der im Schlagschatten der Fläche liegt, vom beleuchteten Teil. Der Eigenschatten liegt auf dem Objekt selbst und ist der nicht beleuchtete Teil des Objekts. Ein Teil des Objekts wird von den Lichtstrahlen getroffen, während der der Lichtquelle abgewandte Teil im Schatten liegt. Die Linie auf dem Objekt, die den beleuchteten vom unbeleuchteten Teil trennt, heißt **Eigenschattengrenze**.

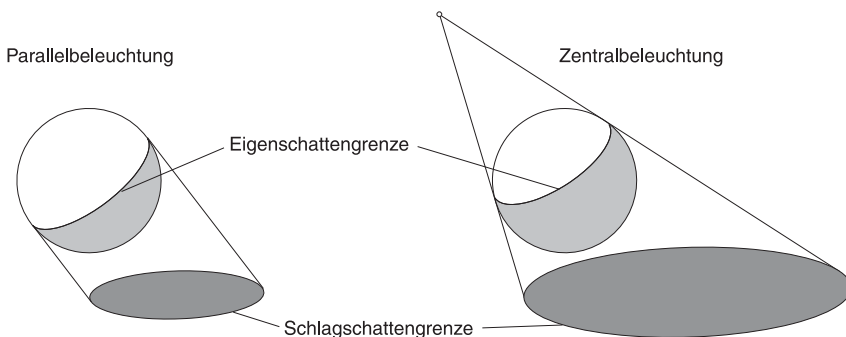
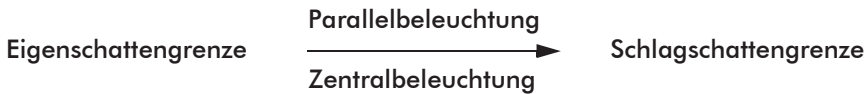


Bild 10.8: Zusammenhang zwischen Eigenschattengrenze und Schlagschattengrenze

Die Eigenschattengrenze erhält man über die Konstruktion der Berührungspunkte des Lichtstrahlenzylinders bei Parallelbeleuchtung bzw. des Lichtstrahlenkegels bei Zentralbeleuchtung mit dem Objekt. Zwischen Eigenschattengrenze und Schlagschattengrenze besteht der Zusammenhang, dass die Eigenschattengrenze des Objekts bei Parallel- oder Zentralbeleuchtung auf die Schlagschattengrenze auf der Auffangfläche abgebildet wird (Bild 10.8).



10.1 Schattenkonstruktionen bei Parallelbeleuchtung

Sollen von einer Bebauung die Verschattungs- und Besonnungsverhältnisse betrachtet werden, so muss auf realistische Sonnenstände für die Bebauung zurückgegriffen werden.

Der Sonnenstand wird durch zwei Winkel² gekennzeichnet, die beide abhängig sind von der Tages- und Jahreszeit sowie der geografischen Breite des Ortes:

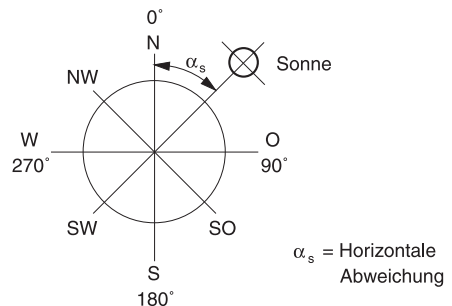


Bild 10.9: Azimutwinkel

1. Azimutwinkel α_s

α_s ist der Winkel zwischen der geografischen Nordrichtung (0°) und dem Vertikalkreis durch den Sonnenmittelpunkt. Die anderen Himmelsrichtungen sind gekennzeichnet durch: Osten= 90° , Süden= 180° und Westen= 270° (Bild 10.9). Der Azimutwinkel kann folglich im Grundriss eingezeichnet werden, nachdem dieser genordet wurde.

2. Höhenwinkel γ_s

γ_s ist der Winkel zwischen dem Sonnenmittelpunkt und dem Horizont, vom Beobachter aus betrachtet (Bild 10.10).

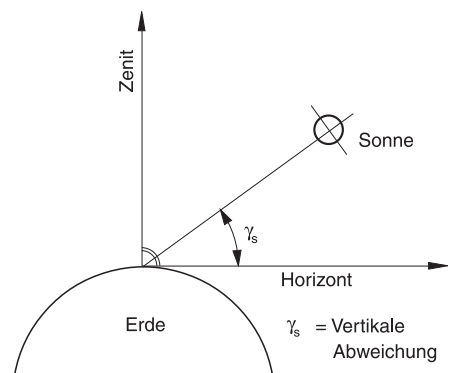


Bild 10.10: Höhenwinkel

2. E. Neufert: Bauentwurfslehre, 34. erw. Auflage, Wiesbaden 1996, S.152.
DIN 5034, Teil 2 (Febr. 1985): Tageslicht in Innenräumen.

In den verschiedenen Jahreszeiten beschreibt die Sonne unterschiedliche Bahnen. Bild 10.11 zeigt ein Diagramm der Sonnenbahnen für einen geographischen Ort 51° nördliche Breite (mittleres Deutschland: Aachen, Köln, Kassel).

Sonnenstandsdiagramme wie in Bild 10.12 zeigen die Abhängigkeiten des Azimut- und Höhenwinkels von der Tages- und Jahreszeit für einen bestimmten Ort. Die übliche Angabe für die Tageszeit ist in diesen Sonnenstandsdiagrammen die wahre Ortszeit (WOZ). Diese ist die von der Sonnenuhr angezeigte Zeit, bei der die Sonne exakt um 12 h Mittag ihren oberen Kulminationspunkt (Höchststand der Sonne) erreicht. Im Gegensatz zur Zonenzeit (in Mitteleuropa: Mittlere Ortszeit des 15. Längengrades – MEZ) ist bei der wahren Ortszeit das Zeitmaß nicht konstant wegen der schwankenden Länge des wahren Sonnentages. Der wahre Sonnentag ist der Zeitraum zwischen zwei aufeinanderfolgenden unteren Kulminationen der Sonne (Mitternacht).

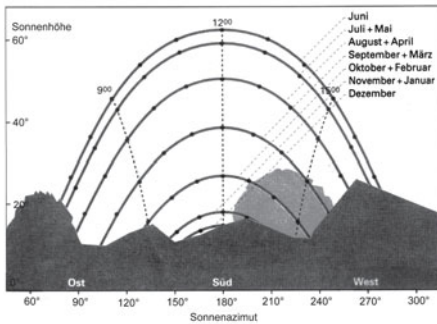


Bild 10.11: Sonnenbahnen im Tages- und Jahresverlauf

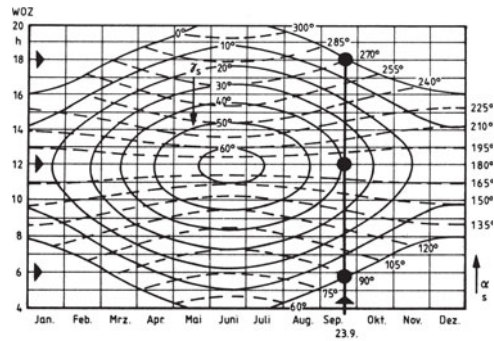


Bild 10.12: Sonnenstandsdiagramm für 51° NB (mittleres Deutschland, Köln, Kassel)

Das Diagramm in Bild 10.12 zeigt die Grundrissprojektion des Azimutwinkels α_s und des Höhenwinkels γ_s bei wahrer Ortszeit. Aus diesem Diagramm können Azimut- und Höhenwinkel der Sonne an einem bestimmten Tag und Uhrzeit ermittelt werden. Für Köln ist z. B. am 23.9. der Sonnenaufgang um 6 Uhr bei $\alpha_s = 90^\circ$ (Osten) und um 12 Uhr beträgt $\alpha_s = 180^\circ$ (Süd) und der Höhenwinkel ca. 39° . Der Sonnenuntergang ($\gamma_s = 0^\circ$) ist um 18 Uhr bei $\alpha_s = 270^\circ$ (Westen).

Wenn nun in Bild 10.13 der Schatten eines Hauses in Köln am 23.9. um 14 Uhr konstruiert werden soll, können zunächst aus dem Sonnenstandsdiagramm $\alpha_s \approx 218^\circ$ und $\gamma_s \approx 33^\circ$ abgelesen werden.

Der Drehsinn der Winkel wird hier im Sinne der Geodäsie verwendet. In der Geodäsie ist der positive Drehsinn im Uhrzeigersinn, während er in der Mathematik entgegen dem Uhrzeigersinn ist.

Sonnenstand-Applets oder auch mobile Apps können den Sonnenstand entsprechend des geografischen Ortes sowie der Jahres- und Tageszeitangaben präzise angeben. Durch das GPS-Ortungsverfahren, wie es in Navigationssystemen benutzt wird, können mit einer entsprechenden mobilen App die Sonnenstände zum aktuellen Aufenthaltsort bestimmt werden.

Zur Schattenkonstruktion eines Architekturentwurfs ist es also zunächst wesentlich, die Koordinaten des geografischen Ortes zu ermitteln, den Entwurf zu Norden und dann geeignete Sonnenstandswinkel zu einer Jahres- und Tageszeit für diesen Ort zu bestimmen. Der Azimutwinkel wird in manchen Programmen, wie in dem Erde und Sonne Applet (Bild 10.13) auch **Kompasswinkel** genannt, da er zum Nordpfeil des Kompasses gemessen wird. Das Erde und Sonne Applet zeigt nach der Wahl dann den Verlauf des Höhenwinkels der Sonne für den gewählten Tag in der Grafik an. Rechts der Grafik werden die entsprechenden Daten zusammengefasst:

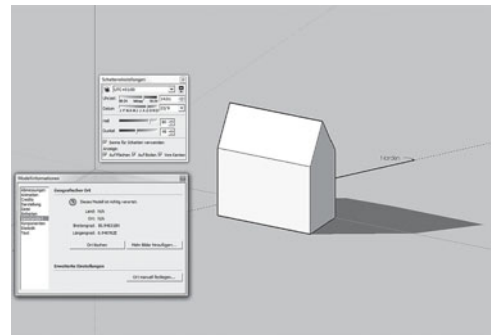
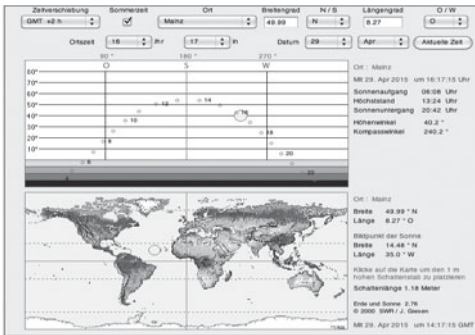


Bild 10.13: Informationen zum Sonnenstand aus dem Erde und Sonne Applet³

Bild 10.14: Eingabe des geographischen Ortes und der Schatteneinstellungen in SketchUp®

der Ort mit geografischer Breite und Länge, Datum, Uhrzeit, Sonnenaufgang, Sonnenuntergang, Höhenwinkel und Kompasswinkel.

In den CAD- bzw. Render-Programmen sind für die Darstellung der Schatten entsprechende Eingabemöglichkeiten für den geografischen Ort integriert. Bild 10.14 zeigt in SketchUp® die erforderlichen Einstellungen für die Schattendarstellung. Der geografische Ort muss bei den Modellinformationen festgelegt werden, und das Modell muss genordet werden. Ohne gesonderte Einstellung zeigt die grüne Achse Norden an. Dann werden im Fenster der Schatteneinstellungen Tag und Uhrzeit mit weiteren Parametern für die Schattendarstellung gewählt. Besonders nützlich und wirkungsvoll ist die interaktive Darstellung des Schattenverlaufs, wenn die Tages- oder Jahreszeit verändert wird.

3. Erde und Sonne Applet von Jürgen Giesen, SWR 2000. <http://www.geoastro.de/ErdeSonne/SE/se-applet.html> (Stand 30.04.2015)

In den genordneten Grundriss des Hauses kann der Azimutwinkel α_s eingezeichnet werden. Damit ist der Grundriss der Lichtrichtung l' bestimmt. Um den Höhenwinkel γ_s einzeichnen zu können, wird eine Seitenrissebene π_4 senkrecht zu π_1 durch l eingeführt. In diesem Seitenriss kann der wahre Höhenwinkel γ_s eingezeichnet werden, und damit ist der Seitenriss l'' des Lichtstrahls gefunden. Mittels Ordner durch einen beliebigen Punkt L'' wird L' und L'' und somit der Aufriss l'' des Lichtstrahls gefunden (Bild 10.15). Mit dieser nun in Grund- und Aufriss gegebenen Lichtrichtung kann die Schattenkonstruktion durchgeführt werden.

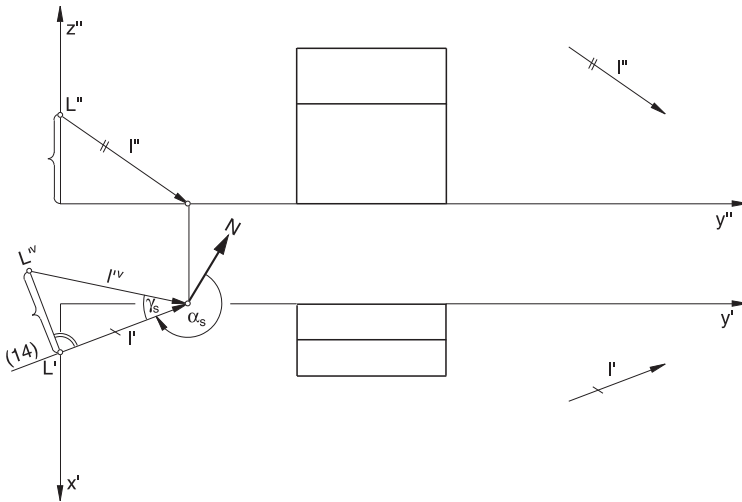


Bild 10.15: Ermitteln der Lichtrichtung in Grund- und Aufriss

10.1.1 Schattenkonstruktionen ebenflächiger Körper

Alle Lichtstrahlen sind zu l parallel. Im Grundriss können also die Lichtstrahlen parallel zu l' und im Aufriss parallel zu l'' eingezeichnet werden. Der Schlagschatten des Hauses auf die horizontale Standebene, die hier die Grundrissebene ist, kann ermittelt werden, indem die Schatten der Eckpunkte des Objekts gesucht werden. Diese werden als Durchstoßpunkte der Lichtstrahlen mit der Auffangebene konstruiert (Bild 10.16). Da die Eckpunkte im Objekt geradlinig miteinander verbunden sind, können die Schatten der Eckpunkte ebenfalls entsprechend der Verbindungsgeraden im Objekt miteinander geradlinig verbunden werden. Bei der Schattenkonstruktion kann stets beachtet werden, dass die Schattenbilder von Eckpunkten des Objektes nur dann miteinander verbunden werden können, wenn diese auch im Objekt, also dem Urbild des Schattenbildes, miteinander verbunden sind. Der Schatten kann als Parallelriss des Objektes konstruiert werden. Die Geraden, die am weitesten außen liegen, bilden die Schlagschattengrenze, deren Urbild die Eigenschattengrenze.

1. Parallelen zu l'' durch die Eckpunkte des Hauses schneiden die y'' -Achse in den Aufrissen der entsprechenden Schattenpunkte, z. B. P_s'' .
2. Die Ordner durch diese Aufrisse der Schattenpunkte schneiden die Parallelen zu l' durch die entsprechenden Eckpunkte in den Grundrissen der zugeordneten Schattenpunkte, z. B. P_s' .
3. Die Schatten aller Hauskanten sind die Verbindungsstrecken der zugehörigen Schattenpunkte.
4. Die Streckenzüge, die am weitesten außen liegen, bilden die Schlagschattengrenze.
5. Da in diesem Fall der Schatten der Traufe teil der Schlagschattengrenze ist, muss die Traufe teil der Eigenschattengrenze sein. Beide Dachebenen werden also beleuchtet und liegen nicht im Eigenschatten.

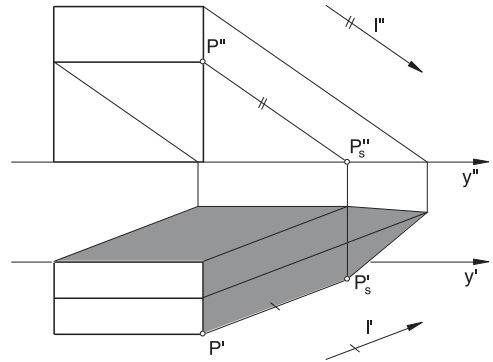


Bild 10.16: Schattenkonstruktion in Grund- und Aufriss auf horizontale Auffangebene

Die gleiche Schattenkonstruktion kann auch in einer Axonometrie durchgeführt werden. Es muss dann mit der axonometrischen Lichttrichtung l^p und dem Grundriss der Lichttrichtung in der Axonometrie l^p gearbeitet werden (Bild 10.17). Diese können aus Grund- und Aufriss in die Axonometrie übertragen werden.

Die Schattenpunkte der Eckpunkte des Hauses werden gefunden, indem die Parallelen zu l^p durch die axonometrischen Grundrisspunkte des Hauses mit den Parallelen zu l^p durch die zugehörigen Raumpunkte des Hauses geschnitten werden. Die am weitesten außen liegenden Schatten der Gebäudekanten liefern auch in der Axonometrie die Schlagschattengrenze.

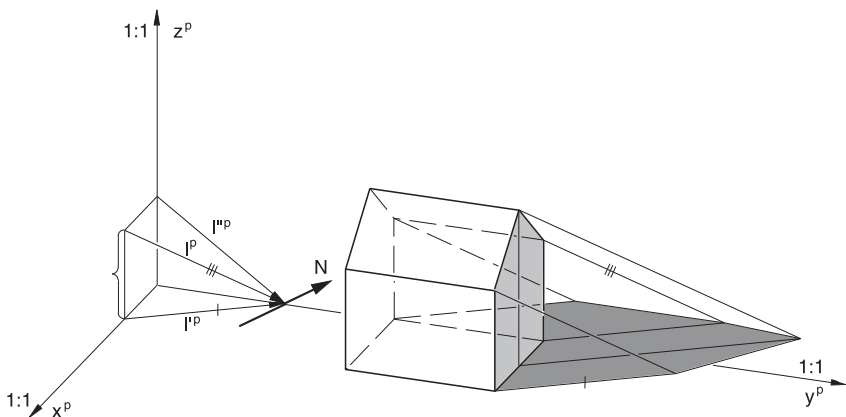


Bild 10.17: Schattenkonstruktion in der Axonometrie auf horizontale Auffangebene

Bei allen Konstruktionen kann auch benutzt werden:

! Eine zur Auffangebene parallele Gerade und ihr Schlagschatten sind parallel zueinander.

Fällt der Schatten eines Objektes auf eine vertikale Ebene, so ist die Vorgehensweise vergleichbar.

Bild 10.18 zeigt ein Objekt mit Vor- und Rücksprung, für die eine Schattenkonstruktion unter Zuhilfenahme des Grundrisses durchgeführt wird. Die Türkanten, die vertikalen Quaderkanten und ihr Schattenbild auf der Wand sind jeweils parallel zueinander, da sie parallel zur Wand als Schattenauffangebene sind. Bild 10.16 zeigt außerdem die Schattenkonstruktion in der Axonometrie desselben Objektes.

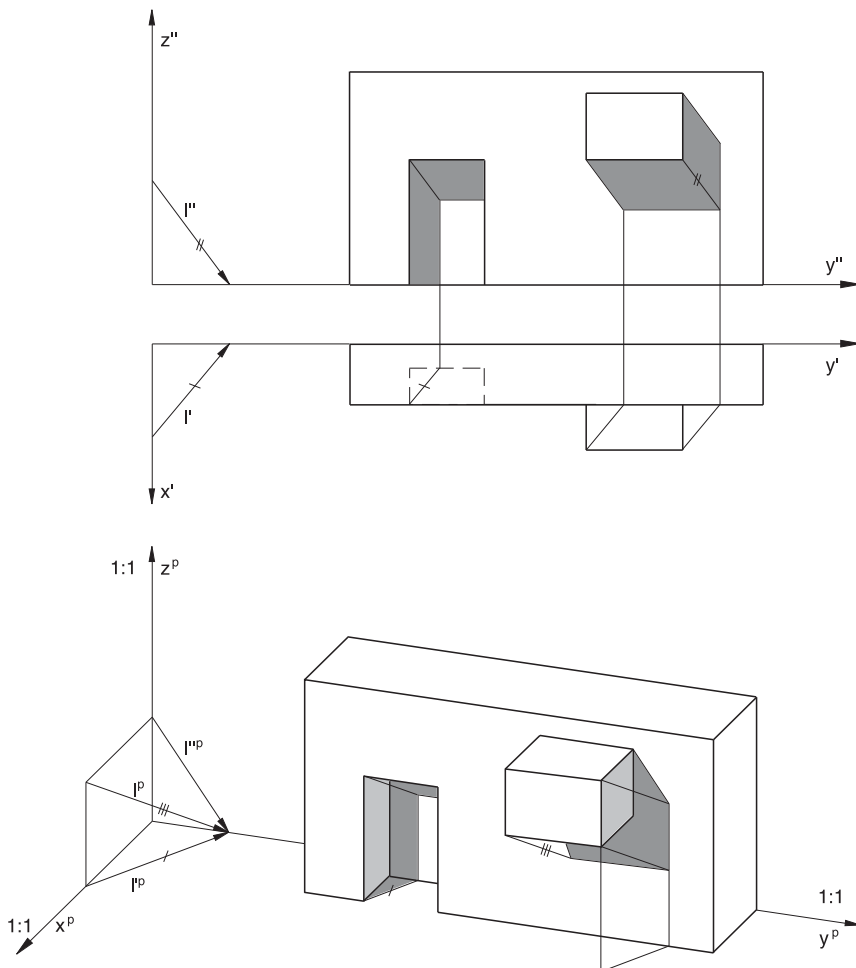


Bild 10.18: Schatten bei vertikaler Auffangebene in Grund- und Aufriss sowie in einer Axonometrie

Ist die Schattenauffangebene eine geneigte Ebene ε , so muss mit Hilfe der Methode der Deckgeraden (Kapitel 5.4.3) jeweils der Durchstoßpunkt des Lichtstrahls mit der Auffangebene ermittelt werden, um den Schattenpunkt eines Objektpunktes zu finden (Bild 10.19).

Eine zweite Konstruktionsmöglichkeit besteht darin, die Projektion der Lichtrichtung l auf die Auffangebene ε zu konstruieren. Die Schattenkonstruktion kann dann in der Axonometrie mit Hilfe von l^p (axonometrische Lichtrichtung) und l_ε^p (Projektion der Lichtrichtung l auf die Auffangebene ε) durchgeführt werden. In Bild 10.20 wird die Schattenkonstruktion für ein Haus am Hang in einer Axonometrie so durchgeführt, dass l_ε ermittelt wird, indem die Ebene ε durch den Lichtstrahl l geschnitten wird.

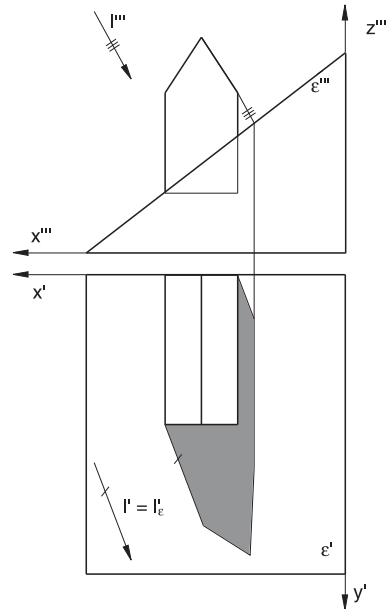


Bild 10.19: Schattenkonstruktion auf eine geneigte Auffangebene in Grund- und Kreuzriss

1. Die Parallele zu l^p durch P^p schneidet ε^p in 1^p und 2^p . $1^p = 1^p$ und Parallele zur z-Richtung durch 2^p ergibt 2^p .
2. Die Gerade $1^p 2^p$ ist die Projektion der Lichtrichtung auf die Ebene $\varepsilon^p \rightarrow l_\varepsilon^p$.
3. l^p durch Punkt P^p geschnitten mit l_ε^p durch P_ε^p ergibt den Schattenpunkt P_s^p des Punktes P^p in ε^p .

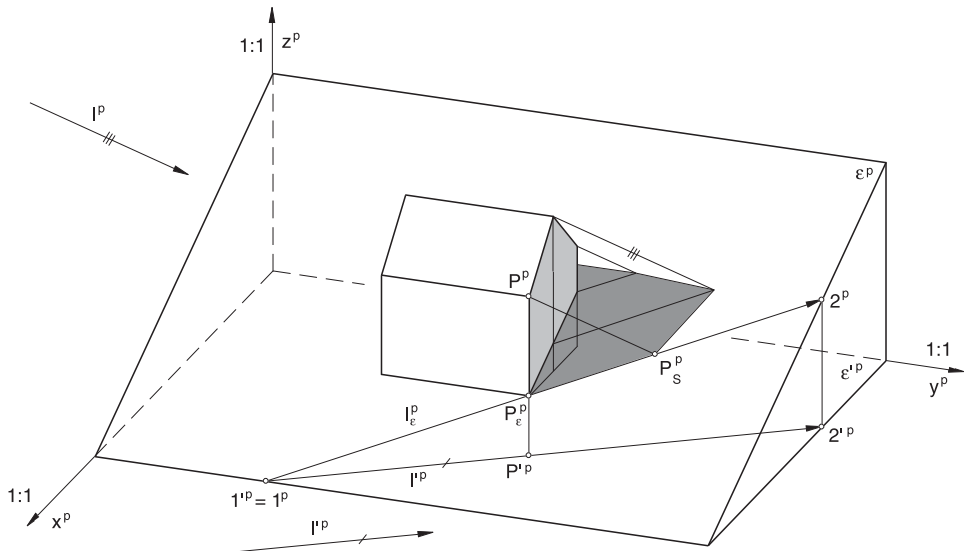


Bild 10.20: Schattenkonstruktion auf eine geneigte Auffangebene in einer Axonometrie

10.1.2 Schattenkonstruktionen gekrümmter Körper

Die Schattenkonstruktionen gekrümmter Körper unterscheiden sich von denen ebenflächiger Körper (Polyeder) dadurch, dass die Eigenschattengrenze als Kurve auf dem gekrümmten Körper zu konstruieren ist. Eine Ebene kann nur ganz oder gar nicht beleuchtet sein, so dass stets Kanten eines ebenflächigen Körpers die Eigenschattengrenze bilden. Für die Grundformen Zylinder, Kegel und Kugel sollen im folgenden die Schattenkonstruktionen durchgeführt werden.

Der **Schatten eines Drehzylinders**, der auf der Grundrissebene steht, kann in Grund- und Aufriss oder in der Axonometrie ermittelt werden. Die Lichtstrahlen berühren den Zylinder in zwei Geraden. Diese bilden die Eigenschattengrenze. In diesem Fall ist die Eigenschattengrenze auf dem gekrümmten Körper also geradlinig. Ihr Schlagschatten und der Schlagschatten des oberen Abschlusskreises vervollständigen den Schatten des Drehzylinders (Bild 10.21).

1. Die Parallelen zu l' berühren den Grundriss des Drehzylinders in $1'$ und $2'$.
2. Mittels Ordner erhält man die Geraden durch $1''$ und $2''$, die die Eigenschattengrenze bilden.
3. Den Schlagschatten des Kreises um M erhält man als Kreis um M_s' , dem Grundriss des Schattenpunktes von M . Da der Kreis parallel zur Grundrissebene liegt, erscheint er im Schatten ebenfalls als Kreis.

Entsprechend kann die Schattenkonstruktion beim Drehzylinder in der Axonometrie durchgeführt werden. Der Grund- und Abschlusskreis des Drehzylinders wird sich aber in der Axonometrie im allgemeinen als Ellipse darstellen, ebenso der Schatten des Abschlusskreises. Für diese Ellipsen müssen die Konstruktionen aus Kapitel 3.3 und 3.4 herangezogen werden.

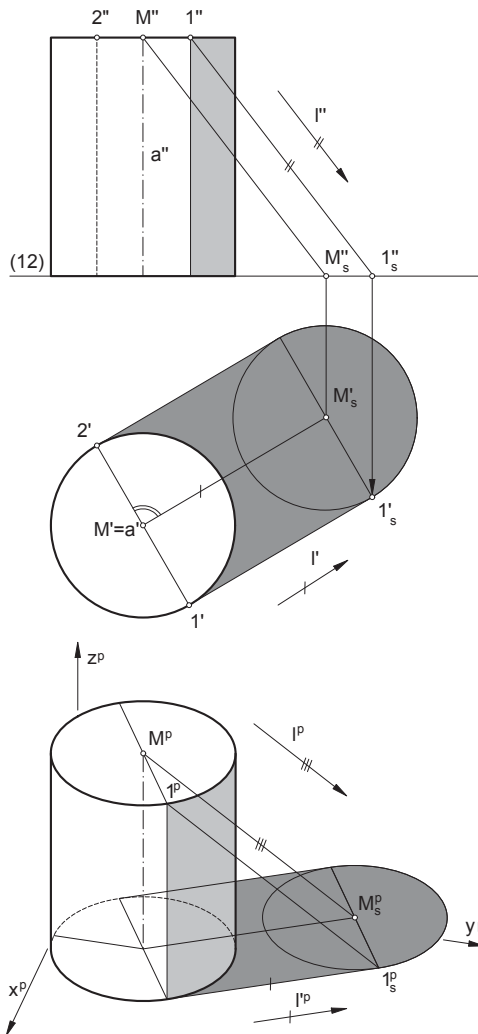
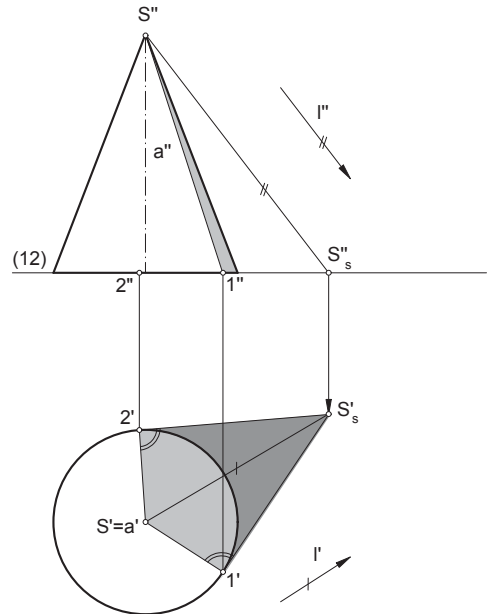


Bild 10.21: Schatten eines Drehzylinders in Grund- und Aufriss sowie in einer Axonometrie

Bei der **Schattenkonstruktion eines Drehkegels** wird zunächst der Schattenpunkt S_s der Kegelspitze S gesucht. Die Tangenten von S_s an den Leitkreis des Drehkegels berühren den Leitkreis in zwei Punkten. Die Kegelerzeugenden durch diese beiden Punkte bilden die Eigenschattengrenze auf dem Drehkegel. Der Schlagschatten dieser beiden Kegelerzeugenden bestimmen die Schlagschattengrenze des Drehkegels (Bild 10.22).

1. Parallele zu l'' durch S'' schneidet die Rissachse (12) im Aufriss des Schattenpunktes S_s'' .
2. Ordner durch S_s'' schneidet die Parallele zu l' durch S' im Grundriss des Schattenpunktes S_s' der Kegelspitze.
3. Die Tangenten von S_s' an den Drehkegelleitkreis (Thaleskreis über der Strecke $S'S_s'$) berühren den Leitkreis in $1'$ und $2'$.
4. $S'1'$ und $S'2'$ sind die Grundrisse der Kegelerzeugenden, die die Eigenschattengrenze bilden.
5. Ordner durch $1'$ und $2'$ liefern die Eigenschattengrenze im Aufriss $\rightarrow S''1''$ (und $S''2''$, verdeckt).
6. Die Geraden $S_s''1''$ und $S_s''2''$ bilden die Schlagschattengrenze des Drehkegels.



In einer Axonometrie stellt sich der Leitkreis des Drehkegels im allgemeinen als Ellipse dar. Soll die Schattenkonstruktion in der Axonometrie durchgeführt werden, so kann der Leitkreis mit den Tangenten vom Schattenpunkt S_s^p an den Kreis aus dem Grundriss in die Axonometrie als Ellipse mit den Tangenten vom Schattenpunkt S_s^p aus an die Ellipse übertragen werden.

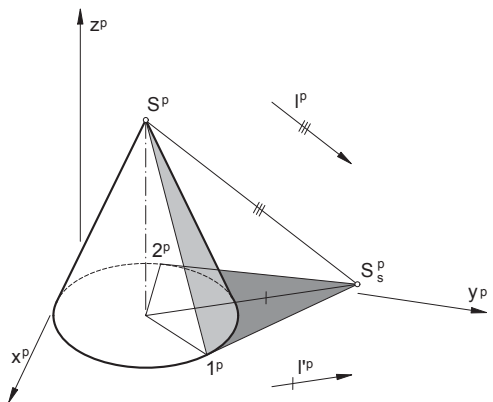


Bild 10.22: Schatten eines Drehkegels in Grund- und Aufriss sowie in einer Axonometrie

Der **Schatten einer Kugel** wird ebenfalls mit Hilfe des Lichtstrahlenzylinders gefunden. Die Lichtstrahlen berühren die Kugel in einem Großkreis. Dieser bildet die Eigenschattengrenze. Der Großkreis erscheint in den Rissen im allgemeinen als Ellipse. Der Schlagschatten der Kugel auf die Grundrissebene entsteht dadurch, dass der Lichtstrahlenzylinder schief auf diese auftrifft. Die Schlagschattengrenze bildet somit eine Ellipse (Bild 10.23).

1. Um den Eigenschatten der Kugel zu finden, zeichnet man die Senkrechte zu l' durch M' . Diese schneidet den Kugelumriss im Grundriss in den Punkten $1'$ und $2'$. Da die Ebene des Großkreises senkrecht zur Lichtrichtung l' steht und $1'2' \perp l'$, ist die Gerade 12 eine Höhenlinie der Großkreisebene. Deshalb ist $1'2'$ die Hauptachse der Ellipse im Grundriss, die das Bild des Großkreises ist, der die Eigenschattengrenze bildet.
2. Entsprechend ist $3''4'' \perp l''$ die Hauptachse der Ellipse im Aufriss, da die Gerade 34 eine Frontlinie der Großkreisebene ist.
3. Ordner und Parallelen zur Rissachse durch M'' bzw. M' liefern die Ellipsenpunkte $1''$ und $2''$ im Aufriss sowie $3'$ und $4'$ im Grundriss.
4. Mit Hilfe der Papierstreifenkonstruktion (vgl. Kapitel 3.4.2) kann jeweils in Grund- und Aufriss die Länge der Nebenachse der Ellipsen gefunden werden (siehe Aufriss).
5. Um den Schlagschatten der Kugel auf die Grundrissebene zu finden, werden die Lichtstrahlen l'' durch $3''$ und $4''$ verlängert. Die Schnittpunkte mit der Rissachse (12) sind die Aufrisse der Schattenpunkte $3_s''$ und $4_s''$. Ordner schneiden die Parallelen zu l' durch $3'$ und $4'$ in $3_s'$ und $4_s'$, die Punkte der Schlag-schattengrenze (Ellipse) sind.
6. Die Parallele zu l'' durch M'' schneidet die Rissachse im Aufriss des Ellipsenmittelpunktes M_E'' . Der Ordner durch M_E'' schneidet die Parallele zu l' durch M' im Grundriss des Ellipsenmittelpunktes M_E' .
7. Da $1'2'$ eine Höhenlinie ist, liegt die Gerade $1_s'2_s'$ parallel zu ihrem Schatten $1_s''2_s''$ mit gleicher Länge (wahrer Durchmesser des Lichtstrahlenzylinders). $1_s'2_s'$ ist die Nebenachse der Ellipse.
8. Die Hauptachse ist senkrecht hierzu. Da außerdem die Ellipsenpunkte $3_s'$ und $4_s'$ bekannt sind, kann die Länge der Hauptachse wieder über die Papierstreifenkonstruktion gefunden werden.

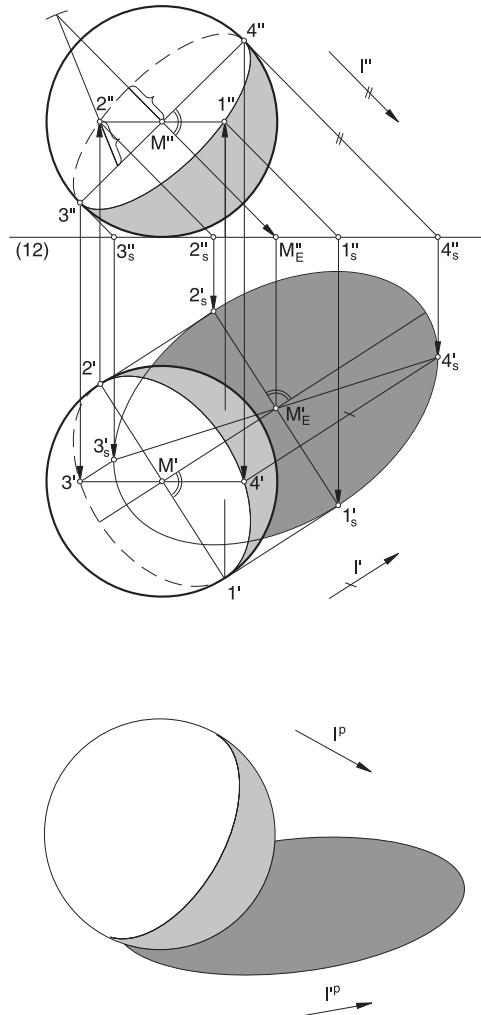


Bild 10.23: Schatten einer Kugel in Grund- und Aufriss und in normaler Axonometrie

Für die Schattenkonstruktion der Kugel in der Axonometrie wurde eine normale Axonometrie gewählt, da nur dann der Kugelumriss als Großkreis erscheint (vgl. Kapitel 12). Eigenschatten- und Schlagschattengrenze können als Ellipsen aufgrund der axonometrischen Lichtrichtung l^p und der Grundrissprojektion l^p konstruiert werden.

10.1.3 Schattenkonstruktionen von Körpern auf andere Körper

Um insbesondere Verschattungsverhältnisse in Stadträumen zu betrachten, muss untersucht werden, inwiefern sich Gebäude untereinander verschatten. Die Schattenauffangfläche kann sich dann aus verschiedenen Auffangflächen zusammensetzen.

Die Vorgehensweise wird vereinfacht in Bild 10.24 am Beispiel eines Hauses und eines daneben stehenden Turmes erläutert. Der Schlagschatten des Turmes fällt zunächst auf die Standebene, die hier die Grundrissebene ist. Dann wird der Schatten auf die Wand und schließlich auf das Dach umgelenkt.

Die Konstruktion kann wie in Bild 10.20 mit Hilfe der Methode der Deckgeraden durchgeführt werden, indem man die Durchstoßpunkte der Lichtstrahlen mit den jeweiligen Auffangflächen konstruiert (Kapitel 5.4.3).

Sowohl bei der Konstruktion in Grund- und Aufriss als auch in der Axonometrie wird eine Hilfsebene durch den Lichtstrahl hindurchgelegt und die Schnittfigur mit dem Haus gesucht. Dort wo l'' bzw. l^p diese Schnittfigur trifft, ist der zugehörige Schattenpunkt.

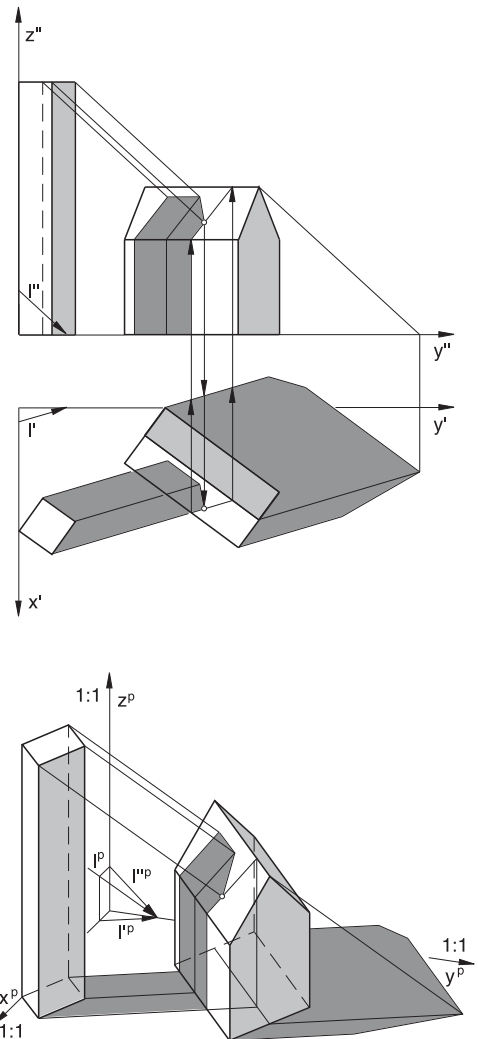


Bild 10.24: Schatten von Turm und Haus in Grund- und Aufriss sowie in einer Axonometrie

In Stadträumen, in denen viele Häuser dicht beieinander stehen, können sehr viel komplexere Schattenkonstruktionen entstehen, wenn der Schatten auf benachbarte Gebäude fällt. In Bild 10.25 fällt der Schatten der Häuser einer Einfamilienhausgruppierung auf das vereinfacht terrassierte Gelände und auf Gebäudeteile mit Flachdach. Auch innerhalb eines Gebäudes kommen komplexe Schatten vor, wenn Gebäudeteile auf andere Gebäudeteile Schatten werfen. Bild 10.26 zeigt in dem Studienprojekt Entwurf eines Lesehauses die Schatten des horizontal geschnittenen Gebäudes auf die Standebene sowie die Schatten der Wände, Stützen, Treppe und Geländer auf Boden und Wand in einer Axonometrie.

Wenn der Schatten eines Körpers auf einen anderen gekrümmten Körper fällt, entsteht die Schlagschattengrenze als Durchdringungskurve zwischen dem Lichtstrahlenszylinder und dem Körper. Am Beispiel eines drehzylindrischen Turmes mit überstehendem drehkegelförmigem Dach wird ein solcher Fall in Grund- und Aufriss in Bild 10.27 untersucht.

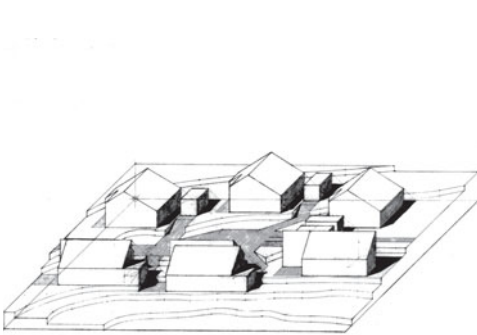


Bild 10.25: Einfamilienhausgruppierung in einer Axonometrie, 1995, Studienprojekt

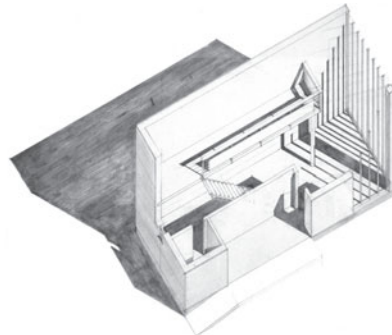


Bild 10.26: Lesehaus in einer Axonometrie, 1996, Studienprojekt

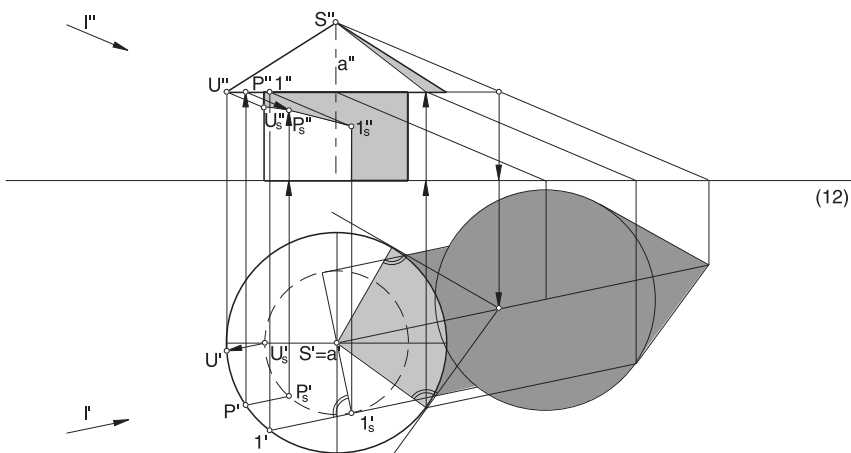


Bild 10.27: Schatten eines drehzylindrischen Turmes mit drehkegelförmigem Dach

1. Der Leitkreis des Drehkegels wirft einen Schatten auf den Drehzylinder. Ein beliebiger Punkt dieses Schattens P_s entsteht, indem durch einen im Grundriss gewählten Punkt P' des Leitkreises eine Parallele zu l' gezeichnet wird. Diese trifft den Grundriss des Zylinders in P_s' . Ordner durch P' ergibt P'' . Parallele zu l'' durch P'' schneidet den Ordner durch P_s' in P_s .
2. Der Punkt 1_s ist der unterste Punkt des Schattens. Hier geht die Eigenschattengrenze des Zylinders in die Schlagschattengrenze als Projektion des Kegeldaches über. Daher entsteht hier ein Knick.
3. Der Punkt U_s ist der Punkt des Schlagschattens auf dem Zylinderumriss.
4. Die Eigenschattengrenze des Kegeldaches und der Schlagschatten auf die Standebene kann entsprechend Bild 10.22 konstruiert werden.
5. Der Leitkreis des Drehkegels erscheint im Schatten wieder als Kreis, da er parallel zur Grundriss-ebene liegt.

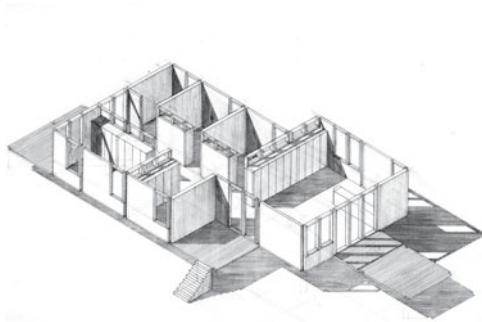


Bild 10.28: Schnittaxonometrie mit Schatten eines Wohnhauses, 2012, Studienprojekt

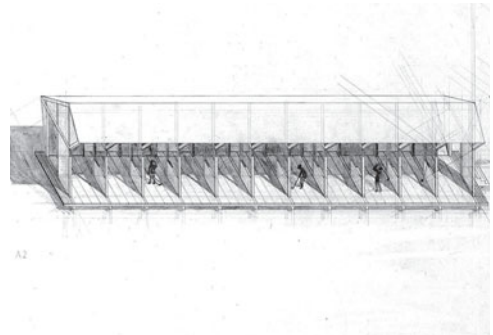


Bild 10.29: Aufrissaxonometrie mit Schatten einer Driving Range, 2008, Studienprojekt

Bild 10.28 und Bild 10.29 zeigen zwei unterschiedliche Studienprojekte von Architekturstudierenden im ersten Semester, bei denen durch die Integration der Schattendarstellung in der gewählten Axonometrie der Entwurf räumlich plastisch wird.

In Bild 10.28 wurde der Entwurf eines Wohnhauses im Fach Baukonstruktion mit einer horizontalen Ebene geschnitten, um die Grundrissorganisation mit Einbauten, Öffnungen und Terrassen zu verdeutlichen.

Im zweiten Projekt in Bild 10.29 wurde eine im Fach Baukonstruktion entworfene Driving Range in einer Aufrissaxonometrie dargestellt. Die Schattendarstellung erleichtert, die einzelnen Boxen und die aufgeständerte Konstruktion klar zu erkennen. Die gezeichneten Personen kennzeichnen die Funktion des Gebäudes.

10.2 Schattenkonstruktionen bei Zentralbeleuchtung

Bei Zentralbeleuchtung entstehen Schatten durch künstliche Lichtquellen. In Bild 10.30 erzeugen Strahler über den Tischen die Schatten auf dem Boden.

In einem Raum treten häufig mehrere Lichtquellen auf. Zusätzlich zur künstlichen Beleuchtung (Zentralprojektion) kann natürliches Licht (Parallelprojektion) durch die Öffnungen in einen Raum fallen (Bild 10.31), so dass sich dann verschiedene Schatten überlagern.

Um den Schatten aufgrund einer Lampe zu ermitteln, wird diese als punktförmige Lichtquelle idealisiert. Die Lichtstrahlen bilden einen Lichtstrahlenkegel bzw. eine Lichtstrahlenpyramide. Sie schneiden die Schattenauffangfläche in der Schlagschattengrenze. Der Schlagschatten kann hierbei als das perspektive Bild des Objektes aufgefasst werden.



Bild 10.30: Schatten bei Zentralbeleuchtung - Lichtstudie der Siemens AG



Bild 10.31: Schatten durch verschiedene Lichtquellen - Industriebau in Roeselare, Belgien

Um die Schattenkonstruktion bei Zentralbeleuchtung durchzuführen, muss die Lage der punktförmigen Lichtquelle gegeben sein oder angenommen werden. Auch bei der Zentralbeleuchtung gilt: Eine zur Auffangebene parallele Gerade und ihr Schlagschatten sind parallel zueinander.

Im Unterschied zur Parallelbeleuchtung bleibt die Parallelität von Geraden, die nicht zur Auffangebene parallel sind, im Schatten nicht erhalten. Die Geraden schneiden sich in einem Fluchtpunkt (vgl. Kapitel 2.3 und 13.2). Die Schattenkonstruktionen können ansonsten vergleichbar mit denen der Parallelbeleuchtung durchgeführt werden. Der Schlagschatten eines Würfels auf eine horizontale Standebene (Grundrissebene) kann ermittelt werden, indem die Durchstoßpunkte der Lichtstrahlen durch die Eckpunkte des Würfels mit der Auffangebene konstruiert werden (Bild 10.32).

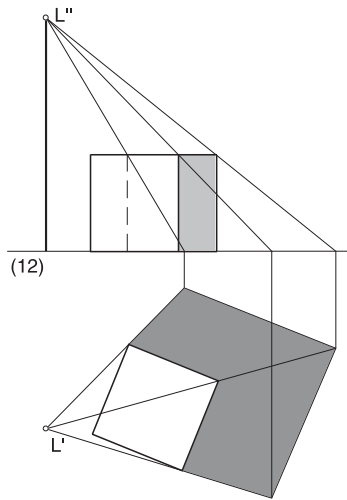


Bild 10.32: Schattenkonstruktion auf horizontale Ebene

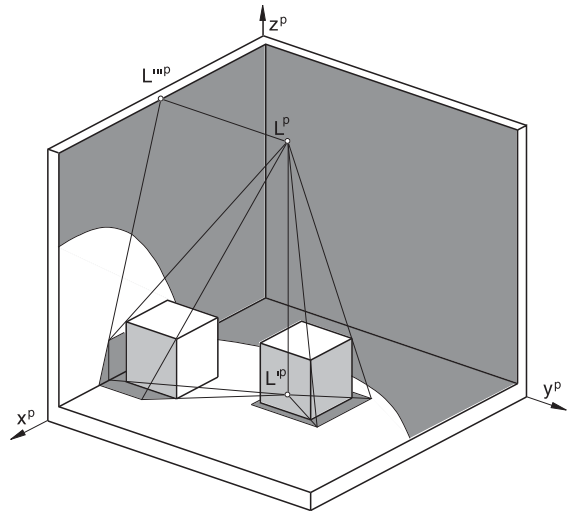


Bild 10.33: Innenraum bei Zentralbeleuchtung in einer Axonometrie

Die Schatten bei Zentralbeleuchtung werden in Bild 10.33 für einen stark vereinfachten Innenraum in einer Axonometrie konstruiert. Durch einen kegelförmigen Lampenschirm entsteht ein Lichtkegel, der den Boden in einer Ellipse und die Wand in einer Hyperbel trifft. In Bild 10.34 fällt zusätzlich paralleles Licht durch die Öffnung im Raum und projiziert den Türrahmen auf den Boden des Raumes.

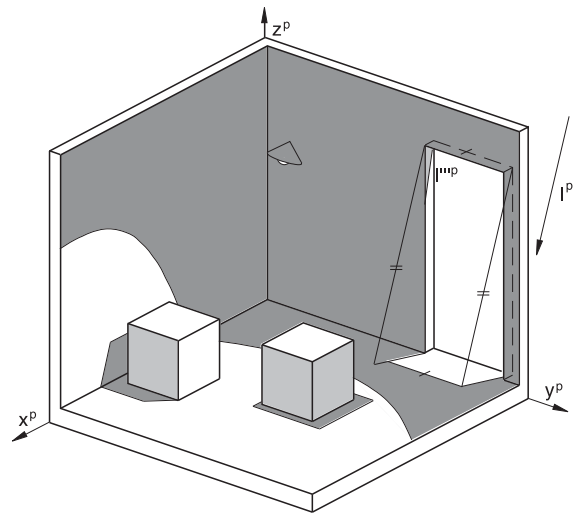


Bild 10.34: Innenraum bei Zentralbeleuchtung mit Parallelbeleuchtung durch die Öffnung in einer Axonometrie

11 KOTIERTE PROJEKTION

In Kapitel 2.4 wurde die **kotierte Projektion** neben der Zweitafelprojektion und der Axonometrie als eine Methode vorgestellt, um die Rekonstruktion eines räumlichen Objektes bei Parallelprojektion aus der Zeichnung zu ermöglichen.

In kotierter Projektion werden die Elemente des Raumes mittels senkrechter Parallelprojektion auf eine horizontale Bildebene projiziert, also ein Grundriss hergestellt. Im Grundriss fehlt die geometrische Information über die Höhe eines Punktes im Raum. Daher wird der Grundriss mit Höhenangaben in Längeneinheiten über bzw. unter einer Bezugsebene in der Höhe Null versehen.

Die kotierte Projektion findet Verwendung für Geländedarstellungen und –bearbeitungen sowie für Dachausmittlungen. Sie wird auch **topographische Projektion** genannt. Für die Planung eines Gebäudes am Hang ist die kotierte Projektion wichtiger Ausgangspunkt.

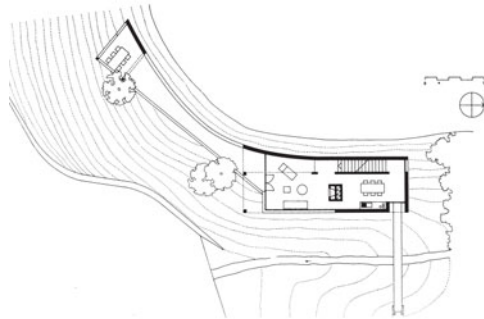


Bild 11.1: Gebäude im Gelände - Casa Kalman, Locarno, Schweiz, 1974-76, Luigi Snozzi

Der Lageplan in Bild 11.1 zeigt, wie das Wohnhaus Casa Kalman in Locarno von Luigi Snozzi parallel zu den Höhenlinien in den steilen Hang integriert wurde.

Der Abstand eines Punktes P von der Bildebene π wird, bezogen auf einen Maßstab, d. h. in Längeneinheiten (L. E.), als **Höhenkote** oder kurz **Kote** neben den Grundriss P' in die Zeichnung geschrieben (Bild 11.2). Das Vorzeichen dieser Kote (abgeleitet von franz. "à côté de") legt in der Geografie fest, ob der Punkt über oder unter der Bildebene π (NN) liegt:

P über $\pi \rightarrow \text{Kote} > 0$

P unter $\pi \rightarrow \text{Kote} < 0$

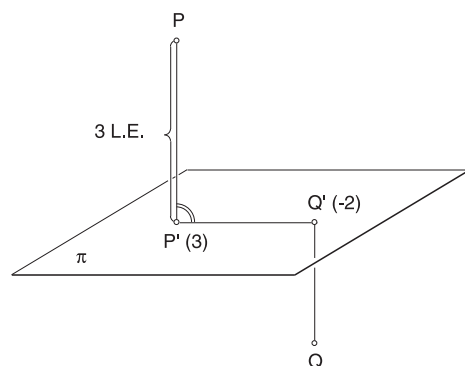


Bild 11.2: Kote eines Punktes

11.1 Darstellung von Kurven und Flächen

Auch Kurven und Flächen werden in kotierter Projektion mittels Höhenangaben dargestellt, um die räumliche Lage erfassen zu können. Da aber nicht jeder Kurven- und Flächenpunkt mit Koten versehen werden kann, werden Kurven und Flächen mit **Hauptschichtenebenen** parallel zur Bildebene π mit ganzzahligen Koten geschnitten. In welchem Abstand diese Hauptschichtenebenen gewählt werden, jeden Meter, jede 10 m oder 100 m, hängt vom verwendeten Maßstab ab.

Die Hauptschichtenebenen schneiden eine beliebige Raumkurve in Punkten mit unterschiedlichen Abständen auf der Kurve, den **Hauptschichtenpunkten** (Bild 11.3).

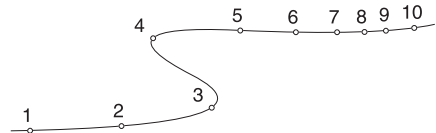


Bild 11.3 : Darstellung einer Kurve

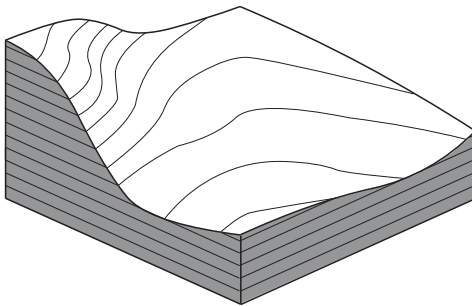


Bild 11.4: Geländefläche

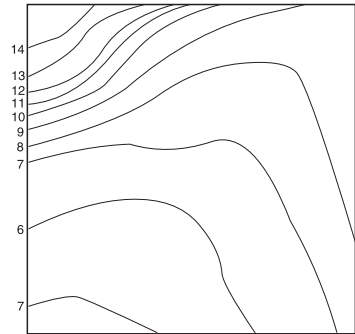


Bild 11.5: Schichtenplan der Geländefläche in kotierter Projektion

Eine beliebige Fläche, z. B. eine Geländefläche (Bild 11.4), wird von den Hauptschichtenebenen in Kurven geschnitten, den **Höhenlinien** oder **Hauptschichtenlinien**. Diese bilden den Schichtenplan der Fläche (Bild 11.5).

11.1.1 Darstellung einer Geraden

Bei einer Geraden haben die Hauptschichtenpunkte konstanten Abstand, da die Steigung einer Geraden konstant ist. Der Grundrissabstand zweier benachbarter Hauptschichtenpunkte der Geraden g kennzeichnet die **Steigung** von g . Dieser Abstand heißt **Intervall i** (Bild 11.6).

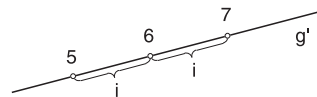


Bild 11.6: Intervall i

Der Zusammenhang zwischen Steigung und Intervall i der Geraden g kann mit Hilfe des Steigungsdreiecks (Bild 11.7) aufgezeigt werden.¹ Dieses entsteht, indem die Höhen der Punkte auf g in die Grundrissebene hineingeklappt werden. Die Gerade g erscheint dann in geklappter Lage g_0 . α ist der Neigungswinkel von g gegen die Grundrissebene. Im rechtwinkligen Steigungsdreieck gilt: $\tan \alpha = 1 : i$. Die Steigung einer Geraden wird in der Mathematik definiert als der Tangens des Neigungswinkels. $1 : i$ legt somit die Steigung einer Geraden fest.



Die Steigung einer Geraden wird definiert als: $\tan \alpha = \frac{1}{i}$

In den Aufgaben zur kotierten Projektion wird die Steigung meistens durch $1 : i$ angegeben. Das Intervall i gibt den horizontalen Abstand zweier benachbarter Hauptschichtenpunkte auf der Geraden an.

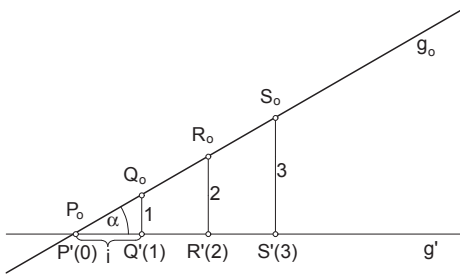


Bild 11.7: Steigungsdreieck



Bild 11.8: Steigung einer Straße

Liegen die Hauptschichtenpunkte einer Geraden dicht beieinander, so ist das Intervall i klein und somit die Steigung der Geraden groß. Bei einer geringen Steigung hingegen liegen die Hauptschichtenpunkte weit auseinander, und das Intervall i ist also groß.

Auf Straßenschildern wie in Bild 11.8 wird z. B. die Steigung 25 % angegeben.

Steigung 25 % bedeutet: $\frac{1}{i} = \frac{25}{100} \rightarrow i = 4 \rightarrow \alpha \approx 14^\circ$

Eine 100 %ige Steigung bedeutet nicht, dass es senkrecht hoch geht, sondern:

Steigung 100 % bedeutet: $\frac{1}{i} = \frac{100}{100} \rightarrow i = 1 \rightarrow \alpha = 45^\circ$

1. Längeneinheit für die Zeichnungen in Kapitel 11 ist: 0 1 2 3 4 5

11.1.2 Darstellung einer Ebene

Die Höhenlinien einer Ebene sind zueinander parallele Geraden mit gleichem Abstand (Bild 11.9). Die Steigung einer Ebene ist die Steigung einer Falllinie (Senkrechte zu den Höhenlinien) dieser Ebene. Die Falllinien einer Ebene sind die Geraden stärksten Gefälles. Der Pfeil der Falllinie f zeigt in die Richtung, in die die Ebene fällt.

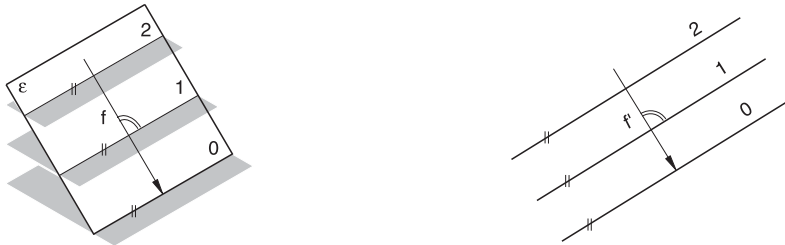


Bild 11.9: Darstellung einer Ebene in Axonometrie und kotierter Projektion

11.1.3 Darstellung eines Drehkegels

Durch Schnitte mit Hauptschichten-ebenen können auch andere Flächen in kotierter Projektion dargestellt werden. Ein Drehkegel mit grundrissprojizierender Achse stellt sich in kotierter Projektion mit konzentrischen Kreisen dar. Dem Abstand zwischen den Kreisen entspricht das Intervall i einer Kegelerzeugenden. Um die kotierte Projektion einer Fläche zu finden, kann es wie hier beim Drehkegel auch sinnvoll sein, einen Aufriss zu Hilfe zu nehmen (Bild 11.10).

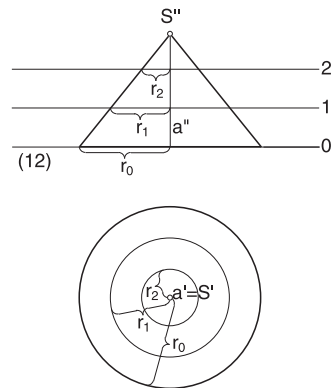


Bild 11.10: Drehkegel mit grundrissprojizierender Achse

11.2 Grundaufgaben bei Geländebearbeitungen

Lagepläne mit Geländedarstellungen in kotierter Projektion sind Ausgangspunkt von Gebäude-, Stadt-, Raum- und Straßenplanungen. Um die geplanten Elemente in den Lageplan integrieren zu können, müssen verschiedene Grundaufgaben in kotierter Projektion gelöst werden.

An Beispielen werden die verschiedenen Grundaufgaben wie Ebenen und Flächen zum Schnitt bringen, eine Gerade in eine Ebene legen, oder eine Ebene mit bestimmter Steigung durch eine Gerade legen, aufgezeigt.

11.2.1 Ebene durch horizontale Gerade

In ein Gelände soll eine horizontale Plattform gelegt werden. Dazu muss das Gelände zum Teil abgetragen und zum Teil aufgeschüttet werden. Die Aufschüttung (Auftrag) wird meistens mit einer geringeren Steigung durchgeführt als der Abtrag (Einschnitt), da der Abtrag aus gewachsenem Boden besteht. Abhängig vom vorhandenen und verwendeten Material soll wegen der Abrutschgefahr die Steigung des Auf- und Abtrags bestimmte Werte nicht übersteigen²:

	Auftrag	Abtrag
Feiner Sand	1 : 2,0	1 : 1,8
Kies	1 : 1,6	1 : 1,5
Geröll	1 : 1,5	1 : 1,2

Die Auf- und Abtragsböschungen werden gefunden, indem durch die Ränder der horizontalen Plattform Ebenen mit der gegebenen Steigung für Auftrag (3:4) und Abtrag (1:1) gelegt werden. Hier muss die Grundaufgabe, eine Ebene ε mit gegebener Steigung durch eine horizontale Plattform zu legen, gelöst werden. Da der Plattformrand horizontal ist, stellt er auch gleichzeitig eine Höhenlinie der Böschungsebene dar. Die Höhenlinien der gesuchten Böschungsebenen sind also Parallelen zum Plattformrand, für den Auftrag im Abstand $i=4/3$ L. E. und für den Abtrag im Abstand $i=1$ L. E.. Durch Vergleichen der Höhen von Plattform und Gelände kann entschieden werden, wo Auftrag und Abtrag anzuwenden sind (Bild 11.11). Auf der Höhenlinie 40 liegt die Plattform im Gelände. Die Linie, in der das geplante Element (im Beispiel die Plattform) und das Gelände gleich hoch sind, wird **Nullinie** genannt.

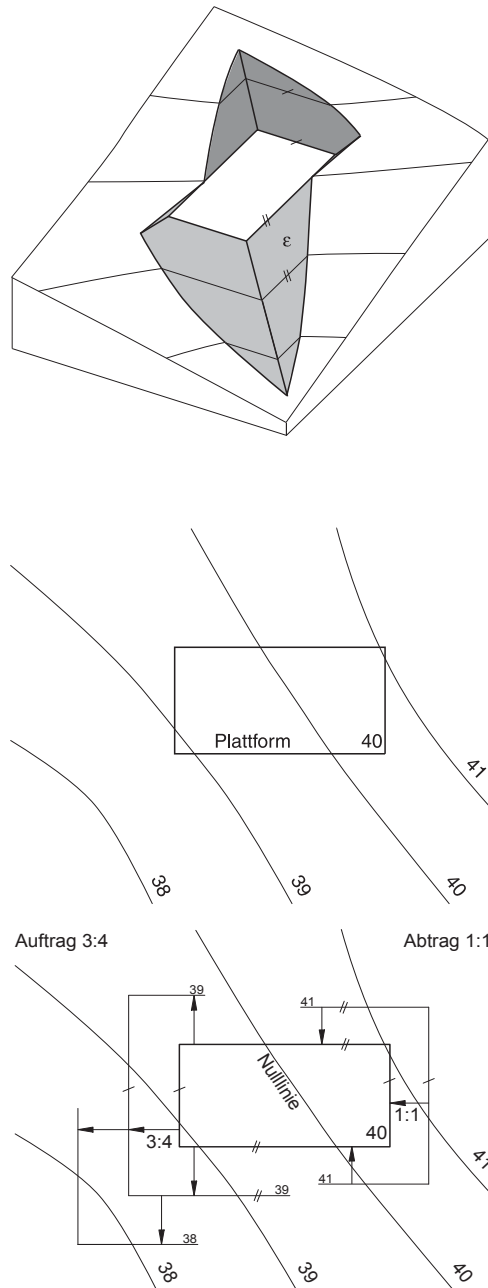


Bild 11.11: Horizontale Plattform in einem Gelände - Höhenlinien von Auftrag und Abtrag

2. H. Bauner / W. Kicking. Baugemetrie. Band 2. Wiesbaden und Berlin 1982, S. 70.

11.2.2 Schnitt zweier Flächen bzw. Ebenen

Um herauszufinden, wo die Böschungen aus Bild 11.11 im Gelände enden, ist eine zweite Grundaufgabe, Schnitt zweier Flächen bzw. Ebenen, zu lösen (Bild 11.12).

Die Schnittlinie zweier Flächen entsteht als Verbindungslinie der Schnittpunkte der Höhenlinien gleicher Höhe beider Flächen.

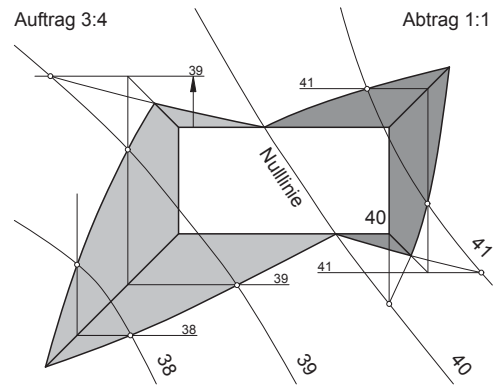


Bild 11.12: Schnittlinien der Böschungsebenen mit dem Gelände

In diesem Fall ist eine der Flächen, die Böschung, eine Ebene. Ist auch das Gelände als Geländeebene idealisiert, so entsteht eine Schnittgerade (Bild 11.13).

In einem Sonderfall, wenn die Höhenlinien von zwei Ebenen parallel sind, kann auf diese Weise keine Schnittgerade gefunden werden. In diesem Fall schneidet man die beiden Ebenen ε und δ senkrecht zu den Höhenlinien durch. Die durch diesen Schnitt erhaltenen Fallgeraden f_1 und f_2 , deren Grundrisse deckungsgleich sind, werden in die Bildebene umgeklappt (vgl. Bild 5.31). Durch den Schnittpunkt P der beiden Fallgeraden muss die Schnittgerade s verlaufen (Bild 11.14).

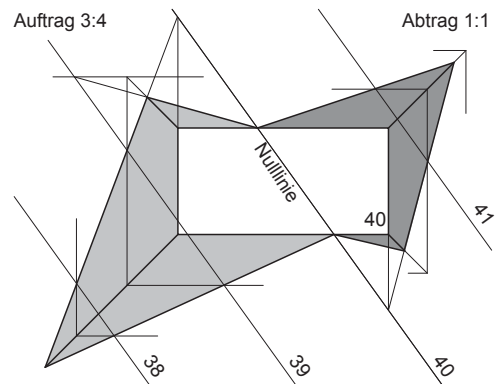


Bild 11.13: Idealisiertes Gelände – Geländeebene

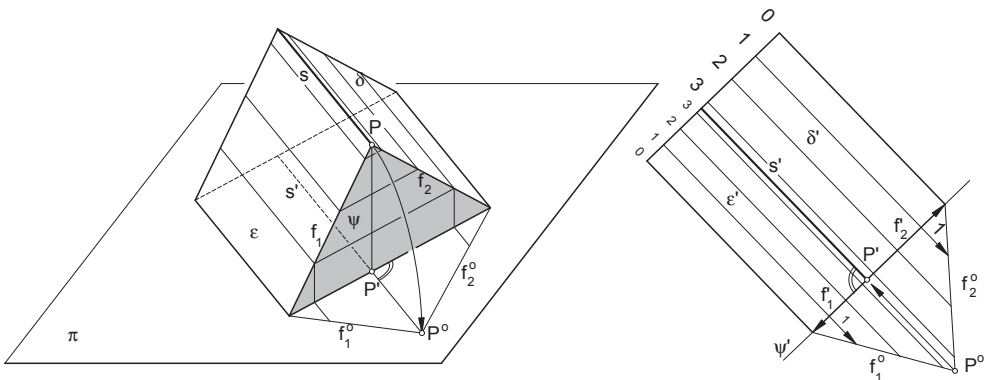


Bild 11.14: Schnitt zweier Ebenen mit parallelen Höhenlinien

1. Schnittebene ψ wird senkrecht zu den Höhenlinien gewählt, $\psi' \perp$ Höhenlinien \rightarrow Fallgeraden $f_1' = f_2'$.
2. Umklappen der Fallgeraden mit Hilfe der angegebenen Höhen ergibt f_1° und f_2° .
3. f_1° und f_2° schneiden einander in P° , zurückgeklappt entsteht $f_1' \cap f_2' = P'$.
4. Die Schnittgerade $s = \varepsilon \cap \delta$ erscheint im Grundriss als Parallele zu den Höhenlinien durch P' .

11.2.3 Ebene durch geneigte Gerade

Liegt ein geplantes Element nicht horizontal, sondern geneigt, so sind die Höhenlinien der durch die Ränder gelegten Böschungsebenen nicht parallel zu den Rändern, da diese dann schräg im Raum liegende Geraden sind. Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn eine geneigte Straße in ein Gelände gelegt wird (Bild 11.15). Um die Straße in das Gelände hineinplanen zu können, muss zum Teil Auftrag und zum Teil Abtrag vorgenommen werden. Dazu wird zuerst die Nulllinie der Straße gesucht, indem die Höhenlinien gleicher Höhe der Straßenebene und des Geländes miteinander zum Schnitt gebracht werden.

Die Böschungsebenen für Auftrag (Steigung 3:4) und Abtrag (Steigung 1:1) müssen nun durch die Straßenränder gelegt werden. Um die Richtung der Höhenlinien dieser Böschungsebenen herauszufinden, werden sogenannte Böschungskegel (Drehkegel mit vertikaler Achse) mit der Kegelspitze in Punkten des Straßenrandes mit ganzzahliger Kote aufgestellt. Die Erzeugenden der Böschungskegel müssen so geneigt sein, wie die Böschungsebenen geneigt sein sollen. Beim Auftrag sind die Böschungskegel nach unten geöffnet, beim Abtrag nach oben geöffnet (Bild 11.16).

Die gesuchte Böschungsebene ist die Tangentenebene an die Böschungskegel.

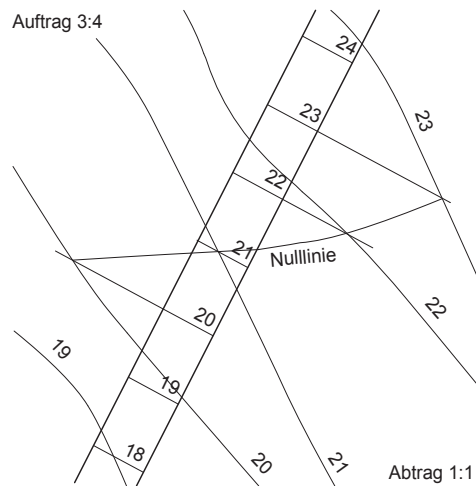


Bild 11.15: Geneigte Straße im Gelände

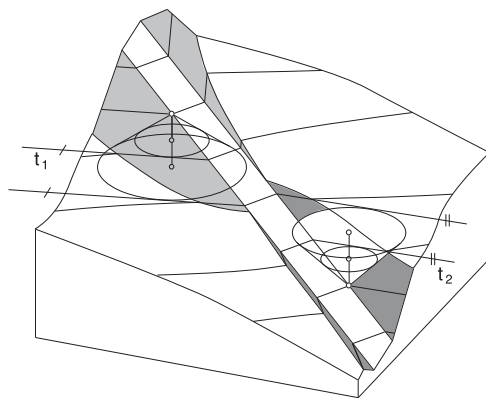


Bild 11.16: Böschungskegel bei Auftrag und Abtrag

Daher sind die Höhenlinien der Böschungsebene die Tangenten an die Höhenkreise gleicher Höhe bzw. die Tangente von einem Punkt des Straßenrandes an den Höhenkreis eines Böschungskegels gleicher Höhe (z. B. t_1 und t_2 in Bild 11.16). In kotierter Projektion stellt sich der Böschungskegel in konzentrischen Kreisen dar (vgl. Bild 11.10). Daher können in kotierter Projektion die Höhenlinien der Böschungsebenen als Tangenten an diese entsprechenden Höhenkreise konstruiert werden (Bild 11.17). Mit dieser Konstruktionsmethode können die Höhenlinien der vier erforderlichen Böschungsebenen (Auftrag und Abtrag) der geneigten Straße im Gelände aus Bild 11.15 gefunden werden.

1. Die Spitze eines Böschungskegels wird in einen beliebigen Punkt des Straßenrandes mit ganzzahliger Kote (hier z. B. Höhe 23) gelegt.
2. An dieser Stelle ist ein Auftrag anzubringen, daher ist der Kegel nach unten geöffnet (vgl. Bild 11.16). Der Höhenkreis des Böschungskegels in der Höhe 22 ist ein Kreis mit Radius $i=4/3$ L.E..
3. Die Höhenlinie 22 der gesuchten Böschungsebene ist die Tangente t_1 an diesen Höhenkreis von dem Punkt der Höhe 22 des Straßenrandes aus. Alle Höhenlinien dieser Böschungsebene sind hierzu parallel.
4. In der Höhe 19 der Straße z. B. ist ein Abtrag vorzunehmen. Daher ist hier der Böschungskegel nach oben geöffnet (vgl. Bild 11.16).
5. Für diese und die beiden anderen Böschungsebenen können die Höhenlinien dann vergleichbar wie in Punkt 2 und 3 konstruiert werden.

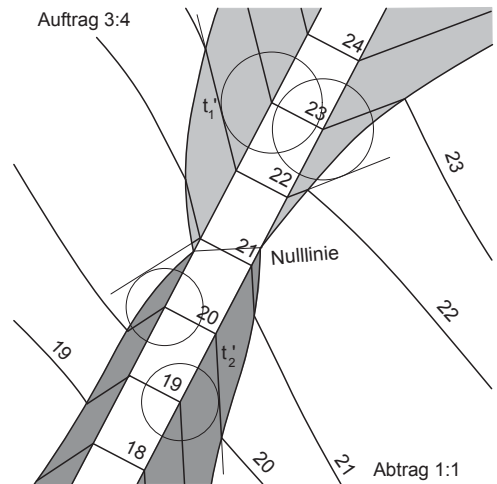


Bild 11.17: Konstruktion der Höhenlinien bei Auftrag und Abtrag

11.2.4 Gerade in eine Ebene legen

Soll ein Straßenverlauf stärker dem Gelände angepasst werden, so kann sich die Aufgabe ergeben, die Mittellinie der Straße mit einer vorgegebenen Steigung in das Gelände hineinzulegen. Zur Lösung dieser Aufgabe wird die Straße als geradlinig angenommen (mit der Steigung 1:3) und das Gelände als Ebene idealisiert (Bild 11.18). Ausgehend von Punkt P in der Höhe 55, durch den die Mittellinie hindurchgehen soll, muss der Punkt der Mittellinie, der einen Meter höher bzw. tiefer liegt als der Punkt P, den Grundrissabstand $i = 3$ L.E. von P haben. Da die Gerade in der Geländeebene liegen soll, muss dieser Punkt außerdem auf der entsprechenden Höhenlinie (56 bzw. 54) der Geländeebene ε liegen. Bild 11.18 zeigt die zwei möglichen Lösungen dieser Grundaufgabe.

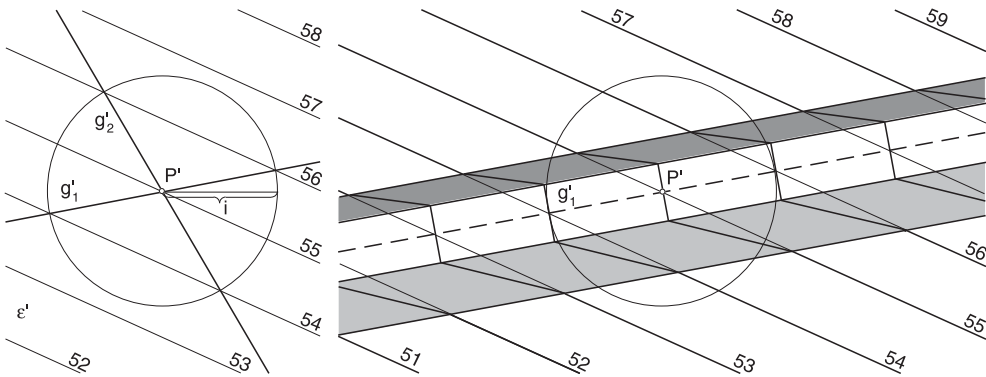


Bild 11.18: Gerade in eine Ebene legen Bild 11.19: Mittellinie der Straße in der Geländeebene

1. Kreis um $P'(55)$ mit Radius $i=3$ L. E. schneidet die Höhenlinie 54 und 56 in vier Punkten.
2. g'_1 und g'_2 sind die zwei möglichen Lagen der Mittellinie, die die gewünschte Steigung 1:3 hat und in der Ebene ε liegt.

Angewandt auf das Beispiel der Mittellinie einer Straße ergibt sich dann nach Wahl einer der beiden Möglichkeiten der Mittellinie die Lage der Straße in Bild 11.19. Die Höhenlinien der Straßenebene können durch die Schnittpunkte der Geländehöhenlinien mit der Mittellinie senkrecht zur Mittellinie eingezeichnet werden, wenn die Straße keine Querneigung besitzen soll. In diesem Fall ist die Mittellinie die Nulllinie, in der Wechsel zwischen Auf- und Abtrag stattfindet. Oberhalb der Straße ist ein Abtrag (1:1), unterhalb ein Auftrag (3:4) vorzunehmen. Nach der Anwendung der Böschungskegel wie in Bild 11.17 ergibt sich der Verlauf der Höhenlinien der Böschungsebenen und die beiden Schnittgeraden mit dem Gelände, die parallel zum Straßenrand verlaufen müssen.

11.2.5 Böschungsfläche durch kreisförmige horizontale Plattform

Wird wie in Bild 11.20 in eine Geländeebene eine kreisförmige horizontale Plattform mit Radius r hineingeplant, so muss eine Böschungsfläche mit der Steigung 1: i durch den kreisförmigen Rand hindurchgelegt werden. Diese Böschungsfläche ist dann ein Drehkegel mit der grundrissprojizierenden Achse a ($a'=P'$) und der Steigung der Erzeugenden 1: i . Die Höhenlinien der Böschungsfläche sind also konzentrische Kreise mit jeweils einen um das Intervall i größeren Radius. Als Schnitt dieser drehkegelförmigen Böschungsfläche mit der Geländeebene entsteht eine Ellipse, wenn die Steigung der Geländeebene (1: 3) kleiner ist als die Steigung der Böschungsfläche (3:4). Diese Ellipse kann wie in Bild 7.69 unter zu Hilfeahme eines Aufrisses bzw. Seitenrisses konstruiert werden.

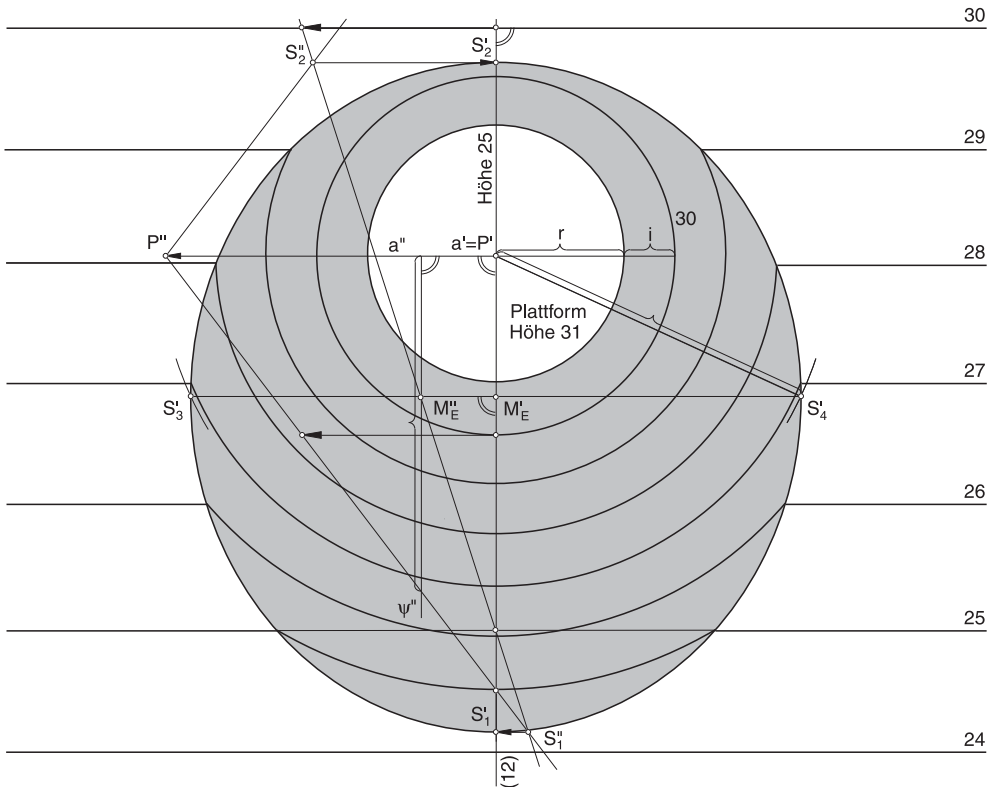


Bild 11.20: Böschungsfläche durch kreisförmige horizontale Plattform

1. Die Höhenlinien der Böschungsfläche sind Höhenkreise eines Drehkegels mit der Achse a . Höhenkreis 30 ist z. B. ein Kreis um a' mit Radius $r+i$.
2. Die weiteren Höhenkreise schneiden die Höhenlinien der Geländeebene in Punkten der Schnittellipse.
3. Mit Hilfe eines Aufrisses senkrecht zu den Höhenlinien der Geländeebene können die Scheitel der Ellipse ermittelt werden. Rissachse (12) wird senkrecht zu den Höhenlinien durch a' gewählt.
4. Für den Aufriss kann eine beliebige Bezugshöhe (hier Höhe 25) festgelegt werden. Die Umrisslinien der drehkegelförmigen Böschungsfläche im Aufriss werden mit Hilfe zweier beliebiger Höhenkreise und die Geländeebene mit Hilfe zweier Höhenlinien gefunden. Die Geländeebene ist in diesem Aufriss projizierend.
5. Die Schnittpunkte S_1'' und S_2'' der Kegelumrisslinien mit der Geländeebene sind die Hauptscheitel der Ellipse. Über Ordner werden S_1' und S_2' im Grundriss gefunden.
6. Die Nebenachse steht senkrecht zur Hauptachse, ist im Aufriss daher projizierend, und geht durch den Mittelpunkt M_E der Ellipse, der durch Halbieren von $S_1''S_2''$ im Aufriss gefunden wird. Im Grundriss verläuft die Nebenachse in Ordnerichtung.
7. Eine Hilfsebene ψ senkrecht zur Drehkegelachse a durch die Nebenachse schneidet einen Kreis aus dem Drehkegel aus. Dieser Kreis im Grundriss (um a') schneidet die Nebenachse in den Nebenscheiteln S_3' und S_4' .

11.2.6 Böschungsfläche durch beliebige Raumkurve

Ist der Straßenrand eine beliebige Raumkurve, ansteigend und gekrümmt, so kann die Böschungsfläche durch diese Kurve ähnlich gefunden werden wie die Böschungsebene durch eine geneigte Gerade (vgl. Kapitel 11.2.3).

In jedem Punkt P der Raumkurve c kann ein Böschungskegel mit der entsprechenden Böschungsneigung aufgestellt werden. Die gewünschte Böschungsfläche Φ durch die Raumkurve c ist dann als die Einhüllende (Hüllfläche) der Böschungskegel definiert, eine Fläche, die sämtliche Böschungskegel berührt. Jeder Böschungskegel berührt die Böschungsfläche in einer Erzeugenden des Böschungskegels. Diese Erzeugenden (Geraden) sind Falllinien der Böschungsfläche.

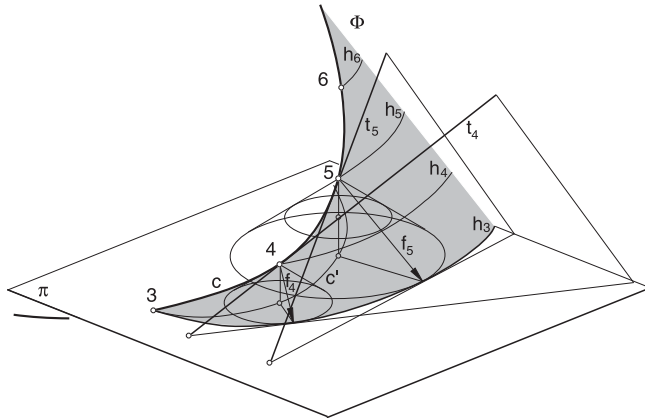


Bild 11.21: Böschungsfläche als Hüllfläche der Böschungskegel

Die Höhenlinien der Böschungsfläche Φ sind dann die Hüllkurven gleichkotierter Höhenkreise.

Eine Böschungsfläche wie in Bild 11.21 und 11.22 ist eine Fläche, die in jedem Flächenpunkt die gleiche Steigung hat (hier Steigung 1:2).

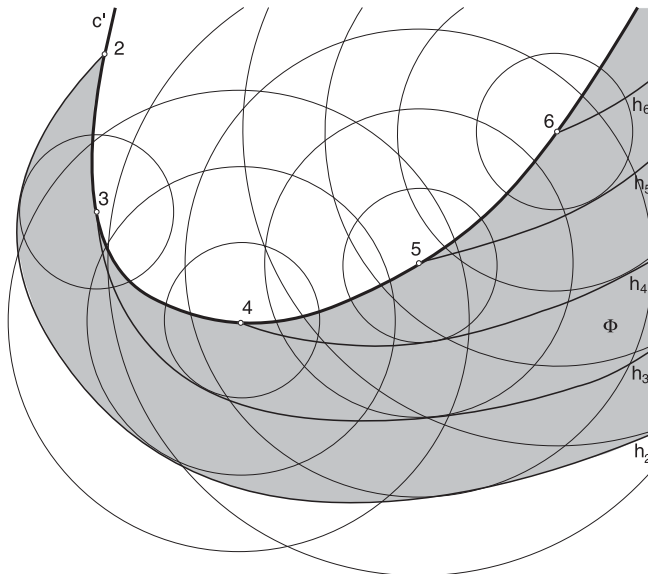


Bild 11.22: Höhenlinien als Hüllkurven gleichkotierter Höhenkreise

Die Böschungsfläche wird auch Torse genannt und ist eine abwickelbare Fläche (vgl. Bild 9.7).

11.3 Querprofil

Die kotierte Projektion stellt ein Gelände nicht sehr anschaulich dar. Über die Höhenangaben und die Lage der Höhenlinien kann eine Vorstellung über den Geländeverlauf nur indirekt erschlossen werden, indem die Zahlen und die Abstände der Höhenlinien interpretiert werden. Liegen die Höhenlinien dicht beieinander, ist das Gelände steil; liegen sie weit auseinander, ist das Gelände flach. Für ein anschaulicheres Verständnis des Geländes und zur Lösung von Geländeaufgaben kann es sinnvoll sein, vertikale Geländeschnitte anzufertigen.



Die Schnittkurve der Geländefläche mit einer vertikalen Ebene heißt **Querprofil** der Fläche.

Ein Querprofil der Fläche kann an beliebigen Stellen zu einem jeweiligen Zweck erstellt werden. Das Querprofil gibt Auskunft darüber, wie das Gelände zwischen zwei Punkten verläuft (Bild 11.23). Mehrere Querprofile können dann an den kritischen Stellen eine Planungsgrundlage liefern.

Zum Erstellen der Querprofile werden die Höhen der in der vertikalen Schnittebene liegenden Punkte in die Bildebene umgeklappt. Besonders wichtig sind solche Überlegungen bei Hangbebauungen. Über ein Querprofil kann erfasst werden, wie das geplante Haus im Gelände steht und wie groß der erforderliche Erdaushub ist. Querprofile können zur Optimierung von Hangbebauungen (Bild 11.24, Maßstab halbiert) sinnvoll eingesetzt werden.

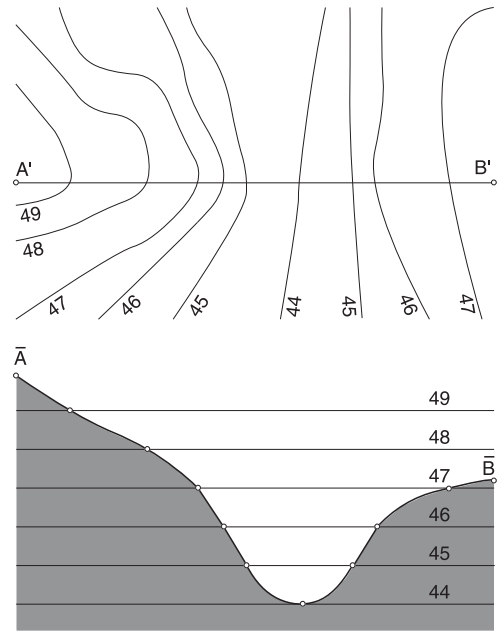


Bild 11.23: Querprofil einer Geländefläche

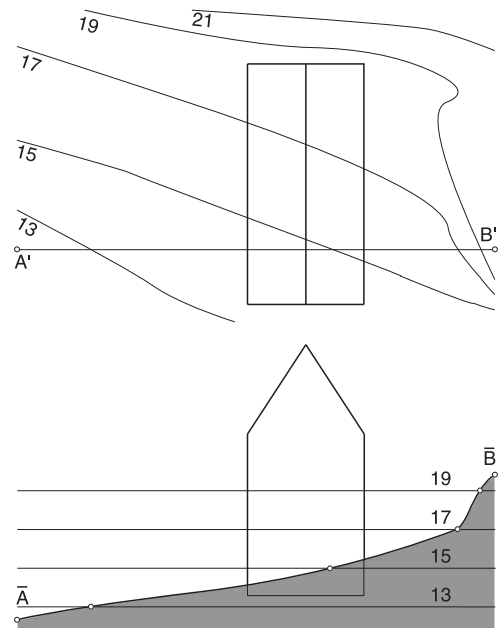


Bild 11.24: Querprofil einer Hangbebauung

Die Querprofile können auch dazu dienen, Untersuchungen zur Lärmreflexion von Straßenabschnitten durchzuführen. Vor- und Nachteile der verschiedenen Böschungsneigungen für den Einschnitt der Straße in das Gelände können anhand der Querprofile abgewogen werden.

Bild 11.25 zeigt einen Straßenabschnitt mit der zu untersuchenden Situation der Lärmbelastung für benachbarte Gebäude. Das erste Querprofil zeigt z. B., dass senkrechte Wände im Einschnitt der Straße ungünstige Lärmreflexionen auf die Fahrbahn und flach in die Umgebung zur Folge haben. Sind die Wände des Einschnittes geneigt wie im zweiten Querprofil, so liegen günstigere Lärmreflexionen vor. Die Reflexionen werden stärker nach oben gelenkt. Das dritte Querprofil mit noch stärker geneigten Böschungsebenen im Einschnitt der Straße macht die noch günstigeren Reflexionen nach oben deutlich. Diese stärkere Neigung ist allerdings verbunden mit dem Nachteil einer weiten Öffnung und damit eines größeren Einschnittes in die Landschaft.

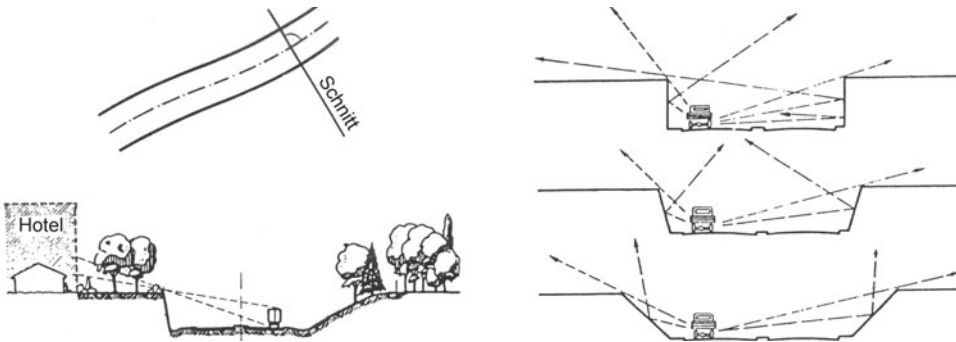


Bild 11.25: Querprofile zur Untersuchung der Lärmreflexion von Straßenabschnitten

11.4 Dachausmittlung

Ein weiterer Anwendungsbereich der kotierten Projektion, auch in Verbindung mit Geländedarstellungen, stellt die Dachausmittlung dar. **Dachausmittlung** ist die Bestimmung der Schnittgeraden von verschiedenen Dachebenen, die zur Überdachung eines Gebäudes verwendet werden. Die Dächer können aus unterschiedlichen Grundformen zusammengesetzt sein. Die wichtigsten Grundformen sind: Pultdach, Satteldach und Walmdach (Bild 11.26).

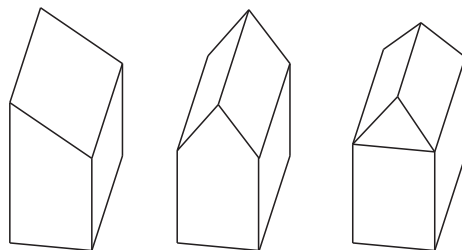


Bild 11.26: Dachgrundformen - Pultdach, Satteldach und Walmdach

Um eine Dachausmittlung durchzuführen, werden die Abschlusskanten (Traufen) der Außenmauern eines Hauses betrachtet. Diese bilden im allgemeinen ein Vieleck. Durch diese Traufen werden Dachebenen in der gewünschten Neigung gelegt und die gegenseitigen Verschneidungen ermittelt. Die Traufen sind meistens horizontal und können dann als Höhenlinien der Dachebenen verwendet werden. Punkte der Schnittgeraden der Dachebenen werden mit Hilfe von Schichtenebenen (Bild 11.27) herausgefunden. Die Schichtenebenen schneiden die Dachebenen in Höhenlinien gleicher Höhe. Daher sind die Schnittpunkte der Dachhöhenlinien gleicher Höhe Punkte der Schnittgeraden der verschiedenen Dachebenen.

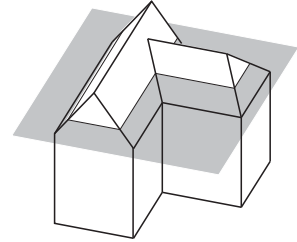


Bild 11.27: Höhenlinien der Dachebenen

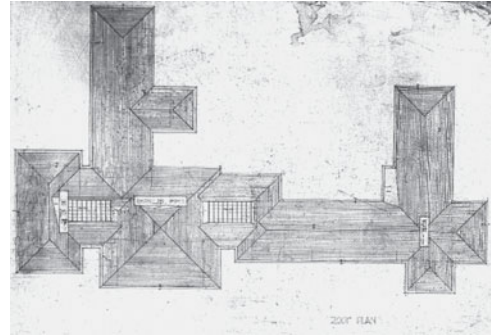


Bild 11.28: Dachaufsicht und Dachausmittlung - Haus für Avery Coonley, Riverside, Illinois, USA, 1907, Frank Lloyd Wright

Bei der Konstruktion im Grundriss können zwei Fälle unterschieden werden:

1. die Dachebenen sind gleich geneigt,
2. die Dachebenen sind unterschiedlich geneigt.

11.4.1 Dachausmittlung bei gleich geneigten Dachebenen

Werden durch ein Traufvieleck Dachebenen mit gleicher Neigung gelegt, so spielt die Dachneigung bei der Konstruktion keine Rolle.

Sind zwei Traufen horizontal auf gleicher Höhe, aber nicht parallel, so gilt:



Der Grundriss der Schnittgeraden zweier gleich geneigter Dachebenen ist eine Winkelhalbierende der Grundrisse der Traufen.

Sind zwei Traufen horizontal, auf gleicher Höhe und parallel, so gilt:



Der Grundriss der Schnittgeraden zweier gleich geneigter Dachebenen ist die Mittelparallele der Grundrisse der Traufen.

Durch Einzeichnen der Winkelhalbierenden bzw. Mittelparallelen kann jeder beliebige Grundriss mit gleich geneigten Ebenen überdacht werden (Bild 11.28 - 11.30).

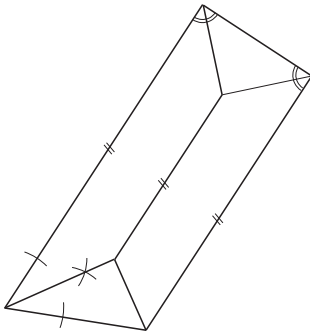


Bild 11.29: Schnittgeraden der Dachebenen

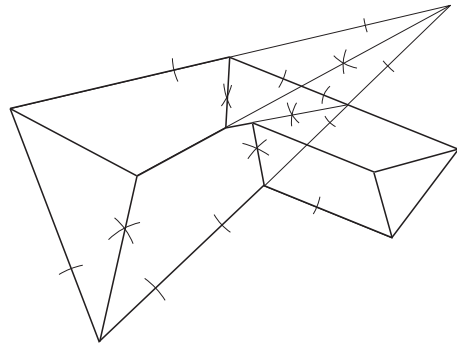


Bild 11.30: Walmdach über sechseckigem Grundriss

11.4.2 Dachausmittlung bei unterschiedlich geneigten Dachebenen

Sollen die Dachebenen unterschiedlich geneigt sein, so spielt bei der Konstruktion der Schnittgeraden die Dachneigung eine Rolle. Daher müssen dann mit Hilfe einer Schichtenebene die Höhenlinien der verschiedenen Dachebenen gesucht werden (vgl. Bild 11.27). Diese Schichtenebene kann in beliebiger Höhe gewählt werden, da zum Auffinden der Schnittgeraden nur entscheidend ist, dass die Höhenlinien der verschiedenen Dachebenen in gleicher Höhe liegen.

Betrachtet man die Seitenrisse der Dachebenen mit unterschiedlicher Neigung α und β , so können hier die zugehörigen Grundrissabstände d_α und d_β gleich hoher Höhenlinien in der Höhe h , von der Traufe aus gemessen, abgelesen werden. Mit diesen Grundrissabständen können die Höhenlinien im Grundriss parallel zu den Traufen eingezeichnet werden. Die Schnittpunkte, verbunden mit den Eckpunkten der Traufen, ergeben die gesuchten Schnittgeraden der Dachebenen.

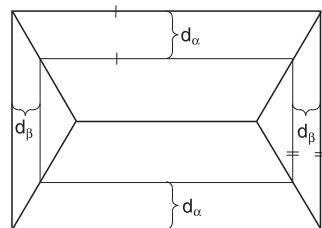
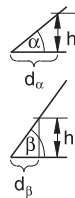


Bild 11.31: Dachausmittlung bei unterschiedlich geneigten Dachebenen

Auch bei einem beliebigen Grundriss können die Schnittgeraden der unterschiedlich geneigten Dachebenen gefunden werden, indem die Höhenlinien der verschiedenen Dachebenen in einer bestimmten Höhe h parallel zu den Traufen eingezeichnet und zum Schnitt gebracht werden.

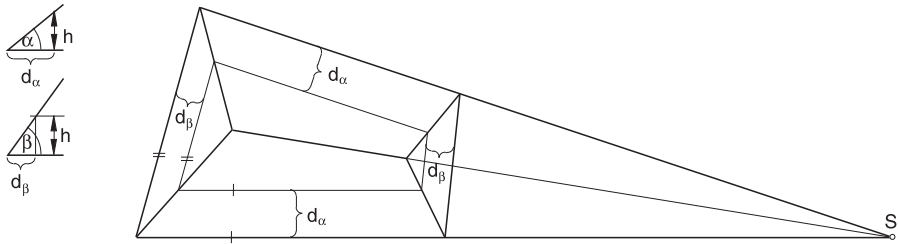


Bild 11.32: Dachausmittlung mit unterschiedlich geneigten Dachebenen und beliebigem Grundriss

Soll z. B. ein rechteckiger Grundriss mit einem Satteldach mit unterschiedlich geneigten Ebenen überdacht werden, dann sind die Traufen und Höhenlinien der beiden Dachebenen zueinander parallel. Die Schnittgerade kann wie in Bild 11.14 durch einen Schnitt der Dachebenen senkrecht zu den Höhenlinien gefunden werden.

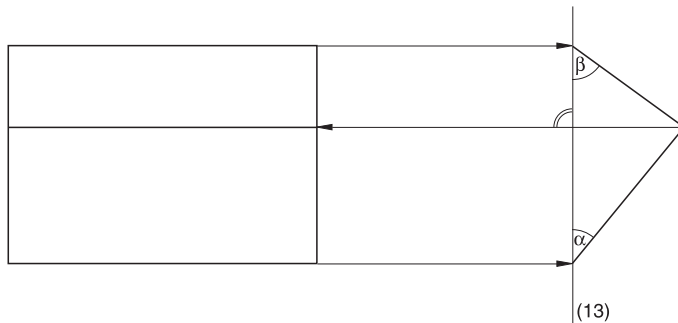


Bild 11.33: Schnittgerade zweier unterschiedlich geneigter Dachebenen bei parallelen Höhenlinien

Die Konstruktionen der Dachausmittlung können auch bei Flachdächern zum Einsatz kommen, um Gefällepläne zur Dachentwässerung herzustellen. Es handelt sich dann zwar um sehr flache Neigungen, aber es werden dieselben Grundprinzipien verwendet.

Werden die Dächer aus gekrümmten Flächen gebildet, so können die Schnittlinien der verschiedenen Dachflächen mittels Hilfsebenen als Schnittkurven gekrümmter Flächen wie in Kapitel 8 (vgl. Bild 8.12) ermittelt werden.

12 NORMALE AXONOMETRIE

In Kapitel 4 wurde die Methode der Axonometrie eingeführt, um anschauliche Bilder von Objekten zu erzeugen. Dabei wurde unterschieden zwischen schiefer und normaler Axonometrie, je nachdem ob die Projektionsstrahlen schief oder senkrecht (normal) zur Bildebene sind (vgl. Bild 4.3 und 4.4). Normale Axonometrien sind anschaulicher als schiefe Axonometrien, weil es eher unserem Sehen entspricht, dass die Bildebene senkrecht zur Blickrichtung gedacht wird. In Bild 12.1 wird das ORF-Landesstudio in Salzburg von Gustav Peichl in einer schiefen Axonometrie (Grundrissaxonometrie), einer Luftaufnahme und einer normaler Axonometrie gezeigt. Es wird deutlich, dass die normale Axonometrie eher der Sicht im Foto entspricht. Objekte in normaler Axonometrie darzustellen ist meist jedoch aufwendiger als in schiefer Axonometrie, da das Koordinatensystem und die Verkürzungen bei normaler Axonometrie nicht beliebig angenommen werden können.



Bild 12.1: Grundrissaxonometrie (schiefe Axonometrie), Luftaufnahme und normale Axonometrie des ORF-Landesstudios, Salzburg, 1972, Gustav Peichl

12.1 Grundgesetze der normalen Axonometrie

Eine Axonometrie wurde in Kapitel 4 definiert als der Parallelriss eines Objektes in einem räumlichen Koordinatensystem, bei dem keine Koordinatenachse bzw. -ebene projizierend ist. Bei normaler Axonometrie darf deshalb die Bildebene π nicht parallel zu einer Koordinatenachse bzw. -ebene sein. Alle drei Koordinatenachsen x , y und z haben daher je einen Schnittpunkt mit der Bildebene π , die Spurpunkte X , Y und Z genannt werden (Bild 12.2). Die Spurpunkte X , Y , Z bestimmen das **Spurendreieck**; die Seiten $XY = s_1$, $YZ = s_2$, $ZX = s_3$ sind die Spurgeraden der drei Koordinatenebenen. Das Spurendreieck bildet mit dem Koordinatendreibein eine Pyramide, deren Höhe der senkrechte Abstand des Koordinatenursprungs O von der Bildebene π ist.



Die Bilder der Koordinatenachsen x^n , y^n und z^n sind die Höhen im Spurendreieck XYZ .

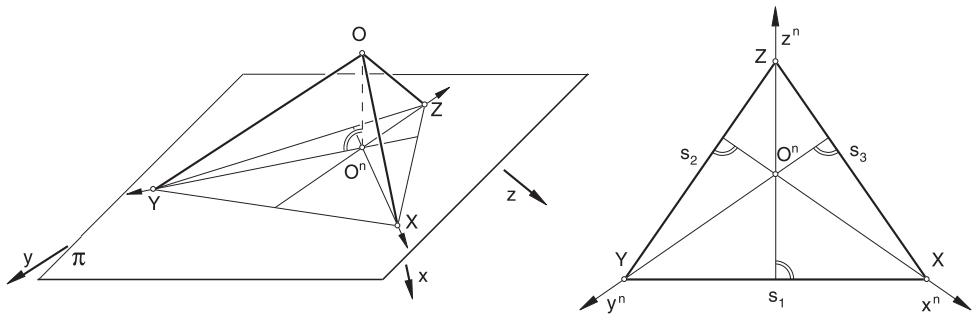


Bild 12.2: Spurendreieck bei normaler Axonometrie

Die z -Achse steht senkrecht auf der xy -Ebene und damit senkrecht zu allen Geraden der xy -Ebene, also auch senkrecht zu s_1 . Da bei senkrechter Parallelprojektion rechte Winkel dann unverzerrt erscheinen, wenn ein Schenkel parallel zur Bildebene ist (hier s_1), muss z^n senkrecht zu s_1 sein. Ein entsprechender Beweis kann für die x^n - und y^n -Achse geführt werden.

Über das Spurendreieck bei normaler Axonometrie ist bekannt, dass es immer spitzwinklig ist. Dies folgt aus der Tatsache, dass rechte Winkel zwischen den Koordinatenachsen, z. B. zwischen der x - und y -Achse, in stumpfe Winkel zwischen ihren Bildern, der x^n - und y^n -Achse übergehen¹.

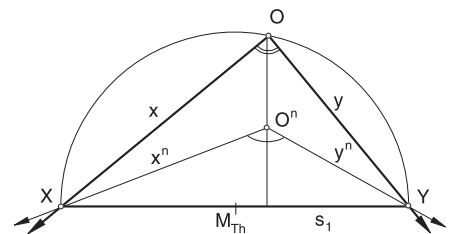


Bild 12.3: Stumpfer Winkel zwischen x^n - und y^n -Achse

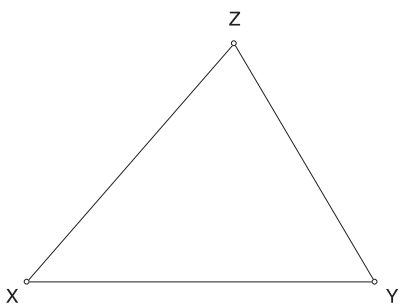


Bild 12.4: Vorgabe einer normalen Axonometrie durch ein spitzwinkliges Spurendreieck oder die Bilder der Koordinatenachsen

1. Zum Beweis s. F. Reutter: Darstellende Geometrie. Band 1. 12. Auflage, G. Braun Verlag Karlsruhe 1979, S. 175 f.

Eine normale Axonometrie ist also durch die Vorgabe eines beliebig beschrifteten spitzwinkligen Dreiecks als Spurendreieck oder der Bilder der Koordinatenachsen mit sich stumpfwinklig schneidenden positiven Halbachsen festgelegt. Im ersten Fall können die Bilder der Koordinatenachsen als Höhen im Spurendreieck konstruiert werden. Im zweiten Fall ist das Spurendreieck nur bis auf Ähnlichkeit bestimmt. Das bedeutet eine Parallelverschiebung der Bildebene; dadurch wird das Bild des Objekts nicht verändert.

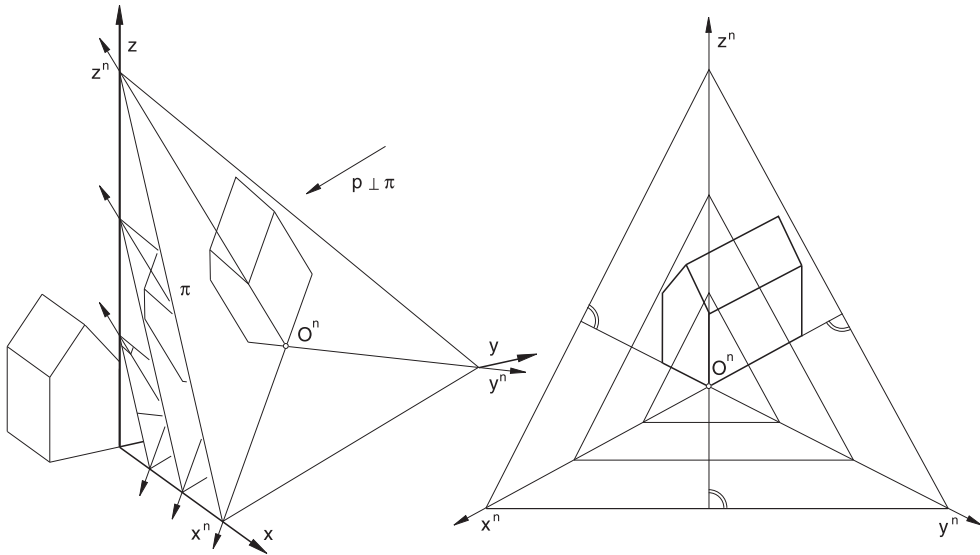


Bild 12.5: Ähnliche Spurendreiecke

Bei der Beschriftung des Spurendreiecks bzw. der Koordinatenachsen ist darauf zu achten, ob der Koordinatenursprung O hinter oder vor der Bildebene liegen soll:

O hinter der Bildebene \rightarrow xy -Ebene wird von oben betrachtet \rightarrow Übersicht

O vor der Bildebene \rightarrow xy -Ebene wird von unten betrachtet \rightarrow Untersicht

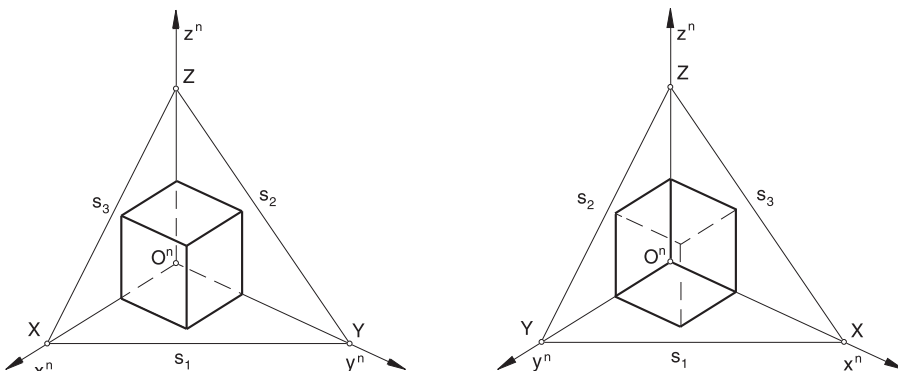


Bild 12.6: Übersicht und Untersicht eines Objektes in normaler Axonometrie

Bei einer senkrechten Parallelprojektion werden Strecken, die nicht parallel zur Bildebene sind, stets verkürzt (vgl. Bild 2.12). In der normalen Axonometrie sind also die Bilder der Einheitsstrecke e_x , e_y und e_z im Vergleich zu der Originaleinheitsstrecke e verkürzt (Bild 12.7). Ist das Spurendreieck XYZ oder das Bild der Koordinatenachsen gegeben, so sind die Verkürzungen schon bestimmt und nicht mehr frei wählbar wie bei der schiefen Axonometrie. Die Verkürzungen können konstruktiv ermittelt werden.

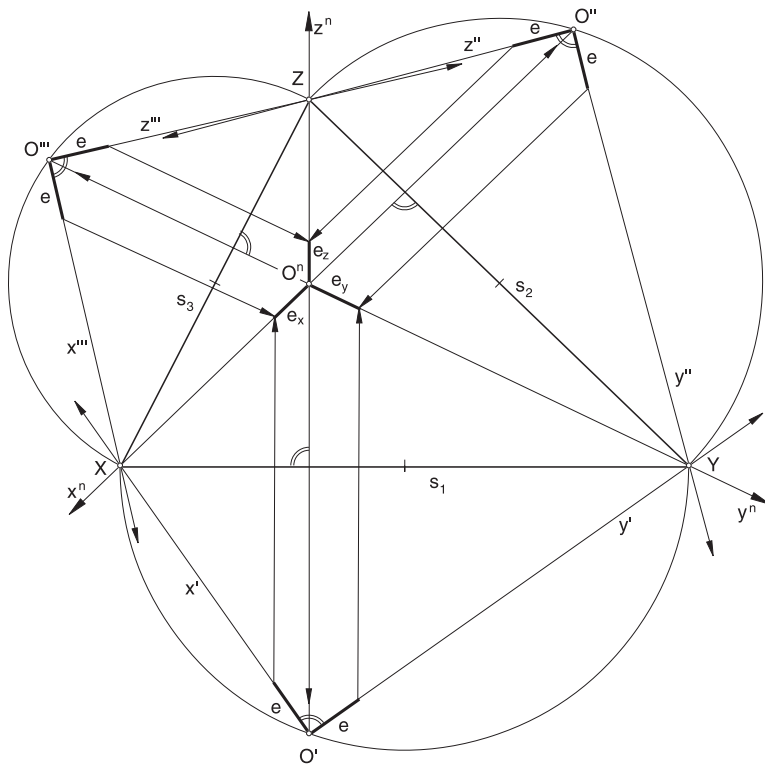


Bild 12.7: Ermitteln der Verkürzungsverhältnisse

Die Koordinatenebenen werden um ihre Spuren in die Bildebene geklappt. Sie sind dann unverzerrt, d. h. in wahrer Gestalt sichtbar. Die xy -Ebene wird um die Spur s_1 in die Bildebene geklappt. Beim Umklappen bewegt sich der Koordinatenursprung O auf einem Kreis senkrecht zur Spur s_1 . O' muss also auf der Senkrechten zu s_1 durch O^n liegen. Da die x - und y -Achse im Raum einen rechten Winkel einschließen, muss O' außerdem auf dem Thaleskreis über der Strecke XY liegen. Auf den in die Bildebene geklappten Koordinatenachsen x' und y' können die wahren Einheitsstrecken e eingezeichnet werden. Durch Zurückklappen erhält man auf x^n und y^n die verkürzten Bilder der Einheitsstrecken e_x und e_y . Analog kann mit den Koordinatenebenen yz und xz verfahren werden.

Für die drei Verkürzungsverhältnisse gilt folgender Zusammenhang:

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 2$$

mit $\lambda = \frac{e_x}{e} = \cos \varphi$, $\mu = \frac{e_y}{e} = \cos \psi$ und $\nu = \frac{e_z}{e} = \cos \omega$.²

λ ist also die Verkürzung auf der x^n -Achse, μ auf der y^n -Achse und ν auf der z^n -Achse in der normalen Axonometrie. Die Verkürzungen sind abhängig von den Neigungswinkeln φ , ψ und ω der Koordinatenachsen x , y und z gegen die Bildebene π .

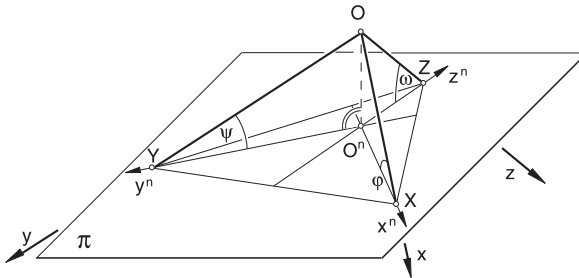


Bild 12.8: Zusammenhang zwischen den Neigungswinkeln der Koordinatenachsen gegen die Bildebene und den Verkürzungen

Aus diesen Zusammenhängen kann auch ermittelt werden, unter welchen Voraussetzungen eine Monometrie, eine Dimetrie und eine Trimetrie entsteht.

Bei einer **Monometrie** sind alle drei Verkürzungen sowie alle drei Neigungswinkel φ , ψ und ω gleich groß, und es entsteht ein gleichseitiges Spurendreieck:

$$\lambda = \mu = \nu \quad \lambda = \mu = \nu = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{und} \quad e_x \div e_y \div e_z = 1 \div 1 \div 1.$$

Bei einer **Dimetrie** sind zwei Verkürzungen sowie zwei Neigungswinkel gleich groß, und es entsteht ein gleichschenkliges Spurendreieck:

$$\lambda \neq \mu = \nu \quad \lambda = \frac{1}{3}\sqrt{2}, \quad \mu = \nu = \frac{2}{3}\sqrt{2} \quad \text{und} \quad e_x \div e_y \div e_z = \frac{1}{2} \div 1 \div 1.$$

Einer **Trimetrie** liegt ein beliebiges Spurendreieck zugrunde mit drei unterschiedlichen Verkürzungen. Bei beliebiger Wahl der Blickrichtung k entsteht im allgemeinen eine Trimetrie mit $\lambda \neq \mu \neq \nu$, bei der drei unterschiedliche Neigungswinkel vorliegen.

Zur Konstruktion einer normalen Axonometrie ist am besten das Einschneideverfahren anzuwenden.

2. Zum Beweis s. F. Reutter: Darstellende Geometrie I, s. o.; S. 181.

12.2 Einschneideverfahren

Zur Wahl eines geeigneten Bildes des Koordinatensystems ist es bei normaler Axonometrie zweckmäßig und anschaulich, mit Hilfe des Einschneideverfahrens (vgl. Kap. 4.3.2) zu arbeiten. Dazu wählt man eine geeignete Blickrichtung k in Grund- und Aufriss bzw. Kreuzriss. Die Lage der Bildebene π ist damit senkrecht zu dieser Blickrichtung k festgelegt. Die Größe des Spurendreiecks ist noch frei wählbar, indem z. B. ein Punkt des Spurendreiecks gewählt wird.³

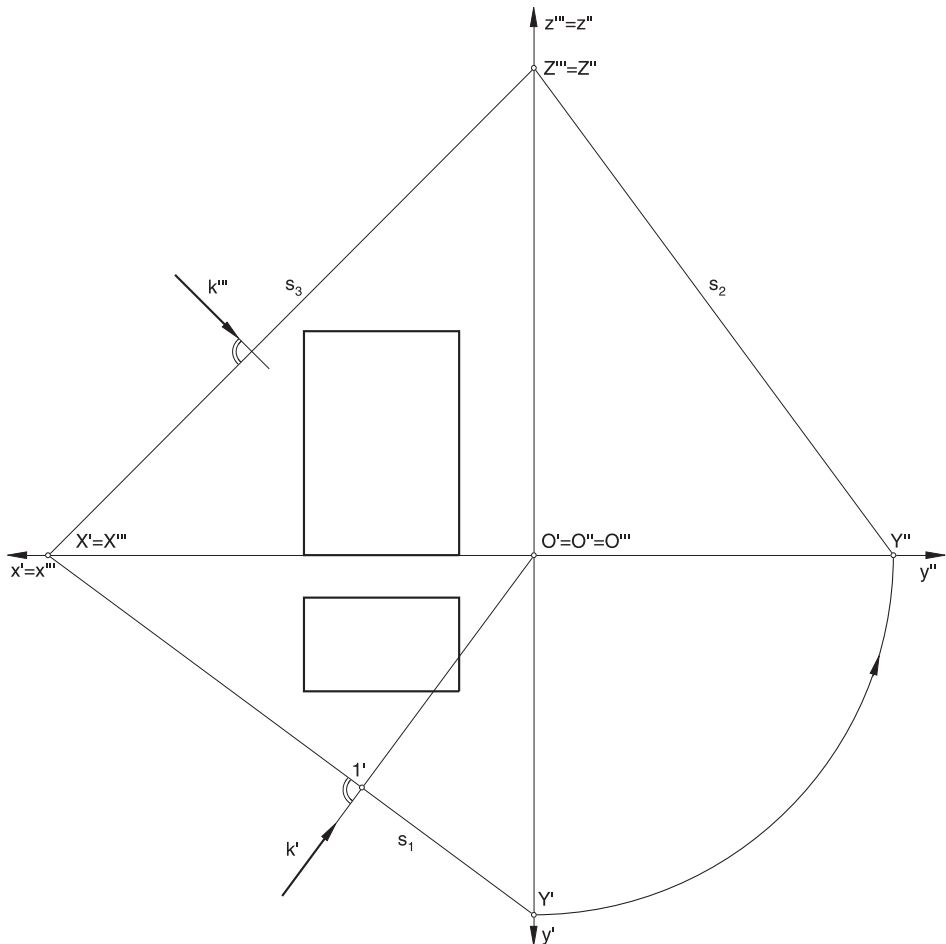


Bild 12.9: Wahl der Blickrichtung k für die normale Axonometrie in Grund- und Kreuzriss

3. Theodor Schmid: Darstellende Geometrie. 1. Band. Walter de Gruyter & Co., Berlin/Leipzig, 1922, S. 255ff.
Vorgehensweise und Beispiel nach Andrzej Zdziarski und Renata Górska, Politechnika Krakowska, Polen.

Das Spurendreieck XYZ kann mittels dieser Informationen gezeichnet werden. Die normale Axonometrie ist damit festgelegt.

1. $s_1 \perp k'$ wird im Grundriss beliebig gewählt.
2. X' und Y' sind die Schnittpunkte von s_1 mit den Koordinatenachsen x' und y' .
3. Die Spur s_3 ist nun festgelegt durch $X''=X'''$ und $s_3 \perp k'''$. Punkt Z''' ist der Schnittpunkt von s_3 mit der Koordinatenachse z''' .
4. Das Lot von O' auf s_1 ergibt Punkt $1'$. In der normalen Axonometrie ist $1''$ der Höhenfußpunkt der z'' -Achse im Spurendreieck XYZ. Oder: s_2 wird im Aufriss ermittelt. Dann kann das Spurendreieck aus den drei Seiten s_1 , s_2 und s_3 konstruiert werden.

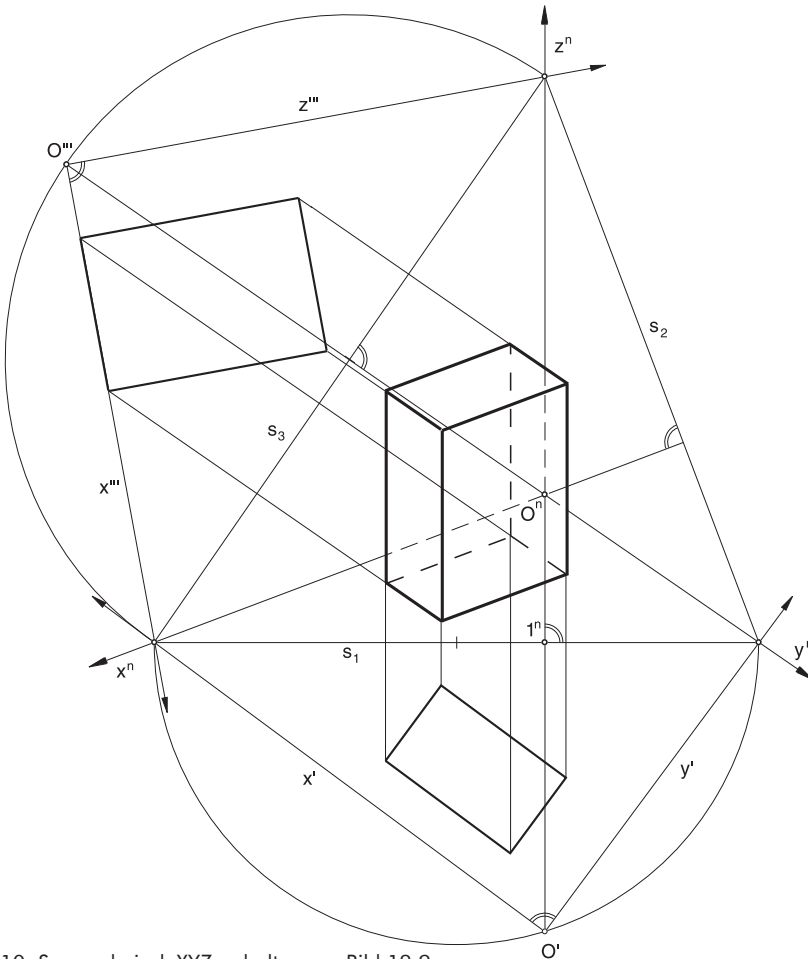


Bild 12.10: Spurendreieck XYZ, erhalten aus Bild 12.9

Durch Umklappen der Koordinatenebenen um ihre Spuren in die Bildebene können die Verkürzungsverhältnisse wie in Bild 12.7 bestimmt werden.

Durch diese Vorgehensweise wird ermittelt, wie die Risse, in Bild 12.11 Grund-, Auf- und Kreuzriss, für das Einschneideverfahren hingelegt werden müssen. Nach entsprechender Anordnung der Risse kann das normal-axonometrische Bild des Objekts mittels Einschneidestralen gezeichnet werden (Bild 12.12). Dabei ist zu beachten, dass man durch das Umklappen "nach außen" von der anderen Seite auf die Koordinatenebene sieht, d. h. die Risse müssten seitenverkehrt aufgezeichnet werden. Das folgende Beispiel soll dies verdeutlichen.

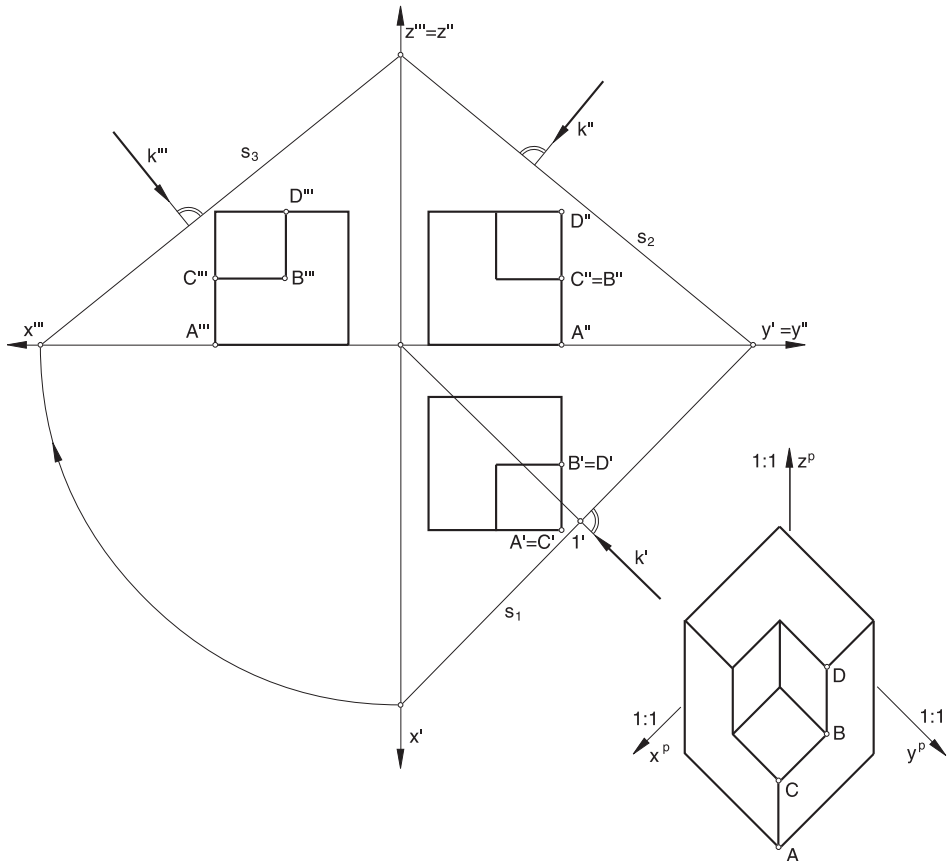


Bild 12.11: Grund-, Auf- und Kreuzriss sowie Grundrissaxonometrie eines Objektes mit Wahl der Blickrichtung k für die normale Axonometrie

Bei komplizierten Objekten kann dieses dann erforderliche seitenverkehrte Aufzeichnen der zugeordneten Normalrisse sehr lästig sein. Da die Zuordnung der Normalrisse nach der Ausrichtung am Spurendreieck aufgelöst ist, wird die Verknüpfung der verschiedenen Risse eines Punktes für die Vorstellung zusätzlich erschwert. Die seitenverkehrten Risse lassen sich vermeiden, wenn die Koordinatenebenen statt "nach außen" "nach innen" in die Bildebene umgeklappt werden (Bild 12.13).

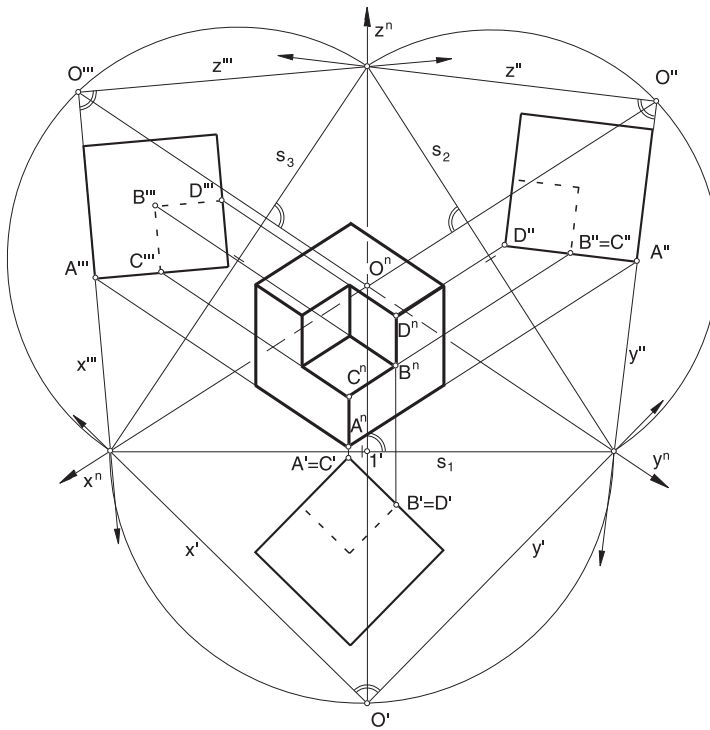


Bild 12.12: Konstruktion der normalen Axonometrie nach dem Einschneideverfahren aus den seitenverkehrten Normalrissen

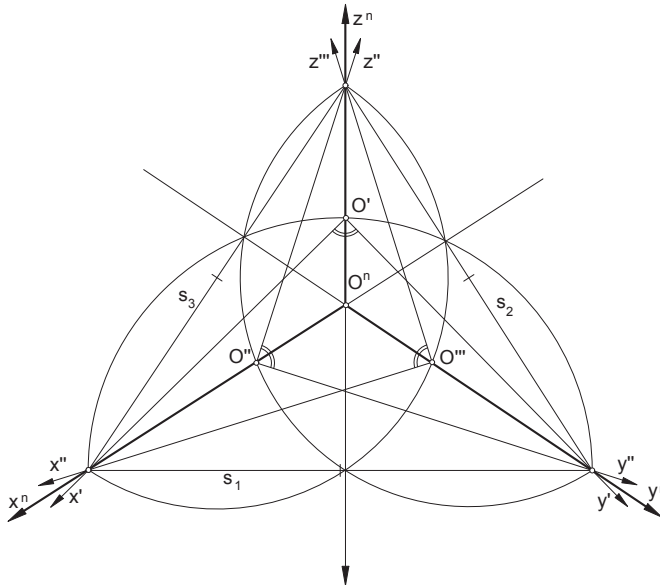


Bild 12.13: Umklappen der Koordinatenebenen "nach innen" in die Bildebene

Meistens werden allerdings dann die Risse und das normal-axonometrische Bild einander überdecken. Dieser Verwirrung kann dadurch aus dem Wege gegangen werden, dass die Risse in Richtung der zugehörigen Einschneidestrahlen nach außen parallel verschoben werden. Das normal-axonometrische Bild ändert sich dadurch nicht und die zugeordneten Normalrisse können wie gegeben, d. h. nicht seitenverkehrt, verwendet werden.

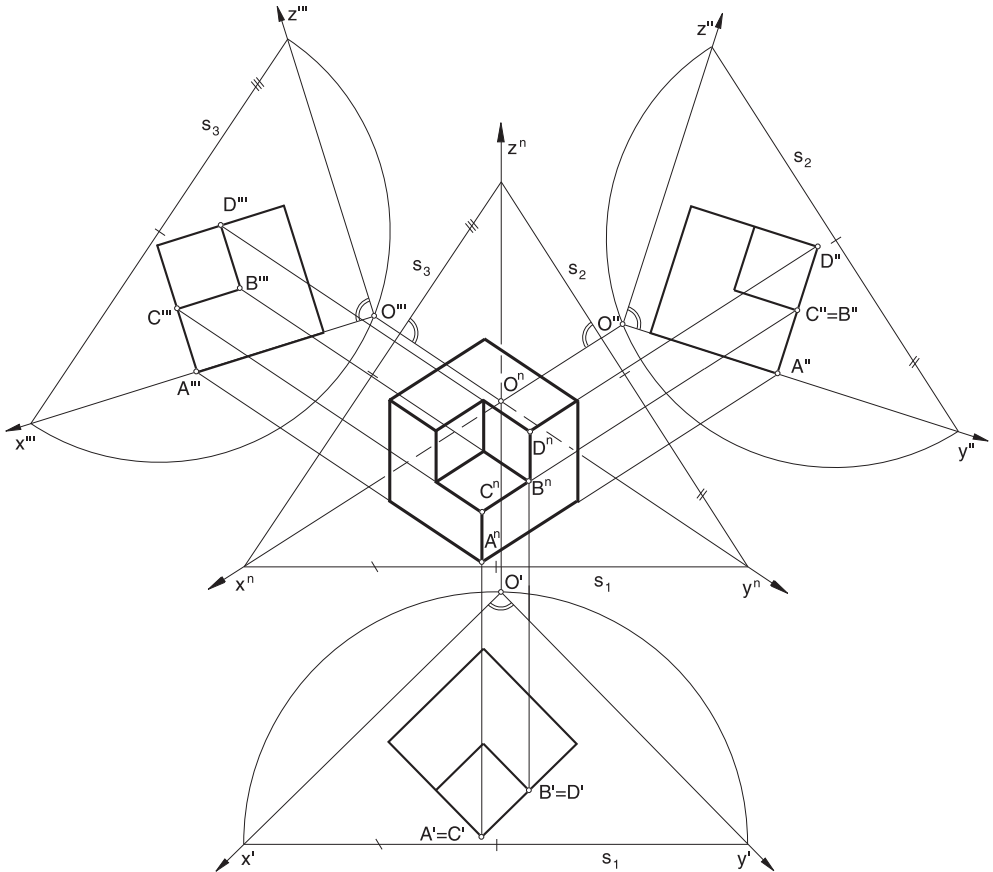


Bild 12.14: Konstruktion der normalen Axonometrie aus den auseinander geschobenen, "nach innen" geklappten Normalrissen

Der Vorteil der Konstruktion einer normalen Axonometrie mit Hilfe dieses Einschneideverfahrens liegt in der leicht vorstellbaren Wahl der Blickrichtung. Nach der Wahl der Blickrichtung in Grund- und Aufriss bzw. Kreuzriss ist die normale Axonometrie bestimmt. Die Vorgehensweise ist ähnlich derjenigen beim Zeichnen einer Perspektive, nur muss dort zusätzlich die Lage des Auges und der Bildebene gewählt werden (vgl. Kap. 13).

Besonders geeignet ist die normale Axonometrie für Objekte, in denen eine Kugel enthalten ist, da der Umriss der Kugel bei senkrechter Parallelprojektion ein Großkreis ist (vgl. Bild 7.43). Die normale Axonometrie der Wiener Secession (stark vereinfacht), gebaut 1898 von Joseph Maria Olbrich, in Bild 12.15 soll dies verdeutlichen.

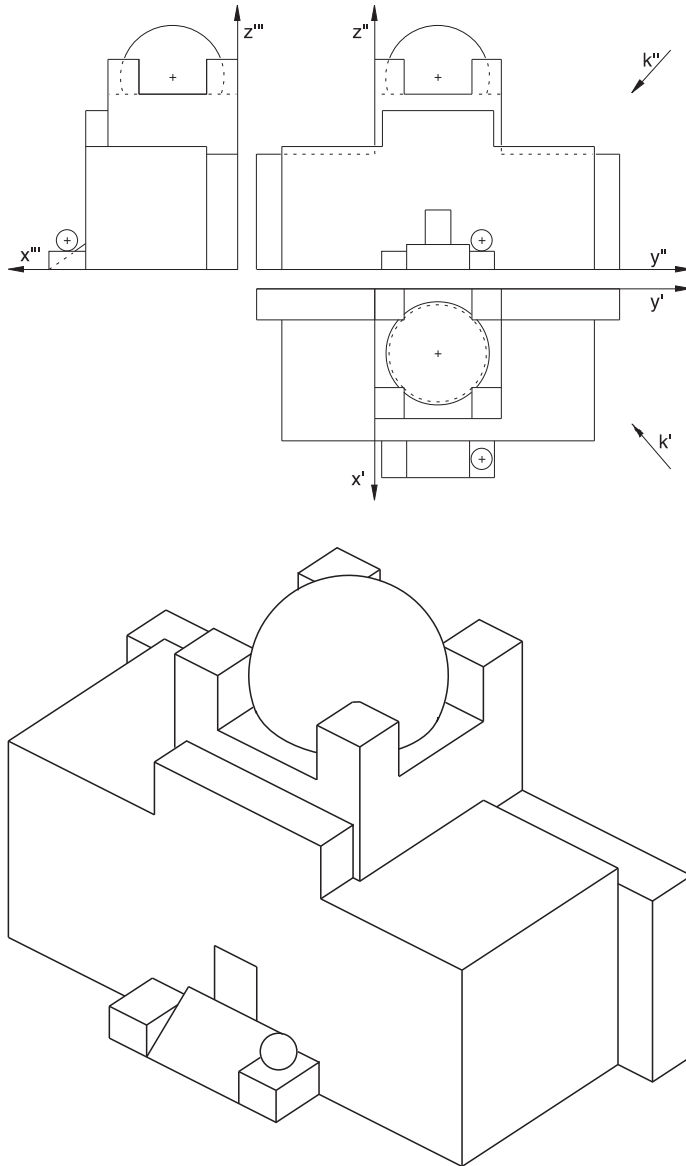


Bild 12.15: Normale Axonometrie der Wiener Secession (stark vereinfacht), 1898, Joseph Maria Olbrich

Die Bilder 12.16 und 12.17 zeigen Fotos der Wiener Secession mit der ornamentierten Kuppel aus vergoldeten Lorbeerblättern und Beeren. Die Zeichnung der normalen Axonometrie des Gebäudes macht deutlich, dass der Umriss der kugelförmige Kuppel alleine durch die Konstruktion des Mittelpunktes gefunden werden kann, da sich der Umriss dann als Großkreis um den Mittelpunkt der Kugel darstellt.

Am Beispiel einer auf die geometrischen Grundformen reduzierten Zeichnung der Wagenfeld-Leuchte von Wilhelm Wagenfeld, der diese Leuchte in verschiedenen Ausführungen 1923 und 1924 entworfen hat, soll genauer erläutert werden, wie sich die Konstruktion der Kugel und der Ellipse als Bild des kreisförmigen Kugelschnittes in einer normalen Axonometrie vereinfacht. Die Achsen und Scheitel der Ellipse können einfach gefunden werden, da die Hauptachse der Ellipse genau die Länge des Kreisdurchmessers haben muss und damit parallel zur Bildebene liegt. Wenn also der Kreis wie bei der Leuchte parallel zur Grundrissebene liegt, ist das Urbild der Hauptachse im Grundriss die Senkrechte zu k' und folglich parallel zur Spur s_1 .



Bild 12.16: Wiener Secession mit Kugel, Wien, 1898, Joseph Maria Olbrich



Bild 12.17: Detail der Kugel der Wiener Secession, Wien, 1898, Joseph Maria Olbrich

Bei Normalprojektion werden Strecken stets verkürzt (vgl. Kapitel 2.1.2). Also ist der wahre Kreisdurchmesser der größte Ellipsendurchmesser im Bild, damit die Hauptachse der Ellipse. Die Nebenachse steht darauf senkrecht.

1. Das Spurendreieck wird zunächst in Bild 12.18 aus der Blickrichtung k ermittelt und für die Konstruktion der normalen Axonometrie in Bild 12.19 gezeichnet.
2. Durch Umklappen der Koordinatenebenen xy und yz , hier nach außen, wird mit Hilfe der Thaleskreise die Lage von Grund- und Aufriss zum Zeichnen der normalen Axonometrie ermittelt.
3. Die Einschneidestrahlen durch M' und M'' schneiden einander im Kugelmittelpunkt M^n in der normalen Axonometrie. Kreis um M^n mit Radius der Kugel liefert den Umriss der Kugel.
4. Um die Ellipse als Bild des kreisförmigen Fußes der Leuchte zu finden, wird der Mittelpunkt der Ellipse über die Einschneidestrahlen durch den Mittelpunkt des Kreises konstruiert.
5. Die Hauptachse der Ellipse ist parallel zur Spur s_1 bzw. senkrecht zur z^n -Achse. Die Nebenachse ist wiederum dazu senkrecht, verläuft also in z^n -Richtung. Die Länge der Nebenachse wird aus Grund- und Aufriss mittels Einschneidestrahlen ermittelt.

Bild 12.18: Grund- und Aufriss der Wagenfeld-Leuchte und Ermitteln des Spurendreiecks

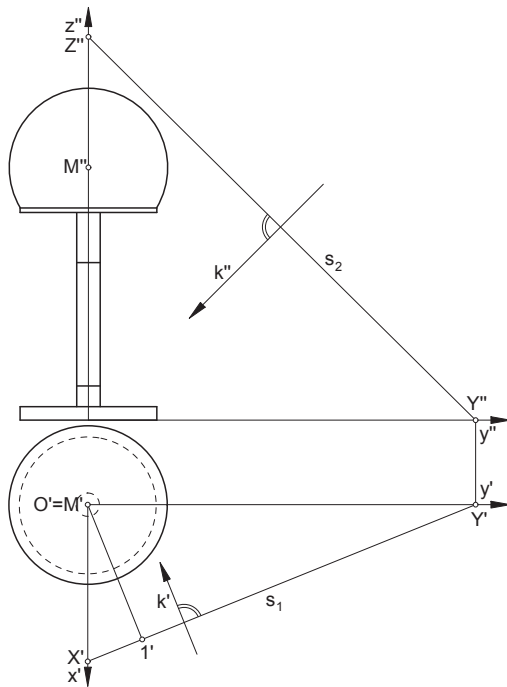
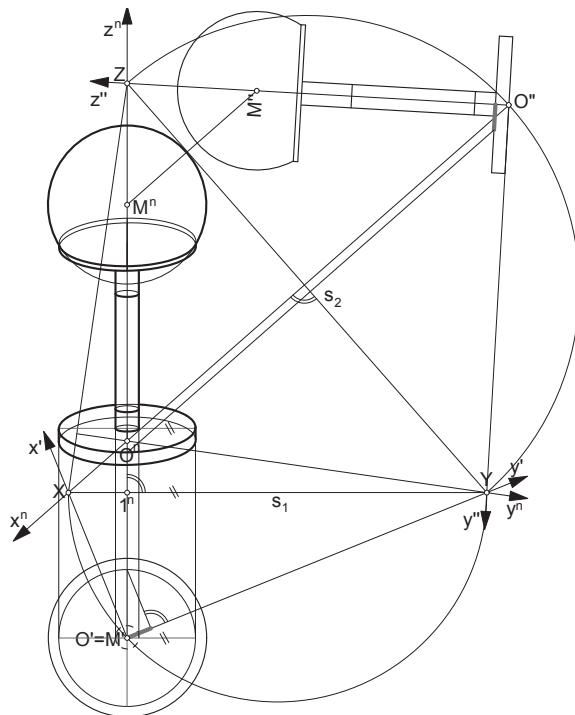


Bild 12.19: Konstruktion der normalen Axonometrie der Wagenfeld-Leuchte



Das Titelblatt dieses Buches zeigt eine normale Axonometrie eines Wohnhauses von Beat Consoni für Thomas Sonderegger in Frasnacht in der Nähe des Bodensees in der Schweiz, das 1994 gebaut wurde. In Bild 12.20 ist dieses Wohnhaus mit Blick auf die West- und Ostfassade zu sehen. Das Gebäude wird aus mehreren Quadern gebildet, die auf einem ins Gelände eingeschobenen Sockel ruhen. Die Quader staffeln sich den Südhang hinauf. Die normale Axonometrie auf dem Titelblatt ist mit Hilfe des Einschneideverfahrens, wie in diesem Kapitel erläutert, gezeichnet worden. Bild 12.21 zeigt das Ermitteln des Spurendreiecks für die normale Axonometrie in den vereinfacht angegebenen Rissen des Wohnhauses, Grund-, Auf- und Kreuzriss, nachdem eine Blickrichtung k durch Festlegen in den Rissen gewählt wurde. Die Risse können dann entsprechend des Spurendreiecks in die Zeichenebene gelegt werden. Zur Konstruktion der normalen Axonometrie sind zwei Risse ausreichend. In Bild 12.22 wurde das normal-axonometrische Bild des Gebäudes mittels Einschneidestrahlen aus Grund- und Aufriss, hier nach innen geklappt, konstruiert.

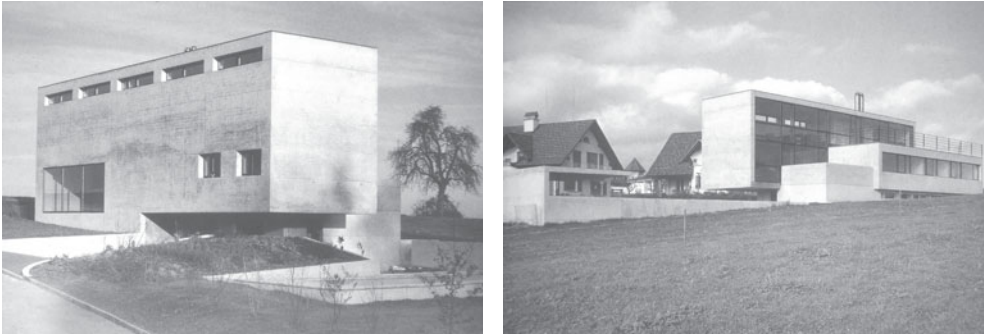


Bild 12.20: Blick auf die West- und Ostfassade des Sonderegger-Wohnhauses, Frasnacht, Schweiz, 1994, Beat Consoni

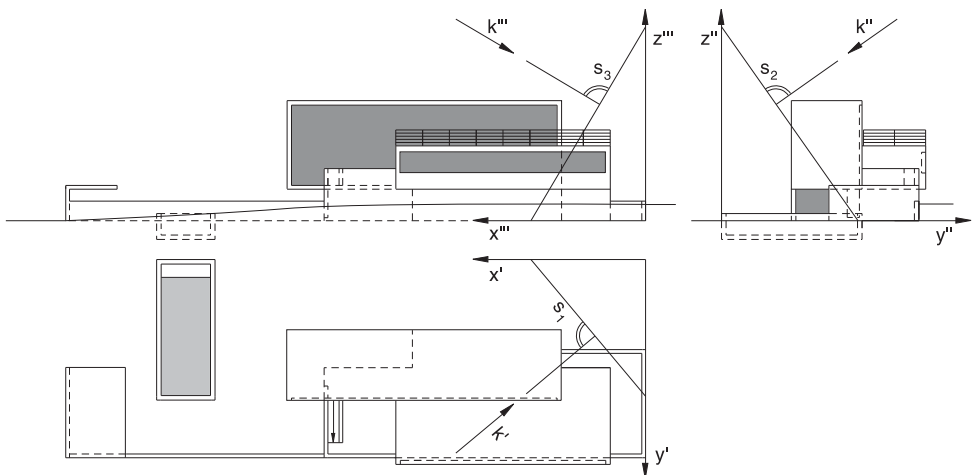


Bild 12.21: Vereinfachte Risse des Sonderegger-Wohnhauses von B. Consoni mit gewählter Blickrichtung k

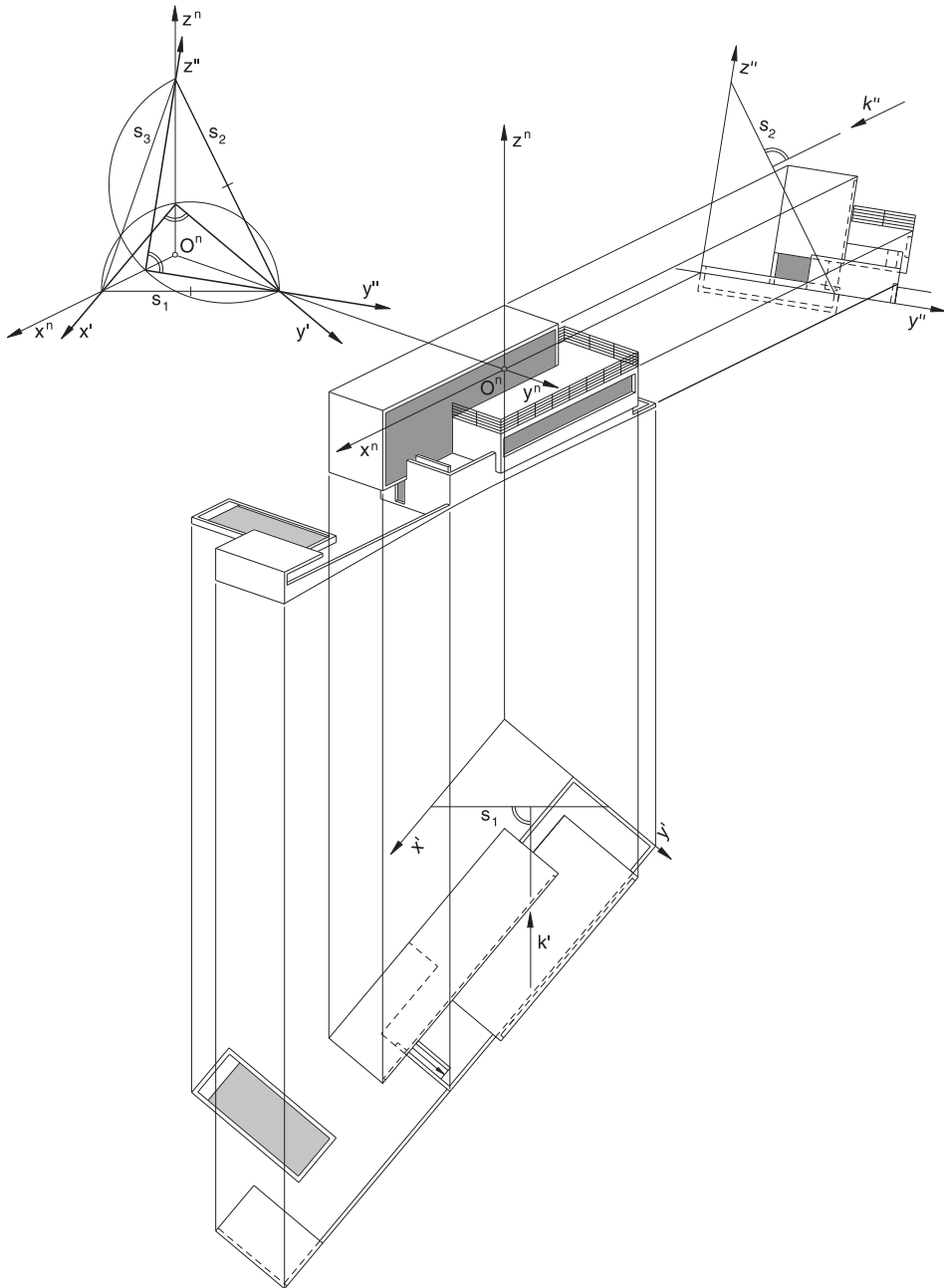


Bild 12.22: Konstruktion der normalen Axonometrie des Sonderegger-Wohnhauses von Beat Consoni

12.3 Computergestützte normale Axonometrie

Die in CAD-Programmen implementierten Axonometrien sind häufig normale Axonometrien, da diese von der Vorgabe der Parameter her sehr viel einfacher zu handhaben sind (vgl. Kapitel 4.6) und ohnehin die besseren Bilder liefern. Nachdem die Blickrichtung gewählt wurde, kann das CAD-Programm die normale Axonometrie berechnen.

Ähnlich wie in Kapitel 12.2 muss in einem CAD-Programm die Blickrichtung z. B. mit Hilfe von zwei Winkeln gewählt werden:

1. Winkel zur x-Achse
2. Winkel zur xy-Ebene.

Mit Hilfe dieser zwei Winkel ist die Blickrichtung k im Raum festgelegt und damit die normale Axonometrie.

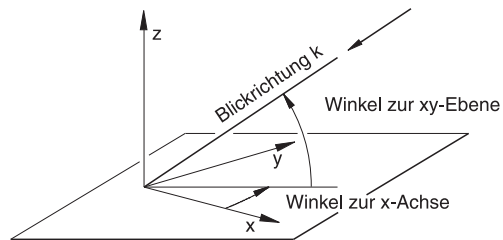
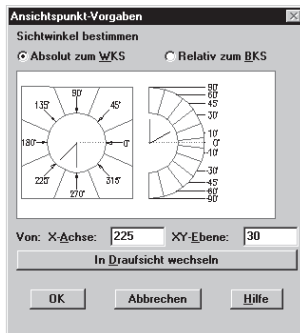


Bild 12.23: Wahl der Blickrichtung für eine normale Axonometrie am Beispiel AutoCAD®

Der Begriff "Normale Axonometrie" wird in AutoCAD® nicht verwendet. Die Option "3D-Ansicht" mit der Wahl des Ansichtspunktes (APUNKT), wie oben beschrieben, erzeugt normal-axonometrische Bilder. Eine ähnliche Vorgehensweise findet man auch in anderen CAD-Programmen bzw. die Wahl findet durch interaktives Drehen des Koordinatensystems (vgl. Bild 4.38 und 4.39) statt. Wird durch den Benutzer nur die Blickrichtung festgelegt, erzeugt das CAD-Programm immer eine normale Axonometrie.

13 ZENTRALPROJEKTION - PERSPEKTIVE

Die Zentralprojektion liefert anders als die Parallelprojektion Bilder von Objekten wie wir sie wahrnehmen, da diese dem Sehvorgang nachgebildet ist. Die abzubildenden Objekte werden bei der Zentralprojektion der Raumwahrnehmung eines Betrachters angepasst. Der Betrachterstandpunkt hat einen entscheidenden Einfluss auf das durch die Zentralprojektion entstehende Bild, die **Perspektive**. So kann durch das Zeichnen einer Perspektive ein Foto eines noch nicht vorhandenen Gebäudes von einem bestimmten Standpunkt aus vorweggenommen werden. Bild 13.1 zeigt eine gezeichnete Perspektive und ein Foto mit ähnlichen Betrachterstandpunkten am Beispiel der Maastricht Academy von Wiel Arets. In einer gezeichneten Perspektive können besondere Eigenschaften des Gebäudes hervorgehoben bzw. verändert gezeigt werden. Unterschiedliche Betrachterstandpunkte fangen verschiedene Eindrücke des Objektes ein.

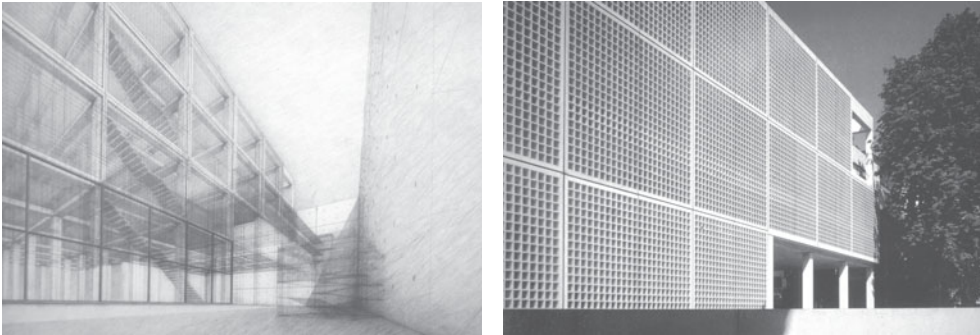


Bild 13.1: Perspektivzeichnung und Foto der Maastricht Academy for Arts and Architecture, Maastricht, 1989-93, Wiel Arets

Die Eigenschaften eines Objektes werden bei Zentralprojektion stark verändert. Parallele Geraden bleiben im allgemeinen nicht parallel, Teilverhältnisse bleiben nicht erhalten (vgl. Kapitel 2.2.2). Daher ist die Abbildungsmethode der Zentralprojektion nicht geeignet, um das Objekt und die Raumstrukturen aufzuzeigen, sondern um Raumeindrücke und die Wirkung des Entwurfs von einem bestimmten Betrachterstandpunkt aus zu vermitteln. Axonometrie und Perspektive liefern beide anschauliche Bilder räumlicher Objekte und nehmen im Kommunikationsprozess zwischen Entwerfenden und Entscheidungsträgern eine den Entwurf vermittelnde Rolle ein. Da die Axonometrie auf der Parallelprojektion und die Perspektive auf der Zentralprojektion beruht, unterscheiden sie sich wesentlich in ihren Einsatzmöglichkeiten und Wirkungen.¹ Auf dieser Grundlage können Axonometrie und Perspektive zu unterschiedlichen Zwecken der Architekturdarstellung gewählt werden.

1. Die Gegenüberstellung auf der folgenden Seite wurde zusammengestellt auf der Grundlage von: B. Schneider: Perspektive bezieht sich auf den Betrachter, Axonometrie bezieht sich auf den Gegenstand. In: Daidalos 1, 1981, S. 81-95.

Axonometrie	Perspektive
<ul style="list-style-type: none"> • Die Axonometrie ist dem Entwurf, dem Objekt näher; sie bezieht sich auf den Gegenstand. • In der Axonometrie werden die Baukörper aufgebaut, Raumstrukturen entwickelt. • Sie umfasst und konstruiert den Raum, nicht die daraus entspringende Wirkung für den Betrachter. • Sie stellt nicht dar wie sich die Dinge zeigen, sondern wie sie sind. 	<ul style="list-style-type: none"> • Die Perspektive bezieht sich auf den Betrachter; in der Perspektive wird die Wirkung des Entwurfs auf einen Betrachter zum Ausdruck gebracht. Sie ist daher dem Publikum, dem Betrachter näher als dem Objekt. • Sie trägt die subjektiven Elemente des Standortes, der Aughöhe, der Stellung und Lage der Bildebene in sich. • Der Raum wird als perspektivische Szene präsentiert.
	
<p>Bild 13.2: Axonometrie einer temporären Wohnanlage im Tessin, 1996, Monika Breu</p> <ul style="list-style-type: none"> • Sie ist am Gegenstand orientiert, ohne die Raumwahrnehmung des Betrachters zu berücksichtigen. • Der Entwurf kann in seinen Phasen auf die visuelle Wirksamkeit und Zusammenspiel der Funktionseinheiten überprüft werden. • Der Raumkörper wird "objektiv" wiedergegeben. • Die Axonometrie stellt dar, was man vom Dargestellten weiß oder: die Axonometrie weiß etwas vom Gegenstand. 	<p>Bild 13.3: Perspektive des Entwurfs der temporären Wohnanlage</p> <ul style="list-style-type: none"> • Sie ist nichts anderes als eine mechanische Kamera; sie versucht den Sehvorgang nachzubilden. • Der Entwurf kann hinsichtlich seiner Wirkung auf den Betrachter von einem bestimmten Standpunkt aus überprüft werden. • Subjektive Raumeindrücke werden vermittelt. • Die Perspektive stellt dar, was man vom Dargestellten sieht oder: die Perspektive weiß etwas vom Betrachter.

13.1 Entwicklung der Perspektive als Nachbildung des Sehens

Bereits in seiner "Optica" entwickelte Euklid eine Geometrie des Sehens. Seine Motivation war es, naturwissenschaftliche Erkenntnisse über Abstände und Entfernungen der Planeten und Sterne aus dem Sehen zu gewinnen. Er formulierte dort schon, dass gleich große Objekte, aber unterschiedlich weit entfernt, unterschiedlich groß erscheinen und diejenigen, die dem Auge näher liegen, größer aussehen. Parallele Geraden würden von weitem betrachtet nicht in gleichem Abstand voneinander erscheinen. Damit formulierte er bereits wichtige Eigenschaften der Perspektive. In der Renaissance griff Alberti² die Ansätze Euklids auf und führte mit dem "velum" (Tuch) eine praktischen Hilfe für das Zeichnen von Perspektiven ein. Die Perspektive entsteht nach seiner Beschreibung dadurch, dass das "velum", platziert zwischen Auge und gesehenem Objekt, die Sehpyramide durchdringt. Das entstandene Bild wird also als Schnitt der Sehpyramide erläutert, vgl. Brook Taylor³ (Bild 13.4).

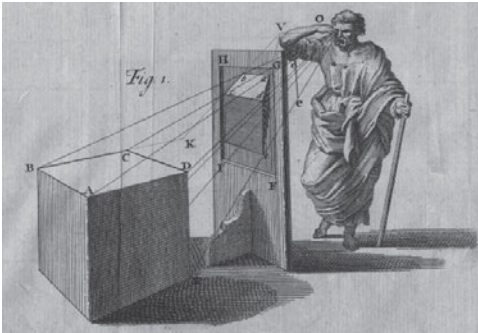


Bild 13.4: Darstellung der Sehpyramide, 1719, Brook Taylor



Bild 13.5: Perspektivmaschine mit Visier, Holzschnitt, 1525, Albrecht Dürer

In den verschiedenen zur Zeit Dürers⁴ entstandenen Seh-/Perspektivmaschinen wurde diese Vorstellung Albertis umgesetzt. Die Zeichenmaschine Dürers zur Darstellung einer Laute (Bild 2.4) ist eher dem Prozess des Zeichnens nachempfunden: die gespannte Schnur steht für die zu zeichnende Gerade. Seine Perspektivmaschine mit Visier (Bild 13.5) möchte ein Bild entsprechend des einäugigen Sehens entstehen lassen, versucht also das Sehen selbst nachzubilden. Aus der Idee der Nachmodellierung des einäugigen menschlichen Sehens entstand das Konzept der Perspektive. Die Methode der Zentralprojektion mit ihren Bestimmungselementen entwickelte sich dann aus der Vorstellung des Projizierens eines räumlichen Objektes von einem Projektionszentrum aus weiter.

2. Leon Battista Alberti: De Pictura (Über die Malkunst). 1435/36.

3. Brook Taylor: New principles of linear perspective or the art of designing on a plane, the representations of all sorts of objects, in a more general and simple method than has been done before. London 1719.

4. Albrecht Dürer: Ueberweisung der Messung, mit dem Zirckel und Richtscheit, in Linien, Ebenen und gantzen corporen. Nürnberg 1525.

13.2 Bestimmungselemente der Zentralprojektion

Der Betrachterstandpunkt, auch **Projektionszentrum** oder **Auge** genannt, ist ein wesentliches Bestimmungselement der Zentralprojektion. Das räumliche Objekt wird von diesem Projektionszentrum aus auf eine Bildebene projiziert. Auge und Bildebene in ihrer Lage zum abzubildenden Gegenstand bestimmen das Bild, die Perspektive. Bei der Abbildungsmethode der Zentralprojektion ist der Bildpunkt P^c eines Punktes P der Durchstoßpunkt des Projektionsstrahles OP (Verbindungsgerade des Auges O und dem Punkt P) mit der Bildebene π (Bild 13.6).

räumliches Objekt $\xrightarrow{\text{Zentralprojektion}}$ Perspektive:
Bild des Objektes

Für die Zentralprojektion und die Perspektive werden folgende Elemente definiert:

O ist das **Projektionszentrum** oder **Auge** der Zentralprojektion

l ist der **Hauptsehstrahl**.

π ist die **Bildebene**, die senkrecht zum Hauptsehstrahl steht.

H ist der **Hauptpunkt** der Perspektive. Er entsteht als Schnittpunkt des Hauptsehstrahls l mit der Bildebene π .

d ist die **Distanz** des Auges von der Bildebene ($d = \overline{OH}$).

π_v ist die **Verschwindungsebene**, die parallele Ebene zur Bildebene π durch das Auge O . Alle Punkte der Verschwindungsebene besitzen keine Bildpunkte.

h ist der **Horizont**, die Schnittgerade der horizontalen Ebene durch das Auge O mit der Bildebene π .

s ist die **Standlinie**, die Schnittgerade der Standebene mit der Bildebene π .

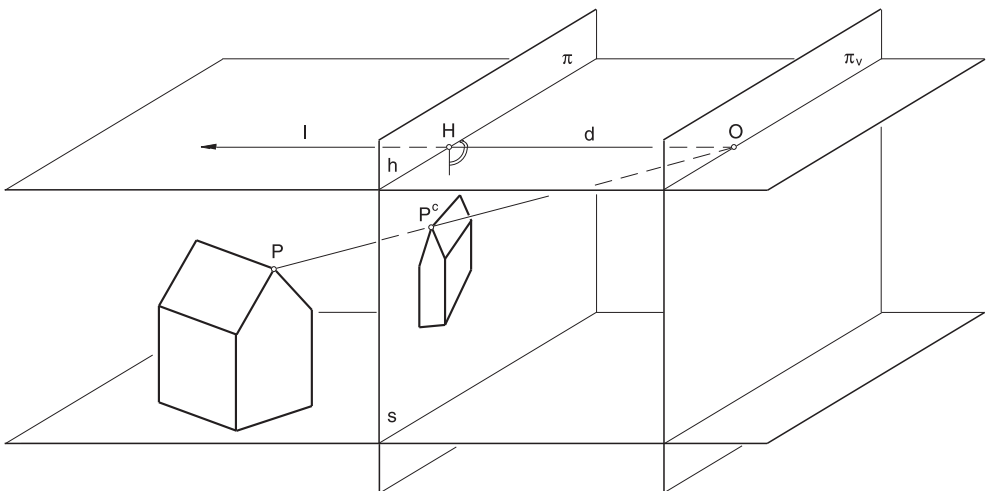


Bild 13.6: Bestimmungselemente der Zentralprojektion

Durch die Lage des Auges O und der Bildebene π ist die Perspektive eines räumlichen Objektes eindeutig bestimmt. Ist die Bildebene vertikal, so liegt der Hauptpunkt H auf dem Horizont h . Bei geneigter Bildebene (Blick nach oben oder unten) ist dies nicht der Fall. Für sehr hohe Gebäude kann es sinnvoll sein, mit geneigter Bildebene zu arbeiten. Dies wird in Kapitel 13.12 behandelt. Im folgenden werden wir uns auf eine vertikale Bildebene beschränken.

Um ein räumliches Objekt im perspektiven Bild zu finden, können einzelne Objektpunkte, aber auch Geraden abgebildet werden. Jede nicht zur Bildebene parallele Gerade g durchstößt die Bildebene π im Spurpunkt S_g (Bild 13.7). Von den unendlich vielen Projektionsstrahlen, die durch Punkte der Geraden g eingezeichnet werden können, gibt es einen der zur Geraden g parallel ist. Es ist der Projektionsstrahl durch den Fernpunkt der Geraden g und heißt Fluchtstrahl. Sein Durchstoßpunkt mit der Bildebene π heißt Fluchtpunkt F_g^c der Geraden g (vgl. Kapitel 2.3).

! Der **Fluchtpunkt** einer Bildgeraden in der Perspektive ist das Bild des **Fernpunktes** der Geraden.

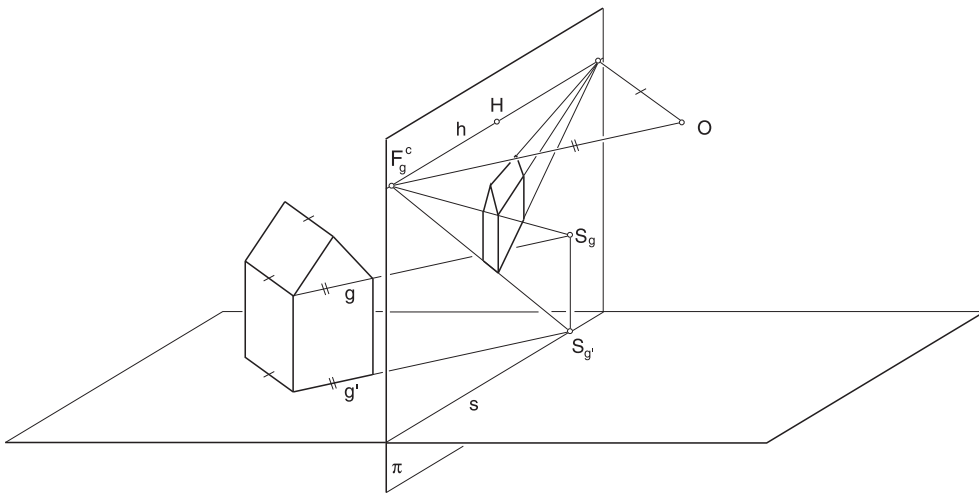


Bild 13.7: Perspektive paralleler Geraden - Spurpunkt und Fluchtpunkt

Das Bild jeder nicht zur Bildebene parallelen Geraden ist durch Spurpunkt und Fluchtpunkt bestimmt. Geraden, die zueinander parallel sind, haben in der Perspektive denselben Fluchtpunkt.

! In einer Perspektive gibt es so viele Fluchtpunkte wie das abzubildende Objekt verschiedene Richtungen von Geraden aufweist.

Nur in einem Sonderfall sind parallele Geraden in der Perspektive wieder parallel. Wenn die Geraden parallel zur Bildebene liegen, sind Bildgeraden parallel untereinander und parallel zu den Originalgeraden. In Bild 13.8 ist die Gerade g parallel zur Bildebene.

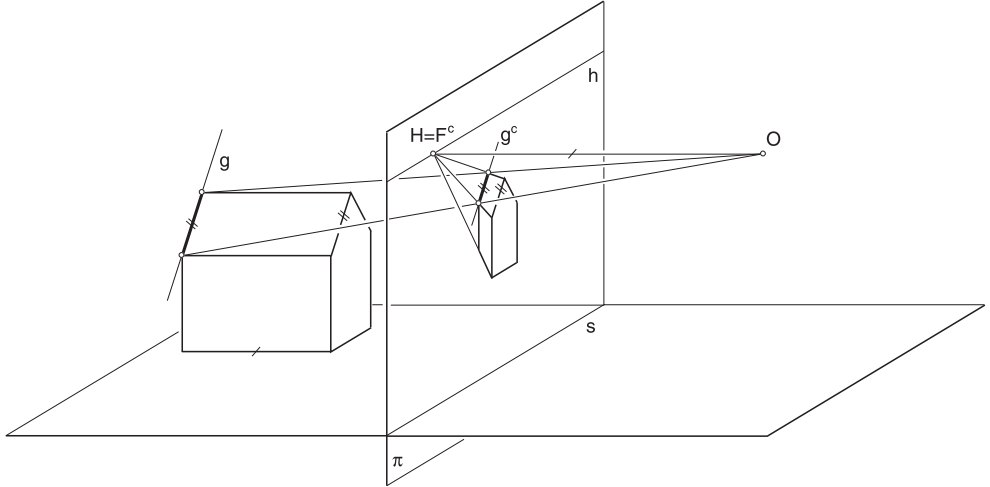


Bild 13.8: Zur Bildebene parallele Geraden in der Perspektive

13.3 Zeichenmethoden

Aufgrund dieser Zusammenhänge bieten sich verschiedene Methoden zum Zeichnen einer Perspektive an, die beim Zeichnen sinnvollerweise miteinander verknüpft werden und in unterschiedlichen Fällen Anwendung finden.

13.3.1 Durchstoßmethode

In der **Durchstoßmethode** wird das Abbildungsprinzip der Zentralprojektion, wie es auch in der Zeichnung von Dürer (Bild 2.4 und 2.5) veranschaulicht wurde, zeichnerisch umgesetzt. Das perspektive Bild eines Objekts wird punktweise gesucht.



Der Bildpunkt P^c eines Objektpunktes P ist der Durchstoßpunkt des Projektionsstrahls OP mit der Bildebene π .

Um diese Methode für ein in Grund- und Aufriss gegebenes Haus durchzuführen, werden zunächst die Bestimmungselemente der Perspektive, Lage des Auges O , Hauptsehstrahl l und Bildebene π , festgelegt und dann die Bildpunkte aller Eckpunkte des Hauses in der Perspektive gesucht (Bild 13.9 und 13.10).

Die Bestimmungselemente der Perspektive können in den Rissen, z. B. Grund-, Auf- und Seitenriss eingezeichnet werden.

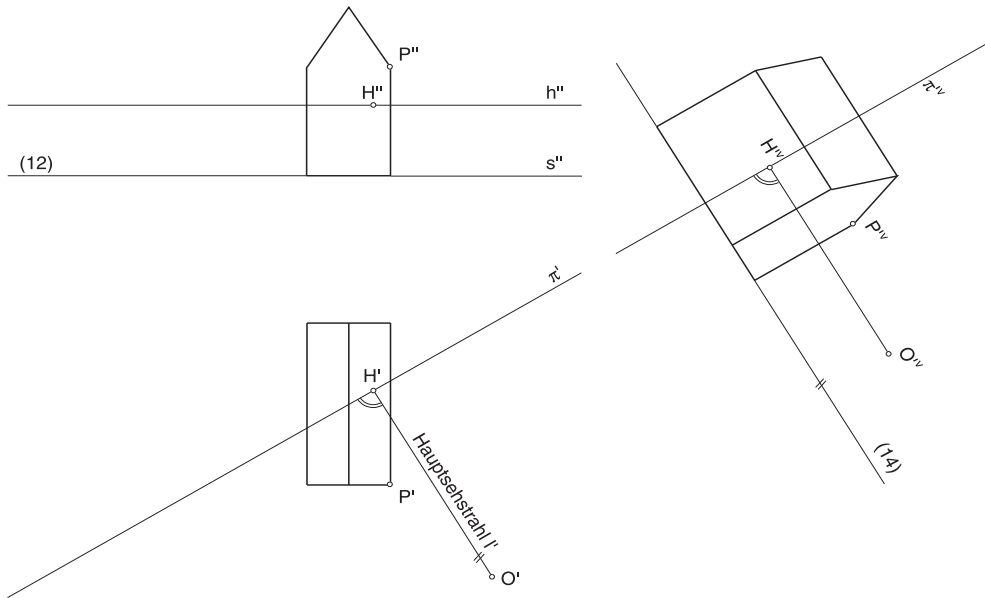


Bild 13.9: Wahl der Bestimmungselemente der Perspektive in Grund-, Auf- und Seitenriss

Im Grundriss werden die Richtung des Hauptsehstrahls l' , die Lage des Auges O' und die Lage des Risses der vertikalen Bildebene π' gekennzeichnet. Um auch die Höhe des Auges und die der entstehenden Bildpunkte berücksichtigen zu können, ist ein Seitenriss senkrecht zur Grundrissebene und parallel zum Hauptsehstrahl l' erforderlich. Die Bildebene ist in diesem Seitenriss wie im Grundriss projizierend. Die Gebäudehöhen im Seitenriss können dem Aufriss entnommen werden (vgl. Kapitel 5.5). Um die Durchstoßmethode zeichnerisch umzusetzen (Bild 13.10), wird der Grundriss nun am besten so angeordnet, dass π' parallel zum Horizont h^c liegt. Der Seitenriss wird so hingelegt, dass π'^v senkrecht zu h^c und O'^v auf der Höhe von h^c zu liegen kommt. Im Grundriss und im Seitenriss können die Durchstoßpunkte der Sehstrahlen durch die Eckpunkte des Hauses mit der Bildebene konstruiert werden. Das perspektive Bild des Hauses entsteht durch Umklappen der Bildebene aus Grund- und Seitenriss in die Zeichnungsebene. Nachdem Grund- und Seitenriss so angeordnet wurden, kann die Perspektive mit Hilfe von Ordern gezeichnet werden. Die Lage der Bildpunkte von links nach rechts in der Perspektive werden durch den Grundriss, die Höhen der perspektiven Bildpunkte durch den Seitenriss herausgefunden. Die Schnittpunkte dieser Ordner liefern die Bilder der Eckpunkte des Hauses in der Perspektive. Die Gebäudekanten sind die Verbindungsgeraden der konstruierten Bildpunkte.

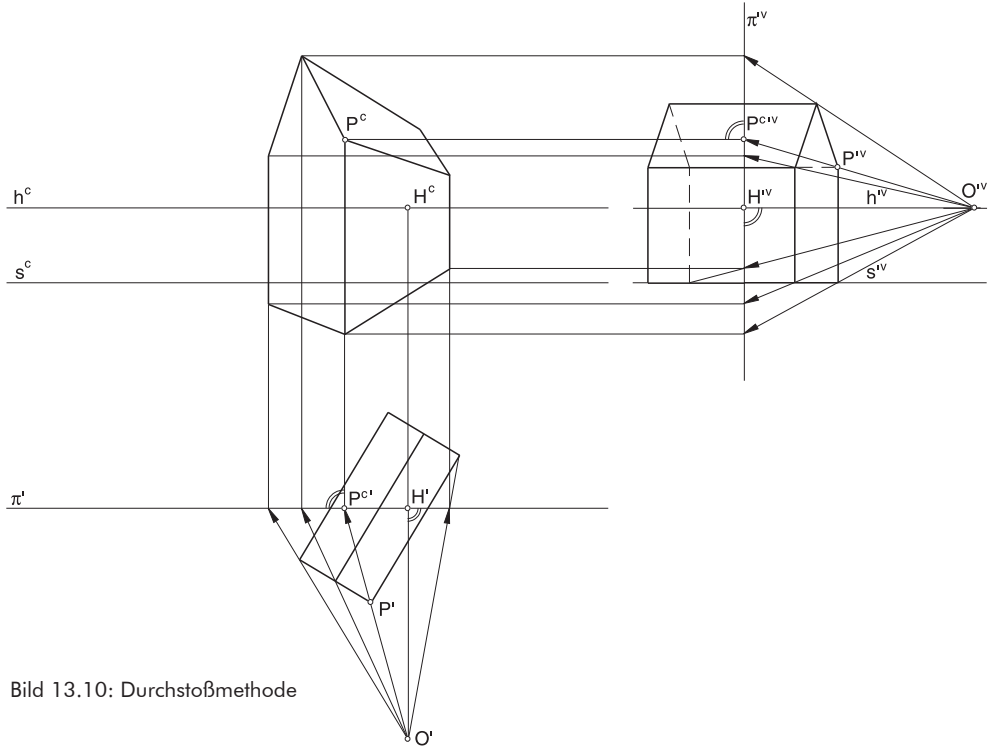


Bild 13.10: Durchstoßmethode

1. Der Horizont h^c kann beliebig eingezeichnet werden. Der Grundriss wird so angeordnet, dass π^i parallel zu h^c liegt. Der Seitenriss wird so hingelegt, dass π^{iv} senkrecht zu h^c und O^{iv} auf der Höhe von h^c liegt.
2. Der Grundriss des Projektionsstrahls O^iP^i schneidet π^i im Grundriss des Bildpunktes von $P \rightarrow P^{ci}$.
3. Der Bildpunkt P^c muss auf einer Senkrechten zu π^i durch P^{ci} liegen, da die Bildebene in die Zeichenebene umgeklappt werden muss (Ordner aus dem Grundriss).
4. Der Seitenriss des Projektionsstrahles $O^{iv}P^{iv}$ schneidet π^{iv} im Seitenriss des Bildpunktes von $P \rightarrow P^{civ}$.
5. Der Bildpunkt P^c liegt auf der Senkrechten zu π^{iv} durch P^{civ} , da die Bildebene ebenfalls in die Zeichenebene umgeklappt wird (Ordner aus dem Seitenriss).
6. P^c ist der Schnittpunkt der beiden Ordner aus Grund- und Seitenriss.
7. Die anderen Eckpunkte des Hauses können entsprechend konstruiert werden.
8. Die Bilder der Gebäudekanten entstehen als Verbindungsgeraden der konstruierten Bilder der Eckpunkte in der Perspektive.

Da das Bild des Objektes bei der Durchstoßmethode punktwise entsteht, ist diese Methode in der Anwendung umständlich und zeitaufwendig. In CAD-Programmen werden Perspektiven meist nach diesem Verfahren entwickelt, da es sich leicht programmtechnisch umsetzen lässt.

13.3.2 Spurpunkt-Fluchtpunkt-Methode

Das abzubildende Objekt wird bei der **Spurpunkt-Fluchtpunkt-Methode** in Kanten bzw. Geraden zerlegt und die Bilder dieser Geraden konstruiert. Die Eckpunkte werden dann durch den Schnitt zweier Geraden bestimmt. Das Bild jeder einzelnen Geraden ist durch Spurpunkt und Fluchtpunkt bestimmt.

Nachdem das Auge O und die Bildebene π in Grund- und Aufriss festgelegt wurden, kann zuerst der perspektive Grundriss mittels Spurpunkt und Fluchpunkt der einzelnen Geraden konstruiert werden.



Wahre Höhen werden in den
Spurpunkten abgetragen.

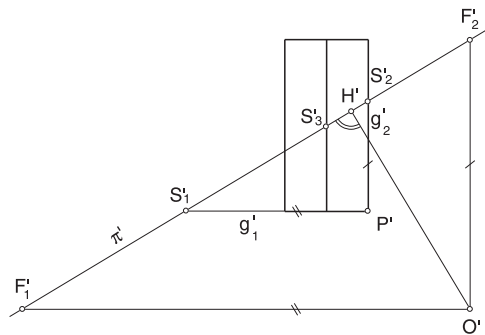
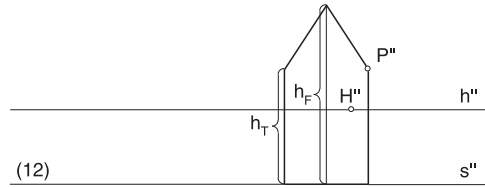


Bild 13.11: Ermitteln der Spur- und Fluchtpunkte im Grundriss

Die verzerrten Höhen werden dann über die perspektiven Bilder der Höhenlinien gefunden.

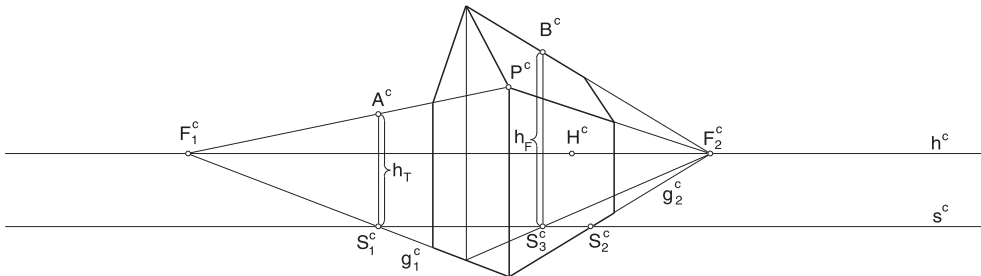


Bild 13.12: Spurpunkt-Fluchtpunkt-Methode

1. Der Abstand von s^c und h^c kann dem Aufriss (s'' und h'') entnommen werden. s^c und h^c sind Parallelen in diesem Abstand.
2. Der Hauptpunkt H^c wird auf h^c beliebig festgelegt.
3. Der Grundriss des Spurpunktes S_1' einer Gebäudekante g_1' ist ihr Schnittpunkt mit π' . Die Parallele zu g_1' durch O' schneidet π' im Grundriss des Fluchtpunktes der Geraden $g_1 \rightarrow F_1'$.
4. Spurpunkt S_1^c und Fluchtpunkt F_1^c können mit Hilfe der Abstände von H^c , entsprechend der Abstände von H' , in die Perspektive übertragen werden. S_1^c liegt auf der Standlinie s^c und F_1^c liegt auf dem Horizont h^c .
5. Die Verbindungsgerade $S_1^c F_1^c$ ist die Gerade g_1^c in der Perspektive.

6. Spurpunkt S_2^1 und Fluchtpunkt F_2^1 der Geraden g_2^1 liefern in der Perspektive $g_2^c = S_2^c F_2^c$.
7. g_1^c geschnitten mit g_2^c ist ein Eckpunkt des perspektiven Grundrisses.
8. Durch Einzeichnen der anderen den Grundriss des Hauses begrenzenden Geraden entstehen die weiteren Eckpunkte des perspektiven Grundrisses.
9. Die Traufhöhe h_T des Hauses kann z. B. im Spurpunkt S_1^c abgetragen werden \rightarrow Punkt A^c .
10. Das Bild der Höhenlinie durch A^c ist die Gerade $A^c F_1^c$. Diese schneidet die vertikalen Kanten (senkrecht zu h^c) in den Eckpunkten des Hauses in Traufhöhe, z. B. Eckpunkt P^c .
11. Entsprechend kann die Traufhöhe im Spurpunkt S_2^c abgetragen werden und damit die zweite Traufe des Hauses gefunden werden.
12. Auch der Grundriss des Firstes kann in der Perspektive mittels Spurpunkt und Fluchtpunkt eingezeichnet werden.
13. Im Spurpunkt S_3^c kann die Firsthöhe h_F des Hauses abgetragen werden \rightarrow Punkt B^c .
14. Die Höhenlinie $B^c F_2^c$ liefert die perspektiv verzerrten Firsthöhen.
15. Durch entsprechende Verbindungsgeraden zwischen schon konstruierten Bildpunkten und den Fluchtpunkten kann die Perspektive des Hauses vervollständigt werden.

Auch bei der Spurpunkt-Fluchtpunkt-Methode können Grund- und Aufriss so angeordnet werden, dass die Abstände und Höhen mittels Ordern in die Perspektive übertragen werden können. Ein Seitenriss wie bei der Durchstoßmethode ist hier nicht erforderlich. Diese Anordnung der Risse wird auch **Architektenanordnung** genannt. Die Perspektive kann auf diese Weise mit Hilfe eines Transparentpapiers aus den entsprechend angeordneten Rissen eines Objektes rasch gezeichnet werden.

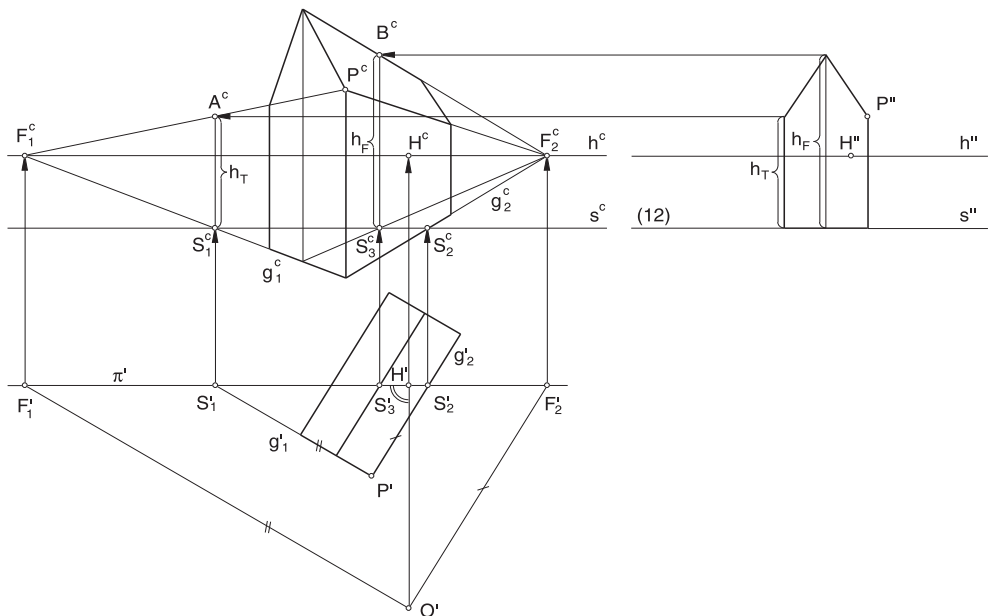


Bild 13.13: Architektenanordnung bei der Spurpunkt-Fluchtpunkt-Methode

Die Durchstoßmethode liefert das perspektive Bild eines Objektes punktweise, die Spurpunkt-Fluchtpunkt-Methode dagegen erzeugt es geradenweise. Jede dieser beiden Methode alleine ist umständlich. Durch Kombination der beiden Methoden, indem die Gebäudekanten mittels der Spurpunkt-Fluchtpunkt-Methode und die Eckpunkte des Gebäudes mit Hilfe der Durchstoßmethode konstruiert werden, wird das Zeichenverfahren optimiert.

13.3.3 Kollineation

In Kapitel 3.2 wurde der Zusammenhang einer ebenen Figur und ihrer Bildfigur mittels der Kollineation beschrieben. Entsprechend wie eine Axonometrie eines Objektes mit Hilfe der Affinität (vgl. Bild 3.12) gezeichnet werden kann, wird der Zusammenhang der Kollineation zum Zeichnen einer Perspektive verwendet (vgl. Bild 3.23).

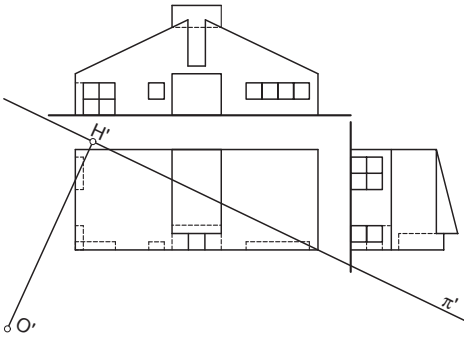


Bild 13.14: Grund-, Auf- und Seitenriss eines Hauses in Anlehnung an Robert Venturi

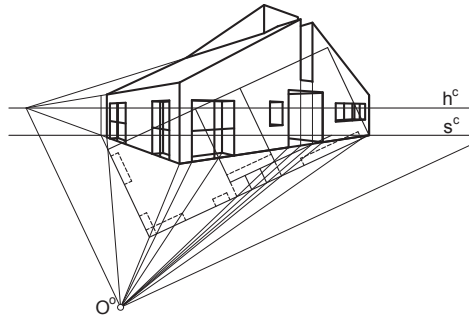


Bild 13.15: Perspektivkonstruktion aus dem Grundriss mittels Kollineation

Die ebene Grundrissfigur eines Gebäudes z. B. kann über die Kollineation in die Perspektive abgebildet werden. In Bild 13.14 und 13.15 wurde dieses Verfahren auf ein Gebäude in Anlehnung an das Haus Vanna Venturi in Pennsylvania von Robert Venturi angewandt.

Um die Kollineation in der Zeichenebene ausführen zu können (Bild 13.16), wird die Grundrissebene um die Standlinie s in die Bildebene π und gleichzeitig das Auge O um den Horizont h in die Bildebene gedreht. Das gedrehte Auge O° ist das Kollinationszentrum und die Standlinie s (die Achse, um die in diesem Fall gedreht wird) die Kollinationsachse. Das aus diesen Zusammenhängen resultierende Zeichenverfahren wird auch **Drehsehnenverfahren** genannt. Beim Drehen der Grundrissebene in die Bildebene beschreibt z. B. der Punkt P einen Kreisbogen. Die Sehne dieses Kreisbogens, die Drehsehne PP° , kennzeichnet diese Drehbewegung. Alle Drehsehnen durch Punkte der Grundrissfigur sind untereinander parallel und haben daher im perspektiven Bild denselben Fluchtpunkt.

$O^\circ P^\circ$ ist das Bild der Drehsehne PP° in der Perspektive, auf der folglich auch der Bildpunkt P^c von P liegen muss. Das gedrehte Auge O° ist der Fluchtpunkt der Drehsehnen. $O^\circ P^\circ$ kann auch als Kollineationsstrahl gedeutet werden. Um diese Zusammenhänge in der Perspektive umzusetzen, wird der Abstand $O'H'=d$ aus dem Grundriss von H^c aus senkrecht zu h^c abgetragen, und man erhält das gedrehte Auge O° . Das perspektive Bild P^c des Punktes P entsteht dann mit Hilfe einer Geraden g , auf der P liegt und deren Spur- und Fluchtpunkt bekannt ist, sowie mittels des Kollineationsstrahls $O^\circ P^\circ$.

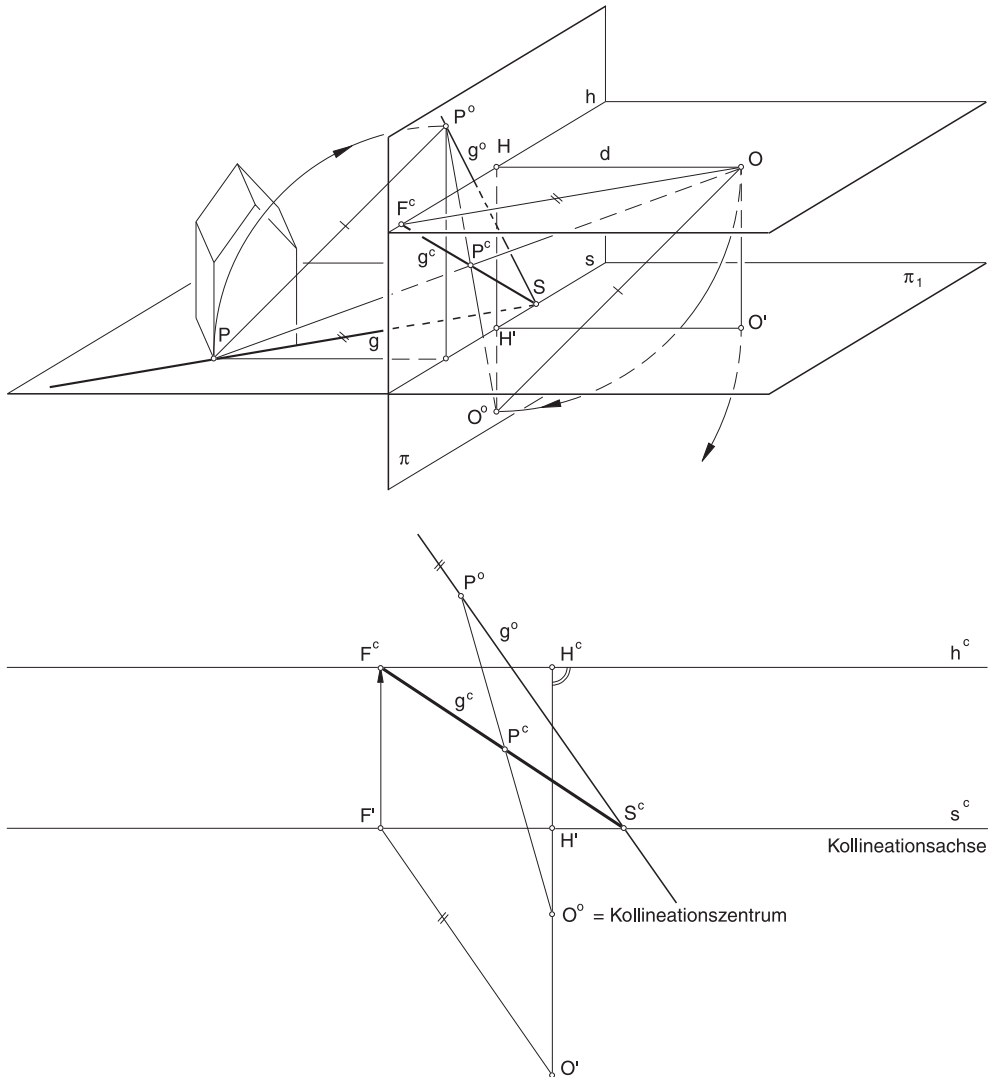


Bild 13.16: Umklappen der Grundrissebene und des Auges in die Bildebene am Beispiel der Geraden g und dem Punkt P

Der perspektive Grundriss kann als kollineares Bild des gedrehten Grundrisses konstruiert werden.

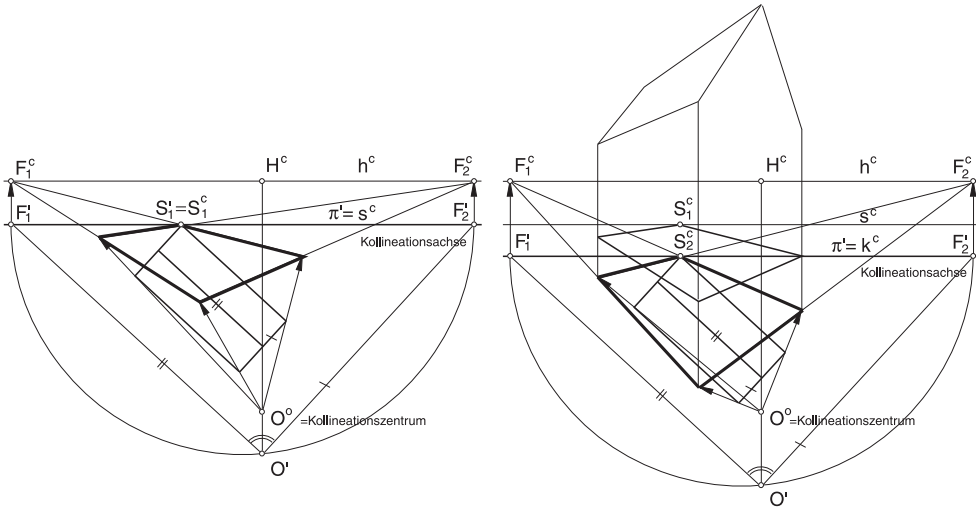


Bild 13.17: Perspektiver Grundriss als kollineares Bild des Grundrisses bzw. Kellergrundrisses

1. Das um den Horizont gedrehte Auge muss den Abstand d von H^c haben. Das gedrehte Auge O^o ist das Kollineationszentrum. Das Auge im Grundriss O' darf nicht mit dem gedrehten Auge O^o (Kollineationszentrum) verwechselt werden.
2. Der Spurpunkt S_1^c , der auf der Kollineationsachse s^c liegt, bleibt bei der Abbildung fest: $S_1' = S_1^c$.
3. Mit Hilfe der Fluchtpunkte F_1^c und F_2^c können die Richtungen der perspektiven Grundrisslinien durch S_1^c eingezeichnet werden.
4. Die Kollineationsstrahlen durch die Eckpunkte des in die Bildebene gedrehten Grundrissrechtecks schneiden die entsprechenden Geraden in den Eckpunkten des perspektiven Grundrisses des Hauses.

Ist die Augenhöhe der Zentralprojektion sehr gering, so kann die Kollineation auch benutzt werden, um das perspektive Bild des Kellergrundrisses zu ermitteln. Dadurch kann die Zeichengenauigkeit erhöht werden. Der Kellergrundriss muss dann um die Spurgerade k^c in die Bildebene π gedreht werden (Bild 13.17), das Kollineationszentrum O^o bleibt an der gleichen Stelle. Der perspektive Kellergrundriss wird dann entsprechend über die Kollineation gefunden. Dieses Verfahren kann für jede Höhe des Hauses durchgeführt werden. Die Perspektive des Gebäudes entsteht dann aus mehreren horizontalen Schichten. Wenn das Gebäude in den verschiedenen Schichten unterschiedliche Grundrisse aufweist, ist diese Methode besonders geeignet. Die Schicht des Hauses muss jeweils um ihre Spurgerade (Kollineationsachse) in die Bildebene gedreht werden, d. h. zeichnet man die Perspektive auf Transparent über dem entsprechenden Grundriss mit eingezeichneter Bildebene π' , so wird die Spur der zu konstruierenden Höhenschicht jeweils auf π' zu liegen kommen (Bild 13.17).

Bei dieser Methode entwickeln wir wie Lambert mit seinem Perspektograph (vgl. Bild 3.12) das perspektive Bild einer ebenen Figur. Die Gegenüberstellung der beiden Methoden Drehsehnenverfahren und Durchstoßmethode in Bild 13.18 und 13.19 am Beispiel eines in der Grundrissebene liegenden Rechtecks, z. B. der Grundriss eines Hauses, soll den Unterschied der Vorgehensweise verdeutlichen. Wenn bei der Durchstoßmethode der Grundriss so verschoben wird, dass der Grundriss der Bildebene π' mit der Standlinie in der Perspektive s^c zusammenfällt, so wird der Unterschied ganz deutlich: beim Durchstoßverfahren suchen wir im Grundriss den Durchstoßpunkt eines Sehstrahls, durch O' mit der Bildebene π' , während wir beim Drehsehnenverfahren in der Bildebene der Perspektive direkt konstruieren, indem der Grundriss um die Spur, die Standlinie, in die Bildebene und das Auge O um den Horizont in die Bildebene π gedreht wurden, dadurch das Kollinationszentrum O^o entstand. Bei der Durchstoßmethode müssen wir uns also die Bildebene der Perspektive als Schicht über der Grundrissebene wie ein Transparentpapier vorstellen, während beim Drehsehnenverfahren der Grundriss und das Auge in die Bildebene der Perspektive gedreht wurden. Auch die Fluchtpunkte können direkt mit Hilfe von Parallelen zu den Rechteckskanten im gedrehten Grundriss durch O^o geschnitten mit dem Horizont h^c gefunden werden. Bei der Durchstoßmethode muss stets der "Umweg" über die Bildebene im Grundriss π' genommen werden. Bei beiden Methoden ergänzt die Spurpunkt-Fluchtpunkt-Methode die Ermittlung der perspektiven Bildfigur.

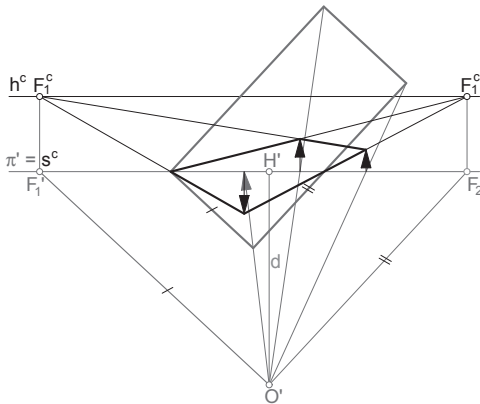


Bild 13.18: Durchstoßmethode am Beispiel eines Rechtecks

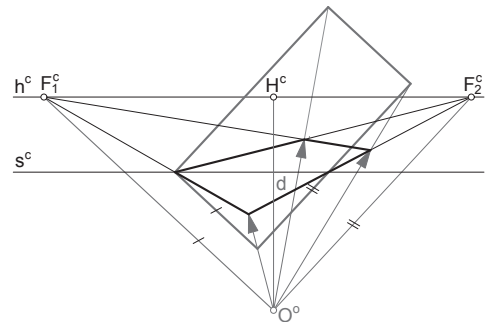


Bild 13.19: Drehsehnenverfahren am Beispiel eines Rechtecks mit gleichen Parametern

Der Vergleich der dargestellten drei Methoden zum Zeichnen einer Perspektive zeigt: bei der **Durchstoßmethode** wird das perspektive Bild eines **Punktes** ermittelt, bei der **Spurpunkt-Fluchtpunkt-Methode** das perspektive Bild einer **Geraden**, beim **Drehsehnenverfahren** das perspektive Bild einer **ebenen Figur**.

13.4 Messen in der Perspektive

13.4.1 Messen einer Strecke

Soll in einer Perspektive eine Strecke, z. B. die Länge eines Hauses, maßgerecht übertragen werden, so muss herausgefunden werden, wie diese Strecke in der Perspektive verzerrt wird.



Eine Strecke erscheint in der Perspektive nur dann in wahrer Größe, wenn sie in der Bildebene liegt.

Teilverhältnisse auf einer Geraden bleiben in der Perspektive dann erhalten, wenn die Gerade parallel zur Bildebene ist.

Am Beispiel zweier Häuser mit der Breite und dem Zwischenabstand a können die Eigenschaften aufgezeigt werden (Bild 13.20).

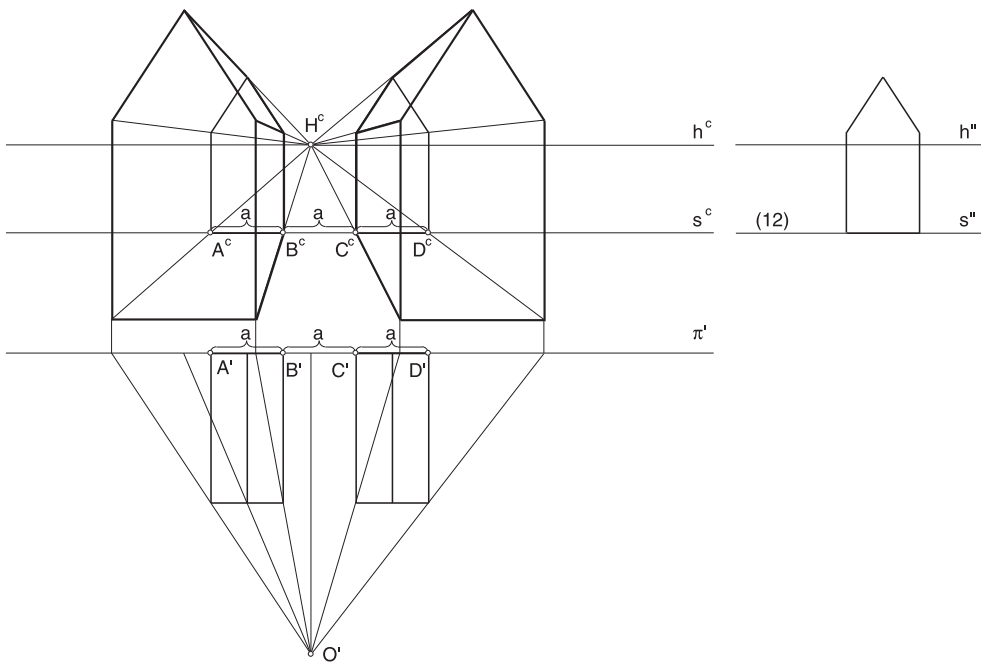


Bild 13.20: Erhalt der wahren Gestalt und der Teilverhältnisse

Die hinteren Giebel der Häuser und ihr Zwischenabstand erscheinen in der Perspektive in wahrer Größe und Gestalt, da sie in der Bildebene liegen. Die vorderen Giebel sind parallel zur Bildebene. Sie erscheinen dadurch ähnlich zum Original, und die Teilverhältnisse (im Beispiel: drei gleich große Strecken) bleiben erhalten.

Soll auf einer horizontalen Geraden g , die nicht in der Bildebene π liegt, eine Strecke maßgerecht in die Perspektive übertragen werden (z. B. \overline{AB} und \overline{CD}), so wird die Gerade um ihren Spurpunkt S_g in die Bildebene gedreht. Dort kann dann das wahre Maß der Strecke abgetragen werden (Bild 13.21). Die Punkte A , B , C und D auf der Geraden g im Raum und die in die Bildebene gedrehten Punkte A_o , B_o , C_o und D_o liegen auf parallelen Drehsehnern. Die Drehsehnern sind die Sehnen der Kreisbögen, auf denen die Punkte der Geraden wandern, wenn diese in die Bildebene gedreht wird. Im perspektiven Bild gehen die parallelen Drehsehnern in Geraden über, die einander im Fluchtpunkt der Drehsehnern schneiden. Der Fluchtpunkt dieser Drehsehnern heißt auch **Messpunkt** der Geraden.

! Der Messpunkt einer Geraden ist der Fluchtpunkt der Drehsehnern durch Punkte der Geraden, wenn die Gerade in die Bildebene gedreht wird.

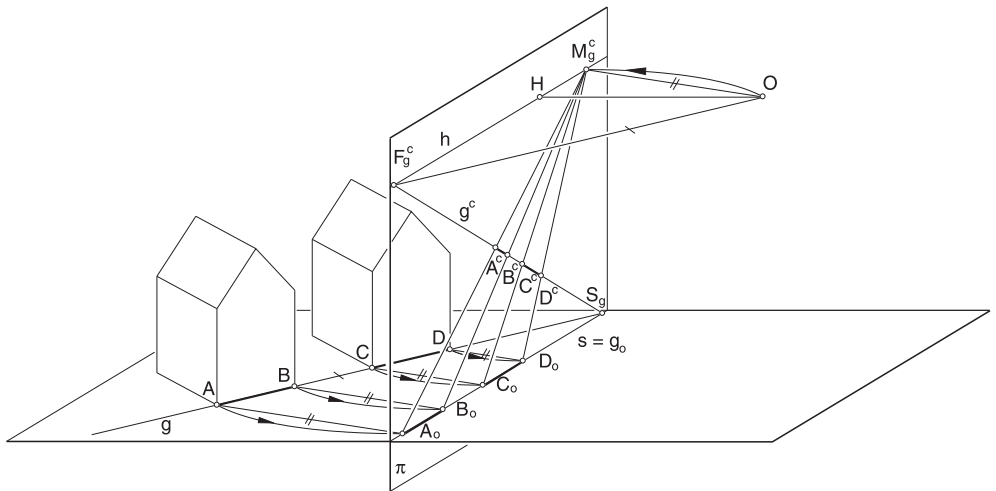


Bild 13.21: Messpunkt als Fluchtpunkt der Drehsehnern

Die Bilder der Drehsehnern schneiden einander in der Perspektive im Messpunkt M_g^c . In der Perspektive kann somit der Messpunkt M_g^c einer Geraden g , auf der Längen eingemessen werden sollen, gefunden werden, indem das Auge O um den Fluchtpunkt F_g^c der Geraden g in die Bildebene π gedreht wird.

Sollen in einer Perspektive die Hausbreiten und Abstände a auf einer Geraden g eingemessen werden (Bild 13.22), muss zunächst der Messpunkt M_g^c ermittelt werden. Die Länge der Strecke $\overline{O'F_g^c}$ wird hierzu aus dem Grundriss in die Perspektive von F_g^c aus auf dem Horizont h^c abgetragen: $\overline{O'F_g^c} = \overline{F_g^c M_g^c}$. Die wahren Abstände können dann vom Spurpunkt S_g^c aus auf der Standlinie $s^c = g_o^c$ eingemessen werden.

Die Verbindungsgeraden mit dem Messpunkt M_g^c schneiden dann g^c in den gesuchten Bildpunkten in der Perspektive.

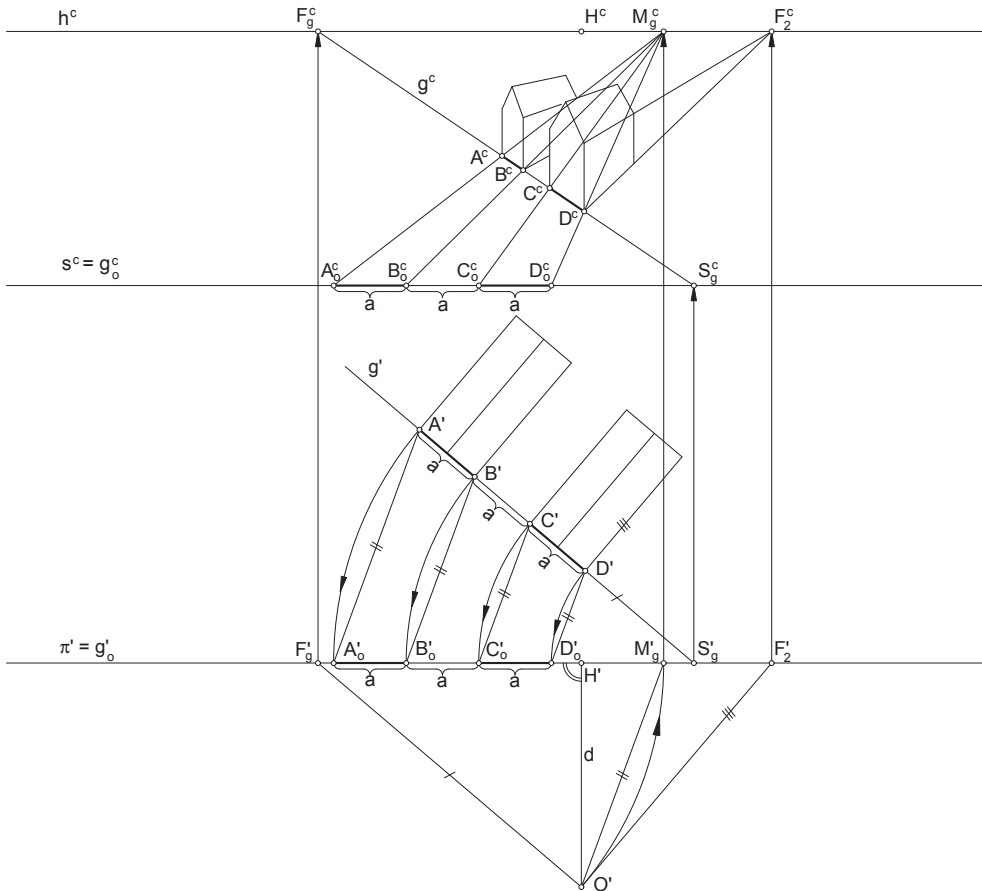


Bild 13.22: Messpunkt M_g einer Geraden g

1. Nachdem g in die Bildebene π gedreht wurde, können die wahren Abstände zwischen S_g , A , B , C und D auf der Standlinie s^c abgetragen werden. In der Perspektive liegen dann die gedrehten Punkte A_o^c , B_o^c , C_o^c und D_o^c auf $g_o^c = s^c$.
2. Der Messpunkt M_g' entsteht durch einen Kreis um den Fluchtpunkt F_g' durch O' geschnitten mit π' . Durch Übertragen in die Perspektive entsteht der Messpunkt M_g^c .
3. Die perspektiven Bilder der Drehsehnen $A_o^c M_g^c$, $B_o^c M_g^c$, $C_o^c M_g^c$ und $D_o^c M_g^c$ schneiden g^c in den perspektiven Bildpunkten A^c , B^c , C^c und D^c .

Mit dieser Herleitung eines Messpunktes, kann nun direkt in der Perspektive mit dem Messpunkt und den wahren Abständen auf der Geraden gearbeitet werden, ohne den Grundriss aufzuzeichnen.

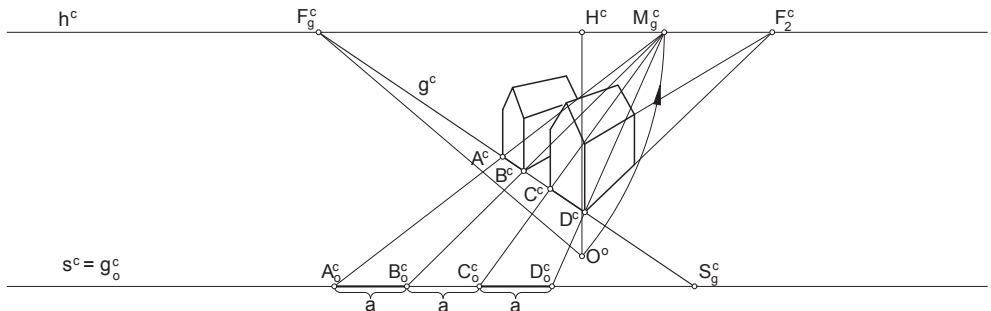


Bild 13.23: Direktes Einmessen wahrer Abstände mit Hilfe des Messpunktes in der Perspektive

1. Die Gerade g wird mit Hilfe ihres Spur- und Fluchtpunktes in die Perspektive eingezeichnet.
2. Das in die Bildebene geklappte Auge O^o kann mit Hilfe der Distanz d von H^c aus senkrecht zum Horizont h^c gefunden werden.
3. Der Messpunkt M_g^c entsteht durch einen Kreis um F_g^c durch O^o geschnitten mit h^c .
4. Auf der Standlinie können nun ausgehend vom Spurpunkt S_g^c die wahren Abstände zwischen A , B , C und D abgetragen werden.
5. Die so entstandenen Punkte A_o^c , B_o^c , C_o^c und D_o^c werden mit dem Messpunkt M_g^c verbunden. Diese Verbindungslinien schneiden die Gerade g^c in den perspektivischen Bildpunkten A^c , B^c , C^c und D^c .



Zu jeder Geradenrichtung gehört ein anderer Messpunkt, d. h. der Messpunkt ist abhängig vom Fluchtpunkt der Geraden.

Liegt der Sonderfall einer Zentralperspektive vor, bei der eine Hauptrichtung der abzubildenden Objekte senkrecht zur Bildebene steht, so vereinfacht sich die Konstruktion mit Messpunkten.

Geraden, die senkrecht zur Bildebene π stehen, heißen **Tiefenlinien**. Für die Tiefenlinien ergibt sich der Hauptpunkt H^c als Fluchtpunkt, und der Messpunkt der Tiefenlinien ist der sogenannte **Distanzpunkt**. Wird in diesem Sonderfall die oben beschriebene Konstruktion des Messpunktes umgesetzt, so wird im Fall der Tiefenlinien das Auge um den Hauptpunkt in die Bildebene gedreht. Damit ist der Messpunkt der Tiefenlinien genau die Distanz d vom Hauptpunkt H^c entfernt und wird deshalb Distanzpunkt genannt.



Der Messpunkt der Tiefenlinien ist der Distanzpunkt.

Die perspektiv verzerrte Tiefe der beiden Häuser im Beispiel von Bild 13.20 kann daher mit Hilfe des Distanzpunktes D_1^c bzw. D_2^c in der Perspektive ermittelt werden (Bild 13.24), je nachdem in welche Richtung die Tiefe b um den Spurpunkt in die Bildebene gedreht wird.

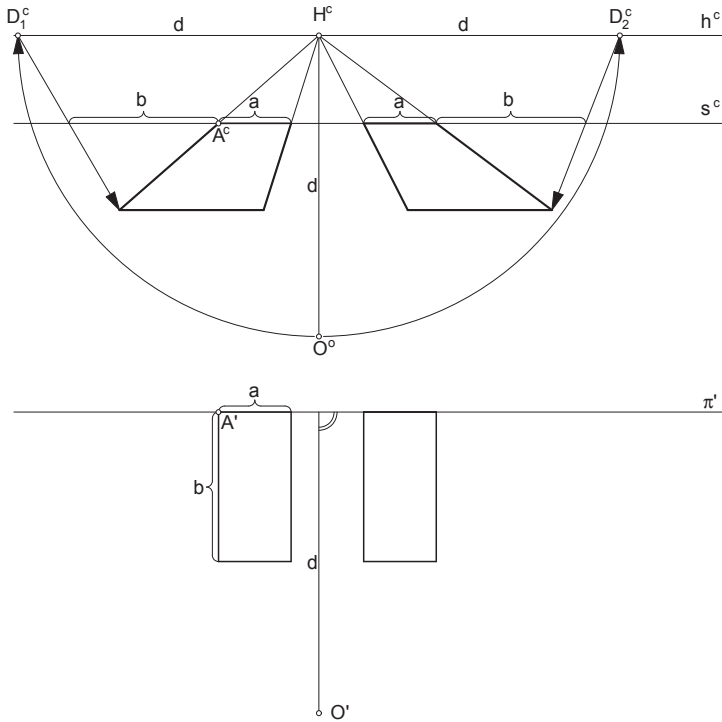


Bild 13.24: Distanzpunkt als Messpunkt der Tiefenlinien

1. Nachdem die Breite a des Hauses im Spurpunkt A^c wie in Bild 13.20 abgetragen wurde, kann die Tiefe b des Hauses um den Spurpunkt nach links in die Bildebene gedreht werden, also von A^c aus die Tiefe b auf der Standlinie s^c abgetragen werden.
2. Die beiden Distanzpunkte D_1^c und D_2^c entstehen durch einen Kreisbogen um den Hauptpunkt H^c , dem Fluchtpunkt der Tiefenlinien, durch das geklappte Auge O^o , also Kreis mit Radius d , geschnitten mit dem Horizont h^c .
3. Die Verbindungsgerade von D_1^c mit dem Endpunkt der um den Spurpunkt A^c gedrehten Tiefe b des Hauses schneidet die Gerade A^cH^c im linken vorderen Eckpunkt des Hauses.
4. Entsprechend kann rechts mit dem Distanzpunkt D_2^c gearbeitet werden, wenn die Tiefe b des Hauses nach rechts in die Bildebene gedreht wurde.

Entsprechend dieser Konstruktionen mit Messpunkten kann auch umgekehrt, jedoch nur unter bestimmten Voraussetzungen, ein wahres Maß einer Strecke aus einer Perspektive ermittelt werden. In der Fotorekonstruktion (vgl. Kapitel 13.11) ist dieser Zusammenhang in der Umkehrung anwendbar. Die Konstruktion mit einem Messpunkt wird dann rückwärts durchlaufen.

Das Einmessen von Strecken ist auch erforderlich, wenn in eine Perspektive Personen oder sonstige vertikale Elemente eingezeichnet werden sollen. Die Größe der Personen in der Perspektive hängt von ihrer Entfernung zum Auge und zur Bildebene ab.

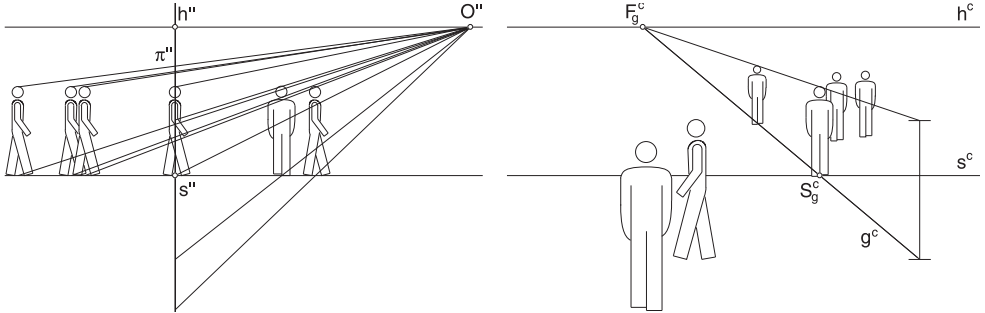


Bild 13.25: Personen in einer Perspektive mit beliebiger Augenhöhe



Bild 13.26: Perspektive mit erhöhtem Auge, Pariser Platz, Berlin, 1996, Josef Paul Kleihues



Bild 13.27: Perspektive aus Fußgänger-Aughöhe, Projekt EXPO-Pavillon, 1997, MVRDV

Die Größen können auf einer beliebigen horizontalen Geraden g eingemessen werden (Bild 13.25), wenn sie sich auf der horizontalen Standebene befinden. Bild 13.26 zeigt eine Perspektive des Pariser Platzes in Berlin von J. P. Kleihues mit eingemessenen Personen. Die Perspektive des EXPO-Pavillons der Architekten MVRDV (Bild 13.27) zeigt einen speziellen Fall: die Köpfe gleich großer Personen liegen immer in Horisonthöhe, wenn es eine Perspektive mit entsprechender Aughöhe ist (Bild 13.28).

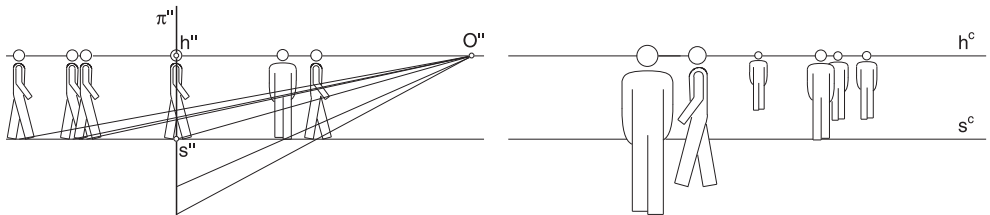


Bild 13.28: Personen in einer Perspektive mit der Aughöhe eines Fußgängers

13.4.2 Messen eines Winkels

Beim Zeichnen von Perspektiven müssen auch Winkel in die Perspektive eingemessen werden. Für Winkel zwischen zwei Geraden gilt, dass sie nur in wahrer Gestalt erscheinen, wenn die beiden Geraden parallel zur Bildebene sind.

Um ein Haus mit Pultdach in einer Perspektive zu zeichnen (Bild 13.29), muss der Neigungswinkel α der Geraden g des Pultdaches in die Perspektive eingemessen werden. Hierzu wird die Giebelwand in die Bildebene gedreht. Dadurch entsteht wie in Kapitel 13.4.1 der Messpunkt M_g^c als Drehsehnenfluchtpunkt. Der wahre Neigungswinkel α des Daches kann im Messpunkt vom Horizont ausgehend abgetragen werden. Diese Gerade schneidet die Fluchtgerade der Giebelwand im Fluchtpunkt F_g^c der Geraden g des Pultdaches, die unter dem Winkel α geneigt ist.

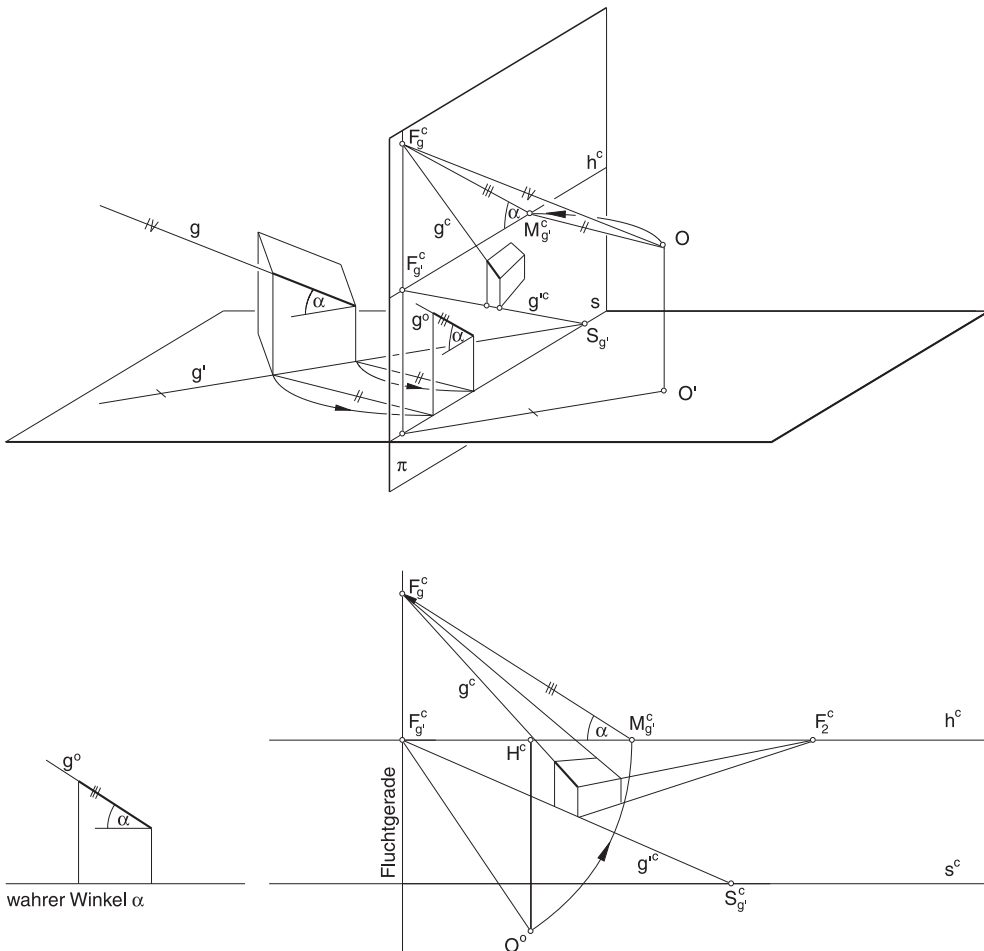


Bild 13.29: Einmessen eines Winkels α in eine Perspektive

13.5 Teilen in der Perspektive

Wenn kein festes Maß einer Strecke in die Perspektive eingemessen werden soll, sondern eine in der Perspektive bereits ermittelte Bildstrecke in Teile unterteilt werden soll, so vereinfacht sich die Konstruktion erheblich. Dann kann direkt in der Perspektive gearbeitet werden, ohne die Parameter Standlinie und Auge der Perspektive zu kennen.

In Kapitel 13.4.1 hatten wir bereits festgehalten, dass Teilverhältnisse auf einer Geraden erhalten bleiben, wenn die Gerade parallel zur Bildebene ist. Eine Gerade, die parallel zur Bildebene ist, heißt **Frontgerade**. Auf Frontgeraden können also Teilverhältnisse direkt in der Perspektive umgesetzt werden. Frontgeraden müssen in der Perspektive parallel zur Spurgeraden ihrer Trägerebene verlaufen. Die am häufigsten vorkommenden Sonderfälle von **horizontalen** und **vertikalen Frontgeraden** sind am einfachsten zu erkennen und zu handhaben. Das perspektive Bild einer horizontalen Frontgeraden verläuft parallel zum Horizont, das einer vertikalen Frontgeraden senkrecht zum Horizont. Bild 13.30 zeigt am Beispiel einer in einer Perspektive gegebenen Fassade eines Gebäudes diese beiden Sonderfälle der Teilung von horizontalen und vertikalen Frontgeraden. In diesem Beispiel wird die Fassade mit einem 7x5-Raster versehen. Die horizontale Frontgerade wird in sieben und die vertikale Frontgerade in fünf gleiche Teile geteilt.

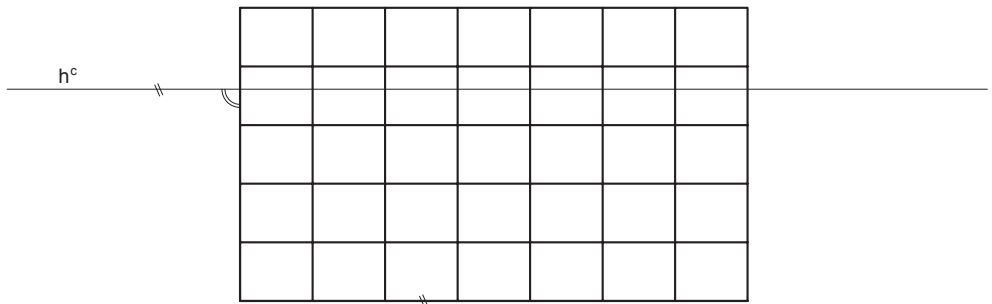


Bild 13.30: Teilen von horizontalen und vertikalen Frontgeraden in der Perspektive

Die Teilung in gleiche Teile kann in diesen Sonderfällen der Frontgeraden wegen der Teilverhältnistreue auf zur Bildebene parallelen Geraden direkt in der Perspektive umgesetzt werden. Im Allgemeinen ist dies nicht möglich, da die Teilung der perspektiven Verzerrung folgt. Dieser Sonderfall gibt uns die Idee für die Umsetzung im allgemeinen Fall: die zu teilende Strecke wird in eine Frontgerade gedreht und dort die Teilung in gleiche Teile ausgeführt. Die Konstruktion beruht auf der Übertragung des Strahlensatzes (vgl. Anhang a, Bild A1) in die Perspektive. Bild 13.31 zeigt den Strahlensatz als Anwendung der Teilung einer Strecke AB in sieben gleiche Teile.

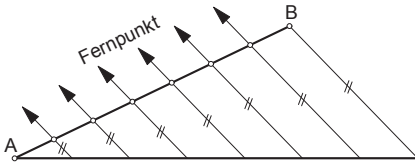


Bild 13.31: Teilen der Strecke AB in gleiche Teile mit Hilfe des Strahlensatzes

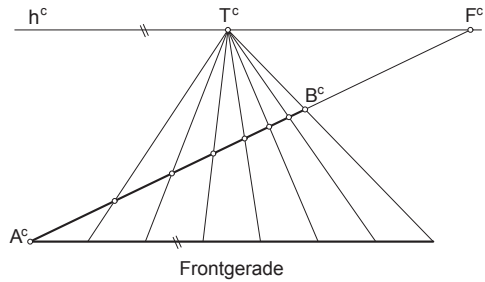


Bild 13.32: Übertragung des Strahlensatzes in die Perspektive - Teilungspunkt T^c für die horizontale Strecke $A^c B^c$

Die parallelen Strahlen mit gleichem Fernpunkt in der Strahlensatzfigur (Bild 13.31) gehen in der Perspektive in Geraden über, die sich im Fluchtpunkt der parallelen Strahlen schneiden (Bild 13.32). Die **lineare Skala** der Parallelprojektion geht bei Zentralprojektion in eine **projektive Skala** über. Den Fluchtpunkt der parallelen Strahlen nennen wir **Teilungspunkt**. Um eine in einer Perspektive gegebene horizontale Strecke $A^c B^c$ räumlich in gleiche Teile zu teilen, drehen wir die Strecke AB parallel zur Bildebene und führen dort die gleichmäßige Unterteilung durch. Der Teilungspunkt einer horizontalen Strecke muss auf dem Horizont liegen, da er der Fluchtpunkt der horizontalen Drehsehnen ist. Die Verbindungsgeraden mit dem Teilungspunkt schneiden die Strecke $A^c B^c$ in den entsprechenden Teilpunkten im perspektiven Bild (Bild 13.32).



Der Teilungspunkt einer horizontalen Strecke liegt auf dem Horizont.

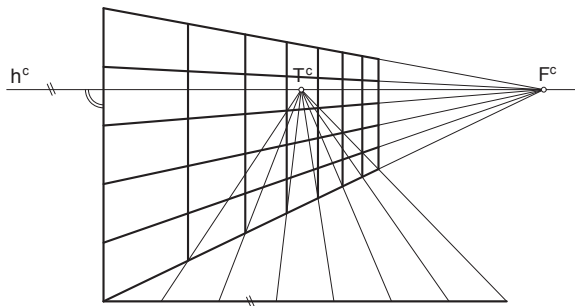


Bild 13.33: Konstruktion des Rasters einer Fassade in Perspektive bei allgemeiner Lage

1. Im Punkt A^c kann eine horizontale Frontgerade parallel zum Horizont gezeichnet werden. Die Länge der Strecke ist beliebig, kann aber am einfachsten gleich so gewählt werden, dass die Teile (hier sieben) einfach gefunden werden bzw. in einem festen Maß abgetragen werden und der entstehende Teilungspunkt T^c auf dem Horizont für die Zeichnung günstig liegt.
2. Die Verbindungslinie des Endpunktes dieser Strecke mit dem Punkt B^c schneidet den Horizont h^c im Teilungspunkt T^c .
3. Die gleichmäßigen Teilpunkte auf der Frontgeraden verbunden mit dem Teilungspunkt schneiden die Strecke A^cB^c in den perspektiv verzerrten Teilpunkten.
4. Um das Fassaden-Raster wie in Bild 13.30 in dieser allgemeinen Perspektive einzuzeichnen, können durch die gefundenen Teilpunkte der Strecke A^cB^c die Vertikalen gezeichnet werden.
5. Die Unterteilung auf der Vertikalen ist teilverhältnistreu und kann daher direkt auf einer Vertikalen durchgeführt werden. Werden diese Teilpunkte auf der Vertikalen mit dem Fluchtpunkt F^c verbunden, so entsteht das 7x5-Raster im perspektiven Bild der Fassade.

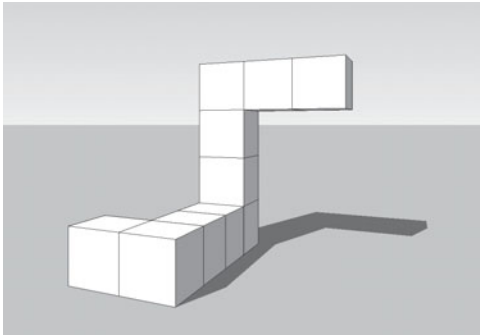


Bild 13.34: Objekt des Mental Rotation Test (MRT) in Perspektive

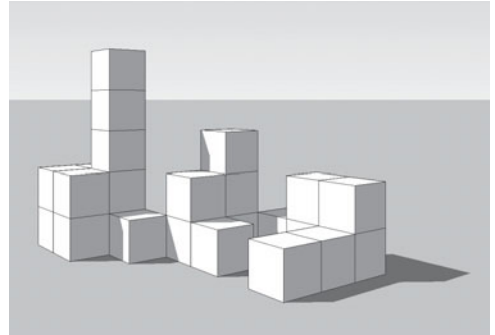


Bild 13.35: Würfellandschaft in Perspektive

Mit Hilfe entsprechender Teilungspunkte können aus der Vorgabe eines Würfels in einer Perspektive Objekte aus Würfeln oder ganze Würfellandschaften konstruiert werden, ohne die weiteren Parameter der Perspektive zu kennen.

Diese Konstruktionsmethode kann auch auf eine schräg im Raum liegende Gerade übertragen werden. In Bild 13.36 wurde die Strecke AB auf der schräg im Raum liegenden Geraden g als Kante einer Rampe zur Unterteilung in fünf Teile ausgewählt. Die Rampe wurde in einer Perspektive gezeichnet. Eine Frontgerade kann als Parallele zur Fluchtgeraden der Rampenfläche in der Perspektive gefunden werden. Dort können die fünf Teile in beliebig gleichen Längen abgetragen werden. Der Teilungspunkt T^c liegt dann entsprechend der Übertragung des Strahlensatzes auf der Fluchtgeraden der Rampenfläche.

- Der Teilungspunkt einer schräg im Raum liegenden Strecke liegt auf der Fluchtgeraden der Trägerebene der Strecke.

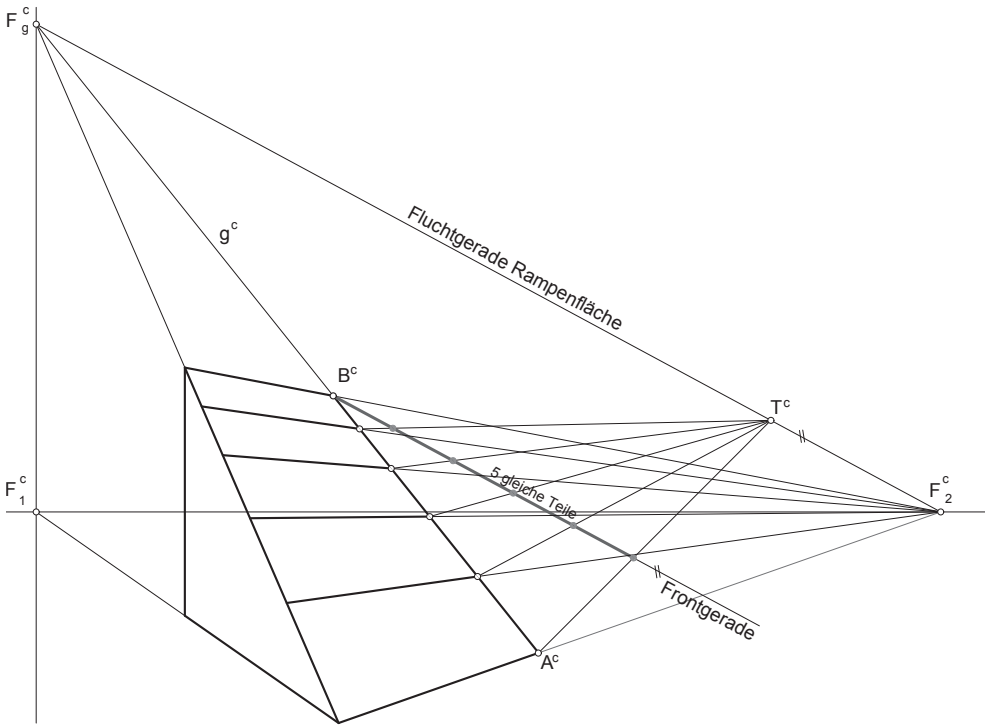


Bild 13.36: Teilen einer schräg im Raum liegenden Strecke in Perspektive - Muster auf der Rampefläche

1. Die Fluchtgerade der Rampefläche ist die Verbindungsgerade zweier Fluchtpunkte von Geraden dieser Fläche, hier F_2^c und F_g^c .
2. Um die Teilung der Strecke AB in fünf gleiche Teile in der Perspektive umzusetzen, wird im Punkt B^c eine Frontgerade parallel zur Fluchtgerade der Rampefläche, in der die Strecke AB liegt, eingezeichnet.
3. Auf der Frontgerade werden die fünf gleichen Teile in beliebiger Länge abgetragen, am besten so, dass der Teilungspunkt für die Zeichnung günstig liegt.
4. Die Verbindungsgerade von A^c mit dem Endpunkt der letzten Teilstrecke schneidet die Fluchtgerade der Rampefläche im Teilungspunkt T^c .
5. Die gleichmäßigen Teilpunkte auf der Frontgeraden verbunden mit dem Teilungspunkt schneiden die Strecke A^cB^c in den perspektiv verzerrten Teilpunkten, in Bild 13.36 mit Punktkreisen markiert.
6. Verbindet man diese Teilpunkte mit dem Fluchtpunkt F_2^c , so entsteht auf der Rampefläche ein räumlich gleichmäßiges Linienmuster (parallele Linien im gleichen Abstand) im perspektiven Bild.

Diese Teilung auf der Rampefläche kann z. B. auch verwendet werden, um eine Treppe auf Grundlage der Rampe, wie in Bild 13.37 dargestellt, zu zeichnen.

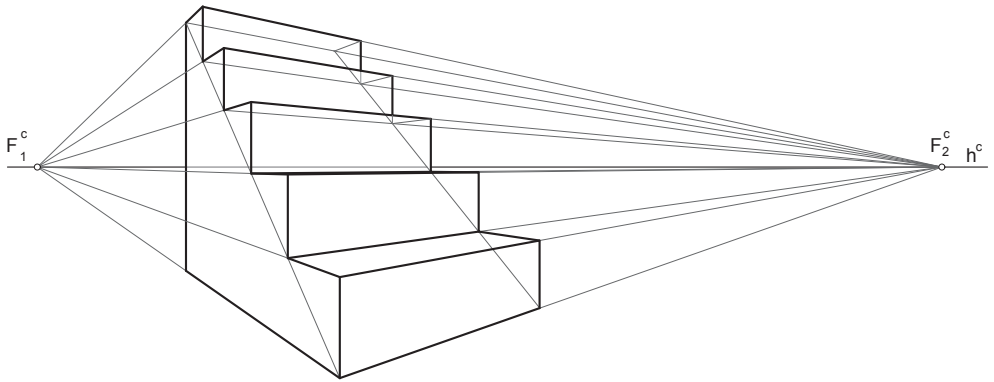


Bild 13.37: Treppe in Perspektive auf Grundlage der Unterteilung der Rampenfläche

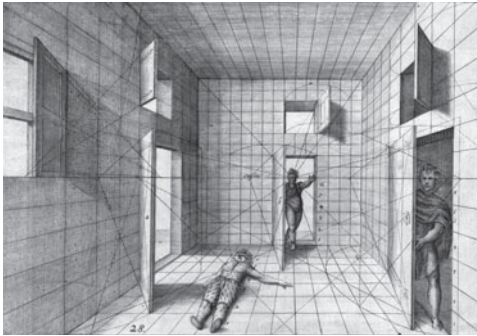


Bild 13.38: Perspektive mit Figuren, 1604/05, Hans Vredeman de Vries

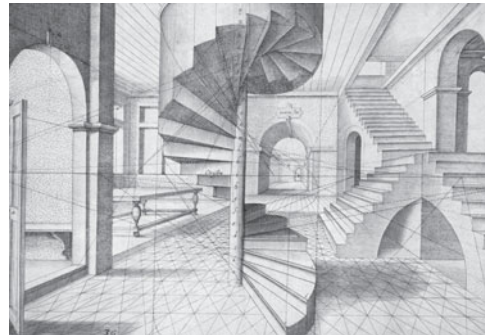


Bild 13.39: Perspektive Wendeltreppendarstellung, 1604/05, Hans Vredeman de Vries

Hans Vredemann de Vries, der viele beeindruckende Zeichnungen zur Architekturperspektive geschaffen hat, verwendete in seinen perspektiven Darstellungen häufig Raster zur Konstruktion. Das erleichtert die Konstruktion auch bei freien Formen wie z. B. den Menschendarstellungen. Die in Bild 13.38 und 13.39 gezeigten Stiche sind Beispiele hierfür. Das Einmessen der stehenden Personen erfolgte entsprechend der Regel aus Bild 13.28, dass die Augen der dargestellten Personen auf der Höhe des Horizontes liegen müssen, wenn die Perspektive mit der Aughöhe einer entsprechenden Person entwickelt wurde.

Die perspektive Darstellung einer Wendeltreppe mit diversen Türbögen (Bild 13.39) verwendet ebenfalls Raster, die eine perspektive Struktur für kompliziertere räumliche Objekte liefern und auch geeignet sind, Tiefenwirkung zu erzeugen. Wie sich die Kreise im perspektiven Bild darstellen und wie diese konstruiert werden können, ist das Thema des nächsten Kapitels.

13.6 Perspektives Bild eines Kreises

Wird ein Kreis mittels Parallelprojektion abgebildet, so entsteht im Bild stets eine Ellipse. Bei Zentralprojektion ist dies nicht der Fall. Welche Kurven als Bilder möglich sind, soll am Beispiel eines horizontal liegenden Kreises k überlegt werden. Die Bilder 13.40 und 13.41 zeigen Fotos der Schule in Madrid von Alberto Campo Baeza mit horizontal liegenden Kreisen der drehzylindrischen Treppenhalle. In dem Außenfoto (Bild 13.40) erscheinen die Kreise als Ellipsen, in der Innenansicht dagegen, bei der der Fotograf innerhalb des Kreises steht, sind die Kreise als Hyperbeln zu sehen. Diese unterschiedlichen Erscheinungsweisen der Kreise können erklärt werden, indem ein Kreis mittels Zentralprojektion abgebildet wird, d. h. die Projektionsstrahlen durch die Kreispunkte gelegt werden. Die Projektionsstrahlen vom Auge O zu den Punkten des Kreises k bilden einen schiefen Kreiskegel. Der Schnitt dieses schiefen Kreiskegels mit der Bildebene π ist das perspektive Bild des Kreises.



Bild 13.40: Ellipsen als Kreisbilder - Schule in Madrid, 1985, Alberto Campo Baeza



Bild 13.41: Hyperbeln als Kreisbilder der drehzylindrischen Treppenhalle, Innenansicht

Je nach Lage der Bildebene π und des Auges O in Bezug zum Kreis können drei Arten von perspektiven Kreisbildern entstehen: Ellipse, Parabel oder Hyperbel (Bild 13.42 – 13.44). Diese entsprechen den drei möglichen Fällen von Kegelschnitten (vgl. Kapitel 7.4.3). Entscheidend für das entstehende perspektive Kreisbild ist die Lage der zur Bildebene π parallelen Verschwindungsebene π_v durch das Auge O zum Kreis.



Das perspektive Bild eines Kreises ist eine Ellipse, wenn der Kreis die Verschwindungsebene nicht trifft, eine Parabel, wenn der Kreis die Verschwindungsebene berührt, eine Hyperbel, wenn der Kreis die Verschwindungsebene schneidet.

Die Punkte des Kreises, die auf der Verschwindungsgeraden v der Kreisebene liegen, haben keinen Bildpunkt in der Perspektive bzw. werden in einen Fernpunkt abgebildet. Die Parabel besitzt also einen, die Hyperbel zwei Fernpunkte.

Da der abzubildende Kreis in Bild 13.42 die Verschwindungsebene π_v nicht trifft, entsteht hier eine Ellipse. Bei der Bildellipse ist zu beachten, dass der Mittelpunkt des Kreises nicht wie bei der Parallelprojektion auf den Mittelpunkt der Ellipse abgebildet wird, da die Zentralprojektion im Unterschied zur Parallelprojektion nicht teilverhältnistreu ist.

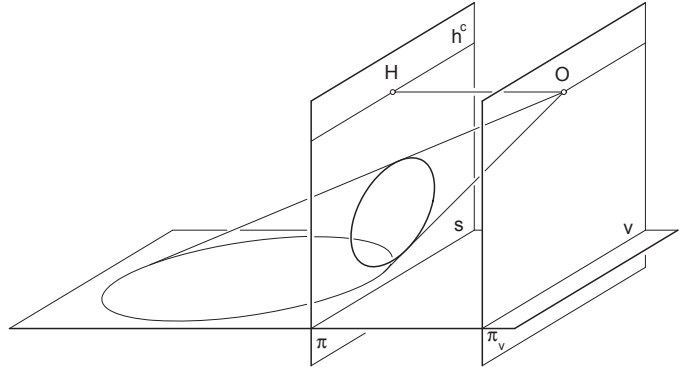


Bild 13.42: Ellipse als perspektives Bild des Kreises

In Bild 13.43 berührt der Kreis die Verschwindungsebene π_v . Der Kreis öffnet sich im perspektiven Bild zu einer Parabel, da der Berührungspunkt V mit der Verschwindungsebene keinen Bildpunkt besitzt. Der Punkt V geht beim Abbilden in einen Fernpunkt der Parabel über. Die Achsenrichtung der Parabel entspricht diesem Fernpunkt.

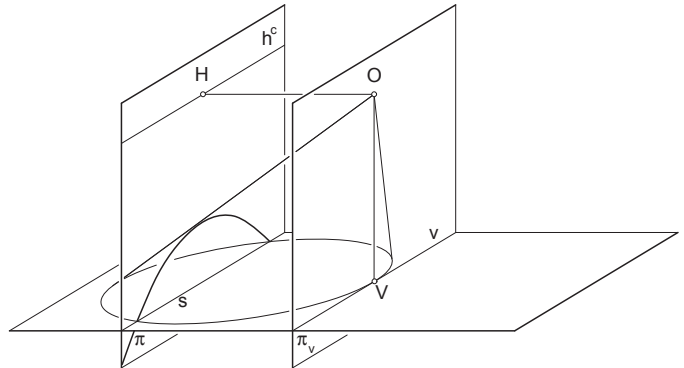


Bild 13.43: Parabel als perspektives Bild des Kreises

Der Kreis schneidet in Bild 13.44 die Verschwindungsebene π_v in zwei Punkten V_1 und V_2 . Das perspektive Bild des Kreises ist dann eine Hyperbel. Die perspektiven Bilder der Verschwindungspunkte V_1 und V_2 sind Fernpunkte. Die Bilder der Kreistangenten in den Punkten V_1 und V_2 sind die Asymptoten der Hyperbel.

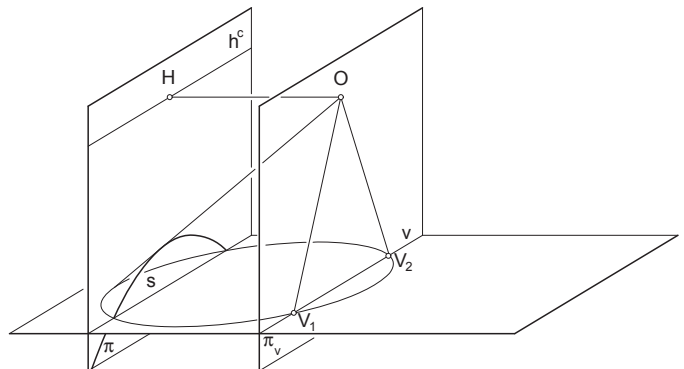


Bild 13.44: Hyperbel als perspektives Bild des Kreises

Die folgenden Zeichnungen zeigen die Vorgehensweise beim Konstruieren des perspektiven Bildes des Kreises aus dem Grundriss. Der Kreis liegt in der Grundriss-ebene. Bild 13.45 zeigt die Konstruktion der Ellipse als perspektives Bild des Kreises. Der Kreis im Quadrat wird in Perspektive in die Ellipse im Trapez abgebildet.

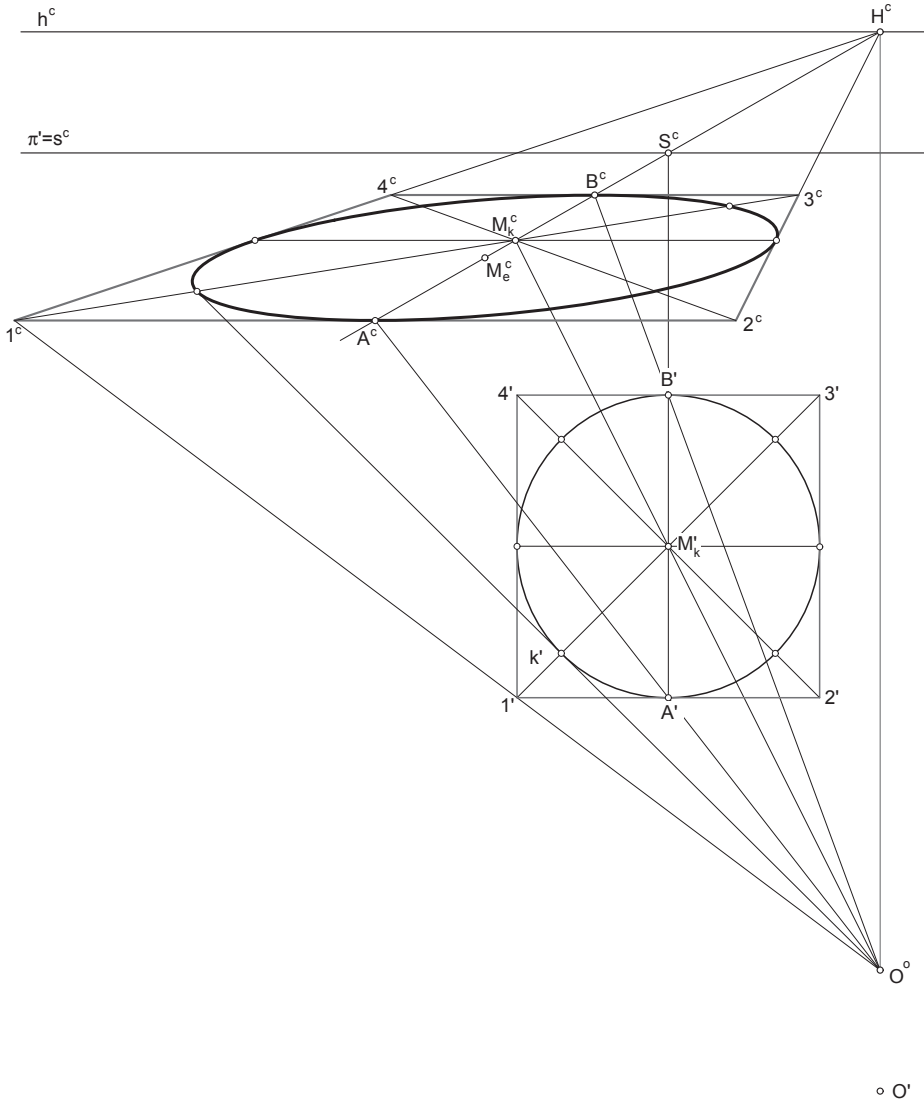


Bild 13.45: Konstruktion der Ellipse als perspektives Bild eines Kreises

1. Sinnvollerweise wird der Kreis k in ein Quadrat (im Grundriss $1'2'3'4'$) eingebettet, am besten so, dass zwei Quadratseiten parallel zur Bildebene sind. Für diese bleiben die Teilverhältnisse

und die Parallelität erhalten. Die beiden anderen Quadratseiten sind dann Tiefenlinien mit dem Hauptpunkt H^c als Fluchtpunkt in der Perspektive.

2. Als perspektives Bild des Quadrates entsteht dann das Trapez $1^c 2^c 3^c 4^c$ mittels Spurpunkten und Fluchtpunkten sowie dem Drehsehenverfahren (Konstruktion mittels O^0), in das die Ellipse eingebettet sein wird, d. h. die Trapezseiten werden Tangenten an die Ellipse sein.
3. Die Kreispunkte auf den Quadratseiten werden als Ellipsenpunkte auf den Trapezseiten konstruiert.
4. Das Bild des Kreismittelpunktes M_k^c ist nicht der Ellipsenmittelpunkt, da der Kreisdurchmesser $A'B'$ nicht teilverhältnistreu abgebildet wird. Das Bild des Kreisdurchmessers $A^c B^c$ ist aber ein Ellipsendurchmesser. Daher muss der Mittelpunkt der Ellipse M_e^c in der Mitte der Strecke $A^c B^c$ liegen.
5. Weitere Punkte und Tangenten der Ellipse können aus Kreispunkten und -tangenten mittels Spurpunkt-Fluchtpunkt-Methode und Drehsehenverfahren ermittelt werden, um dann die Ellipse als Kurve durch diese Punkte entsprechend der Tangenten einzufügen.



Bild 13.46: Innenraumfoto "Vitrine", Hombroich, 1982-87, Erwin Heerich

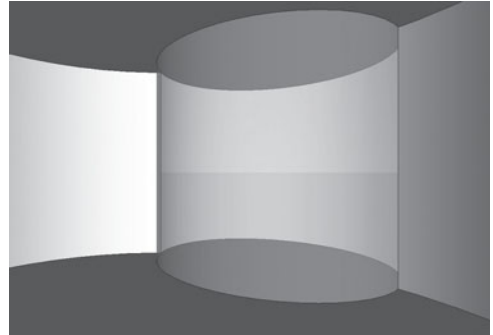


Bild 13.47 Ellipsen und Hyperbeln als Raum-, Unter- und Oberkanten

Die Ellipse kann klarer erfasst werden, wenn konjugierte Ellipsendurchmesser (vgl. Kapitel 3.3) ermittelt werden. Aus diesen können dann auch die Scheitel der Ellipse konstruiert werden (vgl. Rytz'sche Konstruktion, S. 65 ff.). Für konjugierte Ellipsendurchmesser gilt, dass die Tangenten in den Endpunkten eines Ellipsendurchmessers parallel sind zu den Tangenten in den Endpunkten seines konjugierten Ellipsendurchmessers. Konjugierte Ellipsendurchmesser bilden also ein Parallelogramm um die Ellipse. Die Überlegung, wann zwei Geraden durch Zentralprojektion in zwei parallele Geraden abgebildet werden, führt zu der Lösung, dass die Urbilder der beiden parallelen Parallelogrammseiten Tangenten an den Kreis sein müssen, die sich in der Verschwindungsebene schneiden, da dieser Punkt in der Perspektive in einen Fernpunkt abgebildet wird. Die Konstruktion der konjugierten Ellipsendurchmesser in Bild 13.48 zeigt die Vorgehensweise, bei der das den Kreis umschreibende Trapez in das die Ellipse umschreibende Parallelogramm abgebildet wird.

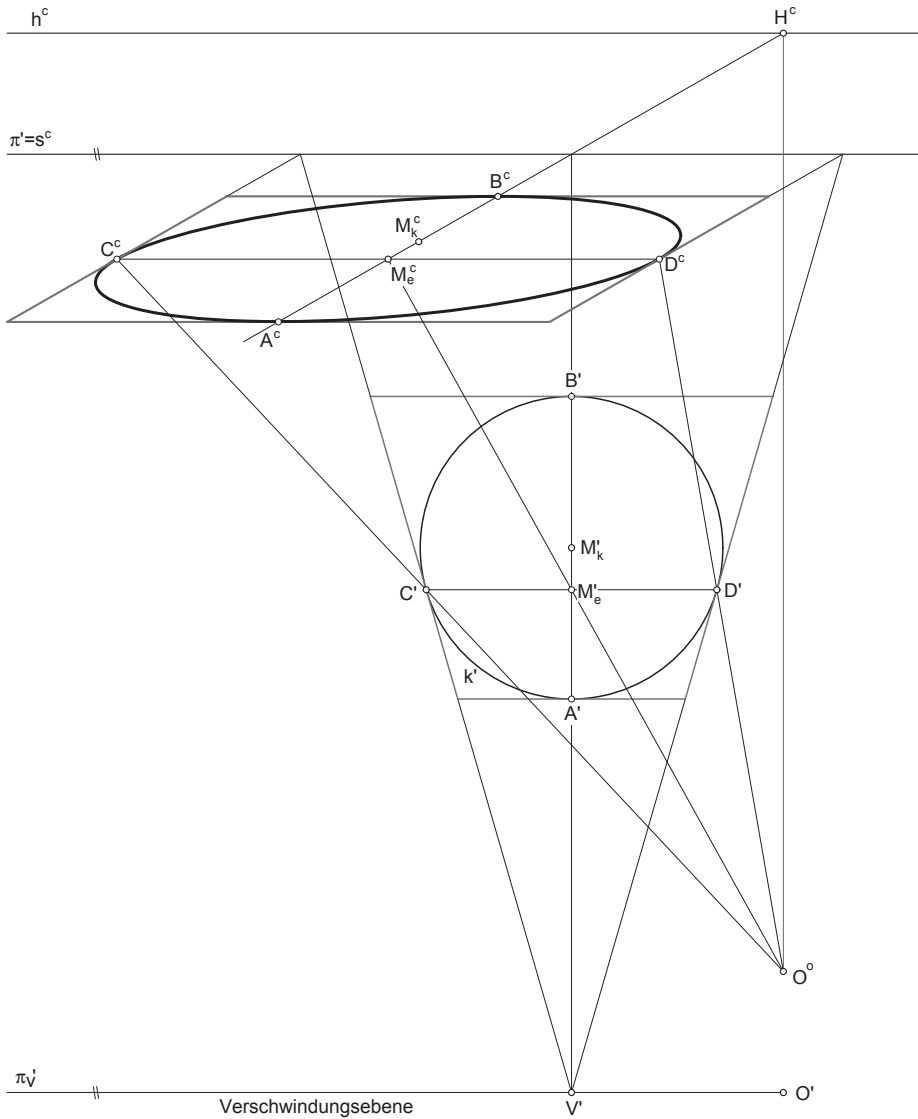


Bild 13.48: Ermitteln konjugierter Ellipsendurchmesser im perspektiven Bild des Kreises

1. Nachdem wie in Bild 13.45 der Mittelpunkt M_e^c der Ellipse ermittelt wurde, kann dessen Urbildpunkt M_e' mit Hilfe des Kollineationsstrahls $O^o M_e^c$ auf $A'B'$ gefunden werden.
2. Die Kreissehne $C'D'$, die parallel zur Bildebene π ist, wird in den zu $A^c B^c$ konjugierten Ellipsendurchmesser $C^c D^c$ abgebildet.
3. Betrachtet man die Tangenten in C' und D' an den Kreis k' , so muss deren Schnittpunkt V' in der Verschwindungsebene $\pi_{V'}$ liegen.

4. Die Endpunkte C' und D' der Kreissehne, können auch direkt als Berührungspunkte der Tangenten an den Kreis k' vom Verschwindungspunkt V' aus, Schnittpunkt der Geraden $A'B'$ mit der Verschwindungsebene $\pi_{V'}$, gefunden werden.
5. Die Tangenten in den Punkten C^c und D^c an die Ellipse sind also parallel zu A^cB^c und damit A^cB^c und C^cD^c konjugierte Ellipsendurchmesser.

Entsprechend kann die Parabel und Hyperbel als perspektives Bild des Kreises ermittelt werden, wenn der Kreis die Verschwindungsebene berührt bzw. in zwei Punkten schneidet. Im Sonderfall tritt der Fall der Parabel auf, wenn der Betrachter auf der Kreislinie steht, der Fall der Hyperbel, wenn der Betrachter innerhalb des Kreises steht. Dies sind nur Sonderfälle zur besseren Vorstellung. Es reicht aus, wenn der Kreis im Fall der Parabel die Verschwindungsebene berührt bzw. im Fall der Hyperbel der Kreis die Verschwindungsebene in zwei Punkten schneidet. Der Betrachter, im Grundriss durch O' angegeben, kann also seitlich versetzt zum Kreis stehen.

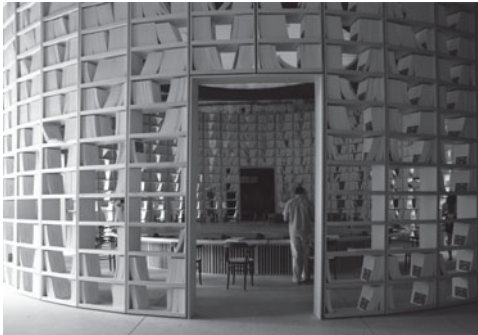


Bild 13.49: Außenfoto des Pavillons Bahrain, Biennale Venedig, 2014

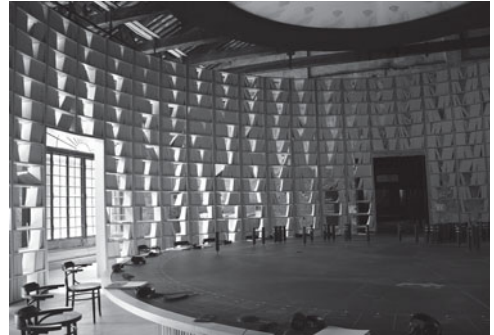


Bild 13.50: Innenfoto des Pavillons Bahrain, Biennale Venedig, 2014

Da die Punkte der Verschwindungsebene zu Fernpunkten in der Perspektive werden, ergibt sich aus der Betrachtung der perspektiven Bilder des Kreises ein tieferes Verständnis der Eigenschaften der Kegelschnitte Ellipse, Parabel und Hyperbel im Allgemeinen:

Die Ellipse besitzt 0 Fernpunkte. Sie hat keinen Punkt mit der Verschwindungsebene gemeinsam.

Die Parabel besitzt 1 Fernpunkt. Sie hat einen Punkt mit der Verschwindungsebene gemeinsam, d. h. die beiden Parabel-Äste werden im Unendlichen parallel zueinander.

Die Hyperbel besitzt 2 Fernpunkte. Sie hat zwei Punkte mit der Verschwindungsebene gemeinsam, d. h. die beiden Fernpunkte werden zu den Richtungen der beiden Asymptoten der Hyperbel in der Perspektive.

Bei der Konstruktion der Parabel in Bild 13.51 wird deutlich, dass aus dem Quadrat, das den Kreis umschreibt, eine offene Figur wird, die oben in der Seite 1^c2^c die

Parabel tangiert. Der Kreispunkt V' hat keinen Bildpunkt auf der Parabel, er wird zum Fernpunkt.

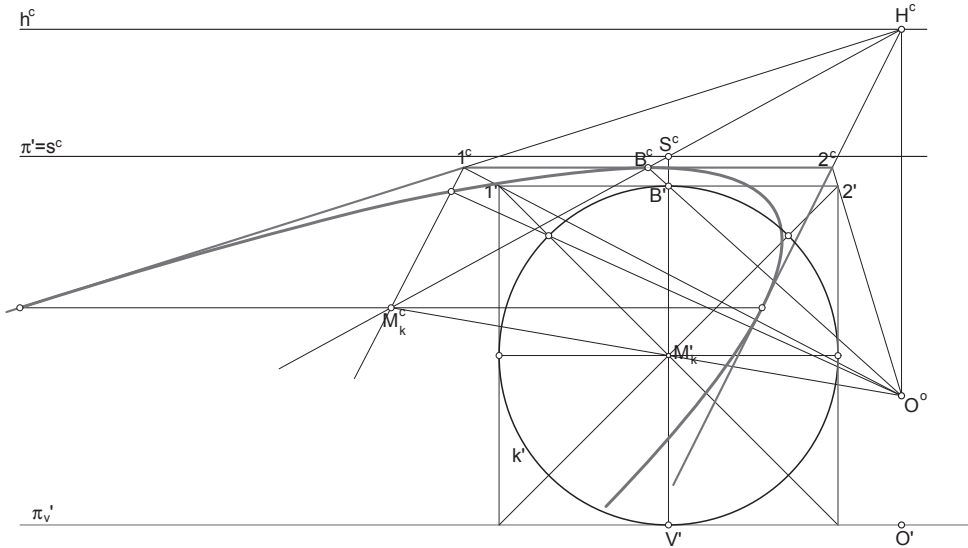


Bild 13.51: Konstruktion der Parabel als perspektives Bild eines Kreises

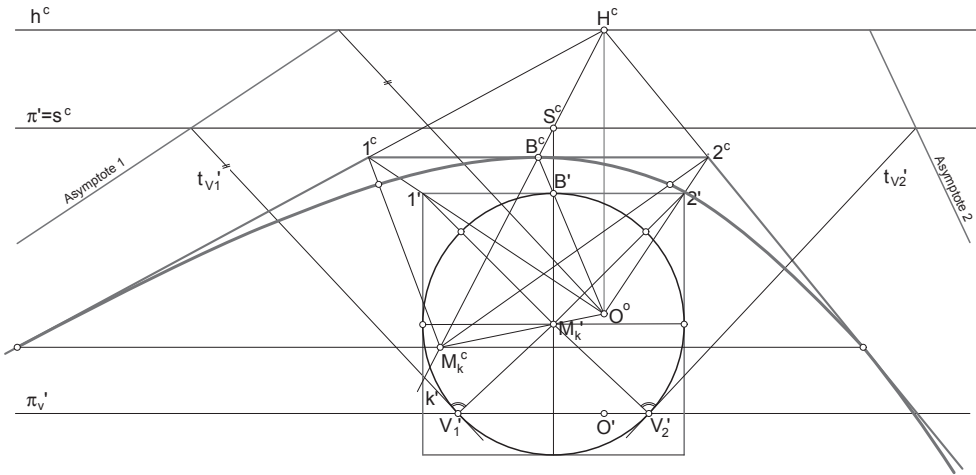


Bild 13.52: Konstruktion der Hyperbel als perspektives Bild eines Kreises

1. Die Asymptoten 1 und 2 der Hyperbel sind die perspektiven Bilder der Tangenten t_{V1}' und t_{V2}' an k' in den Verschwindungspunkten V_1' und V_2' , mittels Spur- und Fluchtpunkten konstruiert.
2. Durch Punkte mit Tangenten kann die Hyperbel in die offene Bildfigur des Quadrats eingepasst werden.

13.7 Randverzerrungen

Mit der Zentralprojektion wird versucht, das Sehen nachzubilden. Daher muss auch beim Zeichnen einer Perspektive berücksichtigt werden, dass ein Betrachter nur einen gewissen Ausschnitt von einem festen Blickpunkt aus wahrnehmen kann. Um ein anschauliches Bild zu erhalten, darf der Bildbereich in der Perspektive nicht zu weit ausgedehnt sein. Die Regel besagt, dass ein Auge O mit der Hauptsehrichtung OH nur die Dinge unverzerrt erkennt, die in einem **Sehkegel** mit der Spitze O , der Achse OH und einem halben Öffnungswinkel von etwa 30° liegen.

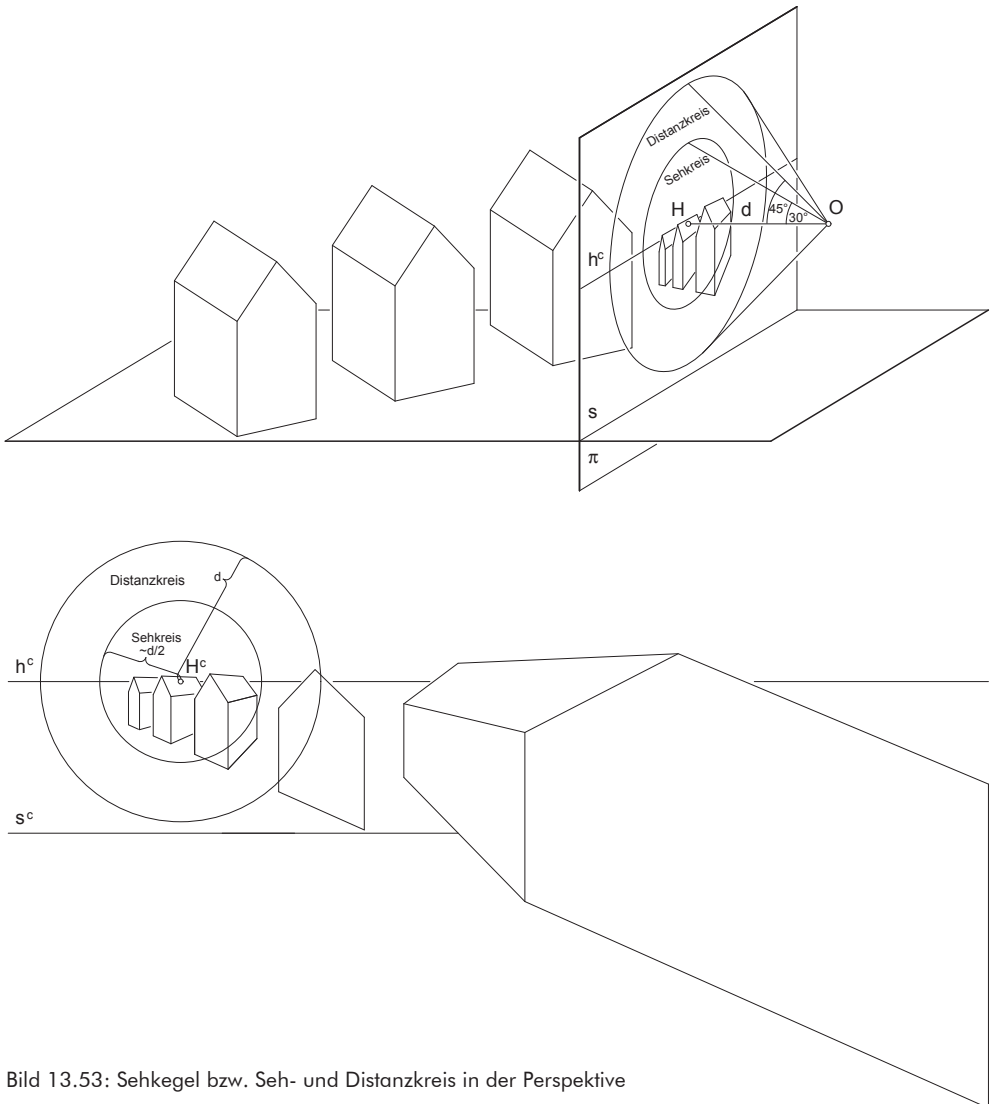


Bild 13.53: Sehkegel bzw. Seh- und Distanzkreis in der Perspektive

Der halbe Öffnungswinkel des Kegels wird auch der **Sehwinkel** genannt. Dieser Sehkegel schneidet die Bildebene π in einem Kreis mit Mittelpunkt H und einem Radius $r = d \cdot \tan 30^\circ \approx d \cdot 0,57$, dem **Sehkreis**. Der Sehkreis umschließt wie eine Blende die Bilder der Objekte, die ein ruhiges Auge wahrnimmt.

Darf sich das Auge bei fester Kopfstellung bewegen, also Raum und Bildfeld abtasten, so entspricht dies einem Sehwinkel von 45° (Bild 13.53). Der Kegel schneidet die Bildebene dann in einem Kreis mit Radius d . Dieser Kreis heißt deshalb **Distanzkreis**.



Das Bild eines Objektes sollte möglichst im Sehkreis, stets aber im Distanzkreis liegen.

Diese Werte folgen Erkenntnissen zur Physiologie des menschlichen Auges, sind also nicht geometrisch zu interpretieren. Je nach gewünschter Wirkung der Perspektive, können auch bewusst Randverzerrungen eingesetzt werden, um die Sicht von einem bestimmten Blickpunkt aus auf das Objekt zu dramatisieren.

Bereits Leonardo da Vinci hat das Problem der Randverzerrung erkannt. Am Beispiel einer Säulenreihe, die aus gleich starken Säulen besteht, zeigte er auf, dass die beiden äußeren Säulen breiter erscheinen als die mittlere. Bild 13.54 zeigt eine entsprechende Zeichnung nach Leonardo in einer Draufsicht mit Blick von O' aus. Die Sehwinkel α und γ sind gleich, β ist größer, aber die in der Bildebene erhaltenen Breiten der Säulen AB und EF sind größer als CD.

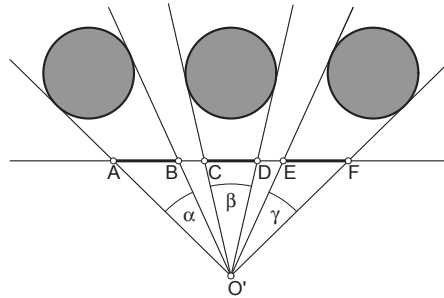


Bild 13.54: Randverzerrungen einer aus gleich starken Säulen bestehenden Säulenreihe nach Leonardo

Erwin Panofsky⁵ beschreibt in seinem berühmten Aufsatz "Die Perspektive als symbolische Form" die Analyse Leonardos zum Problem der Nahdistanzbilder. Der Künstler habe im allgemeinen die Nahdistanz zu vermeiden, wenn ein realistischer Eindruck entstehen soll. Unter Berücksichtigung des Sehkegels kann eine sinnvolle Distanz zum Objekt für die Perspektive gewählt werden. Eine Perspektive kann immer nur den in den Sehkegel fallenden Ausschnitt des Objekts entsprechend unseres Sehens darstellen.

5. Erwin Panofsky: Die Perspektive als symbolische Form. 1927.

Eine Perspektive, die innerhalb des Distanzkreises liegt, entspricht einem Foto mit einem 20 mm-Weitwinkelobjektiv. Kleinere Brennweiten als 20 mm würden stark verzerrt wirkende Fotos liefern, da dann der Öffnungswinkel des Sehkegels größer als 45° wäre. Die folgende Tabelle und Bild 13.55 zeigen den Zusammenhang zwischen Brennweite des Objektivs und dem Sehwinkel.⁶ Dieser Zusammenhang wird an einer Kleinbildkamera mit dem Bildformat 24 x 36 mm verdeutlicht. Die Brennweite f ist der Abstand des Objektiv-Brennpunktes von der Filmebene. Die Brennweite definiert die Vergrößerungseigenschaften der Kameralinse. Einer größeren Brennweite f entspricht ein kleinerer Sehwinkel α und umgekehrt.

Brennweite f	Sehwinkel α
20 mm	45°
35 mm	30°
50 mm	22°
90 mm	13°

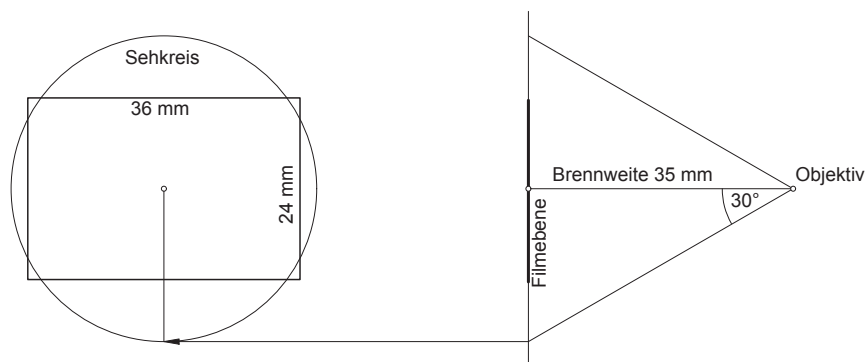


Bild 13.55: Zusammenhang von Brennweite und Sehwinkel

In den meisten CAD-Programmen orientiert sich die Einstellung des Betrachterstandpunktes für die Perspektive an den Begriffen der Fotografie. Daher wird das Fotoformat, traditionell 3:2 bei einem Fotoquerformat, verwendet und aus dem Basisrechteck und der Kameraposition als Pyramidenspitze eine **Sehpyramide** anstatt eines Sehkegels gebildet. Dadurch ergeben sich leicht abweichende Werte für den Sehwinkel in Abhängigkeit von der Brennweite. In Bild 13.56 ist dieser Zusammenhang für ein Bild im Hochformat 2:3 dargestellt.

In AutoCAD[®] entspricht dem Sehwinkel das halbe Blickfeld, in Vectorworks[®] dem halben Blickwinkel. Dann ergibt sich für die Sehpyramide und Brennweite 35 mm zum Beispiel:

6. Manfred Dopler: Die Perspektive im DG-Unterricht der AHS: Ein Lehrgang in Arbeitsblättern (Teil II), IBDG 1/1995, S. 51.

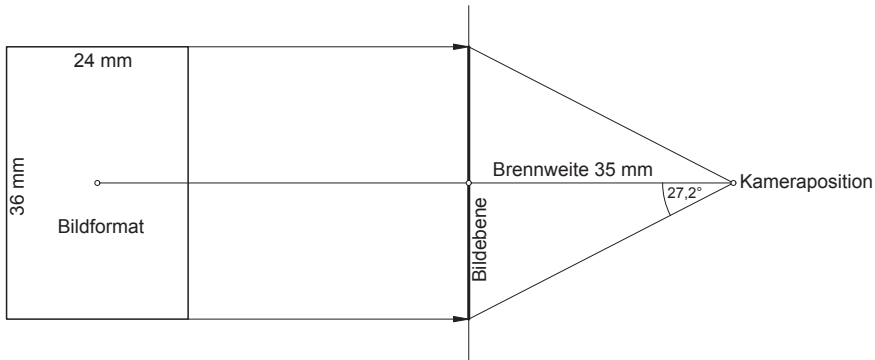


Bild 13.56: Zusammenhang von Brennweite und Sehwinkel bei der Sehpyramide

$$\tan \alpha = \text{halbe Bildbreite} / \text{Brennweite} = 18 / 35 \quad \alpha = 27,2^\circ \quad \text{Blickfeld} = 2\alpha = 54,4^\circ$$

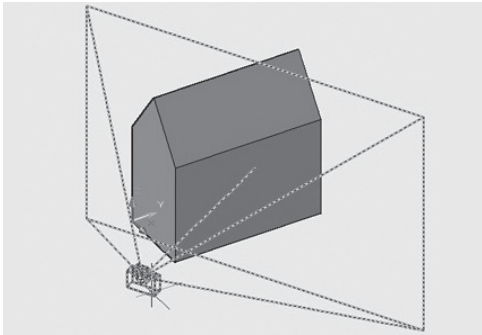


Bild 13.57: Sehpyramide aus Kameraposition und Bildformat in AutoCAD®

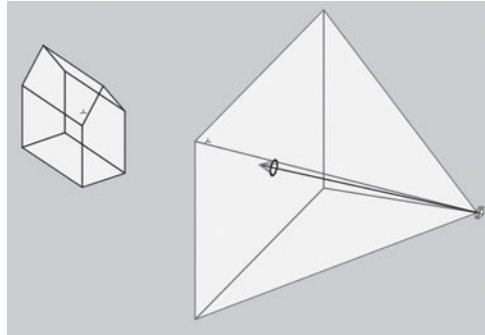


Bild 13.58: Sehpyramide aus Kameraposition und Bildformat in Vectorworks®

Im Programm Rhinoceros® ist das ähnlich. Dort kann entweder Brennweite oder Sichtfeldwinkel bei der Definition der Perspektive gewählt werden. Der jeweils andere Wert ist durch die Wahl der Brennweite oder des Sichtfeldwinkels bestimmt. Die Brennweite und der zugehörige Blickwinkel bzw. das Blickfeld bzw. der Sichtfeldwinkel werden in den Eigenschaftsinformationen der Kamera angezeigt. Trotz etwas abweichender Begriffe ist jeweils der Bereich gemeint, der bei der entsprechenden Brennweite und dem Bildformat eingefangen wird.

Bei der Präsentation einer Perspektive sollten Überlegungen zur sinnvollen Größe des Bildes in Relation zum Präsentationsort und -art miteinbezogen werden. Die optimale, besonders überzeugende Bildwirkung kann erreicht werden, wenn der Betrachter mit einem Auge die richtige Position in Distanz und Aughöhe einnimmt und das andere Auge schließt. Das Auge sollte von der Bildebene einen Mindestabstand von 25 cm, die sogenannte **deutliche Sehweite**, haben.

13.8 Wahl der Parameter einer Perspektive

Die Wirkung des perspektiven Bildes hängt entscheidend davon ab, welche Lage das Projektionszentrum O und der Hauptsehstrahl I zum abzubildenden Objekt einnehmen. Daher ist es von großer Bedeutung, diese Parameter für die Perspektive geeignet zu wählen. Ähnlich wie bei der Axonometrie (vgl. Kapitel 4) ist es sinnvoll, für die Festlegung der Parameter zunächst mit einem Probekörper zu arbeiten. Empfehlenswert sind die folgenden Schritte⁷:

1. Wahl des Hauptsehstrahls im Grundriss

Zuerst wird die Richtung festgelegt, aus der das Objekt betrachtet werden soll. Bei vertikaler Bildebene ist der Hauptsehstrahl stets horizontal. Er sollte auf den wichtigsten Teil des Objekts gerichtet werden, der in der Perspektive zum Ausdruck kommen soll.

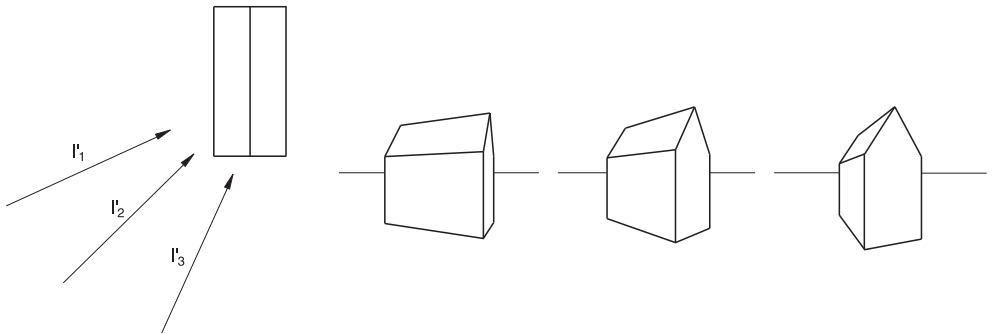


Bild 13.59: Wahl des Hauptsehstrahls im Grundriss - Perspektiven mit verschiedenen Lagen des Hauptsehstrahls

Bild 13.59 zeigt drei unterschiedliche Perspektiven, die aus den drei angegebenen Lagen des Hauptsehstrahls im Grundriss I'_1 , I'_2 bzw. I'_3 entstehen.

2. Wahl der Aughöhe

Die Aughöhe bestimmt die Höhe, aus der das Objekt betrachtet werden soll. Durch die Wahl des Hauptsehstrahls im Aufriss wird die Aughöhe festgelegt.

Soll die Szenerie so dargestellt werden, wie sie ein Fußgänger erleben würde, so muss eine Aughöhe von ca. 170 cm gewählt werden.

Ist die Aughöhe gering, so spricht man von einer **Froschperspektive**. Diese ist zum Beispiel bei Hangbebauungen wie bei der Perspektive des Wohnhauses von Rudolf M. Schindler in Bild 13.61 geeignet.

Ist die Aughöhe sehr groß, so spricht man von einer **Vogelperspektive**. Der Betrachter erlebt das Objekt aus Vogel- bzw. Flugzeugsicht.

7. Diese Schritte sind zusammengestellt nach einem Vorlesungsskript von Claus Pütz: Arbeitsblätter zur Darstellende Geometrie für Architekten. Institut für Geometrie und Praktische Mathematik, RWTH Aachen, 1996.

Eine solche Vogelperspektive ist sinnvoll, wenn ein Überblick über einen größeren Gebäudekomplex bzw. ein Stadtteil vermittelt werden soll, wie in Bild 13.62 der Blick über die Villen mit Dachgärten an der Riviera von Adolf Loos die gesamte Wohnanlage veranschaulicht.

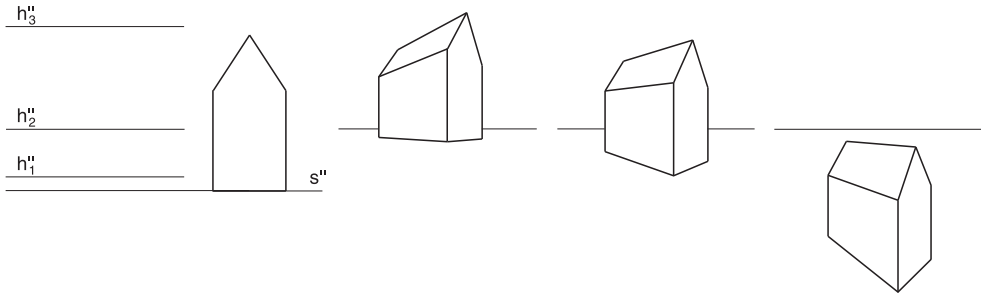


Bild 13.60: Wahl der Augenhöhe - Perspektiven mit unterschiedlicher Augenhöhe

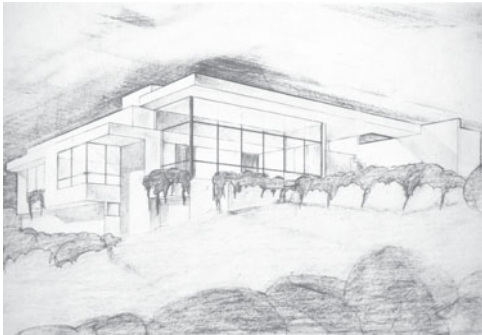


Bild 13.61: Froschperspektive - Wohnhaus für Haines, USA, 1934-35, R. M. Schindler



Bild 13.62: Vogelperspektive - Villen mit Dachgärten an der Riviera, 1923, Adolf Loos

3. Wahl des Auges auf dem Hauptsehstrahl

Mit der Wahl des Auges auf dem Hauptsehstrahl wird die Entfernung des Auges vom Objekt festgelegt. Für die Bildwirkung ist entscheidend, ob das Bild des Objektes in den Sehkreis bzw. Distanzkreis passt, darüber hinaus geht oder ihn nicht voll ausnutzt (Bild 13.63).

Die Überprüfung, ob das Objekt innerhalb des Sehkegels liegt, darf nicht nur im Grundriss erfolgen, sondern muss im Raum durchgeführt werden. Insbesondere an "extremen" Raumpunkten – sehr hoch, sehr niedrig – sollte die Lage bezüglich des Sehkegels überprüft werden. Ist O' zu nah am Objekt, werden die Proportionen des Objekts im Bild stark verzerrt. Ist O' zu weit vom Objekt entfernt, wird das Bild spannungsarm und sieht beinahe wie eine Axonometrie aus.

Um auch im Aufriss zu überprüfen, ob das Objekt innerhalb des Sehkegels liegt, kann der Umriss des Sehkegels im Aufriss mit Hilfe einer Kugel, die den Sehkegel berührt, eingezeichnet werden.

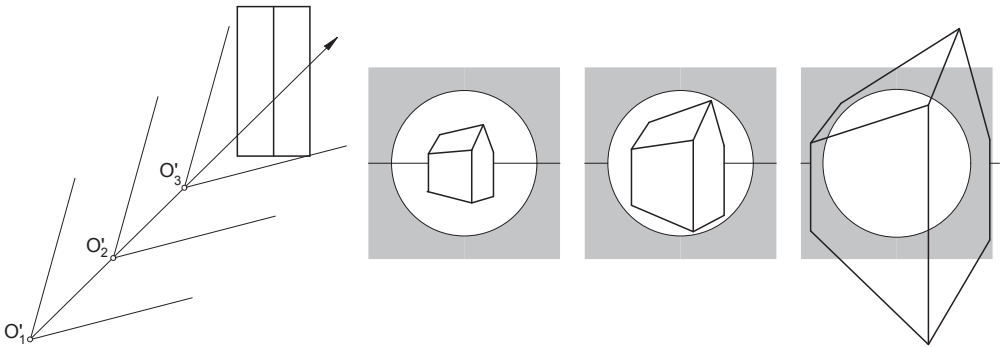


Bild 13.63: Wahl des Auges - Perspektiven mit unterschiedlichen Entfernungen des Auges zum Objekt

Vor der Konstruktion können die Sichtbarkeitsverhältnisse grob abgeschätzt werden. Hierzu werden Sehstrahlen durch O' und durch die Ecken der Baukörper eingezeichnet und die dahinterliegenden verdeckten Bereiche ermittelt.

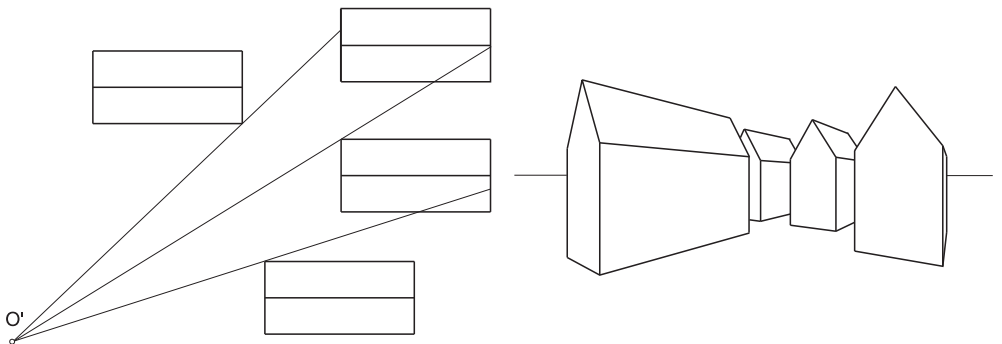


Bild 13.64: Überprüfen der Sichtbarkeit

4. Wahl der Bildebene

Als letzter Parameter ist die Distanz der Bildebene vom Auge festzulegen.

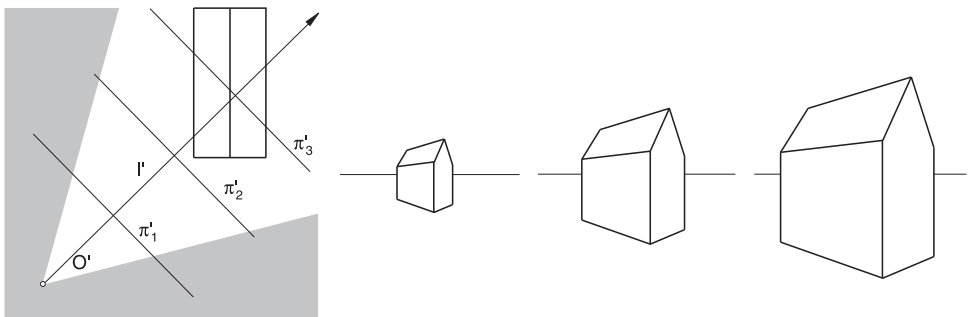


Bild 13.65: Wahl der Bildebene - Perspektiven mit unterschiedlicher Distanz der Bildebene vom Auge

Die Bildebene π muss senkrecht zum Hauptsehstrahl l eingezeichnet werden, an welcher Stelle genau, ist nun nicht mehr entscheidend für die Art der Perspektive, die entsteht. Die Bildwirkung ändert sich durch unterschiedliche Distanzen nicht. Nur die Größe des Bildes und die Erreichbarkeit der Fluchtpunkte wird durch die Wahl der Bildebene beeinflusst. Je kleiner die Distanz, desto kleiner wird das Bild und desto näher liegen die Fluchtpunkte beieinander. Je größer die Distanz, desto größer wird das Bild und desto weiter sind die Fluchtpunkte voneinander entfernt. Die Lage der Bildebene entscheidet also über eine Vergrößerung oder Verkleinerung des perspektiven Bildes. Als Entscheidungshilfe ist es sinnvoll, die Fluchtstrahlen schon vor dem Festlegen der Bildebene einzuzichnen, damit die Lage der Fluchtpunkte und deren Erreichbarkeit abzusehen sind. Die Lage der Bildebene sollte also als letzter Parameter der Perspektive festgelegt werden. Eine spätere Skalierung des Bildes, um eine für die Präsentationsart geeignete Größe des Bildes zu erhalten, hat den gleichen Effekt wie die Verschiebung der Bildebene.

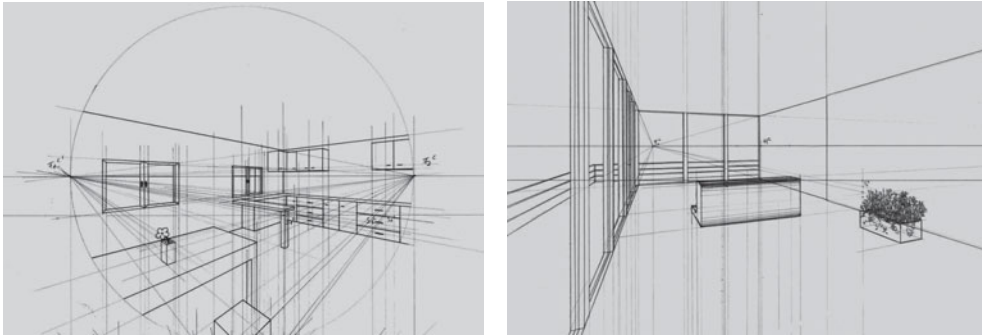


Bild 13.66: Innenraum-Perspektiven, Konstruktionszeichnungen zu Entwurfsprojekten, 2007, Studienprojekt Benjamin Maier (links) und Julika Siegmund (rechts)

Bei Innenraum-Perspektiven ist es häufig schwieriger als beim Außenraum die Parameter der Perspektive geeignet festzulegen. Es kann immer nur ein Ausschnitt des Raums gezeigt werden, nie der ganze Raum, wenn ein realistischer Betrachterstandpunkt gewählt wird. Daher ist es entscheidend, den für den Entwurf wichtigen Ausschnitt passend festzulegen. Besonders aussagekräftig ist die Darstellung des Bezugs zwischen draußen und drinnen in der Innenraumperspektive. Der Raumbezug zum Außenraum durch die Fenster, kann bereits durch die Kennzeichnung des Horizonts verdeutlicht werden. Mit einer Serie von Perspektiven kann ein Weg durch ein Gebäude oder ein Umschauen in einem Raum simuliert werden.

13.9 Licht und Schatten in der Perspektive

Die Berücksichtigung von Licht und Schatten (vgl. Kapitel 10) in einer Perspektive lässt den dargestellten Raum für den Betrachter plastischer werden. Auch bei den Schattenkonstruktionen in der Perspektive müssen wir wie bei Parallelrissen zwischen der natürlichen Beleuchtung durch die Sonne (Parallelbeleuchtung) und künstlicher Beleuchtung durch eine Lampe (Zentralbeleuchtung) unterscheiden.

13.9.1 Schatten in der Perspektive bei Parallelbeleuchtung

Die Bilder der parallelen Lichtstrahlen der Sonne in der Perspektive sind im allgemeinen nicht parallel, sondern schneiden einander im Fluchtpunkt F_l^c . Die räumlichen Lichtstrahlen und die Risse der Lichtstrahlen auf die Schattenauffangfläche müssen in die Perspektive abgebildet werden. Der räumliche Lichtstrahl und seine Projektion auf die Schattenauffangfläche bilden das für die Schattenkonstruktion entscheidende vertikale Lichtdreieck. Die Fluchtgerade der Ebene durch dieses Lichtdreieck muss daher eine Senkrechte zum Horizont sein. Ist die Schattenauffangfläche die horizontale Grundrissebene (Standebene), so liegt der Fluchtpunkt der Bilder der Grundrisse der Lichtstrahlen F_l^c auf dem Horizont und der Fluchtpunkt der räumlichen Lichtstrahlen F_l^c senkrecht darüber oder darunter. Diese Lichtfluchtpunkte werden gefunden, indem die Parallelen zu l und l' durch das Auge O gelegt und mit der Bildebene π zum Schnitt gebracht werden, d. h. das Lichtdreieck wird zur Konstruktion der Fluchtpunkte in das Auge parallel verschoben.

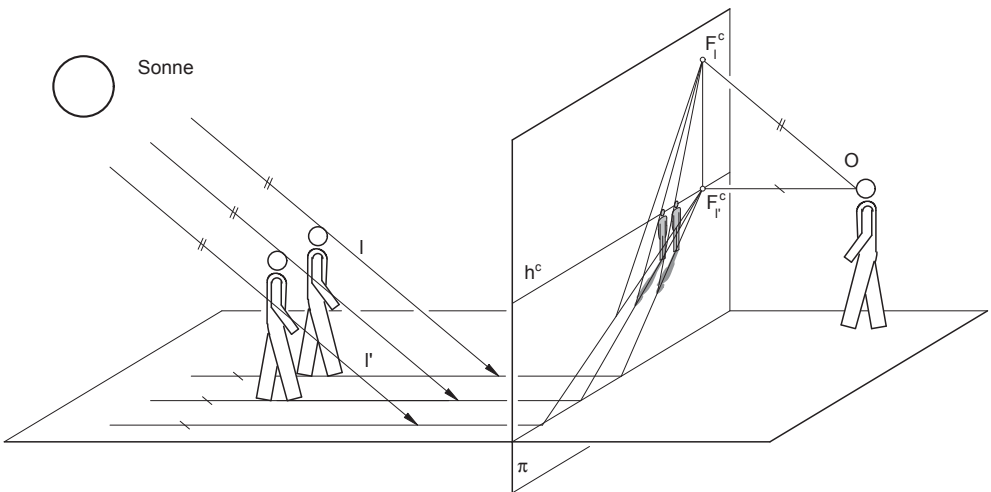


Bild 13.67: Perspektives Bild der Lichtdreiecke aus räumlichen Lichtstrahlen und deren Grundrisse

Wie bei der Axonometrie (vgl. Kapitel 10) muss das Bild des räumlichen Lichtstrahls mit dem Bild des Risses des Lichtstrahls auf die Schattenauffangfläche zum Schnitt gebracht werden, um herauszufinden, wo der Lichtstrahl auf die Schattenauffangfläche auftrifft.

Für die räumlichen Lichtstrahlen können drei Fälle unterschieden werden:

1. Die Sonne liegt vor dem Betrachter, d. h. es liegt **Gegenlicht** vor. Dann befindet sich der Fluchtpunkt der räumlichen Lichtstrahlen l_1 über dem Horizont (Bild 13.68, 13.69 und 13.70).
2. Die Sonne liegt hinter dem Betrachter, d. h. es liegt **Rückenlicht** vor. Dann befindet sich der Fluchtpunkt der räumlichen Lichtstrahlen l_2 unter dem Horizont (Bild 13.68, 13.69 und 13.71).
3. Die Lichtstrahlen sind parallel zur Bildebene, d. h. es liegt **Seitenlicht** vor. Die Lichtstrahlen bleiben in der Perspektive ebenfalls parallel, der Fluchtpunkt der räumlichen Lichtstrahlen l_3 ist dann ein Fernpunkt (Bild 13.68, 13.69 und 13.72).



Bild 13.68: Gegenlicht, Rückenlicht und Seitenlicht - Außentreppen der Wohnanlage in Paris, 1991-94, Philippe Gazeau

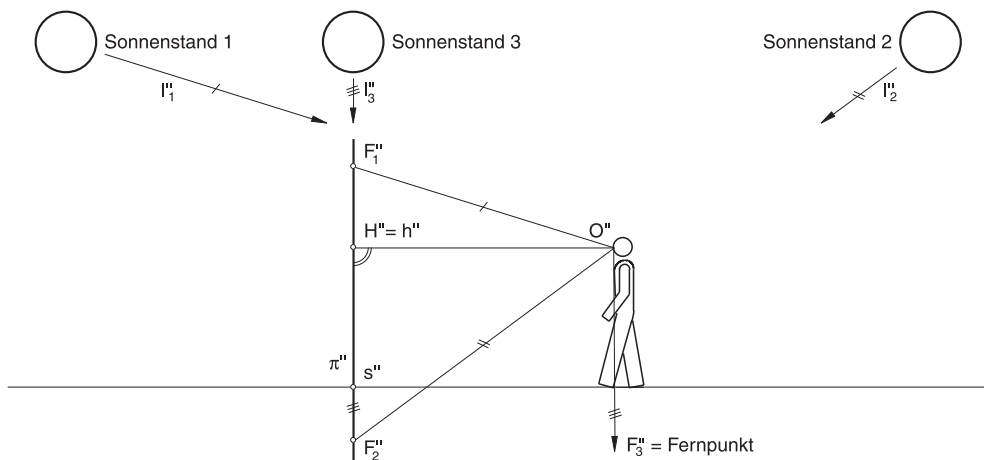


Bild 13.69: Verschiedene Lagen der Sonne zum Betrachter

Bild 13.70-72 zeigen die drei Fälle der Lage der Sonne zum Betrachter in der Perspektive.

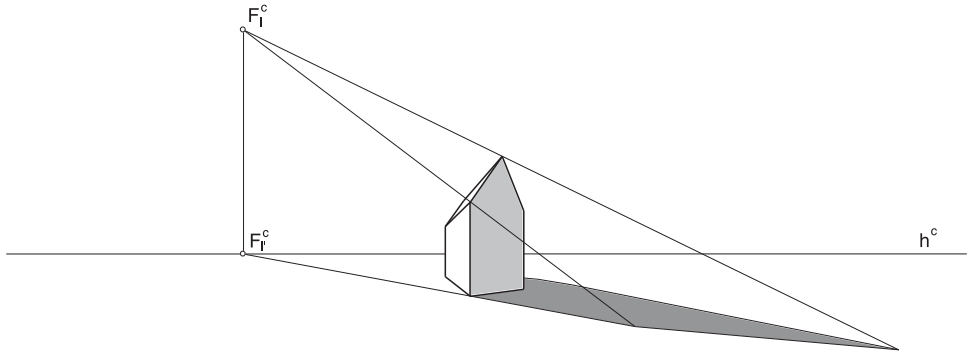


Bild 13.70: Sonne liegt vor dem Betrachter - Gegenlicht

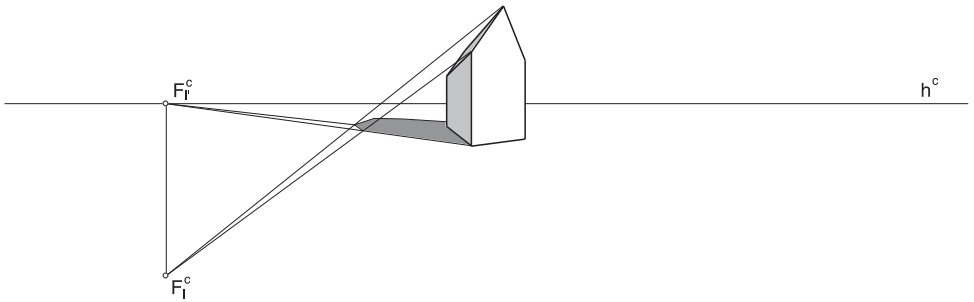


Bild 13.71: Sonne liegt hinter dem Betrachter - Rückenlicht

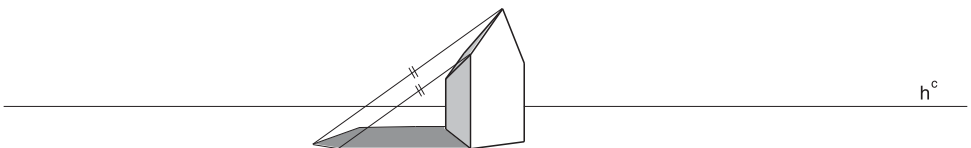


Bild 13.72: Lichtstrahlen parallel zur Bildebene - Seitenlicht

Zur Darstellung eines Objektes in einer Perspektive ist das Rückenlicht am geeignetsten. Die vorderen Flächen des Objektes werden in diesem Fall beleuchtet, sind nicht verschattet. Der Schatten betont die räumliche Situation, da er nach hinten fällt. Bei Gegenlicht hingegen liegen die vorderen Objektseiten im Schatten. Daher ist das Objekt selbst nicht mehr gut zu erkennen. Der Fall des Seitenlichtes mit zur Bildebene parallelen Lichtstrahlen stellt ein Sonderfall dar, der auch beim Fotografieren kaum exakt herstellbar ist. Daher wirkt dieser Fall in der Perspektive eher künstlich.

Ist der Sonnenstand z. B. am 23.09., 14 Uhr, in Köln mit dem Azimutwinkel $\alpha_s \approx 218^\circ$ (Süden) und dem Höhenwinkel $\gamma_s \approx 33^\circ$ bekannt (vgl. Kapitel 10.1), so kann die Lichtrichtung in die Perspektive übertragen werden. In den genordeten Grundriss kann der Azimutwinkel α_s eingetragen werden. Damit ist die Lichtrichtung im Grundriss l' bekannt, und der Fluchtpunkt der Grundrisslichtstrahlen F_l^c kann in die Perspektive übertragen werden. Um den Fluchtpunkt F_l^c der räumlichen Lichtstrahlen zu erhalten, wird mit Hilfe des Messpunktes der Grundrisslichtstrahlen (vgl. Kapitel 13.4.2) der Höhenwinkel γ_s in der Perspektive abgetragen (Bild 13.73).

Nach der Konstruktion der Fluchtpunkte der Grundrisslichtrichtung und der räumlichen Lichtrichtung kann die Schattenkonstruktion in der Perspektive durchgeführt werden. Die perspektiven Bilder der räumlichen Lichtstrahlen, F_l^c verbunden mit den Bildern der Objektpunkte, schneiden die perspektiven Bilder der Grundrisslichtstrahlen, F_l^c verbunden mit den perspektiven Grundrissen der Objektpunkte, in den zugehörigen Schattenpunkten.

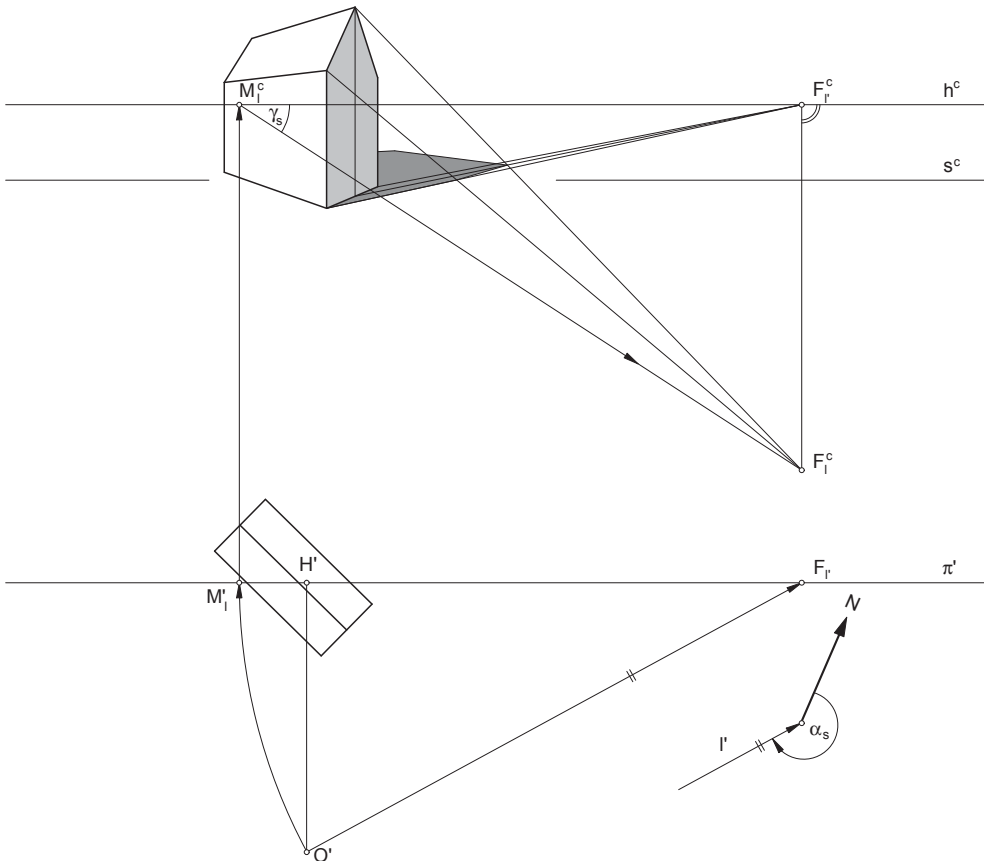


Bild 13.73: Lichtrichtung und Schattenkonstruktion in der Perspektive bei Parallelbeleuchtung auf eine horizontale Auffangebene

Die Eigenschaften können entsprechend des Zusammenhangs von Eigen- und Schlagschatten (vgl. Kapitel 10) gefunden werden: die Eigenschattengrenze wird auf die Schlagschattengrenze abgebildet. Ist also die Schlagschattengrenze gefunden, so ist das Urbild im Objekt die Eigenschattengrenze.

Ergänzend zum Schatten auf eine horizontale Schattenauffangebene sollen im Folgenden die Schattenkonstruktionen bei vertikalen und geneigten Schattenauffangebenen entsprechend der Beispiele in Kapitel 10 betrachtet werden.

Bild 13.74 zeigt das Objekt mit Vor- und Rücksprung aus Bild 10.16 in einer Perspektive mit gegebenen Lichtfluchtpunkten F_1^c und F_1^c . Im perspektiven Grundriss kann zunächst herausgefunden werden, an welcher Stelle der Grundriss des Lichtstrahls an der Unterkante des Türücksprungs auftrifft. Die vertikalen Tür- und Quaderkanten und ihr Schattenbild auf der Wand sind jeweils parallel zueinander wie bei der Axonometrie, da bei einer Perspektive mit vertikaler Bildebene die Parallelität der Vertikalen erhalten bleibt. Die horizontalen Kanten sind räumlich gesehen ebenfalls parallel zu den Schattenauffangebenen im Beispiel. In der Perspektive verlaufen die Schattenbilder der horizontalen Kanten daher durch denselben Fluchtpunkt F_1^c wie die Objektkanten.

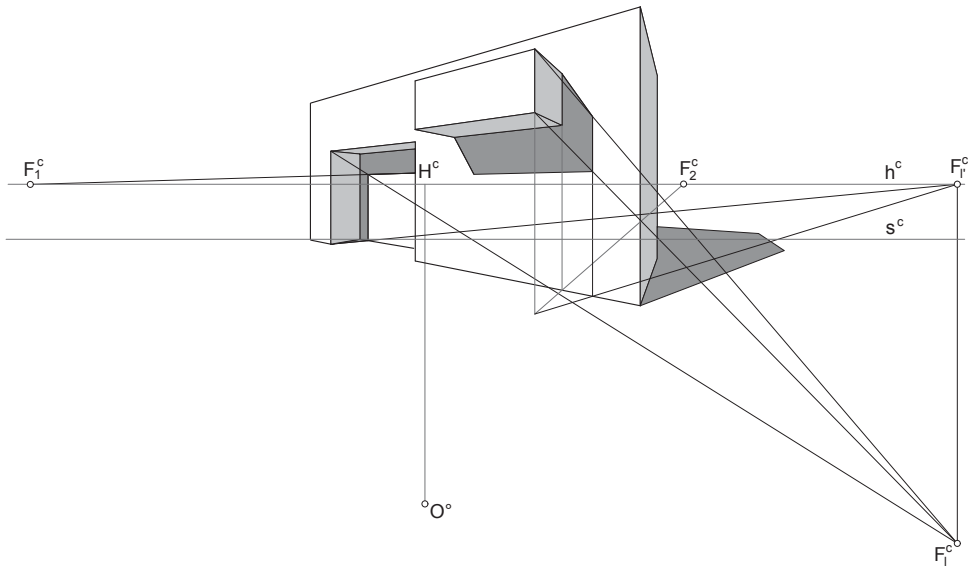


Bild 13.74: Schattenkonstruktion bei vertikaler Auffangebene in einer Perspektive

1. Für die Schattenkonstruktion des Türücksprungs wird der am Boden liegende Punkt der äußeren Kante der Türöffnung mit dem Fluchtpunkt F_1^c verbunden.

2. Im Schnittpunkt mit der Unterkante des Türücksprungs kann die Senkrechte zum Horizont gezeichnet werden.
3. Der obere Eckpunkt der äußeren Kante der Türöffnung wird mit dem Fluchtpunkt F_1^c der räumlichen Lichtstrahlen verbunden. Diese Verbindungslinie schneidet die gezeichnete Senkrechte im Schattenpunkt dieses oberen Eckpunktes.
4. Die Verbindungslinie mit dem Fluchtpunkt F_1^c der Oberkante der Türöffnung kennzeichnet den Schattenverlauf dieser oberen Kante der Türöffnung.
5. Für die Ermittlung des Schlagschattens des quaderförmigen Vorsprungs auf die Wand wird zunächst die Grundrissprojektion des Vorsprungs in der Perspektive gesucht.
6. Durch die Verbindung des rechten Eckpunktes des Grundrisses des Vorsprungs mit dem Lichtfluchtpunkt F_1^c wird der Punkt gefunden, in dem der Grundrisslichtstrahl an der Wand auftrifft.
7. Die Vertikale in diesem Punkt geschnittenen mit dem räumlichen Lichtstrahl durch den entsprechenden oberen Punkt des Vorsprungs liefert den Schattenpunkt.
8. Mit Hilfe der Parallelität, der Objektluchtpunkte und der Lichtfluchtpunkte kann die Schattenkonstruktion vervollständigt werden.



Bild 13.75: Schnittperspektive mit Licht und Schatten, 2011, Studienprojekt Ali Ajeti

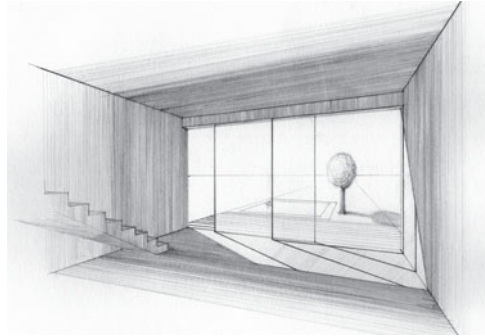


Bild 13.76: Innenraumperspektive mit Licht und Schatten, 2012, Studienprojekt Luzia Birker

Die Projektbeispiele Schnittperspektive und Innenraumperspektive zeigen Schatten auf horizontale und vertikale Schattenauffangflächen, Boden und Wand. Bei der Innenraumperspektive sehen wir in Umkehrung der Schattenkonstruktion das Licht, das in den Raum fällt. Zunächst ist also der Raum dunkel und das durch die Öffnungen einfallende Licht erzeugt helle Bereiche.

Ist die Schattenauffangebene eine geneigte Ebene ε , so muss die Methode der Deckgeraden (Kapitel 5.4.3) für den Lichtstrahl in die Perspektive umgesetzt werden. Damit kann die Projektion der Lichtrichtung l auf die Ebene ε mit dem Lichtfluchtpunkt F_ε^c ermittelt werden. Die Schattenkonstruktion auf die geneigte Ebene ε wird dann mit Hilfe des Lichtfluchtpunktes F_1^c des räumlichen Lichtstrahls und des Fluchtpunktes F_ε^c der auf die Ebene ε projizierten Lichtrichtung anstatt F_1^c entsprechend des Beispiels in der Axonometrie (Bild 10.20) durchgeführt.

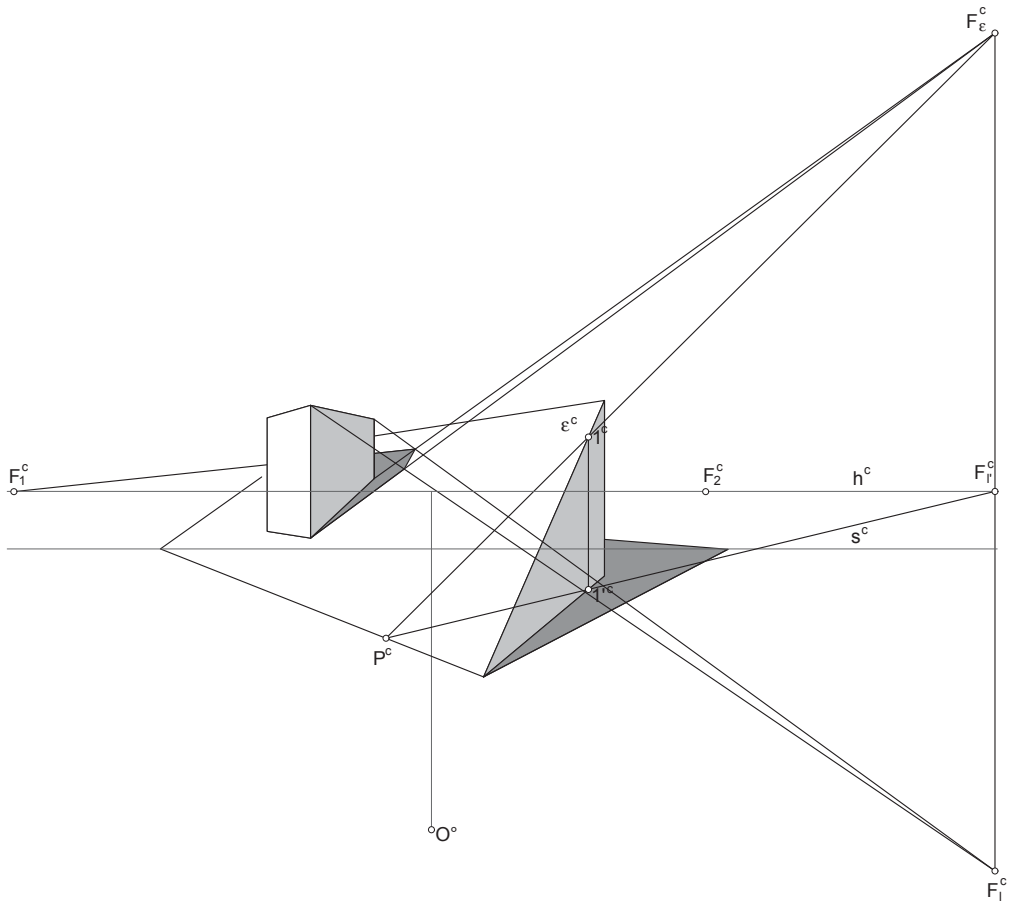


Bild 13.77: Schattenkonstruktion auf eine geneigte Auffangebene in einer Perspektive

1. In einem beliebigen Punkt P^C der Unterkante der geneigten Ebene ε wird die Grundrissprojektion des Lichtstrahls eingezeichnet, indem dieser mit dem Fluchtpunkt F_P^C verbunden wird.
2. Im Schnittpunkt 1^C mit einer Kante der Grundrissprojektion der geneigten Ebene ε wird die Vertikale eingezeichnet, welche die Kante der Ebene ε im Punkt 1^C trifft.
3. Die Gerade $P^C 1^C$ schneidet die Fluchtgerade der vertikalen Ebene durch den Lichtstahl l , also die Vertikale zum Horizont durch den Lichtfluchtpunkt F_P^C bzw. F_l^C , im Fluchtpunkt F_ε^C , mit dem im Folgenden die Schattenkonstruktion auf die geneigte Ebene ε durchgeführt werden kann.

Aus diesen drei Fällen können die meisten Schattenkonstruktionen auf
Auffangebene zusammengesetzt werden.

13.9.2 Schatten in der Perspektive bei Zentralbeleuchtung

In Bild 13.78 sind zwei Perspektiven mit unterschiedlichen Lichtquellen des Entwurfs "Ramses Workstation" zu sehen, bei dem eine Arbeitsplattform zur Restauration des Tempels entworfen wurde. Das linke Bild zeigt den Entwurf bei Parallelbeleuchtung. Durch die Sonne als Lichtquelle fällt der Schatten auf den Boden und die benachbarte Säulenreihe. Das rechte Bild zeigt dieselbe Perspektive dieses Entwurfs mit Zentralbeleuchtung. Hier ist eine Lampe am Baugerüst die schattenerzeugende Lichtquelle. Dadurch entsteht ein völlig anderer Schatten, der in alle Richtungen fällt.

Bei der Zentralbeleuchtung wird eine Lampe als punktförmige Lichtquelle angenommen (vgl. Kapitel 10.2). Die Lage der punktförmigen Lichtquelle L im Raum wird aus Grund- und Aufriss in die Perspektive übertragen. Im Unterschied zur Parallelbeleuchtung sind die ermittelten Punkte L^c und L^c keine Fluchtpunkte.

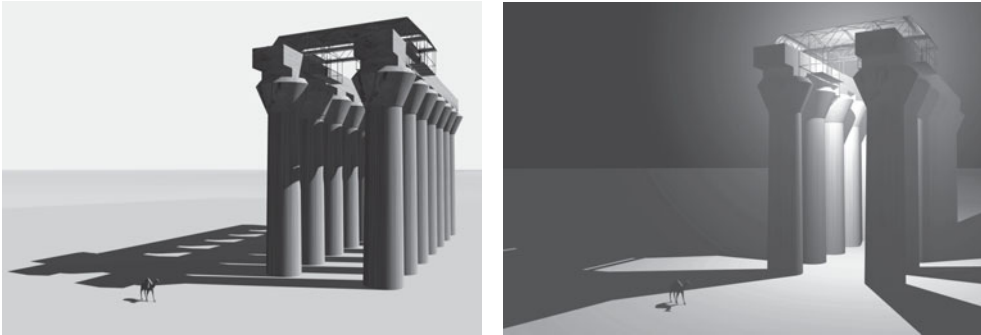


Bild 13.78: Schatten bei Parallelbeleuchtung und bei Zentralbeleuchtung in einer Perspektive am Beispiel des Entwurfs "Ramses Workstation", 1997, Studienprojekt Christian Brost

Die Schattenkonstruktion kann durchgeführt werden, indem die räumlichen Lichtstrahlen durch die Bilder der räumlichen Objektpunkte in der Perspektive, L^c verbunden mit den Objektpunkten, mit den perspektiven Bildern der Grundrisslichtstrahlen, L^c verbunden mit den perspektiven Grundrissen der Objektpunkte, zum Schnitt gebracht werden (Bild 13.79).

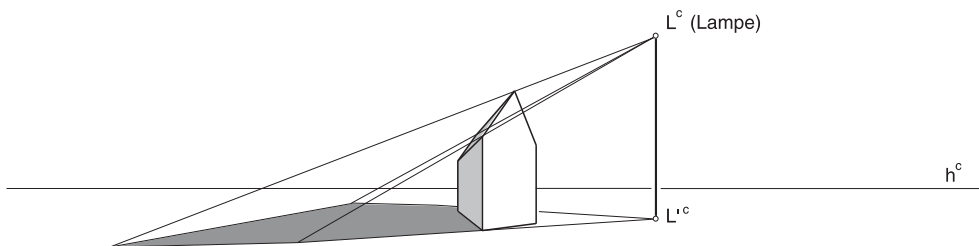


Bild 13.79: Punktförmige Lichtquelle - Schattenkonstruktion in der Perspektive bei Zentralbeleuchtung

13.10 Spiegelung in der Perspektive

Um die räumliche Wirkung der perspektiven Darstellung zu erhöhen, ist es sinnvoll neben dem Schatten auch Spiegelungen auf Oberflächen zu berücksichtigen. Dies führt zu plastischeren und realistischeren Darstellungen der Gesamtsituation. Spiegelungen kennzeichnen Materialien, glatte Oberflächen. Durch Spiegelungen können ergänzend andere Sichten auf das Objekt gezeigt werden, z. B. Untersicht von Bauteilen oder Rückansichten.

Für die Konstruktion von Spiegelungen muss zunächst geklärt werden, was das physikalische Phänomen Spiegelung geometrisch bedeutet. Spiegelung wird interpretiert als die Reflexion von Lichtstrahlen an einem ebenen Spiegel, d. h. im Raum werden die Figuren an einer Ebene α , der **Spiegelebene**, reflektiert. Dabei gelten folgende Grundgesetze der Spiegelung (Bild 13.80):

1. Ein einfallender Lichtstrahl I wird mit dem gleichen Winkel zur Spiegelebenennormalen n als Lichtstrahl I_r reflektiert, d. h. der Einfallswinkel ist gleich dem Ausfallswinkel.
2. Der einfallende Lichtstrahl I und der reflektierte Lichtstrahl I_r liegen mit der Normalen n zur Spiegelebene in einer zur Spiegelebene senkrechten Ebene im Schnittpunkt des Lichtstrahls mit der Spiegelebene.
3. Alle durch einen Punkt P gehenden einfallenden Strahlen werden so reflektiert, dass sich die Verlängerungen der reflektierten Lichtstrahlen hinter der Spiegelebene in einem Punkt, dem Spiegelpunkt P_r von P schneiden.
4. Der Spiegelpunkt P_r liegt in derselben Entfernung hinter der Spiegelebene wie der Punkt P vor der Spiegelebene. Die Verbindung PP_r ist senkrecht zur Spiegelebene.

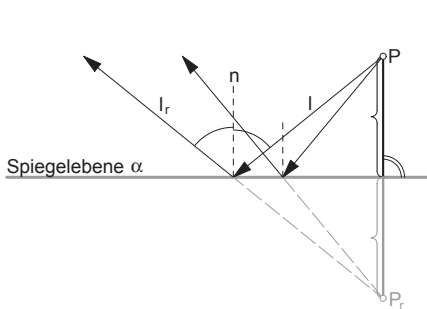


Bild 13.80: Grundgesetze der Spiegelung an der Spiegelebene α

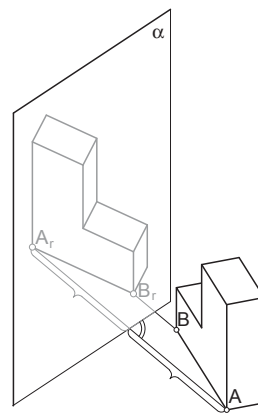


Bild 13.81: Änderung der Orientierung bei Spiegelung

Der durch die Spiegelung erhaltene Bildpunkt P_r von P ist also dadurch bestimmt, dass die Verbindungsstrecke zwischen ihm und seinem Bildpunkt P_r von der Spiegelebene α rechtwinklig halbiert wird (Bild 13.80). Fixpunkte sind genau die Punkte der Spiegelebene. Fixgeraden sind die Geraden der Spiegelebene sowie die Geraden, die zu dieser orthogonal verlaufen. Fixebenen sind die Spiegelebene und die zu ihr orthogonalen Ebenen. Durch die Spiegelung verändert sich die Orientierung der Figur (Bild 13.81).

Räumlich gesehen, ist das Spiegelbild gleich groß wie das Original. Für die Umsetzung in einer Perspektive ist entscheidend, dass das Objekt im Spiegelbild von einem anderen Betrachterstandpunkt gesehen wird als das Original, da dieser für Spiegelbild und Original fest bleibt. Die Konstruktion der Spiegelung in der Perspektive soll hier auf zwei Fälle beschränkt behandelt werden: horizontale und vertikale Spiegelebenen.

13.10.1 Horizontale Spiegelebene

Die Spiegelung an einer horizontalen Spiegelebene, z. B. an der Wasseroberfläche, ist in Perspektive mit vertikaler Bildebene einfach umzusetzen, da alle vertikalen Objektkanten teilverhältnistreu abgebildet werden, und somit auch die gleichen Abstände von Punkt und Spiegelpunkt zur Spiegelebene in der Perspektive erhalten bleiben. In Bild 13.83 wird die Konstruktion der Spiegelung an einer horizontalen Spiegelung am Beispiel eines Hauses am Ufer auf der Wasseroberfläche aufgezeigt. Zeichnet man die Spur der Spiegelebene in der Bildebene, hier die Spur w^c der Wasseroberfläche, in die Perspektive ein, so kann der Spiegelpunkt P_r eines beliebigen Punktes P dadurch gefunden werden, dass die Senkrechte zur Spur der Spiegelebene durch Punkt P eingezeichnet wird und dann der Abstand von Punkt P zu einer horizontalen Geraden in der Spiegelebene nach unten (unter die Spiegelebene) abgetragen wird. Von jedem zu spiegelnden Punkt muss die Senkrechte zur Spiegelebene und der Durchstoßpunkt mit der Spiegelebene ermittelt werden.

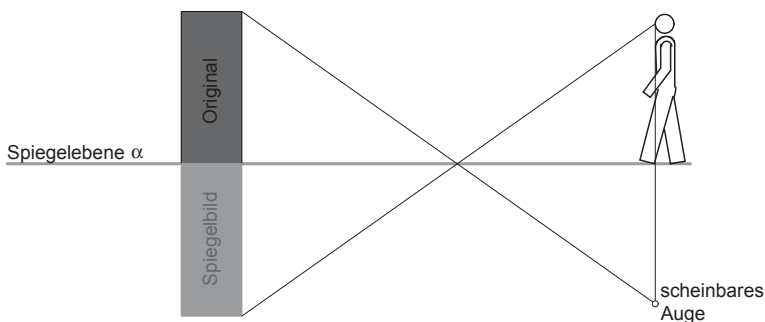


Bild 13.82: "Scheinbares Auge" für die Sicht auf das Original im Spiegelbild bei horizontaler Spiegelebene

Durch das Darstellen des Spiegelbilds in der Perspektive bietet sich die Möglichkeit, einen anderen Blick auf das Objekt in das Bild einzubringen, z. B. eine Untersicht von Bauteilen, wie dies am Beispiel der Türöffnung in Bild 13.83 deutlich wird. In Bild 13.82 ist am Beispiel eines Quaders in einer Ansicht das "scheinbare Auge" eingezeichnet, von dem aus das Original im Spiegelbild betrachtet wird.

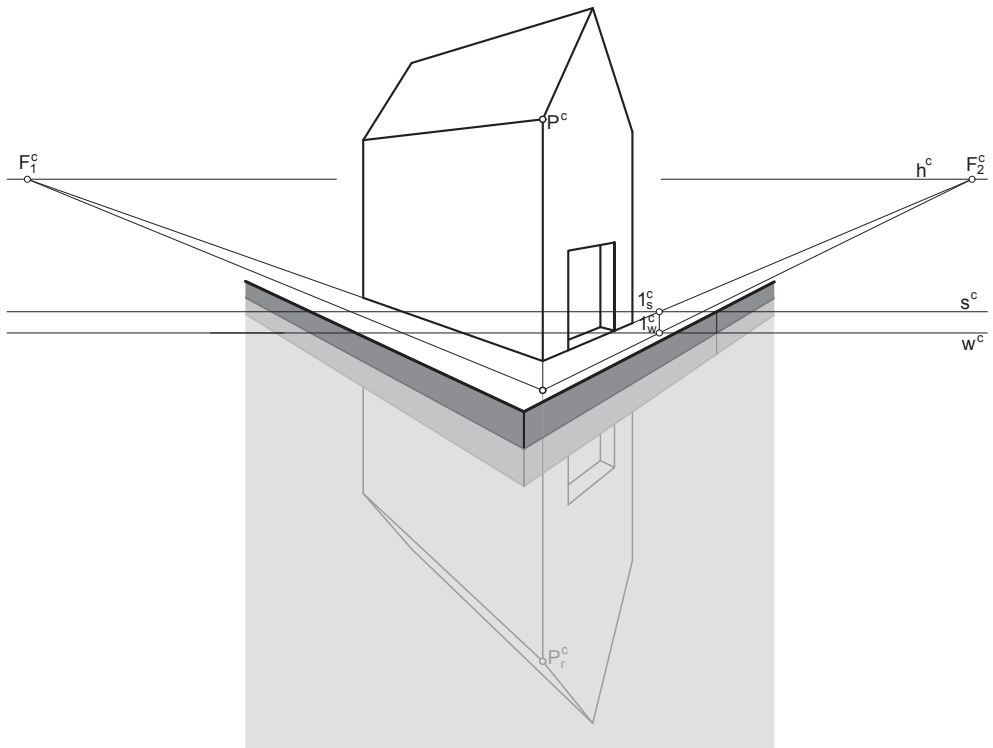


Bild 13.83: Haus am Wasser in Perspektive mit Spiegelung auf horizontaler Spiegelebene

1. Die Spur w^c der Wasseroberfläche als horizontale Spiegelebene kann als Parallele zur Standlinie s^c mit der Höhendifferenz zwischen der Standebene des Hauses und der Wasseroberfläche im entsprechenden Maßstab eingezeichnet werden.
2. Die Senkrechte durch den Spurpunkt 1_s^c der Unterkante des Hauses schneidet die Spur der Wasseroberfläche w^c im Spurpunkt 1_w^c der Geraden der bis zur Wasseroberfläche verlängerten Giebelseite des Hauses.
3. Diese Unterkante des Hauses in der Spiegelebene schneidet die Vertikale durch den Punkt P^c im Mittelpunkt der Strecke zwischen Punkt P^c und seinem Spiegelpunkt P_r^c .
4. Für die weitere Konstruktion des Spiegelbildes kann benutzt werden, dass die Fluchtpunkte F_1^c und F_2^c der horizontalen Gebäudekanten auch im Spiegelbild erhalten bleiben.

13.10.2 Vertikale Spiegelebene

Bei vertikaler Spiegelebene können die Abstände der Objektpunkte zur Spiegelebene nicht auf diese Weise in die Perspektive übertragen werden, da die horizontalen Abstände in der Perspektive nicht erhalten bleiben, also keine teilverhältnistreue Abbildung für diese vorliegt. Die Verzerrung des Abstands des Originals zur Spiegelebene in der Perspektive kann mit Hilfe eines Teilungspunktes (vgl. Kapitel 13.5) ermittelt werden. Das Spiegelbild ist ohne Kenntnis aller Parameter der Perspektive direkt in der Perspektive zu finden. Es ist ausreichend, wenn der Horizont h^c , der Fluchtpunkt der horizontalen Geraden in der Spiegelebene F_1^c und der Fluchtpunkt einer dazu senkrechten Richtung F_2^c bekannt sind.

Im Spiegelbild mit vertikaler Spiegelebene wird das Objekt von hinten betrachtet. Bild 13.86 zeigt in einer Draufsicht die Lage des "scheinbaren Auges" für die Sicht auf das Original im Spiegelbild wieder am Beispiel eines Quaders.



Bild 13.84: Wasserspiegelung beim "Glas Tea House Mondrian", Venedig, 2014, Hiroshi Sugimoto



Bild 13.85: Vertikaler und geneigter Spiegel im "Zimmerbild Berlin", 1820, Johann Erdmann Hummel

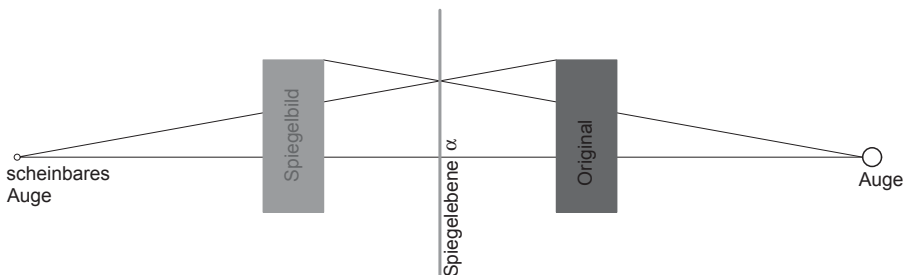


Bild 13.86: "Scheinbares Auge" für die Sicht auf das Original im Spiegelbild bei vertikaler Spiegelebene in Draufsicht

Die Konstruktion des Spiegelbildes eines Innenraums in einem Spiegel an der Wand wird in Bild 13.87⁸ erläutert. Die Abstände von Objektpunkten auf der Bodenebene zur vertikalen Spiegelebene werden auf einer Frontgeraden, einer Parallelen zur Bildebene der Perspektive, im wahren Teilverhältnis mit Hilfe eines geeigneten Teilungspunktes ermittelt, dort teilverhältnistreu gespiegelt und dann die Spiegelpunkte im perspektiven Bild mit Hilfe des Teilungspunktes gefunden.

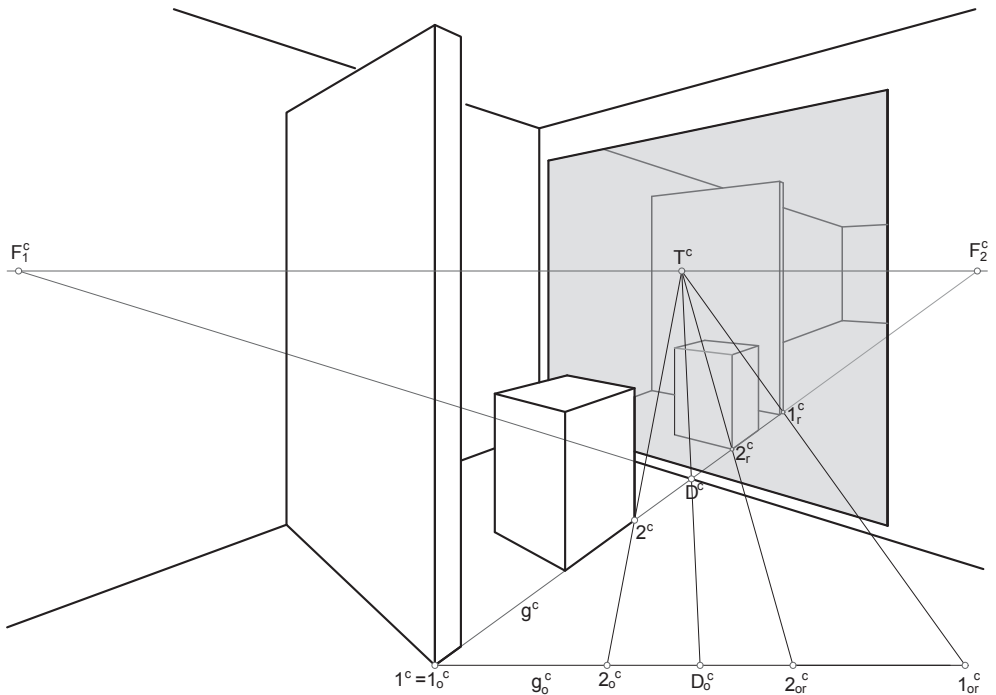


Bild 13.87: Innenraum mit vertikaler Spiegelebene

1. Die Unterkante g^c der Zwischenwand und des Quaders, diese liegen hier zur Vereinfachung auf einer Geraden, schneiden die Unterkante der Spiegelebene am Boden im Punkt D^c . Die Gerade g steht senkrecht zur Spiegelebene, auf ihr können also die Abstände der Objektpunkte zur Spiegelebene gemessen werden.
2. Um diese im wahren Teilverhältnis zu finden, müssen die Abstände auf g^c mit Hilfe eines geeigneten Teilungspunktes, auf einer Frontgeraden g_o^c z. B. durch den Punkt 1^c ermittelt werden, d. h. so dass die gespiegelten Abstände in der Zeichnung Platz finden.
3. Die Abstände im wahren Teilverhältnis auf der Geraden g_o^c können nun am Punkt D_o^c gespiegelt werden.
4. Die gespiegelten Punkte 1_{or}^c und 2_{or}^c verbunden mit dem Teilungspunkt T^c liefern die gespiegelten Punkte 1_r^c und 2_r^c in der Perspektive.
5. Mit Hilfe der Fluchtpunkte F_1^c und F_2^c der horizontalen Objektkanten kann das Spiegelbild im vertikalen Spiegel ergänzt werden.

8. Beispiel nach Rudolf Schmidt: Perspektive Schritt für Schritt. Augustus Verlag, Augsburg 1995, S. 98.

13.11 Fotorekonstruktion

Zur Präsentation eines Entwurfs im Zusammenhang mit einer vorhandenen Umgebung sind Fotomontagen besonders geeignet. Die Bilder 13.88 bis 13.90 zeigen solche Fotomontagen in vorhandenen bzw. möglichen Umgebungen. Ein Foto kann als Perspektive angenommen und dann als solche rekonstruiert werden. Das Projektionszentrum O entspricht dem optischen Mittelpunkt des Objektivs der Fotokamera, die Distanz ist die Brennweite, d. h. der Abstand zwischen O und der Filmebene. Das Foto muss durch Umkehrung der Zentralprojektion "entzerrt" werden, um die Bestimmungselemente der Zentralprojektion herauszufinden. Die Fotogrammetrie beschäftigt sich mit diesem Problem. Mit den rekonstruierten Bestimmungselementen der Perspektive kann das neu Entworfene in einer entsprechenden Perspektive gezeichnet und dann in das Foto montiert werden. Grafische Montagetechniken und Bildbearbeitungsprogramme können dabei das Ergebnis optimieren.



Bild 13.88: Fotomontage am Beispiel einer Baulücke in Kaiserslautern, 2006, Studienprojekt Anja Lieske



Bild 13.89: Fotomontage des 1975 abgerissenen Pfaffbads in Kaiserslautern, 2008, Studienprojekt Andreas Borocho

Sind zwei von verschiedenen Standpunkten aufgenommene Fotografien vorhanden, so ist das Objekt im allgemeinen bis auf den Maßstab eindeutig rekonstruiert, wenn man die durch die Brennweite des Linsensystems bestimmte Distanz sowie den Schnittpunkt der optischen Achse mit der Filmebene kennt (Hauptsatz der Fotogrammetrie).⁹ Ist nur ein Foto vorhanden, so ist die Rekonstruktion nur mit zusätzlichen Informationen möglich. Es müssen Informationen über das im Foto bzw. in der Perspektive abgebildete Objekt vorliegen.



Jede Perspektive einer ebenen Figur lässt sich entzerren, wenn sie ein Viereck $A^cB^cC^cD^c$ enthält, dessen Originalgestalt $ABCD$ bekannt ist.¹⁰

9. S. Finsterwalter: Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie. Jahresberichte der DMV, Bd. 6 (1899), S. 15.
H. Brauner: Lehrbuch der Konstruktiven Geometrie. Wien 1986, S.137.

10. Vgl. O. Giering/H. Seybold: Konstruktive Ingenieurgeometrie. München 1987, S. 329 ff.

Die Gestalt eines räumlichen Objekts lässt sich aus jeder Perspektive rekonstruieren, in der sich die zu bestimmenden Objektpunkte auf zwei nicht parallele entzerrbare Ebenen beziehen lassen. Die zu rekonstruierenden Bestimmungselemente der Perspektive werden in zwei Arten gegliedert:

Innere Orientierung der Perspektive:

Hauptpunkt H

Distanz d

Projektionszentrum O

Äußere Orientierung der Perspektive:

Lage der Bildebene π

Die rekonstruierte innere Orientierung der Perspektive erlaubt, das Objekt bis auf den Maßstab zu rekonstruieren. Mit Hilfe der äußeren Orientierung können dann auch die wahren Abmessungen des abgebildeten Objekts ermittelt werden.

Sind die vertikalen Kanten eines Objekts in der Perspektive als Parallelen abgebildet, so kann man auf eine Perspektive mit vertikaler Bildebene schließen.

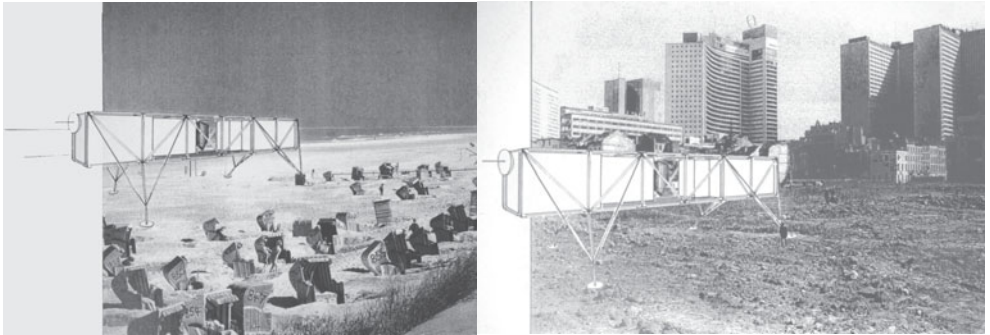


Bild 13.90: Fotomontage des Entwurfs "Nicolai - Restingplace for Santa Claus" in zwei möglichen Umgebungen: am Strand und eine Brache in Berlin, 1996, Studienprojekt Justus Thiede

Wenn bekannt ist, dass es sich bei diesem Foto um eine Originalaufnahme mit normalem Objektiv handelt und nicht ein Bildausschnitt vorliegt, muss der Hauptpunkt H^c des Fotos bzw. der Perspektive der Diagonalschnittpunkt des Fotos sein. Könnte es sich um einen Bildausschnitt handeln, dann sind allgemeinere Rekonstruktionsverfahren erforderlich.

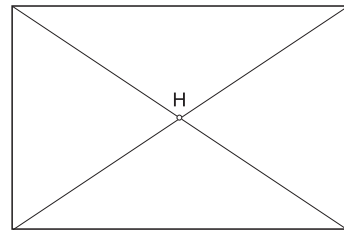


Bild 13.91: Hauptpunkt als Diagonalschnittpunkt

Die Durchführung einer Fotorekonstruktion wird hier auf zwei wichtige Fälle auf der Grundlage einer Perspektive mit vertikaler Bildebene beschränkt:

1. Ein horizontal liegendes Rechteck ist in wahrer Größe bekannt.
2. Ein vertikal stehendes Rechteck ist in wahrer Größe bekannt.

13.11.1 Fotorekonstruktion bei bekanntem horizontalen Rechteck

Ist ein Foto eines Gebäudes vorhanden und ist z. B. das wahre Grundrissrechteck ABCD bekannt, so kann die innere und äußere Orientierung der Perspektive ermittelt werden. In Bild 13.92 wurde ein Foto eines Einfamilienhauses von Mario Botta rekonstruiert und anschließend ein Steg in das Foto montiert. Das wahre Grundrissrechteck ABCD des Gebäudes ist bekannt (Bild 13.94). Die vertikalen Gebäudekanten erscheinen im Bild parallel, daher liegt eine Perspektive mit vertikaler Bildebene vor. Die verlängerten horizontalen Rechteckseiten im Foto schneiden einander in den Fluchtpunkten F_1^c und F_2^c . Damit ist auch der Horizont h^c bestimmt.

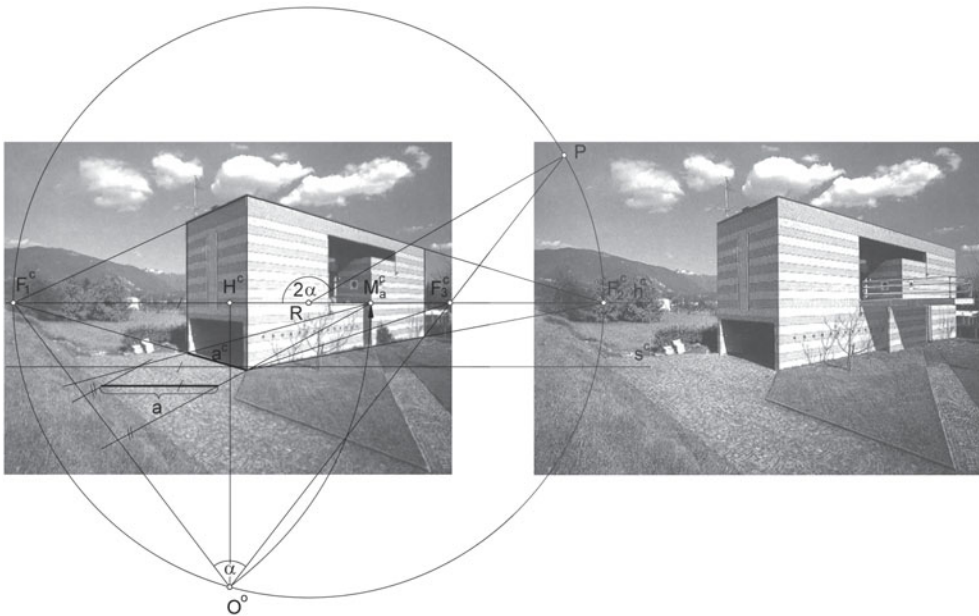


Bild 13.92: Fotorekonstruktion und Fotomontage - Einfamilienhaus in Ligornetto, Schweiz, 1975-76, Mario Botta

Das um den Horizont in die Bildebene gedrehte Auge O° muss auf einem Thaleskreis über der Strecke $F_1^c F_2^c$ liegen, da F_1^c und F_2^c die Fluchtpunkte von zwei senkrecht aufeinanderstehenden Geraden des Rechtecks sind. Zweites Bestimmungsstück für die Lage des gedrehten Auges O° ist das Bild der Diagonalen BD mit dem zugehörigen Fluchtstrahl. Dazu muss der Winkel α zwischen der Rechteckseite AB und der Diagonalen BD in der Perspektive eingemessen werden (Bild 13.94). Die Umkehrung des Messpunktverfahrens für die Strecke $AB = a$ liefert schließlich die Standlinie s^c in der Perspektive. Damit sind alle Parameter der Perspektive bekannt. Wahre Maße von Gebäudeteilen im Foto können ermittelt und neue Elemente hinzugefügt werden.

Zum Einmessen des Winkels α kann der Peripheriewinkelsatz am Kreis, eine Verallgemeinerung des Satz des Thales, Anwendung finden (Anhang e, Bild A5).



Jeder spitze Peripheriewinkel ist halb so groß wie der zum selben Kreisbogen gehörende Zentriwinkel.

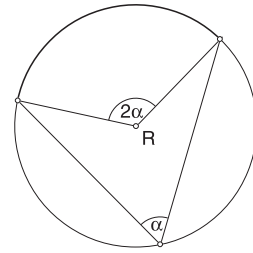


Bild 13.93 : Peripheriewinkelsatz am Kreis

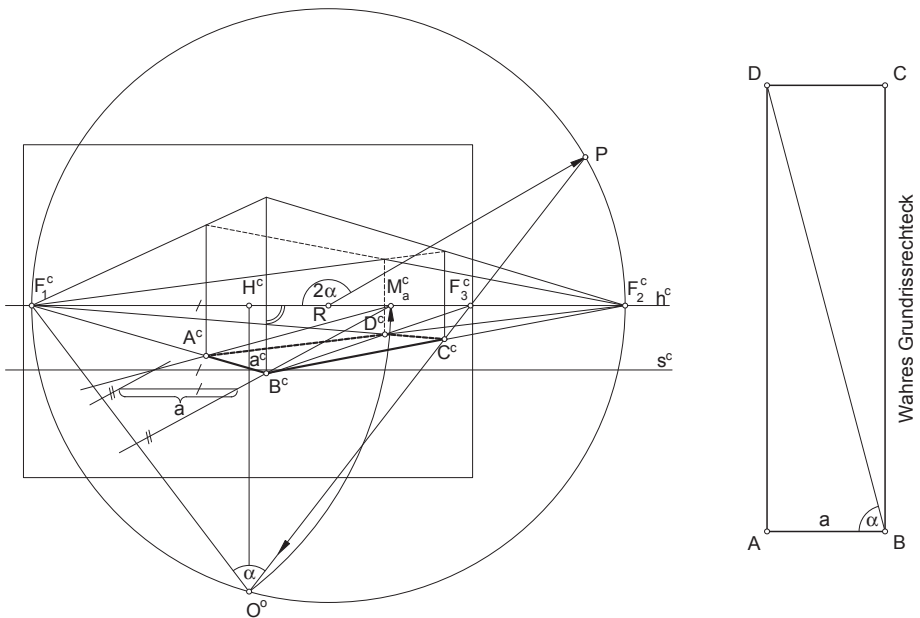


Bild 13.94: Rekonstruktion einer Perspektive bei bekanntem Grundrissrechteck

1. A^cB^c und C^cD^c schneiden sich im Fluchtpunkt F_1^c sowie A^cD^c und B^cC^c im Fluchtpunkt F_2^c .
2. Die Verbindungsgerade $F_1^c F_2^c$ ist der Horizont h^c , der senkrecht zu den Vertikalen liegen muss.
3. Das um h^c in die Bildebene geklappte Auge O^o muss auf dem Thaleskreis über $F_1^c F_2^c$ liegen.
4. Die Verlängerung des Bildes der Rechteckdiagonalen B^cD^c schneidet h^c im Fluchtpunkt F_3^c .
5. Nach dem Winkelsatz am Kreis kann im Mittelpunkt des Thaleskreises R der Zentriwinkel 2α vom Horizont h^c ausgehend abgetragen werden. Auf dem Thaleskreis erhält man Punkt P .
6. Die Gerade $F_3^c P$ ist der Fluchtstrahl der Diagonalen BD und schneidet den Thaleskreis in O^o .
7. Der Messpunkt M_a^c für die Rechteckseite $AB = a$ wird durch Eindrehen von O^o gefunden.
8. Durch Einpassen der wahren Strecke $AB = a$ bezogen auf einen Maßstab zwischen den Geraden $A^c M_a^c$ und $B^c M_a^c$ parallel zu h^c wird die Standlinie s^c als letzter Parameter gefunden.

13.11.2 Fotorekonstruktion bei bekanntem vertikalen Rechteck

Auch wenn keine Maße eines Gebäudes gegeben sind, kann eine Fotorekonstruktion häufig trotzdem durchgeführt werden, indem Maße geschätzt werden. Hierzu kann z. B. die Größe einer Tür oder eines Fensters vermutet werden. Hintergrund der Vermutung kann die historische Einordnung des Gebäudes sein. Es liegt dann der Fall einer Fotorekonstruktion bei bekanntem vertikalen Rechteck vor.

Bild 13.95 zeigt ein Foto eines Gebäudes mit gekennzeichnetem Bild eines vertikalen Rechtecks $A^cB^cC^cD^c$ eines Garagentors. Um die Fotorekonstruktion durchführen zu können, wurde die wahre Größe dieses Rechtecks als Standardgaragentor geschätzt. Mit dieser Kenntnis können alle Bestimmungsstücke der Perspektive, die diesem Foto zugrunde liegen, rekonstruiert werden. Rechts im Bild ist der Entwurf der Lückenbebauung in einer Ansicht und der mit den bestehenden Gebäuden zusammengefügte Entwurf in einer Perspektive zu sehen.

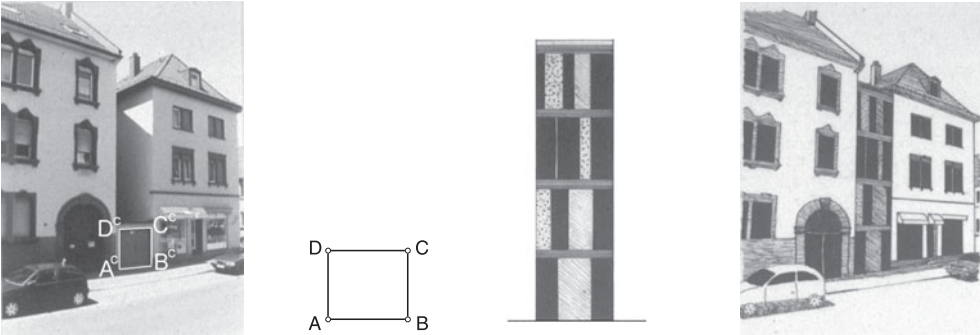


Bild 13.95: Fotorekonstruktion und -montage bei bekanntem vertikalen Rechteck, Entwurf einer Lückenbebauung, Kaiserslautern, 1997 - Studienprojekt Claudia von Harpe

Bei der Fotoaufnahme wurde darauf geachtet, dass die Filmebene der Fotokamera vertikal steht, damit eine Perspektive mit vertikaler Bildebene vorliegt. Die vertikalen Gebäudekanten erscheinen dann auch im Foto parallel. Zur Durchführung der Fotorekonstruktion werden beim Beispiel eines Hauses mit bekannten Schaufensterabmessungen $ABCD$ (Bild 13.96) die Fluchtpunkte F_1^c und F_2^c zweier zueinander senkrechter horizontaler Geradenrichtungen ermittelt. Der Horizont h^c kann dann als Gerade $F_1^cF_2^c$ eingezeichnet werden, der zugleich senkrecht zu den Bildern der vertikalen Gebäudekanten liegen muss. Das gedrehte Auge O° liegt auf dem Thaleskreis über $F_1^cF_2^c$. Mit Hilfe der Diagonalen B^cD^c des perspektivischen Bildes des Rechtecks $A^cB^cC^cD^c$ und ihres Fluchtpunktes F_3^c kann der Messpunkt M_a^c und damit O° gefunden werden. Durch Einpassen der maßstäblichen wahren Breite des Schaufensters $AB = a$ wird die Standlinie s^c ermittelt. Damit liegt die innere und äußere Orientierung der Perspektive fest. Für die Fotomontage kann der Entwurf in derselben Perspektive gezeichnet und in das Foto montiert werden.

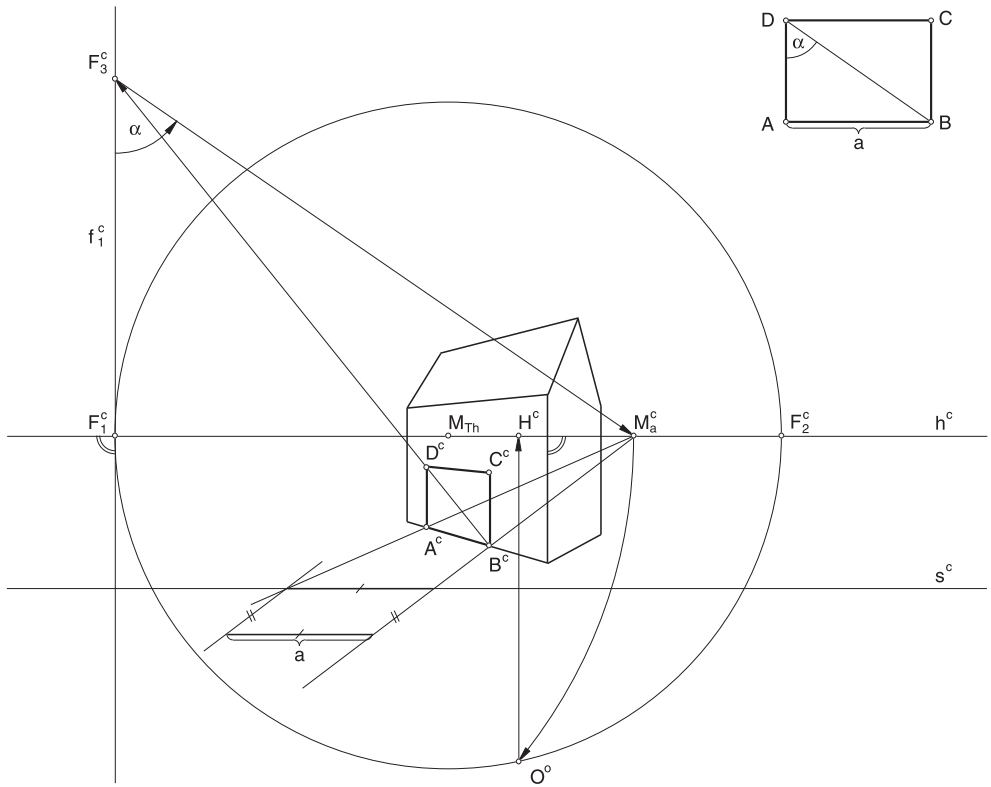


Bild 13.96: Fotorekonstruktion bei bekanntem vertikalen Rechteck ABCD

1. Die Verlängerungen horizontaler Gebäudekanten schneiden einander in den Fluchtpunkten F_1^c und F_2^c .
2. Der Horizont h^c ist die Verbindungsgerade $F_1^c F_2^c$.
3. Ist ein rechter Winkel zwischen diesen beiden Hauptrichtungen, so liegt das um den Horizont h^c in die Bildebene geklappte Auge O° auf dem Thaleskreis über $F_1^c F_2^c$.
4. Die vertikale Hauswand, in der das Schaufenster ABCD liegt, besitzt die Fluchtgerade f_1^c durch F_1^c und senkrecht zu h^c .
5. Die Schaufensterdiagonale $B^c D^c$ schneidet die Fluchtgerade f_1^c im Fluchtpunkt F_3^c .
6. In diesem Fluchtpunkt kann nach dem Messpunktverfahren der wahre Winkel α zwischen der Rechteckseite AD und der Diagonalen BD abgetragen werden.
7. Der Schnittpunkt mit h^c ist der Messpunkt M_a^c der Rechteckseite AB.
8. Der Kreis um F_1^c durch M_a^c schneidet den Thaleskreis im geklappten Auge O° .
9. Durch Einpassen der wahren Rechteckseite $AB = a$ bezogen auf einen Maßstab zwischen den Geraden $A^c M_a^c$ und $B^c M_a^c$ parallel zu h^c wird die Standlinie s^c gefunden.
10. Alle Bestimmungselemente der Perspektive können damit der Fotorekonstruktion entnommen werden.

13.12 Geneigte Bildebene

Zur Darstellung von Hochhäusern oder hohen Räumen können Zentralprojektionen mit geneigter Bildebene geeigneter sein als solche mit vertikaler Bildebene. Ein Blick von oben nach unten oder von unten nach oben entspricht einer Perspektive mit geneigter Bildebene. Bild 13.97 zeigt den Blick von oben nach unten vom Campanile auf das Baptisterium San Giovanni mit der umgebenden Bebauung in Florenz. Der Guinigi-Turm in Lucca in Bild 13.98 wird dagegen mit einem Blick von unten nach oben präsentiert.

Um eine Perspektive mit geneigter Bildebene zu zeichnen, wird nach der Wahl des Hauptsehstrahls l die Bildebene π senkrecht zum Hauptsehstrahl l gewählt. Ist die Bildebene π zu keiner der Koordinatenachsen parallel, so entsteht immer ein Fluchtdreieck $F_x^c F_y^c F_z^c$, indem die Parallelen zu den Koordinatenachsen durch das Auge O mit der Bildebene π zum Schnitt gebracht werden (Bild 13.99).



Bild 13.97: Blick nach unten vom Campanile auf das Baptisterium San Giovanni, Florenz



Bild 13.98: Blick nach oben auf den Guinigi-Turm, Lucca, Italien

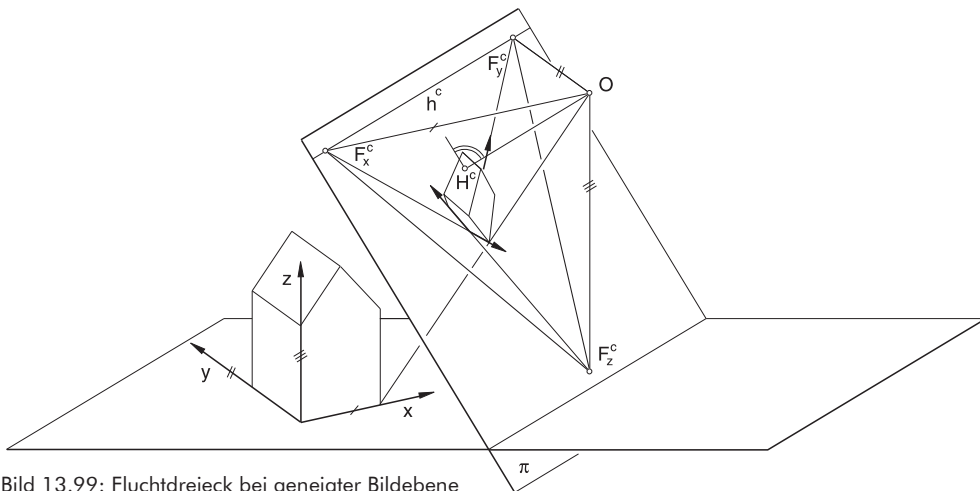


Bild 13.99: Fluchtdreieck bei geneigter Bildebene

Die drei Fluchtpunkte F_x^c , F_y^c und F_z^c sind die Fluchtpunkte für die drei Hauptrichtungen x , y und z . So wie bei der normalen Axonometrie durch das Spurendreieck das axonometrische Bild festgelegt ist (vgl. Kapitel 12.1), kann die Perspektive mit geneigter Bildebene durch das Fluchtdreieck angegeben werden. Entsprechend ist auch der Schnittpunkt der Höhen im Fluchtdreieck der Hauptpunkt H^c in der Perspektive.

In Spezialfällen kann eine Perspektive mit geneigter Bildebene wie eine Perspektive mit vertikaler Bildebene behandelt werden. Bild 13.100 zeigt den Blick von oben nach unten auf ein Hochhaus von Linda Pollak in New York. Eine Gebäudekante ist nahezu parallel zur Bildebene. Wenn zueinander parallele Geraden im räumlichen Objekt auch im Foto parallel erscheinen, liegt ein solcher Spezialfall vor. In Bild 13.101 mit Blick von unten nach oben auf das Seagram-Gebäude in New York von Mies van der Rohe tritt der Sonderfall einer horizontalen Bildebene auf. Dieser Sonderfall kann wie eine Zentralperspektive mit vertikaler Bildebene konstruiert werden.



Bild 13.100: Blick nach unten - Hochhaus in New York, 1990, Linda Pollak



Bild 13.101: Blick nach oben - Seagram-Gebäude, New York, 1954-58, Mies van der Rohe

Die Achsenrichtungen x und y sind dann parallel zur Bildebene, wohingegen die z -Richtung einen Fluchtpunkt im perspektiven Bild besitzt.

Zur Konstruktion einer Perspektive mit geneigter Bildebene sind Überlegungen zur Wahl des Hauptsehstrahls erforderlich. Die Richtung des Hauptsehstrahls l bestimmt entscheidend die Art der Perspektive. Um den Hauptsehstrahl mit wahrem Neigungswinkel wählen zu können, muss ein Seitenriss parallel zum Hauptsehstrahl hergestellt werden. Die Konstruktion wird dann erleichtert, da die Bildebene π somit senkrecht zu dieser Seitenrissebene steht. In den folgenden Konstruktionen ist der Aufriss schon so gewählt, dass der Hauptsehstrahl l parallel zur Aufrissebene liegt. Dieser erscheint daher im Grundriss senkrecht zu den Ordnern (Bild 13.103 und 13.105).

Die Konstruktion einer Perspektive mit geneigter Bildebene wird im folgenden für die beiden Fälle "Blick nach unten" und "Blick nach oben" erläutert.

13.12.1 Blick nach unten

In den beiden Perspektiven von Hans Vredeman de Vries ist ein Hof mit mehreren Galerieebenen mit Blick nach unten dargestellt (Bild 13.102). Im linken Beispiel liegt der Sonderfall einer horizontalen Bildebene vor, da die Grundrissrechtecke wieder als Rechtecke dargestellt sind. Im Beispiel rechts liegt eine allgemeinere schräge Lage der Bildebene vor, nur eine Kantenrichtung ist parallel zur Bildebene.

Die Konstruktion einer Perspektive mit schräg im Raum liegender Bildebene und Blick nach unten soll nun erläutert werden. Nachdem das Auge O in Grund- und Aufriss (Bild 13.103) festgelegt wurde, kann der Hauptsehstrahl I dort gewählt und eingezeichnet werden. Im Aufriss wird der Hauptsehstrahl I so gewählt, dass das darzustellende Gebäude im Sehkegel liegt, damit keine zu großen Verzerrungen auftreten. Die Bildebene π liegt senkrecht zum Hauptsehstrahl. Die ansonsten frei wählbare Lage der Bildebene π bestimmt die Größe des perspektiven Bildes (vgl. Kapitel 13.8).

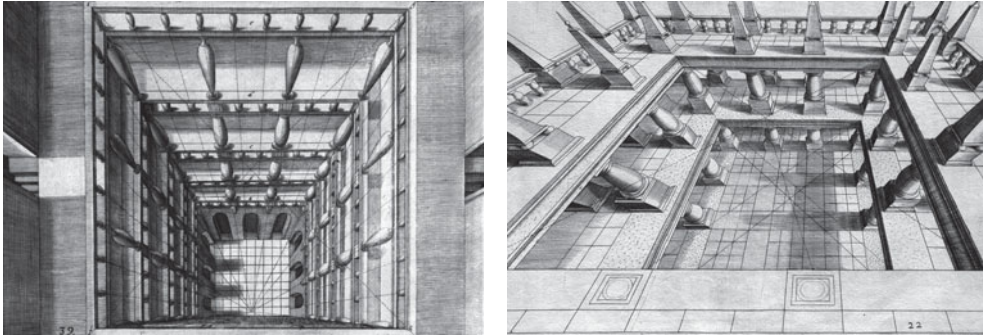


Bild 13.102: Perspektiven mit Blick nach unten in einen galerieumzogenen Hof mit horizontaler und geneigter Bildebene, 1604/05, Hans Vredeman de Vries

Die Parallelen zu den Koordinatenachsen x , y und z durch das Projektionszentrum O schneiden die Bildebene π in den Fluchtpunkten F_x , F_y und F_z . Durch Übertragen dieser drei Fluchtpunkte aus Grund- und Aufriss (Bild 13.103) in die Perspektive F_x^c , F_y^c und F_z^c (Bild 13.104) erhält man das Fluchtdreieck. Der Hauptpunkt H^c entsteht als Schnittpunkt der Höhen im Fluchtdreieck bzw. H^c kann auch als Schnittpunkt des Hauptsehstrahls I mit der Bildebene π aus Grund- und Aufriss in die Perspektive übertragen werden. Der Horizont h ist die Schnittgerade der horizontalen Ebene durch das Auge O mit der Bildebene. Im Unterschied zu einer Perspektive mit vertikaler Bildebene liegt der Hauptpunkt H nicht auf dem Horizont h . Zur Konstruktion der Perspektive kann die Spurpunkt-Fluchtpunkt-Methode und die Durchstoßmethode angewandt werden. Beim Übertragen der entsprechenden Punkte aus Grund- und Aufriss in die Perspektive wird benutzt, dass wahre Abstände für die Perspektive stets in der Bildebene π zu sehen sind, die dem Aufriss bzw. auf Höhenlinien dem Grundriss entnommen werden können.

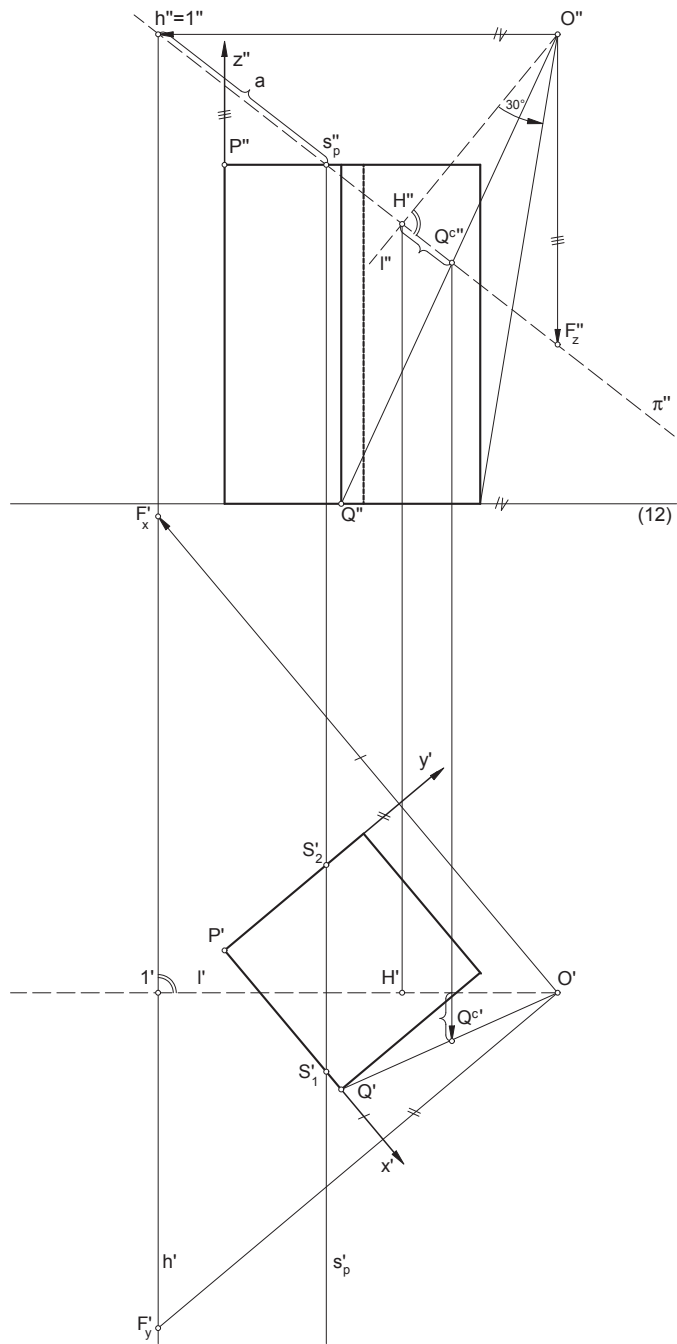


Bild 13.103: Konstruktion der Perspektive mit Blick nach unten aus Grund- und Aufriss

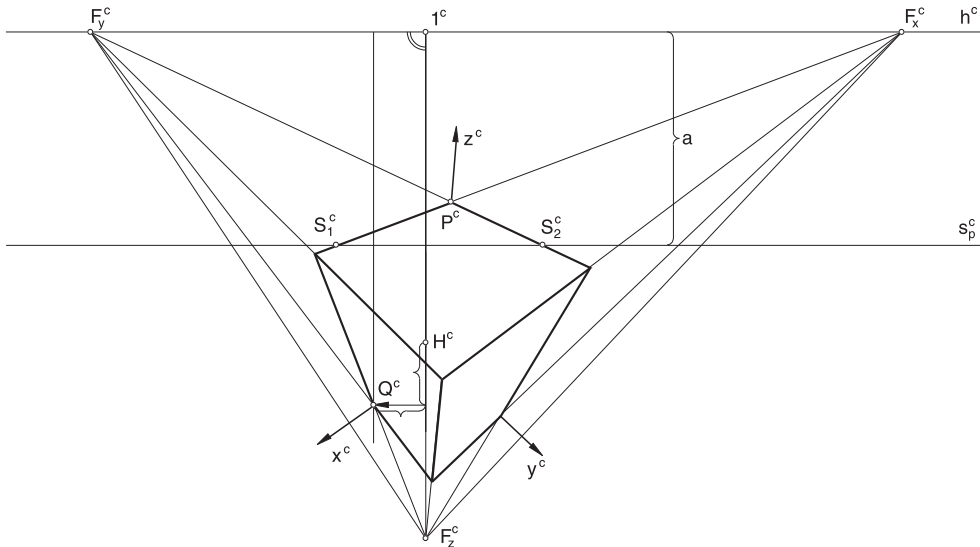


Bild 13.104: Perspektive mit Blick nach unten

1. Die Parallele zur Rissachse (12) im Aufriss schneidet π'' im Horizont h'' . Im Grundriss verläuft h' in Ordnerichtung.
2. Die Parallele zu x' durch O' schneidet h' im Grundriss des Fluchtpunktes F_x' , die Parallele zu y' durch O' im Grundriss des Fluchtpunktes F_y' . Der Abstand $\overline{F_x' F_y'}$ ist der wahre Abstand, da der Horizont h parallel zur Grundrissebene ist. Dieser kann auf h^c in der Perspektive abgetragen werden $\rightarrow F_x^c$ und F_y^c .
3. Der Hauptpunkt H^c liegt auf der Senkrechten zum Horizont h^c durch den Punkt 1^c mit $\overline{F_y^c 1^c} = \overline{F_y' 1'}$ und $\overline{1^c H^c} = \overline{1'' H''}$.
4. Die Parallele zu z'' durch O'' schneidet π'' im Fluchtpunkt F_z'' . In der Perspektive liegt F_z^c auf der Senkrechten zu h^c durch 1^c im Abstand $\overline{1^c F_z^c} = \overline{1'' F_z''}$.
5. Der Bildpunkt von P wird mittels Spurpunkt-Fluchtpunkt-Methode konstruiert:
Die obere Begrenzungsebene des Quaders, die den Punkt P enthält, schneidet im Aufriss den Riss der Bildebene π'' in der Spurgeraden s_p'' .
6. In π'' ist der Abstand a zwischen s_p'' und h'' als Abstand zwischen s_p^c und h^c zu entnehmen und in der Perspektive abzutragen.
7. Die Spurpunkte der oberen Quaderkanten durch P können dem Grundriss als Schnittpunkte mit s_p' entnommen werden $\rightarrow S_1^c$ und S_2^c . Die Geraden $S_1^c F_x^c$ und $S_2^c F_y^c$ schneiden einander im Bildpunkt P^c .
8. Am Beispiel des Punktes Q wird die Durchstoßmethode ausgeführt:
 $O''Q''$ schneidet π'' in Q'' . Ordner durch Q'' schneidet $O'Q'$ in Q^c . Durch Übertragen der wahren Abstände aus Grund- und Aufriss in die Perspektive ergibt sich Bildpunkt Q^c .
9. In Kombination liefern Spurpunkt-Fluchtpunkt-Methode und Durchstoßmethode am schnellsten alle Eckpunkte und Kanten des Quaders in der Perspektive.

13.12.2 Blick nach oben

Zur Erleichterung der Konstruktion wird die Bildebene π auch bei der Perspektive mit Blick nach oben aufrißprojizierend angenommen. Auge O , Hauptsehstrahl I und Bildebene π werden in Grund- und Aufriss so gewählt, dass der Sehkegel den höchsten Punkt P des abzubildenden Objekts noch erfasst. Die Konstruktion der Perspektive verläuft analog der Konstruktion der Perspektive mit Blick nach unten, indem die Bildpunkte bzw. Spur- und Fluchtpunkte in Grund- und Aufriss ermittelt und in die Perspektive mittels wahrer Abstände übertragen werden.

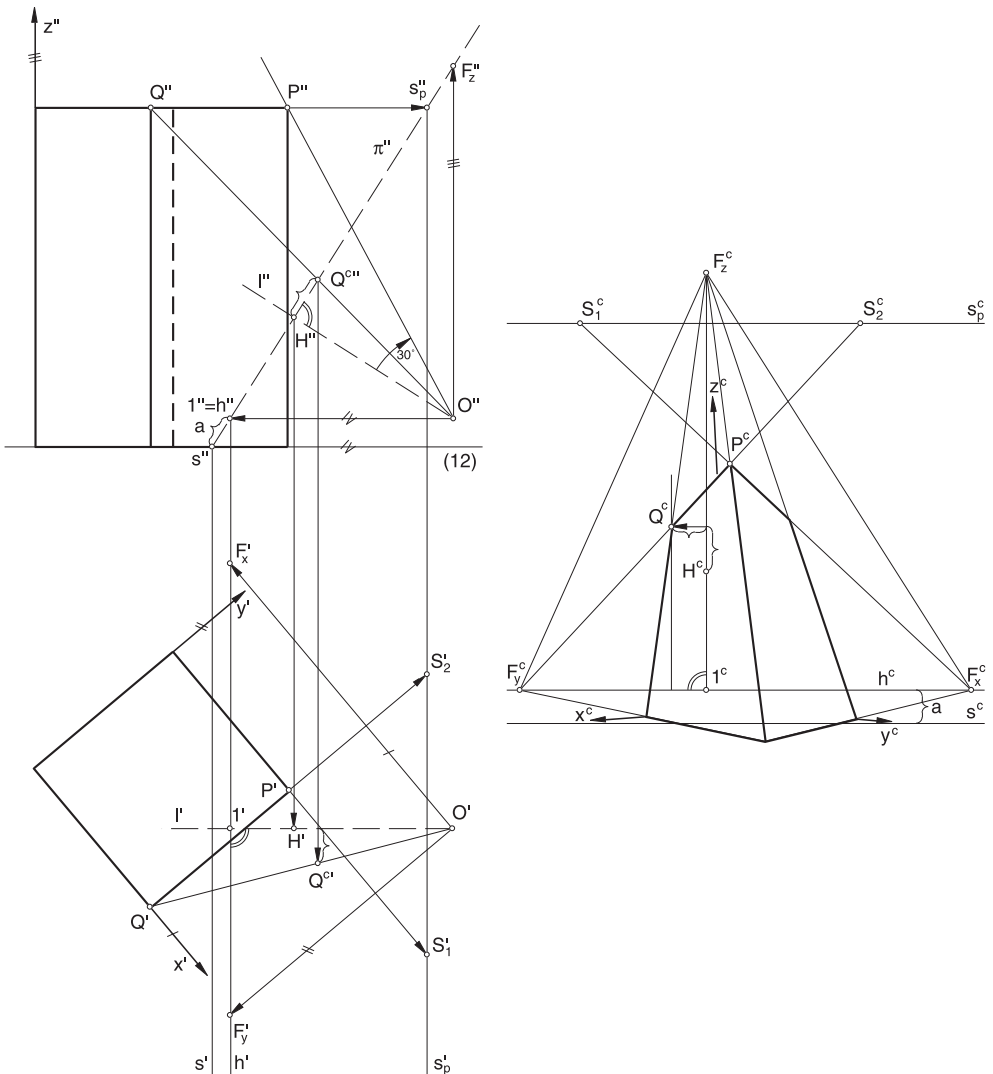


Bild 13.105: Konstruktion der Perspektive mit Blick nach oben aus Grund- und Aufriss

13.13 CAD-Perspektiven und Renderings

Mit Hilfe eines 3D-CAD-Programms können schnell unterschiedliche Perspektiven eines Objektes erstellt werden, wenn das Objekt mit seinen dreidimensionalen Daten im CAD-Programm modelliert wurde. Das interaktive Anzeigen unterschiedlicher Perspektiven erleichtert das räumliche Verständnis. Durch verschieden gewählte Perspektiven kann die Wirkung eines Entwurfs von unterschiedlichen Betrachterstandpunkten aus bereits in der Entwurfsphase überprüft werden. Bild 13.106 zeigt verschiedene Kamerapositionen im Lageplan, die zunächst Testbilder erzeugen. Nach der detaillierten 3D-Modellierung eines Projektes und der Festlegung der Parameter der Perspektive, müssen für die Visualisierung als Rendering weitere Parameter wie Farbe, Texturen und verschiedene Lichtarten ausgewählt und zugeordnet werden. Bild 13.107 zeigt ein Rendering des aus alten Plänen modellierten Pfaffbads in Kaiserslautern, das 1924 gebaut und 1975 abgerissen wurde.

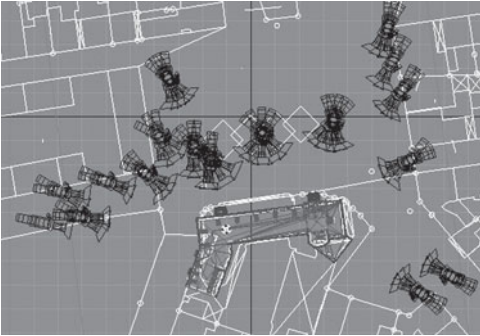


Bild 13.106: Kamerapositionen auf dem Lageplan zur Erzeugung von Testperspektiven

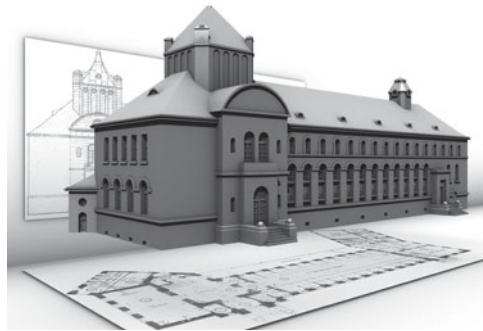


Bild 13.107: Rendering des 3D-Modells Pfaffbad, 2008, Studienprojekt Sebastian Stein

In CAD-Programmen sind die Begriffe zum Bestimmen der Parameter einer Perspektive eher dem Fotografieren entlehnt als der Darstellenden Geometrie.

Meistens muss eine Kamera und ein Zielpunkt im Raum festgelegt werden. Beide zusammen bestimmen die Ziellinie, die dem Hauptsehstrahl entspricht. Mit der Option Abstand wird die Kamera positioniert, also das Projektionszentrum festgelegt. Außerdem kann die Brennweite der Kamera wie beim Fotografieren bestimmt werden (vgl. Kapitel 13.7).

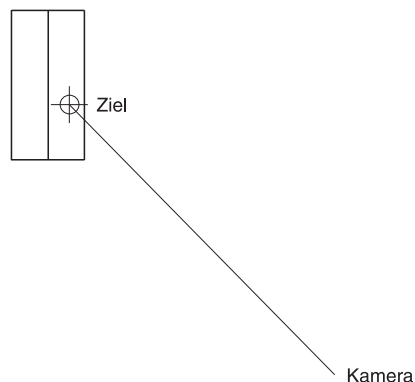


Bild 13.108: Festlegen von Kamera und Ziel

Der Zielpunkt stimmt mit dem Hauptpunkt einer Perspektive überein. Mit der Kamera ist das Auge noch nicht lokalisiert, sondern nur die Richtung des Hauptsehstrahls festgelegt. Erst mit der Option Abstand wird das Auge positioniert, die Distanz und damit die Perspektive festgelegt (Bild 13.109).

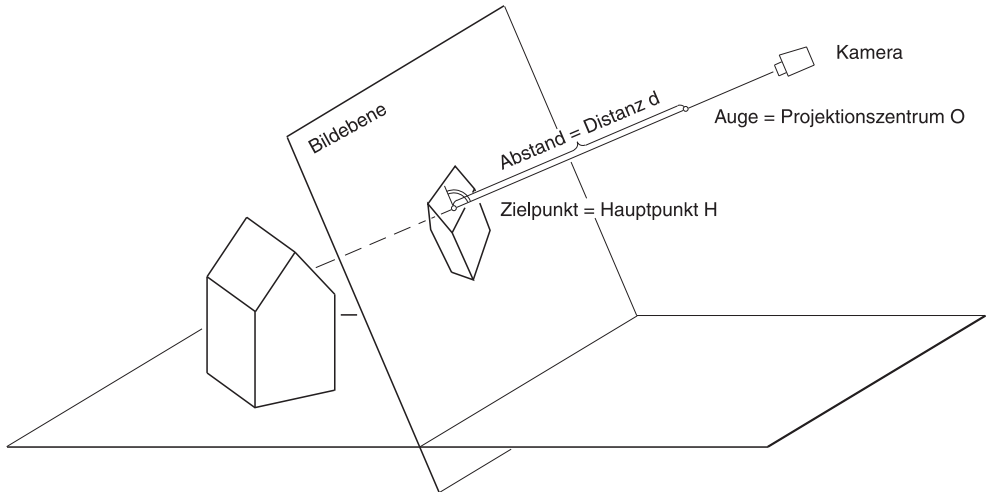


Bild 13.109: Parameter in einer CAD-Perspektive

Soll eine Perspektive mit vertikaler Bildebene entstehen, so müssen Kamerahöhe und Zielhöhe gleich gewählt werden, damit der Hauptsehstrahl horizontal ist. Die Wahl der Brennweite der Kamera bestimmt den Ausschnitt für das perspektive Bild in Abhängigkeit vom Bildformat (vgl. Kapitel 13.7).

Die für ein Rendering zusätzlich festzulegenden Parameter können, je nach gewünschter Darstellungsart, sehr umfangreich sein. Informationen zu Farbe, Texturen, Materialeigenschaften, verschiedene Lichtquellen und Schatten sind den Objekten und der räumlichen Szene zuzuordnen. Die Perspektive ist dabei der Ausgangspunkt für ein umfassendes räumliches Visualisierungssystem. Der Versuch, Wirklichkeit durch Bilder möglichst perfekt zu simulieren, zielt auf eine virtuelle Realität, die dazu tendiert, mit ihr verwechselt zu werden. Es bleibt wesentlich, alle Darstellungen, auch Renderings, als Zeichen in einem Kommunikations- und Vermittlungsprozess zu begreifen, die Vorstellungen des Entworfenen im Betrachter erzeugen sollen, keine Wahrnehmung der Wirklichkeit vermitteln. Beurteilungskriterium für die Qualität einer Darstellung sollte also nicht eine möglichst perfekte Simulation von Wirklichkeit sein, sondern, ob das Planungs- und Entwurfsobjekt in den wesentlichen Aspekten repräsentiert wird. Daher müssen zunächst die wesentlichen Aspekte formuliert werden, um dann geeignete Repräsentationen entsprechend des jeweiligen Aspektes zu finden. Erforderlich ist es, die Aspekte zu trennen und jeweils in einer geeigneten Darstellung zu repräsentieren. Jede Darstellung führt zur Beto-

nung einiger Aspekte und gleichzeitig zur Vernachlässigung anderer Aspekte. Bei aller Begeisterung für das technisch Mögliche zur Erzeugung illusionistischer Bilder mittels Render-Programmen, muss der Stellenwert verschiedener Darstellungsformen reflektiert werden.

Die beiden Darstellungen in Bild 13.110 und 13.111 zeigen zwei Verwendungsmöglichkeiten von Renderings. In Bild 13.110 wurde das 3D-Modell des entworfenen Gebäudes mit Texturen versehen, um entsprechende Materialien der Fassade zu simulieren. Die städtische Umgebung des entworfenen Gebäudes wurde durch die Montage mit einem Foto des Straßenraums in die Darstellung eingebracht. Wesentlicher Aspekt der Darstellung ist hier die Überprüfung des Entwurfs hinsichtlich der Einpassung in die vorhandene Bebauung, die Wirkung auf einen Passanten im Straßenraum. In Bild 13.111 ist der entworfene Innenraum vollständig gerendert, indem insbesondere Materialeigenschaften wie Spiegelung und Texturen zugeordnet und verschiedene Lichtquellen im Raum sowie Licht durch Öffnungen definiert wurden.



Bild 13.110: Rendering mit Fotomontage eines Entwurfs für New York City, 2014, Studienprojekt Romy Link

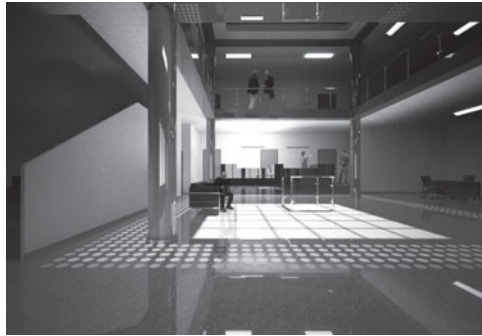


Bild 13.111: Innenraum-Rendering des Entwurfs einer Bank, 2015, Studienprojekt Ali Ajeti

Wesentlicher Aspekt der Darstellung ist in diesem Beispiel, die Raumwirkung in Abhängigkeit von Licht und Materialien im Innenraum zu studieren.

Werden Perspektiven mit Hilfe einer sequenziellen Veränderung des Betrachterstandpunktes und der Blickrichtung erzeugt, so entstehen Perspektiven, die in der szenischen Abfolge zu einem Film zusammengesetzt werden können. Die Simulation eines Gebäudes in seiner Umgebung und der Gang durch das Gebäude kann dadurch perfektioniert und das Erleben einer zukünftigen Wirklichkeit durch einen bewegten Betrachter simuliert werden. Die Subjektivität der Raumeindrücke wird durch die Bilderabfolge verstärkt, in der eine Bewegung des Betrachters nachvollzogen wird. Nicht nur die subjektive Raumwirkung des Architekturobjektes ist dann Darstellungsgegenstand, sondern auch die Bewegung des Betrachters in Relation zum Architekturobjekt. Damit wird der Betrachter noch stärker in den Mittelpunkt der Darstellungen gerückt.

Aber nicht nur der fertige Entwurf, sondern auch der Entwurfsprozess selbst kann auf diese Weise nachvollziehbar gemacht werden. Bild 13.112 zeigt drei Perspektiven, die Teil eines Films zur Präsentation einer Entwurfsstrategie sind.

In der "Virtual Reality" mit Echtzeit-Navigation erreicht diese Entwicklung ihren vorläufigen Höhepunkt. Der Betrachter wird in die Darstellung miteinbezogen, er wird zum Akteur in der simulierten Welt. Die Diskrepanz zwischen Betrachter und simulierter Welt wird scheinbar aufgehoben. Er wird zum Akteur in der simulierten Szene.

Die digitalen Werkzeuge haben dazu beigetragen, die Geometrie der Zentralprojektion zu einem umfassenden Instrument zur Erzeugung von Bildern als Visualisierungssystem auszubauen. Trotzdem bleibt es entscheidend, aus den möglichen Darstellungsformen auszuwählen, um einen Entwurf in seinen wesentlichen Aspekten zu repräsentieren.



Bild 13.112: Perspektiven aus einer Animation zur Visualisierung der Entwurfsstrategie, 2000, Diplomarbeit "Bild und Architektur - eine assoziative Entwurfsstrategie" von Andreas Matievits

"Bedenklich wird die Sache, (...) wenn sich die Gestalt als Zeichen von der Gestalt als Sache entfernt. In einer Welt der Perspektiven und Ansichten, der Oberflächen und Fassaden, des Auftretens und der Show wird dies aber fast zur Regel."¹¹

11. Otl Aicher: Die Welt als Entwurf. Ernst & Sohn Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin 1991, S.158.

ANHANG

Geometrische Grundkonstruktionen

a Streckenteilung und Strahlensatz

Gegeben ist eine Strecke AB. Gesucht sind die Punkte auf AB, die AB in beliebig viele (n) gleiche Abschnitte $1/n$ teilt. Auf einem beliebigen Strahl von A aus werden n gleiche Strecken abgetragen. Der letzte Punkt C des Strahls wird mit B, dem Endpunkt der Strecke, verbunden. Die Parallelen zu dieser Verbindungsgeraden teilen AB in n gleiche Abschnitte.

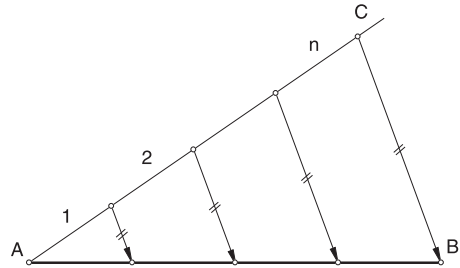


Bild A1: Strahlensatz

b Winkelhalbierende

Gegeben sind zwei Schenkel, die sich im Punkt S schneiden und einen Winkel bilden. Gesucht ist der Strahl, der den Winkel halbiert. Der Kreis um S mit beliebigem Radius schneidet die beiden Schenkel in A und B. Die Kreise um A und B mit gleichem beliebigem Radius schneiden einander in C. Der Strahl SC ist die gesuchte Winkelhalbierende.

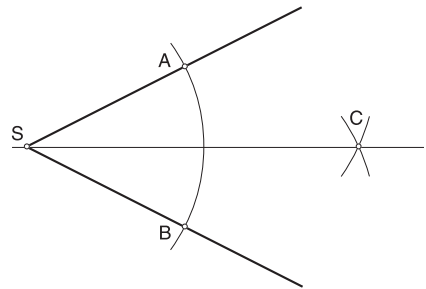


Bild A2: Winkelhalbierende

c Mittelsenkrechte einer Strecke

Gegeben ist eine Strecke AB. Gesucht sind der Mittelpunkt M der Strecke AB sowie die Mittelsenkrechte dieser Strecke. Die Kreise um die Punkte A und B mit beliebigem, aber gleichem Radius schneiden einander in den Punkten C und D. Die Gerade CD schneidet AB im Mittelpunkt M der Strecke AB. Die Gerade CD ist gleichzeitig die Mittelsenkrechte der Strecke AB.

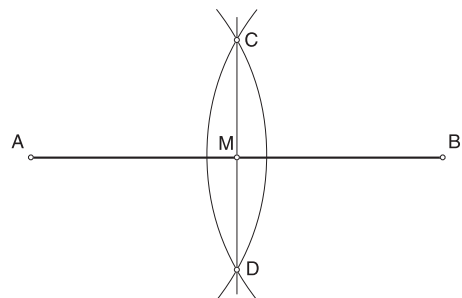


Bild A3: Mittelsenkrechte

d Satz des Thales

Der Peripheriewinkel im Halbkreis ist rechtwinklig oder kurz: Der Winkel im Halbkreis ist ein Rechter. Der Mittelpunkt M_{Th} der Strecke AB ist der Mittelpunkt des Thaleskreises.

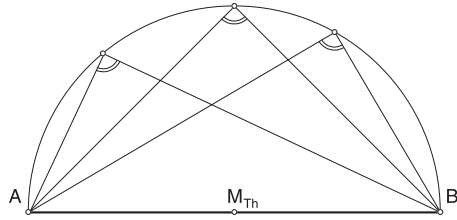


Bild A4: Satz des Thales

e Peripheriewinkelsatz am Kreis

Eine Verallgemeinerung des Satz des Thales ist der Peripheriewinkelsatz am Kreis:

Alle Peripheriewinkel zum selben Kreisbogen AB sind gleich groß. Jeder spitze Peripheriewinkel ist halb so groß wie der zum selben Kreisbogen AB gehörende Zentriwinkel.

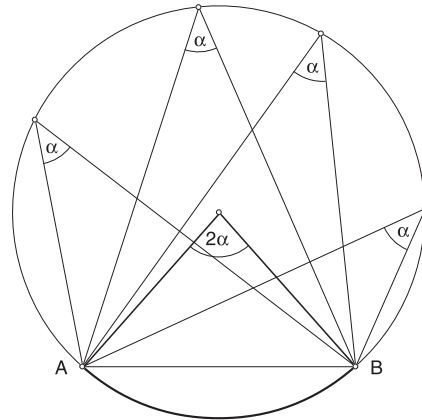


Bild A5: Peripheriewinkelsatz am Kreis

f Tangente von Punkt P an einen Kreis

Gegeben sind ein Kreis mit Mittelpunkt M und ein Punkt P außerhalb des Kreises. Gesucht sind die beiden Tangenten t_1 und t_2 an den Kreis von Punkt P aus. Der Mittelpunkt M_{Th} der Strecke MP ist der Mittelpunkt des Thaleskreises durch M und P. Die Schnittpunkte des Thaleskreises mit dem Kreis sind die Berührungspunkte B_1 und B_2 . Die Geraden PB_1 und PB_2 sind die gesuchten Tangenten t_1 und t_2 .

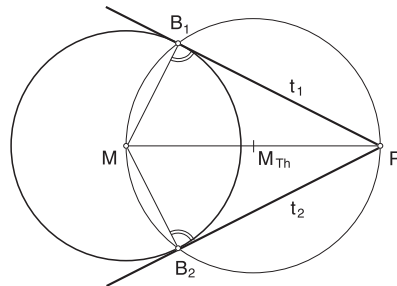


Bild A6: Tangente von einem Punkt an einen Kreis

Bezeichnungen

Um eine geometrische Zeichnung besser verstehbar zu machen, werden folgende Bezeichnungen verwendet:

Punkte:	A, B, C, ...	Konstruktionspunkte: 1, 2, 3, ...
Gerade, Kurven:	a, b, c, ..., g, h, ...	
Ebenen:	$\varepsilon, \delta, \dots, \pi, \dots$	(d. h. griechische Kleinbuchstaben)
gekrümmte Flächen:	$\Sigma, \Delta, \dots, \Pi, \dots$	(d. h. griechische Großbuchstaben)
Winkel:	α, β, \dots	
Parallelität:	\parallel	(in Zeichnungen z. B.: $\nparallel \nparallel$)
Nichtparallelität:	\nparallel	
Orthogonalität:	\perp	(in Zeichnungen: \perp)

Das griechische Alphabet:

A	α	Alpha	N	ν	Ny
B	β	Beta	Ξ	ξ	Xi
Γ	γ	Gamma	O	o	Omikron
Δ	δ	Delta	Π	π	Pi
E	ε	Epsilon	P	ρ	Rho
Z	ζ	Zeta	Σ	σ	Sigma
H	η	Eta	T	τ	Tau
Θ	θ	Theta	Y	υ	Ypsilon
I	ι	Iota	Φ	ϕ	Phi
K	κ	Kappa	X	χ	Chi
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
M	μ	My	Ω	ω	Omega

Die geometrischen Grundelemente: Punkt, Gerade, Ebene, Fläche müssen für geometrische Konstruktionen häufig miteinander verknüpft werden. Zur Beschreibung dieser Konstruktionen finden folgende Bezeichnungen für die Verknüpfungen geometrischer Grundelemente Anwendung:

$AB = g$	g ist die Verbindungsgerade der Punkte A und B
$ABC = \varepsilon$	ε ist die Verbindungsebene der Punkte A, B und C
$\varepsilon \cap \delta = g$	g ist die Schnittgerade der Ebenen ε und δ
$g \cap h = S$	S ist der Schnittpunkt der Geraden g und h
$g \cap \varepsilon = S$	Die Gerade g schneidet die Ebene ε im Punkt S
$P \in g$	Der Punkt P liegt auf der Geraden g
$Q \notin \varepsilon$	Der Punkt Q liegt nicht in der Ebene ε
$g \subset \varepsilon$	Die Gerade g liegt in der Ebene ε
$h \not\subset \pi$	Die Gerade h liegt nicht in der Ebene π

Literatur

1. Allgemeine Grundlagen

- Bense, M.: Das Universum der Zeichen. Agis-Verlag, Baden-Baden 1983
- Bertin, J.: Graphische Semiologie. Walter de Gruyter, Berlin - New York 1974
- Bruno, E.: Das verzauberte Auge. Unmögliche Objekte und mehrdeutige Figuren. Taco Verlagsgesellschaft und Agentur, Berlin 1989
- Gardner, H.: Frames of Mind: The Theory of Multiple Intelligences (10th Anniversary Edition). Basic Books, New York 1993
- Gittler, G.: Intelligenzförderung durch Schulunterricht: Darstellende Geometrie und räumliches Vorstellungsvermögen. In: G. Gittler et al.: Die Seele ist ein weites Land: aktuelle Forschungen am Wiener Institut für Psychologie. Wiener Universitätsverlag, Wien 1994
- Gombrich, E. H.: Bild und Auge. Neue Studien zur Psychologie der bildlichen Darstellung. Klett-Cotta, Stuttgart 1984
- Gombrich, E. H.: Schatten. Ihre Darstellung in der abendländischen Kunst. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1996
- Górska, R./Sorby, S. A./Leopold, C.: Gender Differences in Visualization Skills - An International Perspective. The Engineering Design Graphics Journal. Autumn 1998, Volume 62, Number 3, S. 9-18
- Helmholtz, H. von: Die Tatsachen in der Wahrnehmung. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1959 - Reprogr. d. Ausg. Berlin 1879 bzw. aus: Helmholtz: Philosoph. Aufsätze, Leipzig 1887
- Helmholtz, H. von: Über das Sehen des Menschen. In: Vorträge und Reden. 1. Band, 5. Aufl., Braunschweig 1903
- Lasswell, H.D.: The Structure and Function of Communication in Society. In: L. Bryson (Hrsg.): The Communications of Ideas. Cooper Square Publishers, New York 1948
- Leopold, C.: Analysen zur Raumvorstellung und ihre Rolle in den Ingenieurwissenschaften. Internationale Vergleiche unter Genderaspekten. In: R. Motzer (Hrsg.): Mathematik und Gender. Verlag Franzbecker Hildesheim 2013, S. 16-27
- Leopold, C.: Precise Experiments: Relations between Mathematics, Philosophy and Design at Ulm School of Design. Nexus Network Journal, Vol. 15, No. 2, 2013, Springer Birkhäuser Verlag Basel, S. 363-380
- Leopold, C.: Zum Verhältnis von "reiner" und "angewandter" Geometrie - zeichentheoretische Anmerkungen. In: Semiosis 69/70, Heft 1/2, 1993, Agis-Verlag, Baden-Baden, S. 77-89
- Maier, P. H.: Räumliches Vorstellungsvermögen. Peter Lang Europäischer Verlag der Wissenschaften, Frankfurt a. M. 1994
- Maser, S.: Grundlagen der allgemeinen Kommunikationstheorie. Verlag Berliner Union, Verlag W. Kohlhammer, Stuttgart, 2. Auflage, 1973
- Meisenheimer, W.: Raumstrukturen. Reihe ad. Düsseldorf, 3. Auflage, 1990
- Metzger, W.: Gesetze des Sehens. Verlag Waldemar Kramer, Frankfurt a. M., 3. Auflage, 1975
- Piaget, J. und Inhelder, B.: Die Entwicklung des räumlichen Denkens beim Kinde. Ernst Klett Verlag, Stuttgart 1971
- Reichert, D. (Hrsg.): Räumliches Denken. vdf Hochschulverlag AG an der ETH Zürich 1996
- Richter, H.-G.: Die Kinderzeichnung. Entwicklung, Interpretation, Ästhetik. Schwann, Düsseldorf 1987
- Rock, I.: Wahrnehmung - Vom visuellen Reiz zum Sehen und Erkennen. Spektrum der Wissenschaft, Heidelberg 1985
- Sellenriek, J.: Zirkel und Lineal. Kulturgeschichte des konstruktiven Zeichnens. Verlag Georg D. W. Callwey, München 1987
- Thurstone, L.L.: Primary Mental Abilities. University of Chicago Press, Chicago 1938
- Walther, E.: Allgemeine Zeichenlehre. Einführung in die Grundlagen der Semiotik. DVA, Stuttgart 1979

2. Architektur

- Evans, E.: *The Projective Cast. Architecture and Its Three Geometries*. Massachusetts Institute of Technology, Cambridge 1995
- Bittner, U.: *Architekturdarstellung - die Rolle von CAD*. Peter Lang Europäischer Verlag der Wissenschaften, Frankfurt a. M. 1996
- Faber, Colin: *Candela und seine Schalen*. Verlag Georg D. W. Callwey, München 1965
- Fonatti, F.: *Elementare Gestaltungsprinzipien in der Architektur*. Buch- und Kunstverlag, Wien 1987
- Fuller, R. B.: *Synergetics. Explorations in the Geometry of Thinking*. Macmillan Publishing Co., New York 1975
- Gänshirt, Ch.: *Werkzeuge für Ideen. Einführung ins architektonische Entwerfen*. Birkhäuser Basel Boston Berlin 2007
- Giedion, S.: *Raum, Zeit, Architektur. Die Entstehung einer neuen Tradition*. Otto Maier Verlag, Ravensburg 1965
- Hemmerling, M./Tiggemann, A.: *Digitales Entwerfen. Computer Aided Design in Architektur und Innenarchitektur*. Wilhelm Fink Paderborn 2010
- Knauer, R.: *Entwerfen und Darstellen. Die Zeichnung als Mittel des architektonischen Entwurfs*. Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin 1991
- Lampugnani, V. M.: *Architektur unseres Jahrhunderts in Zeichnungen. Utopie und Realität*. Verlag Gerd Hatje, Stuttgart 1982
- Leopold, C.: *Strukturelles Denken als Methode*. In: J. Medina Warmburg, C. Leopold (Hrsg.): *Strukturelle Architektur. Zur Aktualität eines Denkens zwischen Technik und Ästhetik*. Transcript Verlag Bielefeld 2012, S. 9-29
- Le Corbusier: *Ausblick auf eine Architektur*. Bertelsmann Verlag, Gütersloh 1969
- Mengeringhausen, M.: *Komposition im Raum. Die Kunst individueller Baugestaltung mit Serienelementen*. Bertelsmann Fachzeitschriften, Gütersloh 1983
- Nerdinger, W.: *Die Architekturzeichnung. Vom barocken Idealplan zur Axonometrie*. Prestel-Verlag, München 1986
- Neufert, E.: *Bauentwurfslehre*. 40. erw. Auflage, Springer Vieweg Wiesbaden 2012
- Schmitt, G.: *Architektur mit dem Computer*. Vieweg Verlag Braunschweig - Wiesbaden 1996
- Schneider, B.: *Perspektive bezieht sich auf den Betrachter, Axonometrie bezieht sich auf den Gegenstand*. In: *Daidalos 1*, 1981, S. 81-95

3. Geometrie

- Bärtschi, W.: *Geometrische Linear- und Schattenperspektive*. Vieweg Verlag, Braunschweig - Wiesbaden 1994
- Barner, M./Flohr, F.: *Darstellende Geometrie. Quelle und Meyer, Heidelberg - Wiesbaden*, 12. Auflage, 1991
- Beyer, U. (Hrsg.): *Studienarbeiten Darstellende Geometrie 1998 - 2006*. Universität Karlsruhe 2007
- Bonanni, A.: *Darstellende Geometrie I und II*. Technische Universität, Berlin 1985
- Brauner, H.: *Lehrbuch der Konstruktiven Geometrie*. Springer-Verlag, Wien - New York 1986
- Brauner, H. / Kicking, W.: *Baugeometrie I und II*. Bauverlag, Wiesbaden - Berlin 1977 und 1982
- Euklid: *Die Elemente. Buch I-XIII*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1980
- Euclid: *Optica. The Optics of Euclid*. Translated by H. E. Burton, J. Opt. Soc. Am. 35, no. 5, 1943, S. 357-372.
- Finsterwalter, S.: *Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie*. Jahresberichte der DMV, Bd. 6, 1899

- Fucke, R./Kirch, K./Nickel, H.: Darstellende Geometrie für Ingenieure. Fachbuchverlag, Leipzig - Köln, 15. Auflage, 1993
- Giering, O./Seybold, H.: Konstruktive Ingenieurgeometrie. C. Hanser Verlag München - Wien 1979, 3. Auflage 1987
- Glaeser, G.: Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik. 3. Auflage, Springer Spektrum Berlin Heidelberg 2014
- Glaeser, G.: Geometrische Betrachtungen zum Lauf der Sonne am Firmament. Informationsblätter für Darstellende Geometrie. Heft 1/1996, S. 10-15
- Hilpert, T.: Geometrie der Architekturzeichnung. Einführung in Axonometrie und Perspektive. Vieweg Verlag, Braunschweig - Wiesbaden 1988
- Hohenberg, F.: Konstruktive Geometrie in der Technik. Springer, Wien 1966
- Klix, D./Nickel, H.: Darstellende Geometrie. VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1990
- Kürpig, F./Niewiadomski, O.: Grundlehre Geometrie. Begriffe, Lehrsätze, Grundkonstruktionen. Vieweg Verlag, Braunschweig - Wiesbaden 1992
- Leopold, C.: Darstellende Geometrie I - Aufgabensammlung. Technische Universität Kaiserslautern 2011
- Leopold, C.: Darstellende Geometrie II - Aufgabensammlung. Technische Universität Kaiserslautern 2015
- Leopold, C. (Hrsg.): Das Pfaffbad. Eine Rekonstruktion. Technische Universität Kaiserslautern 2009
- Leopold, C.: Perspective Concepts - Exploring Seeing and Representation of Space. Journal for Geometry and Graphics, Vol. 18 (2014), No. 2, S. 225-238
- Leopold, C. (Hrsg.): Über Form und Struktur - Geometrie in Gestaltungsprozessen. Springer Vieweg Wiesbaden 2014
- Leopold, C.: Visual Representation for Spatial Thinking. In: L. Cocchiarella (ed.): The Visual Language of Technique. Volume 3: Heritage and Expectations in Research and Teaching. Springer International Publishing Switzerland 2015, S. 37-56
- Lordick, D.: Konstruktion der Schattengrenzen krummer Flächen mithilfe von Begleitflächen. Shaker Verlag, Aachen 2001
- Meirer, K.: Studienarbeiten 1985-1991. Universität Karlsruhe 1991
- Meirer, K.: Studienarbeiten 1991-1997. Universität Karlsruhe 1998
- Müller, E./Kruppa, E.: Lehrbuch der Darstellenden Geometrie. Springer-Verlag, Wien 1961
- Noli, W.: Darstellende Geometrie. I.-III. Teil. Selbst-Verlag, Gießen 1987
- Panofsky, E.: Perspektive als symbolische Form. In: F. Saxl (Hrsg.): Vorträge der Bibliothek Warburg 1924-1925, Leipzig Berlin 1927, S. 258-330
- Patzelt, O.: Faszination des Scheins. 500 Jahre Geschichte der Perspektive. Verlag f. Bauwesen Berlin 1991
- Pottmann, H./Asperl, A./Hofer, M./Kilian, A./Lass, E.: Architekturgeometrie. Springer Wien 2009
- Pütz, C.: Arbeitsblätter zur Darstellenden Geometrie für Architekten. Institut für Geometrie und Praktische Mathematik. RWTH Aachen 1996
- Pütz, C.: Arbeitsblätter zur Darstellenden Geometrie für Architekten. Shaker Verlag, Aachen 1999
- Pütz, C.: Untersuchungen zur Auswahl der Lehrinhalte des Faches Darstellende Geometrie für die Hochschulausbildung zum Architekten. Dissertation an der RWTH Aachen 1990
- Pumann: Darstellende Geometrie, 1. und 2. Teil. Selbst-Verlag, Coburg
- Rehbock, F.: Darstellende Geometrie. Springer, Berlin - Göttingen - Heidelberg 1969
- Rehbock, F.: Geometrische Perspektive. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 2. Auflage, 1980
- Reutter, F.: Darstellende Geometrie I und II. Verlag G. Braun, Karlsruhe 1979
- Sand, D.: Perspektive. Vorlesungsskript, Universität Kaiserslautern 1998
- Schmid-Kirsch, A.: Grundlagen der technischen Darstellung. Ein Skript zum Mitzeichnen. Universität Hannover 1989

- Schmid-Kirsch, A.: Axonometrie und Perspektive. Konstruktionsverfahren - Anwendungen. Universität Hannover 1991
- Schmidt, R.: Perspektive Schritt für Schritt. Augustus Verlag, Augsburg 1995
- Sorby, S. A. u. a.: 3-D Visualization for Engineering Graphics. Prentice-Hall, New Jersey 1998
- Strubecker, K.: Vorlesungen der Darstellenden Geometrie. Vandenhoeck & Rupprecht, Göttingen 1967
- Thomae, R.: Darstellende Geometrie. Kohlhammer Verlag, Stuttgart 1993
- Thomae, R.: Perspektive und Axonometrie. Kohlhammer Verlag, Stuttgart, 7. Auflage, 2001
- Tschupik, J. P.: Darstellende geometrische Sonnenstandsbestimmung. Informationsblätter für Darstellende Geometrie. Heft 1/1994, S. 21-26

Abbildungsnachweis

1.1: Burkhard Grashorn, Oldenburg. 1.2: Arch+ 94, 4/1988, S. 32. 1.3: Fotografische Sammlung, Museum Folkwang, Essen. 1.8: Franco Fonatti: Elementare Gestaltungsprinzipien in der Architektur. Buch- und Kunstverlag Wien, 1982, S. 26 und 27. 1.9: Georg Gittler: Dreidimensionaler Würfeltest (3DW). Ein rasch-skaliertes Test zur Messung des räumlichen Vorstellungsvermögens. Beltz Test, Weinheim 1990. 1.12: Martin Wentz (Hrsg.): Stadtentwicklung. Campus Verlag, Frankfurt 1996, S. 147 und S. 59. 1.13: DIN 1356-1: 1995-02, Bauzeichnungen, Linienarten und Linienbreiten, S. 6. Beuth Verlag, Berlin. 1.14: Jörg Sellenriek: Zirkel und Lineal. Kulturgeschichte des Konstruktiven Zeichnens. Callwey Verlag, München 1987, S. 10. 1.15: Ebenda, S. 17. 1.16: Ebenda, S. 26. 1.17: "Grabfunde", 31.01.1952 - Stadt zur Zeit Assurbanipal's II, Britisches Museum. 1.18: Zeichnung von Hannah Müller, 1994. 1.19: Zeichnung von Fabian Müller, 1998. 1.23: W. H. Freeman & Co., New York. 1.24: W. H. Freeman & Co., New York. 1.28: Foto von Cornelia Leopold. 1.29: Buno Ernst: Das verzauberte Auge. Unmögliche Objekte und mehrdeutige Figuren. Taco Verlagsgesellschaft und Agentur, Berlin 1989, S. 44. 1.30: Ebenda, S. 35. 1.31: Mindpower, Selbstseinschätzung - Selbstentfaltung. Time-Life Bücher, Amsterdam, 1994, S. 90. 1.32: Differential Aptitude Tests. Fifth Edition. The Psychological Corporation 1990. Testaufgabe 40. 1.33: Peter H. Maier: Räumliches Vorstellungsvermögen - Unterschiede zwischen Mann und Frau? In: Informationsblätter für Darstellende Geometrie, Innsbruck, Heft 1/1998, S. 25. 1.34: Ebd. 1.35: Sheryl A. Sorby u. a.: 3-D Visualization for Engineering Graphics. Prentice-Hall, New Jersey, 1998, S. 105. 1.36: Jean Piaget; Bärbel Inhelder; u. a.: Die Entwicklung des räumlichen Denkens beim Kinde. Einleitung von Hans Aebli. Aus dem Französischen von Rosemarie Heipcke. © 1971 by Jean Piaget und Bärbel Inhelder. Klett-Cotta, Stuttgart 1971. 1.37: Foto von Cornelia Leopold. 1.38: Virtuelle Modelle entwickelt von Cornelia Leopold und Luc Müller. 2.1: Foto von Virginie Jolivet. 2.2: Ernst H. Gombrich: Schatten. Ihre Darstellung in der abendländischen Kunst. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1997 (= Lizenzausgabe vom Verlag Klaus Wagenbach, Berlin 1996), S. 63. 2.4: Jörg Sellenriek: Zirkel und Lineal. Kulturgeschichte des konstruktiven Zeichnens. Callwey Verlag, München 1987, S. 138. 2.5: Ebenda. 2.22: Carmen Humbel: Junge Schweizer Architekten. Artemis Verlag, Zürich 1995, S. 44. 2.25: Topographische Karte eines Geländes bei Hermeskeil, Rheinland-Pfalz. 2.26: Foto von Cornelia Leopold. 2.32: DIN ISO 5456-2: 1998-04, S. 4, Beuth Verlag, Berlin. 2.33: DIN ISO 5456-2: 1998-04, S. 5, Beuth Verlag, Berlin. 2.34: DIN 1356-1: 1995-02, S. 4, Beuth Verlag, Berlin. 2.35: DIN 1356-1: 1995-02, S. 4, Beuth Verlag, Berlin. 2.36: DIN 1356-1: 1995-02, S. 3, Beuth Verlag, Berlin. 3.1: Yukio Futagawa; Arata Isozaki; Le Corbusier: Le Corbusier: Couvent Sainte Marie de La Tourette, Evieux-sur-l'Arbresle, France, 1957-60. A. D. A. Edit, Tokyo, 1971. 3.2: Esto Photographics. 3.12: Johann Heinrich Lambert: Schriften zur Perspektive. Max Steck (Hrsg.), Berlin, 1943, S. 161. 3.13: Yukio Futagawa: Frank Lloyd Wright, Monograph 1951-1959, Band 8, A. D. A. Edit, Tokyo 1988, S. 159. 3.24: Foto von Cornelia Leopold. 3.32: Foto von Cornelia Leopold. 3.33: Takamatsu & Lahyani Architects. 3.36 (links): Firma Gebrüder HAFF GmbH, Pfronten. 3.36 (rechts): Hugo Heine: Der technische Zeichenbedarf. rotiring werke, Riepe KG, Hamburg 1978, S. 78. 3.44 (links): Foto von Luc Müller. 3.44 (rechts): Hugo Heine: Der technische Zeichenbedarf. rotiring werke, Riepe KG, Hamburg 1978, S. 78. 4.1: Peter Neitzke und Carl Steckeweh (Hrsg.): Centrum. Jahrbuch Architektur und Stadt 1993. Friedrich Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft, Braunschweig/Wiesbaden 1993, S. 194. 4.2: Bruno Zevi: Giuseppe Terragni. Zanichelli Editore, Bologna 1980, S. 128. 4.9: Projektarbeit "Rad-Stop" von Simone Didillon in Zusammenarbeit der Fächer Baukonstruktion (B. Meyerspeer), Darstellungsmethodik (H.-J. Schlamp) und Darstellende Geometrie (C. Leopold), Universität Kaiserslautern, 1997. 4.10: Projektarbeit "Lesehaus" von Irina Retz in Zusammenarbeit der Fächer Baukonstruktion (B. Meyerspeer), Darstellungsmethodik (H.-J. Schlamp) und Darstellende Geometrie (C. Leopold), Universität Kaiserslautern, 1996. 4.12: Projektarbeit "Minimales Wohnen" von Lara Kiefer in Zusammenarbeit der Fächer Baukonstruktion (H. Eissler), Darstellungsmethodik (W. Glas) und Darstellende Geometrie (C. Leopold), Universität Kaiserslautern, 1993. 4.13: Gezeichnet von Heiner Reimers - vgl. Stanislaus von Moos: Le Corbusier, Elements of a Synthesis. The MIT Press, Cambridge Massachusetts, 1979, S. 131. 4.15: Gezeichnet von Sibylle Hirsch - vgl. GA Document 17, A.D.A. Edit, Tokyo, 1987, S. 109 ff. 4.21: Studienprojekt von Markus Kiefer, 1996. 4.22: Alan J. Brookes; Chris Grech: Konstruktive Lösungen in der High-Tech-Architektur. Analyse von 30 Bauten. Birkhäuser Verlag, Basel 1993, S. 51 (Englische Originalausgabe 1992 bei Butterworth-Heinemann, Oxford, England). 4.26: Württembergischer Kunstverein Stuttgart: 50 Jahre bauhaus, Kunstgebäude am Schloßplatz, Stuttgart 1968, S. 221. 4.27: Ebenda, S. 221. 4.28: Rizzoli International Publications, New York. 4.29: KISHO KUROKAWA architect & associates. 4.30: Projektarbeit "Wohnbaukasten für Studie-

rende" von Gerd Zinsmayer in Zusammenarbeit der Fächer Baukonstruktion (B. Meyerspeer), Darstellungsmethodik (H.-J. Schlamp) und Darstellende Geometrie (C. Leopold), Universität Kaiserslautern, 1995.

4.31: Projektarbeit von Lara Frindert, 2010, Entwurf und Umgestaltung eines Kälberguts, Baukonstruktion 1, B. Meyerspeer und Darstellende Geometrie, C. Leopold, TU Kaiserslautern. 4.32: Arch+ 133, 9/96, S. 38. Entwurf von Monika Breu, Wien, Temporäre Wohnanlage für Bauarbeiter im Tessin. 4.33: Projektarbeit "Rad-Stop" von Markus Neeser in Zusammenarbeit der Fächer Baukonstruktion (B. Meyerspeer), Darstellungsmethodik (H.-J. Schlamp) und Darstellende Geometrie (C. Leopold), Universität Kaiserslautern, 1997. 4.34: Alan J. Brookes; Chris Grech: Konstruktive Lösungen in der High-Tech-Architektur. Analyse von 30 Bauten. Birkhäuser Verlag, Basel 1993, S. 122 (Englische Originalausgabe 1992 bei Butterworth-Heinemann, Oxford, England). 5.1: Foto von Cornelia Leopold. 5.2: Daniel Libeskind. 5.25: Foto von Cornelia Leopold. 5.28: GA Houses 3, A.D.A. Edit, Tokyo, 1977, S.43. 5.29: Vitra, Weil am Rhein. 6.1: Stanislaus von Moos: Le Corbusier, Elements of a Synthesis. The MIT Press, Cambridge Massachusetts, 1979, S.133. 6.2: Architektur aktuell 216, 6/1998, S. 41. 6.6: Jörg Sellenriek: Zirkel und Lineal. Kulturgeschichte des konstruktiven Zeichnens. Callwey Verlag, München 1987, S. 56. 6.7: Foto von Cornelia Leopold. 6.9: Foto von Cornelia Leopold. 6.11: Max Mengerlinghausen: Raumfachwerke aus Stäben und Knoten. Bauverlag, Wiesbaden und Berlin 1975, S. 209. 6.12: Foto von Cornelia Leopold. 6.14: Richard Buckminster Fuller: Synergetics. Explorations in the Geometrie of Thinking. Macmillan Publishing Co., New York 1975, S. 185. 6.15: Archiv des Fachgebietes Darstellende Geometrie, Fachbereich Architektur der TU Kaiserslautern. 6.16: Paul Adam; Arnold Wyss: Platonische und Archimedische Körper, ihre Sternformen und polaren Gebilde. Verlag Paul Haupt, Bern, 1984, S. 57. 6.17: Max Mengerlinghausen: Komposition im Raum. Die Kunst individueller Baugestaltung mit Serienelementen. Bertelsmann Fachzeitschriften, Gütersloh, 1983, S. 113. 6.18: Ebenda. 7.1: Archiv des Fachgebietes Darstellende Geometrie, Fachbereich Architektur der TU Kaiserslautern. 7.2: Arch+, 141, April 1998, S. 110. 7.8: Foto von Cornelia Leopold. 7.9: Colin Faber: Candela und seine Schalen. Verlag Georg D.W. Callwey, München 1965, S. 221. 7.19: Archiv des Fachgebietes Darstellende Geometrie, Fachbereich Architektur der TU Kaiserslautern. 7.20: Archiv des Fachgebietes Darstellende Geometrie, Fachbereich Architektur der TU Kaiserslautern. 7.23: Alexander Tzonis; Liane Lefaivre: Architektur in Europa seit 1968. Campus Verlag, Frankfurt 1992, S. 228. 7.25: Archiv des Fachgebietes Darstellende Geometrie, Fachbereich Architektur der TU Kaiserslautern. 7.26: Foto von Cornelia Leopold. 7.29 - 7.31: Daniel Lordick: Konstruktion der Schattengrenzen krummer Flächen mithilfe von Begleitflächen. Shaker Verlag, Aachen 2001, S. 24. 7.33: Institut für das Bauen mit Kunststoff, Mannheim. 7.34: Daidalos 68/1998, S. 34 und S. 42. 7.39: Gerenderte Darstellung von Claudia Zapp. 7.41: Architecture and Urbanism. 1998: 02, No 329, A+U Publishing Co., Tokyo, S. 106. 7.42: USM Haller, Möbelkunde mit System, Katalog. 7.45: Archiv des Fachgebietes Darstellende Geometrie, Fachbereich Architektur der TU Kaiserslautern. 7.46: Ebenda. 7.49: Foto: Michael Reisch, Düsseldorf. 7.50: Knud W. Jensen; Kjeld Kjeldsen; Charlotte Sabroe (Hrsg.): Louisiana. Museum of Modern Art, Humlebaek, 1995, S. 56. 7.53: Foto von Cornelia Leopold. 7.54: Siemens AG. 7.58: Archiv des Fachgebietes Darstellende Geometrie, Fachbereich Architektur der TU Kaiserslautern. 7.59: Foto von Fabian Müller. 7.62: Fotos von Cornelia Leopold. 7.73: Takamatsu & Lahyani Architects. 7.74: Archiv des Fachgebietes Darstellende Geometrie, Fachbereich Architektur der TU Kaiserslautern. 8.1: Ebenda. 8.2: Gustav Peichl, Verlag Wilhelm Ernst und Sohn, Berlin 1987, S. 15. 8.8: Zeichnung von Claudia Zapp. 8.9: Gerenderte Darstellung von Claudia Zapp. 9.2: Matthias Ludwig: Mobile Architektur. Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart, 1998, S. 112 (Buckminster Fuller Institute, Los Angeles). 9.3: Ebenda. 9.5: Daniel Libeskind. 9.13: Robin Evans: The Projective Cast. Architecture and Its Three Geometries. Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1995, S. 183 und S. 187. Arch+ 137, 6/1997, S. 58. Pierre Mardaga (Hrsg.): Architecture de Philibert de L'Orme. Oeuvres de Philibert de L'Orme (1648), Brüssel, 1981, S. 96. 10.1: Mario Botta 1980-1990, Verlag für Architektur, Artemis und Winkler Verlag, Zürich und München, 1991, S. 72. 10.2: Archiv des Fachgebietes Darstellende Geometrie, Fachbereich Architektur der TU Kaiserslautern. 10.5: Richard Meier Architect, Rizzoli International Publications, New York 1991, S. 188. 10.6: Ebenda, S. 182. 10.11: Leicht verändertes Diagramm aus: Bundesarchitektenkammer (Hrsg.): Energiegerechtes Bauen und Modernisieren. Birkhäuser Verlag für Architektur, Basel, 1996, S. 62. 10.12: Ernst Neufert: Bauentwurfslehre. 34. erw. Auflage, Friedr. Vieweg & Sohn, Wiesbaden 1996, S. 152. 10.13: Erde Sonne Applet von Jürgen Giesen, SWR 2000. <http://www.geoastro.de/ErdeSonne/SE/se-applet.html> (Stand 30.04.2015). 10.25: Projektarbeit "Einfamilienhausgruppierung" von Timo Niendorf in Zusammenarbeit der Fächer Grundlagen der Ortsplanung (H. Dennhardt), Techniken der Plandarstellung (H.-J. Schlamp) und Darstellende Geometrie (C. Leopold), Universität Kaiserslautern, 1995. 10.26: Projektarbeit "Lesehaus" von Kristin Lutz in Zusammenarbeit der Fächer Baukonstruktion (B. Meyerspeer), Dar-

stellungsmethodik (H.-J. Schlamp) und Darstellende Geometrie (C. Leopold), Universität Kaiserslautern, 1996. 10.28: Projektarbeit von Ali Ajeti, 2012, Entwurf eines Wohnhauses, Baukonstruktion 1, B. Meyerspeer und Darstellende Geometrie, C. Leopold, TU Kaiserslautern. 10.29: Projektarbeit von Willem Roelof Balk, 2008, Entwurf "Driving Range", Baukonstruktion 1, B. Meyerspeer und Darstellende Geometrie, C. Leopold, TU Kaiserslautern. 11.1: Alexander Tzonis; Liane Lefaivre: Architektur in Europa seit 1968. Campus Verlag, Frankfurt 1992, S. 80. 11.8: Foto von Luc Müller. 11.25: H.-P. Paukowitsch: Der Mathematikunterricht. Verlag Ernst Klett Stuttgart, Heft 4/1986, S. 80. 11.28: Yukio Futagawa: Frank Lloyd Wright, Monograph 1951-1959, Band 3, A. D. A. Edit, Tokyo, 1987, S.1 und S. 3. 12.1: Manfred Sack; Akademie der Bildenden Künste Wien (Hrsg.): Gustav Peichl. Gebaute Ideen. Residenz Verlag, Salzburg, Wien, 1988, S. 85. 12.16: Secession Vienna June 2006 017.jpg von Autor Gryffindor, Wikimedia Commons, http://en.wikipedia.org/wiki/Vienna_Secession (Stand 30.04.2015). 12.17: Foto von Dotterrenate, Creative Commons by-sa-2.0-de, https://commons.wikimedia.org/File:Dotter_Wien_Secession_1.JPG (Stand 18.06.2015). 12.20: Baumeister 8/1995, S. 21 und 23. 13.1: Wiel Arets: Maastricht academy for the arts and architecture. 010 publishers, Rotterdam, 1994, S. 9 und S. 90. 13.2: Arch+ 133, 9/96, S. 38 - Entwurf von Monika Breu, Wien, Temporäre Wohnanlage für Bauarbeiter im Tessin. 13.3: Ebenda. 13.4: Brook Taylor: New principles of linear perspective or the art of designing on a plane, the representations of all sorts of objects, in a more general and simple method than has been done before. London 1719. S. 90, Fig. 1, <http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/MPIWG:C0RQ3H5B> (Stand 30.04.2015). 13.5: Albrecht Dürer: Underweysung der Messung, mit Zirckel und Richtscheit, in Linien, Ebenen und gantzen corpore. Nürnberg 1525. Online Edition: digital.slub-dresden.de/werkansicht/dlf/17139 (Stand 30.04.2015). 13.14: Aufgabenstellung im Fach Perspektive an der Universität Kaiserslautern von Dietlinde Sand, nach Robert Venturi, Haus Vanna Venturi, Chestnut Hill, Pennsylvania, 1962. Aus: A. Sanmartin (Hrsg.): Venturi, Rauch & Scott Braun. Bauten und Projekte 1959 - 1985, Karl Krämer Verlag, Stuttgart, 1986, S. 38ff. 13.26: Annette Bekker und Wilfried Wang (Hrsg.): Architektur Jahrbuch 1996, Prestel Verlag, München 1996, S. 20. 13.27: Arch+ 142, 7/98, S. 55 - Entwurf der Architekten MVRDV des niederländischen Pavillons für die Expo 2000 in Hannover, 1997. 13.38: Hans Vredeman de Vries: Perspective. fol. 28. 13.39: Ebenda, fol. 36. 13.40: Alberto Campo Baeza. 13.41: Ebenda. 13.46, 13.49 und 13.50: Fotos von Cornelia Leopold. 13.55: Hans Vredeman de Vries: Perspective. fol. 28. 13.56: Ebenda, fol. 36. 13.61: August Sarnitz: R.M. Schindler, Architekt, 1887-1953. Christian Brandstätter Verlag & Edition, Wien 1986, S. 89. 13.62: Vittorio Magnago Lampugnani: Architektur unseres Jahrhunderts in Zeichnungen. Utopie und Realität. Verlag Gerd Hatje, Stuttgart 1982, S. 73. 13.66: Projektarbeiten von Benjamin Maier und Julika Siegmund, 2007, Entwurf "Parasit", Grundlagen des Entwerfens, D. Bayer und Darstellende Geometrie, C. Leopold, TU Kaiserslautern. 13.68: Manuel Gausa: Housing. New Alternatives, New Systems. Birkhäuser Publishers, Basel 1998, S. 244-245. 13.75: Projektarbeit von Ali Ajeti, 2011, Entwurf "Stadthaus zwischen zwei Brandwänden", Grundlagen des Entwerfens, D. Bayer und Darstellende Geometrie, C. Leopold, TU Kaiserslautern. 13.76: Projektarbeit von Luzia Birker, 2012, Entwurf "Filmcharakterhaus", Methodik des Entwerfens, D. Bayer und Darstellende Geometrie, C. Leopold, TU Kaiserslautern. 13.78: Ramses Workstation, Entwurf und Zeichnungen von Christian Brost, 1997 und 1999, Entwurfsaufgabenstellung von K. Mahler, Universität Kaiserslautern. 13.84: Foto von Cornelia Leopold. 13.85: Johann Ermann Hummel, Zimmerbild, http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/5f/Zimmerbild_78.jpg (Stand 30.04.2015). 13.88: Studienprojekt von Anja Lieske, 2006, Perspektive, C. Leopold, TU Kaiserslautern. 13.89: Studienprojekt von Andreas Boroch, 2008, Perspektive, C. Leopold, TU Kaiserslautern. 13.90: "Nicolai - Restingplace for Santa Claus", Entwurf und Fotomontage von Justus Thiede, 1996, Entwurfsaufgabenstellung von K. Mahler, Universität Kaiserslautern. 13.92: Fotomontage von José Vicente und Andreas Matievits. Originalfoto aus: Toshio Nakamura (Hrsg.): Mario Botta. Architecture and Urbanism. Extra Edition. 9/86, a+u Publishing Co., Tokyo, S. 64. 13.95: Projektarbeit "Wilhelm 20b - Durchleben des Spalts" von Claudia von Harpe in Zusammenarbeit der Fächer Baukonstruktion (B. Meyerspeer) und Perspektive (D. Sand), Universität Kaiserslautern, 1997. 13.97: Foto von Cornelia Leopold. 13.98: Foto von Cornelia Leopold. 13.100: Geometrische Dachbegrünung, Hochhaus in Manhattan von Linda Pollak, 1990. Aus: Daidalos 63, 3/97, S. 113. 13.101: Werner Blaser: Mies van der Rohe. Die Kunst der Struktur. Artemis, Zürich und Stuttgart, 1965, S. 154. 13.102: Hans Vredeman de Vries: Perspective (Band 1 und 2). Leiden, 1604-1605, Tafel 39 und Tafel 22, <http://digi.ub.uni-heidelberg.de/diglit/vries1604>, <http://digi.ub.uni-heidelberg.de/diglit/vries1605>. 13.106: Studienprojekt Adrian Angstmann und Andreas Boroch, 2008, Perspektive, C. Leopold, TU Kaiserslautern. 13.107: Studienprojekt Sebastian Stein, 2008, Perspektive, C. Leopold, TU Kaiserslautern. 13.110: Rendering Romy Link, 2014, Entwurf für New York City, Gebäudelehre und Entwerfen, W. Böhm, TU Kaiserslautern. 13.111: Rendering Ali Ajeti, 2015, Entwurf einer Bank, Gebäudelehre

und Entwerfen, M. Zünd, TU Kaiserslautern. 13.112: Diplomarbeit "Bild und Architektur - eine assoziative Entwurfsstrategie", Andreas Matievits, 2000, Baukonstruktion 1 und Entwerfen, B. Meyerspeer, Darstellende Geometrie und Perspektive, C. Leopold. TU Kaiserslautern.

Index

A

Abbildungsmethode 12, 13, 17, 23, 29, 39, 40, 47, 223, 226
Abstand 53, 70, 103, 108-110, 112, 126, 139, 159, 164, 191-195, 198, 231, 234-235, 258, 277, 287, 289, 290
Abtrag 195, 197-199
abwickelbare Fläche 167
Abwicklung 165-172
Achsen der Ellipse 58, 62, 145
Äffinität 49-54, 57-64, 109, 144-145, 166, 233
Ähnlichkeit 31, 36, 38
Anschaulich 77
anschaulich 32, 46, 71, 79, 102, 103, 174, 202, 207, 212, 223, 256
Anschaulichkeit 34
Anschauungsraum 38-39
Archimedische Körper 124
Architektenanordnung 232
Asymptoten 153, 255
Aufbaumethode 77, 78
Aufriss 42- 43, 46, 52, 66, 75, 79, 87- 91, 93-94, 96, 98-108, 110-111, 113-114, 131, 139, 141-142, 145, 150-153, 158-159, 161, 166, 169, 171-172, 179-181, 183-187, 200, 212-214, 216, 220, 228-229, 231-232, 261, 271, 285-288
Aufrissaxonometrie 74, 75, 82, 85
Auftrag 195, 197-199
Auge 226-229, 231, 233-235, 238, 242, 249, 256-257, 261-262, 279-283, 285, 288, 290
Axonometrie 17, 40, 46, 47, 53, 58, 59, 66, 67, 71- 79, 81- 85, 114, 174, 180-187, 190, 191, 194, 207-210, 214-217, 220-224, 233, 260, 261, 265
Azimutwinkel 176-177, 179, 267

B

Benutzerkoordinatensystem 105, 114
Berührungspunkt 136, 140-142, 145, 159, 176, 250
Bildebene 23, 29, 30, 33, 49, 50, 54, 71, 72, 76, 88, 135, 136, 191, 192, 196, 202, 207-216, 224, 226-231, 233-235, 237-239, 243, 249, 257, 260, 262, 265, 266, 278, 279, 280-285, 287, 288, 290
Bildwirkung 261, 263
Blickfeld 259
Blickrichtung 84, 85, 102, 207, 211, 212, 214, 216, 220, 222, 291
Boolesche Operationen 157
Böschung 195-197, 199, 201
Böschungkegel 199
Böschungsebene 195, 197-199, 203
Böschungsfäche 199-201
Böschungskegel 197, 198, 201
Brennweite 258-259, 277, 289, 290

C

CAD-Programm 47, 84, 85, 114, 137, 157, 222, 230, 258, 289
Catalanische Körper 124

D

Dachausmittlung 41, 191, 203-206
Dachgrundformen 203
Deckgerade 98-101, 182, 186
deutliche Sehweite 259
Differentialgeometrie 132
Differenz 156, 157
Dimetrie 76, 211
dimetrische Projektion 73
DIN 16, 17, 45, 76
Distanz 226, 262, 263, 277, 278
Distanzkreis 256- 258, 261
Distanzpunkt 240
Dodekaeder 117-121
Doppelverhältnis 36, 38
Drehfläche 125, 126, 128, 129, 161, 162
Drehhyperboloid 126, 128, 130
Drehkegel 126, 128, 147-154, 157, 160, 163, 170-172, 184, 187, 188, 194, 197, 199, 200
Drehsehnen 233, 234, 238, 239, 243
Drehsehnenverfahren 233, 236
Drehsinn 177
Drehzylinder 126, 128, 143-145, 154, 155, 157-161, 163, 168, 169, 183, 188
Dreitafelprojektion 41, 87
dual 120, 121
Durchdringung 138, 155, 157, 160
Durchdringungskurve 155, 157, 158, 160, 161, 162, 187
Durchschnitt 156, 157
Durchsichtaxonometrie 81
Durchstoßmethode 228-230, 232, 233, 236, 287
Durchstoßpunkt 30, 89, 100, 179, 182, 186, 189, 226-229

E

Ebenen 49, 50, 53, 54, 100
Eigenschaften 137, 175, 176, 179, 180, 183, 184-186, 188, 268
Einschneideverfahren 79, 211, 212, 214-216, 220
Ellipse 57, 58, 60-70, 113, 114, 139, 141, 142, 144, 145, 149-153, 155, 169, 171, 172, 183-186, 190, 199, 200, 249, 250-252, 254
Ellipsoid 134, 135
elliptischer Flächenpunkt 134
Erzeugende 126, 128, 137, 143, 144, 146, 148, 149, 152, 153, 162, 164, 167-172, 184, 194, 197, 199, 201
Euler'scher Polyedersatz 116, 120
Euler-Charakteristik 117
Explosionsaxonometrie 81, 83

F

Fassadenabwicklung 166
Ferngerade 39
Fernpunkt 39, 227, 249, 250, 254, 255, 265
Fläche 21, 125-129, 133-135, 138, 139, 143, 144, 146, 155, 157, 158, 160-162, 165, 167, 168, 172, 175, 192, 194, 196, 199, 201, 202, 206, 296
Flächenmodell 157
Fluchtgerade 243, 246, 247, 282
Fluchtpunkt 39, 227, 231-235, 238, 239, 243, 263-265, 267, 279- 282, 284, 287, 288

Form 12, 14, 19, 27, 121, 123, 127, 138, 140, 155, 156, 173, 183
 Formmetamorphose 14
 Fotografie 21, 31, 32, 258, 266, 277, 289
 Fotomontage 277-279, 281
 Fotorekonstruktion 241, 277-279, 281, 282
 frontale Axonometrie 75
 Frontgerade 244, 247, 276
 Frontlinie 91, 110-111, 113
 Froschperspektive 260-261

G

Gegenlicht 265-266
 Geländedarstellung 41, 191, 194
 Geländefläche 192, 202
 Gerade 50, 89-91, 93, 98, 100, 107-109, 125, 126, 128, 131
 Grundriss 42, 43, 45, 52, 56, 58, 59, 74, 79, 87-89, 91-94, 96, 98, 99, 102-105, 108, 109, 111, 113, 131, 140-142, 145, 150, 152, 153, 159-161, 164, 166, 167, 169, 172, 176-177, 179-180, 183-185, 188-189, 191-193, 197-198, 200, 204-206, 212-214, 216, 220, 229-235, 238, 260, 264, 267, 271, 279, 284, 285, 287
 Grundrissaxonometrie 74-75, 79, 82, 85, 145, 207, 214

H

Hauptachse 58, 60, 63-66, 70, 113, 130, 141, 172, 185, 200
 Hauptlinie 91, 109-111, 113
 Hauptpunkt 226-227, 231, 278, 284-285, 287, 290
 Hauptschichtenebene 192, 194
 Hauptschichtenlinie 192
 Hauptschichtenpunkte 192-193
 Hauptsehstrahl 226, 228-229, 260, 261, 283-285, 288-290
 Hexaeder 119-120
 Hilfskugelfverfahren 161
 Höhenkote 191
 Höhenlinie 41, 91, 105, 109, 111-113, 191, 192, 194, 195-202, 204-206, 231, 232, 285
 Höhenwinkel 176, 177, 179, 267
 Horizont 226, 227, 229-231, 233, 235, 238, 242-243, 264, 265, 279-282, 285, 287
 Hyperbel 126, 130, 149, 153-154, 249-250, 254-255
 hyperbolischer Flächenpunkt 134
 Hyperbolisches Paraboloid 127-128, 137
 Hyperboloid 126, 128, 130

I

Ikosaeder 117-121, 123, 124
 Innenraumperspektive 269
 Intervall 192, 193, 194, 199
 Invarianten 34, 36, 38, 46
 Isometrie 76, 85

K

Kamera 22, 224, 258, 277, 281, 289, 290
 kartesisches Rechtskoordinatensystem 41, 46, 77
 Kavalierprojektion 75
 Kegel 126, 134, 137, 138, 146-154, 157, 160, 162, 164, 167, 170-173, 176, 183, 184,

187-190, 194, 197-201, 249, 257, 261
 Kegelschnitt 148-150, 152-154, 249
 Klostergewölbe 155
 kollinear 53, 54, 55, 70
 Kollineation 53, 54, 55, 151, 153, 233-236
 Kommunikation 11, 15, 16, 17, 21, 223
 Kommunikationsmedien 11, 12
 Kommunikationsmodell 15
 Kompasswinkel 178
 konjugierte Ellipsendurchmesser 57-58, 60, 62, 66-67, 252-253
 konkav 115-117
 Kontur 136, 139
 konvex 115-118, 124
 Körper 125, 128, 129, 138, 143, 155-157, 165, 167, 173, 183, 186-187, 224, 260, 262
 Kote 40, 191, 192, 197-198
 kotierte Projektion 40-41, 191-192, 194, 202
 Kreis 57-70, 113-114, 128-129, 139-144, 146, 217-219, 251-260
 Kreuzgewölbe 155
 Kreuzriss 42, 43, 77, 87, 159, 102, 164, 182, 212, 214, 216, 220
 Krümmung 125, 132-135, 139, 140, 146
 Krümmungskreis 133, 134, 145, 150
 Kugel 119, 123, 128, 135-142, 158-162, 167, 173, 183, 185, 186, 217, 261

L

Licht 173, 176, 182-183, 185-190, 264-271, 291
 lineare Skala 245

M

maßgerecht 32, 236, 237, 238
 MERO-Norm-Knoten 124
 Messpunkt 238, 239, 240, 241, 243, 267, 279, 280-282
 Methode der Deckgeraden 98-101, 182, 186
 Methode des Projizierens 29, 30, 32
 Militärprojektion 74
 Modellierprogramm 47-48
 Modellierung 289
 Monge'sche Drehkonstruktion 107
 Monometrie 211
 monometrische Projektion 73

N

Nebenachse 58, 60, 63-67, 113, 130, 141, 150, 172, 185, 200
 Neigungswinkel 105, 108, 193, 211, 243, 284
 Netz 123, 157, 166-167
 Normale 76, 111, 133
 normale Axonometrie 76, 84, 139, 185, 207, 209, 212-217, 220, 222, 284
 Normalprojektion 33-35, 40, 44, 52, 111, 113, 136
 Normalriss 33-35, 102, 113
 Nulllinie 195, 197, 199

O

Obersicht 80, 84, 209
 Oktaeder 117-122
 Ordner 43, 88, 90, 96, 100, 103-104, 108, 112-113, 141-142, 150-153, 159, 160, 164, 179-180, 183-185, 188, 200, 229-230, 232, 284, 287

Ordnung 12, 23

P

Parabel 127, 128, 149, 152, 153, 249, 250, 254, 255
parabolischer Flächenpunkt 134
Paraboloid 127, 128, 134, 135, 137
parallel 49, 50, 57, 58, 66, 75, 91, 92, 94-96, 106-109, 111, 116, 126, 141-145, 148-150, 152-154, 158-162, 169, 171, 175, 179, 181, 183, 188-192, 194, 196-199, 204-208, 210, 216, 223, 226-230, 233, 237, 238, 249, 264-266, 278-284, 296
Parallelbeleuchtung 33, 52, 137, 174, 176, 189, 190, 264, 267, 271
Paralldrehen 110, 166
parallelentreu 34, 58, 62, 69
Parallelentreue 97
Parallelität 34, 38, 189
Parallelprojektion 32-35, 37-40, 46, 49, 50, 57, 62, 69, 71, 78, 135, 136, 139, 149, 174, 189, 191, 208, 210, 217, 223, 249, 250
Parallelriss 32, 33, 37, 50, 51, 71, 73, 179, 207, 264
Perspektive 13, 17, 30, 31, 46, 47, 56, 174, 216, 223, 224, 226, 264-267, 271, 277, 290
Perspektivmaschine 225
Perspektograph 53, 236
planometrische Projektion 74
Platonische Körper 117, 120, 121
Polyeder 115-125, 166, 183
Polygon 115-119, 124
Prisma 13, 116
Projektion 175, 182, 188, 191-194, 198, 202, 203, 207
Projektionsstrahl 30-33, 39, 40, 50, 54, 72, 79, 207, 226-228, 230, 249
Projektionszentrum 30-33, 39, 226, 260, 277, 278, 285, 289
Projektive Erweiterung 38-39
projektive Skala 245
Punkte 50, 54, 89, 92, 155, 226
Pyramide 116, 117, 131, 166, 167, 207

Q

Quader 42, 44, 101, 111, 116, 220, 287
Querprofil 202, 203

R

Randverzerrung 256, 257
Raumfachwerk 121, 122, 123
Raumvorstellung 24, 25, 27, 28
Raumvorstellungsvermögen 14
Raumwahrnehmung 25, 223, 224
Regelfläche 126
reguläre Polyeder 117
regulärer Flächenpunkt 132
Rekonstruktion 13, 40, 46, 191, 241, 277-282
Rendering 137, 289-291
Rhombenkuboktaeder 124
Rissachse 43, 88, 91, 93, 94, 103-105, 108, 112, 113, 185, 200, 287
Rotation 128-130, 148
Rückenlicht 265-266

S

Schatten 29, 31, 33, 52, 56, 57, 137, 173-177, 179-190, 264-267, 269, 271
Schattenkonstruktionen 173
Scheitel 58, 62, 63, 67, 113, 141, 142, 145, 149, 150, 152, 153, 200, 252
Scheitelkrümmungskreis 67, 68, 69, 145, 150
Schiebfläche 125, 128, 143
schiefer Kreiskegel 147
Schnittaxonometrie 81-82
Schlagschatten 137, 175, 179-183, 189, 268
Schlagschattengrenze 268
Schnittaxonometrie 82
Schnittgerade 50, 54, 92, 100, 101, 144, 151, 162, 196, 197, 199, 203-206, 226, 285, 296
Schnittkurve 140, 144, 148, 155-159, 161, 162, 168, 169, 171, 172, 202, 206
Schnittlinie 196, 206
Schnittperspektive 269
Schraubung 125, 127, 130, 131
Sehkegel 256-258, 261, 285, 288
Sehkreis 257, 261
Sehpyramide 225, 258, 259
Sehvorgang 21
Sehwinkel 257-259
Seitenlicht 265, 266
Seitenriss 102-114, 142, 229, 230, 232, 233, 284
Semiotik 16
singulärer Flächenpunkt 132, 146
Sonne 33, 174-177, 264-266, 271
Sonnenbahn 177
Sonnenstand 176, 177, 178, 267
Sonnenstandsdiagramm 177
Spiegelebene 272-276
Spiegelung 53, 272, 273, 291
Spuren 92, 93, 163, 164, 210, 213
Spurendreieck 207-214, 220, 284
Spurpunkt 89, 93, 108, 207, 227, 231-233, 235, 238, 285, 287
Spurpunkt-Fluchtpunkt-Methode 231-233, 236, 285, 287
Standlinie 226, 231, 233, 238, 239, 279-282
Steigung 192-195, 197-199, 201
Steigungsdreieck 193
Strahlensatz 245, 294
Strahlfläche 125-127, 146
Strahlschraubfläche 127, 131, 132
Stutzkuppel 142
Symmetrie 117, 139

T

Tangente 57, 58, 60, 61, 63, 64, 68, 69, 132-136, 145, 158, 159, 162-164, 168, 184, 198, 250, 295
Tangentenebene 132, 134, 135, 136, 162, 163, 164, 167, 168, 197
Täuschung 22
Teilen 244
Teilungspunkt 245, 246, 247, 275, 276
Teilverhältnis 35, 36, 38, 223, 237, 244
teilverhältnistreue 35, 250
Teilverhältnistreu 58, 62, 78
Tetraeder 117, 118, 119, 120, 121, 122
Thaleskreis 58, 62, 65-66, 145, 210, 279-282, 295

Tiefenlinie 240, 241
topographische Projektion 191
Torse 168
Torus 129, 135
Trimetrie 211
trimetrische Projektion 73

U

Umriß 135-137, 139-143, 145, 146, 150, 152,
153, 159, 185, 186, 188, 200, 217, 261
Untersicht 80, 84, 209, 272

V

Vereinigung 156, 157
Verkürzungen 73, 74, 76, 78, 211
Verschwindungsebene 226, 249, 250, 252, 254
Verschwindungsgerade 249
Verschwindungspunkt 255, 257
Verzerrungsverhältnis 33, 34
Vogelperspektive 260, 261
Vogelprojektion 74
Volumenmodell 157

W

wahre Gestalt 87, 106, 109, 110, 166, 167, 169,
172, 237, 243
wahre Größe 35, 106, 107, 237, 278, 281
Wahrnehmung 21, 23, 290
Weltkoordinatensystem 105, 114
Wendeltreppe 131, 132
Winkel 74-76, 108, 109, 111, 118, 119, 121, 130,
141, 167, 168, 171, 176, 177, 179, 193,
204, 205, 208, 210, 211, 222, 243, 256-
258, 267, 279, 280, 282, 294, 296
Winkelsatz 280, 295
Würfel 12-15, 26, 77, 101, 103-105, 116-121,
142, 154, 173-174, 181, 189

Z

Zeichen 15- 17, 19-20
Zeichensystem 15, 19-20
Zeichnen 17
Zeichnungslegende 16
Zentralbeleuchtung 56, 175-176, 189, 190
Zentralprojektion 30-32, 34, 36-39, 46, 49, 53,
54, 70, 175, 189, 223, 226, 228, 235,
249, 250, 256, 277, 283
Zentralriß 30- 32, 37, 54-55
Zielpunkt 289, 290
zugeordnete Normalrisse 43, 79, 87, 96, 102-103,
106
zweischaliges Drehhyperboloid 130
Zweitafelprojektion 40, 43, 45, 47, 87-88, 191
Zylinder 126, 128, 134-138, 143-146, 154-164,
167-169, 173, 176, 183, 185, 187-188