Spektrum der Wissenschaft

KOMPAKT

TOPOLOGIE

Wie abstrakte Mathematik unsere Welt prägt

Quantenfeldtheorie
Verknotete Zustände erklären Naturgesetze

Fußball
Was Sport und Chemie gemeinsam haben

Neue Wunderstoffe
Hoffnungsträger für revolutionäre Technologien

UNSPLASH / GEORGE PAGAN III

EDITORIAL

Folgen Sie uns:

Manon Bischoff
E-Mail: m.bischoff@spektrum.de

Liebe Leserin, lieber Leser,

an der Universität hörte ich erstmals davon, dass abstrakte mathematische Konzepte unsere Naturgesetze beschreiben, wie etwa das Standardmodell der Teilchenphysik. Von da an war ich der Mathematik verfallen. Wie konnte es sein, dass so lebensferne Bereiche offenbar handfeste Anwendungen finden?
Je weiter ich im Studium vorankam, desto überraschender und vielfältiger wurden die Verbindungen zwischen beiden Disziplinen. Gerade die Topologie, die dazu dient, geometrische Figuren zu klassifizieren, lief mir immer über den Weg: sei es, um das Verhalten kleinster Teilchen auf subatomarer Ebene zu verstehen oder die besondere Leitfähigkeit neuartiger Materialien zu erklären. Lassen auch Sie sich von der faszinierenden Welt der Topologie in den Bann ziehen!

Eine spannende Lektüre wünscht

M. Bischoff

Erscheinungsdatum dieser Ausgabe: 18.02.2019

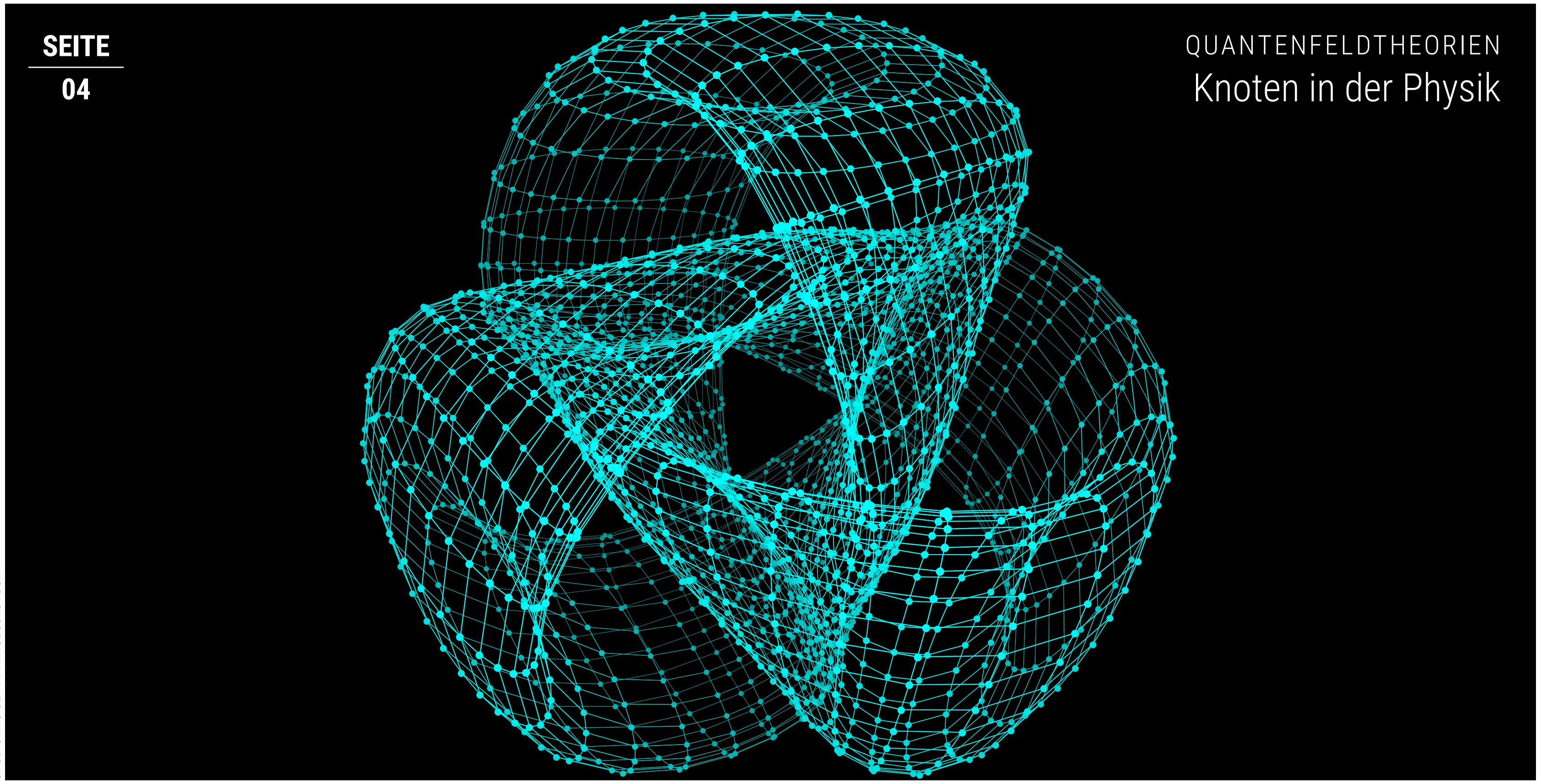
IMPRESSUM

Chefredakteure: Prof. Dr. Carsten Könneker (v.i.S.d.P.)
Redaktionsleiter: Dr. Daniel Lingenhöhl
Art Director Digital: Marc Grove
Layout: Oliver Gabriel, Marina Männle
Schlussredaktion: Christina Meyberg (Ltg.), Sigrid Spies, Katharina Werle
Bildredaktion: Alice Krüßmann (Ltg.), Anke Lingg, Gabriela Rabe
Produktmanagement Digital: Antje Findeklee, Dr. Michaela Maya-Mrschtik
Verlag: Spektrum der Wissenschaft Verlagsgesellschaft mbH, Tiergartenstr. 15–17, 69121 Heidelberg, Tel. 06221 9126-600, Fax 06221 9126-751; Amtsgericht Mannheim, HRB 338114, UStd-Id-Nr. DE229038528
Geschäftsleitung: Markus Bossle
Marketing und Vertrieb: Annette Baumbusch (Ltg.), Michaela Knappe (Digital)
Leser- und Bestellservice: Helga Emmerich, Sabine Häusser, Ilona Keith, Tel. 06221 9126-743, E-Mail: service@spektrum.de

Die Spektrum der Wissenschaft Verlagsgesellschaft mbH ist Kooperationspartner der Nationales Institut für Wissenschaftskommunikation gGmbH (NaWik).

Bezugspreis: Einzelausgabe € 4,99 inkl. Umsatzsteuer
Anzeigen: Wenn Sie an Anzeigen in unseren Digitalpublikationen interessiert sind, schreiben Sie bitte eine E-Mail an service@spektrum.de.

INHALT



STUDIOM1 / GETTY IMAGES / ISTOCK

LASSEDESIGNEN / STOCK.ADOBE.COM

SHULZ / GETTY IMAGES / ISTOCK

AGSANDREW / STOCK.ADOBE.COM

QUANTENFELDTHEORIEN

KNOTEN in der Physik

von José Manuel Fernández de Labastida

ROST-9D / GETTY IMAGES / ISTOCK

In den 1980er Jahren gelang ein ungewöhnlicher Brückenschlag zwischen den fundamentalsten Wissenschaften: Aus dem Zusammenspiel von physikalischer Intuition und mathematischer Konsequenz entstanden die topologischen Quantenfeldtheorien.

Sind Mathematik und Physik von Grund auf verschieden? Die Physik beobachtet, analysiert und sucht Regeln hinter den Naturereignissen. Die Mathematik dagegen errichtet in ihrer eigenen Sprache Gedankengebäude und erforscht deren innere Struktur. Was in der Welt geschieht, scheint sie weniger zu interessieren. Doch der Unterschied war nicht immer so groß – im Gegenteil.

Seit Galileo Galilei (1564–1642) sprechen die Physiker die Sprache der Mathematik, und vom 17. bis weit ins 19. Jahrhundert hinein entwickelten sich beide Wissenschaften Hand in Hand. Berühmte Naturwissenschaftler jener Zeit waren häufig Mathematiker und Physiker zugleich. Zum Beispiel entwickelte Isaac Newton (1643–1727) die moderne Analysis, um die Bewegung der Körper in Gesetze fassen zu können. Erst in der Mitte des 19. Jahrhunderts folgten die Mathematiker – zumindest die tonangebenden – bedingungslos ihrer Liebe zur reinen Abstraktion, und die Wege der beiden Wissenschaften trennten sich.

Im ersten Drittel des 20. Jahrhunderts revolutionierten zwei Ideen die Physik: die Relativitätstheorie und die Quantenmechanik. Um den mathematischen Rahmen mussten sich die Physiker in beiden Fällen nicht sorgen, denn die Mathematiker hielten ihn schon bereit. Die Relativitätstheorie stützte sich auf die moderne Geometrie und die Tensorrechnung, während die Quantenmechanik in der Sprache der Hilbert-Räume formuliert werden konnte. So bereitete die abstrakte Mathematik den Boden für physikalische Erkenntnisse, die oft erst Jahre später im Experiment bestätigt wurden.

Doch schon in den 1940er Jahren, als in der Physik die ersten Quantenfeldtheorien aufkamen, bahnte sich eine umgekehrte Entwicklung an. Aus ihr gingen in den 1980er Jahren die topologischen Quantenfeldtheorien hervor. Diesmal ließen sich die Mathematiker von der Vorstellungskraft der Physiker anregen und kamen ein Stück voran.

Weitere Felder eines fruchtbaren Zusammenspiels zwischen Mathematik und Physik sind Eichtheorien und die Knotentheorie. Wie sich herausstellen wird, sind diese Konzepte auch untereinander eng verbunden. Unter den Teilgebieten der Mathematik profitierte am meisten eines, das

---

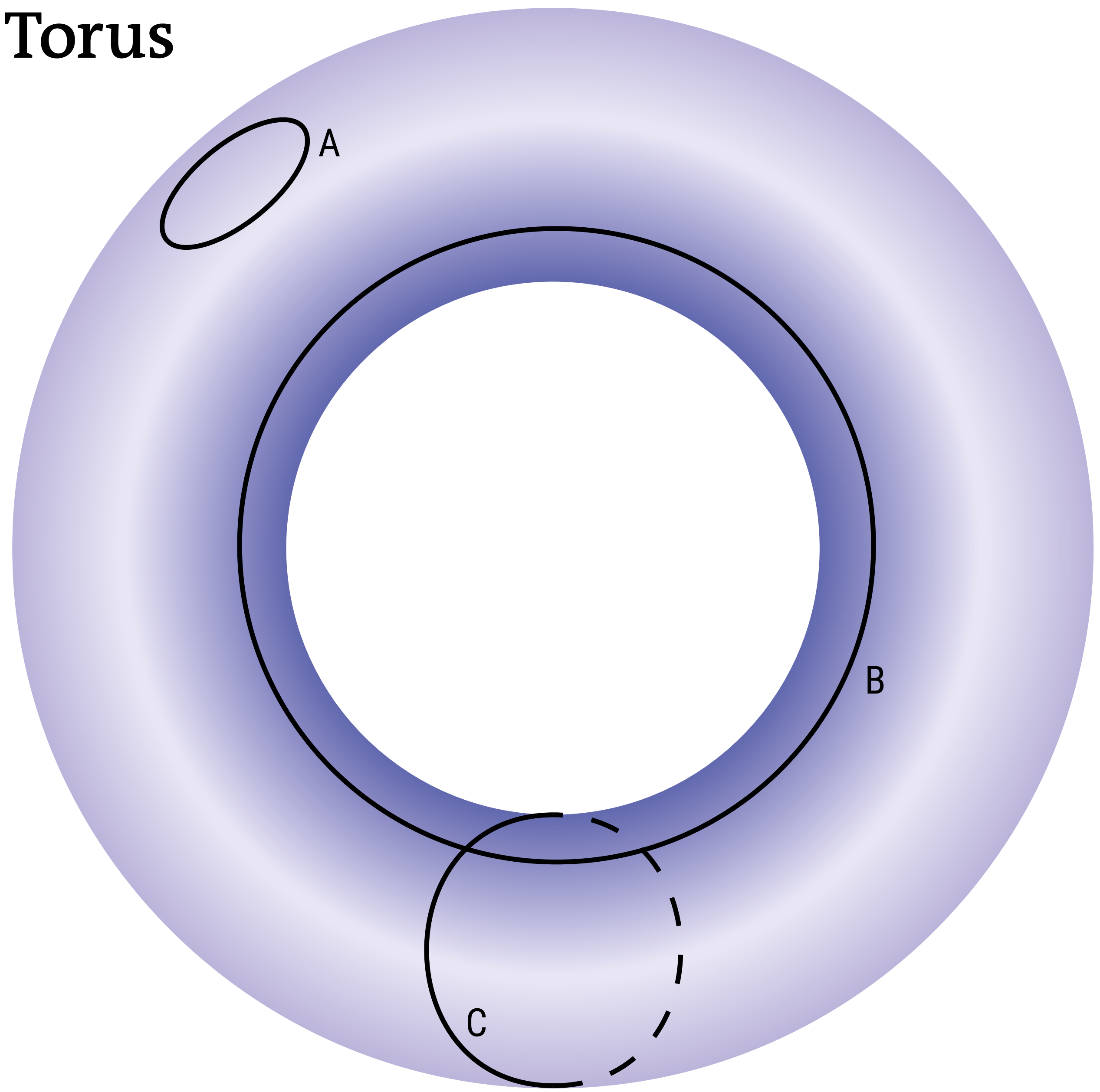
Jose Manuel Fernandez de Labastida ist Professor für Theoretische Physik an der Universität von Santiago de Compostela (Spanien). Nach seiner Promotion an der Staatsuniversität von New York in Stony Brook im Jahre 1985 forschte er am Institute for Advanced Study in Princeton und am Europäischen Kernforschungszentrum CERN in Genf. Sein Interesse gilt Aspekten der Superstring- und der topologischen Quantenfeldtheorien im Überschneidungsgebiet zwischen Mathematik und Physik.

auf den ersten Blick nichts mit Physik zu tun hat: die Topologie.

Topologie

In diesem Zweig der Mathematik geht es – unter anderem – um globale Eigenschaften von Oberflächen, Körpern und anderen Objekten. Vergleichen wir zum Beispiel die Oberflächen eines Wasserballs und eines Schwimmrings. Ist der Ball weich, kann er in die Gestalt einer Birne verformt, zu einem Kissen zusammengedrückt oder wie ein Wurm in die Länge gezogen werden, ohne dass seine Haut verletzt würde. Nur in die Form des Schwimmrings lässt er sich nicht bringen. Denn dazu müsste man die Enden des Wurmes aufschneiden und neu miteinander verbinden oder in die Mitte des Kissens ein Loch stechen. Mathematisch gesprochen: Eine Kugeloberfläche (wie die des Wasserballs) kann nicht stetig zu einer Torusoberfläche (wie der des Schwimmrings) deformiert werden. Im Allgemeinen betrachtet die Topologie Objekte als gleich und nennt sie äquivalent, wenn sie durch stetige Deformierungen, das heißt ohne Schneiden oder Kleben, ineinander überführbar sind. Zum Beispiel sind die Oberflächen des Balls, des Kissens, des

Der Torus



Die Topologie untersucht globale Eigenschaften von Mengen, die unter stetigen Deformierungen dieser Mengen erhalten bleiben. Zum Beispiel unterscheidet sich der Torus von der Kugel durch die Eigenschaft, dass auf seiner Oberfläche Kurven existieren, die sich nicht auf einen Punkt zusammenziehen lassen. Im Bild sind drei Typen von Kurven dargestellt, die auf dem Torus vorkommen: Anders als die Kurve A können B und C nicht auf einen Punkt zusammenschnurren. Das bleibt auch so, wenn man den Torus zusammendrückt, in die Länge zieht oder auf andere Weise deformiert, ohne seine Haut zu verletzen.

J. M. FERNÁNDEZ DE LABASTIDA

Wurmes und der Birne topologisch gleich. Dagegen ist die Oberfläche des Schwimmrings von diesen verschieden.

Woran erkennt man, ob sich zwei Objekte topologisch unterscheiden? Man sucht eine Eigenschaft, die sich unter stetigen Deformierungen der Objekte nicht ändert: eine topologische Invariante. Objekte, die sich in ihr nicht gleichen, können auch nicht äquivalent sein.

Für die Kugeloberfläche haben die Mathematiker eine topologische Invariante gefunden: Jede geschlossene Kurve, die wie eine Schlinge aus Gummifaden auf der Oberfläche liegt, lässt sich auf einen einzigen Punkt zusammenziehen. Dasselbe gilt für Kurven auf dem Kissen, dem Wurm, der Birne und jeder anderen stetigen Deformation der Kugeloberfläche. Die Eigenschaft hat globalen Charakter, denn sie macht eine generelle Aussage über die geschlossenen Kurven auf der Kugel, unabhängig davon, wie und wo sie im Einzelnen verlaufen.

Auf dem Torus jedoch kann eine um das Loch in der Mitte geschlungene Kurve ebenso wenig zu einem Punkt schrumpfen wie eine, die sich um seinen Körper windet. Oberflächen oder allgemeinere Objekte indirekt über geschlossene Kurven zu charakterisieren, ist ein Grundprinzip der Topologie, das uns später wieder begegnen wird.

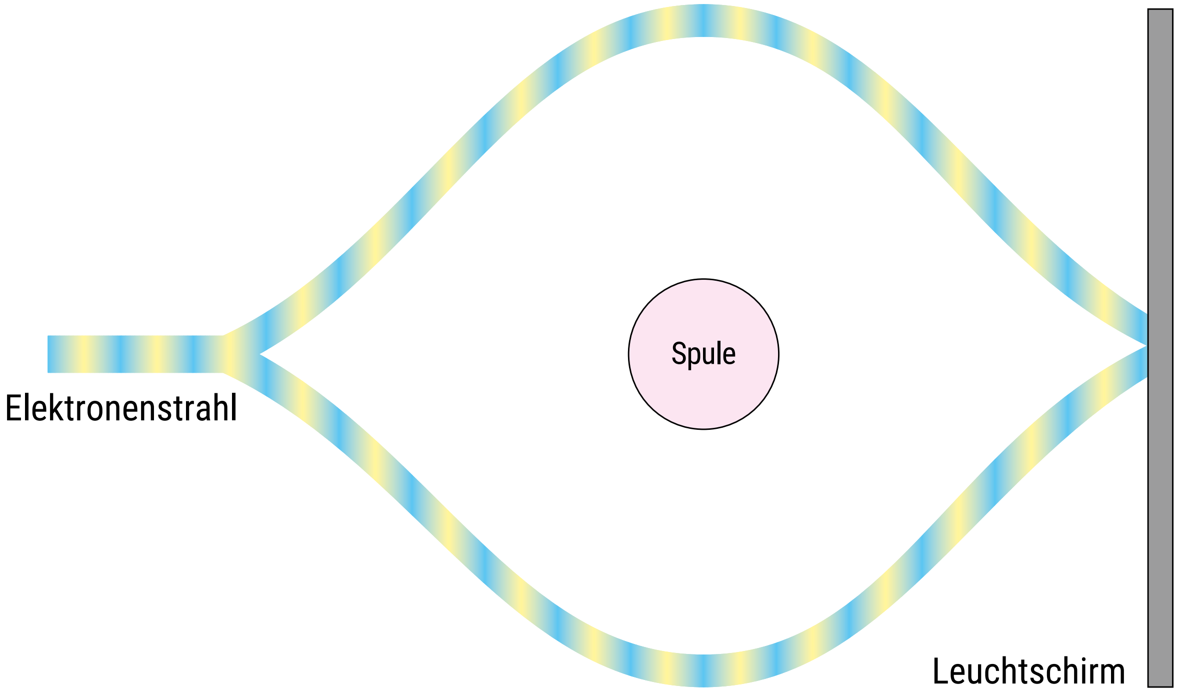
Topologie und Physik

Warum interessieren sich Physiker für diese mathematische Disziplin? Die Physik ist in einem vierdimensionalen Raum zu Hause, denn sie benötigt drei Dimensionen für den Ort und eine weitere für die Zeit. Ihre Gesetze beschreiben normalerweise lokale Ereignisse, wie zum Beispiel den Stoß zweier Körper an einem bestimmten Ort zu einer bestimmten Zeit. Also sollte man erwarten, dass in der Physik nur die lokalen, nicht aber die globalen Eigenschaften des Raumes eine Rolle spielen. Physik und Topologie hätten dann wenig gemeinsam, denn die Letztere untersucht ja gerade die globalen Eigenschaften des Raumes.

Doch 1959 sagten die Physiker Yakir Aharonov und David Bohm (1917–1992) einen Effekt voraus, der zeigt, dass globale Eigenschaften des Raumes ein physikalisches System messbar beeinflussen können. Er trägt seither ihren Namen; ein Jahr später hat Robert G. Chambers von der University of Bristol ihn im Experiment beobachtet.

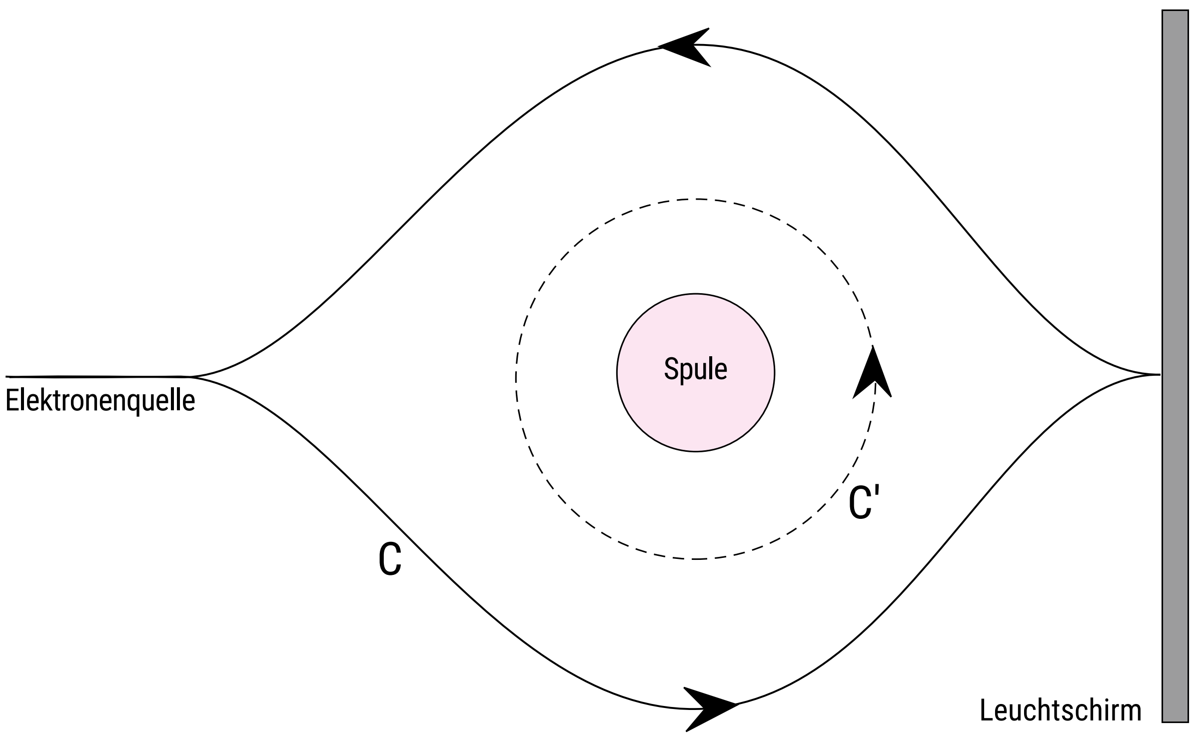
Die eine Hälfte eines geteilten Elektronenstrahls wird links, die andere rechts an einer sehr langen Spule vorbeigeschickt, die senkrecht auf der Ebene der Teilchenwege steht. Hinter der Spule werden die Teilstrahlen wieder zusammengeführt und auf einem Leuchtschirm überlagert. Es entsteht ein Interferenzmuster aus hellen und dunklen Streifen: Nur dort, wo viele Elektronen eintreffen, leuchtet der Schirm hell. Die bloße Anwesenheit der Spule hat keinen Einfluss auf das Muster. Schickt man aber einen Strom durch die Spule, so verschieben sich die Streifen auf dem Schirm in Abhängigkeit von der Stromstärke. Das ist der Aharonov-Bohm-Effekt.

Die klassische Physik kann diesen Effekt nicht erklären, denn der Strom erzeugt nur im Inneren der Spule ein Magnetfeld. Im Außenraum, wo die Elektronen fliegen, herrscht weder ein elektrisches noch ein magnetisches Feld, auch wenn Strom fließt. (Genau genommen müsste dafür die Spule unendlich lang sein. Im Experiment wird das Feld nach außen durch eine supraleitende Hülle komplett abgeschirmt.) Glaubt man den nach ihrem Entdecker James C. Maxwell (1831–1879) benannten Grundgleichungen des klassischen Elektromagnetismus, so ist die Kraft auf ein geladenes



Das Experiment zur Beobachtung des Aharonov-Bohm-Effekts

Die beiden Hälften eines geteilten Elektronenstrahls werden links und rechts an einer Spule vorbeigeführt, die senkrecht zu der von den Elektronenbahnen aufgespannten Ebene (der Bildebene) steht. Auf dem Leuchtschirm hinter der Spule erzeugen die Elektronen ein Interferenzmuster, das sich verändert, sobald in der Spule ein Strom fließt. Die Geräte, welche die Elektronen auf diese gekrümmten Bahnen zwingen, sind für den Effekt unwesentlich und deshalb nicht eingezeichnet.



Aharonov-Bohm-Effekt

Geht man entlang der unteren Elektronenbahn von der Quelle zum Schirm und entlang der oberen wieder zurück, entsteht eine geschlossene Kurve *C* um die Spule. Das Wegintegral des magnetischen Potenzials entlang dieser Kurve um die Spule ist gleich der Differenz der Wegintegrale entlang der beiden Elektronenbahnen von der Quelle zum Schirm, denn das Vorzeichen des Integrals entlang der oberen Bahn kehrt sich durch den Richtungswechsel um. Das Wegintegral ändert sich nicht unter der Deformation von *C* (beispielsweise zu einem Kreis *C*'), welche die Spule nicht trifft Sobald ein Strom fließt, ist das Wegintegral entlang einer Kurve wie *C* ungleich null; also müssen die beiden Wegintegrale entlang der unteren und der oberen Bahn von der Quelle zum Schirm verschieden sein. Im Allgemeinen sind damit auch die Phasenfaktoren verschieden, mit denen die Wellenfunktionen der beiden Elektronenstrahlen multipliziert werden.

J. M. FERNÁNDEZ DE LABASTIDA

Teilchen der Stärke des Feldes an dieser Stelle proportional, insbesondere gleich null, wenn das Feld null ist. Im feldfreien Raum dürften die Elektronen vom Strom in der Spule eigentlich nichts spüren.

Der Schlüssel zur Erklärung des unerwarteten Effekts ist das magnetische Potenzial. Im Gegensatz zur klassischen Physik, wo es als reine Rechengröße dient, kann es in der Quantenmechanik messbare Auswirkungen haben. Die Elektronen reagieren auf den Strom in der Spule, weil dieser das magnetische Potenzial im Außenraum verändert.

Das magnetische Potenzial

Das Magnetfeld ist ein Vektorfeld in Raum und Zeit: An jedem Raumpunkt sitzt ein Vektor, ein Pfeil, der wie eine Kompassnadel in die Richtung der Feldlinien zeigt. Seine Länge gibt die Feldstärke an und kann ebenso wie seine Richtung mit der Zeit variieren. Auch das elektrische Feld ist ein solches Vektorfeld. Die Maxwell-Gleichungen beschreiben, wie sich die beiden Felder mit der Zeit verändern.

In der klassischen Physik pflegt man beide Felder durch so genannte Potenziale auszudrücken. Das sind zunächst künstlich eingeführte Hilfsgrößen; mit ihnen lassen sich die Maxwell-Gleichungen viel übersichtlicher darstellen als mit den Feldern selbst. Das magnetische Potenzial ist wieder ein Vektorfeld (mit Länge und Richtung in jedem Raumpunkt), das elektrische Potenzial ein skalares (richtungsloses) Feld. Aus der Kenntnis beider Potenziale kann man jederzeit auf die Felder zurückschließen.

Es gibt einen weiteren guten Grund für ihre Einführung: die Eichfreiheit. Die Potenziale sind nicht eindeutig bestimmt, das heißt, zu ein und demselben Feld gibt es verschiedene Potenziale. Die Entscheidung für ein bestimmtes Paar von Potenzialen nennt man Eichung, den Wechsel zu anderen Potenzialen, die dieselben Felder beschreiben, Eichtransformation. Die Felder ändern sich also unter dieser Operation nicht – sie sind eichinvariant. Durch geschickte Eichung vereinfachen sich viele Rechnungen.

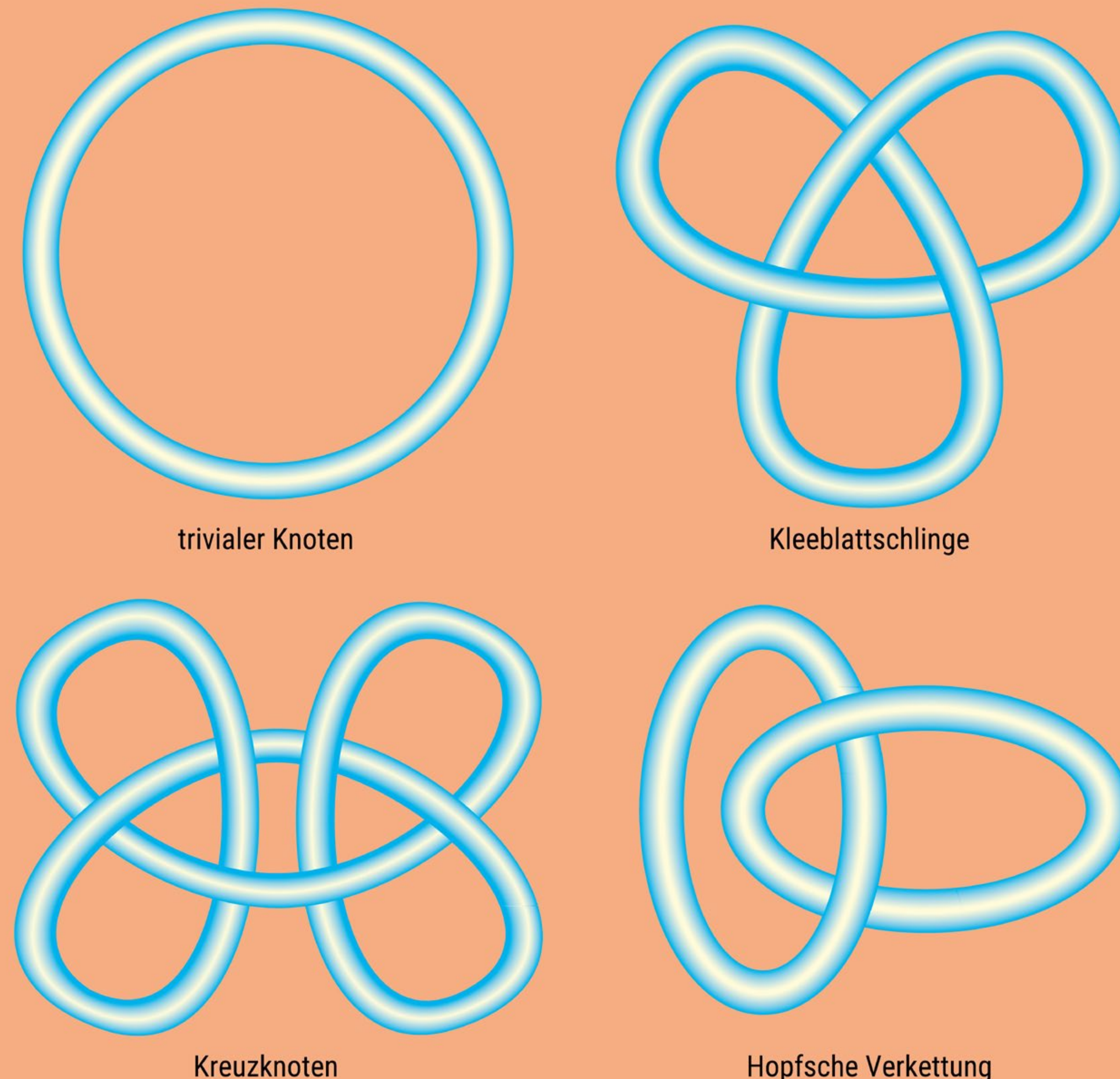
Wichtig für den Aharonov-Bohm-Effekt ist nicht das magnetische Potenzial an sich, sondern sein Wegintegral entlang geschlossener Kurven. Was ist das? Betrachten wir zum Beispiel einen Kreis um die Spule. Wie an jedem Raumpunkt sitzt auch an jedem Punkt der Kreislinie ein Vektor des magnetischen Potenzials. Er lässt sich zerlegen in eine Komponente tangential zum Kreis und eine Komponente senkrecht dazu. Man bestimmt das Wegintegral des magnetischen Potenzials entlang des Kreises, indem man auf der Kreislinie um die Spule herumgeht und dabei die Längen aller Tangentialkomponenten gewissermaßen aufaddiert. Korrekt ausgedrückt: Man integriert über die Tangentialkomponente des Potenzials entlang der Kurve.

Welche Werte kann das Integral annehmen? Aus den Maxwell-Gleichungen ergibt sich, dass das Wegintegral des magnetischen Potenzials entlang einer beliebigen geschlossenen Kurve proportional ist zum eingeschlossenen magnetischen Fluss, das heißt anschaulich zur Zahl der umrundeten Magnetfeldlinien. Fließt in der Spule kein Strom, sind die Felder überall gleich null und das Wegintegral entlang jeder geschlossenen Kurve auch, denn es gibt keinen magnetischen Fluss, den eine Kurve einschließen könnte.

Dasselbe lässt sich auch mathematisch zeigen. In der Situation ohne Strom unterscheidet sich das magnetische Potenzial nur durch eine Eichtransformation vom

KNOTEN

Ein Knoten ist eine geschlossene Kurve im dreidimensionalen Raum, die sich selbst nirgends schneidet. Der triviale Knoten, das Kleeblatt und der Kreuzknoten sind nicht äquivalent, denn keinen von ihnen kann man in einen der anderen überführen, ohne ihn aufzuschneiden. Aus mehreren Knoten entsteht eine Verkettung. Unter den zweikomponentigen ist die hopfsche Verkettung die einfachste.



J. M. FERNÁNDEZ DE LABASTIDA

Nullpotenzial und kann als Ableitung einer Funktion geschrieben werden (genauer: als deren Gradient). Das Wegintegral des Potenzials entlang einer beliebigen Kurve berechnet sich als die Differenz der Werte dieser Funktion am End- und am Anfangspunkt der Kurve. Weil Anfang und Ende bei geschlossenen Kurven zusammenfallen, verschwindet das Wegintegral entlang solcher Kurven automatisch.

Schaltet man den Strom jedoch ein, ändert sich die physikalische Ausgangslage: Im Inneren der Spule wirkt ein Magnetfeld, dessen Feldlinien parallel zur Spulenachse verlaufen. Jetzt ist das Wegintegral des magnetischen Potenzials entlang des Kreises um die Spule von null verschieden, weil der Kreis das ganze Bündel von Feldlinien im Inneren der Spule einschließt. Das Gleiche gilt für jede andere geschlossene Kurve um die Spule. Nur wenn die Kurve ganz im feldfreien Außenraum verläuft, ohne die Spule zu umrunden, verschwindet das Wegintegral des magnetischen Potenzials nach wie vor.

Mathematisch betrachtet, stellt sich die Situation so dar: Es gibt bei eingeschaltetem Strom keine Möglichkeit mehr, ein magnetisches Potenzial im ganzen Raum zu definieren. Irgendwo – zum Beispiel in der Spulenachse – nimmt es unvermeidlich unendliche Werte an. Dadurch ändert sich die Topologie des Gebietes, in dem es ein Potenzial gibt: Das Einschalten des Stroms reißt gewissermaßen ein unendlich langes, zylindrisches Loch in den Raum. Eine geschlossene Kurve um die Spule lässt sich nicht mehr auf einen Punkt zusammenziehen.

In dieser Situation lässt sich das magnetische Potenzial nicht mehr so einfach als Ableitung einer Funktion darstellen. Teilt man jedoch den Außenraum in zwei Hälften, eine rechts, eine links von der Spule, so ist jede Hälfte für sich ein Gebiet ohne Loch, auf dem das Potenzial als Ableitung einer Funktion geschrieben werden kann. Nur an den Grenzen ist Vorsicht geboten. Das Wegintegral des Potenzials entlang eines Kreises um die Spule ergibt sich jetzt als Summe der beiden Integrale entlang der nacheinander durchlaufenen Kreishälften. In der Tat ist es ungleich null und proportional zum eingekreisten magnetischen Fluss.

Verallgemeinerungen des Potenzials auf Räume mit Loch kannten die Mathematiker schon vor Aharonov und Bohm. Die Theorie der Faserbündel untersucht als Spezialfall elektromagnetische Potenziale über beliebigen topologischen Räumen.

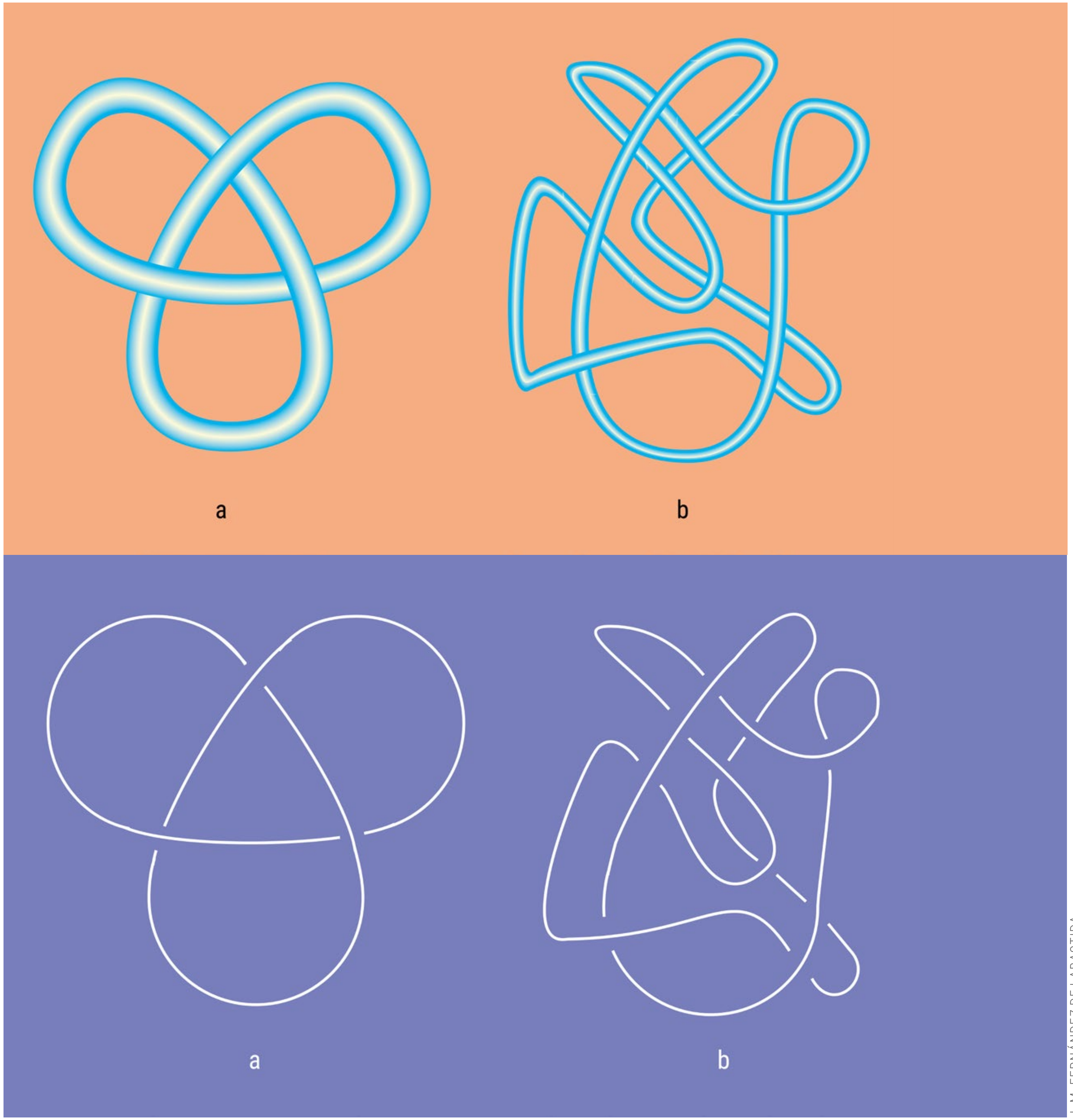
Erklärung des Aharonov-Bohm-Effektes

Was haben die Interferenzstreifen mit diesem Wegintegral zu tun? In der Quantenmechanik werden Elektronen als Wellen aufgefasst. Eine Funktion ordnet jedem Raumpunkt eine komplexe (aus zwei reellen Zahlen zusammengesetzte) Zahl zu. Sie heißt Wellenfunktion, denn ihr Wert schwankt periodisch in Raum und Zeit wie die Höhe einer Wasserwelle. Das Quadrat ihres Betrages an einem Raumpunkt gibt die Wahrscheinlichkeit an, das Elektron dort zu finden.

Es ist jedoch physikalisch sinnlos zu sagen, die Welle befinde sich – an einem gewissen Ort und zu einem gewissen Zeitpunkt – im Maximum, im Minimum oder sonst einer Phase. Denn wenn die Phase der Welle überall im Raum gleich verschoben wird, läuft das auf dasselbe hinaus, wie wenn man die gesamte Wellenfunktion mit einem Phasenfaktor multipliziert, das heißt einer komplexen Zahl vom Betrag 1. Dabei bleiben das Betragsquadrat der Wellenfunktion und damit die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons unverändert: Globale Phasen erzeugen in der Quantenmechanik keinen beobachtbaren Effekt.

Werden aber, wie auf dem Leuchtschirm im Experiment, zwei Elektronenstrahlen überlagert, so addieren sich ihre Wellenfunktionen. Multipliziert man beide vor der Addition mit verschiedenen Phasenfaktoren, wirkt sich der Phasenunterschied entscheidend auf das Ergebnis aus: Das Betragsquadrat der Summe, das heißt die Auftreffwahrscheinlichkeit auf dem Schirm, ändert sich. Relative Phasen zeigen also durchaus Wirkung: Sie sind verantwortlich für Interferenzeffekte. Treffen an einer Stelle des Schirms viele Elektronen ein, weil die Auftreffwahrscheinlichkeit hoch ist, leuchtet er hell; sind es wenige, bleibt er dunkel.

Das Magnetfeld im Inneren der Spule muss also einen Phasenunterschied verur-



ÄQUIVALENTE KNOTEN

Der Knoten b kann ohne Zerreißen in die Kleeblattschlinge a überführt werden (oben). Die beiden Knoten sind also äquivalent. Unten die zweidimensionalen Diagramme der Knoten.

sachen zwischen den Elektronen, die links, und denen, die rechts an der Spule vorüberfliegen. Nach der Quantentheorie wird die Wellenfunktion eines Elektrons dadurch, dass es einen Weg zurücklegt – zum Beispiel an der Spule vorbei von der Quelle zum Schirm –, mit einem Phasenfaktor multipliziert. Dieser ist durch das Integral des magnetischen Potenzials entlang des Elektronenwegs bestimmt. Wenn ein Strom durch die Spule fließt, erwerben die Elektronen entlang des linken und des rechten Wegs unterschiedliche Phasenfaktoren. Das liegt daran, dass das Wegintegral des magnetischen Potenzials entlang geschlossener Kurven um die Spule in diesem Fall nicht verschwindet. Abhängig von diesem Phasenunterschied, also letztlich von der Stromstärke in der Spule, verschieben sich die Interferenzstreifen auf dem Schirm – genau wie im Experiment beobachtet.

Was bedeutet der Versuch von Aharonov und Bohm für die Beziehung zwischen Physik und Topologie? Zum einen zeigt er, dass sich topologische Eigenschaften des Raumes in der Quantenmechanik messbar auswirken können. Indem das Magnetfeld im Inneren der Spule ein Loch in den Raum reißt, verändert es dessen Topologie – in beobachtbarer Weise. Zum anderen ist der Effekt ein Beleg dafür, dass es sinnvoll sein kann, physikalische Konzepte auf topologisch kompliziertere Räume auszudehnen. In der so verallgemeinerten Theorie ist das elektromagnetische Potenzial ein so genannter Zusammenhang (connection) eines Hauptfaserbündels.

Eichtheorien

Außer der klassischen und der quantenmechanischen Formulierung des Elektromagnetismus gibt es weitere Theorien, in denen die Felder invariant sind unter Eichtransformationen der zugehörigen Potenziale. Zu diesen so genannten Eichtheorien gehört auch das Standardmodell der Physik. Es verallgemeinert die quantenmechanische Formulierung des Elektromagnetismus und umfasst drei der vier bekannten Wechselwirkungen: die starke, die schwache und die elektromagnetische. Eine Transformation der Potenziale kann in der einen Theorie eine Eichtransformation sein, in der anderen dagegen nicht, weil sie dort die Felder verändert. Ein geeignetes Mittel, die Vielfalt dieser Transformationen übersichtlich zu machen, ist die Gruppentheorie.

Die Eichtransformationen bilden eine Gruppe im mathematischen Sinn. Das heißt, zwei nacheinander ausgeführte Transformationen können zu einer einzigen zusammengefasst werden, jede von ihnen lässt sich durch eine umgekehrte rückgängig machen, und Nichtstun ist auch eine Eichtransformation – das neutrale Element der Gruppe. Sie heißt Eichgruppe, und ihre innere Struktur sagt viel aus über die Eichtheorie, zu der sie gehört.

Die klassische Theorie der vierten Wechselwirkung, der Gravitation, zählt ebenfalls zu den Eichtheorien. Leider entzieht sie sich bis heute hartnäckig einer quantenmechanischen Beschreibung und sorgt damit für eines der größten offenen Probleme der theoretischen Physik. Die Versuche, es zu lösen, konzentrieren sich auf zwei Schwerpunkte: die Verfeinerung quantenfeldtheoretischer Methoden einerseits, denn die Schwierigkeit besteht ja gerade in der Quantisierung des Gravitationsfeldes, und die Weiterentwicklung der String- und Superstringtheorien andererseits. Im Erfolgsfall erhofft man sich von den Stringtheorien und ihren Nachfolgern, wie beispielsweise der M-Theorie, eine umfassende Beschreibung aller vier Grundkräfte der

Natur (theory of everything). Vielleicht besteht die Schwierigkeit aber darin, überhaupt geeignete mathematische Strukturen zu finden.

Quantenfeldtheorien

Eine neue Verbindung zwischen Physik und Mathematik entdeckte 1982 Edward Witten vom Institute for Advanced Study in Princeton (New Jersey). Harold Morse (1892–1977) hatte aus dem Studium gewisser Funktionen Erkenntnisse über die topologischen Eigenschaften der Mengen gewonnen, auf denen die Funktionen definiert sind. Witten verallgemeinerte Morses Ideen mit Hilfe der zweidimensionalen supersymmetrischen Quantenfeldtheorien. Das sind Feldtheorien – grob gesagt solche, die Teilchen aus Feldern erklären – mit besonders symmetrischer Struktur: Anders als in der Wirklichkeit haben in diesen Theorien alle Elementarteilchen dieselbe Masse, und es gibt gleich viele Sorten bosonischer und fermionischer Teilchen. (Bekannte Bosonen sind zum Beispiel die Teilchen des Lichts, die masselosen Photonen; zu den Fermionen gehören die Elektronen und die schwereren Protonen.) Die allgemeinsten unter diesen Quantenfeldtheorien sind die so genannten Sigma-Modelle, in denen der zweidimensionale Raum mit einem anderen Raum beliebig hoher Dimension in Beziehung gesetzt wird.

Witten stieß in einer solchen Quantenfeldtheorie auf physikalische Größen, die sich unter stetigen Deformierungen des zu Grunde liegenden Raumes nicht ändern, auf topologische Invarianten also. Allerdings stützt sich der Nachweis dieser Invarianz auf einen Begriff (das Funktionalintegral), der mathematisch nicht immer sauber definiert ist. Deshalb kann noch nicht von einem Beweis im strengen Sinn die Rede sein. In Wittens Weiterentwicklung der Theorie von Morse verwandeln sich Ungleichungen in Gleichungen. Dadurch werden ihre Resultate aussagekräftiger. Allerdings erfordert die verfeinerte Theorie aufwändigere Rechnungen als die ursprüngliche.

Spätere Arbeiten lösten die Theorie völlig aus dem physikalischen Rahmen der Quantenfeldtheorien und gaben ihr eine eigene, mathematisch strenge Grundlage. Im Jahr 1988 gelang es Witten, den Zusammenhang zwischen der Topologie und den wesentlichen Bausteinen der supersymmetrischen Quantenfeldtheorien aufzuklären. So entstanden die topologischen

Die Quantenfeldtheorie liefert eine topologische Größe: eine Invariante für Knoten

Quantenfeldtheorien. Für diese Leistung erhielt der Physiker Witten 1990 die für mathematische Errungenschaften ausgesetzte Fields-Medaille.

Neben den zweidimensionalen Räumen wurden in den achtziger Jahren auch die topologischen Strukturen drei- und vierdimensionaler Räume erforscht. Die beiden berühmtesten Beispiele sind die Formulierung der Invarianten für vierdimensionale Räume durch Simon Donaldson und die Entdeckung der Jones-Polynome als Invarianten für drei Dimensionen. Die Sigma-Modelle hatten zum Verständnis der Topologie zweidimensionaler Räume beigetragen. Auf ähnliche Weise eröffnete nun eine andere Quantenfeldheorie neue Wege für das Studium dreidimensionaler Räume: die Eichtheorie von Shiing-Shen Chern (1911–2004) und James Simons, der sich inzwischen hauptsächlich mit Finanzmathematik beschäftigt. Die physikalischen Größen der Chern-Simons-Theorie sind ebenfalls topologische Invarianten; sie beziehen sich auf Knoten.

Knoten und Knoteninvarianten

Man nehme ein Seil, verschlinge es beliebig kunstvoll und verbinde schließlich seine Enden fest miteinander. Vernachlässigt man den endlichen Durchmesser des Seils, so ist das Resultat eine geschlossene Kurve im dreidimensionalen Raum, die sich nirgends selbst durchdringt – ein Knoten. Mehrere ineinander verschlungene Knoten zusammen bilden eine Verkettung. Ein einzelner Knoten ist der Spezialfall einer Verkettung mit nur einer Komponente. Zum Beispiel sind der triviale Knoten, das Kleeblatt und der Kreuzknoten einkomponentig, während sich die hopfsche Verkettung aus zwei Komponenten zusammensetzt.

Der Begriff des Knotens macht nur in drei Dimensionen Sinn. Wird ein Knoten von der Seite angeleuchtet und auf einen Schirm projiziert, so schneiden sich in seinem zweidimensionalen Schattenbild Kurvenstücke, die räumlich hintereinanderliegen. Der wirkliche Knoten im dreidimensionalen Raum hat keine Schnittpunkte. In vier Dimensionen kann sogar jeder Knoten zum trivialen Knoten aufgelöst werden.

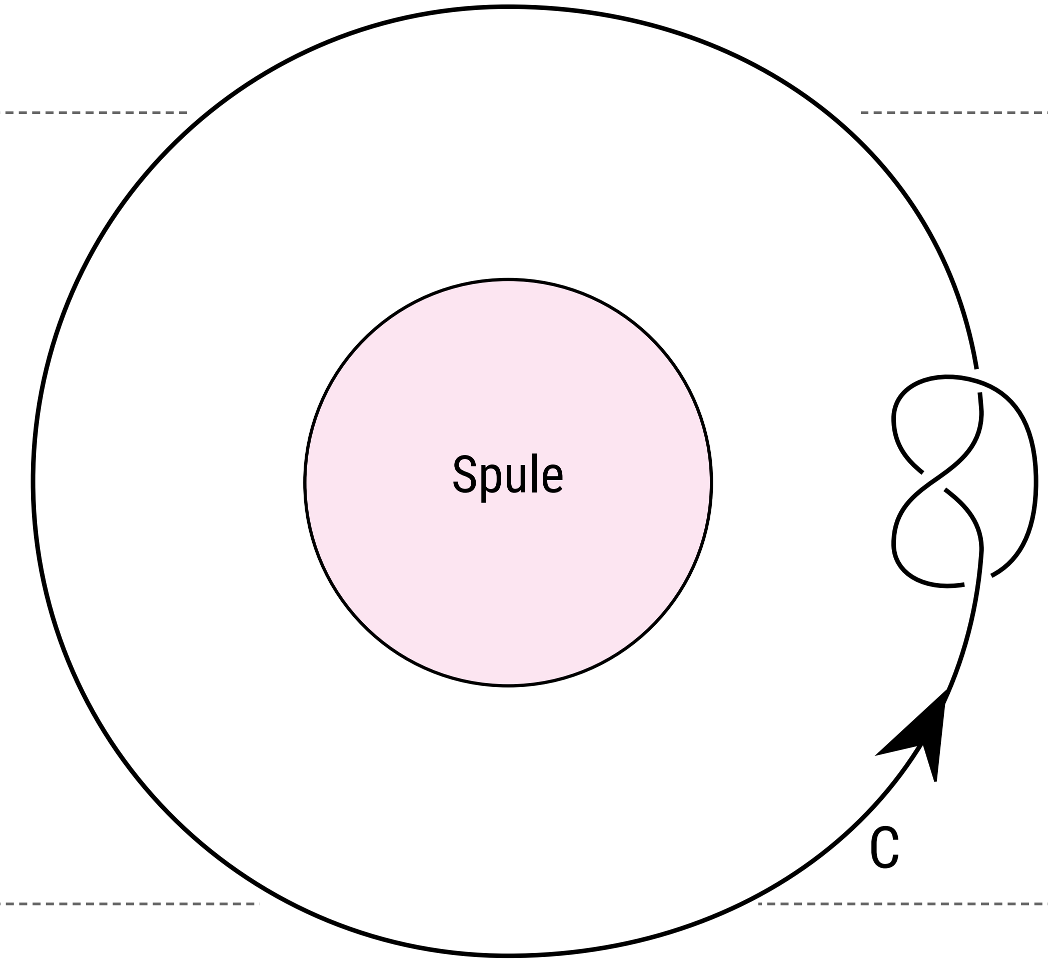
Schon im 19. Jahrhundert interessierten sich außer den Seefahrern auch Wissenschaftler für das verschlungene Thema. So versuchte William Thomson (1824–1907), besser bekannt als Lord Kelvin, das Periodensystem der Elemente zu erklären, indem er jedes Atom als Knoten im hypothetischen Äther auffasste – und zwar je nach Element von verschiedener Art. Dazu musste sich Thomson überlegen, wann er zwei Knoten als gleich und wann als verschieden ansehen wollte. Obwohl seine Idee bald verworfen wurde, bildeten seine Arbeiten den Ausgangspunkt der Knotentheorie, denn sie waren der erste Versuch einer Klassifizierung.

Fasziniert von Lord Kelvins Überlegungen, veröffentlichte Peter G. Tait (1831–1901) im Jahr 1900 ein Periodensystem der Elemente zusammen mit einer Tabelle, in die er zahlreiche Knoten nach eigenen Kriterien einsortiert hatte. Einige seiner Hypothesen, auf die er sein Ordnungsschema gründete, konnten erst über 80 Jahre später bewiesen oder widerlegt werden. Bis heute ist es noch nicht gelungen, die Knoten und Verkettungen vollständig zu klassifizieren.

Zwei Knoten werden als gleich angesehen und heißen äquivalent, wenn man den einen durch beliebige Verformungen in die Gestalt des anderen bringen kann, ohne das Seil durchzuschneiden. Wie ein Gummiband darf der Knoten dabei auch gedehnt werden, das heißt, seine Größe

Die Kleeblattschlinge im Versuch von Aharonov und Bohm

Wird das magnetische Potential entlang der gezeichneten Kurve *C* integriert, ergibt sich derselbe Wert wie bei einer Integration entlang des Kreises ohne die Kleeblattschlinge. Der Knoten kann ungestraft gelöst werden, weil das magnetische Potenzial keine Selbstwechselwirkung zeigt.



J. M. FERNÁNDEZ DE LABASTIDA

spielt keine Rolle. Üblicherweise werden Knoten in Diagrammen dargestellt: In einer zweidimensionalen Projektion wird an jedem Kreuzungspunkt das weiter hinten liegende Kurvenstück unterbrochen gezeichnet. Wird der Knoten deformiert oder die Projektionsrichtung verändert, ist das Diagramm unter Umständen nicht wiederzuerkennen. Wie soll man dann zwei Diagrammen ansehen, ob sie zu äquivalenten Knoten gehören oder zu verschiedenen?

Im Jahr 1920 entdeckte Kurt Reidemeister (1893–1971) drei einfache Manipulationen an Knotendiagrammen. Erzeugt man aus einem Diagramm durch beliebig viele solcher Reidemeister-Bewegungen ein neues, so stellt dieses mit Sicherheit noch immer denselben Knoten dar. Der Knoten könnte also so deformiert werden, dass seine Projektion aus einer geeigneten Richtung das neue Diagramm ergibt. Umgekehrt lassen sich die Diagramme zweier äquivalenter Knoten stets durch eine Abfolge von Reidemeister-Bewegungen ineinander überführen, sogar wenn sie so verschieden aussehen, dass niemand diese Abfolge erraten kann.

Die Reidemeister-Bewegungen eröffnen eine Möglichkeit, Knoten anhand ihrer Diagramme zu unterscheiden: Wenn es gelingt, jedem Diagramm auf eindeutige Weise eine Eigenschaft zuzuweisen, die unter Reidemeister-Bewegungen erhalten bleibt, dann können zwei Diagramme, die sich in dieser Eigenschaft unterscheiden, nicht zu äquivalenten Knoten gehören. Denn wären die Knoten äquivalent, könnte man das erste Diagramm durch Reidemeister-Bewegungen in das zweite überführen. Dabei würde sich die invariante Eigenschaft mit übertragen. Die Diagramme äquivalenter Knoten müssen sich also in ihr gleichen. Solche Eigenschaften nennt man Knoteninvarianten.

Im Jahr 1928 fand James W. Alexander (1888–1971) eine Möglichkeit, jedem Knotendiagramm auf eindeutige Weise ein Polynom zuzuordnen, das sich unter Reidemeister-Bewegungen nicht ändert. Diese erste Knoteninvariante, das Alexander-Polynom, basiert auf der Anzahl der Kreuzungspunkte in einem Diagramm. Eine zweite polynomiale Invariante entdeckte Vaughan F. R. Jones von der University of California in Berkeley, als er 1984 mathematische Strukturen untersuchte, die auf natürliche Weise auch in der statistischen Physik auftreten. Bis dahin hatte niemand einen Zusammenhang zwischen der Knotentheorie und diesem Teilgebiet der Physik vermutet. Jones erhielt dafür – ebenfalls 1990 – die Fields-Medaille.

Insgesamt gesehen ist das Jones-Polynom eine feinere Knoteninvariante als das Alexander-Polynom. Es gibt nämlich Knoten, deren Jones-Polynome sich unterscheiden, obwohl ihre Alexander-Polynome gleich sind. Zum Beispiel stimmen die Alexander-Polynome spiegelsymmetrischer Knoten stets überein – das Polynom von Jones dagegen erkennt den Unterschied in vielen Fällen.

Unter diesem Problem leiden alle bekannten Knoteninvarianten: Es kann vorkommen, dass zwei Diagramme die gleiche Invariante haben, obwohl sie verschiedene Knoten darstellen. Die Knoteninvarianten sind also nicht trennscharf genug. Eine noch feinere Invariante, die tatsächlich alle nicht äquivalenten Knoten und Verkettungen unterscheidet, würde das Klassifikationsproblem der Knotentheorie lösen.

Nur wenige Jahre später stieß Witten im Rahmen der topologischen Quantenfeldtheorien erneut aus einer völlig anderen Richtung auf das Jones-Polynom. Er konnte es sogar verallgemeinern: von den Knoten auf geschlossene Bahnen in dreidimensionalen Räumen mit komplizierteren topologischen Eigenschaften.

Quantenfeldtheorie und Knoten

Die Quantenfeldtheorie, die Witten mit der Knotentheorie in Verbindung brachte, ist die Chern-Simons-Theorie. Die Hauptrolle spielt in dieser Theorie ein Potenzial, das im Unterschied zum elektromagnetischen Potenzial mit sich selbst wechselwirken kann. Zudem ist die Chern-Simons-Theorie nicht vierdimensional wie die Theorie des Elektromagnetismus, sondern nur dreidimensional. Sie ist eine topologische Quantenfeldtheorie, weil ihre physikalischen Größen topologische Invarianten sind.

Betrachten wir zum Vergleich noch einmal das Experiment von Aharonov und Bohm: Obwohl die Felder im Außenraum der Spule verschwinden, ist das Wegintegral des magnetischen Potenzials entlang einer geschlossenen Kurve um die Spule ungleich null, sobald ein Strom fließt. Das liegt am Magnetfeld, das der Strom im Inneren der Spule erzeugt. In der Theorie von Chern und Simons verschwindet das Feld grundsätzlich, denn es gibt keine Materie und damit kein Analogon zur stromdurchflossenen Spule. Deshalb kann das Chern-Simons-Potenzial durch eine Eichtransformation aus dem Nullpotenzial erzeugt werden. Erstaunlicherweise ist das Integral des Chern-Simons-Potenzials entlang geschlossener Bahnen in bestimmten Situationen trotzdem ungleich null. Wie wir sehen werden, liegt das an der Wechselwirkung des Potenzials mit sich selbst.

Im Versuch von Aharonov und Bohm hat die Gestalt der geschlossenen Kurve um die Spule keinen Einfluss auf das Wegintegral des magnetischen Potenzials: Sein Wert ist invariant unter stetigen Deformierungen der Kurve, weil diese die Windungszahl nicht ändern. Die wiederum gibt an, wie oft die Spule beim Integrieren entlang der Kurve umrundet wird, und ist allein verantwortlich für den Wert des Integrals. Zwei Umläufe verdoppeln ihn, drei Umläufe verdreifachen ihn und so weiter.

Geschlossene Kurven im dreidimensionalen Raum sind uns auch in anderem Zusammenhang schon begegnet – als Knoten. Integriert man also das magnetische Potenzial entlang eines beliebigen Knotens, der die Spule umschließt, so ist der Wert dieses Integrals eine Invariante des Knotens. Die so definierte Knoteninvariante ist vergleichsweise grob, denn sie berücksichtigt nur, wie oft sich der Knoten um das Loch windet. So unterscheidet sie nicht zwischen dem trivialen Knoten und der Kleeblattschlinge, wenn sich das Loch in einem Blatt derselben befindet. Es wird entlang der Kleeblattschlinge nicht öfter umrundet als entlang des trivialen Knotens: genau einmal, nur etwas umständlicher.

Wie im Elektromagnetismus ist es auch in der Chern-Simons-Theorie interessant, das Potenzial entlang verschiedener geschlossener Wege zu integrieren. Diese Integrale sind die physikalischen Größen der Theorie. Allerdings sind die Integrationswege meist keine Knoten, das heißt keine Kurven im gewöhnlichen dreidimensionalen Raum, sondern Bahnen in komplizierteren topologischen Räumen. Die Knoten werden als einfache Spezialfälle mitbehandelt. Das Integral des Chern-Simons-Potenzials entlang einer solchen Bahn ist eine Zahl, die sich unter stetigen Deformierungen der Bahn nicht ändert – eine Invariante also, die man benutzen kann, um geschlossene Bahnen zu vergleichen. Genau wie die Kugel- und die Torusoberfläche kann man auch kompliziertere topologische Räume indirekt über die Eigenschaften geschlossener Bahnen in diesen Räumen charakterisieren. Weil das invariante Integral des Chern-Simons-Potenzials solche Bahnen unterscheidet, kann es zur Klassifikation der topologischen Räume, in denen sie verlaufen, beitragen.

Im Spezialfall der Knoten ist das Integral des Chern-Simons-Potenzials eine erheblich feinere Invariante als das des magnetischen Potenzials. Beispielsweise unterscheidet es zwischen der Kleeblattschlinge und dem trivialen Knoten, denn dieses Mal kommt es darauf an, wie oft eine Kurve sich selbst umschließt: Da das Chern-Simons-Potenzial mit sich selbst wechselwirkt, entsteht immer dann ein Beitrag zum Integral, wenn die Kurve ein Stück des eigenen Weges umrundet. Anders als beim trivialen Knoten lässt sich dies beim Durchlaufen der Kleeblattschlinge nicht vermeiden. Deshalb nimmt das Integral des Chern-Simons-Potenzials entlang dieser beiden Kurven um das Loch verschiedene Werte an.

Genauer betrachtet umfasst die Chern-Simons-Theorie eine Vielzahl ähnlicher Theorien, die alle unter diesem Namen zusammengefasst werden. Für jede von ihnen ergibt das Integral des Potenzials entlang geschlossener Bahnen eine andere Knoteninvariante. Überraschenderweise unterscheidet und identifiziert sie die Knoten in einem Fall auf exakt dieselbe Weise wie das Jones-Polynom. Diesen Zusammenhang zwischen der Knoten- und der Quantenfeldtheorie hat Witten aufgeklärt.

In manchen Situationen lässt sich das Integral des Chern-Simons-Potenzials nicht genau berechnen. In diesem Fall hilft nur noch eine Näherungsmethode – die Störungsrechnung. In jedem Teil-schritt dieses Verfahrens kommt zur genäherten Lösung ein Summand hinzu, der das Ergebnis dem eigentlich gesuchten Wert des Integrals näherbringt. Der Fehler wird also immer kleiner, und zwar proportional zu den Potenzen einer Konstante, die kleiner als eins ist. Ihr Kehrwert gibt die Stärke der Wechselwirkung an. Im Fall der Chern-Simons-Theorie kommt der Störungsrechnung eine besondere Bedeutung zu: Aus den einzelnen Beiträgen zur Näherungslösung lassen sich weitere Invarianten ablesen, die im Unterschied zum Integral des Potenzials geometrisch interpretierbar sind. Sie gehören zu den Vassiliev-Invarianten, die V. A. Vassiliev von der Universität Moskau Ende der 1980er Jahre zusammen mit Marcos Alvarez und mir entdeckt hat.

Rollentausch

In der Vergangenheit bildeten die Fortschritte der Mathematik das Fundament, auf dem die physikalischen Theorien errichtet werden konnten, wie zum Beispiel die Quantenmechanik und die Relativitätstheorie. In der Folge mussten die Physiker ihre Experimentierkunst verfeinern, um die Vorhersagen der neuen Theorien zu prüfen.

Die Rollen wechselten, als in den 1980er Jahren die topologischen Quantenfeldtheorien entstanden. Aus der Intuition der Physiker entwickelte sich hier eine Sprache, für die sich allmählich der Name theoretische Mathematik einbürgert. Ihre physikalisch motivierten Hypothesen zu beweisen, ist eine Herausforderung für die Mathematik: Sie muss neue Methoden finden, um den Quantenfeldtheorien im Nachhinein ein solides mathematisches Gerüst zu geben. Obwohl diese Entwicklung noch nicht abgeschlossen ist, kann die Mathematik in der Topologie schon heute auf Erfolge verweisen, die auf den Ansporn aus der Physik zurückgehen.

Vielleicht wird die Mathematik den Ball in der Zukunft wieder zurückspielen, denn die erhoffte mathematisch strenge Formulierung der Quantenfeldtheorien könnte der Physik den Ausgangspunkt für eine quantenmechanische Beschreibung der Gravitation liefern. Das wäre ein großer Schritt auf dem Weg zu einer einheitlichen Theorie aller vier Grundkräfte der Natur.

(Spektrum der Wissenschaft, 10/1998)

AUSZEICHNUNG

Abel-Preis für **John W. Milnor**

von Dierk Schleicher

Der amerikanische Mathematiker hat zu vielen Gebieten bahnbrechende Beiträge geleistet. Berühmt geworden ist er vor allem durch seine topologischen Arbeiten über »exotische Sphären«.

KNUT FALCH / THE ABEL PRIZE

Topologie-Vorlesung an der Princeton University 1949. Professor Albert Tucker schreibt eine Behauptung ohne Beweis an die Tafel: »Jeder nichttriviale Knoten hat Gesamtkrümmung größer als 4π.« Der 18-jährige Student John W. Milnor kommt wieder einmal zu spät, hält das Angeschriebene für eine Hausaufgabe und liefert eine Woche später den Beweis ab. Der Satz war aber gar keine Hausaufgabe, sondern eine bis dahin unbewiesene Vermutung, und der Student konnte den Beweis gleich als seine erste wissenschaftliche Arbeit in den »Annals of Mathematics« veröffentlichen. Die nunmehr bewiesene Behauptung findet sich in der Literatur als Satz von Fáry-Milnor, weil der ungarische Mathematiker István Fáry (1922–1984) fast zeitgleich einen weiteren Beweis vorlegte.

Mit diesem Paukenschlag begann die lange und überaus fruchtbare Karriere des John Milnor, die 62 Jahre später, im Jahr 2011, mit dem Abel-Preis gekrönt wurde. Die Auszeichnung wird erst seit 2003 vergeben und ist in Analogie zu den Nobelpreisen konzipiert: Mit einem Preisgeld von sechs Millionen norwegischen Kronen (etwa 750 000 Euro) und einer Zeremonie in Gegenwart des norwegischen Königs wird jedes Jahr das Lebenswerk eines großen Mathematikers gewürdigt. Zuvor gab es als nobelpreisähnliche Ehre für das Fach nur die Fields-Medaille, die alle vier Jahre an bis zu vier »junge« (zu verstehen als »bis zu 40-jährige«) Mathematiker verliehen wird und erheblich bescheidener dotiert ist. Diesen Preis erhielt Milnor schon 1962, dazu viele weitere renommierte Auszeichnungen wie die amerikanische National Medal of Science 1967 und den Wolf Prize 1989.

Ein Großteil seines umfangreichen Gesamtwerks bezieht sich auf dasselbe Teilgebiet der Mathematik wie seine genial erledigte Hausaufgabe: die Topologie. Das ist so etwas wie eine Geometrie ohne Längen und Winkel. Auf die genaue Gestalt ihrer Objekte – zum Beispiel geschlossene Kurven, Flächen oder Mengen in noch höherdimensionalen Räumen – kommt es nicht an, sondern nur darauf, wie sie mit sich selbst zusammenhängen. Zwei Objekte sind topologisch gleich (»homöomorph«), wenn es zwischen ihnen eine umkehrbar eindeutige und in beiden Richtungen stetige Abbildung gibt. Das heißt: Jeder Punkt im einen Objekt hat genau einen Partner im anderen, und wenn eine Folge von Punkten auf einen Grenzpunkt zustrebt, dann strebt die Folge der Partner gegen den Partner des Grenzpunkts. Da eine solche Abbildung (ein »Homöomorphismus«) die Gestalt eines Objekts bis zur Unkenntlichkeit verändern kann, ist es manchmal sehr schwierig nachzuweisen – oder zu widerlegen –, dass zwei gegebene Objekte homöomorph sind.

Wie bekommt man ein Gebilde mit dermaßen unbestimmter Form in den Griff? Man zieht ihm ein Korsett ein; das heißt, man nähert zum Beispiel eine Kurve durch einen Streckenzug an. Bei einer geschlossenen Fläche sind es entsprechend lauter Dreiecke. An einer solchen »Triangulierung« zählt man alle Ecken, Kanten und Flächen ab und berechnet aus ihnen eine einzige Zahl, das »topologische Geschlecht« der Fläche. Bemerkenswerterweise hängt diese Zahl nicht von der Wahl der Triangulierung ab; insbesondere bleibt sie unver-

Dierk Schleicher ist Professor für Mathematik an der Jacobs University in Bremen. Sein Hauptforschungsgebiet sind dynamische Systeme. An Milnors Institut war er mehrere Semester Gastwissenschaftler.

ändert, wenn man die Triangulierung verfeinert, das heißt ihr neue Eckpunkte und Kanten hinzufügt. Damit ist die Situation in diesem Fall angenehm übersichtlich. Zwei geschlossene, orientierbare Flächen sind genau dann homöomorph, wenn sie das gleiche Geschlecht haben.

Topologie in höheren Dimensionen

Flächen sind zweidimensional, weil man sich auf ihnen in zwei voneinander unabhängigen Richtungen bewegen kann. Entsprechend erlaubt eine »*n*-dimensionale Mannigfaltigkeit« oder kurz »*n*-Mannigfaltigkeit« Bewegungen in n unabhängigen Richtungen. Das kann man sich für größere Werte von *n* nicht mehr vorstellen; eine 3-Mannigfaltigkeit sieht zwar auf kurze Distanzen so aus wie unser gewöhnlicher dreidimensionaler Raum, darf aber so mit sich selbst verbunden sein, dass man nach einem langen Geradeauslauf wieder bei seinem Ausgangspunkt ankommt. Gleichwohl kann man *n*-Mannigfaltigkeiten triangulieren. Wieder fasst man die Anzahlen ihrer Ecken, Kanten, Flächen und Teilmengen höherer Dimension zu charakteristischen Größen zusammen. Das sind allerdings kompliziertere Objekte (eine »Kette simplizialer Homologiegruppen«), wie Henri Poincaré (1854–1912) zwischen 1895 und 1904 ausgearbeitet hat.

Eigentlich waren die Mathematiker davon überzeugt, dass die Homologiegruppen ebenfalls von der Wahl der Triangulierung unabhängig seien, zumal sie durch eine Verfeinerung nicht verändert werden, wie schon Poincaré gezeigt hatte. Es hätte genügt zu zeigen, dass zwei verschiedene Triangulierungen derselben Mannigfaltigkeit eine gemeinsame Verfeinerung haben. Denn dann müssten die Homologiegruppen zu beiden Triangulierungen von Anfang an gleich sein. Das ist die (damals auch im Englischen so genannte) »Hauptvermutung der kombinatorischen Topologie«. Sie hat länger als ein halbes Jahrhundert jedem Beweisversuch widerstanden, bis John Milnor 1961 den Grund dafür entdeckte: Sie ist falsch!

Perelman und die Vorgänger

Können denn die Homologiegruppen eine Mannigfaltigkeit so eindeutig charakterisieren, wie das topologische Geschlecht das für die zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten tut? Kann man mit ihrer Hilfe wenigstens die einfachsten Exemplare, die

JOHN WILLARD MILNOR, geboren am 20. Februar 1931 in Orange (New Jersey), promovierte 1954 in Princeton bei Ralph Fox. Auf dem Umweg über das MIT und Los Angeles kam er bald wieder nach Princeton, an das Institute for Advanced Studies. Im Jahr 1990 wurde er Direktor des neu gegründeten Institute for Mathematical Sciences an der State University of New York in Stony Brook (heute Stony Brook University), wo er bis heute arbeitet.

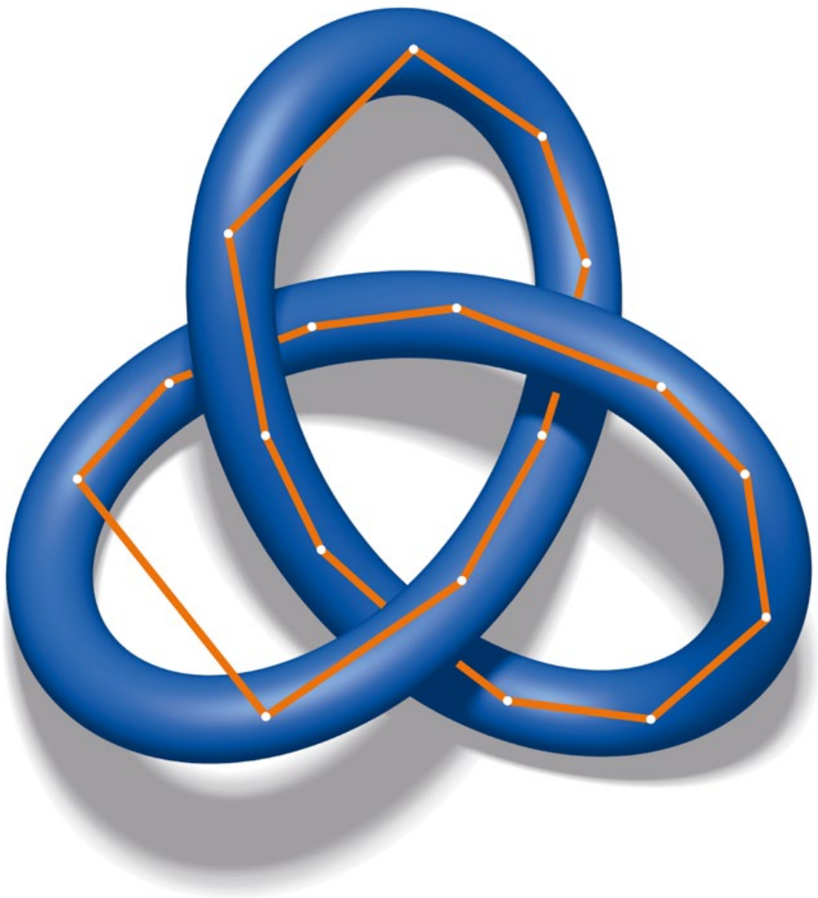
Sphären (verallgemeinerte Kugeloberflächen), von den anderen unterscheiden? Ausgerechnet für die Dimension 3 stellte sich diese Frage als äußerst schwierig heraus; sie hat das 20. Jahrhundert ungelöst überstanden. Die Mathematiker versuchten es zunächst mit höheren Dimensionen – mit Erfolg: Stephen Smale (Fields-Medaille 1966) bewies die Vermutung für alle Dimensionen $n > 4$, Michael Freedman (Fields-Medaille 1986) für $n = 4$.

Der Fall $n = 3$, genauer: ein Spezialfall, der als »Poincaré-Vermutung« bekannt wurde, avancierte zu einem der berühmten »Millenniums-Probleme« und wurde von Grigori Perelman (Fields-Medaille 2006, nicht angenommen) erledigt. Perelman bewies eine viel stärkere Behauptung, die »Geometrisierungsvermutung« von William Thurston (Fields-Medaille 1982), der in jungen Jahren Postdoc bei Milnor war. Entscheidende Ergebnisse, die für Thurstons Vermutung die Grundlage bilden, wurden 1962 bewiesen – von John Milnor. Das wohl bekannteste überraschende Ergebnis Milnors bezieht sich auf Homöomorphismen zwischen zwei siebendimensionalen Sphären oder kurz 7-Sphären, also »Oberflächen« achtdimensionaler Kugeln.

Die Gesamtkrümmung einer Kurve

Ein Knoten ist eine geschlossene Kurve im dreidimensionalen Raum, die sich selbst nicht schneidet. Ein solcher Knoten ist trivial, wenn er sich ohne Selbstüberschneidung so verformen lässt, dass er zu einem Kreis wird, etwa wie ein verheddertes, aber unzerschnittenes Gummiband, das man glatt zieht.

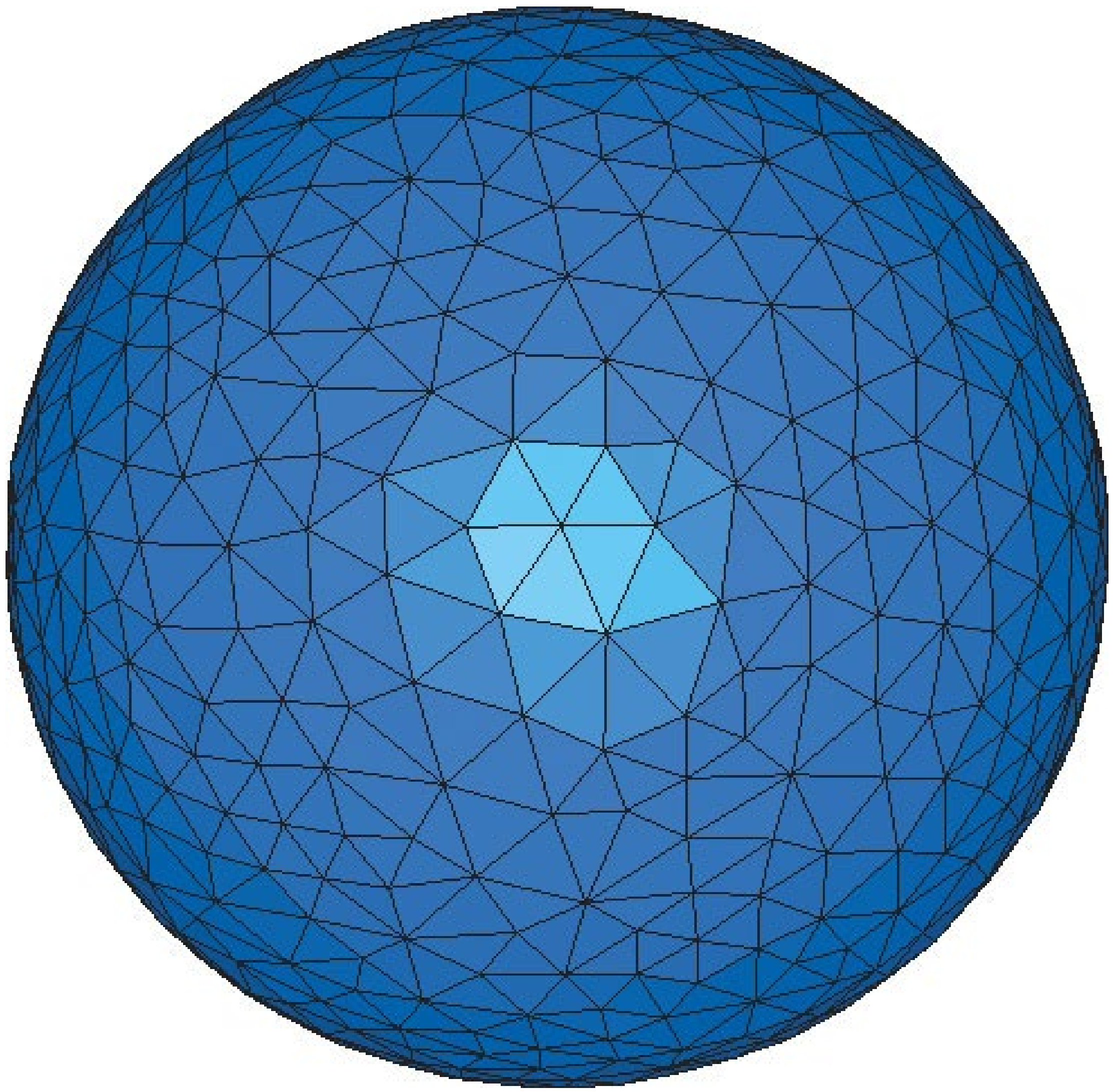
Die Gesamtkrümmung einer Kurve – zum Beispiel eines Knotens – ist ein Maß dafür, wie sehr man den ganzen Weg entlang seine Richtung ändern muss, wenn man die Kurve entlangläuft. Eine Näherung für diese Zahl gewinnt man, indem man die Kurve »diskretisiert«, das heißt endlich viele Punkte auf der Kurve auswählt und von einem Punkt zum nächsten nicht die Kurve entlang, sondern die gerade Verbindungsstrecke läuft. Dabei muss man im Allgemeinen in jedem dieser Diskretisierungspunkte seine Richtung um einen gewissen Winkel ändern. Die Summe dieser Winkel, alle mit positivem Vorzeichen genommen, gibt ein Maß für die Größe aller Richtungsänderungen zusammen. Diese Zahl strebt gegen die Gesamtkrümmung der Kurve, wenn man nun die Diskretisierung verfeinert, das heißt immer mehr Punkte auf die Kurve legt, so



JIM BELK / PUBLIC DOMAIN; BEARBEITUNG: SPEKTRUM DER WISSENSCHAFT

dass der eckige Laufweg sich immer mehr der echten Kurve anschmiegt.

Jede geschlossene Kurve hat eine Gesamtkrümmung von mindestens 2π; der Minimalwert 2π wird genau dann angenommen, wenn die Kurve eben und konvex ist. Man kann jeden Knoten leicht so deformieren, dass seine Gesamtkrümmung beliebig groß wird; aber wenn er nicht trivial ist, bleibt sie stets größer als 4π.



Eine Triangulierung der zweidimensionalen Sphäre.

FIGURE 53.1 SURFACE MESH OF A SPHERE

Eine solche Abbildung darf zwar einen Zusammenhang weder zerreißen noch einen herstellen, wo vorher keiner war. Aber ein eigentlich glattes Objekt mit einem Knick zu versehen ist erlaubt (und kommt beim Triangulieren massenhaft vor). Entsprechend sollte es möglich sein, einen Knick zu glätten, das heißt durch eine beliebig geringe Verformung aus einer nur stetigen Abbildung eine differenzierbare zu machen, wenn die zu Grunde liegenden Objekte glatt sind.

Exotische Sphären

Umso größer war die Überraschung, als Milnor ein Gegenbeispiel fand. Es gibt einen Homöomorphismus von einer 7-Sphäre zu einer anderen, den man nicht zu einer differenzierbaren Abbildung glätten kann, und das, obgleich die Mannigfaltigkeiten, die er aufeinander abbildet, so glatt (differenzierbar) sind wie überhaupt möglich. Wenn man nun in Verschärfung des üblichen Kriteriums zwei topologische Objekte nur noch dann als gleich ansieht, wenn die vermittelnde Abbildung samt ihrer Umkehrung nicht nur stetig, sondern auch differenzierbar ist, dann gibt es auf einmal 28 wesentlich verschiedene 7-Sphären: eine gewöhnliche und 27 »exotische«. Damit hatte Milnor ein neues Gebiet der Mathematik eröffnet: die Differenzialtopologie.

Der Preisträger hat noch auf zahlreichen weiteren Gebieten große Leistungen erbracht: in der Spieltheorie, der K-Theorie und in den letzten Jahrzehnten vor allem in der Theorie der dynamischen Systeme, in der auch die berühmte Mandelbrot-Menge zu Hause ist. Ganz gegen seine Gewohnheit hat er hier nicht irgendwelche Vermutungen widerlegt – vielleicht gab es keine widerlegbaren –, sondern dazu beigetragen, das Fachgebiet zu strukturieren, und zwar, wie auf vielen anderen Gebieten auch, mit einem grundlegenden Standardwerk. In diesem Fall diente und dient »Dynamics on the Riemann Sphere« als Einführung für quasi alle jungen Forscher auf dem Gebiet (mich eingeschlossen).

Nebenbei war und ist Milnor Pionier in einer ganz anderen Richtung, nämlich der computergestützten »experimentellen Mathematik«. Nicht zuletzt durch unzählige selbst programmierte Experimente hat er viele Phänomene entdeckt und formuliert, die der Entwicklung des Gebiets als Orientierung dienten. So mancher Doktorand konnte sich daraufhin rühmen, eine Vermutung von Milnor bewiesen zu haben.

Übrigens: Die Geschichte mit der missverstandenen Hausaufgabe steht zwar in dem Festband zu Ehren seines 60. Geburtstags, ist aber falsch. Milnor wusste genau, was er tat, als er diesen Satz bewies. So erzählte er mir jedenfalls vor Jahren, als ich ihn darauf ansprach. Und warum er die Sache nicht richtiggestellt habe? »Wozu«, antwortete er mit seinem typischen verschmitzten Lächeln, »hätte ich diese nette Geschichte kaputt machen sollen?«

(Spektrum der Wissenschaft, Juni 2011)

MATHEMATIK TRIFFT SPORT

»Der Ball ist rund« ist nur der Anfang

von Dieter Kotschick

Für einen Topologen ist ein Ball erst der Anfang einer Exkursion durch eine Welt deformierbarer Muster.

SEBASTIAN KAULITZKI / STOCK.ADOBE.COM; BEARBEITUNG: SPEKTRUM DER WISSENSCHAFT

Was ist ein Fußball? Die offizielle Definition der Fifa sagt nur geringfügig mehr als der klassische Spruch »Der Ball ist rund«: Er soll eine Kugel mit einem Umfang zwischen 68 und 70 Zentimetern sein, und wenn er mit 0,8 Atmosphären Überdruck aufgeblasen ist, sind höchstens 1,5 Prozent Abweichung von der Kugelgestalt erlaubt.

Aber welches Bild kommt Ihnen in den Sinn, wenn Sie an Fußball denken? Mit größter Wahrscheinlichkeit ist es jenes schwarz-weiße Muster, das Ihnen beispielsweise aus Anlass einer Weltmeisterschaft von jeder Werbefläche entgegenstrahlt.

Dieser Standardfußball setzt sich aus 32 Polygonen (Vielecken) zusammen. Zwölf Fünfecke und 20 Sechsecke sind so angeordnet, dass jedes Fünfeck ausschließlich von Sechsecken umgeben ist. Traditionell sind die Fünfecke schwarz und die Sechsecke weiß gefärbt.

Dieter Kotschick ist Professor für Mathematik und Inhaber des Lehrstuhls für Differentialgeometrie an der Universität München.

Das Farbschema wurde angeblich zur Weltmeisterschaft 1970 eingeführt, um den Ball im Fernsehen besser sichtbar zu machen. Das Muster als solches ist allerdings älter.

Warum sieht der Fußball so aus, wie er aussieht? Kann man die Fünf- und Sechsecke auch anders anordnen? Dürfen es an Stelle von Fünf- und Sechsecken andere Polygone sein? Fragen dieser Art sollen im Folgenden mit mathematischen Mitteln untersucht – und zum Teil auch beantwortet – werden.

Zu diesem Zweck ist die Frage »Was ist ein Fußball?« neu zu stellen, und die Antwort der Fifa ist nicht die geeignetste. Unser mathematischer Ball ist zwar auch noch »rund«, aber in einem verallgemeinerten Sinne. Er ist ein »sphärisches Polyeder«, was nichts weiter heißt, als dass er aus Polygonen zusammengesetzt ist und Kugelform annimmt, wenn man ihn geeignet aufbläst. Das ist nicht besonders restriktiv; selbst ein Würfel ist ein sphärisches Polyeder. Erst wenn beim Aufblasen keine Kugel, sondern beispielsweise ein Fahrradschlauch (Torus) herauskommt, nennt man das Polyeder nicht mehr sphärisch.

Außerdem interessiert uns nicht wirklich, wie das Aufblasen vonstatten geht und wo genau dabei die Ecken und Kanten des Polyeders auf der Kugeloberfläche (Sphäre) landen. Wir nehmen uns zum Beispiel die Freiheit, einen Eckpunkt auf der Sphäre zu verschieben (wobei die Kanten, die diesen Eckpunkt mit anderen verbinden, mitgehen). Nur einander überkreuzende Kanten dürfen dabei nicht entstehen. Nach unserer Definition ändert das nichts Wesentliches am Polyeder.

Mit anderen Worten: Es geht nicht um die metrischen, sondern um die topologischen Eigenschaften sphärischer Polyeder. Was von dem Fußball bleibt, ist ein so genannter Graph auf der Sphäre, bestehend aus Ecken und Kanten, die diese Ecken verbinden, ohne dass es auf deren genaue Lage ankommt. Aber trotz dieser Abstraktion: Fünfeck bleibt Fünfeck, und man kann nach wie vor davon reden, ob Fünfecke nur an Sechsecke oder auch aneinandergrenzen und wie viele Flächen in einer bestimmten Ecke zusammenkommen.

Aus graphentheoretischer Sicht hat der Standardfußball drei wesentliche Eigenschaften:

(1) Er besteht nur aus Fünf- und Sechsecken;
(2) jedes Fünfeck grenzt nur an Sechsecke; und
(3) die Seiten jedes Sechsecks grenzen abwechselnd an Fünf- und Sechsecke.

Aus diesem Grund definieren wir einen Fußball als ein beliebiges sphärisches Polyeder mit den Eigenschaften (1), (2) und (3). Wir denken uns die Fünfecke schwarz und die Sechsecke weiß (was am Prinzip nichts ändert). Damit ist der Standardfußball mit der vertrauten Musterung auch in dem soeben definierten Sinn ein Fußball, allerdings nicht der einzig mögliche.

Dieser Definition bin ich 1983 zum ersten Mal als Schüler begegnet, in einer Aufgabe im Bundeswettbewerb Mathematik. Die Aufgabe lautete: Gegeben sei ein Fußball mit den Eigenschaften (1) bis (3). Aus wie vielen Fünf- und Sechsecken besteht er? Damals habe ich bei meiner Lösung angenommen, dass der Ball ein konvexes Polyeder sei, das aus regelmäßigen Polygonen besteht. Diese geometrische Voraussetzung erzwingt zusammen mit den Regeln (1) bis (3), dass es genau 12 Fünfecke und 20 Sechsecke gibt. Außerdem gibt es nur eine Möglichkeit, sie zusammenzusetzen, und diese liefert den Standardfußball. Aber ohne die geometrische Zusatzbedingung hat das graphentheoretische Problem unendlich viele weitere Lösungen.

Als ich im Jahr 2001 zu einem Vortrag anlässlich einer Preisverleihung des Bundeswettbewerbs eingeladen wurde, begann ich wieder, über dieses Problem nachzudenken. Schließlich fand ich zusammen mit meinem Mitarbeiter Volker Braungardt eine Beschreibung aller Lösungen, die ich im Folgenden diskutieren möchte.

Fullerene

Interessanterweise tauchte ein verwandtes Problem in den 1980er Jahren in der Chemie auf, nachdem das Buckminster-Fulleren C_{60} entdeckt worden war. Das ist ein Molekül aus 60 Kohlenstoffatomen, deren räumliche Anordnung genau dem Standardfußball entspricht: Die 60 Atome sitzen an den Ecken des Polyeders, und die Kanten entsprechen chemischen Bindungen.

Die Entdeckung dieses Moleküls, die 1996 mit dem Nobelpreis für Chemie gewürdigt wurde, sorgte für ein großes Interesse an den so genannten Fullerenen. Das sind Kohlenstoffmoleküle, deren räumliche Struktur die Eigenschaft (1) hat und außerdem die folgende Bedingung erfüllt, die von den chemischen Bindungseigenschaften des Kohlenstoffs erzwungen wird:

(3') An jeder Ecke treffen sich genau drei Kanten. Manchmal interessiert man sich für die speziellen Fullerene, die zusätzlich Bedingung (2) erfüllen. Man nimmt an, dass sie besonders stabil sind; vermutlich ist es der Stabilität abträglich, wenn zwei Fünfecke benachbart sind.

Es gibt unendlich viele Fulleren-Polyeder – C_{60} war nur das erste, das als Molekül nachgewiesen wurde –, und es ist bemerkenswert, dass die beiden unendlichen Familien von Polyedern, Fußbälle und Fullerene, nur den Standardfußball miteinander gemein haben.

Um das einzusehen, ist die schöne Polyederformel hilfreich, die der Schweizer Mathematiker Leonhard Euler (1707–1783) entdeckt hat. In jedem sphärischen Polyeder ist die Anzahl e der Ecken minus die Anzahl k der Kanten plus die Anzahl f der Flächen gleich 2:

$$e - k + f = 2.$$

Wenden wir Eulers Formel auf ein Polyeder aus S schwarzen Fünfecken und W weißen Sechsecken an. Die Gesamtzahl f der Flächen ist $S + W$. Die Fünfecke haben insgesamt $5S$ Kanten und die Sechsecke $6W$. Beides zusammen wäre die Gesamtanzahl der Kanten – nur haben wir jede Kante doppelt gezählt, nämlich bei den beiden Flächen, zu denen sie gehört. Zum Ausgleich teilen wir durch 2. Die Anzahl der Kanten ist somit

$$k = (5S + 6W) / 2.$$

Schließlich sind die Ecken zu zählen. Die Fünfecke haben zusammen $5S$ und die Sechsecke $6W$ Ecken. Im Fall der Fullerene gehört nach Bedingung (3') jede Ecke zu drei verschiedenen Flächen. In der Summe $5S + 6W$ ist also jede Ecke genau dreimal gezählt, und wir müssen zum Ausgleich durch 3 teilen:

$$e = (5S + 6W) / 3.$$

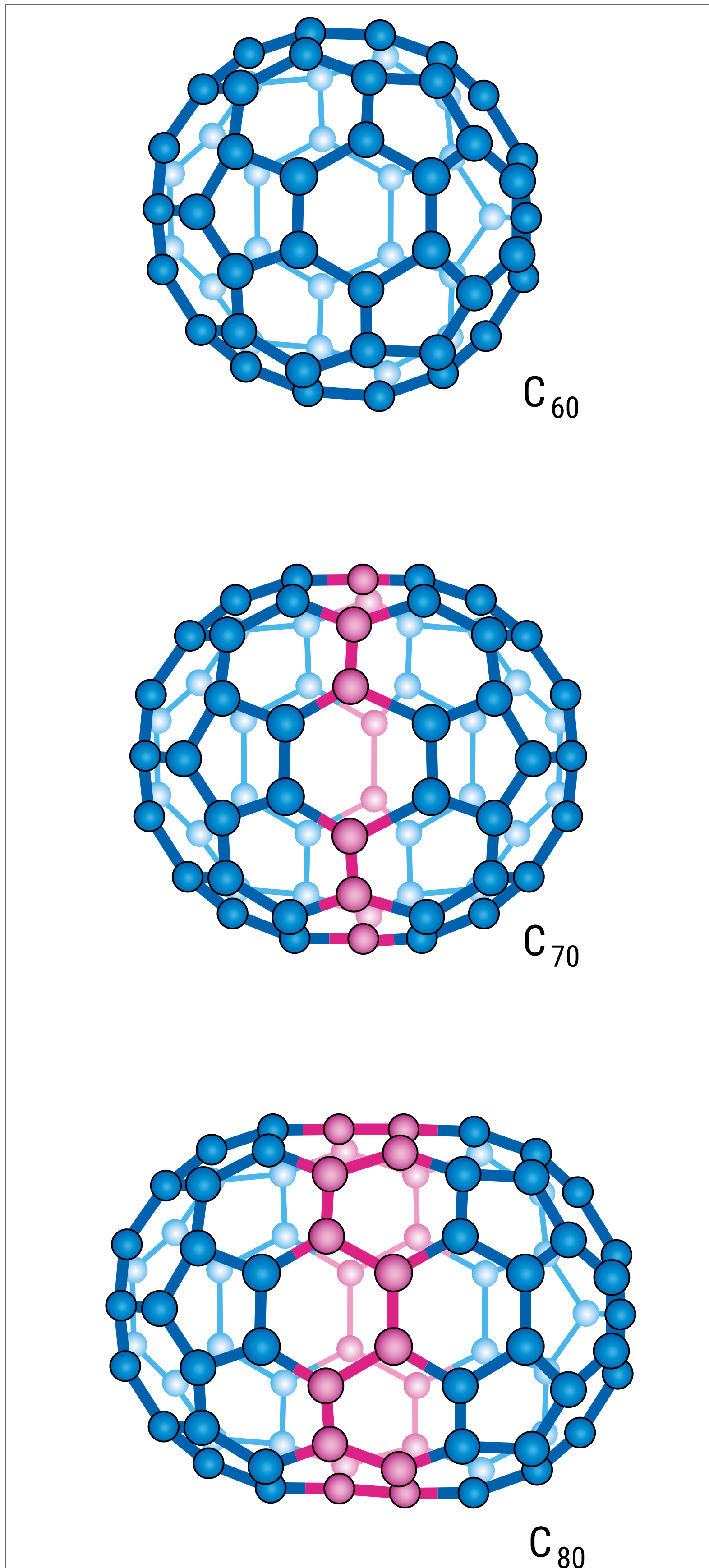
Setzen wir diese Werte für f, k und e in die eulersche Formel ein, so stellen wir fest, dass die Beiträge von W sich gegenseitig wegheben und die Formel sich auf $S = 12$ reduziert. Jedes Fulleren enthält genau 12 Fünfecke! Dagegen ergibt sich aus der eulerschen Formel keine Einschränkung für die Anzahl W der Sechsecke und mithin der Ecken. Man kann zeigen, dass unter der Zusatzbedingung (2) die Anzahl der Sechsecke mindestens 20 sein muss. Der Standardfußball realisiert diesen Mindestwert. Die Anzahl e der Ecken ist dann 60, entsprechend den 60 Atomen im C_{60}-Molekül.

Für unsere mathematischen Fußbälle ist die Anzahl der Flächen, die sich in einer Ecke treffen, nicht festgelegt – Bedingung (3') gilt nicht –, aber drei müssen es mindestens sein. Daher wird aus der Gleichung $e = (5S + 6W) / 3$ die Ungleichung $e \leq (5S + 6W) / 3$.

Setzen wir das in die eulersche Formel ein, so heben sich die Beiträge von W wieder gegenseitig auf. Übrig bleibt die Un-

FULLERENE

In einem Fulleren sitzen Kohlenstoffatome an den Ecken eines Polyeders; dessen Kanten entsprechen den Bindungen zwischen den Atomen. Das klassische Buckminster-Fulleren C_{60} entspricht dem Standardfußball; von C_{70} und C_{80} gibt es jeweils mehrere kombinatorische Möglichkeiten.



AARON COX, NACH: RIICHIRO SAITO

MICHAEL TROTT

Verzweigte Überlagerung

So macht man durch verzweigte Überlagerung aus einem Fußball einen neuen: Man wähle einen Weg von einer Ecke zu einer anderen entlang von Kanten (*a*), begradige ihn (*b*) und schneide den Ball entlang dieses Wegs auf (*c*), schrumpfe ihn in der Breite auf die Hälfte zusammen (*d*) und vernähe zwei Exemplare dieses Gebildes (*e*), um 180 Grad gegeneinander gedreht, miteinander (*f*). Der Ästhetik zuliebe kann man die ursprüngliche Zickzackform der Naht wiederherstellen (*g*). Die Bilder der (mathematischen) Fußbälle hat Michael Trott von Wolfram Research Inc. mit dem Programm »Mathematica« erzeugt.

gleichung $S \leq 12$. Somit enthält jeder Fußball mindestens 12 Fünfecke, doch anders als ein Fulleren kann er sehr wohl mehr enthalten.

Ebenfalls im Unterschied zu Fullerenen bestimmt bei einem Fußball die Anzahl der Fünfecke die der Sechsecke und umgekehrt. Wir zählen die Kanten, an denen Fünf- und Sechsecke zusammenstoßen. Nach Bedingung (2) sind alle Kanten von Fünfecken auch Kanten von Sechsecken, und nach Bedingung (3) ist jede zweite Sechseckskante gleichzeitig Kante eines Fünfecks. Daraus folgt $(1/2)(6W) = 5S$, also $3W = 5S$. Wegen $S \leq 12$ ist W mindestens 20. Diese Mindestwerte werden vom Standardfußball realisiert, und die Realisierung ist wegen der Bedingungen (2) und (3) kombinatorisch eindeutig. Allerdings hat die Gleichung $3W = 5S$ unendlich viele weitere ganzzahlige Lösungen; entsprechen diese Fußballpolyedern? Es wird sich zeigen, dass dies genau für diejenigen Lösungen der Fall ist, bei denen W ein Vielfaches von 20 und S ein Vielfaches von 12 ist. Es gibt also tatsächlich eine unendliche Schar von Fußbällen.

Damit wissen wir, dass es unendlich viele Fullerene – mit den Eigenschaften (1), (2) und (3') – und unendlich viele Fußbälle –

mit (1), (2) und (3) – gibt. Aber diese beiden unendlichen Mengen haben nur ein gemeinsames Element! Für ein Fulleren ist $S = 12$, für einen Fußball gilt $5S = 3W$. Soll ein Fußball gleichzeitig ein Fulleren sein, so schließen wir, dass $5 \cdot 12 = 3W$ oder $W = 20$. Jeder Fußball, der zugleich ein Fulleren ist, muss also 12 Fünfecke und 20 Sechsecke haben. Es ist bekannt, dass es 1812 verschiedene Fullerene mit 12 Fünfecken und 20 Sechsecken gibt, doch 1811 davon haben Fünfecke mit einer gemeinsamen Kante und sind daher keine Fußbälle, weil sie die Bedingung (2) verletzen. Der Standardfußball ist das einzige dieser Fullerene mit disjunkten Fünfecken.

Neue Fußbälle aus alten

Lassen wir nun die Chemie beiseite und kommen zur eigentlichen Frage: Welche weiteren Fußbälle gibt es außer dem Standardfußball, und wie können wir sie verstehen? Es stellt sich heraus, dass man durch eine topologische Konstruktion namens »verzweigte Überlagerung« aus einem Fußball einen anderen machen kann. Das Spiel lässt sich beliebig oft wiederholen, so dass unendliche Folgen verschiedener Fußbälle entstehen.

Was ist eine verzweigte Überlagerung? Stellen Sie sich das Muster eines Fußballs, zum Beispiel des Standardfußballs, auf die Erdoberfläche aufgetragen vor, und zwar so, dass eine Ecke auf den Nordpol und eine andere auf den Südpol fällt *(a)*. Nun verzerren Sie das Muster so, dass einer der (Zickzack-)Wege, die an Kanten entlang von Pol zu Pol führen, begradigt wird und auf einen Längengrad zu liegen kommt, zum Beispiel den Nullmeridian *(b)*. Diese Verzerrung ist erlaubt; wir betreiben ja Topologie und nicht Geometrie.

Als Nächstes schneiden Sie in Gedanken mit einem Messer entlang der soeben begradigten Linie von Pol zu Pol und ziehen die derart aufgeschlitzte Erdoberfläche in Ost-West-Richtung zusammen *(c)*, bis sie nur noch die Hälfte der Kugel bedeckt, zum Beispiel die westliche Halbkugel *(d)*. Fertigen Sie schließlich eine Kopie dieser zusammengestauchten Fläche an und drehen Sie sie um die Erdachse, bis sie die östliche Halbkugel bedeckt *(e)*. Dann passen die Fussballmuster der beiden Stücke zusammen, so dass man sie zu einem neuen Fußball zusammennähen kann. An den beiden vom Nord- zum Südpol verlaufenden Nähten treffen sich nämlich Teilstücke – eins vom Original, eins von der Kopie –, die genau so aussehen wie die Teilstücke, die wir durch Aufschlitzen voneinander getrennt hatten. Das Ergebnis ist ein Fußball mit doppelt so vielen Fünf- und Sechsecken wie zuvor *(f, g)*.

Man bezeichnet den so konstruierten Fußball als zweiblättrige verzweigte Überlagerung des ursprünglichen Fußballs; die Pole heißen Verzweigungspunkte. Wenn man den neuen Ball nur lokal betrachtet, das heißt den Blick nur auf einzelne Ecken und deren Umgebungen richtet, sieht er topologisch genauso aus wie der alte, außer an den Verzweigungspunkten. An diesen beiden Ecken stoßen jetzt sechs statt drei Flächen zusammen; an den übrigen 116 Ecken (den 58 Ecken, die nicht auf die Pole gelegt wurden, und ihren Kopien) treffen sich wie zuvor jeweils drei Flächen.

Von der lokalen zur globalen Struktur

Es gibt eine naheliegende Variante dieser Konstruktion. Man ziehe die geschlitzte Erdoberfläche in der Breite nicht nur auf die Hälfte, sondern auf ein Drittel, Viertel, … d-tel zusammen, so dass sie wie ein Stück Melonenschale aussieht (die Melone wurde in d Teile zerschnitten), und lege dann d Exemplare dieses Schalenstücks um die Erde.

Wieder lassen sich alle Stücke so zusammennähen, dass ein Fußballmuster entsteht. Das ist eine d-blättrige verzweigte Überlagerung. Für große Werte von d sind die Fünf- und Sechsecke zwar bis zur Unkenntlichkeit gestaucht, aber das macht nichts: Auf Längen und Winkel kommt es in der Topologie nicht an.

Aber erreicht man durch diese Konstruktion jeden überhaupt denkbaren Fußball? Überraschenderweise ja. Braungardt und ich haben bewiesen, dass jeder Fußball eine verzweigte Überlagerung des Standardfußballs ist. Allerdings kommen dabei auch allgemeinere Überlagerungen vor, die sich nicht aus den hier geschilderten zyklischen Überlagerungen zusammensetzen lassen.

Der Beweis beruht auf einem interessanten Zusammenspiel zwischen der lokalen Struktur von Fußballmustern und der globalen Struktur verzweigter Überlagerungen. Wir betrachten irgendeine Ecke eines beliebigen Fußballs. Jede Fläche, die der Ecke anliegt, hat zwei aufeinander folgende Kanten, die sich in dieser Ecke treffen. Weil nach Bedingung (3) wenigstens eine dieser beiden Kanten ein Fünfeck berandet, gibt es keine Ecke, an der sich nur Sechsecke treffen. Also liegt an jeder Ecke ein Fünfeck an. Seine Nachbarn sind Sechsecke, und die Seiten der Sechsecke grenzen abwechselnd an Fünf- und Sechsecke.

Diese Bedingung ist nur erfüllbar, wenn die Flächen um die Ecke herum in der Reihenfolge schwarz, weiß, weiß, schwarz, weiß, weiß und so weiter angeordnet sind. (Zur Erinnerung: Die Fünfecke sind schwarz.) Damit sich das Muster um die Ecke herum schließt, muss die Anzahl der an der Ecke anliegenden Flächen ein Vielfaches von 3 sein. Folglich sieht das Muster in der Umgebung jeder Ecke so aus wie eine verzweigte Überlagerung des Standardfußballs bei einem Verzweigungspunkt.

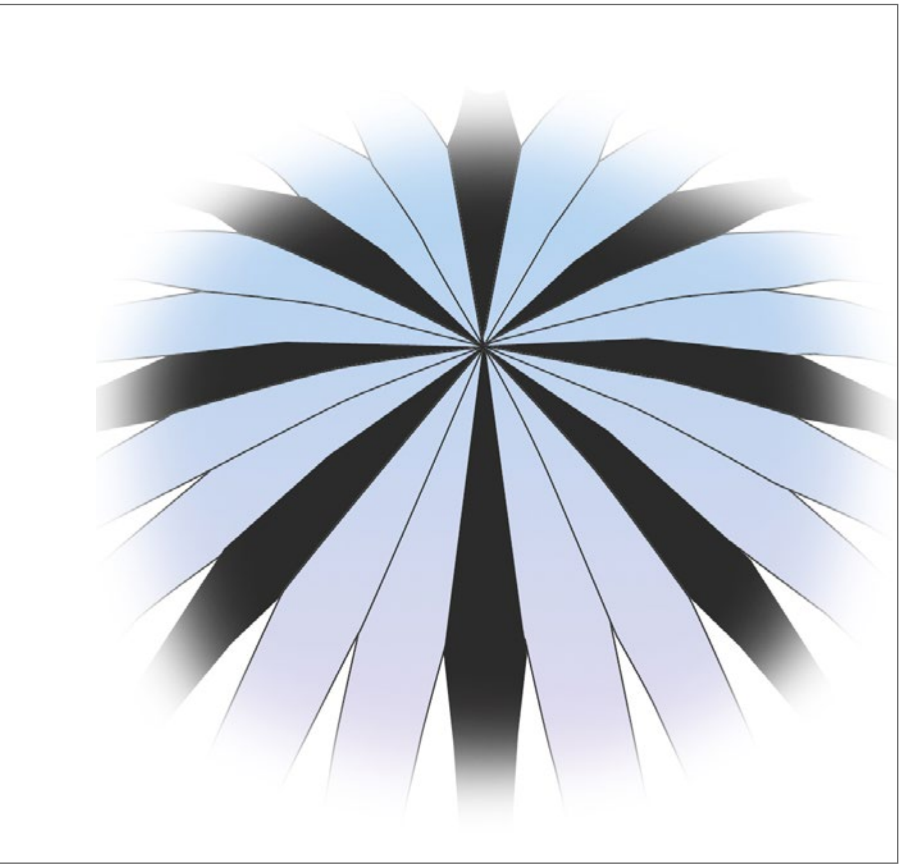
Das ist zwar nur eine lokale Information; aber die Überlagerungstheorie – der Teil der Topologie, der Abbildungen zwischen Räumen untersucht, die lokal gleich aussehen – erlaubt es, daraus Schlüsse auf globale Eigenschaften zu ziehen und insbesondere zu beweisen, dass tatsächlich jeder Fußball eine verzweigte Überlagerung des Standardfußballs ist.

Jenseits der Fünf- und Sechsecke

Das Verallgemeinern liegt dem Mathematiker im Blut. Kaum hat er ein Ergebnis,

Achtblättrige verzweigte Überlagerung eines Standardfußballs.

MICHAEL TROTT



SPEKTRUM DER WISSENSCHAFT / THOMAS BRAUN, HEIDELBERG

FLÄCHENVERTEILUNG

Bei einem (mathematischen) Fußball liegen um jede Ecke die Flächen in der Reihenfolge schwarz, weiß, weiß, schwarz, weiß, weiß und so weiter. Insbesondere ist die Gesamtzahl dieser Flächen ein Vielfaches von 3.

schaut er nach, welche der verwendeten Voraussetzungen er wirklich braucht und welche vielleicht entbehrlich sind. In unserem Fall stellt sich rasch heraus, dass wir von der Tatsache, dass Fußbälle aus Fünf- und Sechsecken bestehen, nirgends Gebrauch gemacht haben. Führen wir also verallgemeinerte Fußbälle ein!

Das sind Polyeder, die immer noch Flächen zweier Arten haben, schwarze mit je s Kanten und weiße mit je w Kanten. Aber wir bestehen nicht mehr darauf, dass $s = 5$ und $w = 6$ ist. Allerdings sollen immer noch die schwarzen Flächen nur zu weißen Flächen benachbart sein und an den Kanten weißer Flächen abwechselnd schwarze und weiße Flächen anliegen – woraus folgt, dass W eine gerade Zahl sein muss.

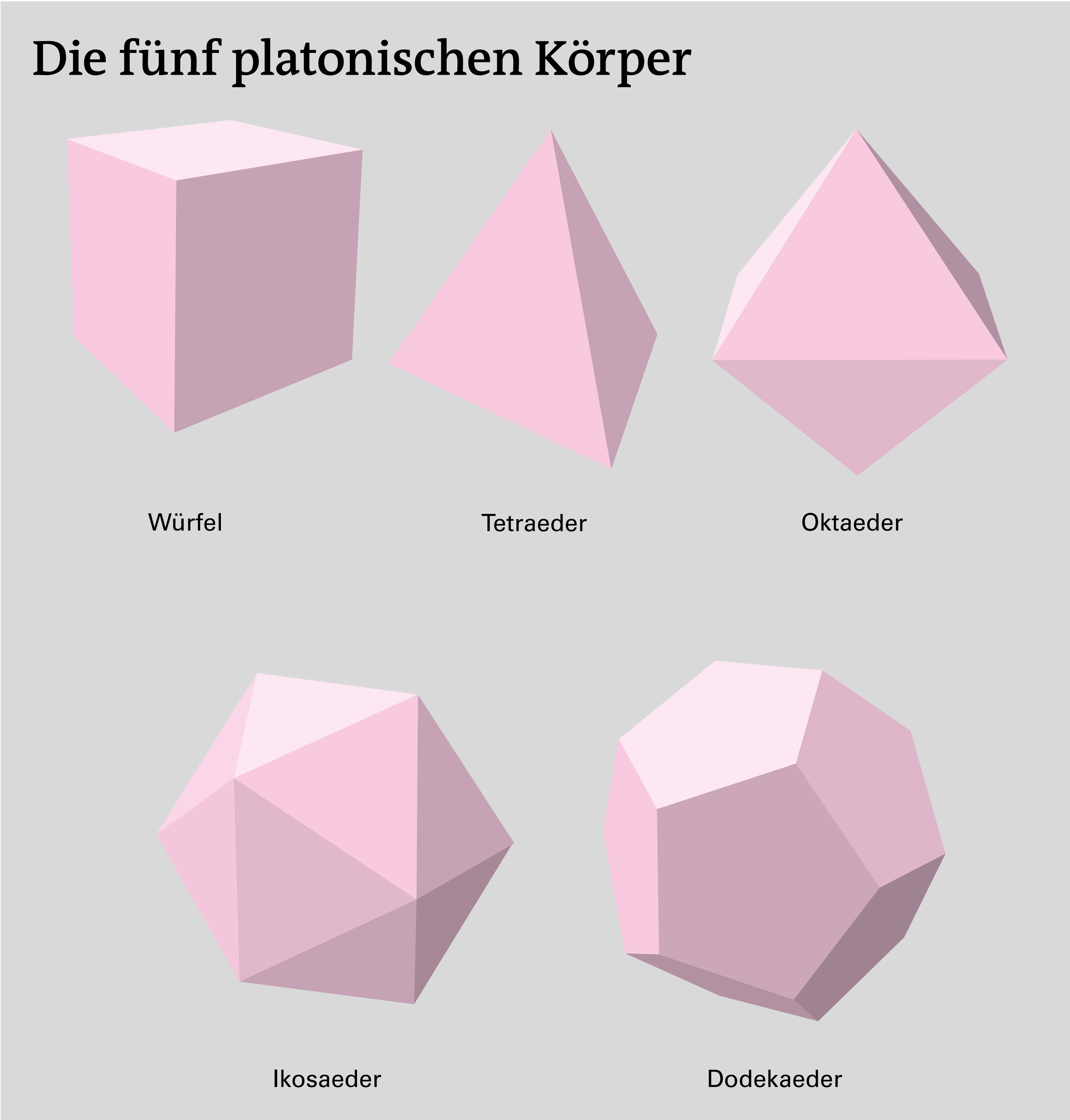
Wir können noch einen Schritt weitergehen, indem wir verlangen, dass eine weiße Fläche nur an jeder n-ten Kante eine schwarze Fläche trifft und dass alle übrigen benachbarten Flächen weiß sind. Dann muss w ein Vielfaches von n sein; das heißt $w = m \cdot n$ für eine ganze Zahl m. Nach wie vor sollen schwarze Flächen nur an weiße grenzen.

Das Farbschema eines derart verallgemeinerten Fußballs wird also durch die drei ganzen Zahlen (s, m, n) beschrieben; dabei ist s die Anzahl der Kanten einer schwarzen Fläche, $w = m \cdot n$ die Anzahl der Kanten einer weißen Fläche, und jede n-te Kante einer weißen Fläche grenzt an eine schwarze. Welche Kombinationen von s, m und n sind überhaupt möglich? Die Antwort hängt eng mit den regulären Polyedern zusammen.

Die Polyeder mit der größtmöglichen Symmetrie sind die platonischen Körper: Alle ihre Flächen sind gleichseitige Polygone mit der gleichen Anzahl von Kanten, und an jeder Ecke des Polyeders treffen sich gleich viele Flächen. Euklid hat in seinen »Elementen« bewiesen, dass es nur fünf solche Polyeder gibt: das Tetraeder, das Oktaeder, den Würfel, das Ikosaeder und das Dodekaeder.

Heutzutage wissen wir, dass der Beweis nicht von der metrischen Eigenschaft »Gleichseitigkeit« abhängt. Das folgende topologische Argument, das nur die eulersche Polyederformel benutzt, zeigt, dass es neben den fünf genannten Polyedern keine weitere Möglichkeit gibt.

Jeder platonische Körper wird durch zwei Zahlen beschrieben: die Anzahl K der Ecken jeder Fläche und die Anzahl M der



SPEKTRUM DER WISSENSCHAFT / THOMAS BRAUN, HEIDELBERG

Flächen, die sich in jeder Ecke treffen. Ist f die Anzahl der Flächen, dann gilt für die Gesamtzahl der Kanten $k = (1/2)Kf$ und für die Anzahl der Ecken $e = (1/M)Kf$. Setzen wir diese Werte in die eulersche Formel $e - k + f = 2$ ein, so führen elementare Umformungen auf die Gleichung

$$1/(Kf) + 1/4 = 1/(2K) + 1/(2M).$$

Die möglichen Lösungen lassen sich leicht bestimmen. Für das Zahlenpaar (K, M) kommen nur die folgenden Werte in Frage:

(3, 3) für das Tetraeder;
(4, 3) für den Würfel und
(3, 4) für das Oktaeder;
(5, 3) für das Dodekaeder und
(3, 5) für das Ikosaeder.

Hinzu kommen die Möglichkeiten $K = 2$ und M beliebig sowie $M = 2$ und k beliebig. Sie sind nicht durch Polyeder im üblichen Sinn realisierbar, aber der erste Fall entspricht M Zweiecken in Gestalt von Melonenschalenstücken, die sich sämtlich an zwei Punkten treffen. Der amerikanische Football ist nach diesem Muster genäht.

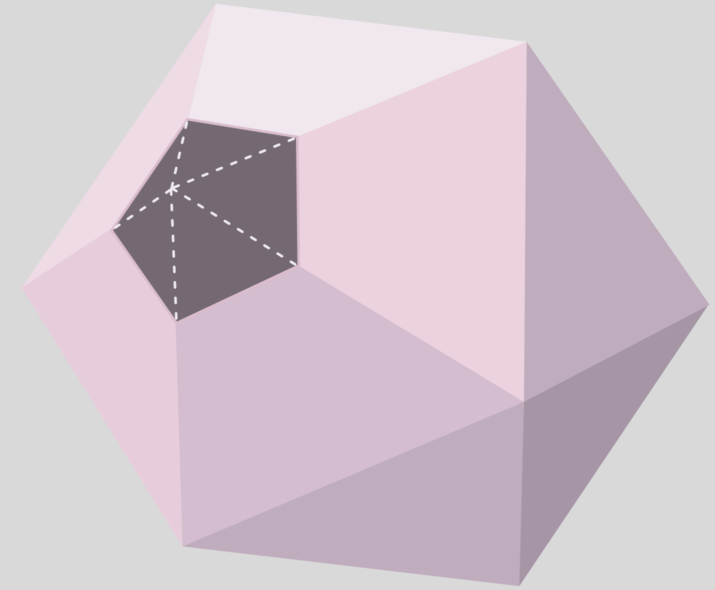
Konstruktion verallgemeinerter Fußbälle

Damit haben wir einen vollständigen Überblick über die Polyeder, die nur eine Art Flächen (nämlich k-Ecke) und nur eine Art Ecken (nämlich solche mit M Flächen) haben. Was wir suchen, sind aber Polyeder mit genau zwei Arten Flächen – schwarze und weiße –, die noch gewisse Zusatzbedingungen erfüllen. Wie kann man die aus regulären Polyedern herstellen? Eine mögliche Antwort ist: durch Entecken oder auch Abstumpfen. Man schneidet einem regulären Polyeder alle Ecken mitsamt etwas Umgebung ab. Was dabei von den Flächen des ursprünglichen Polyeders übrig bleibt, bildet die eine Art Flächen; die andere Art sind die Schnittflächen.

Für das Ikosaeder sieht das so aus: An jeder seiner zwölf Ecken kommen fünf Flächen zusammen. Durch Abschneiden jeder Ecke entsteht ein Fünfeck, und die 20 Dreiecke werden zu Sechsecken zurechtgestutzt. Die Kanten jedes Sechsecks sind im Wechsel die Überreste der ursprünglichen Ikosaederkanten und die neu entstandenen Kanten zu den Schnittflächen. Mit den Kanten der ersten Art grenzt das Sechseck an ein weiteres Sechseck, mit denen der zweiten Art an ein Fünfeck. Das ist nichts anderes als der Standardfußball! Mathematiker nennen ihn den Ikosaederstumpf.

Dieselbe Prozedur ist auch auf die übrigen platonischen Körper anwendbar. So besteht der Tetraederstumpf aus Dreiecken und Sechsecken, wobei die Dreiecke nur an Sechsecke grenzen und die Sechsecke abwechselnd an Dreiecke und Sechsecke. Es handelt sich um einen verallgemeinerten Fußball mit $s = 3$, $m = 3$, $n = 2$ (und $w = \mathrm{m} \cdot n = 6$). Der Ikosaederstumpf (Standardfußball) hat $s = 5$, $m = 3$ und $n = 2$. Die übrigen Abstumpfungen ergeben $(s, m, n) = (4, 3, 2)$ für das Oktaeder, $(3, 4, 2)$ für den Würfel, $(3, 5, 2)$ für das Dodekaeder sowie $(s, 2, 2)$ mit beliebigem $s > 2$ für den entsprechenden amerikanischen Football.

Sind das die einzigen Möglichkeiten für verallgemeinerte Fußballmuster, oder gibt es weitere? Wiederum können wir die Frage mit Hilfe der eulerschen Formel beantworten. Genau wie bei den platonischen Körpern können wir die Anzahl der Flächen, Kanten und Ecken durch die Daten des Musters ausdrücken, und zwar hier die Anzahl S der schwarzen Flächen, die Anzahl W der weißen Flächen und die Parameter s, m und n. Diesmal ist die Anzahl der Flächen, die sich an einer Ecke treffen,



IKOSAEDER

Jeder platonische Körper wird durch Entecken (Abstumpfen) zu einem verallgemeinerten Fußball. Aus dem Ikosaeder entsteht der Standardfußball: Die 12 Ecken werden zu Fünfecken und die 20 Dreiecke zu Sechsecken.

SPEKTRUM DER WISSENSCHAFT / THOMAS BRAUN, HEIDELBERG nicht festgelegt; sie muss aber wie oben mindestens gleich 3 sein. Daraus ergibt sich die folgende Bedingung an die Daten des Musters:

$$1/(sS) + (n+1)/12 \leq 1/(2s) + 1/(2m)$$

Das sieht kompliziert aus, lässt sich jedoch leicht analysieren, ähnlich der Gleichung, die auf die platonischen Körper führt. Es ist nicht schwer zu zeigen, dass n höchstens 6 sein kann, weil sonst die linke Seite größer als die rechte würde. Mit etwas mehr Aufwand können wir eine vollständige Liste aller möglichen Lösungen aufstellen.

Ordentliche und unordentliche Fußbälle

Allerdings ist die Arbeit damit noch nicht getan. Es gibt Tripel wie etwa $(s, m, n) = (4, 4, 1)$, welche die Ungleichung für geeignete Werte von S erfüllen, ohne dass sich entsprechende verallgemeinerte Fußbälle konstruieren ließen. Braungardt und ich haben die Werte von (s, m, n) bestimmt, die durch verallgemeinerte Fußbälle realisiert werden; sie sind in der Tabelle aufgeführt. Für $n = 2$ sind die kleinsten Realisierungen aller Muster abgestumpfte platonische Körper.

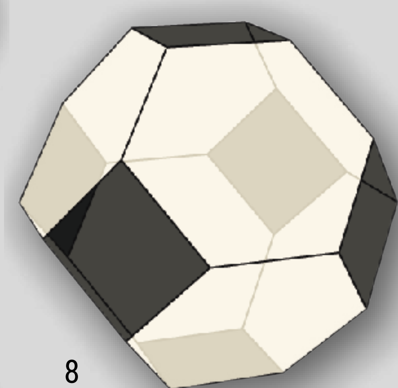
Neben dem Standardfußball (Typ 10) enthält die Tabelle drei weitere Fullerene: die Typen 14 und 20 und Typ 17 für $s = 6$. Die Anzahl der Sechsecke ist in diesen Fällen 30, 60 beziehungsweise 2 (wobei im letzten Fall die Sechsecke die schwarzen sind). Die entsprechenden Fullerenmoleküle haben 80, 140 beziehungsweise 24 Kohlenstoffatome. Während das 24-atomige Fulleren eindeutig bestimmt ist, gibt es bei 80 Atomen sieben verschiedene Anordnungen mit disjunkten Fünfecken, von denen nur eine ein verallgemeinerter Fußball ist, und bei 140 Atomen 121 354 Stück.

Hat man einen verallgemeinerten Fußball, so kann man durch eine verzweigte Überlagerung einen weiteren Fußball desselben Typs, das heißt mit denselben Werten (s, m, n), daraus machen. Aber was wir oben für den Standardfußball ausgeführt haben, nämlich dass diese Konstruktionsmethode die Menge aller verallgemeinerten Fußbälle ausschöpft, gilt nicht mehr uneingeschränkt. Es gilt für $n = 2$, das heißt, wenn weiße Flächen entlang ihren Kanten abwechselnd an schwarze und weiße Nachbarn stoßen. Aber die Aussage ist falsch für andere Werte von n. Das einfachste Gegenbeispiel ist $(s, m, n) = (3, 1, 3)$: Das Polyeder besteht aus lauter Dreiecken; die schwarzen grenzen nur an weiße und jedes weiße an genau ein schwarzes. Das minimale Beispiel ist ein Tetraeder, bei dem eine Fläche schwarz ist. Eine weitere Realisierung ist das Oktaeder, von dem zwei gegenüberliegende Flächen schwarz sind. Aber das ist keine verzweigte Überlagerung des gefärbten Tetraeders! Dann müssten nämlich an jeder Ecke 3 oder 6 oder 9 … Flächen zusammenstoßen, beim Oktaeder aber sind es vier.

Der Fall $n = 2$ ist in einem gewissen Sinn ordentlicher als alle anderen. Denn wie beim Standardmuster mit Fünf- und Sechsecken müssen alle Ecken im Wesentlichen gleich aussehen: Die einer Ecke anliegenden Flächen haben dieselbe Farbfolge, nämlich schwarz, weiß, weiß, schwarz, weiß, weiß und so weiter, nur die Länge der Folge ist offen. Die lokale Struktur eines verallgemeinerten Fußballs mit $n = 2$ ist also durch diese kombinatorischen Bedingungen schon weitgehend festgelegt. Diese Kontrolle fehlt im Fall $n \neq 2$. In der Tat haben die Ecken des gefärbten Oktaeders die Farbfolge schwarz, weiß, weiß, weiß, und beim gefärbten Tetraeder kommen sogar zwei verschiedene Farbfolgen vor. Daher können wir jetzt zwar alle verallgemei-

Die Klassifizierung der verallgemeinerten Fußbälle

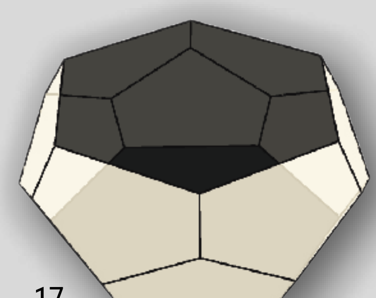
4



8

10

14

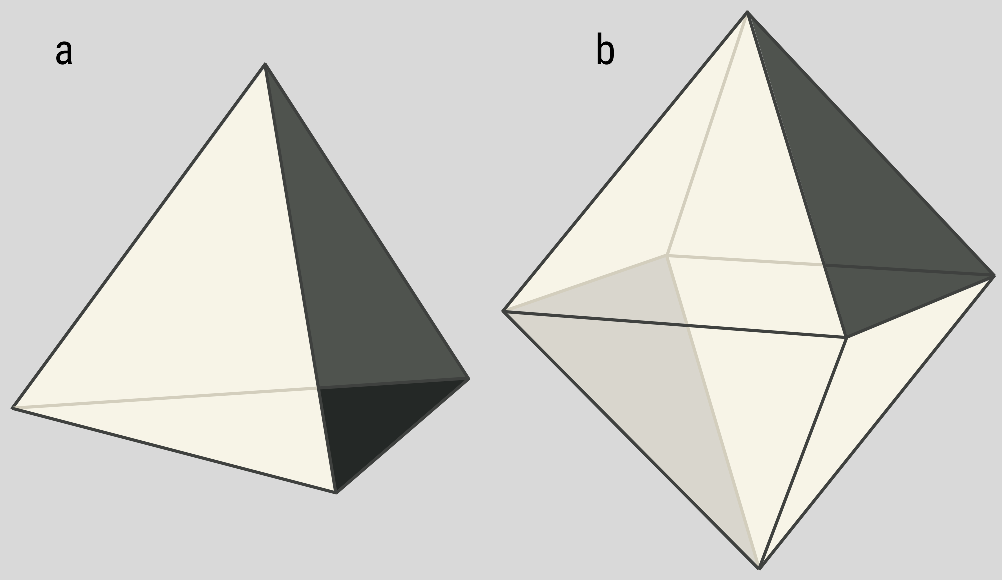


17
(s = 6)

20

MICHAEL TROTT

Typ	*s*	*m*	*n*	minimale Realisierung	*S*	*W*
1	3	3	1	Oktaeder	4	4
2	3	4	1	Kuboktaeder	8	6
3	4	3	1	Kuboktaeder	6	8
4	3	5	1	Ikosidodekaeder	20	12
5	5	3	1	Ikosidodekaeder	12	20
6	3	3	2	Tetraederstumpf	4	4
7	3	4	2	Würfelstumpf	8	6
8	4	3	2	Oktaederstumpf	6	8
9	3	5	2	Dodekaederstumpf	20	12
10	5	3	2	Ikosaederstumpf = Standardfußball	12	20
11	≥3	2	2	abgestumpfter amerikanischer Football oder *s*-seitiges Prisma	2	*s*
12	3	2	3	entkantetes Tetraeder	4	6
13	4	2	3	entkanteter Würfel	6	12
14	5	2	3	entkantetes Dodekaeder	12	30
15	≥3	1	3	einseitig abgestumpfter amerikanischer Football oder *s*-seitige Pyramide	1	*s*
16	≥3	1	4	doppeltes *s*-seitiges Prisma	2	2*s*
17	≥3	1	5	verdrehtes doppeltes *s*-seitiges Prisma	2	2*s*
18	3	1	6	bekränztes Tetraeder	4	12
19	4	1	6	bekränzter Würfel	6	24
20	5	1	6	bekränztes Dodekaeder	12	60



SPEKTRUM DER WISSENSCHAFT / THOMAS BRAUN, HEIDELBERG

TETRAEDER UND OKTAEDER

Sowohl ein Tetraeder mit einer schwarzen Fläche (*a*) als auch ein Oktaeder mit zwei gegenüberliegenden schwarzen Flächen (*b*) sind Realisierungen des Schemas (s, m, n) = (3, 1, 3), gehen aber nicht durch verzweigte Überlagerung auseinander hervor.

nerten Fußbälle mit $n = 2$ beschreiben: Sie sind verzweigte Überlagerungen abgestumpfter platonischer Körper. Doch verfügen wir über kein einfaches Verfahren, das sämtliche verallgemeinerten Fußbälle mit $n > 2$ hervorbringt.

Coda

Sie werden es schon geahnt haben: Das Ziel unserer Überlegungen war nicht in erster Linie die Konstruktion von Bällen, die man gut treten kann. Von unserem Standpunkt aus sind unter anderen die Fußbälle besonders interessant, mit denen man gar nicht richtig spielen kann: Sie haben die Form eines Torus, einer Brezel oder einer Oberfläche mit noch mehr Löchern. Denn jede dieser Flächen ist – in einem etwas verallgemeinerten Sinn – eine verzweigte Überlagerung der Kugeloberfläche. Unsere Konstruktionen für Fußballmuster lassen sich also auf diese Flächen übertragen. Dies ist nur ein sehr einfaches Beispiel für die engen Beziehungen zwischen Graphen auf Flächen und verzweigten Überlagerungen, die in der modernen algebraischen Geometrie eine wesentliche Rolle spielen. Aber das ist eine andere Geschichte.

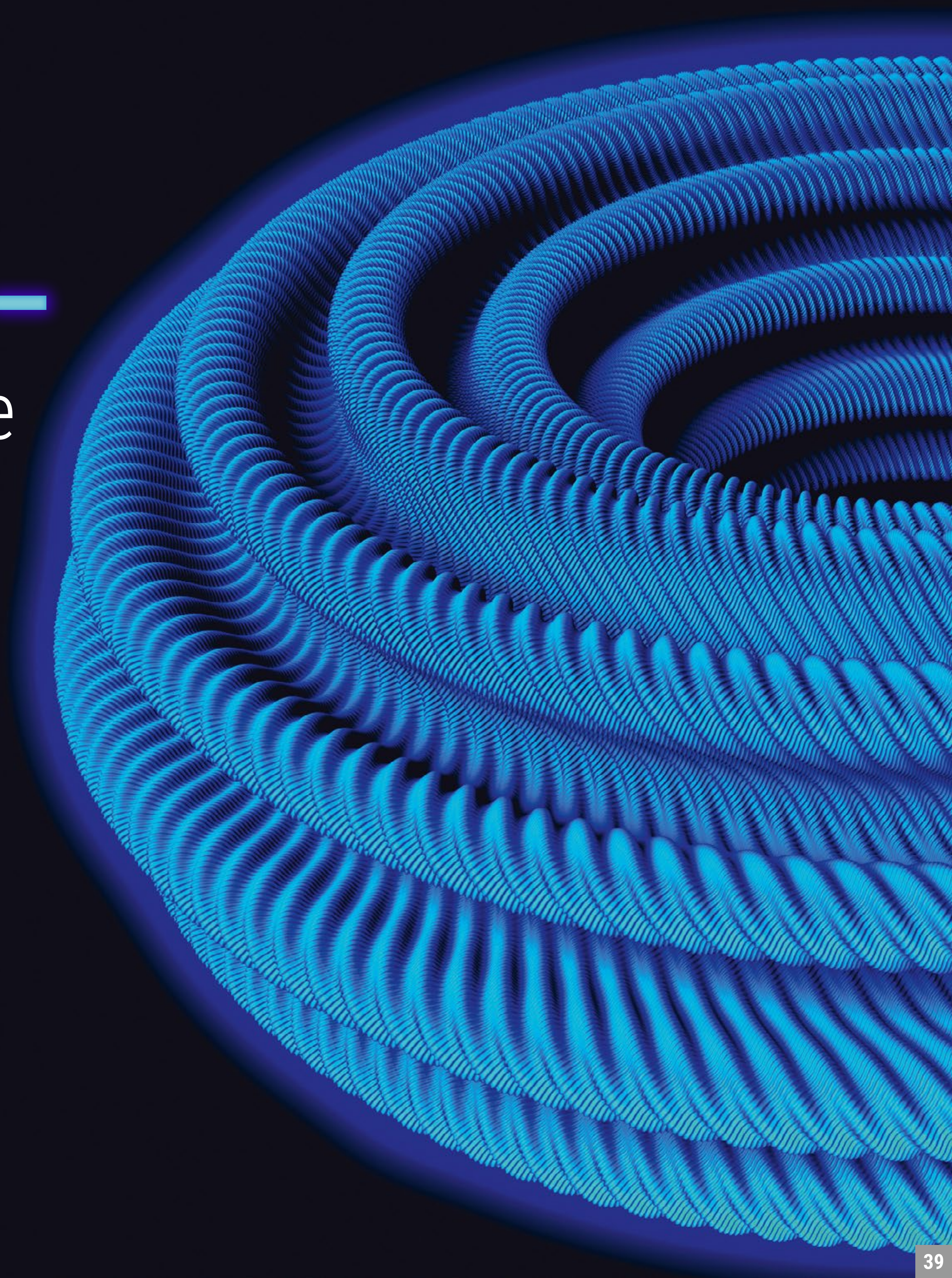
(Spektrum der Wissenschaft, Juli 2006)

DIFFERENZIALGEOMETRIE

Glatte Fraktale – eine neue Art von Fläche

von Vincent Borrelli, Francis Lazarus und Boris Thibert

Man kann einen Teil der Ebene so auf eine autoschlauchförmige Fläche abbilden, dass dabei alle Längen erhalten bleiben. Das erstmals visualisierte Resultat ist das erste bekannte Exemplar einer Familie neuartiger geometrischer Objekte.



VINCENT BORRELLI, SAÏD JABRANE, FRANCIS LAZARUS, DAMIEN ROHMER UND BORIS THIBERT

Eigentlich kennt man den amerikanischen Mathematiker John Nash als Pionier der Spieltheorie und Schöpfer des nach ihm benannten Gleichgewichtsbegriffs. Über dieser Leistung, die ihm 1994 den Wirtschaftsnobelpreis einbrachte, ist ein anderer Geniestreich von ihm fast in Vergessenheit geraten. In den 1950er Jahren entdeckte Nash, dass ein als unlösbar geltendes geometrisches Problem Lösungen im Überfluss hat. Es geht darum, eine »isometrische Einbettung« zu finden, eine Abbildung von der Ebene auf eine gekrümmte Fläche mit der Eigenschaft, dass alle Längen erhalten bleiben.

Ein paar Seiten mathematischer Argumentation genügten Nash, um aus der Unmöglichkeit eine Möglichkeit zu machen und dabei einige vermeintliche Gewissheiten über den Haufen zu werfen. Es gab nur eine ärgerliche Kleinigkeit: Obwohl niemand ernsthaft bezweifelte, dass eine isometrische Einbettung existiert, konnte niemand sie sich vorstellen, und deswegen verstand auch niemand sie richtig. Dank einer Kombination von Mathematik und Informatik ist es uns gelungen, diese Lücke zu schließen. Das Resultat ist eine Fläche von ganz neuem Typ; wir haben sie als glattes Fraktal bezeichnet, weil sie über gewisse Eigenschaften eines Fraktals verfügt.

Unsere Arbeit stützt sich auf eine Theorie namens »konvexe Integration«, die der russisch-französische Mathematiker Mikhail Gromov entwickelt hat. Unter anderem von Nashs Arbeiten inspiriert, liefert sie ein mächtiges Werkzeug zur Lösung zahlreicher Probleme aus dem Grenzbereich von Geometrie und Analysis. Sie ist so abstrakt formuliert, dass irgendwelche Anwendungen undenkbar schienen; dem ist jedoch nicht so, wie wir zeigen konnten. Gromovs Theorie erlaubt es, sehr konkret gewisse Klassen von partiellen Differenzialgleichungen zu lösen – das sind solche, deren Unbekannte Funktionen mehrerer Veränderlicher sind.

Die Anfänge des Problems reichen in die 1850er Jahre zurück. Damals revolutionier-

Vincent Borrelli ist Dozent an der Université Claude Bernard und Mitglied des Institut Camille Jordan in Lyon. **Francis Lazarus** ist Informatiker und arbeitet am Laboratorium Gipsa-lab, einer Gemeinschaftseinrichtung des französischen Forschungsverbunds CNRS und der Université de Grenoble. **Boris Thibert** ist Dozent für angewandte Mathematik an der Université Joseph Fourier und Mitglied des Laboratoire Jean Kuntzmann, beides in Grenoble.

AUF EINEN BLICK

Eine neue Art von Flächen

1 Aus einem Quadrat kann man in Gedanken einen **Torus** (eine autoschlauchförmige Fläche) machen, indem man jeweils zwei gegenüberliegende Seiten miteinander verklebt.

2 Damit das gelingt, muss man das Quadrat stark verzerren; eine solche Abbildung kann nicht isometrisch (längentreu) sein.

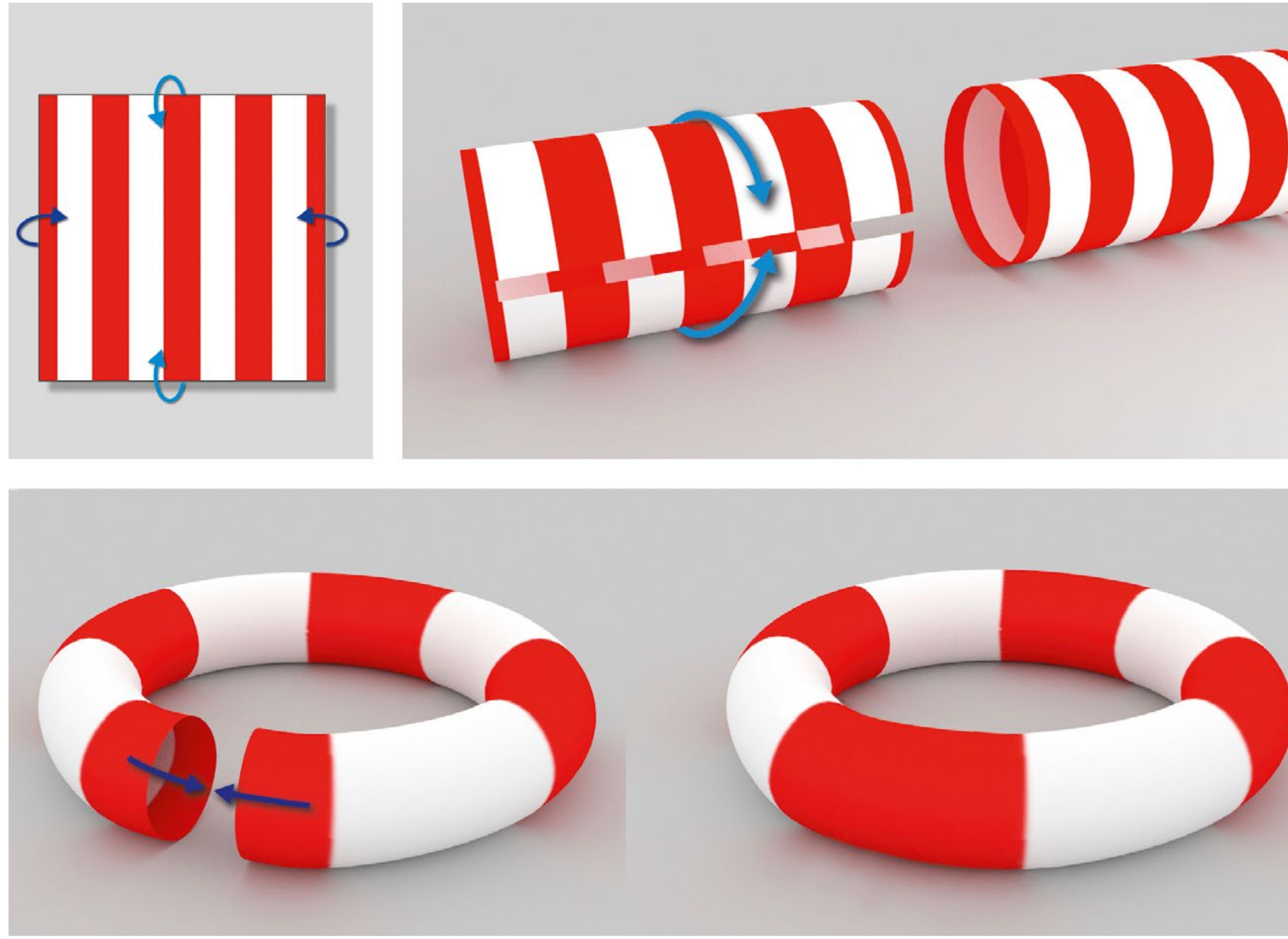
3 Durch eine **sehr spezielle Deformation des Torus** kann man die Abbildung längentreu machen; allerdings ist die entstehende Fläche weniger glatt als gewöhnliche Flächen.

3 Vielmehr hat sie eine **fraktale Struktur mit Runzeln** in allen Größenskalen.

te Bernhard Riemann (1826–1866) die Geometrie, indem er einen radikalen Wechsel der Perspektive vollzog.

Der begrifflich einfachste Weg, eine Fläche im Raum zu beschreiben, ist die »Parametrisierung«. Das ist eine Funktion, die jedem Punkt der Ebene – oder eines Teilstücks der Ebene – einen Punkt im Raum zuordnet. Die Fläche besteht dann aus allen Werten dieser Funktion. Das Ebenenstück, auf dem die Funktion definiert ist, wird manchmal auch eine »Karte« der Fläche genannt. Unter einer geeigneten Parametrisierung verwandeln sich Gitterlinien (»Rechenkästchen«) auf einer rechteckigen Karte in Längen- und Breitenkreise auf einer Kugeloberfläche. Ein Zylinder wird parametrisiert durch ein Rechteck, bei dem zwei gegenüberliegende Seiten miteinander identifiziert werden; man klebt gewissermaßen die linke und die rechte Seite eines Blattes Papier zur Röhre zusammen. (Hier und im Folgenden verstehen wir unter einem Zylinder nur die gekrümmte Mantelfläche, also eine Konservendose ohne Boden und Deckel.) Entsprechend wird aus einer autoschlauchförmigen Fläche (einem Torus) ein »quadratischer Torus«, das heißt ein Quadrat, bei dem gegenüberliegende Seiten paarweise identifiziert werden.

Allerdings sagt einem eine Parametrisierung über eine Fläche mehr, als man eigentlich wissen will. Es interessiert einen nicht wirklich, wo und in welche Richtung orientiert die Fläche im Raum liegt; vielmehr möchte man den Standpunkt eines



PATRICK MASSOT

VOM QUADRAT ZUM ZYLINDER
Aus einem Quadrat entsteht ein Zylinder, indem man zwei gegenüberliegende Seiten des Quadrats miteinander verklebt. Um einen Torus daraus zu machen, muss man auch noch die beiden verbleibenden Seiten zusammenbringen, was nicht ohne erhebliche Verzerrung abgeht.

fiktiven Wesens einnehmen, das auf der Fläche lebt und dort auch Längen und Winkel messen kann, aber außerhalb seiner Fläche nichts wahrnimmt. Gleichwohl kann unser gedachter Flächenbewohner Dreiecke vermessen und zum Beispiel aus der Tatsache, dass die Winkelsumme im Dreieck in einer systematischen Weise größer ist als 180 Grad, erschließen, dass er auf einer Kugeloberfläche lebt.

Riemannsche Metrik

Riemann ersetzte nun die Parametrisierung einer Fläche durch eine Funktion, die in jedem Punkt die »intrinsischen« (für einen Flächenbewohner erkennbaren) Eigenschaften der Fläche beschreibt. Allerdings sind die auf der Fläche gemessenen Längen im Allgemeinen nicht die Längen auf der Karte. Von wenigen Ausnahmen wie dem Zylinder abgesehen, ist es nicht möglich, ein Stück Ebene so mit einer gekrümmten Fläche in Beziehung zu setzen, dass Längen und Winkel in der Ebene gleich ihren Gegenstücken auf der Fläche sind. Es gibt keine Karte der Erdoberfläche, die zugleich längen- und winkeltreu ist. Und auf dem Torus ist der äußere Äquator länger als der innere, während die ihnen entsprechenden Kurven auf dem quadratischen Torus – das sind zwei horizontale Strecken – gleiche Länge haben.

Riemann korrigierte diesen Mangel auf eine merkwürdig anmutende Weise. Er führte auf der Karte einen orts- und richtungsabhängigen Maßstab ein. Diesen wählte er so, dass die mit dem verzerrenden Maßstab auf der Karte gemessenen Längen genau die richtigen Längen auf der Fläche sind. Wie sich herausstellt, ist dieser ortsabhängige Maßstab, der nach seinem Erfinder »riemannsche Metrik« heißt, alles, was man über die Geometrie der Fläche wissen muss.

Riemanns Vorgehen erlaubt es, die möglicherweise sehr unübersichtliche Form der Fläche völlig außer Acht zu lassen. Wichtig ist nur ihre Darstellung durch ein Stück Ebene plus einen ortsabhängigen Maßstab, eben die riemannsche Metrik, auf derselben. Diese Sichtweise erweist sich als überaus effizient; insbesondere liegt sie der mathematischen Formulierung der allgemeinen Relativitätstheorie zu Grunde.

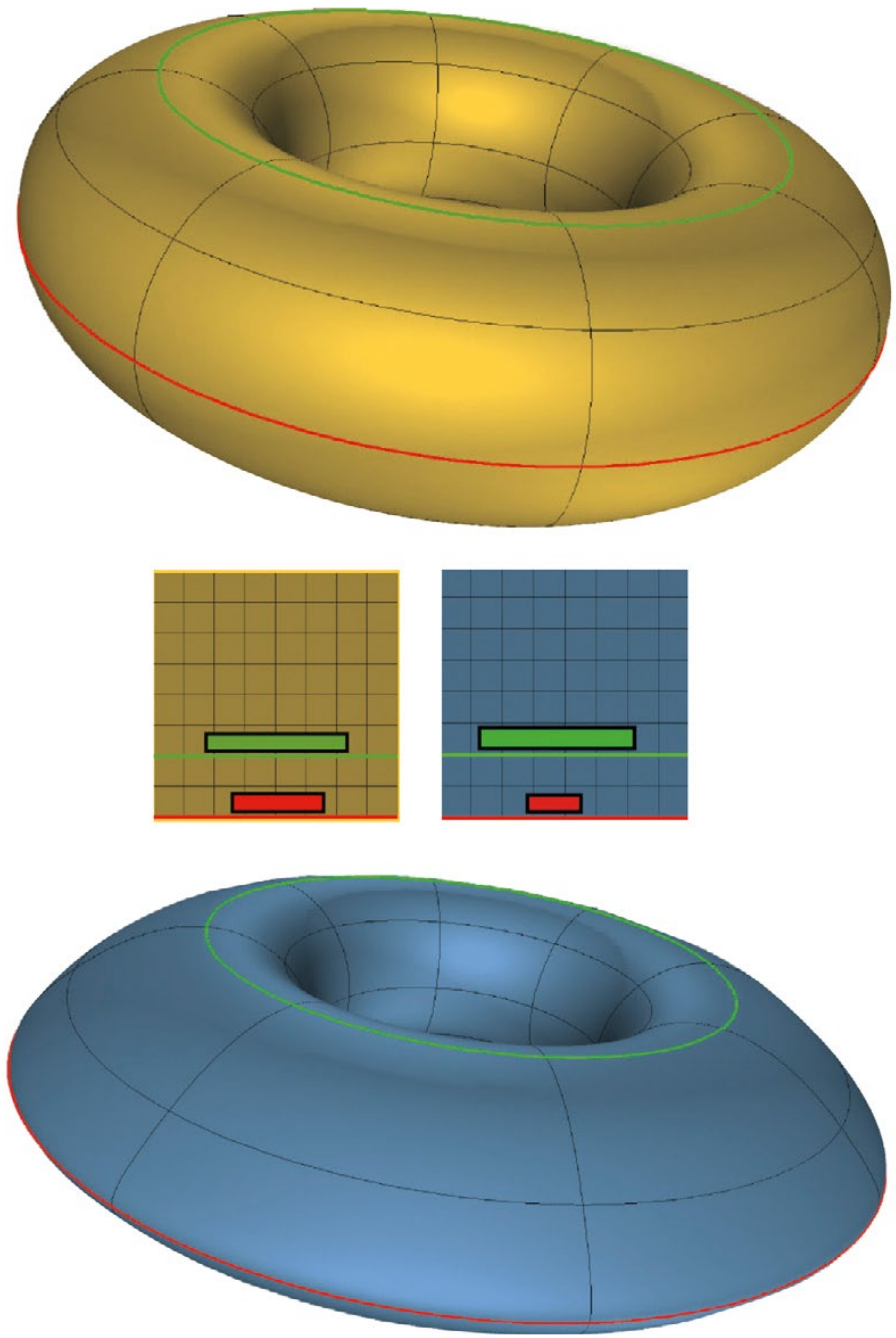
Damit reduziert sich das Studium der Flächen auf die Arbeit mit riemannschen Metriken, also im Wesentlichen mit den Funktionen, die zu jedem Ort und zu jeder Richtung den zugehörigen Maßstab angeben. Derartige Maßstabsfunktionen gibt es sehr viele, darunter solche mit sehr sonderbaren Eigenschaften, was eine schwierige Frage aufwirft: Existiert zu einer beliebigen »riemannschen Mannigfaltigkeit«, das heißt zu einem Stück Ebene mitsamt riemannscher Metrik, eine Fläche, die diese Geometrie im dreidimensionalen Raum konkret realisiert? Das ist das erwähnte Problem der isometrischen Einbettung. Eine Abbildung wird als isometrisch bezeichnet, wenn sie die Entfernungen nicht verändert. Das gilt normalerweise nur für Kongruenzabbildungen wie Drehungen und Verschiebungen; aber eine isometrische Abbildung von einer riemannschen Mannigfaltigkeit in eine Fläche kann wesentlich komplizierter sein.

Das Problem der isometrischen Einbettung läuft also darauf hinaus, ob es zu jeder riemannschen Mannigfaltigkeit eine Fläche gibt, die mit dieser durch eine isometrische Abbildung verbunden ist, und umgekehrt (zu einer beliebigen Fläche eine riemannsche Metrik zu finden, ist nicht schwer). John Nash hat diese Frage mit »Ja« beantwortet – unter gewissen Voraussetzungen, die wir weiter unten besprechen.

Um die Schwierigkeit des Problems nachvollziehen zu können, genügt es, den quadratischen Torus zu betrachten, also ein Quadrat mit identifizierten gegenüberliegenden Seiten, das mit einem ortsabhängigen Maßstab versehen ist. Wie wir gesehen haben, ist der gewöhnliche Torus dessen Realisierung. Nichts hindert uns daran, auf demselben quadratischen Torus einen anderen Maßstab zu definieren und dadurch ein anderes abstraktes geometrisches Gebilde zu erzeugen. Der einfachste derartige Maßstab ist der aus dem Alltag gewohnte, bei dem die Längen überhaupt nicht vom Ort abhängen. Im Folgenden soll der quadratische Torus mit dieser konstanten Maßstabsfunktion »flacher quadratischer Torus« heißen.

Vom Quadrat zum Torus unter Erhaltung der Längen

Welche Fläche im dreidimensionalen Raum realisiert den flachen quadratischen Torus – wenn es sie überhaupt gibt? Der gewöhnliche Torus kann es offensichtlich nicht sein. Wie schwer das Problem ist, merkt man, wenn man versucht, bei einem echten Quadrat aus Papier beide Paare gegenüberliegender Seiten zu verkleben.



Riemannsche Metrik

Auf dem gelben Torus (oben) ist die rote Kurve länger als die grüne. Damit Längen auf dem echten Torus und auf dem zugehörigen Stück Ebene, dem »quadratischen Torus«, übereinstimmen, muss auf Letzterem eine Längeneinheit im roten Bereich kürzer sein als eine im grünen. Verkürzt man den roten Maßstab noch weiter, ändert der Torus seine Form (blaue Bilder). Das Problem der isometrischen Einbettung läuft auf die Frage hinaus, ob es zu jeder beliebigen Wahl der riemannschen Metrik – des ortsabhängigen Maßstabs auf dem Quadrat – eine passende Fläche gibt.

VINCENT BORRELLI, SAÏD JABRANE, FRANCIS LAZARUS, DAMIEN ROHMER UND BORIS THIBERT

Wenn das überhaupt gelingt, dann nur unter gewaltiger Verknitterung und mit vorspringenden Ecken; das entstehende Objekt ähnelt in nichts einer Fläche. Unweigerlich stellt sich der Eindruck ein, es sei unmöglich, das Papier zu einer Fläche zu deformieren, die dieser Bezeichnung würdig ist.

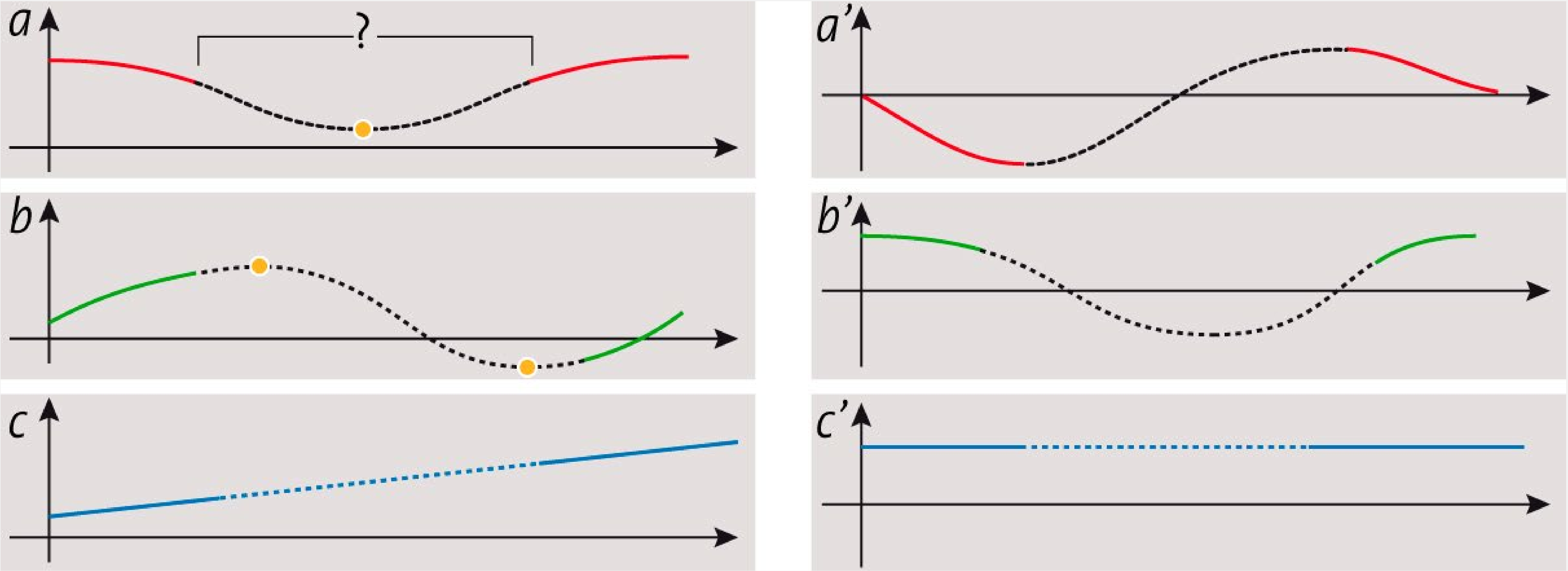
Dieses Gefühl lässt sich durch eine geometrische Größe namens »gaußsche Krümmung« klarer fassen. Das ist eine Zahl, die man für jeden Punkt einer Fläche ausrechnen kann; in diese Berechnung gehen zweite Ableitungen der Parametrisierungsfunktion beziehungsweise der riemannschen Metrik ein. Die gaußsche Krümmung gibt ungefähr unsere anschauliche Vorstellung von Krümmung wieder. So ist die gaußsche Krümmung der Ebene in jedem Punkt gleich null. Das trifft auch auf einen Zylinder zu, den man ja vollständig in die Ebene abrollen kann. Für eine Kugeloberfläche hat sie in jedem Punkt den gleichen positiven Wert – sehr klein für die Erdkugel, aber merklich größer für die Planeten, die der »kleine Prinz« von Saint-Exupéry besucht. Zu Beginn des 19. Jahrhunderts bewies Carl Friedrich Gauß (1777–1855), dass die heute nach ihm benannte Krümmung eine bemerkenswerte Eigenschaft besitzt: Sie bleibt unverändert, wenn man die Fläche unter Erhaltung aller Abstände deformiert.

Was sagt uns das über den flachen quadratischen Torus? Seine gaußsche Krümmung ist null; also müsste das auch für die ihn realisierende Fläche gelten, was eine sehr starke Einschränkung darstellt. Man kann sogar zeigen, dass die Forderung unerfüllbar ist. Genauer beweist man Folgendes: Eine beliebige Fläche von der topologischen Gestalt eines Torus – das heißt, man kann sie durch stetige, also nicht zerreißende oder zusammenklebende Deformationen zu einem Torus zurechtbiegen – hat unweigerlich Punkte, an denen ihre gaußsche Krümmung ungleich null ist.

Das scheint ein stichhaltiger Unmöglichkeitsbeweis zu sein: Allem Anschein nach gibt es keine isometrische Einbettung des quadratischen flachen Torus. Umso überraschter war die Fachwelt, als Nash 1954 nachwies, dass diese Unmöglichkeit relativ, trügerisch und vermeidbar ist. Mehr noch – es gibt eine Vielzahl isometrischer Einbettungen. Im darauf folgenden Jahr führte der niederländische Mathematiker Nicolaas Kuiper (1920–1994) Nashs Arbeit weiter und konnte sogar zeigen, dass man den flachen quadratischen Torus auf unendlich viele Weisen im dreidimensionalen euklidischen Raum realisieren kann.

Wo steckt die Lücke in dem Unmöglichkeitsbeweis, die Nash und Kuiper nutzten? Hierzu muss man sich mit der Glattheit (»Regularität«) von Flächen beschäftigen. Eine Fläche ist per definitionem glatt in dem Sinn, dass sie keine Knicklinien oder gar Löcher aufweist. Mathematisch ausgedrückt: Sie hat in jedem Punkt eine Tangentialebene. Es gibt jedoch unterschiedliche Grade dieser Glattheit.

Dies lässt sich am besten an einer Skateboardbahn veranschaulichen. Eine beliebte Form ist die »Halfpipe«, die untere Hälfte eines auf den Boden gelegten Zylindermantels, in dessen Innerem der Skater beim Abwärtsrollen Schwung gewinnt. Es gibt auch Bahnen, bei denen die Halfpipe gewissermaßen entlang der Bodenlinie durchgeschnitten und zwischen die beiden Hälften ein ebenes Stück eingefügt ist. Ein Skater, der diese Fläche entlang der Linie größten Gefälles hinunterrast, verspürt einen Stoß in dem Moment, in dem er die Verbindungslinie überschreitet – nicht etwa, weil dort eine Fuge im Beton wäre,



VINCENT BORRELLI, SAÏD JABRANE, FRANCIS LAZARUS, DAMIEN ROHMER UND BORIS THIBERT

Topologische und analytische Hindernisse

In der Differenzialgeometrie, dem Teilgebiet der Mathematik, in dem man die Analysis (Differenzial- und Integralrechnung) zum Studium von Kurven, Flächen und dergleichen verwendet, erfordert die Lösung eines Problems zwei Schritte, einen topologischen und einen analytischen.

Hier ein einfaches Beispiel: Gegeben sind drei Fragmente von Funktionen *a*, *b* und *c*. Ist es möglich, sie in ihrem bisher nicht festgelegten Mittelteil so zu ergänzen, dass die Tangente an die Kurve in keinem Punkt horizontal liegt (gelbe Punkte)?

In einem derartigen Punkt wäre die Ableitung der Funktion gleich null, der Graph der Ableitungsfunktion *a'*, *b'* beziehungsweise *c'* (rechte Bilder) würde also dort die horizontale Achse schneiden. Die gestellte Frage läuft somit darauf hinaus, ob man den Graphen der jeweiligen Ableitungsfunktion so ergänzen kann, dass er die horizontale Achse nicht trifft. Das entspricht dem ersten, topologischen Schritt.

Wie man sieht, kann man die Kurve *a'* nicht ergänzen, ohne die Achse zu schneiden. Daraus folgt, dass eine horizontale Tangente an die Kurve ***a*** nicht zu vermeiden ist. Dagegen kann man die Kurven *b'* und *c'* ergänzen, ohne die horizontale Achse zu treffen.

Nachdem der topologische Teil des Problems für diese beiden Kurven gelöst ist, geht man zum analytischen über und stellt fest, dass bei der Kurve *b* ein Verbotsschild auftaucht: Nach dem Satz von Rolle, einem Spezialfall des Mittelwertsatzes der Differenzialrechnung, ist es unmöglich, die Kurve ***b*** zu vervollständigen, ohne eine horizontale Tangente zu erzeugen. Dagegen ist im Fall der Kurve *c* der Weg frei, eine Ergänzung ohne horizontale Tangente ist also möglich.

sondern weil die Krümmung der Bahn dort plötzlich von einem positiven Wert auf null abfällt. (Achtung: Es handelt sich nicht um die gaußsche Krümmung der Fläche, denn die ist im zylindrischen wie im ebenen Teil null, sondern um die Krümmung der – eindimensionalen – Linie, die der Skater entlangfährt.)

Gute Skatebahnen ersparen ihren Benutzern diese Erschütterung, indem ihre gekrümmten Teile nicht eine konstante, sondern eine stetig auf null abfallende Krümmung haben. Aus demselben Grund sind echte Eisenbahnschienen nicht wie ihre Gegenstücke in der Modellbahn aus geraden Stücken und Kreisbögen zusammengesetzt, sondern folgen speziellen Kurven, den so genannten Klothoiden.

Im Querschnitt betrachtet, entspricht die primitive Skatebahn – Kreisbogen plus angesetztes Geradenstück – zwar einer differenzierbaren Funktion, denn die Kurve hat in jedem Punkt eine Tangente. Die Funktion ist sogar zweimal differenzierbar, aber die zweite Ableitung ist nicht mehr stetig, sondern macht einen Sprung am Übergangspunkt.

Allgemein teilt man in der Differenzialrechnung die Funktionen in Qualitäts-(Glattheits-)klassen ein. Die Klasse C^1 umfasst alle Funktionen, deren Ableitung existiert und stetig ist, das heißt keine Sprünge macht. Zur Klasse C^2 gehören die »zweimal stetig differenzierbaren Funktionen«, das heißt solche, bei denen die zweite Ableitung existiert und stetig ist. Jede C^2-Funktion gehört automatisch zu C^1, denn wenn die erste Ableitung nicht stetig ist, kann die zweite nicht existieren. So geht es weiter mit C^3, C^4 … bis zu C^∞, der Klasse der unendlich oft differenzierbaren Funktionen.

Inwiefern kann diese Klasseneinteilung unser Paradox aufklären? In den Beweis, dass die isometrische Einbettung des flachen quadratischen Torus unmöglich ist, ging an entscheidender Stelle die gaußsche Krümmung ein. Diese gibt es jedoch nur für ziemlich reguläre Flächen, denn sie ist wie beschrieben über zweite Ableitungen definiert; also muss die Fläche mindestens der Klasse C^2 angehören. Ist sie nicht hinreichend glatt, sondern gehört beispielsweise nur zur Klasse C^1, so kann man ihre gaußsche Krümmung nicht mehr berechnen. Dieser Begriff verliert folglich seinen Sinn. Also kann jede Überlegung, die sich auf die Krümmung stützt, nur beweisen, dass es keine Fläche der Klasse C^2 mit den geforderten Eigenschaften gibt. Flächen der niedrigeren Qualitätsklasse C^1 sind damit nicht ausgeschlossen. Durch den Verzicht auf einen Grad an Regularität öffnet sich der Zugang zu einer Welt, in der es auf die gaußsche Krümmung nicht mehr ankommt.

Eine Welt ohne Einschränkungen

Damit ist zwar ein entscheidender Grund dafür entfallen, dass es keine Realisierung des flachen quadratischen Torus geben kann. Aber es könnten noch tausend andere Hindernisse der Existenz einer solchen Einbettung im Weg stehen. Die große Überraschung an dem Ergebnis von Nash besteht darin, dass es keine weiteren Hindernisse gibt.

Um das Ausmaß der Verblüffung besser verstehen zu können, muss man sich die üblichen Arbeitsmittel der Differenzialgeometrie vor Augen führen. In diesem Zweig der Mathematik wird die Differenzialrechnung (Ableitungen und Integrale) angewandt, um Objekte wie Kurven oder Flächen zu verstehen. Ein Beweis lässt sich mit einem Weg vergleichen, der eine Stadt *A* – die Voraussetzungen – mit einer

Stadt *B* – der zu beweisenden Behauptung – verbindet.

Zwei Arten von Hindernissen können unserer Reise im Weg stehen: physische wie zum Beispiel ein Meer und rechtliche wie Einfahrverbote oder Landesgrenzen. Gegen Hindernisse der ersten Art hilft gar nichts. Wenn es keine Landverbindung zwischen *A* und *B* gibt, haben wir schon verloren und brauchen über so etwas wie Einbahnstraßen nicht mehr nachzudenken. Dieser Teil der Frage ist relativ einfach zu beantworten; meistens genügt ein flüchtiger Blick auf die Landkarte. Auf einer existierenden Landverbindung eine rechtlich zulässige Straße zu finden, erfordert mehr Aufmerksamkeit. Die Idee, einfach nach dem Zufallsprinzip Straßen auszuwählen, wird mit großer Wahrscheinlichkeit scheitern, wenn zum Beispiel *A* in der Stadtmitte von Paris und *B* im Zentrum von Marseille liegt.

In einem differenzialgeometrischen Beweis entsprechen den Einbahnstraßen und den Grenzen die Gesetze der Differenzialrechnung. Wie eine Straßenverkehrsbehörde erlauben sie gewisse (Beweis-)Wege, während sie an anderen Verbotsschilder aufstellen. Die Suche nach einem »gesetzlich zulässigen« Weg beschäftigt einen Mathematiker oft so sehr, dass er einen anderen wichtigen, aber weniger sichtbaren Aspekt vergisst: die Topologie. Dieses Teilgebiet der Mathematik untersucht diejenigen Eigenschaften, die unter stetigen Deformationen erhalten bleiben. Wenn man beispielsweise eine Kreisscheibe verzerrt, auf der zwei Punkte und eine Verbindungslinie zwischen ihnen eingezeichnet sind, so sieht die Linie hinterher vielleicht sehr wild und krakelig aus; aber sie verbindet immer noch die beiden Punkte. Die Existenz einer Landverbindung von *A* nach *B* ist also eine topologische Eigenschaft.

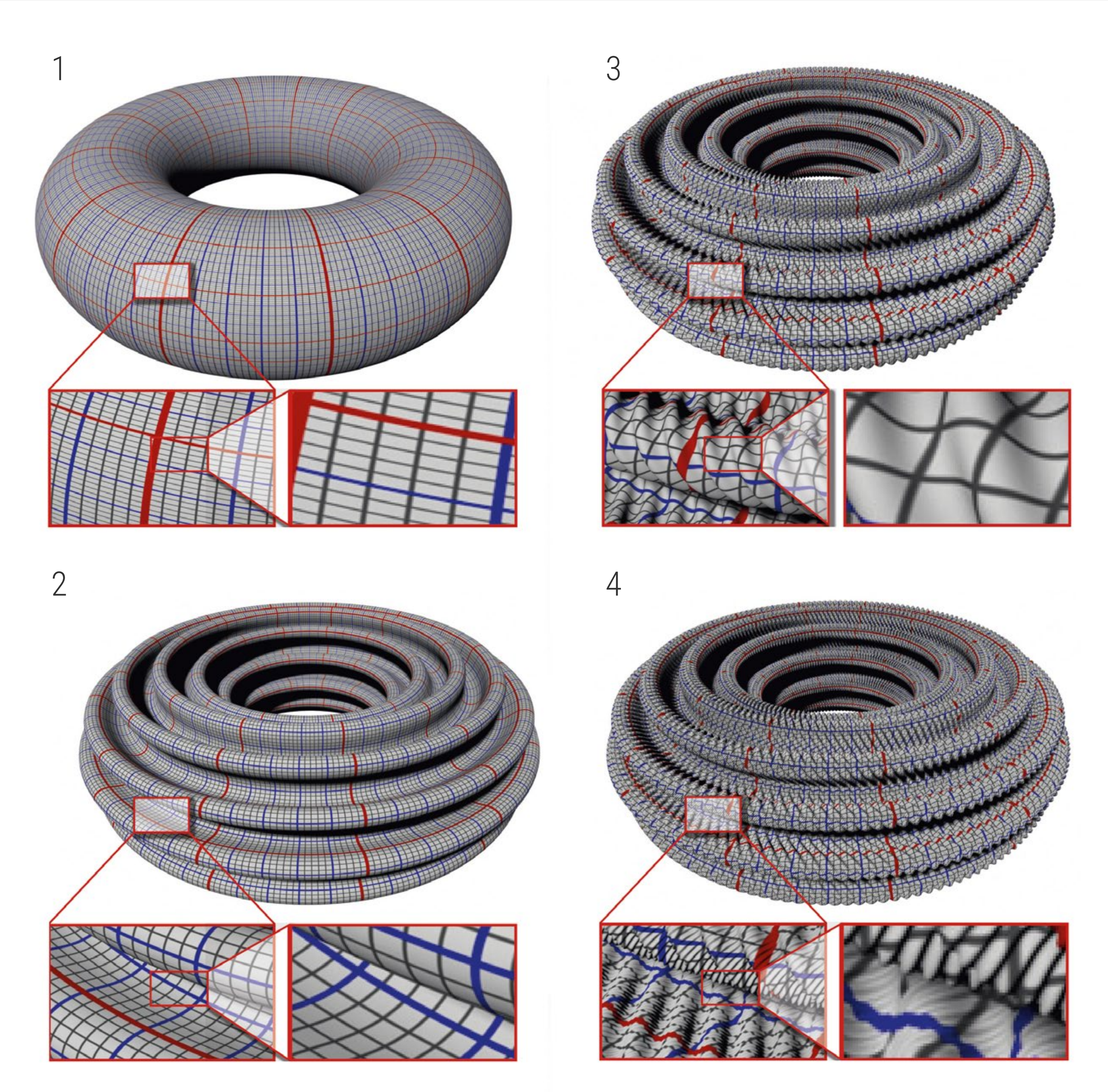
Die konvexe Integration, die befreiende Theorie

In unserer Analogie geht die Topologie der Differenzialgeometrie voraus; sie liefert die mathematischen Hilfsmittel, mit denen man die Frage »Gibt es eine Straßenverbindung von *A* nach *B*?« beantworten kann. Falls die Antwort positiv ausfällt, stellt man mit Hilfe der Differenzialrechnung fest, ob es auf der vorgeschlagenen Route Straßensperren gibt oder nicht. Die Lösung eines differenzialgeometrischen Problems zerfällt folglich in zwei Phasen: eine topologische, in der man die Existenz einer Route nachweist, und eine analytische, in der man mit Hilfsmitteln der Differenzialrechnung zeigt, dass es auf dieser Route keine rechtlichen Hindernisse gibt. Die zweite Phase ist oft schwieriger als die erste.

Die Lösung des Problems der isometrischen Einbettung liefert ein geradezu klassisches Beispiel für dieses zweischrittige Vorgehen. Der erste, topologische Schritt ist vergleichsweise einfach. Wenn man auf die Erhaltung der Längen keine Rücksicht nehmen muss, lässt sich das Quadrat mühelos zum Torus deformieren. Es gibt also keine physischen Hindernisse.

Beim zweiten, geometrischen Schritt erscheint sofort ein Verbotsschild – wegen der gaußschen Krümmung. Diese müsste überall null sein, was aber unmöglich ist, wie wir gesehen haben. Doch das Verbotsschild gilt nur für Flächen der Klasse C^2, so wie wenn die Straße für Kraftfahrzeuge gesperrt ist. Fahrzeuge minderer Qualität wie Fahrräder, das heißt Flächen der Klasse C^1, sind nicht betroffen. Zum großen Erstaunen der Mathematiker ist kein weiteres Verbotsschild aufgetaucht.

In den 1970er Jahren entdeckte Gromov, dass die von Nash entdeckte Abwesenheit



VINCENT BORRELLI, SAÏD JABRANE, FRANCIS LAZARUS, DAMIEN ROHMER UND BORIS THIBERT

Runzeln in jedem Maßstab

Bei der üblichen Abbildung eines Quadrats auf einen Torus werden die Kästchen eines Gitters (man denke sich das Quadrat aus Millimeterpapier) zu Vierecken mit ungleichen Seitenlängen verzerrt (links, Ausschnittvergrößerung in zwei Stufen). Indem der Torus in – horizontale – Runzeln gelegt wird, gelingt es, diese Ungleichheit zu verringern. Im Grenzwert unendlich vieler Verrunzelungen mit anders orientierten, immer kleineren und zahlreicheren Deformationen strebt die Ungleichheit gegen null: Die Einbettung ist isometrisch geworden, und alle Maschenweiten sind gleich. Hier sind bloß die ersten drei Schritte des Verfahrens gezeigt; alle weiteren erzeugen nur noch Deformationen, die für das bloße Auge unsichtbar sind.

aller Verbotsschilder kein exotischer Einzelfall ist. Er fand eine technische Bedingung namens Homotopieprinzip oder kurz h-Prinzip, die von vielen interessanten differenzialgeometrischen Gleichungen erfüllt wird. Wenn das der Fall ist, gibt es keine Verbotsschilder. Wie durch ein Wunder fallen alle differenzialgeometrischen Hindernisse einfach weg und nur die topologischen bleiben übrig.

Interessanterweise lieferten Nash mit seinem Beweis und Kuiper mit dessen Verallgemeinerung Gromov die Grundlage für seine Theorie der konvexen Integration. Die wiederum stellt ein Mittel bereit, um im Einzelfall zu bestimmen, ob das h-Prinzip erfüllt ist oder nicht.

Hinter der Theorie steckt folgende Idee, die man in viele Richtungen ausarbeiten kann: Wenn der direkte Weg von *A* nach *B* nicht gangbar ist, suche man einen Ausweichweg, der einerseits räumlich dicht bei dem direkten liegt, andererseits länger ist, dadurch die Schwierigkeiten des direkten Wegs »verdünnt« und sie so in den Bereich des Handhabbaren bringt. In dem klassischen Beispiel liegt *B* genau vertikal über *A*, und das Auto, das von *A* nach *B* fahren soll, kann nur eine begrenzte Steigung bewältigen. Lässt man das Auto mit der maximal möglichen Steigung in *A* losfahren, so wird es sich von der direkten Strecke weiter entfernt haben, als die Vorschrift zur räumlichen Nähe zulässt, bevor es die geforderte Höhe über Grund erreicht hat. Das scheint auf ein geometrisches Verbot hinauszulaufen. Aber dieses lässt sich leicht umgehen, und die Lösung findet sich sogar im Alltag: Man schickt das Auto auf einen schraubenförmigen Weg, der sich um die vertikale Linie windet wie die Fahrbahnen in einem mehrstöckigen Parkhaus.

Ein Effekt der Mittelung

Das geschilderte Problem ist nicht topologischer, sondern differenzialgeometrischer Natur. Es geht ja darum, dass das Auto nur eine gewisse Maximalsteigung bewältigen kann, und die Steigung berechnet sich über die Ableitung der Bahnkurve, genauer gesagt über deren Tangentialvektor. Das ist ein Vektor der Länge 1, der »mit dem Auto mitfährt« und in jedem Moment in dessen Bewegungsrichtung zeigt.

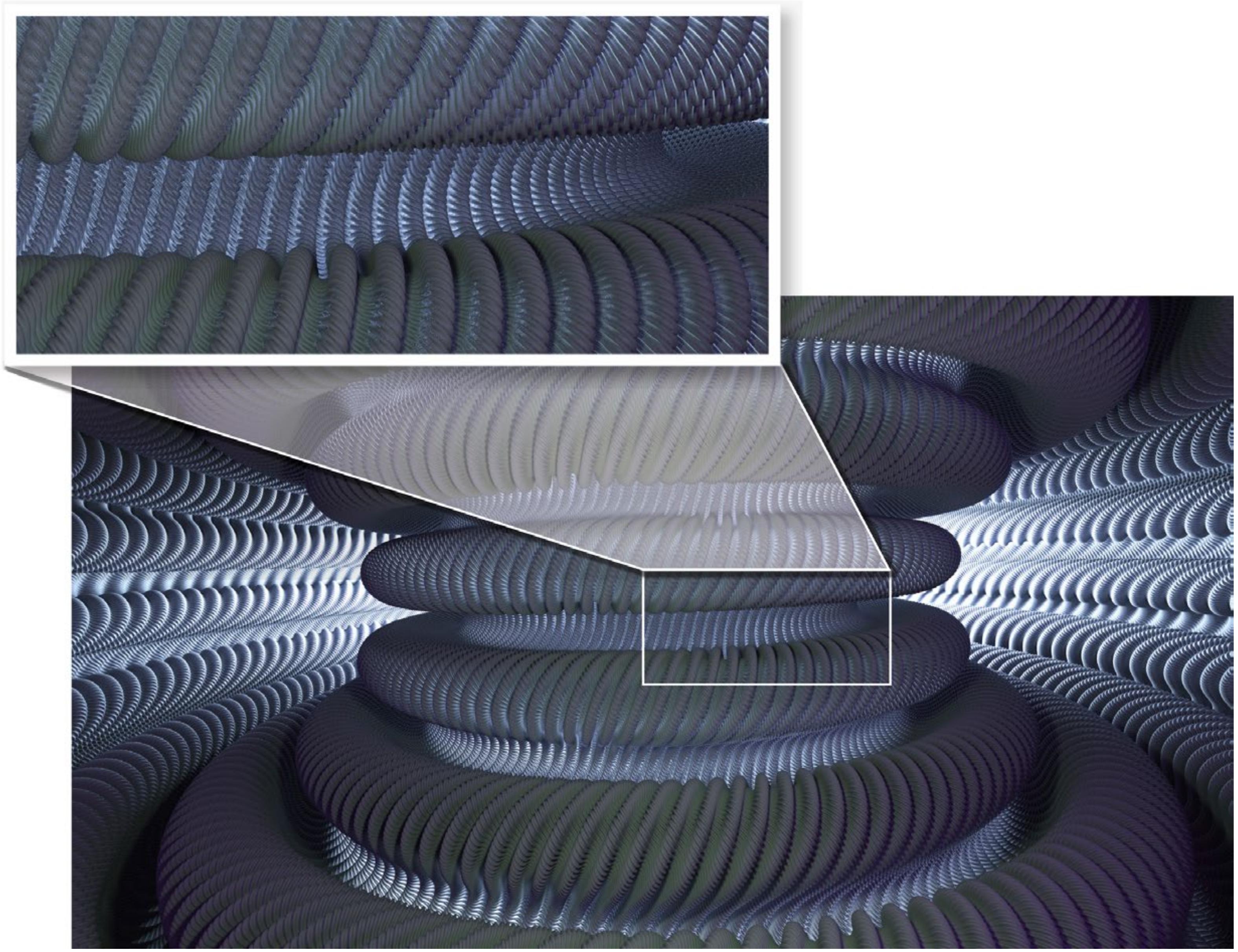
Während das Auto eine Runde fährt, beschreibt sein Tangentialvektor – dessen Anfangspunkt man sich in den Nullpunkt verschoben denkt – eine horizontale Kreislinie in geringer Höhe über der Horizontalen. Mittelt man den Tangentialvektor über eine Runde, so fallen die horizontalen Anteile weg, und es bleibt ein kurzes vertikales Stück übrig. Wie bei gewöhnlichen Funktionen ist auch bei der Bahn des Autos das Integral über die Ableitung gleich dem Funktionswert selbst. Durch Integrieren der Ableitung (des Tangentialvektors) über eine Runde oder, was bis auf eine Konstante dasselbe ist, durch Mittelung können wir erstens zeigen, dass sich das Auto im Verlauf einer Runde ein kurzes Stück in (hier vertikaler) Richtung auf das Ziel bewegt hat. Das ist in diesem einfachen Beispiel zwar offensichtlich, im allgemeinen Fall aber keineswegs.

Zweitens können wir beweisen, dass die Differenz zwischen einem Punkt der Bahn und dem entsprechenden Punkt der eigentlich vorgeschriebenen Kurve (hier der Vertikalen) nicht über den Kreis, den der Tangentialvektor beschreibt, hinausläuft. In der Fachsprache: Sie verbleibt in der »konvexen Hülle« der Kurve des Tangentialvektors. Das erklärt, warum die Technik »konvexe Integration« heißt.

Auch außerhalb unseres Problems liefert die konvexe Integration ein mächtiges

Isometrische Einbettung

Der Blick von innen in die isometrische Einbettung des flachen quadratischen Torus zeigt deren fraktale Struktur: Unter der Vergrößerung werden neue, kleinere Runzeln sichtbar – bis ins Unendliche.



VINCENT BORRELLI, SAÏD JABRANE, FRANCIS LAZARUS, DAMIEN ROHMER UND BORIS THIBERT

Werkzeug der Differenzialgeometrie. So findet sie Anwendung beim »Umstülpen einer Sphäre«. In den 1950er Jahren entdeckte der amerikanische Mathematiker Stephen Smale ein Verfahren, eine Sphäre (Kugeloberfläche) umzustülpen, ohne unterwegs scharfe Kanten oder Spitzen zu erzeugen. Allerdings muss man zulassen, dass sich die Sphäre im Verlauf des Prozesses selbst durchdringt. Wenn das Innere und das Äußere dieser Sphäre in unterschiedlichen Farben angemalt sind, dann sind nach der Umstülpung Innen- und Außenfarbe vertauscht. Zu diesem an sich schon überraschenden Resultat hat die Theorie der konvexen Integration noch das Ergebnis hinzugefügt, dass diese Umstülpung isometrisch erfolgen kann – das heißt, alle Längen bleiben während der Umstülpung erhalten.

Nach der Einführung der konvexen Integration wurde Nashs Einbettung plötzlich begreiflicher. Sie war nicht mehr ein exotisches Einzelergebnis, sondern Anwendungsfall einer umfassenderen Theorie. Aber vorstellen konnte man sich so eine Fläche immer noch nicht, und wegen ihrer paradoxen Eigenschaften hatte sie nach wie vor die Aura des Geheimnisvollen. Wie kann sie untadelig glatt sein und zugleich jedem, der sie mit dem Skateboard herunterfährt, eine unendliche Serie von Stößen verpassen? Wie würde sie aussehen?

In der Hoffnung, diese Fragen beantworten zu können, bildeten wir drei 2006 zusammen mit dem damaligen Doktoranden Saïd Jabrane eine Arbeitsgruppe; 2012 stieß noch Damien Rohmer dazu, ein Spezialist für Visualisierung. Wir waren davon überzeugt, dass die konvexe Integration uns einen Weg zu einer Visualisierung weisen würde. Gromovs Beweis des Satzes von Nash und Kuiper ist nämlich »quasikonstruktiv«. Das heißt, er begnügt sich nicht etwa mit dem Nachweis, dass die Annahme der Nichtexistenz einer solchen Fläche auf einen Widerspruch führen würde, sondern liefert so etwas wie ein Verfahren zu ihrer Konstruktion – allerdings viel zu abstrakt und allgemein, als dass man es ohne Weiteres in ein Computerprogramm hätte umsetzen können.

Unsere Überzeugung war begründet; allerdings brauchten wir volle sechs Jahre, bis wir eine einzige dieser berüchtigten Einbettungen visualisiert hatten. Unter den unendlich vielen Möglichkeiten, die Gromovs Beweis uns anbot, mussten wir uns für eine entscheiden. Darüber hinaus nahmen wir einige Vereinfachungen vor, die nur für den Torus gelten, aber uns für diesen die Arbeit erleichterten.

Unser Programm beginnt mit der Standardabbildung vom Quadrat auf einen gewöhnlichen Torus. Dabei sind die Längenmaßstäbe so gewählt, dass jede Entfernung auf dem Torus kürzer ist als die entsprechende Entfernung auf dem Quadrat. Insbesondere sind alle Breitenkreise kürzer als die ihnen entsprechenden horizontalen Linien von der linken zur rechten Quadratseite.

Runzeln in jedem Maßstab

Die Torusfläche müsste also überall größer sein, als sie ist, und zwar außen ein bisschen und innen sehr viel. Unser Programm macht nun die Fläche größer – außen ein bisschen, innen sehr viel mehr –, aber so, dass sie bis auf kleine Abweichungen an ihrem Platz bleibt. Dazu legt es die Fläche in sorgfältig dimensionierte Runzeln (»corrugations«).

Durch diese Aktion wird die Abweichung von der Isometrie zwar kleiner, aber noch nicht null. Ein zweiter Verrunzelungsschritt ist erforderlich, in einer Richtung schräg zu der des ersten Schritts und mit kleineren und zahlreicheren Runzeln. Wieder wird die Abweichung von der Isometrie kleiner, aber verschwindet nicht ganz, so dass ein weiterer Schritt erforderlich wird, und so weiter. Erst nach unendlich vielen Verrunzelungen ist das Ziel erreicht. Aber bereits nach vier Schritten sieht man mit bloßem Auge keinen Unterschied mehr.

Das Endergebnis ist überraschend. Man könnte die sich ergebende Fläche mit einem Fraktal verwechseln, weil sie in jedem Maßstab dieselben Strukturen zeigt. Sie ist aber kein klassisches Fraktal wie etwa die Koch-Kurve oder die Peano-Kurve, denn diese Kurven haben in keinem Punkt eine Tangente. Unsere Fläche dagegen ist glatt, denn sie hat in jedem Punkt eine Tangentialebene, aber nicht so glatt wie eine klassische Fläche, denn sonst hätte sie eine gaußsche Krümmung. Wir bezeichnen eine derartige Fläche als C^1-Fraktal oder als glattes Fraktal.

Nachdem es uns gelungen ist, den flachen quadratischen Torus zu visualisieren, hoffen wir, auch andere isometrische Einbettungen riemannscher Mannigfaltigkeiten im dreidimensionalen Raum mit dem Computer darstellen zu können. Insbesondere denken wir an die poincarésche Kreisscheibe, ein bekanntes Modell der nichteuklidischen Geometrie in der Ebene. Zweifellos werden derartige Visualisierungen abermals glatte Fraktale zu Tage fördern.

Unsere neuen Flächen sind eine Art »missing link« zwischen fraktalen und gewöhnlichen Flächen; vermutlich werden sie auch bei anderen mathematischen Fragen auftauchen. Höchstwahrscheinlich werden auch diverse Strukturen aus der Physik, der Chemie oder den Lebenswissenschaften, die bislang als Fraktale gelten, sich als C^1-Fraktale entpuppen. Weitere Gebilde dieser Klasse dürften der Entdeckung harren.

(Spektrum.de, 11.12.2014)

Borrelli, V. et al.: Flat Tori in Three-dimensional Space and Convex Integration. In: Proceedings of the National Academy of Science USA 109, S. 7218 – 7223, 2012

XIAOLIN ZENG FÜR QUANTA MAGAZINE

HOCHENERGIEPHYSIK

Die seltsamen Zahlen der **Teilchenkollisionen**

von Kevin Hartnett

Zwischen Experimenten der Hochenergiephysik und höchst abstrakten Kenngrößen algebraischer Kurven und Flächen tut sich eine unerwartete Verbindung auf.

Am Large Hadron Collider in Genf schießen Physiker Protonen auf einen 27 Kilometer langen Rundkurs und lassen sie dann mit fast Lichtgeschwindigkeit aufeinanderprallen. Nur mit großer technischer Raffinesse lassen sich die Elementarteilchenstrahlen so präzise lenken, dass tatsächlich einige Frontaltreffer zu Stande kommen. In merkwürdigem Gegensatz zu dem hohen experimentellen Aufwand steht das primitive Hilfsmittel, mit dem die Wissenschaftler die Trümmer theoretisch beschreiben: Feynman-Diagramme. Eine Kinderzeichnung von einem Zusammenstoß würde auf den ersten Blick nicht wesentlich anders aussehen.

Der amerikanische Physiker Richard Feynman (1918–1988, Nobelpreis 1965) hatte die Diagramme, die heute seinen Namen tragen, in den 1940er Jahren entworfen. Sie bestehen aus Linien, die sich in einem Punkt treffen, und anderen, die von einem solchen Knoten ausgehen (siehe »Berechnung von Teilchenkollisionen«). Eine Linie ist der Weg eines Elementarteilchens in einem Raum-Zeit-Diagramm, ein Knoten kennzeichnet eine Kollision und die von ihm wegführenden Linien den Weg der Kollisionsprodukte. Die fliegen entweder weg oder enden in neuen Knoten, wenn sie zum Beispiel zerfallen oder ein Photon abstrahlen oder aufnehmen. Eine Abfolge von Knoten kann beliebig lang werden – soweit die Fantasie der Physiker reicht.

Dieses Schema ergänzen die Physiker durch Zahlen und andere Größen, die Massen, Impulse und Flugrichtung der beteiligten Teilchen angeben. Dann erstellen sie eine Art Bilanz des gesamten Vorgangs, was diverse Rechenoperationen, darunter auch Integrationen, erfordert. Am Ende steht eine einzige Zahl, die so genannte Feynman-Amplitude. Sie gibt an, wie groß die Chance ist, dass die Teilchenkollision genau so verläuft, wie das Diagramm sie darstellt.

»In gewisser Weise erfand Feynman diese Diagramme, um bei den umfangreichen Berechnungen den Überblick zu behalten«, sagt Sergei Gukov, ein theoretischer Physiker vom California Institute of Technology in Pasadena.

Feynman-Diagramme haben den Physikern über viele Jahre sehr gute Dienste ge-

Kevin Hartnett ist Wissenschaftsjournalist in Columbia (South Carolina).

AUF EINEN BLICK

Perioden und Motive

1. Berechnet man theoretisch die Wahrscheinlichkeit, mit der sich eine Reaktion von Elementarteilchen ereignet, so ergeben sich Zahlen (»Feynman-Amplituden«), die einer speziellen Klasse angehören.

2. Genau diese Klasse tritt auch im Rahmen der algebraischen Geometrie auf, eines Teilgebiets der Mathematik, das abstrakte Aussagen über die Menge der Lösungen algebraischer Gleichungen macht.

3. Physiker wie Mathematiker versuchen nun, diese überraschende und zunächst abwegig wirkende Verbindung zwischen ihren beiden Gebieten für weitere Erkenntnisse zu nutzen.

leistet. Nun aber stößt ihre Anwendung immer häufiger an Grenzen. Eine davon ist der zunehmende Rechenaufwand. Physiker untersuchen Teilchenkollisionen mit immer höheren Energien. Dadurch wachsen die Anforderungen an die Genauigkeit der beteiligten Messungen erheblich und mit ihr die Anzahl und Komplexität der Feynman-Diagramme, die man in die Rechnung einbeziehen muss.

Die zweite Grenze ist grundsätzlicherer Natur. Im Prinzip gibt es unendlich viele Möglichkeiten, wie sich eine Teilchenkollision im Detail abgespielt haben könnte – mit irgendwelchen Zwischenprodukten, die schon wieder zerfallen sind oder miteinander reagiert haben, bevor sie sich nach außen bemerkbar machen. Aber, so die Annahme, je komplizierter ein solcher Prozess, desto unwahrscheinlicher ist er auch, so dass man ab einer gewissen Komplexität mit Rechnen aufhören kann, weil alle übrigen Prozesse nur noch eine verschwindend geringe Wahrscheinlichkeit zum Gesamtergebnis beitragen. Das zugehörige Verfahren, die »Störungsrechnung«, funktioniert gut bei Zusammenstößen von Elektronen, denn dabei wirken nur die schwache und die elektromagnetische Kraft. Für energiereichere Kollisionen jedoch, etwa die von Protonen, bei denen die starke Kernkraft die dominierende Rolle spielt, liefert die Störungsrechnung keine ausreichend guten Ergebnisse mehr oder führt sogar in die Irre.

»Wir wissen genau, dass die Ergebnisse der Berechnung ab einem gewissen Punkt divergieren«, sagt Francis Brown, ein Mathematiker von der University of Oxford. Das heißt, die Feynman-Amplituden werden nicht kleiner, sondern wieder größer, nachdem ihre Summe der Realität schon nahegekommen war. »Allerdings ist nicht klar, wann genau man aufhören sollte.«

Vielleicht gibt es jetzt aber Anlass zum Optimismus. Seit zehn Jahren untersuchen Physiker und Mathematiker eine überraschende Beziehung, die möglicherweise den ehrenwerten Feynman-Diagrammen zu neuem Leben und der Physik wie der Mathematik zu weit reichenden neuen Einsichten verhelfen wird. Die mit Hilfe von Feynman-Diagrammen berechneten Werte stimmen genau mit einigen der wichtigsten Zahlen überein, die in der algebraischen Geometrie vorkommen, einem Zweig der reinen Mathematik. Diese Größen heißen »Perioden von Motiven«. Ein solches Zusammentreffen erscheint zunächst völlig abstrus, ungefähr so, als ob man die Reiskörner in Tassen verschiedener Größe zählen und dabei jedes Mal eine Primzahl vorfinden würde. Ein Grund dafür will einem nicht in den Sinn kommen.

Dennoch: »Es besteht eine Beziehung zwischen der Natur und der algebraischen Geometrie mit ihren Perioden, und inzwischen wissen wir, dass es sich nicht um ein zufälliges Zusammentreffen handelt«, sagt

Quanta magazine

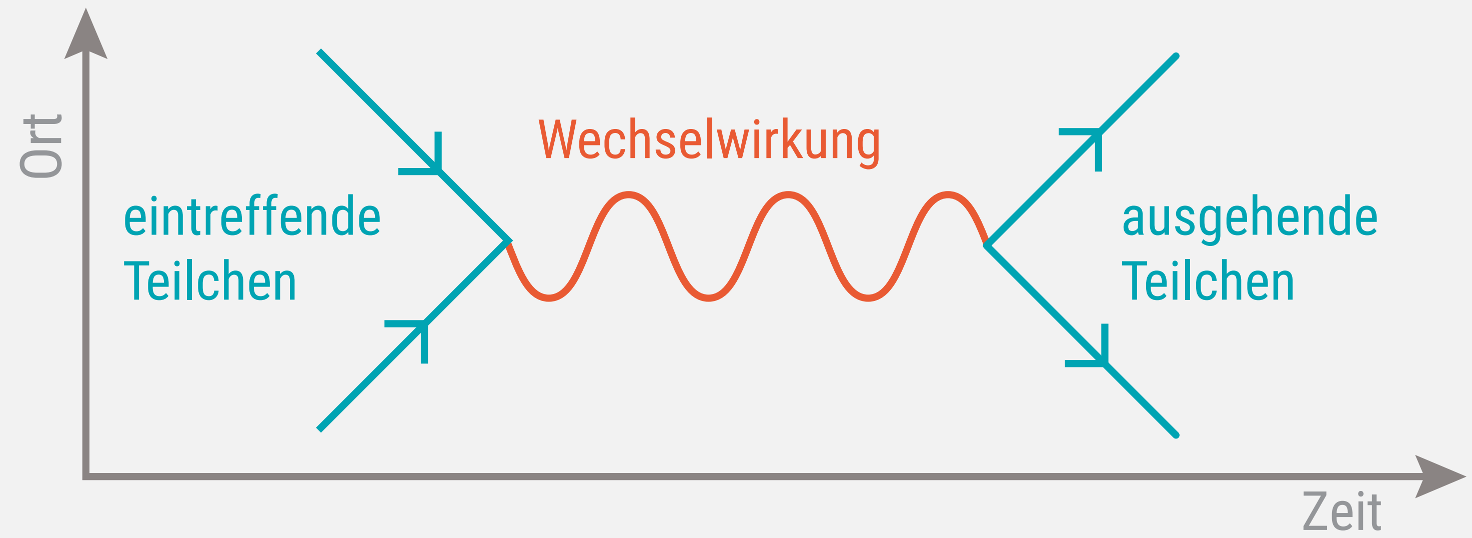
Von »Spektrum der Wissenschaft« übersetzte und redigierte Fassung des Artikels »Strange Numbers Found in Particle Collisions« aus »Quanta Magazine«, einem inhaltlich unabhängigen Magazin der Simons Foundation, die sich die Verbreitung von Forschungsergebnissen aus Mathematik und den Naturwissenschaften zum Ziel gesetzt hat.

Berechnung von Kollisionen

Vor jedem Experiment, zum Beispiel am Large Hadron Collider, errechnen die Kernphysiker eine Prognose darüber, was sich bei einer Teilchenkollision ereignen wird. Das wesentliche Mittel dafür ebenso wie für die Interpretation der Messergebnisse ist das Feynman-Diagramm.

Der lange Weg zur Prognose

1 In der Quantenmechanik werden Teilchenkollisionen durch Feynman-Diagramme dargestellt. Ein solches Diagramm zeigt den Ausgangszustand (die eintreffenden Teilchen) und den Endzustand (die Reaktionsprodukte) sowie alle Kollisionen, die dazwischen noch stattfinden, aber nicht direkt beobachtbar sind.



2 Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Ausgang des Experiments müsste man eigentlich alle denkbaren Verläufe der Kollision berechnen, zumindest die wichtigsten. Hier sind vier von tausenden möglichen Detailverläufen dargestellt.

Integral A	Integral B	Integral C	Integral D

3 Für jedes Diagramm berechnen die Physiker ein zugehöriges »Feynman-Integral«, das die Massen, Impulse und Bewegungsrichtungen der Teilchen einbezieht.

4 Um die Wahrscheinlichkeit für das Gesamtereignis zu berechnen, addieren die Physiker die (komplexen) Feynman-Integrale aller Diagramme (die »Amplituden«) und quadrieren den Betrag dieser Summe.

$$|A + B + C + D|^2 = \text{Wahrscheinlichkeit}$$

Eine mögliche Abkürzung

Amplitude

Die für Feynman-Diagramme berechneten Amplituden gehören alle zu einer gewissen Sorte von Zahlen, den so genannten Perioden.

Perioden spielen in der Mathematik eine wichtige Rolle, weil sie charakteristische Größen grundlegender mathematischer Objekte sind – der »Motive«. Diese wiederum dienen zur Untersuchung von Lösungsmengen polynomialer Gleichungen. Unter den Perioden solcher Motive finden sich Werte der riemannschen Zetafunktion.

Die Mathematiker untersuchen Struktur und Eigenschaften der Menge aller Perioden. Sollten Physiker vergleichbare Strukturen bei Amplituden von Feynman-Diagrammen entdecken, würde das den Berechnungen für ihre Experimente massiv aufhelfen.

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} \cdots\cdots$$

$$\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} \cdots\cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(4) = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} \cdots\cdots = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\zeta(6) = \frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} \cdots\cdots = \frac{\pi^6}{945}$$

LUCY READING-IKKANDA FÜR QUANTA MAGAZINE; BEARBEITUNG: SPEKTRUM DER WISSENSCHAFT

Dirk Kreimer, ein Physiker von der Humboldt-Universität Berlin.

Mittlerweile arbeiten Mathematiker und Physiker gemeinsam intensiv daran, die genaue Art dieser Beziehung zu entschlüsseln. Die Physik hat die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf eine spezielle Klasse von Zahlen gelenkt, die sie besser verstehen möchten: Verbirgt sich eine Struktur hinter denjenigen Perioden, die in der Physik auftauchen? Welche speziellen Eigenschaften könnte diese Klasse von Zahlen haben? Die Physiker wiederum versprechen sich von einem tieferen mathematischen Verständnis eine größere Klarheit über die Ereignisse in der chaotischen Welt der Quanten.

Motive: Wiederkehrende Themen in Musik und algebraischer Geometrie

Heute gehören Perioden zu den abstraktesten Gegenständen der Mathematik. Anfangs dienten sie jedoch einem konkreten Anliegen. Zu Beginn des 17. Jahrhunderts bemühten sich Wissenschaftler wie Galileo Galilei, die Zeit zu berechnen, die ein Pendel für eine komplette Schwingung benötigt. Sie erkannten, dass man dafür das Integral – eine Art unendliche Summe – zu einer gewissen Funktion finden musste. In diese Funktion gehen Daten wie die Länge des Pendels und seine Anfangsauslenkung ein. Ungefähr zur gleichen Zeit stellte Johannes Kepler ähnliche Berechnungen an, um die Umlaufzeit eines Planeten um die Sonne zu bestimmen. Die Forscher bezeichneten diese Werte, wenig überraschend, als »Perioden«.

Im Verlauf des 18. und 19. Jahrhunderts studierten die Mathematiker allgemeinere Perioden – nicht nur im Zusammenhang mit Pendeln oder Planetenbahnen, sondern als Zahlen, die sich beim Integrieren polynomialer Funktionen wie $x^2 + 2x - 6$ oder $3x^3 - 4x^2 - 2x + 6$ ergeben. Mehr als ein Jahrhundert lang erkundeten Koryphäen wie Carl Friedrich Gauß und Leonhard Euler das Universum der Perioden und entdeckten dabei zahlreiche Hinweise auf eine ihm zu Grunde liegende Ordnung. Unter anderem aus diesen Bemühungen ging im 20. Jahrhundert die algebraische Geometrie hervor, die sich mit der Gestalt der Lösungsmengen polynomialer Gleichungen befasst.

In den 1960er Jahren nahm das Gebiet einen gewaltigen Aufschwung. Die Mathematiker taten genau das, was in ihrem Gebiet häufig zum Erfolg führt: Sie übersetzten einigermaßen konkrete Objekte wie Gleichungen in abstraktere, um mit deren Hilfe Beziehungen zu finden, die an den Ursprungsobjekten alles andere als offensichtlich waren.

In diesem Fall betrachteten sie statt der ursprünglichen Gegenstände (Polynome in mehreren Variablen) geometrische Strukturen, so genannte algebraische Varietäten, die als Mengen der Nullstellen solcher Polynome definiert sind. Um wesentliche Eigenschaften dieser geometrischen Objekte zu finden, insbesondere solche, die unabhängig von dem die Varietät definierenden Polynom sind, entwickelten sie neue Methoden, »Kohomologien« genannt.

Etwa um 1960 hatte der Ansatz so viele Blüten getrieben, dass die Situation unüberschaubar wurde: Es gab singuläre Kohomologie, De-Rham-Kohomologie, »étale Kohomologie« und andere. Fast schien es, als hätte jeder algebraische Geometer seine eigene Sichtweise auf den Gegenstand seiner Wissenschaft. Dann kam der geniale Alexander Grothendieck (1928–2014) und zeigte, dass alle diese diversen Kohomologietheorien nur verschiedene Versionen derselben Sache sind.

Dieses Gemeinsame nannte Grothendieck ein »Motiv«. »In der Musik versteht man darunter ein wiederkehrendes Thema. Für Grothendieck war ein Motiv etwas, das in verschiedener Gestalt immer und immer wieder auftaucht, dabei aber stets dasselbe bleibt«, sagt Pierre Cartier, ein Mathematiker am Institut des Hautes Études Scientifiques bei Paris und früherer Kollege von Grothendieck.

Motive sind in gewisser Weise die elementaren Bausteine der Lösungsmengen polynomialer Gleichungen, etwa so wie jede natürliche Zahl ein Produkt von Primfaktoren ist oder jeder chemische Stoff aus Atomen verschiedener Elemente besteht. Und ebenso wie jedes Element Kenngrößen wie Ordnungszahl und Atomgewicht hat, ordnen Mathematiker einem Motiv gewisse Zahlen zu. Die wichtigsten unter ihnen sind seine Perioden. Wenn zwei Motive, die verschiedenen algebraischen Varietäten entstammen, die gleichen Perioden haben, müssen sie bereits im Wesentlichen gleich sein.

»Sind die Perioden, also spezifische Zahlen, bekannt, dann ist das ungefähr so, als ob man das Motiv selbst kennt«, sagt Minhyong Kim, ein Mathematiker an der University of Oxford.

Um zu verstehen, wie ein und dieselbe Periode unerwartet in verschiedenen Kontexten auftauchen kann, denke man an die Kreiszahl π, in den Worten von Cartier »das berühmteste Beispiel einer Periode«. In der Tat erscheint π in zahlreichen Kontexten: bei der Formel für den Kreisumfang, für die Kreisfläche und für das Kugelvolumen, was auf Integrale in einer, zwei beziehungsweise drei Dimensionen hinausläuft. Dass ein und dieselbe Zahl in derart unterschiedlichen Situationen auftaucht, war für die Gelehrten der Antike ein großes Mysterium. »Die moderne Erklärung besteht in der Erkenntnis, dass alle drei Gebilde dasselbe Motiv haben und damit im Wesentlichen auch dieselbe Periode«, so der Oxforder Mathematiker Brown.

Feynmans Pfadintegrale: Der beschwerliche Weg zur Erleuchtung

Ging es bei der Periode π noch um einigermaßen verwandte Gebilde wie Kreis und Kugel, wollen Mathematiker und Physiker heute wissen, warum diese Zahlen im Zusammenhang mit geometrischen Objekten völlig anderer Art auftauchen: den Feynman-Diagrammen.

Da die Perioden aus der Physik stammen, geht ihre Bedeutung über das zweckfreie Glasperlenspiel hinaus

Nun, selbst diese kinderzeichnungsartigen Dinge haben geometrische Eigenschaften. Sie bestehen aus Linien, Pfeilen und Knoten. Nehmen wir ein einfaches Beispiel: Ein Elektron und ein Positron stoßen zusammen und zerfallen in ein Myon und ein Antimyon. Möchte man die Wahrscheinlichkeit berechnen, mit der genau dieses Paar entsteht, müsste man Masse und Impuls jedes der eintreffenden Teilchen kennen und dazu noch etwas über ihre Bahnen wissen. Aber quantenmechanisch ist eine Bahn nicht genau bestimmt, weil Ort und Impuls eines Teilchens nie zugleich genau bekannt sein können. Also muss man nicht nur die Bahn betrachten, der die Teilchen nach der klassischen Physik folgen würden, sondern auch benachbarte Wege. Über alle diese Wege muss man eine Art Mittelwert bilden. Der ist das so genannte Feynman-Integral.

Jeder mögliche Verlauf, den ein Zusammenstoß bestimmter Teilchen nehmen könnte, lässt sich in einem Feynman-Diagramm darstellen, und jedes Diagramm bestimmt ein eigenes Integral. Möchte man die Wahrscheinlichkeit ausrechnen, mit der sich bei gegebener Ausgangssituation ein konkreter Endzustand ergibt, betrachtet man alle dabei möglichen Diagramme, berechnet jedes der zugehörigen Integrale und addiert alle so gebildeten Werte. Das Ergebnis heißt »Wahrscheinlichkeitsamplitude«. Der Betrag dieser (komplexen) Zahl zum Quadrat ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit (siehe »Berechnung von Teilchenkollisionen«).

Wenn das Ereignis tatsächlich so abläuft wie oben beschrieben, ist das alles noch relativ einfach. Interessant wird es, wenn ein Feynman-Diagramm Schleifen enthält. Dem entspricht eine Situation, in der ein beteiligtes Teilchen ein weiteres emittiert und dann wieder absorbiert. Wenn ein Elektron mit einem Positron kollidiert, gibt es eine unendliche Vielfalt solcher Erzeugungs- und Zerfallsprozesse, bevor am Ende das Myon und das Antimyon davonfliegen. Bei diesen Zwischenereignissen werden neue Teilchen, etwa Photonen, erzeugt und gleich wieder vernichtet, ohne dass sie zu beobachten sind. Die ein- und ausgehenden Teilchen sind dieselben wie eben beschrieben, aber die unbeobachtbaren Erzeugungs- und Vernichtungsprozesse können einen, wenn auch geringen, Einfluss auf den Ausgang haben.

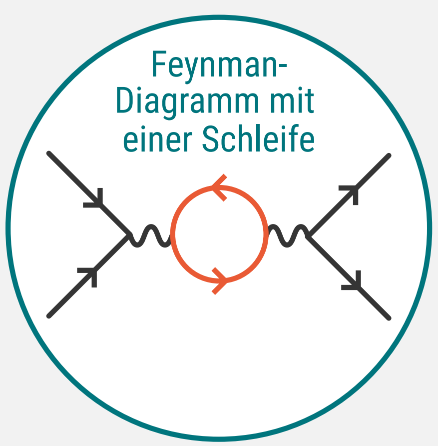
»Es ist wie mit einem Baukasten aus Stäbchen und Klötzchen. Baut man ein Diagramm, dann kann man – nach den Regeln der Theorie – immer wieder neue Teile hinzufügen«, sagt Philip (»Flip«) Tanedo, ein Physiker an der University of California in Riverside. »Du fügst hier eine neue Linie ein und da einen weiteren Knoten, und mit jeder Ergänzung wird es komplizierter.«

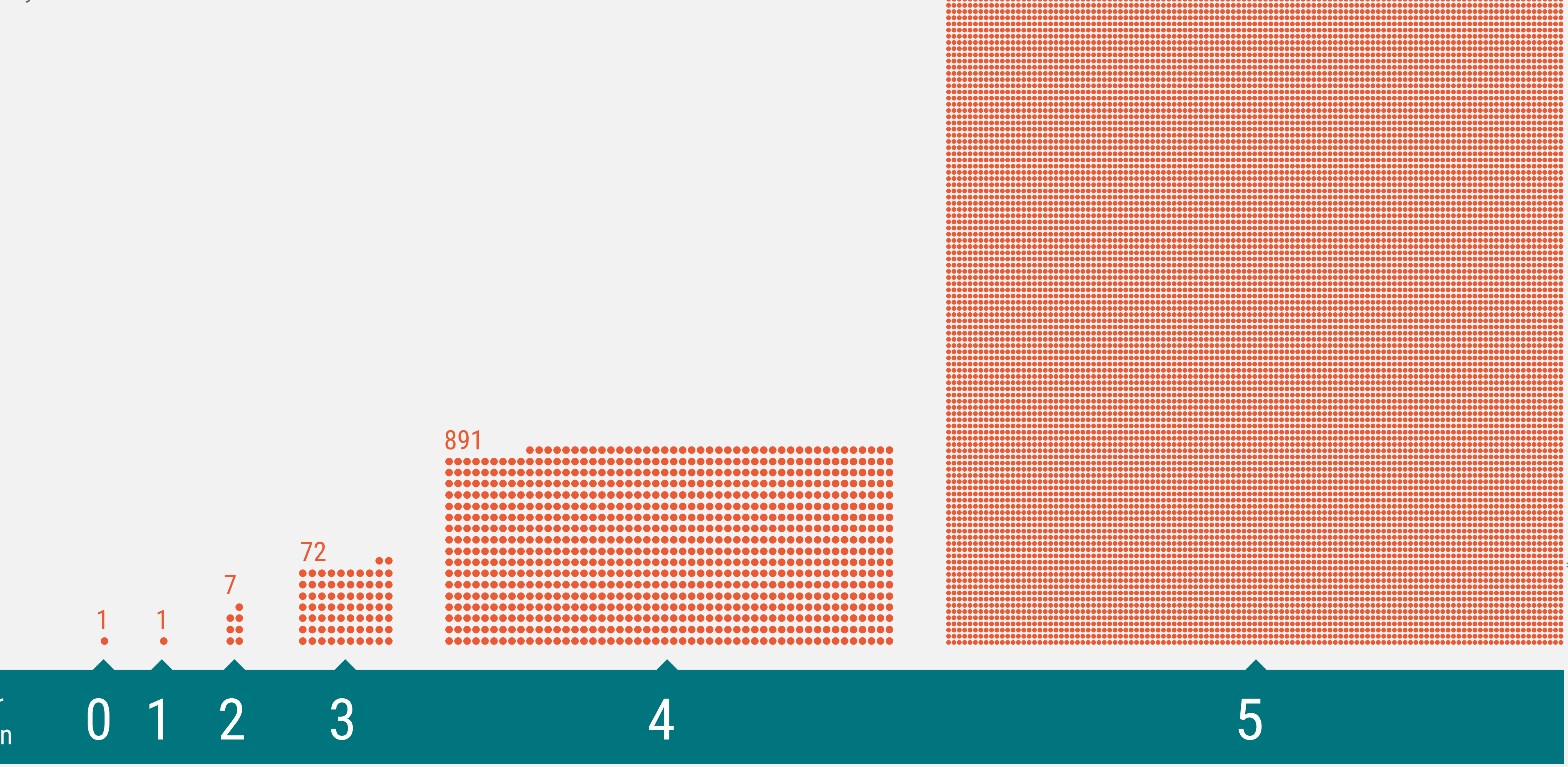
Jede hinzugenommene Schleife macht die Berechnung etwas genauer. Allerdings erhöht sich mit zunehmender Anzahl der Schleifen die Zahl der zu berücksichtigenden Feynman-Diagramme dramatisch. Typische Zahlen: Für eine einzige Schleife braucht man nur ein Diagramm, für zwei Schleifen schon sieben und für drei Schleifen 72 Stück. Erhöht man die Anzahl auf fünf Schleifen, dann wären in die Berechnung etwa 12000 Integrale einzubeziehen – eine Rechnung, die Jahre dauern würde (siehe »Kombinatorische Explosion«).

Statt sich durch so viele mühsame Integrale zu ackern und am Ende nur eine einzige Zahl, die Gesamtamplitude, herauszubekommen, würden die Physiker es vorziehen, Einsichten über diese Zahl allein durch intensives Betrachten des Feynman-Graphen zu gewinnen, so wie die Mathemati-

Kombinatorische Explosion

Stoßen zwei Elementarteilchen zusammen, kann allerlei passieren. Selbst wenn man sich auf das Teilchenpaar festlegt, das aus der Kollision hervorgehen soll, sind noch zahlreiche Zwischenschritte denkbar. Insbesondere kann im Verlauf der Reaktion ein Teilchen ein anderes ausstoßen und wieder absorbieren. Das stellt man im Feynman-Diagramm als »Schleife« dar, eine Linie, deren Anfangs- und Endpunkt identisch sind. Je mehr Schleifen man berücksichtigt, desto genauer wird die Berechnung. Zugleich steigt jedoch die Anzahl der zu berücksichtigenden Feynman-Diagramme (und die Komplexität der zugehörigen Integrale) rapide an. Die Grenze des Berechenbaren liegt zurzeit ungefähr bei zwei Schleifen für die starke Wechselwirkung. Physiker versuchen, sie auf drei bis vier hochzuschrauben.





LUCY READING-IKKANDA FÜR QUANTA MAGAZINE; BEARBEITUNG: SPEKTRUM DER WISSENSCHAFT ker die Beziehung zwischen Perioden und Motiven ausnutzen.

Perioden, Motive und die riemannsche Zetafunktion

Der vermutete Zusammenhang zwischen Perioden und Amplituden erblickte das Licht der Welt 1994 in einem Vortrag, den Kreimer und sein Fachkollege David Broadhurst von der Open University in England hielten, sowie in einem Artikel ein Jahr später. Daraufhin spekulierten Mathematiker und Physiker, ob vielleicht alle Amplituden sogar Perioden gemischter Tate-Motive seien, einer speziellen Art von Motiven, die nach John Tate benannt sind, einem emeritierten Professor der Harvard University. Deren Perioden sind stets Vielfache von Werten der riemannschen Zetafunktion, einer der bedeutendsten Konstruktionen der Zahlentheorie. In dem oben genannten Beispiel – Elektron und Positron zerfallen zu Myon und Antimyon – ergibt sich als Amplitude der Wert $6\zeta(3)$, das Sechsfache des Werts der Zetafunktion an der Stelle 3.

Wären tatsächlich alle Amplituden Vielfache von Werten der Zetafunktion, dann hätten es die Physiker mit einer bestens untersuchten Klasse von Zahlen zu tun. Im Jahr 2012 fanden allerdings Brown und sein Fachkollege Oliver Schnetz von der Universität Erlangen-Nürnberg heraus, dass dem nicht so ist. Bislang sind zwar alle Amplituden, mit denen die Physiker zu tun hatten, tatsächlich Perioden gemischter Tate-Motive. Aber »da draußen lauern wohl noch Monster, die uns einen Knüppel zwischen die Beine werfen«, sagt Brown. »Es sind zwar sicher auch Perioden, aber nicht die netten und einfachen, auf die wir gehofft hatten.«

Immerhin gibt es allem Anschein nach eine Beziehung zwischen der Anzahl von Schleifen in einem Feynman-Diagramm und einer Größe, welche die Mathematiker »Gewicht« nennen. Es handelt sich um eine Zahl, die mit der Dimension des Raums zusammenhängt, über den integriert wird: Ein Periodenintegral über eine Dimension, sprich über ein Intervall oder eine Gerade, kann das Gewicht 0, 1 oder 2 haben, eins über zwei Dimensionen ein Gewicht von bis zu 4, und so weiter. Die Perioden lassen sich auch nach ihrem Gewicht in verschiedene Typen einteilen: Alle Perioden vom Gewicht 0 sind vermutlich algebraische Zahlen, also Lösungen polynomialer Gleichungen mit rationalen Koeffizienten, aber das ist noch unbewiesen. Die Periode eines Pendels hat stets das Gewicht 1, π ist eine Periode vom Gewicht 2, und das Gewicht eines Werts $\zeta(z)$ der Zetafunktion ist immer $2 \cdot z$; $\zeta(3)$ hat also das Gewicht 6.

Diese Klassifikation mit Hilfe der Gewichte ist auch auf Feynman-Diagramme übertragbar; und zwar besteht eine Verbindung zwischen der Zahl der Schleifen in einem Diagramm und dem Gewicht seiner Amplitude. Diagramme ohne Schleifen haben Amplituden vom Gewicht 0, die Amplituden von Diagrammen mit einer Schleife sind sämtlich Perioden von gemischten Tate-Motiven und haben höchstens das Gewicht 4. Entsprechende Beziehungen gelten vermutlich auch für Diagramme mit weiteren Schleifen, aber die Mathematiker sehen sie noch nicht.

»Wenn wir zu größeren Schleifenzahlen übergehen, sehen wir Perioden von allgemeineren Typen«, sagt Kreimer. »Das finden die Mathematiker richtig interessant, weil sie über andere als gemischte Tate-Motive kaum etwas wissen.«

Mathematiker und Physiker pendeln im Moment zwischen den beiden Gebieten in dem Bemühen, das Problem besser einzugrenzen und Lösungen zu finden. Dabei schlagen die Mathematiker den Physikern

Funktionen (und deren Integrale) vor, die zum Beschreiben von Feynman-Diagrammen geeignet sein könnten. Daraufhin denken sich die Physiker Konfigurationen von Teilchenkollisionen aus, die mit den von den Mathematikern angebotenen Funktionen nicht zu bewältigen sind. »Es ist wirklich erstaunlich zu sehen, wie schnell sie sich technisch anspruchsvolle mathematische Ideen angeeignet haben«, sagt Brown. »Uns sind die klassischen Zahlen und Funktionen ausgegangen, die wir den Physikern noch anbieten können.«

Die Gruppen der Natur

Seit der Entwicklung der Analysis im 17. Jahrhundert haben Zahlen, die in der physikalischen Welt auftreten, den mathematischen Fortschritt vorangetrieben. Das gilt bis heute. Die Tatsache, dass diese Perioden aus der Physik stammen, »verschafft ihnen eine Bedeutung, die über das zweckfreie Glasperlenspiel hinausgeht. Sie haben eine reichhaltige Struktur, und zwar nicht unbedingt eine, die einem Mathematiker von allein in den Sinn kommt«, sagt Brown.

Und Kreimer ergänzt: »Es scheint so, als ob die Perioden, mit denen die Natur arbeitet, nur eine Teilmenge aller definierbaren Perioden sind. Wir wissen aber noch nicht, wie diese Teilmenge abzugrenzen ist.«

Brown versucht zurzeit zu beweisen, dass die Menge aller Perioden für Feynman-Diagramme eine spezielle mathematische Struktur hat, die durch eine so genannte Galois-Gruppe beschreibbar ist. »In jedem Fall, der jemals berechnet wurde, scheint die Antwort Ja zu sein«, sagt er, ein allgemeiner Beweis liege jedoch noch in weiter Ferne. »Wenn tatsächlich auf den physikalischen Perioden eine Gruppe operiert, dann hätten wir ein mächtiges Arsenal an Symmetrien zur Verfügung«, sagt Brown. »Dann wäre die nächste Frage, wie diese gewaltige Symmetriegruppe aussieht und welche physikalische Bedeutung sie hätte.«

Jeder Fortschritt in dieser Richtung würde die Beziehungen zwischen zwei sehr verschiedenen Bereichen noch weiter vertiefen. Vorläufig bleibt reine Spekulation, was uns die Motive, die ursprünglich der Erforschung sehr mathematischer algebraischer Varietäten dienten, über die sehr physikalischen Kollisionen von Elementarteilchen sagen.

(Spektrum der Wissenschaft, August 2017)

TOPOLOGISCHE PHYSIK

Bizarr und **revolutionär**

von Davide Castelvecchi

Das Innere exotischer Materialien lässt sich mit äußerst eleganter Mathematik beschreiben. Bescheren diese topologischen Festkörper der Physik einen Paradigmenwechsel?

SHULZ / GETTY IMAGES / ISTOCK

Charles Kane hatte niemals daran gedacht, sich mit Topologen abzugeben. »Ich denke nicht wie ein Mathematiker«, gesteht der theoretische Physiker, der sich eigentlich mit greifbaren Problemen von Feststoffen beschäftigt. Das geht nicht nur ihm so. Physiker haben der Topologie – also der mathematischen Untersuchung von Formen und ihrer Anordnung im Raum – typischerweise wenig Aufmerksamkeit geschenkt. Doch jetzt stürzen sich Kane und viele andere Physiker geradezu auf dieses Forschungsgebiet.

Denn im vergangenen Jahrzehnt sind Wissenschaftler darauf gestoßen, dass die Topologie einzigartige Einsichten in die Physik von Materialien bietet. Etwa darin, wie manche Isolatoren in einer nur ein Atom dicken Schicht an ihrer Oberfläche Strom leiten können.

Einige dieser topologischen Effekte wurden bereits in den 1980er Jahren entdeckt, doch erst in den vergangenen paar Jahren haben Physiker erkannt, dass solche Effekte sehr viel häufiger auftreten und sehr viel bizarrer sind als erwartet. Topologische Materialien »befanden sich direkt vor unserer Nase, doch wir haben sie nicht beachtet«, sagt Kane, der an der University of Pennsylvania in Philadelphia tätig ist.

Die topologische Physik explodiert

Doch jetzt explodiert die topologische Physik geradezu. Es gibt kaum noch Forschungsarbeiten im Bereich Festkörperphysik, bei denen nicht das Wort »Topologie« im Titel vorkommt. Und die Experimentalphysiker werden künftig sogar noch fleißiger sein. Eine im Juli 2017 im Fachblatt »Nature« veröffentlichte Untersuchung präsentiert einen Atlas von Materialien, die topologische Effekte zeigen könnten. Damit liefert der Katalog den Physikern eine Vielzahl von Stoffen, bei denen sie nach bizarren Materiezuständen wie Weyl-Fermionen und Quantenspinflüssigkeiten suchen können.

Die Wissenschaftler hoffen, dass topologische Materialien eines Tages zu schnelleren und effizienteren Computerchips führen oder sogar für Quantencomputer verwendet werden können. Schon jetzt finden die exotischen Stoffe Verwendung als vir-

ITHINKSKY / GETTY IMAGES / ISTOCK

»Emergente Phänomene der topologischen Physik sind möglicherweise überall um uns herum am Werk – sogar in einem Stück Gestein«

[Zahid Hasan]

tuelle Laboratorien für die Suche nach exotischen und bislang unentdeckten Elementarteilchen und physikalischen Gesetzen.

Viele Forscher sind der Ansicht, der größte Gewinn der topologischen Physik werde ein tieferes Verständnis der Natur der Materie sein. »Emergente Phänomene der topologischen Physik sind möglicherweise überall um uns herum am Werk – sogar in einem Stück Gestein«, sagt Zahid Hasan, Physiker an der Princeton University in New Jersey.

Einige der grundlegendsten Eigenschaften subatomarer Teilchen sind im Grunde genommen topologischer Natur. Ein Beispiel ist der Spin des Elektrons, der nach oben oder nach unten zeigen kann. Kippt man ihn von »Spin aufwärts« nach »Spin abwärts« und dann wieder zurück nach »Spin aufwärts«, so würde man denken, diese Drehung um 360 Grad würde den ursprünglichen Zustand des Elektrons wiederherstellen. Doch verblüffenderweise das ist nicht der Fall.

In der seltsamen Welt der Quantenphysik lässt sich ein Elektron durch eine Wellenfunktion darstellen, in der die Informationen über das Teilchen codiert sind, wie etwa die Wahrscheinlichkeit, es in einem bestimmten Spin-Zustand anzutreffen. Entgegen unserer Intuition führt die 360-Grad-Drehung zu einer Phasenverschiebung bei der Wellenfunktion, so dass aus Wellenkämmen Wellentäler werden und umgekehrt. Eine weitere 360-Grad-Drehung ist nötig, um die ursprüngliche Wellenfunktion wiederherzustellen.

Wie die Ameise auf einem Möbiusband

Und das ist genau das, was bei einer der unter Mathematikern beliebtesten topologischen Kuriositäten passiert, dem Möbiusband. Es entsteht, wenn man einen Papierstreifen mit seinen beiden Enden ringförmig zusammenklebt, zuvor aber das eine Ende um 180 Grad verdreht. Läuft eine Ameise auf einem solchen Band immer in eine Richtung, würde sie sich nach einem Umlauf auf der Unterseite ihrer Startposition wiederfinden. Erst nach einem zweiten Umlauf wäre sie wieder dort, wo sie losgelaufen ist.

Die Situation der Ameise ist nicht einfach nur eine Analogie für das, was mit der Wellenfunktion eines Elektrons passiert. Es geschieht tatsächlich im abstrakten geometrischen Raum der Quanten-Wellen-Funktionen. Es ist, als ob jedes Elektron ein kleines Möbiusband enthält, das diese interessante Topologie mit sich bringt. Alle Arten von Teilchen, die diese Eigenschaft teilen, darunter Quarks und Neutrinos, werden als Fermionen bezeichnet. Teilchen, die diese Eigenschaft nicht besitzen, wie etwa Photonen, heißen Bosonen.

Die meisten Physiker, die Quantenkonzepte wie den Spin untersuchen, scheren sich nicht um deren topologische Bedeutungen. Doch in den 1980er Jahren begannen Theoretiker wie David Thouless von der University of Washington in Seattle zu vermuten, dass eben diese Topologie für ein überraschendes Phänomen verantwortlich sein könnte, das als Quanten-Hall-Effekt bezeichnet wird. Bei diesem Phänomen ändert sich der elektrische Widerstand in einer nur ein Atom dicken Kristallschicht sprunghaft in diskreten Schritten, wenn das Material sich in einem veränderlichen Magnetfeld befindet. Andererseits ändert sich der Widerstand nicht bei Fluktuationen der Temperatur oder bei Unreinheiten in dem Kristall. Ein so robustes Verhalten war zuvor unbekannt, sagt Hasan, und es ist eine der Schlüsseleigenschaften jener topologischen Zustände, die Physiker jetzt für technische Anwendungen nutzen wollen.

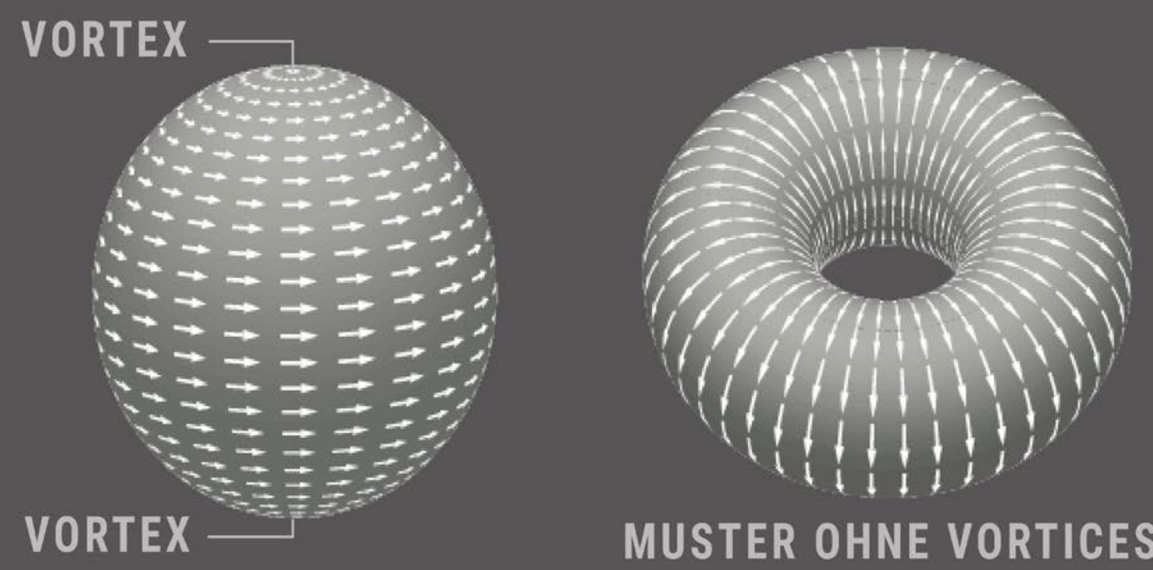
Physik mit einer Drehung

Im Jahr 1982 entschlüsselten Thouless und seine Kollegen die Topologie hinter dem Quanten-Hall-Effekt – was schließlich mit dazu führte, dass Thouless einen Anteil am Physik-Nobelpreis des des Jahres 2016 erhielt. Wie beim Spin des Elektrons zeigt sich die Topologie auch hier in einem abstrakten Raum. Doch diesmal ist die grundlegende Form kein Möbiusband, sondern die Oberfläche eines Torus. Wenn das Magnetfeld stärker oder schwächer wird, bilden sich auf der Oberfläche Wirbel und verschwinden wieder, ähnlich den Windströmungen um das Auge eines Hurrikans (siehe Grafik »Alles aufgewickelt«).

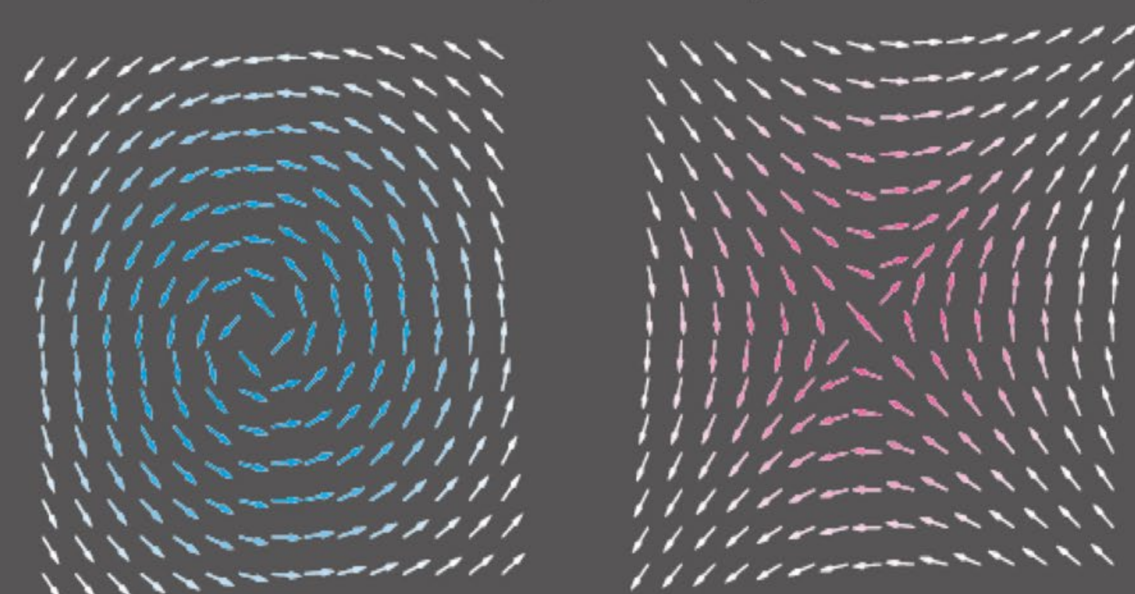
Wirbel besitzen eine »Windungszahl« genannte Eigenschaft. Sie beschreibt, wie oft sie sich um einen zentralen Punkt winden. Die Windungszahl ist eine topologische Invariante – sie ändert sich nicht, wenn man die Fläche deformiert. Außerdem ist die Gesamtsumme aller Windungszahlen der bei den Veränderungen des Magnetfelds auftauchenden und wieder verschwindenden Wirbel konstant. Diese

ALLES AUFGEWICKELT

Viele physikalische Phänomene wie etwa Luft- oder Wasserströmungen lassen sich als Muster von Pfeilen auf einer Oberfläche darstellen. Das Verhalten der Phänomene hängt dann teilweise von der Topologie dieser Oberflächen ab. Und so, wie das Kämmen einer behaarten Kugel unvermeidlich zur Bildung von Haarwirbeln an den Polen der Kugel führt, wird eine Kugeloberfläche stets einige Wirbel oder »Vortices« in dem Muster enthalten. Wenn es sich bei der Oberfläche um einen Torus handelt, ist das jedoch nicht immer der Fall.

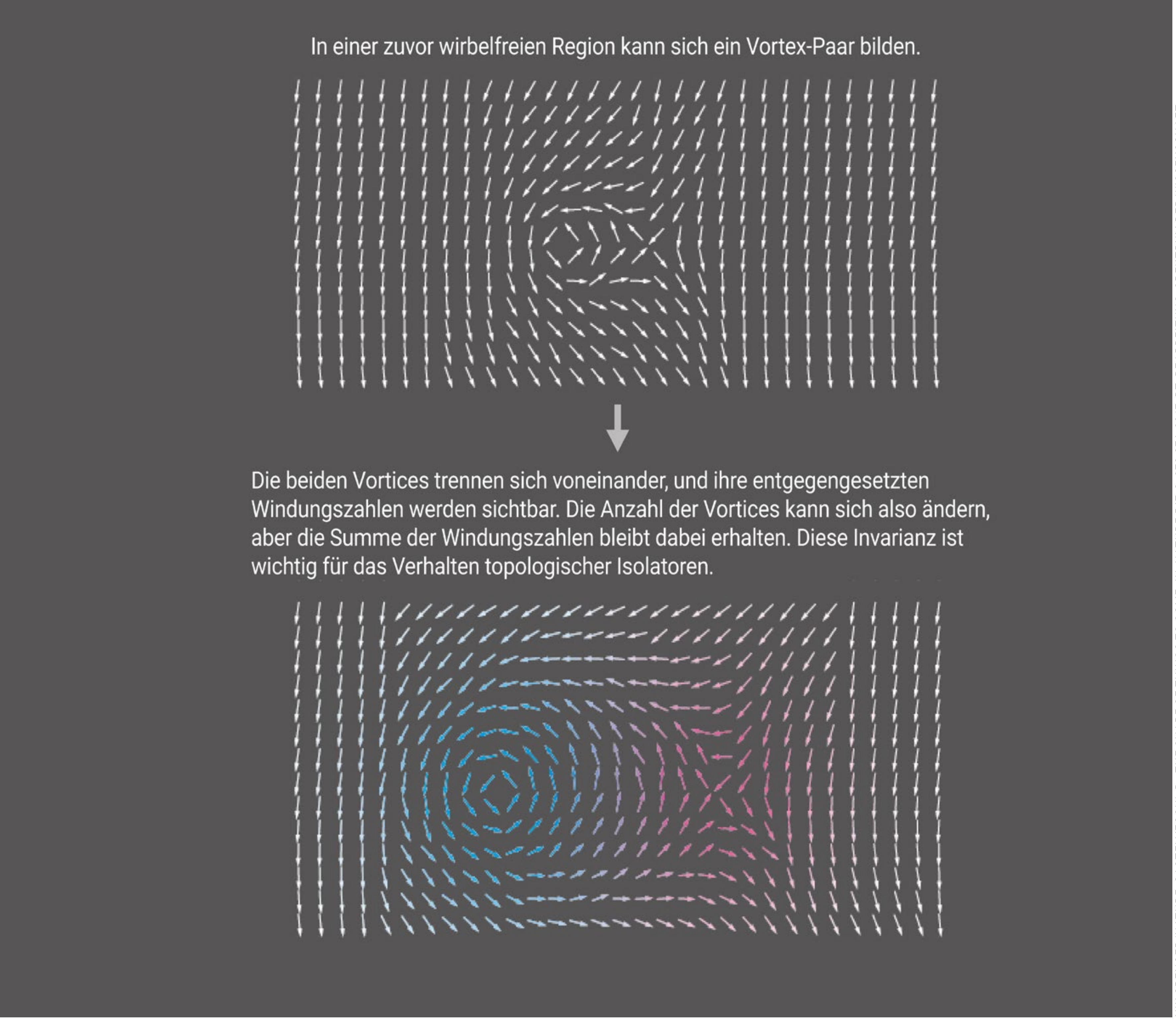


Jeder Vortex besitzt eine »Windungszahl«, die erfasst, wie oft sich der Wirbel um einen Punkt windet. Diese Zahl kann positiv oder negativ sein.



WINDUNGSZAHL 1 WINDUNGSZAHL −1

NIK SPENCER/NATURE; CASTELVECCHI, D.: THE SHAPE OF THINGS TO COME. IN: NATURE 547, S. 272-274, 2017; DT. BEARBEITUNG: SPEKTRUM DER WISSENSCHAFT



Summe wird als Chern-Zahl bezeichnet, benannt nach dem chinesisch-amerikanischen Mathematiker Shiing-Shen Chern. Sie ist unter Topologen bereits seit den 1940er Jahren bekannt.

Stromfluss ohne Widerstand

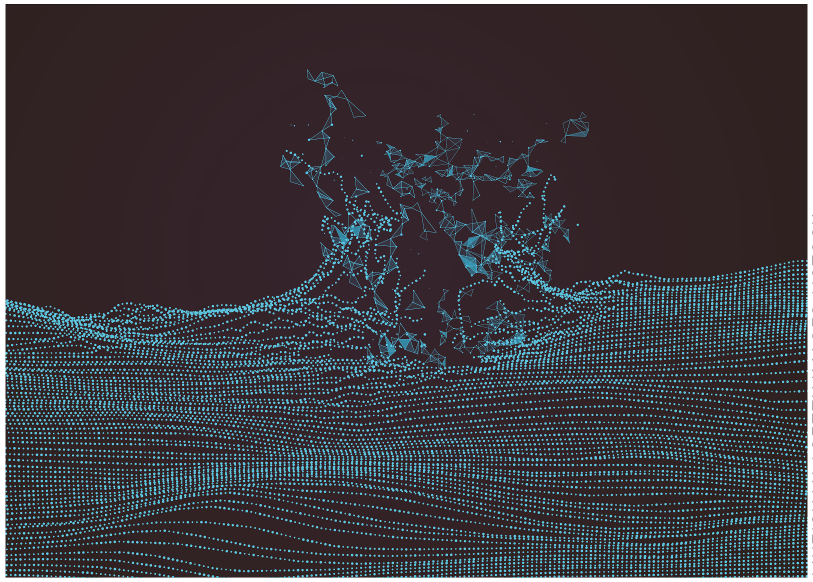
Doch die überraschendste Entdeckung stand den Forschern noch bevor. Bis Mitte der 2000er Jahre hatte man den Quanten-Hall-Effekt und andere topologische Effekte lediglich unter dem Einfluss starker Magnetfelder beobachtet. Doch Kane und seine Kollegen sowie ein weiteres unabhängiges Forscherteam bemerkten, dass einige aus schweren Elementen hergestellte Isolatoren über innere Wechselwirkungen von Elektronen und Atomkernen ihr eigenes Magnetfeld mitbrachten. Das stattet Elektronen an der Oberfläche dieser Materialien mit robusten, »topologisch geschützten« Zuständen aus, die einen Stromfluss nahezu ohne Widerstand möglich machen. Hasans Gruppe demonstrierte diesen Effekt 2008 in Wismut-Antimon-Kristallen, die als topologische Isolatoren bezeichnet werden. »Damit begann der Spaß erst richtig«, sagt Hasan.

Die Entdeckung erschütterte die physikalische Welt, urteilt Edward Witten, Theoretiker am Institute for Advanced Study in Princeton. Er ist der einzige Physiker, der jemals die Fields-Medaille verliehen bekommen hat, die höchste Auszeichnung für Mathematiker. Topologische Zustände seien keineswegs exotische Ausnahmen, so Witten, sondern sie böten vielfältige Möglichkeiten zur Entdeckung bislang unbekannter Effekte in der Natur: »Die Denkweise hat sich geändert.«

Kreislauf der Ideen

Eine der größten Überraschungen war es, dass diese Zustände sich häufig mit Theorien erklären lassen, die zur Lösung völlig anderer Probleme aufgestellt worden waren – etwa für die Verbindung der Gravitation mit der Quantenphysik. Konzepte wie Wittens topologische Quantenfeldtheorie, die zu Durchbrüchen in der reinen Mathematik geführt haben, tauchten nun in der Physik an unerwarteten Stellen wieder auf. »Es handelt sich um einen wunderbaren Kreislauf der Ideen«, erklärt der 2019 verstorbene Mathematiker Michael Atiyah, ebenfalls Träger die Fields-Medaille, der an der University of Cambridge in Großbritannien über diese Theorien forschte. Eine weitere Quelle der Aufregung ist, dass Elektronen und andere Teilchen in topologischen Materialien mitunter Zustände einnehmen können, in denen sie sich kollektiv wie ein einziges Elementarteilchen verhalten. Solche »Quasiteilchen«-Zustände können Eigenschaften aufweisen, die bei natürlichen Elementarteilchen nicht auftreten. Sie können sogar Teilchen imitieren, die von den Physikern erst noch entdeckt werden müssen. Einige solcher heiß ersehnten Quasiteilchen wurden vor zwei Jahren aufgespürt. Sie werden als Weyl-Fermionen bezeichnet, weil der Mathematiker Hermann Weyl bereits in den 1920er Jahren über masselose Fermionen spekuliert hatte. Alle Fermionen, die im konventionellen Teilchenzoo entdeckt worden sind, besitzen eine Masse. Doch wie Hasan berechnet hat, können topologische Effekte im Inneren von Tantal-Arsenid-Kristallen zu masselosen Quasiteilchen führen, die sich wie Weyl-Fermionen verhalten. Wenn ein Quasiteilchen masselos ist, bewegt es sich unabhängig von seiner Energie stets mit der gleichen Geschwindigkeit.

Hasans Team konnte das 2015 experimentell bestätigen, ebenso wie eine von Hongming Weng an der Chinesischen Akademie der Wissenschaften in Peking geleitete Gruppe. Die Hoffnung der Forscher ist, dass solche Materialien eines Tages in superschnellen Transistoren Anwendung finden. Wenn sich Elektronen durch einen Kristall bewegen, werden sie normalerweise an Unreinheiten gestreut. Das verlangsamt ihre Bewegung. Doch die topologischen Effekte in Hasans Tantal-Arsenid erlauben es den Elektronen, sich ungehindert durch den Kristall zu bewegen. Marin Soljacic, Physiker



LIUZISHAN / GETTY IMAGES / ISTOCK

»Wenn man eine neue Technologie entwickeln will, muss man zunächst das Fundament dafür richtig hinbekommen«

[Michael Freedman, Microsoft Research]

am Massachusetts Institute of Technology in Cambridge in den USA, und seine Kollegen haben inzwischen etwas Ähnliches wie Weyl-Fermionen beobachtet, jedoch nicht in einem Kristall, sondern in elektromagnetischen Wellen. Zunächst formten die Wissenschaftler eine Gyroid-Struktur, ein faszinierendes dreidimensionales Muster, das wie ein System miteinander verbundener Wendeltreppen aussieht, indem sie sorgfältig Löcher in einen Stapel Kunststofffliesen bohrten. Dann feuerten sie Mikrowellen auf den Gyroid und beobachteten, dass sich die Photonen – bei denen es sich um masselose Bosonen handelt – wie die Weyl-Fermionen in Hasans Material verhielten. Eine der aufregendsten Perspektiven dieses boomenden Forschungsgebiets der topologischen Photonik ist die mögliche Nutzung von Kristallen zur Herstellung optischer Leiter, in denen Licht sich nur in die eine Richtung bewegen kann. Das würde verhindern, dass das Licht an Unreinheiten zurückgeworfen wird, und so die Effizienz von Datenübertragungen über weite Entfernungen verbessern.

Verrückheit der Quasiteilchen

Auf einer Skala der reinen Verrücktheit gibt es ein Sorte von Quasiteilchen, die Soljacic-Boson-Fermionen noch übertreffen: die Anyonen. Normalerweise sind individuelle Teilchen entweder Fermionen oder Bosonen. Doch Anyonen – Quasiteilchen, die in zweidimensionalen, nur ein Atom dicken Materialien existieren – brechen diese Regel. Die Forscher können diesen Verstoß beobachten, wenn zwei identische Teilchen ihre Plätze tauschen. Bei Bosonen hat ein solcher Tausch keinen Einfluss auf die kollektive Wellenfunktion. Bei Fermionen dagegen verschiebt sich die Phase der Wellenfunktion um 180 Grad, ähnlich wie bei der Drehung eines Elektrons um 360 Grad. Doch bei Anyonen ändert sich die Phase der Wellenfunktion um einen Winkel, der von der Art des Anyons abhängt. Und die Theorie deutet darauf hin, dass in einigen Fällen ein zweiter Platztausch der Anyonen nicht zur Wiederherstellung der ursprünglichen Wellenfunktion führt.

Wenn die Wissenschaftler also eine Vielzahl solcher Anyonen nahe beieinander erzeugen könnten und dann hin und her tauschen würden, würden sich deren Quantenzustände »erinnern«, wie sie gemischt worden sind. Die Physiker können diesen Prozess visualisieren, indem sie die zweidimensionale Bewegung der Anyonen gegen eine dritte Dimension, die Zeit, auftragen. Das Ergebnis ist ein Flechtwerk von Linien, die sich zu hübschen Zöpfen verwickeln. Im Prinzip ließen sich mit solchen Zopfzuständen Quantenbits kodieren. Solche »Qubits« sind die kleinsten Informationseinheiten in Quantencomputern. Die Topologie der Zöpfe würde die Qubits vor externem Rauschen schützen – störenden Einflüssen, die bislang jedes andere Verfahren zur Speicherung von Quanteninformationen beeinträchtigen.

Microsoft übertrug 2005 dem Mathematiker Michael Freedman die Verantwortung für die Forschung des Unternehmens im Bereich Quantencomputer – und investierte damit massiv in Quantenzöpfe. Denn Freedman hatte 1986 die Fields-Medaille für seine Arbeiten über die Topologie vierdimensionaler Sphären erhalten und entwickelte in den 1990er Jahren einige der wichtigsten Ideen zu Zopf-Qubits.

Zunächst konzentrierte Freedmans Team sich auf die Theorie. Doch Ende 2016 stellte Microsoft eine ganze Reihe angesehener Experimentalphysiker aus der akademischen Welt ein. Einer von ihnen ist Leo Kouwenhoven von der Technischen Universität Delft in den Niederlanden. Er hatte 2012 als Erster experimentell bestätigt, dass Teilchen wie Anyonen sich an ihre Vertauschung erinnern. Kouwenhoven baut gegenwärtig ein Labor für Microsoft in Delft auf, dessen Ziel es ist, mit Anyonen Qubits zu codieren und einfache Quantencomputer-Operationen durchzuführen.

Zwar hinkt dieses Verfahren anderen Ansätzen für Quantencomputer um gut zwei Jahrzehnte hinterher. Doch Freedman ist davon überzeugt, dass die Robustheit der topologischen Qubits dem neuen Ansatz letztlich zum Sieg verhelfen wird. »Wenn man eine neue Technologie entwickeln will, muss man zunächst das Fundament dafür richtig hinbekommen«, betont er. Hasan versucht sich an ähnlichen Experimenten, glaubt jedoch, dass es topologische Quantencomputer frühestens in vier Jahrzehnten geben wird. »Meine Prognose ist, dass topologische Phasen der Materie noch für viele Jahre auf die Laboratorien von Universitäten beschränkt bleiben«, führt er weiter aus.

Ein topologischer Atlas

Doch vielleicht gibt es eine Möglichkeit, die Entwicklung zu beschleunigen. Die konventionelle Methode der Experimentalphysiker bei der Suche nach neuen topologischen Isolatoren basiert auf der arbeitsintensiven Berechnung möglicher Energien von Elektronen in jedem Material, um dann daraus die Eigenschaften des Materials vorherzusagen.

Doch ein von dem theoretischen Physiker Andrei Bernevig an der Princeton University geleitetes Team hat eine Abkürzung gefunden. Die Forscher erstellten einen Atlas topologischer Materialien, indem sie alle 230 unterschiedlichen Symmetrien betrachteten, die in der Kristallstruktur eines Materials existieren können. Dann haben sie systematisch untersucht, welche dieser Symmetrien – im Prinzip – zu topologischen Zuständen führen können, ohne dass sie dazu erst alle Energieniveaus berechnen mussten.

Zehntausende topologische Legierungen

Die Forscher gehen davon aus, dass 10 bis 30 Prozent aller Materialien topologische Effekte zeigen könnten. Das wären potenziell Zehntausende von Legierungen. Bislang konnten erst einige Hundert dieser topologischen Materialien identifiziert werden. »Wie sich zeigt, kennen wir bisher nur einen kleinen Teil der gewaltigen Menge von topologischen Materialien, die existieren können, und es gibt noch viel, viel mehr davon«, sagt Bernevig.

Zu Bernevigs Team gehören auch drei Experten für die Mathematik von Kristallen von der Universität des Baskenlands in Bilbao. Schon bald können Forscher den »Bilbao Crystallographic Server« konsultieren, um herauszufinden, ob ein bestimmtes kristallines Material potenziell topologisch ist. Bernevigs Methode sei »definitiv ein effizienter Weg«, um nach neuen topologischen Isolatoren zu suchen, unterstreicht Wei Li, Physiker an der Tsinghua-Universität in Peking: »Ich glaube, wir werden damit viele neue Materialien entdecken.«

Ein ganzer Zoo physikalischer Phänomene

»Wenn wir wissen, dass ein Material topologische Materiezustände besitzt, heißt das aber noch nicht, dass wir unmittelbar seine Eigenschaften vorhersagen können«, mahnt Koautorin Claudia Felser, Materialwissenschaftlerin am Max-Planck-Institut für Chemische Physik fester Stoffe in Dresden, zur Vorsicht. Diese Eigenschaften müssten immer noch für jedes Material berechnet und gemessen werden, erläutert sie.

Die meisten der bislang untersuchten topologischen Materialien – einschließlich jener in Bernevigs Atlas – sind relativ einfach zu verstehen, weil die Elektronen in ihnen ihre gegenseitige Abstoßung kaum spüren. Die nächste große Herausforderung für die Theoretiker ist es, »stark wechselwirkende« topologische Materialien zu verstehen, in denen die Elektronen sich stark abstoßen. Wenn die Theoretiker dieses Problem lösen, sagt Hasan, »werden wir einen ganzen Zoo neuer physikalischer Phänomene finden, die wir uns heute nicht einmal vorstellen können«.

(Spektrum – Die Woche, 46/2017)

Der Artikel erschien im Original unter dem Titel »The strange topology that is reshaping physics« in »Nature«.

FESTKÖRPERPHYSIK

Topologische Materialien

von Manon Bischoff

Rätselhafte neue Stoffe stellen heute eine Revolution der Halbleiterindustrie in Aussicht. Was ist das Geheimnis der exotischen Festkörper?

TAMPATRA / GETTY IMAGES / ISTOCK

Im Oktober 2016 sah sich Thors Hans Hansson mit einer schwierigen Aufgabe konfrontiert. Er musste der Weltöffentlichkeit den Physik-Nobelpreis erklären. Es ging dabei um das wenig dankbare Thema der Topologie, ein abstraktes mathematisches Gebiet, von dem zu diesem Zeitpunkt selbst mancher Naturwissenschaftler wenig gehört hatte. So kam es, dass Hansson vor den laufenden Fernsehkameras eine Papiertüte zückte und nacheinander eine Brezel, einen Bagel und ein Zimtbrötchen auspackte. Topologen, sagte er, würden das Gebäck nicht durch ihren Geschmack, sondern gemäß der Anzahl ihrer Löcher unterscheiden. Ein Zimtbrötchen ist also nicht nur süßer als eine Brezel, es hat vor allem zwei Löcher weniger. Aus Sicht eines Mathematikers hätte Hansson statt dem Zimtbrötchen also auch ein Vollkornbrot in die Tüte packen können – topologisch gesehen sind beide Körper identisch. Vor dem Backen hätten sich ihre Teigmassen ineinander verformen lassen, ohne dass sie dabei zerreißen. Und darauf kommt es in der Topologie an.

Manon Bischoff ist theoretische Physikerin und Redakteurin bei Spektrum der Wissenschaft.

Für viele Beobachter war Hanssons Auftritt auch überraschend, weil es abstrakte mathematische Themen eher selten ins Rampenlicht schaffen. Aber das Nobelkomitee trug damit einer Entwicklung Rechnung, die unter Experten längst hohe Wellen schlug: Dem Siegeszug der Topologie beim Verständnis der Phänomene in Festkörpern.

In der Festkörperphysik suchen Wissenschaftler weder nach neuen Bausteinen der Materie noch nach exotischen Grundkräften. Stattdessen arbeiten sie mit gewöhnlichen Atomen und Elektronen, die bereits seit Jahrhunderten bekannt sind, aber auch heute noch Forscher vor ungelöste Fragen stellen. So etwa jene, wie diese Bausteine im Innern verschiedener Materialien interagieren, von Metallen über Magnete bis hin zu Supraleitern. Und tatsächlich haben Physiker dazu in den vergangenen 30 Jahren enorm viel herausgefunden.

Das verdeutlichen nicht zuletzt die Arbeiten von David Thouless, Duncan Haldane und Michael Kosterlitz, die 2016 den Nobelpreis für Physik erhielten. Sie trugen maßgeblich zur Entdeckung einer völlig neuen Stoffklasse bei, der »topologischen« Materialien. Wie die drei Physiker zeigten,

AUF EINEN BLICK

Die neuen Wunderstoffe

1. 1980 beobachtete der deutsche Physiker Klaus von Klitzing erstmals ein ungewöhnliches Verhalten von Elektronen in Festkörpern.

2. Zwei Jahre später deckten vier Forscher auf, dass das abstrakte mathematische Gebiet der Topologie die exotischen Phänomene erklärt.

3. Erst im letzten Jahrzehnt realisierten Physiker, dass die bizarren Zustände keine Ausnahme waren. Sie erkannten eine neue Materialklasse, die gleichberechtigt neben gewöhnlichen Isolatoren und Leitern steht.

STANDBILD AUS THE NOBEL PRIZE IN PHYSICS 2016 – PRIZE ANNOUNCEMENT

BREZEL UND BAGEL

Thors Hans Hansson bei der Verkündung des Nobelpreises für Physik 2016.

lassen sich die Elektronen in diesen speziellen Kristallen elegant mit dem Handwerkszeug der Topologie beschreiben.

Inzwischen explodiert die Anzahl der Veröffentlichungen zu dem Thema geradezu. Und das, obwohl selbst Experten die exotischen Stoffe noch in den 1990er und 2000er Jahren kaum wahrnahmen. Heute sind sich Physiker aber sicher: Mit den topologischen Materialien hat man eine neue Klasse von Festkörpern entdeckt, die gleichberechtigt neben den gewöhnlichen Isolatoren und den elektrischen Leitern steht. Nun träumen Wissenschaftler von neuen Technologien, die auf topologischen Konzepten basieren, wie verbesserten Quantencomputern oder futuristischen Spin-Netzwerken.

Der Startschuss dieser Materialrevolution fiel in einer Februarnacht des Jahres 1980, auch wenn das die Forscher damals noch nicht ahnten. Der deutsche Physiker Klaus von Klitzing tüftelte wie so oft bis spätabends im Hochfeld-Magnetlabor der Universität Grenoble. Die Experimente seines Teams benötigten so viel Energie, dass der Physiker nur nachts arbeiten durfte, um günstigere Stromtarife zu nutzen. An diesem Abend untersuchte er, wie sich Elektronen in verschiedenen Transistoren bewegen. Dabei legte der deutsche Forscher auch immer wieder ein starkes Magnetfeld an und kühlte die elektronischen

Schalter mit flüssigem Helium auf minus 270 Grad Celsius.

Bei den untersuchten Materialien handelte es sich um neuartige Halbleiter, in denen die für den Stromtransport verantwortlichen Elektronen zwischen zwei Schichten eingeschlossen waren. Dadurch konnten sich die elektrischen Leiter nur in einer zweidimensionalen Ebene bewegen. Als von Klitzing eine Spannung an die Probe anlegte und dabei die Stärke des äußeren Magneten variierte, riss der Strom entlang der elektrischen Spannung immer wieder ab, während er senkrecht dazu verlustfrei floss (siehe »Quanten-Hall-Effekt«).

Überraschung aus dem Labor

Gegen zwei Uhr morgens war sich von Klitzing sicher, etwas Ungewöhnlichem auf der Spur zu sein. Unabhängig davon, ob er die Messung an Proben der Siemens-Forschungslaboratorien oder der Plessey-Company machte, »immer wieder fanden wir einen elektrischen Widerstand, dessen Wert von etwa 6453,2 Ohm die Natur festgelegt hat«, wird sich von Klitzing später erinnern[10]. Für ihn und seine Mitarbeiter wirkte das, was seine Messgeräte zeigten, wie ein Wunder.

FOTO: HENRY SEGERMAN; 3D PRINT DESIGN: KEENAN CRANE & HENRY SEGERMAN; MIT FRDL. GEN. VON HENRY SEGERMAN

BEIDES HAT GENAU EIN LOCH

Durch einfaches Kneten kann man eine Tasse zu einem Donut verformen. Darum sind beide Objekte topologisch gesehen gleich.

Erstaunlicherweise beobachtete von Klitzing den konstanten Widerstandswert bei jedem Halbleiter, den er testete. Für alle Materialien, bei denen die leitenden Elektronen auf einer zweidimensionalen Schicht gefangen sind, tauchte die gleiche Messgröße auf. Das durfte eigentlich nicht sein. Schließlich unterschieden sich die untersuchten Halbleiter deutlich voneinander. Die genaue Platzierung und Art der Atome, aber auch die Form einer Probe hat normalerweise großen Einfluss darauf, wie sich Elektronen in Festkörpern bewegen. Und damit sollte eigentlich auch der elektrische Widerstand unterschiedlich sein.

Aber von Klitzings Messungen waren eindeutig. In seinen Tests schien die Art des Materials keine Rolle zu spielen. Kollegen schauten in den kommenden Monaten skeptisch auf seine Arbeiten. Eine Fachzeitschrift lehnte sogar zunächst sein Manuskript ab, die Gutachter vermuteten einen Fehler. Erst nachdem von Klitzing seine Ergebnisse auf einer Konferenz vorgestellt und die Fragen seiner Kollegen beantwortet hatte, nahm die Fachwelt deren Tragweite wahr.

Die Entdeckung des deutschen Forschers ging als Quanten-Hall-Effekt in die Wissenschaftsgeschichte ein, und 1985 erhielt er dafür den Physik-Nobelpreis. Damit fing die Arbeit aber erst an. In den folgenden Jahren versuchten andere Physiker, die ungewöhnlichen Vorgänge in den Halbleitern theoretisch zu deuten. David Thouless und drei seiner Kollegen erinnerte das sonderbare Verhalten der Elektronen an den Bereich der Topologie. Bereits 1982, zwei Jahre nach von Klitzings Experiment, hatten sie die entscheidende Idee, die Thouless 2016 den Nobelpreis bescheren sollte. Die Wissenschaftler bewiesen, dass das abstrakte mathematische Gebiet den Quanten-Hall-Effekt erklärt.

Denn auch in der Topologie ist die genaue Geometrie eines Objekts irrelevant, ebenso wie es für die Elektronen in Klaus von Klitzings Experiment egal ist, wie der Festkörper um sie herum im Detail beschaffen ist. Für Topologen sind zwei Figuren, die man durch Kneten – ohne sie zu zerreißen – ineinander umformen kann, gleich. Daher gibt es aus topologischer Sicht keinen Unterschied zwischen einer Tasse und einem Donut, denn sie haben beide genau ein Loch. Ein Ball gehört dagegen der Null-Loch-Kategorie an, genauso wie ein Ei oder eine Wurst.

Die Topologie im Quanten-Hall-Effekt ist allerdings nicht durch die Form der Probe oder die Anordnung ihrer Atome gegeben, sondern sie versteckt sich in den Wellenfunktionen der leitenden Elektronen. Die Wellenfunktion ist ein Maß für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Teilchens. Aus ihr lassen sich die Orbitale berechnen, also jene Bereiche um einen Atomkern, in denen sich die Elektronen aufhalten dürfen (siehe »Kristalline Festkörper«). Die Wellenfunktion besteht aus einem reellen und einem »imaginären« Wert, der Wurzeln aus negativen Zahlen enthält. Oftmals ist es deshalb einfacher, sich eine Wellenfunktion als zweidimensionales Objekt aus reellen Zahlen vorzustellen, die man in einem einfachen Koordinatensystem darstellen kann. Ein darin eingezeichneter Vektor hat zwei Einträge, den Realteil auf der x-Achse und den Imaginärteil auf der y-Achse.

Elektronen auf Abwegen

Wenn sich ein Teilchen in einem starken Magnetfeld bewegt, ändert sich auch die Wellenfunktion mit seiner Geschwindigkeit. Wird ein Elektron in einem Quanten-Hall-System erst langsamer und dann wieder schneller, dann wackelt der dazugehörige Vektor fortlaufend hin und her. Es wirkt, als würde er entlang einer gekrümmten Oberfläche geschoben. Tatsächlich lässt sich mit dieser Oberfläche eine Brücke zur Topologie schlagen und das sonderbare Verhalten in von Klitzings Halbleitern erklären.

Um das zu verstehen, hilft eine Analogie: Stellen wir uns eine Person vor, die auf einen fremden Himmelskörper gebeamt wurde. Sie möchte wissen, ob diese Welt rund wie die Erde ist oder eher einem Donut ähnelt. Die Person spaziert (ohne sich dabei um die eigene Achse zu drehen) einen kleinen Rundweg entlang und stellt fest, dass sie zu Beginn ihrer Tour in eine andere Richtung geblickt hat als am Ende. Aus diesem Winkelunterschied kann die Person die Krümmung der Oberfläche in ihrer Umgebung berechnen, zumindest wenn sie etwas von Geometrie versteht. Indem sie alle möglichen geschlossenen Wege entlangwandert, kann sie sogar die Lochzahl des Himmelskörpers ermitteln und damit seine Topologie.

Anders als in dieser Metapher bestimmt in Festkörpern nicht der Aufenthaltsort eines Elektrons die Neigung der Wellenfunktion, sondern dessen Geschwindigkeit. Bewegt sich ein Elektron in einem Quanten-Hall-System schneller, beugt sich der zugehörige Vektor in die eine Richtung; wird es langsamer, neigt er sich in die andere.

Die gekrümmte »Oberfläche«, auf der die Wellenfunktion gleitet, ist also kein räumliches Objekt, sondern ein abstraktes mathematisches Gebilde. Aber es hat handfeste Folgen: Forscher können die Eigenschaften der Oberfläche im Labor messen. Dazu beschleunigen sie die Elektronen mit Laserstrahlen und bestimmen die so genannten Phasenunterschiede zwischen den Wellenfunktionen vor und nach der Beschleunigung. Anschaulich gesehen entspricht der Phasenunterschied dem Winkel zwischen der Blickrichtung zu Beginn und am Ende eines Rundwegs, den eine Person auf einem Himmelskörper entlanggeht. Auf ähnliche Weise können die Wissenschaftler aus dem Phasenunterschied auf die Topologie der abstrakten Oberfläche schließen.

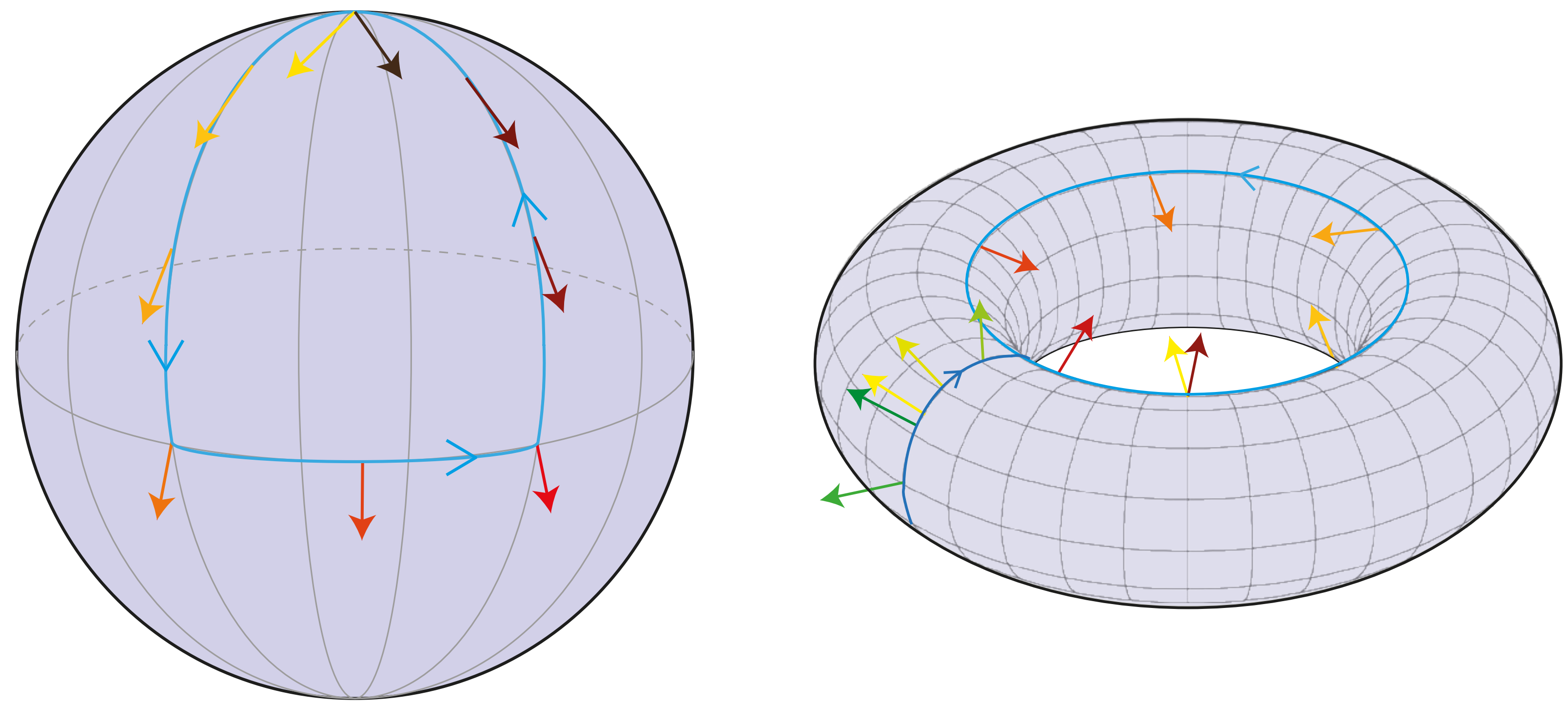
Die Stärke des äußeren Magnetfelds bestimmt dabei, wie sich die Wellenfunktionen der Elektronen gemäß ihrer Geschwindigkeit winden. Indem man die Feldstärke stark variiert, kann man daher ein Material von einem topologischen Zustand in den nächsten überführen und damit den Elektronen ein bestimmtes Verhalten vorschreiben. Dieser Effekt hatte sich in von Klitzings Messungen gezeigt. Der Widerstand hatte nicht nur für alle getesteten Proben den gleichen Wert, sondern er blieb auch dann konstant, als der Forscher das Magnetfeld leicht erhöhte. Tatsächlich hing der Widerstand lediglich von der Topologie der abstrakten Oberfläche ab. So konnte von Klitzing die Feldstärke immer weiter erhöhen; als sie schließlich einen bestimmten Schwellenwert erreichte, stieg der Widerstand schlagartig an. Das Material war in den nächsten topologischen Zustand gerutscht. Bildlich gesehen gleicht das der Situation, in der das Magnetfeld Löcher in die Oberfläche reißt, entlang derer die Wellenfunktionen gleiten.

Das bedeutet aber, dass das Verhalten der Elektronen in topologischen Materialien extrem robust gegenüber äußeren Einflüssen ist. Diese Stabilität, gefolgt von einer ruckartigen Änderung, zeichnet die Festkörperklasse aus. Kleinere Variationen – etwa in der Gestalt der Probe, dem äußeren Magnetfeld, der genauen Anordnung der

Atome oder der Temperatur – können den Elektronenwellenfunktionen wenig anhaben. Die abstrakte »Oberfläche«, die ihr Verhalten bestimmt, verformt sich zwar, ohne anschaulich gesehen an Löchern zu gewinnen oder zu verlieren. Deshalb lässt sich ein Quanten-Hall-System nicht ohne Weiteres in einen gewöhnlichen Materiezustand überführen, zu denen unter anderem Leiter oder Isolatoren gehören.

Ein bizarrer Spezialfall?

Wie sich nach von Klitzings Experimenten zeigen sollte, haben die exotischen Materialien eine weitere ungewöhnliche Eigenschaft: Obwohl ihr Inneres isoliert, leiten sie auch ohne äußere Spannung entlang ihres Rands verlustfrei Strom. Denn das Magnetfeld zwingt die Elektronen auf enge Kreisbahnen. An der Kante können die Teilchen diese Bahnen nicht mehr vollenden und bewegen sich daher entlang einer festen Richtung. Wegen dieser vorgegebenen Flussrichtung können die Elektronen nicht von Hindernissen (etwa Fehlstellen im Kristallgitter, die in allen echten Festkörpern auftreten) umgelenkt werden – womit auch die bei solchen Kollisionen übliche Wärmeerzeugung ausbleibt.



Wege auf Kugel und Torus

Ein Mensch wandert, ohne sich zu drehen, auf einer Kugel (links). Anfangs geht er geradeaus nach Süden und blickt nach Südwesten (gelb und orange). Den zweiten Teil des Wegs marschiert er seitlich und blickt stets in Richtung Süden (rot). Am Ende seines Pfads – den letzten Teil des Wegs ist er rückwärtsgegangen – blickt der Mensch in südöstliche Richtung (schwarz). Bewegt sich die Person dagegen auf einer donutförmigen Oberfläche, ergeben sich andere Winkel zwischen den jeweiligen Start- (gelb) und Zielpositionen (rot beziehungsweise grün). Der Winkel hängt dabei vom konkreten Rundweg ab. Unter Berücksichtigung aller möglichen kurzen geschlossenen Wege können Wissenschaftler die topologische Kategorie (also die Anzahl der Löcher) der Oberfläche bestimmen, auf der sich eine Person befindet.

SPEKTRUM DER WISSENSCHAFT / MANON BISCHOFF

Jahrzehntelang wirkte es so, als sei der Effekt, den von Klitzing entdeckt hatte, ein bizarrer Spezialfall, der nur in extrem heruntergekühlten zweidimensionalen Materialien mit starken Magnetfeldern auftritt. Die Forschung stand in diesem Bereich daher still. Mohammad Hafezi, Physiker an der University of Maryland, erinnert sich: »Als ich Doktorand war und einen Vortrag über topologische Eigenschaften hielt, die man tatsächlich im Labor messen könnte, lachten mich alle aus. Sie zogen mich noch Monate damit auf!« Dass man die topologische Klasse der abstrakten Oberfläche von Elektronenwellenfunktionen messen kann, war damals noch nicht absehbar.

Die Lage änderte sich im Jahr 2004. Die Physiker Andre Geim und Konstantin Novoselov trafen sich damals regelmäßig freitags abends in den Laboratorien der University of Manchester, um Experimente durchzuführen, die nicht direkt mit ihrer Forschung verbunden waren. An einem dieser Tage zogen die beiden Russen dünne Schichten eines Graphitblocks mit Klebeband ab. Als sie ihre Ergebnisse unter einem Mikroskop betrachteten, fiel ihnen auf, dass einige der herausgelösten Schichten dünner waren als andere. Als sie das Klebeband genauer untersuchten, fanden sie einatomige Graphitschichten – heute bekannt als Graphen.

Die hauchdünnen Lagen erinnerten andere Forscher an die Materialien, die von Klitzing 1980 untersucht hatte. Auch Graphen, das von Natur aus zweidimensional ist, sperrt Elektronen in eine Ebene ein. Könnten sich darin womöglich ähnlich bizarre Phänomene zeigen wie in den Quanten-Hall-Systemen? Das brachte die Wissenschaftler weiter ins Grübeln. Gab es vielleicht sogar natürlich auftretende Materialien, die von sich aus Elektronen solche Kunststücke aufführen lassen, also ganz ohne äußeres Magnetfeld und andere Tricks?

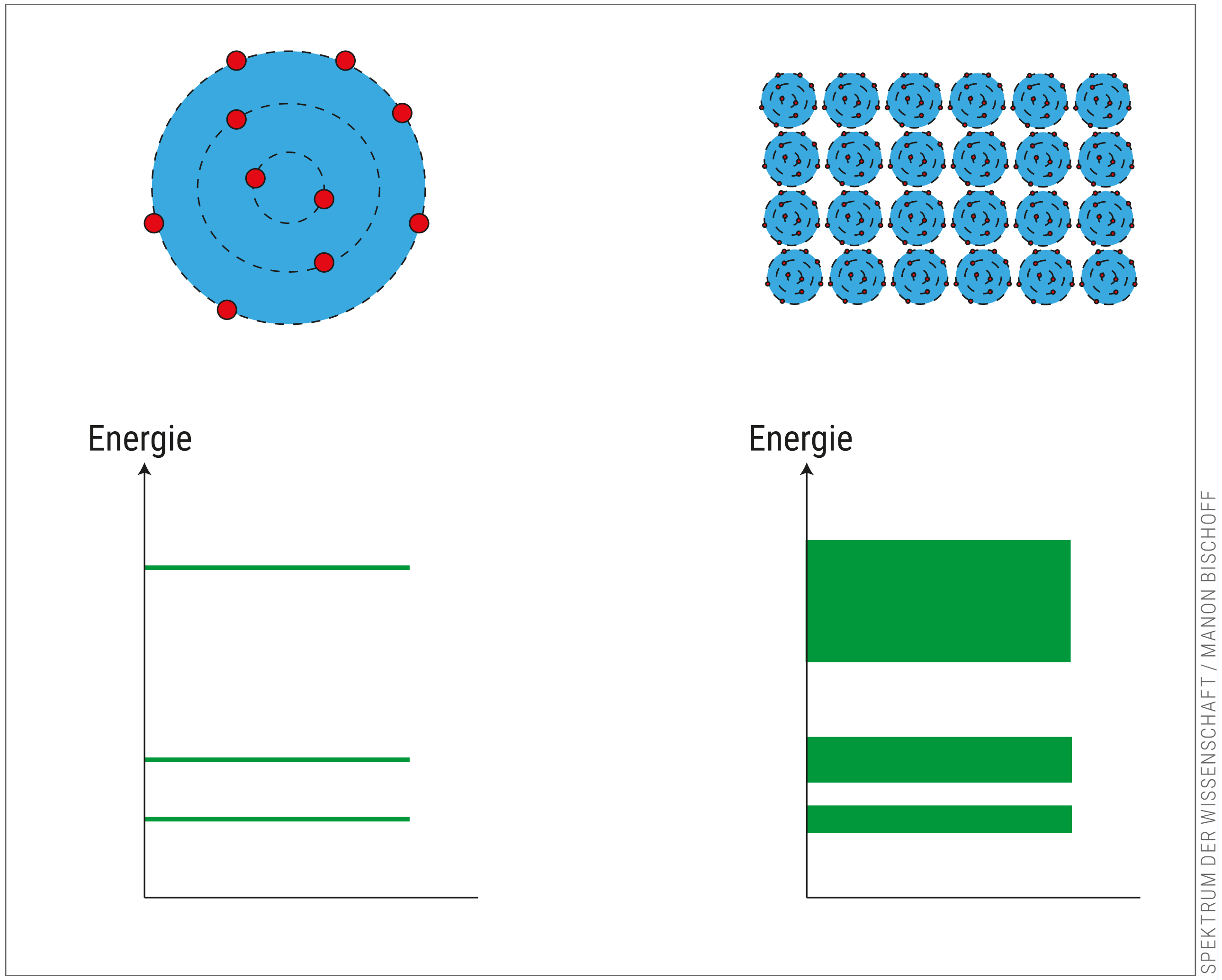
Experten kramten einen Aufsatz aus den 1980er Jahren hervor, der bis dahin wenig Beachtung gefunden hatte. Darin hatte der spätere Nobelpreisträger Duncan Haldane gezeigt, dass der Spin, eine Art Eigendrehimpuls des Elektrons, die Rolle eines äußeren Magnetfeldes übernehmen könnte, was topologische Zustände auch ohne ein solches denkbar machte. 2005 wurde Physikern die volle Bedeutung dieser Überlegung klar, als die beiden Theoretiker Charles Kane und Eugene Mele die Schlussfolgerungen Haldanes auf Graphen übertrugen.

Da rotierende Ladungen ein Magnetfeld erzeugen, verhält sich ein Elektron mit Spin wie ein winziger Magnet. Er besitzt zwei mögliche Ausrichtungen, entweder positiv (rechtsdrehend) oder negativ (linksdrehend). Üblicherweise spielt es für die Eigenschaften eines Elektrons keine Rolle, welchen Spin es hat, während es um einen Atomkern herumschwirrt.

Aus Sicht des Elektrons wirkt es so, als würde der Kern um das Teilchen herumkreisen. Wenn das Elektron schnell genug ist, spürt es wegen der positiven Ladung des Kerns ein starkes Magnetfeld, das seinen Spin in dieselbe Richtung zwingt. Elektronen mit hoher Geschwindigkeit ändern daher ihre Flugbahn, um ihren Spin dem wahrgenommenen Kernmagnetfeld anzupassen. Diese relativistische »Spin-Bahn-Kopplung« ähnelt der Wirkung eines äußeren Magnetfelds und kann damit, wie Haldane erkannte, topologische Zustände erzeugen.

Kane und Mele mutmaßten in ihrer 2005 erschienenen Arbeit, dass stark abgekühltes Graphen auch ohne äußeres Magnetfeld topologisch sei. Danach sah es aber

Kristalline Festkörper



In einem Atom (links im Bild) besetzen die Elektronen einzelne Orbitale mit einem festen Energieniveau (grüne Linien, links unten), die der jeweiligen Energie der Elektronen entsprechen. Ein Festkörper besteht aus einer enormen Anzahl aus Atomen und Elektronen (rechts). Die einzelnen Atomorbitale überlappen sich und fügen sich zu größeren zusammen. Den Elektronen steht ein ganzes »Band« (breite grüne Streifen, rechts unten) an erlaubten Energien zur Verfügung. Sie können jede dieser Energien annehmen, solange sie nicht schon durch ein identisches Teilchen besetzt ist. Zwischen den einzelnen Bändern existieren Energielücken, in denen sich keine Elektronen aufhalten können.

zunächst nicht aus. In Experimenten fanden Physiker keine Hinweise auf ähnliche Effekte wie in von Klitzings Versuchen. Heute weiß man, weshalb: Die Spin-Bahn-Kopplung in der zweidimensionalen Graphitschicht ist einfach zu schwach. Ähnlich wie beim berühmten Grenobler Experiment, für das ein extrem starkes Magnetfeld nötig war, treten die topologischen Eigenschaften in Graphen nur dann zu Tage, wenn die Spin-Bahn-Kopplung sehr stark ist.

Eine neue Materialklasse

Das ist meist bei schweren Atomen der Fall, die viele positiv geladene Protonen enthalten. Um der enormen Anziehungskraft zu entgehen, schwirren die Elektronen mit rasender Geschwindigkeit so um die Kerne herum, dass ihr Spin passend ausgerichtet ist. Sind die negativ geladenen Teilchen langsamer, genügt der schwache Effekt nicht, um ihre Bahn umzukehren. Da Graphen aus leichten Kohlenstoffatomen besteht, die lediglich sechs Protonen fassen, konnten die Wissenschaftler das Phänomen in dem Material nicht beobachten.

Trotz der gescheiterten Experimente erwachte das Interesse der Festkörperphysiker. »Das Paper von Thouless und seinen Kollegen von 1982 war für mich ehrlich gesagt mehr eine theoretische Arbeit, deren Relevanz mir erst klar wurde, nachdem ich die Veröffentlichung von Kane und Mele gelesen habe«, sagt Laurens Molenkamp, Leiter der Arbeitsgruppe für Experimentalphysik an der Universität Würzburg.

So ging es auch anderen Physikern: 2006 identifizierten Forscher um Shou-Cheng Zhang von der Stanford University einen Halbleiter, dessen Spin-Bahn-Kopplung stark genug ist, um einen topologischen Zustand zu erzeugen. Der Stoff leitet also an seinem Rand extrem gut Strom, während sein Inneres isoliert. Dabei handelt es sich um Quecksilbertellurid (HgTe), das unter anderem im seltenen Mineral Coloradoit in der Natur auftritt.

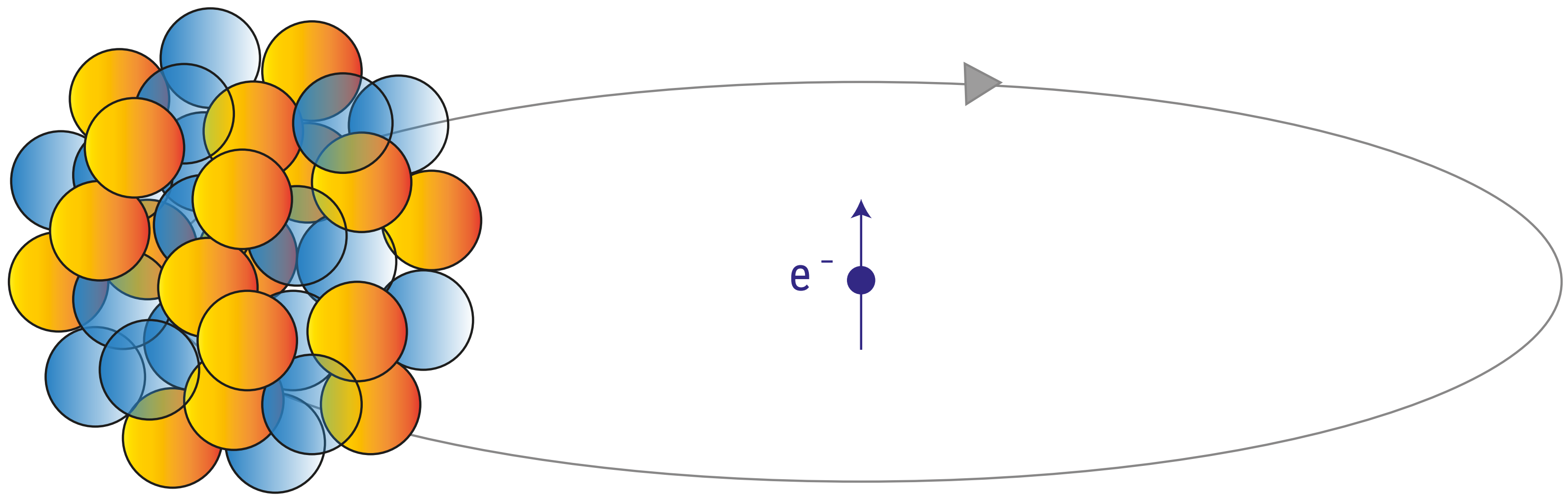
In ihrem theoretischen Modell beschrieben die Wissenschaftler eine dünne HgTe-Schicht, die zwischen zwei Kadmiumtellurid-Blöcken (CdTe) eingequetscht ist. Diese Anordnung sollte eine künftige Untersuchung des Stoffs im Labor erleichtern. Obwohl HgTe und CdTe die gleiche Gitterstruktur haben – und damit eigentlich auch ähnliche elektronische Eigenschaften –, bewirkt der schwere Quecksilberkern eine starke Spin-Bahn-Kopplung in der HgTe-Schicht. Der Effekt ist so ausgeprägt, dass die gängigsten Orbitalkonfigurationen (die so genannten s- und p-Orbitale) ihre Rollen tauschen. Während normalerweise Elektronen mit höherem Drehimpuls (p-Orbital) nur wenig Energie haben und solche mit geringem Drehimpuls (s-Orbital) viel Energie besitzen dürfen, ist es bei HgTe gerade anders herum.

Diese besondere Anordnung macht Quecksilbertellurid zu einem zweidimensionalen topologischen Material. Kleinere äußere Einflüsse verformen zwar die Atomorbitale, vertauschen aber nicht ihre Rollen. Auch in anderen Halbleitern mit starker Spin-Bahn-Kopplung sind die Eigenschaften der s- und der p-Orbitale vertauscht. Dieses Phänomen hängt also nicht von den mikroskopischen Details der jeweiligen Stoffe ab, sondern scheint universell aufzutreten – typisch für topologische Zustände.

Allerdings unterscheidet sich der von Zhang und seinen Kollegen vorhergesagte Zustand drastisch von denen, die von Klitzing in seinen Experimenten beobachtet hatte; sie bilden eine weitere neue Materialklasse: die topologischen Isolatoren. Sie sollten sich als jene Stoffe entpuppen, von denen die Physiker so lange geträumt hatten. Topologische Effekte wie die erhöhte Leitfähigkeit am Rand traten hier auch ohne äußeres Magnetfeld zu Tage, sie sollten sich daher viel besser nutzen lassen.

Die topologischen Eigenschaften der Zustände, die von Klitzing 1980 entdeckt hatte, verstecken sich in dem Verhalten der Elektronenwellenfunktionen. Dabei ist entscheidend, ob sie über eine abstrakte »Oberfläche« mit einem, zwei, drei oder mehr Löchern zu gleiten scheinen. Jeder dieser Fälle stellt einen eigenen topologischen Zustand dar. Bei topologischen Isolatoren gibt es dagegen nur zwei mögliche Fälle: Entweder verhalten sich zwei Orbitale wie gewohnt – und das Material ist ein normaler Isolator –, oder sie haben ihre Rollen getauscht.

Der Unterschied zwischen den beiden Materialklassen äußert sich in ihren elektrischen Eigenschaften. Anders als ein äußeres Magnetfeld, das die Spins aller Teilchen in eine einzige Richtung zwingt, gibt es in Kristallen mit Spin-Bahn-Wechselwirkung üblicherweise genauso viele Elektronen mit positiven wie mit negativen Spin. Die topologischen Isolatoren sind zwar –



Flugbahn

Wenn ein Elektron sehr schnell um einen Atomkern schwirrt, wirkt es aus seiner Sicht so, als kreise der Kern um das Teilchen. Das Elektron verändert seine Flugbahn dann derart, dass sein Spin in die gleiche Richtung wie das von ihm wahrgenommene Kernmagnetfeld zeigt.

SPEKTRUM DER WISSENSCHAFT / MANON BISCHOFF

wie Quanten-Hall-Systeme auch – in ihrem Innern isolierend und haben einen elektrisch leitenden Rand; ihre Elektronen können sich aber je nach Spinausrichtung in zwei Richtungen bewegen statt nur in einer. Da die Teilchen ihren Spin nicht einfach ändern können, umgehen sie bei solchen tiefen Temperaturen Fehlstellen, ohne an ihnen zu streuen und Wärme zu erzeugen.

Die Geburtsstunde der topologischen Isolatoren

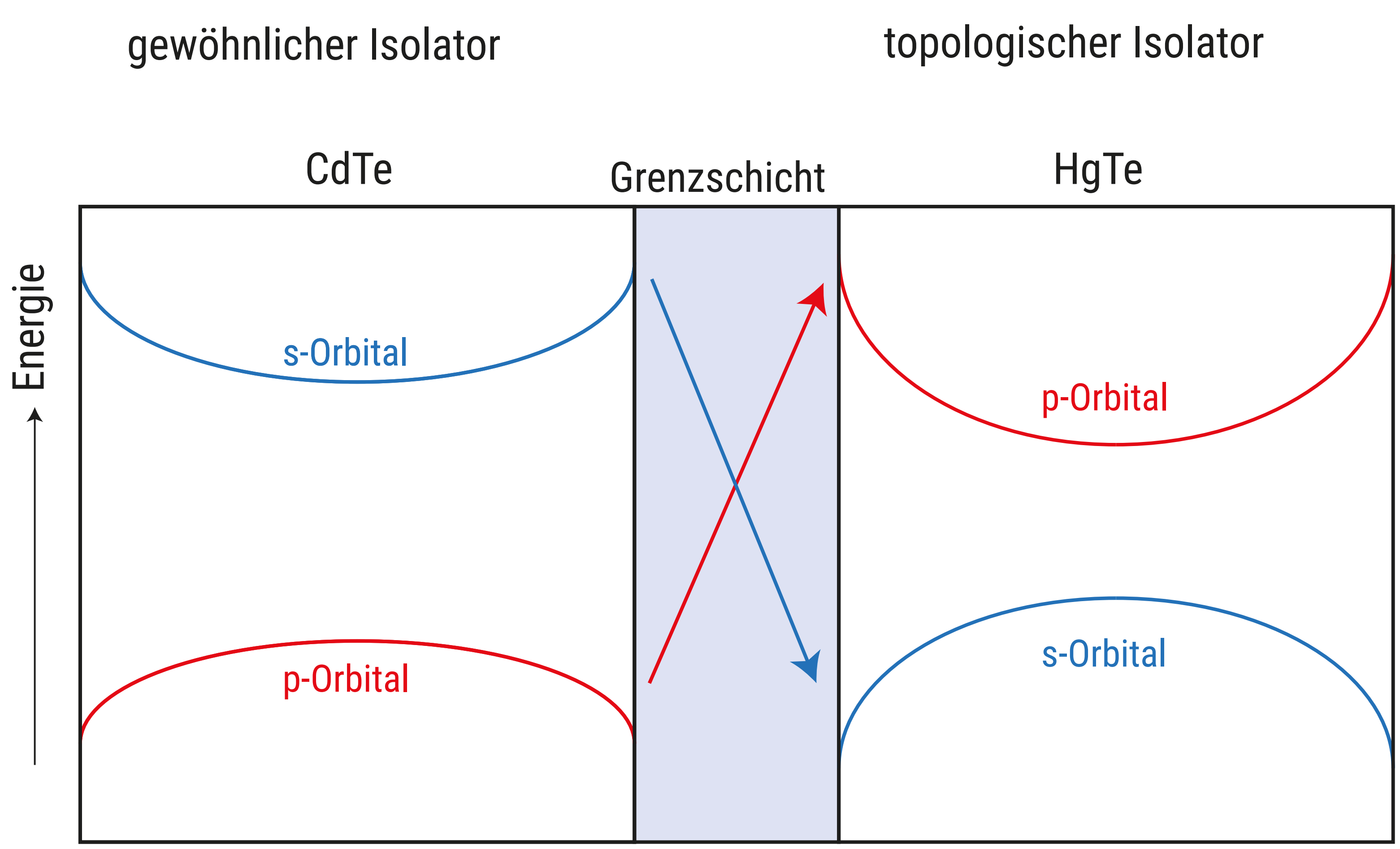
Ende 2006 überprüfte Molenkamp mit seiner Arbeitsgruppe in Würzburg die theoretischen Vorhersagen von Zhang und dessen Team im Labor. Die Würzburger stellten den ersten topologischen Isolator her, indem sie die HgTe- und CdTe-Schichten auf minus 263 Grad Celsius herunterkühlten und die Leitfähigkeit am Rand der HgTe-Schicht nachwiesen. Es war der Startschuss für einen beispiellosen Boom, der 2016 in der Vergabe des Nobelpreises gipfelte und bis heute anhält. »Heute weiß jeder über Topologie Bescheid«, sagt Mohammad Hafezi, »das ist toll!«

Tatsächlich haben Physiker mittlerweile herausgefunden, dass die topologischen Isolatoren, anders als Quanten-Hall-Systeme, nicht auf nur zwei Dimensionen beschränkt sind. Es gibt dreidimensionale Körper, in denen Elektronen an der Oberfläche ein besonderes Verhalten zeigen, beispielsweise das giftige Bismutselenid (BiSe) oder Bismuttellurid (BiTe). Auch hier bewegen sich die Elektronen an ihrer Oberfläche, ohne nennenswert Energie zu verlieren. Die Materialien unterscheiden sich aber insofern von Supraleitern, als sie nur beim absoluten Nullpunkt (minus 273,15 Grad Celsius) völlig verlustfrei Strom leiten. Supraleiter tun das zum Teil bei deutlich höheren Temperaturen.

In der Praxis müssen Physiker das exotische Verhalten der Elektronen an der Oberfläche eines Materials nachweisen, um sicherzustellen, dass es topologisch ist. Inzwischen ist es beispielsweise Forschern um Alexander Holleitner von der Technischen Universität München sogar gelun-

Isolatoren

In einem gewöhnlichen Isolator (links im Bild) haben Elektronen im s-Orbital mehr Energie als im p-Orbital. Für den topologischen Isolator HgTe (rechts) ist es umgekehrt, die Orbitale tauschen ihre Rollen. Weder in CdTe noch in HgTe berühren sich die Orbitale, Physiker sprechen von einer Bandlücke. Das bedeutet, dass die Kristalle keine elektrischen Leiter sind. An der Grenzfläche zwischen HgTe und CdTe (Mitte) verbinden sich die jeweiligen s- und p-Orbitale aus beiden Materialien (Pfeile). Dadurch kreuzen sie sich, es gibt also keine Bandlücke mehr, und daher ist die Grenzfläche elektrisch leitend.



gen, einige dieser Phänomene in Bi_2Te_2Se bei Raumtemperatur zu messen. »Es ist bemerkenswert, dass solche topologischen Effekte in gewöhnlichen Materialien realisiert werden können, ohne dass dazu extreme Bedingungen nötig sind«, formuliert es Zhang in einem Aufsatz.

Dadurch rücken technische Anwendungen immer näher. Die ungewöhnlichen Eigenschaften der Elektronen an der Oberfläche dieser seltsamen Stoffe könnten zu einer vollkommen neuen Art von Technik führen, bei der nicht bloß die Ladung der Elektronen, sondern auch ihr Spin eine Rolle spielt. Um die neuen Materialien kommerziell nutzen zu können, sollten sie allerdings einfach herzustellen und nicht gesundheitsgefährdend sein. So ist in den vergangenen Jahren eine regelrechte Jagd nach weiteren Kristallen mit den begehrten Eigenschaften entbrannt.

Dabei half eine Arbeit der zwei theoretischen Physiker Alexander Altland und Martin Zirnbauer von der Universität zu Köln, die bereits Mitte der 1990er Jahre eine Art Karte erstellt haben, um topologische Zustände zu finden. Sie hatten dazu einfache Kristalle nach den Symmetrien geordnet, die sich in den Gleichungen dieser Systeme verstecken. Anschließend hatten sie herausgearbeitet, welche davon einen topologischen Zustand ermöglichen. Auch diese Veröffentlichung blieb lange Zeit unbeachtet und trat erst mit der Entdeckung topologischer Isolatoren wieder ins Rampenlicht.

»Da hat man plötzlich Dinge wiedergefunden, die man schon kannte – wie den Quanten-Hall-Effekt«, sagt Carsten Timm von der Freien Universität Berlin. »Aber der größte Nutzen war, dass man eine große Zahl an Voraussagen hatte, in welchen Materialgruppen man nach topologischen Stoffen suchen kann und wo es sich eben nicht lohnt.«

Nicht so selten wie erwartet

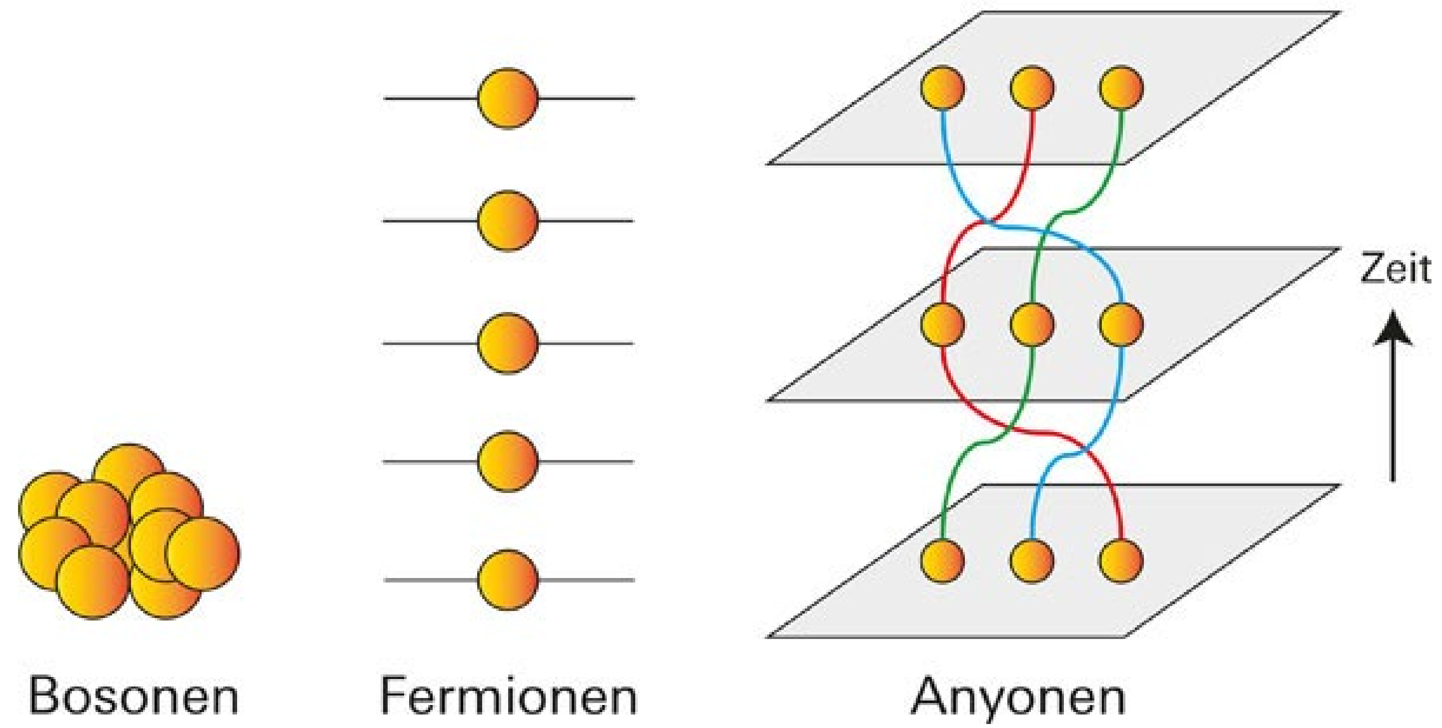
Doch die Suche ging recht schleppend voran. Bis Ende 2017 mussten Wissenschaftler dazu äußerst komplizierte und aufwändige Berechnungen durchführen. Mit enormer Computerunterstützung konnten sie lediglich knapp 400 verschiedene Stoffe unter den bekannten Kristallgittern identifizieren, die topologische Eigenschaften bergen. Verglichen mit den etwa 200 000 bekannten Kristallstrukturen er-

Teilchenfamilien

Alle bekannten Partikel spalten sich in zwei Familien auf, die Fermionen und die Bosonen. Die Bausteine der Materie – etwa Quarks, Neutrinos, Elektronen und ihre jeweiligen Antiteilchen – sind allesamt Fermionen. Die übrigen Teilchen, welche die Wechselwirkungen zwischen der Materie bedingen, wie Photonen und Gluonen, gehören dagegen zu den Bosonen.

Der schwerwiegendste Unterschied zwischen beiden Familien ist das so genannte Pauli-Ausschlussprinzip: Fermionen können nicht die gleichen Eigenschaften besitzen und sich dabei gleichzeitig am selben Ort befinden. Ohne diese Regel gäbe es keine Atome und Moleküle, wie wir sie kennen. Denn die verschiedenen Energieniveaus entstehen dadurch, dass ein Orbital wegen des Pauli-Prinzips nur eine begrenzte Anzahl an Teilchen aufnehmen kann.

Bereits 1951 hatte der Physiker Julian Schwinger einen Beweis vorgelegt, dass sich alle Teilchen in diese beiden Familien einordnen lassen. Doch 1988 fand sich eine Ausnahme zu dieser Regel. In zwei Raumdimensionen können seltsame Partikel existieren, die weder bosonischer noch fermionischer Natur sind, so genannte Anyonen.



SPEKTRUM DER WISSENSCHAFT / MANON BISCHOFF

schien die Anzahl topologischer Materialien sehr klein.

Im Juli 2018 kam der Durchbruch: Mehrere Teams hatten unabhängig voneinander Algorithmen entwickelt, die Datenbanken mit verschiedenen Kristallgittern systematisch durchforsten, um mögliche topologische Eigenschaften zu finden. Eine Gruppe von Forschern um Tiantian Zhang von der Chinesischen Akademie der Wissenschaften in Peking fand unter knapp 40 000 Kristallen mehr als 8000 Kandidaten für die bizarren Stoffe – sie könnten also weitaus häufiger vorkommen als bisher angenommen. Nun prüfen Wissenschaftler, ob sich unter den Kandidaten auch solche befinden, die man einfach züchten kann, nicht giftig sind und auch bei Raumtemperatur ihre besonderen Eigenschaften behalten.

Allerdings weisen nicht nur kristalline Festkörper dieses sonderbare topologische Verhalten auf. Um mehr über die neuen Zustände zu erfahren, bedienen sich Forscher auch der so genannten Quantensimulation, die ihnen tiefe Einblicke in die Struktur der Materie gewährt.

Ein Quantensimulator ist ein Quantensystem, das ein anderes Quantensystem nachahmt. Er bildet damit die einfachste Version eines Quantencomputers, der nur eine einzige Art von Rechnung durchführen kann. Um einen Festkörper zu simulieren, nutzen Forscher unter anderem aufwändige Lasersysteme, mit denen sie Atome auf Temperaturen bis kurz vor dem absoluten Nullpunkt herunterkühlen und wie in einem Eierkarton auffangen.

Die ultrakalten Teilchen symbolisieren dabei nicht etwa die Atome eines Kristalls, sondern jedes ultrakalte Atom – samt Kern und Elektronenhülle – steht für ein freies Elektron im zu simulierenden Material. Im Gegensatz zu Versuchen mit echten Festkörpern können Physiker in solchen Experimenten die Wechselwirkungen zwischen den Atomen sehr genau kontrollieren und sogar steuern. Dadurch können sie selbst die kompliziertesten Kristallstrukturen oder auch Stoffe simulieren, die es in der Natur gar nicht geben darf.

Echte Festkörper sind nämlich ungemein komplizierter als das ultrakalte Atommodell. Sie bestehen aus mehr als 10^{23} Teilchen, die miteinander wechselwirken. Zudem sind reale Kristalle niemals perfekt, sie enthalten immer Fehlstellen im Gitter oder auch fremde Atome. Dazu kommen noch äußere Einflüsse wie Schwingungen und schwankende Temperaturen, die das Verhalten der Elektronen auf nicht immer vorhersagbare Weise prägen.

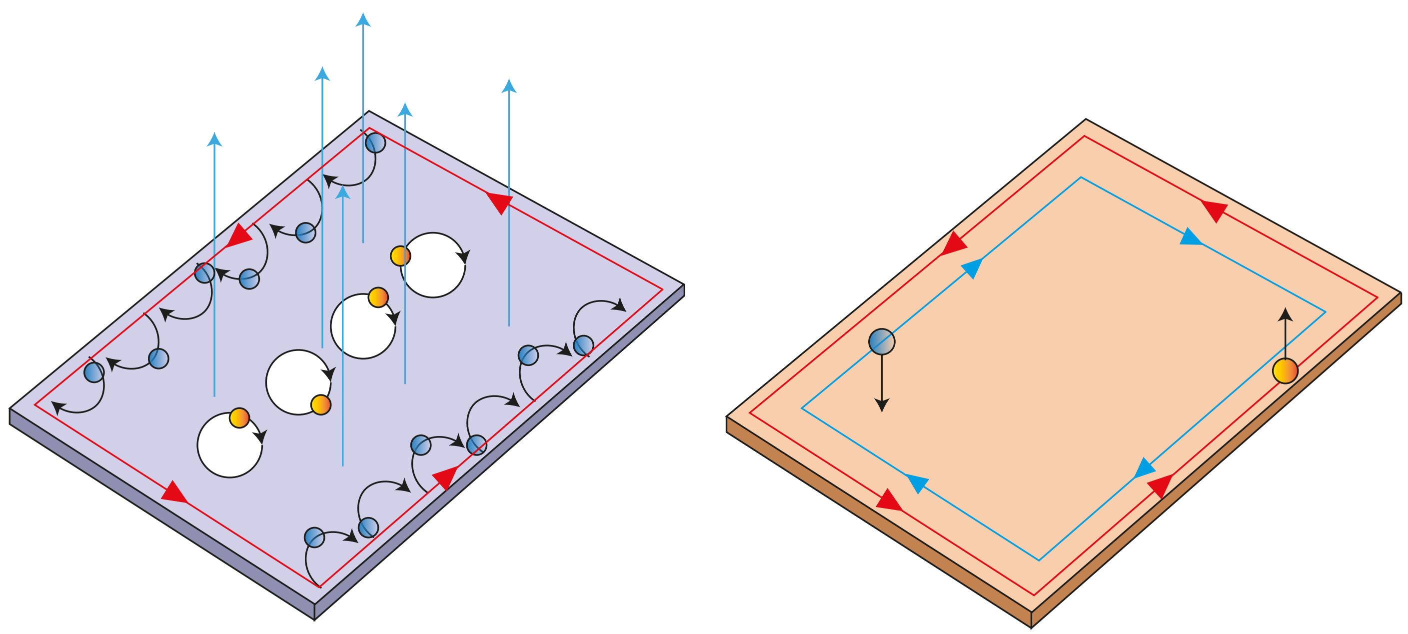
Ultrakalte Atome ermöglichen es den Physikern dagegen, extrem präzise Messungen durchzuführen, die in echten Festkörpern undenkbar wären. Wissenschaftler um Immanuel Bloch von der Technischen Universität München haben beispielsweise 2012 die Wellenfunktion ultrakalter Atome experimentell untersucht und nachgewiesen, dass sich der nachgebildete exotische Kristall in einem topologischen Zustand befand.

Quantensimulatoren bestehen aber nicht nur aus ultrakalten Atomen; einige Wissenschaftler machen sich zum Beispiel die Eigenschaften von Photonen zu Nutze. Die Lichtteilchen ahmen dabei direkt die Wellenfunktion der Elektronen in einem topologischen Festkörper nach. Um das seltsame Verhalten dieser Wellen zu simulieren, leiten Physiker die Lichtquanten in kompliziert geformte Hohlräume, damit sich ihre Phase wie in einem topologischen Material verschiebt.

»Photonen wechselwirken nur sehr schwach miteinander. So kann man die Ex-

Quanten-Hall- und topologischer Isolator

Für einen Quanten-Hall-Isolator (links) benötigt man ein starkes äußeres Magnetfeld (blau). Dieses zwingt die Elektronen am Rand des Materials, sich entlang einer Richtung (rot) zu bewegen. In einem topologischen Isolator (rechts), der ohne Magneten auskommt, können die Randelektronen dagegen – je nach Spinausrichtung (schwarz) – den Rand in zwei Richtungen (rot und blau) umkreisen.



SPEKTRUM DER WISSENSCHAFT / MANON BISCHOFF

perimente sogar bei Raumtemperatur durchführen«, erklärt Hafezi. Das hat allerdings den Nachteil, dass man mit ihnen lediglich Festkörper mit schwach wechselwirkenden Elektronen simulieren kann.

Quanten simulieren Quanten

Dennoch bieten Photonen einen weiteren Vorteil. »Sie sind gute Informationsträger«, sagt Hafezi, »weshalb man sie in der Kommunikationstechnik nutzt.« Somit kann man topologische Photonensysteme auch über das Gebiet der Quantensimulation hinaus anwenden. Mit ihnen könnte man Lichtquanten genauer kontrollieren und gezielt verstärken, was beispielsweise die moderne Kommunikation sicherer gestalten würde. »Doch es muss noch eine Menge getan werden, um zu zeigen, dass topologische Systeme einen Vorteil gegenüber der aktuellen Technik liefern«, warnt Hafezi.

Topologische Zustände könnten aber auch in anderen Bereichen Anwendung finden. Einige Forscher hoffen sogar, dass die exotischen Materialien in einigen Jahrzehnten eine ähnliche Bedeutung erlangen werden, wie Halbleiter sie heute haben.

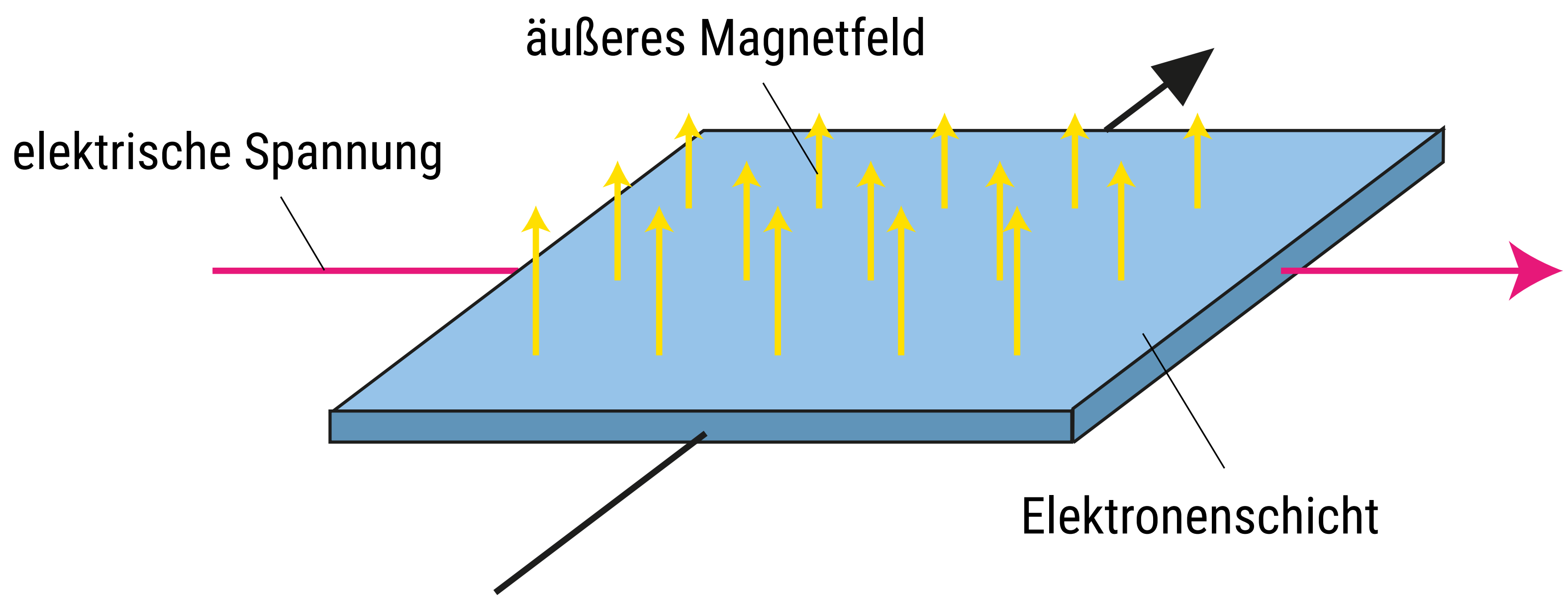
Moderne elektrische Geräte bestehen aus vielen kleinen Schaltkreisen, in deren Innerem sich Elektronen tummeln. Seit Jahren versucht man, diese immer weiter zu verkleinern und dichter zu packen, damit Prozessoren kompakter und leistungsstärker werden. Das bringt allerdings Probleme mit sich: Innerhalb der Schaltkreise stoßen die Elektronen auf Fehlstellen, und die Geräte heizen sich infolgedessen auf. Einen Ausweg könnte die »Spintronik« liefern, ein Bereich, bei dem Wissenschaftler Signale nicht nur über die Elektronenladung übertragen, sondern auch den Spin der Teilchen nutzen.

Statt eines gewöhnlichen Ladungsstroms könnten Geräte dann über einen reinen Spinstrom betrieben werden, der keine elektrische Ladung, sondern nur Spinausrichtungen übermittelt. Auf der Oberfläche von topologischen Isolatoren tauchen genau diese seltsamen Ströme auf. Die Elektronen fließen dort je nach Spinausrichtung in entgegengesetzte Richtungen. Insgesamt sind dadurch zwar alle Leiter in Bewegung; wenn es aber gleich viele Teilchen mit positiven und negativen Spin gibt, wandern genauso viele Elektronen nach links wie nach rechts – es gibt also insgesamt keinen Ladungsstrom. Da der Spin die Bewegungsrichtung vorgibt, fließen die Teilchen ungehindert an Fehlstellen vorbei und erzeugen kaum noch Hitze.

Das Forschungsgebiet topologischer Materialien hat daher den Bereich der Spintronik in den letzten Jahren stark vorangetrieben. Forscher hoffen, in Zukunft einen spintronischen Computer aus den neuartigen Stoffen bauen zu können. Ein solcher Rechner würde kaum Abwärme produzieren und viel weniger Strom verbrauchen, da der Spin eines Teilchens sehr schnell und mit geringem Energieaufwand umgekehrt werden kann.

Doch der wahrscheinlich vielversprechendste Bereich, in dem topologische Materialien zum Einsatz kommen könnten,

Quanten-Hall-Effekt



Der deutsche Forscher Klaus von Klitzing untersuchte während eines Forschungsaufenthalts in Grenoble Halbleiterstrukturen, deren freie Elektronen zwischen zwei Schichten gefangen sind und die somit somit einem zweidimensionalen System ähneln. Um den Stromtransport in diesen so genannten MOSFETs zu analysieren, brachte er sie in einen äußerst starken Magneten, dessen Feld die zweidimensionale Elektronenschicht (blaue Fläche) senkrecht durchdrang (gelbe Pfeile).

Der Magnet zwang die Elektronen in dem MOSFET, sich auf Kreisbahnen zu bewegen. Je stärker das angelegte Feld war, desto enger kreisten die Teilchen. Bereits vor dem Experiment war von Klitzing klar, dass für extrem starke Felder die Quantennatur der Elektronen ins Gewicht fällt: Wegen ihrer winzigen Kreisbahnen konnten sie nur noch wenige erlaubte Energiewerte annehmen. Die energetischen Abstände zwischen den Bändern wuchsen entsprechend.

SPEKTRUM DER WISSENSCHAFT / MANON BISCHOFF

ist das aufkeimende Feld der Quantencomputer. Die bislang am weitesten gediehenen Ansätze basieren hier auf Ionenfallen oder supraleitenden Schaltkreisen. Aber manche Entwickler, zum Beispiel Microsoft, setzen auf topologische Materialien, die Vorteile gegenüber den bisherigen Favoriten hätten und eine ihrer größten Schwachstellen ausbügeln würden.

Gewöhnliche Computer rechnen mit Bits, die entweder einer Null oder einer Eins entsprechen. Quantencomputer verwenden dagegen quantenmechanische Bits (kurz: Qubits), die eine Überlagerung aus beiden Werten darstellen. Dabei nutzen Physiker aus, dass ein quantenmechanisches System bis zu einer Messung in mehreren Zuständen sein kann.

Einige Berechnungen können Quantencomputer daher schneller als herkömmliche Rechner ausführen. Allerdings sind diese Systeme üblicherweise sehr empfindlich. Kleinste Störungen bewirken, dass der überlagerte Zustand eines Qubits kollabiert und dieser dann den festen Wert null oder eins annimmt, was zu einem Fehler in der laufenden Berechnung führt.

Topologische Quantensysteme hätten dieses Problem wohl nicht, da sie sich als

Um die Leitfähigkeit der Halbleiterstruktur zu untersuchen, legte von Klitzing anschließend eine Spannung entlang der zweidimensionalen Elektronenschicht an (pinker Pfeil). Die rotierenden Elektronen bewegten sich daraufhin wegen der auf sie wirkenden Lorentzkraft senkrecht (fette schwarze Linie) zum angelegten elektrischen Feld, während normalerweise kein Strom in Richtung der Spannung fließen sollte.

Allerdings verfügt jeder Festkörper über Fehlstellen in der Gitterstruktur. Trifft ein Elektron auf eine solche Fehlstelle, wird es in seiner Bahn abgelenkt. Es nimmt dann auch einen anderen Energiewert an. In von Klitzings Fall führten die Stöße dazu, dass sich letztlich doch einige Elektronen in Richtung des elektrischen Feldes bewegten und einen Strom in diese Richtung erzeugten.

Für bestimmte Werte des Magnetfelds riss der Stromfluss in Richtung der Spannung allerdings ab, während die Elektronen senkrecht dazu verlustfrei durch den Festkörper wanderten. Erstaunlicherweise wiederholte sich dieser Effekt auch für andere MOSFETs. Als von Klitzing den senkrecht zur Spannung stehenden Widerstand in den unterschiedlichen Materialien bestimmte, stellte er überrascht fest, dass er stets denselben Wert maß – ungeachtet dessen, welche Probe er untersuchte.

Wie man heute weiß, liegt der Grund dafür in der Natur der Teilchen. Bei bestimmten Magnetfeldstärken sind alle Bänder der Festkörper voll besetzt. Trifft ein Elektron in so einem Fall auf eine Fehlstelle, würde es mit niedrigerer Energie in eine andere Richtung weiterfließen. Da aber alle niedrigeren Energien schon von anderen Elektronen besetzt sind, ist das nicht möglich – es hat schlichtweg keinen »Platz« und fließt stattdessen ungehindert an der Fehlstelle vorbei. Als Konsequenz fällt der Strom in Richtung des elektrischen Feldes auf null ab, während er senkrecht dazu verlustfrei weiterfließt.

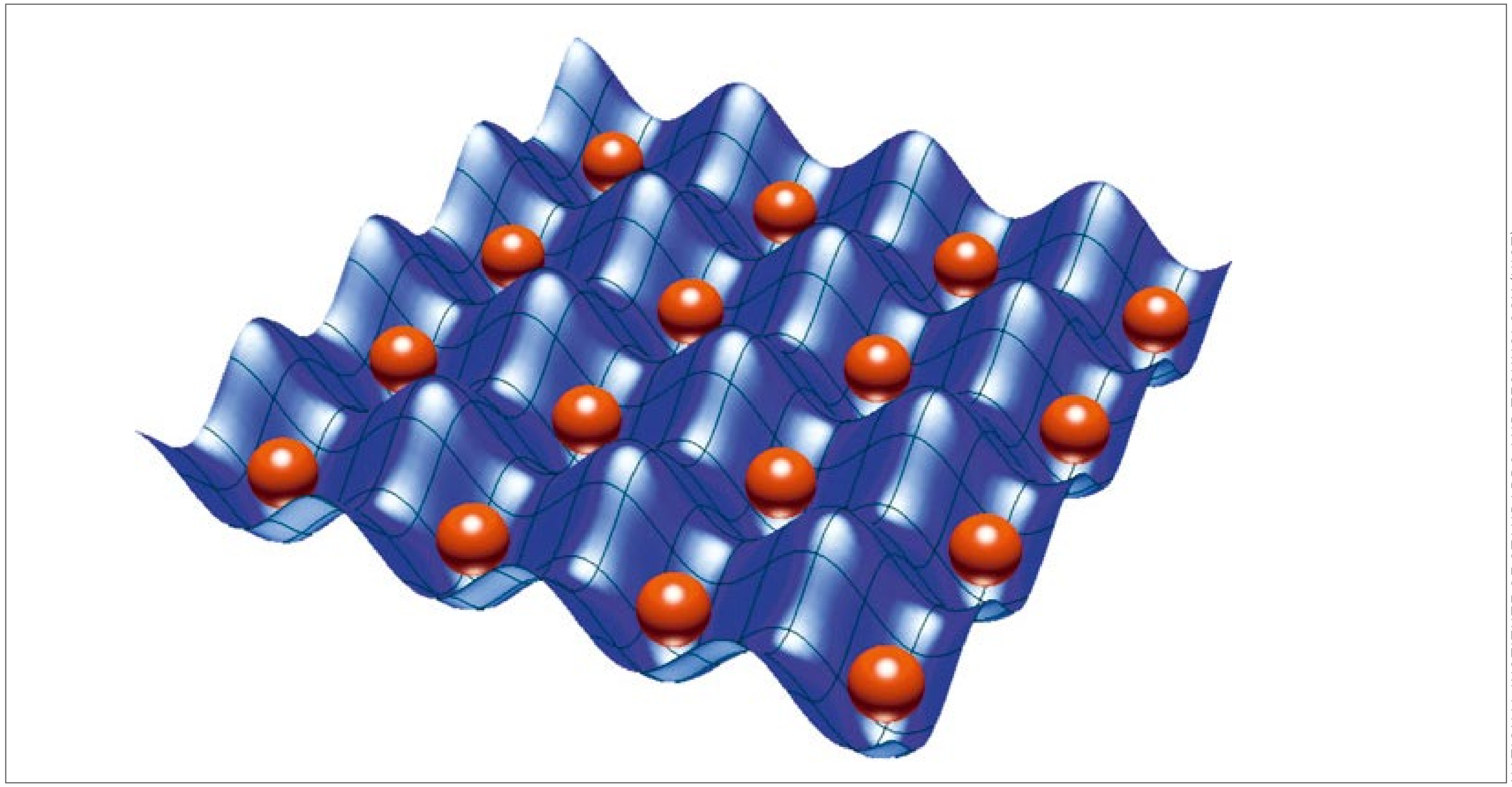
Warum dieses Phänomen in den unterschiedlichsten zweidimensionalen Materialien auftritt und dabei immer auf dieselben Messwerte des elektrischen Widerstands führt, kann im Detail nur die Topologie erklären.

besonders widerstandsfähig herausgestellt haben. Kleine äußere Störungen wie Temperaturschwankungen oder leichte Schwingungen können ihnen nichts anhaben.

Um ein topologisches Qubit zu erzeugen, genügt allerdings kein einfacher topologischer Isolator. Man muss diesen erst mit einem Supraleiter verbinden. An der Grenzschicht zwischen den beiden ungewöhnlichen Festkörpern entstehen dann exotische Zustände, die sich von allen bisher bekannten unterscheiden.

Supraleiter leiten unterhalb einer bestimmten Temperatur widerstandsfrei Strom. Der Grund dafür ist, dass sich die Elektronen in ihrem Innern zu Paaren verbinden. Sie verhalten sich dadurch wie Bosonen, eine Teilchenklasse, in der sich die Partikel nicht mehr gegenseitig abstoßen und gemeinsam den gleichen Zustand annehmen können. In Supraleitern fließen diese Paare daher ungehindert aneinander vorbei, ohne sich gegenseitig zu stören oder Reibung zu erzeugen.

Liang Fu und Charles Kane stellten 2008 fest, dass zwischen einem Supraleiter und einem topologischen Isolator eine ungewöhnliche Art von Supraleiter entsteht. Bringt man diesen so genannten p-Wellen-Supraleiter in ein Magnetfeld, bilden die Elektronenpaare Strudel, die in einem Gitter angeordnet sind. In der Mitte eines solchen Strudels ist ein einzelnes Teilchen gefangen, das sich sehr seltsam verhält und der Schlüssel für die Entwicklung zukünftiger Quantencomputer sein könnte.



ATOME IM EIERKARTON

Aufwändige Lasersysteme fangen ultrakalte Atome ein und ordnen sie ähnlich wie in Eierkarton in einem Gitter an.

Suche nach Majoranas

Innerhalb der Strudel wirken die Teilchen so, als seien sie masselos, besäßen keine elektrische Ladung und wären ihr eigenes Antiteilchen. Treffen also zwei Strudel aufeinander, vernichten sich die seltsamen Konfigurationen in ihrer Mitte gegenseitig. Teilchen mit diesen Eigenschaften heißen Majoranas, nach dem italienischen Physiker Ettore Majorana, der sie bereits 1937 vorhergesagt hatte.

Durch die räumliche Nähe des topologischen Isolators ist der p-Wellen-Supraleiter auch topologisch. Die Majoranas sind daher stabil, und ihre Existenz hängt nicht von den Details des supraleitenden Stoffs ab. Experten sprechen von topologischen Supraleitern – sie bilden die dritte neuartige Materialklasse neben Quanten-Hall-Systemen und topologischen Isolatoren.

Die seltsamen Majoranas treten allerdings nur auf der zweidimensionalen Schicht zwischen dem topologischen Isolator und dem gewöhnlichen Supraleiter auf. Anders als alle anderen existierenden Teilchen lassen sich zweidimensionale Majoranas nicht in die zwei bekannten Teilchenfamilien, die Bosonen und die Fermionen, einordnen. Sie bilden eine neue Kategorie, die es in drei Dimensionen nicht gibt und niemals geben kann (siehe »Teilchenfamilien«): die so genannten Anyonen.

Ihr Hauptmerkmal ist, dass sie eine Art Gedächtnis haben. Vertauscht man zwei identische Anyonen miteinander, kann man hinterher an ihrer Wellenfunktion ablesen, welche Umordnungen vorgenommen wurden. Denn ähnlich wie die Elektronen aus von Klitzings Experiment verändert sich die Wellenfunktion der Majoranas unter ihrem Austausch.

Die Wellenfunktion der Anyonen lässt sich damit in einen Informationsträger verwandeln. Indem die Forscher die Partikel gezielt miteinander verflechten, könnten sie ihre Wellenfunktion codieren, um so Berechnungen durchzuführen. Da die Majoranas Teil eines topologischen Systems sind, bleiben sie dabei im Gegensatz zu gewöhnlichen Qubits durch äußere Einflüsse ungestört, solange diese nicht zu stark sind.

Inzwischen haben etliche Physiker topologische Supraleiter im Labor studiert und versucht, die seltsamen Majoranas nachzuweisen. Sie konnten bisher einzelne masselose und neutrale Partikel innerhalb der Elektronenpaar-Strudel messen. Doch es gelang ihnen noch nicht, die entscheidende Eigenschaft nachzuweisen, dass sich deren Wellenfunktion unter Vertauschung ändert. »Eine der größten offenen Fragen auf dem Gebiet der topologischen Materialien ist, ob die Experimente tatsächlich Majorana-Zustände gesehen haben. Das ist nach wie vor unklar«, sagt Molenkamp.

Auch deshalb ist noch nicht sicher, ob topologische Materialien die Elektronikindustrie revolutionieren oder zu Quantencomputern führen werden. »Es gibt leider bisher noch keine echten Anzeichen, dass so ein Durchbruch schon gefunden ist«, so Molenkamp. »Ich erhoffe mir vor allem spannende neue Physik.« Eines ist jedoch klar: Die Arbeiten der Physiker Thouless, Kosterlitz und Haldane haben die Festkörperphysik nachhaltig verändert – und aus ihr eine Disziplin gemacht, in der abstrakte mathematische Konzepte eine handfeste Anwendung finden. ⮌

(Spektrum der Wissenschaft, Februar 2019)

Hasan, M. Z., Kane, C. L.: Colloquium: Topological Insulators. In: Reviews of Modern Physics 82, 10.1103/RevModPhys.82.3045, 2010

Qi, X.-L., Zhang, S.-C.: Topological Insulators and Superconductors. In: Reviews of Modern Physics 83, 10.1103/RevModPhys.83.1057, 2011

Wehling, T. O. et al.: Dirac Materials. In: Advances in Physics 63, S. 1–76, 2014

Zhang, T. et al.: Catalogue of Topological Electronic Materials. In: arXiv 1807.08756, 2018